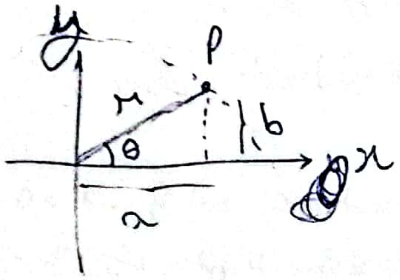
Lista 10 Joseney - A jornada final!!!

① ⓐ Seja a circunferência $x^2+y^2=r^2$ a circunferência de raio r centrada na origem. Substituindo $P=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ na equação temos $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1}) = r^2$, como queríamos. Logo, $\forall\theta$, $P \in x^2+y^2=r^2$

↳ Procure também provas geométricas, como o círculo trigonométrico, são muito mais legais

ⓑ Geometricamente temos:



Seja $P=(a,b)$

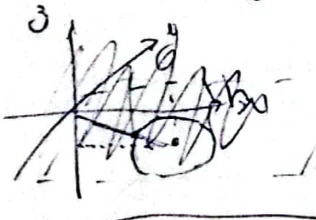
Pelas relações do triângulo retângulo temos:

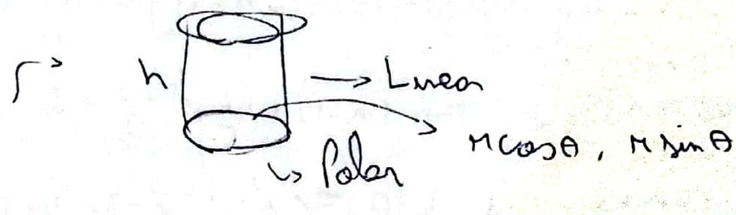
$\sin\theta = \frac{b}{r}$ e $\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow b = r\sin\theta$ e $a = \cos\theta \cdot r$. Logo,

$P = (\cos\theta\, r, \sin\theta\, r)$, como queríamos.

---

② Como já mostrado, todo ponto no plano pode ser escrito como $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Entretanto, como temos infinitos planos no $\mathbb{R}^3$, especificamos o ponto em questão (em relação à origem) linearmente pelo fator $z=h$



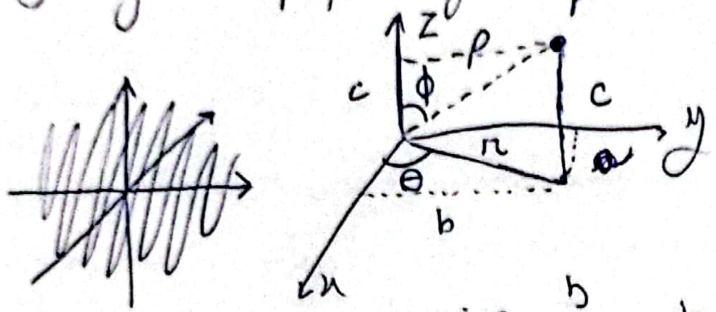


---

③ A esfera de centro O é $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, com raio ρ. Como P é $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$ então: $\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}) + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi) = \rho^2$, como queríamos demonstrar.

→ Letra a

(b) Seja o espaço a seguir: $\longrightarrow P = (a, b, c)$



$\cos\phi = \dfrac{c}{\rho} \Rightarrow c = \rho\cos\phi$

$\sin\phi = \dfrac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho\sin\phi$

$\longrightarrow \sin\theta = \dfrac{b}{r} \therefore b = \rho\sin\theta\sin\phi$

$\longrightarrow \cos\theta = \dfrac{a}{r} \therefore a = \rho\cos\theta\sin\phi$, Logo, todas as coordenadas podem ser representadas como queremos. //

---

(4) $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \therefore (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + (z + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 0 \Rightarrow (x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 + (z + c/2)^2 = 1/4(a^2 + b^2 + c^2) - d$. Logo, se $1/4(a^2+b^2+c^2) - d > 0$, temos uma esfera. Mas, se $d < 0$, então $-d > 0$ e, consequentemente, a inequação é válida $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. ↳ Esfera de centro $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$

---

(5) (a) $(x-2)^2 + (y+6)^2 + z^2 = 25 \therefore C = (2, -6, 0)$ e $r = 5$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 16 \therefore$ $C = (2, -3, -1)$, $r = 4$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = -5 \therefore$ Não existe $\varnothing$

(e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = -2 \therefore \varnothing$

OPS

(d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2 \therefore C = (1, -1, 0)$ e $r = \sqrt{2}$

(f) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x + 2y - 4z + 7 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 2z + 7/2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3/2)^2 + (y + 1/2)^2 + (z-1)^2 = 0 \therefore$ É um ponto.

