1) Basta encontrar uma solução para a equação diofantina

$$24X + 42Y = 300$$

Pelo algoritmo de Euclides,

$$\begin{array}{c|c|c|c|l}
 & 1 & 1 & 3 & \\
42 & 24 & 18 & \boxed{6} & \rightarrow MDC(24,42) \\
18 & 6 & 0 & &
\end{array}$$

Note que

$$42 = 24 \times 1 + 18$$
$$24 = 18 \times 1 + 6$$

Assim,

$$18 = 42 + 24(-1)$$
$$6 = 24 + 18(-1)$$

Donde

$$6 = 24 + 18(-1)$$
$$6 = 24 + (42 + 24(-1))(-1)$$
$$6 = 24 \times 2 + 42(-1) \qquad \times 50$$
$$300 = 24 \times 100 + 42(-50)$$

Assim 300 pode ser escrito como a soma de 2400 (múltiplo de 24) e −2100 (múltiplo de 42).

2a) Como $MDC(18,23) = 1$ e $1 | 9$, então a equação diofantina

$$18X + 23Y = 9$$

admite soluções. Vamos encontrá-las

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\
23 & 18 & 5 & 3 & 2 & 1 \\
5 & 3 & 2 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Note que

$$23 = 18 \times 1 + 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 23 + 18(-1)$$
$$18 = 5 \times 3 + 3 \qquad\quad 3 = 18 + 5(-3)$$
$$5 = 3 \times 1 + 2 \qquad\quad 2 = 5 + 3(-1)$$
$$3 = 2 \times 1 + 1 \qquad\quad 1 = 3 + 2(-1)$$

Donde,

$$1 = 3 + 2(-1)$$
$$1 = 3 + (5 + 3(-1))(-1)$$
$$1 = 3 \cdot 2 + 5(-1)$$
$$1 = (18 + 5(-3)) \cdot 2 + 5(-1)$$
$$1 = 18 \times 2 + 5 \times (-7)$$
$$1 = 18 \times 2 + (23 + 18(-1))(-7)$$
$$1 = 18 \times 9 + 23(-7)$$

assim,

$$9 = 18 \times 81 + 23 \times (-63)$$

donde $X = 81$ e $Y = -63$ é uma solução da equação diofantina

$$18X + 23Y = 9$$

Portanto, qualquer outra solução é da forma

$$\begin{cases} X = 81 + 23t \\ Y = -63 - 18t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

2b) Como $MDC(12,-20) = 4$ e $4 \nmid 2$, então a equação diofantina

$$12X - 20Y = 2$$

não admite solução

2c) Pelo algoritmo de Euclides,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 7 & 2 & 1 & 5 \\
375 & 51 & 18 & 15 & \boxed{3} \\
18 & 15 & 3 & 0 &
\end{array}$$

Logo, $MDC(375, 51) = 3$ e $3 \mid 45$, então a equação diofantina

$$375X + 51Y = 45$$

possui solução. Vamos encontrá-las, para isto, note que

$$\begin{aligned}
375 &= 51 \times 7 + 18 & \Rightarrow \quad 18 &= 375 + 51(-7) \\
51 &= 18 \times 2 + 15 & 15 &= 51 + 18(-2) \\
18 &= 15 \times 1 + 3 & 3 &= 18 + 15(-1)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
3 &= 18 + 15(-1) \\
3 &= 18 + (51 + 18(-2))(-1) \\
3 &= 18 \times 3 + 51 \times (-1) \\
3 &= (375 + 51(-7)) \times 3 + 51 \times (-1) \\
3 &= 375 \times 3 + 51 \times (-22) \qquad (\times 15) \\
45 &= 375 \times 45 + 51 \times (-330)
\end{aligned}$$

Assim, $X = 45$ e $Y = -330$ é uma solução da equação diofantina

$$375X + 51Y = 45$$

Portanto, qualquer outra solução é da forma

$$\begin{cases} X = 45 + 17t \\ Y = -330 - 125t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

