# Definitionen von Stetigkeit

Jendrik Stelzner

9. Dezember 2014

Im Folgenden wollen wir die unterschiedlichen Definitionen der Stetigkeit einer Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angebeben und ihre Äquivalenz beweisen.

**Definition 1.** Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *$\varepsilon$-$\delta$-stetig im Punkt* $x \in \mathbb{R}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung $f$ heißt *$\varepsilon$-$\delta$-stetig*, falls $f$ $\varepsilon$-$\delta$-stetig an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ ist.

**Beispiel(e).** Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{aligned} \left|x^2 - y^2\right| &= |(x+y)(x-y)| = |x+y||x-y| \leq (|x| + |y|)|x-y| \\ &\leq (|x| + |x| + |x-y|)|x-y| = 2|x||x-y| + |x-y|^2, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir die Dreiecksungleichung für $|x+y| \leq |x| + |y|$ und $|y| = |x| + |x-y|$ nutzen. Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen:

Ist $x = 0$, so ist $|x^2 - y^2| = |y|^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wählt man dann $\delta \coloneqq \sqrt{\varepsilon}$, so ist für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| = |x-y| < \delta$ auch $|x^2 - y^2| = |y|^2 < \varepsilon$.

Ist $x \neq 0$, so ergibt sich für $\delta \coloneqq \min\{\varepsilon/(4|x|), \sqrt{\varepsilon/2}\}$ aus (1), dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$

$$\left|x^2 - y^2\right| \leq 2|x||x-y| + |x-y|^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das zeigt, dass $f$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist

**Übung 1.**
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\varepsilon$-$\delta$-stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f(x) > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(y) > 0$ für alle $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Gilt die Aussage auch für $f(x) < 0$ oder $f(x) \neq 0$?

**Übung 2.**
Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f$ $\varepsilon$-$\delta$-stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ und $g$ $\varepsilon$-$\delta$-stetig an der Stelle $f(x)$, so ist die Komposition $g \circ f$ $\varepsilon$-$\delta$-stetig an der Stelle $x$.

**Definition 2.** Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *folgenstetig an* $x \in \mathbb{R}$, falls für jedes Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

$f$ heißt *folgenstetig*, falls $f$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ folgenstetig ist.

**Beispiel(e).** Wir betrachten erneut die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so folgt aus den bekannten Eigenschaften konvergenter Folgen, dass auch die Folge $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = x \cdot x = x^2.$$

Das zeigt, dass $f$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ folgenstetig ist.

**Übung 3.**
Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beide folgenstetig an der Stelle $x \in R$. Zeigen Sie, dass auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ folgenstetig an der Stelle $x$ sind.

**Definition 3.** Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}$ schreiben wir $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = y$, falls

für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, s.d. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x_0 - \delta < x < x_0$,

und bezeichnen $y$ dann als den *linksseitigen Limes von $f$ an $x_0$*. Analog schreiben wir $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = f(y)$, falls

für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, s.d. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Wir nennen $y$ dann denn *rechtsseitigen Limes von $f$ an $x_0$*. Existieren links- und rechtsseitiger Limes von $f$ an $x_0$ und ist $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$, so nennen wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) := \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$$

den *beidseitgen Limes von $f$ an $x_0$*.

**Definition 4.** Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *linksstetig an der Stelle* $x \in \mathbb{R}$, falls $\lim_{y\uparrow x} f(y) = f(x)$. $f$ heißt *rechtsstetig an der Stelle* $x$, falls $\lim_{y\downarrow x} f(y) = f(x)$. $f$ heißt *beidseitig stetig an* $x$, falls $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. (Insbesondere müssen die entsprechenden Grenzwerte existieren.)

$f$ heißt *linksstetig*, falls $f$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ linksstetig ist, und *rechtsstetig*, falls $f$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ rechtsstetig ist. Ist $f$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ beidseitig stetig, so heißt $f$ *beidseitig stetig*.

**Bemerkung 5.** Rechts-, Links- und beidseitige Limites sind eindeutig (sofern sie existieren).

**Übung 4.**
Zeigen Sie, dass $f$ genau dann beidseitig stetig ist, wenn $f$ links- und rechtsstetig ist.

**Übung 5.**
Zeigen Sie, dass für eine monoton steigende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Limes exitieren, und dass

$$\lim_{y\uparrow x} f(y) = \sup\{f(y) \mid y < x\} \quad \text{und} \quad \lim_{y\downarrow x} f(y) = \inf\{f(y) \mid y > x\}.$$

**Übung 6.**
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$ genau dann, wenn

für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - y| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$ und $x \neq x_0$.

**Proposition 6.** *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

1. *$f$ ist $\varepsilon$-$\delta$-stetig an der Stelle $x$.*
2. *$f$ ist folgenstetig an der Stelle $x$.*
3. *$f$ ist beidseitig stetig an der Stelle $x$.*

*Beweis.* ($1 \Rightarrow 2$) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $f$ $\varepsilon$-$\delta$-stetig an $x$ ist, gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \delta$. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|x - x_n| < \delta$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ ist also $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Das zeigt, dass $f$ folgenstetig an $x$ ist.

($2 \Rightarrow 1$) Angenommen, $f$ ist nicht $\varepsilon$-$\delta$-stetig an $x$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass es für jedes $\delta > 0$ ein $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ gibt. Insbesondere gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_n| < 1/n$ und $|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Es ist dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ aber nicht $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Dies steht im Widerspruch zur Folgenstetigkeit von $f$ an $x$.

($1 \Rightarrow 3$) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $f$ $\varepsilon$-$\delta$-stetig an $x$ ist, gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$. Inbesondere ist $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x)$ und für alle $y \in (x, x + \delta)$. Also ist $f$ sowohl rechts- als auch linksstetig an $x$, und somit beidseitig stetig an $x$.

($3 \Rightarrow 1$) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $f$ beidseitig stetig an $x$ ist, existiert der beidseitige Limes $\lim_{y\to x} f(y)$ und es ist $f(x) = \lim_{y\to x} f(y)$. Nach Übung 6 gibt daher $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ und $x \neq y$; für $x = y$ gilt dies offenbar ebenfalls. Also ist $f$ $\varepsilon$-$\delta$-stetig an $x$. $\square$