(g) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x - 8y - 8z + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 5/2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1/2 \therefore C = (1,1,1)$ e $r = \sqrt{2}/2$

(h) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 15 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = -10 \therefore \varnothing$

(i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 0 \therefore$ É um ponto!

(6) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=r^2$ que contém $(1,1,3)$ ∴ $0^2+0^2+1^2=r^2$ ∴

$r=1$, logo, temos a equação $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$

---

(7) Como $\overline{AB}$ é diâmetro, então $C=\frac{A+B}{2}=(3,-1,-4)$ e $2r=d(A,B) \iff$

$\sqrt{(2-4)^2+(-3-1)^2+(-5+3)^2}=\sqrt{24}=2r$ ∴ $24=4r^2$ ∴ $r^2=6$, logo

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z+4)^2=6$

---

(8) A esfera é: $x^2+y^2+z^2+2x-2y=0 \iff (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=2$ ∴ $D=2r=2\sqrt{2}$.

$n_\pi=(1,-1,0)$ ∴ os pontos do diâmetro estão nessa reta: $X=(-1,1,0)+\lambda(1,-1,0)$

$\equiv X=\lambda(1,-1,0)$. Ou seja:

$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases}$ então $(\lambda+1)^2+(-\lambda-1)^2=2$ ∴ $(\lambda+1)^2=1$ $\begin{cases} \to \lambda+1=1 \Rightarrow \lambda=0 \\ \to \lambda+1=-1 \Rightarrow \lambda=-2 \end{cases}$

↳ Logo, o diâmetro é formado pelos pontos $(0,0,0)$ e $(-2,2,0)$

---

(9) A equação geral é: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$\begin{cases} a^2+(2-b)^2+(-1-c)^2=r^2 \\ (1-a)^2+(1-b)^2+(-1-c)^2=r^2 \\ (1-a)^2+(-1-b)^2+(1-c)^2=r^2 \\ (-1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2=r^2 \end{cases}$ $\begin{matrix} a^2+(2-b)^2=(1-a)^2+(1-b)^2 \\ (1-a)^2+(-1-b)^2=(-1-a)^2+(1-b)^2 \end{matrix}$ $\begin{cases} 2a=2b-2 \\ a=b \end{cases}$ $\emptyset$

↳ Nenhuma esfera contém esses 4 pontos.

---

(10) Seja $C=(a,b,c)$, então $a+b=c$

↳ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ∴ $\begin{cases} a^2+b^2+(1-c)^2=r^2 \\ (1-a)^2+b^2+c^2=r^2 \\ a^2+(1-b)^2+c^2=r^2 \\ a+b=c \end{cases} \iff \begin{cases} (1-a)^2+b^2=a^2+(1-b)^2 \\ a=b \end{cases}$

e analogamente, $a=c$, logo: $a=b=c$ e $a+b=c \Rightarrow a=b=c=0$.

Logo, $r=1$. Portanto $x^2+y^2+z^2=1$

---

(11) (a) $S\cap\pi=\{y=5$ ∴ $\frac{x^2}{64}+\frac{z^2}{4}=3/4 \iff \frac{x^2}{48}+\frac{z^2}{3}=1 \to$ elipse

$a=\sqrt{48}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{4}$

↳ Logo, $C=(0,5,0)$ e $F=(\pm\sqrt{45},5,0)$ e $V_x=(\pm\sqrt{48},5,0)$, $V_z=(0,5,\pm\sqrt{3})$

