

# Grenzwerte von Funktionen

Jendrik Stelzner

26. Dezember 2014

## Inhaltsverzeichnis

1	Häufungspunkte	1
2	Grenzwerte von Funktionen	2
3	Links-, rechts- und beidseitige Grenzwerte	5
4	Grenzwerte und Stetigkeit	9
5	Uneigentliche Grenzwerte	10
6	Lösungen der Übungen	13

## 1 Häufungspunkte

Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Wir wollen untersuchen, wie sich  $f$  an einer Stelle  $x \in \mathbb{R}^n$  verhält, bzw. verhalten sollte. Um das Verhalten von  $f$  an  $x$  zu untersuchen, brauchen wir, dass  $f$  „in der Nähe“ von  $x$  definiert ist. Hierfür brauchen wir, dass  $x$  „nahe“ an  $A$  ist. Dies motiviert die folgende Definition:

**Definition 1.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt *Häufungspunkt* von  $A$ , falls es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $a \in A$  mit  $\|x - a\| < \varepsilon$  und  $x \neq a$  gibt.

Wir bezeichnen die Menge aller Häufungspunkte von  $A$  mit  $A'$ .

### Übung 1.

Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Der *punktierte offene  $\varepsilon$ -Ball* um  $x$  ist die Menge

$$\dot{B}_\varepsilon(x) := B_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|y - x\| < \varepsilon\}.$$

Eine *punktierte Umgebung* von  $x$  ist eine Menge  $U \setminus \{x\}$ , wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $x$  ist.

Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1.  $x$  ist ein Häufungspunkt von  $A$ .
2. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $a \in A$  mit  $a \in \dot{B}_\varepsilon(x)$ .
3. Für jede punktierte Umgebung  $V$  von  $x$  gibt es ein  $a \in A$  mit  $a \in V$ .

Vorstellungsmäßig ist  $x \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt von  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , falls sich  $x$  von außen durch Punkte aus  $A$  annähern lässt.

**Beispiel(e).** •  $x = 0$  ist ein Häufungspunkt von  $A := \{1/n \mid n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ : Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$  gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n \geq 1$  mit  $|x - 1/n| < \varepsilon$ , wobei klar ist, dass  $1/n \neq 0$ .

- Der Punkt  $x = 2$  ist *kein* Häufungspunkt der Menge  $A := [0, 1] \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$ , denn das einzige  $a \in A$  mit  $|x - a| < 1/2$  ist  $a = 2$ .
- Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so ist jeder Punkt  $x \in U$  ein Häufungspunkt von  $U$ : Da  $U$  offen ist, gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(x) \subseteq U$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es für  $\omega := \min\{\varepsilon, \delta\}$  daher ein

$$y \in B_\omega(x) \subseteq B_\delta(x) \subseteq U \quad \text{mit } y \neq x,$$

und es gilt  $\|x - y\| < \omega \leq \varepsilon$ .

- Allgemeiner ergibt sich mit dieser Argumentation, dass  $x \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt von  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, falls  $V$  eine Umgebung von  $x$  ist. (Es genügt bereits eine punktierte Umgebung.)

### Übung 2.

Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $x \in \mathbb{R}^m$ . Zeigen Sie, dass  $x$  genau dann ein Häufungspunkt von  $A$  ist, falls es eine Folge  $(a_n)$  auf  $A \setminus \{x\}$  gibt, so dass  $a_n \rightarrow x$ .

### Übung 3.

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  endlich. Zeigen Sie, dass  $M' = \emptyset$ .

### Übung 4.

Bestimmen Sie  $\mathbb{Z}'$ .

### Übung 5.

Es seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

1. Ist  $A \subseteq B$ , so ist  $A' \subseteq B'$ .
2. Es ist  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .

### Übung 6.

Bestimmen Sie  $A'$  für  $A := [0, 1] \cup [2, 3]$ .

## 2 Grenzwerte von Funktionen

**Definition 2.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Für  $y \in \mathbb{R}^m$  schreiben wir

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = y,$$

falls es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Wir nennen  $y$  dann den *Grenzwert von  $f$  an  $x$  über  $A$* .

