Matemática Discreta I

Primeira Lista de Exercícios

1. Quais das seguintes sentenças são proposições?

   (a) Você sairá de carro hoje?

   (b) O número $2^{987654321} + 21$ é primo.

   (c) Eu sou brasileiro se, e somente se, sou inteligente.

   (d) Vá procurar o que fazer!

   (e) Se está frio, então hoje é sexta-feira.

   (f) Todo retângulo é um quadrado, mas $2 + 2 = 5$.

2. Considere as proposições P : "Está chovendo", Q : "O Sol está brilhando" e R: "Há nuvens". Escreva as sentenças abaixo utilizando operadores lógicos:

   (a) Se está chovendo, então há nuvens.

   (b) O Sol brilha quando e apenas quando o céu fica sem nuvens.

   (c) Choverá se o Sol brilhar ou se o céu estiver com nuvens.

   (d) A chuva é causa do Sol não brilhar.

3. Sendo P, Q e R as proposições dadas no exercício anterior, escreva, na linguagem corrente, as seguintes proposições compostas:

   (a) $P \to R$ (c)$P \to Q$ (e) $P \to \sim R$

   (b) $R \to P$ (d) $R \to \sim P$ (f) $\sim P \vee R$

4. Suponha que a proposição $P \to Q$ seja falsa. Verifique se é possível determinar o valor-verdade de cada uma das seguintes proposições: (a) $P \wedge Q$ (b) $P \vee Q$ (c) $Q \to P$. E se $P \to Q$ for verdadeira?

5. Detemine o valor-verdade de cada proposição:

   (a) Se 2+2=4, então 2+4 =8. (c) Se 2+2=4, então 2+4 =6.

   (b) Se 2+2=5, então 2+4 =8. (d) Se 2+2=5, então 2+4 =6.

6. Assuma que as proposições “Darcy é uma menina ” e “Darcy tem dez anos ” são ambas falsas. Determine o valor-verdade de cada proposição abaixo.

   (a) Se Darcy tem dez anos, então Darcy é menina.

   (b) Darcy tem dez anos se, e somente se, é menina.

   (c) Darcy não é uma menina com dez anos.

   E se as duas proposições dadas forem ambas verdadeiras?

7. Suponha que “Darcy não é baixa” é uma proposição falsa e assuma que as proposições “Darcy ou Maria têm dez anos ” e “se Maria tem dez anos, então Darcy não é baixa” são ambas verdadeiras. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

   (a) Darcy não é baixa.

   (b) Maria tem dez anos.

   (c) Darcy tem dez anos.

   (d) Ou Darcy ou Maria não tem dez anos.

8. Sabendo-se que P e X são proposições falsas e que Y é uma proposição verdadeira, determine o valor-verdade de:

   (a) $((P \vee X) \wedge (X \vee Y)) \longrightarrow P$

   (b) $\sim (\sim (\sim X \wedge Y)) \longrightarrow (\sim (\sim P))$

   (c) $\sim (\sim (\sim (P \wedge \sim Y)) \wedge (\sim P \wedge \sim X))$

9. Diga quais das seguintes proposições compostas possui apenas uma valor-lógico e determine esse valor. Se não possível atribuir um único valor-lógico para a proposição, explique por quê.

   (a) $\sim P \longrightarrow (Q \vee \sim R)$, sendo R verdadeira.

   (b) $P \longrightarrow (Q \wedge S)$, sendo P verdadeira.

   (c) $(P \longrightarrow S) \longrightarrow R$, sendo R verdadeira.

   (d) $(P \longrightarrow R) \wedge S$, sendo R verdadeira.

   (e) $(P \vee R) \vee (S \longrightarrow Q)$, sendo Q falsa e R verdadeira.

   (f) $[(P \vee Q) \longleftrightarrow (Q \wedge P)] \longrightarrow ((R \wedge P) \vee Q)$, sendo V o valor lógico de Q.

   (g) $(P \longleftrightarrow Q) \vee (Q \longrightarrow \sim P)$, sendo Q falsa.

   (h) $[(P \longrightarrow Q) \wedge P] \longrightarrow \sim P$, sendo P falsa.

10. Sejam P, Q e R proposições quaisquer, τ uma tautologia e C uma contradição. Construa a tabela-verdade de cada uma das proposições seguintes:

(a) $[\sim (P \wedge Q)] \vee P$

(b) $(\sim P \longrightarrow R) \wedge Q$.

