① (a) $r: X = (1,1,0) + \lambda(1,2,3)$, $s: X = (2,3,3) + \mu(3,2,1)$

$\therefore \vec{r} = (1,2,3)$ e $\vec{s} = (3,2,1)$. Seja $A = (1,1,0)$ e $B = (2,3,3)$, logo $\vec{AB} = -A+B = (1,2,3)$.

O determinante entre $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\vec{AB}$ resulta em 0, já que $\vec{r} = \vec{AB}$, logo, são concorrentes. Seja $\mu = 0$, temos:

$(1,1,0) + \lambda(1,2,3) = (2,3,3) \Rightarrow \lambda(1,2,3) = (1,2,3) \Rightarrow \lambda = 1$, logo $X = (2,2,3)$ é a intersecção.

(b) $\vec{r} = (2,1,3)$ e $\vec{s} = (4,2,6)$. Como $\vec{s} = 2\vec{r}$, elas são paralelas, como possuem pontos em comum, são também coincidentes.

(c) $\vec{r} = (-24,5,0)$ e $\vec{s} = (2,-2,1)$, $\vec{AB} = (2,4,11) - (0,1,0) = (2,3,11)$. Como $\vec{AB} = 11\vec{s} + 5\vec{r}$, o determinante da matriz é 0, então são concorrentes e isso acontece no ponto $(22,-21,11)$

(d) $\vec{r} = (3,4,1)$, $\vec{s} = (4,2,2)$. $\vec{AB} = (2,-2,0) - (0,0,3) = (2,-2,-3)$
Como o determinante desses vetores é -46, elas são retas reversas!!

(e) $\vec{r} = (-2,1,-1)$, $\vec{s} = (2,-1,1)$, $A-B = (1,-1,1) - (3,3,0) = (-2,-4,1)$
Como $\vec{r} = -\vec{s}$, as retas são paralelas, mas não coincidentes já que $\vec{AB} \neq k\vec{r}$.

(f) $\vec{r} = (2,2,3)$, $\vec{s} = (1,2,1/2)$, $\vec{AB} = (-3,2,1) - (0,7,3/2) = (-3,-5,-1/2)$
A matriz formada pelos três vetores tem det $= 4$, logo, são reversas

(g) $\vec{r} = (1,4,1)$ e $\vec{s} = (1,1,-1)$ e $\vec{AB} = (-3,1,0) - (0,2,2) = (-3,-1,-2)$
Como o determinante vale 19, as retas são reversas.

② Para Q temos os pontos $A = (-24,14,-34)$ e $B = (26,-11,41)$. O vetor diretor é $B-A = (50,-25,75)$, então, $X = A + \lambda(50,-25,75)$ ou apenas $X = A + \lambda(2,-1,3)$. Portanto, $\vec{p} = \vec{q}$, são paralelas, e, como A pertence a ambos, são coincidentes, ou seja, estão em rota de colisão. Como q está atrás e se locomove mais rápido, haverá colisão

③ ⓐ $\vec{r} = (1,-1,4)$, logo, $r: X = (0,0,1) + \lambda(1,-1,4)$

$\vec{s} = (3,3,5)$, logo, $s: X = (1,5,-2) + \lambda(3,3,5)$

Seja $\vec{AB} = (1,5,-2) - (0,0,1) = (1,5,-3)$. O determinante dos três vetores é 0, então se cruzam e isso acontece em $(-2,2,-7)$.

A equação de π é, por exemplo $\pi: X = (-2,2,-7) + \lambda(1,-1,4) + \mu(3,3,5)$ e na sua forma geral, $\pi: -17x + 7y + 6z - 6 = 0$ //

ⓑ $\vec{r} = (2,2,1)$, $\vec{s} = (2,8,8)$, $\vec{AB} = (3,6,1) - (0,0,-4) = (3,6,5)$

Como o det é 0, são concorrentes, isso acontece no ponto $(1,4,0)$

A equação geral do plano:

$$\vec{n}_\pi = \vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 8 \end{vmatrix} = (8,-14,12) = (4,-7,6) \therefore$$

