Segunda Lista de Exercícios

GEOMETRIA ANALÍTICA

Dependência, independência linear e base

1. (Camargo–Boulos) A tripla $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

   (a) Necessariamente, um dos vetores é nulo.

   (b) Se $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

   (c) Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são não nulos, então dois deles são paralelos.

   (d) Existem três planos paralelos e distintos, o primeiro contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{u}$, o segundo contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{v}$ e o terceiro contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{w}$.

2. (Camargo–Boulos) Prove que:

   (a) $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD$\Longrightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD.

   (b) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI$\Longrightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ é LI.

   (c) $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD$\Longleftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ é LD.

3. (Camargo–Boulos) Verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta.

   (a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD$\Longrightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ é LD.

   (b) $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI$\Longrightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

   (c) Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ não são nulos, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD$\Longrightarrow (2\vec{u}, -\vec{v})$ é LD.

   (d) Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD, então $(\vec{u}, \vec{v})$ tanto pode ser LD como LI.

   (e) Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tanto pode ser LD como LI.

4. (Camargo–Boulos) Prove que $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ é LD, quaisquer que sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

   (a) $\vec{a} = 2\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}$, $\quad \vec{b} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w}$, $\quad \vec{c} = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

   (b) $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$, $\quad \vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$, $\quad \vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$

   (c) $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$, $\quad \vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$, $\quad \vec{c} = \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}$

5. (Camargo–Boulos) Sejam $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{v} - 2\vec{w}$. Prove que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI se, e somente se, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ é LI.

6. (Camargo–Boulos) Prove que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI se, e somente se, $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ é LI.

7. (Camargo–Boulos) Mostre que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI se, e somente se, $(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w},\vec{u}-\vec{v},3\vec{v})$ é LI.

8. (Camargo–Boulos) Prove que $(2\vec{u}+\vec{w},\vec{u}-\vec{v},\vec{v}+\vec{w})$ é LD se, e somente se, $(\vec{u}-\vec{w},\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{w})$ é LD.

9. (Camargo–Boulos) Suponha que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é uma tripla LI de vetores, e seja $\vec{x}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$. Mostre que $(\vec{u}+\vec{x},\vec{v}+\vec{x},\vec{w}+\vec{x})$ é LI se, e somente se, $a+b+c+1\neq 0$.

10. Desenhe os seguintes vetores na posição padrão em um plano gerado por um par $(\vec{x},\vec{y})$ de vetores ortonormais.

    (a) $(3,1)$ (b) $(-4,-2)$ (c) $(2,-3)$ (d) $(-1,5)$ (e) $(4,0)$ (f) $(0,-3)$

11. Desenhe os seguintes vetores na posição $(2,-3)$ em um plano gerado por um par $(\vec{x},\vec{y})$ de vetores ortonormais.

    (a) $(3,1)$ (b) $(-4,-2)$ (c) $(2,-3)$ (d) $(-1,5)$ (e) $(4,0)$ (f) $(0,-3)$

12. Desenhe os seguintes vetores na posição padrão (em um sistema de coordenadas ortonormal).

    (a) $(0,1,2)$ (b) $(-4,0,0)$ (c) $(-1,-2,-3)$ (d) $(2,-1,5)$ (e) $(0,0,-2)$ (f) $(1,-3,1)$

13. Translade os vetores abaixo de modo que suas extremidades estejam no ponto $(4,2,-1)$, determine os pontos correspondentes às suas origens.

    (a) $(0,1,2)$ (b) $(-4,0,0)$ (c) $(-1,-2,-3)$ (d) $(2,-1,5)$ (e) $(0,0,-2)$ (f) $(1,-3,1)$

14. (Poole) Para cada um dos seguintes pares de pontos, desenhe o vetor $\overrightarrow{AB}$. Depois, determine e redesenhe $\overrightarrow{AB}$ na posição padrão.

    (a) $A=(1,-1)\,,B=(4,2)$
    (b) $A=(0,-2)\,,B=(2,-1)$
    (c) $A=\left(2,\frac{3}{2}\right),B=\left(\frac{1}{2},3\right)$
    (d) $A=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),B=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$

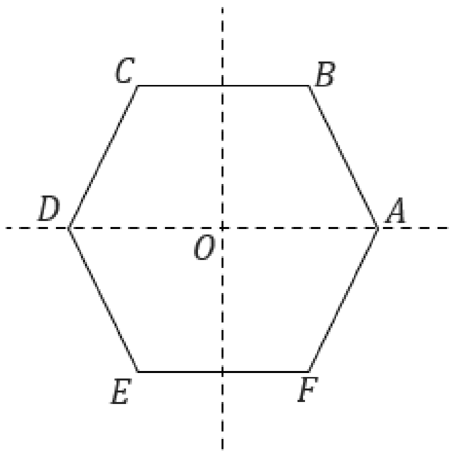
15. Sejam $u=(3,1,-1)$, $v=(-1,0,4)$ e $w=(1,-2,0)$. Determine os vetores indicados:

    (a) $u+2v$ (b) $3v-2(4u+w)$ (c) $-w+2u-\frac{3}{4}u$ (d) $5v+(2w-u)+3w$

16. (Poole) Um excursionista anda 4 km no sentido norte e depois 5 km no sentido nordeste. Desenhe os vetores deslocamento que representam o passeio do excursionosta e o vetor que representa o deslocamento real do ponto de partida.

17. (Poole) O hexágono $ABCDEF$ abaixo é regular. Expresse cada um dos seguintes vetores em função de $u = \overrightarrow{OA}$ e $v = \overrightarrow{OB}$.