(b) $S\cap\pi=\{x=-2\sqrt{5}$ ∴ $20+9y^2+4z^2=36$ ∴ $9y^2+4z^2=16$ ∴ $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=\frac{4}{9}$ ∴

$\frac{y^2}{\left(\frac{16}{9}\right)}+\frac{z^2}{4}=1$, logo, elipse, $a=2$, $b=\frac{4}{3}$, $c=\frac{\sqrt{20}}{3}$ ∴ $C=(-2\sqrt{5},0,0)$,

$F=(-2\sqrt{5},0,\pm\frac{\sqrt{20}}{3})$, $V_y=(-2\sqrt{5},\pm\frac{4}{3},0)$, $V_z=(-2\sqrt{5},0,\pm2)$

(c) $\mathcal{S} \cap \pi : \{ z = -1/3 \therefore 4x^2+4y^2 = 1 \therefore x^2+y^2 = 1/4$. Circunferência de r = 1/2.
$C = (0,0,-1/3)$

(12) Seja $X = (x,y,z)$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2+\cancel{y^2}+\cancel{z^2} = 4 + (x+1)^2+\cancel{y^2}+\cancel{z^2} - 4\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}$

$\therefore -4x-4 = -4\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} \therefore (x+1) = \sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} \therefore (x+1)^2 = (x+1)^2+y^2+z^2$

$\therefore y^2+z^2 = 0 \Rightarrow y = z = 0$. Logo: $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = 2$

$|x-1| + |x+1| = 2 \Rightarrow -1 \le x \le 1$. Logo o segmento AB é o espaço geométrico

$\underbrace{\geq 0}_{x \geq -1}$ $\quad \underbrace{\geq 0}_{x \leq 1}$

---

(13) (a) $\mathcal{S} \cap \pi = \{ z = -\frac{\sqrt{5}}{5} \therefore x^2 - 4y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2y$ com $z = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, é a união de duas retas

(b) $\mathcal{S} \cap \pi : \{ y = 1 \therefore +3x^2 + 4z^2 = +48 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{48}{3}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{48}{4}\right)} = \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{12} = 1$, que é uma elipse de $a = 4$, $b = \sqrt{12}$ e $c = 2$ $\therefore$ $F = (\pm 2, 1, 0)$, $V = (\pm 4, 1, 0)$, $V_2 = (0, 1, \pm\sqrt{12})$ e $C = (0,1,0)$

(c) $\mathcal{S} \cap \pi : \{ y = -2 \therefore$ $\Rightarrow \frac{x^2}{2} - z^2 = 3 \therefore \frac{x^2}{6} - \frac{z^2}{3} = 1 \Rightarrow F: (\pm 3, -2, 0)$, $V = (\pm\sqrt{6}, -2, 0)$

$C = (0,-2,0)$ e assíntotas $X = (0,-2,0) + \lambda(\pm\sqrt{2}, 0, 1)$

---

(14) $2c = \sqrt{6}$. No plano $x = k \Rightarrow 2k^2 - y^2 + 4z^2 = 1 \therefore 4z^2 - y^2 = 1 - 2k^2$

$\therefore \frac{4z^2}{1-2k^2} - \frac{y^2}{1-2k^2} = 1 \therefore -10k^2 = 1 \Rightarrow \emptyset$ hipérbole com eixo principal em z, mas se:

$\frac{y^2}{2k^2-1} - \frac{z^2}{\left(\frac{2k^2-1}{4}\right)} = 1 \therefore 10k^2 = 11 \therefore k = \pm\sqrt{\frac{11}{10}}$ para o plano x

↳ $x = \pm\sqrt{\frac{11}{10}}$

No plano $y = m \Rightarrow 2x^2 - m^2 + 4z^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + 4z^2 = 1 + m^2 \therefore \frac{x^2}{\left(\frac{1+m^2}{2}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{1+m^2}{4}\right)} = 1$

$\therefore 2 \cdot \frac{1+m^2}{2} = \frac{1+m^2}{4} + \frac{6}{4} \Rightarrow 2 + 2m^2 = 1 + m^2 + 6 \therefore m^2 = 5 \therefore m = \pm\sqrt{5}$ para o plano y

