

# Grenzwerte und Konvergenz

Jendrik Stelzner

27. November 2014

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Supremum und Infimum</b>	<b>1</b>
1.1	Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$ . . . . .	1
1.2	Verallgemeinerung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Grenzwerte</b>	<b>4</b>
2.1	Konvergenz und Ordnung . . . . .	5
2.2	Konvergenz und Rechenoperationen . . . . .	6
2.3	Uneigentliche Grenzwerte . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Alternative Definitionen von Konvergenz</b>	<b>10</b>
3.1	Limsup und Liminf . . . . .	10
3.2	Cauchy-Folgen . . . . .	11
3.3	Äquivalente Definitionen . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Beispiele und Tricks</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Metrische Räume</b>	<b>13</b>

## 1 Supremum und Infimum

### 1.1 Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$

**Definition 1.** Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  heißt *nach oben beschränkt*, falls es ein  $s \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $a \leq s$  für alle  $a \in A$ ;  $s$  heißt dann *obere Schranke von  $A$* .  $A$  heißt *nach oben unbeschränkt*, falls  $A$  nicht nach oben beschränkt ist.

$A$  heißt *nach unten beschränkt*, falls es ein  $t \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $t \leq a$  für alle  $a \in A$ ;  $t$  heißt dann *untere Schranke von  $A$* .  $A$  heißt *nach unten unbeschränkt*, falls  $A$  nicht nach unten beschränkt ist.

$A$  heißt *beschränkt*, falls  $A$  sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

**Beispiel(e).** 1.  $N \subseteq \mathbb{R}$  ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.

2.  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  ist nach unten und nach oben unbeschränkt.

3. Das Einheitsintervall  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  ist beschränkt.

4. Jede endliche Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  ist beschränkt.

5. Ist  $B \subseteq \mathbb{R}$  nach unten, bzw. oben beschränkt, so ist  $A \subseteq B$  ebenfalls nach unten, bzw. oben beschränkt. Ist  $A$  nach unten, bzw. oben unbeschränkt, so ist auch  $B$  nach unten, bzw. oben unbeschränkt.
6. Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann nach unten, bzw. oben beschränkt, falls die Teilmenge

$$-A = \{-a \mid a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$

nach oben, bzw. unten beschränkt ist.

**Bemerkung 2.** Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann beschränkt, falls es ein  $R \geq 0$  gibt, so dass  $|a| \leq R$  für alle  $a \in A$ .

*Beweis.* Gibt es ein solches  $R$ , so ist  $-R \leq a \leq R$  für alle  $a \in A$  und somit ist  $A$  sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, also beschränkt.

Ist  $A$  beschränkt, so gibt  $s, t \in \mathbb{R}$ , so dass  $s \leq a \leq t$  für alle  $a \in A$ . Für den Radius  $R := \max\{|s|, |t|\}$  ist dann  $|a| \leq R$  für alle  $a \in A$ .  $\square$

**Definition 3.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  eine Teilmenge und  $s \in \mathbb{R}$ .  $s$  heißt *Supremum* von  $A$ , falls  $s$  eine kleinste obere Schranke von  $A$  ist, d.h. falls

1.  $s$  ist eine obere Schranke von  $A$ , und
2. für jede obere Schranke  $t$  von  $A$  ist  $s \leq t$ .

$s$  heißt *Infimum* von  $A$ , falls  $s$  eine größte untere Schranke von  $A$  ist, d.h. falls

1.  $s$  ist eine untere Schranke von  $A$ , und
2. für jede untere Schranke  $t$  von  $A$  ist  $t \leq s$ .

**Bemerkung 4.** Existiert ein Supremum, bzw. Infimum einer Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$ , so ist dieses eindeutig, d.h. sind  $s, t \in \mathbb{R}$  Suprema, bzw. Infima von  $A$ , so ist  $s = t$ . Falls das Supremum von  $A$  existiert, so schreiben wir hierfür  $\sup A$ . Für das Infimum schreiben wir  $\inf A$ , sofern dieses existiert.

*Beweis.* Es seien  $s$  und  $t$  Suprema von  $A$ . Da  $s$  ein Supremum von  $A$  und  $t$  eine obere Schranke von  $A$  ist, ist  $s \leq t$ . Durch Vertauschen der Rollen ergibt sich, dass auch  $t \leq s$ . Daher ist  $s = t$ .

