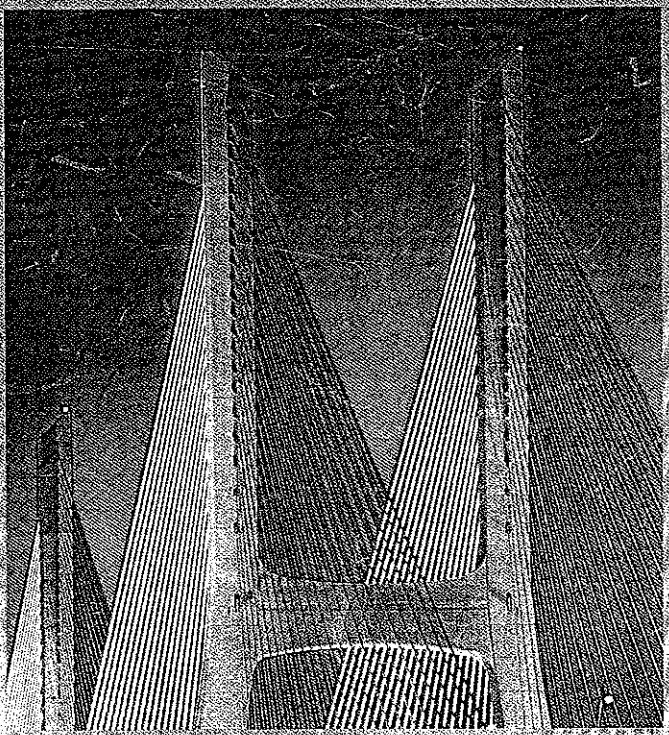


# ANTON • RORRES



## Álgebra Linear com Aplicações



8<sup>a</sup> Edição

# Índice de Símbolos

## CAPÍTULO 1

$[a_{ij}]$ , uma matriz cuja entrada na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é  $a_{ij}$   
 $[A | b]$ , matriz aumentada de um sistema de equações lineares  
 $m \times n$ , tamanho de uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas  
 $A^T$ , transposta de uma matriz  
 $\text{tr}(A)$ , traço de uma matriz  
 $I_n$ , matriz identidade  $n \times n$

$A^{-1}$ , inversa de uma matriz quadrada  
 $A^T = A$ , matriz simétrica  
 $A^T = -A$ , matriz anti-simétrica  
 $Ax = b$ , sistema de equações lineares  
 $0$ , matriz zero

## CAPÍTULO 2

$\det(A)$ , determinante de uma matriz quadrada  
 $E$ , símbolo usado para denotar uma matriz elementar  
 $\det(\lambda I - A) = 0$ , equação característica de uma matriz quadrada

$M_{ij}$ , menor da entrada  $a_{ij}$  de uma matriz quadrada  $A$   
 $C_{ij}$ , co-fator da entrada  $a_{ij}$  de uma matriz quadrada  $A$   
 $\text{adj}(A)$ , adjunta de uma matriz quadrada  $A$

## CAPÍTULO 3

$v$ , vetor  
0, vetor nulo  
 $\|u\|$ , norma de um vetor  $u$   
 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ , fórmula da distância no espaço tridimensional  
 $u \cdot v$ , produto escalar ou interno de dois vetores  
 $\text{proj}_a u$ , componente vetorial de  $u$  ao longo de  $a$

$u - \text{proj}_a u$ , componente vetorial de  $u$  ortogonal a  $a$   
 $u \times v$ , produto vetorial de dois vetores no espaço tridimensional  
 $i, j, k$ , vetores unitários canônicos do espaço tridimensional  
 $u \cdot (v \times w)$ , produto misto  
 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) + d = 0$ , forma ponto-normal da equação de um plano  
 $ax + by + cz + d = 0$ , forma geral da equação de um plano  
 $n \cdot (r - r_0)$ , forma vetorial da equação de um plano

## CAPÍTULO 4

$R^n$ , conjunto das  $n$ -uplas ordenadas ou espaço  $n$ -dimensional  
 $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ , produto interno euclidiano  
 $v^T u = u \cdot v$ , produto interno euclidiano usando vetores-coluna  
 $\|u\| = (\sum u_i^2)^{1/2}$ , norma euclidiana  
 $d(u, v) = \|u - v\|$ , distância euclidiana  
 $T$ , símbolo usado para denotar uma transformação linear  
 $T_A(x) = Ax$ , transformação matricial de  $R^n$  em  $R^m$  (multiplicação por  $A$ )  
 $[T]$ , matriz canônica de uma transformação linear

$T_B \circ T_A$ , a composta de uma transformação linear  $T_B$  com uma transformação linear  $T_A$   
 $[T_2 \circ T_1] = [T_2] [T_1]$ , a matriz canônica da composta  $T_2 \circ T_1$   
 $e_1, e_2, \dots, e_n$ , a base canônica de  $R^n$   
 $[T] = [T(e_1) | T(e_2) | \dots | T(e_n)]$ , a matriz canônica de  $T$  em termos das imagens dos vetores da base canônica de  $R^n$

## CAPÍTULO 5

$u$ , um vetor  
 $V$ , geralmente um espaço vetorial arbitrário  
 $W$ , geralmente um subespaço de um espaço vetorial  $V$   
 $M_{mn}$ , o espaço vetorial das matrizes reais  $m \times n$   
 $F(-\infty, \infty)$ , o espaço das funções reais definidas no intervalo  $(-\infty, \infty)$   
 $F[a, b]$ , o espaço das funções reais do intervalo fechado  $[a, b]$   
 $F(a, b)$ , o espaço das funções reais do intervalo aberto  $(a, b)$   
 $C(-\infty, \infty)$ , o espaço das funções reais contínuas no intervalo  $(-\infty, \infty)$   
 $C^1(-\infty, \infty)$ , o espaço das funções reais com derivada contínua no intervalo  $(-\infty, \infty)$

$C^m(-\infty, \infty)$ , o espaço das funções reais com  $m$ -ésima derivada contínua no intervalo  $(-\infty, \infty)$   
 $C^\infty(-\infty, \infty)$ , o espaço das funções reais com derivadas contínuas de todas as ordens no intervalo  $(-\infty, \infty)$   
 $C[a, b]$ , o espaço das funções reais contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$   
 $C(a, b)$ , o espaço das funções reais contínuas no intervalo aberto  $(a, b)$   
 $C^m[a, b]$ , o espaço das funções reais com  $m$ -ésima derivada contínua no intervalo fechado  $[a, b]$   
 $C^m(a, b)$ , o espaço das funções reais com  $m$ -ésima derivada contínua no intervalo aberto  $(a, b)$

# Índice de Símbolos

Capítulo 5 (continuação).

$C^\infty[a, b]$ , o espaço das funções reais com derivadas contínuas de todas as ordens no intervalo fechado  $[a, b]$   
 $C^\infty(a, b)$ , o espaço das funções reais com derivadas contínuas de todas as ordens no intervalo aberto  $(a, b)$   
 $\text{ger}(S)$ , o espaço de todas as combinações lineares de vetores no conjunto  $S$   
 $P_n$ , o espaço dos polinômios de grau  $\leq n$

$W(x)$ , o wronskiano  
 $\dim(V)$ , a dimensão do espaço vetorial  $V$  de dimensão finita  
 $\text{pos}(A)$ , a dimensão comum do espaço-linha e do espaço-coluna da matriz  $A$   
 $\text{nul}(A)$ , a dimensão do espaço-nulo de uma matriz  $A$  de tamanho  $m \times n$   
 $[\mathbf{v}]_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , o vetor de coordenadas de  $\mathbf{v}$  em relação a uma base  $S$

## CAPÍTULO 6

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , produto interno dos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$   
 $\|\mathbf{u}\|$ , norma de um vetor  $\mathbf{u}$   
 $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , distância entre os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$   
 $W^\perp$ , complemento ortogonal de um subespaço  $W$   
 $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ , vetor normalizado

$\text{proj}_W \mathbf{u}$ , projeção ortogonal do vetor  $\mathbf{u}$  no subespaço  $W$   
 $A^{-1} = A^T$ , matriz ortogonal  
 $[\mathbf{v}]_S$ , matriz de coordenadas de  $\mathbf{v}$  em relação à base  $S$

## CAPÍTULO 7

$\det(\lambda I - A) = 0$ , a equação característica de uma matriz quadrada  $A$

$D$ , símbolo usado para denotar uma matriz diagonal

## CAPÍTULO 8

$T : V \rightarrow W$ , transformação linear de um espaço vetorial  $V$  em um espaço vetorial  $W$   
 $\text{Nuc}(T)$ , núcleo da transformação linear  $T$   
 $\text{Im}(T)$ , imagem da transformação linear  $T$

$\text{pos}(T)$ , posto da transformação linear  $T$   
 $\text{nul}(T)$ , nullidade da transformação linear  $T$   
 $[T]_{B' \times B}$ , matriz de  $T$  em relação às bases  $B$  e  $B'$

## CAPÍTULO 9

$Y' = A Y$ , sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem

$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ , erro quadrático médio

## CAPÍTULO 10

$i$ , símbolo usado para denotar  $\sqrt{-1}$   
 $z = a + bi$ , um número complexo arbitrário  
 $(a, b)$ , símbolo alternativo para um número complexo  
 $\bar{z} = a - bi$ , conjugado de um número complexo  $z$   
 $\text{Re}(z)$ , parte real de um número complexo  $z$   
 $\text{Im}(z)$ , parte imaginária de um número complexo  $z$   
 $\arg z$ , argumento de um número complexo  $z$   
 $\text{Arg } z$ , argumento principal de um número complexo  $z$   
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , módulo de um número complexo  $z$   
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , forma polar de um número complexo  $z$   
 $z = re^{i\theta}$ , forma polar alternativa de um número complexo  $z$

$C^n$ , espaço das  $n$ -uplas de números complexos (espaço euclidiano  $n$ -dimensional complexo)  
 $C(-\infty, \infty)$  complexo, o espaço vetorial das funções complexas de uma variável real que são contínuas no intervalo  $(-\infty, \infty)$   
 $C[a, b]$  complexo, o espaço vetorial das funções complexas de uma variável real que são contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$   
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \dots + u_n\bar{v}_n$ , produto interno euclidiano complexo  
 $A^* = A$ , matriz hermitiana  
 $A^* = -A$ , matriz anti-hermitiana  
 $A^* = A^{-1}$ , matriz unitária  
 $A A^* = A^* A$ , matriz normal



# *Álgebra Linear*

## *com Aplicações*

Este é o terceiro volume da coleção de livros de matemática para engenharia e ciências da computação da Pearson. Os outros volumes são:  
• Álgebra Linear com Aplicações (Volume 1)  
• Cálculo com Aplicações (Volume 2)  
• Cálculo Avançado com Aplicações (Volume 3)

A634a

Anton, Howard

Álgebra linear com aplicações / Anton Howard e Chris Rorres;  
trad. Claus Ivo Doering. – 8. ed. – Porto Alegre : Bookman, 2001.

1. Álgebra linear. I. Rorres, Chris. II. Título.

CDU 512.1/.9

Catalogação na publicação: Mônica Ballejo Canto – CRB 10/1023

ISBN 85-7307-847 -2

ANTON • RORRES

*Álgebra Linear  
com Aplicações*

8<sup>a</sup> Edição

Tradução:

**Claus Ivo Doering**

Professor Titular do Instituto de Matemática da UFRGS

Reimpressão 2005



Porto Alegre, 2001

Obra originalmente publicada sob o título  
Elementary Linear Algebra: Applications Version

© 2000

Tradução autorizada por John Wiley & Sons, Inc., do original em língua inglesa

ISBN 0-471-17052-6

Capa: Mário Röhnelt

Supervisão editorial: Arysinha Jacques Affonso

Editoração eletrônica: Laser House

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à  
ARTMED® EDITORA S.A.  
(BOOKMAN® COMPANHIA EDITORA é uma divisão da ARTMED® EDITORA S. A.)  
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana  
90040-340 – Porto Alegre RS  
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer  
formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web  
e outros), sem permissão expressa da Editora.

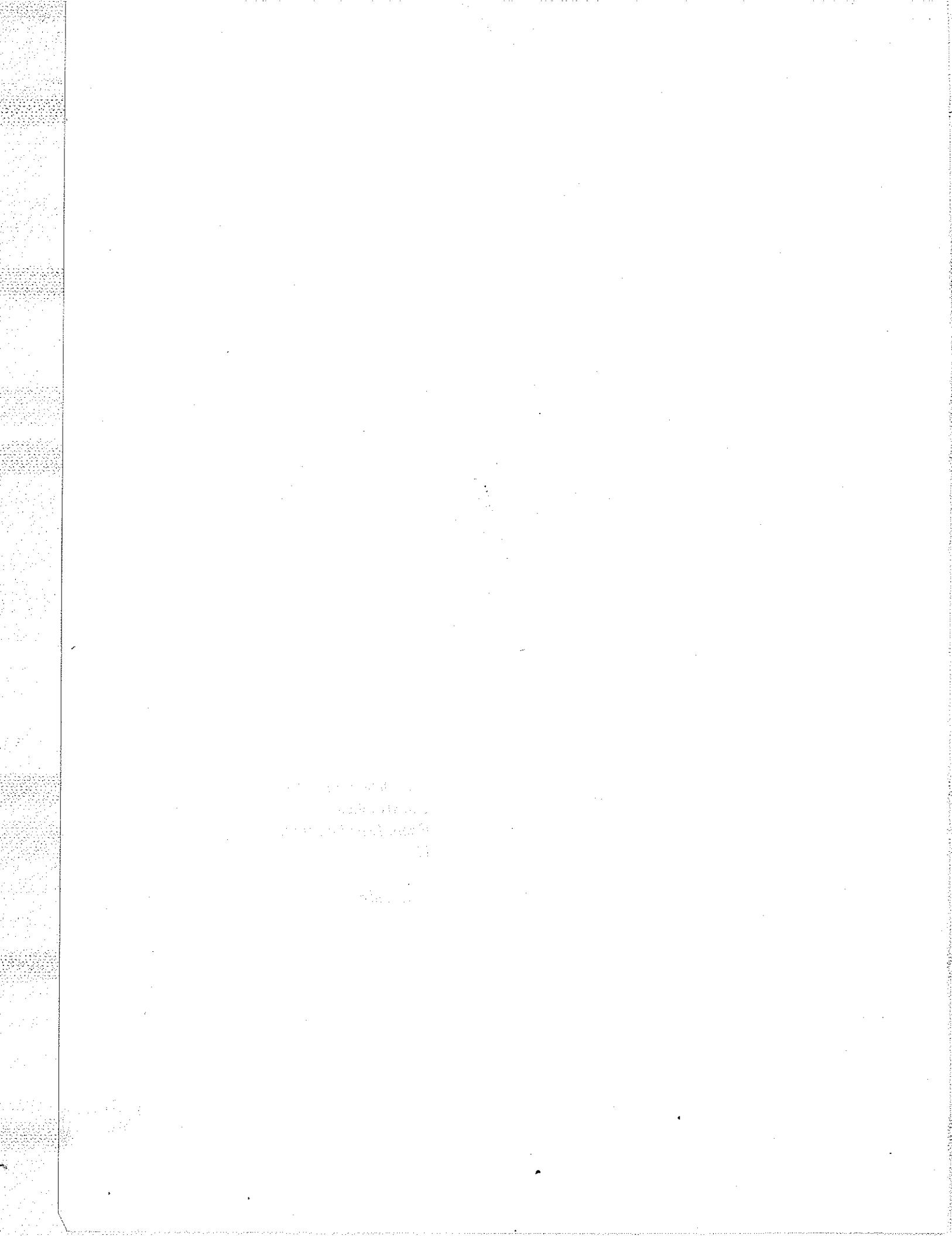
SÃO PAULO  
Av. Angélica, 1.091 – Higienópolis  
01227-100 – São Paulo – SP  
Fone: (11) 3667-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL  
PRINTED IN BRAZIL

*Para minha esposa Pat  
e meus filhos  
Brian, David e Lauren  
HA*

*Para Billie  
CR*



# Prefácio

Este livro é uma versão ampliada da oitava edição da obra *Elementary Linear Algebra*, de Howard Anton. Os dez primeiros capítulos de ambos os textos são idênticos; o décimo primeiro capítulo deste livro consiste de 21 aplicações da álgebra linear, escolhidas dentre a administração, economia, engenharia, física, ciência da computação, teoria da aproximação, ecologia, sociologia, demografia e genética. As aplicações são, com uma única exceção, independentes uma da outra e cada uma é antecedida por uma lista de pré-requisitos matemáticos. Assim, cada professor tem a flexibilidade de escolher as aplicações mais adequadas a seus alunos e de incorporar as aplicações em qualquer parte da disciplina, depois de satisfeitos os pré-requisitos.

Esta edição, no espírito das anteriores, dá um tratamento elementar à álgebra linear e suas aplicações, ideal para estudantes universitários de primeiro e segundo anos. O objetivo é apresentar os fundamentos da álgebra linear e suas aplicações da maneira mais clara possível. O cálculo não é um pré-requisito, mas há exemplos e exercícios claramente assinalados para alunos que têm conhecimento de cálculo. Estes exercícios podem ser omitidos sem perda de continuidade. Recursos computacionais também não são exigidos, mas incluímos exercícios nos finais de capítulos para aqueles que gostariam de usar MATLAB, Mathematica, Maple ou calculadoras com funcionalidade de álgebra linear.

## RESUMO DAS MUDANÇAS DESTA EDIÇÃO

Esta edição é um aperfeiçoamento da edição anterior. Nós tentamos manter a clareza e o estilo, mas também atender as necessidades de uma nova geração de alunos. Aqui está um resumo das mudanças:

- **Acrescentamos Exercícios que Requerem o Uso de Recursos Computacionais:** Um conjunto de exercícios computacionais foi acrescentado ao final dos capítulos; os exercícios são divididos por seção, de modo que podem ser resolvidos junto com os outros exercícios. Os exercícios computacionais foram projetados para acostumar o aluno com os comandos básicos necessários para resolver problemas de álgebra linear usando recursos computacionais. Os exercícios foram escritos em uma forma genérica e livre de sintaxe, pois entendemos que os manuais da ferramenta utilizada serão a fonte primária para comandos específicos e para os procedimentos necessários. Para aliviar o estudante da tarefa de formatar dados, os dados para os exercícios computacionais nos formatos de MATLAB, Maple e Mathematica podem ser baixados de [www.wiley.com/college/anton](http://www.wiley.com/college/anton).
- **Acrescentamos Exercícios de Discussão e Descoberta:** Uma nova categoria de exercícios, classificados como *Discussão* e *Descoberta*, foi acrescentada a muitos conjuntos de exercícios. Acompanhando as modernas tendências didáticas, estes exercícios são mais abertos que os demais, incluindo verdadeiro/falso, conjecturas, descoberta e explicações informais sobre como chegar às conclusões.
- **Refinamento da Exposição:** Partes do texto foram aprimoradas, mas não houve mudança substancial de estilo, organização ou conteúdo, exceto as já observadas.
- **Uma Nova Aplicação em Deformações e Morfismos:** Esta nova aplicação, ao final do Capítulo 11, fornece uma introdução a modernas técnicas de processamento de imagens disponíveis em computação gráfica.

## Características Marcantes

- **Relações entre os Conceitos:** Um dos importantes objetivos de uma disciplina de álgebra linear é estabelecer a intrincada linha de relações entre sistemas de equações lineares, matrizes, determinantes, vetores, transformações lineares e autovalores. Esta linha de relações é desenvolvida através do seguinte crescendo de teoremas que ligam cada idéia nova às que a precederam: 1.5.3, 1.6.4, 2.3.6, 4.3.4, 5.6.9, 6.2.7, 6.4.5 e 7.1.5. Estes teoremas trazem uma coerência ao cenário da álgebra linear e também servem de fonte constante de revisão.
- **Transição Suave para a Abstração:** Como a transição do  $R^n$  para espaços vetoriais arbitrários é traumática para a maioria dos estudantes, esta transição foi suavizada enfatizando a geometria subjacente aos conceitos e desenvolvendo as idéias centrais no  $R^n$  antes de passar a espaços vetoriais mais gerais.
- **Apresentação Antecipada das Transformações Lineares e Autovalores:** Para garantir que o material referente a transformações lineares e autovalores não se perca no final do período, alguns dos conceitos básicos relacionando estes conceitos são desenvolvidos cedo e, mais adiante no texto, revisados quando o assunto é tratado com maior profundidade. Por exemplo, a equação característica é discutida rapidamente na seção de determinantes e as transformações lineares de  $R^n$  em  $R^m$  são discutidas imediatamente após a introdução do  $R^n$ , sendo mais tarde retomadas no contexto de transformações lineares mais gerais.

## Sobre os Exercícios

Os exercícios ao final de cada seção sempre começam com problemas rotineiros de treinamento, continuam com problemas de maior substância e concluem com problemas teóricos. Na maioria das seções, o conjunto de exercícios regulares é seguido pelos problemas de *Discussão e Descoberta* descritos acima. A maioria dos capítulos termina com um conjunto de exercícios suplementares que, em geral, são mais exigentes e obrigam o estudante a pensar em todo o capítulo e não só numa seção específica. Os exercícios computacionais são os últimos do capítulo e estão classificados de acordo com a seção à qual se referem. Dados formatados para estes exercícios podem ser baixados de [www.wiley.com/college/anton](http://www.wiley.com/college/anton).

## Sobre o Capítulo 11

Este capítulo consiste de 21 aplicações da álgebra linear. Com uma única exceção claramente assinalada, cada aplicação é uma seção independente, de modo que estas seções podem ser omitidas ou permutadas livremente para adaptar às necessidades e interesses individuais. Cada tópico começa com uma lista de pré-requisitos de álgebra linear, de modo que o leitor sabe de antemão se tem o conhecimento para ler a seção.

Como os tópicos variam consideravelmente em dificuldade, nós incluímos uma classificação subjetiva dos tópicos—fácil, moderado, mais difícil. (Ver adiante neste prefácio, *Um Guia para o Professor*.) Nossa avaliação é baseada principalmente na dificuldade intrínseca do material e não no número de pré-requisitos; assim, um tópico com menos pré-requisitos matemáticos pode estar classificado como mais difícil do que um que requer mais pré-requisitos.

Como o nosso objetivo primordial é apresentar aplicações da álgebra linear, as provas são muitas vezes omitidas. Nós supomos que o leitor tem os pré-requisitos de álgebra linear e, sempre que necessitamos resultados de outras áreas, estes resultados são enunciados precisamente (com motivação onde possível), mas geralmente sem prova.

Já que há mais material neste livro do que pode ser coberto em um semestre ou em um trimestre, o professor deverá fazer uma seleção de tópicos. No Guia para o Professor a seguir, fornecemos ajuda para fazer esta seleção.

## **UM GUIA PARA O PROFESSOR**

As disciplinas de álgebra linear variam muito de uma instituição para outra, em termos de conteúdo e filosofia, mas a maioria das disciplinas oferecidas cai em uma de duas categorias: aquelas com aproximadamente 35–40 aulas (excluindo provas e revisões) e aquelas com aproximadamente 25–30 aulas (excluindo provas e revisões). Em vista disto, criamos uma seqüência longa e uma curta como possível ponto de partida para construir um cronograma. Na seqüência longa, supomos que serão apresentadas todas as seções dos capítulos indicados e na seqüência curta supomos que os professores irão selecionar seções destes capítulos para adaptar ao tempo disponível. É claro que estas seqüências são só um guia e você pode querer personalizá-las para encaixar seus interesses e exigências.

A organização do texto teve o intuito de facilitar a tarefa dos professores que trabalham com tempo restrito. Uma breve introdução a autovalores e autovetores é dada nas Seções 2.3 e 4.3 e transformações lineares de  $R^n$  em  $R^m$  são discutidas no Capítulo 4. Isto torna possível que todos professores cubram estes tópicos em um nível básico, quando for muito limitado o tempo para o devido aprofundamento nos Capítulos 7 e 8. Também observe que o Capítulo 3 pode ser omitido, sem perda de continuidade para os alunos familiarizados com este material.

	<b>Seqüência Curta</b>	<b>Seqüência Longa</b>
<b>pítulo 1</b>	6 aulas	7 aulas
<b>pítulo 2</b>	3 aulas	4 aulas
<b>pítulo 4</b>	3 aulas	3 aulas
<b>pítulo 5</b>	7 aulas	8 aulas
<b>pítulo 6</b>	3 aulas	6 aulas
<b>pítulo 7</b>	3 aulas	4 aulas
<b>pítulo 8</b>	2 aulas	6 aulas
<b>Total</b>	<b>27 aulas</b>	<b>38 aulas</b>

## Variacões nas Seqüências

São possíveis muitas variações na seqüência longa. Por exemplo, pode-se criar uma seqüência longa alternativa seguindo a seqüência curta e dedicando as demais 11 aulas a alguns dos tópicos nos Capítulos 9, 10 e 11.

**Uma Seqüência Orientada para Aplicações**

Uma vez coberto o material central, o professor pode escolher aplicações dos Capítulos 9 ou 11. A tabela a seguir classifica cada uma das 21 seções do Capítulo 11 de acordo com a dificuldade:

**Fácil:** O aluno médio que tem os pré-requisitos listados deveria ser capaz de ler o material sem ajuda do professor.

**Moderado:** O aluno médio que tem os pré-requisitos listados pode precisar de um pouco de ajuda do professor.

**Mais Difícil:** O aluno médio que tem os pré-requisitos listados provavelmente vai precisar de ajuda do professor.

and the polymerization reaction was stopped. The polymer was isolated by precipitation in methanol and dried. The yield was 10.0 g. (40%). The infrared spectrum showed absorption bands at 3050, 1650, 1550, 1450, 1350, 1250, 1150, 1050, 950, 850, 750, 650 cm<sup>-1</sup>.

The polymer was soluble in benzene, chloroform, and acetone. It was insoluble in methanol, ethanol, and ether. The viscosity of the polymer in benzene at 30°C. was 0.25 dl./g.

#### *2.2.2. Preparation of Poly(1,3-butadiene)*

Monomer	Monomer concentration (mole/liter)	Catalyst (mole/liter)	Reaction time (hours)	Yield (g.)	Molecular weight
1,3-butadiene	1.0	0.005	1.0	10.0	10,000
1,3-butadiene	1.0	0.005	1.0	10.0	10,000
1,3-butadiene	1.0	0.005	1.0	10.0	10,000
1,3-butadiene	1.0	0.005	1.0	10.0	10,000
1,3-butadiene	1.0	0.005	1.0	10.0	10,000

Reaction conditions: Temperature, 30°C.; pressure, 1 atm.; solvent, benzene; catalyst, TiCl<sub>4</sub> + Al(C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)<sub>3</sub>.

#### *2.2.3. Preparation of Poly(1,3-butadiene)*

Reaction conditions: Temperature, 30°C.; pressure, 1 atm.; solvent, benzene; catalyst, TiCl<sub>4</sub> + Al(C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)<sub>3</sub>.

#### *2.2.4. Preparation of Poly(1,3-butadiene)*

Reaction conditions: Temperature, 30°C.; pressure, 1 atm.; solvent, benzene; catalyst, TiCl<sub>4</sub> + Al(C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)<sub>3</sub>.

#### *2.2.5. Preparation of Poly(1,3-butadiene)*

Reaction conditions: Temperature, 30°C.; pressure, 1 atm.; solvent, benzene; catalyst, TiCl<sub>4</sub> + Al(C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)<sub>3</sub>.

#### *2.2.6. Preparation of Poly(1,3-butadiene)*

Reaction conditions: Temperature, 30°C.; pressure, 1 atm.; solvent, benzene; catalyst, TiCl<sub>4</sub> + Al(C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)<sub>3</sub>.

# Agradecimentos

Nós expressamos nosso agradecimento pela orientação prestada pelas seguintes pessoas:

## REVISORES E COLABORADORES DE EDIÇÕES ANTERIORES

- Steven C. Althoen, *University of Michigan-Flint*  
C. S. Ballantine, *Oregon State University*  
Erol Barbut, *University of Idaho*  
George Bergman, *University of California-Berkeley*  
William A. Brown, *University of Maine*  
Joseph Buckley, *Western Michigan University*  
Thomas Cairns, *University of Tulsa*  
Douglas E. Cameron, *University of Akron*  
Bomshik Chang, *University of British Columbia*  
Peter Colwell, *Iowa State University*  
Carolyn A. Dean, *University of Michigan*  
Ken Dunn, *Dalhousie University*  
Bruce Edwards, *University of Florida*  
Murray Eisenberg, *University of Massachusetts*  
Harold S. Engelsohn, *Kingsborough Comm. College*  
Garret Etgen, *University of Houston*  
Marjorie E. Fitting, *San Jose State University*  
Dan Flath, *University of South Alabama*  
David E. Flesner, *Gettysburg College*  
Mathew Gould, *Vanderbilt University*  
Ralph P. Grimaldi, *Rose-Hulman Institute*  
William W. Hager, *University of Florida*  
Collin J. Hightower, *University of Colorado*  
Joseph F. Johnson, *Rutgers University*  
Robert L. Kelley, *University of Miami*  
Arlene Kleinstein  
Myren Krom, *California State University*  
Lawrence D. Kugler, *University of Michigan*  
Charles Livingston, *Indiana University*  
Nicholas Macri, *Temple University*
- Roger H. Marty, *Cleveland State University*  
Patricia T. McAuley, *SUNY-Binghamton*  
Robert M. McConnel, *University of Tennessee*  
Douglas McLeod, *Drexel University*  
Michael R. Meek, *Southern Connecticut State Univ.*  
Craig Miller, *University of Pennsylvania*  
Donald P. Minassian, *Butler University*  
Hal G. Moore, *Brigham Young University*  
Thomas E. Moore, *Bridgewater State College*  
Robert W. Negus, *Rio Hondo Junior College*  
Bart S. Ng, *Purdue University*  
James Osterburg, *University of Cincinnati*  
Michael A. Penna, *Indiana-Purdue University*  
Gerald J. Porter, *University of Pennsylvania*  
F. P. J. Rimrott, *University of Toronto*  
C. Ray Rosentrater, *Westmont College*  
Kenneth Schilling, *University of Michigan-Flint*  
William Scott, *University of Utah*  
Donald R. Sherbert, *University of Illinois*  
Bruce Solomon, *Indiana University*  
Mary T. Treanor, *Valparaiso University*  
William F. Trench, *Trinity University*  
Joseph L. Ullman, *University of Michigan*  
W. Vance Underhill, *East Texas State University*  
James R. Wall, *Auburn University*  
Arthur G. Wasserman, *University of Michigan*  
Evelyn J. Weinstock, *Glassboro State College*  
Rugang Ye, *Stanford University*  
Frank Zorzitto, *University of Waterloo*  
Daniel Zwick, *University of Vermont*

## Revisores e Colaboradores da Sétima Edição

Mark B. Beinterna, *Southern Illinois University*  
Paul Wayne Britt, *Louisiana State University*  
David C. Buchthal, *University of Akron*  
Keith Chavey, *University of Wisconsin-River Falls*  
Marc Frantz, *Indiana-Purdue University*  
Sue Friedman, *Bernard M. Baruch College, CUNY*  
William Golightly, *College of Charleston*  
Hugh Haynsworth, *College of Charleston*  
Tom Hern, *Bowling Green State University*  
J. Hershenov, *Queens College, CUNY*  
Steve Humphries, *Brigham Young University*  
Steven Kahan, *Queens College, CUNY*  
Andrew S. Kim, *Westfield State College*  
John C. Lawlor, *University of Vermont*  
M. Malek, *California State University at Hayward*  
J. J. Malone, *Worcester Polytechnic Institute*

Stephen L. Davis, *Davidson College*  
Blaise DeSesa, *Drexel University*  
Dan Flath, *University of South Alabama*  
Peter Fowler, *California State University*  
William McWorter, *Ohio State University*  
Valerie A. Miller, *Georgia State University*  
Hal G. Moore, *Brigham Young University*  
S. Obaid, *San Jose State University*  
Ira J. Papick, *University of Missouri-Columbia*  
Donald Passman, *University of Wisconsin*  
Robby Robson, *Oregon State University*  
David Ryeburn, *Simon Fraser University*  
Ramesh Sharma, *University of New Haven*  
David A. Sibley, *Pennsylvania State University*  
Donald Story, *University of Akron*  
Michael Tarabek, *Southern Illinois University*

## Solução de Problemas, Leitura Crítica e Índice

Michael Dagg, *Numerical Solutions, Inc.*  
Susan L. Friedman, *Bernard M. Baruch  
College, CUNY*

Maureen Kelley, *Northern Essex Community College*  
Randy Schwartz, *Schoolcraft College*  
Daniel Traster (Estudante), *Yale University*

**Outros Colaboradores** Agradecimentos especiais aos seguintes professores, que leram o texto com cuidado e deram contribuições significativas à qualidade da matemática e da exposição:

George Bergman, *University of California-Berkeley*  
Stephen Davis, *Davidson College*  
Blaise DeSesa, *Drexel University*  
Dan Flath, *University of South Alabama*  
Marc Frantz, *Indiana-Purdue University*

William McWorter, *Ohio State University*  
Donald Passman, *University of Wisconsin*  
David Ryeburn, *Simon Fraser University*  
Lois Craig Stagg, *University of Wisconsin-Milwaukee*

## REVISORES E COLABORADORES DA OITAVA EDIÇÃO

Richard Alfaro, *University of Michigan-Flint*  
Stuart Boersma, *Alfred University*  
Scott Chapman, *Trinity University*  
KarabgDatta, *Northern Illinois University*  
Mark Davis, *City College of San Francisco*  
Alberto L. Delgado, *Kansas State University*  
Willy Hereman, *Colorado School of Mines*  
Chandanie Hetti-Arachchige, *Northern Illinois  
University*  
Farhad Jafari, *University of Wyoming*  
Eugene W. Johnson, *University of Iowa*  
John Johnson, *George Fox College*

Steven Kahan, *Queens College*  
John W. Krussel, *Lewis & Clark College*  
Steffen Lempp, *University of Wisconsin*  
Thomas A. Metzger, *University of Pittsburgh*  
Gary L. Mullen, *Pennsylvania State University-  
University Park*  
Sheldon Rothman, *Long Island University-C.W. Post*  
Mark Sepanski, *Baylor University*  
Sally Shao, *Cleveland State*  
Evelyn Weinstock, *Rowan University*  
T. J. Ypma, *Colorado School of Mines*

## Respostas e Soluções

Agradecimentos especiais à equipe de pessoas que nos assistiram com respostas e soluções. O trabalho deles foi notável, e nós agradecemos pelo seu profissionalismo e atenção ao detalhe.

Charles A. Grobe, Jr., *Bowdoin College*

Elizabeth M. Grobe

Michael A. Carchidi, *Drexel University*

Scott Chapman, *Trinity University*

Mark Davis, *City College of San Francisco*

Herbert Kreyszig, M.B.A., *Columbia University*

Dr. Erwin Kreyszig, *Carleton University*

Donald Passman, *University of Wisconsin*

Jean Springer, *Mt. Royal College*

## Consultores Matemáticos

Agradecimentos especiais também são devidos a dois matemáticos muito talentosos que leram o manuscrito com especial atenção à perfeição técnica e nos ofereceram excelentes sugestões em inúmeros assuntos pedagógicos e matemáticos.

Dean Hickerson

David Ryeburn, *Simon Fraser University*

HOWARD ANTON  
CHRIS RORRES

## Aperfeiçoamento da Edição Brasileira

enviado sugestões de retificações:

Cristina Furlanetto (UFRGS)

Giselle Spindler

Liana Beatriz Costi Nácul (UFRGS)

Morgan Scariot (UFRGS)

Paulo Ricardo De Ávila Zingano (UFRGS)

Severino Toscano do Rego Melo (USP)

Vanessa Bielefeldt Leotti (UFRGS)

A Bookman Companhia Editora agradece às seguintes pessoas por terem

the first time in the history of the world, the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

It is a remarkable fact that the whole of the human race has been gathered together in one place.

# Sumário Resumido

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES</b>	<b>27</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>DETERMINANTES</b>	<b>77</b>
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>VETORES NOS ESPAÇOS BI E TRIDIMENSIONAIS</b>	<b>101</b>
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS</b>	<b>129</b>
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>ESPAÇOS VETORIAIS ARBITRÁRIOS</b>	<b>157</b>
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO</b>	<b>201</b>
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>AUTOVALORES E AUTOVETORES</b>	<b>239</b>
<b>CAPÍTULO 8</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES LINEARES</b>	<b>257</b>
<b>CAPÍTULO 9</b>	<b>TÓPICOS ADICIONAIS</b>	<b>291</b>
<b>CAPÍTULO 10</b>	<b>ESPAÇOS VETORIAIS COMPLEXOS</b>	<b>333</b>
<b>CAPÍTULO 11</b>	<b>APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR</b>	<b>363</b>

# Sumário

## CAPÍTULO 1

## SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES

27

1.1	Introdução aos Sistemas de Equações Lineares	28
1.2	Eliminação Gaussiana	31
1.3	Matrizes e Operações Matriciais	41
1.4	Inversas; Regras da Aritmética Matricial	49
1.5	Matrizes Elementares e um Método para Encontrar $A^{-1}$	56
1.6	Mais Resultados sobre Sistemas de Equações e Invertibilidade	62
1.7	Matrizes Diagonais, Triangulares e Simétricas	66

## CAPÍTULO 2

## DETERMINANTES

77

2.1	A Função Determinante	78
2.2	Calculando Determinantes através de Redução por Linhas	82
2.3	Propriedades da Função Determinante	86
2.4	Expansão em Co-fatores; Regra de Cramer	91

## CAPÍTULO 3

## VETORES NOS ESPAÇOS BI E TRIDIMENSIONAIS

101

3.1	Introdução aos Vetores (Geométricos)	102
3.2	Norma de um Vetor; Aritmética Vetorial	106
3.3	Produto Escalar; Projeções	109
3.4	Produto Vetorial	114
3.5	Retas e Planos no Espaço Tridimensional	121

## CAPÍTULO 4

## ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS

129

4.1	Espaço Euclidiano $n$ -dimensional	130
4.2	Transformações Lineares de $R^n$ em $R^m$	137
4.3	Propriedades das Transformações Lineares de $R^n$ em $R^m$	148

**CAPÍTULO 5****ESPAÇOS VETORIAIS ARBITRÁRIOS****157**

- |   |     |
|---|-----|
| 5.1 Espaços Vetoriais Reais                   | 158 |
| 5.2 Subespaços                                | 162 |
| 5.3 Independência Linear                      | 169 |
| 5.4 Bases e Dimensão                          | 174 |
| 5.5 Espaço-Linha, Espaço-Coluna e Espaço-Nulo | 184 |
| 5.6 Posto e Nulidade                          | 192 |

**CAPÍTULO 6****ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO****201**

- |   |     |
|---|-----|
| 6.1 Produtos Internos   | 202 |
| 6.2 Ângulo e Ortogonalidade em Espaços com Produto Interno              | 208 |
| 6.3 Bases Ortonormais; Processo de Gram-Schmidt; Decomposição <i>QR</i> | 215 |
| 6.4 Melhor Aproximação; Mínimos Quadrados                               | 223 |
| 6.5 Matrizes Ortogonais; Mudança de Bases                               | 229 |

**CAPÍTULO 7****AUTOVALORES E AUTOVETORES****239**

- |                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 7.1 Autovalores e Autovetores | 240 |
| 7.2 Diagonalização            | 245 |
| 7.3 Diagonalização Ortogonal  | 251 |

**CAPÍTULO 8****TRANSFORMAÇÕES LINEARES****257**

- |   |     |
|---|-----|
| 8.1 Transformações Lineares Arbitrárias             | 258 |
| 8.2 Núcleo e Imagem                                 | 264 |
| 8.3 Transformações Lineares Inversas                | 268 |
| 8.4 Matrizes de Transformações Lineares Arbitrárias | 273 |
| 8.5 Semelhança                                      | 280 |

**CAPÍTULO 9****TÓPICOS ADICIONAIS****291**

- |  |     |
|--|-----|
| 9.1 Aplicação a Equações Diferenciais                            | 292 |
| 9.2 Geometria dos Operadores Lineares de $R^2$                   | 295 |
| 9.3 Ajuste de Mínimos Quadrados a Dados                          | 302 |
| 9.4 Problemas de Aproximação; Séries de Fourier                  | 305 |
| 9.5 Formas Quadráticas   | 308 |
| 9.6 Diagonalização de Formas Quadráticas; Seções Cônicas         | 313 |
| 9.7 Superfícies Quádricas  | 318 |
| 9.8 Comparação dos Procedimentos para Resolver Sistemas Lineares | 321 |
| 9.9 Decomposição LU  | 326 |

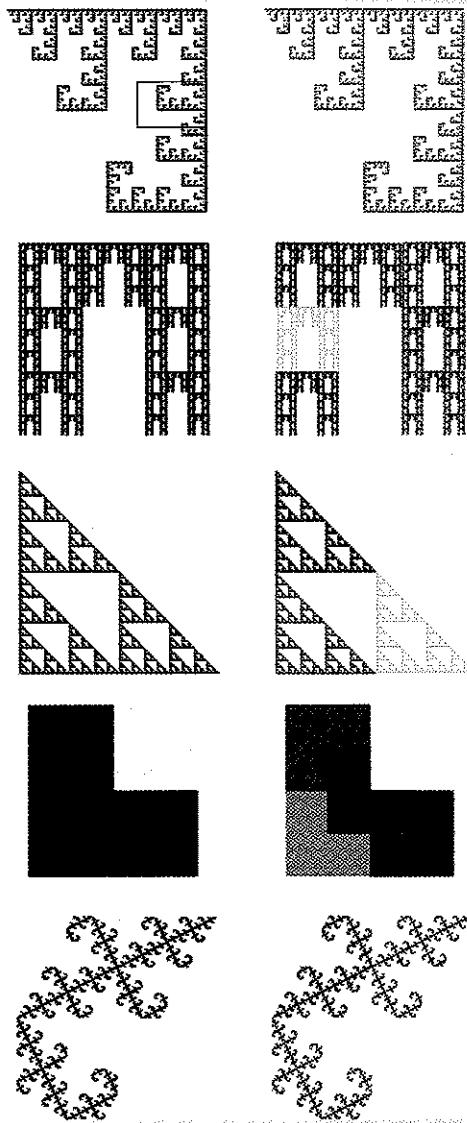
**CAPÍTULO 10****ESPAÇOS VETORIAIS COMPLEXOS****333**

10.1 Números Complexos	334
10.2 Divisão de Números Complexos	338
10.3 Forma Polar de um Número Complexo	341
10.4 Espaços Vetoriais Complexos	346
10.5 Espaços Vetoriais Complexos com Produto Interno	350
10.6 Matrizes Unitárias, Normais e Hermitianas	354

**CAPÍTULO 11****APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR****363**

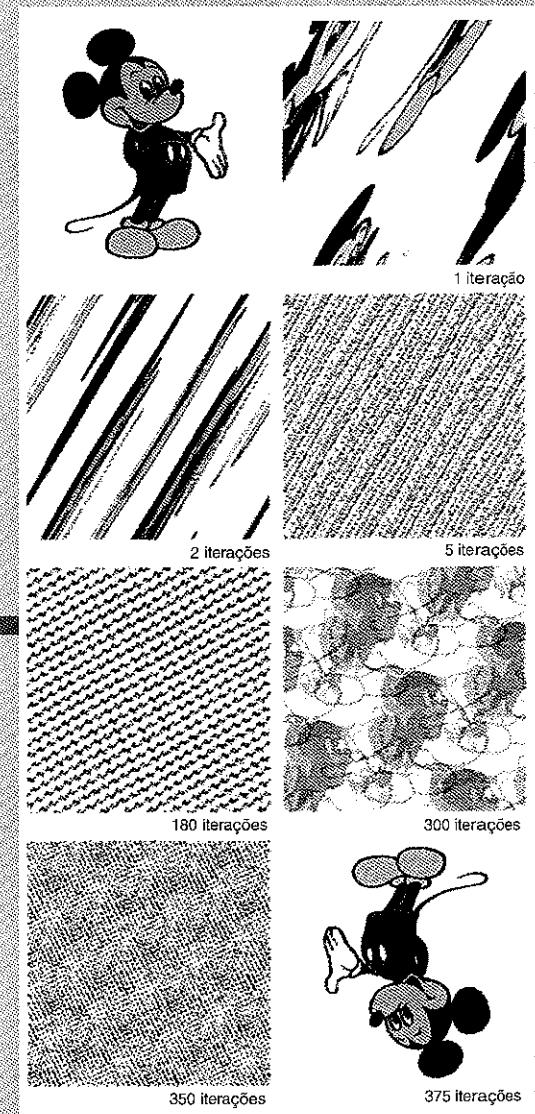
11.1 Construindo Curvas e Superfícies por Pontos Especificados	364
11.2 Redes Elétricas	367
11.3 Programação Linear Geométrica	371
11.4 O Problema da Alocação de Tarefas	377
11.5 Interpolação Spline Cúbica	384
11.6 Cadeias de Markov	390
11.7 Teoria de Grafos	397
11.8 Jogos de Estratégia	405
11.9 Modelos Econômicos de Leontief	411
11.10 Administração de Florestas	417
11.11 Computação Gráfica	422
11.12 Distribuições de Temperatura de Equilíbrio	429
11.13 Tomografia Computadorizada	436
11.14 Fractais	444
11.15 Caos	456
11.16 Criptografia	466
11.17 Genética	473
11.18 Crescimento Populacional por Faixa Etária	480
11.19 Colheita de Populações Animais	486
11.20 Um Modelo de Mínimos Quadrados para a Audição Humana	490
11.21 Deformações e Morfismos	495

**RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS****503****CRÉDITOS DAS FOTOS****561****ÍNDICE****563**



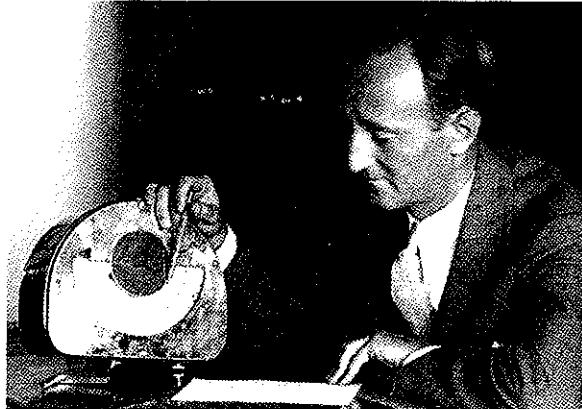
## 11.14 FRACTAIS [p. 444]

Cada um dos conjuntos pretos à esquerda pode ser repartido em versões congruentes proporcionalmente reduzidas do conjunto original. Esta propriedade é típica de conjuntos denominados fractais, atualmente aplicados à compactação de dados computacionais. Os métodos da álgebra linear podem ser usados para construir e classificar fractais.



## 11.15 CAOS [p. 456]

Os *pixels* que constituem a imagem matricial de Mickey são embaralhados repetidamente de uma mesma maneira, na tentativa de torná-los aleatórios. Contudo, padrões indesejados continuam aparecendo no processo. A aplicação matricial que descreve o processo de embaralhar ilustra tanto a ordem quanto a desordem que caracterizam estes processos caóticos.

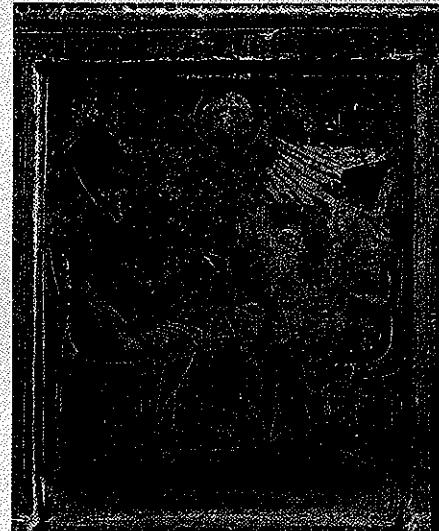


## 11.16 CRIPTOGRAFIA [p. 466]

Durante a Segunda Guerra Mundial, os decodificadores norte-americanos e britânicos tiveram êxito em quebrar o código militar inimigo usando técnicas matemáticas e máquinas sofisticadas. Hoje em dia, o principal impulso para o desenvolvimento de códigos seguros é dado pelas comunicações confidenciais entre computadores e em telecomunicações.

## 11.17 GENÉTICA [p. 473]

Os mandatários do Egito antigo recorriam a casamentos entre irmãos para manter a pureza da linhagem real. Este costume propagou e acentuou certos traços genéticos através de muitas gerações. A teoria das matrizes fornece um referencial matemático para examinar o problema geral da propagação de traços genéticos.



## 11.18 CRESCIMENTO POPULACIONAL POR FAIXA ETÁRIA [p. 480]

A configuração populacional futura pode ser projetada aplicando álgebra matricial às taxas, especificadas por faixas etárias, de nascimento e mortalidade da população. A evolução a longo prazo da população depende das características matemáticas de uma matriz de projeção que contém os parâmetros demográficos da população.



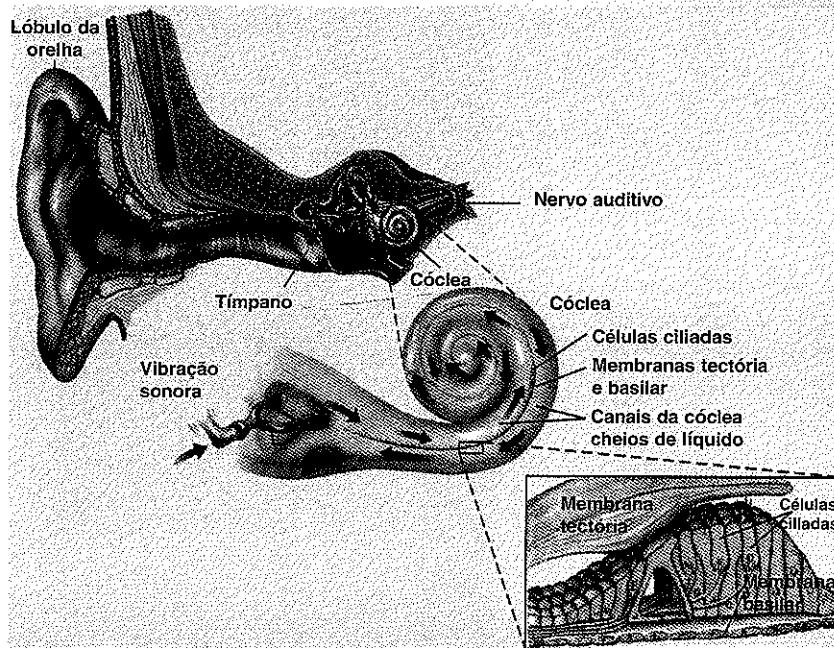
## 11.19 COLHEITA DE POPULAÇÕES ANIMAIS [p. 486]

A colheita sustentada de uma criação de animais requer o conhecimento da demografia da população animal. Para maximizar o lucro de uma colheita periódica, podem ser comparadas diversas estratégias de colheita sustentada utilizando técnicas matriciais que descrevem a dinâmica do crescimento populacional.



## 11.20 UM MODELO DE MÍNIMOS QUADRADOS PARA A AUDIÇÃO HUMANA [p. 490]

O ouvido interno contém uma estrutura com milhares de receptores sensoriais ciliares. Estes receptores, movidos pelas vibrações do tímpano, respondem a freqüências diferentes de acordo com sua localização e produzem impulsos elétricos que viajam até o cérebro através do nervo auditivo. Desta maneira, o ouvido interno age como um processador de sinais que decompõe uma onda sonora complexa em um espectro de freqüências distintas.



## 11.21 DEFORMAÇÕES E MORFISMOS [p. 495]

Das dezesseis imagens apresentadas mostrando uma mulher ao longo de um período de cinquenta anos, somente as quatro na diagonal do topo à esquerda até a base à direita são fotografias reais. As demais são imagens geradas por computador, denominadas morfismos, que são misturas das fotografias reais. Tais técnicas de manipulação de imagens têm encontrado inúmeras aplicações na indústria médica, científica e de entretenimento.



To describe a conic that shall pass through five given points.

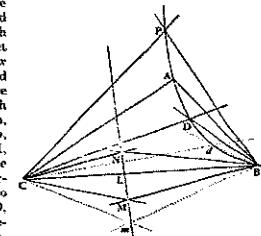
Let the five given points be A, B, C, P, D. From any one of them, as A, to any other two as B, C, which may be called the poles, draw the right lines AB, AC, and parallel to those the lines TPS, PRQ through the fourth point P. Then from the two poles B, C, draw through the fifth point D two indefinite lines BDT, CRD, meeting with the last drawn lines TPS, PRQ (the former with the former, and the latter with the latter) in T and R. And then draw the right line t<sub>r</sub> parallel to TR, cutting off from the right lines PT, PR, any segments Pt, Pr, proportional to PT, PR; and if through their extremities t<sub>r</sub>, r, and the poles B, C, the right lines Bl, Cr are drawn, meeting in d, that point d will be placed in the conic required. For (by Lem. 20) that point d is placed in a conic section passing through the four points A, B, C, P; and the lines Rr, Tt vanishing, the point d comes to coincide with the point D. Wherefore a conic section passes through the five points A, B, C, P, D.

Q.E.D.

The same otherwise.

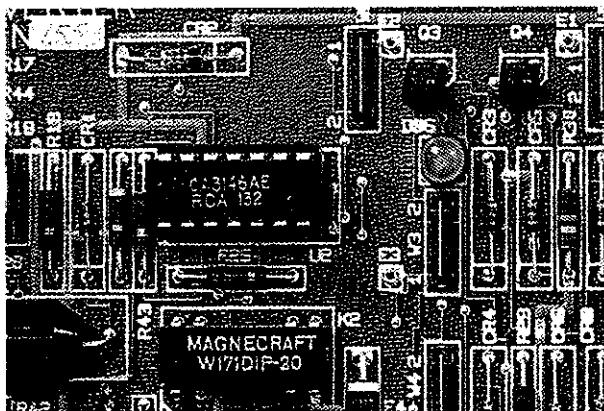
If the given points join any three, as A, B, C; and about two of them B, C, as poles, making the angles ABC, ACB of a given magnitude to revolve, apply the point D, then to the point P, and mark the points M, N, in which the other legs BL, CL intersect each other in both cases. Draw the indefinite right line MN, and let those movable angles revolve about their poles B, C, in such manner that the intersection, which is now supposed to be m, of the legs BL, CL, or BM, CM, may always fall in that indefinite right line MN; and the intersection, which is now supposed to be d, of the legs BA, CA, or BD, CD, will describe the conic required, PADMB. For (by Lem. 21) the point d will be placed in a conic section passing through the points B, C; and when the point m comes to coincide with the points L, M, N, the point d will (by construction) come to coincide with the points A, D, P. Wherefore a conic section will be described that shall pass through the five points A, B, C, P, D.

Con. t. Hence a right line may be readily drawn which shall be a tangent to



## 11.1 CONSTRUINDO CURVAS E SUPERFÍCIES POR PONTOS ESPECIFICADOS [p. 364]

Um dos problemas que Isaac Newton contemplou em seu trabalho monumental *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural (Principia Mathematica)* foi o da construção de uma elipse por cinco pontos dados, com isto ilustrando como encontrar a órbita de um cometa ou planeta com cinco observações. Os determinantes podem ser usados para resolver este problema analiticamente, em vez do procedimento geométrico de Newton.



## 11.2 REDES ELÉTRICAS [p. 367]

No circuito elétrico mostrado, os componentes marcados com a letra "R" são resistências, que restringem o fluxo da corrente elétrica. Circuitos que contêm somente resistências e geradores de energia podem ser analisados usando sistemas de equações lineares que derivam das leis básicas da teoria de circuitos.

## 11.3 PROGRAMAÇÃO LINEAR GEOMÉTRICA [p. 371]

Um problema usual tratado na área de programação linear é o da determinação de proporções dos ingredientes em uma mistura com o objetivo de minimizar seu custo quando as proporções variam dentro de certos limites. Um tempo enorme do uso de computadores na administração e na indústria é dedicado a problemas de programação linear.



## **11.4 O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE TAREFAS [p. 377]**

Um problema importante na indústria é o do deslocamento de pessoal e de recursos de uma maneira eficiente quanto ao custo. Por exemplo, uma construtora pode querer escolher rotas para movimentar equipamento pesado de seus depósitos para os locais de construção de maneira a minimizar a distância total percorrida.



## **11.5 INTERPOLAÇÃO SPLINE CÚBICA [p. 384]**

As fontes tipográficas PostScript™ e TrueType™ usadas em telas de monitores e por impressoras são definidas por curvas polinomiais por partes denominadas *splines*. Os parâmetros que determinam estes *splines* estão estocados na memória do computador, um conjunto de parâmetros para cada um dos caracteres de uma particular fonte.

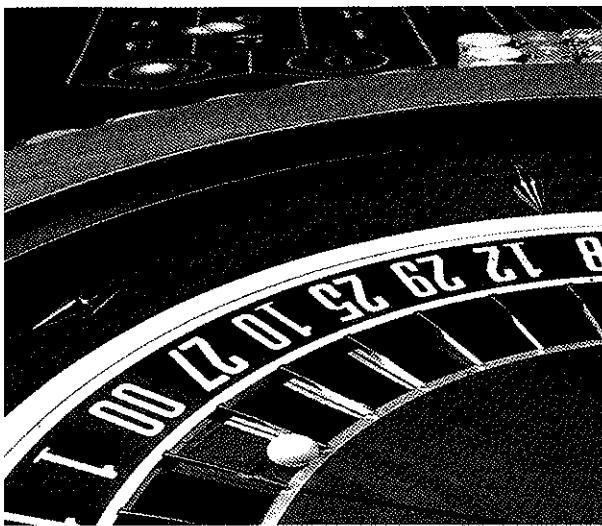
## **11.6 CADEIAS DE MARKOV [p. 390]**

Os registros meteorológicos de uma localidade específica podem ser usados para estimar a probabilidade de que vá nevar em um certo dia a partir da informação de que nevou ou não no dia anterior. A teoria de cadeias de Markov pode utilizar tais dados para prever, com muita antecedência, a probabilidade de um dia com neve na localidade.



## **11.7 TEORIA DE GRAFOS [p. 397]**

A classificação social num grupo de animais é uma relação que pode ser descrita e analisada com a teoria de grafos. Esta teoria também tem aplicações a problemas tão distintos como a determinação de rotas de companhias aéreas e a análise de padrões de votação.



## 11.8 JOGOS DE ESTRATÉGIA [p. 405]

No jogo de roleta o jogador dá seu lance com uma aposta e o cassino responde com o giro da roleta; o lucro para o jogador ou para o cassino é determinado a partir destes dois movimentos. Estes são os ingredientes básicos de uma variedade de jogos que contém elementos tanto de estratégia quanto de acaso. Os métodos matriciais podem ser usados para desenvolver estratégias otimizadas para os jogadores.

## 11.9 MODELOS ECONÔMICOS DE LEONTIEF [p. 411]

Num sistema econômico simplificado, uma mina de carvão, uma ferrovia e uma usina de energia necessitam cada uma de uma parte da produção das outras para sua manutenção e para suprir outros consumidores de seu produto. Os modelos de produção de Leontief podem ser usados para determinar o nível de produção necessário às três indústrias para manter o sistema econômico.



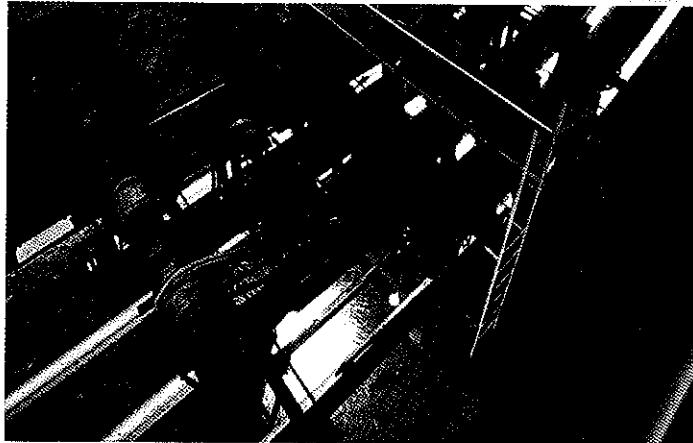
## 11.10 ADMINISTRAÇÃO DE FLORESTAS [p. 417]

O administrador de uma plantação de árvores de Natal quer plantar e cortar as árvores de uma maneira tal que a configuração da floresta permaneça inalterada de um ano para outro. O administrador também procura maximizar os rendimentos, que dependem do número e do tamanho das árvores cortadas. Técnicas matriciais podem quantificar este problema e auxiliar o administrador a escolher uma programação sustentável de corte.

## **11.11 COMPUTAÇÃO GRÁFICA**

**[p. 422]**

Uma das aplicações mais úteis da computação gráfica é a do simulador de vôo. As matrizes fornecem uma maneira conveniente de lidar com a enorme quantidade de dados necessários para construir e animar os objetos tridimensionais usados por simuladores de vôo para representar um cenário em movimento.



## **11.12 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA DE EQUILÍBRIO**

**[p. 429]**

Uma tarefa básica da ciência e da engenharia, que pode ser reduzida a resolver um sistema de equações lineares através de técnicas matriciais iterativas, é determinar a distribuição de temperatura de objetos tais como a do aço saindo da fornalha.

## **11.13 TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA [p. 436]**

Um dos principais avanços no diagnóstico médico é o desenvolvimento de métodos não invasivos para obter imagens de seções transversais do corpo humano, como a tomografia computadorizada e a ressonância magnética. Os métodos da álgebra linear podem ser usados para reconstruir imagens a partir do escaneamento por raios X da tomografia computadorizada.



# Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

## Conteúdo do Capítulo

- 1.1 Introdução aos Sistemas de Equações Lineares
- 1.2 Eliminação Gaussiana
- 1.3 Matrizes e Operações Matriciais
- 1.4 Inversas; Regras da Aritmética Matricial
- 1.5 Matrizes Elementares e um Método para Encontrar  $A^{-1}$
- 1.6 Mais Resultados sobre Sistemas de Equações e Invertibilidade
- 1.7 Matrizes Diagonais, Triangulares e Simétricas

**I**NTRODUÇÃO: Muitas vezes na Ciência e na Matemática a informação é organizada em linhas e colunas formando agrupamentos retangulares chamados matrizes. Estas matrizes podem ser tabelas de dados numéricos surgidos de observações físicas, mas também ocorrem em vários contextos matemáticos. Por exemplo, nós veremos neste capítulo que para resolver um sistema de equações tal como

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

toda a informação requerida para chegar à solução está encorpada na matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e que a solução pode ser obtida efetuando operações apropriadas nesta matriz. Isto é particularmente importante no desenvolvimento de programas de computador para resolver sistemas de equações lineares, porque os computadores são muito bons para manipular coleções de números. Contudo, as matrizes não são simplesmente uma ferramenta de notação para resolver sistemas de equações lineares; elas também podem ser vistas como objetos matemáticos de vida própria, existindo uma teoria rica e importante a elas associada que tem uma grande variedade de aplicações. Neste capítulo nós iremos começar o estudo de matrizes.

## 1.1 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Os sistemas de equações algébricas lineares e suas soluções constituem um dos principais tópicos estudados em cursos conhecidos como “de Álgebra Linear.” Nesta primeira seção nós iremos introduzir alguma terminologia básica e discutir um método para resolver estes sistemas.

**Equações Lineares** Qualquer linha reta no plano  $xy$  pode ser representada algebraicamente por uma equação da forma

$$a_1x + a_2y = b$$

onde  $a_1, a_2$  e  $b$  são constantes reais e  $a_1$  e  $a_2$  não são ambas nulas. Uma equação desta forma é chamada uma equação linear nas variáveis  $x$  e  $y$ . Mais geralmente, nós definimos uma **equação linear** nas  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  como uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  são constantes reais. As variáveis de uma equação linear são, muitas vezes, chamadas *incógnitas*.

### EXEMPLO 1 Equações Lineares

As equações

$$x + 3y = 7, \quad y = \frac{1}{2}x + 3z + 1 \quad \text{e} \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

são lineares. Observe que uma equação linear não envolve quaisquer produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. As equações

$$x + 3\sqrt{y} = 5, \quad 3x + 2y - z + xz = 4 \quad \text{e} \quad y = \sin x$$

são *não-lineares*.

Uma **solução** de uma equação linear  $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$  é uma seqüência de  $n$  números  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tais que a equação é satisfeita quando substituímos  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ . O conjunto de todas as soluções de uma equação é chamado seu **conjunto-solução** ou, às vezes, a **solução geral** da equação.

### EXEMPLO 2 Encontrando um Conjunto-Solução

Encontre o conjunto-solução de (a)  $4x - 2y = 1$  e (b)  $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$ .

**Solução (a).** Para encontrar soluções de (a), nós podemos atribuir um valor arbitrário a  $x$  e resolver em  $y$ , ou escolher um valor arbitrário para  $y$  e resolver em  $x$ . Seguindo a primeira abordagem e dando um valor arbitrário  $t$  para  $x$ , obtemos

$$x = t, \quad y = 2t - \frac{1}{2}$$

Estas fórmulas descrevem o conjunto-solução em termos de um número arbitrário  $t$ , chamado *parâmetro*. Soluções numéricas

particulares podem ser obtidas substituindo  $t$  por valores específicos. Por exemplo,  $t = 3$  dá a solução  $x = 3, y = \frac{11}{2}$  e  $t = -\frac{1}{2}$  dá a solução  $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$ .

Seguindo a segunda abordagem e dando um valor arbitrário  $t$  para  $y$ , obtemos

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}, \quad y = t$$

Embora estas fórmulas sejam diferentes das obtidas acima, fornecem o mesmo conjunto-solução à medida que  $t$  varia sobre todos os valores reais possíveis. Por exemplo, as fórmulas anteriores dão a solução  $x = 3, y = \frac{11}{2}$  quando  $t = 3$ , enquanto as fórmulas acima dão esta solução para  $t = \frac{11}{2}$ .

**Solução (b).** Para encontrar o conjunto-solução de (b), nós podemos atribuir valores arbitrários a quaisquer duas variáveis e resolver na terceira variável. Em particular, dando os valores arbitrários  $s$  e  $t$  para  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente, e resolvendo em  $x_1$ , nós obtemos

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t$$

**Sistemas Lineares** Um conjunto finito de equações lineares nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é chamado um **sistema de equações lineares** ou um **sistema linear**. Uma seqüência de números  $s_1, s_2, \dots, s_n$  é chamada uma **solução** do sistema se  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$  é uma solução de cada equação do sistema. Por exemplo, o sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

tem a solução  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$  pois estes valores satisfazem ambas equações. No entanto,  $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 1$  não é uma solução do sistema pois estes valores satisfazem apenas a primeira das duas equações do sistema.

Nem todos os sistemas de equações lineares têm solução. Por exemplo, multiplicando a segunda equação do sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

por  $\frac{1}{2}$ , torna-se evidente que não existem soluções, pois o sistema equivalente

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

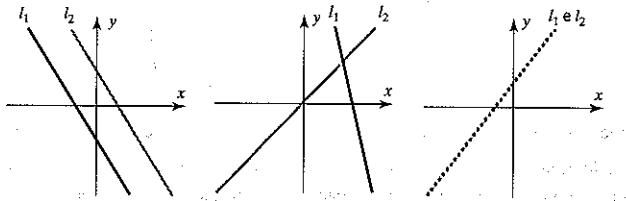
que resulta tem equações contraditórias.

Um sistema de equações que não possui solução é chamado **inconsistente**; se existir pelo menos uma solução do sistema, dizemos que ele é **consistente**. Para ilustrar as possibilidades que podem ocorrer na resolução de sistemas de equações lineares, considere um sistema arbitrário de duas equações lineares nas incógnitas  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \quad (a_1, b_1 \text{ não ambas nulas}) \\ a_2x + b_2y &= c_2 \quad (a_2, b_2 \text{ não ambas nulas}) \end{aligned}$$

Os gráficos destas equações são retas, digamos,  $l_1$  e  $l_2$ . Como um ponto  $(x, y)$  está na reta se, e somente se, os números  $x$  e  $y$  satisfazem a equação da reta, as soluções do sistema de equações correspondem a pontos de corte de  $l_1$  e  $l_2$ . Existem três possibilidades, ilustradas na Figura 1.1.1:

- As retas  $l_1$  e  $l_2$  podem ser paralelas, caso em que não há interseção e consequentemente não existe nenhuma solução do sistema.
- As retas  $l_1$  e  $l_2$  podem cortar-se em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.
- As retas  $l_1$  e  $l_2$  podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de soluções do sistema.



(a) Nenhuma solução (b) Uma solução (c) Infinitas soluções  
**Figuras 1.1.1**

Embora nós aqui tenhamos considerado apenas duas equações em duas incógnitas, nós mostraremos mais tarde que as mesmas três possibilidades valem para sistemas de equações lineares arbitrários:

*Todo sistema de equações lineares tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma, ou então uma infinidade de soluções.*

Um sistema arbitrário de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas pode ser escrito como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\quad \vdots &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as incógnitas e as letras  $a$  e  $b$  com subscritos denotam constantes. Por exemplo, um sistema geral de três equações lineares em quatro incógnitas pode ser escrito como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

O subscrito duplo nos coeficientes das incógnitas é um recurso útil que é usado para especificar a localização do coeficiente no sistema. O primeiro subscrito no coeficiente  $a_{ij}$  indica a equação na qual o coeficiente ocorre e o segundo subscrito indica qual incógnita ele multiplica. Assim,  $a_{12}$  ocorre na primeira equação e multiplica a incógnita  $x_2$ .

**Matrizes Aumentadas** Se nós mantivermos guardado na memória a localização dos sinais de soma, das variáveis e das constantes, poderemos abreviar a escrita de um sistema de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas para:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Esta é chamada a **matriz aumentada** do sistema. (Em Matemática, o termo *matriz* é utilizado para denotar uma coleção retangular de números. As matrizes surgem em vários contextos, que consideraremos com mais detalhes em seções posteriores.) Por exemplo, a matriz aumentada do sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

**OBSERVAÇÃO.** Quando construímos a matriz aumentada, as incógnitas devem estar escritas na mesma ordem em cada equação e as constantes que não multiplicam incógnitas devem estar à direita.

O método básico de resolver um sistema de equações lineares é substituir o sistema dado por um sistema novo que tem o mesmo conjunto-solução mas que é mais simples de resolver. Este sistema novo é geralmente obtido numa sucessão de passos aplicando os seguintes três tipos de operações para eliminar sistematicamente as incógnitas.

- Multiplicar uma equação inteira por uma constante não-nula.
- Trocar duas equações entre si.
- Somar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Como as linhas (horizontais) de uma matriz aumentada correspondem às equações no sistema associado, estas três operações correspondem às seguintes operações nas linhas da matriz aumentada.

- Multiplicar uma linha inteira por uma constante não-nula.
- Trocar duas linhas entre si.
- Somar um múltiplo de uma linha a uma outra linha.

**Operações Elementares sobre Linhas** Estas três operações são chamadas *operações elementares sobre linhas*. O seguinte exemplo ilustra como estas operações podem ser usadas para resolver sistemas de equações lineares. Como na próxima seção iremos desenvolver um procedimento sistemático para encontrar soluções, não é preciso ficar preocupado sobre o porquê dos passos tomados neste exemplo. O esforço aqui deveria ser para entender as contas e a discussão.

### EXEMPLO 3 Usando Operações Elementares sobre Linhas

Na coluna da esquerda nós resolvemos um sistema de equações lineares operando nas equações do sistema e na coluna da direita nós resolvemos o mesmo sistema operando nas linhas da matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

## 30 • • • Álgebra Linear com Aplicações

Some -2 vezes a primeira equação à segunda para obter esquerda

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2y - 7z &= -17 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

Some -3 vezes a primeira equação à terceira para obter

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2y - 7z &= -17 \\3y - 11z &= -27\end{aligned}$$

Multiplique a segunda equação por  $\frac{1}{2}$  para obter

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\3y - 11z &= -27\end{aligned}$$

Some -3 vezes a segunda equação à terceira para obter

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\-\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Some -2 vezes a primeira linha à segunda para obter direita

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

Some -3 vezes a primeira linha à terceira para obter

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Multiplique a segunda linha por  $\frac{1}{2}$  para obter

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Some -3 vezes a segunda linha à terceira para obter

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right]$$

Multiplique a terceira equação por -2 para obter

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\z &= 3\end{aligned}$$

Some -1 vez a segunda equação à primeira para obter

$$\begin{aligned}x + \frac{11}{2}z &= \frac{35}{2} \\y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\z &= 3\end{aligned}$$

Some  $-\frac{11}{2}$  vezes a terceira equação à primeira e  $\frac{7}{2}$  vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned}x &= 1 \\y &= 2 \\z &= 3\end{aligned}$$

Multiplique a terceira linha por -2 para obter

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Some -1 vez a segunda linha à primeira para obter

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Some  $-\frac{11}{2}$  vezes a terceira linha à primeira e  $\frac{7}{2}$  vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

A solução  $x = 1, y = 2, z = 3$  pode, agora, ser visualizada.

## Conjunto de Exercícios 1.1

1. Quais das seguintes equações são lineares em  $x_1, x_2$  e  $x_3$ ?

- (a)  $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$     (b)  $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$     (c)  $x_1 = -7x_2 + 3x_3$   
 (d)  $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$     (e)  $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$     (f)  $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Sabendo que  $k$  é uma constante, quais das seguintes equações são lineares?

- (a)  $x_1 - x_2 + x_3 = \sin k$     (b)  $kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9$     (c)  $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

3. Encontre o conjunto-solução de cada uma das seguintes equações lineares.

- (a)  $7x - 5y = 3$     (b)  $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$   
 (c)  $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$     (d)  $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

4. Encontre a matriz aumentada de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

- (a)  $3x_1 - 2x_2 = -1$     (b)  $2x_1 + 2x_3 = 1$     (c)  $x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$     (d)  $x_1 = 1$   
 $4x_1 + 5x_2 = 3$      $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$      $3x_2 + x_3 - x_5 = 2$      $x_2 = 2$   
 $7x_1 + 3x_2 = 2$      $6x_1 + x_2 - x_3 = 0$      $x_3 + 7x_4 = 1$      $x_3 = 3$

5. Encontre o sistema de equações lineares correspondendo à matriz aumentada.

(a)  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$     (b)  $\left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right]$

(c)  $\left[ \begin{array}{ccccc|c} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$     (d)  $\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$

6. (a) Encontre uma equação linear nas variáveis  $x$  e  $y$  que tem  $x = 5 + 2t, y = t$  como solução geral.

(b) Mostre que  $x = t, y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$  também é a solução geral da equação da parte (a).

7. A curva  $y = ax^2 + bx + c$  mostrada na figura passa pelos pontos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$ . Mostre que os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são uma solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

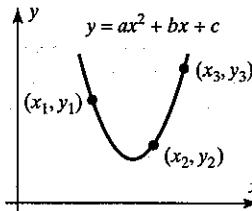


Figura Ex-7

8. Considere o sistema de equações

$$x + y + 2z = a$$

$$x + z = b$$

$$2x + y + 3z = c$$

Mostre que para este sistema ser consistente, as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  devem satisfazer  $c = a + b$ .

9. Mostre que se as equações lineares  $x_1 + kx_2 = c$  e  $x_1 + lx_2 = d$  têm o mesmo conjunto-solução, então as equações são idênticas.

## Discussão e Descoberta

10. Para quais valores da constante  $k$  o sistema

$$x - y = 3$$

$$2x - 2y = k$$

não tem solução? Exatamente uma solução? Infinitas soluções? Explique seu raciocínio.

11. Considere o sistema de equações

$$ax + by = k$$

$$cx + dy = l$$

$$ex + fy = m$$

O que você pode dizer sobre a posição relativa das retas  $ax + by = k$ ,  $cx + dy = l$  e  $ex + fy = m$ , quando

- (a) o sistema não tem solução;
- (b) o sistema tem exatamente uma solução;
- (c) o sistema tem infinitas soluções?

12. Se o sistema do Exercício 11 for consistente, explique por que pelo menos uma das equações poderá ser descartada do sistema sem alterar o conjunto-solução.

13. Se  $k = l = m$  no Exercício 11, explique por que o sistema deve ser consistente. O que pode ser dito sobre o ponto de corte das três retas se o sistema tem exatamente uma solução?

## 1.2 ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

Nesta seção nós vamos desenvolver um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares. O procedimento é baseado na idéia de reduzir a matriz aumentada de um sistema a uma outra matriz aumentada que seja suficientemente simples a ponto de permitir visualizar a solução.

**Forma Escalonada:** No Exemplo 3 da última seção nós resolvemos um sistema linear nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$  reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a partir da qual a solução  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$  ficou evidente. Isto é um exemplo de uma matriz que está em **forma escalonada**

**reduzida por linhas.** Para ser desta forma, uma matriz deve ter as seguintes propriedades:

1. Se uma linha não consistir só de zeros, então o primeiro número não-nulo da linha é um 1. Chamamos este número 1 de **líder** ou **pivô**.
2. Se existirem linhas constituídas somente de zeros, elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
3. Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só de zeros, o líder da linha inferior ocorre mais à direita que o líder da linha superior.
4. Cada coluna que contém um líder tem zeros nas demais entradas.

Dizemos que uma matriz que tem as três primeiras propriedades está em **forma escalonada por linhas**, ou simplesmente, em **forma escalonada**. (Assim, uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas necessariamente está em forma escalonada, mas não reciprocamente.)

**EXEMPLO 1 Formas Escalonada e Escalonada Reduzida por Linhas**

As seguintes matrizes estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As seguintes matrizes estão em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nós deixamos para você a tarefa de confirmar que cada uma das matrizes deste exemplo satisfaz todos os requisitos exigidos. ♦

**EXEMPLO 2 Mais sobre Formas Escalonada e Escalonada Reduzida por Linhas**

Como o último exemplo ilustra, uma matriz em forma escalonada tem zeros abaixo de cada líder, enquanto que uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas tem zeros abaixo e acima de cada líder. Assim, colocando qualquer número real no lugar dos asteriscos, as matrizes dos seguintes tipos estão em forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
  

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Além disto, as matrizes dos seguintes tipos estão em forma escalonada reduzida por linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
  

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Se a matriz aumentada de um sistema de equações lineares for colocada em forma escalonada reduzida por linhas por meio de uma seqüência de operações elementares, então a solução do sistema está visível ou então se torna visível depois de uns poucos passos simples. O próximo exemplo ilustra isto.

**EXEMPLO 3 Soluções de Quatro Sistemas Lineares**

Suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$
  

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Solução (a).* O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Por inspeção,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 4$ .

*Solução (b).* O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 &+ 4x_4 = -1 \\ x_2 &+ 2x_4 = 6 \\ x_3 &+ 3x_4 = 2 \end{aligned}$$

Como  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  correspondem a líderes na matriz aumentada, dizemos que estas variáveis são *variáveis líderes*. As variáveis não-líderes (neste caso, só  $x_4$ ) são chamadas *variáveis livres*. Resolvendo as variáveis líderes em termos das variáveis livres, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 4x_4 \\ x_2 &= 6 - 2x_4 \\ x_3 &= 2 - 3x_4 \end{aligned}$$

A partir deste formato das equações nós vemos que podemos dar um valor arbitrário à variável livre  $x_4$ , digamos  $t$ , que então determina os valores das variáveis líderes  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Resulta, assim, que há uma infinidade de soluções e que a solução geral é dada pela fórmula

$$x_1 = -1 - 4t, \quad x_2 = 6 - 2t, \quad x_3 = 2 - 3t, \quad x_4 = t$$

*Solução (c).* A linha de zeros leva à equação  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$ , que não coloca restrições às soluções (por quê?). Assim, podemos omitir esta equação e escrever o sistema correspondente como

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &+ 4x_5 = -2 \\ x_3 + 3x_5 &= 1 \\ x_4 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Aqui, as variáveis líderes são  $x_1$ ,  $x_3$  e  $x_4$  e as variáveis livres são  $x_2$  e  $x_5$ . Resolvendo as variáveis líderes em termos das variáveis livres obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - 6x_2 - 4x_5 \\ x_3 &= 1 - 3x_5 \\ x_4 &= 2 - 5x_5 \end{aligned}$$

Como a  $x_5$  pode ser atribuído um valor arbitrário  $t$ , e a  $x_2$  pode ser atribuído um valor arbitrário  $s$ , existem infinitas soluções. A solução geral é dada pelas fórmulas

$$x_1 = -2 - 6s - 4t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 1 - 3t, \quad x_4 = 2 - 5t, \quad x_5 = t$$

**Solução (d).** A última equação do sistema correspondente é

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Como esta equação não pode ser resolvida, não existe solução para o sistema. ♦

**Métodos de Eliminação** Nós acabamos de ver como é fácil resolver um sistema de equações lineares tão logo sua matriz aumentada estiver em forma escalonada reduzida por linhas. Agora nós iremos dar um procedimento de **eliminação** passo a passo que pode ser usado para reduzir qualquer matriz à forma escalonada. À medida que enunciamos cada passo, iremos ilustrá-lo reduzindo a seguinte matriz à forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

**Passo 1.** Localize a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteiramente de zeros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Coluna não-nula mais à esquerda

**Passo 2.** Permute a primeira linha com uma outra linha, se necessário, para obter uma entrada não-nula ao topo da coluna encontrada no Passo 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Foram permutadas a primeira e a segunda linhas da matriz precedente.

**Passo 3.** Se a entrada que agora está no topo da coluna encontrada no Passo 1 é  $a$ , multiplique a primeira linha inteira por  $1/a$  para introduzir um líder.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da matriz precedente foi multiplicada por  $1/2$ .

**Passo 4.** Some múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do líder.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

-2 vezes a primeira linha da matriz precedente foi somada à terceira linha.

**Passo 5.** Agora esconda a primeira linha da matriz e recomece aplicando o Passo 1 à submatriz resultante. Continue desta maneira até que *toda* a matriz esteja em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Coluna não-nula mais à esquerda da submatriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da submatriz foi multiplicada por  $-1/2$  para introduzir um líder.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

-5 vezes a primeira linha da submatriz foi somada à segunda linha da submatriz para introduzir um zero debaixo do líder.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

A linha superior da submatriz foi tratada e retornamos ao Passo 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Coluna não-nula mais à esquerda da nova submatriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A primeira (e única) linha da nova submatriz foi multiplicada por 2 para introduzir um líder.

A matriz *toda* está agora em forma escalonada. Para obter a forma escalonada reduzida por linhas precisamos de mais um passo.

**Passo 6.** Começando com a última linha não-nula e trabalhando para cima, some múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores para introduzir zeros acima dos líderes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\frac{7}{2}$  vezes a terceira linha da matriz precedente foi somada à segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-6 vezes a terceira linha foi somada à primeira linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5 vezes a segunda linha foi somada à primeira linha.

A última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas.

Se nós usarmos somente os cinco primeiros passos, o procedimento acima, chamado **eliminação gaussiana**, produzirá uma forma escalonada reduzida por linhas para uma dada matriz, não importa como variamos as operações sobre linhas. (Uma prova deste resultado pode ser encontrada no artigo "The Reduced Row Echelon Form of a Matrix Is Unique: A

OBSERVAÇÃO. Pode ser mostrado que *toda matriz tem uma única forma escalonada reduzida por linhas*; ou seja, sempre chegamos à mesma forma escalonada reduzida por linhas para uma dada matriz, não importa como variamos as operações sobre linhas. (Uma prova deste resultado pode ser encontrada no artigo "The Reduced Row Echelon Form of a Matrix Is Unique: A



Karl Friedrich Gauss



Wilhelm Jordan

**Karl Friedrich Gauss** (1777–1855) foi um cientista e matemático alemão. As vezes chamado “príncipe dos matemáticos,” Gauss é colocado junto a Newton e Arquimedes como um dos três maiores matemáticos de todos os tempos. Em toda a história da Matemática, talvez nunca tenha havido uma criança tão precoce como Gauss—pois sua própria iniciativa desenvolveu os rudimentos da aritmética antes mesmo de começar a falar. Certo dia, antes de completar três anos, seu gênio se mostrou a seus pais de uma maneira muito dramática. Seu pai estava preparando a folha de pagamento semanal dos trabalhadores sob seu encargo enquanto o garoto observava quieto desde um canto. Quando seu pai terminou a longa e tediosa conta, Gauss informou-lhe que havia um erro no resultado e forneceu a resposta que ele havia calculado de cabeça. Para grande surpresa dos pais, uma verificação da conta mostrou que Gauss estava certo.

Em sua tese de Doutorado, Gauss deu a primeira prova completa do Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que o número de soluções de cada equação polinomial coincide com o seu grau. Aos 19 anos de idade, resolveu um problema que frustrou Euclides, inscrevendo um polígono regular de dezessete lados em um círculo usando somente régua e compasso, e em 1801, aos 24 anos, ele publicou sua primeira obra-prima, *Disquisitiones Arithmeticae*, considerada por muitos como uma das mais brilhantes realizações matemáticas. Neste trabalho, Gauss sistematizou o estudo da Teoria de Números (propriedades dos inteiros) e formulou os conceitos básicos que constituem o fundamento deste assunto.

Entre suas inúmeras realizações, Gauss descobriu a assim chamada curva de Gauss, ou em forma de sino, que é fundamental em Probabilidade, deu a primeira interpretação geométrica dos números complexos e estabeleceu seu papel fundamental na Matemática, desenvolveu métodos para caracterizar superfícies de maneira intrínseca por meio de curvas nestas superfícies, desenvolveu a teoria das aplicações conformes (as que preservam ângulo) e descobriu a geometria não-euclidiana 30 anos antes destas idéias serem publicadas por outros. Na Física, ele deu contribuições relevantes à teoria de lentes e à ação capilar e, com Wilhelm Weber, realizou trabalho fundamental em eletromagnetismo. Gauss inventou o heliotrópio, o magnetômetro bifilar e um eletrotelégrafo.

Gauss era profundamente religioso e aristocrático em sua conduta. Ele dominava línguas estrangeiras com facilidade, lia extensivamente e apreciava mineralogia e botânica como hobby. Ele não gostava de lecionar e era em geral frio e desencorajador com outros matemáticos, possivelmente por que ele já havia antecipado seus trabalhos. Diz-se que se Gauss tivesse publicado todos suas descobertas, o estado atual da Matemática estaria 50 anos à frente. Ele foi, sem dúvida, o maior matemático da era moderna.

**Wilhelm Jordan** (1842–1899) foi um engenheiro alemão especializado em Geodesia. Sua contribuição à resolução de sistemas lineares apareceu em seu livro popular, *Handbuch der Vermessungskunde* (Manual da Geodesia) em 1888.

“Simple Proof,” de Thomas Yuster, *Mathematics Magazine*, Vol. 57, No. 2, 1984, páginas 93-94.) Por outro lado, *uma forma escalonada de uma dada matriz não é única*: diferentes sequências de operações sobre linhas podem produzir formas escalonadas diferentes.

#### EXEMPLO 4 Eliminação de Gauss-Jordan

Resolva por eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 - 2x_3 & + 2x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 & = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 & + 15x_6 & = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 & + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 & = 6 \end{array}$$

Solução.

A matriz aumentada do sistema é

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{array} \right]$$

Somando  $-2$  vezes a primeira linha à segunda e quarta linhas dá

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{array} \right]$$

Multiplicando a segunda linha por  $-1$  e depois somando  $-5$  vezes a nova segunda linha à terceira linha e  $-4$  vezes a nova segunda linha à quarta linha dá

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array} \right]$$

Permutando as terceira e quarta linhas e então multiplicando a terceira linha da matriz resultante por  $\frac{1}{3}$  dá a forma escalonada

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Somando  $-3$  vezes a terceira linha à segunda linha e depois somando  $2$  vezes a segunda linha da matriz resultante à primeira linha fornece a forma escalonada reduzida por linhas

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &+ 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(Nós descartamos a última equação,  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$ , pois ela é automaticamente satisfeita pelas soluções das demais equações.) Resolvendo as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Se dermos os valores arbitrários  $r$ ,  $s$  e  $t$  às variáveis livres  $x_2$ ,  $x_4$  e  $x_5$ , respectivamente, então a solução geral é dada pelas fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3} \quad \diamond$$

**Retro-substituição** Às vezes é preferível resolver um sistema de equações lineares por eliminação gaussiana para levar a matriz aumentada à forma escalonada sem continuar até chegar à forma escalonada reduzida por linhas. Quando isto é feito, o correspondente sistema de equações pode ser resolvido por uma técnica chamada retro-substituição. O próximo exemplo ilustra esta ideia.

### EXEMPLO 5 O Exemplo 4 Resolvido por Retro-substituição

Das contas do Exemplo 4, uma forma escalonada da matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para resolver o sistema de equações correspondente

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &+ 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 &+ 3x_6 = 1 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

nós procedemos da seguinte maneira:

**Passo 1.** Resolva as equações para as variáveis líderes.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Passo 2.** Começando com a equação de baixo e trabalhando para cima, substitua sucessivamente cada equação em todas as equações acima dela.

Substituindo  $x_6 = \frac{1}{3}$  na segunda equação dá

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Substituindo  $x_3 = -2x_4$  na primeira equação, dá

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Passo 3.** Atribua valores arbitrários às variáveis livres, se houver.

Atribuindo os valores arbitrários  $r$ ,  $s$  e  $t$  a  $x_2$ ,  $x_4$  e  $x_5$ , respectivamente, a solução geral é dada pelas fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

Isto confere com a solução obtida no Exemplo 4. ♦

**OBSERVAÇÃO.** Os valores arbitrários que atribuímos às variáveis livres são, muitas vezes, chamados *parâmetros*. Nós geralmente usamos as letras  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,... para os parâmetros, mas também podem ser usadas quaisquer letras que não entrem em conflito com as variáveis.

### EXEMPLO 6 Eliminação Gaussiana

Resolva

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

por eliminação gaussiana e retro-substituição.

*Solução.*

Este é o sistema do Exemplo 3 da Seção 1.1. Naquele exemplo, nós convertemos a matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

à forma escalonada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

O sistema correspondente a esta matriz é

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\z &= 3\end{aligned}$$

Substituindo a equação de baixo nas que estão acima, dá

$$\begin{aligned}x &= 9 - y - 2z \\y &= -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}z \\z &= 3\end{aligned}$$

e substituindo a segunda equação na de cima fornece  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$ . Isto confere com o resultado obtido pela eliminação de Gauss-Jordan no Exemplo 3 da Seção 1.1.

**Sistemas Lineares Homogêneos** Um sistema de equações lineares é dito **homogêneo** se os termos constantes são todos zero; ou seja, o sistema tem a forma

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\&\vdots &&\vdots &&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0\end{aligned}$$

Cada sistema homogêneo de equações lineares é consistente, pois todos sistemas homogêneos têm  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , ...,  $x_n = 0$  como uma solução. Esta solução é chamada *solução trivial* ou *solução nula*; se há outras soluções, estas são chamadas *não-triviais*.

Como um sistema linear homogêneo sempre tem a solução trivial, só existem duas possibilidades para suas soluções:

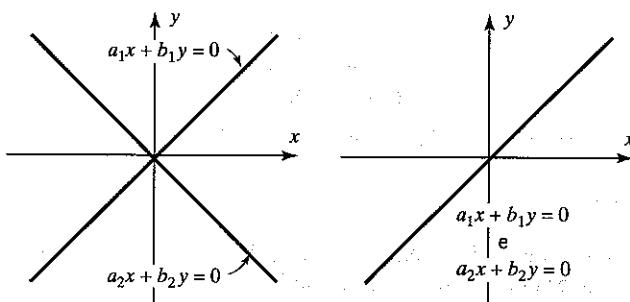
- O sistema tem somente a solução trivial.
- O sistema tem infinitas soluções além da solução trivial.

No caso especial de um sistema linear homogêneo de duas equações em duas incógnitas, digamos

$$a_1x + b_1y = 0 \quad (a_1, b_1 \text{ não ambas nulas})$$

$$a_2x + b_2y = 0 \quad (a_2, b_2 \text{ não ambas nulas})$$

os gráficos das equações são retas pela origem, e a solução trivial corresponde ao ponto de corte na origem (Figura 1.2.1).



(a) Somente a solução trivial

(b) Infinitas soluções

Figura 1.2.1

Há um caso no qual um sistema homogêneo garantidamente tem soluções não-triviais, a saber, sempre que o sistema envolve mais incógnitas que equações. Para ver por que, considere o seguinte exemplo de quatro equações em cinco incógnitas.

### EXEMPLO 7 Eliminação de Gauss-Jordan

Resolva o seguinte sistema homogêneo de equações lineares usando eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 - x_3 &+ x_5 = 0 \\-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 + x_2 - 2x_3 &- x_5 = 0 \\x_3 + x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

*Solução.*

A matriz aumentada para o sistema é

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Reduzindo esta matriz à forma escalonada reduzida por linhas, obtemos

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &+ x_5 = 0 \\x_3 &+ x_5 = 0 \\x_4 &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned}x_1 &= -x_2 - x_5 \\x_3 &= -x_5 \\x_4 &= 0\end{aligned}$$

Assim, a solução geral é

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

Note que a solução trivial é obtida quando  $s = t = 0$ .

O Exemplo 7 ilustra dois aspectos importantes sobre resolução de sistemas homogêneos de equações lineares. O primeiro é que nenhuma das operações elementares sobre linhas altera a coluna final de zeros da matriz aumentada, de modo que o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada também deve ser um sistema homogêneo [ver sistema (2)]. O segundo é que, dependendo da forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada ter alguma linha nula, o número de equações no sistema reduzido é menor do que ou igual ao número de equações do sistema original [compare os sistemas (1) e (2)]. Assim, se o sistema homogêneo dado tiver  $m$  equações em  $n$  incógnitas com  $m < n$ , e se há  $r$  linhas não-nulas na forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada, nós teremos  $r < n$ . Segue-se

que o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada terá a forma

$$\begin{array}{ll} \cdots x_{k_1} & + \Sigma(\cdot) = 0 \\ \cdots x_{k_2} & + \Sigma(\cdot) = 0 \\ \cdots & \vdots \\ x_{k_r} & + \Sigma(\cdot) = 0 \end{array} \quad (3)$$

onde  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$  são as variáveis líderes e  $\Sigma(\cdot)$  denota as somas (possivelmente todas distintas) que envolvem as  $n - r$  variáveis livres [compare o sistema (3) com o sistema (2) acima]. Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= -\Sigma(\cdot) \\ x_{k_2} &= -\Sigma(\cdot) \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= -\Sigma(\cdot) \end{aligned}$$

Como no Exemplo 7, podemos atribuir valores arbitrários às variáveis livres do lado direito e assim obter infinitas soluções do sistema.

Resumindo, nós temos o importante teorema a seguir.

### Teorema 1.2.1

*Um sistema homogêneo de equações lineares com mais incógnitas que equações tem infinitas soluções.*

OBSERVAÇÃO. Note que o Teorema 1.2.1 aplica somente a sistemas homogêneos. Um sistema não-homogêneo com mais incógnitas que equações não precisa ser consistente (Exercício 28); contudo, se o sistema for consistente, terá infinitas soluções. Isto será provado mais tarde.

### Soluções Computacionais de Sistemas Lineares

Em aplicações não é incomum encontrar sistemas lineares grandes que precisam ser resolvidos por computador. A maioria dos algoritmos computacionais para resolver estes sistemas são baseados na eliminação gaussiana ou na eliminação de Gauss-Jordan, mas os procedimentos básicos são muitas vezes modificados para comportar problemas tais como

- Redução de erros de arredondamento
- Minimização do uso de espaço de memória do computador
- Resolução do sistema com rapidez máxima

Alguns desses assuntos serão considerados no Capítulo 9. Fazendo cálculos à mão, as frações constituem um aborrecimento que muitas vezes não pode ser evitado. Contudo, em alguns casos é possível evitar as frações variando as operações elementares sobre linhas da maneira correta. Assim, uma vez que as técnicas da eliminação gaussiana e da eliminação de Gauss-Jordan tiverem sido dominadas, o leitor poderá querer variar os passos em problemas específicos para evitar frações (ver Exercício 18).

OBSERVAÇÃO. Como a eliminação de Gauss-Jordan evita o uso de retro-substituição, poderia parecer que este método é o mais eficiente dos dois métodos que nós consideramos. Pode ser argumentado que esta afirmação é verdadeira quando resolvemos manualmente sistemas pequenos, pois a eliminação de Gauss-Jordan na verdade envolve escrever menos. Contudo, mostra-se que ambos métodos requerem o mesmo número de operações. Esta é uma consideração importante quando usamos computadores para obter soluções de grandes sistemas de equações. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar a Seção 9.8.

### Conjunto de Exercícios 1.2

1. Quais das seguintes matrizes  $3 \times 3$  estão em forma escalonada reduzida por linhas?

- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |   |   |   |
| (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | (g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
|   |   |   | (j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |

2. Quais das seguintes matrizes  $3 \times 3$  estão em forma escalonada?

- |  |   |   |   |
|--|---|---|---|
| (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  | (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ | (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| (e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |   |   |

**38 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

3. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, escalonada reduzida por linhas, ambas ou nenhuma das duas.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada dada. Resolva o sistema.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

$$(a) x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

$$(b) 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$$

$$-2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$$

$$8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1$$

$$(c) x - y + 2z - w = -1$$

$$(d) -2b + 3c = 1$$

$$2x + y - 2z - 2w = -2$$

$$3a + 6b - 3c = -2$$

$$-x + 2y - 4z + w = 1$$

$$6a + 6b + 3c = 5$$

$$3x - 3w = -3$$

7. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 6 por eliminação gaussiana.

8. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

$$(a) 2x_1 - 3x_2 = -2$$

$$(b) 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15$$

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$$

$$-6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30$$

$$(c) 4x_1 - 8x_2 = 12$$

$$(d) 10y - 4z + w = 1$$

$$3x_1 - 6x_2 = 9$$

$$x + 4y - z + w = 2$$

$$-2x_1 + 4x_2 = -6$$

$$3x + 2y + z + 2w = 5$$

$$-2x - 8y + 2z - 2w = -4$$

$$x - 6y + 3z = 1$$

9. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 8 por eliminação gaussiana.

10. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

$$(a) 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$$

$$(b) x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5$$

$$(c) w + 2x - y = 4$$

$$x - y = 3$$

$$w + 3x - 2y = 7$$

$$2u + 4v + w + 7x = 7$$

- 11.** Resolva cada um dos sistemas do Exercício 10 por eliminação gaussiana.
- 12.** Sem utilizar papel e lápis, determine quais dos seguintes sistemas homogêneos têm soluções não-triviais.
- $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0$
  - $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$
  - $7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0$
  - $x_2 - 8x_3 = 0$
  - $2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 = 0$
  - $4x_3 = 0$
  - $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$
  - $3x_1 - 2x_2 = 0$
  - $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$
  - $6x_1 - 4x_2 = 0$
- 13.** Resolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares por qualquer método.
- $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$
  - $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
  - $2x + 2y + 4z = 0$
  - $x_1 + 2x_2 = 0$
  - $5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$
  - $w - y - 3z = 0$
  - $x_2 + x_3 = 0$
  - $2w + 3x + y + z = 0$
  - $-2w + x + 3y - 2z = 0$
- 14.** Resolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares por qualquer método.
- $2x - y - 3z = 0$
  - $v + 3w - 2x = 0$
  - $x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$
  - $-x + 2y - 3z = 0$
  - $2u + v - 4w + 3x = 0$
  - $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$
  - $x + y + 4z = 0$
  - $2u + 3v + 2w - x = 0$
  - $-2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$
  - $-4u - 3v + 5w - 4x = 0$
  - $2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0$
  - $x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$
- 15.** Resolva os seguintes sistemas por qualquer método.
- $2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 = 9$
  - $I_1 - 2I_3 + 7I_4 = 11$
  - $3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 = 8$
  - $2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 = 10$
  - $Z_3 + Z_4 + Z_5 = 0$
  - $-Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 = 0$
  - $Z_1 + Z_2 - 2Z_3 - Z_5 = 0$
  - $2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 + Z_5 = 0$
- 16.** Resolva os seguintes sistemas, onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes.
- $2x + y = a$
  - $x_1 + x_2 + x_3 = a$
  - $3x + 6y = b$
  - $2x_1 + 2x_3 = b$
  - $3x_2 + 3x_3 = c$
- 17.** O sistema seguinte não tem soluções para quais valores de  $a$ ? Exatamente uma solução? Infinitas soluções?
- $$\begin{aligned} x + 2y - & \quad 3z = 4 \\ 3x - y + & \quad 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z & = a + 2 \end{aligned}$$
- 18.** Reduza
- $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
- à forma escalonada reduzida por linhas sem introduzir quaisquer frações.
- 19.** Obtenha duas formas escalonadas por linha diferentes de
- $$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$
- 20.** Resolva o seguinte sistema de equações não-lineares para os ângulos incógnitos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , onde  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  e  $0 \leq \gamma < \pi$ .
- $$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha - \cos \beta + 3 \operatorname{tg} \gamma &= 3 \\ 4 \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta - 2 \operatorname{tg} \gamma &= 2 \\ 6 \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \beta + \operatorname{tg} \gamma &= 9 \end{aligned}$$
- 21.** Mostre que o seguinte sistema não-linear tem 18 soluções se  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  e  $0 \leq \gamma < 2\pi$ .
- $$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta + 3 \operatorname{tg} \gamma &= 0 \\ 2 \operatorname{sen} \alpha + 5 \cos \beta + 3 \operatorname{tg} \gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha - 5 \cos \beta + 5 \operatorname{tg} \gamma &= 0 \end{aligned}$$
- 22.** Para que valor(es) de  $\lambda$  o sistema de equações
- $$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + & \quad y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$
- tem soluções não-triviais?

23. Resolva o sistema

$$2x_1 - x_2 = \lambda x_1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = \lambda x_2$$

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda x_3$$

para  $x_1, x_2$  e  $x_3$  nos dois casos  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$ .

24. Resolva o seguinte sistema para  $x, y$  e  $z$ .

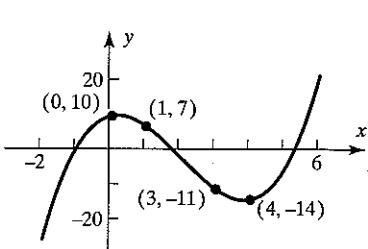
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} = 0$$

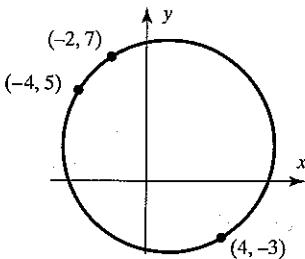
$$-\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} = 5$$

25. Encontre coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  tais que a curva mostrada na figura é o gráfico da equação  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

26. Encontre coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  tais que a curva mostrada na figura é dada pela equação  $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ .



**Figura Ex-25**



**Figura Ex-26**

27. (a) Mostre que se  $ad - bc \neq 0$ , então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ é } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que o sistema

$$ax + by = k$$

$$cx + dy = l$$

tem exatamente uma solução quando  $ad - bc \neq 0$ .

28. Encontre um sistema linear inconsistente que tem mais incógnitas do que equações.

### Discussão e Descoberta

29. Discuta as formas escalonadas reduzidas por linhas possíveis de

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

30. Considere o sistema de equações

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

$$ex + fy = 0$$

Discuta as posições relativas das retas  $ax + by = 0$ ,  $cx + dy = 0$  e  $ex + fy = 0$  quando o sistema

(a) tem somente a solução trivial e

(b) tem soluções não-triviais.

31. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Se uma matriz for reduzida à forma escalonada reduzida por linhas por duas seqüências distintas de operações elementares sobre linhas, então as matrizes resultantes serão diferentes.

(b) Se uma matriz for reduzida à forma escalonada por duas seqüências distintas de operações elementares sobre linhas, então as matrizes resultantes serão diferentes.

- (c) Se a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz aumentada de um sistema linear tiver uma linha de zeros, então o sistema deve possuir uma infinidade de soluções.  
 (d) Se três retas do plano  $xy$  são lados de um triângulo, então o sistema de equações formado pelas suas equações tem três soluções, uma correspondendo a cada vértice.
32. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- Um sistema linear de três equações em cinco incógnitas é consistente.
  - Um sistema linear de cinco equações em três incógnitas não pode ser consistente.
  - Se um sistema linear de  $n$  equações em  $n$  incógnitas tiver  $n$  entradas líder na forma escalonada reduzida por linhas de sua matriz aumentada, então o sistema terá exatamente uma solução.
  - Se um sistema linear de  $n$  equações em  $n$  incógnitas tiver duas equações que são múltiplas uma da outra, então o sistema será inconsistente.

## 1.3 MATRIZES E OPERAÇÕES MATRICIAIS

Coleções retangulares de números reais aparecem em muitos contextos, não só como a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Nesta seção nós vamos começar nosso estudo da teoria das matrizes dando algumas das definições fundamentais do assunto. Nós vamos ver como as matrizes podem ser combinadas através das operações aritméticas de adição, subtração e multiplicação.

**Notação e Terminologia Matricial** Na Seção 1.2 nós usamos agrupamentos retangulares de números, denominados *matrizes aumentadas*, para abreviar a escrita de sistemas de equações lineares. Contudo, agrupamentos retangulares de números ocorrem também em outros contextos. Por exemplo, a seguinte coleção retangular de três linhas e sete colunas pode descrever o número de horas que um estudante gastou estudando três matérias durante uma certa semana:

	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	Sab.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Se nós suprimirmos os títulos, ficaremos com a seguinte coleção retangular de números com três linhas e sete colunas, denominada *matriz*:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais geralmente, fazemos a seguinte definição.

### Definição

Uma *matriz* é um agrupamento retangular de números. Os números neste agrupamento são chamados *entradas* da matriz.

### EXEMPLO 1 Exemplos de Matrizes

Alguns exemplos de matrizes são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4] \quad \blacklozenge$$

O *tamanho* de uma matriz é descrito em termos do número de linhas (fileiras horizontais) e de colunas (fileiras verticais) que contém. Por exemplo, a primeira matriz do Exemplo 1 tem três linhas e duas colunas, portanto seu tamanho é 3 por 2 (e escrevemos  $3 \times 2$ ). Numa descrição de tamanho, o primeiro número sempre denota o número de linhas e o segundo o de colunas. As outras matrizes do Exemplo 1 têm tamanhos  $1 \times 4$ ,  $3 \times 3$ ,  $2 \times 1$  e  $1 \times 1$ , respectivamente. Uma matriz com somente uma coluna é chamada *matriz-coluna* (ou *vetor-coluna*) e uma matriz com somente uma linha é chamada *matriz-linha* (ou *vetor-linha*). Assim, no Exemplo 1 a matriz  $2 \times 1$  é uma matriz-coluna, a matriz  $1 \times 4$  é uma matriz-linha e a matriz  $1 \times 1$  é tanto uma matriz-coluna quanto uma matriz-linha. (O termo *vetor* tem um outro significado que será discutido em capítulos subsequentes.)

**OBSERVAÇÃO.** É prática comum omitir os colchetes numa matriz  $1 \times 1$ . Assim, nós podemos escrever 4 em vez de  $[4]$ . Embora isto torne impossível dizer se 4 denota o número “quatro” ou a matriz  $1 \times 1$  cuja única entrada é este número “quatro,” isto raramente causa problemas, pois geralmente é possível discernir a que nos estamos referindo a partir do contexto no qual aparece o símbolo.

Nós iremos usar letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas; assim, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Quando discutimos matrizes, é usual chamar as quantidades numéricas de *escalares*. A menos de menção explícita em contrário, *escalares são números reais*; escalares complexos serão considerados no Capítulo 10.

A entrada que ocorre na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de uma matriz  $A$  é denotada por  $a_{ij}$ . Assim, uma matriz arbitrária  $3 \times 4$  pode ser escrita como

## 4.2 ••• Álgebra Linear com Aplicações

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

e uma matriz arbitrária  $m \times n$  como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Quando for desejada uma notação mais compacta, a matriz precedente pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m \times n} \text{ ou } [a_{ij}]$$

a primeira notação sendo usada quando é importante saber o tamanho da matriz e a segunda quando o tamanho não necessita ênfase. Em geral, combinamos a letra denotando a matriz com a letra denotando suas entradas; assim, para uma matriz  $B$  nós geralmente usamos  $b_{ij}$  para a entrada na linha  $i$  e na coluna  $j$  e para uma matriz  $C$  nós usamos a notação  $c_{ij}$ .

A entrada na linha  $i$  e na coluna  $j$  de uma matriz  $A$  também é comumente denotada por  $(A)_{ij}$ . Assim, para a matriz (1) acima, nós temos

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

e para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

nós temos  $(A)_{11} = 2$ ,  $(A)_{12} = -3$ ,  $(A)_{21} = 7$  e  $(A)_{22} = 0$ .

Matrizes-linha e matrizes-coluna são de importância especial, e é prática comum denotá-las por letras minúsculas em negrito em vez de letras maiúsculas. Para tais matrizes é desnecessário usar subscritos duplos para as entradas. Assim, uma matriz-linha  $1 \times n$  arbitrária  $\mathbf{a}$  e uma matriz-coluna  $m \times 1$  arbitrária  $\mathbf{b}$  podem ser escritas como

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uma matriz  $A$  com  $n$  linhas e  $n$  colunas é chamada **matriz quadrada de ordem  $n$**  e as entradas sombreadas  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  em (2) constituem a **diagonal principal** de  $A$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

**Operações sobre Matrizes** Até aqui usamos matrizes para abreviar o trabalho de resolver sistemas de equações lineares. Para outras aplicações, contudo, é desejável desenvolver uma “aritmética de matrizes” na qual as matrizes podem ser somadas, subtraídas e multiplicadas de alguma maneira útil. O restante desta seção será dedicado a desenvolver esta aritmética.

### Definição

Duas matrizes são definidas como sendo **iguais** se têm o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes são iguais.

Em notação matricial, se  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  têm o mesmo tamanho, então  $A = B$  se, e somente se,  $(A)_{ij} = (B)_{ij}$  ou, equivalente,  $a_{ij} = b_{ij}$  para quaisquer  $i$  e  $j$ .

### EXEMPLO 2 Igualdade de Matrizes

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se  $x = 5$ , então  $A = B$ , mas para todos os outros valores de  $x$  as matrizes  $A$  e  $B$  não são iguais, pois nem todas suas entradas coincidem. Não existe valor de  $x$  tal que  $A = C$  pois  $A$  e  $C$  têm tamanhos diferentes. ♦

### Definição

Se  $A$  e  $B$  são matrizes de mesmo tamanho, então a **soma**  $A + B$  é a matriz obtida somando as entradas de  $B$  às entradas correspondentes de  $A$ , e a **diferença**  $A - B$  é a matriz obtida subtraindo as entradas de  $B$  das entradas correspondentes de  $A$ . Matrizes de tamanho distintos não podem ser somadas ou subtraídas.

Em notação matricial, se  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  têm o mesmo tamanho, então

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{e} \quad (A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

### EXEMPLO 3 Adição e Subtração

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

As expressões  $A + C$ ,  $B + C$ ,  $A - C$  e  $B - C$  não estão definidas. ♦

### Definição

Se  $A$  é uma matriz e  $c$  é um escalar, então o **produto**  $cA$  é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz  $A$  por  $c$ . A matriz  $cA$  é chamada **múltiplo escalar** de  $A$ .

Em notação matricial, se  $A = [a_{ij}]$ , então

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

### EXEMPLO 4 Multiplos Escalares

Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

nós temos

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

É usual denotar  $(-1)B$  por  $-B$ .

Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são matrizes de mesmo tamanho e  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são escalares, então uma expressão da forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_nA_n$$

é chamada **combinação linear** de  $A_1, A_2, \dots, A_n$  com coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Por exemplo, se  $A, B$  e  $C$  são as matrizes do Exemplo 4, então

$$\begin{aligned} 2A - B + \frac{1}{3}C &= 2A + (-1)B + \frac{1}{3}C \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é a combinação linear de  $A, B$  e  $C$  com coeficientes escalares 2,  $-1$  e  $\frac{1}{3}$ .

Até aqui nós definimos a multiplicação de uma matriz por um escalar mas não a multiplicação de duas matrizes. Como matrizes são somadas somando as entradas correspondentes e subtraídas subtraindo as entradas correspondentes, pareceria natural definir a multiplicação de matrizes multiplicando as entradas correspondentes. Contudo, ocorre que tal definição não seria muito útil na maioria dos problemas. A experiência levou os matemáticos à seguinte definição muito mais útil de multiplicação de matrizes.

#### Definição

Se  $A$  é uma matriz  $m \times r$  e  $B$  é uma matriz  $r \times n$ , então o **produto**  $AB$  é a matriz  $m \times n$  cujas entradas são determinadas como segue. Para obter a entrada na linha  $i$  e coluna  $j$  de  $AB$ , destaque a linha  $i$  de  $A$  e a coluna  $j$  de  $B$ . Multiplique as entradas correspondentes desta linha e desta coluna e então some os produtos resultantes.

### EXEMPLO 5 Multiplicando Matrizes

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Como  $A$  é uma matriz  $2 \times 3$  e  $B$  é uma matriz  $3 \times 4$ , o produto  $AB$  é uma matriz  $2 \times 4$ . Para determinar, por exemplo, a entrada na linha 2 e coluna 3 de  $AB$ , nós destacamos a linha 2 de  $A$  e a coluna 3 de  $B$ . Então, como ilustrado abaixo, nós multiplicamos as entradas correspondentes e somamos estes produtos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

A entrada na linha 1 e coluna 4 de  $AB$  é calculada como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

As contas para os demais produtos são

$$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) = 12$$

$$(1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) = 27$$

$$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) = 30$$

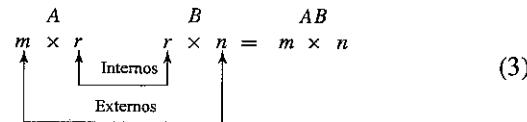
$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) = 8$$

$$(2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) = -4$$

$$(2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) = 12$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

A definição de multiplicação de matrizes exige que o número de colunas do primeiro fator  $A$  seja igual ao número de linhas do segundo fator  $B$  para que seja possível formar o produto  $AB$ . Se esta condição não é satisfeita, o produto não está definido. Uma maneira conveniente de determinar se o produto de duas matrizes está ou não definido é escrever o tamanho do primeiro fator e, à direita, escrever o tamanho do segundo fator. Se, como em (3), os números internos coincidem, então o produto está definido.



### EXEMPLO 6 Determinando se um Produto Está Definido

Suponha que  $A, B$  e  $C$  são matrizes dos seguintes tamanhos:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3 \times 4 & 4 \times 7 & 7 \times 3 \end{array}$$

Então, por (3), o produto  $AB$  está definido e é uma matriz  $3 \times 7$ ;  $BC$  está definido e é uma matriz  $4 \times 3$  e  $CA$  está definido e é uma matriz  $7 \times 4$ . Os produtos  $AC$ ,  $CB$  e  $BA$  não estão definidos.

Em geral, se  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz  $m \times r$  e  $B = [b_{ij}]$  é uma matriz  $r \times n$ , então, como está ilustrado pelo sombreado em (4),

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

a entrada  $(AB)_{ij}$  na linha  $i$  e coluna  $j$  de  $AB$  está dada por

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \quad (5)$$

**Matrizes Particionadas** Uma matriz pode ser subdividida em blocos ou **particionada** em matrizes menores inserindo riscos horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas. Por exemplo, a seguir exibimos três partições possíveis de uma matriz  $3 \times 4$  arbitrária  $A$ : a primeira é uma partição de  $A$  em quatro **submatrizes**  $A_{11}, A_{12}, A_{21}$  e  $A_{22}$ ; a segunda é uma partição de  $A$  em suas matrizes-linha  $r_1, r_2$  e  $r_3$ ; a terceira é uma partição de  $A$  em suas matrizes-coluna  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$ :

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[ \begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]$$

### Multiplicação Matricial por Colunas e Linhas

Às vezes pode ser conveniente encontrar uma linha ou coluna específica de um produto matricial  $AB$  sem calcular todo o produto. Os seguintes resultados, cujas provas são deixadas para os exercícios, são úteis para esta finalidade:

$$[i\text{-ésima matriz-coluna de } AB = A \cdot [i\text{-ésima matriz-coluna de } B]] \quad (6)$$

$$[i\text{-ésima matriz-linha de } AB = [i\text{-ésima matriz-linha de } A] \cdot B] \quad (7)$$

### EXEMPLO 7 Exemplo 5 de Novo

Se  $A$  e  $B$  são as matrizes do Exemplo 5, então por (6) a segunda matriz-coluna do produto  $AB$  pode ser obtida calculando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

↑                              ↑  
Segunda coluna          Segunda coluna  
de  $B$                     de  $AB$

e por (7), a primeira matriz-linha de  $AB$  pode ser obtida calculando

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix} \leftarrow$$

Primeira linha de  $A$                               Prima linha de  $AB$

Se  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  denotam as matrizes-linha de  $A$  e  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  denotam as matrizes-coluna de  $B$ , então das Fórmulas (6) e (7) segue-se que

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n] = [A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ \cdots \ A\mathbf{b}_n] \quad (8)$$

( $AB$  calculado coluna a coluna)

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix} \quad (9)$$

( $AB$  calculado linha a linha)

OBSERVAÇÃO. As Fórmulas (8) e (9) são casos especiais de um procedimento mais geral de multiplicação de matrizes particionadas (ver Exercícios 15–17).

**Produtos Matriciais como Combinações Lineares** Matrizes-linha e coluna fornecem uma maneira alternativa de ver a multiplicação matricial. Por exemplo, suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Em palavras, a expressão (10) nos diz que o *produto  $A \mathbf{x}$  de uma matriz  $A$  por uma matriz-coluna  $\mathbf{x}$  é uma combinação linear das matrizes-coluna de  $A$  com coeficientes provenientes da matriz  $\mathbf{x}$ .* Nos exercícios nós pedimos ao leitor mostrar que o *produto  $\mathbf{y}A$  de uma matriz  $1 \times m$   $\mathbf{y}$  por uma matriz  $m \times m$   $A$  é uma combinação linear das matrizes-linha de  $A$  com coeficientes escalares provenientes da matriz  $\mathbf{y}$ .*

### EXEMPLO 8 Combinacões Lineares

A matriz produto

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

pode ser escrita como a combinação linear das matrizes-coluna

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A matriz produto

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [-16 \ -18 \ 35]$$

pode ser escrita como a combinação linear das matrizes-linha

$$1[-1 \ 3 \ 2] - 9[1 \ 2 \ -3] - 3[2 \ 1 \ -2] = [-16 \ -18 \ 35] \quad \blacklozenge$$

Segue de (8) e (10) que  $j$ -ésima matriz-coluna de um produto  $AB$  é uma combinação linear das matrizes-coluna de  $A$  com coeficientes dados pela  $j$ -ésima coluna de  $B$ .

### EXEMPLO 9 Colunas de um Produto $A B$ como Combinações Lineares

Nós mostramos no Exemplo 5 que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \\ 13 & 12 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

As matrizes-coluna de  $A B$  podem ser expressas como combinações lineares das matrizes-coluna de  $A$  como segue:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \blacklozenge$$

**Forma Matricial de um Sistema Linear** A multiplicação matricial tem uma importante aplicação a sistemas de equações lineares. Considere um sistema qualquer de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Como duas matrizes são iguais se, e somente se, suas entradas correspondentes são iguais, nós podemos substituir as  $m$  equações deste sistema por uma única equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz  $m \times 1$  à esquerda desta equação pode ser escrita como um produto.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Denotando estas matrizes por  $A$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente, o sistema original de  $m$  equações em  $n$  incógnitas foi substituído pela única equação matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

A matriz  $A$  nesta equação é chamada **matriz de coeficientes** do sistema. A matriz aumentada deste sistema é obtida pela

adunção de  $\mathbf{b}$  a  $A$  como a última coluna; assim, a matriz aumentada é

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

**Transposta de uma Matriz** Nós concluímos esta seção definindo duas operações matriciais que não tem análogos entre os números reais.

#### Definição

Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  qualquer, então a **transposta de  $A$** , denotada por  $A^T$ , é definida como a matriz  $n \times m$  que resulta da permutação das linhas com as colunas de  $A$ ; ou seja, a primeira coluna de  $A^T$  é a primeira linha de  $A$ , a segunda coluna de  $A^T$  é a segunda linha de  $A$ , e assim por diante.

### EXEMPLO 10 Algumas Transpostas

A seguir, alguns exemplos de matrizes e suas transpostas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 3 \ 5], \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad D^T = [4] \quad \blacklozenge$$

Observe que não só as colunas de  $A^T$  são as linhas de  $A$ , mas também as linhas de  $A^T$  são colunas de  $A$ . Assim, a entrada na linha  $i$  e coluna  $j$  de  $A^T$  é a entrada na linha  $j$  e coluna  $i$  de  $A$ ; ou seja,

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} \quad (11)$$

Observe a reversão de subscritos.

No caso especial em que a matriz  $A$  é uma matriz quadrada, a transposta de  $A$  pode ser obtida pela permutação das entradas posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal. Em (12), é mostrado que  $A^T$  também pode ser obtida de  $A$  “refletindo”  $A$  em torno de sua diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

↑  
Permute entradas posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal.

#### Definição

Se  $A$  é uma matriz quadrada, então o **traço de  $A$** , denotado por  $\text{tr}(A)$ , é definido pela soma das entradas na diagonal principal de  $A$ . O traço de  $A$  não é definido se  $A$  não é uma matriz quadrada.

**EXEMPLO 1.1 Traco de uma Matriz**

A seguir, exemplos de matrizes e seus traços.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\text{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

◆

**Conjunto de Exercícios 1.3**

1. Suponha que  $A, B, C, D$  e  $E$  sejam matrizes dos seguintes tamanhos:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4 \times 5) & (4 \times 5) & (5 \times 2) & (4 \times 2) & (5 \times 4) \end{array}$$

Determine quais das seguintes expressões matriciais estão definidas. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

- (a)  $BA$       (b)  $AC + D$       (c)  $AE + B$       (d)  $AB + B$   
 (e)  $E(A + B)$       (f)  $E(AC)$       (g)  $E^T A$       (h)  $(A^T + E)D$

2. Resolva a seguinte equação matricial em termos de  $a, b, c$  e  $d$ .

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule os seguintes (quando possível).

- (a)  $D + E$       (b)  $D - E$       (c)  $5A$       (d)  $-7C$   
 (e)  $2B - C$       (f)  $4E - 2D$       (g)  $-3(D + 2E)$       (h)  $A - A$   
 (i)  $\text{tr}(D)$       (j)  $\text{tr}(D - 3E)$       (k)  $4 \text{tr}(7B)$       (l)  $\text{tr}(A)$

4. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

- (a)  $2A^T + C$       (b)  $D^T - E^T$       (c)  $(D - E)^T$       (d)  $B^T + 5C^T$   
 (e)  $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$       (f)  $B - B^T$       (g)  $2E^T - 3D^T$       (h)  $(2E^T - 3D^T)^T$

5. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

- (a)  $AB$       (b)  $BA$       (c)  $(3E)D$   
 (e)  $A(BC)$       (f)  $CC^T$       (g)  $(DA)^T$   
 (i)  $\text{tr}(DD^T)$       (j)  $\text{tr}(4E^T - D)$       (k)  $\text{tr}(C^TA^T + 2E^T)$

6. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

- (a)  $(2D^T - E)A$       (b)  $(4B)C + 2B$       (c)  $(-AC)^T + 5D^T$   
 (d)  $(BA^T - 2C)^T$       (e)  $B^T(CC^T - A^TA)$       (f)  $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método do Exemplo 7 para encontrar

- (a) a primeira linha de  $AB$       (b) a terceira linha de  $AB$       (c) a segunda coluna de  $AB$   
 (d) a primeira coluna de  $BA$       (e) a terceira linha de  $AA$       (f) a terceira coluna de  $AA$

8. Sejam  $A$  e  $B$  as matrizes do Exercício 7.

- (a) Expresse cada matriz-coluna de  $AB$  como uma combinação linear das matrizes-coluna de  $A$ .
- (b) Expresse cada matriz-coluna de  $BA$  como uma combinação linear das matrizes-coluna de  $B$ .

9. Sejam

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m] \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mostre que o produto  $\mathbf{y}A$  pode ser expresso como uma combinação linear das matrizes-linha de  $A$  com coeficientes escalares vindo de  $\mathbf{y}$ .

10. Sejam  $A$  e  $B$  as matrizes do Exercício 7.

- (a) Use o resultado do Exercício 9 para expressar cada matriz-linha de  $AB$  como uma combinação linear das matrizes-linha de  $B$ .
- (b) Use o resultado do Exercício 9 para expressar cada matriz-linha de  $BA$  como uma combinação linear das matrizes-linha de  $A$ .

11. Sejam  $C$ ,  $D$  e  $E$  as matrizes do Exercício 3. Usando o mínimo possível de contas, determine a entrada na linha 2 e coluna 3 de  $C(DE)$ .

12. (a) Mostre que se  $A$  e  $B$  e  $BA$  estão ambas definidas, então  $AB$  e  $BA$  são matrizes quadradas.

- (b) Mostre que se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  e  $A(BA)$  está definida, então  $B$  é uma matriz  $n \times m$ .

13. Em cada parte, encontre matrizes  $A$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{b}$  que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 & \text{(b)} \quad 4x_1 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 = -1 & 5x_1 + x_2 - 8x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 & 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ & 3x_2 - x_3 + 7x_4 = 2 \end{array}$$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} & \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

15. Se  $A$  e  $B$  são particionadas em submatrizes, por exemplo,

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \quad \text{e} \quad B = \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right]$$

então  $AB$  pode ser expresso como

$$AB = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array} \right]$$

sempre que os tamanhos das submatrizes de  $A$  e  $B$  são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas. Este método de multiplicar matrizes particionadas é chamado *multiplicação em bloco*. Em cada parte, calcule o produto usando multiplicação em bloco. Confira seus resultados multiplicando diretamente.

$$\text{(a)} \quad A = \left[ \begin{array}{c|c} -1 & 2 & | & 1 & 5 \\ \hline 0 & -3 & | & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & | & 6 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 1 & | & 4 \\ \hline -3 & 5 & | & 2 \\ \hline 7 & -1 & | & 5 \\ \hline 0 & 3 & | & -3 \end{array} \right]$$

$$\text{(b)} \quad A = \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & | & 5 \\ \hline 0 & -3 & 4 & | & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & | & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 1 & | & 4 \\ \hline -3 & 5 & | & 2 \\ \hline 7 & -1 & | & 5 \\ \hline 0 & 3 & | & -3 \end{array} \right]$$

16. Adapte o método do Exercício 15 para calcular os seguintes produtos usando multiplicação em bloco.

$$\text{(a)} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & | & -3 \\ \hline 2 & 1 & 4 & | & 5 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{array} \right] \quad \text{(b)} \quad \left[ \begin{array}{c|c} 2 & -5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 0 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right]$$

$$(c) \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array} \right]$$

17. Em cada parte, determine se pode ser usada multiplicação em bloco para calcular  $A B$  a partir das partições dadas. Se puder, calcule o produto usando multiplicação em bloco.

$$(a) A = \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

$$(b) A = \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 & \\ 0 & -3 & 4 & 2 & \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 & \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

18. (a) Mostre que se  $A$  tem uma linha de zeros e  $B$  é uma matriz qualquer para a qual o produto  $A B$  está definido, então  $A B$  também tem uma linha de zeros.  
 (b) Encontre um resultado similar valendo para uma coluna de zeros.  
 19. Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  qualquer e seja  $O$  a matriz  $m \times n$  com todas as entradas nulas. Mostre que se  $kA = O$ , então  $k = 0$  ou  $A = O$ .  
 20. Seja  $I$  a matriz  $n \times n$  cuja entrada na linha  $i$  e coluna  $j$  é

$$\begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Mostre que  $A I = I A = A$  para qualquer matriz  $n \times n$   $A$ .

21. Em cada parte, encontre uma matriz  $[a_{ij}]$  de tamanho  $6 \times 6$  que satisfaz a condição dada. Dê respostas tão gerais quanto possível, usando letras e não números para entradas não-nulas específicas.  
 (a)  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$     (b)  $a_{ij} = 0$  se  $i > j$     (c)  $a_{ij} = 0$  se  $i < j$     (d)  $a_{ij} = 0$  se  $|i - j| > 1$

22. Encontre a matriz  $[a_{ij}]$  de tamanho  $4 \times 4$  cujas entradas satisfazem a condição dada.

$$(a) a_{ij} = i + j \quad (b) a_{ij} = i^{j-1} \quad (c) a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i - j| > 1 \\ -1 & \text{se } |i - j| \leq 1 \end{cases}$$

23. Prove: Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$ , então  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .

## Discussão e Descoberta

24. Descreva três métodos distintos para calcular um produto de matrizes e ilustre os métodos calculando algum produto  $A B$  destas três maneiras.  
 25. Quantas matrizes  $A$  de tamanho  $3 \times 3$  você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de  $x, y$  e  $z$ ?

26. Quantas matrizes  $A$  de tamanho  $3 \times 3$  você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de  $x, y$  e  $z$ ?

27. Dizemos que uma matriz  $B$  é uma *raiz quadrada* de uma matriz  $A$  se  $B B = A$ .

$$(a) \text{Encontre duas raízes quadradas de } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \text{Quantas raízes quadradas distintas você consegue encontrar de } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}?$$

- (c) Você acha que qualquer matriz  $2 \times 2$  tem pelo menos uma raiz quadrada? Explique seu raciocínio.
28. Seja  $\theta$  a matriz  $2 \times 2$  com todas as entradas nulas.
- Existe alguma matriz  $A$  de tamanho  $2 \times 2$  tal que  $A \neq 0$  e  $A A = \theta$ ? Justifique sua resposta.
  - Existe alguma matriz  $A$  de tamanho  $2 \times 2$  tal que  $A \neq 0$  e  $A A = A$ ? Justifique sua resposta.
29. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- As expressões  $\text{tr}(AA^T)$  e  $\text{tr}(A^TA)$  estão sempre definidas, independentemente do tamanho de  $A$ .
  - $\text{tr}(AA^T) = \text{tr}(A^TA)$  para qualquer matriz  $A$ .
  - Se a primeira coluna de  $A$  for toda constituída de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto  $A B$ .
  - Se a primeira linha de  $A$  for toda constituída de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto  $A B$ .
30. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- Se  $A$  é uma matriz quadrada com duas linhas idênticas, então  $A A$  tem duas linhas idênticas.
  - Se  $A$  é uma matriz quadrada e  $A A$  tem uma coluna toda constituída de zeros então necessariamente  $A$  tem uma coluna toda constituída de zeros.
  - Se  $B$  é uma matriz  $n \times n$  cujas entradas são inteiros pares positivos e se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  cujas entradas são inteiros positivos, então as entradas de  $A B$  e de  $B A$  são inteiros pares positivos.
  - Se a soma de matrizes  $A B + B A$  estiver definida, então  $A$  e  $B$  devem ser matrizes quadradas.

## 1.4 INVERSAS; REGRAS DA ARITMÉTICA MATRICIAL

Nesta seção nós vamos discutir algumas propriedades das operações aritméticas sobre matrizes. Nós veremos que muitas das regras básicas da aritmética de números reais também valem para matrizes, mas que algumas poucas não valem.

**Propriedades das Operações Matriciais** Para números reais  $a$  e  $b$ , nós sempre temos  $ab = ba$ , que é chamada a *lei da comutatividade para a multiplicação*. Para matrizes, contudo,  $AB$  e  $BA$  não precisam ser iguais; a igualdade pode falhar por três razões. Pode acontecer que o produto  $AB$  está definido mas o produto  $BA$  não está definido. Por exemplo, este é o caso se  $A$  é uma matriz  $2 \times 3$  e  $B$  é uma matriz  $3 \times 4$ . Também pode ocorrer que os produtos  $AB$  e  $BA$  estão ambos definidos mas têm tamanhos diferentes. Esta é a situação se  $A$  é uma matriz  $2 \times 3$  e  $B$  é uma matriz  $3 \times 2$ . Finalmente, como mostra o Exemplo 1, é possível ter  $AB \neq BA$  mesmo se ambos produtos  $AB$  e  $BA$  estiverem definidos e tiverem o mesmo tamanho.

### EXEMPLO 1 $AB$ e $BA$ não Precisam Ser Iguais

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando, obtemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,  $AB \neq BA$ .

Embora a lei da comutatividade para a multiplicação não seja válida na aritmética matricial, muitas leis familiares da aritmética são válidas para matrizes. O teorema a seguir dá um resumo de algumas das mais importantes e seus nomes.

### Teorema 1.4.1

#### Propriedades da Aritmética Matricial

Supondo que os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| (a) $A + B = B + A$             | (Lei da Comutatividade para a Adição)     |
| (b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ | (Lei da Associatividade da Adição)        |
| (c) $A(BC) = (AB)C$             | (Lei da Associatividade da Multiplicação) |
| (d) $A(B + C) = AB + AC$        | (Lei da Distributividade à Esquerda)      |
| (e) $(A + B)C = AC + BC$        | (Lei da Distributividade à Direita)       |
| (f) $A(B - C) = AB - AC$        |   |
| (g) $(B - C)A = BA - CA$        |   |
| (h) $a(B + C) = aB + aC$        |   |
| (i) $a(B - C) = aB - aC$        |   |
| (j) $(a + b)C = aC + bC$        |   |
| (k) $(a - b)C = aC - bC$        |   |
| (l) $a(bC) = (ab)C$             |   |
| (m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$     |   |

Para provar as igualdades neste teorema, nós devemos mostrar que a matriz do lado esquerdo tem o mesmo tamanho que a matriz do lado direito e que as entradas correspondentes dos dois lados são iguais. Exceto pela lei da associatividade na parte (c), todas as provas seguem o mesmo padrão geral. Para ilustrar isto, iremos provar a parte (d). A prova da lei da associatividade, que é mais complicada, é delineada nos exercícios.

*Prova (d).* Nós devemos mostrar que  $A(B + C)$  e  $AB + AC$  têm o mesmo tamanho e que as entradas correspondentes são iguais. Para formar  $A(B + C)$ , as matrizes  $B$  e  $C$  devem ter o mesmo tamanho, digamos  $m \times n$ , e então a matriz  $A$  deve ter  $m$  colunas, de modo que seu tamanho é da forma  $r \times m$ . Isto faz de  $A(B + C)$  uma matriz  $r \times n$ . Segue que  $AB + AC$  também é uma matriz  $r \times n$  e, consequentemente,  $A(B + C)$  e  $AB + AC$  têm o mesmo tamanho.

Suponha que  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  e  $C = [c_{ij}]$ . Nós queremos mostrar que as entradas correspondentes de  $A(B + C)$  e de  $AB + AC$  são iguais, ou seja, que

$$[A(B + C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

para todos valores de  $i$  e  $j$ . Pela definição de soma e produto de matrizes, entretanto, temos

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj}) \\ &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj}) \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB + AC]_{ij}\end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO.** Embora as operações de adição matricial e de multiplicação matricial tenham sido definidas para pares de matrizes, as leis da associatividade (*b*) e (*c*) nos permitem escrever somas e produtos de três matrizes, como  $A + B + C$  e  $ABC$  sem inserir parênteses. Isto é justificado pelo seguinte fato: onde quer que os parênteses sejam inseridos, as leis da associatividade garantem que o resultado final é sempre o mesmo. Em geral, *dada qualquer soma ou qualquer produto de matrizes, podemos omitir ou inserir pares de parênteses em qualquer lugar da expressão sem afetar o resultado final*.

### EXEMPLO 2 Associatividade da Multiplicação Matricial

Como uma ilustração da lei da associatividade para a multiplicação matricial, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

de modo que  $(A B) C = A (B C)$ , conforme garante o Teorema 1.4.1c. ♦

**Matrizes Zero** Uma matriz com todas suas entradas nulas, tal como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

é chamada uma *matriz zero* ou *matriz nula*. Uma matriz zero sempre será denotada por  $0$ ; se for importante enfatizar seu tamanho, nós escreveremos  $0_{m \times n}$  para a matriz zero de tamanho  $m \times n$ . Além disto, continuando com a convenção de usar símbolos em negrito para matrizes de uma única coluna, denotamos uma matriz zero de uma coluna por  $\mathbf{0}$ .

Se  $A$  é uma matriz qualquer e  $0$  é a matriz zero de mesmo tamanho, é óbvio que  $A + 0 = 0 + A = A$ . A matriz  $0$  desempenha, portanto, nesta equação matricial o mesmo papel que o número  $0$  desempenha na equação numérica  $a + 0 = 0 + a = a$ .

Como nós já sabemos que algumas das regras da aritmética dos números reais não valem na aritmética matricial, seria leviano supor que todas as propriedades do número real zero valem para a matriz zero. Por exemplo, considere os dois seguintes resultados-padrão da aritmética dos números reais.

- Se  $ab = ac$  e  $a \neq 0$ , então  $b = c$ . (Esta é chamada a *lei de cancelamento*).
- Se  $ad = 0$ , então pelo menos um dos fatores à esquerda é  $0$ .

Como o próximo exemplo mostra, os resultados correspondentes não são válidos, em geral, na aritmética matricial.

### EXEMPLO 3 A Lei de Cancelamento não Vale

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Você deveria verificar que

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, embora  $A \neq 0$ , é *incorrecto* cancelar  $A$  de ambos os lados da equação  $AB = AC$  e escrever  $B = C$ . Também  $AD = 0$ , embora  $A \neq 0$  e  $D \neq 0$ . Assim, a lei de cancelamento não é válida para a multiplicação matricial e é possível um produto de matrizes ser zero sem que nenhum dos fatores seja zero. ♦

Não obstante o exemplo acima, existem várias propriedades familiares do número real  $0$  que *valem* para as matrizes zero. O teorema a seguir dá um resumo de algumas das mais importantes. As provas são deixadas como exercícios.

#### Teorema 1.4.2

#### Propriedades das Matrizes Zero

Supondo que os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

- $A + 0 = 0 + A = A$
- $A - A = 0$
- $0 - A = -A$
- $A0 = 0; 0A = 0$

**Matrizes Identidade** De especial interesse são as matrizes quadradas com entradas 1 na diagonal principal e com entradas 0 fora da diagonal principal, tais como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e assim por diante.}$$

Uma matriz desta forma é chamada uma **matriz identidade** e é denotada por  $I$ . Se for importante enfatizar seu tamanho, nós escreveremos  $I_n$  para a matriz identidade de tamanho  $n \times n$ .

Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então, como ilustra o seguinte exemplo,

$$AI_n = A \quad \text{e} \quad I_m A = A$$

Assim, uma matriz identidade desempenha na aritmética matricial o mesmo papel que o número 1 desempenha nas relações numéricas  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ .

#### EXEMPLO 4 Multiplicação por uma Matriz Identidade

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Então

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

e

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

As matrizes identidade surgem naturalmente no estudo da forma escalonada reduzida por linhas de matrizes *quadradas*, como mostra o próximo teorema.

#### Teorema 1.4.3

*Se  $R$  é a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz  $A$   $n \times n$ , então ou  $R$  tem uma linha de zeros ou  $R$  é a matriz identidade  $I_n$ .*

*Prova.* Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

De duas uma: ou a última linha desta matriz é constituída inteiramente de zeros ou não. Se não, a matriz não contém linhas nulas e consequentemente cada uma de suas  $n$  linhas tem um pivô 1. Como estes pivôs ocorrem progressivamente para a direita à medida que descemos pelas linhas, cada um deve ocorrer na diagonal principal. Como as demais entradas na mesma coluna são zeros,  $R$  deve ser  $I_n$ . Assim, ou  $R$  tem uma linha de zeros ou  $R = I_n$ . ■

#### Definição

Dada uma matriz quadrada  $A$ , se pudermos encontrar uma matriz  $B$  de mesmo tamanho tal que  $AB = BA = I$ , então diremos que  $A$  é **invertível** e que  $B$  é uma **inversa** de  $A$ . Se não puder ser encontrada uma tal matriz  $B$  então diremos que  $A$  é **não-invertível** ou **singular**.

#### EXEMPLO 5 Verificando as Exigências de Invertibilidade

A matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é uma inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

pois

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

#### EXEMPLO 6 Uma Matriz sem Inversa

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

é singular. Para ver por que, seja

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

uma matriz  $3 \times 3$  qualquer. A terceira coluna de  $BA$  é

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Propriedades das Inversas** É razoável perguntar se uma matriz invertível pode ter mais de uma inversa. O próximo teorema mostra que a resposta é não—uma matriz invertível tem exatamente uma inversa.

**Teorema 1.4.4**

*Se  $B$  e  $C$  são ambas inversas da matriz  $A$ , então  $B = C$ .*

*Prova.* Como  $B$  é uma inversa de  $A$ , nós temos  $BA = I$ . Multiplicando ambos os lados pela direita por  $C$  dá  $(BA)C = IC = C$ . Mas  $(BA)C = B(AC) = BI = B$ , de modo que  $C = B$ . ■

Como uma consequência deste importante resultado, nós podemos agora falar “da” inversa de uma matriz invertível. Se  $A$  é invertível, então sua inversa será denotada pelo símbolo  $A^{-1}$ . Assim,

$$AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad A^{-1}A = I$$

A inversa de  $A$  desempenha, portanto, na aritmética matricial o mesmo papel que o recíproco  $a^{-1}$  desempenha nas relações numéricas  $aa^{-1} = 1$  e  $a^{-1}a = 1$ .

Na próxima seção nós iremos desenvolver um método para encontrar a inversa de matrizes invertíveis de qualquer tamanho; no entanto, o próximo teorema dá condições sob as quais uma matriz  $2 \times 2$  é invertível e fornece uma fórmula simples para a inversa.

**Teorema 1.4.5**

*A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

*é invertível se  $ad - bc \neq 0$ , caso em que a inversa é dada pela fórmula*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

*Prova.* Nós deixamos ao leitor verificar que  $AA^{-1} = I_2$  e que  $A^{-1}A = I_2$ . ■

**Teorema 1.4.6**

*Se  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então  $AB$  é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

*Prova.* Se nós conseguirmos mostrar que  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ , então teremos mostrado, simultaneamente, que a matriz  $AB$  é invertível e que  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Mas  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ . Um argumento similar mostra que  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ . ■

Este resultado pode ser estendido para incluir três ou mais fatores, mas isto não será provado aqui; ou seja, vale que

*O produto de um número qualquer de matrizes invertíveis é invertível e a inversa do produto é o produto das inversas em ordem inversa.*

**EXEMPLO 7 Inversa de um Produto**

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Aplicando a fórmula do Teorema 1.4.5, obtemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Também

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Assim,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , como garante o Teorema 1.4.6. ♦

**Potências de uma Matriz** A seguir, vamos definir potências de matrizes quadradas e discutir suas propriedades.

**Definição**

Se  $A$  é uma matriz quadrada, definimos as potências inteiras não-negativas de  $A$  por

$$A^0 = I \quad A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ fatores}} \quad (n > 0)$$

Além disto, se  $A$  é invertível, então definimos as potências inteiras negativas por

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n \text{ fatores}}$$

Como esta definição é idêntica à de potências de números reais, valem as leis usuais de expoentes. (Omitimos os detalhes.)

**Teorema 1.4.7****Leis de Exponentes**

*Se  $A$  é uma matriz quadrada e  $r$  e  $s$  são inteiros, então*

$$A^rA^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

O próximo teorema fornece algumas propriedades úteis de expoentes negativos.

**Teorema 1.4.8****Leis de Exponentes**

*Se  $A$  é uma matriz invertível, então*

(a)  $A^{-1}$  é invertível e  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

(b)  $A^n$  é invertível e  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$

(c) Para qualquer escalar não-nulo  $k$ , a matriz  $kA$  é invertível e  $(kA)^{-1} = \left(\frac{1}{k}\right)A^{-1}$ .

Prova.

- (a) Como  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ , a matriz  $A^{-1}$  é invertível e  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- (b) Esta parte é deixada como exercício.
- (c) Se  $k$  é qualquer escalar não-nulo, os resultados (l) e (m) do Teorema 1.4.1 permitem-nos escrever

$$(kA) \left( \frac{1}{k} A^{-1} \right) = \frac{1}{k} (kA) A^{-1} = \left( \frac{1}{k} k \right) AA^{-1} = (1)I = I$$

Similarmente,  $\left( \frac{1}{k} A^{-1} \right) (kA) = I$  e portanto  $kA$  é invertível e  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ . ■

### EXEMPLO 8 Potências de uma Matriz

Sejam  $A$  e  $A^{-1}$  as matrizes do Exemplo 7, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

### Expressões Polinomiais Envolvendo Matrizes

Se  $A$  é uma matriz quadrada, digamos  $m \times m$ , e se

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (1)$$

é um polinômio qualquer, então nós definimos

$$p(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $m \times m$ . Em palavras,  $p(A)$  é a matriz  $m \times m$  que resulta quando  $x$  é substituído por  $A$  em (1) e  $a_0$  é substituído por  $a_0I$ .

### EXEMPLO 9 Polinômio Matricial

Se

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} p(A) &= 2A^2 - 3A + 4I = 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \quad \diamond \end{aligned}$$

**Propriedades da Transposta** O próximo teorema lista as principais propriedades da operação de transposição.

### Teorema 1.4.9

### Propriedades da Transposta

Se os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, então

- (a)  $((A)^T)^T = A$
- (b)  $(A + B)^T = A^T + B^T$  e  $(A - B)^T = A^T - B^T$
- (c)  $(kA)^T = kA^T$ , onde  $k$  é um escalar qualquer
- (d)  $(AB)^T = B^TA^T$

Lembrando que transpondo uma matriz trocamos entre si suas linhas e colunas, as partes (a), (b) e (c) deveriam ser evidentes. Por exemplo, a parte (a) afirma que trocando entre si as linhas e as colunas duas vezes, a matriz fica inalterada; a parte (b) assegura que somando e depois trocando entre si as linhas e colunas dá o mesmo resultado que primeiro trocando entre si as linhas e colunas e depois somando; e a parte (c) assegura que multiplicando por um escalar e depois trocando entre si as linhas e colunas dá o mesmo resultado que primeiro trocando entre si as linhas e colunas e depois multiplicando por um escalar. A parte (d) não é tão óbvia, por isso apresentamos sua prova.

**Prova (d).** Sejam  $A = [a_{ij}]_{m \times r}$  e  $B = [b_{ij}]_{r \times n}$  e assim os produtos  $AB$  e  $B^TA^T$  estão definidos. Deixamos ao leitor conferir que  $(AB)^T$  e  $B^TA^T$  têm o mesmo tamanho, a saber,  $n \times m$ . Assim, resta mostrar que as entradas correspondentes de  $(AB)^T$  e  $B^TA^T$  são iguais, ou seja,

$$(AB)^T_{ij} = (B^TA^T)_{ij} \quad (2)$$

Aplicando a Fórmula (11) da Seção 1.3 ao lado esquerdo desta equação e usando a definição de multiplicação de matrizes, obtemos

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri} \quad (3)$$

Para calcular o lado direito de (2) é conveniente deixar  $a'_{ij}$  e  $b'_{ij}$  denotar as  $ij$ -ésimas entradas de  $A^T$  e  $B^T$ , respectivamente, de modo que

$$a'_{ij} = a_{ji} \quad \text{e} \quad b'_{ij} = b_{ji}$$

Destas relações e da definição de multiplicação de matrizes, nós obtemos

$$\begin{aligned} (B^TA^T)_{ij} &= b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + \cdots + b'_{ir}a'_{rj} \\ &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr} \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri} \end{aligned}$$

Isto, junto com (3), prova (2). ■

A parte (d) deste teorema pode ser estendida para incluir três ou mais fatores, coisa que não provaremos aqui; ou seja, vale que

*A transposta de um produto de um número qualquer de matrizes é igual ao produto de suas transpostas em ordem inversa.*

**OBSERVAÇÃO.** Note a semelhança entre este resultado e o que segue o Teorema 1.4.6 sobre a inversa de um produto de matrizes.

**Invertibilidade de uma Transposta** O teorema a seguir estabelece uma relação entre a inversa de uma matriz invertível e a inversa de sua transposta.

**Teorema 1.4.10**

Se  $A$  é uma matriz invertível, então  $A^T$  também é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (4)$$

*Prova.* Nós podemos provar a invertibilidade de  $A^T$  e obter (4) mostrando que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$$

Mas lembrando da parte (d) do Teorema 1.4.9 e observando que  $I^T = I$ , segue-se que

$$\begin{aligned} A^T(A^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T = I^T = I \\ (A^{-1})^T A^T &= (AA^{-1})^T = I^T = I \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

**EXEMPLO 10 Verificando o Teorema 1.4.10**

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 1.4.5 obtemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Como garante o Teorema 1.4.10, estas matrizes satisfazem (4). ♦

**Conjunto de Exercícios 1.4**

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Mostre que

- (a)  $A + (B + C) = (A + B) + C$     (b)  $(AB)C = A(BC)$     (c)  $(a + b)C = aC + bC$   
 (d)  $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

- (a)  $a(BC) = (ab)C = B(aC)$     (b)  $A(B - C) = AB - AC$     (c)  $(B + C)A = BA + CA$   
 (d)  $a(bC) = (ab)C$

3. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

- (a)  $(A^T)^T = A$     (b)  $(A + B)^T = A^T + B^T$     (c)  $(aC)^T = aC^T$     (d)  $(AB)^T = B^T A^T$

4. Use o Teorema 1.4.5 para calcular as inversas das seguintes matrizes.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (c) C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (d) D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Use as matrizes  $A$  e  $B$  do Exercício 4 para verificar que

- (a)  $(A^{-1})^{-1} = A$     (b)  $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$

6. Use as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  do Exercício 4 para verificar que

- (a)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$     (b)  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

7. Em cada parte use a informação dada para encontrar  $A$ .

$$(a) A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (b) (7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(c) (5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (d) (I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

8. Seja  $A$  a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule  $A^3$ ,  $A^{-3}$  e  $A^2 - 2A + I$ .

9. Seja  $A$  a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte encontre  $p(A)$ .

- (a)  $p(x) = x - 2$    (b)  $p(x) = 2x^2 - x + 1$    (c)  $p(x) = x^3 - 2x + 4$

10. Sejam  $p_1(x) = x^2 - 9$ ,  $p_2(x) = x + 3$  e  $p_3(x) = x - 3$ .

- (a) Mostre que  $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$  para a matriz do Exercício 9.  
 (b) Mostre que  $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$  para qualquer matriz quadrada  $A$ .

11. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

12. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

13. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

onde  $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$ . Mostre que  $A$  é invertível e encontre sua inversa.

14. Mostre que se uma matriz quadrada  $A$  satisfizer  $A^2 - 3A + I = 0$ , então  $A^{-1} = 3I - A$ .

15. (a) Mostre que uma matriz com uma linha de zeros não pode ter uma inversa.  
 (b) Mostre que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.

16. Será necessariamente invertível a soma de duas matrizes invertíveis?

17. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas tais que  $AB = 0$ . Mostre que se  $A$  é invertível, então  $B = 0$ .

18. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $0$  matrizes  $2 \times 2$ . Supondo que  $A$  é invertível, encontre uma matriz  $C$  tal que

$$\left[ \begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline C & A^{-1} \end{array} \right]$$

é a inversa da matriz particionada

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & A \end{array} \right]$$

(Veja Exercício 15 da seção anterior.)

19. Use o resultado do Exercício 18 para encontrar as inversas das seguintes matrizes.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

20. (a) Encontre uma matriz não-nula  $A$  de tamanho  $3 \times 3$  tal que  $A^T = A$ .

(b) Encontre uma matriz não-nula  $A$  de tamanho  $3 \times 3$  tal que  $A^T = -A$ .

21. Uma matriz quadrada  $A$  é chamada *simétrica* se  $A^T = A$  e *anti-simétrica* se  $A^T = -A$ . Mostre que se  $B$  é uma matriz quadrada, então  
 (a)  $BB^T$  e  $B + B^T$  são simétricas.   (b)  $B - B^T$  é anti-simétrica.

22. Se  $A$  é uma matriz quadrada e  $n$  é um inteiro positivo, é verdade que  $(A^n)^T = (A^T)^n$ ?

23. Seja  $A$  a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine se  $A$  é invertível e, se for, encontre sua inversa. [Sugestão. Resolva  $AX = I$  igualando entradas correspondentes de ambos os lados.]

24. Prove:
- a parte (b) do Teorema 1.4.1
  - a parte (i) do Teorema 1.4.1
  - a parte (m) do Teorema 1.4.1
25. Aplique as partes (d) e (m) do Teorema 1.4.1 às matrizes  $A$ ,  $B$  e  $(-1)^C$  para deduzir o resultado da parte (f).
26. Prove o Teorema 1.4.2.
27. Considere as leis de expoentes  $A^r A^s = A^{r+s}$  e  $(A^r)^s = A^{rs}$ .
- Mostre que se  $A$  é uma matriz quadrada, estas leis são válidas para quaisquer inteiros não negativos  $r$  e  $s$ .
  - Mostre que se  $A$  é invertível, estas leis valem para quaisquer inteiros negativos  $r$  e  $s$ .
28. Mostre que se  $A$  é invertível e  $k$  é um escalar não-nulo qualquer, então  $(kA)^n = k^n A^n$  para qualquer inteiro  $n$ .
29. (a) Mostre que se  $A$  é invertível e  $AB = AC$ , então  $B = C$ .  
 (b) Explique por que a parte (a) e o Exemplo 3 não são contraditórios.
30. Prove a parte (c) do Teorema 1.4.1.  
 [Sugestão. Suponha que  $A$  é  $m \times n$ ,  $B$  é  $n \times p$  e  $C$  é  $p \times q$ . A  $i,j$ -ésima entrada do lado esquerdo é  $l_{ij} = a_{i1}[BC]_{1j} + a_{i2}[BC]_{2j} + \dots + a_{in}[BC]_{nj}$  e a  $i,j$ -ésima entrada do lado direito é  $r_{ij} = [AB]_{i1}c_{1j} + [AB]_{i2}c_{2j} + \dots + [AB]_{ip}c_{pj}$ . Verifique que  $l_{ij} = r_{ij}$ .]

## Discussão e Descoberta

31. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de mesmo tamanho.
- Dê um exemplo em que  $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ .
  - Preencha a lacuna para criar uma identidade que é válida para quaisquer  $A$  e  $B$ .  $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + \dots$
32. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de mesmo tamanho.
- Dê um exemplo em que  $(A + B)(B - A) \neq A^2 - B^2$ .
  - Preencha a lacuna para criar uma identidade que é válida para quaisquer  $A$  e  $B$ .  $(A + B)(B - A) = \dots$
33. No sistema dos números reais, a equação  $a^2 = 1$  tem exatamente duas soluções. Encontre pelo menos oito matrizes  $3 \times 3$  que satisfazem a equação  $A^2 = I_3$ . [Sugestão. Procure soluções entre as matrizes com entradas zero fora da diagonal principal.]
34. Uma afirmação do tipo “Se  $p$ , então  $q$ ” é logicamente equivalente à afirmação “Se não  $q$ , então não  $p$ .” (A segunda afirmação é chamada a *contraposição lógica* da primeira.) Por exemplo, a contraposição lógica da afirmação “Se está chovendo, então o chão está molhado” é “Se o chão não está molhado, então não está chovendo.”
- Encontre a contraposição lógica da afirmação: Se  $A^T$  é singular, então  $A$  é singular.
  - A afirmação é verdadeira ou falsa? Explique.
35. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique cada resposta.
- $(AB)^2 = A^2 B^2$  deve ser verdadeiro.
  - $(A - B)^2 = (B - A)^2$  deve ser verdadeiro.
  - $(AB^{-1})(BA^{-1}) = I_n$  deve ser verdadeiro.
  - Nunca é verdade que  $AB = BA$ .

## 1.5 MATRIZES ELEMENTARES E UM MÉTODO PARA ENCONTRAR $A^{-1}$

Nesta seção nós vamos desenvolver um algoritmo para encontrar a inversa de uma matriz invertível. Nós também discutiremos algumas das propriedades básicas de matrizes invertíveis.

Nós começamos com a definição de um tipo especial de matriz que pode ser usada para executar uma operação elementar sobre linhas por multiplicação matricial.

### Definição

Uma matriz  $n \times n$  que pode ser obtida da matriz identidade  $I_n$  de tamanho  $n \times n$  executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma **matriz elementar**.

### EXEMPLO 1 Matrizes Elementares e Operações sobre Linhas

Abaixo listamos quatro matrizes elementares e as operações sobre linhas que as produzem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑                   ↑                   ↑                   ↑

Multiplique a segunda linha de  $I_2$  por -3      Permute a segunda linha de  $I_4$  com a quarta.      Some 3 vezes a terceira linha de  $I_3$  à primeira.      Multiplique a primeira linha de  $I_3$  por 1.

Quando uma matriz  $A$  é multiplicada à esquerda por uma matriz elementar  $E$ , o efeito é o de executar uma operação elementar sobre linhas de  $A$ . Isto é enunciado no próximo teorema, cuja prova deixamos para os exercícios.

**Teorema 1.5.1****Operações sobre Linhas por Multiplicação Matricial**

Se a matriz elementar  $E$  resulta de efetuar uma certa operação sobre linhas em  $I_m$  e se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então o produto  $EA$  é a matriz que resulta quando esta mesma operação sobre linhas é efetuada em  $A$ .

**EXEMPLO 2 Usando Matrizes Elementares**

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e considere a matriz elementar

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta de somar 3 vezes a primeira linha de  $I_3$  à terceira linha. O produto  $EA$  é

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

que é precisamente a mesma matriz que resulta quando nós somamos 3 vezes a primeira linha de  $A$  à terceira linha. ♦

**OBSERVAÇÃO.** O Teorema 1.5.1 é principalmente de interesse teórico e será usado para desenvolver alguns resultados sobre matrizes e sistemas de equações lineares. Em termos de contas, é preferível efetuar operações sobre linhas diretamente do que multiplicar à esquerda por uma matriz elementar.

Se uma operação elementar sobre linhas é aplicada a uma matriz identidade  $I$  para produzir uma matriz elementar  $E$ , então existe uma segunda operação que, aplicada a  $E$ , produz de volta a matriz  $I$ . Por exemplo, se  $E$  é obtida multiplicando a  $i$ -ésima linha de  $I$  por uma constante não-nula  $c$ , então  $I$  pode ser recuperada se a  $i$ -ésima linha de  $E$  é multiplicada por  $1/c$ . As várias possibilidades estão listadas na Tabela 1. As operações do lado direito desta tabela são chamadas *operações inversas* das correspondentes operações do lado esquerdo.

**TABELA 1**

Operações sobre linhas de $I$ que produzem $E$	Operações sobre linhas de $E$ que reproduzem $I$
Multiplique a linha $i$ por $c \neq 0$	Multiplique a linha $i$ por $1/c$
Troque entre si as linhas $i$ e $j$	Troque entre si as linhas $i$ e $j$
Some $c$ vezes a linha $i$ à linha $j$	Some $-c$ vezes a linha $i$ à linha $j$

**EXEMPLO 3 Operações e Operações Inversas sobre Linhas**

Em cada um dos exemplos a seguir, foi efetuada uma operação elementar na matriz identidade  $2 \times 2$  para obter uma matriz elementar  $E$  e, em seguida,  $E$  foi restaurada à matriz identidade aplicando a operação inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑  
Multiplique a segunda linha por 7. ↑  
Multiplique a segunda linha por  $1/7$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑  
Permute a primeira linha com a segunda. ↑  
Permute a primeira linha com a segunda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑  
Some 5 vezes a segunda linha à primeira. ↑  
Some  $-5$  vezes a segunda linha à primeira. ♦

O próximo teorema dá uma importante propriedade de matrizes elementares.

**Teorema 1.5.2**

Qualquer matriz elementar é invertível e a inversa é, também, uma matriz elementar.

**Prova.** Se  $E$  é uma matriz elementar, então  $E$  é o resultado de alguma operação elementar sobre linhas de  $I$ . Seja  $E_0$  a matriz que resulta quando é efetuada a operação inversa em  $I$ . Aplicando o Teorema 1.5.1 e lembrando que operações e suas inversas se cancelam mutuamente, segue que

$$E_0 E = I \text{ e } E E_0 = I$$

Assim, a matriz elementar  $E_0$  é a inversa de  $E$ . ■

O próximo teorema estabelece algumas relações fundamentais entre invertibilidade, sistemas lineares homogêneos, formas escalonadas reduzidas por linhas e matrizes elementares. Estes resultados são extremamente importantes e vão ser usados muitas vezes nas próximas seções.

**Teorema 1.5.3 Afirmativas Equivalentes**

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  então as seguintes afirmações são equivalentes, ou seja, são todas verdadeiras ou todas falsas.

- (a)  $A$  é invertível.
- (b)  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- (d)  $A$  pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

*Prova.* Nós vamos provar a equivalência destas afirmações estabelecendo a cadeia de implicações:  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$ .

$(a) \Rightarrow (b)$ . Suponha que  $A$  é invertível e seja  $\mathbf{x}_0$  uma solução qualquer de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ; assim,  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Multiplicando ambos os lados desta equação pela matriz  $A^{-1}$  dá  $A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}\mathbf{0}$ , ou então,  $(A^{-1}A)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , ou ainda,  $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , ou  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Assim,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial.

$(b) \Rightarrow (c)$ . Seja  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  a forma matricial do sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

e suponha que o sistema só admite a solução trivial. Se nós resolvemos por eliminação de Gauss-Jordan, então o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada será

$$\begin{array}{ll} x_1 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ & \vdots \\ x_n & = 0 \end{array} \tag{2}$$

Assim, a matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array} \right]$$

de (1) pode ser reduzida à matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right]$$

de (2) por uma seqüência de operações elementares sobre linhas. Se nós desconsiderarmos a última coluna (de zeros) em cada uma destas matrizes, poderemos concluir que a forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .

$(c) \Rightarrow (d)$ . Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ , de modo que  $A$  pode ser reduzida a  $I_n$  por uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas. Pelo Teorema 1.5.1, cada uma destas operações pode ser efetuada por uma matriz elementar adequada. Assim, nós podemos encontrar matrizes elementares  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tais que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Pelo Teorema 1.5.2, as matrizes  $E_1, E_2, \dots, E_k$  são invertíveis. Multiplicando ambos os lados da Equação (3) pela esquerda sucessivamente por  $E_k^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ , nós obtemos

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{4}$$

Pelo Teorema 1.5.2, esta equação expressa  $A$  como um produto de matrizes elementares.

$(d) \Rightarrow (a)$ . Se  $A$  é um produto de matrizes elementares, então dos Teoremas 1.4.6 e 1.5.2 segue que a matriz  $A$  é um produto de matrizes invertíveis, e portanto invertível. ■

**Equivalência por Linhas** Se uma matriz  $B$  pode ser obtida de uma matriz  $A$  efetuando uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas, então obviamente podemos recuperar  $B$  de volta de  $A$  efetuando as inversas destas operações elementares sobre linhas na ordem inversa. As matrizes que podem ser obtidas uma da outra por uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas são ditas matrizes *equivalentes por linhas*. Com esta terminologia, segue das partes (a) e (c) do Teorema 1.5.3 que uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  é invertível se, e somente se,  $A$  é equivalente por linhas à matriz identidade  $n \times n$ .

**Um Método para Inverter Matrizes** Como nossa primeira aplicação do Teorema 1.5.3, vamos estabelecer um método para determinar a inversa de uma matriz invertível. Multiplicando (3) pela direita por  $A^{-1}$ , dá

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I_n \tag{5}$$

que informa que  $A^{-1}$  pode ser obtida multiplicando  $I_n$  sucessivamente à esquerda pelas matrizes elementares  $E_1, E_2, \dots, E_k$ . Como cada multiplicação à esquerda por uma destas matrizes elementares efetua uma operação sobre linhas, resulta, comparando as Equações (3) e (5), que a seqüência de operações elementares sobre linhas que reduz  $A$  a  $I_n$  também reduz  $I_n$  a  $A^{-1}$ . Assim, temos o seguinte resultado:

Para encontrar a inversa de uma matriz invertível  $A$ , nós devemos encontrar uma seqüência de operações elementares sobre linhas que reduz  $A$  à identidade e depois efetuar esta mesma seqüência de operações em  $I_n$  para obter  $A^{-1}$ .

Um método simples para executar este procedimento é dado no próximo exemplo.

#### EXEMPLO 4 Usando Operações sobre Linhas para Encontrar $A^{-1}$

Encontre a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução.

Nós queremos reduzir  $A$  à matriz identidade por operações sobre linhas e simultaneamente aplicar estas operações a  $I$  para produzir  $A^{-1}$ . Para conseguir isto, nós vamos adjuntar a matriz identidade à direita de  $A$ , com isto produzindo uma matriz da forma

$$[A | I]$$

Em seguida nós iremos aplicar operações sobre linhas desta matriz até que o lado esquerdo esteja reduzido a  $I$ ; estas operações vão converter o lado direito a  $A^{-1}$ , de modo que a matriz final terá a forma

$$[I | A^{-1}]$$

As contas são as seguintes:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Nós somamos  $-2$  vezes a primeira linha à segunda e  $-1$  vezas a primeira à terceira.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Nós somamos  $2$  vezes a segunda linha à terceira.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Nós multiplicamos a terceira linha por  $-1$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Nós somamos  $3$  vezes a terceira linha à segunda e  $-3$  vezes a terceira à primeira.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Nós somamos  $-2$  vezes a segunda linha à primeira.

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Muitas vezes nós não sabemos, de antemão, se uma dada matriz é ou não invertível. Se uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  não é invertível, então ela não pode ser reduzida a  $I_n$  por operações elementares sobre linhas [parte (c) do Teorema 1.5.3]. Dito de outra maneira, a forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  tem pelo menos uma linha de zeros. Assim, se o procedimento do último exemplo for tentado em uma matriz que não é invertível, então em algum ponto das contas vai aparecer uma linha de zeros *no lado esquerdo*. Pode-se então concluir que a dada matriz não é invertível e parar as contas.

### EXEMPLO 5 Mostrando que uma Matriz não É Invertível

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando o procedimento do Exemplo 4 dá

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Nós somamos  $-2$  vezes a primeira linha à segunda e somamos a primeira à terceira.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Nós somamos a segunda linha à terceira.

Como obtivemos uma linha de zeros no lado esquerdo,  $A$  não é invertível.

### EXEMPLO 6 Uma Consequência da Invertibilidade

No Exemplo 4 nós mostramos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

é uma matriz invertível. Do Teorema 1.5.3 segue que o sistema homogêneo

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 + 8x_3 = 0$$

tem somente a solução trivial.

### Conjunto de Exercícios 1.5

1. Quais das seguintes matrizes são elementares?

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(g) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 60 • • • Álgebra Linear com Aplicações

2. Encontre uma operação sobre linhas que retorna a matriz elementar dada a uma matriz identidade.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontre matrizes elementares  $E_1, E_2, E_3$  e  $E_4$  tais que

$$(a) E_1 A = B \quad (b) E_2 B = A \quad (c) E_3 A = C \quad (d) E_4 C = A$$

4. No Exercício 3, é possível encontrar uma matriz elementar  $E$  tal que  $E B = C$ ? Justifique sua resposta.

Nos Exercícios 5–7, use o método mostrado nos Exemplos 4 e 5 para encontrar a inversa da matriz dada se a matriz é invertível e confira sua resposta por multiplicação.

$$5. (a) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6. (a) \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7. (a) \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

8. Encontre a inversa de cada uma das seguintes matrizes  $4 \times 4$ , onde  $k_1, k_2, k_3, k_4$  e  $k_5$  são todos não-nulos.

$$(a) \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre matrizes elementares  $E_1$  e  $E_2$  tais que  $E_2 E_1 A = I$ .
- (b) Escreva  $A^{-1}$  como um produto de duas matrizes elementares.
- (c) Escreva  $A$  como um produto de duas matrizes elementares.

10. Em cada parte, efetue a operação sobre linhas dada na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

multiplicando  $A$  à esquerda por uma matriz elementar conveniente. Confira sua resposta em cada caso executando a operação sobre linhas diretamente em  $A$ .

- (a) Permute a primeira e terceira linhas.
- (b) Multiplique a segunda linha por  $\frac{1}{3}$ .

- (c) Some duas vezes a segunda linha à primeira.  
 11. Expresse a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

no formato  $A = E F G R$ , onde  $E, F$  e  $G$  são matrizes elementares e  $R$  está em forma escalonada por linhas.

12. Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

é uma matriz elementar, então pelo menos uma entrada da terceira linha deve ser um zero.

13. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

é não-invertível para qualquer valor das entradas.

14. Prove que se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então existe uma matriz invertível  $C$  tal que  $CA$  está em forma escalonada reduzida por linhas.  
 15. Prove que se  $A$  é uma matriz invertível e  $B$  é equivalente por linhas a  $A$ , então  $B$  também é invertível.  
 16. (a) Prove: Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $m \times n$ , então  $A$  e  $B$  são equivalentes por linhas se, e somente se,  $A$  e  $B$  têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.  
 (b) Mostre que  $A$  e  $B$  são equivalentes por linhas e encontre uma sequência de operações elementares por linhas que produz  $B$  a partir de  $A$ , sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

17. Prove o Teorema 1.5.1.

## Discussão e Descoberta

18. Suponha que  $A$  é alguma matriz invertível desconhecida, mas que você conhece uma sequência de operações elementares por linhas que produz a matriz identidade quando efetuada sucessivamente em  $A$ . Explique como você pode usar a informação disponível para encontrar  $A$ .  
 19. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.  
 (a) Toda matriz quadrada pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.  
 (b) O produto de duas matrizes elementares é uma matriz elementar.  
 (c) Se  $A$  é uma matriz invertível e um múltiplo da primeira linha de  $A$  é somado à segunda linha, então a matriz resultante é invertível.  
 (d) Se  $A$  é invertível e  $A B = 0$ , então é necessariamente verdade que  $B = 0$ .  
 20. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.  
 (a) Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  singular, então  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem infinitas soluções.  
 (b) Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  singular, então a forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  tem pelo menos uma linha de zeros.  
 (c) Se  $A^{-1}$  pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, então o sistema linear homogêneo  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial.  
 (d) Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  singular e  $B$  resulta da permutação de duas linhas de  $A$ , então  $B$  pode ser ou não ser singular.

21. Você acredita que existe uma matriz  $A$  de tamanho  $2 \times 2$  tal que

$$A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$$

para todos valores de  $a, b, c$  e  $d$ ? Explique seu raciocínio.

## 1.6 MAIS RESULTADOS SOBRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES E INVERTIBILIDADE

Nesta seção nós vamos estabelecer mais resultados sobre sistemas de equações lineares e invertibilidade de matrizes. Nosso trabalho nos levará a um novo método de resolver  $n$  equações em  $n$  incógnitas.

**Um Teorema Básico** Na Seção 1.1 nós afirmamos (baseados na Figura 1.1.1) que todo sistema linear tem ou nenhuma solução, ou uma solução, ou infinitas soluções. Agora estamos em condições de provar este resultado fundamental.

### Teorema 1.6.1

*Todo sistema de equações lineares tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma solução, ou infinitas soluções.*

*Prova.* Se  $Ax = b$  é um sistema de equações lineares, vale exatamente uma das seguintes afirmações: (a) o sistema não tem solução, (b) o sistema tem exatamente uma solução ou (c) o sistema tem mais de uma solução. A prova estará completa se conseguirmos mostrar que no caso (c) o sistema tem infinitas soluções.

Suponha que  $Ax = b$  tem mais de uma solução e seja  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , onde  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  são duas soluções distintas quaisquer. Como  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  são distintas,  $\mathbf{x}_0$  é não-nula; além disto,

$$Ax_0 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$$

Se  $k$  é um escalar qualquer, então

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0) &= Ax_1 + A(k\mathbf{x}_0) = Ax_1 + k(Ax_0) \\ &= b + k0 = b + 0 = b \end{aligned}$$

Isto significa que  $\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0$  é uma solução de  $Ax = b$ . Como  $\mathbf{x}_0$  é não-nula e existem infinitas possibilidades de escolha para  $k$ , o sistema  $Ax = b$  tem infinitas soluções. ■

**Resolvendo Sistemas Lineares por Inversão de Matrizes** Até aqui, nós estudamos dois métodos para resolver sistemas lineares: eliminação gaussiana e eliminação de Gauss-Jordan. O seguinte teorema fornece um novo método para resolver certos sistemas lineares.

### Teorema 1.6.2

*Se  $A$  é uma matriz invertível  $n \times n$ , então para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $n \times 1$ , o sistema de equações  $Ax = \mathbf{b}$  tem exatamente uma solução, a saber,  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .*

*Prova.* Como  $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ , segue-se que  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  é uma solução de  $Ax = \mathbf{b}$ . Para mostrar que esta é a única solução, nós vamos supor que  $\mathbf{x}_0$  é uma solução arbitrária e mostrar que  $\mathbf{x}_0$  necessariamente é a solução  $A^{-1}\mathbf{b}$ .

Se  $\mathbf{x}_0$  é uma solução qualquer, então  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ . Multiplicando ambos os lados por  $A^{-1}$ , obtemos  $\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{b}$ . ■

### EXEMPLO 1 Solução de um Sistema Linear Usando $A^{-1}$

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

No formato matricial, este sistema pode ser escrito como  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

No Exemplo 4 da seção precedente nós mostramos que  $A$  é invertível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 1.6.2, a solução do sistema é

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 2$ . ♦

**OBSERVAÇÃO.** Note que o método do Exemplo 1 aplica somente quando o sistema tem o mesmo número de equações e incógnitas e a matriz de coeficientes é invertível.

**Sistemas Lineares com uma Matriz de Coeficientes Comum** Freqüentemente precisamos resolver uma seqüência de sistemas

$$Ax = \mathbf{b}_1, \quad Ax = \mathbf{b}_2, \quad Ax = \mathbf{b}_3, \dots, \quad Ax = \mathbf{b}_k$$

cada um dos quais tem a mesma matriz de coeficientes  $A$ . Se  $A$  é invertível, então as soluções

$$\mathbf{x}_1 = A^{-1}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{x}_2 = A^{-1}\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{x}_3 = A^{-1}\mathbf{b}_3, \dots, \quad \mathbf{x}_k = A^{-1}\mathbf{b}_k$$

podem ser obtidas com uma inversão matricial e  $k$  multiplicações de matrizes. Contudo, um método mais eficiente é formar a matriz

$$[A \mid \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k] \quad (1)$$

na qual a matriz  $A$  foi “aumentada” por todas as  $k$  matrizes  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$ , ...,  $\mathbf{b}_k$ . Reduzindo (1) à forma escalonada reduzida por linhas nós podemos resolver todos os  $k$  sistemas de uma só vez por eliminação de Gauss-Jordan. Este método tem a vantagem adicional de aplicar mesmo se  $A$  é não-invertível.

### EXEMPLO 2 Resolvendo Dois Sistemas Lineares de uma só vez

Resolva os sistemas

$$\begin{array}{ll} (a) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 & (b) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5 & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 8x_3 = 9 & x_1 + 8x_3 = -6 \end{array}$$

*Solução.*

Os dois sistemas têm a mesma matriz de coeficientes. Se nós aumentarmos esta matriz de coeficientes com as colunas das constantes à direita nestes sistemas, obteremos

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array} \right]$$

Reduzindo esta matriz à forma escalonada reduzida por linhas, obtemos (verifique)

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Segue-se das duas últimas colunas que a solução do sistema (a) é  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$  e a do sistema (b) é  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$ .  $\diamond$

**Propriedades de Matrizes Invertíveis** Até aqui, para mostrar que uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  é invertível, tem sido necessário encontrar uma matriz  $B$  de tamanho  $n \times n$  tal que

$$AB = I \quad \text{e} \quad BA = I$$

O próximo teorema mostra que se obtivermos uma matriz  $B$  de tamanho  $n \times n$  satisfazendo *qualquer* uma destas condições, então a outra é também, automaticamente, satisfeita.

### Teorema 1.6.3

Seja  $A$  uma matriz quadrada.

- (a) Se  $B$  é uma matriz quadrada satisfazendo  $BA = I$ , então  $B = A^{-1}$ .
- (b) Se  $B$  é uma matriz quadrada satisfazendo  $AB = I$ , então  $B = A^{-1}$ .

Nós vamos provar a parte (a) e deixar a parte (b) como um exercício.

*Prova (a).* Suponha que  $BA = I$ . Se conseguirmos mostrar que  $A$  é invertível, a prova poderá ser completada multiplicando  $BA = I$  de ambos os lados por  $A^{-1}$  para obter

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \quad \text{ou} \quad BI = IA^{-1} \quad \text{ou} \quad B = A^{-1}$$

Para mostrar que  $A$  é invertível, é suficiente mostrar que o sistema  $AX = 0$  tem só a solução trivial (ver Teorema 1.5.3). Seja  $x_0$  uma solução qualquer deste sistema. Se nós multiplicarmos ambos os lados de  $AX_0 = 0$  à esquerda por  $B$ , obteremos  $BAx_0 = B0$  ou  $Ix_0 = 0$  ou  $x_0 = 0$ . Assim, o sistema de equações  $AX = 0$  tem somente a solução trivial.  $\blacksquare$

Agora nós estamos em condições de acrescentar duas afirmações equivalentes às quatro dadas no Teorema 1.5.3.

### Teorema 1.6.4

#### Afirmações Equivalentes

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é invertível.
- (b)  $AX = 0$  só tem a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- (d)  $A$  pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.
- (e)  $AX = b$  é consistente para cada matriz  $b$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (f)  $AX = b$  tem exatamente uma solução para cada matriz  $b$   $n \times 1$ .

*Prova.* Como no Teorema 1.5.3 nós provamos que (a), (b), (c) e (d) são equivalentes, é suficiente provar que (a)  $\Rightarrow$  (f)  $\Rightarrow$  (e)  $\Rightarrow$  (a).

(a)  $\Rightarrow$  (f). Isto já foi provado no Teorema 1.6.2.

(f)  $\Rightarrow$  (e). Isto é evidente: Se  $AX = b$  tiver exatamente uma solução para cada matriz  $b$  de tamanho  $n \times 1$ , então  $AX = b$  será consistente para cada matriz  $b$   $n \times 1$ .

(e)  $\Rightarrow$  (a). Suponha que o sistema  $AX = b$  é consistente para cada matriz  $b$   $n \times 1$ ; então, em particular, os sistemas

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são consistentes. Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soluções destes sistemas, respectivamente, e formemos uma matriz  $C$  de tamanho  $n \times n$  tendo estas soluções como colunas. Assim,  $C$  tem a forma

$$C = [x_1 \mid x_2 \mid \cdots \mid x_n]$$

Como já discutimos na Seção 1.3, as sucessivas colunas do produto  $A C$  serão

$$Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$$

Assim,

$$AC = [Ax_1 \mid Ax_2 \mid \cdots \mid Ax_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Pela parte (b) do Teorema 1.6.3 segue que  $C = A^{-1}$ . Logo  $A$  é invertível.  $\blacksquare$

Nós sabemos de trabalho anterior que fatores invertíveis produzem um produto invertível. O próximo teorema, que será provado mais tarde, considera a recíproca: se o produto de matrizes quadradas é invertível então os fatores também devem ser invertíveis.

**Teorema 1.6.5**

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de mesmo tamanho. Se  $A$  é invertível, então  $A$  e  $B$  também são invertíveis.

O seguinte problema fundamental ocorrerá em vários contextos no nosso trabalho adiante.

**Um Problema Fundamental.** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  fixada. Encontre todas as matrizes  $b$  de tamanho  $m \times 1$  tais que o sistema  $Ax = b$  é consistente.

Para matrizes  $A$  invertíveis, o Teorema 1.6.2 resolve este problema completamente afirmando que, para qualquer matriz  $b$  de tamanho  $m \times 1$ , o sistema  $Ax = b$  tem a única solução  $x = A^{-1}b$ . Se  $A$  não for quadrada, ou se  $A$  for quadrada mas não-invertível, então o Teorema 1.6.2 não aplica. Nesses casos, a matriz  $b$  deve, em geral, satisfazer certas condições para garantir que  $Ax = b$  é consistente. O seguinte exemplo ilustra como os métodos de eliminação da Seção 1.2 podem ser usados para determinar tais condições.

**EXEMPLO 3. Determinando Consistência por Eliminação**

Quais condições devem satisfazer  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

é consistente?

*Solução*

A matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{array} \right]$$

que pode ser reduzida à forma escalonada como segue.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \leftarrow -1 \text{ vez a primeira linha foi somada à segunda e } -2 \text{ vezes a primeira linha foi somada à terceira.} \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{A segunda linha foi multiplicada por } -1. \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{A segunda linha foi somada à terceira.} \end{matrix}$$

Agora é evidente pela terceira linha da matriz que o sistema tem uma solução se, e somente se,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  satisfazem a condição

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \text{ ou } b_3 = b_1 + b_2$$

Para expressar esta condição de uma outra maneira,  $Ax = b$  é consistente se, e somente se,  $b$  é uma matriz da forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são arbitrários.

**EXEMPLO 4. Determinando Consistência por Eliminação**

Quais condições devem satisfazer  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

é consistente?

*Solução.*

A matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right]$$

Reduzindo esta matriz à forma escalonada reduzida por linhas obtemos (verifique)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{array} \right] \quad (2)$$

Neste caso não há restrições sobre  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$ ; ou seja, o sistema  $Ax = b$  tem a única solução

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \quad (3)$$

para qualquer  $b$ .

**OBSERVAÇÃO.** Como o sistema  $Ax = b$  do exemplo precedente é consistente para qualquer  $b$ , segue do Teorema 1.6.4 que  $A$  é invertível. Nós deixamos a cargo do leitor verificar que as fórmulas em (3) também podem ser usadas para calcular  $x = A^{-1}b$ .

**Conjunto de Exercícios 1.6**

Nos Exercícios 1–8 resolva o sistema invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2.

$$\begin{aligned} 1. \quad x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

4.  $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$   
 $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$   
 $x_2 + x_3 = 5$

5.  $x + y + z = 5$   
 $x + y - 4z = 10$   
 $-4x + y + z = 0$

6.  $-x - 2y - 3z = 0$   
 $w + x + 4y + 4z = 7$   
 $w + 3x + 7y + 9z = 4$   
 $-w - 2x - 4y - 6z = 6$

7.  $3x_1 + 5x_2 = b_1$   
 $x_1 + 2x_2 = b_2$

8.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1$   
 $2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = b_2$   
 $3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = b_3$

9. Resolva o seguinte sistema geral invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_1 \\x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\x_1 + x_2 &= b_3\end{aligned}$$

Use as fórmulas resultantes para encontrar a solução se

- (a)  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = 3$ ,  $b_3 = 4$     (b)  $b_1 = 5$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 0$     (c)  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = -1$ ,  $b_3 = 3$

10. Resolva os três sistemas do Exercício 9 simultaneamente usando o método do Exemplo 2.

Nos Exercícios 11–14 use o método do Exemplo 2 para resolver simultaneamente todos os sistemas dados.

11.  $x_1 - 5x_2 = b_1$   
 $3x_1 + 2x_2 = b_2$

- (a)  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 4$   
(b)  $b_1 = -2$ ,  $b_2 = 5$

12.  $-x_1 + 4x_2 + x_3 = b_1$   
 $x_1 + 9x_2 - 2x_3 = b_2$   
 $6x_1 + 4x_2 - 8x_3 = b_3$

- (a)  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 0$   
(b)  $b_1 = -3$ ,  $b_2 = 4$ ,  $b_3 = -5$

13.  $4x_1 - 7x_2 = b_1$   
 $x_1 + 2x_2 = b_2$

- (a)  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$   
(b)  $b_1 = -4$ ,  $b_2 = 6$   
(c)  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = 3$   
(d)  $b_1 = -5$ ,  $b_2 = 1$

14.  $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = b_1$   
 $-x_1 - 2x_2 = b_2$   
 $2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = b_3$

- (a)  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = -1$   
(b)  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 1$   
(c)  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = -1$ ,  $b_3 = 0$

15. O método do Exemplo 2 pode ser usado em sistemas lineares com infinitas soluções. Use aquele método para resolver os sistemas de ambas partes simultaneamente.

(a)  $x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$     (b)  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$   
 $2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1$      $2x_1 - 5x_2 + x_3 = -1$   
 $3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -1$      $3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0$

Nos Exercícios 16–19 encontre condições que as constantes  $b$  devem satisfazer para o sistema ser consistente.

16.  $6x_1 - 4x_2 = b_1$   
 $3x_1 - 2x_2 = b_2$

17.  $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1$   
 $4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b_2$   
 $-3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = b_3$

18.  $x_1 - 2x_2 - x_3 = b_1$   
 $-4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = b_2$   
 $-4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = b_3$

19.  $x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_1$   
 $-2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = b_2$   
 $-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = b_3$   
 $4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = b_4$

20. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que a equação  $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$  pode ser reescrita como  $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e use este resultado para resolver  $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$  em  $\mathbf{x}$ .  
(b) Resolva  $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ .

21. Resolva a equação seguinte em  $X$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Em cada parte, determine se o sistema homogêneo tem uma solução não-trivial (sem usar papel e lápis); depois decida se a matriz dada é invertível.
- (a)  $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$   
 $5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$   
 $x_3 + 2x_4 = 0$   
 $3x_4 = 0$
- $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
- (b)  $5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$   
 $2x_3 - x_4 = 0$   
 $x_3 + x_4 = 0$   
 $7x_4 = 0$
- $$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$
23. Seja  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  um sistema homogêneo de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas cuja única solução é a trivial. Mostre que se  $k$  é qualquer inteiro positivo, então o sistema  $A^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$  também só tem a solução trivial.
24. Seja  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  um sistema homogêneo de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas e seja  $Q$  uma matriz invertível  $n \times n$ . Mostre que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial se, e somente se,  $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial.
25. Seja  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  um sistema de equações lineares consistente e seja  $\mathbf{x}_1$  uma solução fixada. Mostre que qualquer solução do sistema pode ser escrita na forma  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$ , onde  $\mathbf{x}_0$  é a solução de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Mostre também que qualquer matriz  $\mathbf{x}$  desta forma é uma solução.
26. Use a parte (a) do Teorema 1.6.3 para provar a parte (b).

## Discussão e Descoberta

27. (a) Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e se  $\mathbf{b}$  é uma matriz  $n \times 1$ , quais condições você imporia para garantir que a equação  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  tem uma única solução em  $\mathbf{x}$ ?  
(b) Supondo que suas condições estão satisfeitas, encontre uma fórmula para a solução em termos de uma inversa apropriada.
28. Suponha que  $A$  é uma matriz  $n \times n$  invertível. O sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$  precisa ter uma solução única? Explique seu raciocínio.
29. É possível ter  $A\mathbf{B} = I$  e  $B$  não ser a inversa de  $A$ ? Explique seu raciocínio.
30. Crie um teorema reescrevendo o Teorema 1.6.5 em contraposição lógica (veja Exercício 34 da Seção 1.4).

## 1.7 MATRIZES DIAGONAIS, TRIANGULARES E SIMÉTRICAS

Nesta seção nós vamos considerar certas classes de matrizes que têm formatos especiais. As matrizes que nós estudamos nesta seção estão entre os tipos mais importantes de matrizes encontradas em Álgebra Linear e surgirão em muitos contextos diferentes ao longo do texto.

**Matrizes Diagonais** Uma matriz quadrada na qual todas as entradas fora da diagonal principal são zero é chamada **matriz diagonal**. Aqui temos alguns exemplos.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonal arbitrária  $D$  de tamanho  $n \times n$  pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Uma matriz diagonal é invertível se, e somente se, todas suas entradas na diagonal são não-nulas; neste caso, a inversa de (1) é

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

O leitor deveria verificar que  $DD^{-1} = D^{-1}D = I$ .

Potências de matrizes diagonais são fáceis de calcular; nós deixamos para o leitor verificar que se  $D$  é a matriz diagonal (1) e  $k$  é um inteiro positivo, então

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

### EXEMPLO 1 Inversas e Potências de Matrizes Diagonais

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \quad A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

Produtos de matrizes que envolvem fatores diagonais são especialmente fáceis de calcular. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} & d_1 a_{14} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & d_2 a_{23} & d_2 a_{24} \\ d_3 a_{31} & d_3 a_{32} & d_3 a_{33} & d_3 a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & d_3 a_{13} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & d_3 a_{23} \\ d_1 a_{31} & d_2 a_{32} & d_3 a_{33} \\ d_1 a_{41} & d_2 a_{42} & d_3 a_{43} \end{bmatrix}$$

Em palavras, para multiplicar uma matriz  $A$  à esquerda por uma matriz diagonal  $D$ , podemos multiplicar as linhas sucessivas de  $A$  pelas entradas sucessivas na diagonal de  $D$ , e para multiplicar  $A$  à direita por  $D$ , podemos multiplicar as colunas sucessivas de  $A$  pelas entradas sucessivas na diagonal de  $D$ .

**Matrizes Triangulares** Uma matriz quadrada na qual todas as entradas acima da diagonal principal são zero é chamada **triangular inferior** e uma matriz quadrada na qual todas as entradas abaixo da diagonal principal são zero é chamada **triangular superior**. Uma matriz que é triangular inferior ou triangular superior é chamada **triangular**.

### EXEMPLO 2 Matrizes Triangulares Superiores e Inferiores

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular superior  $4 \times 4$  arbitrária.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular inferior  $4 \times 4$  arbitrária.

**OBSERVAÇÃO.** Observe que matrizes diagonais são triangulares tanto inferiores quanto superiores, pois têm zeros acima quanto abaixo da diagonal principal. Observe também que uma matriz quadrada em forma escalonada é triangular superior pois tem zeros abaixo da diagonal principal.

As seguintes são quatro caracterizações úteis de matrizes triangulares. O leitor verá que é instrutivo verificar que as matrizes do Exemplo 2 têm as propriedades afirmadas.

- Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  é triangular superior se, e somente se, a  $i$ -ésima linha começa com pelo menos  $i-1$  zeros.
- Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  é triangular inferior se, e somente se, a  $j$ -ésima coluna começa com pelo menos  $j-1$  zeros.
- Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  é triangular superior se, e somente se,  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ .
- Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  é triangular inferior se e somente se  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ .

O teorema a seguir lista algumas das propriedades de matrizes triangulares.

### Teorema 1.7.1

- A transposta de uma matriz triangular inferior é triangular superior e a transposta de uma matriz triangular superior é triangular inferior.
- O produto de matrizes triangulares inferiores é triangular inferior e o produto de matrizes triangulares superiores é triangular superior.
- Uma matriz triangular é invertível se, e somente se, suas entradas na diagonal principal são todas não-nulas.
- A inversa de uma matriz triangular inferior é triangular inferior e a inversa de uma matriz triangular superior é triangular superior.

A parte (a) é evidente pois transpor uma matriz quadrada corresponde a refletir suas entradas em torno da diagonal principal; nós omitimos a prova formal. Nós vamos provar (b), mas vamos adiar as provas de (c) e (d) para o próximo capítulo, onde nós teremos as ferramentas necessárias para provar estes resultados de maneira mais eficiente.

**Prova (b).** Nós provaremos o resultado para matrizes triangulares inferiores; a prova para matrizes triangulares superiores é similar.

Sejam  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  matrizes  $n \times n$  triangulares inferiores e seja  $C = [c_{ij}]$  o produto  $C = AB$ . Da observação anterior a este teorema, nós podemos provar que  $C$  é triangular inferior mostrando que  $c_{ij} = 0$  para  $i < j$ . Mas pela definição de multiplicação matricial,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Se nós supormos que  $i < j$ , então os termos desta expressão poderão ser agrupados como segue:

$$c_{ij} = \underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i(j-1)}b_{(j-1)j}}_{\text{Termos nos quais o número de linha de } b \text{ é menor do que o número de coluna de } b} + \underbrace{a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}}_{\text{Termos nos quais o número de linha de } a \text{ é menor do que o número de coluna de } a}$$

No primeiro grupo todos os fatores de  $b$  são zeros pois  $B$  é triangular inferior e no segundo grupo todos os fatores de  $a$  são zeros pois  $A$  é triangular inferior. Assim,  $c_{ij} = 0$ , que é o que queríamos mostrar. ■

### EXEMPLO 3 Matrizes Triangulares Superiores

Considere as matrizes triangulares superiores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $A$  é invertível, pois suas entradas na diagonal principal são não-nulas, mas a matriz  $B$  não é. Nós deixamos para o leitor calcular a inversa de  $A$  pelo método da Seção 1.5 e mostrar que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Esta inversa é triangular superior, como garante a parte (d) do Teorema 1.7.1. Nós também deixamos para o leitor conferir que o produto  $AB$  é

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Este produto é triangular superior, como garante a parte (b) do Teorema 1.7.1. ♦

**Matrizes Simétricas** Uma matriz quadrada  $A$  é chamada *simétrica* se  $A = A^T$ .

#### EXEMPLO 4 Matrizes Simétricas

As seguintes matrizes são simétricas, já que cada uma é igual à sua transposta (verifique).

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

É fácil reconhecer matrizes simétricas por inspeção: As entradas na diagonal principal podem ser quaisquer, mas como ilustramos em (2), as “imagens espelhadas” das entradas em torno da diagonal principal devem ser iguais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Isto ocorre pois transpor uma matriz quadrada corresponde a permitir entradas que estão posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal. Expresso em termos de entradas individuais, uma matriz  $A = [a_{ij}]$  é simétrica se, e somente se,  $a_{ij} = a_{ji}$  para todos os valores de  $i$  e  $j$ . Como é ilustrado no Exemplo 4, todas as matrizes diagonais são simétricas.

O seguinte teorema lista as principais propriedades algébricas das matrizes simétricas. As provas são uma consequência direta do Teorema 1.4.9 e são deixadas para o leitor.

#### Teorema 1.7.2

Se  $A$  e  $B$  são matrizes simétricas de mesmo tamanho e se  $k$  é um escalar qualquer, então:

- (a)  $A^T$  é simétrica.
- (b)  $A + B$  e  $A - B$  são simétricas.
- (c)  $kA$  é simétrica.

**OBSERVAÇÃO.** Não é verdade, em geral, que o produto de matrizes simétricas é uma matriz simétrica. Para ver por que isto

é assim, sejam  $A$  e  $B$  matrizes simétricas de mesmo tamanho. Pela parte (d) do Teorema 1.4.9 e pela simetria, nós temos

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

Como  $AB$  e  $BA$  não são geralmente iguais, segue que  $AB$  não é geralmente simétrica. Contudo, no caso especial em que  $AB = BA$ , o produto  $AB$  é simétrico. Se  $A$  e  $B$  são matrizes tais que  $AB = BA$ , dizemos que  $A$  e  $B$  *comutam*. Em resumo: *O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e somente se, as matrizes comutam.*

#### EXEMPLO 5 Produtos de Matrizes Simétricas

A primeira das equações a seguir mostra um produto de matrizes simétricas que não é uma matriz simétrica e a segunda mostra um produto de matrizes simétricas que é uma matriz simétrica. Concluímos que os fatores da primeira equação não comutam, mas que os da segunda comutam. Deixamos para o leitor verificar que isto é assim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

Em geral, uma matriz simétrica não precisa ser invertível; por exemplo, uma matriz quadrada zero é simétrica mas não-invertível. Contudo, se uma matriz simétrica é invertível, então a inversa também é simétrica.

#### Teorema 1.7.3

Se  $A$  é uma matriz simétrica invertível, então  $A^{-1}$  é simétrica.

**Prova.** Suponha que  $A$  é simétrica e invertível. Pelo Teorema 1.4.10 e lembrando que  $A = A^T$ , nós temos

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

que prova que  $A^{-1}$  é simétrica. ■

**Produtos  $AA^T$  e  $A^TA$**  Produtos de matrizes da forma  $AA^T$  e  $A^TA$  surgem em uma variedade de aplicações. Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então  $A^T$  é uma matriz  $n \times m$ , de modo que os produtos  $AA^T$  e  $A^TA$  são ambos matrizes quadradas—a matriz  $AA^T$  tem tamanho  $m \times m$  e a matriz  $A^TA$  tem tamanho  $n \times n$ . Estes produtos são sempre simétricos, pois

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T \quad \text{e} \quad (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

#### EXEMPLO 6 O Produto de uma Matriz e sua Transposta é uma Matriz Simétrica

Seja  $A$  a matriz  $2 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observe que  $A^T A$  e  $AA^T$  são simétricas, como se esperava. ♦

Adiante neste texto, nós obteremos condições gerais sobre  $A$  sob as quais  $AA^T$  e  $A^T A$  são invertíveis. Contudo, no caso especial em que  $A$  é quadrada, nós temos o seguinte resultado.

### Teorema 1.7.4

Se  $A$  é uma matriz invertível, então  $AA^T$  e  $A^T A$  são também invertíveis.

*Prova.* Como  $A$  é invertível, também  $A^T$  é invertível, pelo Teorema 1.4.10. Assim,  $AA^T$  e  $A^T A$  são invertíveis, pois são produtos de matrizes invertíveis. ■

### Conjunto de Exercícios 1.7

1. Determine se a matriz dada é invertível; se for, encontre a inversa por inspeção.

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2. Calcule, por inspeção, o produto das matrizes dadas.

(a)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Encontre  $A^2$ ,  $A^{-2}$  e  $A^{-k}$  por inspeção.

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  (b)  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

4. Quais das seguintes matrizes são simétricas?

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Determine, por inspeção, se a dada matriz triangular é invertível.

(a)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

6. Encontre todos os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  para os quais  $A$  é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

7. Encontre todos os valores de  $a$  e  $b$  para os quais  $A$  e  $B$  são ambas não-invertíveis.

$$A = \begin{bmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2a-3b-7 \end{bmatrix}$$

8. Use a equação dada para determinar, por inspeção, se as matrizes do lado esquerdo comutam.

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

## 70 • • • Álgebra Linear com Aplicações

9. Mostre que  $A$  e  $B$  comutam se  $a - d = 7b$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

10. Encontre uma matriz diagonal  $A$  tal que

$$(a) A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. (a) Fatore  $A$  na forma  $A = BD$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 3a_{11} & 5a_{12} & 7a_{13} \\ 3a_{21} & 5a_{22} & 7a_{23} \\ 3a_{31} & 5a_{32} & 7a_{33} \end{bmatrix}$$

(b) A fatoração encontrada é a única possível? Explique.

12. Verifique o Teorema 1.7.1b para o produto  $AB$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

13. Verifique o Teorema 1.7.1d para as matrizes do Exercício 12.

14. Verifique o Teorema 1.7.3 para a matriz  $A$  dada.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

15. Seja  $A$  uma matriz simétrica.

(a) Mostre que  $A^2$  é simétrica. (b) Mostre que  $2A^2 - 3A + I$  é simétrica.

16. Seja  $A$  uma matriz simétrica.

(a) Mostre que  $A^k$  é simétrica se  $k$  é qualquer inteiro não-negativo.  
(b) Se  $p(x)$  é um polinômio, é  $p(A)$  necessariamente simétrica? Explique.

17. Sejam  $A$  uma matriz triangular superior e  $p(x)$  um polinômio. É  $p(A)$  necessariamente triangular superior? Explique.

18. Prove: Se  $A^T A = A$  então  $A$  é simétrica e  $A = A^2$ .

19. Encontre todas as matrizes diagonais  $3 \times 3$  que satisfazem  $A^2 - 3A - 4I = 0$ .

20. Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz  $n \times n$ . Determine se  $A$  é simétrica.

(a)  $a_{ij} = i^2 + j^2$  (b)  $a_{ij} = i^2 - j^2$  (c)  $a_{ij} = 2i + 2j$  (d)  $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

21. Usando sua experiência com o Exercício 20, projete um teste geral que pode ser aplicado a uma fórmula para  $a_{ij}$  para determinar se  $A = [a_{ij}]$  é simétrica.

22. Uma matriz quadrada  $A$  é chamada *anti-simétrica* se  $A^T = -A$ . Prove:

(a) Se  $A$  é uma matriz anti-simétrica invertível, então  $A^{-1}$  é anti-simétrica.

(b) Se  $A$  e  $B$  são anti-simétricas, então também o são  $A^T$ ,  $A + B$ ,  $A - B$  e  $kA$ , para qualquer escalar  $k$ .

(c) Toda matriz quadrada  $A$  pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.

[*Sugestão*. Observe a identidade  $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ .]

23. Nós mostramos no texto que o produto de matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e somente se, as matrizes comutam. É o produto de matrizes anti-simétricas que comutam uma matriz anti-simétrica? Explique. [*Observação*. Veja o Exercício 22 para a terminologia.]

24. Se a matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  pode ser expressa como  $A = LU$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior e  $U$  é uma matriz triangular superior, então o sistema  $Ax = b$  pode ser expresso como  $LUX = b$  e portanto pode ser resolvido em dois passos:

**Passo 1.** Seja  $Ux = y$ , de modo que  $LUX = b$  pode ser escrito como  $Ly = b$ . Resolva este sistema.

**Passo 2.** Resolva o sistema  $Ux = y$  em  $x$ .

Em cada parte, use este método de dois passos para resolver o sistema dado.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

25. Encontre uma matriz triangular superior que satisfaz

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

### Discussão e Descoberta

26. Qual é o número máximo de entradas distintas que pode ter uma matriz simétrica de tamanho  $n \times n$ ? Explique seu raciocínio.
27. Invente e prove um teorema que diz como multiplicar duas matrizes diagonais.
28. Suponha que  $A$  é uma matriz quadrada e que  $D$  é uma matriz diagonal tal que  $AD = I$ . O que você pode dizer sobre a matriz  $A$ ? Explique seu raciocínio.
29. (a) Construa um sistema linear consistente de cinco equações em cinco incógnitas que tem uma matriz de coeficientes triangular inferior com nenhum zero na diagonal principal nem abaixo da diagonal principal.  
 (b) Projete um procedimento eficiente para resolver seu sistema à mão.  
 (c) Invente um nome apropriado para o seu procedimento.
30. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique cada resposta.
  - (a) Se  $AA^T$  é singular, então também  $A$  é singular.
  - (b) Se  $A + B$  é simétrica, então também  $A$  e  $B$  são simétricas.
  - (c) Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $Ax = 0$  tem somente a solução trivial, então também  $A^T x = 0$  tem somente a solução trivial.
  - (d) Se  $A^2$  é simétrica, então também  $A$  é simétrica.

### Exercícios Suplementares do Capítulo I

1. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver  $x'$  e  $y'$  em termos de  $x$  e  $y$ .

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$

$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

2. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver  $x'$  e  $y'$  em termos de  $x$  e  $y$ .

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

3. Encontre um sistema linear homogêneo de duas equações que não são múltiplas uma da outra e tal que

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$$

e

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = -1$$

são soluções do sistema.

4. Uma caixa contendo moedas de 1, 5 e 10 centavos contém 13 moedas com um valor total de 83 centavos. Quantas moedas de cada tipo há na caixa?

5. Encontre inteiros positivos que satisfazem

$$x + y + z = 9$$

$$x + 5y + 10z = 44$$

6. Para quais valores de  $a$  o sistema a seguir tem zero, uma ou infinitas soluções?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_3 = 2$$

$$(a^2 - 4)x_3 = a - 2$$

7. Seja

$$\left[ \begin{array}{cccc} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array} \right]$$

a matriz aumentada de um sistema linear. Para quais valores de  $a$  e  $b$  o sistema tem

- (a) uma única solução, (b) uma solução a um parâmetro,  
 (c) uma solução a dois parâmetros, (d) nenhuma solução?

## 7.2 • • • Álgebra Linear com Aplicações

8. Resolva em  $x, y$  e  $z$ .

$$xy - 2\sqrt{y} + 3zy = 8$$

$$2xy - 3\sqrt{y} + 2zy = 7$$

$$-xy + \sqrt{y} + 2zy = 4$$

9. Encontre uma matriz  $K$  tal que  $AKB = C$ , sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Como devem ser escolhidos os coeficientes  $a, b$  e  $c$  para que o sistema

$$ax + by - 3z = -3$$

$$-2x - by + cz = -1$$

$$ax + 3y - cz = -3$$

tenha a solução  $x = 1, y = -1$  e  $z = 2$ ?

11. Em cada parte resolva a equação matricial em  $X$ .

$$(a) X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (b) X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

12. (a) Expressse as equações

$$y_1 = x_1 - x_2 + x_3$$

$$y_2 = 3x_1 + x_2 - 4x_3 \quad \text{e} \quad z_1 = 4y_1 - y_2 + y_3$$

$$y_3 = -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \quad z_2 = -3y_1 + 5y_2 - y_3$$

no formato matricial  $Y = AX$  e  $Z = BY$ . Em seguida, use estas expressões para obter uma relação direta  $Z = CX$  entre  $Z$  e  $X$ .

- (b) Use a equação  $Z = CX$  obtida em (a) para expressar  $z_1$  e  $z_2$  em termos de  $x_1, x_2$  e  $x_3$ .

- (c) Confira o resultado em (b) substituindo diretamente as equações em  $y_1, y_2$  e  $y_3$  nas equações em  $z_1$  e  $z_2$  e simplificando.

13. Se  $A$  é  $m \times n$  e  $B$  é  $n \times p$ , quantas operações de multiplicação e quantas de adição são necessárias para calcular o produto matricial  $AB$ ?

14. Seja  $A$  uma matriz quadrada.

- (a) Mostre que  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$  se  $A^4 = 0$ .

- (b) Mostre que  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n$  se  $A^{n+1} = 0$ .

15. Encontre valores de  $a, b$  e  $c$  tais que o gráfico do polinômio  $p(x) = ax^2 + bx + c$  passa pelos pontos  $(1, 2)$ ,  $(-1, 6)$  e  $(2, 3)$ .

16. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Encontre valores de  $a, b$  e  $c$  tais que o gráfico do polinômio  $p(x) = ax^2 + bx + c$  passa pelo ponto  $(-1, 0)$  e tem uma tangente horizontal em  $(2, -9)$ .

17. Seja  $J_n$  a matriz  $n \times n$  tal que todas entradas são 1. Mostre que se  $n > 1$ , então

$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$$

18. Mostre que se uma matriz quadrada  $A$  satisfaz a equação  $A^3 + 4A^2 - 2A + 7I = 0$  então  $A^T$  também satisfaz.

19. Prove: Se  $B$  é invertível, então  $AB^{-1} = B^{-1}A$  se, e somente se,  $AB = BA$ .

20. Prove: Se  $A$  é invertível, então  $A + B$  e  $I + BA^{-1}$  são ambas invertíveis ou ambas não-invertíveis.

21. Prove que se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$ , então

- (a)  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$     (b)  $\text{tr}(kA) = k \text{tr}(A)$     (c)  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$     (d)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

22. Use o Exercício 21 para mostrar que não existem matrizes quadradas  $A$  e  $B$  tais que

$$AB - BA = I$$

23. Prove: Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  e  $B$  é a matriz  $n \times 1$  com todas as entradas iguais a  $1/n$ , então

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

onde  $\bar{r}_i$  é a média das entradas na  $i$ -ésima linha de  $A$ .

24. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Se as entradas da matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \cdots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

são funções diferenciáveis de  $x$ , então nós definimos

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \cdots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \cdots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \cdots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Mostre que se as entradas de  $A$  e  $B$  são funções diferenciáveis de  $x$  e os tamanhos das matrizes são tais que as operações estão definidas, então

$$(a) \frac{d}{dx}(kA) = k \frac{dA}{dx} \quad (b) \frac{d}{dx}(A+B) = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} \quad (c) \frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx}B + A \frac{dB}{dx}$$

25. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Use a parte (c) do Exercício 24 para mostrar que

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1} \frac{dA}{dx} A^{-1}$$

Enuncie todas as hipóteses que são necessárias para obter esta fórmula.

26. Encontre valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  que tornam a equação

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{3x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

uma identidade. [Sugestão. Multiplique ambos os lados por  $(3x - 1)(x^2 + 1)$  e iguale os coeficientes correspondentes dos polinômios obtidos em ambos os lados da equação resultante.]

27. Se  $P$  é uma matriz  $n \times 1$  tal que  $P^T P = 1$ , então  $H = I - 2PP^T$  é chamada a **matriz de Householder** correspondente a  $P$  (homenageando o matemático norte-americano A. S. Householder).

(a) Verifique que  $P^T P = 1$  se  $P^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$  e calcule a matriz de Householder correspondente.

(b) Prove que se  $H$  é qualquer matriz de Householder, então  $H = H^T$  e  $H^T H = I$ .

(c) Verifique que a matriz de Householder encontrada na parte (a) satisfaz as condições provadas na parte (b).

28. Supondo que as inversas envolvidas existem, prove as seguintes igualdades.

(a)  $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C + D)^{-1}D$       (b)  $(I + CD)^{-1}C = C(I + DC)^{-1}$

(c)  $(C + DD^T)^{-1}D = C^{-1}D(I + D^T C^{-1}D)^{-1}$

29. Mostre que se  $a \neq b$ , então

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar  $A^n$  se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}$$

[Observação. Este exercício deriva de um problema submetido por John M. Johnson, em *The Mathematics Teacher*, Vol. 85, No. 9, 1992.]

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais do Capítulo 1

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

## Seção 1.1

**T1. (Números e operações numéricas)** Leia em seu manual sobre como entrar e exibir números e executar as operações aritméticas básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Determine como controlar o número de dígitos de um número decimal que aparecem na tela. Se você está usando um sistema algébrico computacional, caso em que você pode calcular com números exatos em vez de aproximações decimais, aprenda como entrar com números exatos tais como  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$  e  $\frac{1}{3}$  e como convertê-los em números decimais. Experimente com números de sua própria escolha até sentir que você dominou os procedimentos e operações.

## Seção 1.2

- T1. (Matrizes e formas escalonadas reduzidas por linhas)** Leia em seu manual sobre como entrar com matrizes e como encontrar a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz. Então use seu recurso para encontrar a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada do Exemplo 4 da Seção 1.2.
- T2. (Sistemas lineares com solução única)** Leia em seu manual sobre como resolver um sistema linear e então use seu recurso para resolver o sistema linear do Exemplo 3 da Seção 1.1. Também resolva o sistema reduzindo a matriz aumentada à forma escalonada reduzida por linhas.
- T3. (Sistemas lineares com infinitas soluções)** Os recursos computacionais variam sobre como tratam com sistemas lineares com infinitas soluções. Veja como seu recurso lida com o sistema do Exemplo 4 da Seção 1.2.
- T4. (Sistemas lineares inconsistentes)** Os recursos computacionais muitas vezes detectam sistemas lineares inconsistentes corretamente, mas podem, às vezes, ser enganados e concluir que um sistema consistente é inconsistente ou vice-versa. Isto ocorre tipicamente quando alguns dos números que aparecem nas contas são tão pequenos que os erros de arredondamento tornam difícil para o recurso determinar se eles são zero ou não. Crie alguns sistemas lineares inconsistentes e verifique como seu recurso os trata.
- T5. Um polinômio cujo gráfico passa por um conjunto dado de pontos é chamado um *polinômio interpolador* destes pontos. Alguns recursos computacionais têm comandos específicos para encontrar polinômios interpoladores. Se o seu recurso tiver esta funcionalidade, leia o manual e depois use seu recurso para resolver o Exercício 25 da Seção 1.2.**

## Seção 1.3

**T1. (Operações matriciais)** Leia em seu manual sobre como executar as operações básicas com matrizes—adição, subtração, multiplicação por escalar e multiplicação matricial. Em seguida faça as contas dos Exemplos 3, 4 e 5. Veja o que acontece quando você tenta efetuar uma operação com matrizes de tamanho inconsistente.

**T2.** Calcule o valor da expressão  $A^5 - 3A^3 + 7A - 4I$  para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

**T3. (Extraindo linhas e colunas)** Leia em seu manual sobre como extrair linhas e colunas de uma matriz e então use o seu recurso

para extrair várias linhas e colunas de matrizes de sua escolha.

- T4. (Transposta e traço)** Leia em seu manual sobre como encontrar a transposta e o traço de uma matriz e então use o seu recurso para encontrar a transposta da matriz  $A$  da Fórmula (12) e o traço da matriz  $B$  do Exemplo 11.
- T5. (Construindo uma matriz aumentada)** Leia em seu manual sobre como criar uma matriz aumentada  $[A | b]$  depois de entrar com as matrizes  $A$  e  $b$ . Em seguida use seu recurso para formar a matriz aumentada do sistema  $Ax = b$  do Exemplo 4 da Seção 1.1 a partir das matrizes  $A$  e  $b$ .

## Seção 1.4

- T1. (Matrizes zero e identidade)** Digitar entradas individuais de matrizes pode ser tedioso, por isso muitos recursos fornecem atalhos para entrar com matrizes zero e identidade. Leia em seu manual sobre como fazer isto e depois entre com matrizes zero e identidade de diversos tamanhos.
- T2. (Inversa)** Leia em seu manual sobre como encontrar a inversa de uma matriz e então use seu recurso para fazer as contas do Exemplo 7.
- T3. (Fórmula para a inversa)** Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, use-o para confirmar o Teorema 1.4.5.
- T4. (Potências de matrizes)** Leia em seu manual sobre como encontrar potências de uma matriz e então use seu recurso para encontrar várias potências positivas e negativas da matriz  $A$  do Exemplo 8.
- T5. Seja**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Descreva o que acontece à matriz  $A^k$  quando é permitido a  $k$  crescer indefinidamente (ou seja, quando  $k \rightarrow \infty$ ).

- T6. Experimentando com diversos valores de  $n$ ,** encontre uma expressão para a inversa de uma matriz  $n \times n$  da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Seção 1.5

- T1. (Matrizes Singulares)** Encontre a inversa da matriz do Exemplo 4 e então verifique o que seu recurso faz quando você tenta inverter a matriz do Exemplo 5.

## Seção 1.6

- T1. (Resolvendo  $Ax = b$  por inversão)** Use o método do Exemplo 4 para resolver o sistema do Exemplo 3 da Seção 1.1.
- T2. Resolva o sistema  $Ax = 2x$ , sendo**

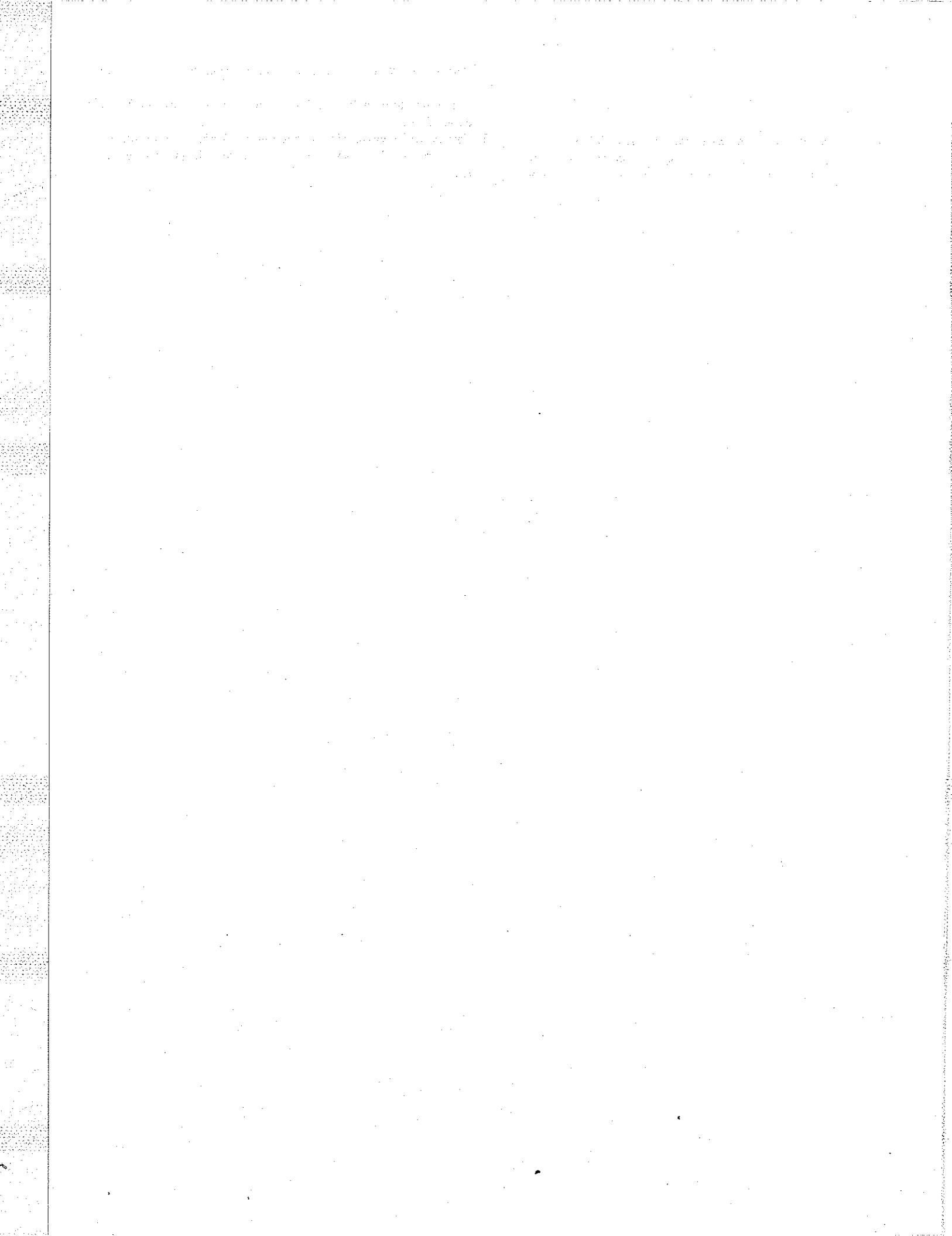
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

## Seção 1.7

**T1.** (*Matrizes diagonais, simétricas e triangulares*) Muitos recursos computacionais fornecem atalhos para entrar com matrizes diagonais, simétricas e triangulares. Leia em seu manual sobre como

conseguir isto e então experimente entrando com várias matrizes destes tipos.

**T2.** (*Propriedades de matrizes triangulares*) Confirme os resultados do Teorema 1.7.1 usando algumas matrizes triangulares de sua escolha.



# Determinantes

## Conteúdo do Capítulo

- 2.1 A Função Determinante
- 2.2 Calculando Determinantes através de Redução por Linhas
- 2.3 Propriedades da Função Determinante
- 2.4 Expansão em Co-fatores; Regra de Cramer

**INTRODUÇÃO:** Nós todos estamos familiarizados com funções do tipo  $f(x) = \sin x$  e  $f(x) = x^2$ , que associam um número real  $f(x)$  a um valor real da variável  $x$ . Como ambos  $x$  e  $f(x)$  tomam apenas valores reais, tais funções são descritas como funções reais de uma variável real. Nesta seção nós vamos estudar “funções determinante,” que são funções reais de uma variável matricial, o que significa que associam um número real  $f(X)$  a uma matriz quadrada  $X$ . Nossa trabalho com as funções determinante vai gerar aplicações importantes à teoria de sistemas de equações lineares e também vai nos levar a uma fórmula explícita da inversa de uma matriz invertível.

## 2.1 A FUNÇÃO DETERMINANTE

Como observamos na introdução a este capítulo, um “determinante” é um certo tipo de função que associa um número real a uma matriz quadrada. Nesta seção nós iremos definir esta função e aplicá-la a matrizes  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ .

Lembre do Teorema 1.4.5 que diz que a matriz  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se  $ad - bc \neq 0$ . A expressão  $ad - bc$  ocorre com tanta freqüência em Matemática que recebeu um nome: é o **determinante** da matriz  $A$  e é denotado pelo símbolo  $\det(A)$ . Com esta notação, a fórmula para  $A^{-1}$  dada no Teorema 1.4.5 é

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Um dos objetivos deste capítulo é o de obter análogos desta fórmula para matrizes quadradas de ordens maiores. Isto vai requerer que nós estendamos o conceito de um determinante para matrizes quadradas de qualquer tamanho. Para fazer isto nós precisamos de alguns resultados preliminares sobre permutações.

### Definição

Uma **permutação** do conjunto de inteiros  $\{1, 2, \dots, n\}$  é um rearranjo destes inteiros em alguma ordem sem omissões ou repetições.

### EXEMPLO 1 Permutações de Três Inteiros

Existem seis permutações distintas do conjunto de inteiros  $\{1, 2, 3\}$ , a saber,

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3) & (2, 1, 3) & (3, 1, 2) \\ (1, 3, 2) & (2, 3, 1) & (3, 2, 1) \end{array}$$

Um método conveniente de listar sistematicamente as permutações é usar uma *árvore de permutações*. Este método é ilustrado no nosso próximo exemplo.

### EXEMPLO 2 Permutações de Quatro Inteiros

Liste todas as permutações do conjunto de inteiros  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

*Solução.*

Considere a Figura 2.1.1. Os quatro pontos marcados 1, 2, 3, 4 no alto da figura, representam as possíveis escolhas para o primeiro número da permutação. Os três ramos saindo destes pontos representam as possíveis escolhas para a segunda posição na permutação. Assim, se a permutação começa com  $(2, -, -, -)$ , as três possibilidades para a segunda posição são 1, 3 e 4. Os dois ramos saindo de cada ponto na segunda posição representam as possíveis escolhas para a terceira posição. Assim, se a permutação começa com  $(2, 3, -, -)$ , as duas possíveis escolhas para a terceira posição são 1 e 4. Finalmente, o ramo simples saindo de cada ponto da terceira posição representa a única escolha possível para a quarta posição. Assim, se a permutação começa com  $(2, 3, 4, -)$ , a única escolha possível para a quarta posição é 1. As diferentes permutações podem agora ser listadas traçando todos os possíveis caminhos pela árvore desde a primeira posição até a última posição. Nós obtemos a seguinte lista neste processo.

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 3, 2)
(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(4, 2, 1, 3)
(1, 3, 4, 2)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 1, 2)
(1, 4, 3, 2)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 2, 1)

Deste exemplo vemos que existem 24 permutações de  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Este resultado poderia ter sido antecipado sem listar todas as permutações com o seguinte argumento. Como a primeira posição pode ser preenchida de quatro maneiras e então a segunda posição de três maneiras, existem  $4 \cdot 3$  maneiras de preencher as duas primeiras posições. Como a terceira posição pode ser preenchida de duas maneiras, existem  $4 \cdot 3 \cdot 2$  maneiras de preencher as três primeiras posições. Finalmente, como a última posição agora só pode ser preenchida de uma única maneira, existem  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  maneiras de preencher todas as quatro posições. Em geral, existem  $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$  permutações distintas do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Nós vamos denotar por  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  uma permutação arbitrária do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Aqui,  $j_1$  é o primeiro inteiro na permutação,  $j_2$  o segundo, e assim por diante. Ocorre uma *inversão* numa permutação sempre que um inteiro maior precede um menor. O número total de inversões que pode ocorrer numa permutação pode ser obtido como segue: (1) encontre o número de inteiros que são menores que  $j_1$  e que estão depois de  $j_1$  na permutação; (2) encontre o número de inteiros que são menores que  $j_2$  e que estão depois de  $j_2$  na permutação. Continue este processo para  $j_3, \dots, j_{n-1}$ . A soma destes números será o número total de inversões na permutação.

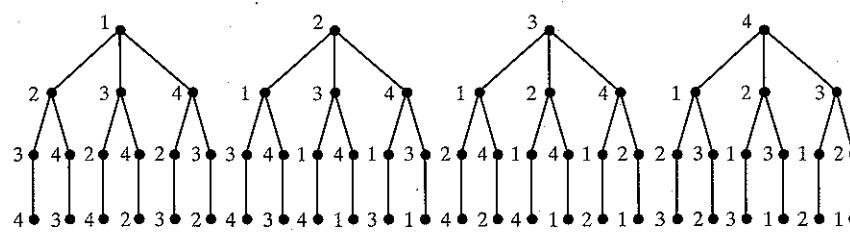


Figura 2.1.1

### EXEMPLO 3 Contando Inversões

Determine o número de inversões nas seguintes permutações.

- (a)  $(6, 1, 3, 4, 5, 2)$  (b)  $(2, 4, 1, 3)$  (c)  $(1, 2, 3, 4)$

*Solução.*

- (a) O número de inversões é  $5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$ .  
 (b) O número de inversões é  $1 + 2 + 0 = 3$ .  
 (c) Não há inversões nesta permutação.

#### Definição

Uma permutação é chamada **par** se o número total de inversões é um inteiro par e é chamada **ímpar** se o número total de inversões é ímpar.

### EXEMPLO 4 Classificando Permutações

A tabela a seguir classifica as permutações de  $\{1, 2, 3\}$  como pares e ímpares.

Permutação	Número de Inversões	Classificação
$(1, 2, 3)$	0	par
$(1, 3, 2)$	1	ímpar
$(2, 1, 3)$	1	ímpar
$(2, 3, 1)$	2	par
$(3, 1, 2)$	2	par
$(3, 2, 1)$	3	ímpar

**Definição de um Determinante** Se  $A$  é uma matriz de tamanho  $n \times n$ , dizemos que um produto de  $n$  entradas de  $A$ , tais que não há duas de mesma linha ou mesma coluna de  $A$ , é um **produto elementar** da matriz  $A$ .

### EXEMPLO 5 Produtos Elementares

Liste todos os produtos elementares das matrizes

$$(a) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

*Solução (a).* Como cada produto elementar deve ter dois fatores e como cada fator vem de uma linha distinta, um produto elementar pode ser escrito na forma

$$a_1 \cdot a_2$$

onde as lacunas designam números de colunas. Como não há dois fatores no produto vindo da mesma coluna, os números de coluna devem ser  $1 \ 2$  ou  $2 \ 1$ . Assim, os únicos produtos elementares são  $a_{11}a_{22}$  e  $a_{12}a_{21}$ .

*Solução (b).* Como cada produto elementar deve ter três fatores e como cada fator vem de uma linha distinta, um produto elementar pode ser escrito na forma

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$$

Como não há dois fatores no produto vindo da mesma coluna, os números de coluna não têm repetições; consequentemente, eles devem constituir uma permutação do conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Estas  $3! = 6$  permutações dão a lista de produtos elementares.

$$\begin{array}{lll} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{12}a_{21}a_{33} & a_{13}a_{21}a_{32} \\ a_{11}a_{23}a_{32} & a_{12}a_{23}a_{31} & a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Como este exemplo mostra, uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  tem  $n!$  produtos elementares. Esses são os produtos da forma  $a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ , onde  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  é uma permutação do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Um produto elementar  $a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  multiplicado por  $+1$  ou  $-1$  é chamado um **produto elementar com sinal** de  $A$ . Nós usamos o  $+$  se  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  é uma permutação par e o  $-$  se  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  é uma permutação ímpar.

### EXEMPLO 6 Produtos Elementares com Sinal

Liste todos os produtos elementares com sinal das matrizes

$$(a) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Produto Elementar	Permutação Associada	Par ou Ímpar	Produto Elementar com Sinal
$a_{11}a_{22}$	$(1, 2)$	par	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	$(2, 1)$	ímpar	$-a_{12}a_{21}$

Produto Elementar	Permutação Associada	Par ou Ímpar	Produto Elementar com Sinal
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$(1, 2, 3)$	par	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	$(1, 3, 2)$	ímpar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	$(2, 1, 3)$	ímpar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$(2, 3, 1)$	par	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$(3, 1, 2)$	par	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	$(3, 2, 1)$	ímpar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Nós estamos, agora, em condições de definir a função determinante

#### Definição

Seja  $A$  uma matriz quadrada. A **função determinante** é denotada por  $\det$  e nós definimos  $\det(A)$  como a soma de todos os produtos elementares com sinal de  $A$ . O número  $\det(A)$  é chamado **determinante de  $A$** .

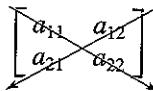
**EXEMPLO 7 Determinantes de Matrizes  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$** 

Usando as matrizes do Exemplo 6, obtemos

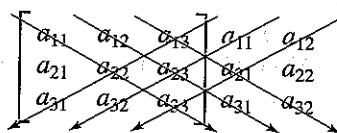
$$(a) \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(b) \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad \diamond$$

Para evitar memorizar estas expressões desajeitadas, nós sugerimos usar os recursos mnemônicos dados na Figura 2.1.2. A fórmula da parte (a) do Exemplo 7 é obtida da Figura 2.1.2a somando as entradas da flecha direcionada para a direita e subtraindo as entradas da flecha direcionada para a esquerda. A fórmula da parte (b) do Exemplo 7 é obtida acrescentando à matriz uma cópia da primeira e da segunda colunas, como mostra a Figura 2.1.2b. O determinante é, então, calculado somando as entradas das flechas direcionadas para a direita e subtraindo as entradas das flechas direcionadas para a esquerda.



(a) Determinante de uma matriz  $2 \times 2$



(b) Determinante de uma matriz  $3 \times 3$

**Figura 2.1.2**

**EXEMPLO 8 Calculando Determinantes**

Calcule os determinantes de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

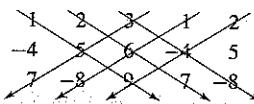
*Solução.*

Usando o método da Figura 2.1.2a, obtemos

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

Usando o método da Figura 2.1.2b, obtemos

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$



**Advertência.** Nós enfatizamos que os métodos mostrados na Figura 2.1.2 não funcionam para determinantes de matrizes  $4 \times 4$  ou maiores.

**Notação e Terminologia** Nós concluímos esta seção com alguns comentários sobre terminologia e notação. Primeiro observamos que o símbolo  $|A|$  é uma notação alternativa para  $\det(A)$ . Por exemplo, o determinante de uma matriz  $3 \times 3$  pode ser escrito como

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Na última notação, o determinante da matriz  $A$  do Exemplo 8 é escrito como

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

Estritamente falando, o determinante de uma matriz é um número. Contudo, é prática comum “abusar” um pouco da terminologia e usar o termo “determinante” para nos referirmos à matriz cujo determinante está sendo calculado. Assim, nós poderemos nos referir a

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

como um determinante  $2 \times 2$  e chamar 3 a entrada na primeira linha e primeira coluna do determinante.

Finalmente, observamos que, muitas vezes, o determinante de  $A$  é escrito simbolicamente como

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1)$$

onde  $\Sigma$  indica que os termos devem ser somados sobre todas as permutações  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  e o + ou - é selecionado em cada parcela de acordo com a permutação sendo par ou ímpar. Esta notação é útil quando queremos enfatizar a definição de um determinante.

**OBSERVAÇÃO.** Calcular determinantes diretamente da definição leva a dificuldades computacionais. De fato, calcular um determinante  $4 \times 4$  diretamente envolveria calcular  $4! = 24$  produtos elementares com sinal e um determinante  $10 \times 10$  envolveria calcular  $10! = 3.628.800$  produtos elementares com sinal. Mesmo os mais rápidos computadores digitais não conseguem dar conta em um tempo razoável dos cálculos de um determinante  $25 \times 25$  por este método. Muito do que segue neste capítulo será dedicado, portanto, a desenvolver propriedades dos determinantes que vão simplificar o seu cálculo.

### Conjunto de Exercícios 2.1

- Encontre o número de inversões em cada uma das seguintes permutações de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 
  - (4 1 3 5 2)
  - (5 3 4 2 1)
  - (3 2 5 4 1)
  - (5 4 3 2 1)
  - (1 2 3 4 5)
  - (1 4 2 3 5)
- Classifique cada uma das permutações do Exercício 1 como par ou ímpar.

Nos Exercícios 3–12, calcule o determinante.

$$\begin{array}{ll}
 3. \left| \begin{array}{cc} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{array} \right| & 4. \left| \begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{array} \right| \quad 5. \left| \begin{array}{cc} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{array} \right| \quad 6. \left| \begin{array}{ccc} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{array} \right| \quad 7. \left| \begin{array}{cc} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{array} \right| \quad 8. \left| \begin{array}{ccc} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{array} \right| \\
 9. \left| \begin{array}{ccc} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{array} \right| & 10. \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{array} \right| \quad 11. \left| \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{array} \right| \quad 12. \left| \begin{array}{ccc} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{array} \right|
 \end{array}$$

- Encontre todos os valores de  $\lambda$  para os quais  $\det(A) = 0$ .

$$\begin{array}{ll}
 (a) \left[ \begin{array}{cc} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{array} \right] & (b) \left[ \begin{array}{ccc} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

- Classifique cada permutação de  $\{1, 2, 3, 4\}$  como par ou ímpar.
- Use as respostas do Exercício 14 para construir uma fórmula para o determinante de uma matriz  $4 \times 4$ .
- Use a fórmula obtida no Exercício 15 para calcular

$$\left| \begin{array}{cccc} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right|$$

- Use a definição de determinante para calcular

$$\begin{array}{ll}
 (a) \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| & (b) \left| \begin{array}{cccccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|
 \end{array}$$

- Resolva em  $x$ .

$$\left| \begin{array}{cc} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{array} \right|$$

- Mostre que o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta - \cos \theta & \sin \theta + \cos \theta & 1 \end{vmatrix}$$

não depende de  $\theta$ .

- Prove que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

### Discussão e Descoberta

- Explique por que o determinante de uma matriz  $n \times n$  com entradas inteiras deve ser um inteiro.

22. O que você pode dizer sobre o determinante de uma matriz  $n \times n$  cujas entradas são todas 1? Explique seu raciocínio.
23. (a) Explique por que o determinante de uma matriz  $n \times n$  com uma linha de zeros deve ser zero.  
 (b) Explique por que o determinante de uma matriz  $n \times n$  com uma coluna de zeros deve ser zero.
24. Use a Fórmula (1) para descobrir uma fórmula para o determinante de uma matriz  $n \times n$  diagonal. Expressse sua fórmula em palavras.
25. Use a Fórmula (1) para descobrir uma fórmula para o determinante de uma matriz  $n \times n$  triangular superior. Expressse sua fórmula em palavras. Faça o mesmo para uma matriz triangular inferior.

## 2.2 CALCULANDO DETERMINANTES ATRAVÉS DE REDUÇÃO POR LINHAS

Nesta seção nós vamos mostrar que o determinante de uma matriz quadrada pode ser calculado através da redução da matriz à forma escalonada reduzida por linhas. Este método é importante pois evita os longos cálculos envolvidos na aplicação direta da definição de determinante.

**Um Teorema Básico** Como discutimos no final da seção anterior, a definição de determinante é útil para provar teoremas sobre determinantes, mas não fornece meios práticos para calculá-los, especialmente determinante de matrizes maiores do que  $3 \times 3$ . Por causa disto, começamos com um teorema fundamental que nos levará a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz de qualquer tamanho  $n$ .

### Teorema 2.2.1

Seja  $A$  uma matriz quadrada.

- (a) Se  $A$  tem uma linha ou uma coluna de zeros, então  $\det(A) = 0$ .  
 (b)  $\det(A) = \det(A^T)$ .

Prova (a). Como cada produto elementar com sinal de  $A$  tem um fator de cada linha e um fator de cada coluna, segue-se que cada produto elementar com sinal necessariamente tem um fator de uma linha de zeros ou de uma coluna de zeros. Nestes casos, cada produto elementar com sinal é zero e portanto  $\det(A)$ , que é uma soma de produtos elementares com sinal, é zero. ■

Nós omitimos a prova da parte (b), mas lembramos que um produto elementar tem um fator de cada linha e de cada coluna, de modo que é evidente que  $A$  e  $A^T$  têm precisamente o mesmo conjunto de produtos elementares. Com a ajuda de alguns teoremas sobre permutações, que nos levariam para muito longe dos nossos propósitos, pode ser mostrado que na realidade  $A$  e  $A^T$  têm o mesmo conjunto de produtos elementares com sinal. Isto implica que  $\det(A) = \det(A^T)$ .

**OBSERVAÇÃO.** Por causa do Teorema 2.2.1b, quase cada teorema sobre determinantes que contém a palavra “linha” em seu enunciado, também é verdadeiro se substituirmos a palavra “linha” por “coluna”. Para provar uma afirmação sobre colunas, basta transpor a matriz em questão para converter a afirmação sobre

colunas numa afirmação sobre linhas e em seguida aplicar o resultado conhecido para as linhas.

**Matrizes Triangulares** O próximo teorema torna fácil calcular o determinante de uma matriz triangular, independentemente de seu tamanho.

### Teorema 2.2.2

Se  $A$  é uma matriz triangular (triangular superior, triangular inferior ou diagonal) de tamanho  $n \times n$ , então  $\det(A)$  é o produto das entradas na diagonal principal da matriz; ou seja,  $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ .

Para simplificar a notação, nós vamos provar este resultado para matrizes triangulares inferiores.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

de tamanho  $4 \times 4$ . O argumento no caso  $n \times n$  é similar. Uma prova para matrizes triangulares superiores pode ser obtido aplicando o Teorema 2.2.1b e observando que a transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular inferior com as mesmas entradas na diagonal.

*Prova do Teorema 2.2.2 (caso triangular inferior  $4 \times 4$ ).* O único produto elementar de  $A$  que pode ser não-nulo é  $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ . Para ver isto, considere um produto elementar  $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$  típico. Como  $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ , precisamos ter  $j_1 = 1$  para obter um produto elementar não-nulo. Se  $j_1 = 1$ , devemos ter  $j_2 \neq 1$ , pois dois fatores não podem vir da mesma coluna. Além disso, como  $a_{23} = a_{24} = 0$ , precisamos ter  $j_2 = 2$  para obter um produto elementar não-nulo. Continuando deste modo, obtemos  $j_3 = 3$  e  $j_4 = 4$ . Como  $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$  é multiplicado por +1 para formar o produto elementar com sinal, resulta

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

### EXEMPLO 1 Determinante de uma Matriz Triangular Superior

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

**Operações Elementares sobre Linhas** O próximo teorema mostra como uma operação elementar sobre linhas de uma matriz afeta o valor de seu determinante.

### Teorema 2.2.3

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .

- Se  $B$  é a matriz que resulta quando uma única linha ou uma única coluna de  $A$  é multiplicada por um escalar  $k$ , então  $\det(B) = k \det(A)$ .
- Se  $B$  é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de  $A$  são permutadas, então  $\det(B) = -\det(A)$ .
- Se  $B$  é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de  $A$  é somado a uma outra linha ou quando um múltiplo de uma coluna de  $A$  é somado a uma outra coluna, então  $\det(B) = \det(A)$ .

Uma prova deste teorema pode ser obtida usando a Fórmula (1) da Seção 2.1 para calcular os determinantes envolvidos e depois verificar sua igualdade. Nós omitimos a prova mas damos o seguinte exemplo que ilustra o teorema para determinantes  $3 \times 3$ .

### EXEMPLO 2 O Teorema 2.2.3 Aplicado a Determinantes $3 \times 3$

Relação	Operação
$ka_{11} \quad ka_{12} \quad ka_{13}$ $a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}$ $a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}$ $= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	A primeira linha de $A$ é multiplicada por $k$ . $\det(B) = k \det(A)$
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	A primeira e a segunda linhas de $A$ são permutadas. $\det(B) = -\det(A)$
$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	Um múltiplo da segunda linha de $A$ é somado à primeira linha. $\det(B) = \det(A)$

Nós vamos verificar a equação da última linha da tabela e deixar as duas primeiras para o leitor. Com a ajuda do Exemplo 7 da Seção 2.1, nós obtemos

$$\begin{aligned} \det(B) &= (a_{11} + ka_{21})a_{22}a_{33} + (a_{12} + ka_{22})a_{23}a_{31} + (a_{13} + ka_{23})a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}(a_{13} + ka_{23}) - a_{33}a_{21}(a_{12} + ka_{22}) - a_{32}a_{23}(a_{11} + ka_{21}) \\ &= \det(A) + k(a_{21}a_{22}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{21} \\ &= \det(A) + 0 = \det(A) \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. Como está sendo ilustrado pela primeira equação no Exemplo 2, a parte (a) do Teorema 2.2.3 permite-nos tirar um

“fator comum” de qualquer linha (ou coluna) para fora do sinal de determinante.

**Matrizes Elementares** Lembre que uma matriz elementar é o resultado de efetuar uma única operação elementar sobre as linhas de uma matriz identidade; assim, se nós tomarmos  $A = I_n$  no Teorema 2.2.3 [de modo que  $\det(A) = \det(I_n) = 1$ ], então a matriz  $B$  será uma matriz elementar e o teorema fornecerá o seguinte resultado sobre determinantes de matrizes elementares.

### Teorema 2.2.4

Seja  $E$  uma matriz elementar  $n \times n$ .

- Se  $E$  resulta de multiplicar uma linha de  $I_n$  por  $k$ , então  $\det(E) = k$ .
- Se  $E$  resulta de permutar duas linhas de  $I_n$ , então  $\det(E) = -1$ .
- Se  $E$  resulta de somar um múltiplo de uma linha de  $I_n$  a uma outra linha, então  $\det(E) = 1$ .

### EXEMPLO 3 Determinantes de Matrizes Elementares

Os seguintes determinantes de matrizes elementares, que são calculados por inspeção, ilustram o Teorema 2.2.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

A primeira e última linhas de  $I_4$  foram 7 vezes a última linha de  $I_4$  foi somada à primeira.

### Matrizes com Linhas ou Colunas Proporcionais

Se uma matriz quadrada  $A$  tem duas linhas proporcionais, então pode ser introduzida uma linha de zeros somando um múltiplo conveniente de uma das duas linhas à outra. Similarmente para colunas. Mas somando um múltiplo de uma linha ou coluna a uma outra não muda o determinante, de modo que, pelo Teorema 2.2.1a, nós devemos ter  $\det(A) = 0$ . Isto prova o seguinte teorema.

### Teorema 2.2.5

Se  $A$  é uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então  $\det(A) = 0$ .

### EXEMPLO 4 Introduzindo Linhas de Zeros

O próximo cálculo ilustra a introdução de uma linha de zeros quando há duas linhas proporcionais:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{array} \right| = 0$$

A segunda linha é 2 vezes a primeira, portanto somamos -2 vezes a primeira linha à segunda para introduzir uma linha de zeros.

Cada uma das seguintes matrizes tem duas linhas ou colunas proporcionais; assim, cada uma tem determinante zero.

$$\left[ \begin{array}{cc} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{array} \right]$$

**Calculando Determinantes através de Redução por Linhas** Nós vamos dar agora um método para calcular determinantes que envolve substancialmente menos contas que aplicando a definição diretamente. A idéia do método é primeiro reduzir a matriz dada ao formato triangular superior por operações elementares, depois calcular o determinante da matriz triangular superior (uma conta fácil) e finalmente relacionar aquele determinante com o da matriz original. Vejamos um exemplo.

### EXEMPLO 5 Usando Redução por Linhas para Calcular um Determinante

Calcule  $\det(A)$ , onde

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

Solução.

Nós vamos reduzir  $A$  a uma forma escalonada (que é triangular superior) e aplicar o Teorema 2.2.3:

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{array} \right|$$

A primeira e segunda linhas de  $A$  foram permutadas.

$$= -3 \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{array} \right|$$

Um fator comum de 3 da primeira linha foi retirado através do determinante.

$$= -3 \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{array} \right|$$

-2 vezes a primeira linha foi somado à terceira linha.

$$= -3 \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{array} \right|$$

-10 vezes a segunda linha foi somado à terceira linha.

$$= (-3)(-55) \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Um fator comum de -55 da última linha foi retirado através do determinante.

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

OBSERVAÇÃO. O método de redução por linhas, por ser sistemático e facilmente programável, é muito conveniente para calcular determinantes usando computadores. No entanto, em seções subsequentes nós iremos desenvolver métodos que, em geral, são mais fáceis para cálculos à mão.

### EXEMPLO 6 Usando Operações sobre Colunas para Calcular Determinantes

Calcule o determinante de

$$A = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{array} \right]$$

Solução.

Este determinante poderia ser calculado como o anterior usando operações elementares sobre linhas para reduzir  $A$  à forma escalonada, mas nós podemos colocar  $A$  em forma triangular inferior em um passo, somando -3 vezes a primeira à quarta coluna para obter

$$\det(A) = \det \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{array} \right] = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Este exemplo ressalta a utilidade de manter a atenção voltada às operações sobre colunas que podem encurtar nossas contas. ♦

### Conjunto de Exercícios 2.2

1. Verifique que  $\det(A) = \det(A^T)$  para

$$(a) A = \left[ \begin{array}{cc} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{array} \right] \quad (b) A = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{array} \right]$$

2. Calcule os seguintes determinantes por inspeção.

$$(a) \left| \begin{array}{ccc} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right| \quad (b) \left| \begin{array}{cccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right|$$

$$(c) \left| \begin{array}{ccc} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{array} \right| \quad (d) \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{array} \right|$$

3. Calcule os determinantes das seguintes matrizes por inspeção.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 4–11, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

$$4. \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$11. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$12. \text{ Sabendo que } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6, \text{ encontre}$$

$$(a) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$$

13. Use redução por linhas para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

14. Use um argumento como o que foi dado na prova do Teorema 2.2.2 para mostrar que

$$(a) \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$(b) \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

15. Prove os seguintes casos especiais do Teorema 2.2.3.

$$(a) \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## Discussão e Descoberta

16. Em cada parte, encontre  $\det(A)$  por inspeção, explicando seu raciocínio.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Por inspeção, resolva a equação

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Explique seu raciocínio.

18. (a) Por inspeção, encontre duas soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(b) É possível haver outras soluções? Justifique sua resposta.

## 2.3 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DETERMINANTE

Nesta seção nós vamos desenvolver algumas das propriedades fundamentais da função determinante. Nosso trabalho aqui nos dará uma compreensão mais profunda da relação entre uma matriz quadrada e seu determinante. Uma das consequências imediatas deste material será um teste de determinante para a invertibilidade de uma matriz.

### Propriedades Básicas dos Determinantes

Suponha que  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$  e que  $k$  é um escalar qualquer. Começamos considerando as possíveis relações entre  $\det(A)$ ,  $\det(B)$  e

$$\det(kA), \det(A + B) \text{ e } \det(AB)$$

Como um fator comum de qualquer linha de uma matriz pode ser carregado para fora do sinal  $\det$  e como cada uma das  $n$  linhas de  $A$  tem o fator  $k$  em comum, obtemos

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad (1)$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Infelizmente, em geral não existem relações simples entre  $\det(A)$ ,  $\det(B)$  e  $\det(A + B)$ . Em particular, enfatizamos que  $\det(A + B)$  geralmente não é igual a  $\det(A) + \det(B)$ . O seguinte exemplo ilustra este fato.

### EXEMPLO 1 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Nós temos  $\det(A) = 1$ ,  $\det(B) = 8$  e  $\det(A + B) = 23$ ; assim,

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Não obstante o aspecto negativo do exemplo precedente, existe uma relação importante que trata de somas de determinantes e que é muitas vezes útil. Para obtê-la, considere duas matrizes  $2 \times 2$  que só diferem na segunda linha:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Nós temos

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Este é um caso especial do seguinte resultado geral.

### Teorema 2.3.1

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes  $n \times n$  que diferem somente em uma única linha, digamos a  $r$ -ésima, e suponha que a  $r$ -ésima linha de  $C$  pode ser obtida somando as entradas correspondentes nas  $r$ -ésimas linhas de  $A$  e  $B$ . Então

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

O mesmo resultado vale para colunas.

### EXEMPLO 2 Usando o Teorema 2.3.1

Calculando os determinantes, o leitor pode verificar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Determinante de um Produto Matricial** Quando nós consideramos a complexidade das definições de multiplicação matricial e de determinantes, parece-nos ser improvável poder haver alguma relação simples entre estes conceitos. Isto é o que faz tão surpreendente a elegante simplicidade do seguinte resultado: Nós vamos mostrar que se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad (2)$$

A prova deste teorema é razoavelmente complexa, de modo que vamos precisar desenvolver primeiro alguns resultados preliminares. Nós começamos com o caso especial de (2) em que  $A$  é uma matriz elementar. Como este caso especial é só um prelúdio para (2), vamos chamá-lo de lema.

### Lema 2.3.1

Se  $B$  é uma matriz  $n \times n$  e  $E$  é uma matriz elementar  $n \times n$ , então

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

*Prova.* Nós vamos considerar três casos, um para cada uma das operações sobre linhas que produz a matriz  $E$ .

*Caso 1.* Se  $E$  é o resultado da multiplicação de uma linha de  $I_n$  por  $k$ , então, pelo Teorema 1.5.1, o resultado da multiplicação de uma linha de  $B$  por  $k$  é  $EB$ ; logo, pelo Teorema 2.2.3a nós temos  $\det(EB) = k \det(B)$

Mas pelo Teorema 2.2.4a sabemos que  $\det(E) = k$ , logo

$$\det(EB) = \det(E) \det(B)$$

*Casos 2 e 3.* As provas dos casos em que  $E$  é o resultado da troca de duas linhas de  $I_n$  entre si ou da soma de um múltiplo de uma linha a uma outra linha de  $I_n$ , seguem o mesmo padrão do Caso 1 e são deixadas como exercícios. ■

**OBSERVAÇÃO.** Da aplicação repetida do Lema 2.3.2 segue que se  $B$  é uma matriz  $n \times n$  e se  $E_1, E_2, \dots, E_r$  são matrizes elementares  $n \times n$ , então

$$\det(E_1 E_2 \cdots E_r B) = \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_r) \det(B) \quad (3)$$

Por exemplo,

$$\det(E_1 E_2 B) = \det(E_1) \det(E_2 B) = \det(E_1) \det(E_2) \det(B)$$

**Teste de Determinante para a Invertibilidade** O próximo é um dos mais fundamentais teoremas de Álgebra Linear; ele fornece um critério importante para a invertibilidade em termos de determinantes e será usado para provar (2).

### Teorema 2.3.3

*Uma matriz quadrada  $A$  é invertível se, e somente se,  $\det(A) \neq 0$ .*

*Prova.* Seja  $R$  a forma escalonada reduzida por linhas de  $A$ . Como um passo preliminar vamos mostrar que  $\det(A)$  e  $\det(R)$  são ambos nulos ou ambos não-nulos. Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_r$  as matrizes elementares que correspondem às operações elementares sobre linhas que produzem  $R$  a partir de  $A$ . Assim,

$$R = E_r \cdots E_2 E_1 A$$

e por (3)

$$\det(R) = \det(E_r) \cdots \det(E_2) \det(E_1) \det(A) \quad (4)$$

Mas pelo Teorema 2.2.4, os determinantes das matrizes elementares são todos não-nulos. (Não esqueça que multiplicar por zero não é uma operação elementar permitida, de modo que  $k \neq 0$  nesta aplicação do Teorema 2.2.4.) Assim, segue de (4) que  $\det(A)$  e  $\det(R)$  são ambos nulos ou ambos não-nulos. Agora passamos à parte principal da prova.

Se  $A$  é invertível, então pelo Teorema 1.6.4 nós temos  $R = I$ , de modo que  $\det(R) = 1 \neq 0$  e consequentemente  $\det(A) \neq 0$ . Reciprocamente, se  $\det(A) \neq 0$ , então  $\det(R) \neq 0$  e portanto  $R$  não pode ter uma linha de zeros. Segue do Teorema 1.4.3 que  $R = I$ , de modo que  $A$  é invertível pelo Teorema 1.6.4. ■

Segue dos Teoremas 2.3.3 e 2.2.5 que uma matriz quadrada com duas linhas ou duas colunas proporcionais é não-invertível.

### EXEMPLO 3 Testando Invertibilidade por Determinantes

Como a primeira e terceira linhas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

são proporcionais,  $\det(A) = 0$ . Assim,  $A$  é não-invertível. ■

Nós estamos agora prontos para o principal resultado desta seção.

### Teorema 2.3.4

*Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$*

*Prova.* Nós dividimos a prova em dois casos, considerando  $A$  invertível ou não. Se a matriz  $A$  é não-invertível, então pelo Teorema 1.6.5 tampouco o produto  $AB$  o é. Assim, pelo Teorema 2.3.3, nós temos  $\det(AB) = 0$  e  $\det(A) = 0$ , de modo que  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

Suponha agora, que  $A$  é invertível. Pelo Teorema 1.6.4, a matriz  $A$  pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, digamos

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r \quad (5)$$

e portanto

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_r B$$

Aplicando (3) a esta equação, obtemos

$$\det(AB) = \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_r) \det(B)$$

e aplicando novamente (3), resulta

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_r B)$$

que, por (5), pode ser reescrito como  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ . ■

### EXEMPLO 4 Verificando que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Nós deixamos para o leitor verificar que

$$\det(A) = 1, \det(B) = -23 \text{ e } \det(AB) = -23$$

Assim,  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ , como garante o Teorema 2.3.4. ■

O próximo teorema dá uma relação útil entre o determinante de uma matriz invertível e o determinante da sua inversa.

**Teorema 2.3.5**

*Se  $A$  é invertível, então*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

*Prova.* Como  $A^{-1}A = I$ , segue que  $\det(A^{-1}A) = \det(I)$ . Logo, devemos ter  $\det(A^{-1})\det(A) = 1$ . Como  $\det(A) \neq 0$ , a prova pode ser completada dividindo ambos os lados desta equação por  $\det(A)$ . ■

**Sistemas Lineares da Forma  $Ax = \lambda x$**  Muitas aplicações da Álgebra Linear envolvem sistemas de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas que aparecem no formato

$$Ax = \lambda x \quad (6)$$

onde  $\lambda$  é um escalar. Tais sistemas são, realmente, sistemas homogêneos disfarçados, pois (6) pode ser reescrito como  $\lambda x - Ax = 0$  ou, inserindo uma matriz identidade e fatorando, como

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (7)$$

Aqui temos um exemplo.

**EXEMPLO 5 Encontrando  $\lambda I - A$** 

O sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \quad (7)$$

pode ser escrito em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que é do formato (6) com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema pode ser reescrito como

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é do formato (7), com

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

O problema primordial que nos interessa em relação aos sistemas no formato (7) é determinar para quais valores de  $\lambda$  o sistema tem uma solução não-trivial; um tal valor de  $\lambda$  é chamado *autovalor de  $A$* , ou *valor próprio* ou, às vezes, *valor característico de  $A$* .

de  $A$ . Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , então cada solução não-trivial de (7) é chamada um *autovetor de  $A$*  associado ao autovalor  $\lambda$ .

Segue do Teorema 2.3.3 que o sistema  $(\lambda I - A)x = 0$  tem uma solução não-trivial se, e somente se,

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (8)$$

Esta equação é chamada *equação característica de  $A$* ; os autovalores de  $A$  podem ser encontrados resolvendo esta equação em  $\lambda$ .

Os autovalores e autovetores serão estudados novamente nos capítulos subsequentes, onde nós iremos discutir sua interpretação geométrica e desenvolver suas propriedades mais profundamente.

**EXEMPLO 6 Autovalores e Autovetores**

Encontre os autovalores e correspondentes autovetores da matriz  $A$  do Exemplo 5.

*Solução.*

A equação característica de  $A$  é

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

A forma fatorada desta equação é  $(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0$ , de modo que os autovalores de  $A$  são  $\lambda = -2$  e  $\lambda = 5$ .

Por definição,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de  $A$  se, e somente se,  $x$  é uma solução não-trivial de  $(\lambda I - A)x = 0$ ; ou seja,

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se  $\lambda = -2$ , então (9) é dada por

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos (verifique)  $x_1 = -t$ ,  $x_2 = t$ , de modo que os autovetores associados a  $\lambda = -2$  são as soluções não-nulas da forma

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$

Novamente, por (9), os autovetores correspondendo a  $\lambda = 5$  são as soluções não-triviais de

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nós deixamos ao leitor resolver este sistema e mostrar que os autovetores de  $A$  correspondentes a  $\lambda = 5$  são as soluções não-nulas da forma

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix}$$

**Resumo** No Teorema 1.6.4 nós listamos cinco resultados que são equivalentes à invertibilidade da matriz  $A$ . Nós concluímos esta seção juntando o Teorema 2.3.3 à lista para obter o seguinte teorema que relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

**Teorema 2.3.6****Afirmações Equivalentes**

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a)  $A$  é invertível.

- (b)  $Ax = \mathbf{0}$  só tem a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- (d)  $A$  pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.
- (e)  $Ax = \mathbf{b}$  é consistente para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (f)  $Ax = \mathbf{b}$  tem exatamente uma solução para cada matriz  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .
- (g)  $\det(A) \neq 0$ .

**Conjunto de Exercícios 2.3**

1. Verifique que  $\det(kA) = k^n \det(A)$  para

$$(a) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; k = 2 \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}; k = -2$$

2. Verifique que  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Por inspeção, explique por que  $\det(A) = 0$ .

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Use o Teorema 2.3.3 para determinar quais das seguintes matrizes são invertíveis.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Supondo que  $\det(A) = -7$ , obtenha

$$(a) \det(3A) \quad (b) \det(A^{-1}) \quad (c) \det(2A^{-1}) \quad (d) \det((2A)^{-1}) \quad (e) \det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$$

6. Sem calcular diretamente, mostre que  $x = 0$  e  $x = 2$  satisfazem

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

## 90 • • • Álgebra Linear com Aplicações

7. Sem calcular diretamente, mostre que

$$\det \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nos Exercícios 8–11, prove a identidade sem calcular os determinantes.

$$8. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 t & a_2 + b_2 t & a_3 + b_3 t \\ a_1 t + b_1 & a_2 t + b_2 & a_3 t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - t^2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ta_1 & c_1 + rb_1 + sa_1 \\ a_2 & b_2 + ta_2 & c_2 + rb_2 + sa_2 \\ a_3 & b_3 + ta_3 & c_3 + rb_3 + sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

12. Encontre o(s) valor(es) de  $k$  que faz(em)  $A$  não-invertível.

$$(a) A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

13. Use o Teorema 2.3.3 para mostrar que

$$\begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & \sin^2 \beta & \sin^2 \gamma \\ \cos^2 \alpha & \cos^2 \beta & \cos^2 \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é não-invertível para quaisquer valores de  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ .

14. Expresse os seguintes sistemas lineares no formato  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

$$(a) \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \quad (b) \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \quad (c) \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ -5x_1 - 3x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

15. Para cada um dos sistemas do Exercício 14, encontre

- (i) a equação característica;
- (ii) os autovalores;
- (iii) os autovetores associados a cada autovalor.

16. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Mostre que se  $A$  é invertível, então  $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$ .

17. (a) Expresse

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes cujas entradas não contém somas.

(b) Expresse

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 & e_1 + f_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 & e_2 + f_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 + d_3 & e_3 + f_3 \end{vmatrix}$$

como uma soma de oito determinantes cujas entradas não contêm somas.

18. Prove que uma matriz quadrada  $A$  é invertível se, e somente se,  $A^T A$  é invertível.

19. Prove os Casos 2 e 3 do Lema 2.3.2.

## Discussão e Descoberta

20. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Você já sabe, pelo que foi visto antes, que  $A B$  e  $B A$  não precisam coincidir. Vale o mesmo para  $\det(A B)$  e  $\det(B A)$ ? Explique seu raciocínio.
21. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Você já sabe, pelo que foi visto antes, que  $A B$  é invertível se  $A$  e  $B$  são invertíveis. O que você sabe dizer sobre a invertibilidade de  $A B$  se um ou ambos fatores são singulares? Explique seu raciocínio.
22. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
  - (a)  $\det(2A) = 2 \det(A)$
  - (b)  $|A^2| = |A|^2$
  - (c)  $\det(I + A) = 1 + \det(A)$
  - (d) Se  $\det(A) = 0$ , então o sistema homogêneo  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem infinitas soluções.
23. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
  - (a) Se  $\det(A) = 0$ , então  $A$  pode ou pode não ser expressa como um produto de matrizes elementares.
  - (b) Se a forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  tiver uma linha de zeros, então  $\det(A) = 0$ .
  - (c) O determinante de uma matriz permanece inalterado se escrevemos as colunas em ordem inversa.
  - (d) Não existe matriz quadrada  $A$  para a qual  $\det(A A^T) = -1$ .

## 2.4 EXPANSÃO EM CO-FATORES; REGRA DE CRAMER

Nesta seção nós vamos considerar um método para calcular determinantes que é útil para cálculos manuais e também é importante para a teoria. Como uma consequência do nosso trabalho, nós vamos obter uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível, bem como uma fórmula para a solução de certos sistemas de equações lineares em termos de determinantes.

**Menores e Co-fatores** No Exemplo 7 da Seção 2.1 nós vimos que o determinante de uma matriz  $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

é o número

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1)$$

Rearranjando os termos e fatorando, (1) pode ser reescrito como  
 $\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (2)$

As expressões destacadas em cor em (2) são, elas mesmas, determinantes:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

As submatrizes de  $A$  que aparecem nestes determinantes têm um nome especial.

### Definição

Se  $A$  é uma matriz quadrada, então o **determinante menor da entrada  $a_{ij}$** , ou simplesmente o **menor de  $a_{ij}$** , é denotado por  $M_{ij}$  e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$ . O número  $(-1)^{i+j} M_{ij}$  é denotado por  $C_{ij}$  e é chamado o **co-fator de  $a_{ij}$** .

### EXEMPLO 1 Encontrando Menores e Co-fatores

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O menor de  $a_{11}$  é

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

O co-fator de  $a_{11}$  é

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Similarmente, o menor de  $a_{32}$  é

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

O co-fator de  $a_{32}$  é

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

Note que a diferença entre o co-fator e o menor de um elemento  $a_{ij}$  é somente de sinal, ou seja,  $C_{ij} = \pm M_{ij}$ . Uma maneira rápida de determinar se deve ser usado + ou - é observar que o sinal relacionando  $C_{ij}$  e  $M_{ij}$  é o que está na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna do arranjo em forma de tabuleiro de xadrez.

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Por exemplo,  $C_{11} = M_{11}$ ,  $C_{21} = -M_{21}$ ,  $C_{12} = -M_{12}$ ,  $C_{22} = M_{22}$  e assim por diante.

**Expansão em Co-fatores** Tendo em vista a definição acima, a expressão em (2) pode ser escrita em termos de menores e co-fatores como

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}M_{11} + a_{12}(-M_{12}) + a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}\end{aligned}\quad (3)$$

As equações em (3) mostram que o determinante de  $A$  pode ser calculado multiplicando as entradas da primeira linha de  $A$  pelos co-fatores correspondentes e somando os produtos que resultam. Este método de calcular  $\det(A)$  é chamado *expansão em co-fatores* ao longo da primeira linha de  $A$ .

