Matemática Discreta

1. Mostre as afirmações abaixo por indução sobre n.

   (a) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$ para $n \geq 1$.

   (b) $2^n > n,$ para $n \geq 1$.

   (c) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2},$ para $n \geq 1$.

   (d) $n^2 > 3n,$ para $n \geq 4$.

   (e) $3^{2n} - 1$ é divisível por 8, para $n \geq 1$.

   (f) $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para $n \geq 1$.

   (g) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$ para $n \geq 1$.

   (h) $2^n \leq 2^{n+1},$ para $n \geq 1$.

   (i) $n^2 > n + 1,$ para $n \geq 2$.

   (j) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para $n \geq 1$.

2. Determine o menor número natural n_o tal que $n_o! > n_o^2$, onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Prove que $n! > n^2$, para todo $n \geq n_o$.

3. Considere os predicados no universo dos inteiros: $N(x)$: "x é um inteiro não-negativo", $E(x)$: "x é par", $I(x)$: "x é ímpar", $P(x)$: "x é primo". Escreva as proposições abaixo simbolicamente:

   (a) Existe um inteiro par.

   (b) Todo inteiro é par ou ímpar.

   (c) Todo inteiro primo não é negativo.

   (d) Todo primo é ímpar.

   (e) Se um inteiro não é ímpar, então é par.

   (f) Nem todos os primos são ímpares.

4. Considere os predicados $P(x)$: "$x^3 - 2x = 0$", $Q(x)$: "$|x + 1| = 2$", $R(x)$: "$x^2 - 9 = 0$". Determine o valor-verdade de cada proposição abaixo em cada um dos seguintes universos de discurso: $A = \{-3, 0, 3\}$, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

   (a) $\exists x(P(x))$

   (b) $\forall x(P(x) \vee R(x))$

   (c) $\forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$

   (d) $\exists x(Q(x))$

   (e) $\forall x[\sim Q(x) \wedge (P(x) \rightarrow R(x))]$

   (f) $\exists x(Q(x) \rightarrow R(x))$

   (g) $\exists x(\sim R(x))$

   (h) $\forall x(\sim Q(x) \vee \sim R(x))$

5. Considere os predicados $P(x)$: "$x^2 - 1 = 0$" e $Q(x)$: "$x^2 = 0$", no universo $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$. Determine o valor-verdade das seguintes proposições:

   (a) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ (b) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ (c) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ (d) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

6. Considere os predicados $P(x)$: "$x^2 - 36 = 0$", $Q(x)$: "x é múltiplo de 3", $R(x)$: "$|x| \leq 5$", $S(x)$: "$x^2 - x - 2 = 0$" e $T(x)$: "$x^2 = x$" no universo $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Determine o valor-verdade das seguintes proposições:

   (a) $\forall x(P(x) \to Q(x))$
   (b) $\exists x(\sim P(x) \wedge Q(x))$
   (c) $\forall x(S(x) \to R(x))$
   (d) $\exists x(\sim R(x) \wedge S(x))$
   (f) $\forall x(T(x) \to R(x))$
   (e) $\exists x(\sim T(x) \wedge R(x))$
   (g) $\forall x(\sim R(x) \vee Q(x) \vee T(x))$
   (h) $\exists x(R(x) \leftrightarrow P(x))$

7. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 5\}$, escreva simbolicamente as sentenças abaixo, classificando-as em verdadeiras (V) ou falsas (F):

   (a) 2 é elemento de A
   (b) 4 pertence a B
   (c) B é um subconjunto de A
   (d) 1 não é elemento de B
   (e) A é igual a B
   (f) A não está contido em B

8. Considere o universo $\mathcal{U} = \{1, 4, 9, 10, 11\}$. Escreva os seguintes conjuntos listando explicitamente todos os seus elementos.

