precisam ser coplanares — não necessariamente

1) a) F, b) F, eles podem ser LI, c) F, d) V, vetores são transcendente

2) a) Com $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD, logo, $\vec{u} = k\vec{v}$. Então, para $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, temos $(k\vec{v}, \vec{v}, \vec{w})$, para todos os casos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares, logo, como dois vetores distintos formam um plano, com certeza $\vec{w}$ será coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ caracterizando-os como LD

b) Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. Suponha que u e v são LD, ou seja, $\vec{u} = k\vec{v}$, $ak\vec{v} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$, logo

$\vartheta(ak+b)+cw=0 \therefore c=0$ e $ak=-b$ respondem a equação, que não implica que $a=b=0$ é a única resposta. Logo, como isso é um absurdo, u e ϑ são

(c) Se (u,ϑ) é L.D. então $\vec{u}=k\vartheta$, logo $(u+\vartheta, u-\vartheta)$ pode ser reescrito como $((k+1)\vartheta, (k-1)\vartheta)$, que são claramente paralelos e formam uma dupla L.D.

(3) (a) F, (b) F, apenas se w não for coplanar a u e ϑ (c) F, seja $u=a\vartheta+bw$ o motivo deles serem L.D, logo, $(2u,-\vartheta)=(2a\vartheta+2bw,-\vartheta)$. Eles só serão L.D. se $2a\vartheta+2bw=-k\vartheta$, então $\vartheta(2a+k)=-2bw$, $\vartheta=\frac{-2b}{2a+k}w$, ou seja, ϑ e w devem ser L.D. entre si, mas isso não é condição obrigatória, logo, a implicação é falsa. (d) V, para $(\vec{u},\vec{\vartheta},\vec{w})$ L.D temos duas situações, $\vec{u}=k\vartheta=j\vec{w}$, logo, (u,ϑ) é L.D.. Entretanto, se $\vec{u}=a\vartheta+bw$, temos que (u,ϑ) é L.I. (e) V, seja $au+b\vartheta=w$, quer dizer que w é um vetor no mesmo plano de u e ϑ, logo (u,ϑ,w) é L.D. Entretanto, se w não pode ser escrito como combinação de u e ϑ, a tripla (u,ϑ,w) é L.I.

(4) (a) Podemos escrever que $-\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}c=b$, ou $-a+5c=2b \therefore a=5c-2b$, ou seja, como um é combinação dos outros, eles são coplanares, logo, L.D. (b) $c=2a\mp b$, pelo mesmo motivo de antes, concluímos que são L.D. (c) $c=2b-3a$, logo, são L.D.

(5) $(a,b,c)=(u+w, 2u+\vartheta-w, \vartheta-2w)$. Dentre a, b e c não há combinações tais que um forme o outro. Seja $(u+w)=(2u+\vartheta-w)k$ $(\vartheta-2w)j \Longrightarrow u+w=2uk+\vartheta(k+j)+w(-k-2j) \Longrightarrow k+j=0 \therefore u+w=u(2k)+w(k)$, o que é impossível, exceto quando se supõem que $u=xw$, ou seja, eles são L.D, possibilitando a resolução. Dessa forma, concluímos que, se (u,ϑ,w) é L.I, então (a,b,c) também é L.I e vice-versa.

(6) Para $(u+\vartheta, u-\vartheta)$ ser L.D., $u+\vartheta=ku-k\vartheta$, o que é impossível caso ϑ e u não tenham nenhuma dependência, logo, igual no exercício 5, (u,ϑ) é LI $\Longleftrightarrow (u+\vartheta, u-\vartheta)$ é L.I

(7) Seja $(u+\vartheta+w, u-\vartheta, 3\vartheta)$ uma tripla LI, então

$a(u+v+w) + b(u-v) + c(3v) = 0 \leftrightarrow a=b=c=0$, então $u(a+b) + v(a-b+3c) + w(a) = 0$. Se ~~tivéssemos~~ ~~deles~~ podemos ~~uma combinação~~ eles não são L.D, então $a=b=c=0$, como queríamos. Se $ku + jv = w$, então $u(a+ak+b) + v(a-b+3c+ja) = 0$, existem diversos valores que respondem. Logo, a tripla não seria L.I, pois um estará sujeito ao outro, provando o que queríamos.

