Grenzwerte und Konvergenz

Jendrik Stelzner

26. November 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitungen

Definition 1. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a \leq s$ für alle $a \in A$; s heißt dann eine obere Schranke von A. A heißt *nach oben unbeschränkt*, falls A nicht nach oben beschränkt ist.

A heißt *nach unten beschränkt*, falls es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $t \leq a$ für alle $a \in A$; t heißt dann untere Schranke von A. A heißt *nach unten unbeschränkt*, falls A nicht nach unten beschränkt ist.

A heißt *beschränkt*, falls A sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Beispiel(e).

1. $N \subseteq \mathbb{R}$ ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.
2. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ist nach unten und oben unbeschränkt.
3. Das Einheitsintervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.
4. Jede endliche Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.
5. Ist $B \subseteq \mathbb{R}$ nach unten, bzw. oben beschränkt, so ist $A \subseteq \mathbb{R}$ ebenfalls nach unten, bzw. oben beschränkt. Ist B nach unten, bzw. oben unbeschränkt, so ist auch A nach unten, bzw. oben unbeschränkt.
6. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann nach unten, bzw. oben beschränkt, falls die Teilmenge
$$-A = \{-a \mid a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$
nach oben, bzw. unten beschränkt ist.

Bemerkung 2. *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, falls es ein $R > 0$ gibt, so dass $|a| \leq R$ für alle $a \in A$.*

Beweis. Gibt es ein solches R, so ist $-R \leq a \leq R$ für alle $a \in A$ und somit ist A sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, also beschränkt.

Ist A beschränkt, so gibt $s, t \in \mathbb{R}$, so dass $t \leq a \leq s$ für alle $a \in A$. Für $R := \max\{|s|, |t|\}$ ist dann $|a| \leq R$ für alle $a \in A$. $\square$

Definition 3. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $s \in \mathbb{R}$. s heißt *Supremum von A*, falls s eine kleinste obere Schranke von A ist, d.h. falls

1. s ist eine obere Schranke von A, und
2. für jede obere Schranke t von A ist $s \leq t$.

s heißt *Infimum von A*, falls s eine größte untere Schranke von A ist, d.h. falls

1. s ist eine untere Schranke von A, und
2. für jede untere Schranke t von A ist $t \leq s$.

Bemerkung 4. *Existiert ein Supremum, bzw. Infimum einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$, so ist dieses eindeutig, d.h. sind $s, t \in \mathbb{R}$ Suprema, bzw. Infima von A, so ist $s = t$. Falls das Supremum von A existiert, so schreiben wir hierfür* $\sup A$. *Für das Infimum schreiben wir* $\inf A$, *sofern dieses existiert.*

Beweis. Es seien s und t Suprema von A. Da s ein Supremum von A und t eine obere Schranke von A ist, ist $s \leq t$. Durch Vertauschen der Rollen ergibt sich, dass auch $t \leq s$. Daher ist $s = t$.

Sind s und t Infima von A, so ergibt sich $s = t$ analog. □

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so besitzt A keine obere Schranke und somit auch kein Supremum. Wie sich herausstellt, ist diese Bedingung für Teilmengen von $\mathbb{R}$ schon hinreichend:

Proposition 5. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.*

1. *Ist A nach oben beschränkt, so existiert* $\sup A$.
2. *Ist A nach unten beschränkt, so existiert* $\inf A$.

Wir wollen diese Proposition hier nicht beweisen, da der Beweis von der konkreten Konstruktion der reellen Zahlen abhängt.

Lemma 6 (Charakterisierung von sup und inf). *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Teilmenge.*

1. *Für eine obere Schranke s von A ist $s = \sup A$ genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $s - \varepsilon < a \leq s$ gibt.*
2. *Für eine untere Schranke s von A ist $s = \inf A$ genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $s \leq a < s + \varepsilon$ gibt.*

Beweis.

1. Angenommen es ist $s = \sup A$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da s die kleinste obere Schranke von A ist, ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von A. Es gibt also $a \in A$ mit $s - \varepsilon < a$. Da s eine obere Schranke von A ist, ist auch $a \leq s$. Zusammen ist daher $s - \varepsilon < a \leq s$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt die Implikation.