(c) $(Q \rightarrow P) \longleftrightarrow (P \wedge Q)$

(d) $(P \longleftrightarrow Q) \rightarrow (P \vee \sim R)$

(e) $(P \wedge \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

(f) $[R \wedge (P \longleftrightarrow \tau)] \vee [\sim (P \longrightarrow C)]$

(g) $[(P \longrightarrow Q) \wedge \sim P] \longrightarrow \sim Q$

(h) $(\sim [C \longleftrightarrow (Q \longleftrightarrow \tau)]) \wedge (P \vee R)$

11. O conectivo "ou exclusivo" acontece se apenas uma das duas cláusulas componentes for verdadeira. Denote tal conectivo por $\oplus$. (a) Faça as tabelas-verdade de: $P \oplus Q$, $P \oplus P$, $(P \oplus Q) \oplus R$. (b) Mostre que $P \oplus Q$ equivale a $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ e também a $\sim (P \longleftrightarrow Q)$.

12. Prove as seguintes equivalências:

(a) $P \equiv P \vee P$ (Idempotência)

(b) $P \equiv P \wedge P$ (Idempotência)

(c) $P \vee Q \equiv Q \vee P$ (Comutatividade)

(d) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ (Comutatividade)

(e) $[(P \vee Q) \vee R] \equiv [P \vee (Q \vee R)]$ (Associatividade)

(f) $[(P \wedge Q) \wedge R] \equiv [P \wedge (Q \wedge R)]$ (Associatividade)

(g) $\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$ (De Morgan)

(h) $\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$ (De Morgan)

(i) $[P \vee (Q \wedge R)] \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (Distributividade)

(j) $[P \wedge (Q \vee R)] \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (Distributividade)

(k) $P \equiv \sim (\sim P)$ (Lei da Dupla Negação)

(l) $(P \rightarrow Q) \equiv \sim P \vee Q$ (Definição de Condicional)

(m) $(P \equiv Q) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ (Definição de Bicondicional)

13. Utilize as equivalências lógicas dadas no exercício anterior para verificar as seguintes regras de equivalência:

    (a) $(P \to Q) \equiv (\sim Q \to \sim P)$ (Contrapositiva)

    (b) $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ (Absorção)

    (c) $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ (Absorção)

    (d) $(P \to Q) \equiv \sim [P \wedge (\sim Q)]$ (Definição de Condicional)

    (e) $[(P \wedge Q) \to R] \equiv [P \to (Q \to R)]$ (Exportação)

    (f) $[(P \to Q) \wedge (P \to \sim Q)] \equiv \sim P$ (Absurdo)

14. Sejam P uma proposição qualquer, C uma contradição e τ uma tautologia. Prove as seguintes regras de equivalência:

    (a) $P \vee C \equiv P$

    (b) $P \wedge C \equiv C$

    (c) $P \wedge \sim P \equiv C$

    (d) $P \vee \sim P \equiv \tau$

    (e) $P \vee \tau \equiv \tau$

    (f) $P \wedge \tau \equiv P$

15. Sejam P, Q, R e S proposições quaisquer. Mostre que as proposições $(P \to R) \vee (Q \to S)$ e $(P \wedge Q) \to (R \vee S)$ são equivalentes.

16. Sejam P, Q e R proposições quaisquer. Utilize as equivalências lógicas dadas nos exercícios anteriores para verificar as seguintes equivalências:

    (a) $P \to Q \equiv P \to (P \wedge Q)$ (b) $\sim (P \to Q) \equiv P \wedge \sim (P \wedge Q)$

    (c) $(P \vee Q) \to P \equiv Q \to P$ (d) $P \equiv Q \equiv (P \vee Q) \to (P \wedge Q)$

    (e) $\sim (P \wedge (\sim [Q \vee R])) \equiv \sim R \to (\sim Q \to \sim P)$

    (f) $\sim [(\sim P \to \sim Q) \wedge ([Q \wedge P) \to \sim P)] \equiv Q$

17. Simplifique as proposições abaixo (utilizando regras de equivalência):

    (a) $[\sim (P \vee Q)] \vee (P \wedge \sim Q)$ (b) $\sim (P \vee Q) \wedge P$

    (c) $Q \wedge \sim (P \wedge Q)$ (d) $P \to (P \vee Q)$

    (e) $(P \wedge Q) \to (\sim R \to \sim Q)$ (f) $\sim P \to [(\sim P \vee Q) \to (P \wedge Q)]$

