Grenzwerte von Funktionen

Jendrik Stelzner

28. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1	**Häufungspunkte**	**1**
2	**Grenzwerte von Funktionen**	**4**
3	**Grenzwerte und Stetigkeit**	**7**
4	**Links-, rechts- und beidseitige Grenzwerte**	**9**
5	**Uneigentliche Grenzwerte**	**13**
6	**Lösungen der Übungen**	**16**

1 Häufungspunkte

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ (nicht notwendigerweise stetig). Wir wollen untersuchen, wie sich f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ verhält, bzw. verhalten sollte. Um das Verhalten von f an x zu untersuchen, brauchen wir, dass f „in der Nähe“ von x definiert ist. Hierfür brauchen wir, dass x „nahe“ an A ist. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt von A*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $x \neq a$ gibt (also $0 < \|x - a\| < \varepsilon$).

Wir bezeichnen die Menge aller Häufungspunkte von A mit A'.

Übung 1.

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Der *punktierte offene ε-Ball um x* ist die Menge

$$\dot{B}_\varepsilon(x) \coloneqq B_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Für eine Umgebung V von x ist $\dot{V} \coloneqq V \setminus \{x\}$ die entsprechende *punktierte Umgebung von x*

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. x ist ein Häufungspunkt von A.
2. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a \in A$ mit $a \in \dot{B}_\varepsilon(x)$.
3. Für jede punktierte Umgebung $\dot{V}$ von x gibt es ein $a \in A$ mit $a \in \dot{V}$.

Lösung 1.
($1 \Leftrightarrow 2$) 2 ist eine direkte Umformulierung der Definition von 1.

($2 \Leftrightarrow 3$) Jeder punktierte ε-Ball um x ist auch eine punktierte Umgebung von x. Andererseits enthält jede punktierte Umgebung von x einen punktierten ε-Ball um x.

Vorstellungsmäßig ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von $A \subseteq \mathbb{R}^n$, falls sich x *von außen* durch Punkte aus A annähern lässt.

Beispiel(e).

- $x = 0$ ist ein Häufungspunkt von $A := \{1/n \mid n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$: Da $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 1$ mit $|x - 1/n| < \varepsilon$, wobei klar ist, dass $1/n \neq 0$.

- Der Punkt $x = 2$ ist *kein* Häufungspunkt der Menge $A := [0,1] \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$, denn das einzige $a \in A$ mit $|x - a| < 1/2$ ist $a = 2$.

- Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist jeder Punkt $x \in U$ ein Häufungspunkt von U: Da U offen ist gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es für $\omega := \min\{\varepsilon, \delta\}$ daher ein

$$y \in B_\omega(x) \subseteq B_\delta(x) \subseteq U \quad \text{mit } y \neq x,$$

  und es gilt $\|x - y\| < \omega \leq \varepsilon$.

- Allgemeiner ergibt sich mit dieser Argumentation, dass $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, falls V eine Umgebung von x ist. (Es genügt bereits eine punktierte Umgebung.)

Übung 2.
Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass x genau dann ein Häufungspunkt von A ist, falls es eine Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ gibt, so dass $a_n \to x$.

Lösung 2.
Angenommen, x ist ein Häufungspunkt von A. Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $|x - a_n| < 1/n$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert per Konstruktion gegen x.

Angenommen, eine solche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Inbesondere ist $a_N \in A$ mit $|x - a_N| < \varepsilon$ und $a_N \neq x$.

Übung 3.
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich. Zeigen Sie, dass $M' = \emptyset$.

Lösung 3.
Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \notin M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon := \min_{m\in M} \|x - m\| > 0,$$

dass es kein $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ gibt. Also ist x dann kein Häufungspunkt von M. Ist $x \in M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon := \begin{cases} \min_{m\in M, m\neq x} \|x - m\| & \text{falls } |M| \geq 2, \\ 1 & \text{falls } M = \{x\}, \end{cases}$$

dass x das einzige $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ ist. Also ist x auch dann kein Häufungspunkt von M.

Übung 4.
Bestimmen Sie $\mathbb{Z}'$.

Lösung 4.
Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ist $x \notin \mathbb{Z}$, so gibt es für

$$\varepsilon := \min\{\lceil x \rceil - x, x - \lfloor x \rfloor\}$$

kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < \varepsilon$. Also ist x dann kein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$. Ist andererseits $x \in \mathbb{Z}$, so gibt es außer x kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < 1/2$, weshalb x auch dann kein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$ ist.

Also ist kein $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$, und somit $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

Übung 5.
Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Ist $A \subseteq B$, so ist $A' \subseteq B'$.
2. Es ist $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Lösung 5.

