Tópicos de Geometria Analítica (Notas de Aula)

Julio Cesar Moraes Pezzott

E-mail: jcmpezzott2@uem.br

Claudia Juliana Fanelli Gonçalves

E-mail: cjfgoncalves2@uem.br

Departamento de Matemática, UEM

O texto que se encaminha é baseado nos livros citados abaixo e para uma melhor compreensão do assunto, recomendamos o estudo destes:

- I. Camargo, P. Boulos. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial.* 3^a ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- P. Winterle, A. Steinbruch. *Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books, 2000.

.

1 Vetores

Denotaremos por $\mathbb{E}^3$ o conjunto de pontos da Geometria Euclidiana e o chamaremos de *Espaço*. Os pontos de $\mathbb{E}^3$ serão denotados por letras maiúsculas: por exemplo, A, B, X etc. Dados os pontos A e B, indicaremos o segmento ligando tais pontos por AB e o seu comprimento por $\overline{AB}$

Definição 1.1. Um *segmento orientado* é um par ordenado (A, B) de pontos do espaço, em que A é chamado de *origem* (ou *ponto inicial*) e B de *extremidade* (ou *ponto final*). Um segmento orientado do tipo (A, A) é chamado *segmento orientado nulo*.

Observe que se $A \neq B$, então (A, B) é diferente de (B, A).

Definição 1.2. O *comprimento* do segmento orientado (A, B) é o comprimento do segmento geométrico AB. O segmento nulo tem comprimento igual a zero.

Definição 1.3. Dados dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) não-nulos, diremos que eles têm a *mesma direção* (ou que são *paralelos*) se a reta contendo os pontos A e B é paralela à reta contendo os pontos C e D (isso inclui o caso em que todos os pontos estão em uma mesma reta).

Definição 1.4. Sejam (A, B) e (C, D) segmentos orientados não-nulos. Suponhamos que (A, B) e (C, D) sejam paralelos.

(i) Se os pontos A e B estão em uma reta r, e os pontos C e D estão em uma reta s, em que r e s são retas distintas, então dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o *mesmo sentido* se os segmentos geométricos AC e BD não se interceptam (veja a Figura 1). Se AC e BD se interceptam, diremos que (A, B) e (C, D) são de *sentido contrário* (Figura 2).

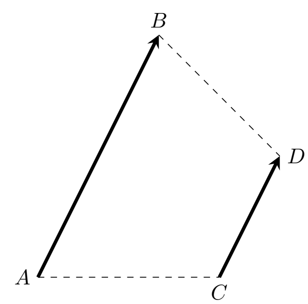


Figura 1: Segmentos orientados de mesmo sentido.

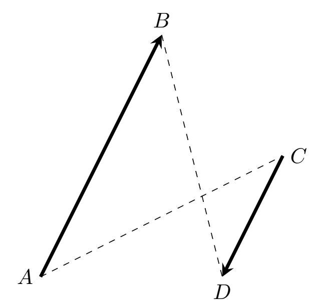


Figura 2: Segmentos orientados de sentido contrário.

(ii) Se os pontos A, B, C e D são colineares (isto é, eles pertencem a uma mesma reta), considere dois pontos A' e B' tais que A' não pertença à reta AB e os segmentos orientados (A', B') e (A, B) sejam de mesmo sentido (de acordo com o item (i) dessa definição). Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são de *mesmo sentido* se (A', B') e (C, D) são de mesmo sentido (Figura 3). Se isso não ocorrer, dizemos que (A, B) e (C, D) são de *sentido contrário* (Figura 4).

Observe que se $A \neq B$, então (A, B) e (B, A) têm mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário.

Definição 1.5. Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são ditos *equipolentes* se forem ambos nulos, ou então, nenhum

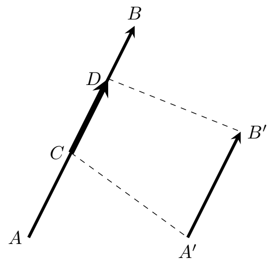


Figura 3: Segmentos orientados de mesmo sentido.

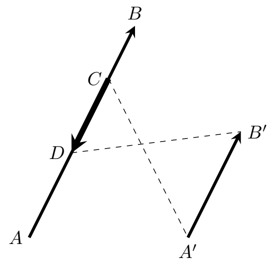
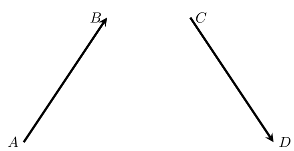


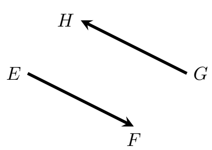
Figura 4: Segmentos orientados de sentido contrário.

deles sendo nulo, se forem de mesmo comprimento, direção e mesmo sentido. Se (A, B) é equipolente a (C, D), então escrevemos $(A, B) \sim (C, D)$.

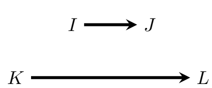
Vejamos alguns exemplos.



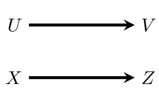
(A, B) e (C, D) não são equipolentes pois não possuem a mesma direção.



(E, F) e (G, H) não são equipolentes, porque não possuem o mesmo sentido.



(I, J) e (K, L) não são equipolentes, pois não possuem o mesmo comprimento.



(U, V) e (X, Z) são equipolentes.

Proposição 1.6. A relação de equipolência é uma relação de equivalência, isto é, para quaisquer segmentos orientados (A, B), (C, D) e (E, F), temos:

(i) $(A, B) \sim (A, B)$;

(ii) Se $(A, B) \sim (C, D)$, então $(C, D) \sim (A, B)$;

(iii) Se ocorrer $(A, B) \sim (C, D)$ e $(C, D) \sim (E, F)$, então $(A, B) \sim (E, F)$.

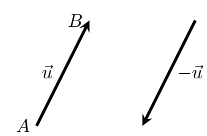
Denotemos por $\overrightarrow{AB}$ o conjunto formado por todos os segmentos orientados que são equipolentes ao segmento (A, B). Dizemos que $\overrightarrow{AB}$ é a *classe de equipolência* de (A, B).

Como $\sim$ é uma relação de equivalência, cada segmento orientado está em uma e somente uma classe de equipolência. Deste modo, temos que $(A, B) \sim (C, D)$ se, e somente se, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Um elemento de uma classe de equivalência é chamado de *representante* da classe.

Definição 1.7. Um *vetor* é uma classe de equipolência de segmentos orientados.

Faremos, agora, algumas considerações:

- O vetor determinado pelo segmento orientado (A, B) será denotado por $\overrightarrow{AB}$. Algumas vezes, escreveremos $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$,... para indicarmos um vetor.
- Temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $(A, B) \sim (C, D)$.
- *Vetor nulo* é o vetor que tem como representante um segmento orientado nulo e será denotado por $\vec{0}$. Assim, $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, para qualquer ponto A.
- Se $\vec{u}$ é um vetor com representante (A, B), o *vetor oposto* de $\vec{u}$, denotado por $-\vec{u}$, é o vetor que tem como representante o segmento orientado (B, A). Portanto, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



- Diremos que dois vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *paralelos* (e escrevemos $\vec{u}//\vec{v}$) se seus representantes forem de mesma direção. Assumimos que o vetor nulo é paralelo a qualquer vetor. Por sua vez, dois vetores são ditos de *mesmo sentido* se seus representantes forem de mesmo sentido.
- A *norma* do vetor $\vec{u}$ será denotada por $||\vec{u}||$ e definida como sendo o comprimento de um (e, portanto, de todos) os representantes de $\vec{u}$.. Se $||\vec{u}|| = 1$, diremos que $\vec{u}$ é um *vetor unitário*. A norma de um vetor satisfaz as seguintes propriedades:

  (a) $||\vec{u}|| \geq 0$, para qualquer vetor $\vec{u}$;

  (b) $||\vec{u}|| = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$;

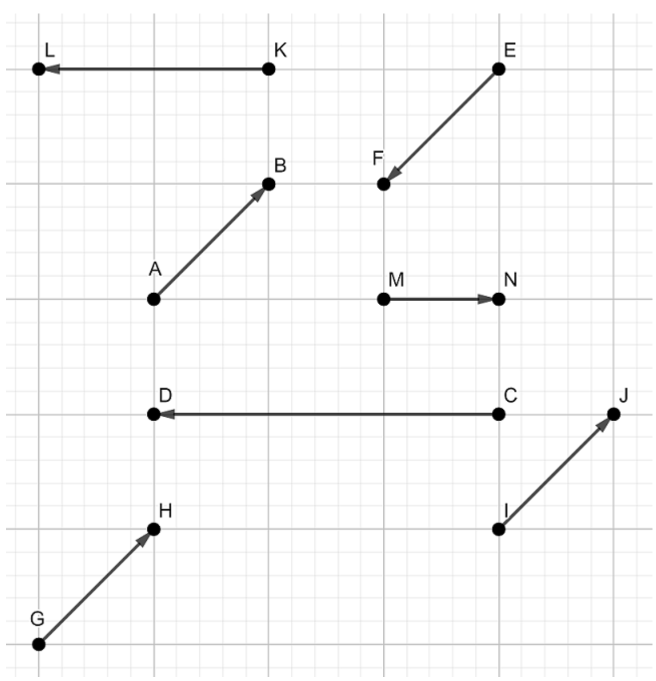
  (c) $||\vec{u}|| = ||-\vec{u}||$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

Proposição 1.8. Seja $\vec{u}$ um vetor qualquer. Escolhido arbitrariamente um ponto P, existe um segmento orientado representante de $\vec{u}$ com origem P, isto é, existe um ponto B tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$. Além disso, tal representante (e, portanto, o ponto B) é único, ou seja, se $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB}$, então $A = B$.

Essa proposição nos diz que um vetor é uma "flecha" que pode ser colocada em qualquer posição do espaço, desde que se preservem seu comprimento, sua direção e seu sentido.

Proposição 1.9. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Então $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm normas iguais, são de mesma direção e mesmo sentido.

Exemplo 1.10. No quadriculado abaixo, são dados 7 segmentos orientados.

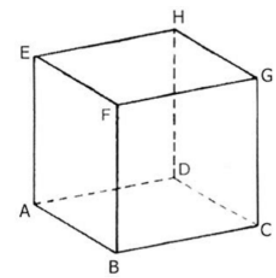


Vemos que os segmentos orientados (A, B), (G, H) e (I, J) são equipolentes; assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IJ}$.

Os segmentos orientados (A, B) e (E, F) têm mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário. Desse modo, $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB}$.

Os segmentos orientados (C, D), (K, L) e (M, N) são de mesma direção, mas não possuem mesmo comprimento. Logo, são dois a dois não-equipolentes.

Exemplo 1.11. A figura abaixo é um cubo:



Temos que:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$ e $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

Vemos ainda que:

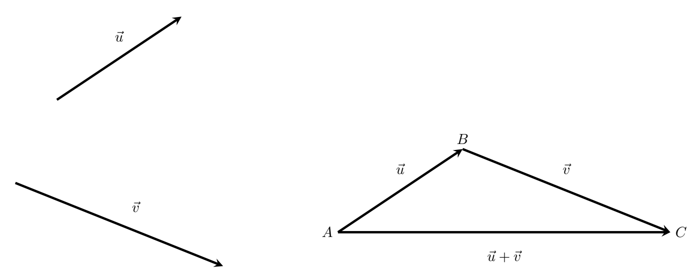
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{CH}$

2 Operações entre vetores

Nesta seção apresentaremos algumas operações básicas envolvendo vetores.

2.1 Adição de vetores

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, seja (A, B) um representante qualquer de $\vec{u}$ e seja (B, C) o representante de $\vec{v}$ que tem origem B (a existência de tal representante é garantida pela Proposição 1.8). A *adição* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor que tem (A, C) como representante e este será denotado por $\vec{u}+\vec{v}$ e chamado de *vetor soma*. Assim, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Assim, para quaisquer pontos A, B e C, temos $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Para determinar o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$, pode-se usar também a regra do paralelogramo, de acordo com a Figura 5.

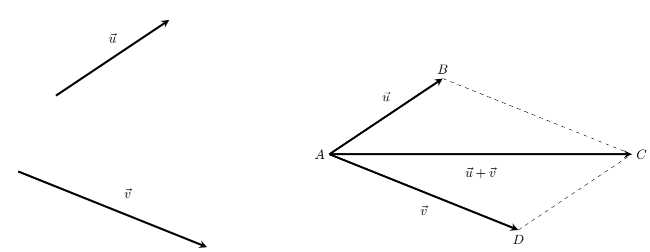


Figura 5

A operação de adição entre vetores satisfaz algumas propriedades.

Proposição 2.1. Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, temos:

(i) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associatividade);

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatividade);

(iii) Existe um único vetor tal que a soma desse vetor com qualquer outro vetor $\vec{u}$ resulta em $\vec{u}$. Tal vetor é o vetor nulo: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (existência de elemento neutro);

(iv) Para cada $\vec{u}$, existe um único vetor tal que a soma de tal vetor com $\vec{u}$ resulta no vetor nulo. Tal vetor é o oposto de $\vec{u}$, ou seja, o vetor $-\vec{u}$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (existência de elemento oposto).

A *subtração* (ou diferença) $\vec{u} - \vec{v}$ de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definida por $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. As Figuras 6 e 7 representam o vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$. De acordo com a Figura 7, temos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Logo,

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} =$$
$$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}.$$

Figura 6

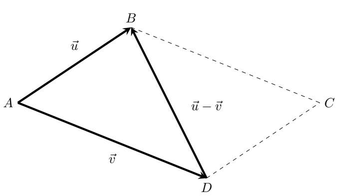
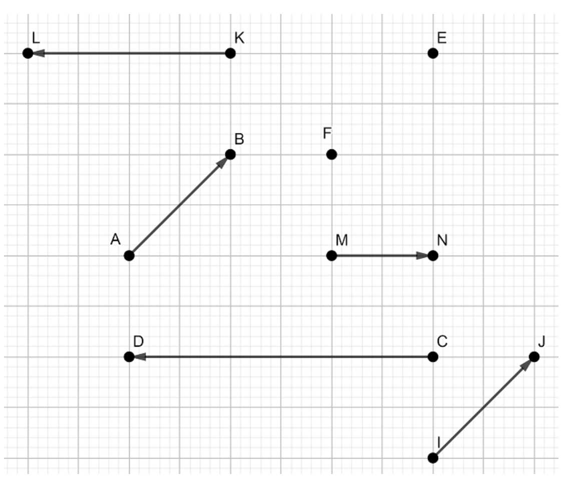


Figura 7

Exercício 2.2. No quadriculado abaixo, estão representados alguns pontos e segmentos orientados.



Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ os vetores definidos por

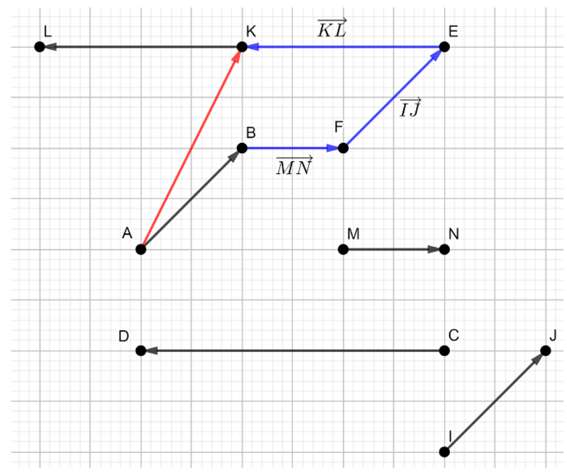
$$\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KL}$$
$$\vec{y} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN}$$

(a) Determine o representante de $\vec{x}$ que tem o ponto A como ponto inicial.

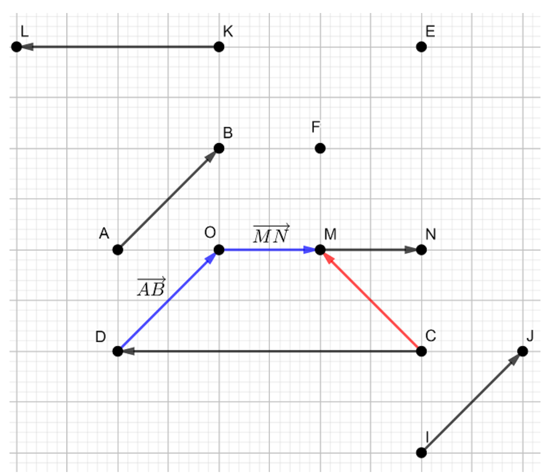
(b) Determine o representante de $\vec{y}$ que tem o ponto C como ponto inicial.

Solução:

(a) Vemos que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{IJ}$ e que $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{KL}$. Assim,
$\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK}$.
O representante é (A, K).

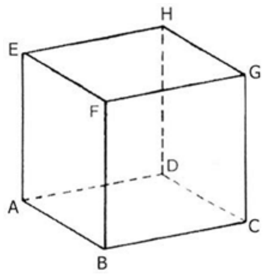


(b) Seja 0 o ponto tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DO}$. Desta forma, conforme vemos na figura abaixo, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM}$. Portanto, $\vec{y} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{CM}$. O representante é (C, M).



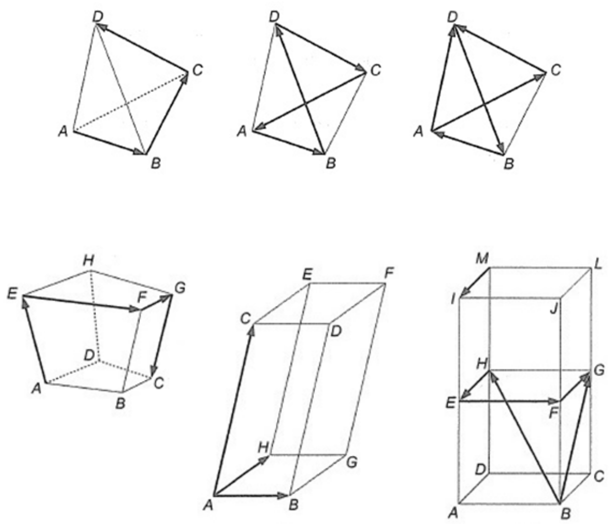
Exercício 2.3. Sabendo-se que a figura abaixo é um cubo, seja $\vec{u}$ o vetor definido por $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BD}$. Determine o representante de $\vec{u}$ que tem o ponto D como ponto inicial.

Solução: Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$,



temos $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} = = \overrightarrow{DH}$.

Exercício 2.4. Determine a soma dos vetores indicados em cada caso.



2.2 Multiplicação de vetor por um número real

Dados um vetor $\vec{u}$ e um número real α (chamado escalar), a multiplicação de α por $\vec{u}$ é o vetor $\alpha\vec{u}$, chamado *produto de α por $\vec{u}$*, tal que:

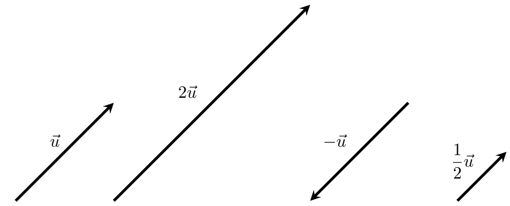
(a) Se $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{u} = \vec{0}$;

(b) Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{u}$ caracteriza-se por:

- $\alpha\vec{u} // \vec{u}$ ($\alpha\vec{u}$ é paralelo a $\vec{u}$);
- $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ são de mesmo sentido se $\alpha > 0$, e de sentido contrário se $\alpha < 0$;
- $||\alpha\vec{u}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{u}||$, em que $|\alpha|$ é o módulo do número real α.

Vejamos alguns exemplos:

Se $\vec{v}$ é um vetor não nulo, o vetor $\dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ é chamado *versor* de $\vec{v}$.



Proposição 2.5. Para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

(i) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

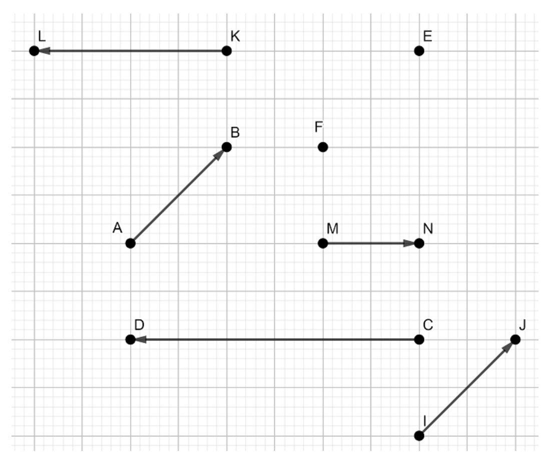
(ii) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

(iii) $1\vec{u} = \vec{u}$;

(iv) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$.

Sendo $\mathbb{V}^3$ o conjunto dos vetores do Espaço, segue das Proposições 2.1 e 2.5 que $\mathbb{V}^3$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial quando munido com as operações de adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar real.

Exercício 2.6. No quadriculado abaixo, estão representados alguns pontos e segmentos orientados. Seja $\vec{v}$ o vetor definido por $\vec{v} = 2\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{MN} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$. Determine o representante de $\vec{v}$ que tem C como ponto inicial.

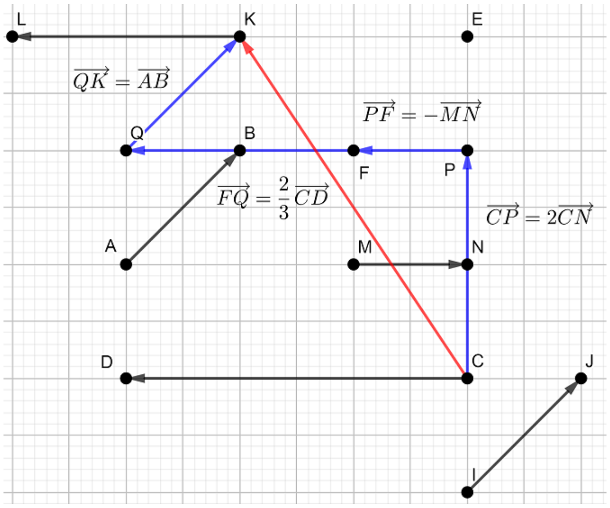


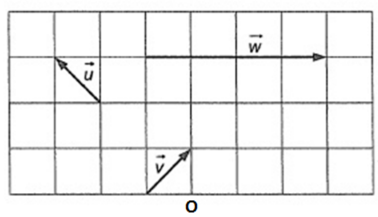
Solução: Seja P o ponto tal que $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CN}$ (veja a figura abaixo). Daí, $-\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PF}$. Seja Q o ponto tal que $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FQ}$. Disso vem que $\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{AB}$. Portanto, $\vec{v} = 2\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{MN} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{CK}$. Obtemos que (C, K) é o representante.

O próximo resultado trata do paralelismo entre vetores.

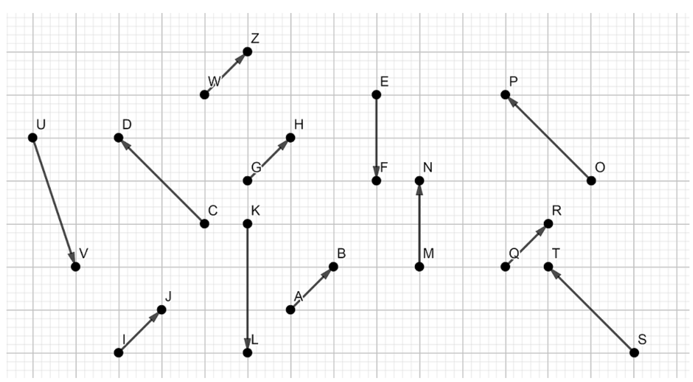
Proposição 2.7. Dois vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Exercício 2.8. Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ na figura abaixo, determine o representante do vetor $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + \dfrac{5}{4}\vec{w}$ com origem no ponto O.





Exercício 2.9. No quadriculado abaixo, são dados 12 segmentos orientados.



(a) Liste os segmentos orientados que representam o vetor $\overrightarrow{AB}$.

(b) Liste os segmentos orientados que representam o vetor $\overrightarrow{ST}$.

(c) Os segmentos (E, F) e (K, L) representam o mesmo vetor? Justifique.

(d) Os segmentos (E, F) e (M, N) representam o mesmo vetor? Justifique.

(e) Os segmentos (E, F) e (U, V) representam o mesmo vetor? Justifique.

