$(A+u)+v = A+(u+v)$ $A+u = B+u \iff A=B$

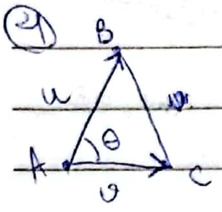
$A+u = A+v \iff u=v$ $(A-u)+u = A$

1) Sabemos que $\vec{AB} = B - A$, então $A + u = B + v$ $\iff$ $u = B - A + v \iff u = \vec{AB} + v$, como queríamos.

2) $(A+\vec{AB})+\vec{CX} = C + CB \iff \cancel{A} + \cancel{B} - \cancel{A} + X - C = \cancel{C} + \cancel{B} - \cancel{C}$
$\Rightarrow \boxed{X = C}$. É interessante notar também que, como $X=C$, $\vec{XC} = \vec{CX} = 0$

3) Se $B = A + \vec{DC}$, então $B = A + C - D = C + A - D = C + \vec{DA}$, como queríamos.

4)



Como $B = A+u$, $u = B - A = \vec{AB}$

Como $C = A + v$, $v = C - A = \vec{AC}$

$\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| \sin\theta$, logo $\|u\wedge v\| = 8$

↳ A área sendo 4, temos que $4 = \frac{\|u\|\|v\| \sin\theta}{2}$

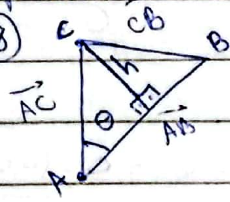
5) $\|u \wedge v\| = 2\cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$ 4

6) $\|u\wedge v\| = 1\cdot 7\cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. $\|4u \wedge 9v\| = 4\cdot 63\cdot \frac{1}{2} = 126$

7) a) Precisamos mostrar que $\|u\wedge v\| \le \|u\|\|v\|$
Sabemos que $\|u\wedge v\| = \|u\|\|v\|\sin\theta$, além disso $\sin\theta \le 1$, logo, multiplicando ambos os lados por $\|u\|\|v\|$, temos $\|u\|\|v\|\sin\theta \le \|u\|\|v\|$, logo, $\|u\wedge v\| \le \|u\|\|v\|$, como queríamos.

b) $\|u\wedge v\| = \|u\|\|v\| \iff u \perp v$. Para mostrar isso, temos que $\|u\|\|v\|\sin\theta = \|\cancel{u}\|\|\cancel{v}\| \iff \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow u\perp v$, como queríamos.

8)



Pela definição de sen θ, $\sin\theta = \frac{\|h\|}{\|\vec{AC}\|}$ ∴

$\|h\| = \sin\theta\,\|\vec{AC}\| = \frac{\sin\theta\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\|\vec{AC}\wedge\vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$, como queríamos. Como a distância de C até AB é a mesma coisa que a altura (pelo ângulo de 90°), a fórmula é a mesma

9) Realizar o produto dessa expressão é propriamente muito complicado, mas percebam que $(\sqrt{2} u - \sqrt{3} v + w)\cdot -\sqrt{3} = -\sqrt{6} u + 3v - \sqrt{3} w$, ou seja, eles são L.D e, consequentemente, paralelos, logo, seu produto vetorial vale 0.

10) Pelas propriedades:

$(u+v)\wedge(u-v) = u\wedge(u-v) + v\wedge(u-v) = \underbrace{u\wedge u}_{0} + u\wedge -v + v\wedge u + \underbrace{v\wedge -v}_{0}$

$= -u\wedge v - u\wedge v = -2\cdot u\wedge v = 2v\wedge u$, como queríamos.

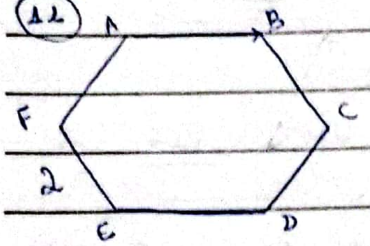
$$\|u\wedge v\| = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}$$

$\|u\|^2\|v\|^2 \quad \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\theta$

Entretanto, usando as definições do próprio produto vetorial. Como u é coplanar a v, então $2u$, $u+v$ e $u-v$ também pertencem ao mesmo plano, logo, $(u+v)\wedge(u-v)$ e $(2v)\wedge u$ geram um vetor perpendicular a esse mesmo plano, de mesma direção e sentido. Vamos mostrar então que seu módulo é igual. Sabendo que $\|u\wedge v\| = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}$, isso é fácil de provar pela identidade trigonométrica.

