

Grenzwerte von Funktionen

Jendrik Stelzner

4. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Häufungspunkte	1
2	Grenzwerte von Funktionen	4
3	Grenzwerte und Stetigkeit	7
4	Links-, rechts- und beidseitige Grenzwerte	9
5	Uneigentliche Grenzwerte	13
6	Lösungen	16

1 Häufungspunkte

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ (nicht notwendigerweise stetig). Wir wollen untersuchen, wie sich f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ verhält, bzw. verhalten sollte. Um das Verhalten von f an x zu untersuchen, brauchen wir, dass f „in der Nähe“ von x definiert ist. Hierfür brauchen wir, dass x „nahe“ an A ist. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt von A* , falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $x \neq a$ gibt (also $0 < \|x - a\| < \varepsilon$).

Wir bezeichnen die Menge aller Häufungspunkte von A mit A' .

Übung 1.

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Der *punktierte offene ε -Ball um x* ist die Menge

$$\dot{B}_\varepsilon(x) := B_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Für eine Umgebung V von x ist $\dot{V} := V \setminus \{x\}$ die entsprechende *punktierte Umgebung von x*

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. x ist ein Häufungspunkt von A .
2. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a \in A$ mit $a \in \dot{B}_\varepsilon(x)$.
3. Für jede punktierte Umgebung \dot{V} von x gibt es ein $a \in A$ mit $a \in \dot{V}$.

Lösung 1.

(1 \Leftrightarrow 2) 2 ist eine direkte Umformulierung der Definition von 1.

(2 \Leftrightarrow 3) Jeder punktierte ε -Ball um x ist auch eine punktierte Umgebung von x . Andererseits enthält jede punktierte Umgebung von x einen punktierten ε -Ball um x .

Vorstellungsmäßig ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von $A \subseteq \mathbb{R}^n$, falls sich x von außen durch Punkte aus A annähern lässt.

Beispiel(e). • $x = 0$ ist ein Häufungspunkt von $A := \{1/n \mid n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$: Da $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 1$ mit $|x - 1/n| < \varepsilon$, wobei klar ist, dass $1/n \neq 0$.

• Der Punkt $x = 2$ ist *kein* Häufungspunkt der Menge $A := [0, 1] \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$, denn das einzige $a \in A$ mit $|x - a| < 1/2$ ist $a = 2$.

• Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist jeder Punkt $x \in U$ ein Häufungspunkt von U : Da U offen ist gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es für $\omega := \min\{\varepsilon, \delta\}$ daher ein

$$y \in B_\omega(x) \subseteq B_\delta(x) \subseteq U \quad \text{mit } y \neq x,$$

und es gilt $\|x - y\| < \omega \leq \varepsilon$.

• Allgemeiner ergibt sich mit dieser Argumentation, dass $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, falls V eine Umgebung von x ist. (Es genügt bereits eine punktierte Umgebung.)

Übung 2.

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass x genau dann ein Häufungspunkt von A ist, falls es eine Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ gibt, so dass $a_n \rightarrow x$.

Lösung 2.

Angenommen, x ist ein Häufungspunkt von A . Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $|x - a_n| < 1/n$. Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergiert per Konstruktion gegen x .

Angenommen, eine solche Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere ist $a_N \in A$ mit $|x - a_N| < \varepsilon$ und $a_N \neq x$.

Übung 3.

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich. Zeigen Sie, dass $M' = \emptyset$.

Lösung 3.

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \notin M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon := \min_{m \in M} \|x - m\| > 0,$$

dass es kein $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ gibt. Also ist x dann kein Häufungspunkt von M . Ist $x \in M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon := \begin{cases} \min_{m \in M, m \neq x} \|x - m\| & \text{falls } |M| \geq 2, \\ 1 & \text{falls } M = \{x\}, \end{cases}$$

dass x das einzige $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ ist. Also ist x auch dann kein Häufungspunkt von M .

Übung 4.

Bestimmen Sie \mathbb{Z}' .

Lösung 4.

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ist $x \notin \mathbb{Z}$, so gibt es für

$$\varepsilon := \min\{\lceil x \rceil - x, x - \lfloor x \rfloor\}$$

kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < \varepsilon$. Also ist x dann kein Häufungspunkt von \mathbb{Z} . Ist andererseits $x \in \mathbb{Z}$, so gibt es außer x kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < 1/2$, weshalb x auch dann kein Häufungspunkt von \mathbb{Z} ist.

