Sétima Lista de Exercícios

GEOMETRIA ANALÍTICA

Ângulo entre retas, entre reta e plano e entre planos

1. (Poole) Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa por $P = (2, -1)$ e é perpendicular à reta de equação geral $2x - 3y = 1$.

2. (Poole) A reta r passa pelo ponto $P = (1, -1, 1)$ e tem vetor diretor $u = (2, 3, -1)$. Para cada um dos seguintes planos π, determine se r e π são paralelos, perpendiculares, ou nenhum desses dois.

   (a) $\pi : 2x + 3y - z = 1$

   (b) $\pi : 4x - y + 5z = 0$

   (c) $\pi : x - y - z = 3$

3. (Poole) Determine uma equação vetorial para a reta que passa por $P = (-1, 0, 3)$ e é perpendicular ao plano de equação geral $x - 3y + 2z = 5$.

4. (Poole) O plano π_1 tem equação $4x - y + 5z = 2$. Para cada um dos planos π, determine se π_1 e π são paralelos, perpendiculares ou nenhum desses dois.

   (a) $\pi : 2x + 3y - z = 1$

   (b) $\pi : x - y - z = 3$

   (c) $\pi : 4x + 6y - 2z = 0$

5. (Poole) Determine uma equação vetorial da reta que passa por $P = (-1, 0, 3)$ e é paralela à reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

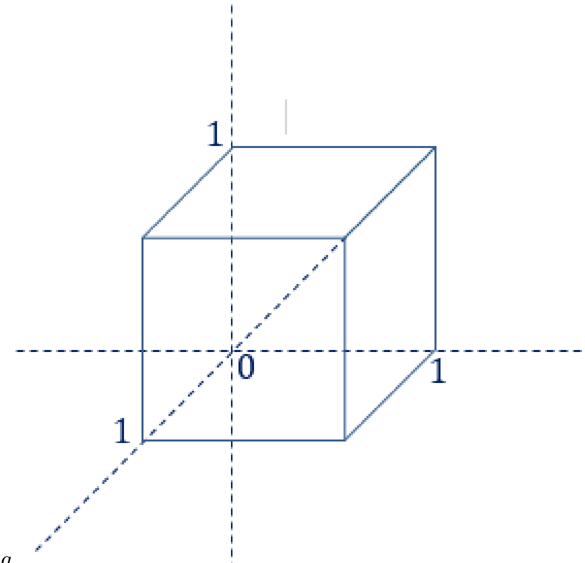
6. (Poole) Escreva uma equação na forma normal para o plano que passa por $P = (0, -2, 5)$ e é paralelo ao plano de equação geral $6x - y + 2z = 3$.

7. (Poole) Veja o cubo da Figura 1.

   (a) Encontre a equação geral para cada um dos planos que determinam as seis faces do cubo.

   (b) Encontre a equação geral para o plano que contém a diagonal que vai da origem ao ponto $(1, 1, 1)$ e é perpendicular ao plano Oxy.

unitário



$_1.png$

Figura 1. Cubo

8. (Camargo–Boulos) Verifique se as retas são ortogonais ou perpendiculares.

   (a) $r : X = (1, 2, 3) + \lambda\,(1, 2, 1) \qquad s : X = (2, 4, 4) + \mu\,(-1, 1, -1)$

   (b) $r : x + 3 = y = z/3 \qquad s : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{4-y}{-1} = -z$

   (c) $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z}{7} \qquad s : (1, 3, 0) + \lambda\,(0, -7, 5)$

   (d) $r : 36x - 9y = 3y + 4z = 18 \qquad s : x + y = z - y - 2 = 0$

9. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém P e é perpendicular a r, nos casos:

   (a) $P = (2, 6, 1)\,, \quad r : X = (-3, 0, 0) + \lambda\,(1, 1, 3)$

   (b) $P = (1, 0, 1)\,, \quad r$ contém $A = (0, 0, -1)$ e $B = (1, 0, 0)$

10. (Camargo-Boulos) Obtenha o ponto simétrico do ponto P em relação à reta r, nos casos:

    (a) $P = (0, 2, 1) \qquad r : X = (1, 0, 0) + \lambda\,(0, 1, -1)$

    (b) $P = (1, 1, -1) \qquad r : \dfrac{x+2}{3} = y = z$

11. (Camargo-Boulos) A diagonal BC de um quadrado $ABCD$ está contida na reta $r : X = (1, 0, 0) + \lambda\,(0, 1, 1)$. Conhecendo $A = (1, 1, 0)$, determine os outros três vértices.

12. (Camargo-Boulos) Obtenha um vetor normal ao plano π em cada caso:

    (a) π contém $A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 1), C = (1, 2, 3)$

    (b) $\pi : X = (1, 2, 0) + \lambda (1, -1, 1) + \mu (0, 1, -2)$

13. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $(1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano de equação $x - y + 2z + 1 = 0$.

