① Sabendo que a forma vetorial é $X = A + \lambda \vec{u}$, para $\vec{u}$ um vetor diretor:

$\vec{u} = \vec{BC} = C - B = (4,-7,-6) + (5,-2,-3) = (9,-9,-9)$ ∴ podemos dizer que $\vec{u} \equiv (1,-1,-1)$, já que, por ser vetor diretor, seu módulo não importa; então, $X = (4,-7,-6) + \lambda(1,-1,-1)$ é a forma vetorial, logo:

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -7 - \lambda \\ z = -6 - \lambda \end{cases}$$ é a forma paramétrica e $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+7}{-1} = \dfrac{z+6}{-1}$ é a simétrica

$\hookrightarrow D = (3,1,4)$ não pertence já que $\dfrac{3-4}{1} \neq \dfrac{1+7}{-1} \neq \dfrac{4+6}{-1}$

② Igual em ①, $\vec{u} = (3,2,1)$, que é o diretor, logo, $X = (1,2,3) + \lambda(3,2,1)$, logo

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$ e $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$. Para os vetores unitários, $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$\hookrightarrow = \dfrac{(3,2,1)}{\sqrt{14}} = \pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$

③ ⓐ $3x+2y+c=0$, em $(0,0) \Rightarrow 0+0+c=0 \Rightarrow c=0$ ∴ $3x+2y=0$ //

ⓑ $3x-4y+c=0$, em $(1,2) \Rightarrow 3-8+c=0 \Rightarrow c=5$ ∴ $3x-4y+5=0$ //

④ $X=(-4,4)+\lambda(1,1)$, $\begin{cases} x=-4+\lambda \\ y=4+\lambda \end{cases}$

$$\frac{x+4}{1}=\frac{y-4}{1} \Rightarrow x-y+8=0 \;//$$

⑤ Sejam $r_1: y=m_1x+d_1$ e $r_2: y=m_2x+d_2$. Mostre que há perpendicularidade se, e somente se, $m_1m_2=-1$.

Método 1: $m_1=tg(\theta_1) \Rightarrow$ Inclinação de r_1 em relação a $\vec{x}$ e $m_2=tg(\theta_2)$. Se eles são perpendiculares, então $\theta_1-\theta_2=\pi/2$, logo:

$$cotg(\theta_1-\theta_2)=cotg(\pi/2) \Rightarrow \frac{1}{tg(\theta_1-\theta_2)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1+tg\theta_1 tg\theta_2}{tg\theta_1-tg\theta_2}=0 \;∴\; tg\theta_1 tg\theta_2=-1 \Rightarrow m_1m_2=-1,$$ como queríamos.

Método 2: $r_1: m_1x-y+d_1=0$ e $r_2: m_2x-y+d_2=0$, o que significa que $\vec{n_1}=(m_1,-1)$ e $\vec{n_2}=(m_2,-1)$. Como as retas são perpendiculares, $\langle n_1,n_2\rangle=0$ ∴ $m_1m_2+1=0$ ∴ $m_1m_2=-1$ //

⑥ O vetor diretor da reta dada é $(-1,-3,0)$, logo a reta procurada será: $X=(1,4,-7)+\lambda(-1,-3,0)$, e paramétrica:

$$\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=4-3\lambda \\ z=-7 \end{cases}$$ como queríamos.

⑦ Vetor diretor $=(-5,\frac{4}{3},6)$, então $(-15,4,18)$

$$\begin{cases} x=2-15\lambda \\ y=4\lambda \\ z=-3+18\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-15}=\frac{y-0}{4}=\frac{z+3}{18}$$

↱ Passa $(1, 2)$ (0;1)

8. a) $y = 3x - 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{3} = x \therefore \vec{u} = (1,3)$, logo, $X = \ldots 1) + \lambda(1,3)$

e a paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$

↱ Passa pelo ponto $(1,1)$ e $(0, 5/2)$

b) $3x + 2y = 5 \Leftrightarrow 3x = 5 - 2y \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{5-2y}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5/2 - y}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y - 5/2}{-3}$

$\therefore \vec{u} = (2,-3)$ e $X = (0, 5/2) + \lambda(2,-3)$, logo:

$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 5/2 - 3\lambda \end{cases}$, como queríamos.