### EXEMPLO 2 Expansão em Co-fatores ao longo da Primeira Linha

Seja  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ . Calcule  $\det(A)$  por expansão em co-fatores ao longo da primeira linha de  $A$ .

*Solução.*

Por (3),

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1\end{aligned}$$

Rearranjando os termos em (1) de outras maneiras, é possível obter outras fórmulas como (3). Não deveria haver dificuldades em conferir que todas as seguintes fórmulas são verdadeiras (ver Exercício 28):

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}\end{aligned}\quad (4)$$

Note que em cada equação as entradas e os co-fatores são todos da mesma linha ou coluna. Estas equações são chamadas *expansões em co-fatores* de  $\det(A)$ .

Os resultados que acabamos de ver para matrizes  $3 \times 3$  formam um caso especial do seguinte teorema geral, que enunciaremos sem prova.

#### Teorema 2.4.1 Expansão em Co-fatores

O determinante de uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  pode ser calculado multiplicando as entradas de qualquer linha (ou coluna) pelos seus co-fatores e somando os produtos resultantes, ou seja, para quaisquer  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} \quad (\text{expansão em co-fatores ao longo da } j\text{-ésima coluna})$$

e

$$\det(A) = a_{ij}C_{ij} + a_{1j}C_{1j} + \dots + a_{nj}C_{nj} \quad (\text{expansão em co-fatores ao longo da } i\text{-ésima linha})$$

### EXEMPLO 3 Expansão em Co-fatores ao longo da Primeira Coluna

Seja  $A$  a matriz do Exemplo 2. Calcule  $\det(A)$  expandindo em co-fatores ao longo da primeira coluna de  $A$ .

*Solução.*

Por (4),

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1\end{aligned}$$

Isto confere com o resultado obtido no Exemplo 2. ♦

OBSERVAÇÃO. Neste exemplo, nós precisamos calcular três co-fatores, mas no Exemplo 2 nós só precisamos calcular dois deles, pois o terceiro foi multiplicado por zero. Em geral, a melhor estratégia para calcular o determinante pela expansão em co-fatores é expandindo ao longo da linha ou coluna que tem o maior número de zeros.

A expansão em co-fatores e as operações elementares com linhas e colunas podem, às vezes, ser usadas em conjunto para fornecer um meio efetivo de calcular determinantes. O exemplo seguinte ilustra esta idéia.

### EXEMPLO 4 Operações com Linhas e Expansão em Co-fatores

Calcule  $\det(A)$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Somando múltiplos convenientes da segunda linha às demais linhas, nós obtemos

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad \xleftarrow{\text{Expansão em co-fatores ao longo da primeira coluna.}} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \xleftarrow{\text{Nós somamos a primeira linha à terceira linha.}} \\ &= -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \xleftarrow{\text{Expansão em co-fatores ao longo da primeira coluna.}} \\ &= -18\end{aligned}$$

**Adjunta de uma Matriz** Na expansão em co-fatores nós calculamos  $\det(A)$  multiplicando as entradas de uma linha ou

coluna pelos seus co-fatores e somando os produtos resultantes. Ocorre que se nós multiplicamos as entradas de uma linha qualquer pelos co-fatores de uma *outra* linha diferente, a soma dos produtos resultantes é sempre zero. (Este resultado também vale para colunas.) Mesmo omitindo a prova geral, o próximo exemplo ilustra a idéia da prova num caso especial.

### EXEMPLO 5 Entradas e Co-fatores de Linhas Diferentes

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Considere a expressão

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$$

que é formada multiplicando as entradas da primeira linha pelos co-fatores das entradas correspondentes da terceira linha e somando os produtos resultantes. Usando o artifício a seguir, nós vamos mostrar que esta quantidade é zero. Construa uma nova matriz  $A'$  substituindo a terceira linha de  $A$  com uma cópia da primeira linha. Assim,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Sejam  $C'_{31}$ ,  $C'_{32}$  e  $C'_{33}$  os co-fatores das entradas da terceira linha de  $A'$ . Como as duas primeiras linhas de  $A$  e  $A'$  são as mesmas e como os cálculos para obter  $C_{31}$ ,  $C_{32}$ ,  $C_{33}$ ,  $C'_{31}$ ,  $C'_{32}$  e  $C'_{33}$  envolvem somente as entradas das duas primeiras linhas de  $A$  e  $A'$ , segue que

$$C_{31} = C'_{31}, \quad C_{32} = C'_{32}, \quad C_{33} = C'_{33}$$

Como  $A'$  tem duas linhas idênticas,

$$\det(A') = 0 \quad (5)$$

Por outro lado, calculando  $\det(A')$  por expansão em co-fatores ao longo da primeira linha dá

$$\det(A') = a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} = a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \quad (6)$$

De (5) e (6) nós obtemos

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0$$

### Definição

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $C_{ij}$  é o co-fator de  $a_{ij}$ , então a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada *matriz de co-fatores de A*. A transposta desta matriz é chamada *adjunta de A* e denotada por  $\text{adj}(A)$ .

### EXEMPLO 6 Adjunta de uma Matriz $3 \times 3$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Os co-fatores de  $A$  são

$$\begin{aligned} C_{11} &= 12 & C_{12} &= 6 & C_{13} &= -16 \\ C_{21} &= 4 & C_{22} &= 2 & C_{23} &= 16 \\ C_{31} &= 12 & C_{32} &= -10 & C_{33} &= 16 \end{aligned}$$

de modo que a matriz dos co-fatores é

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

é a adjunta de  $A$  é

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Agora nós estamos em condições de obter uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível.

### Teorema 2.4.2

#### Inversa de uma Matriz Usando a Adjunta

Se  $A$  é uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (7)$$

*Prova.* Em primeiro lugar, mostramos que

$$A \text{adj}(A) = \det(A) I$$

Consideremos o produto

$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

A entrada na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna do produto  $A \text{adj}(A)$  é

$$a_{11}C_{j1} + a_{12}C_{j2} + \cdots + a_{1n}C_{jn} \quad (8)$$

(ver as linhas sombreadas acima).

Se  $i = j$ , então (8) é a expansão em co-fatores de  $\det(A)$  ao longo da  $i$ -ésima linha de  $A$  (Teorema 2.4.1) e se  $i \neq j$ , então as entradas da matriz  $A$  e os co-fatores provêm de linhas diferentes de  $A$ , de modo que o valor de (8) é zero. Portanto,

$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \quad (9)$$

Como  $A$  é invertível,  $\det(A) \neq 0$ . Portanto, a equação pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\det(A)}[A \operatorname{adj}(A)] = I \quad \text{or} \quad A \left[ \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right] = I$$

Multiplicando ambos os lados à esquerda por  $A^{-1}$ , resulta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

### EXEMPLO 7 Usando a Adjunta para Encontrar uma Matriz Inversa

Use (7) para encontrar a inversa da matriz  $A$  do Exemplo 6.

*Solução.*

O leitor pode conferir que  $\det(A) = 64$ . Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & \frac{-10}{64} \\ \frac{-16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

**Aplicações da Fórmula (7)** O método do exemplo precedente é razoável para inverter uma matriz  $3 \times 3$ , mas para matrizes maiores é mais eficiente usar o algoritmo de inversão discutido na Seção 1.5. Entretanto, não deve ser esquecido que o método da Seção 1.5 é só um procedimento para orientar os cálculos, enquanto que (7) é uma autêntica fórmula para a inversa.

Na Seção 1.7 nós enunciamos dois resultados sobre inversas sem prova.

- **Teorema 1.7.1c:** Uma matriz triangular é invertível se, e somente se, suas entradas na diagonal principal são todas não-nulas.
- **Teorema 1.7.1d:** A inversa de uma matriz triangular inferior é triangular inferior e a inversa de uma matriz triangular superior é triangular superior.

Nós iremos provar estes resultados usando a fórmula da adjunta para a inversa.

*Prova do Teorema 1.7.1c.* Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz triangular; as entradas na diagonal principal de  $A$  são

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

Pelos Teoremas 2.2.2 e 2.3.3, a matriz  $A$  é invertível se, e somente se,

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$$

que vale se, e somente se, as entradas na diagonal são todas não-nulas.

Deixamos como exercício para o leitor usar a fórmula da adjunta para  $A^{-1}$  para mostrar que se  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz triangular invertível, então as entradas sucessivas da diagonal de  $A^{-1}$  são

$$\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}$$

(Veja Exemplo 3 da Seção 1.7.)

*Prova do Teorema 1.7.1d.* Nós vamos provar o resultado para matrizes triangulares superiores e deixar o caso de triangulares inferiores como exercício. Suponha que  $A$  é triangular superior e invertível. Como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

nós podemos provar que  $A^{-1}$  é triangular superior mostrando que  $\operatorname{adj}(A)$  é triangular superior ou, equivalentemente, que a matriz de co-fatores é triangular inferior. Isto pode ser feito mostrando que cada co-fator  $C_{ij}$  com  $i < j$  (ou seja, acima da diagonal principal) é zero. Como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

é suficiente provar que cada menor  $M_{ij}$  com  $i < j$  é zero. Para verificar isto, seja  $B_{ij}$  a matriz obtida suprimindo a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$ , isto é,

$$M_{ij} = \det(B_{ij}) \quad (10)$$

Da hipótese  $i < j$  segue que  $B_{ij}$  é triangular superior (Exercício 32). Como  $A$  é triangular superior, sua  $(i+1)$ -ésima linha começa com pelo menos  $i$  zeros. Mas a  $i$ -ésima linha de  $B_{ij}$  é a  $(i+1)$ -ésima linha de  $A$  com a entrada na  $j$ -ésima coluna removida. Como  $i < j$ , nenhum dos primeiros  $i$  zeros foi removido quando omitimos a  $j$ -ésima coluna; assim, a  $i$ -ésima linha de  $B_{ij}$  começa com pelo menos  $i$  zeros, o que implica que esta linha tem um zero na diagonal principal. Segue agora, pelo Teorema 2.2.2, que  $\det(B_{ij}) = 0$  e, por (10), que  $M_{ij} = 0$ .

**A Regra de Cramer** O próximo teorema fornece uma fórmula para a solução de certos sistemas de  $n$  equações em  $n$  incógnitas. Esta fórmula, conhecida como *regra de Cramer*, é de interesse marginal para fins computacionais, mas é útil para estudar as propriedades matemáticas de uma solução sem precisar resolver o sistema.

#### Teorema 2.4.3

#### Regra de Cramer

Se  $Ax = b$  é um sistema de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas tal que  $\det(A) \neq 0$ , então o sistema tem uma única solução. Esta solução é

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

onde  $A_j$  é a matriz obtida substituindo as entradas da  $j$ -ésima coluna de  $A$  pelas entradas da matriz

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

*Prova.* Se  $\det(A) \neq 0$ , então  $A$  é invertível e, pelo Teorema 1.6.2,  $x = A^{-1}b$  é a única solução de  $Ax = b$ . Portanto, pelo Teorema 2.4.2, temos

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$



**Gabriel Cramer (1704–1752)** foi um matemático suíço. Embora ele não seja classificado como um dos grandes matemáticos de seu tempo, mereceu seu lugar na história da Matemática pela sua contribuição como um divulgador de ideias matemáticas. Cramer viajou muito e encontrou-se com muitos dos mais importantes matemáticos de sua época.

O trabalho mais amplamente conhecido de Cramer, chamado *l'Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, de 1750, é um estudo da classificação de curvas algébricas; a regra de Cramer aparece nos apêndices. Embora a regra tenha o seu nome, variações desta regra foram formuladas antes por vários matemáticos. No entanto, a notação superior de Cramer ajudou a esclarecer e popularizar a técnica.

Excesso de trabalho combinado com uma queda de uma carruagem levaram à sua morte aos 48 anos de idade. Aparentemente, Cramer foi uma pessoa boa e agradável, demonstrando amplos interesses. Ele escreveu sobre a filosofia da lei e do governo e sobre a história da Matemática. Ele trabalhou em repartições públicas, participou da construção de fortificações e da artilharia do governo, instruiu trabalhadores de construção sobre técnicas de restauração de edifícios e coordenou escavações de arquivos de catedrais. Cramer recebeu numerosas honrarias por suas atividades.

Multiplicando as matrizes, resulta

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \cdots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

e portanto a entrada na  $j$ -ésima linha de  $\mathbf{x}$  é

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}}{\det(A)} \quad (11)$$

Seja, agora,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como  $A_j$  difere de  $A$  somente na  $j$ -ésima coluna, segue que os co-fatores das entradas  $b_1, b_2, \dots, b_n$  de  $A_j$  coincidem com os co-fatores das correspondentes entradas da  $j$ -ésima coluna de  $A$ . A expansão em co-fatores de  $\det(A_j)$  ao longo da  $j$ -ésima coluna é, portanto,

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

Substituindo esta expressão em (11), resulta

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

### EXEMPLO 8 Usando a Regra de Cramer para Resolver um Sistema

Use a regra de Cramer para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + & \quad + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = 8 \end{aligned}$$

Solução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

OBSERVAÇÃO. Para resolver um sistema de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas pela regra de Cramer, é necessário calcular  $n + 1$  determinantes de matrizes  $n \times n$ . Para sistemas com mais de três equações, a eliminação gaussiana é muito mais eficiente, pois somente requer a redução de uma matriz aumentada  $n \times (n + 1)$ . No entanto, a regra de Cramer dá uma fórmula para a solução se o determinante da matriz de coeficientes é não-nulo.

### Conjunto de Exercícios 2.4

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre todos os menores de  $A$ .
- (b) Encontre todos os co-fatores.

## 96 • • • Álgebra Linear com Aplicações

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontre

- (a)  $M_{13}$  e  $C_{13}$     (b)  $M_{23}$  e  $C_{23}$     (c)  $M_{22}$  e  $C_{22}$     (d)  $M_{21}$  e  $C_{21}$

3. Calcule o determinante da matriz do Exercício 1 usando uma expansão de co-fatores ao longo da

- (a) primeira linha    (b) primeira coluna    (c) segunda linha  
 (d) segunda coluna    (e) terceira linha    (f) terceira coluna

4. Para a matriz do Exercício 1, encontre

- (a)  $\text{adj}(A)$     (b)  $A^{-1}$ , usando o Teorema 2.4.2

Nos Exercícios 5–10, calcule  $\det(A)$  usando uma expansão em co-fatores ao longo de alguma linha ou coluna de sua preferência.

$$5. A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 11–14, encontre  $A^{-1}$  usando o Teorema 2.4.2.

$$11. A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$12. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$13. A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$14. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

15. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule  $A^{-1}$  usando o Teorema 2.4.2.  
 (b) Calcule  $A^{-1}$  usando o método do Exemplo 4 da Seção 1.5.  
 (c) Qual método envolve menos contas?

Nos Exercícios 16–21, resolva pela regra de Cramer, onde aplicável.

$$16. \begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$17. \begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$18. \begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$$

$$19. \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$20. \begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

$$21. \begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

22. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível para todos os valores de  $\theta$ ; em seguida, encontre  $A^{-1}$  usando o Teorema 2.4.2.

23. Use a regra de Cramer para resolver em  $y$  sem resolver em  $x, z$  e  $w$ .

$$4x + y + z + w = 6$$

$$3x + 7y - z + w = 1$$

$$7x + 3y - 5z + 8w = -3$$

$$x + y + z + 2w = 3$$

24. Seja  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  o sistema do Exercício 23.

(a) Resolva o sistema pela regra de Cramer.

(b) Resolva o sistema por eliminação de Gauss-Jordan.

(c) Qual método envolve menos contas?

25. Prove que se  $\det(A) = 1$  e todas as entradas de  $A$  são números inteiros, então todas as entradas de  $A^{-1}$  também são inteiros.

26. Seja  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  um sistema de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas com coeficientes e constantes números inteiros. Prove que se  $\det(A) = 1$ , então as entradas da solução  $\mathbf{x}$  são inteiros.

27. Prove que se  $A$  é uma matriz triangular inferior invertível, então  $A^{-1}$  é triangular inferior.

28. Obtenha a expansão em co-fatores listada na última linha da Fórmula (4).

29. Prove: A equação da reta que passa pelos pontos distintos  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

30. Prove: Os pontos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$  são colineares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

31. (a) Se  $A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right]$  é uma matriz em blocos “triangular superior,” onde  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes quadradas, então  $\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22})$ . Use este resultado para calcular  $\det(A)$  para a matriz

$$A = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 \end{array} \right]$$

(b) Verifique sua resposta na parte (a) usando uma expansão em co-fatores para calcular  $\det(A)$ .

32. Prove que se  $A$  é uma matriz triangular superior e  $B_{ij}$  é a matriz que resulta quando suprimimos a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$ , então  $B_{ij}$  é triangular superior se  $i < j$ .

## Discussão e Descoberta

33. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz  $4 \times 4$  pode ter sem ter determinante nulo? Explique seu raciocínio.

34. Seja  $A$  uma matriz com o seguinte formato:

$$A = \left[ \begin{array}{ccccc} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} \right]$$

Quantos valores distintos você consegue obter para  $\det(A)$  substituindo os asteriscos por valores numéricos (não necessariamente todos iguais)? Explique seu raciocínio.

35. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a)  $A \text{ adj}(A)$  é uma matriz diagonal para cada matriz quadrada  $A$ .

- (b) Em teoria, a regra de Cramer pode ser usada para resolver qualquer sistema de equações lineares, embora a quantidade de contas possa ser enorme.  
 (c) Se  $A$  é invertível, então  $\text{adj}(A)$  também deve ser invertível.  
 (d) Se  $A$  tem uma linha de zeros, então  $\text{adj}(A)$  também deve ter.

### Exercícios Suplementares do Capítulo 2

1. Use a regra de Cramer para resolver  $x'$  e  $y'$  em termos de  $x$  e  $y$ .

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$

$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

2. Use a regra de Cramer para resolver  $x'$  e  $y'$  em termos de  $x$  e  $y$ .

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

3. Examinando o determinante da matriz dos coeficientes, mostre que o seguinte sistema tem uma solução não-trivial se, e somente se,  $\alpha = \beta$ .

$$x + y + \alpha z = 0$$

$$x + y + \beta z = 0$$

$$\alpha x + \beta y + z = 0$$

4. Seja  $A$  uma matriz  $3 \times 3$  tal que todas suas entradas são 0 ou 1. Qual é o maior valor possível para  $\det(A)$ ?

5. (a) Para o triângulo da figura dada, use trigonometria para mostrar que

$$b \cos \gamma + c \cos \beta = a$$

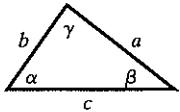
$$c \cos \alpha + a \cos \gamma = b$$

$$a \cos \beta + b \cos \alpha = c$$

e em seguida aplique a regra de Cramer para mostrar que

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- (b) Use a regra de Cramer para obter fórmulas similares para  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$ .



**Figura Ex-5**

6. Use determinantes para mostrar que, para qualquer valor de  $\lambda$ , a única solução de

$$x - 2y = \lambda x$$

$$x - y = \lambda y$$

é  $x = 0, y = 0$ .

7. Prove: Se  $A$  é invertível, então  $\text{adj}(A)$  é invertível

$$[\text{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \text{adj}(A^{-1})$$

8. Prove: Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então  $\det[\text{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$ .

9. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Mostre que se  $f_1(x), f_2(x), g_1(x)$  e  $g_2(x)$  são funções diferenciáveis e se

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \quad \text{então} \quad \frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) \end{vmatrix}$$

10. (a) Na figura dada, a área do triângulo  $A B C$  pode ser expressa como

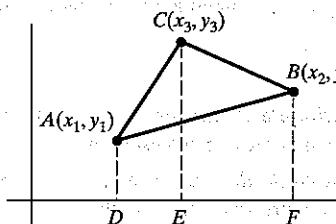
$$\text{área } A B C = \text{área } A D E C + \text{área } C E F B - \text{área } A D F B$$

Use isto e o fato conhecido que a área de um trapézio é  $\frac{1}{2}$  da altura vezes a soma dos lados paralelos para mostrar que

$$\text{área } A B C = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

**[Observação.** Na dedução desta fórmula, os vértices foram denotados de tal modo que quando passamos de  $(x_1, y_1)$  para  $(x_2, y_2)$  para  $(x_3, y_3)$ , o triângulo é percorrido no sentido anti-horário. Para uma orientação horária, o determinante acima dá o *negativo* da área.]

- (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a área do triângulo de vértices  $(3, 3), (4, 0), (-2, -1)$ .



**Figura Ex-10**

11. Prove: Se a soma das entradas em cada linha de uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  é sempre zero, então o determinante de  $A$  é zero.  
[Sugestão. Considere o produto matricial  $A X$ , onde  $X$  é a matriz  $n \times 1$  com todas entradas iguais a 1.]
12. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $B$  a matriz que resulta quando as linhas de  $A$  são escritas em ordem inversa (a última linha passa a ser a primeira, e assim por diante). Qual é a relação entre  $\det(A)$  e  $\det(B)$ ?
13. Como é afetada a matriz inversa  $A^{-1}$  se
  - (a) permutamos em  $A$  a  $i$ -ésima com a  $j$ -ésima linha;
  - (b) a  $i$ -ésima linha de  $A$  é multiplicada por um escalar não-nulo  $c$ ;
  - (c)  $c$  vezes a  $i$ -ésima linha de  $A$  é somada à  $j$ -ésima linha?
14. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Suponha que  $B_1$  é obtida somando o mesmo número  $t$  a cada entrada da  $i$ -ésima linha de  $A$  e  $B_2$  é obtida subtraindo  $t$  de cada entrada da  $i$ -ésima linha de  $A$ . Mostre que  $\det(A) = \frac{1}{2}[\det(B_1) + \det(B_2)]$ .

15. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- (a) Expresse  $\det(\lambda I - A)$  como um polinômio  $p(\lambda) = \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ .
- (b) Expresse os coeficientes  $b$  e  $d$  em termos de determinantes e traços.

16. Sem calcular diretamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix} = 0$$

17. Sabendo que 21.375, 38.798, 34.162, 40.223 e 79.154 são todos divisíveis por 19 mostre, sem calculá-lo diretamente, que o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

é divisível por 19.

18. Encontre os autovalores e correspondentes autovetores para cada um dos sistemas seguintes.

$$(a) \begin{array}{l} x_2 + 9x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 - 3x_3 = \lambda x_3 \end{array} \quad (b) \begin{array}{l} x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 - x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = \lambda x_3 \end{array}$$

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais do Capítulo 2

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**Seção 2.1**

- T1. (Determinantes)** Leia em seu manual sobre como calcular determinantes e então use seu recurso para calcular os determinantes do Exemplo 8.
- T2. (Fórmulas para determinantes)** Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, use-o para confirmar as fórmulas no Exemplo 7. Também use-o para obter a fórmula pedida no Exercício 15 da Seção 2.1.
- T3. (Simplificação)** Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, leia a documentação sobre como simplificar expressões algébricas e então use os comandos de determinante e simplificação juntos para mostrar que

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

- T4.** Use o método do Exercício T3 para encontrar uma fórmula simples para o determinante

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

**Seção 2.2**

- T1. (Determinante de uma transposta)** Confirme a parte (b) do Teorema 2.2.1 usando algumas matrizes de sua escolha.

**Seção 2.3**

- T1. (Determinante de um produto)** Confirme o Teorema 2.3.4 para algumas matrizes de sua escolha.
- T2. (Determinante de uma inversa)** Confirme o Teorema 2.3.5 para algumas matrizes de sua escolha.
- T3. (Equação característica)** Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, use-o para encontrar a equação característica da matriz  $A$  do Exemplo 6. Também leia a documentação sobre como resolver equações e então resolva a equação  $\det(I - A)$  dos autovalores de  $A$ .

**Seção 2.4**

- T1. (Menores, co-fatores e adjuntas)** Os recursos computacionais variam amplamente em seu tratamento de menores, co-fatores e adjuntas. Por exemplo, alguns recursos têm comandos para calcular menores mas não co-fatores, alguns têm comandos diretos para encontrar adjuntas enquanto outros não os têm. Assim, dependendo de seu recurso, você deverá juntar comandos ou fazer ajustes à mão para encontrar co-fatores e adjuntas. Leia seu manual e depois encontre a adjunta da matriz do Exemplo 6.

# Vetores nos Espaços Bi e Tridimensionais

## Conteúdo do Capítulo

- 3.1 Introdução aos Vetores (Geométricos)
- 3.2 Norma de um Vetor; Aritmética Vetorial
- 3.3 Produto Escalar; Projeções
- 3.4 Produto Vetorial
- 3.5 Retas e Planos no Espaço Tridimensional

**I**NTRODUÇÃO: Muitas quantidades físicas, tais como área, comprimento, massa e temperatura ficam completamente determinadas assim que for dada sua magnitude. Tais quantidades são denominadas *escalares*. Outras quantidades físicas não ficam determinadas completamente enquanto não forem especificados tanto uma magnitude quanto uma direção e um sentido. Estas quantidades são denominadas *vetoriais*. Por exemplo, o movimento do vento é usualmente descrito atribuindo-lhe uma velocidade e uma direção de onde sopra, digamos, um nordeste a 20 km/h. A velocidade do vento e sua direção e sentido formam um vetor chamado *velocidade* do vento. Outros exemplos de vetores são *força* e *deslocamento*. Nossa objetivo neste capítulo é rever uma parte da teoria básica de vetores em duas e três dimensões.

**Nota.** Os leitores familiarizados com o conteúdo deste capítulo podem seguir diretamente para o Capítulo 4 sem perda de continuidade.

### 3.1 INTRODUÇÃO AOS VETORES [GEOMÉTRICOS]

Nesta seção introduzimos geometricamente os vetores nos espaços bi e tridimensionais, definimos operações algébricas com vetores e estabelecemos algumas das propriedades básicas destas operações algébricas.

**Vetores Geométricos** Os vetores podem ser representados geometricamente como segmentos de reta orientados ou como flechas nos espaços bi e tridimensionais. A direção e o sentido da flecha especificam a direção e o sentido do vetor e o comprimento da flecha descreve sua magnitude. A cauda da flecha é chamada de *ponto inicial* do vetor e a ponta da flecha é o *ponto final*. Simbolicamente, denotamos vetores por letras minúsculas em negrito (por exemplo,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{x}$ ). Quando tratarmos de vetores, chamamos os números de *escalares*. Por enquanto, todos os nossos escalares serão números reais e serão denotados por letras minúsculas em itálico (por exemplo,  $a$ ,  $k$ ,  $v$ ,  $w$  e  $x$ ).

Se o ponto inicial de um vetor  $\mathbf{v}$  é  $A$  e o ponto final é  $B$ , como na Figura 3.1.1a, então escrevemos

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

Vetores com o mesmo comprimento, direção e sentido, tais como os da Figura 3.1.1b, são ditos *equivalentes*. Como nós queremos que um vetor seja determinado somente pelo seu comprimento, direção e sentido, consideramos vetores equivalentes como sendo *iguais* mesmo quando estiverem localizados em posições diferentes. Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são equivalentes, escrevemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$



(a) O vetor  $\overrightarrow{AB}$



(b) Vetores equivalentes

Figura 3.1.1

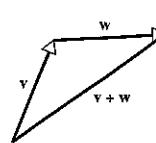
#### Definição

Sejam  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  dois vetores quaisquer. A *soma* de  $\mathbf{v}$  com  $\mathbf{w}$  é o vetor  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  determinado da seguinte maneira: posicione o vetor  $\mathbf{w}$  de tal maneira que seu ponto inicial coincida com o ponto final do vetor  $\mathbf{v}$ . O vetor  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  é representado pela flecha do ponto inicial de  $\mathbf{v}$  ao ponto final de  $\mathbf{w}$  (Figura 3.1.2a).

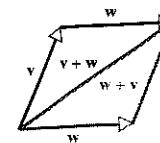
Na Figura 3.1.2b construímos duas somas,  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  (flechas coloridas) e  $\mathbf{w} + \mathbf{v}$  (flechas cinza). É evidente que

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

e que a soma coincide com a diagonal do paralelogramo determinado por  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  quando estes vetores são posicionados com o mesmo ponto inicial.



(a) A soma  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$



(b)  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

Figura 3.1.2

O vetor de comprimento zero é chamado *vetor nulo* ou *vetor zero* e denotado por  $\mathbf{0}$ . Definimos

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

para cada vetor  $\mathbf{v}$ . Como não há uma direção natural para o vetor nulo, concordamos que, dependendo do problema, o vetor nulo tem a direção e sentido que for mais conveniente. Se  $\mathbf{v}$  é um vetor não-nulo qualquer, então  $-\mathbf{v}$ , o negativo de  $\mathbf{v}$ , é definido como o vetor de mesma magnitude e direção de  $\mathbf{v}$  mas de sentido oposto (Figura 3.1.3). Este vetor tem a propriedade

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

(Por que?) Além disto, definimos  $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$ . A subtração de vetores é definida como segue.

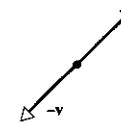


Figura 3.1.3

O negativo de  $\mathbf{v}$  tem o mesmo comprimento e a mesma direção de  $\mathbf{v}$ , mas sentido oposto.

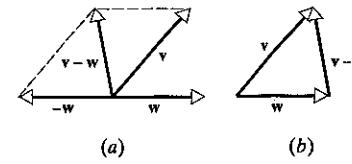
#### Definição

Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são dois vetores quaisquer então a *diferença* de  $\mathbf{w}$  por  $\mathbf{v}$  é definida por

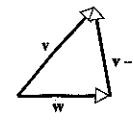
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

(Figura 3.1.4a).

Para obter a diferença  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  sem construir  $-\mathbf{w}$ , posicione  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  de tal modo que seus pontos iniciais coincidam; o vetor do ponto final de  $\mathbf{w}$  ao ponto final de  $\mathbf{v}$  então é o vetor  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  (Figura 3.1.4b).



(a)



(b)

Figura 3.1.4

#### Definição

Se  $\mathbf{v}$  é um vetor não-nulo e  $k$  é um número real (escalar) não-nulo, então o *produto*  $k\mathbf{v}$  é definido como o vetor de mesma direção de  $\mathbf{v}$  cujo comprimento é  $|k|$  vezes o comprimento de  $\mathbf{v}$  e cujo sentido é o mesmo de  $\mathbf{v}$  se  $k > 0$  e oposto ao de  $\mathbf{v}$  se  $k < 0$ . Nós definimos  $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$  se  $k = 0$  ou se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

A Figura 3.1.5 ilustra a relação entre um vetor  $\mathbf{v}$  e os vetores  $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ ,  $(-1)\mathbf{v}$ ,  $2\mathbf{v}$  e  $(-3)\mathbf{v}$ . Note que o vetor  $(-1)\mathbf{v}$  tem o mesmo comprimento que  $\mathbf{v}$ , mas sentido oposto. Assim,  $(-1)\mathbf{v}$  é simplesmente o negativo de  $\mathbf{v}$ , ou seja,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

Um vetor da forma  $k\mathbf{v}$  é chamado *múltiplo escalar* de  $\mathbf{v}$ . Como é visível na Figura 3.1.5, vetores que são múltiplos escalares um do outro são paralelos. Reciprocamente, pode ser mostrado que vetores paralelos não-nulos são múltiplos escalares um do outro. Nós omitimos a prova.

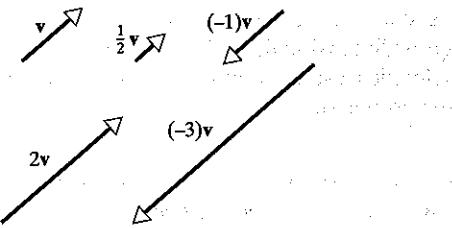


Figura 3.1.5

**Vetores em Sistemas de Coordenadas** A introdução de um sistema de coordenadas retangulares muitas vezes simplifica problemas envolvendo vetores. Por enquanto vamos restringir nossa discussão a vetores no espaço bidimensional (o plano). Seja  $\mathbf{v}$  qualquer vetor no plano e suponha, como na Figura 3.1.6, que  $\mathbf{v}$  tenha sido posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares. As coordenadas  $(v_1, v_2)$  do ponto final de  $\mathbf{v}$  são chamadas *componentes de  $\mathbf{v}$*  e escrevemos

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

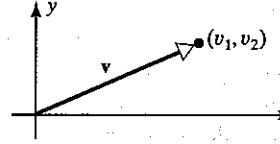


Figura 3.1.6  $v_1$  e  $v_2$  são os componentes de  $\mathbf{v}$ .

Se vetores equivalentes  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são colocados com seus pontos iniciais na origem, então é óbvio que seus pontos finais coincidem (pois os vetores têm o mesmo comprimento, direção e sentido); logo os vetores possuem os mesmos componentes. Reciprocamente, vetores com os mesmos componentes são equivalentes pois têm o mesmo comprimento, direção e sentido. Em resumo, dois vetores

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ e } \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

são equivalentes se e somente se

$$v_1 = w_1 \text{ e } v_2 = w_2$$

As operações vetoriais de adição e multiplicação por escalar são facilmente executáveis em termos de componentes. Como é ilustrado na Figura 3.1.7, se

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ e } \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \quad (1)$$

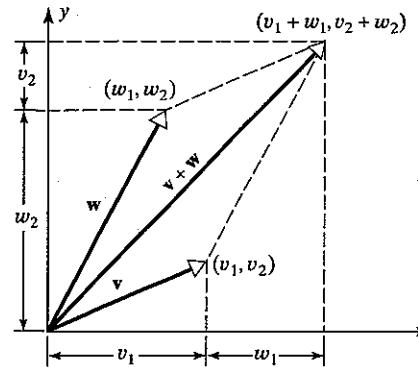


Figura 3.1.7

Se  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  e  $k$  é um escalar qualquer então pode ser mostrado, usando um argumento geométrico envolvendo triângulos semelhantes (Exercício 15), que

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2) \quad (2)$$

(Figura 3.1.8). Assim, por exemplo, se  $\mathbf{v} = (1, -2)$  e  $\mathbf{w} = (7, 6)$  então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

e

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

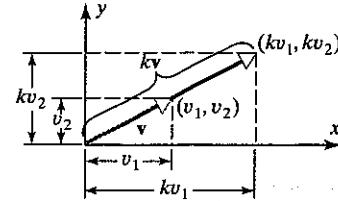


Figura 3.1.8

Como  $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$ , segue das Fórmulas (1) e (2) que

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$$

(Verifique.)

**Vetores no Espaço Tridimensional** Assim como os vetores no plano podem ser descritos por pares de números reais, os vetores no espaço podem ser descritos por ternos de números reais utilizando um sistema de *coordenadas retangulares*. Para construir um tal sistema de coordenadas, selecionamos um ponto  $O$ , denominado a *origem* e escolhemos três retas mutuamente perpendiculares passando pela origem, denominadas *eixos coordenados*. Designe estes eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  e selecione um sentido positivo para cada eixo coordenado, bem como uma unidade de comprimento para medir tamanhos (Figura 3.1.9a). Cada par de eixos coordenados determina um plano chamado *plano coordenado*. Referimo-nos aos planos coordenados como os planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ . A cada ponto  $P$  no espaço tridimensional associamos um terno  $(x, y, z)$  de números, chamados *coordenadas de P*, como segue: passe três planos por  $P$  paralelos aos planos coordenados e denote os pontos de intersecção destes planos com os três eixos coordenados por  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  (Figura 3.1.9b).

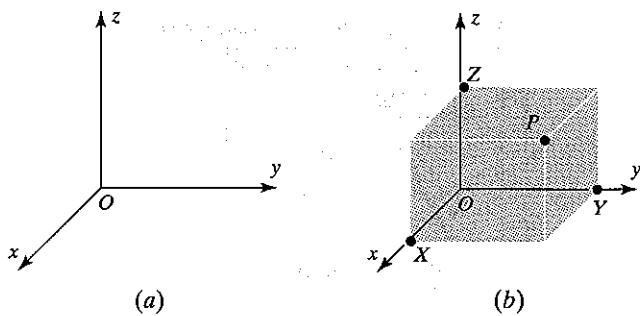


Figura 3.1.9

As coordenadas de  $P$  são definidas pelos comprimentos orientados

$x = OX$ ,  $y = OY$ ,  $z = OZ$

Na Figura 3.1.10a nós construímos o ponto cujas coordenadas são  $(4, 5, 6)$  e na Figura 3.1.10b o ponto cujas coordenadas são  $(-3, 2, -4)$ .

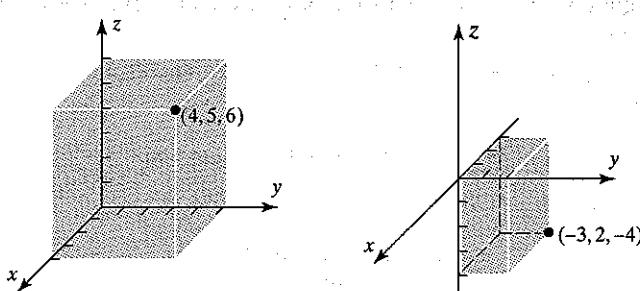


Figura 3.1.10

Os sistemas de coordenadas retangulares no espaço tridimensional dividem-se em duas categorias: os de **mão direita** e os de **mão esquerda**. Um sistema de mão direita tem a propriedade de um parafuso comum, apontando na direção positiva do eixo  $z$ ; ele avança se o eixo  $x$  positivo é girado  $90^\circ$  na direção do eixo  $y$  positivo (Figura 3.1.11a); o sistema é de mão esquerda se o parafuso retroceder (Figura 3.1.11b).

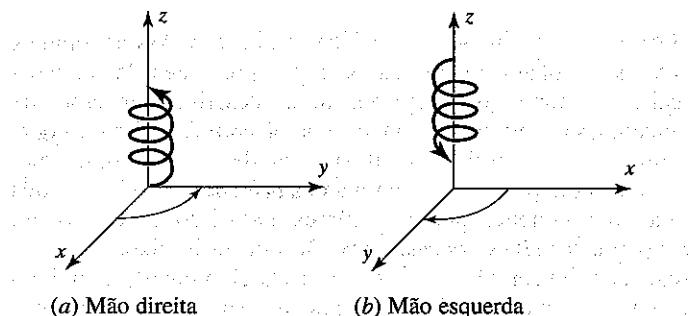


Figura 3.1.11

OBSERVAÇÃO. Neste livro somente usaremos sistemas de coordenadas de mão direita.

Se um vetor  $\mathbf{v}$  no espaço tridimensional for posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas

retangulares, como na Figura 3.1.12, então as coordenadas do ponto final são chamadas os **componentes** de  $\mathbf{v}$  e escrevemos

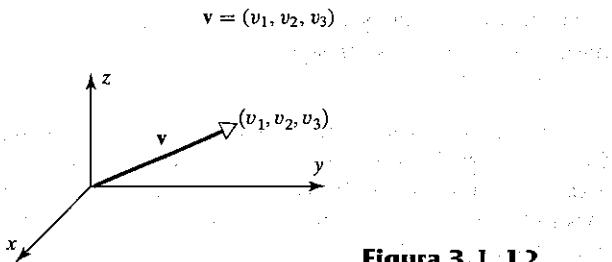


Figura 3.1.12

Se  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  são dois vetores no espaço tridimensional, então os seguintes resultados podem ser estabelecidos usando argumentos similares aos utilizados para vetores no plano.

$\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são equivalentes se, e somente se,  $v_1 = w_1$ ,  $v_2 = w_2$  e  $v_3 = w_3$   
 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$   
 $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$ , onde  $k$  é um escalar qualquer

### EXEMPLO 1 Operando com Vetores Usando Componentes

Se  $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$  e  $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$  então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \quad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4), \quad -\mathbf{w} = (-4, -2, -1), \\ \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1)$$

Às vezes um vetor não está posicionado com seu ponto inicial na origem. Se o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  tem o ponto inicial  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  e ponto final  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , então

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ou seja, os componentes do vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  são obtidos subtraindo as coordenadas do ponto inicial das coordenadas do ponto final. Isto pode ser visto usando a Figura 3.1.13: o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  é a diferença dos vetores  $\overrightarrow{OP_2}$  e  $\overrightarrow{OP_1}$ , de modo que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

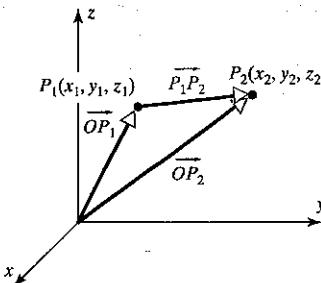


Figura 3.1.13

### EXEMPLO 2 Obtendo os Componentes de um Vetor

Os componentes do vetor  $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$  com ponto inicial  $P_1(2, -1, 4)$  e final  $P_2(7, 5, -8)$  são

$$\mathbf{v} = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12)$$

No espaço bidimensional o vetor com ponto inicial  $P_1(x_1, y_1)$  e ponto final  $P_2(x_2, y_2)$  é

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

**Translação de Eixos** A solução de muitos problemas pode ser simplificada pela translação dos eixos coordenados para obter novos eixos paralelos aos originais.

Na Figura 3.1.14a nós transladamos os eixos de um sistema de coordenadas  $xy$  para obter um sistema de coordenadas  $x'y'$  cuja origem  $O'$  está no ponto  $(x, y) = (k, l)$ . Um ponto  $P$  no espaço bidimensional tem agora tanto coordenadas  $(x, y)$  quanto coordenadas  $(x', y')$ . Para ver como as duas coordenadas estão relacionadas, considere o vetor  $\overrightarrow{O'P}$  (Figura 3.1.14b). No sistema  $xy$ , seu ponto inicial está em  $(k, l)$  e seu ponto final está em  $(x, y)$ , de modo que  $\overrightarrow{O'P} = (x - k, y - l)$ . No sistema  $x'y'$  seu ponto inicial está em  $(0, 0)$  e seu ponto final em  $(x', y')$ , de modo que  $\overrightarrow{O'P} = (x', y')$ , e portanto

$$x' = x - k, \quad y' = y - l$$

Estas fórmulas são chamadas *equações de translação*.

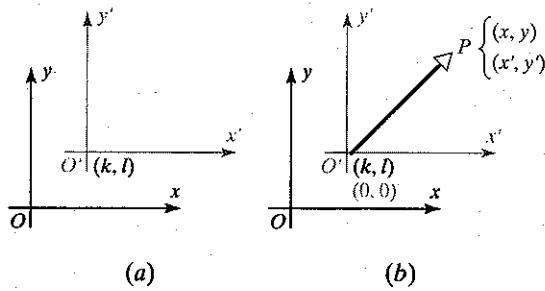


Figura 3.1.14

### EXEMPLO 3 Utilizando as Equações de Translação

Suponha que um sistema de coordenadas  $xy$  é transladado para um sistema de coordenadas  $x'y'$  cuja origem tem coordenadas  $xy$  dadas por  $(k, l) = (4, 1)$ .

- Encontre as coordenadas  $x'y'$  do ponto com coordenadas  $xy$  dadas por  $P(2, 0)$ .
- Encontre as coordenadas  $xy$  do ponto com coordenadas  $x'y'$  dadas por  $Q(-1, 5)$ .

*Solução (a).* As equações de translação são

$$x' = x - 4, \quad y' = y - 1$$

e portanto as coordenadas  $x'y'$  de  $P(2, 0)$  são  $x' = 2 - 4 = -2$  e  $y' = 0 - 1 = -1$ .

*Solução (b).* As equações de translação em (a) podem ser reescritas como

$$x = x' + 4, \quad y = y' + 1$$

e portanto as coordenadas  $xy$  de  $Q$  são  $x = -1 + 4 = 3$  e  $y = 5 + 1 = 6$ .

As equações de translação no espaço tridimensional são

$$x' = x - k, \quad y' = y - l, \quad z' = z - m$$

onde  $(k, l, m)$  são as coordenadas  $xyz$  da origem das coordenadas  $x'y'z'$ .

### Conjunto de Exercícios 3.1

1. Desenhe um sistema de coordenadas de mão direita e marque os pontos cujas coordenadas são

- (3, 4, 5)
- (-3, 4, 5)
- (3, -4, 5)
- (3, 4, -5)
- (-3, -4, 5)
- (-3, 4, -5)
- (3, -4, -5)
- (-3, -4, -5)
- (-3, 0, 0)
- (3, 0, 3)
- (0, 0, -3)
- (0, 3, 0)

2. Esboce os seguintes vetores com ponto inicial na origem:

- $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$
- $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$
- $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$
- $\mathbf{v}_4 = (5, -4)$
- $\mathbf{v}_5 = (3, 0)$
- $\mathbf{v}_6 = (0, -7)$
- $\mathbf{v}_7 = (3, 4, 5)$
- $\mathbf{v}_8 = (3, 3, 0)$
- $\mathbf{v}_9 = (0, 0, -3)$

3. Encontre os componentes do vetor de ponto inicial  $P_1$  e ponto final  $P_2$ :

- $P_1(4, 8), P_2(3, 7)$
- $P_1(3, -5), P_2(-4, -7)$
- $P_1(-5, 0), P_2(-3, 1)$
- $P_1(0, 0), P_2(a, b)$
- $P_1(3, -7, 2), P_2(-2, 5, -4)$
- $P_1(-1, 0, 2), P_2(0, -1, 0)$
- $P_1(a, b, c), P_2(0, 0, 0)$
- $P_1(0, 0, 0), P_2(a, b, c)$

4. Encontre um vetor não-nulo  $\mathbf{u}$  com ponto inicial  $P(-1, 3, -5)$  tal que

- $\mathbf{u}$  tem a mesma direção e sentido que  $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$
- $\mathbf{u}$  tem a mesma direção mas sentido oposto ao de  $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$

5. Encontre um vetor não-nulo  $\mathbf{u}$  com ponto final  $Q(3, 0, -5)$  tal que  
 (a)  $\mathbf{u}$  tem a mesma direção e sentido que  $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$   
 (b)  $\mathbf{u}$  tem a mesma direção mas sentido oposto ao de  $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$
6. Sejam  $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$  e  $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$ . Encontre os componentes de  
 (a)  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  (b)  $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$  (c)  $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$  (d)  $5(\mathbf{v} - 4\mathbf{u})$  (e)  $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$  (f)  $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$
7. Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  os vetores do Exercício 6. Encontre os componentes do vetor  $\mathbf{x}$  que satisfaz  $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$ .
8. Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  os vetores do Exercício 6. Encontre escalares  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  tais que  $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (2, 0, 4)$ .
9. Mostre que não existem escalares  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  tais que  
 $c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$ .
10. Encontre todos os escalares  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  tais que  
 $c_1(1, 2, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$ .
11. Sejam  $P$  o ponto  $(2, 3, -2)$  e  $Q$  o ponto  $(7, -4, 1)$ .  
 (a) Encontre o ponto médio do segmento de reta que liga  $P$  a  $Q$ .  
 (b) Encontre o ponto no segmento de reta que liga  $P$  a  $Q$  que está a  $\frac{3}{4}$  do caminho de  $P$  a  $Q$ .
12. Suponha que um sistema de coordenadas  $xy$  é transladado a um sistema de coordenadas  $x'y'$  cuja origem  $O'$  tem coordenadas  $(2, -3)$  no sistema  $xy$ .  
 (a) Encontre as coordenadas  $x'y'$  do ponto  $P$  cujas coordenadas  $xy$  são  $(7, 5)$ .  
 (b) Encontre as coordenadas  $xy$  do ponto  $Q$  cujas coordenadas  $x'y'$  são  $(-3, 6)$ .  
 (c) Desenhe os eixos coordenados  $xy$  e  $x'y'$  e marque os pontos  $P$  e  $Q$ .
13. Suponha que um sistema de coordenadas  $xyz$  é transladado a um sistema de coordenadas  $x'y'z'$ . Seja  $\mathbf{v}$  um vetor cujos componentes no sistema  $xyz$  são  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Mostre que  $\mathbf{v}$  tem os mesmos componentes no sistema  $x'y'z'$ .
14. Encontre os componentes de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  e  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  para os vetores dados na figura.

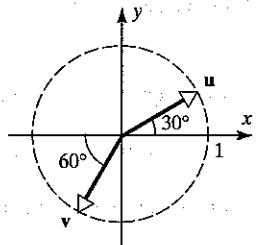


Figura Ex-14

15. Prove geometricamente que se  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , então  $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$ . (Restrinja a prova ao caso  $k > 0$  ilustrado na Figura 3.1.8. A prova completa envolve vários casos que dependem do sinal de  $k$  e do quadrante no qual cai o vetor.)

## Discussão e Descoberta

16. Considerando a Figura 3.1.13, discuta a interpretação geométrica do vetor

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$$

17. Desenhe uma figura que mostra quatro vetores não-nulos cuja soma é zero.

18. Se você tivesse quatro vetores não-nulos dados, como você construiria geometricamente um quinto vetor que é igual à soma dos quatro dados? Faça um desenho para ilustrar seu método.

## 3.2 NORMA DE UM VETOR; ARITMÉTICA VETORIAL

Nesta seção nós estabeleceremos as regras básicas da aritmética vetorial.

**Propriedades das Operações Vetoriais** O seguinte teorema enumera as mais importantes propriedades de vetores nos espaços bi e tridimensionais.

### Teorema 3.2.1

### Propriedades da Aritmética Vetorial

Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores de um espaço bi ou tridimensional e  $k$  e  $l$  são escalares, então valem as seguintes relações.

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$              | (b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ |
| (c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ | (d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$   |
| (e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$                                | (f) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$                          |
| (g) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$                  | (h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$  |

Antes de discutir a prova, observamos que nós desenvolvemos duas abordagens de vetores: uma *geométrica* na qual os vetores são representados por flechas ou segmentos orientados de reta e outra *analítica*, na qual os vetores são representados por pares ou ternos de números chamados componentes. Como uma consequência, as equações no Teorema 3.2.1 podem ser provadas tanto geométrica quanto analiticamente. Para ilustrar isto, vamos provar (b) de ambas maneiras. As demais provas são deixadas como exercícios.

**Prova da parte (b) (analítica).** Nós veremos a prova para vetores no espaço tridimensional; a prova para o espaço bidimensional é similar. Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , então

$$\begin{aligned}\mathbf{(u+v)+w} &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) \\&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\&= [(u_1 + v_1) + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, [u_3 + v_3] + w_3] \\&= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2], u_3 + [v_3 + w_3]) \\&= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\end{aligned}$$

**Prova da parte (b) (geométrica).** Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  representados por  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{QR}$  e  $\overrightarrow{RS}$  conforme ilustrado na Figura 3.2.1. Então

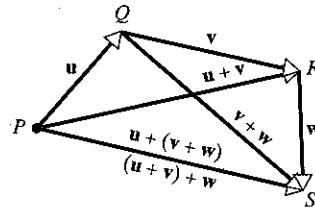
$$\mathbf{v+w} = \overrightarrow{QS} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overrightarrow{PS}$$

Também

$$\mathbf{u+v} = \overrightarrow{PR} \quad \text{e} \quad (\mathbf{u+v})+\mathbf{w} = \overrightarrow{PS}$$

Logo,

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$



**Figura 3.2.1** Os vetores  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  e  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$  são iguais.

**OBSERVAÇÃO.** Tendo em vista a parte (b) deste teorema, o símbolo  $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$  não é ambíguo, pois a mesma soma é obtida não importa onde coloquemos os parênteses. Além disto, se os vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são enfileirados com o ponto inicial do seguinte no ponto final do anterior, então a soma  $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$  é o vetor desde o ponto inicial de  $\mathbf{u}$  até o ponto final de  $\mathbf{w}$  (Figura 3.2.1).

**Norma de um Vetor** O comprimento de um vetor  $\mathbf{u}$  é muitas vezes chamado *norma* de  $\mathbf{u}$  e é denotado por  $\|\mathbf{u}\|$ . Segue do Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  no espaço bidimensional é

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (1)$$

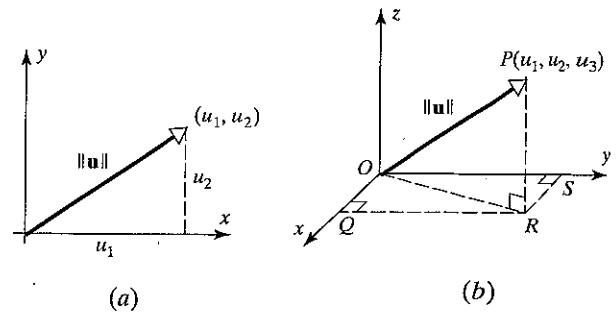
(Figura 3.2.2a). Seja  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  um vetor no espaço tridimensional. Usando a Figura 3.2.2b e duas aplicações do Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\|\mathbf{u}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Assim,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (2)$$

Um vetor de norma 1 é chamado *vetor unitário*.



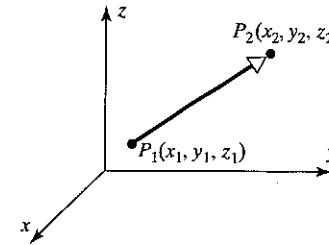
**Figura 3.2.2**

Se  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  são dois pontos no espaço tridimensional, então a *distância*  $d$  entre eles é a norma do vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  (Figura 3.2.3). Como

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

segue de (2) que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3)$$



**Figura 3.2.3** A distância entre  $P_1$  e  $P_2$  é a norma do vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

Similarmente, se  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  são pontos no espaço bidimensional, então a distância entre eles é dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

#### EXEMPLO 1 Obtendo Norma e Distância

A norma do vetor  $\mathbf{u} = (-3, 2, 1)$  é

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

A distância  $d$  entre os pontos  $P_1(2, -1, -5)$  e  $P_2(4, -3, 1)$  é

$$d = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-3 + 1)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Da definição do produto  $kv$ , o comprimento do vetor  $kv$  é  $|k|$  vezes o comprimento do vetor  $v$ . Em forma de equação, esta afirmação diz que

$$\|kv\| = |k|\|v\| \quad (5)$$

Esta fórmula útil é aplicável tanto no espaço bi quanto tridimensional.

### Conjunto de Exercícios 3.2

1. Encontre a norma de  $v$ .

- (a)  $v = (4, -3)$     (b)  $v = (2, 3)$     (c)  $v = (-5, 0)$   
 (d)  $v = (2, 2, 2)$     (e)  $v = (-7, 2, -1)$     (f)  $v = (0, 6, 0)$

2. Encontre a distância entre  $P_1$  e  $P_2$ .

- (a)  $P_1(3, 4), P_2(5, 7)$     (b)  $P_1(-3, 6), P_2(-1, -4)$   
 (c)  $P_1(7, -5, 1), P_2(-7, -2, -1)$     (d)  $P_1(3, 3, 3), P_2(6, 0, 3)$

3. Sejam  $u = (2, -2, 3)$ ,  $v = (1, -3, 4)$  e  $w = (3, 6, -4)$ . Em cada parte calcule a expressão dada.

- (a)  $\|u + v\|$     (b)  $\|u\| + \|v\|$     (c)  $\|-2u\| + 2\|u\|$   
 (d)  $\|3u - 5v + w\|$     (e)  $\frac{1}{\|w\|}w$     (f)  $\left\| \frac{1}{\|w\|}w \right\|$

4. Seja  $v = (-1, 2, 5)$ . Encontre todos os escalares  $k$  tais que  $\|kv\| = 4$ .

5. Sejam  $u = (7, -3, 1)$ ,  $v = (9, 6, 6)$ ,  $w = (2, 1, -8)$ ,  $k = -2$  e  $l = 5$ . Verifique que estes vetores e escalares satisfazem as seguintes identidades do Teorema 3.2.1.

- (a) parte (b)    (b) parte (e)    (c) parte (f)    (d) parte (g)  
 6. (a) Mostre que se  $v$  é qualquer vetor não-nulo, então  $\frac{1}{\|v\|}v$  é um vetor unitário.  
 (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar um vetor unitário de mesma direção e sentido de  $v = (3, 4)$ .  
 (c) Use o resultado da parte (a) para encontrar um vetor unitário de mesma direção mas sentido oposto ao de  $v = (-2, 3, -6)$ .  
 7. (a) Mostre que os componentes do vetor  $v = (v_1, v_2)$  mostrado na figura são  $v_1 = \|v\| \cos \theta$  e  $v_2 = \|v\| \sin \theta$ .  
 (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar os componentes de  $4u - 5v$ , onde  $u$  e  $v$  são os vetores dados na figura.

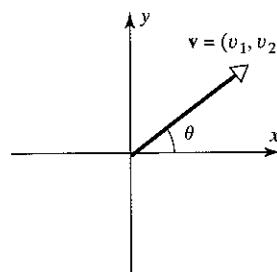


Figura Ex-7(a)

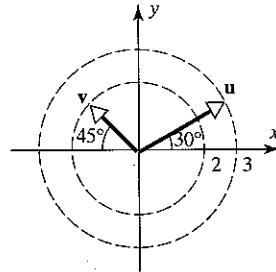


Figura Ex-7(b)

8. Sejam  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $p = (x, y, z)$ . Descreva o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  para os quais  $\|p - p_0\| = 1$ .  
 9. Prove geometricamente que se  $u$  e  $v$  são vetores no espaço bi ou tridimensional então  $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .  
 10. Prove analiticamente as partes (a), (c) e (e) do Teorema 3.2.1.  
 11. Prove analiticamente as partes (d), (g) e (h) do Teorema 3.2.1.

### Discussão e Descoberta

12. É possível ter a igualdade  $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$  na desigualdade enunciada no Exercício 9? Explique seu raciocínio.  
 13. (a) Qual relação deve satisfazer o ponto  $p = (a, b, c)$  para estar equidistante da origem e do plano  $xz$ ? Verifique se a relação que você deu vale para valores positivos e negativos de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .  
 (b) Qual relação deve satisfazer o ponto  $p = (a, b, c)$  para estar mais longe da origem do que do plano  $xz$ ? Verifique se a relação que você deu vale para valores positivos e negativos de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .  
 14. (a) O que a desigualdade  $\|x\| < 1$  diz sobre o ponto  $x$ ?  
 (b) Obtenha uma desigualdade que descreve o conjunto de pontos  $x$  que estão fora do círculo de raio 1 centrado no ponto  $x_0$ .

15. Os triângulos na figura dada deveriam sugerir uma prova geométrica do Teorema 3.2.1(f) para o caso  $k > 0$ . Dê a prova.

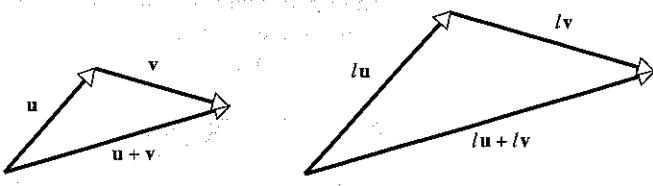
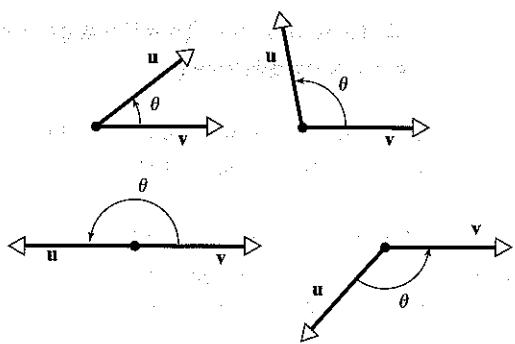


Figura Ex-15

### 3.3 PRODUTO ESCALAR; PROJEÇÕES

Nesta seção nós iremos discutir uma maneira importante de multiplicar vetores nos espaços bi e tridimensionais. Depois daremos algumas aplicações desta multiplicação à geometria.

**Produto Escalar de Vetores** Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  dois vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional e suponha que estes vetores foram posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem. Pelo **ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$**  nós entendemos o ângulo  $\theta$  determinado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  que satisfaz  $0 \leq \theta \leq \pi$  (Figura 3.3.1).

Figura 3.3.1 O ângulo  $\theta$  entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  satisfaz  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

#### Definição

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores no espaço bi ou tridimensional e  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , então o **produto escalar  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , ou produto interno euclidiano**, é definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta & \text{se } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1)$$

#### EXEMPLO 1 Produto Escalar

Conforme indicado na Figura 3.3.2, o ângulo entre os vetores  $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$  e  $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$  é de  $45^\circ$ . Logo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = (\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2})(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2$$

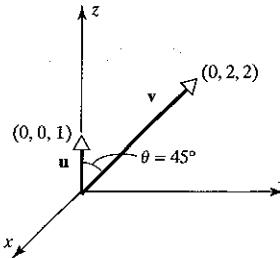


Figura 3.3.2

#### Produto Escalar em termos de Componentes

Para efeitos de cálculo, é desejável ter uma fórmula que dê o produto escalar de dois vetores em termos dos componentes do vetor. Nós iremos deduzir uma fórmula destas para vetores no espaço tridimensional; a dedução em duas dimensões é similar.

Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  dois vetores não-nulos. Se o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é  $\theta$ , conforme Figura 3.3.3, então a lei dos cosenos dá

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \theta \quad (2)$$

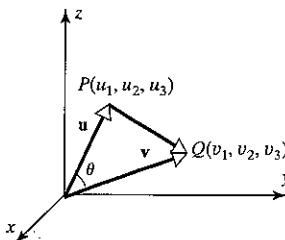


Figura 3.3.3

Como  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , podemos rescrever (2) como

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \theta = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

ou

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

Substituindo

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

e

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

e simplificando, obtemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (3)$$

Embora esta fórmula tenha sido deduzida supondo que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são não-nulos, ela também é válida se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  ou se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (verifique).

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  são dois vetores no espaço bidimensional então a fórmula correspondente a (3) é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (4)$$

**Obtendo o Ângulo entre Vetores** Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são dois vetores não-nulos, então a Fórmula (1) pode ser escrita como

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad (5)$$

### EXEMPLO 2 Produto Escalar Usando (3)

Considere os vetores  $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$  e  $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ . Encontre  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  e determine o ângulo  $\theta$  entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

Solução.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

Para os vetores dados nós temos  $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$ , de modo que, por (5),

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Assim,  $\theta = 60^\circ$ .

### EXEMPLO 3 Um Problema Geométrico

Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Solução.

Seja  $k$  o comprimento de uma aresta e introduza um sistema de coordenadas conforme indicado na Figura 3.3.4. Se tomarmos os vetores  $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$  e  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$ , então o vetor

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

é a diagonal do cubo. O ângulo  $\theta$  entre  $\mathbf{d}$  e a aresta  $\mathbf{u}_1$  satisfaz

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)\sqrt{3k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Assim,

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 54,74^\circ$$

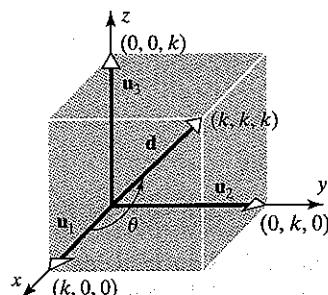


Figura 3.3.4

O teorema seguinte mostra com o produto escalar pode ser usado para obter informação sobre o ângulo entre dois vetores; além disto, estabelece uma relação importante entre a norma e o produto escalar.

### Teorema 3.3.1

Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores no espaço bi ou tridimensional.

- (a)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ ; ou seja,  $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$
- (b) Se os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são não-nulos e  $\theta$  é o ângulo entre eles, então

$\theta$ é agudo	se, e somente se,	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
$\theta$ é obtuso	se, e somente se,	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
$\theta = \pi/2$	se, e somente se,	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Prova (a). Como o ângulo  $\theta$  entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}$  é 0, temos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\| \cos 0 = \|\mathbf{v}\|^2 \cos 0 = \|\mathbf{v}\|^2$$

Prova (b). Como  $\theta$  satisfaz  $0 \leq \theta \leq \pi$ , temos:  $\theta$  é agudo se, e somente se,  $\cos \theta > 0$ ;  $\theta$  é obtuso se, e somente se,  $\cos \theta < 0$ ;  $\theta = \pi/2$  se, e somente se,  $\cos \theta = 0$ . Mas  $\cos \theta$  tem o mesmo sinal que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , já que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ ,  $\|\mathbf{u}\| > 0$  e  $\|\mathbf{v}\| > 0$ . Logo, decorre o resultado. ■

### EXEMPLO 4 Obtendo o Produto Escalar a partir de Componentes

Se  $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$  e  $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$ , então

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0$$

Assim,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  formam um ângulo obtuso,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  formam um ângulo agudo e  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  são perpendiculares. ■

**Vetores Ortogonais** Vetores perpendiculares são também chamados vetores *ortogonais*. Tendo em vista o Teorema 3.3.1b, dois vetores não-nulos são ortogonais se, e somente se, seu produto escalar é zero. Se concordarmos em considerar os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  como perpendiculares se um deles ou ambos forem o vetor nulo  $\mathbf{0}$ , então poderemos afirmar, sem exceção, que *dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ortogonais (perpendiculares) se, e somente se,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$* . Para indicar que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores ortogonais nós escrevemos  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ .

### EXEMPLO 5 Um Vetor Perpendicular a uma Reta

Mostre que o vetor não-nulo  $\mathbf{n} = (a, b)$  é perpendicular à reta  $ax + by + c = 0$  no espaço bidimensional.

Solução.

Sejam  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  dois pontos distintos da reta, de modo que

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Como o vetor  $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  é paralelo à reta dada (Figura 3.3.5), basta mostrar que  $\mathbf{n}$  e  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  são perpendiculares. Subtraindo as equações em (6) obtemos

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = 0$$

que pode ser expresso na forma

$$(a, b) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = 0$$

Assim,  $\mathbf{n}$  e  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  são perpendiculares.

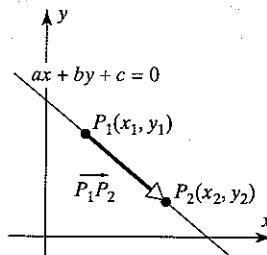


Figura 3.3.5

O próximo teorema lista as propriedades mais importantes do produto escalar, que são úteis no cálculo com vetores.

### Teorema 3.3.2

#### Propriedades do Produto Escalar

Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores no espaço bi ou tridimensional e  $l$  é um escalar, então:

- (a)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- (b)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- (c)  $l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (l\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (l\mathbf{v})$
- (d)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$  se  $\mathbf{v} \neq 0$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$  se  $\mathbf{v} = 0$

**Prova.** Nós iremos provar (c) para vetores no espaço tridimensional e deixar as demais provas como exercícios. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ; então

$$\begin{aligned} l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= l(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ &= (lu_1)v_1 + (lu_2)v_2 + (lu_3)v_3 \\ &= (l\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (l\mathbf{v})$$

**Uma Projeção Ortogonal** Em muitas aplicações é de interesse “decompor” um vetor  $\mathbf{u}$  na soma de dois componentes, um paralelo a um vetor não-nulo especificado  $\mathbf{a}$  e o outro perpendicular a  $\mathbf{a}$ . Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{a}$  são posicionados com seus pontos iniciais coincidindo com um ponto  $Q$ , podemos decompor o vetor  $\mathbf{u}$  como segue (Figura 3.3.6): baixamos uma perpendicular da ponta de  $\mathbf{u}$  para a reta ao longo de  $\mathbf{a}$  e construímos o vetor  $\mathbf{w}_1$  de  $Q$  ao pé desta perpendicular. Em seguida tomamos a diferença

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$

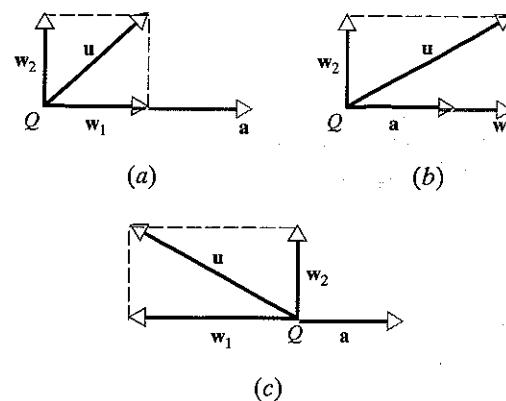


Figura 3.3.6 O vetor  $\mathbf{u}$  é a soma de  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ , onde  $\mathbf{w}_1$  é paralelo ao vetor  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{w}_2$  é perpendicular ao vetor  $\mathbf{a}$ .

Conforme indicado na Figura 3.3.6, o vetor  $\mathbf{w}_1$  é paralelo ao vetor  $\mathbf{a}$ , o vetor  $\mathbf{w}_2$  é perpendicular ao vetor  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$$

O vetor  $\mathbf{w}_1$ , chamado *projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{a}$* , ou então *componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ao longo do vetor  $\mathbf{a}$* , é denotado por

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} \quad (7)$$

O vetor  $\mathbf{w}_2$  é chamado *componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ortogonal ao vetor  $\mathbf{a}$* . Como  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ , este vetor pode ser escrito com a notação de (7) como

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$$

O seguinte teorema dá fórmulas para calcular os vetores  $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$  e  $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ .

### Teorema 3.3.3

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{a}$  são vetores no espaço bi ou tridimensional e se  $\mathbf{a} \neq 0$ , então

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \quad (\text{componente vetorial de } \mathbf{u} \text{ ao longo de } \mathbf{a})$$

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \quad (\text{componente vetorial de } \mathbf{u} \text{ ortogonal a } \mathbf{a})$$

**Prova.** Sejam  $\mathbf{w}_1 = \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ . Como  $\mathbf{w}_1$  é paralelo a  $\mathbf{a}$ , deve ser um múltiplo escalar de  $\mathbf{a}$ , e portanto pode ser escrito na forma  $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{a}$ . Assim

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2 \quad (8)$$

Tomando o produto escalar de  $\mathbf{a}$  com ambos os lados de (8) e usando os Teoremas 3.3.1a e 3.3.2 resulta

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} \quad (9)$$

Mas  $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} = 0$ , pois  $\mathbf{w}_2$  é perpendicular a  $\mathbf{a}$ ; portanto (9) dá

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

Como  $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = \mathbf{w}_1 = k\mathbf{a}$ , obtemos

$$\text{proj}_a \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$$

**EXEMPLO 6 O Componente Vetorial de  $\mathbf{u}$  ao longo de  $\mathbf{a}$** 

Sejam  $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$  e  $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$ . Encontre o componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ao longo de  $\mathbf{a}$  e o componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{a}$ .

*Solução.*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} &= (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15 \\ \|\mathbf{a}\|^2 &= 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21\end{aligned}$$

Portanto o componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ao longo de  $\mathbf{a}$  é

$$\text{proj}_a \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

e o componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{a}$  é

$$\mathbf{u} - \text{proj}_a \mathbf{u} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

Para conferir, o leitor pode querer verificar que os vetores  $\mathbf{u} - \text{proj}_a \mathbf{u}$  e  $\mathbf{a}$  são perpendiculares mostrando que o seu produto escalar é zero.

Uma fórmula para o comprimento do componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ao longo de  $\mathbf{a}$  pode ser obtida escrevendo

$$\begin{aligned}\|\text{proj}_a \mathbf{u}\| &= \left\| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \right\| \\ &= \left| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right| \|\mathbf{a}\| \quad \leftarrow \text{Fórmula (5) da Seção 3.2} \\ &= \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}\| \quad \leftarrow \text{Pois } \|\mathbf{a}\|^2 > 0\end{aligned}$$

o que fornece

$$\|\text{proj}_a \mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} \quad (10)$$

Se  $\theta$  denota o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{a}$ , então  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{a}\| \cos \theta$ , de modo que (10) pode também ser escrito da forma

$$\|\text{proj}_a \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{a}\| \cos \theta \quad (11)$$

(Verifique.) Uma interpretação geométrica deste resultado é dada na Figura 3.3.7.

Como um exemplo, nós usaremos métodos vetoriais para deduzir uma fórmula para a distância de um ponto no plano a uma reta.

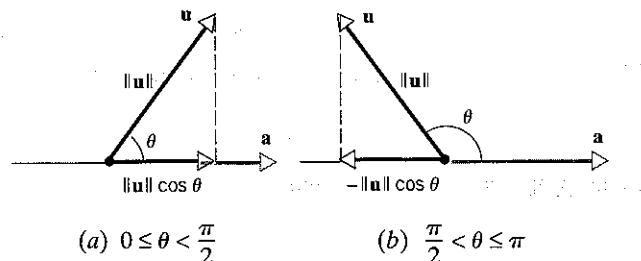


Figura 3.3.7

**EXEMPLO 7 A Distância entre um Ponto e uma Reta**

Encontre uma fórmula para a distância  $D$  entre o ponto  $P_0(x_0, y_0)$  e a reta  $ax + by + c = 0$ .

*Solução.*

Seja  $Q(x_1, y_1)$  um ponto qualquer da reta e posicione o vetor  $\mathbf{n} = (a, b)$  com seu ponto inicial em  $Q$ .

Como sabemos do Exemplo 5, o vetor  $\mathbf{n}$  é perpendicular à reta (Figura 3.3.8). Conforme indicado na figura, a distância  $D$  é igual ao comprimento da projeção ortogonal de  $\overrightarrow{QP_0}$  sobre  $\mathbf{n}$ ; assim, por (10),

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP_0}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

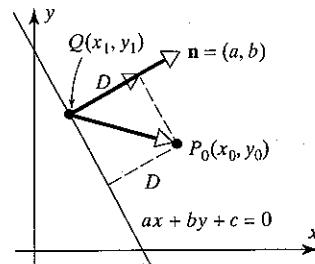


Figura 3.3.8

Mas

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP_0} &= (x_0 - x_1, y_0 - y_1) \\ \overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) \\ \|\mathbf{n}\| &= \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

de modo que

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (12)$$

Como o ponto  $Q(x_1, y_1)$  está na reta, suas coordenadas devem satisfazer a equação da reta, ou seja,

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \text{ou} \quad c = -ax_1 - by_1$$

Substituindo esta expressão em (12) fornece a fórmula

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (13)$$

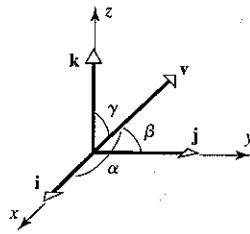
**EXEMPLO 8 Usando a Fórmula da Distância**

Segue da fórmula (13) que a distância  $D$  do ponto  $(1, -2)$  à reta  $3x + 4y - 6 = 0$  é

$$D = \frac{|(3)(1) + 4(-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

### Conjunto de Exercícios 3.3

1. Encontre  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .
  - (a)  $\mathbf{u} = (2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (5, -7)$
  - (b)  $\mathbf{u} = (-6, -2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0)$
  - (c)  $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$
  - (d)  $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$
2. Em cada parte do Exercício 1, encontre o cosseno do ângulo  $\theta$  entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .
3. Determine se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  fazem um ângulo agudo, um ângulo obtuso ou são ortogonais.
  - (a)  $\mathbf{u} = (6, 1, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$
  - (b)  $\mathbf{u} = (0, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
  - (c)  $\mathbf{u} = (-6, 0, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$
  - (d)  $\mathbf{u} = (2, 4, -8)$ ,  $\mathbf{v} = (5, 3, 7)$
4. Encontre a projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  em  $\mathbf{a}$ .
  - (a)  $\mathbf{u} = (6, 2)$ ,  $\mathbf{a} = (3, -9)$
  - (b)  $\mathbf{u} = (-1, -2)$ ,  $\mathbf{a} = (-2, 3)$
  - (c)  $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$ ,  $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$
  - (d)  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$
5. Em cada parte do Exercício 4, encontre o componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{a}$ .
6. Em cada parte, encontre  $\|\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}\|$ .
  - (a)  $\mathbf{u} = (1, -2)$ ,  $\mathbf{a} = (-4, -3)$
  - (b)  $\mathbf{u} = (5, 6)$ ,  $\mathbf{a} = (2, -1)$
  - (c)  $\mathbf{u} = (3, 0, 4)$ ,  $\mathbf{a} = (2, 3, 3)$
  - (d)  $\mathbf{u} = (3, -2, 6)$ ,  $\mathbf{a} = (1, 2, -7)$
7. Sejam  $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 6, 3)$  e  $k = -4$ . Verifique o Teorema 3.3.2 para estas quantidades.
8. (a) Mostre que  $\mathbf{v} = (a, b)$  e  $\mathbf{w} = (-b, a)$  são vetores ortogonais.  
 (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar dois vetores ortogonais a  $\mathbf{v} = (2, -3)$ .  
 (c) Encontre dois vetores unitários que são ortogonais a  $(-3, 4)$ .
9. Sejam  $\mathbf{u} = (3, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (5, -1)$  e  $\mathbf{w} = (7, 1)$ . Calcule as seguintes expressões.
  - (a)  $\mathbf{u} \cdot (7\mathbf{v} + \mathbf{w})$
  - (b)  $\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}\|$
  - (c)  $\|\mathbf{u}\|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
  - (d)  $(\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
10. Encontre cinco vetores não-nulos distintos que são ortogonais a  $\mathbf{u} = (5, -2, 3)$ .
11. Use vetores para encontrar os cossenos dos ângulos internos do triângulo de vértices  $(0, -1)$ ,  $(1, -2)$  e  $(4, 1)$ .
12. Mostre que  $A(3, 0, 2)$ ,  $B(4, 3, 0)$  e  $C(8, 1, -1)$  são vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?
13. Encontre um vetor unitário que é ortogonal a ambos  $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ .
14. Sejam  $\mathbf{p} = (2, k)$  e  $\mathbf{q} = (3, 5)$ . Encontre  $k$  tal que
  - (a)  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  são paralelos
  - (b)  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  são ortogonais
  - (a) o ângulo entre  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  é  $\pi/3$
  - (a) o ângulo entre  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  é  $\pi/4$
15. Use a Fórmula (13) para calcular a distância entre o ponto e a reta.
  - (a)  $4x + 3y + 4 = 0$ ;  $(-3, 1)$
  - (b)  $y = -4x + 2$ ;  $(2, -5)$
  - (c)  $3x + y = 5$ ;  $(1, 8)$
16. Mostre que vale a identidade  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$ .
17. Mostre que vale a identidade  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$ .
18. Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas faces.
19. Sejam  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  os vetores unitários ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  positivos de um sistema de coordenadas retangulares no espaço tridimensional. Se  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  é um vetor não-nulo, então os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , respectivamente, são chamados **ângulos diretores de  $\mathbf{v}$**  (veja a figura) e os números  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$  são os **cossenos diretores de  $\mathbf{v}$** .
  - (a) Mostre que  $\cos \alpha = a / \|\mathbf{v}\|$ .
  - (b) Encontre  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$ .
  - (c) Mostre que  $\mathbf{v} / \|\mathbf{v}\| = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .
  - (d) Mostre que  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .



**Figura Ex-19**

20. Use o resultado do Exercício 19 para estimar, até o grau mais próximo, os ângulos que a diagonal de uma caixa de 10 cm × 15 cm × 25 cm faz com as arestas da caixa. [Observação. É necessária uma calculadora.]
21. Em relação ao Exercício 19, mostre que dois vetores não-nulos  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  do espaço tridimensional são perpendiculares se, e somente se, seus cossenos diretores satisfazem
- $$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$
22. Mostre que se  $\mathbf{v}$  é perpendicular a ambos  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ , então  $\mathbf{v}$  é ortogonal a  $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$ , para quaisquer escalares  $k_1$  e  $k_2$ .
23. Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional e sejam  $k = \|\mathbf{u}\|$  e  $l = \|\mathbf{v}\|$ . Mostre que o vetor  $\mathbf{w} = t\mathbf{u} + k\mathbf{v}$  bissecta o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

## Discussão e Descoberta

24. Em cada parte, há alguma coisa errada com a expressão. O que é?
- (a)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$     (b)  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$     (c)  $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$     (d)  $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
25. É possível ter  $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{a}$ ? Explique seu raciocínio.
26. Se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , é correto cancelar  $\mathbf{u}$  de ambos os lados da equação  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  e concluir que  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ? Explique seu raciocínio.
27. Suponha que  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores não-nulos mutuamente ortogonais no espaço tridimensional e suponha que você conhece os produtos escalares destes três vetores com um vetor  $\mathbf{r}$  do espaço tridimensional. Obtenha uma expressão para  $\mathbf{r}$  em termos de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  e dos produtos escalares. [Sugestão.] Procure obter uma expressão do tipo  $\mathbf{r} = b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{v} + b_3\mathbf{w}$ .
28. Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores ortogonais do espaço bi ou tridimensional. Qual é o teorema famoso descrito pela equação  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ ? Faça uma figura para corroborar sua resposta.

## 3.4 PRODUTO VETORIAL

Em muitas aplicações de vetores a problemas geométricos, físicos e de engenharia é de interesse construir um vetor no espaço tridimensional que é perpendicular a dois vetores dados. Nesta seção nós iremos mostrar como fazer isto.

**Produto Vetorial de Vetores** Lembre da Seção 3.3 que o produto escalar de dois vetores nos espaços bi e tridimensionais produz um escalar. Nós iremos definir agora um tipo de multiplicação vetorial que produz um vetor como produto, mas que é aplicável somente ao espaço tridimensional.

### Definição

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  são vetores no espaço tridimensional, então o produto vetorial  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é o vetor definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \quad (1a)$$

ou em notação de determinante,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad (1b)$$

OBSERVAÇÃO. Em vez de memorizar (1b), você pode obter os componentes de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  como segue:

- Forme a matriz  $2 \times 3$  dada por  $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ , cuja primeira linha contém os componentes de  $\mathbf{u}$  e cuja segunda linha contém os componentes de  $\mathbf{v}$ .
- Para obter o primeiro componente de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , delete a primeira coluna e tome o determinante; para obter o segundo componente, delete a segunda coluna e tome o

negativo do determinante; e para obter o terceiro componente, delete a terceira coluna e tome o determinante.

### EXEMPLO 1 Calculando um Produto Vetorial

Encontre  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , sendo  $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$  e  $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ .

Solução.

Usando (1) ou o mnemônico da observação precedente, nós temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left( \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, -7, -6) \end{aligned}$$

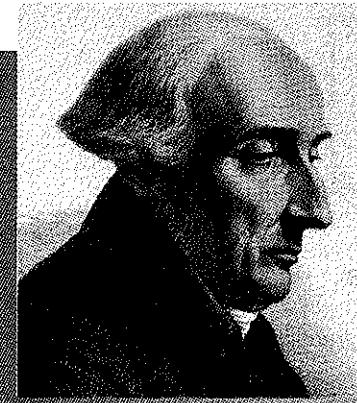
Existe uma diferença importante entre o produto escalar e o produto vetorial de dois vetores—o produto escalar é um escalar e o produto vetorial é um vetor. O teorema a seguir dá algumas relações importantes entre os produtos escalar e vetorial e também mostra que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é ortogonal a ambos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

### Teorema 3.4.1

### Relações entre os Produtos Escalar e Vetorial

Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores no espaço tridimensional, então:

- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$     ( $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é ortogonal a  $\mathbf{u}$ )
- $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$     ( $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é ortogonal a  $\mathbf{v}$ )
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$     (*identidade de Lagrange*)
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$     (*relação entre os produtos vetorial e escalar*)
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$     (*relação entre os produtos vetorial e escalar*)



**Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) foi um matemático e astrônomo franco-italiano. Embora seu pai quisesse que ele se tornasse um advogado, Lagrange foi atraído para a Matemática e Astronomia depois de ler um trabalho do astrônomo Halley. Aos 16 anos começou a estudar Matemática por conta própria e aos 19 foi designado para um cargo de professor na Escola de Artilharia Real de Turim. No ano seguinte ele resolveu alguns problemas famosos usando métodos novos que acabaram florescendo em um ramo da Matemática chamado *Cálculo das Variações*. Estes métodos e sua aplicação a problemas de Mecânica Celeste foram tão monumentais que aos 25 anos Lagrange era considerado por muitos de seus contemporâneos como o maior matemático vivo. Um dos trabalhos mais famosos de Lagrange é *Mecânica Analítica*, no qual ele reduziu a teoria da Mecânica a uma única fórmula geral das quais todas as demais equações podem ser deduzidas.

Um grande admirador de Lagrange foi Napoleão, que o cobriu de honrarias. Apesar de sua fama, Lagrange foi um homem tímido e modesto. Quando morreu, foi enterrado com honras no Panteão.

**Prova (a).** Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Então

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0\end{aligned}$$

**Prova (b).** Similar a (a).

**Prova (c).** Como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \quad (2)$$

e

$$\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \quad (3)$$

a prova pode ser concluída desenvolvendo os lados direitos de (2) e (3) e verificando sua igualdade. ■

**Prova (d) e (e).** Veja os Exercícios 26 e 27. ■

### EXEMPLO 2 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é Perpendicular a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$

Considere os vetores

$$\mathbf{u} = (1, 2, -2) \text{ e } \mathbf{v} = (3, 0, 1)$$

No Exemplo 1 mostramos que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Como

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

e

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é ortogonal a ambos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , como garante o Teorema 3.4.1. ♦

As principais propriedades aritméticas do produto vetorial são as enumeradas no próximo teorema.

### Teorema 3.4.2

#### Propriedades do Produto Vetorial

Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores no espaço tridimensional e  $l$  é um escalar qualquer, então:

- (a)  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- (b)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- (c)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- (d)  $l(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (l\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (l\mathbf{v})$
- (e)  $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- (f)  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

As demonstrações seguem imediatamente da Fórmula (1b) e das propriedades dos determinantes; por exemplo, (a) pode ser demonstrada como segue:

**Prova (a).** Trocando-se  $\mathbf{u}$  com  $\mathbf{v}$  em (1b), trocam as linhas dos três determinantes no lado direito de (1b) e portanto troca o sinal de cada componente do produto vetorial. Assim,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ . ■

As provas das demais partes são deixadas como exercícios.

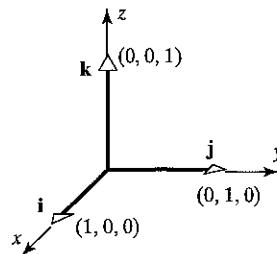
### EXEMPLO 3 Vetores Unitários Canônicos

Considere os vetores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0) \text{ e } \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Estes vetores têm, cada um, comprimento 1 e estão sobre os eixos coordenados (Figura 3.4.1). Eles são chamados **vetores unitários canônicos** do espaço tridimensional. Cada vetor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  do espaço tridimensional pode ser expresso em termos de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , pois podemos escrever

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$



**Figura 3.4.1** Os vetores unitários canônicos.

Por exemplo,

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

De (1b) obtemos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

O leitor não deveria encontrar dificuldades para estabelecer os seguintes resultados:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

A Figura 3.4.2 é útil para lembrar destes resultados. Olhando para este diagrama, vemos que o produto vetorial de dois vetores tomados no sentido horário é o vetor seguinte e o produto vetorial de dois vetores tomados no sentido anti-horário é o negativo do vetor seguinte.

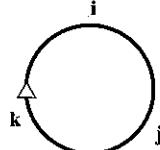


Figura 3.4.2

**O Produto Vetorial em Formato de Determinante** Também é importante notar que um produto vetorial pode ser representado simbolicamente na forma de um determinante  $3 \times 3$ :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (4)$$

Por exemplo, se  $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$  e  $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ , então

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

o que confere com o resultado obtido no Exemplo 1.

**Advertência** Não é verdade, em geral, que  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ . Por exemplo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$$

Nós sabemos do Teorema 3.4.1 que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é ortogonal a ambos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores não-nulos, pode ser mostrado que o sentido de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  pode ser determinado usando a “regra da mão direita”<sup>1</sup> (Figura 3.4.3): seja  $\theta$  o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e suponha que  $\mathbf{u}$  é girado pelo ângulo  $\theta$  até coincidir com  $\mathbf{v}$ . Se os dedos da mão direita se fecharem apontando no sentido desta rotação, então o polegar indica (aproximadamente) o sentido de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

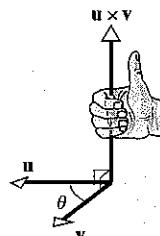


Figura 3.4.3

O leitor pode considerar instrutivo treinar esta regra com os produtos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

### Interpretação Geométrica do Produto Vetorial

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores no espaço tridimensional, então a norma de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  tem uma interpretação geométrica útil. A identidade de Lagrange, dada no Teorema 3.4.1, afirma que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (5)$$

Se  $\theta$  denota o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , então  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ , de modo que (5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Como  $0 \leq \theta \leq \pi$ , segue que  $\sin \theta \geq 0$ , e portanto isto pode ser reescrito como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \quad (6)$$

Mas  $\|\mathbf{v}\| \sin \theta$  é a altura do paralelogramo determinado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  (Figura 3.4.4). Assim, por (6), a área  $A$  deste paralelogramo é dada por

$$A = (\text{base})(\text{altura}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

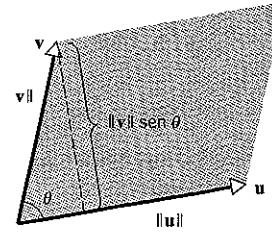


Figura 3.4.4

Este resultado também é válido se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são colineares, pois então o paralelogramo determinado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  tem área zero e por (6) temos  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , já que, neste caso,  $\theta = 0$ . Assim, temos o seguinte teorema.

### Teorema 3.4.3

#### Área de um Paralelogramo

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores no espaço tridimensional, então  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$  é igual à área do paralelogramo determinado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

<sup>1</sup> Lembre que nós somente consideramos sistemas de coordenadas de mão direita neste texto. Se estivéssemos usando sistemas de mão esquerda, usariamos aqui uma “regra da mão esquerda.”

**EXEMPLO 4 Área de um Triângulo**

Encontre a área do triângulo determinado pelos pontos  $P_1(2, 2, 0)$ ,  $P_2(-1, 0, 2)$  e  $P_3(0, 4, 3)$ .

*Solução.*

A área  $A$  do triângulo é  $\frac{1}{2}$  da área do paralelogramo determinado pelos vetores  $\vec{P_1P_2}$  e  $\vec{P_1P_3}$  (Figura 3.4.5). Usando o método discutido no Exemplo 2 da Seção 3.1,  $\vec{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$  e  $\vec{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$ . Segue que

$$\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

e consequentemente

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$

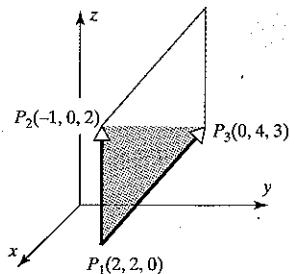


Figura 3.4.5

**Definição**

Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores no espaço tridimensional então

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é chamado *produto misto* de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .

O produto misto de  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  pode ser calculado a partir da fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Isto segue da Fórmula (4), pois

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left( \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**EXEMPLO 5 Calculando um Produto Misto**

Calcule o produto misto  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  dos vetores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

*Solução.*

Por (7),

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 60 + 4 - 15 = 49 \end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO.** O símbolo  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$  não faz sentido por que nós não podemos formar o produto vetorial de um escalar com um vetor. Assim, não há ambigüidade escrevendo  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$  em vez de  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ . No entanto, por clareza, em geral manteremos os parênteses.

Segue de (7) que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

pois os determinantes  $3 \times 3$  que representam estes produtos podem ser obtidos um do outro por *duas* trocas de linhas. (Verifique.) Estas relações podem ser lembradas movendo os vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  no sentido horário em torno dos vértices do triângulo da Figura 3.4.6.

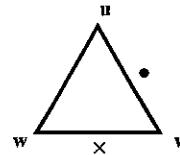


Figura 3.4.6

**Interpretação Geométrica de Determinantes** O próximo teorema fornece uma interpretação geométrica útil de determinantes  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ .

**Teorema 3.4.4**

(a) *O valor absoluto do determinante*

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

*é igual à área do paralelogramo no espaço bidimensional determinado pelos vetores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . (Veja Figura 3.4.7a.)*

(b) *O valor absoluto do determinante*

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

*é igual ao volume do paralelepípedo no espaço tridimensional determinado pelos vetores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ . (Veja Figura 3.4.7b.)*

*Prova (a).* A chave para a prova é usar o Teorema 3.4.3. Contudo, aquele teorema refere-se a vetores no espaço tridimensional, enquanto  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  são vetores do espaço bidimensional. Para superar este “problema de dimen-

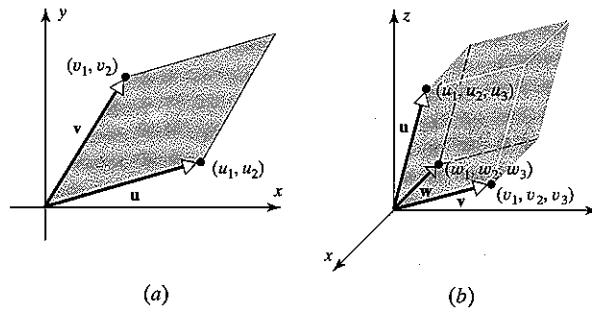


Figura 3.4.7

são”, veremos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  como vetores do plano  $xy$  de um sistema de coordenadas  $xyz$  (Figura 3.4.8a), no qual estes vetores são escritos como  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$ . Assim,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k}$$

Decorre agora do Teorema 3.4.3 e de  $\|\mathbf{k}\| = 1$  que a área  $A$  do paralelogramo determinado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k} \right\| = \left\| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right\| \|\mathbf{k}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right\|$$

completando a prova.

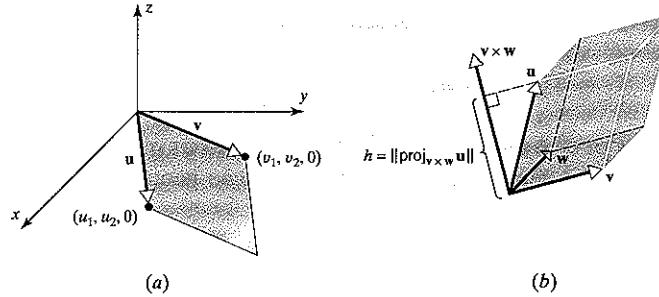


Figura 3.4.8

*Prova (b).* Conforme mostramos na Figura 3.4.8b, tomamos o paralelogramo determinado por  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  como a base do paralelepípedo determinado por  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Segue do Teorema 3.4.3 que a área da base é  $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$  e, como ilustra a Figura 3.4.8b, a altura  $h$  do paralelepípedo é o comprimento da projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ . Logo, pela Fórmula (10) da Seção 3.3,

$$h = \|\text{proj}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

Assim, o volume  $V$  do paralelepípedo é

$$V = (\text{área da base}) \cdot \text{altura} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

E portanto, por (7),

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

completando a prova. ■

OBSERVAÇÃO. Se  $V$  denota o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , então o Teorema 3.4.4 e a Fórmula (7) garantem que

$$V = \begin{cases} \text{volume do paralelepípedo} \\ \text{determinado por } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \text{ e } \mathbf{w} \end{cases} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \quad (8)$$

Disto, e do Teorema 3.3.1b, nós podemos concluir que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

onde os resultados + ou - dependem de  $\mathbf{u}$  fazer um ângulo agudo ou obtuso com  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ .

A Fórmula (8) leva a um teste útil para verificar se três dados vetores ficam em um mesmo plano ou não. Como três vetores não-coplanares determinam um paralelepípedo de volume positivo, decorre de (8) que  $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = 0$  se, e somente se, os vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  estão num mesmo plano. Assim, temos o resultado seguinte.

### Teorema 3.4.5

Se os três vetores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  têm o mesmo ponto inicial, então eles ficam em um mesmo plano se, e somente se,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

**Independência entre Produto Vetorial e Coordenadas** No início, definimos um vetor como sendo um segmento de reta orientado ou uma flecha nos espaços bi e tridimensionais; sistemas de coordenadas e componentes foram introduzidos mais tarde a fim de simplificar os cálculos com vetores. Assim, um vetor tem uma “existência matemática” independentemente da introdução ou não de um sistema de coordenadas. Além disto, os componentes de um vetor não são determinados somente pelo vetor; eles também dependem do sistema de coordenadas escolhido. Por exemplo, na Figura 3.4.9 nós fornecemos um vetor fixo  $\mathbf{v}$  do plano e dois sistemas de coordenadas distintos. No sistema de coordenadas  $xy$ , os componentes de  $\mathbf{v}$  são  $(1, 1)$  e no sistema de coordenadas  $x'y'$  eles são  $(\sqrt{2}, 0)$ .

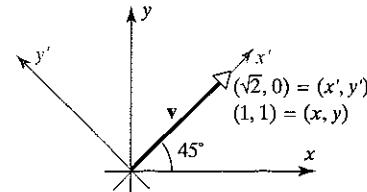


Figura 3.4.9

Isto levanta uma questão importante sobre nossa definição de produto vetorial. Já que definimos o produto vetorial  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  em termos de componentes de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e uma vez que estes componentes dependem do sistema de coordenadas escolhido, poderia ser possível que dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  fixados tivessem produtos vetoriais distintos em sistemas de coordenadas diferentes.

Felizmente, isto não ocorre e, para ver porque, nós só precisamos lembrar que

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é perpendicular a ambos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .
- O sentido de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é determinado pela regra da mão direita.
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$ .

Estas três propriedades determinam o vetor  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  completamente: a primeira e a segunda propriedades determinam a direção e sentido e a terceira propriedade determina o comprimento. Como estas propriedades de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  dependem somente dos comprimentos e das posições relativas de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e não do particular sistema de coordenadas de mão direita que estamos usando, o vetor  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  permanecerá inalterado se introduzirmos um outro sistema de coordenadas de mão direita. Assim, nós dizemos que a definição de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é *independente de coordenadas*. Este resultado é importante para físicos e engenheiros que, muitas vezes, trabalham com vários sistemas de coordenadas em um mesmo problema.

### EXEMPLO 6 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é Independente do Sistema de Coordenadas

Considere dois vetores perpendiculares  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , cada um de comprimento 1 (Figura 3.4.10a). Se nós introduzirmos um sistema de coordenadas  $xyz$  como indicado na Figura 3.4.10b, então

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$$

e portanto

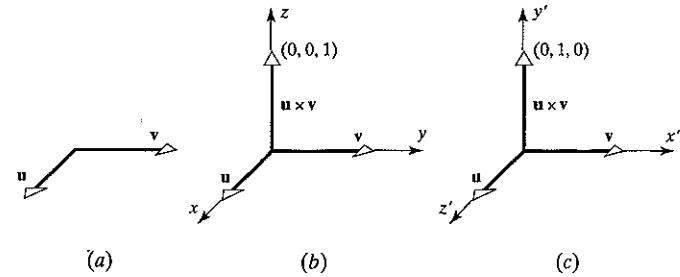
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

No entanto, introduzindo um sistema de coordenadas como mostra a Figura 3.4.10c, temos

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$$

e portanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$$



**Figura 3.4.10**

No entanto, a partir das Figuras 3.4.10b e 3.4.10c é claro que o vetor  $(0, 0, 1)$  no sistema  $xyz$  coincide com o vetor  $(0, 1, 0)$  no sistema  $x'y'z'$ . Assim, obtemos o mesmo vetor  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , tanto usando coordenadas do sistema  $xyz$  quanto usando coordenadas do sistema  $x'y'z'$ . ♦

### Conjunto de Exercícios 3.4

1. Sejam  $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$  e  $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$ . Calcule
  - $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$
  - $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
  - $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
  - $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
  - $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$
  - $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$
2. Encontre um vetor que é ortogonal a ambos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .
  - $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$
  - $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$
3. Encontre a área do paralelogramo determinado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .
  - $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$
  - $\mathbf{u} = (2, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$
  - $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$
4. Encontre a área do triângulo de vértices  $P$ ,  $Q$  e  $R$ .
  - $P(2, 6, -1)$ ,  $Q(1, 1, 1)$ ,  $R(4, 6, 2)$
  - $P(1, -1, 2)$ ,  $Q(0, 3, 4)$ ,  $R(6, 1, 8)$
5. Verifique o Teorema 3.4.1 para os vetores  $\mathbf{u} = (4, 2, 1)$  e  $\mathbf{v} = (-3, 2, 7)$ .
6. Verifique as partes (a), (b) e (c) do Teorema 3.4.2 para  $\mathbf{u} = (5, -1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (6, 0, -2)$ ,  $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$  e  $k = -5$ .
7. Encontre um vetor  $\mathbf{v}$  que é ortogonal ao vetor  $\mathbf{u} = (2, -3, 5)$ .
8. Encontre o produto misto  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ .
  - $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$ ,  $\mathbf{w} = (-1, 2, 5)$
  - $\mathbf{u} = (3, -1, 6)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$ ,  $\mathbf{w} = (5, -1, 2)$
9. Suponha que  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$ . Encontre
  - $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$
  - $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$
  - $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
  - $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
  - $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$
  - $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$
10. Obtenha o volume do paralelepípedo de lados  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .
  - $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$ ,  $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$
  - $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 5, 1)$ ,  $\mathbf{w} = (1, 2, 4)$

## 120 • • • Álgebra Linear com Aplicações

11. Determine se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  estão num mesmo plano quando seus pontos iniciais coincidem.
- $\mathbf{u} = (-1, -2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$ ,  $\mathbf{w} = (5, -4, 0)$
  - $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (4, -1, 1)$ ,  $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$
  - $\mathbf{u} = (4, -8, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$ ,  $\mathbf{w} = (3, -4, 12)$
12. Encontre todos os vetores unitários paralelos ao plano  $yz$  que são perpendiculares ao vetor  $(3, -1, 2)$ .
13. Encontre todos os vetores unitários do plano determinado por  $\mathbf{u} = (3, 0, 1)$  e  $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$  que são perpendiculares ao vetor  $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$ .
14. Sejam  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  e  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ . Mostre que
- $$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$
15. Simplifique  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ .
16. Use o produto vetorial para encontrar o seno do ângulo entre os vetores  $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$  e  $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$ .
17. (a) Obtenha a área do triângulo de vértices  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(0, 2, 3)$  e  $C(2, 0, 1)$ .  
 (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a altura do vértice  $C$  ao lado  $AB$ .
18. Mostre que se  $\mathbf{u}$  é um vetor de um ponto qualquer de uma reta a um ponto  $P$  fora da reta e se  $\mathbf{v}$  é um vetor paralelo à reta, então a distância entre  $P$  e a reta é dada por  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| / \|\mathbf{v}\|$ .
19. Use o resultado do Exercício 18 para encontrar a distância entre o ponto  $P$  e a reta pelos pontos  $A$  e  $B$ :
- $P(-3, 1, 2)$ ,  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(-2, 3, -4)$
  - $P(4, 3, 0)$ ,  $A(2, 1, -3)$ ,  $B(0, 2, -1)$
20. Prove: Se  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ , então  $\operatorname{tg} \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ .
21. Considere o paralelepípedo de lados  $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$  e  $\mathbf{w} = (1, 3, 3)$ .
- Encontre a área da face determinada por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .
  - Encontre o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e o plano contendo a face determinada por  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .
- [*Observação.* O ângulo entre um vetor e um plano é definido pelo complemento do ângulo  $\theta$  entre o vetor e a normal do plano, tomando  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .]
22. Encontre um vetor  $\mathbf{n}$  perpendicular ao plano determinado pelos pontos  $A(0, -2, 1)$ ,  $B(1, -1, -2)$  e  $C(-1, 1, 0)$ . [Veja observação no Exercício 21.]
23. Sejam  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  os vetores cujos componentes no sistema  $xyz$  da Figura 3.4.10 são  $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$  e  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ .
- Encontre os componentes de  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  no sistema  $x'y'z'$  da Figura 3.4.10.
  - Calcule  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$  usando os componentes do sistema  $xyz$ .
  - Calcule  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$  usando os componentes do sistema  $x'y'z'$ .
  - Mostre que os vetores obtidos em (b) e (c) são iguais.
24. Prove as seguintes identidades.
- $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
  - $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$
25. Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vetores não-nulos com o mesmo ponto inicial no espaço tridimensional mas tais que dois quaisquer deles não são colineares. Mostre que
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  está no mesmo plano determinado por  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .
  - $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$  está no mesmo plano determinado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .
26. Prove a parte (d) do Teorema 3.4.1. [*Sugestão.* Prove o resultado primeiro no caso  $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$ , depois o caso  $\mathbf{w} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$  e, por último, o caso  $\mathbf{w} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ . Finalmente, prove o caso geral  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  escrevendo  $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ .]
27. Prove a parte (e) do Teorema 3.4.1. [*Sugestão.* Aplique a parte (a) do Teorema 3.4.2 ao resultado da parte (d) do Teorema 3.4.1.]
28. Sejam  $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$  e  $\mathbf{w} = (3, -1, 2)$ . Calcule  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  usando a técnica do Exercício 26; depois confira seu resultado calculando o produto diretamente.
29. Prove: Se  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  estão num mesmo plano, então  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$ .
30. É um teorema da geometria sólida que o volume de um tetraedro é dado por  $\frac{1}{3} (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$ . Use este resultado para provar que o volume de um tetraedro cujos lados são os vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  é  $\frac{1}{6} |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$  (veja figura dada).

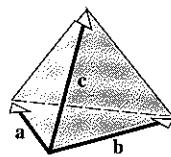


Figura Ex-30

31. Use o resultado do Exercício 30 para encontrar o volume do tetraedro de vértices  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ .
- $P(-1, 2, 0)$ ,  $Q(2, 1, -3)$ ,  $R(1, 0, 1)$ ,  $S(3, -2, 3)$
  - $P(0, 0, 0)$ ,  $Q(1, 2, -1)$ ,  $R(3, 4, 0)$ ,  $S(-1, -3, 4)$
32. Prove a parte (b) do Teorema 3.4.2.
33. Prove as partes (c) e (d) do Teorema 3.4.2.
34. Prove as partes (e) e (f) do Teorema 3.4.2.

## Discussão e Descoberta

35. (a) Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores não-colineares com ponto inicial na origem do espaço tridimensional. Faça um esboço que ilustra como o vetor  $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  está orientado em relação a  $\mathbf{u}$  e a  $\mathbf{v}$ .  
(b) O que você sabe dizer sobre os valores de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ? Explique seu raciocínio.
36. Se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , é correto cancelar  $\mathbf{u}$  de ambos os lados da equação  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$  e concluir que  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ? Explique seu raciocínio.
37. Há alguma coisa errada com uma das seguintes expressões. Qual delas é e o que está errado?  
 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$
38. O que você pode dizer sobre os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  se  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ?
39. Dê alguns exemplos de regras algébricas que valem para a multiplicação de números reais mas que não valem para o produto vetorial de vetores?

## 3.5 RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

### TRIDIMENSIONAL

Nesta seção nós utilizaremos vetores para deduzir equações de retas e planos no espaço tridimensional. Depois usaremos estas equações para resolver alguns problemas geométricos básicos.

**Planos no Espaço Tridimensional** Na Geometria Analítica, uma reta no espaço bidimensional pode ser especificada dando-se sua inclinação e um de seus pontos. Similarmente, um plano no espaço tridimensional pode ser especificado dando-se sua inclinação e um de seus pontos. Um método conveniente para descrever a inclinação de um plano é especificar um vetor não-nulo, chamado um vetor *normal*, que é perpendicular ao plano.

Suponha que queremos encontrar a equação do plano que passa pelo ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e que tenha o vetor normal  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ . É evidente pela Figura 3.5.1 que o plano consiste precisamente dos pontos  $P(x, y, z)$  para os quais o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  é ortogonal a  $\mathbf{n}$ , ou seja,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad (1)$$

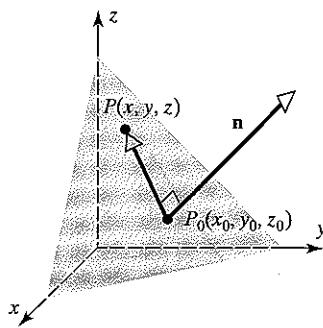


Figura 3.5.1 Plano com vetor normal.

Como  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , a Equação (1) pode ser escrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

Esta é a forma *ponto-normal* da equação de uma reta.

### EXEMPLO 1 Encontrando a Equação Ponto-Normal de um Plano

Encontre a equação do plano que passa pelo ponto  $(3, -1, 7)$  e é perpendicular ao vetor  $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$ .

Solução.

Por (2), a forma ponto-normal é

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$

Multiplicando e agrupando os termos, (2) pode ser reescrita na forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes, com  $a, b$  e  $c$  não todas nulas. Por exemplo, a equação no Exemplo 1 pode ser reescrita como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

Como o próximo teorema indica, os planos no espaço tridimensional são representados por equações da forma  $ax + by + cz + d = 0$ .

#### Teorema 3.5.1

Se  $a, b, c$  e  $d$  são constantes e  $a, b$  e  $c$  não são todas nulas, então o gráfico da equação

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (3)$$

é um plano com um vetor normal  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ .

A equação (3) é uma equação linear em  $x, y$  e  $z$ , denominada a *forma geral* da equação de um plano.

*Prova.* Por hipótese, os coeficientes  $a, b$  e  $c$  não são todos nulos. Suponha, por enquanto, que  $a \neq 0$ . Então a equação  $ax + by + cz + d = 0$  pode ser reescrita na forma  $a(x + (d/a)) + b y + c z = 0$ . Mas isto é uma forma ponto-normal do plano passando pelo ponto  $(-d/a, 0, 0)$  e tendo  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  como normal.

Se  $a = 0$ , então ou  $b \neq 0$  ou  $c \neq 0$ . Uma simples modificação do argumento acima dá conta destes casos. ■

Assim como as soluções de um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} ax + by &= k_1 \\ cx + dy &= k_2 \end{aligned}$$

correspondem aos pontos da intersecção das retas  $ax + by = k_1$  e  $cx + dy = k_2$  no plano  $xy$ , também as soluções de um sistema

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k_1 \\ dx + ey + fz &= k_2 \\ gx + hy + iz &= k_3 \end{aligned} \tag{4}$$

correspondem aos pontos de intersecção dos três planos  $ax + by + cz = k_1$ ,  $dx + ey + fz = k_2$  e  $gx + hy + iz = k_3$ .

Na Figura 3.5.2 ilustramos as possibilidades geométricas que ocorrem quando (4) tem zero, uma ou infinitas soluções.

### EXEMPLO 2 Equação de um Plano por Três Pontos

Encontre a equação de um plano passando pelos pontos  $P_1(1, 2, -1)$ ,  $P_2(2, 3, 1)$  e  $P_3(3, -1, 2)$ .

*Solução.*

Como os três pontos estão no plano, suas coordenadas devem satisfazer a equação geral  $ax + by + cz + d = 0$  do plano. Assim,

$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ 2a + 3b + c + d &= 0 \\ 3a - b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema obtemos  $a = -\frac{9}{16}t$ ,  $b = -\frac{1}{16}t$ ,  $c = \frac{5}{16}t$  e  $d = t$ . Tomando  $t = -16$ , por exemplo, resulta a equação desejada

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

Nós observamos que qualquer outra escolha de  $t$  fornece um múltiplo desta equação, de modo que qualquer valor de  $t \neq 0$  também daria uma equação válida do plano.

*Solução Alternativa.*

Como os pontos  $P_1(1, 2, -1)$ ,  $P_2(2, 3, 1)$  e  $P_3(3, -1, 2)$  estão no plano, os vetores  $\vec{P_1P_2} = (1, 1, 2)$  e  $\vec{P_1P_3} = (2, -3, 3)$  são paralelos ao plano. Portanto, o vetor  $\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = (9, 1, -5)$  é normal ao plano, já que é perpendicular a ambos  $\vec{P_1P_2}$  e  $\vec{P_1P_3}$ . Disto e por  $P_1$  estar no plano, vemos que

$$9(x - 1) + (y - 2) - 5(z + 1) = 0 \quad \text{ou} \quad 9x + y - 5z - 16 = 0$$

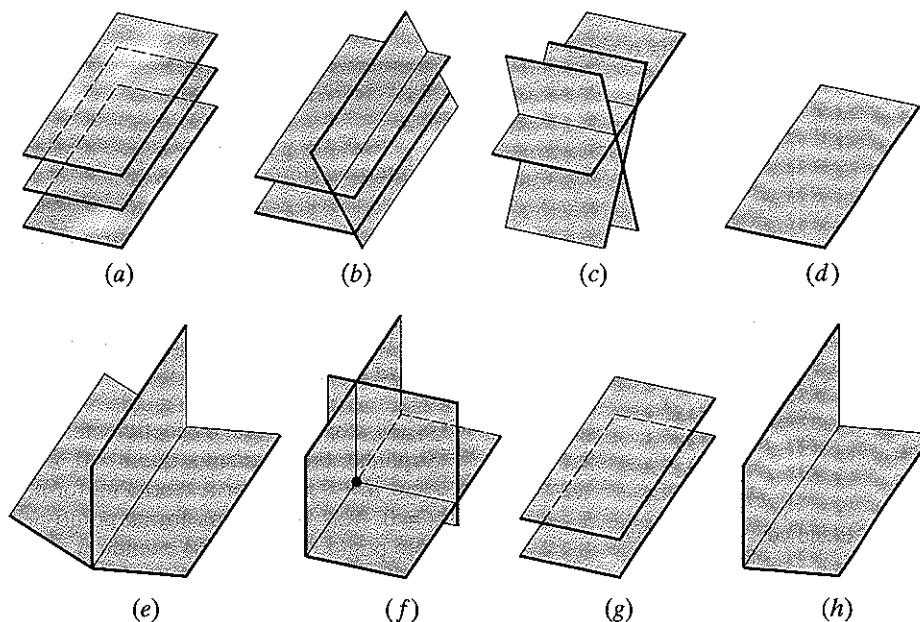
é uma forma ponto-normal para a equação do plano. ♦

### Forma Vetorial da Equação de um Plano

A notação vetorial fornece uma alternativa útil de escrever a forma ponto-normal da equação de um plano. Observando a Figura 3.5.3, sejam  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  o vetor da origem ao ponto  $P(x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  o vetor da origem ao ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e seja  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  um vetor normal ao plano. Então  $\vec{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , e assim a Fórmula (1) pode ser reescrita como

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \tag{5}$$

Esta é chamada a *forma vetorial da equação de um plano*.



**Figura 3.5.2** (a) Nenhuma solução (3 planos paralelos). (b) Nenhuma solução (2 planos paralelos). (c) Nenhuma solução (3 planos sem intersecção comum). (d) Infinitas soluções (3 planos coincidentes). (e) Infinitas soluções (3 planos cortando em uma reta). (f) Uma solução (3 planos cortando em um ponto). (g) Nenhuma solução (2 planos coincidentes paralelos a um terceiro plano). (h) Infinitas soluções (2 planos coincidentes cortando um terceiro plano).

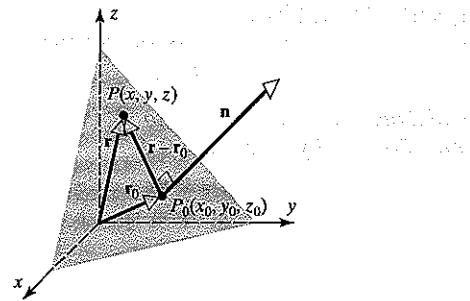


Figura 3.5.3

### EXEMPLO 3 Equações Vetoriais de um Plano Usando (5)

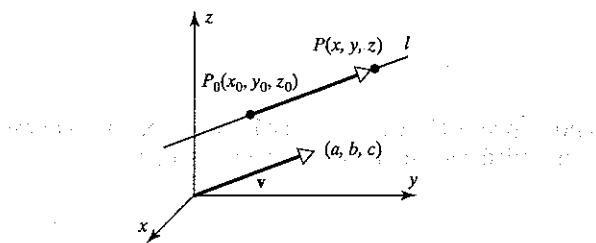
A equação

$$(-1, 2, 5) \cdot (x - 6, y - 3, z + 4) = 0$$

é a equação vetorial do plano que passa pelo ponto  $(6, 3, -4)$  e é perpendicular ao vetor  $\mathbf{n} = (-1, 2, 5)$ . ♦

**Retas no Espaço Tridimensional** Iremos mostrar agora como obter equações para as retas no espaço tridimensional. Suponha que  $l$  é a reta no espaço tridimensional pelo ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e paralela ao vetor não-nulo  $\mathbf{v} = (a, b, c)$ . É evidente (Figura 3.5.4) que  $l$  consiste precisamente dos pontos  $P(x, y, z)$  para os quais o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  é paralelo a  $\mathbf{v}$ , ou seja, para os quais existe um escalar  $t$  tal que

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \quad (6)$$

Figura 3.5.4  $\overrightarrow{P_0P}$  é paralelo a  $\mathbf{v}$ .

Em termos de componentes, (6) pode ser escrito como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

do que segue que  $x - x_0 = ta$ ,  $y - y_0 = tb$ , e  $z - z_0 = tc$ , de modo que

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc$$

À medida que o parâmetro  $t$  varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ , o ponto  $P(x, y, z)$  traça a reta  $l$ . As equações

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (7)$$

são chamadas as *equações paramétricas* de  $l$ .

### EXEMPLO 4 Equações Paramétricas de uma Reta

A reta pelo ponto  $(1, 2, -3)$  e paralela ao vetor  $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$  tem equações paramétricas

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -3 - 7t \quad (-\infty < t < +\infty) \quad \diamond$$

### EXEMPLO 5 Intersecção de uma Reta e o Plano $xy$

- Encontre as equações paramétricas da reta  $l$  que passa pelos pontos  $P_1(2, 4, -1)$  e  $P_2(5, 0, 7)$ .
- Em que ponto a reta corta o plano  $xy$ ?

*Solução (a).* Como o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -4, 8)$  é paralelo a  $l$  e  $P_1(2, 4, -1)$  é um ponto de  $l$ , a reta  $l$  é dada por

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 - 4t, \quad z = -1 + 8t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

*Solução (b).* A reta corta o plano  $xy$  no ponto em que  $z = -1 + 8t = 0$ , ou seja, onde  $t = \frac{1}{8}$ . A substituição deste valor de  $t$  nas equações paramétricas de  $l$  fornece o ponto

$$(x, y, z) = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{2}, 0\right)$$

como ponto de corte. ♦

### EXEMPLO 6 A Linha de Intersecção de Dois Planos

Encontre as equações paramétricas da reta de corte dos planos

$$3x + 2y - 4z - 6 = 0 \quad \text{e} \quad x - 3y - 2z - 4 = 0$$

*Solução.*

A reta de corte consiste de todos os pontos  $(x, y, z)$  que satisfazem as duas equações do sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= 6 \\ x - 3y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema obtemos  $x = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t$ ,  $y = -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t$  e  $z = t$ . Assim, a reta de corte pode ser representada pelas equações paramétricas

$$x = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t, \quad y = -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t, \quad z = t \quad (-\infty < t < +\infty) \quad \diamond$$

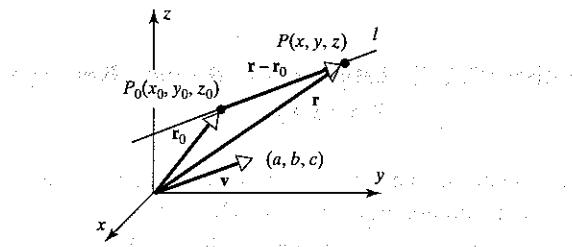
**Forma Vetorial da Equação de uma Reta** A notação vetorial fornece uma alternativa útil de escrever as equações paramétricas de uma reta. Observando a Figura 3.5.5, sejam  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  o vetor da origem ao ponto  $P(x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  o vetor da origem ao ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e seja  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  um vetor paralelo à reta. Então  $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  e assim, a Fórmula (6) pode ser reescrita como

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$$

Tomando em consideração o intervalo de variação dos valores de  $t$ , isto pode ser reescrito como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (8)$$

Esta é chamada a **forma vetorial da equação de uma reta** no espaço tridimensional.



**Figura 3.5.5** Interpretação vetorial de uma reta no espaço tridimensional.

### EXEMPLO 7 Uma Reta Paralela a um Vetor Dado

A equação

$$(x, y, z) = (-2, 0, 3) + t(4, -7, 1)$$

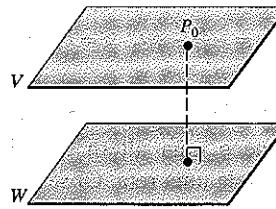
é a equação vetorial da reta pelo ponto  $(-2, 0, 3)$  que é paralela ao vetor  $\mathbf{v} = (4, -7, 1)$ .

**Problemas Envolvendo Distância** Concluímos esta seção discutindo dois “problemas de distância” básicos no espaço tridimensional:

#### Problemas:

- Obter a distância entre um ponto e um plano.
- Obter a distância entre dois planos paralelos.

Os dois problemas são relacionados. Se soubermos obter a distância entre um ponto e um plano, então podemos obter a distância entre dois planos paralelos calculando a distância entre qualquer um dos dois planos e um ponto arbitrário  $P_0$  do outro (Figura 3.5.6).



**Figura 3.5.6** A distância entre os planos paralelos  $V$  e  $W$  é igual à distância entre  $P_0$  e  $W$ .

### Teorema 3.5.2

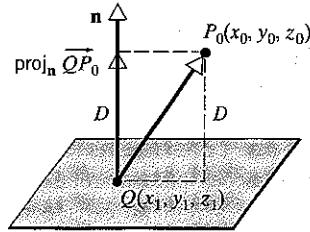
### Distância entre um Ponto e um Plano

A distância  $D$  entre um ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e o plano de equação  $ax + by + cz + d = 0$  é

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (9)$$

**Prova.** Seja  $Q(x_1, y_1, z_1)$  um ponto qualquer do plano. Posicione um vetor normal  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  com ponto inicial em  $Q$ . Como está ilustrado na Figura 3.5.7, a distância  $D$  é igual ao comprimento da projeção ortogonal de  $\overrightarrow{QP_0}$  sobre  $\mathbf{n}$ . Assim, usando (10) da Seção 3.3,

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP_0}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$



**Figura 3.5.7** A distância de  $P_0$  ao plano.

Mas

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Logo

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (10)$$

Como o ponto  $Q(x_1, y_1, z_1)$  está no plano, suas coordenadas devem satisfazer a equação do plano; portanto

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ou

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Substituindo esta expressão em (10) obtemos (9). ■

**OBSERVAÇÃO.** Note a semelhança entre (9) e a fórmula para a distância entre um ponto e uma reta no plano [ver (13) da Seção 3.3].

### EXEMPLO 8 Distância entre um Ponto e um Plano

Encontre a distância  $D$  entre o ponto  $(1, -4, -3)$  e o plano  $2x - 3y + 6z = -1$ .

*Solução.*

Para aplicar (9), primeiro reescrevemos a equação do plano na forma

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

Então

$$D = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

Dados dois planos, ou bem eles se cortam, e então podemos perguntar pela sua reta de corte, como no Exemplo 6, ou bem são paralelos, e então podemos perguntar pela distância entre eles. O próximo exemplo ilustra o segundo caso.

### EXEMPLO 9 Distância entre Planos Paralelos

Os planos

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{e} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

são paralelos pois seus vetores normais,  $(1, 2, -2)$  e  $(2, 4, -4)$ , são paralelos. Encontre a distância entre estes planos.

*Solução.*

Para obter a distância  $D$  entre os planos, podemos selecionar um ponto arbitrário em um dos planos e calcular sua distância ao outro plano. Colocando  $y = z = 0$  na equação  $x + 2y - 2z = 3$ , obtemos o ponto  $P_0(3, 0, 0)$  neste plano. A partir de (9), a distância entre  $P_0$  e o plano  $2x + 4y - 4z = 7$  é

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

### Conjunto de Exercícios 3.5

1. Encontre a forma ponto-normal da equação do plano passando por  $P$  e tendo normal  $\mathbf{n}$ .
  - (a)  $P(-1, 3, -2)$ ;  $\mathbf{n} = (-2, 1, -1)$
  - (b)  $P(1, 1, 4)$ ;  $\mathbf{n} = (1, 9, 8)$
  - (c)  $P(2, 0, 0)$ ;  $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$
  - (d)  $P(0, 0, 0)$ ;  $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$
2. Escreva as equações dos planos do Exercício 1 na forma geral.
3. Encontre uma forma ponto-normal.
  - (a)  $-3x + 7y + 2z = 10$
  - (b)  $x - 4z = 0$
4. Encontre a equação do plano que passa pelos pontos dados.
  - (a)  $P(-4, -1, -1)$ ,  $Q(-2, 0, 1)$ ,  $R(-1, -2, -3)$
  - (b)  $P(5, 4, 3)$ ,  $Q(4, 3, 1)$ ,  $R(1, 5, 4)$
5. Determine se os planos são paralelos.
  - (a)  $4x - y + 2z = 5$  e  $7x - 3y + 4z = 8$
  - (b)  $x - 4y - 3z - 2 = 0$  e  $3x - 12y - 9z - 7 = 0$
  - (c)  $2y = 8x - 4z + 5$  e  $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$
6. Determine se a reta e o plano são paralelos.
  - (a)  $x = -5 - 4t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 3 + 2t$ ;  $x + 2y + 3z - 9 = 0$
  - (b)  $x = 3t$ ,  $y = 1 + 2t$ ,  $z = 2 - t$ ;  $4x - y + 2z = 1$
7. Determine se os planos são perpendiculares.
  - (a)  $3x - y + z - 4 = 0$ ,  $x + 2z = -1$
  - (b)  $x - 2y + 3z = 4$ ,  $-2x + 5y + 4z = -1$
8. Determine se a reta e o plano são perpendiculares.
  - (a)  $x = -2 - 4t$ ,  $y = 3 - 2t$ ,  $z = 1 + 2t$ ;  $2x + y - z = 5$
  - (b)  $x = 2 + t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 5 + 3t$ ;  $6x + 6y - 7 = 0$
9. Encontre as equações paramétricas para a reta passando por  $P$  e paralela a  $\mathbf{n}$ .
  - (a)  $P(3, -1, 2)$ ;  $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$
  - (b)  $P(-2, 3, -3)$ ;  $\mathbf{n} = (6, -6, -2)$
  - (c)  $P(2, 2, 6)$ ;  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$
  - (d)  $P(0, 0, 0)$ ;  $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$
10. Encontre as equações paramétricas para a reta passando pelos pontos dados.
  - (a)  $(5, -2, 4)$ ,  $(7, 2, -4)$
  - (b)  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, -1, -3)$
11. Encontre as equações paramétricas para a reta de corte dos planos dados.
  - (a)  $7x - 2y + 3z = -2$  e  $-3x + y + 2z + 5 = 0$
  - (b)  $2x + 3y - 5z = 0$  e  $y = 0$
12. Encontre a forma vetorial da equação do plano passando por  $P_0$  e tendo normal  $\mathbf{n}$ .
  - (a)  $P_0(-1, 2, 4)$ ;  $\mathbf{n} = (-2, 4, 1)$
  - (b)  $P_0(2, 0, -5)$ ;  $\mathbf{n} = (-1, 4, 3)$
  - (c)  $P_0(5, -2, 1)$ ;  $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$
  - (d)  $P_0(0, 0, 0)$ ;  $\mathbf{n} = (a, b, c)$

## 126 • • • Álgebra Linear com Aplicações

13. Determine se os planos são paralelos.

- (a)  $(-1, 2, 4) \cdot (x - 5, y + 3, z - 7) = 0; (2, -4, -8) \cdot (x + 3, y + 5, z - 9) = 0$   
 (b)  $(3, 0, -1) \cdot (x + 1, y - 2, z - 3) = 0; (-1, 0, 3) \cdot (x + 1, y - z, z - 3) = 0$

14. Determine se os planos são perpendiculares.

- (a)  $(-2, 1, 4) \cdot (x - 1, y, z + 3) = 0; (1, -2, 1) \cdot (x + 3, y - 5, z) = 0$   
 (b)  $(3, 0, -2) \cdot (x + 4, y - 7, z + 1) = 0; (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0$

15. Encontre a forma vetorial da equação da reta passando por  $P_0$  e paralela a  $\mathbf{v}$ .

- (a)  $P_0(-1, 2, 3); \mathbf{v} = (7, -1, 5)$     (b)  $P_0(2, 0, -1); \mathbf{v} = (1, 1, 1)$   
 (c)  $P_0(2, -4, 1); \mathbf{v} = (0, 0, -2)$     (d)  $P_0(0, 0, 0); \mathbf{v} = (a, b, c)$

16. Mostre que a reta

$$x = 0, \quad y = t, \quad z = t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

- (a) está no plano  $6x + 4y - 4z = 0$   
 (b) está abaixo do plano  $5x - 3y + 3z = 1$  e é paralela a este plano  
 (c) está acima do plano  $6x + 2y - 2z = 3$  e é paralela a este plano

17. Encontre uma equação para o plano passando por  $(-2, 1, 7)$  que é perpendicular à reta  $x - 4 = 2t, y + 2 = 3t, z = -5t$ .

18. Encontre uma equação do

- (a) plano  $xy$   
 (b) plano  $xz$   
 (c) plano  $yz$

19. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  que é

- (a) paralelo ao plano  $xy$   
 (b) paralelo ao plano  $yz$   
 (c) paralelo ao plano  $xz$

20. Encontre uma equação para o plano passando pela origem e que é paralelo ao plano  $7x + 4y - 2z + 3 = 0$ .

21. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto  $(3, -6, 7)$  que é paralelo ao plano  $5x - 2y + z - 5 = 0$ .

22. Encontre o ponto de corte da reta

$$x - 9 = -5t, \quad y + 1 = -t, \quad z - 3 = t$$

e o plano  $2x - 3y + 4z + 7 = 0$ .

23. Encontre uma equação para o plano que contém a reta  $x = -1 + 3t, y = 5 + 2t, z = 2 - t$  e que é perpendicular ao plano  $2x - 4y + 2z = 9$ .

24. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto  $(2, 4, -1)$  que contém a interseção dos planos  $x - y - 4z = 2$  e  $-2x + y + 2z = 3$ .

25. Mostre que os pontos  $(-1, -2, -3), (-2, 0, 1), (-4, -1, -1)$  e  $(2, 0, 1)$  estão num mesmo plano.

26. Encontre equações paramétricas para a reta passando pelo ponto  $(-2, 5, 0)$  que é paralela aos planos  $2x + y - 4z = 0$  e  $-x + 2y + 3z + 1 = 0$ .

27. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto  $(-2, 1, 5)$  que é perpendicular aos planos  $4x - 2y + 2z = -1$  e  $3x + 3y - 6z = 5$ .

28. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto  $(2, -1, 4)$  que é perpendicular à reta de interseção dos planos  $4x + 2y + 2z = -1$  e  $3x + 6y + 3z = 7$ .

29. Encontre uma equação para o plano que é perpendicular ao plano  $8x - 2y + 6z = 1$  e que passa pelos pontos  $P_1(-1, 2, 5)$  e  $P_2(2, 1, 4)$ .

30. Mostre que as retas

$$x = 3 - 2t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

e

$$x = 5 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 7 + t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

são paralelas e encontre uma equação para o plano que elas determinam.

31. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto  $(1, -1, 2)$  que contém a reta  $x = t, y = t + 1, z = -3 + 2t$ .

32. Encontre uma equação para o plano que contém a reta  $x = 1 + t, y = 3t, z = 2t$  e é paralelo à reta de corte dos planos  $-x + 2y + z = 0$  e  $x + z + 1 = 0$ .

33. Encontre uma equação para o plano cujos pontos são todos eqüidistantes de  $(-1, -4, -2)$  e  $(0, -2, 2)$ .

34. Mostre que a reta

$$x - 5 = -t, \quad y + 3 = 2t, \quad z + 1 = -5t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

é paralela ao plano  $-3x + y + z - 9 = 0$ .

35. Mostre que as retas

$$x - 3 = 4t, \quad y - 4 = t, \quad z - 1 = 0 \quad (-\infty < t < +\infty)$$

e

$$x + 1 = 12t, \quad y - 7 = 6t, \quad z - 5 = 3t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

são concorrentes e encontre o ponto de corte.

36. Encontre uma equação do plano que contém as retas do Exercício 35.

37. Encontre as equações paramétricas para a reta de corte dos planos dados.

- (a)  $-3x + 2y + z = -5$  e  $7x + 3y - 2z = -2$   
 (b)  $5x - 7y + 2z = 0$  e  $y = 0$

38. Mostre que o plano que corta os eixos coordenados em  $x = a$ ,  $y = b$  e  $z = c$  tem equação

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

desde que  $a$ ,  $b$  e  $c$  sejam não-nulos.

39. Obtenha a distância entre o ponto e o plano.

- (a)  $(3, 1, -2)$ ;  $x + 2y - 2z = 4$   
 (b)  $(-1, 2, 1)$ ;  $2x + 3y - 4z = 1$   
 (c)  $(0, 3, -2)$ ;  $x - y - z = 3$

40. Obtenha a distância entre os planos paralelos dados.

- (a)  $3x - 4y + z = 1$  e  $6x - 8y + 2z = 3$   
 (b)  $-4x + y - 3z = 0$  e  $8x - 2y + 6z = 0$   
 (c)  $2x - y + z = 1$  e  $2x - y + z = -1$

41. Mostre que se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são não-nulos, então a reta

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

consiste de todos os pontos  $(x, y, z)$  que satisfazem

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas são as *equações simétricas* da reta.

42. Encontre as equações simétricas das retas das partes (a) e (b) do Exercício 9. [Observação. Veja o Exercício 41 para a terminologia.]

43. Em cada parte, encontre equações de dois planos cuja interseção é a reta dada.

- (a)  $x = 7 - 4t$ ,  $y = -5 - 2t$ ,  $z = 5 + t$  ( $-\infty < t < +\infty$ )  
 (b)  $x = 4t$ ,  $y = 2t$ ,  $z = 7t$  ( $-\infty < t < +\infty$ )

[Sugestão. Cada igualdade das equações simétricas de uma reta representa um plano contendo a reta. Veja o Exercício 41 para a terminologia.]

44. Dois planos que se cortam no espaço tridimensional determinam dois ângulos de interseção, um agudo ( $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ) e seu suplemento  $180^\circ - \theta$  (veja figura). Se  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  são vetores não-nulos normais aos planos, então o ângulo entre  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  é  $\theta$  ou  $180^\circ - \theta$ , dependendo dos sentidos das normais (veja figura). Em cada parte, encontre o ângulo agudo de interseção dos planos até o grau mais próximo.

- (a)  $x = 0$  e  $2x - y + z - 4 = 0$   
 (b)  $x + 2y - 2z = 5$  e  $6x - 3y + 2z = 8$

[Observação. É necessária uma calculadora.]

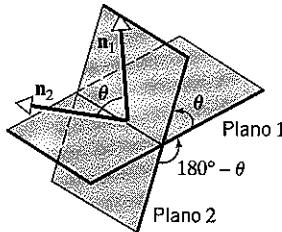


Figura Ex-44

45. Encontre o ângulo agudo entre o plano  $x - y - 3z = 5$  e a reta  $x = 2 - t$ ,  $y = 2t$ ,  $z = 3t - 1$  até o grau mais próximo. [Sugestão. Veja o Exercício 44.]

### Discussão e Descoberta

46. O que as retas  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - t\mathbf{v}$  têm em comum? Explique.
47. Qual é a relação entre a reta  $x = x_0 + at$ ,  $y = y_0 + bt$ ,  $z = z_0 + ct$  e o plano  $ax + by + cz = 0$ ? Explique seu raciocínio.
48. Sejam  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  vetores da origem aos pontos  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , respectivamente. O que a equação
- $$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_1 + t\mathbf{r}_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$
- representa geometricamente? Explique seu raciocínio.
49. Escreva as equações paramétricas para duas retas perpendiculares que passam pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**Requisito: Recurso Computacional****Exercícios Computacionais do Capítulo 3**

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**Seção 3.1**

- T1. (Vetores)** Leia em seu manual sobre como entrar com vetores e como soma-los, subtraí-los e multiplicá-los por escalares. Então use seu recurso para fazer os cálculos do Exemplo 1.
- T2. (Desenhando vetores)** Se você está usando um recurso que desenha retas no espaço bi ou tridimensional, tente desenhar alguns segmentos de reta com pontos iniciais e finais escolhidos. Você também pode querer ver se seu recurso consegue desenhar pontas de flechas, e neste caso pode fazer os segmentos de retas parecerem vetores geométricos.

**Seção 3.3**

- T1. (Produto escalar e norma)** Alguns programas possuem comandos para calcular produtos escalares e normas enquanto outros só calculam o produto escalar. Nestes últimos, as normas podem ser obtidas da fórmula  $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ . Leia em seu manual sobre como realizar o produto escalar (e norma, se disponível) e então use seu recurso para fazer os cálculos do Exemplo 2.
- T2. (Projeções)** Veja se você consegue programar seu recurso computacional para calcular  $\text{proj } u$  quando o usuário entrar com os vetores  $a$  e  $b$ . Confira seu trabalho fazendo seu programa realizar os cálculos do Exemplo 6.

**Seção 3.4**

- T1. (Produto vetorial)** Leia em seu manual sobre realizar o produto vetorial e então use seu recurso para fazer os cálculos do Exemplo 1.
- T2. (Fórmula do produto vetorial)** Se você está usando um sistema algébrico computacional, use-o para confirmar a Fórmula (1a).
- T3. (Propriedades do produto vetorial)** Se você está usando um sistema algébrico computacional, use-o para provar as afirmações do Teorema 3.4.1.
- T4. (Área de um triângulo)** Veja se você consegue programar seu recurso computacional para produzir a área do triângulo no espaço tridimensional determinado por três pontos quando o usuário entrar com as coordenadas destes pontos. Confira seu trabalho calculando a área do triângulo do Exemplo 4.
- T5. (Fórmula do produto misto)** Se você está usando um sistema algébrico computacional, use-o para provar a Fórmula (7) mostrando que a diferença entre os dois lados é zero.
- T6. (Volume de um paralelepípedo)** Veja se você consegue programar seu recurso computacional para produzir o volume do paralelepípedo no espaço tridimensional determinado pelos vetores  $u$ ,  $v$  e  $w$  quando o usuário entrar com estes vetores. Confira seu trabalho resolvendo o Exercício 10 do Conjunto de Exercícios 3.4.

# Espaços Vetoriais Euclidianos

## Conteúdo do Capítulo

- 4.1 Espaço Euclidiano  $n$ -dimensional
- 4.2 Transformações Lineares de  $R^n$  em  $R^m$
- 4.3 Propriedades das Transformações Lineares de  $R^n$  em  $R^m$

**I**NTRODUÇÃO: Em meados do século dezessete foi materializada explicitamente a idéia de utilizar pares de números para situar pontos no plano e ternos de números para situar pontos no espaço tridimensional. Na segunda metade do século dezoito, os matemáticos e físicos começaram a perceber que não havia necessidade de parar com ternos, pois quádruplos  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  de números poderiam ser considerados pontos de um espaço de dimensão quatro, quintuplos  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  de números como pontos num espaço de dimensão cinco e assim por diante, uma  $n$ -upla de números sendo pontos de um “espaço  $n$ -dimensional.” Nossa objetivo neste capítulo é estudar as propriedades das operações sobre os vetores deste tipo de espaço.

## 4.1 ESPAÇO EUCLIDIANO

### *n*-DIMENSIONAL

Embora nossa visualização geométrica não se estenda além do espaço tridimensional, é possível, mesmo assim, estender além do espaço tridimensional muitas das idéias familiares trabalhando, não com as propriedades geométricas de pontos e vetores mas sim com suas propriedades numéricas ou algébricas. Nesta seção nós iremos tornar estas idéias mais precisas.

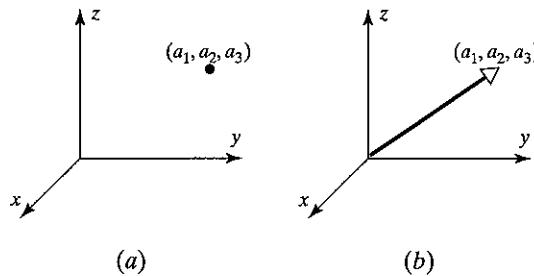
**Vetores no Espaço *n*-dimensional** Começamos com uma definição.

#### Definição

Se  $n$  é um inteiro positivo, dizemos que uma sequência  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de números reais é uma ***n*-upla ordenada**. O conjunto de todas as *n*-uplas ordenadas é chamado o **espaço *n*-dimensional** e denotado por  $R^n$ .

Quando  $n = 2$  ou  $3$ , é usual usar os termos **par ordenado** e **terno ordenado**, respectivamente, em vez de 2-upla e 3-upla. Quando  $n = 1$ , cada *n*-upla ordenada consiste simplesmente de um número real e por isso podemos ver  $R^1$  como o conjunto de números reais; neste caso, é comum escrever  $R$  em vez de  $R^1$ .

No estudo do espaço tridimensional, pode haver ocorrido a você que o símbolo  $(a_1, a_2, a_3)$  tem duas interpretações geométricas distintas: pode ser interpretado como um ponto, caso em que  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são as coordenadas (Figura 4.1.1a), ou pode ser interpretado como um vetor, caso em que  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são os componentes (Figura 4.1.1b). Segue-se, portanto, que uma *n*-upla ordenada  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  pode ser vista tanto como um “ponto generalizado” quanto um “vetor generalizado”—a distinção matemática não é importante. Assim, podemos descrever a 5-upla  $(-2, 4, 0, 1, 6)$  tanto como um ponto de  $R^5$  quanto um vetor em  $R^5$ .



**Figura 4.1.1** O terno ordenado  $(a_1, a_2, a_3)$  pode ser interpretado geometricamente como um ponto ou um vetor.

#### Definição

Dois vetores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  em  $R^n$  são ditos **iguais** se

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

A soma  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  é definida por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

e se  $k$  é um escalar qualquer, o **múltiplo escalar**  $k\mathbf{v}$  de  $\mathbf{v}$  é definido por

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$$

As operações de adição e multiplicação por escalar nesta definição são chamadas as **operações padrão** em  $R^n$ .

O **vetor nulo** ou **zero** de  $R^n$  é denotado por  $\mathbf{0}$  e é definido como

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  é um vetor qualquer de  $R^n$ , então o **negativo** (ou **inverso aditivo**) de  $\mathbf{u}$  é denotado por  $-\mathbf{u}$  e definido por

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

A **diferença** de vetores em  $R^n$  é definida por

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$$

ou, em termos de componentes,

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \dots, v_n - u_n)$$

**Propriedades das Operações Vetoriais no Espaço *n*-dimensional** As propriedades aritméticas mais importantes da adição e da multiplicação por escalar de vetores em  $R^n$  estão listadas no próximo teorema. As provas são todas fáceis e deixadas como exercícios.

#### Teorema 4.1.1

#### Propriedades de Vetores em $R^n$

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  são vetores em  $R^n$  e  $k$  e  $l$  são escalares, então:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$              | (b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$           |
| (c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ | (d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , ou seja, $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ |
| (e) $k(l\mathbf{u}) = kl(\mathbf{u})$                                | (f) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$                                    |
| (g) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$                  | (h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$  |

Este teorema nos autoriza a operar com vetores em  $R^n$  sem expressá-los em termos de componentes. Por exemplo, para resolver a equação vetorial  $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$  em  $\mathbf{x}$ , nós podemos somar  $-\mathbf{u}$  a ambos os lados e proceder como segue:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$$

$$\mathbf{x} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

O leitor achará instrutivo determinar os itens do Teorema 4.1.1 que justificam os três últimos passos desta conta.

**Espaço Euclidiano  $n$ -dimensional** Para estender as noções de distância, norma e ângulo ao  $R^n$ , nós começamos com a seguinte generalização do produto escalar de  $R^2$  e  $R^3$  [Fórmulas (3) e (4) da Seção 3.3].

### Definição

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são vetores quaisquer em  $R^n$ , então

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

define o *produto interno euclidiano*  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

Observe que para  $n = 2$  ou  $3$ , o produto interno euclidiano é o produto escalar usual.

### EXEMPLO 1 Produto Interno de Vetores no $R^4$

O produto interno euclidiano dos vetores

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7) \text{ e } \mathbf{v} = (5, -4, 7, 0)$$

em  $R^4$  é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18$$

Como tantas das idéias familiares dos espaços bi e tridimensionais continuam válidas no espaço  $n$ -dimensional, é comum nos referirmos ao  $R^n$  com as operações de adição, multiplicação por escalar e o produto interno euclidiano como o *espaço euclidiano  $n$ -dimensional*.

As quatro principais propriedades aritméticas do produto interno euclidiano são dadas no próximo teorema.

### Teorema 4.1.2

#### Propriedades do Produto Interno Euclidiano

Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores em  $R^n$  e  $l$  é um escalar, então:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$       | (b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$                  |
| (c) $(l\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ | (d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ . Além disto, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ se, e somente se, $\mathbf{v} = 0$ . |

Nós iremos provar as partes (b) e (d) e deixar as demais provas como exercícios.

**Prova (b).** Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ . Então

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \dots + (u_n + v_n)w_n \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + \dots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

**Prova (d).** Nós temos  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq 0$ . Além disto, a igualdade vale se, e somente se,  $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$ , ou seja, se, e somente se,  $\mathbf{v} = 0$ . ■

### EXEMPLO 2 Comprimento e Distância em $R^4$

O Teorema 4.1.2 nos permite efetuar contas com produtos internos euclidianos praticamente da mesma maneira que as efetuamos com produtos aritméticos comuns. Por exemplo,

$$\begin{aligned} (3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u}) + (3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u}) + (2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 8(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 11(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

O leitor deveria determinar quais partes do Teorema 4.1.2 foram usadas em cada passo. ♦

### Norma e Distância no Espaço Euclidiano $n$ -dimensional

Por analogia com as fórmulas familiares do  $R^2$  e  $R^3$ , nós definimos a *norma euclidiana* (ou o *comprimento euclidiano*) de um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  em  $R^n$  por

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \quad (1)$$

[Compare esta fórmula com as Fórmulas (1) e (2) da Seção 3.2.]

Da mesma forma, a *distância euclidiana* entre os pontos  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  do  $R^n$  é definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \quad (2)$$

[Veja as Fórmulas (3) e (4) da Seção 3.2.]

### EXEMPLO 3 Encontrando Norma e Distância

Se  $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$  e  $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$  então temos, no espaço euclidiano  $R^4$ ,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

e

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 7)^2 + (-2 - 2)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{58} \quad \diamond$$

O próximo teorema fornece a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, uma das desigualdades mais importantes da Álgebra Linear.

### Teorema 4.1.3

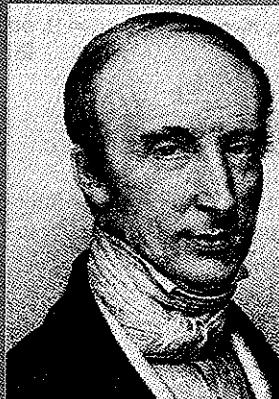
#### A Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $R^n$

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são vetores em  $R^n$ , então:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (3)$$

Em termos de componentes, (3) é o mesmo que

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)^{1/2} \quad (4)$$



Augustin-Louis (Baron de) Cauchy



Herman Armandus Schwarz

**Augustin-Louis (Baron de) Cauchy** (1789–1857) foi um matemático francês. A educação básica de Cauchy foi adquirida de seu pai, um advogado e mestre dos clássicos. Cauchy ingressou na Escola Politécnica em 1805 para estudar engenharia, mas por causa de sua saúde frágil, foi aconselhado a especializar em Matemática. Seu principal trabalho matemático começou em 1811, com uma série de soluções brilhantes a alguns difíceis e importantes problemas.

As contribuições matemáticas de Cauchy nos 45 anos seguintes foram brilhantes e inacreditáveis em quantidade: mais de 700 artigos, que preenchem 26 volumes modernos. O trabalho de Cauchy iniciou a era da análise moderna; ele trouxe a Matemática padrões de precisão e de rigor impensáveis para os matemáticos mais antigos.

A vida de Cauchy foi inextricavelmente ligada aos tumultos políticos de sua época. Por ser fortemente partidário da família Bourbon, ele abandonou mulher e filhos em 1830 para seguir o rei Carlos X ao exílio. Por sua lealdade ele foi feito um barão pelo ex-rei. Mais tarde, Cauchy retornou à França mas só veio a aceitar uma posição universitária quando o governo abriu mão da exigência de um juramento de lealdade.

É difícil compreender Cauchy muito bem. Profundamente católico, ele patrocinava trabalho

de caridade para mães solteiras e criminosos bem como socorro para a Irlanda. No entanto, outros aspectos de sua vida o colocam noutra luz. O matemático norueguês Abel o descreveu como “louco, infinitamente católico e fanático.” Alguns escritores louvam suas aulas, enquanto outros dizem que ele falava incessante e incômplemente e, de acordo com um relatório, uma vez ele dedicou uma aula inteira à extração da raiz quadrada de dezessete até a décima casa decimal por um método muito bem conhecido de seus alunos. De qualquer forma, Cauchy é indiscutivelmente uma das maiores mentes da história da ciência.

**Herman Armandus Schwarz** (1843–1921) foi um matemático alemão. Schwarz foi o líder matemático de Berlim da primeira metade do século vinte. Por causa de sua dedicação ao ensino na Universidade de Berlim e de uma propensão para tratar com a mesma dedicação tanto fatos importantes quanto triviais, ele não publicou muito abundantemente. Sua tendência era concentrar-se em problemas concretos específicos mas suas técnicas eram, muitas vezes, extremamente engenhosas e influenciaram o trabalho de outros matemáticos. A versão da desigualdade que leva o seu nome apareceu num artigo sobre superfícies de área mínima publicado em 1885.

Nós omitimos a prova, pois adiante neste texto demonstraremos uma versão mais geral deste teorema. No entanto, para vetores do  $R^2$  e  $R^3$ , este resultado é uma consequência simples da Fórmula (1) da Seção 3.3: Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores não-nulos do  $R^2$  e  $R^3$ ,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos \theta| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (5)$$

e, se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  ou se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , então ambos os lados de (3) são zero, de modo que a desigualdade vale também neste caso.

Os próximos dois teoremas apresentam as propriedades básicas de comprimento e distância no espaço euclidiano  $n$ -dimensional.

#### Teorema 4.1.4

#### Propriedades do Comprimento em $R^n$

Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores em  $R^n$  e  $k$  é um escalar, então:

- (a)  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
- (b)  $\|\mathbf{u}\| = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- (c)  $\|k\mathbf{v}\| = |k| \|\mathbf{v}\|$
- (d)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$   
(Desigualdade triangular)

Nós iremos provar (c) e (d) e deixar (a) e (b) como exercícios.

**Prova (c).** Se  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , então  $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$  e portanto

$$\begin{aligned} \|k\mathbf{v}\| &= \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2 + \cdots + (kv_n)^2} \\ &= |k| \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \\ &= |k| \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

**Prova (d).**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

← Propriedade do valor absoluto  
← Desigualdade de Cauchy-Schwarz

O resultado agora segue extraindo a raiz quadrada em ambos os lados. ■

A parte (c) deste teorema afirma que multiplicando um vetor por um escalar  $k$  multiplica o comprimento daquele vetor por um fator de  $|k|$  (Figura 4.1.2a). A parte (d) deste teorema é conhecida como a **desigualdade triangular** por que generaliza o resultado familiar da geometria euclidiana segundo o qual a soma de dois lados de um triângulo é pelo menos tão grande quanto o terceiro lado (Figura 4.1.2b).

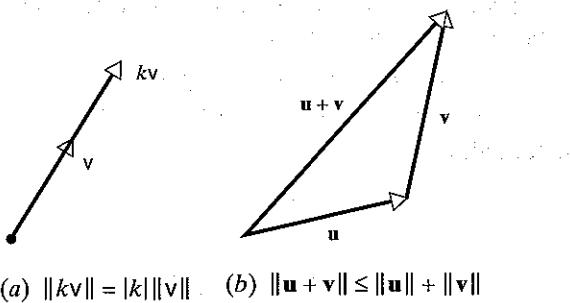


Figura 4.1.2

**Teorema 4.1.5****Propriedades da Distância em  $R^n$** 

Se  $u, v$  e  $w$  são vetores em  $R^n$ , então:

- (a)  $d(u, v) \geq 0$
- (b)  $d(u, v) = 0$  se, e somente se,  $u = v$
- (c)  $d(u, v) = d(v, u)$
- (d)  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$   
(Desigualdade triangular)

Os resultados deste teorema são consequências imediatas do Teorema 4.1.4. Nós iremos provar a parte (d) e deixar as demais como exercícios.

**Prova (d).** Por (2) e pela parte (d) do Teorema 4.1.4 nós temos

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = \|(u - w) + (w - v)\| \\ &\leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v) \end{aligned}$$

A parte (d) deste teorema, que também é chamada a *desigualdade triangular*, generaliza o resultado familiar da geometria euclidiana que afirma que a menor distância entre dois pontos é obtida ao longo de uma reta (Figura 4.1.3).

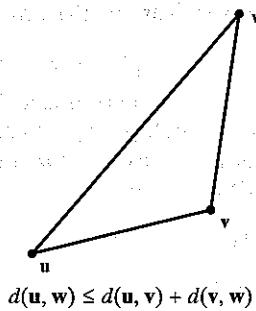


Figura 4.1.3

A Fórmula (1) expressa a norma de um vetor em termos do produto escalar. O seguinte teorema útil expressa o produto escalar em termos de normas.

**Teorema 4.1.6**

Se  $u$  e  $v$  são vetores em  $R^n$  com o produto interno euclidiano, então

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 \quad (6)$$

**Prova.**

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) = \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2 \\ \|u-v\|^2 &= (u-v) \cdot (u-v) = \|u\|^2 - 2(u \cdot v) + \|v\|^2 \end{aligned}$$

e (6) decorre por álgebra elementar. ■

Nos exercícios apresentamos alguns problemas que usam este teorema.

**Ortogonalidade** Lembre que nos espaços euclidianos  $R^2$  e  $R^3$ , dois vetores  $u$  e  $v$  são definidos como sendo *ortogonais* (ou perpendiculares) se  $u \cdot v = 0$  (Seção 3.3). Motivados por isto, nós apresentamos a seguinte definição.

**Definição**

Dois vetores  $u$  e  $v$  em  $R^n$  são *ortogonais* se  $u \cdot v = 0$ .

**EXEMPLO 4** *Vetores Ortogonais em  $R^4$* 

Os vetores

$$u = (-2, 3, 1, 4) \text{ e } v = (1, 2, 0, -1)$$

são ortogonais no espaço euclidiano  $R^4$ , pois

$$u \cdot v = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$

As propriedades dos vetores ortogonais serão discutidas com mais detalhe mais adiante no texto, mas agora observamos que muitas das propriedades familiares de vetores ortogonais dos espaços euclidianos  $R^2$  e  $R^3$  continuam valendo no espaço euclidiano  $R^n$ . Por exemplo, se  $u$  e  $v$  são vetores ortogonais de  $R^2$  ou de  $R^3$ , então  $u$ ,  $v$  e  $u+v$  formam os lados de um triângulo retângulo (Figura 4.1.4); assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

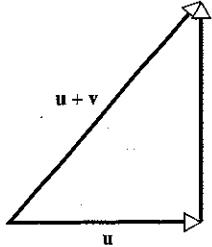


Figura 4.1.4

O próximo teorema mostra que este resultado estende ao  $R^n$ .

**Teorema 4.1.7****O Teorema de Pitágoras em  $R^n$** 

Se  $u$  e  $v$  são vetores ortogonais em  $R^n$  com o produto interno euclidiano, então

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

*Prova.*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \blacksquare$$

### Notações Alternativas para Vetores em $\mathbb{R}^n$

Muitas vezes é útil escrever um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  em notação matricial como uma matriz-linha ou uma matriz-coluna:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]$$

Isto é justificado da seguinte maneira: as operações matriciais

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad k\mathbf{v} = k \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_n \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] + [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \\ &= [u_1 + v_1 \ u_2 + v_2 \ \cdots \ u_n + v_n] \\ k\mathbf{v} &= k[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] = [kv_1 \ kv_2 \ \cdots \ kv_n] \end{aligned}$$

produzem os mesmo resultados que as operações vetoriais

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$k\mathbf{v} = k(v_1, v_2, \dots, v_n) = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$$

A única diferença é o formato em que escrevemos os vetores.

### Uma Fórmula Matricial para o Produto Escalar

Se nós usarmos a notação de matrizes-coluna para os vetores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

e omitirmos o colchete de matrizes  $1 \times 1$ , então teremos

$$\mathbf{v}^T \mathbf{u} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n] = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Assim, para vetores na notação de matrizes-coluna nós temos a seguinte fórmula para o produto interno euclidiano:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u} \quad (7)$$

Por exemplo, se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u} = [5 \ -4 \ 7 \ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = [18] = 18$$

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então segue da Fórmula (7) e das propriedades da transposta que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T (\mathbf{A} \mathbf{u}) = (\mathbf{v}^T \mathbf{A}) \mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{v})^T \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} &= (\mathbf{A} \mathbf{v})^T \mathbf{u} = (\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{u} = \mathbf{v}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u}) = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

As fórmulas

$$\mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v} \quad (8)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (9)$$

fornecem uma relação importante entre multiplicação por uma matriz  $n \times n A$  e multiplicação por  $A^T$ .

### EXEMPLO 5 Verificando que $\mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v}$

Suponha que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

do que segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 7(-2) + 10(0) + 5(5) = 11 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v} &= (-1)(-7) + 2(4) + 4(-1) = 11 \end{aligned}$$

Assim, vale  $\mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v}$ , como garante a Fórmula (8). Deixamos para o leitor verificar que (9) também vale. ♦

### A Multiplicação Matricial do Ponto de Vista do Produto Escalar

O produto escalar fornece uma outra maneira de pensar sobre a multiplicação matricial. Lembre que se  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz  $m \times r$  e  $B = [b_{ij}]$  é uma matriz  $r \times n$  então a  $ij$ -ésima entrada de  $A B$  é

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ir} b_{rj}$$

que é o produto escalar do  $i$ -ésimo vetor-linha

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ir}]$$

de  $A$  com o  $j$ -ésimo vetor-coluna

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

de  $B$ . Assim, se  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$  são os vetores-linha de  $A$  e se  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$  são os vetores-coluna de  $B$  então podemos escrever o produto matricial  $A B$  como

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_n \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

Em particular, podemos escrever um sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  no formato de produto escalar como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$  são os vetores-linha de  $A$  e  $b_1, b_2, \dots, b_m$  são as entradas de  $\mathbf{b}$ .

### EXEMPLO 6 Um Sistema Linear Escrito na Forma de Produto Escalar

Um exemplo de um sistema linear expresso no formato (11) de produto escalar é:

Sistema	Forma de Produto Escalar
$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$	$(3, -4, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 1$
$2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 5$	$(2, -7, -4) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 5$
$x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 0$	$(1, 5, -8) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$

### Conjunto de Exercícios 4.1

- Sejam  $\mathbf{u} = (-3, 2, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 7, -3, 2)$  e  $\mathbf{w} = (5, -2, 8, 1)$ . Encontre
  - $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
  - $2\mathbf{u} + 7\mathbf{v}$
  - $-\mathbf{u} + (\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$
  - $6(\mathbf{u} - 3\mathbf{v})$
  - $-(\mathbf{v} - \mathbf{w})$
  - $(6\mathbf{v} - \mathbf{w}) - (4\mathbf{u} + \mathbf{v})$
- Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  os vetores do Exercício 1. Encontre os vetores  $\mathbf{x}$  que satisfazem  $5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$ .
- Sejam  $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$  e  $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$ . Encontre escalares  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  tais que  $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = (0, 5, 6, -3)$ .
- Mostre que não existem escalares  $c_1, c_2$  e  $c_3$  tais que
 
$$c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, -2, 1) + c_3(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$$
- Em cada parte, calcule a norma euclidiana do vetor.
  - $(-2, 5)$
  - $(1, 2, -2)$
  - $(3, 4, 0, -12)$
  - $(-2, 1, 1, -3, 4)$
- Sejam  $\mathbf{u} = (4, 1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 3, 8, -2)$  e  $\mathbf{w} = (3, 1, 2, 2)$ . Calcule cada expressão.
  - $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
  - $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
  - $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$
  - $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$
  - $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$
  - $\left\| \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w} \right\|$
- Mostre que se  $\mathbf{v}$  é um vetor não-nulo em  $R^n$  então  $(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$  tem norma euclidiana 1.
- Seja  $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$ . Encontre todos os escalares  $k$  tais que  $\|k\mathbf{v}\| = 5$ .
- Encontre o produto interno euclidiano  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .
  - $\mathbf{u} = (2, 5)$ ,  $\mathbf{v} = (-4, 3)$
  - $\mathbf{u} = (4, 8, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$
  - $\mathbf{u} = (3, 1, 4, -5)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 2, -4, -3)$
  - $\mathbf{u} = (-1, 1, 0, 4, -3)$ ,  $\mathbf{v} = (-2, -2, 0, 2, -1)$
- Encontre dois vetores em  $R^2$  de norma euclidiana 1 cujo produto interno euclidiano com  $(3, -1)$  é zero.
- Mostre que há infinitos vetores em  $R^3$  de norma euclidiana 1 cujo produto interno euclidiano com o vetor  $(1, -3, 5)$  é zero.
- Encontre a distância euclidiana entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .
  - $\mathbf{u} = (1, -2)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1)$
  - $\mathbf{u} = (2, -2, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$
  - $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$
  - $\mathbf{u} = (3, -3, -2, 0, -3)$ ,  $\mathbf{v} = (-4, 1, -1, 5, 0)$
- Verifique as partes (b), (e), (f) e (g) do Teorema 4.1.1 para  $\mathbf{u} = (2, 0, -3, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0, 3, 5)$ ,  $\mathbf{w} = (1, 6, -2, 1)$ ,  $k = 5$  e  $l = -3$ .
- Verifique as partes (b) e (c) do Teorema 4.1.2 para os valores de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  e  $k$  do Exercício 12.
- Em cada parte, determine se os vetores dados são ortogonais.
  - $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 2, -1)$
  - $\mathbf{u} = (-2, -2, -2)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
  - $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$
  - $\mathbf{u} = (-4, 6, -10, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1, -2, 9)$
  - $\mathbf{u} = (0, 3, -2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (5, 2, -1, 0)$
  - $\mathbf{u} = (a, b)$ ,  $\mathbf{v} = (-b, a)$
- Para quais valores de  $k$  os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ortogonais?
  - $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 7, k)$
  - $\mathbf{u} = (k, k, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$
- Encontre dois vetores de norma 1 que são ortogonais aos três vetores  $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$  e  $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$ .

## 136 • • • Álgebra Linear com Aplicações

17. Em cada parte, verifique que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

- (a)  $\mathbf{u} = (3, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, -1)$       (b)  $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$   
 (c)  $\mathbf{u} = (-4, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (8, -4, -2)$       (d)  $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$

18. Em cada parte, verifique que valem as Fórmulas (8) e (9).

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

19. Resolva o seguinte sistema linear em  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ .

$$(1, -1, 4) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 10$$

$$(3, 2, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 1$$

$$(4, -5, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 7$$

20. Encontre  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  sabendo que  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 1$  e  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 5$ .

21. Use o Teorema 4.1.6 para mostrar que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sempre são vetores ortogonais em  $R^n$  se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ . Interprete este resultado geometricamente em  $R^2$ .

22. As fórmulas para os componentes vetoriais do Teorema 3.3.3 também valem em  $R^n$ . Dados  $\mathbf{a} = (-1, 1, 2, 3)$  e  $\mathbf{u} = (2, 1, 4, -1)$ , encontre o componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ao longo de  $\mathbf{a}$  e o componente vetorial de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{a}$ .

23. Determine se as duas retas

$$\mathbf{r} = (3, 2, 3, -1) + t(4, 6, 4, -2) \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = (0, 3, 5, 4) + t(1, -3, -4, -2)$$

intersectam em  $R^4$ .

24. Prove a seguinte generalização do Teorema 4.1.7. Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  são vetores dois a dois ortogonais em  $R^n$  então

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_r\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{v}_r\|^2$$

25. Prove: Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são matrizes  $n \times 1$  e  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então

$$(\mathbf{v}^T A^T \mathbf{u})^2 \leq (\mathbf{u}^T A^T \mathbf{A}) (\mathbf{v}^T A^T \mathbf{A} \mathbf{v})$$

26. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

para todos os valores reais de  $a$ ,  $b$  e  $\theta$ .

27. Prove: Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores em  $R^n$  e  $k$  é um escalar, então

$$(a) \mathbf{u} \cdot (k \mathbf{v}) = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad (b) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

28. Prove as partes (a) a (d) do Teorema 4.1.1.

29. Prove as partes (e) a (h) do Teorema 4.1.1.

30. Prove as partes (a) e (c) do Teorema 4.1.2.

31. Prove as partes (a) e (b) do Teorema 4.1.4.

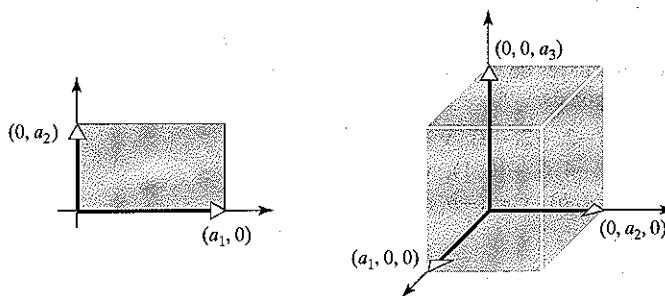
32. Prove as partes (a), (b) e (c) do Teorema 4.1.5.

33. Suponha que  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são números reais positivos. Em  $R^2$ , os vetores  $\mathbf{v}_1 = (a_1, 0)$  e  $\mathbf{v}_2 = (0, a_2)$  determinam um retângulo de área  $A = a_1 a_2$  (veja figura dada) e em  $R^3$ , os vetores  $\mathbf{v}_1 = (a_1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, a_2, 0)$  e  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, a_3)$  determinam uma caixa de volume  $V = a_1 a_2 a_3$  (veja figura dada). A área  $A$  e o volume  $V$  são chamados, às vezes, a medida euclidiana do retângulo e da caixa, respectivamente.

(a) Como você definiria a medida euclidiana da “caixa” em  $R^n$  que é determinada pelos vetores

$$\mathbf{v}_1 = (a_1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, a_2, 0, \dots, 0), \dots, \quad \mathbf{v}_n = (0, 0, 0, \dots, a_n)?$$

(b) Como você definiria o comprimento euclidiano da diagonal da caixa da parte (a)?



$$\text{Área } A = a_1 a_2$$

$$\text{Volume } V = a_1 a_2 a_3$$

Figura Ex-33

## Discussão e Descoberta

34. (a) Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores em  $R^n$ . Mostre que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

(b) O resultado na parte (a) enuncia um teorema sobre paralelogramos em  $R^2$ . Qual é o teorema?

35. (a) Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores ortogonais em  $R^n$  tais que  $\|\mathbf{u}\| = 1$  e  $\|\mathbf{v}\| = 1$ , então  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .  
 (b) Faça um desenho para ilustrar este resultado.

36. Na figura dada, os vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  formam um triângulo em  $R^2$  e  $\theta$  denota o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Pela lei dos cossenos da Trigonometria decorre que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

Você diria que esta fórmula continua válida se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores em  $R^n$ ? Justifique sua resposta.

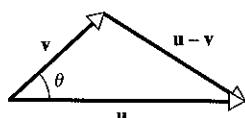


Figura Ex-36

37. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

- (a) Se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ , então  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores ortogonais.  
 (b) Se  $\mathbf{u}$  é ortogonal a  $\mathbf{v}$  e a  $\mathbf{w}$ , então  $\mathbf{u}$  é ortogonal a  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ .  
 (c) Se  $\mathbf{u}$  é ortogonal a  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ , então  $\mathbf{u}$  é ortogonal a  $\mathbf{v}$  e a  $\mathbf{w}$ .  
 (d) Se  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0$ , então  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ .  
 (e) Se  $\|k\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\|$ , então  $k \geq 0$ .

## 4.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES DE $R^n$ EM $R^m$

Nesta seção nós iremos começar o estudo de funções da forma  $w = F(x)$ , onde a variável independente  $x$  é um vetor em  $R^n$  e a variável dependente  $w$  é um vetor em  $R^m$ . Estamos particularmente interessados em estudar uma classe especial de tais funções, chamadas "transformações lineares." As transformações lineares são fundamentais no estudo da Álgebra Linear e têm muitas aplicações na Física, Engenharias, Ciências Sociais e em vários ramos da Matemática.

**Funções de  $R^n$  em  $R$**  Lembre que uma função é uma regra  $f$  que associa a cada elemento de um conjunto  $A$  um, e exatamente um, elemento de um conjunto  $B$ . Se  $f$  associa o elemento  $b$  ao elemento  $a$  então escrevemos  $b = f(a)$  e dizemos que  $b$  é a *imagem* de  $a$  por  $f$  ou que  $f(a)$  é o *valor* de  $f$  em  $a$ . O conjunto  $A$  é chamado o *domínio* de  $f$  e o conjunto  $B$  é chamado o *contradomínio* de  $f$ . A *imagem* de  $f$  é o subconjunto de  $B$  consistindo de todos os possíveis valores de  $f$  à medida que  $a$  percorre  $A$ . Para as funções mais elementares,  $A$  e  $B$  são conjuntos de números reais e então dizemos que  $f$  é uma *função real de uma variável real*. Outras funções comuns ocorrem quando  $B$  é um conjunto de números reais e  $A$  é um conjunto de vetores em  $R^2$  ou  $R^3$  ou, mais geralmente, em  $R^n$ . Alguns exemplos são dados na Tabela 1, a seguir.

Duas funções  $f_1$  e  $f_2$  são consideradas *iguais* e escrevemos  $f_1 = f_2$  se ambas têm o mesmo domínio e  $f_1(a) = f_2(a)$  para qualquer  $a$  do domínio.

**Funções de  $R^n$  em  $R^m$**  Se o domínio de uma função  $f$  é  $R^n$  e o contradomínio é  $R^m$ , então escrevemos  $f: R^n \rightarrow R^m$  e  $f$  é chamada uma *aplicação* ou *transformação* de  $R^n$  em  $R^m$ ; neste caso, dizemos que a função *leva* ou *aplica*  $R^n$  em  $R^m$ . As funções da Tabela 1 são transformações para as quais  $m = 1$ . No caso em que  $m = n$ , a transformação  $f: R^n \rightarrow R^n$  é chamada um *operador* de  $R^n$ . A primeira entrada na Tabela 1 é um operador de  $R$ .

Para ilustrar uma maneira importante pela qual podemos construir transformações, suponha que  $f_1, f_2, \dots, f_m$  são funções reais de  $n$  variáveis reais, digamos

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots &&\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Estas  $m$  equações associam um único ponto  $(w_1, w_2, \dots, w_m)$  em  $R^m$  a cada ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $R^n$  e portanto definem uma transformação de  $R^n$  em  $R^m$ . Denotando esta transformação por  $T$ , temos  $T: R^n \rightarrow R^m$  com

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

### EXEMPLO 1 Uma Transformação de $R^2$ em $R^3$

As equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 x_2 \\ w_3 &= x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

definem uma transformação  $T: R^2 \rightarrow R^3$ . A imagem do ponto

TABELA 1

Fórmula	Exemplo	Classificação	Descrição
$f(x)$	$f(x) = x^2$	Função real de uma variável real	Função de $R$ em $R$
$f(x, y)$	$f(x, y) = x^2 + y^2$	Função real de duas variáveis reais	Função de $R^2$ em $R$
$f(x, y, z)$	$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$	Função real de três variáveis reais	Função de $R^3$ em $R$
$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$	Função real de $n$ variáveis reais	Função de $R^n$ em $R$

$(x_1, x_2)$  por esta transformação é o ponto

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1x_2, x_1^2 - x_2^2)$$

Assim, por exemplo,  $T(1, -2) = (-1, -6, -3)$ .

**Transformações Lineares de  $R^n$  em  $R^m$**  No caso especial em que as equações em (1) são lineares, a transformação  $T : R^n \rightarrow R^m$  definida por estas equações é chamada uma *transformação linear* (ou um *operador linear* se  $m = n$ ). Assim, uma transformação linear  $T : R^n \rightarrow R^m$  é definida por equações da forma

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots && \vdots && \vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned} \quad (2)$$

ou então, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

ou, mais concisamente, por

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x} \quad (4)$$

A matriz  $A = [a_{ij}]$  é chamada a *matriz canônica* da transformação linear  $T$  e a transformação  $T$  é chamada *multiplicação por A*.

## EXEMPLO 2 Uma Transformação de $R^4$ em $R^3$

A transformação linear  $T : R^4 \rightarrow R^3$  definida pelas equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned} \quad (5)$$

pode ser expressa em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

de modo que a matriz canônica de  $T$  é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A imagem de um ponto  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  pode ser calculada diretamente das equações definidoras (5) ou da matriz (6) por multiplicação matricial. Por exemplo, se  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$  então, substituindo em (5), obtemos

$$w_1 = 1, w_2 = 3, w_3 = 8$$

(verifique) ou então, alternativamente, por (6) obtemos

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

**Algumas Questões de Notação** Se  $T : R^n \rightarrow R^m$  é a multiplicação por  $A$  e se é importante enfatizar que  $A$  é a matriz canônica de  $T$ , nós escreveremos a transformação linear  $T : R^n \rightarrow R^m$  como  $T_A : R^n \rightarrow R^m$ . Assim,

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad (7)$$

Nesta equação deve ficar claro que entendemos o vetor  $\mathbf{x}$  em  $R^n$  como uma matriz-coluna.

Às vezes é impraticável introduzir mais uma letra para denotar a matriz canônica de uma transformação linear  $T : R^n \rightarrow R^m$ . Nesses casos nós denotaremos a matriz canônica de  $T$  pelo símbolo  $[T]$ . Com esta notação, a Equação (7) assume a forma

$$T(\mathbf{x}) = [T]\mathbf{x} \quad (8)$$

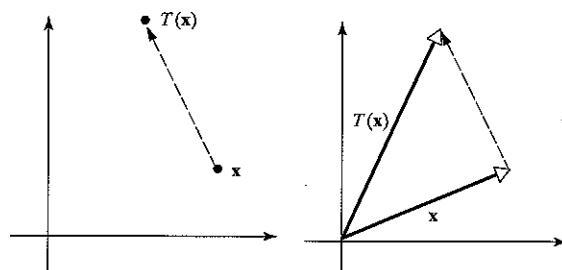
Ocasionalmente, misturamos as duas notações para a matriz canônica, quando então teremos

$$[T_A] = A \quad (9)$$

**OBSERVAÇÃO.** No meio de toda esta notação é importante não esquecer que nós estabelecemos uma correspondência entre as matrizes  $m \times n$  e as transformações lineares de  $R^n$  em  $R^m$ : A cada matriz  $A$  corresponde uma transformação linear  $T_A$  (multiplicação por  $A$ ) e a cada transformação linear  $T : R^n \rightarrow R^m$  corresponde uma matriz  $[T]$  de tamanho  $m \times n$  (a matriz canônica de  $T$ ).

## A Geometria das Transformações Lineares

Dependendo de como encaramos uma  $n$ -upla, se como um ponto ou um vetor, o efeito geométrico de um operador  $T: R^n \rightarrow R^n$  é o de transformar cada ponto (ou vetor) de  $R^n$  em algum novo ponto (ou vetor) (Figura 4.2.1).



(a)  $T$  leva pontos em pontos    (b)  $T$  leva vetores em vetores  
**Figura 4.2.1**

## EXEMPLO 3 A Transformação Nula de $R^n$ em $R^m$

Se  $0$  é a matriz zero  $m \times n$  e se  $\mathbf{0}$  é o vetor nulo de  $R^m$  então, para cada vetor  $x$  em  $R^n$  temos

$$T_0(x) = 0x = \mathbf{0}$$

de modo que a multiplicação por zero leva cada vetor em  $R^n$  no vetor nulo de  $R^m$ . Nós chamamos  $T_0$  a **transformação nula** ou **zero** de  $R^n$  em  $R^m$ . Às vezes a transformação nula é denotada por  $0$ . Embora isto seja a mesma notação usada para a matriz zero, a interpretação correta fica, geralmente, clara pelo contexto. ♦

## EXEMPLO 4 O Operador identidade de $R^n$

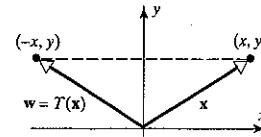
Se  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ , então, para cada vetor  $x$  em  $R^n$  temos

$$T_I(x) = Ix = x$$

de modo que a multiplicação por  $I$  leva cada vetor em  $R^n$  em si mesmo. Nós chamamos  $T_I$  o **operador identidade** de  $R^n$ . Às vezes o operador identidade é denotado por  $I$ . Embora isto seja a mesma notação usada para a matriz identidade, a interpretação correta fica, geralmente, clara pelo contexto. ♦

Entre os operadores lineares mais importantes de  $R^2$  e  $R^3$  estão os que produzem reflexões, projeções e rotações. Agora nós passamos a estudar estes operadores.

**Reflexões** Considere o operador  $T: R^2 \rightarrow R^2$  que aplica cada vetor na sua imagem simétrica em relação ao eixo  $y$  (Figura 4.2.2).



**Figura 4.2.2**

Se escrevermos  $w = T(x)$ , então as equações relacionando os componentes de  $x$  e de  $w$  são

$$\begin{aligned} w_1 &= -x = -x + 0y \\ w_2 &= y = 0x + y \end{aligned} \quad (10)$$

**TABELA 2**

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Reflexão em torno do eixo $y$		$w_1 = -x$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno do eixo $x$		$w_1 = x$ $w_2 = -y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno da reta $y = x$		$w_1 = y$ $w_2 = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

TABELA 3

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Reflexão em torno do plano $xy$		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = -z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno do plano $xz$		$w_1 = x$ $w_2 = -y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno do plano $yz$		$w_1 = -x$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (11)$$

Como as equações em (10) são lineares,  $T$  é um operador linear e, por (11), a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em geral, os operadores em  $R^2$  e  $R^3$  que levam cada vetor em seu simétrico em relação a alguma reta ou plano são chamados de

**reflexões.** Estes operadores são lineares. As Tabelas 2 e 3 listam algumas das reflexões mais comuns.

**Projeções** Considere o operador  $T : R^2 \rightarrow R^2$  que leva cada vetor na sua projeção ortogonal sobre o eixo  $x$  (Figura 4.2.3). As equações relacionando os componentes de  $\mathbf{x}$  e de  $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$  são

$$\begin{aligned} w_1 &= x = x + 0y \\ w_2 &= 0 = 0x + 0y \end{aligned} \quad (12)$$

ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (13)$$

TABELA 4

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Projeção ortogonal sobre o eixo $x$		$w_1 = x$ $w_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o eixo $y$		$w_1 = 0$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

TABELA 5

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Projeção ortogonal sobre o plano $xy$		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano $xz$		$w_1 = x$ $w_2 = 0$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano $yz$		$w_1 = 0$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

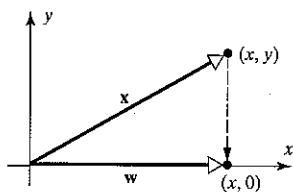


Figura 4.2.3

Como as equações em (12) são lineares,  $T$  é um operador linear e, por (13), a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em geral, uma *projeção* (ou, mais precisamente, uma *projeção ortogonal*) de  $R^2$  ou  $R^3$  é qualquer operador que leva cada vetor em sua projeção ortogonal sobre alguma reta ou algum plano pela origem. Pode ser mostrado que tais operadores são lineares. As Tabelas 4 e 5 listam algumas das mais básicas projeções em  $R^2$  e  $R^3$ .

**Rotações** Um operador que gira cada vetor em  $R^2$  por um ângulo fixado  $\theta$  é chamado uma *rotação em  $R^2$* . A Tabela 6 dá

as fórmulas para as rotações de  $R^2$ . Para mostrar como derivamos estes resultados, considere o operador que gira cada vetor no sentido anti-horário por um ângulo positivo  $\theta$  fixado. Para encontrar as equações relacionando  $\mathbf{x}$  com  $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$ , seja  $\phi$  o ângulo entre  $\mathbf{x}$  e o eixo  $x$  positivo e seja  $r$  o comprimento comum de  $\mathbf{x}$  e de  $\mathbf{w}$  (Figura 4.2.4).

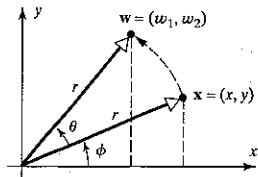


Figura 4.2.4

Por trigonometria básica,

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (14)$$

e

$$w_1 = r \cos(\theta + \phi), \quad w_2 = r \sin(\theta + \phi) \quad (15)$$

TABELA 6

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Rotação pelo ângulo $\theta$		$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$ $w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Aplicando identidades trigonométricas a (15), resulta

$$\begin{aligned} w_1 &= r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \\ w_2 &= r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi \end{aligned}$$

e substituindo (14) resulta

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ w_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (16)$$

As equações em (16) são lineares, de modo que  $T$  é um operador linear; além disto, segue destas equações que a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

### EXEMPLO 5 Rotação

Se cada vetor em  $R^2$  é rodado por um ângulo de  $\pi/6$  ( $= 30^\circ$ ), então a imagem  $w$  de um vetor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

é

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \cos \pi/6 & -\sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a imagem do vetor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Em geral descrevemos uma rotação de vetores em  $R^3$  em relação a um raio partindo da origem, chamado o *eixo de rotação*. À medida que um vetor gira em torno do eixo de rotação ele varre uma porção de um cone (Figura 4.2.5a). O *ângulo de rotação*, que é medido na base do cone, é descrito como sendo no sentido “horário” ou “anti-horário” em relação a um ponto de vista ao longo do eixo de rotação *olhando para a origem*. Por exemplo, na Figura 4.2.5a o vetor  $w$  resulta da rotação no sentido anti-horário do vetor  $x$  em torno do eixo  $l$  por um ângulo de  $\theta$ . Assim como em  $R^2$ , os ângulos são *positivos* se gerados por rotações no sentido anti-horário e *negativos* se gerados por rotações no sentido horário.

A maneira mais comum de descrever um eixo de rotação geral é especificando um vetor não-nulo  $\mathbf{u}$  com ponto inicial na origem e apontando ao longo do eixo de rotação. O sentido anti-horário para a rotação em torno do eixo pode então ser determinado pela “regra da mão direita” (Figura 4.2.5b); Se o polegar da mão direita aponta na direção e sentido do vetor  $\mathbf{u}$  então os dedos da mão fechada apontam no sentido anti-horário.

TABELA 7

Operador	Ilustração	Equação	Matriz Canônica
Rotação anti-horária em torno do eixo $x$ positivo por um ângulo $\theta$		$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= y \cos \theta - z \sin \theta \\ w_3 &= y \sin \theta + z \cos \theta \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo $y$ positivo por um ângulo $\theta$		$\begin{aligned} w_1 &= x \cos \theta + z \sin \theta \\ w_2 &= y \\ w_3 &= -x \sin \theta + z \cos \theta \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo $z$ positivo por um ângulo $\theta$		$\begin{aligned} w_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ w_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta \\ w_3 &= z \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

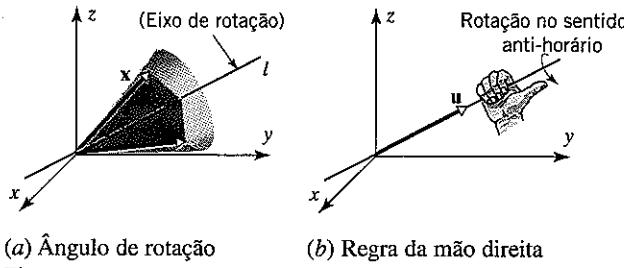


Figura 4.2.5

Uma **rotação** em  $R^3$  é um operador linear que gira cada vetor em  $R^3$  em torno de algum eixo de rotação por um ângulo fixado  $\theta$ . Na Tabela 7 nós descrevemos as rotações em  $R^3$  cujos eixos de rotação são os eixos coordenados positivos. Para cada uma destas rotações, um dos componentes permanece inalterado durante a rotação e a relação entre os dois outros componentes pode ser deduzida da mesma maneira que deduzimos (16). Por exemplo, na rotação em torno do eixo  $z$ , os componentes  $z$  de  $x$  e de  $w = T(x)$  são os mesmos e os componentes  $x$  e  $y$  estão relacionados como em (16). Isto fornece as equações de rotação mostradas na última coluna da Tabela 7.

Observamos, para completar, que a matriz canônica da rotação anti-horária por um ângulo  $\theta$  em torno de um eixo em  $R^3$ , determinado por um vetor arbitrário mas *unitário*  $u = (a, b, c)$  com ponto inicial na origem, é

$$\begin{bmatrix} a^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & ab(1 - \cos \theta) - c \sin \theta & ac(1 - \cos \theta) + b \sin \theta \\ ab(1 - \cos \theta) + c \sin \theta & b^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & bc(1 - \cos \theta) - a \sin \theta \\ ac(1 - \cos \theta) - b \sin \theta & bc(1 - \cos \theta) + a \sin \theta & c^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

A dedução desta matriz pode ser encontrada no livro intitulado *Principles of Interactive Computer Graphics*, de W. M. Newmann e R. F. Sproull, editado em 1979 pela McGraw-Hill, de Nova Iorque. O leitor pode achar instrutivo deduzir os resultados da Tabela 7 como casos especiais deste resultado mais geral.

**Dilatações e Contrações** Se  $k$  é um escalar não-negativo, então o operador  $T(x) = kx$  de  $R^2$  ou de  $R^3$  é chamado uma *homotetia de razão*  $k$ ; especificamente, o operador é uma *contração de razão*  $k$  se  $0 \leq k \leq 1$  e uma *dilatação de razão*  $k$  se  $k \geq 1$ . O efeito geométrico de uma contração é comprimir cada vetor por um fator  $k$  (Figura 4.2.6a) e o efeito geométrico de uma dilatação é esticar cada vetor por um fator  $k$  (Figura

4.2.6b). Uma contração comprime  $R^2$  ou  $R^3$  uniformemente de todas as direções na direção da origem e uma dilatação expande  $R^2$  ou  $R^3$  uniformemente em todas as direções para longe da origem.

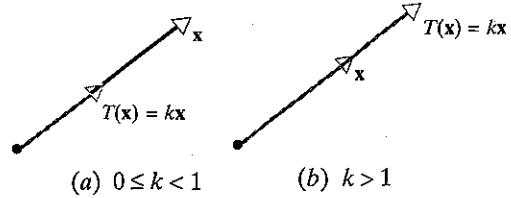


Figura 4.2.6

A contração mais extrema ocorre com  $k = 0$ , caso em que  $T(x) = kx$  reduz ao operador nulo  $T(x) = 0$ , que comprime cada vetor a um único ponto (a origem). Se  $k = 1$  então  $T(x) = kx$  reduz ao operador identidade  $T(x) = x$ , que deixa cada vetor inalterado; isto poderia ser considerado tanto uma contração quanto uma dilatação. As Tabelas 8 e 9 listam as contrações e dilatações em  $R^2$  e  $R^3$ .

**Composição de Transformações Lineares** Se  $T_A : R^n \rightarrow R^k$  e  $T_B : R^k \rightarrow R^m$  são transformações lineares então, para cada  $x$  em  $R^n$  nós podemos calcular, primeiro,  $T_A(x)$ , que é um vetor em  $R^k$  e depois calcular  $T_B(T_A(x))$ , que é um vetor em  $R^m$ . Assim, a aplicação de  $T_A$  seguida de  $T_B$  produz uma transformação de  $R^n$  em  $R^m$ . Esta transformação é chamada a *composição* ou a *composta* de  $T_B$  com  $T_A$  e é denotada por  $T_B \circ T_A$  (podemos ler “ $T_B$  bola  $T_A$ ”). Assim,

$$(T_B \circ T_A)(x) = T_B(T_A(x)) \quad (18)$$

A composta  $T_B \circ T_A$  é linear pois

$$(T_B \circ T_A)(x) = T_B(T_A(x)) = B(Ax) = (BA)x \quad (19)$$

de modo que  $T_B \circ T_A$  é a multiplicação por  $BA$ , que é uma transformação linear. A Fórmula (19) também nos diz que a matriz canônica de  $T_B \circ T_A$  é  $BA$ . Isto pode ser dito pela fórmula

$$T_B \circ T_A = T_{BA} \quad (20)$$

OBSERVAÇÃO. A Fórmula (20) captura uma idéia importante: *Multiplicar matrizes é equivalente a compor as correspondentes*

TABELA 8

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Contração de fator $k$ em $R^2$ ( $0 \leq k \leq 1$ )		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatação de fator $k$ em $R^2$ ( $k \geq 1$ )		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	

TABELA 9

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Contração de fator $k$ em $\mathbb{R}^3$ ( $0 \leq k \leq 1$ )		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatação de fator $k$ em $\mathbb{R}^3$ ( $k \geq 1$ )		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

transformações lineares, formando os fatores da direita para a esquerda.

Existe uma forma alternativa para a Fórmula (20): Se  $T_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $T_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  são transformações lineares, então temos

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] \quad (21)$$

pois a matriz canônica da composta  $T_2 \circ T_1$  é o produto das matrizes canônicas de  $T_2$  e de  $T_1$ .

### EXEMPLO 6 Composição de Duas Rotações

Sejam  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  operadores lineares que rodam os vetores por ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente. Assim, a operação

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

primeiro roda  $\mathbf{x}$  por um ângulo  $\theta_1$  e então roda  $T_1(\mathbf{x})$  por um ângulo  $\theta_2$ . Segue-se que o efeito líquido de  $T_2 \circ T_1$  é rodar cada vetor em  $\mathbb{R}^2$  por um ângulo  $\theta_1 + \theta_2$  (Figura 4.2.7).

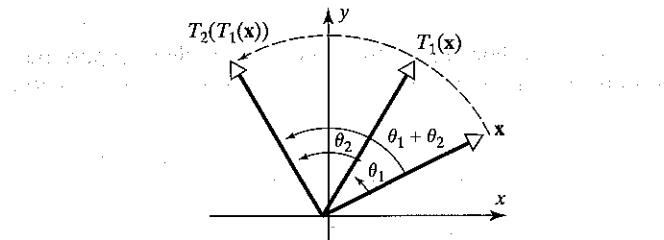


Figura 4.2.7

Assim, as matrizes canônicas destes operadores lineares são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Estas matrizes deveriam satisfazer (21). Com a ajuda de algumas identidades trigonométricas básicas, podemos mostrar que isto realmente ocorre:

$$\begin{aligned} [T_2][T_1] &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \sin \theta_1 & -(\cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) \\ \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_2 \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \\ &= [T_2 \circ T_1] \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. Em geral, é importante a ordem pela qual componemos transformações lineares. Isto era de se esperar, pois compor transformações lineares corresponde a multiplicar as correspondentes matrizes canônicas e nós sabemos que é relevante a ordem na qual multiplicamos matrizes.

### EXEMPLO 7 A Composição não é Comutativa

Sejam  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a reflexão em torno da reta  $y = x$  e  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção ortogonal sobre o eixo  $y$ . A Figura 4.2.8 ilustra graficamente o efeito distinto que  $T_1 \circ T_2$  e  $T_2 \circ T_1$  têm sobre um vetor  $\mathbf{x}$ . Esta mesma conclusão pode ser alcançada mostrando que as matrizes canônicas de  $T_1$  e  $T_2$  não comutam:

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que  $[T_2 \circ T_1] \neq [T_1 \circ T_2]$ .

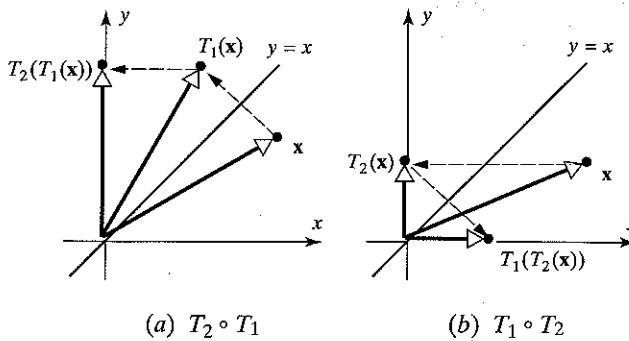


Figura 4.2.8

**EXEMPLO 8 A Composição de Duas Reflexões**

Sejam  $T_1 : R^2 \rightarrow R^2$  a reflexão em torno do eixo  $y$  e  $T_2 : R^2 \rightarrow R^2$  a reflexão em torno do eixo  $x$ . Neste caso,  $T_1 \circ T_2$  e  $T_2 \circ T_1$  são idênticas; ambas aplicam cada vetor  $\mathbf{x} = (x, y)$  em seu negativo  $-\mathbf{x} = (-x, -y)$  (Figura 4.2.9):

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(x, y) &= T_1(x, -y) = (-x, -y) \\ (T_2 \circ T_1)(x, y) &= T_2(-x, y) = (-x, -y) \end{aligned}$$

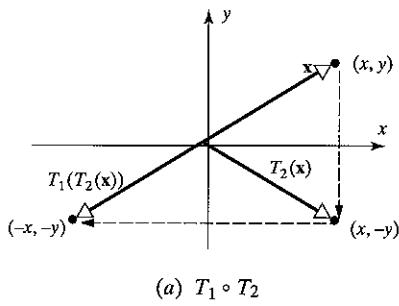
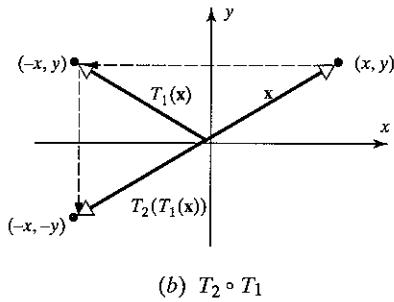
(a)  $T_1 \circ T_2$ (b)  $T_2 \circ T_1$ 

Figura 4.2.9

A igualdade de  $T_1 \circ T_2$  e  $T_2 \circ T_1$  também pode ser deduzida mostrando que as matrizes canônicas de  $T_1$  e  $T_2$  comutam:

$$\begin{aligned} [T_1 \circ T_2] &= [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ [T_2 \circ T_1] &= [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O operador  $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$  em  $R^2$  ou  $R^3$  é chamado **reflexão em torno da origem**. Como mostram as contas acima, a matriz

canônica deste operador em  $R^2$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Composição de Três ou Mais Transformações Lineares**

A composição também pode ser definida para três ou mais transformações lineares. Por exemplo, considere as transformações lineares

$$T_1 : R^n \rightarrow R^k, \quad T_2 : R^k \rightarrow R^l, \quad T_3 : R^l \rightarrow R^m$$

Nós definimos a composta  $(T_3 \circ T_2 \circ T_1) : R^n \rightarrow R^m$  por

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{x})))$$

Pode ser mostrado que esta composição é uma transformação linear e que a matriz canônica de  $T_3 \circ T_2 \circ T_1$  está relacionada com as matrizes canônicas de  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  por

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1] = [T_3][T_2][T_1] \quad (22)$$

que generaliza (21). Se as matrizes canônicas de  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  são denotadas por  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, então nós também temos a seguinte generalização de (20):

$$[T_C \circ T_B \circ T_A] = T_{CBA} \quad (23)$$

**EXEMPLO 9 Composição de Três Transformações**

Encontre a matriz canônica do operador linear  $T : R^3 \rightarrow R^3$  que primeiro roda um vetor no sentido anti-horário em torno do eixo  $z$  por um ângulo  $\theta$  e depois reflete o vetor resultante em torno do plano  $yz$  e finalmente projeta este vetor ortogonalmente sobre o plano  $xy$ .

*Solução.*

A transformação linear  $T$  pode ser expressa como a composição

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

onde  $T_1$  é a rotação em torno do eixo  $z$ ,  $T_2$  é a reflexão em torno do plano  $yz$  e  $T_3$  é a projeção ortogonal sobre o plano  $xy$ . As matrizes canônicas destas transformações lineares, pelas Tabelas 3, 5 e 7, são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, por (22), a matriz canônica de  $T$  é  $[T] = [T_3][T_2][T_1]$ ; ou seja,

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Conjunto de Exercícios 4.2**

1. Encontre o domínio e o contradomínio das transformações definidas pelas equações dadas e determine se a transformação é linear.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & w_1 = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & \text{(b)} & w_1 = 2x_1 x_2 - x_2 \\ & w_2 = 5x_1 - 8x_2 + x_3 & & w_2 = x_1 + 3x_1 x_2 \\ & w_3 = x_1 + x_2 & & w_3 = 2x_1 - 4x_2 - x_3 \end{array} \quad \begin{array}{llll} \text{(c)} & w_1 = 5x_1 - x_2 + x_3 & \text{(d)} & w_1 = x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ & w_2 = -x_1 + x_2 + 7x_3 & & w_2 = 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4 \\ & w_3 = 2x_1 - 4x_2 - x_3 & & \end{array}$$

2. Encontre a matriz canônica da transformação linear definida pelas equações.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_4 & \text{(b)} & w_1 = 7x_1 + 2x_2 - 8x_3 \\ & w_2 = 3x_1 + 5x_2 - x_4 & & w_2 = -x_2 + 5x_3 \\ & w_3 = 4x_1 + 7x_2 - x_3 & & w_3 = 5x_1 - 7x_2 \\ & & & w_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{array} \quad \begin{array}{llll} \text{(c)} & w_1 = -x_1 + x_2 & \text{(d)} & w_1 = x_1 \\ & w_2 = 3x_1 - 2x_2 & & w_2 = x_1 + x_2 \\ & w_3 = 5x_1 - 7x_2 & & w_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ & & & w_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{array}$$

3. Encontre a matriz canônica da transformação linear  $T: R^3 \rightarrow R^3$  dada por

$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ w_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 \\ w_3 &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

e em seguida calcule  $T(-1, 2, 4)$  por substituição direta nas equações e também por multiplicação matricial.

4. Encontre a matriz canônica do operador linear  $T$  definido pela fórmula.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2) \\ \text{(b)} & T(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \\ \text{(c)} & T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3) \\ \text{(d)} & T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3) \end{array}$$

5. Encontre a matriz canônica do operador linear  $T$  definido pela fórmula.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2) \\ \text{(b)} & T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1) \\ \text{(c)} & T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0) \\ \text{(d)} & T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3) \end{array}$$

6. Em cada parte é dada a matriz canônica  $[T]$  de uma transformação linear  $T$ . Use a matriz para obter  $T(\mathbf{x})$ . [Expresse as repostas em formato matricial.]

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & [T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \text{(b)} & [T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \text{(c)} & [T] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \text{(d)} & [T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

7. Em cada parte use a matriz canônica  $[T]$  para obter  $T(\mathbf{x})$ ; em seguida, confira seu resultado calculando  $T(\mathbf{x})$  diretamente.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2); \mathbf{x} = (-1, 4) \\ \text{(b)} & T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0); \mathbf{x} = (2, 1, -3) \end{array}$$

8. Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de  $(-1, 2)$  em torno

$$\begin{array}{lll} \text{(a) do eixo } x & \text{(b) do eixo } y & \text{(c) da reta } y = x \end{array}$$

9. Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de  $(2, -5, 3)$  em torno do

$$\begin{array}{lll} \text{(a) plano } xy & \text{(b) plano } xz & \text{(c) plano } yz \end{array}$$

10. Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de  $(2, -5)$  sobre o

$$\begin{array}{ll} \text{(a) eixo } x & \text{(b) eixo } y \end{array}$$

11. Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de  $(-2, 1, 3)$  sobre o

$$\begin{array}{lll} \text{(a) plano } xy & \text{(b) plano } xz & \text{(c) plano } yz \end{array}$$

12. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor  $(3, -4)$  quando for girado por um ângulo de

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } \theta = 30^\circ & \text{(b) } \theta = -60^\circ & \text{(c) } \theta = 45^\circ \\ & & \text{(d) } \theta = 90^\circ \end{array}$$

13. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor  $(-2, 1, 2)$  quando for girado por

$$\begin{array}{l} \text{(a) } 30^\circ \text{ em torno do eixo } x \\ \text{(b) } 45^\circ \text{ em torno do eixo } y \\ \text{(c) } 90^\circ \text{ em torno do eixo } z \end{array}$$

14. Encontre a matriz canônica do operador linear que roda um vetor em  $R^3$  por um ângulo de  $-60^\circ$  em torno do

$$\begin{array}{lll} \text{(a) eixo } x & \text{(b) eixo } y & \text{(c) eixo } z \end{array}$$

15. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor  $(-2, 1, 2)$  quando for girado por

$$\begin{array}{l} \text{(a) } -30^\circ \text{ em torno do eixo } x \end{array}$$

- (b)  $-45^\circ$  em torno do eixo  $y$   
 (c)  $-90^\circ$  em torno do eixo  $z$
16. Encontre a matriz canônica para a composição dada de operadores lineares de  $\mathbb{R}^2$ .  
 (a) Uma rotação de  $90^\circ$  seguida de uma reflexão em torno da reta  $y = x$ .  
 (b) Uma projeção ortogonal sobre o eixo  $y$  seguida de uma contração de razão  $k = \frac{1}{2}$ .  
 (c) Uma reflexão em torno do eixo  $x$  seguida de uma dilatação de razão  $k = 3$ .
17. Encontre a matriz canônica para a composição dada de operadores lineares de  $\mathbb{R}^2$ .  
 (a) Uma rotação de  $60^\circ$ , seguida de uma projeção ortogonal sobre o eixo  $x$ , seguida de uma reflexão em torno da reta  $y = x$ .  
 (b) Uma dilatação de razão  $k = 2$ , seguida de uma rotação de  $45^\circ$ , seguida de uma reflexão em torno do eixo  $y$ .  
 (c) Uma rotação de  $15^\circ$ , seguida de uma rotação de  $105^\circ$ , seguida de uma rotação de  $60^\circ$ .
18. Encontre a matriz canônica para a composição dada de operadores lineares de  $\mathbb{R}^3$ .  
 (a) Uma reflexão em torno do plano  $yz$ , seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano  $xz$ .  
 (b) Uma rotação de  $45^\circ$  em torno do eixo  $y$ , seguida de uma dilatação de razão  $k = \sqrt{2}$ .  
 (c) Uma projeção ortogonal sobre o plano  $xy$ , seguida de uma reflexão em torno do plano  $yz$ .
19. Encontre a matriz canônica para a composição dada de operadores lineares de  $\mathbb{R}^3$ .  
 (a) Uma rotação de  $30^\circ$  em torno do eixo  $x$ , seguida de uma rotação de  $30^\circ$  em torno do eixo  $z$ , seguida de uma contração de razão  $k = \frac{1}{4}$ .  
 (b) Uma reflexão em torno do plano  $xy$ , seguida de uma reflexão em torno do plano  $xz$ , seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano  $yz$ .  
 (c) Uma rotação de  $270^\circ$  em torno do eixo  $x$ , seguida de uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $y$ , seguida de uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $z$ .
20. Determine se  $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ .  
 (a)  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção ortogonal sobre o eixo  $x$  e  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção ortogonal sobre o eixo  $y$ .  
 (b)  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a rotação por um ângulo  $\theta_1$  e  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a rotação por um ângulo  $\theta_2$ .  
 (c)  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção ortogonal sobre o eixo  $x$  e  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a rotação por um ângulo  $\theta$ .
21. Determine se  $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ .  
 (a)  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a dilatação de razão  $k$  e  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a rotação em torno do eixo  $z$  por um ângulo  $\theta$ .  
 (b)  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a rotação em torno do eixo  $x$  por um ângulo  $\theta_1$  e  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a rotação em torno do eixo  $z$  por um ângulo  $\theta_2$ .
22. Definimos as *projeções ortogonais* de  $\mathbb{R}^3$  sobre os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, por
- $$T_1(x, y, z) = (x, 0, 0), \quad T_2(x, y, z) = (0, y, 0), \quad T_3(x, y, z) = (0, 0, z)$$
- (a) Mostre que as projeções ortogonais sobre os eixos coordenados são operadores lineares e encontre suas matrizes canônicas.  
 (b) Mostre que se  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma projeção ortogonal sobre um dos eixos coordenados, então os vetores  $T(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$  são vetores ortogonais, para cada vetor  $\mathbf{x}$  em  $\mathbb{R}^3$ .  
 (c) Faça um esboço indicando  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$  no caso em que  $T$  é a projeção ortogonal sobre o eixo  $x$ .
23. Deduza as matrizes canônicas para as rotações em torno do eixo  $x$ , do eixo  $y$  e do eixo  $z$  de  $\mathbb{R}^3$  a partir da Fórmula (17).  
 24. Use a Fórmula (17) para encontrar a matriz canônica de uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo determinado pelo vetor  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ .  
 [Observação. A Fórmula (17) exige que o vetor que define o eixo de rotação tenha comprimento 1.]  
 25. Verifique a Fórmula (21) para as transformações lineares dadas.  

(a)  $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$  e  $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$   
 (b)  $T_1(x_1, x_2) = (4x_1, -2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2)$  e  $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 4x_1 - x_3)$   
 (c)  $T_1(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, -x_2 + x_3, -x_3 + x_1)$  e  $T_2(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1, 3x_3, -4x_2)$

26. Pode ser provado que se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  com  $\det(A) = 1$  e tal que os vetores-coluna de  $A$  são ortogonais e têm comprimento 1, então a multiplicação por  $A$  é uma rotação por algum ângulo  $\theta$ . Verifique que

$$A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

satisfaz as condições enunciadas e encontre o ângulo de rotação.

27. O resultado enunciado no Exercício 26 também vale em  $\mathbb{R}^3$ : Pode ser provado que se  $A$  é uma matriz  $3 \times 3$  com  $\det(A) = 1$  e tal que os vetores-coluna de  $A$  são dois ortogonais e têm comprimento 1, então a multiplicação por  $A$  é uma rotação em torno de algum eixo de rotação por algum ângulo  $\theta$ . Use a Fórmula (17) para mostrar que se  $A$  satisfaz as condições enunciadas, então o ângulo de rotação satisfaz a equação

$$\cos \theta = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2}$$

28. Seja  $A$  uma matriz  $3 \times 3$  (não a identidade) que satisfaz as condições enunciadas no Exercício 27. Pode ser mostrado que se  $\mathbf{x}$  é um vetor não-nulo qualquer em  $\mathbb{R}^3$  então o vetor  $\mathbf{u} = A\mathbf{x} + A^T\mathbf{x} + [1 - \text{tr}(A)]\mathbf{x}$  determina um eixo de rotação quando  $\mathbf{u}$  é posicionado com seu ponto inicial na origem. [Ver o artigo *The Axis of Rotation: Analysis, Algebra, Geometry*, por Dan Kalman, em *Mathematics Magazine*, Vol. 62, No. 4, Outubro de 1989.]  
 (a) Mostre que a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

é uma rotação.

- (b) Encontre um vetor de comprimento 1 que define um eixo da rotação.  
(c) Use o resultado do Exercício 27 para encontrar o ângulo de rotação em torno do eixo obtido na parte (b).

## Discussão e Descoberta

29. Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor  $\mathbf{x}$  pela matriz  $A$ .

(a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$     (b)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

30. Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor  $\mathbf{x}$  pela matriz  $A$ .

(a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$     (b)  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

31. Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor  $\mathbf{x}$  pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

32. Se a multiplicação por  $A$  roda um vetor  $\mathbf{x}$  do plano  $xy$  por um ângulo  $\theta$ , qual é o efeito de multiplicar  $\mathbf{x}$  por  $A^T$ ? Explique seu raciocínio.

## 4.3 PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES DE $R^n$ EM $R^m$

Nesta seção nós vamos investigar a relação entre a invertibilidade de uma matriz e propriedades das correspondentes transformações matriciais. Nós também iremos obter uma caracterização das transformações lineares de  $R^n$  em  $R^m$  que será a base para as transformações lineares mais gerais que serão abordadas em seções subsequentes e discutiremos algumas propriedades geométricas dos autovetores.

**Transformações Lineares Injetoras** As transformações lineares que aplicam vetores (pontos) distintos em vetores (pontos) distintos são de especial importância. Um exemplo de uma tal transformação é o operador linear  $T : R^2 \rightarrow R^2$  que roda cada vetor por um ângulo  $\theta$ . É óbvio, geometricamente, que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores distintos em  $R^2$  então também os vetores girados  $T(\mathbf{u})$  e  $T(\mathbf{v})$  são distintos (Figura 4.3.1).

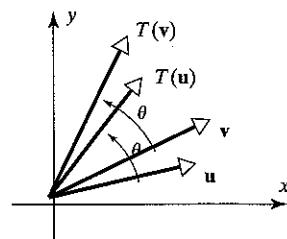


Figura 4.3.1 Os vetores distintos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são girados em vetores distintos  $T(\mathbf{u})$  e  $T(\mathbf{v})$ .

Contrastando com este efeito, se  $T : R^3 \rightarrow R^3$  é a projeção ortogonal de  $R^3$  sobre o plano  $xy$ , então pontos distintos na mesma reta vertical são levados num mesmo ponto do plano  $xy$  (Figura 4.3.2).

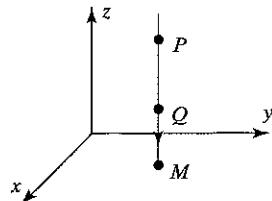


Figura 4.3.2 Os pontos distintos  $P$  e  $Q$  são levados no mesmo ponto  $M$ .

### Definição

Uma transformação linear  $T : R^n \rightarrow R^m$  é dita **injetora** se  $T$  aplica vetores (pontos) distintos de  $R^n$  em vetores (pontos) distintos de  $R^m$ .

OBSERVAÇÃO. Segue desta definição que para cada vetor  $\mathbf{w}$  na imagem de uma transformação linear injetora  $T$  existe exatamente um único vetor  $\mathbf{x}$  tal que  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ .

**EXEMPLO 1 Transformações Lineares Injetoras**

Na terminologia da definição que acabamos de dar, a rotação da Figura 4.3.1 é injetora mas a projeção ortogonal da Figura 4.3.2 não o é.

Sejam  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $T_A: R^n \rightarrow R^n$  a multiplicação por  $A$ . Agora vamos investigar as relações entre a invertibilidade de  $A$  e propriedades de  $T_A$ .

Lembre do Teorema 2.3.6 (com  $w$  no lugar de  $b$ ) que as seguintes afirmações são equivalentes:

- $A$  é invertível.
- $Ax = w$  é consistente para cada matriz  $n \times 1$   $w$ .
- $Ax = w$  tem exatamente uma solução para cada matriz  $n \times 1$   $w$ .

No entanto, a última destas afirmações é mais forte do que é necessário. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes (Exercício 24):

- $A$  é invertível.
- $Ax = w$  é consistente para cada matriz  $n \times 1$   $w$ .
- $Ax = w$  tem exatamente uma solução quando o sistema é consistente.

Transladando estas afirmações para o contexto do operador linear  $T_A$ , deduzimos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- $A$  é invertível.
- Para cada vetor  $w$  em  $R^n$  existe um vetor  $x$  em  $R^n$  tal que  $T_A(x) = w$ . Dito de outra forma, a imagem de  $T_A$  é todo  $R^n$ .
- Para cada vetor  $w$  da imagem de  $T_A$ , existe exatamente um vetor  $x$  em  $R^n$  tal que  $T_A(x) = w$ . Dito de outra forma,  $T_A$  é injetora.

Resumindo, estabelecemos o seguinte teorema sobre operadores lineares de  $R^n$ .

**Teorema 4.3.1****Afirmativas Equivalentes**

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $T_A: R^n \rightarrow R^n$  é a multiplicação por  $A$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- $A$  é invertível.
- A imagem de  $T_A$  é  $R^n$ .
- $T_A$  é injetora.

**EXEMPLO 2 Aplicando o Teorema 4.3.1**

No Exemplo 1 nós observamos que a rotação  $T: R^2 \rightarrow R^2$  ilustrada na Figura 4.3.1 é injetora. Segue pelo Teorema 4.3.1 que a imagem de  $T$  deve ser todo o  $R^2$  e que a matriz canônica de  $T$  deve ser invertível. Para mostrar que a imagem de  $T$  é todo o  $R^2$ ,

nós devemos mostrar que cada vetor  $w$  em  $R^2$  é a imagem de algum vetor  $x$  por  $T$ . Mas isto claramente ocorre, pois o vetor  $x$  obtido girando  $w$  por um ângulo de  $-\theta$  é levado em  $w$  quando girado por um ângulo  $\theta$ . Além disto, pela Tabela 6 da Seção 4.2, a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

que é invertível, pois

$$\det[T] = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0$$

**EXEMPLO 3 Aplicando o Teorema 4.3.1**

No Exemplo 1 nós observamos que a projeção  $T: R^3 \rightarrow R^3$  ilustrada na Figura 4.3.1 não é injetora. Segue pelo Teorema 4.3.1 que a imagem de  $T$  não pode ser todo o  $R^3$  e que a matriz canônica de  $T$  é não-invertível. Para mostrar que a imagem de  $T$  não é todo o  $R^3$ , nós devemos encontrar um vetor  $w$  em  $R^3$  que não é imagem por  $T$  de nenhum vetor  $x$ . Mas qualquer vetor  $w$  fora do plano  $xy$  tem esta propriedade, pois todas as imagens por  $T$  estão no plano  $xy$ . Além disto, pela Tabela 5 da Seção 4.2, a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que não é invertível, pois  $\det[T] = 0$ .

**Inversa de um Operador Injetor** Se  $T_A: R^n \rightarrow R^n$  é um operador linear injetor, então a matriz  $A$  é invertível pelo Teorema 4.3.1. Assim,  $T_{A^{-1}}: R^n \rightarrow R^n$  também é um operador linear, chamado *inverso de  $T_A$* . Os operadores lineares  $T_A$  e  $T_{A^{-1}}$  cancelam-se mutuamente, no seguinte sentido: para todo  $x$  de  $R^n$

$$\begin{aligned} T_A(T_{A^{-1}}(x)) &= AA^{-1}x = Ix = x \\ T_{A^{-1}}(T_A(x)) &= A^{-1}Ax = Ix = x \end{aligned}$$

ou, equivalente, ou,

$$\begin{aligned} T_A \circ T_{A^{-1}} &= T_{AA^{-1}} = T_I \\ T_{A^{-1}} \circ T_A &= T_{A^{-1}A} = T_I \end{aligned}$$

De um ponto de vista mais geométrico, se  $w$  é a imagem de  $x$  por  $T_A$ , então  $T_{A^{-1}}$  leva  $w$  de volta em  $x$ , pois

$$T_{A^{-1}}(w) = T_{A^{-1}}(T_A(x)) = x$$

(Figura 4.3.3).

Antes de passar a um exemplo, é útil mencionar um assunto de notação. Quando um operador linear injetor em  $R^n$  é escrito como  $T: R^n \rightarrow R^n$  (em vez de  $T_A: R^n \rightarrow R^n$ ), então o operador inverso de  $T$  é denotado por  $T^{-1}$  (em vez de  $T_{A^{-1}}$ ). Como a matriz canônica de  $T^{-1}$  é a inversa da matriz canônica de  $T$ , temos

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

(1)

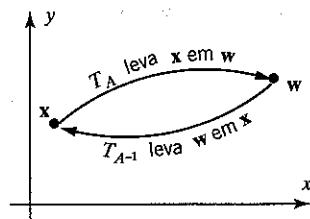


Figura 4.3.3

**EXEMPLO 4 A Matriz Canônica de  $T^{-1}$** 

Seja  $T: R^2 \rightarrow R^2$  o operador que gira cada vetor de  $R^2$  por um ângulo de  $\theta$ , pela Tabela 6 da Seção 4.2,

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

É geometricamente evidente que para desfazer o efeito de  $T$  nós devemos girar cada vetor de  $R^2$  por um ângulo de  $-\theta$ . Ocorre que isto é exatamente o que o operador  $T^{-1}$  faz, pois a matriz canônica de  $T^{-1}$  é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

(verifique), que é idêntica a (2) exceto que  $\theta$  é trocado por  $-\theta$ . ♦

**EXEMPLO 5 Encontrando  $T^{-1}$** 

Mostre que o operador linear  $T: R^2 \rightarrow R^2$  definido pelas equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

é injetor e encontre  $T^{-1}(w_1, w_2)$ .

*Solução.*

A forma matricial destas equações é

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é invertível (e portanto  $T$  é injetor) e a matriz canônica de  $T^{-1}$  é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T^{-1}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_2 \\ -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 \end{bmatrix}$$

pelo que concluímos que

$$T^{-1}(w_1, w_2) = (\frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_2, -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2)$$

**Propriedades da Linearidade** Na seção precedente nós definimos uma transformação  $T: R^n \rightarrow R^m$  como sendo linear se as equações relacionando  $x$  com  $w = T(x)$  são equações lineares. O teorema a seguir dá uma caracterização alternativa da linearidade. Este teorema é fundamental e será a base para estender, mais adiante neste texto, o conceito de transformação linear para contextos mais gerais.

**Teorema 4.3.2****Propriedades de Transformações Lineares**

Uma transformação  $T: R^n \rightarrow R^m$  é linear se, e somente se, as seguintes relações valem para todos os vetores  $u$  e  $v$  em  $R^n$  e qualquer escalar  $c$ .

$$(a) T(u+v) = T(u) + T(v) \quad (b) T(cv) = cT(v)$$

*Prova.* Suponha primeiro que  $T$  é uma transformação linear e seja  $A$  a matriz canônica de  $T$ . Pelas propriedades aritméticas básicas de matrizes segue que

$$T(u+v) = A(u+v) = Au+Av = T(u)+T(v)$$

e

$$T(cv) = A(cv) = cA(v) = cT(v)$$

Reciprocamente, suponha que as propriedades (a) e (b) valem para a transformação  $T$ . Nós podemos provar que  $T$  é linear encontrando uma matriz  $A$  tal que

$$T(x) = Ax \quad (3)$$

para cada vetor  $x$  em  $R^n$ . Isto mostrará que  $T$  é a multiplicação por  $A$  e portanto é linear. Antes de encontrar uma tal matriz  $A$  nós precisamos observar que a propriedade (a) pode ser estendida a três ou mais parcelas; por exemplo, se  $u$ ,  $v$  e  $w$  são vetores quaisquer em  $R^n$ , então agrupando primeiro  $v$  e  $w$  e aplicando a propriedade (a), nós obtemos

$$T(u+v+w) = T(u+(v+w)) = T(u)+T(v+w) = T(u)+T(v)+T(w)$$

Mais geralmente, dados quaisquer vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  em  $R^n$ , temos

$$T(v_1+v_2+\dots+v_k) = T(v_1)+T(v_2)+\dots+T(v_k)$$

Para encontrar a matriz  $A$ , sejam  $e_1, e_2, \dots, e_n$  os vetores

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

e seja  $A$  a matriz cujas colunas sucessivas são  $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ ; ou seja,

$$A = [T(e_1) | T(e_2) | \dots | T(e_n)] \quad (5)$$

Se

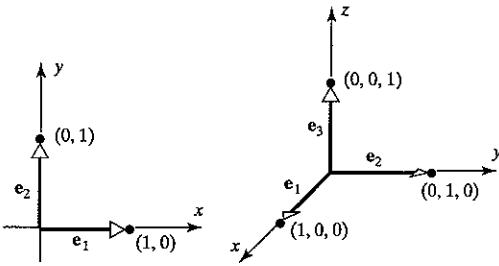
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é um vetor qualquer em  $R^n$  então, como vimos na Seção 1.3, o produto  $Ax$  é uma combinação linear dos vetores-coluna de  $A$  com coeficientes vindo de  $x$ , de modo que

$$\begin{aligned} Ax &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n T(\mathbf{e}_n) \\ &= T(x_1 \mathbf{e}_1) + T(x_2 \mathbf{e}_2) + \cdots + T(x_n \mathbf{e}_n) \quad \leftarrow \text{Propriedade (b)} \\ &= T(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n) \quad \leftarrow \text{Propriedade (a) para } n \text{ parcelas} \\ &= T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

A expressão em (5) é individualmente importante pois fornece uma fórmula explícita para a matriz canônica de uma transformação linear  $T: R^n \rightarrow R^m$  em termos das imagens dos vetores  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  por  $T$ . Por razões que serão discutidas adiante, os vetores  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  de (4) são chamados vetores da **base canônica** de  $R^n$ . Em  $R^2$  e  $R^3$  estes são os vetores de comprimento 1 ao longo dos eixos coordenados (Figura 4.3.4).



(a) A base canônica de  $R^2$  (b) A base canônica de  $R^3$

**Figura 4.3.4**

Por causa de sua importância e para referência futura, vamos enunciar (5) como um teorema.

### Teorema 4.3.3

Se  $T: R^n \rightarrow R^m$  é uma transformação linear e  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  são os vetores da base canônica de  $R^n$ , então

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) | T(\mathbf{e}_2) | \cdots | T(\mathbf{e}_n)] \quad (6)$$

é a matriz canônica de  $T$ .

A Fórmula (6) é uma ferramenta poderosa para encontrar matrizes canônicas e para analisar o efeito geométrico de uma transformação linear. Por exemplo, suponha que  $T: R^3 \rightarrow R^3$  é a projeção ortogonal sobre o plano  $xy$ . Olhando para a Figura 4.3.4, é geometricamente evidente que

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que, por (6),

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o que concorda com o resultado da Tabela 5 da Seção 4.2.

Usando (6) de uma outra maneira, suponha que  $T_A: R^3 \rightarrow R^2$  é a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

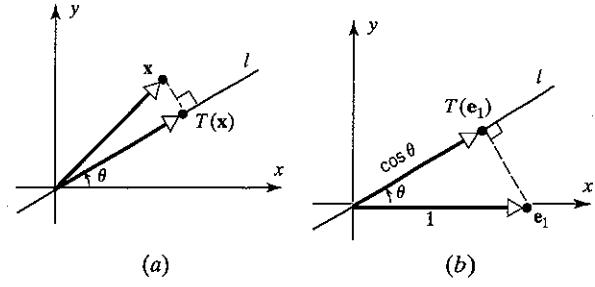
As imagens dos vetores da base canônica podem ser lidas diretamente das colunas da matriz  $A$ :

$$T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

### EXEMPLO 6. A Matriz Canônica de uma Projeção

Seja  $l$  a reta do plano  $xy$  que passa pela origem e faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  positivo, com  $0 \leq \theta < \pi$ . Conforme está ilustrado na Figura 4.3.5a, seja  $T: R^2 \rightarrow R^2$  o operador linear que leva cada vetor em sua projeção ortogonal sobre  $l$ .

- Encontre a matriz canônica de  $T$ .
- Encontre a projeção ortogonal do vetor  $\mathbf{x} = (1, 5)$  sobre a reta pela origem que faz um ângulo  $\theta = \pi/6$  com o eixo  $x$  positivo.



**Figura 4.3.5**

Solução (a). Por (6),

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) | T(\mathbf{e}_2)]$$

onde  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  são os vetores da base canônica de  $R^2$ . Nós consideramos o caso  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ; o caso  $\pi/2 < \theta < \pi$  é similar. Olhando para a Figura 4.3.5b, vemos que  $\|T(\mathbf{e}_1)\| = \cos \theta$ , de modo que

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \|T(\mathbf{e}_1)\| \cos \theta \\ \|T(\mathbf{e}_1)\| \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}$$

e olhando para a Figura 4.3.5c, vemos que  $\|T(\mathbf{e}_2)\| = \sin \theta$ , de modo que

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \|T(\mathbf{e}_2)\| \cos \theta \\ \|T(\mathbf{e}_2)\| \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

*Solução (b).* Como  $\sin \pi/6 = 1/2$  e  $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ , segue da parte (a) que a matriz canônica desta projeção é

$$[T] = \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3+5\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}+5}{4} \end{pmatrix}$$

ou, em notação horizontal,

$$T(1, 5) = \left( \frac{3+5\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}+5}{4} \right)$$

### Interpretação Geométrica dos Autovetores

Lembre que na Seção 2.3 vimos que se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  então  $\lambda$  é chamado um *autovalor* de  $A$  se existe um vetor não-nulo  $\mathbf{x}$  tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \text{ ou, equivalentemente, } (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Os vetores não-nulos  $\mathbf{x}$  satisfazendo a equação são chamados *autovetores* de  $A$  associados a  $\lambda$ .

Autovalores e os autovetores também podem ser definidos para operadores em  $R^n$ ; as definições são similares às relembradas para matrizes.

#### Definição

Se  $T: R^n \rightarrow R^n$  é um operador linear, então um escalar  $\lambda$  é chamado um *autovalor de  $T$*  se existe um vetor não-nulo  $\mathbf{x}$  em  $R^n$  tal que

$$T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \quad (7)$$

Os vetores não-nulos  $\mathbf{x}$  que satisfazem esta equação são chamados os *autovetores de  $T$  associados a  $\lambda$* .

Observe que se  $A$  é a matriz canônica de  $T$ , então (7) pode ser reescrito como

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

e obtemos:

- Os autovalores de  $T$  são precisamente os autovalores de sua matriz canônica  $A$ .
- $\mathbf{x}$  é um autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$  se, e somente se,  $\mathbf{x}$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$ .

Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  e  $\mathbf{x}$  é um autovetor associado, então  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , de modo que a multiplicação por  $A$  leva  $\mathbf{x}$  em um múltiplo escalar de si mesmo. Em  $R^2$  e  $R^3$  isto significa que *a multiplicação por  $A$  leva cada autovetor  $\mathbf{x}$  em um vetor que está na mesma reta que  $\mathbf{x}$*  (Figura 4.3.6).

Lembre que na Seção 4.2 vimos que se  $\lambda \geq 0$ , então o operador linear  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  comprime  $\mathbf{x}$  por um fator  $\lambda$  se  $0 \leq \lambda \leq 1$  ou

estica  $\mathbf{x}$  por um fator  $\lambda$  se  $\lambda \geq 1$ . Se  $\lambda < 0$ , então  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  inverte a direção de  $\mathbf{x}$  e comprime o vetor invertido por um fator  $|\lambda|$  se  $0 \leq |\lambda| \leq 1$  ou estica o vetor invertido por um fator  $|\lambda|$  se  $|\lambda| \geq 1$  (Figura 4.3.7).

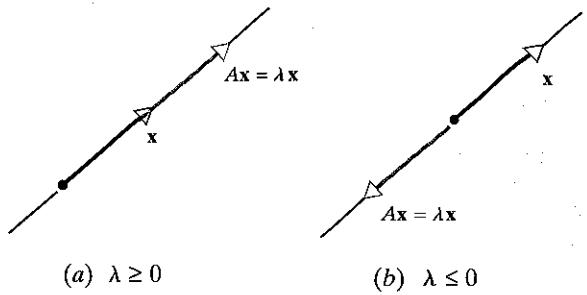


Figura 4.3.6

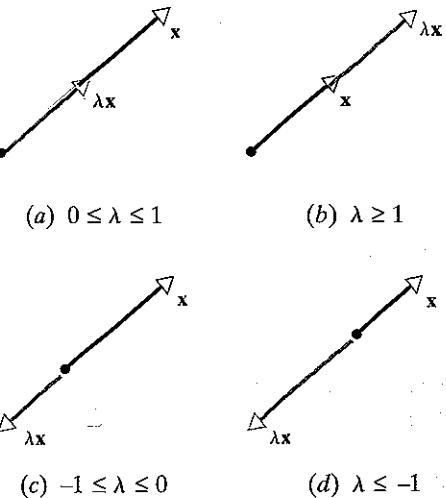


Figura 4.3.7

### EXEMPLO 7 Autovaleores de um Operador Linear

Seja  $T: R^2 \rightarrow R^2$  o operador linear que gira cada vetor por um ângulo  $\theta$ . É geometricamente evidente que, a menos que  $\theta$  seja um múltiplo de  $\pi$ ,  $T$  não aplica nenhum vetor não-nulo  $\mathbf{x}$  na mesma reta que contém  $\mathbf{x}$ ; consequentemente,  $T$  não tem autovalores reais. No entanto, se  $\theta$  é um múltiplo de  $\pi$  então cada vetor não-nulo  $\mathbf{x}$  é levado na mesma reta que contém  $\mathbf{x}$ , de modo que *cada* vetor não-nulo é um autovetor de  $T$ . Vamos verificar algebricamente estas observações geométricas. A matriz canônica de  $T$  é

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Como foi visto na Seção 2.3, os autovalores desta matriz são soluções da equação característica

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{vmatrix} = 0$$

ou seja,

$$(\lambda - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 0 \quad (8)$$

No entanto, se  $\theta$  não é um múltiplo de  $\pi$ , então  $\sin^2 \theta > 0$ , de modo que esta equação não tem solução real para  $\lambda$  e consequentemente  $A$  não tem autovalores reais.<sup>1</sup> Se  $\theta$  é um múltiplo de  $\pi$ , então  $\sin \theta = 0$  e  $\cos \theta = 1$  ou  $\cos \theta = -1$ , dependendo do particular múltiplo de  $\pi$ . No caso em que  $\sin \theta = 0$  e  $\cos \theta = 1$ , a equação característica (8) é dada por  $(\lambda - 1)^2 = 0$  e portanto  $\lambda = 1$  é o único autovalor de  $A$ . Neste caso, a matriz  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Assim, para cada  $x$  em  $R^2$ ,

$$T(x) = Ax = Ix = x$$

e portanto  $T$  aplica cada vetor em si mesmo e portanto na mesma reta. No caso em que  $\sin \theta = 0$  e  $\cos \theta = -1$ , a equação característica (8) é dada por  $(\lambda + 1)^2 = 0$  e portanto  $\lambda = -1$  é o único autovalor de  $A$ . Neste caso, a matriz  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Assim, para cada  $x$  em  $R^2$ ,

$$T(x) = Ax = -Ix = -x$$

e portanto  $T$  aplica cada vetor em seu negativo e portanto na mesma reta. ♦

### EXEMPLO 8 Autovalores de um Operador Linear

Seja  $T: R^3 \rightarrow R^3$  a projeção ortogonal sobre o plano  $xy$ . Os vetores do plano  $xy$  são levados em si mesmos por  $T$ , de modo que cada vetor não-nulo do plano  $xy$  é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda = 1$ .  $T$  aplica cada vetor  $x$  ao longo do eixo  $z$  em  $0$ , que está na mesma reta que  $x$ , de modo que cada vetor não-nulo no eixo  $z$  é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda = 0$ . Vetores que não estão no plano  $xy$  ou no eixo  $z$  não são aplicados em múltiplos escalares deles mesmos e portanto não há outros autovetores ou autovalores.

Para verificar algebricamente estas observações geométricas, lembre que pela Tabela 5 da Seção 4.2 a matriz canônica de  $T$  é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica de  $A$  é

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } (\lambda - 1)^2 \lambda = 0$$

<sup>1</sup> Existem aplicações que requerem o uso de escalares complexos e de vetores de componentes complexos. Nestes casos são permitidos autovalores complexos e autovetores de componentes complexos que, não obstante, não têm relevância geométrica imediata para o nosso caso. Em capítulos posteriores nós iremos discutir tais autovalores e autovetores mas, até menção explícita em contrário, nós consideraremos somente autovalores reais e autovetores de componentes reais.

que tem as soluções  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 1$  antecipadas acima.

Como foi visto na Seção 2.3, os autovalores da matriz  $A$  associados a um autovalor  $\lambda$  são as soluções não-nulas de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se  $\lambda = 0$ , este sistema é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem as soluções  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = t$  (verifique) ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Como antecipamos, estes são os vetores ao longo do eixo  $z$ . Se  $\lambda = 1$ , então o sistema (9) é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem as soluções  $x_1 = s, x_2 = t, x_3 = 0$  (verifique) ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como antecipamos, estes são os vetores do plano  $xy$ . ♦

**Resumo** No Teorema 2.3.6 nós listamos seis resultados que são equivalentes à invertibilidade de uma matriz  $A$ . Nós concluímos esta seção juntando o Teorema 4.3.1 àquela lista para obter o seguinte teorema que relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

#### Teorema 4.3.4

#### Afirmativas Equivalentes

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e se  $T_A: R^n \rightarrow R^n$  é a multiplicação por  $A$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é invertível.
- (b)  $Ax = \mathbf{0}$  admite somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- (d)  $A$  pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.
- (e)  $Ax = b$  é consistente para cada matriz  $b$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (f)  $Ax = b$  tem exatamente uma solução para cada matriz  $b$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (g)  $\det(A) \neq 0$ .
- (h) A imagem de  $T_A$  é o  $R^n$ .
- (i)  $T_A$  é injetora.

**Conjunto de Exercícios 4.3**

1. Determine, por inspeção, se o operador linear é injetor.
- uma projeção ortogonal sobre o eixo  $x$  em  $\mathbb{R}^2$
  - uma reflexão em torno do eixo  $y$  em  $\mathbb{R}^2$
  - uma reflexão em torno da reta  $y = x$  em  $\mathbb{R}^2$
  - uma contração de razão  $k > 0$  em  $\mathbb{R}^2$
  - uma rotação em torno do eixo  $z$  em  $\mathbb{R}^3$
  - uma reflexão em torno do plano  $xy$  em  $\mathbb{R}^3$
  - uma dilatação de razão  $k > 0$  em  $\mathbb{R}^3$

2. Encontre a matriz canônica do operador linear definido pelas equações e use o Teorema 4.3.4 para determinar se o operador é injetor.

(a) $w_1 = 8x_1 + 4x_2$	(b) $w_1 = 2x_1 - 3x_2$	(c) $w_1 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$	(d) $w_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$w_2 = 2x_1 + x_2$	$w_2 = 5x_1 + x_2$	$w_2 = 2x_1 + 4x_3$	$w_2 = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$
		$w_3 = x_1 + 3x_2 + 6x_3$	$w_3 = x_1 + 8x_3$

3. Mostre que a imagem do operador linear definido pelas equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 4x_1 - 2x_2 \\ w_2 &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

não é todo o  $\mathbb{R}^2$  e encontre um vetor que não está na imagem.

4. Mostre que a imagem do operador linear definido pelas equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 2x_2 + x_3 \\ w_2 &= 5x_1 - x_2 + 3x_3 \\ w_3 &= 4x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

não é todo o  $\mathbb{R}^3$  e encontre um vetor que não está na imagem.

5. Determine se o operador linear  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido pelas equações é injetor; se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre  $T^{-1}(w_1, w_2)$ .

(a) $w_1 = x_1 + 2x_2$	(b) $w_1 = 4x_1 - 6x_2$	(c) $w_1 = -x_2$	(d) $w_1 = 3x_1$
$w_2 = -x_1 + x_2$	$w_2 = -2x_1 + 3x_2$	$w_2 = -x_1$	$w_2 = -5x_1$

6. Determine se o operador linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido pelas equações é injetor; se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre  $T^{-1}(w_1, w_2, w_3)$ .

(a) $w_1 = x_1 - 2x_2 + 2x_3$	(b) $w_1 = x_1 - 3x_2 + 4x_3$	(c) $w_1 = x_1 + 4x_2 - x_3$	(d) $w_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$
$w_2 = 2x_1 + x_2 + x_3$	$w_2 = -x_1 + x_2 + x_3$	$w_2 = 2x_1 + 7x_2 + x_3$	$w_2 = -2x_1 + x_2 + 4x_3$
$w_3 = x_1 + x_2$	$w_3 = -2x_2 + 5x_3$	$w_3 = x_1 + 3x_2$	$w_3 = 7x_1 + 4x_2 - 5x_3$

7. Determine, por inspeção, a inversa do operador linear injetor dado.

- a reflexão em torno do eixo  $x$  em  $\mathbb{R}^2$
- a rotação por um ângulo  $\pi/4$  em  $\mathbb{R}^2$
- a dilatação de razão 3 em  $\mathbb{R}^2$
- a reflexão em torno do plano  $xy$  em  $\mathbb{R}^3$
- a contração de razão  $\frac{1}{5}$  em  $\mathbb{R}^3$

Nos Exercícios 8 e 9 use o Teorema 4.3.2 para determinar se  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador linear.

8. (a)  $T(x, y) = (2x, y)$     (b)  $T(x, y) = (x^2, y)$     (c)  $T(x, y) = (-y, x)$     (d)  $T(x, y) = (x, 0)$   
 9. (a)  $T(x, y) = (2x + y, x - y)$     (b)  $T(x, y) = (x + 1, y)$     (c)  $T(x, y) = (y, y)$     (d)  $T(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

Nos Exercícios 10 e 11 use o Teorema 4.3.2 para determinar se  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador linear.

10. (a)  $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$     (b)  $T(x, y, z) = (1, 1)$   
 11. (a)  $T(x, y, z) = (0, 0)$     (b)  $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$   
 12. Em cada parte use o Teorema 4.3.3 para encontrar a matriz canônica do operador linear a partir das imagens dos vetores da base canônica.  
  - as reflexões em  $\mathbb{R}^2$  da Tabela 2 da Seção 4.2
  - as reflexões em  $\mathbb{R}^3$  da Tabela 3 da Seção 4.2
  - as projeções em  $\mathbb{R}^2$  da Tabela 4 da Seção 4.2
  - as projeções em  $\mathbb{R}^3$  da Tabela 5 da Seção 4.2
  - as rotações em  $\mathbb{R}^2$  da Tabela 6 da Seção 4.2
  - as homotetias em  $\mathbb{R}^3$  da Tabela 9 da Seção 4.2

13. Use o Teorema 4.3.3 para encontrar a matriz canônica de  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a partir das imagens dos vetores da base canônica.
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  projeta os vetores ortogonalmente sobre o eixo  $x$  e em seguida reflete estes vetores em torno do eixo  $y$ .
  - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  reflete os vetores em torno da reta  $y = x$  e em seguida reflete estes vetores em torno do eixo  $x$ .
  - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dilata os vetores por um fator 3, em seguida reflete estes vetores em torno da reta  $y = x$  e finalmente projeta estes vetores ortogonalmente sobre o eixo  $y$ .
14. Use o Teorema 4.3.3 para encontrar a matriz canônica de  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a partir das imagens dos vetores da base canônica.
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  reflete os vetores em torno do plano  $xz$  e em seguida contrai estes vetores por um fator  $\frac{1}{5}$ .
  - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  projeta os vetores ortogonalmente sobre o plano  $xz$  e em seguida projeta estes vetores ortogonalmente sobre o plano  $xy$ .
  - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  reflete os vetores em torno do plano  $xy$ , em seguida reflete estes vetores em torno do plano  $xz$  e finalmente reflete estes vetores em torno do plano  $yz$ .
15. Seja  $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a multiplicação por
- $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$
- e sejam  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Encontre os seguintes vetores por inspeção.
- $T_A(\mathbf{e}_1), T_A(\mathbf{e}_2)$  e  $T_A(\mathbf{e}_3)$
  - $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$
  - $T_A(7\mathbf{e}_3)$
16. Determine se a multiplicação por  $A$  é uma transformação linear injetora.
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
17. Use o resultado do Exemplo 6 para encontrar a projeção ortogonal de  $\mathbf{x}$  sobre a reta pela origem que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  positivo.
- $\mathbf{x} = (-1, 2); \theta = 45^\circ$
  - $\mathbf{x} = (1, 0); \theta = 30^\circ$
  - $\mathbf{x} = (1, 5); \theta = 120^\circ$
18. Use o tipo de raciocínio utilizado no Exemplo 8 para encontrar os autovalores e autovetores associados de  $T$ . Verifique suas conclusões calculando os autovalores e autovetores associados a partir da matriz canônica de  $T$ .
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a reflexão em torno do eixo  $x$ .
  - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a reflexão em torno da reta  $y = x$ .
  - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção ortogonal sobre o eixo  $x$ .
  - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a contração de razão  $\frac{1}{2}$ .
19. Repita o Exercício 18 nos seguintes casos.
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a reflexão em torno do plano  $yz$ .
  - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a projeção ortogonal sobre o plano  $xz$ .
  - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a dilatação de razão 2.
  - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a rotação de  $45^\circ$  em torno do eixo  $z$ .
20. (a) Será injetora a composta de transformações lineares injetoras? Justifique sua resposta.  
 (b) Pode ser injetora a composta de uma transformação linear injetora com uma transformação linear que não é injetora? Permita ambas ordens de composição e justifique sua resposta.
21. Mostre que  $T(x, y) = (0, 0)$  define um operador linear em  $\mathbb{R}^2$  mas não  $T(x, y) = (1, 1)$ .
22. Prove que se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação linear, então  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , ou seja,  $T$  leva o vetor nulo de  $\mathbb{R}^n$  no vetor nulo de  $\mathbb{R}^m$ .
23. Seja  $l$  a reta do plano  $xy$  que passa pela origem e que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  positivo, onde  $0 \leq \theta < \pi$ . Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear que reflete cada vetor em torno de  $l$  (veja figura dada).
- Use o método do Exemplo 6 para encontrar a matriz canônica de  $T$ .
  - Encontre a reflexão do vetor  $\mathbf{x} = (1, 5)$  em torno da reta  $l$  pela origem que faz um ângulo de  $\theta = 30^\circ$  com o eixo  $x$  positivo.

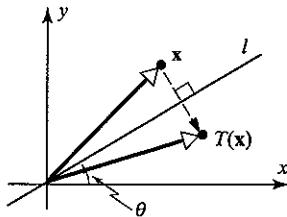


Figura Ex-23

24. Prove: Uma matriz  $A$   $n \times n$  é invertível se, e somente se, o sistema linear  $A \mathbf{x} = \mathbf{w}$  tem exatamente uma solução para cada vetor  $\mathbf{w}$  em  $R^n$  para o qual o sistema é consistente.

### Discussão e Descoberta

25. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- Se  $T$  aplica  $R^n$  em  $R^m$  e se  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , então  $T$  é linear.
  - Se  $T : R^n \rightarrow R^m$  é uma transformação linear injetora então não existem vetores distintos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $R^n$  tais que  $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .
  - Se  $T : R^n \rightarrow R^n$  é um operador linear e se  $T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$  para algum vetor  $\mathbf{x}$ , então  $\lambda = 2$  é um autovalor de  $T$ .
  - Se  $T$  aplica  $R^n$  em  $R^m$  e se  $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$  para quaisquer escalares  $c_1$  e  $c_2$  e todos os vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  de  $R^n$ , então  $T$  é linear.
26. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  tal que  $\det(A) = 0$  e seja  $T : R^n \rightarrow R^n$  a multiplicação por  $A$ .
- O que você sabe dizer sobre a imagem do operador  $T$ ? Dê um exemplo que ilustra sua conclusão.
  - O que você sabe dizer sobre o número de vetores que  $T$  aplica em  $\mathbf{0}$ ?

### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais do Capítulo 4

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

### Seção 4.1

- T1. (Operações com vetores em  $R^n$ )** Na maioria dos recursos, os comandos para operar com vetores em  $R^n$  são os mesmos que para operar com vetores de  $R^2$  e  $R^3$  e o comando para calcular um produto escalar fornece o produto interno euclidiano de  $R^n$ . Use seu recurso para fazer as contas dos Exercícios 1, 3 e 9 da Seção 4.1.

### Seção 4.2

- T1. (Rotações)** Encontre a matriz canônica do operador linear em  $R^3$  que efetua uma rotação anti-horária de  $45^\circ$  em torno do eixo  $x$ , seguida de uma rotação anti-horária de  $60^\circ$  em torno do eixo  $y$ , seguida de uma rotação anti-horária de  $30^\circ$  em torno do eixo  $z$ . Em seguida obtenha a imagem do ponto  $(1, 1, 1)$  por este operador.

# Espaços Vetoriais Arbitrários

## Conteúdo do Capítulo

- 5.1 Espaços Vetoriais Reais
- 5.2 Subespaços
- 5.3 Independência Linear
- 5.4 Bases e Dimensão
- 5.5 Espaço-Linha, Espaço-Coluna e Espaço-Nulo
- 5.6 Posto e Nulidade

**I**NTRODUÇÃO: No último capítulo nós generalizamos os vetores dos espaços bidimensionais e tridimensionais aos vetores do espaço  $n$ -dimensional. Neste capítulo nós iremos generalizar ainda mais o conceito de vetor. Nós iremos enunciar uma coleção de axiomas que, uma vez satisfeitos por uma classe de objetos, permite que estes objetos sejam chamados vetores. Estes vetores generalizados incluirão, entre outros objetos, muitos tipos de matrizes e de funções. Nossa trabalho neste capítulo não é um exercício fútil de matemática teórica; ele nos fornecerá uma ferramenta poderosa para estender nossa visualização geométrica a uma larga classe de importantes problemas matemáticos, nos quais normalmente não poderíamos contar com nossa intuição geométrica. Nós podemos visualizar os vetores de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  como flechas, o que nos permite desenhar ou formar figuras mentais que nos ajudam a resolver problemas. Como os axiomas que definem nossos novos tipos de vetores serão baseados nas propriedades de vetores de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , os novos vetores terão muitas propriedades familiares. Conseqüentemente, quando quisermos resolver um problema envolvendo nossos novos tipos de vetores, digamos, matrizes ou funções, poderemos utilizar como ponto de apoio uma visualização do problema correspondente em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .

## 5.1 ESPAÇOS VETORIAIS REAIS

Nesta seção nós iremos estender o conceito de vetor extraíndo as propriedades mais importantes dos vetores usuais e transformando-as em axiomas. Assim, quando um conjunto de objetos satisfizer estes axiomas, estes objetos automaticamente têm as mais importantes propriedades dos vetores usuais, o que torna razoável considerar estes novos objetos como novos tipos de vetores.

**Axiomas de Espaço Vetorial** A próxima definição consiste de dez axiomas. À medida que você lê cada axioma, lembre que você já viu cada um deles como parte de vários teoremas e definições nos dois capítulos precedentes (por exemplo, veja o Teorema 4.1.1). Lembre também que axiomas não são demonstrados, pois são simplesmente as “regras do jogo.”

### Definição

Seja  $V$  um conjunto não-vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares (números). Por **adição** nós entendemos uma regra que associa a cada par de objetos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V$  um objeto  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ , chamado a **soma** de  $\mathbf{u}$  com  $\mathbf{v}$ ; por **multiplicação por escalar** nós entendemos uma regra que associa a cada escalar  $k$  e cada objeto  $\mathbf{v}$  em  $V$  um objeto  $k\mathbf{v}$ , chamado o **múltiplo** de  $\mathbf{v}$  por  $k$ . Se os seguintes axiomas são satisfeitos por todos objetos  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em  $V$  e quaisquer escalares  $k$  e  $l$ , então nós dizemos que  $V$  é um **espaço vetorial** e que os objetos de  $V$  são **vetores**.

- (1) Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são objetos em  $V$  então  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  é um objeto em  $V$ .
- (2)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (3)  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- (4) Existe um objeto  $\mathbf{0}$  em  $V$ , chamado um **vetor nulo** ou **vetor zero** de  $V$ , tal que  $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$  para cada  $\mathbf{u}$  em  $V$ .
- (5) Para cada  $\mathbf{u}$  em  $V$ , existe um objeto  $-\mathbf{u}$ , chamado um **negativo** de  $\mathbf{u}$ , tal que  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- (6) Se  $k$  é qualquer escalar e  $\mathbf{v}$  é um objeto em  $V$ , então  $k\mathbf{v}$  é um objeto em  $V$ .
- (7)  $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$
- (8)  $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$
- (9)  $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
- (10)  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

**OBSERVAÇÃO.** Dependendo da aplicação, os escalares podem ser números reais ou complexos. Os espaços vetoriais nos quais os escalares são números complexos são chamados **espaços vetoriais complexos** e aqueles nos quais os escalares são números reais são chamados **espaços vetoriais reais**. No Capítulo 10 nós iremos estudar espaços vetoriais complexos mas, até lá, *todos nossos escalares são números reais*.

O leitor deve sempre lembrar que a definição de um espaço vetorial não especifica nem a natureza dos vetores nem das operações. Qualquer tipo de objeto pode ser um vetor e as operações de adição e multiplicação por escalar podem não guardar semelhança ou não ter relação alguma com as operações usuais em  $R^n$ . A única exigência é que os dez axiomas de espaço vetorial sejam satisfeitos. Alguns autores usam as notações  $\oplus$  e  $\odot$  para a adição e multiplicação por escalar para distinguir estas operações da adição e multiplicação de números reais; no entanto, nós não iremos utilizar esta convenção.

**Exemplos de Espaços Vetoriais** Os seguintes exemplos ilustram a variedade de espaços vetoriais possíveis. Em cada exemplo, nós vamos especificar um conjunto não-vazio  $V$  e duas operações: a adição e a multiplicação escalar; em seguida vamos verificar que os dez axiomas de espaço vetorial estão satisfeitos, com isso habilitando  $V$ , com as operações dadas, a ser chamado de espaço vetorial.

### EXEMPLO 1 $R^n$ é um Espaço Vetorial

O conjunto  $V = R^n$  com as operações conhecidas de adição e multiplicação por escalar definidas na Seção 4.1 é um espaço vetorial. Os Axiomas 1 a 6 seguem das definições das operações padrão em  $R^n$ ; os demais axiomas seguem do Teorema 4.4.1. ♦

Os três casos especiais mais importantes de  $R^n$  são  $R$  (os números reais),  $R^2$  (os vetores do plano) e  $R^3$  (os vetores do espaço tridimensional).

### EXEMPLO 2 Um Espaço Vetorial de Matrizes $2 \times 2$

Mostre que o conjunto  $V$  de todas as matrizes  $2 \times 2$  com entradas reais é um espaço vetorial se a adição vetorial é definida pela adição matricial e a multiplicação vetorial por escalar é definida pela multiplicação matricial por escalar.

*Solução.*

Neste exemplo é conveniente verificar os axiomas na seguinte ordem: 1, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 5 e 10. Sejam

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Para provar o Axioma 1, nós devemos mostrar que  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  é um objeto em  $V$ , ou seja, nós devemos mostrar que  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  é uma matriz  $2 \times 2$ . Mas isto segue da definição de soma matricial, pois

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

Similarmente, o Axioma 6 vale pois para cada número real  $k$  nós temos

$$k\mathbf{v} = k \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix}$$

e portanto  $k\mathbf{v}$  é uma matriz  $2 \times 2$  e consequentemente um objeto em  $V$ .

O Axioma 2 segue do Teorema 1.4.1a pois:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Similarmente, o Axioma 3 segue da parte (b) daquele teorema e os Axiomas 7, 8 e 9 seguem das partes (h), (j) e (l), respectivamente.

Para provar o Axioma 4, nós devemos encontrar um objeto  $\mathbf{0}$  em  $V$  tal que  $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$  para cada  $\mathbf{u}$  em  $V$ . Isto pode ser feito definindo  $\mathbf{0}$  como

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com esta definição,

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

e, similarmente,  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ . Para provar o Axioma 5, nós devemos mostrar que cada objeto  $\mathbf{u}$  em  $V$  tem um negativo  $-\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  e  $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Isto pode ser feito definindo o negativo de  $\mathbf{u}$  como

$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

Com esta definição,

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

e, similarmente,  $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Finalmente, o Axioma 10 é uma simples conta:

$$1\mathbf{u} = 1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

### EXEMPLO 3 Um Espaço Vetorial de Matrizes $m \times n$

O Exemplo 2 é um caso especial de uma classe mais geral de espaços vetoriais. As argumentações daquele exemplo podem ser adaptadas para mostrar que o conjunto  $V$  de todas as matrizes  $m \times n$  com entradas reais, junto com as operações de adição matricial e multiplicação matricial por escalar, é um espaço vetorial. A matriz zero  $m \times n$  é o vetor nulo  $\mathbf{0}$  e se  $\mathbf{u}$  é a matriz  $U$  de tamanho  $m \times n$  então a matriz  $-U$  é o negativo  $-\mathbf{u}$  do vetor  $\mathbf{u}$ . Nós denotaremos este espaço vetorial pelo símbolo  $M_{mn}$ .

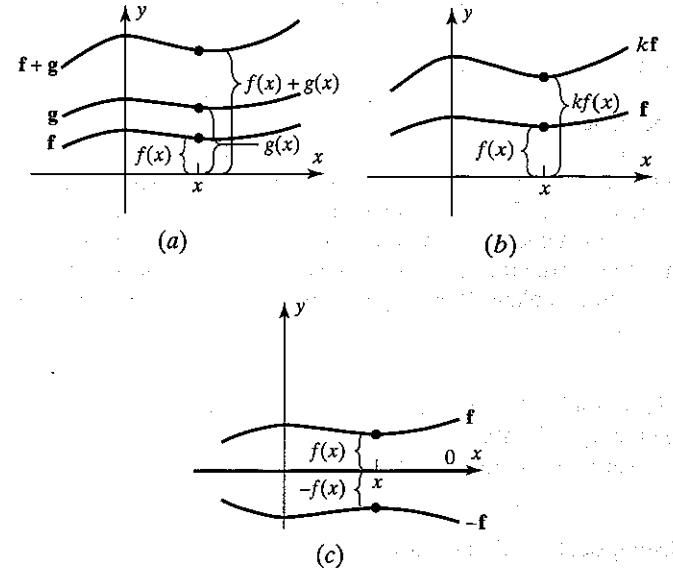
### EXEMPLO 4 Um Espaço Vetorial de Funções Reais

Seja  $V$  o conjunto de funções reais definidas na reta real  $(-\infty, \infty)$ . Se  $f = f(x)$  e  $g = g(x)$  são duas tais funções e se  $k$  é um número real qualquer, defina a função-soma  $f + g$  e o múltiplo escalar  $kf$ , respectivamente, por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (kf)(x) = k f(x)$$

Dito em palavras, o valor da função  $f + g$  no ponto  $x$  é obtido somando os valores de  $f$  e de  $g$  no ponto  $x$  (Figura 5.1.1a). Similarmente, o valor de  $kf$  no ponto  $x$  é  $k$  vezes o valor de  $f$  no ponto  $x$  (Figura 5.1.1b). Nos exercícios nós vamos pedir que

você mostre que  $V$  é um espaço vetorial em relação a estas operações. Este espaço vetorial é denotado por  $F(-\infty, \infty)$ . Se  $f$  e  $g$  são vetores neste espaço, nós dizemos que  $f = g$  equivale a ter  $f(x) = g(x)$  para cada  $x$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$ .



**Figura 5.1.1**

O vetor  $\mathbf{0}$  em  $F(-\infty, \infty)$  é a função constante que é identicamente zero para todos os valores de  $x$ . O gráfico desta função é a reta que coincide com o eixo  $x$ . O negativo de um vetor  $f$  é a função  $-f = -f(x)$ . Geometricamente, o gráfico de  $-f$  é a reflexão do gráfico de  $f$  em torno do eixo  $x$  (Figura 5.1.1.c).

**OBSERVAÇÃO.** No exemplo acima, nós nos ocupamos com o intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Se nós tivéssemos usado algum intervalo fechado  $[a, b]$  ou algum intervalo aberto  $(a, b)$ , as funções definidas nestes intervalos com as operações enunciadas no exemplo também produziriam espaços vetoriais. Estes espaços vetoriais são denotados por  $F[a, b]$  e  $F(a, b)$ , respectivamente.

### EXEMPLO 5 Um Conjunto que não é um Espaço Vetorial

Seja  $V = R^2$  e defina as operações de adição e multiplicação por escalar como segue: Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , defina

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

e, se  $k$  é um número real qualquer, defina

$$k\mathbf{v} = (k v_1, 0)$$

Por exemplo, se  $\mathbf{u} = (2, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, 5)$  e  $k = 7$ , então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1, 9)$$

$$k\mathbf{v} = 7\mathbf{v} = (7 \cdot (-3), 0) = (-21, 0)$$

A adição é a operação de adição padrão em  $R^2$  mas a operação de multiplicação por escalar não é a multiplicação por escalar padrão. Nos exercícios nós iremos pedir para você mostrar que os nove primeiros axiomas de espaço vetorial estão satisfeitos; contudo, existem valores de  $\mathbf{u}$  para os quais o Axioma 10 falha. Por exemplo, se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  é tal que  $u_2 \neq 0$ , então

$1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$   
Assim,  $V$  não é um espaço vetorial com as operações enunciadas. ♦

### EXEMPLO 6 Cada Plano pela Origem é um Espaço Vetorial

Seja  $V$  um plano qualquer pela origem do  $\mathbb{R}^3$ . Nós iremos mostrar que os pontos em  $V$  formam um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar de vetores de  $\mathbb{R}^3$ . Pelo Exemplo 1, nós sabemos que o espaço  $\mathbb{R}^3$  todo é um espaço vetorial com estas operações. Assim, os Axiomas 2, 3, 7, 8, 9 e 10 valem para todos os pontos em  $\mathbb{R}^3$  e, consequentemente, para todos os pontos do plano  $V$ . Basta mostrar, portanto, que os Axiomas 1, 4, 5 e 6 estão satisfeitos.

Como o plano  $V$  passa pela origem, ele tem uma equação da forma

$$ax + by + cz = 0 \quad (1)$$

(Teorema 3.5.1). Assim, se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  são pontos em  $V$ , então  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$  e  $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ . Somando estas equações dá

$$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

Esta igualdade diz que as coordenadas do ponto

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

verificam (1); assim,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  está no plano  $V$ . Isto prova que o Axioma 1 está satisfeito. As verificações dos Axiomas 4 e 6 são deixadas como exercícios; no entanto, nós provaremos que o Axioma 5 é satisfeito. Multiplicando  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$  por  $-1$  dá

$$a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$$

Assim,  $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$  está em  $V$ , estabelecendo o Axioma 5. ♦

### EXEMPLO 7 O Espaço Vetorial Nulo

Seja  $V$  formado por um único objeto, que nós denotamos por  $\mathbf{0}$ , e defina

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ e } k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

para todos escalares  $k$ . É fácil verificar que valem todos os axiomas de espaço vetorial. Este espaço  $V$  é chamado o *espaço vetorial nulo*. ♦

**Algumas Propriedades de Vetores** À medida que avançarmos, nós acrescentaremos mais exemplos de espaços vetoriais à nossa lista. Nós terminamos esta seção com um teorema que dá uma lista útil de propriedades de vetores.

#### Teorema 5.1-1

Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $\mathbf{u}$  um vetor em  $V$  e  $l$  um escalar, então:

- (a)  $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- (b)  $l\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- (c)  $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
- (d) Se  $l\mathbf{u} = \mathbf{0}$  então  $l = 0$  ou  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Nós iremos provar as partes (a) e (c) e deixar a prova das demais partes como exercícios.

*Prova (a).* Nós podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{0}\mathbf{u} + 0\mathbf{u} &= (0 + 0)\mathbf{u} && [\text{Axioma 8}] \\ &= \mathbf{0}\mathbf{u} && [\text{Propriedade do número 0}] \end{aligned}$$

Pelo Axioma 5, o vetor  $0\mathbf{u}$  tem um negativo,  $-\mathbf{0}\mathbf{u}$ . Somando este negativo a ambos os lados acima, fornece

$$[\mathbf{0}\mathbf{u} + 0\mathbf{u}] + (-\mathbf{0}\mathbf{u}) = \mathbf{0}\mathbf{u} + (-\mathbf{0}\mathbf{u})$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{0}\mathbf{u} + [\mathbf{0}\mathbf{u} + (-\mathbf{0}\mathbf{u})] &= \mathbf{0}\mathbf{u} + (-\mathbf{0}\mathbf{u}) && [\text{Axioma 3}] \\ \mathbf{0}\mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} && [\text{Axioma 5}] \\ \mathbf{0}\mathbf{u} &= \mathbf{0} && [\text{Axioma 4}] \end{aligned}$$

*Prova (c).* Para mostrar que  $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ , nós devemos mostrar que  $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Para ver isto, observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} &= \mathbf{1}\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} && [\text{Axioma 10}] \\ &= (1 + (-1))\mathbf{u} && [\text{Axioma 8}] \\ &= \mathbf{0}\mathbf{u} && [\text{Propriedade de números}] \\ &= \mathbf{0} && [\text{Parte (a) acima}] \end{aligned}$$

#### Conjunto de Exercícios 5.1

Nos Exercícios 1–16 é dado um conjunto de objetos junto com operações de adição e multiplicação por escalar. Determine quais dos conjuntos são espaços vetoriais com as operações dadas. Para os que não são, liste todos os axiomas que falham.

1. O conjunto de todos os ternos ordenados  $(x, y, z)$  de números reais com as operações

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \text{ e } k(x, y, z) = (kx, y, z)$$

2. O conjunto de todos os ternos ordenados  $(x, y, z)$  de números reais com as operações

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \text{ e } k(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

3. O conjunto de todos os pares ordenados  $(x, y)$  de números reais com as operações

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ e } k(x, y) = (2kx, 2ky)$$

4. O conjunto de todos os números reais  $x$  com as operações usuais de adição e multiplicação.

5. O conjunto de todos os pares de números reais da forma  $(x, 0)$  com as operações padrão de  $\mathbb{R}^2$ .

6. O conjunto de todos os pares  $(x, y)$  de números reais com  $x \geq 0$  com as operações padrão de  $\mathbb{R}^2$ .  
 7. O conjunto de todas as  $n$ -uplas de números reais da forma  $(x, x, \dots, x)$  com as operações padrão de  $\mathbb{R}^n$ .  
 8. O conjunto de todos os pares  $(x, y)$  de números reais com as operações

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1) \quad \text{e} \quad k(x, y) = (kx, ky)$$

9. O conjunto de todas as matrizes  $2 \times 2$  da forma

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

com a adição matricial e a multiplicação matricial por escalar.

10. O conjunto de todas as matrizes  $2 \times 2$  da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

com a adição matricial e a multiplicação matricial por escalar.

11. O conjunto de todas as funções reais  $f$  definidas em toda a reta real e tais que  $f(1) = 0$ , com as operações definidas no Exemplo 4.  
 12. O conjunto de todas as matrizes  $2 \times 2$  da forma

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$$

com a adição matricial e a multiplicação matricial por escalar.

13. O conjunto de todos os pares de números reais da forma  $(1, x)$  com as operações

$$(1, y) + (1, y') = (1, y + y') \quad \text{e} \quad k(1, y) = (1, ky)$$

14. O conjunto de todos os polinômios da forma  $a x + b$  com as operações

$$(a_0 + a_1 x) + (b_0 + b_1 x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x \quad \text{e} \quad k(a_0 + a_1 x) = (ka_0) + (ka_1)x$$

15. O conjunto de todos os números reais positivos com as operações

$$x + y = xy \quad \text{e} \quad kx = x^k$$

16. O conjunto de todos os pares  $(x, y)$  de números reais com as operações

$$(x, y) + (x', y') = (xx', yy') \quad \text{e} \quad k(x, y) = (kx, ky)$$

17. Mostre que os primeiros nove axiomas de espaço vetorial são satisfeitos se  $V = \mathbb{R}^2$  tem as operações de adição e multiplicação por escalar definidas no Exemplo 5.  
 18. Prove que uma reta pela origem em  $\mathbb{R}^3$  é um espaço vetorial com as operações padrão de  $\mathbb{R}^3$ .  
 19. Complete os detalhes omitidos do Exemplo 4.  
 20. Complete os detalhes omitidos do Exemplo 6.