Sind  $s$  und  $t$  Infima von  $A$ , so ergibt sich  $s = t$  analog.  $\square$

Ist  $A \subseteq \mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt, so besitzt  $A$  keine obere Schranke und somit auch kein Supremum. Wie sich herausstellt, ist diese Bedingung für nicht-leere Teilmengen von  $\mathbb{R}$  schon hinreichend:

**Proposition 5.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  eine nicht-leere Teilmenge.

1. Ist  $A$  nach oben beschränkt, so existiert  $\sup A$ .
2. Ist  $A$  nach unten beschränkt, so existiert  $\inf A$ .

Wir wollen diese Proposition hier nicht beweisen, da der Beweis von der konkreten Konstruktion der reellen Zahlen abhängt.

**Lemma 6** (Charakterisierung von  $\sup$  und  $\inf$ ). Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

1. Für eine obere Schranke  $s$  von  $A$  ist  $s = \sup A$  genau dann, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $a \in A$  mit  $s - \varepsilon < a \leq s$  gibt.
2. Für eine untere Schranke  $s$  von  $A$  ist  $s = \inf A$  genau dann, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $a \in A$  mit  $s \leq a < s + \varepsilon$  gibt.

**Beweis.** 1. Angenommen es ist  $s = \sup A$ . Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $s$  die kleinste obere Schranke von  $A$  ist, ist  $s - \varepsilon$  keine obere Schranke von  $A$ . Es gibt also  $a \in A$  mit  $s - \varepsilon < a$ . Da  $s$  eine obere Schranke von  $A$  ist, ist auch  $a \leq s$ . Zusammen ist daher  $s - \varepsilon < a \leq s$ . Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt die Implikation.

Angenommen es ist  $s \neq \sup A$ . Dann gibt es eine kleinere obere Schranke  $t < s$  von  $A$ . Für  $\varepsilon := s - t > 0$  ist dann für alle  $a \in A$

$$a \leq t = s - \varepsilon.$$

Es gibt dann kein  $a \in A$  mit  $s - \varepsilon < a \leq s$ .

2. Der Beweis läuft analog zum vorherigen. □

Auch für Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , die nicht beschränkt sind, lassen sich Supremum und Infimum definieren.

**Definition 7.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Ist  $A$  nach oben unbeschränkt, so setzen wir  $\sup A := \infty$ . Ist  $A$  nach unten unbeschränkt, so setzen wir  $\inf A := -\infty$ .

Für die leere Menge setzen wir  $\sup \emptyset = -\infty$  und  $\inf \emptyset = \infty$ .

## 1.2 Verallgemeinerung

Die Ideen des Supremums und Infimums lassen sich leicht auf eine beliebige geordnete Menge verallgemeinern. Dabei verstehen wir unter einer geordneten Mengen eine Menge  $X$  zusammen mit einer Ordnungsrelation  $\leq$ , die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Für alle  $x \in X$  ist  $x \leq x$ . (Reflexivität)
2. Für  $x, y \in X$  mit  $x \leq y$  und  $y \leq x$  ist bereits  $x = y$ . (Anti-Symmetrie)
3. Für  $x, y, z \in X$  mit  $x \leq y$  und  $y \leq z$  ist auch  $x \leq z$ . (Transitivität)

Auf einer geordneten Menge lassen sich dann Beschränktheit von Teilmengen, Schranken für Teilmengen und damit auch die Begriffe des Supremums und Infimums verallgemeinern, indem man in den entsprechenden obigen Definitionen  $\mathbb{R}$  durch  $X$  ersetzt.

Mithilfe dieser Verallgemeinerung lässt sich auch Definition 7 anders verstehen: Die Menge  $X := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  ist eine geordnete Menge, indem man die Ordnung von  $\mathbb{R}$  um

- $x \leq \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $-\infty \leq x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $-\infty \leq \infty$

erweitert. Supremum und Infimum nach 7 entsprechen dann dem Supremum und Infimum auf  $X$ .

## 2 Grenzwerte

Im Folgenden handelt es sich bei allen Folgen um Folgen auf  $\mathbb{R}$ .

**Definition 8.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt nach oben beschränkt, bzw. nach unten beschränkt, bzw. beschränkt, falls die Punktmenge  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  nach oben beschränkt, bzw. nach unten beschränkt, bzw. beschränkt ist.

