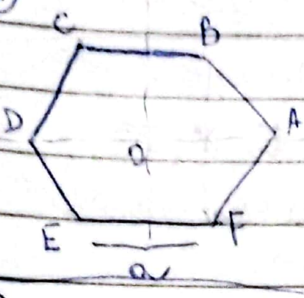
$\hookrightarrow \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle$

① 

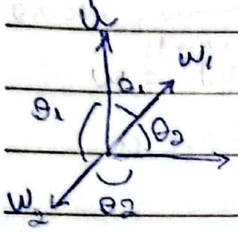
ⓐ $150^\circ \Leftrightarrow a^2 = a^2 + 3a^2 + 2\cdot a\cdot a\sqrt{3}\cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ⓑ $90^\circ \Leftrightarrow 12a^2 = 9a^2 + 3a^2 + 3\cdot a\cdot\sqrt{3}\, a\cos\theta \Rightarrow \theta = 90^\circ$

ⓒ $60^\circ \Leftrightarrow 12a^2 = 4a^2 + 4a^2 + 2\cdot 2a\cdot 2a\cdot\cos\theta \Rightarrow \theta = 60^\circ$

ⓓ $30^\circ \Leftrightarrow 7a^2 = a^2 + 3a^2 + a\cdot a\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos\theta \Rightarrow \theta = 30^\circ$

② Como $\langle w,u\rangle = \langle w,v\rangle \Rightarrow \|w\|\,\|u\|\cos\theta_1 = \|w\|\,\|v\|\cos\theta_2 \therefore \theta_1 = \theta_2$. Além disso sabemos que $w = au + bv$, ou seja, são coplanares, logo:



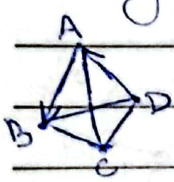
São as duas únicas possibilidades de isso acontecer, logo

$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \therefore \theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$

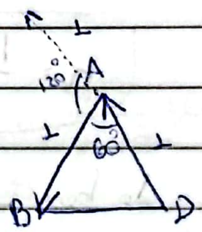
ou

$\theta_1 + \theta_2 = 270^\circ \therefore \theta_1 = \theta_2 = 135^\circ$

③ Seja o tetraedro



$\rightarrow$ Planificando o triangulo equilatero ABD temos:

$\equiv$ 

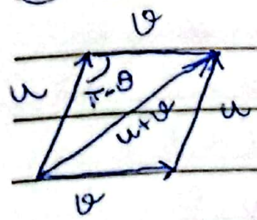
$AB\cdot DA = 1\cdot 1\cdot\cos(120^\circ)$

$AB\cdot DA = -\frac{1}{2}$

④ Para $|\langle u,v\rangle| = |\,\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta\,| = \|u\|\cdot\|v\|\cdot|\cos\theta|$.

Como sabemos que $0 \leq |\cos\theta| \leq 1$, então, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ multiplicando por $\|u\|\|v\|$ na desigualdade, $0 \leq \|u\|\|v\||\cos\theta| \leq \|u\|\|v\|$, então $0 \leq |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, como queríamos. Poderíamos apenas substituir o valor da inequação na igualdade também!

⑤ ⓐ Para:



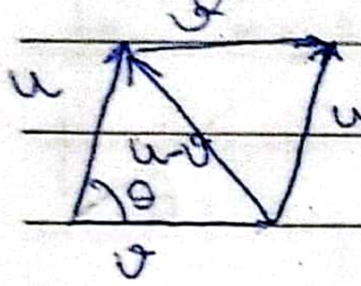
$\hookrightarrow$ Utilizando a lei dos cossenos:

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos(\theta)$. Como $\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$, como queríamos

tilibra

(b) Seja:



Pela lei dos cossenos:

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$. Logo, igual na a),

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$, como queríamos

(c) Utilizando os provados em a) e b)

~~$\langle u+v, u-v\rangle$~~ Para $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$, temos que

