Recursividade

Marco A L Barbosa
malbarbo.pro.br

Departamento de Informática
Universidade Estadual de Maringá

Nós vimos como a definição adequada de tipos de dados é importante no projeto de programas.

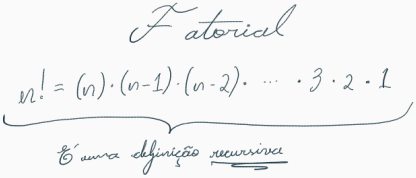
Agora vamos explorar como a forma da definição do tipo de dado pode nos ajudar a escrever o corpo das funções.

Considere a seguinte definição de número natural:

- 0 é um número natural;
- Se n é um número natural, então $n + 1$ é um número natural.

O que esta definição tem de diferente?

No segundo caso, um número natural é definido em termos de outro número natural! Como isso é possível!?



Como é possível algo ser definido em termos de si mesmo?

É possível porque um algo maior está sendo definido em termos do mesmo tipo de algo, mas menor. Como não é possível diminuir algo infinitamente, em algum momento teremos um algo básico, que não é composto de outro algo.

Esse tipo de definição é muito utilizado na computação e matemática.

Definições recursivas

Caso base
Passo de recursão (autorreferência)

Uma **definição recursiva** (ou definição indutiva) é uma definição que é feita em termos de si mesma.

Para estar bem formada, uma definição recursiva precisa de:

- Pelo menos um caso base (que não depende da própria definição);
- Pelo menos um caso com autorreferência (que depende da própria definição para elementos “menores”).

A partir do(s) caso(s) base, os outros elementos são definidos de forma indutiva pelos casos com autorreferência.

Definição de número natural:

- 0 é um número natural;
- Se n é um número natural, então $n + 1$ é um número natural.

O número 4 é natural? Vamos verificar

- Como 4 não é zero, para ele ser natural, o 3 tem que ser natural;
- Como 3 não é zero, para ele ser natural, o 2 tem que ser natural;
- Como 2 não é zero, pare ele ser natural, o 1 tem que ser natural;
- Como 1 não é zero, pare ele ser natural, o 0 tem que ser natural;
- Por definição, 0 é natural.

Portanto, o 4 é natural. Note que foi preciso decompor o 4 até chegar no caso base.

Assim como temos definições recursivas, também temos funções recursivas.

Uma **função recursiva** é aquela que chama a si mesmo.

Assim como para definições recursivas, para estar bem formada, uma função recursiva precisa de:

- Pelo menos um caso base (o valor da função é calculado diretamente);
- Pelo menos um caso com chamada recursiva (depende do valor da função para entradas menores).

as entradas da chamada precisam diminuir } CHEGAR NO CASO BASE

Como projetar funções recursivas?

Existem várias técnicas de projeto de funções recursivas, nós vamos explorar uma delas, chamada de **diminuição e conquista**.

A ideia é diminuir o problema inicial gerando um novo problema, conquistar o novo problema – diretamente ou recursivamente – e estender a solução do novo problema para o problema inicial.

No início, para diminuir o problema inicial, nós vamos explorar a relação entre autorreferência na definição do tipo de dado e a chamada recursiva na função que processa o tipo de dado.

Exemplo: soma naturais

Projete uma função recursiva que some todos os números naturais menores ou iguais que um determinado n.

Exemplo: soma naturais

```
def soma_naturais(n: int) -> int:
    '''
    Soma todos os número naturais menores
    ou iguais que *n*.
    Requer que n >= 0.
    Exemplos
    >>> soma_naturais(0)
    0
    >>> soma_naturais(1)
    1
    >>> soma_naturais(2)
    3
    >>> soma_naturais(3)
    6
    >>> soma_naturais(4)
    10
    '''
    return 0
```

Como a definição de número natural tem dois casos, vamos começar a implementação da função com dois casos.

```
if n == 0:
    ...
else:
    n ...
```