Es ist also eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann nach oben beschränkt, wenn es  $C \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $x_n \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Ähnliches gilt für Beschränktheit nach unten und Beschränktheit.

**Definition 9.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $\mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$ .  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x$ , falls es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|x_n - x| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , bzw.  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wir sagen, dass die Folge  $(x_n)$  konvergent ist, falls es ein  $x \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $x$  heißt dann der Grenzwert der Folge  $(x_n)$ . Konvergiert  $(x_n)$  nicht, so heißt die Folge *divergent*.

**Proposition 10.** Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig, d.h. ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge und sind  $x, x' \in \mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \rightarrow x'$  für  $n \rightarrow \infty$ , so ist  $x = x'$ .

*Beweis.* Angenommen es ist  $x \neq x'$ . Dann ist  $\varepsilon := |x - x'| > 0$ . Da  $x_n \rightarrow x$  gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x| < \varepsilon/3$  für alle  $n \geq n_1$ . Da  $x_n \rightarrow x'$  gibt es  $n_2 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x'| < \varepsilon/3$  für alle  $n \geq n_2$ . Für  $N := \max\{n_1, n_2\}$  ist dann für alle  $n \geq N$  sowohl  $|x_n - x| < \varepsilon/3$  als auch  $|x_n - x'| < \varepsilon/3$ . Daher ist nach der Dreiecksungleichung

$$\varepsilon = |x - x'| = |(x_n - x') - (x_n - x)| \leq |x_n - x'| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

im Widerspruch zu  $\varepsilon = |x - x'| > 0$ . □

**Beispiel(e).** 1. Wir haben  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ : Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Nach Archimedes gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 1$  mit  $N > 1/\varepsilon$ , also  $\varepsilon > 1/N$ . Für alle  $n \geq N$  ist dann  $\varepsilon > 1/n$  und damit

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.,$$

also  $|0 - 1/n| < \varepsilon$ . Dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$  folgt daher aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$ .

2. Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  konvergiert die konstante Folge  $(c)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $c$ .

3. Es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ . Zum Beweis hiervon sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Es sei  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \geq 2$  und  $N \geq 1 + 2/\varepsilon^2$ , also  $(N-1)\varepsilon^2/2 \geq 1$ . Für alle  $n \geq N$  ist dann  $(n-1)\varepsilon^2/2 \geq 1$  und somit

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 + \dots \\ &> 1 + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 = 1 + n \frac{(n-1)\varepsilon^2}{2} \geq 1 + n > n. \end{aligned}$$

Für alle  $n \geq N$  ist deshalb

$$1 \leq n < (1 + \varepsilon)^n$$

und daher

$$1 \leq n^{1/n} < 1 + \varepsilon,$$

also  $|1 - n^{1/n}| < \varepsilon$ . Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $n^{1/n} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

4. Die Folgen  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren nicht.

**Bemerkung 11.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gegen  $x \in \mathbb{R}$ , falls die Folge der Abstände  $(|x - x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0 konvergiert.

*Beweis.* Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$||x - x_n| - 0| = |x - x_n|.$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist also genau dann  $||x - x_n| - 0| < \varepsilon$ , wenn  $|x - x_n| < \varepsilon$ . Damit folgt die Aussage direkt.  $\square$

## 2.1 Konvergenz und Ordnung

**Lemma 12.** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge. Dann ist  $(x_n)$  beschränkt, d.h. es gibt  $R \geq 0$ , so dass  $|x_n| \leq R$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Es sei  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Da  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x| < 1$  für alle  $n \geq N$ . Es ist dann nach der Dreiecksungleichung für alle  $n \geq N$

$$|x_n| = |x + x_n - x| \leq |x| + |x_n - x| < |x| + 1.$$

Für

$$R := \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|, |x| + 1\}$$

ist daher  $|x_n| \leq R$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Lemma 13.** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen mit  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

*Beweis.* Es sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Angenommen, es ist  $b < a$ . Dann ist  $\varepsilon := a - b > 0$ . Da  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \varepsilon/3$  für alle  $n \geq n_1$ . Da  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|b_n - b| < \varepsilon/3$  für alle  $n \geq n_2$ . Für  $N = \max\{n_1, n_2\}$  ist dann

$$b_N < b + \frac{\varepsilon}{3} < b + \frac{2\varepsilon}{3} = a - \frac{\varepsilon}{3} < a_N,$$

im Widerspruch zu  $a_n \leq b_n$ .  $\square$

**Lemma 14 (Sandwich-Lemma).** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen mit  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Konvergieren die beiden äußeren Folgen  $(a_n)$  und  $(c_n)$  und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , so konvergiert auch  $(b_n)$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

