Grundlegendes zur Konvergenz von Reihen

Jendrik Stelzner

6. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitung

Wir werden einige grundlegende Eigenschaften über die Konvergenz von Folgen nutzen, die bisher nicht gezeigt wurden. Wir überlassen die entsprechenden Beweise den geneigten Lesern als Übung.

Übung 1.
Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|.$$

Übung 2.
Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $C \in \mathbb{R}$ gilt: Es gibt genau dann $y < C$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le y$ für alle $n \ge N$, falls $\limsup_{n\to\infty} a_n < C$.

2 Definition

Definition 1. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der *Partialsummen* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

definiert; s_n heißt die *n-te Partialsumme* (der Folge (a_n)). Diese Folge der Partialsummen bezeichnet man als *Reihe* und schreibt man als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, d.h. konvergiert die Folge der Partialsummen (s_n), so bezeichnet man den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ ebenfalls als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und nennt dies den *Wert der Reihe*. Die Folge (a_n) heißt dann summierbar.

Für $N \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ als die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+N}$ definiert.

Bemerkung 2. Die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ wird nach dieser Definition als die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k+N}$ verstanden. Alternativ kann man die Reihe auch als die Folge der Partialsummen $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s'_n := \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

definieren. Dies macht praktisch keinen Unterschied, da dann

$$s'_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n < N, \\ s_{n-N} & \text{falls } n \ge N. \end{cases}$$

Die Folge (s'_n) ist also die Folge (s_n) mit Nullen aufgefüllt.

Man bemerke, dass man mit der Notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sowohl die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch der Grenzwert dieser Folge bezeichnet. Soll also gezeigt werden, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist damit gemeint, dass die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren soll. Soll der Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimmt werden, so soll der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ ermittelt werden.

Definition 3. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Die Folge (a_n) heißt dann absolut summierbar.

Bemerkung 4. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, also $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, so schreibt man für $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ebenfalls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet man aber in diesen Fällen nicht als konvergent.

Übung 3.
Zeigen Sie, dass für alle $-1 < q < 1$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert bestimmen Sie ihren Wert. Man bezeichnet Reihen dieser Form als *geometrische Reihe*.

Übung 4.
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ gegen ∞ divergiert. Man bezeichnet diese Reihe als die *harmonische Reihe*.

3 Grundlegende Eigenschaften

Wir wollen nun einige grundlegende Eigenschaften von (konvergenten) Reihen angeben und beweisen.

Lemma 5. *Konvergiert für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$, so ist (a_n) eine Nullfolge, d.h.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Wir betrachten die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert bedeutet gerade, dass die Folge (s_n) konvergiert. Es sei

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Wir bemerken nun, dass für alle $n \geq 1$

$$s_n - s_{n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = a_n.$$

Durch die üblichen Rechenregeln konvergenter Folgen ergibt sich daher, dass

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

für $n \to \infty$. Also ist (a_n) konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Man beachte, dass die Umkehrung des Lemmas nicht gilt, d.h. nicht jede Nullfolge ist auch summierbar. Ein einfaches Gegenbeispiel hierfür ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Proposition 6.

1. *Konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ und es gilt*
$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$
2. *Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ so konvergiert für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k)$ und es gilt*
$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$
3. *Für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergiert. Es ist dann*
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich direkt aus den bekannten Rechenregeln für endliche Summen und konvergente Folgen. Ein genaues Formulieren bleibt den Lesern als Übung überlassen. □

Korollar 7. *Die Menge der summierbaren Folgen*

$$\Sigma := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ ist summierbar}\}$$

bildet unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und die Abbildung

$$\Sigma \to \mathbb{R}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ist $\mathbb{R}$-linear.

Wir erhalten aus dem Lemma auch, dass $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$, denn wir haben

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0.$$

Wie bereits für endliche Summen gilt auch für Reihen eine Dreiecksungleichung.