Como o segundo caso da definição de número natural tem uma autorreferência, vamos colocar uma chamada recursiva no segundo caso da função.

```
if n == 0:
    ...
else:
    n ... soma_naturais(n - 1)
```

Exemplo: soma naturais

```python
def soma_naturais(n: int) -> int:
    '''
    Soma todos os número naturais menores
    ou iguais que *n*.
    Requer que n >= 0.
    Exemplos
    >>> soma_naturais(0)
    0
    >>> soma_naturais(1)
    1
    >>> soma_naturais(2)
    3
    >>> soma_naturais(3)
    6
    >>> soma_naturais(4)
    10
    '''
```

```python
def soma_naturais(n: int) -> int:
    if n == 0:
        # Qual é a soma dos naturais
        # até n == 0?
        soma = ...
    else:
        # Tendo a soma dos naturais
        # até n - 1 e o natural n,
        # como obter a soma dos
        # naturais até n?
        soma = n ... soma_naturais(n - 1)
    return soma
```

Caso base

Acesso à referência.

Exemplo: soma naturais

```
def soma_naturais(n: int) -> int:
    '''
    Soma todos os número naturais menores
    ou iguais que *n*.
    Requer que n >= 0.
    Exemplos
    >>> soma_naturais(0)
    0
    >>> soma_naturais(1)
    1
    >>> soma_naturais(2)
    3
    >>> soma_naturais(3)
    6
    >>> soma_naturais(4)
    10
    '''
```

Uma lista é um elemento recursivo.

$CB \to [\,]$

$AR \to [a, b, \cdots, y, z]$

Uma árvore também é uma estrutura recursiva.

```
def soma_naturais(n: int) -> int:
    if n == 0:
        # Qual é a soma dos naturais
        # até n == 0?
        soma = 0
    else:
        # Tendo a soma dos naturais
        # até n - 1 e o natural n,
        # como obter a soma dos
        # naturais até n?
        soma = n + soma_naturais(n - 1)
    return soma
```

Sempre deixar o return para o final.

É recursivo porque chama a própria função dentro da função

Exemplo: exponencial

Projete uma função recursiva que receba como entrada um número $a \neq 0$ e um número natural n e calcule o valor a^n.

Exemplo: exponencial

```
def potencia(a: float, n: int) -> float:
    '''
    Calcula *a* elevado a *n*.
    Requer que a != 0 e n >= 0.
    Exemplos
    >>> potencia(2.0, 0)
    1.0
    >>> potencia(2.0, 1)
    2.0
    >>> potencia(2.0, 2)
    4.0
    >>> potencia(2.0, 3)
    8.0
    >>> potencia(3.0, 3)
    27.0
    >>> potencia(3.0, 4)
    81.0
    '''
    return 0.0
```

Como a definição de número natural tem dois casos, vamos começar a implementação da função com dois casos.

```
if n == 0:
    a ...
else:
    a ... n ...
```

Como o segundo caso da definição de número natural tem uma autorreferência, vamos colocar uma chamada recursiva no segundo caso da função.

```
if n == 0:
    a ...
else:
    a ... n ... potencia(a, n - 1)
```

Exemplo: exponencial

```python
def potencia(a: float, n: int) -> float:
    '''
    Calcula *a* elevado a *n*.
    Requer que a != 0 e n >= 0.
    Exemplos
    >>> potencia(2.0, 0)
    1.0
    >>> potencia(2.0, 1)
    2.0
    >>> potencia(2.0, 2)
    4.0
    >>> potencia(2.0, 3)
    8.0
    >>> potencia(3.0, 3)
    27.0
    >>> potencia(3.0, 4)
    81.0
    '''
```

```python
def potencia(a: float, n: int) -> float:
    if n == 0:
        # Qual é o valor de a^n
        # quando n == 0?
        an = a ...
    else:
        # Tendo a potência a^(n - 1),
        # o valor de a e n, como
        # calcular a^n?
        an = a ... n ... potencia(a, n - 1)
    return an
```

