Kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Jendrik Stelzner

23. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 **Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen** 1

2 **Folgenkompaktheit** 2

3 **Überdeckungskompaktheit** 3

4 **Der Satz von Heine-Borel** 5

1 Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen

Zur Motivation des Kompaktheitbegriffes wollen wir zunächst die folgende wichtige Aussage beweisen:

Lemma 1. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Abbildung f beschränkt und nimmt auf $[a,b]$ ihr Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $x_{max}, x_{min} \in [a,b]$ mit*

$$f(x_{max}) = \sup_{y \in [a,b]} f(y) \quad \text{und} \quad f(x_{min}) = \inf_{y \in [a,b]} f(y).$$

Für offene Intervalle oder halboffene Intervalle gilt diese Aussage nicht. Man betrachte etwa die Abbildung $(0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$, oder gar $(0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(1/x)/x$.

Herzstück des Beweises ist die Beobachtung, dass auf $[a,b]$ jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Lemma 2. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf $[a,b]$. Dann besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$, und für den Grenzwert $x := \lim_{j \to \infty} x_{n_j}$ gilt $x \in [a,b]$.*

Beweis. Da $a \leq x_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge (x_n) beschränkt und besitzt daher nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$. Es sei $x := \lim_{j \to \infty} x_{n_j}$. Da $a \leq x_{n_j} \leq b$ für alle $j \in \mathbb{N}$ ist auch $a \leq x \leq b$, also $x \in [a,b]$. $\square$

Beweis von Lemma 1. Wir zeigen zunächst, dass f beschränkt ist: Angenommen, f wäre nach oben unbeschränkt. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) \geq n$. Nach Lemma 2 besitzt die Folge (x_n) eine konvergente Folge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Da f stetig ist, konvergiert auch die Folge $(f(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist aber $f(x_{n_j}) \geq n_j$, die Folge $f(x_{n_j})$ konvergiert also nicht. Dieser Widerspruch zeigt dass f nach oben unbeschränkt seien muss. Analog ergibt sich, dass f auch nach unten beschränkt ist. Also ist f beschränkt.

Es sei

$$M := \sup_{y\in[a,b]} f(y).$$

Da f nach oben beschränkt ist, ist $M < \infty$. Nach der ε-Charakterisierung des Supremums gibt es für alle $n \geq 1$ ein $x_n \in [a, b]$ mit

$$M \geq f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}.$$

Nach Lemma 2 besitzt die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Es sei $x :- \lim_{j\to\infty} x_{n_j}$. Da f stetig ist, konvergiert auch die Folge $(f(x_{n_j}))$ und es gilt

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x).$$

Andererseits gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$M \geq f(x_{n_j}) \geq M - \frac{1}{n_j}.$$

Also muss nach dem Sandwich-Lemma auch

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = M.$$

Also ist $f(x) = M$. Das zeigt, dass f auf $[a, b]$ sein Maximum annimmt. Analog ergibt sich, dass f auf $[a, b]$ auch sein Minimum annimmt. □

2 Folgenkompaktheit

Zum Beweis von Lemma 1 haben wir Folgenstetigkeit und Lemma 2 benötigt. Diese Beobachtung legt nahe, dass sich Lemma 1 auf beliebige Teilmengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ verallgemeinern lässt, für die eine zu Lemma 2 analoge Aussage gilt.

Definition 3. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und (x_n) ein Folge auf X. Wir sagen (x_n) *konvergiert auf* X, falls die Folge (x_n) konvergiert und $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$.

Beispiel(e). Die Folge $(1/n)_{n\geq 1}$ konvergiert auf $[0, 1]$, nicht aber auch $(0, 1)$.

Definition 4. Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, falls jede Folge (x_n) auf K eine auf K konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiel(e). Lemma 2 zeigt, dass ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ kompakt ist. Offene Intervalle hingegen sind niemals kompakt: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist $(a + (b - a)/(n + 2))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf (a, b), die keine auf (a, b) konvergente Teilfolge besitzt.

Proposition 5. *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Abbildung f auf K beschränkt und nimmt auf K ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es gibt $x_{min}, x_{max} \in K$ mit*

$$f(x_{max}) = \sup_{y\in K} f(y) \quad \textit{und} \quad f(x_{min}) = \inf_{y\in K} f(y).$$

Beweis. Nehme den Beweis von Lemma 1 und ersetze $[a, b]$ durch K und die Verweise auf Lemma 2 durch Kompaktheit. □

Da sich stetige Funktionen auf kompakten Mengen gutartig verhalten, sind kompakte Mengen von großer Bedeutung für die Analysis.