1. Es sei $x \in A'$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $a \neq x$. Da $a \in A \subseteq B$ folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon$ und $b \neq x$ gibt. Also ist x ein Häufungspunkt von B, also $x \in B'$. Aus der Beliebigkeit von $x \in A'$ folgt, dass $A' \subseteq B'$.
2. Da $A \subseteq A \cup B$ ist $A' \subseteq (A \cup B)'$, und da $B \subseteq A \cup B$ ist $B' \subseteq (A \cup B)'$. Also ist auch $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

   Angenommen, es ist $x \notin A' \cup B'$. Dann gibt es $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$, so dass es kein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon_A$ und $a \neq x$ gibt, und auch kein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon_B$ und $b \neq x$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ gibt es daher kein $c \in A \cup B$ mit $\|x - c\| < \varepsilon$ und $c \neq x$. Also ist dann $x \notin (A \cup B)'$. Das zeigt, dass auch $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

Übung 6.
Bestimmen Sie A' für $A := [0, 1] \cup [2, 3]$.

Lösung 6.
Behauptung. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist*

$$[a, b]' = [a, b].$$

Beweis der Behauptung. Für $x < a$ ist $a - x > 0$. Für alle $y \in [a, b]$ ist wegen $y \geq a$ aber

$$\|x - y\| = y - x \geq a - x,$$

es gibt also kein $y \in [a, b]$ mit $\|x - y\| < a - x$. Daher ist $x \notin [a, b]'$. Analog ergibt sich, dass auch $x \notin [a, b]'$ für $x > b$. Also ist $[a, b]' \subseteq [a, b]$.

Dass $a, b \in [a, b]'$ ergibt sich durch die Folgen (x_n) auf $(a, b]$ und (y_n) auf $[a, b)$ mit

$$x_n := a + \frac{b - a}{n + 1} \quad \text{und} \quad y_n := b - \frac{b - a}{n + 1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $x \in [a,b]'$ für $a < x < b$ ergibt sich daraus, dass $[a,b]$ eine Umgebung für diese x ist. Damit ergibt sich, dass $[a,b] \subseteq [a,b]'$. $\square$

Aus der Behauptung ergibt sich direkt, dass

$$([0,1] \cup [2,3])' = [0,1]' \cup [2,3]' = [0,1] \cup [2,3].$$

2 Grenzwerte von Funktionen

Definition 2. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A. Für $y \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a) = y,$$

falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Wir nennen y dann den *Grenzwert von f an x über A*. Wir schreiben auch $f(a) \to y$ für $a \to x$ über $a \in A$

Grenzwerte von Funktionen sind eindeutig:

Lemma 3. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A. Sind $y, y' \in \mathbb{R}^m$, so dass $f(a) \to y$ und $f(a) \to y'$ für $a \to x$ über $a \in A$, so ist $y = y'$.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $f(a) \to y$ für $a \to x$ über $a \in A$ gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow \|y - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da $f(a) \to y'$ für $a \to x$ über $a \in A$ gibt es auch ein $\delta_2 > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta_2 \Rightarrow \|y' - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da x eine Häufungspunkt von A ist, gibt es für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \delta$ und $a \neq x$. Deshalb ist

$$\|y - y'\| \leq \|y - f(a)\| + \|y' - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\|y - y'\| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ ist bereits $\|y - y'\| = 0$, also $y = y'$ $\square$

Beispiel(e).

- Wir betrachten die *Signumabbildung*

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

  0 ist ein gemeinsamer Häufungspunkt von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$, und es ist

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in (-\infty,0)}} f(x) = -1, \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in (0,\infty)}} f(x) = 1.$$

- Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin\frac{1}{x}.$$

0 ist ein Häufungspunkt der beiden Mengen

$$A := \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad B := \left\{ \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

und es ist

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in A}} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in B}} f(x) = -1.$$

0 ist auch ein Häufungspunkt der Menge $(0,\infty)$, der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in (0,\infty)}} f(x)$$

existiert jedoch nicht.

Lemma 4. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ und $x \in \mathbb{R}^m$ ein Häufungspunkt von A. Für $y \in \mathbb{R}^k$ sind äquivalent:*

1. $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$.
2. *Für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \to x$ ist $f(a_n) \to y$.*

(Da x ein Häufungspunkt von A ist, existiert eine entsprechende Folge.)

Beweis. ($1 \Rightarrow 2$) Es sei (a_n) eine Folge auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \to x$. Wir wollen zeigen, dass $f(a_n) \to y$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da $a_n \to x$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x - a_n\| < \delta$ für alle $n \geq N$. Da $a_n \neq x$ ist deshalb $\|y - f(a_n)\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

($2 \Rightarrow 1$) Angenommen, es ist nicht $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $a \in A$ gibt, so dass zwar $a \neq x$ und $\|x - a\| < \delta$, aber $\|y - f(a)\| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es deshalb für alle $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $\|x - a_n\| < 1/n$ aber $\|y - f(a_n)\| \geq \varepsilon$. Dann ist (a_n) eine Folge auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \to x$, aber es gilt nicht $f(a_n) \to y$. $\square$

Aus dieser Beschreibung von Funktionsgrenzwerten durch Folgen ergeben sich direkt zwei einfache Konsequenzen: Zum einen sehen wir, dass sich Funktionsgrenzwerte auch koordinatenweise beschreiben lassen.