↳ $y = \pm\sqrt{5}$

No plano $z = n \Rightarrow 2x^2 - y^2 + 4n^2 = 1 \therefore 2x^2 - y^2 = 1 - 4n^2 \therefore \frac{x^2}{\left(\frac{1-4n^2}{2}\right)} - \frac{y^2}{1-4n^2} = 1$ OU

$\frac{y^2}{4n^2-1} - \frac{x^2}{\left(\frac{4n^2-1}{2}\right)} \Rightarrow 4n^2 = 0 \therefore n = 0$ OU $4n^2 = 2 \Rightarrow n = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ para o plano z

↳ $z = 0$ ou $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(15) $\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2} - \sqrt{x^2+(y+3)^2+z^2} = 6 \Rightarrow \cancel{x^2}+(y-3)^2+\cancel{z^2} = 36+\cancel{x^2}+(y+3)^2+\cancel{z^2}$

$+12\sqrt{x^2+(y+3)^2+z^2} \Rightarrow -12y-36 = 12\sqrt{x^2+(y+3)^2+z^2} \Rightarrow x^2+z^2=0 \Rightarrow x=z=0$

$\therefore |y-3|-|y+3|=6 \Rightarrow y\in[-3,3]$, que é uma reta com $x=z=0$

---

(16) $9x^2+36y^2-4z^2-18x+72y+16z-7=0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y+1 \\ w = z-2 \end{cases}$

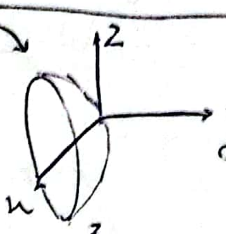
$(3x-3)^2+(6y+6)^2-(2z-4)^2 = 36 \Leftrightarrow$

$\frac{9(x-1)^2}{36} + \frac{36(y+1)^2}{36} - \frac{4(z-2)^2}{36} = 1$ //

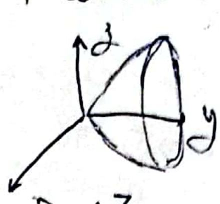
→ fórmula do hiperbolóide de uma folha

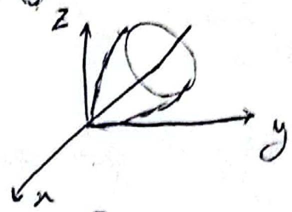
---

(17) (a) $x = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$, com $a \neq b$,

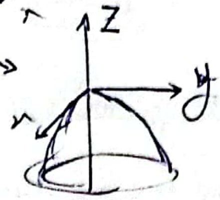


(b) $y = \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$, com $a\neq b$

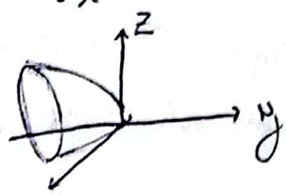




(c) $z = -\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$



(d) $x = -\left(y^2/a^2 + z^2/b^2\right)$:



(e) $y = -\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)$:

---

(18) (a) $\Omega\cap\pi = \{ z=-9 \therefore x^2+3y^2=9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. Elipse, $C=(0,0,-9)$,

$V_x=(\pm3,0,-9)$, $V_y=(0,\pm\sqrt{3},-9)$, $F=(\pm\sqrt{6},0,-9)$

(b) $\Omega\cap\pi = \{ z=1 \therefore 4y-4x^2=1 \therefore x^2=(y-1/4)$. Parábola, $V=(0,1/4,1)$,

$p=1/4$, $F=(0,1/2,1)$, diretriz r: $X=(0,0,1)+\lambda(1,0,0)$ → x livre, z = 1, y = 0

(c) $\Omega\cap\pi = \{ x=1 \therefore \underbrace{y^2}_{>0}+\underbrace{2z^2}_{>0}=-1 = \emptyset$

---

(19) $\underbrace{d(P',\pi)}_{\frac{|\langle n, AP'\rangle|}{\|n\|}} = \underbrace{d(P',P)}_{\|P'P\|}$ com $\underbrace{\pi: x=2}_{n=(1,0,0) \text{ e } A=(2,0,0)}$, $P=(-2,0,0)$ e $P'=(x,y,z)$

Logo, $\frac{|\langle (1,0,0),(x-2,y,z)\rangle|}{1} = \sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2} \iff$

$|x-2| = \sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2} \iff \cancel{x^2}+\cancel{4}-4x = \cancel{x^2}+\cancel{4}+4x+y^2+z^2 \therefore -8x = y^2+z^2$

$\therefore x = -\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{8} \to$ Parabolóide de rotação com concavidade para o eixo x, no negativo. Vértice = origem.