3 Überdeckungskompaktheit

Ein weiterer Kompaktheitsbegriff ist der der Überdeckungskompaktheit. Wie sich herausstellt, sind Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ äquivalent.

Definition 6. Es sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Kollektion von Teilmengen $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Die Kollektion $\{U_i\}_{i\in I}$ heißt *Überdeckung von X*, falls $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Sie heißt *endlich*, bzw. *abzählbar*, falls I endlich, bzw. abzählbar ist.

Eine *Teilüberdeckung* ist dann eine Teilkollektion $\{U_j\}_{j\in J}$, also $J \subseteq I$, so dass bereits $\{U_j\}_{j\in J}$ eine Überdeckung von X ist.

Außerdem heißt die Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X *offen*, falls die $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ alle offen sind.

Bemerkung 7. Offenbar ist eine Teilüberdeckung einer offenen Überdeckung ebenfalls offen.

Beispiel(e).

- Die Kollektion $\{B_n(0) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ bildet eine abzählbare, offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$.
- Die offenen Intervalle $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$.
- Allgemein bilden die ε-Bälle $\{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$.
- Die Würfel $\{[-K, K]^n \mid K \in \mathbb{N}, K \geq 1\}$ bilden eine abzählbar Überdeckung von $\mathbb{R}^n$, die nicht offen ist.
- Die ε-Bälle mit rationalen Radius um Mittelpunkte mit rationalen Koeffizienten $\{B_q(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$.
- Die Intervalle $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n+1)$, aber nicht von $\mathbb{R}$.
- Die offenen Intervalle $\{(-1/n, 1 + 1/n) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ bilden eine offene Überdeckung des abgeschlossenen Einheitsintervalls $[0, 1]$; diese Überdeckung besitzt eine endliche (sogar einelementige) Teilüberdeckung.

Definition 8. Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *überdeckungskompakt*, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Lemma 9. *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ überdeckungskompakt. Dann gilt:*

1. *K ist abgeschlossen.*
2. *K ist beschränkt.*

Beweis.

1. Wir zeigen, dass K abgeschlossen ist, indem wir zeigen, dass K^c offen ist. Es sei hierfür $x \in K^c$ beliebig aber fest. Wir wollen zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq K$. Für jedes $y \in K$ ist $x \neq y$ (da $x \notin K$), also $\varepsilon_y := \|x - y\|/2 > 0$. Für jedes $y \in K$ sind dann $B_{\varepsilon_y}(x)$ und $B_{\varepsilon_y}(y)$ disjunkt.

   (Wir würden nun gerne die Bälle $B_{\varepsilon_y}(x)$ schneiden, um eine, hoffentlich offene, Menge zu erhalten, die x enthält, aber disjunkt zu K ist. Das Problem ist, dass der möglicherweise unendliche Schnitt $\bigcap_{y \in K} B_{\varepsilon_y}(x)$ nicht mehr notwendigerweise offen ist. Mithilfe der Überdeckungskompaktheit können wir diesen unendlichen Schnitt aber durch einen endlichen ersetzen:)

   Die ε-Bälle $\{B_{\varepsilon_y}(y) \mid y \in K\}$ bilden eine offene Überdeckung von K. Da K überdeckungskompakt ist, besitzt diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung; es gibt also $y_1, \dots, y_s \in K$ mit

   $$K \subseteq B_{\varepsilon_{y_1}}(y_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon_{y_s}}(y_s). \tag{1}$$

   Wir setzen $\varepsilon := \min_{i=1,\dots,s} \varepsilon_{y_s} > 0$. Da $B_{\varepsilon_y}(x)$ und $B_{\varepsilon_y}(y)$ für alle $y \in K$ disjunkt sind, folgt aus (1), dass auch $B_\varepsilon(x)$ und K disjunkt sind; es ist nämlich

   $$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) \cap K \subseteq B_\varepsilon(x) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\varepsilon_{y_i}}(y_i) &= \bigcup_{i=1}^s (B_\varepsilon(x) \cap B_{\varepsilon_{y_i}}(y_i)) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^s \underbrace{(B_{\varepsilon_{y_i}}(x) \cap B_{\varepsilon_{y_i}(y_i)})}_{=\emptyset} = \emptyset. \end{aligned}$$

   Es ist also $B_\varepsilon(x) \subseteq K^c$. Aus der Beliebigkeit von $x \in K^c$ folgt, dass K^c offen ist, und somit K abgeschlossen.

