Sexta Lista de Exercícios

GEOMETRIA ANALÍTICA

Posições relativas de retas e planos

1. (Camargo–Boulos) Estude a posição relativa das retas r e s. Em caso de retas concorrentes, obtenha o ponto de intersecção.

   (a) $r : X = (1,1,0) + \lambda\,(1,2,3) \qquad s : X = (2,3,3) + \mu\,(3,2,1)$

   (b) $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases}$

   (c) $r : \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 11 \end{cases} \qquad s : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = z$

   (d) $r : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = z \qquad s : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{2}$

   (e) $r : X = (1,-1,1) + \lambda\,(-2,1,-1) \qquad s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

   (f) $r : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{2y-4}{4} = \dfrac{z-1}{3} \qquad s : \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$

   (g) $r : x + 3 = \dfrac{y-1}{4} = z \qquad s : X = (0,2,2) + \lambda\,(1,1,-1)$

2. (Camargo–Boulos) Uma partícula p realiza movimento retilíneo uniforme descrito pela fórmula $P(t) = (2,1,5) + t\,(2,-1,3)$ $(t \in \mathbb{R})$. Também em movimento retilíneo uniforme, outra partícula q ocupa a posição $Q(-2) = (-24,14,-34)$, no instante -2, e a posição $Q(3) = (26,-11,41)$, no instante 3. Verifique se as partículas estão em rota de colisão.

3. (Camargo–Boulos) Mostre que as retas r e s são concorrentes, determine o ponto comum e obtenha uma equação geral do plano determinado por elas.

   (a) $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \qquad s : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{2+z}{5}$

   (b) $r : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-6}{2} = z - 1 \qquad s : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z+4}{8}$

4. (Camargo–Boulos) Calcule m de forma que as retas r, s, t sejam paralelas a um mesmo plano.

$$r : \begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : x = \frac{y}{m} = z \qquad t : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

5. Determine k de forma que as retas r e s sejam reversas.

$$r : \begin{cases} 2x + ky - 1 = 0 \\ x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \qquad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{k} = z + 1$$

6. (Camargo–Boulos) Estude a posição relativa da reta r e o plano π. Em caso de serem transversais, determine o ponto de intersecação $r \cap \pi$.

   (a) $r : X = (-1, -1, 0) + \lambda\,(1, -1, -1) \qquad \pi : x + y + z + 1 = 0$

   (b) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda\,(0, 1, 1) \qquad \pi : x - y - z = 2$

   (c) $r : \dfrac{x-1}{2} = y = z \qquad \pi : X = (3, 0, 1) + \lambda\,(1, 0, 1) + \mu\,(2, 2, 0)$

   (d) $r : x - 3 = y - 2 = \dfrac{z+1}{2} \qquad \pi : x + 2y - z = 10$

   (e) $r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \qquad \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 + \mu \\ z = 1 + \lambda + \pi \end{cases}$

   (f) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \pi : X = (0, 1/2, 0) + \lambda\,(1, -1/2, 0) + \mu\,(0, 1, 1)$

   (g) $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \pi : x + y = 2$

   (h) $r : X = (0, 0, 0) + \lambda\,(1, 4, 1) \qquad \pi : X = (1, -1, 1) + \lambda\,(0, 1, 2) + \mu\,(1, -1, 0)$

7. (Camargo–Boulos) Calcule m para que a reta $r : X = (1, 1, 1) + \lambda\,(2, m, 1)$ seja paralela ao plano $\pi : X = (0, 0, 0) + \lambda\,(1, 2, 0) + \mu\,(1, 0, 1)$.

8. (Camargo–Boulos) Para que valores de m a reta $r : \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{m}$ é transversal ao plano $\pi : x + my + z = 0$?

9. (Camargo–Boulos) Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2. Em caso de transversalidade, determine a reta de intersecação $\pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) $\pi_1 : x + 2y - z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : 2x + y - z = 1$

   (b) $\pi_1 : X = (1, 1, 1) + \lambda\,(0, 1, 1) + \mu\,(-1, 2, 1) \qquad \pi_2 : X = (1, 0, 0) + \lambda\,(1, -1, 0) + \mu\,(-1, -1, -2)$

(c) $\pi_1 : z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : y - 2x + 2 = 0$

(d) $\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0 \qquad \pi_2 : X = (0,0,1) + \lambda\,(1,0,3) + \mu\,(-1,1,1)$

(e) $\pi_1 : x - y = 1 - 3z \qquad \pi_2 : 6z - 2y = 2 - 2x$

(f) $\pi_1 : 3x - 4y + 2z = 4 \qquad \pi_2 : -15x + 20y - 10z = 9$

10. (Poole) Escreva uma equação na forma normal (geral) para o plano que passa por $P = (0,-2,5)$ e é paralelo ao plano de equação geral $6x - y + 2z = 3$.

11. (Camargo–Boulos) O triângulo ABC é retângulo em B e está contido em $\pi_1 : x + y + z = 1$. O cateto BC está contido no plano $\pi_2 : x - 2y - 2z = 0$ e a hipotenusa a mede $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Sendo $A = (0,1,0)$, determine B e C.

12. (Camargo–Boulos) Obtenha equações planares para as retas.

    (a) $r : X = (1,9,4) + \lambda\,(-1,1,-1)$

    (b) $r : X = (-7,1,10) + \lambda\,(-1,0,1)$

13. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação vetorial para a reta $r : \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$.

14. (Camargo–Boulos) Calcule m para que os planos $\pi_1 : X = (1,1,0) + \lambda\,(m,1,1) + \mu\,(1,1,m)$ e $\pi_2 : 2x + 3y + 2z - 5 = 0$ sejam paralelos distintos.

15. (Camargo–Boulos) Estude a posição relativa dos planos $\pi_1 : 2x + y + 3z + 1 = 0$ e $\pi_2 : X = (1,1,1) + \lambda\,(1,1,0) + \mu\,(2,-1,m)$.

16. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $P = (1,0,-1)$ e reta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = 2 - z$.

17. (Camargo–Boulos) Obtenha uma equação do plano que contém os pontos $A = (2,0,0)$ e $B = (0,2,0)$ e a reta intersecção dos planos $\pi_1 : 3x - 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y + 4z - 2 = 0$.