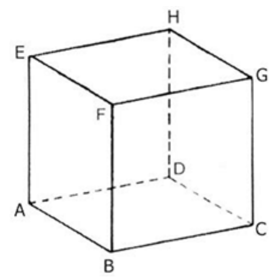
(f) Seja $\vec{x} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AB}$. Determine o o representante de $\vec{x}$ que tem C como ponto inicial.

(g) Seja $\vec{y} = \overrightarrow{UV} + 3\overrightarrow{WZ} + \overrightarrow{EF}$. Determine o o representante de $\vec{y}$ que tem U como ponto inicial.

(h) Seja $\vec{t} = -\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OP}$. Determine o o representante de $\vec{t}$ que tem M como ponto inicial.

Exercício 2.10. Sabendo-se que a figura abaixo é um cubo, considere os vetores $\vec{x}$ e $\vec{a}$ definidos por:

$$\vec{x} = \overrightarrow{EF} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{HC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{HG}$$
$$\vec{a} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BG}$$



(a) Determine o representante do vetor $\vec{x}$ que tem E como ponto inicial. Determine o representante do vetor $\vec{a}$ que tem C como ponto inicial.

(b) Determine o representante de $\vec{y}$ que tem D como ponto inicial, sendo $\vec{y}$ o vetor que satisfaz a equação

$$3(\vec{y} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{BF}.$$

2.3 Soma de ponto com vetor

Considere um ponto P e um vetor $\vec{u}$. Pela Proposição 1.8, existe um único ponto Q tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$. Nesse caso, o ponto Q é chamado *soma de* P *com* $\vec{u}$ e é denotado por $P + \vec{u}$.

$$P + \vec{u} = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{u}$$

A notação $P - \vec{u}$ é usada para indicar a soma do ponto P com o vetor oposto de $\vec{u}$.

Note que $P + \vec{0} = P$, pois se $P + \vec{0} = Q$, então $\vec{0} = \overrightarrow{PQ}$ e, consequentemente, $P = Q$.

3 Dependência e independência linear. Base

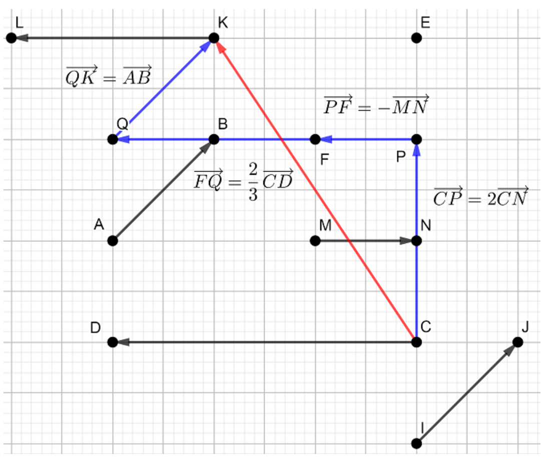
Dado um vetor $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$, dizemos que $\vec{u}$ é uma *combinação linear* dos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ (ou que $\vec{u}$ é *gerado* pelos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$) se existirem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que $\vec{u}$ se escreve como

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n}.$$

Exemplo 3.1. O vetor nulo é gerado por quaisquer vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ de $\mathbb{V}^3$, pois $\vec{0} = 0\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + \ldots + 0\vec{v_n}$ (todos os escalares iguais a zero).

Exemplo 3.2. Na figura abaixo, vemos que o vetor $\overrightarrow{CK}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AB}$, pois, conforme já vimos em um exemplo anterior,

$$\overrightarrow{CK} = 2\,\overrightarrow{CN} + (-1)\overrightarrow{MN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} + 1\,\overrightarrow{AB}$$



Exercício 3.3. Considerando os pontos e segmentos orientados dados no quadriculado acima, escreva:

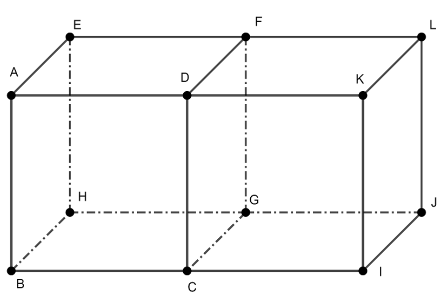
(i) $\overrightarrow{AF}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$

(ii) $\overrightarrow{QA}$ como combinação linear de $\overrightarrow{KL}$ e $\overrightarrow{PC}$.

Exercício 3.4. Sabendo-se que a figura abaixo é uma união de dois cubos com mesmas medidas, escreva:

(i) $\overrightarrow{AG}$ como combinação linear de $\overrightarrow{IK}$ e $\overrightarrow{DL}$

(ii) $\overrightarrow{BL}$ como combinação linear de $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{KA}$ e $\overrightarrow{IJ}$.



Antes da próxima definição, iremos fixar o conceito de *sequência ordenada de vetores*: dado um número natural n, o símbolo $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$ indica a sequência ordenada dos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$. Daí $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}) = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n})$ se, somente se, $\vec{v_i} = \vec{u_i}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por exemplo, se $\vec{u} \neq \vec{v}$, então $(\vec{u}, \vec{v}) \neq (\vec{v}, \vec{u})$.

Definição 3.5. Diremos que a sequência de vetores $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$ é *linearmente independente* (LI) se a combinação linear $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$ implicar em $\alpha_i = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Caso contrário, diremos que a sequência é *linearmente dependente* (LD), ou seja, a sequência $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$ é LD se existirem escalares não todos iguais a zero tais que $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$.

Exercício 3.6. Suponha que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja LI e considere $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{c} = \vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{d} = \vec{u} - \vec{w}$.

(i) Mostre que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é LI.

(ii) A sequência $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})$ é LI ou LD?

Solução:

(i) Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Então $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) + \beta(\vec{u}+\vec{w}) + \gamma(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0}$ e disso resulta a combinação linear $(\alpha+\beta)\vec{u} + (\alpha+\gamma)\vec{v} + (\beta+\gamma)\vec{w} = \vec{0}$. Como $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, obtemos $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$. É possível mostrar que o sistema dado tem solução única $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (prove isso!). Isso prova que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é LI.

(ii) Como $\vec{a} - \vec{c} - \vec{d} = \vec{u} + \vec{v} - (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} - \vec{w}) = \vec{0}$ (ou seja, o vetor $\vec{0}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$, com escalares não todos iguais a zero), concluímos que a sequência é LD.

Observe que se a sequência $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$ é LD, então um dos vetores é combinação linear dos demais. Por exemplo, se $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$ e $\alpha_1 \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{v_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{v_2} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{v_n}$$

e, assim, $\vec{v_1}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$.

De um modo geral, temos:

Teorema 3.7. Uma sequência $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$ é LD se, e somente se, um dos vetores é combinação linear dos demais.

Agora, iremos abordar os conceitos de dependência e independência linear do ponto de vista geométrico. O que se leva em conta aqui é o número de vetores da sequência.

- A sequência $(\vec{v})$ é LD se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.

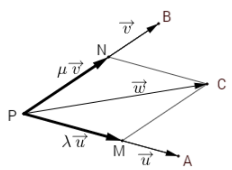
Isso segue diretamente da definição de multiplicação de vetor por um número real, uma vez que $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

- A sequência $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

  De fato, se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, a conclusão é imediata. Supondo $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, vemos que:

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}) \text{ é LD} &\iff \text{um deles é gerado pelo outro} \\ &\iff \vec{u} = \alpha\vec{v} \text{ ou } \vec{v} = \beta\vec{u} \\ &\iff \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são paralelos} \end{aligned}$$

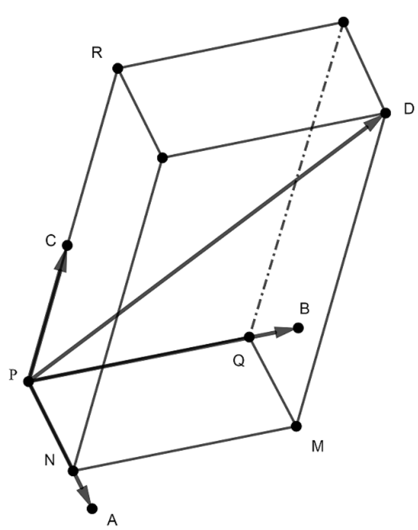
- A sequência $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares (ou seja, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ possuem representantes em um mesmo plano).



$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{PA} & \lambda\vec{u} &= \overrightarrow{PM} \\ \vec{v} &= \overrightarrow{PB} & \mu\vec{v} &= \overrightarrow{PN} \\ \vec{w} &= \overrightarrow{PC} & \vec{w} &= \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \end{aligned}$$

- Toda sequência com quatro ou mais vetores de $\mathbb{V}^3$ é sempre LD.

  Isso equivale a dizer que dados quatro ou mais vetores de $\mathbb{V}^3$, sempre é possível escrever um deles como combinação linear dos outros.



$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{PA} \\ \vec{v} &= \overrightarrow{PB} \\ \vec{w} &= \overrightarrow{PC} \\ \vec{z} &= \overrightarrow{PD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\vec{u} &= \overrightarrow{PN} \\ \beta\vec{v} &= \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM} \\ \gamma\vec{w} &= \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{MD} \end{aligned}$$

$$\vec{z} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

Proposição 3.8. Seja $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma sequência LI. Se $\vec{u}$ é um vetor qualquer de $\mathbb{V}^3$, então existem escalares α_1, α_2 e α_3 tais que $\vec{u} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}$.

Além disso, os escalares α_1, α_2 e α_3 são únicos. Ou seja, se $\vec{u} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}$, então $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ e $\alpha_3 = \beta_3$.

Demonstração. Consideremos $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$. Se $\vec{u} = \vec{e_i}$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$, digamos $\vec{u} = \vec{e_1}$, então podemos escrever

$$\vec{u} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} + 0 \cdot \vec{e_3},$$

em que $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Agora, vamos supor que $\vec{u} \neq \vec{e_i}$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Como $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{u})$ é LD, existem escalares λ_1, λ_2, λ_3 e λ tais que

$$\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3} + \lambda\vec{u} = \vec{0}.$$

Afirmamos que $\lambda \neq 0$. De fato, supondo $\lambda = 0$, obtemos $\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3} = \vec{0}$. Mas como $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é LI, segue que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e, consequentemente, $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{u})$ seria LI, o que é um absurdo. Logo, devemos ter $\lambda \neq 0$ e, assim, podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{e_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{e_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda}\vec{e_3},$$

com escalares $\alpha_1 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda}$, $\alpha_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda}$ e $\alpha_3 = -\dfrac{\lambda_3}{\lambda}$.

Para provar a unicidade, tomemos $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}$. Temos $(\alpha_1 - \beta_1)\vec{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e_2} + (\alpha_3 - \beta_3)\vec{e_3} = \vec{0}$ e, sendo $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ LI, obtemos $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$ e $\alpha_3 - \beta_3 = 0$, ou seja, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ e $\alpha_3 = \beta_3$. □

Vejamos agora a definição de base para $\mathbb{V}^3$.

Definição 3.9. Qualquer sequência de três vetores LI é chamada de *base* para $\mathbb{V}^3$.

Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base. De acordo com a última proposição, dado $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$, existem únicos escalares α_1, α_2 e α_3 tais que

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}.$$

Os escalares α_1, α_2, α_3 são denominados *coordenadas* do vetor $\vec{u}$ na base E e usaremos a notação

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_E.$$

Por exemplo, se $\vec{u} = -\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$, então $\vec{u} = (-1, 5, 2)_E$. Se $\vec{v} = 3\vec{e_1} + \vec{e_3}$, então $\vec{v} = (3, 0, 1)_E$. Ainda, $\vec{e_1} = (1, 0, 0)_E$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)_E$ e $\vec{e_3} = (0, 0, 1)_E$.

Observação 3.10. Existem infinitas bases para $\mathbb{V}^3$. Após fixada uma base, as coordenadas de um vetor nessa base ficam determinadas de modo único.

Uma forma de determinar se uma sequência com três vetores é LI é dada na proposição a seguir.

Proposição 3.11. Fixada uma base E, consideremos os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_E$. A sequência $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Logo, a sequência $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercício 3.12. Fixada uma base E, verifique se a sequência $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base para $\mathbb{V}^3$ ou não.

(a) $\vec{u} = (2, -1, 0)_E$, $\vec{v} = (1, -1, 2)_E$ e $\vec{w} = (1, 0, 2)_E$;

(b) $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (0, 1, 3)_E$ e $\vec{w} = (4, -3, 11)_E$.

Solução: (a) Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, segue que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI e, portanto, é base.

(b) Temos $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 0$; logo a sequência é LD e, com isso, não é uma base para $\mathbb{V}^3$.

Proposição 3.13. Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base. Então:

(i) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_E + (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_E = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)_E$;

(ii) $\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_E = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)_E$.

(iii) $\vec{0} = (0, 0, 0)_E$;

(iv) $-(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_E = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3)_E$.

Exemplo 3.14. Sendo $\vec{u} = (-1, 2, 0)_E$ e $\vec{v} = (3, -3, 4)_E$ e $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$, as coordenadas de $\vec{w}$ na base E são:

$\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v} = -3(-1, 2, 0)_E + 2(3, -3, 4)_E =$

$= (3, -6, 0)_E + (6, -6, 8)_E = (9, -12, 8)_E$.

Exercício 3.15. Fixada uma base E, considere os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)_E$, $\vec{v} = (3, 2, 1)_E$ e $\vec{w} = (9, 8, 6)_E$.

(a) Mostre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base para $\mathbb{V}^3$.

(b) Sendo $\vec{z} = (1, 2, 4)_E$, escreva $\vec{z}$ como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Solução: (a) Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, temos que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI e, portanto, é base para $\mathbb{V}^3$.

(b) Devemos determinar números reais α, β, γ tais que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{z}$, ou seja, $\alpha(1, 2, 3) + \beta(3, 2, 1) + \gamma(9, 8, 6) = (1, 2, 4)$. Disso resulta o seguinte sistema de equações nas incógnitas α, β, γ:

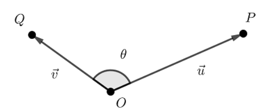
$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 9\gamma = 1 \\ 2\alpha + 2\beta + 8\gamma = 2 \\ 3\alpha + \beta + 6\gamma = 4 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $\alpha = 5/2$, $\beta = 5/2$ e $\gamma = -1$ (verifique!). Portanto, $\vec{z} = \frac{5}{2}\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v} - \vec{w}$.

Exercício 3.16. Fixada uma base E, considere os vetores $\vec{u} = (1, 0, 2)_E$, $\vec{v} = (1, 2, -1)_E$, $\vec{w} = (1, 2, 4)_E$ e $\vec{z} = (5, 6, -4)_E$. Mostre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base para $\mathbb{V}^3$ e escreva $\vec{z}$ como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Aqui, precisamos das definições de medida angular entre vetores e de vetores ortogonais.

Definição 3.17. Dados vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{V}^3$, consideremos representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com origem um um mesmo ponto, digamos $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$. Chama-se *medida angular* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a medida θ do ângulo $P\hat{O}Q$, em que $0 \leq \theta \leq \pi$ (se a medida for em radianos) e $0 \leq \theta \leq 180$ (se a medida for em graus). Escrevemos $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$. Quando $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, colocamos $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

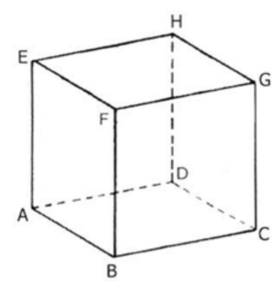


Definição 3.18. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos são ditos *ortogonais*, e escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$, se $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ rad. Definimos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

Definimos agora base ortonormal.

Definição 3.19. Uma base $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é *ortonormal* se $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ são vetores unitários e dois a dois ortogonais.

Exemplo 3.20. Suponha que a figura abaixo é um cubo, com arestas medindo 1 unidade de medida.



Neste caso, temos que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ é uma base ortonormal.

Proposição 3.21. Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal. Se $\vec{u} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}$, então

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Exemplo 3.22. Seja E uma base ortonormal e considere os vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)_E$ e $\vec{v} = (1, -2, 2)$. Então

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

4 Produtos entre vetores

Salvo menção contrária, a partir daqui, toda base considerada é ortonormal.

4.1 Produto escalar

Definição 4.1. Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{V}^3$, o *produto escalar* (ou *produto interno*) entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número real denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e definido como segue:

- se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ for o vetor nulo, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem ambos não nulos e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \cos\theta$.

Proposição 4.2. Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as propriedades:

(i) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

(ii) $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;

(iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

(iv) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$;

(v) $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$;

(vi) $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Demonstração. Faremos aqui apenas a prova dos itens (v) e (vi).

(v) Observamos que se $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ e, desse modo, $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = 0 = ||\vec{u}||$, ou seja, $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = ||\vec{u}||$. Agora, se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ rad. Desta forma, temos $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||||\vec{u}|| \underbrace{\cos 0}_{=1} = ||\vec{u}||^2$ e, assim, $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = ||\vec{u}||$.

(vi) Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, o resultado é imediato. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, temos: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. $\square$

Se conhecermos as coordenadas dos vetores em uma base ortonormal, o cálculo do produto escalar entre eles fica mais simples.

Proposição 4.3. Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$, em que E é base ortonormal, então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

Exercício 4.4. Suponha que a base considerada seja ortonormal. Sabendo-se que $\vec{u}$ é ortogonal a $(-3, 0, 1)$ e que, além disso, $\vec{u} \cdot (1, 4, 5) = 24$ e $\vec{u} \cdot (-1, 1, 0) = 1$, determine as coordenadas de $\vec{u}$ nessa base.

Solução: Façamos $\vec{u} = (x, y, z)$. Como $\vec{u}$ é ortogonal a $(-3, 0, 1)$, temos $\vec{u} \cdot (-3, 0, 1) = 0$, ou seja, $-3x + z = 0$. Visto que $\vec{u} \cdot (1, 4, 5) = 24$, obtemos $x + 4y + 5z = 24$. De $\vec{u} \cdot (-1, 1, 0) = 1$ vem que $-x + y = 1$. Disso resulta o seguinte sistema de equações lineares: $\begin{cases} -3x + z = 0 \\ x + 4y + 5z = 24 \\ -x + y = 1 \end{cases}$, cuja solução é $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Portanto, $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

Definição 4.5. Seja $\vec{u}$ um vetor não-nulo. Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer, o vetor $\vec{p}$ é chamado *projeção ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$, e indicado por $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, se $\vec{p}$ satisfaz as seguintes condições:

(i) $\vec{p}$ é paralelo a $\vec{u}$;

(ii) $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$.

Nas figuras abaixo, temos $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OC}$ ($\vec{p}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$) e $\vec{v} - \vec{p} = \overrightarrow{CB}$.

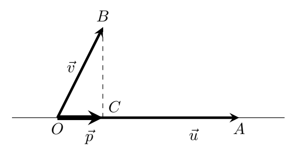


Figura 8: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ rad

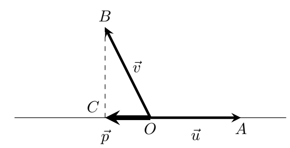


Figura 9: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ rad

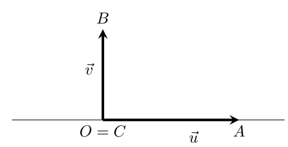


Figura 10: $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad

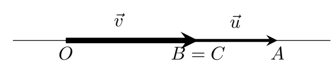


Figura 11: $\theta = 0$ rad

Proposição 4.6. Seja $\vec{u}$ um vetor não-nulo. Qualquer que seja $\vec{v}$, existe e é única a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Sua expressão em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$$

e sua norma é dada por

$$||\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}|| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{||\vec{u}||}.$$

Exercício 4.7. Sendo E uma base ortonormal, considere os vetores $\vec{u} = (2, -2, 1)_E$ e $\vec{v} = (3, -6, 0)_E$.

(a) Determine a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$;

(b) Determine $\vec{p}$ e $\vec{q}$ tais que $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, sendo $\vec{p}$ paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{q} \perp \vec{u}$.

Solução: (a) Vemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2.3 + (-2).(-6) + 1.0 = 18$. Ainda, $||\vec{u}||^2 = 2^2 + (-2)^2 + 1 = 9$. Logo,

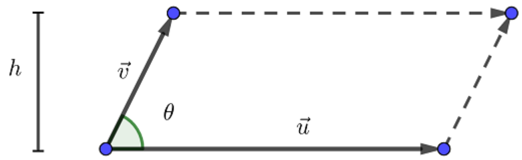
$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||^2}\vec{u} = \frac{18}{9}(2, -2, 1) = (4, -4, 2)_E$$

(b) Note que $\vec{p}$ é a projeção ortogonal calculada em (a). Como $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, temos $\vec{q} = \vec{v} - \vec{p}$ e, assim,

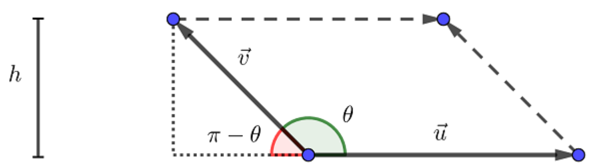
$$\vec{q} = \vec{v} - \vec{p} = (3, -6, 0)_E - (4, -4, 2)_E = (-1, -2, -2)_E.$$

4.2 Produto vetorial

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{V}^3$ e seja $\theta = \text{ang}(\vec{u},\vec{v})$. Suponha que $(\vec{u},\vec{v})$ seja LI.



Vemos que a área α do paralelogramo acima é dada por $\alpha = ||\vec{u}||h = ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\,\theta$, visto que $\text{sen}\,\theta = \dfrac{h}{||\vec{v}||}$.

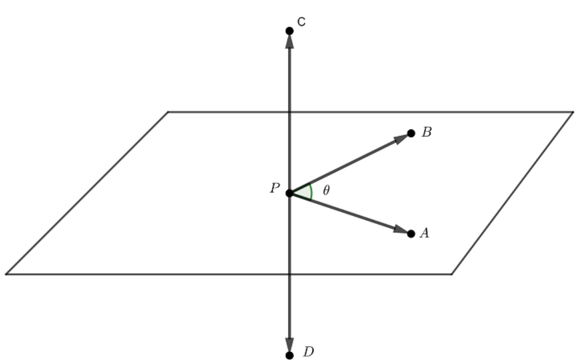


Da figura acima vem que

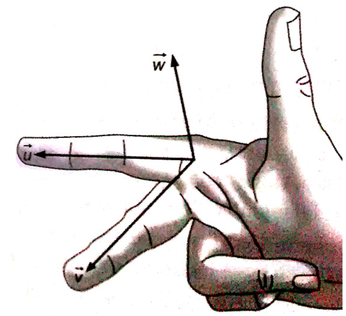
$$\alpha = ||\vec{u}||h = ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\,(\pi-\theta) =$$
$$= ||\vec{u}||||\vec{v}||\underbrace{\text{sen}\,\pi}_{=0}\cos\theta - ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\,\theta\underbrace{\cos\pi}_{=-1} =$$
$$= ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\,\theta$$

Concluímos assim que a área α do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\alpha = ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\,\theta$.

Escrevamos agora $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$. Seja r a reta perpendicular ao plano determinado por P, A e B que passa por P.



Sendo $\alpha = ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\,\theta$, temos que $\alpha > 0$ e existem dois pontos de r que distam α do ponto P, digamos C e D. Obtemos assim os vetores $\overrightarrow{PC}$ e $\overrightarrow{PD}$ e iremos escolher um deles para representar o produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Tal escolha é baseada na *Regra da Mão Direita*: "colocando-se o indicador da mão direita na direção e sentido de $\vec{u}$ (1^o vetor da sequência $(\vec{u},\vec{v})$) e o dedo médio na direção e sentido de $\vec{v}$ (2^o vetor da sequência $(\vec{u},\vec{v})$), conforme figura abaixo, o vetor escolhido $\vec{w}$ é o que pode ser colocado na direção e sentido do polegar."



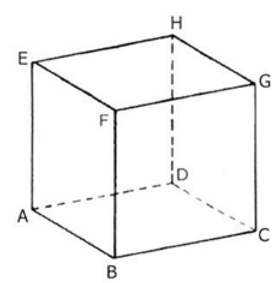
Pela construção feita aqui, o vetor escolhido é $\overrightarrow{PC}$.

Definição 4.8. Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{V}^3$, o *produto vetorial* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor denotado por $\vec{u}\wedge\vec{v}$ e definido como segue:

(i) se $(\vec{u},\vec{v})$ é LD, então $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$;

(ii) se $(\vec{u},\vec{v})$ é LI, então $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é o vetor $\overrightarrow{PC}$ construído acima.

