Definitionen von Stetigkeit

Jendrik Stelzner

5. Dezember 2014

Im Folgenden wollen wir die unterschiedlichen Definitionen der Stetigkeit einer Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angebeben und ihre Äquivalenz beweisen.

Definition 1. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ε-δ-stetig im Punkt* $x \in \mathbb{R}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung f heißt *ε-δ-stetig*, falls f ε-δ-stetig an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Beispiel(e). Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{aligned}\left|x^2 - y^2\right| &= |(x+y)(x-y)| = |x+y||x-y| \leq (|x| + |y|)|x-y| \\ &\leq (|x| + |x| + |x-y|)|x-y| = 2|x||x-y| + |x-y|^2,\end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir die Dreiecksungleichung für $|x + y| \leq |x| + |y|$ und $|y| = |x| + |x - y|$ nutzen. Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen:

Ist $x = 0$, so ist $|x^2 - y^2| = |y|^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wählt man dann $\delta := \sqrt{\varepsilon}$, so ist für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| = |x - y| < \delta$ auch $|x^2 - y^2| = |y|^2 < \varepsilon$.

Ist $x \neq 0$, so ergibt sich für $\delta := \min\{\varepsilon/(4|x|), \sqrt{\varepsilon/2}\}$ aus (1), dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$

$$\left|x^2 - y^2\right| \leq 2|x||x-y| + |x-y|^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das zeigt, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist

Im Folgenden seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Üb. 1 — Zeigen Sie, dass wenn f ε-δ-stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ ist und $f(x) > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(y) > 0$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Gilt die Aussage auch für $f(x) < 0$ oder $f(x) \neq 0$?

Üb. 2 — Zeigen Sie: Ist f ε-δ-stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ und g ε-δ-stetig an der Stelle $f(x)$, so ist die Komposition $g \circ f$ ε-δ-stetig an der Stelle x.

Definition 2. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *folgenstetig an* $x \in \mathbb{R}$, falls für jedes Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

f heißt *folgenstetig*, falls f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ folgenstetig ist.

Beispiel(e). Wir betrachten erneut die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so folgt aus den bekannten Eigenschaften konvergenter Folgen, dass auch die Folge $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = x \cdot x = x^2.$$

Das zeigt, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ folgenstetig ist.

Definition 3. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}$ schreiben wir $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = y$, falls

für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, s.d. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x_0 - \delta < x < x_0$,

und bezeichnen y dann als den *linksseitigen Limes von f an x_0*. Analog schreiben wir $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = f(y)$, falls

für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, s.d. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Wir nennen y dann denn *rechtsseitigen Limes von f an x_0*. Existieren links- und rechtsseitiger Limes von f an x_0 und ist $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$, so nennen wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \coloneqq \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$$

den *beidseitgen Limes von f an x_0*.

Definition 4. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *linksstetig an der Stelle* $x \in \mathbb{R}$, falls $\lim_{y\uparrow x} f(y) = f(x)$. f heißt *rechtsstetig an der Stelle* x, falls $\lim_{y\downarrow x} f(y) = f(x)$. f heißt *beidseitig stetig an* x, falls $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. (Insbesondere müssen die entsprechenden Grenzwerte existieren.)

f heißt *linksstetig*, falls f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ linksstetig ist, und *rechtsstetig*, falls f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ rechtsstetig ist. Ist f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ beidseitig stetig, so heißt f *beidseitig stetig*.

Im Folgenden sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Üb. 3 — Zeigen Sie, dass f genau dann beidseitig stetig ist, wenn f links- und rechtsstetig ist.