*Beweis.* Wir setzen  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $a_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - x| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_1$ . Da  $c_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|c_n - x| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_2$ . Für  $N := \max\{n_1, n_2\}$  ist daher für alle  $n \geq N$

$$x - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < x + \varepsilon,$$

also  $|x - b_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  zeigt dies, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$ .  $\square$

**Proposition 15 (Bolzano-Weierstraß).** *Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte monotone Folge. Dann konvergiert  $(x_n)$ .*

*Beweis.* Wir betrachten den Fall, dass  $(x_n)$  monoton steigend ist. Da  $(x_n)$  nach oben beschränkt ist existiert  $x := \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ . Wir wollen zeigen, dass  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Aus der Charakterisierung des Supremums wissen wir, dass es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x - \varepsilon < x_N \leq x$  gibt. Wegen der Monotonie von  $(x_n)$  erhalten wir, dass  $x - \varepsilon < x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und nach der Definition von  $x$  ist auch  $x_n \leq x$  für alle  $n \geq N$ . Es ist also

$$x - \varepsilon < x_n \leq x \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und somit insbesondere  $|x - x_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Der Fall, dass  $(x_n)$  monoton fallend ist, läuft analog.  $\square$

## 2.2 Konvergenz und Rechenoperationen

**Proposition 16.** *Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .*

1. *Die Folge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist ebenfalls konvergent und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

2. *Für alle  $c \in \mathbb{R}$  ist die Folge  $(ca_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

3. *Die Folge  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist ebenfalls konvergent und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

4. *Ist  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \neq 0$ , so konvergiert auch die Folge  $(1/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und es ist*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

5. *Ist  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $b \neq 0$ , so ist auch  $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

*Beweis.* 1. Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a - a_n| < \varepsilon/2$  für alle  $n \geq n_1$ . Da  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|b - b_n| < \varepsilon/2$  für alle  $n \geq n_2$ . Für  $N := \max\{n_1, n_2\}$  ist dann für alle  $n \geq N$

$$\begin{aligned} |(a+b) - (a_n+b_n)| &= |(a-a_n) + (b-b_n)| \\ &\leq |a-a_n| + |b-b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .

2. Für  $c = 0$  ist die Aussage klar. Ansonsten sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a - a_n| < \varepsilon/|c|$  für alle  $n \geq N$ . Es ist dann für alle  $n \geq N$

$$|ca - ca_n| = |c||a - a_n| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt damit, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca$ .

3. Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $(a_n)$  konvergiert, ist  $(a_n)$  insbesondere beschränkt. Es gibt also ein  $c > 0$  mit  $|a_n| \leq c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir bemerken zunächst, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |ab - a_nb_n| &= |ab - a_nb + a_nb - a_nb_n| \\ &\leq |ab - a_nb| + |a_nb - a_nb_n| \\ &= |a - a_n||b| + |a_n||b - b_n| \\ &\leq |b||a - a_n| + c|b - b_n|. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen: Ist  $b = 0$ , so ist nach (1)

$$|ab - a_nb_n| \leq c|b - b_n|$$

Da  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|b - b_n| < \varepsilon/c$  für alle  $n \geq N$ . Es ist daher für alle  $n \geq N$

$$|ab - a_nb_n| \leq c|b - b_n| < c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Ist andererseits  $b \neq 0$ , und somit auch  $|b| \neq 0$ , so gibt es wegen  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a - a_n| < \varepsilon/(2|b|)$  für  $n \geq n_1$ , und wegen  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|b - b_n| < \varepsilon/(2c)$  für alle  $n \geq n_2$ . Für  $N := \max\{n_1, n_2\}$  ist dann für alle  $n \geq N$

$$|ab - a_nb_n| \leq |b||a - a_n| + c|b - b_n| < |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} + c \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon.$$

In beiden Fällen folgt aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$ , dass  $(a_nb_n)$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ .

4. Da  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $|b| > 0$  gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|b - b_n| < |b|/2$  für alle  $n \geq n_1$ . Da für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| \Rightarrow |b_n| \geq |b| - |b - b_n|$$

ist dann für alle  $n \geq n_1$

$$|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

und damit auch

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| = \left| \frac{b_n - b}{bb_n} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2}. \quad (2)$$

Es sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es auch ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|b - b_n| < \varepsilon|b|^2/2$  für alle  $n \geq n_2$ . Zusammen mit (2) ergibt sich für  $N := \max\{n_1, n_2\}$ , dass für alle  $n \geq N$

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/b_n = 1/b$ .

5. Aus den vorherigen Aussagen folgt, dass  $1/b_n \rightarrow 1/b$  für  $n \rightarrow \infty$  und damit auch

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . □

**Beispiel(e).** 1. Wir wollen die Konvergenz der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n := \frac{n^2 + 3n + 5}{6n^2 + n + 1}$$

untersuchen. Erweitern des Bruches mit  $1/n^2$  ergibt, dass für alle  $n \geq 1$

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{6n^2 + n + 1} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{6 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Zusammen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$  ergibt sich aus der obigen Proposition, dass auch  $3/n \rightarrow 0$ ,  $5/n^2 \rightarrow 0$  und  $1/n^2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Also gilt nach der Proposition  $1 + 3/n + 5/n^2 \rightarrow 1$  und  $6 + 1/n + 1/n^2 \rightarrow 6$  für  $n \rightarrow \infty$ . Daher folgt unter erneuter Anwendung der Proposition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}.$$

2. Für alle  $0 \leq q < 1$  ist die Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend, da  $q^{n+1} = q \cdot q^n \leq q^n$  und nach unten beschränkt (durch 0), und somit konvergent. Für den Grenzwert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n$  folgt aus der Linearität des Grenzwertes

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = q \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = qx,$$

also  $(1 - q)x = 0$ , und wegen  $q \neq 1$  somit  $x = 0$ . Allgemeiner gilt für alle  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ , dass

$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n,$$

und da wegen der Linearität des Grenzwertes auch  $-|q|^n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  können aus dem Sandwich-Lemma folgern, dass  $q^n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .



**Bemerkung 17.** Die Proposition zeigt insbesondere, dass die Menge der konvergenten Folgen

$$\mathcal{S} := \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$$

unter punktwiser Addition und Skalarmultiplikation, d.h.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

für alle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum bildet, und dass die Abbildung

$$\lim: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$\mathbb{R}$ -linear ist. Insbesondere bilden die Menge der Nullfolgen

$$\mathcal{N} := \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0 \right\} \subseteq \mathcal{S}$$

einen Untervektorraum, da  $\mathcal{N} = \ker \lim$ .

### 2.3 Uneigentliche Grenzwerte

Nur weil eine Folge nicht konvergiert, bedeutet dies noch nicht, dass für  $n \rightarrow \infty$  kein „vernünftiges“ Verhalten aufweist.

**Definition 18.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *konvergiert gegen  $\infty$*  oder *divergiert bestimmt gegen  $\infty$* , falls es für jedes  $R > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $a_n > R$  für alle  $n \geq N$ . Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  oder  $x_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

$(x_n)$  *konvergiert gegen  $-\infty$*  oder *divergiert bestimmt gegen  $-\infty$* , falls es für jedes  $R < 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $a_n < R$  für alle  $n \geq N$ . Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  oder  $x_n \rightarrow -\infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Ist  $x_n \rightarrow \infty$  oder  $x_n \rightarrow -\infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , so sagen wir, dass die Folge  $(x_n)$  *uneigentlich konvergent* ist.

Unter der zusätzlichen Verwendung von uneigentlichen Grenzwerten ergibt sich, dass jede monotone Folge konvergiert:

Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton steigende Folge, so gibt es zwei mögliche Fälle: Ist die Folge nach oben beschränkt, so konvergiert sie eigentlich nach Bolzano-Weierstraß. Ist sie nicht nach oben beschränkt, so gibt es für alle  $R > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_N > R$ , und aus der Monotonie der Folge folgt, dass  $x_n > R$  für alle  $n \geq N$ , weshalb in diesem Fall  $x_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Analog ergibt sich, dass auch jede monoton fallende Folge entweder eigentlich konvergiert, oder uneigentlich gegen  $-\infty$  konvergiert.