$\pi: 4x - 7y + 6z + d = 0$, mas em $(1,4,0) \Rightarrow d = 24 \therefore \pi: 4x - 7y + 6z + 24 = 0$ //

④ $\vec{r} = (m,1,1)$, $\vec{s} = (1,m,1)$ e $\vec{t} = (-2,1,-1)$

$$[\vec{r},\vec{s},\vec{t}] = 0 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} m & 1 \\ 1 & m \\ -2 & 1 \end{matrix} = -m^2 - 2 + 1 + 2m - m + 1 =$$

$-m^2 + m = 0 \therefore m = 0$ ou $m = 1$, entretanto, $m \neq 0$ pelo domínio de cte

$\therefore$ Logo $\boxed{m = 1}$ //

⑤ $\vec{r} = \left(-\frac{k}{2}, 1, \frac{k+2}{6}\right)$ $\vec{s} = (2,k,1)$, $\vec{AB} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{13}{6}\right)$

$$\begin{vmatrix} -\frac{k}{2} & 1 & \frac{k+2}{6} \\ 2 & k & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{13}{6} \end{vmatrix} = \frac{-6k^2 + k - 29}{6} \neq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{R}^*$$

Além disso, não existe $\lambda \in \mathbb{R} \mid \left(-\frac{k}{2}, 1, \frac{k+2}{6}\right) = \lambda(2,k,1)$, ou seja, elas nunca podem ser paralelas nem concorrentes, portanto, para $k \in \mathbb{R}^*$, as retas são reversas!!

plano $\pi: X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ e $r: X = B + \vec{r}\lambda$

6 (a) $\vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v} = (1,1,1)$ e $\vec{r} = (1,-1,-1)$. Logo:
$[u,v,r] = \langle u\wedge v, r\rangle = 1-1-1 = -1 \neq 0$, logo, são transversais. Em r: $x = -1+\lambda$, $y = -1-\lambda$ e $z = -\lambda$. Pelo plano:
$-1+\cancel{\lambda} - \cancel{1} - \cancel{\lambda} - \lambda = 0 \therefore \lambda = -1$. Logo, $r \cap \pi = (-2,0,1)$

(b) $\vec{n} = (0,1,1)$, $\vec{r} = (1,-1,-1)$ e $\langle\vec{n},\vec{r}\rangle = -2$, logo, são transversais e, com $x = 1$, $y = 1+\lambda$ e $z = \lambda$, $r \cap \pi = (1,0,-1)$

(c) $\vec{r} = (2,1,1)$, $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (2,2,0)$. Sabemos que $[r,u,v] = 0$, logo, r não é transversal a π, são paralelos, e, como $\pi \cap r = \varnothing$, são simplesmente paralelos

(d) $\vec{n} = (1,1,2)$, $\vec{r} = (1,2,-1)$. $\langle r,n\rangle = 1 \neq 0$, logo, são transversais e $\pi \cap \vec{r} = (5,4,3)$ Aquele π ficou confuso, foi seguindo.

(e) $\vec{r} = (2,1,-3)$, $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,0)$. Como $[r,u,v] = -5$, são transversais. $r \cap \pi = \left(\frac{2-2\pi}{5}, \frac{1-\pi}{5}, \frac{3\pi+2}{5}\right)$

(f) $\vec{r} = (0,1,1)$, $\vec{u} = (1,-\frac{1}{2},0)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$. Como $\vec{v} = \vec{r}$, $[\vec{r},\vec{u},\vec{v}] = 0$, logo, são paralelos e como $r \cap \pi = \cancel{\varnothing}\ \vec{r}$, não são apenas paralelos, mas também a reta está contida em π

(g) $\vec{r} = (0,0,1)$, $\vec{n} = (1,1,0)$. $\langle r,n\rangle = 0$, logo, são paralelos mas como $\pi \cap r = \varnothing$, eles são apenas paralelos.

