1a) FALSA. De fato, tome $a = 2$, $b = 4$ e $c = 2$. Temos que $a \mid b$, no entanto, $(a+c) \nmid (b+c)$.

1b) VERDADEIRA. De fato, como $a \mid b$, então existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $b = za$, donde temos que

$$bc = zac$$

Em particular, isto garante que $bc \mid ac$.

1c) VERDADEIRA. De fato, como $a \mid b$, então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Em particular, note que $-b = c(-a)$, portanto, $-a \mid -b$

1d) FALSO: De fato, tome $a = 14$, $b = 7$ e $c = 2$. Temos que $a \mid bc$, no entanto, $a \nmid b$ e $a \nmid c$

1e) VERDADEIRA. De fato, escreva

$$b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} \quad e \quad c = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}$$

as fatorações (únicas) de b e c em números primos. Como $a \mid bc$ e a é primo, então a unicidade da fatoração do número bc assegura que $a = p_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$ ou $a = q_i$ para algum $i = 1, \ldots, m$. Em particular, $a \mid b$ ou $a \mid c$

1f) FALSO. De fato, tome $a = 2$, $b = 3$ e $c = 3$. Temos que $a \mid (b+c)$, no entanto, $a \nmid b$ e $a \nmid c$.

1g) FALSO: De fato, $1, 2, 3$ e 4 são 4 números consecutivos e nenhum é múltiplo de 5.

1h) VERDADEIRO. De fato, considere m números consecutivos

$$a+1, a+2, \ldots, a+m \qquad (\#)$$

Pelo algoritmo da divisão, existem inteiros q e r, com $0 \leq r < m$, tais que

$$a = mq + r$$

Note que $x = a + (m-r)$ pertence ao intervalo em $(\#)$ e

$$x = a + (m-r) = mq + r + (m-r) = m(q+1).$$

Em particular, $m \mid x$.

1i) FALSO. De fato, temos que para $a = 2$, $b = 3$ e $d = 5$. Temos que $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$ são inteiros tais que $d = s_1 a + s_2 b$. No entanto, $MDC(a, b) = 1 \neq d$.

1j) VERDADEIRO. De fato, sabemos que se c é um inteiro com

$$c = s_1 a + s_2 b,$$

então $MDC(a, b)$ divide c. Assim, a hipótese com $c = 1$ garante que $MDC(a, b)$ divide 1. Como o único divisor positivo de 1 é ele mesmo, segue que $MDC(a, b) = 1$.

(1K) no verso

2a)

$$\begin{array}{r|l} 187 & 6 \\ \hline -18 & 31 \\ 07 & \\ -6 & \\ 1 & \end{array}$$

$q = 31$
$r = 1$

2b)

$q = q' + 1 = 32$
$r = |a| - r' = 5$

$-187 = (-6)\,32 + 5$

2c)

$$\begin{array}{r|l} 350 & 13 \\ \hline -26 & 26 \\ 90 & \\ -78 & \\ 12 & \end{array}$$

$q = 26$
$r = 12$

2d)

$q = -q' = -26$
$r = r' = 12$

$350 = (-13)(-26) + 12$

2e)

$$\begin{array}{r|l} 223 & 10 \\ \hline -20 & 22 \\ 23 & \\ -20 & \\ 3 & \end{array}$$

$q' = 22$
$r' = 3$

$q = -q' - 1 = -23$
$r = |a| - r' = 7$

$-223 = 10 \cdot (-23) + 7$

3a) Seja q o quociente da divisão de b por a, então

$$b = aq + r \quad \text{com } 0 \leq r < |a|$$

Em particular, multiplicando ambos os lados por c, obtemos c é positivo

$$bc = acq + rc \quad \text{com } 0 \leq rc < |ac|$$

Logo, o quociente e o resto da divisão de bc por ac é q e rc, respectivamente.