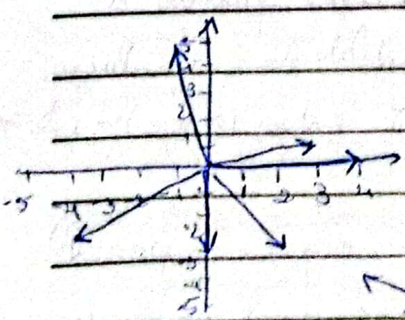
(8) $(2u+w,\ u-v,\ v+w)$ é L.D, então, $a(2u+w) + b(u-v) + c(v+w)$ possui diversas soluções, da forma $u(2a+c) + v(c-b) + w(a+c) = 0$. De outro modo, um dos vetores pode ser formado como uma combinação linear de outros dois. $k(2u+w) = a(v+w) + b(u-v)$. Seja $a=b=1$, $k(2u+w) = u+w$. Isso só é possível para $u=0$ (o que torna ambas as ~~vetores~~ triplas L.D) ou para u uma combinação linear de w, o que torna as triplas L.D. Em caso contrário, ambas serão L.I.

(9) Para $x = au+bv+cw$. A tripla $(u+x,\ v+x,\ w+x)$ ser L.I implica que $\alpha(u+x) + \beta(v+x) + \gamma(w+x) = 0 \leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$, logo $\alpha((a+1)u+bv+cw) + \beta(au+(b+1)v+cw) + \gamma(au+bv+(c+1)w) = 0$

$u(\alpha(a+1)+\beta a+\gamma a) + v(\alpha b+\beta(b+1)+\gamma b) + w(\alpha c+\beta c+\gamma(c+1)) = 0$

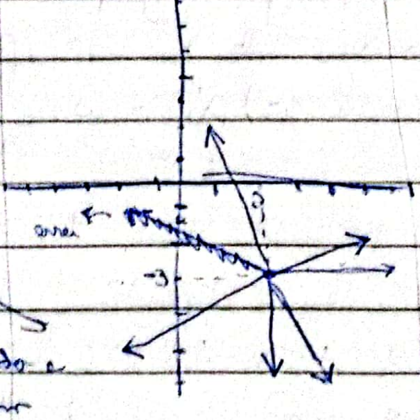
Como os coeficientes devem zerar; $a(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha=0$; $b(\alpha+\beta+\gamma)+\beta=0$; $c(\alpha+\beta+\gamma)+\gamma=0$. Somando tudo, $(a+b+c+1)(\alpha+\beta+\gamma)=0$. Ou seja, há duas possibilidades de o sistema ser L.I, ou temos $\alpha=\beta=\gamma=0$ ou a possibilidade $a+b+c+1=0$, que não pode ocorrer se queremos um sistema L.I.

(10)

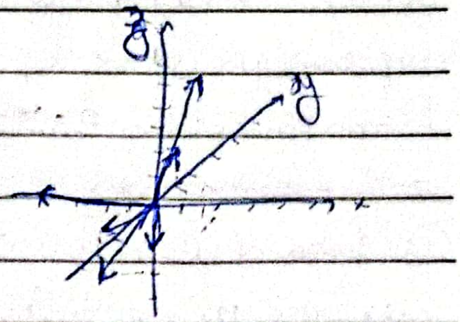


Iguais, só muda a origem

(11)



(12)