Also ist kein $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von \mathbb{Z} , und somit $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

Übung 5.

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Ist $A \subseteq B$, so ist $A' \subseteq B'$.
2. Es ist $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Lösung 5.

1. Es sei $x \in A'$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $a \neq x$. Da $a \in A \subseteq B$ folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon$ und $b \neq x$ gibt. Also ist x ein Häufungspunkt von B , also $x \in B'$. Aus der Beliebigkeit von $x \in A'$ folgt, dass $A' \subseteq B'$.
2. Da $A \subseteq A \cup B$ ist $A' \subseteq (A \cup B)'$, und da $B \subseteq A \cup B$ ist $B' \subseteq (A \cup B)'$. Also ist auch $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

Angenommen, es ist $x \notin A' \cup B'$. Dann gibt es $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$, so dass es kein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon_A$ und $a \neq x$ gibt, und auch kein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon_B$ und $b \neq x$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ gibt es daher kein $c \in A \cup B$ mit $\|x - c\| < \varepsilon$ und $c \neq x$. Also ist dann $x \notin (A \cup B)'$. Das zeigt, dass auch $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

Übung 6.

Bestimmen Sie A' für $A := [0, 1] \cup [2, 3]$.

Lösung 6.

Behauptung. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist

$$[a, b]' = [a, b].$$

Beweis der Behauptung. Für $x < a$ ist $a - x > 0$. Für alle $y \in [a, b]$ ist wegen $y \geq a$ aber

$$\|x - y\| = y - x \geq a - x,$$

es gibt also kein $y \in [a, b]$ mit $\|x - y\| < a - x$. Daher ist $x \notin [a, b]'$. Analog ergibt sich, dass auch $x \notin [a, b]'$ für $x > b$. Also ist $[a, b]' \subseteq [a, b]$.

Dass $a, b \in [a, b]'$ ergibt sich durch die Folgen (x_n) auf (a, b) und (y_n) auf $[a, b)$ mit

$$x_n := a + \frac{b - a}{n + 1} \quad \text{und} \quad y_n := b - \frac{b - a}{n + 1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $x \in [a, b]'$ für $a < x < b$ ergibt sich daraus, dass $[a, b]$ eine Umgebung für diese x ist. Damit ergibt sich, dass $[a, b] \subseteq [a, b]'$. \square

Aus der Behauptung ergibt sich direkt, dass

$$([0, 1] \cup [2, 3])' = [0, 1]' \cup [2, 3]' = [0, 1] \cup [2, 3].$$

2 Grenzwerte von Funktionen

Definition 2. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A . Für $y \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = y,$$

falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Wir nennen y dann den *Grenzwert von f an x über A* . Wir schreiben auch $f(a) \rightarrow y$ für $a \rightarrow x$ über $a \in A$.

Die Bedingung $a \neq x$ sorgt dafür, dass nur das Verhalten von f in der Nähe von x von Bedeutung ist, unabhängig von $f(x)$ selbst. So können wir untersuchen, wie sich f an x verhalten sollte.

Grenzwerte von Funktionen sind eindeutig:

Lemma 3. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A . Sind $y, y' \in \mathbb{R}^m$, so dass $f(a) \rightarrow y$ und $f(a) \rightarrow y'$ für $a \rightarrow x$ über $a \in A$, so ist $y = y'$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $f(a) \rightarrow y$ für $a \rightarrow x$ über $a \in A$ gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow \|y - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da $f(a) \rightarrow y'$ für $a \rightarrow x$ über $a \in A$ gibt es auch ein $\delta_2 > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta_2 \Rightarrow \|y' - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da x ein Häufungspunkt von A ist, gibt es für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \delta$ und $a \neq x$. Deshalb ist

$$\|y - y'\| \leq \|y - f(a)\| + \|y' - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\|y - y'\| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ ist bereits $\|y - y'\| = 0$, also $y = y'$. \square

Für diese Eindeutigkeit ist es entscheidend, dass x ein Häufungspunkt von A ist; daher definieren wir Funktionsgrenzwerte nur für diesen Fall.