Exercício 4.9. Sabendo-se que a figura abaixo é um cubo com arestas medindo 1, determine: $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF}$.



Algumas propriedades são destacadas abaixo:

Proposição 4.10. Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{V}^3$ e qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que:

(i) $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;

(ii) se $(\vec{u},\vec{v})$ é LI, então a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $||\vec{u}\wedge\vec{v}||$ e, neste caso, $||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\,\theta$, em que $\theta = \text{ang}(\vec{u},\vec{v})$;

(iii) $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$;

(iv) $\vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\wedge\vec{v} = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})$

Proposição 4.11. Seja $E = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal e consideremos vetores $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)_E$ e $\vec{v} = (b_1,b_2,b_3)_E$. Temos que

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

A fórmula dada na proposição pode ser memorizada por meio do seguinte determinante simbólico:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 4.12. Consideremos os vetores $\vec{u} = (6, 2, -4)$ e $\vec{v} = (3, 2, -5)$. Então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

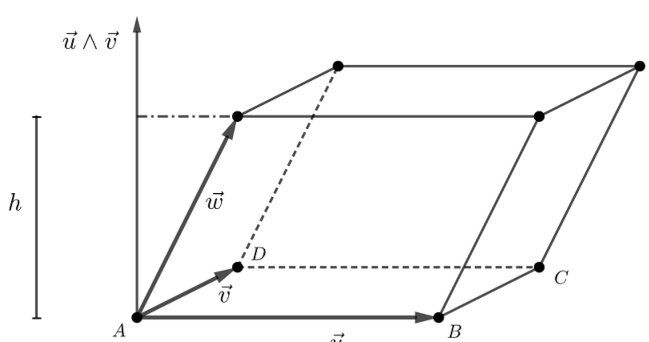
$= -2\vec{i} + 18\vec{j} + 6\vec{k} = (-2, 18, 6)$

Exercício 4.13. Determinar as coordenadas do vetor $\vec{x}$, sabendo que $\vec{x} \cdot (1, 4, -3) = -7$ e $\vec{x} \wedge (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$.

Exercício 4.14. Sejam $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (3, 0, 5)$ vetores. Se $\vec{u} = (a, b, c)$ é tal que $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = (-5, 21, 3)$, determine o números a, b e c.

4.3 Produto misto

Nosso objetivo inicial aqui é calcular o volume V do paralelepípedo dado abaixo.



Sendo S a área da base $ABCD$ e h a altura, então $V = Sh$. Agora, sabemos que $S = ||\vec{u} \wedge \vec{v}||$. Por sua vez, h é a norma da projeção ortogonal de $\vec{w}$ sobre $\vec{u} \wedge \vec{v}$, isto é,

$$h = ||\text{proj}_{\vec{u} \wedge \vec{v}} \vec{w}|| = \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}.$$

Como $\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$, obtemos

$$V = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||} ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|.$$

Definição 4.15. O *produto misto* entre os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o número real denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ e definido por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Dois resultados são dados na sequência.

Proposição 4.16. Se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$, então $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Proposição 4.17. A sequência de vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$. Equivalentemente, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

Exercício 4.18. Consideremos $\vec{u} = (1, 2, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, -3)$ e $\vec{w} = (2, 0, 0)$.

(a) Calcule o produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

(b) A sequência $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD ou LI?

(c) Determine o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Solução: (a) Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -16$ (verifique!), temos que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -16$.

(b) Pelo item (a), $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$. Logo, a sequência é $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

(c) O volume V do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é dado por $V = |\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,| = |-16| = 16$ unidades de volume.

Exercício 4.19. Os vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 5)$ determinam um paralelepípedo. Calcular seu volume e a altura relativa à base definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

5 Sistema de coordenadas

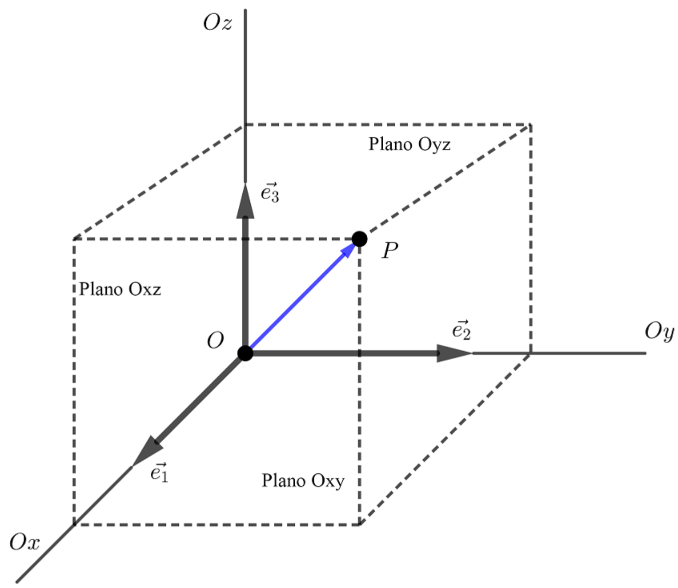
Um *sistema de coordenadas* para o espaço é um par ordenado $\Sigma = (O, E)$, em que O é um ponto fixado chamado de *origem* e $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é uma base. Se E é uma base ortonormal, dizemos que o sistema de coordenadas é *ortogonal*.

Fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$, se P é um ponto do espaço, então existem únicos escalares x_0, y_0 e z_0 tais que $\overrightarrow{OP} = x_0\vec{e_1} + y_0\vec{e_2} + z_0\vec{e_3}$. Neste caso, x_0, y_0 e z_0 são as coordenadas de P no sistema de coordenadas Σ e escrevemos $P = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$ ou $P = (x_0, y_0, z_0)$. Neste caso, o valor x_0 é chamada *abcissa* de P, y_0 é a *ordenada* de P e z_0 é a *cota* de P.

Chama-se *eixo ordenado* cada reta que contém a origem O e é paralela a um dos vetores $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$. Temos três eixos:

- eixo dos x ou das abcissas, denotado por Ox;
- eixo dos y ou das ordenadas, denotado por Oy;
- eixo dos z ou das cotas, denotado por Oz.

Cada plano determinado por um par de eixos coordenados é chamado de *plano coordenado*. O plano determinado pelos eixos Ox e Oy é denotado por Oxy. Os outros são Oxz e Oyz.



Observação 5.1. Se $\Sigma = (O, E)$ é um sistema de coordenadas então $O = (0,0,0)_\Sigma$, pois $\overrightarrow{OO} = \vec{0} = 0\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$.

Proposição 5.2. Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas. Se $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$, $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$, $\vec{u} = (a, b, c)_E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

(i) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_E$

(ii) $A + \lambda\vec{u} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)_\Sigma$

Exemplo 5.3. Consideremos aqui os pontos $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (-2, 4, 5)$. Temos que:

- $\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1, 4 - 2, 5 - 3) = (-3, 2, 2)$
- $Q + 2\overrightarrow{QP} = Q - 2\overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1)$.

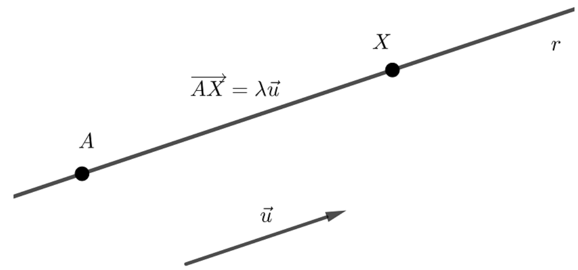
Daqui em diante, $\Sigma = (O, E)$ será um sistema ortogonal de coordenadas fixo e omitiremos os índices Σ e E.

6 Estudo da reta

6.1 Equações de reta

Definição 6.1. Um vetor não-nulo $\vec{u}$ é um *vetor diretor* para a reta r se a reta r contém algum representante do vetor $\vec{u}$.

Consideremos uma reta r contendo um ponto A e tendo $\vec{u}$ como vetor diretor:



Temos que um ponto X pertence à reta r se, e somente se os $(\overrightarrow{AX}, \vec{u})$ é LD, ou seja, se $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Isso significa que:

$$X = A + \lambda\vec{u}. \tag{1}$$

Assim, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação (1) nos dá um ponto X de r. Por outro lado, dado um ponto X de r, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a equação (1) se verifica. A reta r é, portanto, o lugar geométrico dos pontos X do espaço tais que a equação (1) se verifica.

Definição 6.2. A equação (1) é chamada *equação vetorial* da reta r, ou equação da reta r na forma vetorial. Neste caso, podemos indicar a reta r da seguinte maneira:

$$r: \ X = A + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Observação 6.3. Devido à arbitrariedade da escolha do ponto e do vetor diretor, uma reta pode ter uma infinidade de equações vetoriais diferentes. Por exemplo, se A e B são pontos de r, com $A \neq B$, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são vetores diretores de r e, desse modo, as equações $X = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, $X = A + \lambda\overrightarrow{BA}$, $X = B + \lambda\overrightarrow{AB}$ e $X = B + \lambda\overrightarrow{BA}$ são algumas das infinitas equações vetoriais de r.

Agora, suponhamos que $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$. Neste caso, a expressão $X = A + \lambda\vec{u}$ dada em (2) fica $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$, o que nos fornece $(x, y, z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$. Portanto, temos

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, a \\ y = y_0 + \lambda\, b \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + \lambda\, c \end{cases} \tag{3}$$

Note que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e, assim, a, b, c não são todos iguais a zero.

Definição 6.4. As equações dadas em (3) são denominadas sistema de *equações paramétricas* da reta r, ou sistema de equações da reta r na forma paramétrica.

Se tivemos a, b e c todos diferentes de zero em (3), então podemos escrever

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{4}$$

Definição 6.5. O sistema de equações (4) é chamado sistema de equações da reta r na *forma simétrica*, ou, por abuso de linguagem, equações da reta r na forma simétrica.

Exercício 6.6. Seja r a reta do Espaço determinada pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 5, 2)$.

(a) Obtenha equações de r nas formas vetorial, paramétrica e simétrica.

(b) Verifique se os pontos $P = (-3, -4, 5)$ e $Q = (4, 5, 6)$ são pontos de r ou não.

(c) Obtenha dois vetores diretores de r e dois pontos de r, distintos de A e B.

Solução: (a) Temos $\overrightarrow{AB} = (2, 3, -1)$. Usando este vetor e o ponto A em (1), (3) e (4), obtemos equações de r nas formas

- vetorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(2, 3, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$
- simétrica: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = 3 - z$

(b) Fazendo $x = -3$, $y = -4$ e $z = 5$ nas equações paramétricas de r, obtemos $\begin{cases} -3 = 1 + 2\lambda \\ -4 = 2 + 3\lambda \\ 5 = 3 - \lambda \end{cases}$

Podemos verificar que $\lambda = -2$ torna as três equações verdadeiras. Assim, P é um ponto de r. Por sua vez, se substituirmos $x = 4$, $y = 5$ e $z = 6$ nas equações paramétricas de r, temos o sistema $\begin{cases} 4 = 1 + 2\lambda \\ 5 = 2 + 3\lambda \\ 6 = 3 - \lambda \end{cases}$

Neste caso, a segunda equação nos fornece $\lambda = 1$, enquanto que a terceira equação nos dá $\lambda = -3$. Portanto, o ponto Q não é um ponto de r.

(c) Qualquer múltiplo por escalar não-nulo de $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor de r. Por exemplo, $2\overrightarrow{AB} = (4, 6, -2)$ e $\overrightarrow{BA} = (-2, -3, 1)$ são vetores diretores de r.

Para obtermos pontos de r, atribuímos valores para λ nas equações paramétricas de r: por exemplo, se $\lambda = 4$, temos o ponto $(9, 14, -1)$; se $\lambda = -1$, obtemos o ponto $(-1, -1, 4)$.

6.2 Posição relativa de retas

Duas retas r e s no Espaço podem ser reversas, concorrentes, paralelas distintas ou paralelas coincidentes (iguais).

Sejam $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r, $\vec{s}$ um vetor diretor da reta s, A um ponto de r e B um ponto de s. Temos:

- r e s são reversas se, e somente se, $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LI. Equivalentemente, r e s são coplanares se, e somente se, $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LD (isto inclui os casos: concorrentes, paralelas distintas e paralelas coincidentes).
- r e s são paralelas se, e somente se, $(\vec{r}, \vec{s})$ é LD.
- r e s são concorrentes se, e somente se, são coplanares e não são paralelas, isto é, $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LD e $(\vec{r}, \vec{s})$ é LI.

Sugerimos o seguinte roteiro para se estudar a posição relativa de r e s:

- Se $(\vec{r}, \vec{s})$ é LD, então r e s são paralelas. Neste caso, se A for ponto de s, então $r = s$; se A não for um ponto de s, então r e s são distintas.
- Se $(\vec{r}, \vec{s})$ é LI, então as retas não são paralelas e, assim, elas podem ser concorrentes ou reversas. Neste caso, temos que: se $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LI, então r e s são reversas; se $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LD, as retas são concorrentes.

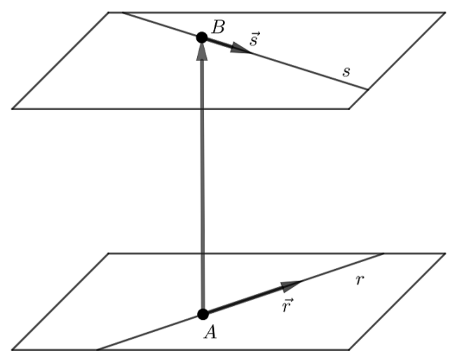


Figura 12: Retas reversas

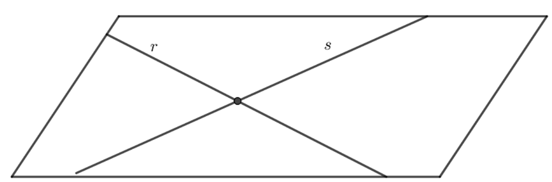


Figura 13: Retas concorrentes

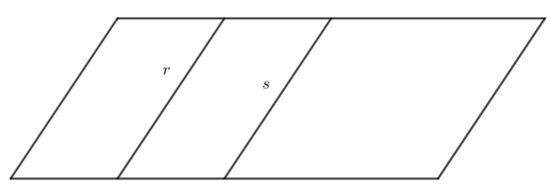


Figura 14: Retas paralelas distintas

Exercício 6.7. Seja r a reta dada pela equação vetorial

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(2, -2, -2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Em cada item, estude a posição relativa das retas r e s. Se as retas forem paralelas, diga se elas são iguais ou distintas. Se elas forem concorrentes, determine o ponto de interseção.

(a) $s : -x = y - 1 = z - 3$

(b) s contém os pontos $P = (0, 2, 1)$ e $Q = (2, 3, 4)$.

(c) $s : \begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

Solução: Escrevemos $A = (1, 2, 1)$ e $\vec{r} = (2, -2, -2)$

(a) Fazendo $x = 0$ e $x = 1$, obtemos os seguintes pontos de s: $C = (0, 1, 3)$ e $D = (1, 0, 2)$. Assim, $\overrightarrow{DC} = (-1, 1, 1)$ é um vetor diretor de s. Temos que $\vec{r}$ e $\overrightarrow{DC}$ são paralelos, pois $\vec{r} = (2, -2, -2) = (-2)(-1, 1, 1) = (-2)\overrightarrow{DC}$. Assim, $(\vec{r}, \overrightarrow{DC})$ é LD e, portanto, as retas r e s são paralelas. Agora, é fácil ver que o ponto A não é ponto de s, pois se fizermos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 1$, a equação de s não se verifica. Assim, concluímos que as retas r e s são paralelas distintas.

(b) Vemos que $\vec{s} = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, 3)$. Assim, $(\vec{r}, \vec{s})$ é LI, pois não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(2, -2, -2) = \alpha(2, 1, 3)$. Agora, $\overrightarrow{PA} = (1, 0, 0)$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, temos que $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{PA})$ é LI.
Portanto, r e s são reversas.

(c) Temos que $\vec{s} = (1, 1, 1)$ é um vetor diretor de s. Como não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(2, -2, -2) = \alpha(1, 1, 1)$, concluímos que $(\vec{r}, \vec{s})$ é LI. Logo, as retas são reversas ou concorrentes.

Vemos que $B = (8, 5, 4)$ é um ponto de s e consideramos o vetor $\overrightarrow{AB} = (7, 3, 3)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, concluímos que as retas são concorrentes.

Para determinar o ponto de interseção, iremos escrever as equações paramétricas de r com parâmetro μ e comparar tais equações com as equações de s:

$r : \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$. Desse modo, $\begin{cases} 1 + 2\mu = 8 + \lambda \\ 2 - 2\mu = 5 + \lambda \\ 1 - 2\mu = 4 + \lambda \end{cases}$

Pela primeira equação, obtemos $\lambda = 2\mu - 7$. Desse modo, usando a segunda equação, temos $2 - 2\mu = 5 + (2\mu - 7)$, o que nos fornece $\mu = 1$ e, portanto, $\lambda = -5$ (note que $\mu = 1$ e $\lambda = -5$ verificam as 3 equações do último sistema). Fazendo $\mu = 1$ no sistema de equações paramétricas de r, chegamos no ponto $(3, 0, -1)$ e este é o ponto de interseção.

Exercício 6.8. Estude a posição relativa das retas r e s. Ou seja, diga se as retas são reversas, concorrentes ou paralelas. Se elas forem concorrentes, diga em qual ponto ocorre a interseção. Se elas forem paralelas, diga se elas são paralelas iguais ou paralelas distintas.

(a) $r : X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 0, 1)$

$s : X = (3, -1, 3) + \lambda(1, 0, 4)$.

(b) $r : X = (2, -2, 1) + \lambda(5, 3, 4)$ e $s : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \frac{1}{3} + 2\lambda \end{cases}$

(c) $r : \dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 5}{3} = \dfrac{z + 2}{5}$ e $s : x = -y = \dfrac{z - 1}{4}$.

(d) $r : \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{3z + 6}{4}$ e $s : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

(e) $r : X = (-1, 6, 2) + \lambda(2, -4, -1)$

$s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$

(f) $r : \dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z + 1}{2}$ e $s : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$

(g) $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$

$s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$.

(h) $r : x + 3 = \dfrac{2y - 4}{4} = \dfrac{z - 1}{3}$

$s : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$

7 Estudo do plano

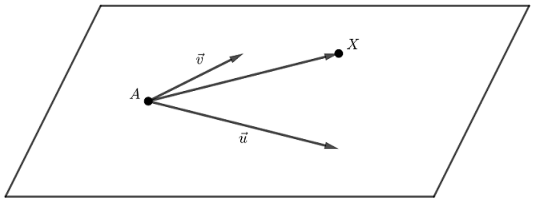
7.1 Equações de plano

Seja π um plano no Espaço. Um vetor $\vec{u}$ de $\mathbb{V}^3$ é dito *paralelo* ao plano π se $\vec{u}$ possui representante em π.

Definição 7.1. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são denominados *vetores diretores* para um plano π se ambos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem paralelos ao plano π e se a sequência $(\vec{u}, \vec{v})$ for LI.

Consideremos um plano π contendo um ponto A e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores para o plano π.

Nestas condições, um ponto X do Espaço pertence ao plano π se, e somente se, a sequência $(\vec{u},\ \vec{v}, \overrightarrow{AX})$ é LD. Uma vez que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, teremos que $X \in \pi$ se, e somente se, existem escalares $\lambda,\ \mu$ tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, ou seja, $X = A + \overrightarrow{AX} = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.



Definição 7.2. Seja π um plano que contém o ponto A e tem $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como vetores diretores. Uma *equação vetorial* do plano π é

$$\pi:\ X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v};\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Observação 7.3. Um plano pode ser representado por infinitas equações vetoriais. Por exemplo, se os pontos não-colineares A, B e C pertencem a π, algumas equações vetoriais desse plano são

$$X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$$
$$X = B + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$$
$$X = B + \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{CA}$$

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal, suponhamos $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (r, s, t)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. Neste caso, um ponto $X = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, $X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, o que equivale a termos $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(r, s, t) + \mu(m, n, p)$. Ou ainda,

$$\pi:\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda r + \mu m \\ y = y_0 + \lambda s + \mu n \quad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + \lambda t + \mu p \end{cases} \tag{6}$$

Definição 7.4. O sistema de equações (6) é chamado sistema de *equações paramétricas do plano* π, ou sistema de equações do plano π na forma paramétrica.

Vimos também que o ponto $X = (x, y, z)$ pertence ao plano se, e somente se, a sequência $(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v})$ é LD, o que equivale a

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

Se $a = \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}$, então, fazendo o desenvolvimento de Laplace segundo os elementos da linha 1 em (7), obtemos:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Fazendo agora $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, chegamos na equação $ax + by + cz + d = 0$.

Definição 7.5. A equação $ax+by+cz+d = 0$ é denominada *equação geral* do plano π. Escreve-se

$$\pi:\ ax + by + cz + d = 0$$

Observação 7.6. (1) Como $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, os valores a, b e c na equação acima não são todos nulos.

(2) Se $ax+by+cz+d = 0$ é uma equação geral do plano π, então qualquer equação equivalente a ela é uma equação de π. Por exemplo, se $\pi: 3x-2y+z+1 = 0$, então as equações $3x + z + 1 = 2y$ e $6x + 2 = 4y - 2z$ também representam π.

(3) Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com a, b e c não todos iguais a zero, pode-se mostrar que $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano do Espaço.

Exercício 7.7. Seja π o plano do Espaço que contém o ponto $A = (2, 4, -1)$ e tem $\vec{u} = (2, 3, 4)$ e $\vec{v} = (8, 9, 2)$ como vetores diretores.

(a) Apresente equações de π nas formas vetorial, paramétrica e geral.

(b) Diga se os pontos $P = (1, 1, -10)$ e $Q = (-7, -4, 7)$ são pontos de π ou não.

Solução: (a) Temos as seguintes equações:

- Equação vetorial:

$(x, y, z) = (2, 4, -1) + \lambda(2, 3, 4) + \mu(8, 9, 2) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

- Equações paramétricas:

$$\pi:\ \begin{cases} x = 2 + 2\lambda + 8\mu \\ y = 4 + 3\lambda + 9\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + 4\lambda + 2\mu \end{cases}$$

- Equação geral: temos que um ponto $X = (x, y, z)$ do Espaço é um ponto de π se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 4 & z + 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

o que nos fornece $-30x + 28y - 6z - 58 = 0$, sendo essa uma equação geral de π.

(b) O ponto $P = (1, 1, -10)$ é um ponto de π, pois se fizermos $x = 1$, $y = 1$ e $z = -10$ em $-30x+28y-6z-58 = 0$, obtemos $-30(1) + 28(1) - 6(-10) - 58 = 0$. Por sua vez, $-30(-7)+28(-4)-6(7)-58 = -2 \neq 0$; logo, Q não é ponto de π.

Exercício 7.8. Obtenha uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π. Obtenha também uma equação geral de π.

(a) π contém o ponto $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

(b) π contém os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$.

(c) π contém os pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, 1, 0)$.

(d) π contém os pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$.

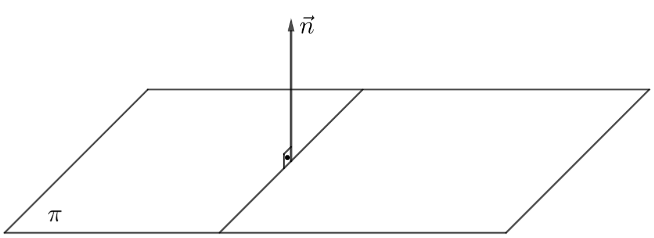
(e) π contém a reta $r : (x - 1)/2 = y/3 = 2 - z$ e o ponto $P = (1, 0, 1)$.

Proposição 7.9. Sejam $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral de um plano π e $\vec{u} = (m, n, p)$. Temos que $\vec{u}$ é paralelo a π se, e somente se, $am + bn + cp = 0$.

Exemplo 7.10. Considere o plano $\pi : 2x-9y+4z-900 = 0$. Temos que o vetor $\vec{u} = (1, 2, 4)$ é paralelo a π, visto que $2 \cdot 1 - 9 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 0$. Agora, $\vec{v} = (3, 1, 3)$ não é paralelo a π, porque $2 \cdot 3 - 9 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 9 \neq 0$.

7.2 Vetor normal a um plano

Definição 7.11. Dado um plano π, qualquer vetor não-nulo ortogonal a π é chamado de *vetor normal* a π.