13 a) $(0,1,2) = (4,2,-1) + (x,y,z)$, $O = (+4, +1, +3)$

b) $(-4,0,0) = (4,2,-1) - (x,y,z)$, $O = (8, 2, -1)$

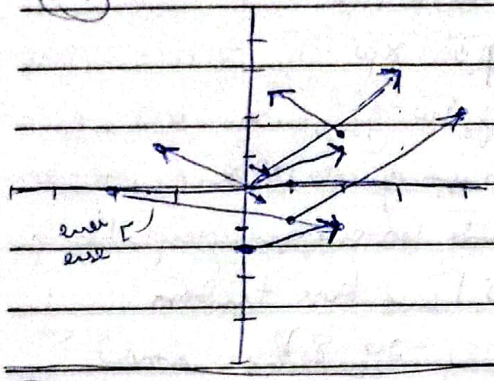
c) $(-1,-2,-3) = (4,2,-1) - (x,y,z)$; $O = (5, 4, 2)$

d) $(2,-1,5) = (4,2,-1) - (x,y,z)$, $O = (2, 3, -6)$

e) $(0,0,-2) = (4,2,-1) - (x,y,z)$, $O = (4, 2, 1)$

f) $(1,-3,1) = (4,2,-1) - (x,y,z)$, $O = (3, +5, -2)$

14



15

a) $(3,1,-1) + (-2,0,8) = (1,1,7)$

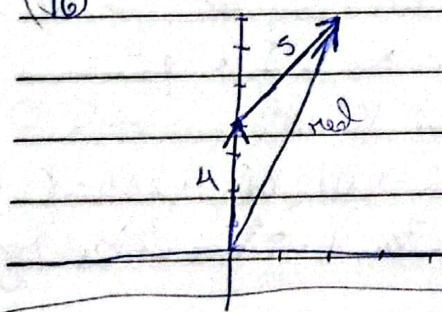
b) $(-3,0,12) + (-26,-4,+8) = (-29,-4,20)$

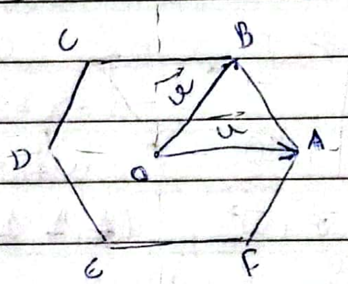
c) $(-1,2,0) + (6,2,-2) + (-\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = (\frac{11}{4}, \frac{13}{4}, -\frac{5}{4})$

d) $(-5,0,20) + (3,-6,0) + (-2,-5,1) = (-4,-11,21)$

17 $\vec{w} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

16





a) $\vec{v} - \vec{w}$

b) $-\vec{w}$

c) $-2\vec{v}$

d) $2(\vec{w} - \vec{v})$

e) $-2\vec{w} + \vec{v}$

f) O

18 a) $x = 3u$, b) $x = \frac{3(u-v)}{2}$

19 $\vec{w} = (6,3) + (0,2) = (6,5)$

20 a) $(0,1,0) = k(1,0,1)$, $\nexists k$ ∴ são L.I.

b) $(1,-3,14) = k(\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)$, $\exists k = 14$ ∴ são L.D

c) $(0,1,1) = k(0,3,1)$, $\nexists k$ ∴ são L.I

21 a) $x + y = (3,0,6)$; $x - 2y = (-3,-3,-3)$, $x + 2y - 3z = (8,4,-3)$

b) $(1,-1,3) = (2a, a, 3a) + (-b,-b,4b)$, $\nexists\, a,b$ para isso, logo, x não é combinação de y e z

c) $(4,0,13) = (a,-a,3a) + (2b,b,3b) + (-c,-c,4c)$ ∴ $c=1, b=2, a=1$

22 $u = (1, m, n+1)$; $v = (m, n, 10)$ são L.D, ou seja, $u = kv$, $(1, m, n+1) = (km, kn, 10k)$ ∴ $m = 2$, $n = 4$ e $k = \frac{1}{2}$

23) a) $\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 3$, logo, L.I b) $\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 0$, ∴ L.D.

c) $\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 0$ ∴ L.D, d) $\left|\begin{matrix} 7 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 7 & 6 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 4$ ∴ L.I.