## Discussão e Descoberta

21. Nós mostramos no Exemplo 6 que qualquer plano pela origem em  $\mathbb{R}^3$  é um espaço vetorial com as operações padrão de  $\mathbb{R}^3$ . Será o mesmo válido para os planos que não passam pela origem? Explique seu raciocínio.  
 22. Foi mostrado no Exercício 14 acima que o conjunto dos polinômios de grau menor do que ou igual a 1 é um espaço vetorial com as operações enunciadas naquele exercício. Será o conjunto de polinômios de grau exatamente 1 um espaço vetorial com aquelas operações? Explique seu raciocínio.  
 23. Considere o conjunto cujo único elemento é a lua. Será este conjunto um espaço vetorial com as operações  $\text{lua} + \text{lua} = \text{lua}$  e  $k(\text{lua}) = \text{lua}$  para cada número real  $k$ ? Explique seu raciocínio.  
 24. Você considera possível existir um espaço vetorial formado por exatamente dois vetores distintos? Explique seu raciocínio.  
 25. O que segue é uma prova da parte (b) do Teorema 5.1.1. Justifique cada passo completando a linha em branco com a palavra "hipótese" ou especificando o número de um dos axiomas de espaço vetorial dados nesta seção.

**Hipótese:** Sejam  $\mathbf{u}$  um vetor qualquer de um espaço vetorial  $V$ ,  $\mathbf{0}$  o vetor nulo de  $V$  e  $l$  um escalar.

**Conclusão:** Então  $l\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

**Prova:** (1) Primeiro,  $l\mathbf{0} + l\mathbf{u} = l(\mathbf{0} + \mathbf{u})$ .

$$(2) \quad l\mathbf{0} + l\mathbf{u} = l\mathbf{u}$$

$$(3) \quad \text{Como } l\mathbf{u} \text{ está em } V, -l\mathbf{u} \text{ está em } V.$$

$$(4) \quad \text{Portanto, } (l\mathbf{0} + l\mathbf{u}) + (-l\mathbf{u}) = l\mathbf{u} + (-l\mathbf{u}).$$

$$(5) \quad l\mathbf{0} + (l\mathbf{u} + (-l\mathbf{u})) = l\mathbf{u} + (-l\mathbf{u})$$

$$(6) \quad l\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

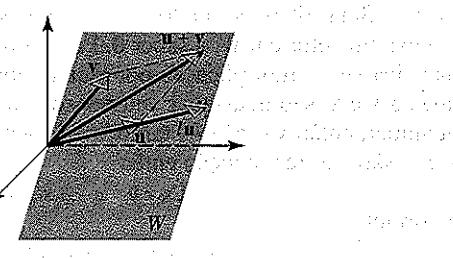
$$(7) \quad \text{Finalmente, } l\mathbf{0} = \mathbf{0}$$



subespaço de  $V$  se, e somente se,  $W$  é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

### EXEMPLO 1 Teste para Subespaço

No Exemplo 6 da Seção 5.1 nós verificamos os dez axiomas de espaço vetorial para mostrar que os pontos num plano pela origem de  $R^3$  formam um subespaço de  $R^3$ . Em vista do Teorema 5.2.1, nós vemos que muito daquele trabalho foi desnecessário, pois bastaria ter verificado que o plano é fechado na adição e na multiplicação por escalar (Axiomas 1 e 6). Na Seção 5.1 nós verificamos estes axiomas algebricamente; no entanto, eles também podem ser verificados geometricamente, como segue: Seja  $W$  um plano qualquer pela origem e sejam  $u$  e  $v$  dois vetores quaisquer em  $W$ . Então  $u + v$  deve estar em  $W$  pois é a diagonal do paralelogramo determinado por  $u$  e  $v$  (Figura 5.2.1) e  $lu$  deve estar em  $W$  para qualquer escalar  $l$  pois  $lu$  está na reta por  $u$ . Assim,  $W$  é fechado na adição e na multiplicação por escalar e portanto é um subespaço de  $R^3$ . ♦



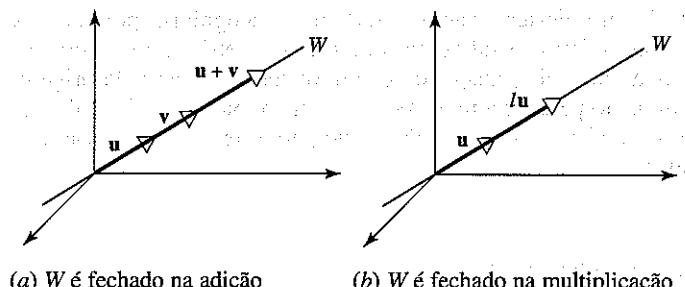
**Figura 5.2.1** Os vetores  $u + v$  e  $lu$  estão ambos no mesmo plano que  $u$  e  $v$ .

### EXEMPLO 2 Retas pela Origem são Subespaços

Mostre que uma reta pela origem do  $R^3$  é um subespaço de  $R^3$ .

*Solução.*

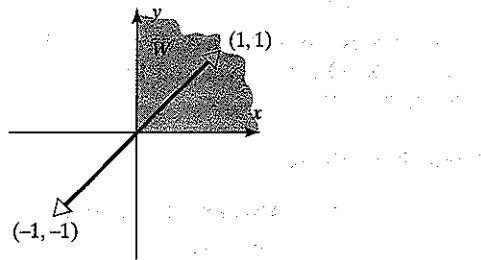
Seja  $W$  uma reta pela origem de  $R^3$ . É geometricamente evidente que a soma de dois vetores nesta reta também está nesta reta e que um múltiplo escalar de um vetor nesta reta também está nesta reta (Figura 5.2.2). Assim,  $W$  é fechado na adição e na multiplicação por escalar e portanto é um subespaço de  $R^3$ . Nos exercícios nós pedimos uma prova algébrica, usando as equações paramétricas da reta. ♦



**Figura 5.2.2**

### EXEMPLO 3 Um Subconjunto de $R^2$ que não é Subespaço

Seja  $W$  o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  em  $R^2$  tais que  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Estes são os pontos do primeiro quadrante. O conjunto  $W$  não é um subespaço de  $R^2$  pois não é fechado na multiplicação por escalar. Por exemplo,  $\mathbf{v} = (1, 1)$  está em  $W$  mas seu negativo  $(-1, -1) \mathbf{v} = -\mathbf{v} = (-1, -1)$  não está (Figura 5.2.3). ♦



**Figura 5.2.3**  $W$  não é fechado na multiplicação por escalar.

Qualquer espaço vetorial não-nulo  $V$  tem pelo menos dois subespaços: o próprio  $V$  é um subespaço e o conjunto  $\{\mathbf{0}\}$  consistindo apenas do vetor nulo de  $V$  é um subespaço, chamado **subespaço nulo**. Combinando isto com os Exemplos 1 e 2, nós obtemos a seguinte lista de subespaços de  $R^2$  e  $R^3$ :

#### Subespaços de $R^2$

- $\{\mathbf{0}\}$
- Retas pela origem
- Planos pela origem
- $R^2$

#### Subespaços de $R^3$

- $\{\mathbf{0}\}$
- Retas pela origem
- Planos pela origem
- $R^3$

Adiante nós iremos mostrar que estes são os únicos subespaços de  $R^2$  e  $R^3$ .

### EXEMPLO 4 Subespaços de $M_{nn}$

Pelo Teorema 1.7.2, a soma de duas matrizes simétricas é simétrica e um múltiplo escalar de uma matriz simétrica é simétrica. Assim, o conjunto de todas as matrizes simétricas  $n \times n$  forma um subespaço do espaço vetorial  $M_{nn}$  de todas as matrizes  $n \times n$ . Analogamente, o conjunto das matrizes  $n \times n$  triangulares superiores, o conjunto das matrizes  $n \times n$  triangulares inferiores e o conjunto das matrizes  $n \times n$  diagonais, todos formam subespaços de  $M_{nn}$ , pois cada um destes conjuntos é fechado na adição e na multiplicação por escalar. ♦

### EXEMPLO 5 Um Subespaço dos Polinômios de Grau $\leq n$

Seja  $n$  um inteiro não-negativo e suponha que  $W$  consiste de todas as funções que podem ser expressas na forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (1)$$

onde  $a_0, \dots, a_n$  são números reais. Assim,  $W$  consiste de todos os polinômios de grau  $n$  ou menor. O conjunto  $W$  é um subespaço do espaço vetorial de todas as funções reais discutido no Exemplo 4 da seção precedente. Para ver isto, sejam  $p$  e  $q$  os polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \text{e} \quad q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

Então

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

e

$$(kp)(x) = kp(x) = (ka_0) + (ka_1)x + \dots + (ka_n)x^n$$

Estas funções têm a forma dada em (1), de modo que  $p + q$  e  $kp$  estão em  $W$ . O espaço vetorial  $W$  deste exemplo será denotado pelo símbolo  $P_n$ .

#### Requisito: Cálculo

#### EXEMPLO 6 Subespaços das Funções Contínuas em $(-\infty, \infty)$

Lembre do Cálculo que se  $f$  e  $g$  são funções contínuas no intervalo  $(-\infty, \infty)$  e  $k$  é uma constante, então  $f + g$  e  $kf$  também são contínuas. Assim, as funções contínuas no intervalo  $(-\infty, \infty)$  formam um subespaço de  $F(-\infty, \infty)$ , pois são fechadas na adição e na multiplicação por escalar. Nós denotamos este espaço por  $C(-\infty, \infty)$ . Analogamente, se  $f$  e  $g$  têm primeira derivada contínua no intervalo  $(-\infty, \infty)$  e  $k$  é uma constante, então também  $f + g$  e  $kf$  têm. Assim, as funções com primeira derivada contínua no intervalo  $(-\infty, \infty)$  formam um subespaço de  $F(-\infty, \infty)$ . Nós denotamos este espaço por  $C^1(-\infty, \infty)$ , onde o sobrescrito 1 é usado para enfatizar a primeira derivada. Contudo, é um teorema do Cálculo que cada função diferenciável é contínua, de modo que  $C^1(-\infty, \infty)$  é, na realidade, um subespaço de  $C(-\infty, \infty)$ .

Indo um passo adiante, as funções reais com  $m$ -ésimas derivadas contínuas em  $(-\infty, \infty)$  formam um subespaço de  $C^m(-\infty, \infty)$ , para cada inteiro positivo  $m$ , bem como as funções com derivadas contínuas de todas as ordens. Nós denotamos o espaço das funções com  $m$ -ésimas derivadas contínuas em  $(-\infty, \infty)$  por  $C^m(-\infty, \infty)$  e o espaço das funções com derivadas contínuas de todas as ordens em  $(-\infty, \infty)$  por  $C^\infty(-\infty, \infty)$ . Finalmente, é um teorema do Cálculo que os polinômios têm derivadas contínuas de todas as ordens, de modo que  $P_n$  é um subespaço de  $C^\infty(-\infty, \infty)$ . A hierarquia dos espaços apresentados neste exemplo é dada na Figura 5.2.4.

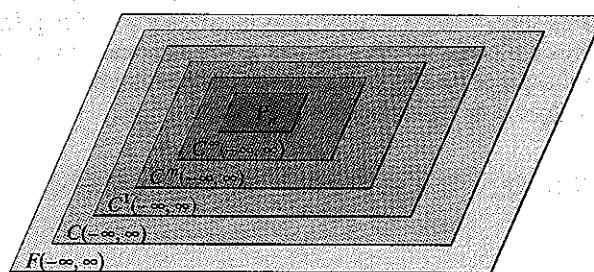


Figura 5.2.4

OBSERVAÇÃO. No exemplo acima, nós nos ocupamos com o intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Se nós tivéssemos usado algum intervalo fechado  $[a, b]$  então os subespaços correspondentes aos definidos no exemplo seriam denotados por  $C[a, b]$ ,  $C^m[a, b]$  e  $C^\infty[a, b]$ . Analogamente, num intervalo aberto  $(a, b)$  eles seriam denotados por  $C(a, b)$ ,  $C^m(a, b)$  e  $C^\infty(a, b)$ .

**Espaço-Solução de Sistemas Homogêneos** Se  $Ax = b$  é um sistema de equações lineares, então cada vetor  $\mathbf{x}$  que satisfaz esta equação é chamado um *vetor-solução* do sistema. O teorema a seguir mostra que os vetores-solução de um sistema linear *homogêneo* formam um espaço vetorial, que chamamos o *espaço-solução* do sistema.

#### Teorema 5.2.2

Se  $Ax = b$  é um sistema linear homogêneo de  $m$  equações em  $n$  incógnitas, então o conjunto dos vetores-solução é um subespaço de  $R^n$ .

*Prova.* Seja  $W$  o conjunto dos vetores-solução. Existe pelo menos um vetor em  $W$ , a saber  $\mathbf{0}$ . Para mostrar que  $W$  é fechado na adição e na multiplicação por escalar nós precisamos mostrar que se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  são quaisquer vetores-solução e se  $k$  é um escalar qualquer, então  $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$  e  $k\mathbf{x}$  também são vetores-solução. Mas se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  são vetores-solução então

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

e portanto

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = Ax + Ax' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e

$$A(k\mathbf{x}) = kAx = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

o que prova que  $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$  e  $k\mathbf{x}$  são vetores-solução. ■

#### EXEMPLO 7 Espaços-Solução que são Subespaços de $R^3$

Considere os sistemas lineares

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cada um destes sistemas tem três incógnitas, portanto as soluções formam subespaços de  $R^3$ . Geometricamente, isto significa que cada espaço-solução deve ser uma reta pela origem, um plano pela origem, somente a origem ou todo o  $R^3$ . Nós iremos verificar isto agora (deixando para o leitor a resolução dos sistemas).

*Solução.*

(a) As soluções são

$$x = 2s - 3t, \quad y = s, \quad z = t$$

e portanto obtemos

$$x = 2y - 3z \text{ ou } x - 2y + 3z = 0$$

Isto é a equação de um plano pela origem com vetor normal  $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ .

(b) As soluções são

$$x = -5t, \quad y = -t, \quad z = t$$

que são as equações paramétricas da reta pela origem paralela ao vetor  $\mathbf{v} = (-5, -1, 1)$ .

(c) A solução é  $x = 0, y = 0, z = 0$  e portanto o espaço-solução é só a origem, ou seja, é  $\{0\}$ .

(d) As soluções são

$$x = r, \quad y = s, \quad z = t$$

onde  $r, s$  e  $t$  tomam quaisquer valores, e portanto o espaço-solução é todo  $\mathbb{R}^3$ . ♦

Na Seção 1.3 nós introduzimos o conceito de combinação linear de vetores-coluna: A definição a seguir estende esta idéia para vetores mais gerais.

### Definição

Dizemos que um vetor  $\mathbf{w}$  é uma combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  se  $\mathbf{w}$  pode ser escrito na forma

$$\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_r \mathbf{v}_r$$

onde  $k_1, k_2, \dots, k_r$  são escalares.

OBSERVAÇÃO. Se  $r = 1$ , então a equação desta definição reduz a  $\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1$ ; ou seja,  $\mathbf{w}$  é uma combinação linear de um único vetor  $\mathbf{v}_1$  se for um múltiplo escalar de  $\mathbf{v}_1$ .

### EXEMPLO 8 Os Vetores em $\mathbb{R}^3$ são Combinações Lineares de $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$

Cada vetor  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base canônica

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

pois

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

### EXEMPLO 9 Conferindo uma Combinação Linear

Considere os vetores  $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$  e  $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$  em  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que  $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$  é uma combinação linear de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e que  $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$  não é uma combinação linear de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

*Solução.* Para  $\mathbf{w}$  ser uma combinação linear de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  deve haver escalares  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $\mathbf{w} = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v}$ ; ou seja,

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

ou

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Igualando os componentes correspondentes dá

$$k_1 + 6k_2 = 9$$

$$2k_1 + 4k_2 = 2$$

$$-k_1 + 2k_2 = 7$$

Resolvendo este sistema obtemos  $k_1 = -3$ ,  $k_2 = 2$  e portanto

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

Analogamente, para  $\mathbf{w}'$  ser uma combinação linear de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  deve haver escalares  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $\mathbf{w}' = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v}$ ; ou seja,

$$\mathbf{w}' = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

ou

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

Igualando os componentes correspondentes dá

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Este sistema de equações é inconsistente (verifique), de modo que não há tais escalares  $k_1$  e  $k_2$ . Conseqüentemente,  $\mathbf{w}'$  não é combinação linear de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . ♦

**Espaço Gerado** Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  são vetores em um espaço vetorial  $V$ , então geralmente alguns vetores de  $V$  podem ser combinações lineares de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  enquanto outros vetores não. O teorema seguinte mostra que se nós construirmos um conjunto  $W$  consistindo de todos os vetores que podem ser dados por combinações lineares de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , então  $W$  será um subespaço de  $V$ .

### Teorema 5.2.3

Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  são vetores em um espaço vetorial  $V$ , então:

- (a) O conjunto  $W$  de todos as combinações lineares de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  é um subespaço de  $V$ .
- (b)  $W$  é o menor subespaço de  $V$  que contém  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , no seguinte sentido: qualquer subespaço de  $V$  que contém  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  também contém  $W$ .

*Prova (a).* Para mostrar que  $W$  é um subespaço de  $V$ , nós devemos provar que é fechado na adição e na multiplicação por escalar. Em  $W$  temos pelo menos um vetor, a saber,  $\mathbf{0}$ , pois  $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_r$ . Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores em  $W$  então

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_r \mathbf{v}_r$$

e

$$\mathbf{v} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_r \mathbf{v}_r$$

onde  $c_1, c_2, \dots, c_r, k_1, k_2, \dots, k_r$  são escalares. Segue-se que

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + k_1) \mathbf{v}_1 + (c_2 + k_2) \mathbf{v}_2 + \dots + (c_r + k_r) \mathbf{v}_r$$

e, para qualquer escalar  $l$ ,

$$l\mathbf{u} = (lc_1) \mathbf{v}_1 + (lc_2) \mathbf{v}_2 + \dots + (lc_r) \mathbf{v}_r$$

Assim,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  e  $l\mathbf{u}$  são combinações lineares de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  e consequentemente estão em  $W$ . Isto mostra que  $W$  é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

*Prova (b).* Cada vetor  $\mathbf{v}_i$  é uma combinação linear de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , pois podemos escrever

$$\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 1\mathbf{v}_i + \dots + 0\mathbf{v}_r$$

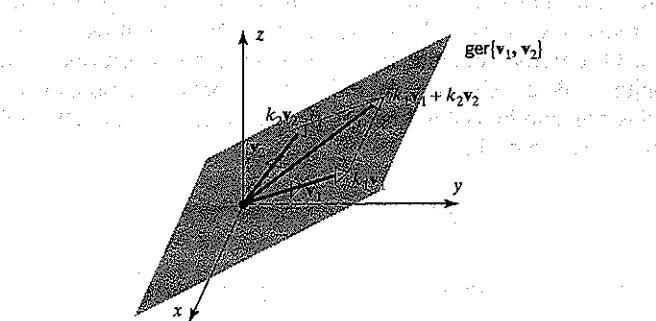
Isto mostra que o subespaço  $W$  contém cada um dos vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ . Seja  $W'$  um subespaço qualquer de  $V$  que contém  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ . Como  $W'$  é fechado na adição e na multiplicação por escalar, deve conter também todas as combinações lineares de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ . Assim,  $W'$  contém cada vetor de  $W$ . ■

Nós introduzimos a seguinte definição.

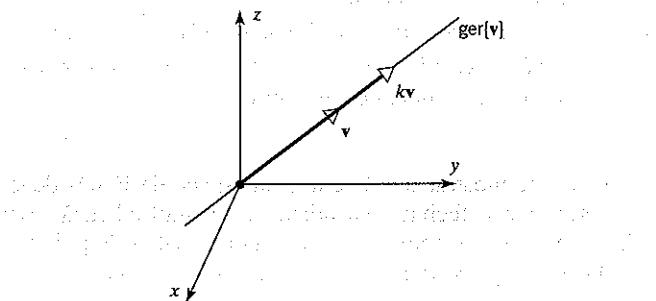
### Definição

Se  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é um conjunto de vetores de um espaço vetorial  $V$ , então o subespaço  $W$  de  $V$  que consiste de todas as combinações lineares dos vetores em  $S$  é chamado o *espaço gerado* por  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , e nós dizemos que os vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  geram  $W$ . Para indicar que  $W$  é o espaço gerado pelos vetores do conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ , nós escrevemos

$$W = \text{ger}(S) \quad \text{ou} \quad W = \text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$$



(a)  $\text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  é o plano pela origem determinado por  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ .



(b)  $\text{ger}\{\mathbf{v}\}$  é a reta pela origem determinada por  $\mathbf{v}$ .

**Figura 5.2.5**

### EXEMPLO 10 Espaços Gerados por um ou Dois Vetores

Se  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são vetores não-colineares em  $\mathbb{R}^3$  com pontos iniciais na origem, então  $\text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ , que consiste de todas as combinações lineares  $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ , é o plano determinado por  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  (veja Figura 5.2.5a). Similarmente, se  $\mathbf{v}$  é um vetor não-nulo em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , então  $\text{ger}\{\mathbf{v}\}$ , que é o conjunto de todos os múltiplos escalares  $k\mathbf{v}$ , é a reta determinada por  $\mathbf{v}$  (ver Figura 5.2.5b). ♦

### EXEMPLO 11 Conjunto Gerador para $P_n$

Os polinômios  $1, x, x^2, \dots, x^n$  geram o espaço vetorial  $P_n$  definido no Exemplo 5, pois cada polinômio  $p$  em  $P_n$  pode ser escrito como

$$p = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

que é uma combinação linear de  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . Nós podemos denotar isto escrevendo

$$P_n = \text{ger}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

### EXEMPLO 12 Três Vetores que não Geram $\mathbb{R}^3$

Determine se  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$  e  $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$  geram o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .

*Solução.*

Nós devemos determinar se um vetor arbitrário  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser escrito como uma combinação linear

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

dos vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ . Escrevendo esta equação em termos dos componentes dá

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

ou

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

ou

$$k_1 + k_2 + 2k_3 = b_1$$

$$k_1 + k_3 = b_2$$

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = b_3$$

O problema portanto reduz a determinar se este sistema é consistente para quaisquer valores de  $b_1, b_2$  e  $b_3$ . Pelas partes (e) e (g) do Teorema 4.3.4, este sistema é consistente para quaisquer  $b_1, b_2$  e  $b_3$  se, e somente se, a matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem um determinante não-nulo. Contudo,  $\det(A) = 0$  (verifique), de modo que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  não geram  $\mathbb{R}^3$ . ♦

Os conjuntos geradores não são únicos. Por exemplo, quaisquer dois vetores não-colineares que estão no plano mostrado na Figura 5.2.5 geram aquele plano e qualquer vetor não-nulo na reta daquela figura gera aquela reta. Nós deixamos a prova do seguinte teorema útil como exercício.

### Teorema 5.2.4

Se  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  e  $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$  são dois conjuntos de vetores em um espaço vetorial  $V$ , então

$$\text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\} = \text{ger}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$$

e, somente se, cada vetor em  $S$  é uma combinação linear dos vetores de  $S'$  e cada vetor em  $S'$  é uma combinação linear dos vetores de  $S$ .

**Conjunto de Exercícios 5.2**

1. Use o Teorema 5.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) todos os vetores da forma  $(a, 0, 0)$
- (b) todos os vetores da forma  $(a, 1, 1)$
- (c) todos os vetores da forma  $(a, b, c)$ , com  $b = a + c$
- (d) todos os vetores da forma  $(a, b, c)$ , com  $b = a + c + 1$

2. Use o Teorema 5.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de  $M_{22}$ .

- (a) todas as matrizes  $2 \times 2$  com entradas inteiras
- (b) todas as matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tais que  $a + b + c + d = 0$

- (c) todas as matrizes  $2 \times 2$  tais que  $\det(A) = 0$
- (d) todas as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

3. Use o Teorema 5.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de  $P_3$ .

- (a) todos os polinômios  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  para os quais  $a_0 = 0$
- (b) todos os polinômios  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  para os quais  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$
- (c) todos os polinômios  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  para os quais  $a_0, a_1, a_2$  e  $a_3$  são números inteiros
- (d) todos os polinômios da forma  $a_0 + a_1x$ , onde  $a_0$  e  $a_1$  são números reais

4. Use o Teorema 5.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços do espaço  $F(-\infty, \infty)$ .

- (a) todas as funções  $f$  tais que  $f(x) \leq 0$  para todo  $x$
- (b) todas as funções  $f$  tais que  $f(0) = 0$
- (c) todas as funções  $f$  tais que  $f(0) = 2$
- (d) todas as funções constantes
- (e) todas as funções  $f$  da forma  $k_1 + k_2 \operatorname{sen} x$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são números reais

5. Use o Teorema 5.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de  $M_{nn}$ .

- (a) todas as matrizes  $A$  de tamanho  $n \times n$  tais que  $\operatorname{tr}(A) = 0$
- (b) todas as matrizes  $A$  de tamanho  $n \times n$  tais que  $A^T = -A$
- (c) todas as matrizes  $A$  de tamanho  $n \times n$  tais que o sistema linear  $Ax = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial
- (d) todas as matrizes  $A$  de tamanho  $n \times n$  tais que  $AB = BA$  para uma matriz fixada  $B$  de tamanho  $n \times n$
- 6. Determine se o espaço-solução do sistema  $Ax = \mathbf{0}$  é uma reta pela origem, um plano pela origem ou somente a origem. Se for um plano, obtenha uma equação para este plano; se for uma reta, obtenha as equações paramétricas desta reta.

$$(a) A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad (c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad (e) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \quad (f) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Quais dos seguintes são combinações lineares de  $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$  e  $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$ ?

- (a)  $(2, 2, 2)$
- (b)  $(3, 1, 5)$
- (c)  $(0, 4, 5)$
- (d)  $(0, 0, 0)$

8. Expressse os seguintes como combinações lineares de  $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$  e  $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$ .

- (a)  $(-9, -7, -15)$
- (b)  $(6, 11, 6)$
- (c)  $(0, 0, 0)$
- (d)  $(7, 8, 9)$

9. Expressse os seguintes como combinações lineares de  $\mathbf{p}_1 = 2 + x + 4x^2$ ,  $\mathbf{p}_2 = 1 - x + 3x^2$  e  $\mathbf{p}_3 = 3 + 2x + 5x^2$ .

- (a)  $-9 - 7x - 15x^2$
- (b)  $6 + 11x + 6x^2$
- (c)  $0$
- (d)  $7 + 8x + 9x^2$

10. Quais dos seguintes são combinações lineares de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

$$(a) \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Em cada parte, determine se os vetores dados geram  $\mathbb{R}^3$ .
- $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 3)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$
  - $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$
  - $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 4)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 5)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (5, -2, 9)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 4, -1)$
  - $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 6)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, 4, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (4, 3, 1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (3, 3, 1)$
12. Sejam  $f = \cos^2 x$  e  $g = \sin^2 x$ . Quais dos seguintes estão no espaço gerado por  $f$  e  $g$ ?
- $\cos 2x$
  - $3 + x^2$
  - $1$
  - $\sin x$
  - $0$
13. Determine se os seguintes polinômios geram  $P_2$ .
- $$\mathbf{p}_1 = 1 - x + 2x^2, \quad \mathbf{p}_2 = 3 + x, \quad \mathbf{p}_3 = 5 - x + 4x^2, \quad \mathbf{p}_4 = -2 - 2x + 2x^2$$
14. Sejam  $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$  e  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$ . Quais dos seguintes vetores estão em  $\text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ?
- $(2, 3, -7, 3)$
  - $(0, 0, 0, 0)$
  - $(1, 1, 1, 1)$
  - $(-4, 6, -13, 4)$
15. Encontre uma equação para o plano gerado pelos vetores  $\mathbf{u} = (-1, 1, 1)$  e  $\mathbf{v} = (3, 4, 4)$ .
16. Encontre equações paramétricas para a reta gerada pelo vetor  $\mathbf{u} = (3, -2, 5)$ .
17. Mostre que os vetores-solução de um sistema não-homogêneo e consistente de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas não formam um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ .
18. Prove o Teorema 5.2.4.
19. Use o Teorema 5.2.4 para mostrar que  $\mathbf{v}_1 = (1, 6, 4)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 4, -1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 2, 5)$  e  $\mathbf{w}_1 = (1, -2, -5)$ ,  $\mathbf{w}_2 = (0, 8, 9)$  geram o mesmo subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .
20. Uma reta  $L$  pela origem em  $\mathbb{R}^3$  pode ser representada por equações paramétricas da forma  $x = at$ ,  $y = bt$  e  $z = ct$ . Use estas equações para mostrar que  $L$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ; ou seja, se  $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  são pontos em  $L$  e  $k$  é qualquer número real, então  $k\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  também são pontos em  $L$ .
21. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Mostre que os seguintes conjuntos de funções são subespaços de  $F(-\infty, \infty)$ .
  - todas as funções contínuas em  $(-\infty, \infty)$
  - todas as funções diferenciáveis em  $(-\infty, \infty)$
  - todas as funções diferenciáveis em  $(-\infty, \infty)$  que satisfazem  $f' + 2f = 0$
22. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Mostre que o conjunto das funções  $\mathbf{f} = f(x)$  contínuas em  $[a, b]$  e tais que
- $$\int_a^b f(x) dx = 0$$
- é um subespaço de  $C[a, b]$ .
- ### Discussão e Descoberta
23. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- Se  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é qualquer sistema linear consistente de  $m$  equações em  $n$  incógnitas, então o conjunto-solução é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ .
  - Se  $W$  é um conjunto de um ou mais vetores de um espaço vetorial  $V$  tal que  $l\mathbf{u} + \mathbf{v}$  sempre é um vetor em  $W$  para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $W$  e qualquer escalar  $l$ , então  $W$  é um subespaço de  $V$ .
  - Se  $S$  é um conjunto finito de vetores de um espaço vetorial  $V$ , então  $\text{ger}(S)$  é fechado na adição e na multiplicação por escalar.
  - A interseção de dois subespaços de um espaço vetorial  $V$  também é um subespaço de  $V$ .
  - Se  $\text{ger}(S_1) = \text{ger}(S_2)$  então  $S_1 = S_2$ .
24. (a) Sob quais condições dois vetores de  $\mathbb{R}^3$  geram um plano? E uma reta?  
 (b) Sob quais condições vale  $\text{ger}\{\mathbf{u}\} = \text{ger}\{\mathbf{v}\}$ ? Explique.  
 (c) Se  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é um sistema linear consistente de  $m$  equações em  $n$  incógnitas, sob quais condições é verdade que o conjunto-solução é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ ? Explique.
25. Lembre que retas pela origem são subespaços de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $W_1$  é a reta  $y = x$  e  $W_2$  é a reta  $y = -x$ , é verdade que a união  $W_1 \cup W_2$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ ? Explique seu raciocínio.
26. (a) Seja  $M_{22}$  o espaço vetorial das matrizes  $2 \times 2$ . Encontre quatro matrizes que gerem  $M_{22}$ .  
 (b) Descreva em palavras um conjunto de matrizes geradoras de  $M_{22}$ .
27. Nós mostramos no Exemplo 8 que os vetores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  geram o  $\mathbb{R}^3$ . Em geral, que propriedades geométricas devem ter três vetores em  $\mathbb{R}^3$  para gerar o  $\mathbb{R}^3$ ?

## 5.3 INDEPENDÊNCIA LINEAR

Na seção anterior nós aprendemos que um conjunto de vetores  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  gera um dado espaço vetorial  $V$  se cada vetor em  $V$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de  $S$ . Em geral, pode haver mais de uma maneira de expressar um vetor em  $V$  como uma combinação linear de vetores de um conjunto gerador. Nesta seção nós iremos estudar as condições sob as quais cada vetor de  $V$  só pode ser escrito exatamente de uma única maneira como combinação linear de um conjunto gerador de vetores. Conjuntos geradores com esta propriedade desempenham um papel fundamental no estudo de espaços vetoriais.

### Definição

Se  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é um conjunto não-vazio de vetores, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem pelo menos uma solução, a saber,

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Se esta é a única solução, então o conjunto  $S$  é chamado *linearmente independente*. Se existem outras soluções, então  $S$  é um conjunto *linearmente dependente*.

### EXEMPLO 1 Um Conjunto Linearmente Dependente

Se  $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1)$  e  $\mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$ , então o conjunto de vetores  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é linearmente dependente, pois  $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ .

### EXEMPLO 2 Um Conjunto Linearmente Dependente

Os polinômios

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2 \text{ e } \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

formam um conjunto linearmente dependente em  $P_3$ , pois  $3\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$ .

### EXEMPLO 3 Conjunto Linearmente Independentes

Considere os vetores  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  em  $R^3$ . Em termos de componentes, a equação vetorial

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

é dada por

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

ou, equivalentemente, por

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Isto implica que  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$  e  $k_3 = 0$ , de modo que o conjunto  $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  é linearmente independente. Um argumento similar pode ser usado para mostrar que os vetores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

formam um conjunto linearmente independente em  $R^n$ . ♦

### EXEMPLO 4 Determinando Independência / Dependência Linear

Determine se os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

formam um conjunto linearmente dependente ou independente.

*Solução.*

Em termos de componentes, a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

é dada por

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

ou, equivalentemente, por

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Igualando os componentes correspondentes, dá

$$k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0$$

$$-2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0$$

$$3k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

Assim, os vetores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  formam um conjunto linearmente dependente se este sistema tiver uma solução não-trivial, ou um conjunto linearmente independente se só tiver a solução trivial. Resolvendo o sistema, obtemos

$$k_1 = -\frac{1}{2}t, \quad k_2 = -\frac{1}{2}t, \quad k_3 = t$$

Assim, o sistema tem soluções não-triviais e  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  formam um conjunto linearmente dependente. Alternativamente, nós poderíamos mostrar a existência de soluções não-triviais sem resolver o sistema, mostrando que a matriz de coeficientes tem determinante zero e consequentemente é não-invertível (verifique). ♦

### EXEMPLO 5 Um Conjunto Linearmente Independente em $P_n$

Mostre que os polinômios

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

formam um conjunto linearmente independente em  $P_n$ .

*Solução.*

Sejam  $\mathbf{p}_0 = 1$ ,  $\mathbf{p}_1 = x$ ,  $\mathbf{p}_2 = x^2, \dots, \mathbf{p}_n = x^n$  e suponha que alguma combinação linear destes polinômios é nula, digamos

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \dots + a_n\mathbf{p}_n = 0$$

ou, equivalentemente,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \text{ para todo } x \text{ em } (-\infty, \infty) \quad (1)$$

Nós devemos mostrar que

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Para ver isto, lembre da Álgebra que um polinômio *não-nulo* de grau  $n$  tem no máximo  $n$  raízes distintas. Segue-se que  $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ , pois, caso contrário, teríamos por (1) que  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  é um polinômio não-nulo com infinitas raízes. ■

O termo “linearmente dependente” sugere que os vetores de alguma maneira dependem um do outro. O próximo teorema mostra que isto realmente ocorre.

### Teorema 5.3.1

Um conjunto  $S$  de dois ou mais vetores é:

- (a) linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de  $S$  pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de  $S$ .
- (b) linearmente independente se, e somente se, nenhum vetor em  $S$  pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de  $S$ .

Nós vamos provar a parte (a) e deixar a parte (b) como exercício.

*Prova (a).* Seja  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  um conjunto com dois ou mais vetores. Supondo que  $S$  é linearmente dependente, existem escalares  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , não todos nulos, tais que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \quad (2)$$

Para sermos específicos, suponha que  $k_1 \neq 0$ . Então (2) pode ser reescrita como

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)\mathbf{v}_r$$

que expressa  $\mathbf{v}_1$  como combinação linear dos outros vetores de  $S$ . Analogamente, se  $k_j \neq 0$  em (2) para algum  $j = 2, 3, \dots, r$ , então  $\mathbf{v}_j$  pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de  $S$ .

Reciprocamente, suponha que pelo menos um dos vetores em  $S'$  pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores. Para sermos específicos, suponha que

$$\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r$$

e portanto

$$\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3 - \cdots - c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Segue que  $S$  é linearmente dependente, pois a equação

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

é satisfeita por

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -c_2, \dots, \quad k_r = -c_r$$

onde nem todos os escalares são nulos. A prova é similar no caso em que é um outro vetor e não  $\mathbf{v}_1$  que pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de  $S$ . ■

### EXEMPLO 6 De Novo o Exemplo 1

No Exemplo 1 nós vimos que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1) \text{ e } \mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$$

formam um conjunto linearmente dependente. Pelo Teorema 5.3.1, pelo menos um destes vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros dois vetores. Neste exemplo, cada um dos três vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros dois vetores, pois da equação  $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$  (ver Exemplo 1) decorre

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \diamond$$

### EXEMPLO 7 De Novo o Exemplo 3

No Exemplo 3 nós vimos que os vetores  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  formam um conjunto linearmente independente. Pelo Teorema 5.3.1 segue que nenhum destes vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos outros dois. Para ver isto diretamente, suponha que  $\mathbf{k}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{k} = k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j}$$

Em termos de componentes,

$$(0, 0, 1) = k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) \text{ ou } (0, 0, 1) = (k_1, k_2, 0)$$

Mas a última equação não é válida para nenhum valor de  $k_1$  e  $k_2$ , de modo que  $\mathbf{k}$  não pode ser expresso por uma combinação linear de  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ . Similarmente,  $\mathbf{i}$  não pode ser expresso por uma combinação linear de  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{j}$  não pode ser expresso por uma combinação linear de  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{k}$ . ■

O seguinte teorema fornece duas informações importantes sobre independência linear.

### Teorema 5.3.2

- (a) Um conjunto finito de vetores que contém o vetor nulo é linearmente dependente.
- (b) Um conjunto de exatamente dois vetores é linearmente independente se, e somente se, nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro.

Nós vamos provar a parte (a) e deixar a parte (b) como exercício.

*Prova (a).* Dados quaisquer vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ , o conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{0}\}$  é linearmente dependente pois a equação

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r + 1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

escreve  $\mathbf{0}$  como uma combinação linear de vetores de  $S$  com coeficientes não todos nulos. ■

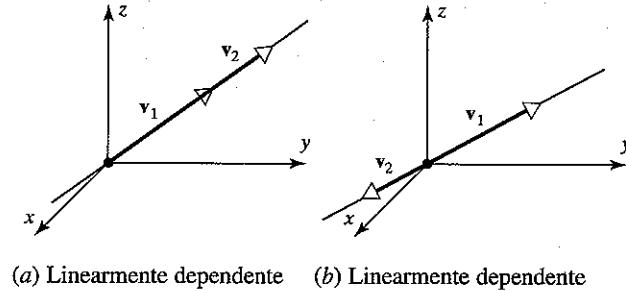
### EXEMPLO 8 Usando o Teorema 5.3.2b

As funções  $f_1 = x$  e  $f_2 = \sin x$  formam um conjunto linearmente independente de vetores em  $F(-\infty, \infty)$ , pois nenhuma das duas é um múltiplo escalar da outra. ■

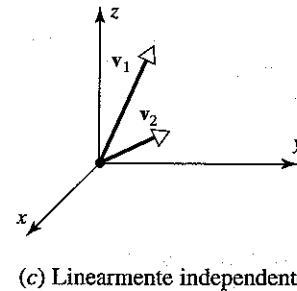
### Interpretação Geométrica da Independência Linear

**Linear** A independência linear tem uma interpretação geométrica útil em  $R^2$  e  $R^3$ :

- Em  $R^2$  ou  $R^3$ , um conjunto de dois vetores é linearmente independente se, e somente se, os vetores não estão numa mesma reta quando colocados com seus pontos iniciais na origem (Figura 5.3.1).



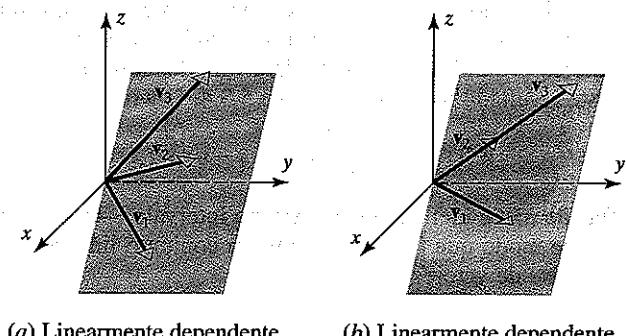
(a) Linearmente dependente (b) Linearmente dependente



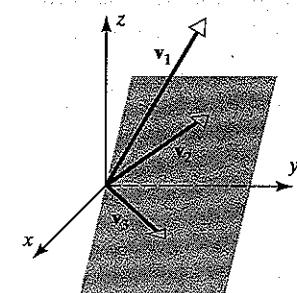
(c) Linearmente independente

Figura 5.3.1

- Em  $R^3$ , um conjunto de três vetores é linearmente independente se, e somente se, os vetores não estão num mesmo plano quando colocados com seus pontos iniciais na origem (Figura 5.3.2).



(a) Linearmente dependente (b) Linearmente dependente



(c) Linearmente independente

Figura 5.3.2

O primeiro resultado segue do seguinte fato: dois vetores são linearmente independentes se, e somente se, nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro. Geometricamente, isto equivale a afirmar que os vetores não estão numa mesma reta quando colocados com seus pontos iniciais na origem.

O segundo resultado segue do seguinte fato: três vetores são linearmente independentes se, e somente se, nenhum dos três vetores é uma combinação linear dos outros dois. Geometricamente, isto equivale a afirmar que nenhum dos três vetores está no mesmo plano que os outros dois ou, alternativamente, que os três vetores não estão num plano comum quando colocados com seus pontos iniciais na origem (por que?).

O próximo teorema mostra que um conjunto linearmente independente em  $R^n$  pode conter no máximo  $n$  vetores.

### Teorema 5.3.3

Seja  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  um conjunto de vetores em  $R^n$ . Se  $r > n$ , então  $S$  é linearmente dependente.

**Prova.** Suponha que

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}) \\ v_2 &= (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n}) \\ &\vdots \\ v_r &= (v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{rn}) \end{aligned}$$

Considere a equação

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$$

Como já foi ilustrado no Exemplo 4, se nós expressarmos ambos os lados desta equação em termos dos componentes e equacionarmos os componentes correspondentes, obteremos o sistema

$$\begin{aligned} v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \dots + v_{r1}k_r &= 0 \\ v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \dots + v_{r2}k_r &= 0 \\ &\vdots && \vdots \\ v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \dots + v_{rn}k_r &= 0 \end{aligned}$$

Isto é um sistema homogêneo de  $n$  equações nas  $r$  incógnitas  $k_1, k_2, \dots, k_r$ . Como  $r > n$ , segue do Teorema 1.2.1 que o sistema tem soluções não-triviais. Isto mostra que  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  é um conjunto linearmente dependente. ■

**OBSERVAÇÃO.** O teorema acima nos diz que um conjunto em  $R^2$  com mais de dois vetores é linearmente dependente e que um conjunto em  $R^3$  com mais de três vetores é linearmente dependente.

### Requisito: Cálculo

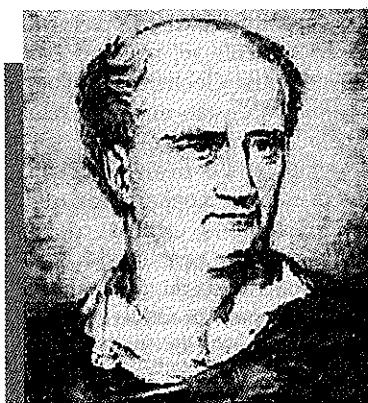
**Independência Linear de Funções** Às vezes podemos deduzir a dependência linear de funções a partir de identidades conhecidas. Por exemplo, as funções

$$f_1 = \sin^2 x, \quad f_2 = \cos^2 x \quad \text{e} \quad f_3 = 5$$

formam um conjunto linearmente dependente em  $F(-\infty, \infty)$ , pois a equação

$$5f_1 + 5f_2 - f_3 = 5\sin^2 x + 5\cos^2 x - 5 = 5(\sin^2 x + \cos^2 x) - 5 = 0$$

expressa 0 como uma combinação linear de  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  com coeficientes não todos zero. No entanto, estas identidades só podem ser aplicadas em situações especiais. Embora não exista um



**Józef Maria Hoëne-Wronski** (1776–1853) foi um matemático e filósofo francês-polonês. Wronski recebeu sua educação elementar em Poznán e Varsóvia. Ele serviu como oficial de artilharia no exército prussiano num levante nacional em 1794, sendo feito prisioneiro pelo exército russo; depois de solto, estudou filosofia em várias universidades alemãs. Ele tornou-se um cidadão francês em 1800 e, mais tarde, acabou radicado em Paris, onde desenvolveu pesquisas em análise matemática, que o levou a publicar alguns artigos controversos e relacionados com isto, a um famoso julgamento sobre assuntos financeiros. Muitos anos depois, seu projeto de pesquisa sobre a determinação da longitude em alto mar foi recusado pelo Comité Francês de Longitude e Wronski voltou-se para estudos em filosofia messianica. Na década de 1830 ele investigou a exequibilidade de veículos movidos a esteiras competirem com trens, mas sem sucesso. Ele viveu seus últimos anos na pobreza. A maior parte de seu trabalho matemático está repleto de erros e imprecisões, mas muitas vezes contém resultados e ideias isoladas valiosas. Alguns autores atribuem sua disposição para a controvérsia a tendências psicóticas e a um excesso na auto-avaliação da importância de seu trabalho.

método geral que possa ser utilizado para estabelecer a dependência ou independência linear de funções em  $F(-\infty, \infty)$ , nós iremos desenvolver um teorema que, às vezes, pode ser usado para mostrar que um dado conjunto de funções é linearmente independente.

Se  $\mathbf{f}_1 = f_1(x), \mathbf{f}_2 = f_2(x), \dots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$  são funções  $n - 1$  vezes diferenciáveis no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , então chamamos o determinante da matriz

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

o **wronskiano** de  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Como veremos a seguir, este determinante é útil para decidir se as funções  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  formam um conjunto linearmente independente de vetores no espaço vetorial  $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$ .

Suponha, por enquanto, que  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  são vetores linearmente dependentes em  $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$ . Então existem escalares  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , não todos zero, tais que

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$$

para todos  $x$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Combinando esta equação com as equações obtidas por  $n - 1$  sucessivas derivações resulta

$$\begin{aligned} k_1 f_1(x) &+ k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0 \\ k_1 f'_1(x) &+ k_2 f'_2(x) + \cdots + k_n f'_n(x) = 0 \\ \vdots &\vdots \vdots \vdots \\ k_1 f_1^{(n-1)}(x) &+ k_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + k_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{aligned}$$

Assim, a dependência linear de  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  implica que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem uma solução não-trivial para cada  $x$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Isto, por sua vez, implica que para cada  $x$  em  $(-\infty, \infty)$ , a matriz de coeficientes é não-invertível ou, equivalentemente, que seu determinante (o wronskiano) é zero para cada  $x$  em  $(-\infty, \infty)$ . Assim, se o wronskiano não é identicamente zero em  $(-\infty, \infty)$ , então as funções  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  devem ser vetores linearmente independentes em  $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$ . Isto é o que afirma o seguinte teorema.

### Teorema 5.3.4

Se as funções  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  têm  $n - 1$  derivadas contínuas no intervalo  $(-\infty, \infty)$  e se o wronskiano destas funções não é identicamente zero em  $(-\infty, \infty)$ , então estas funções formam um conjunto linearmente independente de vetores em  $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$ .

### EXEMPLO 9 Um Conjunto Linearmente Independente em $C^1(-\infty, \infty)$

Mostre que as funções  $\mathbf{f}_1 = x$  e  $\mathbf{f}_2 = \sin x$  formam um conjunto linearmente independente de vetores em  $C^1(-\infty, \infty)$ .

*Solução.*

No Exemplo 8 nós mostramos que estes vetores formam um conjunto linearmente independente observando que nenhum dos dois vetores é múltiplo do outro. Para fins ilustrativos, vamos obter este resultado usando o Teorema 5.3.4. O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \sin x$$

Esta função não é identicamente zero no intervalo  $(-\infty, \infty)$  (verifique), de modo que  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$  formam um conjunto linearmente independente de vetores.

### EXEMPLO 10 Um Conjunto Linearmente Independente em $C^2(-\infty, \infty)$

Mostre que  $\mathbf{f}_1 = 1$ ,  $\mathbf{f}_2 = e^x$  e  $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$  formam um conjunto linearmente independente de vetores em  $C^2(-\infty, \infty)$ .

*Solução.*

O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

Esta função não é identicamente zero (mais que isto, esta função nunca se anula) no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , de modo que  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  e  $\mathbf{f}_3$  formam um conjunto linearmente independente de vetores. ♦

OBSERVAÇÃO. A recíproca do Teorema 5.3.4 é falsa. Se o wronskiano de  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  é identicamente zero em  $(-\infty, \infty)$ , então

nada pode ser deduzido sobre a independência linear de  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ ; este conjunto de vetores pode ser linearmente independente ou linearmente dependente. (Omitimos os detalhes.)

### Conjunto de Exercícios 5.3

- Explique por que os conjuntos de vetores dados são linearmente dependentes. (Resolva este problema somente inspecionando os conjuntos.)
  - $\mathbf{u}_1 = (-1, 2, 4)$  e  $\mathbf{u}_2 = (5, -10, -20)$  em  $R^3$
  - $\mathbf{u}_1 = (3, -1), \mathbf{u}_2 = (4, 5), \mathbf{u}_3 = (-4, 7)$  em  $R^3$
  - $\mathbf{p}_1 = 3 - 2x + x^2$  e  $\mathbf{p}_2 = 6 - 4x + 2x^2$  em  $P_2$
  - $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$  em  $M_{22}$
- Quais dos seguintes conjuntos de vetores em  $R^3$  são linearmente dependentes?
  - $(4, -1, 2), (-4, 10, 2)$
  - $(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)$
  - $(8, -1, 3), (4, 0, 1)$
  - $(-2, 0, 1), (3, 2, 5), (6, -1, 1), (7, 0, -2)$
- Quais dos seguintes conjuntos de vetores em  $R^4$  são linearmente dependentes?
  - $(3, 8, 7, -3), (1, 5, 3, -1), (2, -1, 2, 6), (1, 4, 0, 3)$
  - $(0, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 0), (1, 1, 0, -1)$
  - $(0, 3, -3, -6), (-2, 0, 0, -6), (0, -4, -2, -2), (0, -8, 4, -4)$
  - $(3, 0, -3, 6), (0, 2, 3, 1), (0, -2, -2, 0), (-2, 1, 2, 1)$
- Quais dos seguintes conjuntos de vetores em  $P_2$  são linearmente dependentes?
  - $2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2$
  - $3 + x + x^2, 2 - x + 5x^2, 4 - 3x^2$
  - $6 - x^2, 1 + x + 4x^2$
  - $1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2$
- Suponha que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  são vetores em  $R^3$  com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão num plano.
  - $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0), \mathbf{v}_2 = (6, 1, 4), \mathbf{v}_3 = (2, 0, -4)$
  - $\mathbf{v}_1 = (-6, 7, 2), \mathbf{v}_2 = (3, 2, 4), \mathbf{v}_3 = (4, -1, 2)$
- Suponha que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  são vetores em  $R^3$  com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão numa mesma reta.
  - $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (2, -4, -6), \mathbf{v}_3 = (-3, 6, 0)$
  - $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4), \mathbf{v}_2 = (4, 2, 3), \mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$
  - $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 8), \mathbf{v}_2 = (2, 3, 4), \mathbf{v}_3 = (-2, -3, -4)$
- (a) Mostre que os vetores  $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (6, 0, 5, 1)$  e  $\mathbf{v}_3 = (4, -7, 1, 3)$  formam um conjunto linearmente dependente em  $R^4$ .  
 (b) Expresse cada vetor como uma combinação linear dos outros dois.
- Para quais valores reais de  $\lambda$  os vetores
 
$$\mathbf{v}_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \quad \mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}), \quad \mathbf{v}_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$$
 formam um conjunto linearmente dependente em  $R^3$ ?
- Mostre que se  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é um conjunto linearmente independente de vetores, então também o são  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}, \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}, \{\mathbf{v}_1\}, \{\mathbf{v}_2\}$  e  $\{\mathbf{v}_3\}$ .
- Mostre que se  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é um conjunto linearmente independente de vetores, então também o é qualquer subconjunto não vazio de  $S$ .
- Mostre que se  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é um conjunto linearmente dependente de vetores em um espaço vetorial  $V$  e se  $\mathbf{v}_4$  é um vetor qualquer em  $V$ , então  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  também é linearmente dependente.
- Mostre que se  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é um conjunto linearmente dependente de vetores em um espaço vetorial  $V$  e se  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  são quaisquer vetores em  $V$ , então  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  também é linearmente dependente.
- Mostre que qualquer conjunto com mais do que três vetores de  $P_2$  é linearmente dependente.
- Mostre que se  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  é um conjunto linearmente independente e  $\mathbf{v}_3$  não pertence a ger  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ , então  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é linearmente independente.
- Prove: Para quaisquer vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , os vetores  $\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}$  e  $\mathbf{w} - \mathbf{u}$  formam um conjunto linearmente dependente.
- Prove: O espaço gerado por dois vetores em  $R^3$  é ou uma reta pela origem, ou um plano pela origem, ou a própria origem.
- Sob quais condições é um conjunto de um único vetor linearmente independente?

18. Os vetores  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  da parte (a) da figura dada são linearmente independentes? E os da parte (b)? Explique.

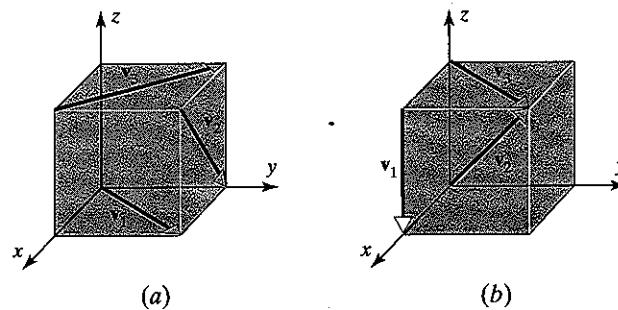


Figura Ex-18

19. Utilize identidades apropriadas, onde necessário, para determinar quais dos seguintes conjuntos de vetores em  $F(-\infty, \infty)$  são linearmente dependentes.
- (a)  $6, 3\sin^2 x, 2\cos^2 x$       (b)  $x, \cos x$       (c)  $1, \sin x, \sin 2x$   
 (d)  $\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x$       (e)  $(3-x)^2, x^2 - 6x, 5$       (f)  $0, \cos^3 \pi x, \sin^5 3\pi x$
20. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Use o wronskiano para mostrar que os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.
- (a)  $1, x, e^x$       (b)  $\sin x, \cos x, x \sin x$       (c)  $e^x, xe^x, x^2e^x$       (d)  $1, x, x^2$
21. Use a parte (a) do Teorema 5.3.1 para provar a parte (b).
22. Prove a parte (b) do Teorema 5.3.2.

## Discussão e Descoberta

23. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- (a) O conjunto das matrizes  $2 \times 2$  que contêm exatamente dois 1 e dois 0 é um conjunto linearmente independente em  $M_{2,2}$ .  
 (b) Se  $\{v_1, v_2\}$  é um conjunto linearmente dependente, então cada vetor é um múltiplo escalar do outro.  
 (c) Se  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é um conjunto linearmente independente, então também o é o conjunto  $\{k v_1, k v_2, k v_3\}$ , para cada escalar não-nulo  $k$ .  
 (d) A recíproca do Teorema 5.3.2a também vale.
24. Se  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é um conjunto linearmente dependente de vetores não-nulos, então cada vetor no conjunto pode ser obtido como uma combinação linear dos outros dois.
25. O Teorema 5.3.3 implica que quatro vetores não-nulos em  $R^3$  devem ser linearmente dependentes. Dê um argumento geométrico informal para explicar este resultado.
26. (a) No Exemplo 3 nós mostramos que os vetores mutuamente ortogonais  $i, j$  e  $k$  formam um conjunto linearmente independente de vetores em  $R^3$ . Você acredita que qualquer conjunto de três vetores não nulos e mutuamente ortogonais em  $R^3$  é linearmente independente? Justifique sua conclusão com um argumento geométrico.  
 (b) Justifique sua conclusão com um argumento algébrico. [Sugestão. Use produtos escalares.]

## 5.4 BASES E DIMENSÃO

Em geral nós pensamos numa reta como sendo unidimensional, num plano como sendo bídimensional e no espaço à nossa volta como sendo tridimensional. O principal objetivo desta seção é tornar mais precisa esta noção intuitiva de "dimensão".

### Sistemas de Coordenadas Não-retangulares

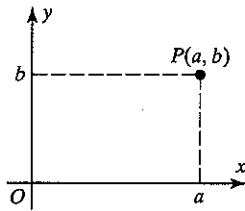
Na Geometria Analítica plana nós aprendemos a associar um ponto  $P$  no plano a um par de coordenadas  $(a, b)$  projetando  $P$  sobre um par de eixos coordenados perpendiculares (Figura 5.4.1a). Com este processo, é associado um único conjunto de coordenadas a cada ponto do plano e, reciprocamente, a cada par de coordenadas está associado um único ponto no plano. Nós descrevemos isto dizendo que o sistema de coordenadas estabelece uma **correspondência biunívoca** entre os pontos do

plano e os pares ordenados de números reais. Embora os eixos coordenados perpendiculares sejam os mais comuns, podemos usar quaisquer duas retas não-paralelas para definir um sistema de coordenadas no plano. Por exemplo, na Figura 5.4.1b nós associamos um par de coordenadas  $(a, b)$  ao ponto  $P$  projetando-o paralelamente aos eixos coordenados não-paralelos. Analogamente, no espaço tridimensional, podemos definir um sistema de coordenadas utilizando quaisquer três retas não-coplanares.

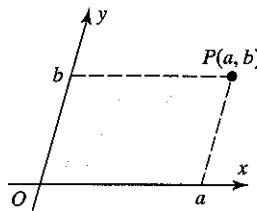
Nosso primeiro objetivo nesta seção é estender o conceito de sistema de coordenadas a espaços vetoriais arbitrários. Para começar, será útil reformular a noção de sistema de coordenadas nos espaços bi e tridimensionais usando vetores em vez de eixos coordenados para especificar o sistema de coordenadas. Isto pode ser feito substituindo cada eixo coordenado por um vetor de comprimento 1 que aponta na direção e no sentido positivo do eixo. Na Figura 5.4.2a, por exemplo,  $v_1$  e  $v_2$  são tais vetores. Como ilustramos na figura, se  $P$  é um ponto qualquer no plano,

podemos projetar  $P$  paralelamente a  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  para ter  $\overrightarrow{OP}$  como a diagonal do paralelogramo determinado por  $a\mathbf{v}_1$  e  $b\mathbf{v}_2$  e portanto escrever o vetor  $\overrightarrow{OP}$  como uma combinação linear de  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ :

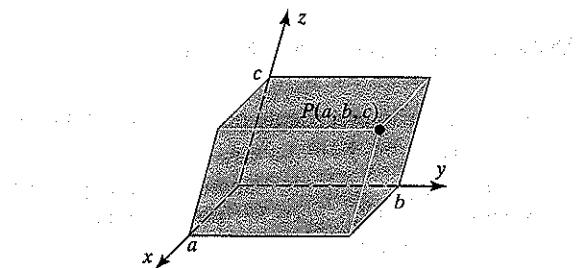
$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$



(a) As coordenadas de  $P$  num sistema de coordenadas retangulares no espaço bidimensional



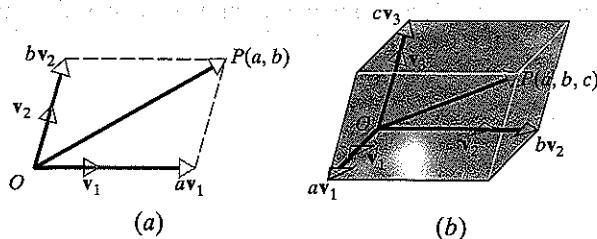
(b) As coordenadas de  $P$  num sistema de coordenadas não-retangulares no espaço bidimensional



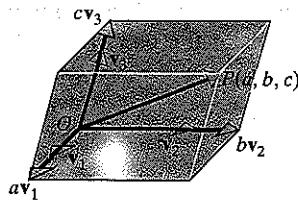
(c) As coordenadas de  $P$  num sistema de coordenadas não-retangulares no espaço tridimensional

**Figura 5.4.1**

É evidente que os números  $a$  e  $b$  desta fórmula vetorial são precisamente as coordenadas de  $P$  no sistema de coordenadas da Figura 5.4.1b. Analogamente, as coordenadas  $(a, b, c)$  do ponto  $P$  da Figura 5.4.1c podem ser obtidas escrevendo  $\overrightarrow{OP}$  como uma combinação linear dos vetores indicados na Figura 5.4.2b.



(a)



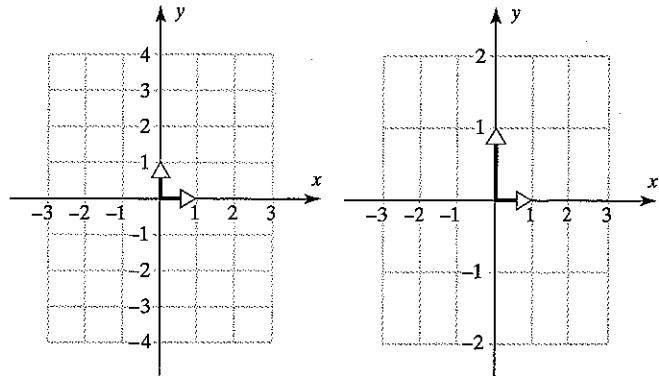
(b)

**Figura 5.4.2**

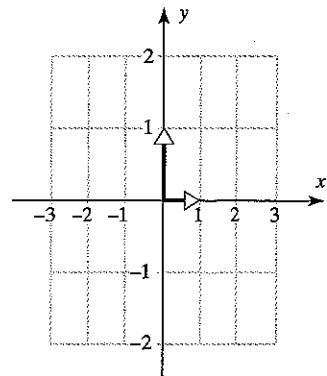
Enunciado informalmente, dizemos que os vetores que especificam um sistema de coordenadas são os “vetores de base” do sistema. Mesmo tendo usado vetores de base de com-

primento 1 acima, veremos daqui a pouco que isto não é essencial—vetores não-nulos de qualquer comprimento são suficientes.

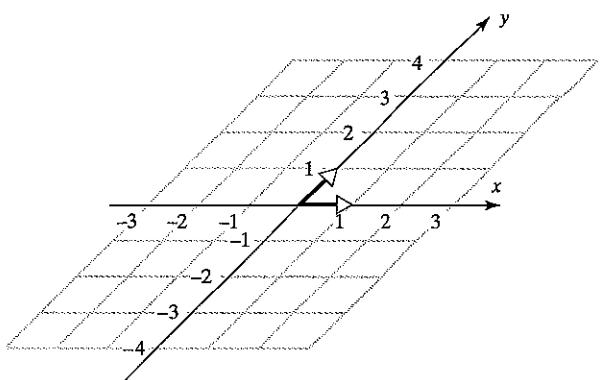
Um ingrediente essencial de qualquer sistema de coordenadas é a escala da medida de comprimento ao longo dos eixos coordenados. Em geral, tenta-se utilizar a mesma escala em cada eixo e espaçamos os pontos inteiros por uma unidade de distância. No entanto, isto nem sempre é prático ou adequado: Escalas diferentes, ou escalas em que os pontos inteiros estão a mais ou a menos do que uma unidade de distância, podem ser necessárias para encaixar um gráfico numa página impressa ou para representar quantidades físicas com unidades diferentes num mesmo sistema de coordenadas (por exemplo, tempo em segundos em um dos eixos e temperatura em centenas de graus no outro). Quando um sistema de coordenadas é especificado por um conjunto de vetores de base, então os comprimentos destes vetores correspondem às distâncias entre pontos inteiros sucessivos nos eixos coordenados (Figura 5.4.3). Assim, é o sentido dos vetores de base que define o sentido positivo nos eixos coordenados e o comprimento dos vetores de base é que estabelece a escala de medida.



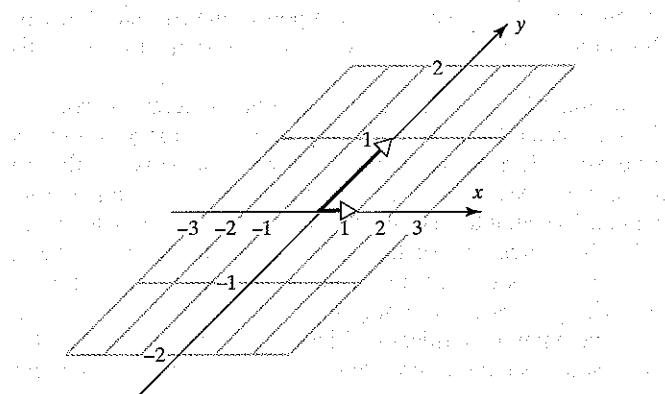
(a) Escalas idênticas. Eixos perpendiculares.



(b) Escalas diferentes. Eixos perpendiculares.



(c) Escalas idênticas. Eixos oblíquos.



(d) Escalas diferentes. Eixos oblíquos.

**Figura 5.4.3**

A seguinte definição-chave vai tornar estas idéias mais precisas e permitir estender o conceito de sistema de coordenadas a espaços vetoriais arbitrários.

### Definição

Se  $V$  é um espaço vetorial qualquer e  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é um conjunto de vetores em  $V$ , dizemos que  $S$  é uma **base** de  $V$  se valerem as seguintes condições:

- (a)  $S$  é linearmente independente.
- (b)  $S$  gera  $V$ .

A base é a generalização para espaços vetoriais arbitrários do sistema de coordenadas em espaços bi e tridimensionais. O teorema a seguir ajuda a elucidar esta afirmação.

### Teorema 5.4.1

#### Unicidade da Representação em Base

Se  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de um espaço vetorial  $V$ , então cada vetor em  $V$  pode ser expresso da forma  $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$  de uma única maneira.

**Prova.** Como  $S$  gera  $V$ , segue da definição de conjunto gerador que cada vetor de  $V$  pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores em  $S$ . Para ver por que só existe *uma* maneira de expressar um vetor como uma combinação linear dos vetores em  $S$ , suponha que um certo vetor possa ser escrito como

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

e também como

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$0 = (c_1 - k_1)v_1 + (c_2 - k_2)v_2 + \dots + (c_n - k_n)v_n$$

Como o lado direito desta equação é uma combinação linear dos vetores em  $S$ , a independência linear de  $S$  implica

$$c_1 - k_1 = 0, \quad c_2 - k_2 = 0, \dots, \quad c_n - k_n = 0$$

ou seja,

$$c_1 = k_1, \quad c_2 = k_2, \dots, \quad c_n = k_n$$

Assim, as duas expressões para  $v$  são a mesma. ■

**Coordenadas em Relação a uma Base** Se  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de um espaço vetorial  $V$  e se

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

é a expressão de um vetor  $v$  em termos desta base  $S$ , então os escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são chamados as **coordenadas** de  $v$  em relação à base  $S$ . O vetor  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  em  $R^n$  construído destas coordenadas é chamado **vetor de coordenadas de  $v$  em relação a  $S$**  e é denotado por

$$(v)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

**OBSERVAÇÃO.** Deve ser notado que os vetores de coordenadas dependem não só da base  $S$  mas também da ordem na qual escrevemos os vetores da base; uma mudança na ordem dos vetores da base resulta numa mudança correspondente da ordem das entradas nos vetores de coordenadas.

### EXEMPLO 1 A Base Canônica de $R^3$

No Exemplo 3 da seção precedente nós mostramos que se

$$i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad k = (0, 0, 1)$$

então  $S = \{i, j, k\}$  é um conjunto linearmente independente em  $R^3$ . Este conjunto também gera  $R^3$ , pois qualquer vetor  $v = (a, b, c)$  em  $R^3$  pode ser escrito como

$$v = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = ai + bj + ck \quad (1)$$

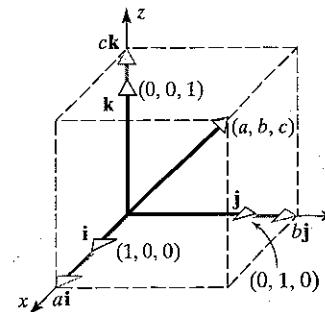
Assim,  $S$  é uma base de  $R^3$ , denominada **base canônica** de  $R^3$ . Olhando para os coeficientes de  $i, j$  e  $k$  em (1), segue que as coordenadas de  $v$  em relação à base canônica são  $a, b$  e  $c$ , de modo que

$$(v)_S = (a, b, c)$$

Comparando este resultado com (1), vemos que

$$v = (v)_S$$

Esta equação diz que os componentes de um vetor  $v$  em relação a um sistema de coordenadas retangulares  $xyz$  coincidem com as coordenadas de  $v$  em relação à base canônica; assim, tanto o sistema de coordenadas quanto a base produzem exatamente a mesma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço tridimensional e os ternos ordenados de números reais (Figura 5.4.4).

**Figura 5.4.4**

Os resultados do exemplo acima constituem um caso particular dos resultados do próximo exemplo.

**EXEMPLO 2 A Base Canônica de  $R^n$** 

No Exemplo 3 da seção precedente nós mostramos que se

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

então

$$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

é um conjunto linearmente independente em  $R^n$ . Além disto, este conjunto também gera  $R^n$ , pois qualquer vetor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  em  $R^n$  pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n \quad (2)$$

Assim,  $S$  é uma base de  $R^n$ , denominada **base canônica** de  $R^n$ . Segue de (2) que as coordenadas de  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  em relação à base canônica são  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , de modo que

$$(\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Como no Exemplo 1, nós temos  $\mathbf{v} = (\mathbf{v})_S$ , de modo que são iguais um vetor  $\mathbf{v}$  e seu vetor de coordenadas em relação à base canônica de  $R^n$ .

**OBSERVAÇÃO.** Nós veremos num exemplo posterior que um vetor não é igual ao seu vetor de coordenadas; a igualdade que observamos nos dois exemplos acima é uma situação especial que ocorre somente com a base canônica de  $R^n$ .

**OBSERVAÇÃO.** Em  $R^2$  e  $R^3$ , os vetores da base canônica costumam ser denotados por  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  em vez de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ . Nós utilizaremos ambas notações, dependendo da situação.

**EXEMPLO 3 Demonstrando que um Conjunto de Vetores é uma Base**

Sejam  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$  e  $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ . Mostre que o conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é uma base de  $R^3$ .

*Solução.*

Para mostrar que o conjunto  $S$  gera  $R^3$ , nós devemos mostrar que um vetor  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  qualquer pode ser expresso como uma combinação linear

$$\mathbf{b} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$$

dos vetores em  $S$ . Expressando esta equação em termos de componentes, temos

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

ou

$$(b_1, b_2, b_3) = (c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3)$$

ou, igualando componentes correspondentes,

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 + 4c_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, para mostrar que  $S$  gera  $R^3$ , nós devemos mostrar que o sistema (3) tem solução para qualquer escolha de  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ .

Para mostrar que  $S$  é linearmente independente, nós devemos mostrar que a única solução de

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad (4)$$

é  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Como acima, se (4) é expresso em termos de componentes, a verificação da independência reduz-se a mostrar que o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

tem somente a solução trivial. Observe que os sistemas (3) e (5) têm a mesma matriz de coordenadas. Assim, pelas partes (b), (e) e (g) do Teorema 4.3.4, nós podemos provar simultaneamente que  $S$  é linearmente independente e que gera  $R^3$  demonstrando que a matriz de coeficientes dos sistemas (3) e (5) tem determinante não-zero. Escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ nós obtemos } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

e portanto  $S$  é uma base de  $R^3$ .

**EXEMPLO 4 Representando um Vetor Usando Duas Bases**

Seja  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  a base de  $R^3$  do exemplo precedente.

- Encontre o vetor de coordenadas de  $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$  em relação a  $S$ .
- Encontre o vetor  $\mathbf{v}$  em  $R^3$  cujo vetor de coordenadas em relação à base  $S$  é  $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$ .

*Solução (a).* Nós devemos encontrar escalares  $c_1, c_2$  e  $c_3$  tais que

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$$

ou, em termos de componentes,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtemos  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -1$ ,  $c_3 = 2$  (verifique). Portanto

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

*Solução (b).* Usando a definição de vetor de coordenadas  $(\mathbf{v})_S$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7) \end{aligned}$$

**EXEMPLO 5 A Base Canônica de  $P_n$** 

- Mostre que  $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  é uma base para o espaço vetorial  $P_n$  dos polinômios da forma  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ .

- Encontre o vetor de coordenadas do polinômio  $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$  em relação à base  $S = \{1, x, x^2\}$  de  $P_2$ .

*Solução (a).* No Exemplo 11 da Seção 5.2 nós mostramos que  $S$  gera  $P_n$  e no Exemplo 5 da Seção 5.3 nós mostramos que  $S$  é um

conjunto linearmente independente. Assim,  $S$  é uma base de  $P_n$ ; esta base é chamada de **base canônica** de  $P_n$ .

**Solução (b).** As coordenadas de  $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$  são os coeficientes escalares dos vetores  $1$ ,  $x$  e  $x^2$  da base, de modo que  $(\mathbf{p})_S = (a_0, a_1, a_2)$ .  $\diamond$

### EXEMPLO 6 A Base Canônica de $M_{mn}$

Sejam

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O conjunto  $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$  é uma base do espaço vetorial  $M_{22}$  das matrizes  $2 \times 2$ . Para ver que  $S$  gera  $M_{22}$ , observe que um vetor (uma matriz)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

arbitrário pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 \end{aligned}$$

Para ver que  $S$  é linearmente independente, suponha que

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0$$

ou seja,

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segue-se que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,  $a = b = c = d = 0$  e portanto  $S$  é linearmente independente. A base  $S$  deste exemplo é chamada a **base canônica** de  $M_{22}$ . Mais geralmente, a **base canônica** de  $M_{mn}$  consiste das  $mn$  matrizes distintas com uma única entrada  $1$  e todas as demais entradas iguais a zero.  $\diamond$

### EXEMPLO 7 Uma Base para o Subespaço ger [S]

Se  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial  $V$ , então  $S$  é uma base do subespaço gerado ger ( $S$ ) pois o conjunto  $S$  gera ger ( $S$ ) por definição de ger ( $S$ ).  $\diamond$

#### Definição

Um espaço vetorial não-nulo  $V$  é chamado de **dimensão finita** se contém um conjunto finito  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de vetores que constitui uma base de  $V$ . Se não existir um tal conjunto, dizemos que  $V$  é de **dimensão infinita**. Além disto, consideramos o espaço vetorial nulo como sendo de dimensão finita.

### EXEMPLO 8 Alguns Espaços de Dimensão Finita e Infinita

Pelos Exemplos 2, 5 e 6, os espaços vetoriais  $R^n$ ,  $P_n$  e  $M_{mn}$  são de dimensão finita. Os espaços  $F(-\infty, \infty)$ ,  $C(-\infty, \infty)$ ,  $C^m(-\infty, \infty)$  e  $C^\infty(-\infty, \infty)$  são de dimensão infinita (Exercício 23).  $\diamond$

Nosso próximo teorema dá a chave para o conceito de dimensão.

#### Teorema 5.4.2

Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  uma base qualquer de  $V$ .

- (a) Um conjunto com mais do que  $n$  vetores é linearmente dependente.
- (b) Um conjunto com menos do que  $n$  vetores não gera  $V$ .

**Prova (a).** Seja  $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  um conjunto qualquer de  $m$  vetores em  $V$ , onde  $m > n$ . Nós queremos mostrar que  $S'$  é linearmente dependente. Como  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é uma base, cada  $\mathbf{w}_i$  pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores em  $S$ , digamos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_2 &= a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{v}_n \\ &\vdots && \vdots \\ \mathbf{w}_m &= a_{m1}\mathbf{v}_1 + a_{m2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{6}$$

Para mostrar que  $S'$  é linearmente dependente, nós devemos encontrar escalares  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , não todos zero, tais que

$$k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \tag{7}$$

Usando as equações de (6), podemos reescrever (7) como

$$\begin{aligned} (k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_ma_{1n})\mathbf{v}_1 \\ + (k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_ma_{2n})\mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ + (k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \cdots + k_ma_{nn})\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Assim, pela independência linear de  $S$ , o problema de provar que  $S'$  é um conjunto linearmente independente reduz-se a mostrar que existem escalares  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , não todos zero, que satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_m &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_m &= 0 \\ &\vdots && \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nn}k_m &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

No entanto, (8) tem mais incógnitas do que equações, de modo que a prova está completa, pois o Teorema 1.2.1 garante a existência de soluções não-triviais.

**Prova (b).** Seja  $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  um conjunto qualquer de  $m$  vetores em  $V$ , onde  $m < n$ . Nós queremos mostrar que  $S'$  não gera  $V$ . A prova será por contradição: Nós vamos mostrar que supondo que  $S'$  gera  $V$  leva a uma contradição da independência linear de  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ .

Se  $S'$  gera  $V$ , então cada vetor em  $V$  é uma combinação linear dos vetores em  $S'$ . Em particular, cada vetor  $v_i$  da base é uma combinação linear dos vetores em  $S'$ , digamos

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ v_2 &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots && \vdots \\ v_n &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned} \quad (9)$$

Para obter nossa contradição, nós mostraremos que existem escalares  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , não todos zero, tais que

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = \mathbf{0} \quad (10)$$

No entanto, observe que (9) e (10) têm a mesma forma que (6) e (7) exceto pela permutação de  $m$  com  $n$  e dos vetores  $w$  com os vetores  $v$ . Assim, a conta que nos levou a (8) agora fornece

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n &= 0 \\ &\vdots && \vdots && \vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}k_n &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tem mais incógnitas do que equações, de modo que possui soluções não-triviais pelo Teorema 1.2.1. ■

Segue do teorema acima que se  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base qualquer de um espaço vetorial  $V$ , então todos os conjuntos em  $V$  que simultaneamente geram  $V$  e são linearmente independentes devem ter precisamente  $n$  vetores. Assim, todas as bases de  $V$  devem ter o mesmo número de vetores do que a base arbitrária  $S$ . Isto prova o próximo resultado, que é um dos mais importantes resultados em Álgebra Linear.

### Teorema 5.4.3

Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

Para ver como este teorema é relacionado com o conceito de "dimensão," recorde que a base canônica de  $R^n$  tem  $n$  vetores (Exemplo 2). Assim, o Teorema 5.4.3 implica que todas as bases de  $R^n$  têm  $n$  vetores. Em particular, todas as bases de  $R^3$  têm 3 vetores, todas as bases de  $R^2$  têm 2 vetores e todas as bases de  $R^1$  ( $= R$ ) têm um vetor. Intuitivamente,  $R^3$  é tridimensional,  $R^2$  (um plano) é bidimensional e  $R$  (uma reta) é unidimensional. Assim, o número de vetores numa base é o mesmo que a dimensão, para os espaços familiares. Isto sugere a seguinte definição.

### Definição

A **dimensão** de um espaço vetorial de dimensão finita  $V$  é definida como o número de vetores de uma base de  $V$  e denotada por  $\dim(V)$ . Além disto, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

**OBSERVAÇÃO:** Daqui em diante nós seguimos uma convenção comum de considerar o conjunto vazio como sendo a base do

espaço vetorial nulo. Isto é consistente com a definição dada, pois o conjunto vazio não tem vetores e o espaço vetorial nulo tem dimensão zero.

### EXEMPLO 9 Dimensão de alguns Espaços Vetoriais

$$\begin{aligned} \dim(R^n) &= n & [\text{A base canônica tem } n \text{ vetores (Exemplo 2).}] \\ \dim(P_n) &= n+1 & [\text{A base canônica tem } n+1 \text{ vetores (Exemplo 5).}] \\ \dim(M_{m,n}) &= mn & [\text{A base canônica tem } mn \text{ vetores (Exemplo 6).}] \end{aligned}$$

### EXEMPLO 10 Dimensão de um Espaço-Solução

Determine uma base e a dimensão do espaço-solução do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &+ x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &- x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

*Solução.*

No Exemplo 7 da Seção 1.2 foi mostrado que a solução geral deste sistema é

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

Portanto, podemos escrever os vetores-solução como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o que mostra que os vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

geram o espaço-solução. Como também são linearmente independentes (verifique), resulta que  $\{v_1, v_2\}$  é uma base e o espaço-solução é bidimensional. ♦

**Alguns Teoremas Fundamentais** Nós dedicaremos o restante desta seção a uma série de teoremas que revelam a util inter-relação entre os conceitos de gerador, independência linear, base e dimensão. Estes teoremas não são um exercício fútil de matemática teórica—eles são essenciais ao entendimento de espaços vetoriais e neles são baseadas muitas das aplicações práticas da Álgebra Linear.

O próximo teorema, que nós chamamos de *Teorema de Mais-Menos* (nossa própria nomenclatura), estabelece dois princípios básicos dos quais dependem a maioria dos teoremas a seguir.

**Teorema 5.4.4****Teorema de Mais-Menos**

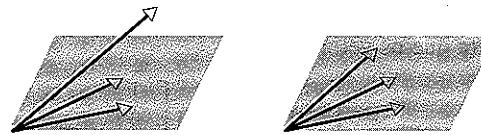
Seja  $S$  um conjunto não-vazio de vetores em um espaço vetorial  $V$ .

- (a) Se  $S$  é um conjunto linearmente independente e se  $v$  é um vetor em  $V$  que está fora do ger ( $S$ ), então o conjunto  $S \cup \{v\}$  que resulta acrescentando  $v$  a  $S$  é ainda linearmente independente.
- (b) Se  $v$  é um vetor em  $S$  que pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores de  $S$  e se  $S - \{v\}$  denota o conjunto obtido removendo  $v$  de  $S$ , então  $S$  e  $S - \{v\}$  geram o mesmo espaço, ou seja,

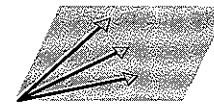
$$\text{ger}(S) = \text{ger}(S - \{v\})$$

Nós iremos adiar a prova para o final da seção, para poder passar de imediato às consequências do teorema. No entanto, podemos visualizar o teorema em  $R^3$  como segue:

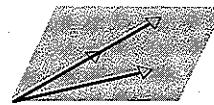
- (a) Um conjunto  $S$  de dois vetores linearmente independentes em  $R^3$  gera um plano pela origem. Se nós aumentarmos  $S$  acrescentando um vetor  $v$  qualquer de fora deste plano (Figura 5.4.5a), então o conjunto resultante de três vetores é ainda linearmente independente pois nenhum dos três vetores é coplanar com os outros dois.
- (b) Se  $S$  é um conjunto de três vetores não-colineares em  $R^3$  que estão num mesmo plano comum pela origem (Figura 5.4.5b, c), então os três vetores geram o plano. No entanto, se nós removermos de  $S$  qualquer vetor  $v$  que é uma combinação linear dos outros dois, os dois vetores que permanecem continuam gerando o plano.



(a) Nenhum dos três vetores está no mesmo plano que os outros dois.



(b) Qualquer um dos vetores pode ser removido e os dois restantes continuam gerando o plano.



(c) Qualquer um dos dois vetores colineares pode ser removido e os dois restantes continuam gerando o plano.

**Figura 5.4.5**

Em geral, para mostrar que um conjunto de vetores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de um espaço vetorial  $V$ , nós devemos

mostrar que os vetores são linearmente independentes e que geram  $V$ . No entanto, se soubermos que  $V$  tem dimensão  $n$  (de modo que  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  tem o número correto de vetores de uma base), então basta verificar *ou* que são linearmente independentes *ou* que geram—a outra condição é automaticamente satisfeita. Este é o conteúdo do seguinte teorema.

**Teorema 5.4.5**

Se  $V$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional e se  $S$  é um conjunto em  $V$  com exatamente  $n$  vetores, então  $S$  é uma base de  $V$  se  $S$  ou gera  $V$  ou é linearmente independente.

**Prova.** Suponha que  $S$  tem exatamente  $n$  vetores e que gera  $V$ . Para provar que  $S$  é uma base nós devemos mostrar que  $S$  é um conjunto linearmente independente. Se isto não for o caso, então algum vetor  $v$  de  $S$  é uma combinação linear dos demais vetores de  $S$ . Removendo este vetor de  $S$ , segue pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4b) que o conjunto resultante de  $n - 1$  vetores ainda gera  $V$ . Mas isto é impossível, pois do Teorema 5.4.2b segue que nenhum conjunto com menos do que  $n$  vetores pode gerar um espaço vetorial  $n$ -dimensional. Assim,  $S$  é linearmente independente.

Suponha que  $S$  tem  $n$  vetores e que é um conjunto linearmente independente. Para provar que  $S$  é uma base nós devemos mostrar que  $S$  gera  $V$ . Se isto não for o caso, então algum vetor  $v$  de  $V$  não está no ger ( $S$ ). Acrescentando este vetor a  $S$ , segue pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4a) que o conjunto resultante de  $n + 1$  vetores ainda é linearmente independente. Mas isto é impossível, pois do Teorema 5.4.2a segue que nenhum conjunto com mais do que  $n$  vetores em um espaço vetorial  $n$ -dimensional pode ser linearmente independente. Assim,  $S$  gera  $V$ . ■

**EXEMPLO 1.1 Verificando uma Base**

- (a) Mostre por inspeção que  $v_1 = (-3, 7)$  e  $v_2 = (5, 5)$  formam uma base de  $R^2$ .
- (b) Mostre por inspeção que  $v_1 = (2, 0, -1)$ ,  $v_2 = (4, 0, 7)$  e  $v_3 = (-1, 1, 4)$  formam uma base de  $R^3$ .

**Solução (a).** Como nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro, os dois vetores formam um conjunto linearmente independente no espaço bidimensional  $R^2$  e portanto constituem uma base, pelo Teorema 5.4.5.

**Solução (b).** Os vetores  $v_1$  e  $v_2$  formam um conjunto linearmente independente no plano  $xz$  (por que?). O vetor  $v_3$  está fora do plano  $xz$  e portanto o conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  também é linearmente independente. Como  $R^3$  é tridimensional, o Teorema 5.4.5 implica que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é uma base de  $R^3$ . ♦

O próximo teorema mostra que em espaços vetoriais  $V$  de dimensão finita, cada conjunto gerador contém nele uma base de  $V$  e qualquer conjunto linearmente independente é parte de alguma base de  $V$ .

**Teorema 5.4.6**

Seja  $S$  um conjunto finito de vetores em um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita.

- Se  $S$  gera  $V$  mas não é uma base de  $V$ , então  $S$  pode ser reduzido a uma base de  $V$  removendo vetores apropriados de  $S$ .*
- Se  $S$  é um conjunto linearmente independente que não é uma base de  $V$ , então  $S$  pode ser ampliado para uma base de  $V$  acrescentando vetores apropriados a  $S$ .*

**Prova (a).** Se  $S$  é um conjunto de vetores que gera  $V$  mas não é uma base de  $V$ , então  $S$  é um conjunto linearmente dependente. Assim, algum vetor  $v$  de  $S$  pode ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores de  $S$ . Pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4b) nós podemos remover  $v$  de  $S$  e o conjunto resultante  $S'$  ainda gera  $V$ . Se  $S'$  é linearmente independente, então  $S'$  é uma base de  $V$  e podemos parar. Se  $S'$  é linearmente dependente, então podemos remover algum vetor apropriado de  $S'$  para obter um conjunto  $S''$  que ainda gera  $V$ . Nós podemos continuar removendo vetores desta maneira até chegar num conjunto de vetores em  $S$  que é linearmente independente e que gera  $V$ . Este subconjunto de  $S$  é uma base de  $V$ .

**Prova (b).** Suponha que  $\dim(V) = n$ . Se  $S$  é um conjunto linearmente independente que não é uma base de  $V$ , então  $S$  não gera  $V$  e portanto existe algum vetor  $v$  em  $V$  que não está no ger ( $S$ ). Pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4a) nós podemos acrescentar  $v$  a  $S$  e o conjunto resultante  $S'$  ainda é linearmente independente. Se  $S'$  gera  $V$ , então  $S'$  é uma base de  $V$  e podemos parar. Se  $S'$  não gera  $V$ , então podemos acrescentar algum vetor apropriado a  $S'$  para obter um conjunto  $S''$  que ainda é linearmente independente. Nós podemos continuar acrescentando vetores desta maneira até chegar num conjunto de  $n$  vetores linearmente independentes em  $V$ . Este conjunto será uma base de  $V$  pelo Teorema 5.4.5. ■

Na próxima seção nós daremos exemplos numéricos para ilustrar este teorema.

Pode ser provado (Exercício 29) que qualquer subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita é de dimensão finita. Nós concluímos esta seção com um teorema que mostra que a dimensão de um subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita  $V$  não pode exceder a dimensão do próprio espaço  $V$  e que a única maneira de um subespaço ter a mesma dimensão que o próprio espaço  $V$  é sendo igual ao espaço todo. A Figura 5.4.6 ilustra esta idéia em  $R^3$ . Nesta figura, observe que os subespaços sucessivamente maiores aumentam de dimensão.

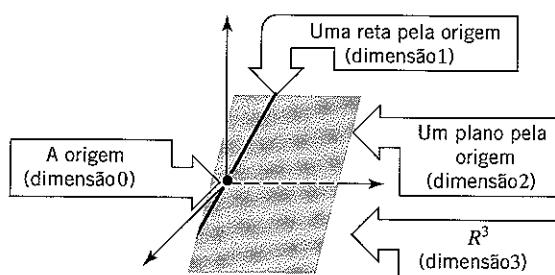


Figura 5.4.6

**Teorema 5.4.7**

Se  $W$  é um subespaço de um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita, então  $\dim(W) \leq \dim(V)$ ; além disto, se  $\dim(W) = \dim(V)$ , então  $W = V$ .

**Prova.** Como  $V$  é de dimensão finita,  $W$  também é de dimensão finita pelo Exercício 29. Suponha, então, que  $S = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  é uma base de  $W$ . Ou  $S$  também é uma base de  $V$  ou não. Se for, então  $\dim(W) = \dim(V) = m$ . Se não for, então pelo Teorema 5.4.6b podemos acrescentar vetores ao conjunto linearmente independente  $S$  para torná-lo uma base de  $V$  e portanto  $\dim(W) < \dim(V)$ . Em qualquer caso,  $\dim(W) \leq \dim(V)$ . Se  $\dim(W) = \dim(V)$ , então  $S$  é um conjunto de  $m$  vetores linearmente independentes no espaço vetorial  $V$  de dimensão  $m$ ; logo,  $S$  é uma base de  $V$  pelo Teorema 5.4.5. Isto implica que  $W = V$  (por que?). ■

**Provas Adicionais**

**Prova do Teorema 5.4.4a.** Suponha que  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  é um conjunto linearmente independente de vetores em  $V$  e que  $v$  é um vetor em  $V$  que está fora do ger ( $S$ ). Para mostrar que  $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_r, v\}$  é um conjunto linearmente independente, nós devemos mostrar que os únicos escalares que satisfazem a equação

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r + k_{r+1} v = 0 \quad (11)$$

são  $k_1 = k_2 = \cdots = k_{r+1} = 0$ . Mas nós devemos ter  $k_{r+1} = 0$  pois, caso contrário, nós poderíamos resolver (11) em  $v$  como uma combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , contradizendo a nossa hipótese que  $v$  está fora do ger ( $S$ ). Assim, (11) simplifica para

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0 \quad (12)$$

o que implica, pela independência linear de  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ , que

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

**Prova do Teorema 5.4.4b.** Suponha que  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  é um conjunto de vetores em  $V$  e, para sermos específicos, suponha que  $v_r$  é uma combinação de  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$ , digamos,

$$v_r = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{r-1} v_{r-1} \quad (13)$$

Nós queremos mostrar que se  $v_r$  é removido de  $S$ , então o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$  que resta ainda gera ger ( $S$ ), ou seja, devemos mostrar que cada vetor  $w$  em ger ( $S$ ) pode ser expresso como uma combinação linear de  $\{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$ . Mas se  $w$  é um vetor em ger ( $S$ ) então  $w$  pode ser expresso na forma

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{r-1} v_{r-1} + k_r v_r$$

ou então, substituindo (13),

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{r-1} v_{r-1} + k_r(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{r-1} v_{r-1})$$

que dá  $w$  como uma combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$ . ■

**Conjunto de Exercícios 5.4**

1. Explique por que os seguintes conjuntos de vetores *não* são bases dos espaços vetoriais indicados. (Faça este exercício por inspeção.)

- (a)  $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 3)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (2, 7)$  de  $R^2$
- (b)  $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (6, 1, 1)$  de  $R^3$
- (c)  $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2$ ,  $\mathbf{p}_2 = x - 1$  de  $P_2$
- (d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$  de  $M_{22}$

2. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de  $R^2$ ?

- (a)  $(2, 1), (3, 0)$
- (b)  $(4, 1), (-7, -8)$
- (c)  $(0, 0), (1, 3)$
- (d)  $(3, 9), (-4, -12)$

3. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de  $R^3$ ?

- (a)  $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)$
- (b)  $(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)$
- (c)  $(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)$
- (d)  $(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)$

4. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de  $P_2$ ?

- (a)  $1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x$
- (b)  $4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2$
- (c)  $1 + x + x^2, x + x^2, x^2$
- (d)  $-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2$

5. Mostre que o conjunto de vetores dados é uma base de  $M_{22}$ .

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Seja  $V$  o espaço gerado por  $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$ ,  $\mathbf{v}_2 = \sin^2 x$ ,  $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$ .

- (a) Mostre que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  não é uma base de  $V$ .
- (b) Encontre uma base de  $V$ .

7. Encontre o vetor de coordenadas de  $\mathbf{w}$  em relação à base  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $R^2$ .

- (a)  $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$ ;  $\mathbf{w} = (3, -7)$
- (b)  $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$ ;  $\mathbf{w} = (1, 1)$
- (c)  $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 2)$ ;  $\mathbf{w} = (a, b)$

8. Encontre o vetor de coordenadas de  $\mathbf{v}$  em relação à base  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ .

- (a)  $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ;  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$
- (b)  $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$ ;  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

9. Encontre o vetor de coordenadas de  $\mathbf{p}$  em relação à base  $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ .

- (a)  $\mathbf{p} = 4 - 3x + x^2$ ;  $\mathbf{p}_1 = 1$ ,  $\mathbf{p}_2 = x$ ,  $\mathbf{p}_3 = x^2$
- (b)  $\mathbf{p} = 2 - x + x^2$ ;  $\mathbf{p}_1 = 1 + x$ ,  $\mathbf{p}_2 = 1 + x^2$ ,  $\mathbf{p}_3 = x + x^2$

10. Encontre o vetor de coordenadas de  $\mathbf{A}$  em relação à base  $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 11–16, determine a dimensão e encontre uma base do espaço-solução do sistema.

$$\begin{array}{lll} 11. \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0 & 12. \quad 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & 13. \quad x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 & 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 & 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 14. \quad x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 & 15. \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 & 16. \quad x + y + z = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 & x_1 + 5x_3 = 0 & 3x + 2y - 2z = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 & x_2 + x_3 = 0 & 4x + 3y - z = 0 \\ & & 6x + 5y + z = 0 \end{array}$$

17. Determine bases dos seguintes subespaços de  $R^3$ .

- (a) o plano  $3x - 2y + 5z = 0$
- (b) o plano  $x - y = 0$
- (c) a reta  $x = 2t$ ,  $y = -t$ ,  $z = 4t$
- (d) todos os vetores da forma  $(a, b, c)$  com  $b = a + c$

18. Determine as dimensões dos seguintes subespaços de  $R^4$ .
- todos os vetores da forma  $(a, b, c, 0)$
  - todos os vetores da forma  $(a, b, c, d)$ , onde  $d = a + b$  e  $c = a - b$
  - todos os vetores da forma  $(a, b, c, d)$ , onde  $a = b = c = d$
19. Determine a dimensão do subespaço de  $P_3$  consistindo de todos os polinômios  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$  para os quais  $a_0 = 0$ .
20. Encontre um vetor da base canônica que pode ser acrescentado ao conjunto  $\{v_1, v_2\}$  para formar uma base de  $R^3$ .
- $v_1 = (-1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (1, -2, -2)$
  - $v_1 = (1, -1, 0)$ ,  $v_2 = (3, 1, -2)$
21. Encontre vetores da base canônica que podem ser acrescentados ao conjunto  $\{v_1, v_2\}$  para formar uma base de  $R^4$ .
- $$v_1 = (1, -4, 2, -3), v_2 = (-3, 8, -4, 6)$$
22. Seja  $\{v_1, v_2, v_3\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$ . Mostre que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  também é uma base, onde  $u_1 = v_1$ ,  $u_2 = v_1 + v_2$  e  $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ .
23. (a) Mostre que podemos encontrar  $n + 1$  vetores linearmente independentes em  $F(-\infty, \infty)$ , para cada inteiro positivo  $n$ . [Sugestão. Procure polinômios.]
- Use o resultado da parte (a) para provar que  $F(-\infty, \infty)$  tem dimensão infinita.
  - Prove que  $C(-\infty, \infty)$ ,  $C^m(-\infty, \infty)$  e  $C^\infty(-\infty, \infty)$  são espaços vetoriais de dimensão infinita.
24. Seja  $S$  uma base de um espaço vetorial  $n$ -dimensional  $V$ . Mostre que se  $v_1, v_2, \dots, v_r$  formam um conjunto linearmente independente de vetores em  $V$ , então os vetores de coordenadas  $(v_1)_S, (v_2)_S, \dots, (v_r)_S$  formam um conjunto linearmente independente em  $R^n$  e reciprocamente.
25. Usando a notação do Exercício 24, mostre que se  $v_1, v_2, \dots, v_r$  geram  $V$ , então os vetores de coordenadas  $(v_1)_S, (v_2)_S, \dots, (v_r)_S$  geram  $R^n$  e reciprocamente.
26. Encontre uma base do subespaço de  $P_2$  gerado pelos vetores dados.
- $-1 + x - 2x^2, 3 + 3x + 6x^2, 9$
  - $1 + x, x^2, -2 + 2x$
  - $1 + x - 3x^2, 2 + 2x - 6x^2, 3 + 3x - 9x^2$
- [Sugestão. Seja  $S$  a base canônica de  $P_2$  e trabalhe com os vetores de coordenadas em relação a  $S$ ; repare nos Exercícios 24 e 25.]
27. A figura dada mostra um sistema de coordenadas retangulares  $xy$  e um sistema de coordenadas  $x'y'$  com eixos oblíquos. Supondo que em todos os eixos foram utilizadas escalas de uma unidade, encontre as coordenadas  $x'y'$  dos pontos cujas coordenadas  $xy$  estão dadas.
- $(1, 1)$
  - $(1, 0)$
  - $(0, 1)$
  - $(a, b)$

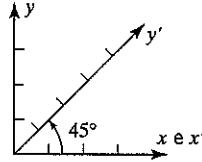


Figura Ex-27

28. A figura dada mostra um sistema de coordenadas retangulares  $xy$  determinado pelos vetores unitários  $i$  e  $j$  da base canônica e um sistema de coordenadas  $x'y'$  determinado pelos vetores unitários  $u_1$  e  $u_2$  de uma outra base. Encontre as coordenadas  $x'y'$  dos pontos cujas coordenadas  $xy$  estão dadas.
- $(\sqrt{3}, 1)$
  - $(1, 0)$
  - $(0, 1)$
  - $(a, b)$

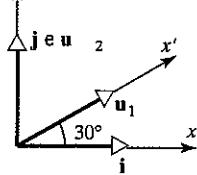


Figura Ex-28

29. Prove: Qualquer subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita tem dimensão finita.

### Discussão e Descoberta

30. A base de  $M_{22}$  que fornecemos no Exemplo 6 é formada por matrizes não-invertíveis. Você acredita que exista uma base de  $M_{22}$  consistindo de matrizes invertíveis? Justifique sua resposta.
31. (a) O espaço vetorial de todas as matrizes  $n \times n$  diagonais tem dimensão \_\_\_\_\_
- (b) O espaço vetorial de todas as matrizes  $n \times n$  simétricas tem dimensão \_\_\_\_\_
- (c) O espaço vetorial de todas as matrizes  $n \times n$  triangulares superiores tem dimensão \_\_\_\_\_

32. (a) Para uma matriz  $A$   $3 \times 3$ , explique em palavras por que o conjunto  $I_3, A, A^2, \dots, A^9$  precisa ser linearmente independente se as dez matrizes forem distintas.  
 (b) Enuncie um resultado correspondente para matrizes  $A$   $n \times n$ .
33. Enuncie as duas partes do Teorema 5.4.2 na forma de contraposição lógica. [Veja o Exercício 34 da Seção 1.4.]
34. (a) A equação  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  pode ser vista como um sistema linear de uma equação em  $n$  incógnitas. Faça uma conjectura sobre a dimensão do espaço-solução desta equação.  
 (b) Confirme sua conjectura encontrando uma base.
35. (a) Mostre que o conjunto  $W$  dos polinômios em  $P_2$  tais que  $p(1) = 0$  é um subespaço de  $P_2$ .  
 (b) Faça uma conjectura sobre a dimensão de  $W$ .  
 (c) Confirme sua conjectura encontrando uma base de  $W$ .

## 5.5 ESPAÇO-LINHA, ESPAÇO-COLUNA E ESPAÇO-NULO

Nesta seção nós estudaremos três espaços vetoriais importantes associados com matrizes. Nossa trabalho aqui nos fornecerá um entendimento mais profundo da relação entre as soluções de um sistema linear de equações e as propriedades da matriz de coeficientes.

Nós começamos com algumas definições.

### Definição

Para uma matriz  $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}] \\ \mathbf{r}_2 &= [a_{21} \ a_{22} \ \cdots \ a_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= [a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}] \end{aligned}$$

em  $\mathbb{R}^n$  formados pelas linhas de  $A$  são chamados os **vetores-linha** de  $A$  e os vetores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

em  $\mathbb{R}^m$  formados pelas colunas de  $A$  são chamados os **vetores-coluna** de  $A$ .

### EXEMPLO 1 Vetores-Linha e -Coluna de uma Matriz $2 \times 3$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Os vetores-linha de  $A$  são

$$\mathbf{r}_1 = [2 \ 1 \ 0] \text{ e } \mathbf{r}_2 = [3 \ -1 \ 4]$$

e os vetores-coluna de  $A$  são

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A seguinte definição define três espaços vetoriais importantes associados com uma matriz.

### Definição

Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então o subespaço de  $\mathbb{R}^n$  gerado pelos vetores-linha de  $A$  é chamado **espaço-linha** de  $A$  e o subespaço de  $\mathbb{R}^m$  gerado pelos vetores-coluna de  $A$  é chamado **espaço-coluna** de  $A$ . O espaço-solução do sistema homogêneo de equações  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , que é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ , é chamado o **espaço-nulo** de  $A$ .

Nesta seção e na próxima nós estaremos ocupados com as duas seguintes questões gerais:

- Quais relações existem entre as soluções de um sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e o espaço-linha, o espaço-coluna e o espaço-nulo da matriz de coeficientes  $A$ ?
- Quais relações existem entre o espaço-linha, o espaço-coluna e o espaço-nulo de uma matriz  $A$ ?

Para investigar a primeira destas questões, suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Segue da Fórmula (10) da Seção 1.3 que se  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$  denotam os vetores-coluna de  $A$ , então o produto  $A\mathbf{x}$  pode ser expresso como uma combinação linear destes vetores-coluna com coeficientes de  $\mathbf{x}$ , ou seja,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \quad (1)$$

Assim, um sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  de  $m$  equações em  $n$  incógnitas pode ser escrito como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \quad (2)$$

pelo que podemos concluir que  $Ax = \mathbf{b}$  é consistente se, e somente se,  $\mathbf{b}$  pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores-coluna de  $A$  ou, equivalentemente, se, e somente se,  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$ . Isto fornece o seguinte teorema.

### Teorema 5.5.1

Um sistema  $Ax = \mathbf{b}$  de equações lineares é consistente se, e somente se,  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$ .

### EXEMPLO 2 Um Vetor $\mathbf{b}$ no Espaço-Coluna de $A$

Seja  $Ax = \mathbf{b}$  o sistema linear

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Mostre que  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$  e expresse  $\mathbf{b}$  como uma combinação linear dos vetores-coluna de  $A$ .

*Solução.*

Resolvendo o sistema por eliminação gaussiana, obtemos (verifique)

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$

Como o sistema é consistente,  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$ . Além disto, por (2) e pela solução obtida, segue que

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

O próximo teorema estabelece uma relação fundamental entre as soluções de um sistema linear não-homogêneo  $Ax = \mathbf{b}$  e as do correspondente sistema linear homogêneo  $Ax = \mathbf{0}$  de mesma matriz de coeficientes.

### Teorema 5.5.2

Se  $\mathbf{x}_0$  denota uma solução particular de um sistema linear consistente  $Ax = \mathbf{b}$  e se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  forma uma base do espaço-nulo de  $A$ , ou seja, do espaço-solução do sistema homogêneo  $Ax = \mathbf{0}$ , então cada solução de  $Ax = \mathbf{b}$  pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k \quad (3)$$

e, reciprocamente, para qualquer escolha de escalares  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , o vetor  $\mathbf{x}$  desta fórmula é uma solução de  $Ax = \mathbf{b}$ .

*Prova.* Suponha que  $\mathbf{x}_0$  é uma solução fixada de  $Ax = \mathbf{b}$  e que  $\mathbf{x}$  é uma solução arbitrária. Então

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \quad \text{e} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Subtraindo estas equações obtemos

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

o que mostra que  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  é uma solução do sistema homogêneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Como  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  é uma base do espaço-solução deste sistema, nós podemos expressar  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  como uma combinação linear destes vetores, digamos

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k$$

Assim,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k$$

o que prova a primeira parte do teorema. Reciprocamente, para qualquer escolha dos escalares  $c_1, c_2, \dots, c_k$  em (3) nós temos

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_0 + c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k)$$

ou

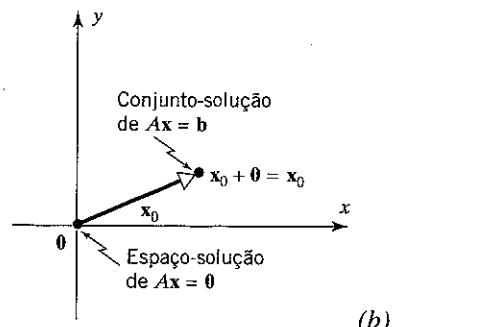
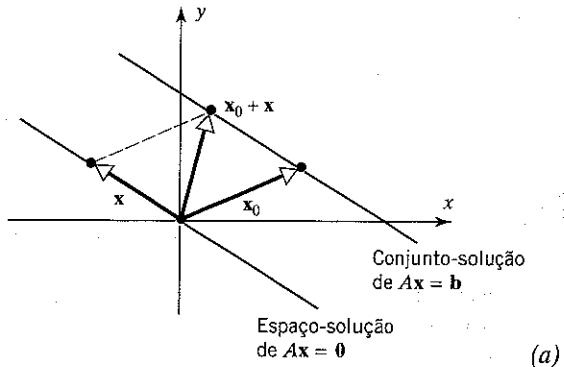
$$A\mathbf{x} = Ax_0 + c_1(A\mathbf{v}_1) + c_2(A\mathbf{v}_2) + \cdots + c_k(A\mathbf{v}_k)$$

Como  $\mathbf{x}_0$  é uma solução do sistema não-homogêneo e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  são soluções do sistema homogêneo, a última equação acima implica que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

o que mostra que  $\mathbf{x}$  é uma solução de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . ■

**Soluções Particulares e Soluções Gerais** Existe uma terminologia associada à Fórmula (3). O vetor  $\mathbf{x}_0$  é chamado uma *solução particular* de  $Ax = \mathbf{b}$ . A expressão  $\mathbf{x}_0 + c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k$  é chamada a *solução geral* de  $Ax = \mathbf{b}$  e a expressão  $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k$  é chamada a *solução geral* de  $Ax = \mathbf{0}$ . Com esta terminologia, a Fórmula (3) afirma que a *solução geral de  $Ax = \mathbf{b}$  é a soma de uma solução particular qualquer de  $Ax = \mathbf{b}$  com a solução geral de  $Ax = \mathbf{0}$ .*



**Figura 5.5.1** Somando  $\mathbf{x}_0$  a cada vetor  $\mathbf{x}$  no espaço-solução de  $Ax = \mathbf{0}$  translada o espaço-solução.

Para sistemas lineares com duas ou três incógnitas, o Teorema 5.5.2 tem uma interpretação geométrica interessante em  $R^2$  e  $R^3$ . Por exemplo, considere o caso em que  $Ax = \mathbf{0}$  e  $Ax = \mathbf{b}$  são sistemas lineares com duas incógnitas. As soluções de  $Ax = \mathbf{0}$  formam um subespaço de  $R^2$  e portanto constituem uma reta pela origem, só a origem, ou todo o  $R^2$ . Pelo Teorema 5.5.2, as soluções de  $Ax = \mathbf{b}$  podem ser obtidas pela soma de uma solução particular de  $Ax = \mathbf{b}$ , digamos  $x_0$ , às soluções de  $Ax = \mathbf{0}$ . Supondo que  $x_0$  está posicionado com seu ponto inicial na origem, isto significa transladar o espaço-solução de  $Ax = \mathbf{0}$  de tal modo que a origem é movida para o ponto final de  $x_0$  (Figura 5.5.1). Isto significa que os vetores-solução de  $Ax = \mathbf{b}$  formam uma reta pelo ponto final de  $x_0$ , o próprio ponto na ponta de  $x_0$  ou todo o  $R^2$ . (Você consegue visualizar este último caso?) Analogamente, para sistemas lineares com três incógnitas, as soluções de  $Ax = \mathbf{b}$  formam um plano pelo ponto final de uma solução particular  $x_0$  qualquer, uma reta pelo ponto final de  $x_0$ , o ponto na ponta de  $x_0$  ou todo o  $R^3$ .

### EXEMPLO 3 Solução Geral de um Sistema Linear

$$Ax = \mathbf{b}$$

No Exemplo 4 da Seção 1.2, nós resolvemos o sistema linear não-homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &+ 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 &+ 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 &+ 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{aligned} \quad (4)$$

e obtivemos

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

No formato vetorial podemos escrever este resultado como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_0} + r \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + s \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} \quad (5)$$

que é a solução geral de (4). O vetor  $x_0$  em (5) é uma solução particular de (4); a combinação linear  $\mathbf{x}$  em (5) é a solução geral do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &+ 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 &+ 15x_6 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 &+ 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{aligned}$$

(verifique).

### Bases para os Espaços-Linha, -Coluna e -Nulo

Nós iniciamos o desenvolvimento de operações elementares sobre linhas com o propósito de resolver sistemas de equações lineares e nós sabemos, pelo que já vimos, que efetuar uma operação elementar sobre uma matriz aumentada não altera o conjunto-solução do correspondente sistema linear. Segue que aplicando uma operação elementar sobre linhas de  $A$  não muda o conjunto-solução do sistema linear correspondente  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  ou,

dito de outra forma, não altera o espaço-nulo de  $A$ . Assim, temos o seguinte teorema.

### Teorema 5.5.3

*As operações elementares sobre linhas não alteram o espaço-nulo de uma matriz.*

### EXEMPLO 4 Uma Base para o Espaço-Nulo

Encontre uma base para o espaço-nulo de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução.

O espaço-nulo de  $A$  é o espaço-solução do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &+ x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &- x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

No Exemplo 10 da Seção 5.4 nós mostramos que os vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base deste espaço.

O próximo teorema acompanha o Teorema 5.5.3.

### Teorema 5.5.4

*As operações elementares sobre linhas não alteram o espaço-linha de uma matriz.*

*Prova.* Suponha que  $r_1, r_2, \dots, r_m$  são os vetores-linha de uma matriz  $A$  e que  $B$  é obtida de  $A$  efetuando uma operação elementar sobre linhas. Nós iremos mostrar que cada vetor no espaço-linha de  $B$  também está no espaço-linha de  $A$  e, reciprocamente, que cada vetor no espaço-linha de  $A$  também está no espaço-linha de  $B$ . A partir disto poderemos concluir que  $A$  e  $B$  têm o mesmo espaço-linha.

Considere as opções: Se a operação sobre linhas é uma troca de linhas, então  $B$  e  $A$  têm os mesmos vetores-linha e consequentemente o mesmo espaço-linha. Se a operação sobre linhas é a multiplicação de uma linha por um escalar não-nulo ou a soma de um múltiplo de uma linha a uma outra linha, então os vetores-linha  $r'_1, r'_2, \dots, r'_m$  de  $B$  são combinações lineares de  $r_1, r_2, \dots, r_m$ ; logo estão no espaço-linha de  $A$ . Como um espaço

vetorial é fechado na adição e na multiplicação por escalar, todas as combinações lineares de  $\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \dots, \mathbf{r}_m'$  também estarão no espaço-linha de  $A$ . Isto mostra que cada vetor no espaço-linha de  $B$  está no espaço-linha de  $A$ .

Como  $B$  é obtida de  $A$  efetuando uma operação elementar sobre linhas,  $A$  pode ser obtida de  $B$  efetuando a operação elementar inversa (Seção 1.5). Assim, a prova acima mostra que o espaço-linha de  $A$  está contido no espaço-linha de  $B$ . ■

À luz dos Teoremas 5.5.3 e 5.5.4, poderíamos antecipar que as operações elementares sobre linhas não deveriam alterar o espaço-coluna de uma matriz. No entanto, isto não ocorre – as operações elementares sobre linhas podem mudar o espaço-coluna. Por exemplo, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

A segunda coluna é um múltiplo escalar da primeira e portanto o espaço coluna de  $A$  consiste de todos os múltiplos escalares do primeiro vetor-coluna. No entanto, se nós somarmos – 2 vezes a primeira linha de  $A$  à segunda linha, nós obteremos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aqui novamente a segunda coluna é um múltiplo escalar da primeira, de modo que o espaço coluna de  $B$  consiste de todos os múltiplos escalares do primeiro vetor-coluna. Este não é igual ao espaço-coluna de  $A$ .

Embora as operações elementares sobre linhas possam mudar o espaço-coluna de uma matriz, nós mostraremos que quaisquer que sejam as relações de independência ou dependência linear que existam entre os vetores-coluna de uma matriz antes de efetuarmos operações elementares sobre linhas, estas relações continuarão válidas para a matriz que resulta das operações efetuadas. Para tornar isto mais preciso, suponha que efetuando uma operação elementar sobre linhas de  $A$  resulta a matriz  $B$ . Pelo Teorema 5.5.3 os dois sistemas lineares homogêneos

$$Ax = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad Bx = \mathbf{0}$$

têm o mesmo conjunto-solução. Assim, o primeiro sistema terá uma solução não-trivial se, e somente se, o mesmo valer para o segundo. Mas se os vetores-coluna de  $A$  e  $B$ , respectivamente, são

$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \dots, \mathbf{c}'_n$$

então, por (2), os dois sistemas podem ser reescritos como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{0} \quad (6)$$

e

$$x_1\mathbf{c}'_1 + x_2\mathbf{c}'_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}'_n = \mathbf{0} \quad (7)$$

Assim, (6) terá uma solução não-trivial para  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se, e somente se, o mesmo valer para (7). Isto implica que os vetores-coluna de  $A$  serão linearmente independentes se, e somente se, o mesmo valer para  $B$ . Embora nós omitirmos a prova, esta conclusão também aplica a qualquer subconjunto de vetores-coluna. Assim, temos o seguinte resultado.

### Teorema 5.5.5

*Se  $A$  e  $B$  são matrizes equivalentes por linhas, então:*

- (a) *Um conjunto qualquer de vetores-coluna de  $A$  é linearmente independente se, e somente se, o conjunto de vetores-coluna correspondente de  $B$  é linearmente independente.*
- (b) *Um conjunto qualquer de vetores-coluna de  $A$  forma uma base para o espaço-coluna de  $A$  se, e somente se, o conjunto de vetores-coluna correspondente de  $B$  forma uma base do espaço-coluna de  $B$ .*

O próximo teorema torna possível encontrar bases para os espaços-linha e -coluna de uma matriz escalonada por linhas apenas por inspeção.

### Teorema 5.5.6

*Se uma matriz  $R$  está em forma escalonada por linhas, então os vetores-linha com os líderes (ou seja, os vetores-linha não-nulos) formam uma base do espaço-linha de  $R$  e os vetores-coluna com os líderes dos vetores-linha formam uma base do espaço-coluna de  $R$ .*

Como este resultado é praticamente evidente quando olhamos para exemplos numéricos, nós omitiremos a prova, que envolve pouco mais que uma análise da posição das entradas 0 e 1 em  $R$ .

### EXEMPLO 5 Bases do Espaço-Linha e do Espaço-Coluna

A matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está em forma escalonada por linhas. Pelo Teorema 5.5.6, os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [1 & -2 & 5 & 0 & 3] \\ \mathbf{r}_2 &= [0 & 1 & 3 & 0 & 0] \\ \mathbf{r}_3 &= [0 & 0 & 0 & 1 & 0] \end{aligned}$$

formam uma base do espaço-linha de  $R$  e os vetores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço-coluna de  $R$ . ♦

**EXEMPLO 6 Bases do Espaço-Linha e do Espaço-Coluna**

Encontre bases para os espaços-linha e -coluna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Como operações elementares sobre linhas não alteram o espaço-linha de uma matriz, nós podemos encontrar uma base do espaço-linha de  $A$  encontrando uma base para o espaço-linha de qualquer matriz em forma escalonada por linhas obtida de  $A$ . Reduzindo  $A$  à forma escalonada por linhas, nós obtemos (verifique)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 5.5.6, os vetores-linha não-nulos de  $R$  formam uma base para o espaço-linha de  $R$  e portanto formam uma base para o espaço-linha de  $A$ . Estes vetores de base são

$$\mathbf{r}_1 = [1 \ -3 \ 4 \ -2 \ 5 \ 4]$$

$$\mathbf{r}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 3 \ -2 \ -6]$$

$$\mathbf{r}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5]$$

Lembrando que  $A$  e  $R$  podem ter espaços-coluna diferentes, nós não poderemos obter uma base para o espaço-coluna de  $A$  diretamente dos vetores-coluna de  $R$ . No entanto, segue do Teorema 5.5.5b que se pudermos encontrar um conjunto de vetores-coluna de  $R$  que foram uma base do espaço-coluna de  $R$  então os vetores-coluna correspondentes de  $A$  formarão uma base do espaço-coluna de  $A$ .

As primeira, terceira e quinta colunas de  $R$  contém os líderes dos vetores-linha, de modo que

$$\mathbf{c}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço-coluna de  $R$ ; assim, os vetores-coluna correspondentes de  $A$ , a saber,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço-coluna de  $A$ .

**EXEMPLO 7 Uma Base de um Espaço Vetorial Usando Operações sobre Linhas**

Encontre uma base do espaço gerado pelos vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0),$$

$$\mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

*Solução.*

Exceto por uma mudança de notação, o espaço gerado por estes vetores é o espaço-linha da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduzindo esta matriz à forma escalonada por linhas, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores-linha não-nulos nesta matriz são

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \quad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

Estes vetores formam uma base do espaço-linha e consequentemente formam uma base do subespaço de  $\mathbb{R}^5$  gerado por  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  e  $\mathbf{v}_4$ .

Observe que no Exemplo 6 os vetores da base que obtivemos para o espaço-coluna de  $A$  consistiam de vetores-coluna de  $A$  mas os vetores de base obtidos no espaço-linha de  $A$  não são todos vetores-linha de  $A$ . O próximo exemplo ilustra um procedimento para encontrar uma base para o espaço-linha de uma matriz  $A$  que consiste inteiramente de vetores-linha de  $A$ .

**EXEMPLO 8 Uma Base para o Espaço-Linha de uma Matriz**

Encontre uma base para o espaço-linha de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

consistindo totalmente de vetores-linha de  $A$ .

*Solução.*

Nós vamos transpor  $A$  e portanto converter o espaço-linha de  $A$  no espaço-coluna de  $A^T$ ; depois nós usaremos o método do Exemplo 6 para encontrar uma base do espaço-coluna de  $A^T$ ; finalmente, nós transponemos novamente para converter os vetores-coluna de volta para vetores-linha. Transpondo  $A$  resulta

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduzindo esta matriz à forma escalonada por linhas obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As primeira, segunda e quarta colunas contém líderes, de modo que os vetores correspondentes em  $A^T$  formam uma base para o espaço-coluna de  $A^T$ ; estes vetores são

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Transpondo novamente e ajustando a notação de acordo, obtemos os vetores de base canônica

$$\mathbf{r}_1 = [1 \ -2 \ 0 \ 0 \ 3], \quad \mathbf{r}_2 = [2 \ -5 \ -3 \ -2 \ 6]$$

e

$$\mathbf{r}_4 = [2 \ 6 \ 18 \ 8 \ 6]$$

para o espaço-linha de  $A$ .

Nós sabemos do Teorema 5.5.5 que as operações elementares sobre linhas não alteram as relações de independência e dependência linear entre os vetores-coluna; no entanto, as Fórmulas (6) e (7) implicam muito mais. Como estas fórmulas têm os mesmos coeficientes escalares  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , segue que operações elementares sobre linhas não alteram as fórmulas (combinações lineares) que relacionam os vetores-coluna linearmente dependentes. Nós omitiremos a prova formal.

### EXEMPLO 9 Bases e Combinações Lineares

(a) Encontre um subconjunto dos vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1, -2, 0, 3), & \mathbf{v}_2 &= (2, -5, -3, 6), \\ \mathbf{v}_3 &= (0, 1, 3, 0), & \mathbf{v}_4 &= (2, -1, 4, -7), & \mathbf{v}_5 &= (5, -8, 1, 2) \end{aligned}$$

que forma uma base para o espaço gerado por estes vetores.

(b) Expresse cada vetor que não está na base como uma combinação linear dos vetores da base.

*Solução (a):* Nós começamos construindo uma matriz que tem  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_5$  como vetores-coluna:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{array} \right] \quad (8)$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 \end{array}$$

A primeira parte de nosso problema pode ser resolvida encontrando uma base para o espaço-coluna desta matriz. Reduzindo a matriz à forma escalonada reduzida por linhas e denotando os vetores-coluna da matriz resultante por  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$  e  $\mathbf{w}_5$ , obtemos

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9)$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 & \mathbf{w}_5 \end{array}$$

Os líderes ocorrem nas colunas 1, 2 e 4 e portanto, pelo Teorema 5.5.6,

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$$

é uma base do espaço-coluna de (9) e consequentemente

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$$

é uma base do espaço-coluna de (8).

*Solução (b):* Nós começamos expressando  $\mathbf{w}_3$  e  $\mathbf{w}_5$  como combinação linear dos vetores  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{w}_4$  da base. A maneira mais simples de fazer isto é expressar  $\mathbf{w}_3$  e  $\mathbf{w}_5$  em termos dos vetores com subscritos menores. Assim, nós expressaremos  $\mathbf{w}_3$  como combinação linear de  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{w}_5$  como combinação linear de  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{w}_4$ . Ispetionando (9), estas combinações lineares são

$$\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{w}_5 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4$$

que nós chamamos *equações de dependência*. As relações correspondentes em (8) são

$$\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$$

O procedimento ilustrado no exemplo acima é suficientemente importante para ter seus passos enumerados:

Dado um conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  de vetores em  $R^n$ , o seguinte procedimento produz um subconjunto destes vetores que é uma base de ger ( $S$ ) e expressa os vetores de  $S$  que não são desta base como combinação linear dos vetores da base.

**Passo 1.** Forme a matriz  $A$  que tem  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  como vetores-coluna.

**Passo 2.** Reduza a matriz  $A$  à sua forma escalonada reduzida por linhas  $R$  e sejam  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$  os vetores-coluna de  $R$ .

**Passo 3.** Identifique as colunas que contêm os líderes em  $R$ . Os vetores-coluna correspondentes de  $A$  são os vetores da base de ger ( $S$ ).

**Passo 4.** Expresse cada vetor-coluna de  $R$  que não contém um líder como combinação linear dos vetores-coluna anteriores que contêm líderes. (Você poderá fazer isto por inspeção.) Isto fornece um conjunto de equações de dependência envolvendo os vetores de  $R$ . As equações correspondentes para os vetores-coluna de  $A$  expressa os vetores que não estão na base como combinação linear dos vetores da base.

## Conjunto de Exercícios 5.5

1. Identifique os vetores-linha e os vetores-coluna da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Expresse o produto  $A \mathbf{x}$  como uma combinação linear dos vetores-coluna de  $A$ .

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

3. Determine se  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$  e, se estiver, expresse  $\mathbf{b}$  como combinação linear dos vetores-coluna de  $A$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(e) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

4. Suponha que  $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = -3$  é uma solução de um sistema linear não-homogêneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e que o conjunto-solução do sistema homogêneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é dado pelas fórmulas

$$x_1 = -3r + 4s, \quad x_2 = r - s, \quad x_3 = r, \quad x_4 = s$$

- (a) Encontre a forma vetorial da solução geral de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  
 (b) Encontre a forma vetorial da solução geral de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
5. Encontre a forma vetorial da solução geral do sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dado; depois use o resultado obtido para encontrar a forma vetorial da solução geral de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

$$(a) \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 = 2 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -3 \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_4 = -5 \end{array}$$

6. Encontre uma base para o espaço-nulo de  $A$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(e) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

7. Em cada parte é dada uma matriz em forma escalonada por linhas. Por inspeção, encontre bases para o espaço-linha e o espaço-coluna de  $A$ .

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Para as matrizes do Exercício 6, encontre uma base do espaço-linha de  $A$  reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

9. Para as matrizes do Exercício 6, encontre uma base do espaço-coluna de  $A$ .

10. Para as matrizes do Exercício 6, encontre uma base do espaço-linha de  $A$  consistindo totalmente de vetores-linha de  $A$ .

11. Encontre uma base do subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado pelos vetores dados.

- (a)  $(1, 1, -4, -3), (2, 0, 2, -2), (2, -1, 3, 2)$     (b)  $(-1, 1, -2, 0), (3, 3, 6, 0), (9, 0, 0, 3)$   
 (c)  $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-2, 0, 2, 2), (0, -3, 0, 3)$

12. Encontre um subconjunto dos vetores dados que forma uma base do espaço gerado por estes vetores; em seguida, expresse cada vetor que não está na base como uma combinação linear dos vetores da base.

- (a)  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (-3, 3, 7, 1), \mathbf{v}_3 = (-1, 3, 9, 3), \mathbf{v}_4 = (-5, 3, 5, -1)$   
 (b)  $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (2, -4, 0, 6), \mathbf{v}_3 = (-1, 1, 2, 0), \mathbf{v}_4 = (0, -1, 2, 3)$   
 (c)  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 5, 2), \mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (4, -5, 9, 4), \mathbf{v}_4 = (0, 4, 2, -3), \mathbf{v}_5 = (-7, 18, 2, -8)$

13. Prove que os vetores-linha de uma matriz  $A$   $n \times n$  invertível formam uma base de  $\mathbb{R}^n$ .

14. (a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e considere um sistema de coordenadas retangulares  $xyz$  no espaço tridimensional. Mostre que o espaço-nulo de  $A$  consiste de todos os pontos no eixo  $z$  e que o espaço-coluna consiste de todos os pontos no plano  $xy$  (veja figura dada).

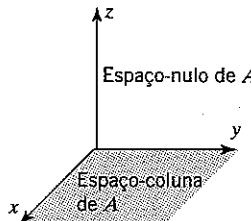


Figura Ex-14

- (b) Encontre uma matriz  $3 \times 3$  cujo espaço-nulo é o eixo  $x$  e cujo espaço-coluna é o plano  $yz$ .

## Discussão e Descoberta

15. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

- (a) Se  $E$  é uma matriz elementar então  $A$  e  $EA$  têm o mesmo espaço-nulo.  
 (b) Se  $E$  é uma matriz elementar então  $A$  e  $EA$  têm o mesmo espaço-linha.  
 (c) Se  $E$  é uma matriz elementar então  $A$  e  $EA$  têm o mesmo espaço-coluna.  
 (d) Se  $Ax = b$  não possui soluções, então  $b$  não está no espaço-coluna de  $A$ .  
 (e) O espaço-linha e o espaço-nulo de numa matriz invertível são iguais.

16. (a) Encontre todas as matrizes  $2 \times 2$  cujo espaço-nulo é a reta  $3x - 5y = 0$ .

- (b) Esboce os espaços-nulos das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. A equação  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  pode ser vista como um sistema linear de uma equação em três incógnitas. Expresse a solução geral como uma solução particular mais uma solução geral do sistema homogêneo correspondente. [Escreva os vetores na forma de colunas.]

18. Suponha que  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$  e que  $A$  é invertível. Invente e prove um teorema que descreve como estão relacionados os espaços-linha de  $AB$  e de  $B$ .

## 5.6 POSTO E NULIDADE

Na seção anterior nós investigamos as relações entre sistemas de equações lineares e o espaço-linha, o espaço-coluna e o espaço-nulo da matriz de coeficientes. Nesta seção nós nos ocuparemos das relações entre as dimensões do espaço-linha, do espaço-coluna e do espaço-nulo de uma matriz e de sua transposta. Os resultados que obteremos são fundamentais e nos fornecerão uma visão aprofundada de sistemas lineares e de transformações lineares.

### Quatro Espaços Matriciais Fundamentais

Considerando simultaneamente uma matriz  $A$  e sua transposta  $A^T$ , temos seis espaços vetoriais de interesse:

o espaço-linha de $A$	o espaço-linha de $A^T$
o espaço-coluna de $A$	o espaço-coluna de $A^T$
o espaço-nulo de $A$	o espaço-nulo de $A^T$

No entanto, transpor uma matriz converte vetores-linha em vetores-coluna e vetores-coluna em vetores-linha, de modo que, exceto por uma diferença de notação, o espaço-linha de  $A^T$  é igual ao espaço-coluna de  $A$  e o espaço-coluna de  $A^T$  é igual ao espaço-linha de  $A$ . Assim permanecem quatro espaços de interesse:

o espaço-linha de $A$	o espaço-coluna de $A$
o espaço-nulo de $A$	o espaço-nulo de $A^T$

Estes espaços são conhecidos como os *espaços matriciais fundamentais* associados com  $A$ . Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então o espaço-linha de  $A$  e o espaço-nulo de  $A$  são subespaços de  $\mathbb{R}^n$  e o espaço-coluna de  $A$  e o espaço-nulo de  $A^T$  são subespaços de  $\mathbb{R}^m$ . Nosso principal objetivo nesta seção é estabelecer relações entre as dimensões destes quatro espaços vetoriais.

### Os Espaços-Linha e -Coluna têm Dimensões Iguais

No Exemplo 6 da Seção 5.5 nós vimos que os espaços-linha e -coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

têm, cada um, três vetores na base, ou seja, ambos são tridimensionais. Não é acidental que estas dimensões sejam as mesmas; é uma consequência do seguinte resultado geral.

#### Theorema 5.6.1

Se  $A$  é uma matriz qualquer, então o espaço-linha e o espaço-coluna de  $A$  têm a mesma dimensão.

**Prova.** Seja  $R$  qualquer forma escalonada de  $A$ . Segue do Teorema 5.5.4 que

$$\dim(\text{espaço-linha de } A) = \dim(\text{espaço-linha de } R)$$

e do Teorema 5.5.5b que

$$\dim(\text{espaço-coluna de } A) = \dim(\text{espaço-coluna de } R)$$

Assim, a prova estará completa se nós pudermos mostrar que o espaço-linha e o espaço-coluna de  $R$  têm a mesma dimensão. Ocorre que a dimensão do espaço-linha de  $R$  é o número de linhas não-nulas e a dimensão do espaço-coluna de  $R$  é o número de colunas que contém um líder (Teorema 5.5.6). No entanto, as linhas não-nulas são precisamente as linhas nas quais ocorre um líder, portanto coincide o número de líderes e de linhas não-nulas. Isto mostra que o espaço-linha e o espaço-coluna de  $R$  têm a mesma dimensão. ■

As dimensões do espaço-linha, do espaço-coluna e do espaço-nulo de uma matriz são números tão importantes que existe uma notação e terminologia para elas.

#### Definição

A dimensão comum do espaço-linha e do espaço-coluna de uma matriz  $A$  é chamada **posto** de  $A$ , que nós denotamos por  $\text{pos}(A)$ ; a dimensão do espaço-nulo de  $A$  é chamada **nulidade** de  $A$ , que nós denotamos por  $\text{nul}(A)$ .

### EXEMPLO 1 Posto e Nulidade de uma Matriz

$4 \times 6$

Encontre o posto e a nulidade da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Solução.

A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(verifique). Como há duas linhas não-nulas (ou, equivalente mente, dois líderes), o espaço-linha e o espaço-coluna são ambos bidimensionais, ou seja,  $\text{pos}(A) = 2$ . Para encontrar a nulidade de  $A$ , nós devemos encontrar a dimensão do espaço-solução do sistema linear  $Ax = \mathbf{0}$ . Este sistema pode ser resolvido reduzindo a matriz aumentada à forma escalonada reduzida por linhas. A matriz resultante será idêntica a (1), exceto que terá uma última coluna adicional de zeros, e o sistema de equações correspondente será

$$x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0$$

ou, resolvendo nas variáveis líderes,

$$\begin{aligned}x_1 &= 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6 \\x_2 &= 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6\end{aligned}\quad (2)$$

Segue que a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned}x_1 &= 4r + 28s + 37t - 13u \\x_2 &= 2r + 12s + 16t - 5u \\x_3 &= r \\x_4 &= s \\x_5 &= t \\x_6 &= u\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \right] = r \left[ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + s \left[ \begin{array}{c} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + t \left[ \begin{array}{c} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] + u \left[ \begin{array}{c} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]\quad (3)$$

Os quatro vetores do lado direito de (3) formam uma base do espaço-solução, de modo que  $\text{nul}(A) = 4$ . ♦

O seguinte teorema mostra que uma matriz e sua transposta têm o mesmo posto.

### Teorema 5.6.2

*Se  $A$  é uma matriz qualquer, então  $\text{pos}(A) = \text{pos}(A^T)$ .*

*Prova.*

$\text{pos}(A) = \dim(\text{espaço-linha de } A) = \dim(\text{espaço-coluna de } A^T) = \text{pos}(A^T)$ . ■

O seguinte teorema estabelece uma relação importante entre o posto e a nulidade de uma matriz.

### Teorema 5.6.3

#### O Teorema da Dimensão para Matrizes

*Se  $A$  é uma matriz com  $n$  colunas, então*

$$\text{pos}(A) + \text{nul}(A) = n.\quad (4)$$

*Prova.* Como  $A$  tem  $n$  colunas, o sistema linear homogêneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem  $n$  incógnitas (variáveis). Estas variáveis são de duas categorias: as variáveis líderes e as livres. Assim,

$$\left[ \begin{array}{c} \text{número de variáveis} \\ \text{líderes} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{número de variáveis} \\ \text{livres} \end{array} \right] = n$$

Como o número de variáveis líderes é o número de líderes na forma escalonada reduzida por linhas de  $A$ , e isto é o posto de  $A$ , decorre

$$\text{pos}(A) + \left[ \begin{array}{c} \text{número de variáveis} \\ \text{livres} \end{array} \right] = n$$

O número de variáveis livres é igual à nulidade de  $A$ . Isto é assim por que a nulidade de  $A$  é a dimensão do espaço-solução de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , que é igual ao número de parâmetros na solução geral

[veja (3), por exemplo], que é o mesmo que o número de variáveis livres. Assim,

$$\text{pos}(A) + \text{nul}(A) = n.$$

A prova do teorema precedente contém dois resultados que por si só são importantes.

### Teorema 5.6.4

*Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então:*

- (a)  $\text{pos}(A) = \text{número de variáveis líderes na solução de } A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (b)  $\text{nul}(A) = \text{número de parâmetros na solução geral de } A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

### EXEMPLO 2 A Soma de Posto e Nulidade

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

tem 6 colunas, portanto

$$\text{pos}(A) + \text{nul}(A) = 6$$

Isto é consistente com o Exemplo 1, onde mostramos que

$$\text{pos}(A) = 2 \text{ e } \text{nul}(A) = 4$$

### EXEMPLO 3 O Número de Parâmetros numa Solução Geral

Encontre o número de parâmetros na solução geral de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  se  $A$  é uma matriz  $5 \times 7$  de posto 3.

*Solução.*

Por (4),

$$\text{nul}(A) = n - \text{pos}(A) = 7 - 3 = 4$$

Assim, há quatro parâmetros. ♦

Suponha, agora, que  $A$  é uma matriz  $m \times n$  de posto  $r$ ; segue do Teorema 5.6.2 que  $A^T$  é uma matriz  $n \times m$  de posto  $r$ . Aplicando o Teorema 5.6.3 a  $A$  e a  $A^T$ , obtemos

$$\text{nul}(A) = n - r, \quad \text{nul}(A^T) = m - r$$

e podemos deduzir a seguinte tabela relacionando as dimensões dos quatro espaços fundamentais de uma matriz  $A$  de tamanho  $m \times n$  e posto  $r$ .

Espaço Fundamental	Dimensão
Espaço-linha de $A$	$r$
Espaço-coluna de $A$	$r$
Espaço-nulo de $A$	$n - r$
Espaço-nulo de $A^T$	$m - r$

**Valor Máximo do Posto** Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então os vetores-linha estão no  $\mathbb{R}^m$  e os vetores-coluna estão no  $\mathbb{R}^n$ . Isto implica que o espaço-linha tem no máximo dimensão  $n$  e que o espaço-coluna tem no máximo dimensão  $m$ . Como o espaço-linha e o espaço-coluna têm a mesma dimensão (o posto de  $A$ ), nós devemos concluir que se  $m \neq n$ , então o posto de  $A$  é no máximo o menor dos valores  $m$  e  $n$ . Denotamos isto escrevendo

$$\text{pos}(A) \leq \min(m, n) \quad (5)$$

onde  $\min(m, n)$  denota o menor dos dois números  $m$  e  $n$  se  $m \neq n$  ou seu valor comum se  $m = n$ .

#### EXEMPLO 4 Valor Máximo do Posto de uma Matriz $7 \times 4$

Se  $A$  é uma matriz  $7 \times 4$ , então o posto de  $A$  é no máximo 4 e, consequentemente, os sete vetores-linha devem ser linearmente dependentes. Se  $A$  é uma matriz  $4 \times 7$ , então novamente o posto de  $A$  é no máximo 4 e, consequentemente, os sete vetores-coluna devem ser linearmente dependentes. ♦

**Sistemas Lineares de  $m$  Equações em  $n$  Incógnitas** Em seções anteriores nós obtivemos uma grande variedade de teoremas relativos a sistemas lineares de  $n$  equações em  $n$  incógnitas. (Veja o Teorema 4.3.4.) Agora nós passamos a nos ocupar de sistemas lineares de  $m$  equações em  $n$  incógnitas, nos quais  $m$  e  $n$  não precisam ser iguais.

O seguinte teorema fornece condições que garantem a consistência de sistemas lineares de  $m$  equações em  $n$  incógnitas.

#### Teorema 5.6.5

#### O Teorema da Consistência

Se  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é um sistema linear de  $m$  equações em  $n$  incógnitas, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente.
- (b)  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$ .
- (c) A matriz de coeficientes  $A$  e a matriz aumentada  $[A | \mathbf{b}]$  têm o mesmo posto.

**Prova.** É suficiente provar as duas equivalências  $(a) \Leftrightarrow (b)$  e  $(b) \Leftrightarrow (c)$ , pois então segue pela lógica que  $(a) \Leftrightarrow (c)$ .

$(a) \Leftrightarrow (b)$ . Veja o Teorema 5.5.1.

$(b) \Rightarrow (c)$ . Nós iremos mostrar que se  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$  então, de fato, os espaços-coluna de  $A$  e de  $[A | \mathbf{b}]$  são iguais, e portanto estas duas matrizes terão o mesmo posto.

Por definição, o espaço-coluna de uma matriz é o espaço gerado pelos seus vetores-coluna, de modo que podemos expressar os espaços-coluna de  $A$  e de  $[A | \mathbf{b}]$  como

$$\text{ger}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\} \quad \text{e} \quad \text{ger}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n, \mathbf{b}\}$$

respectivamente. Se  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$ , então cada vetor no conjunto  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n, \mathbf{b}\}$  é uma combinação linear dos vetores em  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$  e reciprocamente (por que?). Assim, pelo Teorema 5.2.4, os espaços-coluna de  $A$  e de  $[A | \mathbf{b}]$  são iguais.

$(c) \Rightarrow (b)$ . Suponha que  $A$  e  $[A | \mathbf{b}]$  têm o mesmo posto  $r$ . Pelo Teorema 5.4.6a, existe um subconjunto dos vetores-coluna de  $A$  que forma uma base do espaço-coluna de  $A$ . Suponha que estes vetores são

$$\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \dots, \mathbf{c}'_r$$

Estes  $r$  vetores de base também estão no espaço-coluna  $r$ -dimensional de  $[A | \mathbf{b}]$ ; pelo Teorema 5.4.6a, estes vetores também formam uma base do espaço-coluna de  $[A | \mathbf{b}]$ . Isto significa que  $\mathbf{b}$  pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores  $\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \dots, \mathbf{c}'_r$  e, consequentemente,  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$ . ■

Não é difícil visualizar por que este teorema é válido se vermos o posto de uma matriz como o número de linhas não-nulas em sua forma escalonada reduzida por linhas. Por exemplo, a matriz aumentada do sistema

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ -3x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 7 \\ -3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 6x_4 = -1 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 7 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 4 & -3 & 7 \\ -3 & 6 & 9 & -6 & -1 \end{array} \right]$$

que tem a seguinte forma escalonada reduzida por linhas (verifique):

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -23 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Pela terceira linha desta matriz vemos que o sistema é inconsistente. No entanto, é também devido a esta linha que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada tem menos linhas nulas do que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz de coeficientes. Isto força a matriz de coeficientes e a matriz aumentada a ter postos diferentes.

O Teorema da Consistência trata das condições sob as quais um sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente para um vetor específico  $\mathbf{b}$ . O próximo teorema trata das condições sob as quais um sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente para todas as possíveis escolhas de  $\mathbf{b}$ .

#### Teorema 5.6.6

Se  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é um sistema linear de  $m$  equações em  $n$  incógnitas, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente para qualquer matriz  $b$  de tamanho  $m \times 1$ .
- (b) Os vetores-coluna de  $A$  geram  $\mathbb{R}^m$ .
- (c)  $\text{pos}(A) = m$ .

**Prova.** É suficiente provar as duas equivalências  $(a) \Leftrightarrow (b)$  e  $(a) \Leftrightarrow (c)$ , pois então segue pela lógica que  $(b) \Leftrightarrow (c)$ .

$(a) \Leftrightarrow (b)$ . Pela Fórmula (2) da Seção 5.5, o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  pode ser expresso como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b}$$

pelo que podemos concluir que  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente para qualquer matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $m \times 1$  se, e somente se, cada uma destas matrizes  $\mathbf{b}$  pode ser expressa como uma combinação linear dos vetores-coluna  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ , ou, equivalentemente se, e somente se, estes vetores-coluna geram  $R^m$ .

(a)  $\Rightarrow$  (c). Supondo que  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente para qualquer matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $m \times 1$ , segue das partes (a) e (b) do Teorema da Consistência (5.6.5) que cada vetor  $\mathbf{b}$  em  $R^m$  está no espaço-coluna de  $A$ , ou seja, que o espaço-coluna de  $A$  é todo o  $R^m$ . Assim, pos  $(A) = \dim(R^m) = m$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a). Supondo que pos  $(A) = m$ , segue que o espaço-coluna de  $A$  é um subespaço de  $R^m$  de dimensão  $m$ , e portanto deve ser todo o  $R^m$  pelo Teorema 5.4.7. Agora segue das partes (a) e (b) do Teorema da Consistência (5.6.5) que  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente para cada vetor  $\mathbf{b}$  em  $R^m$ , pois cada tal vetor  $\mathbf{b}$  está no espaço-coluna de  $A$ . ■

Um sistema linear com mais equações do que incógnitas é chamado um *sistema linear sobre determinado*. Se  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é um sistema linear sobre determinado de  $m$  equações em  $n$  incógnitas (de modo que  $m > n$ ), então os vetores-coluna de  $A$  não podem gerar  $R^m$ ; segue do último teorema dado que para uma matriz  $A$  de tamanho  $m \times n$  fixada, o sistema linear sobre determinado  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  não pode ser consistente para todos os  $\mathbf{b}$  possíveis.

### EXEMPLO 5 Um Sistema sobre determinado

O sistema linear

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= b_1 \\x_1 - x_2 &= b_2 \\x_1 + x_2 &= b_3 \\x_1 + 2x_2 &= b_4 \\x_1 + 3x_2 &= b_5\end{aligned}$$

é sobre determinado, portanto não pode ser consistente para todos os possíveis valores de  $b_1, b_2, b_3, b_4$  e  $b_5$ . Podem ser obtidas condições exatas sob as quais este sistema é consistente resolvendo o sistema pela eliminação de Gauss-Jordan. Nós deixamos ao leitor mostrar que a matriz aumentada é equivalente por linhas a

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2b_2 - b_1 & \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 & \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_2 + 2b_1 & \\ 0 & 0 & b_4 - 4b_2 + 3b_1 & \\ 0 & 0 & b_5 - 5b_2 + 4b_1 & \end{array} \right]$$

Assim, o sistema é consistente se, e somente se,  $b_1, b_2, b_3, b_4$  e  $b_5$  satisfazem as condições

$$\begin{aligned}2b_1 - 3b_2 + b_3 &= 0 \\3b_1 - 4b_2 + b_4 &= 0 \\4b_1 - 5b_2 + b_5 &= 0\end{aligned}$$

ou, resolvendo este sistema linear homogêneo,

$$b_1 = 5r - 4s, \quad b_2 = 4r - 3s, \quad b_3 = 2r - s, \quad b_4 = r, \quad b_5 = s$$

onde  $r$  e  $s$  são quaisquer. ♦

Na Fórmula (3) do Teorema 5.5.2, os escalares  $c_1, c_2, \dots, c_k$  são os parâmetros arbitrários da solução geral de ambos  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  e  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Assim, estes dois sistemas têm o mesmo número de parâmetros nas suas soluções gerais. Além disto, segue pela parte (b) do Teorema 5.6.4 que o número destes parâmetros é nul ( $A$ ). Este fato, mais o Teorema da Dimensão para Matrizes (5.6.3), dão o seguinte teorema.

### Teorema 5.6.7

*Se  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é um sistema linear consistente de  $m$  equações em  $n$  incógnitas e se  $A$  tem posto  $r$ , então a solução geral do sistema contém  $n - r$  parâmetros.*

### EXEMPLO 6 Número de Parâmetros numa Solução Geral

Se  $A$  é uma matriz  $5 \times 7$  de posto 4 e se  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é um sistema linear consistente, então a solução geral do sistema contém  $7 - 4 = 3$  parâmetros. ♦

Em seções anteriores nós obtivemos uma grande variedade de condições sob as quais um sistema linear homogêneo de  $n$  equações em  $n$  incógnitas tem exatamente uma única solução, a trivial. (Veja o Teorema 4.3.4.) O seguinte teorema obtém resultados correspondentes para sistemas de  $m$  equações em  $n$  incógnitas, nos quais  $m$  e  $n$  não precisam ser iguais.

### Teorema 5.6.8

*Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a)  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  possui somente a solução trivial.
- (b) Os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.
- (c)  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  tem no máximo uma solução (uma ou nenhuma) para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $m \times 1$ .

**Prova.** É suficiente provar as duas equivalências (a)  $\Leftrightarrow$  (b) e (a)  $\Leftrightarrow$  (c), pois então segue pela lógica que (b)  $\Leftrightarrow$  (c).

(a)  $\Leftrightarrow$  (b). Se  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$  são os vetores-coluna de  $A$ , então o sistema linear  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  pode ser escrito como

$$x_1 \mathbf{c}_1 + x_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + x_n \mathbf{c}_n = \mathbf{0} \quad (6)$$

Se  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$  são vetores linearmente independentes, então esta equação só é satisfeita por  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ , o que significa que  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial. Reciprocamente, se  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial, então a Equação (6) só é satisfeita por  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ , o que significa que  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$  são linearmente independentes.

(a)  $\Rightarrow$  (c). Suponha que  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial. Ou  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente ou não. Se não é consistente, então não existem soluções de  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  e a prova acaba. Se  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é con-

sistente, seja  $x_0$  uma solução qualquer. Como estamos supondo que  $Ax = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial, o que observamos antes de enunciar o Teorema 5.5.2 nos permite concluir que a solução geral de  $Ax = \mathbf{b}$  é  $x_0 + \mathbf{0} = x_0$ . Assim, a única solução de  $Ax = \mathbf{b}$  é  $x_0$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a). Suponha que  $Ax = \mathbf{b}$  tem no máximo uma solução para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $m \times 1$ . Então, em particular,  $Ax = \mathbf{0}$  tem no máximo uma solução. Assim,  $Ax = \mathbf{0}$  tem somente uma solução, a trivial. ■

Um sistema linear com mais incógnitas do que equações é chamado um *sistema linear subdeterminado*. Se  $Ax = \mathbf{b}$  é um sistema linear consistente e subdeterminado de  $m$  equações em  $n$  incógnitas (de modo que  $m < n$ ), então segue pelo Teorema 5.6.7 que a solução geral tem pelo menos um parâmetro (por que?); portanto, um *sistema linear consistente e subdeterminado tem infinitas soluções*. Em particular, um sistema linear homogêneo subdeterminado tem infinitas soluções; mas isto já havia sido provado no Capítulo 1 (Teorema 1.2.1).

### EXEMPLO 7 Um Sistema Subdeterminado

Se  $A$  é uma matriz  $5 \times 7$ , então o sistema linear  $Ax = \mathbf{b}$  é subdeterminado para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $7 \times 1$ . Assim,  $Ax = \mathbf{b}$  deve ser consistente para algum  $\mathbf{b}$  e, para cada um destes  $\mathbf{b}$ , a solução geral deve ter  $7 - r$  parâmetros, onde  $r$  é o posto de  $A$ . ♦

**Resumo** No Teorema 4.3.4 nós listamos oito resultados que são equivalentes à invertibilidade de uma matriz  $A$ . Nós concluímos esta seção juntando mais oito resultados àquela lista para obter o Teorema 5.6.9 abaixo que relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

**Prova.** Nós já sabemos do Teorema 4.3.4 que as afirmações (a) a (i) são equivalentes. Para completar a prova nós mostraremos que (j) a (q) são equivalentes a (b) provando a seqüência de implicações  $(b) \Rightarrow (j) \Rightarrow (k) \Rightarrow (l) \Rightarrow (m) \Rightarrow (n) \Rightarrow (o) \Rightarrow (p) \Rightarrow (q) \Rightarrow (b)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (j). Se  $Ax = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial então, pelo Teorema 5.6.8, os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.

(j)  $\Rightarrow$  (k)  $\Rightarrow$  (l)  $\Rightarrow$  (m)  $\Rightarrow$  (n)  $\Rightarrow$  (o). Isto segue do Teorema 5.4.5, pois  $R^n$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional. (Os detalhes são omitidos.)

(o)  $\Rightarrow$  (p). Se os  $n$  vetores-coluna de  $A$  formam uma base de  $R^n$ , então o espaço-linha de  $A$  é  $n$ -dimensional e  $A$  tem posto  $n$ .

(p)  $\Rightarrow$  (q). Isto decorre do Teorema da Dimensão (5.6.3).

(q)  $\Rightarrow$  (b). Se  $A$  tem nulidade 0, então o espaço-solução de  $Ax = \mathbf{0}$  tem dimensão 0, o que significa que somente contém o vetor nulo. Logo  $Ax = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial. ■

### Teorema 5.6.9

#### Afirmativas Equivalentes

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e se  $T_A : R^n \rightarrow R^n$  é a multiplicação por  $A$ , então as seguintes afirmativas são equivalentes.

- (a)  $A$  é invertível.
- (b)  $Ax = \mathbf{0}$  admite somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- (d)  $A$  pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.
- (e)  $Ax = \mathbf{b}$  é consistente para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (f)  $Ax = \mathbf{b}$  tem exatamente uma solução para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (g)  $\det(A) \neq 0$ .
- (h) A imagem de  $T_A$  é o  $R^n$ .
- (i)  $T_A$  é injetora.
- (j) Os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.
- (k) Os vetores-linha de  $A$  são linearmente independentes.
- (l) Os vetores-coluna de  $A$  geram o  $R^n$ .
- (m) Os vetores-linha de  $A$  geram o  $R^n$ .
- (n) Os vetores-coluna de  $A$  formam uma base do  $R^n$ .
- (o) Os vetores-linha de  $A$  formam uma base do  $R^n$ .
- (p)  $A$  tem posto  $n$ .
- (q)  $A$  tem nulidade 0.

**Conjunto de Exercícios 5.6**

1. Verifique que  $\text{pos}(A) = \text{pos}(A^T)$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Encontre o posto e a nulidade da matriz; em seguida verifique que os valores obtidos satisfazem a Fórmula (4) do Teorema da Dimensão.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(e) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Em cada parte do Exercício 2 use os resultados obtidos para encontrar, sem resolver o sistema, o número de variáveis líderes e o número de parâmetros na solução de  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

4. Em cada parte use a informação da tabela para encontrar as dimensões do espaço-linha de  $A$ , do espaço-coluna de  $A$ , do espaço-nulo de  $A$  e do espaço-nulo de  $A^T$ .

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Tamanho de $A$	$3 \times 3$	$3 \times 3$	$3 \times 3$	$5 \times 9$	$9 \times 5$	$4 \times 4$	$6 \times 2$
Posto de $A$	3	2	1	2	2	0	2

5. Em cada parte, encontre o maior valor possível para o posto de  $A$  e o menor valor possível para a nulidade de  $A$ .

(a)  $A$  é  $4 \times 4$       (b)  $A$  é  $3 \times 5$       (c)  $A$  é  $5 \times 3$

6. Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , qual é o maior valor possível para o posto de  $A$  e o menor valor possível para a nulidade de  $A$ ? [Sugestão. Veja o Exercício 5.]

7. Em cada parte use a informação da tabela para determinar se o sistema linear  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente. Se for, dê o número de parâmetros na solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Tamanho de $A$	$3 \times 3$	$3 \times 3$	$3 \times 3$	$5 \times 9$	$5 \times 9$	$4 \times 4$	$6 \times 2$
Posto de $A$	3	2	1	2	2	0	2
Posto de $[A \mathbf{b}]$	3	3	1	2	3	0	2

8. Para cada uma das matrizes do Exercício 7, encontre a nulidade de  $A$  e determine o número de parâmetros na solução geral do sistema linear homogêneo  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

9. Quais condições devem ser satisfeitas por  $b_1, b_2, b_3, b_4$  e  $b_5$  para o sistema linear sobre-determinado

$$x_1 - 3x_2 = b_1$$

$$x_1 - 2x_2 = b_2$$

$$x_1 + x_2 = b_3$$

$$x_1 - 4x_2 = b_4$$

$$x_1 + 5x_2 = b_5$$

ser consistente?

10. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Mostre que  $A$  tem posto 2 se, e somente se, um ou mais dos determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

é não-nulo.

11. Suponha que  $A$  é uma matriz  $3 \times 3$  cujo espaço-nulo é uma reta pela origem no espaço tridimensional. Podem o espaço-linha ou o espaço-coluna também ser uma reta pela origem? Explique.  
 12. Verifique como o posto de  $A$  varia com  $t$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{bmatrix}$$

13. Existem valores de  $r$  e  $s$  para os quais o posto de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

é um ou dois? Se existirem, encontre estes valores.

14. Use o resultado do Exercício 10 para mostrar que o conjunto de pontos  $(x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3$  para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & y \end{bmatrix}$$

tem posto 1 é a curva de equações paramétricas  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ .

15. Prove: Se  $k \neq 0$ , então  $A$  e  $kA$  têm o mesmo posto.

## Discussão e Descoberta

16. (a) Dê um exemplo de uma matriz  $3 \times 3$  cujo espaço-coluna é um plano pela origem no espaço tridimensional.  
 (b) Que espécie de objeto geométrico é o espaço-nulo de sua matriz?  
 (c) Que espécie de objeto geométrico é o espaço-linha de sua matriz?  
 (d) Em geral, se o espaço-coluna de uma matriz  $3 \times 3$  é um plano pela origem no espaço tridimensional, o que você pode dizer sobre as propriedades geométricas do espaço-nulo e do espaço-linha? Explique seu raciocínio.
17. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.  
 (a) Se  $A$  não é quadrada, então os vetores-linha de  $A$  são linearmente dependentes.  
 (b) Se  $A$  é quadrada, então os vetores-linha ou os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.  
 (c) Se os vetores-linha e os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes, então  $A$  é quadrada.  
 (d) Adicionando uma coluna a mais a uma matriz  $A$  aumenta seu posto por um.
18. (a) Se  $A$  é uma matriz  $3 \times 5$ , então o número de líderes na forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é no máximo \_\_\_\_\_. Por quê?  
 (b) Se  $A$  é uma matriz  $3 \times 5$ , então o número de parâmetros na solução geral de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é no máximo \_\_\_\_\_. Por quê?  
 (c) Se  $A$  é uma matriz  $5 \times 3$ , então o número de líderes na forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é no máximo \_\_\_\_\_. Por quê?  
 (d) Se  $A$  é uma matriz  $5 \times 3$ , então o número de parâmetros na solução geral de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é no máximo \_\_\_\_\_. Por quê?
19. (a) Se  $A$  é uma matriz  $3 \times 5$ , então o posto de  $A$  é no máximo \_\_\_\_\_. Por quê?  
 (b) Se  $A$  é uma matriz  $3 \times 5$ , então a nulidade de  $A$  é no máximo \_\_\_\_\_. Por quê?  
 (c) Se  $A$  é uma matriz  $3 \times 5$ , então o posto de  $A^T$  é no máximo \_\_\_\_\_. Por quê?  
 (d) Se  $A$  é uma matriz  $3 \times 5$ , então a nulidade de  $A^T$  é no máximo \_\_\_\_\_. Por quê?

## Exercícios Suplementares do Capítulo 5

1. Em cada parte, o espaço-solução é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  e portanto deve ser uma reta pela origem, um plano pela origem, a origem ou todo o  $\mathbb{R}^3$ . Para cada sistema, determine qual é o caso. Se o subespaço for um plano, encontre sua equação e se for uma reta, encontre suas equações paramétricas.
- (a)  $0x + 0y + 0z = 0$     (b)  $2x - 3y + z = 0$     (c)  $x - 2y + 7z = 0$     (d)  $x + 4y + 8z = 0$   
 $6x - 9y + 3z = 0$      $-4x + 8y + 5z = 0$      $2x + 5y + 6z = 0$   
 $-4x + 6y - 2z = 0$      $2x - 4y + 3z = 0$      $3x + y - 4z = 0$

2. Para quais valores de  $s$  é o espaço-solução de

$$x_1 + x_2 + sx_3 = 0$$

$$x_1 + sx_2 + x_3 = 0$$

$$sx_1 + x_2 + x_3 = 0$$

uma reta pela origem, um plano pela origem, a origem ou todo o  $\mathbb{R}^3$ ?

3. (a) Expresse  $(4a, a-b, a+2b)$  como uma combinação linear de  $(4, 1, 1)$  e  $(0, -1, 2)$ .  
 (b) Expresse  $(3a+b+3c, -a+4b-c, 2a+b+2c)$  como uma combinação linear de  $(3, -1, 2)$  e  $(1, 4, 1)$ .  
 (c) Expresse  $(2a-b+4c, 3a-c, 4b+c)$  como uma combinação linear de três vetores não-nulos.  
 4. Seja  $W$  o espaço gerado por  $f = \sin x$  e  $g = \cos x$ .  
 (a) Mostre que para qualquer valor de  $\theta$ ,  $f_1 = \sin(x+\theta)$  e  $g_1 = \cos(x+\theta)$  são vetores em  $W$ .  
 (b) Mostre que  $f_1$  e  $g_1$  formam uma base de  $W$ .  
 5. (a) Expresse  $v = (1, 1)$  como uma combinação linear de  $v_1 = (-1, 1)$ ,  $v_2 = (3, 0)$ ,  $v_3 = (2, 1)$  de duas maneiras distintas.  
 (b) Mostre que isto não contradiz o Teorema 5.4.1.  
 6. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  e sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vetores linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$  expressos como matrizes  $n \times 1$ . Para ter  $A v_1, A v_2, \dots, A v_n$  linearmente independentes, o que deve satisfazer  $A$ ?  
 7. Uma base de  $P_n$  necessariamente contém um polinômio de grau  $k$  para cada  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ? Justifique sua resposta.  
 8. Para uso neste exercício, definimos uma “matriz-tabuleiro” como sendo uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i+j \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i+j \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Encontre o posto e a nulidade das seguintes matrizes-tabuleiro:

- (a) a matriz-tabuleiro  $3 \times 3$   
 (b) a matriz-tabuleiro  $4 \times 4$   
 (c) a matriz-tabuleiro  $n \times n$

9. Para uso neste exercício, definimos uma “matriz-X” como sendo uma matriz quadrada com um número ímpar de linhas e colunas que tem 0 em cada entrada exceto nas diagonais principal e secundária, onde tem uma entrada 1. Encontre o posto e a nulidade das seguintes matrizes-X:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) a matriz-X de tamanho  $(2n+1) \times (2n+1)$

10. Em cada parte, mostre que o conjunto de polinômios é um subespaço de  $P_n$  e encontre uma base para o subespaço.

- (a) todos os polinômios em  $P_n$  tais que  $p(-x) = p(x)$   
 (b) todos os polinômios em  $P_n$  tais que  $p(0) = 0$

11. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Mostre que o conjunto de todos os polinômios em  $P_n$  que têm uma tangente horizontal em  $x = 0$  é um subespaço de  $P_n$ . Encontre uma base para este subespaço.

12. Em Álgebra Linear avançada prova-se o seguinte critério de posto usando determinantes: O posto de uma matriz  $A$  é  $r$  se, e somente se,  $A$  tem alguma submatriz  $r \times r$  com determinante não-zero e todas as submatrizes de tamanho maior têm determinante zero. (Uma submatriz de  $A$  é qualquer matriz obtida de  $A$  por eliminação de linhas ou colunas de  $A$ . A matriz  $A$  toda também é considerada uma submatriz de  $A$ .) Em cada parte, use este critério para encontrar o posto da matriz.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Use o resultado do Exercício 12 para encontrar os postos possíveis para as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{bmatrix}$$

14. Prove: Se  $S$  é uma base para um espaço vetorial  $V$ , então valem as seguintes relações para quaisquer vetores  $v$  e  $w$  e qualquer escalar  $k$ :

$$(a) (v+w)_S = (v)_S + (w)_S \quad (b) (k v)_S = k(v)_S$$

**Requisito: Recurso Computacional****Exercícios Computacionais do Capítulo 5**

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**Seção 5.2**

- T1.** (a) Alguns recursos não têm comandos diretos para encontrar combinações lineares de vetores em  $R^n$ . No entanto, você pode usar multiplicação matricial para calcular uma combinação linear, criando uma matriz  $A$  com os vetores como colunas e um vetor-coluna  $x$  cujas entradas são os coeficientes. Use este método para calcular o vetor

$$\mathbf{v} = 6(8, -2, 1, -4) + 17(-3, 9, 11, 6) - 9(0, -1, 2, 4)$$

Confira seu trabalho à mão.

- (b) Use seu recurso para determinar se o vetor  $(9, 1, 0)$  é uma combinação linear dos vetores  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 4, 6)$  e  $(2, -3, -5)$ .

**Seção 5.4**

- T1.** (*Independência linear*) Projete três procedimentos diferentes de utilização de seu recurso para determinar se um conjunto dado de  $n$  vetores em  $R^n$  é linearmente independente; utilize todos estes procedimentos para determinar se os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (4, -5, 2, 6), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -2, 1, 3), \quad \mathbf{v}_3 = (6, -3, 3, 9),$$

$$\mathbf{v}_4 = (4, -1, 5, 6)$$

são linearmente independentes.

- T2.** (*Dimensão*) Projete três procedimentos diferentes de utilização de seu recurso para determinar a dimensão do subespaço gerado por um conjunto dado de vetores em  $R^n$ ; utilize todos estes procedimentos para determinar a dimensão do subespaço de  $R^5$  gerado pelos vetores

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, -1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, -1, 2, -3, 1),$$

$$\mathbf{v}_3 = (1, 1, -2, 0, -1), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 0, 1, 1, 1)$$

**Seção 5.5**

- T1.** (*Base do espaço-linha*) Alguns recursos fornecem um comando para encontrar uma base do espaço-linha de uma matriz. Se seu recurso tem esta funcionalidade, leia seu manual e então utilize o recurso para obter uma base do espaço-linha da matriz do Exemplo 6.

- T2.** (*Base do espaço-coluna*) Alguns recursos fornecem um comando para encontrar uma base do espaço-coluna de uma matriz. Se seu recurso tem esta funcionalidade, leia seu manual e então utilize o recurso para obter uma base do espaço-coluna da matriz do Exemplo 6.

- T3.** (*Espaço-nulo*) Alguns recursos fornecem um comando para encontrar uma base do espaço-nulo de uma matriz. Se seu recurso tem esta funcionalidade, leia seu manual e então verifique o seu entendimento do procedimento encontrando uma base do espaço-nulo da matriz  $A$  do Exemplo 4. Use este resultado para encontrar a solução geral do sistema homogêneo  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Seção 5.6**

- T1.** (*Posto e nulidade*) Leia em seu manual sobre como encontrar o posto de uma matriz e então use seu recurso para encontrar o posto da matriz  $A$  do Exemplo 1. Encontre a nulidade da matriz usando o Teorema 5.6.3 e o posto.

- T2.** Existe um resultado, chamado *Desigualdade de Sylvester*, que afirma que se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$  de postos  $r_A$  e  $r_B$ , respectivamente, então o posto  $r_{AB}$  de  $A B$  satisfaz a desigualdade

$$r_A + r_B - n \leq r_{AB} \leq \min(r_A, r_B),$$

onde  $\min(r_A, r_B)$  denota o menor entre  $r_A$  e  $r_B$  ou o seu valor comum, se os dois postos coincidem. Use seu recurso para confirmar este resultado com algumas matrizes de sua escolha.

# Espaços com Produto Interno

## Conteúdo do Capítulo

- 6.1 Produtos Internos
- 6.2 Ângulo e Ortogonalidade em Espaços com Produto Interno
- 6.3 Bases Ortonormais; Processo de Gram-Schmidt; Decomposição QR
- 6.4 Melhor Aproximação; Mínimos Quadrados
- 6.5 Matrizes Ortogonais; Mudança de Bases

**I**NTRODUÇÃO: Na Seção 3.3 nós definimos o produto interno euclidiano nos espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Em seguida, na Seção 4.1, nós estendemos este conceito ao  $\mathbb{R}^n$  e o utilizamos para definir as noções de comprimento, distância e ângulo no  $\mathbb{R}^n$ . Nesta seção nós iremos estender o conceito de produto interno ainda mais, extraíndo as propriedades mais importantes do produto interno euclidiano no  $\mathbb{R}^n$  e transformando-as em axiomas aplicáveis a espaços vetoriais quaisquer. Assim, estes axiomas, quando satisfeitos, produzem produtos internos generalizados que automaticamente têm as mais importantes propriedades dos produtos internos euclidianos. É, então, razoável usar estes produtos internos generalizados para definir as noções de comprimento, distância e ângulo em espaços vetoriais arbitrários.

## 6.1 PRODUTOS INTERNOS

Nesta seção nós iremos utilizar as propriedades mais importantes do produto interno euclidiano como axiomas para definir o conceito geral de um produto interno. Em seguida nós iremos mostrar como um produto interno pode ser usado para definir as noções de comprimento e distância em espaços vetoriais outros que não o  $R^n$ .

**Produtos Internos Gerais** Na Seção 4.1 nós denotamos o produto interno euclidiano de dois vetores do  $R^n$  pela notação  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ . Nesta seção será conveniente introduzir a notação alternativa  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  para o produto interno arbitrário. Com esta nova notação, as propriedades fundamentais do produto interno euclidiano listadas no Teorema 4.1.2 são precisamente os axiomas na definição seguinte.

### Definição

Um **produto interno** em um espaço vetorial real  $V$  é uma função que associa um número real  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  a cada par de vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V$  de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos por quaisquer vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  de  $V$  e qualquer escalar  $l$ .

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$  [Axioma de simetria]
  - (2)  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  [Axioma de aditividade]
  - (3)  $\langle l\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = l\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  [Axioma de homogeneidade]
  - (4)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$  [Axioma de positividade]
- e  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Um espaço vetorial real com um produto interno é chamado **espaço com produto interno real**.

**OBSERVAÇÃO.** No Capítulo 10 nós iremos estudar produtos internos sobre espaços vetoriais complexos. Até lá iremos utilizar a expressão “espaço com produto interno” no lugar de “espaço com produto interno real.”

Como os axiomas de produto interno são baseados nas propriedades do produto interno euclidiano, o produto interno euclidiano automaticamente satisfaz estes axiomas; este é o significado do próximo exemplo.

### EXEMPLO 1 Produto Interno Euclidiano em $R^n$

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são vetores no  $R^n$ , então a fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

define  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  como o produto interno euclidiano do  $R^n$ . Os quatro axiomas de produto interno são garantidos pelo Teorema 4.1.2. ♦

O produto interno euclidiano é o produto interno mais importante do  $R^n$ . Contudo, existem várias aplicações nas quais

é desejável modificar o produto interno euclidiano ponderando seus termos diferentemente. Mais precisamente, se

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

são números reais *positivos*, que chamamos **pesos**, e se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são vetores no  $R^n$ , então pode ser mostrado (Exercício 26) que a fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n \quad (1)$$

define um produto interno no  $R^n$ , denominado **produto interno euclidiano ponderado com pesos**  $w_1, w_2, \dots, w_n$ .

Para ilustrar uma maneira pela qual pode surgir um produto interno euclidiano ponderado, suponha que um experimento físico possa produzir qualquer um de  $n$  possíveis valores numéricos

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

e que  $m$  repetições do experimento fornecem estes valores com várias freqüências, ou seja, que  $x_1$  ocorre  $f_1$  vezes,  $x_2$  ocorre  $f_2$  vezes, e assim por diante. Como há um total de  $m$  repetições do experimento, temos

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = m$$

Assim, a **média aritmética** dos valores numéricos observados (denotada por  $\bar{x}$ ) é

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{1}{m}(f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n) \quad (2)$$

Se escrevermos

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 1/m$$

então (2) pode ser expresso como o produto interno ponderado

$$\bar{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = w_1f_1x_1 + w_2f_2x_2 + \cdots + w_nf_nx_n$$

**OBSERVAÇÃO.** Iremos supor sempre que  $R^n$  tem o produto interno euclidiano, a menos que um outro produto interno seja explicitamente especificado. Como definimos na Seção 4.1, referimo-nos ao  $R^n$  com o produto interno euclidiano como o **espaço euclidiano  $n$ -dimensional**.

### EXEMPLO 2 Produto Interno Euclidiano Ponderado

Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  vetores do  $R^2$ . Mostre que o produto interno euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

satisfaz os quatro axiomas de produto interno.

**Solução.**

Em primeiro lugar note que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são trocados nesta equação, então o lado direito permanece inalterado. Logo

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

Se  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ , então

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

garantindo o segundo axioma.

Em seguida,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3(lu_1)v_1 + 2(lu_2)v_2 = l(3u_1v_1 + 2u_2v_2) = l\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

que garante o terceiro axioma.

Finalmente,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1^2 + 2v_2^2$$

É óbvio que  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$ . Além disto,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$  se, e somente se,  $v_1 = v_2 = 0$ , ou seja, se, e somente se,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{0}$ . Logo o quarto axioma é satisfeito. ♦

**Comprimento e Distância em Espaços com Produto Interno** Antes de discutir mais exemplos de produtos internos, faremos uma pausa para explicar como os produtos internos são utilizados para introduzir as noções de comprimento e distância em espaços com produto interno. Lembre que no espaço euclidiano  $n$ -dimensional o comprimento euclidiano de um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  pode ser expresso em termos do produto interno euclidiano como

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}$$

e a distância euclidiana entre dois pontos arbitrários  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  pode ser expressa como

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})]^{1/2}$$

[veja Fórmulas (1) e (2) da Seção 4.1]. Motivados por estas fórmulas, fazemos a seguinte definição.

### Definição

Se  $V$  é um espaço com produto interno, então a **norma** (ou **comprimento**) de um vetor  $\mathbf{u}$  de  $V$  é denotada por  $\|\mathbf{u}\|$  e é definida por

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}$$

A distância entre dois pontos (vetores)  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é denotada por  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  e é definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

### EXEMPLO 3 Norma e Distância em $R^n$

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são vetores do  $R^n$  com o produto interno euclidiano, então

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

e

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{1/2} = [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})]^{1/2} \\ &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \end{aligned}$$

Observe que estas são nada mais que as fórmulas padrão para a norma e a distância euclidianas discutidas na Seção 4.1 [veja Fórmulas (1) e (2) naquela seção]. ♦

### EXEMPLO 4 Usando um Produto Interno Euclidiano Ponderado

É importante não esquecer que norma e distância dependem do produto interno que está sendo usado. Se o produto interno for mudado, então as normas e distâncias entre vetores também mudam. Por exemplo, para os vetores  $\mathbf{u} = (1, 0)$  e  $\mathbf{v} = (0, 1)$  do  $R^2$  com o produto interno euclidiano, nós temos

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

e

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Contudo, se mudarmos para o produto interno euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

então obteremos

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{1/2} = \sqrt{3}$$

e

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(1, -1), (1, -1)\| \\ &= [3(1)(1) + 2(-1)(-1)]^{1/2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

**Círculos Unitários e Esferas em Espaços com Produto Interno** Se  $V$  é um espaço com produto interno, então o conjunto dos pontos de  $V$  que satisfazem

$$\|\mathbf{u}\| = 1$$

é chamado a **esfera unitária**, ou então, o **círculo unitário**, de  $V$ . No  $R^2$  e  $R^3$  estes são os pontos que distam 1 unidade da origem.

### EXEMPLO 5 Círculos Unitários Incomuns em $R^2$

(a) Esboce o círculo unitário num sistema de coordenadas  $xy$  em  $R^2$  usando o produto interno euclidiano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$ .

(b) Esboce o círculo unitário num sistema de coordenadas  $xy$  em  $R^2$  usando o produto interno euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{9}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2$$

*Solução (a).* Se  $\mathbf{u} = (x, y)$ , então  $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , de modo que a equação do círculo unitário é  $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ , ou, elevando ao quadrado ambos os lados,

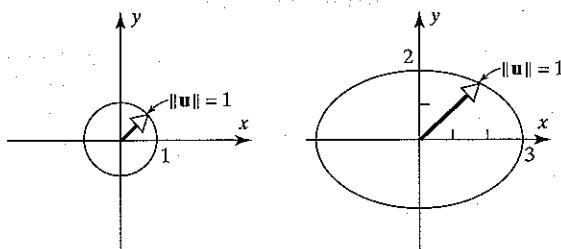
$$x^2 + y^2 = 1$$

Como era de se esperar, o gráfico desta equação é um círculo de raio 1 centrado na origem (Figura 6.1.1a).

*Solução (b).* Se  $\mathbf{u} = (x, y)$ , então  $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2}$ , de modo que a equação do círculo unitário é  $\sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2} = 1$ , ou, elevando ao quadrado ambos os lados,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

O gráfico desta equação é a elipse mostrada na Figura 6.1.1b.♦

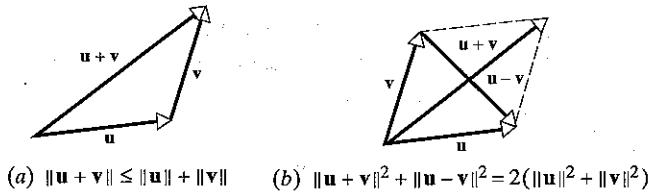


(a) O círculo unitário com a norma euclidiana  
 $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) O círculo unitário com a norma euclidiana  
 $\|u\| = \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2}$

**Figura 6.1.1**

É natural você sentir-se um pouco confuso com os resultados do último exemplo, pois embora nossas definições de comprimento e distância coincidam com as definições padrão quando aplicadas ao  $R^2$  com o produto interno euclidiano, é necessário um pouco de boa vontade para concordar que um “círculo” unitário possa ter um formato elíptico. Contudo, mesmo se produtos internos não canônicos distorcem espaços conhecidos e levam a valores estranhos para comprimentos e distâncias, muitos dos teoremas básicos da geometria euclidiana continuam valendo nestes espaços incomuns. Por exemplo, é um fato básico da geometria euclidiana que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é pelo menos tão grande quanto o comprimento do terceiro lado (Figura 6.1.2a). Nós veremos adiante que este resultado conhecido vale em todos espaços com produto interno, independentemente de quão incomum o produto interno possa ser. Como um outro exemplo, lembre do teorema de geometria euclidiana que afirma que a soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo coincide com a soma dos quadrados dos quatro lados (Figura 6.1.2b). Este resultado também vale em todos espaços com produto interno, independentemente do produto interno (Exercício 20).



**Figura 6.1.2**

**Produtos Internos Gerados por Matrizes** O produto interno euclidiano e o produto interno euclidiano ponderado são casos particulares de uma classe geral de produtos internos do  $R^n$ , que passamos a descrever. Sejam

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

vetores do  $R^n$  (escritos como matrizes  $n \times 1$ ) e seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  invertível. Pode ser mostrado (Exercício 30) que se  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  é o produto interno euclidiano de  $R^n$ , então a fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (3)$$

define um produto interno, chamado *produto interno do  $R^n$  gerado por  $A$* .

Lembrando que o produto interno euclidiano  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  pode ser escrito como o produto matricial  $\mathbf{v}^T \mathbf{u}$  [veja (7) na Seção 4.1], decorre que (3) pode ser escrito na forma alternativa

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{Av})^T \mathbf{A}\mathbf{u}$$

ou, equivalentemente,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (4)$$

### EXEMPLO 6 Produto Interno Gerado pela Matriz Identidade

O produto interno em  $R^n$  gerado pela matriz identidade  $n \times n$  é o produto interno euclidiano, pois substituindo  $A = I$  em (3) obtemos

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = I\mathbf{u} \cdot I\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

O produto interno euclidiano ponderado  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$  discutido no Exemplo 2 é o produto interno em  $R^2$  gerado por

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

pois substituindo esta matriz em (4) obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= [v_1 \ v_2] \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= [v_1 \ v_2] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \end{aligned}$$

Em geral, o produto interno euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n$$

é o produto interno em  $R^n$  gerado por

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

(verifique).♦

Nos próximos exemplos nós iremos descrever alguns produtos internos em espaços vetoriais outros que o  $R^n$ .

### EXEMPLO 7 Um Produto Interno em $M_{22}$

Se

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

são duas matrizes  $2 \times 2$  quaisquer, então a seguinte fórmula define um produto interno em  $M_{22}$  (verifique):

$$\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V) = \text{tr}(V^T U) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

Por exemplo, se

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$\langle U, V \rangle = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = 16$$

A norma de uma matriz  $U$  relativa a este produto interno é

$$\|U\| = \langle U, U \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

e a esfera unitária neste espaço consiste de todas as matrizes  $U$ , de tamanho  $2 \times 2$ , cujas entradas satisfazem a equação  $\|U\| = 1$ , que, elevada ao quadrado, é

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$$

### EXEMPLO 8 Um Produto Interno em $P_2$

Se

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{e} \quad q = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

são dois vetores quaisquer em  $P_2$ , então a seguinte fórmula define um produto interno em  $P_2$  (verifique):

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

A norma do polinômio  $p$  relativa a este produto interno é

$$\|p\| = \langle p, p \rangle^{1/2} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}$$

e a esfera unitária neste espaço consiste de todos os polinômios  $p$  em  $P_2$  cujos coeficientes satisfazem a equação  $\|p\| = 1$  que, elevada ao quadrado, é

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1$$

### Requisito: Cálculo

### EXEMPLO 9 Um Produto Interno em $C[a, b]$

Sejam  $f = f(x)$  e  $g = g(x)$  duas funções contínuas em  $C[a, b]$  e defina

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (6)$$

Nós iremos mostrar que esta fórmula define um produto interno em  $C[a, b]$  verificando os quatro axiomas de produto interno para funções  $f = f(x)$ ,  $g = g(x)$  e  $s = s(x)$  em  $C[a, b]$ :

$$(1) \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle$$

mostra que vale o Axioma 1.

$$\begin{aligned} (2) \langle f + g, s \rangle &= \int_a^b (f(x) + g(x))s(x) dx \\ &= \int_a^b f(x)s(x) dx + \int_a^b g(x)s(x) dx \\ &= \langle f, s \rangle + \langle g, s \rangle \end{aligned}$$

mostra que vale o Axioma 2.

$$(3) \langle kf, g \rangle = \int_a^b kf(x)g(x) dx = k \int_a^b f(x)g(x) dx = k\langle f, g \rangle$$

mostra que vale o Axioma 3.

- (4) Se  $f = f(x)$  é qualquer função em  $C[a, b]$ , então  $f^2(x) \geq 0$  para cada  $x$  em  $[a, b]$ , de modo que

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$$

Além disto, como  $f^2(x) \geq 0$  e  $f = f(x)$  é contínua em  $[a, b]$ , segue que  $\int_a^b f^2(x) dx = 0$  se, e somente se,  $f(x) = 0$  para cada  $x$  em  $[a, b]$ . Assim, temos que  $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx = 0$  se, e somente se,  $f = \mathbf{0}$ . Isto mostra que vale o Axioma 4. ♦

### Requisito: Cálculo

### EXEMPLO 10 Norma de um Vetor em $C[a, b]$

Se  $C[a, b]$  tem o produto interno definido no exemplo precedente, então a norma de uma função  $f = f(x)$  relativa a este produto interno é

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \quad (7)$$

e a esfera unitária neste espaço consiste de todas as funções  $f$  em  $C[a, b]$  que satisfazem a equação  $\|f\| = 1$  que, elevada ao quadrado, é

$$\int_a^b f^2(x) dx = 1$$

### Requisito: Cálculo

OBSERVAÇÃO. Como polinômios são funções contínuas em  $(-\infty, \infty)$ , em particular, são contínuas em qualquer intervalo fechado  $[a, b]$ . Assim, para todos tais intervalos, o espaço vetorial  $P_n$  é um subespaço de  $C[a, b]$  e a Fórmula (6) define um produto interno em  $P_n$ .

### Requisito: Cálculo

OBSERVAÇÃO. Lembre do Cálculo que o comprimento de arco de uma curva  $y = f(x)$  ao longo de um intervalo  $[a, b]$  é dado pela fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (8)$$

Não confunda este conceito de comprimento de arco com  $\|f\|$ , que é o comprimento (norma) de  $f$  quando  $f$  é visto como um vetor em  $C[a, b]$ . As Fórmulas (7) e (8) são bem distintas.

O próximo teorema lista algumas propriedades algébricas básicas de produtos internos.

### Teorema 6.1.1

**Propriedades do Produto Interno**  
Se  $u, v$  e  $w$  são vetores em um espaço com produto interno real e  $k$  é um escalar qualquer, então:

- (a)  $\langle \mathbf{0}, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle = 0$
- (b)  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
- (c)  $\langle u, kv \rangle = k\langle u, v \rangle$
- (d)  $\langle u - v, w \rangle = \langle u, w \rangle - \langle v, w \rangle$
- (e)  $\langle u, v - w \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, w \rangle$

*Prova.* Nós vamos provar a parte (b) e deixar a prova das demais partes como exercícios.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && [\text{Por simetria}] \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && [\text{Por aditividade}] \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && [\text{Por simetria}]\end{aligned}$$

O exemplo a seguir ilustra como o Teorema 6.1 e as propriedades que definem produtos internos podem ser usados para efetuar cálculos algébricos com produtos internos. À medida que você lê o exemplo, vai achar instrutivo justificar cada passo.

### EXEMPLO 1.1 Calculando com Produtos Internos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} - 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} \rangle - \langle 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, 3\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle - \langle 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} \rangle - \langle 2\mathbf{v}, 4\mathbf{v} \rangle \\ &= 3\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 6\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - 8\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= 3\|\mathbf{u}\|^2 + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 6\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 3\|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

Como o Teorema 6.1.1 é um resultado geral, é particularmente válido para *todos* os espaços com produto interno reais. Este é o verdadeiro poder do desenvolvimento axiomático de espaços vetoriais e produtos internos—um único teorema prova uma abundância de resultados de uma só vez. Por exemplo, sem maiores provas temos a garantia que as cinco propriedades listadas no Teorema 6.1.1 são verdadeiras para o produto interno em  $R^n$  gerado por qualquer matriz  $A$  [Fórmula (3)]. Para exemplificar, vamos conferir a parte (b) do Teorema 6.1.1 para este produto interno:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= (\mathbf{v} + \mathbf{w})^T A^T \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{v}^T + \mathbf{w}^T) A^T \mathbf{u} && [\text{Propriedade da transposta}] \\ &= (\mathbf{v}^T A^T \mathbf{u}) + (\mathbf{w}^T A^T \mathbf{u}) && [\text{Propriedade de multiplicação matricial}] \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle\end{aligned}$$

O leitor pode verificar que é instrutivo conferir as demais partes do Teorema 6.1.1 para este produto interno.

### Conjunto de Exercícios 6.1

- Seja  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  o produto interno euclidiano do  $R^2$  e sejam  $\mathbf{u} = (3, -2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 5)$ ,  $\mathbf{w} = (-1, 6)$  e  $l = -4$ . Mostre que
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
  - $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
  - $\langle l\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = l\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, l\mathbf{v} \rangle$
  - $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$
- Repita o Exercício 1 para o produto interno euclidiano ponderado  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$ .
- Calcule  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  usando o produto interno do Exemplo 7.
  - $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
- Calcule  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$  usando o produto interno do Exemplo 8.
  - $\mathbf{p} = -2 + x + 3x^2$ ,  $\mathbf{q} = 4 - 7x^2$
  - $\mathbf{p} = -5 + 2x + x^2$ ,  $\mathbf{q} = 3 + 2x - 4x^2$
- (a) Use a Fórmula (3) para mostrar que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 9u_1v_1 + 4u_2v_2$  é o produto interno de  $R^2$  gerado por
 
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
 (b) Use o produto interno da parte (a) para calcular  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  com  $\mathbf{u} = (-3, 2)$  e  $\mathbf{v} = (1, 7)$ .
- (a) Use a Fórmula (3) para mostrar que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 10u_2v_2$  é o produto interno de  $R^2$  gerado por
 
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
 (b) Use o produto interno da parte (a) para calcular  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  com  $\mathbf{u} = (0, -3)$  e  $\mathbf{v} = (6, 2)$ .
- Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Em cada parte, a expressão dada é um produto interno em  $R^2$ . Encontre a matriz que gera este produto interno.
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + 6u_2v_2$
- Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Mostre que as expressões a seguir são produtos internos em  $R^2$  verificando que valem os axiomas de produtos internos.
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$
- Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Determine quais das expressões a seguir são produtos internos em  $R^3$ . Para as que não são produtos internos, liste os axiomas que não valem.
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$
- Em cada parte use o produto interno em  $R^2$  dado para calcular  $\|\mathbf{w}\|$ , onde  $\mathbf{w} = (-1, 3)$ .
  - o produto interno euclidiano

- (b) o produto interno euclidiano ponderado  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ , onde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$   
(c) o produto interno gerado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Use os produtos internos do Exercício 10 para encontrar  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  para  $\mathbf{u} = (-1, 2)$  e  $\mathbf{v} = (2, 5)$ .

12. Suponha que  $P_2$  tem o produto interno do Exemplo 8. Em cada parte, encontre  $\|\mathbf{p}\|$ .

(a)  $\mathbf{p} = -2 + 3x + 2x^2$       (b)  $\mathbf{p} = 4 - 3x^2$

13. Suponha que  $M_{22}$  tem o produto interno do Exemplo 7. Em cada parte, encontre  $\|A\|$ .

(a)  $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$       (b)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. Suponha que  $P_2$  tem o produto interno do Exemplo 8. Encontre  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ .

$\mathbf{p} = 3 - x + x^2$ ,       $\mathbf{q} = 2 + 5x^2$

15. Suponha que  $M_{22}$  tem o produto interno do Exemplo 7. Encontre  $d(A, B)$ .

(a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ ,       $B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$       (b)  $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,       $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

16. Suponha que  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores tais que

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2$ ,       $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -3$ ,       $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 5$ ,       $\|\mathbf{u}\| = 1$ ,       $\|\mathbf{v}\| = 2$ ,       $\|\mathbf{w}\| = 7$

Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões.

(a)  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle$       (b)  $\langle 2\mathbf{v} - \mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{w} \rangle$       (c)  $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, 4\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle$   
(d)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$       (e)  $\|2\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$       (f)  $\|\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 4\mathbf{w}\|$

17. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Suponha que  $P_2$  tem o produto interno

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

(a) Encontre  $\|\mathbf{p}\|$  para  $\mathbf{p} = 1$ ,  $\mathbf{p} = x$  e  $\mathbf{p} = x^2$ . (b) Encontre  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  se  $\mathbf{p} = 1$  e  $\mathbf{q} = x$ .

18. Esboce o círculo unitário em  $R^2$  usando o produto interno dado.

(a)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4}u_1v_1 + \frac{1}{16}u_2v_2$       (b)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$

19. Encontre um produto interno euclidiano ponderado de  $R^2$  para o qual o círculo unitário é a elipse mostrada na figura dada.

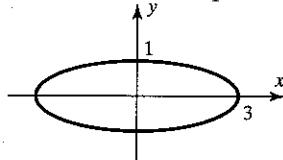


Figura Ex-19

20. Mostre que vale a seguinte identidade para vetores de qualquer espaço com produto interno.

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

21. Mostre que vale a seguinte identidade para vetores de qualquer espaço com produto interno.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

22. Sejam  $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$  e  $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ .

Mostre que  $\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$  não é um produto interno em  $M_{22}$ .

23. Sejam  $\mathbf{p} = p(x)$  e  $\mathbf{q} = q(x)$  polinômios em  $P_2$ . Mostre que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p(0)q(0) + p\left(\frac{1}{2}\right)q\left(\frac{1}{2}\right) + p(1)q(1)$$

é um produto interno em  $P_2$ . Isto é um produto interno em  $P_3$ ? Explique.

24. Prove: Se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  é o produto interno euclidiano de  $R^n$  e se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então  $\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle A^T\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .

[Sugestão.] Use o seguinte fato:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$ .]

25. Verifique o resultado do Exercício 24 para o produto interno euclidiano de  $R^3$  e

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

26. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Mostre que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \dots + w_nu_nv_n$$

é um produto interno em  $R^n$  se  $w_1, w_2, \dots, w_n$  são números reais positivos.

27. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Em cada parte, use o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

para calcular  $\langle p, q \rangle$  para os vetores  $p = p(x)$  e  $q = q(x)$  em  $P_3$ .

- (a)  $p = 1 - x + x^2 + 5x^3$      $q = x - 3x^2$   
 (b)  $p = x - 5x^3$      $q = 2 + 8x^2$

28. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Em cada parte, use o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

para calcular  $\langle f, g \rangle$  para os vetores  $f = f(x)$  e  $g = g(x)$  em  $C[0, 1]$ .

- (a)  $f = \cos 2\pi x$ ,  $g = \sin 2\pi x$     (b)  $f = x$ ,  $g = e^x$     (c)  $f = \tan \frac{\pi}{4}x$ ,  $g = 1$

29. Mostre que o produto interno do Exemplo 7 pode ser escrito como  $\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V)$ .

30. Prove que a Fórmula (3) define um produto interno em  $R^n$ . [Sugestão. Use a versão alternativa da Fórmula (3) dada por (4).]

31. Mostre que a matriz (5) gera o produto interno euclidiano ponderado  $\langle u, v \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \dots + w_n u_n v_n$  em  $R^n$ .

### Discussão e Descoberta

32. A seguir apresentamos uma prova da parte (c) do Teorema 6.1.1. Preencha cada lacuna com o nome do axioma de produto interno que justifica o passo.

Hipótese: Sejam  $u$  e  $v$  vetores de um espaço com produto interno real.

Conclusão:  $\langle u, kv \rangle = k \langle u, v \rangle$ .

Prova: (1)  $\langle u, kv \rangle = \langle kv, u \rangle$  \_\_\_\_\_  
 (2) \_\_\_\_\_ =  $k \langle v, u \rangle$  \_\_\_\_\_  
 (3) \_\_\_\_\_ =  $k \langle u, v \rangle$  \_\_\_\_\_

33. Prove as partes (a), (d) e (e) do Teorema 6.1.1, justificando cada passo com o nome do axioma de produto interno ou dando referência a um resultado estabelecido previamente.

34. Crie um produto interno euclidiano ponderado  $\langle u, v \rangle = au_1v_1 + bu_2v_2$  em  $R^2$  para o qual o círculo unitário num sistema de coordenadas  $xy$  é a elipse da figura dada.

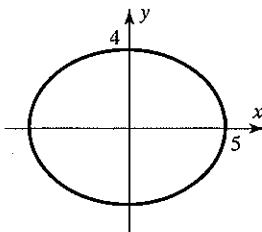


Figura Ex-3 4

## 6.2 ÂNGULO E ORTOGONALIDADE EM ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Nesta seção nós iremos definir a noção de ângulo entre dois vetores em um espaço com produto interno e usaremos este conceito para obter algumas relações básicas entre vetores de um espaço com produto interno, inclusive uma relação geométrica fundamental entre o espaço-nulo e o espaço-coluna de uma matriz.

**Desigualdade de Cauchy-Schwarz** Sabemos pela Fórmula (1) da Seção 3.3 que se  $u$  e  $v$  são dois vetores não-nulos em  $R^2$  ou  $R^3$  e  $\theta$  é o ângulo entre eles, então

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta \quad (1)$$

ou, alternativamente,

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \quad (2)$$

Nosso primeiro objetivo nesta seção é definir o conceito de ângulo entre dois vetores de um espaço com produto interno arbitrário. Para que uma tal definição seja razoável, queremos que seja consistente com a Fórmula (2) quando aplicada ao caso especial do  $R^2$  ou  $R^3$  com o produto interno euclidiano. Assim, nós queremos que a nossa definição de ângulo  $\theta$  entre dois vetores não-nulos de um espaço com produto interno satisfaça a relação

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \quad (3)$$

Contudo, como  $|\cos \theta| \leq 1$ , haveria pouca esperança de satisfazer (3) a menos que nos seja assegurado que

$$\left| \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right| \leq 1$$

vale para qualquer par de vetores não-nulos de um espaço com produto interno. Felizmente, seremos capazes de provar que isto

realmente ocorre, usando a generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja Teorema 4.13) a seguir.

### Teorema 6.2.1

#### Desigualdade de Cauchy-Schwarz

*Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores em um espaço com produto interno real, então*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (4)$$

*Prova.* Antes de começar, nós advertimos o leitor que a prova dada aqui depende de um truque que não é fácil motivar. Se  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , então  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ , e ambos lados de (4) são iguais. Suponha agora que  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . Sejam  $a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ ,  $b = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  e  $c = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  e seja  $t$  um número real qualquer. Pelo axioma da positividade, o produto interno de qualquer vetor por ele mesmo é sempre não-negativo. Portanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= at^2 + bt + c \end{aligned}$$

Esta desigualdade implica que o polinômio quadrático  $at^2 + bt + c$  não tem raiz real ou então tem uma raiz real dupla. Portanto, seu discriminante deve satisfazer a desigualdade  $b^2 - 4ac \leq 0$ . Expressando os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  em termos dos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  resulta  $4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0$ , ou, equivalentemente,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados e usando o fato que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  e  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  são não-negativos, resulta

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2} \text{ ou, equivalentemente, } |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

completando a prova. ■

Observamos, para referência, que a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser escrita nas seguintes formas alternativas:

$$(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \leq (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle)(\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle) \quad (5)$$

$$(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad (6)$$

A primeira destas fórmulas foi obtida na prova do Teorema 6.2.1 e a segunda é obtida da primeira usando os fatos  $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$  e  $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ .

### EXEMPLO 1 A desigualdade de Cauchy-Schwarz em $R^n$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $R^n$  (Teorema 4.1.3) decorre como caso especial do Teorema 6.2.1 tomando  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  como o produto interno euclidiano  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ . ♦

Os dois próximos teoremas mostram que as propriedades básicas de comprimento e distância, estabelecidas nos Teoremas 4.1.4 e 4.1.5 para vetores do espaço euclidiano  $n$ -dimensional, continuam válidas em espaços com produto interno arbitrários. Isto evidencia fortemente que foram bem escolhidas nossas definições de produto interno, comprimento e distância.

### Teorema 6.2.2

#### Propriedades do Comprimento

*Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores em um espaço com produto interno  $V$  e se  $k$  é um escalar qualquer, então:*

- (a)  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
- (b)  $\|\mathbf{u}\| = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- (c)  $\|k\mathbf{v}\| = |k| \|\mathbf{v}\|$
- (d)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$  (Desigualdade triangular)

### Teorema 6.2.3

#### Propriedades da Distância

*Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores em um espaço com produto interno  $V$ , então:*

- (a)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
- (b)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
- (c)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
- (d)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  (Desigualdade triangular)

Nós iremos provar a parte (d) do Teorema 6.2.2 e deixar as demais partes dos Teoremas 6.2.2 e 6.2.3 como exercícios.

*Prova do Teorema 6.2.2d.* Por definição,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \quad [\text{Propriedade de valor absoluto}] \\ &\leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \quad [\text{Por (4)}] \\ &\leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada obtemos  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ . ■

**Ângulo Entre Vetores** Nós mostraremos agora como a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser usada para definir ângulos em espaços com produto interno arbitrários. Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores não-nulos num espaço com produto interno  $V$ . Se dividirmos ambos os lados da fórmula (6) por  $\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$ , nós obtemos

$$\left[ \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right]^2 \leq 1$$

ou, equivalentemente,

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1 \quad (7)$$

Ocorre que se  $\theta$  é o ângulo cuja medida em radianos varia de 0 a  $\pi$ , então  $\cos \theta$  toma cada valor entre  $-1$  e  $1$ , inclusive os extremos, exatamente uma única vez (Figura 6.2.1).

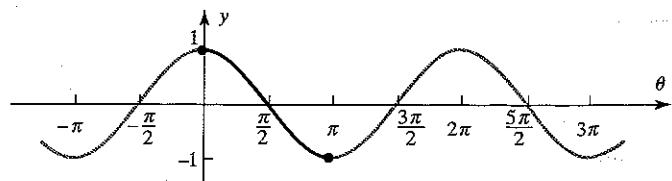


Figura 6.2.1

Assim, por (7), existe um único ângulo  $\theta$  tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (8)$$

Nós definimos  $\theta$  como o **ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$** . Observe que em  $R^2$  ou  $R^3$  com o produto interno euclidiano, (8) concorda com a fórmula usual do cosseno do ângulo entre dois vetores não-nulos [Fórmula (2)].

### EXEMPLO 2 Cosseno de um Ângulo entre Dois Vetores em $R^4$

Tomando o produto interno euclidiano em  $R^4$  encontre o cosseno do ângulo  $\theta$  entre os vetores  $\mathbf{u} = (4, 3, 1, -2)$  e  $\mathbf{v} = (-2, 1, 2, 3)$ .

*Solução.*

Nós deixamos como exercício para o leitor verificar que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{18}, \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -9$$

de modo que

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{-9}{\sqrt{30} \sqrt{18}} = -\frac{3}{2\sqrt{15}}$$

**Ortogonalidade** O Exemplo 2 é basicamente um exercício matemático, pois há relativamente pouca necessidade de encontrar ângulos entre vetores, exceto em  $R^2$  ou  $R^3$ , com o produto interno euclidiano. Contudo, um problema da maior importância em todos os espaços com produto interno é determinar se dois vetores são *ortogonais*—ou seja, se o ângulo entre eles é  $\theta = \pi/2$ .

Segue de (8) que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são dois vetores *não-nulos* de um espaço com produto interno e  $\theta$  é o ângulo entre eles, então  $\cos \theta = 0$  se, e somente se,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Equivalentemente, para vetores não-nulos nós temos  $\theta = \pi/2$  se, e somente se,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Se nós concordarmos considerar que o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é  $\pi/2$  quando um ou ambos destes vetores for 0, então podemos afirmar, sem exceção, que o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é  $\pi/2$  se, e somente se,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Isto sugere a seguinte definição.

#### Definição

Dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  de um espaço com produto interno são chamados *ortogonais* se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .

Observe que no caso especial em que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  é o produto interno euclidiano de  $R^n$ , esta definição reduz-se à definição de ortogonalidade do espaço euclidiano  $n$ -dimensional dada na Seção 4.1. Nós também enfatizamos que a ortogonalidade depende do produto interno; dois vetores podem ser ortogonais em relação a um produto interno mas não a outro.

### EXEMPLO 3 Vetores Ortogonais em $M_{22}$

Tomando em  $M_{22}$  o produto interno do Exemplo 7 da seção precedente, as matrizes

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são ortogonais, pois

$$\langle U, V \rangle = 1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0) = 0$$

#### Requisito: Cálculo

### EXEMPLO 4 Vetores Ortogonais em $P_2$

Tomando em  $P_2$  o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

sejam  $p = x$  e  $q = x^2$ . Então

$$\begin{aligned} \|p\| &= \langle p, p \rangle^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 xx dx \right]^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 x^2 dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \|q\| &= \langle q, q \rangle^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 x^2 x^2 dx \right]^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 x^4 dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}} \\ \langle p, q \rangle &= \int_{-1}^1 xx^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \end{aligned}$$

Como  $\langle p, q \rangle = 0$ , os vetores  $p = x$  e  $q = x^2$  são ortogonais relativamente ao produto interno dado.

Na Seção 4.1 nós provamos o Teorema de Pitágoras para vetores no espaço euclidiano  $n$ -dimensional. O próximo teorema estende este resultado a vetores em qualquer espaço com produto interno.

#### Teorema 6.2.4 Teorema de Pitágoras Generalizado

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores ortogonais em um espaço com produto interno, então:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

*Prova.* A ortogonalidade de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  implica que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , e portanto

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

#### Requisito: Cálculo

### EXEMPLO 5 O Teorema de Pitágoras em $P_2$

No Exemplo 4 nós mostramos que  $p = x$  e  $q = x^2$  são ortogonais relativamente ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

de  $P_2$ . Segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$$

Assim, pelas contas feitas no Exemplo 4, temos

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

Nós podemos verificar este resultado diretamente por integração:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= \langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^1 (x + x^2)(x + x^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^2 dx + 2 \int_{-1}^1 x^3 dx + \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{5} = \frac{16}{15} \quad \diamond\end{aligned}$$

**Complementos Ortogonais** Se  $V$  é um plano pela origem do  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno euclidiano, então o conjunto de todos os vetores que são ortogonais a cada vetor de  $V$  constitui a reta  $L$  pela origem que é perpendicular a  $V$  (Figura 6.2.2). Na linguagem da Álgebra Linear nós dizemos que a reta e o plano são *complementos ortogonais* um do outro. A seguinte definição estende este conceito a espaços com produto interno arbitrários.

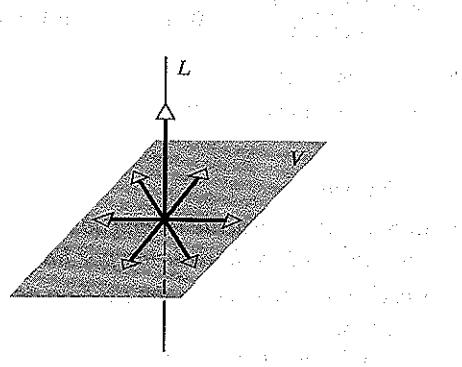


Figura 6.2.2 Cada vetor em  $L$  é ortogonal a cada vetor em  $V$ .

### Definição

Seja  $W$  um subespaço de um espaço com produto interno  $V$ . Um vetor  $\mathbf{u}$  de  $V$  é dito **ortogonal a  $W$**  se é ortogonal a cada vetor de  $W$ , e o conjunto de todos os vetores de  $V$  que são ortogonais a  $W$  é chamado **complemento ortogonal de  $W$** .

Lembre da Geometria que o símbolo  $\perp$  é usado para indicar perpendicularidade. Na Álgebra Linear, o complemento ortogonal de um subespaço  $W$  é denotado por  $W^\perp$  (que lemos “ $W$  perpendicular”). O teorema seguinte enumera as propriedades básicas dos complementos ortogonais.

### Teorema 6.2.5

#### Propriedades do Complemento Ortogonal

Se  $W$  é um subespaço de um espaço com produto interno  $V$  de dimensão finita, então:

- $W^\perp$  é um subespaço de  $V$ .
- O único vetor comum a  $W$  e  $W^\perp$  é  $\mathbf{0}$ .
- O complemento ortogonal de  $W^\perp$  é  $W$ , ou seja,  $(W^\perp)^\perp = W$ .

Nós iremos provar as partes (a) e (b). A prova de (c) requer resultados apresentados mais adiante neste capítulo, portanto sua prova será deixada para os exercícios ao final do capítulo.

**Prova (a).** Em primeiro lugar, observe que  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 0$  para cada vetor  $\mathbf{w}$  em  $W$ , portanto  $W^\perp$  contém pelo menos o vetor nulo. Nós queremos mostrar que  $W^\perp$  é fechado na adição e multiplicação por escalar; ou seja, queremos mostrar que a soma de dois vetores de  $W^\perp$  é ortogonal a cada vetor de  $W$  e que qualquer múltiplo escalar de um vetor de  $W^\perp$  é ortogonal a cada vetor de  $W$ . Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores de  $W^\perp$ , seja  $k$  um escalar qualquer, e seja  $\mathbf{w}$  um vetor qualquer em  $W$ . Então pela definição de  $W^\perp$  nós temos  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$  e  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ . Usando propriedades básicas do produto interno, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0 \\ \langle k\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= k\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = k(0) = 0\end{aligned}$$

provando que  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  e  $k\mathbf{v}$  estão em  $W^\perp$ .

**Prova (b).** Se  $\mathbf{v}$  é um vetor de ambos  $W$  e  $W^\perp$ , então  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , que acarreta  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , pelo Axioma 4 de produtos internos. ■

**OBSERVAÇÃO.** Como  $W$  e  $W^\perp$  são complementos ortogonais um do outro pela parte (c) do teorema acima, nós dizemos que  $W$  e  $W^\perp$  são *complementos ortogonais*.

**Uma Relação Geométrica Entre Espaço-Nulo e Espaço-Linha** O seguinte teorema fundamental fornece uma relação geométrica entre o espaço-nulo e o espaço-linha de uma matriz.

### Teorema 6.2.6

Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então:

- O espaço-nulo de  $A$  e o espaço-linha de  $A$  são complementos ortogonais em  $\mathbb{R}^n$  com relação ao produto interno euclidiano.
- O espaço-nulo de  $A^T$  e o espaço-coluna de  $A$  são complementos ortogonais em  $\mathbb{R}^m$  com relação ao produto interno euclidiano.

**Prova (a).** Nós queremos mostrar que o complemento ortogonal do espaço-linha de  $A$  é o espaço-nulo de  $A$ . Para fazer isto, nós precisamos mostrar que se um vetor  $\mathbf{v}$  é ortogonal a cada vetor do espaço-linha, então  $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$  e, reciprocamente, se  $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , então  $\mathbf{v}$  é ortogonal a cada vetor do espaço-linha.

Suponha primeiro que  $\mathbf{v}$  é ortogonal a cada vetor do espaço-linha de  $A$ . Então, em particular,  $\mathbf{v}$  é ortogonal aos vetores-linha  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  de  $A$ ; ou seja,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v} = \dots = \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

Pela Fórmula (11) da Seção 4.1, o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  pode ser escrito com notação de produto escalar como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

e portanto segue de (9) que  $v$  é uma solução do sistema e consequentemente pertence ao espaço-nulo de  $A$ .

Reciprocamente, suponha que  $v$  é um vetor no espaço-nulo de  $A$ , ou seja, que  $Av = \mathbf{0}$ . Segue de (10) que

$$r_1 \cdot v = r_2 \cdot v = \dots = r_n \cdot v = 0$$

Agora, se  $r$  é um vetor qualquer do espaço-linha de  $A$ , então  $r$  pode ser escrito como uma combinação linear de vetores-linha de  $A$ , digamos

$$r = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_n r_n$$

Assim,

$$\begin{aligned} r \cdot v &= (c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_n r_n) \cdot v \\ &= c_1(r_1 \cdot v) + c_2(r_2 \cdot v) + \dots + c_n(r_n \cdot v) \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

provando que  $v$  é ortogonal a cada vetor do espaço-linha de  $A$ .

*Prova (b).* Como o espaço-coluna de  $A$  é o espaço-linha de  $A^T$  (exceto por uma diferença de notação), a prova segue aplicando o resultado da parte (a) a  $A^T$ . ■

O próximo exemplo mostra como o Teorema 6.2.6 pode ser usado para encontrar uma base para o complemento ortogonal de um subespaço do espaço euclidiano  $n$ -dimensional.

### EXEMPLO 6. Uma Base para o Complemento Ortogonal

Seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^5$  gerado pelos vetores

$$\begin{aligned} w_1 &= (2, 2, -1, 0, 1), & w_2 &= (-1, -1, 2, -3, 1), \\ w_3 &= (1, 1, -2, 0, -1), & w_4 &= (0, 0, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Encontre uma base para o complemento ortogonal de  $W$ .

*Solução.*

O espaço  $W$  gerado por  $w_1, w_2, w_3$  e  $w_4$  é o mesmo que o espaço-linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, pela parte (a) do Teorema 6.2.6, o espaço-nulo de  $A$  é um complemento ortogonal de  $W$ . No Exemplo 4 da Seção 5.5 nós mostramos que

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base para este espaço-nulo. Escrevendo estes vetores na mesma notação que  $w_1, w_2, w_3$  e  $w_4$ , nós concluímos que os vetores

$$v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad v_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$$

formam uma base do complemento ortogonal de  $W$ . Para conferir, o leitor pode querer verificar que  $v_1$  e  $v_2$  são ortogonais a  $w_1, w_2, w_3$  e  $w_4$ , calculando os produtos escalares necessários. ♦

**Resumo** Nós deixamos a cargo do leitor mostrar que em qualquer espaço com produto interno  $V$ , o espaço nulo  $\{\mathbf{0}\}$  e o espaço inteiro  $V$  são complementos ortogonais. Assim, se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , dizer que  $Ax = \mathbf{0}$  admite somente a solução trivial é equivalente a dizer que o complemento ortogonal do espaço-nulo de  $A$  é todo o  $\mathbb{R}^n$ , ou, equivalentemente, que o espaço-linha de  $A$  é todo  $\mathbb{R}^n$ . Isto nos permite acrescentar dois novos resultados aos dezessete listados no Teorema 5.6.9.

### Teorema 6.2.7

#### Afirmações Equivalentes

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e se  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a multiplicação por  $A$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é invertível.
- (b)  $Ax = \mathbf{0}$  admite somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- (d)  $A$  pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.
- (e)  $Ax = b$  é consistente para cada matriz  $b$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (f)  $Ax = b$  tem exatamente uma solução para cada matriz  $b$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (g)  $\det(A) \neq 0$ .
- (h) A imagem de  $T_A$  é o  $\mathbb{R}^n$ .
- (i)  $T_A$  é injetora.
- (j) Os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.
- (k) Os vetores-linha de  $A$  são linearmente independentes.
- (l) Os vetores-coluna de  $A$  geram o  $\mathbb{R}^n$ .
- (m) Os vetores-linha de  $A$  geram o  $\mathbb{R}^n$ .
- (n) Os vetores-coluna de  $A$  formam uma base do  $\mathbb{R}^n$ .
- (o) Os vetores-linha de  $A$  formam uma base do  $\mathbb{R}^n$ .
- (p)  $A$  tem posto  $n$ .
- (q)  $A$  tem nulidade 0.
- (r) O complemento ortogonal do espaço-nulo de  $A$  é o  $\mathbb{R}^n$ .
- (s) O complemento ortogonal do espaço-linha de  $A$  é  $\{\mathbf{0}\}$ .

Este teorema relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

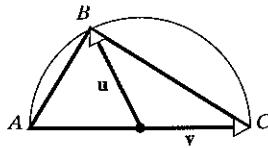
### Conjunto de Exercícios 6.2

1. Em cada parte, determine se os vetores dados são ortogonais em relação ao produto interno euclidiano.
  - (a)  $u = (-1, 3, 2)$ ,  $v = (4, 2, -1)$
  - (b)  $u = (-2, -2, -2)$ ,  $v = (1, 1, 1)$
  - (c)  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (0, 0, 0)$
  - (d)  $u = (-4, 6, -10, 1)$ ,  $v = (2, 1, -2, 9)$
  - (e)  $u = (0, 3, -2, 1)$ ,  $v = (5, 2, -1, 0)$
  - (f)  $u = (a, b)$ ,  $v = (-b, a)$

2. Suponha que  $R^4$  tem o produto interno euclidiano e seja  $\mathbf{u} = (-1, 1, 0, 2)$ . Determine se o vetor  $\mathbf{u}$  é ortogonal ao subespaço gerado pelos vetores  $\mathbf{w}_1 = (0, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{w}_2 = (1, -1, 3, 0)$  e  $\mathbf{w}_3 = (4, 0, 9, 2)$ .
3. Suponha que  $R^2$ ,  $R^3$  e  $R^4$  têm o produto interno euclidiano. Em cada parte, encontre o cosseno do ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .
- $\mathbf{u} = (1, -3)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 4)$
  - $\mathbf{u} = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 8)$
  - $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$
  - $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$
  - $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$
  - $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$
4. Suponha que  $P_2$  tem o produto interno do Exemplo 8 da Seção 6.1. Encontre o cosseno do ângulo entre  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ .
- $\mathbf{p} = -1 + 5x + 2x^2$ ,  $\mathbf{q} = 2 + 4x - 9x^2$
  - $\mathbf{p} = x - x^2$ ,  $\mathbf{q} = 7 + 3x + 3x^2$
5. Mostre que  $\mathbf{p} = 1 - x + 2x^2$  e  $\mathbf{q} = 2x + x^2$  são ortogonais em relação ao produto interno do Exercício 4.
6. Suponha que  $M_{22}$  tem o produto interno do Exemplo 7 da Seção 6.1. Encontre o cosseno do ângulo entre  $A$  e  $B$ .
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
7. Seja
- $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
- Quais das seguintes matrizes são ortogonais a  $A$  em relação ao produto interno do Exercício 6?
- $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
8. Suponha que  $R^3$  tem o produto interno euclidiano. Para quais valores de  $k$  os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ortogonais?
- $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 7, k)$
  - $\mathbf{u} = (k, k, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$
9. Suponha que  $R^4$  tem o produto interno euclidiano. Encontre dois vetores de norma 1 que são ortogonais aos três vetores  $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$  e  $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$ .
10. Em cada parte, mostre que a desigualdade de Cauchy-Schwarz vale para os vetores dados usando o produto interno euclidiano.
- $\mathbf{u} = (3, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, -1)$
  - $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$
  - $\mathbf{u} = (-4, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (8, -4, -2)$
  - $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$
11. Em cada parte, mostre que a desigualdade de Cauchy-Schwarz vale para os vetores dados.
- $\mathbf{u} = (-2, 1)$  e  $\mathbf{v} = (1, 0)$ , usando o produto interno do Exemplo 2 da Seção 6.1.
  - $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$  e  $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ , usando o produto interno do Exemplo 7 da Seção 6.1.
  - $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$  e  $\mathbf{q} = 2 - 4x^2$ , usando o produto interno do Exemplo 8 da Seção 6.1.
12. Seja  $W$  a reta de equação  $y = 2x$  em  $R^2$ . Obtenha uma equação para  $W^\perp$ .
13. (a) Seja  $W$  o plano de equação  $x - 2y - 3z = 0$  em  $R^3$ . Obtenha equações paramétricas para  $W^\perp$ .
- (b) Seja  $W$  a reta de equações paramétricas  $x = 2t$ ,  $y = -5t$ ,  $z = 4t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) em  $R^3$ . Obtenha uma equação para  $W^\perp$ .
- (c) Seja  $W$  a intersecção dos dois planos  $x + y + z = 0$  e  $x - y + z = 0$  em  $R^3$ . Obtenha uma equação para  $W^\perp$ .
14. Seja
- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
- Encontre bases para o espaço-linha e espaço-nulo de  $A$ .
  - Mostre que cada vetor do espaço-linha é ortogonal a cada vetor do espaço-nulo (conforme garantido pelo Teorema 6.2.6a).
15. Seja  $A$  a matriz do Exercício 14.
- Encontre bases para o espaço-coluna de  $A$  e para o espaço-nulo de  $A^T$ .
  - Mostre que cada vetor do espaço-coluna de  $A$  é ortogonal a cada vetor do espaço-nulo de  $A^T$  (conforme garantido pelo Teorema 6.2.6b).
16. Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço de  $R^n$  gerado pelos vetores.
- $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (5, -4, -4)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (7, -6, 2)$
  - $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)$
  - $\mathbf{v}_1 = (1, 4, 5, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 2, 2)$
  - $\mathbf{v}_1 = (1, 4, 5, 6, 9)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, -2, 1, 4, -1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -1, -2, -1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (2, 3, 5, 7, 8)$
17. Seja  $V$  um espaço com produto interno. Mostre que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores ortogonais de  $V$  tais que  $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ , então  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$ .

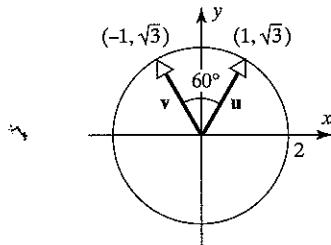
## 214 • • • Álgebra Linear com Aplicações

18. Seja  $V$  um espaço com produto interno. Mostre que se  $w$  é ortogonal a ambos  $u_1$  e  $u_2$ , então  $w$  é ortogonal a  $k_1 u_1 + k_2 u_2$  para quaisquer escalares  $k_1$  e  $k_2$ . Interprete este resultado geometricamente no caso em que  $V$  é o  $R^3$  com o produto interno euclidiano.
19. Seja  $V$  um espaço com produto interno. Mostre que se  $w$  é ortogonal a cada um dos vetores  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , então é ortogonal a cada vetor em  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ .
20. Seja  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  uma base do espaço com produto interno  $V$ . Mostre que o vetor nulo é o único vetor de  $V$  que é ortogonal a todos os vetores da base.
21. Seja  $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  uma base do subespaço  $W$  do espaço com produto interno  $V$ . Mostre que  $W^\perp$  consiste de todos os vetores de  $V$  que são ortogonais a cada vetor da base.
22. Prove a seguinte generalização do Teorema 6.2.4. Se  $v_1, v_2, \dots, v_r$  são vetores dois a dois ortogonais de um espaço com produto interno, então
- $$\|v_1 + v_2 + \dots + v_r\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_r\|^2$$
23. Prove as seguintes partes do Teorema 6.2.2:  
 (a) parte (a)      (b) parte (b)      (c) parte (c)
24. Prove as seguintes partes do Teorema 6.2.3:  
 (a) parte (a)      (b) parte (b)      (c) parte (c)      (d) parte (d)
25. Prove: se  $u$  e  $v$  são matrizes  $n \times 1$  e  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então
- $$(v^T A^T A u)^2 \leq (u^T A^T A u)(v^T A^T A v)$$
26. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que, para quaisquer valores reais de  $a, b$  e  $\theta$ , vale
- $$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2$$
27. Prove: Se  $w_1, w_2, \dots, w_n$  são números reais positivos e se  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são quaisquer dois vetores no  $R^n$ , então
- $$|w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \dots + w_n u_n v_n| \leq (w_1 u_1^2 + w_2 u_2^2 + \dots + w_n u_n^2)^{1/2} (w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \dots + w_n v_n^2)^{1/2}$$
28. Mostre que vale a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz se, e somente se,  $u$  e  $v$  são linearmente independentes.
29. Use métodos vetoriais para provar que um triângulo inscrito num círculo de tal modo que um de seus lados é um diâmetro, é necessariamente um triângulo retângulo. [Sugestão. Expresse os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{BC}$  da figura dada em termos de  $u$  e  $v$ .]



**Figura Ex-29**

30. Os vetores  $u = (1, \sqrt{3})$  e  $v = (-1, \sqrt{3})$  têm norma 2 em relação ao produto interno euclidiano e o ângulo entre eles é de  $60^\circ$  (veja figura). Encontre um produto interno euclidiano ponderado em relação ao qual  $u$  e  $v$  são vetores unitários e ortogonais.



**Figura Ex-30**

31. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções contínuas em  $[0, 1]$ . Prove:

$$(a) \left[ \int_0^1 f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \left[ \int_0^1 f^2(x) dx \right] \left[ \int_0^1 g^2(x) dx \right]$$

$$(b) \left[ \int_0^1 [f(x) + g(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[ \int_0^1 f^2(x) dx \right]^{1/2} + \left[ \int_0^1 g^2(x) dx \right]^{1/2}$$

[Sugestão. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.]

32. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Suponha que  $C[0, \pi]$  tem o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$$

e seja  $f_n = \cos nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Mostre que se  $k \neq l$ , então  $f_k$  e  $f_l$  são ortogonais em relação ao produto interno dado.

## Discussão e Descoberta

33. (a) Seja  $W$  a reta  $y = x$  num sistema de coordenadas  $xy$  do  $R^2$ . Descreva o subespaço  $W^\perp$ .  
 (b) Seja  $W$  o eixo  $y$  num sistema de coordenadas  $xyz$  do  $R^3$ . Descreva o subespaço  $W^\perp$ .  
 (c) Seja  $W$  o plano  $yz$  num sistema de coordenadas  $xyz$  do  $R^3$ . Descreva o subespaço  $W^\perp$ .

34. Seja  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  um sistema homogêneo de três equações nas variáveis  $x, y$  e  $z$ .
- Se o espaço-solução é uma reta pela origem em  $\mathbb{R}^3$ , que tipo de objeto geométrico é o espaço-linha? Explique seu raciocínio.
  - Se o espaço-coluna de  $A$  é uma reta pela origem, que tipo de objeto geométrico é o espaço-solução do sistema homogêneo  $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ? Explique seu raciocínio.
  - Se o sistema homogêneo  $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem uma única solução, o que você pode dizer sobre o espaço-linha e o espaço-coluna de  $A$ ? Explique seu raciocínio.
35. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- $V$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  e  $W$  é um subespaço de  $V$ , então  $W^\perp$  é um subespaço de  $V^\perp$ .
  - $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  para quaisquer vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  de um espaço com produto interno.
  - Se  $\mathbf{u}$  está no espaço-linha e no espaço-nulo de uma matriz quadrada  $A$ , então  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
  - Se  $\mathbf{u}$  está no espaço-linha e no espaço-coluna de uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  então  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
36. Suponha que  $M_{22}$  tem o produto interno  $\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V) = \text{tr}(V^T U)$  que foi definido no Exemplo 7 da Seção 6.1. Descreva o complemento ortogonal do
- subespaço das matrizes diagonais
  - subespaço das matrizes simétricas

## 6.3 BASES ORTONORMAIS; PROCESSO DE GRAM-SCHMIDT; DECOMPOSIÇÃO QR

Em muitos problemas envolvendo espaços vetoriais, temos liberdade de escolher qualquer base para o espaço vetorial que nos pareça apropriada. Em espaços com produto interno a solução de um problema é muitas vezes enormemente simplificada pela escolha de uma base na qual os vetores são ortogonais entre si. Nesta seção nós iremos mostrar como tais bases podem ser obtidas.

### Definição

Um conjunto de vetores em um espaço com produto interno é chamado um **conjunto ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais. Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é chamado **ortonormal**.

### EXEMPLO 1 Um Conjunto Ortogonal em $\mathbb{R}^3$

Sejam

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$$

e suponha que  $\mathbb{R}^3$  tem o produto interno euclidiano. Então o conjunto de vetores  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  é ortogonal, pois  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0$ . ♦

Se  $\mathbf{v}$  é um vetor não-nulo de um espaço com produto interno, então pela parte (c) do Teorema 6.2.2 o vetor

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$$

tem norma 1, já que

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right| \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1$$

O processo de multiplicar um vetor não-nulo  $\mathbf{v}$  pelo recíproco de seu comprimento para obter um vetor de norma 1 é chamado **normalização de  $\mathbf{v}$** . Um conjunto ortogonal de vetores **não-nulos** pode ser sempre convertido num conjunto ortonormal normalizando cada um de seus vetores.

### EXEMPLO 2 Construindo um Conjunto Ortonormal

As normas euclidianas dos vetores do Exemplo 1 são

$$\|\mathbf{u}_1\| = 1, \quad \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{2}$$

Conseqüentemente, a normalização de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  fornece

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que o conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é ortonormal, verificando que

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$$

Num espaço com produto interno, uma base consistindo de vetores ortonormais é chamada **base ortonormal** e uma base consistindo de vetores ortogonais é chamada **base ortogonal**. Um exemplo familiar de base ortonormal é a base canônica do  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno euclidiano:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Esta é a base associada aos sistemas de coordenadas retangulares (veja Figura 5.4.4). Mais geralmente, no  $\mathbb{R}^n$  com o produto interno euclidiano, a base canônica

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

é ortonormal.

### Coordenadas em Relação a Bases ortonormais

O interesse em encontrar bases ortonormais de espaços com produto interno é motivado, em parte, pelo teorema seguinte, que mostra que é excepcionalmente simples expressar um vetor em termos de uma base ortonormal.

### Teorema 6.3.1

Se  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é uma base ortonormal de um espaço com produto interno  $V$  e  $\mathbf{u}$  é um vetor qualquer de  $V$ , então

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

**Prova.** Como  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base, um vetor  $\mathbf{u}$  pode ser escrito na forma

$$\mathbf{u} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

Nós iremos completar a prova mostrando que  $k_i = \langle \mathbf{u}, v_i \rangle$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Para cada vetor  $v_i$  de  $S$  nós temos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, v_i \rangle &= \langle k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n, v_i \rangle \\ &= k_1 \langle v_1, v_i \rangle + k_2 \langle v_2, v_i \rangle + \cdots + k_n \langle v_n, v_i \rangle\end{aligned}$$

Como  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é um conjunto ortonormal, temos

$$\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \langle v_j, v_i \rangle = 0 \quad \text{se } j \neq i$$

Portanto, a expressão acima para  $\langle \mathbf{u}, v_i \rangle$  simplifica a

$$\langle \mathbf{u}, v_i \rangle = k_i$$

Usando a terminologia e notação introduzidas na Seção 5.4, os escalares

$$\langle \mathbf{u}, v_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, v_2 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}, v_n \rangle$$

no Teorema 6.3.1 são as coordenadas do vetor  $\mathbf{u}$  em relação à base ortonormal  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e

$$\langle \mathbf{u} \rangle_S = (\langle \mathbf{u}, v_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, v_2 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}, v_n \rangle)$$

é o vetor de coordenadas de  $\mathbf{u}$  em relação a esta base.

### EXEMPLO 3 Vectors de Coordenadas em Relação a uma Base ortonormal

Sejam

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \quad v_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

É fácil verificar que  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  é uma base ortonormal do  $R^3$  com o produto interno euclidiano. Escreva o vetor  $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$  como uma combinação linear dos vetores de  $S$  e obtenha o vetor de coordenadas  $\langle \mathbf{u} \rangle_S$ .

*Solução.*

$$\langle \mathbf{u}, v_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{u}, v_2 \rangle = -\frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{u}, v_3 \rangle = \frac{7}{5}$$

Portanto, pelo Teorema 6.3.1 nós temos

$$\mathbf{u} = v_1 - \frac{1}{5} v_2 + \frac{7}{5} v_3$$

ou seja,

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \frac{1}{5} \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5} \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

O vetor de coordenadas de  $\mathbf{u}$  em relação a  $S$  é

$$\langle \mathbf{u} \rangle_S = (\langle \mathbf{u}, v_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, v_2 \rangle, \langle \mathbf{u}, v_3 \rangle) = (1, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$$

**OBSERVAÇÃO.** A utilidade do Teorema 6.3.1 deveria ser evidente a partir deste exemplo se for lembrado que com bases não-ortonormais é, em geral, necessário resolver um sistema de equações a fim de escrever um vetor em termos da base.

Bases ortonormais de espaços com produto interno são convenientes porque, como é mostrado no próximo teorema, muitas fórmulas familiares valem com estas bases.

### Teorema 6.3.2

Se  $S$  é uma base ortonormal de um espaço  $n$ -dimensional com produto interno e se

$$\langle \mathbf{u} \rangle_S = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v} \rangle_S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

então:

$$(a) \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

$$(b) d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

$$(c) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

A prova é deixada como exercício.

**OBSERVAÇÃO.** Observe que o lado direito da igualdade na parte (a) é a norma do vetor de coordenadas  $\langle \mathbf{u} \rangle_S$  em relação ao produto interno euclidiano do  $R^n$ , e o lado direito da igualdade na parte (c) é o produto interno euclidiano de  $\langle \mathbf{u} \rangle_S$  com  $\langle \mathbf{v} \rangle_S$ . Assim, trabalhando com bases ortonormais, o cálculo de normas e produtos internos arbitrários pode ser reduzido ao cálculo de normas e produtos internos euclidianos dos vetores de coordenadas.

### EXEMPLO 4 Calculando Normas Usando Bases ortonormais

Se  $R^3$  tiver o produto interno euclidiano, então a norma do vetor  $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$  é

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Contudo, se permitirmos que  $R^3$  tenha a base ortonormal  $S$  do último exemplo, então saberemos daquele exemplo que o vetor de coordenadas de  $\mathbf{u}$  em relação a  $S$  é

$$\langle \mathbf{u} \rangle_S = (1, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$$

A norma de  $\mathbf{u}$  também pode ser calculada a partir deste vetor usando a parte (a) do Teorema 6.3.2, que fornece

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + (-\frac{1}{5})^2 + (\frac{7}{5})^2} = \sqrt{\frac{75}{25}} = \sqrt{3}$$

### Coordenadas em Relação a Bases ortonormais

**Se**  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base *ortogonal* de um espaço com produto interno  $V$ , então a normalização de cada um destes vetores produz a base ortonormal

$$S' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$$

Assim, se  $\mathbf{u}$  é um vetor qualquer de  $V$ , segue do Teorema 6.3.1 que

$$\mathbf{u} = \left\langle \mathbf{u}, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \left\langle \mathbf{u}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle \frac{v_2}{\|v_2\|} + \cdots + \left\langle \mathbf{u}, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

que, pela parte (c) do Teorema 6.1.1, pode ser reescrito como

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \quad (1)$$

Esta fórmula expressa  $\mathbf{u}$  como uma combinação linear dos vetores da base ortonormal  $S$ . Nos exercícios são dados alguns problemas que requerem o uso desta fórmula.

É evidente que se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  são três vetores não-nulos mutuamente perpendiculares do  $R^3$ , então nenhum destes vetores está no mesmo plano que os outros dois; ou seja, os vetores são linearmente independentes. O seguinte teorema generaliza este resultado.

### Teorema 6.3.3

*Se  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é um conjunto ortogonal de vetores não-nulos de um espaço com produto interno, então  $S$  é linearmente independente.*

**Prova.** Suponha que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (2)$$

Para demonstrar que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é linearmente independente, nós devemos provar que  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ .

Para cada  $\mathbf{v}_i$  em  $S$ , segue de (2) que

$$\langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

ou, equivalentemente, que

$$k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

Pela ortogonalidade de  $S$  decorre que  $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$  se  $j \neq i$ , de modo que esta equação reduz-se a

$$k_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

Como os vetores de  $S$  são não-nulos por hipótese,  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$  pelo axioma de positividade dos produtos internos. Logo,  $k_i = 0$ . Como o índice  $i$  é arbitrário, temos  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ ; assim,  $S$  é linearmente independente. ■

### EXEMPLO 5 Usando o Teorema 6.3.3

No Exemplo 2 nós mostramos que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

constituem um conjunto ortonormal em relação ao produto interno euclidiano do  $R^3$ . Pelo Teorema 6.3.3, estes vetores formam um conjunto linearmente independente e, como  $R^3$  é tridimensional,  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é uma base ortonormal do  $R^3$  pelo Teorema 5.4.5. ■

**Projeções Ortogonais** Nós iremos agora desenvolver alguns resultados que serão úteis para construir bases ortogonais e ortonormais de espaços com produto interno.

É geometricamente evidente em  $R^2$  ou  $R^3$  com o produto interno euclidiano, que se  $W$  é uma reta ou um plano pela origem, então cada vetor  $\mathbf{u}$  do espaço pode ser escrito como uma soma

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

onde  $\mathbf{w}_1$  está em  $W$  e  $\mathbf{w}_2$  é perpendicular a  $W$  (Figura 6.3.1). Este resultado é um caso especial do seguinte teorema geral, cuja prova é dada no final desta seção.

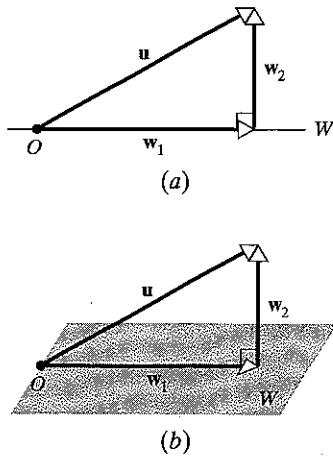


Figura 6.3.1

### Teorema 6.3.4

### Teorema da Projeção

*Se  $W$  é um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno  $V$ , então cada vetor  $\mathbf{u}$  de  $V$  pode ser expresso precisamente de uma única maneira como*

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad (3)$$

*onde  $\mathbf{w}_1$  está em  $W$  e  $\mathbf{w}_2$  está em  $W^\perp$ .*

O vetor  $\mathbf{w}_1$  do teorema precedente é chamado **projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  em  $W$**  e é denotado por  $\text{proj}_W \mathbf{u}$ . O vetor  $\mathbf{w}_2$  é chamado **componente de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $W$**  e é denotada por  $\text{proj}_{W^\perp} \mathbf{u}$ . Assim, a Fórmula (3) no Teorema da Projeção pode ser reformulada como

$$\mathbf{u} = \text{proj}_W \mathbf{u} + \text{proj}_{W^\perp} \mathbf{u} \quad (4)$$

Como  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ , decorre

$$\text{proj}_{W^\perp} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$$

e portanto a Fórmula (4) também pode ser escrita como

$$\mathbf{u} = \text{proj}_W \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}) \quad (5)$$

(Figura 6.3.2).

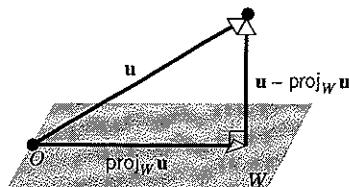


Figura 6.3.2

O próximo teorema, cuja prova é solicitada nos exercícios, fornece fórmulas para calcular projeções ortogonais.

**Teorema 6.3.5**

Seja  $W$  um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno  $V$ .

- (a) Se  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  é uma base ortonormal de  $W$  e  $u$  é um vetor qualquer de  $V$ , então

$$\text{proj}_W u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_r \rangle v_r \quad (6)$$

- (b) Se  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  é uma base ortogonal de  $W$  e  $u$  é um vetor qualquer de  $V$ , então

$$\text{proj}_W u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_r \rangle}{\|v_r\|^2} v_r \quad (7)$$

**EXEMPLO 6 Calculando Projeções**

Suponha que  $R^3$  tem o produto interno euclidiano e que  $W$  é o subespaço gerado pelos vetores ortonormais  $v_1 = (0, 1, 0)$  e  $v_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ . De (6), a projeção ortogonal de  $u = (1, 1, 1)$  em  $W$  é

$$\begin{aligned} \text{proj}_W u &= \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 \\ &= (1)(0, 1, 0) + \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \end{aligned}$$

O componente de  $u$  ortogonal a  $W$  é

$$\text{proj}_{W^\perp} u = u - \text{proj}_W u = (1, 1, 1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) = \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right)$$

Observe que  $\text{proj}_{W^\perp} u$  é ortogonal a ambos  $v_1$  e  $v_2$ , de modo que este vetor é ortogonal a cada vetor do espaço  $W$  gerado por  $v_1$  e  $v_2$ , como deveria ser. ♦

**Encontrando Bases Ortogonais e ortonormais**

Nós vimos que bases ortonormais gozam de uma variedade de propriedades úteis. Nossa próximo teorema, que é o resultado principal desta seção, mostra que cada espaço vetorial não-nulo de dimensão finita possui uma base ortonormal. A prova deste resultado é extremamente importante, já que fornece um algoritmo, ou método, para converter uma base arbitrária numa base ortonormal.

**Teorema 6.3.6**

Cada espaço vetorial não-nulo de dimensão finita possui uma base ortonormal.

**Prova.** Seja  $V$  um espaço vetorial não-nulo de dimensão finita com produto interno e suponha que  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  é uma base de  $V$ . É suficiente mostrar que  $V$  tem uma base ortogonal, pois os vetores da base ortogonal podem ser normalizados para produzir uma base ortonormal de  $V$ . A seguinte seqüência de passos irá produzir uma base ortogonal  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $V$ .

**Passo 1.** Seja  $v_1 = u_1$ .

**Passo 2.** Conforme está ilustrado na Figura 6.3.3, nós podemos obter um vetor  $v_2$  que é ortogonal a  $v_1$  tomando o

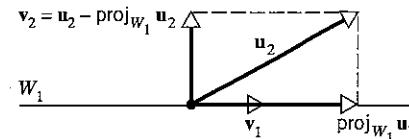
componente de  $u_2$  que é ortogonal ao espaço  $W_1$  gerado por  $v_1$ . Para isto nós usamos a Fórmula (7):

$$v_2 = u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

É claro que se  $v_2 = \mathbf{0}$  então  $v_2$  não é um vetor de base. Mas isto não pode ocorrer, pois se  $v_2 = \mathbf{0}$ , então a fórmula acima para  $v_2$  acarreta

$$u_2 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

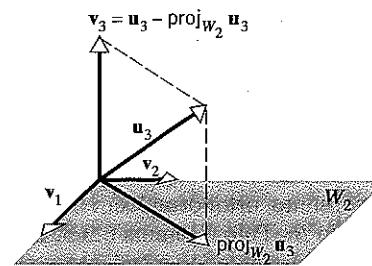
o que significa que  $u_2$  é um múltiplo de  $u_1$ , contradizendo a independência linear da base  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

**Figura 6.3.3**

**Passo 3.** Para construir um vetor  $v_3$  que é ortogonal a ambos  $v_1$  e  $v_2$ , calculamos o componente de  $u_3$  que é ortogonal ao espaço  $W_2$  gerado por  $v_1$  e  $v_2$  (Figura 6.3.4). Por (7),

$$v_3 = u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

Como no Passo (2), a independência linear de  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  garante que  $v_3 \neq \mathbf{0}$ . Deixamos os detalhes como um exercício.

**Figura 6.3.4**

**Passo 4.** Para determinar um vetor  $v_4$  que é ortogonal a  $v_1, v_2$  e  $v_3$ , calculamos o componente de  $u_4$  que é ortogonal ao espaço  $W_3$  gerado por  $v_1, v_2$  e  $v_3$ . Por (7),

$$v_4 = u_4 - \text{proj}_{W_3} u_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3$$

Continuando desta maneira, nós iremos obter, depois de  $n$  passos, um conjunto ortogonal de vetores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Como  $V$  tem dimensão  $n$  e conjuntos ortogonais são linearmente independentes, o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base ortogonal de  $V$ . ■



**Jørgen Pederson Gram (1850–1916)** foi um atuário dinamarquês. A educação elementar de Gram foi em escolas de aldeias complementada com tutoria particular. Depois de concluir o segundo grau ele obteve o grau de Mestre em Matemática com especialização na então sendo desenvolvida Álgebra Moderna. Em seguida Gram foi contratado como atuário na Companhia

Háfnia de Seguros de Vida, onde ele desenvolveu os fundamentos matemáticos de seguros de acidentes para a firma Skjold. Ele trabalhou na Diretoria da Háfnia e dirigiu a Skjold até 1910, quando se tornou diretor do Conselho Dinamarquês de Seguros. Enquanto trabalhava de atuário, ele obteve o Doutorado com sua tese intitulada “Sobre Desenvolvimentos em Séries Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados”. Foi nesta tese que primeiro formulou suas contribuições no processo de Gram-Schmidt. Mais tarde Gram passou a interessar-se pela Teoria Abstrata de Números, tendo ganhado uma medalha de ouro da Sociedade Real Dinamarquesa de Ciências e Letras por sua contribuição nesse campo. No entanto, ele também manteve um interesse, durante toda sua vida, na inter-relação entre matemática teórica e aplicada, que o levou a quatro tratados sobre administração florestal dinamarquesa. Gram faleceu um final de tarde numa colisão de bicicleta a caminho de uma reunião da Sociedade Real Dinamarquesa.



**Erhardt Schmidt (1876–1959)** foi um matemático alemão. Schmidt recebeu seu doutorado da Universidade de Göttingen em 1905, onde estudou sob orientação de David Hilbert, um dos gigantes da Matemática. Mais tarde, em 1917, foi lecionar na Universidade de Berlim, onde permaneceu pelo resto de sua vida. Schmidt fez importantes contribuições em uma variedade de campos matemáticos, mas é mais notável por ter conseguido moldar muitas das diversas ideias de Hilbert num único conceito abrangente (chamado *espaço de Hilbert*), que é fundamental no estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita. Schmidt primeiro descreveu o processo que leva seu nome num trabalho sobre equações integrais publicado em 1907.

A construção passo a passo acima para converter uma base arbitrária numa base ortogonal é chamada **processo de Gram-Schmidt**.

### EXEMPLO 7 Usando o Processo de Gram-Schmidt

Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno euclidiano. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar os

vetores de base  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$  em uma base ortogonal  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ; depois normalize os vetores da base ortogonal para obter uma base ortonormal  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ .

*Solução.*

**Passo 1.**  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned}\text{Passo 2 } \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 \\ &= (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Passo 3 } \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 \\ &= (0, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{1/3}{2/3} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

formam uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ . As normas destes vetores são

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  é

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \\ \mathbf{q}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO.** No exemplo precedente nós utilizamos o processo de Gram-Schmidt para produzir uma base ortogonal; em seguida, depois de conseguir toda a base ortogonal, normalizamos para obter a base ortonormal. Alternativamente, podemos normalizar cada vetor da base ortogonal à medida que for sendo obtido, com isso gerando a base ortonormal passo a passo. No entanto, este método tem a pequena desvantagem de produzir mais raízes quadradas para contabilizar.

O processo de Gram-Schmidt com normalização subsequente não só converte bases  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  arbitrárias em bases  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\}$  ortonormais, mas também o faz de tal modo que para  $k \geq 2$ , valem as seguintes relações:

- $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$  é uma base ortonormal para o espaço gerado por  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ .
- $\mathbf{q}_k$  é ortogonal a  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}\}$ .

Nós omitimos as provas, mas estes fatos devem tornar-se evidentes a partir de um exame cuidadoso da prova do Teorema 6.3.6.

### Decomposição QR

Colocamos o seguinte problema.

**Problema.** Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  com vetores-coluna linearmente independentes e se  $Q$  é a matriz com os vetores-coluna ortonormais que resultam aplicando o processo de Gram-Schmidt aos vetores-coluna de  $A$ , qual relação existe entre  $A$  e  $Q$ , se é que há alguma?

Para resolver este problema, suponha que os vetores-coluna de  $A$  são  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  e que os vetores-coluna ortonormais de  $Q$  são  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ ; assim,

$$A = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n] \quad \text{e} \quad Q = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n]$$

Segue do Teorema 6.3.1 que os vetores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  podem ser escritos em termos dos vetores  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n \\ \mathbf{u}_2 &= \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n \\ &\vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_n &= \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n\end{aligned}$$

Lembrando da Seção 1.3 que o  $j$ -ésimo vetor-coluna de um produto de matrizes é uma combinação linear dos vetores-coluna do primeiro fator com os coeficientes vindo da  $j$ -ésima coluna do segundo fator, decorre que estas relações podem ser expressas em forma matricial por

$$[\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n] = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix}$$

ou, mais concisamente, por

$$A = Q R \quad (8)$$

No entanto, é uma propriedade do processo de Gram-Schmidt que, para  $j \geq 2$ , o vetor  $\mathbf{q}_j$  é ortogonal a  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{j-1}$ ; assim, todas entradas abaixo da diagonal principal de  $R$  são nulas,

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nós deixamos como exercício mostrar que as entradas na diagonal de  $R$  são não-nulas, de modo que  $R$  é invertível. Assim (8) é uma fatoração de  $A$  no produto da matriz  $Q$  com vetores-coluna ortonormais e uma matriz triangular superior invertível  $R$ . Nós chamamos (8) de **decomposição QR de  $A$** . Resumindo, temos o seguinte teorema.

#### Teorema 6.3.7

#### Decomposição QR

Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  com vetores-coluna linearmente independentes, então  $A$  pode ser fatorada como

$$A = Q R$$

onde  $Q$  é uma matriz  $m \times n$  com vetores-coluna ortonormais e  $R$  é uma matriz  $n \times n$  triangular superior invertível.

**OBSERVAÇÃO.** Lembre que, pelo Teorema 6.2.7, se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então a invertibilidade de  $A$  é equivalente à independência linear de seus vetores-coluna; logo, toda matriz invertível tem uma decomposição  $QR$ .

### EXEMPLO 8 Decomposição QR de uma Matriz $3 \times 3$

Encontre a decomposição  $QR$  de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Os vetores-coluna de  $A$  são

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O processo de Gram-Schmidt com normalização subsequente aplicado a estes vetores-coluna produz os vetores ortonormais (ver Exemplo 7)

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e, por (9), a matriz  $R$  é

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Assim, a decomposição  $QR$  de  $A$  é

$$A = Q R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

**O Papel da Decomposição QR na Álgebra Linear** Nos últimos anos, a decomposição  $QR$  tem assumido importância crescente como o fundamento matemático de uma grande variedade de algoritmos numéricos práticos, incluindo algoritmos largamente usados para computar autovalores de matrizes grandes. Tais algoritmos são discutidos nos livros-texto que tratam de métodos avançados de Álgebra Linear.

### Prova Adicional

**Prova do Teorema 6.3.4.** A prova tem duas partes. Primeiro nós devemos encontrar vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  com as propriedades requeridas e depois devemos mostrar que estes são os únicos tais vetores.

Pelo processo de Gram-Schmidt existe uma base ortonormal  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  para  $\mathbb{W}$ . Sejam

$$\mathbf{w}_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \quad (10)$$

e

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 \quad (11)$$

Decorre que  $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$ , e portanto resta mostrar que  $\mathbf{w}_1$  está em  $W$  e que  $\mathbf{w}_2$  é ortogonal a  $W$ . Mas  $\mathbf{w}_1$  está em  $W$  pois é uma combinação linear dos vetores da base de  $W$ . Para mostrar que  $\mathbf{w}_2$  é ortogonal a  $W$ , devemos mostrar que  $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \rangle = 0$  para cada vetor  $\mathbf{w}$  de  $W$ . Mas qualquer vetor  $\mathbf{w}$  de  $W$  pode ser escrito como uma combinação linear

$$\mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

dos vetores da base de  $W$ . Assim,

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} - \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle \quad (12)$$

Mas

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n \rangle \\ &= k_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \end{aligned}$$

e, pela parte (c) do Teorema 6.3.2,

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle k_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle k_n$$

Assim,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$  e  $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle$  são iguais, de modo que (12) fornece  $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \rangle = 0$ , que era o que queríamos mostrar.

Para ver que (10) e (11) são os únicos vetores com as propriedades enunciadas no teorema, supomos que também podemos escrever

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2 \quad (13)$$

onde  $\mathbf{w}'_1$  está em  $W$  e  $\mathbf{w}'_2$  é ortogonal a  $W$ . Se nós subtraímos a equação

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

de (13), obtemos

$$\mathbf{0} = (\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2)$$

ou

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \quad (14)$$

Como  $\mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{w}'_2$  são ortogonais a  $W$ , sua diferença também é ortogonal a  $W$ , pois para qualquer vetor  $\mathbf{w}$  de  $W$  podemos escrever

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}'_2 \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_2 \rangle = 0 - 0 = 0$$

Mas  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$  também é um vetor de  $W$ , já que por (14) é a diferença dos dois vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}'_1$ , que estão no subespaço  $W$ . Assim,  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$  deve ser ortogonal a si mesmo, ou seja,

$$\langle \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \rangle = 0$$

Mas isto implica que  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ , pelo Axioma 4 dos produtos internos. Assim,  $\mathbf{w}'_2 = \mathbf{w}_2$  e, por (14),  $\mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}_1$ . ■

### Conjunto de Exercícios 6.3

- Quais dos seguintes conjuntos de vetores são ortogonais em relação ao produto interno euclidiano de  $R^2$ ?
  - $(0, 1), (2, 0)$
  - $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
  - $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
  - $(0, 0), (0, 1)$
- Quais dos conjuntos de vetores do Exercício 1 são ortonormais em relação ao produto interno euclidiano de  $R^2$ ?
- Quais dos seguintes conjuntos de vetores são ortogonais em relação ao produto interno euclidiano de  $R^3$ ?
  - $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
  - $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
  - $(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1)$
  - $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$
- Quais dos conjuntos de vetores do Exercício 3 são ortonormais em relação ao produto interno euclidiano de  $R^3$ ?
- Quais dos seguintes conjuntos de polinômios são ortonormais em relação ao produto interno de  $P_2$  discutido no Exemplo 8 da Seção 6.1?
  - $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2$
  - $1, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, x^2$
- Quais dos seguintes conjuntos de matrizes são ortonormais em relação ao produto interno euclidiano de  $M_{22}$  discutido no Exemplo 7 da Seção 6.1?
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- Mostre que o conjunto de vetores dado é ortogonal em relação ao produto interno euclidiano; em seguida, converta-o num conjunto ortogonal normalizando seus vetores.
  - $(-1, 2), (6, 3)$
  - $(1, 0, -1), (2, 0, 2), (0, 5, 0)$
  - $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$
- Mostre que o conjunto de vetores  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  é ortogonal em relação ao produto interno  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_2$  de  $R^2$ ; em seguida, converta-o num conjunto ortonormal normalizando seus vetores.
- Mostre que os vetores  $\mathbf{v}_1 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), \mathbf{v}_2 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)$  e  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$  formam uma base ortonormal de  $R^3$  em relação ao produto interno euclidiano; em seguida, use o Teorema 6.3.1 para expressar cada um dos seguintes vetores como uma combinação linear de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ .
  - $(1, -1, 2)$
  - $(3, -7, 4)$
  - $(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{7})$
- Mostre que os vetores  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2, -1), \mathbf{v}_2 = (-2, 2, 3, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 2, 0, -1), \mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)$  formam uma base ortogonal de  $R^4$  em relação ao produto interno euclidiano; em seguida, use a Fórmula (1) para expressar cada um dos

## 222 • • • Álgebra Linear com Aplicações

- seguintes vetores como uma combinação linear de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  e  $\mathbf{v}_4$ .
- $(1, 1, 1, 1)$
  - $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
  - $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$
11. Em cada parte é dada uma base ortonormal em relação ao produto interno euclidiano. Use o Teorema 6.3.1 para encontrar o vetor de coordenadas de  $\mathbf{w}$  em relação àquela base.
- $\mathbf{w} = (3, 7); \mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
  - $\mathbf{w} = (-1, 0, 2); \mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
12. Suponha que  $R^2$  tem o produto interno euclidiano e seja  $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  a base ortonormal com  $\mathbf{w}_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$  e  $\mathbf{w}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ .
- Encontre os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  que têm  $(\mathbf{u})_S = (1, 1)$  e  $(\mathbf{v})_S = (-1, 4)$  como vetores de coordenadas.
  - Calcule  $\|\mathbf{u}\|, d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  e  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  aplicando o Teorema 6.3.2 aos vetores de coordenadas  $(\mathbf{u})_S$  e  $(\mathbf{v})_S$ ; em seguida, confira suas respostas fazendo as contas diretamente com os vetores  $\mathbf{u}$ , e  $\mathbf{v}$ .
13. Suponha que  $R^3$  tem o produto interno euclidiano e seja  $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$  a base ortonormal com  $\mathbf{w}_1 = (0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 0)$ , e  $\mathbf{w}_3 = (0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ .
- Encontre os vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  que têm  $(\mathbf{u})_S = (-2, 1, 2), (\mathbf{v})_S = (3, 0, -2)$  e  $(\mathbf{w})_S = (5, -4, 1)$  como vetores de coordenadas.
  - Calcule  $\|\mathbf{v}\|, d(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  e  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  aplicando o Teorema 6.3.2 aos vetores de coordenadas  $(\mathbf{u})_S, (\mathbf{v})_S$  e  $(\mathbf{w})_S$ ; em seguida, confira suas respostas fazendo as contas diretamente com os vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .
14. Em cada parte,  $S$  representa uma base ortonormal de um espaço com produto interno de dimensão 4. Use a informação dada para encontrar  $\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|, \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$  e  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ .
- $(\mathbf{u})_S = (-1, 2, 1, 3), (\mathbf{v})_S = (0, -3, 1, 5), (\mathbf{w})_S = (-2, -4, 3, 1)$
  - $(\mathbf{u})_S = (0, 0, -1, -1), (\mathbf{v})_S = (5, 5, -2, -2), (\mathbf{w})_S = (3, 0, -3, 0)$
15. (a) Mostre que os vetores  $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3, -4), \mathbf{v}_2 = (2, 1, -4, -3), \mathbf{v}_3 = (-3, 4, 1, -2)$  e  $\mathbf{v}_4 = (4, 3, 2, 1)$  formam uma base ortogonal de  $R^4$  com o produto interno euclidiano.  
(b) Use (1) para expressar  $\mathbf{u} = (-1, 2, 3, 7)$  como uma combinação linear dos vetores de (a).
16. Suponha que  $R^2$  tem o produto interno euclidiano. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  em uma base ortonormal. Esboce os vetores de ambas bases no plano  $xy$ .
- $\mathbf{u}_1 = (1, -3), \mathbf{u}_2 = (2, 2)$
  - $\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (3, -5)$
17. Suponha que  $R^3$  tem o produto interno euclidiano. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  em uma base ortogonal.
- $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$
  - $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (3, 7, -2), \mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$
18. Suponha que  $R^4$  tem o produto interno euclidiano. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$  em uma base ortonormal.
- $$\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, -1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 2, 0, -1), \quad \mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 1)$$
19. Suponha que  $R^3$  tem o produto interno euclidiano. Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por  $(0, 1, 2), (-1, 0, 1), (-1, 1, 3)$ .
20. Suponha que  $R^3$  tem o produto interno  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ . Use o processo de Gram-Schmidt para converter  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)$  em uma base ortonormal.
21. O subespaço de  $R^3$  gerado pelos vetores  $\mathbf{u}_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$  e  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$  é um plano passando pela origem. Expresse  $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$  na forma  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ , onde  $\mathbf{w}_1$  é um vetor do plano e  $\mathbf{w}_2$  é perpendicular ao plano.
22. Repita o Exercício 21 com  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$  e  $\mathbf{u}_2 = (2, 0, -1)$ .
23. Suponha que  $R^4$  tem o produto interno euclidiano. Expresse  $\mathbf{w} = (-1, 2, 6, 0)$  na forma  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ , onde  $\mathbf{w}_1$  é um vetor do espaço  $W$  gerado pelos vetores  $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1, 2)$  e  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$  e  $\mathbf{w}_2$  é ortogonal a  $W$ .
24. Encontre a decomposição  $QR$ , onde possível.
- $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
25. Seja  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  uma base ortonormal de um espaço com produto interno  $V$ . Mostre que se  $\mathbf{w}$  é um vetor de  $V$ , então  $\|\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 \rangle^2$ .
26. Seja  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  uma base ortonormal de um espaço com produto interno  $V$ . Mostre que se  $\mathbf{w}$  é um vetor de  $V$ , então  $\|\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \dots + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle^2$ .
27. No Passo 3 da prova do Teorema 6.3.6 foi afirmado que “a independência linear de  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  garante que  $\mathbf{v}_3 \neq 0$ .” Prove esta afirmação.
28. Prove que as entradas na diagonal de  $R$  na Fórmula (9) são não-nulas.
29. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Suponha que  $P_2$  tem o produto interno
- $$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base canônica  $S = \{1, x, x^2\}$  em uma base ortonormal. (Os polinômios da base obtida são chamados os três primeiros **polinômios de Legendre normalizados**.)

30. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Use o Teorema 6.3.1 para expressar os seguintes polinômios como combinações lineares dos três primeiros polinômios de Legendre normalizados (Exercício 29).

$$(a) 1 + x + 4x^2 \quad (b) 2 - 7x^2 \quad (c) 4 + 3x$$

31. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Suponha que  $P_2$  tem o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

Aplice o processo de Gram-Schmidt para transformar a base canônica  $S = \{1, x, x^2\}$  em uma base ortonormal.

32. Prove o Teorema 6.3.2.  
33. Prove o Teorema 6.3.5.

## Discussão e Descoberta

34. (a) Segue do Teorema 6.3.6 que qualquer plano pela origem do  $\mathbb{R}^3$  deve possuir uma base ortonormal em relação ao produto interno euclidiano. Explique em palavras como você faria para obter uma base ortonormal para um plano do qual é conhecida uma equação.  
(b) Use seu método para obter uma base ortonormal para o plano  $x + 2y - z = 0$ .
35. Encontre vetores  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{R}^2$  que são ortonormais em relação ao produto interno  $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$  mas não são ortonormais em relação ao produto interno euclidiano.
36. Se  $W$  é uma reta pela origem do  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno euclidiano e se  $u$  é um vetor em  $\mathbb{R}^3$ , então o Teorema 6.3.4 implica que  $u$  pode ser expresso de maneira única na forma  $u = w_1 + w_2$ , onde  $w_1$  é um vetor de  $W$  e  $w_2$  é um vetor de  $W^\perp$ . Faça uma figura ilustrando este fato.
37. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.  
(a) Um conjunto linearmente dependente de vetores em um espaço com produto interno não pode ser ortonormal.  
(b) Qualquer espaço vetorial de dimensão finita tem uma base ortonormal.  
(c)  $\text{proj}_W u$  é ortogonal a  $\text{proj}_{W^\perp} u$  em qualquer espaço com produto interno.  
(d) Qualquer matriz com determinante não-nulo tem uma decomposição  $QR$ .

## 6.4 MELHOR APROXIMAÇÃO: MÍNIMOS QUADRADOS

Nesta seção nós iremos mostrar como projeções ortogonais podem ser usadas para resolver certos problemas de aproximação. Os resultados obtidos nesta seção têm uma ampla variedade de aplicações, tanto na Matemática como nas Ciências.

**Projeções Ortogonais Vistas como Aproximações** Se  $P$  é um ponto no espaço tridimensional usual e  $W$  é um plano pela origem, então baixando uma perpendicular de  $P$  a  $W$  obtemos o ponto  $Q$  de  $W$  mais próximo de  $P$  (Figura 6.4.1a). Portanto, se escrevermos  $u = \overrightarrow{OP}$ , a distância entre  $P$  e  $W$  é dada por

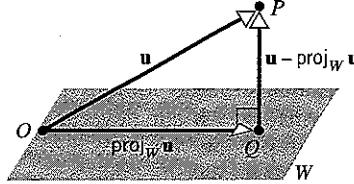
$$\|u - \text{proj}_W u\|$$

Em outras palavras, dentre todos os vetores  $w$  de  $W$ , o vetor  $w = \text{proj}_W u$  minimiza a distância  $\|u - w\|$  (Figura 6.4.1b).

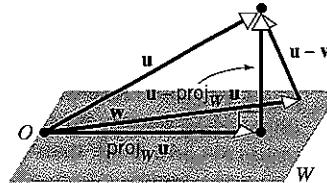
Existe uma outra maneira de pensar sobre isto. Podemos ver  $u$  como um vetor fixado que gostaríamos de aproximar por um vetor de  $W$ . Qualquer tal aproximação  $w$  produz um “vetor-erro”

$$u - w$$

o qual, a menos que  $w$  esteja em  $W$ , não pode ser feito igual a 0.



(a)  $Q$  é o ponto de  $W$  mais próximo de  $P$ .



(b)  $\|u - w\|$  é minimizado por  $w = \text{proj}_W u$ .

**Figura 6.4.1**

Contudo, escolhendo

$$w = \text{proj}_W u$$

podemos fazer o comprimento

$$\|u - w\| = \|u - \text{proj}_W u\|$$

do vetor-erro tão pequeno quanto possível. Assim, nós podemos descrever  $\text{proj}_W u$  como a “melhor aproximação” de  $u$  por vetores em  $W$ . O seguinte teorema precisa estas idéias intuitivas.

**Teorema 6.4.1****Teorema da Melhor Aproximação**

Se  $W$  é um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno  $V$  e se  $\mathbf{u}$  é um vetor de  $V$ , então  $\text{proj}_W \mathbf{u}$  é a melhor aproximação de  $\mathbf{u}$  em  $W$ , no seguinte sentido:

$$\|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\| < \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$$

para cada vetor  $\mathbf{w}$  em  $W$  distinto de  $\text{proj}_W \mathbf{u}$ .

**Prova.** Para cada vetor  $\mathbf{w}$  de  $W$  nós podemos escrever

$$\mathbf{u} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}) + (\text{proj}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}) \quad (1)$$

Sendo uma diferença de vetores de  $W$ ,  $\text{proj}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}$  está em  $W$  e  $\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$  é ortogonal a  $W$ , de modo que os dois termos à direita de (1) são ortogonais. Assim, pelo Teorema de Pitágoras (6.2.4),

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\|^2 + \|\text{proj}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2$$

Se  $\mathbf{w} \neq \text{proj}_W \mathbf{u}$ , então o segundo termo nesta soma é positivo e, portanto,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\|^2$$

ou, equivalentemente,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| > \|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\| \quad \blacksquare$$

Mais adiante daremos aplicações deste teorema.