Exemplo: exponencial

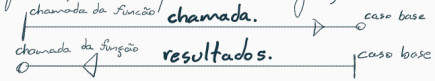
```
def potencia(a: float, n: int) -> float:
    '''
    Calcula *a* elevado a *n*.
    Requer que a != 0 e n >= 0.
    Exemplos
    >>> potencia(2.0, 0)
    1.0
    >>> potencia(2.0, 1)
    2.0
    >>> potencia(2.0, 2)
    4.0
    >>> potencia(2.0, 3)
    8.0
    >>> potencia(3.0, 3)
    27.0
    >>> potencia(3.0, 4)
    81.0
    '''
```

```
def potencia(a: float, n: int) -> float:
    if n == 0:
        # Qual é o valor de a^n
        # quando n == 0?
        an = 1.0
    else:
        # Tendo a potência a^(n - 1),
        # o valor de a e n, como
        # calcular a^n?
        an = a * potencia(a, n - 1)
    return an
```

CB

AR

Quando chegamos no caso base, não chamamos mais a função. Aí, tem-se o return. A partir desse ponto, as respostas das funções anteriores são retornadas



Aspectos importantes no projeto de funções recursivas

Quando estamos projetando funções recursivas, temos que considerar dois aspectos:

- A chamada recursiva deve ser feita para uma **entrada "menor"**, dessa forma, temos a certeza que o caso base será alcançado e a função terminará;
- Devemos **confiar na chamada recursiva**, isto é, que ela produz a resposta correta, e nos preocuparmos apenas em como utilizar essa resposta para calcular o resultado da função.

Podemos projetar funções recursivas que operam em arranjos de forma similar a funções que operam com números naturais. Considere a seguinte definição de lista:

Um arranjo é:

- Vazio; ou
- Um elemento seguido de um arranjo (resto do arranjo)

[head] [tail]
↳ Restante da lista.
↳ CB (pode ser lista vazia ou o "primeiro" elemento de uma lista.

Assim como a definição de número natural, essa definição de arranjo também tem autorreferência (é indutiva).

Portanto, para implementar uma função que processa um arranjo, podemos usar a mesma estratégia que usamos para implementar funções recursivas que processam números naturais.

Exemplo: soma

Projete uma função recursiva que some os elementos de uma lista.

Exemplo: soma

```
def soma(lst: list[int]) -> int:
    '''
    Soma os elementos de *lst*.
    Exemplos
    >>> soma([])
    0
    >>> soma([6])
    6
    >>> soma([3, 6])
    9
    >>> soma([7, 3, 6])
    16
    '''
    return 0
```

Como a definição de lista tem dois casos, vamos começar a implementação da função com dois casos.

```
if lst == []:
    ...
else:
    # as partes de lst
    lst[0] ... lst[1:]
```

Como o segundo caso da definição de lista tem uma autorreferência, isto é, `lst[1:]` é uma lista, vamos fazer uma chamada recursiva para `lst[1:]`.

```
else:
    lst[0] ... soma(lst[1:])
```

Exemplo: soma

```
def soma(lst: list[int]) -> int:
    '''
    Soma os elementos de *lst*.
    Exemplos
    >>> soma([])
    0
    >>> soma([6])
    6
    >>> soma([3, 6])
    9
    >>> soma([7, 3, 6])
    16
    '''
```

```
def soma(lst: list[int]) -> int:
    if lst == []:
        # Qual é a soma dos elementos
        # de uma lista vazia?
        s = ...
    else:
        # Sabendo a soma do resto da lista
        # e o valor do primeiro elemento,
        # como obter a soma da lista?
        s = lst[0] ... soma(lst[1:])
    return s
```

Exemplo: soma

```
def soma(lst: list[int]) -> int:
    '''
    Soma os elementos de *lst*.
    Exemplos
    >>> soma([])
    0
    >>> soma([6])
    6
    >>> soma([3, 6])
    9
    >>> soma([7, 3, 6])
    16
    '''
```

```
def soma(lst: list[int]) -> int:
    if lst == []:
        # Qual é a soma dos elementos
        # de uma lista vazia?
        s = 0
    else:
        # Sabendo a soma do resto da lista
        # e o valor do primeiro elemento,
        # como obter a soma da lista?
        s = lst[0] + soma(lst[1:])
    return s
```

Exemplo: contagem

Projete uma função recursiva que conte quantas vezes um determinado número aparece em uma lista de números.