Lemma 5. *Es sei $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A. In Koordinaten sei $f = (f_1, \dots, f_m)$. Für $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$, falls $\lim_{a \to x, a \in A} f_i(a) = y_i$ für alle $1 \leq i \leq m$.*

Beweis. Dass $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$ ist äquivalent dazu, dass für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \to x$ auch $f(a_n) \to y$. Dies ist äquivalent dazu, dass für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ auch $f_i(a_n) \to y_i$ für alle $1 \leq i \leq m$. Dies bedeutet wiederum, dass $\lim_{a \to x, a \in A} f_i(a) = y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. $\square$

Ein weiteres Ergebnis ist, dass Funktionsgrenzwerte mit den üblichen Rechenregeln im $\mathbb{R}^n$ verträglich sind.

Proposition 6. *Es seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, f_1, f_2 \colon A \to \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A.*

1. *Existieren die Grenzwerte $\lim_{a \to x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \to x, a \in A} f_2(a)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to a, a \in A} (f_1 + f_2)(a)$ und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} (f_1 + f_2)(a) = \left(\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f_1(a) \right) + \left(\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

2. *Existiert der Grenzwert $\lim_{a \to x, a \in A} f(a)$, so existiert auch $\lim_{a \to x, a \in A} (\lambda f)(a)$, und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} (\lambda f)(a) = \lambda \lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a).$$

Im Fall $n = 1$, also für $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, gilt auch eine Verträglichkeit mit Multiplikation und Division.

3. *Existieren die Grenzwerte $\lim_{a \to x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \to x, a \in A} f_2(a)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to a, a \in A} (f_1 \cdot f_2)(a)$ und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} (f_1 \cdot f_2)(a) = \left(\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f_1(a) \right) \cdot \left(\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

4. *Existieren die beiden Grenzwerte $\lim_{a \to x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \to x, a \in A} f_2(a)$, und ist $f_2(a) \neq 0$ für alle $a \in A \setminus \{x\}$ sowie $\lim_{a \to x, a \in A} f_2(a) \neq 0$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{a \to x, a \in A} f_1(a)/f_2(a)$ und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{\lim_{a \to x, a \in A} f_1(a)}{\lim_{a \to x, a \in A} f_2(a)}$$

(Sehen wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, so ergibt sich auch eine Verträglichkeit mit der Multiplikation und Division im Komplexen; hierdrauf gehen wir hier aber nicht weiter ein.)

Wie wir bereits gesehen haben, können für eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit gemeinsamen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}^n$ die beiden Grenzwerte $\lim_{a \to x, a \in A} f(a)$ und $\lim_{b \to x, b \in B} f(b)$ existieren, aber dennoch

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a) \neq \lim_{\substack{b \to x \\ b \in B}} f(b).$$

Es kann auch passieren, dass einer der beiden Grenzwerte existiert, der andere jedoch nicht. Es gibt also im Allgemeinen keinen Zusammehang zwischen dem Grenzwert von f über A und dem Grenzwert über B. Unter bestimmten Umständen lassen sich die beiden Grenzwerte aber vergleichen:

Lemma 7. *Es seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \colon B \to \mathbb{R}^m$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein gemeinsamer Häufungspunkt von A und B, sodass der Grenzwert $\lim_{b \to x, b \in B} f(b)$ existiert, so existiert auch $\lim_{a \to x, a \in A} f(a)$, und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{b \to x \\ b \in B}} f(b).$$

Beweis. Zur besseren Lesbarkeit setzen wir $y := \lim_{b \to x, b \in B} f(b)$. Wir wollen zeigen, dass auch $\lim_{a \to x, x \in A} f(a) = y$. Es sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $y = \lim_{b \to x, b \in B} f(b)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x - b\| < \delta \Rightarrow \|y - f(b)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } b \in B \text{ mit } b \neq x.$$

Da $A \subseteq B$ ist daher insbesondere

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$. □

Korollar 8. *Es sei $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Es seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen, so dass $x \in \mathbb{R}^n$ ein gemeinsamer Häufungspunkt von A und B ist, und die beiden Grenzwerte $\lim_{a \to x, a \in A} f(a)$ und $\lim_{b \to x, b \in B} f(b)$ existieren. Ist x auch ein Häufungspunkt von $A \cap B$, so ist*

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{b \to x \\ b \in B}} f(b).$$

Beweis. Da die beiden Grenzwerte $\lim_{a \to x, a \in A} f(a)$ und $\lim_{b \to x, b \in B} f(b)$ existieren, und $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$, erhalten wir aus Lemma 7, dass auch der Grenzwert $\lim_{c \to x, c \in A \cap B} f(c)$ existiert und

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{c \to x \\ c \in A \cap B}} f(c) = \lim_{\substack{b \to x \\ b \in B}} f(b).$$ □

3 Grenzwerte und Stetigkeit

Die Definition von Funktionsgrenzwerten erinnert stark an das ε-δ-Kriterium für die Stetigkeit einer Funktion. Diese Ähnlichkeit legt die Vermutung nahe, dass sich die Stetigkeit einer Funktion durch die Betrachtung von passenden Funktionsgrenzwerten untersuchen lässt.