3b) Suponha por absurdo que existam dois números ímpares x e y e um quadrado perfeito m^2 tais que

$$m^2 = x^2 + y^2 \quad (*)$$

Pelo algoritmo da divisão, podemos escrever x, y e m na forma

$$m = 2q_1 + r \quad \text{com } 0 \leq r < 2$$
$$x = 2q_2 + 1$$
$$y = 2q_3 + 1$$

Substituindo em $(*)$, obtemos

$$(2q_1 + r)^2 = (2q_2 + 1)^2 + (2q_3 + 1)^2$$
$$4q_1^2 + 4q_1 r + r^2 = 4q_2^2 + 4q_2 + 1 + 4q_3^2 + 4q_3 + 1$$
$$4(q_1^2 + q_1 r - q_2^2 - q_2 - q_3^2 - q_3) = 2 - r^2$$

Logo 4 divide $2 - r^2$ mas $r = 0$ ou $r = 1$, assim, temos que $4 | 2$ ou $4 | 1$ absurdo

3c) Como d divide a e b, então a/d e b/d são inteiros. Além disso,

$$MDC\left(\frac{a}{d} \cdot d, \frac{b}{d} \cdot d\right) = |d| \, MDC\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$$

Sendo d positivo, temos

$$MDC(a, b) = d \, MDC(a/d, b/d)$$

Em particular,

$$MDC(a, b) = d \iff MDC(a/d, b/d) = 1.$$

3d) Seja d um divisor positivo de a e c. Em particular, como $d | a$ e $a | b$, então $d | b$. Assim, d é um divisor positivo de b e c. Como $MDC(b, c) = 1$, segue que $d = 1$. Isto implica que 1 é o único divisor positivo de a e c e, portanto, $MDC(a, c) = 1$.

4a)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 5 & 4 & 2 & 3 \\
810 & 155 & 35 & 15 & 5 \\
35 & 15 & 5 & 0 &
\end{array} \text{ — } MDC(155,810)$$

4b)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 3 & 24 & 1 & 3 \\
1806 & 594 & 24 & 18 & 6 \\
24 & 18 & 6 & 0 &
\end{array} \text{ — } MDC(1806,594)$$

4c)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & -1 & -3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
1064 & -742 & 322 & 224 & 98 & 28 & 14 \\
322 & 224 & 98 & 28 & 14 & 0 &
\end{array} \text{ — } MDC(1064,-742)$$

$1064 = (-742)(-1) + 322$

$-742 = 322 \cdot (-3) + 224$

5a) $MDC(155,810,140) = MDC(MDC(155,810),140)$

$= MDC(5,140)$

$= 5$

$$\begin{array}{c|c}
 & 28 \\
140 & 5 \\
0 &
\end{array}$$

5b) $MDC(1806,594,133) = MDC(MDC(1806,594),133)$

$= MDC(6,133)$

$= 1$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & 22 & 6 \\
133 & 6 & 1 \\
1 & 0 &
\end{array}$$

5c) $MDC(77,-742,1064) = MDC(77, MDC(-742,1064))$

$= MDC(77,14)$

$= 7$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & 5 & 2 \\
77 & 14 & 7 \\
7 & 0 &
\end{array}$$

6a) Temos que $MDC(810,155) = 5$. Além disso,

$$\begin{aligned}
810 &= 155 \cdot 5 + 35 \\
155 &= 35 \cdot 4 + 15 \\
35 &= 15 \cdot 2 + 5
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
35 &= 810 + 155(-5) \\
15 &= 155 + 35(-4) \\
5 &= 35 + 15(-2)
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos, temos

$5 = 35 + 15(-2)$

$5 = 35 + (155 + 35(-4))(-2)$

$5 = 35 \cdot 9 + 155(-2)$

$5 = (810 + 155(-5))9 + 155(-2)$

$\boxed{5 = 810 \cdot 9 + 155(-47)}$

6b) Temos que MDC $(1806, 594) = 6$. Além disso,

$$1806 = 594 \cdot 3 + 24 \Rightarrow 24 = 1806 + 594(-3)$$
$$594 = 24 \cdot 24 + 18 \quad\quad 18 = 594 + 24(-24)$$
$$24 = 18 \cdot 1 + 6 \quad\quad 6 = 24 + 18(-1)$$

Fazendo os cálculos, temos

$$6 = 24 + 18(-1)$$
$$6 = 24 + (594 + 24(-24)) \cdot (-1)$$
$$6 = 24 \cdot 25 + 594(-1)$$
$$6 = (1806 + 594(-3))25 + 594(-1)$$
$$\boxed{6 = 1806 \cdot 25 + 594(-76)}$$

