Quarta Lista de Exercícios

GEOMETRIA ANALÍTICA

Produto vetorial e misto

1 Agentes de deslocamento

Os vetores agem no espaço afim produzindo deslocamentos, por isso são chamados de *agentes de deslocamentos*. Dado um vetor u e um ponto A, existe um ponto B tal que $u = \overrightarrow{AB}$, o que significa que u produz um deslocamento de A até B. Esta ação é representada pela *soma de ponto com vetor*, da seguinte forma:

$$B = A + u \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = u.$$

Decorre da definição que $A + \overrightarrow{AB} = B$, o que justifica a notação simbólica usual $\overrightarrow{AB} = B - A$.

A notação $A - u$ indica a soma do ponto A como vetor oposto de u. A soma de ponto com vetor possui as seguintes propriedades:

I. $(A + u) + v = A + (u + v)$.

II. $A + u = A + v \Leftrightarrow u = v$.

III. $A + u = B + u \Leftrightarrow A = B$.

IV. $(A - u) + u = A$.

2 Exercícios

1. (Camargo–Boulos) Prove que $A + u = B + v \Rightarrow u = \overrightarrow{AB} + v$.

2. (Camargo–Boulos) Dados os pontos A, B, C determine X, sabendo que $\left(A + \overrightarrow{AB}\right) + CX = C + \overrightarrow{CB}$.

3. (Camargo–Boulos) Prove que, se $B = A + \overrightarrow{DC}$, então $B = C + \overrightarrow{DA}$.

4. (Camargo–Boulos) O triângulo ABC tem área 4. Sendo $B = A + u$ e $C = A + v$, calcule $\|u \wedge v\|$.

5. (Camargo–Boulos) A medida angular entre os vetores u e v é 30^0, e suas normas, 2 e 3. Calcule $\|u \wedge v\|$.

6. (Camargo–Boulos) Sabendo que u é unitário, $\|v\| = 7$ e $ang\,(u, v) = \pi/6$ radianos, calcule $\|u \wedge v\|$ e $\|4u \wedge 9v\|$.

7. (Camargo–Boulos) Verifique as seguintes relações:

   a) $\|u \wedge v\| \leq \|u\| \, \|v\|$ b) $\|u \wedge v\| = \|u\| \, \|v\| \Leftrightarrow u \perp v$

8. (Camargo–Boulos) Prove que a altura h do triângulo ABC relativa ao lado AB é $h = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$. Deduza uma fórmula para calcular a distância do ponto C à reta r determinada por A e B.

9. (Camargo–Boulos) Calcule $\left(\sqrt{2}u - \sqrt{3}v + w\right) \wedge \left(-\sqrt{6}u + 3v - \sqrt{3}w\right)$.

10. (Camargo–Boulos) Prove que $(u + v) \wedge (u - v) = 2v \wedge u$.

11. (Camargo–Boulos) O lado do hexágono regular $ABCDEF$ mede 2. Calcule:

    a) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AF}\right\|$ c) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$ d) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}\right\|$ e) $\left\|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BE}\right\|$

12. (Poole) Calcule $u \wedge v$.

    a) $u = (0, 1, 1)\,, v = (3, -1, 2)$ b) $u = (3, -1, 2)\,, v = (0, 1, 1)$ c) $u = (-1, 2, 3)\,, v = (2, -4, -6)$ d) $u = (1, 1, 1)\,, v = (1, 2, 3)$

13. Seja (x, y, z) uma base ortonormal positiva. Mostre que $x \wedge y = z$, $y \wedge z = x$, $z \wedge x = y$.

14. (Camargo–Boulos) Calcule a área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.

15. (Camargo–Boulos) Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)$.

16. (Poole) Determine a área do triângulo de vértices $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (5, -1, 3)$.

17. (Camargo–Boulos) Sendo (i, j, k) uma base ortonormal positiva, calcule $(2k - i + 5j) \wedge (3i - 2k + j)$.

