Décima Lista de Exercícios

GEOMETRIA ANALÍTICA - Camargo–Boulos

Quádricas

1. (Coordenadas polares) Seja $\Sigma = \{O, \vec{x}, \vec{y}\}$ um sistema de coordenadas ortonormal de um plano π.

   (a) Seja r um número real não negativo. Mostre que para todo θ real, o ponto o ponto $P = (r\cos\theta, r\text{sen}\theta)$ de π pertence à circunferência de centro em O e raio r.

   (b) Mostre que todo ponto P do plano π pode ser escrito na forma $(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)$, com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$; (r, θ) são chamadas de *coordenadas polares* do ponto P.

2. (Coordenadas cilíndricas) Seja $\Sigma = \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ um sistema de coordenadas ortonormal. Mostre que todo ponto P de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito na forma $(r\cos\theta, r\text{sen}\theta, h)$, com $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e $h \in \mathbb{R}$; (r, θ, h) são chamadas de *coordenadas cilíndricas* do ponto P.

3. (Coordenadas esféricas) Seja $\Sigma = \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ um sistema de coordenadas ortonormal.

   (a) Seja ρ um número real não negativo. Mostre que, para todo ϕ e todo θ reais, o ponto $P = (\rho\text{sen}\phi\cos\theta, \rho\text{sen}\phi\text{sen}\theta, \rho\cos\phi)$ pertence à esfera de centro em O e raio ρ.

   (b) Mostre que todo ponto P pode ser escrito na forma $(\rho\text{sen}\phi\cos\theta, \rho\text{sen}\phi\text{sen}\theta, \rho\cos\phi)$, com $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$; (ρ, ϕ, θ) são chamadas de *coordenadas esféricas* do ponto P.

4. Mostre que se $d < 0$, a equação $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ descreve uma esfera, quaisquer que sejam os números reais a, b, c.

5. Nos casos em que a equação dada descreve uma superfície esférica, determine o centro e o raio.

   (a) $(x-2)^2 + (y+6)^2 + z^2 = 25$

   (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$

   (d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$

   (e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 16 = 0$

   (f) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x + 2y - 4z + 7 = 0$

(g) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x - 8y - 8z + 10 = 0$

(h) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 15 = 0$

(i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

6. Obtenha uma equação da esfera de centro $C = (1, 1, 2)$ que contém o ponto $P = (1, 1, 3)$.

7. Obtenha uma equação da esfera, conhecendo as extremidades de um diâmetro: $A = (2, -3, -5)$ e $B = (4, 1, -3)$.

8. Determine o diâmetro da esfera $\mathrm{S} : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$ que é perpendicular ao plano $\pi : x - y - 2 = 0$.

9. Obtenha uma equação da esfera que contém os pontos $P = (0, 2, -1)$, $Q = (1, 1, -1)$, $R = (1, -1, 1)$ e $S = (-1, 1, 1)$.

10. Obtenha uma equação da esfera que contém os pontos $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, cujo centro pertence ao plano $\pi : x + y - z = 0$.

11. Nos casos em que a interseção do plano π com o elipsóide Ω for uma elipse, determine seu centro, focos e vértices. Se for uma circunferência, determine o centro e o raio.

    (a) $\Omega : \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} + \dfrac{z^2}{4} = 1 \qquad \pi : y - 5 = 0$

    (b) $\Omega : x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36 \qquad \pi : x + 2\sqrt{5} = 0$

    (c) $\Omega : 4x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2 = 0 \qquad \pi : z + \dfrac{1}{3} = 0$

12. Sejam $A = (1, 0, 0)$ e $B = (-1, 0, 0)$. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos X tais que $\mathrm{d}\,(X, A) + \mathrm{d}\,(X, B) = 2$.

13. Descreva a curva interseção do hiperbolóide Ω com o plano π e determine, quando for o caso: centro, focos, assíntotas, raio.

    (a) $\Omega : x^2 - 4y^2 + 5z^2 = 1 \qquad \pi : z + 1/\sqrt{5} = 0$

    (b) $\Omega : -3x^2 - 4z^2 + 5y^2 = -43 \qquad \pi : y = 1$

    (c) $\Omega : \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} - z^2 = 1 \qquad \pi : y + 2 = 0$

14. Sendo $\Omega : 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 1$, determine os planos paralelos aos planos coordenados que intersectam Ω em uma cônica de distância focal $\sqrt{6}$.