    (g) $P \wedge (P \to Q) \wedge (P \to \sim Q)$ (h) $(P \vee Q) \to [(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)]$

18. Prove as seguintes implicações:

    (a) $P \Rightarrow P \vee Q$ (Adição)

    (b) $P \wedge Q \Rightarrow P$ (Simplificação)

    (c) $(P \to Q) \wedge P \Rightarrow Q$ (Modus Ponens)

    (d) $(P \to Q) \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P$ (Modus Tollens)

    (e) $(P \vee Q) \wedge \sim P \Rightarrow Q$ (Silogismo Disjuntivo)

    (f) $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$ (Silogismo Hipotético)

19. Exibir os nomes de cada um dos seguintes argumentos (a conclusão é o que está abaixo do traço horizontal):

    Exemplo: $$\begin{array}{l} \sim (A \vee D) \longrightarrow E \\ \underline{\sim (A \vee D) \qquad\qquad} \\ E \end{array}$$ Modus Ponens

    (a) $$\begin{array}{l} F \longrightarrow (B \vee D) \\ \underline{\sim (B \vee D) \qquad\qquad} \\ \sim F \end{array}$$

    b) $$\begin{array}{l} (P \wedge Q) \vee (\sim Q \wedge R) \\ \underline{\sim (P \wedge Q) \qquad\qquad} \\ (\sim Q \wedge R) \end{array}$$

    (c) $$\begin{array}{l} A \longrightarrow \sim B \\ \underline{\sim B \longrightarrow (R \vee D) \qquad} \\ A \longrightarrow (R \vee D) \end{array}$$

    (d) $$\begin{array}{l} \underline{(\sim P \vee Q) \wedge (R \longrightarrow S) \qquad} \\ (\sim P \vee Q) \end{array}$$

20. Completar cada um dos seguintes argumentos válidos (a conclusão é o que está abaixo do traço horizontal):

    (a) $$\begin{array}{l} (R \wedge P) \longrightarrow \sim Q \\ \underline{\sim (\sim Q) \qquad\qquad} \\ \qquad ? \end{array}$$

    (b) $$\begin{array}{l} A \longrightarrow (B \longrightarrow R) \\ \underline{\qquad\qquad ? \qquad\qquad} \\ \sim A \end{array}$$

    (c) $$\begin{array}{l} (A \wedge \sim B) \vee (B \wedge \sim R) \\ \underline{\qquad\qquad ? \qquad\qquad} \\ (A \wedge \sim B) \end{array}$$

    (d) $$\begin{array}{l} A \longrightarrow (B \wedge R) \\ \underline{\qquad\qquad ? \qquad\qquad} \\ A \longrightarrow \sim D \end{array}$$

21. Verifique que são válidos os argumentos (C representa uma contradição):

   (a) $P \to \sim Q, \quad Q, \quad \sim P \to (R \wedge S) \vdash \quad R \wedge S$

   (b) $G \to H, \quad \sim G \to \sim\sim F, \quad \sim H \vdash \quad F$

   (c) $\sim Q \vee S, \quad \sim S, \quad [\sim (R \wedge S)] \to Q \vdash \quad R$

   (d) $(\sim R) \to S, \quad R \to T, \quad S \to (P \wedge Q), \quad \sim T \vdash \quad Q$

   (e) $P \to Q, \quad P \vee Q, \quad \sim Q \vdash \quad C$

   (f) $P \to Q, \quad R \to S, \quad \sim Q \wedge R, \quad (\sim P \wedge S) \to X \vdash \quad X$

22. Verifique a validade do argumento: "Se eu não especifico as condições iniciais, meu programa não roda. Se eu cometo 'loop infinito', meu programa não termina. Se o programa não roda ou se ele não termina, então o programa falha. Logo, se o programa não falha, então eu especifiquei as condições iniciais e não cometi 'loop'."