(h) $\vec{r} = (1,4,1)$, $\vec{u} = (0,1,2)$ e $\vec{v} = (1,-1,0)$. Como $[r,u,v] = 9 \neq 0$, são transversais e $r \cap \pi = (-\frac{1}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{1}{9})$

---

7 $\vec{r} = (2,m,1)$ e $\vec{u} = (1,2,0)$ e $\vec{v} = (1,0,1)$. Logo,
$[r,u,v] = -m+2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$

---

8 $\vec{r} = (m,2,m)$ e $\vec{n} = (1,m,1) \therefore \langle r,n\rangle = m+2m+m \neq 0 \therefore$
$m \neq 0$, logo, $\forall m \in \mathbb{R}^*$, eles são transversais

---

9 (a) $\vec{n_1} = (1,2,-1)$ e $\vec{n_2} = (2,1,-1)$. Como n_1 não é proporcional a n_2, eles são transversais e $\pi_1 \cap \pi_2 = r$.

$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \therefore x = y = \lambda \Rightarrow z = 3\lambda-1$, logo $r: X = (0,0,-1)+\lambda(1,1,3)$

(b) $\vec{u_1} = (0,1,1)$ e $\vec{v_1} = (-1,2,1)$ e $\vec{n_1} = \vec{u_1} \wedge \vec{v_1} = (-1,-1,1)$
$\vec{u_2} = (1,-1,0)$ e $\vec{v_2} = (-1,-1,-2)$ e $\vec{n_2} = \vec{u_2} \wedge \vec{v_2} = (1,1,-1)$
Como $n_1 \propto \vec{n_2}$ e eles possuem o ponto $(1,0,0)$ em comum, são paralelos e $\pi_1 = \pi_2$

(c) $\vec{n_1} = (0,0,1)$ e $\vec{n_2} = (-2,1,0)$. Como eles ~~nos~~ não são proporcionais, temos dois planos distintos.

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} z-1=0 \Rightarrow z=1 \\ y-2x+2=0 \Rightarrow y=2x+2=2\lambda-2 \end{cases}$$ seja $x=\lambda$ ∴ $r: X=(0,-2,1)+\lambda(1,2,0)$

(d) $\vec{n_1} = (1,-1,2)$ e $\vec{u_2} = (1,0,3)$, $\vec{v_2} = (-1,1,1) \Rightarrow \vec{n_2} = (-3,-4,1)$ ∴
Como n_1 não é proporcional a n_2, há uma interseção ∴
Por sinal, seja $\pi_2: -3x-4y+z-1=0$ ∴

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} x-y+2z=2 \\ -3x-4y+z=1 \end{cases}$$ $7x+7y=0$ ∴ $x=-y=\lambda$; $z=1-\lambda$ $\Rightarrow$ $r: X=(0,0,1)+\lambda(1,-1,-1)$

(e) $n_1=(1,-1,3)$, $n_2=(2,-2,6)$. Como $n_1 \propto n_2$ e $d_1 \propto d_2$, os dois planos são paralelos e coincidentes, logo, $\pi_1=\pi_2$.

(f) $n_1=(3,-4,2)$ e $n_2=(-15,20,-10)$. Como $n_1 \propto n_2$, mas d_1 não é proporcional a d_2, eles têm $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, Portanto, são apenas paralelos

(10) Se eles são paralelos, $n_1 \propto n_2$, logo, como $n_2=(6,-1,2)$ temos que $\pi_1: 6x-y+2z+d=0$. Passando em P temos: $2+10+d=0$ ∴ $d=-12$, logo, $\pi_1: 6x-y+2z=12$

(11) $$\pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow r: X=\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right)+\lambda(0,1,-1)$$
ou $r: x=2/3$ e $y=\frac{z-1/3}{-1}=1/3-z$

λ $\quad 1/3-\lambda$ $\qquad \mu$ $\quad 1/3-\mu$

Portanto, $B=\left(\frac{2}{3}, y_b, z_b\right)$ e $C=\left(\frac{2}{3}, y_c, z_c\right)$
Com $d(A,C)=\frac{2\sqrt{5}}{3}=\sqrt{(2/3)^2+(\underbrace{1-\mu}_{\mu-1})^2+(1/3-\mu)^2} \Rightarrow \mu=-1/3$ ou $\mu=5/3$