$\|u+v+u-v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 + 2\langle u+v, u-v\rangle$

$4\|u\|^2 = \|u\|^2 + \cancel{2\langle u,v\rangle} + \|v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 - \cancel{2\langle u,v\rangle} + 2\langle u+v, u-v\rangle$

$2\langle u+v, u-v\rangle = 2\|u\|^2 - 2\|v\|^2$, então:

$\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$, como queríamos

(6) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$

Como sabemos que $\langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|$, então:

$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$ $\therefore$ $\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$ $\therefore$

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, como queríamos //

(7) Sabemos pela desigualdade triangular que: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Tudo errado aqui.

Como sabemos que $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$. Pelo mesmo que foi feito em 6, temos que $\|u-v\| = \|u\| - \|v\|$

(8) $\langle u, v\rangle$ e as identidade de polarização:

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v\rangle \cdot 2$ $\therefore$ $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

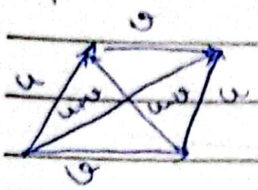
$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$ $\therefore$ $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2)$

$\|u+v\|^2 = \|u-v\|^2 + 4\langle u, v\rangle$ $\therefore$ $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$

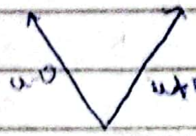
tilibra

(9) Não. Veja o contra-exemplo. Seja $\vec{u}$ um vetor qualquer e $\vec{v}$ um outro vetor tal que $u \perp v$ ∴ $\langle u, v \rangle = 0$. Agora, seja $\vec{w} = -\vec{v}$, também perpendicular a $\vec{u}$ ∴ $\langle u, w \rangle = \langle u, v \rangle = 0$, entretanto, temos que $v \neq w$

(10) Abrindo o lado esquerdo da identidade temos: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$, como queríamos.



=

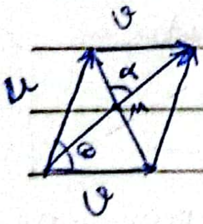


= Pela igualdade, a soma das diagonais do paralelogramo ao quadrado é a soma do dobro do quadrado dos lados

(11) Se $\|u+v\| = \|u-v\|$, então $\|u+v\|^2 = \|u-v\|^2$, logo, $\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle$ ∴ $\langle u, v \rangle = -\langle u, v \rangle$, ou seja, $\cos\theta = -\cos\theta$ ∴ $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \Rightarrow u \perp v$

~~(12) Para analisar a ortogonalidade de u+v, u−v, vejamos seu produto interno: ⟨u+v, u−v⟩ = ‖u+v‖‖u−v‖ cos θ = |‖u+v‖² ‖u−v‖² cos θ = |(‖u‖² − ‖v‖²)²| = |‖u‖² − ‖v‖²| cos θ~~

(12) Geometricamente temos:



Pelas definições de paralelogramos, sabemos que M é o ponto médio de ambas as diagonais, logo, vale a seguinte lei dos cossenos:

$\|v\|^2 = \frac{\|u-v\|^2}{4} + \frac{\|u+v\|^2}{4} - 2 \cdot \frac{\|u-v\|\|u+v\| \cos\alpha}{4}$ ∴

$4\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u-v, u+v \rangle$ ∴

$2\|v\|^2 - 2\|u\|^2 = -2\langle u-v, u+v \rangle \Rightarrow \|u\|^2 - \|v\|^2 = \langle u-v, u+v \rangle$

Em um caso de $u-v \perp u+v$, $\|u\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow \|u\| = \|v\|$, como queríamos.

(13) $\|u\| = 2$, $\|v\| = \sqrt{3}$ e $\langle u, v \rangle = 1$. Portanto, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$.
$\therefore \|u+v\|^2 = 4 + 3 + 2 = 9 \therefore \|u+v\| = 3$.