Segue da definição de vetor normal que um vetor $\vec{n}$ é normal a um plano π se, e somente se, $\vec{n}$ é ortogonal aos vetores diretores de π.

Proposição 7.12. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de um plano π, então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor normal a π.

Seja π um plano e sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π e $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal a π. Um ponto $X = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, $\overrightarrow{AX}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$. Logo, X pertence a π se, e somente se,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Se $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, então a igualdade acima fica

$$ax + by + cz + d = 0$$

e, como os coeficientes a, b e c não são todos nulos (pois, $\vec{n} \neq \vec{0}$), esta é uma equação geral de π.

Por outro lado, se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral de um plano π, então o vetor não-nulo $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π. De fato, pela Proposição 7.9, se $\vec{u} = (m, n, p)$ é paralelo a π, então $am + bn + cp = 0$ e, assim, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, ou seja, $\vec{n} \perp \vec{u}$. Logo, o vetor não-nulo $\vec{n}$ é ortogonal a qualquer vetor paralelo a π, isto é, $\vec{n}$ é um vetor normal a π.

O que acabamos de fazer acima constitui a demonstração da seguinte proposição:

Proposição 7.13. O vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal ao plano π se, e somente se, $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral de π, para algum $d \in \mathbb{R}$.

Exercício 7.14. Sabendo que o plano π contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e tem $\vec{n} = (3, -1, 4)$ como vetor normal, obtenha uma equação geral de π.

Solução 1: De acordo com a Proposição 7.13, uma equação geral de π é da forma $3x-y+4z+d = 0$. Para determinarmos o valor de d, usamos o fato que $A = (1, 1, 2)$ pertence a π: daí, $3(1) - 1 + 4(2) + d = 0$. Logo, $d = -10$ e, portanto, $3x - y + 4z - 10 = 0$ é uma equação geral de π.

Solução 2: Temos que:

$$\begin{aligned} X = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 1, y - 1, z - 2) \cdot (3, -1, 4) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)3 + (y-1)(-1) + (z-2)4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x - y + 4z - 10 = 0. \end{aligned}$$

Exercício 7.15. Sabendo-se que o plano π contém os pontos $A = (9, 1, 0)$, $B = (9, 2, 2)$ e $C = (14, 2, 1)$, obtenha uma equação geral de π.

Solução: Vemos que $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 2)$ e $\overrightarrow{AC} = (5, 1, 1)$ são vetores diretores de π (justifique!). Temos que o produto vetorial

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k} = (-1, 10, -5)$$

é um vetor normal a π. Pela Proposição 7.13, π tem uma equação geral da forma $-x + 10y - 5z + d = 0$. Como

A pertence ao plano π, suas coordenadas satisfazem essa equação, ou seja, $-9+10(1)-5(0)+d=0$. Daí, $d=-1$ e, portanto, $\pi: -x+10y-5z-1=0$.

7.3 Posição relativa de reta e plano

Sejam r uma reta e π um plano no Espaço. Podemos ter que:

- r e π são transversais (ou seja, r e π se interceptam em um único ponto);
- r está contida em π;
- r é paralela a π, com interseção vazia.

Considere $\vec{r}=(m,n,p)$ um vetor diretor da reta r e seja π um plano com vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e descrito pela equação geral $\pi: ax+by+cz+d=0$. Temos que:

- Se $am+bn+cp\neq 0$ ou se $(\vec{u},\vec{v},\vec{r})$ é LI, então r e π são transversais.
- Se $am+bn+cp=0$ ou se $(\vec{u},\vec{v},\vec{r})$ é LD, então r e π não são transversais. Neste caso, tomamos um ponto A qualquer de r; se A for um ponto de π, então r está contida em π; se A não for um ponto de π, então r e π não se interceptam.

Exercício 7.16. Estude a posição relativa de r e π:

(a) $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$ $\qquad \pi: 2x+2y-z+2=0$

(b) $r: X=(1,1,4)+\lambda(3,1,4)$ $\qquad \pi: x+y-z+2=0$

Solução:

(a) As equações de r nos mostram que $\vec{r}=(1,-1,1)$ é um vetor diretor de r. Da equação de π vem que tal plano tem coeficientes $a=2,\ b=2,\ c=-1,\ d=2$. Como

$$am+bn+cp=2\cdot 1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=-1\neq 0$$

temos que r é transversal a π. Seja $P=(x,y,z)$ o ponto de interseção de r e π. Então, P é um ponto de r e, assim, $x=1+\lambda,\ y=1-\lambda$ e $z=3+\lambda$. Usando agora a equação de π (já que $P\in\pi$), obtemos:

$$2(1+\lambda)+2(1-\lambda)-(3+\lambda)+2=0 \Rightarrow \lambda=3$$

Assim, o único ponto comum a r e a π é $P=(4,-2,6)$.

(b) Um vetor diretor de r é $\vec{r}=(3,1,4)$ e os coeficientes $a,\ b,\ c$ na equação de π são, respectivamente, $1,\ 1,\ -1$. Visto que $am+bn+cp=1\cdot 3+1\cdot 1+4\cdot(-1)=0$, concluímos que r é paralela ou está contida em π.

Agora, consideremos o ponto $A=(1,1,4)$ de r. Como $1+1-4+2=0$, temos que A é um ponto de π. Portanto, r está contida em π.

Exercício 7.17. Estude a posição relativa entre o plano π e a reta r, sendo $\pi: X=(2,2,1)+\lambda(3,3,1)+\mu(0,0,5)$ e $r: X=(0,2,0)+\lambda(2,2,0)$

Solução: Note que $\vec{r}=(2,2,0)$ é um vetor diretor de r; por sua vez, $\vec{u}=(3,3,1)$ e $\vec{v}=(0,0,5)$ são vetores diretores de π. Como

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=0$$

concluímos que $(\vec{r},\vec{u},\vec{v})$ é LD. Portanto, r está contida em π ou é paralela a π. Consideremos o ponto $A=(0,2,0)$ de r. Se A for um ponto de π, então existem λ e μ tais que $(0,2,0)=(2,1,1)+\lambda(3,3,1)+\mu(0,0,5)$, o que nos fornece

$$\begin{cases} 0=2+3\lambda \\ 2=1+3\lambda \\ 0=1+\lambda+5\mu \end{cases}$$

O sistema acima é incompatível (justifique!). Logo, A não pertence ao plano π e, portanto, r é paralela a π.

Exercício 7.18. Estude a posição relativa de r e π. Ou seja, determine se r está contida em π, ou se r e π não se interceptam, ou se r e π são transversais (e, quando este for o caso, diga em qual ponto r e π se interceptam).

(a) $r: X=(1,1,1)+\lambda(3,2,1)$

$\pi: X=(1,1,3)+\lambda(1,-1,1)+\mu(0,1,3)$.

(b) $r: \dfrac{x-1}{2}=y=z$

$\pi: X=(3,0,1)+\lambda(1,0,1)+\mu(2,2,0)$.

(c) $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ e $\pi: x+y-z+2=0$.

(d) $r: X=(1,1,0)+\lambda(1,-1,1)$ e $\pi: x+y+-2=0$.

(e) $r: \dfrac{x+2}{3}=y-1=\dfrac{z+3}{3}$ e $\pi: 3x-6y-z=0$.

(f) $r: X=(1,1,0)+\lambda(0,1,1)$ e $\pi: x-y-z=2$.

7.4 Posição relativa de planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos. Uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- π_1 e π_2 são transversais (ou seja, a interseção entre π_1 e π_2 é uma reta);
- π_1 e π_2 são paralelos coincidentes (isto é, $\pi_1 = \pi_2$);
- π_1 e π_2 são paralelos distintos (isto é, tais planos tem interseção vazia).

Quando os planos são descritos por equações na forma geral, podemos obter informações sobre a posição relativa entre estes a partir dos coeficientes dessas equações. É o que veremos na próxima proposição:

Proposição 7.19. Sejam $\pi_1 :\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 :\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ dois planos quaisquer. Então:

(a) π_1 e π_2 são paralelos se, e somente se, $a_1,\ b_1,\ c_1$ e $a_2,\ b_2,\ c_2$ são proporcionais (isto é, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a_1,\ b_1,\ c_1) = \lambda(a_2,\ b_2,\ c_2)$).

(b) Nas condições do item (a):

- se d_1 e d_2 estão na mesma proporção, isto é, se $a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1$ e $a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2$ são proporcionais, então $\pi_1 = \pi_2$.
- se d_1 e d_2 não seguem a proporcionalidade de $a_1,\ b_1,\ c_1$ e $a_2,\ b_2,\ c_2$, então π_1 e π_2 são paralelos distintos.

(c) π_1 e π_2 são transversais se, e somente se, $a_1,\ b_1,\ c_1$ e $a_2,\ b_2,\ c_2$ não são proporcionais.

Exercício 7.20. Estude a posição relativa entre os planos π_1 e π_2:

(a) $\pi_1 :\ 8x - 2y + 6z - 1 = 0$ $\quad \pi_2 :\ 4x - y + 3z - 9 = 0$
(b) $\pi_1 :\ -x + y - z - 3 = 0$ $\quad \pi_2 :\ 2x - 2y + 2z + 6 = 0$
(c) $\pi_1 :\ 2x - y + z - 1 = 0$ $\quad \pi_2 :\ x - 2y + z + 6 = 0$

Solução: (a) Os coeficientes de π_1 são $a_1 = 8$, $b_1 = -2$, $c_1 = 6$, $d_1 = -1$ e os coeficientes de π_2 são $a_2 = 4$, $b_2 = -1$, $c_2 = 3$, $d_2 = -9$. Visto que

$$(a_1, b_1, c_1) = (8, -2, 6) = 2(4, -1, 3) = 2(a_2, b_2, c_2).$$

temos que $a_1,\ b_1,\ c_1$ e $a_2,\ b_2,\ c_2$ são proporcionais. Agora, visto que $d_1 = -1 \neq 2(-9) = 2d_2$, temos que d_1 e d_2 não seguem tal proporção e, portanto, π_1 e π_2 são paralelos distintos.

(b) Os coeficientes de π_1 são $a_1 = -1$, $b_1 = 1$, $c_1 = -1$, $d_1 = -3$ e os coeficientes de π_2 são $a_2 = 2$ $b_2 = -2$, $c_2 = 2$, $d_2 = 6$. Vemos que $a_1,\ b_1,\ c_1$ e $a_2,\ b_2,\ c_2$ são proporcionais, com $(a_1, b_1, c_1) = -\dfrac{1}{2}(a_2, b_2, c_2)$. Uma vez que $d_1 = -\dfrac{1}{2}d_2$, obtemos que π_1 e π_2 são paralelos coincidentes.

(c) Aqui, os coeficientes de π_1 são $a_1 = 2$, $b_1 = -1$, $c_1 = 1$, $d_1 = -1$ e os de π_2 são $a_2 = 1$, $b_2 = -2$, $c_2 = 1$, $d_2 = 6$. Observamos que os coeficientes de π_1 e π_2 não são proporcionais. Logo, π_1 e π_2 são transversais. Desse modo, a interseção entre π_1 e π_2 é uma reta. Vamos determinar uma equação desta reta: da equação de π_2 vem que $x = 2y - z - 6$; substituindo x por $2y - z - 6$ na equação de π_1, obtemos $2(2y - z - 6) - y + z - 1 = 0$; logo, $z = 3y - 13$. Substituindo z por $3y - 13$ em $x = 2y - z - 6$, chegamos em $x = 2y - (3y - 13) - 6$, ou seja, $x = 7 - y$. Fazendo $y = \lambda$ (ou seja, considerando y como parâmetro), podemos dizer que todo ponto (x, y, z) de $\pi_1 \cap \pi_2$ satisfaz as equações $x = 7 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = 3\lambda - 13$. Tais equações descrevem a reta que dada pela interseção de π_1 e π_2.

Exercício 7.21. Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2. Ou seja, diga se os planos são iguais, ou se elas não se interceptam ou se eles são transversais. Se eles forem transversais, apresente equações paramétricas da reta que é a interseção entre eles.

(a) $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 2z - 9 = 0$

(b) $\pi_1 : x + 10y - z - 4 = 0$ e $\pi_2 : 4x + 40y - 4z - 16 = 0$

(c) $\pi_1 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 3)$
$\pi_2 : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(0, 1, 0)$

(d) $\pi_1 : 2x + 2y - 7z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x + y - 4z + 6 = 0$

(e) $\pi_1 : X = (4, 2, 4) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(3, 3, 1)$
$\pi_2 : X = (3, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 4)$

(f) $\pi_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 4z = 0$

(g) $\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0$
$\pi_2 : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1)$

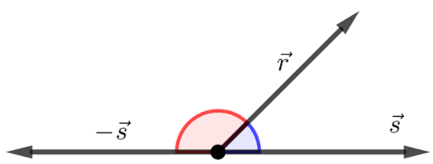
(h) $\pi_1 : x + 2y - 2z = 0$ e $\pi_2 : 3x + 8y - 5z + 3 = 0$

8 Medida angular entre retas e planos

8.1 Medida angular entre retas

Considere as retas r e s. Sejam $\vec{r}$ um vetor diretor de r, e $\vec{s}$ um vetor diretor de s. A *medida angular* entre r e s em radianos, denotada por $\text{ang}(r,s)$, é definida por:

$$\text{ang}(r,s) = \begin{cases} \text{ang}(\vec{r},\vec{s}) & \text{se } \text{ang}(\vec{r},\vec{s}) \in [0,\pi/2] \\ \text{ang}(\vec{r},-\vec{s}) & \text{se } \text{ang}(\vec{r},\vec{s}) \in (\pi/2,\pi] \end{cases}$$



Escrevamos $\theta = \text{ang}(r,s)$ e $\varphi = \text{ang}(\vec{r},\vec{s})$. Se $\cos\varphi \geq 0$, então $\varphi \in [0,\pi/2]$ e daí $\theta = \varphi$. Por sua vez, se $\cos\varphi < 0$, teremos $\varphi \in (\pi/2,\pi]$; neste caso $\theta = \text{ang}(\vec{r},-\vec{s})$ e, assim,

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}\cdot(-\vec{s})}{||\vec{r}||||\vec{s}||} = -\frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{||\vec{r}||||\vec{s}||} = -\cos\varphi.$$

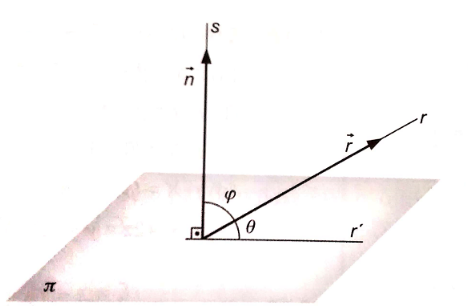
Temos assim que $\cos\theta = |\cos\varphi|$ e disso resulta a fórmula

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{||\vec{r}||||\vec{s}||}.$$

8.2 Medida angular entre reta e plano

Seja π' um plano com vetor normal $\vec{n}$ e seja r uma reta com vetor diretor $\vec{r}$. Consideremos uma reta s com vetor diretor $\vec{n}$ (veja a próxima figura). A *medida angular* entre r e π' em radianos, denotada por $\text{ang}(r,\pi')$, é definida por

$$\text{ang}(r,\pi') = \frac{\pi}{2} - \text{ang}(r,s).$$



Agora, escrevamos $\varphi = \text{ang}(r,s)$ e $\theta = \text{ang}(r,\pi')$. Daí,

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{n}|}{||\vec{r}||||\vec{n}||}.$$

De $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ vem que

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\cos\varphi - \text{sen}\,\varphi\cos\frac{\pi}{2} = \cos\varphi,$$

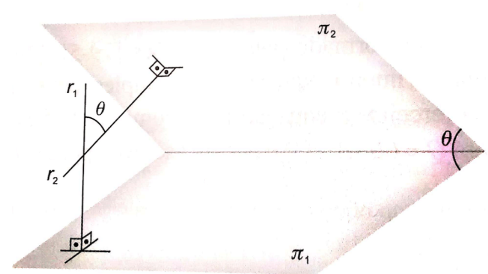
o que nos fornece a expressão

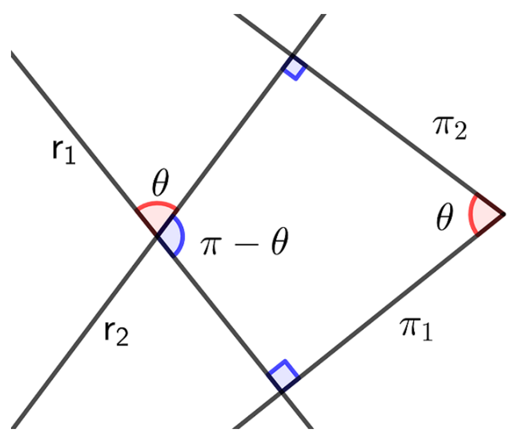
$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{n}|}{||\vec{r}||||\vec{n}||}.$$

8.3 Medida angular entre planos

Consideremos os planos π_1 e π_2. Sejam r_1 e r_2 retas do Espaço tais que $\text{ang}(r_1,\pi_1) = \frac{\pi}{2}$ rad. e $\text{ang}(r_2,\pi_2) = \frac{\pi}{2}$ rad. (ou seja, r_1 é uma reta perpendicular ao plano π_1 e r_2 é uma reta perpendicular ao plano π_2). A *medida angular* entre π_1 e π_2 em radianos, denotada por $\text{ang}(\pi_1,\pi_2)$ é definida por

$$\text{ang}(\pi_1,\pi_2) = \text{ang}(r_1,r_2).$$





Escrevamos $\theta = \text{ang}(\pi_1,\pi_2)$. Se $\vec{n_1}$ é um vetor normal ao plano π_1, então $\vec{n_1}$ é um vetor diretor de r_1. Do mesmo modo, se $\vec{n_2}$ é normal ao plano π_2, então $\vec{n_2}$ é um vetor diretor de r_2. Usando a definição de medida angular entre retas, obtemos

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{||\vec{n_1}||||\vec{n_2}||}.$$

8.4 Exercícios

1. Considere as retas $r : X = (3, -2, 0) + \lambda(1, -1, \sqrt{2})$ e $s : X = (-2, 3, -5) + \lambda(1, 1, \sqrt{2})$. Sendo $\theta = \text{ang}(r, s)$, calcule $\operatorname{sen} \theta$.

2. Calcule a medida angular (em radianos) entre a reta t e o plano π em cada caso:

   (a) $t : x - 2z = y + 2z = 1$ e $\pi : \sqrt{\frac{45}{7}}\, x + y + 2z - 10 = 0$

   (b) $t : x = y - z = 0$ e $\pi : z = 0$

3. Determine a medida angular (em radianos) entre os planos $\pi_1 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1)$ e $\pi_2 : X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0)$

9 Distâncias

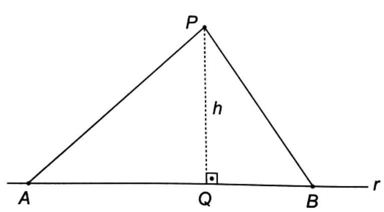
9.1 Distância entre pontos

Dados os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, a distância $\text{d}(A, B)$ entre A e B é dada por

$$\text{d}(A, B) = ||\overrightarrow{BA}|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

9.2 Distância entre ponto e reta

Sejam P um ponto e r uma reta com vetor diretor $\vec{r}$. Na figura abaixo, a distância $\text{d}(P, r)$ entre P e r é precisamente a medida h.



Considerando-se $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ como vetor diretor de r, e sendo $\theta = \text{ang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})$, teremos

$$||\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{AP}||||\overrightarrow{AB}|| \operatorname{sen} \theta = ||\overrightarrow{AP}||||\overrightarrow{AB}|| \frac{h}{||\overrightarrow{AP}||} =$$

$$= h||\overrightarrow{AB}||.$$

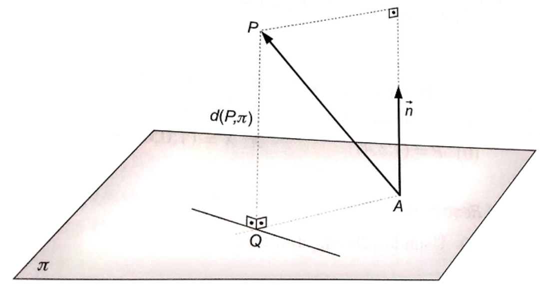
e, assim, obtemos a fórmula

$$d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AB}||}.$$

9.3 Distância entre ponto e plano

Para se calcular a distância $\text{d}(P, \pi)$ entre o ponto P e o plano π, escolhemos um ponto A de π e um vetor normal $\vec{n}$ de π e calculamos a norma da projeção ortogonal de $\overrightarrow{AP}$ sobre $\vec{n}$. Assim,

$$\text{d}(P, \pi) = ||\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP}|| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||}.$$



Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e π o plano dado pela equação geral $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Considere ainda $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto de π. Então $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal à π e vale a relação $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, já que $A \in \pi$. Daí

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

e disso vem que

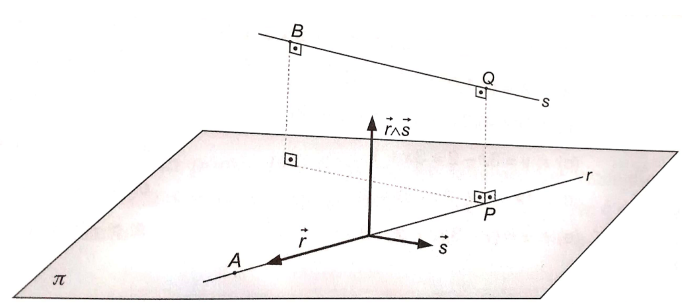
$$\text{d}(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

9.4 Distância entre retas

Sejam r e s retas tais que $\vec{r}$ é vetor diretor de r e $\vec{s}$ é vetor diretor de s. A distância entre r e s será denotada por $\text{d}(r, s)$ e será calculada de acordo com a posição relativa entre r e s.

Caso 1: r e s reversas. Neste caso, existe um único plano π que contém r e é paralelo a s. Se B é um ponto de s, então $\text{d}(r, s) = \text{d}(B, \pi)$. Um vetor normal à π é $\vec{r} \wedge \vec{s}$. Se A é um ponto qualquer de r, teremos

$$\text{d}(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{||\vec{r} \wedge \vec{s}||}$$



Caso 2: Quando r e s são concorrentes, temos $\mathrm{d}(r,s)=0$.

Caso 3: Se r e s forem paralelas, escolhemos um ponto qualquer de uma delas e calculamos a distância entre tal ponto e a outra reta.

9.5 Distância entre reta e plano

Sejam r uma reta e π um plano. Considere ainda $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal à π. A distância entre r e π é denotada por $\mathrm{d}(r,\pi)$.

- Se $\vec{r}\cdot\vec{n}\neq 0$, então r e π são transversais; neste caso, $\mathrm{d}(r,\pi)=0$.
- Se $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$, então r e π não são transversais; neste caso, $\mathrm{d}(r,\pi)$ é a distância entre um ponto qualquer de r e o plano π.

Note que todos os pontos de r estão a uma mesma distância do plano π. No entanto, não é necessariamente verdadeiro que todos os pontos os pontos de π estejam à mesma distância de r.

9.6 Distância entre planos

Sejam π_1 e π_2 planos, com $\vec{n_1}$ um vetor normal à π_1, $\vec{n_2}$ vetor normal à π_2. A distância entre os planos π_1 e π_2 é denotada por $\mathrm{d}(\pi_1,\pi_2)$.

- Se π_1 e π_2 são transversais, então $\mathrm{d}(\pi_1,\pi_2)=0$.
- Se π_1 e π_2 não são transversais, então $\mathrm{d}(\pi_1,\pi_2)$ é a distância entre um ponto qualquer de π_1 e o plano π_2.

9.7 Exercícios

1. Obtenha os pontos da reta $r: 2y+z=x+y=2$ que distam 3 do ponto $A=(0,2,1)$.

2. Calcule a distância do ponto $P=(1,-1,4)$ à reta r dada por $r:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{1-z}{2}$

3. Calcule a distância de $P=(1,1,-1)$ à interseção dos planos $\pi_1: x-y=1$ e $\pi_2: x+y-z=0$.

4. Calcule a distância do ponto $P=(9,2,-2)$ ao plano π dado por $\pi: X=(0,-5,0)+\lambda(0,5/12,1)+\mu(1,0,0)$.

5. Obtenha os pontos da reta $r: x=2-y=y+z$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi: x-2y-z=1$.

6. Calcule a distância entre as retas r e s:

   (a) $r: X=(2,1,0)+\lambda(1,-1,1)$
   $s: x+y+z=2x-y-1=0$

   (b) $r: (x+4)/3=y/4=(z+5)/(-2)$
   $s: X=(21,-5,2)+\lambda(6,-4,-1)$

   (c) $r: y=3z-2=3x+1$
   $s: 3x-2z+3=0=y-z-2$

   (d) $r: (x-1)/(-2)=2y=z$
   $s: X=(0,0,2)+\lambda(-2,1/2,1)$

7. Calcule a distância entre a reta r e o plano π

   (a) $r: X=(1,9,4)+\lambda(3,3,3)$
   $\pi: X=(5,7,9)+\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0)$

   (b) $r: x-y+z=0=2x+y-z-3$
   $\pi: y-z=4$.