Beispiel(e). • Wir betrachten die *Signumabbildung*

$$\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

0 ist ein gemeinsamer Häufungspunkt von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$, und es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (-\infty, 0)}} f(x) = -1, \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, \infty)}} f(x) = 1.$$

- Wir betrachten die Abbildung

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}.$$

0 ist ein Häufungspunkt der beiden Mengen

$$A := \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad B := \left\{ \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

und es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in B}} f(x) = -1.$$

0 ist auch ein Häufungspunkt der Menge $(0, \infty)$, der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, \infty)}} f(x)$$

existiert jedoch nicht.

Lemma 4. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $x \in \mathbb{R}^m$ ein Häufungspunkt von A . Für $y \in \mathbb{R}^k$ sind äquivalent:

1. $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$.
2. Für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \rightarrow x$ ist $f(a_n) \rightarrow y$.

(Da x ein Häufungspunkt von A ist, existiert eine entsprechende Folge.)

Beweis. (1 \Rightarrow 2) Es sei (a_n) eine Folge auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \rightarrow x$. Wir wollen zeigen, dass $f(a_n) \rightarrow y$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da $a_n \rightarrow x$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x - a_n\| < \delta$ für alle $n \geq N$. Da $a_n \neq x$ ist deshalb $\|y - f(a_n)\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

(2 \Rightarrow 1) Angenommen, es ist nicht $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $a \in A$ gibt, so dass zwar $a \neq x$ und $\|x - a\| < \delta$, aber $\|y - f(a)\| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es deshalb für alle $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $\|x - a_n\| < 1/n$ aber $\|y - f(a_n)\| \geq \varepsilon$. Dann ist (a_n) eine Folge auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \rightarrow x$, aber es gilt nicht $f(a_n) \rightarrow y$. \square

Aus dieser Beschreibung von Funktionsgrenzwerten durch Folgen ergeben sich direkt zwei einfache Konsequenzen: Zum einen sehen wir, dass sich Funktionsgrenzwerte auch koordinatenweise beschreiben lassen.

Lemma 5. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A . In Koordinaten sei $f = (f_1, \dots, f_m)$. Für $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$, falls $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_i(a) = y_i$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Beweis. Dass $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$ ist äquivalent dazu, dass für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \rightarrow x$ auch $f(a_n) \rightarrow y$. Dies ist äquivalent dazu, dass für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ auch $f_i(a_n) \rightarrow y_i$ für alle $1 \leq i \leq m$. Dies bedeutet wiederum, dass $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_i(a) = y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. \square

Ein weiteres Ergebnis ist, dass Funktionsgrenzwerte mit den üblichen Rechenregeln im \mathbb{R}^n verträglich sind.

Proposition 6. Es seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A .

1. Existieren die Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} (f_1 + f_2)(a)$ und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (f_1 + f_2)(a) = \left(\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_1(a) \right) + \left(\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

2. Existiert der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$, so existiert auch $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} (\lambda f)(a)$, und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (\lambda f)(a) = \lambda \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a).$$

Im Fall $n = 1$, also für $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, gilt auch eine Verträglichkeit mit Multiplikation und Division.

3. Existieren die Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} (f_1 \cdot f_2)(a)$ und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (f_1 \cdot f_2)(a) = \left(\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_1(a) \right) \cdot \left(\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

4. Existieren die beiden Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)$, und ist $f_2(a) \neq 0$ für alle $a \in A \setminus \{x\}$ sowie $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a) \neq 0$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)/f_2(a)$ und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)}{\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)}$$

(Sehen wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, so ergibt sich auch eine Verträglichkeit mit der Multiplikation und Division im Komplexen; hierauf gehen wir hier aber nicht weiter ein.)

Wie wir bereits gesehen haben, können für eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit gemeinsamen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}^n$ die beiden Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$ und $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ existieren, aber dennoch

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) \neq \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

Es kann auch passieren, dass einer der beiden Grenzwerte existiert, der andere jedoch nicht. Es gibt also im Allgemeinen keinen Zusammenhang zwischen dem Grenzwert von f über A und dem Grenzwert über B . Unter bestimmten Umständen lassen sich die beiden Grenzwerte aber vergleichen:

Lemma 7. Es seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: B \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein gemeinsamer Häufungspunkt von A und B , sodass der Grenzwert $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ existiert, so existiert auch $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$, und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

Beweis. Zur besseren Lesbarkeit setzen wir $y := \lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$. Wir wollen zeigen, dass auch $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$. Es sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $y = \lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x - b\| < \delta \Rightarrow \|y - f(b)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } b \in B \text{ mit } b \neq x.$$