(14) $\|u\| = 1$, $\|v\| = 2$ e $\langle u, v \rangle = 3$. Portanto, $3 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\theta$, logo, $\cos\theta = 3/2$, o que é impossível já que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

(15) $\langle u, w \rangle = \langle u, v \rangle = 0$. Sim, v e w são coplanares, u é sempre normal ao plano formado por eles e $v + w$ é do plano, logo, $u \perp v+w$

(16) a) $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\| = \|B - A + O - O\| = \|BO + OA\| = \|-OB + OA\| = \|-(OB - OA)\| = \|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\|$, como queríamos.

b) $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|-\overrightarrow{BA}\| = |-1| \cdot \|\overrightarrow{BA}\| = \|BA\| = d(B,A)$, como queríamos.

c) $d(A,B) = 0 \iff \|AB\| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XX} \Rightarrow A = B$, como queríamos.

d) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B) \iff \|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$. Como $AB + BC + CA = 0$, eles são vetores que delimitam um triângulo, portanto, seus módulos representam os lados, desse forma, vale a desigualdade triangular que afirma que $\|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$, como queríamos.

(17) a) $\sqrt{4+49} = \sqrt{53}$
c) $\sqrt{9 + 100 + 16} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
e) $\sqrt{2{,}4^2 + 3{,}6^2 + 2{,}1^2} = \sqrt{23{,}13}$
b) $\sqrt{(-\sqrt{10}-3)^2 + (5+6)^2} = \sqrt{140 + 6\sqrt{10}}$
d) $\sqrt{49 + \frac{441}{16} + \frac{121}{64}} = \frac{\sqrt{5021}}{8}$

(18) a) $-3 + 2 = -1$
c) $2 + 6 + 3 = 11$
e) $4 - \sqrt{6} + \sqrt{15}$
b) $12 - 12 = 0$
d) $4{,}8 - 2{,}46 + 0{,}28 = 2{,}62$

(19) a) $\langle u, v \rangle = 0 \therefore \theta = 90° = \pi/2$ rad
b) $9 = 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos\theta \therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \theta = \pi/4$ rad
c) $1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\theta \therefore \theta = \arccos(1/3)$ rad
d) $1 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\theta \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ rad

(20) a) $-3 = \langle u, v \rangle \therefore \theta > \pi/2$ obtuso
b) $3 = \langle u, v \rangle \therefore \theta < \pi/2$ agudo
c) $0 = \langle u, v \rangle \therefore \theta = \pi/2$, reto
d) $0{,}45 = \langle u, v \rangle \therefore \theta < \pi/2$ agudo

(21) Precisamos que, em cada caso, $\langle u, v \rangle = 0$
a) $x + 9 = 0 \therefore x = -9$
b) $4x + x^2 + 4 = 0 \therefore x = -2$
c) $x^2 - 1 - 1 - 4 = 0 \therefore x = \pm\sqrt{6}$
d) $x^2 + 3 + 4 = 0 \therefore x \notin \mathbb{R}$

tilibra

$\text{proj}_u v = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \cdot u$, $\text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \cdot v$

(22) $\langle v, w \rangle = 0$, logo, $3x + y = 0$, então, $v = (-1, 3)\lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(23) Sejam ortogonais: $\langle u, v \rangle = 0$ $\therefore$ $x^2 - x - 6 = 0$ $\therefore$ $x = 3$ ou $x = -2$

(24) $\langle u, (1,4,5) \rangle = a + 4b + 5c = 24$ e $\langle u, (-1,1,0) \rangle = 1 = -a + b$

Além disso, $\langle u, (-3,0,1) \rangle = 0 = -3a + c$. Logo,

$$\begin{cases} -3a + c = 0 \\ -a + b = 1 \\ a + 4b + 5c = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} c - 3b = -3 \\ 5c + 5b = 25 \\ \hline c + b = 5 \end{cases} \quad -4b = -8$$