8. Calcule a distância entre os planos π_1 e π_2.

   (a) $\pi_1: x+y+z=5/2$
   $\pi_2: X=(2,0,0)+\lambda(-1,0,1)+\mu(-1,1,0)$

   (b) $\pi_1: x+y+z=0$
   $\pi_2: 2x+y+z+2=0$

10 Cônicas

O ambiente desta seção é o Plano Euclidiano. Primeiramente, iremos falar acerca de um sistema de coordenadas para o Plano e tratar das equações de uma reta no Plano. Depois, estudaremos circunferência, parábola, elipse e hipérbole e veremos a definição geral de cônica.

10.1 Sistema de coordenadas para o Plano

Nesta seção, vamos fixar um plano π do Espaço. Iremos nos referir ao plano π apenas por Plano. Por simplicidade, vamos supor que π é o plano Oxy do Espaço.

Fixamos $\Sigma = (0, \mathbb{B})$ um sistema ortogonal de coordenadas para o Plano, em que O é a origem e $\mathbb{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ é uma base ortonormal. Aqui, denotaremos $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$. Desse modo, se $\vec{u}$ é um vetor do Plano, então existem números reais a e b tais que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e, diante disso, escrevemos $\vec{u} = (a, b)$.

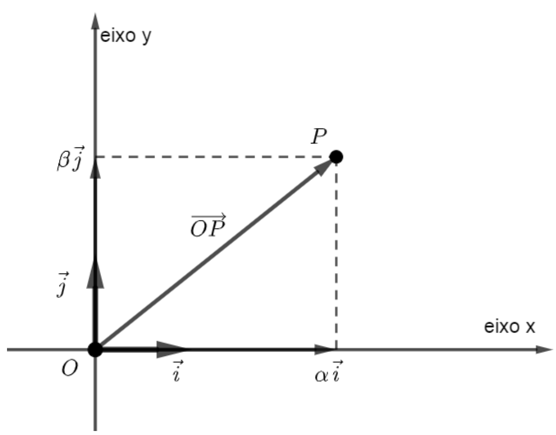
Dados vetores $\vec{u} = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (x_1, y_1)$ no Plano, temos:

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_0x_1 + y_0y_1$.

(ii) $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

(iii) $||\vec{u}|| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

Dado um vetor $\vec{v}$ do Plano, existe um único ponto P (no Plano) tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e existem únicos números reais α e β tais que $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Os escalares α e β são chamados de coordenadas de P e escrevemos $P = (\alpha, \beta)$.



Dados dois pontos P e Q do Plano, a distância $d(P, Q)$ entre P e Q é dada por $d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$.

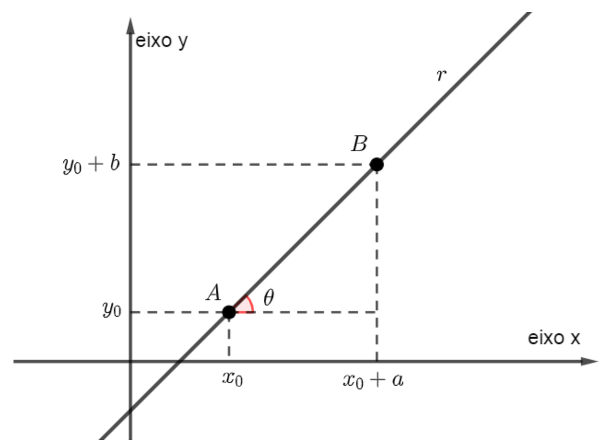
10.2 Estudo da reta no Plano

Seja r um reta no Plano, com vetor diretor $\vec{r} = (a, b)$ (note que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$), e seja $A = (x_0, y_0)$ um ponto de r. A reta r admite:

- uma equação vetorial:
$$r : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b),\ \lambda \in \mathbb{R};$$
- equações paramétricas:
$$r : \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{cases}$$
- equações simétricas (se $a \neq 0$ e $b \neq 0$):
$$r : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

Supondo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, segue de $r : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ que $y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0)$ e daí $y = \dfrac{b}{a}x + y_0 - \dfrac{b}{a}x_0$. Fazendo $m = \dfrac{b}{a}$ e $n = y_0 - \dfrac{b}{a}x_0$, obtemos $y = mx + n$.

O número m é chamado de *declividade* (ou *coeficiente angular*) da reta r. Na próxima figura, temos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_0 + a, y_0 + b)$, sendo A e B pontos de r. Observamos ainda que $m = \dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\theta$.



Precisamos também descrever as equações de retas que são paralelas aos eixos coordenados.

- Se r é uma reta paralela ao eixo Ox, então r admite equação da forma $r : y = c$, em que c é uma constante. Note que $r = \{(x, c) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$

- Se r é uma reta paralela ao eixo Oy, então podemos escrever $r : x = c$, em que c é uma constante. Neste caso, temos $r = \{(c, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$

Sejam r e s retas no Plano. Sejam $\vec{r}$ um vetor diretor de r, $\vec{s}$ um vetor diretor de s, A um ponto de r, B um ponto de s. As retas r e s podem ser:

- *paralelas*: quando $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são paralelos, isto é, se existe um número real α tal que $\vec{r} = \alpha\vec{s}$. Neste caso, se A é um ponto de s, então $r = s$; se A não é ponto de s, então r e s não se interceptam.

- *concorrentes*: quando $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são paralelos; neste caso, a interseção entre r e s é um único ponto.

10.3 Circunferência

Seja C um ponto fixo do Plano e seja r um número real maior que 0. Ao conjunto de todos os pontos P do Plano tais que $d(P, C) = r$ dá-se o nome de *circunferência*.

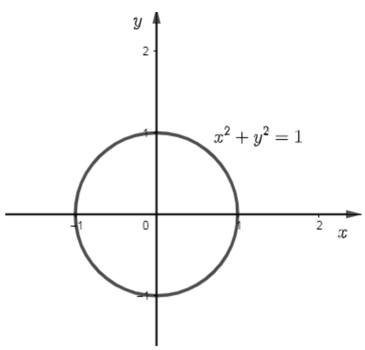
O ponto C é o *centro* e o número r é o *raio* da circunferência.

Tomemos $r > 0$ e escrevamos $C = (x_0, y_0)$. Por definição, um ponto $P = (x, y)$ do Plano é um ponto da circunferência de centro C e raio r se, e somente se, $d(P, C) = r$, ou seja, $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$; daí

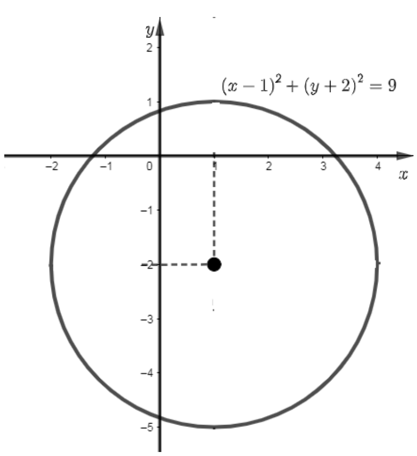
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \quad = \quad r^2 \tag{8}$$

A equação (8) é a *equação da circunferência* de centro C e raio r.

Exemplo 10.1. A equação $x^2 + y^2 = 1$ representa a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.



Por sua vez, a circunferência de centro $(1, -2)$ e raio 3 é representada pela equação $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.



Exemplo 10.2. Seja $\mathbb{S}$ o conjunto dos pontos (x, y) do Plano tais que $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$. Vamos mostrar que $\mathbb{S}$ é uma circunferência e determinar seu centro e seu raio.

Com efeito, primeiramente, vamos *completar quadrados* na equação dada:

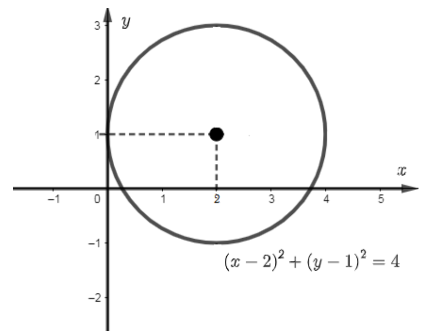
$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = -1 + 4 + 1$$

e disso resulta a equação

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4,$$

a equação da circunferência de centro $C = (2, 1)$ e o raio é $r = \sqrt{4} = 2$.



Exercício: Determine o centro, o raio, a equação e esboce o gráfico das seguintes circunferências.

(a) $x^2 + y^2 + 8y + 6 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 50 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$

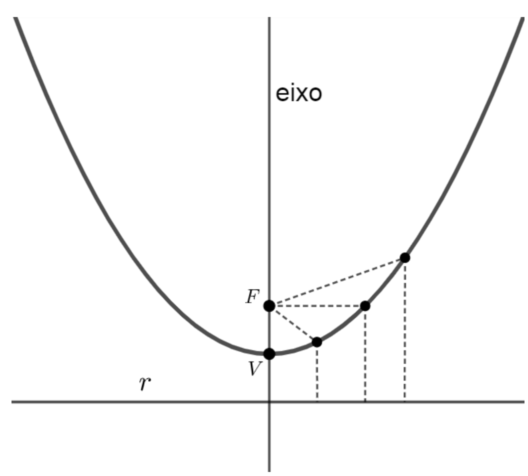
(d) $x^2 + y^2 - 10y = 75$

(e) $x^2 + y^2 - 7 = 0$

10.4 Parábola

Consideremos, no Plano, uma reta r e um ponto F que não pertence a r. Ao conjunto de todos os pontos do Plano equidistantes de F e r dá-se o nome de *parábola*.

O ponto F é chamado de *foco* da parábola e a reta r é a *reta diretriz*. O *eixo* (*de simetria*) da parábola é a reta perpendicular a r que passa por F. O ponto V na interseção da reta diretriz com o eixo da parábola é chamado de *vértice*.



Consideremos um número real $p > 0$. Vamos obter aqui a *equação reduzida* de uma parábola, considerando o vértice na origem e quatro escolhas para foco e reta diretriz.

(i) Consideremos o ponto $F = (p, 0)$ e a reta r definida por $r : x = -p$. Vemos que $d(F, r) = 2p$.

Um ponto $P = (x, y)$ do plano é um ponto da parábola definida a partir de r e F se, e somente se, $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da última equação, obtemos

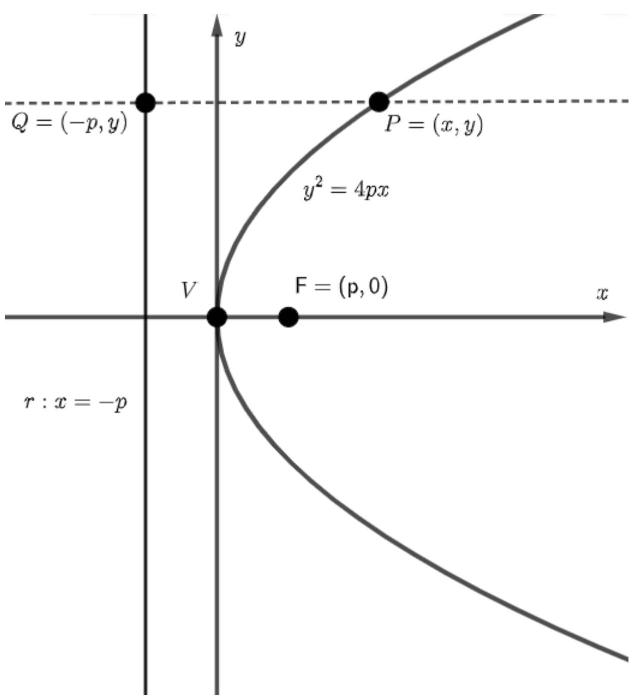
$$(x-p)^2+y^2 = x^2+2px+p^2 \Rightarrow x^2-2px+p^2+y^2 = x^2+2px+p^2$$

$$\Rightarrow \; y^2 = 4px.$$

Chegamos na equação

$$y^2 = 4px. \tag{9}$$

a qual é chamada de *equação reduzida* da parábola determinada por F e r. Note que o eixo da parábola é o eixo Ox.



As equações reduzidas apresentadas nos casos (ii), (iii) e (iv) podem ser deduzidas empregando-se um raciocínio análogo ao que foi utilizado para se obter a equação reduzida da parábola do caso (i).

(ii) A parábola com foco $F = (-p, 0)$ e reta diretriz $r : x = p$ tem Ox como eixo de simetria e apresenta equação reduzida

$$y^2 = -4px$$

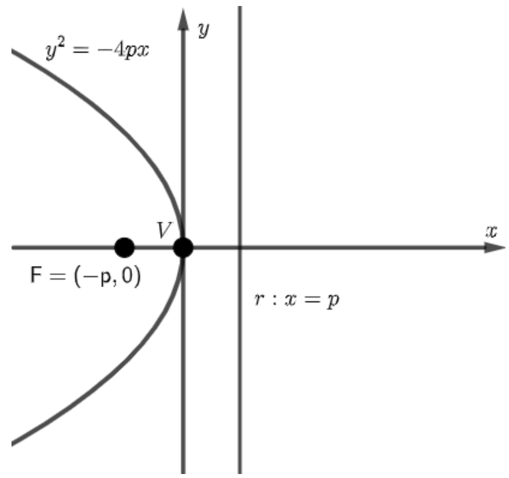


Figura 15: Esboço da parábola $y^2 = -4px$

(iii) A parábola com foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $r : y = -p$ apresenta equação reduzida $x^2 = 4py$. Seu eixo é o eixo Oy.

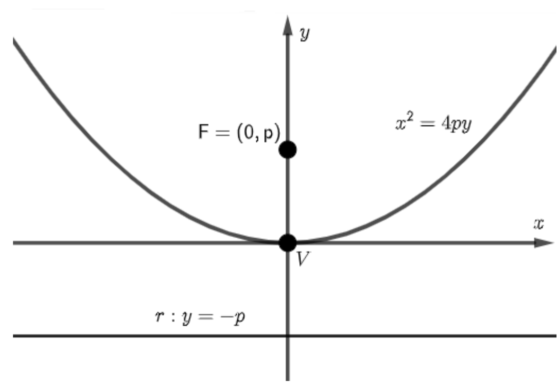


Figura 16: Esboço da parábola $x^2 = 4py$

(iv) A parábola com foco $F = (0, -p)$ e reta diretriz $r : y = p$ tem equação reduzida $x^2 = -4py$ e tem Oy como eixo de simetria.

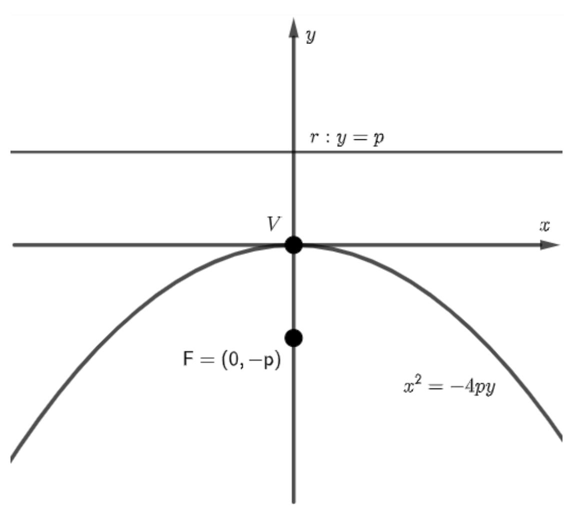


Figura 17: Esboço da parábola $x^2 = -4py$

O número $2p$ é chamado de *parâmetro* da parábola.

Exemplo 10.3. Seja $\mathbb{P}$ o conjunto de pontos (x, y) do Plano tais que $x^2 + 8y = 0$. Reescrevendo $x^2 + 8y = 0$, vemos que $\mathbb{P}$ é a parábola $x^2 = -8y$. A variável que está elevada ao quadrado é x e disso resulta que parábola tem como eixo de simetria o eixo Oy. Como o termo não quadrático da equação é negativo, a parábola $\mathbb{P}$ tem concavidade voltada para baixo. Neste caso, $4p = 8$, ou seja, $p = 2$. Logo, o foco é $F = (0, -2)$ e uma equação para a diretriz é $y = 2$. Um esboço do gráfico de $\mathbb{P}$ é dado na sequência.

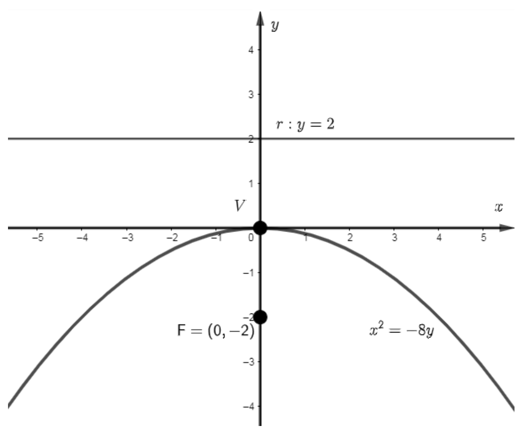


Figura 18: Esboço da parábola $x^2 = -8y$

Exemplo 10.4. Consideremos a parábola $y^2 = 2x$. A variável que está elevada ao quadrado é y; logo, o eixo $0x$ é o eixo de simetria da parábola. Como o termo não quadrático da equação é positivo, a parábola tem concavidade voltada para direita. Aqui, temos que $4p = 2$ e daí $p = 1/2$. Portanto, o foco é $F = (1/2, 0)$, uma equação para a diretriz é $x = -1/2$ e um esboço da gráfico dessa parábola é dado abaixo.

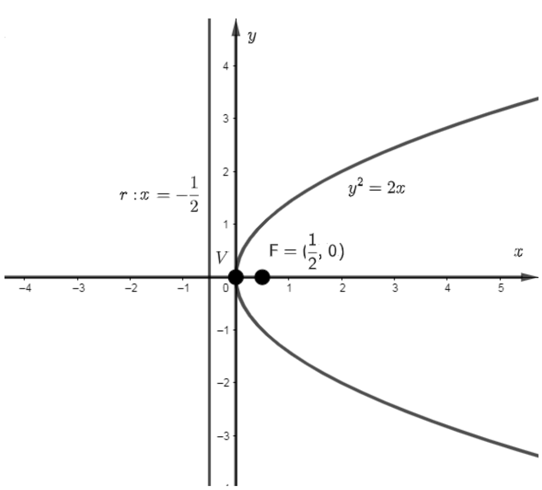


Figura 19: Esboço da parábola $y^2 = 2x$

As parábolas estudadas até aqui apresentam vértice no ponto $(0, 0)$. Vejamos como são as equações de parábolas com vértice $V = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e eixos paralelos aos eixos coordenadas. Consideremos dois casos:

1º) O eixo da parábola é paralelo ao eixo Ox:

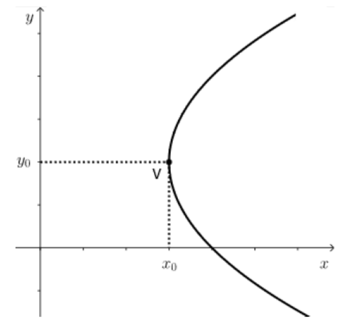


Figura 20: $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

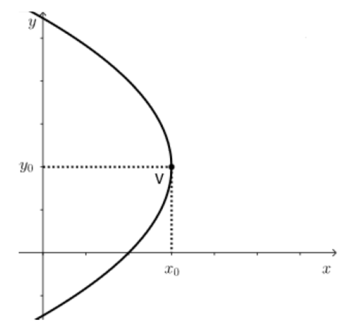


Figura 21: $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$

2º) O eixo da parábola é paralelo ao eixo Oy:

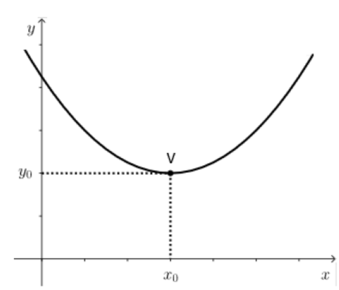


Figura 22: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

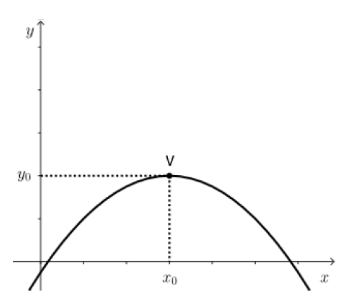


Figura 23: $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$

Exemplo 10.5. Seja $\mathbb{S}$ o conjunto de pontos (x, y) do plano tais que $y^2 - 4y + 12x - 44 = 0$. Completando quadrado e reescrevendo, obtemos: $y^2 - 4y + 4 = -12x + 44 + 4$, ou seja, $(y-2)^2 = -12(x-4)$. Logo, $\mathbb{S}$ é uma parábola com vértice $(4, 2)$. A variável que está elevada ao quadrado é y e, assim, temos que o eixo da parábola é paralelo ao eixo $0x$: o eixo da parábola tem equação $y = 2$. Como o termo não quadrático é negativo, a concavidade da parábola é voltada para a esquerda. Observamos ainda que $p = 3$; logo, $F = (1, 2)$ é o foco da parábola e uma equação para a reta diretriz r é $r : x = 7$. Um esboço do gráfico dessa parábola é dado na sequência.

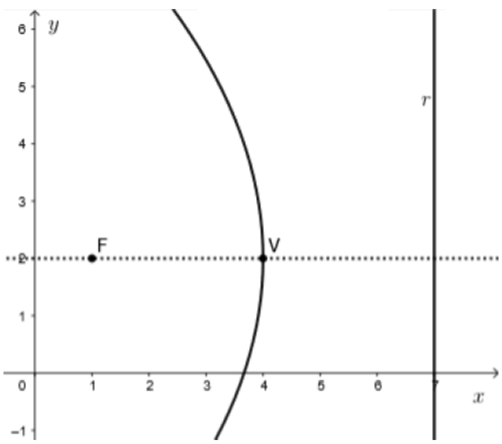


Figura 24: Esboço da parábola $(y-2)^2 = -12(x-4)$

Uma parábola cujo eixo coincide ou é paralelo a um dos eixos coordenados sempre poderá ser representada por uma *equação geral* de um dos seguintes tipos:

$$ax^2 + cx + dy + f = 0 \qquad a \neq 0$$

$$by^2 + cx + dy + f = 0 \qquad b \neq 0$$

Exercício 10.6. Esboce cada uma das parábolas abaixo e encontre o foco. Determine também uma equação da reta diretriz e uma equação do eixo de simetria.

(a) $x^2 = -4y$ (b) $2y^2 - 9x = 0$ (c) $x = -\dfrac{y^2}{8}$

(d) $x^2 - 10y = 0$ (e) $y = \dfrac{x^2}{16}$

Exercício 10.7. Em cada item, esboce o gráfico e obtenha uma equação da parábola que satisfaça as condições dadas:

(a) vértice: $V = (0, 0)$; reta diretriz $r : y = -2$.

(b) foco: $F = (2, 0)$; reta diretriz $r : y = x + 2 = 0$.

(c) vértice: $V = (0, 0)$; foco: $F = (-\frac{1}{2}, 0)$.

(d) vértice: $V = (-2, 3)$; foco: $F = (-2, 1)$.

(e) foco: $F = (4, -5)$; reta diretriz: $y = 1$.

(f) vértice: $V = (4, -3)$; eixo paralelo ao eixo dos x, passando pelo ponto $P = (2, 1)$.

Exercício 10.8. Determine a equação reduzida, o vértice, o foco, uma equação da reta diretriz e uma equação do eixo da parábola de equação dada. Esboce o gráfico.