**Beispiel(e).** • Wir betrachten die *Signumabbildung*

$$\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

0 ist ein gemeinsamer Häufungspunkt von  $(-\infty, 0)$  und  $(0, \infty)$ , und es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (-\infty, 0)}} f(x) = -1, \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, \infty)}} f(x) = 1.$$

• Wir betrachten die Abbildung

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}.$$

0 ist ein Häufungspunkt der beiden Mengen

$$A := \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad B := \left\{ \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

und es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in B}} f(x) = -1.$$

0 ist auch ein Häufungspunkt der Menge  $(0, \infty)$ , der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, \infty)}} f(x)$$

existiert jedoch nicht.

**Lemma 3.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $x \in \mathbb{R}^m$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Für  $y \in \mathbb{R}^k$  sind äquivalent:

1.  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$ .
2. Für jede Folge  $(a_n)$  auf  $A \setminus \{x\}$  mit  $a_n \rightarrow x$  ist  $f(a_n) \rightarrow y$ .

(Da  $x$  ein Häufungspunkt von  $A$  ist, existiert eine entsprechende Folge.)

*Beweis.* ( $1 \Rightarrow 2$ ) Es sei  $(a_n)$  eine Folge auf  $A \setminus \{x\}$  mit  $a_n \rightarrow x$ . Wir wollen zeigen, dass  $f(a_n) \rightarrow y$ . Sei hierfür  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da  $a_n \rightarrow x$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\|x - a_n\| < \delta$  für alle  $n \geq N$ . Da  $a_n \neq x$  ist deshalb  $\|f(x) - f(a_n)\| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ .

( $2 \Rightarrow 1$ ) Angenommen es ist nicht  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass es für alle  $\delta > 0$  ein  $a \in A$  gibt, so dass zwar  $x \neq a$  und  $\|x - a\| < \delta$ , aber  $\|y - f(a)\| \geq \varepsilon$ . Insbesondere gibt es deshalb für alle  $n \geq 1$  ein  $a_n \in A \setminus \{x\}$  mit  $\|x - a_n\| < 1/n$  aber  $\|y - f(a_n)\| \geq \varepsilon$ . Dann ist  $(a_n)$  eine Folge auf  $A \setminus \{x\}$  mit  $a_n \rightarrow x$ , aber nicht  $f(a_n) \rightarrow y$ .  $\square$

Aus dieser Beschreibung von Funktionsgrenzwerten durch Folgen ergeben sich direkt zwei einfache Konsequenzen: Zum einen sehen wir, dass sich Funktionsgrenzwerte auch koordinatenweise beschreiben lassen.

**Lemma 4.** *Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt von  $A$ . In Koordinaten sei  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Für  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  ist genau dann  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$ , falls  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_i(a) = y_i$  für alle  $1 \leq i \leq m$ .*

*Beweis.* Das  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$  ist äquivalent dazu, dass für jede Folge  $(a_n)$  auf  $A \setminus \{x\}$  mit  $a_n \rightarrow x$  auch  $f(a_n) \rightarrow y$ . Dies ist äquivalent dazu, dass für jede Folge  $(a_n)$  auf  $A \setminus \{x\}$  auch  $f_i(a_n) \rightarrow y_i$  für alle  $1 \leq i \leq m$ . Dies bedeutet wiederum, dass  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_i(a) = y_i$  für alle  $1 \leq i \leq m$ .  $\square$

Ein weiteres Ergebnis ist, dass Funktionsgrenzwerte mit den üblichen Rechenregeln im  $\mathbb{R}^n$  verträglich sind.

**Proposition 5.** *Es seien  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f, f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt von  $A$ .*

1. *Der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$  ist eindeutig (wenn er existiert).*
2. *Existieren die Grenzwerte  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$  und  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)$ , so existiert auch der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} (f_1 + f_2)(a)$  und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (f_1 + f_2)(a) = \left( \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_1(a) \right) + \left( \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

3. *Existiert der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$ , so existiert auch  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} (\lambda f)(a)$ , und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (\lambda f)(a) = \lambda \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a).$$

Im Fall  $n = 1$ , also für  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ , gilt auch eine Verträglichkeit mit Multiplikation und Division.