---

(20) $x^2+6z^2-4x+y-12=0 \iff (x-2)^2+(\sqrt{6}z)^2+y=16 \iff$

$(y-16) = -\left((x-2)^2+\frac{z^2}{(1/6)}\right) \to$ Parabolóide de centro $(2,16,0)$

↳ $u=y-16$, $v=x-2$, $w=z$ //

---

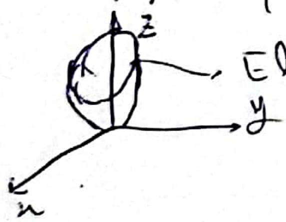
(21) $\underbrace{\overset{a}{8x^2}-\overset{b}{2xy}+\overset{c}{8y^2}}_{\text{Alguma cônica rotacionada}}=z \therefore$ → $\cot 2\theta = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = 1 \therefore \begin{cases} a'+c'=16 \\ a'-c'=-2 \end{cases} \begin{cases} a'=7 \\ c'=9 \end{cases}$

↳ $\Rightarrow 2\theta = 90°$

$\theta = 45°$ $\quad x \equiv u$ e $y \equiv v$

Logo, o lado esquerdo pode ser reescrito por rotação como: $7u^2+9v^2=z \therefore$

$z = \frac{u^2}{(1/7)}+\frac{v^2}{(1/9)}$, que é a equação de um parabolóide elíptico



→ Elipse rotacionada em 45° no sentido anti-horário

---

(22) É fácil notar que todos os casos são apenas mudanças de eixos. A única mudança é no esboço.

---

(23) $y^2-4z^2+x-2y+16z-15=0 \iff (y-1)^2-1-(2z-4)^2+16+x-15=0$

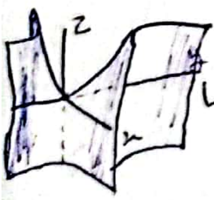
$\iff (y-1)^2-4(z-2)^2+x=0 \therefore x = \frac{(z-2)^2}{(1/4)}-(y-1)^2 \to$ Parabolóide hiperbólico

↳ $w=z-2$ e $v=y-1$ e $x=u$

---

(24) $z = \underbrace{xy}_{\text{alguma cônica}} \therefore$ $a=0, b=1, c=0$ $\quad \cot 2\theta = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = 1 \therefore \begin{cases} a'+c'=0 \\ a'-c'=1 \end{cases} \therefore a'=\frac{1}{2}, c'=-\frac{1}{2}$

↳ $x \equiv u$ e $y \equiv v$



Logo, $z = \frac{u^2-v^2}{2} \therefore z = \frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}$, que é um parabolóide hiperbólico

(25) Seja $P=(x,y,z)$ e $r: X=(0,-\frac{1}{2},0)+\lambda(1,0,0)$ e $s: X=(0,-\frac{1}{2},0)+\lambda(0,0,1)$
↳ Se $A=(0,-\frac{1}{2},0)$

$d(P,r)=d(P,s)$ ∴ $\frac{\|(x,y+\frac{1}{2},z)\wedge(1,0,0)\|}{1}=\frac{\|(x,y+\frac{1}{2},z)\wedge(0,0,1)\|}{1} \iff$

$\frac{\|\vec{AP}\wedge\vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}$ $\{\ \|(0,z,-y-\frac{1}{2})\|=\|(y+\frac{1}{2},-x,0)\| \iff \sqrt{z^2+(y+\frac{1}{2})^2}=\sqrt{x^2+(y+\frac{1}{2})^2}$