(a) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$

(b) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$

(c) $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$

(d) $y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$

(e) $2x^2 - 12x - y + 14 = 0$

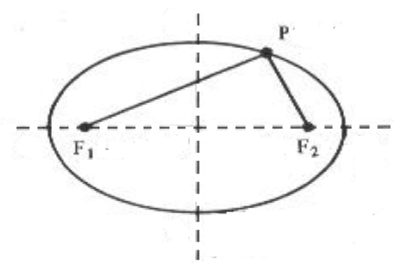
10.5 Elipse

Consideremos, no Plano, dois pontos F_1 e F_2, distantes $2c > 0$ entre si (daí $F_1 \neq F_2$) e seja a um número real tal que $a > c$. Ao conjunto dos pontos P do Plano tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

dá-se o nome de *elipse*.

Os pontos F_1 e F_2 são chamados *focos* e a distância $2c$ entre os focos é a *distância focal*.



Outros elementos da elipse são destacados abaixo.

- O ponto médio C do segmento F_1F_2 é chamado de *centro* da elipse.

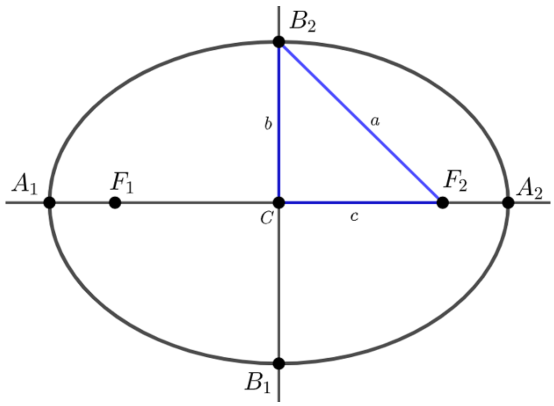
- A reta determinada por F_1 e F_2 intercepta a elipse em dois pontos, digamos A_1 e A_2. A reta perpendicular à reta determinada por F_1 e F_2 também intercepta a elipse em dois pontos, digamos B_1 e B_2 (veja a próxima figura). Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são os *vértices* da elipse.

- O *eixo maior* da elipse é o segmento A_1A_2, o qual tem comprimento $2a$ e contém os focos. O segmento B_1B_2 é chamado de *eixo menor*.

- Supondo que o eixo menor tem comprimento $2b$, obtemos a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- A *excentricidade da elipse* é o número real $e = c/a$ (note que $0 < e < 1$).



Sejam a e c números reais tais que $0 < c < a$ e consideremos os pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (0, c)$ do Plano (note que F_1 e F_2 estão no eixo Ox). Aqui, vamos obter uma equação para descrever a elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior de comprimento $2a$. Temos que um ponto $P = (x, y)$ do Plano pertence a essa elipse se, e somente se, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, ou ainda, $d(P, F_1) = 2a - d(P, F_2)$; daí,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e agrupando termos, obtemos $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Elevando novamente ao quadrado, chegamos em

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

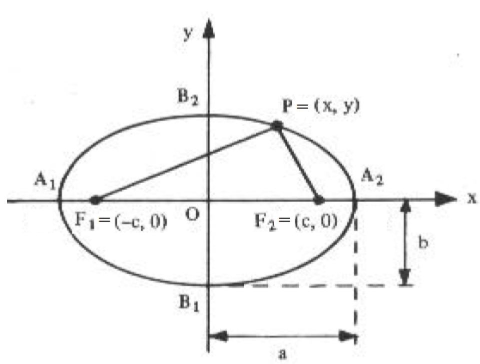
Como $a^2 - c^2 \neq 0$ (pois $a > c > 0$), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{10}$$

Sendo $2b$ o comprimento do eixo menor dessa elipse, temos que $b^2 = a^2 - c^2$. Logo, podemos reescrever a equação (10) da seguinte forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

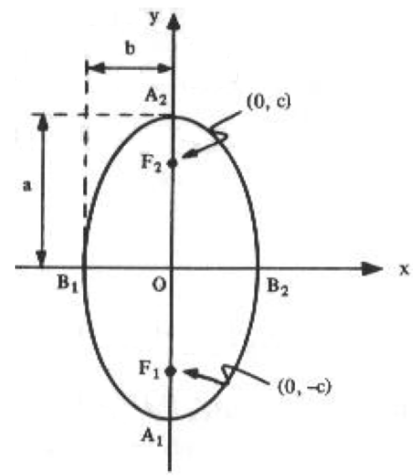
A Equação (11) é denominada *equação reduzida* da elipse. Observe que o centro dessa elipse é $(0, 0)$ e que seu eixo maior está contido no eixo Ox.



Considerando números reais a e c tais que $0 < c < a$ e pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ do Plano, a elipse com focos F_1 e F_2 e eixo maior de comprimento $2a$ pode ser descrita pela seguinte *equação reduzida*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{12}$$

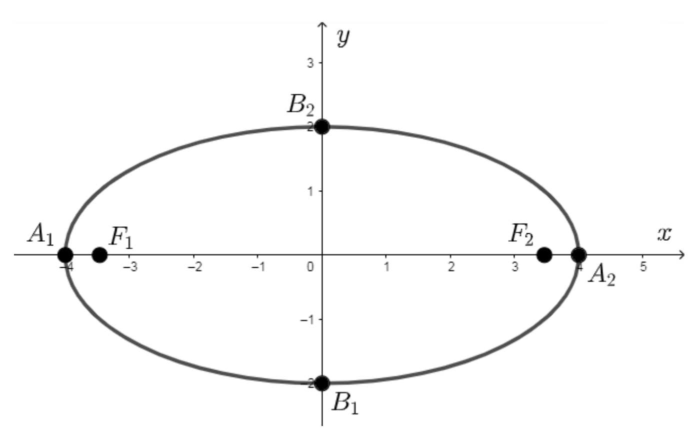
Note que o centro dessa elipse também é $(0, 0)$ e que seu eixo maior está contido no eixo Oy.



Exemplo 10.9. Consideremos a elipse $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$. Reescrevendo essa igualdade, chegamos em

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Maior denominador: 16. Daí, $a^2 = 16$ e, consequentemente, $a = 4$ e o eixo maior está sobre o eixo Ox. Ainda, $b^2 = 4$, $b = 2$ e o eixo menor tem medida $2b = 4$. A elipse tem focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, sendo c um número real maior que 0 tal que $a^2 = b^2 + c^2$. Daí, $c^2 = a^2 - b^2 = 12$ e, assim, $c = \sqrt{12}$. Logo, os focos são $F_1 = (-\sqrt{12}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{12}, 0)$. Um esboço do gráfico é dado abaixo.



Exemplo 10.10. Seja $\mathbb{E}$ o conjunto dos pontos (x, y) do Plano que satisfazem a igualdade $25x^2 + 9y^2 = 225$. Observamos que $\mathbb{E}$ é uma elipse. De fato, de $25x^2 + 9y^2 = 225$ vem que

$$\frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = \frac{225}{225},$$

o que implica

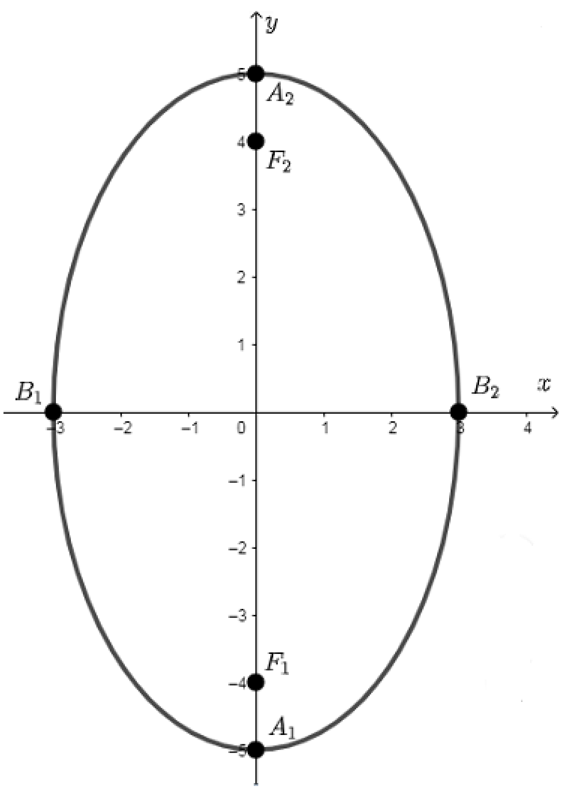
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

a equação reduzida de uma elipse.

Maior denominador: 25. Logo, $a^2 = 25$ e o eixo maior da elipse está sobre o eixo Oy. Além disso, $a = 5$ e, portanto, o eixo maior tem medida $2a = 10$. Ainda, $b^2 = 9$, $b = 3$ e o eixo menor tem medida $2b = 6$.

Os focos dessa elipse são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, sendo c um número real maior que 0 tal que $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, $c^2 = a^2 - b^2 = 16$, o que nos fornece $c = 4$. Logo, os focos são $F_1 = (0, -4)$ e $F_2 = (0, 4)$.

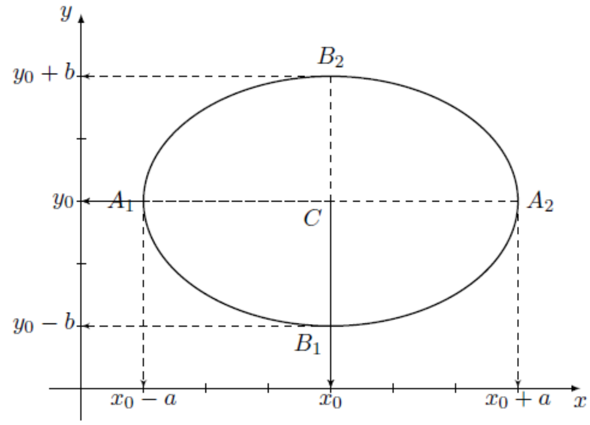
Um esboço do gráfico dessa elise é dado na próxima figura.



Se uma elipse tem centro $C = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, mas eixos (maior e menor) paralelos aos eixos coordenados, também obtemos *equações reduzidas* para tal elipse.

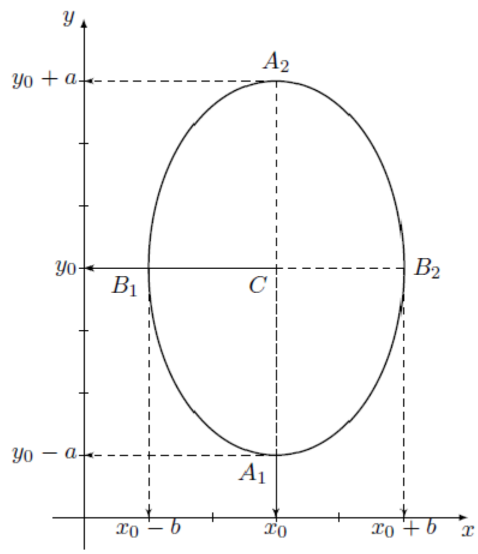
Temos dois casos a considerar.

1º) O eixo maior é paralelo ao eixo Ox:



Equação reduzida: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

2º) O eixo maior é paralelo ao eixo Oy:



Equação reduzida : $\dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$

Exemplo 10.11. Seja $\mathbb{E}$ o conjunto de pontos (x, y) do Plano que satisfazem a igualdade $9x^2+4y^2-36x-8y+4 = 0$. Vamos mostrar que $\mathbb{E}$ é uma elipse. De fato, vemos que $9x^2+4y^2-36x-8y+4 = 0$ implica $9x^2-36x+4y^2-8y = -4$. Completando quadrados, chegamos em

$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4,$$

ou seja,

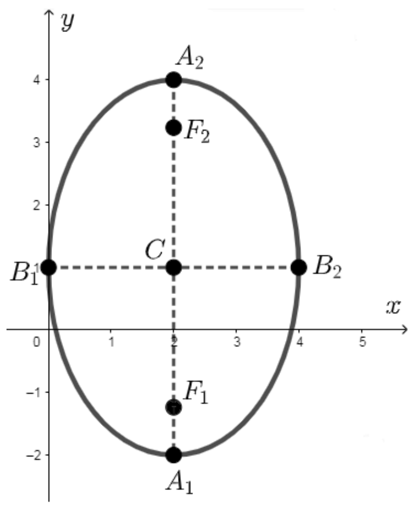
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Tal equação representa uma elipse com centro $C = (2, 1)$.

Maior denominador: 9. Logo, $a^2 = 9$ e o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo Oy. Como o centro dessa elipse é $(2, 1)$, obtemos que o eixo maior está sobre a reta $x = 2$.

Ainda $a = 3$ e, portanto, o eixo maior tem medida $2a = 6$. Além disso, $b^2 = 4$, $b = 2$ e o eixo menor tem medida $2b = 4$.

Os focos dessa elipse são $F_1 = (2, 1 - c)$ e $F_2 = (2, 1 + c)$, em que c um número real maior que 0 tal que $a^2 = b^2 + c^2$. Desse modo, $c^2 = a^2 - b^2 = 5$ e daí $c = \sqrt{5}$. Portanto, os focos são $F_1 = (2, 1 - \sqrt{5})$ e $F_2 = (2, 1 + \sqrt{5})$. Um esboço do gráfico é dado abaixo.



Exercício 10.12. Em cada item, esboçar o gráfico e determinar os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas.

(a) $25x^2 + 4y^2 = 100$
(b) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$
(c) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
(d) $x^2 + 25y^2 = 25$
(e) $4x^2 + 9y^2 = 25$
(f) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Exercício 10.13. Encontrar uma equação da elipse de centro $(0, 0)$, eixo maior sobre o eixo x, excentricidade $\frac{1}{2}$ e que passa pelo ponto $(2, 3)$.

Exercício 10.14. Em cada item, determinar uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas.

(a) focos: $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$; eixo maior de comprimento 10.

(b) focos: $F_1 = (0, -5)$ e $F_2 = (0, 5)$; eixo menor de comprimento 10.

(c) focos: $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$; vértices: $A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$.

(d) vértices: $A_1 = (-10, 0)$ e $A_2 = (10, 0)$; excentricidade $e = \frac{1}{2}$.

(e) centro: $C = (1, 4)$; um foco $F = (5, 4)$; excentricidade $e = \frac{2}{3}$.

(f) focos: $F_1 = (-7, 2)$ e $F_2 = (-1, 2)$; eixo menor de comprimento 2.

(g) centro: $C = (0, 1)$; um vértice $A = (0, 3)$; excentricidade $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 10.15. Determine a equação reduzida, o centro, os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboce o gráfico.

(a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
(b) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$
(c) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$
(d) $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$

10.6 Hipérbole

Consideremos, no Plano, dois pontos F_1 e F_2 tais que $d(F_1, F_2) = 2c > 0$ e seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < c$. Ao conjunto dos pontos P do Plano tais que

$$| d(P, F_1) - d(P, F_2) | = 2a$$

denomina-se *hipérbole*. Os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da hipérbole. O segmento F_1F_2 é chamado de *eixo real* (ou *eixo transverso*) da hipérbole.

A construção abaixo nos fornece elementos para esboçar o gráfico da hipérbole.

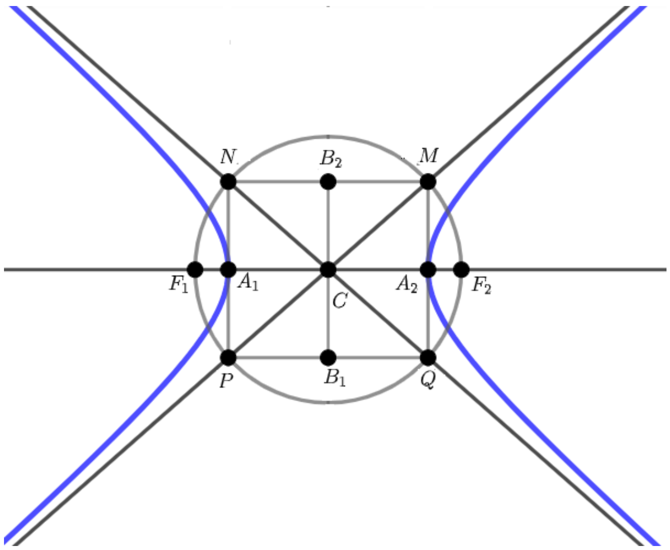
- Seja C o ponto médio do segmento F_1F_2 (o ponto C é chamado de *centro* da hipérbole).

- Desenhe a circunferência de centro C e raio c. No segmento F_1F_2, marque os pontos A_1 e A_2 tais que $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a$ (os pontos A_1 e A_2 são os *vértices* da hipérbole).

- Por A_1 e A_2, tracemos retas perpendiculares ao segmento F_1F_2 e obtenha o retângulo $MNPQ$. Por C, tracemos uma reta perpendicular ao segmento F_1F_2, o qual intercepta o retângulo $MNPQ$ nos pontos B_1 e B_2. O segmento B_1B_2 é chamado de *eixo imaginário* (ou *não-transverso*). Vamos supor que a medida do segmento B_1B_2 seja $2b$.

- No desenho abaixo, destacamos também as retas contendo as diagonais do retângulo $MNPQ$. Tais retas são chamadas de *assíntotas*.

- Podemos aqui esboçar o gráfico da hipérbole.



A *excentricidade* e da hipérbole é dada por $e = \frac{c}{a}$. Como $c > a$, temos que $e > 1$. Destacamos ainda a seguinte relação

$$c^2 = a^2 + b^2$$

No caso em que $a = b$, o retângulo $MNPQ$ é um quadrado e a hipérbole é chamada de *equilátera*.

- **Equação reduzida**

Dados números reais a e c tais que $0 < a < c$, consideremos agora a hipérbole de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e eixo real de comprimento $2a$. Note que o centro dessa hipérbole é a origem $(0, 0)$ e que o eixo real está sobre o eixo Ox.

Um ponto $P = (x, y)$ do Plano pertence a essa hipérbole, se e somente se, $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, ou ainda, $d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$; equivalentemente, teremos $d(P, F_1) = 2a + d(P, F_2)$ ou $d(P, F_1) = -2a + d(P, F_2)$.

Vamos considerar o caso $d(P, F_1) = 2a + d(P, F_2)$. Vemos que tal expressão significa

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e agrupando termos, obtemos

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando novamente ao quadrado, segue que

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

De modo análogo, de $d(P, F_1) = -2a + d(P, F_2)$ chegamos em $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$.

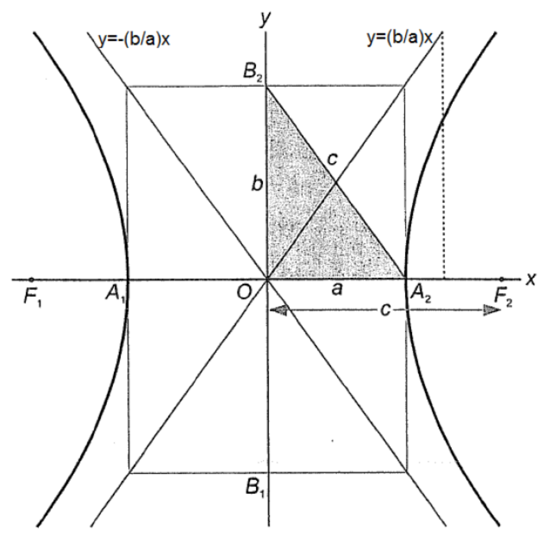
Como $0 < a < c$, temos que $c^2 - a^2 > 0$. Daí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \tag{13}$$

Agora, sabemos que $b^2 = c^2 - a^2$ e, assim, podemos reescrever a Equação (13) da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{14}$$

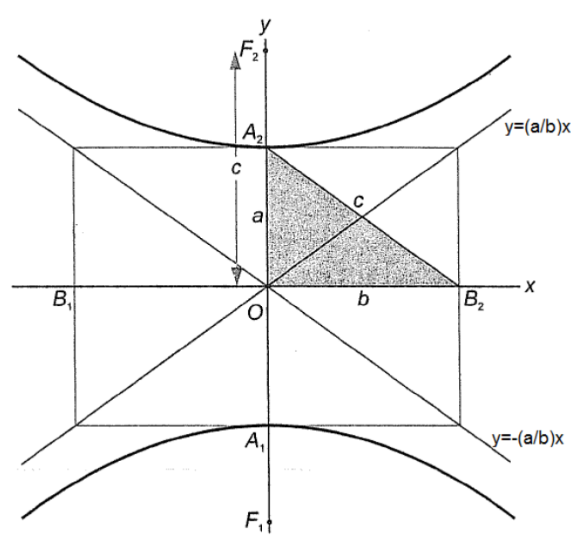
A equação (14) é chamada *equação reduzida* da hipérbole. Os vértices dessa hipérbole são os pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$. Além disso, as assíntotas são as retas $y = -\dfrac{b}{a}x$ e $y = \dfrac{b}{a}x$.



De modo análogo, verifica-se que a hipérbole com focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ (em que $c > 0$) e eixo real sobre o eixo Oy com comprimento $2a$ apresenta *equação reduzida*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Neste caso, as retas assíntotas são $y = -\dfrac{a}{b}x$ e $y = \dfrac{a}{b}x$ e os vértices são $A_1 = (0, -a)$ e $A_2 = (0, a)$.



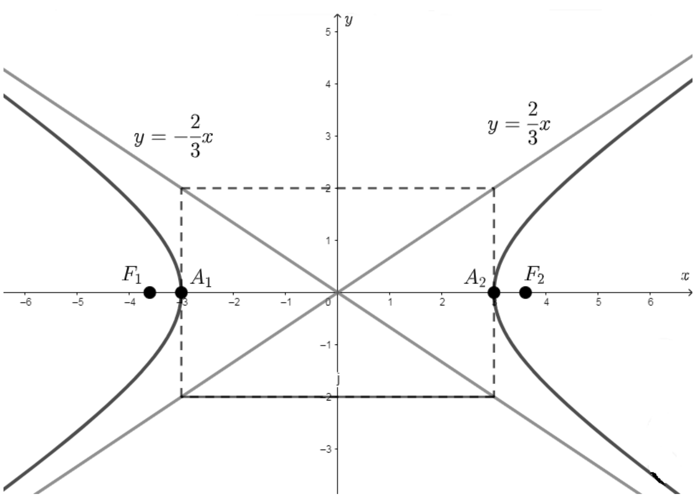
Exemplo 10.16. Seja $\mathbb{H}$ o conjunto dos pontos (x, y) do Plano que satisfazem $4x^2 = 9y^2 + 36$. Reescrevendo a expressão $4x^2 = 9y^2 + 36$, chegamos em

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Logo, $\mathbb{H}$ é uma hipérbole com eixo real sobre o eixo Ox e centro na origem. Da equação reduzida $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, obtemos $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$. Logo $a = 3$ e $b = 2$.

Desse modo, $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (3, 0)$ são os vértices dessa hipérbole. Os focos dessa hipérbole são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, em que c um número real maior que 0 tal que $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$. Daí, $c = \sqrt{13}$ e, assim, $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$.

Além disso, as retas assíntotas dessa hipérbole passam pela origem $(0, 0)$ (centro da hipérbole) e os coeficientes angulares dessas retas são $-\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Assim, as retas $y = -\frac{2}{3}x$ e $y = \frac{2}{3}x$ são as assíntotas da hipérbole. Um esboço do gráfico é dado abaixo.



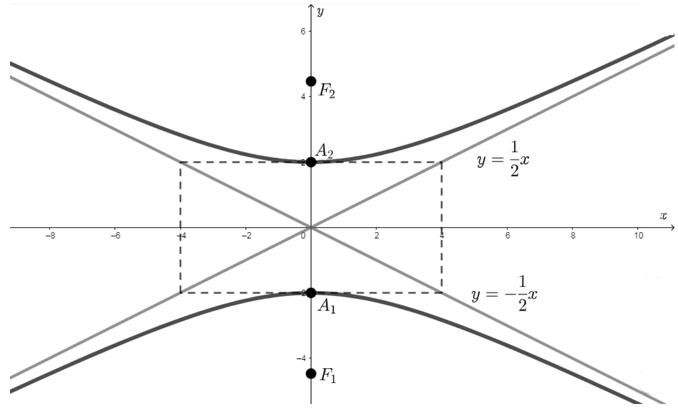
Exemplo 10.17. Consideremos a hipérbole de equação reduzida

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

O eixo real está sobre o eixo Oy e o centro é a origem. Aqui, $a^2 = 4$ e $b^2 = 16$. Daí $a = 2$ e $b = 4$.