   Angenommen es ist $s \neq \sup A$. Dann gibt es eine kleinere obere Schranke $t < s$ von A. Für $\varepsilon := (s - t)/2 > 0$ ist dann für alle $a \in A$

   $$a \leq t < t + \varepsilon = s - \varepsilon.$$

   Es gibt dann kein $a \in A$ mit $s - \varepsilon < a \leq s$.

2. Der Beweis läuft analog zum vorherigen.

□

2 Grenzwerte

Im Folgenden handelt es sich, sofern nicht anders angegeben, bei allen Folgen um Folgen auf $\mathbb{R}$.

Definition 7. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, bzw. nach unten beschränkt, bzw. beschränkt, falls die Punktmenge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt, bzw. nach unten beschränkt, bzw. beschränkt ist.

Definition 8. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $\mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. (x_n) *konvergiert gegen* x, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, bzw. $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

Wir sagen, dass die Folge (x_n) *konvergent* ist, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x_n \to x$ für $n \to \infty$. x heißt dann der *Grenzwert* der Folge (x_n).

Proposition 9. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig, d.h. ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge und sind* $x, x' \in \mathbb{R}$ *mit* $x_n \to x$ *und* $x_n \to x'$ *für* $n \to \infty$*, so ist* $x = x'$*.*

Beweis. Angenommen es ist $x \neq x'$. Dann ist $\varepsilon := |x - x'| > 0$. Da $x_n \to x$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_1$. Da $x_n \to x'$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x'| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_2$. Für $N := \max\{n_1, n_2\}$ ist dann für alle $n \geq N$ sowohl $|x_n - x| < \varepsilon/3$ als auch $|x_n - x'| < \varepsilon/3$. Daher ist nach der Dreiecksungleichung

$$|x - x'| = |(x_N - x') - (x_N - x)| \leq |x_N - x'| + |x_N - x| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

im Widerspruch zu $\varepsilon = |x - x'| > 0$. □

Beispiel(e).

1. Wir haben $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Nach Archimedes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ mit $N > 1/\varepsilon$. Für alle $n \geq N$ ist dann $\varepsilon > 1/n$ und damit
$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.,$$
also $|0 - 1/n| < \varepsilon$. Dass $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ folgt daher aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$.

2. Die konstante Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen c.

3. Es ist $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Zum Beweis hiervon sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$ und $N \geq 1 + 2/\varepsilon^2$. Für alle $n \geq N$ ist dann $(n-1)\varepsilon^2/2 \geq 1$ und somit
$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \dots \\ &> 1 + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 = 1 + n\frac{(n-1)\varepsilon^2}{2} \geq 1 + n > n.\end{aligned}$$
Daher ist für alle $n \geq N$
$$1 \leq n^{1/n} < 1 + \varepsilon$$
und somit $|1 - n^{1/n}| < \varepsilon$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $n^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$.

2.1 Konvergenz und Ordnung

Lemma 10. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann ist (x_n) beschränkt, d.h. es gibt $R > 0$, so dass $|x_n| < R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da $x_n \to x$ für $n \to \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < 1$ für alle $n \geq N$. Es ist dann nach der Dreiecksungleichung für alle $n \geq N$

$$|x_n| = |x + x_n - x| \leq |x| + |x_n - x| < |x| + 1.$$

Für

$$R := \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x| + 1\}$$

ist daher $|x_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Lemma 11. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Beweis. Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Angenommen, es ist $b < a$. Dann ist $\varepsilon := |a - b| = a - b > 0$. Da $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_1$. Da $b_n \to b$ für $n \to \infty$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_2$. Für $N = \max\{n_1, n_2\}$ ist dann

$$b_N < b + \frac{\varepsilon}{3} < b + \frac{2\varepsilon}{3} = a - \frac{\varepsilon}{3} < a_N,$$

im Widerspruch zu $a_n \leq b_n$. □

Lemma 12 (Sandwich-Lemma). *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergieren die beiden äußeren Folgen (a_n) und (c_n) und gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, so konvergiert auch (b_n) und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Beweis. Wir setzen $x := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $a_n \to x$ für $n \to \infty$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. Da $c_n \to x$ für $n \to \infty$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$. Für $N := \max\{n_1, n_2\}$ ist daher für alle $n \geq N$

$$x - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < x + \varepsilon,$$

also $|x - b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = x$. □

Proposition 13 (Bolzano-Weierstraß). *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte monotone Folge. Dann konvergiert (x_n).*