$b = 2$, $c = 3$ e $a = 1$ $\Rightarrow$ Logo, $u = (1, 2, 3)$

(25) $\vec{AB} = B - A = (-4, 1, -1)$, $\vec{AC} = C - A = (1, 1, -3)$, $\vec{BC} = C - B = (5, 0, -2)$

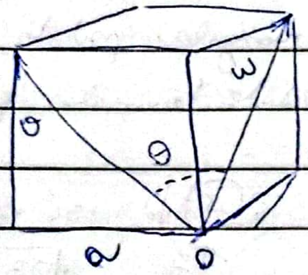
$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = -4 + 1 + 3 = 0$ $\therefore AB \perp AC$

$\langle \vec{AB}, \vec{BC} \rangle = -20 + 2 = -18$

$\langle \vec{AC}, \vec{BC} \rangle = 5 + 6 = 11$

Dois lados perpendiculares, então ele é retângulo

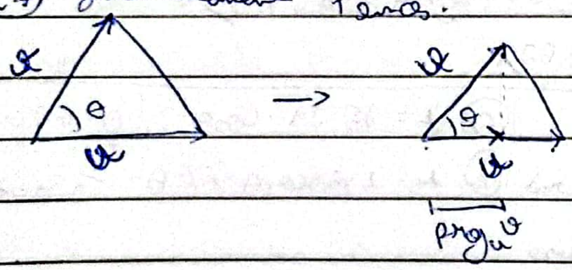
(26)



Seja O o ponto de origem, $\vec{v} = (-a, 0, a)$ e $\vec{w} = (0, a, a)$, logo $\langle v, w \rangle = a^2 = \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a \cdot \cos\theta$

$\Rightarrow 1 = 2\cos\theta$ $\therefore$ $\cos\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 60° = \pi/3$ rad

(27) Geometricamente temos:



$v - \text{proj}_u v$ $\therefore$ Área $= \|u\| \cdot \frac{1}{2} \cdot \|v - \text{proj}_u(v)\|$

Analiticamente temos:

Área $= \|u\| \cdot \frac{1}{2} \cdot \|v - \text{proj}_u(v)\| = \|u\| \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|v\|^2 + \left(\frac{u \cdot v}{\|u\|}\right)^2 - 2\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|}\right)^2}$

$= \|u\| \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|v\|^2 - \left(\frac{u \cdot v}{\|u\|}\right)^2} = \|u\| \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|v\|^2 - \|v\|^2 \cos^2\theta} = \|u\| \cdot \frac{1}{2} \cdot \|v\| \sqrt{\sin^2\theta}$

$= \frac{\|u\| \|v\| \cdot \sin\theta}{2}$, que é uma fórmula básica de área de ~~este~~ triângulo, provando que ele calcula de fato uma área

(28) a) $\frac{-2+3}{5} \cdot (2,1) = \frac{1}{5}(2,1) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

b) $\frac{3/5 - 8/5}{5} \cdot (1,2) = -\frac{1}{5} \cdot (1,2) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

c) $\frac{3}{1} \cdot (0,0,1) = (0,0,3)$

d) $\dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{\sqrt{2}}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3(1+\sqrt{2})}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{3+3\sqrt{2}}{4}, \frac{3+3\sqrt{2}}{4}, \frac{3(\sqrt{2}+2)}{4}\right)$

e) $\dfrac{1-\frac{1}{2}+1}{12} \cdot (2,2,-2) = \dfrac{\frac{3}{2}}{12}(2,2,-2) = \dfrac{3}{24}(2,2,-2) = \left(\frac{3}{12}, \frac{3}{12}, -\frac{3}{12}\right)$

29)