Lemma 9. *Es sei $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}^n$. f sei auf einer Umgebung von $x \in \mathbb{R}^n$ definiert, d.h. es gebe eine Umgebung V von x mit $V \subseteq A$. Dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Grenzwert $\lim_{a \to x, a \in V} f(a)$ existiert für eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x mit $V \subseteq A$.*
2. *Der Grenzwert $\lim_{a \to x, a \in U} f(a)$ existiert für jede Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x mit $U \subseteq A$.*

Der Grenzwert $\lim_{a \to x, a \in U} f(a)$ ist dabei unabhängig von der Wahl der Umgebung U von x mit $U \subseteq A$.

Beweis. ($2 \Rightarrow 1$) Nach Annahme existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x, so dass f auf V definiert ist, also mit $V \subseteq A$; diese Implikation ist daher klar.

($1 \Rightarrow 2$) Es sei V eine entsprechende Umgebung von x und $y := \lim_{a \to x, a \in V} f(a)$. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Umgebung von x mit $U \subseteq A$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{a \to x, a \in U} f(a)$ existiert und $\lim_{a \to x, a \in U} f(a) = y$.

Es sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $y = \lim_{a\to x, a\in V} f(a)$ gibt es $\delta_1 > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da V eine Umgebung von x ist, gibt es außerdem ein $\delta_2 > 0$ mit $B_{\delta_2}(x) \subseteq V$. Für $\delta' := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ist deshalb $B_{\delta'}(x) \subseteq V$ und

$$\|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in B_{\delta'}(x) \text{ mit } a \neq x.$$

Da auch U eine Umgebung von x ist, gibt es ein $\delta'' > 0$ mit $B_{\delta''}(x) \subseteq U$. Für $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$ ist also $B_\delta(x) \subseteq U$ mit

$$\|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in B_\delta(x) \text{ mit } a \neq x.$$

Damit erhalten wir, dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in U \text{ mit } a \neq x.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $\lim_{a\to x, a\in U} f(a) = y$. □

Definition 10. Es sei $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist f auf einer Umgebung V von $x \in \mathbb{R}^n$ definiert, also $V \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a\to x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a\to x\\ a\in V}} f(a)$$

und nennen dies den *Grenzwert von f an x*.

Die Wohldefiniertheit, also Unabhängigkeit von V, folgt aus Lemma 9.

Proposition 11. *Es sei $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}^n$ auf einer Umgebung von x definiert. Dann ist f genau dann stetig an x, wenn $\lim_{a\to x} f(a) = f(x)$.*

Beweis. Angenommen f ist stetig an x. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x mit $V \subseteq A$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{a\to x, a\in V} f(a) = f(x)$. Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da f stetig an x ist gibt es $\delta > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A.$$

Daher ist insbesondere

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in V \text{ mit } a \neq x.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{a\to x, a\in V} f(a) = f(x)$.

Angenommen, es ist $\lim_{x\to a} f(a) = f(x)$. Wir wollen zeigen, dass f stetig an x ist. Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x mit $V \subseteq A$. Da V eine Umgebung von x ist, gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $B_{\delta_1}(x) \subseteq V$. Da $\lim_{a\to x} f(a) = f(x)$ ist $\lim_{a\to x, a\in V} f(a) = f(x)$, es gibt daher ein $\delta_2 > 0$ mit

$$\|x - a\| < \delta_2 \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in V \text{ mit } a \neq x,$$

und wir können offenbar auch $a = x$ zulassen. Für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ haben wir nun $B_\delta(x) \subseteq B_{\delta_1}(x) \subseteq V$ und $\|x - a\| < \delta \leq \delta_2$ für alle $a \in B_\delta(x)$, und somit

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies die Stetigkeit von f an x. □

4 Links-, rechts- und beidseitige Grenzwerte

Wir wollen uns nun einem Sonderfall von Funktionsgrenzwerten zuwenden.

Definition 12. Es sei $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Gibt es ein $r > 0$, so dass $(x - r, x) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \to x \\ a \in (x-r,x)}} f(a),$$

und nennen dies den *linksseitigen Grenzwert von f an x*.

Gibt es ein $r > 0$, so dass $(x, x + r) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \downarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \to x \\ a \in (x,x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *rechtsseitigen Grenzwert von f an x*.