(3) Considere a equação diofantina

$$11X + 9Y = 270$$

Como $MDC(11,9) = 1$ e $1 \mid 270$, então tal equação possui solução. Vamos encontrá-las

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & 4 & 2 \\ 11 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

Note que

$$11 = 9 \times 1 + 2 \Rightarrow 2 = 11 + 9(-1)$$
$$9 = 2 \times 4 + 1 \qquad 1 = 9 + 2(-4)$$

donde

$$1 = 9 + 2(-4)$$
$$1 = 9 + (11 + 9(-1))(-4)$$
$$1 = 9 \times 5 + 11(-4)$$
$$270 = 9 \times 1350 + 11(-1080)$$

Logo, $Y = 1350$ e $X = -1080$ é uma solução da equação diofantina

$$11X + 9Y = 270$$

Portanto, toda outra solução é escrita na forma

$$\begin{cases} X = -1050 + 9t \\ Y = 1350 - 11t \end{cases}, \ t \in \mathbb{Z}$$

Note que.

$$-1080 + 9t > 0 \iff t > \frac{1080}{9} = 120$$
$$1350 - 11t > 0 \iff t < \frac{1350}{11} \approx 122{,}7$$

Assim, temos $-1080 + 9t$ e $1350 - 11t$ simultaneamente positivas apenas para $t = 121$ e $t = 122$.
Portanto, as soluções positivas da equação diofantina $11X + 9Y = 270$ são

$$\begin{cases} X = -1080 + 9 \times 121 \\ Y = 1350 - 11 \times 121 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X = -1080 + 9 \times 122 \\ Y = 1350 - 11 \times 122 \end{cases}$$

isto é $(X,Y) = (9,19)$ ou $(X,Y) = (18,8)$. Portanto, 270 só pode ser escrito como a soma de múltiplos positivos de 11 e 9 se for da forma

$$270 = \underline{11} \times 9 + \underline{9} \times 19 = 99 + 171$$
$$270 = \underline{11} \times 18 + \underline{9} \times 8 = 198 + 72$$

4) Seja r o resto da divisão de x por 8, temos $x \equiv r \bmod 8$. Assim, $x^2 \equiv r^2 \bmod 8$. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
0^2 &\equiv 0 \pmod 8)\\
1^2 &\equiv 1 \pmod 8\\
2^2 &\equiv 4 \pmod 8\\
3^2 &\equiv 1 \pmod 8\\
4^2 &\equiv 0 \pmod 8\\
5^2 &\equiv 1 \pmod 8\\
6^2 &\equiv 4 \pmod 8\\
7^2 &\equiv 1 \pmod 8
\end{aligned}
$$

Logo, como $r \in \{0, 1, \dots, 7\}$ e $x^2 \equiv r^2 \pmod 8$, temos pela transitividade que

ou $x^2 \equiv 0 \pmod 8$,

ou $x^2 \equiv 1 \pmod 8$,

ou $x^2 \equiv 4 \pmod 8$.

5) Note que

$$
\begin{aligned}
2^3 &\equiv 1 \pmod 7\\
(2^3)^{16} &\equiv 1^{16} \pmod 7\\
2^{48} \times 2^2 &\equiv 1^{16} \times 2^2 \pmod 7\\
2^{50} &\equiv 4 \pmod 7
\end{aligned}
$$

Logo, o resto da divisão de 2^{50} por 7 é 4. Além disso

$$
\begin{aligned}
41 &\equiv -1 \pmod 7\\
(41)^{65} &\equiv (-1)^{65} \pmod 7\\
41^{65} &\equiv -1 \pmod 7\\
41^{65} &\equiv 6 \pmod 7
\end{aligned}
$$

Logo, o resto da divisão de 41^{65} por 7 é 6.

6) x, y e z correspondem aos restos das divisões de 223, -3 e -55 por 8, respectivamente. Logo, $x = 7$, $y = 5$ e $z = 1$. Em particular, em $\mathbb{Z}_8$ temos $\overline{223} = \overline{7}$, $\overline{-3} = \overline{5}$ e $\overline{-55} = \overline{1}$.