2. Usar uma função semelhante pra fazer uma lista com o nome dos times sem repetir.

Exemplo: contagem

```
def freq(v: int, lst: list[int]) -> int:
    '''
    Conta quantas vezes *v* aparece
    em *lst*.

    Exemplos
    >>> freq(1, [])
    0
    >>> freq(1, [7])
    0
    >>> freq(1, [1, 7, 1])
    2
    >>> freq(4, [4, 1, 7, 4, 4])
    3
    '''
    return 0
```

Como a definição de lista tem dois casos, vamos começar a implementação da função com dois casos.

```
if lst == []:
    v ...
else:
    # v e as partes de lst
    v ... lst[0] ... lst[1:]
```

Como o segundo caso da definição de lista tem uma autorreferência, isto é, `lst[1:]` é uma lista, vamos fazer uma chamada recursiva para `lst[1:]`.

```
else:
    v ... lst[0] ... freq(v, lst[1:])
```

Exemplo: contagem

```
def freq(v: int, lst: list[int]) -> int:
    '''
    Conta quantas vezes *v* aparece
    em *lst*.

    Exemplos
    >>> freq(1, [])
    0
    >>> freq(1, [7])
    0
    >>> freq(1, [1, 7, 1])
    2
    >>> freq(4, [4, 1, 7, 4, 4])
    3
    '''
```

```
def freq(v: int, lst: list[int]) -> int:
    if lst == []:
        # Quantas vezes v aparece
        # na lista vazia?
        cont = v ...
    else:
        # Sabendo a quantidade de vezes
        # que v aparece em lst[1:],
        # como determinar a quantidade
        # de vezes que v aparece em lst?
        cont = ...
        v ... lst[0] ... freq(v, lst[1:])
    return cont
```

Exemplo: contagem

```
def freq(v: int, lst: list[int]) -> int:
    '''
    Conta quantas vezes *v* aparece
    em *lst*.

    Exemplos
    >>> freq(1, [])
    0
    >>> freq(1, [7])
    0
    >>> freq(1, [1, 7, 1])
    2
    >>> freq(4, [4, 1, 7, 4, 4])
    3
    '''
```

```
def freq(v: int, lst: list[int]) -> int:
    if lst == []:
        # Quantas vezes v aparece
        # na lista vazia?
        cont = 0
    else:
        # Sabendo a quantidade de vezes
        # que v aparece em lst[1:],
        # como determinar a quantidade
        # de vezes que v aparece em lst?
        if v == lst[0]:
            cont = 1 + freq(v, lst[1:])
        else:
            cont = freq(v, lst[1:])
    return cont
```

Exemplo: ordem

Projete uma função recursiva que verifique se os elementos de uma lista estão em ordem não decrescente.

Exemplo: ordem

```
def em_ordem(lst: list[int]) -> bool:
    '''
    Produz True se os elementos de *lst* estão
    em ordem não decrescente, False caso
    contrário.
    Exemplos
    >>> em_ordem([])
    True
    >>> em_ordem([3])
    True
    >>> em_ordem([3, 4])
    True
    >>> em_ordem([4, 3])
    False
    >>> em_ordem([3, 3, 5, 6, 6])
    True
    >>> em_ordem([3, 3, 5, 4, 6])
    False
    '''
    return False
```

Como a definição de lista tem dois casos, vamos começar a implementação da função com dois casos.

```
if lst == []:
    ...
else:
    # as partes de lst
    lst[0] ... lst[1:]
```

