Universidade Estadual de Maringá

Profa. Dra. Maria Elenice R. Hernandes

1a. Lista de Exercícios de Álgebra Linear

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine:

   a) $A + B$ b) $B - 5A$ c) $D^t \cdot C^t$ d) $((A - B)^t \cdot (2 \cdot D)^t)^t$

2. Se $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule A^2 e A^3.

3. Resolva a seguinte equação matricial $\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, indicando os valores para a, b, c e d.

4. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que:

   (a) $X - 2A + 3B = 0$ (b) $2(A - B + X) = 3(X - A)$.

5. O **traço** de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$, denotado por $tr(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz, ou seja, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Verifique se são verdadeiras as igualdades com respeito ao traço das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

   a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$; b) $tr(A \cdot C) = tr(A) \cdot tr(C)$.

6. Seja uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Prove que:
   (a) A é simétrica se, e somente se, $A^t = A$.
   (b) A é antissimétrica se, e somente se, $A^t = -A$.

7. Verifique se a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ é uma raiz do polinômio $f(x) = x^2 - 2x - 3$, ou seja, $f(A) = A^2 - 2A - 3I = 0$, em que 0 é a matriz nula.

8. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Sabendo que $A^t = A$, calcule x.

9. Considerando A e B matrizes, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, assinale verdadeiro ou falso. Quando verdadeiro prove o resultado e quando for falso apresente um contra-exemplo.
   (a) $(-A)^t = -(A^t)$
   (b) $(A + B)^t = A^t + B^t$
   (c) Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$
   (d) $(k_1A)(k_2B) = (k_1k_2)AB$
   (e) $(-A)(-B) = -AB$
   (f) Se A e B são matrizes simétricas, então $AB = BA$.
   (g) Se $AB = 0$ então $BA = 0$.
   (h) Se pudermos efetuar o produto AA, então A é uma matriz quadrada.
   (i) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

10. Explique por que, em geral, $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ e $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$.

11. Se $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, encontre B de modo que $B^2 = A$.

12. Encontre a matriz A de ordem 2×2 que verifica $A^2 - 6A + 5I = 0$.

13. Encontre y de modo que a matriz $Y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$, verifica a equação $Y^2 = 2Y$.

14. Dada a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcule A^n para $n \in \mathbb{N}$.

15. Determinar todas as matrizes quadradas de ordem 3 que comutam com a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

16. Para que valores de m e n a matriz A abaixo admite inversa? Dê um valor para m e n e calcule a inversa da matriz obtida
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

17. Calcule (se existir) a inversa das matrizes abaixo:

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

18. Dada a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Determine a matriz A.

19. A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ é inversível? Em caso afirmativo, calcule sua inversa.

20. Dizemos que uma matriz quadrada A é ortogonal, se A é inversível e $A^{-1} = A^t$.

    (a) Prove que a matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é ortogonal.

    (b) Determinar, se possível, $x, y \in \mathbb{C}$ de modo que a matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

    (c) Mostre que o produto de duas matrizes ortogonal é ainda uma matriz ortogonal.

21. Calcule $det(A)$, onde:

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

22. Sabendo que A é uma matriz quadrada de ordem n e que $detA = 5$, determine:

    a) $det(3 \cdot A)$ b) $det(A^t)$ c) $det(-A)$ d) $det(A^2)$ e) $det(A^{-1})$

23. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Assinale verdadeiro ou falso, justificando:
(a) $det(AB) = det(BA)$ (b) $det((-2)A) = (-2)det(A)$ (c) $det(A^3) = det(A)^3$.

24. Seja A uma matriz quadrada. Prove que se A possui duas linhas múltiplas, então $det(A) = 0$. Verifique que o mesmo vale se A tiver duas colunas múltiplas.

25. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $det(A) + det(B)$ e $det(A + B)$. É verdade que $det(A + B) = det(A) + det(B)$?

26. Mostre que o $detA = 5! = 120$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

27. Calcule o determinante usando o desenvolvimento de Laplace.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

28. Resolva os seguintes sistemas, calcule seu posto e nulidade:

(a) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 3 \\ 3x - 4y + 6z = 7 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0. \end{cases}$

29. Determine o(s) valor(es) de k, a e b, para os quais o sistema seja SPD, SPI e SI.

(a) $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 4z = 0 \\ -3x + az = b \end{cases}$

(c) $\begin{cases} kx + 2y = 6 \\ 3x - y = -2 \\ x + y = 0. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y - kz = 0 \\ kx + y - z = 2 - k \\ x + ky - z = -k \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

30. Usando a regra de Cramer, se possível, resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= -4 \\ x + y + z &= 2 \end{cases}$

31. Resolva os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + z + t &= 0 \\ x + y - z + t &= 0 \\ -x + y - z - t &= 0 \\ 2x - y - z + 3t &= 0 \end{cases}$.