24) para que sejam L.D, o determinante da matriz deve ser 0, então

$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ m-1 & 1 & m-2 \\ m+1 & m-1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ m-1 & 1 \\ m+1 & m-1 \end{matrix} = \cancel{2} + \cancel{2m^2} - 2m - \cancel{4} + \cancel{2m^2} - 4m + \cancel{2} - 2m - \cancel{2} - m^2 + 3m - \cancel{2}$

$-4m + \cancel{4} = 3m^2 - 9m = 0$ ∴ $m = 0$ ou $m = 9/3 = 3$

25) $a = a^2$, $b = b^2$, $a - b = a + b$ ∴ $a = b = 0$, logo, $a^2 + b^2 - a \sim = 0$

26) Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base, então $\alpha_1\vec{u} + \beta_1\vec{v} + \gamma_1\vec{w} = \vec{J}_1$, $\exists!(a,b,c)$ para isso. Em $(a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}) = \alpha a\vec{u} + \beta_2 b\vec{v} + \gamma_2 c\vec{w} = \vec{J}_2$, ou seja, $\alpha_2 a$, $\beta_2 b$ e $\gamma_2 c$ são ctes que multiplicados pelos vetores geram um quarto vetor. Como sabemos que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base, então só existe uma única resposta para essa expressão, o que torna $(a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w})$ uma base também.

27) $\vec{z} = (10, -20, 0) + (2, -6, 8) = (12, -26, 8)$

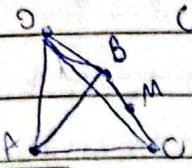
28) (a) $\left|\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = -4 - 2 + 2 = -4$ ∴ são L.I e formam uma base no $\mathbb{R}^3$

(b) $(1,1,1) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $(1,1,1) = a(2,-1,0) + b(1,-1,2) + c(1,0,2)$

$1 = 2a + b + c$; $1 = -a - b$; $1 = 2b + 2c$, ∴ $c = 7/4$, $b = -5/4$ e $a = 1/4$, logo, as coordenadas são $(1/4, -5/4, 7/4)$

29) Para (x, y, z) ser base, eles devem ser L.I, logo, nenhum pode ser combinação linear dos outros, ou seja, $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \iff \alpha u + \alpha v + \beta u + \beta v + \beta w + \gamma a u + \gamma b v + \gamma c w \iff u(\alpha + \beta + \gamma a) + v(\alpha + \beta + \gamma b) + w(\beta + \gamma c) = 0$. Então, $\alpha + \beta + \gamma a = 0$, $\alpha + \beta + \gamma b = 0$ e $\beta + \gamma c = 0$, logo, $\gamma(-a + b) = 0$. Existe possibilidade não trivial de zeros para $a = b$. Logo, se eles são L.I, $a \neq b$

30) Não há possibilidade de existir um tetraedro com seus 3 lados sendo coplanares, logo, eles formam uma tripla L.I, sendo então uma base.



Como os triângulos são equiláteros, $OB + OC = 2OM$, logo $\frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC = OM$. Assim, com $-OA = AO$, temos que $-OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC = AM$, as coordenadas são $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

31 (a) $\sqrt{3}$, (b) $\sqrt{2}$ (c) 5 (d) $\sqrt{21}$

32 (a) É base porque são LI (Não estão no mesmo plano). Sua ortogonalidade é verificada pela definição do paralelepípedo, que afirma que o ângulo entre eles, dois a dois, é 90°. Entretanto, não é ortonormal pois módulo que não é 1

(b) A base (AB, AE, AD) produz AG na soma de AB + AE + AD, logo, as coordenadas para base são (1, 1, 1)

(c) $\sqrt{14} = \sqrt{3^2+2^2+1^2}$