$\iff z^2=x^2$ ∴ $z^2-x^2=0$ ∴ $(z-x)(z+x)=0$. Logo, essa quádrica é a união dos planos $z-x=0$ e $z+x=0$

---

(26) (a) $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \to$ Elíptico com geratriz paralela ao eixo x

(b) $\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \to$ Hiperbólico . . . . . . eixo x

(c) $z^2=cx \longrightarrow$ Parabólico . . . . . . eixo y

(d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \to$ Elíptico . . . . . . eixo y

(e) $y^2=cz \longrightarrow$ Parabólico . . . . . . eixo x

(f) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \to$ Hiperbólico . . . . . . eixo y

---

(27) (a) $\overset{a}{x^2}\ \overset{b}{+2xy}\ \overset{c}{-y^2}\ \overset{d}{+6x}\ \overset{e}{-2y}\ \overset{f}{-3}=0$ Em xyz, no espaço, quádricas!!

↳ $\cot(2\theta)=\frac{1+1}{2}=1$ ∴ $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴ $\begin{cases}\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\end{cases}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ e $\sin\theta=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

↳ Esquece isso aí, vamos transladar primeiro, Seja $u=x+2$ e $v=y+2$

então: $\overset{a}{u^2}-\overset{c}{v^2}+\overset{b}{2uv}-4=0$

↳ Então, na rotação: $\cot(2\theta)=1 \Rightarrow \sin 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴ $\begin{cases}a'+c'=0\\ a'-c'=2\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}a'=\sqrt{2}\\ c'=-\sqrt{2}\end{cases}$
$i=u$ e $j=v$

∴ $\sqrt{2}\,i^2-\sqrt{2}\,j^2=4$ ∴ $\frac{i^2}{(\frac{4}{\sqrt{2}})}-\frac{j^2}{(\frac{4}{\sqrt{2}})}=1$. que é uma quádrica cilíndrica hiperbólica //

(b) $\overset{a}{3x^2}+\overset{c}{y^2}\ \overset{b}{-2xy}\ \overset{d}{-6x}\ \overset{e}{+2y}\ \overset{f}{-1}=0 \Rightarrow$ Em translação, temos

Seja $u=x-1$ e $v=y$ ∴ $\overset{a}{3u^2}+\overset{c}{v^2}\ \overset{b}{-2uv}=\overset{-f}{4}$. E rotação temos:

$\cot(2\theta)=-1$ ∴ $\sin 2\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴ $\begin{cases}a'+c'=4\\ a'-c'=2\sqrt{2}\end{cases} \iff \begin{matrix}a'=2+\sqrt{2}\\ c'=2-\sqrt{2}\end{matrix}$ ∴

$\underbrace{(2+\sqrt{2})}_{>0}i^2+\underbrace{(2-\sqrt{2})}_{>0}j^2=4$ ∴ temos uma quádrica cilíndrica elíptica //

(c) $x^2-6xz+z^2-8x+8z+10=0$. Por translação temos: , para $u=x-1$ e $v=z+1$ temos: $u^2-6uv+v^2+2=0$. Por rotação: $\cot g(2\theta)=0 \therefore \sin 2\theta=1$

$\begin{cases} a'+c'=2 \\ a'-c'=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} a'=-2 \\ c'=4 \end{cases}$ $\therefore -2i^2+4j^2=-2 \therefore \underbrace{i^2-2j^2=1}_{\text{Hyperbole}}$. Logo, essa é uma quádrica cilíndrica hiperbólica //

(d) $y^2+2yz+z^2+y-z-2=0$. Por ~~translação~~ rotação temos: $\cot g 2\theta=0 \therefore$ $\sin 2\theta=1 \therefore \sin\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \therefore$ $\begin{cases} a'+c'=2 \\ a'-c'=2 \end{cases}$ $\therefore 2a'=4 \therefore a'=2$ e $c'=0$

$d'=d\cos\theta+e\sin\theta=0$ e $e'=-d\sin\theta+e\cos\theta=-\sqrt{2}$, logo, temos:

$2u^2-\sqrt{2}v-2=0 \therefore \underbrace{u^2=\frac{(v+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}}_{\text{parábola}}$, quádrica cilíndrica parabólica