4. *Existieren die Grenzwerte  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$  und  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)$ , so existiert auch der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} (f_1 \cdot f_2)(a)$  und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (f_1 \cdot f_2)(a) = \left( \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_1(a) \right) \cdot \left( \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

5. *Existieren die beiden Grenzwerte  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$  und  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)$ , und ist  $f_2(a) \neq 0$  für alle  $a \in A \setminus \{x\}$  sowie  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a) \neq 0$ , so existiert auch der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)/f_2(a)$  und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)}{\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)}$$

(Sehen wir  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ , so ergibt sich auch eine Verträglichkeit mit der Multiplikation und Division im Komplexen; hierauf wollen wir jetzt aber nicht weiter eingehen.)

Wie wir bereits gesehen haben, können für eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Definitionsbereich  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  für Teilmengen  $A, B \subseteq X$  mit gemeinsamen Häufungspunkt  $x \in \mathbb{R}^n$  die beiden Grenzwerte  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$  und  $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$  existieren, aber dennoch

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) \neq \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

Es kann auch passieren, dass einer der beiden Grenzwerte existiert, der andere jedoch nicht. Es gibt also im Allgemeinen keinen Zusammenhang zwischen dem Grenzwert von  $f$  über  $A$  und dem Grenzwert über  $B$ . Unter bestimmten Umständen lassen sich die entsprechenden Grenzwerte aber vergleichen:

**Lemma 6.** *Es seien  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ist  $x \in \mathbb{R}^n$  ein gemeinsamer Häufungspunkt von  $A$  und  $B$ , sodass der Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$  existiert, so existiert auch  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$ , und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

*Beweis.* Zur besseren Lesbarkeit setzen wir  $y := \lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ . Wir wollen zeigen, dass auch  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$ . Es sei hierfür  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $y = \lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|x - b\| < \delta \Rightarrow \|y - f(b)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } b \in B \text{ mit } b \neq x.$$

Da  $A \subseteq B$  ist daher insbesondere

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = y$ . □

**Korollar 7.** *Es sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Definitionsbereich  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es seien  $A, B \subseteq X$  Teilmengen, so dass  $x \in \mathbb{R}^n$  ein gemeinsamer Häufungspunkt von  $A$  und  $B$  ist, und die beiden Grenzwerte  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$  und  $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$  existieren. Ist  $x$  auch ein Häufungspunkt von  $A \cap B$ , so ist*

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

*Beweis.* Da die beiden Grenzwerte  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$  und  $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$  existieren, und  $A \cap B \subseteq A$  und  $A \cap B \subseteq B$ , erhalten wir aus Lemma 6, dass auch der Grenzwert  $\lim_{c \rightarrow x, c \in A \cap B} f(c)$  existiert und

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{c \rightarrow x \\ c \in A \cap B}} f(c) = \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b). \quad \square$$

### 3 Links-, rechts- und beidseitige Grenzwerte

Wir wollen uns nun einem Sonderfall von Funktionsgrenzwerten zuwenden.

**Definition 8.** Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Definitionsbereich  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

Gibt es ein  $r > 0$ , so dass  $(x - r, x) \subseteq A$ , so schreiben wir

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x-r, x)}} f(a),$$

und nennen dies den *linksseitigen Grenzwert von  $f$  an  $x$* .

Gibt es ein  $r > 0$ , so dass  $(x, x + r) \subseteq A$ , so schreiben wir

$$\lim_{a \downarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x, x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *rechtsseitigen Grenzwert von  $f$  an  $x$* .

Existiert ein  $r > 0$ , so dass  $(x - r, x) \cup (x, x + r) \subseteq A$ , so schreiben wir

$$\lim_{a \rightarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *beidseitigen Grenzwert von  $f$  an  $x$* .

Die Wohldefiniertheit der jeweiligen Ausdrücke, also die Unabhängigkeit von  $r$ , ergibt sich aus Korollar 7.