6c) Temos que MDC $(-742, 1064) = 14$. Além disso,

$$1064 = (-742)(-1) + 322 \Rightarrow 322 = 1064 + (-742) \cdot 1$$
$$-742 = 322 \cdot (-3) + 224 \quad\quad 224 = -742 + 322 \cdot 3$$
$$322 = 224 \cdot 1 + 98 \quad\quad 98 = 322 + 224(-1)$$
$$224 = 98 \cdot 2 + 28 \quad\quad 28 = 224 + 98(-2)$$
$$98 = 28 \cdot 3 + 14 \quad\quad 14 = 98 + 28(-3)$$

Fazendo os cálculos, temos

$$14 = 98 + 28(-3)$$
$$14 = 98 + (224 + 98(-2))(-3)$$
$$14 = 98 \cdot 7 + 224 \cdot (-3)$$
$$14 = (322 + 224(-1))7 + 224(-3)$$
$$14 = 322 \cdot 7 + 224(-10)$$
$$14 = 322 \cdot 7 + (-742 + 322 \cdot 3)(-10)$$
$$14 = 322(-23) + (-742)(-10)$$
$$14 = (1064 + (-742)1)(-23) + (-742)(-10)$$
$$\boxed{14 = 1064(-23) + (-742)(-33)}$$

7a) $MMC(155, 810) = \dfrac{155 \cdot 810}{MDC(155, 810)} = \dfrac{155 \cdot 810}{5} = 25\,110$

7b) $MMC(1806, 594) = \dfrac{1806 \cdot 594}{MDC(1806, 594)} = \dfrac{1806 \cdot 594}{6} = 178\,794$

7c) $MMC(-742, 1064) = \dfrac{742 \cdot 1064}{MDC(-742, 1064)} = \dfrac{742 \cdot 1064}{14} = 56\,392$

8a) Seja d um divisor positivo de $(m+1)$ e m. Em particular, $d \mid (m+1)-m$, isto é, $d \mid 1$. Assim, devemos ter $d=1$. Como 1 é o único divisor positivo comum de $(m+1)$ e m, segue que $MDC(m, m+1) = 1$

8b) Seja d um divisor positivo de $2m-1$ e $2m+1$. Em particular, $d \mid (2m+1)-(2m-1)$, isto é, $d \mid 2$. Assim, $d=1$ ou $d=2$. Mas 2 não divide $2m-1$, logo $d=1$. Como 1 é o único divisor positivo comum de $(2m+1)$ e $(2m-1)$, segue que $MDC(2m+1, 2m-1) = 1$.

8c) Usando o exercício (8a), temos que

$$MMC(cm, cm+c) = |c|\, MMC(m, m+1) = |c| \cdot 1 = |c|.$$

9) Como $15! = 15 \times 14 \times 13 \times \ldots \times 3 \times 2$, segue que $2, 3, 5, 7, 11$ e 13 são números primos que dividem $15!$. Além disso, como os números compostos de 2 a 15 são fatorados pelos primos citados, segue pela unicidade do Teorema fundamental da aritmética que $2, 3, 5, 7, 11$ e 13 são os únicos primos que dividem $15!$

10a)
$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

10b)
$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
$48 = 2^4 \cdot 3$

10c)
$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
$144 = 2^4 3^2$

10d)
$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
$360 = 2^3 3^2 5$

10e)
$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$
$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

11a) $2 \cdot (1+1)(1+1)(2+1) = 24$ divisores

11b) $2 \cdot (4+1)(1+1) = 20$ divisores

11c) $2 \cdot (4+1)(2+1) = 30$ divisores

11d) $2 \cdot (3+1)(2+1)(1+1) = 48$ divisores

11e) $2 \cdot (2+1)(2+1)(1+1) = 36$ divisores

12a)
$2^0 3^0 5^0 = 1$
$2^0 3^0 5^1 = 5$
$2^0 3^0 5^2 = 25$
$2^0 3^1 5^0 = 3$
$2^0 3^1 5^1 = 15$
$2^0 3^1 5^2 = 75$
$2^1 3^0 5^0 = 2$
$2^1 3^0 5^1 = 10$
$2^1 3^0 5^2 = 50$
$2^1 3^1 5^0 = 6$
$2^1 3^1 5^1 = 30$
$2^1 3^1 5^2 = 150$