Existiert ein $r > 0$, so dass $(x - r, x) \cup (x, x + r) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \to x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \to x \\ a \in (x-r,x) \cup (x,x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *beidseitigen Grenzwert von f an x*.

Die Wohldefiniertheit der jeweiligen Ausdrücke, also die Unabhängigkeit von r, ergibt sich aus Korollar 8.

Bemerkung 13. Ist $V \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}$, und $f\colon V \to \mathbb{R}^m$, so ist die Notation $\lim_{a \to x} f(a)$ doppelt belegt: Zum einen steht die Notation für $\lim_{a \to x, a \in V} f(a)$. Zum anderen gibt es, da V eine Umgebung von x ist, ein $r > 0$ mit $(x - r, x + r) \subseteq V$; dann steht die Notation auch für $\lim_{a \to x, a \in (x-r,x) \cup (x,x+r)} f(a)$.

Die beiden Definitionen sind in diesem Fall allerdings gleichbedeutend: Per Definition ist der Grenzwertes $\lim_{a \to x, a \in (x-r,x) \cup (x,x+r)} f(a)$ gleichbedeutend zum Grenzwert $\lim_{a \to x, a \in (x-r,x+r)} f(a)$. Dieser Grenzwert ist nach Lemma 9 der gleiche wie $\lim_{a \to x, a \in V} f(a)$.

Der beidseitige Grenzwert lässt sich auch als Kombination des links- und rechtsseitigen Grenzwertes definieren:

Lemma 14. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon A \to \mathbb{R}^m$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^m$ sind äquivalent:*

1. *Der beidseitige Grenzwert $\lim_{a \to x} f(a)$ existiert und $\lim_{a \to x} f(a) = y$.*
2. *Die beiden Grenzwerte $\lim_{a \uparrow x} f(a)$ und $\lim_{a \downarrow x} f(a)$ existieren und es ist*

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = y = \lim_{a \downarrow x} f(a).$$

Beweis. (1 ⇒ 2) Da $\lim_{a \to x} f(a)$ existiert, gibt es ein $r > 0$, so dass f auf $(x - r, x) \cup (x, x + r)$ definiert ist und $\lim_{a \to x, a \in (x-r,x) \cup (x,x+r)} f(a)$ existiert. Dann ist f auf $(x - r, x)$ und auf $(x, x + r)$ definiert, und nach Lemma 7 gilt

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = \lim_{\substack{a \to x \\ a \in (x-r,x)}} f(a) = \lim_{\substack{a \to x \\ a \in (x-r,x) \cup (x,x+r)}} f(a) = \lim_{a \to x} f(a).$$

Analog ergibt sich, dass auch $\lim_{a\downarrow} f(a)$ existiert und

$$\lim_{a\downarrow x} f(a) = \lim_{a\to x} f(a)$$

(2 $\Rightarrow$ 1) Da die beiden Grenzwerte $\lim_{a\uparrow x} f(a)$ und $\lim_{a\downarrow x} f(a)$ existieren gibt es $r_-, r_+ > 0$, so dass f auf $(x - r_-, x)$ und auf $(x, x + r_+)$ definiert ist. Also ist f für $r := \min\{r_-, r_+\}$ auf $(x - r, x) \cup (x, x + r)$ definiert. Wir wollen zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{a\to x} f(a)$ existiert und $\lim_{a\to x} f(a) = y$. Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\lim_{a\uparrow x} f(a) = y$ gibt es ein $\delta_- > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta_- \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x - r_-, x),$$

und da $\lim_{a\downarrow x} f(a) = y$ gibt es ein $\delta_+ > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta_+ \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x, x + r_+).$$

Für $\delta := \min\{\delta_-, \delta_+\}$ ist daher

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x - r, x) \cup (x, x + r).$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{a\to x} f(a) = y$. □

Aus unserer Untersuchung allgemeiner Funktionsgrenzwerte ergibt sich für die Sonderfälle von links-, rechts- und beidseitigen Grenzwert die Verträglichkeit mit den üblichen Rechenregeln.

Beispiel(e).

- Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ existiert nicht: Die beiden Folgen (a_n) und (b_n) mit

  $$a_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi}$$

  konvergieren gegen 0, aber

  $$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

  und

  $$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

- Es ist $\lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$: Wir wissen bereits, dass die Abbildung

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

  stetig ist. (Stetigkeit an $x \neq 0$ ist klar, und an $x = 0$ ergibt die Stetigkeit aus dem ε-δ-Kriterium.) Daher ist

  $$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

- Für $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p, q \geq 1$ ist
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{p}{q}.$$
Das Problem besteht darin, dass $1^q - 1 = 1^p - 1 = 0$. Dieses Problem beseitigen wir dadurch, dass wir aus den Polynomen $x^p - 1$ und $x^q - 1$ den Linearfaktor $x - 1$ ausklammern. Wir erhalten so, dass für alle $x \neq 1$
$$\frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{(x-1)\sum_{k=0}^{p-1} x^k}{(x-1)\sum_{k=0}^{q-1} x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^k}{\sum_{k=0}^{q-1} x^k}.$$
Daher ist
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^k}{\sum_{k=0}^{q-1} x_k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q}.$$