$1 \Rightarrow \sqrt{\|u+v\|^2\|u-v\|^2 - \langle u+v, u-v\rangle^2} = \sqrt{2\|v\|^2\|u\|^2 - \langle 2v, u\rangle^2}$ que, ao realizar a expansão podemos demonstrar a igualdade de um jeito sem usar as propriedades.

11



a) $\|\vec{AB}\wedge\vec{AF}\| = \|\vec{AB}\|\|\vec{AF}\|\sin\theta = 2\cdot2\cdot\underbrace{\sin(120°)}_{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{3}$

b) $\|\vec{AB}\wedge\vec{AD}\| = \|\vec{AB}\|\|\vec{AD}\|\sin\theta = 2\cdot4\cdot\sin(60°) = 4\sqrt{3}$

c) $\|\vec{AB}\wedge\vec{AE}\| = \|\vec{AB}\|\|\vec{AE}\|\sin\theta = 2\cdot2\sqrt{3}\cdot\sin(90°) = 4\sqrt{3}$

d) $\|\vec{AD}\wedge\vec{BE}\| = \|AD\|\|BE\|\sin\theta = 4\cdot4\cdot\sin(60°) = 8\sqrt{3}$

12 a)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & x & y \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right|$$

$5' \ \|u\wedge v\| = \sqrt{2\cdot14-1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$= 2x+3y-3z+x = 3x+3y-3z = (3,3,-3)$

b)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & x & y \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$= -x+3z-2x-3y = -3x-3y+3z = (-3,-3,3)$

c)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & x & y \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -6 & 2 & -4 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow$ são L.D.

$= -12x+6y+4z-4z+12x-6y = 0 = (0,0,0)$

d)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & x & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

$\|u\wedge v\| = \sqrt{3\cdot14-36} = \sqrt{6}$ $\quad \sqrt{6}$

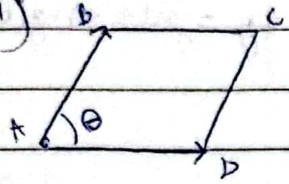
$= 3x+y+2z-z-2x-3y = x-2y+z = (1,-2,1)$

13 Como (x,y,z) é uma base ortonormal positiva, então $ang(x,y) = ang(x,z) = ang(y,z) = 90°$, além disso, $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$. Logo $x\wedge y$ retorna um vetor ~~[illegible]~~ ortogonal a x e y ao mesmo tempo, ou seja, com mesma direção e sentido de z, só precisamos

$$\|u\wedge v\| = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2} = \|u\|\|v\|\sin\theta$$

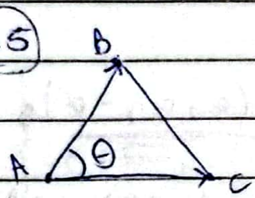
mostrar que seu modulo é o mesmo que o modulo de z, para eles serem iguais. $\|x\wedge y\| = \|x\|\|y\|\sin 90 = 1 = \|z\|$, logo, de fato, são iguais. O mesmo se aplica, sem perda de generalidade, para $y\wedge z$ e $x\wedge z$

14



$$\text{Área} = \|u\wedge v\| = \sqrt{\underbrace{3}_{\|u\|^2}\cdot\underbrace{21}_{\|v\|^2} - \underbrace{1}_{\langle u,v\rangle^2}} = \sqrt{62}$$

15



$$\text{Área} = \frac{\|u\wedge v\|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 10 - 1} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

16

~~Área = ½ · | 2 1 0 / 3 −1 3 | 5 −1 = |3 − 2 − 5 − 12| / 2 = 16/2 = 8 u²~~

OPS

OU

$\vec{AB} = B - A = (2,1,0) - (1,2,1) = (1,-1,-1)$

$\vec{AC} = C - A = (3,-1,3) - (1,2,1) = (4,-3,2)$

$$\text{Área} = \frac{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{\|\vec{AB}\|^2\cdot\|AC\|^2 - \langle AB,AC\rangle^2}}{2} = \frac{\sqrt{3\cdot 29 - 25}}{2} = \frac{\sqrt{62}}{2}$$