9. a) Seja $\lambda = 1$, $X = A + \vec{AB} = A + B - A = B$, ou seja, passa por B.

b) Seja $k = 0$, temos o nosso ponto A. Até $k = 1$, percorremos todos os pontos do vetor até B, logo, $0 \leq k \leq 1$ é um intervalo que contém todos os pontos do vetor diretor $\vec{AB}$.

c) $X = (1,-3,6) + \lambda(\vec{B-A}) \Leftrightarrow X = (1,-3,6) + \lambda(-1,5,-7)$. Para $\lambda = 1/2$, $X = (1/2, -1/2, 5/2)$ // → Ponto médio.

d) $\vec{AB} = B - A = (4,1,-2) - (1,0,1) = (3,1,-3)$. Logo
$X = (1,0,1) + \lambda(3,1,-3)$. Para $\lambda = 1/3$ e $2/3$ temos nossos pontos.
$\lambda = 1/3 \therefore (1,0,1) + (1, 1/3, -1) = (2, 1/3, 0)$ //
$\lambda = 2/3 \therefore (1,0,1) + (2, 2/3, -2) = (3, 2/3, -1)$ //

→ A 10 tá na próxima página, pulei sem querer.

OPS

11. a) Eles serão vértices de um triângulo se não forem colineares.
Seja $\vec{u} = C - A = (1,2,2) - (1,4,0) = (0,-2,2)$. Logo:
$X = (1,4,0) + \lambda(0,-2,2)$. Como não existe λ tal que $X = B$, B não pertence ~~a esse~~ a esse segmento, então, ABC é um triângulo.

b) Seja D a intersecção da altura (que passa por B) com o lado AC, então, sabemos que: $D = (a,b,c)$ pertence à reta AC, logo:

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 - 2\lambda \\ c = 2\lambda \end{cases}$, Além disso, $\langle D - B, C - A \rangle = 0$, já que são perpendiculares

$\langle (-1, 3-2\lambda, 2\lambda+1), (0,-2,2) \rangle = -6 + 4\lambda + 4\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1/2$, logo $D = (1,3,1)$, então, $\vec{BD} = (-1,2,2)$

Então, a equação é $X = (2,1,-1) + \lambda(-1,2,2)$

→ Aí $\vec{CM}$ é o direto

→ Pode fazer só o ponto médio de A e B também, mas normal

10) a) Só fazer o mesmo caso do 11 a)

b) Sabe-se que $\vec{CA} + \vec{CB}$ é paralelo à mediana, então, pode ser o vetor diretor $\vec{u}$: $(-1, 13, -1) + (-9, 9, 9) = (-10, 22, 8) \cong (-5, 11, 4)$, então a equação é:

$$\begin{cases} x = 4 - 5\lambda \\ y = -7 + 11\lambda \\ z = -6 + 4\lambda \end{cases}$$

12) A reta em questão é: $X = (0,1,0) + (B-A)\lambda = (0,1,0) + \lambda(+1, +1, +5)$

Seja $P = (a,b,c)$, como P pertence à reta temos:

$$\begin{cases} a = \lambda \\ b = 1+\lambda \\ c = 5\lambda \end{cases} \Rightarrow P = (\lambda, 1+\lambda, 5\lambda). \text{ Com isso:}$$

$$\sqrt{(\lambda)^2 + (\lambda)^2 + (5\lambda)^2} = 3\sqrt{(\lambda-1)^2 + (\lambda-1)^2 + (5\lambda-5)^2}$$

