Der Banachsche Fixpunktsatz

Jendrik Stelzner

26. Dezember 2014

Wir wollen hier den Banachschen Fixpunktsatz für $\mathbb{R}^n$ formulieren und beweisen.

Definition 1. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Kontraktion*, falls es eine Konstante $0 < L < 1$ gibt, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Übung 1.
Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen eine Kontraktion ist:

1. $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{4} - \frac{2}{3}$
2. $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
3. $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|^{1/2}$
4. $f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Übung 2.
Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gebe es eine Konstante $L > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist. (Man bezeichnet eine solche Abbildung als Lipschitz-stetig (mit Konstante L).) Folgern Sie, dass Kontraktionen stetig sind.

Theorem 2 (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine Kontraktion. Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt, d.h. es existiert genau ein $\xi \in \mathbb{R}^m$ mit $T(\xi) = \xi$. Außerdem gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^m$, dass $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \xi$. (Hier bezeichnet T^n die n-fache Komposition von T mit sich selbst.)*

Der Beweis des Satzes lässt sich in kleinere Zwischenschritte aufteilen:

Übung 3.
Es sei $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine Kontraktion.

1. Zeigen Sie die Eindeutigkeit des Fixpunktes von T. (Wir setzen hier noch keine Existenz voraus.)
2. Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x \in \mathbb{R}^m$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := T^n(x)$ konvergiert. (*Hinweis*: Zeigen Sie, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt.)

3. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ der Grenzwert $\xi := \lim_{n\to\infty} T^n(x)$ ein Fixpunkt von T ist.

Bemerkung 3. Der Banachsche Fixpunktsatz gilt allgemeiner für alle vollständige metrische Räume. Der Beweis hierfür läuft analog.

Lösung 1.

1. f_1 ist eine Kontraktion, da für alle $x, y \in \mathbb{R}$
$$|f_1(x) - f_1(y) = \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right| = \frac{1}{4}|x - y|$$
mit $1/4 < 1$.

2. f_2 ist keine Kontraktion, denn
$$|f_2(2) - f_2(1)| = |2^2 - 1^2| = 3 > 1 = |2 - 1|.$$

3. f_3 ist keine Kontrakiton. Ansonsten gebe es eine Konstante $0 < L < 1$ mit $|f_3(x) - f_3(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Insbesondere wäre dann für alle $n \geq 1$
$$\frac{1}{n^{1/2}} = \left|f_3\left(\frac{1}{n}\right) - f_3(0)\right| \leq L\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{L}{n}$$
und somit $n^{1/2} \leq L$, also $n \leq L^2$. Dies gilt offenbar nicht.

4. Wir sehen $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Die Abbildung f_4 entspricht dann der Multiplikation mit der komplexen Zahl
$$\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i,$$
d.h. $f_4(z) = \xi z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist daher insbesondere
$$|f_4(z)| = |\xi z| = |\xi||z|.$$
Da $|\xi| = \sqrt{1/4 + 1/9} < 1$ ergibt sich, dass f_4 ein Kontraktion ist (mit Konstante $|\xi|$).

Lösung 2.
f erfüllt an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ das ε-δ-Kriterium, denn für beliebiges $\varepsilon > 0$ ergibt sich für $\delta := \varepsilon/L$, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \delta$
$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$
Also ist f stetig. Kontraktionen sind per Definition Lipschitz-stetig mit Konstante $L < 1$ und somit stetig.

Lösung 3.
Es sei $0 < L < 1$, so dass $\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$.

1. Es seien $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^m$ zwei Fixpunkte von T. Dann ist
$$\|\xi - \zeta\| = \|T(\xi) - T(\zeta)\| \leq L\|\xi - \zeta\|.$$
Da $0 < L < 1$ folgt, dass $\|\xi - \zeta\| = 0$ und somit $\xi = \zeta$.

2. Für alle $n \geq 1$ ist
$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|T(x_n) - T(x_{n-1})\| \leq L\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Für $M \coloneqq \|x_1 - x_0\|$ ergibt sich damit induktiv, dass

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq L^n \|x_1 - x_0\| = ML^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $N' \in \mathbb{N}$ und $m, m' \geq N$, wobei o.B.d.A. $m \geq m'$, ist daher

$$\begin{aligned} \|x_m - x_{m'}\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \cdots + \|x_{m'+1} - x_{m'}\| \\ &\leq ML^{m-1} + \cdots + ML^{m'} = ML^{m'} \sum_{k=0}^{m-1-m'} L^k \\ &\leq ML^{N'} \sum_{k=0}^{\infty} L^k = \frac{M}{1-L} L^{N'}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{N' \to \infty} ML^{N'}/(1-L) = 0$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $ML^N/(1-L) < \varepsilon$, und damit $\|x_m - x_{m'}\| < \varepsilon$ für alle $m, m' \geq N$. Dies zeigt, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

3. T ist eine Kontraktion, und damit insbesondere stetig. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^m$ erhalten wir unter Verwendung der Folgenstetigkeit für $\xi \coloneqq \lim_{n \to \infty} T^n(x)$, dass

$$T(\xi) = T\left(\lim_{n \to \infty} T^n(x)\right) = \lim_{n \to \infty} T(T^n(x)) = \lim_{n \to \infty} T^{n+1}(x) = \xi.$$