Oitava Lista de Exercícios

GEOMETRIA ANALÍTICA

Distância entre ponto e reta, entre ponto e plano, entre retas, entre reta e plano e entre planos

1. (Poole) Encontre uma equação para o conjunto de todos os pontos equidistantes dos pontos $P = (1, 0, -2)$ e $Q = (5, 2, 4)$.

2. (Poole) Determine a distância do ponto $P = (2, 2)$ à reta de equação $X = (-1, 2) + t\,(1, -1)$.

3. (Poole) Determine a distância do ponto $P = (0, 1, 0)$ à reta de equação $X = (1, 1, 1) + t\,(-2, 0, 3)$.

4. (Camargo–Boulos) Calcule a distância do ponto P à reta r.

   (a) $P = (0, -1, 0)$ $\quad r : x = 2y - 3 = 2z - 1$

   (b) $P = (1, 0, 1)$ $\quad r : x = 2y = 3z$

   (c) $P = (-2, 0, 1)$ $\quad r : X = (1, -2, 0) + \lambda\,(3, 2, 1)$

5. (Camargo–Boulos) Obtenha os pontos da interseção dos planos $\pi_1 : x + y = 2$ e $\pi_2 : x = y + z$ que distam $\sqrt{\frac{14}{3}}$da reta $s : x = y = z + 1$.

6. (Camargo–Boulos) A diagonal BD de um quadrado está contida em $r : x - 1 = y - z = 0$. Sendo O um dos vértices, determine os outros três.

7. (Camargo–Boulos) Obtenha os pontos da reta $r : x - 1 = 2y = z$ que equidistam das retas $s : x = y = 0$ e $t : x - 2 = z = 0$.

8. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação vetorial da reta r que dista 1 do ponto $P = (1, 2, 1)$, é concorrente com $s : X = (-1, 1, 1) + \lambda\,(0, -1, 2)$ e paralela a $t : 2x - z - 1 = y = 2$.

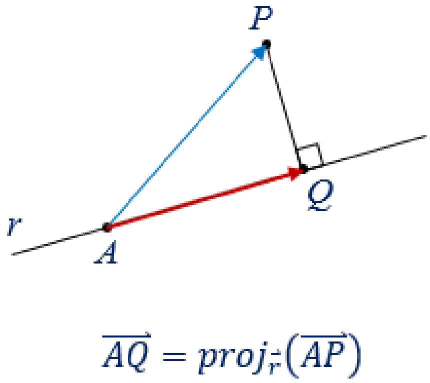
9. (Camargo–Boulos) Mostre que o lugar geométrico dos pontos que equidistam das retas $r : x + y - 1 = z = 0$ e $s : x + z - 1 = y = 0$ é a reunião de dois planos transversais, e obtenha equações desses planos.

10. (Poole) Determine a distância do ponto $P = (2, 2, 2)$ ao plano de equação $x + y - z = 0$.

11. (Poole) Determine a distância do ponto $P = (0, 0, 0)$ ao plano de equação $x - 2y + 2z = 1$.

12. Dada uma reta r e um ponto P, a Figura 2 sugere uma maneira de usar vetores para localizar o pé da reta perpendicular que passa por P (o ponto Q da reta r mais próximo de P). Encontre o ponto Q da reta $r : X = (1, 0, 1) + \lambda\,(2, 1, -1)$ mais próximo do ponto $P = (4, 9, -3)$.

da perpendicular



1.png

Figura 2. Pé da reta perpendicular.

13. (Poole) Encontre o ponto Q da reta r mais próximo do ponto P nos exercícios 2 e 3.

14. (Camargo–Boulos) Calcule a distância do ponto P ao plano π.

   (a) $P = (0, 0, -6)$ $\quad\pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$
   (b) $P = (1, 1, 15/6)$ $\quad\pi : 4x - 6y + 12z + 21 = 0$
   (c) $P = (9, 2, -2)$ $\quad\pi : X = (0, -5, 0) + \lambda\,(0, 5/12, 1) + \mu\,(1, 0, 0)$

15. (Camargo–Boulos) Mostre que os pontos $A = (-2, 0, 1)$, $B = (0, 0, -1)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (-2, -1, -2)$ e $E = (1, 2, 2)$ são vértices de uma pirâmide e calcule seu volume.

16. (Camargo–Boulos) Calcule a distância do segmento PQ ao plano $\pi : 2x - 2y + z - 6 = 0$, nos casos.

   (a) $P = (1, 0, 0)$ $\quad Q = (2, 3, 2)$
   (b) $P = (3, 0, -1)$ $\quad Q = (-1, -2, 3)$

17. (Camargo–Boulos) Obtenha os pontos da reta $r : x = 2 - y = y + z$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi : x - 2y - z = 1$.