Sprechen wir von einer konvergenten Folge, so meinen wir damit, sofern nicht anders gesagt, eine *eigentlich konvergente Folge*, d.h. eine Folge, die im Sinne von Definition 9 konvergiert.

**Lemma 19.** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen mit  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , so ist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ; ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , so ist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

**Beweis.** Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . Es sei  $R > 0$  beliebig aber fest. Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_n > R$  für alle  $n \geq N$ . Damit ist dann auch  $b_n > R$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und wegen der Beliebigkeit von  $R > 0$  somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

Analog ergibt sich auch die zweite Aussage. □

Inbesondere ergibt sich durch das Lemma, dass das Sandwich-Lemma auch mit uneigentlicher Konvergenz verträglich ist, und sich Lemma 13 auch auf uneigentlich konvergente Folgen erweitern lässt.

**Lemma 20.** *Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = 0$ .*

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_n > 1/\varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Es ist dann  $0 < 1/a_n < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = 0$ .

Der Fall  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  läuft analog.  $\square$

### 3 Alternative Definitionen von Konvergenz

#### 3.1 Limsup und Liminf

Einer der Probleme mit dem Begriff des Grenzwertes ist, dass nicht jede Folge eigentlich oder uneigentlich konvergiert, etwa die Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definition 21.** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge. Die Folge  $(\sup_{k \geq n} x_k)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend und daher (eventuell uneigentlich) konvergent. Wir definieren den *Limes superior* der Folge  $(x_n)$  als

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k.$$

Analog definieren wir den *Limes inferior* der Folge  $(x_n)$  als

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k.$$

Dabei wollen wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \infty = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\infty = -\infty$  verstehen.

**Bemerkung 22.** Da man auch die uneigentlichen Grenzwerte  $\infty$  und  $-\infty$  zulässt existieren  $\limsup$  und  $\liminf$  immer. Dies ist ein großer Vorteil gegenüber dem Limes.

**Lemma 23.** *Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .*

*Beweis.* Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\inf_{k \geq n} x_k \leq x_n \leq \sup_{k \geq n} x_k$ , und somit auch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_k. \quad \square$$

**Lemma 24.** *Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge. Es ist genau dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , wenn  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , und genau dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , wenn  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .*

*Beweis.* Wir zeigen nur die erste Äquivalenz, der Beweis der zweiten läuft analog.

Wir nehmen zunächst an, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Sei  $R > 0$  beliebig aber fest. Da  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_n > R$  für alle  $n \geq N$ . Es ist dann  $\inf_{k \geq n} x_k \geq R$  für alle  $n \geq N$ , und somit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k \geq R.$$

Aus der Beliebigkeit von  $R > 0$  folgt, dass  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Da  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  ist auch  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

Wir nehmen nun an, dass  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  (da immer  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  ist dies bereits äquivalent zu  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ). Es sei  $R > 0$  beliebig aber fest. Da  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$  gibt es wegen  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  nach der Definition des uneigentlichen Grenzwertes ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\inf_{k \geq n} x_k > R$  für alle  $n \geq N$ . Insbesondere ist

$$x_n \geq \inf_{k \geq n} x_k > R$$

für alle  $n \geq N$ . Wegen der Beliebigkeit von  $R > 0$  zeigt dies, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .  $\square$

### 3.2 Cauchy-Folgen

**Definition 25.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt eine *Cauchy-Folge*, falls es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$  für alle  $n, n' \geq N$ .

Vorstellungsmäßig bedeutet dies, dass man den Durchmesser der Punktmenge  $\{x_k \mid k \geq N\}$  beliebig klein machen kann, indem man  $N$  groß genug wählt. Insbesondere divergiert eine Cauchy-Folge nicht gegen  $\infty$  oder  $-\infty$ , und springt auch nicht durch die Gegend. Daher können wir erwarten, dass Cauchy-Folgen ein schönes Konvergenzverhalten aufweisen.

Zum Zusammenhang von Cauchy-Folgen und Konvergenz stellen wir zunächst das Folgende fest:

**Lemma 26.** *Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.*

*Beweis.* Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge und  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|x - x_n| < \varepsilon/2$  für alle  $n \geq N$ . Dann ist für alle  $n, n' \geq N$  auch

$$|x_n - x_{n'}| = |(x - x_{n'}) - (x - x_n)| \leq |x - x_{n'}| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  zeigt dies, dass  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge ist.  $\square$

Es stellt sich heraus, dass auf  $\mathbb{R}$  der Begriff der Cauchy-Folge schon äquivalent zu dem einer konvergenten Folge ist.

