Grundlegendes zur Konvergenz von Reihen

Jendrik Stelzner

10. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Folgentheoretische Vorbereitung

Wir werden im Folgenden einige grundlegende Eigenschaften über die Konvergenz von Folgen nutzen, die bisher nicht gezeigt wurden.

Übung 1.
Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|.$$

(Der Betrag ist also (folgen)stetig.) Wenn die Folge der Beträge $(|a_n|)$ konvergiert, konvergiert dann auch schon die Folge (a_n)?

Übung 2.
Zeigen Sie, dass für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und obere Schranke $C \in \mathbb{R}$ gilt: Es gibt genau dann $y < C$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq y$ für alle $n \geq N$, falls $\limsup_{n\to\infty} a_n < C$.

Übung 3.
Zeigen Sie: Konvergieren für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) und gilt $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$, so konvergiert bereits (a_n) selbst.

Übung 4.
Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$.

2 Definition konvergenter Reihen

Definition 1. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der *Partialsummen* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k$$

definiert; das Folgenglied s_n heißt die *n-te Partialsumme* (der Folge (a_n)). Diese Folge der Partialsummen bezeichnet man als *Reihe* und schreibt man als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, d.h. konvergiert die Folge der Partialsummen (s_n), so bezeichnet man den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ ebenfalls als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und nennt dies den *Wert der Reihe*. Die Folge (a_n) heißt dann *summierbar*.

Für $N \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ als die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+N}$ definiert.

Bemerkung 2. Die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ wird nach dieser Definition als die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k+N}$ verstanden. Alternativ kann man die Reihe auch als die Folge der Partialsummen $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s'_n \coloneqq \sum_{k=N}^{n} a_k$$

definieren. Dies macht praktisch keinen Unterschied, da dann

$$s'_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n < N, \\ s_{n-N} & \text{falls } n \geq N. \end{cases}$$

Die Folge (s'_n) entsteht also aus der Folge (s_n) durch Auffüllen mit Nullen.

Man bemerke, dass man mit der Notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sowohl die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch der Grenzwert dieser Folge bezeichnet. Soll gezeigt werden, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist damit gemeint, dass die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren soll. Soll der Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimmt werden, so soll der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ ermittelt werden.

Definition 3. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Die Folge (a_n) heißt dann *absolut summierbar*.

Bemerkung 4. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, also $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, so schreibt man für $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ebenfalls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet man aber in diesen Fällen nicht als konvergent.

Übung 5.
Zeigen Sie, dass für alle $-1 < q < 1$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Wert. Man bezeichnet Reihen dieser Form als *geometrische Reihe.*

Übung 6.
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ gegen ∞ divergiert. Man bezeichnet diese Reihe als die *harmonische Reihe.*

3 Grundlegende Eigenschaften konvergenter Reihen

Wir wollen nun einige grundlegende Eigenschaften von (konvergenten) Reihen angeben und beweisen.

Lemma 5. *Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$, so ist (a_n) eine Nullfolge, d.h. die Folge (a_n) konvergiert und es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Beweis. Wir betrachten die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert bedeutet, dass die Folge (s_n) konvergiert. Es sei

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Für alle $n \geq 1$ ist

$$s_n - s_{n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = a_n.$$

Durch die üblichen Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich daher, dass

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

für $n \to \infty$. Also ist (a_n) konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

Übung 7.
Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$?

Man beachte, dass die Umkehrung des Lemmas nicht gilt, d.h. nicht jede Nullfolge ist auch summierbar. Ein einfaches Gegenbeispiel hierfür ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Proposition 6. 1. *Konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

2. *Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ so konvergiert für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k)$ und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

3. *Für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergiert. Es ist dann*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich direkt aus den bekannten Rechenregeln für endliche Summen und konvergente Folgen. Ein genaues Formulieren bleibt den Lesern als Übung überlassen. □

Korollar 7. *Die Menge der summierbaren Folgen*

$$\Sigma := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ ist summierbar}\}$$

bildet unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und die Abbildung

$$\Sigma \to \mathbb{R}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ist $\mathbb{R}$-linear.