Da $A \subseteq B$ ist daher insbesondere

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$. \square

Korollar 8. Es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Es seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen, so dass $x \in \mathbb{R}^n$ ein gemeinsamer Häufungspunkt von A und B ist, und die beiden Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$ und $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ existieren. Ist x auch ein Häufungspunkt von $A \cap B$, so ist

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

Beweis. Da die beiden Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$ und $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ existieren, und $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$, erhalten wir aus Lemma 7, dass auch der Grenzwert $\lim_{c \rightarrow x, c \in A \cap B} f(c)$ existiert und

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{c \rightarrow x \\ c \in A \cap B}} f(c) = \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b). \quad \square$$

3 Grenzwerte und Stetigkeit

Die Definition von Funktionsgrenzwerten erinnert stark an das ε - δ -Kriterium für die Stetigkeit einer Funktion. Diese Ähnlichkeit legt die Vermutung nahe, dass sich die Stetigkeit einer Funktion durch die Betrachtung von passenden Funktionsgrenzwerten untersuchen lässt.

Lemma 9. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}^n$. f sei auf einer Umgebung von $x \in \mathbb{R}^n$ definiert, d.h. es gebe eine Umgebung V von x mit $V \subseteq A$. Dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

1. Der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$ existiert für eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x mit $V \subseteq A$.
2. Der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a)$ existiert für jede Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x mit $U \subseteq A$.

Der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a)$ ist dabei unabhängig von der Wahl der Umgebung U von x mit $U \subseteq A$.

Beweis. ($2 \Rightarrow 1$) Nach Annahme existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x , so dass f auf V definiert ist, also mit $V \subseteq A$; diese Implikation ist daher klar.

($1 \Rightarrow 2$) Es sei V eine entsprechende Umgebung von x und $y := \lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Umgebung von x mit $U \subseteq A$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a)$ existiert und $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a) = y$.

Es sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $y = \lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$ gibt es $\delta_1 > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da V eine Umgebung von x ist, gibt es außerdem ein $\delta_2 > 0$ mit $B_{\delta_2}(x) \subseteq V$. Für $\delta' := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ist deshalb $B_{\delta'}(x) \subseteq V$ und

$$\|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in B_{\delta'}(x) \text{ mit } a \neq x.$$

Da auch U eine Umgebung von x ist, gibt es ein $\delta'' > 0$ mit $B_{\delta''}(x) \subseteq U$. Für $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$ ist also $B_\delta(x) \subseteq U$ mit

$$\|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in B_\delta(x) \text{ mit } a \neq x.$$

Damit erhalten wir, dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in U \text{ mit } a \neq x.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a) = y$. \square

Definition 10. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist f auf einer Umgebung V von $x \in \mathbb{R}^n$ definiert, also $V \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \rightarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in V}} f(a)$$

und nennen dies den *Grenzwert von f an x* .

Die Wohldefiniertheit, also Unabhängigkeit von V , folgt aus Lemma 9.

Proposition 11. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}^n$ auf einer Umgebung von x definiert. Dann ist f genau dann stetig an x , wenn $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = f(x)$.

Beweis. Angenommen f ist stetig an x . Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x mit $V \subseteq A$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a) = f(x)$. Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da f stetig an x ist gibt es $\delta > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A.$$

Daher ist insbesondere

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in V \text{ mit } a \neq x.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a) = f(x)$.

Angenommen, es ist $\lim_{x \rightarrow a} f(a) = f(x)$. Wir wollen zeigen, dass f stetig an x ist. Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x mit $V \subseteq A$. Da V eine Umgebung von x ist, gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $B_{\delta_1}(x) \subseteq V$. Da $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = f(x)$ ist $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a) = f(x)$, es gibt daher ein $\delta_2 > 0$ mit

$$\|x - a\| < \delta_2 \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in V \text{ mit } a \neq x,$$

und wir können offenbar auch $a = x$ zulassen. Für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ haben wir nun $B_\delta(x) \subseteq B_{\delta_1}(x) \subseteq V$ und $\|x - a\| < \delta \leq \delta_2$ für alle $a \in B_\delta(x)$, und somit

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies die Stetigkeit von f an x . \square

4 Links-, rechts- und beidseitige Grenzwerte

Wir wollen uns nun einem Sonderfall von Funktionsgrenzwerten zuwenden.