Lemma 8. *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis des Lemmas. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent, so haben wir $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$ und die Aussage ist klar. Ansonsten gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach der Dreiecksungleichung für endliche Summen

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$

so dass wir im Grenzwert

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

haben. □

Wir wollen nun auf den Zusammenhang zwischen konvergenten und absolut konvergenten Reihen zurückkommen.

Lemma 9. *Ist eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, also $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Wir wollen zeigen, dass (s_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir für alle $m, m' \geq n$

$$|s_m - s_{m'}| = \left|\sum_{k=\min\{m,m'\}}^{\max\{m,m'\}} a_k\right| \leq \sum_{k=\min\{m,m'\}}^{\max\{m,m'\}} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Aus der obigen Ungleichung ergibt sich damit, dass $m, m' \geq N$ ist dann $|s_m - s_{m'}| < \varepsilon$. □

Wie wir noch sehen werden gilt die Umkehrung des Lemmas nicht, d.h. es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind.

Lemma 10. *Es seien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *Reihen mit* $0 \leq a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Beweis. Für die Partialsummen gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

und die Folge der Partialsummen ist monoton steigend. Die Aussage ergibt sich damit direkt daraus, dass Monotonie von Folgen unter Grenzwerten erhalten bleibt. □

4 Konvergenzkriterien

Wir wollen nun Kriterien entwickeln, mit denen sich entscheiden lässt, ob eine Folge (absolut) konvergiert. Lemma 5 liefert uns bereits die notwendige Bedingung, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge seien muss, damit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Wie wir bereits wissen, ist diese Bedingung aber nicht hinreichend. Solche hinreichenden Bedingungen wollen wir nun ermitteln. Dabei spielt die Absolute Konvergenz eine besondere Rolle, da sich diese unter gewissen Umständen durch einen Vergleich mit der geometrischen Reihe untersuchen lässt.

4.1 Majoranten- und Minorantenkriterium

Eine der einfachsten Ideen um die absolutive Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ zu untersuchen besteht darin, die Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ passend gegen eine konvergente, bzw. divergente Reihe abzuschätzen.

Lemma 11. *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und eine Reihe reeller Zahlen und* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $b_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ist* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$, *so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent. (Majorantenkriterium)*

2. *Ist* $b_n \leq |a_n|$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, *so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *nicht absolut konvergent. (Minorantenkriterium)*

Beweis.

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

also die Folge von Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt, und somit konvergent.

2. Wäre $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so würde die Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergieren, und nach dem Majorantenkriterium würde auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, im Widerspruch zu Annahme. □

Übung 5.
Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Das Majorantenkriterium führt zusammen mit der geometrischen Reihe zu zwei wichtigen Konvergenzkriterien, dem *Quotientenkriterium* und dem *Wurzelkriterium.*

4.2 Quotientenkriterium

Ein erstes wichtes Konvergenzkriterium, dass durch den Vergleich mit der harmonischen Reihe entsteht,

Proposition 12. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gebe $0 \leq y < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+1}/a_n| \leq y$ für alle $n \geq N$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| &= \sum_{k=N}^{\infty} |a_N| \prod_{j=N}^{k-1} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = |a_N| \sum_{k=N}^{\infty} \prod_{j=N}^{k-1} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \\ &\leq |a_N| \sum_{k=N}^{\infty} y^{k-N} = |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{|a_N|}{1-y},\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \frac{|a_N|}{1-y} < \infty. \qquad \square$$

Wie wir bereits wissen, sind die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums äquivalent dazu, dass $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$. Man bemerke jedoch, dass sich für den Fall $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| \geq 1$ keine Aussage über die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ treffen lässt.