17 (i,j,k) é ortonormal positiva, então $B = (i,j,k)$, vamos definir $\vec{u} = -i + 5j + 2k = (-1,5,2)_B$ e $\vec{v} = 3i + j - 2k = (3,1,-2)_B$, portanto, podemos definir, nessa base, o produto vetorial:

$$u\wedge v = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix} = -10x + 6y - z - 15z - 2x - 2y$$

$$= -12x + 4y - 16z = (-12, 4, -16)_B = -12i + 4j - 16k$$

18) Para $x = (a, b, c)_B$ na base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

a) $x \wedge (i + j - k) = 0$

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ a & b \\ 1 & 1 \end{matrix} = -bx + cy + az - bz - cx + ay = x(-b-c) + y(a+c) + z(a-b)$$

$= (-b-c,\ a+c,\ a-b)_B = (0, 0, 0)_B$, logo:

$$\begin{cases} -b - c = 0 \\ a + c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} b = a \\ c = -a \end{matrix}$$

, logo, x é da forma $(a, a, -a)_B$

↳ Então, $(1, 1, -1)_B$ é um exemplo válido, tal como $a(1, 1, -1)_B$

Concluímos então que $\vec{x} = a\vec{i} + a\vec{j} - a\vec{z}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

b) $x \wedge (i + j) = i + j + k$

$$(1, 1, 1)_B = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ a & b \\ 1 & 1 \end{matrix} = yc + az - bz - cx = x(-c) + y(c) + z(a-b)$$

$= (-c,\ c,\ a-b)_B = (1, 1, 1)_B$, logo

$$\begin{cases} -c = 1 \\ c = 1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow c = -c = 1$$

, o que é impossível, ou seja, $\nexists x$ para a solução da equação

Se quisermos analisar o significado disso, acontece porque $i + j$ não é perpendicular a $i + j + k$, ou seja, não é possível que $i + j + k$ seja um produto vetorial de $i + j$, não cumprindo a condição de existência da solução

↳ Portanto $\nexists x$ para a equação

tilibra

(19) $x \wedge (i+k) = 2(i+j-k)$ com $\|x\| = \sqrt{6}$. Adotando-se $B = (i,j,k)$ e $x = (a,b,c)_B$, temos

$$(2,2,-2)_B = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ a & b \\ 1 & 0 \end{matrix} = bx + cy - bz - ay = x(b) + y(c-a) + z(-b)$$

$= (b, c-a, -b)_B = (2,2,-2)_B$, logo:

$$\begin{cases} b = 2 \\ c - a = 2 \\ -b = -2 \end{cases} \Longrightarrow b = 2 \text{ e } c = a+2, \text{ logo, } \vec{x} = (a, 2, a+2)_B, \forall a \in \mathbb{R}$$

Entretanto, queremos que $\|x\| = \sqrt{6}$, logo:

$\sqrt{a^2 + 2^2 + (a+2)^2} = \sqrt{6} \Rightarrow 6 = a^2 + a^2 + 4a + 8 \Rightarrow 2a^2 + 4a + 2 = 0 \therefore a = -1$

Enfim, $x = (-1, 2, +1)_B = -i + 2j + k$

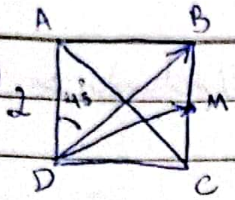
(20) Se $\langle u, v \rangle = 0$, então $\|u\|\|v\|\cos\theta = 0$. Se $u \wedge v = 0$, então $\|u \wedge v\| = 0 \Rightarrow \|u\|\|v\|\sin\theta = 0$, logo:

$\|u\|\|v\|\cos\theta = \|u\|\|v\|\sin\theta$. Vamos assumir erroneamente que $\|u\|$ e $\|v\| \neq 0$, logo, podemos dividir ambos os lados e obter $\sin\theta = \cos\theta = 0$, o que é uma situação impossível, então, por contradição, nossa afirmação é falsa, o que nos garante que ou $\|u\| = 0$ ou $\|v\| \Rightarrow u = 0$ ou $v = 0$

(21) Como u e v são L.I. temos que $\vec{u} \neq \vec{v} \neq 0$. Além disso, como $w \wedge u = w \wedge v = 0 \Rightarrow \|w \wedge u\| = \|w \wedge v\| = 0$ temos:

$\|w\|\|u\|\sin\theta_1 = \|w\|\|v\|\sin\theta_2 = 0$. Como sabemos que as possibilidades de zerar o resultado são $\|w\| = 0$ ou $\sin\theta_1 = 0$ ou $\sin\theta_2 = 0$, vamos analisar cada caso. Se o seno dos ângulos é nulo, então $ang(w,u) = 0^\circ$, $\therefore w = k\vec{u}$, sendo assim, $w \wedge u = 0$. Entretanto, para esse caso, $w \wedge v \neq 0$, justamente por $w = k\vec{u}$ e v serem L.I. Dessa forma, a única possibilidade do produto ser 0 é para $\|w\| = 0 \Rightarrow w = 0$, como queríamos