Übung 8.

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^{3+2k}$ und den Grenzwert, falls die Reihe konvergiert.

Wir erhalten aus dem Lemma auch, dass $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$, denn wir haben

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0.$$

Wie bereits für endliche Summen gilt auch für Reihen eine Dreiecksungleichung (die sich in der Praxis als sehr nützlich erweist).

Lemma 8. *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis des Lemmas. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent, so haben wir $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$ und die Aussage ist klar. Wir gehen daher davon aus, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ absolut konvergiert.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung für endliche Summen

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$

weshalb wir im Grenzwert

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

haben. □

Wir wollen nun auf den Zusammenhang zwischen konvergenten und absolut konvergenten Reihen zurückkommen.

Lemma 9. *Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, also $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Wir wollen zeigen, dass (s_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir für alle $m, m' \geq n$

$$|s_m - s_{m'}| = \left| \sum_{k=\min\{m,m'\}+1}^{\max\{m,m'\}} a_k \right| \leq \sum_{k=\min\{m,m'\}+1}^{\max\{m,m'\}} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|.$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, ist $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| = 0$. Also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Für $m, m' \geq N$ ist dann nach der obigen Ungleichung $|s_m - s_{m'}| < \varepsilon$. $\square$

Wie wir noch sehen werden gilt die Umkehrung des Lemmas nicht, d.h. es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind.

Lemma 10. *Es seien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *Reihen mit* $0 \leq a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Beweis. Für die Partialsummen gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

und die Folgen der Partialsummen sind monoton steigend. Die Aussage ergibt sich damit direkt daraus, dass Monotonie von Folgen unter Grenzwerten erhalten bleibt. $\square$

4 Konvergenzkriterien

Wir wollen nun Kriterien entwickeln, mit denen sich entscheiden lässt, ob eine Folge (absolut) konvergiert. Lemma 5 liefert uns bereits die notwendige Bedingung, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge seien muss, damit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Wie wir bereits wissen, ist diese Bedingung aber nicht hinreichend. Solche hinreichenden Bedingungen wollen wir nun ermitteln. Dabei spielt die absolute Konvergenz eine besondere Rolle, da sich diese oftmals einfacher untersuchen lässt, als nur die Konvergenz selbst.

4.1 Majoranten- und Minorantenkriterium

Eine der einfachsten Ideen um die absolutive Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ zu untersuchen besteht darin, die Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ passend gegen eine konvergente, bzw. divergente Reihe abzuschätzen.

Lemma 11. *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe reeller Zahlen und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $b_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ist* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$, *so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent. (Majorantenkriterium)*

2. *Ist $b_n \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent. (Minorantenkriterium)*

Beweis. 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

also die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt, und somit konvergent.

2. Wäre $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so würde die Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergieren. Nach dem Majorantenkriterium würde dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, im Widerspruch zur Annahme, dass $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$. □

Übung 9.
Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Übung 10.
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergiert.

Das Majorantenkriterium führt zusammen mit der geometrischen Reihe als Majorante zu zwei wichtigen Konvergenzkriterien, dem *Quotientenkriterium* und dem *Wurzelkriterium.*

4.2 Quotientenkriterium

Ein erstes wichtes Konvergenzkriterium, dass durch den Vergleich mit der harmonischen Reihe entsteht, ist das *Quotientenkriterium.*

Proposition 12. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gebe $0 \leq y < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+1}/a_n| \leq y$ für alle $n \geq N$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| &= \sum_{k=N}^{\infty} |a_N| \prod_{j=N}^{k-1} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = |a_N| \sum_{k=N}^{\infty} \prod_{j=N}^{k-1} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \\ &\leq |a_N| \sum_{k=N}^{\infty} y^{k-N} = |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{|a_N|}{1-y}, \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \frac{|a_N|}{1-y} < \infty.$$ □

Wie wir bereits wissen, sind die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums äquivalent dazu, dass $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$. Man bemerke jedoch, dass sich für den Fall $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| \geq 1$ keine Aussage über die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ treffen lässt.

