

Grenzwerte und Konvergenz

Jendrik Stelzner

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitungen	1
2	Grenzwerte	3
2.1	Konvergenz und Ordnung	4
2.2	Konvergenz und Rechenoperationen	5

1 Vorbereitungen

Definition 1. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a \leq s$ für alle $a \in A$; s heißt dann eine obere Schranke von A . A heißt *nach oben unbeschränkt*, falls A nicht nach oben beschränkt ist.

A heißt *nach unten beschränkt*, falls es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $t \leq a$ für alle $a \in A$; t heißt dann untere Schranke von A . A heißt *nach unten unbeschränkt*, falls A nicht nach unten beschränkt ist.

A heißt *beschränkt*, falls A sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Beispiel(e). 1. $N \subseteq \mathbb{R}$ ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.

2. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ist nach unten und oben unbeschränkt.

3. Das Einheitsintervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.

4. Jede endliche Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.

5. Ist $B \subseteq \mathbb{R}$ nach unten, bzw. oben beschränkt, so ist $A \subseteq \mathbb{R}$ ebenfalls nach unten, bzw. oben beschränkt. Ist B nach unten, bzw. oben unbeschränkt, so ist auch A nach unten, bzw. oben unbeschränkt.

6. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann nach unten, bzw. oben beschränkt, falls die Teilmenge

$$-A = \{-a \mid a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$

nach oben, bzw. unten beschränkt ist.

Bemerkung 2. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, falls es ein $R > 0$ gibt, so dass $|a| \leq R$ für alle $a \in A$.

Beweis. Gibt es ein solches R , so ist $-R \leq a \leq R$ für alle $a \in A$ und somit ist A sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, also beschränkt.

Ist A beschränkt, so gibt $s, t \in \mathbb{R}$, so dass $t \leq a \leq s$ für alle $a \in A$. Für $R := \max\{|s|, |t|\}$ ist dann $|a| \leq R$ für alle $a \in A$. \square

Definition 3. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $s \in \mathbb{R}$. s heißt *Supremum* von A , falls s eine kleinste obere Schranke von A ist, d.h. falls

1. s ist eine obere Schranke von A , und
2. für jede obere Schranke t von A ist $s \leq t$.

s heißt *Infimum* von A , falls s eine größte untere Schranke von A ist, d.h. falls

1. s ist eine untere Schranke von A , und
2. für jede untere Schranke t von A ist $t \leq s$.

Bemerkung 4. Existiert ein Supremum, bzw. Infimum einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$, so ist dieses eindeutig, d.h. sind $s, t \in \mathbb{R}$ Suprema, bzw. Infima von A , so ist $s = t$. Falls das Supremum von A existiert, so schreiben wir hierfür $\sup A$. Für das Infimum schreiben wir $\inf A$, sofern dieses existiert.

Beweis. Es seien s und t Suprema von A . Da s ein Supremum von A und t eine obere Schranke von A ist, ist $s \leq t$. Durch Vertauschen der Rollen ergibt sich, dass auch $t \leq s$. Daher ist $s = t$.

Sind s und t Infima von A , so ergibt sich $s = t$ analog. □

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so besitzt A keine obere Schranke und somit auch kein Supremum. Wie sich herausstellt, ist diese Bedingung für Teilmengen von \mathbb{R} schon hinreichend:

Proposition 5. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1. Ist A nach oben beschränkt, so existiert $\sup A$.
2. Ist A nach unten beschränkt, so existiert $\inf A$.

Wir wollen diese Proposition hier nicht beweisen, da der Beweis von der konkreten Konstruktion der reellen Zahlen abhängt.

Lemma 6 (Charakterisierung von \sup und \inf). Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Teilmenge.

1. Für eine obere Schranke s von A ist $s = \sup A$ genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $s - \varepsilon < a \leq s$ gibt.
2. Für eine untere Schranke s von A ist $s = \inf A$ genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $s \leq a < s + \varepsilon$ gibt.

Beweis. 1. Angenommen es ist $s = \sup A$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da s die kleinste obere Schranke von A ist, ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von A . Es gibt also $a \in A$ mit $s - \varepsilon < a$. Da s eine obere Schranke von A ist, ist auch $a \leq s$. Zusammen ist daher $s - \varepsilon < a \leq s$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt die Implikation.

Angenommen es ist $s \neq \sup A$. Dann gibt es eine kleinere obere Schranke $t < s$ von A . Für $\varepsilon := (s - t)/2 > 0$ ist dann für alle $a \in A$

$$a \leq t < t + \varepsilon = s - \varepsilon.$$

Es gibt dann kein $a \in A$ mit $s - \varepsilon < a \leq s$.

2. Der Beweis läuft analog zum vorherigen. □

2 Grenzwerte

Im Folgenden handelt es sich, sofern nicht anders angegeben, bei allen Folgen um Folgen auf \mathbb{R} .

Definition 7. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, bzw. nach unten beschränkt, bzw. beschränkt, falls die Punktmenge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt, bzw. nach unten beschränkt, bzw. beschränkt ist.

Definition 8. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf \mathbb{R} und $x \in \mathbb{R}$. (x_n) konvergiert gegen x , falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, bzw. $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$.

Wir sagen, dass die Folge (x_n) konvergent ist, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. x heißt dann der Grenzwert der Folge (x_n) .

Proposition 9. Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig, d.h. ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und sind $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x_n \rightarrow x$ und $x_n \rightarrow x'$ für $n \rightarrow \infty$, so ist $x = x'$.