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass (x_n) monoton steigend ist. Da (x_n) nach oben beschränkt ist existiert $x := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Wir wollen zeigen, dass $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Aus der Charakterisierung des Supremums wissen wir, dass es $N \in \mathbb{N}$ mit $x - \varepsilon < x_N \leq x$. Wegen der Monotonie von (x_n) erhalten wir, dass $x - \varepsilon < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und dass $x_n \leq x$ für alle $n \geq N$ folgt direkt aus der Definition von x. Es ist also

$$x - \varepsilon < x_n \leq x \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und somit insbesondere $|x - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Der Fall, dass (x_n) monoton fallend ist, läuft analog. □

2.2 Konvergenz und Rechenoperationen

Proposition 14. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$.*

1. *Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls konvergent und*
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$
2. *Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und*
$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca = c \lim_{n\to\infty} a_n.$$
3. *Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls konvergiert und*
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$
4. *Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$, so konvergiert auch die Folge $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es ist*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}$$
5. *Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist auch $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Beweis.

1. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_1$. Da $b_n \to b$ für $n \to \infty$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_2$. Für $N := \max\{n_1, n_2\}$ ist dann für alle $n \geq N$
$$\begin{aligned} |(a+b) - (a_n + b_n)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \\ &\leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$
Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
2. Für $c = 0$ ist die Aussage klar. Ansonsten sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon/|c|$ für alle $n \geq N$. Es ist dann für alle $n \geq N$
$$|ca - ca_n| = |c||a - a_n| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$
Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca$.
3. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da (a_n) konvergiert, ist (a_n) insbesondere beschränkt. Es gibt also ein $c > 0$ mit $|a_n| < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir bemerken zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} |ab - a_n b_n| &= |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \\ &\leq |ab - a_n b| + |a_n b - a_n b_n| \\ &= |a - a_n||b| + |a_n||b - b_n| \\ &\leq |b||a - a_n| + c|b - b_n|. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen: Ist $b = 0$, so ist nach (1)

$$|ab - a_n b_n| \leq c|b - b_n|$$

Da $b_n \to b$ für $n \to \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \varepsilon/c$ für alle $n \geq N$. Es ist daher für alle $n \geq \mathbb{N}$

$$|ab - a_n b_n| \leq c|b - b_n| < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Ist andererseits $b \neq 0$, und somit auch $|b| \neq 0$, so gibt es wegen $a_n \to a$ für $n \to \infty$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon/(2|b|)$ für $n \geq n_1$, und wegen $b_n \to b$ für $n \to \infty$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \varepsilon/(2c)$ für alle $n \geq n_2$. Für $N := \max\{n_1, n_2\}$ ist dann für alle $n \geq N$

$$|ab - a_n b_n| \leq |b||a - a_n| + c|b - b_n| < |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} + c\frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon.$$

In beiden Fällen folgt aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$, dass $(a_n b_n)$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

4. Da $b_n \to b$ für $n \to \infty$ und $|b| > 0$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < |b|/2$ für alle $n \geq n_1$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| \Rightarrow |b_n| \geq |b| - |b - b_n|$$

ist dann für alle $n \geq n_1$

$$|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

und damit auch

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{b_n - b}{bb_n}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2}. \tag{2}$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $b_n \to b$ für $n \to \infty$ gibt es auch ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \varepsilon|b|^2/2$ für alle $n \geq n_2$. Zusammen mit (2) ergibt sich für $N := \max\{n_1, n_2\}$, dass für alle $n \geq N$

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$.

5. Aus den vorherigen Aussagen folgt, dass $1/b_n \to 1/b$ für $n \to \infty$ und damit auch

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

□