1a) $\left\lceil \frac{m}{12} \right\rceil \geq 8 \iff m \geq 12 \cdot 7 + 1 = 85$ $\quad 85$

1b) $\left\lceil \frac{m}{10} \right\rceil \geq 6 \iff m \geq 10 \cdot 5 + 1 = 51$ $\quad 51$

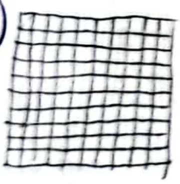
1c) $12 \times 10 = 120$

$\left\lceil \frac{m}{120} \right\rceil \geq 3 \iff m \geq 120 \cdot 2 + 1 = 241$ $\quad 241$

2a) Pelo princípio de Dirichlet, pelo menos $\lceil 9/2 \rceil = 5$ pontos possuem a primeira entrada com a mesma paridade. Destes, pelo menos $\lceil 5/2 \rceil = 3$ pontos possuem também a segunda entrada com a mesma paridade. Destes, pelo menos $\lceil 3/2 \rceil = 2$ pontos possuem também a terceira entrada com a mesma paridade. O ponto médio entre esses dois pontos é um ponto inteiro.

2b)
$(0,0,0)$ $\quad (1,0,0)$
$(0,0,1)$ $\quad (1,0,1)$
$(0,1,0)$ $\quad (1,1,0)$
$(0,1,1)$ $\quad (1,1,1)$

3)



100 quadrados 1×1

Podemos dividir a sala em 100 quadrados de lado 1 m. Pelo princípio de Dirichlet, há pelo menos duas formigas em um mesmo quadrado. Assim, a distância d entre elas satisfaz

$$d \leq \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} < 1{,}5.$$

4) Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{52}$ estes números. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, 52\}$, denote por r_i o resto da divisão de x_i por 100.

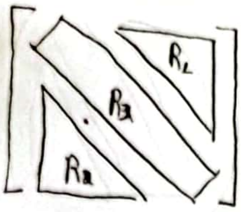
Considere os 51 conjuntos abaixo

$X_0 = \{0\}$,
$X_1 = \{1, 99\}$
$X_2 = \{2, 98\}$
$\vdots$
$X_{49} = \{49, 51\}$
$X_{50} = \{50\}$

Como há 51 conjuntos e 52 restos, então há pelo menos dois restos em um mesmo conjunto: digamos, r_i e r_j com $i \neq j$.

Se $r_i = r_j$, então $x_i - x_j$ é múltiplo de 100. Se $r_i \neq r_j$, então $r_i + r_j = 100$ e assim $x_i + x_j$ é múltiplo de 100.

5)



Suponha por absurdo que um número $K \in \{1, 2, \dots, n\}$ não apareça na diagonal principal. Sejam X_1 e X_2 o número de vezes que o valor K aparece nas regiões R1 e R2, respectivamente. Temos

$$X_1 + X_2 = n \quad (K \text{ aparece uma vez em cada linha})$$
$$X_1 = X_2 \quad (K \text{ é simétrica})$$

Assim, temos $X_1 = X_2 = n/2$. Um absurdo, pois n é ímpar e X_1 e X_2 são inteiros.
Portanto, todo valor $\{1, 2, \dots, K\}$ aparece na diagonal principal.

6) Sejam

$$A = \{X : 1 \le X \le 1000 \text{ e } 2 \mid X\} \text{ e}$$
$$B = \{X : 1 \le X \le 1000 \text{ e } 3 \mid X\}.$$

Temos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor$$
$$= 500 + 333 - 166 = 667$$

Logo, a resposta é $1000 - 667 = 333$ //

7) Sejam

$$A = \{X : 1 \le X \le 500 \text{ e } 4 \mid X\}$$
$$B = \{X : 1 \le X \le 500 \text{ e } 6 \mid X\}$$
$$C = \{X : 1 \le X \le 500 \text{ e } 9 \mid X\}.$$

Temos que

$$A \cap B = \{X : 1 \le X \le 500 \text{ e } 12 \mid X\}$$
$$A \cap C = \{X : 1 \le X \le 500 \text{ e } 36 \mid X\}$$
$$B \cap C = \{X : 1 \le X \le 500 \text{ e } 18 \mid X\}$$
$$A \cap B \cap C = \{X : 1 \le X \le 500 \text{ e } 36 \mid X\}.$$

Assim,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \cancel{|A \cap C|} - |B \cap C| + \cancel{|A \cap B \cap C|}$$
$$= \left\lfloor \frac{500}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{18} \right\rfloor$$
$$= 125 + 83 + 55 - 41 - 27$$
$$= 195 \text{ //}$$

8) Sejam

A = { anagramas com B em primeiro lugar }
B = { " " R " segundo " }
C = { " " L " sexto " }

Temos que

$$|A| = |B| = |C| = 5!$$
$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 4!$$
$$|A \cap B \cap C| = 3!$$

Portanto

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$= 3 \cdot 5! - 3 \cdot 4! + 3!$$
$$= 360 - 72 + 6$$
$$= 294 \text{ //}$$

(7) Denote por A_1, A_2 e A_3 a porcentagem de leitores dos jornais A, B e C, respectivamente. Temos:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 20 + 16 + 14 - 8 - 5 - 4 + 2$$
$$= 35$$

Isto significa que 35% da população lê, pelo menos, um dos três jornais. Portanto, 65% não lê nenhum desses três jornais.