Bestimmungen des Grenzwertes

Jendrik Stelzner

3. Dezember 2014

Auf dem achten Übungsblatt wurde sollte gezeigt werden, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} a_0 &\coloneqq 0 \\ a_1 &\coloneqq 1 \\ a_{n+2} &\coloneqq \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \end{aligned}$$

konvergiert. Wir wollen uns nun damit beschäftigen, den entsprechenden Grenzwert zu ermitteln. Hierfür zeigen wir zunächst noch einmal, dass die Folge (a_n) konvergiert.

Beweis. Für alle $n \geq 1$ ist

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{a_{n-1} + a_n}{2} - a_n\right| = \left|\frac{a_{n-1} - a_n}{2}\right| = \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|.$$

Durch wiederholten Anwenden dieser Gleichung ergibt sich mit $|a_1 - a_0| = 1$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2^n}|a_1 - a_0| = \frac{1}{2^n}.$$

Für alle $N' \in \mathbb{N}$ und $m, m' \geq N'$, wobei o.B.d.A. $m \geq m'$, gilt daher

$$\begin{aligned} |a_m - a_{m'}| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{m'+1} - a_{m'}| \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m'}} = \frac{1}{2^{m'}} \sum_{k=0}^{m-1-m'} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1}{2^{N'}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N'}} \cdot 2 = \frac{1}{2^{N'-1}}. \end{aligned}$$

Für beliebiges aber festes $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $1/(2^{N-1}) < \varepsilon$ gilt daher für alle $m, m' \geq N$, dass $|a_m - a_{m'}| < \varepsilon$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Also ist (a_n) konvergent. $\square$