Der Banachsche Fixpunktsatz

Jendrik Stelzner

24. Dezember 2014

Wir wollen hier (als Übung für den Leser) den Banachschen Fixpunktsatz für $\mathbb{R}^n$ formulieren und beweisen.

Definition 1. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *Kontraktion*, falls es eine Konstante $0 < L < 1$ gibt, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Übung 1.
Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion ist.

$$\begin{aligned} f &: x \mapsto \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \\ g &: x \mapsto x^2 \\ h &: x \mapsto |x|^{1/2} \end{aligned}$$

Übung 2.
Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gebe es eine Konstante $L > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Man bezeichnet eine solche Abbildung als Lipschitz-stetig (mit Konstante L). Folgern Sie, dass Kontraktionen stetig sind.

Theorem 2 (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine Kontraktion. Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt, d.h. es existiert genau ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $T(\xi) = \xi$. Außerdem gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \xi$. (Hier bezeichnet T^n die n-fache Hintereinanderschaltung von T mit sich selbst.)*

Der Beweis des Satzes lässt sich in kleinere Zwischenschritte aufteilen:

Übung 3.
Es sei $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine Kontraktion.

1. Zeigen Sie die Eindeutigkeit des Fixpunktes von T. (Wir setzen hier noch keine Existenz voraus.)
2. Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x \in \mathbb{R}^m$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := T^n(x)$ konvergiert. (*Hinweis*: Zeigen Sie, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt.)

3. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ der Grenzwert $\xi := \lim_{n\to\infty} T^n(x)$ ein Fixpunkt von T ist.

Bemerkung 3. Der Banachsche Fixpunktsatz gilt allgemeiner für alle vollständige metrische Räume. Der Beweis hierfür läuft analog.

Lösung 1.
f ist eine Kontraktion, da für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y) = \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right| = \frac{1}{4}|x - y|$$

mit $1/4 < L$. g ist keine Kontraktion, denn

$$|g(2) - g(1)| = |2^2 - 1^2| = 3 > 1 = |2 - 1|.$$

h ist keine Kontrakiton. Ansonsten gebe es $0 \leq L < 1$ mit $|h(x) - h(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Insbesondere wäre dann für alle $n \geq 1$

$$\frac{1}{n^{1/2}} = \left|h\left(\frac{1}{n}\right) - h(0)\right| \leq L\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{L}{n}$$

und somit $n^{1/2} \leq L$.

Lösung 2.
f erfüllt an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ das ε-δ-Kriterium, denn für beliebiges $\varepsilon > 0$ ergibt sich für $\delta := \varepsilon/L$, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \delta$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Also ist f stetig. Kontraktionen sind per Definition Lipschitz-stetige Abbildung mit Konstante $L < 1$ und somit stetig.

Lösung 3.
Es sei $0 < L < 1$, so dass $\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$.

1. Es seien $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^m$ zwei Fixpunkte von T. Dann ist

   $$\|\xi - \zeta\| = \|T(\xi) - T(\zeta)\| \leq L\|\xi - \zeta\|.$$

   Da $L \neq 1$ folgt, dass $|\xi - \zeta| = 0$ und somit $\xi = \zeta$.

2. Für alle $n \geq 1$ ist

   $$\|x_{n+1} - x_n\| = \|T(x_n) - T(x_{n-1})\| \leq L\|x_n - x_{n-1}\|.$$

   Für $M := \|x_1 - x_0\|$ ergibt sich damit induktiv, dass

   $$\|x_{n+1} - x_n\| \leq L^n\|x_1 - x_0\| = ML^n.$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $N' \in \mathbb{N}$ und $m, m' \geq N$, wobei o.B.d.A. $m \geq m'$, ist daher

   $$\begin{aligned}\|x_m - x_{m'}\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \cdots + \|x_{m'+1} - x_{m'}\| \\ &\leq ML^{m-1} + \cdots + ML^{m'} = ML^{m'}\sum_{k=0}^{m-1-m'} L^k \\ &\leq ML^{N'}\sum_{k=0}^{\infty} L^k = \frac{M}{1-L}L^{N'}.\end{aligned}$$

   Da $\lim_{N'\to\infty} M/(1-L)L^{N'} = 0$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $M/(1-L)L^N < \varepsilon$, und damit insbesondere $\|x_m - x_{m'}\| < \varepsilon$ für alle $m, m' \geq N$. Dies zeigt, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

3. T ist eine Kontraktion, und damit insbesondere stetig. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir unter Verwendung der Folgenstetigkeit für $\xi := \lim_{n\to\infty} T^n(x)$, dass

$$T(\xi) = T\left(\lim_{n\to\infty} T^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = \xi.$$