14. (Camargo-Boulos) O plano π contém $P = (2, 0, 2)$ e é paralelo a $\pi_1 : X = (2, 5, 0) + \lambda (2, -1, -1) + \mu (-3, 1, 2)$. Escreva uma equação geral de π cujos coeficientes tenham soma 30.

15. (Camargo-Boulos) O vetor $(1, 1, m)$ é normal ao plano π, que contém a interseção dos planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ e Oyz. Determine m e obtenha uma equação geral de π.

16. (Camargo-Boulos) Decomponha o vetor $u = (-3, 4, -5)$ em duas parcelas, uma paralela e outra ortogonal ao plano de equação $X = (1, -2, 0) + \lambda (-1, 0, 1) + \mu (0, 0, -1)$.

17. (Camargo-Boulos) Dados $\pi_1 : X = (1, -2, 0) + \lambda (1, 0, -1) + \mu (0, 0, -1)$ e $\pi_2 : X = (1, 0, 3) + \lambda (1, 2, 0) + \mu (-1, 1, -1)$, obtenha uma equação vetorial de $\pi_1 \cap \pi_2$.

18. (Camargo-Boulos) Verifique se r e π são perpendiculares:

    (a) $r : X = (0, 0, 4) + \lambda (1, -1, 1)$ $\quad$ $\pi : X = (1, 2, 3) + \lambda (1, 2, 1) + \mu (1, 0, 1)$

    (b) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda (3, -3, 1)$ $\quad$ $\pi : 6x - 6y + 2z - 1 = 0$

    (c) $r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\pi : x - y + z + 1$

19. (Camargo-Boulos) Prove que o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes de $A = (2, 1, 1), B = (-1, 0, 1), C = (0, 2, 1)$ é uma reta e obtenha uma equação vetorial para ela.

20. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação vetorial da reta que contém o ponto P e é perpendicular ao plano π, nos casos:

    (a) $P = (1, 3, 7), \pi : 2x - y + z = 6$

    (b) $P = (1, -1, 0), \pi : X = (1, -1, 1) + \lambda (1, 0, 1) + \mu (1, 1, 1)$

21. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $P = (1, 1, -1)$ e é perpendicular à reta $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

22. (Camargo-Boulos) Determine a projeção ortogonal da reta $r: x+1 = y+2 = 3z-3$ sobre o plano $\pi: x-y+2z=0$.

23. (Camargo-Boulos) Determine as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P=(1,0,1)$ sobre o plano $\pi: x-2y+4z=1$.

24. (Camargo-Boulos) Obtenha o ponto simétrico do ponto $P=(1,4,2)$ em relação ao plano $\pi: x-y+z-2=0$.

25. (Camargo-Boulos) Sejam $\pi: x+y-z=3$ e r a reta que contém os pontos $A=(1,0,0)$ e $B=(0,-1,-1)$. Obtenha uma equação vetorial da reta simétrica de r em relação a π.

26. (Camargo-Boulos) O vértice de uma perâmide regular é $P=\left(\sqrt{2},2,0\right)$ e sua base é um quadrado $ABCD$ contido no plano $\pi: x-z=0$. Sendo $A=(0,2,0)$, determine os outros três vértices e o volume da pirâmide.

27. (Camargo-Boulos) Estude a posição relativa dos planos $\pi_1: 2x+y+3z+1=0$ e $\pi_2: X=(1,1,1)+\lambda\,(1,1,0)+\mu\,(2,-1,m)$ e verifique se existe algum valor de m para o qual π_1 e π_2 sejam perpendiculares.

28. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $(2,1,0)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1: x+2y-3z+4=0$ e $\pi_2: 8x-4y+16z-1=0$.

29. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que contém a origem do sistema de coordenadas e é paralelo a reta $r: -x = (1-y)/4 = (1-z)/5$ e perpendicular a $\pi: X=(1,2,3)+\lambda\,(0,4,-3)+\mu\,(1,-1,-2)$.

30. (Camargo-Boulos) Calcule a medida angular θ entre as retas:

    (a) $r: X=(-5/2,2,0)+\lambda\,(1/2,1,1)$ $\qquad s: z=3x=2y-16$

    (b) $r: x=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{z}{3},$ $\qquad s: \begin{cases} 3x+y-5z=0 \\ x-2y+3z+1=0 \end{cases}$

31. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação vetorial da reta que forma ângulos congruentes com os eixos coordenados e é concorrente com $r: 2x-2=3y-3=-2z$ e $s: X=(-1,1,0)+\lambda\,(5,3,1)$.

32. (Camargo-Boulos) Obtenha equações na forma simétrica de uma reta que contém o ponto $P=(1,-2,3)$ e forma ângulos de 45^0 e 60^0, respectivamente, com os eixos coordenados Ox e Oy.