Übung 11.
Geben Sie jeweils divergente und absolut konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ an, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \infty.$$

Übung 12.
Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k/k!$, $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/(k^3+5)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k$ auf Konvergenz.

Übung 13.
Es sei $-1 < q < 1$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$ konvergiert und bestimmen sie den Grenzwert.

Übung 14.
Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ absolut konvergiert, und für welche x sie absolut konvergiert.

4.3 Wurzelkriterium

Ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium, dass sich mithilfe der geometrischen Reihe ergibt, ist das *Wurzelkriterium.*

Proposition 13. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und es gebe $0 \le y < 1$ und $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 1$, so dass $|a_n|^{1/n} \le y$ für alle $n \ge N$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.*

Beweis. Für alle $n \ge N$ gilt $|a_n|^{1/n} \le y$ und somit $|a_n| \le y^n$. Daher ist

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=N}^{\infty} y^k = y^N \sum_{k=N}^{\infty} y^{k-N} = y^N \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{y^N}{1-y},$$

und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \frac{y^N}{1-y} < \infty. \qquad \square$$

Wie wir bereits wissen, sind die Voraussetzungen des Wurzelkriteriums äquivalent dazu, dass $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$. Wie bereits beim Quotientenkriterium können wir im Fall $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$ keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe treffen. Im Gegensatz zum Quotientenkriterium wissen wir jedoch im Fall $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1$, dass die Reihe divergiert!

Übung 15.
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, falls $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1$.

Bemerkung 14. Es lässt sich zeigen, dass das Wurzelkriterium stärker ist als das Quotientenkriterium, d.h. wenn sich absolute Konvergenz durch das Quotientenkriterium zeigen lässt, dann auch durch das Wurzelkriterium. Insbesondere hilft in den Fällen, in denen das Wurzelkriterium keine Aussage trifft (also wenn $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$), auch das Quotientenkriterium nicht weiter.

Übung 16.
Gebe eine divergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$ an.

Übung 17.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^k$?

4.4 Cauchysches Verdichtungskriterium

Proposition 15. *Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$ konvergiert.*

Beweis. Wir haben
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k.$$
Da (a_n) monoton fallend ist, ist für alle $\ell \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \leq 2^\ell a_{2^\ell}$$
sowie
$$\sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \geq 2^\ell a_{2^{\ell+1}}.$$

Konvergiert die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$, so konvergiert wegen
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$$
auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so konvergiert wegen
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \geq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}}$$
dann auch die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}}$, und wegen
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$$
damit auch die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$. □

Übung 18.
Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$ konvergiert. (Diese Reihen sind die *allgemeinen harmonischen Reihen.*)

4.5 Leibniz-Kriterium

Definition 16. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *alternierend*, falls

$$\operatorname{sgn} a_n = -\operatorname{sgn} a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wenn sich also die Vorzeichen der a_n durchgehend ändern. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt alternierend, falls die Folge (a_n) alternierend ist.

Die bisherigen Konvergenzkriterien helfen uns nur die absolute Konvergenz einer Reihe zu untersuchen. Ist eine Folge konvergent, aber nicht absolut konvergent, so helfen sie uns nicht weiter. Im Falle von alternierenden Reihen kann uns das Leibniz-Kriterium weiterhelfen.

