

Wir wollen eine streng monoton steigende Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konstruieren, so dass zwar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty,$$

aber die Häufigkeit der genutzten Summanden gegen 0 geht, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}|}{n} = 0. \quad (1)$$

Die Idee der Konstruktion ist die folgende: Wir beginnen mit $a_1 = 1$. Nun nehmen wir jede zweite Zahl hinzu, bis die entsprechende Summe mindestens 2 beträgt. Dann nehmen wir jede dritte Zahl hinzu, bis die entsprechende Summe mindestens 3 beträgt. Dies führen wir dann fort, wobei im n -ten Schritt der Konstruktion solange jeder n -te Summand hinzugefügt wird, bis die bisherige Summe mindestens n beträgt.

Für die so konstruierte Reihe gilt nach Konstruktion $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$. Andererseits wird für jedes $m \geq 1$ nach dem m -ten Schritt nur noch höchstens jeder m -te Summand hinzugefügt, so dass die Anzahl der genutzten Summanden kleiner als $1/m$ wird. Wegen der Beliebigkeit von $m \geq 1$ geht die Häufigkeit der genutzten Summanden dann gegen 0.

Wir wollen diese Konstruktion nun formalisieren: Im ersten Schritt setzen wir $a_1 = 1$, $b_1^{(1)} := 1$, und $\nu(1) := 1$.

Im zweiten Schritt beginnen setzen wir zunächst $b_1^{(2)} := a_1 + m = 3$. Da $1/3 < 1$ setzen wir weiter $b_2^{(2)} := a_1 + m = 5$. Da auch noch $1/3 + 1/5 = 8/15 < 1$ wählen wir weiter $b_3^{(2)} := a_1 + 3m = 7$. Wir führen diesen Vorgang bis zu dem minimalen $\nu(2) \in \mathbb{N}$ fort, so dass $b_1^{(2)} + \dots + b_{\nu(2)}^{(2)} \geq 1$. Ein solches $\nu(2)$ existiert, da $\sum_{m=1}^{\infty} 1/(a_1 + m) = \infty$. (Es ist $\nu(2) = 7$, wir müssen also bis zum Summanden $1/15$ gehen.) Wir definieren dann $a_2, \dots, a_{\nu(2)+1}$ durch

$$a_2 := b_1^{(2)}, a_3 := b_2^{(2)}, \dots, a_{\nu(2)+1} := b_{\nu(2)}^{(2)}.$$

Haben wir bereits $n - 1$ solcher Schritte durchlaufen, und die Werte a_1, \dots, a_k definiert, so wählen wir im n -ten Schritt das minimale $\nu(n) \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{a_k + n} + \frac{1}{a_k + 2n} + \dots + \frac{1}{a_k + \nu(n)n} \geq 1,$$

und setzen

$$a_{k+i} := b_i^{(n)} := a_k + in \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq \nu(n).$$

Ein solches $\nu(n)$ existiert, da $\sum_{m=1}^{\infty} 1/(a_k + mn) = \infty$.

Da wir in jedem der Schritte mindestens einen neuen Wert konstruieren, ist a_n für alle $n \geq 1$ definiert. Aus der Konstruktion ist sofort ersichtlich, dass für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k \geq \sum_{k=1}^{\nu(1)+\dots+\nu(m)} a_k \\ &= \sum_{n=1}^m \sum_{k=\nu(1)+\dots+\nu(n-1)+1}^{\nu(1)+\dots+\nu(n)} a_k = \sum_{n=1}^m \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu(n)} b_i^{(n)}}_{\geq 1} \geq m, \end{aligned}$$

also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Wir wollen nun noch zeigen, dass auch (1) erfüllt ist. Sei hierfür $m \geq 1$ beliebig aber fest. Wir bemerken, dass ab $c := a_{\nu(1)+\dots+\nu(m-1)+1} = b_1^{(m)}$ nur noch höchstens jeder m -te Summand hinzugefügt wird. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned} & |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}| \\ & \leq |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, c\}\}| + |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \dots, n\}\}| \\ & \leq c + |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \dots, n\}\}|. \end{aligned}$$

Da ab c nur noch höchstens jeder m -te Summand hinzugefügt wird, ist dabei für alle $n \geq c$

$$\begin{aligned} & |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \dots, n\}\}| \\ & \leq |\{c + \ell m \mid \ell \in \mathbb{N}\} \cap \{c, \dots, n\}| \\ & = |\{\ell m \mid \ell \in \mathbb{N}\} \cap \{0, \dots, n - c\}| \\ & \leq \frac{n - c + 1}{m}. \end{aligned}$$

Für alle $n \geq c$ ist daher

$$|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}| \leq c + \frac{n - c + 1}{m},$$

und somit

$$\frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}|}{n} \leq \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n - c + 1}{n}.$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{c}{n}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{m} \underbrace{\frac{n - c + 1}{n}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{m}$$

ist damit auch

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}|}{n} \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n - c + 1}{n} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n - c + 1}{n} \\ & = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $m \geq 1$ folgt damit, dass

$$\begin{aligned} 0 & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}|}{n} \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}|}{n} = 0, \end{aligned}$$

und somit bereits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}|}{n} = 0.$$