23. Mostre que os seguintes argumentos são válidos:

   (a) $P \to S,\ P \wedge Q,\ S \wedge R \to \sim T,\ Q \to R \ \vdash \sim T$

   (b) $T \to R,\ \sim R,\ T \vee S \ \vdash\ S$

   (c) $E \to S,\ \sim T \to \sim J,\ E \wedge J \ \vdash\ T \wedge S$

   (d) $(P \vee Q) \wedge (P \vee R),\ P \to S,\ S \to T,\ Q \wedge R \to (M \to T),\ \sim T \ \vdash \sim M$

   Utilizando a demonstração direta condicional

   (e) $\sim R \to Q,\ \sim T,\ \sim S \to \sim Q \ \vdash\ (T \vee \sim S) \to R$

   (f) $S \to R,\ S \vee P,\ P \to Q,\ R \to T \ \vdash \sim Q \to T$

   Utilizando a demonstração por contrapositiva

   (g) $(P \to Q) \vee R,\ S \vee T \to \sim R,\ S \vee (T \wedge U) \ \vdash\ P \to Q$

   (h) $P \to Q \vee R,\ \sim R \ \vdash\ P \to Q$

   Utilizando a demonstração indireta

   (i) $T \to \sim S,\ F \to \sim T,\ S \vee F \ \vdash \sim T$

   (j) $S \vee R,\ S \to \sim E,\ R \to M \ \vdash \sim E \vee M$

   (k) $\sim R \vee \sim B,\ T \vee S \to R,\ \sim S \vee B,\ \sim T \ \vdash \sim (T \vee S)$

Utilizando um método dedutivo de sua escolha

(l) $T \to A,\ V \to T,\ A \to M,\ \sim M \vee V\ \vdash\ A \longleftrightarrow V$

(m) $P \to Q,\ \sim R \to \sim Q,\ \sim (\sim P \vee \sim S)\ \vdash\ R \wedge S$

(n) $A \to (B \to R),\ (R \wedge D) \to E,\ F \to (B \wedge D),\ \sim (\sim F \vee \sim A)\ \vdash\ E$

(o) $(P \wedge \sim Q) \vee (\sim R \wedge Q),\ P \to S,\ \sim S \vee T,\ \sim T\ \vdash\ Q$

(p) $\sim (B \wedge R) \to \sim A,\ A \to (\sim B \wedge D)\ \vdash \sim A$

(q) $\sim B \to \sim A,\ B \to (R \vee D)\ \vdash\ (A \wedge \sim R) \to D$

(r) $A \to (B \to R),\ (A \wedge D) \vee (A \wedge E)\ \vdash \sim (\sim B \vee D) \to (R \wedge E)$

24. Demonstre, utilizando o método dedutivo, as seguintes implicações:

    (a) $[(P \to Q) \wedge (R \to S)] \Rightarrow [(P \wedge R) \to (Q \wedge S)]$

    (b) $(P \to Q) \Rightarrow [P \to (P \wedge Q)]$

25. Considere o argumento $H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4 \vdash\ T$, onde

    H_1: "Se ele estuda medicina, então ele se prepara para conseguir uma boa vida".

    H_2: "Se ele estuda artes, então ele se prepara para conseguir uma vida boa".

    H_3: "Se ele se prepara para conseguir uma boa vida ou se prepara para viver uma vida boa, então seu colégio não é uma perda de tempo".

    H_4: "Seu colégio é uma perda de tempo".

    T: "Assim, ele não estuda nem medicina e nem artes".

    Mostre que esse argumento é válido.

26. Considere os predicados no universo dos inteiros: $N(x)$: "x é um inteiro não-negativo", $E(x)$: "x é par", $I(x)$: "x é ímpar", $P(x)$: "x é primo". Escreva as proposições abaixo simbolicamente:

    (a) Existe um inteiro par.

    (b) Todo inteiro é par ou ímpar.

    (c) Todo inteiro primo não é negativo.

    (d) Todo primo é ímpar.

    (e) Se um inteiro não é ímpar, então é par.

    (f) Nem todos os primos são ímpares.

27. Considere os predicados $P(x)$: "$x^3 - 2x = 0$", $Q(x)$: "$|x+1| = 2$", $R(x)$: "$x^2 - 9 = 0$". Determine o valor-verdade de cada proposição abaixo em cada um dos seguintes universos de

discurso: $A = \{-3, 0, 3\}$, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

(a) $\exists x(P(x))$ (b) $\forall x(P(x) \vee R(x))$ (c) $\forall x(R(x) \to Q(x))$

(d) $\exists x(Q(x))$ (e) $\forall x[\sim Q(x) \wedge (P(x) \to R(x))]$ (f) $\exists x(Q(x) \to R(x))$

(g) $\exists x(\sim R(x))$ (h) $\forall x(\sim Q(x) \vee \sim R(x))$

28. Considere os predicados $P(x)$: "$x^2 - 1 = 0$" e $Q(x)$: "$x^2 = 0$", no universo $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$. Determine o valor-verdade das seguintes proposições:

(a) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ (b) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ (c) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ (d) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