**Soluções de Mínimos Quadrados de Sistemas Lineares**

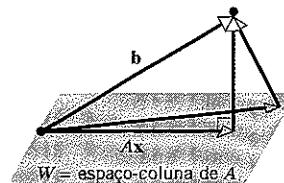
Até aqui nos ocupamos principalmente de sistemas consistentes de equações lineares. Entretanto, sistemas inconsistentes de equações lineares também são importantes em aplicações físicas. É uma situação comum que algum problema físico leve a um sistema  $Ax = b$  que deveria ser consistente em teoria, mas que não o é porque “erros de medida” nas entradas de  $A$  e de  $b$  perturbam o sistema suficientemente a ponto de criar inconsistência. Em tais situações procuramos um valor de  $x$  que chegue “tão perto quanto possível” de ser uma solução, no sentido que minimiza o valor de  $\|Ax - b\|$  em relação ao produto interno euclidiano. A quantidade  $\|Ax - b\|$  pode ser vista como uma medida do “erro” que resulta por considerar  $x$  uma solução aproximada do sistema  $Ax = b$ . Se o sistema é consistente e  $x$  é uma solução exata, então o erro é zero, pois  $\|Ax - b\| = 0$ . Em geral, quanto maior o valor de  $\|Ax - b\|$ , mais pobre é a aproximação  $x$  de uma solução do sistema.

**Problema dos Mínimos Quadrados.** Dado um sistema  $Ax = b$  de  $m$  equações em  $n$  variáveis encontre, se possível, um vetor  $x$  que minimiza  $\|Ax - b\|$  em relação ao produto interno euclidiano de  $R^m$ . Um tal vetor é chamado uma *solução de mínimos quadrados* de  $Ax = b$ .

**OBSERVAÇÃO.** Para entender a origem do termo *mínimos quadrados*, seja  $e = Ax - b$ , que podemos considerar como o vetor-erro que resulta da aproximação  $x$ . Se  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , então uma solução de mínimos quadrados minimiza  $\|e\| = (e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2)^{1/2}$ ; e portanto também minimiza

$$\|e\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 — daí o termo *mínimos quadrados*.$$

Para resolver o problema de mínimos quadrados, seja  $W$  o espaço-coluna de  $A$ . Para cada matriz  $x$  de tamanho  $n \times 1$ , o produto  $Ax$  é uma combinação linear dos vetores-coluna de  $A$ . Assim, à medida que  $x$  varia sobre  $R^n$ , o vetor  $Ax$  varia sobre todas as possíveis combinações lineares dos vetores-coluna de  $A$ , ou seja,  $Ax$  varia sobre todo o espaço-coluna  $W$ . Geometricamente, resolver o problema de mínimos quadrados significa encontrar um vetor  $x$  de  $R^n$  tal que  $Ax$  é o vetor em  $W$  mais próximo de  $b$  (Figura 6.4.2).



**Figura 6.4.2** Uma solução de mínimos quadrados  $x$  fornece o vetor  $Ax$  em  $W$  mais próximo de  $b$ .

Decorre do Teorema da Melhor Aproximação (6.4.1) que o vetor em  $W$  mais próximo de  $b$  é a projeção ortogonal de  $b$  em  $W$ . Assim, para um vetor  $x$  ser uma solução de mínimos quadrados de  $Ax = b$ , este vetor deve satisfazer

$$Ax = \text{proj}_W b \quad (2)$$

Nós poderíamos tentar encontrar soluções de mínimos quadrados de  $Ax = b$  primeiro calculando o vetor  $\text{proj}_W b$  e depois resolvendo (2); no entanto, existe uma abordagem melhor: decorre do Teorema da Projeção (6.3.4) e da Fórmula (5) da Seção 6.3 que

$$b - Ax = b - \text{proj}_W b$$

é ortogonal a  $W$ . Como  $W$  é o espaço-coluna de  $A$ , segue do Teorema 6.2.6 que  $b - Ax$  está no espaço-nulo de  $A^T$ . Desse modo, uma solução de mínimos quadrados de  $Ax = b$  deve satisfazer

$$A^T(b - Ax) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$A^T Ax = A^T b \quad (3)$$

Este sistema é chamado *sistema normal* associado a  $Ax = b$  e as equações que o compõem são chamadas *equações normais* associadas a  $Ax = b$ . Assim, o problema de encontrar uma solução de mínimos quadrados foi reduzido a encontrar uma solução exata do sistema normal associado.

Note as seguintes observações sobre o sistema normal:

- O sistema normal envolve  $n$  equações em  $n$  variáveis (verifique).
- O sistema normal é consistente, pois é satisfeito por uma solução de mínimos quadrados de  $Ax = b$ .
- O sistema normal pode ter infinitas soluções, caso em que todas suas soluções são soluções de mínimos quadrados de  $Ax = b$ .

A partir destas observações e da Fórmula (2) obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 6.4.2**

Para qualquer sistema linear  $Ax = b$ , o sistema normal associado

$$A^T A x = A^T b$$

é consistente e todas soluções do sistema normal são soluções de mínimos quadrados de  $Ax = b$ . Além disto, se  $W$  é o espaço-coluna de  $A$  e  $x$  é qualquer solução de mínimos quadrados de  $Ax = b$ , então a projeção ortogonal de  $b$  em  $W$  é

$$\text{proj}_W b = Ax$$

**Unicidade das Soluções de Mínimos Quadrados**

Antes de examinar alguns exemplos numéricos, nós iremos estabelecer condições sob as quais um sistema linear tem garantidamente uma única solução de mínimos quadrados. Nós vamos precisar do seguinte teorema.

**Teorema 6.4.3**

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) Os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.
- (b)  $A^T A$  é invertível.

**Prova.** Nós iremos provar que  $(a) \Rightarrow (b)$  e deixamos a prova de  $(b) \Rightarrow (a)$  como exercício.

$(a) \Rightarrow (b)$ . Suponha que  $A$  tem vetores-coluna linearmente independentes. A matriz  $A^T A$  tem tamanho  $n \times n$ , portanto podemos provar sua invertibilidade mostrando que o sistema linear  $A^T A x = \mathbf{0}$  tem somente a solução trivial. Mas se  $x$  é qualquer solução deste sistema, então  $A x$  está no espaço-nulo de  $A^T$  e também no espaço-coluna de  $A$ . Pelo Teorema 6.2.6 estes espaços são complementos ortogonais, de modo que a parte (b) do Teorema 6.2.5 implica  $A x = \mathbf{0}$ . Como  $A$  tem vetores-coluna linearmente independentes, resulta que  $x = \mathbf{0}$  pelo Teorema 5.6.8. ■

O próximo teorema é uma consequência direta dos Teoremas 6.4.2 e 6.4.3. Omitimos os detalhes.

**Teorema 6.4.4**

Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  com vetores-coluna linearmente independentes, então para cada matriz  $b$  de tamanho  $n \times 1$ , o sistema linear  $Ax = b$  tem uma única solução de mínimos quadrados. Esta solução é dada por

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (4)$$

Alem disto, se  $W$  é o espaço-coluna de  $A$ , então a projeção ortogonal de  $b$  em  $W$  é

$$\text{proj}_W b = Ax = A(A^T A)^{-1} A^T b \quad (5)$$

**OBSERVAÇÃO.** As Fórmulas (4) e (5) têm varias aplicações teóricas, mas não são eficientes para cálculos numéricos. As soluções de mínimos quadrados de  $Ax = b$  são melhor com-

putadas por eliminação gaussiana ou eliminação de Gauss-Jordan para resolver as equações normais e a projeção ortogonal de  $b$  no espaço-coluna de  $A$  é melhor obtida calculando  $Ax$ , onde  $x$  é a solução de mínimos quadrados de  $Ax = b$ .

**EXEMPLO 1 Solução de Mínimos Quadrados**

Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema linear  $Ax = b$  dado por

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

e encontre a projeção ortogonal de  $b$  no espaço-coluna de  $A$ .

*Solução.*

Aqui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Observe que  $A$  tem vetores-coluna linearmente independentes, portanto sabemos de antemão que existe uma única solução de mínimos quadrados. Temos

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \\ A^T b &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e portanto o sistema normal  $A^T A x = A^T b$ , neste caso, é

$$\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos a solução de mínimos quadrados

$$x_1 = \frac{17}{95}, \quad x_2 = \frac{143}{285}$$

Por (5), a projeção ortogonal de  $b$  no espaço coluna de  $A$  é

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{92}{285} \\ \frac{439}{285} \\ \frac{94}{57} \end{bmatrix}$$

**EXEMPLO 2 Projeção Ortogonal num Subespaço**

Encontre a projeção ortogonal do vetor  $u = (-3, -3, 8, 9)$  no subespaço de  $R^4$  gerado pelos vetores

$$u_1 = (3, 1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 2, 1, 1), \quad u_3 = (-1, 0, 2, -1)$$

*Solução.*

Poderíamos resolver este problema usando primeiro o processo de Gram-Schmidt para converter  $\{u_1, u_2, u_3\}$  em uma base orthonormal e depois aplicando o método usado no Exemplo 6 da Seção 6.3. Contudo, o método a seguir é mais eficiente.

## 226 ••• Álgebra Linear com Aplicações

O subespaço  $W$  de  $R^4$  gerado por  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  é o espaço-coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, se  $\mathbf{u}$  é escrito como vetor-coluna, nós podemos obter a projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  em  $W$  encontrando a solução de mínimos quadrados do sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$  e depois calculando  $\text{proj}_W \mathbf{u} = A\mathbf{x}$  desta solução de mínimos quadrados. As contas são como segue: o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$  é

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

portanto

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o sistema normal  $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{u}$  é

$$\begin{bmatrix} 11 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos a solução de mínimos quadrados de  $A \mathbf{x} = \mathbf{u}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(verifique), de modo que

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou então, em notação horizontal (que é consistente com o enunciado original do problema),  $\text{proj}_W \mathbf{u} = (-2, 3, 4, 0)$ . ♦

Na Seção 4.2 nós discutimos algumas projeções ortogonais básicas de  $R^2$  e  $R^3$  (Tabelas 4 e 5). O conceito de projeção ortogonal pode ser estendido a espaços euclidianos de dimensões mais altas como segue.

### Definição

Se  $W$  é um subespaço de  $R^m$ , então a transformação  $P : R^m \rightarrow W$  que leva cada vetor  $\mathbf{x}$  em  $R^m$  em sua projeção ortogonal  $\text{proj}_W \mathbf{x}$  em  $W$  é chamada *projeção ortogonal de  $R^m$  sobre  $W$* .

Deixamos como um exercício mostrar que as projeções ortogonais são operadores lineares. Segue da Fórmula (5) que a matriz canônica para a projeção ortogonal de  $R^m$  sobre  $W$  é

$$[P] = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (6)$$

onde  $A$  é construída usando qualquer base de  $W$  para vetores-coluna.

### EXEMPLO 3 Verificando a Fórmula (6)

Na Tabela 5 da Seção 4.2 nós mostramos que a matriz canônica da projeção ortogonal de  $R^3$  sobre o plano  $xy$  é

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Para verificar que isto é consistente com a Fórmula (6), tomamos os vetores unitários ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  positivos como uma base para o plano  $xy$ , de modo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que  $A^T A$  é a matriz identidade de tamanho  $2 \times 2$ ; assim, a Fórmula (6) simplifica e obtemos

$$[P] = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que confere com (7). ♦

### EXEMPLO 4 Matriz Canônica de uma Projeção Ortogonal

Obtenha a matriz canônica da projeção ortogonal  $P$  de  $R^2$  sobre a reta  $l$  que passa pela origem e faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  positivo.

*Solução.*

A reta  $l$  é um subespaço unidimensional de  $R^2$ . Conforme ilustrado na Figura 6.4.3, nós podemos tomar  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$  como uma base deste subespaço, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

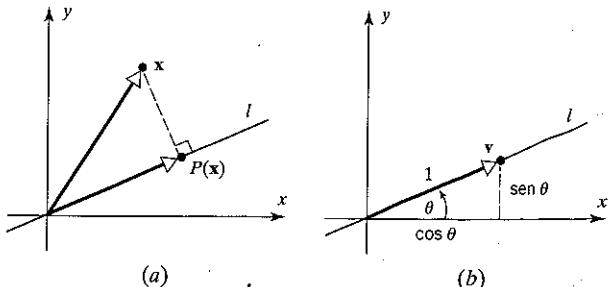


Figura 6.4.3

Nós deixamos a cargo do leitor mostrar que  $A^T A$  é a matriz identidade de tamanho  $1 \times 1$ ; assim, a Fórmula (6) simplifica e obtemos

$$[P] = AA^T = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Note que isto confere com o Exemplo 6 da Seção 4.3.

**Resumo** O Teorema 6.4.3 nos permite acrescentar um resultado adicional ao Teorema 6.2.7.

### Teorema 6.4.5

### Afirmações Equivalentes

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e se  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a multiplicação por  $A$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é invertível.
- (b)  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  admite somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- (d)  $A$  pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.
- (e)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (f)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tem exatamente uma solução para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (g)  $\det(A) \neq 0$ .
- (h) A imagem de  $T_A$  é o  $\mathbb{R}^n$ .
- (i)  $T_A$  é injetiva.
- (j) Os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.
- (k) Os vetores-linha de  $A$  são linearmente independentes.
- (l) Os vetores-coluna de  $A$  geram o  $\mathbb{R}^n$ .
- (m) Os vetores-linha de  $A$  geram o  $\mathbb{R}^n$ .
- (n) Os vetores-coluna de  $A$  formam uma base do  $\mathbb{R}^n$ .
- (o) Os vetores-linha de  $A$  formam uma base do  $\mathbb{R}^n$ .
- (p)  $A$  tem posto  $n$ .
- (q)  $A$  tem nulidade 0.
- (r) O complemento ortogonal do espaço-nulo de  $A$  é o  $\mathbb{R}^n$ .
- (s) O complemento ortogonal do espaço-linha de  $A$  é  $\{\mathbf{0}\}$ .
- (t)  $A^T A$  é invertível.

Este teorema relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

### Conjunto de Exercícios 6.4

1. Encontre o sistema normal associado ao sistema linear dado.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Em cada parte encontre  $\det(A^T A)$  e aplique o Teorema 6.4.3 para determinar se  $A$  tem vetores-coluna linearmente independentes.

$$(a) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e obtenha a projeção ortogonal de  $\mathbf{b}$  no espaço-coluna de  $A$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (d) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

## 228 • • • Álgebra Linear com Aplicações

4. Encontre a projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  no subespaço de  $R^3$  gerado pelos vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ .
  - $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ ;  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$
  - $\mathbf{u} = (1, -6, 1)$ ;  $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 4)$
5. Encontre a projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  no subespaço de  $R^4$  gerado pelos vetores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ .
  - $\mathbf{u} = (6, 3, 9, 6)$ ;  $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-2, -1, 0, -1)$
  - $\mathbf{u} = (-2, 0, 2, 4)$ ;  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-2, -1, -2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-3, -1, 1, 3)$
6. Encontre a projeção ortogonal de  $\mathbf{u} = (5, 6, 7, 2)$  no espaço-solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\2x_2 + x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

7. Use a Fórmula (6) e o método do Exemplo 3 para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal  $P : R^2 \rightarrow R^2$  sobre
  - o eixo  $x$
  - o eixo  $y$

[Observação. Compare suas respostas com a Tabela 4 da Seção 4.2.]

8. Use a Fórmula (6) e o método do Exemplo 3 para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal  $P : R^3 \rightarrow R^3$  sobre
  - o plano  $xz$
  - o plano  $yz$

[Observação. Compare suas respostas com a Tabela 5 da Seção 4.2.]

9. Seja  $W$  o plano de equação  $5x - 3y + z = 0$ .

- Encontre uma base de  $W$ .
- Use a Fórmula (6) para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal sobre  $W$ .
- Use a matriz obtida em (b) para encontrar a projeção ortogonal de um ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  em  $W$ .
- Encontre a distância entre o ponto  $P_0(1, -2, 4)$  e o plano  $W$  e confira seu resultado usando o Teorema 3.5.2.

10. Seja  $W$  a reta de equações paramétricas

$$x = 2t, \quad y = -t, \quad z = 4t \quad (-\infty < t < \infty)$$

- Encontre uma base de  $W$ .
- Use a Fórmula (6) para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal sobre  $W$ .
- Use a matriz obtida em (b) para encontrar a projeção ortogonal de um ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  em  $W$ .
- Encontre a distância entre o ponto  $P_0(2, 1, -3)$  e a reta  $W$ .

11. Para o sistema linear do Exercício 3, mostre que o vetor-erro  $A\bar{x} - \mathbf{b}$  que resulta da solução de mínimos quadrados  $\bar{x}$  é ortogonal ao espaço-coluna de  $A$ .

12. Prove: Se  $A$  tem vetores-coluna linearmente independentes e se  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é consistente, então a solução de mínimos quadrados de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e a solução exata de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  coincidem.

13. Prove: Se  $A$  tem vetores-coluna linearmente independentes e  $\mathbf{b}$  é ortogonal ao espaço-coluna de  $A$ , então a solução de mínimos quadrados de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

14. Seja  $P : R^m \rightarrow W$  a projeção ortogonal de  $R^m$  sobre o subespaço  $W$ .

- Prove que  $[P]^T [P] = [P]$ .
- O que o resultado da parte (a) implica sobre a composta  $P \circ P$ ?
- Mostre que  $[P]$  é simétrica.
- Mostre que as matrizes nas Tabelas 4 e 5 da Seção 4.2 têm as propriedades das partes (a) e (c).

15. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  com vetores-coluna linearmente independentes. Obtenha a matriz canônica da projeção ortogonal de  $R^n$  sobre o espaço-coluna de  $A$ . [Sugestão. Comece com a Fórmula (6).]

### Discussão e Descoberta

16. A seguir apresentamos uma prova da parte (b)  $\Rightarrow$  (a) do Teorema 6.4.3. Preencha cada lacuna com uma justificativa para o passo apresentado.

Hipótese: Suponha que  $A$  é uma matriz  $m \times n$  e que  $A^T A$  é invertível.

Conclusão: Os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.

Prova: (1) Se  $\mathbf{x}$  é uma solução de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , então  $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . \_\_\_\_\_  
 (2) Assim,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . \_\_\_\_\_  
 (3) Logo, os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes. \_\_\_\_\_

17. Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  com vetores-coluna linearmente independentes e seja  $\mathbf{b}$  uma matriz  $n \times 1$ . Dê uma fórmula em termos de  $A$  e  $A^T$  para

- o vetor do espaço-coluna de  $A$  que está mais próximo de  $\mathbf{b}$  em relação ao produto interno euclidiano;
- a solução de mínimos quadrados de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  em relação ao produto interno euclidiano;
- o erro da solução de mínimos quadrados de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  em relação ao produto interno euclidiano;
- a matriz canônica para a projeção ortogonal de  $R^m$  sobre o espaço-coluna de  $A$  em relação ao produto interno euclidiano.

## 6.5 MATRIZES ORTOGONIAIS; MUDANÇA DE BASES

Uma base que é conveniente para um problema pode não o ser para outro, de modo que a mudança de uma base para outra é um processo comum no estudo de espaços vetoriais. Como uma base é a generalização de um sistema de coordenadas para espaços vetoriais, mudar de bases é parecido com mudar de eixos coordenados em  $R^2$  ou  $R^3$ . Nesta seção nós iremos estudar vários problemas relacionados com mudança de bases. Nós também iremos desenvolver propriedades de matrizes quadradas com vetores-coluna ortogonais. Estas matrizes surgem em vários contextos, incluindo problemas envolvendo a mudança de uma base ortonormal para outra.

Matrizes cujas inversas podem ser obtidas por transposição são suficientemente importantes para possuir alguma terminologia associada.

### Definição

Uma matriz *ortogonal* é uma matriz quadrada  $A$  com a propriedade

$$A^{-1} = A^T$$

Decorre desta definição que uma matriz quadrada  $A$  é *ortogonal* se, e somente se,

$$AA^T = A^TA = I \quad (1)$$

De fato, segue do Teorema 1.6.3 que uma matriz quadrada  $A$  é ortogonal se  $AA^T = I$  ou então se  $A^TA = I$ .

### EXEMPLO 1 Uma Matriz $3 \times 3$ Ortogonal

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A^TA = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### EXEMPLO 2 Uma Matriz de Rotação é Ortogonal

Lembre, pela Tabela 6 da Seção 4.2, que a matriz canônica para a rotação anti-horária do  $R^2$  por um ângulo  $\theta$  é

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Esta matriz é ortogonal para todas escolhas de  $\theta$ , pois

$$A^TA = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De fato, é simples verificar que todas as “matrizes de reflexão” nas Tabelas 2 e 3 e todas as “matrizes de rotação” nas Tabelas 6 e 7 da Seção 4.2 são matrizes ortogonais. ♦

Observe que nas matrizes ortogonais dos Exemplos 1 e 2, tanto os vetores-linha quanto os vetores-coluna formam conjuntos ortonormais em relação ao produto interno euclidiano (verifique). Isto não é acidental: é uma consequência do seguinte teorema.

### Teorema 6.5.1

As seguintes afirmações são equivalentes para uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$ .

- (a)  $A$  é ortogonal.
- (b) Os vetores-linha de  $A$  formam um conjunto ortonormal de  $R^n$  em relação ao produto interno euclidiano.
- (c) Os vetores-coluna de  $A$  formam um conjunto ortonormal de  $R^n$  em relação ao produto interno euclidiano.

*Prova.* Nós iremos provar a equivalência de (a) e (b) e deixar a equivalência de (a) e (c) como exercício.

(a)  $\Leftrightarrow$  (b). A entrada na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz produto  $AA^T$  é o produto escalar do  $i$ -ésimo vetor-linha de  $A$  com o  $j$ -ésimo vetor-coluna de  $A^T$ . No entanto, a menos de notação, o  $j$ -ésimo vetor-coluna de  $A^T$  é o  $j$ -ésimo vetor-linha de  $A$ . Assim, se  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  são os vetores-linha de  $A$ , então o produto matricial  $AA^T$  pode ser expresso como

$$AA^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

Assim,  $AA^T = I$  se, e somente se,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \cdots = \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n = 1$$

e

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0 \text{ para } i \neq j$$

que valem se, e somente se,  $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\}$  é um conjunto ortonormal de  $R^n$ . ■

OBSERVAÇÃO. Tendo em vista o Teorema 6.5.1, parece mais adequado chamar matrizes ortogonais de *matrizes ortonormais*. Contudo, não o fazemos em deferência à tradição histórica.

O próximo teorema enumera algumas propriedades fundamentais adicionais de matrizes ortogonais. As provas são todas imediatas e são deixadas para o leitor.

**Teorema 6.5.2**

- (a) A inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal.
- (b) Um produto de matrizes ortogonais é ortogonal.
- (c) Se  $A$  é ortogonal, então  $\det(A) = 1$  ou  $\det(A) = -1$ .

**EXEMPLO 3**  $\det(A) = -1$  Para uma Matriz Ortogonal 4

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

é ortogonal pois seus vetores-linha formam um conjunto orthonormal de  $R^2$ , bem como seus vetores-coluna. Nós deixamos para o leitor verificar que  $\det(A) = 1$ . Uma troca de linhas produz uma matriz ortogonal para a qual  $\det(A) = -1$ . ♦

**Matrizes Ortogonais como Operadores Lineares** Nós observamos no Exemplo 2 que as matrizes canônicas para os operadores básicos de reflexão e rotação de  $R^2$  e  $R^3$  são ortogonais. O próximo teorema ajuda a explicar por que isto é assim.

**Teorema 6.5.3**

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é ortogonal.
- (b)  $\|Ax\| = \|x\|$  para qualquer  $x$  em  $R^n$ .
- (c)  $A x \cdot A y = x \cdot y$  para quaisquer  $x$  e  $y$  em  $R^n$ .

**Prova.** Nós iremos provar a seqüência de implicações  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ .

$(a) \Rightarrow (b)$ . Suponha que  $A$  é ortogonal, de modo que  $A^T A = I$ . Então, pela Fórmula (8) da Seção 4.1,

$$\|Ax\| = (Ax \cdot Ax)^{1/2} = (x \cdot A^T Ax)^{1/2} = (x \cdot x)^{1/2} = \|x\|$$

$(b) \Rightarrow (c)$ . Suponha que  $\|Ax\| = \|x\|$  para cada  $x$  em  $R^n$ . Pelo Teorema 4.1.6, temos

$$\begin{aligned} Ax \cdot Ay &= \frac{1}{4} \|Ax + Ay\|^2 - \frac{1}{4} \|Ax - Ay\|^2 = \frac{1}{4} \|A(x + y)\|^2 - \frac{1}{4} \|A(x - y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 = x \cdot y \end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (a)$ . Suponha que  $Ax \cdot Ay = x \cdot y$  para quaisquer  $x, y$  em  $R^n$ . Então, pela Fórmula (8) da Seção 4.1, temos

$$x \cdot y = x \cdot A^T A y$$

que pode ser reescrito como

$$x \cdot (A^T A y - y) = 0 \quad \text{ou} \quad x \cdot (A^T A - I) y = 0$$

Como isto vale para todo  $x$  em  $R^n$ , em particular vale para

$$x = (A^T A - I) y, \quad \text{ou seja, } (A^T A - I) y \cdot (A^T A - I) y = 0$$

do qual podemos concluir que

$$(A^T A - I) y = 0 \quad (2)$$

(por que?). Assim, (2) é um sistema homogêneo de equações lineares que é satisfeita por cada  $y$  em  $R^n$ . Mas isto implica que a matriz dos coeficientes deve ser zero (por que?), ou seja,  $A^T A = I$  e, consequentemente,  $A$  é ortogonal. ■

Se  $T : R^n \rightarrow R^n$  é a multiplicação por uma matriz ortogonal  $A$ , então  $T$  é chamado **operador ortogonal** de  $R^n$ . Pela partes (a) e (b) do teorema precedente, decorre que os operadores ortogonais de  $R^n$  são precisamente os operadores que mantêm inalterados os comprimentos de todos os vetores. Como as reflexões e as rotações do  $R^2$  e  $R^3$  têm esta propriedade, isto explica nossa observação no Exemplo 2 que as matrizes canônicas para as reflexões e rotações básicas em  $R^2$  e  $R^3$  são ortogonais.

**Matrizes de Coordenadas** Lembre que, pelo Teorema 5.4.1, se  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de um espaço vetorial  $V$ , então cada vetor  $v$  em  $V$  pode ser escrito de maneira única como uma combinação linear dos vetores da base, digamos

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Os escalares  $k_1, k_2, \dots, k_n$  são as coordenadas de  $v$  em relação a  $S$  e o vetor

$$(v)_S = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

é o vetor de coordenadas de  $v$  em relação a  $S$ . Nesta seção será conveniente listar as coordenadas como entradas de uma matriz  $n \times 1$ . Assim, nós definimos

$$[v]_S = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

como sendo a **matriz de coordenadas** de  $v$  em relação a  $S$ .

**Mudança de Base** Em aplicações é comum trabalhar com mais de um sistema de coordenadas e nestes casos é geralmente necessário conhecer as relações entre as coordenadas de um vetor ou ponto dado nos vários sistemas de coordenadas. Como uma base é a generalização para espaços vetoriais de um sistema de coordenadas, somos levados a considerar o seguinte problema.

**Problema da Mudança de Base.** Se nós mudarmos a base de um espaço vetorial  $V$ , de uma base velha  $B$  para uma base nova  $B'$ , qual é a relação entre a velha matriz de coordenadas  $[v]_B$  de um vetor  $v$  e a nova matriz de coordenadas  $[v]_{B'}$ ?

Por simplicidade, nós iremos resolver este problema para espaços bidimensionais. A solução para espaços  $n$ -dimensionais é similar e é deixada para o leitor. Sejam

$$B = \{u_1, u_2\} \quad \text{e} \quad B' = \{u'_1, u'_2\}$$

as bases velha e nova, respectivamente. Nós vamos precisar das matrizes de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha. Suponha que elas sejam

$$[u'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [u'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (3)$$

isto é,

$$u'_1 = au_1 + bu_2$$

$$u'_2 = cu_1 + du_2 \quad (4)$$

Seja, agora,  $\mathbf{v}$  um vetor qualquer de  $V$  e seja

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

a nova matriz de coordenadas, isto é,

$$\mathbf{v} = k_1 \mathbf{u}'_1 + k_2 \mathbf{u}'_2 \quad (6)$$

A fim de encontrar as velhas coordenadas de  $\mathbf{v}$  nós devemos expressar  $\mathbf{v}$  em termos da base velha  $B$ . Para fazer isto, nós substituímos (4) em (6). Isto fornece

$$\mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) + k_2(c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2)$$

ou

$$\mathbf{v} = (k_1a + k_2c)\mathbf{u}_1 + (k_1b + k_2d)\mathbf{u}_2$$

Assim, a velha matriz de coordenadas de  $\mathbf{v}$  é

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix}$$

que pode ser escrito como

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \text{ ou, usando (5), } [\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{B'}$$

Esta equação afirma que a velha matriz de coordenadas  $[\mathbf{v}]_B$  é obtida quando a nova matriz de coordenadas  $[\mathbf{v}]_{B'}$  é multiplicada à esquerda pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

As colunas desta matriz são as coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha [veja (3)]. Assim, temos a seguinte solução para o problema de mudança de base.

**Solução do Problema de Mudança de Base.** Se mudamos a base de um espaço vetorial  $V$  de alguma base velha  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  para uma base nova  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ , então a velha matriz de coordenadas  $[\mathbf{v}]_B$  de um vetor  $\mathbf{v}$  está relacionada com a nova matriz de coordenadas  $[\mathbf{v}]_{B'}$  do mesmo vetor  $\mathbf{v}$  pela equação

$$[\mathbf{v}]_B = P [\mathbf{v}]_{B'} \quad (7)$$

onde as colunas de  $P$  são as matrizes de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha; ou seja, os vetores-coluna de  $P$  são

$$[\mathbf{u}'_1]_B, [\mathbf{u}'_2]_B, \dots, [\mathbf{u}'_n]_B$$

**Matrizes de Transição** A matriz  $P$  é chamada **matriz de transição** de  $B'$  para  $B$  e pode ser expressa em termos de seus vetores-coluna como

$$P = [[\mathbf{u}'_1]_B | [\mathbf{u}'_2]_B | \dots | [\mathbf{u}'_n]_B] \quad (8)$$

#### EXEMPLO 4 Encontrando uma Matriz de Transição

Considere as bases  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  e  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$  de  $R^2$ , onde

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0); \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1); \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 1); \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$$

(a) Encontre a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ .

(b) Use (7) para encontrar  $[\mathbf{v}]_B$  se

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**Solução (a).** Primeiro nós devemos encontrar as matrizes de coordenadas dos vetores  $\mathbf{u}'_1$  e  $\mathbf{u}'_2$  da base nova em relação à base velha  $B$ . Por inspeção,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}'_2 &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

de modo que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Solução (b).** Usando (7) e a matriz de transição da parte (a),

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para conferir, nós deveríamos ser capazes de recuperar o vetor  $\mathbf{v}$  tanto de  $[\mathbf{v}]_B$  quanto de  $[\mathbf{v}]_{B'}$ . Nós deixamos para o leitor mostrar que  $-3\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2 = 7\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 = \mathbf{v} = (7, 2)$ . ♦

#### EXEMPLO 5 Um Ponto de Vista Diferente para o Exemplo 4

Considere os vetores  $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{u}'_1 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{u}'_2 = (2, 1)$ . No Exemplo 4 nós encontramos a matriz de transição da base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$  de  $R^2$  para a base  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ . No entanto, poderíamos igualmente ter pedido a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ . Para obter esta matriz, nós simplesmente mudamos nosso ponto de vista e consideramos  $B'$  como a base velha e  $B$  como a base nova. Como de costume, as colunas da matriz de transição serão as coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha.

Equacionando os componentes correspondentes e resolvendo o sistema linear resultante, o leitor deveria ser capaz de mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 &= 2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2 \end{aligned}$$

de modo que

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de transição de  $B$  para  $B'$  é

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se nós multiplicarmos a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  obtida no Exemplo 4 pela matriz de transição de  $B$  para  $B'$  obtida no Exemplo 5, resulta

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

mostrando que  $Q = P^{-1}$ . O seguinte teorema mostra que isto não é acidental.

### Teorema 6.5.4

Se  $P$  é a matriz de transição de uma base  $B'$  para uma base  $B$  em um espaço vetorial de dimensão finita  $V$ , então:

- (a)  $P$  é invertível;
- (b)  $P^{-1}$  é a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ .

**Prova.** Seja  $Q$  a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ . Nós vamos mostrar que  $PQ = I$  e assim obter  $Q = P^{-1}$  para concluir a prova. Suponha que  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  e suponha que

$$PQ = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Por (7),

$$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'} \text{ e } [\mathbf{x}]_{B'} = Q[\mathbf{x}]_B$$

para cada  $\mathbf{x}$  de  $V$ . Multiplicando ambos os lados da segunda equação à esquerda por  $P$  e substituindo na primeira equação dá

$$[\mathbf{x}]_B = P Q [\mathbf{x}]_{B'} \quad (9)$$

para cada  $\mathbf{x}$  de  $V$ . Tomando  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$  em (9) obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

Analogamente, substituindo sucessivamente  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{x} = \mathbf{u}_n$  em (9), obtemos

$$\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo,  $PQ = I$ . ■

Em resumo, se  $P$  é a matriz de transição de uma base  $B'$  para uma base  $B$ , então para cada vetor  $\mathbf{v}$  valem as seguintes relações:

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} \quad (10)$$

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B \quad (11)$$

**Mudança de Base Ortonormal** O teorema seguinte mostra que num espaço com produto interno, a matriz de transição de uma base ortonormal para outra é sempre ortogonal.

### Teorema 6.5.5

Se  $P$  é a matriz de transição de uma base ortonormal para uma outra base ortonormal em um espaço com produto interno, então  $P$  é uma matriz ortogonal, isto é:

$$P^{-1} = P^T$$

**Prova.** Suponha que  $V$  é um espaço com produto interno  $n$ -dimensional e que  $P$  é a matriz de transição de uma base ortonormal  $B'$  para uma base ortonormal  $B$ . Para provar que  $P$  é ortogonal nós vamos usar o Teorema 6.5.3 e mostrar que  $\|Px\| = \|\mathbf{x}\|$  para cada vetor  $\mathbf{x}$  de  $R^n$ .

Lembre que, pelo Teorema 6.3.2a, a norma de qualquer vetor  $\mathbf{u}$  em  $V$  em relação a qualquer base ortonormal de  $V$ , é a mesma que a norma do vetor das suas coordenadas em relação ao produto interno euclidiano do  $R^n$ . Assim, para qualquer vetor  $\mathbf{u}$  de  $V$  nós temos

$$\|\mathbf{u}\| = \|[\mathbf{u}]_{B'}\| = \|[\mathbf{u}]_B\|$$

ou, por (10),

$$\|\mathbf{u}\| = \|[\mathbf{u}]_{B'}\| = \|P[\mathbf{u}]_{B'}\| \quad (12)$$

onde a primeira norma é em relação ao produto interno de  $V$  e a segunda e terceira são em relação ao produto interno euclidiano do  $R^n$ .

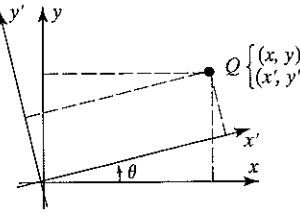
Seja, agora,  $\mathbf{x}$  um vetor qualquer do  $R^n$  e seja  $\mathbf{u}$  o vetor de  $V$  cuja matriz de coordenadas em relação à base  $B'$  é  $\mathbf{x}$ , ou seja,  $[\mathbf{u}]_{B'} = \mathbf{x}$ . Assim, por (12),

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{x}\| = \|Px\|$$

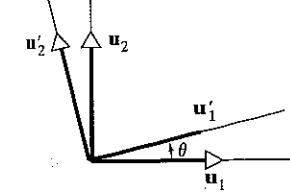
provando que  $P$  é ortogonal. ■

### EXEMPLO 6 Aplicação à Rotação de Eixos no Espaço Bidimensional

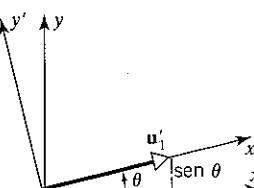
Em muitos problemas é dado um sistema de coordenadas retangulares  $xy$  que, girado no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo  $\theta$ , produz um novo sistema de coordenadas  $x'y'$ . Quando isto é feito, cada ponto  $Q$  do plano tem dois conjuntos de coordenadas: as coordenadas  $(x, y)$  em relação ao sistema  $xy$  e as coordenadas  $(x', y')$  em relação ao sistema  $x'y'$  (Figura 6.5.1a).



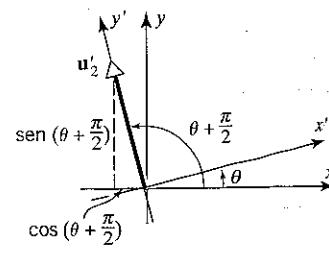
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.5.1

Introduzindo vetores unitários  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  positivos e vetores unitários  $\mathbf{u}'_1$  e  $\mathbf{u}'_2$  ao longo dos eixos  $x'$  e  $y'$

$y'$  positivos, nós podemos considerar esta rotação como uma mudança de uma base velha  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  a uma nova  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$  (Figura 6.5.1b). Assim, as novas coordenadas  $(x', y')$  e as velhas coordenadas  $(x, y)$  de um ponto Q estão relacionadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde  $P$  é a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ . Para encontrar  $P$  nós devemos determinar as matrizes de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha. Conforme indicado na Figura 6.5.1c, os componentes de  $\mathbf{u}'_1$  na base velha são  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ , de modo que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

Analogamente, pela Figura 6.5.1d, nós vemos que os componentes de  $\mathbf{u}'_2$  na base velha são  $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$  e  $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$ , de modo que

$$[\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  é

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Observe que  $P$  é uma matriz ortogonal, como era de se esperar, pois  $B$  e  $B'$  são bases ortonormais. Assim,

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

e portanto, por (13),

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (14)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

Por exemplo, se os eixos são girados de  $\theta = \pi/4$  então, como

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a Equação (14) diz

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim, se as velhas coordenadas de um ponto Q são  $(x, y) = (2, -1)$ , então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e portanto as novas coordenadas de Q são  $(x', y') = (1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ .

**OBSERVAÇÃO.** Note que a matriz de coeficientes em (14) é igual à matriz canônica do operador linear que roda os vetores do  $\mathbb{R}^2$

por um ângulo  $-\theta$  (Tabela 6 da Seção 4.2). Isto é de se esperar, pois girar os eixos coordenados por um ângulo  $\theta$  com os vetores do  $\mathbb{R}^2$  mantidos fixos tem o mesmo efeito que girar os vetores por um ângulo  $-\theta$  com os eixos mantidos fixos.

### EXEMPLO 7 Aplicação à Rotação de Eixos no Espaço Tridimensional

Suponha que um sistema de coordenadas retangulares xyz é girado em torno do eixo z no sentido anti-horário (olhando para baixo ao longo do eixo z positivo) por um ângulo  $\theta$  (Figura 6.5.2). Se nós introduzimos vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  ao longo dos eixos x, y e z positivos e vetores unitários  $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2$  e  $\mathbf{u}'_3$  ao longo dos eixos  $x', y'$  e  $z'$  positivos, nós podemos considerar esta rotação como uma mudança de uma base velha  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  para uma nova  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ . Em vista do Exemplo 6 deveria ser evidente que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

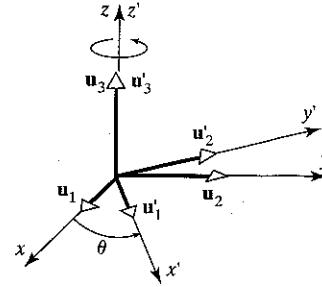


Figura 6.5.2

Alem disto, como  $\mathbf{u}'_3$  se estende ao longo de uma unidade para cima no eixo z positivo, temos

$$[\mathbf{u}'_3]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  é

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de transição de  $B$  para  $B'$  é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(verifique). Assim, as novas coordenadas  $(x', y', z')$  de um ponto Q podem ser computadas a partir das velhas  $(x, y, z)$  por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**Conjunto de Exercícios 6.5**

1. (a) Mostre de três maneiras que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

é ortogonal: calculando  $A^T A$ , usando a parte (b) do Teorema 6.5.1 e usando a parte (c) do Teorema 6.5.1.

- (b) Encontre a inversa da matriz A da parte (a).

2. (a) Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

é ortogonal.

- (b) Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a multiplicação pela matriz A da parte (a). Encontre  $T(x)$  para o vetor  $x = (-2, 3, 5)$ . Usando o produto interno euclidiano de  $\mathbb{R}^3$  verifique se  $\|T(x)\| = \|x\|$ .

3. Determine quais das seguintes matrizes são ortogonais. Para as que são ortogonais, obtenha a inversa.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Mostre que as matrizes de reflexão nas Tabelas 2 e 3 da Seção 4.2 são ortogonais.

5. Encontre a matriz de coordenadas de w em relação à base S = {u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>} do  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) u<sub>1</sub> = (1, 0), u<sub>2</sub> = (0, 1); w = (3, -7)      (b) u<sub>1</sub> = (2, -4), u<sub>2</sub> = (3, 8); w = (1, 1)  
 (c) u<sub>1</sub> = (1, 1), u<sub>2</sub> = (0, 2); w = (a, b)

6. Encontre a matriz de coordenadas de v em relação a S = {v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>}.

- (a) v = (2, -1, 3); v<sub>1</sub> = (1, 0, 0), v<sub>2</sub> = (2, 2, 0), v<sub>3</sub> = (3, 3, 3)  
 (b) v = (5, -12, 3); v<sub>1</sub> = (1, 2, 3), v<sub>2</sub> = (-4, 5, 6), v<sub>3</sub> = (7, -8, 9)

7. Encontre a matriz de coordenadas de p em relação a S = {p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, p<sub>3</sub>}.

- (a) p = 4 - 3x + x<sup>2</sup>; p<sub>1</sub> = 1, p<sub>2</sub> = x, p<sub>3</sub> = x<sup>2</sup>  
 (b) p = 2 - x + x<sup>2</sup>; p<sub>1</sub> = 1 + x, p<sub>2</sub> = 1 + x<sup>2</sup>, p<sub>3</sub> = x + x<sup>2</sup>

8. Encontre a matriz de coordenadas de A em relação a S = {A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub>}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Considere as matrizes de coordenadas

$$[w]_S = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [q]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [B]_S = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre w se S é a base do Exercício 6(a).  
 (b) Encontre q se S é a base do Exercício 7(a).  
 (c) Encontre B se S é a base do Exercício 8.

10. Considere as bases  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ .  
 (b) Encontre a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ .  
 (c) Calcule a matriz de coordenadas  $[\mathbf{w}]_B$ , onde

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e use (11) para calcular  $[\mathbf{w}]_{B'}$ .

- (d) Confira seu resultado calculando  $[\mathbf{w}]_{B'}$  diretamente.

11. Repita o Exercício 10 com o mesmo vetor  $\mathbf{w}$  mas agora com

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

12. Considere as bases  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ .  
 (b) Calcule a matriz de coordenadas  $[\mathbf{w}]_B$ , onde

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e use (11) para calcular  $[\mathbf{w}]_{B'}$ .

- (c) Confira seu resultado calculando  $[\mathbf{w}]_{B'}$  diretamente.

13. Repita o Exercício 12 com o mesmo vetor  $\mathbf{w}$  mas agora com

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

14. Considere as bases  $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$  e  $B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$  de  $P_1$ , onde

$$\mathbf{p}_1 = 6 + 3x, \quad \mathbf{p}_2 = 10 + 2x, \quad \mathbf{q}_1 = 2, \quad \mathbf{q}_2 = 3 + 2x$$

- (a) Encontre a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ .  
 (b) Encontre a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ .  
 (c) Calcule a matriz de coordenadas  $[\mathbf{p}]_B$ , onde  $\mathbf{p} = -4 + x$  e use (11) para calcular  $[\mathbf{p}]_{B'}$ .  
 (d) Confira seu resultado calculando  $[\mathbf{p}]_{B'}$  diretamente.

15. Seja  $V$  o espaço gerado por  $\mathbf{f}_1 = \sin x$  e  $\mathbf{f}_2 = \cos x$ .

- (a) Mostre que  $\mathbf{g}_1 = 2 \sin x + \cos x$  e  $\mathbf{g}_2 = 3 \cos x$  formam uma base de  $V$ .  
 (b) Encontre a matriz de transição de  $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$  para  $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ .  
 (c) Encontre a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ .  
 (d) Calcule a matriz de coordenadas  $[\mathbf{h}]_B$ , onde  $\mathbf{h} = 2 \sin x - 5 \cos x$  e use (11) para calcular  $[\mathbf{h}]_{B'}$ .  
 (e) Confira seu resultado calculando  $[\mathbf{h}]_{B'}$  diretamente.

16. Seja  $x'y'$  o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares  $xy$  no sentido anti-horário por um ângulo  $\theta = 3\pi/4$ .

- (a) Encontre as coordenadas  $x'y'$  do ponto cujas coordenadas  $xy$  são  $(-2, 6)$ .  
 (b) Encontre as coordenadas  $xy$  do ponto cujas coordenadas  $x'y'$  são  $(5, 2)$ .

17. Repita o Exercício 16 com  $\theta = \pi/3$ .

18. Seja  $x'y'z'$  o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares  $xyz$  no sentido anti-horário em torno do eixo  $z$  (olhando para baixo no eixo  $z$  positivo) por um ângulo  $\theta = \pi/4$ .

- (a) Encontre as coordenadas  $x'y'z'$  do ponto cujas coordenadas  $xyz$  são  $(-1, 2, 5)$ .  
 (b) Encontre as coordenadas  $xyz$  do ponto cujas coordenadas  $x'y'z'$  são  $(1, 6, -3)$ .

19. Repita o Exercício 18 com uma rotação no sentido anti-horário em torno do eixo  $y$  (olhando ao longo do eixo  $y$  positivo para a origem) por um ângulo  $\theta = \pi/3$ .

## 236 • • • Álgebra Linear com Aplicações

20. Repita o Exercício 18 com uma rotação no sentido anti-horário em torno do eixo x (olhando ao longo do eixo x positivo para a origem) por um ângulo  $\theta = 3\pi/4$ .
21. (a) Seja  $x'y'z'$  o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares xyzno sentido anti-horário em torno do eixo y (olhando ao longo do eixo y positivo para a origem) por um ângulo  $\theta$ . Encontre uma matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

onde  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$  são as coordenadas do mesmo ponto nos sistemas xyz e  $x'y'z'$ , respectivamente.

- (b) Repita a parte (a) para uma rotação em torno do eixo x.
22. Seja  $x'y'z'$  o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares xyzno sentido anti-horário em torno do eixo z (olhando para baixo ao longo do eixo z positivo) por um ângulo de  $60^\circ$  e seja  $x''y''z''$  o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares  $x'y'z'$  no sentido anti-horário em torno do eixo  $y'$  (olhando ao longo do eixo  $y'$  positivo para a origem) por um ângulo de  $45^\circ$ . Encontre uma matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

onde  $(x, y, z)$  e  $(x'', y'', z'')$  são as coordenadas do mesmo ponto nos sistemas xyz e  $x''y''z''$ , respectivamente.

23. Quais condições devem satisfazer a e b para que a matriz

$$\begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{bmatrix}$$

seja ortogonal?

24. Prove que uma matriz ortogonal A de tamanho  $2 \times 2$  é de uma das duas formas:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

onde  $0 \leq \theta < 2\pi$ . [Sugestão. Comece com uma matriz arbitrária  $A = (a_{ij})$  de tamanho  $2 \times 2$  e use o fato que os vetores-coluna formam um conjunto ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ .]

25. (a) Use o resultado do Exercício 24 para provar que a multiplicação por uma matriz ortogonal  $2 \times 2$  é uma rotação ou uma rotação seguida por uma reflexão em torno do eixo x.  
 (b) Mostre que a multiplicação por A é uma rotação se  $\det(A) = 1$  e uma rotação seguida de reflexão se  $\det(A) = -1$ .
26. Use o resultado do Exercício 25 para determinar se a multiplicação por A é uma rotação ou uma rotação seguida por uma reflexão em torno do eixo x. Encontre o ângulo da rotação em cada caso.

$$(a) A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

27. O resultado do Exercício 25 tem um análogo para matrizes ortogonais  $3 \times 3$ : Pode ser provado que a multiplicação por uma matriz ortogonal A de tamanho  $3 \times 3$  é uma rotação em torno de um eixo se  $\det(A) = 1$  e é uma rotação em torno de um eixo seguida por uma reflexão em torno de um plano coordenado se  $\det(A) = -1$ . Determine se a multiplicação por A é uma rotação ou uma rotação seguida por uma reflexão.

$$(a) A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

28. Use o resultado do Exercício 27 e a parte (b) do Teorema 6.5.2 para mostrar que a composição de rotações pode ser sempre realizada por uma única rotação em torno de um eixo apropriado.
29. Prove a equivalência das afirmações (a) e (c) do Teorema 6.5.1.

## Discussão e Descoberta

30. Um operador linear do  $\mathbb{R}^2$  é chamado *rígido* se mantém o comprimento dos vetores e dizemos que *preserva ângulo* se não muda o ângulo entre vetores não-nulos.
- (a) Dê o nome de dois tipos distintos de operadores que são rígidos.  
 (b) Dê o nome de dois tipos distintos de operadores que preservam ângulo.  
 (c) Existem operadores lineares do  $\mathbb{R}^2$  que são rígidos e não preservam ângulo? Que preservam ângulo e não são rígidos? Justifique suas respostas.

31. Em relação ao Exercício 30, o que você pode dizer sobre  $\det(A)$  se  $A$  é a matriz canônica de um operador linear rígido do  $\mathbb{R}^2$ ?  
 32. Encontre  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ b & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ c & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

é ortogonal. São únicos tais valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ ? Explique.

### Exercícios Suplementares do Capítulo 6

1. Suponha que o  $\mathbb{R}^4$  tem o produto interno euclidiano.  
 (a) Encontre um vetor de  $\mathbb{R}^4$  que é ortogonal a  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$  e  $\mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1)$  e que faz ângulos iguais com  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$  e  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0)$ .  
 (b) Encontre um vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  de comprimento 1 que é ortogonal aos vetores  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_4$  dados acima e tal que o cosseno do ângulo entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}_2$  é o dobro do cosseno do ângulo entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}_3$ .

2. Mostre que se  $\mathbf{x}$  é qualquer vetor-coluna não-nulo de  $\mathbb{R}^n$ , então a matriz  $n \times n$

$$A = I_n - \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x} \mathbf{x}^T$$

é ortogonal e também simétrica.

3. Seja  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  um sistema de  $m$  equações em  $n$  variáveis. Mostre que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é uma solução do sistema se, e somente se, o vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é ortogonal a cada vetor-linha de  $A$  no produto interno euclidiano de  $\mathbb{R}^n$ .

4. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

para quaisquer números reais positivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

5. Mostre que se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são quaisquer vetores de um espaço com produto interno e  $c$  é qualquer escalar, então

$$\|c\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = c^2 \|\mathbf{x}\|^2 + 2c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2$$

6. Suponha que o  $\mathbb{R}^3$  tem o produto interno euclidiano. Encontre dois vetores de comprimento 1 que são ortogonais a cada um dos três vetores  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-2, -1, 2)$  e  $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 1)$ .

7. Encontre um produto interno euclidiano ponderado em  $\mathbb{R}^n$  tal que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{v}_2 = (0, \sqrt{2}, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = (0, 0, \sqrt{3}, \dots, 0)$$

$\vdots$

$$\mathbf{v}_n = (0, 0, 0, \dots, \sqrt{n})$$

formam um conjunto ortonormal.

8. Existe um produto interno euclidiano ponderado em  $\mathbb{R}^2$  no qual os vetores  $(1, 2)$  e  $(3, -1)$  formam um conjunto ortonormal? Justifique sua resposta.  
 9. Prove: Se  $Q$  é uma matriz ortogonal, então cada entrada de  $Q$  coincide com seu co-fator se  $\det(Q) = 1$  e com o negativo de seu co-fator se  $\det(Q) = -1$ .  
 10. Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores de um espaço com produto interno  $V$ , então  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  podem ser considerados como os lados de um “triângulo” em  $V$  (veja figura). Prove que a lei dos cossenos vale para estes triângulos, ou seja, prove  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

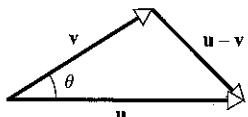


Figura Ex-10

11. (a) No  $\mathbb{R}^3$ , os vetores  $(k, 0, 0)$ ,  $(0, k, 0)$  e  $(0, 0, k)$  formam as arestas de um cubo com diagonal  $(k, k, k)$  (Figura 3.3.4). Similarmente, no  $\mathbb{R}^n$ , os vetores
- $$(k, 0, 0, \dots, 0), \quad (0, k, 0, \dots, 0), \dots, \quad (0, 0, 0, \dots, k)$$
- podem ser considerados como as arestas de um “cubo” com diagonal  $(k, k, k, \dots, k)$ . Mostre que cada uma das arestas acima faz um ângulo de  $\theta$  com a diagonal, onde  $\cos \theta = \cos \theta = 1/\sqrt{n}$ .
- (b) (*Para leitores que estudaram Cálculo.*) O que acontece com o ângulo  $\theta$  da parte (a) quando a dimensão  $n$  de  $\mathbb{R}^n$  tende ao  $+\infty$ ?
12. Sejam  $u$  e  $v$  vetores de um espaço com produto interno.
- (a) Prove que  $\|u\| = \|v\|$  se, e somente se,  $u = v$  e  $u - v$  são ortogonais.
- (b) Dê uma interpretação geométrica deste resultado em  $\mathbb{R}^2$  com o produto interno euclidiano.
13. Seja  $u$  um vetor de um espaço com produto interno  $V$  e seja  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ . Mostre que se  $\alpha_i$  é o ângulo entre  $u$  e  $v_i$  então
- $$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1$$
14. Prove: Se  $\langle u, v \rangle_1$  e  $\langle u, v \rangle_2$  são dois produtos internos num espaço vetorial  $V$ , então a quantidade  $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_1 + \langle u, v \rangle_2$  também é um produto interno.
15. Mostre que o produto interno de  $\mathbb{R}^n$  gerado por qualquer matriz ortogonal é o produto interno euclidiano.
16. Prove a parte (c) do Teorema 6.2.5.

#### **Requisito: Recurso Computacional**

#### **Exercícios Computacionais do Capítulo 6**

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

#### **Seção 6.1**

- T1. (*Produtos internos euclidianos ponderados*) Veja se você consegue programar seu recurso computacional para produzir o valor de um produto interno euclidiano ponderado quando o usuário entrar com  $n$ , os pesos e os vetores. Confira seu trabalho fazendo seu programa realizar alguns cálculos específicos.
- T2. (*Produto interno em  $M_{22}$* ) Veja se você consegue programar seu recurso computacional para produzir o produto interno do Exemplo 7 quando o usuário entrar com as matrizes  $U$  e  $V$ . Confira seu trabalho fazendo seu programa realizar alguns cálculos específicos.
- T3. (*Produto interno em  $C[a, b]$* ) Se você está usando um sistema algébrico computacional ou um recurso que faz integração numérica, veja se você consegue programar seu recurso para calcular o produto interno dado no Exemplo 9 quando o usuário entrar com  $a$ ,  $b$  e as funções  $f(x)$  e  $g(x)$ . Confira seu trabalho fazendo seu programa realizar alguns cálculos específicos.

#### **Seção 6.3**

- T1. (*Normalizando um vetor*) Veja se você consegue criar um programa que normaliza um vetor não-nulo  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  quando o usuário entra com  $v$ .

- T2. (*Processo de Gram-Schmidt*) Leia em seu manual sobre como realizar o processo de Gram-Schmidt e então use seu recurso para fazer os cálculos do Exemplo 7.
- T3. (*Decomposição QR*) Leia em seu manual sobre como realizar o processo de Gram-Schmidt e então use seu recurso para fazer os cálculos do Exemplo 8.

#### **Seção 6.4**

- T1. (*Mínimos Quadrados*) Leia em seu manual sobre a obtenção de soluções de mínimos quadrados de sistemas lineares e então use seu recurso para encontrar a solução de mínimos quadrados do Exemplo 1.
- T2. (*Projeção ortogonal em subespaço*) Use a funcionalidade de mínimos quadrados de seu recurso computacional para encontrar a solução de mínimos quadrados  $x$  do sistema normal do Exemplo 2 e em seguida complete os cálculos do exemplo computando  $Ax$ . Se você tiver êxito, veja se você consegue criar um programa que produz a projeção ortogonal de um vetor  $u$  de  $\mathbb{R}^4$  no subespaço  $W$  quando o usuário entrar com  $u$  e um conjunto de vetores que gera  $W$ . [Sugestão. Como primeiro passo, faça o programa criar a matriz  $A$  cujos vetores-coluna são os geradores.] Confira seu trabalho fazendo seu programa encontrar a projeção ortogonal do Exemplo 2.

# Autovalores e Autovetores

## Conteúdo do Capítulo

- 7.1 Autovalores e Autovetores
- 7.2 Diagonalização
- 7.3 Diagonalização Ortogonal

**INTRODUÇÃO:** Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $x$  é um vetor em  $\mathbb{R}^n$ , então  $Ax$  também é um vetor em  $\mathbb{R}^n$ , mas em geral não há nenhuma relação geométrica simples entre  $x$  e  $Ax$ . No entanto, existe uma relação geométrica simples no caso especial em que  $x$  é um vetor não-nulo e  $Ax$  é um múltiplo escalar de  $x$ . Por exemplo, se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  e se  $x$  é um vetor não-nulo tal que  $Ax$  é um múltiplo escalar de  $x$ , digamos,  $Ax = \lambda x$ , então cada vetor na reta pela origem determinada por  $x$  é levado de volta à mesma reta quando multiplicado por  $A$ .

Vetores não-nulos que são levados em múltiplos escalares deles mesmos por um operador linear aparecem naturalmente no estudo de vibrações e da dinâmica populacional, na Genética, Mecânica Quântica e Economia, bem como na Geometria. Neste capítulo nós estudaremos tais vetores e suas aplicações.

## 7.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Na Seção 2.3 nós introduzimos os conceitos de *autovalores* e *autovetores*. Nesta seção nós iremos estudar estas idéias em maior detalhe e com isto preparar o cenário para as aplicações destes conceitos em seções posteriores.

**Revisão** Nós começamos com uma revisão de alguns conceitos que foram desenvolvidos nas Seções 2.3 e 4.3.

### Definição

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então um vetor não-nulo  $\mathbf{x}$  em  $\mathbb{R}^n$  é chamado um *autovetor* de  $A$  se  $A\mathbf{x}$  é um múltiplo escalar de  $\mathbf{x}$ , ou seja,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

para algum escalar  $\lambda$ . O escalar  $\lambda$  é chamado um *autovalor* de  $A$  e dizemos que  $\mathbf{x}$  é um autovetor *associado* a  $\lambda$ .

Em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , a multiplicação por  $A$  manda cada autovetor  $\mathbf{x}$  de  $A$  (se houver) sobre a mesma reta pela origem que  $\mathbf{x}$ . Dependendo do sinal e da magnitude do autovalor  $\lambda$  associado a  $\mathbf{x}$ , o operador linear  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  comprime ou estica  $\mathbf{x}$  por um fator  $\lambda$ , invertendo o sentido no caso de  $\lambda$  negativo (Figura 7.1.1).

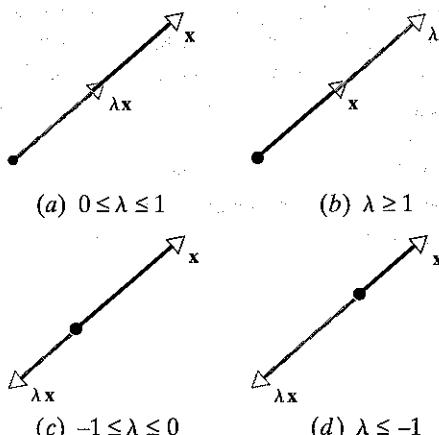


Figura 7.1.1

### EXEMPLO 1 Autovetores de uma Matriz $2 \times 2$

O vetor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  é um autovetor de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

correspondendo ao autovalor  $\lambda = 3$ , pois

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

Para encontrar os autovalores de uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  nós reescrevemos  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  como

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

ou, equivalentemente,

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \quad (1)$$

Para  $\lambda$  ser um autovalor, precisa haver uma solução não-nula desta equação. No entanto, pelo Teorema 6.4.5, a Equação (1) tem uma solução não-nula se, e somente se,

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Esta equação é a *equação característica* de  $A$ ; os escalares que satisfazem esta equação são os autovalores de  $A$ . Quando expandido, o determinante  $\det(\lambda I - A)$  é um polinômio  $p$  em  $\lambda$  que é chamado o *polinômio característico* de  $A$ .

Pode ser mostrado (Exercício 15) que se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então o polinômio característico de  $A$  tem grau  $n$  e o coeficiente de  $\lambda^n$  é 1, ou seja, o polinômio característico  $p(x)$  de uma matriz  $n \times n$  é da forma

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra segue que a equação característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

tem, no máximo,  $n$  soluções distintas, de modo que uma matriz  $n \times n$  tem, no máximo,  $n$  autovalores distintos.

O leitor pode querer revisar o Exemplo 6 da Seção 2.3, onde nós encontramos os autovalores de uma matriz  $2 \times 2$  resolvendo a equação característica. O próximo exemplo envolve uma matriz  $3 \times 3$ .

### EXEMPLO 2 Autovetores de uma Matriz $3 \times 3$

Encontre os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução.

O polinômio característico de  $A$  é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Os autovalores de  $A$ , portanto, satisfazem a equação cúbica

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \quad (2)$$

Para resolver esta equação, nós começamos procurando soluções inteiras. Esta tarefa pode ser enormemente simplificada se lembrarmos o seguinte fato: todas as soluções inteiras (se houver) de uma equação polinomial

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

com coeficientes inteiros são divisores do termo constante  $c_n$ . Assim, as únicas possíveis soluções inteiras de (2) são os divisores de  $-4$ , ou seja,  $\pm 1, \pm 2$  e  $\pm 4$ . Substituindo sucessivamente cada um destes valores em (2) mostra que  $\lambda = 4$  é uma solução inteira. Consequentemente,  $\lambda - 4$  deve ser um fator do lado

esquerdo de (2). Dividindo  $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$  por  $\lambda - 4$ , mostra que (2) pode ser reescrito como

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Assim, as demais soluções de (2) satisfazem a equação quadrática

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

que pode ser resolvida pela fórmula quadrática. Assim, os autovalores de  $A$  são

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

### EXEMPLO 3 Autovalores de uma Matriz Triangular Superior

Encontre os autovalores da matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Lembrando que o determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas na diagonal principal (Teorema 2.2.2), obtemos

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) \end{aligned}$$

Assim, a equação característica é

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

e os autovalores são

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda = a_{22}, \quad \lambda = a_{33}, \quad \lambda = a_{44}$$

que são precisamente as entradas na diagonal principal de  $A$ .

O seguinte teorema geral deveria ser evidente a partir das contas no exemplo precedente.

### Teorema 7.1.1

*Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  triangular (superior, inferior ou diagonal), então os autovalores de  $A$  são as entradas na diagonal principal de  $A$ .*

### EXEMPLO 4 Autovalores de uma Matriz Triangular Inferior

Por inspeção, os autovalores da matriz triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

são  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = \frac{2}{3}$  e  $\lambda = -\frac{1}{4}$ .

**OBSERVAÇÃO.** Muitas vezes, em problemas aplicados, a matriz  $A$  é tão grande que não é prático calcular a equação característica. Neste caso, existem muitos métodos de aproximação que podem ser utilizados para obter os autovalores.

**Autovalores Complexos** É possível que a equação característica de uma matriz com entradas reais tenha soluções complexas. Por exemplo, o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

de modo que a equação característica é  $\lambda^2 + 1 = 0$ , cujas soluções são os números imaginários  $\lambda = i$  e  $\lambda = -i$ . Assim, mesmo para matrizes reais, somos forçados a considerar autovalores complexos. Por sua vez, isto nos leva a considerar a possibilidade de espaços vetoriais complexos, ou seja, espaços vetoriais nos quais são permitidos escalares complexos. Estes espaços vetoriais serão estudados no Capítulo 10. Por enquanto, nós permitiremos autovalores complexos mas nossa discussão de autovetores ficará limitada a matrizes com autovalores reais.

O seguinte teorema resume o que vimos até aqui.

### Teorema 7.1.2 Afirmações Equivalentes

*Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $\lambda$  é um número real, então as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a)  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ .
- (b) O sistema  $(\lambda I - A)x = 0$  de equações tem soluções não-triviais.
- (c) Existe um vetor não-nulo  $x$  tal que  $Ax = \lambda x$ .
- (d)  $\lambda$  é uma solução da equação característica  $\det(\lambda I - A) = 0$ .

**Encontrando Bases para Auto-espacos** Agora que nós sabemos encontrar autovalores, passamos ao problema de encontrar autovetores. Os autovetores de  $A$  associados a um autovalor  $\lambda$  são os vetores não-nulos  $x$  que satisfazem  $Ax = \lambda x$ . Equivalentemente, os autovetores associados a  $\lambda$  são os vetores não-nulos no espaço-solução de  $(\lambda I - A)x = 0$ . Nós chamamos este espaço de *auto-espaco* de  $A$  associado a  $\lambda$ .

### EXEMPLO 5 Bases de Auto-espacos

Encontre bases para os auto-espacos de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*Solução.*

A equação característica da matriz  $A$  é  $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$  ou, em forma fatorada,  $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$  (verifique); assim, os autovalores de  $A$  são  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$  e portanto temos dois autoespaços de  $A$ .

Por definição,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$  se, e somente se,  $\mathbf{x}$  é uma solução não-trivial de  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , ou seja, de

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Se  $\lambda = 2$ , então (3) é dado por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema, obtemos (verifique)

$$x_1 = -s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = s$$

Assim, os autovetores de  $A$  associados a  $\lambda = 2$  são os vetores não-nulos da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes, estes vetores formam uma base do autoespaço associado a  $\lambda = 2$ .

Se  $\lambda = 1$ , então (3) é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema, obtemos (verifique)

$$x_1 = -2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = s$$

Assim, os autovetores associados a  $\lambda = 1$  são os vetores não-nulos da forma

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e portanto} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a  $\lambda = 1$ .

**Potências de uma Matriz** Uma vez obtidos os autovalores e autovetores de uma matriz  $A$ , é uma questão simples obter os autovalores e autovetores de qualquer potência inteira positiva de  $A$ ; por exemplo, se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  e se  $\mathbf{x}$  é um autovetor correspondente, então

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

o que mostra que  $\lambda^2$  é um autovalor de  $A^2$  com autovetor associado  $\mathbf{x}$ . Em geral, nós temos os seguinte resultado.

### Teorema 7.1.3

Se  $k$  é um inteiro positivo,  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz  $A$  e  $\mathbf{x}$  é um autovetor associado, então  $\lambda^k$  é um autovalor de  $A^k$  e  $\mathbf{x}$  é um autovetor associado.

### EXEMPLO 6 Usando o Teorema 7.1.3

No Exemplo 5 nós mostramos que os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 1$ , de modo que, pelo Teorema 7.1.3, ambos  $\lambda = 2^7 = 128$  e  $\lambda = 1^7 = 1$  são autovalores de  $A^7$ . Nós também mostramos que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são autovetores de  $A$  associados ao autovalor  $\lambda = 2$ , de modo que, pelo Teorema 7.1.3, estes vetores também são autovetores de  $A^7$  associados a  $\lambda = 2^7 = 128$ . Analogamente, o autovetor

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de  $A$  associado a  $\lambda = 1$  também é um autovetor de  $A^7$  associado a  $\lambda = 1^7 = 1$ .

**Autovalores e Invertibilidade** O próximo teorema estabelece uma relação entre os autovalores e a invertibilidade de uma matriz.

### Teorema 7.1.4

Uma matriz quadrada  $A$  é invertível se, e somente se,  $\lambda = 0$  não é um autovalor de  $A$ .

**Prova.** Suponha que  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e observe primeiro que  $\lambda = 0$  é uma solução da equação característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

se, e somente se, o termo constante  $c_n$  é zero. Assim, é suficiente provar que  $A$  é invertível se, e somente se,  $c_n \neq 0$ . Mas

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

e portanto, tomando  $\lambda = 0$ ,

$$\det(-A) = c_n \quad \text{ou} \quad (-1)^n \det(A) = c_n$$

Segue da última equação que  $\det(A) = 0$  se, e somente se,  $c_n = 0$  e isto, por sua vez, implica que  $A$  é invertível se, e somente se,  $c_n \neq 0$ .

**EXEMPLO 7 Usando o Teorema 7.1.4**

A matriz  $A$  do Exemplo 5 é invertível pois tem autovalores  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$ , nenhum dos quais é zero. Nós deixamos para o leitor conferir esta conclusão mostrando que  $\det(A) \neq 0$ . ♦

**Resumo** O Teorema 7.1.4 nos permite acrescentar um resultado adicional ao Teorema 6.4.5.

**Teorema 7.1.5****Afirmações Equivalentes**

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e se  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a multiplicação por  $A$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é invertível.
- (b)  $Ax = \mathbf{0}$  admite somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- (d)  $A$  pode ser escrita como um produto de matrizes elementares.
- (e)  $Ax = \mathbf{b}$  é consistente para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (f)  $Ax = \mathbf{b}$  tem exatamente uma solução para cada matriz  $\mathbf{b}$  de tamanho  $n \times 1$ .
- (g)  $\det(A) \neq 0$ .
- (h) A imagem de  $T_A$  é o  $\mathbb{R}^n$ .
- (i)  $T_A$  é injetora.
- (j) Os vetores-coluna de  $A$  são linearmente independentes.
- (k) Os vetores-linha de  $A$  são linearmente independentes.
- (l) Os vetores-coluna de  $A$  geram o  $\mathbb{R}^n$ .
- (m) Os vetores-linha de  $A$  geram o  $\mathbb{R}^n$ .
- (n) Os vetores-coluna de  $A$  formam uma base do  $\mathbb{R}^n$ .
- (o) Os vetores-linha de  $A$  formam uma base do  $\mathbb{R}^n$ .
- (p)  $A$  tem posto  $n$ .
- (q)  $A$  tem nulidade 0.
- (r) O complemento ortogonal do espaço-nulo de  $A$  é o  $\mathbb{R}^n$ .
- (s) O complemento ortogonal do espaço-linha de  $A$  é  $\{\mathbf{0}\}$ .
- (t)  $A^T A$  é invertível.
- (u)  $\lambda = 0$  não é um autovalor de  $A$ .

Este teorema relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

**Conjunto de Exercícios 7.1**

1. Encontre as equações características das seguintes matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Encontre os autovalores das matrizes do Exercício 1.  
 3. Encontre bases dos auto-espacos das matrizes do Exercício 1.  
 4. Encontre as equações características das seguintes matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Encontre os autovalores das matrizes do Exercício 4.  
 6. Encontre bases dos auto-espacos das matrizes do Exercício 4.

## 244 • • • Álgebra Linear com Aplicações

7. Encontre as equações características das seguintes matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Encontre os autovalores das matrizes do Exercício 7.

9. Encontre bases dos auto-espacos das matrizes do Exercício 7.

10. Encontre os autovalores das seguintes matrizes por inspeção:

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

11. Encontre os autovalores de  $A^9$  se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Encontre os autovalores e bases dos auto-espacos de  $A^{25}$  se

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Seja  $A$  uma matriz  $2 \times 2$ . Dizemos que uma reta pela origem de  $R^2$  é *invariante* por  $A$  se  $A \mathbf{x}$  está na reta sempre que  $\mathbf{x}$  estiver. Obtenha as equações de todas as retas de  $R^2$  que são invariantes pela matriz dada.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

14. Encontre  $\det(A)$ , sabendo que  $A$  tem polinômio característico  $p(\lambda)$ .

$$(a) p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5 \quad (b) p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + 7$$

[Sugestão. Veja a prova do Teorema 7.1.4.]

15. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .

(a) Prove que o polinômio característico de  $A$  tem grau  $n$ .

(b) Prove que o coeficiente de  $\lambda^n$  no polinômio característico é 1.

16. Mostre que a equação característica de uma matriz  $2 \times 2 A$  pode ser expressa como  $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ , onde  $\text{tr}(A)$  é o traço de  $A$ .

17. Use o resultado do Exercício 16 para mostrar que se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ (a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \right]$$

são as soluções da equação característica de  $A$ . Use este resultado para mostrar que  $A$  tem

(a) dois autovalores reais distintos se  $(a-d)^2 + 4bc > 0$ .

(b) um autovalor real se  $(a-d)^2 + 4bc = 0$ .

(c) nenhum autovalor real se  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ .

18. Seja  $A$  a matriz do Exercício 17. Mostre que se  $(a-d)^2 + 4bc > 0$  e se  $b \neq 0$  então, associados aos autovalores

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ (a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \right] \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ (a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \right]$$

de  $A$ , temos os autovetores

$$\begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

19. Prove: Se  $a, b, c$  e  $d$  são números inteiros tais que  $a + b = c + d$ , então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tem autovalores inteiros, a saber,  $\lambda_1 = a + b$  e  $\lambda_2 = a - c$ . [Sugestão. Veja o Exercício 17.]

20. Prove: Se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz invertível  $A$  com autovetor associado  $x$ , então  $1/\lambda$  é um autovalor de  $A^{-1}$  com autovetor associado  $x$ .

21. Prove: Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  com autovetor associado  $x$  e se  $s$  é um escalar, então  $\lambda - s$  é um autovalor de  $A - sI$  com autovetor associado  $x$ .

22. Encontre os autovalores e bases dos auto-espacos de

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Em seguida, use os Exercícios 20 e 21 para encontrar os autovalores e bases de auto-espacos de

- (a)  $A^{-1}$       (b)  $A - 3I$       (c)  $A + 2I$

23. (a) Prove que se  $A$  é uma matriz quadrada então  $A$  e  $A^T$  têm os mesmos autovalores.

[Sugestão. Olhe para a equação característica  $\det(\lambda I - A) = 0$ .]

- (b) Mostre que  $A$  e  $A^T$  não precisam ter os mesmos auto-espacos.

[Sugestão. Use o resultado do Exercício 18 e para encontrar uma matriz  $2 \times 2$  para a qual  $A$  e  $A^T$  têm auto-espacos diferentes.]

## Discussão e Descoberta

24. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo. Em cada parte,  $A$  é uma matriz  $n \times n$ .

- (a) Se  $Ax = \lambda x$  para algum escalar não-nulo  $\lambda$ , então  $x$  é um autovetor de  $A$ .

- (b) Se  $\lambda$  não é um autovalor de  $A$ , então o sistema linear  $(\lambda I - A)x = 0$  só tem a solução trivial.

- (c) Se  $\lambda = 0$  é um autovalor de  $A$ , então  $A^2$  é singular.

- (d) Se o polinômio característico de  $A$  é  $p(\lambda) = \lambda^n + 1$ , então  $A$  é invertível.

25. Suponha que o polinômio característico de uma matriz  $A$  é  $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$ . Em cada parte responda a pergunta e explique seu raciocínio.

- (a) Qual é o tamanho de  $A$ ?

- (b)  $A$  é invertível?

- (c) Quantos auto-espacos tem  $A$ ?

## 7.2 DIAGONALIZAÇÃO

Nesta seção nós nos ocuparemos do problema de encontrar uma base de  $R^n$  que consiste de autovetores de uma dada matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$ . Estas bases podem ser usadas para estudar propriedades geométricas de  $A$  e para simplificar muitas contas envolvendo  $A$ . Estas bases também têm significado físico em uma variedade de aplicações, algumas das quais consideraremos mais adiante neste texto.

**O Problema da Diagonalização Matricial** Nosso primeiro objetivo nesta seção é mostrar que os dois problemas a seguir que, aparentemente, são bastante diferentes, na realidade são equivalentes.

**O Problema dos Autovetores.** Dada uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$ , existe uma base de  $R^n$  consistindo de autovetores de  $A$ ?

**O Problema da Diagonalização (Versão Matricial).** Dada uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$ , existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é uma matriz diagonal?

Este último problema sugere a seguinte terminologia.

### Definição

Uma matriz quadrada  $A$  é dita **diagonalizável** se existir uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é uma matriz diagonal; dizemos, então, que a matriz  $P$  **diagonaliza**  $A$ .

O seguinte teorema mostra que o problema do autovetor e o problema de diagonalização são equivalentes.

**Teorema 7.2.1**

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então são equivalentes as seguintes afirmações:

- (a)  $A$  é diagonalizável.
- (b)  $A$  tem  $n$  autovetores linearmente independentes.

*Prova (a)  $\Rightarrow$  (b).* Como estamos supondo que  $A$  é diagonalizável, existe uma matriz

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

invertível tal que  $P^{-1}AP$  é diagonal, digamos,  $P^{-1}AP = D$ , onde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Segue da fórmula  $P^{-1}AP = D$  que  $AP = PD$ , ou seja,

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

(1)

Se nós denotarmos os vetores-coluna de  $P$  por  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  então (1) dá que as sucessivas colunas de  $AP$  são  $\lambda_1 \mathbf{p}_1, \lambda_2 \mathbf{p}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{p}_n$ . No entanto, pela Fórmula (6) da Seção 1.3, as sucessivas colunas de  $AP$  são  $A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n$ . Assim, devemos ter

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n \mathbf{p}_n \quad (2)$$

Como  $P$  é invertível, seus vetores-coluna são todos não-nulos; assim, por (2) segue que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são autovalores de  $A$  e que  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  são os autovetores associados. Como  $P$  é invertível, segue do Teorema 7.1.5 que  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  são linearmente independentes. Assim,  $A$  tem  $n$  autovetores linearmente independentes.

*(b)  $\Rightarrow$  (a).* Suponha que  $A$  tem  $n$  autovetores linearmente independentes  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  com autovalores associados  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e seja

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

a matriz cujos vetores-coluna são  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ . Pela Fórmula (6) da Seção 1.3, os vetores-coluna do produto  $AP$  são

$$A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n$$

Mas

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2, \dots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n \mathbf{p}_n$$

de modo que

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \quad (3) \end{aligned}$$

onde  $D$  é a matriz diagonal com os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  na diagonal principal. Como os vetores-coluna de  $P$  são linearmente independentes,  $P$  é invertível; assim, (3) pode ser reescrita como  $P^{-1}AP = D$ , ou seja,  $A$  é diagonalizável. ■

**Um Procedimento para Diagonalizar uma Matriz** O teorema acima garante que uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  com  $n$  autovetores linearmente independentes é diagonalizável e a prova fornece o seguinte método de diagonalizar  $A$ .

**Passo 1.** Encontre  $n$  autovetores linearmente independentes de  $A$ , digamos  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ .

**Passo 2.** Forme a matriz  $P$  com os vetores-coluna  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ .

**Passo 3.** A matriz  $P^{-1}AP$  será, então, diagonal com entradas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  na diagonal principal, onde  $\lambda_i$  é o autovalor associado a  $\mathbf{p}_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Para executar o Passo 1 deste procedimento precisamos, inicialmente, de uma maneira de determinar se uma dada matriz  $n \times n$   $A$  tem  $n$  autovetores linearmente independentes e, em seguida, de um método de encontrar estes autovetores. Ambos estes problemas podem ser atacados simultaneamente encontrando bases para os auto-espacos de  $A$ . Adiante nesta seção nós mostraremos que, como um só conjunto combinado, os vetores destas bases são linearmente independentes, de modo que se houver  $n$  destes autovetores então  $A$  será diagonalizável e os  $n$  vetores de bases podem ser usados como vetores-coluna da matriz diagonalizante  $P$ . Se houver menos do que  $n$  vetores de base, então  $A$  não será diagonalizável.

**EXEMPLO 1** Encontrando uma Matriz  $P$  que Diagonaliza uma Matriz  $A$

Encontre a matriz  $P$  que diagonaliza

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução.

No Exemplo 5 da seção anterior nós verificamos que  $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

é a equação característica de  $A$  e encontramos as seguintes bases dos auto-espacos:

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Há três vetores de base no total, portanto a matriz  $A$  é diagonalizável e

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza  $A$ . Para conferir, o leitor deveria verificar que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

Não existe uma ordem preferencial para as colunas de  $P$ . Como a  $i$ -ésima entrada diagonal de  $P^{-1}AP$  é um autovalor para o  $i$ -ésimo vetor-coluna de  $P$ , mudando a ordem das colunas de  $P$  só muda a ordem dos autovalores na diagonal de  $P^{-1}AP$ . Assim, se nós tivéssemos escrito

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

no Exemplo 1, nós teríamos obtido

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## EXEMPLO 2 Uma Matriz que não é Diagonalizável

Encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução.

O polinômio característico de  $A$  é

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 3 & -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

de modo que a equação característica é

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Assim, os autovalores de  $A$  são  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$ . Nós deixamos para o leitor mostrar que as bases dos auto-espacos são

$$\lambda = 1: \quad p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2: \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como  $A$  é  $3 \times 3$  e só existem dois vetores de base no total,  $A$  não é diagonalizável.

Solução Alternativa.

Se nós não estivermos interessados em encontrar a matriz diagonalizante  $P$  mas só em determinar se uma dada matriz é ou não diagonalizável, então não é necessário calcular bases para os auto-espacos, bastando encontrar as dimensões dos auto-

espacos. Neste exemplo, o auto-espaco associado a  $\lambda = 1$  é o espaço-solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes tem posto 2 (verifique). Assim, pelo Teorema 5.6.3, a nulidade desta matriz é 1 e portanto o espaço-solução é unidimensional.

O auto-espaco associado a  $\lambda = 2$  é o espaço-solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz de coeficientes também tem posto 2 e nulidade 1 (verifique), de modo que o espaço-solução associado a  $\lambda = 2$  também é unidimensional. Como os auto-espacos produzem um total de dois vetores de base, a matriz  $A$  não é diagonalizável. ♦

No Exemplo 1 supusemos que os vetores-coluna de  $P$ , que consistem de vetores de bases dos vários auto-espacos de  $A$ , são linearmente independentes. O próximo teorema trata desta suposição.

### Teorema 7.2.2

*Se  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são autovetores de  $A$  associados a autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , então  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  é um conjunto linearmente independente.*

*Prova.* Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_k$  autovetores de  $A$  associados a autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Nós vamos supor que  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são linearmente dependentes e obter uma contradição. Assim poderemos concluir que  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são linearmente independentes.

Como um autovetor é não-nulo por definição,  $\{v_1\}$  é linearmente independente. Seja  $r$  o maior inteiro tal que  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  é linearmente independente. Como estamos supondo que  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  é linearmente dependente,  $r$  satisfaz  $1 \leq r < k$ . Além disto, pela definição de  $r$ ,  $\{v_1, v_2, \dots, v_{r+1}\}$  é linearmente dependente. Assim, existem escalares  $c_1, c_2, \dots, c_{r+1}$ , não todos nulos, tais que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad (4)$$

Multiplicando ambos os lados de (4) por  $A$  e usando

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \dots, \quad Av_{r+1} = \lambda_{r+1} v_{r+1}$$

nós obtemos

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad (5)$$

Multiplicando ambos os lados de (4) por  $\lambda_{r+1}$  e subtraindo a equação resultante de (5), dá

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_{r+1}) v_2 + \dots + c_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r = 0$$

Como  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  é um conjunto linearmente independente, esta equação implica que

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2 (\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \dots = c_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

e, como os  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são distintos, segue que

$$c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0 \quad (6)$$

Substituindo estes valores em (4) dá

$$c_{r+1} v_{r+1} = 0$$

Como o autovetor  $v_{r+1}$  é não-nulo, segue que

$$c_{r+1} = 0 \quad (7)$$

As Equações (6) e (7) contradizem o que supomos a respeito destas constantes, a saber, que os escalares  $c_1, c_2, \dots, c_{r+1}$  não são todos nulos, o que completa a prova. ■

**OBSERVAÇÃO.** O Teorema 7.2.2 é um caso especial de um resultado mais geral: Suponha que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são autovalores distintos e que escolhemos um conjunto linearmente independente em cada auto-espacôo correspondente. Se nós juntarmos todos estes vetores num único conjunto, o resultado é um conjunto que ainda é linearmente independente. Por exemplo, escolhendo três vetores linearmente independentes de um auto-espacôo e dois vetores linearmente independentes de um outro auto-espacôo, então os cinco vetores juntos formam um conjunto linearmente independente. Nós omitimos a prova.

Como uma consequência do Teorema 7.2.2, nós obtemos o seguinte importante resultado.

### Teorema 7.2.3

*Se uma matriz A de tamanho  $n \times n$  tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.*

**Prova.** Se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são autovetores associados aos autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , então, pelo Teorema 7.2.2,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são linearmente independentes. Assim, A é diagonalizável pelo Teorema 7.2.1. ■

### EXEMPLO 3 Usando o Teorema 7.2.3

Nós vimos no Exemplo 2 da seção anterior que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

tem três autovalores distintos,  $\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3}, \lambda = 2 - \sqrt{3}$ . Portanto A é diagonalizável. Além disto,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

para alguma matriz invertível P. Se desejarmos, poderemos obter a matriz P pelo método mostrado no Exemplo 1 desta seção. ■

### EXEMPLO 4 Uma Matriz Diagonalizável

Pelo Teorema 7.1.1, os autovalores de uma matriz triangular são as entradas na diagonal principal. Assim, uma matriz triangular com entradas distintas na diagonal é diagonalizável. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizável. ■

### Multiplicidades Geométrica e Algébrica

O Teorema 7.2.3 não resolve totalmente o problema da diagonalização, pois é possível para uma matriz A de tamanho  $n \times n$  ser diagonalizável sem que tenha n autovalores distintos. Nós vimos isto no Exemplo 1, onde a dada matriz  $3 \times 3$  tinha somente dois autovalores distintos e no entanto era diagonalizável. O que realmente importa para a diagonalização são as dimensões dos auto-espacos—a soma destas dimensões deve totalizar n para que a matriz  $n \times n$  seja diagonalizável. Os Exemplos 1 e 2 ilustram isto: as matrizes daqueles exemplos tinham as mesmas equações características e os mesmos autovalores, mas a matriz do Exemplo 1 é diagonalizável por que as dimensões dos auto-espacos somam 3 enquanto que a matriz do Exemplo 2 não é diagonalizável por que as dimensões dos auto-espacos somam somente 2.

Uma excursão completa no estudo da diagonalização é deixado para textos mais avançados, mas queremos tocar num teorema que é importante para um melhor entendimento da diagonalizabilidade. Pode ser provado que se  $\lambda_0$  é um autovalor de A, então a dimensão do auto-espaco associado a  $\lambda_0$  não pode exceder o número de vezes que  $\lambda - \lambda_0$  aparece como um fator do polinômio característico de A. Por exemplo, nos Exemplos 1 e 2 o polinômio característico é

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Assim, o auto-espaco associado a  $\lambda = 1$  é no máximo (e portanto, exatamente) unidimensional e o auto-espaco associado a  $\lambda = 2$  é no máximo bidimensional. No Exemplo 1, o auto-espaco associado a  $\lambda = 2$  de fato tem dimensão 2, resultando em diagonalizabilidade, mas no Exemplo 2, este auto-espaco tem dimensão somente 1, resultando na não-diagonalizabilidade.

Existe alguma terminologia relacionada com este assunto. Se  $\lambda_0$  é um autovalor de uma matriz A de tamanho  $n \times n$ , então a dimensão do auto-espaco associado a  $\lambda_0$  é chamada **multiplicidade geométrica** de  $\lambda_0$  e o número de vezes que  $\lambda - \lambda_0$  aparece como um fator do polinômio característico de A é chamada **multiplicidade algébrica** de  $\lambda_0$ . O teorema a seguir, que apresentamos sem prova, resume esta discussão.

### Teorema 7.2.4

### Multiplicidades Geométrica e Algébrica

*Se A é uma matriz quadrada, então:*

- Para cada autovalor de A, a multiplicidade geométrica é menor ou igual à multiplicidade algébrica.*
- A é diagonalizável se, e somente se, para cada autovalor, a multiplicidade geométrica é igual à multiplicidade algébrica.*

**Calculando as Potências de uma Matriz** Existem inúmeros problemas de matemática aplicada que requerem cal-

cular potências elevadas de uma matriz quadrada. Nós concluirmos esta seção mostrando como a diagonalização pode ser usada para simplificar tais cálculos para matrizes diagonalizáveis.

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $P$  é uma matriz invertível, então

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAAP = P^{-1}A^2P$$

Mais geralmente, para qualquer inteiro positivo  $k$ ,

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP \quad (8)$$

Segue desta equação que se  $A$  for diagonalizável e se  $P^{-1}AP = D$  é uma matriz diagonal, então

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k \quad (9)$$

Resolvendo esta equação em  $A^k$  obtemos

$$A^k = PD^kP^{-1} \quad (10)$$

Esta última equação expressa a  $k$ -ésima potência de  $A$  em termos da  $k$ -ésima potência da matriz diagonal  $D$ . Mas  $D^k$  é fácil de calcular; por exemplo, se

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}, \text{ então } D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

### EXEMPLO 5 Potência de uma Matriz Canônica

Use (10) para calcular  $A^{13}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Nós mostramos no Exemplo 1 que a matriz  $A$  é diagonalizada por

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e que

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, por (10),

$$\begin{aligned} A^{13} &= PD^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (11) \\ &= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. A maior parte do trabalho no método do exemplo acima é diagonalizar  $A$ . Uma vez concluído este trabalho, podemos calcular qualquer potência de  $A$ . Assim, para calcular  $A^{1000}$  nós só precisamos trocar os expoentes 13 para 1000 em (11).

### Conjunto de Exercícios 7.2

- Seja  $A$  uma matriz  $6 \times 6$  com equação característica  $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3 = 0$ . Quais são as possíveis dimensões dos auto-espacos de  $A$ ?
- Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Encontre os autovalores de  $A$ .
- Para cada autovalor  $\lambda$ , encontre o posto da matriz  $\lambda I - A$ .
- $A$  é diagonalizável? Justifique sua conclusão.

Nos Exercícios 3–7, use o método do Exercício 2 para determinar se a matriz dada é diagonalizável.

- $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 8–11, encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza  $A$  e determine  $P^{-1}AP$ .

- $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

## 250 • • • Álgebra Linear com Aplicações

Nos Exercícios 12–17, determine se  $A$  é diagonalizável. Se for, encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza  $A$  e determine  $P^{-1}AP$ .

$$12. A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$13. A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$14. A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$15. A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$16. A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$17. A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

18. Use o método do Exemplo 5 para calcular  $A^{10}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

19. Use o método do Exemplo 5 para calcular  $A^{11}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

20. Em cada parte, calcule a potência indicada de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(a) A^{1000}$$

$$(b) A^{-1000}$$

$$(c) A^{2301}$$

$$(d) A^{-2301}$$

21. Encontre  $A^n$  se  $n$  é um inteiro positivo e

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

22. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Mostre:

(a)  $A$  é diagonalizável se  $(a-d)^2 + 4bc > 0$ .

(b)  $A$  não é diagonalizável se  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ .

[Sugestão. Veja o Exercício 17 da Seção 7.1.]

23. No caso em que a matriz  $A$  do Exercício 22 é diagonalizável, encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza  $A$ . [Sugestão. Veja o Exercício 18 da Seção 7.1.]

24. Prove que se  $A$  é uma matriz diagonalizável, então o posto de  $A$  é o número de autovalores não-nulos de  $A$ .

### Discussão e Descoberta

25. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
  - (a) Uma matriz quadrada com vetores-coluna linearmente independentes é diagonalizável.
  - (b) Se  $A$  é diagonalizável, então existe uma única matriz  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é uma matriz diagonal.
  - (c) Se  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são vetores de auto-espacos distintos de  $A$ , então é impossível expressar  $v_3$  como uma combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ .
  - (d) Se  $A$  é diagonalizável e invertível, então  $A^{-1}$  é diagonalizável.
26. Suponha que o polinômio característico de uma matriz  $A$  é  $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$ . Em cada parte, responda a pergunta e explique seu raciocínio.
  - (a) O que você pode dizer sobre as dimensões dos auto-espacos de  $A$ ?
  - (b) O que você pode dizer sobre as dimensões dos auto-espacos de  $A$  se você souber que  $A$  é diagonalizável?
  - (c) Seja  $\{v_1, v_2, v_3\}$  um conjunto linearmente independente de vetores de  $A$ , cada um dos quais está associado ao mesmo autovalor de  $A$ . O que você pode dizer sobre este autovalor?
27. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Se  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$  é uma seqüência infinita de matrizes  $n \times n$ , dizemos que a seqüência converge a uma matriz  $n \times n$   $A$  se as entradas na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da seqüência convergem à entrada na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $A$ , para cada  $i$  e  $j$ . Neste caso, dizemos que  $A$  é o limite da seqüência e escrevemos  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$ . As propriedades algébricas destes

limites refletem as dos limites numéricos. Assim, por exemplo, se  $P$  é uma matriz  $n \times n$  invertível cujas entradas não dependem de  $k$ , então  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$  se, e somente se,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P^{-1}A_k P = P^{-1}AP$ .

(a) Suponha que  $A$  é uma matriz  $n \times n$  diagonalizável. Que condições sobre os autovalores de  $A$  garantem que a seqüência  $A, A^2, \dots, A^k, \dots$  converge? Explique seu raciocínio.

(b) Qual é o limite quando as condições da parte (a) estão satisfeitas?

28. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Se  $A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots$  é uma série infinita de matrizes  $n \times n$ , dizemos que a série *converge* se a seqüência das somas parciais converge a um limite  $A$  no sentido definido no Exercício 27. Neste caso, dizemos que  $A$  é a *soma* da série e escrevemos  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots$ .

(a) Lembre do Cálculo as condições impostas sobre  $x$  para garantir a convergência da série geométrica

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots$$

Qual é a soma?

(b) Usando o Exercício 27, que condições sobre os autovalores de  $A$  garantem a convergência da série geométrica matricial  $I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots$ ? Explique seu raciocínio.

(c) Qual é a soma desta série quando converge?

## 7.3 DIAGONALIZAÇÃO ORTOGONAL

Nesta seção nós nos ocuparemos do problema de encontrar uma base ortonormal de  $R^n$  com o produto interno euclidiano que consista de autovetores de uma dada matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$ . Nossa trabalho anterior com matrizes simétricas e matrizes ortogonais terá um papel importante na discussão que se segue.

### O Problema da Diagonalização Ortogonal

Como na seção anterior, nós começamos enunciando dois problemas. Nosso objetivo é mostrar que os dois problemas são equivalentes.

**O Problema dos Autovetores Ortonormais.** Dada uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$ , existe uma base ortonormal de  $R^n$  com o produto interno euclidiano consistindo de autovetores da matriz  $A$ ?

**O Problema da Diagonalização Ortogonal (Versão Matricial).** Dada uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$ , existe uma matriz ortogonal  $P$  tal que a matriz  $P^{-1}AP = P^TAP$  é uma matriz diagonal? Se existir uma tal matriz, dizemos que  $A$  é *ortogonalmente diagonalizável* e que  $P$  *diagonaliza A ortogonalmente*.

Para o último problema temos duas questões a considerar:

- Quais matrizes são ortogonalmente diagonalizáveis?
- Como encontrar uma matriz ortogonal que efetue a diagonalização?

Com relação à primeira questão, observamos que não existe esperança de diagonalizar  $A$  ortogonalmente a menos que  $A$  seja simétrica (ou seja,  $A = A^T$ ). Para ver por que isto é assim, suponha que

$$P^TAP = D \quad (1)$$

onde  $P$  é uma matriz ortogonal e  $D$  é uma matriz diagonal. Como  $P$  é ortogonal, temos  $PP^T = P^TP = I$  e portanto segue que (1) pode ser escrito como

$$A = PDP^T \quad (2)$$

Como  $D$  é uma matriz diagonal, temos  $D = D^T$  e portanto, transpondo ambos os lados de (2) dá

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

e portanto  $A$  é simétrica.

**Condições para a Diagonalização Ortogonal** O próximo teorema mostra que qualquer matriz simétrica é, de fato, ortogonalmente diagonalizável. Neste teorema, e no restante desta seção, *ortogonal* significa ortogonal em relação ao produto interno euclidiano de  $R^n$ .

### Teorema 7.3.1

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é ortogonalmente diagonalizável.
- (b)  $A$  tem um conjunto ortonormal de  $n$  autovetores.
- (c)  $A$  é simétrica.

**Prova** (a)  $\Rightarrow$  (b). Como  $A$  é ortogonalmente diagonalizável, existe uma matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é diagonal. Como mostramos na prova do Teorema 7.2.1, os  $n$  vetores-coluna de  $P$  são autovetores de  $A$ . Como  $P$  é ortogonal, estes vetores-coluna são ortonormais (Teorema 6.5.1), de modo que  $A$  tem  $n$  autovetores ortonormais.

(b)  $\Rightarrow$  (a). Suponha que  $A$  tem um conjunto ortonormal de  $n$  autovetores  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ . Como mostramos na prova do Teorema 7.2.1, a matriz  $P$  que tem estes autovetores como colunas diagonaliza  $A$ . Como estes autovetores são ortonormais,  $P$  é ortogonal e portanto diagonaliza  $A$  ortogonalmente.

(a)  $\Rightarrow$  (c). Na prova que (a)  $\Rightarrow$  (b) nós mostramos que uma matriz  $A$   $n \times n$  que é ortogonalmente diagonalizável, é ortogonalmente diagonalizável por uma matriz  $P$   $n \times n$  cujas colunas formam um conjunto ortonormal de autovetores de  $A$ . Seja  $D$  a matriz diagonal

$$D = P^{-1}AP$$

Assim,

$$A = PDP^{-1} \text{ ou } A = PDP^T$$

já que  $P$  é ortogonal. Segue-se que

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^TP^T = PDP^T = A$$

o que mostra que  $A$  é simétrica.

(c)  $\Rightarrow$  (a). A prova desta parte está além do alcance deste texto e será omitida. ■

**Matrizes Simétricas** Nossa próximo objetivo é construir um procedimento para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica, mas antes de poder fazer isto, nós precisamos de um resultado essencial sobre autovalores e autovetores de matrizes simétricas.

### Teorema 7.3.2

Se  $A$  é uma matriz simétrica, então:

- (a) Os autovalores de  $A$  são reais.
- (b) Autovetores de auto-espacos diferentes são ortogonais.

**Prova (a).** A prova da parte (a), que requer conhecimentos de espaços vetoriais complexos, é discutida na Seção 10.6.

**Prova (b).** Sejam  $v_1$  e  $v_2$  autovetores associados aos autovalores distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da matriz  $A$ , respectivamente. Nós queremos mostrar que  $v_1 \cdot v_2 = 0$ . A prova disto envolve o truque de começar com a expressão  $Av_1 \cdot v_2$ . Segue da Fórmula (8) da Seção 4.1 e da simetria de  $A$  que

$$Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot A^T v_2 = v_1 \cdot Av_2 \quad (3)$$

Como  $v_1$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_1$  e  $v_2$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_2$ , segue de (3) a relação

$$\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot \lambda_2 v_2$$

que pode ser reescrita como

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0 \quad (4)$$

Como estamos supondo que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são distintos, temos  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  e portanto segue de (4) que  $v_1 \cdot v_2 = 0$ . ■

**OBSERVAÇÃO.** Nós lembramos ao leitor que até aqui supomos que todas as nossas matrizes têm entradas reais. De fato, no Capítulo 10 veremos que a parte (a) do Teorema 7.3.2 é falsa para matrizes com entradas complexas.

**Diagonalização de Matrizes Simétricas** Como uma consequência do teorema precedente, nós obtemos o seguinte procedimento para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica.

**Passo 1.** Encontre uma base para cada auto-espaco de  $A$ .

**Passo 2.** Aplique o processo de Gram-Schmidt a cada uma destas bases para obter uma base ortonormal de cada auto-espaco.

**Passo 3.** Forme a matriz  $P$  cujas colunas são os vetores de base construídos no Passo 2; esta matriz diagonaliza  $A$  ortogonalmente.

A justificativa para este procedimento deveria ser clara. O Teorema 7.3.2 garante que autovetores de auto-espacos *diferentes* são ortogonais, enquanto a aplicação do processo de Gram-Schmidt garante que os autovetores obtidos dentro de *um mesmo* auto-espaco são ortonormais. Desta maneira, o conjunto *inteiro* de autovetores obtidos por este procedimento é ortonormal.

### EXEMPLO 1 Uma Matriz Ortogonal $P$ que Diagonaliza uma Matriz $A$

Encontre uma matriz ortogonal  $P$  que diagonaliza

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução.

A equação característica de  $A$  é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

Assim, os autovalores de  $A$  são  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 8$ . Pelo método usado no Exemplo 5 da Seção 7.1, pode ser mostrado que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

formam uma base do auto-espaco correspondente a  $\lambda = 2$ . Aplicando o processo de Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  obtemos os seguintes vetores ortonormais (verifique):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (6)$$

O auto-espaco associado a  $\lambda = 8$  tem uma base formada por

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o processo de Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{u}_3\}$  obtemos

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente, usando  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  como vetores-coluna, obtemos

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

que diagonaliza  $A$  ortogonalmente. (Para conferir, o leitor pode querer verificar que  $P^T A P$  é uma matriz diagonal.) ♦

**Conjunto de Exercícios 7.3**

1. Encontre a equação característica da matriz simétrica dada e depois, por inspeção, determine as dimensões dos auto-espacos.

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$       (b)  $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$       (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$       (e)  $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$       (f)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 2–9, encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza  $A$  ortogonalmente e determine  $P^{-1}AP$ .

2.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$       3.  $A = \begin{bmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$       4.  $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$       5.  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

6.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$       7.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$       8.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$       9.  $A = \begin{bmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{bmatrix}$

10. Supondo que  $b \neq 0$ , encontre uma matriz que diagonaliza ortogonalmente a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

11. Prove que se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  qualquer, então  $A^T A$  tem um conjunto ortonormal de  $n$  autovetores.

12. (a) Mostre que se  $v$  é qualquer matriz  $n \times 1$  e se  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ , então  $I - v v^T$  é ortogonalmente diagonalizável.  
 (b) Encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza  $I - v v^T$  ortogonalmente, sendo

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. Use o resultado do Exercício 17 da Seção 7.1 para provar o Teorema 7.3.2a para matrizes  $2 \times 2$  simétricas.

**Discussão e Descoberta**

14. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.  
 (a) Se  $A$  é uma matriz quadrada, então  $AA^T$  e  $A^T A$  são ortogonalmente diagonalizáveis.  
 (b) Se  $v_1$  e  $v_2$  são autovetores de auto-espacos distintos de uma matriz simétrica, então  $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$ .  
 (c) Uma matriz ortogonal é ortogonalmente diagonalizável.  
 (d) Se  $A$  é uma matriz ortogonalmente diagonalizável invertível, então  $A^{-1}$  é ortogonalmente diagonalizável.

15. Existe alguma matriz  $3 \times 3$  simétrica com autovalores  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 7$  e autovetores associados

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

Se existir, encontre uma tal matriz e, se não existir, explique por quê.

**Exercícios Suplementares do Capítulo 7**

1. (a) Mostre que se  $0 < \theta < \pi$ , então

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

## 254 • • • Álgebra Linear com Aplicações

não possui autovalores e, consequentemente, autovetores.

- (b) Dê uma explicação geométrica para o resultado em (a).
2. Encontre os autovalores de
 
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k^3 & -3k^2 & 3k \end{bmatrix}$$
3. (a) Mostre que se  $D$  é uma matriz diagonal com entradas não-negativas na diagonal principal, então existe uma matriz  $S$  tal que  $S^2 = D$ .  
 (b) Mostre que se  $A$  é uma matriz diagonalizável com autovalores não-negativos, então existe uma matriz  $S$  tal que  $S^2 = A$ .  
 (c) Encontre uma matriz  $S$  tal que  $S^2 = A$ , se
 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$
4. (a) Prove: Se  $A$  é uma matriz quadrada, então  $A$  e  $A^T$  têm os mesmos autovalores.  
 (b) Mostre que  $A$  e  $A^T$  não precisam ter os mesmos autovetores. [Sugestão. Use o Exercício 18 da Seção 7.1 para encontrar uma matriz  $A$   $2 \times 2$  para a qual  $A$  e  $A^T$  têm autovetores diferentes.]
5. Prove: Se  $A$  é uma matriz quadrada e  $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  é o polinômio característico de  $A$ , então o coeficiente de  $\lambda^{n-1}$  em  $p(\lambda)$  é o negativo do traço de  $A$ .
6. Prove: Se  $b \neq 0$ , então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

não é diagonalizável.

7. Em textos avançados de Álgebra Linear, prova-se o **Teorema de Cayley-Hamilton**, que afirma que uma matriz quadrada  $A$  satisfaz sua equação característica, ou seja, se

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

é a equação característica de  $A$ , então

$$c_0I + c_1A + c_2A^2 + \cdots + c_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0$$

Verifique este resultado para

$$(a) A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Os Exercícios 8–10 usam o Teorema de Cayley-Hamilton enunciado no Exercício 7.

8. Use o Exercício 16 da Seção 7.1 para provar o Teorema de Cayley-Hamilton para matrizes  $2 \times 2$ .
9. O Teorema de Cayley-Hamilton fornece um método eficiente de calcular potências de uma matriz. Por exemplo, se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  com equação característica

$$c_0 + c_1\lambda + \lambda^2 = 0$$

então  $c_0I + c_1A + A^2 = 0$ , de modo que

$$A^2 = -c_1A - c_0I$$

Multiplicando ambos os lados por  $A$  dá  $A^3 = -c_1A^2 - c_0A$ , que expressa  $A^3$  em termos de  $A^2$  e  $A$  e multiplicando por  $A^2$  dá  $A^4 = -c_1A^3 - c_0A^2$ , que expressa  $A^4$  em termos de  $A^3$  e  $A^2$ . Continuando assim, nós podemos calcular potências sucessivas de  $A$  simplesmente expressando-as em termos de potências menores. Use este procedimento para calcular  $A^2, A^3, A^4$  e  $A^5$  para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Use o método do exercício precedente para calcular  $A^3$  e  $A^4$  para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Encontre os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

12. (a) No Exercício 15 da Seção 7.1 mostramos que se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então o coeficiente de  $\lambda^n$  no polinômio característico de  $A$  é 1. (Um polinômio com esta propriedade é chamado *mônico*.) Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

tem polinômio característico  $p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ . Isto mostra que cada polinômio mônico é o polinômio característico de alguma matriz. A matriz neste exemplo é chamada a *matriz companheira* de  $p(\lambda)$ . [Sugestão. Calcule todos os determinantes neste problema somando um múltiplo da segunda linha à primeira para introduzir um zero no topo da primeira coluna e então expanda por cofatores ao longo da primeira coluna.]

- (b) Encontre uma matriz cujo polinômio característico é  $p(\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 3\lambda^3 + \lambda^4$ .
13. Uma matriz quadrada  $A$  é dita *nilpotente* se  $A^n = 0$  para algum inteiro positivo  $n$ . O que você pode dizer sobre os autovalores de uma matriz nilpotente?
14. Prove: Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $n$  é ímpar, então  $A$  tem pelo menos um autovalor real.
15. Encontre uma matriz  $3 \times 3 A$  com autovalores  $\lambda = 0, 1$  e  $-1$  e autovetores associados

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

16. Suponha que uma matriz  $4 \times 4 A$  tem autovalores  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$  e  $\lambda_4 = -3$ .
- Use o método do Exercício 14 da Seção 7.1 para encontrar  $\det(A)$ .
  - Use o Exercício 5 acima para encontrar  $\text{tr}(A)$ .
17. Seja  $A$  uma matriz quadrada tal que  $A^3 = A$ . O que você pode dizer sobre os autovalores de  $A$ ?

#### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais do Capítulo 7

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

## Seção 7.1

- T1. (*Polinômio característico*) Alguns recursos têm um comando específico para encontrar polinômios característicos, enquanto que em outros você precisa usar a função determinante para calcular  $\det(\lambda I - A)$ . Leia em seu manual sobre qual método você deve usar e então use seu recurso para encontrar  $p(\lambda)$  para a matriz no Exemplo 2.
- T2. (*Solvendo a equação característica*) Dependendo do particular polinômio característico, seu recurso pode ou não conseguir resolver a equação característica para os autovalores. Veja se seu recurso consegue encontrar os autovalores no Exemplo 2 resolvendo a equação característica  $p(\lambda) = 0$ .
- T3. (a) Leia o enunciado do Teorema de Cayley-Hamilton no Exercício Suplementar 7 deste capítulo e então use seu recurso para fazer aquele exercício.

- (b) Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, use-o para provar o Teorema de Cayley-Hamilton para matrizes  $3 \times 3$ .

- T4. (*Autovalores*) Alguns recursos têm um comando específico para encontrar os autovalores de uma matriz diretamente (embora o procedimento falhe em alguns casos). Se seu recurso tem esta funcionalidade, leia seu manual e então calcule os autovalores no Exemplo 2 diretamente.
- T5. (*Autovetores*) Uma maneira de usar um recurso computacional para encontrar autovetores associados a um autovalor  $\lambda$  é resolver o sistema linear  $(\lambda I - A)x = 0$ . Uma outra maneira é utilizar um comando para encontrar uma base do espaço-nulo de  $\lambda I - A$  (se disponível). Contudo, alguns recursos têm comandos específicos para encontrar autovetores. Leia seu manual e então explore os vários procedimentos para encontrar os autovetores nos Exemplos 5 e 6.

## Seção 7.2

**T1. (Diagonalização)** Alguns recursos têm um comando específico para diagonalizar uma matriz. Se o seu recurso tem esta funcionalidade, ele pode ser encontrado como uma “decomposição de Jordan” ou então por alguma variação disto quer envolve o nome “Jordan.” Se seu recurso tem esta funcionalidade, leia seu manual e então use seu recurso para fazer as contas no Exemplo 2.

[*Observação.* Seu recurso pode ou não produzir os autovalores de  $A$  e as colunas de  $P$  na mesma ordem que no exemplo.]

## Seção 7.3

**T1. (Diagonalização ortogonal)** Use seu recurso para conferir as contas no Exemplo 1.

# Transformações Lineares

## Conteúdo do Capítulo

- 8.1 Transformações Lineares Arbitrárias
- 8.2 Núcleo e Imagem
- 8.3 Transformações Lineares Inversas
- 8.4 Matrizes de Transformações Lineares Arbitrárias
- 8.5 Semelhança

**INTRODUÇÃO:** Nas Seções 4.2 e 4.3 nós estudamos transformações lineares de  $R^n$  em  $R^m$ . Neste capítulo nós vamos definir e estudar transformações lineares de um espaço vetorial arbitrário  $V$  em um outro espaço vetorial arbitrário  $W$ . Os resultados que obteremos aqui têm aplicações importantes na Física, Engenharia e em vários ramos da Matemática.

## 8.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES ARBITRÁRIAS

Na Seção 4.2 nós definimos transformações lineares de  $R^n$  em  $R^m$ . Nesta seção nós iremos estender esta idéia definindo o conceito mais geral de transformações lineares de um espaço vetorial para um outro.

**Definições e Terminologia** Lembre que uma transformação linear de  $R^n$  em  $R^m$  foi definida inicialmente como uma função

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

para a qual as equações relacionando  $w_1, w_2, \dots, w_m$  e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são lineares. Subseqüentemente, nós mostramos que uma transformação  $T : R^n \rightarrow R^m$  é linear se, e somente se, as duas relações

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

valem para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $R^n$  e qualquer escalar  $c$  (veja o Teorema 4.3.2). Nós iremos usar estas propriedades como ponto inicial para transformações lineares arbitrárias.

### Definição

Se  $T : V \rightarrow W$  é uma função de um espaço vetorial  $V$  em um outro espaço vetorial  $W$ , então  $T$  é chamada uma **transformação linear** de  $V$  em  $W$  se, para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V$  e qualquer escalar  $c$  valem

$$(a) T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad (b) T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

No caso especial em que  $V = W$ , a transformação linear é chamada um **operador linear** de  $V$ .

### EXEMPLO 1 Transformações Matriciais

Como a definição precedente foi baseada no Teorema 4.3.2, as transformações lineares de  $R^n$  em  $R^m$ , como definidas na Seção 4.2, são também transformações lineares sob esta definição mais geral. Nós iremos chamar as transformações lineares de  $R^n$  em  $R^m$  de **transformações matriciais**, pois elas podem ser efetuadas por multiplicação matricial. ♦

### EXEMPLO 2 A Transformação Nula

Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais quaisquer. A aplicação  $T : V \rightarrow W$  tal que  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  para cada vetor  $\mathbf{v}$  em  $V$  é uma transformação linear chamada **transformação nula** ou **zero**. Para ver que  $T$  é linear, observe que

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad T(c\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Deste modo,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}) \quad ♦$$

### EXEMPLO 3 O Operador Identidade

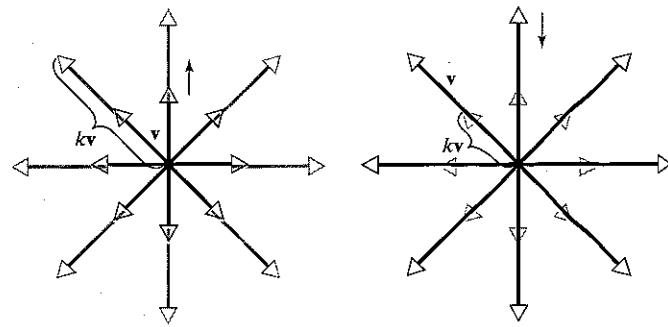
Seja  $V$  um espaço vetorial qualquer. A aplicação  $I : V \rightarrow V$  definida por  $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  é chamada **operador identidade** de  $V$ . A verificação da linearidade de  $I$  é deixada a cargo do leitor. ♦

### EXEMPLO 4 Operadores de Dilatação e de Contracção

Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $k$  um escalar quaisquer. Nós deixamos como um exercício verificar que a função  $T : V \rightarrow V$  definida por

$$T(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$$

é um operador linear de  $V$ . Este operador é chamado uma **homotetia** de razão  $k$  de  $V$ ; se  $k > 1$ , dizemos que  $T$  é uma **dilatação** de  $V$  de razão  $k$  e se  $0 < k < 1$ , dizemos que  $T$  é uma **contracção** de  $V$  de razão  $k$ . Geometricamente, uma dilatação “estica” os vetores em  $V$  por um fator  $k$  e uma contracção “comprime” os vetores em  $V$  por um fator  $k$  (Figura 8.1.1). ♦



(a) Dilatação de  $V$

(b) Contração de  $V$

### EXEMPLO 5 Projeções Ortogonais

Na Seção 6.4 nós definimos a projeção ortogonal de  $R^m$  sobre um subespaço  $W$ . [Veja a Fórmula (6) e a definição que a antecede naquela seção.] As projeções ortogonais também podem ser definidas em espaços com produto interno arbitrários  $V$ , como segue. Suponha que  $W$  é um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno  $V$ ; então a **projeção ortogonal de  $V$  sobre  $W$**  é a transformação definida por

$$T(\mathbf{v}) = \text{proj}_W \mathbf{v}$$

(Figura 8.1.2). Segue do Teorema 6.3.5 que se

$$S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$$

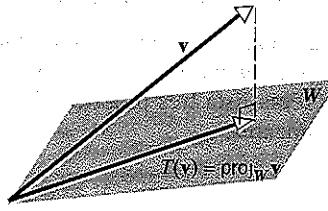
é uma base ortonormal qualquer de  $W$ , então  $T(\mathbf{v})$  é dado pela fórmula

$$T(\mathbf{v}) = \text{proj}_W \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r$$

A prova que  $T$  é uma transformação linear segue das propriedades do produto interno. Por exemplo,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &\quad + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Analogamente,  $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ .



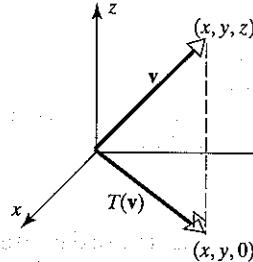
**Figura 8.1.2** A projeção ortogonal de  $V$  sobre  $W$ .

### EXEMPLO 6 Calculando uma Projeção Ortogonal

Como um caso especial do exemplo dado, seja  $V = \mathbb{R}^3$  com o produto interno euclidiano. Os vetores  $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0)$  e  $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 0)$  formam uma base ortonormal do plano  $xy$ . Assim, se  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  é um vetor qualquer em  $\mathbb{R}^3$ , a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$  é dada por

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\ &= (x, y, 0) \end{aligned}$$

(Veja a Figura 8.1.3.)



**Figura 8.1.3** A projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ .

### EXEMPLO 7 Uma Transformação Linear de um Espaço V em $\mathbb{R}^n$

Seja  $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  uma base de um espaço vetorial  $n$ -dimensional  $V$  e seja

$$(\mathbf{v})_S = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

o vetor de coordenadas em relação a  $S$  de um vetor  $\mathbf{v}$  em  $V$ , de modo que

$$\mathbf{v} = k_1 \mathbf{w}_1 + k_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + k_n \mathbf{w}_n$$

Defina  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  como a função que leva  $\mathbf{v}$  em seu vetor de coordenadas em relação  $S$ , ou seja,

$$T(\mathbf{v}) = (\mathbf{v})_S = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

A função  $T$  é uma transformação linear. Para ver isto, suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores em  $V$ ,  $k$  é um escalar e que temosmos

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + c_n \mathbf{w}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = d_1 \mathbf{w}_1 + d_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + d_n \mathbf{w}_n$$

Assim,

$$(\mathbf{u})_S = (c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ e } (\mathbf{v})_S = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

No entanto,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1) \mathbf{w}_1 + (c_2 + d_2) \mathbf{w}_2 + \cdots + (c_n + d_n) \mathbf{w}_n$$

$$k\mathbf{v} = (kd_1) \mathbf{w}_1 + (kd_2) \mathbf{w}_2 + \cdots + (kd_n) \mathbf{w}_n$$

e portanto

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n)$$

$$(k\mathbf{v})_S = (kd_1, kd_2, \dots, kd_n)$$

Deste modo,

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (\mathbf{u})_S + (\mathbf{v})_S \quad \text{e} \quad (k\mathbf{v})_S = k(\mathbf{v})_S$$

Em termos de  $T$  temos

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$$

que mostra que  $T$  é uma transformação linear.

OBSERVAÇÃO. As contas feitas no exemplo acima poderiam igualmente ser feitas usando matrizes de coordenadas em vez de vetores de coordenadas, ou seja,

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_S = [\mathbf{u}]_S + [\mathbf{v}]_S \quad \text{e} \quad [k\mathbf{v}]_S = k[\mathbf{v}]_S$$

### EXEMPLO 8 Uma Transformação Linear de $P_n$ em $P_{n+1}$

Seja  $\mathbf{p} = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$  um polinômio em  $P_n$  e defina a função  $T : P_n \rightarrow P_{n+1}$  por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1}$$

A função  $T$  é uma transformação linear, pois para qualquer escalar  $k$  e quaisquer polinômios  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  em  $P_n$  nós temos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) &= T(p_1(x) + p_2(x)) = x(p_1(x) + p_2(x)) \\ &= xp_1(x) + xp_2(x) = T(\mathbf{p}_1) + T(\mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

e

$$T(k\mathbf{p}) = T(kp(x)) = x(kp(x)) = k(xp(x)) = kT(\mathbf{p})$$

### EXEMPLO 9 Um Operador Linear de $P_n$

Seja  $\mathbf{p} = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$  um polinômio em  $P_n$  e sejam  $a$  e  $b$  quaisquer escalares. Nós deixamos como um exercício mostrar que a função  $T$  definida por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = p(ax + b) = c_0 + c_1(ax + b) + \cdots + c_n(ax + b)^n$$

é um operador linear. Por exemplo, se  $ax + b = 3x - 5$ , então  $T : P_2 \rightarrow P_2$  seria o operador linear dado pela fórmula

$$T(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = c_0 + c_1(3x - 5) + c_2(3x - 5)^2$$

### EXEMPLO 10 Uma Transformação Linear Usando um Produto Interno

Sejam  $V$  um espaço com produto interno e  $\mathbf{v}_0$  um vetor qualquer fixado em  $V$ . Seja  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  a transformação que leva um vetor  $\mathbf{v}$  em seu produto interno com  $\mathbf{v}_0$ , ou seja,

$$T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

Pelas propriedades de um produto interno,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

e

$$T(k\mathbf{v}) = \langle k\mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = k \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = kT(\mathbf{v})$$

de modo que  $T$  é uma transformação linear.

#### Requisito: Cálculo

### EXEMPLO 1.1 Uma Transformação Linear de $C^1(-\infty, \infty)$ em $F(-\infty, \infty)$

Seja  $V = C^1(-\infty, \infty)$  o espaço vetorial das funções com derivadas contínuas em  $(-\infty, \infty)$  e seja  $W = F(-\infty, \infty)$  o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em  $(-\infty, \infty)$ . Seja  $D : V \rightarrow W$  a transformação que leva uma função  $\mathbf{f} = f(x)$  em sua derivada, isto é,

$$D(\mathbf{f}) = f'(x)$$

Pelas propriedades da derivação, temos

$$D(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g}) \quad \text{e} \quad D(k\mathbf{f}) = kD(\mathbf{f})$$

Assim,  $D$  é uma transformação linear.

#### Requisito: Cálculo

### EXEMPLO 1.2 Uma Transformação Linear de $C(-\infty, \infty)$ em $C^1(-\infty, \infty)$

Seja  $V = C(-\infty, \infty)$  o espaço vetorial das funções contínuas em  $(-\infty, \infty)$  e seja  $W = C^1(-\infty, \infty)$  o espaço vetorial das funções com derivadas contínuas em  $(-\infty, \infty)$ . Seja  $J : V \rightarrow W$  a transformação que leva  $\mathbf{f} = f(x)$  em sua integral  $\int_0^x f(t) dt$ . Por exemplo, se  $\mathbf{f} = x^2$ , então

$$J(\mathbf{f}) = \int_0^x t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{3}$$

Pelas propriedades da integração, temos

$$J(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \int_0^x (f(t) + g(t)) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = J(\mathbf{f}) + J(\mathbf{g})$$

$$J(c\mathbf{f}) = \int_0^x c f(t) dt = c \int_0^x f(t) dt = c J(\mathbf{f})$$

Assim,  $J$  é uma transformação linear.

### EXEMPLO 1.3 Uma Transformação que não é Linear

Seja  $T : M_{nn} \rightarrow R$  a transformação que leva uma matriz  $n \times n$  em seu determinante, ou seja,

$$T(A) = \det(A)$$

Se  $n > 1$ , então esta transformação não satisfaz nenhuma das duas propriedades requeridas de uma transformação linear. Por exemplo, nós vimos no Exemplo 1 da Seção 2.3 que, em geral,

$$\det(A_1 + A_2) \neq \det(A_1) + \det(A_2)$$

Além disto,  $\det(cA) = c^n \det(A)$ , de modo que, em geral,

$$\det(cA) \neq c \det(A)$$

Assim,  $T$  não é uma transformação linear.

**Propriedades das Transformações Lineares** Se  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear, então para quaisquer vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  em  $V$  e quaisquer escalares  $c_1$  e  $c_2$ , nós temos

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = T(c_1\mathbf{v}_1) + T(c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$$

e, mais geralmente, se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  são vetores em  $V$  e  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são escalares, então

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n) \quad (1)$$

A Fórmula (1) é, às vezes, descrita dizendo que *uma transformação linear preserva combinações lineares*.

O seguinte teorema lista três propriedades comuns a todas as transformações lineares.

#### Teorema 8.1.1

Se  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear, então:

$$(a) T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

(b)  $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ , para qualquer  $\mathbf{v}$  em  $V$

(c)  $T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$ , para quaisquer  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em  $V$

**Prova.** Seja  $\mathbf{v}$  um vetor qualquer em  $V$ . Como  $0 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , nós temos

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

provando (a). Também

$$T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$$

provando (b). Finalmente,  $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$  e portanto

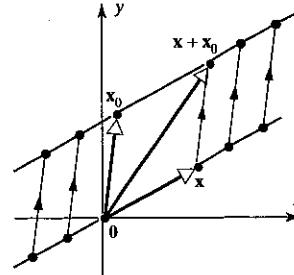
$$\begin{aligned} T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) &= T(\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) + (-1)T(\mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

provando (c). ■

Em palavras, a parte (a) do teorema precedente afirma que uma transformação linear leva  $\mathbf{0}$  em  $\mathbf{0}$ . Esta propriedade é útil para identificar transformações que *não* são lineares. Por exemplo, se  $\mathbf{x}_0$  é um vetor não-nulo fixado em  $R^2$ , então a transformação

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$$

tem o efeito geométrico de transladar cada ponto  $\mathbf{x}$  numa direção paralela a  $\mathbf{x}_0$  ao longo de uma distância  $\|\mathbf{x}_0\|$  (Figura 8.1.4). Isto não é uma transformação linear, pois  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$ , de modo que  $T$  não leva  $\mathbf{0}$  em  $\mathbf{0}$ .



**Figura 8.1.4**  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$  translada cada ponto  $\mathbf{x}$  ao longo de uma reta paralela a  $\mathbf{x}_0$  por uma distância  $\|\mathbf{x}_0\|$ .

**Encontrando Transformações Lineares a Partir das Imagens de Vetores de uma Base** O Teorema 4.3.3 mostra que se  $T$  é uma transformação matricial, então a matriz canônica de  $T$  pode ser obtida a partir das imagens dos vetores da base canônica. Dito de outra maneira, *uma transformação matricial fica completamente determinada pelas suas imagens nos vetores da base canônica*. Isto é um caso especial de um resultado mais geral: Se  $T: V \rightarrow W$  é uma transformação linear e se  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base qualquer de  $V$ , então a imagem  $T(v)$  de qualquer vetor  $v$  em  $V$  pode ser calculada a partir das imagens

$$T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$$

dos vetores da base. Isto pode ser feito expressando  $v$  como uma combinação linear dos vetores da base, digamos

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

e então usando a Fórmula (1) para escrever

$$T(v) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_n T(v_n)$$

Em palavras, *uma transformação linear fica completamente determinada pelas suas imagens nos vetores de qualquer base*.

#### EXEMPLO 1.4 Calculando com Imagens de Vetores de Base

Considere a base  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  de  $R^3$  dada por  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$  e  $v_3 = (1, 0, 0)$ . Seja  $T: R^3 \rightarrow R^2$  a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (1, 0), \quad T(v_2) = (2, -1), \quad T(v_3) = (4, 3)$$

Encontre uma fórmula para  $T(x_1, x_2, x_3)$ ; depois use esta fórmula para calcular  $T(2, -3, 5)$ .

*Solução.*

Inicialmente nós expressamos  $x = (x_1, x_2, x_3)$  como uma combinação linear de  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$  e  $v_3 = (1, 0, 0)$ . Escrevendo

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0)$$

e equacionando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 &= x_2 \\ c_1 &= x_3 \end{aligned}$$

que dá  $c_1 = x_3$ ,  $c_2 = x_2 - x_3$ ,  $c_3 = x_1 - x_2$  e portanto

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0) \\ &= x_3 v_1 + (x_2 - x_3)v_2 + (x_1 - x_2)v_3 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= x_3 T(v_1) + (x_2 - x_3)T(v_2) + (x_1 - x_2)T(v_3) \\ &= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_2)(4, 3) \\ &= (4x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

A partir desta fórmula nós obtemos

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

Na Seção 4.2 nós definimos a composição de transformações matriciais. A seguinte definição estende aquele conceito a transformações lineares arbitrárias.

#### Definição

Se  $T_1: U \rightarrow V$  e  $T_2: V \rightarrow W$  são transformações lineares, então a **composição** ou a **composta de  $T_2$  com  $T_1$** , denotada por  $T_2 \circ T_1$  (podemos dizer “ $T_2$  bola  $T_1$ ”) é a função definida pela fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)) \quad (2)$$

onde  $u$  é um vetor em  $U$ .

OBSERVAÇÃO. Observe que esta definição requer que o domínio de  $T_2$  (que é  $V$ ) contenha a imagem de  $T_1$ ; isto é essencial para a fórmula  $T_2(T_1(u))$  fazer sentido (Figura 8.1.5). O leitor deveria comparar (2) com a Fórmula (18) da Seção 4.2.

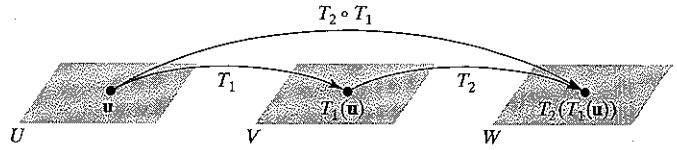


Figura 8.1.5 A composta de  $T_2$  com  $T_1$ .

O próximo resultado mostra que a composta de duas transformações lineares é também uma transformação linear.

#### Teorema 8.1.2

Se  $T_1: U \rightarrow V$  e  $T_2: V \rightarrow W$  são transformações lineares, então  $(T_2 \circ T_1): U \rightarrow W$  também é uma transformação linear.

**Prova.** Se  $u$  e  $v$  são vetores em  $U$  e se  $c$  é um escalar então segue de (2) e da linearidade de  $T_1$  e de  $T_2$  que

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(u + v) &= T_2(T_1(u + v)) = T_2(T_1(u) + T_1(v)) \\ &= T_2(T_1(u)) + T_2(T_1(v)) \\ &= (T_2 \circ T_1)(u) + (T_2 \circ T_1)(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(cv) &= T_2(T_1(cv)) = T_2(cT_1(v)) \\ &= cT_2(T_1(v)) = c(T_2 \circ T_1)(v) \end{aligned}$$

Assim,  $T_2 \circ T_1$  satisfaz as exigências de uma transformação linear. ■

#### EXEMPLO 1.5 Composição de Transformações Lineares

Sejam  $T_1: P_1 \rightarrow P_2$  e  $T_2: P_2 \rightarrow P_3$  as transformações lineares dadas pelas fórmulas

$$T_1(p(x)) = xp(x) \quad \text{e} \quad T_2(p(x)) = p(2x + 4)$$

Então a composta  $(T_2 \circ T_1): P_1 \rightarrow P_3$  é dada pela fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (2x + 4)p(2x + 4)$$

## 262 ••• Álgebra Linear com Aplicações

Em particular, se  $p(x) = c_0 + c_1x$ , então

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(p(x)) &= (T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1x) = (2x + 4)(c_0 + c_1(2x + 4)) \\ &= c_0(2x + 4) + c_1(2x + 4)^2\end{aligned}$$

### EXEMPLO 16 Composição com o Operador Identidade

Se  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear e se  $I : V \rightarrow V$  é o operador identidade (Exemplo 3), então para qualquer vetor  $v$  em  $V$  nós temos

$$(T \circ I)(v) = T(I(v)) = T(v)$$

$$(I \circ T)(v) = I(T(v)) = T(v)$$

Segue que  $T \circ I$  e  $I \circ T$  são iguais a  $T$ , ou seja,

$$T \circ I = T \quad \text{e} \quad I \circ T = T$$

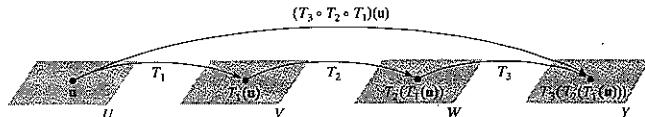
Nós concluímos esta seção observando que a composição pode ser definida para mais do que duas transformações lineares. Por exemplo, se

$$T_1 : U \rightarrow V, \quad T_2 : V \rightarrow W \quad \text{e} \quad T_3 : W \rightarrow Y$$

são transformações lineares, então a composta  $T_3 \circ T_2 \circ T_1$  é definida por

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(u) = T_3(T_2(T_1(u))) \quad (3)$$

(Figura 8.1.6).



**Figura 8.1.6** A composição de três transformações lineares.

### Conjunto de Exercícios 8.1

- Use a definição de operador linear que foi dada nesta seção para mostrar que a função  $T : R^2 \rightarrow R^2$  dada pela fórmula  $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$  é um operador linear.
- Use a definição de transformação linear que foi dada nesta seção para mostrar que a função  $T : R^3 \rightarrow R^2$  dada pela fórmula  $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$  é uma transformação linear.

Nos Exercícios 3–10, determine se a função é uma transformação linear. Justifique sua resposta.

3.  $T : V \rightarrow R$ , onde  $V$  é um espaço com produto interno e  $T(u) = \|u\|$ .

4.  $T : R^3 \rightarrow R^3$ , onde  $v_0$  é um vetor em  $R^3$  fixado e  $T(u) = u \times v_0$ .

5.  $T : M_{22} \rightarrow M_{23}$ , onde  $B$  é uma matriz  $2 \times 3$  fixada e  $T(A) = AB$ .

6.  $T : M_{nn} \rightarrow R$ , onde  $T(A) = \text{tr}(A)$ .

7.  $F : M_{nn} \rightarrow M_{nn}$ , onde  $F(A) = A^T$ .

8.  $T : M_{22} \rightarrow R$ , onde

$$(a) T \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 3a - 4b + c - d \quad (b) T \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = a^2 + b^2$$

9.  $T : P_2 \rightarrow P_2$ , onde

$$(a) T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$$

$$(b) T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2$$

10.  $T : F(-\infty, \infty) \rightarrow F(-\infty, \infty)$ , onde

$$(a) T(f(x)) = 1 + f(x) \quad (b) T(f(x)) = f(x+1)$$

11. Mostre que a função  $T$  no Exemplo 9 é um operador linear.

12. Considere a base  $S = \{v_1, v_2\}$  de  $R^2$ , onde  $v_1 = (1, 1)$  e  $v_2 = (1, 0)$  e seja  $T : R^2 \rightarrow R^2$  o operador linear tal que

$$T(v_1) = (1, -2) \text{ e } T(v_2) = (-4, 1)$$

Encontre uma fórmula para  $T(x_1, x_2)$  e use esta fórmula para obter  $T(5, -3)$ .

13. Considere a base  $S = \{v_1, v_2\}$  de  $R^2$ , onde  $v_1 = (-2, 1)$  e  $v_2 = (1, 3)$  e seja  $T : R^2 \rightarrow R^3$  a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (-1, 2, 0) \text{ e } T(v_2) = (0, -3, 5)$$

Encontre uma fórmula para  $T(x_1, x_2)$  e use esta fórmula para obter  $T(2, -3)$ .

14. Considere a base  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  de  $R^3$ , onde  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$  e  $v_3 = (1, 0, 0)$  e seja  $T : R^3 \rightarrow R^3$  o operador linear tal que

$$T(v_1) = (2, -1, 4), \quad T(v_2) = (3, 0, 1), \quad T(v_3) = (-1, 5, 1)$$

Encontre uma fórmula para  $T(x_1, x_2, x_3)$  e use esta fórmula para obter  $T(2, 4, -1)$ .

15. Considere a base  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , onde  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$  e  $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$  e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear tal que  
 $T(\mathbf{v}_1) = (1, 0)$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = (-1, 1)$ ,  $T(\mathbf{v}_3) = (0, 1)$   
Encontre uma fórmula para  $T(x_1, x_2, x_3)$  e use esta fórmula para obter  $T(7, 13, 7)$ .
16. Sejam  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  vetores num espaço vetorial  $V$  e  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear para a qual  
 $T(\mathbf{v}_1) = (1, -1, 2)$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = (0, 3, 2)$ ,  $T(\mathbf{v}_3) = (-3, 1, 2)$   
Encontre  $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3)$ .
17. Encontre o domínio e o contradomínio de  $T_2 \circ T_1$  e encontre  $(T_2 \circ T_1)(x, y)$ .
- $T_1(x, y) = (2x, 3y)$ ,  $T_2(x, y) = (x - y, x + y)$
  - $T_1(x, y) = (x - 3y, 0)$ ,  $T_2(x, y) = (4x - 5y, 3x - 6y)$
  - $T_1(x, y) = (2x, -3y, x + y)$ ,  $T_2(x, y, z) = (x - y, y + z)$
  - $T_1(x, y) = (x - y, y + z, x - z)$ ,  $T_2(x, y, z) = (0, x + y + z)$
18. Encontre o domínio e o contradomínio de  $T_3 \circ T_2 \circ T_1$  e encontre  $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(x, y)$ .
- $T_1(x, y) = (-2y, 3x, x - 2y)$ ,  $T_2(x, y, z) = (y, z, x)$ ,  $T_3(x, y, z) = (x + z, y - z)$
  - $T_1(x, y) = (x + y, y, -x)$ ,  $T_2(x, y, z) = (0, x + y + z, 3y)$ ,  $T_3(x, y, z) = (3x + 2y, 4z - x - 3y)$
19. Sejam  $T_1 : M_{22} \rightarrow R$  e  $T_2 : M_{22} \rightarrow M_{22}$  as transformações lineares dadas por  $T_1(A) = \text{tr}(A)$  e  $T_2(A) = A^T$ .
- Encontre  $(T_1 \circ T_2)(A)$ , onde  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .  
(b) Você consegue encontrar  $(T_2 \circ T_1)(A)$ ? Explique.
20. Sejam  $T_1 : P_n \rightarrow P_n$  e  $T_2 : P_n \rightarrow P_n$  os operadores lineares dados por  $T_1(p(x)) = p(x - 1)$  e  $T_2(p(x)) = p(x + 1)$ . Encontre  $(T_1 \circ T_2)(p(x))$  e  $(T_2 \circ T_1)(p(x))$ .
21. Seja  $T_1 : V \rightarrow V$  a dilatação  $T_1(\mathbf{v}) = 4\mathbf{v}$ . Encontre um operador linear  $T_2 : V \rightarrow V$  tal que  $T_1 \circ T_2 = I$  e  $T_2 \circ T_1 = I$ .
22. Suponha que as transformações lineares  $T_1 : P_2 \rightarrow P_2$  e  $T_2 : P_2 \rightarrow P_3$  são dadas pelas fórmulas  $T_1(p(x)) = p(x + 1)$  e  $T_2(p(x)) = xp(x)$ . Encontre  $(T_2 \circ T_1)(a_0 + a_1x + a_2x^2)$ .
23. Seja  $q_0(x)$  um polinômio de grau  $m$  fixado e defina a função  $T$  de domínio  $P_n$  pela fórmula  $T(p(x)) = p(q_0(x))$ .
- Mostre que  $T$  é uma transformação linear.
  - Qual é o contradomínio de  $T$ ?
24. Use a definição de  $T_3 \circ T_2 \circ T_1$  dada pela Fórmula (3) para provar que
- $T_3 \circ T_2 \circ T_1$  é uma transformação linear.  
(b)  $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$   
(c)  $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$
25. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ . Mostre que  $T \circ T = T$ .
26. (a) Sejam  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear e  $k$  um escalar. Defina a função  $(kT) : V \rightarrow W$  por  $(kT)(\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ . Mostre que  $kT$  é uma transformação linear.  
(b) Encontre  $(3T)(x_1, x_2)$  se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada pela fórmula  $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_1)$ .
27. (a) Sejam  $T_1 : V \rightarrow W$  e  $T_2 : V \rightarrow W$  duas transformações lineares. Defina as funções  $(T_1 + T_2) : V \rightarrow W$  e  $(T_1 - T_2) : V \rightarrow W$  por  
 $(T_1 + T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{v})$   
 $(T_1 - T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v}) - T_2(\mathbf{v})$   
Mostre que  $T_1 + T_2$  e  $T_1 - T_2$  são transformações lineares.  
(b) Encontre  $(T_1 + T_2)(x, y)$  e  $(T_1 - T_2)(x, y)$  se  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são dadas pelas fórmulas  $T_1(x, y) = (2y, 3x)$  e  $T_2(x, y) = (y, x)$ .
28. (a) Prove que se  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  são escalares quaisquer, então a fórmula  
 $F(x, y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$   
define um operador linear de  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) A fórmula  $F(x, y) = (a_1x^2 + b_1y^2, a_2x^2 + b_2y^2)$  define um operador linear de  $\mathbb{R}^2$ ? Explique.
29. Sejam  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$  e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Mostre que se  $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \dots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ , então  $T$  é a transformação nula.
30. Sejam  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Mostre que se  $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2, \dots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_n$ , então  $T$  é o operador identidade.
31. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Sejam

$$D(f) = f'(x) \quad \text{e} \quad J(f) = \int_0^x f(t) dt$$

as transformações lineares nos Exemplos 11 e 12. Encontre  $(J \circ D)(f)$  para

- (a)  $f = x^2 + 3x + 2$       (b)  $f = \sin x$       (c)  $f = e^x + 3$

32. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Sejam  $V = C[a, b]$  o espaço vetorial das funções contínuas em  $[a, b]$  e  $T : V \rightarrow V$  a transformação definida por

$$T(f) = 5f(x) + 3 \int_a^x f(t) dt$$

Será  $T$  um operador linear?

### Discussão e Descoberta

33. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo. Em cada parte,  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais.
- Se  $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$  para quaisquer vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  em  $V$  e quaisquer escalares  $c_1$  e  $c_2$ , então  $T$  é uma transformação linear.
  - Se  $\mathbf{v}$  é um vetor não-nulo em  $V$ , então existe exatamente uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que  $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ .
  - Existe exatamente uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$  para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V$ .
  - Se  $\mathbf{v}_0$  é um vetor não-nulo em  $V$ , então a fórmula  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$  define um operador linear de  $V$ .
34. Se  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é uma base de um espaço vetorial  $V$ , quantos operadores lineares distintos podem ser criados que levam cada vetor em  $B$  num vetor também em  $B$ ? Explique seu raciocínio.

## 8.2 NÚCLEO E IMAGEM

Nesta seção nós desenvolveremos algumas propriedades básicas de transformações lineares que generalizam as propriedades das transformações matriciais que obtivemos anteriormente neste texto.

**Núcleo e Imagem** Lembre que se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então o espaço-nulo de  $A$  consiste de todos os vetores  $\mathbf{x}$  em  $R^n$  tais que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e, pelo Teorema 5.5.1, o espaço-coluna de  $A$  consiste de todos os vetores  $\mathbf{b}$  em  $R^m$  para os quais existe pelo menos um vetor  $\mathbf{x}$  em  $R^n$  tal que  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Do ponto de vista de transformações matriciais, o espaço-nulo de  $A$  consiste de todos os vetores em  $R^n$  que a multiplicação por  $A$  leva em  $\mathbf{0}$  e o espaço-coluna de  $A$  consiste de todos os vetores em  $R^m$  que são imagem, pela multiplicação por  $A$ , de pelo menos um vetor em  $R^n$ . A seguinte definição estende estas idéias a transformações lineares arbitrárias.

### Definição

Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. O conjunto dos vetores em  $V$  que  $T$  leva em  $\mathbf{0}$  é chamado o *núcleo* de  $T$ , que nós denotamos por  $\text{Nuc}(T)$ . O conjunto de todos os vetores em  $W$  que são imagem por  $T$  de pelo menos um vetor em  $V$  é chamado a *imagem* de  $T$ , que nós denotamos por  $\text{Im}(T)$ .

### EXEMPLO 1 Núcleo e Imagem de uma Transformação Matricial

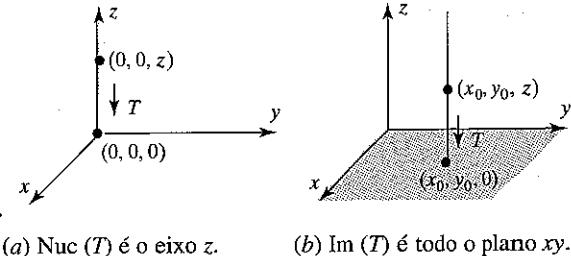
Se  $T_A : R^n \rightarrow R^m$  é a multiplicação por uma matriz  $A$  de tamanho  $m \times n$ , então pelo que observamos acima (antes da definição), o núcleo de  $T_A$  é o espaço-nulo de  $A$  e a imagem de  $T_A$  é o espaço-coluna de  $A$ . ♦

### EXEMPLO 2 Núcleo e Imagem da Transformação Nula

Seja  $T : V \rightarrow W$  a transformação nula (Exemplo 2 da Seção 8.1). Como  $T$  leva *cada* vetor em  $V$  em  $\mathbf{0}$ , segue que  $\text{Nuc}(T) = V$ . Além disto, como  $\mathbf{0}$  é a *única* imagem por  $T$  de vetores em  $V$ , temos  $\text{Im}(T) = \{\mathbf{0}\}$ . ♦

### EXEMPLO 3 Núcleo e Imagem do Operador Identidade

Seja  $I : V \rightarrow V$  o operador identidade (Exemplo 3 da Seção 8.1). Como  $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  para todos os vetores em  $V$ , *cada* vetor em  $V$  é a imagem de algum vetor (a saber, o próprio vetor); assim,  $\text{Im}(I) = V$ . Como  $\mathbf{0}$  é o *único* vetor que  $I$  leva em  $\mathbf{0}$ , segue que  $\text{Nuc}(I) = \{\mathbf{0}\}$ . ♦



(a)  $\text{Nuc}(T)$  é o eixo  $z$ .

(b)  $\text{Im}(T)$  é todo o plano  $xy$ .

**Figura 8.2.1**

### EXEMPLO 4 Núcleo e Imagem de uma Projeção Ortogonal

Seja  $T : R^3 \rightarrow R^3$  a projeção ortogonal sobre o plano  $xy$ . O núcleo de  $T$  é o conjunto de pontos que  $T$  leva em  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ ; estes são os pontos no eixo  $z$  (Figura 8.2.1a). Como  $T$  leva cada ponto do  $R^3$  no plano  $xy$ , a imagem de  $T$  deve ser um subconjunto deste plano. No entanto, cada ponto  $(x_0, y_0, 0)$  no plano  $xy$  é a imagem por  $T$  de algum ponto; na verdade, é a imagem por  $T$  de todos os pontos na reta vertical que passa por  $(x_0, y_0, 0)$  (Figura 8.2.1b). Assim,  $\text{Im}(T)$  é todo o plano  $xy$ . ♦

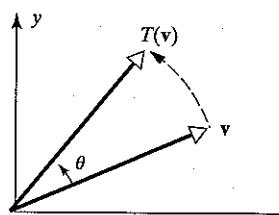


Figura 8.2.2

**EXEMPLO 5 Núcleo e Imagem de uma Rotação**

Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear que gira cada vetor no plano  $xy$  por um ângulo  $\theta$  (Figura 8.2.2). Como *cada* vetor no plano  $xy$  pode ser obtido pela rotação de algum vetor pelo ângulo  $\theta$  (por que?), nós temos  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ . Além disto, o único vetor que gira em  $0$  é  $0$ , de modo que  $\text{Nuc}(T) = \{0\}$ .

**Requisito: Cálculo**

**EXEMPLO 6 Núcleo de uma Transformação de Derivação**

Sejam  $V = C^1(-\infty, \infty)$  o espaço vetorial das funções com derivadas contínuas em  $(-\infty, \infty)$ ,  $W = F(-\infty, \infty)$  o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em  $(-\infty, \infty)$  e  $D : V \rightarrow W$  a transformação de derivação  $D(f) = f'(x)$ . O núcleo de  $D$  é o conjunto de todas as funções com derivada zero. Do Cálculo sabemos que este é o conjunto das funções constantes em  $(-\infty, \infty)$ .

**Propriedades do Núcleo e da Imagem** Em todos os exemplos dados,  $\text{Nuc}(T)$  e  $\text{Im}(T)$  sempre foram *subespaços*. Nos Exemplos 2, 3 e 5 eram ou o subespaço nulo ou todo o espaço vetorial. No Exemplo 4, o núcleo foi uma reta pela origem e a imagem foi um plano pela origem, ambos os quais são subespaços de  $\mathbb{R}^3$ . Tudo isto não é acidental; é uma consequência do seguinte resultado geral.

**Teorema 8.2.1**

Se  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear, então:

- (a) O núcleo de  $T$  é um subespaço de  $V$ .
- (b) A imagem de  $T$  é um subespaço de  $W$ .

**Prova (a).** Para mostrar que  $\text{Nuc}(T)$  é um subespaço, nós precisamos mostrar que contém pelo menos um vetor e que é fechado na adição e na multiplicação por escalar. Pela parte (a) do Teorema 8.1.1, o vetor  $0$  está em  $\text{Nuc}(T)$ , de modo que este conjunto contém pelo menos um vetor. Sejam  $v_1$  e  $v_2$  vetores em  $\text{Nuc}(T)$  e  $k$  um escalar qualquer. Então

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$$

e portanto  $v_1 + v_2$  está em  $\text{Nuc}(T)$ . Também

$$T(kv_1) = kT(v_1) = k0 = 0$$

e portanto  $kv_1$  está em  $\text{Nuc}(T)$ .

**Prova (b).** Como  $T(0) = 0$ , existe pelo menos um vetor em  $\text{Im}(T)$ . Sejam  $w_1$  e  $w_2$  vetores na imagem de  $T$  e  $k$  um escalar qualquer. Para provar esta parte, nós devemos mostrar que  $w_1 + w_2$  e  $k w_1$  estão na imagem de  $T$ , ou seja, precisamos encontrar vetores  $a$  e  $b$  em  $V$  tais que  $T(a) = w_1 + w_2$  e  $T(b) = kw_1$ .

Como  $w_1$  e  $w_2$  estão na imagem de  $T$ , existem vetores  $a_1$  e  $a_2$  em  $V$  tais que  $T(a_1) = w_1$  e  $T(a_2) = w_2$ . Sejam  $a = a_1 + a_2$  e  $b = ka_1$ . Então

$$T(a) = T(a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2) = w_1 + w_2$$

e

$$T(b) = T(ka_1) = kT(a_1) = kw_1$$

o que completa a prova. ■

Na Seção 5.6 nós definimos o posto de uma matriz como a dimensão de seu espaço-coluna (ou do espaço-linha) e a nulidade como a dimensão de seu espaço-nulo. A seguinte definição estende estas definições para transformações lineares arbitrárias.

**Definição**

Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. A dimensão da imagem de  $T$  é chamada o **posto** de  $T$ , que nós denotamos por  $\text{pos}(T)$ . A dimensão do núcleo de  $T$  é chamada a **nulidade** de  $T$ , que nós denotamos por  $\text{nul}(T)$ .

Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  e  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a multiplicação por  $A$ , então nós sabemos do Exemplo 1 que o núcleo de  $T_A$  é o espaço-nulo de  $A$  e que a imagem de  $T_A$  é o espaço-coluna de  $A$ . Assim, temos a seguinte relação entre o posto e nulidade de uma matriz e o posto e nulidade da transformação matricial correspondente.

**Teorema 8.2.2**

Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  e  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a multiplicação por  $A$ , então:

- (a)  $\text{nul}(T_A) = \text{nul}(A)$
- (b)  $\text{pos}(T_A) = \text{pos}(A)$

**EXEMPLO 7 Encontrando o Posto e a Nulidade**

Seja  $T_A : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$  a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Encontre o posto e a nulidade de  $T_A$ .

**Solução.**

No Exemplo 1 da Seção 5.6 nós mostramos que  $\text{pos}(A) = 2$  e  $\text{nul}(A) = 4$ . Assim, pelo Teorema 8.2.2, nós temos  $\text{pos}(T_A) = 2$  e  $\text{nul}(T_A) = 4$ . ■

**EXEMPLO 8 Encontrando o Posto e a Nulidade**

Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a projeção ortogonal sobre o plano  $xy$ . Pelo Exemplo 4, o núcleo de  $T$  é o eixo  $z$ , que é unidimensional, e a imagem de  $T$  é o plano  $xy$ , que é bidimensional. Assim,

$$\text{nul}(T) = 1 \quad \text{e} \quad \text{pos}(T) = 2$$

**Prova Adicional**

**Prova do Teorema 8.2.3.** Nós precisamos mostrar que

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Nuc}(T)) = n$$

Nós iremos provar isto no caso  $1 \leq \dim(\text{Nuc}(T)) < n$ . Os casos  $\dim(\text{Nuc}(T)) = 0$  e  $\dim(\text{Nuc}(T)) = n$  são deixados como exercícios. Suponha que  $\dim(\text{Nuc}(T)) = r$  e seja  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  uma base do núcleo. Como  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é linearmente independente, o Teorema 5.4.6b garante que existem  $n - r$  vetores  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  tais que o conjunto estendido  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é uma base de  $V$ . Para completar a prova, nós mostraremos que os  $n - r$  vetores do conjunto  $S = \{T(\mathbf{v}_{r+1}), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$  formam uma base da imagem de  $T$ . Segue-se, então, que

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Nuc}(T)) = (n - r) + r = n$$

Primeiro nós mostramos que  $S$  gera a imagem de  $T$ . Se  $\mathbf{b}$  é um vetor qualquer da imagem de  $T$ , então  $\mathbf{b} = T(\mathbf{v})$  para algum vetor  $\mathbf{v}$  em  $V$ . Como  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é uma base de  $V$ , podemos escrever o vetor  $\mathbf{v}$  no formato

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_r \mathbf{v}_r + c_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

Como  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  são vetores do núcleo de  $T$ , nós temos  $T(\mathbf{v}_1) = \dots = T(\mathbf{v}_r) = \mathbf{0}$ , de modo que

$$\mathbf{b} = T(\mathbf{v}) = c_{r+1} T(\mathbf{v}_{r+1}) + \dots + c_n T(\mathbf{v}_n)$$

Assim,  $S$  gera a imagem de  $T$ .

Finalmente nós mostramos que  $S$  é um conjunto linearmente independente e consequentemente, que forma uma base da imagem de  $T$ . Suponha que alguma combinação linear de vetores em  $S$  é nula, ou seja,

$$k_{r+1} T(\mathbf{v}_{r+1}) + \dots + k_n T(\mathbf{v}_n) = 0 \quad (2)$$

Nós precisamos mostrar que  $k_{r+1} = \dots = k_n = 0$ . Como  $T$  é linear, (2) pode ser reescrita como

$$T(k_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n \mathbf{v}_n) = 0$$

que diz que  $k_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n \mathbf{v}_n$  está no núcleo de  $T$ . Este vetor pode, portanto, ser escrito como uma combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  da base do núcleo, digamos

$$k_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n \mathbf{v}_n = k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_r \mathbf{v}_r$$

Assim

$$k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_r \mathbf{v}_r - k_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} - \dots - k_n \mathbf{v}_n = 0$$

Como  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é linearmente independente, todos os coeficientes  $k_i$  são zero; em particular,  $k_{r+1} = \dots = k_n = 0$ , o que completa a prova. ■

**Conjunto de Exercícios 8.2**

1. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear dado pela fórmula

$$T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$$

Quais dos seguintes vetores estão em  $\text{Im}(T)$ ?

- (a)  $(1, -4)$    (b)  $(5, 0)$    (c)  $(-3, 12)$

2. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear do Exercício 1. Quais dos seguintes vetores estão em  $\text{Nuc}(T)$ ?

- (a)  $(5, 10)$    (b)  $(3, 2)$    (c)  $(1, 1)$

3. Seja  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear dada pela fórmula

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4, 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, 6x_1 - 9x_3 + 9x_4)$$

Quais dos seguintes vetores estão em  $\text{Im}(T)$ ?

- (a)  $(0, 0, 6)$     (b)  $(1, 3, 0)$     (c)  $(2, 4, 1)$

4. Seja  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear do Exercício 3. Quais dos seguintes vetores estão em  $\text{Nuc}(T)$ ?

- (a)  $(3, -8, 2, 0)$     (b)  $(0, 0, 0, 1)$     (c)  $(0, -4, 1, 0)$

5. Seja  $T: P_2 \rightarrow P_3$  a transformação linear definida por  $T(p(x)) = xp(x)$ . Quais dos seguintes vetores estão em  $\text{Nuc}(T)$ ?

- (a)  $x^2$     (b)  $0$     (c)  $1+x$

6. Seja  $T: P_2 \rightarrow P_3$  a transformação linear do Exercício 5. Quais dos seguintes vetores estão em  $\text{Im}(T)$ ?

- (a)  $x+x^2$     (b)  $1+x$     (c)  $3-x^2$

7. Encontre uma base do núcleo

- (a) do operador linear no Exercício 1  
 (b) da transformação linear no Exercício 3  
 (c) da transformação linear no Exercício 5

8. Encontre uma base da imagem

- (a) do operador linear no Exercício 1  
 (b) da transformação linear no Exercício 3  
 (c) da transformação linear no Exercício 5

9. Verifique a Fórmula (1) do teorema da dimensão para

- (a) o operador linear no Exercício 1  
 (b) a transformação linear no Exercício 3  
 (c) a transformação linear no Exercício 5

Nos Exercícios 10–13, seja  $T$  a multiplicação pela matriz  $A$ . Encontre

- (a) uma base da imagem de  $T$     (b) uma base do núcleo de  $T$   
 (c) o posto e a nulidade de  $T$     (d) o posto e a nulidade de  $A$

10.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

11.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

13.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

14. Descreva o núcleo e a imagem

- (a) da projeção ortogonal sobre o plano  $xz$   
 (b) da projeção ortogonal sobre o plano  $yz$   
 (c) da projeção ortogonal sobre o plano de equação  $y=x$

15. Sejam  $V$  um espaço vetorial qualquer e  $T: V \rightarrow V$  o operador definido por  $T(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$ .

- (a) Qual é o núcleo de  $T$ ?  
 (b) Qual é a imagem de  $T$ ?

16. Em cada parte, use a informação dada para encontrar a nulidade de  $T$ .

- (a)  $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  tem posto 3.  
 (b)  $T: P_4 \rightarrow P_3$  tem posto 1.  
 (c) A imagem de  $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é  $\mathbb{R}^3$ .  
 (d)  $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$  tem posto 3.

17. Seja  $A$  uma matriz  $7 \times 6$  tal que  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  só tem a solução trivial e seja  $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^7$  a multiplicação por  $A$ . Encontre o posto e a nulidade de  $T$ .

18. Seja  $A$  uma matriz  $5 \times 7$  com posto 4.

- (a) Qual é a dimensão do espaço-solução de  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ?  
 (b) Será  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  consistente para todo os vetores  $\mathbf{b}$  em  $\mathbb{R}^5$ ? Explique.

19. Seja  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow V$  uma transformação linear de  $\mathbb{R}^3$  em um espaço vetorial qualquer. Mostre que o núcleo de  $T$  é uma reta pela origem, um plano pela origem, só a origem, ou todo o  $\mathbb{R}^3$ .

20. Seja  $T: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear de um espaço vetorial qualquer em  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que a imagem de  $T$  é uma reta pela origem, um plano pela origem, só a origem, ou todo o  $\mathbb{R}^3$ .

21. Seja  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a multiplicação por

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que o núcleo de  $T$  é uma reta pela origem e encontre equações paramétricas para esta reta.  
 (b) Mostre que a imagem de  $T$  é um plano pela origem e encontre uma equação para este plano.

22. Prove: Se  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é uma base de  $V$  e se  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$  são vetores em  $W$ , não necessariamente distintos, então existe uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \dots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$$

23. Prove o teorema da dimensão nos casos

- (a)  $\dim(\text{Nuc}(T)) = 0$   
 (b)  $\dim(\text{Nuc}(T)) = n$

24. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Seja  $D: P_3 \rightarrow P_2$  a transformação de derivação  $D(p) = p'(x)$ . Descreva o núcleo de  $D$ .

25. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Seja  $J: P_1 \rightarrow R$  a transformação de integração  $J(p) = \int_{-1}^1 p(x) dx$ . Descreva o núcleo de  $J$ .

26. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Seja  $D: V \rightarrow W$  a transformação de derivação  $D(f) = f'(x)$ , onde  $V = C^3(-\infty, \infty)$  e  $W = F(-\infty, \infty)$ .

Descreva os núcleos de  $D \circ D$  e de  $D \circ D \circ D$ .

## Discussão e Descoberta

27. Preencha as lacunas.

- (a) Se  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a multiplicação por  $A$ , então ao espaço-nulo de  $A$  corresponde \_\_\_\_\_ de  $T_A$  e ao espaço-coluna de  $A$  corresponde \_\_\_\_\_ de  $T_A$ .

- (b) Se  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a projeção ortogonal sobre o plano  $x + y + z = 0$ , então o núcleo de  $T$  é a reta pela origem que é paralela ao vetor \_\_\_\_\_.

- (c) Se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita e  $T: V \rightarrow W$  é uma transformação linear, então a dimensão da imagem de  $T$  mais a dimensão do núcleo de  $T$  é \_\_\_\_\_.

- (d) Se  $T_A: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a multiplicação por  $A$  e se  $\text{pos}(T_A) = 2$ , então a solução geral de  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem \_\_\_\_\_ (quantos?) parâmetros.

28. (a) Se  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um operador linear e se o núcleo de  $T$  é uma reta pela origem, que tipo de objeto geométrico é a imagem de  $T$ ? Explique seu raciocínio.

- (b) Se  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um operador linear e se a imagem de  $T$  é um plano pela origem, que tipo de objeto geométrico é o núcleo de  $T$ ? Explique seu raciocínio.

29. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Seja  $V$  o espaço vetorial das funções reais com derivadas contínuas de todas as ordens em  $(-\infty, \infty)$  e  $W = F(-\infty, \infty)$  o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em  $(-\infty, \infty)$ .

- (a) Encontre uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  cujo núcleo é  $P_3$ .

- (b) Encontre uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  cujo núcleo é  $P_n$ .

## EXEMPLO 1 Uma Transformação Linear Injetora

Lembre que, pelo Teorema 4.3.1, se  $A$  é qualquer matriz  $n \times n$  e  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a multiplicação por  $A$ , então  $T_A$  é injetora se, e somente se,  $A$  é uma matriz invertível.

## EXEMPLO 2 Uma Transformação Linear Injetora

Seja  $T: P_n \rightarrow P_{n+1}$  a transformação linear

$$T(p) = T(p(x)) = xp(x)$$

estudada no Exemplo 8 da Seção 8.1. Se

$p = p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$  e  $q = q(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n$  são polinômios distintos, então eles diferem em pelo menos um coeficiente. Logo,

$$T(p) = c_0x + c_1x^2 + \cdots + c_nx^{n+1} \quad \text{e} \quad T(q) = d_0x + d_1x^2 + \cdots + d_nx^{n+1}$$

## 8.3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES INVERSAS

Na Seção 4.3 nós estudamos propriedades de transformações lineares injetoras de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ . Nesta seção nós iremos estender aquelas idéias para tipos mais gerais de transformações lineares.

Na Seção 4.3 vimos que uma transformação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  é chamada *injetora* se leva vetores distintos em  $\mathbb{R}^n$  em vetores distintos em  $\mathbb{R}^m$ . A seguinte definição generaliza esta idéia.

### Definição

Uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  é dita *injetora* se  $T$  leva vetores distintos de  $V$  em vetores distintos de  $W$ .

também diferem em pelo menos um coeficiente. Assim,  $T$  é injetora, pois leva polinômios distintos  $p$  e  $q$  em polinômios distintos  $T(p)$  e  $T(q)$ .  $\diamond$

#### Requisito: Cálculo

### EXEMPLO 3 Uma Transformação que não é Injetora

Seja

$$D : C^1(-\infty, \infty) \rightarrow F(-\infty, \infty)$$

a transformação de derivação estudada no Exemplo 11 da Seção 8.1. Esta transformação linear não é injetora por que leva funções que diferem por uma constante na mesma função. Por exemplo,

$$D(x^2) = D(x^2 + 1) = 2x$$

O seguinte teorema estabelece uma relação entre uma transformação linear injetora e o seu núcleo.

#### Teorema 8.3.1

#### Afirmações Equivalentes

Se  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $T$  é injetora.
- (b) O núcleo de  $T$  contém somente o vetor nulo, isto é,  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$ .
- (c)  $\text{nul}(T) = 0$ .

(b)  $T : R^3 \rightarrow R^3$  é a projeção ortogonal sobre o plano  $xy$ .

(c)  $T : R^6 \rightarrow R^4$  é a multiplicação pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

*Solução* (a). Pelo Exemplo 5 da Seção 8.2,  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$ , portanto  $T$  é injetora.

*Solução* (b). Pelo Exemplo 4 da Seção 8.2,  $\text{Nuc}(T)$  contém vetores não-nulos, portanto  $T$  não é injetora.

*Solução* (c). Pelo Exemplo 7 da Seção 8.2,  $\text{nul}(T) = 4$ , portanto  $T$  não é injetora.  $\diamond$

No caso especial em que  $T$  é um *operador linear* de um espaço vetorial de *dimensão finita*, podemos acrescentar uma quarta afirmação equivalente àquelas no Teorema 8.3.1.

#### Teorema 8.3.2

Se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $T$  é injetora.
- (b)  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$ .
- (c)  $\text{nul}(T) = 0$ .
- (d) A imagem de  $T$  é  $V$ , ou seja,  $\text{Im}(T) = V$ .

*Prova.* Nós deixamos como um exercício mostrar a equivalência de (b) e (c); nós completaremos a prova mostrando a equivalência de (a) e (b).

(a)  $\Rightarrow$  (b). Suponha que  $T$  é injetora e seja  $v$  um vetor qualquer em  $\text{Nuc}(T)$ . Como  $v$  e  $\mathbf{0}$  estão ambos em  $\text{Nuc}(T)$ , temos  $T(v) = \mathbf{0}$  e  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , de modo que  $T(v) = T(\mathbf{0})$ . Mas isto implica que  $v = \mathbf{0}$ , pois  $T$  é injetora; assim,  $\text{Nuc}(T)$  só contém o vetor nulo.

(b)  $\Rightarrow$  (a). Suponha que  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$  e que  $v$  e  $w$  são vetores distintos de  $V$ , ou seja,

$$v - w \neq \mathbf{0} \quad (1)$$

Para provar que  $T$  é injetora nós devemos mostrar que  $T(v)$  e  $T(w)$  são vetores distintos. Se isto não ocorresse, teríamos  $T(v) = T(w)$ , ou

$$T(v) - T(w) = \mathbf{0} \text{ ou } T(v - w) = \mathbf{0}$$

e portanto  $v - w$  está no núcleo de  $T$ . Como  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$ , isto implica que  $v - w = \mathbf{0}$ , contradizendo (1). Assim,  $T(v)$  e  $T(w)$  são vetores distintos.  $\blacksquare$

### EXEMPLO 4 Usando o Teorema 8.3.1

Em cada parte, determine se a transformação linear é injetora encontrando o núcleo ou a nulidade e aplicando o Teorema 8.3.1.

- (a)  $T : R^2 \rightarrow R^2$  roda cada vetor por um ângulo  $\theta$ .

*Prova.* Nós já sabemos que (a), (b) e (c) são equivalentes, de modo que completaremos a prova mostrando a equivalência de (c) e (d).

(c)  $\Rightarrow$  (d). Suponha que  $\dim(V) = n$  e que  $\text{nul}(T) = 0$ . Pelo teorema da dimensão (Teorema 8.2.3) segue que

$$\text{pos}(T) = n - \text{nul}(T) = n$$

Por definição,  $\text{pos}(T)$  é a dimensão da imagem de  $T$ , de modo que a imagem de  $T$  tem dimensão  $n$ . Agora segue pelo Teorema 5.4.7 que a imagem de  $T$  é  $V$ , pois os dois espaços têm a mesma dimensão.

(d)  $\Rightarrow$  (c). Suponha que  $\dim(V) = n$  e que  $\text{Im}(T) = V$ . Destas relações segue que  $\dim(\text{Im}(T)) = n$  ou, equivalentemente, que  $\text{pos}(T) = n$ . Assim, pelo teorema da dimensão (Teorema 8.2.3) segue que

$$\text{nul}(T) = n - \text{pos}(T) = n - n = 0$$

### EXEMPLO 5 Uma Transformação que não é Injetora

Seja  $T_A : R^4 \rightarrow R^4$  a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

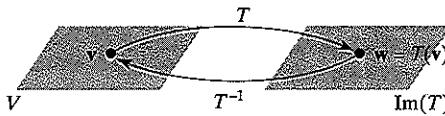
Determine se  $T_A$  é injetora.

*Solução.*

Como já observamos no Exemplo 1, o problema dado é equivalente a determinar se  $A$  é invertível. Mas  $\det(A) = 0$ , pois as duas primeiras linhas de  $A$  são proporcionais e, consequentemente,  $A$  não é invertível. Assim,  $T_A$  não é injetora. ♦

**Transformações Lineares Inversas** Na Seção 4.3 nós definimos o *inverso* de um operador matricial injetor  $T_A: R^n \rightarrow R^n$  como sendo  $T_{A^{-1}}: R^n \rightarrow R^n$  e mostramos que se  $w$  é a imagem de um vetor  $x$  por  $T_A$ , então  $T_A^{-1}$  leva  $w$  de volta em  $x$ . Agora nós estenderemos estas idéias a transformações lineares arbitrárias.

Lembre que se  $T: V \rightarrow W$  é uma transformação linear, então a imagem de  $T$ , denotada por  $\text{Im}(T)$ , é o subespaço de  $W$  consistindo de todas as imagens por  $T$  de vetores em  $V$ . Se  $T$  é injetora, então cada vetor  $w$  em  $\text{Im}(T)$  é a imagem de um único vetor  $v$  em  $V$ . Esta unicidade nos permite definir uma nova função, chamada a transformação *inversa* de  $T$  e denotada por  $T^{-1}$ , que leva  $w$  de volta em  $v$  (Figura 8.3.1).



**Figura 8.3.1** A transformação inversa de  $T$  leva  $T(v)$  de volta em  $v$ .

Pode ser provado (Exercício 19) que  $T^{-1}: \text{Im}(T) \rightarrow V$  é uma transformação linear. Além disto, segue da definição de  $T^{-1}$  que

$$T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(w) = v \quad (2a)$$

$$T(T^{-1}(w)) = T(v) = w \quad (2b)$$

de modo que  $T$  e  $T^{-1}$ , aplicadas em sucessão e em qualquer ordem, cancelam uma o efeito da outra.

**OBSERVAÇÃO.** É importante notar que se  $T: V \rightarrow W$  é uma transformação linear injetora, então o domínio de  $T^{-1}$  é a *imagem* de  $T$ . A imagem pode ou não ser todo  $W$ . Contudo, no caso especial em que  $T: V \rightarrow V$  é um operador linear injetor de um espaço vetorial de dimensão finita, segue do Teorema 8.3.2 que  $\text{Im}(T) = V$ , ou seja., o domínio de  $T^{-1}$  é todo o espaço  $V$ .

### EXEMPLO 6 Uma Transformação Inversa

No Exemplo 2 nós mostramos que a transformação linear  $T: P_n \rightarrow P_{n+1}$  dada por

$$T(p) = T(p(x)) = xp(x)$$

é injetora; assim,  $T$  tem uma inversa. Aqui, a imagem de  $T$  não é todo o espaço  $P_{n+1}$ ; em vez disto,  $\text{Im}(T)$  é o subespaço de  $P_{n+1}$  consistindo dos polinômios com termo constante zero. Isto é evidente da fórmula para  $T$ :

$$T(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) = c_0x + c_1x^2 + \cdots + c_nx^{n+1}$$

Segue que  $T^{-1}: \text{Im}(T) \rightarrow P_n$  é dada pela fórmula

$$T^{-1}(c_0x + c_1x^2 + \cdots + c_nx^{n+1}) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

Por exemplo, no caso em que  $n \geq 3$ ,

$$T^{-1}(2x - x^2 + 5x^3 + 3x^4) = 2 - x + 5x^2 + 3x^3$$

### EXEMPLO 7 Uma Transformação Inversa

Seja  $T: R^3 \rightarrow R^3$  o operador linear definido pela fórmula

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + 3x_3, 5x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

Determine se  $T$  é injetora; se for, encontre  $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ .

*Solução.*

Pelo Teorema 4.3.3, a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(verifique). Esta matriz é invertível e pela Fórmula (1) da Seção 4.3, a matriz canônica de  $T^{-1}$  é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Segue que

$$T^{-1} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = [T^{-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3 \end{bmatrix}$$

Expressando este resultado em notação horizontal, obtemos

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 2x_2 - 3x_3, -11x_1 + 6x_2 + 9x_3, -12x_1 + 7x_2 + 10x_3) \quad \blacktriangleleft$$

O próximo teorema mostra que a composta de transformações lineares injetoras é injetora e relaciona a inversa da composta às inversas das transformações individuais.

### Teorema 8.3.3

Se  $T_1: U \rightarrow V$  e  $T_2: V \rightarrow W$  são transformações lineares injetoras, então:

(a)  $T_2 \circ T_1$  é injetora. (b)  $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ .

**Prova (a).** Nós queremos mostrar que  $T_2 \circ T_1$  leva vetores distintos em  $U$  em vetores distintos em  $W$ . Mas se  $u$  e  $v$  são vetores distintos em  $U$ , então  $T_1(u)$  e  $T_1(v)$  são vetores distintos em  $V$  pois  $T_1$  é injetora. Usando que  $T_2$  é injetora, isto implica que

$$T_2(T_1(u)) \neq T_2(T_1(v))$$

também são vetores distintos. No entanto, também podemos escrever estas expressões como

$$(T_2 \circ T_1)(u) \neq (T_2 \circ T_1)(v)$$

e portanto  $T_2 \circ T_1$  leva  $u$  e  $v$  em vetores distintos em  $W$ .

**Prova (b).** Nós queremos mostrar que

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(w) = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(w)$$

para cada vetor  $w$  na imagem de  $T_2 \circ T_1$ . Para isto, seja

$$\mathbf{u} = (T_2 \circ T_1)^{-1}(\mathbf{w})$$

de modo que nosso objetivo é mostrar que

$$\mathbf{u} = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(\mathbf{w})$$

Observe que (3) implica

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$$

ou, equivalentemente,

$$T_2(T_1(\mathbf{u})) = \mathbf{w}$$

Agora, aplicando  $T_2^{-1}$  em cada lado desta equação e depois aplicando  $T_1^{-1}$  a cada lado do resultado, obtemos (verifique)

$$\mathbf{u} = T_1^{-1}(T_2^{-1}(\mathbf{w}))$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{u} = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(\mathbf{w})$$

(3) inversa. Este resultado pode ser estendido a composições de três ou mais transformações lineares; por exemplo,

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1} \quad (4)$$

No caso especial em que  $T_A$ ,  $T_B$  e  $T_C$  são operadores matriciais em  $\mathbb{R}^n$ , a Fórmula (4) pode ser escrita como

$$(T_C \circ T_B \circ T_A)^{-1} = T_A^{-1} \circ T_B^{-1} \circ T_C^{-1}$$

ou, equivalentemente,

$$(T_{CBA})^{-1} = T_A^{-1} B^{-1} C^{-1} \quad (5)$$

Em palavras, esta fórmula afirma que a matriz canônica da inversa de uma composição de operadores é o produto das inversas das matrizes canônicas dos operadores individuais tomado na ordem inversa.

Alguns problemas que usam a Fórmula (5) são dados nos exercícios.

### Conjunto de Exercícios 8.3

1. Em cada parte, encontre  $\text{Nuc}(T)$  e determine se a transformação linear  $T$  é injetora.

(a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sendo  $T(x, y) = (y, x)$

(b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sendo  $T(x, y) = (0, 2x + 3y)$

(c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sendo  $T(x, y) = (x+y, x-y)$

(d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo  $T(x, y) = (x, y, x+y)$

(e)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo  $T(x, y) = (x-y, y-x, 2x-2y)$

(f)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sendo  $T(x, y, z) = (x+y+z, x-y-z)$

2. Em cada parte, seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a multiplicação por  $A$ . Determine se  $T$  tem uma inversa; se tiver, encontre

$$T^{-1} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)$$

(a)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$     (b)  $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$     (c)  $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a multiplicação por  $A$ . Determine se  $T$  tem uma inversa; se tiver, encontre

$$T^{-1} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)$$

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$     (b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$     (c)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$     (d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, determine se a multiplicação por  $A$  é uma transformação linear injetora.

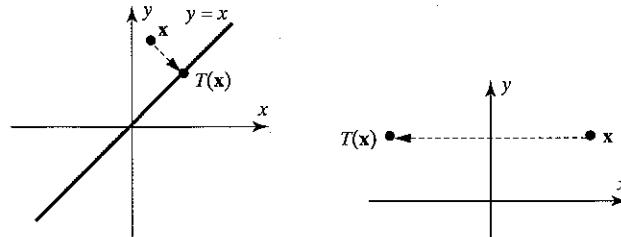
(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$     (b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$     (c)  $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

5. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção ortogonal sobre a reta  $y = x$  indicada na figura dada.

(a) Encontre o núcleo de  $T$ .    (b)  $T$  é injetor? Justifique sua conclusão.

6. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear, indicado na figura dada, que reflete cada ponto em torno do eixo  $y$ .

(a) Encontre o núcleo de  $T$ .    (b)  $T$  é injetor? Justifique sua conclusão.


**Figura Ex-5**
**Figura Ex-6**

7. Em cada parte, use a informação dada para determinar se a transformação linear  $T$  é injetora.
- $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $\text{nul}(T) = 0$
  - $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\text{pos}(T) = n - 1$
  - $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $n < m$
  - $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^n$
8. Em cada parte, determine se a transformação linear  $T$  é injetora.
- $T : P_2 \rightarrow P_3$ , sendo  $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$
  - $T : P_2 \rightarrow P_2$ , sendo  $T(p(x)) = p(x + 1)$
9. Seja  $A$  uma matriz quadrada tal que  $\det(A) = 0$ . A multiplicação por  $A$  é uma transformação linear injetora? Justifique sua conclusão.
10. Em cada parte, determine se o operador linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetor; se for, encontre  $T^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$
  - $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)$
  - $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$
11. Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o operador linear definido pela fórmula
- $$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n)$$
- Sob quais condições  $T$  tem uma inversa?
  - Supondo satisfeitas as condições determinadas na parte (a), encontre uma fórmula para  $T^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
12. Sejam  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  os operadores lineares dados pelas fórmulas
- $$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{e} \quad T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y)$$
- Mostre que  $T_1$  e  $T_2$  são injetores.
  - Encontre fórmulas para  $T_1^{-1}(x, y)$ ,  $T_2^{-1}(x, y)$  e  $(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y)$ .
  - Verifique que  $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ .
13. Sejam  $T_1 : P_2 \rightarrow P_3$  e  $T_2 : P_3 \rightarrow P_3$  as transformações lineares dadas pelas fórmulas
- $$T_1(p(x)) = x p(x) \quad \text{e} \quad T_2(p(x)) = p(x + 1)$$
- Encontre fórmulas para  $T_1^{-1}(p(x))$ ,  $T_2^{-1}(p(x))$  e  $(T_2 \circ T_1)^{-1}(p(x))$ .
  - Verifique que  $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ .
14. Sejam  $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $T_C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  as reflexões em torno dos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , respectivamente. Verifique a Fórmula (5) para estes operadores lineares.
15. Seja  $T : P_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida pela fórmula
- $$T(p(x)) = (p(0), p(1))$$
- Encontre  $T(1 - 2x)$ .
  - Mostre que  $T$  é uma transformação linear.
  - Mostre que  $T$  é injetora.
  - Encontre  $T^{-1}(2, 3)$  e esboce seu gráfico.
16. Prove: Se  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais de dimensão finita tais que  $\dim(V) < \dim(W)$ , então não existem transformações lineares injetoras  $T : V \rightarrow W$ .
17. Em cada parte, determine se o operador  $T : M_{22} \rightarrow M_{22}$  é injetor. Se for, encontre
- $$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$
- $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
18. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear dado pela fórmula  $T(x, y) = (x + ky, -y)$ . Mostre que  $T$  é injetor e que  $T^{-1} = T$ , para cada valor real de  $k$ .
19. Prove que se  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear injetora, então  $T^{-1} : \text{Im}(T) \rightarrow V$  é uma transformação linear.
20. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Seja  $J : P_1 \rightarrow \mathbb{R}$  a transformação de integração  $J(p) = \int_{-1}^1 p(x) dx$ . Determine se  $J$  é injetora. Justifique sua conclusão.
21. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Sejam  $V$  o espaço vetorial  $C^1[0, 1]$  e  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(f) = f(0) + 2f'(0) + 3f'(1)$ . Verifique que  $T$  é uma transformação linear. Determine se  $T$  é injetora. Justifique sua conclusão.

## Discussão e Descoberta

22. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- Se  $T: R^2 \rightarrow R^2$  é a projeção ortogonal sobre o eixo  $x$ , então  $T^{-1}: R^2 \rightarrow R^2$  leva cada ponto do eixo  $x$  sobre uma reta que é perpendicular ao eixo  $x$ .
  - Se  $T_1: U \rightarrow V$  e  $T_2: V \rightarrow W$  são transformações lineares e se  $T_1$  não é injetora, então tampouco  $T_2 \circ T_1$  é injetora.
  - No plano  $xy$ , uma rotação em torno da origem seguida por uma reflexão em torno de um eixo coordenado é injetora.
23. Você acredita que a fórmula  $T(a, b, c) = ax^2 + bx + c$  define uma transformação linear injetora de  $R^3$  em  $P_2$ ? Explique seu raciocínio.
24. Seja  $E$  uma matriz elementar  $2 \times 2$  fixada. Você acredita que a fórmula  $T(A) = EA$  define um operador linear injetor de  $M_{22}$ ? Explique seu raciocínio.
25. Seja  $a$  um vetor fixado em  $R^3$ . Você acredita que a fórmula  $T(v) = a \times v$  define um operador linear injetor de  $R^3$ ? Explique seu raciocínio.

## 8.4 MATRIZES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES ARBITRÁRIAS

Nesta seção nós iremos mostrar que se  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais de dimensão finita (não necessariamente  $R^n$  e  $R^m$ ) então, com um pouco de criatividade, qualquer transformação linear  $T: V \rightarrow W$  pode ser considerada como uma transformação matricial. A ideia básica é trabalhar com matrizes de coordenadas dos vetores em vez dos próprios vetores.

**Matrizes de Transformações Lineares** Suponha que  $V$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional e  $W$  é um espaço vetorial  $m$ -dimensional. Se nós escolhermos bases  $B$  e  $B'$  para  $V$  e  $W$ , respectivamente, então para  $\mathbf{x}$  em  $V$  a matriz de coordenadas  $[\mathbf{x}]_B$  será um vetor em  $R^n$  e a matriz de coordenadas  $[T(\mathbf{x})]_{B'}$  será um vetor em  $R^m$  (Figura 8.4.1).

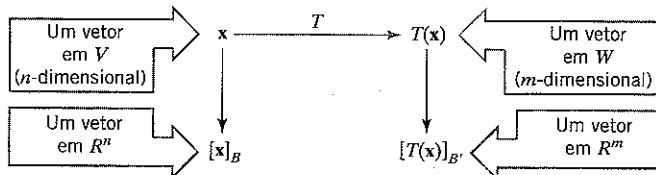


Figura 8.4.1

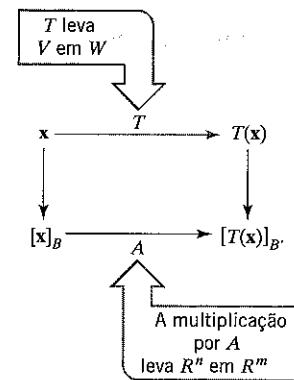


Figura 8.4.2

Como ilustramos na Figura 8.4.2, se nós completarmos o retângulo sugerido pela Figura 8.4.1, obteremos uma transfor-

mação de  $R^n$  em  $R^m$ , que podemos mostrar ser linear. Se denotarmos a matriz canônica desta transformação por  $A$ , então

$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'} \quad (1)$$

A matriz  $A$  em (1) é chamada a *matriz de  $T$  em relação às bases  $B$  e  $B'$* .

Adiante nesta seção, nós veremos alguns dos usos da matriz  $A$  em (1), mas antes vejamos como ela pode ser calculada. Para este fim, sejam  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  uma base do espaço vetorial  $n$ -dimensional  $V$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$  uma base do espaço vetorial  $m$ -dimensional  $W$ . Nós estamos procurando uma matriz  $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tal que (1) vale para todos os vetores  $\mathbf{x}$  em  $V$ . Em particular, nós queremos que esta equação valha para os vetores de base  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ , ou seja,

$$A[\mathbf{u}_1]_B = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, \quad A[\mathbf{u}_2]_B = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}, \dots, \quad A[\mathbf{u}_n]_B = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \quad (2)$$

Mas

$$[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad [\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} A[\mathbf{u}_1]_B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \\ A[\mathbf{u}_2]_B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A[\mathbf{u}_n]_B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados em (2) dá

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}, \dots, \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}$$

o que mostra que as colunas sucessivas de  $A$  são as matrizes de coordenadas de  $T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \dots, T(\mathbf{u}_n)$

$$T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \dots, T(\mathbf{u}_n)$$

em relação à base  $B'$ . Assim, a matriz de  $T$  em relação às bases  $B$  e  $B'$  é

$$A = [[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} | [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} | \cdots | [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}] \quad (3)$$

Costuma-se denotar esta matriz pelo símbolo

$$[T]_{B', B}$$

de modo que a Fórmula (3) acima também pode ser escrita como

$$[T]_{B', B} = [[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} | [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} | \cdots | [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}] \quad (4)$$

e, por (1), esta matriz tem a propriedade

$$[T]_{B', B}[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'} \quad (4a)$$

**OBSERVAÇÃO.** Observe que o subscrito da direita na notação  $[T]_{B', B}$  é a base do domínio de  $T$  e o subscrito da esquerda é a base do contradomínio de  $T$  (Figura 8.4.3). Além disto, observe como o subscrito  $B$  parece “cancelar” na Fórmula (4a) (Figura 8.4.4).

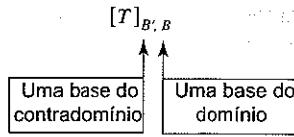


Figura 8.4.3

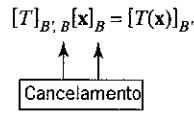


Figura 8.4.4

**Matrizes de Operadores Lineares** No caso especial em que  $V = W$  (e portanto  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear) é usual tomar  $B = B'$  para construir a matriz de  $T$ . Neste caso, a matriz resultante é chamada a *matriz de  $T$  em relação à base  $B$*  e é usualmente denotada por  $[T]_B$  em vez de  $[T]_{B,B}$ . Se  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ , então neste caso as Fórmulas (4) e (4a) passam a ser

$$[T]_B = [[T(\mathbf{u}_1)]_B | [T(\mathbf{u}_2)]_B | \cdots | [T(\mathbf{u}_n)]_B] \quad (5)$$

e

$$[T]_B[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_B \quad (5a)$$

Dito informalmente, (4a) e (5a) afirmam que a *matriz de coordenadas de  $T(\mathbf{x})$*  é a *matriz de  $T$  vezes a matriz de coordenadas de  $\mathbf{x}$* .

### EXEMPLO 1 A Matriz de uma Transformação Linear

Seja  $T : P_1 \rightarrow P_2$  a transformação linear definida por

$$T(p(x)) = xp(x)$$

Encontre a matriz de  $T$  em relação às bases canônicas

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{e} \quad B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

onde

$$\mathbf{u}_1 = 1, \mathbf{u}_2 = x; \mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = x, \mathbf{v}_3 = x^2$$

*Solução.*

Pela fórmula dada para  $T$ , obtemos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= T(1) = (x)(1) = x \\ T(\mathbf{u}_2) &= T(x) = (x)(x) = x^2 \end{aligned}$$

Por inspeção, nós podemos determinar as matrizes de coordenadas de  $T(\mathbf{u}_1)$  e  $T(\mathbf{u}_2)$  em relação a  $B'$ ; elas são

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de  $T$  em relação a  $B$  e  $B'$  é

$$[T]_{B', B} = [[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} | [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### EXEMPLO 2 Verificando a Fórmula (4a)

Seja  $T : P_1 \rightarrow P_2$  a transformação linear no Exemplo 1. Mostre que a matriz

$$[T]_{B', B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(obtida no Exemplo 1) satisfaz (4a) para cada vetor  $\mathbf{x} = a + bx$  em  $P_1$ .

*Solução.*

Como  $\mathbf{x} = p(x) = a + bx$  em  $P_1$ , temos

$$T(\mathbf{x}) = xp(x) = ax + bx^2$$

Com as bases  $B$  e  $B'$  do Exemplo 1, segue por inspeção que

$$[\mathbf{x}]_B = [a + bx]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(\mathbf{x})]_{B'} = [ax + bx^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_{B', B}[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

e portanto vale (4a).

**EXEMPLO 3 A Matriz de uma Transformação Linear:**

Seja  $T : R^2 \rightarrow R^3$  a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{bmatrix}$$

Encontre a matriz da transformação  $T$  em relação às bases  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $R^2$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  de  $R^3$ , onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução.

Pela fórmula dada para  $T$ ,

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Expressando estes vetores como combinações lineares de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ , nós obtemos (verifique)

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3, \quad T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

Assim,

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$[T]_{B',B} = [[T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

**EXEMPLO 4 Verificando a Fórmula (5a)**

Seja  $T : R^2 \rightarrow R^2$  o operador linear definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

e seja  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  a base de  $R^2$  dada por

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre  $[T]_B$ .

(b) Mostre que vale (5a) para cada vetor  $\mathbf{x}$  em  $R^2$ .

Solução (a). Pela fórmula dada para  $T$ ,

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_1, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{u}_2$$

Portanto,

$$[T(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente,

$$[T]_B = [[T(\mathbf{u}_1)]_B | [T(\mathbf{u}_2)]_B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução (b). Se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

é um vetor qualquer em  $R^2$ , então, pela fórmula dada para  $T$ ,

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Para encontrar  $[\mathbf{x}]_B$  e  $[T(\mathbf{x})]_B$ , nós devemos expressar (6) e (7) como combinações lineares de  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ . Isto fornece as equações vetoriais

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Equacionando as entradas correspondentes, resultam os sistemas lineares

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= x_1 \\ k_1 + 2k_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (10)$$

e

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= x_1 + x_2 \\ c_1 + 2c_2 &= -2x_1 + 4x_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Resolvendo (10) para  $k_1$  e  $k_2$ , obtemos

$$k_1 = 2x_1 - x_2, \quad k_2 = -x_1 + x_2$$

de modo que

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

e resolvendo (11) para  $c_1$  e  $c_2$ , obtemos

$$c_1 = 4x_1 - 2x_2, \quad c_2 = -3x_1 + 3x_2$$

de modo que

$$[T(\mathbf{x})]_B = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_B [\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_B$$

e portanto vale (5a).

**Matrizes de Operadores Identidade**
**EXEMPLO 5 Matrizes de Operadores Identidade**

Se  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  é uma base de um espaço vetorial de dimensão finita  $V$  e se  $I : V \rightarrow V$  é o operador identidade de  $V$ , então

$$I(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, \quad I(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2, \dots, \quad I(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$$

Segue-se que

$$[I(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [I(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad [I(\mathbf{u}_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Conseqüentemente, a matriz do operador identidade em relação a uma base qualquer é a matriz identidade  $n \times n$ . Este resultado poderia ter sido antecipado da Fórmula (5a), pois esta fórmula fornece

$$[I]_B[\mathbf{x}]_B = [I(\mathbf{x})]_B = [\mathbf{x}]_B$$

que é consistente com  $[I]_B = I$ . ♦

Nós deixamos a prova do seguinte resultado como um exercício.

### Teorema 8.4.1

*Se  $T : R^n \rightarrow R^m$  é uma transformação linear e se  $B$  e  $B'$  são as bases canônicas de  $R^n$  e  $R^m$ , respectivamente, então*

$$[T]_{B',B} = [T] \quad (12)$$

Este teorema nos diz que no caso especial em que  $T$  leva  $R^n$  em  $R^m$ , a matriz de  $T$  em relação às bases canônicas é a matriz canônica de  $T$ . Neste caso especial, a Fórmula (4a) desta seção reduz-se a

$$[T]\mathbf{x} = T(\mathbf{x})$$

**Por que as Matrizes de Transformações Lineares são Importantes** Existem duas razões básicas para estudar matrizes de transformações lineares arbitrárias, uma teórica e a outra bastante prática:

- Muitas vezes as respostas a questões teóricas sobre a estrutura de transformações lineares arbitrárias em espaços vetoriais de dimensão finita podem ser obtidas simplesmente estudando as transformações matriciais. Este assunto é considerado em detalhe em textos mais avançados de Álgebra Linear, mas um pouco disto será tratado adiante.
- Estas matrizes tornam possível calcular as imagens de vetores usando multiplicação matricial. Estes cálculos podem ser efetuados rapidamente em computadores.

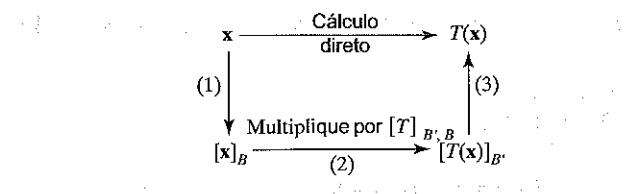


Figura 8.4.5

Para concentrar no segundo motivo, seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Como indicamos na Figura 8.4.5, a matriz  $[T]_{B',B}$  pode ser usada para calcular  $T(\mathbf{x})$  em três passos pelo seguinte procedimento *indireto*:

- (1) Calcule a matriz de coordenadas  $[\mathbf{x}]_B$ .
- (2) Multiplique  $[\mathbf{x}]_B$  à direita por  $[T]_{B',B}$  para obter  $[T(\mathbf{x})]_{B'}$ .
- (3) Reconstrua  $T(\mathbf{x})$  a partir de sua matriz de coordenadas  $[T(\mathbf{x})]_{B'}$ .

### EXEMPLO 6 Um Operador Linear de $P_2$

Seja  $T : P_2 \rightarrow P_2$  o operador linear definido por

$$T(p(x)) = p(3x - 5)$$

ou seja,  $T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(3x - 5) + c_2(3x - 5)^2$ .

- (a) Encontre  $[T]_B$  em relação à base  $B = \{1, x, x^2\}$ .
- (b) Use o procedimento indireto para calcular  $T(1 + 2x + 3x^2)$ .
- (c) Confira o resultado em (b) calculando  $T(1 + 2x + 3x^2)$  diretamente.

*Solução (a).* Pela fórmula de  $T$ ,

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 3x - 5, \quad T(x^2) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

de modo que

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

*Solução (b).* A matriz de coordenadas do vetor  $\mathbf{p} = 1 + 2x + 3x^2$

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Assim, por (5a),

$$[T(1 + 2x + 3x^2)]_B = [T(\mathbf{p})]_B = [T]_B[\mathbf{p}]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -84 \\ 27 \end{bmatrix}$$

do que segue

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 66 - 84x + 27x^2$$

*Solução (c).* Por cálculo direto,

$$\begin{aligned} T(1 + 2x + 3x^2) &= 1 + 2(3x - 5) + 3(3x - 5)^2 \\ &= 1 + 6x - 10 + 27x^2 - 90x + 75 \\ &= 66 - 84x + 27x^2 \end{aligned}$$

o que confere com o resultado obtido em (b). ♦

**Matrizes de Compostas e de Inversas** Agora nós mencionaremos dois teoremas que generalizam a Fórmula (21) da Seção 4.2 e a Fórmula (1) da Seção 4.3. As provas são omitidas.

### Teorema 8.4.2

Se  $T_1 : U \rightarrow V$  e  $T_2 : V \rightarrow W$  são transformações lineares e se  $B, B''$  e  $B'$  são bases de  $U, V$  e  $W$ , respectivamente, então

$$[T_2 \circ T_1]_{B', B} = [T_2]_{B'', B} \cdot [T_1]_{B'', B} \quad (13)$$

### Teorema 8.4.3

Se  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear e se  $B$  é uma base de  $V$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $T$  é injetor.
- (b)  $[T]_B$  é invertível.

Além disto, se valerem estas condições equivalentes, então

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1} \quad (14)$$

$$\begin{matrix} [T_2 \circ T_1]_{B', B} = [T_2]_{B'', B''} \cdot [T_1]_{B'', B} \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ \text{Cancelamento} \end{matrix}$$

Figura 8.4.6

**OBSERVAÇÃO.** Observe como, em (13), o subscrito interno  $B''$  (a base do espaço intermediário  $V$ ) parece “cancelar,” deixando como subscritos somente as bases do domínio e do contradomínio da composta (Figura 8.4.6). Este cancelamento de subscritos internos sugere a seguinte extensão da Fórmula (13) da composição de três transformações lineares (Figura 8.4.7).

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1]_{B', B} = [T_3]_{B', B''} \cdot [T_2]_{B'', B'''} \cdot [T_1]_{B''', B} \quad (15)$$

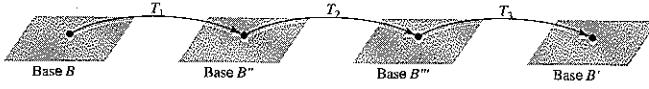


Figura 8.4.7

O próximo exemplo ilustra o Teorema 8.4.2.

### EXEMPLO 7 Usando o Teorema 8.4.2

Sejam  $T_1 : P_1 \rightarrow P_2$  a transformação linear definida por

$$T_1(p(x)) = xp(x)$$

e  $T_2 : P_2 \rightarrow P_2$  o operador linear definido por

$$T_2(p(x)) = p(3x - 5)$$

Então a composição  $(T_2 \circ T_1) : P_1 \rightarrow P_2$  é dada por

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (3x - 5)p(3x - 5)$$

Assim, se  $p(x) = c_0 + c_1x$ , então

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1x) &= (3x - 5)(c_0 + c_1(3x - 5)) \\ &= c_0(3x - 5) + c_1(3x - 5)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Neste exemplo,  $P_1$  faz o papel de  $U$  no Teorema 8.4.2 e  $P_2$  faz o papel de ambos  $V$  e  $W$ ; assim, podemos tomar  $B' = B''$  em (13) e portanto a fórmula simplifica a

$$[T_2 \circ T_1]_{B', B} = [T_2]_{B'} \cdot [T_1]_{B', B} \quad (17)$$

Para base de  $P_1$  escolhemos  $B = \{1, x\}$  e para base de  $P_2$  escolhemos  $B' = \{1, x, x^2\}$ . Nos Exemplos 1 e 6 nós mostramos que

$$[T_1]_{B', B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Assim, segue de (17) que

$$[T_2 \circ T_1]_{B', B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Para conferir, nós iremos calcular  $[T_2 \circ T_1]_{B', B}$  diretamente pela Fórmula (4). Como  $B = \{1, x\}$ , segue da Fórmula (4) com  $\mathbf{u}_1 = 1$  e  $\mathbf{u}_2 = x$  que

$$[T_2 \circ T_1]_{B', B} = [[(T_2 \circ T_1)(1)]_{B'} \mid [(T_2 \circ T_1)(x)]_{B'}] \quad (19)$$

Usando (16) obtemos

$$(T_2 \circ T_1)(1) = 3x - 5 \quad \text{e} \quad (T_2 \circ T_1)(x) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Como  $B' = \{1, x, x^2\}$ , isto implica que

$$[(T_2 \circ T_1)(1)]_{B'} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(T_2 \circ T_1)(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Substituindo em (19) resulta

$$[T_2 \circ T_1]_{B', B} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

que confere com (18). ♦

### Conjunto de Exercícios 8.4

1. Seja  $T : P_2 \rightarrow P_3$  a transformação linear definida por  $T(p(x)) = x p(x)$ .

(a) Encontre a matriz de  $T$  em relação às bases canônicas

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \text{ e } B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= 1, & \mathbf{u}_2 &= x, & \mathbf{u}_3 &= x^2 \\ \mathbf{v}_1 &= 1, & \mathbf{v}_2 &= x, & \mathbf{v}_3 &= x^2, & \mathbf{v}_4 &= x^3 \end{aligned}$$

## 278 • • • Álgebra Linear com Aplicações

(b) Mostre que a matriz  $[T]_{B',B}$  obtida na parte (a) satisfaz a Fórmula (4a) para qualquer vetor  $\mathbf{x} = c_0 + c_1x + c_2x^2$  em  $P_2$ .

2. Seja  $T: P_2 \rightarrow P_1$  a transformação linear definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

(a) Encontre a matriz de  $T$  em relação às bases canônicas  $B = \{1, x, x^2\}$  e  $B' = \{1, x\}$  de  $P_2$  e  $P_1$ .

(b) Mostre que a matriz  $[T]_{B',B}$  obtida na parte (a) satisfaz a Fórmula (4a) para qualquer vetor  $\mathbf{x} = c_0 + c_1x + c_2x^2$  em  $P_2$ .

3. Seja  $T: P_2 \rightarrow P_2$  o operador linear definido por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2$$

(a) Encontre a matriz de  $T$  em relação à base canônica  $B = \{1, x, x^2\}$  de  $P_2$ .

(b) Mostre que a matriz  $[T]_B$  obtida na parte (a) satisfaz a Fórmula (5a) para qualquer vetor  $\mathbf{x} = a_0 + a_1x + a_2x^2$  em  $P_2$ .

4. Seja  $T: R^2 \rightarrow R^2$  o operador linear definido por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

e seja  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  a base com

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre  $[T]_B$ .

(b) Mostre que a Fórmula (5a) vale para qualquer vetor  $\mathbf{x}$  em  $R^2$ .

5. Seja  $T: R^2 \rightarrow R^3$  definida por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre a matriz  $[T]_{B',B}$  em relação às bases  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Mostre que a Fórmula (4a) vale para qualquer vetor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

em  $R^2$ .

6. Seja  $T: R^3 \rightarrow R^3$  definido por  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_3)$ .

(a) Encontre a matriz de  $T$  em relação à base  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , onde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$$

(b) Mostre que a Fórmula (5a) vale para qualquer vetor  $(x_1, x_2, x_3)$  em  $R^3$ .

7. Seja  $T: P_2 \rightarrow P_2$  o operador linear definido por  $T(p(x)) = p(2x + 1)$ , ou seja,

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(2x + 1) + c_2(2x + 1)^2$$

(a) Encontre  $[T]_B$  em relação à base  $B = \{1, x, x^2\}$ .

(b) Use o procedimento indireto ilustrado na Figura 8.4.5 para calcular  $T(2 - 3x + 4x^2)$ .

(c) Confira o resultado obtido na parte (b) calculando  $T(2 - 3x + 4x^2)$  diretamente.

8. Seja  $T: P_2 \rightarrow P_3$  a transformação linear definida por  $T(p(x)) = xp(x - 3)$ , ou seja,

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = x(c_0 + c_1(x - 3) + c_2(x - 3)^2)$$

(a) Encontre  $[T]_{B',B}$  em relação às bases  $B = \{1, x, x^2\}$  e  $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ .

(b) Use o procedimento indireto ilustrado na Figura 8.4.5 para calcular  $T(1 + x - x^2)$ .

(c) Confira o resultado obtido na parte (b) calculando  $T(1 + x - x^2)$  diretamente.

9. Sejam  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$  e  $T: R^2 \rightarrow R^2$  o operador cuja matriz em relação à base  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre  $[T(\mathbf{v}_1)]_B$  e  $[T(\mathbf{v}_2)]_B$ .(b) Encontre  $T(\mathbf{v}_1)$  e  $T(\mathbf{v}_2)$ .(c) Encontre uma fórmula para  $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . (d) Use a fórmula obtida em (c) para calcular  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

10. Seja  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$  a matriz de  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  em relação às bases  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  e  $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ , onde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre  $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'}$ ,  $[T(\mathbf{v}_2)]_{B'}$ ,  $[T(\mathbf{v}_3)]_{B'}$  e  $[T(\mathbf{v}_4)]_{B'}$ .(b) Encontre  $T(\mathbf{v}_1)$ ,  $T(\mathbf{v}_2)$ ,  $T(\mathbf{v}_3)$  e  $T(\mathbf{v}_4)$ .(c) Encontre uma fórmula para  $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ .(d) Use a fórmula obtida em (c) para calcular  $T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

11. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$  a matriz de  $T: P_2 \rightarrow P_2$  em relação à base  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , onde

$$\mathbf{v}_1 = 3x + 3x^2, \mathbf{v}_2 = -1 + 3x + 2x^2, \mathbf{v}_3 = 3 + 7x + 2x^2.$$

(a) Encontre  $[T(\mathbf{v}_1)]_B$ ,  $[T(\mathbf{v}_2)]_B$  e  $[T(\mathbf{v}_3)]_B$ .(b) Encontre  $T(\mathbf{v}_1)$ ,  $T(\mathbf{v}_2)$  e  $T(\mathbf{v}_3)$ .(c) Encontre uma fórmula para  $T(a_0 + a_1x + a_2x^2)$ .(d) Use a fórmula obtida em (c) para calcular  $T(1 + x^2)$ .

12. Sejam  $T_1: P_1 \rightarrow P_2$  a transformação linear definida por

$$T_1(p(x)) = x p(x)$$

e  $T_2: P_2 \rightarrow P_2$  o operador linear definido por

$$T_2(p(x)) = p(2x + 1)$$

Sejam  $B = \{1, x\}$  e  $B' = \{1, x, x^2\}$  as bases canônicas de  $P_1$  e  $P_2$ .(a) Encontre  $[T_2 \circ T_1]_{B', B}$ ,  $[T_2]_{B', B}$  e  $[T_1]_{B', B}$ .

(b) Enuncie uma fórmula relacionando as matrizes na parte (a).

(c) Mostre que as matrizes na parte (a) satisfazem a fórmula enunciada na parte (b).

13. Sejam  $T_1: P_1 \rightarrow P_2$  a transformação linear definida por

$$T_1(c_0 + c_1x) = 2c_0 - 3c_1x$$

e  $T_2: P_2 \rightarrow P_3$  a transformação linear definida por

$$T_2(c_0 + c_1x + c_2x^2) = 3c_0x + 3c_1x^2 + 3c_2x^3$$

Sejam  $B = \{1, x\}$ ,  $B'' = \{1, x, x^2\}$  e  $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ .(a) Encontre  $[T_2 \circ T_1]_{B', B}$ ,  $[T_2]_{B'', B'}$  e  $[T_1]_{B'', B}$ .

(b) Enuncie uma fórmula relacionando as matrizes na parte (a).

(c) Mostre que as matrizes na parte (a) satisfazem a fórmula enunciada na parte (b).

14. Mostre que se  $T: V \rightarrow W$  é a transformação nula, então a matriz de  $T$  em relação a quaisquer bases de  $V$  e de  $W$  é a matriz zero.

15. Mostre que se  $T: V \rightarrow V$  é uma homotetia de  $V$  (Exemplo 4 da Seção 8.1), então a matriz de  $T$  em relação a qualquer base de  $V$  é um múltiplo escalar positivo da matriz identidade.

16. Seja  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$ . Encontre a matriz em relação a  $B$  do operador linear  $T: V \rightarrow V$  definido por  $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ ,  $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_4$ ,  $T(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_1$ .

17. Prove que se  $B$  e  $B'$  são as bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente, então a matriz de uma transformação linear  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  em relação às bases  $B$  e  $B'$  é a matriz canônica de  $T$ .

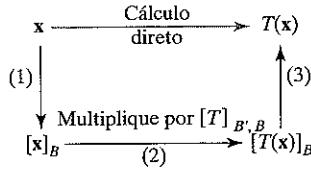
18. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Seja  $D: P_2 \rightarrow P_2$  o operador de derivação  $D(p) = p'(x)$ . Nas partes (a) e (b) encontre a matriz de  $D$  em relação à base  $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ .

(a)  $\mathbf{p}_1 = 1$ ,  $\mathbf{p}_2 = x$ ,  $\mathbf{p}_3 = x^2$

- (b)  $\mathbf{p}_1 = 2$ ,  $\mathbf{p}_2 = 2 - 3x$ ,  $\mathbf{p}_3 = 2 - 3x + 8x^2$   
 (c) Use a matriz da parte (a) para calcular  $D$  ( $6 - 6x + 24x^2$ ).  
 (d) Repita as instruções da parte (c) para a matriz da parte (b).
19. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Em cada parte,  $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$  é uma base de um subespaço  $V$  do espaço vetorial das funções reais definidas na reta real. Encontre a matriz do operador derivação  $D : V \rightarrow V$  em relação a  $B$ .
- (a)  $\mathbf{f}_1 = 1$ ,  $\mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x$ ,  $\mathbf{f}_3 = \cos x$       (b)  $\mathbf{f}_1 = 1$ ,  $\mathbf{f}_2 = e^x$ ,  $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$   
 (c)  $\mathbf{f}_1 = e^{2x}$ ,  $\mathbf{f}_2 = xe^{2x}$ ,  $\mathbf{f}_3 = x^2e^{2x}$       (d) Use a matriz da parte (c) para calcular  $D$  ( $4e^{2x} + 6xe^{2x} - 10x^2e^{2x}$ ).

## Discussão e Descoberta

20. Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear de um espaço vetorial  $V$  de dimensão quatro com base  $B$  em um espaço vetorial  $W$  de dimensão sete com base  $B'$ . Identifique os quatro espaços vetoriais que contêm os vetores dos vértices do diagrama dado.



21. Em cada parte, preencha a lacuna na equação.  
 (a)  $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{\underline{\quad},\underline{\quad}} [T_1]_{B'',B}$       (b)  $[T_3 \circ T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_3]_{\underline{\quad},\underline{\quad}} [T_2]_{B''',B''} [T_1]_{B'',B}$   
 22. Dê duas razões por que são importantes as matrizes de transformações lineares arbitrárias.

## 8.5 SEMELHANÇA

A matriz de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  depende da base selecionada para  $V$ . Um dos problemas fundamentais da Álgebra Linear é escolher uma base de  $V$  que torne a matriz de  $T$  tão simples quanto possível—por exemplo, uma matriz triangular ou diagonal. Nesta seção nós estudaremos este problema.

**Matrizes Simples de Operadores Lineares** As bases canônicas não necessariamente produzem as matrizes mais simples para os operadores lineares. Por exemplo, considere o operador linear  $T : R^2 \rightarrow R^2$  definido por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

e a base canônica  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  de  $R^2$ , onde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 8.4.1, a matriz de  $T$  em relação a esta base é a matriz canônica de  $T$ , ou seja,

$$[T]_B = [T] = [T(\mathbf{e}_1) | T(\mathbf{e}_2)]$$

Por (1),

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para comparar, lembre que no Exemplo 4 da Seção 8.4 nós mostramos que se

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

então a matriz de  $T$  em relação à base  $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  é a matriz diagonal

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Esta matriz é “mais simples” do que (2) por que as matrizes diagonais têm propriedades especiais que não são compartilhadas por matrizes arbitrárias.

Um dos principais temas em textos mais avançados de Álgebra Linear é o de determinar a forma “mais simples possível” que pode ser obtida para a matriz de um operador linear pela escolha apropriada da base. Às vezes é possível obter uma matriz diagonal (como acima, por exemplo); outras vezes devemos nos contentar com uma matriz triangular ou de alguma outra forma. Neste texto nós somente poderemos tocar levemente neste importante tópico.

O problema de encontrar uma base que produza a matriz mais simples possível de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  pode ser atacado encontrando primeiro uma matriz de  $T$  em relação a uma base *qualquer*, digamos, uma canônica, onde aplicável, e em seguida modificar a base de uma maneira que simplifique a matriz. Antes de continuar com esta idéia, convém rever alguns conceitos sobre mudança de bases.

Na Fórmula (8) na Seção 6.5, nós vimos que se os conjuntos  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  e  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$  são duas bases de um espaço vetorial  $V$ , então a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  é dada pela fórmula

$$P = [[\mathbf{u}'_1]_B | [\mathbf{u}'_2]_B | \cdots | [\mathbf{u}'_n]_B] \quad (5)$$

Esta matriz tem a seguinte propriedade: para cada vetor  $\mathbf{v}$  em  $V$ ,

$$P[\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{v}]_B \quad (6)$$

ou seja, a multiplicação por  $P$  leva a matriz de coordenadas de  $\mathbf{v}$  em relação à base  $B'$  na matriz de coordenadas de  $\mathbf{v}$  em relação à base  $B$  [veja a Fórmula (7) na Seção 6.5]. Nós mostramos no Teorema 6.5.4 que  $P$  é invertível e que  $P^{-1}$  é a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ .

O próximo teorema dá um ponto de vista alternativo útil sobre matrizes de transição: mostra que a matriz de transição de uma base  $B'$  para uma base  $B$  pode ser vista como a matriz de um operador identidade.

### Teorema 8.5.1

*Se  $B$  e  $B'$  são bases de um espaço vetorial de dimensão finita  $V$  e se  $I : V \rightarrow V$  é o operador identidade, então  $[I]_{B', B}$  é a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ .*

**Prova.** Suponha que  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  e  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$  são duas bases de  $V$ . Usando que  $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  para cada  $\mathbf{v}$  em  $V$ , segue da Fórmula (4) da Seção 8.4 com  $B$  e  $B'$  trocados que

$$\begin{aligned}[I]_{B', B} &= [[I(\mathbf{u}'_1)]_B \mid [I(\mathbf{u}'_2)]_B \mid \cdots \mid [I(\mathbf{u}'_n)]_B] \\ &= [[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B \mid \cdots \mid [\mathbf{u}'_n]_B]\end{aligned}$$

Assim, por (5), nós temos  $[I]_{B', B} = P$ , o que mostra que  $[I]_{B', B}$  é a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ . ■

O resultado deste teorema está ilustrado na Figura 8.5.1.

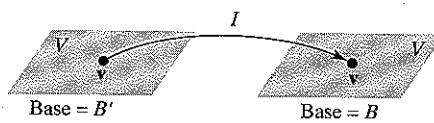


Figura 8.5.1  $[I]_{B', B}$  é a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ .

### O Efeito da Mudança de Bases nas Matrizes de Operadores Lineares

Agora nós estamos prontos para considerar o principal problema desta seção.

**Problema.** Se  $B$  e  $B'$  são duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita  $V$  e se  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear, qual é a relação, se houver alguma, entre as matrizes  $[T]_B$  e  $[T]_{B'}$ ?

A resposta a esta questão pode ser obtida considerando a composição dos três operadores lineares de  $V$  representados na Figura 8.5.2.

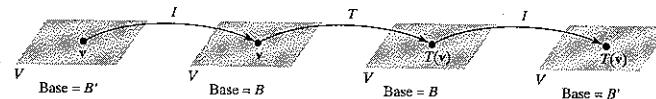


Figura 8.5.2

Nesta figura,  $\mathbf{v}$  é levado primeiro nele mesmo pelo operador identidade, em seguida  $\mathbf{v}$  é levado em  $T(\mathbf{v})$  por  $T$  e finalmente  $T(\mathbf{v})$  é levado nele mesmo pelo operador identidade. Todos os quatro espaços vetoriais envolvidos na composição são o mesmo (a saber,  $V$ ); contudo, as bases destes espaços variam.

Como o vetor de partida é  $\mathbf{v}$  e o de chegada é  $T(\mathbf{v})$ , esta composição coincide com  $T$ , ou seja,

$$T = I \circ T \circ I \quad (7)$$

Tomando a base  $B'$  nos espaços inicial e final e a base  $B$  nos dois espaços intermediários, como na Figura 8.5.2, segue de (7) e da Fórmula (15) da Seção 8.4 (com uma adaptação apropriada nos nomes das bases) que

$$[T]_{B', B'} = [I \circ T \circ I]_{B', B'} = [I]_{B', B}[T]_{B, B}[I]_{B, B'} \quad (8)$$

ou, em notação mais simples,

$$[T]_{B'} = [I]_{B', B}[T]_B[I]_{B, B'} \quad (9)$$

No entanto, segue do Teorema 8.5.1 que  $[I]_{B', B}$  é a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  e, consequentemente,  $[I]_{B', B}$  é a matriz de transição de  $B$  para  $B'$ . Assim, se nós escrevermos  $P = [I]_{B', B}$ , então  $P^{-1} = [I]_{B', B}$  e (9) pode ser escrito como

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

Resumindo, temos o seguinte teorema.

### Teorema 8.5.2

*Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear no espaço vetorial de dimensão finita  $V$  e sejam  $B$  e  $B'$  bases de  $V$ . Então*

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P \quad (10)$$

onde  $P$  é a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ .

**Advertência.** É fácil esquecer se  $P$  é a matriz de transição de  $B$  para  $B'$  (errado) ou de  $B'$  para  $B$  (correto) quando aplicamos o Teorema 8.5.2. Como indicamos na Figura 8.5.3, pode ajudar escrever (10) no formato de (9) e lembrar que os três subscritos “internos” são o mesmo e que os dois subscritos “externos” são o mesmo. Uma vez que você dominar o padrão mostrado nesta figura, você só precisa lembrar que  $P = [I]_{B', B}$  é a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  e que  $P^{-1} = [I]_{B', B}$  é a inversa.

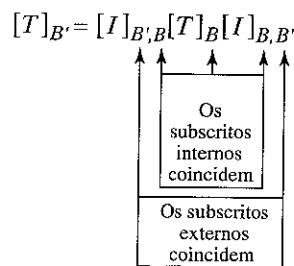


Figura 8.5.3

### EXEMPLO 1 Usando o Teorema 8.5.2

Seja  $T : R^2 \rightarrow R^2$  definido por

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Encontre a matriz de  $T$  em relação à base canônica  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  de  $R^2$  e então use o Teorema 8.5.2 para encontrar a matriz de  $T$  em relação à base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ , onde

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Nós já mostramos antes [veja (2)] que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Para encontrar  $[T]_{B'}$  a partir de (10), nós precisamos encontrar a matriz de transição

$$P = [I]_{B,B'} = [[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B]$$

[veja (5)]. Por inspeção,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}'_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

de modo que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O leitor pode conferir que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que, pelo Teorema 8.5.2, a matriz de  $T$  em relação à base  $B'$  é

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

o que confere com (4).

**Semelhança** A relação dada na Fórmula (10) é de tal importância que existe uma terminologia associada.

### Definição

Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas, dizemos que  $B$  é *semelhante* a  $A$  se existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$ .

**OBSERVAÇÃO.** Deixamos como exercício mostrar que se uma matriz  $B$  é semelhante a uma matriz  $A$  então necessariamente  $A$  é semelhante a  $B$ . Por isso, em geral dizemos simplesmente que  $A$  e  $B$  são *semelhantes*.

**Invariante de Semelhança** As matrizes semelhantes muitas vezes têm propriedades em comum; por exemplo, se  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes, então  $A$  e  $B$  têm o mesmo determinante. Para ver por que isto é assim, suponha que

$$B = P^{-1}AP$$

Então,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \det(A) \det(P) = \det(A) \end{aligned}$$

Nós introduzimos a seguinte definição.

### Definição

Dizemos que uma propriedade de matrizes quadradas é *invariante por semelhança* ou que a propriedade é um *invariante de semelhança*, se ela é compartilhada por quaisquer duas matrizes semelhantes.

Com esta terminologia, o determinante de uma matriz quadrada é invariante por semelhança. A Tabela 1 lista alguns invariantes de semelhança importantes. As provas de alguns dos resultados da Tabela 1 são dadas nos exercícios.

Pelo Teorema 8.5.2 segue que *são semelhantes duas matrizes representando o mesmo operador linear  $T$ :  $V \rightarrow V$  em relação a bases diferentes*. Assim, se  $B$  é uma base de  $V$  e a matriz  $[T]_B$  tem alguma propriedade invariante por semelhança, então a matriz  $[T]_{B'}$  tem a mesma propriedade, para qualquer base  $B'$ . Por exemplo, para quaisquer duas bases  $B$  e  $B'$  nós devemos ter

$$\det([T]_B) = \det([T]_{B'})$$

Segue desta equação que o valor do determinante depende de  $T$ , mas não da particular base que é utilizada para obter a matriz de  $T$ . Assim, o determinante pode ser considerado como numa propriedade do operador linear  $T$ ; de fato, se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita, então nós podemos *definir* o determinante do operador linear  $T$  por

$$\det(T) = \det([T]_B) \quad (11)$$

onde  $B$  é uma base qualquer de  $V$ .

### EXEMPLO 2 Determinante de um Operador Linear

Seja  $T : R^2 \rightarrow R^2$  definido por

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Encontre  $\det(T)$ .

*Solução.*

Nós podemos escolher uma base  $B$  qualquer e calcular  $\det([T]_B)$ . Se nós tomarmos a base canônica então, pelo Exemplo 1,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ de modo que } \det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

Se tivéssemos escolhido a base  $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  do Exemplo 1, então nós teríamos obtido

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ de modo que } \det(T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

em concordância com a conta anterior.

### EXEMPLO 3 Reflexão em Torno de uma Reta

Seja  $l$  a reta no plano  $xy$  que passa pela origem e que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  positivo, onde  $0 \leq \theta < \pi$ . Como ilustra a

TABELA 1 Invariante de Semelhança

Propriedade	Descrição
Determinante	$A$ e $P^{-1}AP$ têm o mesmo determinante.
Invertibilidade	$A$ é invertível se, e somente se, $P^{-1}AP$ é invertível.
Posto	$A$ e $P^{-1}AP$ têm o mesmo posto.
Nulidade	$A$ e $P^{-1}AP$ têm a mesma nulidade.
Traço	$A$ e $P^{-1}AP$ têm o mesmo traço.
Polinômio característico	$A$ e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinômio característico.
Autovalores	$A$ e $P^{-1}AP$ têm os mesmos autovalores
Dimensão de auto-espaco	Se $\lambda$ é um autovalor de $A$ e $P^{-1}AP$ , então o auto-espaco de $A$ associado a $\lambda$ e o auto-espaco de $P^{-1}AP$ associado a $\lambda$ têm a mesma dimensão.

Figura 8.5.4, seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear que leva cada vetor em sua reflexão em torno da reta  $l$ .

- (a) Encontre a matriz canônica de  $T$ .
- (b) Encontre a reflexão do vetor  $x = (1, 2)$  em torno da reta  $l$  pela origem que faz um ângulo  $\theta = \pi/6$  com o eixo  $x$  positivo.

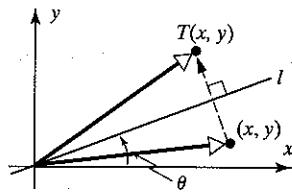


Figura 8.5.4

Solução (a). Nós poderíamos proceder como no Exemplo 6 da Seção 4.3 e tentar construir a matriz canônica a partir da fórmula

$$[T]_B = [T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)]$$

onde  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . No entanto, é mais fácil usar uma estratégia diferente: Em vez de encontrar  $[T]_B$  diretamente, nós vamos encontrar primeiro a matriz  $[T]_{B'}$ , onde

$$B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

é a base consistindo de um vetor unitário  $\mathbf{u}'_1$  ao longo de  $l$  e um vetor unitário  $\mathbf{u}'_2$  perpendicular a  $l$  (Figura 8.5.5).

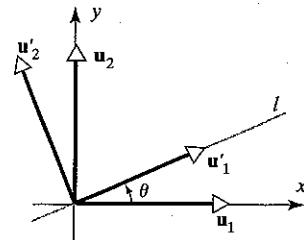


Figura 8.5.5

Uma vez encontrada  $[T]_{B'}$ , nós vamos efetuar uma mudança de bases para encontrar  $[T]_B$ . As contas são as seguintes:

$$T(\mathbf{u}'_1) = \mathbf{u}'_1 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{u}'_2) = -\mathbf{u}'_2$$

portanto

$$[T(\mathbf{u}'_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(\mathbf{u}'_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pelas contas feitas no Exemplo 6 da Seção 6.5, a matriz de transição de  $B'$  para  $B$  é

$$P = [[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Segue da Fórmula (10) que

$$[T]_B = P[T]_{B'} P^{-1}$$

Assim, por (12), a matriz canônica de  $T$  é

$$\begin{aligned}[T] &= P[T]_B P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

*Solução (b).* Segue da parte (a) que a fórmula para  $T$ , em notação matricial, é

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Substituindo  $\theta = \pi/6$  nesta fórmula dá

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e portanto

$$T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix}$$

Assim,  $T(1, 2) = (\frac{1}{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1)$ .

**Autovalores de um Operador Linear** Os autovalores e autovetores podem ser definidos tanto para operadores lineares quanto para matrizes. Um escalar  $\lambda$  é chamado um *autovalor* de um operador linear  $T: V \rightarrow V$  se existir um vetor não-nulo  $x$  em  $V$  tal que  $Tx = \lambda x$ . O vetor  $x$  é chamado um *autovetor* de  $T$  associado a  $\lambda$ . Equivalentemente, os autovetores de  $T$  associados a  $\lambda$  são os vetores não-nulos no núcleo de  $\lambda I - T$  (Exercício 15). Este núcleo é chamado o *auto-espacô* de  $T$  associado a  $\lambda$ .

Pode ser mostrado que se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita e  $B$  é uma base *qualquer* de  $V$ , então

1. Os autovalores de  $T$  são os mesmos que os autovalores de  $[T]_B$ .
2. Um vetor  $x$  é um autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$  se, e somente se, a matriz de coordenadas  $[x]_B$  é um autovetor de  $[T]_B$  associado a  $\lambda$ .

Nós omitimos as provas.

#### EXEMPLO 4 Autovalores e Bases de Auto-espacos

Encontre os autovalores e bases dos auto-espacos do operador linear  $T: P_2 \rightarrow P_2$  definido por

$$T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$$

*Solução.*

A matriz de  $T$  em relação à base canônica  $B = \{1, x, x^2\}$  é

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(verifique). Os autovalores de  $T$  são  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$ , pelo Exemplo 5 da Seção 7.1. Deste mesmo exemplo, sabemos que o auto-espaco de  $[T]_B$  associado a  $\lambda = 2$  tem a base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e o auto-espaco de  $[T]_B$  associado a  $\lambda = 1$  tem a base  $\{\mathbf{u}_3\}$ , onde

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  são as matrizes de coordenadas relativas a  $B$  de

$$\mathbf{p}_1 = -1 + x^2, \quad \mathbf{p}_2 = x, \quad \mathbf{p}_3 = -2 + x + x^2$$

Assim, o auto-espaco de  $T$  associado a  $\lambda = 2$  tem a base

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} = \{-1 + x^2, x\}$$

e o associado a  $\lambda = 1$  tem a base

$$\{\mathbf{p}_3\} = \{-2 + x + x^2\}$$

Para conferir, o leitor deveria usar a fórmula dada para  $T$  e verificar que  $T(\mathbf{p}_1) = 2\mathbf{p}_1$ ,  $T(\mathbf{p}_2) = 2\mathbf{p}_2$  e  $T(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_3$ .

#### EXEMPLO 5 Matriz Diagonal para um Operador Linear

Seja  $T: R^3 \rightarrow R^3$  o operador linear dado por

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

Encontre uma base de  $R^3$  em relação à qual a matriz de  $T$  é diagonal.

*Solução.*

Nós vamos encontrar primeiro a matriz canônica de  $T$ ; depois nós procuramos uma mudança de bases que diagonaliza a matriz canônica.

Se  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  denota a base canônica de  $R^3$ , então

$$T(\mathbf{e}_1) = T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de  $T$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Agora nós queremos mudar da base canônica  $B$  para uma nova base  $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  na qual a matriz de  $T$  é diagonal. Se  $P$  denota a matriz de transição da base desconhecida  $B'$  para a base canônica  $B$ , então, pelo Teorema 8.5.2, as matrizes  $[T]$  e  $[T]_{B'}$  estão relacionadas por

$$[T]_{B'} = P^{-1} [T] P \tag{14}$$

No Exemplo 1 da Seção 7.2 nós obtivemos que

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a matriz em (13). Como  $P$  representa a matriz de transição da base  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$  para a base canônica  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , as colunas de  $P$  são  $[\mathbf{u}'_1]$ ,  $[\mathbf{u}'_2]$  e  $[\mathbf{u}'_3]$ , de modo que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}'_3]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\mathbf{u}'_1 = (-1)\mathbf{e}_1 + (0)\mathbf{e}_2 + (1)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_2 = (0)\mathbf{e}_1 + (1)\mathbf{e}_2 + (0)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_3 = (-2)\mathbf{e}_1 + (1)\mathbf{e}_2 + (1)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são vetores de base que produzem uma matriz diagonal para  $[T]_{B'}$ . Para conferir, calculamos  $[T]_{B'}$  diretamente. Pela fórmula dada de  $T$ , temos

$$T(\mathbf{u}'_1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}'_1, \quad T(\mathbf{u}'_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}'_2, \quad T(\mathbf{u}'_3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[T(\mathbf{u}'_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}'_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}'_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_{B'} = [[T(\mathbf{u}'_1)]_{B'}, [T(\mathbf{u}'_2)]_{B'}, [T(\mathbf{u}'_3)]_{B'}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isto é consistente com (14), pois

$$\begin{aligned} P^{-1}[T]P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Conjunto de Exercícios 8.5

Nos Exercícios 1–7, encontre a matriz de  $T$  em relação a  $B$  e use o Teorema 8.5.2 para calcular a matriz de  $T$  em relação a  $B'$ .

1.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  é definida por

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ , onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  é definida por

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ , onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  é a rotação em torno da origem por  $45^\circ$ ;  $B$  e  $B'$  são as bases dadas no Exercício 1.

4.  $T: R^3 \rightarrow R^3$  é definida por

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

$B$  é a base canônica de  $R^3$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , onde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 286 • • • Álgebra Linear com Aplicações

5.  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a projeção ortogonal sobre o plano  $xy$ ;  $B$  e  $B'$  são como no Exercício 4.
6.  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $T(x) = 5x$ ;  $B$  e  $B'$  são as bases no Exercício 2.
7.  $T: P_1 \rightarrow P_1$  é definido por  $T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x+1)$ ;  $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$  e  $B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ , onde  $\mathbf{p}_1 = 6 + 3x$ ,  $\mathbf{p}_2 = 10 + 2x$ ,  $\mathbf{q}_1 = 2$ ,  $\mathbf{q}_2 = 3 + 2x$ .
8. Encontre  $\det(T)$ .
- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $T(x_1, x_2) = (3x_1 - 4x_2, -x_1 + 7x_2)$
  - $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$
  - $T: P_2 \rightarrow P_2$ , com  $T(p(x)) = p(x-1)$
9. Prove que as seguintes propriedades são invariantes por semelhança.
- posto
  - nulidade
  - invertibilidade
10. Seja  $T: P_4 \rightarrow P_4$  o operador linear dado pela fórmula  $T(p(x)) = p(2x+1)$ .
- Encontre a matriz para  $T$  em relação a uma base conveniente; depois use o Teorema 8.2.2 para encontrar o posto e a nulidade de  $T$ .
  - Use o resultado da parte (a) para determinar se  $T$  é injetor.
11. Em cada parte, encontre uma base de  $\mathbb{R}^2$  relativa à qual a matriz de  $T$  é diagonal.
- $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{bmatrix}$
12. Em cada parte, encontre uma base de  $\mathbb{R}^3$  relativa à qual a matriz de  $T$  é diagonal.
- $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 4x_3 \end{bmatrix}$
13. Seja  $T: P_2 \rightarrow P_2$  definido por
- $$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$$
- Encontre os autovalores de  $T$ .
  - Encontre bases dos auto-espacos de  $T$ .
14. Seja  $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$  definido por
- $$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$
- Encontre os autovalores de  $T$ .
  - Encontre bases dos auto-espacos de  $T$ .
15. Seja  $\lambda$  um autovalor de um operador linear  $T: V \rightarrow V$ . Prove que os autovetores associados a  $\lambda$  são os vetores não-nulos no núcleo de  $\lambda I - T$ .
16. Prove que se  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes, então  $A^2$  e  $B^2$  também são semelhantes. Mais geralmente, prove que  $A^k$  e  $B^k$  são semelhantes, para cada inteiro positivo  $k$ .
17. Sejam  $C$  e  $D$  matrizes  $m \times n$  e seja  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  uma base do espaço vetorial  $V$ . Mostre que se  $C[\mathbf{x}]_B = D[\mathbf{x}]_B$  para qualquer  $\mathbf{x}$  em  $V$ , então  $C = D$ .
18. Seja  $l$  uma reta no plano  $xy$  que passa pela origem e faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  positivo. Como ilustramos na figura dada, seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $l$ . Use o método do Exemplo 3 para mostrar que
- $$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

[Observação. Veja o Exemplo 6 da Seção 4.3.]

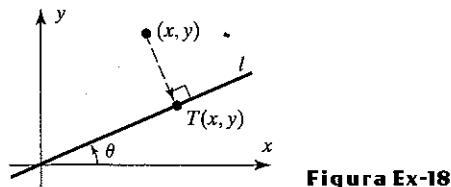


Figura Ex-18

## Discussão e Descoberta

19. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
- Uma matriz não pode ser semelhante a si mesmo.

- (b) Se  $A$  é semelhante a  $B$  e  $B$  é semelhante a  $C$ , então  $A$  é semelhante a  $C$ .  
 (c) Se  $A$  e  $B$  são semelhantes e  $B$  é singular, então  $A$  é singular.  
 (d) Se  $A$  e  $B$  são invertíveis e semelhantes, então  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$  são semelhantes.
20. Encontre duas matrizes  $2 \times 2$  que não são semelhantes e explique por que não são semelhantes.
21. Complete a prova dada preenchendo as lacunas com justificativas apropriadas.  
*Hipótese:*  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes.  
*Conclusão:*  $A$  e  $B$  têm o mesmo polinômio característico (e portanto os mesmos autovalores).
- Prova:*
- (1)  $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - P^{-1}AP)$  \_\_\_\_\_
  - (2)  $= \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP)$  \_\_\_\_\_
  - (3)  $= \det(P^{-1}(\lambda I - A)P)$  \_\_\_\_\_
  - (4)  $= \det(P^{-1}) \det(\lambda I - A) \det(P)$  \_\_\_\_\_
  - (5)  $= \det(P^{-1}) \det(P) \det(\lambda I - A)$  \_\_\_\_\_
  - (6)  $= \det(\lambda I - A)$  \_\_\_\_\_
22. Se  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes, digamos  $B = P^{-1}AP$ , então o Exercício 21 mostra que  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores. Suponha que  $\lambda$  é um destes autovalores comuns e que  $x$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$ . Veja se você consegue encontrar um autovetor de  $B$  associado a  $\lambda$ , expresso em termos de  $\lambda$ ,  $x$  e  $P$ .
23. Já que a base canônica de  $R^n$  é tão simples, por que quereríamos representar um operador linear de  $R^n$  em alguma outra base?

### Exercícios Suplementares do Capítulo 8

1. Sejam  $A$  uma matriz  $n \times n$ ,  $B$  uma matriz  $n \times 1$  não-nula e  $x$  um vetor em  $R^n$  expresso em notação matricial. Será  $T(x) = Ax + B$  um operador linear de  $R^n$ ? Justifique sua resposta.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$$

- (b) Adivinhe o formato da matriz  $A^n$ , para um inteiro positivo  $n$  qualquer.

- (c) Considerando o efeito geométrico da multiplicação  $T : R^2 \rightarrow R^2$  por  $A$ , obtenha geometricamente o resultado em (b).

3. Sejam  $v_0$  um vetor fixado em um espaço vetorial com produto interno  $V$  e  $T : V \rightarrow V$  definido por  $T(v) = \langle v, v_0 \rangle v_0$ . Mostre que  $T$  é um operador linear de  $V$ .

4. Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_m$  vetores fixados em  $R^n$  e  $T : R^n \rightarrow R^n$  a função definida por  $T(x) = (x \cdot v_1, x \cdot v_2, \dots, x \cdot v_m)$ , onde  $x \cdot v_i$  é o produto interno euclidiano em  $R^n$ .

- (a) Mostre que  $T$  é uma transformação linear.

- (b) Mostre que a matriz canônica de  $T$  tem  $v_1, v_2, \dots, v_m$  por vetores-coluna.

5. Sejam  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  a base canônica de  $R^4$  e  $T : R^4 \rightarrow R^3$  a transformação linear para a qual

$$T(e_1) = (1, 2, 1), \quad T(e_2) = (0, 1, 0),$$

$$T(e_3) = (1, 3, 0), \quad T(e_4) = (1, 1, 1)$$

- (a) Encontre bases para a imagem e o núcleo de  $T$ .

- (b) Encontre o posto e a nulidade de  $T$ .

6. Suponha que os vetores em  $R^3$  sejam escritos como matrizes  $1 \times 3$  e defina  $T : R^3 \rightarrow R^3$  por

$$T([x_1 \ x_2 \ x_3]) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre uma base para o núcleo de  $T$ .

- (b) Encontre uma base para a imagem de  $T$ .

7. Sejam  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$  e  $T : V \rightarrow V$  o operador linear para a qual

$$T(v_1) = v_1 + v_2 + v_3 + 3v_4$$

$$T(v_2) = v_1 - v_2 + 2v_3 + 2v_4$$

$$T(v_3) = 2v_1 - 4v_2 + 5v_3 + 3v_4$$

$$T(v_4) = -2v_1 + 6v_2 - 6v_3 - 2v_4$$

## 288 • • • Álgebra Linear com Aplicações

- (a) Encontre o posto e a nulidade de  $T$ .  
 (b) Determine se  $T$  é injetor.

8. Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais,  $T, T_1$  e  $T_2$  transformações lineares de  $V$  em  $W$  e  $k$  um escalar. Defina novas transformações  $T_1 + T_2$  e  $kT$  pelas fórmulas

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x})$$

$$(kT)(\mathbf{x}) = k(T(\mathbf{x}))$$

- (a) Mostre que  $T_1 + T_2 : V \rightarrow W$  e  $kT : V \rightarrow W$  são transformações lineares.  
 (b) Mostre que o conjunto de todas as transformações lineares de  $V$  em  $W$  com as operações dadas em (a) forma um espaço vetorial.

9. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes semelhantes. Prove:

- (a)  $A^T$  e  $B^T$  são semelhantes.  
 (b) Se  $A$  e  $B$  são invertíveis, então  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$  são semelhantes.

10. (*O Teorema da Alternativa de Fredholm*) Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear num espaço vetorial  $n$ -dimensional. Prove que vale exatamente uma das duas afirmações a seguir:

- (a) A equação  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  tem solução para qualquer vetor  $\mathbf{b}$  em  $V$ .  
 (b) A nulidade de  $T$  é positiva:  $\text{nul}(T) > 0$ .

11. Seja  $T : M_{22} \rightarrow M_{22}$  o operador linear definido por

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre o posto e a nulidade de  $T$ .

12. Prove: Se  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes e se  $B$  e  $C$  são matrizes semelhantes, então  $A$  e  $C$  são matrizes semelhantes.

13. Seja  $L : M_{22} \rightarrow M_{22}$  o operador linear definido por  $L(M) = M^T$ . Encontre a matriz de  $L$  em relação à base canônica de  $M_{22}$ .

14. Sejam  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  e  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  bases do espaço vetorial  $V$  e

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a matriz de transição de  $B'$  para  $B$ .

- (a) Expresse  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  como uma combinação linear de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ .  
 (b) Expresse  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  como uma combinação linear de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ .

15. Sejam  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  uma base do espaço vetorial  $V$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontre  $[T]_{B'}$ , onde  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é a base de  $V$  definida por

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

16. Mostre que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

são semelhantes, mas que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não são.

17. Suponha que  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear e que  $B$  é uma base de  $V$  tal que, para qualquer vetor  $\mathbf{x}$  em  $V$ ,

$$[T(\mathbf{x})]_B = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} \quad \text{se} \quad [\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Encontre  $[T]_B$ .

18. Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Prove que  $T$  é injetor se, e somente se,  $\det(T) \neq 0$ .

19. (*Para leitores que estudaram Cálculo*)

- (a) Mostre que se  $f = f(x)$ , então a função  $D : C^2(-\infty, \infty) \rightarrow F(-\infty, \infty)$  definida por  $D(f) = f''(x)$  é uma transformação linear.  
 (b) Encontre uma base do núcleo de  $D$ .  
 (c) Mostre que as funções que satisfazem a equação  $D(f) = f(x)$  formam um subespaço bidimensional de  $C^2(-\infty, \infty)$  e encontre uma base deste subespaço.

20. Seja  $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida pela fórmula

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre  $T(x^2 + 5x + 6)$ .
- (b) Mostre que  $T$  é uma transformação linear.
- (c) Mostre que  $T$  é injetora.
- (d) Encontre

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

- (e) Esboce o gráfico do polinômio na parte (d).

21. Sejam  $x_1, x_2$  e  $x_3$  números reais distintos tais que  $x_1 < x_2 < x_3$  e seja  $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida pela fórmula

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que  $T$  é uma transformação linear.
- (b) Mostre que  $T$  é injetora.
- (c) Verifique que se  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são quaisquer números reais, então

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x)$$

onde

$$P_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad P_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

- (d) Qual é a relação entre o gráfico da função  $a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x)$  e os pontos  $(x_1, a_1), (x_2, a_2)$  e  $(x_3, a_3)$ ?

22. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Sejam  $p(x)$  e  $q(x)$  funções contínuas e seja  $V$  o subespaço de  $C(-\infty, \infty)$  dado por todas funções que são duas vezes diferenciáveis. Defina  $L : V \rightarrow V$  por

$$L(y(x)) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$$

- (a) Mostre que  $L$  é uma transformação linear.
- (b) Considere o caso especial  $p(x) = 0$  e  $q(x) = 1$ . Mostre que a função  $\phi(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$  está no núcleo de  $L$  para quaisquer valores reais de  $c_1$  e  $c_2$ .

23. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Seja  $D : P_n \rightarrow P_n$  o operador de derivação  $D(p) = p'$ . Mostre que a matriz de  $D$  em relação à base  $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

24. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Pode ser mostrado que os vetores

$$1, x - c, \frac{(x - c)^2}{2!}, \dots, \frac{(x - c)^n}{n!}$$

formam uma base de  $P_n$ , qualquer que seja o número real  $c$  dado. Encontre a matriz do operador de derivação do Exercício 23 em relação a esta base.

25. (*Para leitores que estudaram Cálculo.*) Seja  $J : P_n \rightarrow P_{n+1}$  a transformação de integração definida por

$$J(\mathbf{p}) = \int (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

onde  $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ . Encontre a matriz de  $J$  em relação às bases canônicas de  $P_n$  e de  $P_{n+1}$ .

**Requisito: Recurso Computacional**

**Exercícios Computacionais do Capítulo 8**

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**Seção 8.5**

- T1. (*Invariante de semelhança*) Escolha uma matriz  $3 \times 3$  não-nula  $A$  e uma matriz  $3 \times 3$  invertível  $P$ . Calcule  $P^{-1}AP$  e confirme as afirmações na Tabela 1.

# Tópicos Adicionais

## Conteúdo do Capítulo

- 9.1 Aplicação a Equações Diferenciais
- 9.2 Geometria dos Operadores Lineares de  $R^2$
- 9.3 Ajuste de Mínimos Quadrados a Dados
- 9.4 Problemas de Aproximação; Séries de Fourier
- 9.5 Formas Quadráticas
- 9.6 Diagonalização de Formas Quadráticas; Seções Cônicas
- 9.7 Superfícies Quádráticas
- 9.8 Comparação dos Procedimentos para Resolver Sistemas Lineares
- 9.9 Decomposição LU

**INTRODUÇÃO:** Neste capítulo nós veremos como podemos aplicar alguns dos tópicos que estudamos nos capítulos anteriores a outras áreas da Matemática, como Equações Diferenciais e Geometria Analítica, e a tópicos como ajuste de curvas e séries de Fourier. Concluímos o capítulo retornando mais uma vez ao problema fundamental de resolver sistemas de equações lineares  $Ax = b$ . Desta vez nós resolvemos um sistema, não por mais um processo de eliminação, mas sim fatorando a matriz de coeficientes em duas matrizes triangulares distintas. Este é o método geralmente usado em programas de computador para resolver sistemas lineares de grande escala em aplicações do mundo real.

## 9.1 APLICAÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Muitas leis da Física, da Química, da Biologia, da Engenharia e da Economia são descritas em termos de equações diferenciais, ou seja, equações envolvendo funções e suas derivadas. O objetivo desta seção é ilustrar uma maneira na qual a Álgebra Linear pode ser aplicada a certos sistemas de equações diferenciais. O escopo desta seção é estreito, mas ilustra uma importante área de aplicação da Álgebra Linear.

**Terminologia** Uma das equações diferenciais mais simples é

$$y' = ay \quad (1)$$

onde  $y = f(x)$  é uma função desconhecida a ser determinada,  $y' = dy/dx$  é sua derivada e  $a$  é uma constante. Como a maioria das equações diferenciais, (1) tem infinitas soluções, que são as funções da forma

$$y = ce^{ax} \quad (2)$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária. Cada função desta forma é uma solução de  $y' = ay$ , pois

$$y' = cae^{ax} = ay$$

Reciprocamente, cada solução de  $y' = ay$  deve ser uma função da forma  $ce^{ax}$  (Exercício 5), de modo que (2) descreve todas as soluções de  $y' = ay$ . Nós dizemos que (2) é a *solução geral* de  $y' = ay$ .

Às vezes o problema físico que gera uma equação diferencial impõe algumas condições adicionais que nos permitem isolar uma *solução particular* da solução geral. Por exemplo, se nós queremos que a solução de  $y' = ay$  satisfaça a condição adicional

$$y(0) = 3 \quad (3)$$

ou seja, que  $y = 3$  quando  $x = 0$ , então substituindo estes valores na solução geral  $y = ce^{ax}$ , obteremos um valor para  $c$ , a saber,  $3 = ce^0 = c$ . Assim,

$$y = 3e^{ax}$$

é a única solução de  $y' = ay$  que satisfaz a condição adicional. Uma condição como (3), que especifica o valor da solução em um ponto, é chamada uma *condição inicial*, e o problema de resolver uma equação diferencial sujeita a uma condição inicial é chamado um *problema de valor inicial*.

**Sistemas Lineares de Equações de Primeira Ordem** Nesta seção nós nos ocuparemos com a resolução de sistemas de equações diferenciais da forma

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots && \vdots \\ y'_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$ , ...,  $y_n = f_n(x)$  são funções a determinar e os coeficientes  $a_{ij}$  são constantes. Em notação matricial, (4) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ou, mais concisamente,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

### EXEMPLO 1 Solução de um Sistema com Condição Inicial

(a) Escreva o seguinte sistema em forma matricial:

$$\begin{aligned} y'_1 &= 3y_1 \\ y'_2 &= -2y_2 \\ y'_3 &= 5y_3 \end{aligned}$$

(b) Resolva o sistema.

(c) Encontre uma solução do sistema que satisfaz as condições iniciais  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = 4$  e  $y_3(0) = -2$ .

*Solução (a).*

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ou

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

*Solução (b).* Como cada equação envolve só uma função incógnita, nós podemos resolver as equações individualmente. A partir de (2), nós obtemos

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{3x} \\ y_2 &= c_2 e^{-2x} \\ y_3 &= c_3 e^{5x} \end{aligned}$$

ou, em notação matricial,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix} \quad (6)$$

*Solução (c).* Pelas condições iniciais dadas, nós obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= y_1(0) = c_1 e^0 = c_1 \\ 4 &= y_2(0) = c_2 e^0 = c_2 \\ -2 &= y_3(0) = c_3 e^0 = c_3 \end{aligned}$$

de modo que a solução satisfazendo as condições iniciais é

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = 4e^{-2x}, \quad y_3 = -2e^{5x}$$

ou, em notação matricial,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix}$$

É fácil resolver o sistema no exemplo acima pois cada equação envolve somente uma função incógnita, e isto ocorre por que a matriz de coeficientes do sistema em (5) é diagonal. Mas como trabalhar com um sistema  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  no qual a matriz  $A$  não é diagonal? A idéia é simples: Tente fazer uma substituição de  $\mathbf{y}$  que forneça um novo sistema com uma matriz de coeficientes diagonal, resolva este novo sistema mais simples e então use a solução obtida para determinar a solução do sistema original.

O tipo de substituição que nós temos em mente é

$$\begin{aligned} y_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \cdots + p_{1n}u_n \\ y_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \cdots + p_{2n}u_n \\ &\vdots && \vdots \\ y_n &= p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n \end{aligned} \quad (7)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ ou, mais concisamente, } \mathbf{y} = P\mathbf{u}$$

Nesta substituição os coeficientes  $p_{ij}$  são constantes a determinar de tal modo que o novo sistema envolvendo as funções incógnitas  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tem uma matriz de coeficientes diagonal. Nós deixamos para o leitor derivar cada equação em (7) e deduzir

$$\mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$$

Se nós fizermos as substituições  $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$  no sistema original

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

e se nós supormos  $P$  invertível, obteremos

$$P\mathbf{u}' = A(P\mathbf{u})$$

ou

$$\mathbf{u}' = (P^{-1}AP)\mathbf{u} \text{ ou } \mathbf{u}' = D\mathbf{u}$$

onde  $D = P^{-1}AP$ . A escolha para  $P$  agora é clara: se nós quisermos que a nova matriz de coeficientes  $D$  seja diagonal, devemos escolher  $P$  como uma matriz que diagonaliza  $A$ .

**Solução por Diagonalização** A argumentação acima sugere o seguinte procedimento para resolver um sistema  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  com uma matriz de coeficientes diagonalizável  $A$ .

**Passo 1.** Encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza  $A$ .

**Passo 2.** Faça as substituições  $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$  para obter um novo “sistema diagonal”  $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$ , onde  $D = P^{-1}AP$ .

**Passo 3.** Resolva  $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$ .

**Passo 4.** Determine  $\mathbf{y}$  a partir da equação  $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ .

## EXEMPLO 2 Solução Usando Diagonalização

(a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + y_2 \\ y'_2 &= 4y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais  $y_1(0) = 1$  e  $y_2(0) = 6$ .

*Solução (a).* A matriz de coeficientes para o sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Como vimos na Seção 7.2, a matriz  $A$  é diagonalizável por qualquer matriz  $P$  cujas colunas são autovetores linearmente independentes de  $A$ . Como

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

os autovalores de  $A$  são  $\lambda = 2$  e  $\lambda = -3$ . Por definição,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$  se, e somente se,  $\mathbf{x}$  é uma solução não-trivial de  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , ou seja, de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se  $\lambda = 2$ , este sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema, obtemos  $x_1 = t$ ,  $x_2 = t$ , de modo que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do auto-espaco associado a  $\lambda = 2$ . Analogamente, o leitor pode mostrar que

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do auto-espaco associado a  $\lambda = -3$ . Assim,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza  $A$  e

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

A substituição

$$\mathbf{y} = P\mathbf{u} \text{ e } \mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$$

agora fornece o novo “sistema diagonal”

$$\mathbf{u}' = D\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \text{ ou } \begin{aligned} u'_1 &= 2u_1 \\ u'_2 &= -3u_2 \end{aligned}$$

Por (2), a solução deste sistema é

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 e^{2x} \\ u_2 &= c_2 e^{-3x} \end{aligned} \text{ ou } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

de modo que a equação  $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$  fornece a solução para  $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ y_2 &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned} \quad (8)$$

*Solução (b).* Se nós substituímos as condições iniciais dadas em (8), obtemos

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{1}{4} c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, nós obtemos  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 4$ , de modo

que, por (8), a solução satisfazendo as condições iniciais é

$$\begin{aligned} y_1 &= 2e^{2x} - e^{-3x} \\ y_2 &= 2e^{2x} + 4e^{-3x} \end{aligned}$$

Nesta seção nós supomos que a matriz de coeficientes de  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  é diagonalizável. Se isto não ocorrer, devemos usar outros métodos para resolver o sistema. Estes métodos são discutidos em textos mais avançados.

### Conjunto de Exercícios 9.1

1. (a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + 4y_2 \\ y'_2 &= 2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais  $y_1(0) = 0$  e  $y_2(0) = 0$ .

2. (a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + 3y_2 \\ y'_2 &= 4y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais  $y_1(0) = 2$  e  $y_2(0) = 1$ .

3. (a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y'_1 &= -4y_1 + y_3 \\ y'_2 &= -2y_1 + y_2 \\ y'_3 &= -2y_1 + y_3 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais  $y_1(0) = -1$ ,  $y_2(0) = 1$  e  $y_3(0) = 0$ .

4. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y'_1 &= 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y'_2 &= 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ y'_3 &= 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 \end{aligned}$$

5. Mostre que toda solução de  $y' = ay$  tem a forma  $y = ce^{ax}$ .

[*Sugestão.* Seja  $y = f(x)$  uma solução da equação e mostre que  $f'(x) e^{-ax}$  é uma função constante.]

6. Mostre que se  $A$  é diagonalizável e

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

satisfaz  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ , então cada  $y_i$  é uma combinação linear de  $e^{\lambda_1 x}$ ,  $e^{\lambda_2 x}$ , ...,  $e^{\lambda_n x}$ , onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $A$ .

7. Uma única equação diferencial pode ser resolvida escrevendo a equação como um sistema e usando o método desta seção. Para a equação diferencial  $y'' - y' - 6y = 0$ , mostre que as substituições  $y_1 = y$  e  $y_2 = y'$  levam ao sistema

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= 6y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Resolva este sistema e depois resolva a equação diferencial original.

8. Discuta: Como pode o procedimento do Exercício 7 ser usado para resolver a equação diferencial  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ ? Desenvolva suas idéias.

### Discussão e Descoberta

9. (a) Reescrevendo (8) em forma matricial, mostre que a solução do sistema no Exemplo 2 pode ser expressa como

$$\mathbf{y} = c_1 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3x} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta solução é chamada a *solução geral* do sistema.

- (b) Observe que na parte (a) o vetor no primeiro termo é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1 = 2$  e o vetor no segundo termo é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1 = -3$ . Isto é um caso especial do seguinte resultado geral:

### Teorema

*Se a matriz de coeficientes A do sistema  $y' = Ay$  em (4) é diagonalizável, então a solução geral do sistema pode ser expressa como*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \mathbf{x}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \mathbf{x}_n$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de A e  $\mathbf{x}_i$  é um autovetor de A associado a  $\lambda_i$ .

Prove este resultado seguindo o procedimento de quatro passos discutido na seção com

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n].$$

## 9.2 GEOMETRIA DOS OPERADORES LINEARES DE $R^2$

Na Seção 4.2 nós estudamos algumas das propriedades geométricas dos operadores lineares de  $R^2$  e  $R^3$ . Nesta seção nós iremos estudar operadores lineares de  $R^2$  com um pouco mais de profundidade. Algumas das idéias que serão desenvolvidas aqui têm importantes aplicações na área de computação gráfica.

**Vetores ou Pontos** Se  $T: R^2 \rightarrow R^2$  é o operador matricial cuja matriz canônica é

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

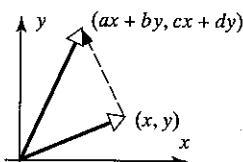
então

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \quad (1)$$

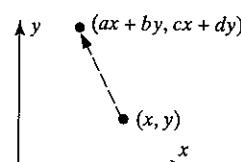
Existem duas interpretações geométricas igualmente boas desta fórmula. Nós podemos ver as entradas nas matrizes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

tanto como componentes de vetores quanto coordenadas de pontos. Com a primeira interpretação,  $T$  leva flechas em flechas e, com a segunda, pontos em pontos (Figura 9.2.1). A escolha é uma questão de gosto.



(a)  $T$  leva vetores em vetores



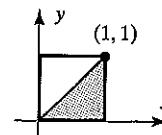
(b)  $T$  leva pontos em pontos

Figura 9.2.1

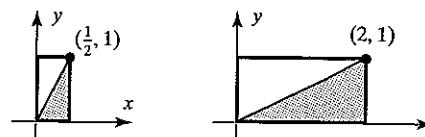
Nesta seção nós vamos ver operadores lineares de  $R^2$  como aplicações de pontos em pontos. Uma maneira eficaz de visualizar o comportamento de operadores lineares é observar seu efeito nos pontos de figuras simples do plano. Por exemplo, a Tabela 1 mostra o efeito de alguns operadores lineares básicos no quadrado unitário, que foi parcialmente colorido.

Na Seção 4.2 nós discutimos reflexões, projeções, rotações, contrações e dilatações. Agora nós consideraremos alguns outros operadores lineares básicos em  $R^2$ .

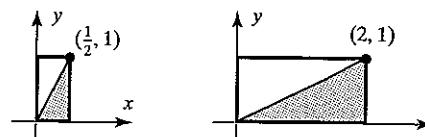
**Expansões e Compressões** Se a coordenada  $x$  de cada ponto no plano é multiplicada por uma constante positiva  $k$ , então o efeito é expandir ou comprimir cada figura plana na direção  $x$ . Se  $0 < k < 1$ , o resultado é uma compressão e se  $k > 1$ , uma expansão (Figura 9.2.2). Nós chamamos estes operadores de *compressão* (ou *expansão*) pelo fator  $k$  na direção  $x$ . Analogamente, se a coordenada  $y$  de cada ponto é multiplicada por uma constante positiva  $k$ , nós obtemos uma *compressão* (ou *expansão*) pelo fator  $k$  na direção  $y$ . Pode ser mostrado que expansões e compressões ao longo dos eixos coordenados são transformações lineares.



(a) Quadrado unitário



(b) (Compressão)  $k = 1/2$



(c) (Expansão)  $k = 2$

Figura 9.2.2

TABELA 1

Operador	Matriz Canônica	Efeito no Quadrado Unitário
Reflexão em torno do eixo $y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Reflexão em torno do eixo $x$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
Reflexão em torno da reta $y = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
Rotação anti-horária por um ângulo $\theta$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	

Se  $T: R^2 \rightarrow R^2$  é uma expansão ou compressão de fator  $k$  na direção  $x$ , então

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de  $T$  é

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, a matriz canônica da expansão ou compressão na direção  $y$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

### EXEMPLO 1 Operando com Matrizes Diagonais

Suponha que o plano  $xy$  é inicialmente comprimido ou expandido por um fator  $k_1$  na direção  $x$  e depois comprimido ou

expandido por um fator  $k_2$  na direção  $y$ . Encontre uma só matriz que efetua ambas operações.

Solução.

As matrizes canônicas das duas operações são

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

expansão (compressão) em  $x$       expansão (compressão) em  $y$

Assim, a matriz canônica da composta da operação em  $x$  seguida pela operação em  $y$  é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Isto mostra que a multiplicação por uma matriz diagonal  $2 \times 2$  expande ou comprime o plano na direção  $x$  e também na direção  $y$ . No caso especial em que  $k_1$  e  $k_2$  são iguais, digamos  $k_1 = k_2 = k$ , observe que (2) simplifica em

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

que é uma dilatação ou contração (Tabela 8 da Seção 4.2). ♦

**Cisalhamentos** Um *cisalhamento de fator k na direção x* é uma transformação que move cada ponto  $(x, y)$  paralelamente ao eixo  $x$  por uma quantia  $ky$  para a nova posição  $(x + ky, y)$ . Com uma tal transformação, os pontos do eixo  $x$  permanecem onde estão, pois  $y = 0$ . No entanto, à medida que nos afastamos do eixo  $x$ , aumenta a magnitude de  $y$ , de modo que os pontos mais longe do eixo  $x$  são movidos por uma distância maior do que os pontos mais perto do eixo (Figura 9.2.3).

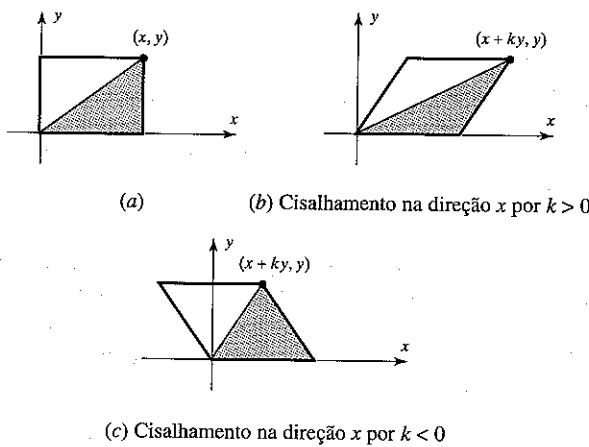


Figura 9.2.3

Um *cisalhamento de fator k na direção y* é uma transformação que move cada ponto  $(x, y)$  paralelamente ao eixo  $y$  por uma quantia  $kx$  para a nova posição  $(x, y + kx)$ . Com uma tal transformação, os pontos do eixo  $y$  permanecem onde estão e os pontos mais longe do eixo  $y$  são movidos por uma distância maior do que os pontos mais perto do eixo.

Pode ser mostrado que os cisalhamentos são transformações lineares. Se  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um cisalhamento por  $k$  na direção  $x$ , então

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de  $T$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, a matriz canônica para o cisalhamento por  $k$  na direção  $y$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

**OBSERVAÇÃO.** A multiplicação pela matriz identidade  $2 \times 2$  é o operador identidade de  $\mathbb{R}^2$ . Este operador pode ser visto como uma rotação por um ângulo de  $0^\circ$  ou um cisalhamento na direção tanto  $x$  quanto  $y$  e de fator  $k = 0$ , ou ainda como uma expansão ou compressão em  $x$  ou  $y$  de fator  $k = 1$ .

## EXEMPLO 2 Encontrando Transformações Matriciais

- Encontre a transformação matricial de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  que primeiro efetua um cisalhamento por 2 na direção  $x$  e depois uma reflexão em torno de  $y = x$ .
- Encontre a transformação matricial de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  que primeiro efetua uma reflexão em torno de  $y = x$  e depois um cisalhamento por 2 na direção  $x$ .

*Solução (a).* A matriz canônica do cisalhamento é

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e da reflexão é

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz canônica do cisalhamento seguido pela reflexão é

$$A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*Solução (b).* A reflexão seguida pelo cisalhamento é representada por

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

No último exemplo, observe que  $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$ , de modo que o efeito do cisalhamento seguido pela reflexão é diferente do efeito da reflexão seguida pelo cisalhamento. Isto é ilustrado geometricamente na Figura 9.2.4, onde mostramos o efeito destas transformações no quadrado unitário.

