Grundbegriffe der Analysis I in $\mathbb{R}^n$

Jendrik Stelzner

23. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitung

Wir gehen davon aus, dass der Leser mit der Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^n$ vertraut ist. Die *Norm* eines Vektors $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist als

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

definiert.

Auf $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ stimmt die Norm mit dem Betrag überein. Die Norm unter $\mathbb{R}^2$ entspricht unter der üblichen Identifikation von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ dem Betrag auf $\mathbb{C}$; unsere folgenden Betrachtungen erhalten daher auch den Konvergenz- und den Stetigkeitsbegriff auf $\mathbb{C}$.

Die Norm erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| \geq 0$, und es ist genau dann $\|x\| = 0$, wenn $x = 0$.
- Die Norm ist *absolut homogen*, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

- Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt die *Dreiecksungleichung*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Insbesondere ist daher $\|-x\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\|x - y\| = \|y - x\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Übung 1.
Zeigen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\|x - y\| \leq |\|x\| - \|y\|| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Übung 2.

1. Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion subadditiv ist, d.h. dass

$$\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{für alle } x, y \geq 0.$$

2. Folgern sie dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ die beiden Ungleichungen

$$|x_i - y_i| \leq \|x - y\| \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n$$

und

$$\|x - y\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

gelten.

2 Folgen

Definition 1. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $\mathbb{R}^m$, also $x_n \in \mathbb{R}^m$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $x \in \mathbb{R}^m$. Wir sagenn, dass (x_n) gegen x konvergiert, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Wie schon in $\mathbb{R}$ ergibt sich auch in $\mathbb{R}^n$, dass Grenzwerte eindeutig sind.

Lemma 2. *Es sei (x_n) eine Folge auf $\mathbb{R}^m$. Sind $y, y' \in \mathbb{R}^m$ mit $x_n \to y$ und $x_n \to y'$ für $n \to \infty$, so ist $y = y'$.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|y - x_n\| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_1$. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = y'$ gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\|y - x_n\| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_2$. Für $N := \max\{N_1, N_2\}$ ist deshalb für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}\|y - y'\| &= \|y - x_n + x_n - y'\| \\ &\leq \|y - x_n\| + \|x_n - y'\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist $\|y - y'\| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Es muss also $\|y - y'\| = 0$, also $y - y' = 0$ und somit $y = y'$. □

Da die Norme auf $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ mit dem Betrag übereinstimmt, handelt es sich um eine Erweiterung des Konvergenzbegriffes auf $\mathbb{R}$. Die Konvergenz in $\mathbb{R}^m$ lässt sich auch auf die Konvergenz in $\mathbb{R}$ zurückführen. Eine Folge auf $\mathbb{R}^m$ konvergiert nämlich genau dann, wenn sie in jeder einzelnen Koordinate konvergiert.

Lemma 3. *Es sei (x_n) eine Folge auf $\mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^m$. In Koordinaten sei $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$. Dann ist genau dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = x^{(i)}$ für alle $1 \leq i \leq m$.*

Beweis. Ist $x_n \to x$, so ist $\|x_n - x\| \to 0$. Für alle $1 \leq i \leq m$ ist

$$0 \leq |x_n^{(i)} - x^{(i)}| \leq \|x_n - x\| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und daher nach dem Sandwich-Lemma $|x_n^{(i)} - x^{(i)}| \to 0$. Also ist $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Ist andererseits $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$ für alle $1 \leq i \leq m$, so ist $|x_n^{(i)} - x^{(i)}| \to 0$ für alle $1 \leq i \leq m$. Damit ist auch $\sum_{i=1}^m |x_n^{(i)} - x^{(i)}| \to 0$. Da

$$0 \leq \|x_n - x\| \leq \sum_{i=1}^m |x_n^{(i)} - x^{(i)}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist daher nach dem Sandwich-Lemma auch $\|x_n - x\| \to 0$, also $x_n \to x$. $\square$

Bemerkung 4. Für den Fall $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ erhalten wir, dass eine Folge komplexer Zahlen (z_n) genau dann gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn die Folge der Realteile $(\Re(z))$ gegen $\Re(z)$ konvergiert und die Folge der Imaginärteile $(\Im(z))$ gegen $\Im(z)$ konvergiert.