- Wir wollen untersuchen, wie sich die Grenzwert von $x\sqrt{1 + 4/x^2}$ an $x = 0$ verhält — von unten, oben und beidseitig. Hierfür bemerken wir, dass für alle $x \neq 0$
$$\begin{aligned} x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} &= \operatorname{sgn}(x)|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2 + 4}. \end{aligned}$$
Daher ist
$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 0} x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} &= \lim_{x \uparrow 0} \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2 + 4} = \lim_{x \uparrow 0} -1 \cdot \sqrt{x^2 + 4} \\ &= -\lim_{x \uparrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = -2. \end{aligned}$$
Analog ergibt sich, dass
$$\lim_{x \downarrow 0} x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 2.$$
Damit kennen wir das Verhalten von Grenzwert von oben und von unten. Der beidseitige Grenzwert existiert nicht, da oberer und unterer Grenzwert verschieden sind.

- Wir wollen den Grenzwert
$$\lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|}$$
untersuchen. Hierfür bemerken wir, dass für alle $x \neq 2$
$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|} &= \frac{(x-2)(x-12)}{|x-2| + |x-2||x+2|} \\ &= \frac{(x-2)(x-12)}{\operatorname{sgn}(x-2)(x-2) + \operatorname{sgn}(x-2)(x-2)|x+2|} \\ &= \frac{x-12}{\operatorname{sgn}(x-2) + \operatorname{sgn}(x-2)|x+2|} \\ &= \operatorname{sgn}(x-2)\frac{x-12}{1 + |x+2|}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\uparrow 2}\frac{x^2-14x+24}{|x-2|+|x^2-4|}=\lim_{x\uparrow 2}\operatorname{sgn}(x-2)\frac{x-12}{1+|x+2|}\\
&=\lim_{x\uparrow 2}-1\cdot\frac{x-12}{1+|x+2|}=-\lim_{x\uparrow 2}\frac{x-12}{1+|x+2|}=-\frac{2-12}{1+|2+2|}=2.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich, dass auch

$$\lim_{x\downarrow 2}\frac{x^2-14x+24}{|x-2|+|x^2-4|}=-2.$$

Übung 7.
Zeigen Sie, dass für eine monoton steigende Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an jeder Stelle $x\in\mathbb{R}$ sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Genzwert existiert, und dass

$$\lim_{y\uparrow x} f(y)=\sup\{f(y)\mid y<x\}\quad\text{und}\quad\lim_{y\downarrow x} f(y)=\inf\{f(y)\mid y>x\}.$$

Wie sieht es für eine monoton fallende Funktion aus?

Lösung 7.
Es sei f monoton steigend und $x\in\mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass $a:=\sup_{y<x} f(y)$ die Eigenschaften des linksseitigen Limes erfüllt. Sei hierfür $\varepsilon>0$ beliebig aber fest. Nach der ε-Charakterisierung des Supremums gibt es ein $y_0<x$ mit $a-\varepsilon<f(y_0)$. Aus der Monotonie von f folgt, dass

$$a-\varepsilon<f(y_0)\le f(y)\le\sup_{y'<x} f(y')=a\quad\text{für alle } y_0\le y<x.$$

Für $\delta:=x-y_0>0$ ist also $|f(y)-a|<\varepsilon$ für alle $y\in(x-\delta,x)$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon>0$ zeigt dies, dass $\lim_{y\uparrow x} f(y)=a$.

Analog zeigt man, dass $\lim_{y\downarrow x} f(y)=\inf_{x<y} f(x)$. Für monoton fallende Funktionen zeigt man analog, dass obere und untere Grenzwerte an jeder Stelle existieren, und dass für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{y\uparrow x} f(y)=\inf_{y<x} f(y)\quad\text{und}\quad\lim_{y\downarrow x} f(y)=\sup_{y>x} f(y).$$

Zusammen mit Proposition 11 ergibt sich damit die aus der Vorlesung bekannte Charakterisierung der Stetigkeit einer monotonen Funktion:

Korollar 15. *Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton steigend. Dann ist f genau dann stetig an der Stelle $x\in\mathbb{R}$, wenn*

$$\sup_{y<x} f(y)=f(x)=\inf_{y>x} f(y).$$

Ist f monoton fallend, so ist f genau dann stetig an x, wenn

$$\inf_{y<x} f(y)=f(x)=\sup_{y>x} f(y).$$

Beweis. f ist genau dann stetig an x, wenn $\lim_{y\to x} f(y)=f(x)$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\lim_{y\uparrow x} f(y)$ und $\lim_{y\downarrow x} f(y)$ existieren und

$$\lim_{y\uparrow x} f(y)=f(x)=\lim_{y\downarrow x} f(y). \tag{1}$$

Da f monoton steigend ist existieren die Grenzwerte $\lim_{y\uparrow x} f(y)$ und $\lim_{y\downarrow x} f(y)$ und es gilt

$$\lim_{y\uparrow x} f(y) = \sup_{y<x} f(y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\downarrow x} f(y) = \inf_{y>x} f(y).$$