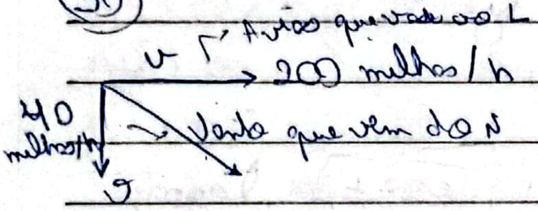
a) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right| \quad \dfrac{|2-4-8+2|}{2} = 4\ u^2$

b) Sejam os lados $\vec{AB} = B - A = (1,-1,2)$ e $\vec{AC} = C - A = (2,1,-2)$

$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 2 - 1 - 4 = -3 = \sqrt{6} \cdot 3 \cdot \cos\theta \quad \therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ logo:

Área $= \sqrt{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}}_{\sin\theta} = \sqrt{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}\ u^2$

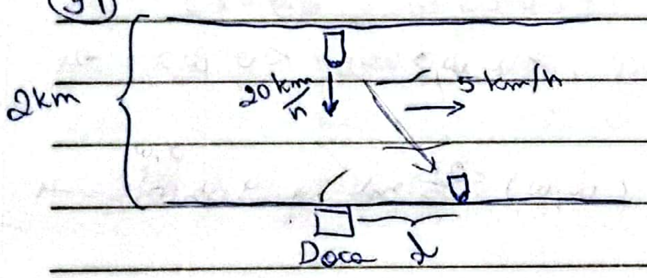
30)

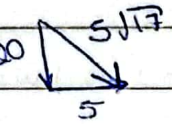


$\|u+v\| = \sqrt{200^2 + 40^2 + 2\overbrace{\langle u, v \rangle}^{0}}$

$= \sqrt{200^2 + 40^2} = 40\sqrt{26}$ milhas/h

31)

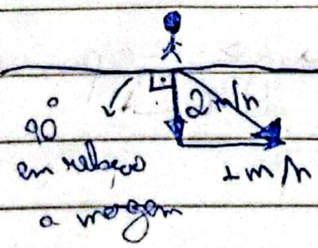




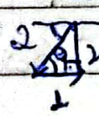
b) Ana demora 6 minutos para atravessar, já que $\begin{array}{l} 20 - 1 \\ 2 - x \end{array}$, $x = \frac{1}{10}h = 6$ min

a) Como ela fica no rio por 6 minutos, a correnteza age nela por esse tempo, logo $d = \begin{array}{l} 5 - 1 \\ d - \frac{1}{10} \end{array} \therefore d = \frac{1}{2}$ km $= 500$ m de distância

32)



Para corrigir a trajetória Beto deve nadar a um



$\cos\theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad

60° em relação a margem

/ /

33 (a)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{matrix} = 18x - 2y - 8z - 6z - 4x - 12y = 14x - 14y - 14z = (1,-1,-1)$$

$\to (14,-14,-14)$

$\|\lambda(1,-1,-1)\| = 3\sqrt{3} \Rightarrow |\lambda|\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \therefore |\lambda| = 3 \therefore \lambda = \pm 3$, logo, os vetores são $(3,-3,-3)$ e $(-3,3,3)$

(b) $\langle(3,-3,-3),(1,0,0)\rangle = 3 \to$ Ângulo agudo, esse!!!

$\langle(-3,3,3),(1,0,0)\rangle = -3 \to$ Ângulo obtuso

34

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} = x + z - y = (1,-1,1) \text{ ou } (-1,1,-1)$$

Norma $\sqrt{3}$ Norma $\sqrt{3}$

$\langle(1,-1,1),(0,1,0)\rangle = -1$, ou seja, obtuso

Logo, $(1,-1,1)$ é o vetor procurado

35 $u = (a,b,c)$. $\langle(1,1,0),u\rangle = a+b = 0$. $\|u\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{2}$

$\langle u,(1,-1,0)\rangle = \|u\|\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = a-b$, ou seja

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=\sqrt{2} \\ a^2+b^2+c^2=2 \end{cases}$$