$[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle = \|u\| \|v\| \|w\| \sin\theta_1 \cos\theta_2$



(22) Geometricamente temos, pelo teorema de pitágoras $\|\vec{DB}\| = 2\sqrt{2}$, $\|DM\| = \sqrt{5}$, além disso, $ang(DM, DC) = \arcsin(1/\sqrt{5})$ ou $\sin\theta = 1/\sqrt{5}$, com isso, calculamos que $\sin(ang(DM, DB)) = 1/\sqrt{10}$, logo $\|DB \wedge DM\| = 2\sqrt{2}\,\sqrt{5} \cdot 1/\sqrt{10} = 2$ invertidas ordens

↳ Alternativamente, de maneira analítica, seja $D = (0,0,0)$ então $DM = (2,1,0)$ $DB = (2,2)$. Então:

$$\vec{DM} \wedge \vec{DB} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 4z - 2z = 2z = (0,0,2)$$

Logo, $\|(0,0,2)\| = \|\vec{DM} \wedge \vec{DB}\| = 2$

(23) $(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0$

↳ Lembre-se que, pelas propriedades do produto vetorial temos,
$(x \wedge y) \wedge z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$, então:

$(u \wedge v) \wedge w = \cancel{\langle u, w \rangle v} - \cancel{\langle v, w \rangle u}$,

$+ (v \wedge w) \wedge u = \cancel{\langle v, u \rangle w} - \cancel{\langle w, u \rangle v}$ e

$+ (w \wedge u) \wedge v = \cancel{\langle w, v \rangle u} - \cancel{\langle u, v \rangle w}$

Que, ao somarmos, cada termo se cancela, resultando em 0, como queríamos.

(24) Sabemos, pela definição de produto misto que:

$|[u, v, w]| = |\langle u \wedge v, w \rangle| = |\,\|u \wedge v\| \|w\| \cos\theta_2| = |\,\|u\| \|v\| \|w\| \sin\theta_1 \cos\theta_2|$

Então:

$|[u, v, w]| = |\,\|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\theta_1 \cos\theta_2|$. Pelos conceitos de trigonometria temos a seguinte desigualdade válida:

$|\sin\theta_1 \cos\theta_2| \leq 1$. Multiplicando ambos os lados por $|\,\|u\| \|v\| \|w\|\,|$ temos que: $|\,\|u\| \|v\| \|w\| \sin\theta_1 \cos\theta_2| \leq |\,\|u\| \|v\| \|w\|\,| \iff$

$|[u, v, w]| \leq \|u\| \|v\| \|w\|$, como queríamos. Percebe que só ocorre a igualdade quando qualquer um dos três é nulo, obviamente ou quando $\sin\theta_1 = 1$ e $\cos\theta_2 = \overset{1}{0}$. Isso significa

↳ $\cos\theta_2 = 1$

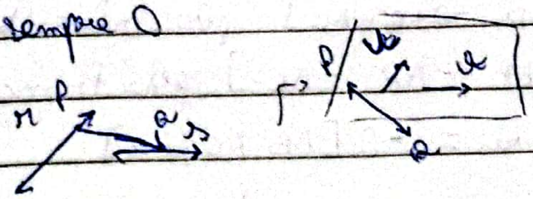
CamScanner

que o ângulo entre u e v é $\theta_1 = 90°$ e o ângulo entre w e um vetor ortogonal a u e v simultaneamente é $\theta_2 = 0°$, portanto, w é paralelo a $u \wedge v$ e, consequentemente, ortogonal a ambos. Finalmente, a igualdade é válida para $u \perp v \perp w$, ou seja, disjuntos dois a dois.

(25) Percebe que a forma $\langle u \wedge v, w \wedge t \rangle$ pode ser escrita como um produto misto como $[u, v, w \wedge t]$. Sabendo que podemos trocar elementos do produto misto apenas alterando o sinal temos que: $[u, v, w \wedge t] = -[u, w \wedge t, v] = [v, w \wedge t, u]$. Voltando para a notação de produtos: $= \langle u, v \wedge (w \wedge t) \rangle$, reescrevendo o segundo argumento com as propriedades do produto vetorial, $=$ $\langle u, v \wedge (w \wedge t) \rangle = u \cdot (v \wedge (w \wedge t)) = u \cdot ((v \cdot t)\vec{w} - (v \cdot w)\vec{t}) =$ $(v \cdot t)(u \cdot w) - (v \cdot w)(u \cdot t)$ que, na notação comum é o mesmo que $\langle u, w \rangle \langle v, t \rangle - \langle v, w \rangle \langle u, t \rangle$, como queríamos.

