

Nona Lista de Exercícios
GEOMETRIA ANALÍTICA - Camargo-Boulos
Cônicas

1. São dados, em cada caso, o parâmetro geométrico a e os focos de uma elipse. Obtenha uma equação algébrica de segundo grau em x e y que todo ponto (x, y) da elipse deva satisfazer.

(a) $a = 4$ $F_1 = (-3, 2)$ $F_2 = (-3, 6)$

(b) $a = 3$ $F_1 = (-1, -1)$ $F_2 = (1, 1)$

(c) $a = 3$ $F_1 = (0, 0)$ $F_2 = (1, 1)$

2. Sejam A e B pontos distintos e p um número real maior que a distância entre eles. Prove que, dentre os triângulos de base AB e perímetro p , os de maior área são isósceles.

3. Nos casos em que a equação dada descreve uma elipse de focos em algum dos eixos coordenados, especifique-o e calcule: a distância focal, a medida do eixo maior e a medida do eixo menor. Faça alguns esboços, a mão livre e com o auxílio do computador, para comparar.

(a) $4x^2 + 169y^2 = 676$

(b) $x^2 + 2y^2/3 = 8$

(c) $x^2/4 + y^2/2 = 0$

(d) $x^2 - 4y^2 = 1$

(e) $4x^2 + 9y^2 + 1 = 0$

(f) $x^2 + m^2y^2 = m$

4. Escreva uma equação reduzida da elipse, nos casos:

(a) Os focos estão em Ox , o eixo menor mede 6, e a distância focal é 8.

(b) Os focos estão em Oy , o eixo maior mede 10, e a distância focal é 6.

(c) Os focos são $(0, 6)$ e $(0, -6)$, e o eixo maior mede 34.

(d) Os focos são $(5, 0)$ e $(-5, 0)$ e um dos vértices é $(-13, 0)$.

(e) As extremidades do eixo menor são $(0, 4)$ e $(0, -4)$, e a amplitude focal é $8/5$.

(f) Os focos são $(0, 2\sqrt{3})$ e $(0, -2\sqrt{3})$, e a amplitude focal é 2.

5. Escreva uma equação reduzida da elipse que contém os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (1, 4)$. Determine seus focos.
6. Calcule a área do quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse de equação $9x^2 + 16y^2 = 100$.
7. Pela Primeira Lei de Kepler, a trajetória da Terra é elíptica e o Sol ocupa a posição de um de seus focos. Calcule o periélio e o afélio da Terra (respectivamente, a menor e a maior distância da Terra ao Sol), adotando os valores aproximados: distância focal da trajetória da Terra, $0,5 \cdot 10^7 \text{ km}$; medida do eixo maior, $30 \cdot 10^7 \text{ km}$.
8. São dados, em cada caso, o parâmetro geométrico a e os focos de uma hipérbole. Obtenha uma equação algébrica de segundo grau em x e y que todo ponto (x, y) da hipérbole deva satisfazer.

- (a) $a = 3$ $F_1 = (3, -3)$ $F_2 = (3, 7)$
- (b) $a = 1$ $F_1 = (3, 4)$ $F_2 = (-1, -2)$

9. Nos casos em que a equação dada descreve uma hipérbole de focos em algum dos eixos coordenados, especifique-o e calcule: a distância focal, a medida dos eixos transversos e conjugados. Faça alguns esboços, a mão livre e com o auxílio do computador, para comparar.

- (a) $9x^2 - 4y^2 = 36$
- (b) $\frac{9}{25}x^2 - y^2 + 9 = 0$
- (c) $x^2 + 2y^2 = 1$
- (d) $-m^2x^2 + 9y^2 = 36, m > 0$
- (e) $5x^2 - 9y^2 - 45 = 0$

10. Determine, em cada caso, os vértices, os focos, as extremidades do eixo conjugado e equações das assíntotas da hipérbole.

- (a) $16x^2 - 25y^2 = 400$
- (b) $y^2 - x^2 = 16$
- (c) $3x^2 - y^2 = 3$

11. Obtenha, em cada caso, uma equação reduzida da hipérbole.

- (a) Os vértices são $(2, 0)$ e $(-2, 0)$, e os focos, $(3, 0)$ e $(-3, 0)$.
- (b) Os vértices são $(-15, 0)$ e $(15, 0)$ e as assíntotas têm equações $5y - 4x = 0$ e $5y + 4x = 0$.
- (c) Os focos são $(-5, 0)$ e $(5, 0)$ e a amplitude focal é $9/2$.

- (d) Os focos são $(-5, 0)$ e $(5, 0)$ e as assíntotas têm equações $2y = x$ e $2y = -x$.
- (e) O ponto $(5, 9)$ pertence à hipérbole, e as assíntotas têm equações $y = x$ e $y = -x$.
- (f) Os focos estão no eixo Oy , as assíntotas têm equações $2y + 3x = 0$ e $2y - 3x = 0$, e o eixo conjugado mede 8.
12. Escreva uma equação reduzida da hipérbole que contém os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (1, 4)$. Escreva as equações de suas assíntotas e determine os focos e vértices.
13. Prove que o produto das distâncias de um ponto de uma hipérbole às assíntotas é $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$.
14. São dados, em cada caso, o foco e a diretriz de uma parábola. Obtenha uma equação algébrica de segundo grau em x e y que todo ponto (x, y) da parábola deve satisfazer.
- (a) $F = (2, 3)$ $r : x = 0$
- (b) $F = (3, 1)$ $r : y + 3 = 0$
- (c) $F = (-4, -2)$ $r : 2x + y = 3$
15. Obtenha o foco, o vértice, o parâmetro e a diretriz da parábola e faça um esboço.
- (a) $y^2 + 8x = 0$
- (b) $x^2 + 6y = 0$
- (c) $5y^2 = 8x$
- (d) $5x^2 = 16y$
16. Obtenha, em cada caso, uma equação da parábola de vértice $(0, 0)$, conhecendo seu parâmetro p e a localização do foco.
- (a) $p = 2/3$ e o foco está no semi-eixo positivo das abscissas.
- (b) $p = 4/3$ e o foco está no semi-eixo negativo das ordenadas.
- (c) $p = 1$ e o foco está no semi-eixo negativo das abscissas.
- (d) $p = 1/2$ e o foco está no semi-eixo positivo das ordenadas.
17. Obtenha, em cada caso, uma equação reduzida da parábola de vértice $V = (0, 0)$, utilizando as informações dadas.
- (a) O foco é $(8, 0)$.

- (b) A diretriz tem equação $y = 2$.
 - (c) O eixo é Ox e o ponto $(5, 10)$ pertence à parábola.
 - (d) O ponto $(4, 7)$ pertence à diretriz e o eixo é Ox .
 - (e) O foco pertence ao semi-eixo positivo das abscissas e a amplitude focal é 8.
 - (f) O foco pertence ao semi-eixo positivo das ordenadas e o triângulo fundamental tem área 18.
18. Obtenha uma equação reduzida da parábola que contém os pontos $(6, 18)$ e $(-6, 18)$.
19. Identifique e esboce a cônica, conhecendo sua equação.
- (a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$
 - (b) $x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}xy - 1 = 0$
 - (c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = 0$
 - (d) $7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy - (14 + 2\sqrt{3})x - (10 + 2\sqrt{3}) + 8 + 2\sqrt{3} = 0$
 - (e) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
 - (f) $16x^2 - 108xy - 29y^2 + 280 = 0$
 - (g) $5x^2 + 2y^2 + 2xy + 2 = 0$