### 3.3 Äquivalente Definitionen

**Proposition 27.** *Für eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind äquivalent:*

1.  $(x_n)$  konvergiert.
2.  $(x_n)$  ist eine Cauchy-Folge.
3.  $-\infty < \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n < \infty$ .

Es gilt dann

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

*Beweis.* (1  $\Rightarrow$  2) Dies wurde bereits gezeigt.

(2  $\Rightarrow$  3) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon/2$  für alle  $n, n' \geq N$ . Für  $a := x_N$  ist daher

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da damit  $x_n < a + \varepsilon/2$  für alle  $n \geq N$  ist

$$\sup_{k \geq n} x_k \leq a + \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und somit auch  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k \leq a + \varepsilon$ . Analog ergibt sich, dass auch  $a - \varepsilon/2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Es ist also

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Inbesondere ist  $-\infty < \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n < \infty$ , d.h.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  sind reell. Somit ergibt sich weiter, dass

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  ergibt sich, dass  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , also  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

(3  $\Rightarrow$  1) Wir definieren die Folgen  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$$g_n := \inf_{k \geq n} x_k \quad \text{und} \quad h_n := \sup_{k \geq n} x_k.$$

Per Definition von  $(g_n)$  und  $(h_n)$  ist  $g_n \leq x_n \leq h_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und nach der Definition des  $\liminf$ , bzw.  $\limsup$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n.$$

Nach dem Sandwich-Lemma ist daher auch  $(x_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  stimmt mit den obigen Ausdrücken überein.  $\square$

## 4 Beispiele und Tricks

Für die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$  für alle  $n \geq \mathbb{N}$  ist

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Für die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$b_n := \frac{3n^2 - 6n + 7}{2n^2 + 3n + 8}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist für alle  $n \geq 1$

$$b_n = \frac{3n^2 - 6n + 7}{2n^2 + 3n + 8} = \frac{3 - \frac{6}{n} + \frac{7}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Für  $c > 0$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n} = 1$ . Nach Archimedes gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $c \leq n_1$  und  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $1/n_2 \leq c$ . Für  $N := \max\{n_1, n_2\}$  gilt dann für alle  $n \geq N$ , dass

$$\frac{1}{n} \leq c \leq n,$$

und somit auch

$$\frac{1}{n^{1/n}} \leq c^{1/n} \leq n^{1/n}.$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$  folgt die Aussage aus dem Sandwich-Lemma.

Seien  $x_1, \dots, x_r \geq 0$ . Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1^n + \dots + x_r^n)^{1/n} = \max_{i=1, \dots, r} x_i.$$

Für  $x := \max_{i=1, \dots, r} x_i$  ist für alle  $n \geq 1$

$$(x_1^n + \dots + x_r^n)^{1/n} \leq (rx^n)^{1/n} = r^{1/n}x$$

und

$$(x_1^n + \dots + x_r^n)^{1/n} \geq (x^n)^{1/n} = x.$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{1/n} = 1$  folgt die Aussage aus dem Sandwich-Lemma.

## 5 Metrische Räume

Wir wollen hier noch kurz eine Möglichkeit vorstellen, den Begriff der Konvergenz zu verallgemeinern. Hierfür wollen wir Räume betrachten, in denen man Abstände messen kann, sogenannte metrische Räume.

**Definition 28.** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Metrik auf  $X$*  ist eine Funktion  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Für alle  $x, y \in X$  ist  $d(x, y) \geq 0$  und es gilt  $d(x, y) = 0$  genau dann wenn  $x = y$ . (Positive Definitheit)
2. Für alle  $x, y \in X$  ist  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie).
3. Für alle  $x, y, z \in X$  gilt die Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(X, d)$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Metrik  $d$  auf  $X$ .

**Bemerkung 29.** Die Forderung, dass  $d(x, y) \geq 0$  kann auch weggelassen werden, da sie aus den anderen dreien folgt. Für alle  $x, y \in X$  ist dann nämlich

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

und somit  $0 \leq d(x, y)$ .