Der beidseitige Grenzwert lässt sich auch als Kombination des links- und rechtsseitigen Grenzwertes definieren:

**Lemma 9.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}$  sind äquivalent:

1. Der beidseitige Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$  existiert und  $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$ .
2. Die beiden Grenzwerte  $\lim_{a \uparrow x} f(a)$  und  $\lim_{a \downarrow x} f(a)$  existieren und es ist

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = \lim_{a \downarrow x} f(a).$$

*Beweis.* ( $1 \Rightarrow 2$ ) Da  $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$  existiert, gibt es ein  $r > 0$ , so dass  $f$  auf  $(x - r, x) \cup (x, x + r)$  definiert ist und  $\lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)} f(a)$  existiert. Dann ist  $f$  auch auf  $(x - r, x)$  und auf  $(x, x + r)$  definiert, und nach Lemma 6 gilt

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = \lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x)} f(a) = \lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)} f(a) = \lim_{a \downarrow x} f(a).$$

Analog ergibt sich, dass auch  $\lim_{a \downarrow x} f(a)$  existiert und

$$\lim_{a \downarrow x} f(a) = \lim_{a \rightarrow x} f(a)$$

( $2 \Rightarrow 1$ ) Da die beiden Grenzwerte  $\lim_{a \uparrow x} f(a)$  und  $\lim_{a \downarrow x} f(a)$  existieren gibt es  $r_-, r_+ > 0$ , so dass  $f$  auf  $(x - r_-, x)$  und  $(x, x + r_+)$  definiert ist. Für  $r := \min\{r_-, r_+\}$  ist also  $f$  auf  $(x - r, x) \cup (x, x + r)$  definiert. Wir schreiben

$$y := \lim_{a \uparrow x} f(a) = \lim_{a \downarrow x} f(a).$$

Wir wollen zeigen, dass auch  $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$ . Hierfür sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $\lim_{a \uparrow x} f(a) = y$  gibt es ein  $\delta_- > 0$ , so dass

$$\|x - a\| < \delta_- \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x - r, x),$$

und da  $\lim_{a \downarrow x} f(a) = y$  gibt es ein  $\delta_+ > 0$ , so dass

$$\|x - a\| < \delta_+ \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x, x + r).$$

Für  $\delta := \min\{\delta_-, \delta_+\}$  ist daher

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in (x - r, x) \cup (x, x + r).$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$ . □

Aus unserer Untersuchung allgemeiner Funktionsgrenzwerte ergibt sich für die Sonderfälle von links-, rechts- und beidseitigen Grenzwert die Verträglichkeit mit den üblichen Rechenregeln.

**Beispiel(e).** • Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  existiert nicht: Die beiden Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  mit

$$a_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi}$$

konvergieren gegen 0, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1.$$

• Es ist  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ : Wir wissen bereits, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

stetig ist. (Stetigkeit an  $x \neq 0$  ist klar, und an  $x = 0$  ergibt die Stetigkeit aus dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium.) Daher ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

• Für  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $p, q \geq 1$  ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{p}{q}.$$

Das Problem besteht darin, dass  $1^q - 1 = 1^p - 1 = 0$ . Dieses Problem beseitigen wir dadurch, dass wir aus den Polynomen  $x^p - 1$  und  $x^q - 1$  den Linearfaktor  $x - 1$  ausklammern. Wir erhalten so, dass für alle  $x \neq 1$

$$\frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{(x - 1) \sum_{k=0}^{p-1} x^k}{(x - 1) \sum_{k=0}^{q-1} x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^k}{\sum_{k=0}^{q-1} x^k}.$$

Daher ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^k}{\sum_{k=0}^{q-1} x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q}.$$

• Wir wollen untersuchen, wie sich die Grenzwert von  $x\sqrt{1+4/x^2}$  an  $x = 0$  verhält – von unten, oben und beidseitig. Hierfür bemerken wir, dass für alle  $x \neq 0$

$$\begin{aligned} x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} &= \operatorname{sgn}(x)|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\lim_{x \uparrow 0} x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} &= \lim_{x \uparrow 0} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{x^2 + 4} = \lim_{x \uparrow 0} -1 \cdot \sqrt{x^2 + 4} \\ &= -\lim_{x \uparrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = -2.\end{aligned}$$

Analog ergibt sich, dass

$$\lim_{x \downarrow 0} x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 2.$$

Damit kennen wir das Verhalten von Grenzwert von oben und von unten. Der beidseitige Grenzwert existiert nicht, da oberer und unterer Grenzwert verschieden sind.

- Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|}$$

untersuchen. Hierfür bemerken wir, dass für alle  $x \neq 2$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|} &= \frac{(x - 2)(x - 12)}{|x - 2| + |x - 2||x + 2|} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 12)}{\operatorname{sgn}(x - 2)(x - 2) + \operatorname{sgn}(x - 2)(x - 2)|x + 2|} \\ &= \frac{x - 12}{\operatorname{sgn}(x - 2) + \operatorname{sgn}(x - 2)|x + 2|} \\ &= \operatorname{sgn}(x - 2) \frac{x - 12}{1 + |x + 2|}.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\lim_{x \uparrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|} &= \lim_{x \uparrow 2} \operatorname{sgn}(x - 2) \frac{x - 12}{1 + |x + 2|} \\ &= \lim_{x \uparrow 2} -1 \cdot \frac{x - 12}{1 + |x + 2|} = -\lim_{x \uparrow 2} \frac{x - 12}{1 + |x + 2|} = -\frac{2 - 12}{1 + |2 + 2|} = 2.\end{aligned}$$

Analog ergibt sich, dass auch

$$\lim_{x \downarrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x - 2| + |x^2 - 4|} = -2.$$

### Übung 7.

Zeigen Sie, dass für eine monoton steigende Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an jeder Stelle  $x \in \mathbb{R}$  sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert, und dass

$$\lim_{y \uparrow x} f(y) = \sup\{f(y) \mid y < x\} \quad \text{und} \quad \lim_{y \downarrow x} f(y) = \inf\{f(y) \mid y > x\}.$$

Wie sieht es für eine monoton fallende Funktion aus?



## 4 Grenzwerte und Stetigkeit

**Lemma 10.** Es  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Definitionsbereich  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  auf einer Umgebung von  $x \in \mathbb{R}^n$  definiert. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

1. Der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$  existiert für eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x$  mit  $V \subseteq A$ .
2. Der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a)$  existiert für jede Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x$  mit  $U \subseteq A$ .

(Nach Annahme existiert eine solche Umgebung, die zweite Aussage ist daher nicht leer.) Zeigen sie ferner, dass der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a)$  unabhängig von der Wahl der Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $U \subseteq A$  ist.

**Beweis.** ( $2 \Rightarrow 1$ ) Nach Annahme existiert eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x$ , so dass  $f$  auf  $V$  definiert ist, also mit  $V \subseteq A$ ; diese Implikation ist daher klar.

( $1 \Rightarrow 2$ ) Es sei  $V$  eine entsprechende Umgebung und  $y := \lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$ . Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beliebige Umgebung von  $x$  mit  $U \subseteq A$ . Wir wollen zeigen, dass  $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a)$  existiert und dass  $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a) = y$ .

Es sei hierfür  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $y = \lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$  gibt es  $\delta_1 > 0$ , so dass

$$\|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A.$$

Da  $V$  eine Umgebung von  $x$  ist, gibt es außerdem ein  $\delta_2 > 0$  mit  $B_{\delta_2}(x) \subseteq V$ . Für  $\delta' := \min\{\delta_1, \delta_2\}$  ist deshalb auch  $B_{\delta'}(x) \subseteq V$  mit

$$\|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in B_{\delta'}(x).$$

Da  $U$  eine Umgebung von  $x$  ist, gibt es  $\delta'' > 0$  mit  $B_{\delta''}(x) \subseteq U$ . Für  $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$  ist also  $B_\delta(x) \subseteq U$  mit

$$\|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in B_\delta(x).$$

Damit erhalten wir, dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in U.$$

wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  zeigt dies, dass  $\lim_{a \rightarrow x, a \in U} f(a) = y$ . □

**Definition 11.** Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Definitionsbereich  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ist  $f$  auf einer Umgebung von  $x \in \mathbb{R}^n$  von  $A$  definiert, so schreiben wir

$$\lim_{a \rightarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$$

und nennen dies den Grenzwert von  $f$  an  $x$ .

Die Wohldefiniertheit, also Unabhängigkeit von  $V$ , folgt aus Lemma 10.

**Bemerkung 12.** Ist  $V \subseteq \mathbb{R}$  eine Umgebung von  $x \in \mathbb{R}$ , und  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ , so ist die Notation  $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$  doppelt belegt: Zum einen steht die Notation für  $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$ . Zum anderen gibt es, da  $V$  eine Umgebung von  $x$  ist, ein  $r > 0$  mit  $(x - r, x + r) \subseteq V$ ; dann steht die Notation auch für  $\lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)} f(a)$ .