$\therefore 27\lambda^2 = 9(27 \cdot (\lambda-1)^2) \Rightarrow \lambda^2 = 9\lambda^2 + 9 - 18\lambda \therefore \lambda = 3/4$ ou $3/2$, então,

$P = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right)$ ou $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$ //

13) Seja $P = (a,b,c) \in r$, temos que: $A = (1,1,1)$

$$\begin{cases} a = 1+\lambda \\ b = 1-\lambda \\ c = 4 \end{cases}$$

, ou seja, $P = (1+\lambda, 1-\lambda, 4)$. Queremos que $\overline{AP} = \sqrt{11}$, logo.

$\sqrt{P-A} = \sqrt{11} = \sqrt{\lambda^2 + (-\lambda)^2 + 3^2} \therefore 2\lambda^2 + 9 = 11 \Rightarrow 2\lambda^2 = 2 \therefore \lambda = \pm 1$ //

$P = (2,0,4)$ ou $P = (0,2,4)$

14) $A = (1,1,1)$, $B = (0,0,1)$, $P = (a,b,c) = (1+\lambda, \lambda, \lambda)$, queremos:

$\overline{PA} = \overline{PB} \therefore \sqrt{(\lambda)^2 + (\lambda-1)^2 + (\lambda-1)^2} = \sqrt{(1+\lambda)^2 + \lambda^2 + (\lambda-1)^2} \therefore$

$(1+\lambda)^2 = (\lambda-1)^2 \therefore \begin{cases} 1+\lambda = \lambda - 1 \Rightarrow \text{Impossível} \\ 1+\lambda = -\lambda+1 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$ $P = (1,0,0)$, é único

15) a) $X = (1,2,0) + \lambda(1,1,0) + k(2,3,-1)$ //

$$\begin{cases} x = 1+\lambda+2k \\ y = 2+\lambda+3k \\ z = -k \end{cases}$$

→ Bem direto esse

(b) $\vec{u} = B - A = (1,-1,-1) - (1,1,0) = (0,-2,-1)$ ∴

$X = (1,1,0) + \lambda(2,1,0) + k(0,-2,-1)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda - 2k \\ z = 0 - k \end{cases}$$

(c) $\vec{u} = B - A = (0,1,-1) - (1,0,1) = (-1,1,-2)$ e

$\vec{v} = C - D = (1,2,1) - (0,1,0) = (1,1,1)$

$X = (1,0,1) + \lambda(-1,1,-2) + k(1,1,1)$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda + k \\ y = \lambda + k \\ z = 1 - 2\lambda + k \end{cases}$$

(d) $\vec{u} = B - A = (2,1,-1) - (1,0,1) = (1,1,-2)$

$\vec{v} = C - A = (1,-1,0) - (1,0,1) = (0,-1,-1)$

$X = (1,0,1) + \lambda(1,1,-2) + k(0,+1,+1)$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda + k \\ z = 1 - 2\lambda + k \end{cases}$$

(e) O plano paralelo é $X = (1,0,0) + \lambda(1,2,-1) + k(2,1,0)$, logo, o plano que queremos é:

$X = (1,1,2) + \lambda(1,2,-1) + k(2,1,0)$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2k \\ y = 1 + 2\lambda + k \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

↳ vetores diretores $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$, por exemplo.

16) $OXY = \begin{cases} x = \lambda \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$, $OXZ = \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$, $OYZ = \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = k \end{cases}$

17) Paralelo à reta: $\vec{v} = (2,1,0)$. Paralelos ao plano: $\vec{w} = (1,0,1)$ e $\vec{J} = (0,1,-1)$, são os diretores, mas existem infinitos outros.

