Terceira Lista de Exercícios

GEOMETRIA ANALÍTICA

Produto interno

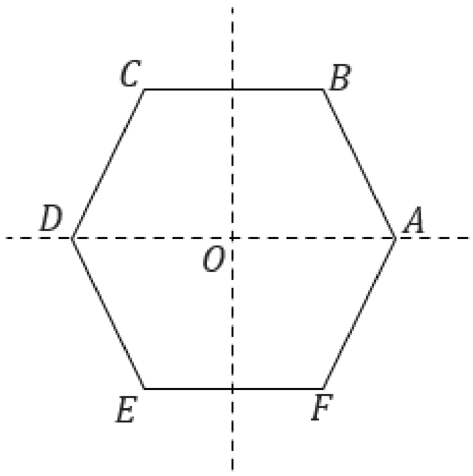
1. (Camargo–Boulos) Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O. Obtenha as seguintes medidas angulares em graus:

   (a) $ang\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}\right)$.

   (b) $ang\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}\right)$.

   (c) $ang\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}\right)$.

   (d) $ang\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BF}\right)$.



2. (Camargo–Boulos) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ortogonais, não nulos e de mesmo comprimento. Se $\vec{w}$ é gerado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$, determine as medidas angulares (em graus) entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$

3. (Camargo–Boulos) Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \right\rangle$.

4. Prove a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, . \, \|\vec{v}\| \, .$$

5. Prove as seguintes identidades:

   (a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$.

(b) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$.

(c) $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

6. Use o Exercício 5 item (a) para provar de forma alternativa a desigualdade triangular $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

7. Prove que $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u}-\vec{v}\|$. (Dica: observe que $\vec{u} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{v}$)

8. Prove as *identidades de polarização*

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \frac{1}{2}\left\{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right\},$$

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right\}.$$

9. Vale a lei do cancelamento para o produto interno? Ou seja, $\langle\vec{u},\vec{w}\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle \implies \vec{w} = \vec{v}$?

10. Prove a *identidade do paralelogramo*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

Interprete geometricamente.

11. (Poole) Mostre que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\| \iff \vec{u} \perp \vec{v}$.

12. (Poole) Prove que $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

13. (Poole) Se $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ e $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 1$, determine $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

14. (Poole) Existem vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, e $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 3$?

15. (Poole) Se $\vec{u}$ é ortogonal a ambos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, então $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}+\vec{w}$?

16. A *distância* $\mathrm{d}(A,B)$ entre dois pontos A, B é definida por

$$\mathrm{d}(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.$$

Ou seja, a distância entre A e B é o comprimento do segmento de reta AB. Mostre as seguintes propriedades da distância:

(a) $\mathrm{d}(A,B) = \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\|$.(obs: é usual definir $B - A = \overrightarrow{AB}$, e assim $\mathrm{d}(A,B) = \|B - A\|$)

(b) $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(B,A)$.

(c) $\mathrm{d}(A,B) = 0 \iff A = B$.

(d) $\mathrm{d}(A,B) \leq \mathrm{d}(A,C) + \mathrm{d}(C,B)$.

A partir daqui, todas as coordenadas referem-se a uma base ortonormal fixada, em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

17. Calcule a distância entre os pontos A e B.

    (a) $A = (0, 3)\,, B = (2, -4)\,.$
    (b) $A = \left(-\sqrt{10}, 5\right)\,, B = (3, -6)\,.$
    (c) $A = (2, 0, -3)\,, B = (-1, 10, 1).$
    (d) $A = \left(0, -4, -\frac{3}{8}\right)\,, B = \left(-7, \frac{5}{4}, 1\right)\,.$
    (e) $A = (0.9, -1.2, 3.7)\,, B = (-1.5, 2.4, 1.6)\,.$

18. Calcule o produto interno $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

    (a) $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1)\,.$
    (b) $\vec{u} = (3, -2)$, $\vec{v} = (4, 6)\,.$
    (c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 3, 1)\,.$
    (d) $\vec{u} = (3.2, -0.6, -1.4)$, $\vec{v} = (1.5, 4.1, -0.2)\,.$
    (e) $\vec{u} = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, $\vec{v} = \left(4, -\sqrt{3}, \sqrt{5}\right)$

19. (Camargo–Boulos) Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

    (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 10, 2)$.
    (b) $\vec{u} = (3, 3, 0)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.
    (c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
    (d) $\vec{u} = \left(\sqrt{3}/2, 1/2, 0\right)$ e $\vec{v} = \left(\sqrt{3}/2, 1/2, \sqrt{3}\right)$.

20. (Poole) Determine se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, obtuso ou um ângulo reto.

    (a) $\vec{u} = (3, 0)$, $\vec{v} = (-1, 1)\,.$
    (b) $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$.
    (c) $\vec{u} = (4, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$.
    (d) $\vec{u} = (0.9, 2.1, 1.2)$, $\vec{v} = (-4.5, 2.6, -0.8)$.

21. (Camargo–Boulos) Determine x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.