Die beiden Definitionen sind in diesem Fall allerdings gleichbedeutend: Per Definition ist der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)} f(a)$  gleichbedeutend zum Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow x, a \in (x-r, x+r)} f(a)$ . Dieser Grenzwert ist nach Lemma 10 der gleiche wie  $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a)$ .

**Proposition 13.** Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Definitionsbereich  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , die auf einer Umgebung von  $x$  definiert ist. Dann ist  $f$  genau dann stetig an  $x$ , wenn  $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = f(x)$ .

*Beweis.* Angenommen  $f$  ist stetig an  $x$ . Es sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $x$  mit  $V \subseteq A$ . Wir wollen zeigen, dass  $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a) = f(x)$ . Hierfür sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $f$  stetig an  $x$  ist gibt es  $\delta > 0$ , so dass

$$\|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A.$$

Daher ist insbesondere

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in V \text{ mit } a \neq x.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a) = f(x)$ .

Angenommen, es ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(a) = f(x)$ . Wir wollen zeigen, dass  $f$  stetig an  $x$  ist. Sei hierfür  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Es sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $x$  mit  $V \subseteq A$ . Da  $V$  eine Umgebung von  $x$  ist, gibt es ein  $\delta_1 > 0$  mit  $B_{\delta_1}(x) \subseteq V$ . Da  $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = f(x)$  ist  $\lim_{a \rightarrow x, a \in V} f(a) = f(x)$ , es gibt daher ein  $\delta_2 > 0$  mit

$$\|x - a\| < \delta_2 \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x;$$

offenbar können wir hier auch  $a = x$  zulassen. Für  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$  haben wir nun  $B_\delta(x) \subseteq B_{\delta_1}(x) \subseteq V$  und  $\|x - a\| < \delta_2$  für alle  $a \in B_\delta(x)$ , und somit

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in B_\delta(x).$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  zeigt dies die Stetigkeit von  $f$  an  $x$ . □

## 5 Uneigentliche Grenzwerte

Sie wie bei Folgen kann man auch bei Funktionen uneigentliche Grenzwerte definieren.

**Definition 14.** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Wir schreiben dass  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = \infty$ , falls es für alle  $R > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow f(a) \geq R \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Analog definieren wir  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = -\infty$ .

**Beispiel(e).** • Es ist

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$  existiert nicht (auch nicht uneigentlich).

• 0 ist ein Häufungspunkt von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und wir haben

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{1}{\|x\|} = \infty.$$

- Es ist

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\exp(x) - 1} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{\exp(x) - 1} = -\infty.$$

**Definition 15.** Es sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung mit Definitionsbereich  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Für  $y \in \mathbb{R}^m$  sagen wir, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$ , falls

1. es gibt  $r_0 \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x)$  für alle  $x \geq r_0$  definiert ist, und
2. für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $r \geq r_0$ , so dass  $\|f(x) - y\| < \varepsilon$  für alle  $x \geq r$ .

Analog definiert man die Schreibweise  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y$ .

**Beispiel(e).** • Es ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0.$$

- Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**Definition 16.** Es sei  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir schreiben, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , falls

1. es gibt  $r_0 \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x)$  für alle  $x \geq r_0$  definiert ist, und
2. für alle  $R > 0$  ein  $r > r_0$ , so dass  $f(x) > R$  für alle  $x \geq r$ .

Analog definiert man die Ausdrücke  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**Beispiel(e).** • Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty.$$

- Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty.$$

**Beispiel(e).** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-a)(x-b)} - x$$

untersuchen. Hierfür bemerken wir zunächst, dass  $(x-a)(x-b) \geq 0$  für alle  $x \geq \max\{a, b\}$ ; der Ausdruck  $\sqrt{(x-a)(x-b)}$  ist also für alle  $x \geq \max\{a, b\}$  definiert. Zur Bestimmung des Grenzwerts wollen wir den Ausdruck  $\sqrt{(x-a)(x-b)} - x$  zunächst umschreiben; für alle  $x > \max\{a, b, 0\}$  haben wir