   $A = \{x \in \mathcal{U} \mid x^2 \neq 16\}$
   $B = \{x \in \mathcal{U} \mid x + 5 = 9\}$
   $C = \{x \in \mathcal{U} \mid x + 1 \in \mathcal{U}\}$
   $D = \{x \in \mathcal{U} \mid 2x - 5 < 6\}$
   $E = \{x \in \mathcal{U} \mid 4 < x < 9\}$
   $F = \{x \in \mathcal{U} \mid x^2 - 3x = 0\}$
   $G = \{x \in \mathcal{U} \mid x^2 = x\}$
   $H = \{x \in \mathcal{U} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$
   $I = \{x \in \mathcal{U} \mid |x - 6| \leq 4\}$

9. Escreva os seguintes conjuntos listando explicitamente todos os seus elementos.

   $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
   $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 25\}$
   $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 10x^2 + 3x - 1 = 0\}$
   $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 1 = 0\}$
   $E = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 4x^2 - 4x - 1 = 0\}$
   $F = \{x \in \mathbb{N} \mid [x + 3 = 8] \vee [x^2 = 9]\}$
   $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid [(x > -1) \wedge (x < 1)] \vee [x^3 = 8]\}$
   $H = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 0\}$
   $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid [x^2 = 4] \wedge [x \text{ é ímpar }]\}$
   $J = \{x \in \mathbb{Z} \mid [x^2 = 16] \vee [2x = 6]\}$

10. Classificar em verdadeira (V) ou falsa (F) cada sentença abaixo:

(a) $\{1,3,5,9\} = \{5,9,3,1\}$
(b) $\{1\} \in \{1\}$
(c) $\{1\} \subset \{1\}$
(d) $\{1\} \in \{\{1\},\{2,3\}\}$
(e) $1 \in \{1\}$
(f) $\{1\} \subset \{\{1\},\{2\}\}$
(g) $\emptyset \subset \{0,a\}$
(h) $\emptyset \subset \emptyset$
(i) $\emptyset \in \{\emptyset,\{a\}\}$
(j) $\emptyset \subset \{\emptyset,\{a\}\}$
(k) $\emptyset \in \{1,\{a\},14\}$
(l) $\emptyset \subset \{1,\{a\},14\}$.

11. Sejam $P(x)$: "existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = y^2$" e $Q(x)$: "$x \geq 20$" predicados com universo de discurso $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, P(x) \wedge \sim Q(x)\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, [x \in A] \vee [x^2 - 7x + 12 = 0]\,\}$$

$$C = \{1,3,5,9,25,45,243\}$$

Diga quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas, justificando sua resposta.

(a) Existe $x \in C$ tal que $x \notin B$
(b) $B \cup C$ tem exatamente 10 elementos.
(c) Existe $x \in B$ tal que $x \notin C$
(d) $\{1,3,9\} \subset (A \cap C)$
(e) $C \setminus B = \emptyset$
(f) $25 \in C \setminus A$
(g) $\{3,6\} \subset \complement_{\mathbb{N}}\,([A \cup C] \setminus B)$
(h) $(\exists c \in C)\,[P(c) \wedge c \notin A]$

12. Sejam $A = \{1,\{2\},q\}$, $B = \{1,2,\{1,2\},r\}$, $X = \{p,q,r,1,2,\{1,2\},\{1\}\}$, $Y = \{r,\{1,2\},p,2,q\}$ e $Z = \{1,\{2\},\{1,2\},q,2\}$.

(a) Determine $((B \setminus A) \cap Z) \cup \complement_X Y$
(b) É verdade que $\{1,2\} \in \wp(Y)$?

13. Sejam A, B e C subconjuntos de um mesmo conjunto universo $\mathcal{U}$. Diga quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas, justificando sua resposta.

(a) $A \setminus B = B \setminus A$
(b) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
(c) $A \cup (A \cap B) = A$
(d) Se $A \not\subset B$ e $B \subset C$, então $A \not\subset C$.
(e) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
(f) $A \setminus B \subset (A \cup B)$
(g) Se $(5,6) \notin A \times B$, então $5 \notin A$ e $6 \notin B$;

14. Sejam A, B, C e D subconjuntos de um mesmo conjunto universo $\mathcal{U}$. Mostre que:

(a) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cup B = B$.

(b) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B = A$.

(c) $C \setminus (B \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)$

(d) $A \setminus A = \emptyset$

(e) $A \setminus \emptyset = A$

(f) $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

(g) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

(h) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

(i) $A \subset B$ se, e somente se, $A \setminus B = \emptyset$.

(j) $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $B \setminus A = B$.

(k) $\left(\complement_{\mathcal{U}} A\right) \cap B = B \setminus A$.