Proposition 17. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (insbesondere ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.*

Beweis. Wir betrachten die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge (a_n) monoton fallend ist, ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0.$$

Die Teilfolge (s_{2n}) ist also monoton fallend. Analog ergibt sich, dass die Teilfolge (s_{2n+1}) monoton steigend ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir außerdem

$$s_{2n} \geq s_{2n} - a_{2n+1} = s_{2n+1}.$$

Es ist also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots \geq s_{2n} \geq s_{2n+1},$$

sowie

$$s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq \cdots \geq s_5 \geq s_3 \geq s_1.$$

Die Teilfolge (s_{2n}) ist also durch s_1 nach unten beschränkt, und die Teilfolge (s_{2n+1}) durch s_0 nach oben beschränkt. Die Teilfolgen (s_{2n}) und (s_{2n+1}) konvergieren also.

Es sei $s := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ und $s' := \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$. Da

$$s - s' = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

ist $s = s'$. Also ist bereits (s_n) selbst konvergent (mit $\lim_{n\to\infty} s_n = s = s'$). □

Übung 19.

Geben Sie eine Reihe an, die zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergent ist.

Übung 20.

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen. Konvergiert dann auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$? Was ist, wenn eine der beiden Reihen absolut konvergent ist?

Übung 21.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1/2$. Bestimmen Sie für möglichst viele $x \in \mathbb{R}$ das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$.

5 Ausblick: Potenzreihen

Wir wollen hier noch einen besonderen Fall von Reihen ansprechen, sogennante Potenzreihen, und ihr Konvergenzverhalten mithilfe des Wurzelkriteriums charakterisieren.

5.1 Definition

Definition 18. Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, wobei (a_k) eine Folge reeller Zahlen ist, und $x \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Man bezeichnet die Zahl a_k als den *k-ten Koeffizienten der Potenzreihe*, und die Folge (a_n) als die *Folge der Koeffizienten der Potenzreihe.*

Allgemeiner bezeichnet man eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ als eine *Potenzreihe mit Entwicklungsstelle* x_0.

Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe hängt zum einen von der Folge der Koeffizienten (a_n) ab und zum anderen von der Stelle $x \in \mathbb{R}$. Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ können wir uns einige grundlegende Fragen stellen:

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$?
- Wenn eine Entwicklungsstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben ist, an welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert dann die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$?
- Inwiefern lässt sich eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Potenzreihe darstellen, d.h. inwiefern ist es möglich, eine Koeffizientenfolge (a_n) mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ zu finden, und für welche x ist dies Darstellung gültig?

Wir wollen hier mithilfe des Wurzelkriteriums zumindest eine Antwort auf die ersten beiden Fragen geben.

5.2 Konvergenzradius

Zunächst bemerken wir, dass es genügt, das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, d.h. mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ zu untersuchen: Für eine gegebene Entwicklungsstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt für eine Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offenbar, dass

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ konvergiert an der Stelle } y \\ \Leftrightarrow &\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert an der Stelle } y - x_0 \end{aligned}$$

Es handelt sich bei dem Konvergenzverhalten von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ also nur um eine verschobe Versions des Konvergenverhaltens von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Um das Verhalten der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ zu untersuchen, wenden wir auf die Reihe das Wurzelkriterium an. Dabei erhalten wir, dass

$$\limsup_{n \to \infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Ist also $|x| \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} < 1$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut, für $|x| \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} > 1$ divergiert sie. Diese Beobachtung motiviert die folgende Definition:

Definition 19. Der *Konvergenzradius* einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Dabei verstehen wir $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$.

Die obigen Beobachtungen lassen sich nun wie folgt formulieren:

Proposition 20. *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann konvergiert die Potenzreihe für $|x-x_0| < \rho$ absolut und divergiert für $|x-x_0| > \rho$.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $x_0 = 0$.

Im Falle $\rho = 0$ ist $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ ist dann

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |x||a_n|^{1/n} = \infty,$$

und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergiert nach dem Wurzelkriterium.

Im Falle $\rho = \infty$ ist $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$. Es ergibt sich dann für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0,$$

so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergiert.