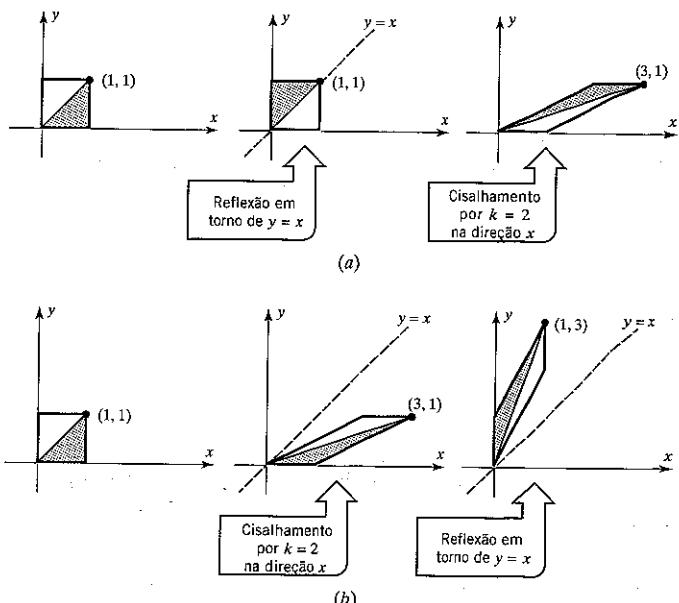


Figura 9.2.4

### EXEMPLO 3 Transformações Usando Matrizes Elementares

Mostre que se  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a multiplicação por uma matriz *elementar*, então a transformação é uma das seguintes:

- um cisalhamento na direção de um eixo coordenado
- uma reflexão em torno de  $y = x$
- uma compressão na direção de um eixo coordenado
- uma expansão na direção de um eixo coordenado
- uma reflexão em torno de um eixo coordenado
- uma compressão ou expansão na direção de um eixo coordenado seguida de uma reflexão em torno de um eixo coordenado.

*Solução.*

Como uma matriz elementar  $2 \times 2$  resulta da aplicação de uma única operação elementar sobre linhas na matriz identidade  $2 \times 2$ , ela deve ser de uma das seguintes formas (verifique):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

As primeiras duas matrizes representam cisalhamentos na direção de um eixo coordenado e a terceira uma reflexão em torno de  $y = x$ . Se  $k > 0$ , as duas últimas matrizes representam uma expansão ou uma compressão na direção de um eixo coordenado, dependendo se  $0 \leq k \leq 1$  ou  $k \geq 1$ . Se  $k < 0$  e se nós expressarmos  $k$  na forma  $k = -k_1$ , onde  $k_1 > 0$ , então as duas últimas matrizes podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Como  $k_1 > 0$ , o produto em (3) representa uma compressão ou expansão na direção  $x$  seguida de uma reflexão em torno do eixo  $y$  e (4) representa uma compressão ou expansão na direção  $y$  seguida de uma reflexão em torno do eixo  $x$ . No caso em que  $k = -1$ , as transformações (3) e (4) são simplesmente reflexões em torno do eixo  $y$  e  $x$ , respectivamente. ♦

As reflexões, rotações, expansões, compressões e cisalhamentos são todos operadores lineares injetores. Isto é evidente geometricamente, pois todos estes operadores levam pontos distintos em pontos distintos. Isto também pode ser conferido algebricamente verificando que as matrizes canônicas destes operadores são invertíveis.

### EXEMPLO 4 Uma transformação e sua Inversa

É intuitivamente claro que se nós comprirmos o plano  $xy$  por um fator  $\frac{1}{2}$  na direção  $y$  e então deveremos expandir o plano  $xy$  por um fator 2 na direção  $y$  para mover cada ponto de volta à sua posição original. Isto realmente ocorre, pois

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

representa uma compressão de fator  $\frac{1}{2}$  na direção  $y$  e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma expansão de fator 2 na direção  $y$ . ♦

**Propriedades Geométricas de Operadores Lineares de  $\mathbb{R}^2$**  Nós concluímos esta seção com dois teoremas que fornecem uma melhor percepção das propriedades geométricas dos operadores lineares de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Teorema 9.2.1

Se  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a multiplicação por uma matriz invertível  $A$ , então o efeito geométrico de  $T$  é o mesmo que uma sucessão apropriada de cisalhamentos, compressões, expansões e reflexões.

**Prova.** Por ser invertível,  $A$  pode ser reduzida à identidade por uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas. Uma operação elementar sobre linhas pode ser efetuada pela multiplicação à esquerda por uma matriz elementar, de modo que existem matrizes elementares  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tais que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

Resolvendo em  $A$ , obtemos

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I$$

ou, equivalentemente,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \quad (5)$$

Esta equação expressa  $A$  como um produto de matrizes elementares (já que a inversa de uma matriz elementar é também elementar, pelo Teorema 1.5.2). O resultado segue, agora, pelo Exemplo 3. ■

### EXEMPLO 5 O Efeito Geométrico da Multiplicação por uma Matriz

Supondo que  $k_1$  e  $k_2$  são positivos, expresse a matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

como um produto de matrizes elementares e descreva o efeito geométrico da multiplicação por  $A$  em termos de expansões e compressões.

*Solução.*

Pelo Exemplo 1 nós temos

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o que mostra que a multiplicação por  $A$  tem o efeito geométrico de primeiro expandir ou comprimir por um fator  $k_1$  na direção  $x$  e depois expandir ou comprimir por um fator  $k_2$  na direção  $y$ . ♦

### EXEMPLO 6 Analisando o Efeito Geométrico de uma Matriz

Expresse

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como um produto de matrizes elementares e então descreva o efeito geométrico da multiplicação por  $A$  em termos de cisalhamentos, expansões, compressões e reflexões.

*Solução.*

$A$  pode ser reduzida a  $I$  como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Some -3 vezes} \\ \text{a primeira} \\ \text{linha à segunda}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Multiplique a} \\ \text{segunda linha} \\ \text{por } -1/2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Some -2 vezes} \\ \text{a segunda linha} \\ \text{à primeira}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As três operações sobre linhas sucessivas podem ser efetuadas multiplicando à esquerda sucessivamente por

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertendo estas três matrizes e usando (5) obtemos

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lendo da direita para a esquerda e observando que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

segue que o efeito de multiplicar por  $A$  equivale a

- (1) um cisalhamento por 2 na direção  $x$ ,
- (2) seguido por uma expansão de fator 2 na direção  $y$ ,
- (3) seguida por uma reflexão em torno do eixo  $x$ ,
- (4) seguida por um cisalhamento por 3 na direção  $y$ . ♦

As provas e partes do seguinte teorema são discutidas nos exercícios.

### Teorema 9.2.2

#### Imagens de Retas

Se  $T: R^2 \rightarrow R^2$  é a multiplicação por uma matriz invertível, então:

- (a) A imagem de uma reta é uma reta.
- (b) A imagem de uma reta pela origem é uma reta pela origem.
- (c) As imagens de retas paralelas são retas paralelas.
- (d) A imagem do segmento de reta ligando  $P$  e  $Q$  é o segmento de reta ligando as imagens de  $P$  e  $Q$ .
- (e) As imagens de três pontos são colineares se, e somente se, os pontos são colineares.

OBSERVAÇÃO. Segue das partes (c), (d) e (e) que a multiplicação por uma matriz invertível  $2 \times 2$  leva triângulos em triângulos e paralelogramos em paralelogramos.

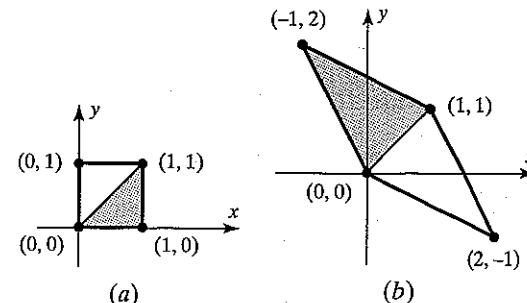


Figura 9.2.5

### EXEMPLO 7 Imagem de um Quadrado

O quadrado de vértices  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 0)$ ,  $P_3(1, 1)$  e  $P_4(0, 1)$  é chamado o **quadrado unitário**. Esboce a imagem do quadrado unitário pela multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Como

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a imagem do quadrado é um paralelogramo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(2, -1)$  e  $(1, 1)$  (Figura 9.2.5). ♦

### EXEMPLO 8 Imagem de uma Reta

De acordo com o Teorema 9.2.2, a matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

leva a reta  $y = 2x + 1$  numa outra reta. Encontre sua equação.

*Solução.*

Seja  $(x, y)$  um ponto da reta  $y = 2x + 1$  e seja  $(x', y')$  sua imagem pela multiplicação por  $A$ . Então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x &= x' - y' \\ y &= -2x' + 3y' \end{aligned}$$

Substituindo em  $y = 2x + 1$  obtemos

$$-2x' + 3y' = 2(x' - y') + 1 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y' = \frac{4}{3}x' + \frac{1}{5}$$

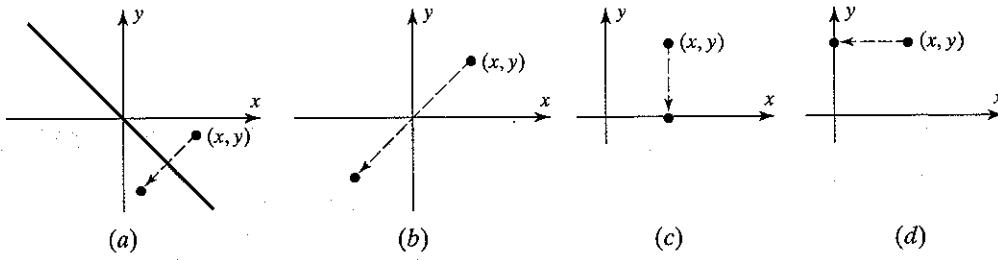
Assim,  $(x', y')$  satisfaz

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$$

que é a equação que queremos.

### Conjunto de Exercícios 9.2

1. Encontre a matriz canônica da transformação linear  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  do plano que leva um ponto  $(x, y)$  na sua (veja figura dada)
- reflexão em torno da reta  $y = -x$
  - reflexão pela origem
  - projeção ortogonal sobre o eixo  $x$
  - projeção ortogonal sobre o eixo  $y$



**Figura Ex-1**

2. Em cada parte do Exercício 1, use a matriz obtida para calcular  $T(2, 1)$ . Confira suas respostas geometricamente esboçando os pontos  $(2, 1)$  e  $T(2, 1)$ .
3. Encontre a matriz canônica do operador linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que leva um ponto  $(x, y, z)$  na sua
- reflexão em torno do plano  $xy$
  - reflexão em torno do plano  $xz$
  - reflexão em torno do plano  $yz$
4. Em cada parte do Exercício 3, use a matriz obtida para calcular  $T(1, 1, 1)$ . Confira suas respostas geometricamente esboçando os vetores  $(1, 1, 1)$  e  $T(1, 1, 1)$ .
5. Encontre a matriz canônica do operador linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que
- roda cada vetor  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno do eixo  $z$  (olhando ao longo do eixo  $z$  positivo na direção da origem)
  - roda cada vetor  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno do eixo  $x$  (olhando ao longo do eixo  $x$  positivo na direção da origem)
  - roda cada vetor  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno do eixo  $y$  (olhando ao longo do eixo  $y$  positivo na direção da origem)
6. Esboce a imagem do retângulo de vértices  $(0, 0), (1, 0), (1, 2)$  e  $(0, 2)$
- pela reflexão em torno do eixo  $x$
  - pela reflexão em torno do eixo  $y$
  - pela compressão por  $k = \frac{1}{4}$  na direção  $y$
  - pela expansão por  $k = 2$  na direção  $x$
  - pelo cisalhamento por  $k = 3$  na direção  $x$
  - pelo cisalhamento por  $k = 2$  na direção  $y$
7. Esboce a imagem do quadrado de vértices  $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$  e  $(0, 1)$  pela multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Encontre a matriz que gira um ponto  $(x, y)$  em torno da origem por
- $45^\circ$
  - $90^\circ$
  - $180^\circ$
  - $270^\circ$
  - $-30^\circ$
9. Encontre a matriz que efetua um cisalhamento
- por  $k = 4$  na direção  $y$
  - por  $k = -2$  na direção  $x$
10. Encontre a matriz que comprime ou expande
- por um fator  $\frac{1}{3}$  na direção  $y$
  - por um fator 6 na direção  $x$
11. Em cada parte, descreva o efeito geométrico da multiplicação pela matriz dada.

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Expresse a matriz dada como um produto de matrizes elementares e então descreva o efeito da multiplicação pela matriz em termos de compressões, expansões, reflexões e cisalhamentos.
- (a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$     (d)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$
13. Em cada parte, encontre uma única matriz que efetue a sucessão de operações indicadas.
- (a) A compressão por um fator  $\frac{1}{2}$  na direção  $x$  seguida da expansão por um fator 5 na direção  $y$ .  
 (b) A expansão por um fator 5 na direção  $y$  seguida do cisalhamento por 2 na direção  $y$ .  
 (c) A reflexão em torno da reta  $y = x$  seguida da rotação por um ângulo de  $180^\circ$  em torno da origem.
14. Em cada parte, encontre uma única matriz que efetue a sucessão de operações indicadas.
- (a) A reflexão em torno do eixo  $y$ , seguida da expansão por um fator 5 na direção  $x$ , seguida pela reflexão em torno da reta  $y = x$ .  
 (b) A rotação por um ângulo de  $30^\circ$  em torno da origem, seguida pelo cisalhamento por  $-2$  na direção  $y$ , seguido pela expansão por 3 na direção  $y$ .
15. Usando inversão matricial, mostre o seguinte:
- (a) A transformação inversa de uma reflexão em torno da reta  $y = x$  é a reflexão em torno da reta  $y = x$ .  
 (b) A transformação inversa de uma compressão na direção de um eixo é uma expansão na direção daquele eixo.  
 (c) A transformação inversa de uma reflexão em torno de um eixo coordenado é a reflexão em torno daquele eixo.  
 (d) A transformação inversa de um cisalhamento na direção de um eixo coordenado é um cisalhamento na direção daquele eixo.
16. Encontre a equação da imagem da reta  $y = -4x + 3$  pela multiplicação por
- $$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$
17. Nas partes (a) a (e), encontre a equação da imagem da reta  $y = 2x$
- (a) pelo cisalhamento por  $k = 3$  na direção  $x$     (b) pela compressão por  $k = \frac{1}{2}$  na direção  $y$   
 (c) pela reflexão em torno do eixo  $y = x$     (d) pela reflexão em torno do eixo  $y$   
 (e) pela rotação de  $60^\circ$  em torno da origem
18. Encontre a matriz do cisalhamento na direção  $x$  que transforma o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(3, 0)$  num triângulo retângulo com o ângulo reto na origem.
19. (a) Mostre que a multiplicação por
- $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$
- leva cada ponto no plano sobre a reta
- $y = 2x$
- .
- 
- (b) Segue de (a) que os pontos não colineares  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(-1, 0)$  são levados numa reta. Isto contradiz a parte (e) do Teorema 9.2.2?
20. Prove a parte (a) do Teorema 9.2.2. [Sugestão. Uma reta no plano tem uma equação da forma  $Ax + By + C = 0$ , onde  $A$  e  $B$  não são ambos zero. Use o método do Exemplo 8 para mostrar que a imagem desta reta sob multiplicação pela matriz invertível
- $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
- tem a equação
- $A'x + B'y + C = 0$
- , onde
- 
- $$A' = (dA - cB) / (ad - bc) \quad \text{e} \quad B' = (-bA + aB) / (ad - bc)$$
- Em seguida mostre que
- $A'$
- e
- $B'$
- não são ambos nulos para concluir que a imagem é uma reta.]
21. Use a sugestão do Exercício 20 para provar as partes (b) e (c) do Teorema 9.2.2.
22. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  descrito pela figura dada.
-

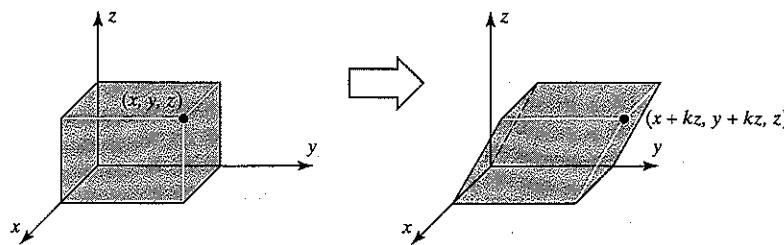


Figura Ex-23

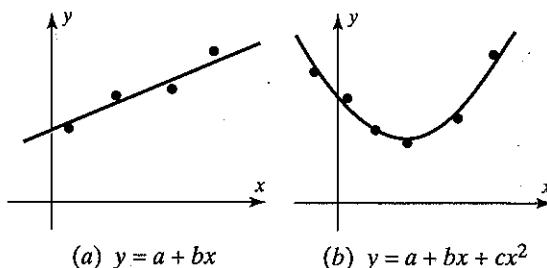
- (a) Encontre a matriz canônica do cisalhamento na direção  $xy$  de fator  $k$ .  
 (b) Como você definiria o cisalhamento pelo fator  $k$  na direção  $xz$  e o cisalhamento pelo fator  $k$  na direção  $yz$ ? Encontre as matrizes canônicas destas transformações lineares.
24. Em cada parte, encontre tantos autovetores linearmente independentes quanto possível por inspeção (ou seja, visualizando o efeito geométrico da transformação em  $R^2$ ). Para cada um dos autovetores obtidos, encontre o autovalor associado por inspeção, e em seguida confira suas respostas calculando os autovalores e bases para os auto-espacos a partir da matriz canônica das transformações.
- (a) A reflexão em torno do eixo  $x$       (b) A reflexão em torno do eixo  $y$   
 (c) A reflexão em torno da reta  $y = x$       (d) O cisalhamento por  $k$  na direção  $x$   
 (e) O cisalhamento por  $k$  na direção  $y$       (f) A rotação por um ângulo  $\theta$

## 9.3 AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS A DADOS

Nesta seção nós iremos usar nossos resultados sobre projeções ortogonais em espaços com produto interno para obter uma técnica de ajustar uma reta ou uma outra curva polinomial a um conjunto de pontos no plano que foram determinados experimentalmente.

**Ajustando uma Curva a Dados** Um problema comum no trabalho experimental é obter uma relação matemática  $y = f(x)$  entre duas variáveis  $x$  e  $y$  através do “ajuste” de uma curva aos pontos no plano que correspondem aos vários valores de  $x$  e  $y$  determinados experimentalmente, digamos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$



$$(b) y = a + bx + cx^2$$

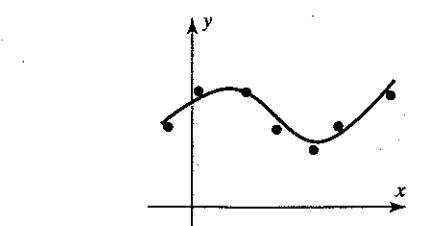


Figura 9.3.1

Na base de considerações teóricas ou simplesmente pelo padrão apresentado pelos pontos, decidimos a forma geral da curva  $y = f(x)$  a ser ajustada. Algumas possibilidades são (Figura 9.3.1)

- (a) Uma reta:  $y = a + bx$   
 (b) Um polinômio quadrático:  $y = a + bx + cx^2$   
 (c) Um polinômio cúbico:  $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

Como os pontos são obtidos experimentalmente, geralmente temos algum “erro” de medição nos dados, tornado impossível encontrar uma curva da forma desejada que passe por todos os pontos. Assim, a idéia é escolher a curva (determinando seus coeficientes) que “melhor” ajusta os dados. Nós começamos com o caso mais simples de ajustar uma reta aos pontos dados.

**Ajuste Linear de Mínimos Quadrados** Digamos que nós queremos ajustar uma reta  $y = a + bx$  aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

determinados experimentalmente. Se estes pontos de dados fossem colineares, a reta passaria por todos os  $n$  pontos e então os coeficientes  $a$  e  $b$  desconhecidos satisfariam

$$y_1 = a + bx_1$$

$$y_2 = a + bx_2$$

 $\vdots$ 

$$y_n = a + bx_n$$

Nós podemos escrever este sistema em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ou, mais compactamente, como

$$Mv = y \quad (1)$$

onde

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2)$$

Se os pontos de dados não são colineares, é impossível encontrar coeficientes  $a$  e  $b$  que satisfaçam o sistema (1) exatamente, ou seja, o sistema é inconsistente. Neste caso nós vamos procurar uma solução de mínimos quadrados

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

Uma reta  $y = a^* + b^*x$  é chamada uma *reta de regressão* dos dados ou um *ajuste linear de mínimos quadrados* aos dados se os coeficientes da reta provém de uma solução de mínimos quadrados. Para explicar esta terminologia, lembre que uma solução de mínimos quadrados de (1) minimiza

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|^2 \quad (3)$$

Se nós expressarmos o quadrado de (3) em termos de componentes, obteremos

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|^2 = (y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \cdots + (y_n - a - bx_n)^2 \quad (4)$$

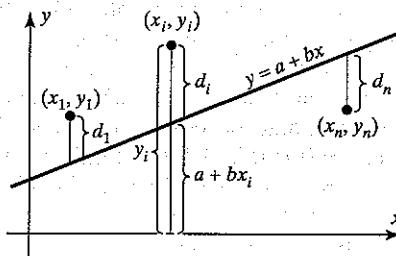
Agora, escrevendo

$$d_1 = |y_1 - a - bx_1|, \quad d_2 = |y_2 - a - bx_2|, \dots, \quad d_n = |y_n - a - bx_n|$$

podemos reescrever (4) como

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 \quad (5)$$

Como ilustramos na Figura 9.3.2, os valores  $d_i$  podem ser interpretados como a distância vertical entre a reta  $y = a + bx$  e os pontos de dados  $(x_i, y_i)$ . Esta distância é uma medida do “erro” que resulta no ponto  $(x_i, y_i)$  do ajuste inexato de  $y = a + bx$  a este ponto dos dados. Como (3) e (5) são minimizados pelo mesmo vetor  $\mathbf{v}^*$ , o ajuste linear de mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados destes erros, e daí o nome *ajuste linear de mínimos quadrados*.



**Figura 9.3.2**  $d_i$  mede o erro vertical na reta de mínimos quadrados

**Equações Normais** Lembre que, pelo Teorema 6.4.2, a solução de mínimos quadrados de (1) pode ser obtida resolvendo o sistema normal associado

$$M^T M \mathbf{v} = M^T \mathbf{y}$$

cujas equações são chamadas as *equações normais*.

Nos exercícios será mostrado que os vetores-coluna de  $M$  são linearmente independentes se, e somente se, os  $n$  pontos dos dados não estão numa reta vertical no plano  $xy$ . Neste caso, segue pelo Teorema 6.4.4 que a solução de mínimos quadrados é única e é dada por

$$\mathbf{v}^* = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{y}$$

Resumindo, temos o seguinte teorema.

### Teorema 9.3.1

### Solução de Mínimos Quadrados

Seja  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  um conjunto de dois ou mais pontos de dados, não todos em uma reta vertical, e sejam

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Então existe um único ajuste linear de mínimos quadrados

$$y = a^* + b^*x$$

aos pontos de dados. Além disto,

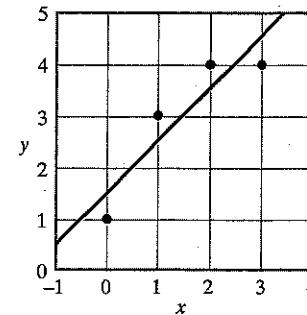
$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

é dado pela fórmula

$$\mathbf{v}^* = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{y} \quad (6)$$

que expressa a unicidade da solução  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$  da equação normal

$$M^T M \mathbf{v} = M^T \mathbf{y} \quad (7)$$



**Figura 9.3.3**

### EXEMPLO 1 Reta de Mínimos Quadrados: Usando a Fórmula (6)

Encontre o ajuste linear de mínimos quadrados aos quatro pontos  $(0, 1), (1, 3), (2, 4)$  e  $(3, 4)$ . (Veja a Figura 9.3.3.)

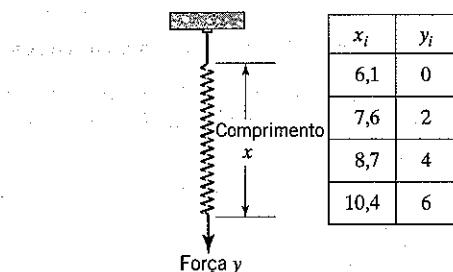
*Solução.*

Nós temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M^T M = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad (M^T M)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^* = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{y} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto a reta desejada é  $y = 1,5 + x$ .



**Figura 9.3.4**

### EXEMPLO 2 A Constante de uma Mola

A lei de Hooke da Física afirma que o comprimento  $x$  de uma mola uniforme é uma função linear da força  $y$  aplicada à mola. Se nós escrevermos  $y = a + bx$ , então o coeficiente  $b$  é chamado a *constante da mola*. Suponha que uma particular mola não estendida tem um comprimento de 6,1 cm (ou seja,  $x = 6,1$  quando  $y = 0$ ). Aplicando forças de 2, 4 e 6 kg à mola, obtemos os comprimentos correspondentes de 7,6 cm, 8,7 cm e 10,4 cm (veja a Figura 9.3.4). Encontre a constante desta mola.

*Solução.*

Nós temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6,1 \\ 1 & 7,6 \\ 1 & 8,7 \\ 1 & 10,4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

e

$$v^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T y \approx \begin{bmatrix} -8,6 \\ 1,4 \end{bmatrix}$$

onde os valores numéricos foram arredondados a uma casa decimal. Assim, o valor estimado da constante desta mola é  $b^* \approx 1,4 \text{ kg/cm}$ .

**Ajuste Polinomial de Mínimos Quadrados** A técnica descrita para ajustar uma reta de mínimos quadrados generaliza facilmente para ajustar um polinômio de qualquer grau especificado a pontos de dados. Vamos tentar ajustar um polinômio de grau fixo  $m$

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \quad (8)$$

aos  $n$  pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

Substituindo estes  $n$  valores de  $x$  e  $y$  em (8), obtemos as  $n$  equações

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_1^m \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_m x_2^m \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m \end{aligned}$$

ou, em formato matricial,

$$Mv = y \quad (9)$$

onde

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

Como antes, as soluções das equações normais

$$M^T M v = M^T y$$

determinam os coeficientes dos polinômios que minimizam

$$\|y - M v\|$$

Nos exercícios são discutidas condições que garantem a invertibilidade de  $M^T M$ . Se  $M^T M$  é invertível, então as equações normais têm uma única solução  $v = v^*$ , dada por

$$v^* = (M^T M)^{-1} M^T y \quad (11)$$

### EXEMPLO 3 Ajustando uma Curva Quadrática a Dados

De acordo com a segunda lei do movimento, de Newton, um corpo perto da superfície da Terra cai verticalmente para baixo de acordo com a equação

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (12)$$

onde

$s$  = deslocamento vertical para baixo relativo a algum ponto fixo

$s_0$  = deslocamento inicial no instante  $t = 0$

$v_0$  = velocidade inicial no instante  $t = 0$

$g$  = aceleração da gravidade na superfície da Terra

Suponha que é realizado um experimento num laboratório nos Estados Unidos para estimar  $g$  usando esta equação. Um peso é solto com velocidade e deslocamento iniciais desconhecidos e, em certos instantes, são medidas as distâncias que o peso caiu em relação a algum ponto de referência fixado. Suponhamos que nos instantes  $t = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$  e  $0,5$  segundos observa-se que o peso caiu  $s = -0,18; 0,31; 1,03; 2,48$  e  $3,73$  pés, respectivamente, desde o ponto de referência. Encontre um valor aproximado de  $g$  usando estes dados.

*Solução.*

O problema matemático é ajustar a curva quadrática

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (13)$$

aos cinco pontos de dados:

$$(0,1; -0,18), (0,2; 0,31), (0,3; 1,03), (0,4; 2,48), (0,5; 3,73)$$

Com os ajustes apropriados na notação, as matrizes  $M$  e  $y$  em (10) são

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0,01 \\ 1 & 0,2 & 0,04 \\ 1 & 0,3 & 0,09 \\ 1 & 0,4 & 0,16 \\ 1 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,18 \\ 0,31 \\ 1,03 \\ 2,48 \\ 3,73 \end{bmatrix}$$

Assim, por (11),

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} -0,40 \\ 0,35 \\ 16,1 \end{bmatrix}$$

Por (12) e (13) nós temos  $a_2 = \frac{1}{2}g$ , de modo que o valor estimado de  $g$  é

$$g = 2a_2^* = 2(16,1) = 32,2 \text{ pés / segundo}^2$$

Se desejarmos, também podemos estimar o deslocamento e velocidade iniciais do peso:

$$s_0 = a_0^* = -0,40 \text{ pés}$$

$$v_0 = a_1^* = 0,35 \text{ pés / segundo}$$

Na Figura 9.3.5 nós esboçamos os cinco pontos de dados e o polinômio aproximante.

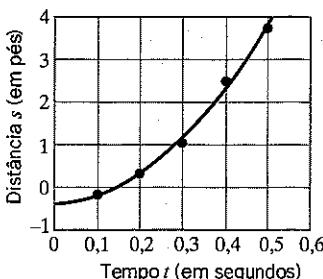


Figura 9.3.5

### Conjunto de Exercícios 9.3

- Encontre a reta de ajuste linear de mínimos quadrados dos três pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(2, 7)$ .
- Encontre a reta de ajuste linear de mínimos quadrados dos quatro pontos  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 1)$  e  $(3, 2)$ .
- Encontre o polinômio quadrático de melhor ajuste dos quatro pontos  $(2, 0)$ ,  $(3, -10)$ ,  $(5, -48)$  e  $(6, -76)$ .
- Encontre o polinômio cúbico de melhor ajuste dos cinco pontos  $(-1, -14)$ ,  $(0, -5)$ ,  $(1, -4)$ ,  $(2, 1)$  e  $(3, 22)$ .
- Mostre que a matriz  $M$  na Equação (2) tem colunas linearmente independentes se, e somente se, pelo menos dois dos números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são distintos.
- Mostre que as colunas da matriz  $M$  de tamanho  $n \times (m+1)$  na Equação (10) são linearmente independentes se  $n > m$  e pelo menos  $m+1$  dos números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são distintos. [Sugestão. Um polinômio não-nulo de grau  $m$  tem, no máximo,  $m$  raízes distintas.]
- Seja  $M$  a matriz da Equação (10). Usando o Exercício 6, mostre que uma condição suficiente para a matriz  $M^T M$  ser invertível é que  $n > m$  e que pelo menos  $m+1$  dos números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são distintos.
- O dono de um negócio em rápida expansão descobre que nos cinco primeiros meses do ano as vendas (em milhares de reais) foram \$ 4,0, \$ 4,4, \$ 5,2, \$ 6,4 e \$ 8,0. O dono coloca estes dados num gráfico e conjectura que, pelo resto do ano, a curva de vendas pode ser aproximada por um polinômio quadrático. Encontre o polinômio quadrático de melhor ajuste de mínimos quadrados para a curva de vendas e use-o para projetar as vendas no décimo segundo mês do ano.

## 9.4 PROBLEMAS DE APROXIMAÇÃO: SÉRIES DE FOURIER

Nesta seção nós iremos utilizar nossos resultados sobre projeções ortogonais em espaços com produto interno para resolver problemas que envolvem aproximar uma função por funções mais simples. Estes problemas surgem em uma variedade de aplicações científicas e de engenharia.

**A Melhor Aproximação** Todos os problemas que iremos estudar nesta seção serão casos particulares do seguinte problema geral.

**O Problema da Aproximação** Dada uma função  $f$  que é contínua num intervalo  $[a, b]$ , encontre a “melhor aproximação possível” de  $f$  dentre todas as funções de um subespaço  $W$  especificado de  $C[a, b]$ .

Aqui estão alguns exemplos de tais problemas:

- Encontre a melhor aproximação possível de  $e^x$  sobre  $[0, 1]$  por um polinômio da forma  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ .

- Encontre a melhor aproximação possível de  $\sin \pi x$  sobre  $[-1, 1]$  por uma função da forma  $a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + a_3 e^{3x}$ .
- Encontre a melhor aproximação possível de  $x$  sobre  $[0, 2\pi]$  por uma função da forma  $a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x$ .

No primeiro exemplo,  $W$  é o subespaço de  $C[0, 1]$  gerado por  $1, x$  e  $x^2$ ; no segundo exemplo,  $W$  é o subespaço de  $C[-1, 1]$  gerado por  $1, e^x, e^{2x}$  e  $e^{3x}$  e no terceiro exemplo,  $W$  é o subespaço de  $C[0, 2\pi]$  gerado por  $1, \sin x, \sin 2x, \cos x, \cos 2x$ .

**Erro de Medida** Para resolver problemas de aproximação dos tipos acima, a frase “melhor aproximação sobre  $[a, b]$ ” deve ser tornada matematicamente precisa; para isto, nós precisamos de uma maneira de medir o erro que resulta quando uma função contínua é aproximada por uma outra sobre  $[a, b]$ . Se nossa preocupação fosse aproximar  $f(x)$  somente em um único ponto  $x_0$ , então o erro em  $x_0$  causado por uma aproximação  $g(x)$  seria simplesmente

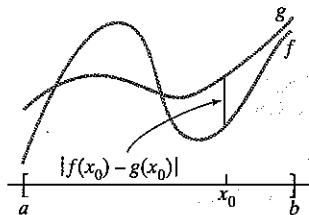
$$\text{erro} = |f(x_0) - g(x_0)|$$

que, às vezes, é chamado o *desvio* entre  $f$  e  $g$  em  $x_0$  (Figura 9.4.1). No entanto, nós estamos pensando em aproximações sobre o intervalo inteiro e não só num ponto. Consequentemente, em algum ponto do intervalo, uma aproximação  $g_1$  de  $f$  pode ter desvio de  $f$  menor do que uma aproximação  $g_2$  de  $f$ , mas em

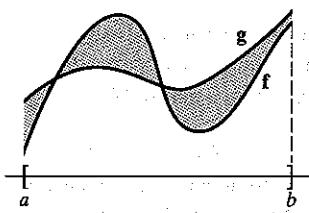
outra parte do intervalo pode ser o contrário. Como decidir qual é a melhor aproximação no total? O que nós precisamos é de uma maneira de medir o erro total de uma aproximação  $g(x)$ . Uma maneira possível de medir o erro total é obtida pela integral do desvio  $|f(x) - g(x)|$  sobre o intervalo  $[a, b]$  inteiro, ou seja,

$$\text{erro} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (1)$$

Geometricamente, (1) é a área entre os gráficos de  $f(x)$  e  $g(x)$  sobre o intervalo  $[a, b]$  (Figura 9.4.2); quanto maior a área, maior o erro total.



**Figura 9.4.1** O desvio entre  $f$  e  $g$  em  $x_0$



**Figura 9.4.2** A área entre os gráficos de  $f$  e  $g$  sobre  $[a, b]$  mede o erro em aproximar  $f$  por  $g$  sobre  $[a, b]$

Enquanto (1) é natural e tem apelo geométrico, a maioria dos matemáticos e cientistas costuma favorecer a seguinte medida alternativa do erro total, chamado o *erro quadrático médio*.

$$\text{erro quadrático médio} = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

O erro quadrático médio enfatiza o efeito de erros maiores pois são elevados ao quadrado e, além disto, tem a vantagem adicional de nos permitir colher frutos da teoria dos espaços vetoriais com produto interno. Para ver como, supomos que  $f$  é uma função contínua em  $[a, b]$  que nós queremos aproximar por uma função  $g$  em algum subespaço  $W$  de  $C[a, b]$  e que em  $C[a, b]$  tomamos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Segue que

$$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx = \text{erro quadrático médio}$$

e portanto minimizar o erro quadrático médio é o mesmo que minimizar  $\|f - g\|^2$ . Assim, podemos reformular precisamente o problema de aproximação enunciado informalmente no início desta seção.

## Aproximação de Mínimos Quadrados

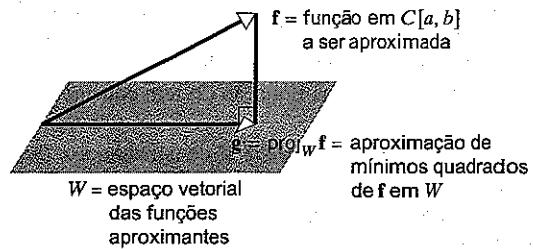
*O Problema da Aproximação de Mínimos Quadrados.* Sejam  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

o produto interno em  $C[a, b]$  e  $W$  um subespaço de dimensão finita de  $C[a, b]$ . Encontre uma função  $g$  em  $W$  que minimiza

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

Como  $\|f - g\|^2$  e  $\|f - g\|$  são minimizados pela mesma função  $g$ , o problema precedente é equivalente a procurar uma função  $g$  em  $W$  que esteja mais próxima de  $f$ . Pelo Teorema 6.4.1 nós já sabemos que  $g = \text{proj}_W f$  é uma tal função (Figura 9.4.3). Assim, nós temos o seguinte resultado.



**Figura 9.4.3**

*Solução do Problema da Aproximação de Mínimos Quadrados.* Se  $f$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e  $W$  é um subespaço de dimensão finita de  $C[a, b]$ , então a função em  $W$  que minimiza o erro quadrático médio

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

é  $g = \text{proj}_W f$ , onde a projeção ortogonal é relativa ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

A função  $g = \text{proj}_W f$  é chamada a *aproximação de mínimos quadrados de  $f$  em  $W$* .

## Séries de Fourier

Uma função da forma

$$t(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx + d_1 \sin x + d_2 \sin 2x + \cdots + d_n \sin nx \quad (2)$$

é chamada um *polinômio trigonométrico*; se  $c_n$  e  $d_n$  não são ambos nulos, dizemos que  $t(x)$  é de *ordem  $n$* . Por exemplo,

$$t(x) = 2 + \cos x - 3 \cos 2x + 7 \sin 4x$$

é um polinômio trigonométrico com

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -3, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 7$$

A ordem de  $t(x)$  é 4.



**Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768–1830) foi um matemático e físico francês que descobriu as séries de Fourier e ideias relacionadas enquanto trabalhava em problemas de difusão de calor. Esta foi uma das descobertas mais influentes na história da Matemática, sendo a pedra fundamental de muitas áreas de pesquisa matemática e uma ferramenta básica em muitos ramos da Engenharia. Fourier, um ativista político durante a Revolução Francesa, passou algum tempo encarcerado por defender vítimas do Terror. Mais tarde, tornou-se um favorito de Napoleão, sendo agraciado tanto com o título de barão quanto de conde.

É evidente por (2) que os polinômios trigonométricos de ordem  $n$  ou menor são as várias combinações lineares possíveis de

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx \quad (3)$$

Pode ser mostrado que estas  $2n + 1$  funções são linearmente independentes e que consequentemente, para qualquer intervalo  $[a, b]$ , formam uma base de um subespaço  $(2n + 1)$ -dimensional de  $C[a, b]$ .

Agora vamos considerar o problema de encontrar a aproximação de mínimos quadrados de uma função  $f(x)$  contínua sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$  por polinômios trigonométricos de ordem  $n$  ou menor. Como observamos acima, a aproximação de mínimos quadrados de  $f$  em  $W$  é a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $W$ . Para encontrar esta projeção ortogonal, nós devemos encontrar uma base ortonormal  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$  de  $W$ , com a qual, então, podemos calcular a projeção ortogonal sobre  $W$  pela fórmula

$$\text{proj}_W \mathbf{f} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle \mathbf{g}_0 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle \mathbf{g}_1 + \dots + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle \mathbf{g}_{2n} \quad (4)$$

[veja o Teorema 6.3.5]. Uma base ortonormal de  $W$  pode ser obtida aplicando o processo de Gram-Schmidt à base (3), usando o produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

Isto dá (Exercício 6) a base ortonormal

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f, g_0), \quad \mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots, \quad \mathbf{g}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \\ \mathbf{g}_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \quad \mathbf{g}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \end{aligned} \quad (5)$$

Se nós introduzirmos a notação

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle, \dots, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle \\ b_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle, \dots, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

e substituirmos (5) em (4), obteremos

$$\text{proj}_W \mathbf{f} = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx] + [b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx] \quad (7)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx \\ &\vdots \\ b_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

Em resumo,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad (8)$$

Os números  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  são chamados os **coeficientes de Fourier** de  $f$ .

### EXEMPLO 1 Aproximação de Mínimos Quadrados

Encontre a aproximação de mínimos quadrados de  $f(x) = x$  em  $[0, 2\pi]$  por

- (a) um polinômio trigonométrico de ordem 2 ou menor;
- (b) um polinômio trigonométrico de ordem  $n$  ou menor.

Solução (a).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi \quad (9a)$$

Para  $k = 1, 2, \dots$ , a integração por partes fornece (verifique)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx = 0 \quad (9b)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{k} \quad (9c)$$

Assim, a aproximação de mínimos quadrados de  $x$  em  $[0, 2\pi]$  por um polinômio trigonométrico de ordem 2 ou menor é

$$x \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$$

ou, por (9a), (9b) e (9c),

$$x \approx \pi - 2 \sin x - \sin 2x$$

Solução (b). A aproximação de mínimos quadrados de  $x$  em  $[0, 2\pi]$  por um polinômio trigonométrico de ordem  $n$  ou menor é

$$x \approx \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx] + [b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx]$$

ou, por (9a), (9b) e (9c),

$$x \approx \pi - 2 \left( \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n} \right)$$

Os gráficos de  $y = x$  e algumas destas aproximações são mostrados na Figura 9.4.4.

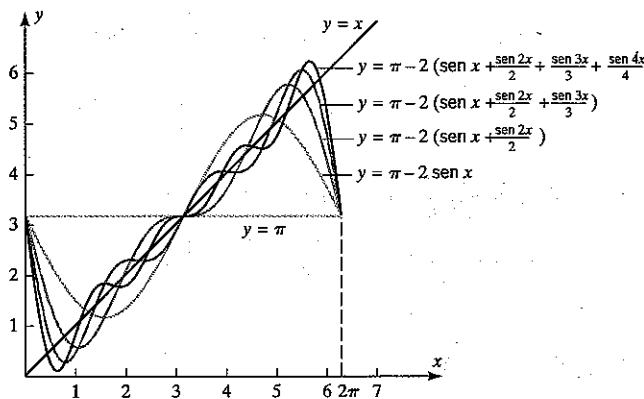


Figura 9.4.4

E natural esperar que o erro quadrático médio vá diminuir à medida que aumentar o número de termos na aproximação de mínimos quadrados

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Pode ser provado que para funções  $f$  em  $C[0, 2\pi]$ , o erro quadrático médio tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ , o que é denotado por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

O lado direito desta equação é chamada a **série de Fourier** de  $f$  sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$ . Tais séries são de extrema importância nas Engenharias, nas Ciências e na Matemática.

### Conjunto de Exercícios 9.4

- Encontre a aproximação de mínimos quadrados de  $f(x) = 1 + x$  sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$  usando
  - um polinômio trigonométrico de ordem 2 ou menor
  - um polinômio trigonométrico de ordem  $n$  ou menor
- Encontre a aproximação de mínimos quadrados de  $f(x) = x^2$  sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$  usando
  - um polinômio trigonométrico de ordem 3 ou menor
  - um polinômio trigonométrico de ordem  $n$  ou menor
- (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de  $x$  sobre o intervalo  $[0, 1]$  por uma função da forma  $a + be^x$ .  
(b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.
- (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de  $e^x$  sobre o intervalo  $[0, 1]$  por um polinômio da forma  $a_0 + a_1 x$ .  
(b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.
- (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de  $\sin nx$  sobre o intervalo  $[-1, 1]$  por um polinômio da forma  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ .  
(b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.
- Use o processo de Gram-Schmidt para obter a base ortonormal (5) a partir da base (3).
- Efetue as integrações em (9a), (9b) e (9c).
- Encontre a série de Fourier de  $f(x) = \pi - x$  sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$ .

## 9.5 FORMAS QUADRÁTICAS

Nesta seção nós iremos estudar funções cujos termos são quadrados de variáveis ou produtos de duas variáveis. Estas funções surgem em uma variedade de aplicações como vibrações de sistemas mecânicos, bem como na Geometria, Estatística e Engenharia Elétrica.

**Formas Quadráticas** Até aqui nós estivemos especialmente interessados em equações lineares, ou seja, em equações da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

A expressão no lado esquerdo desta equação, a saber,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

é uma função de  $n$  variáveis, chamada **forma linear**. Numa forma linear, todas as variáveis aparecem na primeira potência e

não há produtos de variáveis na expressão. Aqui nós estudaremos **formas quadráticas**, que são funções da forma

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 + \left( \begin{array}{l} \text{todos os termos possíveis} \\ \text{do tipo } a_k x_i x_j \text{ para } i < j \end{array} \right) \quad (1)$$

Por exemplo, uma forma quadrática nas variáveis  $x_1$  e  $x_2$  é

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2 \quad (2)$$

e uma forma quadrática nas variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  é

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_1 x_3 + a_6 x_2 x_3 \quad (3)$$

Um termo de uma forma quadrática que envolve um produto de variáveis diferentes é chamado **termo com produto misto** ou, às vezes, **termo cruzado**. Assim, o último termo em (2) é um termo com produto misto e os últimos três termos em (3) são termos com produto misto.

Se nós usarmos a convenção de omitir os colchetes em matrizes  $1 \times 1$ , podemos escrever (2) em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3/2 \\ a_3/2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

e (3) como

$$[x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} a_1 & a_4/2 & a_5/2 \\ a_4/2 & a_2 & a_6/2 \\ a_5/2 & a_6/2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

(verifique isto, efetuando os produtos). Observe que os produtos em (4) e (5) são ambos da forma  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{x}$  é o vetor-coluna das variáveis e  $A$  é uma matriz simétrica cujas entradas na diagonal são os coeficientes dos termos com quadrado e cujas entradas fora da diagonal são a metade dos coeficientes dos termos com produto misto. Mais precisamente, a entrada na diagonal na linha  $i$  e na coluna  $i$  é o coeficiente de  $x_i^2$  e a entrada fora da diagonal, na linha  $i$  e na coluna  $j$ , é a metade do coeficiente do produto  $x_i x_j$ . Aqui estão alguns exemplos.

### EXEMPLO 1 Representação Matricial de Formas Quadráticas

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6xy - 7y^2 &= [x \ y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ 4x^2 - 5y^2 &= [x \ y] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ xy &= [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 &= [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As matrizes simétricas são úteis, mas não essenciais, para representar formas quadráticas. Por exemplo, a forma quadrática  $2x^2 + 6xy - 7y^2$ , que nós representamos por  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  no Exemplo 1 com uma matriz simétrica  $A$ , também pode ser escrita como

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde o coeficiente 6 do termo com produto misto foi repartido em 5 + 1 em vez de 3 + 3, como ocorre na representação simétrica. No entanto, as matrizes simétricas são, em geral, mais convenientes de usar, de modo que deve ser entendido que  $A$  é sempre simétrica quando escrevemos uma forma quadrática como  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , mesmo se isto não for explicitamente dito. Quando for conveniente, nós podemos usar a Fórmula (7) da Seção 4.1 para expressar uma forma quadrática em termos do produto interno euclidiano como

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \text{ ou, por simetria do produto interno, } \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Se preferirmos, poderemos usar a notação  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  para o produto interno e escrever estas expressões como

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \langle \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle \quad (6)$$

**Problemas Envolvendo Formas Quadráticas** O estudo das formas quadráticas é um tópico extenso que somente poderá ser tocado nesta seção. Os seguintes são alguns dos problemas matemáticos importantes relacionados com formas quadráticas.

- Encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  se  $\mathbf{x}$  for restrito ao vínculo

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = 1$$

- Quais condições deve satisfazer  $A$  para que a forma quadrática satisfaça a desigualdade  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  para qualquer  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ?
- Se  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  é uma forma quadrática em duas ou três variáveis e  $c$  é uma constante, como é o gráfico da equação  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = c$ ?
- Se  $P$  é uma matriz ortogonal, a mudança de variáveis  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  converte a forma quadrática  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  em  $(P\mathbf{y})^T A (P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$ . Mas  $P^T A P$  é uma matriz simétrica se  $A$  for simétrica (verifique), de modo que  $\mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$  é uma nova forma quadrática nas variáveis de  $\mathbf{y}$ . É importante saber se podemos escolher  $P$  de tal modo que esta nova forma quadrática não tenha termos com produto misto.

Nesta seção nós vamos estudar os primeiros dois problemas e, na próxima, os dois últimos. O seguinte teorema fornece uma solução para o primeiro problema. A prova é adiada para o final desta seção.

#### Teorema 9.5.1

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  simétrica cujos autovalores em ordem decrescente de tamanho são  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ . Se  $\mathbf{x}$  for restrito a  $\|\mathbf{x}\| = 1$  relativamente ao produto interno euclidiano de  $R^n$ , então:

- $\lambda_1 \geq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq \lambda_n$ .
- $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda_n$  se  $\mathbf{x}$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_n$ .
- $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda_1$  se  $\mathbf{x}$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_1$ .

Segue deste teorema que, sujeita ao vínculo

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = 1$$

a forma quadrática  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  tem um valor máximo de  $\lambda_1$  (o maior autovalor) e um valor mínimo de  $\lambda_n$  (o menor autovalor).

### EXEMPLO 2 Consequências do Teorema 9.5.1

Encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

restrita ao vínculo  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , e determine os valores de  $x_1$  e  $x_2$  nos quais o máximo e mínimo ocorrem.

Solução.

A forma quadrática pode ser escrita como

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A equação característica de  $A$  é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Assim, os autovalores de  $A$  são  $\lambda = 3$  e  $\lambda = -1$ , que são os valores máximo e mínimo, respectivamente, da forma quadrática

restrita ao vínculo. Para encontrar os valores de  $x_1$  e  $x_2$  nos quais estes valores extremos ocorrem, nós devemos encontrar autovalores associados a estes autovalores e depois normalizar estes autovetores para que satisfaçam  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

Nós deixamos para o leitor mostrar que

$$\lambda = 3: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1: \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são bases dos auto-espacos. Normalizando estes vetores, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Assim, sujeita ao vínculo  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , o valor máximo da forma quadrática é  $\lambda = 3$ , que ocorre se  $x_1 = 1/\sqrt{2}$ ,  $x_2 = 1/\sqrt{2}$ ; e o valor mínimo da forma quadrática é  $\lambda = -1$ , que ocorre se  $x_1 = 1/\sqrt{2}$ ,  $x_2 = -1/\sqrt{2}$ . Além disto, obteremos bases alternativas para os auto-espacos se multiplicarmos os vetores acima por  $-1$ . Assim, o valor máximo  $\lambda = 3$  também ocorre se  $x_1 = -1/\sqrt{2}$ ,  $x_2 = -1/\sqrt{2}$ , e o valor mínimo  $\lambda = -1$  também ocorre se  $x_1 = -1/\sqrt{2}$ ,  $x_2 = 1/\sqrt{2}$ . ♦

### Definição

Uma forma quadrática  $x^T Ax$  é chamada *positiva* se  $x^T Ax > 0$  para qualquer  $x \neq 0$  e uma matriz simétrica  $A$  é chamada *positiva* se  $x^T Ax$  é uma forma quadrática positiva.

O seguinte teorema é o principal resultado sobre matrizes positivas.

### Teorema 9.5.2

Uma matriz simétrica  $A$  é positiva se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  são positivos.

**Prova.** Suponha que  $A$  é positiva e seja  $\lambda$  um autovalor qualquer de  $A$ . Se  $x$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$ , então  $x \neq 0$  e  $Ax = \lambda x$ , portanto

$$0 < x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2 \quad (7)$$

onde  $\|x\|$  é a norma euclidiana de  $x$ . Como  $\|x\|^2 > 0$ , segue que  $\lambda > 0$ , que é o que queríamos mostrar.

Reciprocamente, suponha que todos os autovalores de  $A$  são positivos. Nós devemos mostrar que  $x^T Ax > 0$  para qualquer  $x \neq 0$ . Mas se  $x \neq 0$ , nós podemos normalizar  $x$  e obter o vetor  $y = x / \|x\|$  com a propriedade  $\|y\| = 1$ . Agora, pelo Teorema 9.5.1, segue que

$$y^T Ay \geq \lambda_n > 0$$

onde  $\lambda_n$  é o menor autovalor de  $A$ . Assim,

$$y^T Ay = \left( \frac{x}{\|x\|} \right)^T A \left( \frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{1}{\|x\|^2} x^T Ax > 0$$

Multiplicando todas as expressões por  $\|x\|^2$ , obtemos

$$x^T Ax > 0$$

que é o que queríamos mostrar. ■

### EXEMPLO 3 Mostrando que uma Matriz é Positiva

No Exemplo 1 da Seção 7.3 nós mostramos que a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

tem autovalores  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 8$ . Como estes são positivos, a matriz  $A$  é positiva e, para qualquer  $x \neq 0$  temos

$$x^T Ax = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 > 0$$

Nosso próximo objetivo é obter um critério que possa ser utilizado para determinar se uma matriz simétrica é positiva sem precisar encontrar seus autovalores. Para alcançar isto, é útil introduzir um pouco de terminologia adicional. Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada, então as *submatrizes principais* de  $A$  são as submatrizes formadas pelas primeiras  $r$  linhas e  $r$  colunas de  $A$ , para  $r = 1, 2, \dots, n$ . Estas submatrizes são

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \dots, \quad A_n = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

### Teorema 9.5.3

Uma matriz simétrica  $A$  é positiva se, e somente se, o determinante de cada submatriz principal é positivo.

Nós omitimos a prova.

### EXEMPLO 4 Trabalhando com Submatrizes Principais

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

é positiva pois

$$|2| = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

todos os quais são positivos. Assim, nós também sabemos que todos os autovalores de  $A$  são positivos e que  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$  para qualquer  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

**OBSERVAÇÃO.** Uma matriz simétrica  $A$  e a forma quadrática  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  são chamadas

<i>não-negativa</i>	se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$ para qualquer $\mathbf{x}$
<i>negativa</i>	se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
<i>não-positiva</i>	se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$ para qualquer $\mathbf{x}$
<i>indefinida</i>	se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ toma ambos valores positivos e negativos

O Teorema 9.5.2 pode ser modificado de maneira óbvia para aplicar a matrizes destes quatro tipos. Assim, uma matriz simétrica  $A$  é não-negativa (negativa, não-positiva) se, e somente se, todos seus autovalores são *não-negativos* (negativos, não-positivos) e é indefinida se, e somente se, existem autovalores positivos e negativos. Por outro lado, a extensão do Teorema 9.5.3 a estes quatro casos é mais útil; por exemplo, uma matriz simétrica  $A$  é não-negativa se, e somente se, *todos* os determinantes menores (e não só os principais) são não-negativos.

### Opcional

**Prova do Teorema 9.5.1a.** Como  $A$  é simétrica, segue do Teorema 7.3.1 que existe uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  consistindo de autovetores de  $A$ . Suponha que  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é uma tal base, onde  $\mathbf{v}_i$  é o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_i$ . Se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  denota o produto interno euclidiano, então segue pelo Teorema 6.3.1 que, para qualquer  $\mathbf{x}$  em  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Assim,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle A\mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle A\mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle A\mathbf{v}_n \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \lambda_n \mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Segue que os vetores de coordenadas de  $\mathbf{x}$  e de  $A\mathbf{x}$  em relação à base  $S$  são

$$\begin{aligned} (\mathbf{x})_S &= (\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle) \\ (A\mathbf{x})_S &= (\lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle, \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle, \dots, \lambda_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle) \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 6.3.2c e lembrando que  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 = 1 \\ \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle &= \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \end{aligned}$$

Usando estas duas equações e a Fórmula (6), nós podemos provar que  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \lambda_1$  como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \\ &\leq \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \\ &= \lambda_1 (\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2) \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

A prova da desigualdade  $\lambda_n \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  é similar e deixada como exercício.

**Prova do Teorema 9.5.1b.** Se  $\mathbf{x}$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_1$  e  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , então

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda_1 \mathbf{x} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1$$

Analogamente,  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda_n$  se  $\|\mathbf{x}\| = 1$  e  $\mathbf{x}$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_n$ . ■

### Conjunto de Exercícios 9.5

1. Quais das seguintes são formas quadráticas?

- |   |                                       |   |
|---|---------------------------------------|---|
| (a) $x^2 - \sqrt{2}xy$                    | (b) $5x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$       | (c) $4x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 5x_1x_3$ |
| (d) $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$ | (e) $x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_2x_3$      | (f) $x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2$       |
| (g) $(x_1 - 3x_2)^2$                      | (h) $(x_1 - x_3)^2 + 2(x_1 + 4x_2)^2$ |   |

2. Expressse as seguintes formas quadráticas na notação matricial  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , onde  $A$  é uma matriz simétrica.

- |                       |                                 |                        |                |
|-----------------------|---------------------------------|------------------------|----------------|
| (a) $3x_1^2 + 7x_2^2$ | (b) $4x_1^2 - 9x_2^2 - 6x_1x_2$ | (c) $5x_1^2 + 5x_1x_2$ | (d) $-7x_1x_2$ |
|-----------------------|---------------------------------|------------------------|----------------|

3. Expressse as seguintes formas quadráticas na notação matricial  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , onde  $A$  é uma matriz simétrica.

- |  |   |
|--|---|
| (a) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$         | (b) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$                        |
| (c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$                                     | (d) $\sqrt{2}x_1^2 - \sqrt{3}x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 - 8\sqrt{3}x_1x_3$ |
| (e) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_4 + 4x_3x_4$ |   |

4. Em cada parte, encontre uma expressão para a forma quadrática que não envolve matrizes.

- |  |   |  |
|--|---|--|
| (a) $[x \ y] \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  | (b) $[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 7 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$   | (c) $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ |
| (d) $[x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ | (e) $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ |  |

5. Em cada parte, encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática sujeita ao vínculo  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  e determine os valores de  $x_1$  e  $x_2$ .

### 3.12 ••• Álgebra Linear com Aplicações

- nos quais ocorrem os máximos e mínimos.
- $5x_1^2 - x_2^2$
  - $7x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$
  - $5x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$
  - $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$
6. Em cada parte, encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática sujeita ao vínculo  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  e determine os valores de  $x_1, x_2$  e  $x_3$  nos quais ocorrem os máximos e mínimos.
- $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
  - $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2$
  - $3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$
7. Use o Teorema 9.5.2 para determinar quais das seguintes matrizes são positivas.
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
8. Use o Teorema 9.5.3 para determinar quais das matrizes do Exercício 7 são positivas.
9. Use o Teorema 9.5.2 para determinar quais das seguintes matrizes são positivas.
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
10. Use o Teorema 9.5.3 para determinar quais das matrizes do Exercício 9 são positivas.
11. Em cada parte, classifique a forma quadrática como positiva, não-negativa, negativa, não-positiva ou indefinida.
- $x_1^2 + x_2^2$
  - $-x_1^2 - 3x_2^2$
  - $(x_1 - x_2)^2$
  - $-(x_1 - x_2)^2$
  - $x_1^2 - x_2^2$
  - $x_1x_2$
12. Em cada parte, classifique a matriz como positiva, não-negativa, negativa, não-positiva ou indefinida.
- $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
13. Seja  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  uma forma quadrática em  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e defina  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ .
- Mostre que  $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + 2\mathbf{x}^T A \mathbf{y} + T(\mathbf{y})$ .
  - Mostre que  $T(k\mathbf{x}) = k^2 T(\mathbf{x})$ .
  - Será  $T$  uma transformação linear? Explique.
14. Em cada parte, encontre todos os valores de  $k$  para os quais a forma quadrática é positiva.
- $x_1^2 + kx_2^2 - 4x_1x_2$
  - $5x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
  - $3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$
15. Expresse a forma quadrática  $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)^2$  na notação matricial  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , onde  $A$  é uma matriz simétrica.
16. Seja  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Em Estatística, a quantidade
- $$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$
- é chamada a *média amostral* de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e
- $$s_x^2 = \frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$$
- é chamada a *variância amostral*.
- Expresse a forma quadrática  $s_x^2$  na notação matricial  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , onde  $A$  é uma matriz simétrica.
  - Será  $s_x^2$  uma forma quadrática positiva? Explique.
17. Complete a prova do Teorema 9.5.1 mostrando que  $\lambda_n \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  se  $\|\mathbf{x}\| = 1$  e  $\lambda_n = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  se  $\mathbf{x}$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_n$ .

## 9.6 DIAGONALIZAÇÃO DE FORMAS QUADRÁTICAS; SEÇÕES CÔNICAS

Nesta seção nós iremos mostrar como remover o termo com produto misto de uma forma quadrática com uma mudança de variáveis e veremos como usar nossos resultados no estudo de gráficos de seções cônicas.

### Diagonalização de Formas Quadráticas

Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz simétrica de ordem  $n \times n$ . Dizemos que a matriz  $P$  neste teorema *diagonaliza ortogonalmente* a forma quadrática ou que *reduz a forma quadrática a uma soma de quadrados*.

#### EXEMPLO 1 Reduzindo uma Forma Quadrática a uma Soma de Quadrados

Encontre uma mudança de variáveis que reduz a forma quadrática  $x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$  a uma soma de quadrados e expresse a forma quadrática em termos das novas variáveis.

*Solução.*

A forma quadrática pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A equação característica da matriz  $3 \times 3$  é

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

de modo que os autovalores são  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -3$ ,  $\lambda = 3$ . Nós deixamos para o leitor mostrar que

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \lambda = -3: \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3: \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

são bases ortonormais para os três auto-espaços. Assim, a substituição  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  que elimina os termos com produto misto é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 &= \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 &= \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

A nova forma quadrática é

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$-3y_2^2 + 3y_3^2$$

**OBSERVAÇÃO.** Existem outros métodos para eliminar os termos com produto misto de uma forma quadrática, que nós não discutiremos aqui. Dois destes métodos, a *redução de Lagrange* e a *redução de Kronecker*, são discutidos em textos mais avançados.

**Seções Cônicas** Agora nós iremos aplicar nosso trabalho ao estudo de equações da forma

#### Teorema 9.6.1

Seja  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  uma forma quadrática nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , onde  $A$  é simétrica. Se  $P$  diagonaliza  $A$  ortogonalmente e se as novas variáveis  $y_1, y_2, \dots, y_n$  são definidas pela equação  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  então, substituindo esta equação em  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , obtemos

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $A$  e

$$D = P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

onde  $a, b, \dots, f$  são números reais e pelo menos um dentre  $a, b$  e  $c$  é não-nulo. Uma equação deste tipo é chamada uma **equação quadrática em  $x$  e  $y$**  e

é chamada a **forma quadrática associada**.

### EXEMPLO 2 Os Coeficientes de uma Forma Quadrática

Na equação quadrática

$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0 \quad (2)$$

os termos constantes de (2) são

$$a = 3, \quad b = \frac{5}{2}, \quad c = -7, \quad d = 2, \quad e = 0, \quad f = 7$$

### EXEMPLO 3 Exemplos de Formas Quadráticas Associadas

Equação Quadrática	Forma Quadrática Associada
$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$	$3x^2 + 5xy - 7y^2$
$4x^2 - 5y^2 + 8y + 9 = 0$	$4x^2 - 5y^2$
$xy + y = 0$	$xy$

Os gráficos de equações quadráticas em  $x$  e  $y$  são chamadas **cônicas** ou **seções cônicas**. As cônicas mais importantes são as elipses, os círculos, as hipérboles e as parábolas, que são chamadas cônicas **não-degeneradas**. As demais cônicas são chamadas **degeneradas** e incluem pontos isolados e pares de retas (veja o Exercício 15).

Dizemos que uma cônica não-degenerada está em **posição padrão** em relação aos eixos coordenados se sua equação pode ser expressa em uma das formas dadas na Figura 9.6.1.

### EXEMPLO 4 Três Cônicas

Pela Figura 9.6.1, a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

é a de uma elipse com  $k = 2$  e  $l = 3$ . Assim, esta elipse está em posição padrão, intersectando o eixo  $x$  em  $(-2, 0)$  e  $(2, 0)$  e o eixo  $y$  em  $(0, -3)$  e  $(0, 3)$ .

A equação  $x^2 - 8y^2 = -16$  pode ser reescrita como  $y^2 / 2 - x^2 / 16 = 1$ , que é da forma  $y^2 / k^2 - x^2 / l^2 = 1$  com  $k = \sqrt{2}$ , e  $l = 4$ . Seu gráfico, portanto, é uma hipérbole na posição padrão cortando o eixo  $y$  em  $(0, -\sqrt{2})$  e  $(0, \sqrt{2})$ .

A equação  $5x^2 + 2y = 0$  pode ser reescrita como  $x^2 = -\frac{2}{5}y$ , que é da forma  $x^2 = ky$  com  $k = -\frac{2}{5}$ . Como  $k < 0$ , seu gráfico é uma parábola na posição padrão abrindo para baixo.

### O Significado do Termo com Produto Misto

Observe que nenhuma cônica em posição padrão tem um termo em  $xy$  (ou seja, um termo com produto misto) em sua equação; a presença de um termo  $xy$  na equação de uma cônica não-degenerada indica que a cônica está girada para fora de sua posição padrão (Figura 9.6.2a). Também nenhuma cônica em posição padrão tem ambos os termos em  $x^2$  e  $x$  ou ambos os termos em  $y^2$  e  $y$ . Se não há termo com produto misto, a ocorrência de qualquer um destes dois pares na equação de uma cônica não-degenerada indica que a cônica está transladada para fora de sua posição padrão (Figura 9.6.2b). A ocorrência de qualquer um destes pares e de um termo com produto misto indica que a cônica está tanto rodada quanto transladada para fora de sua posição padrão (Figura 9.6.2c).

Uma técnica para identificar o gráfico de uma cônica não-degenerada que não está em posição padrão consiste em rodar e transladar os eixos coordenados  $xy$  para obter um sistema de coordenadas  $x'y'$  em relação ao qual a cônica está em posição padrão. Uma vez feito isto, a equação da cônica no sistema  $x'y'$  terá uma das formas dadas na Figura 9.6.1 e pode, então, ser facilmente identificada.

### EXEMPLO 5 Completando o Quadrado e Transladando

Como a equação quadrática

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$$

contém termos  $x^2$ ,  $x$ ,  $y^2$  e  $y$  mas não um termo com produto misto, seu gráfico é uma cônica que está transladada para fora de sua posição padrão mas não rodada. A cônica pode ser colocada em posição padrão por uma translação conveniente dos eixos coordenados. Para fazer isto, primeiro coletamos os termos em  $x$  e os termos em  $y$ . Isto dá

$$(2x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0 \quad \text{ou} \quad 2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

Completando os quadrados<sup>1</sup> nas duas expressões entre parênteses, obtemos

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

ou

$$2(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad (3)$$

Se nós transladarmos os eixos coordenados pelas equações de translação

$$x' = x - 3, \quad y' = y - 2$$

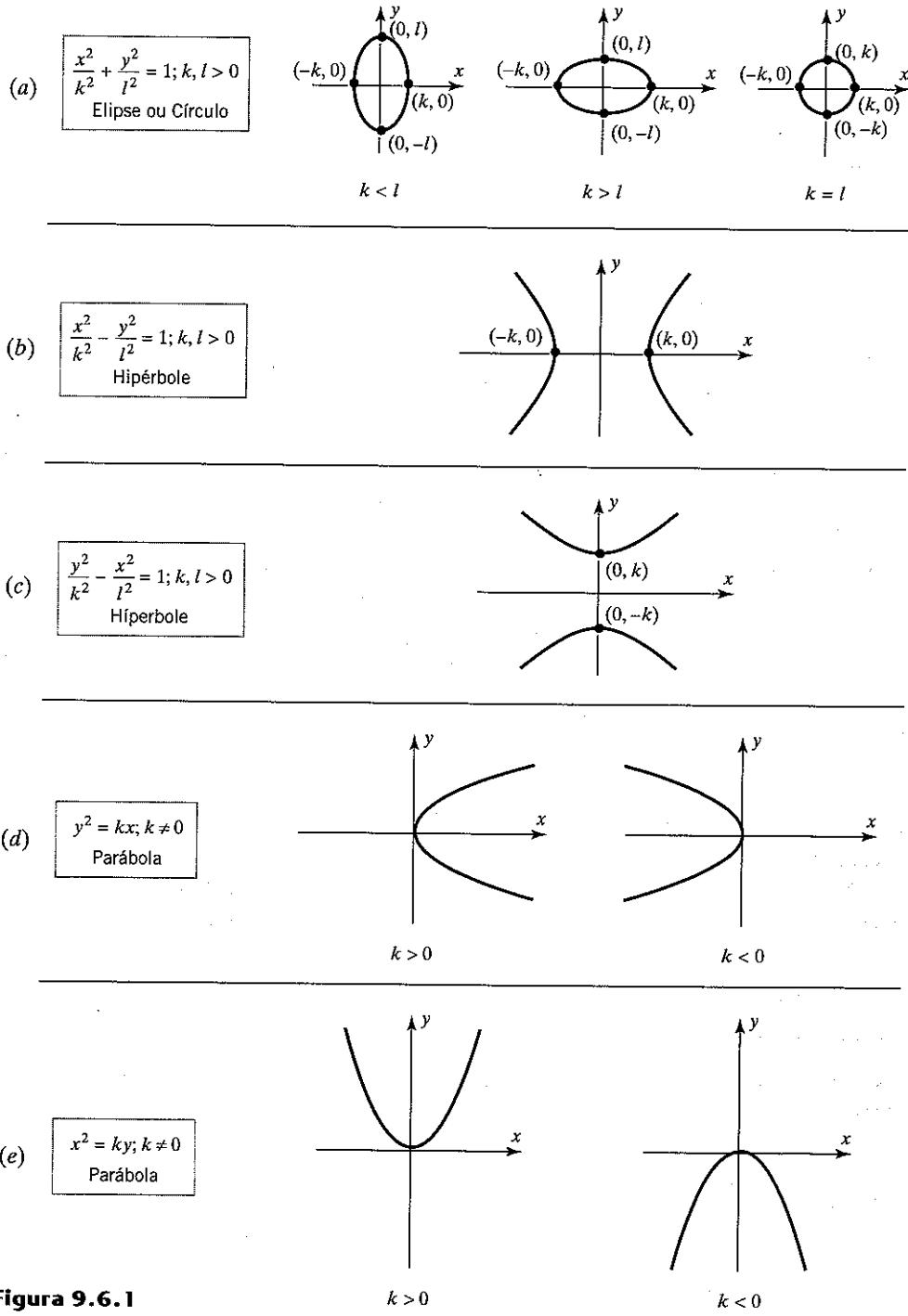
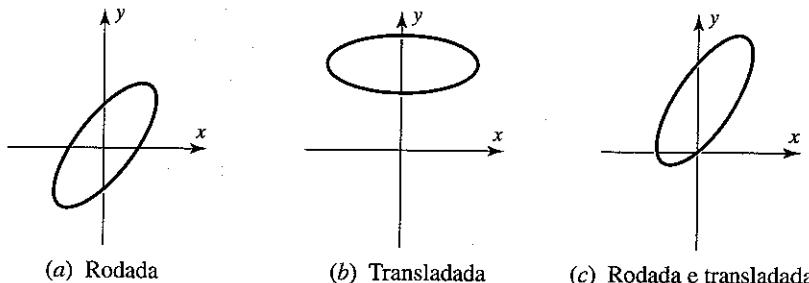
a equação (3) passa a ser

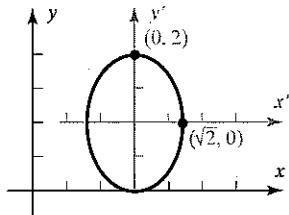
$$2x'^2 + y'^2 = 4 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse em posição padrão no sistema  $x'y'$ . Esta elipse está esboçada na Figura 9.6.3.

<sup>1</sup> Para completar o quadrado numa expressão da forma  $x^2 + px$ , somamos e subtraímos a constante  $(p/2)^2$  para obter

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

**Figura 9.6.1****Figura 9.6.2**



**Figura 9.6.3**  $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$

**Eliminando o Termo com Produto Misto** Agora iremos mostrar como identificar as cônicas que estão rodadas para fora de sua posição padrão. Se nós omitirmos os colchetes de matrizes  $1 \times 1$ , então poderemos escrever (2) no formato matricial

$$[x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \ e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

ou

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{f} = 0$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = [d \ e]$$

Agora considere uma cônica  $C$  cuja equação em coordenadas  $xy$  é

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{f} = 0 \quad (4)$$

Nós gostaríamos de girar os eixos coordenados  $xy$  de tal maneira que a equação da cônica no novo sistema  $x' y'$  não tenha termo com produto misto. Isto pode ser feito como segue.

**Passo 1.** Encontre uma matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

que diagonaliza ortogonalmente a matriz  $A$ .

**Passo 2.** Permute as colunas de  $P$ , se necessário, para ter  $\det(P) = 1$ . Isto garante que a transformação ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}', \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (5)$$

é uma rotação.

**Passo 3.** Para obter a equação de  $C$  no sistema  $x' y'$ , substitua (5) em (4). Isto dá

$$(\mathbf{P} \mathbf{x}')^T \mathbf{A} (\mathbf{P} \mathbf{x}') + \mathbf{K} (\mathbf{P} \mathbf{x}') + \mathbf{f} = 0$$

ou

$$(\mathbf{x}')^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{x}' + (\mathbf{K} \mathbf{P}) \mathbf{x}' + \mathbf{f} = 0 \quad (6)$$

Como  $P$  diagonaliza  $A$  ortogonalmente,

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $A$ . Assim, (6) pode ser reescrito como

$$[\mathbf{x}' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [\mathbf{d}' \ \mathbf{e}'] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \mathbf{f} = 0$$

ou

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d' x' + e' y' + f = 0$$

(onde  $d' = dp_{11} + e p_{21}$  e  $e' = dp_{12} + e p_{22}$ ). Esta equação não tem termo com produto misto.

O seguinte teorema resume esta discussão.

### Teorema 9.6.2

### Teorema dos Eixos Principais em $\mathbb{R}^2$

Seja

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

a equação de uma cônica  $C$  e seja

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

a forma quadrática associada. Então os eixos coordenados podem ser girados de tal modo que a equação de  $C$  no novo sistema  $x' y'$  tem a forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d' x' + e' y' + f = 0$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $A$ . A rotação pode ser efetuada pela substituição

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}'$$

onde  $P$  diagonaliza  $A$  ortogonalmente e  $\det(P) = 1$ .

### EXEMPLO 6 Eliminando o Termo com Produto Misto

Descreva a cônica  $C$  cuja equação é  $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ .

*Solução.*

A forma matricial desta equação é

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - 36 = 0 \quad (7)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

A equação característica de  $A$  é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

de modo que  $\lambda = 4$  e  $\lambda = 9$  são os autovalores de  $A$ . Deixamos a cargo do leitor mostrar que

$$\lambda = 4: \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 9: \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

são bases ortonormais para os auto-espacos. Assim,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

diagonaliza  $A$  ortogonalmente. Além disto,  $\det(P) = 1$ , de modo que a transformação ortogonal de coordenadas

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}' \quad (8)$$

é uma rotação. Substituindo (8) em (7), obtemos

$$(P\mathbf{x}')^T A (P\mathbf{x}') - 36 = 0 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{x}')^T (P^T A P) \mathbf{x}' - 36 = 0$$

Como

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

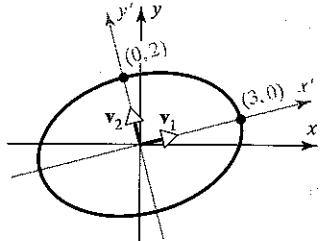
esta equação pode ser escrita como

$$[\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}'] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

ou

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é a equação da elipse esboçada na Figura 9.6.4. Naquela figura, os vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são os vetores-coluna de  $P$ . ♦



**Figura 9.6.4**  $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$

### EXEMPLO 7 Eliminando o Termo com Produto Misto e Transladando

Descreva a cônica  $C$  cuja equação é

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$$

*Solução.*

A forma matricial desta equação é

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + 4 = 0 \quad (9)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = [4\sqrt{5} - 16\sqrt{5}]$$

Como mostramos no Exemplo 6,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

diagonaliza  $A$  ortogonalmente e tem determinante 1. Substituindo  $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$  em (9), obtemos

$$(P\mathbf{x}')^T A (P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + 4 = 0$$

ou

$$(\mathbf{x}')^T (P^T A P) \mathbf{x}' + (K P) \mathbf{x}' + 4 = 0 \quad (10)$$

Como

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K P = \begin{bmatrix} 20 & -80 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = [-8 \quad -36]$$

a equação (10) pode ser escrita como

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \quad (11)$$

Para colocar a cônica em posição padrão, devemos transladar os eixos  $x'$ ,  $y'$ . Procedendo como no Exemplo 5, nós escrevemos (11) como

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = -4$$

Completando os quadrados, obtemos

$$4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36$$

ou

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36 \quad (12)$$

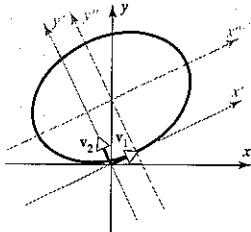
Se nós transladarmos os eixos coordenados pelas equações de translação

$$x'' = x' - 1, \quad y'' = y' - 2$$

então (12) passa a ser

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

que é a equação da elipse esboçada na Figura 9.6.5. Naquela figura, os vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são os vetores-coluna de  $P$ . ♦



**Figura 9.6.5**  $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$

### Conjunto de Exercícios 9.6

1. Em cada parte, encontre uma mudança de variáveis que reduz a forma quadrática a uma soma ou diferença de quadrados e expresse a forma quadrática em termos das novas variáveis.
  - (a)  $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$
  - (b)  $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$
  - (c)  $2x_1x_2$
  - (d)  $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$
2. Em cada parte, encontre uma mudança de variáveis que reduz a forma quadrática a uma soma ou diferença de quadrados e expresse a forma quadrática em termos das novas variáveis.
  - (a)  $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
  - (b)  $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
  - (c)  $-5x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_2$
  - (d)  $2x_1x_3 + 6x_2x_3$
3. Encontre as formas quadráticas associadas às seguintes equações quadráticas.
  - (a)  $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$
  - (b)  $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$
  - (c)  $5xy = 8$
  - (d)  $4x^2 - 2y^2 = 7$
  - (e)  $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$
4. Encontre as matrizes das formas quadráticas no Exercício 3.
5. Expresse cada uma das formas quadráticas no Exercício 3 na forma matricial  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + f = 0$ .
6. Identifique as seguintes cônicas.
  - (a)  $2x^2 + 5y^2 = 20$
  - (b)  $4x^2 + 9y^2 = 1$
  - (c)  $x^2 - y^2 - 8 = 0$
  - (d)  $4y^2 - 5x^2 = 20$
  - (e)  $x^2 + y^2 - 25 = 0$
  - (f)  $7y^2 - 2x = 0$
  - (g)  $-x^2 = 2y$
  - (h)  $3x - 11y^2 = 0$
  - (i)  $y - x^2 = 0$
  - (j)  $x^2 - 3 = -y^2$
7. Em cada parte, a cônica é colocada em posição padrão por uma translação. Identifique a cônica e dê sua equação no sistema de coordenadas transladado.
  - (a)  $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$
  - (b)  $x^2 - 16y^2 + 8x + 128y = 256$
  - (c)  $y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$
  - (d)  $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$
  - (e)  $2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y = -41$
  - (f)  $x^2 + 10x + 7y = -32$
8. As seguintes cônicas não-degeneradas foram rodadas para fora de sua posição padrão. Em cada parte, rode o sistema de coordenadas para remover o termo  $xy$ . Identifique a cônica e dê sua equação no sistema de coordenadas rodado.
  - (a)  $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$
  - (b)  $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$
  - (c)  $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

Nos Exercícios 9–14, translade e rode o sistema de coordenadas, se necessário, para colocar a cônica em posição padrão. Identifique a cônica e dê sua equação no sistema de coordenadas final.

9.  $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y = 5$
10.  $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$
11.  $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$
12.  $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$
13.  $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$
14.  $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

15. O gráfico de uma equação quadrática em  $x$  e  $y$  pode, em certos casos, ser um ponto, uma reta, ou um par de retas; estas cônicas são chamadas **degeneradas**. Também é possível que a equação não seja satisfeita por nenhum valor real de  $x$  e  $y$ . Nestes casos, a equação não possui gráfico e dizemos que representa uma **cônica imaginária**. Cada uma das seguintes equações representa uma cônica degenerada ou imaginária. Quando possível, faça um esboço do gráfico.

- (a)  $x^2 - y^2 = 0$
- (b)  $x^2 + 3y^2 + 7 = 0$
- (c)  $8x^2 + 7y^2 = 0$
- (d)  $x^2 - 2xy + y^2 = 0$
- (e)  $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0$
- (f)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -5$

onde  $a, b, \dots, f$  não são todos nulos, é chamada uma **equação quadrática em  $x, y$  e  $z$**  e a expressão

$$ax^2 + by^2 + bz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyx$$

é chamada a **forma quadrática associada**.

A Equação (1) pode ser escrita no formato matricial

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g \ h \ i] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

ou

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + j = 0$$

onde

## 9.7 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Nesta seção nós vamos aplicar as técnicas de diagonalização desenvolvidas nas seções anteriores a equações quadráticas em três variáveis e veremos como usar nossos resultados para estudar superfícies quâdricas.

**Superfícies Quâdricas** Uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyx + gx + hy + iz + j = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}, \quad K = [g \ h \ i]$$

### EXEMPLO 1 A Forma Quadrática Associada

A forma quadrática associada à equação quadrática

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz + 7x + 2y + 3z - 7 = 0$$

é

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz$$

Os gráficos de equações quadráticas em  $x$ ,  $y$  e  $z$  são chamados **quádricas** ou **superfícies quádricas**. As equações mais sim-

plex de superfícies quádricas ocorrem quando estas superfícies são colocadas em certas posições padrão relativas aos eixos coordenados. A Figura 9.7.1 mostra as seis superfícies básicas e as equações para aquelas superfícies quando as superfícies estão na posição padrão mostrada na figura. Se uma quádrica é cortada por um plano, chamamos a curva de interseção o *traço* do plano na superfície. Para ajudar a visualizar as superfícies quádricas na Figura 9.7.1, nós mostramos e descrevemos os traços feitos por planos paralelos aos planos coordenados. A presença de um ou mais dos termos com produto misto  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  na equação de uma quádrica indica que a quádrica está rodada para fora da posição padrão; a presença de ambos os termos em  $x^2$  e  $x$ ,  $y^2$  e  $y$  ou  $z^2$  e  $z$  numa quádrica sem termo com produto misto indica que a quádrica foi transladada para fora de sua posição padrão.

Superfície	Equação	Superfície	Equação
Elipsóide	$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$ Os traços nos planos coordenados são elipses, bem como os traços naqueles planos que são paralelos aos planos coordenados e que intersectam a superfície em mais de um ponto.	Cone elíptico	$z^2 = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2}$ O traço no plano $xy$ é um ponto (a origem) e os traços nos planos paralelos ao plano $xy$ são elipses. Os traços nos planos $yz$ e $xz$ são pares de retas que se cortam na origem e os traços nos planos paralelos a estes planos coordenados são hipérboles.
Hiperbolóide de uma folha	$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$ O traço no plano $xy$ é uma elipse, bem como os traços nos planos paralelos ao plano $xy$ . Os traços nos planos $yz$ e $xz$ são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a estes e que não passam pelos cortes da superfície com os eixos $x$ e $y$ . Nestes pontos de corte, os traços daqueles planos são pares de retas.	Parabolóide elíptico	$z = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2}$ O traço no plano $xy$ é um ponto (a origem) e os traços nos planos paralelos e acima do plano $xy$ são elipses. Os traços nos planos $yz$ e $xz$ são parábolas, bem como os traços nos planos paralelos a estes.
Hiperbolóide de duas folhas	$\frac{z^2}{l^2} - \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ Não há traço no plano $xy$ . Os traços nos planos paralelos ao plano $xy$ e que cortam a superfície em mais de um ponto são elipses. Os traços nos planos $yz$ e $xz$ são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a estes.	Parabolóide hiperbólico	$z = \frac{y^2}{m^2} - \frac{x^2}{l^2}$ O traço no plano $xy$ é um par de retas que se cortam na origem. Os traços nos planos paralelos ao plano $xy$ são hipérboles. As hipérboles acima do plano $xy$ abrem na direção $y$ e as hipérboles abaixo do plano $xy$ abrem na direção $x$ . Os traços nos planos $yz$ e $xz$ são parábolas, bem como os traços nos planos paralelos a estes.

Figura 9.7.1

**EXEMPLO 2** Identificando uma Superfície Quádrica

Descreva a superfície quádrica cuja equação é

$$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$$

*Solução.*

Rearranjando os termos, obtemos

$$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 = -304$$

Completando os quadrados, obtemos

$$4(x^2 - 4x + 4) + 36(y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = -304 + 16 + 324$$

ou

$$4(x - 2)^2 + 36(y - 3)^2 - 9z^2 = 36$$

ou

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$$

Transladando os eixos pelas equações de translação

$$x' = x - 2, \quad y' = y - 3, \quad z' = z$$

dá

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{4} = 1$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma folha.

**Eliminando os Termos com Produto Misto** O procedimento para identificar as quádricas que foram rodadas para fora de sua posição padrão é similar ao procedimento para cônicas. Seja  $Q$  a superfície quádrica cuja equação nas coordenadas  $xyz$  é

$$x^T Ax + Kx + j = 0 \quad (2)$$

Nós queremos rodar os eixos coordenados  $xyz$  de tal modo que a equação da quádrica no novo sistema de coordenadas  $x' y' z'$  não tenha termo com produto misto. Isto pode ser feito como segue:

**Passo 1.** Encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza ortogonalmente a matriz  $A$ .

**Passo 2.** Permute as colunas de  $P$ , se necessário, para ter  $\det(P) = 1$ . Isto garante que a transformação ortogonal de coordenadas

$$x = Px', \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (3)$$

é uma rotação.

**Passo 3.** Substitua (3) em (2). Isto irá produzir uma equação para a quádrica nas coordenadas  $x' y' z'$  sem termo com produto misto. (A prova é similar à de cônicas e é deixada como exercício.)

O seguinte teorema resume esta discussão.

**Teorema 9.7.1**
**Teorema dos Eixos Principais em  $R^3$** 

*Seja*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

*a equação de uma quádrica  $Q$  e seja*

$$x^T Ax = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

*a forma quadrática associada. Os eixos coordenados podem ser rodados de tal modo que a equação de  $Q$  no sistema  $x'y'z'$  tem a forma*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$$

*onde  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são os autovalores de  $A$ . A rotação pode ser efetuada pela substituição*

$$x = Px'$$

*onde  $P$  diagonaliza  $A$  ortogonalmente e  $\det(P) = 1$ .*

**EXEMPLO 3 Eliminando os Termos com Produto Misto**

Descreva a superfície quádrica cuja equação é

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

*Solução.*

A forma matricial da equação quadrática é

$$x^T Ax - 3 = 0 \quad (4)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Como mostramos no Exemplo 1 da Seção 7.3, os autovalores de  $A$  são  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 8$  e  $A$  é ortogonalmente diagonalizável pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

onde os dois primeiros vetores-coluna de  $P$  são autovetores associados a  $\lambda = 2$  e o terceiro vetor-coluna é um autovetor associado a  $\lambda = 8$ .

Como  $\det(P) = 1$  (verifique), a transformação ortogonal de coordenadas  $x = Px'$  é uma rotação. Substituindo esta expressão em (4), obtemos

$$(Px')^T A (Px') - 3 = 0$$

ou, equivalentemente,

$$(x')^T (P^T A P) x' - 3 = 0 \quad (5)$$

Como

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

a Equação (5) pode ser escrita como

ou

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

Isto pode ser reescrito como

$$\frac{x'^2}{3/2} + \frac{y'^2}{3/2} + \frac{z'^2}{3/8} = 1$$

que é a equação de um elipsóide.

### Conjunto de Exercícios 9.7

- Encontre as formas quadráticas associadas às seguintes equações quadráticas.
    - $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3$
    - $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4$
    - $xy + xz + yz = 1$
    - $x^2 + y^2 - z^2 = 7$
    - $3z^2 + 3xz - 14y + 9 = 0$
    - $2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0$
  - Encontre as matrizes das formas quadráticas no Exercício 1.
  - Expresse cada uma das equações quadráticas dadas no Exercício 1 na forma matricial  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + K \mathbf{x} + j = 0$ .
  - Identifique as seguintes quâdricas.
    - $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$
    - $2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 18$
    - $6x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 6 = 0$
    - $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$
    - $16x^2 + y^2 = 16z$
    - $7x^2 - 3y^2 + z = 0$
    - $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
  - Em cada parte, determine as equações de translação que colocam a quâdrica em posição padrão. Identifique a quâdrica.
    - $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$
    - $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z = -7$
    - $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$
    - $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z = 544$
    - $x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z - 15 = 0$
    - $7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 135 = 0$
    - $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$
  - Em cada parte, encontre uma rotação  $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$  que remova os termos com produto misto. Identifique a quâdrica e dê sua equação no sistema  $x'y'z'$ .
    - $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$
    - $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$
    - $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$
    - $2xy + z = 0$
- Nos Exercícios 7–10, translade e rode o sistema de coordenadas para colocar a quâdrica em posição padrão. Identifique a quâdrica e dê sua equação no sistema de coordenadas final.
- $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9$
  - $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$
  - $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$
  - $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$
  - Prove o Teorema 9.7.1.

## 9.8 COMPARAÇÃO DOS PROCEDIMENTOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEARES

Nesta seção nós vamos discutir alguns aspectos práticos da resolução de sistemas de equações lineares, da inversão de matrizes e da obtenção de autovalores. Embora nós já tenhamos discutido anteriormente métodos para efetuar estes cálculos, aqueles métodos não são diretamente aplicáveis à solução por computador dos problemas de grande escala que aparecem nas aplicações do mundo real.

**Contando Operações** A maioria das quantidades numéricas são arredondadas ou truncadas pelos computadores, dado o limitado número de casas decimais com que eles podem trabalhar. Por exemplo, um computador projetado para armazenar oito casas decimais poderia gravar  $\frac{2}{3}$  tanto como 0,66666667 (arredondado) quanto 0,66666666 (truncado). Em qualquer caso, é introduzido um erro que nós chamamos *erro de arredondamento*.

As principais considerações práticas na resolução de problemas de Álgebra Linear em computadores digitais são minimizar o tempo de computação (e portanto os custos) necessário para obter a solução e minimizar inexatidões devidas a erros de arredondamento. Assim, um algoritmo computacional bom usa o mínimo possível de operações e efetua estas operações de modo a minimizar o efeito dos erros de arredondamento.

Neste texto nós estudamos quatro métodos de resolver um sistema linear  $Ax = b$  de  $n$  equações em  $n$  incógnitas:

1. Eliminação gaussiana com retro-substituição
2. Eliminação de Gauss-Jordan
3. Calculando  $A^{-1}$  e então  $x = A^{-1}b$
4. Regra de Cramer

Para determinar como estes métodos se comparam enquanto ferramentas computacionais, nós precisamos saber quantas operações aritméticas cada uma requer. Em grandes computadores modernos, os tempos de execução típicos em microssegundos (1 microssegundo =  $10^{-6}$  segundo) das operações aritméticas básicas são

Multiplicação = 1,0 microssegundo

Divisão = 3,0 microssegundos

Adição = 0,5 microssegundo

Subtração = 0,5 microssegundo

Em nossa análise nós vamos agrupar divisões e multiplicações (com tempo médio de execução = 2,0 microssegundos) e também adições e subtrações (com tempo médio de execução = 0,5 microssegundo). Nós vamos nos referir tanto a divisões quanto multiplicações como “multiplicações” e tanto a subtrações quanto adições como “adições”.

Na Tabela 1 nós listamos o número de operações requeridas para resolver um sistema linear  $Ax = b$  de  $n$  equações em  $n$  incógnitas por cada um dos quatro métodos discutidos no texto, bem como o número de operações requeridas para inverter  $A$  ou para calcular seu determinante através da redução por linhas.

Observe que os métodos desenvolvidos no texto de eliminação gaussiana e eliminação de Gauss-Jordan têm a mesma contagem de operações. Não é difícil ver por que isto é assim: Ambos métodos começam com a redução da matriz aumentada à forma escalonada por linhas. Esta é a assim chamada *fase* ou *etapa para frente*. Em seguida a solução é completada por retro-

substituição na eliminação gaussiana ou pela continuação à forma escalonada reduzida por linhas na eliminação de Gauss-Jordan. Esta é a assim chamada *fase* ou *etapa para trás*. Ocorre que o número de operações requeridas na etapa para trás é o mesmo, independentemente de usar retro-substituição ou continuando até a forma escalonada reduzida por linhas. Assim, os métodos desenvolvidos no texto de eliminação gaussiana e eliminação de Gauss-Jordan têm a mesma contagem de operações.

**OBSERVAÇÃO.** Existe uma variação comum da eliminação de Gauss-Jordan que é menos eficiente que a apresentada neste texto. No nosso método, a matriz aumentada é primeiro reduzida à forma escalonada por linhas pela introdução de zeros *abaixo* dos pivôs e em seguida completamos a redução introduzindo zeros *acima* dos pivôs. Um procedimento alternativo é introduzir zeros *acima* e *abaixo* de um líder assim que ele for obtido. Este método requer

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \text{ adições e } \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \text{ multiplicações}$$

ambos os quais são maiores que os nossos valores, para qualquer  $n \geq 3$ .

Para ilustrar como calculamos os valores da Tabela 1, vamos deduzir a contagem de operações para a eliminação de Gauss-Jordan. Para isto nós precisamos das fórmulas da soma dos  $n$  primeiros inteiros positivos e da soma dos quadrados dos  $n$  primeiros inteiros positivos a seguir:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

As deduções destas fórmulas são discutidas nos exercícios. Nós também precisamos das fórmulas da soma dos  $n-1$  primeiros inteiros positivos e da soma dos quadrados dos  $n-1$  primeiros inteiros positivos, que podem ser obtidas substituindo  $n$  por  $n-1$  em (1) e (2):

TABELA 1 Contagem de Operações com uma Matriz Invertível  $n \times n$  A

Método	Número de Adições	Número de Multiplicações
Resolver $Ax = b$ por eliminação de Gauss-Jordan	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$
Resolver $Ax = b$ por eliminação gaussiana	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$
Encontrar $A^{-1}$ por redução de $[A I]$ a $[I A^{-1}]$	$n^3 - 2n^2 + n$	$n^3$
Resolver $Ax = b$ como $x = A^{-1}b$	$n^3 - n^2$	$n^3 + n^2$
Encontrar $\det(A)$ através da redução por linhas	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3}n - 1$
Resolver $Ax = b$ pela regra de Cramer	$\frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n$	$\frac{1}{3}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3}n^2 + \frac{2}{3}n - 1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \quad (3)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \quad (4)$$

**Contagem de Operações da Eliminação de Gauss-Jordan** Seja  $Ax = b$  um sistema de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas e suponha que  $A$  é invertível, de modo que o sistema tem uma única solução. Também suponha, para simplificar, que não é necessária nenhuma troca de linhas para colocar a matriz aumentada  $[A|b]$  em forma escalonada reduzida por linhas. Esta hipótese é justificada pois trocas de linha em computadores são tratadas a nível de armazenamento e requerem muito menos tempo do que operações aritméticas.

Como não são requeridas trocas de linhas, o primeiro passo na eliminação de Gauss-Jordan é introduzir um líder na primeira linha, multiplicando os elementos desta linha pelo recíproco da entrada mais à esquerda nesta linha. Nós vamos representar este passo esquematicamente como segue:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \times \text{ denota uma quantidade a ser calculada} \\ \bullet \text{ denota uma quantidade que não é calculada} \\ \text{O tamanho da matriz é } n \times (n+1) \end{array}$$

Observe que o líder é simplesmente registrado e não requer cálculo; somente as demais  $n$  entradas na primeira linha devem ser calculadas.

A seguir apresentamos uma descrição esquemática dos passos e do número de operações requerido para reduzir  $[A|b]$  à forma escalonada por linhas.

**Passo 1**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} n \text{ multiplicações} \\ 0 \text{ adições} \end{array}$$

**Passo 1 a**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} n \text{ multiplicações / linha} \\ n \text{ adições / linha} \\ n-1 \text{ linhas requerendo cálculos} \\ n(n-1) \text{ multiplicações} \\ n(n-1) \text{ adições} \end{array}$$

**Passo 2**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} n-1 \text{ multiplicações} \\ 0 \text{ adições} \end{array}$$

**Passo 2 a**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times & \times & \times \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} n-1 \text{ multiplicações / linha} \\ n-1 \text{ adições / linha} \\ n-2 \text{ linhas requerendo cálculos} \\ (n-1)(n-2) \text{ multiplicações} \\ (n-1)(n-2) \text{ adições} \end{array}$$

**Passo 3**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} n-2 \text{ multiplicações} \\ 0 \text{ adições} \end{array}$$

**Passo 3 a**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \times & \times & \times \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} n-2 \text{ multiplicações / linha} \\ n-2 \text{ adições / linha} \\ n-3 \text{ linhas requerendo cálculos} \\ (n-2)(n-3) \text{ multiplicações} \\ (n-2)(n-3) \text{ adições} \end{array}$$

**Passo  $(n-1)$**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} 2 \text{ multiplicações} \\ 0 \text{ adições} \end{array}$$

**Passo  $(n-1)a$**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \times & \times \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} 2 \text{ multiplicações / linha} \\ 2 \text{ adições / linha} \\ 1 \text{ linha requerendo cálculos} \\ 2 \text{ multiplicações} \\ 2 \text{ adições} \end{array}$$

**Passo  $n$**

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \times & \times \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} 1 \text{ multiplicação} \\ 0 \text{ adições} \end{array}$$

Assim, o número de operações requerido para completar os sucessivos passos é o seguinte:

#### Passos 1 e 1 a

$$\begin{aligned} \text{Multiplicações: } & n + n(n-1) = n^2 \\ \text{Adições: } & n(n-1) = n^2 - n \end{aligned}$$

#### Passos 2 e 2 a

$$\begin{aligned} \text{Multiplicações: } & (n-1) + (n-1)(n-2) = (n-1)^2 \\ \text{Adições: } & (n-1)(n-2) = (n-1)^2 - (n-1) \end{aligned}$$

#### Passos 3 e 3 a

$$\begin{aligned} \text{Multiplicações: } & (n-2) + (n-2)(n-3) = (n-2)^2 \\ \text{Adições: } & (n-2)(n-3) = (n-2)^2 - (n-2) \end{aligned}$$

#### Passos $(n-1)$ e $(n-1)a$

$$\begin{aligned} \text{Multiplicações: } & 4 (= 2^2) \\ \text{Adições: } & 2 (= 2^2 - 2) \end{aligned}$$

#### Passo $n$

$$\begin{aligned} \text{Multiplicações: } & 1 (= 1^2) \\ \text{Adições: } & 0 (= 1^2 - 1) \end{aligned}$$

O número total de operações requeridas para reduzir  $[A|b]$  à forma escalonada por linhas é, portanto,

$$\begin{aligned} \text{Multiplicações: } & n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2 \\ \text{Adições: } & [n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2] \\ & - [n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1] \end{aligned}$$

ou, aplicando as Fórmulas (1) e (2),

$$\text{Multiplicações: } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad (5)$$

$$\text{Adições: } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \quad (6)$$

Isto completa a contagem de operações na etapa para frente. Na etapa para trás nós devemos colocar a forma escalonada por linhas de  $[A|b]$  na forma escalonada reduzida por linhas introduzindo zeros acima dos pivôs. Estas operações são como segue:

<b>Passo 1</b>	$\left[ \begin{array}{cccc cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array} \right]$	$\leftarrow n-1 \text{ multiplicações}$ $n-1 \text{ adições}$
<b>Passo 2</b>	$\left[ \begin{array}{cccc cc} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array} \right]$	$\leftarrow n-2 \text{ multiplicações}$ $n-2 \text{ adições}$

<b>Passo <math>(n-2)</math></b>	$\left[ \begin{array}{cccc cc} 1 & \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array} \right]$	$\leftarrow 2 \text{ multiplicações}$ $2 \text{ adições}$
<b>Passo <math>(n-1)</math></b>	$\left[ \begin{array}{cccc cc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array} \right]$	$\leftarrow 1 \text{ multiplicação}$ $1 \text{ adição}$

Assim, o número total de operações requeridas na fase para trás é

$$\begin{aligned} \text{Multiplicações: } & (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ \text{Adições: } & (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \end{aligned}$$

ou, aplicando a Fórmula (3),

$$\text{Multiplicações: } \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \quad (7)$$

$$\text{Adições: } \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \quad (8)$$

Assim, por (5), (6), (7) e (8), o número total de operações requeridas na eliminação de Gauss-Jordan é

Multiplicações:

$$\left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) + \left( \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right) = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \quad (9)$$

Adições:

$$\left( \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \right) + \left( \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \quad (10)$$

**Comparação dos Métodos de Resolver Sistemas Lineares** Nas aplicações práticas, não é incomum encontrar sistemas lineares com milhares de equações em milhares de incógnitas. Assim, nós estaremos interessados na Tabela 1 para grandes valores de  $n$ ; mas, para valores grandes da variável, um polinômio pode ser aproximado muito bem por seu termo de mais alto grau, ou seja, se  $a_k \neq 0$ , então

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k \approx a_kx^k \text{ para } x \text{ grande}$$

(Exercício 12). Assim, para valores grandes de  $n$  a contagem de operações na Tabela 1 pode ser aproximada como mostra a Tabela 2.

Segue da Tabela 2 que para  $n$  grande, os melhores métodos para resolver  $Ax = b$  são a eliminação gaussiana e a eliminação de Gauss-Jordan. O método de multiplicar por  $A^{-1}$  é muito pior do que estes (requerendo três vezes mais operações) mas o mais fraco de todos os quatro métodos é a regra de Cramer.

**OBSERVAÇÃO.** Nós vimos na observação seguinte à Tabela 1 que se a eliminação de Gauss-Jordan é efetuada introduzindo zeros

TABELA 2 Contagem Aproximada de Operações com uma Matriz Invertível  $A$  e  $n$  grande

Método	Número de Adições	Número de Multiplicações
Resolver $Ax = b$ por eliminação de Gauss-Jordan	$\approx \frac{n^3}{3}$	$\approx \frac{n^3}{3}$
Resolver $Ax = b$ por eliminação gaussiana	$\approx \frac{n^3}{3}$	$\approx \frac{n^3}{3}$
Encontrar $A^{-1}$ por redução de $[A I]$ a $[I A^{-1}]$	$\approx n^3$	$\approx n^3$
Resolver $Ax = b$ como $x = A^{-1}b$	$\approx n^3$	$\approx n^3$
Encontrar $\det(A)$ através da redução por linhas	$\approx \frac{n^3}{3}$	$\approx \frac{n^3}{3}$
Resolver $Ax = b$ pela regra de Cramer	$\approx \frac{n^4}{3}$	$\approx \frac{n^4}{3}$

acima e abaixo dos pivôs assim que eles forem obtidos, então a contagem de operações é

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \text{ adições e } \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \text{ multiplicações}$$

Assim, para  $n$  grande, este procedimento requer  $\approx n^3/2$  multiplicações, o que é 50% a mais que as  $n^3/3$  multiplicações requeridas pelo método dado no texto. Analogamente para as adições.

É razoável perguntar se é possível projetar outros métodos para resolver sistemas de equações lineares, que possam requerer significantemente menos operações do que as  $\approx n^3/3$  adições

e multiplicações requeridas na eliminação gaussiana e na eliminação de Gauss-Jordan. A resposta é um “sim” adjetivado. Recentemente, têm sido delineados métodos que requerem  $\approx Cn^q$  multiplicações, onde  $q$  é um pouco maior do que 2,5. No entanto, estes métodos têm pouco valor prático por que sua programação é complicada, a constante  $C$  é muito grande e o número de adições requeridas é excessivo. Resumindo, não há atualmente nenhum método prático para resolver um sistema de equações lineares que melhore significantemente a contagem de operações das eliminações gaussiana e de Gauss-Jordan dadas no texto.

### Conjunto de Exercícios 9.8

1. Encontre o número de adições e multiplicações que são requeridas para calcular  $AB$  se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  e  $B$  é uma matriz  $n \times p$ .
2. Use o resultado no Exercício 1 para encontrar o número de adições e multiplicações que são requeridas para calcular  $A^k$  por multiplicação direta se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ .
3. Supondo que  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , use as fórmulas na Tabela 1 para determinar o número de operações que são requeridas para os processos na Tabela 3 a seguir.

TABELA 3

	$n = 5$		$n = 10$		$n = 100$		$n = 1000$	
	+	$\times$	+	$\times$	+	$\times$	+	$\times$
Resolver $Ax = b$ por eliminação Gauss-Jordan								
Resolver $Ax = b$ por eliminação Gaussiana								
Encontrar $A^{-1}$ por redução de $[A   I]$ a $[I   A^{-1}]$								
Resolver $Ax = b$ como $x = A^{-1}b$								
Encontrar $\det(A)$ através da redução por linha								
Resolver $Ax = b$ pela regra de Cramer								

4. Supondo um tempo de computação de 2,0 microssegundos para uma multiplicação e de 0,5 microssegundos para uma adição, use os resultados no Exercício 3 para preencher os tempos de execução dos procedimentos listados na Tabela 4.

TABELA 4

	$n = 5$		$n = 10$		$n = 100$		$n = 1000$	
	Tempo de Execução (seg)							
Resolver $Ax = b$ por eliminação Gauss-Jordan								
Resolver $Ax = b$ por eliminação Gaussiana								
Encontrar $A^{-1}$ por redução de $[A   I]$ a $[I   A^{-1}]$								
Resolver $Ax = b$ como $x = A^{-1}b$								
Encontrar $\det(A)$ através de redução por linha								
Resolver $Ax = b$ pela regra de Cramer								

5. Deduza a fórmula

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

## 326 ••• Álgebra Linear com Aplicações

[*Sugestão.* Seja  $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Escreva os termos de  $S_n$  em ordem inversa e some as duas expressões para  $S_n$ .]

6. Use o resultado no Exercício 5 para mostrar que

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

7. Deduza a fórmula

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

usando os seguintes passos.

- (a) Mostre que  $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ .  
 (b) Mostre que

$$[2^3 - 1^3] + [3^3 - 2^3] + [4^3 - 3^3] + \dots + [(n+1)^3 - n^3] = (n+1)^3 - 1$$

- (c) Aplique (a) a cada termo no lado esquerdo de (b) para mostrar que

$$(n+1)^3 - 1 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] + 3[1 + 2 + 3 + \dots + n] + n$$

- (d) Resolva a equação em (c) para  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ , use o resultado no Exercício 5 e então simplifique.

8. Use o resultado no Exercício 7 para mostrar que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

9. Seja  $R$  uma forma escalonada por linhas de uma matriz invertível  $n \times n$ . Mostre que para resolver o sistema linear  $Rx = b$  por retro-substituição são requeridas

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \text{ multiplicações}$$

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \text{ adições}$$

10. Mostre que para reduzir uma matriz invertível  $n \times n$  a  $I_n$  pelo método dado no texto são requeridas

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \text{ multiplicações}$$

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} \text{ adições}$$

[*Observação.* Suponha que não são necessárias trocas de linhas.]

11. Considere a variação da eliminação de Gauss-Jordan na qual os zeros são introduzidos acima e abaixo de um pivô assim que for ele obtido e seja  $A$  uma matriz invertível. Mostre que para resolver um sistema linear  $Ax = b$  usando esta versão da eliminação de Gauss-Jordan são requeridas

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \text{ multiplicações}$$

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \text{ adições}$$

[*Observação.* Suponha que não são necessárias trocas de linhas.]

12. (*Para leitores que estudaram Cálculo.*) Mostre que se  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ , onde  $a_k \neq 0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{a_kx^k} = 1$$

Este resultado justifica a aproximação  $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k \approx a_kx^k$  para valores grandes de  $x$ .

## 9.9 DECOMPOSIÇÃO LU

Com a eliminação gaussiana e a eliminação de Gauss-Jordan, resolvemos um sistema linear operando sistematicamente sobre a matriz aumentada. Nesta seção nós iremos discutir uma abordagem diferente, baseada na fatoração da matriz de coeficientes em um produto de uma matriz triangular inferior e uma matriz triangular superior. Este método é perfeitamente adaptável a computadores, sendo a base de muitos programas práticos de computação.<sup>1</sup>

### Resolvendo Sistemas Lineares por Fatoração

Nós avançaremos em duas etapas. Primeiro, nós vamos mostrar como um sistema linear  $Ax = b$  pode ser resolvido muito facilmente uma vez que a matriz  $A$  de coeficientes é fatorada em um produto de uma matriz triangular inferior e uma matriz triângulo-

<sup>1</sup> Em 1979 foi desenvolvida uma importante biblioteca de programas de Álgebra Linear, denominada LINPAK, no Laboratório Nacional de Argonne (nos EUA), constituída de programas independentes de plataforma. Muitos dos programas naquela biblioteca utilizam os métodos de fatoração que nós estudaremos nesta seção. Variações das rotinas LINPAK são usadas por muitos sistemas de computação, inclusive por MATLAB, Mathematica e Maple.

lar superior. Depois nós mostraremos como construir uma tal fatoração.

Se uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  puder ser fatorada num produto de matrizes  $n \times n$  como

$$A = LU$$

onde  $L$  é triangular inferior e  $U$  é triangular superior, então o sistema linear  $Ax = b$  pode ser resolvido como segue:

**Passo 1.** Reescreva o sistema  $Ax = b$  como

$$LUx = b \quad (1)$$

**Passo 2.** Defina uma nova matriz  $y$  de tamanho  $n \times 1$  por

$$Ux = y \quad (2)$$

**Passo 3.** Use (2) para escrever (1) como  $Ly = b$  e resolva este sistema em  $y$ .

**Passo 4.** Substitua  $y$  em (2) e resolva em  $x$ .

Embora este procedimento substitua o problema de resolver um único sistema  $Ax = b$  pelo problema de resolver os dois sistemas  $Ly = b$  e  $Ux = y$ , estes dois sistemas são fáceis de resolver, pois suas matrizes de coeficientes são triangulares. O seguinte exemplo ilustra este procedimento.

### EXEMPLO 1 Resolvendo um Sistema por Fatoração

Adiante nesta seção nós vamos deduzir a seguinte fatoração

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Use este resultado e o método descrito acima para resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Solução.

Reescreva (3) como

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Como especificamos no Passo 2 acima, defina  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  pelas equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

de modo que (4) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} 2y_1 &= 2 \\ -3y_1 + y_2 &= 2 \\ 4y_1 - 3y_2 + 7y_3 &= 3 \end{aligned}$$

O procedimento para resolver este sistema é similar à retro-substituição exceto que as equações são resolvidas de cima para baixo em vez de de baixo para cima. Este procedimento, que é chamado *substituição direta*, dá

$$y_1 = 1, y_2 = 5, y_3 = 2$$

(Verifique.) Substituindo estes valores em (5), obtemos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema por retro-substituição, obtemos a solução

$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 2$$

(Verifique.)

**Decomposições LU** Agora que nós vimos como um sistema linear de  $n$  equações em  $n$  incógnitas pode ser resolvido fatorando a matriz de coeficientes, nós vamos passar ao problema de construir tais fatorações. Para motivar o método, suponha que uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  tenha sido reduzida à forma escalonada por linhas  $U$  por uma seqüência de operações elementares sobre linhas. Pelo Teorema 1.5.1, cada uma destas operações elementares pode ser efetuada pela multiplicação à esquerda por uma matriz elementar apropriada. Assim, podemos encontrar matrizes  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tais que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U \quad (6)$$

Pelo Teorema 1.5.2, as matrizes  $E_1, E_2, \dots, E_k$  são invertíveis, de modo que podemos multiplicar ambos os lados da Equação (6) à esquerda sucessivamente por

$$E_k^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$$

para obter

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U \quad (7)$$

No Exercício 15 nós vamos ajudar o leitor a mostrar que a matriz  $L$  definida por

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \quad (8)$$

é triangular inferior desde que *não tenham sido usadas trocas de linhas na redução de  $A$  para  $U$* . Supondo que isto seja assim, substituímos (8) em (7) e obtemos

$$A = LU$$

que é uma fatoração de  $A$  em um produto de uma matriz triangular inferior e uma matriz triangular superior.

O teorema seguinte resume o resultado acima.

**Teorema 9.9.1**

Se  $A$  é uma matriz quadrada que pode ser reduzida à forma escalonada por linhas  $U$  por eliminação gaussiana sem troca de linhas, então  $A$  pode ser fatorada como  $A = LU$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior.

**Definição**

Uma fatoração de uma matriz quadrada  $A$  como  $A = LU$ , onde  $L$  é triangular inferior e  $U$  é triangular superior, é chamada uma *fatoração* ou *decomposição LU* ou, ainda, *decomposição triangular* da matriz  $A$ .

**EXEMPLO 2 Uma Decomposição LU**

Encontre uma decomposição  $LU$  de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

*Solução.*

Para obter uma decomposição  $LU$ , nós vamos reduzir  $A$  à forma escalonada por linhas  $U$  e depois calcular  $L$  por (8). Os passos são como segue:

Redução à Forma Escalonada por Linhas	Matriz Elementar Correspondente à Operação sobre Linhas	Inverso da Matriz Elementar
$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$		
<b>Passo 1</b>	$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$		
<b>Passo 2</b>	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$		
<b>Passo 3</b>	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$		
<b>Passo 4</b>	$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$		
<b>Passo 5</b>	$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$	$E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		

Assim,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, por (8),

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma decomposição  $LU$  de  $A$ .

### Método para Encontrar Decomposições LU

Como este exemplo mostra, a maior parte do trabalho de construir decomposições  $LU$  é calcular  $L$ . No entanto, todo este trabalho pode ser eliminado se mantivermos um registro cuidadoso das operações usadas para reduzir  $A$  a  $U$ . Como nós estamos supondo que não foram realizadas trocas de linhas para reduzir  $A$  a  $U$ , só há dois tipos de operações envolvidas: a multiplicação de uma linha por uma constante não-nula e a adição de um múltiplo de uma linha a uma outra linha (estas constantes que usamos para multiplicar são chamadas **multiplicadores**). A primeira operação é utilizada para introduzir os líderes e a segunda para introduzir os zeros debaixo dos líderes.

No Exemplo 2, os multiplicadores necessários para introduzir os líderes nas sucessivas linhas foram:

$\frac{1}{2}$  para a primeira linha

1 para a segunda linha

$\frac{1}{7}$  para a terceira linha

Note que, em (9), as entradas sucessivas na diagonal de  $L$  eram exatamente os recíprocos destes multiplicadores:

$$L = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & 0 \\ -3 & \textcircled{1} & 0 \\ 4 & -3 & \textcircled{7} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Em seguida, observe que para introduzir zeros abaixo do líder da primeira linha, nós usamos as operações

somar 3 vezes a primeira linha à segunda

somar -4 vezes a primeira linha à terceira

e para introduzir o zero debaixo do líder da segunda linha, nós usamos a operação

somar 3 vezes a segunda linha à terceira

Agora note que, em (10), a entrada em cada posição debaixo da diagonal principal de  $L$  é o **negativo** do multiplicador da operação que introduz o zero naquela posição em  $U$ :

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Em resumo, nós obtemos o seguinte procedimento para construir uma decomposição  $LU$  de uma matriz quadrada  $A$  sempre que  $A$  puder ser reduzida à forma escalonada por linhas sem permutação de linhas.

**Passo 1.** Reduza  $A$  à forma escalonada por linhas  $U$  por eliminação gaussiana sem troca de linhas, mantendo armazenados os multiplicadores utilizados para introduzir os pivôs e os multiplicadores utilizados para introduzir os zeros debaixo dos pivôs.

**Passo 2.** Em cada posição ao longo da diagonal principal de  $L$ , coloque o recíproco do multiplicador que introduziu o pivô naquela posição em  $U$ .

**Passo 3.** Em cada posição abaixo da diagonal principal de  $L$ , coloque o negativo do multiplicador utilizado para introduzir o zero naquela posição em  $U$ .

**Passo 4.** Forme a decomposição  $A = LU$ .

### EXEMPLO 3: Encontrando uma Decomposição LU

Encontre uma decomposição  $LU$  de

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução.

Nós começamos pela redução de  $A$  à forma escalonada por linhas, contabilizando todos os multiplicadores.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \leftarrow \text{multiplicador} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \textcircled{2} & 2 & 1 \\ \textcircled{3} & 8 & 5 \end{bmatrix} \leftarrow \text{multiplicador} = -9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \leftarrow \text{multiplicador} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{0} & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{multiplicador} = -8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \leftarrow \text{multiplicador} = 1$$

Aqui, nenhuma operação foi, de fato, realizada pois já há um pivô na terceira linha.

Construindo  $L$  a partir dos multiplicadores dá a decomposição  $LU$ .

$$A = LU = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nós concluímos esta seção discutindo brevemente duas questões fundamentais sobre decomposições  $LU$ :

1. Toda matriz quadrada tem uma decomposição  $LU$ ?
2. Pode uma matriz quadrada ter mais de uma decomposição  $LU$ ?

Nós já sabemos que se uma matriz quadrada  $A$  puder ser reduzida à forma escalonada por eliminação gaussiana sem troca de linhas, então  $A$  tem uma decomposição  $LU$ . Em geral, se for necessária uma troca de linhas para reduzir  $A$  à forma escalonada, então  $A$  não tem uma decomposição  $LU$ . No entanto, em tais casos é possível fatorar  $A$  na forma

$$A = PLU$$

onde  $L$  é triangular inferior,  $U$  é triangular superior e  $P$  é uma matriz obtida pela permutação apropriada de linhas de  $I_n$  (veja o Exercício 17).

As decomposições  $LU$  não são únicas na ausência de restrições adicionais. Por exemplo, se

$$A = LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e se  $L$  tiver entradas não-nulas na diagonal, então nós podemos passar as entradas na diagonal do fator da esquerda para o da direita escrevendo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{l_{31}}{l_{11}} & \frac{l_{32}}{l_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{l_{31}}{l_{11}} & \frac{l_{32}}{l_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{22}u_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que produz uma outra decomposição triangular de  $A$ .

### Conjunto de Exercícios 9.9

1. Use o método do Exemplo 1 e a decomposição  $LU$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para resolver o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

2. Use o método do Exemplo 1 e a decomposição  $LU$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para resolver o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 6x_3 &= -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Nos Exercícios 3–10, encontre uma decomposição  $LU$  da matriz de coeficientes; depois use o método do Exemplo 1 para resolver o sistema.

3.  $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

4.  $\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 19 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

6.  $\begin{bmatrix} -3 & 12 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

7.  $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ -8 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

8.  $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 3 & 10 & -10 \\ -2 & -4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

9.  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$       10.  $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre uma decomposição  $LU$  de  $A$ .
- (b) Express  $A$  na forma  $A = L_1 D U_1$ , onde  $L_1$  é triangular inferior com entradas 1 na diagonal principal,  $U_1$  é triangular superior e  $D$  é uma matriz diagonal.
- (c) Express  $A$  na forma  $A = L_2 U_2$ , onde  $L_2$  é triangular inferior com entradas 1 na diagonal principal e  $U_2$  é triangular superior.

12. Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não possui decomposição  $LU$ .

13. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- (a) Prove: Se  $a \neq 0$ , então  $A$  tem uma única decomposição  $LU$  com entradas 1 na diagonal principal de  $L$ .
- (b) Encontre a decomposição  $LU$  descrita em (a).
- 14. Seja  $Ax = b$  um sistema linear de  $n$  equações em  $n$  incógnitas e suponha que  $A$  é uma matriz invertível que pode ser reduzida à forma escalonada por linhas sem troca de linhas. Quantas adições e multiplicações adicionais são exigidas para resolver o sistema pelo método do Exemplo 1? [Observação. Subtrações são computadas como somas e divisões como multiplicações.]
- 15. Lembre que pelo Teorema 1.7.1b o produto de matrizes triangulares inferiores é uma matriz triangular inferior. Use este fato para provar que a matriz  $L$  em (8) é triangular inferior.
- 16. Use o Teorema 1.7.1b para provar que o produto de um número finito de matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular superior.
- 17. Prove: Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  qualquer, então  $A$  pode ser fatorada como  $A = PLU$ , onde  $L$  é triangular inferior,  $U$  é triangular superior e  $P$  pode ser obtida por troca de linhas apropriadas de  $I_n$ . [Sugestão. Seja  $U$  a forma escalonada por linhas de  $A$  e efetue antes todas as trocas de linhas requeridas para reduzir  $A$  a  $U$ .]
- 18. Fatore

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

como  $A = PLU$ , onde  $P$  é obtida de  $I_3$  por trocas de linhas apropriadas,  $L$  é triangular inferior e  $U$  é triangular superior.

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais do Capítulo 9

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

### Seção 9.3

T1. (Ajuste linear de mínimos quadrados) Leia em seu manual sobre como encontrar o ajuste linear de mínimos quadrados a pontos dados e então use seu recurso para encontrar o melhor ajuste aos dados no Exemplo 1. Não imite o método do exemplo; em vez disto, use os comandos disponíveis em seu recurso.

T2. (Ajuste polinomial de mínimos quadrados) Leia em seu manual sobre como ajustar polinômios a pontos dados por mínimos quadrados e então use seu recurso para encontrar o ajuste polinomial aos dados no Exemplo 3. Não imite o método do exemplo; em vez disto, use os comandos disponíveis em seu recurso.

**Seção 9.7**

T1. (*Superfícies quádricas*) Use seu recurso para efetuar as contas no Exemplo 3.

**Seção 9.9**

T1. (*Decomposição LU*) Os recursos computacionais variam muito em

seu tratamento de decomposições *LU*. Por exemplo, alguns programas fazem trocas de linhas para reduzir os erros de arredondamento e portanto produzem uma decomposição *PLU*, mesmo se for solicitada uma decomposição *LU*. Leia seu manual e então veja o que acontece quando você pede ao seu recurso encontrar a decomposição *LU* da matriz  $A$  no Exemplo 3.

# Espaços Vetoriais Complexos

## Conteúdo do Capítulo

- 10.1 Números Complexos
- 10.2 Divisão de Números Complexos
- 10.3 Forma Polar de um Número Complexo
- 10.4 Espaços Vetoriais Complexos
- 10.5 Espaços Vetoriais Complexos com Produto Interno
- 10.6 Matrizes Unitárias, Normais e Hermitianas

**I**NTRODUÇÃO: Até aqui nós consideramos somente espaços vetoriais para os quais os escalares eram números reais. No entanto, para muitas aplicações importantes de vetores é desejável permitir que os escalares sejam números complexos. Uma vantagem de permitir escalares complexos é que todas as matrizes com entradas escalares têm autovalores, o que não é verdade se somente permitirmos escalares reais.

Nas primeiras três seções deste capítulo nós vamos revisar algumas das propriedades básicas de números complexos e, nas seções subsequentes, nós iremos discutir espaços vetoriais nos quais os escalares podem ser números complexos.

## 10.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Nesta seção nós vamos revisar a definição de números complexos e discutir as operações de adição, subtração e multiplicação de tais números. Nós também vamos considerar matrizes com entradas complexas e explicar como a adição e a subtração de números complexos podem ser vistas como operações com vetores.

**Números Complexos** Como  $x^2 \geq 0$  para cada número real  $x$ , a equação  $x^2 = -1$  não tem solução real. Para contornar este problema, os matemáticos do século 18 introduziram o número “imaginário”

$$i = \sqrt{-1}$$

ao qual eles deram a propriedade

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

mas que, a não ser por isto, podia ser tratado como qualquer número usual. Expressões da forma

$$a + bi \quad (1)$$

onde  $a$  e  $b$  são números reais, eram chamadas “números complexos” e eram manejadas de acordo com as regras usuais da aritmética, com a propriedade adicional de  $i^2 = -1$ .

Em torno do início do século 19 foi reconhecido que um número complexo (1) poderia ser considerado como um símbolo alternativo para o par ordenado

$$(a, b)$$

de números reais e que as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão poderiam ser definidas nestes pares ordenados de tal maneira que as leis familiares da aritmética eram válidas, com a propriedade adicional de  $i^2 = -1$ . Esta é a abordagem que seguiremos aqui.

### Definição

Um **número complexo** é um par ordenado de números reais, denotado tanto por  $(a, b)$  quanto por  $a + bi$ , onde  $i^2 = -1$ .

### EXEMPLO 1 As Duas Notações para um Número Complexo

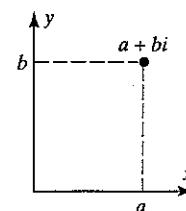
Alguns exemplos de números complexos em ambas notações são os seguintes:

Par Ordenado	Notação Equivalente
(3, 4)	$3 + 4i$
(-1, 2)	$-1 + 2i$
(0, 1)	$0 + i$
(2, 0)	$2 + 0i$
(4, -2)	$4 + (-2)i$

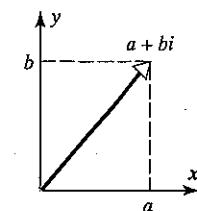
Por simplicidade, os últimos três números complexos seriam usualmente abreviados por

$$0 + i = i, \quad 2 + 0i = 2, \quad 4 + (-2)i = 4 - 2i$$

Geometricamente, um número complexo pode ser visto tanto como um ponto quanto como um vetor no plano  $xy$  (Figura 10.1.1).



(a) Um número complexo como um ponto



(b) Um número complexo como um vetor

Figura 10.1.1

### EXEMPLO 2 Números Complexos como Pontos e como Vetores

Alguns números complexos são mostrados como pontos na Figura 10.1.2a e como vetores na Figura 10.1.2b

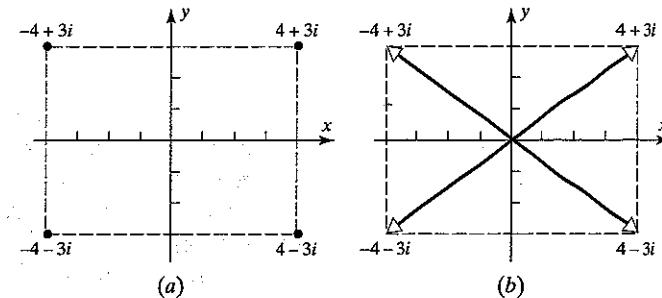


Figura 10.1.2

**O Plano Complexo** Às vezes convém usar uma única letra, tal como  $z$ , para denotar um número complexo. Assim, nós poderíamos escrever

$$z = a + bi$$

O número real  $a$  é chamado a **parte real** de  $z$  e o número real  $b$  é chamado a **parte imaginária** de  $z$ . Estes números são denotados por  $\operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$ , respectivamente. Assim,

$$\operatorname{Re}(4 - 3i) = 4 \text{ e } \operatorname{Im}(4 - 3i) = -3$$

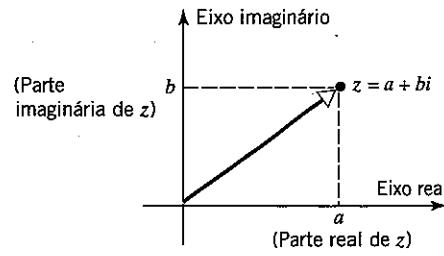


Figura 10.1.3 O plano complexo.

Quando representamos os números complexos geometricamente num sistema de coordenadas  $xy$ , chamamos o eixo  $x$  de *eixo real*, o eixo  $y$  de *eixo imaginário* e o plano todo de *plano complexo* (Figura 10.1.3).

**Operações com Números Complexos** Assim como dois vetores em  $R^2$  são definidos como sendo iguais se têm os mesmos componentes, também definimos dois números complexos como sendo iguais se suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais:

### Definição

Dois números complexos  $a + bi$  e  $c + di$  são definidos como sendo *iguais*, e escrevemos

$$a + bi = c + di$$

se  $a = c$  e  $b = d$ .

Se  $b = 0$ , então o número complexo  $a + bi$  reduz a  $a + 0i$ , que denotamos simplesmente por  $a$ . Assim, para quaisquer números reais  $a$ ,

$$a = a + 0i$$

de modo que os números reais podem ser considerados como números complexos de parte imaginária zero. Geometricamente, os números reais correspondem aos pontos no eixo real. Se nós temos  $a = 0$ , então  $a + bi$  reduz a  $0 + bi$ , que costumamos denotar por  $bi$ . Estes números complexos, que correspondem aos pontos no eixo imaginário, são chamados *números imaginários puros*.

Assim como os vetores em  $R^2$  são somados componente a componente, também números complexos são somados pela adição de suas partes reais e pela adição de suas partes imaginárias.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (2)$$

As operações de subtração e multiplicação por um número *real*, também são similares às correspondentes operações com vetores em  $R^2$ :

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad (3)$$

$$k(a + bi) = (ka) + (kb)i, \quad k \text{ real} \quad (4)$$

Como as operações de soma, subtração e multiplicação de um número complexo por um número real são semelhantes às

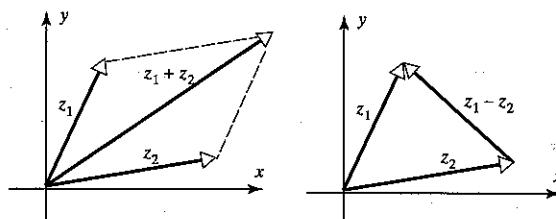


Figura 10.1.4

correspondentes operações de vetores em  $R^2$ , as interpretações geométricas familiares desta operações valem para números complexos (Figura 10.1.4).

Segue por (4) que  $(-1)z + z = 0$  (verifique) e portanto escrevemos  $(-z)$  como  $-z$  e dizemos que é o *negativo* de  $z$ .

### EXEMPLO 3 Adição, Subtração, Multiplicação por Números Reais

Se  $z_1 = 4 - 5i$  e  $z_2 = -1 + 6i$ , encontre  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $3z_1$  e  $-z_2$ .

Solução.

$$z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-1 + 6i) = (4 - 1) + (-5 + 6)i = 3 + i$$

$$z_1 - z_2 = (4 - 5i) - (-1 + 6i) = (4 + 1) + (-5 - 6)i = 5 - 11i$$

$$3z_1 = 3(4 - 5i) = 12 - 15i$$

$$-z_2 = (-1)z_2 = (-1)(-1 + 6i) = 1 - 6i$$

Até aqui sempre mantivemos um paralelo entre os números complexos e os vetores em  $R^2$ . No entanto, agora definiremos a multiplicação de números complexos, uma operação sem análogo vetorial em  $R^2$ . Para motivar esta definição, nós expandimos o produto

$$(a + bi)(c + di)$$

segundo as regras tradicionais da álgebra e tratando  $i^2$  como  $-1$ . Isto dá

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + bdi^2 + adi + bci \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

o que sugere a seguinte definição:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (5)$$

### EXEMPLO 4 Multiplicando Números Complexos

$$(3 + 2i)(4 + 5i) = (3 \cdot 4 - 2 \cdot 5) + (3 \cdot 5 + 2 \cdot 4)i = 2 + 23i$$

$$(4 - i)(2 - 3i) = [4 \cdot 2 - (-1)(-3)] + [(4)(-3) + (-1)(2)]i = 5 - 14i$$

$$i^2 = (0 + i)(0 + i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1$$

(c) O produto de um número real positivo  $k$  e um número complexo  $z$

(d) O produto de um número real negativo  $k$  e um número complexo  $z$

## 336 • • • Álgebra Linear com Aplicações

Nós deixamos como exercício verificar a validade das seguintes regras de aritmética complexa:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \\ z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2 z_3) &= (z_1 z_2) z_3 \\ z_1(z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ 0 + z &= z \\ z + (-z) &= 0 \\ 1 \cdot z &= z \end{aligned}$$

Estas regras tornam possível multiplicar números complexos sem usar a Fórmula (5) diretamente. Seguindo o procedimento usado para motivar esta fórmula, nós podemos simplesmente multiplicar cada termo de  $a + bi$  por cada termo de  $c + di$ , colocar  $i^2 = -1$  e simplificar.

### EXEMPLO 5 Multiplicação de Números Complexos

$$\begin{aligned} (3 + 2i)(4 + i) &= 12 + 3i + 8i + 2i^2 = 12 + 11i - 2 = 10 + 11i \\ (5 - \frac{1}{2}i)(2 + 3i) &= 10 + 15i - i - \frac{3}{2}i^2 = 10 + 14i + \frac{3}{2} = \frac{23}{2} + 14i \\ i(1 + i)(1 - 2i) &= i(1 - 2i + i - 2i^2) = i(3 - i) = 3i - i^2 = 1 + 3i \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. Ao contrário dos números reais, os números complexos não têm uma ordenação por tamanho. Assim, símbolos de ordem como  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$  e  $\geq$  não são usados com números complexos.

Agora que nós definimos adição, subtração e multiplicação de números complexos, é possível somar, subtrair e multiplicar matrizes com entradas complexas e multiplicar uma matriz por um número complexo. Sem entrar nos detalhes, nós observamos que a terminologia e as operações matriciais desenvolvidas no Capítulo 1 passam sem modificações para matrizes com entradas complexas.

### EXEMPLO 6 Matrizes com Entradas Complexas

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 4-i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i \\ 3-2i & 8-i \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1+4i & -i \end{bmatrix} \\ iA &= \begin{bmatrix} i & -i^2 \\ i+i^2 & 4i-i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1+i & 1+4i \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 4-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot i + (-i) \cdot (2-3i) & 1 \cdot (1-i) + (-i) \cdot 4 \\ (1+i) \cdot i + (4-i) \cdot (2-3i) & (1+i) \cdot (1-i) + (4-i) \cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3-i & 1-5i \\ 4-13i & 18-4i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Conjunto de Exercícios 10.1

- Em cada parte, esboce o ponto e o vetor correspondente ao dado número complexo.
  - $2 + 3i$
  - $-4$
  - $-3 - 2i$
  - $-5i$
- Expresse cada número complexo no Exercício 1 como um par ordenado de números reais.
- Em cada parte use a informação dada para encontrar os números reais  $x$  e  $y$ .
  - $x - iy = -2 + 3i$
  - $(x + y) + (x - y)i = 3 + i$
- Sabendo que  $z_1 = 1 - 2i$  e  $z_2 = 4 + 5i$ , encontre
  - $z_1 + z_2$
  - $z_1 - z_2$
  - $4z_1$
  - $-z_2$
  - $3z_1 + 4z_2$
  - $\frac{1}{2}z_1 - \frac{3}{2}z_2$
- Em cada parte, resolva em  $z$ .
  - $z + (1 - i) = 3 + 2i$
  - $-5z = 5 + 10i$
  - $(i - z) + (2z - 3i) = -2 + 7i$
- Em cada parte, esboce os vetores  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_1 + z_2$  e  $z_1 - z_2$ .
  - $z_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = 1 + 4i$
  - $z_1 = -2 + 2i$ ,  $z_2 = 4 + 5i$
- Em cada parte, esboce os vetores  $z$  e  $kz$ .
  - $z = 1 + i$ ,  $k = 2$
  - $z = -3 - 4i$ ,  $k = -2$
  - $z = 4 + 6i$ ,  $k = \frac{1}{2}$
- Em cada parte, encontre números reais  $k_1$  e  $k_2$  que satisfazem a equação.
  - $k_1 i + k_2 (1 + i) = 3 - 2i$
  - $k_1 (2 + 3i) + k_2 (1 - 4i) = 7 + 5i$
- Em cada parte, encontre  $z_1 z_2$ ,  $z_1^2$  e  $z_2^2$ .
  - $z_1 = 3i$ ,  $z_2 = 1 - i$
  - $z_1 = 4 + 6i$ ,  $z_2 = 2 - 3i$
  - $z_1 = \frac{1}{3}(2 + 4i)$ ,  $z_2 = \frac{1}{2}(1 - 5i)$
- Sabendo que  $z_1 = 2 - 5i$  e  $z_2 = -1 - i$ , encontre
  - $z_1 - z_1 z_2$
  - $(z_1 + 3z_2)^2$
  - $[z_1 + (1 + z_2)]^2$
  - $iz_2 - z_1^2$

Nos Exercícios 11–18, efetue as contas e expresse o resultado na forma  $a + bi$ .

11.  $(1+2i)(4-6i)^2$

12.  $(2-i)(3+i)(4-2i)$

13.  $(1-3i)^3$

14.  $i(1+7i) - 3i(4+2i)$

15.  $[(2+i)(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i)]^2$

16.  $(\sqrt{2}+i) - i\sqrt{2}(1+\sqrt{2}i)$

17.  $(1+i+i^2+i^3)^{100}$

18.  $(3-2i)^2 - (3+2i)^2$

19. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 3-i & 4 \end{bmatrix}$$

Encontre

- (a)  $A + 3iB$     (b)  $BA$     (c)  $AB$     (d)  $B^2 - A^2$

20. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3+2i & 0 \\ -i & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1-i & 0 & -i \\ 3 & 2i & -5 \end{bmatrix}$$

Encontre

- (a)  $A(BC)$     (b)  $(BC)A$     (c)  $(CA)B^2$     (d)  $(1+i)(AB) + (3-4i)A$

21. Mostre que

- (a)  $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$     (b)  $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$

22. Em cada parte, resolva a equação pela fórmula quadrática e confira seus resultados substituindo as soluções nas equações dadas.

(a)  $z^2 + 2z + 2 = 0$     (b)  $z^2 - z + 1 = 0$

23. (a) Mostre que se  $n$  é um inteiro positivo, então os únicos valores possíveis para  $i^n$  são  $1, -1, i$  e  $-i$ .

(b) Encontre  $i^{2509}$ . [Sugestão. O valor de  $i^n$  pode ser determinado pelo resto da divisão de  $n$  por 4.]

24. Prove: Se  $z_1 z_2 = 0$ , então  $z_1 = 0$  ou  $z_2 = 0$ .

25. Use o resultado do Exercício 24 para provar: Se  $zz_1 = zz_2$  e  $z \neq 0$ , então  $z_1 = z_2$ .

26. Prove que para quaisquer números complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3$

(a)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$     (b)  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

27. Prove que para quaisquer números complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3$

(a)  $z_1 z_2 = z_2 z_1$     (b)  $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

28. Prove que  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ , para quaisquer números complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3$ .

29. Na Mecânica Quântica, as matrizes

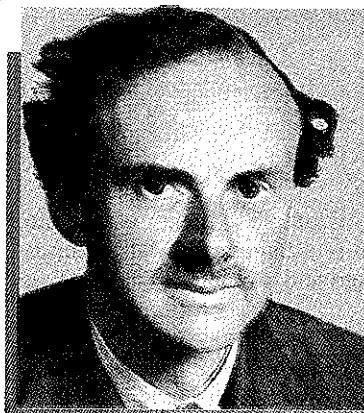
$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são chamadas *matrizes de Dirac*.

(a) Prove que  $\beta^2 = \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = I$ .

(b) Duas matrizes  $A$  e  $B$  são chamadas *anticomutativas* se  $AB = -BA$ . Prove que quaisquer duas matrizes de Dirac distintas são anticomutativas.



**Paul Adrien Maurice Dirac** (1902–1984) foi um físico teórico inglês que elaborou uma nova forma de mecânica quântica e uma teoria que previu o *spin* de elétron e a existência de uma partícula atómica fundamental, denominada pósitron. Em 1933 ele recebeu o Prêmio Nobel de Física e em 1939 a medalha da Sociedade Real Inglesa.

## 10.2 DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Na seção anterior nós definimos a multiplicação de números complexos. Nesta seção nós vamos definir a divisão de números complexos como o inverso da multiplicação.

Nós começamos com algumas idéias preliminares.

**Conjugados Complexos** Se  $z = a + bi$  é um número complexo qualquer, então o **conjugado complexo** de  $z$ , também chamado simplesmente de **conjugado** de  $z$ , é denotado pelo símbolo  $\bar{z}$  (que podemos ler “ $z$  conjugado” ou “ $z$  barra”) e é definido por

$$\bar{z} = a - bi$$

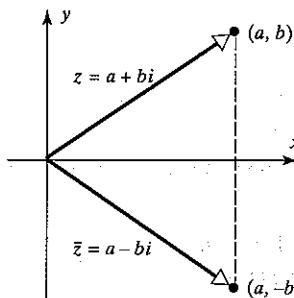


Figura 10.2.1 O conjugado de um número complexo.

Em palavras,  $\bar{z}$  é obtido trocando o sinal da parte imaginária de  $z$ . Geometricamente,  $\bar{z}$  é a reflexão de  $z$  em torno do eixo real (Figura 10.2.1).

### EXEMPLO 1 Exemplos de Conjugados

$z = 3 + 2i$	$\bar{z} = 3 - 2i$
$z = -4 - 2i$	$\bar{z} = -4 + 2i$
$z = i$	$\bar{z} = -i$
$z = 4$	$\bar{z} = 4$

**OBSERVAÇÃO.** A última linha no Exemplo 1 ilustra o seguinte fato: um número real é igual ao seu conjugado. Mais precisamente, pode ser mostrado (Exercício 22) que  $z = \bar{z}$  se, e somente se,  $z$  é um número real.

Se um número complexo  $z$  é visto como um vetor em  $\mathbb{R}^2$ , então a norma ou comprimento do vetor é chamado o módulo (ou *valor absoluto*) de  $z$ . Mais precisamente:

#### Definição

O **módulo** de um número complexo  $z = a + bi$ , denotado por  $|z|$ , é definido por

$$(1) \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se  $b = 0$ , então  $z = a$  é um número real e

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

de modo que o módulo de um número real é simplesmente seu valor absoluto. Por isto, o módulo de  $z$  também é chamado **valor absoluto** de  $z$ .

### EXEMPLO 2 Módulo de um Número Complexo

Encontre  $|z|$  se  $z = 3 - 4i$ .

Solução.

Tomando  $a = 3$  e  $b = -4$  em (1), resulta  $|z| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ .

O próximo teorema estabelece uma relação básica entre  $\bar{z}$  e  $|z|$ .

#### Teorema 10.2.1

Para qualquer número complexo  $z$ ,

$$z\bar{z} = |z|^2$$

**Prova.** Se  $z = a + bi$ , então

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

**Divisão de Números Complexos** Agora nós passamos à divisão de números complexos. Nossa objetivo é definir a divisão como a inversa da multiplicação. Assim, se  $z_2 \neq 0$ , então nossa definição de  $z = z_1/z_2$  deveria ser tal que

$$z_1 = z_2z \quad (2)$$

Nosso procedimento será provar que (2) tem uma única solução em  $z$  se  $z_2 \neq 0$  e então definir  $z_1/z_2$  como sendo este valor de  $z$ . Como ocorre com números reais, não é permitida a divisão por zero.

#### Teorema 10.2.2

Se  $z_2 \neq 0$ , então a Equação (2) tem uma única solução, que é

$$z = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2 \quad (3)$$

**Prova.** Sejam  $z = x + yi$ ,  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ . Então (2) pode ser escrita como

$$x_1 + iy_1 = (x_2 + iy_2)(x + iy)$$

ou

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

ou, igualando as partes real e imaginária,

$$x_2x - y_2y = x_1$$

$$y_2x + x_2y = y_1$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Como  $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$ , segue que  $x_2$  e  $y_2$  não são ambos zero, de modo que

$$\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = x_2^2 + y_2^2 \neq 0$$

Assim, pela regra de Cramer (Teorema 2.4.3), o sistema (4) tem a única solução

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|z_2|^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{|z_2|^2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \frac{1}{|z_2|^2} [(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)] \\ &= \frac{1}{|z_2|^2} (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2 \end{aligned}$$

Assim, para  $z_2 \neq 0$ , nós definimos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2 \quad (5)$$

**OBSERVAÇÃO.** Para lembrar desta fórmula, multiplique o numerador e o denominador de  $z_1 / z_2$  por  $\bar{z}_2$ :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2$$

### EXEMPLO 3 O Quociente no Formato $a + bi$

Expresse

$$\frac{3+4i}{1-2i}$$

no formato  $a + bi$ .

*Solução.*

Tomando  $z_1 = 3 + 4i$  e  $z_2 = 1 - 2i$  em (5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{3+4i}{1-2i} &= \frac{1}{|1-2i|^2} (3+4i)(1-2i) = \frac{1}{5} (3+4i)(1+2i) \\ &= \frac{1}{5} (-5+10i) = -1+2i \end{aligned}$$

*Solução Alternativa.* Como observamos acima, também podemos multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{3+4i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

Em várias aplicações surgem sistemas de equações lineares com coeficientes complexos. Sem entrar em maiores detalhes, nós observamos que todos os resultados estudados nos Capítulos 1 e 2 passam sem modificações para sistemas com coeficientes complexos.

### EXEMPLO 4 Um Sistema Linear com Coeficientes Complexos

Use a regra de Cramer para resolver o sistema

$$\begin{aligned} ix + 2y &= 1 - 2i \\ 4x - iy &= -1 + 3i \end{aligned}$$

*Solução.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2i & 2 \\ -1+3i & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 2 \\ 4 & -i \end{vmatrix}} = \frac{(-i)(1-2i) - 2(-1+3i)}{i(-i) - 2(4)} = \frac{-7i}{-7} = i$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} i & 1-2i \\ 4 & -1+3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 2 \\ 4 & -i \end{vmatrix}} = \frac{(i)(-1+3i) - 4(1-2i)}{i(-i) - 2(4)} = \frac{-7+7i}{-7} = 1-i$$

Assim, a solução é  $x = i$ ,  $y = 1 - i$ .

Nós concluímos esta seção listando algumas propriedades da conjugação complexa que serão úteis em seções posteriores.

### Teorema 10.2.3 Propriedades da Conjugação

Para quaisquer números complexos  $z$ ,  $z_1$  e  $z_2$

- (a)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (b)  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- (c)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- (d)  $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
- (e)  $\overline{\bar{z}} = z$

Nós provamos (a) e deixamos o resto como exercício.

*Prova (a).* Sejam  $z_1 = a_1 + b_1i$  e  $z_2 = a_2 + b_2i$ ; então

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO.** É possível estender a parte (a) do Teorema 10.2.3 a  $n$  parcelas e a parte (c) a  $n$  fatores. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \\ \overline{z_1 z_2 \dots z_n} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n \end{aligned}$$

## Conjunto de Exercícios 10.2

1. Em cada parte, encontre  $\bar{z}$ .
- $z = 2 + 7i$
  - $z = -3 - 5i$
  - $z = 5i$
  - $z = -i$
  - $z = -9$
  - $z = 0$
2. Em cada parte, encontre  $|z|$ .
- $z = i$
  - $z = -7i$
  - $z = -3 - 4i$
  - $z = 1 + i$
  - $z = -8$
  - $z = 0$
3. Mostre que se  $z\bar{z} = |z|^2$  vale para
- $z = 2 - 4i$
  - $z = -3 + 5i$
  - $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$
4. Sabendo que  $z_1 = 1 - 5i$  e  $z_2 = 3 + 4i$ , encontre
- $z_1/z_2$
  - $\bar{z}_1/z_2$
  - $z_1/\bar{z}_2$
  - $\overline{(z_1/z_2)}$
  - $z_1/|z_2|$
  - $|z_1/z_2|$
5. Em cada parte, encontre  $1/z$ .
- $z = i$
  - $z = 1 - 5i$
  - $z = \frac{-i}{7}$
6. Sabendo que  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 1 - 2i$ , encontre
- $z_1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)$
  - $\frac{z_1 - 1}{z_2}$
  - $z_1^2 - \left(\frac{iz_1}{z_2}\right)$
  - $\frac{z_1}{iz_2}$

Nos Exercícios 7–14, efetue as contas e expresse o resultado na forma  $a + bi$ .

7.  $\frac{i}{1+i}$
8.  $\frac{2}{(1-i)(3+i)}$
9.  $\frac{1}{(3+4i)^2}$
10.  $\frac{2+i}{i(-3+4i)}$
11.  $\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$
12.  $\frac{1}{i(3-2i)(1+i)}$
13.  $\frac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$
14.  $\frac{1-2i}{3+4i} - \frac{2+i}{5i}$

15. Em cada parte, resolva em  $z$ .

- $iz = 2 - i$
- $(4 - 3i)\bar{z} = i$

16. Use o Teorema 10.2.3 para provar as seguintes identidades:

- $\overline{z + 5i} = z - 5i$
- $\overline{iz} = -i\bar{z}$
- $\frac{\overline{i + z}}{\overline{i - z}} = -1$

17. Em cada parte, esboce o conjunto de pontos do plano complexo que satisfazem a equação.

- $|z| = 2$
- $|z - (1+i)| = 1$
- $|z - i| = |z + i|$
- $\operatorname{Im}(\bar{z} + i) = 3$

18. Em cada parte, esboce o conjunto de pontos do plano complexo que satisfazem a(s) condição(ões) dada(s).

- $|z + i| \leq 1$
- $1 < |z| < 2$
- $|2z - 4i| < 1$
- $|z| \leq |z + i|$

19. Sabendo que  $z = x + yi$ , encontre

- $\operatorname{Re}(i\bar{z})$
- $\operatorname{Im}(i\bar{z})$
- $\operatorname{Re}(i\bar{z})$
- $\operatorname{Im}(i\bar{z})$

20. (a) Mostre que se  $n$  é um inteiro positivo, então os únicos valores possíveis para  $(1/i)^n$  são  $1, -1, i$  e  $-i$ .

(b) Encontre  $(1/i)^{2509}$ . [Sugestão. Veja o Exercício 23(b) da Seção 10.1.]

21. Prove:

- $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$
- $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \operatorname{Im}(z)$

22. Prove:  $z = \bar{z}$  se, e somente se,  $z$  é um número real.

23. Sabendo que  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ , encontre

- $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$
- $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

24. Prove: Se  $(\bar{z})^2 = z^2$ , então  $z$  é ou real ou imaginário puro.

25. Prove:  $|z| = |\bar{z}|$ .

26. Prove:

- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
- $\bar{\bar{z}} = z$

27. (a) Prove que  $\bar{z}^2 = (\bar{z})^2$ .  
 (b) Prove que se  $n$  é um número inteiro positivo, então  $\bar{z}^n = (\bar{z})^n$ .  
 (c) Será válido o resultado em (b) se  $n$  é um inteiro negativo? Explique.

Nos Exercícios 28–31, resolva o sistema de equações lineares pela regra de Cramer.

$$\begin{array}{l} 28. ix_1 - ix_2 = -2 \\ \quad 2x_1 + x_2 = i \end{array} \quad \begin{array}{l} 29. x_1 + x_2 = 2 \\ \quad x_1 - x_2 = 2i \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 30. x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \quad x_1 + x_2 - x_3 = 2 + 2i \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 31. ix_1 + 3x_2 + (1+i)x_3 = -i \\ \quad x_1 + ix_2 + 3x_3 = -2i \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

Nos Exercícios 32 e 33, resolva o sistema de equações lineares pela eliminação de Gauss-Jordan.

$$32. \begin{bmatrix} -1 & -1-i \\ -1+i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 33. \begin{bmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

34. Resolva o seguinte sistema de equações lineares pela eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{l} x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \\ -x_1 + (1-i)x_2 + 2ix_3 = 0 \\ 2x_1 + (-1+2i)x_2 - 3ix_3 = 0 \end{array}$$

35. Em cada parte, use a fórmula no Teorema 1.4.5 para calcular a inversa da matriz e confira sua resposta mostrando que  $A A^{-1} = A^{-1}A = I$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 1 & i \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

36. Seja  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  um polinômio com coeficientes reais  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Prove que se  $z$  é uma solução da equação  $p(z) = 0$ , então  $\bar{z}$  também é solução.

37. Prove: Para qualquer número complexo  $z$ , valem  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  e  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .

38. Prove que

$$\frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z|$$

[Sugestão. Tome  $z = x + yi$  e use o seguinte fato:  $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ .]

39. Em cada parte, use o método do Exemplo 4 da Seção 1.5 para encontrar  $A^{-1}$  e confira sua resposta mostrando que  $A A^{-1} = A^{-1}A = I$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ -i & 1-2i & 2 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1-4i \\ 2-i & i & 3 \end{bmatrix}$$

40. Mostre que  $|z - 1| = |\bar{z} - 1|$ . Discuta a interpretação geométrica deste resultado.

41. (a) Se  $z_1 = a_1 + b_1i$  e  $z_2 = a_2 + b_2i$ , encontre  $|z_1 - z_2|$  e interprete sua resposta geometricamente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que os números complexos  $12, 6 + 2i$  e  $8 + 8i$  são os vértices de um triângulo retângulo.

42. Use o Teorema 10.2.3 para mostrar que se os coeficientes  $a, b$  e  $c$  de um polinômio quadrático são reais, então as soluções da equação  $az^2 + bz + c = 0$  são números complexos conjugados. O que você pode concluir se  $a, b$  e  $c$  são complexos?

## 10.3 FORMA POLAR

### DE UM NÚMERO COMPLEXO

Nesta seção nós vamos apresentar uma maneira de representar números complexos usando propriedades trigonométricas. Nossa estudo vai levar a uma fórmula importante para as potências de números complexos e a um método de encontrar raízes  $n$ -ésimas de números complexos.

**Forma Polar** Se  $z = x + yi$  é um número complexo não-nulo,  $r = |z|$  e  $\theta$  mede o ângulo do eixo real positivo ao vetor  $z$ , então, como sugere a Figura 10.3.1,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

de modo que  $z = x + yi$  pode ser escrito como  $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$  ou

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2)$$

Esta é chamada a *forma polar* de  $z$ .

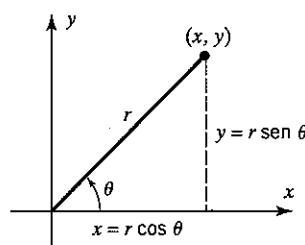


Figura 10.3.1

**Argumento de um Número Complexo** O ângulo  $\theta$  é chamado um *argumento* de  $z$  e é denotado por

$$\theta = \arg z$$

O argumento de  $z$  não é univocamente determinado por que nós podemos somar ou subtrair qualquer múltiplo de  $2\pi$  de  $\theta$  para obter um outro valor do argumento. No entanto, só existe um único valor (em radianos) do argumento que satisfaz

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Este é chamado o *argumento principal* de  $z$  e é denotado por

$$\theta = \operatorname{Arg} z$$

### EXEMPLO 1 Formas Polares

Expressse os seguintes números complexos em forma polar usando seus argumentos principais:

$$(a) z = 1 + \sqrt{3}i \quad (b) z = -1 - i$$

*Solução (a).* O valor de  $r$  é

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

e como  $x = 1$  e  $y = \sqrt{3}$ , segue de (1) que

$$1 = 2 \cos \theta \quad e \quad \sqrt{3} = 2 \sin \theta$$

de modo que  $\cos \theta = 1/2$  e  $\sin \theta = \sqrt{3}/2$ . O único valor de  $\theta$  que satisfaz estas relações e cumpre a exigência  $-\pi < \theta \leq \pi$  é  $\theta = \pi/3$  ( $= 60^\circ$ ) (veja a Figura 10.3.2a). Assim, uma forma polar de  $z$  é

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

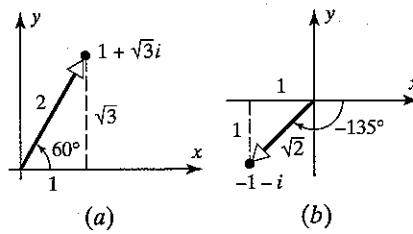


Figura 10.3.2

*Solução (b).* O valor de  $r$  é

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

e como  $x = -1$  e  $y = -1$ , segue de (1) que

$$-1 = \sqrt{2} \cos \theta \quad e \quad -1 = \sqrt{2} \sin \theta$$

de modo que  $\cos \theta = -1/\sqrt{2}$  e  $\sin \theta = -1/\sqrt{2}$ . O único valor de  $\theta$  que satisfaz estas relações e cumpre a exigência  $-\pi < \theta \leq \pi$  é  $\theta = -3\pi/4$  ( $= -135^\circ$ ) (veja a Figura 10.3.2b). Assim, uma forma polar de  $z$  é

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4} \right)$$

**A Multiplicação e a Divisão Interpretadas Geometricamente** Agora nós mostraremos como usar a forma polar para dar uma interpretação geométrica da multiplicação e da divisão de números complexos. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad e \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Multiplicando, obtemos

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

Lembrando das identidades trigonométricas

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

nós obtemos

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (3)$$

que é a forma polar do número complexo de módulo  $r_1 r_2$  e argumento  $\theta_1 + \theta_2$ . Assim, nós mostramos que

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (4)$$

e

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

(Por quê?) Em palavras, o *produto de dois números complexos é obtido multiplicando seus módulos e somando seus argumentos* (Figura 10.3.3).

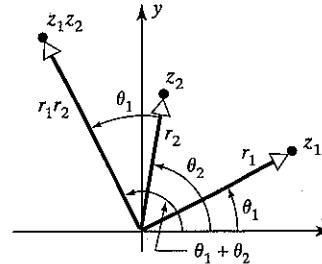


Figura 10.3.3 O produto de dois números complexos.

Nós deixamos como exercício mostrar que se  $z_2 \neq 0$ , então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (5)$$

e portanto,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{se } z_2 \neq 0$$

e

$$\arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

Em palavras, o *quociente de dois números complexos é obtido dividindo seus módulos e subtraindo seus argumentos (na ordem apropriada)*.



**Abraham de Moivre**  
(1667–1754) foi um matemático francês que deu contribuições importantes à Probabilidade, Estatística e Trigonometria. Ele desenvolveu o conceito de eventos estatisticamente independentes, escreveu um importante e influente tratado de Probabilidade e ajudou a transformar a Trigonometria de um ramo da Geometria em um ramo da Análise, pelo uso que fazia de números complexos. Não obstante seu importante trabalho, ele ganhava a vida com dificuldade como tutor e com consultorias em apostas e em seguros.

### EXEMPLO 2 Um Quociente Usando Formas Polares

Sejam

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{e} \quad z_2 = \sqrt{3} + i$$

Formas polares destes números complexos são

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{e} \quad z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

(verifique) de modo que por (3)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 4 \left[ \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = 4[0 + i] = 4i \end{aligned}$$

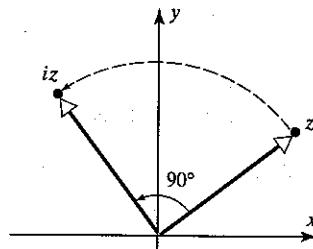
e, por (5),

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= 1 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Para conferir, nós calculamos  $z_1 z_2$  e  $z_1 / z_2$  diretamente sem usar formas polares para  $z_1$  e  $z_2$ :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (3 + 1)i = 4i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{3}) + (-i + 3i)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

que confere com nosso resultado anterior.



**Figura 10.3.4** A multiplicação por  $i$  roda  $z$  no sentido anti-horário por  $90^\circ$ .

O número complexo  $i$  tem módulo 1 e um argumento  $\pi/2$  ( $= 90^\circ$ ), de modo que o produto  $i z$  tem o mesmo módulo do que  $z$ , mas seu argumento é  $90^\circ$  maior do que o de  $z$ . Resumindo, *multiplicando z por i faz z girar no sentido anti-horário por  $90^\circ$*  (Figura 10.3.4).

**A Fórmula de de Moivre** Se  $n$  é um inteiro positivo e  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , então, pela Fórmula (3), temos

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ fatores}} = r^n \underbrace{[\cos(\theta + \theta + \cdots + \theta) + i \sin(\theta + \theta + \cdots + \theta)]}_{n \text{ parcelas}}$$

ou

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (6)$$

Além disto, (6) também vale para inteiros negativos, se  $z \neq 0$  (veja Exercício 23).

No caso especial em que  $r = 1$ , nós temos  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  e portanto (6) dá

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (7)$$

que é chamada a *fórmula de de Moivre*. Embora nós tenhamos deduzido (7) supondo  $n$  positivo, será mostrado nos exercícios que esta fórmula vale para qualquer inteiro  $n$ .

**Encontrando Raízes  $n$ -ésimas** Agora nós mostraremos como a fórmula de de Moivre pode ser usada para obter raízes de números complexos. Se  $n$  é um inteiro positivo e  $z$  é um número complexo qualquer, então nós definimos a *raiz  $n$ -ésima de  $z$*  como o número complexo  $w$  que satisfaz a equação

$$w^n = z \quad (8)$$

Nós denotamos uma raiz  $n$ -ésima de  $z$  por  $z^{1/n}$ . Se  $z \neq 0$ , nós podemos deduzir fórmulas para as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  como segue. Sejam

$$w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{e} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Se nós supormos que  $w$  satisfaz (8), então segue por (6) que

$$\rho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (9)$$

Comparando os módulos de ambos os lados, vemos que  $\rho^n = r$ , ou

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

onde  $\sqrt[n]{r}$  denota a raiz  $n$ -ésima real positiva de  $r$ . Além disto, para satisfazer as igualdades  $\cos n\alpha = \cos \theta$  e  $\sin n\alpha = \sin \theta$  de (9), os ângulos  $n\alpha$  e  $\theta$  devem ser ou iguais ou diferir por um múltiplo de  $2\pi$ . Isto acarreta

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Assim, os valores de  $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  que satisfazem (8) são dados por

$$w = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Embora existam infinitos valores de  $k$ , pode ser mostrado (veja o Exercício 16) que  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  fornecem valores distintos de  $w$  que satisfazem (8), mas que todas as outras escolhas de  $k$  fornecem duplicatas destes valores. Logo temos exatamente  $n$  raízes  $n$ -ésimas distintas de  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , a saber,

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (10)$$

### EXEMPLO 3 Raízes Cubícias de um Número Complexo

Encontre todas as raízes cúbicas de  $-8$ .

*Solução.*

Como  $-8$  está no lado negativo do eixo real, nós podemos usar  $\theta = \pi$  como um argumento. Além disto,  $r = |z| = |-8| = 8$ , de modo que uma forma polar de  $-8$  é

$$-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Por (10) com  $n = 3$ , segue que

$$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{8} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2$$

Assim, as raízes cúbicas de  $-8$  são

$$2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1) = -2$$

$$2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \sqrt{3}i$$

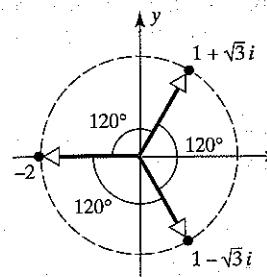


Figura 10.3.5 As raízes cúbicas de  $-8$ .

Como podemos ver na Figura 10.3.5, as três raízes cúbicas de  $-8$  obtidas no Exemplo 3 estão igualmente espaçadas por  $\pi/3$  radianos ( $= 120^\circ$ ) em torno do círculo de raio 2 centrado na origem. Isto não é acidental. Em geral, segue da Fórmula (10) que as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  estão no círculo de raio  $\sqrt[n]{r}$  ( $= \sqrt[n]{|z|}$ ) e estão igualmente espaçadas por  $2\pi/n$  radianos. (Você consegue ver por quê?) Assim, uma vez encontrada uma raiz  $n$ -ésima de  $z$ , as demais  $n-1$  raízes podem ser geradas pela rotação desta raiz por incrementos sucessivos de  $2\pi/n$  radianos.

### EXEMPLO 4 Raízes Quartas de um Número Complexo

Encontre todas as raízes quartas de  $1$ .

*Solução.*

Nós poderíamos aplicar a Fórmula (10). Em vez disto, nós observamos que  $w = 1$  é uma raiz quarta de  $1$ , de modo que as

demais três raízes podem ser geradas rodando esta raiz por incrementos sucessivos de  $2\pi/4 = \pi/2$  radianos ( $= 90^\circ$ ). Pela Figura 10.3.6, nós vemos que as raízes quartas de  $1$  são

$$1, i, -1, -i$$

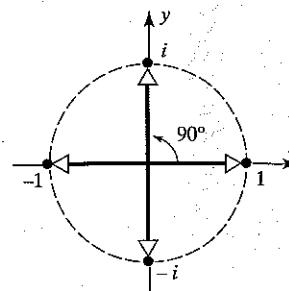


Figura 10.3.6 As raízes quartas de  $1$ .

**Exponentes Complexos** Nós concluímos esta seção com alguns comentários sobre notação.

Em estudos mais detalhados de números complexos, são definidos expoentes complexos e é provado que

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \quad (11)$$

onde  $e$  é um número real irracional dado, aproximadamente, por  $e \approx 2,71828\dots$  (Para os leitores que já estudaram Cálculo, uma prova disto é dada no Exercício 18.)

Segue de (11) que a forma polar

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

pode ser escrita, mais concisamente, como

$$z = re^{i\theta} \quad (12)$$

### EXEMPLO 5 Expressando um Número Complexo na Forma $[1, 2]$

No Exemplo 1 foi mostrado que

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Por (12), isto também pode ser escrito como

$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$$

Pode ser provado que os expoentes complexos seguem as mesmas leis que os expoentes reais, de modo que se

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

são números complexos não-nulos, então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Observe que estas são exatamente as Fórmulas (3) e (5) em outra notação.

Nós concluímos esta seção com uma fórmula útil para  $\bar{z}$  em notação polar. Se

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

então

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) \quad (11)$$

Lembrando as identidades trigonométricas

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

nós podemos reescrever (13) como

$$\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = re^{i(-\theta)}$$

ou, equivalentemente,

$$\bar{z} = re^{-i\theta}$$

(14)

No caso especial em que  $r = 1$ , a forma polar de  $z$  é  $z = e^{i\theta}$  e (14) fornece a fórmula

$$e^{i\theta} = e^{-i\theta}$$

(15)

### Conjunto de Exercícios 10.3

- Em cada parte, encontre o argumento principal de  $z$ .
  - $z = 1$
  - $z = i$
  - $z = -i$
  - $z = 1 + i$
  - $z = -1 + \sqrt{3}i$
  - $z = 1 - i$
- Em cada parte, encontre o valor de  $\theta = \arg(1 - \sqrt{3}i)$  que satisfaz a condição dada.
  - $0 < \theta \leq 2\pi$
  - $-\pi < \theta \leq \pi$
  - $-\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{11\pi}{6}$
- Em cada parte, expresse o número complexo na forma polar usando seu argumento principal.
  - $2i$
  - $-4$
  - $5 + 5i$
  - $-6 + 6\sqrt{3}i$
  - $-3 - 3i$
  - $2\sqrt{3} - 2i$
- Sabendo que  $z_1 = 2(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$  e  $z_2 = 3(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$ , encontre a forma polar de
  - $z_1 z_2$
  - $\frac{z_1}{z_2}$
  - $\frac{z_2}{z_1}$
  - $\frac{z_1^5}{z_2^3}$
- Expresse  $z_1 = i$ ,  $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$  e  $z_3 = \sqrt{3} + i$  em forma polar e use suas respostas para encontrar  $z_1 z_2 / z_3$ . Confira seus resultados efetuando as contas sem usar a forma polar.
- Use a Fórmula (6) para encontrar
  - $(1+i)^{12}$
  - $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-6}$
  - $(\sqrt{3}+i)^7$
  - $(1-i\sqrt{3})^{-10}$
- Em cada parte, encontre todas as raízes e esboce-as como vetores no plano complexo.
  - $(-i)^{1/2}$
  - $(1+\sqrt{3}i)^{1/2}$
  - $(-27)^{1/3}$
  - $(i)^{1/3}$
  - $(-1)^{1/4}$
  - $(-8+8\sqrt{3}i)^{1/4}$
- Use o método do Exemplo 4 para encontrar todas as raízes cúbicas de 1.
- Use o método do Exemplo 4 para encontrar todas as raízes sextas de 1.
- Encontre todas as raízes quadradas de  $1+i$  e expresse suas respostas em forma polar.
- Encontre todas as soluções da equação  $z^4 - 16 = 0$ .
- Encontre quatro soluções da equação  $z^4 + 8 = 0$  e use seu resultado para fatorar  $z^4 + 8$  em dois fatores quadráticos com coeficientes reais.
- Foi mostrado no texto que multiplicando  $z$  por  $i$  gira  $z$  no sentido anti-horário por  $90^\circ$ . Qual é o efeito geométrico de dividir  $z$  por  $i$ ?
- Em cada parte, use (6) para calcular a dada potência.
  - $(1+i)^8$
  - $(-2\sqrt{3}+2i)^{-9}$
- Em cada parte, encontre  $\operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$ .
  - $z = 3e^{i\pi}$
  - $z = 3e^{-i\pi}$
  - $\bar{z} = \sqrt{2}e^{\pi i/2}$
  - $\bar{z} = -3e^{-2\pi i}$
- Mostre que os valores de  $z^{1/n}$  na Fórmula (10) são todos distintos.
- Mostre que qualquer valor inteiro de  $k$  distinto de  $0, 1, 2, \dots, n-1$  produz um valor de  $z^{1/n}$  que é uma duplicata de um dos valores dados na Fórmula (10).
- Mostre que a Fórmula (7) é válida se  $n = 0$  ou se  $n$  é um inteiro negativo.
- (Para leitores que estudaram Cálculo.) Para provar a Fórmula (11), lembre que a série de Maclaurin de  $e^x$  é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

- (a) Substituindo  $x = i\theta$  nesta série e simplificando, mostre que

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

- (b) use o resultado na parte (a) para obter (11).

19. Deduza a Fórmula (5).

20. Quando  $n = 2$  e  $n = 3$ , a Equação (7) dá

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

Use estas duas equações para obter identidades trigonométricas para  $\cos 2\theta$ ,  $\sin 2\theta$ ,  $\cos 3\theta$  e  $\sin 3\theta$ .

21. Use (11) para mostrar que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

22. Mostre que se  $(a + bi)^3 = 8$ , então  $a^2 + b^2 = 4$ .

23. Mostre que a Fórmula (6) é válida para expoentes inteiros negativos se  $z \neq 0$ .

## 10.4 ESPAÇOS VETORIAIS COMPLEXOS

Nesta seção nós vamos desenvolver as propriedades básicas de espaços vetoriais com escalares complexos e discutir algumas das maneiras pelas quais eles diferem de espaços vetoriais reais. No entanto, antes de continuar, o leitor deveria revisar os axiomas de espaço vetorial dados na Seção 5.1.

**Propriedades Básicas** Lembre que um *espaço vetorial complexo* é um espaço vetorial no qual os escalares podem ser números complexos. As combinações lineares de vetores num espaço vetorial complexo são definidas como num espaço vetorial real, exceto que permitimos escalares complexos. Mais precisamente, dizemos que um vetor  $w$  é uma *combinação linear* dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_r$  se  $w$  puder ser expresso na forma

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r$$

onde  $k_1, k_2, \dots, k_r$  são números complexos.

Os conceitos de *independência linear*, *conjunto gerador*, *base*, *dimensão* e *subespaço* passam, sem modificações, para espaços vetoriais complexos e os teoremas desenvolvidos no Capítulo 5 continuam válidos com  $C^n$  no lugar de  $R^n$ .

Entre os espaços vetoriais reais, o mais importante é  $R^n$ , o espaço das  $n$ -uplas de números reais com a adição e multiplicação por escalar efetuada coordenada a coordenada. Entre os espaços vetoriais complexos, o mais importante é  $C^n$ , o espaço das  $n$ -uplas de números complexos com a adição e multiplicação por escalar efetuada coordenada a coordenada. Um vetor  $u$  em  $C^n$  pode ser escrito tanto na notação vetorial

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

quanto na notação matricial

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

onde

$$u_1 = a_1 + b_1i, \quad u_2 = a_2 + b_2i, \dots, \quad u_n = a_n + b_ni$$

### EXEMPLO 1 Adição Vetorial e Multiplicação Vetorial por Escalar

Se

$$u = (i, 1+i, -2) \quad \text{e} \quad v = (2+i, 1-i, 3+2i)$$

então

$$u+v = (i, 1+i, -2) + (2+i, 1-i, 3+2i) = (2+2i, 2, 1+2i)$$

e

$$iu = i(i, 1+i, -2) = (i^2, i+i^2, -2i) = (-1, -1+i, -2i)$$

Em  $C^n$ , assim como em  $R^n$ , os vetores

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1),$$

formam uma base, chamada a *base canônica* de  $C^n$ . Como há  $n$  vetores nesta base,  $C^n$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional.

OBSERVAÇÃO. Não confunda o número complexo  $i = \sqrt{-1}$  com o vetor  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$  da base canônica do  $R^3$  (veja o Exemplo 3, Seção 3.4). O número complexo  $i$  sempre aparece em itálico não-negrito, enquanto o vetor  $\mathbf{i}$  sempre aparece em negrito não-itálico.

### EXEMPLO 2 O Espaço $M_{22}$ Complexo

No Exemplo 3 da Seção 5.1 nós definimos o espaço vetorial  $M_{mn}$  das matrizes  $m \times n$  com entradas reais. O análogo complexo deste espaço é o espaço vetorial das matrizes  $m \times n$  com entradas complexas e as operações de adição matricial e multiplicação matricial por escalar. Nós nos referiremos a este espaço como o espaço  $M_{22}$  complexo.

### EXEMPLO 3 Funções Complexas de uma Variável Real

Se  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são funções reais da variável real  $x$ , então a expressão

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$$

é chamada uma *função complexa da variável real x*. Alguns exemplos são

$$f(x) = 2x + ix^3 \quad \text{e} \quad g(x) = 2 \sin x + i \cos x \quad (1)$$

Seja  $V$  o espaço de todas as funções complexas definidas em toda a reta. Se  $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$  e  $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$  são duas tais funções e  $k$  é um número complexo qualquer, então nós definimos a função **soma**  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  e o **múltiplo escalar**  $k\mathbf{f}$  por

$$\begin{aligned}(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) &= [f_1(x) + g_1(x)] + i[f_2(x) + g_2(x)] \\(k\mathbf{f})(x) &= kf_1(x) + ikf_2(x)\end{aligned}$$

Por exemplo, se  $\mathbf{f} = f(x)$  e  $\mathbf{g} = g(x)$  são as funções em (1), então

$$\begin{aligned}(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) &= (2x + 2 \operatorname{sen} x) + i(x^3 + \cos x) \\(\mathbf{f}\mathbf{f})(x) &= 2xi + i^2x^3 = -x^3 + 2xi \\((1+i)\mathbf{g})(x) &= (1+i)(2 \operatorname{sen} x + i \cos x) = (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + i(2 \operatorname{sen} x + \cos x)\end{aligned}$$

Pode ser mostrado que, junto com as operações enunciadas,  $V$  é um espaço vetorial complexo, sendo o análogo complexo do espaço vetorial  $F$   $(-\infty, \infty)$  das funções reais discutido no Exemplo 4 da Seção 5.1.

#### Requisito: Cálculo

### EXEMPLO 4 O Espaço $C(-\infty, \infty)$ Complexo

Se  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  é uma função complexa da variável real  $x$ , então  $f$  é dita **contínua** se  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são contínuas. Nós deixamos como um exercício mostrar que o conjunto de todas as funções complexas contínuas da variável real  $x$  é um subespaço do espaço vetorial de todas as funções complexas de  $x$ . Este espaço é o análogo complexo do espaço vetorial  $C(-\infty, \infty)$  discutido no Exemplo 6 da Seção 5.2 e é chamado espaço  $C(-\infty, \infty)$  complexo. Um exemplo relacionado é o espaço  $C[a, b]$  complexo, que é o espaço vetorial de todas as funções complexas contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ . ♦

Lembre que em  $R^n$  definimos o produto interno de dois vetores

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \quad (2)$$

e a norma euclidiana (ou comprimento) de  $\mathbf{u}$  por

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \quad (3)$$

Infelizmente, estas definições não são apropriadas para vetores em  $C^n$ . Por exemplo, se (3) fosse aplicado ao vetor  $\mathbf{u} = (i, 1)$  em  $C^2$ , obteríamos

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{i^2 + 1} = \sqrt{0} = 0$$

de modo que  $\mathbf{u}$  seria um vetor **não-nulo** de comprimento zero—uma situação claramente insatisfatória.

Para estender as noções de norma, distância e ângulo de maneira correta ao  $C^n$ , nós devemos modificar ligeiramente o produto interno.

#### Definição

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são vetores em  $C^n$ , então o **produto interno euclidiano complexo**  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n$$

onde  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  são os conjugados de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

OBSERVAÇÃO. Observe que o produto interno euclidiano complexo de vetores em  $C^n$  é um número complexo, enquanto que o produto interno euclidiano de vetores em  $R^n$  é um número real.

### EXEMPLO 5 Produto interno Complexo de Vetores no $C^n$

O produto interno euclidiano complexo dos vetores

$$\mathbf{u} = (-i, 2, 1+3i) \quad \mathbf{v} = (1-i, 0, 1+3i)$$

é

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (-i)\overline{(1-i)} + (2)\overline{(0)} + (1+3i)\overline{(1+3i)} \\&= (-i)(1+i) + (2)(0) + (1+3i)(1-3i) \\&= -i - i^2 + 1 - 9i^2 = 11 - i\end{aligned} \quad \diamond$$

O Teorema 4.1.2 lista as quatro principais propriedades do produto interno euclidiano em  $R^n$ . O seguinte teorema é o resultado correspondente para o produto interno euclidiano complexo em  $C^n$ .

#### Teorema 10.4.1

#### Propriedades do Produto Interno Complexo

Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores em  $C^n$  e  $l$  é um número complexo qualquer, então:

- (a)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
- (b)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- (c)  $(l\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
- (d)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Note a diferença entre a parte (a) deste teorema e a parte (a) do Teorema 4.1.2. Nós iremos provar as partes (a) e (d) e deixar o resto como exercício.

**Prova (a).** Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Então

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n$$

e

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1\bar{u}_1 + v_2\bar{u}_2 + \cdots + v_n\bar{u}_n$$

de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} &= v_1\bar{u}_1 + v_2\bar{u}_2 + \cdots + v_n\bar{u}_n \\&= \bar{v}_1\bar{\bar{u}}_1 + \bar{v}_2\bar{\bar{u}}_2 + \cdots + \bar{v}_n\bar{\bar{u}}_n \quad [\text{Teorema 10.2.3, partes (a) e (c)}] \\&= \bar{v}_1u_1 + \bar{v}_2u_2 + \cdots + \bar{v}_nu_n \quad [\text{Teorema 10.2.3, parte (e)}] \\&= u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n \\&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

**Prova (d).**

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 + \cdots + v_n\bar{v}_n = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2 \geq 0$$

Além disto, a igualdade vale se, e somente se,  $|v_1| = |v_2| = \cdots = |v_n| = 0$ . Mas isto vale se, e somente se,  $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$ , ou seja, se, e somente se,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . ■

OBSERVAÇÃO. Nós deixamos como um exercício provar que

$$\mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) = \bar{k}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

para vetores em  $C^n$ . Compare isto com a fórmula correspondente

$$\mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

para vetores em  $\mathbb{R}^n$ .

**Norma e Distância em  $C^n$**  Por analogia com (3), nós definimos a **norma euclidiana** (ou **comprimento euclidiano**) de um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  em  $C^n$  por

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_n|^2}$$

e nós definimos a **distância euclidiana** entre os pontos  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + \dots + |u_n - v_n|^2}$$

### EXEMPLO 6 Norma e Distância

Se  $\mathbf{u} = (i, 1+i, 3)$  e  $\mathbf{v} = (1-i, 2, 4i)$ , então

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|i|^2 + |1+i|^2 + |3|^2} = \sqrt{1+2+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

e

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{|i - (1-i)|^2 + |(1+i) - 2|^2 + |3 - 4i|^2} \\ &= \sqrt{|-1+2i|^2 + |-1+i|^2 + |3-4i|^2} \\ &= \sqrt{5+2+25} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

O espaço vetorial complexo  $C^n$  com a norma e o produto interno definidos acima é chamado o **espaço euclidiano  $n$ -dimensional complexo**.

### Conjunto de Exercícios 10.4

- Sejam  $\mathbf{u} = (2i, 0, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-i, i, 1+i, -1)$  e  $\mathbf{w} = (1+i, -i, -1+2i, 0)$ . Encontre
  - $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
  - $i\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$
  - $-\mathbf{w} + \mathbf{v}$
  - $3(\mathbf{u} - (1+i)\mathbf{v})$
  - $-i\mathbf{v} + 2i\mathbf{w}$
  - $2\mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{w})$
- Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  os vetores no Exercício 1. Encontre o vetor  $\mathbf{x}$  que satisfaz  $\mathbf{u} - \mathbf{v} + i\mathbf{x} = 2i\mathbf{x} + \mathbf{w}$ .
- Sejam  $\mathbf{u}_1 = (1-i, i, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2i, 1+i, 1)$  e  $\mathbf{u}_3 = (0, 2i, 2-i)$ . Encontre escalares  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  tais que  $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = (-3+i, 3+2i, 3-4i)$ .
- Mostre que não existem escalares  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  tais que  $c_1(i, 2-i, 2+i) + c_2(1+i, -2i, 2) + c_3(3, i, 6+i) = (i, i, i)$ .
- Encontre a norma euclidiana de  $\mathbf{v}$  se
  - $\mathbf{v} = (1, i)$
  - $\mathbf{v} = (1+i, 3i, 1)$
  - $\mathbf{v} = (2i, 0, 2i+1, -1)$
  - $\mathbf{v} = (-i, i, i, 3, 3+4i)$
- Sejam  $\mathbf{u} = (3i, 0, -i)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 3+4i, -2i)$  e  $\mathbf{w} = (1+i, 2i, 0)$ . Encontre
  - $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
  - $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
  - $\|-i\mathbf{u}\| + i\|\mathbf{u}\|$
  - $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$
  - $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$
  - $\left\| \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w} \right\|$
- Mostre que se  $\mathbf{v}$  é um vetor não-nulo em  $C^n$ , então  $(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$  tem norma euclidiana 1.
- Encontre todos os escalares  $k$  tais que  $\|k\mathbf{v}\| = 1$ , sendo  $\mathbf{v} = (3i, 4i)$ .
- Encontre o produto interno euclidiano  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  se
  - $\mathbf{u} = (-i, 3i)$ ,  $\mathbf{v} = (3i, 2i)$
  - $\mathbf{u} = (3-4i, 2+i, -6i)$ ,  $\mathbf{v} = (1+i, 2-i, 4)$
  - $\mathbf{u} = (1-i, 1+i, 2i, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (4+6i, -5i, -1+i, i)$

Nos Exercícios 10 e 11 são descritos conjuntos de objetos junto com operações de adição e multiplicação por escalar. Determine quais conjuntos são espaços vetoriais complexos com as operações dadas. Para os que não são, liste todos os axiomas que falham.

- O conjunto de todos os ternos  $(z_1, z_2, z_3)$  de números complexos com as operações

$$(z_1, z_2, z_3) + (z'_1, z'_2, z'_3) = (z_1 + z'_1, z_2 + z'_2, z_3 + z'_3)$$

e

$$k(z_1, z_2, z_3) = (\bar{k}z_1, \bar{k}z_2, \bar{k}z_3)$$

- O conjunto de todas as matrizes  $2 \times 2$  da forma

$$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix}$$

com as operações matriciais usuais de adição e multiplicação por escalar.

- Use o Teorema 5.2.1 para determinar quais dos seguintes conjuntos são subespaços de  $C^3$ :
  - todos os vetores da forma  $(z, 0, 0)$
  - todos os vetores da forma  $(z, i, i)$
  - todos os vetores da forma  $(z_1, z_2, z_3)$  com  $z_3 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
  - todos os vetores da forma  $(z_1, z_2, z_3)$  com  $z_3 = z_1 + z_2 + i$

13. Seja  $T: C^3 \rightarrow C^3$  o operador linear definido por  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} i & -i & -1 \\ 1 & -i & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre o núcleo e a nulidade de  $T$ .

14. Use o Teorema 5.2.1 para determinar quais dos seguintes conjuntos são subespaços de  $M_{22}$ :

- (a) todas as matrizes da forma (b) todas as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

com  $z_1$  e  $z_2$  reais.

com  $z_1 + z_4 = 0$ .

- (c) todas as matrizes  $2 \times 2$  complexas  $A$  tais que  $(\bar{A})^T = A$ , onde  $\bar{A}$  é a matriz cujas entradas são os conjugados das correspondentes entradas de  $A$ .

15. Use o Teorema 5.2.1 para determinar quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial das funções complexas da variável real  $x$ :

- (a) todas as funções  $f$  tais que  $f(1) = 0$   
 (b) todas as funções  $f$  tais que  $f(0) = i$   
 (c) todas as funções  $f$  tais que  $f(-x) = \overline{f(x)}$   
 (d) todas as funções  $f$  da forma  $k_1 + k_2 e^{ix}$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são números complexos.

16. Quais dos seguintes vetores são combinações lineares de  $\mathbf{u} = (i, -i, 3i)$  e  $\mathbf{v} = (2i, 4i, 0)$ ?

- (a)  $(3i, 3i, 3i)$  (b)  $(4i, 2i, 6i)$  (c)  $(i, 5i, 6i)$  (d)  $(0, 0, 0)$

17. Expresse os seguintes vetores como combinações lineares de  $\mathbf{u} = (1, 0, -i)$ ,  $\mathbf{v} = (1+i, 1, 1-2i)$  e  $\mathbf{w} = (0, i, 2)$ .

- (a)  $(1, 1, 1)$  (b)  $(i, 0, -i)$  (c)  $(0, 0, 0)$  (d)  $(2-i, 1, 1+i)$

18. Em cada parte, determine se os vetores dados geram  $C^3$ .

- (a)  $\mathbf{v}_1 = (i, i, i)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2i, 2i, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (3i, 0, 0)$   
 (b)  $\mathbf{v}_1 = (1+i, 2-i, 3+i)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2+3i, 0, 1-i)$   
 (c)  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -i)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1+i, 1, 1-2i)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, i, 2)$   
 (d)  $\mathbf{v}_1 = (1, i, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, -i, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$

19. Determine quais dos seguintes vetores estão no espaço gerado por  $\mathbf{f} = e^{ix}$  e  $\mathbf{g} = e^{-ix}$ .

- (a)  $\cos x$  (b)  $\sin x$  (c)  $\cos x + 3i \sin x$

20. Explique por que os seguintes conjuntos de vetores são linearmente dependentes. (Resolva este problema por inspeção.)

- (a)  $\mathbf{u}_1 = (1-i, i)$  e  $\mathbf{u}_2 = (1+i, -1)$  em  $C^2$ .

- (b)  $\mathbf{u}_1 = (1, -i)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2+i, -1)$  e  $\mathbf{u}_3 = (4, 0)$  em  $C^2$ .

- (c)  $A = \begin{bmatrix} i & 3i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  no espaço complexo  $M_{22}$ .

21. Quais dos seguintes conjuntos de vetores em  $C^3$  são linearmente independentes?

- (a)  $\mathbf{u}_1 = (1-i, 1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2, 1+i, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (1+i, i, 0)$   
 (b)  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -i)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1+i, 1, 1-2i)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, i, 2)$   
 (c)  $\mathbf{u}_1 = (i, 0, 2-i)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, i)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (-i, -1-4i, 3)$

22. Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções complexas da variável real  $x$ . Mostre que os seguintes vetores são linearmente dependentes.

$$\mathbf{f} = 3 + 3i \cos 2x, \quad \mathbf{g} = \sin^2 x + i \cos^2 x, \quad \mathbf{h} = \cos^2 x - i \sin^2 x$$

23. Explique por que os seguintes conjuntos de vetores não são bases dos espaços indicados. (Resolva este problema por inspeção.)

- (a)  $\mathbf{u}_1 = (i, 2i)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 3i)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (1, 7i)$  de  $C^2$ .

- (b)  $\mathbf{u}_1 = (-1+i, 0, 2-i)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, -i, 1+i)$  de  $C^3$ .

24. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de  $C^2$ ?

- (a)  $(2i, -i)$ ,  $(4i, 0)$  (b)  $(1+i, 1)$ ,  $(1+i, i)$   
 (c)  $(0, 0)$ ,  $(1+i, 1-i)$  (d)  $(2-3i, i)$ ,  $(3+2i, -1)$

25. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de  $C^3$ ?

- (a)  $(i, 0, 0)$ ,  $(i, i, 0)$ ,  $(i, i, i)$  (b)  $(1, 0, -i)$ ,  $(1+i, 1, 1-2i)$ ,  $(0, i, 2)$   
 (c)  $(i, 0, 2-i)$ ,  $(0, 1, i)$ ,  $(-i, -1-4i, 3)$  (d)  $(1, 0, i)$ ,  $(2-i, 1, 2+i)$ ,  $(0, 3i, 3i)$

### 350 • • • Álgebra Linear com Aplicações

Nos Exercícios 26–29, determine a dimensão e uma base do espaço-solução do sistema.

26.  $x_1 + (1+i)x_2 = 0$       27.  $2x_1 - (1+i)x_2 = 0$   
 $(1-i)x_1 + 2x_2 = 0$        $(-1+i)x_1 + x_2 = 0$

28.  $x_1 + (2-i)x_2 = 0$       29.  $x_1 + ix_2 - 2ix_3 + x_4 = 0$   
 $x_2 + 3ix_3 = 0$        $ix_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2ix_4 = 0$   
 $ix_1 + (2+2i)x_2 + 3ix_3 = 0$

30. Prove: Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores no espaço euclidiano  $n$ -dimensional complexo, então

$$\mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) = \bar{k}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

31. (a) Prove a parte (b) do Teorema 10.4.1.  
(b) Prove a parte (c) do Teorema 10.4.1.

32. Mostre que a identidade

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \frac{i}{4} \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - \frac{i}{4} \|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2$$

vale para vetores no espaço euclidiano  $n$ -dimensional complexo.

33. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Prove que o espaço  $C(-\infty, \infty)$  complexo é um subespaço do espaço vetorial da funções complexas de uma variável real.

## 10.5 ESPAÇOS VETORIAIS COMPLEXOS COM PRODUTO INTERNO

Na Seção 6.1 nós definimos o conceito de produto interno em um espaço vetorial real usando para axiomas as propriedades básicas do produto interno euclidiano de  $R^n$ . Nesta seção nós vamos definir produtos internos em espaços vetoriais complexos usando para axiomas as propriedades do produto interno euclidiano de  $C^n$ .

**Espaços Unitários** Motivados pelo Teorema 10.4.1, nós apresentamos a seguinte definição.

### Definição

Um *produto interno num espaço vetorial complexo*  $V$  é uma função que associa um número complexo  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  a cada par  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  de vetores em  $V$  de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos por quaisquer vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em  $V$  e qualquer escalar  $l$ .

- (1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$
- (2)  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- (3)  $\langle l\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = l\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
- (4)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$  e  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Um espaço vetorial complexo com um produto interno é chamado de um *espaço com produto interno complexo* ou um *espaço unitário*.

As seguintes propriedades adicionais seguem imediatamente dos quatro axiomas de produto interno:

- (i)  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$
- (ii)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
- (iii)  $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = \bar{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

Como só (iii) difere do resultado correspondente para produtos internos reais, nós vamos prová-lo e deixar as demais provas como exercícios.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle &= \overline{\langle k\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && [\text{Axioma 1}] \\ &= \bar{k}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && [\text{Axioma 3}] \\ &= \bar{k}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle && [\text{Propriedades da conjugação}] \\ &= \bar{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle && [\text{Axioma 1}] \end{aligned}$$

### EXEMPLO 1 O Produto Interno em $C^n$

Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vetores em  $C^n$ . O produto interno euclidiano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \dots + u_n\bar{v}_n$  satisfaz todos os axiomas de produto interno pelo Teorema 10.4.1. ♦

### EXEMPLO 2 Um Produto Interno no Espaço $M_{22}$ Complexo

Se

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

são quaisquer matrizes  $2 \times 2$  com entradas complexas, então a seguinte fórmula define um produto interno complexo no espaço  $M_{22}$  complexo (verifique):

$$\langle U, V \rangle = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3 + u_4\bar{v}_4$$

Por exemplo, se

$$U = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &= (0)(\bar{1}) + i(\bar{-i}) + (1)(\bar{0}) + (1+i)(\bar{2i}) \\ &= (0)(1) + i(i) + (1)(0) + (1+i)(-2i) \\ &= 0 + i^2 + 0 - 2i - 2i^2 \\ &= 1 - 2i \end{aligned}$$

**Requisito: Cálculo**

### EXEMPLO 3 Um Produto Interno no Espaço $C[a, b]$ Complexo

Se  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  é uma função complexa da variável real  $x$  e se  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são contínuas em  $[a, b]$ , então definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + i \int_a^b f_2(x) dx$$

Em palavras, a integral de  $f(x)$  é a integral da parte real de  $f$  mais  $i$  vezes a integral da parte imaginária de  $f$ .

Nós deixamos como um exercício mostrar que se as funções  $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$  e  $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$  são vetores no espaço  $C[a, b]$  complexo, então a seguinte fórmula define um produto interno no espaço  $C[a, b]$  complexo:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle &= \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)][\overline{g_1(x)} + \overline{ig_2(x)}] dx \\ &= \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)][g_1(x) - ig_2(x)] dx \\ &= \int_a^b [f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)] dx + i \int_a^b [f_2(x)g_1(x) - f_1(x)g_2(x)] dx \end{aligned}$$

Em espaços com produto interno complexos, assim como nos espaços com produto interno reais, definimos a **norma** (ou **comprimento**) de um vetor  $\mathbf{u}$  por

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$$

e a distância entre dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Pode ser mostrado que, com estas definições, os Teoremas 6.2.2 e 6.2.3 permanecem válidos em espaços com produto interno complexos (Exercício 35).

### EXEMPLO 4 Norma e Distância em $C^n$

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são vetores em  $C^n$  com o produto interno euclidiano, então

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_n|^2}$$

e

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{1/2} \\ &= \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + \dots + |u_n - v_n|^2} \end{aligned}$$

Observe que estas são exatamente as fórmulas da norma e distância euclidianas discutidas na Seção 10.4.

**Requisito: Cálculo**

### EXEMPLO 5 Norma de uma Função no Espaço $C[0, 2\pi]$ Complexo

Se o espaço  $C[0, 2\pi]$  complexo tem o produto interno do Exemplo 3 e se  $\mathbf{f} = e^{imx}$ , onde  $m$  é um inteiro qualquer, então, com a ajuda da Fórmula (15) da Seção 10.3 nós obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\| &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle^{1/2} = \left[ \int_0^{2\pi} e^{imx} \overline{e^{imx}} dx \right]^{1/2} \\ &= \left[ \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-imx} dx \right]^{1/2} = \left[ \int_0^{2\pi} dx \right]^{1/2} = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

**Conjuntos Ortogonais** As definições de termos como **vetores ortogonais**, **conjunto ortogonal**, **conjunto ortonormal** e **base ortonormal** passam, sem modificações, para espaços unitários. Além disto, os Teoremas 6.2.4, 6.3.1, 6.3.3, 6.3.4, 6.3.5, 6.3.6 e 6.5.4 continuam válidos em espaços com produto interno complexos e o processo de Gram-Schmidt pode ser usado para converter uma base arbitrária de um espaço com produto interno complexo em uma base ortonormal.

### EXEMPLO 6 Vetores Ortogonais em $C^2$

Os vetores

$$\mathbf{u} = (i, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (1, i)$$

em  $C^2$  são ortogonais em relação ao produto interno euclidiano, pois

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (i)(\bar{1}) + (1)(\bar{i}) = (i)(1) + (1)(-i) = 0$$

### EXEMPLO 7 Construindo uma Base ortonormal de $C^3$

Considere o espaço vetorial  $C^3$  com o produto interno euclidiano. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar os vetores de base  $\mathbf{u}_1 = (i, i, i)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, i, i)$  e  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, i)$  em uma base ortonormal.

Solução.

**Passo 1.**  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (i, i, i)$

$$\begin{aligned} \mathbf{Passo 2.} \quad \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 \\ &= (0, i, i) - \frac{2}{3}(i, i, i) = \left( -\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, \frac{1}{3}i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Passo 3.} \quad \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 \\ &= (0, 0, i) - \frac{1}{3}(i, i, i) - \frac{1/3}{2/3} \left( -\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, \frac{1}{3}i \right) \\ &= \left( 0, -\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i \right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{v}_1 = (i, i, i), \quad \mathbf{v}_2 = \left( -\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, \frac{1}{3}i \right), \quad \mathbf{v}_3 = \left( 0, -\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i \right)$$

formam uma base ortogonal de  $C^3$ . As normas destes vetores são

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} &= \left( \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}} \right), \quad \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left( -\frac{2i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}} \right), \\ \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} &= \left( 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right)\end{aligned}$$

é uma base ortonormal de  $C^3$ .

#### Requisito: Cálculo

#### EXEMPLO 8 Um Conjunto Ortonormal no Espaço $C[0, 2\pi]$ Complexo

Suponha que o espaço  $C[0, 2\pi]$  complexo tem o produto interno do Exemplo 3 e seja  $W$  o conjunto dos vetores em  $C[0, 2\pi]$  da forma

$$e^{imx} = \cos mx + i \sin mx$$

onde  $m$  é um inteiro. O conjunto  $W$  é ortogonal, pois dados dois vetores

$$\mathbf{f} = e^{ikx} \quad \mathbf{g} = e^{ilx}$$

distintos em  $W$ , resulta

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{e^{ilx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(k-l)x dx + i \int_0^{2\pi} \sin(k-l)x dx \\ &= \left[ \frac{1}{k-l} \sin(k-l)x \right]_0^{2\pi} - i \left[ \frac{1}{k-l} \cos(k-l)x \right]_0^{2\pi} \\ &= (0) - i(0) = 0\end{aligned}$$

Normalizando cada vetor no conjunto ortogonal  $W$ , obtemos um conjunto ortonormal. No entanto, no Exemplo 5 nós mostramos que cada vetor em  $W$  tem norma  $\sqrt{2\pi}$ , de modo que os vetores

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

formam um conjunto ortonormal no espaço  $C[0, 2\pi]$  complexo.

### Conjunto de Exercícios 10.5

1. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Mostre que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$  define um produto interno em  $C^2$ .

2. Calcule  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  usando o produto interno no Exercício 1.

- (a)  $\mathbf{u} = (2i, -i)$ ,  $\mathbf{v} = (-i, 3i)$       (b)  $\mathbf{u} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (1-i, 7-5i)$   
 (c)  $\mathbf{u} = (1+i, 1-i)$ ,  $\mathbf{v} = (1-i, 1+i)$     (d)  $\mathbf{u} = (3i, -1+2i)$ ,  $\mathbf{v} = (3i, -1+2i)$

3. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Mostre que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1\bar{v}_1 + (1+i)u_1\bar{v}_2 + (1-i)u_2\bar{v}_1 + 3u_2\bar{v}_2$$

define um produto interno em  $C^2$ .

4. Calcule  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  usando o produto interno no Exercício 3.

- (a)  $\mathbf{u} = (2i, -i)$ ,  $\mathbf{v} = (-i, 3i)$       (b)  $\mathbf{u} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (1-i, 7-5i)$   
 (c)  $\mathbf{u} = (1+i, 1-i)$ ,  $\mathbf{v} = (1-i, 1+i)$     (d)  $\mathbf{u} = (3i, -1+2i)$ ,  $\mathbf{v} = (3i, -1+2i)$

5. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Determine quais dos seguintes são produtos internos em  $C^2$ . Para os que não são, liste todos os axiomas que falham.

- (a)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1\bar{v}_1$     (b)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1\bar{v}_1 - u_2\bar{v}_2$     (c)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = |u_1|^2|v_1|^2 + |u_2|^2|v_2|^2$   
 (d)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1\bar{v}_1 + iu_1\bar{v}_2 + iu_2\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$     (e)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1\bar{v}_1 + iu_1\bar{v}_2 - iu_2\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$

6. Use o produto interno do Exemplo 2 para encontrar  $\langle U, V \rangle$  se

$$U = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ 1-i & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 3 & -2-3i \\ 4i & 1 \end{bmatrix}$$

7. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Será que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3 - iu_3\bar{v}_1$  define um produto interno em  $C^3$ ? Se não definir, liste todos os axiomas que falham.

8. Sejam  $V$  o espaço vetorial das funções complexas da variável real  $x$  e  $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$  e  $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$  dois vetores em  $V$ . A expressão

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = (f_1(0) + if_2(0))\overline{(g_1(0) + ig_2(0))}$$

define um produto interno em  $V$ ? Se não definir, liste todos os axiomas que falham.

9. Suponha que  $C^2$  tem o produto interno do Exercício 1. Encontre  $\|\mathbf{w}\|$  se

- (a)  $\mathbf{w} = (-i, 3i)$     (b)  $\mathbf{w} = (1-i, 1+i)$     (c)  $\mathbf{w} = (0, 2-i)$     (d)  $\mathbf{w} = (0, 0)$

10. Para cada vetor no Exercício 9, use o produto interno euclidiano para encontrar  $\|\mathbf{w}\|$ .

11. Use o produto interno do Exercício 3 para encontrar  $\|\mathbf{w}\|$  se

- (a)  $\mathbf{w} = (1, -i)$     (b)  $\mathbf{w} = (1-i, 1+i)$     (c)  $\mathbf{w} = (3-4i, 0)$     (d)  $\mathbf{w} = (0, 0)$

12. Use o produto interno do Exemplo 2 para encontrar  $\|A\|$  se

$$(a) A = \begin{bmatrix} -i & 7i \\ 6i & 2i \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

13. Suponha que  $C^2$  tem o produto interno do Exercício 1. Encontre  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se  
 (a)  $\mathbf{x} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{y} = (i, -i)$       (b)  $\mathbf{x} = (1 - i, 3 + 2i)$ ,  $\mathbf{y} = (1 + i, 3)$

14. Repita o Exercício 13 usando o produto interno euclidiano em  $C^2$ .

15. Repita o Exercício 13 usando o produto interno do Exercício 3.

16. Suponha que  $M_{22}$  tem o produto interno do Exemplo 2. Encontre  $d(A, B)$  se

$$(a) A = \begin{bmatrix} i & 5i \\ 8i & 3i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -5i & 0 \\ 7i & -3i \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2i & 2-3i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

17. Suponha que  $C^3$  tem o produto interno euclidiano. Para quais valores complexos de  $k$  os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ortogonais?

$$(a) \mathbf{u} = (2i, i, 3i), \mathbf{v} = (i, 6i, k) \quad (b) \mathbf{u} = (k, k, 1+i), \mathbf{v} = (1, -1, 1-i)$$

18. Suponha que  $M_{22}$  tem o produto interno do Exemplo 2. Determine quais das seguintes matrizes são ortogonais a

$$A = \begin{bmatrix} 2i & i \\ -i & 3i \end{bmatrix}$$

$$(a) \begin{bmatrix} -3 & 1-i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3-i & 0 \end{bmatrix}$$

19. Suponha que  $C^3$  tem o produto interno euclidiano. Mostre que para todos os valores da variável  $\theta$  o vetor  $\mathbf{x} = e^{i\theta} \left( \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  tem norma 1 e é ortogonal tanto a  $(1, i, 0)$  quanto  $(0, i, -i)$ .

20. Suponha que  $C^2$  tem o produto interno euclidiano. Quais dos seguintes formam conjuntos ortonormais?

$$(a) (i, 0), (0, 1-i) \quad (b) \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \quad (c) \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right) \quad (d) (i, 0), (0, 0)$$

21. Suponha que  $C^3$  tem o produto interno euclidiano. Quais dos seguintes formam conjuntos ortonormais?

$$(a) \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, -\frac{i}{\sqrt{3}} \right), \left( -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \quad (b) \left( \frac{2}{3}i, -\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i \right), \left( \frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, -\frac{2}{3}i \right), \left( \frac{1}{3}i, \frac{2}{3}i, \frac{2}{3}i \right) \\ (c) \left( \frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, -\frac{2i}{\sqrt{6}} \right), \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

22. Sejam

$$\mathbf{x} = \left( \frac{i}{\sqrt{5}}, -\frac{i}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \left( \frac{2i}{\sqrt{30}}, \frac{3i}{\sqrt{30}} \right)$$

Mostre que  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  é um conjunto ortonormal se  $C^2$  tem o produto interno definido por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$$

mas não é ortonormal se  $C^2$  tem o produto interno euclidiano.

23. Mostre que

$$\mathbf{u}_1 = (i, 0, 0, i), \quad \mathbf{u}_2 = (-i, 0, 2i, i), \quad \mathbf{u}_3 = (2i, 3i, 2i, -2i), \quad \mathbf{u}_4 = (-i, 2i, -i, i)$$

é um conjunto ortogonal em  $C^4$  com o produto interno euclidiano. Normalizando cada um destes vetores, obtenha um conjunto ortonormal.

24. Suponha que  $C^2$  tem o produto interno euclidiano. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  em uma base ortonormal.

$$(a) \mathbf{u}_1 = (i, -3i), \mathbf{u}_2 = (2i, 2i) \quad (b) \mathbf{u}_1 = (i, 0), \mathbf{u}_2 = (3i, -5i)$$

25. Suponha que  $C^3$  tem o produto interno euclidiano. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  em uma base ortonormal.

$$(a) \mathbf{u}_1 = (i, i, i), \mathbf{u}_2 = (-i, i, 0), \mathbf{u}_3 = (i, 2i, i) \quad (b) \mathbf{u}_1 = (i, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (3i, 7i, -2i), \mathbf{u}_3 = (0, 4i, i)$$

26. Suponha que  $C^4$  tem o produto interno euclidiano. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$  em uma base ortonormal.

$$\mathbf{u}_1 = (0, 2i, i, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (i, -i, 0, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (i, 2i, 0, -i), \quad \mathbf{u}_4 = (i, 0, i, i)$$

27. Suponha que  $C^3$  tem o produto interno euclidiano. Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por  $(0, i, 1-i)$  e  $(-i, 0, 1+i)$ .

28. Suponha que  $C^4$  tem o produto interno euclidiano. Expresse o vetor  $\mathbf{w} = (-i, 2i, 6i, 0)$  na forma  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ , onde o vetor  $\mathbf{w}_1$  está no espaço  $W$  gerado por  $\mathbf{u}_1 = (-i, 0, i, 2i)$  e  $\mathbf{u}_2 = (0, i, 0, i)$  e  $\mathbf{w}_2$  é ortogonal a  $W$ .

### 354 • • • Álgebra Linear com Aplicações

29. (a) Prove: Se  $k$  é um número complexo e  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  é um produto interno em um espaço vetorial complexo, então

$$\langle \mathbf{u} - k\mathbf{v}, \mathbf{u} - k\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \bar{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - k\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + k\bar{k}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

(b) Use o resultado em (a) para provar que  $0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \bar{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - k\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + k\bar{k}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ .

30. Prove que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores num espaço com produto interno complexo, então

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

Este resultado, chamado a *desigualdade de Cauchy-Schwarz para espaços com produto interno complexos*, difere de seu análogo real (Teorema 6.2.1) por necessitar um sinal de valor absoluto no membro à esquerda. [Sugestão. Tome  $k = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  na desigualdade do Exercício 29(b).]

31. Prove: Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  são vetores em  $C^n$ , então

$$|u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \dots + u_n\bar{v}_n| \leq (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2)^{1/2} (\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2)^{1/2}$$

Esta é a versão complexa da Fórmula (4) no Teorema 4.1.3. [Sugestão. Use o Exercício 30.]

32. Prove que em espaços com produto interno complexos, vale a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz se, e somente se,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são linearmente dependentes.

33. Prove que se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  é um produto interno em um espaço vetorial complexo, então  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$ .

34. Prove que se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  é um produto interno em um espaço vetorial complexo, então  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ .

35. Os Teoremas 6.2.2 e 6.2.3 permanecem verdadeiros em espaços com produto interno complexos. Em cada parte, prove que isto realmente ocorre.

(a) Teorema 6.2.2a

(b) Teorema 6.2.2b

(c) Teorema 6.2.2c

(d) Teorema 6.2.2d

(e) Teorema 6.2.3a

(f) Teorema 6.2.3b

(g) Teorema 6.2.3c

(h) Teorema 6.2.3d

36. No Exemplo 7 foi mostrado que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = \left( \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}} \right), \quad \mathbf{v}_2 = \left( -\frac{2i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}} \right), \quad \mathbf{v}_3 = \left( 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

formam uma base ortonormal de  $C^3$ . Use o Teorema 6.3.1 para expressar  $\mathbf{u} = (1-i, 1+i, 1)$  como uma combinação linear destes vetores.

37. Prove que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores em um espaço com produto interno complexo, então

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \frac{i}{4} \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - \frac{i}{4} \|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2$$

38. Prove: Se  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  é uma base ortonormal de um espaço com produto interno complexo  $V$  e se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  são quaisquer vetores em  $V$ , então

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle} + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle}$$

[Sugestão. Use o Teorema 6.3.1 para expressar  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  como combinações lineares dos vetores da base.]

39. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Prove que se  $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$  e  $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$  são vetores no espaço  $C[a, b]$ -complexo, então a fórmula

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)] \overline{[g_1(x) + ig_2(x)]} dx$$

define um produto interno complexo em  $C[a, b]$ .

40. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Sejam  $\mathbf{f} = x$  e  $\mathbf{g} = 1 + ix$  vetores no espaço  $C[0, 1]$  complexo e suponha que este espaço tem o produto interno definido no Exercício 39. Encontre

(a)  $\|\mathbf{g}\|$

(b)  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$

(c)  $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$

41. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Sejam  $\mathbf{f} = f_1(x) + if_2(x)$  e  $\mathbf{g} = g_1(x) + ig_2(x)$  vetores no espaço  $C[0, 1]$  complexo e suponha que este espaço tem o produto interno definido no Exercício 39. Mostre que os vetores  $e^{2\pi i m x}$ , onde  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , formam um conjunto ortonormal.

**matrizes unitárias e as hermitianas, que serão discutidas nesta seção.**

**Matrizes Unitárias** Se  $A$  é uma matriz com entradas complexas, então a *transposta conjugada* de  $A$ , denotada por  $A^*$ , é definida por

$$A^* = \overline{A}^T$$

onde  $\overline{A}$  é a matriz cujas entradas são os conjungados complexos das correspondentes entradas de  $A$  e  $\overline{A}^T$  é a transposta de  $\overline{A}$ .

## 10.6 MATRIZES UNITÁRIAS,

### NORMAIS E HERMITIANAS

Para matrizes com entradas reais, as matrizes ortogonais ( $A^{-1} = A^T$ ) e as matrizes simétricas ( $A = A^T$ ) desempenharam um papel importante no problema de diagonalização ortogonal (Seção 7.3). Para matrizes com entradas complexas, estas matrizes ortogonais e simétricas são de relativamente pouca importância; elas são sucedidas por duas novas classes de matrizes, as

**EXEMPLO 1 Transposta Conjugada**

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix} \text{ então } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

O próximo teorema mostra que as propriedades básicas da transposta conjugada são similares às da transposta. As provas são deixadas como exercícios.

**Teorema 10.6.1****Propriedades da Transposta Conjugada**

Se  $A$  e  $B$  são matrizes com entradas complexas e se  $k$  é um número complexo qualquer, então:

- (a)  $(A^*)^* = A$
- (b)  $(A + B)^* = A^* + B^*$
- (c)  $(kA)^* = \bar{k}A^*$
- (d)  $(AB)^* = B^*A^*$

**OBSERVAÇÃO.** Lembre que, pela Fórmula (7) da Seção 4.1, se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores-coluna em  $R^n$ , então o produto interno euclidiano em  $R^n$  pode ser expresso como  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ . Nós deixamos a cargo do leitor confirmar que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores-coluna em  $C^n$ , então o produto interno euclidiano em  $C^n$  pode ser expresso como  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^* \mathbf{v}$ .

Lembre que uma matriz com entradas reais é chamada *ortogonal* se  $A^{-1} = A^T$ . Para matrizes complexas, o conceito análogo ao das matrizes ortogonais é o das matrizes *unitárias*, definidas como segue.

**Definição**

Uma matriz quadrada  $A$  com entradas complexas é chamada *unitária* se

$$A^{-1} = A^*$$

O próximo é a versão paralela ao Teorema 6.5.1.

**Teorema 10.6.2****Afirmações Equivalentes**

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  com entradas complexas, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é unitária.
- (b) Os vetores-linha de  $A$  formam um conjunto ortonormal de  $C^n$  em relação ao produto interno euclidiano.
- (c) Os vetores-coluna de  $A$  formam um conjunto ortonormal de  $C^n$  em relação ao produto interno euclidiano.

**EXEMPLO 2 Uma Matriz Unitária  $2 \times 2$** 

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

tem vetores-linha

$$\mathbf{r}_1 = \left( \frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2} \right), \quad \mathbf{r}_2 = \left( \frac{1-i}{2}, \frac{-1+i}{2} \right)$$

Em relação ao produto interno euclidiano de  $C^2$ , nós temos

$$\|\mathbf{r}_1\| = \sqrt{\left| \frac{1+i}{2} \right|^2 + \left| \frac{1+i}{2} \right|^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\|\mathbf{r}_2\| = \sqrt{\left| \frac{1-i}{2} \right|^2 + \left| \frac{-1+i}{2} \right|^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 &= \left( \frac{1+i}{2} \right) \overline{\left( \frac{1-i}{2} \right)} + \left( \frac{1+i}{2} \right) \overline{\left( \frac{-1+i}{2} \right)} \\ &= \left( \frac{1+i}{2} \right) \left( \frac{1+i}{2} \right) + \left( \frac{1+i}{2} \right) \left( \frac{-1-i}{2} \right) \\ &= \frac{i}{2} - \frac{i}{2} = 0 \end{aligned}$$

de modo que os vetores-linha formam um conjunto ortonormal de  $C^2$ . Assim,  $A$  é unitária e

$$A^{-1} = A^* = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

O leitor deveria verificar que a matriz (2) é a inversa da matriz (1) mostrando que  $A A^* = A^* A = I$ .

Lembre que uma matriz quadrada  $A$  com entradas reais é dita *ortogonalmente diagonalizável* se existir uma matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP (= P^TAP)$  é diagonal. Para matrizes complexas, existe um conceito análogo.

**Definição**

Uma matriz quadrada  $A$  com entradas complexas é dita *unitariamente diagonalizável* se existir uma matriz unitária  $P$  tal que  $P^{-1}AP (= P^TAP)$  é diagonal; neste caso, dizemos que a matriz  $P$  *diagonaliza A unitariamente*.

Temos duas questões a considerar:

- Quais matrizes são unitariamente diagonalizáveis?
- Como encontrar uma matriz unitária  $P$  que efetua a diagonalização?

Antes de atacar estas questões, nós observarmos que nossas definições dos termos *autovetor*, *autovalor*, *auto-espaço*,



**Charles Hermite** (1822–1901) foi um matemático francês que deu contribuições importantes à Álgebra, à Teoria de Matrizes e a vários ramos da Análise. Ele é lembrado por usar integrais para resolver uma equação polinomial geral de quinto grau. Ele também provou que o número  $e$  (a base dos logaritmos naturais) é um número transcendente, ou seja, um número que não pode ser raiz de uma equação polinomial com coeficientes racionais.

**equação característica e polinômio característico** passam, sem modificações, para espaços vetoriais complexos.

**Matrizes Hermitianas** Na Seção 7.3, nós vimos que as matrizes simétricas desempenham um papel fundamental no problema da diagonalização ortogonal de uma matriz com entradas reais. O análogo complexo mais natural das matrizes reais simétricas é o das matrizes *hermitianas*, que são definidas como segue:

### Definição

Uma matriz quadrada  $A$  com entradas complexas é chamada *hermitiana* se

$$A = A^*$$

### EXEMPLO 3 Uma Matriz Hermitiana $3 \times 3$

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

então

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -5 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 3 \end{bmatrix}, \text{ portanto } A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} = A$$

o que significa que  $A$  é hermitiana. ♦

É fácil reconhecer matrizes hermitianas visualmente: Como indicamos em (3), as entradas na diagonal principal são números reais e a imagem espelhada de cada entrada, em relação à diagonal principal, é o complexo conjugado da entrada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

**Matrizes Normais** As matrizes hermitianas tem muitas mas não todas as propriedades das matrizes simétricas reais. Por exemplo, assim como as matrizes simétricas reais são ortogonalmente diagonalizáveis, nós veremos que as matrizes hermitianas são unitariamente diagonalizáveis. No entanto, enquanto as matrizes simétricas reais são as únicas matrizes com entradas reais que são ortogonalmente diagonalizáveis (Teorema 7.3.1), as matrizes hermitianas não constituem toda a classe das matrizes unitariamente diagonalizáveis, ou seja, existem matrizes unitariamente diagonalizáveis que não são hermitianas. Para explicar por que isto é assim, nós precisamos da seguinte definição:

### Definição

Uma matriz quadrada  $A$  com entradas complexas é chamada *normal* se

$$A A^* = A^* A$$

### EXEMPLO 4 Matrizes Unitárias e Hermitianas

Cada matriz hermitiana  $A$  é normal, pois  $A A^* = A A = A^* A$  e cada matriz unitária é normal, pois  $A A^* = I = A^* A$ . ♦

Os próximos dois teoremas são os análogos complexos dos Teoremas 7.3.1 e 7.3.2. As provas são omitidas.

### Teorema 10.6.3

### Afirmações Equivalentes

Se  $A$  é uma matriz quadrada com entradas complexas, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a)  $A$  é unitariamente diagonalizável.
- (b)  $A$  tem um conjunto ortonormal de  $n$  autovetores.
- (c)  $A$  é normal.

### Teorema 10.6.4

Se  $A$  é uma matriz normal, então autovetores de auto-espacos distintos de  $A$  são ortogonais.

O Teorema 10.6.3 diz que uma matriz quadrada  $A$  com entradas complexas é unitariamente diagonalizável se, e somente se, é normal. O Teorema 10.6.4 é a chave para construir uma matriz que diagonaliza unitariamente uma matriz normal.

**Método de Diagonalização** Nós vimos na Seção 7.3 que uma matriz simétrica  $A$  é ortogonalmente diagonalizável por uma matriz ortogonal cujos vetores-coluna são autovetores de  $A$ . Analogamente, uma matriz normal é diagonalizável por uma matriz unitária cujos vetores-coluna são autovetores de  $A$ . O procedimento para diagonalizar uma matriz normal é o seguinte:

**Passo 1.** Encontre uma base para cada auto-espaço de  $A$ .

**Passo 2.** Aplique o processo de Gram-Schmidt a cada uma destas bases para obter uma base ortonormal de cada auto-espaço.

**Passo 3.** Forme a matriz  $P$  cujas colunas são os vetores de base construídos no Passo 2; esta matriz diagonaliza  $A$  unitariamente.

A justificativa para este procedimento deveria ser clara. O Teorema 10.6.4 garante que autovetores de auto-espacos diferentes são ortogonais e a aplicação do processo de Gram-Schmidt garante que os autovetores obtidos dentro de um mesmo auto-espaço são ortonormais. Desta maneira, o conjunto inteiro de autovetores obtidos por este procedimento é ortonormal. Finalmente, o Teorema 10.6.3 garante que este conjunto ortonormal de autovetores é uma base.

### EXEMPLO 5 Diagonalização Unitária

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

é unitariamente diagonalizável pois é hermitiana e portanto normal. Encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza  $A$  unitariamente.

Solução.

O polinômio característico de  $A$  é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 - i \\ -1 + i & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

e portanto a equação característica é

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

e os autovalores são  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 4$ .

Por definição,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$  se, e somente se,  $\mathbf{x}$  é uma solução não-trivial de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 - i \\ -1 + i & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para encontrar os autovetores associados a  $\lambda = 1$ , nós substituímos este valor em (4):

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 - i \\ -1 + i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema por eliminação de Gauss-Jordan, obtemos (verifique):

$$x_1 = (-1 - i)s, \quad x_2 = s$$

Assim, os autovetores de  $A$  associados a  $\lambda = 1$  são os vetores não-nulos de  $C^2$  da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (-1 - i)s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, este auto-espaço é unidimensional com base

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 - i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Neste caso, o processo de Gram-Schmidt envolve só um passo: normalizar este vetor. Como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|-1 - i|^2 + |1|^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3},$$

o vetor

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1 - i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

é uma base ortonormal do auto-espaço associado a  $\lambda = 1$ .

Para encontrar os autovetores associados a  $\lambda = 4$ , nós substituímos este valor em (4):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 - i \\ -1 + i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema por eliminação de Gauss-Jordan, obtemos (verifique):

$$x_1 = \left( \frac{1+i}{2} \right) s, \quad x_2 = s$$

e portanto os autovetores de  $A$  associados a  $\lambda = 4$  são os vetores não-nulos de  $C^2$  da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \left( \frac{1+i}{2} \right) s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, o auto-espaço é unidimensional com base

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Aplicando o processo de Gram-Schmidt (ou seja, normalizando este vetor), obtemos o vetor

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P = [\mathbf{p}_1 \mid \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} \frac{-1 - i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

diagonaliza  $A$  e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

### Autovalores de Matrizes Simétricas e Hermitianas

No Teorema 7.3.2 foi afirmado que os autovalores de uma matriz simétrica com entradas reais são números reais. Este importante resultado é um corolário do seguinte teorema mais geral.

**Teorema 10.6.5**

*Os autovalores de uma matriz hermitiana são números reais.*

**Prova.** Se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz hermitiana  $A$  de tamanho  $n \times n$  com autovetor associado  $v$ , então

$$A v = \lambda v$$

Se nós multiplicarmos cada lado desta igualdade à esquerda por  $v^*$  e então usarmos o observado apóis o Teorema 10.6.1 para escrever  $v^* v = \|v\|^2$  (com o produto interno euclidiano em  $C^n$ ), então obteremos

$$v^* A v = v^* (\lambda v) = \lambda v^* v = \lambda \|v\|^2$$

No entanto, se concordarmos em não distinguir entre a matriz  $1 \times 1 v^* A v$  e sua entrada e se lembarmos que autovetores são não-nulos, poderemos expressar  $\lambda$  como

$$\lambda = \frac{v^* A v}{\|v\|^2} \quad (6)$$

Assim, para mostrar que  $\lambda$  é um número real, é suficiente mostrar que a entrada de  $v^* A v$  é real. Uma maneira de mostrar isto é mostrar que a matriz  $v^* A v$  é hermitiana, pois sabemos que matrizes hermitianas têm números reais na diagonal principal. Mas

$$(v^* A v)^* = v^* A^* (v^*)^* = v^* A v$$

o que mostra que  $v^* A v$  é hermitiana e completa a prova. ■

A prova do seguinte teorema é uma consequência imediata do Teorema 10.6.5 e é deixada como exercício.

**Teorema 10.6.6**

*Os autovalores de uma matriz simétrica com entradas reais são números reais.*

**Conjunto de Exercícios 10.6**

1. Em cada parte, encontre  $A^*$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2i & 1-i \\ 4 & 3+i \\ 5+i & 0 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2i & 1-i & -1+i \\ 4 & 5-7i & -i \\ i & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = [7i \ 0 \ -3i] \quad (d) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

2. Quais das seguintes matrizes são hermitianas?

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} -2 & 1-i & -1+i \\ 1+i & 0 & 3 \\ -1-i & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Encontre  $k, l$  e  $m$  que fazem de  $A$  uma matriz hermitiana.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & k & -i \\ 3-5i & 0 & m \\ l & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$$

4. Use o Teorema 10.6.2 para determinar quais das seguintes matrizes são unitárias.

$$(a) \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{i} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & -1+i \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

5. Em cada parte, verifique se a matriz é unitária e encontre sua inversa.

$$(a) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}i \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}i \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}i \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i\sqrt{3}) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(i-\sqrt{3}) \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{3+i}{2\sqrt{15}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$$

6. Mostre que a matriz

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

é unitária para cada valor real de  $\theta$ .

Nos Exercícios 7–12 encontre uma matriz unitária  $P$  que diagonaliza  $A$  e determine  $P^{-1}AP$ .

$$7. A = \begin{bmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{bmatrix}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 6 & 2+2i \\ 2-2i & 4 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & -3 \end{bmatrix}$$

$$11. A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$$

$$12. A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

13. Mostre que os autovalores da matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4i \\ 4i & 3 \end{bmatrix}$$

não são reais. Isto contradiz o Teorema 10.6.6?

14. Encontre uma matriz  $2 \times 2$  que é tanto hermitiana quanto unitária e cujas entradas não são todas números reais.
15. Prove: Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  com entradas complexas, então  $\det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$ . [Sugestão. Primeiro mostre que os produtos elementares com sinal de  $\bar{A}$  são os conjugados dos produtos elementares com sinal de  $A$ .]
16. (a) Use o resultado no Exercício 15 para provar que se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  com entradas complexas, então  $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ .  
 (b) Prove: Se  $A$  é hermitiana, então  $\det(A)$  é real.  
 (c) Prove: Se  $A$  é unitária, então  $|\det(A)| = 1$ .
17. Prove que as entradas na diagonal principal de uma matriz hermitiana são números reais.

18. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

matrizes com entradas complexas. Mostre que

$$(a) (A^*)^* = A \quad (b) (A+B)^* = A^* + B^* \quad (c) (kA)^* = \bar{k}A^* \quad (d) (AB)^* = B^*A^*$$

19. Prove: Se  $A$  é invertível, então  $A^*$  também é invertível e  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

20. Mostre que se  $A$  é uma matriz unitária então  $A^*$  também é unitária.

21. Prove que uma matriz  $n \times n$  com entradas complexas é unitária se, e somente se, suas linhas formam um conjunto ortogonal em  $C^n$  com o produto interno euclidiano.
22. Use os Exercícios 20 e 21 para mostrar que uma matriz  $n \times n$  é unitária se, e somente se, suas colunas formam um conjunto ortogonal em  $C^n$  com o produto interno euclidiano.
23. Sejam  $\lambda$  e  $\mu$  autovalores distintos de uma matriz hermitiana  $A$ .
- (a) Prove que se  $x$  é um autovetor associado a  $\lambda$  e  $y$  é um autovetor associado a  $\mu$ , então  $x^*A y = \lambda x^* y$  e  $x^*A y = \mu x^* y$ .  
 (b) Prove o Teorema 10.6.4.

## Exercícios Suplementares do Capítulo 10

1. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vetores em  $C^n$  e sejam  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$  e  $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ .
- Prove:  $\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ .
  - Prove:  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ortogonais se, e somente se,  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{v}}$  são ortogonais.

2. Mostre que se a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

é não-nula, então é invertível.

3. Encontre uma base para o espaço-solução do sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Prove: Se  $a$  e  $b$  são números complexos tais que  $|a|^2 + |b|^2$  e se  $\theta$  é um número real, então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\bar{b} & e^{i\theta}\bar{a} \end{bmatrix}$$

é uma matriz unitária.

5. Encontre os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \omega + 1 + \frac{1}{\omega} \\ 0 & 1 & -\omega - 1 - \frac{1}{\omega} \end{bmatrix}$$

onde  $\omega = e^{2\pi i/3}$ .

6. (a) Prove que se  $z$  é um número complexo distinto de 1, então

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

[Sugestão. Seja  $S$  a soma do lado esquerdo da igualdade e considere a quantidade  $S - z \cdot S$ .]

- (b) Use o resultado na parte (a) para provar que se  $z^n = 1$  e  $z \neq 1$ , então  $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$ .

- (c) Use o resultado na parte (a) para obter a identidade trigonométrica de Lagrange

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2 \sin(\theta/2)}$$

para  $0 < \theta < 2\pi$ . [Sugestão. Tome  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ .]

7. Seja  $w = e^{2\pi i/3}$ . Mostre que os vetores  $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{3})(1, \omega, \omega^2)$  e  $\mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{3})(1, \omega^2, \omega^4)$  formam um conjunto ortogonal em  $C^3$ . [Sugestão. Use a parte (b) do Exercício 6.]

8. Mostre que se  $U$  é uma matriz unitária  $n \times n$  e  $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$ , então o produto

$$U \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

também é unitário.

9. Suponha que  $A^* = -A$ . (Neste caso, chamamos  $A$  *anti-hermitiana*.)

- (a) Mostre que  $iA$  é hermitiana.

- (b) Mostre que  $A$  é unitariamente diagonalizável e tem autovalores imaginários puros.

## Requisito: Recurso Computacional

## Exercícios Computacionais do Capítulo 10

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com

funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

## Seções 10.1 e 10.2

- T1. (Números complexos e operações numéricas)** Leia em seu manual sobre como entrar e exibir números complexos e executar as operações aritméticas básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão. Experimente com números de sua própria escolha até sentir que você dominou as operações.
- T2. (Matrizes com entradas complexas)** Na maioria dos recursos computacionais, os procedimentos para somar, subtrair, multiplicar e inverter matrizes com entradas complexas é igual ao de matrizes com entradas reais. Experimente efetuar estas operações em algumas matrizes de sua própria escolha e depois tente usar seu recurso para resolver alguns dos exercícios nas Seções 10.1 e 10.2.
- T3. (Números complexos conjugados)** Leia em seu manual sobre como encontrar o conjugado de um número complexo e então use seu recurso para efetuar as contas no Exemplo 1 da Seção 10.2.

## Seção 10.3

- T1. (Módulo e argumento)** Leia em seu manual sobre como encontrar o módulo e o argumento de um número complexo e então use seu recurso para efetuar as contas no Exemplo 1.

## Seção 10.6

- T1. (Transposta conjugada)** Leia em seu manual sobre como encontrar a transposta conjugada de uma matriz com entradas complexas e então use seu recurso para efetuar as contas nos Exemplos 1 e 3.
- T2. (Diagonalização unitária)** Use seu recurso para diagonalizar a matriz  $A$  no Exemplo 5 e para encontrar a matriz  $P$  que diagonaliza  $A$  unitariamente. (Veja o Exercício Computacional T1 da Seção 7.2.)

and the need for more research on the effects of the new technologies on the environment and society. The report also highlights the importance of international cooperation and the need for governments to take a lead role in addressing these challenges.

The report concludes by calling for a shift towards a more sustainable and responsible approach to technology development and deployment, one that takes into account the needs of all stakeholders and the long-term impacts of our actions on the planet.

The report's findings have been widely praised for their comprehensive and balanced analysis of the opportunities and challenges posed by new technologies. It has provided a valuable resource for policymakers, industry leaders, and the public at large as they work to navigate the complex landscape of technological innovation and its impact on our world.

The report's recommendations have been adopted by many countries and organizations around the world, and have helped to spur a global conversation about the future of technology and its place in our society. The report's findings have also informed the development of new policies and programs aimed at promoting responsible and sustainable technology development and deployment.

The report's findings have been widely praised for their comprehensive and balanced analysis of the opportunities and challenges posed by new technologies.

# Aplicações da Álgebra Linear

## Conteúdo do Capítulo

- |  |  |
|--|--|
| 11.1 Construindo Curvas e Superfícies por Pontos Especificados | 11.13 Tomografia Computadorizada                           |
| 11.2 Redes Elétricas   | 11.14 Fractais   |
| 11.3 Programação Linear Geométrica                             | 11.15 Caos   |
| 11.4 O Problema da Alocação de Tarefas                         | 11.16 Criptografia   |
| 11.5 Interpolação Spline Cúbica                                | 11.17 Genética   |
| 11.6 Cadeias de Markov   | 11.18 Crescimento Populacional por Faixa Etária            |
| 11.7 Teoria de Grafos  | 11.19 Colheita de Populações Animais                       |
| 11.8 Jogos de Estratégia                                       | 11.20 Um Modelo de Mínimos Quadrados para a Audição Humana |
| 11.9 Modelos Econômicos de Leontief                            | 11.21 Deformações e Morfismos                              |
| 11.10 Administração de Florestas                               |  |
| 11.11 Computação Gráfica                                       |  |
| 11.12 Distribuição de Temperatura de Equilíbrio                |  |

**I**NTRODUÇÃO: Este capítulo consiste de 21 aplicações da Álgebra Linear. Com uma única exceção, claramente especificada, cada aplicação é uma seção independente, de modo que as seções podem ser ignoradas ou permutadas à vontade. Cada tópico começa com uma lista de pré-requisitos de Álgebra Linear.

Como o nosso objetivo primordial neste capítulo é apresentar aplicações da Álgebra Linear, as provas são muitas vezes omitidas. Sempre que necessitarmos de resultados de outras áreas, eles são enunciados precisamente, com motivação onde possível, mas geralmente sem prova.

## 11.1 CONSTRUINDO CURVAS E SUPERFÍCIES POR PONTOS ESPECIFICADOS

Nesta seção nós descrevemos uma técnica que utiliza determinantes para construir retas, círculos e seções cônicas em geral por pontos especificados no plano. O procedimento também é utilizado para fazer passar planos e esferas no espaço tridimensional por pontos fixados.

**PRÉ-REQUISITOS:** Sistemas Lineares  
Determinantes  
Geometria Analítica

O teorema a seguir segue do Teorema 2.3.6.

### Teorema 11.1.1

Um sistema linear homogêneo com o mesmo número de equações e de incógnitas tem uma solução não-trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes é zero.

Nós vamos mostrar como este resultado pode ser usado para determinar as equações de várias curvas e superfícies por pontos especificados.

**Uma Reta por Dois Pontos** Suponha que  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são dois pontos distintos no plano. Existe uma única reta

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0 \quad (1)$$

que passa por estes dois pontos (Figura 11.1.1). Observe que  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  não são todos nulos e que estes coeficientes são únicos a menos de uma constante multiplicativa. Como  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  estão na reta, substituindo-os em (1) obtemos as duas equações

$$c_1x_1 + c_2y_1 + c_3 = 0 \quad (2)$$

$$c_1x_2 + c_2y_2 + c_3 = 0 \quad (3)$$

Estas três equações, (1), (2) e (3), podem ser agrupadas e reescritas como

$$xc_1 + yc_2 + c_3 = 0$$

$$x_1c_1 + y_1c_2 + c_3 = 0$$

$$x_2c_1 + y_2c_2 + c_3 = 0$$

que é um sistema linear homogêneo de três equações em  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ . Como  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  não são todos nulos, este sistema tem uma solução não-trivial, de modo que o determinante do sistema deve ser zero. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Conseqüentemente, cada ponto  $(x, y)$  da reta satisfaz (4); reciprocamente, pode ser mostrado que cada ponto  $(x, y)$  que satisfaz (4) está na reta.

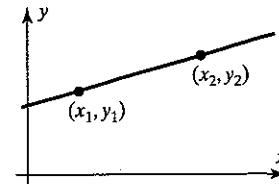


Figura 11.1.1

### EXEMPLO 1 A Equação de uma Reta

Encontre a equação da reta que passa pelos dois pontos  $(2, 1)$  e  $(3, 7)$ .

Solução.

Substituindo as coordenadas dos dois pontos na Equação (4), obtemos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A expansão deste determinante em co-fatores ao longo da primeira linha então dá

$$-6x + y + 11 = 0$$

**Um Círculo por Três Pontos** Suponha que  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$  são três pontos distintos não-colineares do plano. Da Geometria Analítica sabemos que existe um único círculo, digamos,

$$c_1(x^2 + y^2) + c_2x + c_3y + c_4 = 0 \quad (5)$$

que passa por estes três pontos (Figura 11.1.2). Substituindo as coordenadas destes pontos nesta equação, obtemos

$$c_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2x_1 + c_3y_1 + c_4 = 0 \quad (6)$$

$$c_1(x_2^2 + y_2^2) + c_2x_2 + c_3y_2 + c_4 = 0 \quad (7)$$

$$c_1(x_3^2 + y_3^2) + c_2x_3 + c_3y_3 + c_4 = 0 \quad (8)$$

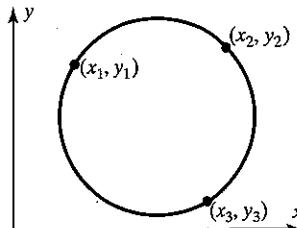


Figura 11.1.2

Como antes, as Equações (5) a (8) formam um sistema linear homogêneo com uma solução não-trivial em  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$ . Assim, o determinante da matriz de coeficientes é zero:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Esta é a equação do círculo em formato de determinante.

**EXEMPLO 2 A Equação de um Círculo**

Encontre a equação do círculo que passa pelos três pontos  $(1, 7)$ ,  $(6, 2)$  e  $(4, 6)$ .

*Solução.*

Substituindo as coordenadas dos três pontos na Equação (9), obtemos

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que reduz a

$$10(x^2 + y^2) - 20x - 40y - 200 = 0$$

A forma-padrão desta equação é

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

Assim, o círculo tem centro  $(1, 2)$  e raio 5.

**Uma Cônica Arbitrária por Cinco Pontos** A equação geral de uma seção cônica arbitrária no plano (uma parábola, hipérbole ou elipse, ou formas degeneradas destas) é dada por

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0$$

Esta equação contém seis coeficientes, mas nós podemos reduzir este número a cinco se dividirmos todos por um que não seja zero. Assim, basta determinar cinco coeficientes e portanto cinco pontos distintos do plano são suficientes para determinar a equação da seção cônica (Figura 11.1.3). Como antes, a equação pode ser posta na forma de determinante (ver Exercício 6):

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

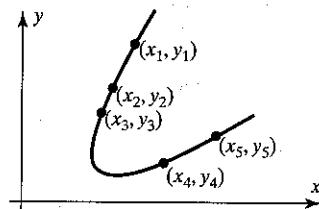


Figura 11.1.3

**EXEMPLO 3 A Equação de uma Órbita**

Um astrônomo que deseja determinar a órbita de um asteroide em torno do Sol coloca um sistema de coordenadas cartesianas no plano da órbita, com o Sol na origem. Ao logo dos eixos são usadas unidades astronômicas ( $1 \text{ UA} = 1 \text{ unidade astronômica} = \text{distância média da Terra ao Sol} = 149.504.200 \text{ km}$ ). Pela

primeira lei de Kepler, a órbita deve ser uma elipse, de modo que o astrônomo faz cinco observações do asteroide em cinco tempos distintos; os cinco pontos ao logo da órbita são

$$(8,025; 8,310), (10,170; 6,355), (11,202; 3,212), (10,736; 0,375), (9,092; -2,267)$$

Encontre a equação da órbita.

*Solução.*

Substituindo as coordenadas dos cinco pontos dados em (10) obtemos

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64,401 & 66,688 & 69,056 & 8,025 & 8,310 & 1 \\ 103,429 & 64,630 & 40,386 & 10,170 & 6,355 & 1 \\ 125,485 & 35,981 & 10,317 & 11,202 & 3,212 & 1 \\ 115,262 & 4,026 & 0,141 & 10,736 & 0,375 & 1 \\ 82,664 & -20,612 & 5,139 & 9,092 & -2,267 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A expansão deste determinante em co-fatores ao longo da primeira linha é

$$386,799x^2 - 102,896xy + 446,026y^2 - 2476,409x - 1427,971y - 17109,378 = 0$$

A Figura 11.1.4 é um diagrama preciso da órbita, junto com os cinco pontos dados.

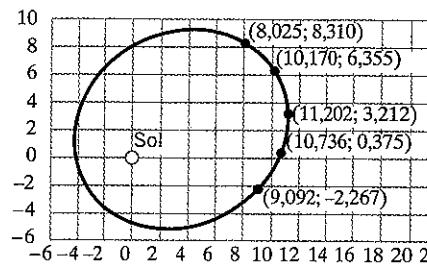


Figura 11.1.4

**Um Plano por Três Pontos** No Exercício 7 nós pedimos ao leitor mostrar o seguinte: O plano no espaço tridimensional de equação

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$$

que passa por três pontos não-colineares  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  e  $(x_3, y_3, z_3)$  é dado pela equação em formato de determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

**EXEMPLO 4 A Equação de um Plano**

A equação do plano que passa pelos três pontos não-colineares  $(1, 1, 0)$ ,  $(2, 0, -1)$  e  $(2, 9, 2)$  é

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que se reduz a

$$2x - y + 3z - 1 = 0$$

**Uma Esfera por Quatro Pontos** No Exercício 8 nós pedimos ao leitor mostrar o seguinte: A esfera no espaço tridimensional de equação

$$c_1(x^2 + y^2 + z^2) + c_2x + c_3y + c_4z + c_5 = 0$$

que passa por quatro pontos não-coplares  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  e  $(x_4, y_4, z_4)$  é dada pela equação em formato de determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

### EXEMPLO 5 A Equação de uma Esfera

A equação da esfera que passa pelos quatro pontos não-coplares  $(0, 3, 2)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(2, 1, 0)$  e  $(5, 1, 3)$  é

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ 13 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 35 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Isto reduz a

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0$$

que, em forma-padrão, é

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$$

### Conjunto de Exercícios 11.1

- Encontre as equações das retas que passam pelos seguintes pontos:  
 (a)  $(1, -1), (2, 2)$       (b)  $(0, 1), (1, -1)$
- Encontre as equações dos círculos que passam pelos seguintes pontos:  
 (a)  $(2, 6), (2, 0), (5, 3)$       (b)  $(2, -2), (3, 5), (-4, 6)$
- Encontre a equação da seção cônica que passa pelos pontos  $(0, 0), (0, -1), (2, 0), (2, -5)$  e  $(4, -1)$ .
- Encontre as equações dos planos do espaço tridimensional que passam pelos seguintes pontos:  
 (a)  $(1, 1, -3), (1, -1, 1), (0, -1, 2)$       (b)  $(2, 3, 1), (2, -1, -1), (1, 2, 1)$
- Encontre as equações das esferas do espaço tridimensional que passam pelos seguintes pontos:  
 (a)  $(1, 2, 3), (-1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 2, -1)$       (b)  $(0, 1, -2), (1, 3, 1), (2, -1, 0), (3, 1, -1)$
- Mostre que a Equação (10) é a equação da seção cônica que passa por cinco pontos distintos dados do plano.
- Mostre que a Equação (11) é a equação do plano no espaço tridimensional que passa por três pontos não-colineares dados.
- Mostre que a Equação (12) é a equação da esfera no espaço tridimensional que passa por quatro pontos não-coplares dados.
- Encontre uma equação no formato de determinante para a parábola da forma

$$c_1y + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0$$

que passa por três pontos não-colineares dados no plano.

### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.1

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. A equação geral de uma superfície quâdratica é dada por

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0$$

Dados nove pontos nesta superfície, pode ser possível determinar sua equação.

- (a) Mostre que se os nove pontos  $(x_i, y_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, 9$ , estão nesta superfície e se eles determinam de modo único a equação desta superfície, então sua equação pode ser escrita em formato de determinante como

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & xy & xz & yz & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \\ x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \\ x_8^2 & y_8^2 & z_8^2 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & x_9y_9 & x_9z_9 & y_9z_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- (b) Use o resultado da parte (a) para determinar a equação da superfície quádrica que passa pelos pontos  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 1, 7)$ ,  $(0, 4, 6)$ ,  $(3, -1, 4)$ ,  $(3, 0, 11)$ ,  $(-1, 5, 8)$ ,  $(9, -8, 3)$ ,  $(4, 5, 3)$  e  $(-2, 6, 10)$ .  
(c) use os métodos da Seção 9.7 para identificar a superfície que resultou na parte (b).

**T2.** (a) Um hiperplano no espaço euclidiano  $n$ -dimensional  $R^n$  tem uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$$

onde  $a_i$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n+1$ , são constantes não todas nulas e  $x_i$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , são variáveis tais que  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$

Um ponto

$$(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) \in R^n$$

está neste hiperplano se

$$a_1x_{10} + a_2x_{20} + a_3x_{30} + \dots + a_nx_{n0} + a_{n+1} = 0$$

Sabendo que os  $n$  pontos  $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{ni})$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , estão neste hiperplano e que eles determinam de modo único a equação deste hiperplano, mostre que a equação do hiperplano pode ser escrita em formato de determinante como

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{n1} & 1 \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{n2} & 1 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{n3} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- (b) Determine a equação do hiperplano em  $R^9$  que passa pelos nove pontos a seguir:

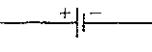
$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) & (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1) & (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2) \\ (4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3) & (5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4) & (6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5) \\ (7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6) & (8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) & (9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \end{array}$$

## 11.2 REDES ELÉTRICAS

Nesta seção são discutidas as leis básicas dos circuitos elétricos e é mostrado como estas leis podem ser usadas para obter os sistemas de equações lineares cujas soluções fornecem as correntes que fluem num circuito elétrico.

### PRÉ-REQUISITO: Sistemas Lineares

Os circuitos elétricos mais simples consistem de dois componentes básicos:

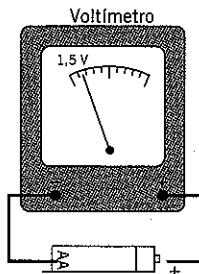
geradores denotados por   
resistores denotados por 

Os geradores elétricos, tais como as baterias, criam correntes num circuito elétrico e os resistores, como as lâmpadas elétricas, limitam as magnitudes das correntes.

Existem três quantidades básicas associadas a circuitos elétricos: o **potencial elétrico** ( $E$ ), a **resistência** ( $R$ ) e a intensidade de **corrente** ( $I$ ). Estas quantidades são usualmente medidas nas seguintes unidades:

$E$	em volts	(V)
$R$	em ohms	( $\Omega$ )
$I$	em ampères	(A)

O potencial elétrico é associado com dois pontos de um circuito elétrico e, na prática, é medido conectando estes dois pontos a um aparelho chamado *voltímetro*. Por exemplo, uma pilha AA comum é classificada como tendo 1,5 volt, o que significa que esta é a diferença de potencial elétrico entre seus terminais positivo e negativo (Figura 11.2.1).



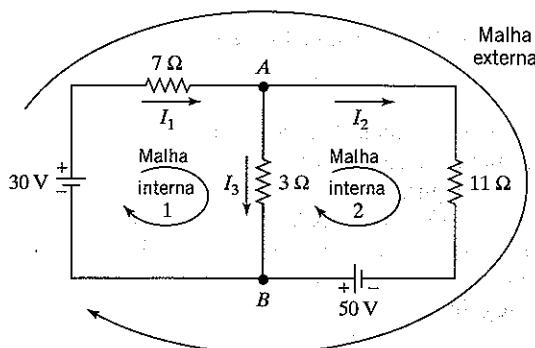
**Figura 11.2.1**

Num circuito elétrico, o potencial elétrico entre dois pontos é chamado de *diferença de potencial* ou *queda de tensão* entre estes dois pontos. Como nós veremos, as intensidades de correntes e as quedas de tensão podem ser tanto positivas quanto negativas.

O fluxo da corrente num circuito elétrico é governado por três princípios básicos:

1. **A Lei de Ohm** A diferença de potencial através de um resistor é o produto da corrente que passa por ele e a resistência; ou seja,  $E = IR$ .
2. **A Lei de Corrente de Kirchhoff** A soma algébrica das correntes fluindo para dentro de qualquer ponto de um circuito elétrico é igual à soma algébrica das correntes fluindo para fora do ponto.
3. **A Lei de Voltagem de Kirchhoff** Em torno de qualquer circuito fechado (também chamado de malha), a soma algébrica das diferenças de potencial é zero.

### EXEMPLO 1 Encontrando Correntes num Circuito



**Figura 11.2.2**

Encontre as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  do circuito mostrado na Figura 11.2.2.

*Solução.*

As direções dos fluxos para as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  (marcadas por flechas) foram tomadas arbitrariamente. Se alguma destas correntes acabar sendo negativa é porque, na realidade, flui no sentido oposto ao selecionado.

Aplicando a Lei de Corrente de Kirchhoff aos pontos *A* e *B*, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 && \text{(Ponto A)} \\ I_3 + I_2 &= I_1 && \text{(Ponto B)} \end{aligned}$$

Como ambas estas equações simplificam à mesma equação linear

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

nós precisamos de mais duas equações para determinar  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  de modo único. Estas equações serão obtidas com a Lei de Voltagem de Kirchhoff.

Para aplicar a Lei de Voltagem de Kirchhoff a um circuito fechado, selecione um sentido positivo em torno do circuito (digamos, sentido horário) e faça a seguinte convenção de sinais:

- Uma corrente passando por um resistor produz uma diferença de potencial positiva se flui no sentido positivo do circuito e uma diferença de potencial negativa se flui no sentido negativo do circuito
- Uma corrente passando por um capacitor produz uma diferença de potencial positiva se o sentido positivo do circuito é de + para - e uma diferença de potencial negativa se o sentido positivo do circuito é de - para +.

Aplicando a Lei de Voltagem de Kirchhoff e a Lei de Ohm à malha interna 1 da Figura 11.2.2, obtemos

$$7I_1 + 3I_3 - 30 = 0 \quad (2)$$

e à malha interna 2, obtemos

$$11I_2 - 3I_3 - 50 = 0 \quad (3)$$

Combinando (1), (2) e (3) resulta o sistema linear

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 7I_1 &\quad + 3I_3 = 30 \\ 11I_2 - 3I_3 &= 50 \end{aligned}$$

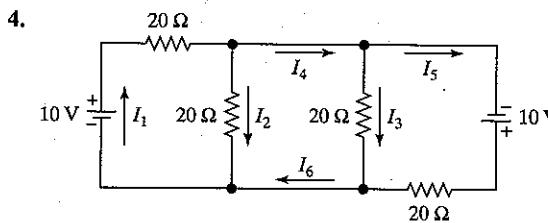
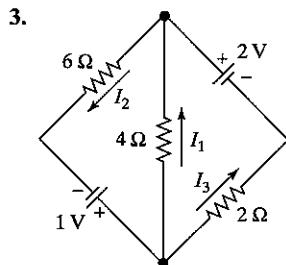
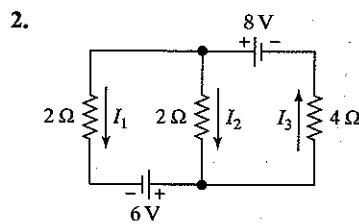
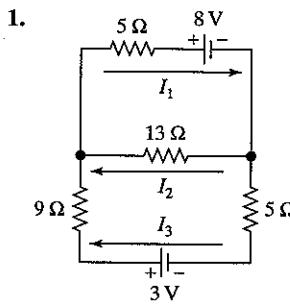
Resolvendo este sistema linear, obtemos os seguintes valores para as correntes:

$$I_1 = \frac{570}{131} \text{ (A)}, \quad I_2 = \frac{590}{131} \text{ (A)}, \quad I_3 = -\frac{20}{131} \text{ (A)}$$

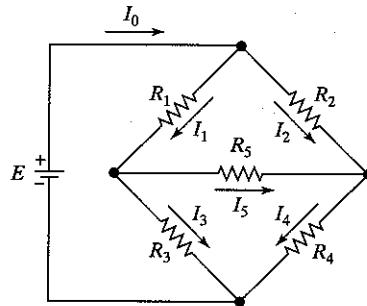
Observe que  $I_3$  é negativo, o que significa que esta corrente flui no sentido oposto ao indicado na Figura 11.2.2. Note que nós poderíamos ter aplicado a Lei de Voltagem de Kirchhoff também ao circuito externo do circuito. No entanto, este procedimento resulta numa equação redundante (tente isto). ♦

**Conjunto de Exercícios 11.2**

Nos Exercícios 1–4, encontre as correntes dos circuitos.



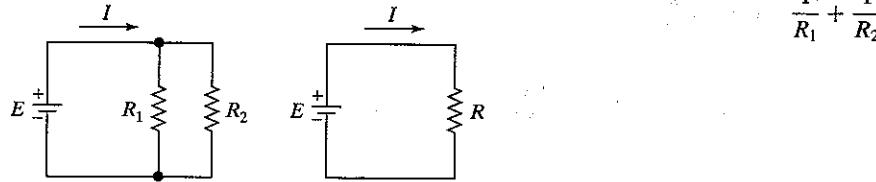
5. Mostre que se a corrente  $I_5$  no circuito da figura dada é zero, então  $R_4 = R_3 R_2 / R_1$ .



**Figura Ex-5**

[*Observação.* Este circuito, chamado um circuito de ponte de Wheatstone, é usado para medições precisas da resistência. Aqui,  $R_4$  é uma resistência desconhecida e  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  são resistores calibrados ajustáveis.  $R_5$  representa um galvanômetro—um aparelho que mede corrente. Depois de variar as resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  até que a leitura no galvanômetro acuse zero, a fórmula  $R_4 = R_3 R_2 / R_1$  determina a resistência desconhecida  $R_4$ .]

6. Mostre que se as duas correntes denotadas por  $I$  nos circuitos da figura dada são iguais, então  $R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ .



**Figura Ex-6**

**Requisito: Recurso Computacional**

**Exercícios Computacionais 11.2**

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com

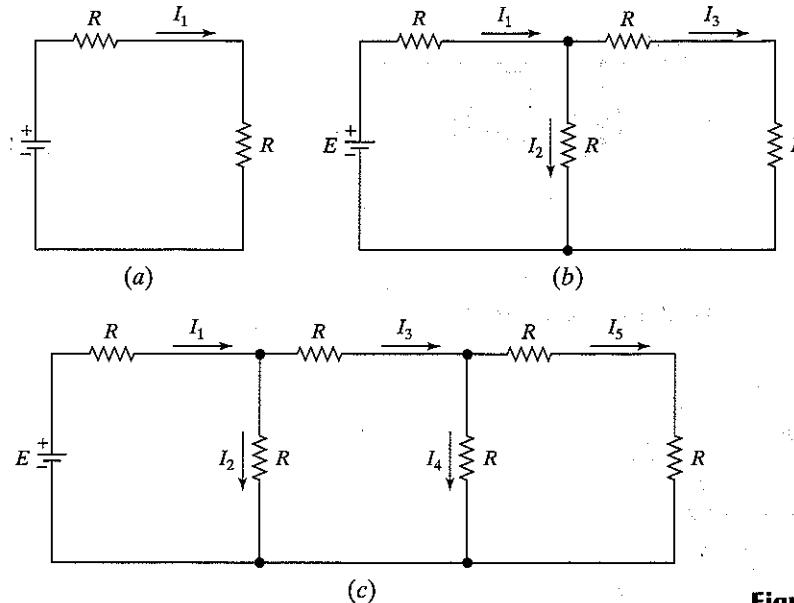
### 370 • • Álgebra Linear com Aplicações

funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**T2.** A figura dada mostra uma sucessão de circuitos distintos.

- Para o circuito na parte (a) da figura, resolva para a corrente  $I_1$ .
- Para o circuito na parte (b) da figura, resolva para as correntes  $I_1$  a  $I_3$ .
- Para o circuito na parte (c) da figura, resolva para as correntes  $I_1$  a  $I_5$ .
- Continue este processo até descobrir um padrão nos valores de  $I_1, I_2, I_3, \dots$
- Investigue a sucessão de valores de  $I_1$  em cada um dos circuitos nas partes (a), (b) e (c) e assim por diante e mostre, numericamente, que os valores desta sucessão tendem a

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\frac{E}{R} \approx (0,6180)\frac{E}{R}$$

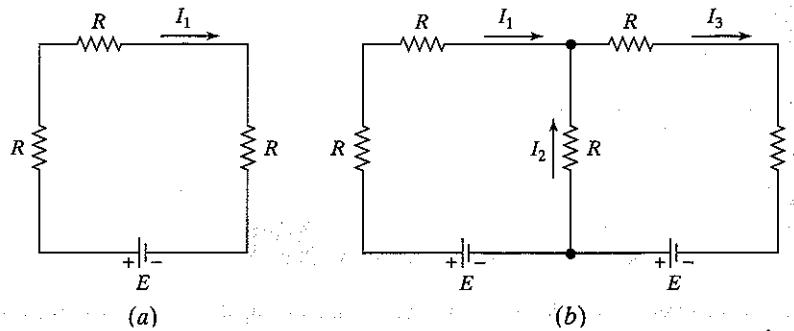


**Figura Ex-T1**

**T2.** A figura dada mostra uma sucessão de circuitos distintos.

- Para o circuito na parte (a) da figura, resolva para a corrente  $I_1$ .
- Para o circuito na parte (b) da figura, resolva para a corrente  $I_1$ .
- Para o circuito na parte (c) da figura, resolva para a corrente  $I_1$ .
- Continue este processo até descobrir um padrão nos valores de  $I_1$ .
- Investigue a sucessão de valores de  $I_1$  em cada um dos circuitos nas partes (a), (b) e (c) e assim por diante e mostre, numericamente, que os valores desta sucessão tendem a

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\frac{E}{R} \approx (0,6180)\frac{E}{R}$$



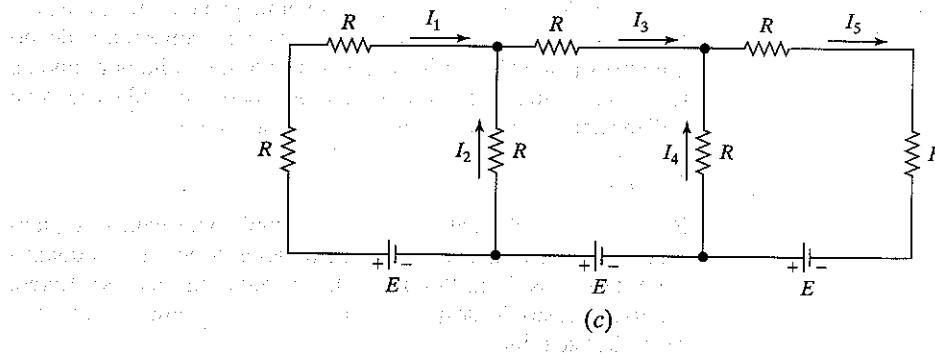


Figura Ex-T2

## 11.3 PROGRAMAÇÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Nesta seção é descrita uma técnica geométrica para maximizar ou minimizar uma expressão linear em duas variáveis sujeita a um conjunto de vínculos lineares.

**PRÉ-REQUISITOS:** Sistemas Lineares  
Desigualdades Lineares

**Programação Linear** O estudo da teoria da Programação Linear foi muito ampliado desde o trabalho pioneiro de George Dantzig no final da década de 1940. Hoje em dia, a Programação Linear é aplicada a uma grande variedade de problemas na indústria e na ciência. Nesta seção nós apresentamos uma abordagem geométrica para as soluções de problemas simples de Programação Linear. Começamos com alguns exemplos.

### EXEMPLO 1 Maximizando o Lucro de Vendas

Um fabricante de bombons tem estocado bombons de chocolate, sendo 130 kg com recheio de cerejas e 170 kg com recheio de menta. Ele decide vender o estoque na forma de dois pacotes sortidos diferentes. Um pacote contém uma mistura com metade do peso em bombons de cereja e metade em menta e vende por R\$ 20,00 por kg. O outro pacote contém uma mistura de um terço de bombons de cereja e dois terços de menta e vende por R\$ 12,50 por kg. O vendedor deveria preparar quantos quilos de cada mistura a fim de maximizar seu lucro de vendas?

*Solução.*

Inicialmente vamos formular este problema matematicamente. Chamamos de  $A$  a mistura com metade cereja e metade menta e o número de quilos desta mistura que deverá ser preparada é  $x_1$ . Chamamos de  $B$  a mistura com um terço cereja e dois terços menta e o número de quilos desta mistura que deverá ser preparada é  $x_2$ . Como a mistura  $A$  vende por R\$ 20,00 e a mistura  $B$  vende por R\$ 12,50 por quilo, o total  $z$  de vendas (em reais) será

$$z = 20,00 x_1 + 12,50 x_2$$

Como cada quilo da mistura  $A$  contém meio quilo de bombons de cereja e cada quilo da mistura  $B$  contém um terço de quilo de bombons de cereja, o número total de quilos de bombons de cereja usados em ambas misturas é

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2$$

De maneira similar, como cada quilo da mistura  $A$  contém meio quilo de menta e cada quilo da mistura  $B$  contém dois terços de quilo de menta, o número total de quilos de bombons de menta usados em ambas misturas é

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2$$

Já que o fabricante só pode usar, no máximo, 130 quilos de bombons de cereja e 170 quilos de bombons de menta, nós devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\leq 130 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 170\end{aligned}$$

Além disso, como  $x_1$  e  $x_2$  não podem ser números negativos, temos

$$x_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_2 \geq 0$$

Isto mostra que o problema pode ser formulado matematicamente, como segue: Encontrar valores de  $x_1$  e  $x_2$  que maximizam

$$z = 20,00 x_1 + 12,50 x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\leq 130 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 170 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Adiante, nesta seção, nós vamos ver como resolver geometricamente este tipo de problema matemático.

### EXEMPLO 2 Maximizando o Rendimento Anual

Uma mulher tem até R\$ 10.000 para investir e seu corretor sugere investir em dois títulos,  $A$  e  $B$ . O título  $A$  é bastante arriscado, com lucro anual de 10 % e o título  $B$  é bastante seguro, com um lucro anual de 7 %. Depois de algumas considerações, ela resolve investir no máximo R\$ 6.000 no título  $A$ , no mínimo R\$

2.000 no título *B* e investir no mínimo tanto no título *A* quanto no título *B*. Como ela deverá investir seus R\$ 10.000 a fim de maximizar o rendimento anual?

*Solução.*

Para formular o problema matematicamente, sejam  $x_1$  a quantia investida no título *A* e  $x_2$  a quantia investida no título *B*. Como cada real investido no título *A* rende R\$ 0,10 por ano e cada real investido no título *B* rende R\$ 0,07 por ano, o total do rendimento anual  $z$  (em reais) de ambos títulos é dado por

$$z = 0,10x_1 + 0,07x_2$$

Os vínculos impostos podem ser formulados como segue:

Investir no máximo R\$ 10.000:

$$x_1 + x_2 \leq 10.000$$

Investir no máximo R\$ 6.000 no título *A*:

$$x_1 \leq 6.000$$

Investir no mínimo R\$ 2.000 no título *B*:

$$x_2 \geq 2.000$$

Investir no mínimo tanto no título *A* quanto no título *B*:

$$x_1 \geq x_2$$

Além disto, estamos supondo implicitamente que ambos  $x_1$  e  $x_2$  são números não-negativos:

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

Assim, uma formulação matemática completa do problema é como segue: Encontrar valores de  $x_1$  e  $x_2$  que maximizam

$$z = 0,10x_1 + 0,07x_2$$

sujeito a

$$\begin{array}{ll} x_1 & x_2 \leq 10.000 \\ x_1 & \leq 6.000 \\ x_2 & \geq 2.000 \\ x_1 & \geq x_2 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

### EXEMPLO 3 Minimizando o Custo

Um estudante quer projetar um desjejum com flocos de milho e leite que seja o mais econômico possível. Levando em conta o que ele consegue comer nas suas outras refeições, ele decide que seu café da manhã deveria supri-lo com pelo menos 9 gramas de proteínas, pelo menos uma terça parte da necessidade diária recomendada (NDR) de vitamina D e pelo menos uma quarta parte da NDR de cálcio. Ele encontra as seguintes informações nutricionais nas embalagens do leite e dos flocos de milho:

	Leite (meio copo)	Flocos de milho (1 xícara)
Custo	7,5 centavos	50 centavos
Proteína	4 gramas	2 gramas
Vitamina D	$\frac{1}{8}$ de NDR	$\frac{1}{10}$ de NDR
Cálcio	$\frac{1}{6}$ de NDR	Nada

A fim de não ter uma mistura muito empapada ou muito seca, o estudante decide limitar-se a misturas que contenham de no mínimo 1 a no máximo 3 xícaras de flocos de milho por copo de leite. Quais quantidades de leite e de flocos de milho ele deve utilizar para minimizar o custo do seu desjejum?