Also übersetzt sich Bedingung (1) in

$$\sup_{y<x} f(y) = f(x) = \inf_{y>x} f(y).$$

Die zweite Aussage ergibt sich analog. □

5 Uneigentliche Grenzwerte

Sie wie bei Folgen kann man auch bei Funktionen uneigentliche Grenzwerte definieren.

Definition 16. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A. Wir schreiben dass $\lim_{a\to x, a\in A} f(a) = \infty$, falls es für alle $R > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|x-a\| < \delta \Rightarrow f(a) \geq R \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Analog definieren wir $\lim_{a\to x, a\in A} f(a) = -\infty$.

Beispiel(e).

- Es ist
$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$
Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} 1/x$ exstiert nicht (auch nicht uneigentlich).
- 0 ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und wir haben
$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{1}{\|x\|} = \infty.$$
- Es ist
$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{\exp(x)-1} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{\exp(x)-1} = -\infty.$$

Definition 17. Es sei $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit Definitionsbereits $X \subseteq \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}^m$ sagen wir, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = y$, falls

1. es gibt $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ für alle $x \geq r_0$ definiert ist, und
2. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $r \geq r_0$, so dass $\|f(x) - y\| < \varepsilon$ für alle $x \geq r$.

Analog definiert man die Schreibweise $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y$.

Beispiel(e).

- Es ist
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$
- Es ist
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Definition 18. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$. Wir schreiben, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, falls

1. es gibt $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ für alle $x \geq r_0$ definiert ist, und
2. für alle $R > 0$ ein $r > r_0$, so dass $f(x) > R$ für alle $x \geq r$.

Analog definiert man die Ausdrücke $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Beispiel(e).

- Es ist
$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty.$$
- Es ist
$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty.$$

Beispiel(e). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{(x-a)(x-b)} - x$$

untersuchen. Hierfür bemerken wir zunächst, dass $(x-a)(x-b) \geq 0$ für alle $x \geq \max\{a,b\}$ü; der Ausdruck $\sqrt{(x-a)(x-b)}$ ist also für alle $x \geq \max\{a,b\}$ definiert. Zur Bestimmung des Grenzwerts wollen wir den Ausdruck $\sqrt{(x-a)(x-b)} - x$ zunächst umschreiben; für alle $x > \max\{a,b,0\}$ haben wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-a)(x-b)} - x &= \frac{(\sqrt{(x-a)(x-b)} - x)(\sqrt{(x-a)(x-b)} + x)}{\sqrt{(x-a)(x-b)} + x} \\
&= \frac{(x-a)(x-b) - x^2}{\sqrt{(x-a)(x-b)} + x} = \frac{(a+b)x + ab}{\sqrt{x^2 + (a+b)x + ab} + x} \\
&= \frac{a + b + \frac{ab}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}} + 1}
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{(x-a)(x-b)} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{a + b + \frac{ab}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}} + 1} = \frac{a+b}{2}.$$

Auch für uneigentliche Grenzwerte gelten (intuitive) Rechenregeln, von denen wir hier einige angeben wollen:

1. Für $y \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = y$, wenn $\lim_{x\downarrow 0} f(1/x) = y$. Die Aussage gilt für eine reellwertige Funktion auch für $y \in \{-\infty, \infty\}$.
2. Wenn $\lim_{x\to a, a\in A} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to a, a\in A} f(x) = -\infty$, dann ist
$$\lim_{x\to a, a\in A} 1/f(x) = 0.$$
3. Ist $\lim_{x\to a, a\in A} f(x) = \infty$, so ist $\lim_{x\to a, a\in A} -f(x) = -\infty$. Analoges gilt für $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Auch uneigentliche Grenzwerte lassen sich durch Folgen ausdrücken.

1. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ und $x \in A$ ein Häufungspunkt von A, so ist genau dann $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = \infty$, falls für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \to x$ auch $f(a_n) \to \infty$. Eine analoge Aussage gilt für $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = -\infty$.

2. Für $y \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$, wenn für jede Folge (x_n) auf $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$ auch $f(x_n) \to y$. Eine analoge Aussage gilt für $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Ist f eine reellwertige Funktion, soo gilt die Aussage auch für $y \in \{-\infty, \infty\}$.

6 Lösungen der Übungen

Lösung 1.

($1 \Leftrightarrow 2$) 2 ist eine direkte Umformulierung der Definition von 1.