7a) Em $\mathbb{Z}_{10}$, temos

$$(\overline{5}+\overline{8})\times\overline{4} = \overline{3}\times\overline{4} = \overline{2}$$

7b) Em $\mathbb{Z}_{22}$, temos

$$(\overline{12}+\overline{16})\times(\overline{4}+\overline{-9}) = \overline{6}\times\overline{-5} = \overline{-30} = \overline{14}$$

7c) Em $\mathbb{Z}_7$, temos

$$\overline{2}^3 = \overline{1} \Rightarrow (\overline{2}^3)^{33} = (\overline{1})^{33}$$
$$\Rightarrow \overline{2}^{99} = \overline{1}$$
$$\Rightarrow \overline{2}^{99}\times\overline{2} = \overline{1}\times\overline{2}$$
$$\Rightarrow \overline{2}^{100} = \overline{2}$$

Do mesmo modo,

$$\overline{6} = \overline{-1} \Rightarrow \overline{6}^{50} = (\overline{-1})^{50}$$
$$\Rightarrow \overline{6}^{50} = \overline{1}$$

Portanto,

$$\overline{2}^{100} + \overline{6}^{50} = \overline{2} + \overline{1} = \overline{3}.$$

8) Um elemento $\overline{X}$ é inversível em $\mathbb{Z}_{30}$ se, e somente se, $MDC(X,30)=1$. Portanto, os elementos inversíveis de $\mathbb{Z}_{30}$ são:

$$\overline{1}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23} \text{ e } \overline{29}.$$

9) Um elemento $\overline{X}$ é inversível em $\mathbb{Z}_9$ se, e somente se, $MDC(X,9)=1$. Portanto, os elementos inversíveis de $\mathbb{Z}_9$ são:

$$\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7} \text{ e } \overline{8}.$$

Além disso, temos que

$\overline{1}^{-1} = \overline{1}$, pois $\overline{1}\times\overline{1} = \overline{1}$

$\overline{2}^{-1} = \overline{5}$, pois $\overline{2}\times\overline{5} = \overline{5}\times\overline{2} = \overline{1}$

$\overline{4}^{-1} = \overline{7}$, pois $\overline{4}\times\overline{7} = \overline{7}\times\overline{4} = \overline{1}$

$\overline{5}^{-1} = \overline{2}$, pois $\overline{2}\times\overline{5} = \overline{5}\times\overline{2} = \overline{1}$

$\overline{7}^{-1} = \overline{4}$, pois $\overline{4}\times\overline{7} = \overline{7}\times\overline{4} = \overline{1}$

$\overline{8}^{-1} = \overline{8}$, pois $\overline{8}\times\overline{8} = \overline{1}$

10) Temos que

$MDC(11, 300) = 1$

$MDC(49, 300) = 1$

$MDC(237, 300) \neq 1$ (pois $3 \mid 237$ e $3 \mid 300$)

Logo, $\overline{237}$ não é inversível em $\mathbb{Z}_{300}$, mas $\overline{11}$ e $\overline{49}$ são.

Vamos encontrar a inversa de $\overline{11}$ e $\overline{49}$ em $\mathbb{Z}_{300}$ utilizando o Algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 27 & 3 & 1 & 2 \\
300 & 11 & 3 & 2 & 1 \\
3 & 2 & 1 & 0 &
\end{array} \Rightarrow \begin{aligned} 300 &= 11 \times 27 + 3 \\ 11 &= 3 \times 3 + 2 \\ 3 &= 2 \times 1 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3 &= 300 + 11(-27) \\ 2 &= 11 + 3(-3) \\ 1 &= 3 + 2(-1) \end{aligned}$$

Assim,

$$1 = 3 + 2(-1)$$
$$1 = 3 + (11 + 3(-3))(-1)$$
$$1 = 3 \cdot 4 + 11(-1)$$
$$1 = (300 + 11(-27)) \cdot 4 + 11(-1)$$
$$1 = 11 \times (-109) + 300 \cdot 4,$$

logo

$$\overline{1} = \overline{11} \times \overline{-109} + \overline{0} \times \overline{4} = \overline{11} \times \overline{-109},$$

isto é, $\overline{11}^{-1} = \overline{-109} = \overline{191}$.