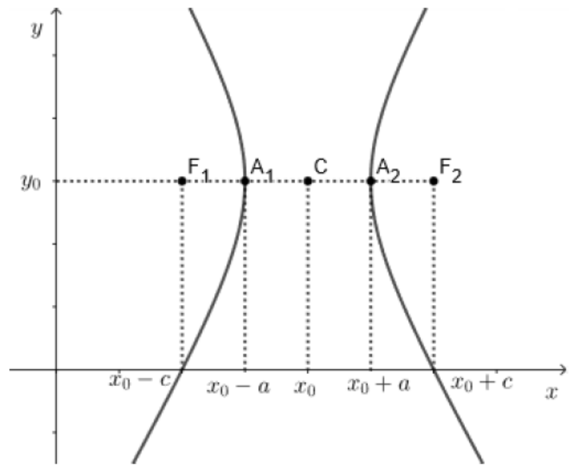
Os vértices são $A_1 = (0, -2)$ e $A_2 = (0, 2)$ e os focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, em que c é um número real positivo tal que $c^2 = a^2 + b^2 = 20$. Logo, $c = \sqrt{20}$ e, portanto, os focos são $F_1 = (0, -\sqrt{20})$ e $F_2 = (0, \sqrt{20})$. As retas $y = -\dfrac{1}{2}x$ e $y = \dfrac{1}{2}x$ são as retas assíntotas dessa hipérbole.

Um esboço do gráfico é dado abaixo.



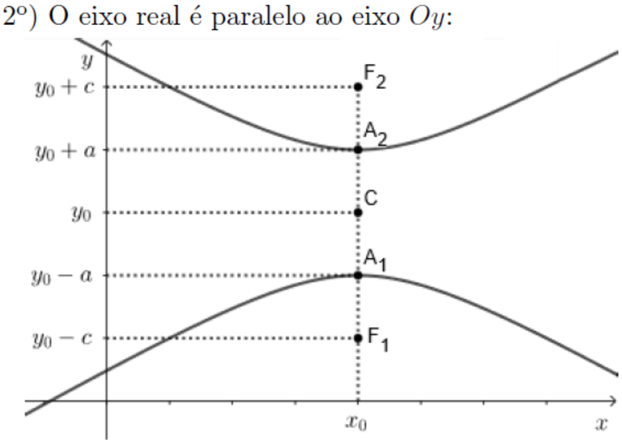
Agora, vejamos como fica a equação reduzida de uma hipérbole com centro $C = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e eixo real paralelo a um dos eixos coordenados. Temos dois casos.

1º) O eixo real é paralelo ao eixo Ox:



Equação reduzida: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

2º) O eixo real é paralelo ao eixo Oy:



Equação reduzida : $\dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

Exemplo 10.18. Seja $\mathbb{H}$ o conjunto dos pontos (x, y) do Plano que satisfazem $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$. Vamos mostrar que $\mathbb{H}$ é uma hipérbole.

De fato, de $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ obtemos que $9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$ e, assim, completando quadrados, temos

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4,$$

ou seja,

$$9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36$$

Logo, $\mathbb{H}$ é uma hipérbole com equação reduzida

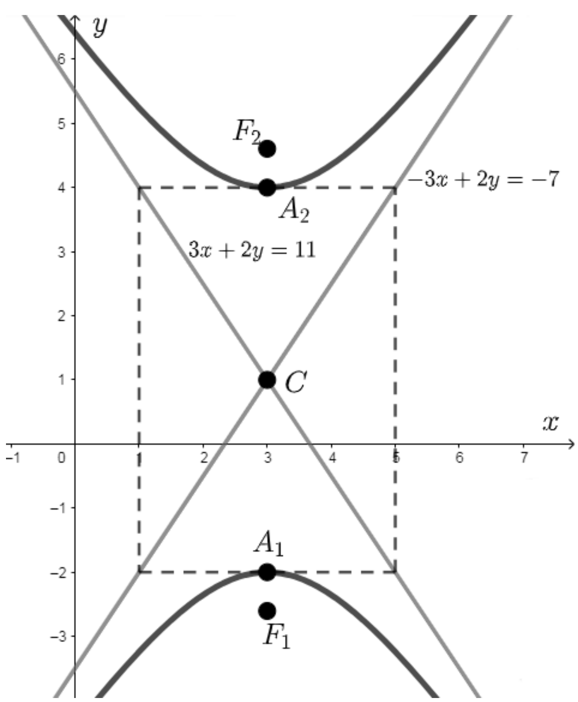
$$-\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Vemos que tal hipérbole tem centro $C = (3, 1)$ e eixo real paralelo ao eixo Oy. Assim, o eixo real está sobre a reta $x = 3$. Aqui, $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$. Logo $a = 3$ e $b = 2$ e, desse modo, o eixo real tem medida $2a = 6$ e o eixo imaginário tem medida $2b = 4$. Logo, $A_1 = (3, -2)$ e $A_2 = (3, 4)$ são os vértices dessa hipérbole.

Os focos são $F_1 = (3, 1 - c)$ e $F_2 = (3, 1 + c)$, em que c um número real positivo tal que $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$. Daí $c = \sqrt{13}$ e os focos são $F_1 = (3, 1 - \sqrt{13})$ e $F_2 = (3, 1 + \sqrt{13})$.

As retas assíntotas dessa hipérbole passam pelo ponto $(3, 1)$. Fica como exercício mostrar que as retas assíntotas são dadas pelas equações $3x + 2y = 11$ e $-3x + 2y = -7$

Um esboço do gráfico é dado abaixo.



Exercício 10.19. Em cada item, esboce o gráfico e determine os vértices, os focos, a excentricidade e equações das assíntotas das hipérboles dadas.

(a) $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$

(b) $9x^2 - 16y^2 = 144$

(c) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

(d) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

(e) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Exercício 10.20. Determine uma equação da hipérbole que satisfaça as condições dadas.

(a) focos: $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$; vértices: $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (3, 0)$.

(b) focos: $F_1 = (0, -3)$ e $F_2 = (0, 3)$; vértices: $A_1 = (0, -2)$ e $A_2 = (0, 2)$.

(c) focos: $F_1 = (0, -4)$ e $F_2 = (0, 4)$; eixo real de medida 2.

(d) vértices: $A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$; passando pelo ponto $P = (8, 2)$.

(e) vértices: $A_1 = (0, -2)$ e $A_2 = (0, 2)$; equações das assíntotas $y = -\frac{1}{4}x$ e $y = \frac{1}{4}x$.

(f) focos: $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$; e que seja uma hipérbole equilátera.

(g) centro: $C = (3, 2)$; um vértice $A = (1, 2)$; um foco $F = (-1, 2)$.

(h) focos: $F_1 = (3, -2)$ e $F_2 = (3, 4)$; excentricidade 2.

(i) centro: $C = (5, 1)$; um foco $F = (9, 1)$; eixo imaginário medindo $4\sqrt{2}$.

(j) focos: $F_1 = (-1, -5)$ e $F_2 = (5, -5)$; e que seja uma hipérbole equilátera.

Exercício 10.21. Determinar a equação reduzida, o centro, os vértices, os focos, e excentricidade e equações das assíntotas das hipérboles dadas. Esboçar o gráfico.

(a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16x - 43 = 0$

(b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$

(c) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

Exercício 10.22. Encontrar uma equação da elipse com focos nos vértices da hipérbole $5y^2 - 4x^2 = 20$ e vértices nos focos dessa hipérbole.

Exercício 10.23. Identifique e esboce o gráfico da cônica dada.

(a) $9x^2 + 4y^2 - 54x - 16y + 61 = 0$

(b) $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$

(c) $y^2 - 6y - 2x + 7 = 0$

(d) $4x^2 - 2y^2 + 24x - 12y + 10 = 0$

(e) $16x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

(f) $x^2 - 10x - 16y - 7 = 0$

(g) $3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$

(h) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

(i) $x^2 + 3y + 3 = 0$

(j) $4y^2 - x^2 + 2x - 56y + 191 = 0$

(k) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

(l) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

(m) $y^2 - 6y + 3x + 9 = 0$

(n) $x^2 + y^2 - 10y - 75 = 0$

10.7 Definição geral de cônica

No Plano Euclidiano, denomina-se *cônica* o lugar geométrico dos pontos (x, y) desse plano que satisfazem a uma equação de segundo grau da forma $g(x, y) = 0$, em que

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

em que a, b, c, d, e, f são números reais. Note que o fato de $g(x, y)$ ser uma equação de segundo grau nos garante que os números a, b e c não são todos iguais a zero.

Os termos ax^2, bxy e cy^2 são os *termos quadráticos*, bxy é o *termo quadrático misto*. Ainda, dx e ey são os *termos lineares* e f é o *termo independente*.

Pode-se mostrar que há apenas 9 tipos de cônicas (veja o Apêndice C em [1]): conjunto vazio, conjunto formado por um único ponto, uma reta, união de duas retas paralelas distintas, união de duas retas concorrentes, circunferência, parábola, elipse e hipérbole.

Exemplo 10.24. Vejamos algumas cônicas descritas por uma equação geral.

-*Conjunto vazio*:

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 + 1 = 0\}.$$

-*Conjunto com um único ponto*:

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$$

-*Reta*: $\{(x, y) : x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$

Note que: $x^2 + 2xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0.$

- *União de duas retas paralelas distintas*:

$$\{(x, y) : x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0\}.$$

Aqui, $x^2+2xy+y^2+x+y = 0 \Leftrightarrow (x+y+1)(x+y) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+y+1 = 0$ ou $x+y = 0$. Logo, $x^2+2xy+y^2+x+y = 0$ se, e somente se, (x, y) é ponto da reta $x + y + 1 = 0$ ou é ponto da reta $x+y = 0$. Vemos que $x+y+1 = 0$ e $x+y = 0$ são retas paralelas distintas.

- *União de duas retas concorrentes*:

$$\{(x, y) : x^2 - y^2 = 0\}$$

Aqui, observamos que $x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Daí, (x, y) satisfaz $x^2 - y^2 = 0$ se, e somente se, (x, y) é ponto da reta $x - y = 0$ ou é ponto da reta $x + y = 0$. Vemos que $x - y = 0$ e $x + y = 0$ são retas concorrentes e se interceptam no ponto $(0, 0)$.

- *Circunferência*: para $r > 0$, $\{(x, y) : x^2 + y^2 - r^2 = 0\}$ é a circunferência de raio r centrada em $(0, 0)$.

- *Parábola*: $\{(x, y) : y^2 - 4y + 12x - 44 = 0\}$ é uma parábola (veja o Exemplo **??**).

- *Elipse*: $\{(x, y) : 9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0\}$ é uma elipse (Exemplo **??**).

- *Hipérbole*: $\{(x, y) : 9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0\}$ é uma hipérbole (veja o Exemplo **??**).

• **Reconhecimento de cônicas**

Dados números reais a, b, c, d, e, f, com a, b e c não todos iguais a zero, como saber qual cônica é descrita pela equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$?

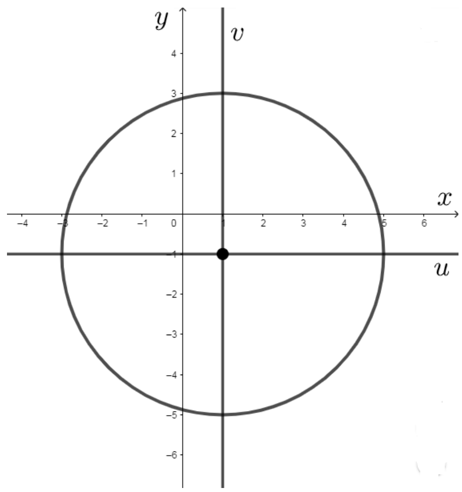
Algumas vezes, uma simples manipulação da equação nos fornece a resposta desejada, conforme vimos em alguns casos no exemplo acima. Em outros casos, pode ser conveniente efetuarmos uma mudança de variáveis que transforme a equação da cônica em uma equação que não apresente o termo quadrático misto nem os termos lineares. *Translações* e *Rotações* são tipos de mudanças de variáveis bastante utilizadas no estudo do reconhecimento da cônica a partir de sua equação.

Inicialmente, observamos que a técnica do *completamento de quadrados* é usada no estudo do reconhecimento de cônicas que não apresentam termo quadrático misto.

Exemplo 10.25. Consideremos a cônica

$$\mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0\}.$$

Completando quadrados, vemos que $x^2+y^2-2x+2y-14=0$ é equivalente a $(x-1)^2+(y+1)^2=16$ e, sabemos que tal equação representa a circunferência de centro $(1,-1)$ e raio 4. Fazendo a mudança de variáveis $u=x-1$ e $v=y+1$, obtemos a equação $u^2+v^2=16$. Esta é a equação da circunferência no sistema de coordenadas que tem as retas $x=1$ e $y=-1$ como eixo coordenados e centro no ponto $(1,-1)$.



Vejamos agora como a *rotação* é utilizada no estudo do reconhecimento de cônicas. Dado $\theta \in (0,2\pi)$, podemos efetuar a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} u = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ v = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{15}$$

Se $\mathcal{C}$ é cônica dada por

$$G(x,y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

com $b \neq 0$, a mudança de coordenadas dada acima nos permite escrever a cônica $\mathcal{C}$ da forma

$$G(x,y) = G'(u,v) = a'u^2+b'uv+c'v+d'u+e'v+f'=0$$

em que a substituição de u e v pelas expressões dadas em (15) nos fornece a', b', c', d', e', f' em termos que a, b, c, d, e, f e θ. Devemos nos lembrar aqui das identidades trigonométricas $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$. Obtemos:

$$\begin{cases} a' = a\cos^2\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + c\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ b' = (c-a)\,\mathrm{sen}\,2\theta + b\cos 2\theta \\ c' = a\,\mathrm{sen}^2\theta - b\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \\ d' = d\cos\theta + e\,\mathrm{sen}\,\theta \\ e' = -d\,\mathrm{sen}\,\theta + e\cos\theta \\ f' = f \end{cases} \tag{16}$$

Se $d=e=0$, então obteremos $d'=e'=0$. Vemos também que o termo independente não é afetado pela rotação, ou seja, $f'=f$.

O objetivo aqui é determinar um valor para θ de modo que $b'=0$. Impondo $b'=0$, segue de (16) que

$$\mathrm{cotg}\,2\theta = \frac{a-c}{b} \tag{17}$$

Usando novamente as equações dadas em (16), obtemos:

$$a'+c' = a(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)+c(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta) = a+c$$

$$a'-c' = a(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta)+2b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta+c(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta) =$$

$$= a\cos 2\theta + b\,\mathrm{sen}\,2\theta - c\cos 2\theta = (a-c)\cos 2\theta + b\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

Desse modo, se θ satisfaz (17), então $a'-c' = \dfrac{b}{\mathrm{sen}\,2\theta}$, pois

$$a'-c' = b\,\mathrm{cotg}\,2\theta\cos 2\theta + b\,\mathrm{sen}\,2\theta = b\left(\frac{\cos^2 2\theta}{\mathrm{sen}\,2\theta}+\mathrm{sen}\,2\theta\right) =$$

$$= \frac{b\left(cos^2 2\theta + \mathrm{sen}^2\,2\theta\right)}{\mathrm{sen}\,2\theta} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,2\theta}.$$

Assim, a' e c' são as soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} a'+c' = a+c \\ a'-c' = \dfrac{b}{\mathrm{sen}\,2\theta} \end{cases}$$

Podemos utilizar a identidade

$$\mathrm{sen}^2 2\theta = \frac{1}{1+\mathrm{cotg}^2 2\theta}$$

para calcular $\mathrm{sen}\,2\theta$ e, assim, $\mathrm{sen}\,2\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 2\theta}}$

Observemos que 2θ pode ser escolhido no intervalo $(0,\pi)$, não importa o valor obtido para $\mathrm{cotg}\,2\theta$. Neste caso, $\mathrm{sen}\,2\theta > 0$ e $0 < \theta < \pi/2$. Daremos preferência a essa escolha, ou seja, θ será escolhido de modo a termos $\mathrm{sen}\,2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 2\theta}}$.

Exercício 10.26. Identifique a cônica cuja equação é

$$4x^2-4xy+7y^2-24=0$$

Solução: Aqui, temos

$$a=4,\quad b=-4,\quad c=7,\quad d=0,\quad e=0 \text{ e } f=-24$$

Iremos efetuar uma rotação para eliminar o termo quadrático misto.

$$\mathrm{cotg}\,2\theta = \frac{a-c}{b} = \frac{4-7}{-4} = \frac{3}{4}.$$

Escolhendo $\theta \in (0, \pi/2)$, temos

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5}.$$

Do sistema

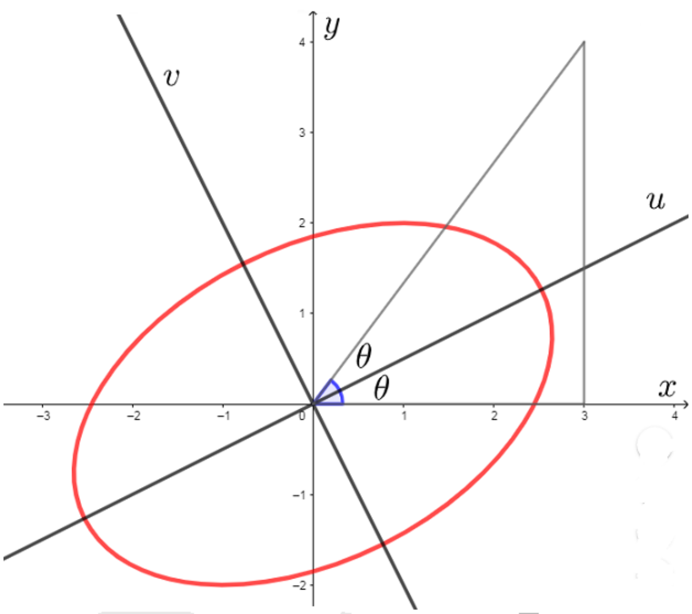
$$\begin{cases} a' + c' = a + c = 11 \\ a' - c' = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 2\theta} = -5 \end{cases}$$

vem que $a' = 3$ e $c' = 8$. Como $d = e = 0$, temos $d' = 0$ e $e' = 0$. Além disso, $b' = 0$ e $f' = f = -24$. Temos assim a equação $3u^2 + 8v^2 - 24 = 0$, ou ainda,

$$\frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{3} = 1,$$

equação que representa uma elipse.

Para esboçar essa elipse, desenhamos o triângulo retângulo destacado na figura abaixo, cujos catetos medem 3 e 4. Como $\operatorname{cotg} 2\theta = 3/4$, sua hipotenusa forma com Ox um ângulo de medida 2θ radianos. Desenhamos o eixo Ou, que contém a bissetriz desse ângulo. Depois, desenhamos Ov, perpendicular a Ou.



Exercício 10.27. Identifique a cônica cuja equação é

$$4x^2 + 4\sqrt{5}\,xy + 5y^2 - 12\sqrt{5}x + 24y - 36 = 0$$

Solução: Para esta cônica temos

$$a = 4, \quad b = 4\sqrt{5}, \quad c = 5, \quad d = -12\sqrt{5}, \quad e = 24 \quad \text{e} \quad f = -36$$

Primeiramente, iremos efetuar uma rotação para eliminar o termo quadrático misto. Temos

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-c}{b} = \frac{4-5}{4\sqrt{5}} = -\frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

Escolhendo $\theta \in (0, \pi/2)$, temos

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} a' + c' = a + c = 9 \\ a' - c' = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 2\theta} = 9 \end{cases}$$

obtemos $a' = 9$ e $c' = 0$.

Agora, para o cálculo de d' e e', usamos as equações

$$\begin{cases} d' = d\cos\theta + e\operatorname{sen}\theta \\ e' = -d\operatorname{sen}\theta + e\cos\theta \end{cases} \tag{18}$$

Devemos aqui conhecer $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ (note que $\theta \in (0, \pi/2)$). Notemos que

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta = \operatorname{cotg} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta = -\frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{9} = -\frac{1}{9}.$$

Além disso,

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta = -\frac{1}{9} \qquad \text{e} \qquad \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1.$$

Daí

$$2\cos^2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9},$$

o que nos fornece $\cos\theta = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Desse modo,

$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

Logo,

$$\begin{cases} d' = d\cos\theta + e\operatorname{sen}\theta = -12\sqrt{5}\dfrac{2}{3} + 24\dfrac{\sqrt{5}}{3} = 0 \\[2ex] e' = -d\operatorname{sen}\theta + e\cos\theta = 12\sqrt{5}\dfrac{\sqrt{5}}{3} + 24\dfrac{2}{3} = 36 \end{cases} \tag{19}$$

Aqui, $f' = f = 36$. Como $b' = 0$, chegamos na equação $g'(u, v) = 9u^2 + 36v - 36 = 0$. Reescrevendo essa igualdade, chegamos em $9u^2 = 36(1 - v)$, ou ainda, $u^2 = -4(v - 1)$. Logo, a cônica dada é uma parábola.

11 Quádricas

Chama-se *superfície quádrica* (ou simplesmente, *quádrica*) qualquer subconjunto de $\mathbb{E}^3$ que possa ser descrito, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, por uma equação de segundo grau (nas variáveis x, y e z) da forma

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0 \quad (20)$$

em que a,b,c,d,e,f,g,h,i são números reais, sendo que a,b,c,d,e,f não são todos iguais a zero.

Mudanças de coordenadas (translações e/ou rotações) nos permitem escrever a equação (20) de um dos seguintes modos:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D \quad (21)$$

$$\begin{cases} Ax^2+By^2+Rz=0 \\ Ax^2+Ry+Cz^2=0 \\ Rx+By^2+Cz^2=0 \end{cases} \quad (22)$$

em que A, B, C, D e R são números reais.

Na sequência, iremos apresentar equações (reduzidas) de algumas quádricas. Tais equações decorrem de (21) e (22), analisando-se as possibilidades para A, B, C, D, R. Para se obter um esboço das quádricas apresentadas, podemos fazer um estudo acerca das interseções da quádrica com planos paralelos aos planos coordenados.

11.1 Superfície Esférica (ou Esfera)

A *superfície esférica* (ou, simplesmente, *esfera*) de centro $C=(x_0,y_0,z_0)$ e raio $r>0$ é o conjunto dos pontos $P=(x,y,z)$ de $\mathbb{E}^3$ que satisfazem a condição $\mathrm{d}(P,C)=r$. Assim, $P=(x,y,z)$ é um ponto dessa superfície esférica se, e somente se, x, y, z satisfazem a equação

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2,$$

chamada de *equação reduzida* dessa esfera. Um esboço é dado na Figura 25.

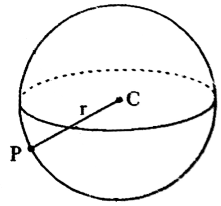


Figura 25: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

No caso em que o centro da esfera é $C=(0,0,0)$, sua equação reduzida é da forma

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

11.2 Elipsóide

A quádrica representada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

em que a, b e c são números reais positivos, com pelo menos dois deles distintos, é chamada de *elipsóide*.

Vamos supor $a \neq b$ e analisar a interseção do elipsóide

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

com planos paralelos ao planos coordenados.

Vemos que a interseção de $\mathcal{E}$ com o plano $z=k$, $k\in\mathbb{R}$, é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$

Tal interseção é não-vazia se, e somente se, $1 \geq \frac{k^2}{c^2}$. E temos:

$1 \geq \frac{k^2}{c^2} \Leftrightarrow c^2 \geq k^2 \Leftrightarrow \sqrt{c^2} \geq \sqrt{k^2} \Leftrightarrow |c| \geq |k| \Leftrightarrow |k| \leq c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -c \leq k \leq c$.

Se $k=c$, essa interseção é o ponto $(0,0,c)$; se $k=-c$, a interseção é o ponto $(0,0,-c)$. Se $-c<k<c$, então $1-\dfrac{k^2}{c^2}>0$ e a interseção de $\mathcal{E}$ com o plano $z=k$ é a elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=k \end{cases}$$

Informações análogas podem ser obtidas se interceptarmos o elipsóide $\mathcal{E}$ com planos da forma $x=k$ e $y=k$. Em tais casos, há a possibilidade da interseção ser uma circunferência, caso tenhamos $a=c$ ou $b=c$.

Um esboço do elipsóide $\mathcal{E}$ é dado na Figura 26.

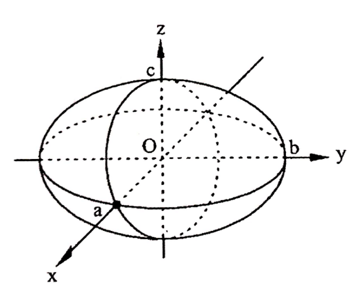


Figura 26: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

11.3 Hiperbolóide de uma folha

A quádrica descrita por uma das seguintes equações

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

em que a, b e c são números reais positivos, é chamada de *hiperbolóide de uma folha.*

Consideremos, na sequência, o hiperbolóide $\mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Vamos estudar a interseção de $\mathcal{H}$ com planos paralelos aos planos coordenados.