    (a) $\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{BC}$ (c) $\overrightarrow{AD}$ (d) $\overrightarrow{CF}$ (e) $\overrightarrow{AC}$ (f) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$



18. (Poole) Encontre o vetor x em função dos vetores u e v.

    (a) $x - u = 2(x - 2u)$
    (b) $x + 2u - v = 3(x + u) - 2(2u - v)$

19. Desenhe os eixos coordenados relativos aos vetores $u = (2, 1)$ e $v = (0, -1)$. Localize o vetor $w = 3u - 2v$.

20. (Camargo–Boulos) Verifique se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são LI ou LD, nos seguintes casos:

    (a) $\vec{x} = (0, 1, 0)$, $\vec{y} = (1, 0, 1)$.
    (b) $\vec{x} = (1, -3, 14)$, $\vec{y} = \left(\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1\right)$.
    (c) $\vec{x} = (0, 1, 1)$, $\vec{y} = (0, 3, 1)$.

21. (Camargo–Boulos) Considere os vetores $\vec{x} = (1, -1, 3)$, $\vec{y} = (2, 1, 3)$, $\vec{z} = (-1, -1, 4)$.

    (a) Determine as coordenadas dos vetores $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} - 2\vec{y}$ e $\vec{x} + 2\vec{y} - 3\vec{z}$.
    (b) Verifique se $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{y}$,$\vec{z}$.

(c) Verifique se é possível escrever o vetor $\vec{u} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de $\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$.

22. (Camargo–Boulos) Determine m e n tais que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD, sendo $\vec{u} = (1, m, n + 1)$ e $\vec{v} = (m, n, 10)$.

23. (Camargo–Boulos) Verifique se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI ou LD.

    (a) $\vec{u} = (1, 0, 0)\,, \vec{v} = (200, 2, 1)\,, \vec{w} = (300, 1, 2)\,.$

    (b) $\vec{u} = (1, 2, 1)\,, \vec{v} = (1, -1, -7)\,, \vec{w} = (4, 5, -4)\,.$

    (c) $\vec{u} = (1, -1, 2)\,, \vec{v} = (-3, 4, 1)\,, \vec{w} = (1, 0, 9)\,.$

    (d) $\vec{u} = (7, 6, 1)\,, \vec{v} = (2, 0, 1)\,, \vec{w} = (1, -2, 1)\,.$

24. (Camargo–Boulos) Determine m de modo que $\vec{u} = (1, 2, 2)\,, \vec{v} = (m - 1, 1, m - 2)\,, \vec{w} = (m + 1, m - 1, 2)$ sejam LD.

25. (Camargo–Boulos) Seja $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base. Sabendo que $(a, b, a - b)_{\mathcal{B}} = \left(a^2, b^2, a + b\right)_{\mathcal{B}}$, determine $a^2 + b^2 - a$.

26. Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base, então $(a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w})$ é base? Discuta.

27. Seja $\mathcal{B}$ uma base. Sendo $\vec{x} = (-2, 4, 0)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{y} = (1, -3, 4)_{\mathcal{B}}$, encontre as coordenadas do vetor $\vec{z} = -5\vec{x} + 2\vec{y}$ na mesma base.

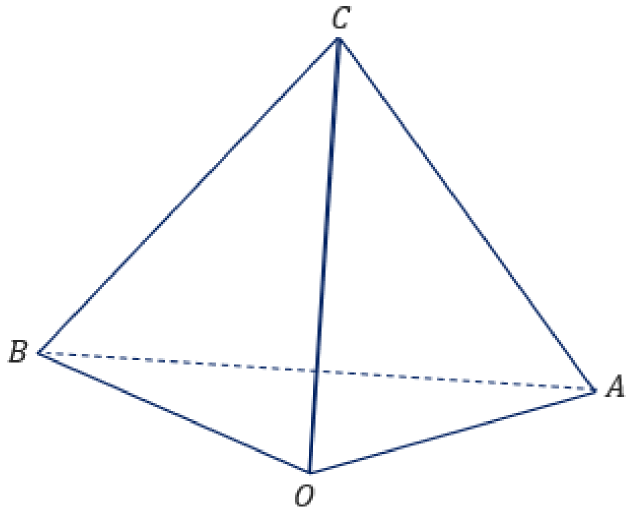
28. (Camargo–Boulos) Seja $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base, $\vec{x} = (2, -1, 0)$, $\vec{y} = (1, -1, 2)$ e $\vec{z} = (1, 0, 2)$.

    (a) Mostre que $\mathcal{A} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ é base.

    (b) Encontre as coordenadas de $\vec{e} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ na base $\mathcal{A}$.

29. (Camargo–Boulos) Sejam $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base, $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{y} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Deduza uma condição necessária e suficiente sobre a, b, c para que $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ seja base.

30. (Camargo–Boulos) Seja $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio do segmento BC. Explique por que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ é base e determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nessa base.



31. (Camargo–Boulos) Seja $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal. Calcule $\|\vec{u}\|$, nos seguintes casos:

    (a) $\vec{u} = (1, 1, 1)_{\mathcal{E}}$

    (b) $\vec{u} = (-1, 1, 0)_{\mathcal{E}}$

    (c) $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$

    (d) $\vec{u} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$

32. (Camargo–Boulos) Considere o paralelepípedo retângulo $ABCDEFGH$ abaixo e responda o que se pede:

    (a) Explique por que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)$ é base e verifique se é ortonormal.

    (b) Encontre as coordenadas de $\overrightarrow{AG}$ na base do item (a).

    (c) Determine o comprimento da diagonal AG.


H
G
E
F
2
D
C
1
A
3
B