$A=(0,1,0)$

Logo, $C = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ou $C = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$. Além disso, sabemos que B está entre essas duas possibilidades de C, logo, $y_b = (-\frac{1}{3} + \frac{5}{3}) \cdot \frac{1}{2}$ e $z_b = (\frac{2}{3} - \frac{4}{3}) \cdot \frac{1}{2}$. Enfim, $B = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

12) a) $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 9+\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases}$ Seja $x = 1-\lambda$, logo

$\to y = \lambda - 1 + 10 = -x + 10 \therefore y + x = 10$

$\to z = 3 + 1 - \lambda = 3 + x \therefore z - x = 3$

↳ $r: \begin{cases} y + x = 10 \\ z - x = 3 \end{cases}$, é uma possível solução.

b) $\begin{cases} x = -7-\lambda \\ y = 1 \\ z = 10+\lambda \end{cases} \to x = -7-\lambda$, logo:

$z = 7 + \lambda + 3 = -x + 3 \therefore x + z = 3$

$x + z = 1 + 2 \Rightarrow x + z - y = 2$

Logo: $r: \begin{cases} x + z = 3 \\ x + z - y = 2 \end{cases}$, é uma possível solução

13) $r: \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x = 6 \therefore x = 3$, além disso: $3y - z = -1$

$\therefore z = 3y + 1$ e, sendo $y = \lambda$, $z = 3\lambda + 1$

logo: $r: X = (3, 0, 1) + \lambda(0, 1, 3)$

14) $u_1 = (m, 1, 1)$ e $v_1 = (1, 1, m) \Rightarrow n_1 = (m-1, 1-m^2, m-1)$

$n_2 = (2, 3, 2)$. Para $n_1 \propto n_2$, temos que $n_1 = k n_2$, logo:

$\begin{cases} m - 1 = 2k \\ 1 - m^2 = 3k \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$, entretanto, como $(1,1,0)$ pertence a π_1 e π_2, eles não podem ser distintos,

então $\nexists\, m$ para que isso aconteça.

15) $\vec{n_1} = (2, 1, 3)$ e $\vec{u_2} = (1, 1, 0)$, $\vec{v_2} = (2, -1, m) \Rightarrow \vec{n_2} = (m, -m, -3)$

Como não existe casos em que $n_1 \propto n_2$, então eles sempre são transversais $\forall\, m \in \mathbb{R}$

(16) $\vec{u_1} = (2,3,-1)$ e, seja $\vec{v_1} = \vec{AB} = (1,0,-1) - (1,0,2) = (0,0,-3)$

Logo, $n_1 = u_1 \wedge v_1 = (-9,6,0) \equiv (-3,2,0)$

Então: $\pi: -9x + 6y + d = 0 \therefore d = 9 \therefore \pi: -9x + 6 + 9 = 0 \equiv$

$\pi: -3x + 2y + 3 = 0$

(17)

Seja $z = \lambda$

$$\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} 3x - 2y - z = 3 \Rightarrow 7x + 7z = 7 \therefore x + z = 1 \Rightarrow x = 1 - z = 1 - \lambda \\ 2x + y + 4z = 2 \Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z = -2\lambda \end{cases}$$

$\therefore \pi_1 \cap \pi_2 : X = (1,0,0) + \lambda(-1,-2,1)$, logo, $\vec{u} = (-1,-2,1)$

e seja $\vec{AB}$ o vetor diretor da reta que passa por A e B temos: $\vec{AB} = (2,0,0) - (0,2,0) = (2,-2,0)$. Enfim, seja $\vec{CD}$ um vetor que relaciona $\vec{AB}$ e $\pi_1 \cap \pi_2$: $\vec{CD} = (2,0,0) - (1,0,0) = (1,0,0)$. Perceba que $[\vec{u}, \vec{AB}, \vec{CD}] = -2$, ou seja, o exercício nos pede um plano formado por duas retas reversas, logo, esse plano não existe.