18. (Camargo–Boulos) Sendo (i, j, k) uma base ortonormal positiva, descreva o conjunto solução da equação dada.

    a) $x \wedge (i + j - k) = 0$ b) $x \wedge (i + j) = i + j + k$

19. (Camargo–Boulos) Sendo (i, j, k) uma base ortonormal positiva, determine x tal que $x \wedge (i + k) = 2\,(i + j - k)$ e $\|x\| = \sqrt{6}$.

20. (Camargo–Boulos) Prove que, se $\langle u, v \rangle = 0$ e $u \wedge v = 0$, então $u = 0$ ou $v = 0$.

21. (Camargo–Boulos) Mostre que, se u, v são LI e $w \wedge u = w \wedge v = 0$, então necessariamente $w = 0$.

22. (Camargo–Boulos) O lado do quadrado $ABCD$ mede 2, AC é diagonal e M é ponto médio de BC. Calcule $\left\| \overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DB} \right\|$.

23. (Camargo–Boulos) Prove a *identidade de Jacobi*

$$(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0.$$

24. (Camargo–Boulos) Prove que $|[u, v, w]| \leq \|u\| \|v\| \|w\|$ para quaisquer u, v, w. Verifique que a igualdade é verdadeira se, e somente se, um dos vetores é julo ou eles são dois a dois disjuntos.

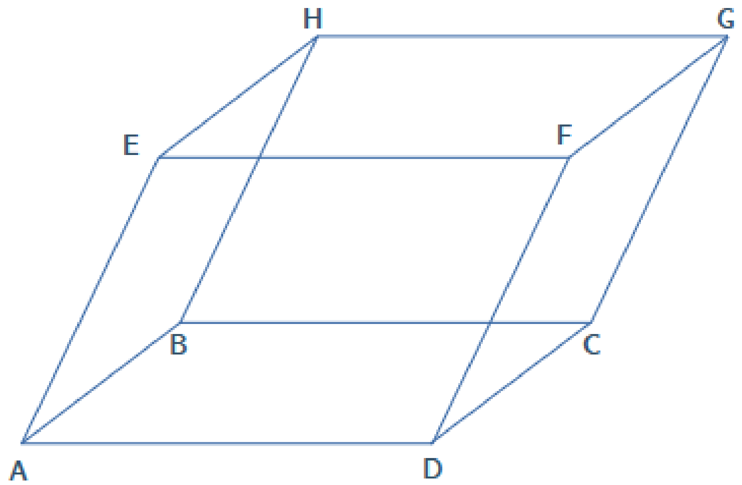
25. (Camargo–Boulos) Prove que $\langle u \wedge v, w \wedge t \rangle = \langle u, w \rangle \langle v, t \rangle - \langle v, w \rangle \langle u, t \rangle$.

26. (Camargo–Boulos) Prove que $[u \wedge v, w, t] = \langle u \wedge v, w \wedge t \rangle$.

27. (Camargo–Boulos) Sejam u, v vetores não nulos respectivamente paralelos às retas r e s, P um ponto de r, Q um ponto de s. Mostre que r e s são coplanares se, e somente se, $\left[u, v, \overrightarrow{PQ}\right] = 0$.

28. (Camargo–Boulos) Considere o paralelepípedo $ABCDEFGH$ tal que $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{BE} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 3)$. Calcule:

    (a) o volume do paralelepípedo.
    (b) o volume do tetraedro $EABD$.
    (c) a altura do tetraedro $EABD$ em relação à face DEB.



29. (Camargo–Boulos) Sendo $[u, v, w] = 6$, calcule $[2u - 3v + w, -u + v - w, v - 3w]$.

30. (Camargo–Boulos) Sejam $ABCD$ um tetraedro, $P = A + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $Q = B - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ e $R = C + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Calcule a razão entre os volumes dos tetraedros $PQRD$ e $ABCD$.