Definition 12. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Gibt es ein $r > 0$, so dass $(x - r, x) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x-r, x)}} f(a),$$

und nennen dies den *linksseitigen Grenzwert von f an x* .

Gibt es ein $r > 0$, so dass $(x, x + r) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \downarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x, x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *rechtsseitigen Grenzwert von f an x* .

Existiert ein $r > 0$, so dass $(x - r, x) \cup (x, x + r) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \rightarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *beidseitigen Grenzwert von f an x* .

Die Wohldefiniertheit der jeweiligen Ausdrücke, also die Unabhängigkeit von r , ergibt sich aus Korollar 8.

Bemerkung 13. Explizit bedeutet die Definition folgendes: Ist $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}$, so ist für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^n$ genau dann $\lim_{a \uparrow x} f(a) = y$, falls

1. es gibt ein $r > 0$, so dass f auf $(x - r, x)$ definiert ist, und
2. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \in (x - \delta, x).$$

Analoges gilt auch für $\lim_{y \downarrow x} f(y)$ und $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$.

Bemerkung 14. Ist $V \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}$, und $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$, so ist die Notation $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$ doppelt belegt: Zum einen steht die Notation für $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$. Zum anderen gibt es, da V eine Umgebung von x ist, ein $r > 0$ mit $(x - r, x + r) \subseteq V$; dann steht die Notation auch für $\lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)} f(a)$.

Die beiden Definitionen sind in diesem Fall allerdings gleichbedeutend: Per Definition ist der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)} f(a)$ gleichbedeutend zum Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x+r)} f(a)$. Dieser Grenzwert ist nach Lemma 9 der gleiche wie $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$.

Der beidseitige Grenzwert lässt sich auch als Kombination des links- und rechtsseitigen Grenzwertes definieren:

Lemma 15. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^m$ sind äquivalent:

1. Der beidseitige Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$ existiert und $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$.

2. Die beiden Grenzwerte $\lim_{a \uparrow x} f(a)$ und $\lim_{a \downarrow x} f(a)$ existieren und es ist

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = y = \lim_{a \downarrow x} f(a).$$

Beweis. ($1 \Rightarrow 2$) Da $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$ existiert, gibt es ein $r > 0$, so dass f auf $(x - r, x) \cup (x, x + r)$ definiert ist und $\lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)} f(a)$ existiert. Dann ist f auf $(x - r, x)$ und auf $(x, x + r)$ definiert, und nach Lemma 7 gilt

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x-r, x)}} f(a) = \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)}} f(a) = \lim_{a \rightarrow x} f(a).$$

Analog ergibt sich, dass auch $\lim_{a \downarrow x} f(a)$ existiert und

$$\lim_{a \downarrow x} f(a) = \lim_{a \rightarrow x} f(a)$$

($2 \Rightarrow 1$) Da die beiden Grenzwerte $\lim_{a \uparrow x} f(a)$ und $\lim_{a \downarrow x} f(a)$ existieren gibt es $r_-, r_+ > 0$, so dass f auf $(x - r_-, x)$ und auf $(x, x + r_+)$ definiert ist. Also ist f für $r := \min\{r_-, r_+\}$ auf $(x - r, x) \cup (x, x + r)$ definiert. Wir wollen zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$ existiert und $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$. Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\lim_{a \uparrow x} f(a) = y$ gibt es ein $\delta_- > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta_- \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x - r_-, x),$$

und da $\lim_{a \downarrow x} f(a) = y$ gibt es ein $\delta_+ > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta_+ \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x, x + r_+).$$

Für $\delta := \min\{\delta_-, \delta_+\}$ ist daher

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x - r, x) \cup (x, x + r).$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$. □

Aus unserer bisherigen, allgemeinen Untersuchung von Funktionsgrenzwerten ergibt sich für die Sonderfälle von links-, rechts- und beidseitigen Grenzwerten ohne weitere Arbeit die Verträglichkeit mit den üblichen Rechenoperationen. Aus Lemma 4 ergibt sich außerdem, dass sich links-, rechts- und beidseitige Grenzwerte durch Folgen beschreiben lassen.

Beispiel(e). • Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ existiert nicht: Die beiden Folgen (a_n) und (b_n) mit

$$a_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergieren gegen 0, aber die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1$$

unterscheiden sich.