29. Considere os predicados $P(x)$: "$x^2 - 36 = 0$", $Q(x)$: "x é múltiplo de 3", $R(x)$: "$|x| \leq 5$", $S(x)$: "$x^2 - x - 2 = 0$" e $T(x)$: "$x^2 = x$" no universo $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Determine o valor-verdade das seguintes proposições:

(a) $\forall x(P(x) \to Q(x))$

(b) $\exists x(\sim P(x) \wedge Q(x))$

(c) $\forall x(S(x) \to R(x))$

(d) $\exists x(\sim R(x) \wedge S(x))$

(f) $\forall x(T(x) \to R(x))$

(e) $\exists x(\sim T(x) \wedge R(x))$

(g) $\forall x(\sim R(x) \vee Q(x) \vee T(x))$

(h) $\exists x(R(x) \leftrightarrow P(x))$

30. Se $\forall x P(x)$ é falsa, então existe um sujeito x_0 no universo de discurso tal que $P(x_0)$ é falso. Neste caso, dizemos que x_0 é um *contraexemplo* da proposição dada. Encontre contraexemplos das sentenças abaixo:

(a) Todos os primos são ímpares: $\forall x : [x \text{ é primo} \to x \text{ é ímpar}]$

(b) $\forall x[(x+1)^2 = x^2 + 1]$ (universo: $\mathbb{R}$)

31. Considere os predicados $P(x)$: "$x^2 - 1 = 0$" e $Q(x)$: "$x^2 = 0$", no universo $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$. Determine o valor-verdade das seguintes proposições:

(a) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ (b) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

(c) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ (d) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

32. Mostre que os seguintes argumentos são válidos:

(a) "Todos os poetas são ou niilistas ou sonhadores. Afrânio é poeta. Mas ele não é niilista. Logo, há sonhadores " (P: poeta, N: niilista , S: sonhador e a : Afrânio).

(b)" Todos os gaúchos gostam de contar estórias. Todos os contadores de estórias são interessantes. O escritor Veríssimo é gaúcho. Logo, alguém é gaucho e interessante " (G : ser gaúcho, C: contar estórias, I : ser interessante, v: Veríssimo).

(c) " Todos os peixes vivem no mar. Acontece que Pluto é um animal. Pluto não vive no mar. Portanto, há animais que não são peixes.

33. Mostre que os seguintes argumentos são válidos:

(a) $\exists x(P(x) \wedge R(x)), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(\sim Q(x) \vee S(x)) \vdash \exists x(R(x) \wedge S(x))$

(b) $\forall x(R(x) \wedge I(x)), \forall x(H(x) \rightarrow \sim A(x)), \forall x(I(x) \rightarrow A(x)) \vdash \forall x(\sim R(x) \rightarrow \sim H(x))$

(c) $\exists x(A(x) \wedge R(x)), \forall x(R(x) \rightarrow L(x)) \vdash \exists x(A(x) \wedge L(x))$

34. Determine os valores lógicos das proposições (universo: $\mathbb{Z}$):

(a) $\forall m \exists n[2n = m]$ (b) $\forall m \exists n[2m = n]$ (c) $\forall m \exists n(\sim [2n = m])$
(d) $\exists n \forall m[2m = n]$ (e) $\exists m \forall n[m < n + m]$ (f) $\forall m \exists n[n < n + m]$

35. Determine quais das seguintes proposições são verdadeiras (universo de discurso: $\mathbb{Z}$). Depois considere o conjunto dos números reais como universo.

(a) $\forall x \exists y[xy = 0]$ (b) $\forall x \exists y[xy = 1]$ (c) $\exists y \forall x[xy = 1]$ (d) $\exists y \forall x[xy = x]$

36. Mostre as afirmações abaixo por indução sobre n.

(a) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$ para $n \geq 1$.

(b) $2^n > n,$ para $n \geq 1$.

(c) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2},$ para $n \geq 1$.

(d) $n^2 > 3n,$ para $n \geq 4$.

(e) $3^{2n} - 1$ é divisível por 8, para $n \geq 1$.

(f) $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para $n \geq 1$.

(g) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$ para $n \geq 1$.

(h) $2^n \leq 2^{n+1},$ para $n \geq 1$.

(i) $n^2 > n + 1,$ para $n \geq 2$.

(j) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},$ para $n \geq 1$.

37. Determine o menor número natural n_o tal que $n_o! > n_o^2$, onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Prove que $n! > n^2$, para todo $n \geq n_o$.