(I) Vemos que a interseção de $\mathcal{H}$ com o plano $z=k$, $k\in\mathbb{R}$, é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$

e se trata de uma elipse (caso $a\neq b$) ou de uma circunferência (se $a=b$) no plano $z=k$.

(II) A interseção de $\mathcal{H}$ com o plano $y=k$, $k\in\mathbb{R}$, é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}$$

Se $-b<k<b$, então $1-\frac{k^2}{b^2}>0$ e a interseção resultante é uma hipérbole no plano $y=k$ com segmento focal paralelo ao eixo x. Agora, se $k<-b$ ou $k>b$, teremos $1-\frac{k^2}{b^2}<0$ e a interseção será uma hipérbole no plano $y=k$ com segmento focal paralelo ao eixo z. Quando $k=-b$ ou $k=b$, teremos $1-\frac{k^2}{b^2}=0$ e daí

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}=0.$$

Neste caso, a interseção será a união das retas concorrentes r e s de equações

$$r:\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0 \\ y=k \end{cases} \qquad s:\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0 \\ y=k \end{cases}$$

Resultados análogos aos apresentados no caso (II) são obtidos se considerarmos a interseção de $\mathcal{H}$ com planos da forma $x=k$, $k\in\mathbb{R}$. Um esboço do hiperbolóide de uma folha $\mathcal{H}$ é dado na Figura 27.

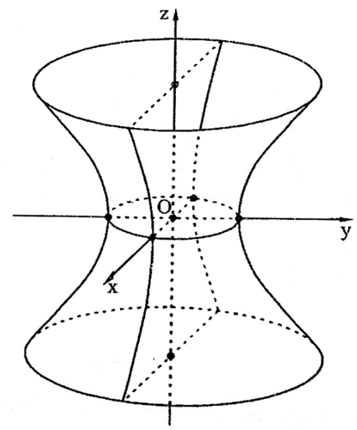


Figura 27: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

11.4 Hiperbolóide de duas folhas

A quádrica descrita por uma das seguintes equações

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

em que a, b e c são números reais positivos, é chamada de *hiperbolóide de duas folhas.*

Consideremos o hiperbolóide de duas folhas $\mathbb{H}$ dado por $\mathbb{H}: -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Vejamos o que ocorre quando interceptamos $\mathbb{H}$ com planos paralelos aos planos coordenados.

(I) A interseção de $\mathbb{H}$ com o plano $z=k$, $k\in\mathbb{R}$, é dada por

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$

que é uma hipérbole com segmento focal paralelo ao eixo y.

Já a interseção de $\mathbb{H}$ com o plano $x=k$, $k\in\mathbb{R}$, é a hipérbole com segmento focal paralelo ao eixo y dada por

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1+\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$

(II) A interseção de $\mathbb{H}$ com o plano $y=k$, $k\in\mathbb{R}$, é dada por

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{k^2}{b^2}-1 \\ y=k \end{cases}$$

Tal interseção é não-vazia se, e somente se, $\frac{k^2}{b^2}-1\geq 0$. E temos

$$\frac{k^2}{b^2}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{k^2}{b^2}\geq 1 \Leftrightarrow k^2\geq b^2 \Leftrightarrow |k|\geq|b| \Leftrightarrow k\leq -b \quad \text{ou} \quad k\geq b.$$

Se $k = b$ ou $k = -b$, a interseção é o ponto $(0, k, 0)$. Se $k > b$ ou $k < -b$, a interseção será dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)} = 1 \\ y = k \end{cases},$$

que se trata de uma elipse (se $a \neq c$) ou uma circunferência (se $a = c$).

Um esboço do hiperbolóide de duas folhas $\mathbb{H}$ é dado na Figura 28.

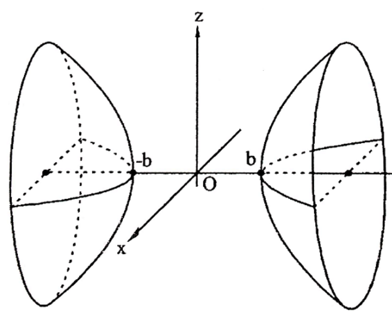


Figura 28: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

11.5 Parabolóides de rotação e elíptico

A quádrica descrita pela equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

em que a e b são números reais positivos, é chamada de *parabolóide de rotação* se $a = b$, e de *parabolóide elíptico* se $a \neq b$. Também são equações de parabolóides (de rotação ou elípticos)

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \qquad x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

com a, b e c números reais positivos.

Seja $\mathcal{P}$ o parabolóide $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

(I) A interseção de $\mathcal{P}$ com o plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}.$$

Se $k < 0$, tal interseção é vazia. Se $k = 0$, a interseção é o ponto $(0, 0, 0)$. Quando $k > 0$, a interseção é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 k} + \dfrac{y^2}{b^2 k} = 1 \\ z = k \end{cases},$$

que é uma elipse (se $a \neq b$) ou uma circunferência (se $a = b$).

(II) A interseção de $\mathcal{P}$ com o plano $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{k^2}{a^2} = z \\ x = k \end{cases},$$

e descreve uma parábola no plano $x = k$, com vértice $V = (k, 0, k^2/a^2)$ e concavidade voltada para o semi-eixo z positivo.

A interseção de $\mathcal{P}$ com o plano $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, resulta na parábola

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} = z \\ x = k \end{cases},$$

com vértice $V = (0, k, k^2/b^2)$ e concavidade voltada para o semi-eixo z positivo.

Na Figura 29, esboçamos o parabolóide $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, considerando $a = b$.

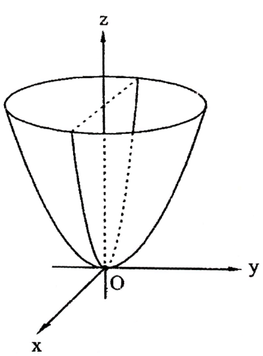


Figura 29: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, com $a = b$

11.6 Paraboloide hiperbólico

A quádrica descrita pela equação

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

em que a e b são números reais positivos, é chamada de *parabolóide hiperbólico* (ou *sela*).

Denotemos por $\mathbb{P}$ o parabolóide hiperbólico $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

(I) A interseção de $\mathbb{P}$ com o plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, é dada por

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}.$$

Se $k = 0$, teremos $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2}$ e o resultado da interseção será a união das retas concorrentes r e s dadas por

$$r : \begin{cases} y = -\dfrac{bx}{a} \\ z = k \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = \dfrac{bx}{a} \\ z = k \end{cases},$$

as quais se interceptam em $(0, 0, 0)$.

Se $k \neq 0$, a interseção será

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2 k} + \dfrac{y^2}{b^2 k} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

e o resultado é uma hipérbole, a qual terá segmento focal paralelo ao eixo Oy se $k > 0$, e terá segmento focal paralelo ao eixo Ox se $k < 0$.

(II) A interseção de $\mathbb{P}$ com o plano $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, é a parábola

$$\begin{cases} z = -\dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = k \end{cases},$$

com vértice $V = (k, 0, -k^2/a^2)$ e concavidade voltada para o semi-eixo z positivo.

(III) A interseção de $\mathbb{P}$ com o plano $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, é a parábola

$$\begin{cases} z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} \\ x = k \end{cases},$$

com vértice $V = (0, k, k^2/b^2)$ e concavidade voltada para o semi-eixo z negativo.

Um esboço de $\mathbb{P}$ é dado na Figura 30.

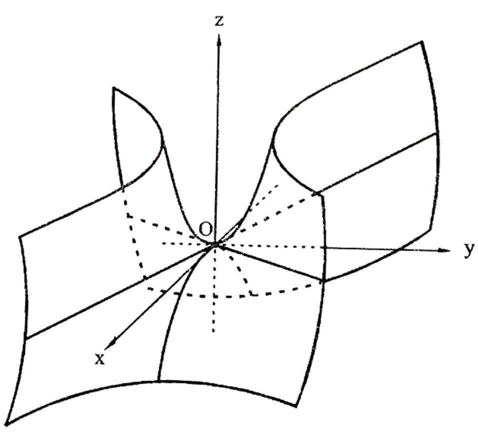


Figura 30: $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Também são equações de parabolóides hiperbólicos:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \qquad x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

$$y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \qquad y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

11.7 Cone quadrático

A quádrica descrita pela equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

em que a e b são números reais positivos, é chamada de *cone quadrático*.

Também são equações de cones quadráticos

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \qquad x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

com a, b e c números reais positivos.

Um esboço do cone quadrático $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ é dado na Figura 31.

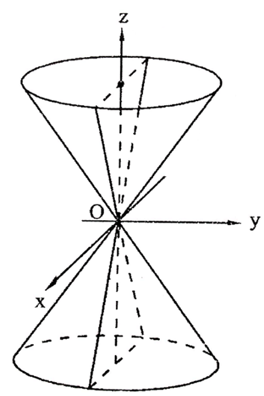


Figura 31: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

11.8 Cilindros

A quádrica descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em que $a \neq b$ são números reais positivos, é chamada de *cilindro elíptico*. Também são equações de cilindros elípticos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

em que a, b e c são números reais positivos dois a dois distintos.

A quádrica descrita pela equação

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

em que $a > 0$ é um número real, é chamada de *cilindro de rotação*. As equações

$$x^2 + z^2 = a^2 \quad \text{e} \quad y^2 + z^2 = a^2$$

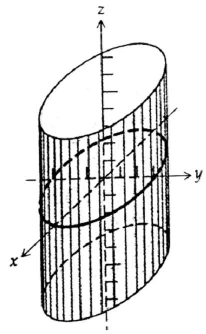


Figura 32: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \neq b$

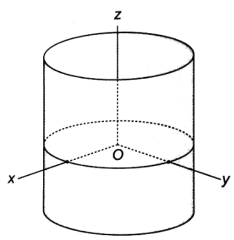


Figura 33: $x^2 + y^2 = a^2$

também representam cilindros de rotação.

Outros tipos de cilindros são o *cilindro hiperbólico* e o *cilindro parabólico*. Na Figura 34, vemos o cilindro hiperbólico $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; na Figura 35, temos o cilindro parabólico $y^2 = cx$, sendo a, b e c números reais positivos.

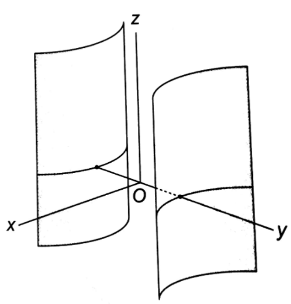


Figura 34: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

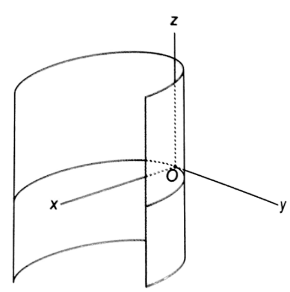


Figura 35: $y^2 = cx$

11.9 Superfícies de revolução

Um subconjunto Ω de $\mathbb{E}^3$ é uma *superfície de revolução* (ou de *rotação*) se existem uma reta r e uma curva Γ tal que Ω seja a união das circunferências (eventualmente de raio nulo, ou seja, pontos) de centros pertencentes a r, contidas em planos perpendiculares a r, planos estes que interceptam Γ.

Ou seja, uma superfície de revolução é a superfície obtida a partir de uma rotação de uma curva plana Γ em torno de uma reta fixa r pertencente ao plano dessa curva. A curva Γ, neste caso, é chamada de *geratriz*; a reta r é o *eixo de rotação* ou *eixo de simetria*.

Nesta seção, consideraremos superfícies de revolução que possuem uma cônica como diretriz. Na sequência, vemos dois exemplos de quádricas que são superfícies de revolução.

Exemplo 11.1. Seja $\mathbb{Q}$ a superfície de revolução em que a diretriz é a hipérbole

$$\Gamma : \begin{cases} -x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

no Plano Oxy e o eixo de simetria é o eixo Oy.

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto de $\mathbb{Q}$. Existem um número real $k \geq 0$ e um ponto $Q = (x, y, 0)$ na hipérbole Γ tais que P e Q pertencem à circunferência de centro $C = (0, y, 0)$ e raio k. Daí, $d(P, C) = k = d(Q, C)$. Considerando que Q é um ponto de Γ, temos

$$d(Q, C) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$d(P, C) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Logo, chegamos em $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$, a equação de um hiperboloide de duas folhas.

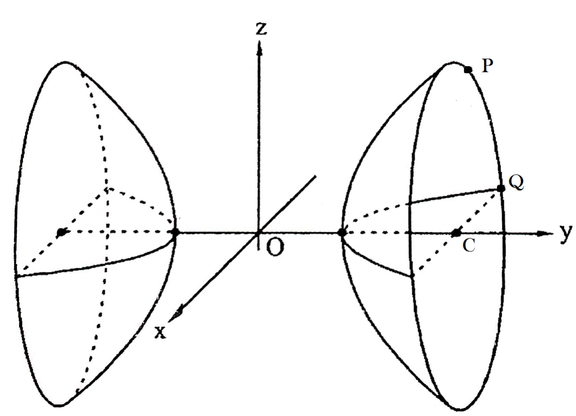


Figura 36: $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Exemplo 11.2. Seja $\mathbb{S}$ a superfície de revolução cuja diretriz é a reta

$$\Gamma : \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

no Plano Oxy e o eixo de simetria é o eixo Oy.

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto de $\mathbb{S}$. Existem um número real $k \geq 0$ e um ponto $Q = (y, y, 0)$ na reta Γ tais que P e Q pertencem à circunferência de centro $C = (0, y, 0)$ e raio k. Daí, a $d(P, C) = k = d(Q, C)$. Logo

$$d(P, C) = \sqrt{(y-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$d(Q, C) = \sqrt{(y-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{y^2}$$

e, assim, obtemos $x^2 + z^2 = y^2$, a equação reduzida de um *cone*.

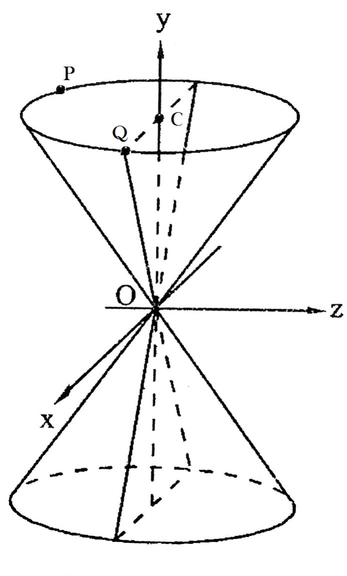
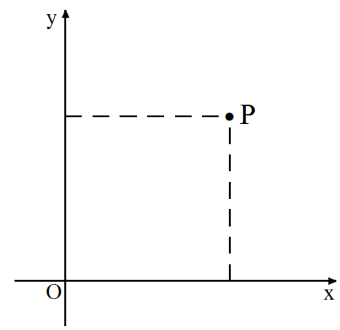


Figura 37: $x^2 + z^2 = y^2$

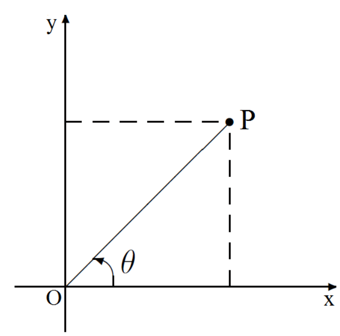
12 Transformações de coordenadas

12.1 Coordenadas polares

Dado um ponto P do plano, utilizando coordenadas cartesianas, descrevemos sua localização no plano escrevendo $P = (x, y)$ onde x é a projeção de P no eixo Ox e y, a projeção no eixo Oy:

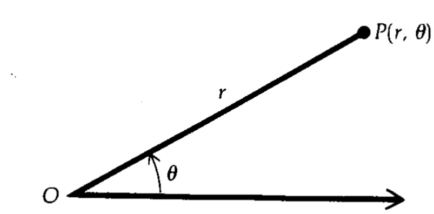


Também, podemos descrever a localização de P a partir da distância de P à origem O do sistema de coordenadas e do ângulo formado pelo eixo Ox e o segmento OP, caso $P \neq 0$:



Denotamos $P = (r, \theta)$ onde $r = \|\overline{OP}\|$ e θ é o ângulo formado entre o eixo Ox e o segmento $\overline{OP}$. Esta forma de representar um ponto do plano é chamada *sistema de coordenadas polares.*

Para representar pontos em coordenadas polares necessitamos somente de um ponto O do plano e uma semi-reta com origem O:

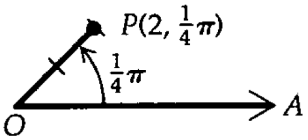


O ponto fixo O é chamado *pólo* e o semi-eixo fixo é chamado *eixo polar* (vamos designá-lo por OA). A medida do ângulo θ é considerada positiva quando está no sentido anti-horário e negativa quando está no sentido horário.

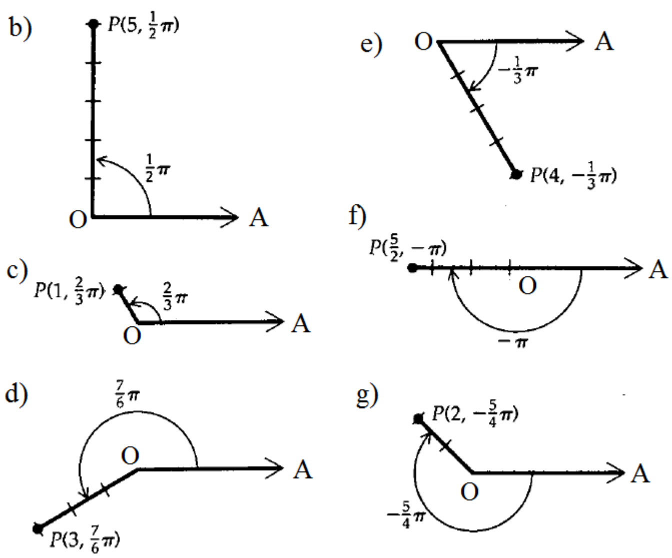
Exemplo 12.1. Marque cada um dos seguintes pontos com o conjunto de coordenadas polares dado:

a) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ *b)* $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$ *c)* $\left(1, \frac{2}{3}\pi\right)$ *d)* $\left(3, \frac{7}{6}\pi\right)$
e) $\left(4, -\frac{1}{3}\pi\right)$ *f)* $\left(\frac{5}{2}, -\pi\right)$ *g)* $\left(2, -\frac{5}{4}\pi\right)$

Solução: a) O ponto $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ é determinado primeiro ao traçarmos o ângulo com medida $\pi/4$ radianos, tendo seu vértice na origem e seu lado inicial ao longo do eixo polar. O ponto no lado terminal que é 2 unidades da origem é o ponto $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$:



Analogamente, obtemos os demais pontos:



Exemplo 12.2. Nas Figuras seguintes, vemos os pontos $\left(4, \frac{5}{6}\pi\right)$, $\left(4, -\frac{7}{6}\pi\right)$ e $\left(4, \frac{17}{6}\pi\right)$. Observe que um ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares. De fato, as coordenadas $\left(4, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi\right)$, n um número inteiro qualquer, são do mesmo ponto.

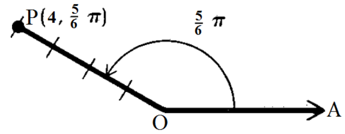


Figura 38: $\left(4, \frac{5}{6}\pi\right)$

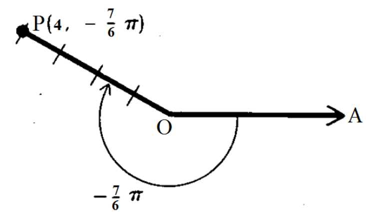


Figura 39: $\left(4, -\frac{7}{6}\pi\right)$

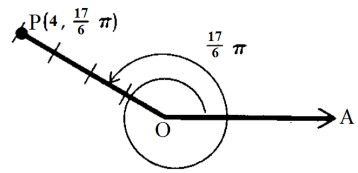


Figura 40: $\left(4, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi\right)$

Exemplo 12.3. Podemos considerar coordenadas polares com r negativo. Neste caso, o ponto estará no prolongamento do lado terminal do ângulo, que é a semi-reta que parte da origem, estendendo-se no sentindo oposto ao lado terminal. Nas figuras abaixo vemos os pontos $\left(-3, \frac{1}{3}\pi\right)$ e $\left(-3, -\frac{5}{3}\pi\right)$

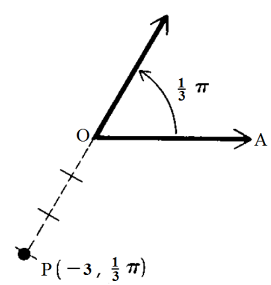


Figura 41: $\left(-3, \frac{1}{3}\pi\right)$

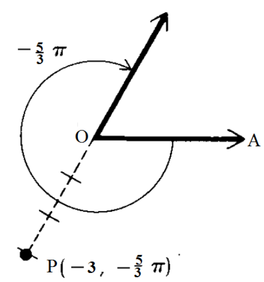


Figura 42: $\left(-3, -\frac{5}{3}\pi\right)$

Na sequência, vamos apresentar a relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares de um ponto. Seja $P = (x, y)$ no sistema de coordenadas cartesianas e $P = (r, \theta)$ no sistema de coordenadas polares:

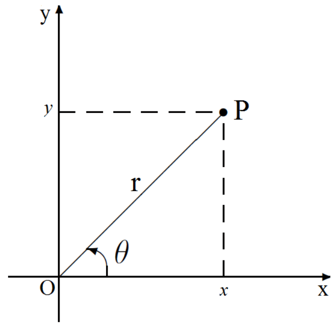
A relação entre essas coordenadas é dada pelas equações:

$$x = r \cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \ \operatorname{sen}\theta$$

Observação 12.4. Usando as igualdades acima temos que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = (r \cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2 &= r^2(\cos\theta)^2 + r^2(\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= r^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= r^2.1 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Ou seja, $x^2 + y^2 = r^2$.



Exemplo 12.5. Determine as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são $\left(-6, \frac{7}{4}\pi\right)$

Solução: Usando as equações

$$x = r \cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \ \operatorname{sen}\theta$$

temos

$$x = -6 \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

$$y = -6 \ \operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -6 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Portanto, as coordenadas cartesianas do ponto é $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

Exemplo 12.6. Dado $P = (-1, 1)$ em coordenadas cartesianas, obtenha as suas coordenadas polares.

Solução: Pela Observação 12.4 temos que

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$$

Logo, $r = \sqrt{2}$. Usando as equações $x = r \cos\theta$ e $y = r \ \operatorname{sen}\theta$ temos

$$-1 = \sqrt{2}\cos\theta \quad \text{e} \quad 1 = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$$

De onde obtemos

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Portanto, as coordenadas polares do ponto é $\left(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$.

12.2 Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas são útil, por exemplo, no cálculo de áreas e volumes quando a superfície limite é de revolução.

No sistema cartesiano representamos um ponto pelas coordenadas $P = (x, y, z)$. No cilíndrico por $P = (r, \theta, z)$, que são as coordenadas polares (r, θ) mais a coordenada z do sistema cartesiano.

As relações de conversão são:

$$x = r \cos\theta \quad y = r \ \operatorname{sen}\theta \quad z = z$$

Exemplo 12.7. Determine as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são $\left(-6, \frac{7}{4}\pi, 2\right)$.

Solução: Do exemplo 12.5 temos

$$x = -3\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = 3\sqrt{2}$$

Assim, as coordenadas cartesianas são $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2)$.

12.3 Coordenadas esféricas

Nesse sistema de coordenadas o ponto é apresentado na forma $P = (\rho, \alpha, \beta)$.

As relações de conversão de coordenadas esféricas ($P = (\rho, \alpha, \beta)$) em cartesianas ($P = (x, y, z)$) são:

$$x = \rho \ \operatorname{sen}(\beta) \ \cos(\alpha)$$

$$y = \rho \ \operatorname{sen}(\beta) \ \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$z = \rho \ \cos(\beta)$$

As relações de conversão de coordenadas cartesianas ($P = (x, y, z)$) em esféricas ($P = (\rho, \alpha, \beta)$) são:

$$\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\beta = \operatorname{arccos}\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

13 Bibliografia

- I. Camargo, P. Boulos. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial.* 3^a ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

- P. Winterle, A. Steinbruch. *Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books, 2000.