12b)
$2^0 3^0 = 1$
$2^0 3^1 = 3$
$2^1 3^0 = 2$
$2^1 3^1 = 6$
$2^2 3^0 = 4$
$2^2 3^1 = 12$
$2^3 3^0 = 8$
$2^3 3^1 = 24$
$2^4 3^0 = 16$
$2^4 3^1 = 48$

12c)
$2^0 3^0 = 1$
$2^0 3^1 = 3$
$2^0 3^2 = 9$
$2^1 3^0 = 2$
$2^1 3^1 = 6$
$2^1 3^2 = 18$
$2^2 3^0 = 4$
$2^2 3^1 = 12$
$2^2 3^2 = 36$
$2^3 3^0 = 8$
$2^3 3^1 = 24$
$2^3 3^2 = 72$
$2^4 3^0 = 16$
$2^4 3^1 = 48$
$2^4 3^2 = 144$

12d)
$2^0 3^0 5^0 = 1$
$2^0 3^0 5^1 = 5$
$2^0 3^1 5^0 = 3$
$2^0 3^1 5^1 = 15$
$2^0 3^2 5^0 = 9$
$2^0 3^2 5^1 = 45$
$2^1 3^0 5^0 = 2$
$2^1 3^0 5^1 = 10$
$2^1 3^1 5^0 = 6$
$2^1 3^1 5^1 = 30$
$2^1 3^2 5^0 = 18$
$2^1 3^2 5^1 = 90$
$2^2 3^0 5^0 = 4$
$2^2 3^0 5^1 = 20$
$2^2 3^1 5^0 = 12$
$2^2 3^1 5^1 = 60$
$2^2 3^2 5^0 = 36$
$2^2 3^2 5^1 = 180$
$2^3 3^0 5^0 = 8$
$2^3 3^0 5^1 = 40$
$2^3 3^1 5^0 = 24$
$2^3 3^1 5^1 = 120$
$2^3 3^2 5^0 = 72$
$2^3 3^2 5^1 = 360$

12e)
$2^0 3^0 7^0 = 1$
$2^0 3^0 7^1 = 7$
$2^0 3^1 7^0 = 3$
$2^0 3^1 7^1 = 21$
$2^0 3^2 7^0 = 9$
$2^0 3^2 7^1 = 63$
$2^1 3^0 7^0 = 2$
$2^1 3^0 7^1 = 14$
$2^1 3^1 7^0 = 6$
$2^1 3^1 7^1 = 42$
$2^1 3^2 7^0 = 18$
$2^1 3^2 7^1 = 126$
$2^2 3^0 7^0 = 4$
$2^2 3^0 7^1 = 28$
$2^2 3^1 7^0 = 12$
$2^2 3^1 7^1 = 84$
$2^2 3^2 7^0 = 36$
$2^2 3^2 7^1 = 252$

13a) Vimos que

$$150 = 2^1\, 3^1\, 5^2$$
$$48 = 2^4\, 3^1\, 5^0$$

Logo,

$$MDC(150,48) = 2^1\, 3^1\, 5^0 = 6$$
$$MMC(150,48) = 2^4\, 3^1\, 5^2 = 1200$$

13b) Vimos que

$$144 = 2^4\, 3^2\, 5^0$$
$$360 = 2^3\, 3^2\, 5^1$$

Logo,

$$MDC(144,360) = 2^3\, 3^2\, 5^0 = 72$$
$$MMC(144,360) = 2^4\, 3^2\, 5^1 = 720$$

13c) Vimos que

$$252 = 2^2\, 3^2\, 7^1$$
$$48 = 2^4\, 3^1\, 7^0$$

Logo,

$$MDC(252,48) = 2^2\, 3^1\, 7^0 = 12$$
$$MMC(252,48) = 2^4\, 3^2\, 7^1 = 1008$$