- Es ist $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$: Wir wissen bereits, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

stetig ist. (Stetigkeit an $x \neq 0$ ist klar, und an $x = 0$ ergibt die Stetigkeit aus dem ε - δ -Kriterium.) Daher ist nach Proposition 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

- Für $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p, q \geq 1$ ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{p}{q}.$$

Das Problem besteht darin, dass $1^q - 1 = 1^p - 1 = 0$. Dieses Problem beseitigen wir dadurch, dass wir aus den Polynomen $x^p - 1$ und $x^q - 1$ den Linearfaktor $x - 1$ ausklammern (dies ist möglich, da 1 eine Nullstelle der beiden Polynome ist). Wir erhalten so, dass für alle $x \notin \{-1, 1\}$

$$\frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{(x - 1) \sum_{k=0}^{p-1} x^k}{(x - 1) \sum_{k=0}^{q-1} x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^k}{\sum_{k=0}^{q-1} x^k}.$$

Daher ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^k}{\sum_{k=0}^{q-1} x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q}.$$

- Wir wollen untersuchen, wie sich die Grenzwert von $x\sqrt{1+4/x^2}$ an $x = 0$ verhalten – von links, rechts und beidseitig. Hierfür bemerken wir, dass für alle $x \neq 0$

$$x = \operatorname{sgn}(x)|x| = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2}$$

und somit

$$\begin{aligned} x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} &= \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Daher ist nach den üblichen Stetigkeitsargumenten (Proposition 11)

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 0} x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} &= \lim_{x \uparrow 0} \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2 + 4} = \lim_{x \uparrow 0} -1 \cdot \sqrt{x^2 + 4} \\ &= -\lim_{x \uparrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = -\sqrt{0^2 + 4} = -2. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich, dass

$$\lim_{x \downarrow 0} x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 2.$$

Damit kennen wir das Verhalten von links- und rechtsseitigen Grenzwert. Der beidseitige Grenzwert existiert nicht, da links- und rechtsseitiger Grenzwert verschieden sind.

- Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|}$$

untersuchen. Hierfür bemerken wir, dass für alle $x \neq 2$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|} &= \frac{(x - 2)(x - 12)}{|x - 2| + |x - 2||x + 2|} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 12)}{\operatorname{sgn}(x - 2)(x - 2) + \operatorname{sgn}(x - 2)(x - 2)|x + 2|} \\ &= \frac{x - 12}{\operatorname{sgn}(x - 2) + \operatorname{sgn}(x - 2)|x + 2|} \\ &= \operatorname{sgn}(x - 2) \frac{x - 12}{1 + |x + 2|}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|} &= \lim_{x \uparrow 2} \operatorname{sgn}(x - 2) \frac{x - 12}{1 + |x + 2|} \\ &= \lim_{x \uparrow 2} -1 \cdot \frac{x - 12}{1 + |x + 2|} = - \lim_{x \uparrow 2} \frac{x - 12}{1 + |x + 2|} = - \frac{2 - 12}{1 + |2 + 2|} = 2. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich, dass auch

$$\lim_{x \downarrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|} = -2.$$

Beispiel(e). Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend, so existiert an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert, und es ist

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = \sup_{a < x} f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{a \downarrow x} f(a) = \inf_{a > x} f(a)$$

Zum Beweis zeigen wir, dass

$$y := \sup_{a < x} f(a)$$

die Eigenschaften des linksseitigen Limes erfüllt. Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Nach der ε -Charakterisierung des Supremums gibt es ein $a_0 < x$ mit $y - \varepsilon < f(a_0)$. Aus der Monotonie von f folgt, dass

$$y - \varepsilon < f(a_0) \leq f(a) \leq \sup_{a' < x} f(a') = y \quad \text{für alle } a_0 \leq a < x.$$

Für $\delta := x - a_0 > 0$ ist also

$$\|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x - \delta, x).$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $\lim_{a \uparrow x} f(a) = y$. Analog zeigt man, dass $\lim_{a \downarrow x} f(a) = \inf_{a > x} f(a)$.