(26) Reescrevendo igual feito em 25, $\langle u \wedge v, w \wedge t \rangle = \langle w \wedge t, u \wedge v \rangle =$ $[w, t, u \wedge v] = -[u \wedge v, t, w] = [u \wedge v, w, t]$, como queríamos.

(27) Pela definição de produto misto, sabemos que $[u, v, w] = 0$ $\Rightarrow$ u, v e w são LD, ou seja coplanares, usando esse conceito temos que u e v, representando as retas, são dois vetores (sempre coplanares) e $\vec{PQ}$ é um terceiro vetor que representa a "angulação" das retas ligação das retas em relação ao plano formado pelos vetores u e v, logo, se os três são LD, serão obviamente coplanares e seu produto misto será sempre 0



$\rightarrow$ PQ garante que a coplanaridade possa ser respeitada ou não

(28) (a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} = 3 = [AB, AE, AD] = \text{Volume} = 3\,u^3$$

$\rightarrow$ Lembrando que $AE = AB + BE = (2,1,2)$

todos partem de A

(b) $V_{tetraedro} = \dfrac{\text{Volume paralelepípedo}}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}\,u^3$

DEB

(c) A área do tetraedro $= A_b \cdot h \cdot 1/3$. Logo, sabemos também que a área $DEB = \|\vec{DE} \wedge \vec{DB}\| \cdot 1/2$. Para isso, vamos calcular

$\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BE} = (0,-3,-3) + (1,0,1) + (1,1,1) = (2,-2,-1)$

$\vec{DB} = DA + AB = (0,-3,-3) + (1,0,1) = (1,-3,-2)$

Então, $\|DE \wedge DB\| \cdot 1/2 = \sqrt{9 \cdot 14 - 100} \cdot 1/2 = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$, logo

$A = A_b \cdot h \cdot 1/3 \rightarrow 1/2 = \dfrac{\sqrt{26}}{2} \cdot h \cdot 1/3 \Rightarrow h = \dfrac{3}{\sqrt{26}} = \dfrac{3\sqrt{26}}{26}$

(29) Pelo princípio da trilinearidade,

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}, \vec{c}]$, ou seja, o produto misto não muda ao somar uma combinação linear dos outros dos vetores em cada elemento. Assim, para $[2u - 3v + w, -u + v - w, v - 3w]$ a igualdade se mantém quando somamos o segundo elemento multiplicado por 1 no primeiro elemento, por exemplo $= [u - 2v, -u + v - w, v - 3w]$, usando essa ideia, $= [u - 2v, -v - w, v - 3w] = [u - 2v, -v - w, -4w] = [u - 2v, -v, -4w] = [u, -v, -4w] = -1 \cdot -1 \cdot 4 \cdot [u, v, w] = 4 \cdot 6 = 24$

(30) O volume de ABCD é: $V_1 = \dfrac{|[AB, AC, AD]|}{6}$, o volume de PQRD é $V_2 = \dfrac{|[PQ, PR, PD]|}{6}$, para isso, calculamos:

$\vec{PQ} = Q - P = \cancel{B} - AB - AC + \cancel{AD} - \cancel{A} - 2AB - AC - \cancel{AD} = -2AB - 2AC$;

$\vec{PR} = R - P = C + AB + AC - A - 2AB - \cancel{AC} - AD = -AB + AC - AD$

$\vec{PD} = D - P = \cancel{D} - \cancel{A} - 2AB - AC - \cancel{AD} = -2AB - AC$, então

$[PQ, PR, PD] = [-2AB - 2AC, -AB + AC - AD, -2AB - AC]$, pela trilinearidade, $= [2AB, -3AB - AD, -2AB - AC] = [2AB, -AD, -AC]$, pela troca de elementos e pela multiplicação de escalares $= -2[AB, AC, AD]$, logo, $V_2 = \dfrac{2[AB, AC, AD]}{6}$, por fim, queremos V_2/V_1 que é

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{2[AB, AC, AD]}{6}}{\frac{[AB, AC, AD]}{6}} = 2$$

Acabou