Übung 6.
Geben Sie divergente, bzw. absolut konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| > 1.$$

Übung 7.
Man zeige, dass die folgenden Reihen absolut konvergieren: $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k/k!$,

4.3 Wurzelkriterium

Proposition 13. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und es gebe $y < 1$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n|^{1/n} < y$ für alle $n \geq N$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.*

Beweis. Für alle $n \geq N$ gilt $|a_n|^{1/n} < y$ und damit $|a_n| < y^n$. Daher ist

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} y^k = y^N \sum_{k=N}^{\infty} y^{k-N} = y^N \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{y^N}{1-y},$$

und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \frac{y^N}{1-y} < \infty. \qquad \square$$

4.4 Cauchysches Verdichtungskriterium

Proposition 14. *Es sei* $(a_n)_{n\geq 1}$ *eine monoton fallende Folge mit* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$ *konvergiert.*

Beweis. Wir haben

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k.$$

Da (a_n) monoton fallend ist, ist für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \leq 2^\ell a_{2^\ell}$$

sowie

$$\sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \geq 2^\ell a_{2^{\ell+1}}.$$

Konvergiert die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$, so konvergiert wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$$

dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so konvergiert wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}}$$

dann auch die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}}$, und wegen

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$$

damit auch die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$. □

4.5 Leibniz-Kriterium

Proposition 15. *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge mit* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Dann konvergiert die alternierende Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Beweis. □

5 Beispiele

5.1 Endliche Reihen

5.2 Die geometrische Reihe

5.3 Die allgemeine harmonische Reihe

5.4 Die (alternierende) harmonische Reihe

5.5 Weitere Beispiele

6 Potenzreihen

6.1 Definition

6.2 Konvergenzradius

6.3 Beispiele

7 Lösungen der Aufgaben

Lösung 1.
Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$||a| - |a_n|| \leq |a - a_n| < \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $|a_n| \to |a|$ für $n \to \infty$.

Lösung 2.
Gibt es solche y und N, so ist $\sup_{k\geq N} a_k \leq y$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq N} a_k \leq y < 1.$$

Sei andererseits $x := \limsup_{n\to\infty} a_n < C$. Da $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k$ gibt es wegen der ε-Charakterisierung des Infimums für alle $\varepsilon > 0$ ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{k\geq N'} a_k < x + \varepsilon$. Für $\varepsilon := (C - x)/2$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{k\geq N} a_k < x + \varepsilon = \frac{C + x}{2} < C.$$

Wählen wir $y := x + \varepsilon = (C + x)/2$ so ist also $y < C$ und $a_k \leq y$ für alle $k \geq N$.

Lösung 3.
Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt bekanntermaßen

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Da $\lim_{N\to\infty} q^N = 0$ folgt, dass die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{N} q^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} q^k = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Lösung 4.
Da die Folge der Partialsummen monoton steigend ist, genügt es zu zeigen, dass es für alle $R \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\sum_{k=1}^{N} 1/k \geq R$. Dies ergibt sich daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^\ell \frac{1}{2^{\ell+1}} = \frac{n}{2}.$$

Lösung 5.
Für alle $k \geq 1$ ist $\sqrt{k} \leq k$ und somit $1/\sqrt{k} \geq 1/k$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$, folgt aus dem Minorantenkriterium, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k} = \infty$.

Für alle $k \geq 1$ ist $k! \geq 2^{k-1}$, und somit $1/k! \geq 1/2^{k-1}$. Da die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k!$ konvergiert.

Für alle $k \geq 1$ ist $k! \leq k^k\ k^{-k} = 1/k^k \leq 1/k!$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k!$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ konvergiert.

Lösung 6.
Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \limsup_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n+1} = 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ divergiert ebenfalls, da $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = \limsup_{n\to\infty} 2 = 2 > 1.$$

Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n} := a_{2n+1} := 1/2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es ist also $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$. Die Reihe konvergiert aber offenbar mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n2^n} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent (mit Majorante $(1/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$). Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n/2 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

ist jedoch $\limsup_{n\to\infty} |b_{n+1}/b_n| = \infty$.

Lösung 7.
Es ist

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2^{k+1}/(k+1)!}{2^k/k!} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{k} = 0,$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k/k!$ nach dem Quotientenkriterium.