Ist $\rho \in \mathbb{R}$ so ergibt sich, dass

$$|x| < \rho \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} < 1,$$

weshalb die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nach dem Wurzelkriterium für $|x| < \rho$ absolut konvergiert. Analog ergibt sich dass sie für $|x| > \rho$ divergiert. $\square$

5.3 Beispiele

Wir betrachten die Potenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = 0$$

ist der Konvergenzradius der Potenzreihe ∞. Sie konvergiert also für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut. Man bezeichnet diese Potenreihe als die *Exponentialreihe.* Ihr Grenzwert ist die *Exponentialfunktion.*

Definition 21. Die *Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Übung 22.
Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion die Funktionsgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

erfüllt. (*Hinweis*: Betrachten Sie das Cauchy-Product der Exponentialreihe mit sich selbst, d.h. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit

$$a_k = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)}!$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.)

Übung 23.
Zeigen Sie, dass $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (*Hinweis*: Zeigen sie zunächst, dass $\exp(x) > 0$ für alle $x \geq 0$.)

Übung 24.
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Übung 25.
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} x^n.$$

Übung 26.
Geben Sie eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ an, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Übung 27.
Geben Sie eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$ an, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } 0 < x < 2.$$

6 Lösungen der Übungen

Lösung 1.
Sei $a \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ gilt damit nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$||a| - |a_n|| \leq |a - a_n| < \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $|a_n| \to |a|$ für $n \to \infty$.

Die Umkehrung der Aussage gilt nicht: Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ selber konvergiert nicht, aber die Folge der Beträge ist konstant und somit konvergent.

Lösung 2.
Gibt es solche y und N, so ist $\sup_{k\geq N} a_k \leq y$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq N} a_k \leq y < C.$$

Sei andererseits $a \coloneqq \limsup_{n\to\infty} a_n < C$. Da $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k$ gibt es wegen der ε-Charakterisierung des Infimums für alle $\varepsilon > 0$ ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{k\geq N'} a_k < a + \varepsilon$. Für $\varepsilon \coloneqq (C-a)/2 > 0$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{k\geq N} a_k < a + \varepsilon = \frac{C+a}{2} < C.$$

Wählen wir $y \coloneqq a + \varepsilon = (C+a)/2$ so ist also $y < C$ und $a_k \leq y$ für alle $k \geq N$.

Lösung 3.
Es sei $a \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_1.$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ gibt es $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_2.$$

Für $N \coloneqq \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ ist dann $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Lösung 4.
Es genügt, zu zeigen, dass es für jedes $a > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n! \geq a^n$ für alle $n \geq N$, dass also $n!/a^n \geq 1$ für alle $n \geq N$. Hierfür bemerken wir, dass

$$\frac{n!}{a^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{a} \cdots \frac{n-1}{a} \cdot \frac{n}{a} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{a}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{N} > a$. Dann ist

$$\frac{n}{a} \geq \frac{\tilde{N}}{a} > 1 \quad \text{für alle } n \geq \tilde{N},$$

und somit für alle $n \geq \tilde{N}$

$$\frac{n!}{a^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{a} = \prod_{k=1}^{\tilde{N}} \frac{k}{a} \cdot \prod_{k=\tilde{N}+1}^{n} \frac{k}{a} \geq \prod_{k=1}^{\tilde{N}} \frac{k}{a} \cdot \left(\frac{\tilde{N}}{a}\right)^{n-\tilde{N}} .$$

Da $\tilde{N}/a > 1$ ist $\lim_{n\to\infty}(\tilde{N}/a)^{n-\tilde{N}} = \infty$, also auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = \infty.$$

Insbesondere gibt es daher $N \in \mathbb{N}$ mit $n!/a^n \geq 1$ für alle $n \geq N$.

Lösung 5.
Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt bekanntermaßen

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Da $|q| < 1$ ist $\lim_{N\to\infty} q^N = 0$, und es folgt, dass die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{N} q^k)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} q^k = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Lösung 6.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^\ell \frac{1}{2^{\ell+1}} = \frac{n}{2}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} n/2 = \infty$ und die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=1}^{N} 1/k)_{N\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, folgt, dass auch $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} 1/k = \infty$.