Ist f monoton fallend, so ergibt sich analog, dass an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = \inf_{a < x} f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{a \downarrow x} f(a) = \sup_{a > x} f(a).$$

Zusammen mit Proposition 11 ergibt sich damit die aus der Vorlesung bekannte Charakterisierung der Stetigkeit einer monotonen Funktion:

Korollar 16. Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend, so ist f genau dann stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, wenn

$$\sup_{a < x} f(a) = f(x) = \inf_{a > x} f(a).$$

Ist f monoton fallend, so ist f genau dann stetig an x , wenn

$$\inf_{a < x} f(a) = f(x) = \sup_{a > x} f(a).$$

Beweis. f ist genau dann stetig an x , wenn $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = f(x)$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\lim_{a \uparrow x} f(a)$ und $\lim_{a \downarrow x} f(a)$ existieren und

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = f(x) = \lim_{a \downarrow x} f(a). \quad (1)$$

Ist f monoton steigend, so existieren die Grenzwerte $\lim_{a \uparrow x} f(a)$ und $\lim_{a \downarrow x} f(a)$, und es ist

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = \sup_{a < x} f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{a \downarrow x} f(a) = \inf_{a > x} f(a).$$

Also übersetzt sich Bedingung (1) dann in

$$\sup_{a < x} f(a) = f(x) = \inf_{a > x} f(a).$$

Die zweite Aussage ergibt sich analog. □

5 Uneigentliche Grenzwerte

Wie bereits für Folgen lassen sich auch für Funktionen uneigentliche Grenzwerte definieren.

Definition 17. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A . Wir schreiben $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = \infty$, falls es für alle $R > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow f(a) \geq R \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Analog definieren wir $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = -\infty$.

Beispiel(e). • Es ist

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ existiert nicht (auch nicht uneigentlich).

- 0 ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und wir haben

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{1}{\|x\|} = \infty.$$

- Es ist

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\exp(x) - 1} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{\exp(x) - 1} = -\infty.$$

Definition 18. Es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ sagen wir, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$, falls

1. es gibt $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ für alle $x \geq r_0$ definiert ist, und
2. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $r \geq r_0$, so dass $\|y - f(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \geq r$.

Analog definiert man die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y$.

Beispiel(e). • Es ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0.$$

• Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Definition 19. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, falls

1. es gibt $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ für alle $x \geq r_0$ definiert ist, und
2. für alle $R > 0$ gibt es $r > r_0$, so dass $f(x) \geq R$ für alle $x \geq r$.

Analog definiert man die Ausdrücke $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Beispiel(e). • Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty,$$

und es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

• Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty.$$

Beispiel(e). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-a)(x-b)} - x$$

untersuchen. Hierfür bemerken wir zunächst, dass $(x-a)(x-b) \geq 0$ für alle $x \geq \max\{a, b\}$; der Ausdruck $\sqrt{(x-a)(x-b)}$ ist also für alle $x \geq \max\{a, b\}$ definiert. Zur Bestimmung des Grenzwerts wollen wir den Ausdruck $\sqrt{(x-a)(x-b)} - x$ zunächst umschreiben; für alle $x > \max\{a, b, 0\}$ haben wir

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-a)(x-b)} - x &= \frac{(\sqrt{(x-a)(x-b)} - x)(\sqrt{(x-a)(x-b)} + x)}{\sqrt{(x-a)(x-b)} + x} \\ &= \frac{(x-a)(x-b) - x^2}{\sqrt{(x-a)(x-b)} + x} = \frac{-(a+b)x + ab}{\sqrt{x^2 - (a+b)x + ab} + x} \\ &= \frac{-(a+b) + \frac{ab}{x}}{\sqrt{1 - \frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}} + 1} \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-a)(x-b)} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(a+b) + \frac{ab}{x}}{\sqrt{1 - \frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}} + 1} = -\frac{a+b}{2}.$$

Auch für uneigentliche Grenzwerte gelten (intuitive) Rechenregeln, von denen wir hier einige angeben wollen:

1. Für $y \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$, wenn $\lim_{x \downarrow 0} f(1/x) = y$. Die Aussage gilt für eine reellwertige Funktion auch für $y \in \{-\infty, \infty\}$.
2. Wenn $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} f(x) = -\infty$, dann ist

$$\lim_{x \rightarrow a, a \in A} 1/f(x) = 0.$$

3. Ist $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} f(x) = \infty$, so ist $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} -f(x) = -\infty$. Analoges gilt für $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Auch uneigentliche Grenzwerte lassen sich durch Folgen charakterisieren.

4. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in A$ ein Häufungspunkt von A , so ist genau dann $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = \infty$, falls für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \rightarrow x$ auch $f(a_n) \rightarrow \infty$. Eine analoge Aussage gilt für $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = -\infty$.
5. Für $y \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$, wenn für jede Folge (x_n) auf \mathbb{R} mit $x_n \rightarrow \infty$ auch $f(x_n) \rightarrow y$. Eine analoge Aussage gilt für $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Ist f eine reellwertige Funktion, so gilt die Aussage auch für $y \in \{-\infty, \infty\}$.

6 Lösungen

Lösung 1.

(1 \Leftrightarrow 2) 2 ist eine direkte Umformulierung der Definition von 1.

(2 \Leftrightarrow 3) Jeder punktierte ε -Ball um x ist auch eine punktierte Umgebung von x . Andererseits enthält jede punktierte Umgebung von x einen punktierten ε -Ball um x .

Lösung 2.

Angenommen, x ist ein Häufungspunkt von A . Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $|x - a_n| < 1/n$. Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergiert per Konstruktion gegen x .

Angenommen, eine solche Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere ist $a_N \in A$ mit $|x - a_N| < \varepsilon$ und $a_N \neq x$.

Lösung 3.

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \notin M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon := \min_{m \in M} \|x - m\| > 0,$$

dass es kein $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ gibt. Also ist x dann kein Häufungspunkt von M . Ist $x \in M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon := \begin{cases} \min_{m \in M, m \neq x} \|x - m\| & \text{falls } |M| \geq 2, \\ 1 & \text{falls } M = \{x\}, \end{cases}$$

dass x das einzige $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ ist. Also ist x auch dann kein Häufungspunkt von M .

Lösung 4.

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ist $x \notin \mathbb{Z}$, so gibt es für

$$\varepsilon := \min\{\lceil x \rceil - x, x - \lfloor x \rfloor\}$$

kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < \varepsilon$. Also ist x dann kein Häufungspunkt von \mathbb{Z} . Ist andererseits $x \in \mathbb{Z}$, so gibt es außer x kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < 1/2$, weshalb x auch dann kein Häufungspunkt von \mathbb{Z} ist.

Also ist kein $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von \mathbb{Z} , und somit $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

Lösung 5.

1. Es sei $x \in A'$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $a \neq x$. Da $a \in A \subseteq B$ folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon$ und $b \neq x$ gibt. Also ist x ein Häufungspunkt von B , also $x \in B'$. Aus der Beliebigkeit von $x \in A'$ folgt, dass $A' \subseteq B'$.
2. Da $A \subseteq A \cup B$ ist $A' \subseteq (A \cup B)'$, und da $B \subseteq A \cup B$ ist $B' \subseteq (A \cup B)'$. Also ist auch $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

Angenommen, es ist $x \notin A' \cup B'$. Dann gibt es $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$, so dass es kein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon_A$ und $a \neq x$ gibt, und auch kein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon_B$ und $b \neq x$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ gibt es daher kein $c \in A \cup B$ mit $\|x - c\| < \varepsilon$ und $c \neq x$. Also ist dann $x \notin (A \cup B)'$. Das zeigt, dass auch $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

Lösung 6.

Behauptung. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist

$$[a, b]' = [a, b].$$

Beweis der Behauptung. Für $x < a$ ist $a - x > 0$. Für alle $y \in [a, b]$ ist wegen $y \geq a$ aber

$$\|x - y\| = y - x \geq a - x,$$

es gibt also kein $y \in [a, b]$ mit $\|x - y\| < a - x$. Daher ist $x \notin [a, b]'$. Analog ergibt sich, dass auch $x \notin [a, b]'$ für $x > b$. Also ist $[a, b]' \subseteq [a, b]$.

Dass $a, b \in [a, b]'$ ergibt sich durch die Folgen (x_n) auf $(a, b]$ und (y_n) auf $[a, b)$ mit

$$x_n := a + \frac{b-a}{n+1} \quad \text{und} \quad y_n := b - \frac{b-a}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $x \in [a, b]'$ für $a < x < b$ ergibt sich daraus, dass $[a, b]$ eine Umgebung für diese x ist. Damit ergibt sich, dass $[a, b] \subseteq [a, b]'$. \square

Aus der Behauptung ergibt sich direkt, dass

$$([0, 1] \cup [2, 3])' = [0, 1]' \cup [2, 3]' = [0, 1] \cup [2, 3].$$