$\vec{u} = (1,2,4) = \underbrace{a(2,1,0)}_{\text{Paralelo à reta}} + \underbrace{b(0,1,-1) + c(1,0,1)}_{\text{Paralelo ao plano}}$

$\begin{cases} 2a+c=1 \\ a+b=2 \\ c-b=4 \end{cases} = \begin{cases} 2a+c=1 \\ a+c=6 \end{cases} \quad \{ a=-5 \Rightarrow b=7 \Rightarrow c=11$

Logo, $\vec{u} = (-10,-5,0) + \underbrace{(0,7,-7)+(11,0,11)}_{\to (11,7,4)}$ ↳ Paralelo ao plano

18) ↳ $ax+by+cz+d=0 \therefore 2x+5y+d=0$. Como passa por P:
$6+0+d=0 \therefore d=-6$ e plano: $2x+5y-6=0$

19) a) $\vec{v} = A-B = (1,1,0)-(-1,1,1) = (0,2,1)$

$u \wedge v = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} = x+4z-2y = (1,-2,4)$, logo: $x-2y+4z+d=0$

Como passa por $(1,1,0) \Rightarrow d=1 \therefore x-2y+4z+1=0$

b) $\vec{u} = A-B = (0,-1,2)$ e $\vec{v} = C-D = (1,1,1)$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = -x+2y+z-2x = (-3,2,1)$, logo
$-3x+2y+z+d=0$
$\Rightarrow d=2$

$\therefore -3x+2y+z+2=0$

c) $\vec{u} = A - B = (-1, -1, 2)$ e $\vec{v} = A - C = (-2, 1, 0)$, logo:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix} = -4y - z - 2z - 2x = (+2, +4, +3)$$

Como $d = -5$, $2x + 4y + 3z - 5 = 0$ //

d) $\vec{u}$ da reta $= (2, 3, -1)$ e seja o ponto A da reta $(1, 0, 2)$, temos

$\vec{v} = P - A = (0, 0, -3)$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix} = -9x + 6y = (-9, 6, 0) \equiv (-3, 2, 0)$$

Como $d = 3$, temos

$-3x + 2y + 3 = 0$

20) $OXY: z = 0$, $OYZ: x = 0$ e $OXZ: y = 0$

21) Para $\vec{u} = (0, 1, 6)$, $\langle u, n \rangle = 0$ $\therefore$ $\langle (0,1,6), (4,-6,1) \rangle = -6 + 6 = 0$, logo é paralelo!

Para $\vec{u} = (-3, 2, 24)$, $\langle u, n \rangle = -12 - 12 + 24 = 0$, logo, é paralelo!

22) a) Temos os pontos $A = (0, 0, 5)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (0, -2, 1)$

$\vec{u} = A - B = (1, 0, 4)$ e $\vec{v} = B - C = (-1, 2, 0)$, logo:

$X = (0, 0, 5) + \lambda(1, 0, 4) + k(-1, 2, 0)$ e $\begin{cases} x = +\lambda - k \\ y = 2k \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$

b) Temos os pontos: $A = (0, -1, 1)$, $B = (0, -1, 2)$ e $C = (1, 4, 0)$

$\vec{u} = A - B = (0, 0, -1)$ e $\vec{v} = C - B = (1, 5, -2)$, logo:

$X = (0, -1, 1) + \lambda(0, 0, -1) + k(1, 5, -2)$, e $\begin{cases} x = k \\ y = -1 + 5k \\ z = 1 - \lambda - 2k \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

23 a) $r: \frac{x-1}{2} = z-1 \therefore x - 2z + 1 = 0$, para $y = 1$

Queremos que $x - y - z = x - 2z + 1$, com $y=1 \therefore (z=2)$, então, na reta, $x = 3$. Logo, o ponto $(3, 1, 2)$ existe na reta e no plano

b) $\cancel{x + 3y - 2z + 1 = x - 2z + 1} \therefore 3y = 0$, mas como $y = 1$, $3 = 0$, o que é impossível. Logo, não existe interseção.

c) $\pi: y = 0$. Mas sabemos pela reta que $y = 1$, como $1 \neq 0$, não existe interseção.