Beweis. Angenommen es ist $x \neq x'$. Dann ist $\varepsilon := |x - x'| > 0$. Da $x_n \rightarrow x$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_1$. Da $x_n \rightarrow x'$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x'| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_2$. Für $N := \max\{n_1, n_2\}$ ist dann für alle $n \geq N$ sowohl $|x_n - x| < \varepsilon/3$ als auch $|x_n - x'| < \varepsilon/3$. Daher ist nach der Dreiecksungleichung

$$|x - x'| = |(x_n - x') - (x_n - x)| \leq |x_n - x'| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

im Widerspruch zu $\varepsilon = |x - x'| > 0$. □

Beispiel(e). 1. Wir haben $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Nach Archimedes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ mit $N > 1/\varepsilon$. Für alle $n \geq N$ ist dann $\varepsilon > 1/n$ und damit

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.,$$

also $|0 - 1/n| < \varepsilon$. Dass $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ folgt daher aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$.

2. Die konstante Folge $(c)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen c .

3. Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$. Zum Beweis hiervon sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$ und $N \geq 1 + 2/\varepsilon^2$. Für alle $n \geq N$ ist dann $(n-1)\varepsilon^2/2 \geq 1$ und somit

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 + \dots \\ &> 1 + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 = 1 + n \frac{(n-1)\varepsilon^2}{2} \geq 1 + n > n. \end{aligned}$$

Daher ist für alle $n \geq N$

$$1 \leq n^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

und somit $|1 - n^{1/n}| < \varepsilon$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $n^{1/n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.

2.1 Konvergenz und Ordnung

Lemma 10. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann ist (x_n) beschränkt, d.h. es gibt $R > 0$, so dass $|x_n| < R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Da $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < 1$ für alle $n \geq N$. Es ist dann nach der Dreiecksungleichung für alle $n \geq N$

$$|x_n| = |x + x_n - x| \leq |x| + |x_n - x| < |x| + 1.$$

Für

$$R := \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|, |x| + 1\}$$

ist daher $|x_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Lemma 11. Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Beweis. Es sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Angenommen, es ist $b < a$. Dann ist $\varepsilon := |a - b| = a - b > 0$. Da $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_1$. Da $b_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_2$. Für $N = \max\{n_1, n_2\}$ ist dann

$$b_N < b + \frac{\varepsilon}{3} < b + \frac{2\varepsilon}{3} = a - \frac{\varepsilon}{3} < a_N,$$

im Widerspruch zu $a_n \leq b_n$. □

Lemma 12 (Sandwich-Lemma). Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergieren die beiden äußeren Folgen (a_n) und (c_n) und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, so konvergiert auch (b_n) und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Beweis. Wir setzen $x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $a_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. Da $c_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$. Für $N := \max\{n_1, n_2\}$ ist daher für alle $n \geq N$

$$x - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < x + \varepsilon,$$

also $|x - b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$. □

Proposition 13 (Bolzano-Weierstraß). Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte monotone Folge. Dann konvergiert (x_n) .

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass (x_n) monoton steigend ist. Da (x_n) nach oben beschränkt ist existiert $x := \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Wir wollen zeigen, dass $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Aus der Charakterisierung des Supremums wissen wir, dass es $N \in \mathbb{N}$ mit $x - \varepsilon < x_N \leq x$. Wegen der Monotonie von (x_n) erhalten wir, dass $x - \varepsilon < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und dass $x_n \leq x$ für alle $n \geq N$ folgt direkt aus der Definition von x . Es ist also

$$x - \varepsilon < x_n \leq x \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und somit insbesondere $|x - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Der Fall, dass (x_n) monoton fallend ist, läuft analog. □

2.2 Konvergenz und Rechenoperationen

Proposition 14. Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

1. Die Folge $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ebenfalls konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

2. Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(ca_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

3. Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ebenfalls konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

4. Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$, so konvergiert auch die Folge $(1/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

5. Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist auch $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Beweis. 1. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_1$. Da $b_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_2$. Für $N := \max\{n_1, n_2\}$ ist dann für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned} |(a + b) - (a_n + b_n)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \\ &\leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

2. Für $c = 0$ ist die Aussage klar. Ansonsten sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon/|c|$ für alle $n \geq N$. Es ist dann für alle $n \geq N$

$$|ca - ca_n| = |c||a - a_n| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca$.

3. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da (a_n) konvergiert, ist (a_n) insbesondere beschränkt. Es gibt also ein $c > 0$ mit $|a_n| < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir bemerken zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |ab - a_n b_n| &= |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \\ &\leq |ab - a_n b| + |a_n b - a_n b_n| \\ &= |a - a_n||b| + |a_n||b - b_n| \\ &\leq |b||a - a_n| + c|b - b_n|. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen: Ist $b = 0$, so ist nach (1)

$$|ab - a_nb_n| \leq c|b - b_n|$$

Da $b_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \varepsilon/c$ für alle $n \geq N$. Es ist daher für alle $n \geq N$

$$|ab - a_nb_n| \leq c|b - b_n| < c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Ist andererseits $b \neq 0$, und somit auch $|b| \neq 0$, so gibt es wegen $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon/(2|b|)$ für $n \geq n_1$, und wegen $b_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \varepsilon/(2c)$ für alle $n \geq n_2$. Für $N := \max\{n_1, n_2\}$ ist dann für alle $n \geq N$

$$|ab - a_nb_n| \leq |b||a - a_n| + c|b - b_n| < |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} + c \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon.$$

In beiden Fällen folgt aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$, dass (a_nb_n) konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

4.

□