(l) $A \cup \left(\complement_{\mathcal{U}} B\right) = \complement_{\mathcal{U}} (B \setminus A)$

(m) $\complement_{\mathcal{U}} \emptyset = \mathcal{U}$

(n) $\complement_{\mathcal{U}} \mathcal{U} = \emptyset$

(o) $A \cap B = B \setminus \complement_{\mathcal{U}} A$

(p) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(q) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

(r) $A \cup E = B$ se, e somente se, $A \setminus B = \emptyset$

(s) $\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$

15. Sejam $A = \{1, 2, \{3\}\}$ e $B = \{1, 3\}$. Determine $A \times B$ e $B \times \wp(A \setminus B)$.

16. Existem conjuntos A e B tais que $A \times B = \{(5, 11), (2, 5), (5, 2), (3, 2), (3, 11), (5, 3), (3, 5)\}$?

17. Sendo I o conjunto dos números naturais ímpares, considere os seguintes predicados no universo de discurso $\mathcal{U} = \wp(\mathbb{N})$:

$P(X)$: "$X \cap \{1, 2, 5, 6\} \neq \emptyset$"

$Q(X)$: " X é infinito"

$R(X)$: "$\{1, 2, 5, 6\} \subset X$"

$S(X)$: "$X \cap I = \emptyset$"

$A(X, Y)$: "$X \cap Y = \emptyset$"

$B(X, Y)$: "$X \cup Y = \mathbb{N}$"

Diga quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas, justificando sua resposta.

(a) $\exists X\, (P(X) \wedge Q(X))$

(b) $\forall X\, (R(X) \to P(X))$

(c) $\forall X\, (P(X) \to R(X))$

(d) $\exists X\, (Q(X) \leftrightarrow S(X))$

(e) $\forall X\, (P(X) \vee S(X))$

(f) $\exists X\, (S(X) \wedge \sim Q(X))$

(g) $\forall X\, \exists Y\, (\sim A(X, Y))$

(h) $\forall X\, \exists Y\, (A(X, Y) \wedge B(X, Y))$

(i) $\exists X\, \forall Y\, (A(X, Y) \to B(X, Y))$

(j) $\exists X\, \forall Y\, (\sim B(X, Y))$

18. Seja $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ e considere no conjunto $\mathcal{U} = \wp(A)$ os seguintes predicados:

$P(X)$: "$X \cap \{a, b\} \neq \emptyset$" $R(X)$: "$a \in X$

$Q(X)$: " $\{1, 2\} \subset \complement_A(X)$ " $S(X)$: "$X \cup \{b, c\} = A$"

Diga quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas, justificando sua resposta.

(a) $\exists X\, (P(X) \wedge Q(X))$

(b) $\forall X\, (R(X) \to P(X))$

(c) $\forall X\, (Q(X) \to R(X))$

(d) $\exists X\, (Q(X) \leftrightarrow S(X))$

(e) $\forall X\, (P(X) \vee S(X))$

(f) $\exists X\, (S(X) \wedge \sim Q(X))$

(g) $\forall X (R(X) \to S(X))$

(h) $\forall X (P(X) \vee Q(X))$

(i) $\exists X ([P(X) \vee Q(X)] \wedge S(X))$

(j) $\forall X\, (\sim Q(X) \vee [S(X) \leftrightarrow R(X)])$

19. Seja R a relação em $\mathbb{Z}$ definida por

$$a\, R\, b \Leftrightarrow 4 \text{ divide } a - b.$$

Prove que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ e determine o conjunto quociente $\mathbb{Z}/R$.

20. Em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, defina a relação $(a, b)R(c, d)$ se e somente $a - c = b - d$. Mostre que R é uma relação de equivalência. Determine classe de equivalência do ponto $(3, 1)$. Represente geometricamente tal classe.

21. Seja R a relação sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $(x, y)R(z, w)$ quando $x = z$. Mostre que R é uma relação de equivalência e determine a classe de equivalência do elemento $(2, 7) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

22. Em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, defina a relação $(x, y)R(z, t)$ se e somente $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$. Mostre que R é uma relação de equivalência. Determine a classe de equivalência de $(5, 0)$. Represente geometricamente tal classe.

23. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e seja o subconjunto $E = \{1, 3\}$ de A. Defina a relação $\sim$ em $\wp(A)$ por

$$X \sim Y \Leftrightarrow X \cup E = Y \cup E.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência em $\wp(A)$ e determine o conjunto quociente $\wp(A)/\sim$.

24. Em cada item, determine se a relação R dada é uma relação de equivalência e, para as que forem, determine o quociente A/R.

    (a) $A = \mathbb{N}$, $\quad xRy$ se $x + y$ é par.

    (b) $A = \mathbb{Z}$, $\quad xRy$ se 5 divide $x - y$.

    (c) $A = \mathbb{Z}$, $\quad xRy$ se $3x + y$ é múltiplo de 4.

    (d) $A = \mathbb{R}$, $\quad xRy$ se $x = y = 0$ ou $xy > 0$.

25. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $S = \{(1, 2), (3, 2), (4, 5), (2, 2)\} \subset A \times A$. Apresente uma relação R em A tal que $S \subset R$ e $R \cap \{(1, 4), (1, 5)\} = \emptyset$. Determine também o conjunto quociente A/R.

26. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, considere as relações:

    (a) $\{(1, 0), (2, 1), (3, -1), (4, 2)\}$

    (b) $\{(1, 0), (2, -1), (3, 2)\}$

    (c) $\{(1, 0), (2, 0), (3, -1), (4, 1)\}$

    (d) $\{(1, 0), (2, 1), (3, -1), (2, 1)\}$

    (e) $\{(1, -1), (2, 1), (3, 0), (4, 2)\}$

    Diga quais delas define uma função $f : A \to B$. Para cada uma dessas funções, verifique se é injetora/sobrejetora.

27. (a) A relação $R = \{(1, 1), (a, b), (b, j), (c, d), (d, d), (-1, 1), (i, j), (a, j)\}$ é uma função de $A = \{-1, 1, a, b, c, d, e, i\}$ em $B = \{1, 2, 3, b, c, d, j\}$?

    (b) A relação $R = \{(1, 1), (b, 1), (\{a\}, 1), (c, 21), (b, b)\}$ é uma função de $A = \{1, \{a\}, b, c, k\}$ em $B = \{1, 9, 21, b, s\}$?

28. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $f(x) = (x, 2x)$. A função f é injetora? É sobrejetora?

29. Considere a função $f : A \to A$. Verifique se as funções abaixo são injetoras ou sobrejetoras para cada um dos casos: (i) $A = \mathbb{N}$, (ii) $A = \mathbb{Z}$, (iii) $A = \mathbb{R}$.

    (a) $f(n) = 2n + 3$ $\qquad$ (b) $f(n) = n + 4$ $\qquad$ (c) $f(n) = n^2 + 1$.

30. Considere as três funções f, g, h de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definidas por: $f(n) = 2n$, $g(n) = n - 3$, e $h(n) = 0$ se n é par e $h(n) = 1$ se n é ímpar. Determine as funções: $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ g$, $g \circ (h \circ f)$.

31. Mostre que cada função abaixo é bijetora e encontre sua inversa.

    (a) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 4, 9, 16\}$, dada por $f(x) = x^2$.

    (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = x + 9$.

    (c) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dada por $f(x, y) = (y, x)$

    (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x + 8$.

    (e) $f : A \to A \times \{a\}$, dada por $f(x) = (x, a)$.

32. Considere $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} (x, x) & \text{se } x > 0 \\ (1, x^2) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

    (a) Mostre que g não é injetora, nem sobrejetora.

    (b) Mostre que f é bijetora e determine sua inversa f^{-1}

    (c) Determine a função composta $g \circ f$, dizendo qual é seu domínio e contradomínio.

33. Seja $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 10\}$ e considere as funções

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad g : \{-1, -2, -3, 1, 4, 9\} \to A, \qquad h : A \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

    dadas por $f(x) = x + 15$, $g(x) = |x| + 1$ e $h(x) = (2x, 3x + 1)$.

    (a) Mostre que g não é injetora. A função g é sobrejetora?

    (b) Mostre que f é bijetora e determine sua inversa f^{-1}.

    (c) Determine a função composta $h \circ g$, dizendo qual é seu domínio e contradomínio. Calcule $(h \circ g)(-1)$.