- Beispiel(e).** 1. Die Abbildung  $d(x, y) = |x - y|$  definiert eine Metrik auf  $\mathbb{R}$ , die man als die *Standardmetrik auf  $\mathbb{R}$*  bezeichnet.
2. Allgemein definiert die Abbildung  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik auf  $\mathbb{R}^n$ , die man als die *Standardmetrik auf  $\mathbb{R}^n$*  bezeichnet.
3. Für eine beliebige Menge  $X$  wird durch

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik auf  $X$  definiert, die sogenannte *diskrete Metrik*. (Die Dreiecksungleichung ergibt sich durch Fallunterscheidung.)

4. Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $Y \subseteq X$ , so lässt sich die Metrik  $d$  auf  $Y$  zu

$$d_Y: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, d_Y(x, y) = d(x, y).$$

einschränken. Dann ist auch  $(Y, d_Y)$  ein metrischer Raum und ein *Unterraum* von  $(X, d)$ .

5. Sind  $(X_1, d_1)$  und  $(X_2, d_2)$  metrische Räume, so ist die Abbildung

$$d: (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}, \\ d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$$

eine Metrik auf  $X_1 \times X_2$ .

Auf einem metrischen Raum kann man nun von der Konvergenz von Folgen sprechen:

**Definition 30.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $X$  und  $x \in X$ . Wir sagen, dass  $x_n$  gegen  $x$  konvergiert, falls es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $d(x, x_n) < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  oder  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Die Konvergenz auf  $\mathbb{R}$ , wie wir sie bisher untersucht haben, entspricht unter dieser Definition genau der Konvergenz auf  $(\mathbb{R}, d)$ , wobei  $d$  die Standardmetrik auf  $\mathbb{R}$  ist.

Viele der Eigenschaften konvergenter Folgen, die wir bisher kennengelernt haben, lassen sich auch auf metrische Räume übertragen. So sind etwa Grenzwerte in metrischen Räumen eindeutig. Man mache sich jedoch bewusst, dass metrische Räume nicht mit zusätzlicher Struktur wie Ordnungsrelationen oder binären Operationen wie Addition oder Multiplikation versehen sein müssen. Daher ergeben Konstruktionen wie „die Summe zweier Folgen“ in allgemeinen metrischen Räumen keinen Sinn.

Zum Schluss wollen wir noch den Begriff der Cauchy-Folge in metrischen Räumen thematisieren. Der Begriff der Cauchy-Folge lässt sich ohne Probleme auf metrische Räume verallgemeinern.

**Definition 31.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $X$ .  $(x_n)$  heißt *Cauchy-Folge*, falls es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$  für alle  $n, n' \geq N$ .

Wie bereits zuvor ergibt sich, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Es stellt sich jedoch heraus, dass es auch metrische Räume gibt, in denen nicht alle Cauchy-Folgen konvergieren.

Als einfaches Gegenbeispiele betrachte man  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ . Es sei  $d$  die Standardmetrik auf  $\mathbb{R}$  und  $d_{\mathbb{Q}}$  die Einschränkung von  $d$  auf  $\mathbb{Q}$ , d.h.  $d_{\mathbb{Q}}(x, y) = d(x, y) = |x - y|$  für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

Es existiert nun eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rationaler Zahlen, so dass in  $(\mathbb{R}, d)$  die Konvergenz  $x_n \rightarrow \sqrt{2}$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. In  $(\mathbb{R}, d)$  handelt es sich deshalb bei  $(x_n)$  um eine Cauchy-Folge. Da  $d_{\mathbb{Q}}$  die Einschränkung von  $d$  auf  $\mathbb{Q}$  ist, ist  $(x_n)$  auch in  $(\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$  eine Cauchy-Folge. In  $(\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$  konvergiert die Folge  $(x_n)$  jedoch nicht, da  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . (Würde die Folge  $(x_n)$  in  $(\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$  gegen eine rationale Zahlen  $q \in \mathbb{Q}$  konvergieren, so würde sie auch in  $(\mathbb{R}, d)$  gegen  $q$  konvergieren, was wegen  $\sqrt{2} \neq q$  im Widerspruch zur Eindeutigkeit von Grenzwerten steht.)

Dies motiviert nun die folgende Definition:

**Definition 32.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in  $X$  auch konvergiert.

**Beispiel(e).** Wie wir bereits wissen ist  $\mathbb{R}$  (mit der Standardmetrik) vollständig. Daraus kann man auch folgern, dass auch  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardmetrik vollständig ist.