Wir wollen eine streng monoton steigende Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konstruieren, so dass zwar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty,$$

aber die Häufigkeit der genutzen Summanden gegen 0 geht, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \dots, n\}\}|}{n} = 0. \tag{1}$$

Die Idee der Konstruktion ist die folgende: Wir beginnen mit $a_1 = 1$. Nun nehmen wir jede zweite Zahl hinzu, bis die entsprechende Summe mindestens 2 beträgt. Dann nehmen wir jede dritte Zahl hinzu, bis die entsprechende Summe mindestens 3 beträgt. Dies führen wir dann fort, wobei im n-ten Schritt der Konstruktion solange jeder n-te Summand hinzugefügt wird, bis die bisherige Summe mindestens n beträgt.

Für die so konstruierte Reihe gilt nach Konstruktion $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$. Andererseits wird für jedes $m \geq 1$ nach dem m-ten Schritt nur noch höchstens jeder m-te Summand hinzugefügt, so dass die Anzahl der genutzten Summanden kleiner als $1/m$ wird. Wegen der Beliebigkeit von $m \geq 1$ geht die Häufigkeit der genutzen Summanden dann gegen 0.

Wir wollen diese Konstruktion nun formalisieren: Im ersten Schritt setzen wir $a_1 = 1$, $b_1^{(1)} := 1$, und $\nu(1) = 1$.

Im zweiten Schritt beginnen setzen wir zunächst $b_1^{(2)} := a_1 + m = 3$. Da $1/3 < 1$ setzen wir weiter $b_2^{(2)} := a_1 + m = 5$. Da auch noch $1/3 + 1/5 = 8/15 < 1$ wählen wir weiter $b_3^{(2)} := a_1 + 3m = 7$. Wir führen diesen Vorgang bis zu dem minimalen $\nu(2) \in \mathbb{N}$ fort, so dass $b_1^{(2)} + \cdots + b_{\nu(2)}^{(2)} \geq 1$. Ein solches $\nu(2)$ existiert, da $\sum_{m=1}^{\infty} 1/(a_1 + m) = \infty$. (Es ist $\nu(2) = 7$, wir müssen also bis zum Summanden $1/15$ gehen.) Wir defineren dann a_2, ..., $a_{\nu(2)+1}$ durch

$$a_2 := b_1^{(2)}, a_3 := b_2^{(2)}, \dots, a_{\nu(n)+1} := b_{\nu(n)}^{(n)}.$$

Haben wir bereits $n-1$ solcher Schritte durchlaufen, und die Werte a_1, ..., a_k definiert, so wählen wir im n-ten Schritt das minimale $\nu(n) \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{a_k + n} + \frac{1}{a_k + 2n} + \cdots + \frac{1}{a_k + \nu(n)n} \geq 1,$$

und setzen

$$a_{k+i} := b_i^{(n)} := a_k + in \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq \nu(n).$$

Ein solches $\nu(n)$ existiert, da $\sum_{m=1}^{\infty} 1/(a_k + mn) = \infty$.

Da wir in jedem der Schritte mindestens einen neuen Wert konstruieren, ist a_n für alle $n \geq 1$ definiert. Aus der Konstruktion ist sofort ersichtlch, dass für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \geq \sum_{k=1}^{\nu(1)+\cdots+\nu(m)} a_k \\ &= \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=\nu(1)+\cdots+\nu(n-1)+1}^{\nu(1)+\cdots+\nu(n)} a_k = \sum_{n=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu(n)} b_i^{(n)}}_{\geq 1} \geq m,\end{aligned}$$

also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Wir wollen nun noch zeigen, dass auch (1) erfüllt ist. Sei hierfür $m \geq 1$ beliebig aber fest. Wir bemerken, dass ab $c := a_{\nu(1)+\cdots+\nu(m-1)+1} = b_1^{(m)}$ nur noch höchstens jeder m-te Summand hinzugefügt wird. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned}
&|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}| \\
&\leq |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, c\}\}| + |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \ldots, n\}\}| \\
&\leq c + |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \ldots, n\}\}| .
\end{aligned}$$

Da ab c nur noch höchstens jeder m-te Summand hinzugefügt wird, ist dabei für alle $n \geq c$

$$\begin{aligned}
&|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \ldots, n\}\}| \\
&\leq |\{c + \ell m \mid \ell \in \mathbb{N}\} \cap \{c, \ldots, n\}| \\
&= |\{\ell m \mid \ell \in \mathbb{N}\} \cap \{0, \ldots, n-c\}| \\
&\leq \frac{n-c+1}{m}.
\end{aligned}$$

Für alle $n \geq c$ ist daher

$$|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}| \leq c + \frac{n-c+1}{m},$$

und somit

$$\frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}|}{n} \leq \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n-c+1}{n}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{c}{n}}_{\to 0} + \frac{1}{m} \underbrace{\frac{n-c+1}{n}}_{\to 1} = \frac{1}{m}$$

ist damit auch

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}|}{n} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n-c+1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n-c+1}{n} \\
&= \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $m \geq 1$ folgt damit, dass

$$\begin{aligned}
0 &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}|}{n} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}|}{n} = 0,
\end{aligned}$$

und somit bereits

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}|}{n} = 0.$$