33. (Camargo-Boulos) Um hexágono regular está contido no plano $\pi: x+y+z=1$. Sendo $A=(1,0,0)$ e $D=(-1/3,2/3,2/3)$ dois vértices diametralmente opostos, determine os outros quatro vértices do hexágono.

34. (Camargo-Boulos) O ângulo $\hat{A}$ do triângulo isósceles ABC mede 120^0. Sabendo que $A = (1, 1, 1)$ e que BC está contido na reta $r : X = (2, 1, 0) + \lambda\,(1, -1, 0)$, determine B e C e calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A.

35. (Camargo-Boulos) Uma fonte luminosa pontual, situada em $F = (0, 0, 1)$ emite um raio luminoso na direção do ponto $A = (1, 1, 0)$, que é refletido por um espelho plano contido no plano $\pi : y = 3$.

    (a) Em que ponto do espelho incide o raio luminoso?

    (b) Em que ponto o raio refletido atinge o plano Oxz? E $\pi_1 : x + y + 1 = 0$?

36. (Camargo-Boulos) Determine as extremidades B e D de uma das diagonais de um losango $ABCD$ contido no plano $\pi : x - y - z = 0$, sabendo que $A = (3, 0, 3)$, $C = (1, 2, -1)$, e que o ângulo $A\hat{B}C$ mede 120^0.

37. (Camargo-Boulos) O triângulo ABC é retângulo em B e está contido no plano $\pi_1 : x + y + z = 1$. O cateto BC está contido no plano $\pi_2 : x - 2y - 2z = 0$ e o ângulo $\hat{C}$ mede 30^0. Dado $A = (0, 1, 0)$, determine B e C e calcule o comprimento da altura relativa à hipotenusa.

38. (Camargo-Boulos) Obtenha a medida angular em radianos entre a reta r e o plano π.

    (a) $r : x = y - z = 0 \qquad \pi : z = 0$

    (b) $r : X = (0, 0, 1) + \lambda\,(-1, 1, 0) \qquad \pi : 3x + 4y = 0$

39. (Camargo-Boulos) Obtenha um vetor diretor da reta que é paralela ao plano $\pi : x+y+z = 0$ e forma ângulo de 45^0 com o plano $\pi_1 : x-y = 0$.

40. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta r e forma ângulo de θ radianoscom a reta s.

    (a) $\cos\theta = 1/9 \qquad s : y + 2z = 4 = x + y + 5 \qquad r : X = (2, 0, 3) + \lambda\,(1, 1, 1)$

    (b) $\cos\theta = 4\sqrt{3}/7 \qquad s : X = (1, 0, 0) + \lambda\,(1, 2, 3) \qquad r$ contém $A = (1, 0, -2)$ e $B = (1, 1, 0)$.

41. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação vetorial da reta r, concorrente com $s : 2x - y + z + 6 = 0 = x - z$ e contida no plano $\pi_1 : 3x - 2y - 2z + 7 = 0$, sabendo que a medida angular entre r e $\pi_2 : x + y = 2$ é $\arccos\,(1/3)$.

42. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação geral do plano π que contém a reta $r : X = (0,4,0) + \lambda\,(1,4,-1)$ e forma ângulos congruentes com as retas $s : X = (1,1,0) + \lambda\,(1,2,-6)$ e $t : X = (3,1,1) + \lambda\,(3,4,4)$.

43. (Camargo-Boulos) Calcule a medida angular entre os planos:

    (a) $\pi_1 : 2x + y - z = 1 \qquad \pi_2 : x - y + 3z - 10 = 0$

    (b) $\pi_1 : X = (1,0,0) + \lambda\,(1,0,1) + \mu\,(-1,0,0) \qquad \pi_2 : x + y + z = 0$

44. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que contém r e forma ângulo de θ radianos com π:

    (a) $r : x = z + 1 = y + 2 \qquad \pi : x + 2y - 3z + 2 = 0 \qquad \theta = \pi/3$

    (b) $r : X = (8,0,0) + \lambda\,(-8,0,8) \qquad \pi : x + z + 1 = 0 \qquad \cos\theta = \sqrt{2/3}$

45. (Camargo-Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que contém a origem $O = (0,0,0)$ e forma ângulo de 60^0 com a reta $r : X = (1,1,1) + \lambda\,(0,1,-1)$ e com o plano $\pi : x - y + 4 = 0$.

46. (Camargo-Boulos) O quadrado $ABCD$ é uma face e CE é uma aresta de um cubo de diagonal AE. Obtenha uma equação geral do plano que contém AE e forma ângulo de 60^0 com a face $ABCD$, sabendo que $A = (2,2,0)$, $C = (0,2,0)$, $E = \big(0,2,\sqrt{2}\big)$.