Vamos determinar agora a inversa de $\overline{49}$.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 6 & 8 & 6 \\
300 & 49 & 6 & 1 \\
6 & 1 & 0 &
\end{array} \Rightarrow \begin{aligned} 300 &= 49 \times 6 + 6 \\ 49 &= 6 \times 8 + 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 6 &= 300 + 49(-6) \\ 1 &= 49 + 6(-8) \end{aligned}$$

Assim,

$$1 = 49 + 6(-8)$$
$$1 = 49 + (300 + 49(-6))(-8)$$
$$1 = 49 \times 49 + 300(-8),$$

logo

$$\overline{1} = \overline{49} \times \overline{49} + \overline{0} \times \overline{-8} = \overline{49} \times \overline{49},$$

isto é, $\overline{49}^{-1} = \overline{49}$.

11) Como MDC$(c, m) = 1$, então $\bar{c}$ é inversível em $\mathbb{Z}_m$, isto é, existe $\bar{c}^{-1} \in \mathbb{Z}_m$ tal que $\bar{c} \times \bar{c}^{-1} = \bar{1}$ em $\mathbb{Z}_m$. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{c} &\Rightarrow (\bar{a} \times \bar{c}) \times \bar{c}^{-1} = (\bar{b} \times \bar{c}) \times c^{-1} \\
&\Rightarrow \bar{a} \times (\bar{c} \times \bar{c}^{-1}) = \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{c}^{-1}) \\
&\Rightarrow \bar{a} \times \bar{1} = \bar{b} \times \bar{1} \\
&\Rightarrow \bar{a} = \bar{b}
\end{aligned}
$$

12) Temos que

$$
\begin{array}{llllllllll}
138 & \underline{|2} \\
0 & 69 & \underline{|2} \\
 & 1 & 34 & \underline{|2} \\
 & & 0 & 17 & \underline{|2} \\
 & & & 1 & 8 & \underline{|2} \\
 & & & & 0 & 4 & \underline{|2} \\
 & & & & & 0 & 2 & \underline{|2} \\
 & & & & & & 0 & 1 & \underline{|2} \\
 & & & & & & & 1 & 0
\end{array}
$$

$138 = (10001010)_2$

$$
\begin{array}{llll}
138 & \underline{|6} \\
0 & 23 & \underline{|6} \\
 & 5 & 3 & \underline{|6} \\
 & & 3 & 0
\end{array}
$$

$138 = (350)_6$

$$
\begin{array}{llll}
138 & \underline{|8} \\
2 & 17 & \underline{|8} \\
 & 1 & 2 & \underline{|8} \\
 & & 2 & 0
\end{array}
$$

$138 = (212)_8$

13) Temos que

$$
\begin{aligned}
(1101011)_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 64 + 32 + 8 + 2 + 1 \\
&= 107 = (107)_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4301)_5 &= 4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0 \\
&= 500 + 75 + 1 \\
&= 576 = (576)_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(375)_9 &= 3 \times 9^2 + 7 \times 9^1 + 5 \times 9^0 \\
&= 243 + 63 + 5 \\
&= 311 = (311)_{10}
\end{aligned}
$$

14) Temos que

$$(2201)_3 = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 54 + 18 + 1 = 73.$$

Além disso,

$$
\begin{array}{llll}
73 & \underline{|7} \\
3 & 10 & \underline{|7} \\
 & 3 & 1 & \underline{|7} \\
 & & 1 & 0
\end{array}
$$

Logo, $73 = (133)_7$. Portanto, $(2201)_3 = (133)_7$.