$2a = \sqrt{2}$, $\boxed{a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } b = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$a^2+b^2+c^2 = 2 \to \frac{2}{4}+\frac{2}{4}+c^2 = 2 \to c^2 = 1$, $\boxed{c = \pm 1}$, logo,

$u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1\right)$

36 Para $\|u\| = \|v\| = 1$; $\|w\| = 4$, $\langle u,w\rangle = -2$, $\langle v,w\rangle = -4$

e ang$(u,v) = \pi/3$ rad,

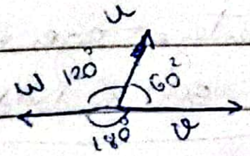
temos que $4\cdot\cos(\theta_1^{u,w}) = -2 \to$ ang$(u,w) = \frac{2\pi}{3}$ rad e $4\cos(\theta_1^{v,w}) = -4$

ang$(v,w) = \pi$ rad

(a) $\langle u+v+w, u\rangle = \langle(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\rangle = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

(b) $\langle 2u - v + w, -u + v\rangle = \langle(-4, \sqrt{3}),(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})\rangle = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

↳



$w = (-4,0)$, $v = (1,0)$, $u = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

37 Para $u = \langle u,x\rangle x + \langle u,y\rangle y + \langle u,z\rangle z$, para (x,y,z) uma base ortonormal. Sabemos que:

$\vec{u} = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

Multiplicando ambos os lados por x

Por conta de ser unitário $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 1$

Pois são ortogonais

$$\langle u, x\rangle = \overbrace{\langle x, x\rangle}^{1}\alpha + \overbrace{\langle x, y\rangle}^{0}\beta + \overbrace{\langle x, z\rangle}^{0}\gamma = \alpha$$

Sem perda de generalidade, pelos mesmos motivos,

$\langle u, y\rangle = \beta$

$\langle u, z\rangle = \gamma$

Logo, $\alpha x + \beta y + \gamma z = \langle u, x\rangle x + \langle u, y\rangle y + \langle u, z\rangle z = u$, como queríamos.

(38) É importante notar que a relação de Euler possui uma interpretação geométrica muito útil para a prova. Entretanto, de forma analítica, temos: $\langle \vec{AB}, \vec{CD}\rangle + \langle \vec{BC}, \vec{AD}\rangle + \langle \vec{CA}, \vec{BD}\rangle = 0$. Utilizando as identidades de polarização, temos que a expressão equivale a:

$$\tfrac{1}{4}\left(\|AB+CD\|^2 - \|AB-CD\|^2 + \|BC+AD\|^2 - \|BC-AD\|^2 + \|CA+BD\|^2 - \|CA-BD\|^2\right)$$

Vamos agora manipular algumas expressões:

$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} - \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{CD} - \vec{BC} = \vec{AD} - \vec{BC}$

$\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{BC} + \vec{DB} - \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{BC} - \vec{DB} = \vec{AC} - \vec{DB} = \vec{BD} - \vec{CA}$

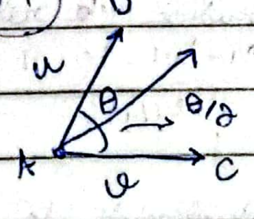
$\vec{CA} + \vec{BD} = \vec{CA} + \vec{BD} + \vec{AB} - \vec{AB} = \vec{CB} + \vec{BD} - \vec{AB} = \vec{CD} - \vec{AB}$

Portanto, seja $v = \vec{AD} - \vec{BC} \Rightarrow -v = \vec{BC} - \vec{AD}$, $u = \vec{BD} - \vec{CA} \Rightarrow -u = \vec{CA} - \vec{BD}$ e $w = \vec{CD} - \vec{AB} \Rightarrow -w = \vec{AB} - \vec{CD}$. Por fim, vamos lembrar que $\|v\| = \|-v\|$. Portanto:

$\langle \vec{AB}, \vec{CD}\rangle + \langle \vec{BC}, \vec{AD}\rangle + \langle \vec{CA}, \vec{BD}\rangle = \tfrac{1}{4}\left[\|v\|^2 - \|-w\|^2 + \|w\|^2 - \|-v\|^2 + \|w\|^2 - \|-u\|^2\right]$

$= \tfrac{1}{4}\left[\|v\|^2 - \|v\|^2 + \|u\|^2 - \|u\|^2 + \|w\|^2 - \|w\|^2\right] = 0$, como queríamos.