Como o segundo caso da definição de lista tem uma autorreferência, isto é, `lst[1:]` é uma lista, vamos fazer uma chamada recursiva para `lst[1:]`.

```
else:
    lst[0] ... em_ordem(lst[1:])
```

Exemplo: ordem

```
def em_ordem(lst: list[int]) -> bool:
    '''
    Produz True se os elementos de *lst* estão
    em ordem não decrescente, False caso
    contrário.
    Exemplos
    >>> em_ordem([])
    True
    >>> em_ordem([3])
    True
    >>> em_ordem([3, 4])
    True
    >>> em_ordem([4, 3])
    False
    >>> em_ordem([3, 3, 5, 6, 6])
    True
    >>> em_ordem([3, 3, 5, 4, 6])
    False
    '''
    if lst == []:
        # Os elementos de uma lista
        # vazia estão em ordem?
        ordem = ...
    else:
        # Sabendo se os elementos de lst[1:]
        # estão em ordem, como determinar
        # se lst está em ordem?
        ordem = ...
        lst[0] ... em_ordem(lst[1:])
    return ordem
```

Exemplo: ordem

```
def em_ordem(lst: list[int]) -> bool:
    '''
    Produz True se os elementos de *lst* estão
    em ordem não decrescente, False caso
    contrário.
    Exemplos
    >>> em_ordem([])
    True
    >>> em_ordem([3])
    True
    >>> em_ordem([3, 4])
    True
    >>> em_ordem([4, 3])
    False
    >>> em_ordem([3, 3, 5, 6, 6])
    True
    >>> em_ordem([3, 3, 5, 4, 6])
    False
    '''
    if lst == []:
        # Os elementos de uma lista
        # vazia estão em ordem?
        ordem = True
    else:
        # Sabendo se os elementos de lst[1:]
        # estão em ordem, como determinar
        # se lst está em ordem?
        if len(lst) == 1:
            ordem = True
        else:
            ordem = lst[0] <= lst[1] and em_ordem(lst[1:])
    return ordem
```

Nesse caso, há dois Cs.

Tanto a lista vazia quanto a unitária estão em ordem.

Podemos simplificar? Sim!

```
    return len(lst) < 2 or \
               lst[0] <= lst[1] and em_ordem(lst[1:])
```

Apesar das funções `soma`, `freq` e `em_ordem` funcionarem corretamente, elas não são eficientes.

Isto porque a operação de slice (`lst[1:]`) cria uma nova lista copiando todos os elementos da lista a partir do índice 1, ou seja, estamos diminuindo a lista (problema) fisicamente.

Para resolver esse problema, podemos diminuir a lista de **forma lógica ao invés de forma física**.

A ideia é usar um parâmetro extra `i` que indica de onde a soma deve começar. Na primeira chamada `i = 0`, na chamada recursiva usamos `i + 1`. O caso base é atingindo quando `i == len(lst)`.

Exemplo: soma com índice incrementando

```
def soma_inc(lst: list[int], i: int) -> int:
    '''
    Soma os elementos de *lst* a partir
    de *i*, isto é, soma os elementos
    de *lst[i:]*.
    Requer que 0 <= i <= len(lst).
    >>> soma_inc([7, 3, 6], 0)
    16
    >>> soma_inc([7, 3, 6], 1)
    9
    >>> soma_inc([7, 3, 6], 2)
    6
    >>> soma_inc([7, 3, 6], 3)
    0
    '''
```

```
def soma_inc(lst: list[int], i: int) -> int:
    if i >= len(lst):
        # Qual é a soma dos elementos
        # de lst a partir de i?
        s = 0
    else:
        # Tendo a soma dos elementos de
        # lst a partir de i + 1 (chamada
        # recursiva) e lst[i], como
        # obter a soma dos elementos
        # de lst a partir de i?
        s = lst[i] + soma_inc(lst, i + 1)
    return s
```

Exemplo: soma com índice decrementando

Ao invés de contar a lista, mantemos ela e decrementamos o índice do elemento da lista que vamos usar.