2. Die offenen Bälle $\{B_r(0) \mid r > 0\}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$, und damit insbesondere auch von K. Da K überdeckungskompakt ist, besitzt diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also Radien $r_1, \dots, r_M > 0$ mit $K \subseteq B_{r_1}(0) \cup \dots \cup B_{r_M}(0)$. Für den Radius $R = \max_{i=1,\dots,M} r_i$ so ist $B_{r_i}(0) \subseteq B_R(0)$ für alle $1 \leq i \leq s$, und somit auch $K \subseteq B_R(0)$. Also ist K beschränkt. $\square$

Proposition 10. *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

1. *K ist folgenkompakt.*
2. *K ist überdeckungskompakt.*

Beweis. Angenommen K ist überdeckungskompakt, aber nicht folgenkompakt. Dann gibt es eine Folge (x_n) auf K, die keine auf K konvergente Teilfolge besitzt.

Behauptung. *Für jedes $x \in K$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$, so dass $\|x - x_n\| \geq \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis der Behauptung. Ansonsten gebe es ein $x \in K$, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in N$ mit $\|x - x_n\| < \varepsilon$ gibt. Insbesondere gibt es dann ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_{n_1}\| < 1$. Dann gibt es auch ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ und $\|x - x_n\| < 1/2$. Rekursiv ergibt sich, dass es für alle $j \geq 1$ ein $n_j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n_j > n_{j-1}$ und $\|x - x_{n_j}\| < 1/j$. Es ist dann n_j eine Teilfolge mit $x_{n_j} \to x$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass (x_n) keine auf K konvergente Teilfolge besitzt. □

Die ε-Bälle $\{B_{\varepsilon_x}(x) \mid x \in K\}$ bilden offenbar eine offene Überdeckung von K. Da K überdeckungskompakt ist, besitzt diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also $x_1, \ldots, x_s \in K$, so dass

$$K \subseteq B_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon_{x_s}}(x_s). \tag{2}$$

Da jeder der ε-Bälle $B_{\varepsilon_x}(x)$ nur endlich viele Folgeglieder enthält, enthält auch K wegen (2) nur endlich viele Folgeglieder, was offenbar nicht seien kann. Das zeigt, dass aus Überdeckungskompaktheit Folgenkompaktheit folgt. □

Wegen der Äquivalenz von Folgen- und Überdeckungskompaktheit in $\mathbb{R}^n$ spricht man auch nur von Kompaktheit; eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt also *kompakt*, falls sie folgenkompakt, bzw. überdeckungskompakt ist.

4 Der Satz von Heine-Borel

Der Satz von Heine-Borel beantwortet die Frage, wie kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ aussehen.

Theorem 11 (Satz von Heine-Borel)**.** *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass jede (überdeckungs)kompakte Teilmenge sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

Es sei andererseits K abgeschlossen und beschränkt. Wir wollen zeigen, dass K (folgen)kompakt ist. Es sei hierfür $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf K. Da K beschränkt ist, besitzt K nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Da (x_{n_j}) eine Folge auf K ist, und K abgeschlossen ist, ist auch $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} \in K$. Also ist K (folgen)kompakt. □

Der Satz von Heine-Borel ist sehr nützlich, um Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ auf Kompaktheit zu untersuchen.

Beispiel(e).

- Die n-dimensionale Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist offenbar beschränkt, und wir wissen bereits, dass sie auch abgeschlossen ist. Also ist S^n kompakt.

- Wir wissen bereits, dass der Einheitswürfel $[0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist. Er ist auch beschränkt, denn für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ ist $\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n$. Also ist der Einheitswürfel kompakt.

- Das offen Intervall $(0,1)$ ist zwar beschränkt, aber nicht abgeschlossen, und somit auch nicht kompakt.
- Der unendliche Zylinder $S^1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt, und somit ebenfalls nicht kompakt. (Für jedes $C > 0$ ist $x \coloneqq (1, 0, C) \in S^1 \times \mathbb{R}$ mit $\|x\| > C$.)