*Solução.*

Para a formulação matemática deste problema, sejam  $x_1$  a quantidade de leite utilizada (medida em meios copos) e  $x_2$  a quantidade de flocos de milho utilizada (medida em xícaras). Então, sendo  $z$  o custo do desjejum em centavos, podemos escrever as restrições seguintes.

Custo do desjejum:

$$z = 7,5x_1 + 50x_2$$

Pelo menos 9 g de proteína:

$$4x_1 + 2x_2 \geq 9$$

Pelo menos  $\frac{1}{3}$  NDR de vitamina D:

$$\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \geq \frac{1}{3}$$

Pelo menos  $\frac{1}{4}$  NDR de cálcio:

$$\frac{1}{6}x_1 \geq \frac{1}{4}$$

Pelo menos 1 xícara de flocos de milho por copo (dois meios copos) de leite:

$$\frac{x_2}{x_1} \geq \frac{1}{2} \text{ (or } x_1 - 2x_2 \leq 0\text{)}$$

No máximo 3 xícaras de flocos de milho por copo (dois meios copos) de leite:

$$\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{3}{2} \text{ (or } 3x_1 - 2x_2 \leq 0\text{)}$$

Como antes, também estamos supondo implicitamente que  $x_1 \geq 0$  e  $x_2 \geq 0$ . Assim, a formulação matemática completa do problema é como segue: Encontrar valores de  $x_1$  e  $x_2$  que minimizam

$$z = 7,5x_1 + 50x_2$$

sujeito a

$$4x_1 + 2x_2 \geq 9$$

$$\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6}x_1 \geq \frac{1}{4}$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

**Uma Solução Geométrica para Problemas de Programação Linear** Cada um dos três problemas precedentes é um caso especial do seguinte problema.

**Problema.** Encontrar valores de  $x_1$  e  $x_2$  que ou maximizam ou minimizam

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (1)$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$\vdots \vdots \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \quad (2)$$

e

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \quad (3)$$

Em cada uma das  $m$  condições de (2), pode ser usado qualquer um dos símbolos  $\leq$ ,  $\geq$  ou  $=$ .

O problema acima é chamado **problema geral de programação linear** em duas variáveis. A função linear  $z$  em (1) é

chamada **função-objetivo**. As equações (2) e (3) são chamadas **restrições** ou **vínculos**; em particular, as equações em (3) são chamadas de **restrições de não-negatividade** das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ .

Nós iremos mostrar agora como resolver graficamente um problema de programação linear em duas variáveis. Um par de variáveis ( $x_1, x_2$ ) que satisfaz todas as restrições é chamado uma **solução viável**. O conjunto de todas as soluções viáveis determina um subconjunto do plano  $x_1 x_2$  chamado a **região viável**. Nossa objetivo é encontrar uma solução viável que maximize a função-objetivo. Uma tal solução é chamada **solução ótima**.

Para examinar a região viável de um problema de programação linear, observamos que cada restrição do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

define uma reta no plano  $x_1 x_2$ , enquanto cada restrição da forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \text{ ou } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

define um semiplano que inclui a reta de fronteira

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

Assim, a região viável é sempre uma interseção de um número finito de retas e semiplanos. Por exemplo, as quatro restrições

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 & \leq 130 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 & \leq 170 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

do Exemplo 1 definem os semiplanos indicados nas partes (a), (b), (c) e (d) da Figura 11.3.1. A região viável deste problema é, portanto, a interseção destes quatro semiplanos, que é a região indicada na Figura 11.3.1e.

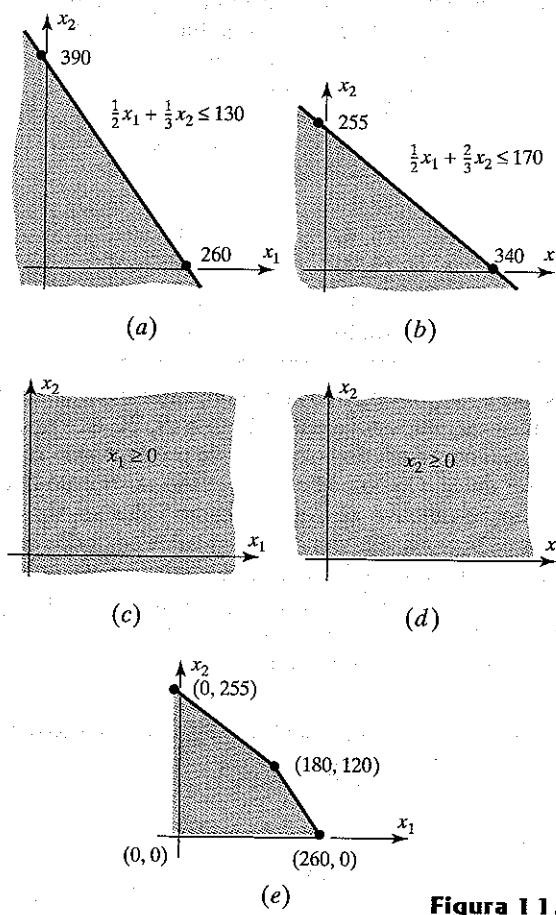


Figura 11.3.1

Pode ser mostrado que a região viável de um problema de programação linear tem uma fronteira que consiste de um número finito de segmentos de retas. Uma região viável é dita **limitada** (Figura 11.3.1e) se puder ser englobada num círculo suficientemente grande; caso contrário, ela é **ilimitada** (Figura 11.3.5). Se a região viável é vazia (ou seja, não contém pontos), então as restrições são inconsistentes e o problema de programação linear não possui solução (Figura 11.3.6).

Os pontos de fronteira de uma região viável que são interseções de dois segmentos de retas de fronteira, são chamados **pontos extremos**. (Também são chamados pontos *de esquina* ou *de vértice*.) Por exemplo, pela Figura 11.3.1e, a região viável do Exemplo 1 tem quatro pontos extremos,

$$(0, 0), (0, 255), (180, 120), (260, 0) \quad (4)$$

A importância dos pontos extremos de uma região viável é mostrada pelo seguinte teorema.

### Teorema 11.3.1

#### Valores Máximos e Mínimos

*Se a região viável de um problema de programação linear é não-vazia e limitada, então a função-objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.*

A Figura 11.3.2 sugere a idéia por trás da prova do teorema. Como a função-objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

de um problema de programação linear é uma função linear de  $x_1$  e de  $x_2$ , suas curvas de nível (as curvas ao longo das quais  $z$  tem valor constante) são retas. À medida que nos deslocamos perpendicularmente a estas retas, a função-objetivo ou cresce ou decresce monotonamente. Dentro de uma região viável limitada, os valores máximos e mínimos de  $z$  devem ocorrer, portanto, nos pontos extremos, como indica a Figura 11.3.2.

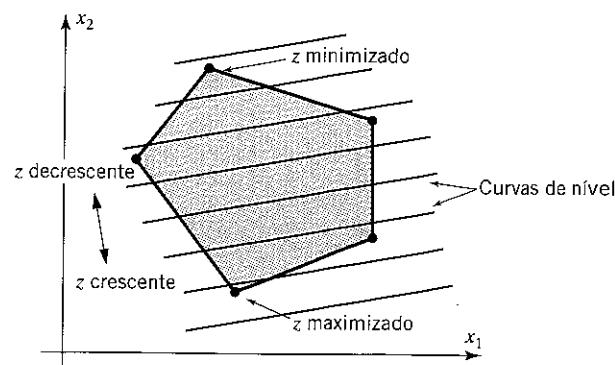


Figura 11.3.2

Nos próximos exemplos nós vamos usar o Teorema 11.3.1 para resolver vários problemas de programação linear e ilustrar as variações na natureza das soluções que podem ocorrer.

**EXEMPLO 4 De Novo o Exemplo 1**

Da Figura 11.3.1e nós vemos que a região viável do Exemplo 1 é limitada. Consequentemente, pelo Teorema 11.3.1 a função-objetivo

$$z = 20,00x_1 + 12,50x_2$$

atinge tanto um valor mínimo quanto um valor máximo em pontos extremos. Os quatro pontos extremos e os correspondentes valores de  $z$  são dados na tabela seguinte.

Ponto Extremo ( $x_1, x_2$ )	Valor de $z = 20,00x_1 + 12,50x_2$
(0, 0)	0
(0, 255)	3187,50
(180, 120)	5100,00
(260, 0)	5200,00

Nós vemos que o maior valor de  $z$  é 5.200,00 e a correspondente solução ótima é (260, 0). Assim, o fabricante de balas atinge um máximo de R\$ 5.200,00 de vendas quando ele produz 260 quilos da mistura A e nada da mistura B. ♦

**EXEMPLO 5 Usando o Teorema 11.3.1**

Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que maximizam

$$z = x_1 + 3x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 - x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solução.

Na Figura 11.3.3 nós desenhamos a região viável deste problema. Por ser limitada, o valor máximo de  $z$  é atingido em um dos cinco pontos extremos. Os valores da função-objetivo nos cinco pontos extremos são dados na tabela seguinte.

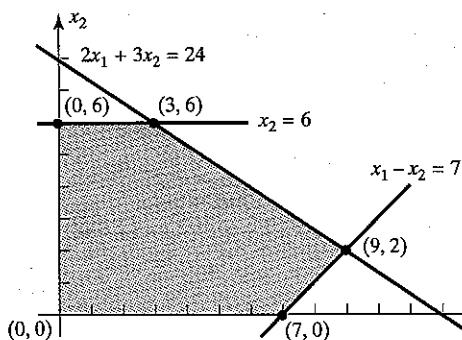


Figura 11.3.3

Ponto Extremo ( $x_1, x_2$ )	Valor de $z = x_1 + 3x_2$
(0, 6)	18
(3, 6)	21
(9, 2)	15
(7, 0)	7
(0, 0)	0

A partir desta tabela vemos que o valor máximo de  $z$  é 21, atingido em  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 6$ . ♦

**EXEMPLO 6 Usando o Teorema 11.3.1**

Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que maximizam

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 - x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solução.

As restrições neste problema são idênticas às restrições do Exemplo 5, portanto a região viável deste problema também é dada pela Figura 11.3.3. Os valores da função-objetivo nos pontos extremos são dados na tabela seguinte.

Ponto Extremo ( $x_1, x_2$ )	Valor de $z = 4x_1 + 6x_2$
(0, 6)	36
(3, 6)	48
(9, 2)	48
(7, 0)	28
(0, 0)	0

Vemos que a função-objetivo atinge um valor máximo de 48 nos dois pontos extremos adjacentes (3, 6) e (9, 2). Isto mostra que uma solução ótima em um problema de programação linear não precisa ser única. Como pedimos ao leitor mostrar no Exercício 9, se a função-objetivo assume o mesmo valor em dois pontos extremos adjacentes, ela tem o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta da fronteira que conecta estes dois pontos extremos. Assim, neste exemplo, o valor máximo de  $z$  é alcançado em todos os pontos do segmento de reta que conecta os pontos extremos (3, 6) e (9, 2). ♦

**EXEMPLO 7 A Região Viável é um Segmento de Reta**

Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que minimizam

$$z = 2x_1 - x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 - 3x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

*Solução.*

Na Figura 11.3.4 nós desenhamos a região viável deste problema. Como uma das restrições é uma restrição de igualdade, a região viável é um segmento de reta com dois pontos extremos. Os valores de  $z$  nos dois pontos extremos são dados na tabela seguinte.

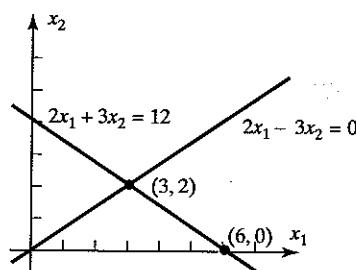


Figura 11.3.4

Ponto Extremo ( $x_1, x_2$ )	Valor de $z = 2x_1 - x_2$
(3, 2)	4
(6, 0)	12

Assim, o valor mínimo de  $z$  é 4, atingido em  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 2$ .

### EXEMPLO 8 Usando o Teorema 11.3.1

Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que maximizam

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ -4x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

*Solução.*

A região viável deste problema de programação linear é indicada na Figura 11.3.5. Por ser ilimitada, o Teorema 11.3.1 não nos garante que a função-objetivo atinge um valor máximo. De fato, é fácil verificar que, como a região viável contém pontos nos quais ambos  $x_1$  e  $x_2$  são arbitrariamente grandes e positivos, a função-objetivo

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

toma valores arbitrariamente grandes e positivos. Este problema não tem solução ótima. Em vez disto, nós dizemos que o problema tem uma *solução ilimitada*. ♦

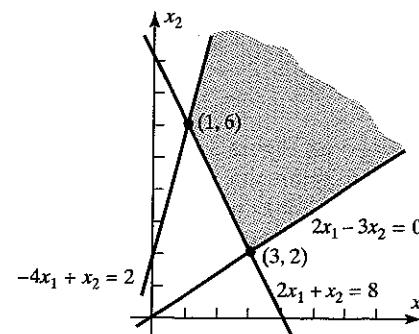


Figura 11.3.5

### EXEMPLO 9 Usando o Teorema 11.3.1

Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que maximizam

$$z = -5x_1 + x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ -4x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

*Solução.*

As restrições acima são as mesmas que as do Exemplo 8, portanto a região viável deste problema também é dada pela Figura 11.3.5. No Exercício 10 nós pedimos ao leitor mostrar que a função-objetivo deste problema atinge um máximo na região viável. Pelo Teorema 11.3.1, este máximo deve ser atingido num ponto extremo. Os valores de  $z$  nos dois pontos extremos são dados na tabela seguinte.

Ponto Extremo ( $x_1, x_2$ )	Valor de $z = -5x_1 + x_2$
(1, 6)	1
(3, 2)	-13

Assim, o valor máximo de  $z$  é 1 e é atingido no ponto extremo  $x_1 = 1, x_2 = 6$ .

### EXEMPLO 10 Restrições inconsistentes

Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que minimizam

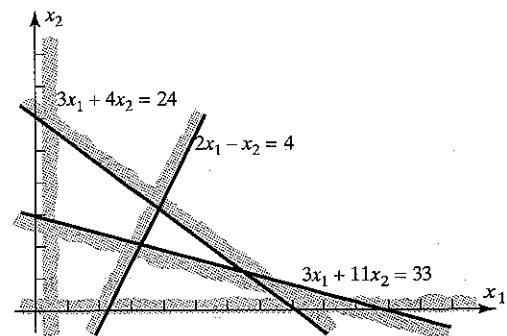
$$z = 3x_1 - 8x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &\leq 4 \\3x_1 + 11x_2 &\leq 33 \\3x_1 + 4x_2 &\geq 24 \\x_1 &\geq 0 \\x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

*Solução.*

Como pode ser visto na Figura 11.3.6, a interseção dos cinco semiplanos definidos pelas cinco restrições é vazio. Este problema de programação linear não possui soluções viáveis pois as restrições são inconsistentes.



**Figura 11.3.6** Não há pontos comuns a todas as cinco regiões sombreadas.

### Conjunto de Exercícios 11.3

1. Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que maximizam

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\2x_1 - x_2 &\geq 0 \\x_1 &\leq 2 \\x_2 &\leq 1 \\x_1 &\geq 0 \\x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

2. Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que minimizam

$$z = 3x_1 - 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &\leq -2 \\4x_1 - x_2 &\geq 0 \\x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0 \\x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

3. Encontre valores de  $x_1$  e  $x_2$  que minimizam

$$z = -3x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 &\geq -5 \\-x_1 + x_2 &\geq 1 \\2x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\x_1 &\geq 0 \\x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

4. Resolva o problema de programação linear proposto no Exemplo 2.

5. Resolva o problema de programação linear proposto no Exemplo 3.

6. Uma empresa de transporte de carga transporta os contêineres de duas companhias, A e B. Cada contêiner da companhia A pesa 40 quilos e mede 0,054 m<sup>3</sup> de volume. Cada contêiner da companhia B pesa 50 quilos e mede 0,081 m<sup>3</sup> de volume. Por cada contêiner transportado, a empresa de transporte de carga cobra R\$ 2,20 de frete da companhia A e R\$ 3,00 de frete da companhia B. Sabendo que um caminhão da empresa não pode carregar mais do que 37.000 quilos e não comporta mais do que 54 m<sup>3</sup>, quantos contêineres das companhias A e B o caminhão deveria transportar para maximizar o valor do frete?

7. Repita o Exercício 6 se a empresa de transporte de carga aumentar o preço do frete de um contêiner da companhia A para R\$ 2,50.

8. Um fabricante produz sacos de ração para galinhas a partir de dois ingredientes, A e B. Cada saco deve conter pelo menos 625 g do nutriente  $N_1$ , pelo menos 500 g do nutriente  $N_2$  e pelo menos 750 g do nutriente  $N_3$ . Cada quilo do ingrediente A contém 125 g do nutriente  $N_1$ , 125

- g do nutriente  $N_2$  e 375 g do nutriente  $N_3$ . Cada quilo do ingrediente  $B$  contém 312,5 g do nutriente  $N_1$ , 187,5 g do nutriente  $N_2$  e 250 g do nutriente  $N_3$ . Se o ingrediente  $A$  custa 8 centavos por quilo e o ingrediente  $B$  custa 9 centavos por quilo, quanto de cada ingrediente o fabricante deveria usar em cada saco de ração para minimizar seus custos?
9. Se a função-objetivo de um problema de programação linear tem o mesmo valor em dois pontos extremos adjacentes, mostre que também tem o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta que conecta os dois pontos extremos. [Sugestão. Se  $(x'_1, x'_2)$  e  $(x''_1, x''_2)$  são dois pontos quaisquer no plano, um ponto  $(x_1, x_2)$  está no segmento de reta que os conecta se
- $$x_1 = tx'_1 + (1-t)x''_1$$
- e
- $$x_2 = tx'_2 + (1-t)x''_2$$
- onde  $t$  é um número no intervalo  $[0, 1]$ .]

10. Mostre que a função-objetivo do Exemplo 9 atinge um valor máximo na região viável. [Sugestão. Examine as curvas de nível da função-objetivo.]

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais 11.3

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Considere a região viável que consiste de  $0 \leq x, 0 \leq y$  junto com o conjunto de desigualdades

$$x \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) + y \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Maximize a função-objetivo

$$z = 3x + 4y$$

supondo que (a)  $n = 1$ , (b)  $n = 2$ , (c)  $n = 3$ , (d)  $n = 4$ , (e)  $n = 5$ , (f)  $n = 6$ , (g)  $n = 7$ , (h)  $n = 8$ , (i)  $n = 9$ , (j)  $n = 10$  e (k)  $n = 11$ .

Em seguida, maximize esta mesma função-objetivo usando (l) a região viável não-linear dada por  $0 \leq x, 0 \leq y$  junto com

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Suponha que os resultados das partes (a) até (k) começam uma seqüência de valores de  $z_{\max}$ . Estes valores se aproximam do valor determinado na parte (l)? Explique.

- T2. Repita o Exercício T1 usando a função-objetivo  $z = x + y$ .

## 11.4 O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE TAREFAS

Um certo número de instalações deverá receber tarefas distintas. Cada possível alocação de tarefas resulta em um certo custo. Nesta seção nós descrevemos um algoritmo, denominado método húngaro, para encontrar uma alocação de tarefas de custo mínimo.

#### PRÉ-REQUISITO: Notação Matricial

Um problema básico em pesquisa operacional é distribuir univocamente tarefas para instalações de um modo otimizado. Por exemplo, o problema pode ser encontrar a melhor distribuição de trabalhadores em empregos, jogadores de um esporte em posições no campo, maquinário em locais de construção e assim por diante. O problema da alocação de tarefas requer que haja o

mesmo número de instalações e tarefas, digamos  $n$ . Neste caso, há exatamente  $n!$  maneiras distintas de alocar univocamente as tarefas às instalações. Isto ocorre pois há  $n$  maneiras de alocar a primeira tarefa,  $n-1$  maneiras de alocar a segunda,  $n-2$  maneiras de alocar a terceira e assim por diante—um total de

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

maneiras de alocar as tarefas. Entre estas  $n!$  possíveis alocações, devemos encontrar uma que é ótima em algum sentido. Para definir a noção de alocação ótima precisamente, nós introduzimos as seguintes quantidades. Seja

$c_{ij}$  = custo de alocar à  $i$ -ésima instalação a  $j$ -ésima tarefa

para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . As unidades de  $c_{ij}$  podem ser reais, quilômetros, horas—o que for apropriado ao problema. Nós definimos a **matriz-custo** como a matriz  $n \times n$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Exigir que a cada instalação seja atribuída uma tarefa de maneira única é equivalente à condição que não haja duas entradas  $c_{ij}$  da mesma linha ou coluna. Isto leva à seguinte definição.

### Definição

Dada uma matriz-custo  $C$  de ordem  $n \times n$ , uma *alocação de tarefas* é um conjunto de  $n$  entradas da matriz tais que não há duas da mesma linha ou coluna.

Uma alocação ótima é definida como segue.

### Definição

A soma das  $n$  entradas de uma alocação é chamada o *custo* da alocação. Uma alocação com o menor custo possível é denominada uma *alocação ótima*.

O *problema da alocação de tarefas* é encontrar uma alocação ótima em uma dada matriz-custo. Por exemplo, para distribuir  $n$  unidades de máquinas para  $n$  locais de construção,  $c_{ij}$  poderia ser a distância em quilômetros entre a  $i$ -ésima máquina e o  $j$ -ésimo local de construção. Uma alocação ótima é uma na qual soma um mínimo a distância total percorrida pelas  $n$  máquinas.

### EXEMPLO 1 Minimizando a Soma de Três Propostas

Uma faculdade pretende instalar aparelhos de ar-condicionado em três de seus prédios num período de uma semana em que permanecerá fechada e convida três firmas para submeter orçamentos para o trabalho envolvido em cada um dos três prédios. Na Tabela 1 aparecem listadas as propostas de orçamento que a faculdade recebe (em unidades de 1000 reais).

TABELA 1

Orçamentos			
	Prédio 1	Prédio 2	Prédio 3
Firma 1	53	96	37
Firma 2	47	87	41
Firma 3	60	92	36

Cada firma só consegue instalar os aparelhos de ar-condicionado em um dos prédios durante o período de uma semana previsto para a obra, de modo que a faculdade precisa contratar uma firma diferente para cada prédio. Para qual prédio deveria ser contratada cada firma para minimizar a soma das propostas correspondentes?

Solução.

A matriz-custo para este problema é a matriz  $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Como só há seis ( $= 3!$ ) alocações possíveis, nós podemos resolver este problema calculando o custo de cada uma delas. Nós sombreados as entradas associadas com cada um das seis alocações e calculamos sua soma.

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & \text{\fbox} & 41 \\ 60 & 92 & \text{\fbox} \end{bmatrix}$$

$$53 + 87 + 36 = 176$$

(a)

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & \text{\fbox} \\ 60 & \text{\fbox} & 36 \end{bmatrix}$$

$$53 + 92 + 41 = 186$$

$$47 + 96 + 36 = 179$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ \text{\fbox} & 87 & 41 \\ 60 & 92 & \text{\fbox} \end{bmatrix}$$

$$47 + 96 + 36 = 179$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & \text{\fbox} & 41 \\ 60 & 92 & \text{\fbox} \end{bmatrix}$$

$$47 + 92 + 37 = 176$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & \text{\fbox} \\ 60 & \text{\fbox} & 36 \end{bmatrix}$$

$$60 + 96 + 41 = 197$$

$$60 + 87 + 37 = 184$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ \text{\fbox} & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

$$60 + 87 + 37 = 184$$

(f)

Observe que os totais de propostas variam de um mínimo de R\$ 176.000 a um máximo de R\$ 197.000. Como o mínimo total de propostas de R\$ 176.000 é atingido por ambas alocações (a) e (d), a faculdade deveria contratar as firmas para os prédios de uma das seguintes maneiras:

Firma 1 para o prédio 1

Firma 1 para o prédio 3

Firma 2 para o prédio 2

Firma 2 para o prédio 1

Firma 3 para o prédio 3

Firma 3 para o prédio 2

O método de força bruta usado neste exemplo logo se torna impraticável, à medida que aumenta o tamanho da matriz-custo. Por exemplo, para uma matriz  $10 \times 10$ , há um total de 3.628.800 ( $= 10!$ ) alocações possíveis. Nós vamos descrever agora um método prático para resolver qualquer problema de alocações. ♦

**O Método Húngaro** Suponha que um problema específico de alocação de tarefas tem a matriz-custo

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 7 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Note que todas as entradas desta matriz-custo são não-negativas e que ela contém muitos zeros. Também observe que nós podemos encontrar uma alocação consistindo somente de zeros, a saber

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 7 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Esta alocação deve ser ótima, pois seu custo é zero e é impossível encontrar uma alocação com custo menor do que zero se todas as entradas são não-negativas.

Muito poucos problemas de alocação de tarefas são tão fáceis de resolver como este. No entanto, o próximo teorema leva a um método de converter um problema arbitrário de alocação de tarefas em um que pode ser tão facilmente resolvido quanto este.

### Teorema 11.4.1 Alocação Ótima

*Se um número é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna de uma matriz-custo, então uma alocação de tarefas ótima para a matriz-custo resultante é também uma alocação de tarefas ótima para matriz-custo original.*

Para ver por que este teorema é verdadeiro, suponha que cinco é somado a cada entrada da segunda fila de uma matriz-custo dada. Como cada alocação contém exatamente uma entrada da segunda linha, segue que o custo de cada alocação para a nova matriz é exatamente cinco a mais do que o custo da alocação

correspondente para a matriz original. Assim, alocações correspondentes preservam seu ordenamento em relação ao custo, de modo que alocações ótimas de cada matriz correspondem a alocações ótimas da outra matriz. Um argumento similar vale se um número é somado a qualquer coluna da matriz-custo, ou se usamos subtração em vez de adição.

Nós agora introduzimos o *método húngaro*, que é um procedimento de cinco passos para aplicar este teorema a uma dada matriz-custo e obter uma com entradas não-negativas que contém uma alocação consistindo inteiramente de zeros. Uma tal alocação (chamada *alocação ótima de zeros*) será então uma alocação ótima para o problema original. Na Figura 11.4.1 delineamos o método húngaro para uma matriz-custo  $n \times n$ . Os primeiros dois passos usam o Teorema 11.4.1 para gerar uma matriz com entradas não-negativas e com pelo menos um zero em cada linha e coluna. Os três últimos passos são aplicados iteradamente tantas vezes quanto for necessário para gerar uma matriz-custo que contém uma alocação ótima de zeros. No Exercício 8 nós pedimos ao leitor mostrar que cada vez que o Passo 5 é aplicado, a soma das entradas da nova matriz-custo gerada é estritamente menor do que a soma das entradas da

### O Método Húngaro

Passos	Observações
1. Subtraia a menor entrada de cada linha de todas as entradas da mesma linha.	Depois deste passo, cada linha tem pelo menos uma entrada zero e todas as outras entradas são não-negativas.
2. Subtraia a menor entrada de cada coluna de todas as entradas da mesma coluna.	Depois deste passo, cada linha e cada coluna têm pelo menos uma entrada zero e todas as outras entradas são não-negativas.
3. Risque um traço ao longo de linhas e colunas de tal modo que todas as entradas zero da matriz-custo são riscadas e utilizando um número <i>mínimo</i> de traços.	Pode haver várias maneiras de fazer isto. O que é importante é usar o número mínimo de traços. Existem algoritmos computacionais que fazem isto; contudo, para valores pequenos de $n$ , é suficiente proceder por tentativa e erro.
4. Teste de Optimalidade. (i) Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é $n$ , então uma alocação ótima de zeros é possível e encerramos o procedimento. (ii) Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é menor do que $n$ , então ainda não é possível uma alocação ótima de zeros. Continue com o Passo 5.	Veja o Exercício 7 para uma justificativa deste teste. Se o teste é afirmativo, uma escolha criteriosa irá produzir um conjunto de $n$ entradas zero, tais que não há duas na mesma linha ou coluna. Existem algoritmos para encontrar uma tal alocação ótima de zeros de maneira sistemática, mas isto não será discutido aqui.
5. Determine a menor entrada não riscada por nenhum traço. Subtraia esta entrada de todas as entradas não riscadas e depois a some a todas as entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente. Retorne ao Passo 3.	Este passo é equivalente a aplicar o Teorema 11.4.1 subtraindo a menor entrada não riscada de cada linha não riscada e depois somando esta menor entrada não riscada a cada coluna riscada.

Figura 11.4.1

matriz anterior. Isto garante que o processo iterativo não pode continuar indefinidamente.

### EXEMPLO 2 Minimizando a Distância Total Percorrida

Uma construtora tem quatro grandes escavadeiras localizados em quatro garagens diferentes. As escavadeiras devem ser transportados a quatro diferentes locais de construção. As distâncias entre as escavadeiras e os locais de construção são dadas, em quilômetros, na Tabela 2.

TABELA 2

		Local de Construção			
		1	2	3	4
Escavadeira	1	90	75	75	80
	2	35	85	55	65
	3	125	95	90	105
	4	45	110	95	115

Como devem ser transportadas as escavadeiras para os locais de construção para minimizar a distância total percorrida?

*Solução.*

Nós vamos aplicar o método húngaro à matriz (4), que é a matriz-custo para o problema.

$$\begin{bmatrix} 90 & 75 & 75 & 80 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 110 & 95 & 115 \end{bmatrix} \quad (4)$$

**Passo 1.** Subtraímos 75 da primeira linha da matriz (4), 35 da segunda linha, 90 da terceira linha e 45 da quarta linha para obter a matriz (5).

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{bmatrix} \quad (5)$$

**Passo 2.** As três primeiras linhas da matriz (5) já contêm entradas zero; portanto nós só precisamos subtrair 5 da quarta coluna. O resultado é a matriz (6).

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix} \quad (6)$$

**Passo 3.** Riscamos as entradas zero da matriz (6) com um número mínimo de traços horizontais e verticais. Isto pode ser feito tentando, primeiro, riscar todos os zeros com um único traço, depois com dois e finalmente com três. Os traços

indicados não são únicos. (Veja o Exercício 3 para traços alternativos.)

**Passo 4.** Como o número mínimo de traços usados no Passo 3 é três, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

**Passo 5.** Subtraímos 20, que é a menor entrada não riscada da matriz (6), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 20 às duas entradas riscadas por dois traços. O resultado é a matriz (7).

$$\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 55 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{bmatrix} \quad (7)$$

**Passo 6.** (Passo 3 da Figura 11.4.1.) Riscamos as entradas zero da matriz (7) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

**Passo 7.** Como o número mínimo de traços usados continua sendo três, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

**Passo 8.** Subtraímos 5, que é a menor entrada não riscada da matriz (7), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 5 às duas entradas riscadas por dois traços. O resultado é a matriz (8).

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix} \quad (8)$$

**Passo 9.** (Passo 3 da Figura 11.4.1.) Riscamos as entradas zero da matriz (8) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

**Passo 10.** Como as entradas zero da matriz (8) não podem ser riscadas com menos do que quatro traços, a matriz deve conter uma alocação ótima de zeros.

Por tentativa e erro, nós podemos encontrar as seguintes duas alocações ótimas de zeros da matriz (8):

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix} \\ (a) & (b) \end{array} \quad (9)$$

A alocação (a) leva à seguinte movimentação de escavadeiras a locais de construção:

Escavadeira 1 para o local de construção 4

Escavadeira 2 para o local de construção 3

Escavadeira 3 para o local de construção 2

Escavadeira 4 para o local de construção 1

Pela Tabela 2, a correspondente distância mínima percorrida é  $80 + 55 + 95 + 45 = 275$  quilômetros

Analogamente, a alocação (b) leva à solução alternativa

Escavadeira 1 para o local de construção 2

Escavadeira 2 para o local de construção 4

Escavadeira 3 para o local de construção 3  
Escavadeira 4 para o local de construção 1  
com a mesma distância mínima percorrida  
 $75 + 65 + 90 + 45 = 275$  quilômetros

Antes de dar outro exemplo, nós deveríamos mencionar que os problemas de alocação de tarefas e matrizes-custo associadas que podem ser resolvidos pelo método húngaro devem satisfazer as três condições seguintes:

- 1.** A matriz-custo precisa ser quadrada. No próximo exemplo nós iremos discutir um procedimento para tratar problemas de alocação de tarefas para os quais a matriz-custo não é quadrada.
- 2.** As entradas da matriz-custo deveriam ser números inteiros. Para contas à mão isto é somente uma conveniência. Mas para calculadoras e computadores isto permite utilizar a aritmética exata de inteiros e evitar erros de arredondamento. Para problemas práticos, as entradas não-inteiras podem ser sempre transformadas em entradas inteiras multiplicando a matriz-custo por uma potência conveniente de dez.
- 3.** O problema deve ser de minimização. O problema de maximizar a soma das entradas de uma matriz-custo é facilmente convertido em um problema de minimizar a soma das entradas multiplicando cada entrada da matriz-custo por  $-1$ .

### EXEMPLO 3. O Problema dos Casamentos

Uma agência de matrimônios tem quatro clientes mulheres e cinco clientes homens que desejam casar. A conselheira matrimonial da agência classifica os pares numa escala de compatibilidade de zero a dez: zero para um par nada compatível e dez para um par altamente compatível. A classificação é dada na Tabela 3.

TABELA 3

		Noivos em potencial				
		Bruno	Tiago	Jonas	Paulo	Diego
Noivas em potencial	Susana	7	4	7	3	10
	Ana	5	9	3	8	7
	Beatriz	3	5	6	2	9
	Fabiana	6	5	0	4	8

Como a conselheira deveria formar os pares para maximizar a soma das compatibilidades?

*Solução.*

Como há um noivo em potencial a mais do que noivas em potencial, um deles não pode formar um par. Assim, a matriz-

custo não é quadrada e o método húngaro não pode ser aplicado diretamente. Para contornar este problema, nós introduzimos uma noiva em potencial fictícia cuja compatibilidade com cada um dos cinco homens é zero: o noivo em potencial que formar um par com esta noiva fictícia é, então, na realidade, o noivo sem par. Portanto nós acrescentamos uma linha de zeros à Tabela 3, correspondendo à noiva fictícia, e dessa maneira somos levados à seguinte matriz-custo quadrada:

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 5 & 9 & 3 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Da maneira como foi enunciado, o problema é o de maximizar uma soma. Para convertê-lo em um problema de minimizar uma soma, multiplicamos cada entrada da matriz (10) por  $-1$  para obter

$$\begin{bmatrix} -7 & -4 & -7 & -3 & -10 \\ -5 & -9 & -3 & -8 & -7 \\ -3 & -5 & -6 & -2 & -9 \\ -6 & -5 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Agora nós aplicamos o método húngaro à matriz (11) para encontrar uma alocação ótima.

**Passo 1.** Subtraímos  $-10$  da primeira linha da matriz (11),  $-9$  da segunda linha,  $-9$  da terceira linha e  $-8$  da quarta linha para obter a matriz (12).

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 6 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & \cancel{\phantom{0}} \\ \hline 6 & 4 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (12)$$

**Passo 2.** Como todas as colunas da matriz (12) contêm entradas zero, não precisamos utilizar o Passo 2 da Figura 11.4.1.

**Passo 3.** Riscamos as entradas zero da matriz (12) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

**Passo 4.** Como o número mínimo de traços usados no Passo 3 é três, não é possível uma alocação ótima de zeros.

**Passo 5.** Subtraímos 2, que é a menor entrada não riscada da matriz (12), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 2 às duas entradas riscadas por dois traços. O resultado é a matriz (13).

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & \cancel{\phantom{0}} \\ \hline 4 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \quad (13)$$

**Passo 6.** (Passo 3 da Figura 11.4.1.) Riscamos as entradas zero da matriz (13) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

**Passo 7.** Como o número mínimo de traços usados é quatro, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

**Passo 8.** Subtraímos 1, que é a menor entrada não riscada da matriz (13), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 1 às três entradas riscadas por dois traços. O resultado é a matriz (14).

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(14)-

**Passo 9.** (Passo 3 da Figura 11.4.1.) Riscamos as entradas zero da matriz (14) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

**Passo 10.** Como as entradas zero da matriz (14) não podem ser riscadas com menos do que cinco traços, a matriz deve conter uma alocação ótima de zeros. Uma tal alocação é dada na matriz (15).

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

A alocação ótima indicada em (15) leva aos seguintes pares de noivos:

Susana-Jonas	(compatibilidade = 7)
Ana-Tiago	(compatibilidade = 9)
Beatriz-Diego	(compatibilidade = 9)
Fabiana-Bruno	(compatibilidade = 6)
Paulo (sem par)	

A soma de compatibilidades máxima é  $7 + 9 + 9 + 6 = 31$ . No Exercício 4 nós pedimos ao leitor encontrar uma alocação ótima de zeros alternativa na matriz (15) e verificar que também leva à mesma soma de compatibilidades máxima. ♦

### Conjunto de Exercícios 11.4

1. Encontre uma alocação ótima e custo correspondente para cada uma das três matrizes-custo a seguir, usando o método húngaro.

$$(a) \begin{bmatrix} 17 & 4 & 10 \\ 15 & 5 & 8 \\ 18 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 12 & 9 & 7 & 7 & 10 \\ 15 & 11 & 8 & 13 & 14 \\ 9 & 6 & 5 & 12 & 12 \\ 6 & 9 & 13 & 7 & 10 \\ 8 & 13 & 12 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

2. Resolva o Exemplo 1 pelo método húngaro.  
 3. Encontre um conjunto de três traços que riscam as entradas zero da matriz (6) do Exemplo 2 de uma maneira diferente da dada. Em seguida, use o método húngaro para verificar que estes traços levam à mesma alocação ótima de zeros dada em (9).  
 4. Encontre uma alocação ótima de zeros na matriz (15) do Exemplo 3 diferente da dada. Verifique que a nova alocação leva ao mesmo custo que a do exemplo.  
 5. Um negociante de moedas vai vender quatro moedas num leilão eletrônico. Ele recebe propostas para cada uma das quatro moedas de cinco interessados, mas estes interessados também afirmam que podem honrar no máximo uma das propostas. As propostas estão dadas na Tabela 4.

TABELA 4

	Propostas			
	Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4
Interessado 1	\$150	\$65	\$210	\$135
Interessado 2	175	75	230	155
Interessado 3	135	85	200	140
Interessado 4	140	70	190	130
Interessado 5	170	50	200	160

- (a) Como o negociante deveria alocar as quatro moedas para maximizar a soma das propostas correspondentes? (Observe que deve ser acrescentada uma moeda fictícia para obter uma matriz-custo quadrada. O interessado que receber a moeda fictícia não recebe nenhuma moeda real.)

- (b) Suponha que o interessado 2 instruiu o negociante que pode honrar no máximo duas das propostas. Como pode o problema ser adaptado e qual é uma alocação ótima para o novo problema?
6. O treinador de um time de futebol de segunda divisão pode mudar a escalação de nove de seus jogadores em nove posições diferentes. O treinador classifica cada um destes jogadores em uma escala de 0 a 25 para cada uma das posições, levando em conta tanto a habilidade do jogador na posição quanto a importância da posição no jogo. Usando a Tabela 5, como deveria o treinador escalar os nove jogadores para maximizar a soma das classificações?

TABELA 5

Posição	Jogador								
	Silmar	Jorge	Júlio	Leandro	Adão	Luís	Paulo	Artur	Heitor
Ponta E	20	15	10	10	17	23	25	5	15
Ponta D	10	10	12	15	9	7	8	7	8
Centro	12	9	9	10	10	5	7	13	9
Meia E	13	14	10	15	15	5	8	20	10
Meia D	12	13	10	15	14	5	9	20	10
Zaga E	15	14	15	16	15	5	10	20	10
Zaga D	7	9	12	12	7	6	7	15	12
Lateral E	5	6	8	8	5	4	5	10	7
Lateral D	5	6	8	8	5	4	5	10	7

7. Prove a parte (ii) do teste de otimalidade no Passo 4 do método húngaro (Figura 11.4.1) mostrando que as  $n$  entradas zero de uma alocação ótima de zeros não podem ser riscadas com menos do que  $n$  traços. [Observação. A prova da parte (i), que foi dada em 1931 por dois matemáticos húngaros, D. König e E. Egerváry, é bastante difícil.]
8. (a) Suponha que as entradas zero de uma matriz-custo  $n \times n$  não-negativa  $C$  foram riscadas por  $m$  traços, com  $m < n$ . Seja  $a > 0$  a menor entrada de  $C$  que não foi riscada e seja  $C'$  a matriz-custo obtida aplicando o Passo 5 do método húngaro a  $C$ . Mostre que  

$$(\text{Soma de todas as entradas de } C) - (\text{Soma de todas as entradas de } C') = a(n - m)$$
[Sugestão. Note que o Passo 5 é equivalente a somar  $a$  a cada entrada de  $C$  que foi riscada por um traço, somar  $2a$  a cada entrada que foi riscada por dois traços e subtrair  $a$  de cada entrada.]
- (b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que o método húngaro produz uma matriz-custo com uma alocação ótima de zeros em um número finito de passos.

**Requisito: Recurso Computacional****Exercícios Computacionais 11.4**

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Use o método húngaro para determinar uma alocação de tarefas ótima para a matriz-custo  $10 \times 10$  dada por

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

O que é interessante no resultado obtido?

T2. Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, use-o para determinar a matriz mais geral que tem a seguinte propriedade: todas as alocações têm o mesmo custo, e portanto todas as alocações são ótimas, nos casos (a)  $2 \times 2$ , (b)  $3 \times 3$ , (c)  $4 \times 4$  e (d)  $n \times n$ .

## 11.5 INTERPOLAÇÃO SPLINE CÚBICA

Nesta seção utilizamos um utensílio de desenho artístico como um modelo físico para o problema matemático de encontrar uma curva que passa por pontos especificados do plano. Os parâmetros da curva são determinados pela resolução de um sistema linear de equações.

**PRÉ-REQUISITOS:** Sistemas Lineares  
Algebra Matricial  
Cálculo Diferencial

**Ajuste de Curvas** Ajustar uma curva por pontos especificados de um plano é um problema comum encontrado na análise de dados experimentais, na determinação das relações entre variáveis e na elaboração de projetos. Na Figura 11.5.1 são exibidos sete pontos no plano  $xy$  e na Figura 11.5.2 foi desenhada uma curva suave que passa pelos pontos. Dizemos que uma curva que passa por um conjunto de pontos no plano *interpola* estes pontos e a curva é chamada *curva interpoladora*. A curva interpoladora da Figura 11.5.2 foi desenhada com a ajuda de um *spline para esboço* (Figura 11.5.3). Este utensílio de desenho consiste de uma tira fina e flexível, de madeira ou de outro material, que é torcida para passar pelos pontos a serem interpolados. Pesos deslizantes ao longo da tira a mantêm em posição enquanto o artista traça a curva interpoladora. O spline de esboço será o modelo físico para uma teoria matemática de interpolação que nós discutiremos nesta seção.

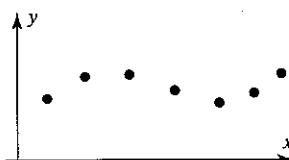


Figura 11.5.1

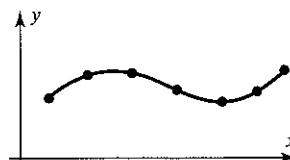


Figura 11.5.2

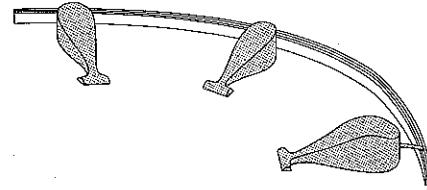


Figura 11.5.3

**Enunciado do Problema** Suponha que são dados  $n$  pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

no plano  $xy$ , que desejamos interpolar com uma curva “bem comportada” (Figura 11.5.4). Por conveniência, tomamos os pontos igualmente espaçados na direção  $x$ , embora nossos resultados possam ser facilmente estendidos ao caso de pontos não igualmente espaçados. Se nós denotarmos por  $h$  a distância comum entre as coordenadas  $x$  dos pontos, teremos

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$$

Seja  $y = S(x)$ ,  $x_1 \leq x \leq x_n$ , a curva interpoladora que estamos procurando. Nós supomos que esta curva descreve o deslocamento de um spline de esboço que interpola os  $n$  pontos quando os pesos que mantêm o spline em posição são colocados exatamente nos  $n$  pontos. É sabido da teoria linear de vigas que, para pequenos deslocamentos, a quarta derivada do deslocamento de uma viga é nula ao longo de qualquer intervalo no eixo  $x$  que não contém forças externas atuando na viga. Se nós tratarmos nosso spline como uma viga fina e observarmos que as únicas forças externas atuantes provêm dos pesos nos  $n$  pontos especificados, então segue que

$$S^{(iv)}(x) \equiv 0 \quad (1)$$

para todos valores de  $x$  nos  $n-1$  intervalos abertos

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$$

entre os  $n$  pontos.

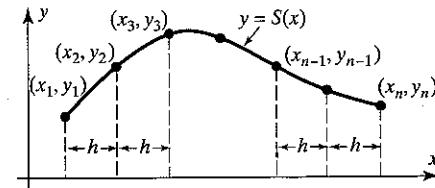


Figura 11.5.4

Nós também vamos precisar do resultado da teoria de vigas que afirma que para uma viga que sofre somente a ação de forças externas, o deslocamento deve possuir duas derivadas contínuas. No caso da curva interpoladora  $y = S(x)$  construída pelo spline de esboço, isto significa que  $S(x)$ ,  $S'(x)$  e  $S''(x)$  devem ser contínuas em todo o intervalo  $x_1 \leq x \leq x_n$ .

Exigir que  $S''(x)$  seja contínua é o que faz com que um spline de esboço produza uma curva que nos satisfaz esteticamente, pois ela tem *curvatura* contínua. O olho humano pode perceber mudanças súbitas de curvatura—ou seja, descontinuidades de  $S''(x)$ —mas mudanças súbitas nas derivadas de ordem mais alta não são perceptíveis. Assim, a condição de continuidade de  $S''(x)$  é um requisito mínimo para que uma curva interpoladora seja vista como uma única curva suave, em vez de uma sucessão de curvas distintas que foram emendadas.

Para determinar a forma matemática da função  $S(x)$ , nós observamos que, como  $S^{(iv)}(x) \equiv 0$  nos intervalos entre os  $n$  pontos especificados, decorre que, integrando esta equação quatro vezes,  $S(x)$  deve ser um *polinômio cúbico* em  $x$  em cada um destes intervalos. Em geral, no entanto,  $S(x)$  será um polinômio cúbico diferente em cada intervalo, de modo que  $S(x)$  deve ter a forma

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2)$$

onde  $S_1(x)$ ,  $S_2(x)$ , ...,  $S_{n-1}(x)$  são polinômios cúbicos. Por conveniência, vamos escrever estes polinômios na forma

$$\begin{aligned} S_1(x) &= a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) &= a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ &\vdots \\ S_{n-1}(x) &= a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 \\ &\quad + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned} \quad (3)$$

Para especificar  $S(x)$  completamente, devemos determinar as constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  com subscritos, que constituem um total de  $4n - 4$  coeficientes. Se nós escolhermos estes coeficientes de tal modo que  $S(x)$  interpola os  $n$  pontos especificados no plano e  $S(x)$ ,  $S'(x)$  e  $S''(x)$  são contínuas, então a curva interpoladora resultante será chamada uma *curva spline cúbica*.

**Dedução da Fórmula da Spline Cúbica** Das Equações (2) e (3) nós temos

$$\begin{aligned} S(x) &= S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S(x) &= S_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ &\vdots \\ S(x) &= S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 \\ &\quad + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned} \quad (4)$$

de modo que

$$\begin{aligned} S'(x) &= S'_1(x) = 3a_1(x - x_1)^2 + 2b_1(x - x_1) + c_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S'(x) &= S'_2(x) = 3a_2(x - x_2)^2 + 2b_2(x - x_2) + c_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ &\vdots \\ S'(x) &= S'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned} \quad (5)$$

e

$$\begin{aligned} S''(x) &= S''_1(x) = 6a_1(x - x_1) + 2b_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S''(x) &= S''_2(x) = 6a_2(x - x_2) + 2b_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ &\vdots \\ S''(x) &= S''_{n-1}(x) = 6a_{n-1}(x - x_{n-1}) + 2b_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned} \quad (6)$$

Nós vamos usar estas equações e as quatro propriedades das splines cúbicas enunciadas abaixo para expressar os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  desconhecidos em termos das coordenadas  $y_1, y_2, \dots, y_n$  conhecidas.

1.  $S(x)$  interpola os pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Como  $S(x)$  interpola os pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , nós temos

$$S(x_1) = y_1, \quad S(x_2) = y_2, \dots, \quad S(x_n) = y_n \quad (7)$$

Das primeiras  $n-1$  destas equações e de (4) nós obtemos

$$\begin{aligned} d_1 &= y_1 \\ d_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ d_{n-1} &= y_{n-1} \end{aligned} \quad (8)$$

Da última equação em (7), a última equação em (4) e lembrando que  $x_n - x_{n-1} = h$ , nós obtemos

$$a_{n-1}h^3 + b_{n-1}h^2 + c_{n-1}h + d_{n-1} = y_n \quad (9)$$

2.  $S(x)$  é contínua em  $[x_1, x_n]$ .

Como  $S(x)$  é contínua para  $x_1 \leq x \leq x_n$ , segue que em cada ponto  $x_i$  do conjunto  $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$  nós devemos ter

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (10)$$

Caso contrário, os gráficos de  $S_{i-1}(x)$  e  $S_i(x)$  não conectariam para formar uma curva contínua em  $x_i$ . Usando a propriedade de interpolação  $S_i(x_i) = y_i$ , segue de (10) que  $S_{i-1}(x_i) = y_i$ , para  $i = 2, 3, \dots, n-1$ , ou, por (4), que

$$\begin{aligned} a_1h^3 + b_1h^2 + c_1h + d_1 &= y_2 \\ a_2h^3 + b_2h^2 + c_2h + d_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2 + c_{n-2}h + d_{n-2} &= y_{n-1} \end{aligned} \quad (11)$$

3.  $S'(x)$  é contínua em  $[x_1, x_n]$ .

Como  $S'(x)$  é contínua para  $x_1 \leq x \leq x_n$ , segue que

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

ou, por (5), que

$$\begin{aligned} 3a_1h^2 + 2b_1h + c_1 &= c_2 \\ 3a_2h^2 + 2b_2h + c_2 &= c_3 \\ &\vdots \\ 3a_{n-2}h^2 + 2b_{n-2}h + c_{n-2} &= c_{n-1} \end{aligned} \quad (12)$$

4.  $S''(x)$  é contínua em  $[x_1, x_n]$ .

Como  $S''(x)$  é contínua para  $x_1 \leq x \leq x_n$ , segue que

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

ou, por (6), que

$$\begin{aligned} 6a_1h + 2b_1 &= 2b_2 \\ 6a_2h + 2b_2 &= 2b_3 \\ &\vdots \\ 6a_{n-2}h + 2b_{n-2} &= 2b_{n-1} \end{aligned} \quad (13)$$

As equações (8), (9), (11), (12) e (13) constituem um sistema de  $4n - 6$  equações lineares nos  $4n - 4$  coeficientes incógnitos  $a_i, b_i, c_i, d_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Conseqüentemente, nós precisamos de mais duas equações para determinar estes coeficientes de maneira única. Antes de obter estas equações adicionais, contudo, nós podemos simplificar nosso sistema expressando as incógnitas  $a_i, b_i, c_i$  e  $d_i$  em termos das novas quantidades incógnitas

$$M_1 = S''(x_1), M_2 = S''(x_2), \dots, M_n = S''(x_n)$$

e das quantidades conhecidas

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

Por exemplo, de (6) segue que

$$\begin{aligned} M_1 &= 2b_1 \\ M_2 &= 2b_2 \\ &\vdots \\ M_{n-1} &= 2b_{n-1} \end{aligned}$$

de modo que

$$b_1 = \frac{1}{2}M_1, \quad b_2 = \frac{1}{2}M_2, \dots, \quad b_{n-1} = \frac{1}{2}M_{n-1}$$

Além disto, nós já sabemos de (8) que

$$d_1 = y_1, d_2 = y_2, \dots, d_{n-1} = y_{n-1}$$

Nós deixamos como exercício para o leitor deduzir as expressões para os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  em termos de  $M_i$  e  $y_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . O resultado final é o seguinte:

### Teorema 11.5.1 Interpolação Spline Cúbica

Dados  $n$  pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  com  $x_{i+1} - x_i = h$ , para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , a curva spline cúbica

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 \\ \quad + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

que interpola estes pontos tem os coeficientes dados por

$$\begin{aligned} a_i &= (M_{i+1} - M_i)/6h \\ b_i &= M_i/2 \\ c_i &= (y_{i+1} - y_i)/h - [(M_{i+1} + 2M_i)h/6] \\ d_i &= y_i \end{aligned} \quad (14)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , e onde  $M_i = S''(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

A partir deste resultado, nós vemos que as quantidades  $M_1, M_2, \dots, M_n$  determinam de modo único a curva spline cúbica. Para encontrar estas quantidades nós substituímos em (12) as expressões para  $a_i, b_i$  e  $c_i$  dadas em (14). Depois de alguma simplificação algébrica, obtemos

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = 6(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = 6(y_2 - 2y_3 + y_4)/h^2$$

$$\vdots$$

$$M_{n-2} + 4M_{n-1} + M_n = 6(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)/h^2$$

ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Isto é um sistema linear de  $n - 2$  equações nas  $n$  incógnitas  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Assim, nós ainda precisamos de duas equações adicionais para determinar  $M_1, M_2, \dots, M_n$  univocamente. A razão disto é que há uma infinidade de curvas spline cúbicas que interpolam os pontos dados, de modo que simplesmente não temos condições suficientes para determinar uma curva spline cúbica única passando pelos pontos. Em seguida discutimos três possíveis maneiras de especificar as duas condições adicionais requeridas para obter uma curva spline cúbica única pelos pontos. (Os exercícios apresentam mais duas maneiras.) Na Tabela 1 resumimos esta discussão.

**A Spline Natural** As duas condições matematicamente mais simples que nós podemos impor são

$$M_1 = M_n = 0$$

Estas condições, junto com (5), resultam num sistema linear  $n \times n$  para  $M_1, M_2, \dots, M_n$  que pode ser escrito em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para cálculos numéricos é mais conveniente eliminar  $M_1$  e  $M_n$  deste sistema e escrever

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

junto com

$$M_1 = 0 \quad (17)$$

$$M_n = 0 \quad (18)$$

Assim, o sistema linear (16) de tamanho  $(n - 2) \times (n - 2)$  pode ser resolvido nos  $n - 2$  coeficientes  $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$  e  $M_1$  e  $M_n$  são determinados por (17) e (18).

TABELA 1

Spline Natural	A segunda derivada da spline é zero nos extremos. $M_1 = 0$ $M_n = 0$	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$
Spline Parabólica Emendada	A spline reduz a parábolas no primeiro e último intervalos. $M_1 = M_2$ $M_n = M_{n-1}$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$
Spline Cúbica Emendada	A spline é uma única curva cúbica nos dois primeiros e nos dois últimos intervalos. $M_1 = 2M_2 - M_3$ $M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$

Fisicamente, a spline natural resulta quando os extremos do spline para esboço se estendem livremente além dos pontos interpolados sem restrições. As porções livres nos extremos da spline, fora dos pontos interpolados, caem em caminhos retílineos, fazendo com que  $S''(x)$  se anula nos extremos  $x_1$  e  $x_n$  e resultando na condição matemática  $M_1 = M_n = 0$ .

A spline natural tende a achatar a curva interpoladora nos extremos, o que pode ser indesejável. É claro que se for exigido que  $S''(x)$  se anule nos extremos, então a spline natural precisa ser usada.

**A Spline Parabólica Emendada** As duas restrições adicionais impostas para este tipo de spline são

$$M_1 = M_2 \quad (19)$$

$$M_n = M_{n-1} \quad (20)$$

Se nós usamos estas duas equações para eliminar  $M_1$  e  $M_n$  em (15), nós obtemos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

de tamanho  $(n-2) \times (n-2)$  em  $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$ . Uma vez determinados estes  $n-2$  valores, podemos obter  $M_1$  e  $M_n$  de (19) e (20).

A partir de (14), nós vemos que  $M_1 = M_2$  implica que  $a_1 = 0$  e  $M_n = M_{n-1}$  implica que  $a_{n-1} = 0$ . Assim, por (3) não há termos cúbicos na fórmula para a spline nos intervalos extremos  $[x_1, x_2]$  e  $[x_{n-1}, x_n]$ . Portanto, como o nome sugere, a spline parabólica emendada reduz a uma curva parabólica nestes intervalos extremos.

**A Spline Cúbica Emendada** Para este tipo de spline nós impomos as duas condições adicionais

$$M_1 = 2M_2 - M_3 \quad (22)$$

$$M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2} \quad (23)$$

Usando estas duas equações para eliminar  $M_1$  e  $M_n$  em (15), nós obtemos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

de tamanho  $(n-2) \times (n-2)$  em  $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$ . Uma vez resolvido este sistema para  $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$ , nós podemos usar (22) e (23) para determinar  $M_1$  e  $M_n$ .

Reescrevendo (22) como

$$M_2 - M_1 = M_3 - M_2$$

segue de (14) que  $a_1 = a_2$ . Como  $S'''(x) = 6a_1$  em  $[x_1, x_2]$  e  $S'''(x) = 6a_2$  em  $[x_2, x_3]$ , nós vemos que  $S'''(x)$  é constante em todo intervalo  $[x_1, x_3]$ . Consequentemente,  $S(x)$  consiste de uma única curva cúbica no intervalo  $[x_1, x_3]$  ao invés de duas curvas cúbicas diferentes juntadas em  $x_2$ . [Para ver isto, integre  $S'''(x)$  três vezes.] Uma análise similar mostra que  $S(x)$  consiste de uma única curva cúbica nos dois últimos intervalos.

Enquanto a spline natural tende a produzir uma curva interpoladora que é achatada nos extremos, a spline cúbica emendada tem a tendência oposta: produz uma curva com acentuada curvatura nos extremos. Se nenhum destes comportamentos é desejado, a spline parabólica emendada é uma opção razoável.

**EXEMPLO 1 Usando uma Spline Parabólica****Emendada**

É um fato bastante conhecido que a densidade da água atinge um máximo a uma temperatura ligeiramente acima do ponto de congelamento. A Tabela 2 (obtida do livro *Handbook of Chemistry and Physics*, editado em Cleveland, Ohio, EUA, pela Chemical Rubber Publishing Company) dá a densidade da água em gramas por centímetro cúbico para cinco temperaturas igualmente espaçadas no intervalo de  $-10^{\circ}\text{C}$  a  $30^{\circ}\text{C}$ . Nós vamos interpolar estas cinco medidas temperatura-densidade com uma spline parabólica emendada e tentar descobrir a densidade máxima da água neste intervalo encontrando o valor máximo nesta curva spline cúbica. Nos exercícios nós pedimos ao leitor executar contas semelhantes usando uma spline natural e uma spline cúbica emendada para interpolar estes pontos.

**TABELA 2**

Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )	Densidade ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )
-10	0,99815
0	0,99987
10	0,99973
20	0,99823
30	0,99567

Sejam

$$\begin{aligned}x_1 &= -10, & y_1 &= 0,99815 \\x_2 &= 0, & y_2 &= 0,99987 \\x_3 &= 10, & y_3 &= 0,99973 \\x_4 &= 20, & y_4 &= 0,99823 \\x_5 &= 30, & y_5 &= 0,99567\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}6[y_1 - 2y_2 + y_3]/h^2 &= -0,0001116 \\6[y_2 - 2y_3 + y_4]/h^2 &= -0,0000816 \\6[y_3 - 2y_4 + y_5]/h^2 &= -0,0000636\end{aligned}$$

e o sistema linear (21) para a spline parabólica emendada é

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0001116 \\ -0,0000816 \\ -0,0000636 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema, obtemos

$$\begin{aligned}M_2 &= -0,00001973 \\M_3 &= -0,00001293 \\M_4 &= -0,00001013\end{aligned}$$

Usando (19) e (20), obtemos

$$M_1 = M_2 = -0,00001973$$

$$M_5 = M_4 = -0,00001013$$

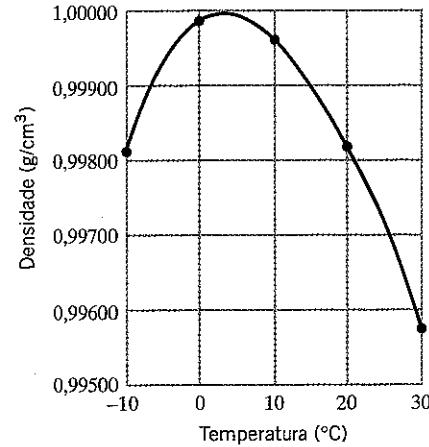
Resolvendo em termos dos coeficientes  $a_i, b_i, c_i, d_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , de (14), obtemos a seguinte expressão para a spline parabólica emendada interpoladora:

$$s(x) = \begin{cases} -0,00000987(x+10)^2 + 0,0002707(x+10) + 0,99815, & -10 \leq x \leq 0 \\ 0,000000113(x-0)^3 - 0,00000987(x-0)^2 + 0,0000733(x-0) + 0,99987, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0,000000047(x-10)^3 - 0,00000647(x-10)^2 + 0,0000900(x-10) + 0,99973, & 10 \leq x \leq 20 \\ -0,00000507(x-20)^2 + 0,0002053(x-20) + 0,99823, & 20 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

Esta spline está esboçada na Figura 11.5.5. A partir desta figura, nós vemos que o máximo é atingido no intervalo  $[0, 10]$ . Para encontrar este máximo, colocamos  $S'(x)$  igual a zero no intervalo  $[0, 10]$ :

$$S'(x) = 0,000000339 x^2 - 0,0000197 x + 0,0000733 = 0$$

com três dígitos significativos, a raiz desta equação quadrática no intervalo  $[0, 10]$  é  $x = 3,99$  e, para este valor de  $x$ , temos  $S(3,99) = 1,00001$ . Assim, de acordo com nossa estimativa interpoladora, a densidade máxima da água é  $1,00001 \text{ g}/\text{cm}^3$  aos  $3,99^{\circ}\text{C}$ . Isto confere com a densidade máxima experimental de  $1,00000 \text{ g}/\text{cm}^3$  aos  $3,98^{\circ}\text{C}$ . (No sistema métrico original, o grama era *definido* como a massa de um centímetro cúbico de água à densidade máxima.)

**Figura 11.5.5**

**Observações Finais** Além de produzir excelentes curvas interpoladoras, splines cúbicas e suas generalizações são úteis para derivação e integração numérica, para a solução numérica de equações diferenciais e integrais e na teoria de otimização.

**Conjunto de Exercícios 11.5**

- Deduza as expressões para os coeficientes  $a_i$  e  $c_i$  nas Equações (14) do Teorema 11.5.1.
- Os seis pontos  $(0,0; 0,00000), (0,2; 0,19867), (0,4; 0,38942), (0,6; 0,56464), (0,8; 0,71736), (1,0; 0,84147)$  estão no gráfico de  $y = \sin x$ , onde  $x$  está em radianos.
- Encontre a curva spline parabólica emendada que interpola estes seis pontos para  $0,4 \leq x \leq 0,6$ . Mantenha uma precisão de cinco casas decimais em suas contas.

- (b) Calcule  $S(0,5)$  para a spline encontrada na parte (a). Qual é a percentagem de erro de  $S(0,5)$  em relação ao valor “exato” de  $\sin(0,5) = 0,47943$ ?
3. Os cinco pontos a seguir  
 $(0, 1), (1, 7), (2, 27), (3, 79), (4, 181)$   
estão em uma única curva cúbica.
- (a) Qual dos três tipos de cúbicas spline (natural, parabólica emendada ou cúbica emendada) coincide exatamente com a única curva cúbica na qual estão os cinco pontos?
- (b) Determine as equações da spline cúbica que você escolheu na parte (a) e verifique que ela é uma única curva cúbica que interpola os cinco pontos.
4. Repita as contas do Exemplo 1 usando uma spline natural para interpolar os cinco pontos dos dados medidos.
5. Repita as contas do Exemplo 1 usando uma spline cúbica emendada para interpolar os cinco pontos dos dados medidos.
6. (*A spline periódica*) Se é sabido ou se é desejado que os  $n$  pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  a serem interpolados estejam num único ciclo de uma curva periódica com período  $x_n - x_1$ , então uma curva spline interpoladora  $S(x)$  deve satisfazer

$$S(x_1) = S(x_n)$$

$$S'(x_1) = S'(x_n)$$

$$S''(x_1) = S''(x_n)$$

- (a) Mostre que estas três condições de periodicidade exigem que

$$y_1 = y_n$$

$$M_1 = M_n$$

$$4M_1 + M_2 + M_{n-1} = 6(y_{n-1} - 2y_1 + y_2)/h^2$$

- (b) Usando as três equações da parte (a) e as Equações (15), construa um sistema linear  $(n-1) \times (n-1)$  em  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  em forma matricial.
7. (*A spline apertada*) Suponha que, além dos  $n$  pontos para serem interpolados, são dados valores específicos  $y'_1$  e  $y'_n$  para as inclinações  $S'(x_1)$  e  $S'(x_n)$  da spline cúbica interpoladora nos pontos extremos  $x_1$  e  $x_n$ .
- (a) Mostre que

$$2M_1 + M_2 = 6(y_2 - y_1 - hy'_1)/h^2$$

$$2M_n + M_{n-1} = 6(y_{n-1} - y_n + hy'_n)/h^2$$

- (b) Usando as equações na parte (a) e as Equações (15), construa um sistema linear  $n \times n$  para  $M_1, M_2, \dots, M_n$  em forma matricial.  
[*Observação.* A spline apertada descrita neste exercício é o tipo mais preciso de spline para trabalhos de interpolação se são conhecidas ou podem ser estimadas as inclinações nos dois extremos.]

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais 11.5

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Na resolução do problema da spline cúbica natural, é preciso resolver um sistema de equações cuja matriz de coeficientes é

$$A_n = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se nós pudermos encontrar uma fórmula para a inversa desta matriz, então a solução do problema da spline cúbica natural poderá ser encontrada facilmente. Neste exercício e no próximo, nós vamos usar um computador para descobrir esta fórmula. Para conseguir isto, determinaremos primeiro uma expressão para o determinante de  $A_n$ , que denotamos pelo símbolo  $D_n$ . Como

$$A_1 = [4] \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

vemos que

$$D_1 = \det(A_1) = \det[4] = 4 \quad \text{e} \quad D_2 = \det(A_2) = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 15$$

- (a) Use a expansão de determinantes em co-fatores para mostrar que

$$D_n = 4D_{n-1} - D_{n-2}$$

para  $n = 3, 4, 5, \dots$ . Isto significa, por exemplo, que

$$D_3 = 4D_2 - D_1 = 4(15) - 4 = 56$$

$$D_4 = 4D_3 - D_2 = 4(56) - 15 = 209$$

e assim por diante. Usando um computador, confira este resultado para  $5 \leq n \leq 10$ .

- (b) Escrevendo

$$D_n = 4D_{n-1} - D_{n-2}$$

e a identidade  $D_{n-1} = D_{n-1}$  em formato matricial, ou seja,

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}$$

mostre que

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- (c) Use os métodos da Seção 7.2 e um computador para mostrar que

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} = \frac{\begin{bmatrix} (2+\sqrt{3})^{n-1} - (2-\sqrt{3})^{n-1} & (2-\sqrt{3})^{n-2} - (2+\sqrt{3})^{n-2} \\ (2+\sqrt{3})^{n-2} - (2-\sqrt{3})^{n-2} & (2-\sqrt{3})^{n-3} - (2+\sqrt{3})^{n-3} \end{bmatrix}}{2\sqrt{3}}$$

e portanto

$$D_n = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$

- (d) Usando um computador, confira este resultado para  $1 \leq n \leq 10$ .

T2. Neste exercício nós determinamos uma fórmula para calcular  $A_n^{-1}$  a partir de  $D_k$  para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , onde definimos  $D_0$  como sendo 1.

- (a) Use um computador para calcular  $A_k^{-1}$  para  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  e 5.

- (b) Usando seu resultado na parte (a), descubra a conjectura que

$$A_n^{-1} = [\alpha_{ij}]$$

onde  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  e

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \left( \frac{D_{n-j} D_{i-1}}{D_n} \right)$$

para  $i \leq j$ .

- (c) Use o resultado da parte (b) para calcular  $A_7^{-1}$  e compare com o resultado obtido usando o computador.

## 11.6 CADEIAS DE MARKOV

Nesta seção descrevemos um modelo geral de um sistema que muda de estado para estado. Em seguida aplicamos o modelo a vários problemas concretos.

**PRÉ-REQUISITOS:** Sistemas Lineares  
Matrizes  
Compreensão Intuitiva de Limites

**Um Processo de Markov** Suponha que um sistema físico ou matemático está sofrendo mudanças tais que a cada momento ele pode ocupar um dentre um número finito de estados. Por exemplo, o tempo em uma certa cidade poderia estar em um dentre três estados possíveis: ensolarado, nublado ou chuvoso; ou então, um indivíduo poderia estar em um dentre quatro estados emocionais possíveis: feliz, triste, irritado ou apreensivo. Suponha que um tal sistema muda com o tempo de um estado para outro e que em instantes pré-determinados observarmos o estado do sistema. Se o estado do sistema em qualquer observação não puder ser predito com certeza, mas se a probabilidade de um certo estado ocorrer puder ser predita unicamente a partir do conhecimento do estado do sistema na

observação imediatamente anterior, então o processo de mudança de um estado para outro é chamado uma *cadeia* ou um *processo de Markov*.

### Definição

Denotemos por  $1, 2, \dots, k$  os  $k$  estados possíveis de uma cadeia de Markov. A probabilidade de o sistema estar no estado  $i$  em qualquer observação se na observação imediatamente precedente estava no estado  $j$ , é denotada por  $p_{ij}$  e é chamada a *probabilidade de transição* do estado  $j$  ao estado  $i$ . A matriz  $P = [p_{ij}]$  é chamada a *matriz de transição* da cadeia de Markov.

Por exemplo, em uma cadeia de Markov de três estados, a matriz de transição tem o formato

#### Estado Precedente

1	2	3
$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$
$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$
$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$

1      Novo Estado  
2      3

Nesta matriz,  $p_{32}$  é a probabilidade que o sistema vai mudar do estado 2 ao estado 3,  $p_{11}$  é a probabilidade que o sistema vai continuar no estado 1 imediatamente depois de ter sido observado no estado 1, e assim por diante.

### EXEMPLO 1 Matriz de Transição da Cadeia de Markov

Uma locadora de automóveis tem três lojas de atendimento, denotadas por 1, 2 e 3. Um cliente pode alugar um carro de qualquer uma das três lojas e devolver o carro para qualquer uma das três lojas. O gerente nota que os clientes costumam devolver os carros de acordo com as seguintes probabilidades:

#### Alugado da Loja

1	2	3
0,8	0,3	0,2
0,1	0,2	0,6
0,1	0,5	0,2

1      Devolvido  
2      à  
3      Loja

Esta matriz é a matriz de transição do sistema se ele for considerado uma cadeia de Markov. A partir desta matriz, a probabilidade que um carro alugado na loja 3 vá ser devolvido na loja 2 é 0,6, a probabilidade que um carro alugado na loja 1 vá ser devolvido na loja 1 é 0,8, e assim por diante.

### EXEMPLO 2 Matriz de Transição da Cadeia de Markov

Conferindo os registros de doações recebidas, a secretaria da associação de ex-alunos de uma universidade norte-americana observa que 80% de seus ex-alunos que contribuem ao fundo da

associação em um certo ano também contribuem no ano seguinte e que 30% dos que não contribuem em um certo ano contribuem no ano seguinte. Isto pode ser visto como uma cadeia de Markov de dois estados: o estado 1 corresponde a um ex-aluno que contribui em um ano qualquer e o estado 2 corresponde a um ex-aluno que não contribui naquele ano. A matriz de transição é

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Nos exemplos acima, as matrizes de transição das cadeias de Markov têm a propriedade que as entradas em qualquer coluna somam 1. Isto não é acidental. Se  $P = [p_{ij}]$  é a matriz de transição de uma cadeia de Markov qualquer de  $k$  estados, então para cada  $j$  nós devemos ter

$$p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{kj} = 1 \quad (1)$$

por que se o sistema está no estado  $j$  em uma observação, é certo que estará em um dos  $k$  estados possíveis na próxima observação.

Uma matriz com a propriedade (1) é chamada *matriz estocástica*, *matriz de probabilidade* ou *matriz de Markov*. Pelo que observamos acima, a matriz de transição de uma cadeia de Markov é sempre uma matriz estocástica.

Em geral não pode ser determinado com certeza o estado de um sistema em uma cadeia de Markov numa observação arbitrária. O melhor que podemos fazer é especificar probabilidades para cada um dos estados possíveis. Por exemplo, nós podemos descrever o estado possível do sistema em uma certa observação em uma cadeia de Markov com três estados, por um vetor-coluna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

no qual  $x_1$  é a probabilidade que o sistema está no estado 1,  $x_2$  é a probabilidade que ele está no estado 2 e  $x_3$  é a probabilidade que ele está no estado 3. Em geral, temos a seguinte definição.

### Definição

O *vetor-estado* de uma observação de uma cadeia de Markov com  $k$  estados é um vetor-coluna  $\mathbf{x}$  cujo  $i$ -ésimo componente  $x_i$  é a probabilidade do sistema estar, naquela observação, no  $i$ -ésimo estado.

Observe que as entradas em qualquer vetor-estado de uma cadeia de Markov são não-negativas e têm soma 1. (Por que?) Um vetor-coluna com esta propriedade é chamado *vetor de probabilidade*.

Suponha, agora, que nós sabemos o vetor-estado  $\mathbf{x}^{(0)}$  de uma cadeia de Markov em alguma observação inicial. O teorema seguinte nos permitirá determinar os vetores-estado

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}, \dots$$

nas observações subsequentes.

**Teorema 11.6.1**

Se  $P$  é a matriz de transição de uma cadeia de Markov e  $\mathbf{x}^{(n)}$  é o vetor-estado na  $n$ -ésima observação, então

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = P\mathbf{x}^{(n)}.$$

A prova deste teorema envolve idéias da teoria de probabilidades e não será dada aqui. Deste teorema segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} &= P\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= P\mathbf{x}^{(1)} = P^2\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= P\mathbf{x}^{(2)} = P^3\mathbf{x}^{(0)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(n)} &= P\mathbf{x}^{(n-1)} = P^n\mathbf{x}^{(0)}\end{aligned}$$

Desta maneira, o vetor-estado inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  e a matriz de transição  $P$  determinam  $\mathbf{x}^{(n)}$  para  $n = 1, 2, \dots$

**EXEMPLO 3 De Novo o Exemplo 2**

A matriz de transição no Exemplo 2 era

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Nós agora iremos construir um registro futuro provável de doações de um novo graduado que não doou no primeiro ano após a formatura. Para um tal graduado, o sistema está, inicialmente, com certeza no estado 2, de modo que o vetor-estado inicial é

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 11.6.1, nós temos, então,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} &= P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= P\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= P\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,525 \\ 0,475 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Assim, depois de três anos, pode-se esperar com probabilidade 0,525 que o ex-aluno irá fazer uma doação. Depois de três anos, obtemos os seguintes vetores-estado (com até três casas decimais):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(4)} &= \begin{bmatrix} 0,563 \\ 0,438 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,581 \\ 0,419 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,591 \\ 0,409 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(7)} = \begin{bmatrix} 0,595 \\ 0,405 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(8)} &= \begin{bmatrix} 0,598 \\ 0,402 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(9)} = \begin{bmatrix} 0,599 \\ 0,401 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(10)} = \begin{bmatrix} 0,599 \\ 0,401 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(11)} = \begin{bmatrix} 0,600 \\ 0,400 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

TABELA 1

$\mathbf{x}^{(n)}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_1^{(n)}$	0	0,300	0,400	0,477	0,511	0,533	0,544	0,550	0,553	0,555	0,556	0,557
$x_2^{(n)}$	1	0,200	0,370	0,252	0,261	0,240	0,238	0,233	0,232	0,231	0,230	0,230
$x_3^{(n)}$	0	0,500	0,230	0,271	0,228	0,227	0,219	0,217	0,215	0,214	0,214	0,213

Para todos  $n$  depois de 11, nós temos

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0,600 \\ 0,400 \end{bmatrix}$$

até três casas decimais. Em outras palavras, os vetores-estado convergem a um vetor fixo à medida que cresce o número de observações. (Adiante, nós discutiremos isto melhor.) ♦

**EXEMPLO 4 De Novo o Exemplo 1**

A matriz de transição no Exemplo 1 era

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Se um carro é inicialmente alugado da loja 2, então o vetor-estado inicial é

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando este vetor e o Teorema 11.6.1 nós obtemos os vetores-estado posteriores listados na Tabela 1. Para todos valores de  $n$  maiores do que 11, todos os vetores-estado são iguais a  $\mathbf{x}^{(11)}$  até três casas decimais.

Duas coisas deveriam ser observadas neste exemplo. Em primeiro lugar, não foi necessário saber por quanto tempo o cliente permaneceu com o carro. Ou seja, num processo de Markov o tempo entre as observações não precisa ser regular. Em segundo lugar, os vetores-estado convergem a um vetor fixo à medida que  $n$  cresce, exatamente como no exemplo anterior. ♦

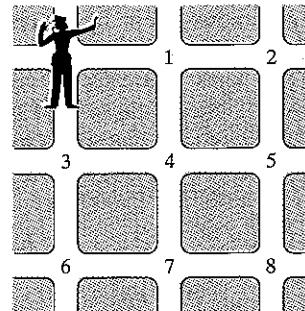


Figura 11.6.1

**EXEMPLO 5 Usando o Teorema 11.6.1**

Uma guarda de transito é designada para controlar o tráfego nos oito cruzamentos indicados na Figura 11.6.1. Ela é instruída a

permanecer em cada cruzamento por uma hora e, em seguida, ou permanecer no mesmo cruzamento ou seguir para um cruzamento adjacente. Para evitar que ela estabeleça um padrão, ela deve escolher o novo cruzamento de maneira aleatória, com qualquer escolha igualmente provável. Por exemplo, se ela está no cruzamento 5, seu próximo cruzamento pode ser 2, 4, 5 ou 8, cada um com probabilidade  $\frac{1}{4}$ . Cada dia ela começa no cruzamento em que parou no dia anterior. A matriz de transição desta cadeia de Markov é

Cruzamento Velho							
1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
0	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

4 Cruzamento Novo
1
2
3
4
5
6
7
8

Se a guarda inicialmente começa no cruzamento 5, suas prováveis localizações, hora a hora, são dadas pelos vetores-estado da Tabela 2.

Para todos valores de  $n$  maiores do que 22, todos os vetores-estado são iguais a  $\mathbf{x}^{(22)}$  até três casas decimais. Assim, como nos dois exemplos anteriores, os vetores-estado convergem a um vetor fixo à medida que  $n$  cresce. ♦

**Comportamento Limite de Vetores-estado** Nos nossos exemplos nós vimos que os vetores-estado convergem a um vetor fixo à medida que o número de observações cresce. Agora nós nos perguntamos se os vetores-estado sempre convergem a um vetor fixo em uma cadeia de Markov. Um exemplo simples mostra que isto não é o caso.

## EXEMPLO 6 O Sistema Oscila entre Dois Estados

Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, como  $P^2 = I$  e  $P^3 = P$ , nós temos

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(4)} = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(5)} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Este sistema oscila indefinidamente entre os dois vetores-estado  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , e portanto não converge a nenhum vetor fixo. ♦

No entanto, impondo uma restrição fraca à matriz de transição, nós podemos mostrar que o sistema se aproxima de um vetor-estado fixo. Esta condição é descrita na próxima definição.

### Definição

Uma matriz de transição é *regular* se uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas.

Assim, para uma matriz de transição regular  $P$ , existe um número inteiro  $m$  tal que todas as entradas de  $P^m$  são positivas. Este é o caso com as matrizes de transição dos Exemplos 1 e 2 com  $m = 1$ . No Exemplo 5, ocorre que  $P^4$  tem todas as entradas positivas. Consequentemente, em todos estes exemplos a matriz de transição é regular.

Uma cadeia de Markov que é governada por uma matriz de transição regular é chamada *cadeia de Markov regular*. Nós veremos que qualquer cadeia de Markov regular possui um vetor-estado fixo  $\mathbf{q}$  tal que, para qualquer escolha  $\mathbf{x}^{(0)}$ , o vetor  $P^n \mathbf{x}^{(0)}$  converge a  $\mathbf{q}$  quando  $n$  aumenta. Este resultado é da maior importância na teoria de cadeias de Markov e é baseado no seguinte teorema.

TABELA 2

$x^{(n)}$	0	1	2	3	4	5	10	15	20	22
$x_1^{(n)}$	0	0,000	0,133	0,116	0,130	0,123	0,113	0,109	0,108	0,107
$x_2^{(n)}$	0	0,250	0,146	0,163	0,140	0,138	0,115	0,109	0,108	0,107
$x_3^{(n)}$	0	0,000	0,050	0,039	0,067	0,073	0,100	0,106	0,107	0,107
$x_4^{(n)}$	0	0,250	0,113	0,187	0,162	0,178	0,178	0,179	0,179	0,179
$x_5^{(n)}$	1	0,250	0,279	0,190	0,190	0,168	0,149	0,144	0,143	0,143
$x_6^{(n)}$	0	0,000	0,000	0,050	0,056	0,074	0,099	0,105	0,107	0,107
$x_7^{(n)}$	0	0,000	0,133	0,104	0,131	0,125	0,138	0,142	0,143	0,143
$x_8^{(n)}$	0	0,250	0,146	0,152	0,124	0,121	0,108	0,107	0,107	0,107

**Teorema 11.6.2****Comportamento de  $P^n$  quando  $n \rightarrow \infty$** 

Se  $P$  é uma matriz de transição regular, então

$$P^n \rightarrow \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , onde os  $q_i$  são números positivos tais que  $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$ .

Nós não iremos provar este teorema aqui. (O leitor interessado pode consultar um texto mais especializado, por exemplo o de J. Kemeny e J. Snell, *Finite Markov Chains*, Nova Iorque: Springer Verlag, 1976.)

Denotemos

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

Assim,  $Q$  é uma matriz de transição com todas colunas iguais ao vetor de probabilidade  $\mathbf{q}$ . Esta matriz  $Q$  tem a seguinte propriedade: se  $\mathbf{x}$  é qualquer vetor de probabilidade, então

$$\begin{aligned} Q\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1x_1 + q_1x_2 + \cdots + q_1x_k \\ q_2x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_2x_k \\ \vdots \\ q_kx_1 + q_kx_2 + \cdots + q_kx_k \end{bmatrix} \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = (1)\mathbf{q} = \mathbf{q} \end{aligned}$$

Isto mostra que  $Q$  transforma qualquer vetor de probabilidade  $\mathbf{x}$  num vetor de probabilidade  $\mathbf{q}$  fixo. Este resultado leva ao teorema seguinte.

**Teorema 11.6.3****Comportamento de  $P^n \mathbf{x}$  quando  $n \rightarrow \infty$** 

Se  $P$  é uma matriz de transição regular e  $\mathbf{x}$  é um vetor de probabilidade qualquer, então

$$P^n \mathbf{x} \rightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , onde  $\mathbf{q}$  é um vetor de probabilidade fixo, independente de  $n$ , cujas entradas são todas positivas.

Este resultado vale pois o Teorema 11.6.2 implica que  $P^n \rightarrow Q$  quando  $n \rightarrow \infty$ , de modo que  $P^n \mathbf{x} \rightarrow Q\mathbf{x} = \mathbf{q}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, para uma cadeia de Markov regular, o sistema sempre acaba convergindo para um vetor-estado  $\mathbf{q}$  fixo. O vetor  $\mathbf{q}$  é

chamado *vetor de estado estacionário* da cadeia de Markov regular.

Geralmente, a técnica mais eficiente de calcular o vetor de estado estacionário  $\mathbf{q}$  de sistemas com muitos estados, é simplesmente calcular  $P^n \mathbf{x}$  para algum  $n$  grande. Nossos exemplos ilustram este procedimento. Cada um é um processo de Markov regular, de modo que é garantida a convergência a um vetor de estado estacionário. Uma outra maneira de calcular o vetor de estado estacionário é utilizar o seguinte teorema.

**Teorema 11.6.4****Vetor de Estado Estacionário**

O vetor de estado estacionário  $\mathbf{q}$  de uma matriz de transição regular  $P$  é o único vetor de probabilidade que satisfaz a equação  $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$ .

Para ver isto, considere a identidade matricial  $PP^n = P^{n+1}$ . Pelo Teorema 11.6.2, ambas  $P^n$  e  $P^{n+1}$  convergem a  $Q$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, temos  $PQ = Q$ . Qualquer uma das colunas desta equação matricial dá  $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$ . Para mostrar que  $\mathbf{q}$  é o único vetor de probabilidade que satisfaz esta equação, suponha que  $\mathbf{r}$  é um outro vetor de probabilidade tal que  $P\mathbf{r} = \mathbf{r}$ . Então também  $P^n \mathbf{r} = \mathbf{r}$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Pelo Teorema 11.6.3, quando  $n \rightarrow \infty$ , resulta  $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ .

O Teorema 11.6.4 também pode ser expresso da seguinte maneira: o sistema linear homogêneo

$$(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

tem um único vetor-solução  $\mathbf{q}$  com entradas não-negativas que satisfazem a condição  $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$ . Nós podemos aplicar esta técnica ao cálculo do vetor de estado estacionário de nossos exemplos.

**EXEMPLO 7 De Novo o Exemplo 2**

No Exemplo 2, matriz de transição era

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema linear  $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$  é

$$\begin{bmatrix} 0,2 & -0,3 \\ -0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Isto leva à única equação independente

$$0,2q_1 - 0,3q_2 = 0$$

ou

$$q_1 = 1,5q_2$$

Assim, colocando  $q_2 = s$ , qualquer solução de (2) é da forma

$$\mathbf{q} = s \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde  $s$  é uma constante arbitrária. Para fazer do vetor  $\mathbf{q}$  um vetor de probabilidade, nós colocamos  $s = 1/(1,5 + 1) = 0,4$ . Consequentemente,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

é o vetor de estado estacionário desta cadeia de Markov regular. Isto significa que, a longo termo, 60% dos ex-alunos vão dar uma doação em algum ano e 40% não. Observe que isto confere com o resultado obtido numericamente no Exemplo 3. ♦

### EXEMPLO 8 De Novo o Exemplo 1

No Exemplo 1, matriz de transição era

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema linear  $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$  é

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 & -0.6 \\ -0.1 & -0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida por linhas da matriz de coeficientes é (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{34}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema linear original é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} q_1 &= \left(\frac{34}{13}\right)q_3 \\ q_2 &= \left(\frac{14}{13}\right)q_3 \end{aligned}$$

Pondo  $q_3 = s$ , qualquer solução do sistema linear é da forma

$$\mathbf{q} = s \begin{bmatrix} \frac{34}{13} \\ \frac{14}{13} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para fazer disto um vetor de probabilidade, colocamos

$$s = \frac{1}{\frac{34}{13} + \frac{14}{13} + 1} = \frac{13}{61}$$

Assim, o vetor de estado estacionário deste sistema é

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{34}{61} \\ \frac{14}{61} \\ \frac{13}{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5573\dots \\ 0.2295\dots \\ 0.2131\dots \end{bmatrix}$$

Isto confere com o resultado obtido numericamente na Tabela 1. As entradas de  $\mathbf{q}$  dão as probabilidades de que, a longo termo, um carro qualquer vá ser devolvido à loja 1, 2 ou 3, respectivamente. Se a locadora de automóveis tem 1000 carros, deveria projetar suas instalações de tal modo a ter pelo menos 558 vagas na loja 1, pelo menos 230 vagas na loja 2 e pelo menos 214 vagas na loja 3. ♦

### EXEMPLO 9 De Novo o Exemplo 5

Nós não vamos dar os detalhes das contas, mas simplesmente afirmar que o único vetor-solução de probabilidade do sistema linear  $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$  é

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{3}{28} \\ \frac{3}{28} \\ \frac{3}{28} \\ \frac{5}{28} \\ \frac{4}{28} \\ \frac{3}{28} \\ \frac{4}{28} \\ \frac{3}{28} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1071\dots \\ 0.1071\dots \\ 0.1071\dots \\ 0.1785\dots \\ 0.1428\dots \\ 0.1071\dots \\ 0.1428\dots \\ 0.1071\dots \end{bmatrix}$$

As entradas deste vetor indicam a proporção de tempo que a guarda de trânsito permanece, a longo termo, em cada cruzamento. Assim, não é adequada a estratégia de movimentação aleatória com probabilidades iguais para cada cruzamento, se o objetivo dela é passar a mesma proporção de tempo em cada cruzamento. (Veja o Exercício 5.) ♦

### Conjunto de Exercícios 11.6

1. Para a matriz de transição  $P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$

(a) calcule  $\mathbf{x}^{(n)}$  para  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , se  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;

(b) enuncie por que  $P$  é regular e encontre seu vetor de estado estacionário.

2. Considere a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$  e  $\mathbf{x}^{(3)}$  até três casas decimais se

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Enuncie por que  $P$  é regular e encontre seu vetor de estado estacionário.

3. Encontre o vetor de estado estacionário das seguintes matrizes de transição regulares:

$$(a) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0,81 & 0,26 \\ 0,19 & 0,74 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

4. Seja  $P$  a matriz de transição

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que  $P$  não é regular.

- (b) Mostre que, quando  $n$  cresce,  $P^n \mathbf{x}^{(0)}$  converge a  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , para qualquer vetor-estado inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

(c) Qual conclusão do Teorema 11.6.3 não é válida para o estado estacionário desta matriz de transição?

5. Verifique que se  $P$  é uma matriz de transição regular  $k \times k$  tal que a soma das entradas de cada linha é 1, então as entradas do vetor de estado estacionário são todas iguais a  $1/k$ .

6. Mostre que a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é regular e use o Exercício 5 para encontrar o vetor de estado estacionário.

7. O João ou está alegre ou está triste. Se ele está alegre num dia, quatro vezes em cinco ele está alegre no dia seguinte. Se ele está triste num dia, uma vez em três ele está triste no dia seguinte. A longo termo, quais são as chances do João estar alegre em um dado dia qualquer?

8. Um país é dividido em três regiões demográficas. Observa-se que, a cada ano, 5% dos moradores da região 1 mudam para a região 2 e 5% mudam para a região 3. Dos moradores da região 2, 15% mudam para a região 1 e 10% mudam para a região 3. Finalmente, dos moradores da região 3, 10% mudam para a região 1 e 5% mudam para a região 2. A longo termo, qual porcentagem da população mora em cada uma das três regiões?

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais 11.6

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Considere a seqüência de matrizes de transição

$$\{P_2, P_3, P_4, \dots\}$$

onde

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

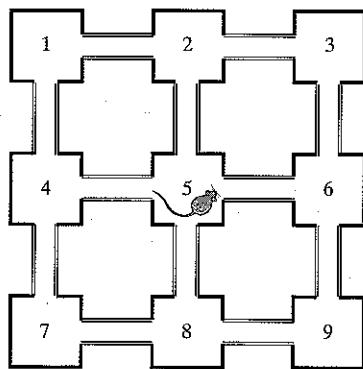
e assim por diante. Use um computador para mostrar que cada uma destas matrizes de transição é regular e determine os vetores de estado

estacionário  $\mathbf{x}_k$  tais que

$$P_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k$$

para  $k = 2, 3, 4, \dots, n$ .

- T2. Um camundongo é colocado numa caixa com nove compartimentos, como mostra a figura dada. Suponha que é igualmente provável que o camundongo passe por qualquer uma das portas do compartimento ou que permanece parado num mesmo compartimento.



**Figura Ex-T2**

- (a) Construa a matriz de transição  $9 \times 9$  para este problema e mostre que é regular.
- (b) Determine o vetor de estado estacionário da matriz.
- (c) Use um argumento de simetria para mostrar que este problema pode ser resolvido usando somente uma matriz  $3 \times 3$ .

## 11.7 TEORIA DE GRAFOS

Nesta seção nós introduzimos representações matriciais das relações entre elementos de um conjunto e usamos aritmética matricial para analisar estas relações.

**PRÉ-REQUISITO:** Adição e Multiplicação de Matrizes

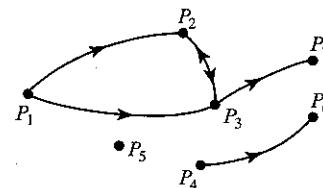
### Relações entre os Membros de um Conjunto

Existem inúmeros exemplos de conjuntos com um número finito de elementos nos quais existe alguma relação entre os elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto poderia consistir de uma coleção de pessoas, animais, países, companhias, equipes esportivas, ou cidades; e a relação entre dois elementos  $A$  e  $B$  de um tal conjunto poderia ser que a pessoa  $A$  domina a pessoa  $B$ , o animal  $A$  alimenta-se do animal  $B$ , o país  $A$  apoia militarmente o país  $B$ , a companhia  $A$  vende seus produtos para a companhia  $B$ , a equipe  $A$  sistematicamente derrota a equipe  $B$ , ou a cidade  $A$  possui um vôo sem escalas para a cidade  $B$ .

Nós veremos agora como a teoria de grafos dirigidos pode ser usada para modelar, matematicamente, relações como as dos exemplos dados.

**Grafos Dirigidos** Um *grafo dirigido* é um conjunto finito de elementos  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  junto com uma coleção finita de pares ordenados  $(P_i, P_j)$  de elementos distintos deste conjunto, sem repetição de pares ordenados. Os elementos do conjunto

são chamados *vértices* e os pares ordenados *arestas dirigidas* do grafo dirigido. Nós usamos a notação  $P_i \rightarrow P_j$  (que lemos “ $P_i$  é conectado a  $P_j$ ”) para indicar que a aresta dirigida  $(P_i, P_j)$  pertence ao grafo dirigido. Geometricamente, nós podemos visualizar um grafo dirigido (Figura 11.7.1) representando os vértices como pontos no plano e representando a aresta dirigida  $P_i \rightarrow P_j$  por um segmento de reta ou de arco, desde o vértice  $P_i$  até o vértice  $P_j$ , com uma seta apontando de  $P_i$  para  $P_j$ . Se ambos  $P_i \rightarrow P_j$  e  $P_j \rightarrow P_i$  valem (que denotamos por  $P_i \leftrightarrow P_j$ ), desenhamos somente um segmento entre  $P_i$  e  $P_j$ , mas com setas apontando em sentidos opostos (como entre  $P_2$  e  $P_3$  na figura).



**Figura 11.7.1**

Como ocorre na Figura 11.7.1, por exemplo, um grafo dirigido pode ter componentes “separados” de vértices, que são conectados somente entre si, bem como também alguns vértices, tal como  $P_5$ , que podem não estar conectados com nenhum outro vértice. Além disto, como  $P_i \rightarrow P_i$  não é permitido num gráfico dirigido, um vértice não pode estar conectado consigo mesmo por um único arco que não passa por nenhum outro vértice.

A Figura 11.7.2 mostra diagramas representando outros três exemplos de grafos dirigidos.

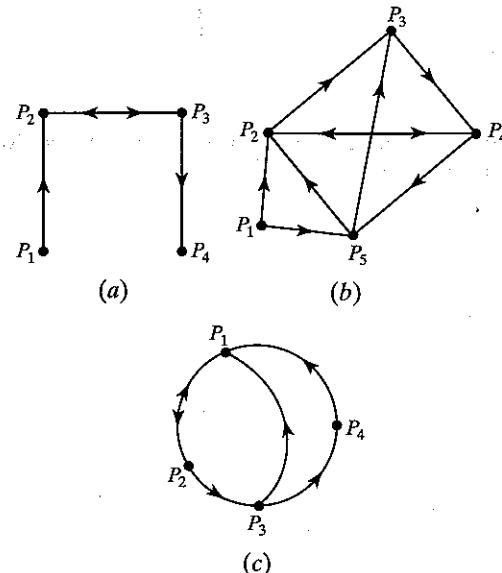


Figura 11.7.2

Dado um grafo dirigido de  $n$  vértices, nós podemos associar ao grafo uma matriz  $M = [m_{ij}]$  de tamanho  $n \times n$ , chamada **matriz de vértices** do grafo dirigido, como segue. Os elementos da matriz são definidos por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } P_i \rightarrow P_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Para os três grafos dirigidos da Figura 11.7.2, as matrizes de vértices correspondentes são

$$\text{Figura 11.7.2a: } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Figura 11.7.2b: } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Figura 11.7.2c: } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por definição, as matrizes de vértices têm as seguintes propriedades:

- (i) Todas entradas são 0 ou 1.
- (ii) Todas entradas na diagonal principal são 0.

Reciprocamente, qualquer matriz com estas propriedades determina um único grafo dirigido cuja matriz de vértices é a matriz dada. Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determina o grafo dirigido da Figura 11.7.3.

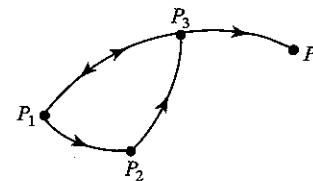


Figura 11.7.3

### EXEMPLO 1 Influências numa Família

Uma certa família consiste de uma mãe, um pai, uma filha e dois filhos. Os membros da família exercem influência, ou poder, sobre os outros membros da família da seguinte maneira: a mãe pode influenciar a filha e o filho mais velho; o pai pode influenciar os dois filhos; a filha pode influenciar o pai; o filho mais velho pode influenciar o filho mais novo; o filho mais novo pode influenciar a mãe.

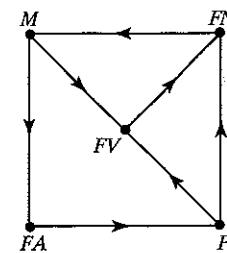


Figura 11.7.4

Nós podemos modelar este padrão de influência familiar com um grafo dirigido cujos vértices são os cinco membros da família. Se o membro da família  $A$  influencia o membro  $B$ , nós escrevemos  $A \rightarrow B$ . A Figura 11.7.4 é o grafo dirigido que resulta, onde usamos as letras  $M$ ,  $P$ ,  $FA$ ,  $FV$  e  $FN$  para denotar a mãe, o pai, a filha, o filho mais velho e o filho mais novo, respectivamente. A matriz de vértices deste grafo dirigido é

$$\begin{array}{ccccc} & M & P & FA & FV & FN \\ M & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ FA & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ FV & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ FN & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

### EXEMPLO 2 Matriz de Vértices: Movimentos de Xadrez

No jogo de xadrez, o movimento do cavalo pelo tabuleiro é num padrão “L.” No tabuleiro da Figura 11.7.5, ele pode mover horizontalmente duas casas e depois verticalmente uma casa ou então ele pode mover verticalmente duas casas e depois horizontalmente uma casa. Assim, a partir da casa central branca do tabuleiro, o cavalo pode mover para qualquer uma das oito casas pretas marcadas com um cavalo na figura. Suponha, agora, que o cavalo está restrito às nove casas numeradas da Figura 11.7.6. Se  $i \rightarrow j$  significa que o cavalo pode mover da casa  $i$  para a casa

*j*, então o grafo dirigido da Figura 11.7.7 ilustra todos os possíveis movimentos que o cavalo pode fazer dentre estas nove casas. Na Figura 11.7.8 nós “desenrolamos” a Figura 11.7.7 para deixar mais claro o padrão de movimentos possíveis.

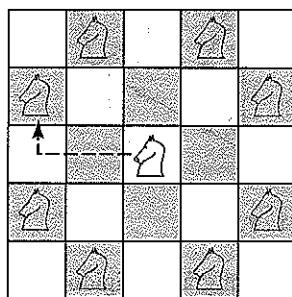


Figura 11.7.5

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 11.7.6

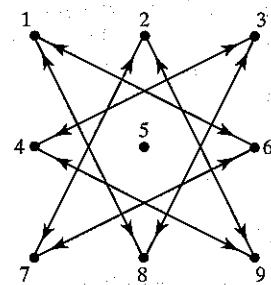


Figura 11.7.7

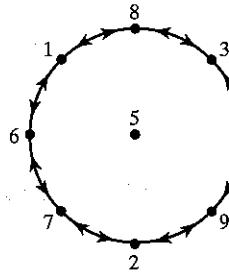


Figura 11.7.8

A matriz de vértices deste grafo dirigido é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No Exemplo 1, o pai não pode influenciar diretamente a mãe; ou seja,  $P \rightarrow M$  não é verdadeiro. Mas o pai pode influenciar o filho mais novo, que pode, então, influenciar a mãe. Nós escrevemos isto  $P \rightarrow FN \rightarrow M$  e chamamos **conexão de 2 passos** de  $P$  para  $M$ . Analogamente, chamamos  $M \rightarrow FA$  de **conexão de 1 passo**,  $FA \rightarrow FV \rightarrow FN \rightarrow M$  de **conexão de 3 passos**, e

assim por diante. Vamos considerar, agora, uma técnica para encontrar o número de todas as conexões de  $r$  passos ( $r = 1, 2, \dots$ ) de um vértice  $P_i$  para um vértice  $P_j$  de um grafo dirigido qualquer. (Isto incluirá o caso em que  $P_i$  e  $P_j$  são o mesmo vértice.) O número de conexões de 1 passo de  $P_i$  para  $P_j$  é simplesmente  $m_{ij}$ . Ou seja, há somente zero ou uma conexão de 1 passo de  $P_i$  para  $P_j$ , dependendo se  $m_{ij}$  é zero ou um. Para o número de conexões de 2 passos, nós consideraremos o quadrado da matriz de vértices. Se  $m_{ij}^{(2)}$  é o  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $M^2$ , nós temos

$$m_{ij}^{(2)} = m_{i1}m_{1j} + m_{i2}m_{2j} + \dots + m_{in}m_{nj} \quad (1)$$

Agora, se  $m_{i1} = m_{1j} = 1$ , existe uma conexão de 2 passos  $P_i \rightarrow P_1 \rightarrow P_j$  de  $P_i$  para  $P_j$ . No entanto, se  $m_{i1}$  ou se  $m_{1j}$  é zero, uma tal conexão de 2 passos não é possível. Assim,  $P_i \rightarrow P_1 \rightarrow P_j$  é uma conexão de 2 passos se, e somente se,  $m_{i1}m_{1j} = 1$ . Similarmente, para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $P_i \rightarrow P_k \rightarrow P_j$  é uma conexão de 2 passos de  $P_i$  para  $P_j$  se, e somente se, o termo  $m_{ik}m_{kj}$  à direita de (1), é igual a um; caso contrário, o termo é zero. Assim, o lado direito de (1) é o número total de conexões de 2 passos de  $P_i$  para  $P_j$ .

Um argumento semelhante funcionará para encontrar o número de conexões de 3, 4, ...,  $n$  passos de  $P_i$  para  $P_j$ . Em geral, nós temos o seguinte resultado.

### Teorema 11.7.1

Seja  $M$  a matriz de vértices de um grafo dirigido e seja  $m_{ij}^{(r)}$  o  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $M^r$ . Então  $m_{ij}^{(r)}$  é igual ao número de conexões de  $r$  passos de  $P_i$  para  $P_j$ .

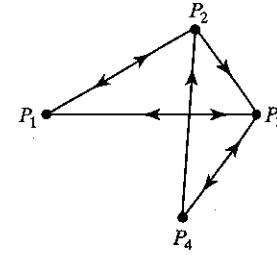


Figura 11.7.9

### EXEMPLO 3 Usando o teorema 11.7.1

A Figura 11.7.9 é o mapa das rotas de uma pequena companhia aérea que atende as quatro cidades  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ . Como grafo dirigido, a matriz de vértices é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nós temos

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Se nós estamos interessados nas conexões da cidade  $P_4$  para a cidade  $P_3$ , podemos usar o Teorema 11.7.1 para encontrar seu número. Como  $m_{43} = 1$ , existe uma conexão de um passo; como  $m_{43}^{(2)} = 1$ , existe uma conexão de 2 passos; e como  $m_{43}^{(3)} = 3$ , existem 3 conexões de 3 passos. Para verificar isto, observamos a Figura 11.7.9 e contamos:

- conexões de 1 passo de  $P_4$  para  $P_3$ :  $P_4 \rightarrow P_3$
- conexões de 2 passos de  $P_4$  para  $P_3$ :  $P_4 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$
- conexões de 3 passos de  $P_4$  para  $P_3$ :  $P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_3$   
 $P_4 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_3$   
 $P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1 \rightarrow P_3$  ♦

**Panelas** Na linguagem do dia-a-dia, uma “panela” é um grupo coeso de pessoas (em geral três ou mais) que tendem a se comunicar entre si e que não têm lugar para pessoas fora do grupo. Na teoria de grafos, damos um sentido mais preciso a este conceito.

### Definição

Um subconjunto de um grafo dirigido é chamado uma *panela* se ele satisfaz as três condições seguintes:

- (i) O subconjunto contém pelo menos três vértices.
- (ii) Para cada par de vértices  $P_i$  e  $P_j$  no subconjunto, ambos  $P_i \rightarrow P_j$  e  $P_j \rightarrow P_i$  são verdadeiros.
- (iii) O subconjunto é tão grande quanto possível; ou seja, não é possível acrescentar mais um vértice ao subconjunto e ainda satisfazer a condição (ii).

Esta definição sugere que as panelas são subconjuntos máximos de elementos que estão em “comunicação perfeita” uns com os outros. Por exemplo, se os vértices representam cidades e  $P_i \rightarrow P_j$  significa que existe um voo direto de  $P_i$  para  $P_j$ , então existem vôos diretos em ambos sentidos entre duas cidades quaisquer de uma panela.

### EXEMPLO 4 Um Grafo Dirigido com Duas Panelas

O grafo dirigido ilustrado na Figura 11.7.10 (que poderia representar o mapa das rotas de uma companhia aérea) tem duas panelas:

$$\{P_1, P_2, P_3, P_4\} \text{ e } \{P_3, P_4, P_6\}$$

Este exemplo mostra que um grafo dirigido pode conter várias panelas e que um vértice pode pertencer simultaneamente a mais de uma panela. ♦

Para grafos dirigidos simples, as panelas podem ser encontradas por inspeção, mas para grafos dirigidos maiores seria desejável ter um procedimento sistemático de detectar panelas. Para este propósito é conveniente definir a matriz  $S = [s_{ij}]$  relacionada ao grafo dirigido como segue:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } P_i \leftrightarrow P_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

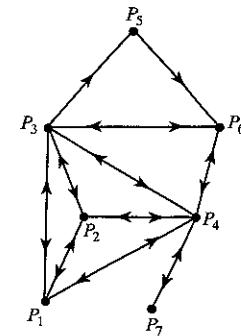


Figura 11.7.10

A matriz  $S$  determina um grafo dirigido que é idêntico ao grafo dirigido dado, exceto que as arestas com somente uma seta foram suprimidas. Por exemplo, se o grafo dirigido original é dado na Figura 11.7.11a, então o grafo dirigido que tem  $S$  como matriz de vértices é dado na Figura 11.7.11b. A matriz  $S$  pode ser obtida da matriz de vértices  $M$  do grafo dirigido original colocando  $s_{ij} = 1$  se  $m_{ij} = m_{ji} = 1$  e  $s_{ij} = 0$ , caso contrário.

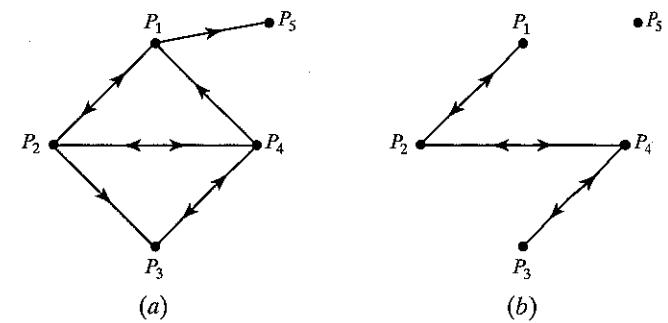


Figura 11.7.11

O teorema seguinte, que utiliza a matriz  $S$ , é útil para identificar panelas.

### Teorema 11.7.2 Identificando Panelas

Seja  $s_{ij}^{(3)}$  o  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $S^3$ . Então um vértice  $P_i$  pertence a uma panela se, e somente se,  $s_{ii}^{(3)} \neq 0$ .

**Prova.** Se  $s_{ii}^{(3)} \neq 0$ , então existe pelo menos uma conexão de 3 passos de  $P_i$  para si mesmo no grafo dirigido modificado determinado por  $S$ , digamos,  $P_i \rightarrow P_j \rightarrow P_k \rightarrow P_i$ . No grafo dirigido modificado, todas as relações dirigidas são bilaterais, de modo que nós também temos as conexões  $P_i \leftrightarrow P_j \leftrightarrow P_k \leftrightarrow P_i$ . No entanto, isto significa que  $\{P_i, P_j, P_k\}$  é ou uma panela ou um subconjunto de uma panela. Em ambos casos,  $P_i$  deve pertencer a alguma panela. A afirmação recíproca, que se  $P_i$  pertence a alguma panela, então  $s_{ii}^{(3)} \neq 0$ , segue de maneira similar. ♦

### EXEMPLO 5 Usando o Teorema 11.7.2

Suponha que um grafo dirigido tem como matriz de vértices

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como todas entradas diagonais de  $S^3$  são zero, segue do Teorema 11.7.2 que o grafo dirigido não possui panelas. ♦

### EXEMPLO 6 Usando o Teorema 11.7.2

Suponha que um grafo dirigido tem como matriz de vértices

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As entradas diagonais não-nulas de  $S^3$  são  $s_{11}^{(3)}$ ,  $s_{22}^{(3)}$  e  $s_{44}^{(3)}$ . Conseqüentemente, neste grafo dirigido,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_4$  pertencem a panelas. Como uma panela deve conter pelo menos três vértices, o grafo dirigido dado tem somente uma panela, a saber,  $\{P_1, P_2, P_4\}$ . ♦

**Grafos Dirigidos por Dominância** Em muitos grupos de indivíduos ou animais, existe uma ordem de dominação bem direcionada entre dois quaisquer de seus membros. Isto é, dados quaisquer dois indivíduos  $A$  e  $B$ , ou  $A$  domina  $B$  ou  $B$  domina  $A$ , mas não ambos. Em termos de grafos dirigidos nos quais  $P_i \rightarrow P_j$  representa que  $P_i$  domina  $P_j$ , isto significa que para todos pares de pontos distintos, ou  $P_i \rightarrow P_j$  ou  $P_j \rightarrow P_i$ , mas não ambos. Em geral, temos a seguinte definição.

#### Definição

Um **grafo dirigido por dominância** é um grafo dirigido tal que, para qualquer par de vértices distintos  $P_i$  e  $P_j$ , ou  $P_i \rightarrow P_j$  ou  $P_j \rightarrow P_i$ , mas não ambos.

Um exemplo de grafo dirigido satisfazendo esta definição é uma divisão de  $n$  equipes esportivas em que cada equipe joga exatamente uma vez com cada uma das outras e em que não são permitidos empates, no estilo de rodadas eliminatórias de um torneio. Se  $P_i \rightarrow P_j$  significa que  $P_i$  derrota  $P_j$ , é fácil ver que a definição de grafo dirigido por dominância está satisfeita. Por

causa deste aspecto, os grafos dirigidos por dominância são, às vezes, chamados **torneios**.

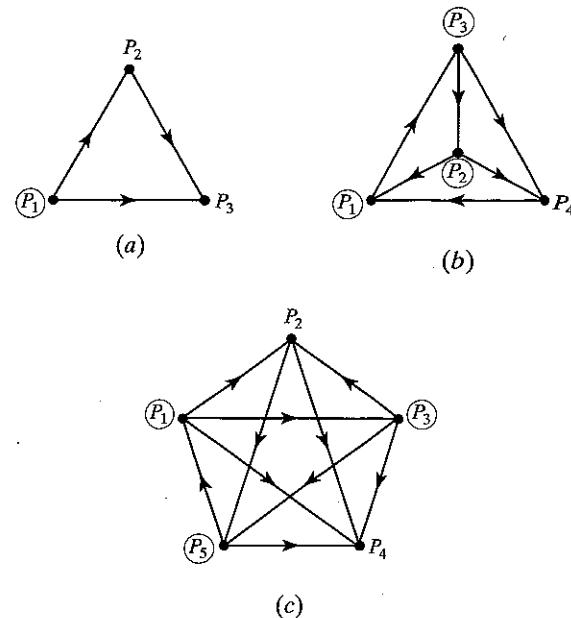


Figura 11.7.12

A Figura 11.7.12 dá alguns grafos dirigidos por dominância com três, quatro e cinco vértices, respectivamente. Nestes três grafos, os vértices circulados têm a seguinte propriedade interessante: de cada um deles, existe uma conexão de 1 ou de 2 passos para cada outro vértice do grafo. Num torneio esportivo, estes vértices correspondem às equipes mais “poderosas” que, ou derrotam uma outra equipe, ou derrotam uma equipe que derrota esta outra equipe. Agora nós podemos enunciar e provar um teorema que garante que qualquer grafo dirigido por dominância tem pelo menos um vértice com esta propriedade.

#### Teorema 11.7.3

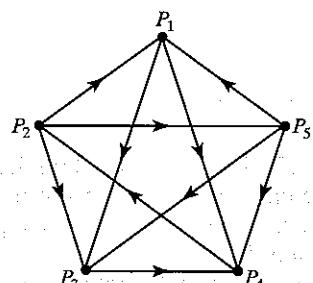
#### Conexões em Grafos Dirigidos por Dominância

Em qualquer grafo dirigido por dominância, existe pelo menos um vértice do qual existem conexões de 1 ou de 2 passos para qualquer outro vértice.

**Prova.** Considere um vértice (pode haver vários) com o maior número total de conexões de 1 e de 2 passos para os outros vértices do grafo. Renumerando, se necessário, os vértices, podemos supor que  $P_1$  é um tal vértice. Suponha que  $P_i$  é um vértice tal que não existem conexões de 1 ou de 2 passos de  $P_1$  para  $P_i$ . Então, em particular,  $P_1 \rightarrow P_i$  não é verdadeiro, de modo que, pela definição de grafo dirigido por dominância,  $P_i \rightarrow P_1$  é verdadeiro. Suponha, agora, que  $P_k$  é um vértice tal que  $P_1 \rightarrow P_k$  é verdadeiro. Então nós não podemos ter  $P_k \rightarrow P_i$  pois, neste caso,  $P_1 \rightarrow P_k \rightarrow P_i$  seria uma conexão de 2 passos de  $P_1$  para  $P_i$ . Assim, necessariamente,  $P_i \rightarrow P_k$  é verdadeiro. Ou seja,  $P_i$  tem uma conexão de 1 passo para todos os vértices para os quais  $P_1$  tem uma conexão de 1 passo. Este vértice  $P_i$  então

também tem uma conexão de 2 passos para todos os vértices para os quais  $P_1$  tem uma conexão de 2 passos. No entanto, temos adicionalmente que  $P_i \rightarrow P_1$  é verdadeiro, de modo que  $P_i$  tem mais conexões de 1 e de 2 passos a outros vértices do grafo do que  $P_1$ . Isto contradiz a maneira pela qual escolhemos  $P_1$ , pelo que concluímos que não existe o tal vértice  $P_i$  para o qual  $P_1$  não possui conexões de 1 e de 2 passos. ■

Esta prova mostra que um vértice com o maior número total de conexões de 1 e de 2 passos para os outros vértices do grafo tem a propriedade enunciada no teorema. Existe uma maneira simples de encontrar tais vértices usando a matriz de vértices  $M$  e seu quadrado  $M^2$ . A soma das entradas na  $i$ -ésima linha de  $M$  é o número total de conexões de 1 passo de  $P_i$  para os outros vértices e a soma das entradas na  $i$ -ésima linha de  $M^2$  é o número total de conexões de 2 passos de  $P_i$  para os outros vértices. Conseqüentemente, a soma das entradas na  $i$ -ésima linha da matriz  $A = M + M^2$  é o número total de conexões de 1 e de 2 passos de  $P_i$  para os outros vértices. Em outras palavras, uma linha de  $A = M + M^2$  com a maior soma de entradas identifica um vértice com a propriedade enunciada no Teorema 11.7.3.



**Figura 11.7.13**

### EXEMPLO 7 Usando o Teorema 11.7.3

Suponha que cinco tenistas jogam exatamente uma vez entre si e que os resultados são indicados no grafo dirigido por dominância da Figura 11.7.13. A matriz de vértices do grafo é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e então

$$A = M + M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A soma das linhas de  $A$  é

soma das entradas da 1<sup>a</sup> linha = 4

soma das entradas da 2<sup>a</sup> linha = 9

soma das entradas da 3<sup>a</sup> linha = 2

soma das entradas da 4<sup>a</sup> linha = 4

soma das entradas da 5<sup>a</sup> linha = 7

Como a segunda linha tem a maior soma de entradas, o vértice  $P_2$  deve ter uma conexão de 1 ou de 2 passos com cada um dos demais vértices. Isto é facilmente confirmado na Figura 11.7.13. ♦

Informalmente, nós sugerimos que um vértice com o maior número de conexões de 1 e de 2 passos para os outros vértices do grafo é um vértice “poderoso.” Podemos formalizar este conceito com a definição seguinte.

#### Definição

O **poder** de um vértice num grafo dirigido por dominância é o número total de suas conexões de 1 e de 2 passos para os outros vértices do grafo. Alternativamente, o poder de um vértice  $P_i$  é a soma das entradas da  $i$ -ésima linha da matriz  $A = M + M^2$ , onde  $M$  é a matriz de vértices do grafo dirigido.

### EXEMPLO 8 De Novo o Exemplo 7

Vamos classificar os cinco tenistas do Exemplo 7 de acordo com seu poder. Pelas contas de soma de entradas naquele exemplo, temos

Poder do tenista  $P_1 = 4$

Poder do tenista  $P_2 = 9$

Poder do tenista  $P_3 = 2$

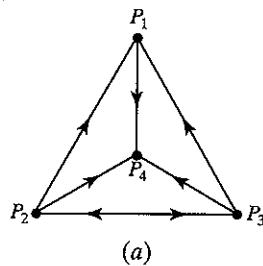
Poder do tenista  $P_4 = 4$

Poder do tenista  $P_5 = 7$

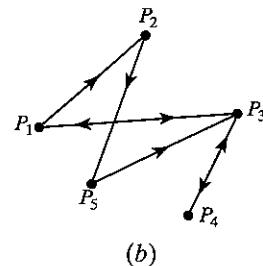
Isto mostra que  $P_2$  (primeiro),  $P_5$  (segundo),  $P_1$  e  $P_4$  (empatados em terceiro),  $P_3$  (último), é uma classificação dos tenistas de acordo com seu poder. ♦

**Conjunto de Exercícios 11.7**

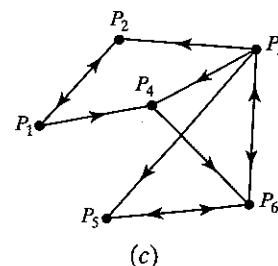
1. Construa a matriz de vértices de cada um dos grafos dirigidos explicitados na figura dada.



(a)



(b)



(c)

**Figura Ex-1**

2. Desenhe um diagrama do grafo dirigido correspondente a cada uma das seguintes matrizes de vértices.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Seja  $M$  a matriz de vértices de um grafo dirigido a seguir:

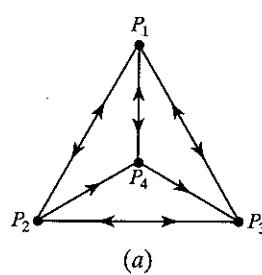
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Desenhe um diagrama do grafo dirigido.

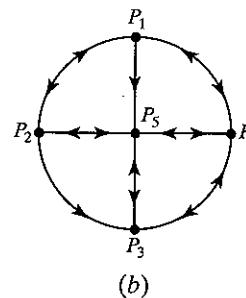
- (b) Use o Teorema 11.7.1 para encontrar o número de conexões de 1, de 2 e de 3 passos do vértice  $P_1$  ao vértice  $P_2$ . Confira sua resposta como no Exemplo 3, listando todas as diversas conexões.

- (c) Repita a parte (b) para as conexões de 1, de 2 e de 3 passos do vértice  $P_1$  ao vértice  $P_4$ .

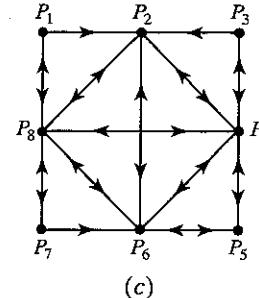
4. Por inspeção, localize todas as panelas em cada um dos grafos dirigidos da figura dada.



(a)



(b)



(c)

**Figura Ex-4**

5. Para cada uma das matrizes de vértices a seguir, use o Teorema 11.7.2 para encontrar todas as panelas nos grafos dirigidos correspondentes.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Construa a matriz de vértices e encontre o poder de cada um dos vértices do grafo dirigido por dominância ilustrado na figura dada.

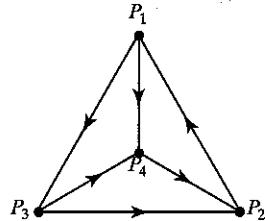


Figura Ex-6

7. Cinco tenistas jogam entre si uma vez com os seguintes resultados:

A derrota B, C e D  
B derrota C e E  
C derrota D e E  
D derrota B  
E derrota A e D

Classifique os cinco tenistas de acordo com o poder dos vértices que lhes correspondem no grafo dirigido por dominância que representa o resultado das partidas.

#### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.7

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Um grafo com  $n$  vértices tais que cada vértice está conectado a cada outro vértice, tem a matriz de vértices dada por

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Neste problema nós desenvolvemos uma fórmula para  $M_n^k$ , cuja  $(i, j)$ -ésima entrada iguala o número de conexões de  $k$  passos de  $P_i$  para  $P_j$ .

- (a) Use um computador para calcular as oito matrizes  $M_n^k$ , para  $n = 2, 3$  e para  $k = 2, 3, 4, 5$ .  
 (b) Use os resultados da parte (a) e argumentos de simetria para mostrar que  $M_n^k$  pode ser escrito como

$$M_n^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \cdots & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \cdots & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \cdots & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \cdots & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \cdots & \beta_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}$$

- (c) Usando o fato que  $M_n^k = M_n M_n^{k-1}$ , mostre que

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & n-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{k-1} \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Usando a parte (c), mostre que

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & n-2 \end{bmatrix}^{k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(e) Use os métodos da Seção 7.2 para calcular

$$\begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & n-2 \end{bmatrix}^{k-1}$$

e com isto obter expressões para  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  e finalmente mostrar que

$$M_n^k = \left( \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} \right) U_n + (-1)^k I_n$$

onde  $U_n$  é a matriz  $n \times n$  com todas entradas 1 e  $I_n$  é a matriz identidade  $n \times n$ .

(f) Mostre que, para  $n > 2$ , todos os vértices destes grafos dirigidos pertencem a panelas.

T2. Considere um torneio eliminatório entre  $n$  jogadores (denotados por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ) no qual  $a_1$  derrota  $a_2$ ,  $a_2$  derrota  $a_3$ ,  $a_3$  derrota  $a_4$ , ...,  $a_{n-1}$  derrota  $a_n$  e  $a_n$  derrota  $a_1$ . Calcule o “poder” de cada jogador, mostrando que eles têm todos o mesmo poder; em seguida determine este poder comum. [Sugestão. Use um computador para estudar os casos  $n = 3, 4, 5, 6$ ; depois estabeleça uma conjectura e prove que sua conjectura é verdadeira.]

## 11.8 JOGOS DE ESTRATÉGIA

Nesta seção nós discutímos um jogo genérico no qual dois oponentes escolhem estratégias distintas para alcançar objetivos opostos. Em alguns casos, a estratégia ótima de cada jogador é encontrada com o uso de técnicas matriciais.

**PRÉ-REQUISITOS:** Multiplicação de Matrizes  
Conceitos Básicos de Probabilidade

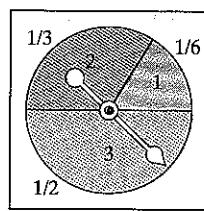
**Teoria de Jogos** Para introduzir os conceitos básicos da teoria de jogos, nós vamos considerar o seguinte jogo, comum em parques de diversões, que duas pessoas concordam em jogar. Nós chamaremos os participantes do jogo de *jogador L* e *jogador C*. Cada jogador tem uma roda estacionária com um ponteiro móvel fixado em seu centro, como mostra a Figura 11.8.1. Por razões que ficarão claras, nós vamos chamar a roda do jogador *L* de *roda das linhas* e a roda do jogador *C* de *roda das colunas*. A roda das linhas é dividida em três setores,

numerados 1, 2 e 3 e a roda das colunas é dividida em quatro setores, numerados 1, 2, 3 e 4. As frações de área ocupadas pelos diversos setores são indicadas na figura. Para dar seu lance, o jogador gira o ponteiro de sua roda, pondo-o em movimento até parar aleatoriamente. O número do setor no qual a roda pára é chamado o *movimento* do jogador. Assim, o jogador *L* tem três movimentos possíveis e o jogador *C* tem quatro movimentos possíveis. Dependendo do movimento feito por cada jogador, o jogador *C* faz um pagamento em dinheiro (em unidades monetárias \$) ao jogador *L* de acordo com a Tabela 1.

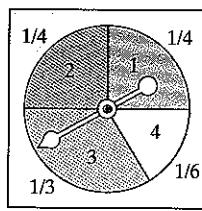
Por exemplo, se o ponteiro da roda das linhas pára no setor 1 (o jogador *L* fez o movimento 1), e o ponteiro da roda das colunas pára no setor 2 (o jogador *C* fez o movimento 2), então o jogador *C* deve pagar \$ 5 ao jogador *L*. Algumas das entradas nesta tabela são negativas, indicando que o jogador *C* faz um pagamento negativo ao jogador *L*. Com isto queremos dizer que o jogador *L* faz um pagamento positivo ao jogador *C*. Por exemplo, se a roda das linhas mostra 2 e a roda das colunas mostra 4, então o jogador *L* paga ao jogador *C* a quantia de \$ 4, pois a entrada correspondente na tabela é - \$ 4. Desta maneira, as entradas positivas na tabela são os ganhos do jogador *L* e as perdas do jogador *C* e as entradas negativas na tabela são os ganhos do jogador *C* e as perdas do jogador *L*.

**TABELA 1**

		Movimento do jogador C			
		1	2	3	4
Movimento do jogador L	1	\$3	\$5	-\$2	-\$1
	2	-\$2	\$4	-\$3	-\$4
	3	\$6	-\$5	\$0	\$3



Roda das linhas do jogador *L*



Roda das colunas do jogador *C*

**Figura 11.8.1**

Neste jogo, os jogadores não têm controle sobre seus movimentos; cada movimento é determinado pela sorte. Contudo, se cada jogador puder decidir se ele quer ou não jogar, então cada um quererá saber quanto pode esperar ganhar ou perder a longo termo, caso decida jogar. (Adiante nesta seção nós vamos discutir esta questão e também considerar a situação mais complicada na qual os jogadores podem exercer algum controle sobre seus movimentos através de variações nos setores de suas rodas.)

### Jogos de Matriz de Duas Pessoas com Soma Zero

**Zero** O jogo descrito acima é um exemplo de um *jogo de matriz de duas pessoas com soma zero*. O termo “soma zero” significa que a cada vez que é jogado, o ganho positivo de um jogador é igual ao ganho negativo (perda) do outro jogador. Ou seja, a soma dos dois ganhos é zero. O termo “jogo de matriz” é utilizado para descrever um jogo de duas pessoas no qual cada jogador tem somente um número finito de movimentos, de modo que todos os possíveis resultados de cada jogada, e os correspondentes ganhos dos jogadores, podem ser arranjados em formato tabular ou matricial, como na Tabela 1.

Em um jogo qualquer deste tipo, seja  $m$  o número de movimentos possíveis do jogador  $L$  e seja  $n$  o número de possíveis movimentos do jogador  $C$ . Num lance deste jogo, cada jogador faz um de seus movimentos possíveis e então é feita uma *compensação* do jogador  $C$  para o jogador  $L$ , dependendo dos movimentos. Para  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ , vamos escrever

$a_{ij}$  = compensação do jogador  $C$  para o jogador  $L$ ,

se o jogador  $L$  faz o movimento  $i$  e o jogador  $C$  faz o movimento  $j$

e o jogador  $C$  faz o movimento  $j$

Esta compensação não precisa ser em dinheiro; ela pode ser qualquer espécie de bem consumível, ao qual podemos associar um valor numérico. Como antes, se uma entrada  $a_{ij}$  é negativa, isto significa que o jogador  $C$  recebe do jogador  $L$  uma compensação de  $|a_{ij}|$ . Nós arranjamos estas  $mn$  compensações possíveis no formato de uma matriz  $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

à qual nos referimos como *matriz de compensação* ou *matriz de pagamento* do jogo.

Cada jogador deve fazer seus movimentos numa base probabilística. Por exemplo, para o jogo discutido na introdução, a razão da área de um setor para a área da roda seria a probabilidade de o jogador fazer o movimento correspondente àquele setor. Assim, pela Figura 11.8.1, vemos que o jogador  $L$  faz o movimento 2 com probabilidade  $\frac{1}{3}$  e o jogador  $C$  faz o movimento 2 com probabilidade  $\frac{1}{4}$ . Em geral, fazemos as seguintes definições:

$p_i$  = probabilidade que o jogador  $L$  faça o movimento  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )

$q_j$  = probabilidade que o jogador  $C$  faça o movimento  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

Segue destas definições que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$$

e

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$$

Com as probabilidades  $p_i$  e  $q_j$  nós formamos dois vetores:

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_m] \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Nós chamamos o vetor-linha  $\mathbf{p}$  a *estratégia do jogador L* e o vetor-coluna  $\mathbf{q}$  a *estratégia do jogador C*. Por exemplo, pela Figura 11.8.1 nós temos

$$\mathbf{p} = \left[ \frac{1}{6} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

para o jogo de parque de diversões descrito acima.

Pela Teoria de Probabilidades, se  $p_i$  é a probabilidade do jogador  $L$  fazer o movimento  $i$  e, independentemente,  $q_j$  é a probabilidade do jogador  $C$  fazer o movimento  $j$ , então  $p_i q_j$  é a probabilidade, em um lance qualquer do jogo, do jogador  $L$  fazer o movimento  $i$  e o jogador  $C$  fazer o movimento  $j$ . A compensação para o jogador  $L$  para um tal par de movimentos é  $a_{ij}$ . Se nós multiplicarmos cada possível compensação pela correspondente probabilidade e somarmos sobre todas as compensações possíveis, nós obtemos a expressão

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + \cdots + a_{1n}p_1q_n + a_{21}p_2q_1 + \cdots + a_{mn}p_mq_n \quad (1)$$

A equação (1) é uma média ponderada das compensações para o jogador  $L$ ; cada compensação é ponderada de acordo com a probabilidade de sua ocorrência. Na Teoria de Probabilidades, esta média ponderada é chamada *compensação esperada* para o jogador  $L$ . Pode ser mostrado que, se o jogo é jogado muitas vezes, a compensação média por jogada para o jogador  $L$ , a longo termo, é dado por esta expressão. Nós denotamos esta compensação esperada por  $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , para enfatizar que depende das estratégias de ambos jogadores. Pela definição da matriz de compensação  $A$  e das estratégias  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , pode ser verificado que nós podemos expressar a compensação esperada em notação matricial como

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{p}A\mathbf{q} \quad (2)$$

Como  $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  é a compensação esperada para o jogador  $L$ , segue que  $-E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  é a compensação esperada para o jogador  $C$ .

### EXEMPLO 1 Compensação Esperada para o Jogador L

Para o jogo de parque de diversões descrito acima, nós temos

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}A\mathbf{q} = \left[ \frac{1}{6} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \right] \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{13}{72} = 0,1805\dots$$

Assim, a longo termo, o jogador  $L$  pode esperar receber uma média de 18 centavos do jogador  $C$  a cada jogada do jogo. ♦

Até aqui nós estivemos discutindo a situação em que cada jogador tem uma estratégia pré-determinada. Agora nós iremos discutir a situação mais difícil em que ambos jogadores podem mudar suas estratégias independentemente. Por exemplo, no jogo descrito na introdução, nós permitiremos a ambos jogadores alterar as áreas dos setores de suas rodas e assim controlar as probabilidades de seus respectivos movimentos. Isto muda qualitativamente a natureza do problema e nos coloca firmemente na verdadeira Teoria de Jogos. Fica entendido que nenhum dos dois jogadores conhece a estratégia que o outro irá escolher. Também supomos que cada jogador vai fazer a melhor escolha possível de estratégia e que o outro jogador sabe disto. Assim, o jogador  $L$  tenta escolher uma estratégia  $p$  tal que  $E(p, q)$  é a maior possível para a melhor estratégia  $q$  que o jogador  $C$  puder escolher; similarmente, o jogador  $C$  tenta escolher uma estratégia  $q$  tal que  $E(p, q)$  é a menor possível para a melhor estratégia  $p$  que o jogador  $L$  puder escolher. Para ver que tais escolhas são realmente possíveis, nós iremos precisar do seguinte teorema, chamado **Teorema Fundamental dos Jogos de Duas Pessoas com Soma Zero**. (A prova geral, que envolve idéias da Teoria de Programação Linear, será omitida. No entanto, mais adiante iremos provar dois casos particulares do teorema.)

### Teorema 11.8.1

#### Teorema Fundamental dos Jogos com Soma Zero

Existem estratégias  $p^*$  e  $q^*$  tais que

$$E(p^*, q) \geq E(p^*, q^*) \geq E(p, q^*) \quad (3)$$

para quaisquer estratégias  $p$  e  $q$ .

As estratégias  $p^*$  e  $q^*$  deste teorema são as melhores estratégias para os jogadores  $L$  e  $C$ , respectivamente. Para ver por que isto vale, escrevemos  $v = E(p^*, q^*)$ . A desigualdade do lado esquerdo da Equação (3) então diz que

$$E(p^*, q) \geq v \text{ para qualquer estratégia } q$$

Isto significa que se o jogador  $L$  escolhe a estratégia  $p^*$  então, não interessa qual estratégia  $q$  o jogador  $C$  escolher, a compensação esperada para o jogador  $L$  nunca será menor do que  $v$ . Além disto, não é possível para o jogador  $L$  alcançar uma compensação esperada maior do que  $v$ . Para ver por que, suponha que existe uma estratégia  $p^{**}$  que o jogador  $L$  pode escolher de tal modo que

$$E(p^{**}, q) > v \text{ para qualquer estratégia } q$$

Então, em particular,

$$E(p^{**}, q^*) > v$$

contradizendo a desigualdade do lado direito da Equação (3), que requer que  $v \geq E(p^{**}, q^*)$ . Consequentemente, o melhor que o jogador  $L$  pode fazer é impedir que a sua compensação esperada caia abaixo do valor  $v$ . De maneira análoga, o melhor que o jogador  $C$  pode fazer é garantir que a sua compensação esperada tenha pelo menos o valor  $v$ , o que pode ser alcançado com a estratégia  $q^*$ .

A partir desta discussão, nós chegamos às seguintes definições.

### Definição

Se  $p^*$  e  $q^*$  são estratégias tais que

$$E(p^*, q) \geq E(p^*, q^*) \geq E(p, q^*) \quad (4)$$

para quaisquer estratégias  $p$  e  $q$ , então

- (i)  $p^*$  é chamada uma *estratégia ótima para o jogador L*;
- (ii)  $q^*$  é chamada uma *estratégia ótima para o jogador C*;
- (iii) a compensação esperada  $v = E(p^*, q^*)$  é chamada *valor do jogo*.

O fraseado nesta definição sugere que as estratégias ótimas não são necessariamente únicas. Isto realmente ocorre e, no Exercício 2, nós pedimos uma prova ao leitor. Contudo, pode ser demonstrado que quaisquer dois pares de estratégias ótimas sempre resultam no mesmo valor  $v$  do jogo. Ou seja, se  $p^*$ ,  $q^*$  e  $p^{**}$ ,  $q^{**}$  são estratégias ótimas, então

$$E(p^*, q^*) = E(p^{**}, q^{**}) \quad (5)$$

O valor de um jogo é, portanto, a compensação esperada para o jogador  $L$  quando ambos jogadores escolhem quaisquer estratégias ótimas.

Para encontrar estratégias ótimas nós devemos encontrar vetores  $p^*$  e  $q^*$  que satisfazem a Equação (4). Geralmente, isto é feito usando técnicas de Programação Linear. A seguir iremos discutir casos especiais nos quais as estratégias ótimas podem ser encontradas usando técnicas mais elementares.

Agora nós introduzimos a seguinte definição.

### Definição

Uma entrada  $a_{rs}$  de uma matriz de compensação  $A$  é chamada um *ponto de sela* se

- (i)  $a_{rs}$  é a menor entrada em sua linha e
- (ii)  $a_{rs}$  é a maior entrada em sua coluna.

Um jogo cuja matriz de compensação tem um ponto de sela é chamado *estritamente determinado*.

Por exemplo, o elemento sombreado em cada uma das seguintes matrizes de compensação é um ponto de sela:

$$\begin{bmatrix} 3 & \blacksquare & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 30 & -50 & -5 \\ 60 & 90 & 75 \\ -10 & 60 & -30 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & -9 \\ 15 & -8 & -2 & 10 \\ 7 & 10 & 6 & 9 \\ 6 & 11 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Se uma matriz tem um ponto de sela  $a_{rs}$ , ocorre que as seguintes estratégias são estratégias ótimas para os dois jogadores:

$$p^* = [0 \ 0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 0], \quad q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow s\text{-ésima entrada}$$

$\nwarrow r\text{-ésima entrada}$

Isso mostra que uma estratégia ótima para o jogador  $L$  é sempre fazer o  $r$ -ésimo movimento e que uma estratégia ótima para o

jogador  $C$  é sempre fazer o  $s$ -ésimo movimento. Estas estratégias em que um só movimento é possível são chamadas *estratégias puras ou simples*. As estratégias nas quais é possível mais de um movimento, são chamadas *estratégias mistas*. Para mostrar que as estratégias acima são ótimas, o leitor pode verificar as três equações a seguir (ver Exercício 6):

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^* A \mathbf{q}^* = a_{rs} \quad (6)$$

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^* A \mathbf{q} \geq a_{rs} \text{ para qualquer estratégia } \mathbf{q} \quad (7)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p} A \mathbf{q}^* \leq a_{rs} \text{ para qualquer estratégia } \mathbf{p} \quad (8)$$

Juntas, estas desigualdades implicam que

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \geq E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)$$

para quaisquer estratégias  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ . Como isto coincide com a Equação (4), segue que  $\mathbf{p}^*$  e  $\mathbf{q}^*$  são estratégias ótimas.

Pela Equação (6), o valor de um jogo estritamente determinado é simplesmente o valor numérico do ponto de sela  $a_{rs}$ . É possível uma matriz de compensação ter vários pontos de sela, mas então a unicidade do valor de um jogo garante que o valor numérico de todos os pontos de sela é o mesmo.

### EXEMPLO 2 Estratégias Ótimas para Maximizar uma Audiência

Duas redes de televisão competidoras,  $L$  e  $C$ , estão planejando levar ao ar programas de uma hora de duração para o mesmo horário. A rede  $L$  pode utilizar um de três programas possíveis e a rede  $C$  pode utilizar um de quatro programas possíveis. Nenhuma das redes sabe qual programa a outra vai levar ao ar. Ambas as redes contratam o mesmo instituto de pesquisa de opinião para lhes dar uma estimativa de como as diversas possibilidades de transmitir os dois programas vão dividir a audiência. O instituto dá às redes a Tabela 2, cuja  $(i, j)$ -ésima entrada é a percentagem da audiência que vai assistir a rede  $L$  se o programa  $i$  da rede  $L$  competir, em termos de audiência, com o programa  $j$  da rede  $C$ . Qual programa cada rede deveria levar ao ar para maximizar a audiência?

TABELA 2 Percentagem de Audiência para a Rede  $L$

		Programa da Rede C			
		1	2	3	4
Programa da Rede L	1	60	20	30	55
	2	50	75	45	60
	3	70	45	35	30

Solução.

Subtraia 50 de cada entrada da tabela acima e construa a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 10 & -30 & -20 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 10 \\ 20 & -5 & -15 & -20 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz de compensação do jogo de duas pessoas com soma zero no qual consideramos que as duas redes de televisão começam com 50% da audiência e em que a  $(i, j)$ -ésima entrada da matriz é a percentagem da audiência que a rede  $C$  perde para a rede  $L$  se os programas  $i$  da rede  $L$  e  $j$  da rede  $C$  competirem entre si. É fácil ver que a entrada

$$a_{23} = -5$$

é um ponto de sela da matriz de compensação. Portanto, a estratégia ótima para a rede  $L$  é levar ao ar o programa 2 e a estratégia ótima para a rede  $C$  é levar ao ar o programa 3. Isto vai resultar em 45% da audiência para a rede  $L$  e 55% da audiência para a rede  $C$ . ♦

**Jogos de Matrizes  $2 \times 2$**  Um outro caso em que podemos encontrar estratégias ótimas por meios elementares ocorre quando cada jogador tem somente dois movimentos possíveis. Neste caso, a matriz de compensação é a matriz  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Se o jogo for estritamente determinado, pelo menos uma das quatro entradas de  $A$  será um ponto de sela e as técnicas discutidas acima poderão então ser aplicadas para determinar as estratégias ótimas para os dois jogadores. Se o jogo não é estritamente determinado, nós primeiro calculamos a compensação esperada para estratégias quaisquer  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} A \mathbf{q} &= [p_1 \ p_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &= a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Como

$$p_1 + p_2 = 1 \text{ e } q_1 + q_2 = 1 \quad (10)$$

nós podemos substituir  $p_2 = 1 - p_1$  e  $q_2 = 1 - q_1$  em (9) para obter

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1(1 - q_1) + a_{21}(1 - p_1)q_1 + a_{22}(1 - p_1)(1 - q_1) \quad (11)$$

Se nós rearranjarmos os termos da Equação (11), podemos escrever

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = [(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})p_1 - (a_{22} - a_{21})]q_1 + (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22} \quad (12)$$

Examinando os coeficientes do termo com  $q_1$  em (12), nós vemos que, colocando

$$p_1 = p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (13)$$

este coeficiente resulta ser zero e (12) reduz-se a

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (14)$$

A Equação (14) é independente de  $\mathbf{q}$ , ou seja, se o jogador  $L$  escolhe a estratégia determinada por (13), o jogador  $C$  não pode modificar a compensação esperada por uma variação de sua estratégia.

De uma maneira similar, pode ser verificado que se o jogador  $C$  escolher a estratégia determinada por

$$q_1 = q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (15)$$

então, substituindo em (12) obteremos

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (16)$$

As Equações (14) e (16) mostram que

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \quad (17)$$

para quaisquer estratégias  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ . Assim, as estratégias determinadas por (13), (15) e (10) são estratégias ótimas para os jogadores  $L$  e  $C$ , respectivamente, e temos o seguinte resultado.

### Teorema 11.8.2

#### Estratégias Ótimas para Jogos de Matrizes $2 \times 2$

Em um jogo  $2 \times 2$  que não é estritamente determinado,

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} & \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}$$

são estratégias ótimas para os jogadores  $L$  e  $C$ . O valor do jogo é

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Para sermos completos, nós precisamos mostrar que as entradas nos vetores  $\mathbf{p}^*$  e  $\mathbf{q}^*$  são números estritamente entre 0 e 1. No Exercício 7 nós pedimos ao leitor mostrar que isto é o caso, pelo menos quando o jogo não é estritamente determinado.

A Equação (17) é interessante pois implica que cada um dos jogadores, escolhendo sua estratégia ótima, pode forçar o valor do jogo ser a compensação esperada, independentemente de qual estratégia o outro jogador escolher. No entanto, isto não é válido em jogos em que cada jogador tem mais de dois movimentos.

### EXEMPLO 3 Usando o Teorema 11.8.2

O governo federal deseja vacinar seus cidadãos contra um certo vírus de gripe. O vírus tem dois sorotipos mas é desconhecida a

proporção na qual os dois sorotipos ocorrem na população do vírus. Foram desenvolvidas duas vacinas. A eficácia da vacina 1 é de 85% contra o sorotipo 1 e de 70% contra o sorotipo 2. A eficácia da vacina 2 é de 60% contra o sorotipo 1 e de 90% contra o sorotipo 2. Qual política de vacinação deveria ser adotada pelo governo?

*Solução.*

Nós podemos considerar este um jogo de duas pessoas no qual o jogador  $L$  (o governo) deseja fazer a compensação (a fração dos cidadãos resistentes ao vírus) o maior possível e o jogador  $C$  (o vírus) deseja fazer a compensação a menor possível. A matriz de compensação é

		Vírus	Sorotipo
		1	2
Vacina	1	0,85 0,70	
	2	0,60 0,90	

Esta matriz não tem pontos de sela, de modo que o Teorema 11.8.2 é aplicável. Conseqüentemente,

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0,90 - 0,60}{0,85 + 0,90 - 0,70 - 0,60} = \frac{0,30}{0,45} = \frac{2}{3}$$

$$p_2^* = 1 - p_1^* = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0,90 - 0,70}{0,85 + 0,90 - 0,70 - 0,60} = \frac{0,20}{0,45} = \frac{4}{9}$$

$$q_2^* = 1 - q_1^* = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{(0,85)(0,90) - (0,70)(0,60)}{0,85 + 0,90 - 0,70 - 0,60} = \frac{0,345}{0,45} = 0,7666\dots$$

Assim, a estratégia ótima para o governo é inocular  $\frac{2}{3}$  dos cidadãos com a vacina 1 e  $\frac{1}{3}$  dos cidadãos com a vacina 2. Isto vai garantir que cerca do 76,7% dos cidadãos resistirá a um ataque do vírus, independentemente da distribuição dos dois sorotipos do vírus.

Observe que uma distribuição de  $\frac{4}{9}$  do sorotipo 1 e de  $\frac{5}{9}$  do sorotipo 2 do vírus resultará nos mesmos 76,7% de cidadãos resistentes, independentemente da política de vacinação adotada pelo governo.

### Conjunto de Exercícios 11.8

- Suponha que um jogo tem uma matriz de compensação

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -4 & 1 \\ 5 & -7 & 3 & 8 \\ -8 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

- Se os jogadores  $L$  e  $C$  usarem as estratégias

$$\mathbf{p} = \left[ \frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

respectivamente, qual será a compensação esperada do jogo?

## 410 • • • Álgebra Linear com Aplicações

- (b) Se o jogador  $C$  mantiver a sua estratégia fixa como na parte (a), qual deveria ser a estratégia escolhida pelo jogador  $L$  para maximizar sua compensação esperada?  
 (c) Se o jogador  $L$  mantiver a sua estratégia fixa como na parte (a), qual deveria ser a estratégia escolhida pelo jogador  $C$  para minimizar a compensação esperada para o jogador  $L$ ?  
 2. Construa um exemplo simples para mostrar que as estratégias ótimas não são necessariamente únicas. Por exemplo, encontre uma matriz de compensação com vários pontos de sela iguais.  
 3. Encontre estratégias ótimas para os dois jogadores e o valor dos jogos estritamente determinados com as matrizes de compensação seguintes.

$$(a) \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & -5 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Encontre estratégias ótimas para os dois jogadores e o valor dos jogos  $2 \times 2$  com as matrizes de compensação seguintes.

$$(a) \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ -10 & 30 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

5. O jogador  $L$  tem duas cartas de baralho: um ás preto e um quatro vermelho. O jogador  $C$  também tem duas cartas: um dois preto e um três vermelho. Cada jogador seleciona, secretamente, uma de suas cartas. Se ambas cartas selecionadas são de mesma cor, o jogador  $C$  paga ao jogador  $L$  a soma dos valores numéricos das cartas em dinheiro. Se as cartas são de cores diferentes, o jogador  $L$  paga ao jogador  $C$  a soma dos valores numéricos das cartas. Quais são as estratégias ótimas para os dois jogadores e qual é o valor do jogo?  
 6. Verifique as Equações (6), (7) e (8).  
 7. Mostre que as entradas das estratégias ótimas  $\mathbf{p}^*$  e  $\mathbf{q}^*$  dadas no Teorema 11.8.2 são números estritamente entre 0 e 1.

### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.8

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Considere um jogo entre dois jogadores, no qual cada jogador pode fazer até  $n$  movimentos diferentes ( $n > 1$ ). Se o  $i$ -ésimo movimento do jogador  $L$  e o  $j$ -ésimo movimento do jogador  $C$  são tais que  $i + j$  é par, então  $C$  paga a  $L$  a quantia de \$. 1. Se  $i + j$  é ímpar, então  $L$  paga a  $C$  a quantia de \$. 1. Suponha que ambos jogadores têm a mesma estratégia, ou seja,  $\mathbf{p}_n = [\rho_i]_{1 \times n}$  e  $\mathbf{q}_n = [\rho_j]_{n \times 1}$ , onde  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_n = 1$ . Use um computador para mostrar que

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) &= (\rho_1 - \rho_2)^2 \\ E(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3) &= (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3)^2 \\ E(\mathbf{p}_4, \mathbf{q}_4) &= (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4)^2 \\ E(\mathbf{p}_5, \mathbf{q}_5) &= (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 + \rho_5)^2 \end{aligned}$$

Use estes métodos para provar que, em geral, a compensação esperada para o jogador  $L$  é

$$E(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n) = \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \rho_j \right)^2 \geq 0$$

o que mostra que, a longo termo, o jogador  $L$  não vai perder este jogo.

- T2. Considere um jogo entre dois jogadores, no qual cada jogador pode fazer até  $n$  movimentos diferentes ( $n > 1$ ). Se ambos os jogadores fizerem o mesmo movimento, então  $C$  pagará a  $L$  a quantia de \$(n - 1). No entanto, se os dois jogadores fizerem movimentos distintos, então  $L$  pagará a  $C$  a quantia de \$. 1. Suponha que ambos jogadores têm a mesma estratégia, ou seja,  $\mathbf{p}_n = [\rho_i]_{1 \times n}$  e  $\mathbf{q}_n = [\rho_j]_{n \times 1}$ , onde  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_n = 1$ . Use um computador para mostrar que

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) &= \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)^2 + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_2)^2 \\
 E(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3) &= \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)^2 + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_3)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_2)^2 + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_3)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_2)^2 + \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_3)^2 \\
 E(\mathbf{p}_4, \mathbf{q}_4) &= \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)^2 + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_3)^2 + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_4)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_2)^2 + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_3)^2 + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_4)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_2)^2 + \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_3)^2 + \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_4)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\rho_4 - \rho_1)^2 + \frac{1}{2}(\rho_4 - \rho_2)^2 + \frac{1}{2}(\rho_4 - \rho_3)^2 + \frac{1}{2}(\rho_4 - \rho_4)^2
 \end{aligned}$$

Usando estes resultados como um guia, prove que, em geral, a compensação esperada para o jogador  $L$  é

$$E(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\rho_i - \rho_j)^2 \geq 0$$

o que mostra que, a longo termo, o jogador  $L$  não vai perder este jogo.

## 11.9 MODELOS ECONÔMICOS DE LEONTIEF

Nesta seção nós discutimos dois modelos lineares para sistemas econômicos e aplicamos alguns resultados sobre matrizes com entradas não-negativas para determinar as estruturas de preços de equilíbrio e a produção necessária para satisfazer a demanda.

**PRÉ-REQUISITOS:** Sistemas Lineares  
Matrizes

**Sistemas Econômicos** A teoria das matrizes tem tido muito sucesso na descrição da inter-relação de preços, produção e demanda em sistemas econômicos. Nesta seção nós vamos discutir alguns modelos simples baseados nas idéias do economista russo Wassily Leontief, prêmio Nobel de Economia de 1973. Nós examinamos dois modelos diferentes mas relacionados: o modelo fechado, ou modelo input-output, e o modelo aberto, ou modelo de produção. Em cada um, são dados certos parâmetros que descrevem as inter-relações entre as "indústrias" do modelo econômico sob consideração. Usando teoria de matrizes, nós podemos, então, calcular certos parâmetros adicionais, tais como os preços e níveis de produção, para satisfazer um objetivo econômico desejado. Nós começamos com o modelo fechado.

**O Modelo Fechado (de Input-Output) de Leontief** Primeiro nós apresentamos um exemplo simples, depois prosseguimos para a teoria geral do modelo.

### EXEMPLO 1 Um Modelo de Input-Output

Três proprietários de casas—um pedreiro, um eletricista e um hidráulico—pretendem fazer consertos em suas três casas. Eles concordam trabalhar um total de 10 dias cada de acordo com a seguinte tabela:

	Trabalho executado pelo		
	Pedreiro	Eletricista	Hidráulico
Dias de Trabalho na Casa do Pedreiro	2	1	6
Dias de Trabalho na Casa do Eletricista	4	5	1
Dias de Trabalho na Casa do Hidráulico	4	4	3

Para efeitos de impostos, eles devem declarar e pagar um ao outro um salário diário razoável, mesmo para o trabalho que cada um faz em sua própria casa. Seus salários diários normais são cerca de R\$ 100, mas eles concordam em ajustar seus respectivos salários diários de tal modo que saiam empatados, ou seja, de tal modo que o total pago por cada um é igual ao total recebido. Nós podemos colocar

$$p_1 = \text{salário diário do pedreiro}$$

$$p_2 = \text{salário diário do eletricista}$$

$$p_3 = \text{salário diário do hidráulico}$$

Para satisfazer a condição de "equilíbrio" de que saiam empatados, nós exigimos que

$$\text{total dos gastos} = \text{total do recebido}$$

para cada um dos proprietários pelo período de dez dias. Por exemplo, o pedreiro paga um total de  $2p_1 + p_2 + 6p_3$  pelos con-

sertos em sua própria casa e recebe um total de  $10p_1$  pelos consertos que faz nas três casas. Igualando estas expressões nos dá a primeira das três equações seguintes:

$$\begin{aligned} 2p_1 + p_2 + 6p_3 &= 10p_1 \\ 4p_1 + 5p_2 + p_3 &= 10p_2 \\ 4p_1 + 4p_2 + 3p_3 &= 10p_3 \end{aligned}$$

As duas outras equações são as equações de equilíbrio para o eletricista e o hidráulico. Dividindo estas equações por 10 e reescrevendo-as em formato matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Subtraindo o lado esquerdo do direito, podemos reescrever a Equação (1) como um sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema homogêneo é (verifique)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

onde  $s$  é uma constante arbitrária. Esta constante é um fator de escala, que os proprietários podem escolher de acordo com sua conveniência. Por exemplo, eles podem colocar  $s = 3$ , de modo que os correspondentes salários diárias, a saber, R\$ 93, R\$ 96 e R\$ 108, são aproximadamente R\$ 100. ♦

Este exemplo ilustra as principais características do modelo de input-output de Leontief. Na fundamental Equação (1), a soma de cada coluna da matriz de coeficientes é 1, correspondendo ao fato que o produto (o “output”) do trabalho de cada um dos proprietários, está completamente distribuído entre estes mesmos proprietários nas proporções dadas pelas entradas da coluna. Nosso problema é o de determinar “preços” para estes trabalhos de tal modo a colocar este sistema em equilíbrio, ou seja, de tal modo que o gasto total de cada proprietário é igual ao total recebido em salário.

No modelo geral, nós temos um sistema econômico consistindo de um número finito de “indústrias,” que ordenamos pelos números  $1, 2, 3, \dots, k$ . Ao longo de algum período fixo de tempo, cada indústria produz um produto, que pode ser algum bem ou serviço, que é completamente utilizado de uma maneira predeterminada pelas  $k$  indústrias. Um problema importante é encontrar “preços” convenientes que devem ser cobrados por estes  $k$  produtos de tal maneira que, para cada indústria, o total dos gastos iguala o total recebido. Uma tal estrutura de preços representa uma posição de equilíbrio para a economia.

Para o período fixado de tempo dado, vamos escrever

$p_i$  = preço cobrado pela  $i$ -ésima indústria pela sua produção total

$e_{ij}$  = fração da produção total da  $j$ -ésima indústria que é comprada pela  $i$ -ésima indústria

para  $i, j = 1, 2, 3, \dots, k$ . Por definição, nós temos

- (i)  $p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$
- (ii)  $e_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, k$
- (iii)  $e_{1j} + e_{2j} + \dots + e_{kj} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, k$

Com estas quantidades, nós formamos o **vetor-preço**

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$$

e a **matriz de troca** ou a **matriz de input-output**

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix}$$

A condição (iii) expressa o fato que todas as somas de colunas da matriz de troca são 1.

Como no exemplo, para que os gastos das indústrias igualem seus rendimentos, a seguinte equação matricial deve ser satisfeita [veja (1)]:

$$E\mathbf{p} = \mathbf{p} \quad (2)$$

ou

$$(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3)$$

A Equação (3) é um sistema linear homogêneo para o vetor-preço  $\mathbf{p}$ . Este sistema tem uma solução não-trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes  $I - E$  é zero. No Exercício 6 nós pedimos ao leitor mostrar que este é o caso para qualquer matriz de troca. Assim, (3) sempre tem soluções não-triviais para o vetor-preço  $\mathbf{p}$ .

Na realidade, para o nosso sistema econômico fazer sentido, nós precisamos mais do que simplesmente o fato de (3) possuir soluções não-triviais para  $\mathbf{p}$ . Nós também precisamos que os preços  $p_i$  dos  $k$  produtos sejam números não-negativos. Esta condição nós expressamos por  $\mathbf{p} \geq 0$ . (Em geral, se  $A$  é qualquer vetor ou matriz, a notação  $A \geq 0$  significa que cada entrada de  $A$  é não-negativa e a notação  $A > 0$  significa que cada entrada de  $A$  é positiva. De maneira análoga,  $A \geq B$  significa  $A - B \geq 0$  e  $A > B$  significa  $A - B > 0$ .) Mostrar que (3) tem uma solução não-trivial para a qual  $\mathbf{p} \geq 0$  é um pouco mais difícil do que simplesmente mostrar que existem soluções não-triviais. No entanto isto é válido, e no próximo teorema enunciamos este fato sem dar a prova.

### Teorema 11.9.1

*Se  $E$  é uma matriz de troca, então  $E\mathbf{p} = \mathbf{p}$  sempre tem uma solução não trivial  $\mathbf{p}$  cujas entradas são não-negativas.*

Vamos considerar alguns exemplos elementares deste teorema.

### EXEMPLO 2 Usando o Teorema 11.9.1

Seja

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Então  $(I - E) \mathbf{p} = \mathbf{0}$  é

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem a solução geral

$$\mathbf{p} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde  $s$  é uma constante arbitrária. Para qualquer  $s > 0$ , nós temos uma solução não-trivial  $\mathbf{p} \geq 0$ .

### EXEMPLO 3 Usando o Teorema 11.9.1

Seja

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então  $(I - E) \mathbf{p} = \mathbf{0}$  tem a solução geral

$$\mathbf{p} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde  $s$  e  $t$  são constantes arbitrárias independentes. Para quaisquer  $s \geq 0$  e  $t \geq 0$ , não ambos nulos, nós temos soluções não-triviais  $\mathbf{p} \geq 0$ .

O Exemplo 2 indica que em algumas situações um dos preços precisa ser zero para a condição de equilíbrio ser satisfeita. O Exemplo 3 indica que pode haver disponíveis várias estruturas de preço linearmente independentes. Nenhuma destas situações descreve uma estrutura econômica realmente interdependente. O teorema a seguir dá condições suficientes para excluir ambos os casos.

#### Teorema 11.9.2

Seja  $E$  uma matriz de troca tal que todas as entradas de  $E^m$  são positivas, para algum inteiro positivo  $m$ . Então existe exatamente uma solução linearmente independente de  $(I - E) \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , e ela pode ser escolhida com todas suas entradas positivas.

Nós não iremos dar uma prova deste teorema. O leitor que leu a Seção 11.6 sobre cadeias de Markov pode observar que este teorema é, essencialmente, o mesmo que o Teorema 11.6.4. O que aqui são matrizes de troca, na Seção 11.6 são matrizes estocásticas, ou de Markov.

### EXEMPLO 4 Usando o Teorema 11.9.2

A matriz de troca do Exemplo 1 era

$$E = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Como  $E > 0$ , a condição  $E^m > 0$  do Teorema 11.9.2 é satisfeita com  $m = 1$ . Consequentemente, é garantido que existe exatamente uma solução linearmente independente de  $(I - E) \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , e ela pode ser escolhida tal que  $\mathbf{p} > 0$ . Naquele exemplo, nós verificamos que

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

é tal solução.

**O Modelo Aberto [de Produção] de Leontief** Ao contrário do modelo fechado, no qual os produtos de  $k$  indústrias são somente distribuídos entre as próprias indústrias, o modelo aberto tenta satisfazer uma demanda externa para os produtos. Uma porção desta produção ainda pode ser distribuída entre as próprias indústrias, para mantê-las operacionais, mas deve haver algum excesso, alguma produção líquida, com a qual satisfazer a demanda externa. No modelo fechado, a produção das indústrias é fixada e nosso objetivo é determinar seu preço de modo que seja satisfeita a condição de equilíbrio, que gastos igualam ganhos. No modelo aberto são os preços que são fixados e nosso objetivo é determinar os níveis de produção das indústrias necessários para satisfazer a demanda externa. Nós vamos medir os níveis de produção em termos dos seus valores econômicos usando os preços fixos. Mais precisamente, para algum período fixado de tempo, vamos escrever

$x_i$  = valor monetário da produção total da  $i$ -ésima indústria

$d_i$  = valor monetário da produção da  $i$ -ésima indústria necessária para satisfazer a demanda externa

$c_{ij}$  = valor monetário da produção da  $i$ -ésima indústria que é necessária para a  $j$ -ésima indústria produzir uma unidade do valor monetário de seu próprio produto

Com estas quantidades, nós definimos o vetor-produção

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

o vetor-demanda

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$$

e a matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

Pela sua própria natureza, temos

$$\mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{d} \geq 0 \quad \text{e} \quad C \geq 0$$

A partir da definição de  $c_{ij}$  e de  $x_j$  pode ser visto que a quantidade

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{ik}x_k$$

é o valor da produção da  $i$ -ésima indústria que é necessária para todas as  $k$  indústrias produzir um total especificado pelo vetor de produção  $\mathbf{x}$ . Como esta quantidade é simplesmente a  $i$ -ésima entrada do vetor-coluna  $C \mathbf{x}$ , nós podemos dizer, além disto, que a  $i$ -ésima entrada do vetor-coluna

$$\mathbf{x} - C \mathbf{x}$$

é o valor do excesso de produção da  $i$ -ésima indústria que está disponível para satisfazer a demanda externa. O valor da demanda externa pelo produto da  $i$ -ésima indústria é a  $i$ -ésima entrada do vetor-demanda  $\mathbf{d}$ . Conseqüentemente, somos levados à seguinte equação

$$\mathbf{x} - C \mathbf{x} = \mathbf{d}$$

ou

$$(I - C) \mathbf{x} = \mathbf{d} \quad (4)$$

para a demanda ser satisfeita exatamente, sem sobras nem faltas. Assim, dados  $C$  e  $\mathbf{d}$ , nosso objetivo é encontrar um vetor-produção  $\mathbf{x} \geq 0$  que satisfaz a Equação (4).

### EXEMPLO 5 Vectors-Produção para uma Cidade

Uma certa cidade tem três indústrias principais: uma mina de carvão, uma usina elétrica e uma rede ferroviária local. Para produzir R\$ 1 de carvão, a mina precisa comprar R\$ 0,25 de eletricidade para seu equipamento e R\$ 0,25 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para produzir R\$ 1 de eletricidade, a usina requer R\$ 0,65 de carvão para combustível, R\$ 0,05 de sua própria eletricidade para equipamento auxiliar e R\$ 0,05 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para fornecer R\$ 1 de transporte, a rede ferroviária precisa de R\$ 0,55 de carvão para combustível e R\$ 0,10 de eletricidade para seu equipamento auxiliar. Numa certa semana, a mina recebe pedidos de R\$ 50.000 de carvão de fora da cidade e a usina recebe pedidos de R\$ 25.000 de eletricidade de fora da cidade. Não há demanda externa para a ferrovia. Quanto cada uma destas três indústrias deve produzir naquela semana para atender exatamente suas próprias demandas e a demanda externa?

*Solução.*

Para o período de uma semana em questão, sejam

$x_1$  = valor da produção total da mina

$x_2$  = valor da produção total da usina

$x_3$  = valor da produção total da ferrovia

Pela informação fornecida, a matriz de consumo do sistema é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema linear  $(I - C) \mathbf{x} = \mathbf{d}$  é, então,

$$\begin{bmatrix} 1,00 & -0,65 & -0,55 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 \\ -0,25 & -0,05 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes da esquerda é invertível e a solução é dada por

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1} \mathbf{d} = \frac{1}{503} \begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102.087 \\ 56.163 \\ 28.330 \end{bmatrix}$$

Assim, a produção total da mina deveria ser R\$ 102.087, a produção total da usina deveria ser R\$ 56.163 e a produção total da ferrovia deveria ser R\$ 28.330.

Vamos reconsiderar a Equação (4):

$$(I - C) \mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Se a matriz quadrada  $I - C$  for invertível, nós poderemos escrever

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1} \mathbf{d} \quad (5)$$

Além disto, se a matriz  $(I - C)^{-1}$  tiver somente entradas não-negativas, então teremos certeza que a Equação (5) terá uma única solução não-negativa  $\mathbf{x}$ , para qualquer  $\mathbf{d} \geq 0$ . Esta é uma situação particularmente desejável, por significar que qualquer demanda externa pode ser satisfeita. A terminologia utilizada para descrever este caso é dada na definição seguinte.

### Definição

Uma matriz de consumo  $C$  é produtiva se  $(I - C)^{-1}$  existe e  $(I - C)^{-1} \geq 0$

Vamos, agora, considerar alguns critérios simples que garantem que uma matriz de consumo é produtiva. O primeiro é dado no teorema seguinte.

### Teorema 11.9.3 Matriz de Consumo Produtiva

Uma matriz de consumo  $C$  é produtiva se, e somente se, existe um vetor-produção  $\mathbf{x} \geq 0$  tal que  $\mathbf{x} > C \mathbf{x}$ .

(A prova está delineada no Exercício 8.) A condição  $\mathbf{x} > C \mathbf{x}$  significa que existe uma tabela de produção tal que cada indústria produz mais do que consome.

O Teorema 11.9.3 tem dois corolários interessantes. Suponha que todas as somas das entradas de linhas de  $C$  são menores do que 1. Se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

então  $C \mathbf{x}$  é um vetor-coluna cujas entradas são estas somas de linhas. Isto significa que  $\mathbf{x} > C \mathbf{x}$  e portanto a condição do teorema está satisfeita. Assim, chegamos ao seguinte corolário.

### Corolário 11.9.4

Uma matriz de consumo  $C$  é produtiva se cada soma das entradas das linhas de  $C$  é menor do que 1.

No Exercício 7 pedimos ao leitor que mostre que este corolário leva ao seguinte:

### Corolário 11.9.5

*Uma matriz de consumo C é produtiva se cada soma das entradas das colunas de C é menor do que 1.*

Lembrando da definição das entradas da matriz de consumo  $C$ , nós vemos que a  $j$ -ésima soma das entradas de colunas de  $C$  é o valor total da produção de todas as  $k$  indústrias que é necessária para produzir uma unidade de valor do produto da  $j$ -ésima indústria. A  $j$ -ésima indústria, portanto, é dita lucrativa se esta  $j$ -ésima soma de coluna é menor do que 1. Em outras palavras,

o Corolário 11.9.5 diz que uma matriz de consumo é produtiva se todas as  $k$  indústrias do sistema econômico são lucrativas.

### EXEMPLO 6 Usando o Corolário 11.9.5

A matriz de consumo do Exemplo 5 era

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}$$

As três somas de colunas desta matriz são todas menores do que 1 e portanto as três indústrias são lucrativas. Consequentemente, pelo Corolário 11.9.5, a matriz de consumo  $C$  é produtiva. Isto também pode ser visto pelas contas do Exemplo 5, já que  $(I - C)^{-1}$  é não-negativa. ♦

### Conjunto de Exercícios 11.9

1. Para as seguintes matrizes de troca, encontre vetores-preço não-negativos que satisfazem a condição de equilíbrio (3).

$$(a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0,35 & 0,50 & 0,30 \\ 0,25 & 0,20 & 0,30 \\ 0,40 & 0,30 & 0,40 \end{bmatrix}$$

2. Usando o Teorema 11.9.3 e seus corolários, mostre que cada uma das seguintes matrizes de consumo é produtiva.

$$(a) \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0,70 & 0,30 & 0,25 \\ 0,20 & 0,40 & 0,25 \\ 0,05 & 0,15 & 0,25 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \end{bmatrix}$$

3. Usando o Teorema 11.9.2, mostre que existe somente um vetor-preço linearmente independente para o sistema econômico fechado dado pela matriz de troca

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 \\ 1 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Três vizinhos têm hortas nos fundos de suas casas. O vizinho  $A$  cria tomates, o vizinho  $B$  cria milho e o vizinho  $C$  cria alface. Eles concordam em dividir a colheita entre eles como segue:  $A$  recebe  $\frac{1}{2}$  dos tomates,  $\frac{1}{3}$  do milho e  $\frac{1}{4}$  da alface;  $B$  recebe  $\frac{1}{3}$  dos tomates,  $\frac{1}{3}$  do milho e  $\frac{1}{4}$  da alface;  $C$  recebe  $\frac{1}{6}$  dos tomates,  $\frac{1}{3}$  do milho e  $\frac{1}{2}$  da alface. Que preços os vizinhos devem dar às suas respectivas colheitas para satisfazer a condição de equilíbrio de uma economia fechada se a colheita de menor preço deve ter um preço de R\$ 100?
5. Três engenheiros—um engenheiro civil (EC), um elétrico (EE) e um mecânico (EM)—têm, cada um, uma firma de consultoria. A consultoria que prestam é de natureza multidisciplinar, de modo que cada um compra uma parte do serviço das outras duas firmas. Para cada R\$ 1 de consultoria feita pelo EC, ele compra R\$ 0,10 de serviços do EE e R\$ 0,30 de serviços do EM. Para cada R\$ 1 de consultoria feita pelo EE, ele compra R\$ 0,20 de serviços do EC e R\$ 0,40 de serviços do EM. Finalmente, para cada R\$ 1 de consultoria feita pelo EM, ele compra R\$ 0,30 de serviços do EC e R\$ 0,40 de serviços do EE. Numa certa semana, o EC recebe pedidos de consultoria externa de R\$ 500, o EE recebe pedidos de consultoria externa de R\$ 700 e o EM recebe pedidos de consultoria externa de R\$ 600. Qual é o valor da consultoria feita por cada engenheiro naquela semana?
6. Usando o fato que as somas das entradas de coluna de uma matriz de troca  $E$  são todas 1, mostre que as somas de  $I - E$  são 0. A partir disto, mostre que  $I - E$  tem determinante zero e portanto  $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$  tem soluções não-triviais  $\mathbf{p}$ .
7. Mostre que o Corolário 11.9.5 segue do Corolário 11.9.4. [Sugestão. Lembre que  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  para qualquer matriz invertível  $A$ .]
8. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Prove o Teorema 11.9.3 como segue:

- (a) Prove a parte “somente se” do teorema, ou seja, mostre que se  $C$  é uma matriz de consumo produtiva, então existe um vetor  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$ .
- (b) Prove a parte “se” do teorema como segue:
- Passo 1.** Mostre que se existe um vetor  $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$  tal que  $C\mathbf{x}^* < \mathbf{x}^*$ , então  $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$ .
- Passo 2.** Mostre que se existe um número  $\lambda$  tal que  $0 < \lambda < 1$  e  $C\mathbf{x}^* < \lambda\mathbf{x}^*$ .
- Passo 3.** Mostre que  $C^n \mathbf{x}^* < \lambda^n \mathbf{x}^*$  para  $n = 1, 2, \dots$

## 416 ••• Álgebra Linear com Aplicações

**Passo 4.** Mostre que  $C^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Passo 5.** Expandindo o produto, mostre que

$$(I - C)(I + C + C^2 + \cdots + C^{n-1}) = I - C^n$$

para  $n = 1, 2, \dots$

**Passo 6.** Fazendo  $n \rightarrow \infty$  no Passo 5, mostre que existe a soma infinita de matrizes

$$S = I + C + C^2 + \cdots$$

e que  $(I - C) S = I$ .

**Passo 7.** Mostre que  $S \geq 0$  e que  $S = (I - C)^{-1}$ .

**Passo 8.** Mostre que  $C$  é uma matriz de consumo produtiva.

### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.9

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**T1.** Considere a seqüência  $\{E_2, E_3, E_4, E_5, \dots, E_n\}$  de matrizes de troca, onde

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

e assim por diante. Use um computador para mostrar que  $E_2^2 > 0$ ,  $E_3^3 > 0$ ,  $E_4^4 > 0$ ,  $E_5^5 > 0$  e fazer a conjectura que, embora  $E_n^n > 0$  é verdadeiro,  $E_n^k > 0$  não é verdadeiro para  $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ . Em seguida, use um computador para determinar os vetores  $p_n$  tais que  $E_n p_n = p_n$  (para  $n = 2, 3, 4, 5, 6$ ), e depois veja se você consegue descobrir um padrão que lhe permite calcular  $p_{n+1}$  facilmente a partir de  $p_n$ . Teste sua descoberta, primeiro calculando  $p_8$  a partir de

$$p_7 = \begin{bmatrix} 2520 \\ 3360 \\ 1890 \\ 672 \\ 175 \\ 36 \\ 7 \end{bmatrix}$$

e depois verificando se  $E_8 p_8 = p_8$ .

**T2.** Considere um modelo de produção aberto com  $n$  indústrias e  $n > 1$ . Para poder produzir R\$ 1 de seu próprio produto, a  $j$ -ésima indústria precisa gastar R\$  $(1/n)$  com o produto da  $i$ -ésima indústria (para cada  $i \neq j$ ), mas a  $j$ -ésima indústria (para cada  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) não gasta nada com a produção do seu próprio produto. Construa a matriz de consumo  $C_n$ , mostre que é produtiva e determine uma expressão para  $(I_n - C_n)^{-1}$ . Ao determinar uma expressão para  $(I_n - C_n)^{-1}$ , use um computador para estudar os casos  $n = 2, 3, 4$  e  $5$ ; então faça uma conjectura e prove sua validade. [Sugestão. Se  $F_n = [1]_{n \times n}$  (ou seja, a matriz  $n \times n$  com todas as entradas iguais a 1), mostre primeiro que

$$F_n^2 = n F_n$$

e depois dê a sua resposta para  $(I_n - C_n)^{-1}$ , em termos de  $n$ ,  $I_n$  e  $F_n$ .]

## 11.10 ADMINISTRAÇÃO DE FLORESTAS

Nesta seção nós discutimos um modelo matricial para administrar uma floresta cujas árvores são agrupadas em classes de acordo com a altura. Calculamos o rendimento sustentável ótimo de um corte periódico quando as árvores de diferentes classes de altura podem ter diferentes valores econômicos.

### PRÉ-REQUISITO: Operações com Matrizes

**Rendimento Sustentável Ótimo** Nosso objetivo é introduzir um modelo simplificado para o corte sustentável de uma floresta cujas árvores são classificadas por altura. Supomos que a altura da árvore determina seu valor econômico quando é cortada e vendida. Inicialmente, há uma distribuição de árvores de várias alturas. Por um certo período de tempo é permitido à floresta crescer e depois algumas das árvores, de tamanhos variados, são cortadas. As árvores restantes, que não foram cortadas, devem ter a mesma configuração de tamanho que as árvores da floresta original, de modo que o corte é sustentável. Como nós veremos, existem muitos destes procedimentos de corte sustentável. Nós queremos encontrar um para o qual o valor econômico total de todas as árvores removidas é o maior possível. Isto determina o **rendimento sustentável ótimo** da floresta e é o maior rendimento que pode ser obtido continuamente sem dízimar a floresta.

**O Modelo** Suponhamos que um plantador tenha uma floresta de pinheiros que são vendidas ano após ano como árvores de Natal. A cada dezembro o plantador corta alguns dos pinheiros para vender. Para cada pinheiro cortado, é plantada uma muda em seu lugar. Deste modo, o número total de árvores na floresta é sempre o mesmo. (Neste modelo simplificado, desconsideraremos as árvores que morrem durante o ano. Nós também vamos supor que cada muda plantada sobrevive e cresce até ser cortada.)

Árvores de diferentes tamanhos têm valores econômicos diferentes no mercado natalino. Suponha que há  $n$  classes distintas de preços, correspondendo a certos intervalos de altura, conforme mostram a Tabela 1 e a Figura 11.10.1. A primeira classe consiste de mudas com altura no intervalo  $[0, h_1]$  e sem valor econômico. A  $n$ -ésima classe consiste de árvores com altura maior do que ou igual a  $h_{n-1}$ .

Seja  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) o número de árvores na  $i$ -ésima classe que sobrevivem aos cortes. Nós formamos um vetor-coluna com estes números que chamamos de **vetor de não-cortadas**:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Para uma política de corte sustentável, a floresta deve retornar à configuração fixa dada pelo vetor de não-cortadas  $\mathbf{x}$ . Parte do

TABELA 1

Classe	Valor (\$)	Intervalo de altura
1 (muda)	Nenhum	$[0, h_1]$
2	$p_2$	$[h_1, h_2]$
3	$p_3$	$[h_2, h_3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n - 1$	$p_{n-1}$	$[h_{n-2}, h_{n-1}]$
$n$	$p_n$	$[h_{n-1}, \infty)$

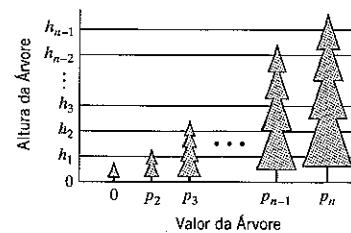


Figura 11.10.1

nosso problema é encontrar aqueles vetores de não-cortadas  $\mathbf{x}$  para os quais é possível um corte sustentável.

Como o número total de árvores da floresta é fixo, nós podemos colocar

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s \quad (1)$$

onde  $s$  é predeterminado pelo tamanho da terra disponível e pelo espaço que cada árvore requer. Olhando para a Figura 11.10.2, temos a seguinte situação. A configuração da floresta é dada pelo vetor  $\mathbf{x}$  depois de cada corte. Entre dois cortes, as árvores crescem e produzem uma nova configuração antes de cada novo corte. Um certo número de árvores é removido de cada classe quando ocorre o corte. Finalmente, uma muda é plantada no lugar de cada árvore removida para a floresta retornar à sua configuração original dada por  $\mathbf{x}$ .

Inicialmente consideraremos o crescimento da floresta entre os cortes anuais. Durante este período, uma árvore da  $i$ -ésima classe pode crescer e passar a uma classe de maior altura ou então seu crescimento pode ser retardado por algum motivo e ela permanece em sua classe. Conseqüentemente, nós definimos o seguinte parâmetro de crescimento  $g_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ :

$g_i$  = a fração das árvores da  $i$ -ésima classe que crescem para a  $(i+1)$ -ésima classe durante um período de crescimento

Por simplicidade, nós supomos que durante um período de crescimento uma árvore no máximo muda uma classe para cima. Com esta hipótese, nós temos

$1 - g_i$  = a fração das árvores da  $i$ -ésima classe que permanecem na  $i$ -ésima classe durante um período de crescimento

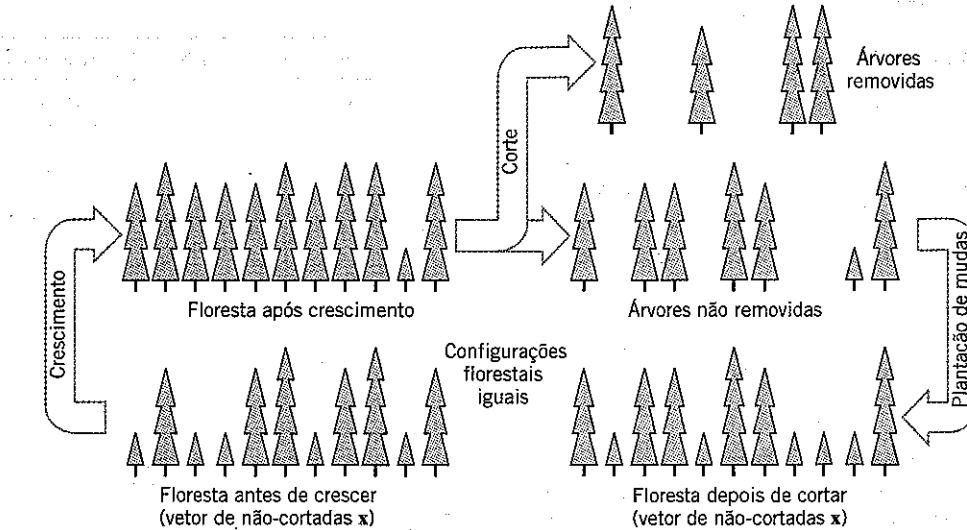


Figura 11.10.2

Com estes  $n - 1$  parâmetros de crescimento nós formamos a **matriz de crescimento**:

$$G = \begin{bmatrix} 1 - g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & 1 - g_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & 1 - g_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Como as entradas do vetor  $x$  são os números de árvores nas  $n$  classes antes do período de crescimento, o leitor pode verificar que as entradas do vetor

$$Gx = \begin{bmatrix} (1 - g_1)x_1 \\ g_1x_1 + (1 - g_2)x_2 \\ g_2x_2 + (1 - g_3)x_3 \\ \vdots \\ g_{n-2}x_{n-2} + (1 - g_{n-1})x_{n-1} \\ g_{n-1}x_{n-1} + x_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

são os números de árvores nas  $n$  classes depois do período de crescimento.

Suponha que durante o corte nós removemos  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) árvores da  $i$ -ésima classe. Nós chamamos o vetor-coluna

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

de **vetor de cortadas**. Assim, um total de

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

árvores são removidas a cada corte. Este também é o número total de árvores adicionadas à primeira classe (as novas mudas) depois de cada corte. Se nós definirmos a seguinte **matriz de reposição** de tamanho  $n \times n$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

então o vetor-coluna

$$Ry = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

especificará a configuração de árvores plantadas após cada corte.

Agora nós estamos prontos para escrever as seguintes equações, que caracterizam uma política de corte sustentável:

$$\begin{bmatrix} \text{configuração} \\ \text{no final do período} \\ \text{[corte]} \\ \text{de crescimento} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{reposição} \\ \text{de mudas} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{configuração} \\ \text{no início do período} \\ \text{de crescimento} \end{bmatrix}$$

ou, matematicamente,

$$Gx - y + Ry = x$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$(I - R)y = (G - I)x \quad (6)$$

ou, por extenso, como

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -g_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Nós nos referiremos à Equação (6) como a **condição de corte sustentável**. Quaisquer vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  com entradas não-negativas e tais que  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$  que satisfazem esta equação matricial, determinam uma política de corte sustentável para a floresta. Note que se  $y_1 > 0$ , então o cortador está removendo mudas sem valor econômico e substituindo-as por mudas novas. Como isto não faz sentido, nós supomos que

$$y_1 = 0 \quad (7)$$

com esta hipótese, pode ser verificado que (6) é o formato matricial do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} y_2 + y_3 + \dots + y_n &= g_1 x_1 \\ y_2 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\ y_3 &= g_2 x_2 - g_3 x_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= g_{n-2} x_{n-2} - g_{n-1} x_{n-1} \\ y_n &= g_{n-1} x_{n-1} \end{aligned} \quad (8)$$

Observe que a primeira equação em (8) é a soma das demais  $n-1$  equações.

Como nós devemos ter  $y_i \geq 0$  para  $i = 2, 3, \dots, n$ , as equações (8) exigem que

$$g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \dots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0 \quad (9)$$

Reciprocamente, se  $\mathbf{x}$  é um vetor-coluna com entradas não-negativas que satisfaz a Equação (9), então (7) e (8) definem um vetor-coluna  $\mathbf{y}$  com entradas não-negativas. Além disto,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  satisfazem a condição de corte sustentável (6). Em outras palavras, uma condição necessária e suficiente para que um vetor-coluna  $\mathbf{x}$  determine uma configuração da floresta que permite um corte sustentável é que as entradas de  $\mathbf{x}$  satisfaçam (9).

**Rendimento Sustentável Ótimo** Como nós removemos  $y_i$  árvores da  $i$ -ésima classe ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) e cada árvore na  $i$ -ésima classe tem valor econômico  $p_i$ , o rendimento total  $RT$  do corte é dado por

$$RT = p_2 y_2 + p_3 y_3 + \dots + p_n y_n \quad (10)$$

Usando (8), nós podemos substituir os  $y_i$  em (10) e obter

$$RT = p_2 g_1 x_1 + (p_3 - p_2) g_2 x_2 + \dots + (p_n - p_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1} \quad (11)$$

Combinando (11), (1) e (9), nós agora podemos enunciar o problema de maximizar o rendimento da floresta sobre todas as possíveis políticas de corte sustentável como segue:

**Problema.** Encontre números não-negativos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que maximizam

$$RT = p_2 g_1 x_1 + (p_3 - p_2) g_2 x_2 + \dots + (p_n - p_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1}$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$$

e

$$g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \dots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0$$

Da maneira que foi formulado, este problema pertence à área de Programação Linear. No entanto, nós vamos ilustrar o próximo resultado, a seguir, exibindo explicitamente uma política de corte sustentável, sem utilizar a teoria de Programação Linear.

### Teorema 11.10.1 Rendimento Sustentável Ótimo

O rendimento sustentável ótimo é obtido cortando todas as árvores de uma classe de altura específica e nenhuma árvore de qualquer outra classe.

Inicialmente denotamos

$RT_k$  = rendimento obtido cortando todas as árvores da  $k$ -ésima classe e nenhuma árvore das outras classes

O maior valor de  $RT_k$  para  $k = 2, 3, \dots, n$  será, então, o rendimento sustentável ótimo e o correspondente valor de  $k$  será a classe que deveria ser completamente cortada para obter este rendimento sustentável ótimo. Como nenhuma classe é cortada, exceto a  $k$ -ésima, temos

$$y_2 = y_3 = \dots = y_{k-1} = y_{k+1} = \dots = y_n = 0 \quad (12)$$

Além disto, como todas as árvores da  $k$ -ésima classe são cortadas, não restam árvores para cortar na  $k$ -ésima classe e nunca há árvores nas classes de altura acima da  $k$ -ésima classe. Assim,

$$x_k = x_{k+1} = \dots = x_n = 0 \quad (13)$$

Substituindo (12) e (13) na condição de corte sustentável (8) obtemos

$$\begin{aligned} y_k &= g_1 x_1 \\ 0 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\ 0 &= g_2 x_2 - g_3 x_3 \\ &\vdots \\ 0 &= g_{k-2} x_{k-2} - g_{k-1} x_{k-1} \\ y_k &= g_{k-1} x_{k-1} \end{aligned} \quad (14)$$

As Equações (14) também podem ser escritas como

$$y_k = g_1 x_1 = g_2 x_2 = \dots = g_{k-1} x_{k-1} \quad (15)$$

da qual segue que

$$\begin{aligned} x_2 &= g_1 x_1 / g_2 \\ x_3 &= g_1 x_1 / g_3 \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= g_1 x_1 / g_{k-1} \end{aligned} \quad (16)$$

Se nós substituímos as Equações (13) e (16) em

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$$

[que é a Equação (1)], nós podemos resolver em  $x_1$  e obter

$$x_1 = \frac{s}{1 + \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1}{g_3} + \dots + \frac{g_1}{g_{k-1}}} \quad (17)$$

Para o rendimento  $RT_k$ , nós combinamos (10), (12), (15) e (17) para obter

$$\begin{aligned} RT_k &= p_2 y_2 + p_3 y_3 + \dots + p_n y_n \\ &= p_k y_k \\ &= p_k g_1 x_1 \\ &= \frac{p_k s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{k-1}}} \end{aligned} \quad (18)$$

A Equação (18) determina  $RT_k$  em termos dos parâmetros econômicos e de crescimento conhecidos para quaisquer  $k = 2, \dots, n$ .

$3, \dots, n$ . Assim, o rendimento sustentável ótimo é obtido como segue.

### Teorema 11.10.2 Encontrando o Rendimento Sustentável Ótimo

O rendimento sustentável ótimo é o maior valor de

$$\frac{p_k s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{k-1}}}$$

para  $k = 2, 3, \dots, n$ . O correspondente valor de  $k$  é o número da classe que é completamente cortada.

No Exercício 4 nós pedimos que o leitor mostre que o vetor de não-cortadas  $x$  para o rendimento sustentável ótimo é

$$x = \frac{s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{k-1}}} \begin{bmatrix} 1/g_1 \\ 1/g_2 \\ \vdots \\ 1/g_{k-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

O Teorema 11.10.2 implica que não é necessariamente a classe de árvores de maior preço que deve ser totalmente cortada. Os parâmetros de crescimento  $g_i$  também devem ser levados em conta para determinar o rendimento sustentável ótimo.

### EXEMPLO 1 Usando o Teorema 11.10.2

A seguinte matriz de crescimento refere-se a uma floresta de pinheiros escoceses na Escócia com período de crescimento de

seis anos (ver M. B. Usher, "A Matrix Approach to the Management of Renewable Resources, with Special Reference to Selection Forests," *Journal of Applied Ecology*, Vol. 3, 1966, páginas 355-367):

$$G = \begin{bmatrix} 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,28 & 0,69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,31 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,23 & 0,63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,37 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Suponha que os preços das árvores (em unidades monetárias \$) nas cinco classes de maior altura são:

$$p_2 = 50, p_3 = 100, p_4 = 150, p_5 = 200, p_6 = 250$$

Qual classe deveria ser completamente cortada para obter o rendimento sustentável ótimo e qual é o rendimento?

Solução.

Da matriz  $G$  obtemos

$$g_1 = 0,28, g_2 = 0,31, g_3 = 0,25, g_4 = 0,23, g_5 = 0,37$$

As Equações (18) então fornecem

$$RT_2 = 50s/(0,28^{-1}) = 14,0s$$

$$RT_3 = 100s/(0,28^{-1} + 0,31^{-1}) = 14,7s$$

$$RT_4 = 150s/(0,28^{-1} + 0,31^{-1} + 0,25^{-1}) = 13,9s$$

$$RT_5 = 200s/(0,28^{-1} + 0,31^{-1} + 0,25^{-1} + 0,23^{-1}) = 13,2s$$

$$RT_6 = 250s/(0,28^{-1} + 0,31^{-1} + 0,25^{-1} + 0,23^{-1} + 0,37^{-1}) = 14,0s$$

Nós vemos que  $RT_3$  é a maior destas cinco quantidades, de modo que, pelo Teorema 11.10.2, a terceira classe deveria ser completamente cortada a cada seis anos para maximizar o rendimento sustentável. O rendimento sustentável ótimo correspondente é \$ 14,7 s, onde  $s$  é o número total de árvores na floresta.

### Conjunto de Exercícios 11.10

1. Uma certa floresta é dividida em três classes de altura e a matriz de crescimento das árvores entre os cortes é dada por

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Se o preço das árvores da segunda classe (em unidades monetárias \$) é \$ 30 e as da terceira classe é \$ 50, qual classe deveria ser totalmente cortada para obter o rendimento sustentável ótimo? Qual é o rendimento ótimo se há 100 árvores na floresta?

2. No Exemplo 1, a que nível deve subir o preço das árvores da quinta classe para que a quinta classe seja a que deve ser totalmente cortada para obter o rendimento sustentável ótimo?
3. No Exemplo 1, qual deve ser a razão  $p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6$  entre os preços das árvores para que os rendimentos  $RT_k$ , com  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ , sejam todos iguais? (Neste caso, qualquer política de corte sustentável irá produzir o mesmo rendimento sustentável ótimo.)
4. Obtenha a Equação (19) para o vetor de não-cortadas correspondente à política de corte sustentável ótima descrita no Teorema 11.10.2.
5. Quantas árvores são removidas da floresta em cada corte na política de corte sustentável ótima descrita no Teorema 11.10.2?
6. Se todos os parâmetros  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$  de crescimento da matriz de crescimento  $G$  são iguais, qual deve ser a razão  $p_2 : p_3 : \dots : p_n$  dos preços para que qualquer política de corte sustentável seja uma política de corte ótima? (Ver Exercício 3.)

**Requisito: Recurso Computacional****Exercícios Computacionais 11.10**

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**T1.** Uma certa floresta tem parâmetros de crescimento dados por

$$g_i = \frac{1}{i}$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , onde  $n$  (o número total de classes de altura) pode ser escolhido tão grande quanto necessário. Suponha que o valor de uma árvore no  $k$ -ésimo intervalo de altura é dado por

$$p_k = a(k-1)^\rho$$

onde  $a$  é uma constante (em R\$) e  $\rho$  é um parâmetro satisfazendo  $1 \leq \rho \leq 2$ .

- (a) Mostre que o rendimento  $RT_k$  é dado por

$$RT_k = \frac{2a(k-1)^{\rho-1}s}{k}$$

- (b) Para os casos

$$\rho = 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9$$

use um computador para determinar o número da classe que deveria ser completamente cortada e determine o rendimento sustentável ótimo em cada caso. Lembre que em suas contas  $k$  pode tomar somente valores inteiros.

- (c) Repita as contas da parte (b) usando

$$\rho = 1,91; 1,92; 1,93; 1,94; 1,95; 1,96; 1,97; 1,98; 1,99$$

- (d) Mostre que se  $\rho = 2$ , então o rendimento sustentável ótimo nunca pode ser maior do que  $2a$ .

- (e) Compare os valores de  $k$  determinados nas partes (b) e (c) com  $1/(2-\rho)$  e use algum cálculo para explicar por que

$$k \approx \frac{1}{2-\rho}$$

**T2.** Uma certa floresta tem parâmetros de crescimento dados por

$$g_i = \frac{1}{2^i}$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , onde  $n$  (o número total de classes de altura) pode ser escolhido tão grande quanto necessário. Suponha que o valor de uma árvore no  $k$ -ésimo intervalo de altura é dado por

$$p_k = a(k-1)^\rho$$

onde  $a$  é uma constante (em R\$) e  $\rho$  é um parâmetro satisfazendo  $1 \leq \rho$ .

- (a) Mostre que o rendimento  $RT_k$  é dado por

$$RT_k = \frac{a(k-1)^\rho s}{2^k - 2}$$

- (b) Para os casos

$$\rho = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

use um computador para determinar o número da classe que deveria ser completamente cortada para obter um rendimento ótimo e determine o rendimento sustentável ótimo em cada caso. Lembre que em suas contas  $k$  pode tomar somente valores inteiros.

- (c) Compare os valores de  $k$  determinados na parte (b) com  $1+\rho/\ln(2)$  e use algum cálculo para explicar por que

$$k \approx 1 + \frac{\rho}{\ln(2)}$$

## 11.11 COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Nesta seção nós supomos que uma imagem de um objeto tridimensional é exibida num monitor de vídeo e mostramos como a álgebra matricial pode ser usada para obter novas imagens do objeto através de rotação, translação e homotetia.

**PRÉ-REQUISITOS:** Álgebra Matricial  
Geometria Analítica

**Visualização de um Objeto Tridimensional** Nós queremos visualizar um objeto tridimensional mostrando num monitor de vídeo várias imagens deste objeto. O objeto que pretendemos mostrar é determinado por um número finito de segmentos de reta. Por exemplo, considere o tronco de pirâmide reta com base hexagonal ilustrado na Figura 11.11.1. Primeiro nós introduzimos um sistema de coordenadas  $xyz$  no qual mergulhamos o objeto. Como na Figura 11.11.1, nós orientamos o sistema de coordenadas de tal modo que sua origem está no centro da tela do monitor e o plano  $xy$  coincide com o plano da tela. Conseqüentemente, um observador somente verá a projeção da imagem do objeto tridimensional no plano bidimensional  $xy$ .

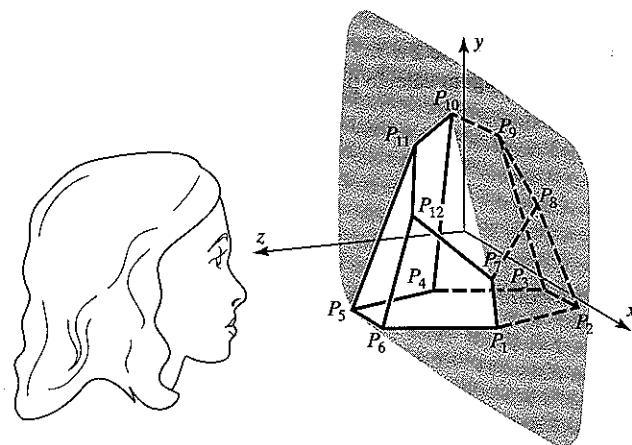


Figura 11.11.1

Os extremos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  dos segmentos de reta que determinam a imagem do objeto têm certas coordenadas no sistema de coordenadas  $xyz$ , digamos,

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$$

Estas coordenadas são estocadas na memória do sistema, junto com uma especificação de quais pares são conectados por segmentos de reta. Por exemplo, suponha que os 12 vértices da pirâmide truncada da Figura 11.11.1 têm as seguintes coordenadas (sendo que a tela tem 4 unidades de largura e 3 de altura):

$$\begin{aligned} P_1 : (1,000; -0,800; 0,000), & \quad P_2 : (0,500; -0,800; -0,866), \\ P_3 : (-0,500; -0,800; -0,866), & \quad P_4 : (-1,000; -0,800; 0,000), \\ P_5 : (-0,500; -0,800; 0,866), & \quad P_6 : (0,500; -0,800; 0,866), \\ P_7 : (0,840; -0,400; 0,000), & \quad P_8 : (0,315; 0,125; -0,546), \\ P_9 : (-0,210; 0,650; -0,364), & \quad P_{10} : (-0,360; 0,800; 0,000), \\ P_{11} : (-0,210; 0,650; 0,364), & \quad P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546) \end{aligned}$$

Estes 12 vértices são conectados dois a dois por 18 segmentos de reta como segue, onde  $P_i \leftrightarrow P_j$  significa que o ponto  $P_i$  é conectado ao ponto  $P_j$ :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} P_1 \leftrightarrow P_2, & P_2 \leftrightarrow P_3, & P_3 \leftrightarrow P_4, & P_4 \leftrightarrow P_5, & P_5 \leftrightarrow P_6, & P_6 \leftrightarrow P_1, \\ P_7 \leftrightarrow P_8, & P_8 \leftrightarrow P_9, & P_9 \leftrightarrow P_{10}, & P_{10} \leftrightarrow P_{11}, & P_{11} \leftrightarrow P_{12}, & P_{12} \leftrightarrow P_7, \\ P_1 \leftrightarrow P_7, & P_2 \leftrightarrow P_8, & P_3 \leftrightarrow P_9, & P_4 \leftrightarrow P_{10}, & P_5 \leftrightarrow P_{11}, & P_6 \leftrightarrow P_{12} \end{array}$$

Na Imagem 1, estes 18 segmentos de reta estão mostrados como apareceriam na tela. Deve ser observado que somente as coordenadas  $x$  e  $y$  dos vértices são usadas pelo sistema para desenhar a imagem, pois é mostrada somente a projeção do objeto no plano  $xy$ . No entanto, nós precisamos manter a informação sobre as coordenadas  $z$  para efetuar certas transformações que discutiremos adiante.

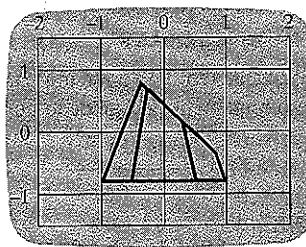


Imagen 1

Agora nós vamos mostrar como formar uma nova imagem do objeto mudando a escala, rodando ou transladando a imagem original. Para isto, nós construímos uma matriz  $3 \times n$ , chamada **matriz de coordenadas da imagem**, cujas colunas são as coordenadas dos  $n$  pontos de uma imagem:

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a matriz de coordenadas  $P$  que corresponde à Imagem 1 é a matriz  $3 \times 12$

$$\begin{bmatrix} 1,000 & 0,500 & -0,500 & -1,000 & -0,500 & 0,500 & 0,840 & 0,315 & -0,210 & -0,360 & -0,210 & 0,315 \\ -0,800 & -0,800 & -0,800 & -0,800 & -0,800 & -0,800 & -0,400 & 0,125 & 0,650 & 0,800 & 0,650 & 0,125 \\ 0,000 & -0,866 & -0,866 & 0,000 & 0,866 & 0,866 & 0,000 & -0,546 & -0,364 & 0,000 & 0,364 & 0,546 \end{bmatrix}$$

Nós vamos mostrar a seguir como transformar a matriz de coordenadas  $P$  de uma imagem na nova matriz de coordenadas  $P'$  que corresponde a uma nova imagem do objeto. Os segmentos de retas que conectam os vários pontos movem junto com os pontos quando estes são transformados. Desta maneira, cada imagem é determinada univocamente pela sua matriz de coordenadas, desde que tenham sido especificados quais pares de pontos são conectados por segmentos de reta na imagem original.

**Homotetia** O primeiro tipo de transformação que nós consideramos é a transformação de homotetia ou mudança de escala, que consiste em mudar as escalas da imagem ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  por fatores  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , respectivamente. Isto significa que um ponto  $P_i$  que tem coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  na imagem original, será transformado no novo ponto  $P'_i$  de coordenadas  $(\alpha x_i, \beta y_i, \gamma z_i)$  na nova imagem. Isto tem o efeito de transformar um cubo unitário da imagem original em um paralelepípedo de dimensões  $\alpha \times \beta \times \gamma$  (Figura 11.11.2). Matematicamente, realizamos esta homotetia pela multiplicação matricial com a matriz diagonal  $3 \times 3$

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

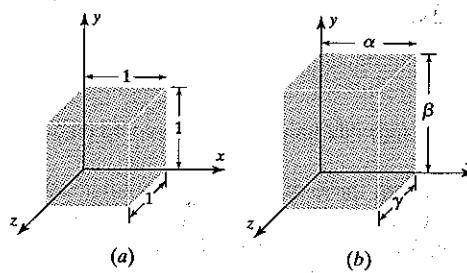


Figura 11.11.2

Se um ponto  $P_i$  da imagem original é representado pelo vetor-coluna

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

então o ponto transformado  $P'_i$  é representado pelo vetor-coluna

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

Usando a matriz de coordenadas  $P$ , que contém as coordenadas de todos os  $n$  pontos da imagem original como colunas, estes  $n$  pontos podem ser transformados simultaneamente para produzir a matriz de coordenadas  $P'$  da imagem homotética, como segue:

$$\begin{aligned} SP &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 & \cdots & \alpha x_n \\ \beta y_1 & \beta y_2 & \cdots & \beta y_n \\ \gamma z_1 & \gamma z_2 & \cdots & \gamma z_n \end{bmatrix} = P' \end{aligned}$$

A nova matriz de coordenadas pode então ser fornecida ao sistema para produzir a nova imagem do objeto. Exemplificando, a Imagem 2 é o resultado da transformação de homotetia dada por  $\alpha = 1,8$ ,  $\beta = 0,5$  e  $\gamma = 3,0$  aplicada à Imagem 1. Observe que a mudança de escala  $\gamma = 3,0$  ao longo do eixo  $z$  não é visível na Imagem 2, pois nós vemos somente a projeção do objeto no plano  $xy$ .

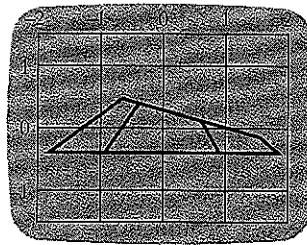
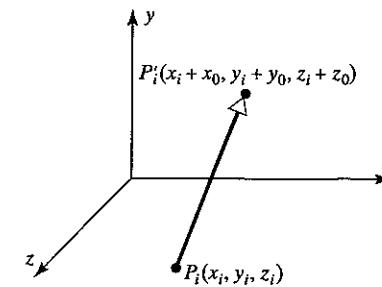
Imagen 2 A homotetia por  $\alpha = 1,8$ ,  $\beta = 0,5$  e  $\gamma = 3,0$  da Imagem 1.

Figura 11.11.3

**Translação** Em seguida, nós consideraremos a transformação de transladar ou deslocar um objeto para uma nova posição na tela. Usando a Figura 11.11.3, suponha que queiramos mudar uma imagem existente de tal modo que cada ponto  $P_i$  com coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  seja movido para um novo ponto  $P'_i$  com coordenadas  $(x_i + x_0, y_i + y_0, z_i + z_0)$ . O vetor

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

é chamado *vetor-translação* da transformação. Definindo a matriz  $3 \times n$

$$T = \begin{bmatrix} x_0 & x_0 & \cdots & x_0 \\ y_0 & y_0 & \cdots & y_0 \\ z_0 & z_0 & \cdots & z_0 \end{bmatrix}$$

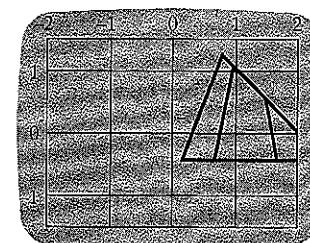
todos os  $n$  pontos da imagem determinados pela matriz de coordenadas  $P$  podem ser transladados por adição matricial através da equação

$$P' = P + T$$

A matriz de coordenadas  $P'$  especifica, portanto, as novas coordenadas dos  $n$  pontos. Por exemplo, se nós queremos transladar a Imagem 1 de acordo com o vetor de translação

$$\begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,4 \\ 1,7 \end{bmatrix}$$

então o resultado é a Imagem 3. Observe, novamente, que a translação por  $z = 1,7$  ao longo do eixo  $z$  não aparece explicitamente na Imagem 3.

Imagen 3 A translação por  $x_0 = 1,2$ ,  $y_0 = 0,4$  e  $z_0 = 1,7$  da Imagem 1.

No Exercício 7 é explicada uma técnica de efetuar translações por multiplicação matricial em vez de adição matricial.

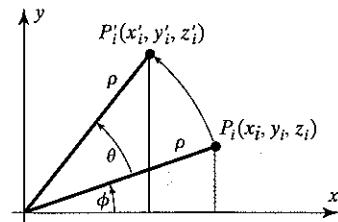


Figura 11.11.4

**Rotação** Um tipo mais complicado de transformação é a rotação de uma imagem em torno de um dos três eixos coordenados. Nós começamos com uma rotação em torno do eixo  $z$  (o eixo perpendicular à tela) por um ângulo  $\theta$ . Dado um ponto  $P_i$  da imagem original com coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$ , desejamos calcular as novas coordenadas  $(x'_i, y'_i, z'_i)$  do ponto  $P'_i$  girado. Usando um pouco de trigonometria e a Figura 11.11.4, o leitor deveria conseguir deduzir o seguinte:

$$\begin{aligned}x'_i &= \rho \cos(\phi + \theta) = \rho \cos \phi \cos \theta - \rho \sin \phi \sin \theta = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta \\y'_i &= \rho \sin(\phi + \theta) = \rho \cos \phi \sin \theta + \rho \sin \phi \cos \theta = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta \\z'_i &= z_i\end{aligned}$$

Estas equações podem ser escritas em formato matricial como

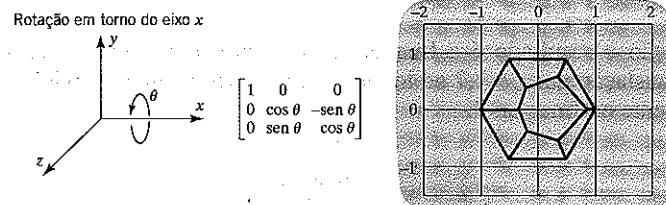
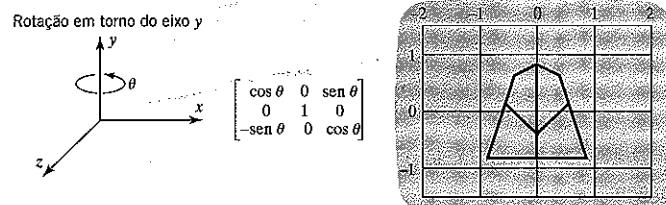
$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

Se nós denotarmos a matriz  $3 \times 3$  desta equação por  $R$ , então todos os  $n$  pontos poderão ser rodados pela multiplicação matricial

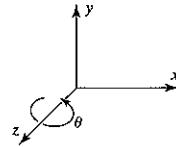
$$P' = R P$$

e fornecer a matriz de coordenadas  $P'$  da imagem rodada.

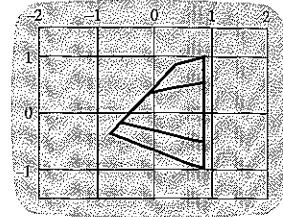
Analogamente, podemos obter rotações em torno dos eixos  $x$  e  $y$  e as matrizes de rotação resultantes são dadas nas Imagens 4 e 5 a seguir. As novas imagens da pirâmide truncada, resultantes de três rotações da Imagem 1 em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  por um ângulo de  $90^\circ$ , são dadas, respectivamente, nas Imagens 4, 5 e 6 a seguir.

Imagen 4 A rotação da Imagem 1 em torno do eixo  $x$  por  $90^\circ$ .Imagen 5 A rotação da Imagem 1 em torno do eixo  $y$  por  $90^\circ$ .

Rotação em torno do eixo  $z$



$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imagen 6 A rotação da Imagem 1 em torno do eixo  $z$  por  $90^\circ$ .

As rotações em torno dos três eixos coordenados podem ser combinadas para dar imagens oblíquas de um objeto. Por exemplo, a Imagem 7 é a Imagem 1 inicialmente girada em torno do eixo  $x$  por  $30^\circ$ , em seguida girada em torno do eixo  $y$  por  $-70^\circ$ , e finalmente girada em torno do eixo  $z$  por  $-27^\circ$ . Matematicamente, estas três rotações sucessivas podem ser encorpadas em uma única equação de transformação  $P' = R P$ , onde  $R$  é o produto das três matrizes individuais de rotação

$$\begin{aligned}R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ 0 & \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \\R_2 &= \begin{bmatrix} \cos(-70^\circ) & 0 & \sin(-70^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-70^\circ) & 0 & \cos(-70^\circ) \end{bmatrix} \\R_3 &= \begin{bmatrix} \cos(-27^\circ) & -\sin(-27^\circ) & 0 \\ \sin(-27^\circ) & \cos(-27^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

na ordem

$$R = R_3 R_2 R_1 = \begin{bmatrix} 0,305 & -0,025 & -0,952 \\ -0,155 & 0,985 & -0,076 \\ 0,940 & 0,171 & 0,296 \end{bmatrix}$$

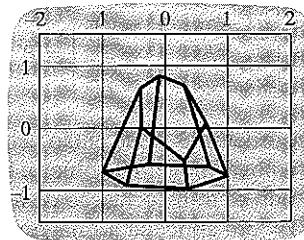
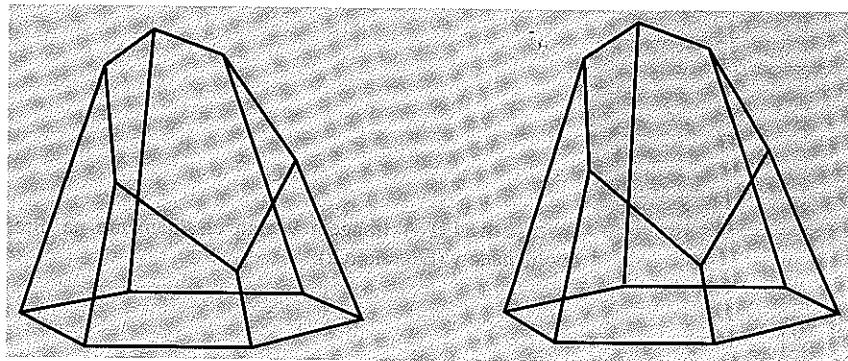


Imagen 7 Imagem oblíqua da pirâmide truncada.

Como uma ilustração final, na Imagem 8 apresentamos duas imagens separadas da pirâmide truncada, que constituem um par estereoscópico. Estas imagens foram produzidas rodando primeiro a Imagem 7 em torno do eixo  $y$  por um ângulo de  $-3^\circ$  e transladando para a direita e em seguida rodando a mesma Imagem 7 em torno do eixo  $y$  por um ângulo de  $+3^\circ$  e transladando para a esquerda. As distâncias de translação foram escolhidas de tal modo que as imagens estereoscópicas estão afastadas cerca de 6,5 centímetros—a distância aproximada entre um par de olhos.



**Imagen 8** Uma figura estereoscópica da pirâmide truncada. A tridimensionalidade do diagrama pode ser vista segurando o livro a cerca de 30 centímetros e focando os olhos à distância. Voltando a olhar para a Imagem 8 sem trocar o foco dos olhos, as duas imagens do par estereoscópico podem ser combinadas para produzir o efeito desejado.

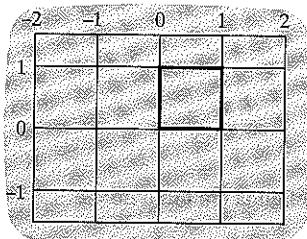
### Conjunto de Exercícios 11.1.1

1. A Imagem 9 é uma imagem de um quadrado de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(0, 1, 0)$ .
  - (a) Qual é a matriz de coordenadas da Imagem 9?
  - (b) Qual é a matriz de coordenadas da Imagem 9 depois de uma mudança de escala por um fator de  $1\frac{1}{2}$  na direção  $x$  e  $\frac{1}{2}$  na direção  $y$ ? Faça um esboço da imagem transformada.
  - (c) Qual é a matriz de coordenadas da Imagem 9 depois de transladada pelo vetor

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}?$$

Faça um esboço da imagem transformada.

- (d) Qual é a matriz de coordenadas da Imagem 9 depois de girada por um ângulo de  $-30^\circ$  em torno do eixo  $z$ ? Faça um esboço da imagem transformada.



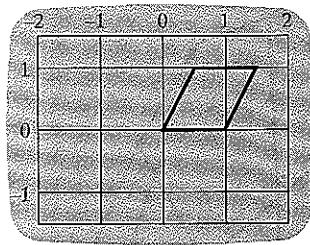
**Imagen 9** O quadrado de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(0, 1, 0)$  (Exercícios 1 e 2).

2. (a) Se a matriz de coordenadas da Imagem 9 é multiplicada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o resultado é a matriz de coordenadas da Imagem 10. Uma tal transformação é chamada *cisalhamento na direção  $x$  por um fator de  $\frac{1}{2}$  em relação à coordenada  $y$* . Mostre que, sob tal transformação, um ponto de coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  passa a ter coordenadas  $(x_i + \frac{1}{2}y_i, y_i, z_i)$ .

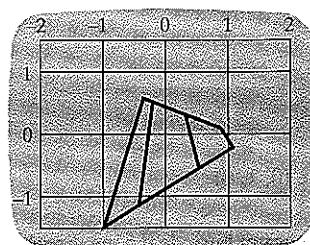
- (b) Quais são as coordenadas dos quatro vértices do quadrado cisalhado da Imagem 10?



(c) A matriz

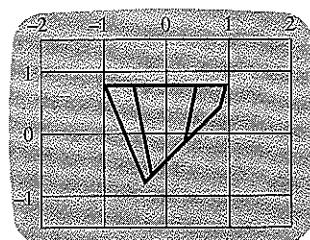
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determina um *cisalhamento na direção y por um fator de 0,6 em relação à coordenada x* (por exemplo, ver Imagem 11). Esboce uma imagem do quadrado da Imagem 9 depois de uma tal transformação de cisalhamento e encontre as novas coordenadas de seus quatro vértices.



**Imagen 10** A Imagem 9 com cisalhamento na direção  $x$  por  $\frac{1}{2}$  em relação à coordenada  $y$  (Exercício 2).

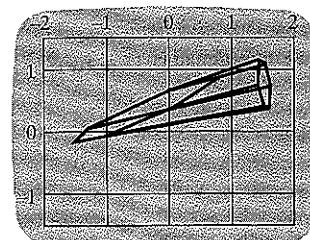
3. (a) A *reflexão em torno do plano xz* é definida como a transformação que leva um ponto  $(x_i, y_i, z_i)$  no ponto  $(x_i, -y_i, z_i)$  (por exemplo, ver Imagem 12). Se  $P$  e  $P'$  são as matrizes de coordenadas de uma imagem e de sua reflexão em torno do plano  $xz$ , respectivamente, encontre uma matriz  $M$  tal que  $P' = MP$ .
- (b) Analogamente à parte (a), defina a *reflexão em torno do plano yz* e construa a matriz correspondente a esta transformação. Faça um esboço da Imagem 1 refletida em torno do plano  $yz$ .
- (c) Analogamente à parte (a), defina a *reflexão em torno do plano xy* e construa a matriz correspondente a esta transformação. Faça um esboço da Imagem 1 refletida em torno do plano  $xy$ .



**Imagen 12** A Imagem 1 refletida em torno do plano  $xz$  (Exercício 3).

4. (a) A Imagem 13 é o resultado da Imagem 1 submetida às cinco seguintes transformações:

1. Homotetia de fator  $\frac{1}{2}$  na direção  $x$ , 2 na direção  $y$  e  $\frac{1}{3}$  na direção  $z$ .
2. Translação de  $\frac{1}{2}$  unidade na direção  $x$ .
3. Rotação de  $20^\circ$  em torno do eixo  $x$ .
4. Rotação de  $-45^\circ$  em torno do eixo  $y$ .
5. Rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $z$ .



**Imagen 13** A Imagem 1 transformada por homotetia, translação e rotação (Exercício 4).

Construa as cinco matrizes  $M_1, M_2, M_3, M_4$  e  $M_5$  associadas a estas cinco transformações.

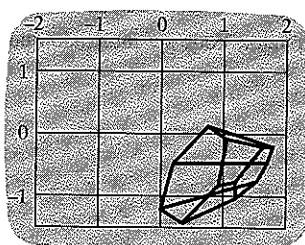
- (b) Se  $P$  é a matriz de coordenadas da Imagem 1 e  $P'$  é a matriz de coordenadas da Imagem 13, expresse  $P'$  em termos das matrizes  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  e  $P$ .

5. (a) A Imagem 14 é o resultado da Imagem 1 submetida às sete seguintes transformações:

1. Homotetia de fator 0,3 na direção  $x$  e 0,5 na direção  $y$ .
2. Rotação de  $45^\circ$  em torno do eixo  $x$ .
3. Translação de 1 unidade na direção  $x$ .
4. Rotação de  $35^\circ$  em torno do eixo  $y$ .
5. Rotação de  $-45^\circ$  em torno do eixo  $z$ .
6. Translação de 1 unidade na direção  $z$ .
7. Homotetia de fator 2 na direção  $x$ .

Construa as sete matrizes  $M_1, M_2, \dots, M_7$  associadas a estas sete transformações.

- (b) Se  $P$  é a matriz de coordenadas da Imagem 1 e  $P'$  é a matriz de coordenadas da Imagem 14, expresse  $P'$  em termos das matrizes  $M_1, M_2, \dots, M_7$  e  $P$ .



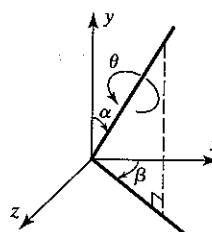
**Imagem 14** A Imagem 1 transformada por homotetia, translação e rotação (Exercício 5).

6. Suponha que  $P$  é a matriz de coordenadas de uma imagem que é transformada pela rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de um eixo pela origem que é especificado pelos dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  (veja a figura dada). Se  $P'$  é a matriz de coordenadas da imagem rodada, encontre as matrizes de rotação  $R_1, R_2, R_3, R_4$  e  $R_5$  tais que

$$P' = R_5 R_4 R_3 R_2 R_1 P$$

[*Sugestão.* A rotação desejada pode ser realizada pelos cinco seguintes passos:

1. Rotação de um ângulo  $\beta$  em torno do eixo  $y$ .
2. Rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $z$ .
3. Rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $y$ .
4. Rotação de um ângulo  $-\alpha$  em torno do eixo  $z$ .
5. Rotação de um ângulo  $-\beta$  em torno do eixo  $y$ .]



**Figura Ex-6**

7. Este exercício ilustra uma técnica para transladar um ponto de coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  para um ponto com coordenadas  $(x_i + x_0, y_i + y_0, z_i + z_0)$  através de multiplicação matricial em vez de adição.

- (a) Associe o ponto  $(x_i, y_i, z_i)$  com o vetor-coluna

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

e o ponto  $(x_i + x_0, y_i + y_0, z_i + z_0)$  com o vetor-coluna

$$\mathbf{v}'_i = \begin{bmatrix} x_i + x_0 \\ y_i + y_0 \\ z_i + z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 4.28 • • • Álgebra Linear com Aplicações

Encontre uma matriz  $4 \times 4 M$  tal que  $\mathbf{v}_i' = M\mathbf{v}_i$ .

- (b) Encontre a matriz  $4 \times 4$  do formato da matriz da parte (a) que realiza especificamente a translação do ponto  $(4, -2, 3)$  para o ponto  $(-1, 7, 0)$ .
8. Para as matrizes de rotação dadas com as Imagens 4, 5 e 6, mostre que

$$R^{-1} = R^T$$

(Uma matriz com esta propriedade é chamada **matriz ortogonal**. Veja Seção 6.5.)

### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.11

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Sejam  $(a, b, c)$  um vetor unitário normal ao plano  $ax + by + cz = 0$  e  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  um vetor. Pode ser mostrado que a imagem espelhada do vetor  $\mathbf{r}$  através do plano dado tem coordenadas  $\mathbf{r}_e = (x_e, y_e, z_e)$ , onde

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

com

$$M = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que  $M^2 = I$  e dê uma razão física por que isto deve ser assim.  
 [Sugestão. Use que o vetor  $(a, b, c)$  é unitário para mostrar que  $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$ .]
- (b) Use um computador para mostrar que  $\det(M) = -1$ .
- (c) Os autovetores de  $M$  satisfazem a equação

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e portanto correspondem àqueles vetores cujas direções não são afetadas por uma reflexão em torno do plano. Use um computador para determinar os autovetores e autovalores de  $M$  e então dê um argumento físico para corroborar sua resposta.

- T2. Um vetor  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  é rodado por um ângulo  $\theta$  em torno de um eixo com vetor unitário  $(a, b, c)$  e assim formando o vetor rodado  $\mathbf{v}_R = (x_R, y_R, z_R)$ . Pode ser mostrado que

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

com

$$R(\theta) = \cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos(\theta)) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + \sin(\theta) \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Use um computador para mostrar que  $R(\theta)R(\phi) = R(\theta + \phi)$  e dê uma razão física por que isto deve ser assim. Dependendo da sofisticação do computador que você estiver usando, talvez você deva experimentar com valores diferentes de  $a, b$  e

$$c = \sqrt{1 - a^2 - b^2}$$

- (b) Mostre também que  $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$  e explique fisicamente por que isto deve ser assim.
- (c) Use um computador para mostrar que  $\det(R(\theta)) = +1$ .

## 11.12 DISTRIBUIÇÕES DE TEMPERATURA DE EQUILÍBRIO

Nesta seção veremos como pode ser encontrada a distribuição de temperatura de equilíbrio em uma placa trapezoidal quando são especificadas as temperaturas ao longo das arestas da placa. O problema é reduzido a resolver um sistema de equações lineares. Também são descritas uma técnica iterativa para resolver o problema e uma abordagem do tipo "caminho aleatório" para o problema.

**PRÉ-REQUISITOS:** Sistemas Lineares  
Matrizes  
Compreensão Intuitiva de Limites

**Dados de Contorno** Suponha que as duas faces da placa trapezoidal fina mostrada na Figura 11.12.1a são isoladas do calor. Suponha também que nos foram dadas as temperaturas ao longo das quatro arestas da placa. Por exemplo, suponha que as temperaturas em cada aresta são constantes, com valores de  $0^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $1^\circ$  e  $2^\circ$ ; como na figura. Depois de um certo período de tempo, a temperatura no interior da placa irá estabilizar. Nossa objetivo nesta seção é determinar esta distribuição de temperatura de equilíbrio dos pontos dentro da placa. Como nós vemos, a temperatura de equilíbrio interior é completamente determinada pelos dados de contorno, ou seja, pelas temperaturas ao longo das arestas da placa.

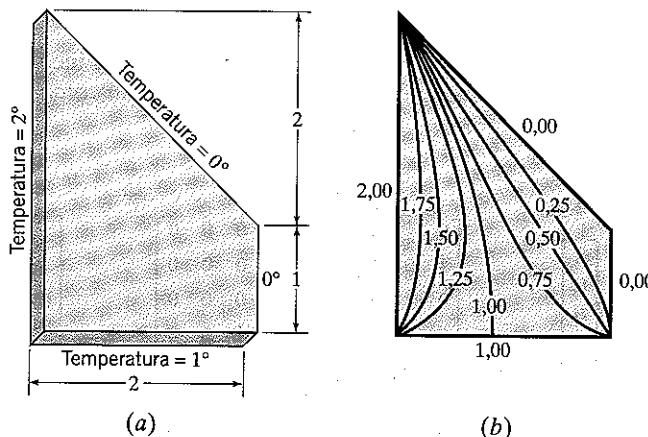


Figura 11.12.1

A distribuição de temperatura de equilíbrio pode ser visualizada pelo uso de curvas que conectam os pontos com mesma temperatura. Estas curvas são chamadas *isotérmicas* da distribuição de temperatura. Na Figura 11.12.1b nós esboçamos algumas isotérmicas usando informações que deduzimos mais adiante neste capítulo.

Embora nossas contas aqui sejam para a placa trapezoidal ilustrada, nossas técnicas generalizam facilmente para placas

com qualquer formato razoável. Estas técnicas também generalizam para o problema de encontrar a temperatura dentro de um corpo tridimensional. Na realidade, nossa "placa" poderia ser o corte transversal de algum objeto sólido se o fluxo de calor perpendicular ao corte é desprezível. Por exemplo, a Figura 11.12.1 poderia representar a seção transversal de uma longa represa. A represa está exposta a três temperaturas diferentes: a temperatura do solo em sua base, a temperatura da água de um lado e a do ar do outro. Para determinar as tensões termais às quais a represa está sujeita é necessário o conhecimento da distribuição de temperatura dentro da represa.

Em seguida, veremos um certo princípio termodinâmico que caracteriza a distribuição de temperatura que estamos procurando.

**A Propriedade do Valor Médio** Existem muitas maneiras diferentes de obter um modelo matemático para o nosso problema. A abordagem que nós usamos aqui é baseada na seguinte propriedade da distribuição de temperatura de equilíbrio.

### Teorema 11.12.1 A Propriedade do Valor Médio

Sejam  $P$  um ponto do interior de uma placa e  $C$  um círculo qualquer, completamente contido na placa e centrado em  $P$  (Figura 11.12.2). Se a placa está em equilíbrio termal, então a temperatura em  $P$  é o valor médio da temperatura no círculo.

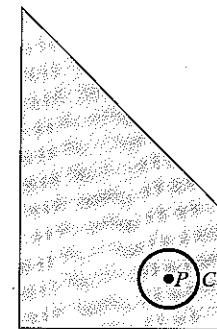
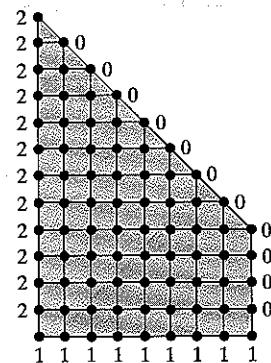
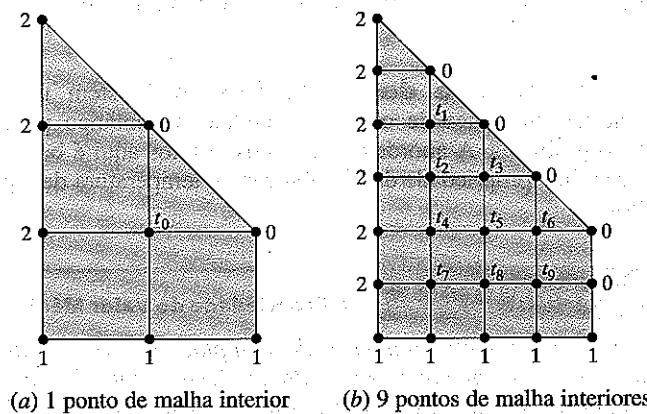


Figura 11.12.2

Esta propriedade é uma consequência de certas leis básicas do movimento molecular que nós não tentaremos deduzir. Basicamente, esta propriedade afirma que a energia termal em equilíbrio tem a tendência de distribuir-se tão uniformemente quanto possível, consistentemente com as condições de contorno. Pode ser mostrado que a propriedade do valor médio determina de maneira única a distribuição de temperatura de equilíbrio de uma placa.

Infelizmente, não é uma tarefa fácil determinar a distribuição de temperatura de equilíbrio a partir da propriedade do valor médio. No entanto, nós podemos reduzir o problema à solução de um sistema linear se nós nos restringirmos a encontrar a temperatura somente em um conjunto finito de pontos do interior da placa. É isto o que faremos a seguir.

**A Formulação Discreta do Problema** Nós podemos cobrir nossa placa trapezoidal com uma sucessão de redes de quadrados, ou malhas, cada vez mais finas (Figura 11.12.3). Em (a) nós temos uma malha bem grosseira; em (b) temos uma malha com a metade do espaçamento da de (a) e em (c) o espaçamento novamente foi reduzido à metade. Os pontos de interseção das linhas da malha são chamados *pontos de malha*. Estes pontos nós classificamos em *pontos de malha de contorno* se estão no contorno da placa e *pontos de malha inteiros* se estão no interior da placa. Para as três malhas escolhidas na figura, existem 1, 9 e 49 pontos de malha inteiros, respectivamente.



(b) 49 pontos de malha inteiros

**Figura 11.12.3**

Na formulação discreta de nosso problema, nós tentamos encontrar somente as temperaturas nos pontos de malha inteiros de uma rede dada. Para uma malha razoavelmente fina, como em (c), isto já fornece uma excelente representação da verdadeira distribuição de temperatura na placa inteira.

A temperatura nos pontos de malha de contorno é fornecida pelos dados de contorno. (Na Figura 11.12.3 nós rotulamos todos os pontos de malha de contorno com suas temperaturas correspondentes.) Nos pontos de malha inteiros, nós aplicaremos a seguinte versão discreta da propriedade do valor médio.

**Teorema 11.12.2****A Propriedade do Valor Médio Discreto**

Em cada ponto de malha interior, a temperatura é aproximadamente a média das temperaturas dos quatro pontos de malha vizinhos.

Esta versão discreta é uma aproximação razoável da verdadeira propriedade do valor médio mas, por ser somente uma aproximação, também fornece somente uma aproximação das verdadeiras temperaturas nos pontos de malha inteiros. No entanto, a aproximação melhora à medida que o espaçamento da malha diminui. De fato, quando o espaçamento da malha tende a zero, as aproximações tendem à distribuição de temperatura exata, um fato que é provado em disciplinas avançadas de Análise Numérica. Nós vamos ilustrar esta convergência calculando as temperaturas aproximadas nos pontos de malha dos três espaçamentos de malha da Figura 11.12.3.

O caso da malha (a) da Figura 11.12.3 é simples, pois só há um ponto de malha interior. Escrevendo  $t_0$  para a temperatura neste ponto de malha, a propriedade do valor médio discreto imediatamente fornece

$$t_0 = \frac{1}{4}(2 + 1 + 0 + 0) = 0,75$$

No caso (b), nós podemos denotar as temperaturas nos nove pontos de malha inteiros por  $t_1, t_2, \dots, t_9$ , como na Figura 11.12.3b. (A ordem escolhida para estes pontos não é importante.) Aplicando a propriedade do valor médio discreto sucessivamente a cada um destes nove pontos, obtemos as nove equações a seguir:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0) \\ t_2 &= \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2) \\ t_3 &= \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + 0 + 0) \\ t_4 &= \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + t_7 + 2) \\ t_5 &= \frac{1}{4}(t_3 + t_4 + t_6 + t_8) \\ t_6 &= \frac{1}{4}(t_5 + t_9 + 0 + 0) \\ t_7 &= \frac{1}{4}(t_4 + t_8 + 1 + 2) \\ t_8 &= \frac{1}{4}(t_5 + t_7 + t_9 + 1) \\ t_9 &= \frac{1}{4}(t_6 + t_8 + 1 + 0) \end{aligned} \quad (1)$$

Isto é um sistema de nove equações lineares em nove incógnitas. Nós podemos reescrever-las em formato matricial como

$$\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b} \quad (2)$$

onde

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Para resolver a Equação (2), nós a reescrevemos como

$$(I - M)\mathbf{t} = \mathbf{b}$$

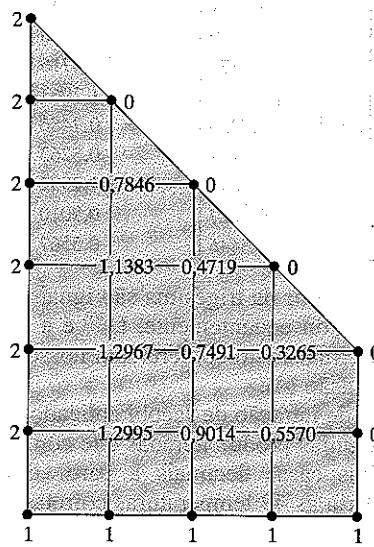
A solução em  $\mathbf{t}$  é, portanto,

$$\mathbf{t} = (I - M)^{-1}\mathbf{b} \quad (3)$$

sempre que a matriz  $(I - M)$  é invertível. Isto realmente ocorre e calculando a solução em  $\mathbf{t}$  por (3), obtemos

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0,7846 \\ 1,1383 \\ 0,4719 \\ 1,2967 \\ 0,7491 \\ 0,3265 \\ 1,2995 \\ 0,9014 \\ 0,5570 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A Figura 11.12.4 é um diagrama da placa com os nove pontos de malha interiores mostrando sua temperatura de acordo com esta solução.



**Figura 11.12.4**

No caso (c) da Figura 11.12.3, nós repetimos este mesmo procedimento. Nós denotamos as temperaturas nos 49 pontos de malha interiores, em qualquer ordem, por  $t_1, t_2, \dots, t_{49}$ . Por exemplo, nós podemos começar no topo da placa e continuar da esquerda para a direita ao longo de cada linha de pontos da malha. Aplicando a propriedade do valor médio discreto a cada um dos pontos de malha, obtemos um sistema de 49 equações lineares em 49 incógnitas:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0) \\ t_2 &= \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2) \\ &\vdots \\ t_{48} &= \frac{1}{4}(t_{47} + t_{48} + 0 + 1) \\ t_{49} &= \frac{1}{4}(t_{48} + t_{49} + 0 + 1) \end{aligned} \quad (5)$$

Em formato matricial, as Equações (5) são

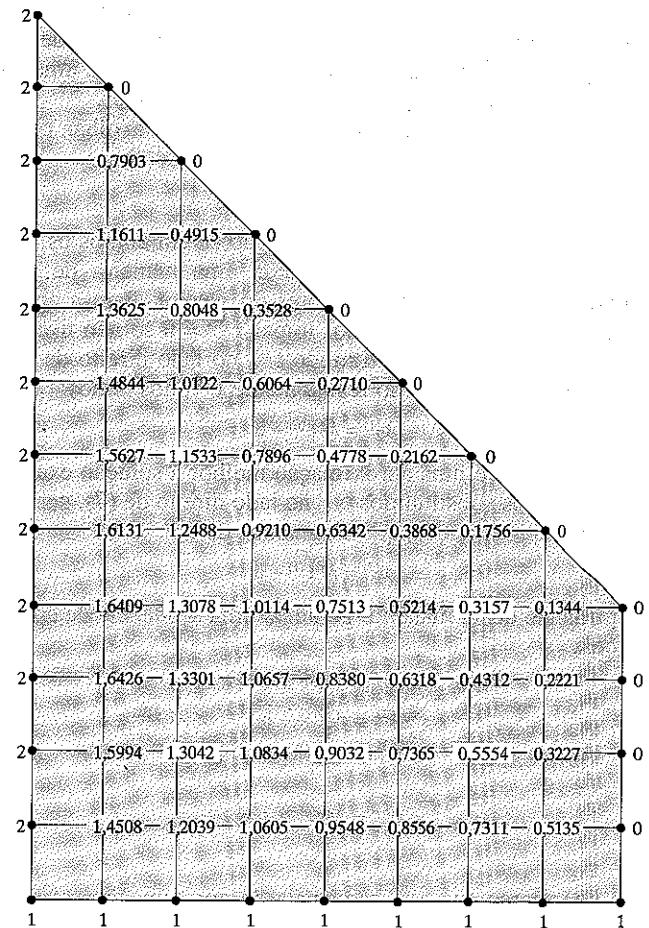
$$\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b}$$

onde  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$  são vetores-coluna de 49 entradas e  $M$  é uma matriz  $49 \times 49$ . Como em (3), a solução em  $\mathbf{t}$  é

$$\mathbf{t} = (I - M)^{-1}\mathbf{b} \quad (6)$$

Na Figura 11.12.5 nós exibimos as temperaturas encontradas com a Equação (6) nos 49 pontos de malha. As nove temperaturas não sombreadas nesta figura caem nos pontos de malha da

Figura 11.12.4. Na Tabela 1 nós comparamos as temperaturas nestes nove pontos de malha interiores que são comuns para os três espaçamentos de rede usados.



**Figura 11.12.5**

**TABELA 1**

Temperaturas nos Pontos de Malha Comuns		
Caso (a)	Caso (b)	Caso (c)
$t_1$	—	0,7846
$t_2$	—	1,1383
$t_3$	—	0,4719
$t_4$	—	1,2967
$t_5$	0,7500	0,7491
$t_6$	—	0,3265
$t_7$	—	1,2995
$t_8$	—	0,9014
$t_9$	—	0,5570

Sabendo que as temperaturas do problema discreto tendem às temperaturas exatas à medida que o espaçamento da malha diminui, nós podemos concluir que as nove temperaturas obtidas no caso (c) estão mais próximas dos valores exatos que as do caso (b).

**Uma Técnica Numérica** Para obter as 49 temperaturas no caso (c) da Figura 11.12.3 foi necessário resolver um sistema linear com 49 incógnitas. Uma rede mais fina pode envolver um sistema linear com centenas ou até milhares de incógnitas. Algoritmos exatos para a solução de sistemas tão grandes são impraticáveis e por esta razão nós discutiremos agora uma técnica numérica para a solução prática destes sistemas.

Para descrever esta técnica, nós voltamos a olhar para a Equação (2):

$$\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b} \quad (7)$$

O vetor  $\mathbf{t}$  que estamos procurando, aparece em ambos os lados desta equação. Nós vamos procurar uma maneira de gerar aproximações melhores e melhores do vetor  $\mathbf{t}$ . Para a aproximação inicial  $\mathbf{t}^{(0)}$  nós podemos tomar  $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{0}$  se não tivermos uma escolha melhor. Substituindo  $\mathbf{t}^{(0)}$  no lado direito de (7) e chamando o lado esquerdo resultante de  $\mathbf{t}^{(1)}$ , nós temos

$$\mathbf{t}^{(1)} = M\mathbf{t}^{(0)} + \mathbf{b} \quad (8)$$

Em geral,  $\mathbf{t}^{(1)}$  é uma aproximação melhor à solução exata do que  $\mathbf{t}^{(0)}$ . Se nós substituímos  $\mathbf{t}^{(1)}$  no lado direito de (7), geramos uma nova aproximação, que chamamos de  $\mathbf{t}^{(2)}$ :

$$\mathbf{t}^{(2)} = M\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{b} \quad (9)$$

Continuando desta maneira, geramos uma seqüência de aproximações:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(1)} &= M\mathbf{t}^{(0)} + \mathbf{b} \\ \mathbf{t}^{(2)} &= M\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{b} \\ \mathbf{t}^{(3)} &= M\mathbf{t}^{(2)} + \mathbf{b} \\ &\vdots \\ \mathbf{t}^{(n)} &= M\mathbf{t}^{(n-1)} + \mathbf{b} \end{aligned} \quad (10)$$

É de se esperar que esta seqüência de aproximações  $\mathbf{t}^{(0)}, \mathbf{t}^{(1)}, \dots$  converge à solução exata de (7). Nós não poderemos tratar aqui das considerações teóricas necessárias para mostrar isto; no entanto, podemos afirmar que para o particular problema que estamos considerando, a seqüência converge à solução exata para qualquer tamanho de malha e para qualquer aproximação inicial  $\mathbf{t}^{(0)}$ .

A técnica de gerar aproximações sucessivas para a solução de (7) é uma variação de uma técnica chamada *iteração de Jacobi*; cada aproximação é uma *iterada*. Como um exemplo numérico, vamos aplicar a iteração de Jacobi ao cálculo das nove temperaturas dos pontos da rede do caso (b). Tomando  $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{0}$ , a Equação (2) fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(1)} &= M\mathbf{t}^{(0)} + \mathbf{b} = M\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,5000 \\ 0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,7500 \\ 0,2500 \\ 0,2500 \end{bmatrix} \\ \mathbf{t}^{(2)} &= M\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5000 \\ 0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,7500 \\ 0,2500 \\ 0,2500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5000 \\ 0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,2500 \\ 0,2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6250 \\ 0,7500 \\ 0,1250 \\ 0,8125 \\ 0,1875 \\ 0,0625 \\ 0,9375 \\ 0,5000 \\ 0,3125 \end{bmatrix}$$

Algumas iteradas adicionais são

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0,6875 \\ 0,8906 \\ 0,2344 \\ 0,9688 \\ 0,3750 \\ 0,1250 \\ 1,0781 \\ 0,6094 \\ 0,3906 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(10)} = \begin{bmatrix} 0,7791 \\ 1,1230 \\ 0,4573 \\ 1,2770 \\ 0,7236 \\ 0,3131 \\ 1,2848 \\ 0,8827 \\ 0,5446 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(20)} = \begin{bmatrix} 0,7845 \\ 1,1380 \\ 0,4716 \\ 1,2963 \\ 0,7486 \\ 0,3263 \\ 1,2992 \\ 0,9010 \\ 0,5567 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(30)} = \begin{bmatrix} 0,7846 \\ 1,1383 \\ 0,4719 \\ 1,2967 \\ 0,7491 \\ 0,3265 \\ 1,2995 \\ 0,9014 \\ 0,5570 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Todas iteradas a partir da trigésima são iguais a  $\mathbf{t}^{(30)}$  até quatro casas decimais. Conseqüentemente,  $\mathbf{t}^{(30)}$  é a solução exata até quatro casas decimais. Isto confere com nosso resultado anterior, dado na Equação (4).

O esquema de iteração de Jacobi aplicado ao sistema linear (5) em 49 incógnitas produz iteradas que começam a repetir as quatro primeiras casas decimais a partir de 119 iterações. Assim,  $\mathbf{t}^{(119)}$  daria as 49 temperaturas corretas até quatro casas decimais do caso (c).

**Uma Técnica de Monte Carlo** Nesta seção nós descrevemos uma assim chamada *técnica de Monte Carlo* para calcular a temperatura em um único ponto de malha interior do problema discreto sem ser preciso calcular as temperaturas dos demais pontos de malha interiores. Inicialmente, nós definimos um *passeio aleatório discreto* na rede. Isto significa um caminho dirigido ao longo de linhas da rede (Figura 11.12.6) que liga uma sucessão de pontos de malha e que é tal que a direção de partida de cada ponto de malha é escolhida aleatoriamente. Cada uma das quatro possíveis direções de partida de cada ponto de malha ao longo do caminho deve ser igualmente provável.

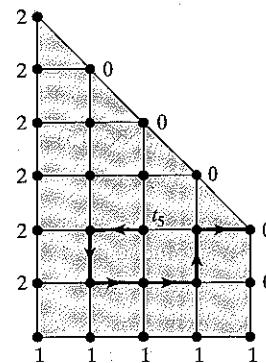


Figura 11.12.6

Utilizando a propriedade enunciada a seguir, nós podemos calcular a temperatura em um ponto de malha interior específico, usando passeios aleatórios.

### Teorema 11.12.3

#### Propriedade do Passeio Aleatório

Seja  $W_1, W_2, \dots, W_n$  uma sucessão de passeios aleatórios, todos começando em um mesmo ponto de malha interior especificado. Sejam  $t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*$  as temperaturas nos primeiros pontos de malha de contorno encontrados ao longo de cada um destes passeios aleatórios. Então o valor médio  $(t_1^* + t_2^* + \dots + t_n^*)/n$  destas temperaturas de contorno tende à temperatura no ponto de malha interior especificado, quando o número  $n$  de passeios aleatórios cresce indefinidamente.

Esta propriedade é uma consequência da propriedade do valor médio discreto satisfeita pelas temperaturas dos pontos de malha. A prova da propriedade do passeio aleatório envolve conceitos elementares da Teoria de Probabilidade e não será dada aqui.

Na Tabela 2 nós exibimos os resultados de um grande número de passeios aleatórios gerados por computador para

obter a temperatura  $t_5$  do caso (b) da Figura 11.12.6 da malha de nove pontos. A primeira coluna lista o número  $n$  do passeio aleatório. A segunda coluna lista a temperatura  $t_n^*$  do primeiro ponto de malha de contorno encontrado ao longo do passeio aleatório correspondente. A última coluna dá a média acumulada das temperaturas de contorno encontradas ao longo dos  $n$  passeios aleatórios. Assim, depois de 1000 passeios aleatórios nós temos a aproximação  $t_5 \approx 0,7550$ . Isto equivale ao valor exato  $t_5 = 0,7491$  que calculamos acima. Como pode ser visto, a convergência ao valor exato não é muito rápida.

TABELA 2

$n$	$t_n^*$	$(t_1^* + \dots + t_n^*)/n$	$n$	$t_n^*$	$(t_1^* + \dots + t_n^*)/n$
1	1	1,0000	20	1	0,9500
2	2	1,5000	30	0	0,8000
3	1	1,3333	40	0	0,8250
4	0	1,0000	50	2	0,8400
5	2	1,2000	100	0	0,8300
6	0	1,0000	150	1	0,8000
7	2	1,1429	200	0	0,8050
8	0	1,0000	250	1	0,8240
9	2	1,1111	500	1	0,7860
10	0	1,0000	1000	0	0,7550

### Conjunto de Exercícios 11.12

- Uma placa no formato de um disco circular tem temperaturas de contorno de  $0^\circ$  na metade esquerda de sua circunferência e de  $1^\circ$  na metade direita de sua circunferência. Ao disco sobreponemos uma rede com quatro pontos de malha interiores (ver figura dada).
  - Usando a propriedade do valor médio discreta, escreva o sistema linear  $4 \times 4$  determinado por  $\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b}$  que determina as temperaturas aproximadas nos quatro pontos de malha interiores.
  - Resolva o sistema linear da parte (a).
  - Use o esquema de iteração de Jacobi com  $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{0}$  para gerar as iteradas  $\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \mathbf{t}^{(3)}, \mathbf{t}^{(4)}$  e  $\mathbf{t}^{(5)}$  para o sistema linear da parte (a). Qual é o “vetor-erro”  $\mathbf{t}^{(5)} - \mathbf{t}$ , onde  $\mathbf{t}$  é a solução encontrada na parte (b)?
  - Usando certos métodos avançados, pode ser determinado que as temperaturas exatas nos quatro pontos de rede são  $t_1 = t_3 = 0,2871$  e  $t_2 = t_4 = 0,7129$ . Quais são os erros percentuais nos valores encontrados na parte (b)?

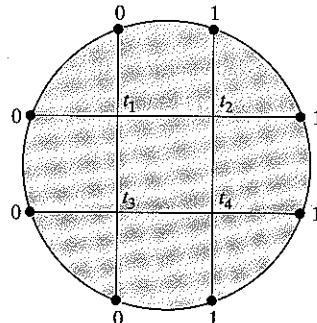


Figura Ex-1

- Use o Teorema 11.12.1 para encontrar a temperatura de equilíbrio exata no centro de disco de Exercício 1.
- Calcule as primeiras duas iteradas  $\mathbf{t}^{(1)}$  e  $\mathbf{t}^{(2)}$  para o caso (b) da Figura 11.12.3 com nove pontos de malha interiores [Equação (2)] quando escolhemos

$$\mathbf{t}^{(0)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

como a iterada inicial.

4. O passeio aleatório ilustrado na Figura Ex-4a pode ser descrito pelas seis flechas

$\leftarrow \downarrow \rightarrow \uparrow \rightarrow$

que especificam as direções de partida dos sucessivos pontos de malha ao longo do passeio. A Figura Ex-4b é um agrupamento  $10 \times 10$  de 100 flechas orientadas aleatoriamente, geradas por computador. Use estas flechas para determinar passeios aleatórios para aproximar a temperatura  $t_5$ , como aparece na Tabela 2. Proceda da seguinte maneira:

- (1) Tome os dois últimos dígitos do número do seu telefone. Use o último dígito para especificar a linha e o outro para especificar a coluna.
- (2) Vá à flecha do agrupamento que tem este número de linha e coluna.
- (3) Usando esta flecha como ponto de partida, siga pelo agrupamento de flechas como você faria para ler um livro (da esquerda para a direita e de cima para baixo). Começando no ponto rotulado  $t_5$  na Figura Ex-4a e usando a seqüência de flechas obtida para especificar uma sucessão de direções, move de ponto de malha para ponto de malha até alcançar um ponto de malha de contorno. Isto completa seu primeiro passeio aleatório. Registre a temperatura do ponto de malha de contorno. (Se você chegou ao fim do agrupamento de flechas, continue com a flecha do canto superior esquerdo.)
- (4) Retorne ao ponto de malha interior rotulado  $t_5$  e comece onde você parou no agrupamento de flechas; gere seu próximo passeio aleatório. Repita este processo até completar 10 passeios aleatórios e registrar 10 temperaturas de contorno.
- (5) Calcule a média das 10 temperaturas de contorno registradas. (O valor exato é  $t_5 = 0,7491$ .)

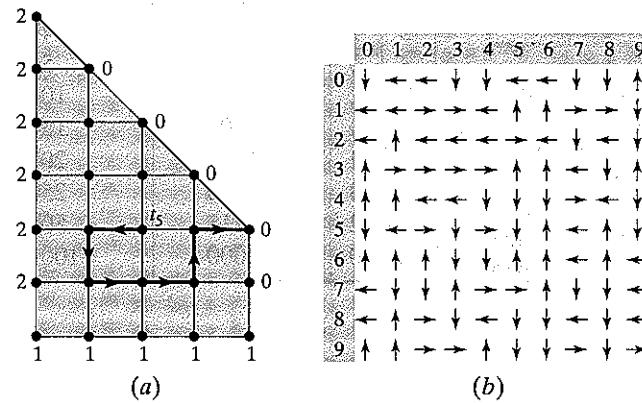


Figura Ex-4

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais 11.1.2

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Suponha que nós temos a região quadrada descrita por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

e suponha que a distribuição de temperatura de equilíbrio  $u(x, y)$  ao longo do contorno é dada por  $u(x, 0) = T_B$ ,  $u(x, 1) = T_T$ ,  $u(0, y) = T_L$  e  $u(1, y) = T_R$ . Suponha também que esta região é particionada em uma malha  $(n+1) \times (n+1)$  usando

$$x_i = \frac{i}{n} \quad \text{e} \quad y_j = \frac{j}{n}$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  e  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ . Se as temperaturas nos pontos de malha interiores são denotadas por

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j) = u(i/n, j/n)$$

então mostre que

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ . Para tratar dos pontos de contorno, defina

$$u_{0,j} = T_L, \quad u_{n,j} = T_R, \quad u_{i,0} = T_B \quad \text{e} \quad u_{i,n} = T_T$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ . Agora defina

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como a matriz  $(n+1) \times (n+1)$  com a matriz identidade  $n \times n$  no canto superior direito, um 1 no canto inferior esquerdo e zeros nas demais entradas. Por exemplo,

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e assim por diante. Definindo a matriz  $(n+1) \times (n+1)$

$$M_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+1}^T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

mostre que se  $U_{n+1}$  é a matriz  $(n+1) \times (n+1)$  com entradas  $u_{i,j}$ , então o conjunto de equações

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$  pode ser escrito como a equação matricial

$$U_{n+1} = \frac{1}{4}(M_{n+1}U_{n+1} + U_{n+1}M_{n+1})$$

onde nós apenas consideramos os elementos de  $U_{n+1}$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ .

- T2.** Os resultados do exercício precedente e a discussão no texto sugerem o seguinte algoritmo para resolver a temperatura de equilíbrio na região quadrada

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

dadas as condições de contorno

$$u(x, 0) = T_B, u(x, 1) = T_T, u(0, y) = T_L, u(1, y) = T_R$$

- (1) Escolha um valor de  $n$  e um palpite inicial, digamos

$$U_{n+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & T_L & \cdots & T_L & 0 \\ T_B & 0 & \cdots & 0 & T_T \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_B & 0 & \cdots & 0 & T_T \\ 0 & T_R & \cdots & T_R & 0 \end{bmatrix}$$

- (2) Para cada valor de  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , calcule  $U_{n+1}^{(k+1)}$  usando

$$U_{n+1}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(M_{n+1}U_{n+1}^{(k)} + U_{n+1}^{(k)}M_{n+1})$$

onde  $M_{n+1}$  é a matriz definida no Exercício T1. Agora ajuste  $U_{n+1}^{(k+1)}$  substituindo todas as entradas de esquina pelas entradas de esquina iniciais em  $U_{n+1}^{(0)}$ . [Observação. As entradas de esquina de uma matriz são as entradas nas primeiras linhas e colunas.]

- (3) Continue este processo até que  $U_{n+1}^{(k+1)} - U_{n+1}^{(k)}$  é aproximadamente a matriz zero. Isto sugere que

$$U_{n+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} U_{n+1}^{(k)}$$

Use um computador e este algoritmo para resolver em  $u(x, y)$ , sabendo que

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 2$$

Escolha  $n = 6$  e calcule até chegar a  $U_{n+1}^{(30)}$ . A solução exata pode ser expressa como

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh}((2m-1)\pi x) \operatorname{sen}((2m-1)\pi y)}{(2m-1) \operatorname{senh}((2m-1)\pi)}$$

Use um computador para calcular  $u(i/6, j/6)$  para  $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  e então compare seus resultados com os valores de  $u(i/6, j/6)$  em  $U_{n+1}^{(30)}$ .

## 11.13 TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

Nesta seção veremos como a construção da imagem de um corte transversal de um corpo humano a partir da análise do escaneamento por raios X leva a um sistema linear inconsistente. Apresentamos uma técnica iterativa que fornece uma "solução aproximada" do sistema linear.

**PRÉ-REQUISITOS:** Sistemas Lineares  
Logaritmos Naturais  
Espaço Euclidiano  $R^n$

O problema básico da tomografia computadorizada é construir a imagem de uma seção transversal do corpo humano usando dados coletados por uma grande quantidade de feixes individuais de raios X que são emitidos ao longo da seção transversal. Esses dados são processados por um computador e a seção transversal computada é exibida num monitor de vídeo.

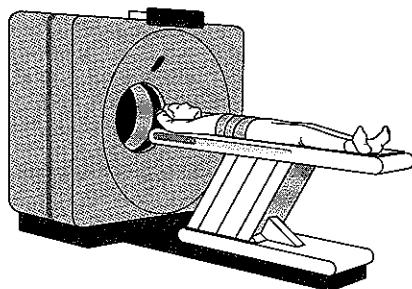


Figura 11.13.1

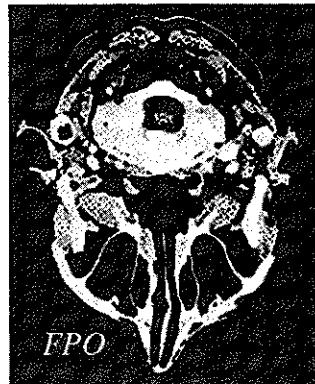


Figura 11.13.2

A Figura 11.13.1 é um diagrama do sistema de tomografia computadorizada da General Electric, mostrando um paciente preparado para ter uma seção transversal de sua cabeça escaneada por um feixe de raios X. A Figura 11.13.2 mostra uma seção transversal típica de uma cabeça humana obtida por este método.

O primeiro sistema comercial de tomografia computadorizada para uso médico foi desenvolvido em 1971 por G. N.

Hounsfield, da firma EMI, Ltd., na Inglaterra. Em 1979, Hounsfield e A. M. Cormack receberam o prêmio Nobel por seu trabalho pioneiro nesta área. Como nós veremos nesta seção, a construção de uma seção transversal ou uma tomografia requer a resolução de um sistema muito grande de equações lineares. Certos algoritmos, da classe de técnicas de reconstrução algébrica, podem ser usados para resolver estes sistemas lineares, cujas soluções produzem as seções transversais em formato digital.

**Modos de Escanear** Ao contrário de imagens de raios X convencionais que são obtidas projetando os raios X perpendicularmente ao plano da imagem, os tomógrafos são construídos a partir de milhares de feixes finíssimos de raios X que *ficam no plano* da seção transversal. Depois de passar pela seção transversal, as intensidades destes feixes são medidas por um detector de raios X e as medidas são transmitidas a um computador, onde são processadas. As Figuras 11.13.3 e 11.13.4 ilustram dois modos possíveis de escanear a seção transversal: o *modo paralelo* e o *modo de leque*. No modo paralelo, um único par de fonte e de detector de raios X é transladado através do campo de visão que contém a seção transversal e é registrada uma grande quantidade de feixes paralelos. Em seguida, o par fonte e detector é girado por um pequeno ângulo e é feito o registro de um novo conjunto de medidas. Este processo é repetido até alcançar o número de medidas desejado. Na máquina original de 1971, por exemplo, eram tomadas 160 medidas paralelas ao longo de 180 ângulos espaçados de  $1^\circ$ , num total de  $160 \times 180 = 28.800$  medidas de intensidade de feixe. Cada escaneamento destes levava cerca de cinco e meio minutos.

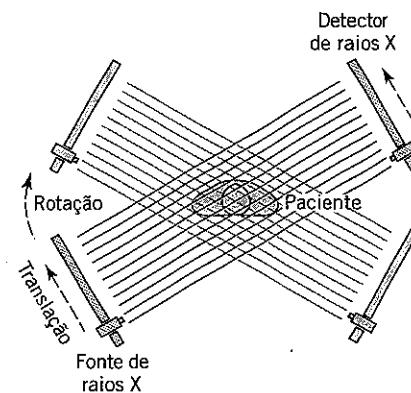


Figura 11.13.3 O modo paralelo.

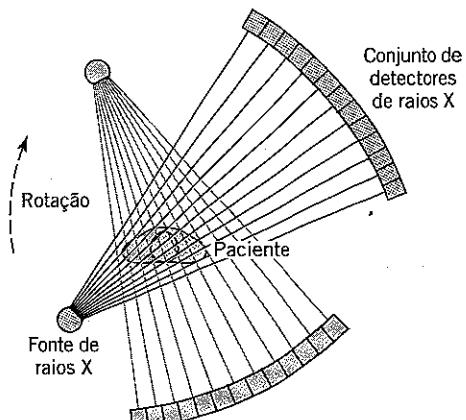


Figura 11.13.4 O modo de leque.

No modo de leque de escanear, uma única fonte de raios X gera um leque de raios colimados cujas intensidades são medidas simultaneamente por uma coleção de detectores do outro lado do campo de visão. A fonte e o conjunto de detectores são girados por muitos ângulos e um conjunto de medidas é tomado em cada ângulo até completar o escaneamento. No sistema de tomografia computadorizada da General Electric, que usa o modo de leque, cada escaneamento leva um segundo.

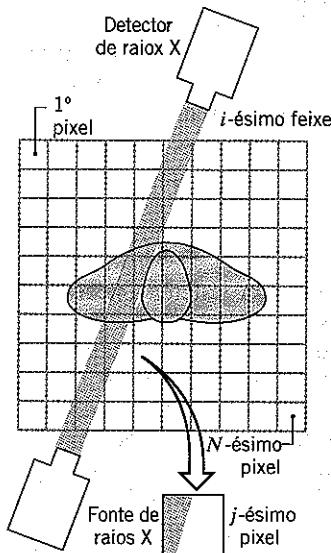


Figura 11.13.5

**Dedução das Equações** Para ver como a seção transversal é reconstruída a partir das muitas medidas de feixes, considere a Figura 11.13.5. Aqui o campo de visão no qual está situada a seção transversal foi dividido em muitos *pixels* quadrados (um pixel é um elemento pictográfico da figura digitalizada) numerados de 1 a  $N$ , como indicado. O que queremos é determinar a densidade dos raios X de cada pixel. No sistema da EMI foram usados 6400 pixels dispostos num arranjo de  $80 \times 80$ . O sistema da General Electric usa 262.144 pixels dispostos num arranjo de  $512 \times 512$ , cada pixel medindo cerca de 1 mm de lado. Depois de determinar as densidades dos pixels pelo método que descreveremos a seguir, elas são reproduzidas num monitor de vídeo, cada pixel sendo sombreado com um nível de cinza proporcional à sua densidade de raios X. Como os diversos tecidos humanos têm densidades de raios X diferentes, a imagem no vídeo distingue claramente os diversos tecidos e órgãos na seção transversal.