18. (Camargo–Boulos) Determine os pontos da reta $r : X = (0, 1, 1) + \lambda\,(1, 1, 2)$ que equidistam dos planos $\pi_1 : x + 2y - z = 3$ e $\pi_2 : x - y + 2z = 1$.

19. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação geral do plano π que contém a reta $r : X = (1, 0, 1) + \lambda\,(1, 1, -1)$ e dista $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ do ponto $P = (1, 1, -1)$.

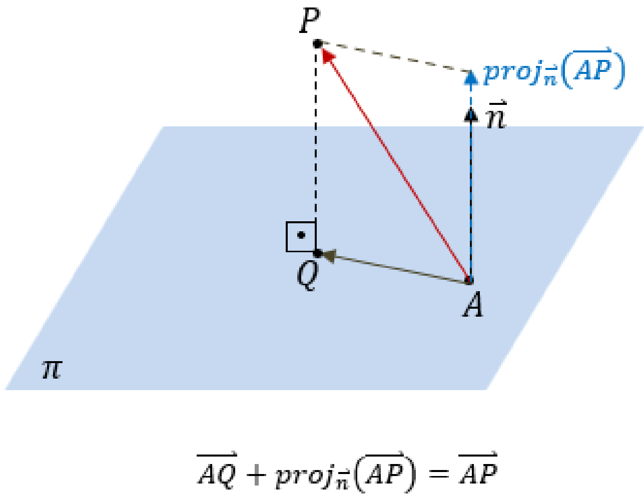
20. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação geral do plano π que contém a reta $r : x = -y = 1 - z$, equidista de $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$, e separa A e B.

21. (Camargo–Boulos) Descreva o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos planos $\pi_1 : x+y-z = 0$, $\pi_2 : x-y-z-2 = 0$ e $\pi_3 : x+y+z = 1$.

22. Dado um plano π e um ponto P, a Figura 3 sugere uma maneira de localizar o pé da reta perpendicular que passa por P (o ponto Q do plano π mais próximo de P). Encontre o ponto Q do plano $\pi : 2x - 3y + z = 1$ mais próximo do ponto $P = (1, -2, 10)$.

da perpendicular

plano



2.png

Figura 3. Pé da reta perpendicular ao plano π.

23. (Poole) Encontre o ponto Q do plano π mais próximo do ponto P nos exercícios 10 e 11.

24. (Poole) Determine a distância entre as retas.

    (a) $r : X = (1, 1) + \lambda\,(-2, 3) \qquad s : X = (5, 4) + \lambda\,(-2, 3)$
    (b) $r : X = (1, 0, -1) + \lambda\,(1, 1, 1) \qquad s : X = (0, 1, 1) + \lambda\,(1, 1, 1)$

25. (Poole) Determine a distância entre os planos.

    (a) $\pi_1 : 2x + y - 2z = 0 \qquad \pi_2 : 2x + y - 2z = 5$
    (b) $\pi_1 : x + y + z = 1 \qquad \pi_2 : x + y + z = 3$

26. (Camargo–Boulos) Calcule a distância entre as retas r e s.

    (a) $r : X = (2, 1, 0) + \lambda\,(1, -1, 1) \qquad s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0$

    (b) $r : \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+5}{-2} \qquad s : X = (21, -5, 2) + \lambda\,(6, -4, -1)$

    (c) $r : x = \dfrac{y-3}{2} = z - 2 \qquad s : x - 3 = \dfrac{y+1}{2} = z - 2$

27. (Camargo–Boulos) Determine a reta r que contémn o ponto $A = (1, 3, -1)$, é paralela ao plano $\pi : x + z = 2$ e dista 3 da reta $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$.

28. (Camargo–Boulos) Obtenha e equação vetorial da reta r que contémn o ponto $A = (0, 0, 3)$, está contida em $\pi : x + z = 3$ e dista 3 de Oy.

29. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação vetorial da reta que contém a origem, dista 2 da reta $s : X = (0, 1, 2) + \lambda\,(0, 1, 0)$ e forma ângulos congruentes com $t : X = (1, 1, 2) + \lambda\,(1, -1, 0)$ e $h : X = (2, 3, -1) + \lambda\,(1, 1, 0)$.

30. (Camargo–Boulos) Obtenha e equação vetorial da reta r que contémn o ponto $A = (1, 1, 1)$, está à distância $1/\sqrt{2}$ de $s : X = (0, 1, 0) + \lambda\,(0, 0, 1)$ e forma com o plano $\pi : 2x - z = 0$ um ângulo cujo cosseno é $\sqrt{7/15}$.