Ao invés de começar o parâmetro extra com 0 e incrementar na chamada recursiva, podemos começar com `len(lst)` e decrementar na chamada recursiva.

Desse forma, o parâmetro extra funciona como um **tamanho lógico** para `lst` e podemos pensar em recursão com lista da mesma forma que pensamos em recursão com número natural.

Vamos chamar o parâmetro de `n` ao invés de `i` para destacar a relação com o tamanho.

Exemplo: soma com índice decrementando

```python
def soma_dec(lst: list[int], n: int) -> int:
    '''
    Soma os primeiro *n* elementos de *lst*,
    isto é, soma os elementos de *lst[:n]*.
    Requer que 0 <= n <= len(lst)
    >>> soma_dec([7, 3, 6], 0)
    0
    >>> soma_dec([7, 3, 6], 1)
    7
    >>> soma_dec([7, 3, 6], 2)
    10
    >>> soma_dec([7, 3, 6], 3)
    16
    '''
```

```python
def soma_dec(lst: list[int], n: int) -> int:
    if n == 0:
        # Qual é a soma de lst, sendo
        # que o "tamanho" (n) de lst é 0?
        s = 0
    else:
        # Tendo a soma dos elementos
        # de lst sem o "último" elemento
        # de lst (chamada recursiva)
        # e o último elemento (lst[n-1]),
        # como obtemos a soma de todos os
        # elementos de lst[:n]?
        s = lst[n - 1] + soma_dec(lst, n - 1)
    return s
```

Limitações

A técnica de diminuição e conquista sempre funciona? Ou seja, se aplicarmos a ideia de diminuir e conquistar conseguimos projetar um algoritmo para resolver qualquer problema?

Não!

Mas então, quando podemos aplicar a técnica de projeto de diminuição e conquista?

- Quando conseguimos resolver o caso base;
- Quando a solução do problema menor pode ser estendida para a solução do problema inicial.

Limitações

Podemos aplicar a técnica de diminuição e conquista para projetar uma função que encontre todos os divisores de um número natural n?

Conseguimos resolver o caso base? Sim.

Tendo os divisores de $n - 1$, podemos encontrar os divisores de n? Sabendo os divisores de 9 $(1, 3, 9)$, podemos determinar os divisores de 10 $(1, 2, 5, 10)$? Não!

Ou seja, a solução do problema menor não pode ser estendida para o problema inicial.

Vocês verão em outras disciplinas outras estratégias que permitirão superar essa limitação.

Definições recursivas são aquelas feitas em termos de si mesmas. Para ser bem formada uma definição recursiva precisa de:

- Pelo menos um caso base;
- Pelo menos um caso com autorreferência.

Funções recursivas são aquelas que chamam a si mesmas. Para ser bem formada uma função recursiva precisa de:

- Pelo menos um caso base;
- Pelo menos um caso com chamada recursiva.

Vimos como empregar definições e funções recursivas para projetar funções utilizando a técnica de diminuição e conquista.

A ideia é diminuir o problema inicial, conquistar o problema menor – diretamente ou recursivamente – e estender a solução do problema menor para o problema inicial.

A forma mais direta de diminuir um problema é explorar a relação entre autorreferência na definição do tipo de dado e recursão na função: onde tem autorreferência tem recursão.

Aplicamos essa forma de diminuir o problema tanto para números naturais quanto para arranjos.

Para arranjos usamos diminuição lógica para para evitar que arranjos sejam criados com a operação de subarranjo (`[1:]`) nas chamadas recursivas. Fizemos a diminuição a partir do início e do fim.

A estratégia de diminuição e conquista não pode ser usada para resolver qualquer problema. Se não conseguimos definir como diminuir o problema ou estender a solução do problema menor para o problema inicial, então não podemos utilizar a técnica de diminuição e conquista.