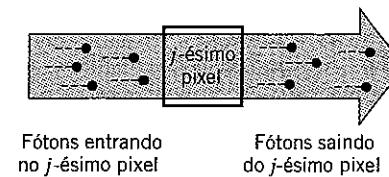


Figura 11.13.6

A Figura 11.13.6 mostra um único pixel sendo atravessado, num sentido paralelo aos lados, por um feixe de raios X de aproximadamente a mesma largura do pixel. Os fótons que constituem o feixe de raios X são absorvidos pelo tecido dentro do pixel numa taxa proporcional à densidade de raios X do tecido. Quantitativamente, a densidade de raios X do  $j$ -ésimo pixel é denotada por  $x_j$  e é definida por

$$x_j = \ln \left( \frac{\text{número de fótons entrando no } j\text{-ésimo pixel}}{\text{número de fótons saindo do } j\text{-ésimo pixel}} \right)$$

onde o “ln” denota a função logarítmico natural. Usando a propriedade logarítmica  $\ln(a/b) = -\ln(b/a)$ , nós também temos

$$x_j = -\ln \left( \frac{\text{fração de fótons que passa pelo }}{\text{j-ésimo pixel sem ser absorvida}} \right)$$

Se o feixe de raios X passa por uma fileira inteira de pixels (Figura 11.13.7), então o número de fótons saindo de um pixel é igual ao número de fótons entrando no próximo pixel na fileira. Se estes pixels são numerados 1, 2, ...,  $n$ , então, pela propriedade aditiva da função logarítmica, temos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \ln \left( \frac{\text{número de fótons entrando no primeiro pixel}}{\text{número de fótons saindo do } n\text{-ésimo pixel}} \right) \\ &= -\ln \left( \frac{\text{fração de fótons que passa }}{\text{pela linha de } n \text{ pixels}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Assim, para determinar a densidade de raios X total de uma fileira de pixels, nós simplesmente somamos as densidades dos pixels individuais.

Em seguida, considere o feixe de raios X da Figura 11.13.5. A **densidade de feixe** do  $i$ -ésimo feixe de um escaneamento é denotada por  $b_i$  e é dada por

$$\begin{aligned} b_i &= \ln \left( \frac{\text{número de fótons do } i\text{-ésimo feixe entrando no detector}}{\text{sem ter a seção transversal no campo de visão}} \right) \\ &\quad \frac{\text{número de fótons do } i\text{-ésimo feixe entrando no detector}}{\text{com a seção transversal no campo de visão}} \\ &= -\ln \left( \frac{\text{fração de fótons do } i\text{-ésimo feixe que }}{\text{passa pela seção transversal sem }} \right. \\ &\quad \left. \text{ser absorvido} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

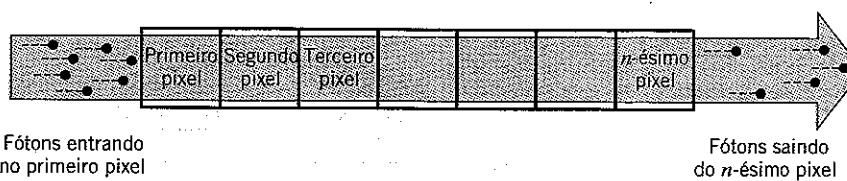


Figura 11.13.7

O numerador da primeira expressão de  $b_i$  é obtido executando um escaneamento de calibração sem ter a seção transversal no campo de visão. As medidas que resultam no detector são armazenadas na memória do computador. Depois é executando um escaneamento clínico com a seção transversal no campo de visão, sendo calculadas todos as densidades  $b_i$  e os valores armazenados para processamento adicional.

Para cada feixe que passa paralelo por dentro de uma fileira de pixels nós devemos ter

$$\begin{pmatrix} \text{fração de fôtons do feixe que passa pela fileira de pixels sem ser absorvida} \\ \vdots \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{fração de fôtons do feixe que passa pela seção transversal sem ser absorvida} \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

Assim, se o  $i$ -ésimo feixe passa paralelo por dentro de uma fileira de pixels, então das Equações (1) e (2) segue que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = b_i$$

Nesta equação, a densidade  $b_i$  é conhecida pelas medidas de calibração e clínica que são feitas e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são densidades desconhecidas de pixel que devem ser determinadas.

Mais geralmente, se o  $i$ -ésimo feixe passa paralelo por dentro de cada pixel de uma linha ou coluna de pixels numerados  $j_1, j_2, \dots, j_p$ , então nós temos

$$x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_p} = b_i$$

**Se definirmos**

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = j_1, j_2, \dots, j_p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então poderemos escrever esta equação como

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N = b_i \quad (3)$$

Nós nos referiremos à Equação (3) como a *i*-ésima equação de feixe.

Olhando para a Figura 11.13.5 vemos que, entretanto, os feixes de um escaneamento não necessariamente passam paralelos por dentro de cada pixel de uma linha ou coluna de pixels. Ao invés disto, um feixe típico passa diagonalmente por cada pixel em seu caminho. Há muitas maneiras de lidar com isto. Na Figura 11.13.8 nós delineamos três métodos de definir as quantidades  $a_{ij}$  que aparecem na Equação (3), cada um dos quais reduz a quantidade  $a_{ij}$  à definição dada acima quando o feixe passa paralelamente por uma linha ou coluna de pixels. Lendo de cima para baixo, cada método é mais exato que o anterior, mas apresenta maior dificuldade computacional.

Usando qualquer um dos três métodos para definir os  $a_{ij}$  na *i*-ésima equação de feixe, nós podemos escrever o conjunto de  $M$  equações de feixe de um escaneamento completo como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M \end{aligned} \quad (4)$$

Deste modo temos um sistema linear de  $M$  equações (as  $M$  equações de feixe) em  $N$  incógnitas (as  $N$  densidades de pixel).

Dependendo do número de feixes e de pixels usados, nós podemos ter  $M > N$ ,  $M = N$  ou  $M < N$ . Nós só vamos considerar o assim chamado caso *sobre determinado*, em que  $M > N$ , no qual há mais feixes no escaneamento do que pixels no campo de visão. Devido aos erros experimentais e de modelagem inerentes ao problema, nós não deveríamos esperar que o nosso sistema linear tivesse uma solução matemática exata para a densidade dos pixels. Na próxima seção nós tentamos encontrar uma solução “aproximada” para este sistema linear.

**Técnicas de Reconstrução Algébrica** Muitos foram os algoritmos desenvolvidos para tratar o sistema sobre determinado (4). O que nós iremos descrever pertence a uma assim

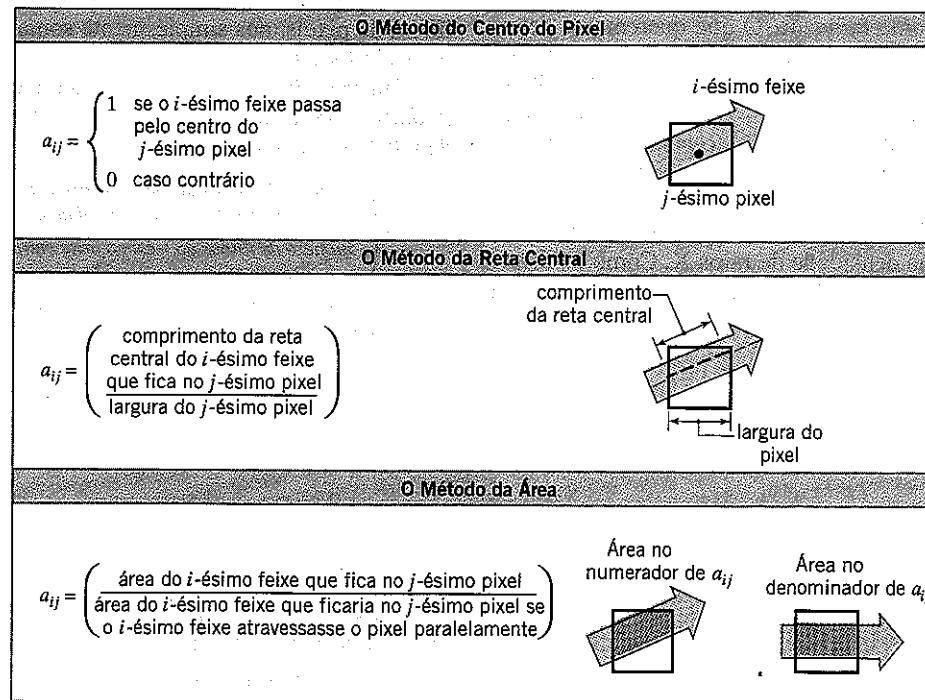


Figura 11.13.8

chamada classe de **Técnicas de Reconstrução Algébrica** (TRA). Este método, que pode ser visto como derivando de uma técnica iterativa introduzida originalmente por S. Kaczmarz em 1937, foi o método utilizado na primeira máquina comercializada. Para introduzir esta técnica, considere o seguinte sistema de três equações em duas incógnitas:

$$\begin{aligned} L_1: \quad x_1 + x_2 &= 2 \\ L_2: \quad x_1 - 2x_2 &= -2 \\ L_3: \quad 3x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned} \quad (5)$$

As retas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  determinadas por estas três equações estão esboçadas no plano  $x_1 x_2$ . Como indicamos na Figura 11.13.9a, as três retas não têm uma interseção comum, de modo que as três equações não têm um solução exata. Contudo, os pontos  $(x_1, x_2)$  do triângulo sombreado delimitado por estas três retas estão todos situados “perto” destas três retas e podem ser considerados como sendo soluções “aproximadas” de nosso sistema. O seguinte procedimento iterativo descreve uma construção geométrica para gerar pontos na fronteira desta região triangular (Figura 11.13.9b).

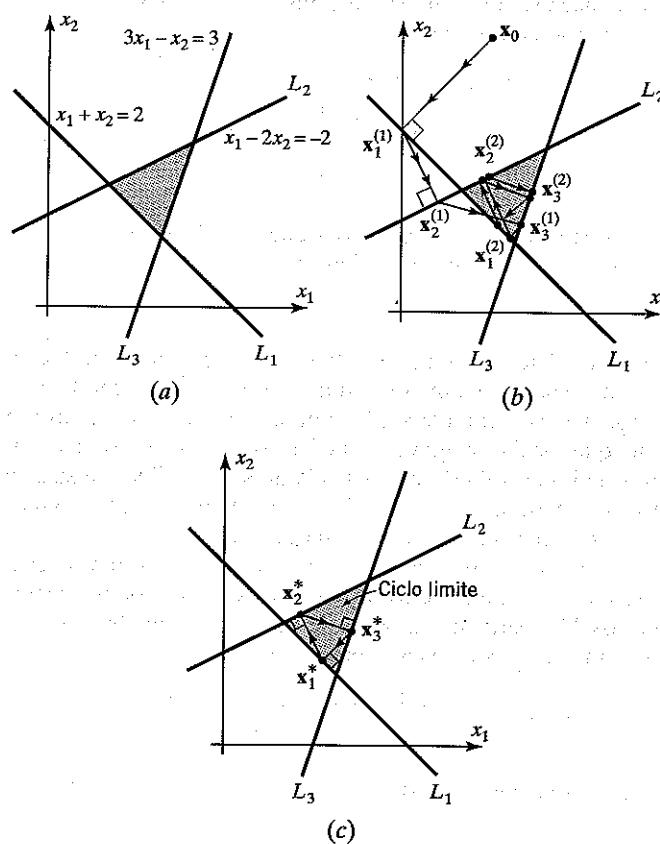


Figura 11.13.9

### Algoritmo 1

**Passo 0.** Escolha um ponto inicial  $\mathbf{x}_0$  arbitrário no plano  $x_1 x_2$ .

**Passo 1.** Projete  $\mathbf{x}_0$  ortogonalmente sobre a primeira reta  $L_1$  e chame a projeção de  $\mathbf{x}_1^{(1)}$ . O sobrescrito (1) indica que esta é a primeira de uma sucessão de rodadas do algoritmo.

**Passo 2.** Projete  $\mathbf{x}_1^{(1)}$  ortogonalmente sobre a segunda reta  $L_2$  e chame a projeção de  $\mathbf{x}_2^{(1)}$ .

**Passo 3.** Projete  $\mathbf{x}_2^{(1)}$  ortogonalmente sobre a terceira reta  $L_3$  e chame a projeção de  $\mathbf{x}_3^{(1)}$ .

**Passo 4.** Tome  $\mathbf{x}_3^{(1)}$  como o novo valor de  $\mathbf{x}_0$  e repita a rodada de passos de 1 a 3. Na segunda rodada, chame os pontos projetados de  $\mathbf{x}_1^{(2)}$ ,  $\mathbf{x}_2^{(2)}$  e  $\mathbf{x}_3^{(2)}$ , na terceira rodada chame os pontos projetados de  $\mathbf{x}_1^{(3)}$ ,  $\mathbf{x}_2^{(3)}$  e  $\mathbf{x}_3^{(3)}$  e assim por diante.

Este algoritmo gera três seqüências de pontos

$$L_1: \quad \mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{x}_1^{(3)}, \dots$$

$$L_2: \quad \mathbf{x}_2^{(1)}, \mathbf{x}_2^{(2)}, \mathbf{x}_2^{(3)}, \dots$$

$$L_3: \quad \mathbf{x}_3^{(1)}, \mathbf{x}_3^{(2)}, \mathbf{x}_3^{(3)}, \dots$$

que estão nas três retas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , respectivamente. Pode ser mostrado que, sempre que as três retas não são paralelas, a primeira seqüência converge a um ponto  $\mathbf{x}_1^*$  de  $L_1$ , a segunda converge a um ponto  $\mathbf{x}_2^*$  de  $L_2$  e a terceira a um ponto  $\mathbf{x}_3^*$  de  $L_3$  (Figura 11.13.9c). Estes três pontos limite formam o que se chama um *ciclo-límite* do processo iterativo. Pode ser mostrado que o ciclo-límite independe do ponto inicial  $\mathbf{x}_0$ .

A seguir estudaremos as fórmulas específicas necessárias para aplicar a projeção ortogonal do Algoritmo 1. Primeiro expressamos a equação

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$$

da reta no espaço  $x_1 x_2$  em forma vetorial por

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$$

onde

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O teorema a seguir dá a fórmula necessária da projeção (Exercício 5).

### Teorema 11.13.1 Fórmula da Projeção Ortogonal

Sejam  $L$  uma reta em  $R^2$  de equação  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  e  $\mathbf{x}^*$  um ponto qualquer de  $R^2$  (Figura 11.13.10). Então a projeção ortogonal  $\mathbf{x}_p$  de  $\mathbf{x}^*$  sobre  $L$  é dada por

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}^* + \frac{(b - \mathbf{a}^T \mathbf{x}^*)}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

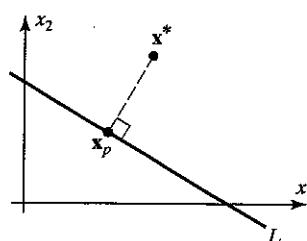


Figura 11.13.10

**EXEMPLO 1 Usando o Algoritmo 1**

Nós podemos utilizar o Algoritmo 1 para obter uma solução aproximada do sistema linear dado em (5) e ilustrado na Figura 11.13.9. Escrevendo as equações das três retas como

$$L_1: \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = b_1$$

$$L_2: \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} = b_2$$

$$L_3: \mathbf{a}_3^T \mathbf{x} = b_3$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = 2, \quad b_2 = -2, \quad b_3 = 3$$

obtemos, pelo Teorema 11.13.1, a expressão

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{x}_{k-1}^{(p)})}{\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k} \mathbf{a}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

para o esquema iterativo do Algoritmo 1, onde  $p = 1$  para a primeira rodada de iteração,  $p = 2$  para a segunda rodada de iteração e assim por diante. Ao fim de cada ciclo de iterações, ou seja, depois de calcular  $\mathbf{x}_3^{(p)}$ , iniciamos o ciclo seguinte com  $\mathbf{x}_0$  tomado como  $\mathbf{x}_3^{(p)}$ .

A Tabela 1 dá o resultado numérico de seis rodadas de iterações começando com o ponto inicial  $\mathbf{x}_0 = (1, 3)$ .

TABELA 1

	$x_1$	$x_2$
$\mathbf{x}_0$	1,00000	3,00000
$\mathbf{x}_1^{(1)}$	0,00000	2,00000
$\mathbf{x}_2^{(1)}$	0,40000	1,20000
$\mathbf{x}_3^{(1)}$	1,30000	0,90000
$\mathbf{x}_1^{(2)}$	1,20000	0,80000
$\mathbf{x}_2^{(2)}$	0,88000	1,44000
$\mathbf{x}_3^{(2)}$	1,42000	1,26000
$\mathbf{x}_1^{(3)}$	1,08000	0,92000
$\mathbf{x}_2^{(3)}$	0,83200	1,41600
$\mathbf{x}_3^{(3)}$	1,40800	1,22400
$\mathbf{x}_1^{(4)}$	1,09200	0,90800
$\mathbf{x}_2^{(4)}$	0,83680	1,41840
$\mathbf{x}_3^{(4)}$	1,40920	1,22760
$\mathbf{x}_1^{(5)}$	1,09080	0,90920
$\mathbf{x}_2^{(5)}$	0,83632	1,41816
$\mathbf{x}_3^{(5)}$	1,40908	1,22724
$\mathbf{x}_1^{(6)}$	1,09092	0,90908
$\mathbf{x}_2^{(6)}$	0,83637	1,41818
$\mathbf{x}_3^{(6)}$	1,40909	1,22728

Usando certas técnicas que são impraticáveis para sistemas lineares muito grandes, podemos mostrar que os valores exatos dos pontos do ciclo-limite deste exemplo são

$$\mathbf{x}_1^* = \left( \frac{12}{11}, \frac{10}{11} \right) = (1,09090\dots, 0,90909\dots)$$

$$\mathbf{x}_2^* = \left( \frac{46}{55}, \frac{78}{55} \right) = (0,83636\dots, 1,41818\dots)$$

$$\mathbf{x}_3^* = \left( \frac{31}{22}, \frac{27}{22} \right) = (1,40909\dots, 1,22727\dots)$$

Pode ser observado que na sexta rodada do algoritmo obtemos uma excelente aproximação do ciclo-limite. Qualquer uma das três iteradas  $\mathbf{x}_1^{(6)}$ ,  $\mathbf{x}_2^{(6)}$  ou  $\mathbf{x}_3^{(6)}$  pode ser usada como uma solução aproximada do sistema linear. (A grande discrepância nos valores de  $\mathbf{x}_1^{(6)}$ ,  $\mathbf{x}_2^{(6)}$  e  $\mathbf{x}_3^{(6)}$  é devida à natureza artificial deste exemplo ilustrativo. Estas discrepâncias seriam muito menores em problemas práticos.)

Para generalizar o Algoritmo 1 de tal modo que aplique a sistemas sobredeterminados

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ &\vdots & & \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M \end{aligned} \quad (6)$$

de  $M$  equações em  $N$  incógnitas, nós introduzimos os vetores-coluna  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{a}_i$  como segue:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{iN} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Com estes vetores, as  $M$  equações que constituem o nosso sistema linear (6) podem ser escritas em formato vetorial como

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Cada uma destas  $M$  equações define o que é chamado um **hiperplano** no espaço euclidiano  $N$ -dimensional  $R^N$ . Em geral, estes hiperplanos não têm interseção comum e assim procuramos um ponto que esteja “razoavelmente” próximo de todos. Um tal ponto será uma solução aproximada do sistema linear e suas  $N$  entradas determinarão densidades de pixel aproximadas com as quais formaremos a seção transversal desejada.

Como no caso bidimensional, nós introduzimos um processo iterativo que gera ciclos de sucessivas projeções ortogonais sobre os  $M$  hiperplanos a partir de um ponto arbitrário do  $R^N$ . Denotamos estas sucessivas iteradas por

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \begin{cases} \text{a iterada pertence ao } k\text{-ésimo hiperplano} \\ \text{gerado durante o } p\text{-ésimo ciclo de iterações} \end{cases}$$

O algoritmo é como segue:

**Algoritmo 2**

**Passo 0.** Escolha um ponto  $\mathbf{x}_0$  arbitrário do  $R^N$ .

**Passo 1.** Para a primeira rodada, tome  $p = 1$ .

**Passo 2.** Para  $k = 1, 2, \dots, M$ , calcule

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{x}_{k-1}^{(p)})}{\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k} \mathbf{a}_k$$

**Passo 3.** Denote  $\mathbf{x}_0^{(p+1)} = \mathbf{x}_M^{(p)}$ .

**Passo 4.** Aumente o número da rodada  $p$  por 1 e retorne ao passo 2.

No passo 2, a iterada  $\mathbf{x}_k^{(p)}$  é chamada a *projeção ortogonal* de  $\mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$  sobre o hiperplano  $\mathbf{a}_k^T \mathbf{x} = b_k$ . Conseqüentemente, como no caso bidimensional, este algoritmo determina uma seqüência de projeções ortogonais de um hiperplano sobre o seguinte até chegar ao último, quando então retornamos, cada vez, voltando a projetar sobre o primeiro.

Pode ser mostrado que se os vetores  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M$  geram o  $R^N$ , então as iteradas  $\mathbf{x}_M^{(1)}, \mathbf{x}_M^{(2)}, \mathbf{x}_M^{(3)}, \dots$  no  $M$ -ésimo hiperplano convergem a um ponto  $\mathbf{x}_M^*$  naquele hiperplano, que não depende da escolha do ponto inicial  $\mathbf{x}_0$ . Na tomografia computadorizada é escolhida uma das iteradas  $\mathbf{x}_M^{(p)}$ , com  $p$  suficientemente grande, como uma solução aproximada do sistema linear para as densidades de pixel.

Observe que para o método do centro de pixel, a quantidade escalar  $\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k$  que aparece na equação do passo 2 do algoritmo é simplesmente o número de pixels nos quais o  $k$ -ésimo feixe passa pelo centro. Analogamente, note que a quantidade escalar

$$b_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$$

naquela mesma equação pode ser interpretada como o *excesso de densidade do  $k$ -ésimo feixe* que resulta se as densidades de pixel são tomadas como sendo iguais às entradas de  $\mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$ . Isto fornece a seguinte interpretação do nosso esquema de iteração do tipo TRA para o método do centro de pixel: *Gere a densidade de pixel de cada iterada distribuindo o excesso de densidade de feixe de sucessivos feixes do escaneamento de maneira uniforme entre aqueles pixels nos quais o feixe passa pelo centro. Quando for alcançado o último feixe do escaneamento, retorne ao primeiro feixe e continue.*

### EXEMPLO 2 Usando o Algoritmo 2

Nós podemos usar o Algoritmo 2 para obter as densidades de pixel desconhecidas dos 9 pixels que estão dispostas na Figura 11.13.11. Estes 9 pixels são escaneados, usando o modo paralelo, com 12 feixes cujas densidades de feixe são medidas e indicadas na figura. Nós escolhemos o método do centro de pixel para montar as 12 equações. (No Exercício 7 e 8 o leitor é con-

TABELA 2

Densidades de Pixel									
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$\mathbf{x}_0$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\mathbf{x}_1^{(1)}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_2^{(1)}$	0,00	0,00	0,00	5,00	5,00	5,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_3^{(1)}$	2,67	2,67	2,67	5,00	5,00	5,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_4^{(1)}$	2,67	2,67	2,67	5,00	5,00	5,37	4,33	4,71	4,71
$\mathbf{x}_5^{(1)}$	2,67	2,67	3,44	5,00	5,77	5,37	5,10	4,71	4,71
$\mathbf{x}_6^{(1)}$	0,49	0,49	3,44	2,83	5,77	5,37	5,10	4,71	4,71
$\mathbf{x}_7^{(1)}$	0,49	0,49	4,93	2,83	5,77	6,87	5,10	4,71	6,20
$\mathbf{x}_8^{(1)}$	0,49	0,84	4,93	2,83	6,11	6,87	5,10	5,05	6,20
$\mathbf{x}_9^{(1)}$	-0,31	0,84	4,93	2,02	6,11	6,87	4,30	5,05	6,20
$\mathbf{x}_{10}^{(1)}$	-0,31	0,13	4,22	2,02	6,11	6,16	4,30	5,05	6,20
$\mathbf{x}_{11}^{(1)}$	1,06	0,13	4,22	2,02	7,49	6,16	4,30	5,05	7,58
$\mathbf{x}_{12}^{(1)}$	1,06	0,13	4,22	0,58	7,49	6,16	2,85	3,61	7,58
$\mathbf{x}_{12}^{(2)}$	2,03	0,69	4,42	1,34	7,49	5,39	2,65	3,04	6,61
$\mathbf{x}_{12}^{(3)}$	1,78	0,51	4,52	1,26	7,49	5,48	2,56	3,22	6,86
$\mathbf{x}_{12}^{(4)}$	1,82	0,52	4,62	1,37	7,49	5,37	2,45	3,22	6,82
$\mathbf{x}_{12}^{(5)}$	1,79	0,49	4,71	1,43	7,49	5,31	2,37	3,25	6,85
$\mathbf{x}_{12}^{(10)}$	1,68	0,44	5,03	1,70	7,49	5,03	2,04	3,29	6,96
$\mathbf{x}_{12}^{(20)}$	1,49	0,48	5,29	2,00	7,49	4,73	1,79	3,25	7,15
$\mathbf{x}_{12}^{(30)}$	1,38	0,55	5,34	2,11	7,49	4,62	1,74	3,19	7,26
$\mathbf{x}_{12}^{(40)}$	1,33	0,59	5,33	2,14	7,49	4,59	1,75	3,15	7,31
$\mathbf{x}_{12}^{(45)}$	1,32	0,60	5,32	2,15	7,49	4,59	1,76	3,14	7,32

↑ Primeira Rodada de Iterações ↓

vidado a montar as equações de feixe usando o método da reta central e o da área.) Como pode ser conferido, as equações de feixe são:

$$\begin{array}{ll} x_7 + x_8 + x_9 = 13,00 & x_3 + x_6 + x_9 = 18,00 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 15,00 & x_2 + x_5 + x_8 = 12,00 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8,00 & x_1 + x_4 + x_7 = 6,00 \\ x_6 + x_8 + x_9 = 14,79 & x_2 + x_3 + x_6 = 10,51 \\ x_3 + x_5 + x_7 = 14,31 & x_1 + x_5 + x_9 = 16,13 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3,81 & x_4 + x_7 + x_8 = 7,04 \end{array}$$

A Tabela 2 ilustra os resultados do esquema iterativo começando com uma iterada inicial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . A tabela dá os valores de cada uma das iteradas da primeira rodada,  $\mathbf{x}_1^{(1)}$  até  $\mathbf{x}_{12}^{(1)}$ , mas depois

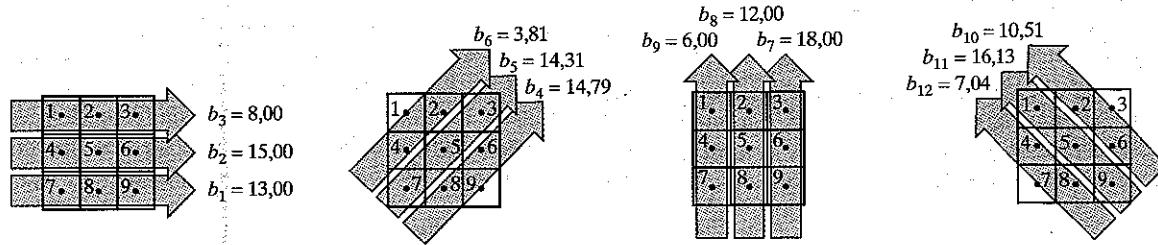


Figura 11.13.11

### Conjunto de Exercícios 11.13

1. (a) Escrevendo  $\mathbf{x}_k^{(p)} = (x_{k1}^{(p)}, x_{k2}^{(p)})$ , mostre que as três equações de projeção

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{x}_{k-1}^{(p)})}{\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k} \mathbf{a}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

para as três retas da Equação (5) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} k = 1: \quad x_{11}^{(p)} &= \frac{1}{2}[2 + x_{01}^{(p)} - x_{02}^{(p)}] \\ &x_{12}^{(p)} = \frac{1}{2}[2 - x_{01}^{(p)} + x_{02}^{(p)}] \\ k = 2: \quad x_{21}^{(p)} &= \frac{1}{5}[-2 + 4x_{11}^{(p)} + 2x_{12}^{(p)}] \\ &x_{22}^{(p)} = \frac{1}{5}[4 + 2x_{11}^{(p)} + x_{12}^{(p)}] \\ k = 3: \quad x_{31}^{(p)} &= \frac{1}{10}[9 + x_{21}^{(p)} + 3x_{22}^{(p)}] \\ &x_{32}^{(p)} = \frac{1}{10}[-3 + 3x_{21}^{(p)} + 9x_{22}^{(p)}] \end{aligned}$$

onde  $(x_{01}^{(p+1)}, x_{02}^{(p+1)}) = (x_{31}^{(p)}, x_{32}^{(p)})$  para  $p = 1, 2, \dots$

- (b) Mostre que os três pares de equações na parte (a) podem ser combinados para produzir

$$\begin{aligned} x_{31}^{(p)} &= \frac{1}{20}[28 + x_{31}^{(p-1)} - x_{32}^{(p-1)}] \\ x_{32}^{(p)} &= \frac{1}{20}[24 + 3x_{31}^{(p-1)} - 3x_{32}^{(p-1)}] \end{aligned} \quad p = 1, 2, \dots$$

onde  $(x_{31}^{(0)}, x_{32}^{(0)}) = (x_{01}^{(1)}, x_{02}^{(1)}) = \mathbf{x}_0^{(1)}$ . [Observação. Usando este par de equações, podemos efetuar um ciclo completo de três projeções ortogonais em um único passo.]

- (c) Como  $x_3^{(p)}$  tende ao ponto limite  $\mathbf{x}_3^*$  quando  $p \rightarrow \infty$ , as equações na parte (b) ficam

$$\begin{aligned} x_{31}^* &= \frac{1}{20}[28 + x_{31}^* - x_{32}^*] \\ x_{32}^* &= \frac{1}{20}[24 + 3x_{31}^* - 3x_{32}^*] \end{aligned}$$

quando  $p \rightarrow \infty$ . Resolva este sistema linear em  $\mathbf{x}_3^* = (x_{31}^*, x_{32}^*)$ . [Observação. As simplificações das fórmulas da TRA descritas neste exercício são impraticáveis para os sistemas lineares grandes que aparecem em problemas reais de tomografia computadorizada.]

disto dá as iteradas somente de  $\mathbf{x}_{12}^{(p)}$  para vários valores de  $p$ . As iteradas  $\mathbf{x}_{12}^{(p)}$  começam a se repetir até duas casas decimais para  $p \geq 45$ , de modo que tomamos as entradas de  $\mathbf{x}_{12}^{(45)}$  como um valor aproximado das 9 densidades de pixel.

Nós terminamos esta seção observando que a área de tomografia computadorizada é, atualmente, uma área de pesquisa bastante ativa. Na verdade, o esquema de TRA discutido aqui já foi substituído, nos sistemas comerciais, por técnicas mais sofisticadas que são mais rápidas e fornecem uma visão mais acurada da seção transversal. Contudo, todas as novas técnicas remontam ao mesmo problema matemático básico: encontrar uma boa solução aproximada de um sistema sobredeterminado e inconsistente constituído de uma grande quantidade de equações lineares.

2. Use o resultado do Exercício 1(b) para encontrar os vetores  $\mathbf{x}_3^{(1)}, \mathbf{x}_3^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_3^{(6)}$  do Exemplo 1 com até cinco casas decimais, usando os seguintes pontos iniciais:  
 (a)  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$    (b)  $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$    (c)  $\mathbf{x}_0 = (148, -15)$   
 3. (a) Mostre diretamente que os pontos

$$\mathbf{x}_1^* = \left(\frac{12}{11}, \frac{10}{11}\right), \quad \mathbf{x}_2^* = \left(\frac{46}{55}, \frac{78}{55}\right), \quad \mathbf{x}_3^* = \left(\frac{31}{22}, \frac{27}{22}\right)$$

do ciclo-limite do Exemplo 1 formam um triângulo cujos vértices estão nas retas  $L_1, L_2$  e  $L_3$  e cujos lados são perpendiculares a estas retas (Figura 11.13.9c).

- (b) Usando as equações obtidas no Exercício 1(a), mostre que se  $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_3^* = \left(\frac{31}{22}, \frac{27}{22}\right)$ , então

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \mathbf{x}_1^* = \left(\frac{12}{11}, \frac{10}{11}\right)$$

$$\mathbf{x}_2^{(1)} = \mathbf{x}_2^* = \left(\frac{46}{55}, \frac{78}{55}\right)$$

$$\mathbf{x}_3^{(1)} = \mathbf{x}_3^* = \left(\frac{31}{22}, \frac{27}{22}\right)$$

[*Observação.* Cada parte deste exercício mostra que as projeções ortogonais de qualquer ponto do ciclo-limite ficam girando indefinidamente pelo ciclo-limite.]

4. As seguintes retas

$$L_1 : x_2 = 1$$

$$L_2 : x_1 - x_2 = 2$$

$$L_3 : x_1 - x_2 = 0$$

do plano  $x_1 x_2$  não têm uma interseção comum. Faça um desenho preciso das três retas e, graficamente, efetue várias rodadas da projeção ortogonal descrita no Algoritmo 1, começando com o ponto inicial  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ . Usando o desenho obtido, determine os três pontos do ciclo-limite.

5. Prove o Teorema 11.13.1, mostrando que

- (a) o ponto  $\mathbf{x}_p$  definido no teorema é um ponto da reta  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  (ou seja,  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_p = b$ );  
 (b) o vetor  $\mathbf{x}_p - \mathbf{x}^*$  é ortogonal à reta  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  (ou seja,  $\mathbf{x}_p - \mathbf{x}^*$  é paralelo a  $\mathbf{a}$ ).

6. Como foi afirmado no texto, as iteradas  $\mathbf{x}_M^{(1)}, \mathbf{x}_M^{(2)}, \mathbf{x}_M^{(3)}, \dots$  definidas no Algoritmo 2 convergem a um único ponto limite  $\mathbf{x}_M^*$  se os vetores  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M$  geram o  $R^N$ . Mostre que se isto acontecer e se for utilizado o método do centro do pixel, então o centro de cada um dos  $N$  pixels do campo de visão é atravessado pelo menos por um dos  $M$  feixes do escaneamento.

7. Construa as 12 equações de feixe do Exemplo 2 usando o método da reta central e supondo que a distância entre as retas centrais de feixes adjacentes é igual à largura de um único pixel.

8. Construa as 12 equações de feixe do Exemplo 2 usando o método da área e supondo que a largura de cada feixe e que a distância entre as retas centrais de feixes adjacentes são ambas iguais à largura de um único pixel.

#### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.13

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**T1:** Dado o conjunto de equações

$$a_k x + b_k y = c_k$$

para  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  (com  $n > 2$ ), vamos considerar o seguinte algoritmo para obter uma solução aproximada do sistema.

(1) Resolva todos os possíveis pares de equações

$$a_i x + b_i y = c_i \quad \text{e} \quad a_j x + b_j y = c_j$$

com  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $i < j$  para obter soluções únicas. Isto leva a

$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

soluções, que nós denotamos por

$$(x_{ij}, y_{ij})$$

com  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $i \neq j$ .

(2) Construa o centro geométrico destes pontos, dado por

$$(x_C, y_C) = \left( \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_{ij}, \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \right)$$

e use-o como a solução aproximada do sistema original.

Utilize este algoritmo para aproximar a solução do sistema

$$x + y = 2$$

$$x - 2y = -2$$

$$3x - y = 3$$

e compare o resultado com o obtido nesta seção.

**T2. (Para leitores que estudaram Cálculo.)** Dado o conjunto de equações

$$a_k x + b_k y = c_k$$

para  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  (com  $n > 2$ ), vamos considerar o seguinte algoritmo de mínimos quadrados para obter uma solução aproximada  $(x^*, y^*)$  do sistema. Dados um ponto  $(\alpha, \beta)$  e a reta  $a_i x + b_i y = c_i$ , a distância deste ponto a esta reta é dada por

$$\frac{|a_i \alpha + b_i \beta - c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$$

Se nós definirmos uma função  $f(x, y)$  por

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{(a_i x + b_i y - c_i)^2}{a_i^2 + b_i^2}$$

e então determinarmos o ponto  $(x^*, y^*)$  que minimiza esta função, obteremos o ponto que está *mais próximo* de cada uma destas retas, no sentido de soma de mínimos quadrados. Mostre que  $x^*$  e  $y^*$  são soluções do sistema

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \right) x^* + \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right) y^* = \sum_{i=1}^n \frac{a_i c_i}{a_i^2 + b_i^2}$$

e

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right) x^* + \left( \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \right) y^* = \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{a_i^2 + b_i^2}$$

Aplique este algoritmo ao sistema

$$x + y = 2$$

$$x - 2y = -2$$

$$3x - y = 3$$

e compare o resultado com o obtido nesta seção.

## 11.14 FRACTAIS

Nesta seção iremos utilizar certas classes de transformações lineares para descrever e gerar conjuntos intrincados no plano euclidiano. Estes conjuntos, denominados fractais, são atualmente o foco de muita pesquisa matemática e científica.

**PRÉ-REQUISITOS:** Geometria de Operadores Lineares de  $R^2$  (Seção 9.2)  
Espaço Euclidiano  $R^n$   
Logaritmos Naturais  
Compreensão Intuitiva de Limites

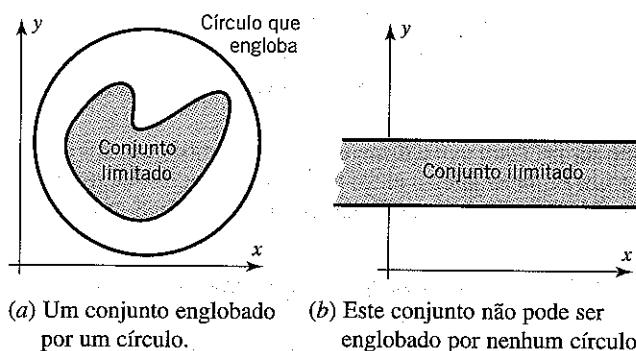
**Fractais no Plano Euclidiano** Na Matemática do final do século dezenove e do início do século vinte começaram a

aparecer vários conjuntos bizarros e estranhos de pontos do plano euclidiano. Embora tenham sido considerados curiosidades matemáticas, estes conjuntos, denominados *fractais*, estão crescendo rapidamente em importância. Hoje reconhecemos que eles revelam uma regularidade em fenômenos físicos e biológicos que anteriormente eram descartados como “aleatórios”, “com ruído” ou “caóticos.” Por exemplo, os fractais estão ao nosso redor nos formatos de nuvens, montanhas, litorais, árvores e samambaias.

Nesta seção nós damos uma breve descrição de certos tipos de fractais no plano euclidiano  $R^2$ . Muito desta descrição é devido a dois matemáticos, Benoit B. Mandelbrot e Michael Barnsley, ambos pesquisadores ativos nesta área.

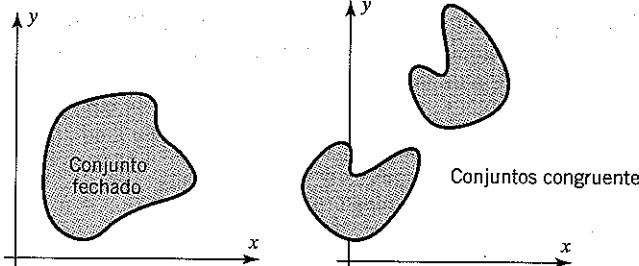
**Conjuntos Auto-Similares** Para começar nosso estudo de fractais, nós precisamos introduzir alguma terminologia de conjuntos em  $R^2$ . Dizemos que um conjunto em  $R^2$  é *limitado* se puder ser englobado em um círculo suficientemente grande

(Figura 11.14.1) e dizemos que um conjunto é *fechado* se contém todos os seus pontos de fronteira (Figura 11.14.2). Dois conjuntos em  $R^2$  são ditos *congruentes* se pudermos fazê-los coincidir exatamente usando translações e rotações apropriadas do plano (Figura 11.14.3). Nós também vamos contar com a percepção intuitiva do leitor de distinguir entre conjuntos *sobrepostos* e *não-sobrepostos*, conforme ilustrado na Figura 11.14.4.

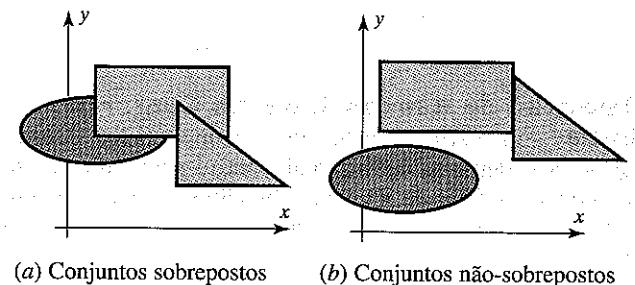
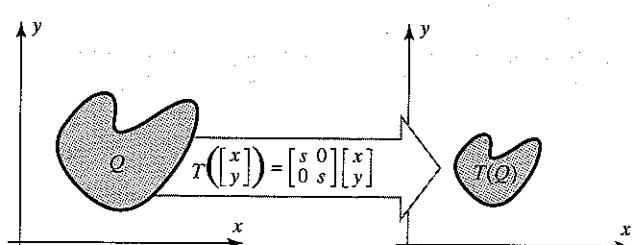


(a) Um conjunto englobado por um círculo.

(b) Este conjunto não pode ser englobado por nenhum círculo.

**Figura 11.14.1****Figura 11.14.2**

Os pontos de fronteira (linha mais forte) fazem parte do conjunto.

**Figura 11.14.3****Figura 11.14.4****Figura 11.14.5** Uma contração de  $Q$ .

Se  $T: R^2 \rightarrow R^2$  é o operador linear que modifica a escala por um fator  $s$  (veja a Tabela 8 da Seção 4.2) e se  $Q$  é um conjunto em  $R^2$ , então o conjunto  $T(Q)$ , ou seja, o conjunto formado pelas imagens dos pontos de  $Q$  por  $T$ , é chamado uma *dilatação* do conjunto  $Q$  se  $s > 1$  e uma *contração* de  $Q$  se  $0 < s < 1$  (Figura 11.14.5). Em ambos casos, dizemos que  $T(Q)$  é uma *homotetia* de  $Q$  de razão  $s$ .

Os tipos de fractais que nós vamos considerar inicialmente são *auto-similares*. Em geral, definimos um conjunto auto-similar do  $R^2$  como segue:

### Definição

Um subconjunto fechado e limitado do plano euclidiano  $R^2$  é dito *auto-similar* se pode ser descrito da forma

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k \quad (1)$$

onde  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$  são conjuntos não-sobrepostos, cada um dos quais é congruente à contração de  $S$  pelo mesmo fator  $s$  ( $0 < s < 1$ ).

Se  $S$  é um conjunto auto-similar, então (1) é chamada, às vezes, a *decomposição* de  $S$  em conjuntos congruentes não-sobrepostos.

### EXEMPLO 1 Um Segmento de Reta

Um segmento de reta em  $R^2$  (Figura 11.14.6a) pode ser expresso como a união de dois segmentos de reta congruentes e não-sobrepostos (Figura 11.14.6b). Na Figura 11.14.6b nós separamos ligeiramente os dois segmentos de reta para facilitar sua visualização. Cada um destes dois segmentos menores é congruente à contração do segmento original pelo fator de  $\frac{1}{2}$ . Deste modo, um segmento de reta é um conjunto auto-similar com  $k = 2$  e  $s = \frac{1}{2}$ .

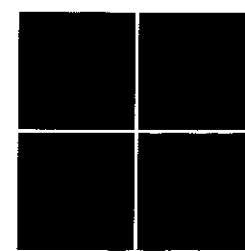
(a)

(b)

**Figura 11.14.6**

### EXEMPLO 2 Um Quadrado

Um quadrado em  $R^2$  (Figura 11.14.7a) pode ser expresso como a união de quatro quadrados congruentes e não-sobrepostos (Figura 11.14.7b), onde novamente separamos ligeiramente os quatro quadrados. Cada um dos quatro quadrados é congruente à contração do quadrado original pelo fator de  $\frac{1}{2}$ . Deste modo, um quadrado é um conjunto auto-similar com  $k = 4$  e  $s = \frac{1}{2}$ .



(a)

(b)

**Figura 11.14.7**

**EXEMPLO 3 O Tapete de Sierpinski**

O conjunto sugerido na Figura 11.14.8a foi descrito primeiro pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882–1969). Este conjunto pode ser expresso como a união de oito subconjuntos congruentes e não-sobrepostos (Figura 11.14.8b), cada um dos quais é congruente à contração do conjunto original pelo fator de  $\frac{1}{3}$ . Deste modo, este conjunto é um conjunto auto-similar com  $k = 8$  e  $s = \frac{1}{3}$ . Note que o padrão intrincado de quadrados dentro de quadrados continua para sempre em escala menor e menor (embora isto somente possa ser sugerido por uma figura como a dada).

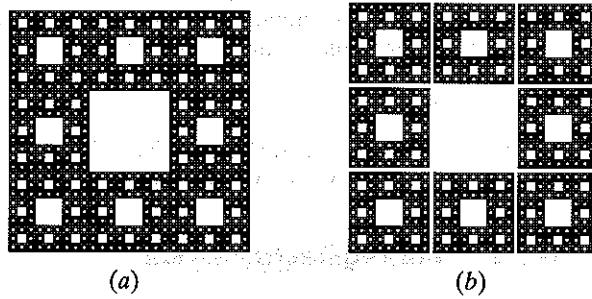


Figura 11.14.8

**EXEMPLO 4 O Triângulo de Sierpinski**

A Figura 11.14.9a ilustra um outro conjunto devido a Sierpinski. Este conjunto é um conjunto auto-similar com  $k = 3$  e  $s = \frac{1}{2}$  (Figura 11.14.9b). Como ocorre com o tapete de Sierpinski, o padrão intrincado de triângulos dentro de triângulos continua para sempre em escala menor e menor.

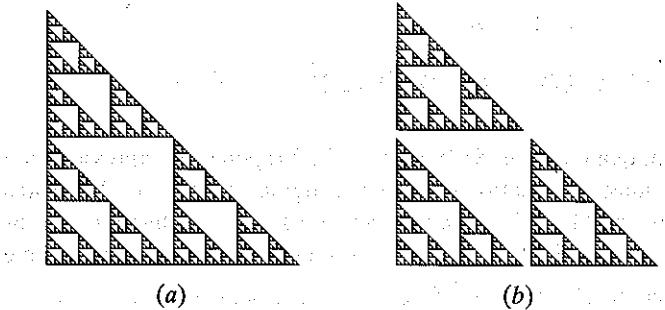


Figura 11.14.9

O tapete e o triângulo de Sierpinski têm uma estrutura mais complexa que o segmento de reta e o quadrado pois exibem um padrão que é repetido indefinidamente. Esta diferença será explorada mais adiante.

**Dimensão Topológica de um Conjunto** Na Seção 5.4 nós definimos a dimensão de um *subespaço* de um espaço vetorial como o número de vetores de uma base e descobrimos que esta definição coincide com nossa idéia intuitiva de dimensão. Por exemplo, a origem de  $R^2$  tem dimensão zero, as retas

pela origem são unidimensionais e o espaço  $R^2$  todo é bidimensional. Esta definição de dimensão é um caso especial de um conceito mais geral, chamado *dimensão topológica*, que é aplicável a subconjuntos de  $R^n$  que não necessariamente são subespaços. Uma definição precisa deste conceito é estudada em um ramo da Matemática chamado *Topologia*. Embora esta definição fuja do escopo deste texto, podemos enunciar informalmente que

- um ponto em  $R^2$  tem dimensão topológica zero;
- uma curva em  $R^2$  tem dimensão topológica um;
- uma região em  $R^2$  tem dimensão topológica dois.

Pode ser provado que a dimensão topológica de um conjunto em  $R^n$  é um número inteiro entre 0 e  $n$ , inclusive. Neste texto denotaremos a dimensão topológica de um conjunto  $S$  por  $d_T(S)$ .

**EXEMPLO 5 Dimensão Topológica de Conjuntos**

A Tabela 1 dá a dimensão topológica de cada um dos conjuntos estudados nos exemplos anteriores. Os primeiros dois resultados desta tabela são intuitivamente evidentes mas não os dois últimos. Enunciado informalmente, ambos o tapete e o triângulo de Sierpinski têm tantos “buracos” que mais parecem estruturas de redes de segmentos de retas do que regiões do plano e assim têm dimensão topológica um. A prova disto é bastante difícil.

TABELA 1

Conjunto $S$	$d_T(S)$
Segmento de linha	1
Quadrado	2
Tapete de Sierpinski	1
Triângulo de Sierpinski	1

**Dimensão de Hausdorff de um Conjunto Auto-Similar**

Em 1919, o matemático alemão Felix Hausdorff (1868–1942) deu uma definição alternativa para a dimensão de conjuntos arbitrários de  $R^n$ . Sua definição é bastante complicada, mas para conjuntos auto-similares reduz-se a algo bem simples:

**Definição**

A *dimensão de Hausdorff* de um conjunto auto-similar  $S$  do formato (1) é denotada por  $d_H(S)$  e é definida por

$$d_H(S) = \frac{\ln k}{\ln(1/s)} \quad (2)$$

Nesta definição, “ln” denota a função logaritmo natural. A Equação (2) também pode ser escrita como

$$s^{d_H(S)} = \frac{1}{k} \quad (3)$$

na qual a dimensão de Hausdorff  $d_H(S)$  aparece como um expoente. A Fórmula (3) é mais útil para interpretar o conceito de dimensão de Hausdorff; esta fórmula diz, por exemplo, que se contrairmos um conjunto por um fator de  $s = \frac{1}{2}$ , então sua área (ou, mais corretamente, sua *medida*) decrescerá por um fator de  $(\frac{1}{2})^{d_H(S)}$ . Assim, contraindo um segmento de reta por um fator de  $\frac{1}{2}$ , sua medida (comprimento) diminuirá por um fator de  $(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$  e contraindo uma região quadrada por um fator de  $\frac{1}{2}$ , sua medida (área) diminuirá por um fator de  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ .

Antes de passar para os exemplos, devemos apresentar alguns fatos sobre a dimensão de Hausdorff:

- As dimensões topológica e de Hausdorff de um conjunto não precisam coincidir.
- A dimensão de Hausdorff de um conjunto não precisa ser um número inteiro.
- A dimensão topológica de um conjunto é menor do que ou igual à dimensão de Hausdorff, ou seja,  $d_T(S) \leq d_H(S)$ .

### EXEMPLO 6 Dimensão de Hausdorff de Conjuntos

A Tabela 2 dá a dimensão de Hausdorff de cada um dos conjuntos estudados nos exemplos anteriores.

TABELA 2

Conjunto $S$	$s$	$k$	$d_H(S) = \frac{\ln k}{\ln(1/s)}$
Segmento de linha	$\frac{1}{2}$	2	$\ln 2 / \ln 2 = 1$
Quadrado	$\frac{1}{2}$	4	$\ln 4 / \ln 2 = 2$
Tapete de Sierpinski	$\frac{1}{3}$	8	$\ln 8 / \ln 3 = 1,892 \dots$
Triângulo de Sierpinski	$\frac{1}{2}$	3	$\ln 3 / \ln 2 = 1,584 \dots$

**Fractais** Comparando as Tabelas 1 e 2, nós vemos que as dimensões de Hausdorff e topológica coincidem para o segmento de reta e para o quadrado, mas são desiguais para o tapete e o triângulo de Sierpinski. Em 1977, Benoit B. Mandelbrot indicou que conjuntos para os quais a dimensão topológica e a de Hausdorff diferem devem ser bem complicados (como Hausdorff já havia sugerido antes, em 1919). Mandelbrot propôs chamar tais conjuntos de *fractais* e ofereceu a seguinte definição.

### Definição

Um *fractal* é um subconjunto de um espaço euclidiano cujas dimensões de Hausdorff e topológica não são iguais.

Mandelbrot também alertou que esta definição é bastante restritiva e que provavelmente será substituída no futuro; enquanto isto, permanece como uma definição formal de fractal. De acordo com esta definição, o tapete e o triângulo de Sierpinski são fractais, enquanto o segmento de reta e o quadrado não são fractais.

Segue da definição precedente que um conjunto cuja dimensão de Hausdorff não é um número inteiro deve ser um fractal (por que?). Contudo, veremos adiante que a recíproca não é verdadeira, ou seja, é possível um fractal ter dimensão de Hausdorff inteira.

**Semelhanças** Nós veremos agora como algumas técnicas de Álgebra Linear podem ser usadas para gerar fractais. Esta abordagem também conduz a algoritmos que podem ser explorados para desenhar fractais com computadores. Começamos com uma definição.

### Definição

Uma *semelhança* de razão  $s$ , ou com fator de escala  $s$ , é uma aplicação de  $R^2$  em  $R^2$  da forma

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = s \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

onde  $s$ ,  $\theta$ ,  $e$  e  $f$  são escalares.

Geometricamente, uma semelhança é composta de três aplicações mais simples: uma homotetia de razão  $s$ , uma rotação em torno da origem por um ângulo  $\theta$  e uma translação (com  $e$  unidades na direção  $x$  e  $f$  unidades na direção  $y$ ). A Figura 11.14.10 ilustra o efeito de uma semelhança sobre o quadrado unitário  $U$ .

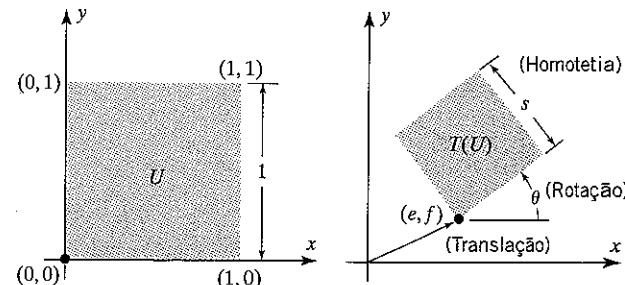


Figura 11.14.10

Para as nossas aplicações a fractais nós somente utilizaremos semelhanças *contrativas*, com o que queremos dizer que a razão  $s$  da semelhança está restrita ao intervalo  $0 < s < 1$ . Consequentemente, quando nos referirmos a semelhanças, nós

sempre estaremos pensando em semelhanças sujeitas a esta restrição.

As semelhanças são importantes no estudo de fractais por causa do seguinte fato:

*Se  $T : R^2 \rightarrow R^2$  é uma semelhança de razão  $s$  se  $S$  é um conjunto fechado e limitado em  $R^2$ , então a imagem  $T(S)$  do conjunto  $S$  por  $T$  é congruente à contração de  $S$  pelo fator  $s$ .*

Lembre da definição de conjuntos auto-similares em  $R^2$  que um conjunto fechado e limitado  $S$  em  $R^2$  é dito auto-similar se pode ser descrito da forma

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k$$

onde  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$  são conjuntos não-sobrepostos, cada um dos quais é congruente à contração de  $S$  pelo mesmo fator  $s$  ( $0 < s < 1$ ) [veja (1)]. Nos próximos exemplos nós vamos obter as semelhanças que produzem os conjuntos  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$  a partir de  $S$  para o segmento de reta, o quadrado, o tapete e o triângulo de Sierpinski.

### EXEMPLO 7 Um Segmento de Reta

O nosso segmento de reta em  $R^2$  será o segmento de reta  $S$  ligando os pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  do plano  $xy$  (Figura 11.14.11a). Considere as duas semelhanças

$$\begin{aligned} T_1 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ T_2 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

ambas com  $s = \frac{1}{2}$  e  $\theta = 0$ . Na Figura 11.14.11b nós mostramos o efeito destas duas semelhanças sobre o quadrado unitário  $U$ . A semelhança  $T_1$  leva  $U$  sobre o quadrado menor  $T_1(U)$  e a semelhança  $T_2$  leva  $U$  sobre o quadrado menor  $T_2(U)$ . Simultaneamente,  $T_1$  leva o segmento de reta  $S$  sobre o segmento menor e não-sobreposto  $T_2(U)$ . A união destes dois segmentos de reta menores e não-sobrepostos é precisamente o segmento de reta original  $S$ ; ou seja,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \quad (5)$$

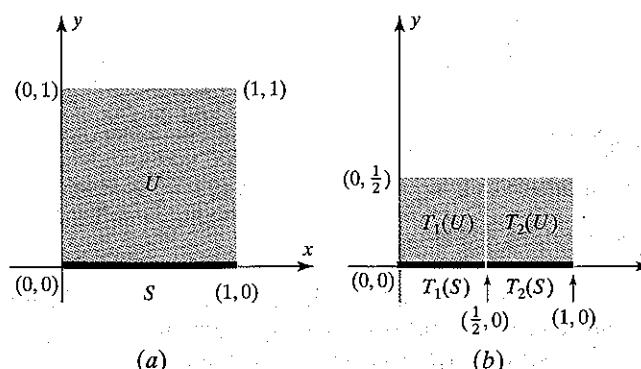


Figura 11.14.11

### EXEMPLO 8 Um Quadrado

Vamos considerar o quadrado unitário  $U$  do plano  $xy$  (Figura 11.14.12a) e as quatro semelhanças a seguir, todas com  $s = \frac{1}{2}$  e  $\theta = 0$ :

$$\begin{aligned} T_1 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ T_2 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ T_3 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ T_4 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

As imagens do quadrado unitário  $U$  por estas quatro semelhanças são os quatro quadrados mostradas na Figura 11.14.12b. Assim,

$$U = T_1(U) \cup T_2(U) \cup T_3(U) \cup T_4(U) \quad (7)$$

é uma decomposição de  $U$  em quatro quadrados não-sobrepostos que são congruentes à contração de  $U$  pelo mesmo fator ( $s = \frac{1}{2}$ ). ♦

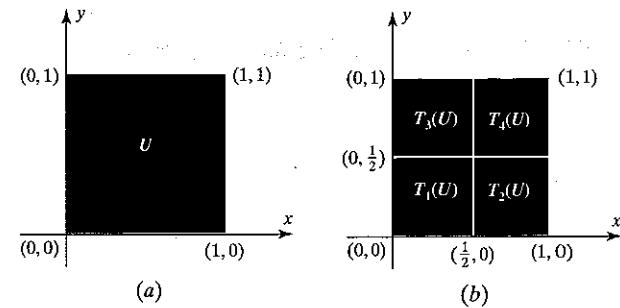


Figura 11.14.12

### EXEMPLO 9 O Tapete de Sierpinski

Vamos considerar um tapete de Sierpinski  $S$  sobre o quadrado unitário  $U$  do plano  $xy$  (Figura 11.14.13a) e as oito semelhanças a seguir, cada uma tendo  $s = \frac{1}{3}$  e  $\theta = 0$ :

$$T_i \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (8)$$

onde os oito valores de  $\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$  são

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

As imagens de  $S$  por estas oito semelhanças são os oito conjuntos mostrados na Figura 11.14.13b. Assim,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_8(S) \quad (9)$$

é uma decomposição de  $S$  em oito conjuntos não-sobrepostos que são congruentes à contração de  $S$  pelo mesmo fator ( $s = \frac{1}{2}$ ).  $\blacklozenge$

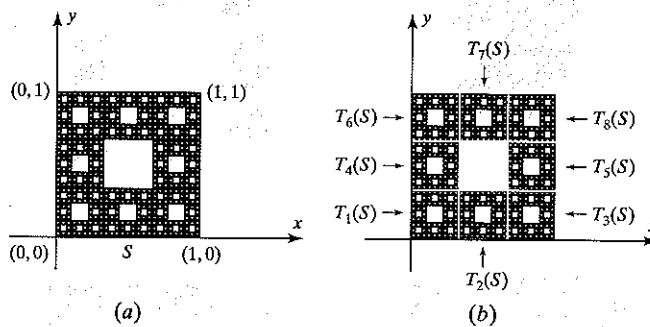


Figura 11.14.13

### EXEMPLO 10 O Triângulo de Sierpinski

Vamos considerar um triângulo de Sierpinski  $S$  encaixado no quadrado unitário  $U$  do plano  $xy$ , como ilustrado na Figura 11.14.14a e as três semelhanças a seguir, cada uma tendo  $s = \frac{1}{2}$  e  $\theta = 0$ :

$$\begin{aligned} T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

As imagens de  $S$  por estas três semelhanças são os três conjuntos na Figura 11.14.14b. Assim,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \quad (11)$$

é uma decomposição de  $S$  em três conjuntos não-sobrepostos que são congruentes à contração de  $S$  pelo mesmo fator ( $s = \frac{1}{2}$ ).  $\blacklozenge$

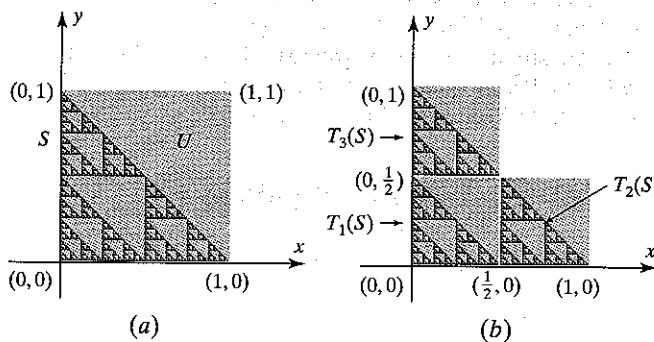


Figura 11.14.14

Nos exemplos acima nós começamos com um conjunto específico  $S$  e mostramos sua auto-similaridade encontrando semelhanças  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$  de mesma razão e tais que  $T_1(S), T_2(S), T_3(S), \dots, T_k(S)$  são conjuntos não-sobrepostos com

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_k(S) \quad (12)$$

O teorema seguinte ataca o problema recíproco de determinar um conjunto auto-similar a partir de uma coleção de semelhanças.

### Teorema 11.14.1

*Se  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$  são semelhanças contrativas de mesma razão, então existe um único conjunto não-vazio, fechado e limitado  $S$  do plano euclidiano tal que*

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_k(S)$$

*Além disto, se os conjuntos  $T_1(S), T_2(S), T_3(S), \dots, T_k(S)$  são não-sobrepostos, então  $S$  é auto-similar.*

**Algoritmos para Gerar Fractais** Em geral, não existe uma maneira simples de obter diretamente o conjunto  $S$  do teorema precedente. Nós agora descreveremos um procedimento iterativo que determina  $S$  a partir das semelhanças que o definem. Primeiro damos um exemplo do procedimento e depois damos o algoritmo para o caso geral.

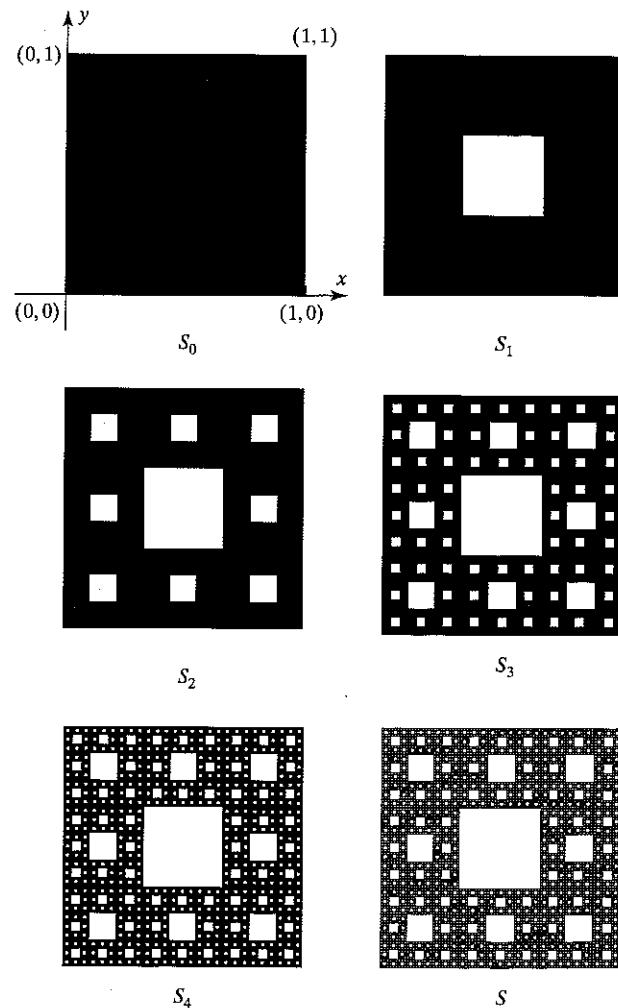


Figura 11.14.15

**EXEMPLO 1.1 O Tapete de Sierpinski**

A Figura 11.14.15 mostra o quadrado unitário  $S_0$  do plano  $xy$  que serve de conjunto “inicial” de um procedimento iterativo para a construção do tapete de Sierpinski. O conjunto  $S_1$  na figura é o resultado de aplicar a  $S$  as oito semelhanças  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) de (8) que determinam o tapete de Sierpinski. Este conjunto  $S_1$  consiste de oito regiões quadradas, cada uma de lado de comprimento  $\frac{1}{3}$ , circundando um quadrado central vazio. Em seguida aplicamos as oito semelhanças a  $S_1$  e obtemos o conjunto  $S_2$ . Analogamente, aplicando as oito semelhanças a  $S_2$  resulta o conjunto  $S_3$ . Se nós continuarmos este processo indefinidamente, a seqüência de conjuntos  $S_1, S_2, S_3, \dots$  “convergirá” a um conjunto  $S$  que é o tapete de Sierpinski. ♦

**OBSERVAÇÃO.** Embora devêssemos dar uma definição formal do que significa uma seqüência de conjuntos “convergir” a um conjunto, uma interpretação intuitiva é suficiente para este tratamento introdutório.

Embora na Figura 11.14.15 tenhamos começado com o quadrado unitário para chegar ao tapete de Sierpinski, nós poderíamos ter começado com qualquer conjunto não-vazio  $S_0$ . A única restrição sobre o conjunto  $S_0$  é que ele deve ser fechado e limitado. Por exemplo, se nós começarmos com o conjunto  $S_0$  específico mostrado na Figura 11.14.16, então o conjunto  $S_1$  na figura é o conjunto obtido aplicando cada uma das oito semelhanças de (8). Aplicando as oito semelhanças a  $S_1$  obtemos o conjunto  $S_2$ . Como antes, aplicando as oito semelhanças indefinidamente, produz o tapete de Sierpinski como conjunto-limite.

O algoritmo geral ilustrado no exemplo precedente é o seguinte: Sejam  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$  semelhanças contrativas de mesma razão  $e$ , para um conjunto arbitrário  $Q$  qualquer em  $R^2$ , defina o conjunto  $\mathcal{J}(Q)$  por

$$\mathcal{J}(Q) = T_1(Q) \cup T_2(Q) \cup T_3(Q) \cup \dots \cup T_k(Q)$$

O algoritmo a seguir gera uma seqüência de conjuntos  $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$  que converge ao conjunto  $S$  do Teorema 11.14.1.

**Algoritmo 1**

**Passo 0.** Escolha um conjunto  $S_0$  não-vazio, fechado e limitado em  $R^2$ .

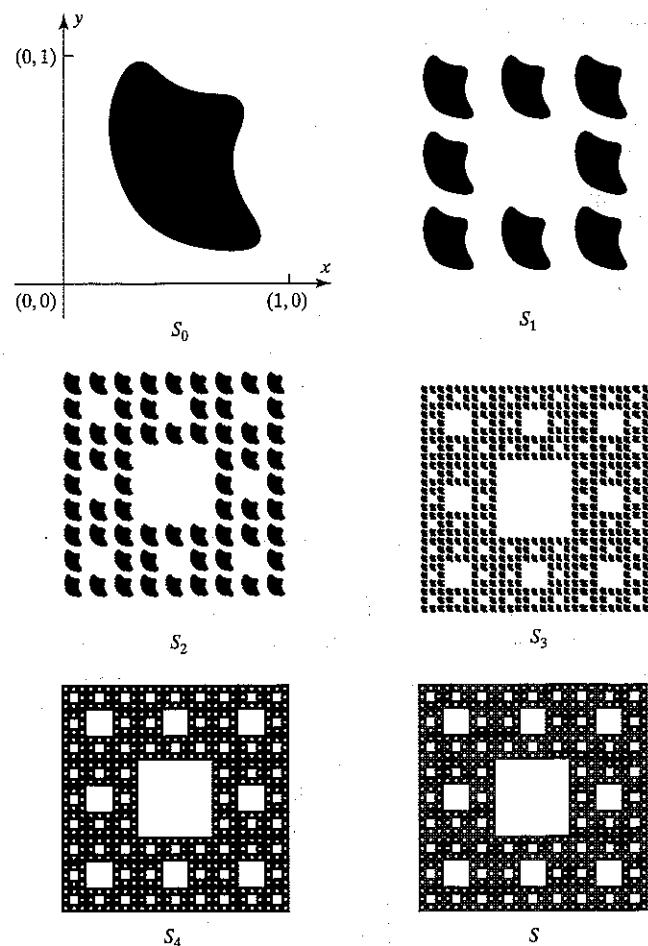
**Passo 1.** Calcule  $S_1 = \mathcal{J}(S_0)$ .

**Passo 2.** Calcule  $S_2 = \mathcal{J}(S_1)$ .

**Passo 3.** Calcule  $S_3 = \mathcal{J}(S_2)$ .

⋮

**Passo  $n$ .** Calcule  $S_n = \mathcal{J}(S_{n-1})$ .

**Figura 11.14.16****EXEMPLO 1.2 O Triângulo de Sierpinski**

Vamos construir o triângulo de Sierpinski determinado pelas três semelhanças dadas em (10). A aplicação de conjuntos correspondente é  $\mathcal{J}(Q) = T_1(Q) \cup T_2(Q) \cup T_3(Q)$ . A Figura 11.14.17 mostra um conjunto arbitrário  $S_0$  não-vazio, fechado e limitado em  $R^2$ , as quatro primeiras iteradas  $S_1, S_2, S_3, S_4$  e o conjunto-limite  $S$  (o triângulo de Sierpinski).

**EXEMPLO 1.3 Usando o Algoritmo 1**

Considere as duas semelhanças a seguir:

$$T_1 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

A ação destas duas semelhanças no quadrado unitário  $U$  está ilustrada na Figura 11.14.18.

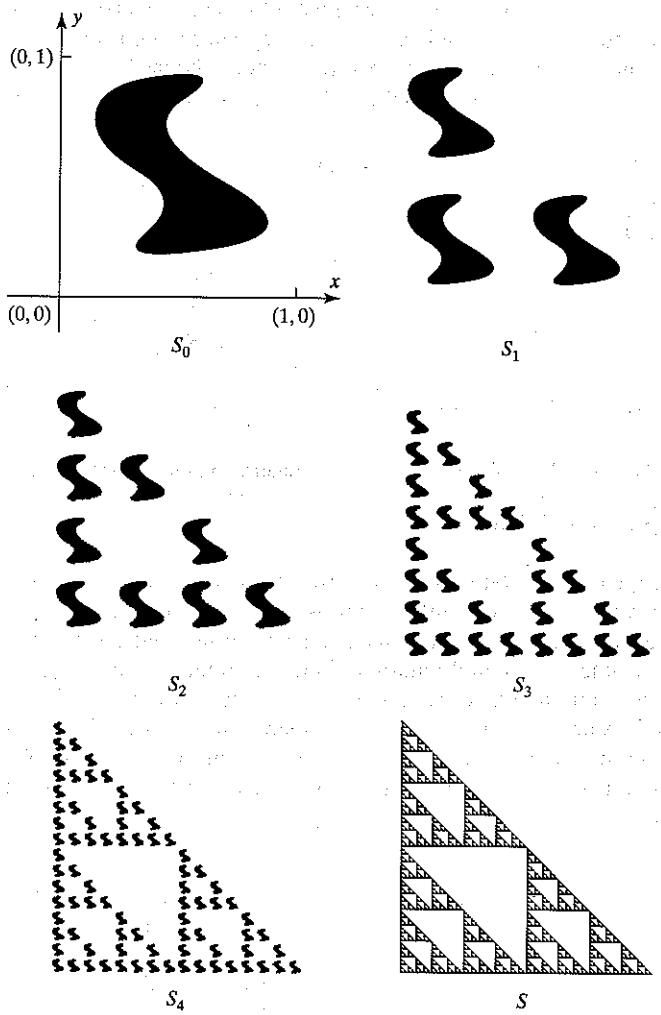


Figura 11.14.17

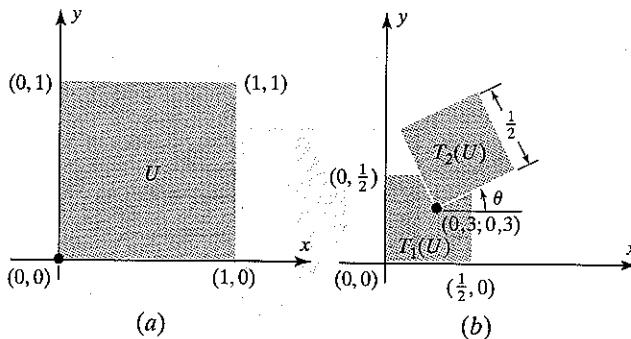


Figura 11.14.18

Aqui, o ângulo de rotação  $\theta$  é um parâmetro que nós variamos para gerar diferentes conjuntos auto-similares. Os conjuntos auto-similares gerados por estas duas semelhanças aparecem na Figura 11.14.19 para vários valores de  $\theta$ . Por simplicidade, deixamos de desenhar os eixos  $x$  e  $y$  mas a origem é sempre o ponto mais abaixo e à esquerda do conjunto. Estes conjuntos foram gerados em computador usando o Algoritmo 1 para os valores de  $\theta$  indicados. Como  $k = 2$  e  $s = \frac{1}{2}$ , segue de (2) que a dimensão de Hausdorff destes conjuntos é 1 para cada valor de  $\theta$ . Pode ser mostrado que a dimensão topológica destes conjun-

tos é 1 para o caso  $\theta = 0$  e é 0 para todos os demais valores de  $\theta$ . Segue-se que o conjunto auto-similar para  $\theta = 0$  não é um fractal [é o segmento de reta de  $(0, 0)$  a  $(0,6; 0,6)$ ], enquanto que os conjuntos auto-similares para todos os demais valores de  $\theta$  são fractais. Em particular, são exemplos de fractais com dimensão de Hausdorff inteira. ♦

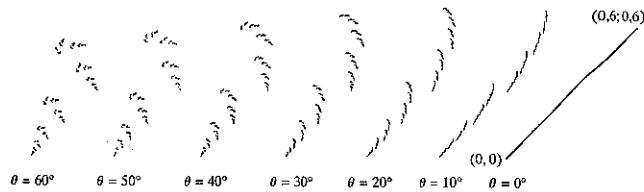


Figura 11.14.19

**Uma Abordagem Monte Carlo** A abordagem descrita no Algoritmo 1 para construir conjuntos auto-similares usando funções de conjuntos consome muito tempo de computador, pois as semelhanças envolvidas devem ser aplicadas a cada um dos muitos pixels de uma tela de monitor em cada iteração. Em 1985, Michael Barnsley descreveu um método alternativo e mais prático para gerar um conjunto auto-similar através de suas semelhanças. É um assim chamado *método de Monte Carlo* que utiliza probabilidades e Barnsley se refere a ele como o *Algoritmo da Iteração Aleatória*.

Sejam  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$  semelhanças contrativas de mesma razão. O próximo algoritmo gera uma seqüência de pontos

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \dots$$

que converge ao conjunto  $S$  do Teorema 11.14.1.

### Algoritmo 2

**Passo 0.** Escolha um ponto arbitrário  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  em  $S$ .

**Passo 1.** Escolha aleatoriamente uma das  $k$  semelhanças, digamos  $T_{k_1}$ , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T_{k_1} \left( \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right)$$

**Passo 2.** Escolha aleatoriamente uma das  $k$  semelhanças, digamos  $T_{k_2}$ , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T_{k_2} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right)$$

**Passo  $n$ .** Escolha aleatoriamente uma das  $k$  semelhanças, digamos  $T_{k_n}$ , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = T_{k_n} \left( \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

Os pixels correspondentes aos pontos gerados por este algoritmo preenchem os pixels que representam o conjunto-límite  $S$  numa tela de monitor.

A Figura 11.14.20 mostra quatro estágios do Algoritmo de Iteração Aleatória que gera o tapete de Sierpinski começando com o ponto inicial  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

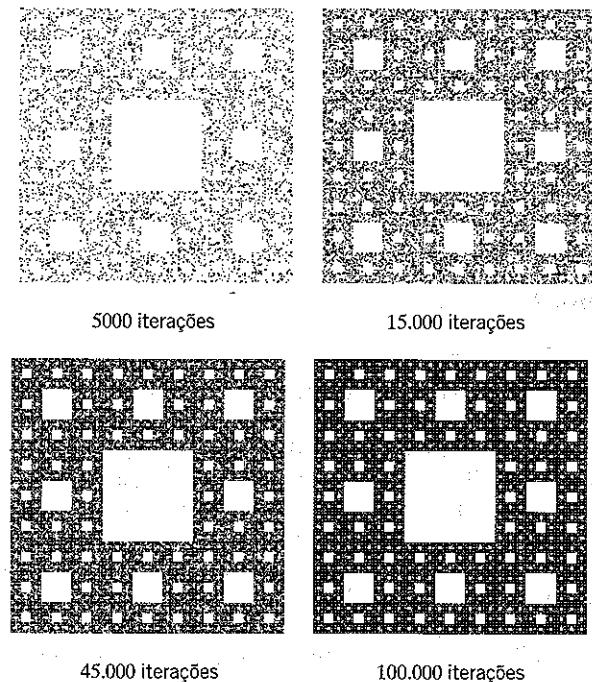


Figura 11.14.20

**OBSERVAÇÃO.** Embora o Passo 0 requeira a escolha de um ponto do conjunto  $S$  que pode até nem ser conhecido antes, isto não é um problema sério. Na prática, podemos geralmente começar com qualquer ponto do  $R^2$  e, depois de umas poucas iterações (digamos, umas 10 iterações) o ponto gerado vai estar tão próximo de  $S$  que o algoritmo funciona corretamente daí em diante.

**Fractais mais Gerais** Até aqui discutimos fractais que são conjuntos auto-similares de acordo com a definição dada acima. No entanto, o Teorema 11.14.1 permanece válido se as semelhanças  $T_1, T_2, \dots, T_k$  são substituídas por transformações mais gerais, chamadas *transformações afins contrativas*. Uma transformação afim é definida como segue:

### Definição

Uma *transformação afim* é uma aplicação de  $R^2$  em  $R^2$  da forma

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

onde  $a, b, c, d, e$  e  $f$  são escalares.

A Figura 11.14.21 mostra como uma transformação afim leva o quadrado unitário  $U$  sobre um paralelogramo  $T(U)$ . Uma transformação afim é dita *contrativa* se a distância euclidiana entre a imagem de dois pontos quaisquer do plano pela transformação é estritamente menor que a distância euclidiana origi-

nal entre estes pontos. Pode ser mostrado que quaisquer  $k$  transformações afins contrativas  $T_1, T_2, \dots, T_k$  determinam um único conjunto fechado e limitado  $S$  satisfazendo a equação

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_k(S) \quad (13)$$

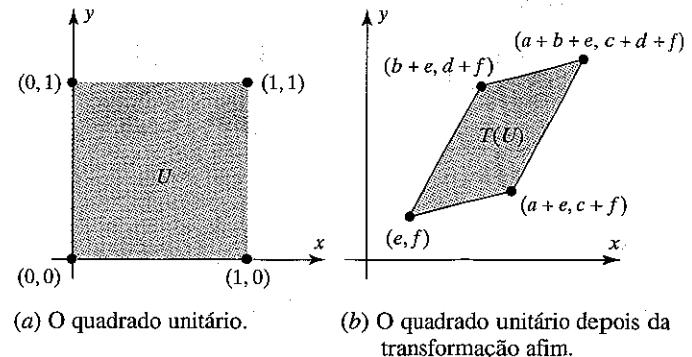


Figura 11.14.21

A Equação (13) tem o mesmo formato que a Equação (12), que utilizamos para definir conjuntos auto-similares. Embora a Equação (13), que usa transformações afins contrativas, não determine um conjunto auto-similar, o conjunto  $S$  que é formado tem muitas das características de conjuntos auto-similares. Por exemplo, a Figura 11.14.22 mostra como um conjunto do plano que parece uma samambaia (um exemplo tornado famoso por Barnsley) pode ser gerado por quatro transformações afins contrativas. Observe como a samambaia central é a união das

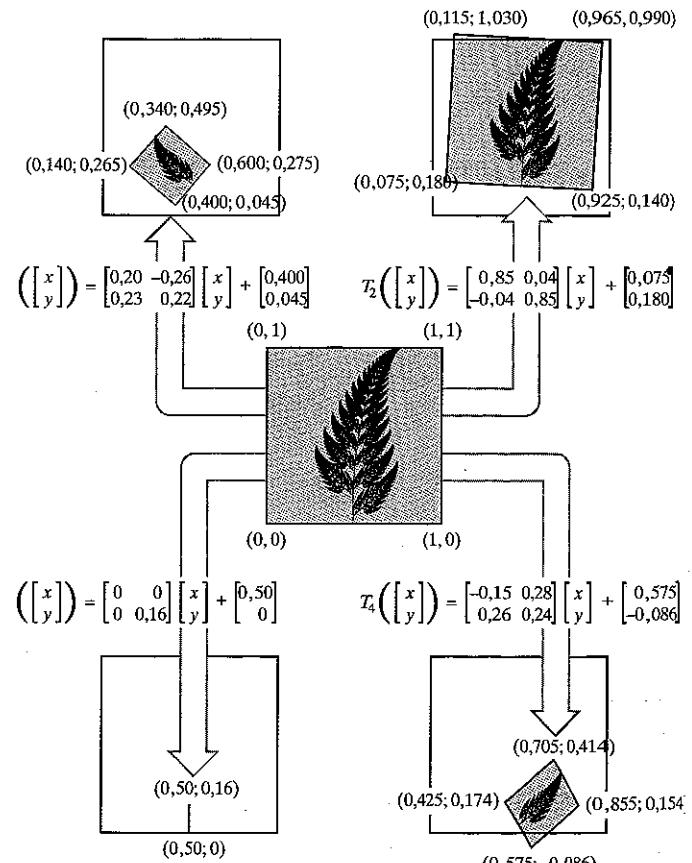


Figura 11.14.22

quatro samambaias menores que a cercam, que são imagens afins ligeiramente sobrepostas. Também note como  $T_3$ , por ter determinante da parte matricial nulo, leva a samambaia inteira sobre o pequeno segmento de reta que liga os pontos  $(0,50; 0)$  e  $(0,50; 0,16)$ . A Figura 11.14.22 contém muita riqueza de informação e deveria ser estudada cuidadosamente.

Michael Barnsley continua trabalhando nas aplicações desta teoria ao ramo de compressão e transmissão de dados. A samambaia, por exemplo, fica completamente determinada pelas quatro transformações afins  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ . Estas quatro transformações, por sua vez, ficam completamente determinadas pelos 24 números dados na Figura 11.14.22 que definem

seus valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  e  $f$ . Dito de outra maneira, estes 24 números codificam completamente a imagem da samambaia. Armazenar estes 24 números em um computador requer consideravelmente menos espaço de memória do que armazenar uma descrição pixel por pixel da samambaia. Em princípio, qualquer imagem digitalizada em uma tela de monitor pode ser descrita por um número finito de transformações afins, embora não seja fácil determinar quais transformações devemos usar. Mesmo assim, uma vez codificadas, as transformações afins em geral requerem várias ordens de grandeza menos memória de computador do que uma descrição pixel por pixel da imagem digitalizada.

### Leitura Recomendada

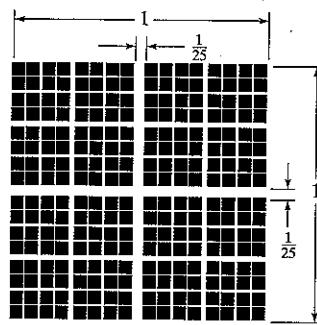
Os leitores interessados em aprender mais sobre fractais devem consultar os seguintes livros, o primeiro dos quais elabora a abordagem por transformações lineares apresentada nesta seção.

1. MICHAEL BARNESLEY, *Fractals Everywhere* (Academic Press, Nova Iorque, 1993).

2. BENOIT B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, Nova Iorque, 1982).
3. HEINZ-OTTO PEITGEN e P. H. RICHTER, *The Beauty of Fractals* (Springer-Verlag, Nova Iorque, 1986).
4. HEINZ-OTTO PEITGEN e DIETMAR SAUPE, *The Science of Fractal Images* (Springer-Verlag, Nova Iorque, 1988).

### Conjunto de Exercícios 11.14

1. O conjunto auto-similar da figura dada tem os tamanhos indicados. Sabendo que o canto inferior esquerdo está situado na origem do plano  $xy$ , encontre as semelhanças que determinam este conjunto. Qual é a dimensão de Hausdorff deste conjunto? Este conjunto é um fractal?
2. Encontre a dimensão de Hausdorff do conjunto auto-similar da figura dada. Use uma régua para medir a figura e determine um valor aproximado do fator de escala  $s$  deste conjunto. Quais são os ângulos de rotação das semelhanças que determinam este conjunto?

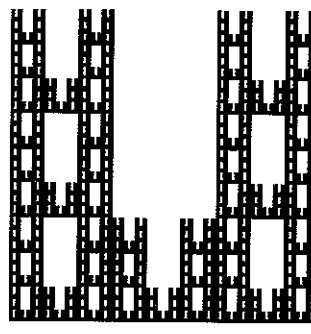


**Figura Ex-1**

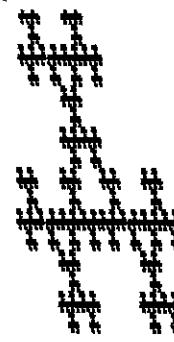


**Figura Ex-2**

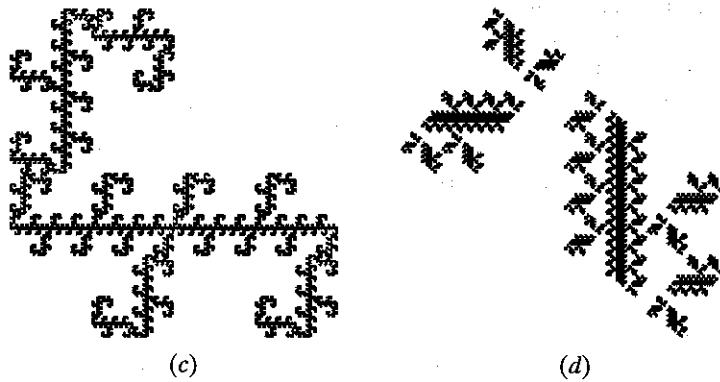
3. Para cada um dos conjuntos auto-similares da figura dada, encontre: (i) a razão  $s$  das semelhanças que descrevem o conjunto; (ii) os ângulos de rotação  $\theta$  de todas as semelhanças que descrevem o conjunto (todos os ângulos de rotação são múltiplos de  $90^\circ$ ); e (iii) a dimensão de Hausdorff do conjunto. Quais destes conjuntos são fractais e por que?



**(a)**



**(b)**

**Figura Ex-3**

4. Das quatro transformações afins mostradas na Figura 11.14.22, somente a transformação  $T_2$  é uma semelhança. Encontre a razão  $s$  e o ângulo de rotação  $\theta$  desta semelhança.
5. Encontre as coordenadas da pontinha da samambaia da Figura 11.14.22. [Sugestão. A transformação  $T_2$  aplica a ponta da samambaia nela mesma.]
6. O quadrado na Figura 11.14.7a foi expresso como a união de quatro quadrados não-sobrepostos indicados na Figura 11.14.7b. Suponha agora que o quadrado seja expresso como a união de 16 quadrados não-sobrepostos. Usando a Equação (2), verifique que sua dimensão de Hausdorff continua sendo 2.
7. Mostre que as quatro semelhanças

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

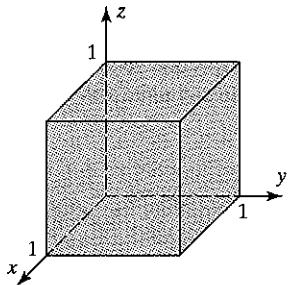
$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

dão o quadrado unitário como a união de quatro quadrados *sobrepostos*. Calcule o lado direito da Equação (2) para os valores de  $k$  e  $s$  determinados por estas semelhanças e mostre que o resultado não é o valor correto da dimensão de Hausdorff do quadrado. [Observação. Este exercício mostra a necessidade da exigir que os conjuntos sejam não-sobrepostos na definição de conjuntos auto-similares e suas dimensões de Hausdorff.]

8. Todos os resultados desta seção podem ser estendidos ao  $R^n$ . Calcule a dimensão de Hausdorff do cubo unitário em  $R^3$  (veja a figura dada). Sabendo que a dimensão topológica do cubo é 3, decida se este cubo é um fractal. [Sugestão. Expresse o cubo unitário como a união de 8 cubos menores congruentes e não-sobrepostos.]

**Figura Ex-8**

9. O conjunto em  $R^3$  da figura dada é um conjunto auto-similar obtido pela remoção de certos buracos cúbicos do cubo unitário e chamado a *esponja de Menger*. Observe que cada face da esponja de Menger é um tapete de Sierpinski e que os buracos do tapete de Sierpinski agora atravessam toda a esponja de Menger. Determine os valores de  $k$  e  $s$  para a esponja de Menger e obtenha sua dimensão de Hausdorff. A esponja de Menger é um fractal?

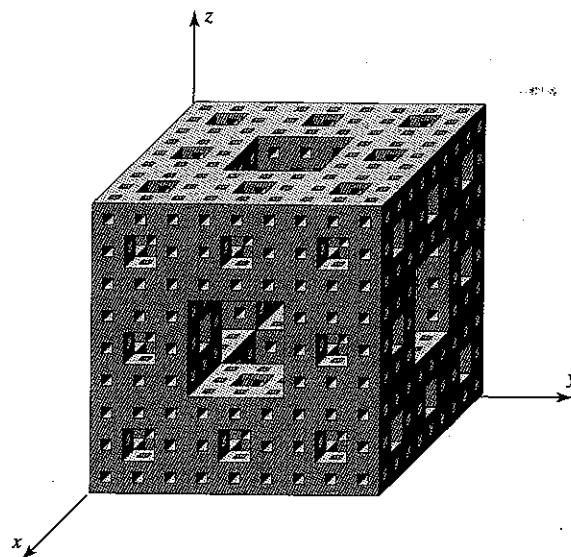


Figura Ex-9

10. As duas semelhanças

$$T_1 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_2 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinam um fractal conhecido como *conjunto de Cantor*. Começando com o quadrado unitário  $U$  como conjunto inicial, esboce os quatro primeiros conjuntos determinados pelo Algoritmo 1. Em seguida obtenha a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor. (Este conjunto famoso foi o primeiro exemplo que Hausdorff forneceu, em seu artigo de 1919, de um conjunto cuja dimensão de Hausdorff não coincide com a dimensão topológica.)

11. Calcule as áreas dos conjuntos  $S_0, S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  da Figura 11.14.15.

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais 11.14

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Use semelhanças da forma

$$T_i \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$$

para mostrar que a esponja de Menger (Exercício 9) é o conjunto  $S$  dado por

$$S = \bigcup_{i=1}^{20} T_i(S)$$

para semelhanças  $T_i$  (com  $i = 1, 2, 3, \dots, 20$ ) convenientemente escolhidas. Determine estas semelhanças determinando a coleção de matrizes  $3 \times 1$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} \mid \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, 20 \right\}$$

- T2. Generalize ao  $R^n$  as idéias envolvidas no conjunto de Cantor (em  $R^1$ ), no tapete de Sierpinski (em  $R^2$ ) e na esponja de Menger (em  $R^3$ ), considerando o conjunto  $S$  dado por

$$S = \bigcup_{i=1}^{m_n} T_i(S)$$

com

$$T_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

onde cada constante  $a_{ki}$  é igual a 0,  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{2}{3}$ , mas nunca duas delas iguais a  $\frac{1}{3}$  ao mesmo tempo. Use um computador para construir o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \mid \text{for } i = 1, 2, 3, \dots, m_n \right\}$$

e assim determinar o valor de  $m_n$  para  $n = 2, 3, 4$ . Em seguida, obtenha uma expressão para  $m_n$ .

## 11.15 CAOS

Nesta seção nós usamos uma transformação do quadrado unitário do plano  $xy$  sobre si mesmo para descrever o conceito de aplicação caótica.

**PRÉ-REQUISITOS:** Geometria de Operadores Lineares de  $R^2$  (Seção 9.2)  
Autovetores e Autovalores  
Compreensão Intuitiva de Limites e Continuidade

**Caos** A palavra *caos* apareceu pela primeira vez na literatura matemática em 1975, num artigo (em inglês) de Tien-Yien Li e James Yorke intitulado “Período Três Implica Caos.” Hoje em dia, o termo é utilizado para descrever certas transformações na Matemática e certos fenômenos físicos que, à primeira vista, parecem ter um comportamento aleatório e desordenado mas que, na verdade, têm um elemento subjacente de ordem bem determinado (como, por exemplo, geração aleatória de números, embaralhar as cartas de um baralho, arritmia cardíaca, vibração das asas de um avião em vôo, mudanças na mancha vermelha de Júpiter e aberrações da órbita de Plutão). Nesta seção nós estudaremos uma transformação caótica específica, conhecida como a *transformação do gato de Arnold*, em referência ao matemático russo Vladimir I. Arnold, que usou o esboço de um gato para a sua descrição.

**A Transformação do Gato de Arnold** Para descrever a transformação do gato de Arnold nós precisamos de algumas técnicas da aritmética modular. Se  $x$  é um número real, então a notação  $x \bmod 1$  denota o único número no intervalo  $[0, 1)$  que difere de  $x$  por um número inteiro. Por exemplo,

$$2.3 \bmod 1 = 0.3, \quad 0.9 \bmod 1 = 0.9, \quad -3.7 \bmod 1 = 0.3, \quad 2.0 \bmod 1 = 0$$

Observe que se  $x$  é um número real não-negativo, então  $x \bmod 1$  é simplesmente a parte fracionária de  $x$ . Se  $(x, y)$  é um par ordenado de números reais, então a notação  $(x, y) \bmod 1$  denota o par  $(x \bmod 1, y \bmod 1)$ . Por exemplo,

$$(2.3, -7.9) \bmod 1 = (0.3, 0.1)$$

Observe que o ponto  $x \bmod 1$  é um ponto do intervalo  $[0, 1)$  para cada número real  $x$ , e que o ponto  $(x, y) \bmod 1$  é um ponto do quadrado unitário

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$$

para cada par ordenado  $(x, y)$ . Note que as arestas superior e da direita do quadrado não estão incluídas em  $S$ .

A transformação do gato de Arnold é a aplicação  $\Gamma : R^2 \rightarrow R^2$  definida pela fórmula

$$\Gamma : (x, y) \rightarrow (x + y, x + 2y) \bmod 1$$

ou, em notação matricial, por

$$\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod 1 \quad (1)$$

Para entender a geometria da transformação do gato de Arnold, é conveniente escrever (1) na forma fatorada

$$\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod 1$$

que expressa a transformação do gato de Arnold como uma composta de um cisalhamento na direção  $x$  com fator 1 seguido de um cisalhamento na direção  $y$  com fator 1. Como as contas são feitas mod 1, a aplicação  $\Gamma$  leva todos os pontos de  $R^2$  no quadrado unitário  $S$ .

Nós iremos ilustrar o efeito da transformação do gato de Arnold no quadrado unitário  $S$  que, na Figura 11.15.1a, aparece sombreado e contendo a imagem de um gato. Pode ser mostrado que não importa quando é feita a conta mod 1, se depois de cada cisalhamento ou somente no final das contas. Nós veremos ambos métodos, inicialmente fazendo a conta mod 1 somente no fim. Os passos são os seguintes:

**Passo 1.** Cisalhamento na direção  $x$  com fator 1 (Figura 11.15.1b):

$$(x, y) \rightarrow (x + y, y)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$$

**Passo 2.** Cisalhamento na direção  $y$  com fator 1 (Figura 11.15.1c):

$$(x, y) \rightarrow (x, x + y)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \end{bmatrix}$$

**Passo 3.** Reagrupar no quadrado  $S$  (Figura 11.15.1d):

$$(x, y) \rightarrow (x, y) \bmod 1$$

O efeito geométrico da aritmética mod 1 é o de quebrar o paralelogramo da Figura 11.15.1c e reagrupar os pedaços de  $S$  conforme indicado na Figura 11.15.1d.

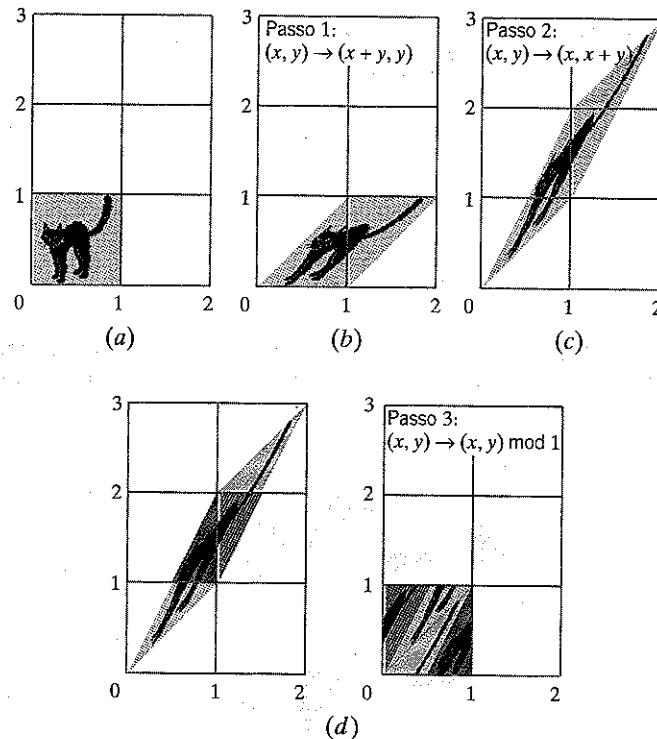


Figura 11.15.1

Para implementação em computador, é mais conveniente efetuar a aritmética mod 1 em cada passo, em vez de somente no final. Desta maneira obtemos um reagrupamento em cada passo, mas o efeito final é o mesmo. Os passos são os seguintes:

**Passo 1.** Cisalhamento na direção  $x$  com fator 1, seguido de um reagrupamento em  $S$  (Figura 11.15.2b):

$$(x, y) \rightarrow (x + y, y) \bmod 1$$

**Passo 2.** Cisalhamento na direção  $y$  com fator 1, seguido de um reagrupamento em  $S$  (Figura 11.15.2c):

$$(x, y) \rightarrow (x, x + y) \bmod 1$$

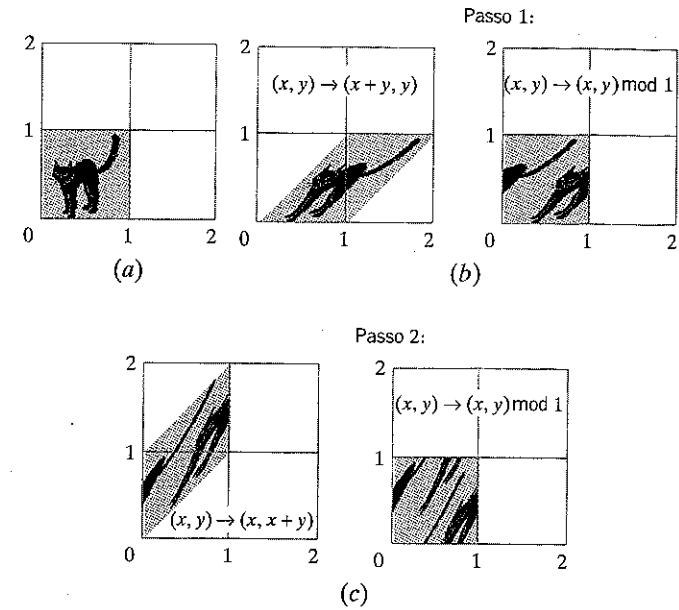


Figura 11.15.2

**Aplicações Repetidas** Aplicações caóticas como a transformação do gato de Arnold em geral surgem em modelos físicos em que uma certa operação é executada repetidamente. Por exemplo, as cartas de um baralho são misturadas por embaralhamento repetido, uma tinta é misturada por movimentos rotatórios repetidos de, por exemplo, uma colher, a água numa baía é misturada por mudanças repetidas da maré, e assim por diante. Deste modo, estamos interessados em examinar o efeito de aplicações repetidas, ou *iterações*, da transformação do gato de Arnold. A Figura 11.15.3, que foi gerada em computador, mostra o efeito de 25 iterações da transformação do gato de Arnold sobre o quadrado unitário  $S$ . Ocorrem dois fenômenos interessantes:

- O gato retorna à sua posição original na 25ª iteração.
- Em algumas das iterações intermediárias, o gato está decomposto em faixas que parecem ter uma direção específica.

Muito do restante desta seção é dedicado a explicar estes fenômenos.

**Pontos Periódicos** Nosso primeiro objetivo é explicar por que o gato na Figura 11.15.3 retorna à sua configuração original na 25ª iterada. Para isto, convém pensar em uma *imagem* no plano  $xy$  como sendo uma associação de cores aos pontos do plano. Para a geração de imagens em uma tela de monitor, ou em qualquer outra digitalização, as limitações impostas pelo *hardware* exigem que a imagem seja repartida em quadrados discretos chamados *pixels*. Por exemplo, nas imagens geradas por computador da Figura 11.15.3, o quadrado unitário foi dividido em um reticulado de 101 pixels por lado, num total de 10.201 pixels, cada um dos quais é preto ou branco (Figura

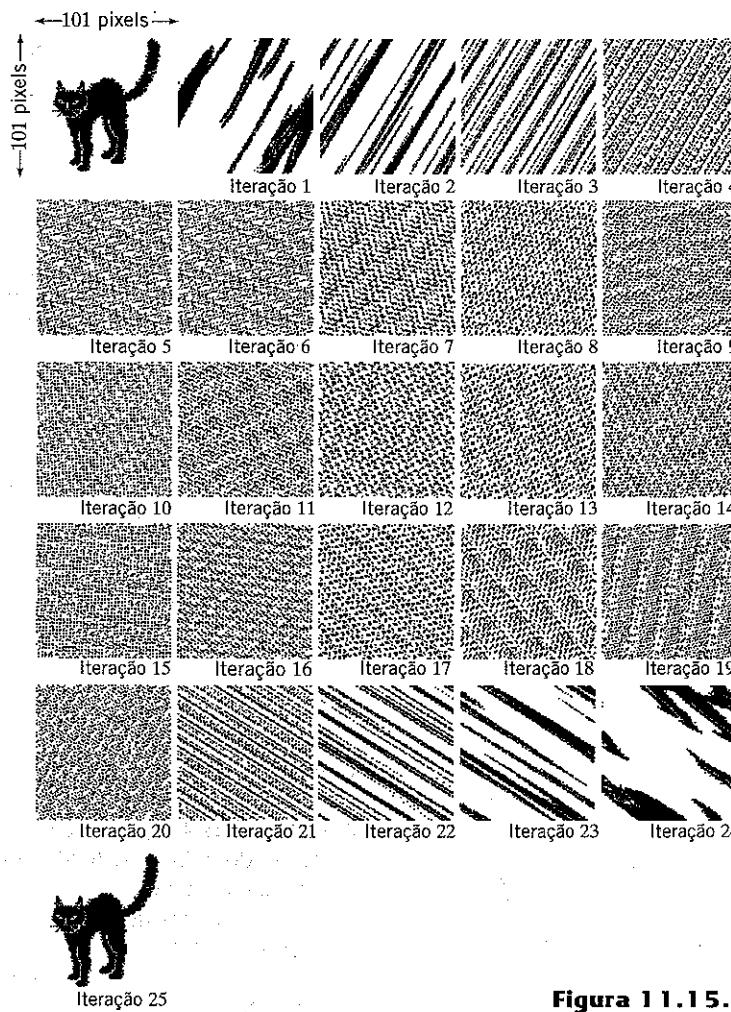


Figura 11.15.3

11.15.4). Um *mapa de pixels* é uma associação de cores a pixels para criar uma imagem.

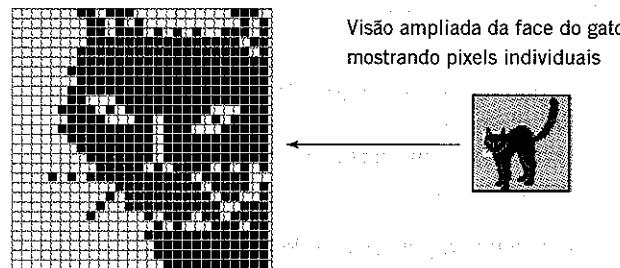


Figura 11.15.4

Como mostra a Figura 11.15.5, a cada pixel em  $S$  pode ser associado um único par de coordenadas da forma  $(m / 101, n / 101)$  que identifica o canto inferior à esquerda, e onde  $m$  e  $n$  são números inteiros do intervalo  $0, 1, 2, \dots, 100$ . Nós chamamos estes pontos de *pontos de pixel*, pois cada um identifica exatamente um único pixel. Em vez de restringir o estudo ao caso em que  $S$  foi subdividido num reticulado de 101 pixels em cada lado, vamos considerar o caso mais geral de  $p$  pixels em cada lado. Assim, cada mapa de pixels de  $S$  consiste de  $p^2$

pixels uniformemente espaçados a cada  $1 / p$  unidades em ambas direções  $x$  e  $y$ . Os pontos de pixel em  $S$  têm coordenadas da forma  $(m / p, n / p)$ , onde  $m$  e  $n$  são números inteiros de 0 a  $p - 1$ .

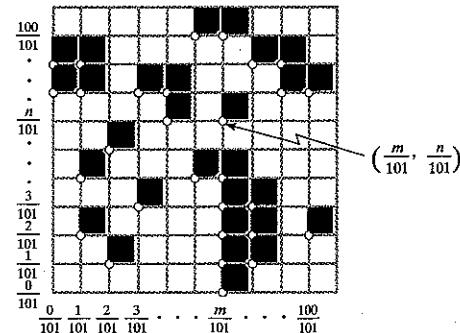


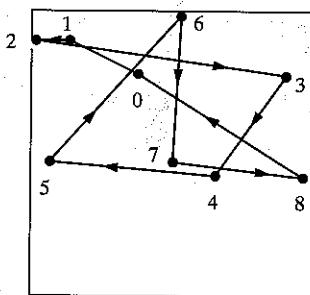
Figura 11.15.5

Sob a ação da transformação do gato de Arnold, cada ponto de pixel de  $S$  é transformado em um outro ponto de pixel de  $S$ . Para ver por que isto é assim, observe que a imagem por  $\Gamma$  do ponto de pixel  $(m / p, n / p)$  é dada, em formato matricial, por

$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} m \\ p \\ n \\ p \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ p \\ n \\ p \end{bmatrix} \bmod 1 = \begin{bmatrix} m+n \\ p \\ m+2n \\ p \end{bmatrix} \bmod 1 \quad (2)$$

O par ordenado  $((m+n)/p, (m+2n)/p) \bmod 1$  é da forma  $(m'/p, n'/p)$ , onde  $m'$  e  $n'$  estão no intervalo de  $0, 1, 2, \dots, p-1$ . Mais especificamente,  $m'$  e  $n'$  são o resto da divisão de  $m+n$  e  $m+2n$  por  $p$ , respectivamente. Consequentemente, cada ponto de  $S$  da forma  $(m/p, n/p)$  é levado em um outro ponto desta forma.

Como a transformação do gato de Arnold transforma cada ponto de pixel de  $S$  em um outro ponto de pixel de  $S$ , e como existem somente  $p^2$  pontos de pixel distintos em  $S$ , segue que um ponto de pixel arbitrário deve retornar à sua posição original depois de no máximo  $p^2$  iterações da transformação do gato de Arnold.



**Figura 11.15.6**

### EXEMPLO 1 Usando a Fórmula [2]

Se  $p = 76$ , então (2) é dada por

$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} m \\ 76 \\ n \\ 76 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} m+n \\ 76 \\ m+2n \\ 76 \end{bmatrix} \bmod 1$$

Neste caso, as iterações sucessivas do ponto  $(\frac{27}{76}, \frac{58}{76})$  são

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{27}{76} \\ \frac{58}{76} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{76} \\ \frac{67}{76} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{0}{76} \\ \frac{67}{76} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{67}{76} \\ \frac{58}{76} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{49}{76} \\ \frac{31}{76} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{4}{76} \\ \frac{35}{76} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ \frac{39}{76} \\ \frac{74}{76} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{37}{76} \\ \frac{55}{76} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ \frac{72}{76} \\ \frac{31}{76} \end{bmatrix}$$

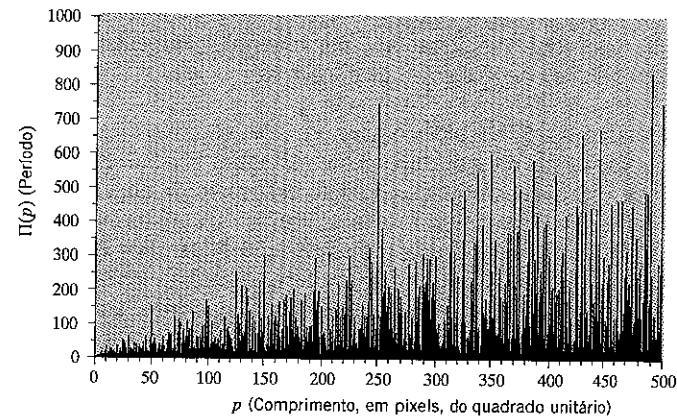
(verifique). Como o ponto retorna à sua posição inicial na nona aplicação da transformação do gato de Arnold (mas não antes), dizemos que o ponto tem período 9 e que o conjunto de nove iteradas distintas é um 9-ciclo. A Figura 11.15.6 mostra a localização deste 9-ciclo com o ponto inicial chamado de 0 e as sucessivas iteradas numeradas de acordo. ♦

Em geral, se um ponto retorna à sua posição inicial depois de  $n$  aplicações da transformação do gato de Arnold mas não retorna com menos do que  $n$  aplicações, dizemos que o ponto tem período  $n$  e que o conjunto de  $n$  iteradas distintas é um  $n$ -ciclo. A transformação do gato de Arnold leva  $(0, 0)$  em  $(0, 0)$ , de modo que este ponto tem período 1. Pontos com período 1 também são chamados *pontos fixos* da transformação.

Deixamos para o leitor mostrar (Exercício 11) que  $(0, 0)$  é o único ponto fixo da transformação do gato de Arnold.

**Período versus Largura de Pixel** Se  $P_1$  e  $P_2$  são pontos de período  $q_1$  e  $q_2$ , respectivamente, então  $P_1$  retorna à sua posição inicial em  $q_1$  iterações (mas não antes) e  $P_2$  retorna à sua posição inicial em  $q_2$  iterações (mas não antes); assim, ambos os pontos retornam às suas posições iniciais em qualquer número de iterações que seja um múltiplo tanto de  $q_1$  quanto de  $q_2$ . Em geral, para um mapa de pixels de  $p^2$  pontos de pixel da forma  $(m/p, n/p)$ , nós denotamos por  $\Pi(p)$  o menor número inteiro que é um múltiplo comum de todos os períodos de todos os pontos de pixel do mapa [ou seja,  $\Pi(p)$  é o menor inteiro que é divisível por todos os períodos]. Segue que o mapa de pixels retorna à sua posição inicial em  $\Pi(p)$  iterações da transformação do gato de Arnold (mas não antes). Por este motivo,  $\Pi(p)$  é chamado o *período do mapa de pixels*. No Exercício 4 nós pedimos ao leitor mostrar que se  $p = 101$ , então todos os pontos de pixel têm períodos 1, 5 ou 25, de modo que  $\Pi(101) = 25$ . Isto explica por que o gato na Figura 11.15.3 voltou à sua configuração inicial em 25 iterações.

A Figura 11.15.7 mostra como o período de um mapa de pixels varia com  $p$ . Enquanto que a tendência geral do período é crescer com  $p$  crescente, há uma quantidade surpreendente de irregularidades neste gráfico. De fato, não há nenhuma função elementar que especifique este relacionamento de  $p$  com  $\Pi(p)$  (veja o Exercício 1).



**Figura 11.15.7**

Embora um mapa de pixels com  $p$  pixels por lado não retorne à sua configuração inicial até que tenham ocorrido  $\Pi(p)$  iterações, várias coisas inesperadas podem ocorrer em iterações intermediárias. Por exemplo, a Figura 11.15.8 mostra o famoso matemático húngaro-norte-americano John von Neumann digitalizado em um mapa de pixels com  $p = 250$ . Pode ser mostrado que  $\Pi(250) = 750$ , de modo o mapa destes pixels retorna à sua configuração inicial depois de 750 iterações da transformação do gato de Arnold (mas não antes). Contudo, depois de 375 iterações, o mapa de pixels aparece de cabeça para baixo e depois de outras 375 iterações (para um total de 750) o mapa de pixels retorna à sua configuração inicial. Além disto, há tantos pontos de pixel com períodos que dividem 750 que múltiplas imagens fantasmais do original ocorrem em iterações inter-

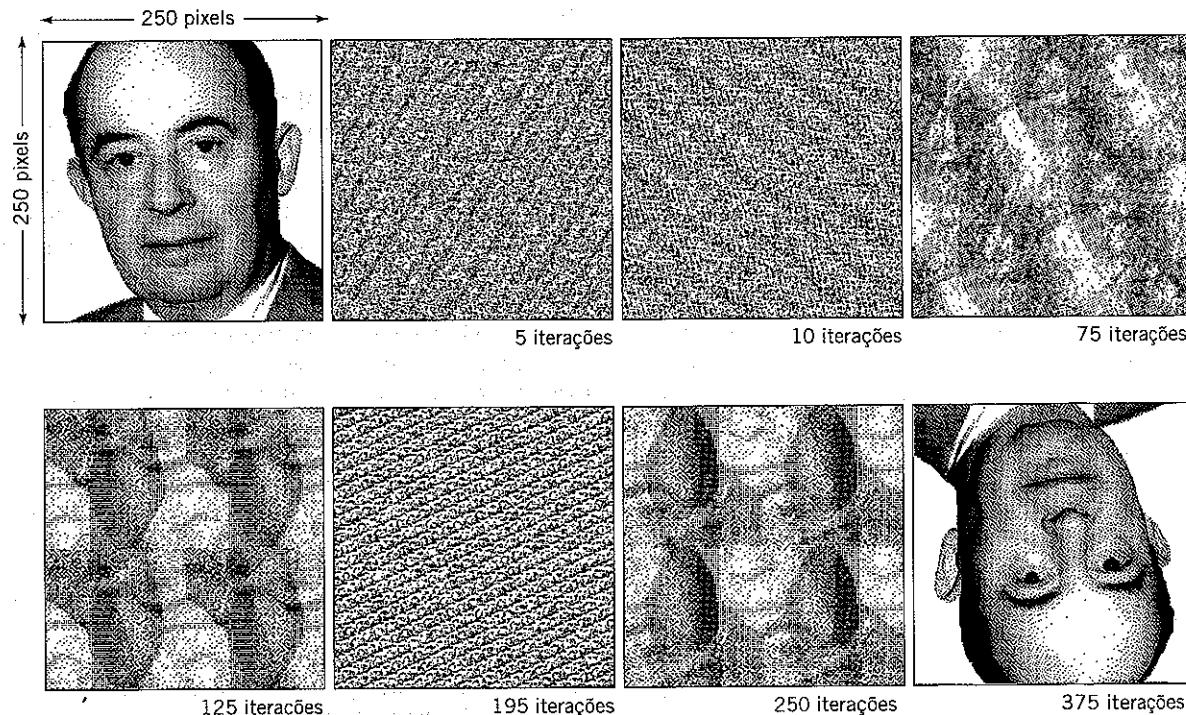


Figura 11.15.8

mediárias; com 195 iterações, por exemplo, aparecem várias miniaturas do original em filas diagonais.

**O Plano Ladrilhado** Nosso próximo objetivo é explicar a causa das faixas retas que aparecem na Figura 11.15.3. Para isto, convém ver a transformação do gato de Arnold de uma maneira diferente. Da maneira como foi definida, a transformação do gato de Arnold não é uma transformação linear, por causa da aritmética mod 1. Contudo, existe uma maneira alternativa de definir a transformação do gato de Arnold que evita a aritmética mod 1 e que resulta numa transformação linear. Para ver isto, imagine que o quadrado unitário  $S$  com sua imagem de gato é um ladrilho e suponha que o plano inteiro é coberto com tais ladrilhos, como na Figura 11.15.9. Nós dizemos que o plano foi *ladrilhado* com o quadrado unitário. Se nós aplicarmos a transformação matricial de (1) ao plano inteiro ladrilhado, sem efetuar a aritmética mod 1, então pode ser mostrado que a porção da imagem em  $S$  é idêntica à obtida usando a aritmética mod 1 (Figura 11.15.9). Resumindo, o ladrilhamento fornece o mesmo mapa de pixels de  $S$  que a aritmética mod 1, mas no caso de ladrilhamento, a transformação do gato de Arnold é uma transformação linear.

É importante entender, contudo, que o ladrilhamento e a aritmética mod 1 vêm a periodicidade de maneira diferente. Se um mapa de pixels de  $S$  tem período  $n$ , então no caso de aritmética mod 1, cada ponto retorna à sua posição original no final das  $n$  iterações. No caso de ladrilhamento, os pontos não precisam retornar à sua posição original; em vez disto, cada ponto é substituído por um ponto da mesma cor ao final de  $n$  iterações.

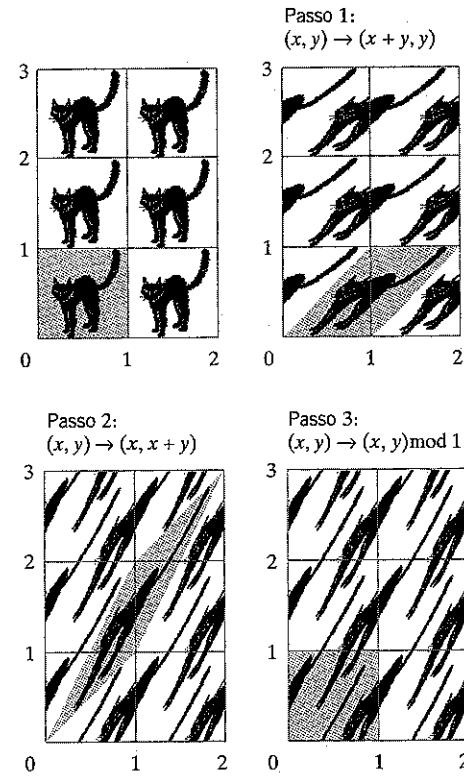


Figura 11.15.9

**Propriedades da Transformação do Gato de Arnold** Para entender a causa das faixas na Figura 11.15.3, pense na transformação do gato de Arnold como uma transformação linear do plano ladrilhado. Observe que a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que define a transformação do gato de Arnold é simétrica e tem determinante 1. Por ser 1 este determinante, a multiplicação por esta matriz preserva áreas; ou seja, são iguais a área de qualquer figura no plano e a área de sua imagem. Isto também vale para figuras em  $S$  no caso da aritmética mod 1, pois o efeito da aritmética mod 1 é a de recortar a figura e reagrupar os pedaços sem sobreposição, como mostra a Figura 11.15.1d. Assim, na Figura 11.15.3, a área do gato (seja o que for) é a mesma que a área total das manchas que são sua imagem em cada iteração.

A simetria da matriz significa que seus autovalores são reais e que os autovetores correspondentes são perpendiculares. Deixamos ao leitor conferir que os autovalores e autovetores correspondentes de  $C$  são

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,6180\dots, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,3819\dots,$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,6180\dots \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,6180\dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em cada aplicação da transformação do gato de Arnold o autovalor  $\lambda_1$  causa uma dilatação na direção do autovetor  $v_1$  por um fator de 2,6180... e o autovalor  $\lambda_2$  causa uma contração na direção do autovetor  $v_2$  por um fator de 0,3819.... A Figura 11.15.10 mostra um quadrado centrado na origem e de lados paralelos às direções dadas pelos autovetores. Sob a ação da transformação dada, o quadrado é deformado no retângulo de lados ainda paralelos às direções dos autovetores. A área do quadrado e do retângulo é a mesma.

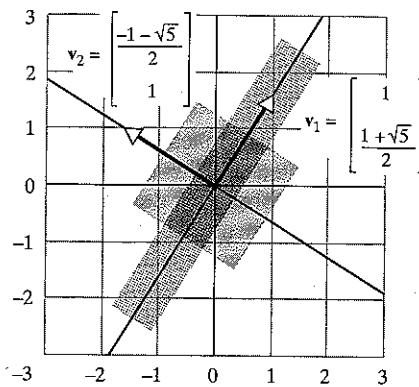


Figura 11.15.10

Para explicar a causa das faixas na Figura 11.15.3, considere  $S$  como uma parte do plano ladrilhado e seja  $p$  um ponto de  $S$  de período  $n$ . Por estarmos considerando um ladrilhamento, existe um ponto  $q$  com a mesma cor do que  $p$  e que, com sucessivas iterações, dirige-se à posição inicialmente ocupada por  $p$ , alcançando esta posição exatamente na  $n$ -ésima iteração. Este ponto é  $q = (C^{-1})^n p = C^{-n} p$ , pois

$$C^n q = C^n (C^{-n} p) = p$$

Assim, com iterações sucessivas, os pontos de  $S$  fluem para longe de suas posições iniciais, enquanto que ao mesmo tempo outros pontos do plano (com cores correspondentes) fluem em direção daquelas posições iniciais, completando sua viagem na iteração final do ciclo. A Figura 11.15.11 ilustra isto no caso de  $n = 4$ ,  $q = (-\frac{8}{3}, \frac{5}{3})$  e  $p = C^4 q = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Observe que  $p \bmod 1 = q \bmod 1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , de modo que ambos os pontos ocupam a mesma posição em seus respectivos ladrilhos. O ponto que se afasta flui na direção aproximada do autovetor  $v_1$ , como indicado pelas flechas na Figura 11.15.11 e o ponto que se aproxima flui na direção aproximada do autovetor  $v_2$ . São estas "linhas de fluxo" nas direções aproximadas dos autovetores que formam as faixas na Figura 11.15.3.

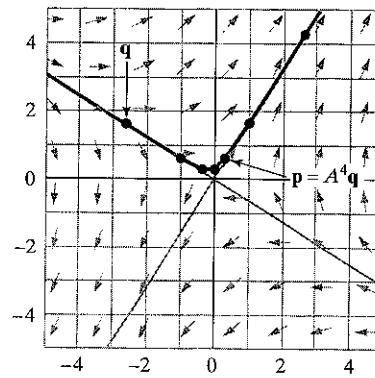


Figura 11.15.11

**Pontos Não-Periódicos** Até aqui nós somente consideramos a ação da transformação do gato de Arnold em pixels da forma  $(m/p, n/p)$  para um número inteiro positivo  $p$  arbitrário. Nós sabemos que todos estes pontos são periódicos. Agora nós vamos considerar o efeito da transformação do gato de Arnold em um ponto arbitrário  $(a, b)$  de  $S$ . Nós classificamos estes pontos como *racionais* se as coordenadas  $a$  e  $b$  são ambas números racionais e *irracionais* se pelo menos uma das coordenadas é irracional. Cada ponto racional é periódico, pois é um ponto de pixel para  $p$  convenientemente escolhido. Por exemplo, o ponto racional  $(r_1/s_1, r_2/s_2)$  pode ser escrito como  $(r_1 s_2/s_1 s_2, r_2 s_1/s_1 s_2)$  e portanto é um ponto de pixel com  $p = s_1 s_2$ . Pode ser mostrado (Exercício 13) que a recíproca também vale: Todos pontos periódicos são pontos racionais.

Segue da discussão acima que os pontos irracionais de  $S$  são não-periódicos, de modo que iterando sucessivamente um ponto irracional  $(x_0, y_0)$  em  $S$  devemos sempre obter pontos distintos de  $S$ . A Figura 11.15.12, que foi gerada em computador, mostra um ponto irracional e algumas iteradas selecionadas até 100.000. Para o particular ponto irracional que selecionamos, as iteradas não parecem acumular em nenhuma região em particular de  $S$ ; em vez disto, parece que elas se espalham por todo  $S$ , tornando-se mais e mais densas com sucessivas iterações.

O comportamento das iteradas na Figura 11.15.12 é suficientemente importante para ter sua própria terminologia. Nós dizemos que um conjunto  $D$  de pontos de  $S$  é *denso em S* se cada disco centrado em qualquer ponto de  $S$  contém pontos de  $D$ , por menor que seja o raio do disco (Figura 11.15.13). Pode

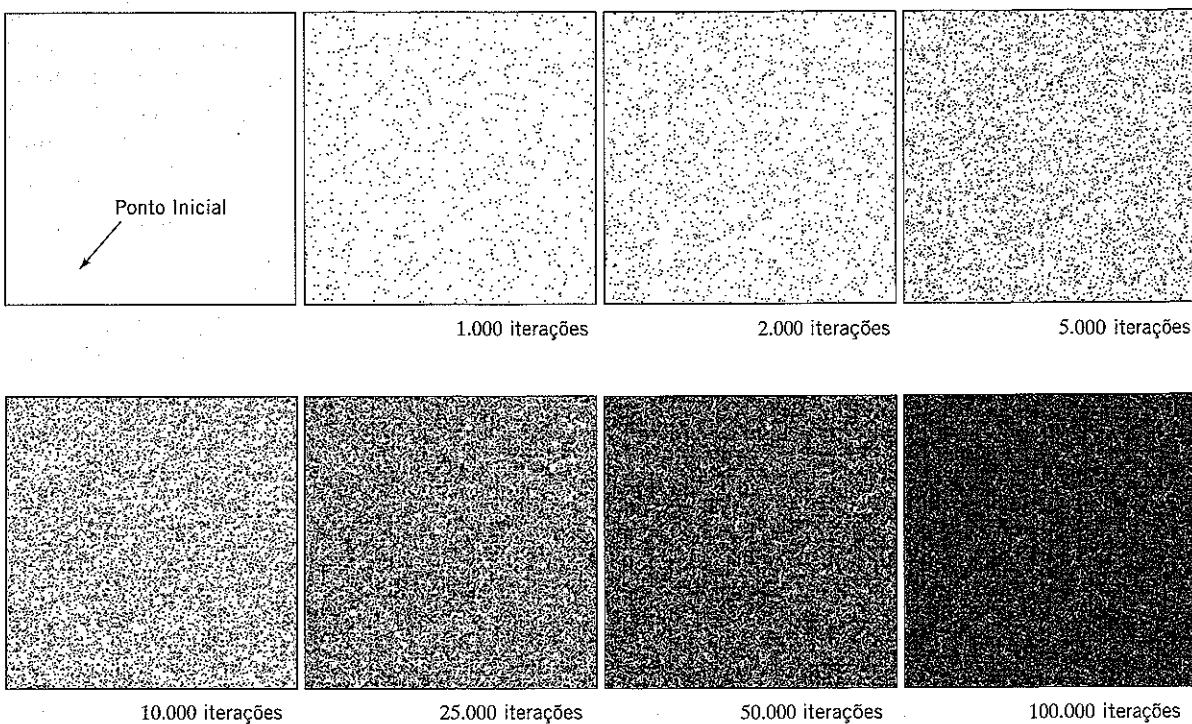


Figura 11.15.12

ser mostrado que os pontos racionais são densos em  $S$  e que o conjunto das iteradas da maioria (mas não de todos) pontos irrationais é denso em  $S$ .

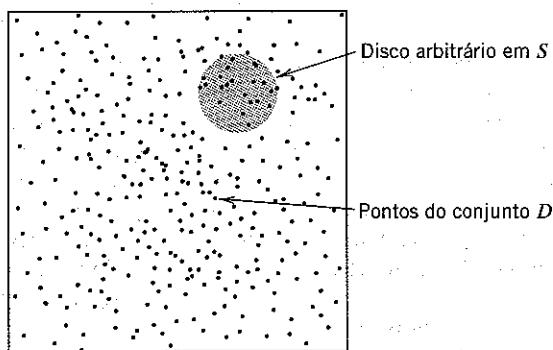


Figura 11.15.13

**Definição de Caos** Nós sabemos que para a transformação do gato de Arnold os pontos racionais de  $S$  são periódicos e densos em  $S$  e que muitos mas não todos os pontos irrationais têm iteradas densas em  $S$ . Estes são ingredientes básicos do caos. Existem várias definições de caos atualmente em uso, mas a seguinte, que deriva de uma definição introduzida por Robert L. Devaney em seu livro *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc) de 1986, é a mais relacionada com nosso trabalho.

### Definição

Uma aplicação contínua  $T$  de um conjunto  $S$  sobre si mesmo é dita **caótica** se:

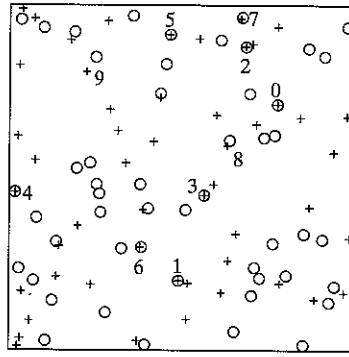
- (i)  $S$  contém um conjunto denso de pontos periódicos de  $T$ .
- (ii) Existe um ponto em  $S$  cujas iteradas por  $T$  são densas em  $S$ .

Pode ser provado que a transformação do gato de Arnold é contínua e, consequentemente, satisfaz a definição de aplicação caótica. O que é notável sobre esta definição é que uma aplicação caótica exibe um elemento de ordem e um elemento de desordem—os pontos periódicos movem regularmente em ciclos, mas os pontos com iteradas densas movem irregularmente, muitas vezes obscurecendo a regularidade dos pontos periódicos. Esta fusão de ordem e desordem caracteriza as aplicações caóticas.

**Sistemas Dinâmicos** Aplicações caóticas surgem no estudo de **sistemas dinâmicos**. Dito informalmente, um sistema dinâmico pode ser visto como um sistema que tem uma configuração ou estado específico em cada instante de tempo, mas que muda seu estado com o tempo. Desta maneira podem ser entendidos sistemas químicos, ecológicos, elétricos, biológicos, econômicos, etc. Num **sistema dinâmico discreto**, o estado muda em pontos discretos do tempo em vez de mudar a cada

instante. Num *sistema dinâmico discreto caótico*, cada estado resulta de uma aplicação caótica do estado precedente. Por exemplo, se nós considerarmos a transformação do gato de Arnold aplicada em instantes discretos do tempo, então os mapas de pixels da Figura 11.15.3 podem ser vistos como a evolução de um sistema dinâmico discreto caótico a partir de um conjunto de estados iniciais (cada ponto do gato é um estado inicial isolado) para conjuntos de estados sucessivos.

Um dos problemas fundamentais no estudo de sistemas dinâmicos é prever estados futuros do sistema a partir de um estado inicial conhecido. Na prática, contudo, o estado inicial exato é raramente conhecido por causa de erros nos instrumentos utilizados na medição do estado inicial. Acreditava-se, há algum tempo, que se os instrumentos de medição fossem suficientemente precisos e os computadores usados para efetuar as iterações fossem suficientemente poderosos, então o estado futuro de um sistema poderia ser predito com qualquer grau de precisão. No entanto, a descoberta de sistemas caóticos estralhou esta crença, pois foi mostrado que com tais sistemas, por menor que seja o erro de medição no estado inicial ou no cálculo das iteradas, este erro inicial é ampliado exponencialmente, impedindo, com isso, uma predição precisa de estados futuros. Vamos demonstrar esta *sensitividade a condições iniciais* com a transformação do gato de Arnold.

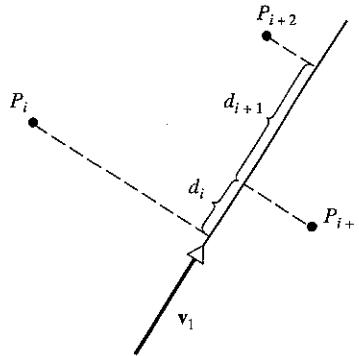


**Figura 11.15.14**

Suponha que  $P_0$  é um ponto do plano  $xy$  cujas coordenadas exatas são  $(0,77837; 0,70904)$ . Fazemos um erro de medição de  $0,00001$  na coordenada  $y$ , de modo que pensamos que o ponto está localizado em  $(0,77837; 0,70905)$ , que denotamos por  $Q_0$ . Ambos  $P_0$  e  $Q_0$  são pontos de pixel com  $p = 100.000$  (por que?)

e portanto ambos retornam à sua posição inicial depois de 75.000 iteradas, já que  $\Pi(100.000) = 75.000$ . Na Figura 11.15.14 nós indicamos as primeiras 50 iterações de  $P_0$  pela transformação do gato de Arnold por cruzes e as de  $Q_0$  por círculos. Mesmo estando tão próximos inicialmente que seus símbolos se sobrepõem, os pontos  $P_0$  e  $Q_0$  somente tem símbolos sobrepostos até a oitava iterada; a partir da nona iterada suas iteradas seguem caminhos divergentes.

É possível quantificar o crescimento do erro a partir dos autovalores e autovetores da transformação do gato de Arnold. Para isto, pensamos na transformação do gato de Arnold como uma transformação linear do plano ladrilhado. Lembre da Figura 11.15.10 e da discussão pertinente que a distância entre dois pontos de  $S$ , projetada na direção do autovetor  $v_1$ , cresce por um fator de  $2,6180\dots (= \lambda_1)$  com cada iteração (Figura 11.15.15). Depois de nove iteradas, esta distância projetada aumenta por um fator de  $(2,6180\dots)^9 = 5,777,99\dots$  e, com um erro inicial de aproximadamente  $1 / 100.000$  na direção de  $v_1$ , esta distância é  $0,0577\dots$ , ou seja, aproximadamente  $1 / 17$  da largura do quadrado unitário  $S$ . Depois de doze iterações, este pequeno erro cresce a  $(2,6180\dots)^{12} / 100.000 = 1,0368\dots$ , que é maior do que a largura de  $S$ . Assim, devido ao crescimento exponencial do erro inicial, depois de 12 iterações perdemos completamente o controle sobre as verdadeiras posições das iteradas dentro de  $S$ .



**Figura 11.15.15**

Embora a sensitividade a condições iniciais limite a possibilidade de prever a evolução futura de sistemas dinâmicos, novas técnicas estão atualmente sendo investigadas para descrever a evolução futura de maneiras alternativas.

### Conjunto de Exercícios 11.15

- Os seguintes resultados sobre a natureza da função  $\Pi(p)$  foram estabelecidos em um artigo de uma revista periódica matemática [F. J. Dyson e H. Falk, "Period of a Discrete Cat Mapping," *The American Mathematical Monthly*, Vol. 99, Agosto-Setembro de 1992, páginas 603–614]:
  - $\Pi(p) = 3p$  se, e somente se,  $p = 2 \cdot 5^k$  para  $k = 1, 2, \dots$
  - $\Pi(p) = 2p$  se, e somente se,  $p = 5^k$  para  $k = 1, 2, \dots$  ou  $p = 6 \cdot 5^k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$
  - $\Pi(p) \leq 12p/7$  para todas as escolhas de  $p$ .
 Encontre  $\Pi(250)$ ,  $\Pi(25)$ ,  $\Pi(125)$ ,  $\Pi(30)$ ,  $\Pi(10)$ ,  $\Pi(50)$ ,  $\Pi(3750)$ ,  $\Pi(6)$  e  $\Pi(5)$ .
- Encontre todos os  $n$ -ciclos que são subconjuntos dos 36 pontos de  $S$  da forma  $(m/6, n/6)$  com  $m$  e  $n$  no intervalo  $0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Em seguida encontre  $\Pi(6)$ .
- (Gerador de Fibonacci de Números Aleatórios)** Um método bem conhecido de gerar números inteiros “pseudo-aleatórios”  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$  no intervalo de 0 a  $p - 1$  é baseado no seguinte algoritmo:

## 464 • • • Álgebra Linear com Aplicações

- (i) Escolha quaisquer dois números inteiros  $x_0$  e  $x_1$  no intervalo  $0, 1, 2, \dots, p-1$ .  
(ii) Tome  $x_{n+1} = (x_n + x_{n-1}) \bmod p$  para  $n = 1, 2, \dots$

Aqui  $x \bmod p$  denota o número no intervalo de  $0$  a  $p-1$  que difere de  $x$  por um múltiplo de  $p$ . Por exemplo,  $35 \bmod 9 = 8$  (pois  $8 = 35 - 3 \cdot 9$ );  $36 \bmod 9 = 0$  (pois  $0 = 36 - 4 \cdot 9$ ) e  $-3 \bmod 9 = 6$  (pois  $6 = -3 + 1 \cdot 9$ ).

- (a) Gere a seqüência de números pseudo-aleatórios que resulta das escolhas  $p = 15$ ,  $x_0 = 3$  e  $x_1 = 7$  até a seqüência começar a repetir.  
(b) Mostre que a fórmula a seguir é equivalente ao passo (ii) do algoritmo:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \bmod p \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

- (c) Use a fórmula da parte (b) para gerar a seqüência de vetores para a escolha  $p = 21$ ,  $x_0 = 5$  e  $x_1 = 5$  até a seqüência começar a repetir.

**OBSERVAÇÃO.** Se nós tomarmos  $p = 1$  e escolhermos  $x_0$  e  $x_1$  no intervalo  $[0, 1)$ , então o gerador de números aleatórios acima produz números pseudo-aleatórios no intervalo  $[0, 1)$ . O esquema que resulta é precisamente o da transformação do gato de Arnold. Além disto, se nós esquecermos a aritmética modular do algoritmo e tomarmos  $x_0 = x_1 = 1$ , então a seqüência de inteiros resultante é a famosa seqüência  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$  de Fibonacci, na qual cada número depois dos dois primeiros é a soma dos dois números anteriores.

4. Para  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , pode ser verificado que

$$C^{25} = \begin{bmatrix} 7.778.742.049 & 12.586.269.025 \\ 12.586.269.025 & 20.365.011.074 \end{bmatrix}$$

Também pode ser verificado que  $12.586.269.025$  é divisível por  $101$  e que o resto da divisão de  $7.778.742.049$  e de  $20.365.011.074$  por  $101$  é  $1$ .

- (a) Mostre que cada ponto de  $S$  da forma  $(m/101, n/101)$  retorna à sua posição inicial depois de 25 iterações da transformação do gato de Arnold.  
(b) Mostre que cada ponto de  $S$  da forma  $(m/101, n/101)$  tem período 1, 5 ou 25.  
(c) Mostre que o ponto  $(\frac{1}{101}, 0)$  tem período maior do que 5 iterando-o cinco vezes.  
(d) Mostre que  $\Pi(101) = 25$ .  
5. Mostre que cada ponto de  $S$  é um ponto periódico para a aplicação  $T : S \rightarrow S$  definida por  $T(x, y) = (x + \frac{5}{12}, y) \bmod 1$ . Por que isto mostra que esta aplicação não é caótica?

6. Um *automorfismo de Anosov* em  $R^2$  é uma aplicação do quadrado unitário  $S$  sobre  $S$  da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1$$

na qual (i)  $a, b, c$  e  $d$  são números inteiros, (ii) o determinante da matriz é  $\pm 1$  e (iii) os autovalores da matriz não têm magnitude 1. Pode ser mostrado que todos os automorfismos de Anosov são caóticos.

- (a) Mostre que a transformação do gato de Arnold é um automorfismo de Anosov.  
(b) Quais das seguintes são matrizes de automorfismos de Anosov?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- (c) Mostre que a seguinte aplicação de  $S$  sobre  $S$  não é um automorfismo de Anosov.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1$$

Qual é o efeito geométrico desta transformação sobre  $S$ ? Use sua resposta para mostrar que esta aplicação não é caótica mostrando que todos os pontos de  $S$  são periódicos.

7. Mostre que a transformação do gato de Arnold é injetora no quadrado unitário  $S$  e que sua imagem é  $S$ .

8. Mostre que a inversa da transformação do gato de Arnold é dada por

$$\Gamma^{-1}(x, y) = (2x - y, -x + y) \bmod 1$$

9. Mostre que o quadrado unitário pode ser particionado em quatro regiões triangulares em cada uma das quais a transformação do gato de Arnold é uma aplicação da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

onde  $a$  e  $b$  não são necessariamente os mesmos para cada região. [Sugestão. Encontre as regiões de  $S$  que são aplicadas nas quatro regiões

sombreadas do paralelogramo da Figura 11.15.1d.]

10. Se  $(x_0, y_0)$  é um ponto em  $S$  e  $(x_n, y_n)$  é a  $n$ -ésima iterada deste ponto pela transformação do gato de Arnold, mostre que

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

Este resultado implica que a aritmética modular não precisa ser efetuada após cada iteração, bastando aplicá-la uma vez ao final da iteração.

11. Mostre que  $(0, 0)$  é o único ponto fixo da transformação do gato de Arnold mostrando que a única solução da equação

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

com  $0 \leq x_0 < 1$  e  $0 \leq y_0 < 1$  é  $x_0 = y_0 = 0$ . [Sugestão. Para inteiros não-negativos  $r$  e  $s$  convenientes, a equação acima pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

12. Encontre todos os 2-ciclos da transformação do gato de Arnold encontrando todas as soluções da equação

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

com  $0 \leq x_0 < 1$  e  $0 \leq y_0 < 1$ . [Sugestão. Para inteiros não-negativos  $r$  e  $s$  convenientes, a equação acima pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

13. Mostre que cada ponto periódico da transformação do gato de Arnold deve ser um ponto racional mostrando que para todas as soluções da equação

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

os números  $x_0$  e  $y_0$  são quocientes de números inteiros.

#### Requisito: Recurso Computacional

#### Exercícios Computacionais 11.15

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Os métodos do Exercício 4 mostram que, para a transformação do gato de Arnold, o número  $\Pi(p)$  é o menor número inteiro satisfazendo a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{\Pi(p)} \text{ mod } p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isto sugere que uma maneira de determinar  $\Pi(p)$  é calcular

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \text{ mod } p$$

começando com  $n = 1$  e parando quando este procedimento dá a matriz identidade. Use esta idéia para calcular  $\Pi(p)$  para  $p = 2, 3, \dots, 10$ . Compare seus resultados com as fórmulas dadas no Exercício 1, se aplicável. O que você pode conjecturar sobre

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}\Pi(p)} \text{ mod } p$$

quando  $\Pi(p)$  é um número par?

## T2. Os autovalores e autovetores da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

da transformação do gato de Arnold são

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Usando estes autovalores e autovetores, podemos definir

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

e escrever  $C = P D P^{-1}$  e portanto  $C^n = P D^n P^{-1}$ . Use um computador para mostrar que

$$C^n = \begin{bmatrix} c_{11}^{(n)} & c_{12}^{(n)} \\ c_{21}^{(n)} & c_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$

onde

$$c_{11}^{(n)} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$c_{22}^{(n)} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

e

$$c_{12}^{(n)} = c_{21}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}$$

De que maneira você pode usar estes resultados e suas conclusões no Exercício T1 para simplificar o método de calcular  $\Pi(p)$ ?

## 11.16 CRIPTOGRAFIA

Nesta seção apresentamos um método para codificar e decodificar mensagens. Nós também examinamos a aritmética modular e mostramos como a eliminação gaussiana pode ser utilizada, às vezes, para quebrar o código de um oponente.

### PRÉ-REQUISITOS: Matrizes

- Eliminación Gaussiana
- Operações Matriciais
- Independência Linear
- Transformações Lineares  
(Seções 8.1 e 8.2)

sidade de manter a privacidade da informação transmitida ao longo de linhas públicas de comunicação. Na linguagem da criptografia, os códigos são denominados *cifras*, as mensagens não codificadas são *textos comuns* e as mensagens codificadas são *textos cifrados* ou *criptogramas*. O processo de converter um texto comum em cifrado é chamado *cifrar* ou *criptografar* e o processo inverso de converter um texto cifrado em comum é chamado *decifrar*.

As cifras mais simples, denominadas *cifras de substituição*, são as que substituem cada letra do alfabeto por uma outra letra. Por exemplo, na cifra de substituição

Comum      A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Cifra      D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C

a letra de texto comum A é substituída por D, a letra de texto comum B por E e assim por diante. Com esta cifra, a mensagem de texto comum

ROMA NAO FOI CONSTRUIDA EM UM DIA

fica

URPD QDR IRL FRQVWUXLGD HP XP GLD

**Cifras** O estudo da codificação e decodificação de mensagens secretas é denominado *criptografia*. Embora os códigos secretos remontem aos primórdios da comunicação escrita, tem havido um aumento recente de interesse no assunto devido à neces-

**Cifras de Hill** Uma desvantagem de cifras de substituição é que elas preservam as frequências de letras individuais, tornando relativamente fácil quebrar o código por métodos estatísticos. Uma maneira de superar este problema é dividir o texto em grupos de letras e criptografar o texto comum por grupo, em vez de uma letra de cada vez. Um *sistema poligráfico* é um sistema de criptografia no qual o texto comum é dividido em conjuntos de  $n$  letras, cada um dos quais é substituído por um conjunto de  $n$  letras cifradas. Nesta seção nós estudaremos uma classe de sistemas poligráficos chamados *cifras de Hill* que são baseados em transformações matriciais. (O nome é em referência a Lester S. Hill, que introduziu estes sistemas em dois artigos: "Cryptography in an Algebraic Alphabet," *American Mathematical Monthly*, Vol. 36, Junho-Julho de 1929, páginas 306–312 e "Concerning Certain Linear Transformation Apparatus of Cryptography," *American Mathematical Monthly*, Vol. 38, Março de 1931, páginas 135–154.)

Daqui em diante, nós vamos supor que cada letra de texto comum e de texto cifrado, excetuando o Z, tem um valor numérico que especifica sua posição no alfabeto padrão (Tabela 1). Por motivos que ficarão claros mais tarde, damos a Z o valor de 0.

TABELA 1

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Nos casos mais simples de cifras de Hill, transformamos pares sucessivos de texto comum em texto cifrado pelo seguinte procedimento:

**Passo 1.** Escolha uma matriz  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

com entradas inteiras para efetuar a codificação. Condições adicionais sobre A serão impostas mais tarde.

**Passo 2.** Agrupe letras sucessivas de texto comum em pares, adicionando uma letra adicional fictícia para completar o último par se o texto comum tem um número ímpar de letras; substitua cada letra de texto comum por seu valor numérico.

**Passo 3.** Converta cada par sucessivo  $p_1 p_2$  de letras de texto comum em um vetor-coluna

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

e forme o produto  $A \mathbf{p}$ . Nós chamamos  $\mathbf{p}$  de *vetor comum* e  $A \mathbf{p}$  o correspondente *vetor cifrado*.

**Passo 4.** Converta cada vetor cifrado em seu equivalente alfabético.

### EXEMPLO 1 Cifra de Hill de uma Mensagem

Use a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

para obter a cifra de Hill da mensagem de texto comum (em inglês)

I AM HIDING

*Solução.*

Se nós agruparmos o texto comum em pares de letras e adicionamos a letra fictícia G para completar o último par, obtemos

$$IA \ MH \ ID \ IN \ GG$$

ou, equivalentemente, usando a Tabela 1,

$$9 \ 1 \ 13 \ 8 \ 9 \ 4 \ 9 \ 14 \ 7 \ 7$$

Para codificar o par IA nós efetuamos o produto matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

que fornece o texto cifrado KC pela Tabela 1.

Para codificar o par MH nós efetuamos o produto matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 24 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Aqui temos um problema, pois o número 29 não possui equivalente alfabético (Tabela 1). Para resolver este problema nós fazemos o seguinte acordo:

*Sempre que ocorrer um inteiro maior do que 25, ele será substituído pelo resto da divisão deste inteiro por 26.*

Como o resto da divisão é um dos inteiros 0, 1, 2, ..., 25, este procedimento sempre fornece um inteiro com equivalente alfabético.

Assim, em (1) nós substituímos 29 por 3, que é o resto da divisão de 29 por 26, e obtemos o texto cifrado CX da Tabela 1 para MH.

As contas para os demais vetores cifrados são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 42 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Estes vetores correspondem aos pares de texto cifrado QL, KP e UU, respectivamente. Coletando os pares, obtemos a mensagem cifrada completa

$$KC \ CX \ QL \ KP \ UU$$

que, normalmente, seria transmitida como uma única cadeia sem espaços:

KCCXQLKPUU

Como o texto comum foi agrupado em pares e criptografado por uma matriz  $2 \times 2$ , dizemos que a cifra de Hill do Exemplo 1 é uma *2-cifra de Hill*. Evidentemente também é possível agrupar o texto comum em ternos e criptografar com uma matriz  $3 \times 3$  com entradas inteiras; isto é chamado uma *3-cifra de Hill*. Em geral, para uma *n-cifra de Hill* agrupamos o texto comum em conjuntos de  $n$  letras e codificamos com uma *matriz codificadora*  $n \times n$  de entradas inteiras.

**Aritmética Modular** No Exemplo 1 substituímos os inteiros maiores do que 25 pelo seu resto pela divisão por 25. Esta técnica de trabalhar com os restos é a base de uma parte da Matemática chamada *aritmética modular*. Tendo em vista sua importância em criptografia, nós iremos digredir por um momento para elaborar algumas das principais idéias desta área.

Em aritmética modular nós supomos dado um inteiro positivo  $m$ , chamado **módulo** e consideramos “iguais” ou “equivalentes” em relação ao módulo quaisquer dois inteiros cuja diferença é um múltiplo inteiro do módulo. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

### Definição

Dados um número inteiro positivo  $m$  e dois inteiros  $a$  e  $b$  quaisquer, dizemos que  $a$  é **equivalente** a  $b$  módulo  $m$ , e escrevemos

$$a = b \pmod{m}$$

se  $a - b$  é um múltiplo inteiro de  $m$ .

### EXEMPLO 2 Várias Equivalências

$$7 = 2 \pmod{5}$$

$$19 = 3 \pmod{2}$$

$$-1 = 25 \pmod{26}$$

$$12 = 0 \pmod{4}$$

Dado um módulo  $m$ , pode ser provado que qualquer inteiro  $a$  é equivalente, módulo  $m$ , a exatamente um dos inteiros

$$0, 1, 2, \dots, m-1$$

Este inteiro é chamado o **resíduo** de  $a$  módulo  $m$  e nós escrevemos

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

para denotar o conjunto dos resíduos de  $a$  módulo  $m$ .

Se  $a$  é um inteiro **não-negativo**, então seu resíduo módulo  $m$  é simplesmente o resto da divisão de  $a$  por  $m$ . Para um inteiro  $a$  arbitrário, o resíduo pode ser encontrado usando o seguinte teorema.

### Teorema 11.16.1

Dados um inteiro  $a$  e um módulo  $m$  quaisquer, seja

$$R = \text{resto de } \frac{|a|}{m}$$

Então o resíduo  $r$  de  $a$  módulo  $m$  é dado por

$$r = \begin{cases} R & \text{se } a \geq 0 \\ m - R & \text{se } a < 0 \text{ e } R \neq 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \text{ e } R = 0 \end{cases}$$

### EXEMPLO 3 Resíduos mod 26

Encontre os resíduos módulo 26 de (a) 87, (b)  $-38$  e (c)  $-26$ .

Solução (a). Dividindo  $|87| = 87$  por 26 dá um resto de  $R = 9$ , ou seja,  $r = 9$ . Assim,

$$87 = 9 \pmod{26}$$

Solução (b). Dividindo  $|-38| = 38$  por 26 dá um resto de  $R = 12$ , ou seja,  $r = 26 - 12 = 14$ . Assim,

$$-38 = 14 \pmod{26}$$

Solução (c). Dividindo  $|-26| = 26$  por 26 dá um resto de  $R = 0$ . Assim,

$$-26 = 0 \pmod{26}$$

Na aritmética usual, cada número não-nulo  $a$  tem um **recíproco**, ou **inverso multiplicativo**, denotado por  $a^{-1}$ , tal que  $a a^{-1} = a^{-1} a = 1$

Na aritmética modular nós temos o seguinte conceito correspondente:

### Definição

Dado um número  $a$  em  $\mathbb{Z}_m$ , dizemos que um número  $a^{-1}$  em  $\mathbb{Z}_m$  é um **recíproco**, ou **inverso multiplicativo** de  $a$  módulo  $m$  se  $a a^{-1} = a^{-1} a = 1 \pmod{m}$ .

Pode ser provado que se  $a$  e  $m$  não têm fatores primos comuns, então  $a$  tem um único recíproco módulo  $m$ ; reciprocamente, se  $a$  e  $m$  têm um fator primo comum, então  $a$  não tem recíproco módulo  $m$ .

### EXEMPLO 4 Recíproco de 3 mod 26

O número 3 tem um recíproco módulo 26 pois 3 e 26 não têm fatores primos em comum. Este recíproco pode ser obtido encontrando o número  $x$  em  $\mathbb{Z}_{26}$  que satisfaz a equação modular

$$3x = 1 \pmod{26}$$

Embora existam métodos gerais para resolver tais equações modulares, isto não será abordado pois nos levaria para muito longe do nosso objetivo. Contudo, como 26 é relativamente pequeno, esta equação pode ser resolvida experimentando, uma por uma, cada solução possível de 0 a 25. Desta maneira nós encontramos que  $x = 9$  é a solução, pois

$$3 \cdot 9 = 27 = 1 \pmod{26}$$

Assim,

$$3^{-1} = 9 \pmod{26}$$

### EXEMPLO 5 Um Número sem Recíproco mod 26

O número 4 não possui recíproco mod 26 pois 4 e 26 têm 2 como fator primo comum (ver Exercício 8).

Para referência futura, fornecemos a seguinte tabela de recíprocos módulo 26:

TABELA 2 Recíprocos Módulo 26

$a$	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
$a^{-1}$	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

**Decifrando** Cada cifra útil deve possuir um procedimento para decifrar. Para decifrar as cifras de Hill, usamos a inversa (mod 26) da matriz codificadora. Para ser preciso, se  $m$  é um inteiro positivo, dizemos que uma matriz  $A$  com entradas em  $Z_m$  é **invertível módulo  $m$**  se existir uma matriz  $B$  com entradas em  $Z_m$  tal que

$$AB = BA = I \pmod{m}$$

Suponha agora que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

é invertível módulo 26 e que esta matriz é usada para uma 2-cifra de Hill. Se

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

é um vetor comum, então

$$\mathbf{c} = A \mathbf{p}$$

é o correspondente vetor cifrado e

$$\mathbf{p} = A^{-1} \mathbf{c}$$

Assim, cada vetor comum pode ser recuperado do correspondente vetor cifrado pela multiplicação à esquerda por  $A^{-1} \pmod{26}$ .

Em criptografia é importante saber quais matrizes são invertíveis módulo 26 e como obter suas inversas. Em seguida nós investigaremos estas questões.

Em aritmética comum, uma matriz quadrada  $A$  é invertível se, e somente se,  $\det(A) \neq 0$  ou, equivalentemente,  $\det(A)$  tem um recíproco. O teorema seguinte é o análogo deste resultado em aritmética modular.

### Teorema 11.16.2

Uma matriz quadrada  $A$  com entradas em  $Z_m$  é invertível módulo  $m$  se, e somente se, o resíduo de  $\det(A)$  módulo  $m$  tem um recíproco módulo  $m$ .

Como o resíduo de  $\det(A)$  módulo  $m$  terá um recíproco módulo  $m$  se, e somente se, este resíduo e  $m$  não tiverem fator primo comum, temos o seguinte corolário.

### Corolário 11.16.3

Uma matriz quadrada  $A$  com entradas em  $Z_m$  é invertível módulo  $m$  se, e somente se,  $m$  e o resíduo de  $\det(A)$  módulo  $m$  não têm fatores primos comuns.

Como os únicos fatores primos de  $m = 26$  são 2 e 13, temos o seguinte corolário que é útil em criptografia.

### Corolário 11.16.4

Uma matriz quadrada  $A$  com entradas em  $Z_{26}$  é invertível módulo 26 se, e somente se, o resíduo de  $\det(A)$  módulo 26 não é divisível por 2 ou 13.

Deixamos para o leitor verificar que se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tem entradas em  $Z_{26}$  e se o resíduo de  $\det(A) = ad - bc$  módulo 26 não é divisível por 2 ou 13, então a inversa de  $\det(A) \pmod{26}$  é dada por

$$A^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \pmod{26} \quad (2)$$

onde  $(ad - bc)^{-1}$  é o recíproco do resíduo de  $ad - bc \pmod{26}$ .

### EXEMPLO 6 Inversa de uma Matriz mod 26

Encontre a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

módulo 26.

Solução.

$$\det(A) = ad - bc = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 3$$

de modo que, pela Tabela 2,

$$(ad - bc)^{-1} = 3^{-1} = 9 \pmod{26}$$

Assim, por (2),

$$A^{-1} = 9 \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -54 \\ -18 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

Conferindo,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 234 \\ 26 & 105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

Analogamente,  $A^{-1} A = I \pmod{26}$ .

### EXEMPLO 7 Decifrando uma 2-Cifra de Hill

Decifre a seguinte 2-cifra de Hill, que foi criptografada pela matriz do Exemplo 6:

GTNKGKDUSK

Solução.

Pela Tabela 1, o equivalente numérico do texto cifrado é

7 20 14 11 7 11 4 21 19 11

Para obter os pares de texto comum, nós multiplicamos cada vetor cifrado pela inversa de  $A$  (obtida no Exemplo 6):

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 487 \\ 436 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 20 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 278 \\ 321 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271 \\ 265 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 508 \\ 431 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 283 \\ 361 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 23 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

Pela Tabela 1, os equivalentes alfábéticos destes vetores são

ST RI KE NO WW

que fornecem a mensagem

STRIKE NOW

**Quebrando uma Cifra de Hill** Como o objetivo de criptografar mensagens e informações é impedir que “opponentes” descubram seu conteúdo, os criptógrafos têm uma preocupação com a *segurança* de suas cifras—ou seja, quão facilmente podem ser quebradas (ou decifradas pelos oponentes). Nós concluiremos esta seção discutindo uma técnica para quebrar cifras de Hill.

Suponha que você consiga algum texto comum e o cifrado correspondente de uma mensagem de seu oponente. Por exemplo, examinando algum texto cifrado interceptado, você talvez seja capaz de deduzir que a mensagem é uma carta que começa com *DEAR SIR*. Nós iremos mostrar que com alguns poucos destes dados pode ser possível determinar a matriz decodificadora de um cifra de Hill e consequentemente obter acesso ao resto da mensagem.

É um resultado básico em Álgebra Linear que uma transformação fica completamente determinada por seus valores em uma base. Este princípio sugere que se nós tivermos uma  $n$ -cifra de Hill e se

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$

forem vetores comuns linearmente independentes cujos correspondentes vetores cifrados

$A \mathbf{p}_1, A \mathbf{p}_2, \dots, A \mathbf{p}_n$

são conhecidos, então disporemos de informação suficiente para determinar a matriz  $A$  e portanto sua inversa  $A^{-1} \pmod{m}$ .

O próximo teorema, cuja prova é discutida nos exercícios, fornece uma maneira de fazer isto.

### Teorema 11.16.5

#### Determinando a Matriz Decodificadora

Sejam  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  vetores comuns linearmente independentes e sejam  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$  os correspondentes vetores cifrados de uma  $n$ -cifra de Hill. Se

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix}$$

é a matriz  $n \times n$  de vetores-coluna  $\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T, \dots, \mathbf{p}_n^T$  e se

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n^T \end{bmatrix}$$

é a matriz  $n \times n$  de vetores-linha  $\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T, \dots, \mathbf{c}_n^T$ , então a sequência de operações elementares sobre linhas que reduz  $C$  a  $I$  transforma  $P$  em  $(A^{-1})^T$ .

Este teorema nos diz que para encontrar a transposta da matriz decodificadora  $A^{-1}$  nós deveremos encontrar uma sequência de operações elementares sobre linhas que reduza  $C$  a  $I$  e então aplicar estas mesmas operações sobre linhas de  $P$ . O próximo exemplo ilustra um algoritmo simples para fazer isto.

### EXEMPLO 8 Usando o Teorema 11.16.5

Foi interceptada a 2-cifra de Hill

IOSBTGXESPXHOPDE

Decifre esta mensagem, sabendo que ela principia com a palavra *DEAR*.

Solução.

Pela Tabela 1, o equivalente numérico do texto comum conhecido é

$$\begin{array}{cc} DE & AR \\ 4 & 5 \\ 1 & 18 \end{array}$$

e o equivalente numérico do texto cifrado correspondente é

$$\begin{array}{cc} IO & SB \\ 9 & 15 \\ 19 & 2 \end{array}$$

de modo que os vetores comuns e correspondentes vetores cifrados são

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nós queremos reduzir

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$$

a  $I$  por operações elementares sobre linhas e simultaneamente aplicar estas operações a

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$$

para obter  $(A^{-1})^T$  (a transposta da matriz decodificadora). Isto pode ser obtido adjuntando  $P$  à direita de  $C$  e aplicando as operações sobre linhas à matriz resultante  $[C \mid P]$  até que o lado esquerdo esteja reduzido a  $I$ . A matriz final então terá o formato  $[I \mid (A^{-1})^T]$ . As contas podem ser feitas como segue:

$\left[ \begin{array}{cc cc} 9 & 15 & 4 & 5 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array} \right]$	Nós formamos a matriz $[C   P]$ .
$\left[ \begin{array}{cc cc} 1 & 45 & 12 & 15 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array} \right]$	Nós multiplicamos a primeira linha por $9^{-1} = 3$ .
$\left[ \begin{array}{cc cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array} \right]$	Nós substituímos 45 pelo seu resíduo módulo 26.
$\left[ \begin{array}{cc cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & -359 & -227 & -267 \end{array} \right]$	Nós somamos -19 vezes a primeira linha à segunda.
$\left[ \begin{array}{cc cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 7 & 19 \end{array} \right]$	Nós substituímos as entradas da segunda linha pelos seus resíduos módulo 26.
$\left[ \begin{array}{cc cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 147 & 399 \end{array} \right]$	Nós multiplicamos a segunda linha por $5^{-1} = 21$ .
$\left[ \begin{array}{cc cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array} \right]$	Nós substituímos as entradas da segunda linha pelos seus resíduos módulo 26.
$\left[ \begin{array}{cc cc} 1 & 0 & -311 & -156 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array} \right]$	Nós somamos -19 vezes a segunda linha à primeira.
$\left[ \begin{array}{cc cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array} \right]$	Nós substituímos as entradas da primeira linha pelos seus resíduos módulo 26.

Assim,

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 9 \end{bmatrix}$$

e portanto a matriz decodificadora é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Para decifrar a mensagem, nós primeiramente agrupamos o texto cifrado em pares e encontramos os equivalentes numéricos de cada letra:

IO	SB	TG	XE	SP	XH	OP	DE
9 15	19 2	20 7	24 5	19 16	24 8	15 16	4 5

Em seguida, multiplicamos os vetores cifrados sucessivamente pela esquerda por  $A^{-1}$  e encontramos os equivalentes alfabeticos dos pares de texto comum resultantes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & D \\ \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} & R \\ \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} & I \\ \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 19 \end{bmatrix} & E \\ \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 16 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} & N \\ \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \end{bmatrix} & T \\ \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix} & A \\ \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \end{bmatrix} & K \end{aligned}$$

(mod 26)

Finalmente, nós construímos a mensagem a partir dos pares de texto comum:

*DE AR IK ES EN DT AN KS  
DEAR IKE SEND TANKS*

### Leitura Recomendada

Os leitores interessados em aprender mais sobre criptografia matemática devem consultar os seguintes livros, o primeiro dos quais é elementar e o segundo mais avançado.

2. ALAN G. KONHEIM, *Cryptography, a Primer* (Wiley-Interscience, 1981).

1. ABRAHAM SINKOV, *Elementary Cryptanalysis, a Mathematical Approach* (Mathematical Association of America, Mathematical Library, 1966).

### Conjunto de Exercícios 11.16

1. Obtenha a cifra de Hill da mensagem

*DARK NIGHT*

para cada uma das matrizes codificadoras:

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Em cada uma das partes, determine se a matriz é invertível módulo 26. Se for, encontre uma inversa módulo 26 e confira seu resultado verificando que  $A A^{-1} = A^{-1}A = I$  (mod 26).

## 472 ••• Álgebra Linear com Aplicações

- (a)  $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$     (b)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$     (c)  $A = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$   
 (d)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$     (e)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$     (f)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Decodifique a mensagem

SAKNOXAOJX

sabendo que é uma cifra de Hill com matriz codificadora

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Uma cifra de Hill interceptada começa com os pares

SL    HK

Encontre as matrizes codificadora e decodificadora, sabendo que a versão comum da mensagem começa com a palavra ARMY.

5. Decodifique a 2-cifra de Hill

LNGIHGYBVRENJYQO

sabendo que as quatro últimas letras do texto comum são ATOM.

6. Decodifique a 3-cifra de Hill

HPAFQGGDUGDDHPGODYNOR

sabendo que as nove primeiras letras do texto comum são IHAVECOME.

7. Se, além do alfabeto padrão, fossem permitidos o ponto, a vírgula e o ponto de interrogação então teríamos 29 letras disponíveis para texto comum e cifrado e toda a aritmética matricial seria feita mod 29. Sob que condições uma matriz cujas entradas são de  $Z_{29}$  seria invertível módulo 29?

8. Substituindo sucessivamente os valores  $x = 0, 1, 2, \dots, 25$  na equação modular  $4x \equiv 1 \pmod{26}$ , conclua que esta equação não possui solução em  $Z_{26}$ .

9. (a) Sejam  $P$  e  $C$  as matrizes do Teorema 11.16.5. Mostre que  $P = C(A^{-1})^T$ .

(b) Para provar o Teorema 11.16.5, sejam  $E_1, E_2, \dots, E_n$  as matrizes elementares que correspondem às operações elementares sobre linhas que reduzem  $C$  a  $I$ , ou seja,

$$E_n \cdots E_2 E_1 C = I$$

Mostre que

$$E_n \cdots E_2 E_1 P = (A^{-1})^T$$

de onde segue que a mesma seqüência de operações de linha que reduz  $C$  a  $I$  converte  $P$  a  $(A^{-1})^T$ .

10. (a) Se  $A$  é a matriz codificadora de uma  $n$ -cifra de Hill, mostre que

$$A^{-1} = (C^{-1}P)^T \pmod{26}$$

onde  $C$  e  $P$  são as matrizes definidas no Teorema 11.16.5.

(b) Em vez de usar o Teorema 11.16.5 como no texto, encontre a matriz decodificadora  $A^{-1}$  do Exemplo 8 usando o resultado na parte (a) e a Equação (2) para calcular  $C^{-1}$ . [Observação. Embora este método seja prático para 2-cifras de Hill, o Teorema 11.16.5 é mais eficiente para  $n$ -cifras de Hill com  $n > 2$ .]

### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.16

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Dois inteiros positivos sem fator comum (a não ser 1), são ditos *relativamente primos*, ou então dizemos que um é relativamente primo com o outro. Dado um inteiro positivo  $n$ , seja  $S_n = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$  o conjunto de todos os inteiros positivos menores do que  $n$  que são relativamente primos com  $n$ ; vamos supor que  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_m$ . Por exemplo, se  $n = 9$ , então

$$S_9 = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_6\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

- (a) Construa uma tabela consistindo de  $n$  e  $S_n$  para  $n = 2, 3, \dots, 15$  e em seguida calcule

$$\sum_{k=1}^m a_k \quad \text{e} \quad \left( \sum_{k=1}^m a_k \right) \pmod{n}$$

em cada caso. Faça uma conjectura e prove sua conjectura. [Sugestão. Use o seguinte fato: se  $a$  é relativamente primo com  $n$  então  $n - a$  é também relativamente primo com  $n$ .]

- (b) Dado um inteiro positivo  $n$  e o conjunto  $S_n$ , seja  $P_n$  a matriz  $m \times m$

$$P_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_m & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_m & a_1 & \cdots & a_{m-3} & a_{m-2} \\ a_m & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} \end{bmatrix}$$

de modo que, por exemplo,

$$P_9 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Use um computador para calcular  $\det(P_n)$  e  $\det(P_n) \pmod{n}$  para  $n = 2, 3, \dots, 15$  e em seguida use estes resultados para fazer uma conjectura.

- (c) Use os resultados da parte (a) para provar sua conjectura. [Sugestão. Some as primeiras  $m - 1$  linhas de  $P_n$  com a última linha e use o Teorema 2.2.3.] O que estes resultados implicam sobre a inversa de  $P_n \pmod{n}$ ?

**T2.** Dado um inteiro positivo  $n$ , o número de inteiros positivos menores do que  $n$  e relativamente primos com  $n$  é denominado a *função Phi de Euler* de  $n$  e é denotada por  $\phi(n)$ . Por exemplo,  $\phi(6) = 2$ , já que somente dois inteiros positivos (a saber, 1 e 5) são menores do que 6 e não têm fator comum com 6.

- (a) Usando um computador, para cada valor de  $n = 2, 3, \dots, 25$  calcule e imprima a lista de todos os inteiros positivos que são menores do que  $n$  e relativamente primos com  $n$ . Utilize estes inteiros para determinar os valores de  $\phi(n)$  para  $n = 2, 3, \dots, 25$ . Você consegue descobrir um padrão nos resultados?
- (b) Pode ser mostrado que se  $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_m\}$  são todos os fatores primos distintos de  $n$ , então

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

Por exemplo, como  $\{2, 3\}$  são os fatores primos distintos de 12, temos

$$\phi(12) = 12 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$$

o que é fácil de conferir, pois  $\{1, 5, 7, 11\}$  são os únicos inteiros positivos menores que 12 que são relativamente primos com 12. Usando um computador, imprima todos os fatores primos de  $n$  para  $n = 2, 3, \dots, 25$ . Em seguida calcule  $\phi(n)$  usando a fórmula acima e compare o resultado com o obtido no item (a).

## 11.17 GENÉTICA

Nesta seção nós investigamos a propagação de uma característica herdada em sucessivas gerações calculando potências de matrizes.

**PRÉ-REQUISITOS:** Autovetores e Autovalores

Diagonalização de uma Matriz

Compreensão Intuitiva de Limites

**Características Hereditárias** Nesta seção nós examinamos a hereditariedade de características de animais ou plan-

tas. Vamos supor que a característica hereditária sob consideração é governada por um conjunto de dois genes, que nós denotamos por  $A$  e  $a$ . Por *hereditariedade autossômica* cada indivíduo de cada sexo possui dois destes genes, e os possíveis pares são  $A A$ ,  $A a$  e  $a a$ . Este par de genes é chamado o *genótipo* do indivíduo e determina como o caráter controlado por estes genes se manifesta no indivíduo. Por exemplo, nas bocas-de-leão, um conjunto de dois genes controla a cor da flor. O genótipo  $A A$  produz flores vermelhas, o genótipo  $A a$  produz flores roxas e o genótipo  $a a$  produz flores brancas. Nos humanos, a cor dos olhos é controlada por hereditariedade autossômica. Os genótipos  $A A$  e  $A a$  têm olhos castanhos e o genótipo  $a a$  tem olhos azuis. Neste caso dizemos que o gene  $A$  *domina* o gene  $a$ , ou

então que o gene  $a$  é **recessivo** em relação ao gene  $A$ , pois o genótipo  $A\ a$  apresenta a mesma característica externa que o genótipo  $A\ A$ .

Além da hereditariedade autossômica nós também discutiremos a **hereditariedade ligada ao sexo**. Neste tipo de hereditariedade, o macho da espécie possui somente um dos dois possíveis genes ( $A$  ou  $a$ ) e a fêmea possui um par de dois genes ( $A\ A$ ,  $A\ a$  ou  $a\ a$ ). Nos humanos, o daltonismo, a calvície hereditária, a hemofilia e a distrofia muscular, para citar somente alguns, são características controladas por hereditariedade ligada ao sexo.

A seguir nós vamos explicar a maneira pela qual os genes dos pais são passados para seus descendentes nos dois tipos de hereditariedade. Nós construiremos modelos matriciais que dão os prováveis genótipos dos descendentes em termos dos genótipos dos pais e nós usaremos estes modelos matriciais para acompanhar a distribuição genotípica de uma população através de sucessivas gerações.

**Hereditariedade Autossômica** Na hereditariedade autossômica, um indivíduo herda um dos genes de cada par de genes dos seus pais para formar seu próprio e particular par. Pelo que sabemos, é uma questão de sorte qual dos dois genes os pais passam aos filhos. Assim, se um dos pais é do genótipo  $A\ a$ , é igualmente provável que o descendente herde o gene  $A$  ou o gene  $a$  daquele genitor. Se um dos pais é do genótipo  $a\ a$  e o outro é do genótipo  $A\ a$ , o descendente sempre receberá um gene  $a$  do genitor  $a\ a$  e receberá, com igual probabilidade, ou um gene  $A$  ou um gene  $a$  do genitor  $A\ a$ . Conseqüentemente, cada descendente terá chances iguais de ser do genótipo  $A\ a$  ou  $a\ a$ . Na Tabela 1 nós listamos as probabilidades dos possíveis genótipos dos descendentes para todas as possíveis combinações de genótipos dos pais.

TABELA 1

Genótipo do Descendente	Genótipos dos Pais					
	$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
$AA$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$Aa$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$aa$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

### EXEMPLO 1 Distribuição dos Genótipos numa População

Suponha que um agricultor tem uma grande população de plantas consistindo de alguma distribuição de todos os três possíveis genótipos  $A\ A$ ,  $A\ a$  e  $a\ a$ . O agricultor deseja implementar um programa de criação no qual cada planta da população é sempre fertilizada por uma planta do genótipo  $A\ A$ . Nós queremos deduzir uma expressão para a distribuição dos três genótipos na população depois de um número qualquer de gerações.

Para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , vamos escrever

$a_n$  = fração de plantas do genótipo  $A\ A$  na  $n$ -ésima geração

$b_n$  = fração de plantas do genótipo  $A\ a$  na  $n$ -ésima geração

$c_n$  = fração de plantas do genótipo  $a\ a$  na  $n$ -ésima geração

Assim,  $a_0$ ,  $b_0$  e  $c_0$  especificam a distribuição inicial dos genótipos. Nós também temos que

$$a_n + b_n + c_n = 1, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Pela Tabela 1 nós podemos determinar a distribuição de genótipos em cada geração a partir da distribuição na geração precedente, pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ b_n &= c_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots \\ c_n &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Por exemplo, a primeira destas três equações afirma que todos os descendentes de uma planta do genótipo  $A\ A$  serão do genótipo  $A\ A$  neste programa de criação e metade dos descendentes de uma planta do genótipo  $A\ a$  será do genótipo  $A\ a$ .

As Equações (1) podem ser escritas em notação matricial como

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

onde

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que as três colunas da matriz  $M$  são iguais às três primeiras colunas da Tabela 1.

Da Equação (2) segue que

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)} = M^2\mathbf{x}^{(n-2)} = \dots = M^n\mathbf{x}^{(0)} \quad (3)$$

Conseqüentemente, se nós encontrarmos uma expressão explícita para  $M^n$ , nós poderemos usar (3) para encontrar uma expressão explícita para  $\mathbf{x}^{(n)}$ . Para encontrar uma expressão explícita para  $M^n$ , nós primeiro diagonalizamos  $M$ , ou seja, procuramos uma matriz invertível  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  tais que

$$M = P D P^{-1} \quad (4)$$

Com esta diagonalização, nós então teremos (ver Exercício 1)

$$M^n = P D^n P^{-1} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

onde

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

A diagonalização de  $M$  é obtida encontrando os autovalores e correspondentes autovetores. Estes são (verifique)

Autovalores:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$

$$\text{Autovetores associados: } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, na Equação (4) nós temos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$P = [\mathbf{v}_1 \ | \ \mathbf{v}_2 \ | \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se que

$$\mathbf{x}^{(n)} = PD^n P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

ou então

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)} &= \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^n & 1 - (\frac{1}{2})^{n-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - (\frac{1}{2})^n b_0 - (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ (\frac{1}{2})^n b_0 + (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lembrando que  $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ , nós obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - (\frac{1}{2})^n b_0 - (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ b_n &= (\frac{1}{2})^n b_0 + (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \quad n = 1, 2, \dots \\ c_n &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Estas são fórmulas explícitas para a fração dos três genótipos na  $n$ -ésima geração de plantas em termos das frações de genótipos iniciais.

Como  $(\frac{1}{2})^n$  tende a zero quando  $n$  tende ao infinito, segue destas equações que

$$a_n \rightarrow 1$$

$$b_n \rightarrow 0$$

$$c_n \rightarrow 0$$

quando  $n$  tende ao infinito. Isto mostra que no limite todas as plantas da população serão do genótipo  $A A$ . ♦

## EXEMPLO 2 Modificando o Exemplo 1

Nós podemos modificar o Exemplo 1 supondo que cada planta da população é sempre fertilizada por uma planta do seu próprio genótipo em vez de sempre ser fertilizada por uma planta do genótipo  $A A$ . Usando a mesma notação do Exemplo 1, nós então teremos

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n \mathbf{x}^{(0)}$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

As colunas desta nova matriz  $M$  são iguais às colunas correspondentes a pais dos genótipos  $A A - A A$ ,  $A a - A a$  e  $a a - a a$  na Tabela 1.

Os autovalores de  $M$  são (verifique)

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

O autovalor  $\lambda_1 = 1$  tem multiplicidade dois e seu auto-espacô correspondente é bidimensional. Escolhendo dois autovetores linearmente independentes  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  neste auto-espacô e um único vetor  $\mathbf{v}_3$  para o autovalor simples  $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ , nós temos (verifique)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As contas para  $\mathbf{x}^{(n)}$  então são

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)} &= M^n \mathbf{x}^{(0)} = PD^n P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] b_0 \\ b_n &= \left( \frac{1}{2} \right)^n b_0 \quad n = 1, 2, \dots \\ c_n &= c_0 + \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] b_0 \end{aligned} \quad (6)$$

No limite, quando  $n$  tende ao infinito,  $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$  e  $(\frac{1}{2})^{n+1} \rightarrow 0$ , de modo que

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow a_0 + \frac{1}{2} b_0 \\ b_n &\rightarrow 0 \\ c_n &\rightarrow c_0 + \frac{1}{2} b_0 \end{aligned}$$

Assim, fertilizando cada planta com uma de seu próprio genótipo produz uma população que no limite contém somente os genótipos  $A A$  e  $a a$ . ♦

**Doenças Recessivas Autossômicas** Existem muitas doenças genéticas governadas por hereditariedade autossônica nas quais um gene normal  $A$  domina um gene anormal  $a$ . O genótipo  $A A$  é um indivíduo normal, o genótipo  $A a$  é um portador da doença mas não é por ela afetado e o genótipo  $a a$  é afetado pela doença. Nos humanos, muitas vezes estas doenças genéticas são associadas a um grupo racial específico; por exemplo, fibrose cística (predominante entre brancos), anemia falciforme (predominante entre negros), beta-talassemia (predominante entre pessoas de origem da região do Mar Mediterrâneo) e doença de Tay-Sachs (predominante entre judeus europeus ocidentais).

Suponha que um criador de animais tenha uma população animal portadora de uma doença recessiva autossônica. Suponha também que os animais aflagidos pela doença não sobrevivem até a maturidade. Uma maneira possível para o criador controlar uma tal doença é sempre cruzar qualquer fêmea, independentemente de seu genótipo, com um macho normal. Desta maneira, todos os futuros descendentes terão os dois pais normais (um cruzamento  $A A - A A$ ) ou um pai normal e uma mãe portadora (um cruzamento  $A A - A a$ ). Não pode haver cruzamentos  $A A - a a$  pois animais do genótipo  $a a$  não chegam à maturidade. Neste tipo de programa de cruzamentos, não haverá descendentes futuros doentes, embora ainda haja portadores em gerações futuras. Vamos determinar agora a fração de portadores nas gerações futuras. Escrevemos

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

onde

$a_n$  = fração da população de genótipo  $A A$  na  $n$ -ésima geração

$b_n$  = fração da população de genótipo  $A a$  (portadores) na  $n$ -ésima geração

Como cada descendente tem pelo menos um dos pais normais, podemos considerar este programa de cruzamentos controlados como um de cruzamento constante com o genótipo  $A A$ , como no Exemplo 1. Assim, a transição de distribuição de genótipo de uma geração para a seguinte é governada pela equação

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Conhecendo a distribuição inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ , a distribuição de genótipos na  $n$ -ésima geração é, portanto, dada por

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n \mathbf{x}^{(0)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

A diagonalização de  $M$  é feita com facilidade (ver Exercício 4) e leva a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)} &= PD^n P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 - (\frac{1}{2})^n b_0 \\ (\frac{1}{2})^n b_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como  $a_0 + b_0 = 1$ , nós obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - (\frac{1}{2})^n b_0 & n = 1, 2, \dots \\ b_n &= (\frac{1}{2})^n b_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Assim, quando  $n$  tende ao infinito, resulta

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow 1 \\ b_n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

de modo que, no limite, não haverá mais portadores na população.

Por (7) nós vemos que

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{8}$$

ou seja, a fração de portadores em cada geração é a metade da fração de portadores na geração precedente. Seria interessante também investigar a propagação de portadores com cruzamentos aleatórios, quando dois animais cruzam independentemente de genótipo. Infelizmente, estes cruzamentos aleatórios levam a equações não-lineares e as técnicas desta seção não são aplicáveis. Contudo, com outras técnicas pode ser mostrado que sob cruzamento aleatório a Equação (8) é substituída por

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 + \frac{1}{2} b_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{9}$$

Como um exemplo numérico, suponha que um criador comece com uma população na qual 10% dos animais são portadores. Com o programa de cruzamento controlado governado pela Equação (8), a percentagem de portadores pode ser reduzida a 5% em uma geração, mas com cruzamento aleatório, a Equação (9) prevê que 9,5% da população é portadora depois de uma geração (ou seja,  $b_n = 0,095$  se  $b_{n-1} = 0,10$ ). Além disto, sob cruzamento controlado, jamais haverá descendente doente, mas com cruzamento aleatório pode ser mostrado que 1 em cada 400 descendentes vai nascer doente quando 10% da população é portadora.

**Hereditariedade Ligada ao Sexo** Como mencionamos na introdução, na hereditariedade ligada ao sexo, o macho possui um gene ( $A$  ou  $a$ ) e a fêmea possui dois genes ( $A A$ ,  $A a$  ou  $a a$ ). O termo “ligada ao sexo” é usado por que estes genes são encontrados no cromossomo X, dos quais o macho tem um e a fêmea tem dois. A hereditariedade destes genes é como segue: Um descendente macho recebe um dos dois genes de sua mãe com igual probabilidade e um descendente fêmea recebe o único gene de seu pai além de um dos dois genes de sua mãe com igual probabilidade. Os leitores familiares com probabilidade básica podem verificar que este tipo de hereditariedade leva aos genótipos da Tabela 2.

Nós vamos discutir um programa de procriação consanguínea relacionada com hereditariedade ligada ao sexo. Iniciando com um macho e uma fêmea, selecionamos dois de seus descendentes aleatoriamente, um de cada sexo, e os cruzamos; em seguida selecionamos dois dos descendentes resultantes e os cruzamos, e assim por diante. Tal procriação consanguínea é normalmente utilizada com animais. (Entre humanos, estes casamentos entre irmãos foram usados pelos mandatários do Egito antigo para manter pura a linhagem real.)

TABELA 2

		Genótipos dos Pais (Pai, Mãe)						
		(A, AA)	(A, Aa)	(A, aa)	(a, AA)	(a, Aa)	(a, aa)	
Descendente	Macho	A	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
	a	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	
Fêmea	AA	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	
	Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	
	aa	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	

O par original de macho-fêmea pode ser de um de seis tipos, correspondentes às seis colunas da Tabela 2:

$$(A, AA), \quad (A, aa)$$

Os pares de irmãos cruzados em gerações sucessivas têm certas probabilidades de ser um destes seis tipos. Para calcular estas probabilidades escrevemos, para  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$a_n = \text{probabilidade que o par de irmãos na } n\text{-ésima geração é tipo } (A, AA)$$

$$b_n = \text{probabilidade que o par de irmãos na } n\text{-ésima geração é tipo } (A, Aa)$$

$$c_n = \text{probabilidade que o par de irmãos na } n\text{-ésima geração é tipo } (A, aa)$$

$$d_n = \text{probabilidade que o par de irmãos na } n\text{-ésima geração é tipo } (a, AA)$$

$$e_n = \text{probabilidade que o par de irmãos na } n\text{-ésima geração é tipo } (a, Aa)$$

$$f_n = \text{probabilidade que o par de irmãos na } n\text{-ésima geração é tipo } (a, aa)$$

Com estas probabilidades nós formamos o vetor-coluna

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pela Tabela 2 segue que

$$\mathbf{x}^{(n)} = M \mathbf{x}^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} (A, AA) & (a, aa) \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad (A, AA)$$

Por exemplo, suponha que o par de irmãos na  $(n-1)$ -ésima geração é do tipo  $(A, Aa)$ . Então o descendente macho será do genótipo  $A$  ou  $a$  com igual probabilidade e a descendente fêmea será ou do genótipo  $AA$  ou  $Aa$  com igual probabilidade. Como um dos descendentes machos e uma das descendentes fêmeas será escolhido ao acaso para cruzar, o próximo par de irmãos será de um dos tipos  $(A, AA)$ ,  $(A, Aa)$ ,  $(a, AA)$  ou  $(a, Aa)$  com probabilidades iguais. Assim a segunda coluna de  $M$  contém “ $\frac{1}{4}$ ” em cada uma das quatro linhas correspondentes a estes quatro pares de irmãos. (Veja o Exercício 9 para as demais colunas.)

Como no nosso exemplo anterior, segue de (10) que

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n \mathbf{x}^{(0)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Depois de uma conta demorada, podemos obter os autovalores e autovetores de  $M$ , que são

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), \quad \lambda_6 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

A diagonalização de  $M$  então leva a

$$\mathbf{x}^{(n)} = P D^n P^{-1} \mathbf{x}^{(0)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})]^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})]^n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}(5 + \sqrt{5}) & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5 + \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}(5 - \sqrt{5}) & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5 - \sqrt{5}) & 0 \end{bmatrix}$$

Nós não iremos escrever o produto matricial de (12), por ser um pouco desajeitado. Contudo, se for dado um vetor específico  $\mathbf{x}^{(0)}$ , os cálculos para  $\mathbf{x}^{(n)}$  não são muito incômodos (ver Exercício 6).

Como os valores absolutos das últimas quatro entradas na diagonal de  $D$  são menores do que 1, vemos que quando  $n$  tende ao infinito,

$$D^n \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segue da Equação (12) que

$$\mathbf{x}^{(n)} \rightarrow P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}^{(0)}$$

Efetuando a multiplicação matricial do lado direito, obtemos (verifique)

$$\mathbf{x}^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 \end{bmatrix} \quad (13) \quad \mathbf{x}^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Isto mostra que, no limite, todos os pares de irmãos serão ou do tipo  $(A, A A)$  ou do tipo  $(a, a a)$ . Por exemplo, se os pais iniciais forem do tipo  $(A, A a)$  (ou seja,  $b_0 = 1$  e  $a_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$ ) então, quando  $n$  tende ao infinito,

Assim, no limite há uma probabilidade de  $\frac{2}{3}$  que os pares de irmãos serão  $(A, A A)$  e uma probabilidade  $\frac{1}{3}$  que serão  $(a, a a)$ .

### Conjunto de Exercícios 11.17

- Mostre que se  $M = P D P^{-1}$  então  $M^n = P D^n P^{-1}$ , para  $n = 1, 2, \dots$
- Suponha, no contexto do Exemplo 1, que as plantas são sempre fertilizadas por uma planta do genótipo  $A A$ . Deduza fórmulas para as frações de plantas dos genótipos  $A A$ ,  $A a$  e  $a a$  na  $n$ -ésima geração. Também encontre o limite da distribuição genotípica quando  $n$  tende ao infinito.
- Suponha, no contexto do Exemplo 1, que as plantas iniciais são fertilizadas pelo genótipo  $A A$ , as plantas da primeira geração são fertilizadas pelo genótipo  $A a$ , as plantas da segunda geração são fertilizadas pelo genótipo  $A A$ , e que esta alternância é mantida. Deduza fórmulas para as frações de plantas dos genótipos  $A A$ ,  $A a$  e  $a a$  na  $n$ -ésima geração.
- Encontre os autovalores e autovetores da matriz  $M$  da parte em que discutimos doenças recessivas autossômicas e verifique a Equação (7).
- Suponha que um criador tem uma população animal na qual 25% da população é portadora de uma doença recessiva autossônica. Se o criador permitir aos animais cruzar sem levar em conta o seu genótipo, use a Equação (9) para calcular o número de gerações que é necessário para a percentagem dos portadores cair de 25% para 10%. Se o criador implementar, em vez disto, o programa de cruzamentos controlados determinado pela Equação (8), qual será a percentagem de portadores depois do mesmo número de gerações?
- Na seção sobre hereditariedade ligada ao sexo, suponha que os pais iniciais são de um dos seis pares genotípicos possíveis com igual probabilidade, ou seja, suponha que

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Usando a Equação (12), calcule  $\mathbf{x}^{(n)}$  e também o limite de  $\mathbf{x}^{(n)}$  quando  $n$  tende ao infinito.

- Mostre, a partir da Equação (13), que para a hereditariedade ligada ao sexo com procriação consanguínea, a probabilidade que no limite o par de irmãos seja  $(A, A A)$  é igual à proporção de genes  $A$  na população inicial.
- Na hereditariedade ligada ao sexo, suponha que nenhuma das fêmeas do genótipo  $A a$  chega à maturidade. Para a procriação consanguínea, os pares de irmãos possíveis então são  
 $(A, A A)$ ,  $(A, a a)$ ,  $(a, A A)$  e  $(a, a a)$
- Encontre a matriz que descreve como a distribuição genotípica muda em uma geração.
- Deduza a matriz  $M$  da Equação (10) a partir da Tabela 2.

#### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.17

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

**T1.** (a) Use um computador para verificar que estão corretos os autovalores e autovetores de

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

dados no texto.

(b) Começando com  $\mathbf{x}^{(n)} = M \mathbf{x}^{(n-1)}$  e a hipótese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}$$

existe, nós devemos ter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n)} = M \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n-1)} \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} = M\mathbf{x}$$

Isto sugere que  $\mathbf{x}$  pode ser resolvido diretamente usando a equação  $(M - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Use um computador para resolver a equação  $\mathbf{x} = M\mathbf{x}$  se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

e  $a + b + c + d + e + f = 1$ ; compare seu resultado com a Equação (13). Explique por que a solução de  $(M - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  junto com  $a + b + c + d + e + f = 1$  não é específico o suficiente para determinar o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n)}$ .

**T2.** (a) Dados a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

da Equação (12) e o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

use um computador para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use um computador para calcular  $M^n$  para  $n = 10, 20, 30, 40, 50, 60$  e  $70$  e em seguida compare seus resultados com o limite da parte (a).

## 11.18 CRESCIMENTO POPULACIONAL POR FAIXA ETÁRIA

Nesta seção nós utilizamos o modelo matricial Leslie para investigar o crescimento ao longo do tempo de uma população feminina que está dividida em faixas etárias. Depois nós determinamos o limite da distribuição etária e da taxa de crescimento populacional.

**PRÉ-REQUISITOS:** Autovetores e Autovalores  
Diagonalização de uma Matriz  
Compreensão Intuitiva de Limites

Um dos modelos de crescimento populacional mais comumente usado por demógrafos é o assim chamado modelo Leslie, desenvolvido na década de 1940. Este modelo descreve o crescimento da parte fêmea de uma população animal ou humana. Neste modelo, as fêmeas são divididas em faixas etárias de igual duração. Para sermos específicos, suponha que a idade máxima atingida por qualquer fêmea da população seja  $L$  anos (ou alguma outra unidade de tempo). Se nós dividirmos a população em  $n$  faixas etárias, então cada faixa tem  $L/n$  anos de duração. Nós numeramos as faixas etárias de acordo com a Tabela 1.

TABELA 1

Faixa Etária	Intervalo de Idade
1	$[0, L/n)$
2	$[L/n, 2L/n)$
3	$[2L/n, 3L/n)$
$\vdots$	$\vdots$
$n - 1$	$[(n - 2)L/n, (n - 1)L/n)$
$n$	$[(n - 1)L/n, L]$

Nós vamos supor que sabemos o número de fêmeas em cada uma das  $n$  faixas no instante  $t = 0$ . Em particular, suponha que há  $x_1^{(0)}$  fêmeas na primeira faixa,  $x_2^{(0)}$  fêmeas na segunda faixa, e assim por diante. Com estes  $n$  números, nós formamos um vetor-coluna:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

que chamamos de *vetor de distribuição etária inicial*.

À medida que o tempo avança, o número de fêmeas dentro de cada uma das  $n$  faixas muda em virtude de três processos biológicos: nascimento, morte e envelhecimento. Descrevendo estes três processos quantitativamente, nós veremos como projetar o vetor de distribuição etária inicial para o futuro.

A maneira mais fácil de estudar o processo de envelhecimento é observar a população a intervalos discretos de tempo, digamos  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ . O modelo Leslie requer que a duração

entre dois tempos de observação sucessivos seja igual à duração da faixa etária. Portanto, colocamos

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= L/n \\ t_2 &= 2L/n \\ &\vdots \\ t_k &= kL/n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Com esta hipótese, todas as fêmeas na  $(i + 1)$ -ésima faixa etária no instante  $t_{k+1}$  estavam na  $i$ -ésima faixa no instante  $t_k$ .

Os processos de nascimento e morte entre dois tempos de observações sucessivas podem ser descritos por meio dos seguintes parâmetros demográficos:

$a_i$ ( $i = 1, 2, \dots, n$ )	O número médio de filhas nascidas por fêmea durante o tempo em que ela está na $i$ -ésima faixa etária
$b_i$ ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ )	A fração de fêmeas na $i$ -ésima faixa etária que se espera que vá sobreviver e passar para a $(i + 1)$ -ésima faixa etária

Pelas definições, nós temos que

$$(i) a_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(ii) 0 < b_i \leq 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n - 1$$

Note que não permitimos qualquer  $b_i$  ser zero, pois então nenhuma fêmea sobreviveria além da  $i$ -ésima faixa etária. Nós também vamos supor que pelo menos um dos  $a_i$  é positivo, de modo que há algum nascimento. Qualquer faixa etária para a qual o correspondente valor de  $a_i$  é positivo é chamada uma *faixa etária fértil*.

Em seguida nós definimos o vetor  $\mathbf{x}^{(k)}$  de distribuição etária no instante  $t_k$  por

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

onde  $x_i^{(k)}$  é o número de fêmeas na  $i$ -ésima faixa etária no instante  $t_k$ . Agora, no instante  $t_k$ , as fêmeas na primeira faixa etária são exatamente as filhas nascidas entre os instantes  $t_{k-1}$  e  $t_k$ . Assim, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \text{número de fêmeas na faixa etária 1 no tempo } t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{número de filhas nascidas das fêmeas na faixa etária 1 entre os tempos } t_{k-1} \text{ e } t_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{número de filhas nascidas das fêmeas na faixa etária 2 entre os tempos } t_{k-1} \text{ e } t_k \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \text{número de filhas nascidas das fêmeas na faixa etária } n \text{ entre os tempos } t_{k-1} \text{ e } t_k \end{bmatrix}$$

ou, matematicamente,

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)} \quad (1)$$

As fêmeas na  $(i + 1)$ -ésima faixa etária ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) no instante  $t_k$  são aquelas fêmeas que estavam na  $i$ -ésima faixa etária no instante  $t_{k-1}$  e que ainda vivem no instante  $t_k$ . Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{número de fêmeas na faixa etária } i+1 \text{ no instante } t_k \\ \text{fêmeas na faixa etária } i \text{ que sobrevive e passa para a faixa etária } i+1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{fração de fêmeas na faixa etária } i \text{ que sobrevive e passa para a faixa etária } i+1 \\ \text{número de fêmeas na faixa etária } i \text{ no instante } t_{k-1} \end{array} \right\}$$

ou, matematicamente,

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

Usando notação matricial, podemos escrever as Equações (1) e (2) como

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

ou, mais compactamente,

$$x^{(k)} = Lx^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

onde  $L$  é a **matriz de Leslie**

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Pela Equação (3) obtemos

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Lx^{(0)} \\ x^{(2)} &= Lx^{(1)} = L^2x^{(0)} \\ x^{(3)} &= Lx^{(2)} = L^3x^{(0)} \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= Lx^{(k-1)} = L^kx^{(0)} \end{aligned} \quad (5)$$

Assim, se conhecermos a distribuição etária inicial  $x^{(0)}$  e a matriz de Leslie  $L$ , nós poderemos determinar a distribuição etária das fêmeas em tempos posteriores.

### EXEMPLO 1 Distribuição Etária de Fêmeas em Animais

Suponha que a idade máxima atingida pelas fêmeas de uma certa população animal é 15 anos e que dividimos a população em três faixas etárias com duração igual de cinco anos. Suponha que a matriz de Leslie para esta população é

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Se inicialmente havia 1.000 fêmeas em cada uma das três faixas etárias então, pela Equação (3), temos

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = Lx^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Lx^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.750 \\ 3.500 \\ 125 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Lx^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.750 \\ 3.500 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.375 \\ 1.375 \\ 875 \end{bmatrix}$$

Assim, depois de 15 anos há 14.375 fêmeas entre 0 e 5 anos de idade, 1.375 fêmeas entre 5 e 10 anos de idade e 875 fêmeas entre 10 e 15 anos de idade. ♦

**Comportamento Limite** Embora a Equação (5) dê a distribuição etária da população em qualquer instante, ela não dá automaticamente uma ideia geral da dinâmica do processo de crescimento. Para ter isto, precisamos investigar os autovalores e autovetores da matriz de Leslie. Os autovalores de  $L$  são as raízes do polinômio característico. No Exercício 2 pedimos ao leitor verificar que este polinômio característico é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\lambda I - L| \\ &= \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} - \cdots - a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \end{aligned}$$

Para analisar as raízes deste polinômio, é conveniente introduzir a função

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{\lambda^n} \quad (6)$$

Usando esta função, a equação característica  $p(\lambda) = 0$  pode ser escrita (verifique) como

$$q(\lambda) = 1 \text{ para } \lambda \neq 0 \quad (7)$$

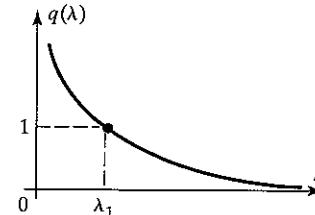


Figura 11.18.1

Como todos os  $a_i$  e  $b_i$  são não-negativos, vemos que  $q(\lambda)$  é monotonamente decrescente para  $\lambda$  maior do que zero. Além disso,  $q(\lambda)$  tem uma assíntota vertical em  $\lambda = 0$  e tende a zero quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Consequentemente, como indicamos na Figura 11.18.1, existe um único  $\lambda$ , digamos  $\lambda = \lambda_1$ , tal que  $q(\lambda_1) = 1$ . Ou seja, a matriz  $L$  tem um único autovalor positivo. Também pode ser mostrado (Exercício 3) que  $\lambda_1$  tem multiplicidade 1, ou seja,  $\lambda_1$  não é uma raiz repetida da equação característica. Nós não daremos os detalhes computacionais, mas o leitor pode verificar que

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2 / \lambda_1^2 \\ b_1 b_2 b_3 / \lambda_1^3 \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} / \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Como  $\lambda_1$  tem multiplicidade 1, o auto-espacó correspondente tem dimensão 1 (Exercício 3) e portanto qualquer autovetor

associado a  $\lambda_1$  é algum múltiplo de  $x_1$ . Nós podemos resumir estes resultados no seguinte teorema.

### Teorema 11.18.1 Existência de um Autovalor Positivo

Uma matriz de Leslie  $L$  tem um único autovalor positivo  $\lambda_1$ . Este autovalor tem multiplicidade 1 e um autovetor associado  $x_1$  cujas entradas são todas positivas.

Agora nós mostraremos que o comportamento a longo termo da distribuição etária da população é determinado pelo autovalor positivo  $\lambda_1$  e seu autovetor  $x_1$ .

No Exercício 9 nós pedimos ao leitor provar o seguinte resultado.

### Teorema 11.18.2 Autovalores de uma Matriz de Leslie

Se  $\lambda_1$  é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie  $L$  e  $\lambda_k$  é qualquer outro autovalor real ou complexo de  $L$ , então  $|\lambda_k| \leq \lambda_1$ .

Para os nossos propósitos, a conclusão do Teorema 11.18.2 não é suficientemente forte; nós gostaríamos que também valesse  $|\lambda_k| < \lambda_1$ . Neste caso, diríamos que  $\lambda_1$  é um **autovalor dominante** de  $L$ . Contudo, como mostramos no próximo exemplo, nem todas as matrizes de Leslie satisfazem esta condição.

### EXEMPLO 2 Uma Matriz de Leslie sem Autovalor Dominante

Seja

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Então o polinômio característico de  $L$  é

$p(\lambda) = |\lambda I - L| = \lambda^3 - 1$

Os autovalores de  $L$  são, portanto, as soluções de  $\lambda^3 = 1$ , a saber,

$$\lambda = 1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Todos os três autovalores têm valor absoluto 1, de modo que o único autovalor positivo  $\lambda_1 = 1$  não é dominante. Observe que esta matriz de Leslie tem a propriedade  $L^3 = I$ . Isto significa que para qualquer escolha da distribuição etária inicial  $x^{(0)}$  nós temos

$$x^{(0)} = x^{(3)} = x^{(6)} = \dots = x^{(3k)} = \dots$$

Isto significa que o vetor de distribuição etária oscila com um período de três unidades de tempo. Tais oscilações (chamadas *ondas populacionais*) não poderiam ocorrer se  $\lambda_1$  fosse um autovalor dominante, como veremos abaixo. ♦

Está além do objetivo deste livro discutir condições necessárias e suficientes para  $\lambda_1$  ser um autovalor dominante. No entanto, enunciaremos a seguinte condição suficiente sem demonstrar.

### Teorema 11.18.3 Autovalor Dominante

Se duas entradas sucessivas  $a_i$  e  $a_{i+1}$  da primeira linha de uma matriz de Leslie  $L$  são não-nulas, então o autovalor positivo de  $L$  é dominante.

Assim, se a população de fêmeas tem duas faixas etárias férteis sucessivas, então a matriz de Leslie tem um autovalor dominante. Isto sempre ocorre com populações reais se a faixa etária for tomada suficientemente pequena. Note que no Exemplo 2 só há uma faixa etária fértil (a terceira), e portanto não vale a hipótese do Teorema 11.18.3. No que segue, nós vamos supor sempre que a condição do Teorema 11.18.3 está satisfeita.

Vamos supor que  $L$  é diagonalizável. Isto não é realmente necessário para o que queremos mostrar, mas simplifica a argumentação. Neste caso,  $L$  tem  $n$  autovalores,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , não necessariamente distintos, e  $n$  autovetores associados linearmente independentes,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Aqui enumeramos o autovalor dominante  $\lambda_1$  em primeiro lugar. Agora construímos uma matriz cujas colunas são os autovetores de  $L$ :

$$P = [x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots \mid x_n]$$

A diagonalização de  $L$  é, então, dada pela equação

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Daqui segue que

$$L^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

para  $k = 1, 2, \dots$ . Para qualquer vetor de distribuição etária inicial  $x^{(0)}$  temos, então,

$$L^k x^{(0)} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} x^{(0)}$$

para  $k = 1, 2, \dots$ . Dividindo ambos os lados desta equação por  $\lambda_1^k$  e lembrando que  $x^{(k)} = L^k x^{(0)}$ , obtemos

$$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} \quad (9)$$

Como  $\lambda_1$  é o autovalor dominante, nós temos  $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$  para  $i = 2, 3, \dots, n$ . Segue que

$$(\lambda_i / \lambda_1)^k \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty, \text{ para } i = 2, 3, \dots, n$$

Usando isto, podemos tomar o limite de ambos os lados de (9) para obter

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{x}^{(k)} \right\} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} \quad (10)$$

Denotamos a primeira entrada do vetor-coluna  $P^{-1} \mathbf{x}^{(0)}$  pela constante  $c$ . Como pedimos ao leitor mostrar no Exercício 4, o lado direito de (10) pode ser reescrito como  $c \mathbf{x}_1$ , onde  $c$  é uma constante positiva que depende somente do vetor de distribuição etária inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Assim, (10) fica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{x}^{(k)} \right\} = c \mathbf{x}_1 \quad (11)$$

Esta Equação (11) nós dá a aproximação

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c \lambda_1^k \mathbf{x}_1 \quad (12)$$

para valores grandes de  $k$ . Por (12) também temos

$$\mathbf{x}^{(k-1)} \simeq c \lambda_1^{k-1} \mathbf{x}_1 \quad (13)$$

Comparando as Equações (12) e (13) nós vemos que

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq \lambda_1 \mathbf{x}^{(k-1)} \quad (14)$$

para valores grandes de  $k$ . Isto significa que para valores grandes do tempo, cada vetor de distribuição etária é um múltiplo escalar do vetor de distribuição etária anterior, o escalar sendo o autovalor positivo da matriz de Leslie. Conseqüentemente, a proporção de fêmeas em cada faixa etária torna-se constante. Como veremos no próximo exemplo, estas proporções no limite podem ser determinadas a partir do autovetor  $\mathbf{x}_1$ .

### EXEMPLO 3 De Novo: Exemplo 1

A matriz de Leslie do Exemplo 1 era

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico é  $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8}$  e o leitor pode verificar que o autovalor positivo é  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ . Por (8), o autovetor correspondente  $\mathbf{x}_1$  é

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 / \lambda_1 \\ b_1 b_2 / \lambda_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

Por (14) nós temos

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq \frac{3}{2} \mathbf{x}^{(k-1)}$$

para valores grandes de  $k$ . Logo, a cada cinco anos o número de fêmeas em cada uma das três faixas crescerá por cerca de 50%, assim como também o número total de fêmeas da população.

Por (12) nós temos

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c \left( \frac{3}{2} \right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente, a longo prazo, as fêmeas estarão distribuídas entre as três faixas etárias na proporção  $1:\frac{1}{3}:\frac{1}{18}$ . Isto corresponde a uma distribuição de 72% das fêmeas na primeira faixa etária, 24% das fêmeas na segunda faixa etária e 4% das fêmeas na terceira faixa etária.

### EXEMPLO 4 Distribuição Etária de Fêmeas Humanas

Neste exemplo nós utilizaremos os parâmetros de nascimento e morte do ano de 1965 das mulheres canadenses. Como poucas mulheres com mais de 50 anos geram filhos, vamos nos restringir à porção da população de mulheres entre os 0 e os 50 anos de idade. Os dados são para faixas de cinco anos, de modo que há 10 faixas etárias. Em vez de escrever a matriz  $10 \times 10$  de Leslie completa, vamos enumerar os parâmetros como segue:

Intervalo de idade	$a_i$	$b_i$
[0, 5)	0,00000	0,99651
[5, 10)	0,00024	0,99820
[10, 15)	0,05861	0,99802
[15, 20)	0,28608	0,99729
[20, 25)	0,44791	0,99694
[25, 30)	0,36399	0,99621
[30, 35)	0,22259	0,99460
[35, 40)	0,10457	0,99184
[40, 45)	0,02826	0,98700
[45, 50]	0,00240	—

Usando técnicas numéricas, podemos aproximar o autovalor positivo e o autovetor associado por

$$\lambda_1 = 1,07622 \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1,00000 \\ 0,92594 \\ 0,85881 \\ 0,79641 \\ 0,73800 \\ 0,68364 \\ 0,63281 \\ 0,58482 \\ 0,53897 \\ 0,49429 \end{bmatrix}$$

Assim, se as mulheres canadenses continuarem a se reproduzir e morrer como o fizeram em 1965, a longo prazo seu número irá aumentar 7,622% a cada cinco anos. No autovetor  $\mathbf{x}_1$  podemos observar que, a longo prazo, para cada 100.000 mulheres entre 0 e 5 anos de idade, haverá 92.594 mulheres entre os 5 e os 10 anos de idade, 85.881 mulheres entre os 10 e os 15 anos de idade, e assim por diante.

Voltamos à Equação (12), que dá o vetor de distribuição etária da população para tempos grandes:

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c \lambda_1^k \mathbf{x}_1 \quad (15)$$

De acordo com o valor do autovalor positivo  $\lambda_1$ , temos três casos:

- (i) A população acaba aumentando se  $\lambda_1 > 1$
- (ii) A população acaba diminuindo se  $\lambda_1 < 1$
- (iii) A população acaba estabilizando se  $\lambda_1 = 1$

O caso  $\lambda_1 = 1$  é particularmente interessante, pois determina uma população com *crescimento populacional nulo*. Para qualquer distribuição etária inicial, a população tende a uma distribuição etária limite que é algum múltiplo do autovetor  $\mathbf{x}_1$ . A

partir das Equações (6) e (7) nós vemos que  $\lambda_1 = 1$  é um autovalor se, e somente se,

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} = 1 \quad (16)$$

A expressão

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \quad (17)$$

é chamada a *taxa líquida de reprodução* da população (Veja o Exercício 5 para uma interpretação demográfica de  $R$ .) Assim, nós podemos dizer que uma população tem crescimento populacional nulo se, e somente se, sua taxa líquida de reprodução é 1.

### Conjunto de Exercícios 11.18

1. Suponha que uma certa população animal é dividida em duas faixas etárias e tem uma matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule o autovalor positivo  $\lambda_1$  de  $L$  e o correspondente autovetor  $\mathbf{x}_1$ .  
 (b) Começando com o vetor de distribuição etária inicial

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- calcule  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}$ ,  $\mathbf{x}^{(3)}$ ,  $\mathbf{x}^{(4)}$  e  $\mathbf{x}^{(5)}$ , arredondando ao inteiro mais próximo quando necessário.  
 (c) Calcule  $\mathbf{x}^{(6)}$  usando a fórmula exata  $\mathbf{x}^{(6)} = L\mathbf{x}^{(5)}$  e a fórmula aproximada  $\mathbf{x}^{(6)} \simeq \lambda_1 \mathbf{x}^{(5)}$ .

2. Encontre o polinômio característico de uma matriz de Leslie arbitrária dada pela Equação (4).  
 3. (a) Mostre que o autovalor positivo  $\lambda_1$  de uma matriz de Leslie é sempre simples. Lembre que uma raiz  $\lambda_0$  de um polinômio  $q(\lambda)$  é simples se, e somente se,  $q'(\lambda_0) \neq 0$ .  
 (b) Mostre que o auto-espaco correspondente a  $\lambda_1$  tem dimensão 1.  
 4. Mostre que o lado direito de (10) é  $c \mathbf{x}_1$ , onde  $c$  é a primeira entrada do vetor-coluna  $P^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$ .  
 5. Mostre que a taxa líquida de reprodução  $R$ , definida por (17), pode ser interpretada como o número médio de filhas nascidas de uma única fêmea durante o seu período de vida.  
 6. Mostre que a população acaba diminuindo se, e somente se, a taxa líquida de reprodução é menor do que 1. Analogamente, mostre que a população acaba aumentando se, e somente se, a taxa líquida de reprodução é maior do que 1.  
 7. Calcule a taxa líquida de reprodução da população animal do Exemplo 1.  
 8. (Para leitores com uma calculadora.) Calcule a taxa líquida de reprodução das mulheres canadenses do Exemplo 4.  
 9. (Para leitores que leram as seções 10.1–10.3.) Prove o Teorema 11.18.2. [Sugestão. Escreva  $\lambda_k = re^{i\theta}$ , substitua em (7), tome a parte real de ambos os lados e mostre que  $r \leq \lambda_1$ .]

#### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.18

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Considere a seqüência de matrizes de Leslie

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

(a) Use um computador para mostrar que

$$L_2^2 = I_2, \quad L_3^3 = I_3, \quad L_4^4 = I_4, \quad L_5^5 = I_5, \dots$$

para uma escolha conveniente de  $a$  em termos de  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ .

(b) A partir de suas respostas na parte (a), conjecture uma relação entre  $a$  e  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  que garanta  $L_n^n = I_n$ , onde

$$L_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Determine uma expressão para  $p_n(\lambda) = |\lambda I_n - L_n|$  e use-a para mostrar que todos os autovalores de  $L_n$  satisfazem  $|\lambda| = 1$  quando  $a \in b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  estão relacionados pela equação determinada na parte (b).

T2. Considere a seqüência de matrizes de Leslie

$$L_2 = \begin{bmatrix} a & ap \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} a & ap & ap^2 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} a & ap & ap^2 & ap^3 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \quad L_5 = \begin{bmatrix} a & ap & ap^2 & ap^3 & ap^4 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

$$L_n = \begin{bmatrix} a & ap & ap^2 & \cdots & ap^{n-2} & ap^{n-1} \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $0 < p < 1$ ,  $0 < b < 1$  e  $1 < a$ .

(a) Escolha um valor para  $n$  (digamos,  $n = 8$ ). Tomando vários valores de  $a, b$  e  $p$ , use um computador para determinar o autovalor dominante de  $L_n$  e, em seguida, compare seus resultados ao valor de  $a + bp$ .

(b) Mostre que

$$p_n(\lambda) = |\lambda I_n - L_n| = \lambda^n - a \left( \frac{\lambda^n - (bp)^n}{\lambda - bp} \right)$$

o que significa que os autovalores de  $L_n$  devem satisfazer

$$\lambda^{n+1} - (a + bp)\lambda^n + a(bp)^n = 0$$

(c) Você consegue dar um esboço de prova que explique por que  $\lambda_1 \cong a + bp$ ?

## 11.19 COLHEITA DE POPULAÇÕES ANIMAIS

Nesta seção nós utilizamos o modelo matricial Leslie de crescimento populacional para modelar a colheita sustentável de populações animais. Também examinamos o efeito de colher frações diferentes de grupos etários diferentes.

**PRÉ-REQUISITOS:** Crescimento Populacional Por Faixa Etária (Seção 11.18)

**Colheita** Na Seção 11.18 nós utilizamos o modelo matricial Leslie para examinar o crescimento de uma população de fêmeas divididas por faixas etárias discretas. Nesta seção nós investigamos os efeitos de colher animais numa população que cresce de acordo com um tal modelo. Por *colher* nós queremos dizer remover animais da população. (O verbo “colher” não é necessariamente um eufemismo para “abater”; os animais podem ser removidos da população para outros propósitos.)

Nesta seção nós nos restringimos a políticas de colheita sustentáveis. Isto significa o seguinte:

### Definição

Uma política de colheita, pela qual uma população animal é periodicamente colhida, é dita ser *sustentável* se o rendimento de cada colheita é o mesmo e a distribuição etária da população remanescente depois de cada colheita é a mesma.

Assim, a população animal não é dizimada por uma política de colheita sustentável; somente é removido o excesso.

Como na Seção 11.18, nós somente tratamos das fêmeas da população. Se o número de machos em cada faixa etária é igual ao número de fêmeas—uma hipótese razoável para muitas populações—então nossas políticas de colheita também aplicam à população de machos.

**O Modelo de Colheita** A Figura 11.19.1 ilustra a idéia básica do modelo. Nós começamos com uma população de uma

certa distribuição etária. Esta população passa por um período de crescimento descrito por uma matriz de Leslie. Ao final do período de crescimento, uma certa fração da população de cada faixa etária é colhida de tal modo que a população não colhida tem a mesma distribuição etária que a população original. Este ciclo repete depois de cada colheita, de modo que o rendimento é sustentável. Supomos que a duração da colheita é curta em comparação com o período de crescimento, de modo que qualquer crescimento ou mudança na população durante o período de colheita pode ser ignorado.

Para descrever este modelo de colheita matematicamente, seja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o vetor de distribuição etária da população antes de começar o período de crescimento. Assim,  $x_i$  é o número das fêmeas na  $i$ -ésima faixa etária que não foram colhidas. Como na Seção 11.18, nós exigimos que a duração de cada faixa etária seja idêntica à duração do período de crescimento. Por exemplo, se a população é colhida uma vez ao ano, então a população é dividida em faixas etárias de um ano.

Se  $L$  é a matriz de Leslie que descreve o crescimento da população, então o vetor  $L\mathbf{x}$  é o vetor de distribuição etária da população ao final do período de crescimento, imediatamente antes da colheita periódica. Seja  $h_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , a fração das fêmeas da  $i$ -ésima faixa que é colhida. Nós usamos estes  $n$  números para formar uma matriz diagonal  $n \times n$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_n \end{bmatrix}$$

que chamamos a *matriz de colheita*. Por definição, nós temos  $0 \leq h_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

ou seja, podemos colher nada ( $h_i = 0$ ), toda ( $h_i = 1$ ), ou alguma fração ( $0 < h_i < 1$ ) de cada uma das  $n$  faixas etárias. Como o número de fêmeas na  $i$ -ésima faixa imediatamente antes de cada colheita é a  $i$ -ésima entrada ( $L\mathbf{x}$ ) <sub>$i$</sub>  do vetor  $L\mathbf{x}$ , pode ser visto que a  $i$ -ésima entrada do vetor-coluna

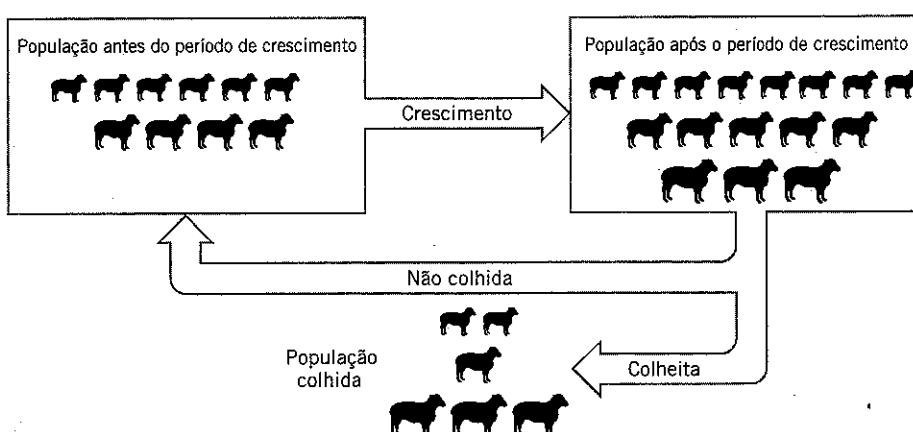


Figura 11.19.1

$$HL\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h_1(L\mathbf{x})_1 \\ h_2(L\mathbf{x})_2 \\ \vdots \\ h_n(L\mathbf{x})_n \end{bmatrix}$$

é o número de fêmeas colhidas da  $i$ -ésima faixa.

Pela definição de política de colheita sustentável, nós temos

$$\begin{bmatrix} \text{distribuição etária} \\ \text{no final do período} \\ \text{de crescimento} \end{bmatrix} - [\text{colheita}] = \begin{bmatrix} \text{distribuição etária} \\ \text{no início do período} \\ \text{de crescimento} \end{bmatrix}$$

ou, matematicamente,

$$L\mathbf{x} - HL\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (1)$$

Se escrevermos a Equação (1) na forma

$$(I - H)L\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (2)$$

nós veremos que  $\mathbf{x}$  deve ser um autovetor da matriz  $(I - H)L$  associado ao autovalor 1. Como mostraremos a seguir, isto coloca certas restrições nos valores de  $h_i$  e de  $\mathbf{x}$ .

Suponha que a matriz de Leslie da população é

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Então a matriz  $(I - H)L$  é dada por (verifique)

$$(I - H)L = \begin{bmatrix} (1 - h_1)a_1 & (1 - h_1)a_2 & (1 - h_1)a_3 & \cdots & (1 - h_1)a_{n-1} & (1 - h_1)a_n \\ (1 - h_2)b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1 - h_3)b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1 - h_n)b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, vemos que a matriz  $(I - H)L$  é uma matriz do mesmo formato que uma matriz de Leslie. Na Seção 11.18 nós mostramos que uma condição necessária e suficiente para uma matriz de Leslie ter 1 como um autovalor é que a taxa líquida de reprodução também seja 1 [veja a Equação (16) da Seção 11.18]. Calculando a taxa líquida de reprodução de  $(I - H)L$  e igualando-a a 1, nós obtemos (verifique)

$$(1 - h_1)[a_1 + a_2b_1(1 - h_2) + a_3b_2(1 - h_3) + \cdots + a_nb_{n-1}(1 - h_n)] = 1 \quad (4)$$

Esta equação coloca uma restrição nas frações de colheita admissíveis. Somente aqueles valores de  $h_1, h_2, \dots, h_n$  que satisfazem (4) e que pertencem ao intervalo  $[0, 1]$  podem produzir um rendimento sustentável.

Se  $h_1, h_2, \dots, h_n$  satisfazem (4), então a matriz  $(I - H)L$  tem o autovalor desejado  $\lambda = 1$  e, além disto, este autovalor tem multiplicidade 1, pois o autovalor positivo de uma matriz de Leslie sempre tem multiplicidade 1 (Teorema 11.18.1). Isto significa que existe somente um vetor linearmente independente  $\mathbf{x}$  satisfazendo a Equação (2). [Veja o Exercício 3(b) da Seção 11.18.] Uma possível escolha para  $\mathbf{x}$  é o seguinte autovetor normalizado:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1(1 - h_2) \\ b_1b_2(1 - h_2)(1 - h_3) \\ b_1b_2b_3(1 - h_2)(1 - h_3)(1 - h_4) \\ \vdots \\ b_1b_2b_3 \cdots b_{n-1}(1 - h_2)(1 - h_3) \cdots (1 - h_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Qualquer outra solução  $\mathbf{x}$  de (2) é um múltiplo de  $\mathbf{x}_1$ . Assim, o vetor  $\mathbf{x}_1$  determina a proporção de fêmeas dentro de cada uma das  $n$  classes depois de uma colheita numa política de colheita sustentável. No entanto, há uma ambigüidade no número total de fêmeas da população depois de cada colheita. Isto pode ser determinado por alguma condição auxiliar, como uma restrição ecológica ou econômica. Por exemplo, para uma população economicamente sustentada pelo colhedor, a maior população que ele puder criar entre as safras determinaria a particular constante pela qual devemos multiplicar  $\mathbf{x}_1$  para obter o vetor apropriado  $\mathbf{x}$  na Equação (2). Para uma população selvagem o habitat natural da população determinaria quão grande ela poderia ficar entre as colheitas.

Resumindo nossos resultados obtidos até aqui, vemos que há uma ampla escolha dos valores de  $h_1, h_2, \dots, h_n$  que produzirão um rendimento sustentável. No entanto, uma vez selecionados estes valores, a distribuição etária proporcional da população depois de cada colheita é determinada de modo único pelo autovetor normalizado  $\mathbf{x}_1$  definido pela Equação (5). Agora nós consideraremos algumas poucas estratégias específicas de colheita deste tipo.

**Colheita Uniforme** Com muitas populações é difícil distinguir ou apanhar animais de uma idade específica. Se os animais são colhidos aleatoriamente, nós podemos supor que a fração colhida de cada faixa etária é a mesma. Por isso colocamos

$$h = h_1 = h_2 = \cdots = h_n$$

A Equação (2) então reduz a (verifique)

$$L\mathbf{x} = \left(\frac{1}{1-h}\right)\mathbf{x}$$

Portanto,  $1/(1-h)$  deve ser o único autovalor positivo  $\lambda_1$  da matriz de Leslie de crescimento  $L$ , ou seja,

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-h}$$

Resolvendo para a fração de colheita  $h$ , obtemos

$$h = 1 - (1/\lambda_1) \quad (6)$$

Neste caso o vetor  $\mathbf{x}_1$  é o autovetor de  $L$  associado ao autovalor  $\lambda_1$ . Pela Equação (8) da Seção 11.18, este vetor é

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1b_2/\lambda_1^2 \\ b_1b_2b_3/\lambda_1^3 \\ \vdots \\ b_1b_2 \cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Por (6) nós podemos ver que quanto maior for  $\lambda_1$ , maior será a fração de animais que podemos colher sem dizimar a população.

## 488 ••• Álgebra Linear com Aplicações

Observe que precisamos ter  $\lambda_1 > 1$  para ter a fração de colheita  $h$  no intervalo  $(0, 1)$ . Isto era de se esperar, pois  $\lambda_1 > 1$  é a condição para ter uma população aumentando.

### EXEMPLO 1 Colhendo Ovelhas

Para uma certa espécie de ovelhas na Nova Zelândia, com período de crescimento de um ano, foi obtida a seguinte matriz de Leslie (ver G. Caughley, "Parameters for Seasonally Breeding Populations," *Ecology*, vol. 48, 1967, páginas 834–839):

$$L = \begin{bmatrix} 0,000 & 0,045 & 0,391 & 0,472 & 0,484 & 0,546 & 0,543 & 0,502 & 0,468 & 0,459 & 0,433 & 0,421 \\ 0,845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,691 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,370 & 0 \end{bmatrix}$$

As ovelhas têm uma expectativa de vida de 12 anos, portanto são divididas em 12 faixas etárias de duração de 1 ano cada. Usando técnicas numéricas, podemos mostrar que

$$\lambda_1 = 1,176$$

é o único autovalor positivo de  $L$ . Pela Equação (6), a fração de colheita  $h$  é

$$h = 1 - (1 / \lambda_1) = 1 - (1 / 1,176) = 0,150$$

Assim, a política de colheita uniforme neste caso significa colher 15% das ovelhas de cada uma das 12 faixas etárias a cada ano. Por (7), o vetor de distribuição etária das ovelhas depois de cada colheita é proporcional a

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,719 \\ 0,596 \\ 0,489 \\ 0,395 \\ 0,311 \\ 0,237 \\ 0,171 \\ 0,114 \\ 0,067 \\ 0,032 \\ 0,010 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A partir de (8) vemos que para cada 1.000 ovelhas entre 0 e 1 ano de idade que não são colhidas, há 719 ovelhas entre 1 e 2 anos de idade, 596 ovelhas entre 2 e 3 anos de idade, e assim por diante. ♦

### Colhendo somente da Faixa Etária mais Jovem

Em algumas populações somente as fêmeas mais jovens têm algum valor econômico, de modo que o colhedor procura colher somente as fêmeas da faixa etária mais jovem. Por isso colocamos

$$\begin{aligned} h_1 &= h \\ h_2 &= h_3 = \cdots = h_n = 0 \end{aligned}$$

A Equação (4) então reduz a

$$(1 - h)(a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}) = 1$$

ou

$$(1 - h)R = 1$$

onde  $R$  é a taxa líquida de reprodução da população. [Veja a Equação (17) da Seção 11.18.] Resolvendo para  $h$ , obtemos

$$h = 1 - (1/R) \quad (9)$$

Observe que esta equação afirma que uma política de colheita sustentável só é possível se  $R > 1$ . Isto é razoável, pois a população só aumenta se  $R > 1$ . Pela Equação (5), o vetor de distribuição etária é proporcional ao vetor

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ b_1 b_2 b_3 \\ \vdots \\ b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

### EXEMPLO 2 Política de Colheita Sustentável

Vamos aplicar este tipo de política de colheita sustentável à população de ovelhas do Exemplo 1. Para a taxa líquida de reprodução da população nós encontramos

$$\begin{aligned} R &= a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \\ &= (0,000) + (0,045)(0,845) + \cdots + (0,421)(0,845)(0,975) \cdots (0,370) \\ &= 2,514 \end{aligned}$$

Pela Equação (9), a fração colhida da primeira faixa etária é

$$h = 1 - (1/R) = 1 - (1/2,513) = 0,602$$

Pela Equação (10), a distribuição etária da população depois da colheita é proporcional ao vetor

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,845 \\ (0,845)(0,975) \\ (0,845)(0,975)(0,965) \\ \vdots \\ (0,845)(0,975) \cdots (0,370) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,845 \\ 0,824 \\ 0,795 \\ 0,755 \\ 0,699 \\ 0,626 \\ 0,532 \\ 0,418 \\ 0,289 \\ 0,162 \\ 0,060 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Um cálculo direto nós dá o seguinte (também veja o Exercício 3):

$$Lx_1 = \begin{bmatrix} 2,514 \\ 0,845 \\ 0,824 \\ 0,795 \\ 0,755 \\ 0,699 \\ 0,626 \\ 0,532 \\ 0,418 \\ 0,289 \\ 0,162 \\ 0,060 \end{bmatrix} \quad (12)$$

O vetor  $L \mathbf{x}_1$  é o vetor de distribuição etária imediatamente antes da colheita. O total de todas as entradas de  $L \mathbf{x}_1$  é 8,520, de modo que a primeira entrada de 2,514 perfaz 29,5% do total. Isto significa que imediatamente antes de cada colheita, 29,5% da população está na faixa mais jovem. Como é colhida 60,2% desta faixa, segue que 17,8% (= 60,2% de 29,5%) de toda população de ovelhas é colhida anualmente. Isto pode ser comparado com a política de colheita uniforme do Exemplo 1, na qual 15,0% da população de ovelhas é colhida anualmente. ♦

**Rendimento Sustentável Ótimo** Nós vimos no Exemplo 1 que uma política de colheita sustentável na qual colhemos a mesma fração de cada faixa etária produz um rendimento de 15,0% da população de ovelhas. No Exemplo 2 nós vimos que se colhemos somente na faixa mais jovem, o rendimento resultante é 17,8% da população. Existem muitas outras políticas de colheita sustentáveis e cada uma, em geral, produz um rendimento diferente. Seria interessante encontrar uma política de colheita sustentável que produzisse o maior rendimento possível. Uma tal política é chamada uma *política sustentável ótima*, e o rendimento resultante é chamado *rendimento sustentável ótimo*. No entanto, para determinar o rendimento sustentável ótimo necessitamos a teoria de Programação Linear,

que não será discutida aqui. Nós referimos o leitor ao seguinte resultado, que aparece no artigo de J. R. Beddington e D. B. Taylor, "Optimum Age Specific Harvesting of a Population," *Biometrics*, vol. 29, 1973, páginas 801–809.

### Teorema 11.19.1

### Rendimento Sustentável Ótimo

*Uma política de colheita sustentável ótima é uma na qual são colhidas ou uma ou duas faixas etárias. Se duas faixas etárias são colhidas, então a faixa mais velha é totalmente colhida.*

Como uma ilustração, pode ser mostrado que o rendimento sustentável ótimo da população de ovelhas é alcançado quando

$$\begin{aligned} h_1 &= 0,522 \\ h_9 &= 1,000 \end{aligned} \quad (13)$$

e todos os demais valores de  $h_i$  são zero. Assim, 52,2% das ovelhas entre 0 e 1 ano de idade e todas as ovelhas entre 8 e 9 anos de idade são colhidas. Como pedimos ao leitor mostrar no Exercício 2, o rendimento sustentável ótimo resultante é 19,9% da população.

### Conjunto de Exercícios 11.19

1. Suponha que uma certa população animal é dividida em três faixas etárias de um ano de duração e que sua matriz de Leslie é

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre o rendimento e o vetor de distribuição etária depois de cada colheita se anualmente é colhida a mesma fração de cada faixa etária.
  - (b) Encontre o rendimento e o vetor de distribuição etária depois de cada colheita se a cada ano somente é colhida a faixa etária mais jovem. Também obtenha a fração da faixa etária mais jovem que é colhida.
2. Encontre o vetor  $\mathbf{x}_1$  que especifica a distribuição etária depois de cada colheita no caso da política de colheita sustentável ótima descrita pela Equação (13). Também calcule o vetor  $L \mathbf{x}_1$  e verifique que o rendimento sustentável ótimo é 19,9% da população.
3. Se somente é colhida a primeira faixa etária de uma população animal, use a Equação (10) para mostrar que

$$L \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} R - 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde  $R$  é a taxa líquida de reprodução da população.

4. Se somente a  $I$ -ésima faixa etária de uma população animal é periodicamente colhida (com  $I = 1, 2, \dots, n$ ) encontre a correspondente fração de colheita  $h_I$ .
5. Suponha que toda a  $J$ -ésima faixa e uma certa fração  $h_J$  da  $I$ -ésima faixa de uma população animal é periodicamente colhida ( $1 \leq I \leq J \leq n$ ). Calcule  $h_I$ .

**Requisito: Recurso Computacional****Exercícios Computacionais 11.19**

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1.** Os resultados do Teorema 11.19.1 sugerem o seguinte algoritmo para determinar o rendimento sustentável ótimo.
- Para cada valor de  $i = 1, 2, \dots, n$ , tome  $h_i = h$  e  $h_k = 0$  para  $k \neq i$  e calcule os respectivos rendimentos. Estas  $n$  contas dão os resultados para a colheita de uma faixa etária. É claro que qualquer conta resultando num valor de  $h$  não entre 0 e 1 é rejeitada.
  - Para cada valor de  $i = 1, 2, \dots, n-1$  e  $j = i+1, i+2, \dots, n$ , tome  $h_i = h$ ,  $h_j = 1$  e  $h_k = 0$  para  $k \neq i, j$  e calcule os respectivos rendimentos. Estas  $\frac{1}{2}n(n-1)$  contas dão os resultados para a colheita de duas faixas etárias. É claro que qualquer conta resultando num valor de  $h$  não entre 0 e 1 é rejeitada.
  - Dos rendimentos calculados em (i) e (ii), o maior deles é o rendimento sustentável ótimo. Observe que haverá no máximo

$$n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

contas no total. Novamente, algumas destas contas podem resultar num valor de  $h$  não entre 0 e 1 e portanto devem ser rejeitadas.

Se nós usarmos este algoritmo para o exemplo das ovelhas dado no texto, haverá no máximo  $\frac{1}{2}(12)(12+1) = 78$  contas a considerar. Use um computador para fazer as contas para a colheita de duas faixas etárias com  $h_i = h$ ,  $h_j = 1$  e  $h_k = 0$  para  $k \neq i$  ou  $j$  e com  $j = 2, 3, \dots, 12$ . Construa uma tabela de dados consistindo dos valores de  $h_j$  e os rendimentos percentuais usando  $j = 2, 3, \dots, 12$ , que vai mostrar que o maior destes rendimentos ocorre com  $j = 9$ .

- T2.** Usando o algoritmo do Exercício T1 faça as contas para a colheita de uma faixa etária com  $h_i = h$  e  $h_k = 0$  para  $k \neq i$  com  $i = 1, 2, \dots, 12$ . Construa uma tabela de dados consistindo dos valores de  $h_i$  e os rendimentos percentuais usando  $i = 1, 2, \dots, 12$ , que vai mostrar que o maior destes rendimentos ocorre com  $i = 9$ .

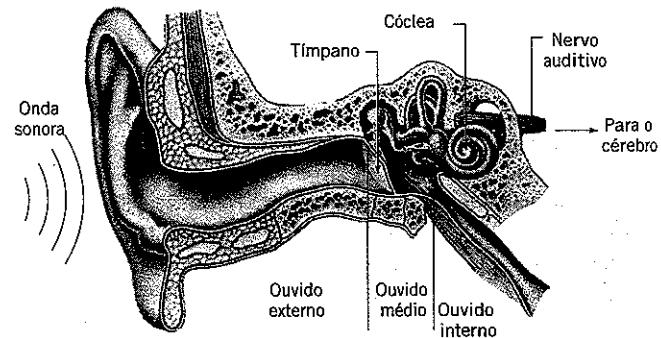
## 11.20 UM MODELO DE MÍNIMOS QUADRADOS PARA A AUDIÇÃO HUMANA

Nesta seção aplicamos o método da aproximação de mínimos quadrados a um modelo para a audição humana. O uso deste método é motivado por considerações de energia.

**PRÉ-REQUISITOS:** Espaços de Produto Interno  
Projeção Ortogonal  
Séries de Fourier (Seção 9.4)

**A Anatomia do Ouvido** Nós começamos com uma breve discussão da natureza do som e da audição humana. A Figura 11.20.1 é um diagrama esquemático do ouvido, mostrando seus três componentes principais: o ouvido externo, o médio e o interno. As ondas sonoras entram no ouvido externo, onde são canalizadas para o tímpano e causam sua vibração. Três ossos minúsculos no ouvido médio fazem uma ligação mecânica do tímpano com a cóclea, que é o caracol do ouvido interno. Esses ossos passam a vibração do tímpano para um fluido dentro da cóclea. A cóclea contém milhares de células ciliadas que são como cabelos minúsculos que oscilam com o fluido. Os cílios perto da entrada da cóclea são estimulados por freqüências altas e os cílios perto da ponta são estimulados por freqüências baixas. Os movimentos destes cílios ativam as células nervosas

que mandam os sinais ao longo de vários caminhos neurais ao cérebro, onde estes sinais são interpretados como som.



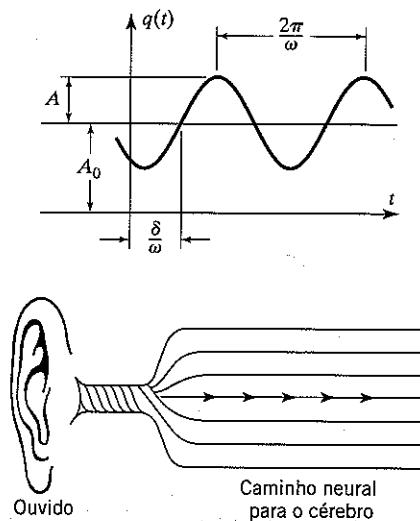
**Figura 11.20.1**

Por sua vez, as ondas sonoras são variações no tempo da pressão do ar. Para o sistema auditivo, o tipo mais elementar de onda sonora é uma variação senoidal da pressão do ar. Este tipo de onda sonora estimula os cílios da cóclea de tal maneira que produz um impulso nervoso ao longo de um único caminho neural (Figura 11.20.2). Uma onda sonora senoidal pode ser descrita por uma função do tempo

$$q(t) = A_0 + A \sin(\omega t - \delta) \quad (1)$$

onde  $q(t)$  mede a pressão atmosférica no tímpano,  $A_0$  é a pressão atmosférica normal,  $A$  é a variação máxima da pressão em relação à pressão atmosférica normal,  $\omega/2\pi$  é a freqüência da onda em ciclos por segundo e  $\delta$  é o ângulo de fase da onda. Para

ser percebida como um som, uma onda senoidal precisa ter freqüências em um certo intervalo. Para os humanos, este intervalo é aproximadamente de 20 a 20.000 ciclos por segundo (cps). As freqüências fora deste intervalo não estimulam suficientemente os cílios dentro da cóclea a ponto de produzir sinais nervosos.

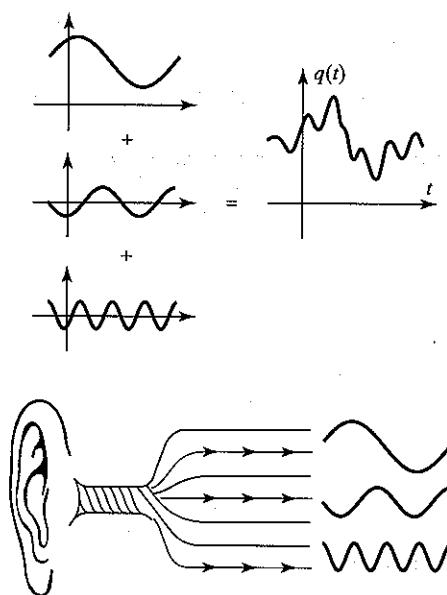


**Figura 11.20.2**

Podemos afirmar, com um grau razoável de exatidão, que o ouvido é um sistema linear. Isto significa que se uma onda sonora complexa é uma soma finita de componentes senoidais de diferentes amplitudes, freqüências e ângulos de fase, digamos

$$q(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2) + \dots + A_n \sin(\omega_n t - \delta_n) \quad (2)$$

então a resposta do ouvido consiste de impulsos nervosos ao longo dos mesmos caminhos neurais que seriam estimulados pelos componentes individuais (Figura 11.20.3).



**Figura 11.20.3**

Vamos considerar agora alguma onda sonora periódica  $p(t)$  com período  $T$  [ou seja,  $p(t) \equiv p(t+T)$ ] que não é uma soma finita de ondas senoidais. Se nós examinarmos a resposta do ouvido a uma tal onda periódica, nós veremos que ela coincide com a resposta do ouvido a alguma onda que é a soma de ondas senoidais. Ou seja, existe alguma onda sonora  $q(t)$  como a dada pela Equação (2) que produz a mesma resposta que  $p(t)$ , mesmo sendo  $p(t)$  e  $q(t)$  funções diferentes do tempo.

Agora nós queremos determinar as freqüências, amplitudes e ângulos de fase dos componentes senoidais de  $q(t)$ . Como  $q(t)$  produz a mesma resposta que a onda periódica  $p(t)$ , é razoável esperar que  $q(t)$  tenha o mesmo período  $T$  que  $p(t)$ . Isto requer que cada termo senoidal em  $q(t)$  tenha período  $T$ . Consequentemente, as freqüências dos componentes senoidais devem ser um múltiplo inteiro das freqüências básicas  $1/T$  da função  $p(t)$ . Assim, os  $w_k$  na Equação (2) devem ser da forma

$$\omega_k = 2k\pi/T, \quad k = 1, 2, \dots$$

Como o ouvido não percebe ondas senoidais com freqüências acima de 20.000 cps, podemos omitir os valores de  $k$  para os quais  $w_k / 2\pi = k/T$  é maior do que 20.000. Assim,  $q(t)$  é da forma

$$q(t) = A_0 + A_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \delta_1\right) + \dots + A_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} - \delta_n\right) \quad (3)$$

onde  $n$  é o maior inteiro tal que  $n/T$  não é maior do que 20.000.

Agora voltamos nossa atenção aos valores das amplitudes  $A_0, A_1, \dots, A_n$  e os ângulos de fase  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$  que aparecem na Equação (3). Existe um critério pelo qual o sistema auditivo “escolhe” estes valores para fazer com que  $q(t)$  tenha a mesma resposta que  $p(t)$ . Para examinar este critério, denotamos

$$e(t) = p(t) - q(t)$$

Se nós considerarmos  $q(t)$  como uma aproximação de  $p(t)$ , então  $e(t)$  será o erro desta aproximação, um erro que o ouvido não consegue perceber. Em termos de  $e(t)$ , o critério para determinar as amplitudes e ângulos de fase é que a quantidade

$$\int_0^T [e(t)]^2 dt = \int_0^T [p(t) - q(t)]^2 dt \quad (4)$$

seja a menor possível. Nós não podemos investigar as razões fisiológicas para isto, mas observamos que esta expressão é proporcional à *energia acústica* da onda de erro  $e(t)$  ao longo de um período. Em outras palavras, é a energia da diferença entre as duas ondas sonoras  $p(t)$  e  $q(t)$  que determina se um ouvido percebe qualquer diferença entre elas. Se esta energia é tão pequena quanto possível, então as duas ondas produzem a mesma sensação de som. Matematicamente, a função  $q(t)$  em (4) é a aproximação de mínimos quadrados de  $p(t)$  no espaço vetorial  $C[0, T]$  das funções contínuas no intervalo  $[0, T]$ . (Veja a Seção 9.4.)

Aproximações de mínimos quadrados por funções contínuas surgem em uma variedade de problemas de aproximação na engenharia e na ciência. Além do problema acústico que acabamos de discutir, alguns outros são os que seguem.

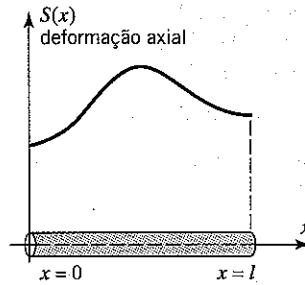
1. Seja  $S(x)$  a distribuição de deformação longitudinal de uma barra uniforme ao longo do eixo  $x$  desde  $x = 0$  até  $x = l$  (Figura 11.20.4). A energia de deformação na barra é proporcional à integral

$$\int_0^l [S(x)]^2 dx$$

A qualidade de uma aproximação  $q(x)$  a  $S(x)$  pode ser julgada de acordo com a energia de deformação da diferença das duas distribuições de deformação. Esta energia é proporcional a

$$\int_0^l [S(x) - q(x)]^2 dx$$

que é um critério de mínimos quadrados.



**Figura 11.20.4**

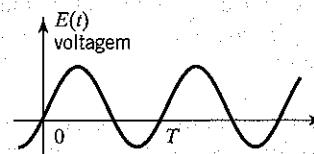
2. Seja  $E(t)$  uma voltagem periódica através de um resistor em um circuito elétrico (Figura 11.20.5). A energia elétrica transferida ao resistor durante um período  $T$  é proporcional a

$$\int_0^T [E(t)]^2 dt$$

Se  $q(t)$  tem o mesmo período que  $E(t)$  e se quisermos que  $q(t)$  seja uma aproximação a  $E(t)$ , então o critério de proximidade pode ser tomado como sendo a energia da diferença de voltagem. Isto é proporcional a

$$\int_0^T [E(t) - q(t)]^2 dt$$

que é, novamente, um critério de mínimos quadrados.



**Figura 11.20.5**

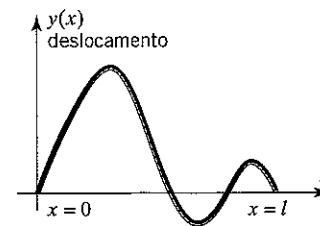
3. Seja  $y(t)$  o deslocamento vertical de uma corda elástica uniforme flexível cuja posição de equilíbrio é ao longo do eixo  $x$  desde  $x = 0$  até  $x = l$  (Figura 11.20.6). A energia potencial elástica da corda é proporcional a

$$\int_0^l [y(x)]^2 dx$$

Se quisermos que  $q(t)$  seja uma aproximação ao deslocamento, então, como antes, a integral de energia

$$\int_0^l [y(x) - q(x)]^2 dx$$

determina um critério de mínimos quadrados para a proximidade da aproximação.



**Figura 11.20.6**

A aproximação por mínimos quadrados também é usada mesmo se não houver uma justificativa a priori para o seu uso, como para aproximar ciclos comerciais, curvas de crescimento populacional, curvas de vendas, e assim por diante. Nestes casos ela é usada por causa de sua simplicidade matemática. Em geral, se não houver algum critério de erro imediatamente aparente para um problema de aproximação, o critério de mínimos quadrados é o critério mais escolhido.

O seguinte resultado foi obtido na Seção 9.4.

### Teorema 11.20.1

#### Minimizando o Erro da Média Quadrática em $[0, 2\pi]$

Se  $f(t)$  é contínua em  $[0, 2\pi]$ , então a função trigonométrica  $g(t)$  dada por

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt + b_1 \sin t + \cdots + b_n \sin nt$$

que minimiza o erro da média quadrática

$$\int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)]^2 dt$$

tem coeficientes

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Se a função original  $f(t)$  está definida no intervalo  $[0, T]$  em vez de  $[0, 2\pi]$ , obtemos o seguinte resultado com uma mudança de escala (ver Exercício 8):

**Teorema 11.20.2****Minimizando o Erro da Média Quadrática em  $[0, T]$** 

Se  $f(t)$  é contínua em  $[0, T]$ , então a função trigonométrica  $g(t)$  dada por

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t + \cdots + a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + b_1 \sin \frac{2\pi}{T}t + \cdots + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t$$

que minimiza o erro da média quadrática

$\int_0^T [f(t) - g(t)]^2 dt$   
tem coeficientes

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

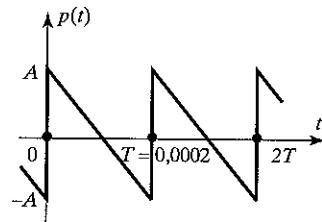


Figura 11.20.7

**EXEMPLO 1 Aproximação de Mínimos Quadrados a uma Onda Sonora**

Seja  $p(t)$  uma onda sonora do tipo serra, com uma freqüência básica de 5.000 cps (Figura 11.20.7). Suponha que as unidades são escolhidas de tal modo que a pressão atmosférica normal é ao nível zero e a amplitude máxima da onda é  $A$ . O período básico da onda é  $T = 1/5000 = 0,0002$  segundo. De  $t = 0$  a  $t = T$ , a função  $p(t)$  tem a equação

$$p(t) = \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right)$$

O Teorema 11.20.2 então fornece o seguinte (verifique):

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2A}{k\pi}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Agora nós podemos investigar como a onda sonora  $p(t)$  é percebida pelo ouvido humano. Nós observamos que  $4/T = 20.000$  cps, de modo que basta avançar até  $k = 4$  nas fórmulas acima. A aproximação de mínimos quadrados a  $p(t)$  então é

$$q(t) = \frac{2A}{\pi} \left[ \sin \frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{T}t + \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{T}t \right]$$

Os quatro termos senoidais têm freqüências de 5.000, 10.000, 15.000 e 20.000 cps, respectivamente. Na Figura 11.20.8 nós esboçamos os gráficos de  $p(t)$  e  $q(t)$  ao longo de um período. Mesmo se  $q(t)$  não é uma boa aproximação ponto a ponto para  $p(t)$ , ambas ondas produzem o mesmo estímulo sonoro para o ouvido.

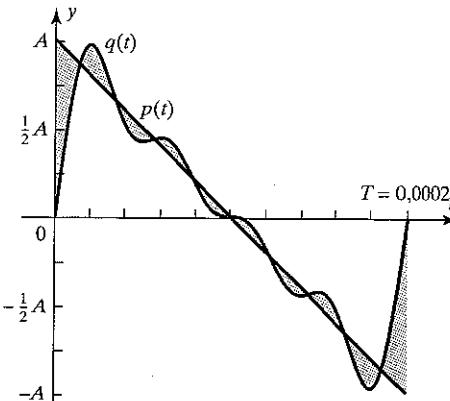


Figura 11.20.8

Como discutimos na Seção 9.4, a aproximação por mínimos quadrados melhora à medida que aumenta o número de termos do polinômio trigonométrico aproximante. Mais precisamente,

$$\int_0^{2\pi} \left[ f(t) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right]^2 dt$$

tende a zero quando  $n$  cresce ao infinito. Nós denotamos isto assim:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

onde o lado direito desta equação é a série de Fourier de  $f(t)$ . Uma outra questão, e muito mais difícil, é saber se a série de Fourier de  $f(t)$  converge a  $f(t)$  para cada  $t$ . Para a maioria das funções contínuas encontradas nas aplicações isto ocorre: a série de Fourier realmente converge à função correspondente para cada valor de  $t$ .

**Conjunto de Exercícios 11.20**

- Encontre o polinômio trigonométrico de ordem 3 que é a aproximação de mínimos quadrados à função  $f(t) = (t - \pi)^2$  sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$ .
- Encontre o polinômio trigonométrico de ordem 4 que é a aproximação de mínimos quadrados à função  $f(t) = t^2$  sobre o intervalo  $[0, T]$ .
- Encontre o polinômio trigonométrico de ordem 4 que é a aproximação de mínimos quadrados à função  $f(t)$  sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$ , onde

## 494 • • • Álgebra Linear com Aplicações

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

4. Encontre o polinômio trigonométrico de ordem arbitrária  $n$  que é a aproximação de mínimos quadrados à função  $f(t) = \sin \frac{1}{2}t$  sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$ .
5. Encontre o polinômio trigonométrico de ordem arbitrária  $n$  que é a aproximação de mínimos quadrados à função  $f(t)$  sobre o intervalo  $[0, T]$ , onde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T \\ T - t, & \frac{1}{2}T < t \leq T \end{cases}$$

6. Usando o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(t)v(t) dt$$

mostre que

$$(a) \|1\| = \sqrt{2\pi} \quad (b) \|\cos kt\| = \sqrt{\pi} \text{ para } k = 1, 2, \dots \quad (c) \|\sin kt\| = \sqrt{\pi} \text{ para } k = 1, 2, \dots$$

7. Mostre que as  $2n+1$  funções

$$1, \cos t, \cos 2t, \dots, \cos nt, \sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt$$

são ortogonais sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$  relativamente ao produto interno  $\langle u, v \rangle$  dado no Exercício 6.

8. Se  $f(t)$  está definida e é contínua em  $t$  no intervalo  $[0, T]$ , mostre que  $f(T\tau/2\pi)$  está definida e é contínua em  $\tau$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Use isto para mostrar que o Teorema 11.20.2 decorre do Teorema 11.20.1.

### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.20

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

- T1. Seja  $g$  a função

$$g(t) = \frac{3 + 4 \sin t}{5 - 4 \cos t}$$

para  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Use um computador para determinar os coeficientes de Fourier

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{3 + 4 \sin t}{5 - 4 \cos t} \right) \begin{Bmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{Bmatrix} dt$$

para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . A partir de seus resultados, faça uma conjectura sobre a expressão geral para  $a_k$  e  $b_k$ . Teste sua conjectura calculando

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

no computador e verifique se esta série converge a  $g(t)$ .

- T2. Seja  $g$  a função

$$g(t) = e^{\cos t} [\cos(\sin t) + \sin(\sin t)]$$

para  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Use um computador para determinar os coeficientes de Fourier

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \begin{Bmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{Bmatrix} dt$$

para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . A partir de seus resultados, faça uma conjectura sobre a expressão geral para  $a_k$  e  $b_k$ . Teste sua conjectura calculando

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

no computador e verifique se esta série converge a  $g(t)$ .

## 11.21 DEFORMAÇÕES E MORFISMOS

As deformações e os morfismos estão entre as mais interessantes técnicas de manipulação de imagens disponíveis para a computação gráfica. Nesta seção nós mostramos como as transformações lineares podem ser usadas para distorcer uma única imagem para produzir uma deformação, ou como distorcer e amalgamar duas imagens para produzir um morfismo.

**PRÉ-REQUISITOS:** Geometria de Operadores Lineares de  $R^2$  (Seção 9.2)  
Independência Linear  
Bases em  $R^2$

A maioria dos aplicativos de computação gráfica permitem a manipulação de uma imagem de várias maneiras, tais como a mudança de suas proporções, rotações ou cisalhamentos. Uma outra técnica básica de manipulação de imagens é a distorção de uma imagem pelo movimento dos vértices de um retângulo que a contém. Um procedimento mais complicado, chamado *deformação*, consiste em distorcer várias partes da imagem de maneiras diferentes. Além disto, a deformação de duas imagens por procedimentos complementares com a fusão das deformações obtidas resulta num *morfismo* das duas imagens. A principal aplicação de deformações e morfismos tem sido a produção de efeitos especiais no cinema, na televisão e na propaganda. No entanto, também surgiram muitas aplicações científicas e tecnológicas para estas técnicas—por exemplo, o estudo da evolução das formas de organismos vivos, a análise do crescimento e desenvolvimento de organismos vivos, a assistência à cirurgia plástica e de reconstrução, a investigação de variações no projeto de um produto e o “envelhecimento” de fotografias de pessoas desaparecidas ou de suspeitos da polícia.

**Deformações** Nós começamos pela descrição de uma deformação simples de uma região triangular do plano, cujos vértices são três pontos não-colineares  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  (Figura 11.21.1a). Vamos chamar este triângulo de *triângulo inicial*. Se  $v$  é um ponto qualquer no triângulo inicial, existem constantes únicas  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$v - v_3 = c_1(v_1 - v_3) + c_2(v_2 - v_3) \quad (1)$$

A Equação (1) dá o vetor  $v - v_3$  como uma (única) combinação linear dos dois vetores linearmente independentes  $v_1 - v_3$  e  $v_2 - v_3$  em relação a uma origem em  $v_3$ . Se nós colocarmos  $c_3 = 1 - c_1 - c_2$ , então poderemos reescrever (1) como

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \quad (2)$$

onde

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad (3)$$

pela definição de  $c_3$ . Se (2) e (3) são válidas e se, além disto, os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  forem não-negativos, diremos que  $v$  é uma *combinação convexa* dos vetores  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ . Pode ser mostrado (Exercício 6) que  $v$  é um ponto do triângulo determinado por  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  se, e somente se, é uma combinação convexa destes vetores.

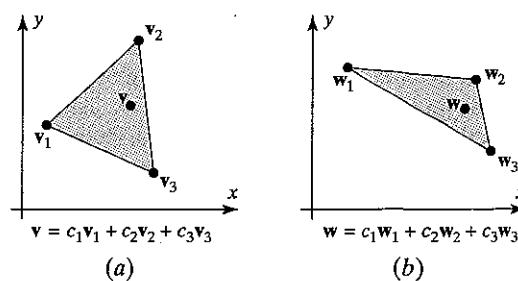


Figura 11.21.1

Em seguida, dados os três pontos não-colineares  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  dos vértices de um *triângulo final* (Figura 11.21.1b), existe uma única *transformação afim* que leva  $v_1$  em  $w_1$ ,  $v_2$  em  $w_2$  e  $v_3$  em  $w_3$ . Ou seja, existem uma única matriz  $2 \times 2$  invertível  $M$  e um único vetor  $b$  tais que

$$w_i = M v_i + b \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

(Veja o Exercício 5 para a obtenção de  $M$  e de  $b$ .) Além disto, pode ser mostrado (Exercício 3) que, por esta transformação afim, a imagem  $w$  do vetor  $v$  de (2) é

$$w = c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 \quad (5)$$

Esta é uma propriedade básica de transformações afins: Levar uma combinação convexa de vetores na mesma combinação convexa das imagens dos vetores.

Agora suponha que o triângulo inicial contém uma imagem dentro dele (Figura 11.21.2a). Ou seja, a cada ponto do triângulo inicial está associado um nível de cinza, digamos, 0 para branco e 100 para preto, com todos os níveis de cinza entre 0 e 100. Em outras palavras, definimos uma função escalar  $\rho_0$ , chamada *densidade de imagem* do triângulo inicial, de tal modo que  $\rho_0(v)$  é o nível de cinza associado ao ponto  $v$  do triângulo inicial. Agora nós podemos definir uma imagem no triângulo final, chamada *deformação* da imagem original, definindo a densidade de imagem  $\rho_1$  do triângulo final associando a um ponto  $w$  dentro do triângulo final o nível de cinza do ponto  $v$  do triângulo inicial que é levado em  $w$ . Em forma de equação, a densidade de imagem  $\rho_1$  é determinada por

$$\rho_1(w) = \rho_0(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \quad (6)$$

Deste modo, à medida que  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  variam sobre todos os valores não-negativos cuja soma é 1, a expressão (5) gera todos os pontos  $w$  do triângulo final e (6) gera os correspondentes níveis de cinza  $\rho_1(w)$  destes pontos da imagem deformada (Figura 11.21.2b).

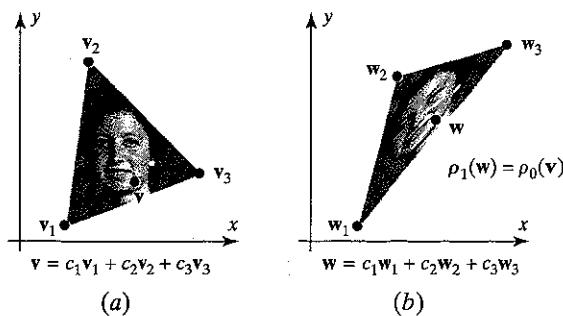
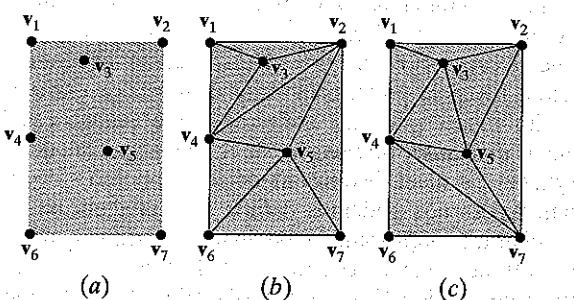


Figura 11.21.2

A Equação (6) determina uma deformação muito simples de uma imagem dentro de um único triângulo. Mais geralmente, podemos repartir uma imagem em várias regiões triangulares e deformar cada região de uma maneira diferente. Isto nos dá uma grande liberdade de projetar deformações, pela escolha das regiões triangulares e da maneira de alterá-las. Para ver isto, suponha que nós temos uma imagem contida em alguma região retangular do plano. Nós escolhemos  $n$  pontos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dentro do retângulo que representam elementos chave da imagem que queremos变形; estes pontos chamamos de **Pontos de Vértice** (Figura 11.21.3a). Uma vez escolhidos os pontos de vértice, completamos uma **triangulação** da região retangular, ou seja, traçamos retas entre os pontos de vértice de tal modo que as seguintes condições são satisfeitas (Figura 11.21.3b):

1. As retas formam os lados de uma coleção de triângulos.
2. As retas não se cruzam.
3. Cada ponto de vértice é o vértice de pelo menos um triângulo.
4. A união dos triângulos é o retângulo.
5. A coleção de triângulos é máxima (ou seja, não restam vértices para conectar).

Observe que a condição 4 requer que cada esquina do retângulo que contém a imagem seja um ponto de vértice.



**Figura 11.21.3**

Nós sempre podemos formar uma triangulação a partir de quaisquer  $n$  pontos de vértice, mas a triangulação não é necessariamente única. Por exemplo, as Figuras 11.21.3b e 11.21.3c são duas triangulações diferentes do mesmo conjunto de vértices da Figura 11.21.3a. Como existem vários algoritmos computacionais que efetuam triangulações com rapidez, não é necessário fazer este trabalho tedioso à mão; nós só precisamos especificar os pontos de vértice que desejamos e deixamos o computador gerar uma triangulação com estes pontos. Se escolhermos  $n$  pontos de vértice, pode ser mostrado que o número  $m$  de triângulos de qualquer triangulação usando estes pontos é dado por

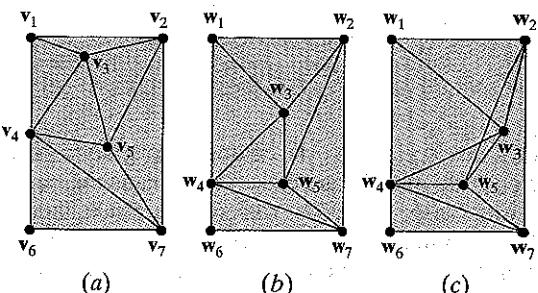
$$m = 2n - 2 - k \quad (7)$$

onde  $k$  é o número de pontos de vértice que estão na fronteira do retângulo, incluindo os quatro situados nas esquinas do retângulo.

A deformação é especificada pelo movimento dos  $n$  pontos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de vértice para novas posições  $w_1, w_2, \dots, w_n$  de acordo com as mudanças que queremos efetuar na imagem

(Figuras 11.21.4a e 11.21.4b). No entanto, impomos duas restrições aos movimentos dos pontos de vértice:

1. Os quatro pontos de vértice nas esquinas do retângulo devem permanecer fixos e todos os pontos de vértice situados nos lados do retângulo devem permanecer fixos ou então mover para outro ponto no mesmo lado do retângulo. Todos os demais pontos de vértice devem permanecer no interior do retângulo.
2. Os triângulos determinados pela triangulação não podem ficar sobrepostos depois de efetuado o movimento de seus vértices.