31. (Camargo–Boulos) Calcule a distância entre a reta r e o plano π.

    (a) $r : X = (1, 9, 4) + \lambda\,(3, 3, 3) \qquad \pi : X = (5, 7, 9) + \lambda\,(1, 0, 0) + \mu\,(0, 1, 0)$

    (b) $r : x - y + z = 0 = 2x + y - z - 3 \qquad \pi : y - z = 4$

    (c) $r : X = (1, 1, 1) + \lambda\,(1, 0, 2) \qquad \pi$ é paralelo a r e contém $s : x + y = z + 2y = 2$

32. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (2, 1, 1)$ e dista 1 da reta $r : X = (1, 0, 2) + \lambda\,(1, 0, 2)$.

33. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que dista $1/\sqrt{29}$ da reta $r : X = (1, 1, 3) + \lambda\,(0, 1, 2)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $M = (2, 1, 4)$ e $N = (0, 1, 1)$.

34. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação vetorial da retra que dista 3 do plano Oxy e é concorrente com as retas $r : X = (1, -1, -1) + \lambda\,(1, 2, 4)$ e $s : 3x + 3 = 3y + 6 = 2z$.

35. (Poole) Prove que a distância entre dua retas paralelas em $\mathbb{R}^2$ de equações normais $r_1 : ax + by + c_1 = 0$ e $r_2 : ax + by + c_2 = 0$ é dada por $d(r_1, r_2) = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\|\vec{n}\|}$, onde $\vec{n} = (a, b)$ é o vetor normal.

36. (Poole) Prove que a distância entre dois planos paralelos de equações $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$ é dada por $d(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|d_1 - d_2|}{\|\vec{n}\|}$, onde $\vec{n} = (a, b, c)$ é o vetor normal.

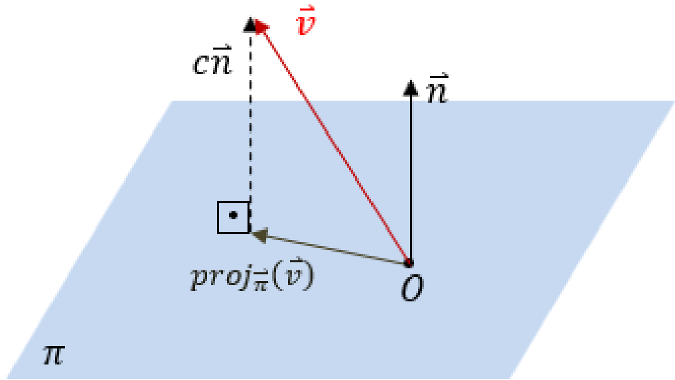
37. (Poole) Seja π um plano que passa pela origem O com vetor normal $\vec{n}$. A *projeção ortogonal* $proj_\pi(\vec{v})$ de um vetor $\vec{v}$ sobre π é um vetor paralelo a π tal que $\vec{v} = proj_\pi(\vec{v}) + c\vec{n}$, para algum escalar c (veja Figura 1).

    (a) Determine o escalar c e obtenha uma expressão para $proj_\pi(\vec{v})$ em função de $\vec{v}$ e $\vec{n}$.

    (b) Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, mostre que $d(P, \pi) = \|\vec{v} - proj_\pi(\vec{v})\|$.

ortogonal sobre

plano



3.png

Figura 1. Projeção ortogonal de um vetor sobre um plano.

38. (Camargo-Boulos) Dentre os planos que distam 2 de $\pi : x - y + z = 0$, qual é o que está mais próximo de $P = (2, 1, 1)$?

39. (Camargo-Boulos) Os vértices de um tetraedro são $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 3)$. Obtenha uma equação geral do plano que dista $3/7$ da face ABC e intercepta o tetraedro.

40. (Camargo-Boulos) Sejam r e s retas reversas, contidas respectivamente, nos planos paralelos π_1 e π_2. Mostre que $d(r, s) = d(\pi_1, \pi_2)$. Esta igualdade é verdadeira se r e s são paralelas?

41. (Camargo–Boulos) Calcule a distância entre os planos π_1 e π_2:

(a) $\pi_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$ $\qquad\qquad$ $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$

(b) $\pi_1 : x + y + z = 5/2$ $\qquad\qquad$ $\pi_2 : X = (2, 1, 2) + \lambda (-1, 0, 3) + \mu (1, 1, 0)$

(c) $\pi_1 : x + y + z = 0$ $\qquad\qquad$ $\pi_2 : 2x + y + z + 2 = 0$