Lösung 7.
Wir wissen bereits, dass die Reihe für $|q| < 1$ absolut konvergiert. Für $|q| \geq 1$ ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, da $|q^n| = |q|^n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ somit nicht konvergent.

Lösung 8.
Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3+2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{(2^2)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4^k}.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/4^k$ konvergiert mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Also konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^{3+2k}$ und es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3+2k}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{6}.$$

Lösung 9.
Für alle $k \geq 1$ ist $\sqrt{k} \leq k$ und somit $1/\sqrt{k} \geq 1/k$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$, folgt aus dem Minorantenkriterium, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k} = \infty$.

Für alle $k \geq 1$ ist

$$k! = \prod_{n=1}^{k} n = \prod_{n=2}^{k} n \geq \prod_{n=2}^{k} 2 = 2^{k-1},$$

und somit $1/k! \leq 1/2^{k-1}$. Da die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k!$ konvergiert.

Für alle $k \geq 1$ ist

$$k! = \prod_{n=1}^{k} n \leq \prod_{n=1}^{k} k = k^k,$$

und somit $k^{-k} = 1/k^k \leq 1/k!$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k!$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ konvergiert.

Lösung 10.
Da die Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $|b_k| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ haben wir

$$|a_k b_k| = |a_k||b_k| \leq C|a_k|,$$

und die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} C|a_k|$ folgt direkt aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Lösung 11.
Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \limsup_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n+1} = 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^k$ divergiert ebenfalls, da $(n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \limsup_{n\to\infty} (n+1) \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\geq 1} \geq \limsup_{n\to\infty} n + 1 = \infty,$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \infty.$$

Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{2n} \coloneqq a_{2n+1} \coloneqq 1/2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es ist also $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$. Die Reihe konvergiert aber offenbar mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n2^n} & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent (mit Majorante $(1/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$). Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)} & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ n/2 & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

ist jedoch $\limsup_{n\to\infty} |b_{n+1}/b_n| = \infty$.

Lösung 12.
Es ist

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2^{k+1}/(k+1)!}{2^k/k!} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0,$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k/k!$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

Für alle $n \geq 2$ ist $n^3 \geq 5$ und somit

$$\frac{n^2}{n^3+5} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2n}.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k) = \infty$ ist nach dem Minorantenkriterium $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/(k^3+5) = \infty$.

Da

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+2n+1}{n^2} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

Lösung 13.
Da

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)|q| = |q| < 1$$

konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium. Zur Bestimmung des Grenzwertes $\xi := \sum_{k=1}^{\infty} kq^k$ bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}
\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1} \\
&= q\sum_{k=0}^{\infty} kq^k + q\sum_{k=0}^{\infty} q^k \\
&= q\xi + \frac{q}{1-q}.
\end{aligned}$$

Durch Umstellen ergibt sich, dass $\xi = q/(1-q)^2$.

Lösung 14.

Für $x = 0$ konvergiert die Reihe offenbar absolut. Für $x \neq 0$ haben wir

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

weshalb die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergiert. Die Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

Lösung 15.

Da $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}, n\geq 1} \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k}$ ist

$$1 < \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Es gibt daher für jedes $n \geq 1$ ein $k \geq n$ mit $1 < |a_k|^{1/k}$ und somit $|a_k| > 1$. Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ somit nicht konvergent.

Lösung 16.

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert mit

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1.$$

Lösung 17.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

Diese Reihe konvergiert bekanntermaßen genau dann, wenn $|x/2| < 1$, also wenn $-2 < x < 2$.

Lösung 18.
Für $\alpha \leq 0$ ist $1/n^\alpha = n^{-\alpha} \geq 1$ für alle $n \geq 1$. Die Reihe divergiert dann gegen ∞.