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-a)(x-b)} - x &= \frac{(\sqrt{(x-a)(x-b)} - x)(\sqrt{(x-a)(x-b)} + x)}{\sqrt{(x-a)(x-b)} + x} \\ &= \frac{(x-a)(x-b) - x^2}{\sqrt{(x-a)(x-b)} + x} = \frac{(a+b)x + ab}{\sqrt{x^2 + (a+b)x + ab} + x} \\ &= \frac{a+b + \frac{ab}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}} + 1} \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-a)(x-b)} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}+1}} = \frac{a+b}{2}.$$

Auch für uneigentliche Grenzwerte gelten (intuitive) Rechenregeln, von denen wir hier einige angeben wollen:

1. Für  $y \in \mathbb{R}^m$  ist genau dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$ , wenn  $\lim_{x \downarrow 0} f(1/x) = y$ . Die Aussage gilt für eine reellwertige Funktion auch für  $y \in \{-\infty, \infty\}$ .
2. Wenn  $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} f(x) = \infty$  oder  $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} f(x) = -\infty$ , dann ist

$$\lim_{x \rightarrow a, a \in A} 1/f(x) = 0.$$

3. Ist  $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} f(x) = \infty$ , so ist  $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} -f(x) = -\infty$ . Analoges gilt für  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

Auch uneigentliche Grenzwerte lassen sich durch Folgen ausdrücken.

1. Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in A$  ein Häufungspunkt von  $A$ , so ist genau dann  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = \infty$ , falls für jede Folge  $(a_n)$  auf  $A \setminus \{x\}$  mit  $a_n \rightarrow x$  auch  $f(a_n) \rightarrow \infty$ . Eine analoge Aussage gilt für  $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = -\infty$ .
2. Für  $y \in \mathbb{R}^m$  ist genau dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$ , wenn für jede Folge  $(x_n)$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  auch  $f(x_n) \rightarrow y$ . Eine analoge Aussage gilt für  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Ist  $f$  eine reellwertige Funktion, so gilt die Aussage auch für  $y \in \{-\infty, \infty\}$ .

## 6 Lösungen der Übungen

### Lösung 1.

(1  $\Leftrightarrow$  2) 2 ist eine direkte Umformulierung der Definition von 1.

(2  $\Leftrightarrow$  3) Jeder punktierte  $\varepsilon$ -Ball um  $x$  ist auch eine punktierte Umgebung von  $x$ . Andererseits enthält jede punktierte Umgebung von  $x$  einen punktierten  $\varepsilon$ -Ball um  $x$ .

### Lösung 2.

Angenommen,  $x$  ist ein Häufungspunkt von  $A$ . Dann gibt es für jedes  $n \geq 1$  ein  $a_n \in A \setminus \{x\}$  mit  $|x - a_n| < 1/n$ . Die Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  konvergiert per Konstruktion gegen  $x$ .

Angenommen, eine solche Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert. Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x - a_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Insbesondere ist  $a_N \in A$  mit  $|x - a_N| < \varepsilon$  und  $a_N \neq x$ .

### Lösung 3.

Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ist  $x \notin M$ , so ergibt sich für

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \min_{m \in M} \|x - m\| > 0,$$

dass es kein  $m \in M$  mit  $\|x - m\| < \varepsilon$  gibt. Also ist  $x$  dann kein Häufungspunkt von  $M$ . Ist  $x \in M$ , so ergibt sich für

$$\varepsilon := \begin{cases} \frac{1}{2} \min_{m \in M, m \neq x} \|x - m\| & \text{falls } |M| \geq 2 \\ 1 & \text{falls } M = \{x\}, \end{cases}$$

dass  $x$  das einzige  $m \in M$  mit  $\|x - m\| < \varepsilon$  ist. Also ist  $x$  auch dann kein Häufungspunkt von  $M$ .

### Lösung 4.

Es sei  $x \in \mathbb{R}$ . Ist  $x \notin \mathbb{Z}$ , so gibt es für

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \min\{\lceil x \rceil - x, x - \lfloor x \rfloor\}$$

kein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $\|x - n\| < \varepsilon$ . Also ist  $x$  dann kein Häufungspunkt von  $\mathbb{Z}$ . Ist andererseits  $x \in \mathbb{Z}$ , so gibt es außer  $x$  kein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $\|x - n\| < 1/2$ , weshalb  $x$  auch dann kein Häufungspunkt von  $\mathbb{Z}$  ist.