15. Seam $A = (0, 3, 0)$ e $B = (0, -3, 0)$. Determine uma equação do lugar geométrico dos pontos X tais que $\mathrm{d}\,(X, A) - \mathrm{d}\,(X, B) = 6$.

16. Seja Ω a quádrica de equação $9x^2 + 36y^2 - 4z^2 - 18x + 72y + 16z - 7 = 0$. Complete os quadrados e faça uma translação do sistema de coordenadas para eliminar os termos de primeiro grau e concluir que se trata de um hiperbolóide de uma folha.

17. Prove que as equações abaixo descrevem parabolóides elípticos e esboce-os.

    $x = y^2/a^2 + z^2/b^2 \qquad y = x^2/a^2 + z^2/b^2 \qquad z = -x^2/a^2 - y^2/b^2$

    $x = -y^2/a^2 - z^2/b^2 \qquad y = -x^2/a^2 - z^2/b^2$

18. Descreva a curva interseção d parabolóide Ω com o plano π e determine, quando for o caso, centro, focos, vértices, assíntotas, raio.

    (a) $\Omega : z + x^2 + 3y^2 = 0 \qquad \pi : z + 9 = 0$

    (b) $\Omega : 4y - 4x^2 - z^2 = 0 \qquad \pi : z - 1 = 0$

    (c) $\Omega : x + y^2 + 2z^2 = 0 \qquad \pi : x - 1 = 0$

19. Obenha uma equação do lugar geométrico dos pontos que são equidistantes do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$, e identifique-o.

20. Seja Ω a quádrica de equação $x^2 + 6z^2 - 4x + y - 12 = 0$. Faça uma translação do sistema de coordenadas para eliminar os termos de primeiro grau e identifique a quádrica.

21. Prove que $\Omega : z = 8x^2 - 2xy + 8y^2$ é um parabolóide elíptico e faça um esboço.

22. Prove que são selas (parabolóides hiperbólicos) as quádricas descritas pelas equações.

    $x = y^2/a^2 - z^2/b^2 \qquad y = x^2/a^2 - z^2/b^2 \qquad z = x^2/a^2 - y^2/b^2$

    $x = -y^2/a^2 + z^2/b^2 \qquad y = -x^2/a^2 + z^2/b^2$

23. Seja Ω a quádrica de equação $y^2 - 4z^2 + x - 2y + 16z - 15 = 0$. Faça uma translação do sistema de coordenadas para eliminar os termos de primeiro grau e identifique a quádrica.

24. Faça uma mudança de coordenadas conveniente para concluir que $\Omega : z = xy$ é um parabolóide hiperbólico, e esboce-o.

25. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos que são equidistantes das retas $r : X = (0, -1/2, 0) + \lambda\,(1, 0, 0)$ e $s : X = (0, -1/2, 0) + \lambda\,(0, 0, 1)$, e identifique-o.

26. Identifique, em cada caso, a quádrica cilíndrica descrita pela equação dada e comente a posição das geratrizes em relação aos eixos coordenados.

(a) $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$

(b) $z^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

(c) $z^2 = cx$

(d) $x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$

(e) $y^2 = cz$

(f) $x^2/a^2 - z^2/b^2 = 1$

27. Identifique a quádrica descrita pela equação dada.

    (a) $x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$

    (b) $3x^2 + y^2 - 2xy - 6x + 2y - 1 = 0$

    (c) $-10 + 8x - 8z - x^2 + 6xz - z^2 = 0$

    (d) $y^2 + 2yz + z^2 + y - z - 2 = 0$

    (e) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

    (f) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 12y + 5 = 0$

28. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos que são equidistantes de O e $r : X = (1, 0, 0) + \lambda\,(0, 1, 0)$, e identifique-o.

29. Prove, em cada caso, que a equação dada descreve uma quádrica cônica.

    (a) $y^2 = x^2/a^2 + z^2/b^2$ $\qquad$ $x^2 = y^2/a^2 + z^2/b^2$

30. Prove, em cada caso, que a equação dada descreve uma quádrica cônica.

    (a) $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 4 = 0$

    (b) $2xy + y^2 = 0$

31. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam da reta $r : x - y = z = 0$ e do plano $\pi : x + y = 0$.