Disciplina: 6876
Turma: 02

Lista 5

1. Sejam $V = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) : x = y = 0\}$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$. Encontre vetores $v \in V$ e $w \in W$ tais que $(x, y, z) = v + w$.

2. Sejam $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{12} = 0\}$ e $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{21} = 0\}$ subespaços vetoriais de $M_2(\mathbb{R})$. Encontre matrizes $A \in V$ e $B \in W$ tais que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A + B$.

3. Verifique se os conjuntos abaixo são linearmente independentes ou linearmente dependentes.

   (a) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)\}$

   (b) $\{(1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 3)\}$

   (c) $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)\}$

   (d) $\{(2, 2, 3, 4), (0, 5, -3, 1), (0, 0, 4, -2)\}$

   (e)
   $$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

4. Mostre que o conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ gera $\mathbb{R}^3$.

5. Encontre uma base e dê dimensão dos seguintes subespaços vetoriais.

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$

   (b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\}$

   (c) $W = \{A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) : A^T = A\}$

   (d) $W = \{A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) : A^T = -A\}$

6. Determinar uma base e a dimensão do espaço solução dos sistemas abaixo.

   (a)
   $$\begin{cases} x - y - z - t &= 0 \\ 2x + y + t &= 0 \\ z - t &= 0 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x - y - 2z &= 0 \\ x + 4y + 5z &= 0 \end{cases}$$

7. Considere os subespaços $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$.

8. Considere os subespaços $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$.

9. Considere os subespaços $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0$ e $z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$. Mostre que $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$.

10. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços $U = \{(x, y, z) : x = 0\}$ e $V = \langle\{(1, 2, 0), (3, 1, 2)\}\rangle$. Determine uma base e a dimensão dos subespaços U, V $U+V$ e $U \cap V$.