Für $\alpha > 0$ ist die Folge $(1/n^\alpha)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $1/n^\alpha \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty 1/k^\alpha$ daher genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{\ell=0}^\infty 2^\ell \frac{1}{\left(2^\ell\right)^\alpha} = \sum_{\ell=0}^\infty 2^{\ell(1-\alpha)} = \sum_{\ell=0}^\infty \left(2^{1-\alpha}\right)^\ell$$

konvergiert. Dies ist bekanntermaßen genau dann der Fall, wenn $2^{1-\alpha} < 1$, wenn also $\alpha > 1$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty 1/k^\alpha$ konvergiert also genau dann, wenn $\alpha > 1$.

Lösung 19.
Die Folge $(1/n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend mit $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Nach dem Leipniz-kriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k}$. Diese Reihe ist aber nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe divergiert. Man bezeichnet die Reihe $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k/k$ als die *alternierende harmonische Reihe*.

Lösung 20.
Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k/\sqrt{k}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$$

divergiert aber.

Ist eine der beiden Reihen absolut konvergent, so können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass $\sum_{k=0}^\infty a_k$ absolut konvergent ist. Da die Reihe $\sum_{k=0}^\infty b_k$ zumindest konvergent ist (wenn auch nicht notwendigerweise absolut konvergent), ist die Folge (b_k) eine Nullfolge und somit beschränkt (denn alle konvergenten Folgen sind beschränkt). Nach Übung 10 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k b_k$ in diesem Fall absolut.

Lösung 21.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{|x|}{2}.$$

Aus dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_n x^n$ für $|x| < 2$ absolut konvergiert und für $|x| > 2$ divergiert.

Für den Fall $|x| = 2$, also $x = -2$ oder $x = 2$ gibt das Wurzelkriterium, und damit auch das Quotientenkriterium, keine Auskunft. Das Verhalten an diesen Stellen hängt von der konkreten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab: Betrachten wir etwa die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \frac{1}{2^n n} \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{2}.$$

Für $x = 2$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k x^k$ nicht, da es sich dort die harmonische Reihe handelt; für $x = -2$ konvergiert sie, da es sich dort um die alternierende harmonische Reihe handelt. Betrachtet man hingegen die Reihe $(a'_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a'_n = \frac{(-1)^n}{2^n n} \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

so ergibt sich genau das umgekehrte Verhalten, d.h. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ konvergiert an $x = 2$ und divergiert an $x = -2$.

Lösung 22.
Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Per Definition der Exponentialfunktion ist

$$\exp(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!}.$$

Andererseits haben wir

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!}.$$

Da die Exponentialreihe absolut konvergiert erhalten wir, dass die Reihe

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!}$$

existiert und erhalten so durch die üblichen Umordnungssätze für absolut konvergente Reihen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!}.$$

Lösung 23.
Für alle $x \geq 0$ ist

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} = 1 + x \geq 1.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1,$$

also $\exp(-x) = 1/\exp(-x)$. Da $\exp(x) \geq 1$ für alle $x \geq 0$, ergibt sich so, dass

$$\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$$

für alle $x \leq 0$.

Lösung 24.
Es ist

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1,$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k$ ist also 1.

Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$ bemerken wir, dass $(2n+1)! \geq n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit wegen $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$ auch $\lim_{n\to\infty} ((2n+1)!)^{1/n} = \infty$. Daher ist

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{((2n+1)!)^{1/n}} = 0,$$

die Reihe hat also einen Konvergenzradius von ∞.

Lösung 25.
Für alle $n \geq 1$ ist

$$1 \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq \sum_{j=1}^{n} 1 = n,$$

und somit

$$1 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right)^{1/n} \leq n^{1/n}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ folgt aus dem Sandwich-Lemma, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right)^{1/n} = 1.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} (1/j) x^n$ beträgt also 1.

Lösung 26.
Man wähle $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ergibt sich die Aussage aus dem Grenzwert geometrischen Reihe.

Lösung 27.
Für alle $0 < x < 2$ haben wir $|1 - x| < 1$ und deshalb

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 - (1 - x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x - 1)^k.$$