Also ist kein  $x \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $\mathbb{Z}$ , und somit  $\mathbb{Z}' = \emptyset$ .

### Lösung 5.

1. Es sei  $x \in A'$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es daher ein  $a \in A$  mit  $\|x - a\| < \varepsilon$  und  $a \neq x$ . Da  $a \in A \subseteq B$  folgt, dass es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $b \in B$  mit  $\|x - b\| < \varepsilon$  und  $b \neq x$  gibt. Also ist  $x$  ein Häufungspunkt von  $B$ , also  $b \in B'$ . Aus der Beliebigkeit von  $a \in A'$  folgt, dass  $A' \subseteq B'$ .

2. Da  $A \subseteq A \cup B$  ist  $A' \subseteq (A \cup B)'$ , und da  $B \subseteq A \cup B$  ist  $B' \subseteq (A \cup B)'$ . Also ist auch  $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$ .

Angenommen, es ist  $x \notin A' \cup B'$ . Dann gibt es  $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ , so dass es kein  $a \in A$  mit  $\|x - a\| < \varepsilon$  und  $x \neq a$  gibt, und auch kein  $b \in B$  mit  $\|x - b\| < \varepsilon$  und  $x \neq b$ . Für  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$  gibt es daher kein  $y \in A \cup B$  mit  $\|x - y\| < \varepsilon$  und  $y \neq x$ . Also ist dann  $x \notin (A \cup B)'$ . Das zeigt, dass auch  $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$ .

**Lösung 6.**

**Behauptung.** Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  ist

$$[a, b]' = [a, b].$$

*Beweis der Behauptung.* Für  $x < a$  ist  $a - x > 0$ , es gibt aber kein  $y \in [a, b]$  mit  $\|x - y\| < a - x$ ; also ist dann  $x \notin [a, b]'$ . Analog ergibt sich, dass auch  $x \notin [a, b]'$  für  $x > b$ . Also ist  $[a, b]' \subseteq [a, b]$ .

Dass  $a, b \in [a, b]'$  ergibt sich durch die Folgen  $(x_n)$  auf  $(a, b)$  und  $(y_n)$  auf  $(a, b)$  mit

$$x_n := a + \frac{b-a}{n+1} \quad \text{und} \quad y_n := b - \frac{b-a}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass  $x \in [a, b]'$  für  $a < x < b$  ergibt sich daraus, dass  $[a, b]$  eine Umgebung für diese  $x$  ist. Damit ergibt sich, dass  $[a, b] \subseteq [a, b]'$ .  $\square$

Aus der Behauptung ergibt sich direkt, dass

$$([0, 1] \cup [2, 3])' = [0, 1]' \cup [2, 3]' = [0, 1] \cup [2, 3].$$

**Lösung 7.**

Es sei  $f$  monoton steigend und  $x \in \mathbb{R}$ . Wir wollen zeigen, dass  $a := \sup_{y < x} f(y)$  die Eigenschaften des linksseitigen Limes erfüllt. Sei hierfür  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Nach der  $\varepsilon$ -Charakterisierung des Supremums gibt es ein  $y_0 < x$  mit  $a - \varepsilon < f(y_0)$ . Aus der Monotonie von  $f$  folgt, dass

$$a - \varepsilon < f(y_0) \leq f(y) \leq \sup_{y' < x} f(y') = a \quad \text{für alle } y_0 \leq y < x.$$

Für  $\delta := x - y_0 > 0$  ist also  $|f(y) - a| < \varepsilon$  für alle  $y \in (x - \delta, x)$ . Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  zeigt dies, dass  $\lim_{y \uparrow x} f(y) = a$ .

Analog zeigt man, dass  $\lim_{y \downarrow x} f(y) = \inf_{x < y} f(y)$ . Für monoton fallende Funktionen zeigt man analog, dass obere und untere Grenzwerte an jeder Stelle existieren, und dass für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{y \uparrow x} f(y) = \inf_{y < x} f(y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \downarrow x} f(y) = \sup_{y > x} f(y).$$