    (a) $\vec{u} = (x, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, x, 3)\,.$
    (b) $\vec{u} = (x, x, 4)$ e $\vec{v} = (4, x, 1)\,.$
    (c) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)\,.$
    (d) $\vec{u} = (x, -1, 4)$ e $\vec{v} = (x, -3, 1)\,.$

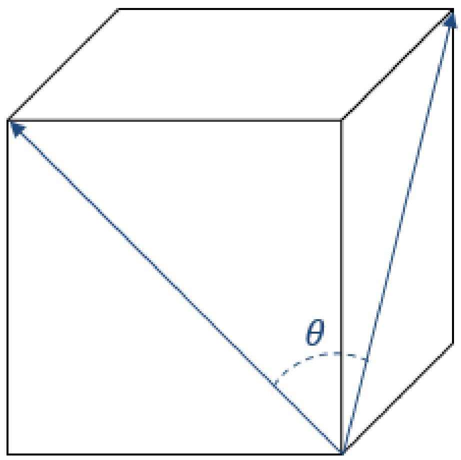
22. (Poole) Descreva todos os vetores $\vec{v} = (x, y)$ que são ortogonais a $\vec{u} = (3, 1)$.

23. (Poole) Encontre todos os valores de x para os quais os vetores $\vec{u} = (1, -1, 2)$ e $\vec{v} = \left(x^2, x, -3\right)$

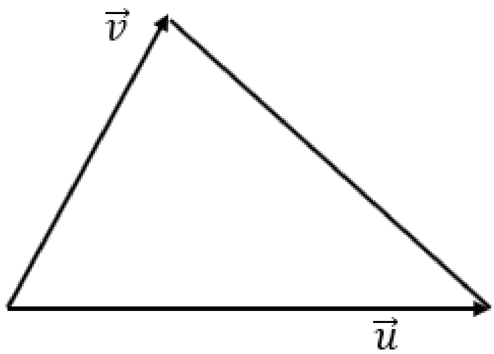
24. (Camargo–Boulos) Determine $\vec{u}$ ortogonal a $(-3, 0, 1)$ tal que $\langle \vec{u}, (1, 4, 5) \rangle = 24$ e $\langle \vec{u}, (-1, 1, 0) \rangle = 1$.

25. (Poole) Sejam $A = (1, 1, -1)$, $B = (-3, 2, -2)$ e $C = (2, 2, -4)$. Prove que ABC é um triângulo retângulo.

26. (Poole) Determine o ângulo entre as diagonais de duas faces adjacentes de um cubo.



27. Considere um triângulo formado por dois vetores $\vec{u}$,$\vec{v}$ LI, conforme figura abaixo. Prove que a área do triângulo é $A = \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} (\vec{v})\|$.



28. (Poole) Encontre a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

(a) $\vec{u} = (-1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1)$.

(b) $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $\vec{v} = (1, 2)$.

(c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (0, 0, 1)$.

(d) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(e) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{v} = (2, 2, -2)$.

29. (Poole) Calcule a área do triângulo de vértices dados.

    (a) $A = (1, -1), B = (2, 2), C = (4, 0)$.

    (b) $A = (3, -1, 4), B = (4, -2, 6), C = (5, 0, 2)$.

30. (Poole) Um avião está voando para o leste com velocidade de 200 milhas por hora. Um vento está vindo do norte a 40 milhas por hora. Qual é a velocidade resultante do avião?

31. (Poole) Ana está pilotando um barco a motor por um rio de 2 km de largura. Em água parada, o barco teria velocidade de 20 km/h, e a correnteza do rio está com 5 km/h. Ana vai de uma margem do rio para uma doca que está exatamente na outra margem do rio, diretamente oposta a ela. Ela pilota o barco em uma direção perpendicular à correnteza.

    (a) Quão longe da doca Ana irá atracar?

    (b) Quanto tempo demorará para Ana cruzar o rio?

32. (Poole) Beto consegue nadar a uma velocidade de 2 milhas por hora em água parada. A correnteza de um rio está fluindo a uma velocidade de 1 milha por hora. Se Beto quer cruzar o rio a nado para chegar em um ponto exatamente oposto a ele, a qual ângulo em relação à margem do rio ele deverá nadar?

33. (Camargo-Boulos)

    (a) Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e a $\vec{v} = (2, -4, 6)$.

    (b) Qual dos vetores obtidos forma ângulo agudo com $(1, 0, 0)$?

34. (Camargo-Boulos) Obtenha as coordenadas do vetor que tem norma $\sqrt{3}$, é ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$, e forma ângulo obtuso com $(0, 1, 0)$.

35. (Camargo-Boulos) Obtenha $\vec{u}$ ortogonal a $(1, 1, 0)$ tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ e a medida angular em graus entre $\vec{u}$ e $(1, -1, 0)$ seja 45^0.

36. (Camargo-Boulos) Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ unitários, $\|\vec{w}\| = 4$, $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -2$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -4$, e $ang\,(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/3$ radianos, calcule:

    a) $\langle \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} \rangle$ b) $\langle 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v} \rangle$

37. (Camargo-Boulos) Seja $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ base ortonormal. Dado qualquer vetor $\vec{u}$, mostre que

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle\, \vec{x} + \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle\, \vec{y} + \langle \vec{u}, \vec{z} \rangle\, \vec{z}.$$

38. (Camargo-Boulos) Prove a *Relação de Euler*

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD} \right\rangle = 0.$$

39. (Camargo-Boulos) Sejam A, B, C pontos não colineares, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Prove que, se $\vec{x}$ e $\vec{u}$ são de mesmo sentido e o mesmo ocorre com $\vec{y}$ e $\vec{v}$, e se $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, então $\vec{x} + \vec{y}$ é paralelo à bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. Conclua que o vetor soma dos versores de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é paralelo à bissetriz de $B\hat{A}C$.

40. (Camargo-Boulos) Use a Relação de Euler para verificar as afirmações.

    (a) Se um tetraedro tem dois pares de arestas opostas ortogonais, então as duas arestas restantes são ortogonais.

    (b) As três retas que contém as alturas de um triângulo são concorrentes num ponto (*ortocentro* do triângulo).