---

(e) $x^2-2xy+y^2=0 \iff (x-y)^2=0 \iff x-y=0 \therefore$ É um plano //

(f) $x^2+4xy+4y^2+6x+12y+5=0$. Por rotação: $\cot g(2\theta)=-3/4$,

$\sin 2\theta=+4/5$, $\cos 2\theta=-3/5$, $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, logo

$\begin{cases} a'+c'=5 \\ a'-c'=+5 \end{cases}$ $\therefore a'=5$ e $c'=0$. $d'=\frac{30}{\sqrt{5}}$ e $e'=0$, então

$\underbrace{5u^2+\frac{30u}{\sqrt{5}}+5=0}$ → Dois resultados para u, logo, duas linhas paralelas

No $\mathbb{R}^3$, temos a união de 2 planos paralelos.

---

28) Seja $P=(x,y,z)$, então $\|PO\|=\frac{\|AP\wedge\vec{m}\|}{\|m\|} \iff \|P\|=\|(-z,0,x-1)\|$

$\therefore$ ~~$x^2+y^2+z^2=z^2+x^2 \ldots y^2 \ldots$~~ $x^2+y^2+z^2=z^2+(x-1)^2 \therefore$

$\underbrace{y^2=1-2x}_{\text{Parábola}}$, logo, no $\mathbb{R}^3$, temos uma quádrica cilíndrica parabólica.

---

29) É literalmente o mesmo caso de $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, só mudam os eixos.

30 a) $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 4 = 0 \therefore (x-2)^2 - 4 + (z-1)^2 - 1 - (y+3)^2 + 9 = 4$

$\Rightarrow (y+3)^2 = (z-1)^2 + (x-2)^2$

↳ Quádrica cônica de centro $(2, -3, 1)$

b) $2xz + y^2 = 0$ ⟶ Há um erro na questão da lista, esse é o certo

↳ Seja $x = u+v$ e $z = u - v$ e temos a resposta. Ou, por rotação em y temos $\cot 2\theta = 0 \therefore \sin 2\theta = 1$, $\begin{cases} a' + c' = 0 \\ a' - c' = 2 \end{cases} \begin{cases} a' = 1 \\ c' = -1 \end{cases} \therefore$

$u = x, v = z, w = y \therefore u^2 - v^2 + w^2 \therefore v^2 = u^2 + w^2$ ⟶ que é uma quádrica cônica

---

31) $r: x - y = z = 0 \therefore \begin{cases} z = 0 \\ x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \therefore r: X = \overset{A}{(0,0,0)} + \lambda(1,1,0)$

e $\pi: x + y = 0$. Seja $P = (x, y, z)$, então $\quad n = (1,1,0) = \vec{r}$

$$\underbrace{d(P, r)}_{\frac{\|\vec{AP} \wedge \vec{r}\|}{\|r\|}} = \underbrace{d(P, \pi)}_{\frac{|\langle n, AP\rangle|}{\|n\|}} \Leftrightarrow \frac{\|(-z, z, x-y)\|}{\cancel{\|r\|}} = \frac{|x+y|}{\cancel{\|n\|}} \therefore$$

$2z^2 + (x-y)^2 = (x+y)^2 \therefore 2z^2 + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2xy = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xy \therefore 2z^2 = 4xy$

$\Rightarrow z^2 = 2xy$. Pela mesma rotação de 30.b temos: $v^2 = u^2 - w^2 \Rightarrow$

$v^2 + w^2 = u^2$, com uma rotação de $\pi/4$ rad, que é uma quádrica cônica

---

Resumo de formulas de quadricas:

Elipsóide e superfície esférica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ → $a = b = c$ → esfera.

Hiperboloide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ → Qualquer eixo

Hiperboloide de duas folhas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ → Quaisquer 2 eixos

Paraboloide elíptico ou de rotação: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Paraboloide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

Quádrica cilíndrica elíptica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Quádrica cilíndrica Hiperbólica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

PODE TROCAR EIXOS

Quádrica cilíndrica Parabólica: $y^2 = cx$

Quádrica cônica elíptica: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Fim