($2 \Leftrightarrow 3$) Jeder punktierte ε-Ball um x ist auch eine punktierte Umgebung von x. Andererseits enthält jede punktierte Umgebung von x einen punktierten ε-Ball um x.

Lösung 2.

Angenommen, x ist ein Häufungspunkt von A. Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $|x - a_n| < 1/n$. Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergiert per Konstruktion gegen x.

Angenommen, eine solche Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Inbesondere ist $a_N \in A$ mit $|x - a_N| < \varepsilon$ und $a_N \neq x$.

Lösung 3.

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \notin M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon \coloneqq \min_{m \in M} \|x - m\| > 0,$$

dass es kein $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ gibt. Also ist x dann kein Häufungspunkt von M. Ist $x \in M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon \coloneqq \begin{cases} \min_{m \in M, m \neq x} \|x - m\| & \text{falls } |M| \geq 2, \\ 1 & \text{falls } M = \{x\}, \end{cases}$$

dass x das einzige $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ ist. Also ist x auch dann kein Häufungspunkt von M.

Lösung 4.

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ist $x \notin \mathbb{Z}$, so gibt es für

$$\varepsilon \coloneqq \min\{\lceil x \rceil - x, x - \lfloor x \rfloor\}$$

kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < \varepsilon$. Also ist x dann kein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$. Ist andererseits $x \in \mathbb{Z}$, so gibt es außer x kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < 1/2$, weshalb x auch dann kein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$ ist.

Also ist kein $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$, und somit $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

Lösung 5.

1. Es sei $x \in A'$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $a \neq x$. Da $a \in A \subseteq B$ folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon$ und $b \neq x$ gibt. Also ist x ein Häufungspunkt von B, also $x \in B'$. Aus der Beliebigkeit von $x \in A'$ folgt, dass $A' \subseteq B'$.

2. Da $A \subseteq A \cup B$ ist $A' \subseteq (A \cup B)'$, und da $B \subseteq A \cup B$ ist $B' \subseteq (A \cup B)'$. Also ist auch $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

   Angenommen, es ist $x \notin A' \cup B'$. Dann gibt es $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$, so dass es kein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon_A$ und $a \neq x$ gibt, und auch kein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon_B$ und $b \neq x$. Für $\varepsilon \coloneqq \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ gibt es daher kein $c \in A \cup B$ mit $\|x - c\| < \varepsilon$ und $c \neq x$. Also ist dann $x \notin (A \cup B)'$. Das zeigt, dass auch $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

Lösung 6.

Behauptung. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist*

$$[a, b]' = [a, b].$$

Beweis der Behauptung. Für $x < a$ ist $a - x > 0$. Für alle $y \in [a, b]$ ist wegen $y \geq a$ aber

$$\|x - y\| = y - x \geq a - x,$$

es gibt also kein $y \in [a, b]$ mit $\|x - y\| < a - x$. Daher ist $x \notin [a, b]'$. Analog ergibt sich, dass auch $x \notin [a, b]'$ für $x > b$. Also ist $[a, b]' \subseteq [a, b]$.

Dass $a, b \in [a, b]'$ ergibt sich durch die Folgen (x_n) auf $(a, b]$ und (y_n) auf $[a, b)$ mit

$$x_n \coloneqq a + \frac{b - a}{n + 1} \quad \text{und} \quad y_n \coloneqq b - \frac{b - a}{n + 1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $x \in [a, b]'$ für $a < x < b$ ergibt sich daraus, dass $[a, b]$ eine Umgebung für diese x ist. Damit ergibt sich, dass $[a, b] \subseteq [a, b]'$. □

Aus der Behauptung ergibt sich direkt, dass

$$([0, 1] \cup [2, 3])' = [0, 1]' \cup [2, 3]' = [0, 1] \cup [2, 3].$$

Lösung 7.

Es sei f monoton steigend und $x \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass $a \coloneqq \sup_{y<x} f(y)$ die Eigenschaften des linksseitigen Limes erfüllt. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Nach der ε-Charakterisierung des Supremums gibt es ein $y_0 < x$ mit $a - \varepsilon < f(y_0)$. Aus der Monotonie von f folgt, dass

$$a - \varepsilon < f(y_0) \leq f(y) \leq \sup_{y'<x} f(y') = a \quad \text{für alle } y_0 \leq y < x.$$

Für $\delta \coloneqq x - y_0 > 0$ ist also $|f(y) - a| < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x)$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $\lim_{y \uparrow x} f(y) = a$.

Analog zeigt man, dass $\lim_{y \downarrow x} f(y) = \inf_{x<y} f(x)$. Für monoton fallende Funktionen zeigt man analog, dass obere und untere Grenzwerte an jeder Stelle existieren, und dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{y \uparrow x} f(y) = \inf_{y<x} f(y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \downarrow x} f(y) = \sup_{y>x} f(y).$$