(39)



Pelas definições de x e y temos que:

$x = \lambda u$ e $y = kv$, além disso $\lambda\|u\| = k\|v\|$

Temos então que:

$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$. Seja γ o ângulo entre $\lambda u + kv$ e v, vamos mostrar que $\gamma = \theta/2$:

$\langle \lambda u + kv, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle + \langle kv, v\rangle$, logo

$\|\lambda u + kv\|\cancel{\|v\|}\cos\gamma = \lambda\|u\|\cancel{\|v\|}\cos\theta + k\|v\|^{\cancel{2}}$

$\sqrt{\lambda^2\|u\|^2 + k^2\|v\|^2 + 2\lambda k\|u\|\|v\|\cos\theta} \cdot \cos\gamma = \lambda\|u\|\cos\theta + k\|v\|$

Como sabemos que $\lambda\|u\| = k\|v\| \Rightarrow$

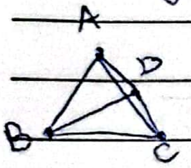
$\sqrt{2}\cdot \lambda\|u\| \sqrt{1+\cos\theta}\,\cos\gamma = \lambda\|u\|\cos\theta + \lambda\|u\|$

$\cos\gamma = \frac{\cos\theta + 1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}} = \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}}$, então

$\cos^2\gamma = \frac{1+\cos\theta}{2}$. Como sabemos pelas fórmulas de trigonometria que $\cos^2 x/2 = \frac{1+\cos x}{2}$, então, $\gamma = \theta/2$, como queríamos.

Finalmente, mostramos que a soma de ~~[illegible]~~ dois vetores de mesmo módulo bissecciona o ângulo formado por outros dois vetores quaisquer de mesma direção e sentido que eles. Logo, como os versores de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são um caso particular dessa generalização, então sua soma também é ~~[illegible]~~ paralela a bissetriz de θ.

(4) a) Seja o tetraedro:



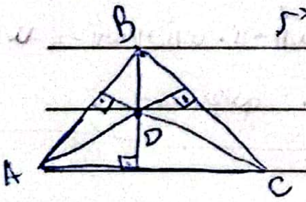
Para: $\vec{AB} \perp \vec{CD}$ e $\vec{AC} \perp \vec{BD}$, precisamos mostrar que $\vec{AD}$ ~~∥~~ $\perp \vec{BC}$. Pela relação de Euler

$\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle + \langle \vec{BC}, \vec{AD} \rangle + \langle \vec{CA}, \vec{BD} \rangle = 0$

Pelas nossas definições, é óbvio que $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle = \langle \vec{CA}, \vec{BD} \rangle = 0$ porque eles são perpendiculares. Nos resta então que:

$\langle AD, BC \rangle = 0 \Rightarrow \vec{AD} \perp \vec{BC}$, como queríamos.

(b)



Pela definição de altura temos que:

$\vec{AB} \perp \vec{CD}$, $\vec{BC} \perp \vec{AD}$ e $\vec{CA} \perp \vec{BD}$, SUPONDO que D é um ponto existente de concorrência entre as alturas. Se essa suposição for verídica, a relação de Euler será respeitada

$\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle + \langle \vec{BC}, \vec{AD} \rangle + \langle \vec{CA}, \vec{BD} \rangle = 0$

Cada produto interno será 0, por conta da perpendicularidade já demonstrada. Logo, como a relação foi respeitada, esse ponto D existe, assim como queríamos demonstrar.