**Figura 11.21.4**

A primeira restrição garante a preservação da forma retangular da imagem inicial. A segunda restrição garante que os pontos de vértice movimentados ainda formam uma triangulação do retângulo e que a triangulação nova é similar à original. Por exemplo, a Figura 11.21.4c não é um movimento permitido aos pontos de vértice mostrados na Figura 11.21.4a. Embora uma violação desta condição possa ser tratada matematicamente sem muito esforço adicional, as deformações resultantes em geral produzem resultados artificiais e nós não trataremos disto aqui.

A Figura 11.21.5 é uma deformação de uma fotografia de uma mulher usando uma triangulação de 94 pontos de vértice e 179 triângulos. Observe como os pontos de vértice da triangulação inicial foram escolhidos ao longo de características essenciais da imagem (contorno dos cabelos, olhos, lábios, etc.). Estes pontos de vértice foram movidos para as posições finais correspondentes às mesmas características numa fotografia da mulher tirada 20 anos depois da imagem inicial. Assim, a imagem deformada representa a mulher forçada para seu formato mais idoso mas usando os níveis de cinza de quando era mais jovem.

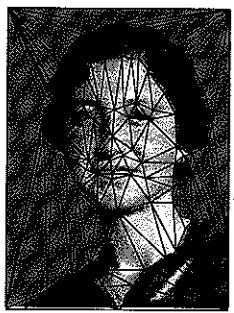
**Deformações Dependentes do Tempo** Uma **deformação dependente do tempo** é um conjunto de deformações geradas quando os pontos de vértice da imagem inicial são movidos continuamente ao longo do tempo desde suas posições originais até posições finais especificadas. Isto nós dá uma animação na qual a imagem inicial é deformada continuamente até uma deformação final. Vamos escolher unidades de tempo de tal modo que  $t = 0$  corresponde à imagem inicial e  $t = 1$  corresponde à deformação final. A maneira mais simples de mover os pontos de vértice do instante de tempo 0 ao instante de tempo 1 é com velocidade constante ao longo de caminhos retos ligando as posições iniciais às posições finais.



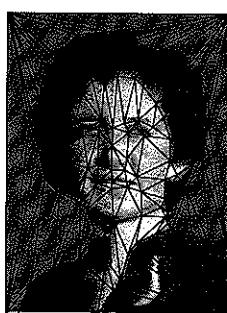
Imagen inicial



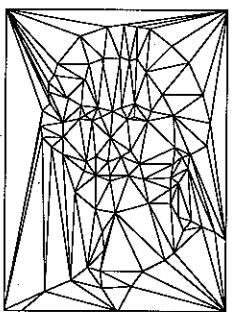
Imagen deformada



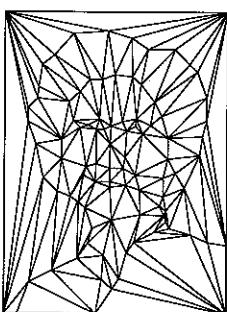
Triangulación inicial



Triangulación deformada



Triangulación inicial



Triangulación deformada

**Figura 11.21.5**

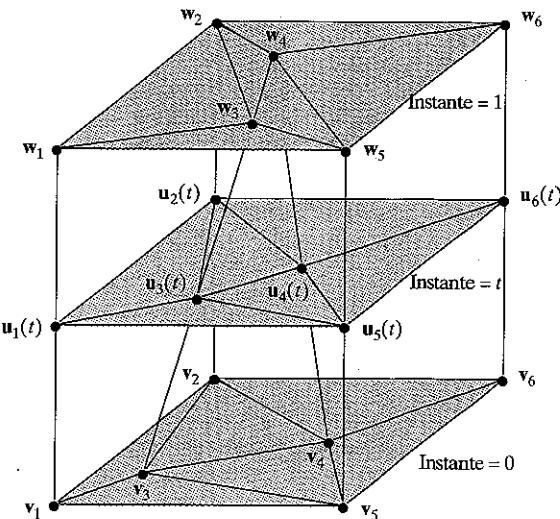
Para descrever um tal movimento, seja  $\mathbf{u}_i(t)$  a posição do  $i$ -ésimo ponto de vértice em um instante de tempo  $t$  entre 0 e 1. Assim,  $\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{v}_i$  (sua posição na imagem inicial) e  $\mathbf{u}_i(1) = \mathbf{w}_i$  (sua posição na imagem final). Entre um e outro ponto, nós determinamos sua posição por

$$\mathbf{u}_i(t) = (1-t)\mathbf{v}_i + t\mathbf{w}_i \quad (8)$$

Observe que (8) exprime  $\mathbf{u}_i(t)$  como uma combinação convexa de  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{w}_i$  para cada  $t$  em  $[0, 1]$ . A Figura 11.21.6 ilustra uma triangulação dependente do tempo de uma região retangular plana com seis pontos de vértice. As linhas conectando os pontos de vértice em instantes diferentes são os caminhos no espaço-tempo destes pontos de vértice neste diagrama espaço-temporal.

Uma vez calculadas as posições dos pontos de vértice em instantes de tempo  $t$ , efetuamos uma deformação entre a imagem inicial e a triangulação no instante  $t$  determinada pelos pontos de vértice movidos até aquele instante  $t$ . A Figura 11.21.7 mostra uma deformação dependente do tempo em cinco

valores de  $t$  gerados a partir da deformação entre  $t = 0$  e  $t = 1$  mostrada na Figura 11.21.5.

**Figura 11.21.6****Figura 11.21.7**

**Morfismos** Um *morfismo dependente do tempo* pode ser descrito como uma combinação de duas deformações dependentes do tempo de duas imagens distintas, usando duas triangulações, que associam características correspondentes das duas imagens. Uma das duas imagens é escolhida como a imagem inicial e a outra como a imagem final. Primeiro geramos uma deformação dependendo do tempo de  $t = 0$  a  $t = 1$  na qual a imagem inicial é deformada para a forma da imagem final. Em seguida geramos uma deformação dependendo do tempo de  $t = 0$  a  $t = 1$  na qual a imagem final é deformada para a forma da imagem inicial. Finalmente, para cada instante  $t$  entre 0 e 1 criamos um morfismo das duas deformações no instante  $t$  usando uma média ponderada dos dois níveis de cinza.

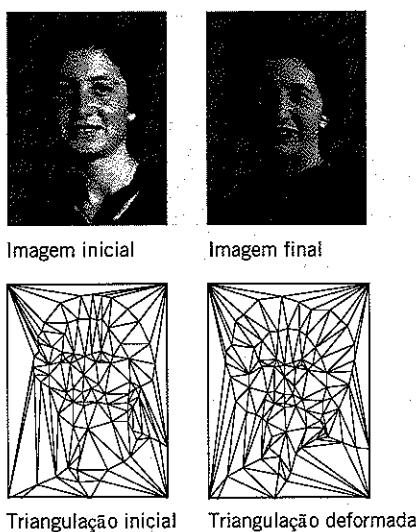


Figura 11.21.8

A Figura 11.21.8 mostra duas fotografias de uma mulher tomadas num intervalo de 20 anos. Abaixo das fotografias estão duas triangulações, nas quais associamos as características correspondentes das duas fotografias. A Figura 11.21.9 mostra o morfismo dependendo do tempo entre estas duas imagens para cinco instantes de tempo  $t$  entre 0 e 1.



Figura 11.21.9

O procedimento para produzir um tal morfismo é delineado nos nove passos seguintes (Figura 11.21.10):

**Passo 1.** Dados uma imagem inicial com densidade de imagem  $\rho_0$  e uma imagem final com densidade de imagem  $\rho_1$ , posicione  $n$  pontos de vértice  $v_1, v_2, \dots, v_n$  na imagem inicial em características essenciais da imagem.

**Passo 2.** Posicione  $n$  pontos de vértice correspondentes,  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , na imagem final nas características essenciais correspondentes da imagem.

**Passo 3.** Triangule as imagens inicial e final de maneiras similares desenhando linhas retas entre os pontos de vértice correspondentes de cada imagem.

**Passo 4.** Para cada instante de tempo  $t$  entre 0 e 1, encontre os pontos de vértice  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  no morfismo da imagem daquele instante usando a fórmula

$$u_i(t) = (1-t)v_i + tw_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

**Passo 5.** Triangule o morfismo da imagem do instante de tempo  $t$  de maneira similar às triangulações das imagens inicial e final.

**Passo 6.** Para cada ponto  $u$  do morfismo da imagem do instante de tempo  $t$ , encontre o triângulo da triangulação ao qual ele pertence e os vértices  $u_j(t), u_j(t)$  e  $u_K(t)$  deste triângulo. (Veja o Exercício 1 para decidir se um ponto está num triângulo.)

**Passo 7.** Expressse  $u$  como uma combinação convexa de  $u_i(t)$ ,  $u_j(t)$  e  $u_K(t)$  encontrando as constantes  $c_I, c_J$  e  $c_K$  tais que

$$u = c_I u_I(t) + c_J u_J(t) + c_K u_K(t) \quad (10)$$

e

$$c_I + c_J + c_K = 1 \quad (11)$$

**Passo 8.** Determine a localização do ponto  $u$  nas imagens inicial e final usando

$$v = c_I v_I + c_J v_J + c_K v_K \quad (\text{na imagem inicial}) \quad (12)$$

e

$$w = c_I w_I + c_J w_J + c_K w_K \quad (\text{na imagem final}) \quad (13)$$

**Passo 9.** Finalmente, determine a densidade de imagem  $\rho_t(u)$  no ponto  $u$  do morfismo da imagem usando

$$\rho_t(u) = (1-t)\rho_0(v) + t\rho_1(w) \quad (14)$$

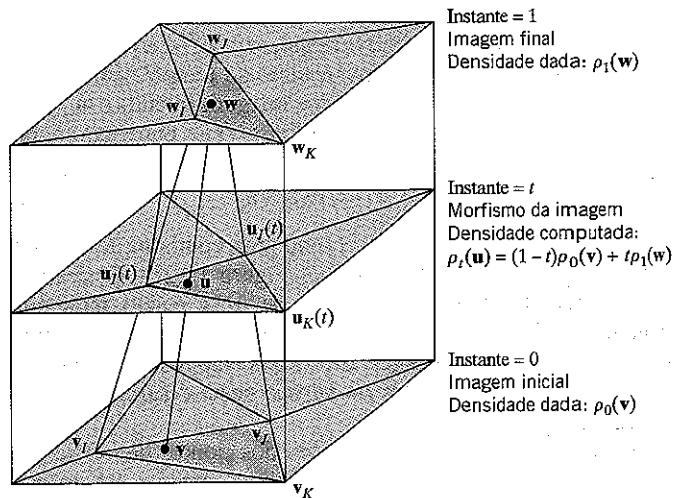


Figura 11.21.10

O Passo 9 é a chave para distinguir um morfismo da uma deformação. A Equação (14) toma médias ponderadas dos níveis de

cinza das imagens inicial e final para produzir o nível de cinza do morfismo da imagem. Os pesos dependem da fração das distâncias que os pontos de vértice já moveram de suas posições iniciais para as suas posições finais. Por exemplo, se os pontos de vértice moveram um quarto do caminho até seu destino (ou seja, se  $t = 0,25$ ), então nós usamos um quarto dos níveis de cinza da imagem final e três quartos dos níveis de cinza da imagem inicial. Assim, à medida que o tempo avança, não só a forma da imagem inicial vai mudando gradualmente para a forma da imagem final (como numa deformação) mas também os níveis de cinza da imagem inicial vão mudando gradualmente para os níveis de cinza da imagem final.

O procedimento descrito acima para gerar um morfismo é muito incômodo para ser feito à mão, mas é o tipo de atividade repetitiva e enfadonha na qual se sobressaem os computadores. Um morfismo bem feito exige um bom preparo e requer mais habilidade artística que matemática. (A habilidade matemática é exigida de quem projeta o software.) As duas fotografias que queremos submeter ao morfismo deveriam ser escolhidas cuidadosamente para ter características correspondentes e os pontos de vértice também deveriam ser escolhidos cuidadosamente de modo que os triângulos das duas triangulações resultantes contenham características similares das duas imagens. Quando executado corretamente, cada quadro de um morfismo deveria parecer tão “real” quanto as imagens inicial e final.

As técnicas que discutimos nesta seção podem ser generalizadas de várias maneiras para produzir deformações e morfismos muito mais elaborados. Por exemplo:

1. Se as imagens são coloridas, os três componentes da cor (vermelho, verde e azul) podem ser transformados separadamente para produzir morfismos coloridos.
2. Em vez de seguir caminhos retilíneos aos seus destinos, podemos direcionar os vértices de uma triangulação separadamente ao longo de caminhos mais complicados para produzir uma variedade de resultados.

3. Ao invés de viajar com velocidade constante ao longo de seus caminhos, podemos obrigar os vértices de uma triangulação a ter velocidades diferentes em instantes de tempos diferentes. Por exemplo, num morfismo entre duas faces, podemos mudar primeiro o contorno dos cabelos, depois o nariz, e assim por diante.
4. Similarmente, podemos fazer variar os níveis de cinza das imagens inicial e final em instantes diferentes e em vértices diferentes de maneiras mais complicadas que a da Equação (14).
5. Usando as técnicas desta seção e triangulando superfícies, podemos construir morfismos entre duas superfícies do espaço tridimensional (por exemplo, duas cabeças completas).
6. Podemos construir morfismos entre dois sólidos do espaço tridimensional (por exemplo, duas tomografias tridimensionais em tempos distintos de um coração humano pulsatante) dividindo-os em tetraedros sólidos correspondentes.
7. Podemos construir morfismos quadro a quadro entre as imagens de duas sequências de animações usando morfismos distintos em cada par de imagens (por exemplo, fazendo um ator caminhando num estúdio gradualmente transformar-se num macaco caminhando no estúdio).
8. Em vez de utilizar linhas retas, podemos usar curvas mais complicadas, como curvas interpoladoras, para triangular duas imagens.
9. Generalizando as fórmulas dadas nesta seção, podemos construir morfismos de três ou mais imagens.

Estas e outras generalizações fizeram de deformações e morfismos duas das áreas mais ativas em computação gráfica.

### Conjunto de Exercícios 11.21

1. Determine se o vetor  $\mathbf{v}$  é uma combinação convexa dos vetores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ . Faça isto resolvendo as Equações (1) e (3) para  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  e verificando se estes coeficientes são não-negativos.

$$(a) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Verifique a Equação (7) para a triangulação dada na Figura 11.21.3.

## 500 • • • Álgebra Linear com Aplicações

3. E dada uma transformação afim com uma matriz  $2 \times 2 M$  e um vetor bidimensional  $\mathbf{b}$ . Sejam  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$ , onde  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ ,  $\mathbf{w} = M \mathbf{v} + \mathbf{b}$  e, para cada  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{w}_i = M \mathbf{v}_i + \mathbf{b}$ . Mostre que  $\mathbf{w} = c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 + c_3 \mathbf{w}_3$ . (Isto mostra que uma transformação afim leva uma combinação convexa de vetores na mesma combinação convexa das imagens dos vetores.)
4. (a) Exiba uma triangulação dos pontos da Figura 11.21.3 na qual os pontos  $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$  e  $\mathbf{v}_6$  formam os vértices de um só triângulo.  
 (b) Exiba uma triangulação dos pontos da Figura 11.21.3 na qual os pontos  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5$  e  $\mathbf{v}_7$  não formam os vértices de um só triângulo.
5. Encontre a matriz  $M$  de tamanho  $2 \times 2$  e o vetor bidimensional  $\mathbf{b}$  que definem a transformação afim que leva os três vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  nos três vetores  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{w}_3$ . Faça isto montando um sistema de seis equações lineares para as quatro entradas da matriz  $M$  e as duas entradas do vetor  $\mathbf{b}$ .

$$(a) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ -9 \end{bmatrix}$$

6. (a) Sejam  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  vetores linearmente independentes do plano. Mostre que se  $c_1$  e  $c_2$  são números não-negativos tais que  $c_1 + c_2 = 1$ , então o vetor  $c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}$  está no segmento de reta que liga as pontas dos vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .  
 (b) Sejam  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  vetores linearmente independentes do plano. Mostre que se  $c_1$  e  $c_2$  são números não-negativos tais que  $c_1 + c_2 \leq 1$ , então o vetor  $c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}$  está no triângulo que conecta a origem e as pontas dos vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . [Sugestão. Examine primeiro o vetor  $c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}$  multiplicado pelo fator de escala  $1 / (c_1 + c_2)$ .]  
 (c) Sejam  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  pontos não-colineares do plano. Mostre que se  $c_1, c_2$  e  $c_3$  são números não-negativos tais que  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ , então o vetor  $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$  está no triângulo que conecta as pontas dos três vetores. [Sugestão. Sejam  $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$  e utilize a Equação (1) e as partes (a) e (b) deste exercício.]
7. (a) O que você pode dizer sobre os coeficientes  $c_1, c_2$  e  $c_3$  que determinam uma combinação convexa  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$  se  $\mathbf{v}$  está em um dos três vértices do triângulo determinado pelos três vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ ?  
 (b) O que você pode dizer sobre os coeficientes  $c_1, c_2$  e  $c_3$  que determinam uma combinação convexa  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$  se  $\mathbf{v}$  está em um dos três lados do triângulo determinado pelos três vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ ?  
 (c) O que você pode dizer sobre os coeficientes  $c_1, c_2$  e  $c_3$  que determinam uma combinação convexa  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$  se  $\mathbf{v}$  está no interior do triângulo determinado pelos três vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ ?  
 8. O centro de gravidade de um triângulo está no segmento de reta que conecta qualquer um dos três vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Sua localização neste segmento de reta é a dois terços da distância do vértice. Se os três vértices são dados pelos vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ , escreva o centro de gravidade como uma combinação convexa destes três vetores.

### Requisito: Recurso Computacional

### Exercícios Computacionais 11.2.1

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de software de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Para construir uma deformação ou um morfismo de uma superfície em  $R^3$  nós precisamos conseguir triangular a superfície. Sejam  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}$ ,

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}$  três vetores não-colineares na superfície. Então um vetor  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$  está no triângulo formado por estes

três vetores se, e somente se,  $\mathbf{v}$  é uma combinação convexa dos três vetores, ou seja,  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$  para coeficientes não-nulos  $c_1, c_2$  e  $c_3$  cuja soma é 1.

(a) Mostre que, neste caso,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são soluções do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nas partes (b)–(d) determine se o vetor  $\mathbf{v}$  é uma combinação convexa dos três vetores  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ .

$$(b) \mathbf{v} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (c) \mathbf{v} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (d) \mathbf{v} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ 50 \end{bmatrix}$$

T2. Para construir uma deformação ou um morfismo de um objeto sólido em  $R^3$  nós primeiro particionamos o objeto em tetraedros disjuntos.

Sejam  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} v_{41} \\ v_{42} \\ v_{43} \end{bmatrix}$  quatro vetores não-coplanares. Então um vetor  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$  está no tetraedro

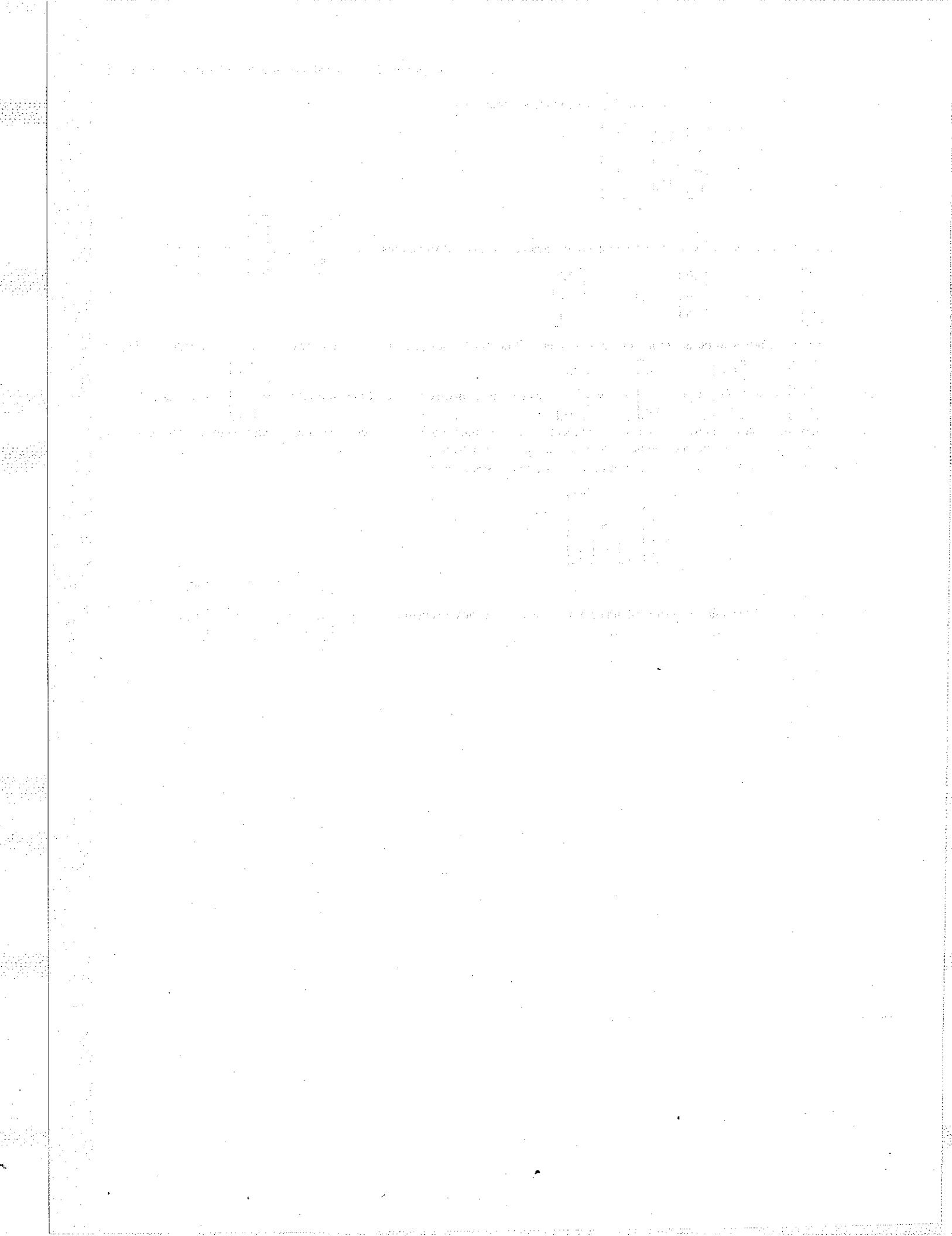
sólido formado por estes quatro vetores se, e somente se,  $\mathbf{v}$  é uma combinação convexa dos quatro vetores, ou seja,  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4$  para coeficientes não-nulos  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  cuja soma é 1.

(a) Mostre que, neste caso,  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  são soluções do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nas partes (b)–(d) determine se o vetor  $\mathbf{v}$  é uma combinação convexa dos três vetores  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

$$(b) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (c) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (d) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



# Respostas dos Exercícios

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.1 [página 30]

1. (a), (c), (f)    2. (a), (b), (c)

3. (a)  $x = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}t$     (b)  $x_1 = \frac{5}{3}s - \frac{4}{3}t + \frac{7}{3}$      $x_1 = \frac{1}{4}r - \frac{5}{8}s + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}$      $v = \frac{8}{3}q - \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t$

$$y = t$$

$$x_2 = s$$

$$x_2 = r$$

$$w = q$$

$$x_3 = t$$

$$x_3 = s$$

$$x = r$$

$$x_4 = t$$

$$y = s$$

$$z = t$$

4. (a)  $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. (a)  $2x_1 = 0$   
 $3x_1 - 4x_2 = 0$   
 $x_2 = 1$

(b)  $3x_1 - 2x_3 = 5$   
 $7x_1 + x_2 + 4x_3 = -3$   
 $-2x_2 + x_3 = 7$

(c)  $7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5$   
 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$   
 $-2x_2 + x_3 = 7$

(d)  $x_1 = 7$   
 $x_2 = -2$   
 $x_3 = 3$   
 $x_4 = 4$

6. (a)  $x - 2y = 5$     (b) Tome  $x = t$ ; então  $t - 2y = 5$ . Resolvendo em  $y$  dá  $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ .

10.  $k = 6$ : infinitas soluções

$k \neq 6$ : nenhuma solução

Nenhum valor de  $k$  dá solução única

11. (a) As retas não têm ponto de interseção.

(b) As retas cortam-se em exatamente um ponto.

(c) As três retas coincidem.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.2 [página 37]

1. (a), (b), (c), (d), (h), (i), (j)

2. (a), (b), (d), (e)

3. (a) Ambas

(b) Nenhuma

(c) Ambas

(d) Escalonada por linhas

(e) Nenhuma

(f) Ambas

4. (a)  $x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 7$

(b)  $x_1 = 7t + 8, x_2 = -3t + 2, x_3 = -t - 5, x_4 = t$

(c)  $x_1 = 6s - 3t - 2, x_2 = s, x_3 = -4t + 7, x_4 = -5t + 8, x_5 = t$

(d) Inconsistente

5. (a)  $x_1 = -37, x_2 = -8, x_3 = 5$

(b)  $x_1 = 13t - 10, x_2 = 13t - 5, x_3 = -t + 2, x_4 = t$

(c)  $x_1 = -7s + 2t - 11, x_2 = s, x_3 = -3t - 4, x_4 = -3t + 9, x_5 = t$

(d) Inconsistente

**504 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

6. (a)  $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$       8. (a) Inconsistente  
 (b)  $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, x_3 = t$       (b)  $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 7$   
 (c)  $x = t - 1, y = 2s, z = s, w = t$       (c)  $x_1 = 3 + 2t, x_2 = t$   
 (d) Inconsistente      (d)  $x = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t - \frac{3}{5}s, y = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}t - \frac{1}{10}s, z = t, w = s$
10. (a)  $x_1 = 2 - 12t, x_2 = 5 - 27t, x_3 = t$       12. (a), (c), (d)  
 (b) Inconsistente  
 (c)  $u = -2s - 3t - 6, v = s, w = -t - 2, x = t + 3, y = t$
13. (a)  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$       14. (a) Somente a solução trivial  
 (b)  $x_1 = -s, x_2 = -t - s, x_3 = 4s, x_4 = t$       (b)  $u = 7s - 5t, v = -6s + 4t, w = 2s, x = 2t$   
 (c)  $w = t, x = -t, y = t, z = 0$       (c) Somente a solução trivial
15. (a)  $I_1 = -1, I_2 = 0, I_3 = 1, I_4 = 2,$   
 (b)  $Z_1 = -s - t, Z_2 = s, Z_3 = -t, Z_4 = 0, Z_5 = t$
16. (a)  $x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b, y = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{9}b$       (b)  $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$
17.  $a = -4$ , nenhuma;  $a \neq \pm 4$ , exatamente uma;  $a = 4$ , infinitas
19.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  são respostas possíveis.      20.  $\alpha = \pi/2, \beta = \pi, \gamma = 0$       22.  $\lambda = 4, \lambda = 2$
23. Se  $\lambda = 1$ , então  $x_1 = x_2 = s, x_3 = 0$       24.  $x = -13/7, y = 91/54, z = -91/8$   
 Se  $\lambda = 2$ , então  $x_1 = -\frac{1}{2}s, x_2 = 0, x_3 = s$
25.  $a = 1, b = -6, c = 2, d = 10$
26.  $a = 1, b = -2, c = -4, d = -29$       30. (a) Pelo menos duas das três retas são distintas.      (b) As três retas são idênticas.
31. (a) Falsa      (b) Verdadeira      (c) Falsa      (d) Falsa      32. (a) Falsa      (b) Falsa      (c) Falsa      (d) Falsa

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.3 [página 46]**

1. (a) Não-definida      (b)  $4 \times 2$       (c) Não-definida      (d) Não-definida  
 (e)  $5 \times 5$       (f)  $5 \times 2$       (g) Não-definida      (h)  $5 \times 2$
2.  $a = 5, b = -3, c = 4, d = 1$
3. (a)  $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$       (b)  $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$       (c)  $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$       (d)  $\begin{bmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$       (e) Não-definida  
 (f)  $\begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$       (g)  $\begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}$       (h)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$       (i) 5      (j) -25      (k) 168      (l) Não-definida
4. (a)  $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$       (b)  $\begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$       (c)  $\begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$       (d) Não-definida  
 (e)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$       (f)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$       (g)  $\begin{bmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$       (h)  $\begin{bmatrix} 9 & -13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$
5. (a)  $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$       (b) Não-definida      (c)  $\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix}$       (d)  $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$       (e)  $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

(f)  $\begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix}$  (g)  $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{bmatrix}$  (h)  $\begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{bmatrix}$  (i) 61 (j) 35 (k) (28)

6. (a)  $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 36 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$  (b) Não definida (c)  $\begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$  (e)  $\begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$  (f)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. (a)  $[67 \ 41 \ 41]$  (b)  $[63 \ 67 \ 57]$  (c)  $\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix}$  (e)  $[24 \ 56 \ 97]$  (f)  $\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix}$

8. (a)  $\begin{bmatrix} 67 \\ 64 \\ 63 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -6 \\ 17 \\ 41 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 41 \\ 59 \\ 57 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 70 \\ 31 \\ 122 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

10. (a)  $[67 \ 41 \ 41] = 3[6 \ -2 \ 4] - 2[0 \ 1 \ 3] + 7[7 \ 7 \ 5]$

$[64 \ 21 \ 59] = 6[6 \ -2 \ 4] + 5[0 \ 1 \ 3] + 4[7 \ 7 \ 5]$

$[63 \ 67 \ 57] = 0[6 \ -2 \ 4] + 4[0 \ 1 \ 3] + 9[7 \ 7 \ 5]$

(b)  $[6 \ -6 \ 70] = 6[3 \ -2 \ 7] - 2[6 \ 5 \ 4] + 4[0 \ 4 \ 9]$

$[6 \ 17 \ 31] = 0[3 \ -2 \ 7] + 1[6 \ 5 \ 4] + 3[0 \ 4 \ 9]$

$[63 \ 41 \ 122] = 7[3 \ -2 \ 7] + 7[6 \ 5 \ 4] + 5[0 \ 4 \ 9]$

11. 182

13. (a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  (b)  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. (a)  $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$  (b)  $3w - 2x + z = 0$

$4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1$   $5w + 2y - 2z = 0$

$-2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4$   $3w + x + 4y + 7z = 0$

$-2w + 5x + y + 6z = 0$

15.  $\begin{bmatrix} -1 & 23 & -10 \\ 37 & -13 & 8 \\ 29 & 23 & 41 \end{bmatrix}$  (ambas partes (a) e (b)) 16. (a)  $\begin{bmatrix} -3 & -15 & -11 \\ 21 & -15 & 44 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 4 & -7 & -19 & -43 \\ 2 & 2 & 18 & 17 \\ 0 & 5 & 25 & 35 \\ 2 & 3 & 23 & 24 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 4 & -4 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

17. (a)  $A_{11}$  é uma matriz  $2 \times 3$  e  $B_{11}$  é uma matriz  $2 \times 2$ .  $A_{11} B_{11}$  não existe. (b)  $\begin{bmatrix} -1 & 23 & -10 \\ 37 & -13 & 8 \\ 29 & 23 & 41 \end{bmatrix}$

**506 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

21. (a)  $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$

22. (a)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

25. Uma, a saber,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  26. Nenhuma

27. (a)  $\pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  (b) Quatro, a saber,  $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{bmatrix}$  (c) Não; por exemplo,  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. (a) Sim, por exemplo,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (b) Sim, por exemplo,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

29. (a) Verdadeira (b) Verdadeira (c) Falsa (d) Verdadeira

30. (a) Verdadeira (b) Falsa; por exemplo  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  (c) Verdadeira (d) Verdadeira

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.4 [página 54]**

4.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ ,  $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7. (a)  $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$  (b)  $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$  (c)  $A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$  (d)  $A = \begin{bmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$

8.  $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 28 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A^{-3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

9. (a)  $p(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  (b)  $p(A) = \begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$  (c)  $p(A) = \begin{bmatrix} 39 & 13 \\ 26 & 13 \end{bmatrix}$

11.  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  12.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) \\ \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$

13.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$

16. Não      18.  $C = -A^{-1}BA^{-1}$

19. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. (a) Um exemplo é  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$       (b) Um exemplo é  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . 22. Sim 23.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

31. (a) Por exemplo,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$       (b)  $AB + BA$

32. (a) O mesmo que 31(a)      (b)  $A^2 = AB + BA = B^2$       33.  $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

34. (a) Se  $A$  é invertível, então  $A^T$  é invertível.      (b) Verdadeira

35. (a) Falsa      (b) Verdadeira      (c) Verdadeira      (d) Falsa (às vezes são iguais)

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.5 [página 59]

1. (a), (c), (d), (f)

2. (a) Some três vezes a primeira linha à segunda.

(b) Multiplique a terceira linha por  $\frac{1}{3}$ .

(c) Permute a primeira com a quarta linha.

(d) Some  $\frac{1}{7}$  vezes a terceira linha à primeira.

3. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Não, pois  $C$  não pode ser obtida de  $B$  por uma única operação sobre linhas.

5. (a)  $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -\frac{5}{39} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$  (c) Não-invertível

6. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$  (b) Não-invertível (c)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  (e)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{26} & \frac{-3\sqrt{2}}{26} & 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{26} & \frac{\sqrt{2}}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$  (d) Não-invertível (e)  $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

8. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$

9. (a)  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (b)  $A^{-1} = E_2 E_1$  (c)  $A = E_1^{-1} E_2^{-1}$

10. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 4 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 10 & 9 & -6 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$  11.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. (b) Some - 1 vezes a primeira linha à segunda.  
Some - 1 vezes a primeira linha à terceira.  
Some - 1 vezes a segunda linha à primeira.  
Some a segunda linha à terceira.

19. (a) Falsa (b) Falsa (c) Verdadeira (d) Verdadeira

20. (a) Verdadeira (b) Verdadeira (c) Verdadeira (d) Falsa

21. Em geral, não. Tente  $b = 1$ ,  $a = c = d = 0$ .

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.6 [página 64]

1.  $x_1 = 3, x_2 = -1$  2.  $x_1 = -3, x_2 = -3$  3.  $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -7$

4.  $x_1 = 1, x_2 = -11, x_3 = 16$  5.  $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -1$

6.  $w = -6, x = 1, y = 10, z = -7$  7.  $x_1 = 2b_1 - 5b_2, x_2 = -b_1 + 3b_2$

8.  $x_1 = -\frac{15}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{5}{2}b_3, x_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3, x_3 = \frac{5}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3$

9. (a)  $x_1 = \frac{16}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = -\frac{11}{3}$  (b)  $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{10}{3}$   
(c)  $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -4$

11. (a)  $x_1 = \frac{22}{17}, x_2 = \frac{1}{17}$  (b)  $x_1 = \frac{21}{17}, x_2 = \frac{11}{17}$

12. (a)  $x_1 = -18, x_2 = -1, x_3 = -14$  (b)  $x_1 = -\frac{421}{2}, x_2 = -\frac{25}{2}, x_3 = -\frac{327}{2}$

13. (a)  $x_1 = \frac{7}{15}, x_2 = \frac{4}{15}$  (b)  $x_1 = \frac{34}{15}, x_2 = \frac{28}{15}$  (c)  $x_1 = \frac{19}{15}, x_2 = \frac{13}{15}$  (d)  $x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = \frac{3}{5}$

14. (a)  $x_1 = 18, x_2 = -9, x_3 = 2$  (b)  $x_1 = -23, x_2 = 11, x_3 = -2$   
(c)  $x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 0$

15. (a)  $x_1 = -12 - 3t, x_2 = -5 - t, x_3 = t$  (b)  $x_1 = 7 - 3t, x_2 = 3 - t, x_3 = t$

16.  $b_1 = 2b_2$  17.  $b_1 = b_2 + b_3$  18. Nenhuma restrição 19.  $b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4$

21.  $X = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$

22. (a) Somente a solução trivial  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ; invertível.

(b) Infinitas soluções; não invertível.

27. (a)  $I - A$  é invertível. (b)  $x = (I - A)^{-1}b$

28. Não. Tente  $A = I$ .

29. Sim, para matrizes não-quadradas.

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.7 [página 69]

1. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$  (b) Não invertível (c)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. (a)  $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -24 & -10 & 12 \\ 3 & -10 & 0 \\ 60 & 20 & -16 \end{bmatrix}$

3. (a)  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $A^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ,  $A^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(-2)^k \end{bmatrix}$   
(b)  $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$ ,  $A^{-2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ ,  $A^{-k} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix}$

4. (b), (c) 5. (a) 6.  $a = 11, b = -9, c = -13$  7.  $a = 2, b = -1$

8. (a) Não comutam (b) Comutam 10. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} \pm\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

11. (a)  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$  (b) Não 16. (b) Sim 17. Sim

19.  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$   
 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

20. (a) Sim (b) Não (exceto se  $n = 1$ ) (c) Sim (d) Não (exceto se  $n = 1$ ) 23. Não

24. (a)  $x_1 = \frac{7}{4}, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}$  (b)  $x_1 = -8, x_2 = -4, x_3 = 3$

25.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  26.  $\frac{n}{2}(1+n)$  27. Multiplique entradas diagonais correspondentes

28.  $A$  é diagonal 30. (a) Verdadeira (b) Falsa (c) Verdadeira (d) Falsa

### EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES [página 71]

1.  $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$  2.  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta, y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$

3. Uma resposta possível é 4. Três moedas de 1 centavo, quatro de 5 e seis de 10.

$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$

$x_1 + 5x_2 + 2x_4 = 0$

5.  $x = 4, y = 2, z = 3$

6. Infinitas se  $a = 2$  ou  $a = -\frac{3}{2}$ ; caso contrário, nenhuma.

## 510 • • • Álgebra Linear com Aplicações

7. (a)  $a \neq 0, b \neq 2$  (b)  $a \neq 0, b = 2$  (c)  $a = 0, b = 2$  (d)  $a = 0, b \neq 2$

8.  $x = \frac{5}{9}, y = 9, z = \frac{1}{3}$  9.  $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  10.  $a = 2, b = -1, c = 1$

11. (a)  $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  (c)  $X = \begin{bmatrix} -\frac{113}{37} & -\frac{160}{37} \\ -\frac{20}{37} & -\frac{46}{37} \end{bmatrix}$

12. (a)  $Z = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 11 \\ 14 & 10 & -26 \end{bmatrix} X$  (b)  $z_1 = -x_1 - 7x_2 + 11x_3$   
 $z_2 = 14x_1 + 10x_2 - 26x_3$

13.  $m p n$  multiplicações e  $m p (n-1)$  adições 15.  $a = 1, b = -2, c = 3$

16.  $a = 1, b = -4, c = -5$  26.  $A = -\frac{7}{5}, B = \frac{4}{5}, C = \frac{3}{5}$

29. (b)  $\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ d & 0 & c^n \end{bmatrix}$ , onde  $d = \begin{cases} a^n - c^n & \text{se } a \neq c \\ \frac{a-c}{na^{n-1}} & \text{se } a = c \end{cases}$

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.1 [página 81]

1. (a) 5 (b) 9 (c) 6 (d) 10 (e) 0 (f) 2

2. (a) Ímpar (b) Ímpar (c) Par (d) Par (e) Par (f) Par

3. 22 4. 0 5. 52 6.  $-3\sqrt{6}$  7.  $a^2 - 5a + 21$  8. 0

9. -65 10. -4 11. -123 12.  $-c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2$

13. (a)  $\lambda = 1, \lambda = -3$  (b)  $\lambda = -2, \lambda = 3, \lambda = 4$  16. 275

17. (a) = -120 (b) = -120 18.  $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$  22. É igual a 0 se  $n > 1$ .

24. O determinante é igual ao produto das entradas da diagonal.

25. O determinante é igual ao produto das entradas da diagonal.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.2 [página 84]

2. (a) -30 (b) -2 (c) 0 (d) 0 3. (a) -5 (b) -1 (c) 1

4. 30 5. 5 6. -17 7. 33 8. 39 9. 6 10.  $-\frac{1}{6}$

11. -2 12. (a) -6 (b) 72 (c) -6 (d) 18

16. (a)  $\det(A) = -1$  (b)  $\det(A) = 1$  17.  $x = 0, -1, \frac{1}{2}$  18.  $x = 1, -3$

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.3 [página 89]

1. (a)  $\det(2A) = -40 = 2^2 \det(A)$  (b)  $\det(-2A) = -448 = (-2)^3 \det(A)$

2.  $\det AB = -170 = (\det A)(\det B)$

4. (a) Invertível (b) Não-invertível (c) Não-invertível (d) Não-invertível

5. (a) -189 (b)  $-\frac{1}{7}$  (c)  $-\frac{8}{7}$  (d)  $-\frac{1}{56}$  (e) 7

6. Se  $x = 0$ , a primeira e terceira linhas são proporcionais.

Se  $x = 2$ , a primeira e segunda linhas são proporcionais.

12. (a)  $k = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$  (b)  $k = -1$

14. (a)  $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 5 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. (i)  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$  (ii)  $\lambda = -1, \lambda = 3$  (iii)  $\begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$

(i)  $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$  (ii)  $\lambda = -1, \lambda = 6$  (iii)  $\begin{bmatrix} -t \\ t \\ \frac{3}{4}t \end{bmatrix}$

(i)  $\lambda^2 - 4 = 0$  (ii)  $\lambda = -2, \lambda = 2$  (iii)  $\begin{bmatrix} -\frac{t}{5} \\ t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$

20. Não      21.  $AB$  é singular.

22. (a) Falsa      (b) Verdadeira      (c) Falsa      (d) Verdadeira

23. (a) Verdadeira      (b) Verdadeira      (c) Falsa      (d) Verdadeira

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.4 [página 95]

1. (a)  $M_{11} = 29, M_{12} = 21, M_{13} = 27, M_{21} = -11, M_{22} = 13, M_{23} = -5, M_{31} = -19, M_{32} = -19, M_{33} = 19$   
 (b)  $C_{11} = 29, C_{12} = -21, C_{13} = 27, C_{21} = 11, C_{22} = 13, C_{23} = 5, C_{31} = -19, C_{32} = 19, C_{33} = 19$

2. (a)  $M_{13} = 0, C_{13} = 0$       (b)  $M_{23} = -96, C_{23} = 96$       3. 152  
 (c)  $M_{22} = -48, C_{22} = -48$       (d)  $M_{21} = 72, C_{21} = -72$

4. (a)  $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 29 & 11 & -19 \\ -21 & 13 & 19 \\ 27 & 5 & 19 \end{bmatrix}$  (b)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{29}{152} & \frac{11}{152} & -\frac{19}{152} \\ -\frac{21}{152} & \frac{13}{152} & \frac{19}{152} \\ \frac{27}{152} & \frac{5}{152} & \frac{19}{152} \end{bmatrix}$

5. -40      6. -66      7. 0      8.  $k^3 - 8k^2 - 10k + 95$       9. -240      10. 0

11.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$       12.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$       13.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

14.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{29}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$       15.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

16.  $x_1 = 1, x_2 = 2$       17.  $x = \frac{3}{11}, y = \frac{2}{11}, z = -\frac{1}{11}$

18.  $x = -\frac{144}{55}, y = -\frac{61}{55}, z = \frac{46}{11}$       19.  $x_1 = -\frac{30}{11}, x_2 = -\frac{38}{11}, x_3 = -\frac{40}{11}$

20.  $x_1 = 5, x_2 = 8, x_3 = 3, x_4 = -1$       21. A regra de Cramer não é aplicável.

22.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       23.  $y = 0$       24.  $x = 1, y = 0, z = 2, w = 0$

31.  $\det(A) = 10 \times (-108) = -1080$       33. 12      34. Um

35. (a) Verdadeira      (b) Falsa      (c) Verdadeira      (d) Falsa

**EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES [página 98]**

1.  $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$     2.  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta, y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$   
 4. 2    5.  $\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$     10. (b)  $\frac{19}{2}$   
 12.  $\det(B) = (-1)^{n(n-1)/2} \det(A)$   
 13. (a) A  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima colunas serão trocadas.  
 (b) A  $i$ -ésima coluna será dividida por  $c$ .  
 (c)  $-c$  vezes a  $j$ -ésima coluna será somada à  $i$ -ésima coluna.  
 15. (a)  $\lambda^3 + (-a_{11} - a_{22} - a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})\lambda +$   
 $(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32})$   
 18. (a)  $\lambda = -5, \lambda = 2, \lambda = 4; \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7t \\ 19t \\ t \end{bmatrix}$     (b)  $\lambda = 1; \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix}$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.1 [página 105]**

3. (a)  $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, -1)$     (b)  $\overrightarrow{P_1P_2} = (-7, -2)$     (c)  $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1)$     (d)  $\overrightarrow{P_1P_2} = (a, b)$   
 (e)  $\overrightarrow{P_1P_2} = (-5, 12, -6)$     (f)  $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -1, -2)$     (g)  $\overrightarrow{P_1P_2} = (-a, -b, -c)$     (h)  $\overrightarrow{P_1P_2} = (a, b, c)$   
 4. (a)  $Q(5, 10, -8)$  é uma resposta possível.    (b)  $Q(-7, -4, -2)$  é uma resposta possível.  
 5. (a)  $P(-1, 2, -4)$  é uma resposta possível.    (b)  $P(7, -2, -6)$  é uma resposta possível.  
 6. (a)  $(-2, 1, -4)$     (b)  $(-10, 6, 4)$     (c)  $(-7, 1, 10)$   
 (d)  $(80, -20, -80)$     (e)  $(132, -24, -72)$     (f)  $(-77, 8, 94)$   
 7.  $\mathbf{x} = (-\frac{8}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{3})$     8.  $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 2$     10.  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$   
 11. (a)  $(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$     (b)  $(\frac{23}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$     12. (a)  $x' = 5, y' = 8$     (b)  $x = -1, y = 3$   
 14.  $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \mathbf{v} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{u} + \mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{u} - \mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.2 [página 108]**

1. (a) 5    (b)  $\sqrt{13}$     (c) 5    (d)  $2\sqrt{3}$     (e)  $3\sqrt{6}$     (f) 6  
 2. (a)  $\sqrt{13}$     (b)  $2\sqrt{26}$     (c)  $\sqrt{209}$     (d)  $3\sqrt{2}$   
 3. (a)  $\sqrt{83}$     (b)  $\sqrt{17} + \sqrt{26}$     (c)  $4\sqrt{17}$     (d)  $\sqrt{466}$     (e)  $\left(\frac{3}{\sqrt{61}}, \frac{6}{\sqrt{61}}, -\frac{4}{\sqrt{61}}\right)$     (f) 1  
 4.  $k = \pm \frac{4}{\sqrt{30}}$     6. (b)  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$     (c)  $(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7})$     7. (b)  $(6\sqrt{3} + 5\sqrt{2}, 6 - 5\sqrt{2})$   
 8. Uma esfera de raio 1 centrada em  $(x_0, y_0, z_0)$     12. Sim  
 13. (a)  $a = c = 0$     (b) Pelo menos um dentre  $a$  e  $c$  deve ser não-nulo, ou seja,  $a^2 + c^2 > 0$   
 14. (a) A distância de  $\mathbf{x}$  à origem é menor do que 1.    (b)  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > 1$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.3 [página 113]**

1. (a) -11    (b) -24    (c) 0    (d) 0    2. (a)  $-\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{74}}$     (b)  $-\frac{3}{\sqrt{10}}$     (c) 0    (d) 0  
 3. (a) Ortogonal    (b) Obtuso    (c) Agudo    (d) Obtuso

4. (a)  $(0, 0)$  (b)  $(\frac{8}{13}, -\frac{12}{13})$  (c)  $(-\frac{16}{13}, 0, -\frac{80}{13})$  (d)  $(\frac{16}{89}, \frac{12}{89}, \frac{32}{89})$   
 5. (a)  $(6, 2)$  (b)  $(-\frac{21}{13}, -\frac{14}{13})$  (c)  $(\frac{55}{13}, 1, -\frac{11}{13})$  (d)  $(\frac{73}{89}, -\frac{12}{89}, -\frac{32}{89})$   
 6. (a)  $\frac{2}{5}$  (b)  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$  (c)  $\frac{18}{\sqrt{22}}$  (d)  $\frac{43}{\sqrt{54}}$  8. (b)  $(3k, 2k)$  com um escalar  $k$  qualquer. (c)  $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}), (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$   
 9. (a) 102 (b)  $125\sqrt{2}$  (c) 170 (d) 170  
 10. Por exemplo,  $(2, -5, 0), (-3, 0, 5), (0, 3, 2), (1, -5, -5), (-3, 3, 7)$   
 11.  $\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta_2 = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \theta_3 = 0$  12. O ângulo reto está em  $B$ .  
 13.  $\pm(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$   
 14. (a)  $\frac{10}{3}$  (b)  $-\frac{6}{5}$  (c)  $\frac{-60+34\sqrt{3}}{33}$  (d)  $\frac{1}{2}$   
 15. (a) 1 (b)  $\frac{1}{\sqrt{17}}$  (c)  $\frac{6}{\sqrt{10}}$  18.  $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$   
 19. (b)  $\cos \beta = \frac{b}{\|\mathbf{v}\|}, \cos \gamma = \frac{c}{\|\mathbf{v}\|}$  20.  $\theta_1 \approx 71^\circ, \theta_2 \approx 61^\circ, \theta_3 \approx 36^\circ$   
 24. (a) Não existe o produto escalar do vetor  $\mathbf{u}$  com um escalar. (b) Um escalar está sendo somado ao vetor  $\mathbf{w}$ .  
 (c) Escalares não tem normas. (d) Não existe o produto escalar do escalar  $k$  com um vetor.  
 25. Sim; por exemplo, se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{u}$  são ortogonais. 26. Não; a equação só diz que  $\mathbf{u}$  é ortogonal a  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ .  
 27.  $\mathbf{r} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}$  28. Teorema de Pitágoras.

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.4 [página 119]

1. (a)  $(32, -6, -4)$  (b)  $(-14, -20, -82)$  (c)  $(27, 40, -42)$   
 (d)  $(0, 176, -264)$  (e)  $(-44, 55, -22)$  (f)  $(-8, -3, -8)$   
 2. (a)  $(18, 36, -18)$  (b)  $(-3, 9, -3)$  3. (a)  $\sqrt{59}$  (b)  $\sqrt{101}$  (c) 0  
 4. (a)  $\frac{\sqrt{374}}{2}$  (b)  $\sqrt{285}$  7. Por exemplo,  $(1, 1, 1) \times (2, -3, 5) = (8, -3, -5)$   
 8. (a) -10 (b) -110 9. (a) -3 (b) 3 (c) 3 (d) -3 (e) -3 (f) 0  
 10. (a) 16 (b) 45 11. (a) Não (b) Sim (c) Não 12.  $\pm\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$   
 13.  $\left(\frac{6}{\sqrt{61}}, -\frac{3}{\sqrt{61}}, \frac{4}{\sqrt{61}}\right), \left(-\frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{3}{\sqrt{61}}, -\frac{4}{\sqrt{61}}\right)$  15.  $2(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$  16.  $\frac{12\sqrt{13}}{49}$   
 17. (a)  $\frac{\sqrt{26}}{2}$  (b)  $\frac{\sqrt{26}}{3}$  19. (a)  $\frac{2\sqrt{141}}{\sqrt{29}}$  (b)  $\frac{\sqrt{137}}{3}$  21. (a)  $\sqrt{122}$  (b)  $\theta \approx 40^\circ 19''$   
 22. Qualquer múltiplo escalar de  $(2, 2, 1)$   
 23. (a)  $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$  (b)  $(-1, 0, 0)$  (c)  $(0, 0, -1)$   
 28.  $(-8, 0, -8)$  31. (a)  $\frac{2}{3}$  (b)  $\frac{1}{2}$  35. (b)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \neq 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$   
 36. Não, a equação é equivalente a  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$  e portanto, a  $\mathbf{v} - \mathbf{w} = l \mathbf{u}$  para algum escalar  $l$ .  
 37.  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ , em geral. 38. São colineares.  
 39. Por exemplo,  $a b = b a$ , (a b) c = a (b c) e  $a b = 0$  implica  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.5 [página 125]**

1. (a)  $-2(x+1)+(y-3)-(z+2)=0$    (b)  $(x-1)+9(y-1)+8(z-4)=0$   
 (c)  $2z=0$    (d)  $x+2y+3z=0$
2. (a)  $-2x+y-z-7=0$    (b)  $x+9y+8z-42=0$   
 (c)  $2z=0$    (d)  $x+2y+3y=0$
3. (a)  $(0, 0, 5)$  é um ponto no plano e  $\mathbf{n} = (-3, 7, 2)$  é um vetor normal, de modo que  $-3(x-0) + 7(y-0) + 2(z-5) = 0$  é uma forma ponto-normal; outros pontos e outras normais também dão respostas corretas.  
 (b)  $(x-0) + 0(y-0) - 4(z-0) = 0$  é uma possibilidade.
4. (a)  $2y-z+1=0$    (b)  $x+9y-5z-26=0$
5. (a) Não paralelos   (b) Paralelos   (c) Paralelos   6. (a) Paralelos   (b) Não paralelos
7. (a) Não perpendiculares   (b) Perpendiculares   8. (a) Perpendiculares   (b) Não perpendiculares
9. (a)  $x=3+2t, y=-1+t, z=2+3t$    (b)  $x=-2+6t, y=3-6t, z=-3-2t$   
 (c)  $x=2, y=2+t, z=6$    (d)  $x=t, y=-2t, z=3t$
10. (a)  $x=5+t, y=-2+2t, z=4-4t$    (b)  $x=2t, y=-t, z=-3t$
11. (a)  $x=-12-7t, y=-41-23t, z=t$    (b)  $x=\frac{5}{2}t, y=0, z=t$
12. (a)  $(-2, 4, 1) \cdot (x+1, y-2, z-4) = 0$    (b)  $(-1, 4, 3) \cdot (x-2, y, z+5) = 0$   
 (c)  $(-1, 0, 0) \cdot (x-5, y+2, z-1) = 0$    (d)  $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$
13. (a) Paralelos   (b) Não paralelos   14. (a) Perpendiculares   (b) Não perpendiculares
15. (a)  $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(7, -1, 5)$  ( $-\infty < t < +\infty$ )  
 (b)  $(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(1, 1, 1)$  ( $-\infty < t < +\infty$ )  
 (c)  $(x, y, z) = (2, -4, 1) + t(0, 0, -2)$  ( $-\infty < t < +\infty$ )  
 (d)  $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(a, b, c)$  ( $-\infty < t < +\infty$ )
17.  $2x+3y-5z+36=0$    18. (a)  $z=0$    (b)  $y=0$    (c)  $x=0$
19. (a)  $z-z_0=0$    (b)  $x-x_0=0$    (c)  $y-y_0=0$    20.  $7x+4y-2z=0$
21.  $5x-2y+z-34=0$    22.  $(-\frac{173}{3}, -\frac{43}{3}, \frac{49}{3})$    23.  $y+2z-9=0$
24.  $x-y-4z-2=0$    26.  $x=\frac{11}{5}t-2, y=-\frac{2}{5}t+5, z=t$
27.  $x+5y+3z-18=0$    28.  $(x-2)+(y+1)-3(z-4)=0$
29.  $4x+13y-z-17=0$    30.  $3x+10y+4z-53=0$    31.  $3x-y-z-2=0$
32.  $5x-3y+2z-5=0$    33.  $2x+4y+8z+13=0$    36.  $x-4y+4z+9=0$
37. (a)  $x=\frac{11}{23}+\frac{7}{23}t, y=-\frac{41}{23}-\frac{1}{23}t, z=t$    (b)  $x=-\frac{2}{5}t, y=0, z=t$
39. (a)  $\frac{5}{3}$    (b)  $\frac{1}{\sqrt{29}}$    (c)  $\frac{4}{\sqrt{3}}$    40. (a)  $\frac{1}{2\sqrt{26}}$    (b) 0   (c)  $\frac{2}{\sqrt{6}}$
42. (a)  $\frac{x-3}{2}=y+1=\frac{z-2}{3}$    (b)  $\frac{x+2}{6}=-\frac{y-3}{6}=-\frac{z+3}{2}$
43. (a)  $x-2y-17=0$  e  $x+4z-27=0$  é uma resposta possível.   (b)  $x-2y=0$  e  $-7y+2z=0$  é uma resposta possível.
44. (a)  $\theta \approx 35^\circ$    (b)  $\theta \approx 79^\circ$    45.  $\theta \approx 75^\circ$    46. São idênticas.   47. São perpendiculares.   48. É o segmento de reta ligando  $P_1$  a  $P_2$ .
49. Por exemplo,  $x=x_0+2t$ ,  $y=y_0+3t$ ,  $z=z_0+5t$  e  $x=x_0+t$ ,  $y=y_0-4t$ ,  $z=z_0+2t$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 4.1 [página 135]**

1. (a)  $(-1, 9, -11, 1)$    (b)  $(22, 53, -19, 14)$    (c)  $(-13, 13, -36, -2)$   
 (d)  $(-90, -114, 60, -36)$    (e)  $(-9, -5, -5, -3)$    (f)  $(27, 29, -27, 9)$

2.  $(\frac{6}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5})$     3.  $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1$   
 5. (a)  $\sqrt{29}$     (b) 3    (c) 13    (d)  $\sqrt{31}$   
 6. (a)  $\sqrt{133}$     (b)  $\sqrt{30} + \sqrt{77}$     (c)  $4\sqrt{30}$     (d)  $\sqrt{1811}$     (e)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{2}{3\sqrt{2}}\right)$     (f) 1  
 8.  $k = \pm\frac{5}{7}$     9. (a) 7    (b) 14    (c) 7    (d) 11    10. (a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$   
 11. (a)  $\sqrt{10}$     (b)  $\sqrt{56}$     (c)  $\sqrt{59}$     (d) 10  
 14. (a) Sim    (b) Não    (c) Sim    (d) Não    (e) Não    (f) Sim  
 15. (a)  $k = -3$     (b)  $k = -2, k = -3$   
 16.  $\pm\frac{1}{57}(-34, 44, -6, 11)$     19.  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$     20. -6  
 22. O componente na direção de  $\mathbf{a}$  é  $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{4}{15}(-1, 1, 2, 3)$ ; o componente ortogonal é  $\frac{1}{15}(34, 11, 52, -27)$ .  
 23. Não intersectam.  
 33. (a) A medida euclidiana da “caixa” no  $R^n$  é  $a_1 a_2 \cdots a_n$  (b) O comprimento da diagonal é  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$   
 34. (b) A lei do paralelogramo: A soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das duas diagonais.  
 35. (a)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{2}$     36. Sim, pois quaisquer dois vetores estão num plano.  
 37. (a) Verdadeira    (b) Verdadeira    (c) Falsa    (d) Verdadeira    (e) Verdadeira, a menos que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 4.2 [página 146]

1. (a) Linear;  $R^3 \rightarrow R^2$     (b) Não-linear;  $R^2 \rightarrow R^3$     (c) Linear;  $R^3 \rightarrow R^3$     (d) Não-linear;  $R^4 \rightarrow R^2$

2. (a)  $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$     (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}; T(-1, 2, 4) = (3, -2, -3)$

4. (a)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$     (d)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

5. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$     (d)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}$     (c)  $\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 6x_1 - x_3 \end{bmatrix}$     (d)  $\begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 + 8x_2 \end{bmatrix}$

7. (a)  $T(-1, 4) = (5, 4)$     (b)  $T(2, 1, -3) = (0, -2, 0)$

8. (a) (-1, -2)    (b) (1, 2)    (c) (2, -1)

9. (a) (2, -5, -3)    (b) (2, 5, 3)    (c) (-2, -5, 3)

## 516 ••• Álgebra Linear com Aplicações

10. (a)  $(2, 0)$  (b)  $(0, -5)$  11. (a)  $(-2, 1, 0)$  (b)  $(-2, 0, 3)$  (c)  $(0, 1, 3)$

12. (a)  $\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{2}, \frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$  (b)  $\left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3}-4}{2}\right)$  (c)  $\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$  (d)  $(4, 3)$

13. (a)  $\left(-2, \frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$  (b)  $(0, 1, 2\sqrt{2})$  (c)  $(-1, -2, 2)$

14. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. (a)  $\left(-2, \frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}\right)$  (b)  $(-2\sqrt{2}, 1, 0)$  (c)  $(1, 2, 2)$

16. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$  17. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

18. (a)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. (a)  $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/8 & -\sqrt{3}/16 & 1/16 \\ 1/8 & 3/16 & -\sqrt{3}/16 \\ 0 & 1/8 & \sqrt{3}/8 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. (a) Sim (b) Sim (c) Não 21. (a) Sim (b) Não 22.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1-\cos\theta)+\cos\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta \\ \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)+\cos\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta \\ \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta & \frac{1}{3}(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$

26.  $135^\circ$  28. (c)  $90^\circ$  29. (a) Duas vezes a projeção ortogonal no eixo  $x$   
(b) Duas vezes a reflexão em torno do eixo  $x$

30. (a) A coordenada  $x$  é esticada por um fator de 2 e a coordenada  $y$  é esticada por um fator de 3.  
(b) Rotação por um ângulo de  $30^\circ$

31. Rotação por um ângulo  $2\theta$

32. Rotação por um ângulo  $-\theta$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 4.3 [página 154]

1. (a) Não-injetor (b) Injetor (c) Injetor (d) Injetor  
(e) Injetor (f) Injetor (g) Injetor

2. (a)  $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ; não-injetor (b)  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ; injetor (c)  $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ ; não-injetor (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ; injetor

3. O vetor  $(1, 3)$  não está na imagem, por exemplo.  
4. O vetor  $(1, 6, 2)$  não está na imagem, por exemplo.

5. (a) Injetor;  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ;  $T^{-1}(w_1, w_2) = (\frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2, \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2)$       (b) Não-injetor

(c) Injetor;  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $T^{-1}(w_1, w_2) = (-w_2, -w_1)$       (d) Não-injetor

6. (a) Injetor;  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ ;  $T^{-1}(w_1, w_2, w_3) = (w_1 - 2w_2 + 4w_3, -w_1 + 2w_2 - 3w_3, -w_1 + 3w_2 - 5w_3)$

(b) Não-injetor;

(c) Injetor;  $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ;  $T^{-1}(w_1, w_2, w_3) = \left( \frac{-3w_1 - 3w_2 + 11w_3}{2}, \frac{w_1 + w_2 - 3w_3}{2}, \frac{-w_1 + w_2 - w_3}{2} \right)$

(d) Não-injetor

7. (a) Reflexão em torno do eixo  $x$     (b) Rotação pelo ângulo de  $-\pi/4$   
 (d) Reflexão em torno do plano  $yz$  (e) Dilatação pelo fator de 5.

(c) Contração por um fator de  $\frac{1}{3}$

8. (a) Linear      (b) Não-linear      (c) Linear      (d) Linear

9. (a) Linear      (b) Não-linear      (c) Linear      (d) Não-linear

10. (a) Linear      (b) Não-linear

11. (a) Linear      (b) Linear

12. (a) Para uma reflexão em torno do eixo  $y$ ,  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b) Para uma reflexão em torno do plano  $xz$ ,  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(c) Para uma projeção ortogonal sobre o eixo  $x$ ,  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(d) Para uma projeção ortogonal sobre o plano  $yz$ ,  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(e) Para uma rotação por um ângulo positivo  $\theta$ ,  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

(f) Para uma dilatação por um fator  $k \geq 1$ ,  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ .

13. (a)  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(b)  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**518 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

(c)  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ .

14. (a)  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ .

(b)  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(c)  $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Assim,  $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

15. (a)  $T_A(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $T_A(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$  e  $T_A(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

(b)  $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = T_A(\mathbf{e}_1) + T_A(\mathbf{e}_2) + T_A(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

(c)  $T_A(7\mathbf{e}_3) = 7T_A(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ -21 \end{bmatrix}$

16. (a) Transformação linear  $R^2 \rightarrow R^3$ ; injetora

(b) Transformação linear  $R^3 \rightarrow R^2$ ; não-injetora

17. (a)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (b)  $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$  (c)  $\left(\frac{1-5\sqrt{3}}{4}, \frac{15-\sqrt{3}}{4}\right)$

18. (a)  $\lambda = 1$ ;  $\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\lambda = 1$ ;  $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$  (c)  $\lambda = 1$ ;  $\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$  (d)  $\lambda = \frac{1}{2}$ ; todos vetores em  $R^2$  são autovetores

$\lambda = -1$ ;  $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$   $\lambda = -1$ ;  $\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$   $\lambda = 0$ ;  $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$

19. (a)  $\lambda = 1$ ;  $\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix}$   $\lambda = -1$ ;  $\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\lambda = 1$ ;  $\begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$   $\lambda = 0$ ;  $\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\lambda = 2$ ; todos vetores em  $R^3$  são autovetores (d)  $\lambda = 1$ ;  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$

20. (a) Sim (b) Sim 23. (a)  $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$  (b)  $\left(\frac{1+5\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-5}{2}\right)$

25. (a) Falsa (b) Verdadeira (c) Falsa, pois x poderia ser 0 (d) Verdadeira

26. (a) A imagem de  $T$  está contida propriamente em  $R^n$ .

(b)  $T$  deve levar infinitos vetores em 0.

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.1 [página 160]**

1. Não é um espaço vetorial. Falha o Axioma 8.
2. Não é um espaço vetorial. Falha o Axioma 10.
3. Não é um espaço vetorial. Falham os Axiomas 9 e 10.
4. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
5. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
6. Não é um espaço vetorial. Falham os Axiomas 5 e 6.
7. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
8. Não é um espaço vetorial. Falham os Axiomas 7 e 8.
9. Não é um espaço vetorial. Falham os Axiomas 1, 4, 5 e 6.
10. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
11. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
12. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
13. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
14. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
15. O conjunto é um espaço vetorial com as operações dadas.
16. Não é um espaço vetorial. Falha o Axioma 7. Além disto, supondo  $\mathbf{0} = (1, 1)$ , vale o Axioma 4 mas falha o Axioma 5.
21. Não. Um espaço vetorial precisa ter um elemento nulo.
22. Não. Os Axiomas 1, 4 e 5 vão falhar.
23. Sim. A lua funciona como o vetor nulo.      24. Não
25. (1) Axioma 7      (2) Axioma 4      (3) Axioma 5      (4) Segue da afirmação 2      (5) Axioma 3  
 (6) Axioma 5      (7) Axioma 4
27. (1) Axioma 1      (2) Hipótese      (3) Axioma 3, depois Axioma 5 e Axioma 4  
 (4) Axioma 3, depois Axioma 5 e Axioma 4
28. Não;  $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$
29. Não;  $(-\mathbf{u})_1 = (-\mathbf{u})_1 + [\mathbf{u} + (-\mathbf{u})_2] = [(-\mathbf{u})_1 + \mathbf{u}] + (-\mathbf{u})_2 = (-\mathbf{u})_2$
30.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-1)(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.2 [página 167]**

1. (a), (c)      2. (b), (d)      3. (a), (b), (d)      4. (b), (d), (e)      5. (a), (b), (d)
6. (a) Reta;  $x = -\frac{1}{2}t, y = -\frac{3}{2}t, z = t$       (b) Reta;  $x = 2t, y = t, z = 0$       (c) Origem  
 (d) Origem      (e) Reta;  $x = -3t, y = -2t, z = t$       (f) Plano;  $x - 3y + z = 0$
7. (a), (b), (d)
8. (a)  $(-9, -7, -15) = -2\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$       (b)  $(6, 11, 6) = 4\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}$   
 (c)  $(0, 0, 0) = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$       (d)  $(7, 8, 9) = 0\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$
9. (a)  $-9 - 7x - 15x^2 = -2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_3$       (b)  $6 + 11x + 6x^2 = 4\mathbf{p}_1 - 5\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$   
 (c)  $0 = 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_3$       (d)  $7 + 8x + 9x^2 = 0\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + 3\mathbf{p}_3$
10. (a), (b), (c)
11. (a) Os vetores geram.      (b) Os vetores não geram.  
 (c) Os vetores não geram.      (d) Os vetores geram.

## 520 ••• Álgebra Linear com Aplicações

12. (a), (c), (e) 13. Não 14. (a), (b), (d) 15.  $y = z$

16.  $x = 3t$ ,  $y = -2t$ ,  $z = 5t$ , onde  $-\infty < t < +\infty$

23. (a) Falsa (b) Verdadeira (c) Verdadeira (d) Verdadeira (e) Falsa

24. (a) Eles geram uma reta se são colineares e não ambos nulos. Eles geram um plano se são não-colineares.

(b) Se  $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} = b\mathbf{u}$  para certos números reais  $a$  e  $b$ .

(c) Nós devemos ter  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , pois um subespaço deve conter  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e então  $\mathbf{b} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

25. Não;  $W_1 \cup W_2$  não é um subespaço.

26. (a) Por exemplo,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) O conjunto das matrizes com uma entrada igual a 1 e todas as demais nulas.

27. Eles não são co-planares.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.3 [página 173]

1. (a)  $\mathbf{u}_2$  é um múltiplo escalar de  $\mathbf{u}_1$ . (b) Os vetores são linearmente dependentes pelo Teorema 5.3.3.  
(c)  $\mathbf{p}_2$  é um múltiplo escalar de  $\mathbf{p}_1$ . (d)  $B$  é um múltiplo escalar de  $A$ .

2. (d) 3. Nenhum 4. (d) 5. (a) Eles não estão num mesmo plano. (b) Eles estão num mesmo plano.

6. (a) Eles não estão numa mesma reta.  
(b) Eles não estão numa mesma reta.  
(c) Eles estão numa mesma reta.

7. (b)  $\mathbf{v}_1 = \frac{2}{7}\mathbf{v}_2 - \frac{3}{7}\mathbf{v}_3$ ,  $\mathbf{v}_2 = \frac{7}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_3$ ,  $\mathbf{v}_3 = -\frac{7}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_2$

8.  $\lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = 1$  17. Se, e somente se, o vetor for não-nulo.

18. (a) Eles são linearmente independentes, pois  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  não estão num mesmo plano quando colocados com seus pontos iniciais coincidindo na origem.  
(b) Eles não são linearmente independentes, pois  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  estão num mesmo plano quando colocados com seus pontos iniciais coincidindo na origem.

19. (a), (d), (e), (f)

23. (a) Falsa (b) Falsa (c) Verdadeira (d) Falsa

26. (a) Sim

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.4 [página 182]

1. (a) Uma base para o  $R^2$  tem dois vetores linearmente independentes.  
(b) Uma base para o  $R^3$  tem três vetores linearmente independentes.  
(c) Uma base para  $P_2$  tem três vetores linearmente independentes.  
(d) Uma base para  $M_{2,2}$  tem quatro vetores linearmente independentes.

2. (a), (b) 3. (a), (b) 4. (c), (d) 6. (b) Quaisquer dois dos vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

7. (a)  $(\mathbf{w})_S = (3, -7)$  (b)  $(\mathbf{w})_S = (\frac{5}{28}, \frac{3}{14})$  (c)  $(\mathbf{w})_S = \left(a, \frac{b-a}{2}\right)$

8. (a)  $(\mathbf{v})_S = (3, -2, 1)$  (b)  $(\mathbf{v})_S = (-2, 0, 1)$

9. (a)  $(\mathbf{p})_S = (4, -3, 1)$  (b)  $(\mathbf{p})_S = (0, 2, -1)$

10.  $(A)_S = (-1, 1, -1, 3)$ , 11. Base:  $(1, 0, 1)$ ; dimensão = 1

12. Base:  $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$ ; dimensão = 2

13. Base:  $(4, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$ ; dimensão = 3  
 14. Base:  $(3, 1, 0), (-1, 0, 1)$ ; dimensão = 2      15. Não há base; dimensão = 0  
 16. Base:  $(4, -5, 1)$ ; dimensão = 1  
 17. (a)  $(\frac{2}{3}, 1, 0), (-\frac{5}{3}, 0, 1)$     (b)  $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$     (c)  $(2, -1, 4)$     (d)  $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$   
 18. (a) Tridimensional    (b) Bidimensional    (c) Unidimensional    19. Tridimensional  
 20. (a)  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\}$  ou  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2\}$     (b)  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\}$  ou  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2\}$  ou  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3\}$   
 21.  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  ou  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$  ou  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$   
 26. (a) Uma resposta possível é  $\{-1 + x - 2x^2, 3 + 3x + 6x^2, 9\}$ .  
 (b) Uma resposta possível é  $\{1 + x, x^2, -2 + 2x^2\}$ .  
 (c) Uma resposta possível é  $\{1 + x - 3x^2\}$ .  
 27. (a)  $(0, \sqrt{2})$     (b)  $(1, 0)$     (c)  $(-1, \sqrt{2})$     (d)  $(a - b, \sqrt{2}b)$   
 28. (a)  $(2, 0)$     (b)  $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$     (c)  $(0, 1)$     (d)  $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a, b - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$   
 30. Sim; por exemplo,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$     31. (a)  $n$     (b)  $n(n+1)/2$     (c)  $n(n+1)/2$   
 32. (a)  $10 > 9 = \dim(M_{33})$     (b) O conjunto  $I_n, A, A^2, \dots, A^n$  é linearmente dependente.  
 33. (a) Um conjunto linearmente independente tem no máximo  $n$  vetores.  
 (b) Um conjunto gerador tem no mínimo  $n$  vetores.  
 34. (a) A dimensão é  $n-1$ .  
 (b)  $(1, 0, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), (0, 0, 1, \dots, 0, -1), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1, -1)$  é uma base de tamanho  $n-1$ .  
 35. (b)  $\dim W = 2$  (c)  $x-1, x^2-1$  é uma base de  $W$ .

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.5 [página 190]

1.  $\mathbf{r}_1 = (2, -1, 0, 1), \mathbf{r}_2 = (3, 5, 7, -1), \mathbf{r}_3 = (1, 4, 2, 7);$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$2. \text{(a)} 1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} -2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 22 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} -1 \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -13 \\ -1 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-5) \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 58 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{(a)} \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \mathbf{b} \text{ não está no espaço-coluna de } A. \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (t-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(e)} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = -26 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 13 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. (a)  $r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. (a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; r \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; s \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. (a)  $\begin{bmatrix} 16 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  (e)  $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

7. (a)  $\mathbf{r}_1 = [1 \ 0 \ 2], \mathbf{r}_2 = [0 \ 0 \ 1], \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b)  $\mathbf{r}_1 = [1 \ -3 \ 0 \ 0], \mathbf{r}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\mathbf{r}_1 = [1 \ 2 \ 4 \ 5], \mathbf{r}_2 = [0 \ 1 \ -3 \ 0], \mathbf{r}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ -3], \mathbf{r}_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ ,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d)  $\mathbf{r}_1 = [1 \ 2 \ -1 \ 5], \mathbf{r}_2 = [0 \ 1 \ 4 \ 3], \mathbf{r}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ -7], \mathbf{r}_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ ,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. (a)  $(1, -1, 3), (0, 1, -19)$  (b)  $(1, 0, -\frac{1}{2})$  (c)  $(1, 4, 5, 2), (0, 1, 1, \frac{4}{7})$

(d)  $(1, 4, 5, 6, 9), (0, 1, 1, 1, 2)$  (e)  $(1, -3, 2, 2, 1), (0, 1, 2, 0, -1), (0, 0, 1, 0, -\frac{5}{12})$

9. (a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  (e)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

10. (a)  $(1, -1, 3), (5, -4, -4)$  (b)  $(2, 0, -1)$  (c)  $(1, 4, 5, 2), (2, 1, 3, 0)$

(d)  $(1, 4, 5, 6, 9), (3, -2, 1, 4, -1)$  (e)  $(1, -3, 2, 2, 1), (0, 3, 6, 0, -3), (2, -3, -2, 4, 4)$

11. (a)  $(1, 1, -4, -3), (0, 1, -5, -2), (0, 0, 1, -\frac{1}{2})$   
 (b)  $(1, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -\frac{1}{6})$   
 (c)  $(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)$

12. (a)  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}; \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$   
 (b)  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}; \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$   
 (c)  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}; \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5 = -\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_4$

14. (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. (a) Verdadeira (b) Verdadeira (c) Falsa (d) Verdadeira (e) Falsa

16. (a)  $\begin{bmatrix} 3a & -5a \\ 3b & -5b \end{bmatrix}$  para quaisquer números reais  $a, b$ , não ambos nulos.

$$17. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

18. Os espaços-linha de  $A$  e de  $B$  são iguais pois  $A$  é um produto de matrizes elementares.

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.6 [página 197]

1.  $\text{pos}(A) = \text{pos}(A^T) = 2$

2. (a) Nulidade = 1, posto = 2;  $n = 3$  (b) Nulidade = 2, posto = 1;  $n = 3$   
 (c) Nulidade = 2, posto = 2;  $n = 4$  (d) Nulidade = 3, posto = 2;  $n = 5$   
 (e) Nulidade = 2, posto = 3;  $n = 5$

3. (a) 2; 1 (b) 1; 2 (c) 2; 2 (d) 2; 3 (e) 3; 2

4. (a) 3; 3; 0; 0 (b) 2; 2; 1; 1 (c) 1; 1; 2; 2 (d) 2; 2; 7; 3  
 (e) 2; 2; 3; 7 (f) 0; 0; 4; 4 (g) 2; 2; 0; 4

5. (a) Posto = 4, nulidade = 0 (b) Posto = 3, nulidade = 2 (c) Posto = 3, nulidade = 0

6. posto =  $\min(m, n)$ , nulidade =  $n - \min(m, n)$

7. (a) Sim, 0 (b) Não (c) Sim, 2 (d) Sim, 7 (e) Não (f) Sim, 4 (g) Sim, 0

8. (a) Nulidade = 0, número de parâmetros = 0  
 (b) Nulidade = 1, número de parâmetros = 1  
 (c) Nulidade = 2, número de parâmetros = 2  
 (d) Nulidade = 7, número de parâmetros = 7  
 (e) Nulidade = 7, número de parâmetros = 7  
 (f) Nulidade = 4, número de parâmetros = 4  
 (g) Nulidade = 0, número de parâmetros = 0

9.  $b_1 = r, b_2 = s, b_3 = 4s - 3r, b_4 = 2r - s, b_5 = 8s - 7r$  11. Não

12. (a)  $\text{pos}(A) = 1$  se  $t = 1$ ;  $\text{pos}(A) = 2$  se  $t = -2$ ;  $\text{pos}(A) = 3$  se  $t \neq 1, -2$   
 (b)  $\text{pos}(A) = 2$  se  $t = 1, \frac{3}{2}$ ;  $\text{pos}(A) = 3$  se  $t \neq 1, \frac{3}{2}$

13. O posto é 2 se  $r = 2$  e  $s = 1$ ; o posto nunca é 1.

16. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- (b) Uma reta pela origem. (c) Um plano pela origem.

- (d) O espaço-nulo é uma reta pela origem e o espaço-linha é um plano pela origem.

17. (a) Falsa (b) Falsa (c) Verdadeira (d) Falsa

18. (a) 3 (b) 5 (c) 3 (d) 3 19. (a) 3 (b) 5 (c) 3 (d) 3

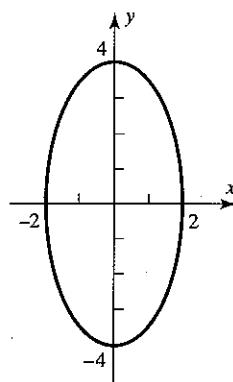
**EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES [página 198]**

1. (a) Todo o  $\mathbb{R}^3$   
 (b) Plano:  $2x - 3y + z = 0$   
 (c) Reta:  $x = 2t, y = t, z = 0$   
 (d) A origem:  $(0, 0, 0)$
2. Uma reta pela origem:  $s = -2$   
 Um plano pela origem:  $s = 1$   
 Somente a origem:  $s \neq 1, -2$   
 Todo o  $\mathbb{R}^3$ : nenhum valor de  $s$
3. (a)  $a(4, 1, 1) + b(0, -1, 2)$    (b)  $(a+c)(3, -1, 2) + b(1, 4, 1)$   
 (c)  $a(2, 3, 0) + b(-1, 0, 4) + c(4, -1, 1)$
5. (a)  $\mathbf{v} = (-1+r)\mathbf{v}_1 + (\frac{2}{3}-r)\mathbf{v}_2 + r\mathbf{v}_3; r$  arbitrário   6. A deve ser invertível   7. Não
8. (a) Posto = 2, nulidade = 1   (b) Posto = 2, nulidade = 2   (c) Posto = 2, nulidade =  $n-2$  se  $n \geq 2$ ; posto = 1, nulidade = 0 se  $n = 1$
9. (a) Posto = 2, nulidade = 1   (b) Posto = 3, nulidade = 2   (c) Posto =  $n+1$ , nulidade =  $n$
11.  $\{1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \dots, x^n\}$    12. (a) 2   (b) 1   (c) 2   (d) 3   13. 0, 1, ou 2

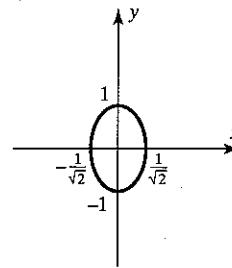
**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.1 [página 206]**

1. (a) 2   (b) 11   (c) -13   (d) -8   (e) 0
2. (a) -2   (b) 62   (c) -74   (d) 8   (e) 0   3. (a) 3   (b) 56
4. (a) -29   (b) -15   5. (b) 29   6. (b) -42   7. (a)  $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$    (b)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$
9. (a) Não. Falha o Axioma 4.   (b) Não. Falham os Axiomas 2 e 3.   (c) Sim.   (d) Não. Falha o Axioma 4.
10. (a)  $\sqrt{10}$    (b)  $\sqrt{21}$    (c)  $5\sqrt{5}$    11. (a)  $3\sqrt{2}$    (b)  $3\sqrt{5}$    (c)  $3\sqrt{13}$
12. (a)  $\sqrt{17}$    (b) 5   13. (a)  $\sqrt{74}$    (b) 0   14.  $3\sqrt{2}$    15. (a)  $\sqrt{105}$    (b)  $\sqrt{47}$
16. (a) 8   (b) -113   (c) -40   (d) 3   (e)  $2\sqrt{53}$    (f)  $\sqrt{881}$
17. (a)  $\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{10}$    (b)  $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

18. (a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$



(b)  $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{1} = 1$



19.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{9}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$    22. Falha o Axioma 4.

23. Não em  $P_3$ , pois  $\mathbf{p} = x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$  satisfaz  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = 0$    27. (a)  $-\frac{28}{15}$    (b) 0

28. (a) 0   (b) 1   (c)  $\frac{2\ln 2}{\pi}$

32. (a) (1) Simetria   (2) Homogeneidade   (3) Simetria   34.  $a = 1/25, b = 1/16$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.2 [página 212]**

1. (a) Sim   (b) Não   (c) Sim   (d) Não   (e) Não   (f) Sim   2. Não

3. (a)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (b)  $-\frac{3}{\sqrt{73}}$  (c) 0 (d)  $-\frac{20}{9\sqrt{10}}$  (e)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (f)  $\frac{2}{\sqrt{55}}$

4. (a) 0 (b) 0 6. (a)  $\frac{19}{10\sqrt{7}}$  (b) 0

7. (a) Ortogonal (b) Ortogonal (c) Ortogonal (d) Não-ortogonal

8. (a)  $k = -3$  (b)  $k = -2, k = -3$  9.  $\pm \frac{1}{57}(-34, 44, -6, 11)$  12.  $y = -\frac{1}{2}x$

13. (a)  $x = t, y = -2t, z = -3t$  (b)  $2x - 5y + 4z = 0$  (c)  $x - z = 0$

14. (a)  $(1, 2, -1, 2), (0, 1, -3, 2); \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  15. (a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. (a)  $(16, 19, 1)$  (b)  $(0, 1, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1)$  (c)  $(-1, -1, 1, 0), (\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, 0, 1)$  (d)  $(-1, -1, 1, 0, 0), (-2, -1, 0, 1, 0), (-1, -2, 0, 0, 1)$

30.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$  33. (a) A reta  $y = -x$  (b) O plano  $xz$  (c) O eixo  $x$

34. (a) Um plano pela origem (b) Um plano pela origem (c) Ambos são iguais a  $\mathbb{R}^3$

35. (a) Falsa (b) Verdadeira (c) Verdadeira (d) Falsa

36. (a) Todas as matrizes com entradas nulas na diagonal (b) Todas as matrizes anti-simétricas

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.3 [página 221]

1. (a), (b), (d) 2. (b) 3. (b), (d) 4. (b), (d) 5. (a) 6. (a)

7. (a)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  (b)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0)$   
 (c)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

8.  $(\frac{1}{2}, 0), (0, 1)$  9. (a)  $-\frac{7}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$  (b)  $-\frac{37}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{9}{5}\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$  (c)  $-\frac{3}{7}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{7}\mathbf{v}_2 + \frac{5}{7}\mathbf{v}_3$

10. (a)  $\frac{1}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{5}{21}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$  (b)  $\frac{15\sqrt{2}}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{5\sqrt{2}}{21}\mathbf{v}_2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\mathbf{v}_3$  (c)  $-\frac{3}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{11}{63}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{18}\mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_4$

11. (a)  $(\mathbf{w})_S = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$  (b)  $(\mathbf{w})_S = (0, -2, 1)$

12. (a)  $\mathbf{u} = (\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}), \mathbf{v} = (\frac{13}{5}, \frac{16}{5})$  (b)  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}, d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{13}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3$

13. (a)  $\mathbf{u} = (1, \frac{14}{5}, -\frac{2}{5}), \mathbf{v} = (0, -\frac{17}{5}, \frac{6}{5}), \mathbf{w} = (-4, -\frac{11}{5}, \frac{23}{5})$  (b)  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{13}, d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 5\sqrt{3}, \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 13$

14. (a)  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{15}, \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 5, \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{105}, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 20$   
 (b)  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}, \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \sqrt{34}, \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{118}, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 21$

15. (b)  $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{11}{10}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_4$

16. (a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$  (b)  $(1, 0), (0, -1)$

17. (a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$  (b)  $(1, 0, 0), \left(0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right), \left(0, \frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{\sqrt{53}}\right)$

18.  $\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right)$

19.  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$

20.  $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

## 526 • • • Álgebra Linear com Aplicações

21.  $\mathbf{w}_1 = \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right)$ ,  $\mathbf{w}_2 = \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)$

22.  $\mathbf{w}_1 = \left(\frac{13}{14}, \frac{31}{14}, \frac{40}{14}\right)$ ,  $\mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, \frac{2}{14}\right)$

23.  $\mathbf{w}_1 = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$ ,  $\mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{19}{4}, -\frac{9}{4}\right)$

$$24. \text{(a)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{\sqrt{234}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{\sqrt{234}} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{\sqrt{234}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{26}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \text{(e)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{19}} & -\frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{19}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}} & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}$$

(f) As colunas não são linearmente independentes

29.  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x, \mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)$

30. (a)  $1 + x + 4x^2 = \frac{7}{3}\sqrt{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\mathbf{v}_2 + \frac{8}{15}\sqrt{10}\mathbf{v}_3$

(b)  $2 - 7x^2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{28}{15}\sqrt{\frac{5}{2}}\mathbf{v}_3$  (c)  $4 + 3x = 4\sqrt{2}\mathbf{v}_1 + \sqrt{6}\mathbf{v}_2$

31.  $\mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \sqrt{3}(2x - 1), \mathbf{v}_3 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$

34. (a) Encontraria dois vetores independentes no plano e aplicaria Gram-Schmidt.

(b)  $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

35.  $(1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (2/\sqrt{30}, -3/\sqrt{30})$

37. (a) Verdadeira (b) Falsa, a menos que o espaço tenha um produto interno (c) Verdadeira (d) Verdadeira

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.4 [página 227]

1. (a)  $\begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$

2. (a) 0; os vetores-coluna não são linearmente independentes.

(b) 0; os vetores-coluna não são linearmente independentes.

3. (a)  $x_1 = 5, x_2 = \frac{1}{2}; \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -4 \end{bmatrix}$  (b)  $x_1 = \frac{3}{7}, x_2 = -\frac{2}{3}; \begin{bmatrix} \frac{46}{21} \\ -\frac{5}{21} \\ \frac{13}{21} \end{bmatrix}$

(c)  $x_1 = 12, x_2 = -3, x_3 = 9; \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  (d)  $x_1 = 14, x_2 = 30, x_3 = 26; \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

4. (a)  $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3})$  (b)  $(3, -4, -1)$  5. (a)  $(7, 2, 9, 5)$  (b)  $(-\frac{12}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5})$

6.  $(0, -1, 1, 1)$  7. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  8. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. (a)  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -5)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 3)$  (b)  $\begin{bmatrix} \frac{10}{35} & \frac{15}{35} & -\frac{5}{35} \\ \frac{15}{35} & \frac{26}{35} & \frac{3}{35} \\ -\frac{5}{35} & \frac{3}{35} & \frac{34}{35} \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} \frac{10}{35}x_0 + \frac{15}{35}y_0 - \frac{5}{35}z_0 \\ \frac{15}{35}x_0 + \frac{26}{35}y_0 + \frac{3}{35}z_0 \\ -\frac{5}{35}x_0 + \frac{3}{35}y_0 + \frac{34}{35}z_0 \end{bmatrix}$  (d)  $\frac{15}{\sqrt{35}}$

10. (a)  $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$  (b)  $\begin{bmatrix} \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} \\ \frac{8}{21} & -\frac{4}{21} & \frac{16}{21} \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} \frac{4}{21}x_0 - \frac{2}{21}y_0 + \frac{8}{21}z_0 \\ -\frac{2}{21}x_0 + \frac{1}{21}y_0 - \frac{4}{21}z_0 \\ \frac{8}{21}x_0 - \frac{4}{21}y_0 + \frac{16}{21}z_0 \end{bmatrix}$  (d)  $\frac{\sqrt{497}}{7}$  15.  $[P] = A^T(AA^T)^{-1}A$

16. (1) Pois  $A^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$  (2) Pois  $A^T A$  é invertível.  
(3) Pois o espaço-nulo de  $A$  é não-nulo se, e somente se, as colunas de  $A$  são dependentes.

17. (a)  $A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$  (b)  $(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$  (c)  $\|\mathbf{b} - A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}\|$  (d)  $A(A^T A)^{-1} A^T$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.5 [página 234]

1. (b)  $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$

2. (b)  $T(-2, 3, 5) = \left(\frac{14}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$

3. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$  (e)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

5. (a)  $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$  (b)  $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{28} \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix}$  (c)  $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} a \\ b-a \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix}$

6. (a)  $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  (b)  $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. (a)  $[\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  (b)  $[\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. (a)  $[\mathbf{A}]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

9. (a)  $\mathbf{w} = (16, 10, 12)$  (b)  $\mathbf{q} = 3 + 4x^2$  (c)  $B = \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

10. (a)  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$  (c)  $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $[\mathbf{w}]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{bmatrix}$

11. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$  (c)  $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} -\frac{17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$ ,  $[\mathbf{w}]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$

**528 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

12. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{43}{12} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$  13. (a)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{23}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$

14. (a)  $\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$  (c)  $[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  (d)  $[\mathbf{p}]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

15. (b)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$  (d)  $[\mathbf{h}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, [\mathbf{h}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

16. (a)  $(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$  (b)  $(-\frac{7}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$

17. (a)  $(-1 + 3\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$  (b)  $(\frac{5}{2} - \sqrt{3}, \frac{5}{2}\sqrt{3} + 1)$

18. (a)  $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 5)$  (b)  $(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{2}\sqrt{2}, -3)$

19. (a)  $(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3}, 2, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})$  (b)  $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}, 6, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})$

20. (a)  $(-1, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{7}{2}\sqrt{2})$  (b)  $(1, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{2}\sqrt{3})$

21. (a)  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$  (b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

22.  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$  23.  $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$

26. (a) Rotação (b) Rotação seguida de reflexão

27. (a) Rotação seguida de reflexão (b) Rotação

30. (a) Rotação e reflexão (b) Rotação e dilatação

(c) Qualquer operador rígido preserva ângulo. Qualquer dilatação ou contração com  $k \neq 0$  e  $k \neq 1$  preserva ângulo mas não é rígida.

31.  $\det(A) = \pm 1$  32.  $a = 0, b = \sqrt{2/3}, c = -\sqrt{1/3}$  ou  $a = 0, b = -\sqrt{2/3}, c = \sqrt{1/3}$

**EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES [página 237]**

1. (a)  $(0, a, a, 0)$  com  $a \neq 0$  (b)  $\pm \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$  6.  $\pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

7.  $w_k = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots, n$  8. Não 11. (b)  $\theta$  tende a  $\frac{\pi}{2}$

12. (b) As diagonais de um paralelogramo são perpendiculares se, e somente se, seus lados têm o mesmo comprimento.

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.1 [página 243]**

1. (a)  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$  (b)  $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$  (c)  $\lambda^2 - 12 = 0$   
 (d)  $\lambda^2 + 3 = 0$  (e)  $\lambda^2 = 0$  (f)  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

2. (a)  $\lambda = 3, \lambda = -1$  (b)  $\lambda = 4$  (c)  $\lambda = \sqrt{12}, \lambda = -\sqrt{12}$   
 (d) Não tem autovalores reais (e)  $\lambda = 0$  (f)  $\lambda = 1$

3. (a) Base do auto-espaço associado a  $\lambda = 3$ :  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ ; base do auto-espaço associado a  $\lambda = -1$ :  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Base do auto-espaço associado a  $\lambda = 4$ :  $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) Base do auto-espaço associado a  $\lambda = \sqrt{12}$ :  $\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{12} \\ 1 \end{bmatrix}$ ; base do auto-espaço associado a  $\lambda = -\sqrt{12}$ :  $\begin{bmatrix} -3 \\ -\sqrt{12} \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) Não há auto-espaços.

(e) Base do auto-espaço associado a  $\lambda = 0$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) Base do auto-espaço associado a  $\lambda = 1$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. (a)  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$     (b)  $\lambda^3 - 2\lambda = 0$     (c)  $\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0$   
 (d)  $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$     (e)  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$     (f)  $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0$

5. (a)  $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$     (b)  $\lambda = 0, \lambda = \sqrt{2}, \lambda = -\sqrt{2}$     (c)  $\lambda = -8$   
 (d)  $\lambda = 2$     (e)  $\lambda = 2$     (f)  $\lambda = -4, \lambda = 3$

6. (a)  $\lambda = 1$ : base  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda = 2$ : base  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda = 3$ : base  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b)  $\lambda = 0$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda = \sqrt{2}$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{1}{7}(15 + 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{7}(-1 + 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda = -\sqrt{2}$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{1}{7}(15 - 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{7}(-1 - 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$

(c)  $\lambda = -8$ : base  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$     (d)  $\lambda = 2$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$     (e)  $\lambda = 2$ : base  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(f)  $\lambda = -4$ : base  $\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda = 3$ : base  $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. (a)  $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$     (b)  $(\lambda - 4)^2(\lambda^2 + 3) = 0$

8. (a)  $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$     (b)  $\lambda = 4$

9. (a)  $\lambda = 1$ : base  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda = -2$ : base  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda = -1$ : base  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$     (b)  $\lambda = 4$ : base  $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

10. (a)  $\lambda = -1, \lambda = 5$     (b)  $\lambda = 3, \lambda = 7, \lambda = 1$     (c)  $\lambda = -\frac{1}{3}, \lambda = 1, \lambda = \frac{1}{2}$

11.  $\lambda = 1, \lambda = \frac{1}{512}, \lambda = 512, \lambda = 0$

12. Para  $A^{25}$ ,  $\lambda = 1, -1$ : base para  $\lambda = 1$ :  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; base para  $\lambda = -1$ :  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

**530 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

13. (a)  $y = x$  e  $y = 2x$       (b) Não há retas      (c)  $y = 0$

14. (a) -5      (b) 7

22. (a)  $\lambda_1 = 1: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda_2 = \frac{1}{2}: \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_3 = \frac{1}{3}: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$       (b)  $\lambda_1 = -2: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda_2 = -1: \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_3 = 0: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c)  $\lambda_1 = 3: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda_2 = 4: \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_3 = 5: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

24. (a) Falsa      (b) Verdadeira      (c) Verdadeira      (d) Verdadeira

25. (a)  $A$  é  $6 \times 6$ .      (b)  $A$  é invertível.      (c)  $A$  tem três auto-espaços.

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.2 [página 249]**

1. 1 ou 2 para  $\lambda = 0$ ; 1 para  $\lambda = 1$ ; 1, 2 ou 3 para  $\lambda = 2$

2. (a)  $\lambda = 3, \lambda = 5$

(b) Para  $\lambda = 3$ , o posto de  $3I - A$  é 1. Para  $\lambda = 5$ , o posto de  $5I - A$  é 2.

(c)  $A$  é diagonalizável, pois os auto-espaços dão um total de três vetores de base.

3. Não-diagonalizável

4. Não-diagonalizável

5. Não-diagonalizável

6. Não-diagonalizável

7. Não-diagonalizável

8.  $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$       9.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10.  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$       11.  $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

12. Não-diagonalizável      13.  $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

14. Não-diagonalizável      15.  $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       16. Não-diagonalizável

17.  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

18.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}$       19.  $\begin{bmatrix} -1 & 10237 & -2047 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10245 & -2048 \end{bmatrix}$

20. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       (c)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$       (d)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

21.  $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

23. Uma possibilidade é  $P = \begin{bmatrix} -b & -b \\ a - \lambda_1 & a - \lambda_2 \end{bmatrix}$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são dados no Exercício 18 da Seção 7.1.

25. (a) Falsa      (b) Falsa      (c) Verdadeira      (d) Verdadeira
26. (a) Dimensões possíveis são 1 para  $\lambda = 1$ ; 1 ou 2 para  $\lambda = 3$ ; 1, 2 ou 3 para  $\lambda = 4$ .  
 (b) As dimensões são 1 para  $\lambda = 1$ ; 2 para  $\lambda = 3$ ; 3 para  $\lambda = 4$ .  
 (c)  $\lambda = 4$
27. (a) Os autovalores  $\lambda$  devem satisfazer  $-1 < \lambda \leq 1$ .  
 (b) Se  $A = P D P^{-1}$  com  $D$  diagonal, então  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = P D' P^{-1}$ , onde  $D'$  é obtida de  $D$  colocando 0 em todas as entradas da diagonal que não são 1.
28. (a) É preciso ter  $|x| < 1$ , caso em que a soma é  $(1-x)^{-1}$   
 (b) É preciso que todos os autovalores tenham valor absoluto menor do que 1.  
 (c)  $(I-A)^{-1}$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.3 [página 253]

1. (a)  $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ ;  $\lambda = 0$ : unidimensional;  $\lambda = 5$ : unidimensional  
 (b)  $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$ ;  $\lambda = 6$ : unidimensional;  $\lambda = -3$ : bidimensional  
 (c)  $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$ ;  $\lambda = 3$ : unidimensional;  $\lambda = 0$ : bidimensional  
 (d)  $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32 = 0$ ;  $\lambda = 2$ : bidimensional;  $\lambda = 8$ : unidimensional  
 (e)  $\lambda^4 - 8\lambda^3 = 0$ ;  $\lambda = 0$ : tridimensional;  $\lambda = 8$ : unidimensional  
 (f)  $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 22\lambda^2 - 24\lambda + 9 = 0$ ;  $\lambda = 1$ : bidimensional;  $\lambda = 3$ : bidimensional

2.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$     3.  $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

4.  $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$     5.  $P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$

6.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$     7.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8.  $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$     9.  $P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$

10.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$     12. (b)  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

14. (a) Verdadeira      (b) Verdadeira      (c) Falsa      (d) Verdadeira

15. Sim; tome  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ .

**EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES [página 253]**

1. (b) A transformação gira os vetores por um ângulo  $\theta$ ; portanto, se  $0 < \theta < \pi$ , nenhum vetor não-nulo é transformado em um vetor de mesma direção.

2.  $\lambda = k$  com multiplicidade 3.      3. (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

9.  $A^2 = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 75 & 150 \\ 25 & 50 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 375 & 750 \\ 125 & 250 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1875 & 3750 \\ 625 & 1250 \end{bmatrix}$

10.  $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \\ 10 & -24 & 15 \end{bmatrix}$       11. 0 e  $\text{tr}(A)$

12. (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$       15.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$       16. (a) 18      (b) -1

17. Eles são todos 0, 1 ou -1.

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 8.1 [página 262]**

3. Não-linear    4. Linear    5. Linear    6. Linear    7. Linear    8. (a) Linear    (b) Não-linear  
 9. (a) Linear    (b) Não-linear    10. (a) Não-linear    (b) Linear  
 12.  $T(x_1, x_2) = (-4x_1 + 5x_2, x_1 - 3x_2); T(5, -3) = (-35, 14)$   
 13.  $T(x_1, x_2) = \frac{1}{7}(3x_1 - x_2, -9x_1 - 4x_2, 5x_1 + 10x_2); T(2, -3) = (\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{20}{7})$   
 14.  $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 4x_2 - x_3, 5x_1 - 5x_2 - x_3, x_1 + 3x_3); T(2, 4, -1) = (15, -9, -1)$   
 15.  $T(x_1, x_2, x_3) = (-41x_1 + 9x_2 + 24x_3, 14x_1 - 3x_2 - 8x_3); T(7, 13, 7) = (-2, 3)$   
 16.  $T(2v_1 - 3v_2 + 4v_3) = (-10, -7, 6)$   
 17. (a) Domínio:  $R^2$ ; contradomínio:  $R^2$ ;  $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$   
 (b) Domínio:  $R^2$ ; contradomínio:  $R^2$ ;  $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (4x - 12y, 3x - 9y)$   
 (b) Domínio:  $R^2$ ; contradomínio:  $R^2$ ;  $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$   
 (b) Domínio:  $R^2$ ; contradomínio:  $R^2$ ;  $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (0, 2x)$   
 18. (a) Domínio:  $R^2$ ; contradomínio:  $R^2$ ;  $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(x, y) = (3x - 2y, x)$   
 (b) Domínio:  $R^2$ ; contradomínio:  $R^2$ ;  $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(x, y) = (4y, 6y)$   
 19. (a)  $a + d$     (b)  $(T_2 \circ T_1)(A)$  não existe pois  $T_1(A)$  não é uma matriz  $2 \times 2$ .  
 20.  $(T_1 \circ T_2)(p(x)) = p(x); (T_2 \circ T_1)(p(x)) = p(x)$   
 21.  $T_2(v) = \frac{1}{4}v$     22.  $(T_2 \circ T_1)(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2)x + (a_1 + 2a_2)x^2 + a_2x^3$     23. (b)  $P_{mn}$   
 26. (b)  $(3T)(x_1, x_2) = (6x_1 - 3x_2, 3x_2 + 3x_1)$   
 27. (b)  $(T_1 + T_2)(x, y) = (3y, 4x); (T_2 - T_1)(x, y) = (y, 2x)$   
 28. (b) Não    31. (a)  $x^2 + 3x$     (b)  $\sin x$     (c)  $e^x - 1$

32. Sim      33. (a) Verdadeira      (b) Falsa      (c) Verdadeira      (d) Falsa      34.  $n^n$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 8.2 [página 266]

1. (a), (c)    2. (a)    3. (a), (b), (c)    4. (a)    5. (b)    6. (a)

7. (a)  $(\frac{1}{2}, 1)$     (b)  $(\frac{3}{2}, -4, 1, 0)$     (c) Não existe base.

8. (a)  $(1, 4)$     (b)  $(4, 2, 6), (1, 1, 0), (-3, -4, 9)$     (c)  $(x, x^2, x^3)$

10. (a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} -\frac{14}{11} \\ \frac{19}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$     (c)  $\text{pos}(T) = 2, \text{nul}(T) = 1$     (d)  $\text{pos}(A) = 2, \text{nul}(A) = 1$

11. (a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$     (c)  $\text{pos}(T) = 1, \text{nul}(T) = 2$     (d)  $\text{pos}(A) = 1, \text{nul}(A) = 2$

12. (a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$     (c)  $\text{pos}(T) = 2, \text{nul}(T) = 2$     (d)  $\text{pos}(A) = 2, \text{nul}(A) = 2$

13. (a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$     (b)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$     (c)  $\text{pos}(T) = 3, \text{nul}(T) = 2$     (d)  $\text{pos}(A) = 3, \text{nul}(A) = 2$

14. (a) Imagem: plano  $xz$ ; núcleo: eixo  $y$   
 (b) Imagem: plano  $yz$ ; núcleo: eixo  $x$   
 (c) Imagem: plano  $y = x$ ; núcleo: a reta  $x = -t, y = t, z = 0$

15.  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}; \quad \text{Im}(T) = V$

16. (a)  $\text{nul}(T) = 2$     (b)  $\text{nul}(T) = 4$     (c)  $\text{nul}(T) = 3$     (d)  $\text{nul}(T) = 1$

17.  $\text{nul}(T) = 0, \quad \text{pos}(T) = 6$

18. (a) Dimensão =  $\text{nul}(T) = 3$

(b) Não. Para  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  ser consistente para qualquer  $\mathbf{b}$  em  $R^5$ , devemos ter  $\text{Im}(T) = R^5$ . Mas  $\text{Im}(T) \neq R^5$ , pois  $\text{pos}(T) = \dim \text{Im}(T) = 4$ .

21. (a)  $x = -t, y = -t, z = t, -\infty < t < +\infty$     (b)  $14x - 8y - 5z = 0$

24.  $\text{Nuc}(D)$  consiste de todos os polinômios constantes.

25.  $\text{Nuc}(J)$  consiste de todos os polinômios da forma  $kx$ .

26.  $\text{Nuc}(D \circ D)$  consiste de todas as funções da forma  $ax + b$ ;  $\text{Nuc}(D \circ D \circ D)$  consiste de todas as funções da forma  $ax^2 + bx + c$ .

27. (a) o núcleo, a imagem    (b)  $(1, 1, 1)$     (c) a dimensão de  $V$     (d) três

28. (a) Um plano pela origem    (b) Uma reta pela origem

29. (a)  $D \circ D \circ D \circ D$ , onde  $D$  é a derivação    (b)  $D \circ D \circ \dots \circ D$  ( $n + 1$  vezes)

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 8.3 [página 271]

1. (a)  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}; T$  é injetora.    (b)  $\text{Nuc}(T) = \{k(-\frac{3}{2}, 1)\}; T$  não é injetora.  
 (c)  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}; T$  é injetora.    (d)  $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}; T$  é injetora.  
 (e)  $\text{Nuc}(T) = \{k(1, 1)\}; T$  não é injetora.    (f)  $\text{Nuc}(T) = \{k(0, 1, -1)\}; T$  não é injetora.

**534 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

2. (a)  $T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$  (b)  $T$  não tem inversa. (c)  $T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{19}x_1 - \frac{7}{19}x_2 \\ \frac{1}{19}x_1 + \frac{4}{19}x_2 \end{bmatrix}$

3. (a)  $T$  não tem inversa. (b)  $T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 - \frac{3}{4}x_3 \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\ -\frac{3}{8}x_1 + \frac{5}{8}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \end{bmatrix}$

(c)  $T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}$  (d)  $T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$

4. (a) Não é injetora. (b) Não é injetora. (c) É injetora.

5. (a)  $\text{Nuc}(T) = \{k(-1, 1)\}$  (b)  $T$  não é injetor pois  $\text{Nuc}(T) \neq \{0\}$ .

6. (a)  $\text{Nuc}(T) = \{0\}$  (b)  $T$  é injetor pelo Teorema 8.3.2.

7. (a)  $T$  é injetora. (b)  $T$  não é injetora. (c)  $T$  não é injetora. (d)  $T$  é injetora.

8. (a)  $T$  é injetora. (b)  $T$  é injetora. 9. Não. A não é invertível.

10. (a)  $T$  não é injetor. (b)  $T^{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1)$

(c)  $T^{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

11. (a)  $a_i \neq 0$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  (b)  $T^{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \left( \frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \dots, \frac{1}{a_n}x_n \right)$

12. (b)  $T_1^{-1}(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)$ ;  $T_2^{-1}(x, y) = (\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y)$ ;  $(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y) = (\frac{3}{10}x - \frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y)$

13. (a)  $T_1^{-1}(p(x)) = \frac{p(x)}{x}$ ;  $T_2^{-1}(p(x)) = p(x-1)$ ;  $(T_2 \circ T_1)^{-1}(p(x)) = \frac{1}{x}p(x-1)$

15. (a)  $(1, -1)$  (d)  $T^{-1}(2, 3) = 2+x$

17. (a)  $T$  não é injetor. (b)  $T$  é injetor.  $T^{-1} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

(c)  $T$  é injetor.  $T^{-1} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

20.  $J$  não é injetora pois  $J(x) = J(x^3)$ .

21.  $T$  não é injetora pois, por exemplo,  $f(x) = x^2(x-1)^2$  está no núcleo.

22. (a) Falsa, pois não existe  $T^{-1}$ . (b) Verdadeira (c) Verdadeira

23. Sim; é injetora. 24. Sim; é injetor. 25. Não; não é injetor.

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 8.4 [página 277]**

1. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  2. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  3. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. (a)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  5. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$  6. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  (b)  $3 + 10x + 16x^2$  8. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $-11x + 7x^2 - x^3$

9. (a)  $[T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $[T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  (b)  $T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \end{bmatrix}$   
 (c)  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{18}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{107}{7} & \frac{24}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{83}{7} \end{bmatrix}$

10. (a)  $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ,  $[T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $[T(\mathbf{v}_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ,  $[T(\mathbf{v}_4)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b)  $T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -42 \\ 32 \\ -10 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} -56 \\ 87 \\ 17 \end{bmatrix}$ ,  $T(\mathbf{v}_4) = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c)  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{253}{10} & \frac{49}{5} & \frac{241}{10} & -\frac{229}{10} \\ \frac{115}{2} & -39 & -\frac{65}{2} & \frac{153}{2} \\ 66 & -60 & -9 & 91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} -31 \\ 37 \\ 12 \end{bmatrix}$

11. (a)  $[T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ,  $[T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $[T(\mathbf{v}_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b)  $T(\mathbf{v}_1) = 16 + 51x + 19x^2$ ,  $T(\mathbf{v}_2) = -6 - 5x + 5x^2$ ,  $T(\mathbf{v}_3) = 7 + 40x + 15x^2$

(c)  $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{239a_0 - 161a_1 + 289a_2}{24} + \frac{201a_0 - 111a_1 + 247a_2}{8}x + \frac{61a_0 - 31a_1 + 107a_2}{12}x^2$

(d)  $T(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$

12. (a)  $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $[T_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $[T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B'} [T_1]_{B',B}$

13. (a)  $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ ,  $[T_2]_{B',B''} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $[T_1]_{B'',B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(b)  $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B''} [T_1]_{B'',B}$

16.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  18. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $-6 + 48x$

19. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d)  $14e^{2x} - 8xe^{2x} - 20x^2e^{2x}$  pois  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ -20 \end{bmatrix}$

20. Linha de cima  $V \rightarrow W$ , linha de baixo  $R^4 \rightarrow R^7$

21. (a)  $B', B''$  (b)  $B', B'''$

## 536 • • • Álgebra Linear com Aplicações

22. Nós podemos calcular facilmente o núcleo, a imagem e a composta de transformações lineares.

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 8.5 [página 285]

1.  $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{56}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

2.  $[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{61}{10} \\ \frac{18}{5} & -\frac{19}{5} \end{bmatrix}$ ,  $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{31}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{75}{2} & \frac{25}{2} \end{bmatrix}$

3.  $[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ,  $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{13}{11\sqrt{2}} & -\frac{25}{11\sqrt{2}} \\ \frac{5}{11\sqrt{2}} & \frac{9}{11\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4.  $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

5.  $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6.  $[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

7.  $[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ ,  $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. (a)  $\det(T) = 17$   
 (b)  $\det(T) = 0$   
 (c)  $\det(T) = 1$

10. (a)  $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ , onde  $B$  é a base canônica de  $P_4$ ;  $\text{pos}(T) = 5$  e  $\text{nul}(T) \approx 0$ .

(b)  $T$  é injetor.

11. (a)  $\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  (b)  $\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3-\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix}$

12. (a)  $\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}'_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}'_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c)  $\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}'_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

13. (a)  $\lambda = -4, \lambda = 3$

(b) Base do auto-espaco associado a  $\lambda = -4$ :  $-2 + \frac{8}{3}x + x^2$ ;  
 base do auto-espaco associado a  $\lambda = 3$ :  $5 - 2x + x^2$

14. (a)  $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$

(b) Base do auto-espaco associado a  $\lambda = 1$ :  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;

base do auto-espaco associado a  $\lambda = -2$ :  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;

base do auto-espaco associado a  $\lambda = -1$ :  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

19. (a) Falsa      (b) Verdadeira      (c) Verdadeira      (d) Verdadeira

20. Por exemplo,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  pois têm autovalores distintos.

21. (1)  $B = P^{-1}AP$  é semelhante a  $A$ .  
 (2)  $I = P^{-1}P$   
 (3) A lei distributiva para matrizes.  
 (4) O determinante de um produto é o produto dos determinantes.  
 (5) A lei comutativa para multiplicação de números reais.  
 (6)  $\det(P^{-1}) = 1 / \det(P)$

22.  $P^{-1}x$  é um autovetor de  $B$  com autovalor  $\lambda$ .

23. A escolha de uma base apropriada pode dar um melhor entendimento do operador linear.

### EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES [página 287]

1. Não.  $T(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) + B \neq (A x_1 + B) + (A x_2 + B) = T(x_1) + T(x_2)$  e, se  $c \neq 1$ , então  $T(cx) = cAx + B \neq c(Ax + B) = cT(x)$ .

2. (b)  $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

5. (a)  $T(e_3)$  e quaisquer dois dentre  $T(e_1), T(e_2)$  ou  $T(e_4)$  formam uma base para a imagem;  $(-1, 1, 0, 1)$  é uma base para o núcleo.  
 (b)  $\text{pos}(T) = 3$ ,  $\text{nul}(T) = 1$ .

6. (a)  $(1, 1, -1)$       (b)  $(-1, 2, 4)$  e  $(3, 0, 1)$

7. (a)  $\text{pos}(T) = 2$  e  $\text{nul}(T) = 2$  (b)  $T$  não é injetor.

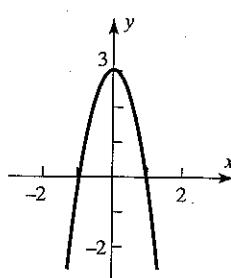
11.  $\text{pos}(T) = 3$ ,  $\text{nul}(T) = 1$ .      13.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. (a)  $v_1 = 2u_1 + u_2, v_2 = -u_1 + u_2 + u_3, v_3 = 3u_1 + 4u_2 + 2u_3$   
 (b)  $u_1 = -2v_1 - 2v_2 + v_3, u_2 = 5v_1 + 4v_2 - 2v_3, u_3 = -7v_1 - 5v_2 + 3v_3$

15.  $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$       17.  $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$       19. (b)  $1, e, x$       (c)  $e^x, e, e^{-x}$

20. (a)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$       (e)

(d)  $-3x^2 + 3$



21. (d) Os pontos estão no gráfico.

24. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

25. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}$$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.1 [página 294]**

1. (a)  $y_1 = c_1 e^{5x} - 2c_2 e^{-x}$     (b)  $y_1 = 0$     2. (a)  $y_1 = c_1 e^{7x} - 3c_2 e^{-x}$     (b)  $y_1 = -\frac{1}{40} e^{7x} + \frac{81}{40} e^{-x}$   
 $y_2 = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}$      $y_2 = 0$      $y_2 = 2c_1 e^{7x} + 2c_2 e^{-x}$      $y_2 = -\frac{1}{20} e^{7x} - \frac{27}{20} e^{-x}$
3. (a)  $y_1 = -c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$     (b)  $y_1 = e^{2x} - 2e^{3x}$     4.  $y_1 = (c_1 + c_2)e^{2x} + c_3 e^{8x}$   
 $y_2 = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - c_3 e^{3x}$      $y_2 = e^x - 2e^{2x} + 2e^{3x}$      $y_2 = -c_2 e^{2x} + c_3 e^{8x}$   
 $y_3 = 2c_2 e^{2x} - c_3 e^{3x}$      $y_3 = -2e^{2x} + 2e^{3x}$      $y_3 = -c_1 e^{2x} + c_3 e^{8x}$
7.  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$     8.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.2 [página 300]**

1. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. (a)  $(-1, -2)$  (b)  $(-2, -1)$  (c)  $(2, 0)$  (d)  $(0, 1)$
3. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. (a)  $(1, 1, -1)$  (b)  $(1, -1, 1)$  (c)  $(-1, 1, 1)$
5. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
6. (a) Retângulo com vértices em  $(0,0), (1,0), (1,-2), (0,-2)$   
(b) Retângulo com vértices em  $(0,0), (-1,0), (-1,2), (0,2)$   
(c) Retângulo com vértices em  $(0,0), (1,0), (1, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})$   
(d) Quadrado com vértices em  $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$   
(e) Paralelogramo com vértices em  $(0,0), (1,0), (7,2), (6,2)$   
(f) Paralelogramo com vértices em  $(0,0), (1,-2), (1,0), (0,2)$
7. Retângulo com vértices em  $(0,0), (-3,0), (0,1), (-3,1)$
8. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  (e)  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$
9. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  10. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
11. (a) Expansão de fator 3 na direção  $x$   
(b) Expansão de fator -5 na direção  $y$   
(c) Cisalhamento de fator 4 na direção  $x$
12. (a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; expansão de fator 3 na direção  $y$ , depois expansão de fator 2 na direção  $x$ .

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; cisalhamento de fator 4 na direção  $x$ , depois cisalhamento de fator 2 na direção  $y$ .

(c)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ; expansão de fator -2 na direção  $y$ , depois expansão de fator 4 na direção  $x$ , depois reflexão em torno da reta  $y = x$ .

(d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; cisalhamento de fator -3 na direção  $x$ , depois expansão de fator 18 na direção  $y$ , depois cisalhamento de fator 4 na direção  $y$ .

13. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  14. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -6\sqrt{3} + 3 & 6 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix}$

16.  $16y - 11x - 3 = 0$  17. (a)  $y = \frac{2}{7}x$  (b)  $y = x$  (c)  $y = \frac{1}{2}x$  (d)  $y = -2x$

18.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  19. (b) Não.  $A$  não é invertível.

22. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b) Na direção  $xz$ :  $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$ ; na direção  $yz$ :  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. (a)  $\lambda_1 = 1$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda_2 = -1$ :  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\lambda_1 = 1$ :  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda_2 = -1$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\lambda_1 = 1$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $\lambda_2 = -1$ :  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (d)  $\lambda = 1$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  (e)  $\lambda = 1$ :  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) ( $\theta$  um múltiplo ímpar de  $\pi$ )  $\lambda = -1$ : (1, 0), (0, 1)

( $\theta$  um múltiplo par de  $\pi$ )  $\lambda = 1$ : (1, 0), (0, 1)

( $\theta$  não múltiplo inteiro de  $\pi$ ) não há autovalores reais.

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.3 [página 305]

1.  $y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}x$  2.  $y = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}x$  3.  $y = 2 + 5x - 3x^2$  4.  $y = -5 + 3x - 4x^2 + 2x^3$

8.  $y = 4 - (0,2)x + (0,2)x^2$ ; se  $x = 12$ , então  $y = 30,4$  (R\$ 30.400)

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.4 [página 308]

1. (a)  $(1 + \pi) - 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$  (b)  $(1 + \pi) - 2 \left[ \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right]$

2. (a)  $\frac{4}{3}\pi^2 + 4 \cos x + \cos 2x + \frac{4}{9}\cos 3x - 4\pi \operatorname{sen} x - 2\pi \operatorname{sen} 2x - \frac{4\pi}{3} \operatorname{sen} 3x$

(b)  $\frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$

3. (a)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{e-1}e^x$  (b)  $\frac{1}{12} - \frac{3-e}{2e-2}$  4. (a)  $(4e-10) + (18-6e)x$  (b)  $\frac{(3-e)(7e-19)}{2}$

5. (a)  $\frac{3}{\pi}x$  (b)  $1 - \frac{6}{\pi^2}$  8.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \operatorname{sen}(kx)$

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.5 [página 311]

1. (a), (c), (e), (g), (h)

2. (a)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$  (b)  $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$  (c)  $A = \begin{bmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$  (d)  $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 0 \end{bmatrix}$

3. (a)  $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$  (c)  $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(d)  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -4\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -4\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$  (e)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

4. (a)
- $2x^2 + 5y^2 - 6xy$
- (b)
- $7x_1^2 + 5x_1x_2$
- (c)
- $x^2 - 3y^2 + 5z^2$
- 
- (d)
- $-2x_1^2 + 3x_3^2 + 7x_1x_2 + x_1x_3 + 12x_2x_3$
- (e)
- $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

5. (a) valor máximo = 5 em
- $\pm(1, 0)$
- ; valor mínimo = -1 em
- $\pm(0, 1)$

(b) valor máximo =  $\frac{11 + \sqrt{10}}{2}$  em  $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{20 - 6\sqrt{10}}}, \frac{1}{\sqrt{20 + 6\sqrt{10}}}\right)$ ;

valor mínimo =  $\frac{11 - \sqrt{10}}{2}$  em  $\pm\left(\frac{-1}{\sqrt{20 + 6\sqrt{10}}}, \frac{1}{\sqrt{20 - 6\sqrt{10}}}\right)$

(c) valor máximo =  $\frac{7 + \sqrt{10}}{2}$  em  $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{20 - 6\sqrt{10}}}, \frac{-1}{\sqrt{20 - 6\sqrt{10}}}\right)$ ;

valor mínimo =  $\frac{7 - \sqrt{10}}{2}$  em  $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{20 + 6\sqrt{10}}}, \frac{1}{\sqrt{20 - 6\sqrt{10}}}\right)$

(d) valor máximo =  $\frac{3 + \sqrt{10}}{2}$  em  $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{20 - 2\sqrt{10}}}, \frac{3}{\sqrt{20 + 2\sqrt{10}}}\right)$ ;

valor mínimo =  $\frac{3 - \sqrt{10}}{2}$  em  $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{20 + 2\sqrt{10}}}, \frac{-3}{\sqrt{20 - 2\sqrt{10}}}\right)$

6. (a) valor máximo = 4 em
- $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$
- ; valor mínimo = -2 em
- $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(b) valor máximo = 3 em  $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ; valor mínimo = 0 em  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(c) valor máximo = 4 em  $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ; valor mínimo = 2 em todos os pontos da esfera unitária nos quais  $x_3 = -x_1$

7. (b) 9. (a)

11. (a) Positiva (b) Negativa (c) Não-negativa
- 
- (d) Não-positiva (e) Indefinida (f) Indefinida

12. (a) Indefinida (b) Indefinida (c) Não-negativa
- 
- (d) Indefinida (e) Não-negativa e não-positiva (f) Positiva

13. (c) Não.  $T(k\mathbf{x}) \neq kT(\mathbf{x})$ , a menos que  $k = 0$  ou 1.

14. (a)  $k > 4$  (b)  $k > 2$  (c)  $-\frac{1}{3}\sqrt{15} < k < \frac{1}{3}\sqrt{15}$

$$15. A = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 & \cdots & c_1c_n \\ c_1c_2 & c_2^2 & c_2c_3 & \cdots & c_2c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1c_n & c_2c_n & c_3c_n & \cdots & c_n^2 \end{bmatrix}$$

$$16. (a) A = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \frac{1}{n(n-1)} & \frac{1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{n(n-1)} \\ \frac{-1}{n(n-1)} & \frac{1}{n} & \frac{-1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{-1}{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-1}{n(n-1)} & \frac{-1}{n(n-1)} & \frac{-1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

(b) Não-negativa

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.6 [página 318]

$$1. (a) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; y_1^2 + 3y_2^2 \quad (b) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; y_1^2 + 6y_2^2$$

$$(c) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; y_1^2 - y_2^2$$

$$(d) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}} & \frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}} \\ \frac{1}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}} & \frac{-1}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; (1+\sqrt{17})y_1^2 + (1-\sqrt{17})y_2^2$$

$$2. (a) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}; y_1^2 + 7y_2^2 + 4y_3^2 \quad (b) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}; 7y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$$

$$(c) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}; 2y_2^2 - 7y_3^2$$

$$(d) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{20}} & \frac{3}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}; \sqrt{10}y_2^2 - \sqrt{10}y_3^2$$

3. (a)  $2x^2 - 3xy + 4y^2$  (b)  $x^2 - xy$  (c)  $5xy$  (d)  $4x^2 - 2y^2$  (e)  $y^2$

**542 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

4. (a)  $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  (e)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. (a)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-7 \ 2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 7 = 0$  (b)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [5 \ 8] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3 = 0$   
 (c)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0$  (d)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 7 = 0$   
 (e)  $[x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [7 \ -8] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 5 = 0$

6. (a) Elipse (b) Elipse (c) Hipérbole (d) Hipérbole  
 (e) Círculo (f) Parábola (g) Parábola (h) Parábola  
 (i) Parábola (j) Círculo

7. (a)  $9x'^2 + 4y'^2 = 36$ , elipse (b)  $x'^2 - 16y'^2 = 16$ , hipérbole  
 (c)  $y'^2 = 8x'$ , parábola (d)  $x'^2 + y'^2 = 16$ , círculo  
 (e)  $18y'^2 - 12x'^2 = 419$ , hipérbole (f)  $y' = -\frac{1}{7}x'^2$ , parábola

8. (a) Hipérbole; equações possíveis são  $3x'^2 - 2y'^2 + 8 = 0$ ,  $-2x'^2 + 3y'^2 + 8 = 0$   
 (b) Elipse; equações possíveis são  $7x'^2 + 3y'^2 = 9$ ,  $3x'^2 + 7y'^2 = 9$   
 (c) Hipérbole; equações possíveis são  $4x'^2 - y'^2 = 3$ ,  $4y'^2 - x'^2 = 3$

9.  $2x''^2 + y''^2 = 6$ , elipse 10.  $13y''^2 - 4x''^2 = 81$ , hipérbole 11.  $2x''^2 - 3y''^2 = 24$ , hipérbole

12.  $6x''^2 + 11y''^2 = 66$ , elipse 13.  $4y''^2 - x''^2 = 0$ , hipérbole 14.  $\sqrt{29}x'^2 - 3y' = 0$ , parábola

15. (a) Duas retas que se cortam,  $y = x$  e  $y = -x$  (b) Não há gráfico. (c) O gráfico é o único ponto  $(0, 0)$ . (d) O gráfico é a reta  $y = x$   
 (e) O gráfico consiste de duas retas paralelas,  $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y = \pm 2$  (f) O gráfico é o único ponto  $(1, 2)$ .

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.7 [página 321]**

1. (a)  $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz$  (b)  $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz$  (c)  $xy + xz + yz$   
 (d)  $x^2 + y^2 - z^2$  (e)  $3z^2 + 3xz$  (f)  $2z^2 + 2xz + y^2$

2. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  (e)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$  (f)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. (a)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [7 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 3 = 0$

(b)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [-3 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 4 = 0$

(c)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0$  (d)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 7 = 0$

(e)  $[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \ -14 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 9 = 0$

$$(f) [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [2 \ -1 \ 3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

4. (a) Elipsóide (b) Hiperbolóide de uma folha  
 (e) Parabolóide elíptico (f) Parabolóide hiperbólico (c) Hiperbolóide de duas folhas (d) Cone elíptico  
 (g) Esfera
5. (a)  $9x'^2 + 36y'^2 + 4z'^2 = 36$ , elipsóide (b)  $6x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 = 18$ , hiperbolóide de uma folha  
 (c)  $3x'^2 - 3y'^2 - z'^2 = 3$ , hiperbolóide de duas folhas (d)  $4x'^2 + 9y'^2 - z'^2 = 0$ , cone elíptico  
 (e)  $x'^2 + 16y'^2 - 16z' = 0$ , parabolóide elíptico (f)  $7x'^2 - 3y'^2 + z' = 0$ , parabolóide hiperbólico  
 (g)  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 25$ , esfera
6. (a)  $25x'^2 - 3y'^2 - 50z'^2 - 150 = 0$ , hiperbolóide de duas folhas (b)  $2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 - 5 = 0$ , elipsóide  
 (c)  $9x'^2 + 4y'^2 - 36z' = 0$ , parabolóide elíptico (d)  $x'^2 - y'^2 + z' = 0$ , parabolóide hiperbólico
7.  $x''^2 + y''^2 - 2z''^2$ , hiperbolóide de duas folhas 8.  $x''^2 + y''^2 + 2z''^2 = 4$ , elipsóide
9.  $x''^2 - y''^2 + z'' = 0$ , parabolóide hiperbólico
10.  $6x''^2 + 3y''^2 - 8\sqrt{2}z'' = 0$ , parabolóide elíptico

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.8 [página 325]

1. Multiplicações:  $mpn$ ; adições:  $mp(n-1)$   
 2. Multiplicações:  $(k-1)n^3$ ; adições:  $(k-1)(n^3-n^2)$

3.

	$n=5$	$n=10$	$n=100$	$n=1000$
Resolver $Ax = b$ por eliminação de Gauss-Jordan	+ : 50 x : 65	+ : 375 x : 430	+ : 383.250 x : 343.300	+ : 333.832.500 x : 334.333.000
Resolver $Ax = b$ por eliminação gaussiana	+ : 50 x : 65	+ : 375 x : 430	+ : 383.250 x : 343.300	+ : 333.832.500 x : 334.333.000
Encontrar $A^{-1}$ por redução de $[A I]$ a $[I A^{-1}]$	+ : 80 x : 125	+ : 810 x : 1000	+ : 980.100 x : 1.000.000	+ : 998.001.000 x : 1.000.000.000
Resolver $Ax = b$ como $x = A^{-1}b$	+ : 100 x : 150	+ : 900 x : 1100	+ : 990.000 x : 1.010.000	+ : 999.000.000 x : 1.001.000.000
Encontrar $\det(A)$ através de redução por linhas	+ : 30 x : 44	+ : 285 x : 339	+ : 328.350 x : 333.399	+ : 332.833.500 x : 333.333.999
Resolver $Ax = b$ pela regra de Cramer	+ : 180 x : 264	+ : 3135 x : 3729	+ : 33.163.350 x : 33.673.399	+ : 33.316.633 $\times 10^4$ x : 33.366.733 $\times 10^4$

4.

	$n=5$	$n=10$	$n=100$	$n=1000$
	Tempo de Execução (segundos)			
Resolver $Ax = b$ por eliminação de Gauss-Jordan	$1,55 \times 10^{-4}$	$1,05 \times 10^{-3}$	0,878	836
Resolver $Ax = b$ por eliminação gaussiana	$1,55 \times 10^{-4}$	$1,05 \times 10^{-3}$	0,878	836
Encontrar $A^{-1}$ por redução de $[A I]$ a $[I A^{-1}]$	$2,84 \times 10^{-4}$	$2,41 \times 10^{-3}$	2,49	2499
Resolver $Ax = b$ como $x = A^{-1}b$	$3,50 \times 10^{-4}$	$2,65 \times 10^{-3}$	2,52	2502
Encontrar $\det(A)$ através de redução por linhas	$1,03 \times 10^{-4}$	$8,21 \times 10^{-4}$	0,831	833
Resolver $Ax = b$ pela regra de Cramer	$6,18 \times 10^{-4}$	$90,3 \times 10^{-4}$	83,9	$834 \times 10^3$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.9 [página 330]**

1.  $x_1 = 2, x_2 = 1$     2.  $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = -3$     3.  $x_1 = 3, x_2 = -1$

4.  $x_1 = 4, x_2 = -1$     5.  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0$     6.  $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$

7.  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0$     8.  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$

9.  $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 1$     10.  $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 0$

11. (a)  $A = LU = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b)  $A = L_1DU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c)  $A = L_2U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

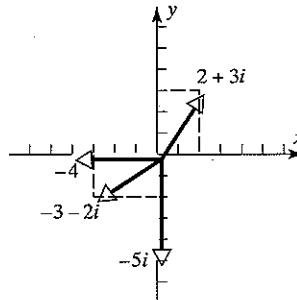
13. (b)  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix}$

14. Adições:  $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$ ; multiplicações:  $\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$

18.  $A = PLU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 10.1 [página 336]**

1. (a-d)

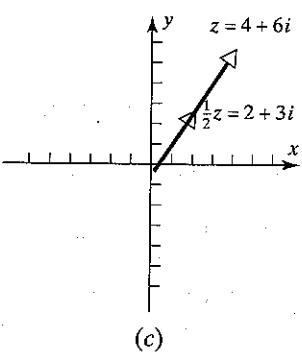
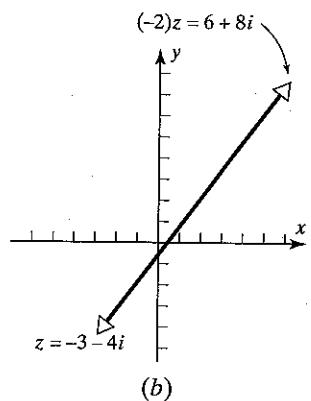
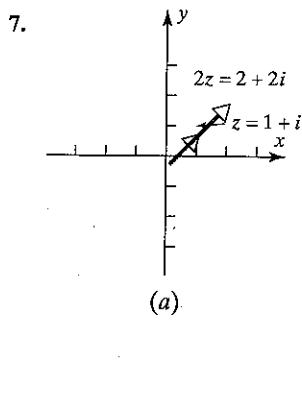
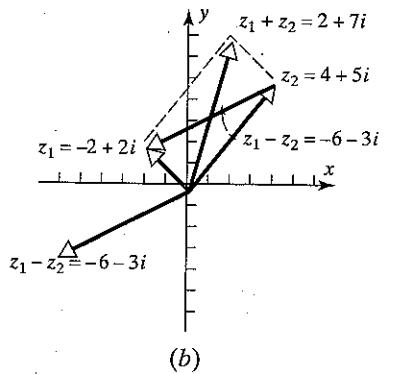
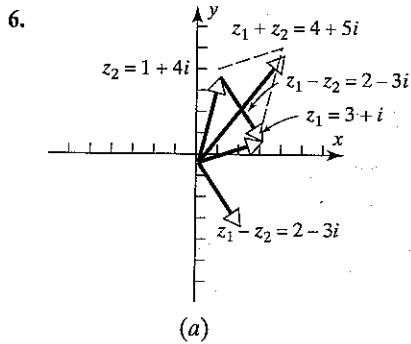


2. (a) (2, 3) (b) (-4, 0) (c) (-3, -2) (d) (0, -5)

3. (a)  $x = -2, y = -3$  (b)  $x = 2, y = 1$

4. (a)  $5 + 3i$  (b)  $-3 - 7i$  (c)  $4 - 8i$  (d)  $-4 - 5i$  (e)  $19 + 14i$  (f)  $-\frac{11}{2} - \frac{17}{2}i$

5. (a)  $2 + 3i$  (b)  $-1 - 2i$  (c)  $-2 + 9i$



8. (a)  $k_1 = -5, k_2 = 3$    (b)  $k_1 = 3, k_2 = 1$

9. (a)  $z_1 z_2 = 3 + 3i, z_1^2 = -9, z_2^2 = -2i$

(b)  $z_1 z_2 = 26, z_1^2 = -20 + 48i, z_2^2 = -5 - 12i$

(c)  $z_1 z_2 = \frac{11}{3} - i, z_1^2 = \frac{4}{9}(-3 + 4i), z_2^2 = -6 - \frac{5}{2}i$

10. (a)  $9 - 8i$    (b)  $-63 + 16i$    (c)  $-32 - 24i$    (d)  $22 + 19i$

11.  $76 - 88i$    12.  $26 - 18i$

13.  $-26 + 18i$

14.  $-1 - 11i$

15.  $-\frac{63}{16} + i$

16.  $(2 + \sqrt{2}) + i(1 - \sqrt{2})$

17. 0

18.  $-24i$

19. (a)  $\begin{bmatrix} 1+6i & -3+7i \\ 3+8i & 3+12i \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 3-2i & 6+5i \\ 3-5i & 13+3i \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 3+3i & 2+5i \\ 9-5i & 13-2i \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 9+i & 12+2i \\ 18-2i & 13+i \end{bmatrix}$

20. (a)  $\begin{bmatrix} 13+13i & -8+12i & -33-22i \\ 1+i & 0 & i \\ 7+9i & -6+6i & -16-16i \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 6+2i & -11+19i \\ -1+6i & -9-5i \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 6i & 1+i \\ -6-i & 5-9i \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 22-7i & 2+10i \\ -5-4i & 6-8i \\ 9-i & -1-i \end{bmatrix}$

22. (a)  $z = -1 \pm i$    (b)  $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

i

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 10.2 [página 340]

1. (a)  $2 - 7i$    (b)  $-3 + 5i$    (c)  $-5i$    (d)  $i$    (e)  $-9$    (f) 0

2. (a) 1   (b) 7   (c) 5   (d)  $\sqrt{2}$    (e) 8   (f) 0

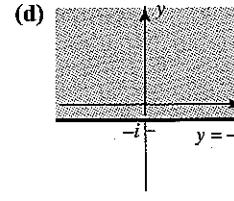
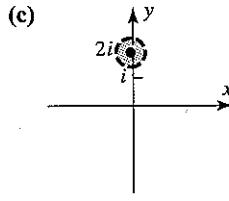
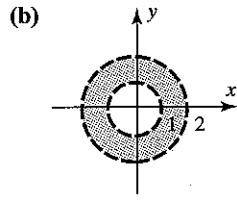
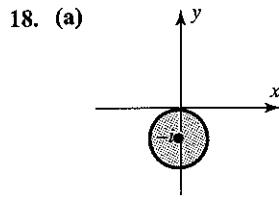
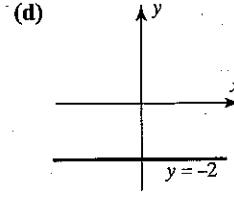
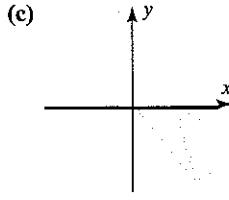
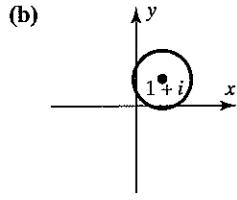
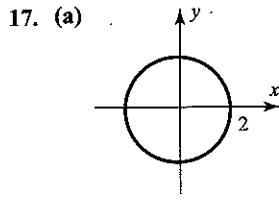
4. (a)  $-\frac{17}{25} - \frac{19}{25}i$    (b)  $\frac{23}{25} + \frac{11}{25}i$    (c)  $\frac{23}{25} - \frac{11}{25}i$    (d)  $-\frac{17}{25} + \frac{19}{25}i$    (e)  $\frac{1}{5} - i$    (f)  $\frac{\sqrt{26}}{5}$

5. (a)  $-i$    (b)  $\frac{1}{26} + \frac{5}{26}i$    (c)  $7i$    6. (a)  $\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$    (b)  $-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$    (c)  $\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$    (d)  $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$

7.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$    8.  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$    9.  $-\frac{7}{625} - \frac{24}{625}i$    10.  $-\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$    11.  $\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i$

12.  $-\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$    13.  $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$    14.  $-\frac{2}{5}$    15. (a)  $-1 - 2i$    (b)  $-\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

**546 •••** Álgebra Linear com Aplicações



19. (a)  $-y$  (b)  $-x$  (c)  $y$  (d)  $x$     20. (b)  $-i$     23. (a)  $\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$     (b)  $\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

27. (c) Sim, se  $z \neq 0$ .    28.  $x_1 = i, x_2 = -i$     29.  $x_1 = 1+i, x_2 = 1-i$

30.  $x_1 = \frac{1}{2} + i, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2} - i$     31.  $x_1 = i, x_2 = 0, x_3 = -i$

32.  $x_1 = -(1+i)t, x_2 = t$     33.  $x_1 = (1+i)t, x_2 = 2t$

34.  $x_1 = -(1-i)t, x_2 = -it, x_3 = t$     35. (a)  $\begin{bmatrix} i & 2 \\ -1 & i \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -i & 2i \end{bmatrix}$

39. (a)  $\begin{bmatrix} -i & -2-2i & -1+i \\ 1 & 2 & -i \\ i & i & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1+i & -i & 1 \\ -7+6i & 5-i & 1+4i \\ 1+2i & -i & 1 \end{bmatrix}$

41. (a)  $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$   
 (b)  $|(8+8i) - 12|^2 = 80 = 40 + 40 = |12 - (6+2i)|^2 + |(6+2i) - (8+8i)|^2$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 10.3 [página 345]**

1. (a) 0 (b)  $\pi/2$  (c)  $-\pi/2$  (d)  $\pi/4$  (e)  $2\pi/3$  (f)  $-\pi/4$

2. (a)  $5\pi/3$  (b)  $-\pi/3$  (c)  $5\pi/3$

3. (a)  $2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$  (b)  $4[\cos \pi + i \sin \pi]$  (c)  $5\sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$

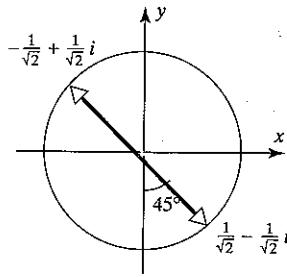
(d)  $12 \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$  (e)  $3\sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right]$  (f)  $4 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$

4. (a)  $6 \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$  (b)  $\frac{2}{3} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]$

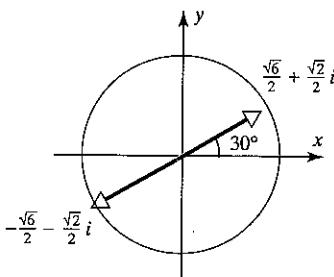
(c)  $\frac{3}{2} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right]$  (d)  $\frac{32}{9} \left[ \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right]$

5. 1    6. (a)  $-64$  (b)  $-i$  (c)  $-64\sqrt{3} - 64i$  (d)  $-\frac{1 + \sqrt{3}i}{2048}$

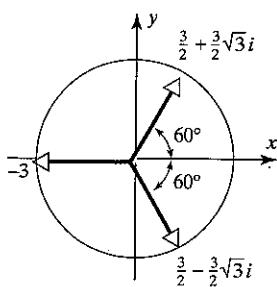
7. (a)



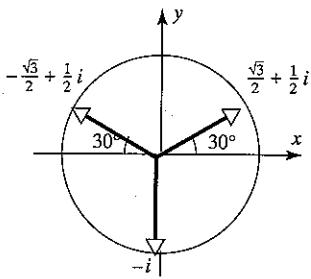
(b)



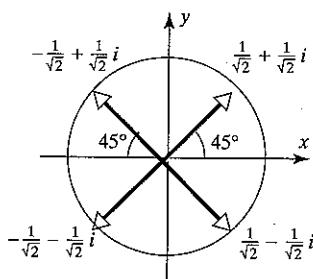
(c)



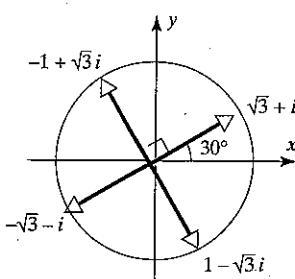
(d)



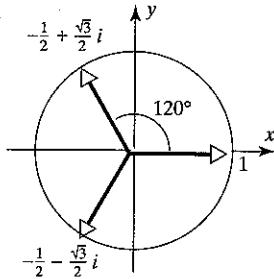
(e)



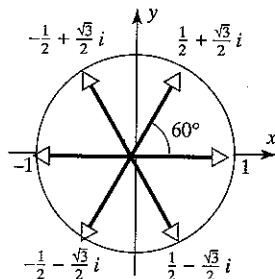
(f)



8.



9.



10.  $\sqrt[4]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right], \sqrt[4]{2} \left[ \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \right]$     11.  $\pm 2, \pm 2i$

12. As soluções são  $\pm(2^{1/4} + 2^{1/4}i), \pm(2^{1/4} - 2^{1/4}i)$  e a fatoração é  $z^4 + 8 = (z^2 - 2^{5/4}z + 2^{3/2}) \cdot (z^2 + 2^{5/4}z + 2^{3/2})$ .

13. Girar  $z$  por  $90^\circ$  no sentido horário.

14. (a) 16    (b)  $\frac{i}{4^9}$

15. (a)  $\operatorname{Re}(z) = -3, \operatorname{Im}(z) = 0$     (b)  $\operatorname{Re}(z) = -3, \operatorname{Im}(z) = 0$   
 (c)  $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -\sqrt{2}$     (d)  $\operatorname{Re}(z) = -3, \operatorname{Im}(z) = 0$

20.  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$   
 $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta, \sin 3\theta = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 10.4 [página 348]

1. (a)  $(3i, -i, -2 - i, 4)$     (b)  $(3 + 2i, -1 - 2i, -3 + 5i, -i)$   
 (c)  $(-1 - 2i, 2i, 2 - i, -1)$     (d)  $(-3 + 9i, 3 - 3i, -3 - 6i, 12 + 3i)$   
 (e)  $(-3 + 2i, 3, -3 - 3i, i)$     (f)  $(-1 - 5i, 3i, 4, -5)$

2.  $(2 + i, 0, -3 + i, -4i)$     3.  $c_1 = -2 - i, c_2 = 0, c_3 = 2 - i$

5. (a)  $\sqrt{2}$     (b)  $2\sqrt{3}$     (c)  $\sqrt{10}$     (d)  $\sqrt{37}$

6. (a)  $\sqrt{43}$     (b)  $\sqrt{10} + \sqrt{29}$     (c)  $\sqrt{10} + \sqrt{10}i$     (d)  $\sqrt{699}$     (e)  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{6}}, \frac{2i}{\sqrt{6}}, 0\right)$     (f) 1

8. Todos  $k$  tais que  $|k| = \frac{1}{3}$

9. (a) 3    (b)  $2 - 27i$     (c)  $-5 - 10i$

10. O conjunto é um espaço vetorial sob as operações dadas.

## 548 • • • Álgebra Linear com Aplicações

11. Não é um espaço vetorial. O Axioma 6 falha; ou seja, o conjunto não é fechado na multiplicação por escalar. (Multiplique por  $i$ , por exemplo.)
12. (a)      13. O núcleo de  $T$  é todos os múltiplos de  $(1 + 3i, 1 + i, -2)$ ;  $\text{nul}(T) = 1$ .
14. (b)      15. (a), (d)      16. (a), (b), (d)
17. (a)  $(-3 - 2i)\mathbf{u} + (3 - i)\mathbf{v} + (1 + 2i)\mathbf{w}$       (b)  $(2 + i)\mathbf{u} + (-1 + i)\mathbf{v} + (-1 - i)\mathbf{w}$   
 (c)  $0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$       (d)  $(-5 - 4i)\mathbf{u} + (5 - 2i)\mathbf{v} + (2 + 4i)\mathbf{w}$
18. (a) Sim      (b) Não      (c) Sim      (d) Não      19. (a), (b), (c)
20. (a)  $\mathbf{u}_2 = i\mathbf{u}_1$       (b) Três vetores em um espaço bidimensional.  
 (c)  $A$  é um múltiplo escalar de  $B$ .
21. (b), (c)      22.  $\mathbf{f} - 3\mathbf{g} - 3\mathbf{h} = 0$
23. (a) Três vetores em um espaço bidimensional.      (b) Dois vetores em um espaço tridimensional.
24. (a), (b)      25. (a), (b), (c), (d)      26.  $(-1, -i, 1)$ ; dimensão = 1
27.  $(1, 1 - i)$ ; dimensão = 1      28.  $(3 + 6i, -3i, 1)$ ; dimensão = 1
29.  $(\frac{5}{2}i, -\frac{1}{2}, 1, 0), (-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}i, 0, 1)$ ; dimensão = 2

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 10.5 [página 352]

2. (a)  $-12$       (b)  $0$       (c)  $2i$       (d)  $37$       4. (a)  $-4 + 5i$       (b)  $0$       (c)  $4 - 4i$       (d)  $42$
5. (a) Falha o Axioma 4.      (b) Falha o Axioma 4.      (c) Falham os Axiomas 2 e 3.  
 (d) Falham os Axiomas 1 e 4.      (e) Isto é um produto interno.
6.  $-9 - 5i$       7. Não. Os Axiomas 1 e 4 falham.      8. Não. Falha o Axioma 4.      9. (a)  $\sqrt{21}$       (b)  $\sqrt{10}$       (c)  $\sqrt{10}$       (d)  $0$
10. (a)  $\sqrt{10}$       (b)  $2$       (c)  $\sqrt{5}$       (d)  $0$       11. (a)  $\sqrt{2}$       (b)  $2\sqrt{3}$       (c)  $5$       (d)  $0$
12. (a)  $3\sqrt{10}$       (b)  $\sqrt{14}$       13. (a)  $\sqrt{10}$       (b)  $2\sqrt{5}$       14. (a)  $2$       (b)  $2\sqrt{2}$
15. (a)  $2\sqrt{3}$       (b)  $2\sqrt{2}$       16. (a)  $7\sqrt{2}$       (b)  $2\sqrt{3}$       17. (a)  $-\frac{8}{3}i$       (b) Nenhum
18. (a), (b), (c)      20. (b)      21. (b), (c)
23.  $\left(\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{i}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2i}{\sqrt{21}}, \frac{3i}{\sqrt{21}}, \frac{2i}{\sqrt{21}}, \frac{-2i}{\sqrt{21}}\right), \left(-\frac{i}{\sqrt{7}}, \frac{2i}{\sqrt{7}}, -\frac{i}{\sqrt{7}}, \frac{i}{\sqrt{7}}\right)$
24. (a)  $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{10}}, -\frac{3i}{\sqrt{10}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(\frac{3i}{\sqrt{10}}, \frac{i}{\sqrt{10}}\right)$  (b)  $\mathbf{v}_1 = (i, 0), \mathbf{v}_2 = (0, -i)$
25. (a)  $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right), \mathbf{v}_3 = \left(\frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, -\frac{2i}{\sqrt{6}}\right)$   
 (b)  $\mathbf{v}_1 = (i, 0, 0), \mathbf{v}_2 = \left(0, \frac{7i}{\sqrt{53}}, \frac{-2i}{\sqrt{53}}\right), \mathbf{v}_3 = \left(0, \frac{2i}{\sqrt{53}}, \frac{7i}{\sqrt{53}}\right)$
26.  $\left(0, \frac{2i}{\sqrt{5}}, \frac{i}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{5i}{\sqrt{30}}, -\frac{i}{\sqrt{30}}, \frac{2i}{\sqrt{30}}, 0\right), \left(\frac{i}{\sqrt{10}}, \frac{i}{\sqrt{10}}, -\frac{2i}{\sqrt{10}}, -\frac{2i}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{i}{\sqrt{15}}, \frac{i}{\sqrt{15}}, -\frac{2i}{\sqrt{15}}, \frac{3i}{\sqrt{15}}\right)$
27.  $\mathbf{v}_1 = \left(0, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1-i}{\sqrt{3}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{3i}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1+i}{\sqrt{15}}\right)$
28.  $\mathbf{w}_1 = \left(-\frac{5i}{4}, -\frac{i}{4}, \frac{5i}{4}, \frac{9i}{4}\right), \mathbf{w}_2 = \left(\frac{i}{4}, \frac{9i}{4}, \frac{19i}{4}, -\frac{9i}{4}\right)$
36.  $\mathbf{u} = -\sqrt{3}i\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{6}}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_3$       40. (a)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       (b)  $\frac{1}{2} - \frac{i}{3}$       (c)  $\frac{1}{2} + \frac{i}{3}$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 10.6 [página 358]**

1. (a)  $\begin{bmatrix} -2i & 4 & 5-i \\ 1+i & 3-i & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -2i & 4 & -i \\ 1+i & 5+7i & 3 \\ -1-i & i & 1 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -7i \\ 0 \\ 3i \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} \end{bmatrix}$

2. (b), (d), (e) 3.  $k = 3 + 5i$ ,  $l = i$ ,  $m = 2 - 4i$  4. (a), (b)

5. (a)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5}i & -\frac{3}{5}i \end{bmatrix}$  (b)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$

(c)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-i) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}i) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}i) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{3}-i) \end{bmatrix}$  (d)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3-i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4-3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$

7.  $P = \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$  8.  $P = \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

9.  $P = \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$  10.  $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3-i}{\sqrt{14}} & \frac{3-i}{\sqrt{35}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11.  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1-i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

12.  $P = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

13.  $\lambda = 2 \pm i\sqrt{15}$ ; não, pois  $A$  tem entradas complexas. 14.  $\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$  é uma possibilidade.

**EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES [página 360]**

3.  $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  é uma possibilidade. 5.  $\lambda = 1, \omega, \omega^2 (= \bar{\omega})$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.1 [página 366]**

1. (a)  $y = 3x - 4$  (b)  $y = -2x + 1$

2. (a)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$  ou  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$   
(b)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$  ou  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

**550** • • • Álgebra Linear com Aplicações

3.  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y = 0$  (uma parábola)    4. (a)  $x + 2y + z = 0$     (b)  $-x + y - 2z + 1 = 0$

5. (a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = -2$  ou  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2$   
 (b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 3$  ou  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5$

$$9. \begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ y_1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.2 [página 369]**

- $$1. \quad I_1 = \frac{255}{317}, \quad I_2 = \frac{97}{317}, \quad I_3 = \frac{158}{317} \quad 2. \quad I_1 = \frac{13}{5}, \quad I_2 = -\frac{2}{5}, \quad I_3 = \frac{11}{5}$$

$$3. \quad I_1 = -\frac{1}{22}, \quad I_2 = \frac{1}{22}, \quad I_3 = \frac{6}{11} \quad 4. \quad I_1 = \frac{1}{2}, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = \frac{1}{2}, \quad I_5 = \frac{1}{2}, \quad I_6 = \frac{1}{2}$$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.3 [página 376]**

- $x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{3}$ ; valor máximo de  $z = \frac{22}{3}$
  - Nenhuma solução viável.
  - A solução é ilimitada.
  - Investir R\$ 6000 no título  $A$  e R\$ 4000 no título  $B$ ; o rendimento anual é R\$ 880.
  - $\frac{7}{9}$  copos de leite,  $\frac{25}{18}$  xícaras de flocos de milho; custo mínimo =  $\frac{1460}{18} \approx 81,11$  centavos.
  - 550 contêineres da companhia  $A$  e 300 contêineres da companhia  $B$ ; frete máximo = R\$ 2.110,00
  - 925 contêineres da companhia  $A$  e nenhum contêiner da companhia  $B$ ; frete máximo = R\$ 2.312,50
  - 0,4 quilos do ingrediente  $A$  e 2,4 quilos do ingrediente  $B$ ; custo mínimo = 24,8 centavos

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.4 [página 382]**

$$3. \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix} \quad 4. \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. (a) O interessado 1 recebe a moeda 3 (R\$ 210).  
O interessado 2 recebe a moeda 1 (R\$ 175).  
O interessado 3 recebe a moeda 2 (R\$ 85).  
O interessado 4 não recebe moedas.  
O interessado 5 recebe a moeda 4 (R\$ 160).  
Soma das propostas = R\$ 630

- (b) Repita a linha do interessado 2 duas vezes na matriz de custo; some duas moedas fictícias para ficar com uma matriz de custo de tamanho  $6 \times 6$ . A alocação ótima é:  
 O interessado 1 não recebe nada.  
 O interessado 2 recebe as moedas 1 e 3 (R\$ 175 + R\$ 230).  
 O interessado 3 recebe a moeda 2 (R\$ 85).  
 O interessado 4 não recebe nada.  
 O interessado 5 recebe a moeda 4 (R\$ 160).  
 Soma de propostas = R\$ 650

6. Ponta E – Paulo	Meia E – Jorge ou Adão	Zaga D – Heitor
Ponta D – Leandro	Meia D – Artur	Lateral E – Júlio ou Luís
Centro – Silmar	Zaga E – Adão ou Jorge	Lateral D – Luís ou Júlio

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.5 [página 388]

2. (a)  $S(x) = -0,12643(x - 0,4)^3 - 0,20211(x - 0,4)^2 + 0,92158(x - 0,4) + 0,38942$   
 (b)  $S(0,5) = 0,47943$ ; erro = 0%

3. (a) A spline cúbica emendada      (b)  $S(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

4.  $S(x) = \begin{cases} -0,00000042(x+10)^3 & +0,000214(x+10) + 0,99815, -10 \leq x \leq 0 \\ 0,00000024(x)^3 & -0,0000126(x)^2 & +0,000088(x) & +0,99987, 0 \leq x \leq 10 \\ -0,00000004(x-10)^3 & -0,0000054(x-10)^2 & -0,000092(x-10) & +0,99973, 10 \leq x \leq 20 \\ 0,00000022(x-20)^3 & -0,0000066(x-20)^2 & -0,000212(x-20) & +0,99823, 20 \leq x \leq 30 \end{cases}$

Máximo em  $(x, S(x)) = (3,93; 1,00004)$

5.  $S(x) = \begin{cases} 0,00000009(x+10)^3 - 0,0000121(x+10)^2 + 0,000282(x+10) + 0,99815, -10 \leq x \leq 0 \\ 0,00000009(x)^3 & -0,0000093(x)^2 & +0,000070(x) & +0,99987, 0 \leq x \leq 10 \\ 0,00000004(x-10)^3 - 0,0000066(x-10)^2 - 0,000087(x-10) + 0,99973, 10 \leq x \leq 20 \\ 0,00000004(x-20)^3 - 0,0000053(x-20)^2 - 0,000207(x-20) + 0,99823, 20 \leq x \leq 30 \end{cases}$

Máximo em  $(x, S(x)) = (4,00; 1,00001)$

6. (b)  $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_{n-1} - 2y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_1 \end{bmatrix}$

7. (b)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} -hy'_1 - y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \\ y_{n-1} - y_n + hy'_n \end{bmatrix}$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.6 [página 395]

1. (a)  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}, x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,46 \\ 0,54 \end{bmatrix}, x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,454 \\ 0,546 \end{bmatrix}, x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,4546 \\ 0,5454 \end{bmatrix}, x^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,45454 \\ 0,54546 \end{bmatrix}$

(b)  $P$  é regular pois todas as entradas de  $P$  são positivas;  $q = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} \end{bmatrix}$

2. (a)  $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,23 \\ 0,52 \\ 0,25 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,273 \\ 0,396 \\ 0,331 \end{bmatrix}$

3. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{9}{17} \\ \frac{8}{17} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} \frac{26}{45} \\ \frac{19}{45} \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} \frac{3}{19} \\ \frac{4}{19} \\ \frac{12}{19} \end{bmatrix}$

(b)  $P$  é regular pois todas as entradas de  $P$  são positivas;  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{22}{72} \\ \frac{29}{72} \\ \frac{21}{72} \end{bmatrix}$

4. (a)  $P^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 \end{bmatrix}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Assim, nenhuma potência inteira de  $P$  tem todas as entradas positivas.

(b)  $P^n \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  com  $n$  crescente, de modo que  $P^n \mathbf{x}^{(0)} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  para qualquer  $\mathbf{x}^{(0)}$  com  $n$  crescente.

(c) As entradas do vetor limite  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  não são todas positivas.

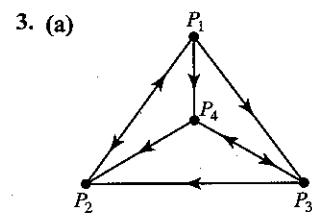
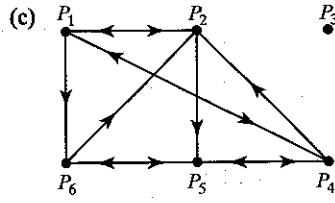
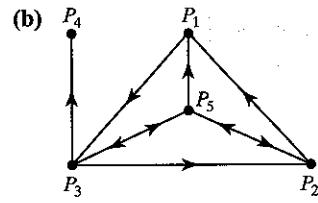
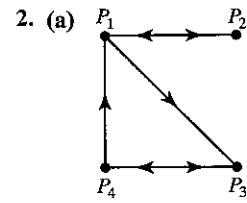
6.  $P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  tem todas entradas positivas;  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7.  $\frac{10}{13}$

8.  $54\frac{1}{6}\%$  na região 1,  $16\frac{2}{3}\%$  na região 2 e  $29\frac{1}{6}\%$  na região 3

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.7 [página 403]

1. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



- (b) De 1 passo:  $P_1 \rightarrow P_2$   
De 2 passos:  $P_1 \rightarrow P_4 \rightarrow P_2$   
 $P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2$   
De 3 passos:  $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2$   
 $P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_2$   
 $P_1 \rightarrow P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2$

- (c) De 1 passo:  $P_1 \rightarrow P_4$   
De 2 passos:  $P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4$   
De 3 passos:  $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_4$   
 $P_1 \rightarrow P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4$

4. (a)  $\{P_1, P_2, P_3\}$  (b)  $\{P_3, P_4, P_5\}$  (c)  $\{P_2, P_4, P_6, P_8\}$  e  $\{P_4, P_5, P_6\}$

5. (a) Nenhuma (b)  $\{P_3, P_4, P_6\}$

6.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Potência de  $R = 5$   
 Potência de  $R_2 = 3$   
 Potência de  $R_3 = 4$   
 Potência de  $R_4 = 2$

7. Primeiro, A; segundo, B e E (empate); quarto, C; quinto, D.

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.8 [página 409]

1. (a)  $-5/8$  (b)  $[0 \ 1 \ 0]$  (c)  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  2. Por exemplo, tome  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

3. (a)  $p^* = [0 \ 1]$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $v = 3$  (b)  $p^* = [0 \ 1 \ 0]$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v = 2$

(c)  $p^* = [0 \ 0 \ 1]$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v = 2$  (d)  $p^* = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v = -2$

4. (a)  $p^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$ ,  $v = \frac{27}{8}$  (b)  $p^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$ ,  $v = \frac{70}{3}$

(c)  $p^* = [1 \ 0]$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v = 3$  (d)  $p^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ ,  $v = \frac{19}{5}$

(e)  $p^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{10}{13} \end{bmatrix}$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} \\ \frac{12}{13} \end{bmatrix}$ ,  $v = -\frac{29}{13}$

5.  $p^* = \begin{bmatrix} \frac{13}{20} & \frac{7}{20} \end{bmatrix}$ ,  $q^* = \begin{bmatrix} \frac{11}{20} \\ \frac{9}{20} \end{bmatrix}$ ,  $v = -\frac{3}{20}$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.9 [página 415]

1. (a)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 78 \\ 54 \\ 79 \end{bmatrix}$

2. (a) Use o Corolário 11.9.4; todas as somas de linha são menores do que 1.  
 (b) Use o Corolário 11.9.5; todas as somas de coluna são menores do que 1.

3.  $E^2$  tem todas entradas positivas.

(c) Use o Teorema 11.9.3, com  $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} > Cx = \begin{bmatrix} 1,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{bmatrix}$ .

4. Preço dos tomates, R\$ 120,00; preço do milho, R\$ 100,00; preço da alface, R\$ 106,67.

5. R\$ 1256 para o EC, R\$ 1448 para o EE, R\$ 1556 para o EM.

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.10 [página 420]

1. A segunda classe; \$ 15.000 2. \$ 223 3.  $1 : 1,90 : 3,02 : 4,24 : 5,00$   
 5.  $s/(g_1^{-1} + g_2^{-1} + \dots + g_{k-1}^{-1})$  6.  $1 : 2 : 3 : \dots : n - 1$

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.11 [página 425]

1. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 0 & 0,866 & 1,366 & 0,500 \\ 0 & -0,500 & 0,366 & 0,866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. (b)  $(0, 0, 0), (1, 0, 0), \left(1\frac{1}{2}, 1, 0\right)$  e  $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$   
(c)  $(0, 0, 0), (1; 0,6; 0), (1; 1,6; 0), (0, 1, 0)$

3. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. (a)  $M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ ,  $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ 0 & \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix}$ ,  
 $M_4 = \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & 0 & \sin(-45^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-45^\circ) & 0 & \cos(-45^\circ) \end{bmatrix}$ ,  $M_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $P' = M_5 M_4 M_3 (M_1 P + M_2)$

5. (a)  $M_1 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ 0 & \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$ ,  $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $M_4 = \begin{bmatrix} \cos 35^\circ & 0 & \sin 35^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 35^\circ & 0 & \cos 35^\circ \end{bmatrix}$ ,  $M_5 = \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) & 0 \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  
 $M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ ,  $M_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $P' = M_7 (M_5 M_4 (M_2 M_1 P + M_3) + M_6)$

6.  $R_1 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$ ,  $R_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$ ,  
 $R_4 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R_5 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$

7. (a)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.1.2 [página 433]

1. (a)  $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (b)  $t = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

(c)  $t^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad t^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}, \quad t^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{11}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{11}{16} \end{bmatrix}, \quad t^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} \\ \frac{23}{32} \\ \frac{7}{32} \\ \frac{23}{32} \end{bmatrix}, \quad t^{(5)} = \begin{bmatrix} \frac{15}{64} \\ \frac{47}{64} \\ \frac{15}{64} \\ \frac{47}{64} \end{bmatrix}, \quad t^{(5)} - t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{64} \\ -\frac{1}{64} \\ -\frac{1}{64} \\ -\frac{1}{64} \end{bmatrix}$

(d) 4,5 % em  $t_1$ ; -1,8 % em  $t_2$ .

2.  $\frac{1}{2}$  3.  $t^{(1)} = [\frac{3}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{4}]^T$   
 $t^{(2)} = [\frac{13}{16} \quad \frac{18}{16} \quad \frac{9}{16} \quad \frac{22}{16} \quad \frac{13}{16} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{21}{16} \quad \frac{16}{16} \quad \frac{10}{16}]^T$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.1.3 [página 442]

1. (c)  $x_3^* = (\frac{31}{22}, \frac{27}{22})$

2. (a)  $x_3^{(1)} = (1,40000; 1,20000)$  (b) Os mesmos que na parte (a)  
 $x_3^{(2)} = (1,41000; 1,23000)$   
 $x_3^{(3)} = (1,40900; 1,22700)$   
 $x_3^{(4)} = (1,40910; 1,22730)$   
 $x_3^{(5)} = (1,40909; 1,22727)$   
 $x_3^{(6)} = (1,40909; 1,22727)$   
(c)  $x_3^{(1)} = (9,55000; 25,65000)$   
 $x_3^{(2)} = (0,59500; -1,21500)$   
 $x_3^{(3)} = (1,49050; 1,47150)$   
 $x_3^{(4)} = (1,40095; 1,20285)$   
 $x_3^{(5)} = (1,40991; 1,22972)$   
 $x_3^{(6)} = (1,40901; 1,22703)$

4.  $x_1^* = (1, 1), x_2^* = (2, 0), x_3^* = (1, 1)$

7.  $x_7 + x_8 + x_9 = 13,00$   
 $x_4 + x_5 + x_6 = 15,00$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 8,00$

$0,82843(x_6 + x_8) + 0,58579x_9 = 14,79$   
 $1,41421(x_3 + x_5 + x_7) = 14,31$

$0,82843(x_2 + x_4) + 0,58579x_1 = 3,81$   
 $x_3 + x_6 + x_9 = 18,00$   
 $x_2 + x_5 + x_8 = 12,00$   
 $x_1 + x_4 + x_7 = 6,00$

$0,82843(x_2 + x_6) + 0,58579x_3 = 10,51$   
 $1,41421(x_1 + x_5 + x_9) = 16,13$   
 $0,82843(x_4 + x_8) + 0,58579x_7 = 7,04$

8.  $x_7 + x_8 + x_9 = 13,00$   
 $x_4 + x_5 + x_6 = 15,00$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 8,00$

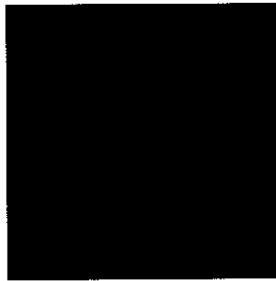
$0,04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0,75000(x_6 + x_8) + 0,61396x_9 = 14,79$   
 $0,91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0,25000(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = 14,31$

$0,04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0,75000(x_2 + x_4) + 0,61396x_1 = 3,81$   
 $x_3 + x_6 + x_9 = 18,00$   
 $x_2 + x_5 + x_8 = 12,00$   
 $x_1 + x_4 + x_7 = 6,00$

$0,04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0,75000(x_2 + x_6) + 0,61396x_3 = 10,51$   
 $0,91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0,25000(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = 16,13$   
 $0,04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0,75000(x_4 + x_8) + 0,61396x_7 = 7,04$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.14 [página 453]**

1.  $T_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{12}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , onde os quatro valores de  $\begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$  são  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{13}{25} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{25} \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} \frac{13}{25} \\ \frac{13}{25} \end{pmatrix}$ ;  
 $d_H(S) = \ln(4) / \ln(\frac{25}{12}) = 1,888\dots$
2.  $s \approx 0,47$ ;  $d_H(S) \approx \ln(4) / \ln(1/0,47) = 1,8\dots$  Ângulos de rotação:  $0^\circ$  (esquerdo superior);  $90^\circ$  (direito superior);  $180^\circ$  (esquerdo inferior);  $180^\circ$  (direito inferior).
3. (a) (i)  $s = \frac{1}{3}$ ; (ii) todos ângulos de rotação são de  $0^\circ$ ; (iii)  $d_H(S) = \ln(7) / \ln(3) = 1,771\dots$  Este conjunto é um fractal.  
(b) (i)  $s = \frac{1}{2}$ ; (ii) todos ângulos de rotação são de  $180^\circ$ ; (iii)  $d_H(S) = \ln(3) / \ln(2) = 1,584\dots$  Este conjunto é um fractal.  
(c) (i)  $s = \frac{1}{2}$ ; (ii) ângulos de rotação:  $90^\circ$  (topo);  $180^\circ$  (esquerdo inferior);  $180^\circ$  (direito inferior);  
(iii)  $d_H(S) = \ln(3) / \ln(2) = 1,584\dots$  Este conjunto é um fractal.  
(d) (i)  $s = \frac{1}{2}$ ; (ii) ângulos de rotação:  $90^\circ$  (esquerdo superior);  $180^\circ$  (direito superior);  $180^\circ$  (direito inferior);  
(iii)  $d_H(S) = \ln(3) / \ln(2) = 1,584\dots$  Este conjunto é um fractal.
4.  $s = 0,8509\dots$ ,  $\theta = -2,69^\circ\dots$  5.  $(0,766; 0,996)$  arredondado até três casas decimais.
6.  $d_H(S) = \ln(16) / \ln(4) = 2$  7.  $\ln(4) / \ln(\frac{4}{3}) = 4,818\dots$  8.  $d_H(S) = \ln(8) / \ln(2) = 3$ ; o cubo não é um fractal.
9.  $k = 20$ ;  $s = \frac{1}{3}$ ;  $d_H(S) = \ln(20) / \ln(3) = 2,726\dots$ ; o conjunto é um fractal.
- 10.



Conjunto inicial



Primeira iterada



Segunda iterada



Terceira iterada



Quarta iterada

$$d_H(S) = \ln(2) / \ln(3) = 0,6309\dots$$

11. Área de  $S_0 = 1$ ; área de  $S_1 = \frac{8}{9} = 0,888\dots$ ; área de  $S_2 = (\frac{8}{9})^2 = 0,790\dots$ ; área de  $S_3 = (\frac{8}{9})^3 = 0,702\dots$ ;  
área de  $S_4 = (\frac{8}{9})^4 = 0,624\dots$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.15 [página 463]**

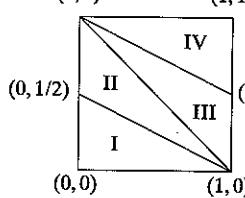
1.  $\Pi(250) = 750$ ,  $\Pi(25) = 50$ ,  $\Pi(125) = 250$ ,  $\Pi(30) = 60$ ,  $\Pi(10) = 30$ ,  $\Pi(50) = 150$ ,  $\Pi(3750) = 7500$ ,  
 $\Pi(6) = 12$ ,  $\Pi(5) = 10$
2. Um 1-ciclo:  $\{(0, 0)\}$ ; um 3-ciclos:  $\{(\frac{3}{6}, 0), (\frac{3}{6}, \frac{3}{6}), (0, \frac{3}{6})\}$ ; dois 4-ciclos:  
 $\{(\frac{4}{6}, 0), (\frac{4}{6}, \frac{4}{6}), (\frac{2}{6}, 0), (\frac{2}{6}, \frac{2}{6})\}$  e  $\{(0, \frac{2}{6}), (\frac{2}{6}, \frac{4}{6}), (0, \frac{4}{6}), (\frac{4}{6}, \frac{2}{6})\}$ ; dois 12-ciclos:  
 $\{(0, \frac{1}{6}), (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}), (\frac{3}{6}, \frac{5}{6}), (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{3}{6}, \frac{4}{6}), (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}), (0, \frac{5}{6}), (\frac{5}{6}, \frac{4}{6}), (\frac{3}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{4}{6}, \frac{5}{6}), (\frac{5}{6}, \frac{2}{6}), (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})\}$   
e  $\{(\frac{1}{6}, 0), (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{2}{6}, \frac{3}{6}), (\frac{2}{6}, \frac{2}{6}), (\frac{1}{6}, \frac{3}{6}), (\frac{4}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{5}{6}, 0), (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}), (\frac{4}{6}, \frac{3}{6}), (\frac{1}{6}, \frac{4}{6}), (\frac{5}{6}, \frac{3}{6}), (\frac{2}{6}, \frac{5}{6})\}$ .  
 $\Pi(6) = 12$
3. (a) 3, 7, 10, 2, 12, 14, 11, 10, 6, 1, 7, 8, 0, 8, 8, 1, 9, 10, 4, 14, 3, 2, 5, 7, 12, 4, 1, 5, 6, 11, 2, 13, 0, 13, 13, 11, 9, 5, 14, 4, 3, 7, ...  
(c) (5, 5), (10, 15), (4, 19), (2, 0), (2, 2), (4, 6), (10, 16), (5, 0), (5, 5), ...

4. (c) As cinco primeiras iteradas de  $(\frac{1}{101}, 0)$  são  $(\frac{1}{101}, \frac{1}{101}), (\frac{2}{101}, \frac{3}{101}), (\frac{5}{101}, \frac{8}{101}), (\frac{13}{101}, \frac{21}{101})$  e  $(\frac{34}{101}, \frac{55}{101})$ .

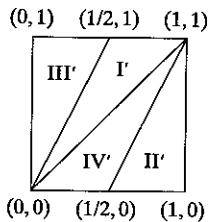
6. (b) As matrizes de automorfismos de Anosov são  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

(c) A transformação produz uma rotação de  $S$  por um ângulo de  $90^\circ$  no sentido horário.

9.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



Na região I:  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ; na região II:  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ; na região III:  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ; na região IV:  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ .

12.  $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$  e  $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$  formam um 2-ciclo e  $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$  e  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  formam um outro 2-ciclo.

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.1.6 [página 471]

1. (a) GIYUOKEVBH (b) SFANEFWJH

2. (a)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{bmatrix}$  (b) Não invertível (c)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 19 \\ 23 & 24 \end{bmatrix}$

(d) Não invertível (e) Não invertível (f)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{bmatrix}$

3. WELOVEMATH

4. Matriz decodificadora =  $\begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ; matriz codificadora =  $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}$

5. THEY SPLIT THE ATOM

6. I HAVE COME TO BURY CAESAR

7.  $A$  é invertível módulo 29 se, e somente se,  $\det(A) \neq 0 \pmod{29}$ .

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.1.7 [página 478]

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (a_0 - c_0) \\ b_n = \frac{1}{2} \\ c_n = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (a_0 - c_0) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} a_n \rightarrow \frac{1}{4} \\ b_n = \frac{1}{2} \\ c_n \rightarrow \frac{1}{4} \end{array} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$
  

$$\left. \begin{array}{l} a_{2n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6(4)^n} (2a_0 - b_0 - 4c_0) \\ b_{2n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6(4)^n} (2a_0 - b_0 - 4c_0) \\ c_{2n+1} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ b_{2n} = \frac{1}{2} \\ c_{2n} = \frac{1}{12} - \frac{1}{6(4)^n} (2a_0 - b_0 - 4c_0) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} a_{2n} = \frac{5}{12} + \frac{1}{6(4)^n} (2a_0 - b_0 - 4c_0) \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right\}$$

4. Autovalores:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ; autovetores:  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

**558 • • •** Álgebra Linear com Aplicações

5. 12 gerações; 0,006 %

$$6. \mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n+3}} [(-3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^{n+1} + (-3 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^{n+1}] \\ \frac{1}{2^{2n+1}} [(1 + \sqrt{5})^{n+1} + (1 - \sqrt{5})^{n+1}] \\ \frac{1}{2^{2n+1}} [(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n] \\ \frac{1}{2^{2n+1}} [(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n] \\ \frac{1}{2^{2n+1}} [(1 + \sqrt{5})^{n+1} + (1 - \sqrt{5})^{n+1}] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n+3}} [(-3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^{n+1} + (-3 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^{n+1}] \end{bmatrix}; \mathbf{x}^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad 8. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.18 [página 484]**

$$1. (a) \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 175 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 250 \\ 88 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 382 \\ 125 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 570 \\ 191 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{x}^{(6)} = L\mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 857 \\ 285 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(6)} \simeq \lambda_1 \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 855 \\ 287 \end{bmatrix}$$

7. 2,375      8. 1,49611

**CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.19 [página 489]**

$$1. (a) \text{Rendimento} = 33 \frac{1}{3}\% \text{ da população}; \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

$$(b) \text{Rendimento} = 45,8 \% \text{ da população}; \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}; \text{ é colhida } 57,9 \% \text{ da faixa mais jovem.}$$

$$2. \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,845 \\ 0,824 \\ 0,795 \\ 0,755 \\ 0,699 \\ 0,626 \\ 0,532 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2,090 \\ 0,845 \\ 0,824 \\ 0,795 \\ 0,755 \\ 0,699 \\ 0,626 \\ 0,532 \\ 0,418 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1,089 + 0,418}{7,584} = 0,199$$

4.  $h_I = (R - 1)/(a_1 b_1 b_2 \cdots b_{I-1} + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1})$

5.  $h_I = \frac{a_1 + a_2 b_1 + \cdots + (a_{J-1} b_1 b_2 \cdots b_{J-2}) - 1}{a_1 b_1 b_2 \cdots b_{I-1} + \cdots + a_{J-1} b_1 b_2 \cdots b_{J-2}}$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.20 [página 493]

1.  $\frac{\pi^2}{3} + 4 \cos t + \cos 2t + \frac{4}{9} \cos 3t$

2.  $\frac{T^2}{3} + \frac{T^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{2^2} \cos \frac{4\pi}{T} t + \frac{1}{3^2} \cos \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{4^2} \cos \frac{8\pi}{T} t \right) - \frac{T^2}{\pi} \left( \sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T} t + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{T} t \right)$

3.  $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{3\pi} \cos 2t - \frac{2}{15\pi} \cos 4t$

4.  $\frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 2t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 3t - \cdots - \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \cos nt \right)$

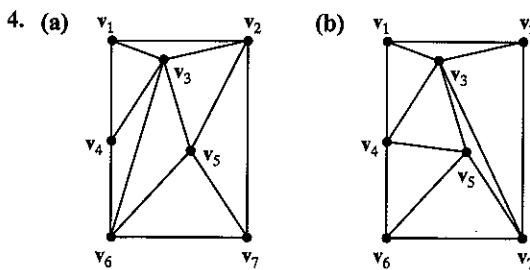
5.  $\frac{T}{4} - \frac{8T}{\pi^2} \left( \frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{10^2} \cos \frac{10\pi}{T} t + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \cos \frac{2n\pi}{T} t \right)$

### CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 11.21 [página 499]

1. (a) Sim;  $v = \frac{1}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2 + \frac{2}{5}v_3$       (b) Não;  $v = \frac{2}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2 - \frac{1}{5}v_3$   
 (c) Sim;  $v = \frac{2}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2 + 0v_3$       (d) Sim;  $v = \frac{4}{15}v_1 + \frac{6}{15}v_2 + \frac{5}{15}v_3$

2.  $m$  = número de triângulos = 7,  $n$  = número de pontos de vértice = 7,  
 $k$  = número de pontos de vértice na fronteira = 5; a Equação (7) é  $7 = 2(7) - 2 - 5$ .

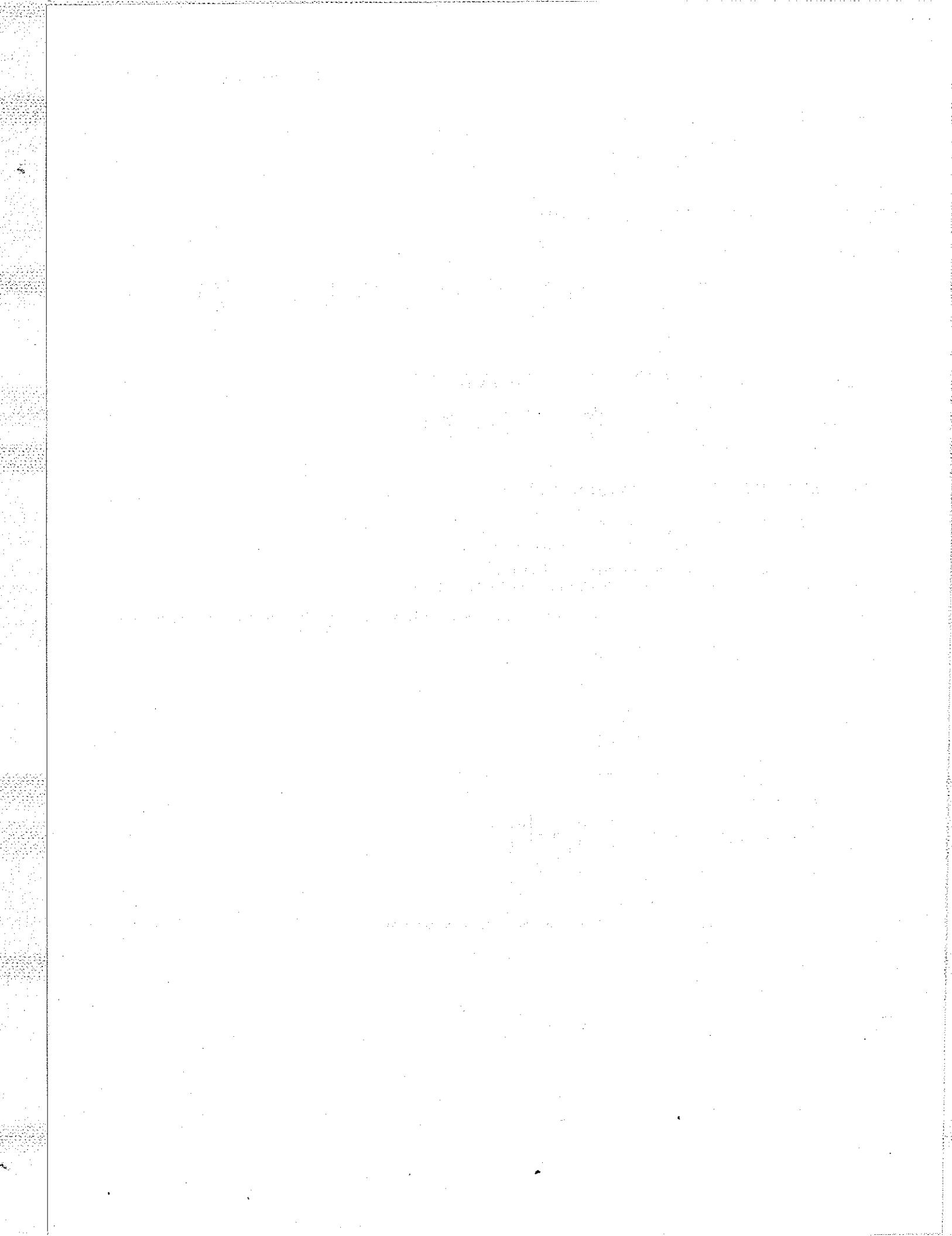
3.  $w = Mv + b = M(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) + (c_1 + c_2 + c_3)b = c_1(Mv_1 + b) + c_2(Mv_2 + b) + c_3(Mv_3 + b) = c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3$



5. (a)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$       (b)  $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 (c)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$       (d)  $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

7. (a) Dois dos coeficientes são zero.      (b) Pelo menos um dos coeficientes é zero.  
 (c) Nenhum dos coeficientes é zero.

8.  $\frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$



# Créditos das Fotos

**Capítulo 1.** Página 13 (em cima): Coleção Granger. Página 13 (embaixo): Cortesia do Museu Alemão, Munique.

**Capítulo 2.** Página 111: Coleção Granger.

**Capítulo 3.** Página 139: Coleção Granger.

**Capítulo 4.** Página 165 (em cima): Cortesia da Universidade Columbia (Nova Iorque). Página 165 (embaixo): Cortesia da Universidade de Berlim.

**Capítulo 6.** Página 304: Detalhe de uma pintura de P. S. Kroyer, 1897. Cortesia da Real Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras. Página 305: Foto de Gerda Schimpf, Cortesia da Universidade de Berlim.

**Capítulo 9.** Página 446: Science Photo Library / Photo Researchers.

**Capítulo 10.** Páginas 495 e 503: Coleção Granger. Página 522: © Corbis-Bettmann.

## Fotos Coloridas do Sumário:

**Figura 11.1:** Isaac Newton; Florian Cajori (editor), *Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*, traduzido e editado por Andrew Motte, Regentes da Editora da Universidade da Califórnia, © 1934, 1962.

**Figura 11.2:** Gregory Heisler / The Image Bank.

**Figura 11.3:** Roger Tully / Tony Stone Images, Inc.

**Figura 11.4 (esquerda):** Ulf E. Wallin / The Image Bank.

**Figura 11.4 (direita):** Simon Wilkinson / The Image Bank.

**Figura 11.5:** Chris Rorres.

**Figura 11.6:** Bruce Coleman, Inc.

**Figura 11.7:** Roy P. Fontaine / Photo Researchers.

**Figura 11.8:** Hank DeLespinasse / The Image Bank.

**Figura 11.9 (esquerda):** Tony Stone Images, Inc.

**Figura 11.9 (centro):** Gary Withey / Bruce Coleman, Inc.

**Figura 11.9 (direita):** Lou Jones / The Image Bank.

**Figura 11.10 (esquerda):** Wolf Von Dem Bussche / The Image Bank.

**Figura 11.10 (direita):** Michael Melford / The Image Bank.

**Figura 11.11:** James King-Holmes / Science Photo Library / Photo Researchers.

**Figura 11.12:** Charles Thatcher / Tony Stone Images, Inc.

**Figura 11.13:** David York / Medicchrome.

**Figura 11.14:** Chris Rorres.

**Figura 11.15:** Chris Rorres.

**Figura 11.16:** UPI / Bettmann.

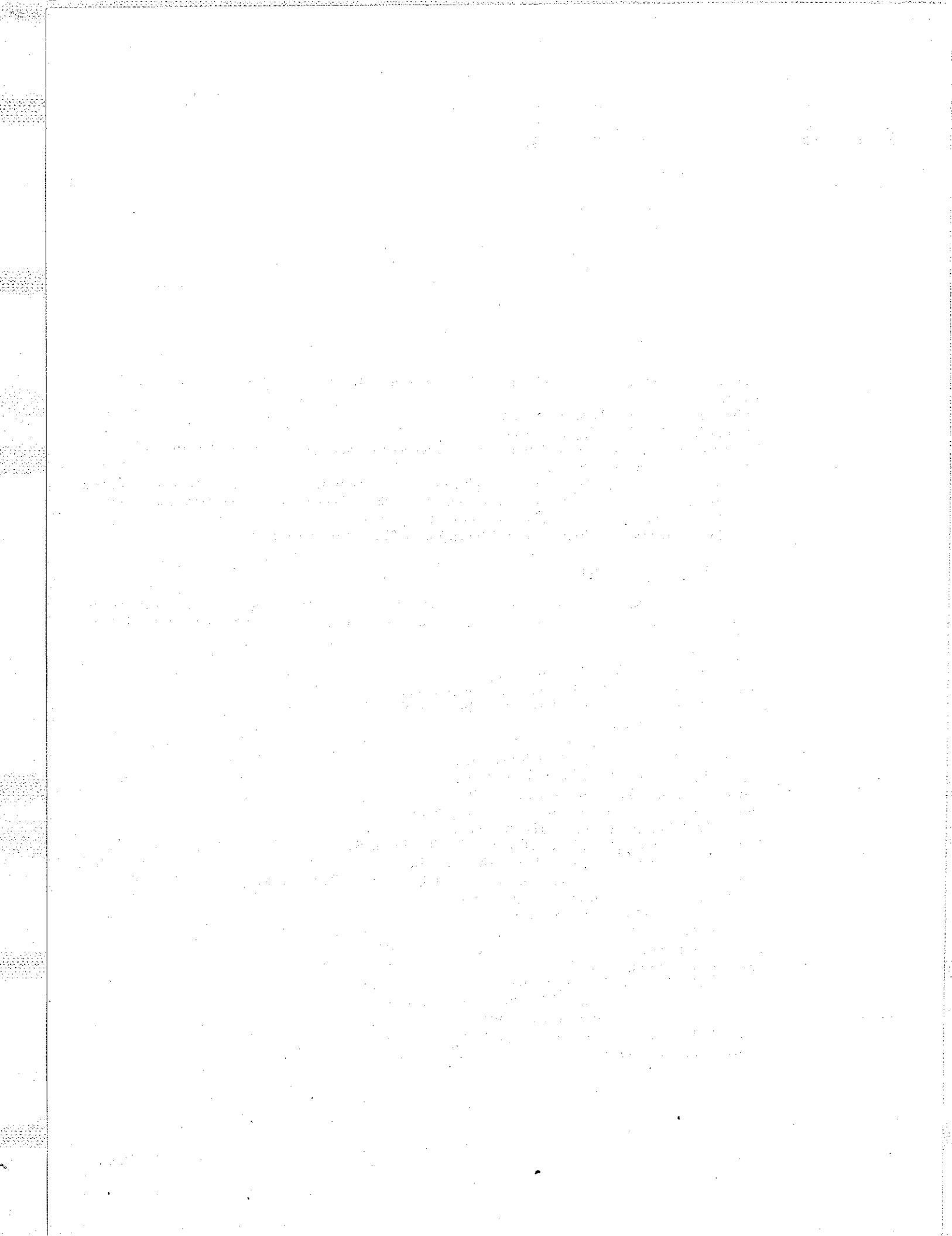
**Figura 11.17:** Erich Lessing / Art Resource.

**Figura 11.18:** Karen Kasmauski / Woodfin Camp & Associates.

**Figura 11.19:** Clyde H. Smith / Peter Arnold, Inc.

**Figura 11.20:** Newton Graphics / Blaize Zito Associates, Inc.

**Figura 11.21:** Chris Rorres.



# Índice

## A

- $A^{-1}$ , Ver Matriz inversa
- $A^T$ , Ver Matriz transposta
- Aberto, modelo econômico de Leontief, 413-415
- Absoluto, valor, de número complexo, 337-339
- Adição
  - espaços vetoriais complexos, 346-347
  - espaços vetoriais reais, 158
  - fechado sob, 162-163
  - matrizes, 42-43, 49-50
  - números complexos, 335-336
  - vetores em  $R^2$  e  $R^3$ , 102-104
  - vetores em  $R^n$ , 130
- Aditiva, inversa, 130-131
- Adjunta, matriz, 92-94
  - inversa usando, 93-95
- Administração de florestas, 416-420
- Afim, transformação, com morfismos, 495-496
- Afim, transformação, contrativa, 451-452
- Ajuste de curvas
  - interpolação spline cúbica, 384-388
  - linear de mínimos quadrados, 302-303
  - de mínimos quadrados, 302-305
  - quadrático de mínimos quadrados, 303-305
- Aleatória, algoritmo da iteração, 451
- Aleatório, passeio, 432-433
- Aleatórios, números, gerador de Fibonacci, 463-464
- Algébrica, multiplicidade, 248-249
- Algébrica, técnica de reconstrução (TRA), 436-442
- Algoritmo da iteração aleatória, 451
- Alocação, método húngaro, 378-382
- Alocação, problemas de, 377-382
- Alternativa de Fredholm, teorema da, 287-288
- Amostral, média e variância, 312-313
- Anemia falciforme, 475-476
- Ângulo
  - diretor de um vetor, 113-114
  - espaços com produto interno reais, 208-212
  - preserva, operador linear, 236-237
  - de rotação, 142-143
  - entre vetor e plano, 120-121
  - entre vetores, 109-110, 209-210
- Animais, colheita de população, 486-489
- Anosov, automorfismo, 464-465
- Anual, maximizando rendimento, 371-372
- Apertada, spline, 388-389
- Aplicação, 137-138
  - de semelhança na geração de fractais, 447-450

## Aproximação

- melhor, 223-224
- melhor possível, 305-306
- problemas de, 305-308
- projeções ortogonais como, 223-224
- Arestas dirigidas, 397
- Argumento, de número complexo, 341-343
- Argumento principal de número complexo, 341-342
- Aritmética, média, 202-203
- Aritmética modular, 456, 467-469
- Arnold, transformação do gato de, 456-463
- Arquimedes, 34
- Arredondamento, erro de, 321-322
- Árvore de permutações, 78-79
- Associada, forma quadrática, duas variáveis, 313-314
- Associada, forma quadrática, três variáveis, 318-320
- Associado, autovetor, 240
- Audição humana, modelo, 490-494
- Audição humana, ondas sonoras, 490-491, 493-494
- Audiência, maximizando uma, 407-408
- Aumentada, matriz, 29-30, 45
- Auto-espaco, 241-242
  - dimensão e diagonalizabilidade, 248-249
- Automorfismo de Anosov, 464-465
- Auto-similar, conjunto, Ver Conjunto auto-similar
- Autossômica, doenças recessivas, 475-476
- Autossômica, hereditariedade, 473-476
- Autovaleores, 88-89, 240-242
  - complexos, 152-153, 241-242
  - dominante de uma matriz de Leslie, 481-482
  - e formas quadráticas, 308-309
  - e invertibilidade, 242-243
  - de uma matriz de Leslie, 481-484
  - matrizes hermitiana, 357-358
  - matrizes simétricas, 251-252, 357-358
  - matrizes triangulares, 241
  - multiplicidades algébrica e geométrica, 248-249
  - de um operador linear, 283-286
  - de operadores lineares em  $R^n$ , 152
- Autovetores, 88-89, 240-242
  - associado, 240
  - complexos, 152-153
  - e diagonalização, 245-246
  - interpretação geométrica, 151-153
  - de matrizes simétricas, 251-252
  - de operadores lineares em  $R^n$ , 152
  - problema dos, 245-246, 251

## B

- Base, 245-246, 260-261
- combinações lineares e, 189-190
- complemento ortogonal, para, 211-212
- coordenadas em relação a uma, 176-180
- coordenadas em relação a uma ortogonal, 216-218
- coordenadas em relação a uma orthonormal, 215-217
- demonstrando que um conjunto é uma, 177
- efeito de mudança sobre matriz de operador linear, 281-282
- espaço-coluna, espaço-linha, espaço-nulo, para, 186-190
- espaço vetorial complexo, 346
- espaço vetorial real, 176-180
- mudança, 230-234, 281-282
- representação de vetores usando duas, 177-178
- Teorema de Mais-Menos, 179-182
- verificando, 180
- Base canônica, 150-151
- de  $C^n$ , 346
- de  $M_{mn}$ , 177-178
- de  $P_n$ , 177-178
- de  $R^n$ , 176-177
- de  $R^3$ , 176-177
- obter transformação linear pela imagem da, 260-261
- Bases ortogonais, 215-217
- encontrando pelo processo de Gram-Schmidt, 218-220
- Bases orthonormais, 251
- em  $C^3$ , 351-352
- encontrando por decomposição QR, 219-221
- em espaços com produto interno reais, 215-217
- mudança de, 232-234
- Bidimensional: espaço, Ver  $R^2$
- Biunívoca, correspondência, 174-175
- Bloco, multiplicação em, 47-48
- C
- $C_{ij}$ , 96-97
- $C^n$ , 346
  - norma e distância, 351
  - produto interno em, 350-351
- $C(-\infty, \infty)$ 
  - como espaço de dimensão infinita, 178
  - complexo, 346-347

- subespaço de funções, 163–164  
 transformação linear em  $C^1(-\infty, \infty)$ , 259–260
- $C^1(-\infty, \infty)$   
 conjuntos linearmente dependentes em, 172–173  
 transformação linear de  $C(-\infty, \infty)$ , 259–260  
 transformação linear em  $F(-\infty, \infty)$ , 259–260
- $C^2(-\infty, \infty)$   
 conjuntos linearmente dependentes em, 172–173  
 vetores ortogonais, 351
- $C^m(-\infty, \infty)$ , 178
- $C^\infty(-\infty, \infty)$ , 178
- $C[a, b]$   
 norma de um vetor em, 205–206  
 produto interno no espaço complexo, 350–351  
 produto interno no espaço real, 205
- $C[0, 2\pi]$ , norma de função no espaço complexo, 351
- Cadeia de Markov, 390–396  
 matriz de transição de, 391–394  
 regular, 393–394
- Cálculo de Variações, 114–115
- Calvície hereditária, 473–474
- Cancelamento, lei de, 50–51
- Canônica, matriz, Ver Matriz canônica
- Canônicos, vetores unitários, 115–116
- Cantor, conjunto de, 454–455
- Caos, 456–463  
 definição, 461–463
- Característica, equação, 88, 240–241
- Característico, polinômio, 240–241
- Característico, valor, 88. Ver também Autovalor
- Casamentos, problema dos, 381–382
- Cauchy, Augustin Louis, 132
- Cauchy-Schwarz, desigualdade, Ver Desigualdade de Cauchy-Schwarz
- Cayley-Hamilton, teorema de, 254–255
- Ciclo-límite, 439
- Cifrado, texto, 466
- Cifrado, vetor, 466–467
- Cifrar, 466
- Cifras de substituição, 466–467
- Cifras de Hill, 466–468  
 decifrando, 468–470  
 2-cifras, 3-cifras e  $n$ -cifras, 467–470  
 quebrando, 469–471
- Círculo de ponte de Wheatstone, 369
- Círculo elétrico, 367–368
- Círculo, 314–315  
 por três pontos, 364–365  
 unitário, 203–204
- Cisalhamento, 296–298  
 em computação gráfica, 425–426  
 em  $R^3$ , 302
- Codificadora, matriz, 467–468
- Coeficientes  
 de combinação linear de matrizes, 43  
 de Fourier, 307  
 matriz de, Ver Matriz de coeficientes
- Co-fatores, 91–92  
 expansão em, Ver Expansão em co-fatores  
 de linhas diferentes, 92–93  
 matriz de, 93
- Colheita sustentável  
 de ovelhas, 487–489  
 de populações animais, 486–489  
 matriz de, de animais, 486–488
- Colunas, 27, 41–42. Ver também Espaço-coluna, Vetor-coluna
- expansão em co-fatores ao longo da primeira, 92–93  
 multiplicação matricial por, 44  
 operações sobre, cálculo de determinante por, 84–85  
 proporcionais, determinante de matriz com, 83–84, 87  
 roda das, 405–406
- Combinação convexa, 495
- Combinação linear de matrizes, 43  
 produto matricial como, 44–45
- Combinação linear de vetores  
 e bases, 189  
 equações de dependência, 189–190  
 espaços vetoriais complexos, 346  
 espaços vetoriais reais, 164–165  
 e transformações lineares, 260
- Companheira, matriz, 255
- Compensação, matriz de, 406, 407
- Completando o quadrado, 314–316
- Complexos. Ver também Espaço vetorial complexo, Números complexos  
 autovalores, 152–153, 241–242  
 conjugados, 337–339  
 escalares, 333  
 expoentes, 344–345
- Componentes de um vetor  
 dependência no sistema de coordenadas, 118  
 encontrando, 104–105  
 no espaço bidimensional, 102–103  
 no espaço tridimensional, 104–105  
 produto escalar, 109–110  
 de  $\mathbf{u}$  ao longo de  $\mathbf{a}$ , 111–112  
 de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $\mathbf{a}$ , 111–112, 217
- Composição de transformações lineares, 143–146  
 espaços vetoriais na composição, 261–262  
 transformações inversas, 270–271, 276–278
- Composta de transformações, Ver Composição de transformações lineares
- Compressão, operador, 295–298
- Comprimento, de um vetor, Ver Norma euclidiana (comprimento)
- Computação gráfica, 421–425  
 deformações, 495–498  
 morfismos, 495, 497–500
- Computacionais, soluções, de sistemas lineares, 27, 36–38  
 contagem de operações, vários métodos, 321–323
- Comum, texto e vetor, 466–467
- Comutatividade, lei da, para a multiplicação, 48–49
- Condições iniciais, 292  
 sensitividade a, 463
- Cone elíptico, 319–320
- Conexões, grafos dirigidos, Ver Grafo dirigido
- Cônica, seção, 313–318  
 degenerada, 314, 318  
 imaginária, 318  
 não-degenerada, 314  
 por cinco pontos, 365
- Conjugada transposta, matriz, 354–355
- Conjugado complexo, 337–339  
 propriedades, 339
- Conjunto  
 congruente, 445  
 de Cantor, 454–455  
 denso, 461–463  
 limitado, 444–445  
 linearmente (in)dependente de vetores, 169–171
- relações entre os membros de um, 397  
 -solução, 28–29
- Conjunto auto-similar, 444–446  
 dimensão de Hausdorff, 446–447
- Conjuntos  
 não-sobrepostos e sobrepostos, 445  
 ortogonais em  $C^n$ , 351–353  
 ortogonais em espaços com produto interno reais, 215  
 ortonormais em  $C[0, 2\pi]$ , 351–353  
 ortonormais em espaços com produto interno reais, 215
- Consistência, Teorema da 194–195
- Consistência determinada por métodos de eliminação, 64–65
- Consistente, Ver Sistema linear consistente
- Constante de mola, 303–304
- Consumo, matriz de, 413–415
- Contagem de operações, em soluções computacionais, 321–323
- Contínuas, funções complexas, de uma variável real, 346–347
- Contorno, dados de, distribuição de temperatura, 428–430
- Contrações, 142–144  
 fractais, 445, 447–448  
 em espaços vetoriais, 258–259
- Contradomínio, de função, 137
- Contraposição lógica, 55–56
- Contrativa, transformação afim, 451–452
- Convergente, seqüência, 250–251
- Convexa, combinação, 495
- Coordenadas,  
 matriz de, Ver Matriz de coordenadas  
 de um ponto, 103–104  
 em relação a uma base ortogonal, 216–217  
 em relação a uma base ortonormal, 215–217  
 sistema de, Ver Sistema de coordenadas  
 vetor de, 176  
 vetor independente de, 118–119
- Coordenado, plano, 103–104
- Coordenados, Ver Eixos coordenados
- Corrente, 367–368
- Correspondência biunívoca, 174–175
- Cortadas, vetor de, 418–419
- Corte sustentável de florestas, 416–420
- Cosseno diretor de um vetor, 113–114
- Cramer, Gabriel, 95
- Cramer, regra de, Ver Regra de Cramer
- Crescimento  
 de floresta de pinheiros, 420  
 matriz de, 418  
 populacional por faixa etária, 479–484  
 populacional nulo, 483–484
- Criptografar, 466
- Criptografia, 466–471
- Cruzado, termo, Ver Termo com produto misto
- Cúbica, raiz, Ver Números complexos  
 spline, Ver Spline
- Cúbica emendada, Ver Spline
- Curva, ajuste de, Ver Ajuste de curvas  
 interpoladora, 384  
 spline, cúbica, Ver Spline
- Curva quadrática, ajuste de mínimos quadrados, 303–305
- Custo, matriz de, 372  
 minimizando, 372–373
- Custo e problemas de alocação, 377–382

**D**

Daltonismo, 473-474  
 De Moivre, Abraham, 344  
 De Moivre, fórmula de, 343-344  
 Decifrar, 466  
     cifras de Hill, 468-470  
 Decodificadora, matriz, 470  
 Decomposição  
     em conjuntos auto-similares, 445-446  
     de Jordan, 255-256  
     QR, 219-221  
 Decomposição LU, 327-330  
     procedimento para encontrar, 329-330  
 Deformações, 495-497  
     dependentes de tempo, 496-498  
 Degenerada, seção cônica, *Ver Cônica, seção*  
 Demanda, vetor, 413-414  
 Densidade de imagem, 495  
 Denso, conjunto, 461-463  
 Dependência, equações de, 189-190  
 Derivação, operador de, 264-265  
 Desigualdade de Cauchy-Schwarz  
     em  $R^n$ , 131-133, 209  
     espaços com produto interno reais, 208-209  
     espaços com produto interno complexos, 353-354  
 Desigualdade de Sylvester, 200  
 Deslocamento, como vetor, 101  
 Desvio, 305-306  
 det, 79-80  
 det (A), 78  
 Determinante, 78-80  
     calculando, 80  
     calculando de ordem n, 82  
     calculando por redução por linhas, 83-84  
     critério de posto usando, 199-200  
     expansão em co-fatores, 91-95  
     função, 77, 79-80  
     interpretação geométrica, 117-118  
     matrizes com linhas ou colunas proporcionais, 83-84, 87  
     matrizes elementares, 83-84  
     matrizes triangulares, 82-83  
     notação e terminologia, 80-81  
     e operações elementares sobre linhas, 82-85  
     de operador linear, 282-283  
     produto matricial, 86-87  
     produto vetorial em formato de, 114, 116  
     propriedades, 85-89  
     teste de invertibilidade, 86-88  
     wronskiano, 171-173  
 Diagonal, matriz, *Ver Matriz Diagonal*  
 Diagonal principal, 42  
 Diagonalização, 245-246  
     cônicas, 313-318  
     formas quadráticas, 313-318  
     matrizes simétricas, 252-253  
     multiplicidade algébrica, 365-366  
     multiplicidade geométrica, 365-366  
     ortogonal, 251-253, 313  
     para calcular potências de matrizes, 248-249  
     para resolver sistemas lineares de equações diferenciais de primeira ordem, 293-294  
     problema da, 245-246, 251  
     procedimento, 246-248  
     quâdricas, 318-321  
     unitária, 355-357

**Diferença**

matrizes, 42-43  
 números complexos, 335  
 de potencial, 367-368  
 vetores em  $R^2$  e  $R^3$ , 102-103  
 vetores em  $R^n$ , 130-131

Diferenciais, equações. *Ver Equações diferenciais*

Dilatações, 142-144, 296-297, 445

em espaços vetoriais, 258-259

Dimensão, *Ver também* Teorema da dimensão espaço-linha e espaço-coluna, 192  
 espaços vetoriais complexos, 346  
 espaços vetoriais reais, 179-180  
 finita, espaços vetoriais de, 178-181  
 de Hausdorff, 446-447  
 topológica, 446-447

Dinâmico, sistema, *Ver Sistema dinâmico*

Dirac, matrizes de, 337

Dirac, Paul Adrien Maurice, 337

Direta, substituição, 327

Diretor, ângulo e cosseno, 113-114

Dirigido, grafo, *Ver Grafo dirigido*

Discreto

    passo aleatório, 432-433

    propriedade do valor médio, 430

    sistema dinâmico, 461-463

    sistema dinâmico, caótico, 461-463

Distância, *Ver também* Distância euclidiana

entre dois planos paralelos no espaço

    tridimensional, 125

entre dois pontos, 107-108

espaços com produto interno complexos, 351

espaços com produto interno reais, 203-204,

209

entre um ponto e uma reta, 112-113

entre um ponto e um plano no espaço

    tridimensional, 123-125

Distância euclidiana, 131-133

espaços com produto interno complexos, 347-

348, 351

espaços com produto interno reais, 203, 209

Distância total percorrida, minimizando, 380-381

Distribuição, de temperatura de equilíbrio, 428-

433

    de vacinas, 409

Distribuição etária de fêmeas, em animais, 480-

483

    humanas, 483-484

Distrofia muscular, 473-474

Divisão, *Ver Números complexos*

Doença de Tay-Sachs, 475-476

Doenças genéticas recessivas, 475-476

Dominância, grafo dirigido por, 401-402

Dominante, autovalor, 481-482

Dominante, gene, 473-474

Domínio, de função, 137

Duas pessoas com soma zero, jogos de, 405-408

**E**

Econômico, modelo, *Ver Modelo econômico de Leontief*

Eixo

    imaginário, 334-335

    real, 334-335

    de rotação, 142-143, 147-148

Eixos

    coordenados, 103-104

    não-retangulares, 174-176

translação de, 104-106

Eixos principais, teorema dos, *Ver Teorema dos Eixos Principais*

Elementares

matrizes, *Ver Matriz elementar*

operações, *Ver Operações elementares sobre linhas*

produtos, 79-80

Elétrico, circuito, 367-368

Elétrico, potencial, 367-368

Eliminação de Gauss-Jordan, 33-35

aplicação em computador, 36-38

contagem de operações, 322-326

soluções de mínimos quadrados, 225

sistemas lineares homogêneos, 36-37

Eliminação gaussiana, 31-35

aplicação em computador, 36-38

contagem de operações, 322, 324-326

retro-substituição com, 35-36, 322

soluções de mínimos quadrados, 225

Elipse, 314-315

Elipsóide, 319-320

Elíptico, cone, 319-320

Elíptico, parabolóide, 319-320

Entradas, de uma matriz, 41-42

Equação do plano, forma geral, 121-122

Equação do plano, forma ponto-normal, 121

Equação paramétrica, 123

Equações

de dependência, 189-190

normais, 224, 302-304

de translação, 104-106

Equações diferenciais, 292-295

diferenciais de primeira ordem, 292-293

solução particular, 292

Equações lineares, 28-29. *Ver também* Sistemas lineares

solução geral, 28

Equações quadráticas

duas variáveis, 313-314

três variáveis, 318-320

Equilíbrio, distribuição de temperatura de, 428-433

Equivalência

de inteiros módulo p, 467-468

de vetores, 102

por linhas, de matrizes, 58-59

Erro

de arredondamento, 321-322

de medida, 305-306

quadrático médio, 305-306

Escala, mudança de, *Ver Homotetia (mudança de escala)*

Escalar, multiplicação por, *Ver Multiplicação por escalar*

Escalares, 41-42, 102. *Ver também* Autovalores;

Números complexos

complexos, 333

exemplos físicos de, 101

Escalonada, forma, *Ver Forma escalonada (reduzida) por linhas*

Escapeamento, modos de leque e paralelo, 436-437

Esfera, por quatro pontos, 365-366

Esfera unitária, 203-204

Espaço, *Ver também* Espaço vetorial

bidimensional, *Ver R<sup>2</sup>*

C (-∞, ∞) complexo, 346-347

de Hilbert, 219-220

## 566 • • • Índice

- tridimensional, Ver  $R^3$   
unitário, 350-353
- Espaço com produto interno, real, 201-207  
complexo, 350-353
- Espaço euclidiano  
 $n$ -dimensional, 130-135, 202-203  
 $n$ -dimensional complexo, 347-348
- Espaço gerado, 165-166  
espaços vetoriais complexos, 346  
espaços vetoriais reais, 165-167, 178  
por um ou dois vetores em  $R^3$ , 165-166  
Teorema de Mais-Menos, 179-182
- Espaço vetorial  
das funções reais de uma variável real, 159-215  
de dimensão infinita, 178  
nulo, 160
- Espaço vetorial complexo, 345-348  
matrizes hermitianas, 355-358  
matrizes normais, 356  
matrizes unitárias, 354-356
- Espaço-coluna e espaço-linha, 184-186  
bases para, 186-190  
dimensão, 192  
como espaço matricial fundamental, 192  
relação geométrica com espaço-nulo, 211-212
- Espaços matriciais fundamentais, 192
- Espaços vetoriais, 158-159. Ver também Base;  
Dimensão; Nulidade; Posto  
de dimensão finita, 178-181  
de dimensão infinita, 178  
exemplos, 158-160  
independência linear, 168-173  
propriedades, 160  
subespaços, 162-164  
transformações lineares, 258-262
- Espaço-solução, sistema homogêneo, 164
- Esponja de Menger, 454-455
- Esquina, pontos de, Ver Pontos extremos
- Estado estacionário, vetor de, 394
- Estratégias, 406-408  
puras ou simples e mistas, jogos de matriz, 407-408
- Estratégias ótimas, jogos de matriz  $2 \times 2$ , 408-409
- Etapa (fase), para frente, 316  
para trás, 322
- Euclidiana  
distância, Ver Distância euclidiana  
medida, 136  
norma, Ver Norma euclidiana (comprimento)
- Euclidiano, espaço, Ver Espaço euclidiano  
 $n$ -dimensional  
produto interno, Ver Produto interno euclidiano
- Euler, função Phi de, 472-473
- Expansão em co-fatores ao longo da primeira coluna, 92-93  
linha, 91-92
- Expansões, 295-298
- Exponentes, lei de, matricial, 52-53
- Exponentes complexos, 344-345
- Extremos, pontos, Ver Pontos extremos
- F**  
 $F(-\infty, \infty)$ , 159  
conjuntos linearmente dependentes em, 171-172  
como espaço de dimensão infinita, 178  
transformação linear de  $C^1(-\infty, \infty)$  em, 259-260
- F** [ $a, b$ ], 159-160  
 $F(a, b)$ , 159-160  
Faixa etária, crescimento por, 479-484  
Faixa etária fértil, 480-481  
Família, influências numa, 398-399  
Fase (etapa), para frente, 316  
para trás, 322
- Fechado, conjunto, 444-445  
modelo econômico de Leontief, 411-413
- Fechado na adição e na multiplicação por escalar, 162-163
- Feixe, densidade de, 437-438
- Fêmeas, distribuição etária, Ver Distribuição etária de fêmeas
- Fértil, faixa etária, 480-481
- Fibonacci, gerador de números aleatórios, 463-464
- Fibrose cística, 475-476
- Final, ponto, de vetor, 102
- Final, triângulo, morfismos, 495-496
- Fixos, pontos, 459
- Florestas, administração de, 416-420
- Força, como vetor, 101
- Forma escalonada por linhas, 31-32  
bases do espaço-linha e do espaço-coluna, 187  
de matrizes quadradas: matrizes triangulares, 67  
não-unicidade, 33-34
- Forma escalonada reduzida por linhas, 31-32  
de matrizes quadradas, 51  
método de eliminação para produzir, 32-34  
unicidade, 33-34
- Forma geral da equação do plano, 121-122
- Forma polar, números complexos, 341-345
- Forma vetorial, equação, da reta, 123-124  
do plano, 122-123
- Formas lineares, 308
- Formas quadráticas, 308-309  
associada, 313-314, 318-320  
diagonalização, 313-318  
indefinida, não-negativa, não-positiva, negativa, 310-311  
positiva, 309-310  
problemas envolvendo, 309-312  
redução a uma soma de quadrados, 313-314  
translação, 314-318
- Fourier, coeficientes de, 307  
Jean Baptiste Joseph, 307  
séries de, 306-308
- Fractais, 444-453  
algoritmo para gerar, 449-452  
aplicação de semelhança na geração de, 447-450  
definição, 447
- Fredholm, Teorema da alternativa de, 287-288
- Frente, etapa (fase) para, 316
- Fronteira, ponto de malha de, 430
- Fronteira de um conjunto, 373, 438-439, 444-445, 496
- Função objetivo, 372-373
- Função Phi de Euler, 472-473
- Funções  
complexas de uma variável real, 346-347  
complexas contínuas de uma variável real, 346-347  
de  $R^n$  em  $R$ , 137-138  
de  $R^n$  em  $R^m$ , 137-138  
determinante, 77, 79-80  
iguais, 137-138  
independência linear, 172-173
- reais de uma variável real, 77, 137-138
- Fundamentais, espaços matriciais, 192
- Fundamental, teorema, dos jogos com soma zero, 406-407
- G**
- Gato, transformação do, de Arnold, 456-463
- Gauss, Karl Friedrich, 34
- Gauss-Jordan, eliminação de, Ver Eliminação de Gauss-Jordan
- Gaussiana, eliminação, Ver Eliminação gaussiana
- Gene, dominante e recessivo, 473-474
- General Electric, sistema de tomografia, 435-436
- Genética, 473-478  
doença, 475-476
- Genótipo, 473-474  
distribuição em população, 474-476
- Geométrica, multiplicidade, 248-249  
programação linear, 370-376
- Gerador de Fibonacci de números aleatórios, 463-464
- Geral, forma, equação do plano, 121-122  
solução, Ver Solução geral
- Gráfico dirigido, 397-400  
arestas dirigidas, 397  
conexões de 27, 28 e 29 passos, 399-402  
matriz de vértices, 397-399  
panelas, 400-401  
poder de um vértice, 402  
por dominância, 401-402  
vértices, 397
- Gram, Jørgen Pederson, 219
- Gram-Schmidt, processo, 218-220
- H**
- Hausdorff, dimensão de, 446-447
- Hemofilia, 473-474
- Hereditariedade, 473-474  
autossómica, 473-476  
ligada ao sexo, 473-474, 476-478
- Hermite, Charles, 356
- Hermitiana, Ver Matriz hermitiana
- Hill, cifras de, Ver Cifras de Hill
- Hipérbole, 314-315
- Hiperbolóides, 313-314
- Hiperplano, 440-441
- Homogêneos, Ver Sistemas lineares homogêneos
- Homotetia (mudança de escala), 142-144, 258-259. Ver também Contrações; Dilatações  
computação gráfica, 422-423  
conjuntos auto-similares, 445, 447-448  
em espaços vetoriais, 258-259
- Hooke, lei de, 303-304
- Householder, A. S., 73  
matriz de, 72-73
- Humana, modelo para a audição, 490-494
- Húngaro, método, 378-382
- I**
- Identidade, matriz, 50-51  
operador, Ver Operador identidade
- Identidade de Lagrange, 114-116
- Igualdade de  
funções, 137-138  
inteiros módulo  $p$ , 467-468  
matrizes, 42-43  
números complexos, 334-335  
vetores em  $R^2$  e  $R^3$ , 102

- vetores em  $R^n$ , 130  
 Ilimitada, região viável ilimitada, 373  
     solução ilimitada, 375  
 Imagem, 457-459  
     densidade de, 495  
 Imagem de  
     função, 137  
     um quadrado, 299  
     retas, 299-300  
     transformação linear, 137, 264-266  
 Imaginária, cônica, 318  
     parte, de número complexo, 334-335  
 Imaginário, eixo, 334-335  
 Imaginários, números, 334, 335. *Ver também*  
     Números complexos  
 Ímpar, permutação, 79  
 Incógnitas, 28  
     eliminando, 29-30  
 Inconsistente, *Ver* Sistema linear inconsistente  
 Indefinida, forma e matriz, 310-311  
 Independência linear  
     de conjuntos de vetores, 169-171  
     espaços vetoriais complexos, 346  
     espaços vetoriais reais, 168-173  
     funções, 171-173  
     interpretação geométrica, 170-172  
     e o Teorema de Mais-Menos, 179-182  
 Indústria lucrativa, no modelo de Leontief, 414-415  
 Inferior, matriz triangular, *Ver* Matriz triangular inferior  
 Infinita, dimensão de espaço vetorial, 178  
 Influências numa família, 398-399  
 Inicial, condição, 292  
     ponto, de vetor, 102  
     problema de valor, 292-293  
     triângulo, morfismos, 495  
     vetor de distribuição etária, 480-481  
 Injetora, transformação, *Ver* Transformações lineares injetoras  
 Input-Output, matriz de, 412-413  
 Interior, ponto de malha, 430  
 Interpolação, 384. *Ver também* Spline  
 Invariantes,  
     retas, 243-244  
     de e por semelhança, 282-283  
 Inversa, matriz, *Ver* Matriz inversa  
     operação, 57-58  
     substituição, 35-35, 322  
     transformação linear, 269-271  
 Inversão, permutações, 78-79  
 Inverso multiplicativo de  $a$  módulo  $m$ , 468-410  
 Invertível, matriz, *Ver* Matriz invertível  
 Isotérmica, 428-429  
 Iteração aleatória, algoritmo da, 451  
 Iteração de Jacobi, 432  
 Iterada, 439-443, 450-451, 457-463
- J
- Jacobi, iterada de, 432  
 Jogos de matriz, 405-406  
     de duas pessoas com soma zero, 405-408  
     estratégias puras ou simples e mistas, 407-408  
     estritamente determinados, 407  
     matriz de pagamento, 406-407  
     pagamento, 405-406  
     teorema fundamental, com soma zero, 406-407  
     teoria de, *Ver* Teoria de Jogos
- Jordan, decomposição de, 255-256  
 Jordan, Wilhelm, 34
- K
- Kirchhoff, leis de, 367-368  
 Kroenecker, redução de, 313-314
- L
- Ladrilhado, plano, 460-461  
 Lagrange, identidade de, 114-116  
     Joseph Louis, 115  
     redução de, 313-314  
 Legendre, polinômios de, 222-223  
 Lei(s)  
     da comutatividade para a multiplicação, 48-49  
     de Hooke, 303-304  
     de Kirchhoff, 367-368  
     de Ohm, 367-368  
 Leontief, *Ver* Modelo econômico de Leontief  
 Leque, escaneamento em modo de leque, 436-437  
 Leslie, matriz de, *Ver* Matriz de Leslie  
 Líder, 31-32  
 Líderes, variáveis, 32-33  
 Limitada, região viável, 373  
 Limite, ciclo, 439  
 Limite de uma sequência, 250-251  
 Linear, combinação, *Ver* Combinação linear de matrizes e de vetores  
     independência, *Ver* Independência linear  
     programação, *Ver* Programação Linear  
     transformação, *Ver* Transformações lineares  
 Lineares, equações, 28-29, *Ver também* Sistemas lineares  
     formas, 308  
     operadores, *Ver* Operadores lineares  
     sistemas, *Ver* Sistemas lineares  
 Linearmente dependente e independente, *Ver* Independência linear  
 Linha, espaço-, *Ver* Espaço-linha  
     matriz-, 41-42  
     vetor-, *Ver* Vetor-linha  
 Linhas, 27  
     expansão em co-fatores ao longo da primeira, 91-92  
     multiplicação matricial por, 44  
     proporcionais, determinantes de matrizes com, 83-84, 87  
     roda das, 405-406  
 LINPAK, 326-327  
 Livres, variáveis, 32-33  
 Lógica, contraposição, 55-56  
 Lucrativa, indústria, no modelo de Leontief, 414-415  
 Lucro de vendas, maximizando o, 370-372
- M
- $M_{ij}$ , 91  
 $M_{mn}$ . *Ver* Matrizes  $m \times n$   
 Mais-Menos, teorema de, 179-182  
 Malha, pontos de, 430  
 Mão direita e esquerda, sistema de coordenadas de, 104  
 Mapa de pixels, 457-461  
     período, 459-461  
 Markov, cadeias (processos), 390-396  
     matriz, 391-392  
 Matricial, polinômio, 53  
     transformação, 258
- Matriz, *Ver também* Matrizes  
     adjunta, 92-95  
     aumentada, 29-30, 45  
     em blocos, 44, 47-48  
     de co-fatores, 93  
     codificadora, 467-468  
     de colheita de animais, 486-488  
     companheira, 255  
     de compensação, 406-407  
     de custo, 377-378  
     decodificadora, 470  
     definição, 27, 29, 35  
     entradas, 41-42  
     de entradas complexas, 336  
     escalonada por linhas, *Ver* Forma escalonada por linhas  
     escalonada reduzida por linhas, *Ver* Forma escalonada reduzida por linhas estocástica, 391-392  
     jogos de, *Ver* Jogos de Matriz de Householder, 72-73  
     identidade, 50-51  
     indefinida, 310-311  
     de input-output, 412-413  
     de Markov, 391-392  
      $n \times n$ , *Ver* Matriz quadrada  
     não-negativa, 310-311  
     não-positiva, 310-311  
     negativa, 310-311  
     nilpotente, 255  
     normal, 356  
     notação e terminologia, 40-42  
     nula, 50-51  
     operações aritméticas, 42-46, 48-54  
     ortonormal, 229-230  
     de pagamento, 406-407  
     particionada, 44, 47-48  
     positiva, 309-310  
     potência, *Ver* Potências de matrizes  
     de probabilidade, 391-392  
     produto interno gerado por, 204-207  
     produtos elementares, 79-80  
     raiz quadrada, 48  
     de reposição, 418-419  
     submatriz, 44, 310-311  
     tamanho de, 41-42  
     transposta conjugada, 354-355  
     de troca, 412-413  
     de vértices, 397-399  
     zero, 50-51
- Matriz canônica, 138, 150-151  
     de compressões e expansões, 295-296  
     da inversa de operador injetor, 149-150  
     de projeções, 151-152  
     de projeções ortogonais, 226-227
- Matriz de coeficientes, 45  
 comum, resolvendo sistemas com, 62-63  
     e espaço-coluna / espaço-linha / espaço-nulo, 184-185  
     fatoração em matrizes triangulares, 326-328  
     de sistema de equações diferenciais, 294-295
- Matriz de consumo, 413-415  
     produtiva, 414-415
- Matriz de coordenadas, 230  
     de uma imagem, 422-423  
     mudança de base, 230-234
- Matriz de Leslie, *Ver também* Modelo de Leslie  
     autovalores, 481-484

- colheita de animais, 487  
crescimento populacional, 481-484  
**Matriz de operador linear**, 274-276, 280-281  
  identidade, 275-276  
**Matriz de transformação linear**, 273-276  
**Matriz de transição**, 231-232, 280-281  
  de cadeia de Markov, 391-394  
**Matriz diagonal**, 66-68  
  autovalores, 241  
  determinante de, 82  
  de operador linear, 284-286  
**Matriz elementar**, 56-58  
  determinante, 83-84  
  transformações usando 297-298  
**Matriz hermitiana**, 355-356  
  autovalores, 357-358  
**Matriz inversa**, 51  
  de matriz diagonal, 66-67  
  de matriz elementar, 57-58  
  método para encontrar, 58-60  
  de operadores injetores, 149-150  
  propriedades, 51-52  
  resolvendo sistemas lineares usando, 62-63,  
    322, 324-325  
  de transformações lineares, 298  
  usando adjunta, 93-95  
**Matriz invertível**, 51  
  autovalores, 242-243  
  diagonal, 66-67  
  matrizes elementares, 57-58  
  módulo  $m$ , 468-470  
  número de inversas, 51-52  
  propriedades, 63-65  
  teste de determinante, 86-88  
  transposta, 53-54  
  triangular, 67  
**Matriz ortogonal**, 228-230  
  como operador linear, 229-230  
**Matriz quadrada**. *Ver também* Determinante;  
Diagonalização; Matriz inversa; Matriz invertível  
anti-simétrica, 55, 70-71  
decomposição  $LU$ , 327-328  
expressões polinomiais, 53  
hermitiana, 355-356  
nilpotente, 255  
normal, 356  
de ordem  $n$ , 42  
potências, 52-53  
como produto de matrizes elementares, 57-58  
simétrica, *Ver* Matriz simétrica  
singular, 51  
submatrizes principais, 310-311  
traço, 45-46  
unitária, 354-356  
**Matriz simétrica**, 55, 67-68  
  autovalores, 251-252, 357-358  
  diagonalização, 252-253  
  formas quadráticas, 309-311  
**Matriz transposta**, 45-46  
  conjugada, 354-355  
  determinante, 82  
  espaço matricial fundamental, 192  
  invertibilidade, 53-54  
  posto, 193  
  produto de matriz com sua, 68-69  
  propriedades, 53-54  
  triangular, 67  
**Matriz triangular**, inferior e superior, 66-68  
  autovalores, 241  
cálculo de determinante, 82-83  
fatoração de sistemas lineares em, 326-328  
  inversa, 67, 94  
**Matriz-coluna e -linha**, 41-42  
**Matrizes**, *Ver também* Matriz  
  que comutam, 68  
  de crescimento, modelo de administração  
    florestal, 418  
  de Dirac, 337-338  
  equivalentes por linhas, 58-59  
  espaços matriciais fundamentais, 192  
  iguais, 42-43  
  propriedades operacionais, 48-52  
   $4 \times 6$ , posto e nulidade, 192-193  
  semelhantes, 281-286  
  série infinita de, 250-251  
  como tabelas, 27  
**Matrizes  $2 \times 2$**   
  autovalores, 240  
  determinantes, 79-80  
  espaço vetorial das, 158-159  
  espaços com produto interno, 204-205  
  espaços com produto interno complexos, 350-  
    351  
  interpretação geométrica do determinante de,  
    117-118  
  jogos de, 408-409  
  unitária, 355-356  
  vetores ortogonais em, 210  
**Matrizes  $m \times n$** , 41-42  
  base canônica, 177-178  
  espaço vetorial complexo, 346  
  espaço vetorial real, 159  
  relação geométrica entre espaço-linha e espaço-  
    nulo, 211  
  subespaços de, 163-164  
**Matrizes  $3 \times 3$**   
  adjunta, 93-94  
  autovalores, 240-241  
  decomposição  $QR$ , 220-221  
  determinante, 79-80, 83, 117-118  
  interpretação geométrica do determinante de,  
    117-118  
  ortogonais, 229  
**Maximizando**  
  uma audiência, 407-408  
  o lucro de vendas, 370-372  
**Média**, 202-203  
  amostral, 312-313  
**Medida euclidiana**, 136  
**Médio**, erro quadrático, 305-306  
  propriedade do valor, 429-430  
**Menger**, esponja de, 454-455  
**Menor da entrada**  $a_{ij}$ , 91-92  
  de linhas diferentes, 92-93  
**Método húngaro**, 378-382  
**Métodos de eliminação**, 32-35  
  determinando consistência por, 64-65  
  de Gauss-Jordan, *Ver* Eliminação de Gauss-  
    Jordan  
  gaussiana, *Ver* Eliminação gaussiana  
**Minimizando**,  
  custo, 372-373  
  distância total percorrida, 380-381  
  a soma de propostas, 378-379  
**Mínimos quadrados**  
  ajuste de curvas, 302-305  
  ajuste linear de, 302-303  
  modelo para a audição humana, 490-494  
problemas de aproximação, 305-308  
resolução de sistemas lineares inconsistentes,  
  223-227  
  solução de, 224-225  
**Mistas**, estratégias, jogos de matriz, 407-408  
**Modelo de Leslie** para o crescimento populacional,  
  479-484  
**Modelo econômico de Leontief**, 410-412  
  aberto [produção], 413-415  
  fechado [input-output], 411-413  
  indústria lucrativa, 414-415  
  matriz de consumo produtiva, 414-415  
  matriz de troca ou matriz de input-output, 412-  
    413  
  vetor-demanda e vetor-produção, 413-414  
  vetor-preço, 412  
**Modelo para a audição humana**, 490-494  
**Modo de leque e paralelo**, escaneamento, 436-437  
**Modular, aritmética**, 456, 467-469  
**Módulo**, 467-468  
  de número complexo, 337-339  
**Mola**, constante de, 303-304  
**Monte Carlo**, técnica, *Ver* Técnica de Monte Carlo  
**Morfismos**, 495, 497-500  
  dependentes do tempo, 497-500  
  triângulo final, 495-496  
  triângulo inicial, 495  
**Multiplicação**  
  por  $A$ , 138  
  lei da comutatividade para a, 48-49  
  de números complexos, 335-336, 342-343  
**Multiplicação matricial**, 49-50. *Ver também*  
  Produto matricial  
  em blocos, 47-48  
  por colunas e linhas, 44-44  
  efeito geométrico, 298-299  
  múltiplo escalar, 42-43  
  natureza não-comutativa, 48-50  
  do ponto de vista do produto escalar, 134-135  
**Multiplicação por escalar**  
  em espaços vetoriais reais, 158  
  fechado na, 162-163  
  de matriz, 42-43  
  de vetor complexo, 346-347  
  de vetor em  $R^2$  e  $R^3$ , 102-103  
  de vetor em  $R^n$ , 130  
**Multiplicação vetorial**. *Ver também* Produto  
  interno; Produto interno euclidiano;  
  Produto vetorial  
  múltiplo escalar em espaço vetorial, 102-104  
  múltiplo escalar em  $R^2$  e  $R^3$ , 102-103  
  múltiplo escalar em  $R^n$ , 130-133  
  produto misto, 116-117  
**Multiplicidade, algébrica e geométrica**, 248-249  
**N**  
   $n$ -dimensional, 130. *Ver também*  $R^n$   
  Não-cortadas, vetor de, 416-417  
  Não-degenerada, cônica, 314  
  Não-negatividade, restrições, 372-373  
  Não-periódicos, pontos de pixel, 461-463  
  Não-retangular, sistema de coordenadas, 174-176  
  Não-sobrepostos, conjuntos, 445  
  Não-trivial, solução, 35-36  
  Natural, spline, 386-387  
  Negativo  
    espaços vetoriais complexos, 335  
    espaços vetoriais reais, 158

- vetor, em  $R^2$ ,  $R^3$  e  $R^n$ , 102  
 Newton, Isaac, 34  
 Norma, Ver Norma euclidiana (comprimento)  
 Norma euclidiana (comprimento), 131-133  
     cálculo usando base ortonormal, 216-217  
     espaços com produto interno reais, 203-204, 209  
     espaços com produto interno complexos, 337-338, 347-348, 350-351  
 Normais, equações, 224, 302-304  
 Normal, vetor, a um plano, 121  
     matriz, 356  
 Normalização, 215  
 Nula, transformação linear, Ver Transformação linear nula  
 Nulidade  
     e espaços-linha e espaços-coluna, 192-193, 195  
     de matriz  $4 \times 6$ , 192-193  
     de transformação linear, 265-266  
 Nulo, espaço vetorial, 160  
     subespaço, 162-163  
     vetor, Ver Vetor nulo  
 Números aleatórios, gerador de Fibonacci de, 463-464  
 Números complexos, 334-336  
     argumento, 341-343  
     argumento principal, 341-342  
     divisão, 337-339, 342-343  
     iguais, 334-335  
     imaginários, 334-335  
     imaginários puros, 335  
     forma polar, 341-345  
     módulo, 337-339  
     multiplicação, 335-336, 342-343  
     operações aritméticas, 334-339  
     parte imaginária de, 334-335  
     parte real de, 334-335  
     raiz cúbica, 343-344  
     raiz quarta, 344  
     raízes  $n$ -ésimas, 343-344
- O**
- Objetivo, função, 372-373  
 Ohm, lei de, 367-368  
 Ondas populacionais, 482  
 Ondas sonoras, 490-491, 493-494  
 Operações elementares sobre linhas, 29-30  
     e o espaço-coluna, 186-187  
     e o espaço-linha, 186-187  
     e o espaço-nulo, 186-187  
     e expansão em co-fatores, 92-93  
     para inversão de matrizes, 58-60  
     como multiplicação de matrizes, 56-57  
     e operações inversas, 57-58  
     e o valor do determinante, 82-85  
 Operações padrão em  $R^n$ , 130  
 Operações por linhas, Ver Operações elementares sobre linhas  
 Operador identidade  
     em espaços vetoriais, 258  
     imagem e núcleo, 264  
     matriz de, 275-276  
     de  $R^n$ , 138-139  
 Operadores de, Ver também Operadores lineares  
     cisalhamento, Ver Cisalhamento  
     compressão, 295-298  
     contração, Ver Contrações  
     derivação, 264-265
- expansão, 295-298  
 projeção, Ver Projeções; Projeções ortogonais  
 reflexão, Ver Reflexões  
 rotação, Ver Rotações  
 Operadores lineares, 138  
     análise do efeito geométrico, 298-299  
     autovalores, 283-286  
     autovetores, 151-153  
     determinante de, 282-283  
     efeito da mudança de bases nas matrizes de, 281-282  
     em espaços vetoriais, 258  
     inversos de injetores, 149-150  
     matriz mais simples de, 280-281  
     matrizes de, 274-276  
     matrizes ortogonais como, 229-230  
     ortogonais, 230  
     de  $R^2$ , geometria dos, 295-299  
     que preservam ângulo, 224  
     rígidos, 224  
 Órbitas, 365  
 Ordem  $n$ , polinômio trigonométrico de, 306-307  
 Ordenada,  $n$ -upla, 130  
 Ordenado, par e terno, 130  
 Origem, 103-104  
     planos pela, como subespaços, 159-160  
     reflexão em torno da, 144-145  
     retas pela, como subespaços, 162-163  
 Ortogonais  
     bases, Ver Bases ortogonais  
     conjuntos, Ver Conjuntos ortogonais  
     complementos, 210-211  
     matrizes, Ver Matriz ortogonal  
     operadores, 230  
     projeções, Ver Projeções ortogonais  
     vetores, Ver Vetores ortogonais  
 Ortogonal, diagonalização, 251-253, 313  
 Ortonormais  
     bases, Ver Bases ortonormais  
     conjuntos, Ver Conjuntos ortonormais  
     matrizes, 229-230  
     problema dos autovetores, 251  
 Ótima, alocação, 377-378  
     estratégia, Ver Estratégias ótimas  
     política de corte sustentável, 488-489  
     solução, 372-373  
 Ottimização, problemas de, Ver Problemas de ottimização  
 Ótimo, rendimento sustentável, Ver Rendimento sustentável ótimo  
 Ouvido, modelo de mínimos quadrados para o, 490-494  
 Ovelhas, colhendo, 487-489
- P**
- $P_n$ , Ver Polinômios  
 Padrão, operações, em  $R^n$ , 130  
     posição, Ver Posição padrão  
 Pagamento, em jogos de matriz, 405-406  
     matriz de, 406-407  
 Panela, grafo dirigido, 400-401  
 Par, permutação, 79  
 Par ordenado, 130  
 Parábola, 314-315  
 Parabólica (emendada), spline, Ver Spline  
 Parabolóide elíptico e hiperbólico, 313-314  
 Paralelepípedo, volume, 118-118
- Paralelo, escaneamento em modo paralelo, 436-437  
 Paramétrica, equação, 123  
 Parâmetros, 28-29, 35  
     número de, em solução geral, 193, 195-196  
 Particionada, matriz, 44, 47-48  
 Particular, solução, Ver Solução particular  
 Passeio aleatório discreto, 432-433  
 Passos, conexão de 27-29, 399-402  
 Periódica, spline, 388-389  
 Período, mapa de pixels, 459-461  
 Permutação, 78-79  
     ímpar e par, 79  
 Permutações, árvore de, 78-79  
 Pesos, produto interno euclidiano ponderado, 202-203  
 Phi, função de Euler, 472-473  
 Pinheiros, crescimento de floresta de, 420  
 Pivô, 31-32  
 Pixels, 457-459  
     mapa de, 457-461  
     Pontos de, 457-459  
 Plano  
     ângulo entre vetor e, 120-121  
     complexo, 334-335  
     coordenado, 103-104  
     distância entre dois paralelos, no espaço tridimensional, 125  
     distância entre ponto e, no espaço tridimensional, 123-125  
     no espaço tridimensional, 121-122  
     forma ponto-normal, equação do, 121  
     interseção de reta com, 123  
     ladrilhado, 460-461  
     pela origem, como subespaço vetorial, 159-160  
     reta de interseção de dois, 123-124  
     por três pontos, 365-366  
     xy, xz e yz, 103-104  
 Poder de um vértice, grafo dirigido, 402  
 Polar, forma, números complexos, 341-345  
 Poligráfico, sistema, 466-467  
 Polinômio interpolador, 73-74  
 Polinômio matricial, 53  
 Polinômios ( $P_n$ ), 53  
     ajuste de mínimos quadrados, 303-305  
     base canônica, 177-178  
     conjunto gerador de, 166  
     conjuntos linearmente independentes, 169-170  
     de Legendre normalizados, 222-223  
     operadores lineares de, 276-277  
     produto interno, 204-205  
     spline cúbico, 384-388  
     subespaço de, 163-164  
     transformações lineares em espaços vetoriais arbitrários, 259-260  
     trigonométricos de ordem  $n$ , 306-307  
     vetores ortogonais em, 210  
 Política sustentável ótima, 488-489  
 Ponderado, produto interno euclidiano, 202-204  
 Ponto de sela de matriz de compensação, 407  
 Ponto-normal, forma, equação do plano, 121  
 Pontos  
     construindo curvas e superfícies por, 364-366  
     coordenadas de, 103-104  
     distância entre, e retas, 112-113  
     distância entre dois, 107-108  
     equação do plano por três, 121-123  
     fixos, 459

## 570 . . . Índice

- de malha, 430  
números complexos como, 334-335
- Pontos de pixel, 457-459  
não-periódicos, 461-463
- Pontos extremos, 373-374  
deformações, 495-497  
programação linear, 373-374
- Populacional, crescimento, por faixa etária, 479-484  
onda, 482
- Posição padrão de cônicas, 314-315
- Posição padrão de quâdricas, 318-320
- Positiva, forma quadrática, 309-310  
matriz, 309-310
- Posto  
critério de, usando determinantes, 199-200  
dimensão do espaço-linha e espaço-coluna, 192-194, 199-200  
matriz  $4 \times 6$ , 192-193  
transformação linear, 265-266
- Potencial elétrico, 367-368
- Potências de matrizes, 52-53  
autovalores, 242  
calculando, 248-249  
diagonal, 66-67, 248-249
- Primeira ordem, equações diferenciais de, 292-293
- Principal, argumento, número complexo, 341-342  
submatriz, 310-311
- Principais, eixos, teorema dos, Ver Teorema dos Eixos Principais
- Probabilidade de transição, 391
- Problema  
dos autovetores, 245-246  
dos autovetores ortonormais, 251  
geral de Programação Linear, 372-373  
de valor inicial, 292-293
- Problemas de aproximação, 305-308
- Problemas de maximização  
jogos de duas pessoas com soma zero, 407-408  
programação linear, 370-376
- Problemas de minimização  
alocação de tarefas, 378-381  
programação linear, 372-374
- Problemas de otimização  
alocação de tarefas, 377-382  
programação linear, 370-376
- Problemas envolvendo formas quadráticas, 309-312
- Processo de Gram-Schmidt, 218-220
- Processo de Markov, Ver Cadeia de Markov
- Produto  
elementar com sinal, 79-80  
números complexos, 335-336, 342-343  
vetores, Ver Multiplicação vetorial
- Produto escalar, Ver Produto interno
- Produto interno, Ver também Produto interno euclidiano  
ângulo, 208-212  
círculos unitários/esferas, 203-204  
comprimento e distância, 203-204  
encontrando bases ortogonais/ortonormais, 218-221  
espaços vetoriais complexos, 350  
espaços vetoriais reais, 202-203  
gerado pela matriz identidade, 266-268  
gerado por matriz, 204-207  
propriedades, 205-206  
transformação linear usando, 259-260
- Produto interno euclidiano  
complexo, 347-348  
fórmula matricial do, 133-135  
ponderado, 202-204  
vetores em  $R^2$  e  $R^3$ , 109-115  
vetores em  $R^n$ , 130-131, 202-203
- Produto matricial  
em blocos, 47-48  
como combinação linear, 44-45  
determinando se definido, 43-44  
determinante, 86-87  
de matriz e sua transposta, 68-69  
matrizes invertíveis, 52  
matrizes simétricas, 68  
matrizes triangulares, 67  
múltiplo escalar, 42-43  
operações sobre linhas como, 56-57  
transposta, 53-54
- Produto misto, 116-117
- Produto vetorial, 114-116  
formato de determinante do, 114, 116  
independência de coordenadas, 118-119  
interpretação geométrica, 116-117  
propriedades, 115-116  
regra da mão direita, 116  
relações com o produto escalar, 114-115
- Produtos elementares, 79-80
- Programação Linear  
geométrica, 370-376  
problemas de maximização, 370-376  
problemas de minimização, 372-374  
problema geral de, 372-373  
solução geométrica, 372-376
- Projeções, 139-142  
matriz canônica, 151-152
- Projeções ortogonais, 140-141  
como aproximações, 223-224  
em espaços com produto interno, 217-218, 220-221, 226  
em espaços vetoriais, 258-259  
imagem e núcleo, 264-265  
matriz canônica de, 226-227  
em  $R^3$ , 147  
sobre subespaço, 225-226  
técnicas de reconstrução algébrica (TRA), 439-441
- Propostas, minimizando a soma, 378-379
- Propriedade do valor médio, 429-430  
discreto, 430
- Próprio, valor, 88. Ver também Autovalor Puro, número imaginário, 335
- Q
- $QR$ , decomposição, 219-221
- Quadrado, imagem de um, 299
- Quadráticas, equações, Ver Equações quadráticas formas, Ver Formas quadráticas
- Quadrático, erro, médio, 305-306
- Quâdricas, superfícies, 318-321
- Quarta, raiz, de números complexos, 344
- Queda de tensão, 367-368
- R
- $R^1$  158-159  
 $R^2$ , 158-159, Ver também Produto interno euclidiano  
automorfismos de Anosov, 464-465
- círculos unitários em, 203-204  
conjuntos auto-similares em, 444-446  
geometria de operadores lineares de, 295-299  
subespaços de, 163-164  
vetores em, 102-104, 106-108  
visualizando vetores como flechas em, 157
- $R^3$ , 158-159. Ver também Produto vetorial  
base canônica de, 176-177  
cisalhamento de fator  $k$  na direção  $xy$ , 301-302  
conjuntos ortogonais em, 215  
distância entre dois planos paralelos em, 125  
distância entre ponto e plano em, 123-125  
planos em, 121-123  
projeções ortogonais, 147  
retas, 123-124  
subespaços de, 163-164  
vetores em, 103-108  
visualizando vetores como flechas em, 157
- $R^n$ , 130, 346  
base canônica de, 176-177  
como espaço vetorial, 158-159  
notação alternativa para vetores em, 133-134  
teorema de Pitágoras em, 133-134  
transformações lineares de, em  $R^m$ , 137-153, 258  
vetores em, 130-135
- $R^4$ , comprimento e distância em, 131  
vetores ortogonais em, 133-134
- Raios X, tomografia computadorizada, 435-442
- Raiz quadrada de matriz, 48
- Raiz quarta de números complexos, 344
- Real, eixo, 334-335  
espaço com produto interno, 202  
espaço vetorial, 158  
funções reais de uma variável, 77, 137-138  
parte, de número complexo, 334-335
- Ressivo, gene, 473-474
- Recíproco de  $a$  módulo  $m$ , 468-469
- Redução de Kroenecker e de Lagrange, 313-314
- Redução de formas quadráticas a soma de quadrados, 313-314
- Redução por linhas, contagem de operações, 322, 324-325  
determinante calculado por, 83-84
- Reducida por linhas, forma escalonada, Ver Forma escalonada reduzida por linhas
- Reflexões, 138-140, 297-298  
composição de duas, 144-145  
em torno da origem, 144-145  
em torno de um plano, 426-427  
em torno de uma reta, 282-284
- Região viável, 372-375  
ilimitada, 373
- Regra da mão direita, produto vetorial, 116  
rotação em torno de um eixo, 142-143
- Regra de Cramer, 94-95  
contagem de operações na, 322, 324-325
- Ressão, reta de, 302-303
- Regular, cadeia de Markov, 393-394  
matriz de transição, 393-394
- Rendimento sustentável ótimo, de colheita, 488-489  
de corte, 416-417, 419-420
- Repetidas, aplicações, 456-458
- Reposição, matriz de, 418-419
- Reprodução, taxa líquida de, 483-484
- Resíduo de  $a$  módulo  $m$ , 467-468

- Resistência, 367-368  
 Restrições, 372-373, 375-376  
   de não-negatividade, 372-373  
 Retangulares, sistema de coordenadas, 103-104  
 Reta de regressão, 302-303  
 Retas  
   de ajuste de mínimos quadrados, 302-303  
   distância entre ponto e, 112-113  
   por dois pontos, 364-365  
   equações simétricas, 126-127  
   no espaço tridimensional, 123-124  
   imagem de, 299-300  
   interseção com plano  $xy$ , 123  
   invariante, 243-244  
   pela origem, subespaços, 162-163  
   paralela a vetor dado, 123-124  
   reflexão em torno de, 282-284  
   soluções de sistemas lineares, 28-29  
   vetor perpendicular a, 110-111
- Rígido, operador de  $R^2$ , 224  
 Roda das colunas, das linhas, 405-406  
 Rotações, 141-143, 297-298  
   composição de duas, 143-145  
   em computação gráfica, 423-425  
   e conjuntos auto-similares, 447-448  
   imagem e núcleo, 264-265  
   mudança de bases ortonormais, 232-234  
   ortogonalidade, 229
- S**
- Schmidt, Erhardt, 219  
 Schwarz, Herman Amadeus, 132  
 Seção cônica, *Ver* Cônica, seção  
 Sela, ponto de, matriz de compensação, 407  
 Semelhança  
   invariantes de e por, 282-286  
   de matrizes, 281-286  
   na geração de fractais, 447-450  
 Sequência convergente, 250-251  
 Séries de Fourier, 306-308  
 Sierpinski, *Ver* Tapete de Sierpinski; Triângulo de Sierpinski  
 Sinal, produto elementar com, 79-80  
 Singular, matriz, 51  
 Sino, curva em forma de (curva de Gauss), 34  
 Sistema de coordenadas  
   de mão direita e esquerda, 104  
   não-retangulares, 174-176  
   retangulares, 103-104  
 Sistema dinâmico, 461-463  
   caótico, 461-463  
 Sistema linear consistente, 28-29, 184-185, 194-195  
   determinando por eliminação, 64-65  
 Sistema linear inconsistente, 28-29  
   resolução por mínimos quadrados, 223-227  
 Sistema poligráfico, 466-467  
 Sistemas de equações lineares, *Ver* Sistemas lineares  
 Sistemas lineares, 28-29. *Ver também* Matriz de coeficientes; Operações elementares sobre linhas;  
 Sistemas lineares homogêneos  
   coeficientes complexos, 339  
   comparação de métodos de resolução, 321-326  
   consistência, 28-29, 64-65, 184-185, 194-195  
   decomposição LU, 327-330  
   equações diferenciais de primeira ordem, 292-293  
   da forma  $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ , 87-89, 239-240  
   formato matricial, 44-45  
   matriz aumentada, 29-30, 45  
   matrizes de coeficientes comuns, 62-63  
   de  $m$  equações em  $n$  incógnitas, 29, 194-196  
   métodos de resolução, 29-30  
   número de soluções, 62  
   resolução de dois de uma só vez, 62-63  
   resolução de inconsistentes por mínimos quadrados, 223-227  
   resolução pela regra de Cramer, 94-95  
   resolução por computador, 27, 36-38, 321-323  
   resolução por fatoração, 326-330  
   resolução por eliminação de Gauss-Jordan, *Ver*  
     Eliminação de Gauss-Jordan  
   resolução por eliminação gaussiana, *Ver*  
     Eliminação gaussiana  
   resolução por inversão matricial, 62-63, 322, 324-325  
   resolução por redução por linhas, *Ver* Redução por linhas  
   sobredeterminados, 195  
   solução geral, 185-186, 193, 195-196  
   solução particular, 185-186  
   subdeterminados, 195-196  
 Sistemas lineares homogêneos, 35-37  
   espaço vetorial das soluções, 164-165  
   espaço-solução, 164  
   da forma  $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ , 87-89, 239-240  
   e matrizes elementares, 57-58  
   vetor-solução, 164  
 Sobre determinado, sistema linear, 195  
 Sobrepostos, conjuntos, 445  
 Solução  
   conjunto-, 28-29  
   equação linear, 28  
   espaço-, de sistema homogêneo, 164  
   ilimitada, 375  
   de mínimos quadrados, 224-225  
   não-trivial, 35-36  
   sistema linear, 28-29  
   sistema linear homogêneo, 35-36  
   trivial, 35-36  
   vetor-, sistema homogêneo, 164  
   viável, 372-373  
 Solução geral  
   equações diferenciais, 292, 294-295  
   equações lineares, 28  
   sistemas lineares, 185-186, 193, 195-196  
 Solução particular, equações diferenciais, 292  
   sistemas lineares, 185-186  
 Soma  
   espaços vetoriais reais, 158  
   matrizes, 42-43, 49-50  
   nulidade e posto, 193  
   nímeros complexos, 335  
   séries infinitas, 250-251  
   vetores complexos, 346-347  
   vetores em  $R^2$  e  $R^3$ , 102-103  
   vetores em  $R^n$ , 130  
   zero, jogos, teorema fundamental, 406-407  
 Spline, 384-389  
   apertada, 388-389  
   cúbica, 384-385  
   cúbica emendada, 386-388  
   para esboço, 384  
   interpolação cúbica, 384-388  
   natural, 386-387  
 parabólica emendada, 386-388  
 periódica, 388-389  
 Subdeterminado, sistema linear, 195-196  
 Subespaço  
   espaço vetorial complexo, 346  
   espaço vetorial real, 162-164  
   imagem e núcleo, 264-265  
   núlo, 162-163  
   projeção ortogonal sobre, 225-226  
 Submatriz, 44, 310-311  
   principal, 310-311  
 Substituição, cifras de, 466-467  
 Substituição direta, 327  
 Subtração  
   matrizes, 42-43  
   nímeros complexos, 335-336  
   vetores em  $R^2$  e  $R^3$ , 102-103  
   vetores em  $R^n$ , 130-131  
 Superfícies quádricas, 318-321  
   traço, 318-320  
 Sylvester, desigualdade de, 200  

**T**

Talassemia, 475-476  
 Tapete de Sierpinski, 445-450, 454-455  
 Taxa líquida de reprodução, 483-484  
 Tay-Sachs, doença de, 475-476  
 Técnica de Monte Carlo  
   geração de fractais, 451-452  
   determinação de distribuição de temperatura, 432-433  
 Temperatura de equilíbrio, distribuição de, 428-433  
 Teorema  
   da alternativa de Fredholm, 287-288  
   da Consistência, 194-195  
 Teorema da dimensão  
   matrizes, 193  
   e o Teorema de Mais-Menos, 179-182  
   transformações lineares, 266-267  
 Teorema  
   de Mais-Menos, 179-182  
   de Pitágoras em  $R^n$ , 133-134  
   de Pitágoras generalizado, 210-211  
 Teorema dos Eixos Principais  
   em  $R^2$ , 316  
   em  $R^3$ , 320  
 Teoria de jogos, 405-406  
   jogos de duas pessoas com soma zero, 405-408  
   jogos de matriz de duas pessoas com soma zero, 408-409  
 Teoria linear de vigas, 384-385  
 Termo com produto misto, 308-309  
 Termo com resultado, 308-309  
   eliminação em duas variáveis, 314-318  
   eliminação em três variáveis, 320-321  
   significado, 314-316  
 Textos cifrados, 466  
 Textos comuns, 466-467  
 Tomografia computadorizada, 435-442  
 Topologia, 446  
 Topológica, dimensão, 446-447  
 Torneio, 401  
 Traço de matriz quadrada, 45-46  
 Traço de superfície quádrica, 318-320  
 Transformação afim contrativa, 451-452  
 Transformação do gato de Arnold, 456-463  
   aplicações repetidas da, 456-458

- Transformação linear nula  
em espaços vetoriais, 258  
imagem e núcleo, 264  
de  $R^n$  em  $R^m$ , 138-139
- Transformação matricial, 258  
encontrando, 297-298
- Transformação não-linear, 260
- Transformações lineares,  
composições de, 143-146, 261-262  
encontrando pelas imagens dos vetores da base canônica, 260-261  
em espaços vetoriais, 258-262  
geometria de, 138-139  
imagem, 264-266  
inversas de, 269-271, 298  
matrizes simples de, 280-284  
multiplicação por A, 138  
núcleo, 264-266  
nulidade, 265-266  
posto, 265-266  
propriedades, 150-152, 260-261  
de  $R^n$  em  $R^m$ , 137-153  
de rotação, Ver Rotações  
teorema da dimensão, 266-267
- Transformações lineares injetoras, 148-149, 268-270  
em espaços vetoriais, 268-270  
inversa de, 149-150  
de  $R^n$  em  $R^m$ , 148-150
- Transição, matriz, Ver Matriz de transição  
probabilidade de, 391
- Translação  
equações de, 104-106  
de formas quadráticas, 314-318  
vetor de, 423-424
- Transposta, matriz, Ver Matriz transposta
- Trás, etapa (fase) para, 322
- Triangulação, 496
- Triangular, decomposição, 327-330  
desigualdade, 131-133  
matriz Ver Matriz triangular inferior e superior
- Triângulo  
área, 116-117  
final, morfismos, 495-496  
inicial, morfismos, 495  
de Sierpinski, 446-451
- Tridimensional, espaço, Ver  $R^3$
- Trigonométrico, polinômio, 306-307
- Trivial, solução, 35-36
- Troca, matriz de, 412-413
- U**
- Unitária, diagonalização, 355-357  
esfera, 203-204  
matriz, 354-356
- Unitário, círculo, 203-204  
espaço, 350-353  
vetor, 107
- V**
- Vacinas, distribuição de, 409
- Valor  
característico, 88. Ver também Autovalor de uma função, 137  
de jogos de matriz, 407  
próprio, 88. Ver também Autovalor
- Valor médio (discreto), propriedade do, 429-430
- Variância amostral, 312-313
- Variáveis, 28  
líderes e livres, 32-33
- Velocidade, como vetor, 101
- Vendas, maximizando o lucro de, 370-372
- Vento, velocidade do, como vetor, 101
- Vértice  
de um grafo dirigido, 397-398  
poder de um, grafos dirigidos, 402  
Pontos de, Ver Pontos extremos
- Vetor. Ver também Distância; Espaços vetoriais;  
Norma (comprimento); Vetores  
ângulo diretor de, 113-114  
componentes, Ver Componentes de um vetor de coordenadas, 176  
de cortadas, 418-419  
coseno diretor de, 113-114  
de distribuição etária inicial, 480-481  
de estado estacionário, 394  
exemplo físico de, 101  
força, 101  
de não-cortadas, 416-417  
número complexo como, 334-335  
operações aritméticas, 106-108  
ponto de vista geométrico de, 102-106  
pontos final e inicial, 102  
de probabilidade, 391-392  
de translação, 423-424  
unitário, 107
- Vetor nulo  
em  $R^2$  e  $R^3$ , 102  
em  $R^n$ , 130, 158
- Vetor-coluna, 41-42, 189  
matrizes ortogonais, 229
- Vetor-demanda, 413-414
- Vetores  
equivalentes, 102  
no espaço bidimensional, 102-104, 106-108  
no espaço tridimensional, 102-108  
iguais em  $R^n$ , 130  
iguais em  $R^2$  e  $R^3$ , 102  
ortogonais, 110-111  
produto de, Ver Produto interno; Produto vetorial  
projeção ortogonal de, 111-112  
unitários canônicos, 115-116
- Vetores ortogonais em  
 $C^2$ , 351  
espaços com produto interno reais, 210-211  
 $R^n$ , 133-134  
 $R^2$  e  $R^3$ , 110-111
- Vetor-estado, cadeias de Markov, 391-392  
comportamento limite, 393-396
- Vetorial, forma, da equação da reta, 123-124  
forma, da equação do plano, 122-123  
produto, Ver Produto vetorial
- Vetor-linha, 41-42, 184  
matrizes ortogonais, 229
- Vetor-preço, 412
- Vetor-produção, 413-414
- Vetor-solução, sistema homogêneo, 164
- Viável, região, 372-375  
solução, 372-373
- Vínculos, Ver Restrições
- Visualização tridimensional de objetos, 421-423
- Voltagem, lei de, 367-368
- Voltímetro, 367-368
- W**
- Wheatstone, circuito de ponte de, 369
- Wrónski, Józef Maria Hoëné-, 172
- Wronskiano, 171-173
- X**
- Xadrez, movimento de, 398-399
- Z**
- Zero, matriz, 50-51  
teorema fundamental dos jogos com soma, 406-407  
transformação linear, Ver Transformação linear nula  
vetor, Ver Vetor nulo



- ANTON, H. – Cálculo: Um Novo Horizonte (6<sup>a</sup> ed.), 2 volumes
- BROOKSHEAR, J.G. – Ciência da Computação (5<sup>a</sup> ed.)
- COMER, D. – Redes de Computadores e Internet (2<sup>a</sup> ed.)
- \*DEITEL E DEITEL – C++: Como Programar (3<sup>a</sup> ed.)
- DEITEL E DEITEL – Java: Como Programar (3<sup>a</sup> ed.)
- ERCEGOVAC, LANG & MORENO – Introdução aos Sistemas Digitais
- FREUND & SIMON – Estatística Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade (9<sup>a</sup> ed.)
- GAMMA, HELM, JOHNSON & VLASSIDES – Padrões de Projeto: Soluções Reutilizáveis para o Software Orientado a Objetos
- \*GIESECKE & outros – Representação Gráfica Moderna
- GOLDSTEIN, LAY & SCHNEIDER – Matemática Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade (8<sup>a</sup> ed.)
- FOWLER, M. – UML Essencial: Um Breve Guia para a Linguagem-Padrão de Modelagem de Objetos (2<sup>a</sup> ed.)
- HAYKIN, S. – Redes Neurais (2<sup>a</sup> ed.)
- HAYKIN & VAN VEEN – Sinais e Sistemas
- LARMAN, C. – Utilizando a UML e Padrões: Uma Introdução à Análise e Projeto Orientados a Objeto
- LEWIS & PAPADIMITRIOU – Elementos de Teoria da Computação (2<sup>a</sup> ed.)
- SEBESTA, R.W. – Conceitos de Linguagem de Programação (4<sup>a</sup> ed.)
- STROUSTRUP, BJARNE – C++: A Linguagem de Programação (3<sup>a</sup> ed.)
- TANENBAUM & WOODHULL – Sistemas Operacionais: Projeto e Implementação (2<sup>a</sup> ed.)

*Recone o seu marcador de página*



\* Livros em produção no momento da impressão desta obra, mas que muito em breve estarão à disposição dos leitores em língua portuguesa.

ANTON • RORRES

# Álgebra Linear com Aplicações

Versão ampliada do famoso livro de Howard Anton, este texto dá um tratamento elementar à álgebra linear e suas aplicações, apresentando seus fundamentos da maneira mais clara possível. Além dos tópicos tradicionais de um livro de álgebra linear, o livro tem um capítulo dedicado a 21 aplicações da álgebra, escolhidas dentre a administração, economia, ciência, engenharia, física, ciências sociais e biologia.

## Índice com preços

### Preço para estudantes

### Preço para outras compras

### Preço para sistemas de computador

### Preço para instituições

### Preço para livrarias

### Preço para livrarias de exportação

### Preço para livrarias de importação



Bookman

ISBN 85-7307-847-2



9 788573 078472