1)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

2) Pela relação de Stifel, temos

$$C_m^p + 2C_m^{p+1} + C_m^{p+2} = \left(C_m^p + C_m^{p+1}\right) + \left(C_m^{p+1} + C_m^{p+2}\right)$$
$$= C_{m+1}^{p+1} + C_{m+1}^{p+2}$$
$$= C_{m+2}^{p+2}$$

3) Seja m o número de elementos de A, temos

$$C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 512$$

Pelo Teorema das linhas, temos $2^m = 512$, donde $m = 9$

4) Teorema das linhas

$$C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7 - C_7^1 - C_7^0$$
$$= 128 - 7 - 1$$
$$= 120$$

5) Como $CR_m^p = C_{m+p-1}^p$, temos

teorema das diagonais

$$CR_m^0 + CR_m^1 + CR_m^2 + \dots + CR_m^p = C_{m-1}^0 + C_m^1 + C_{m+1}^2 + \dots + C_{m+p-1}^p = C_{m+p}^p = \frac{(m+p)!}{m!\,p!}$$

6a) $C_7^i (2x)^{7-i}(-3)^i$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7$

$$C_7^4 (2x)^{7-4}(-3)^4 = \frac{7!}{4!\,3!}\, 2^3x^3(-3)^4 = 35\cdot 8\cdot 81\, x^3 = 22\,680\, x^3$$

6b) $C_{10}^i (2x)^{10-i}(1)^i$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

$$C_{10}^2 (2x)^{10-2}\cdot 1^2 = \frac{10\times 9}{2}(2x)^8 = 45\cdot 256\, x^8 = 11.520\, x^8$$

6c) $C_{10}^{i} \cdot X^{10-i} \cdot 2^{i}$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$

$$C_{10}^{5}\, X^{10-5}\, 2^{5} = \frac{10!}{5!5!} \cdot 32\, X^{5} = 252 \cdot 32\, X^{5} = 8064\, X^{5}$$

7)
$$(2X^{4} - 1/X)^{12} = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^{i}\, (2X^{4})^{12-i}\, (-X^{-1})^{i}$$
$$= \sum_{i=0}^{12} C_{12}^{i}\, 2^{12-i}\, X^{48-4i}\, (-1)^{i}\, X^{-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{12} C_{12}^{i}\, 2^{12-i} (-1)^{i}\, X^{48-5i}$$

Como devemos ter $X^{48-5i} = X^{3}$, então devemos tomar $i = 9$. Assim,
$$C_{12}^{9}\, 2^{3} (-1)^{9}\, X^{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} \cdot 8 \cdot (-1)\, X^{3} = -1760\, X^{3}$$
Logo, o coeficiente de X^{3} é -1760

8) Temos que
$$(2X^{2} - 1/X^{3})^{n} = \sum_{i=0}^{n} C_{n}^{i}\, (2X^{2})^{n-i} \cdot (-X^{-3})^{i}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} C_{n}^{i}\, 2^{n-i}\, X^{2n-2i}\, (-1)^{i}\, X^{-3i}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} C_{n}^{i}\, 2^{n-i} (-1)^{i}\, X^{2n-5i}$$

Note que $X^{2n-5i} = X^{0}$ apenas se $i = \frac{2}{5}n$. Além disso, $\frac{2}{5}n \in \{0,1,2,\dots,n\}$ apenas quando n é múltiplo de 5. Em outras palavras, o desenvolvimento de $(2X^{2} - 1/X^{3})^{n}$ possui um termo independente de X apenas se n é múltiplo de 5.

9) Se $P(X) = a_n X^{n} + \dots + a_2 X^{2} + a_1 X + a_0$, então
$$P(1) = a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0,$$
isto é, $P(1)$ corresponde a soma dos coeficientes do polinômio p. Portanto, a soma dos coeficientes do polinômio $(2X^{3} - 3X)^{101}$ é
$$(2 \cdot (1)^{2} - 3 \cdot 1)^{101} = (-1)^{101} = -1$$