Viele der Eigenschaften und Rechenregeln, die wir für konvergente Folgen auf $\mathbb{R}$ kenne, lassen sich auf Folgen auf $\mathbb{R}^n$ zu verallgemeinern. So sind Grenzwerte auch im Mehrdimensionalen eindeutig und verträglich mit Addition und Skalarmultiplikation. Im Komplexen ergibt sich auch eine Verträglichkeit mit der Multiplikation und Division, wie wir sie schon aus dem reellen kennen.

Übung 3.

Es seien (ξ_n) und (ζ_n) zwei konvergente Folgen komplexer Zahlen mit Grenzwerten $\xi := \lim_{n\to\infty} \xi_n$ und $\zeta := \lim_{n\to\infty} \zeta_n$. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(\xi_n \cdot \zeta_n)$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} (\xi_n \cdot \zeta_n) = \xi \cdot \zeta = \left(\lim_{n\to\infty} \xi_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \zeta_n\right).$$

Für Folgen auf $\mathbb{R}$ kennen wir bereits den Begriff der Cauchy-Folge, und wissen, dass eine Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Dies lässt sich auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern:

Definition 5. Eine Folge (x_n) auf $\mathbb{R}^m$ heißt *Cauchy*-Folge, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\|x_n - x_{n'}\| < \varepsilon$ für alle $n, n' \geq N$.

Wir haben bereits gesehen, dass eine Folge im Mehrdimensionalen genau dann konvergiert, wenn sie in jeder Koordinate konvergiert. Es ergibt sich auch, dass eine Folge im Mehrdimensionalen genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn sie in jeder Komponente eine Cauchy-Folge ist.

Übung 4.
Es sei (x_n) eine Folge auf $\mathbb{R}^m$ mit Koordinaten $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (x_n) genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $(x_n^{(i)})$ für alle $1 \leq i \leq m$ eine Cauchy-Folge ist.

Proposition 6 (Vollständigkeit von $\mathbb{R}^m$)**.** *Es sei (x_n) eine Folge auf $\mathbb{R}^m$. Dann ist (x_n) genau dann eine Cauchy-Folge, wenn (x_n) konvergiert.*

Beweis. (x_n) ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn (x_n) in jeder Koordinate eine Cauchy-Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist dies äquivalent dazu, dass (x_n) in jeder Koordinate konvergiert. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass (x_n) auf $\mathbb{R}^m$ konvergiert. $\square$

3 Stetigkeit

Nachdem wir nun den Begriff der Folgenkonvergenz ins Mehrdimensionale verallgemeinert haben, wollen wir uns jetzt dem Begriff der Stetigkeit zuwenden.

Definition 7. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \colon X \to \mathbb{R}^m$. f heißt *stetig an der Stelle* $x \in X$ falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in X.$$

Da die Norm auf $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ mit dem Betrag übereinstimmt ist dieser Stetigkeitsbegriff eine Verallgemeinerung der ε-δ-Stetigkeit auf $\mathbb{R}$. Für den Fall $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ erhalten wir so auch einen Stetigkeitsbegriff für Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$.

Übung 5.
Zeigen Sie, dass die Norm

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$$

stetig ist.

Übung 6.
Zeigen Sie, dass die Projektion $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ stetig ist.

Eine wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen besteht darin, dass die Einschränkung stetiger Funktionen wieder stetig ist:

Übung 7.
Es seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \colon B \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: Ist f stetig, so ist auch die Einschränkung $f|_A$ stetig. (Die Einschränkung ist als

$$f|_A \colon A \to \mathbb{R}^m, a \mapsto f(a)$$

definiert.)

Wir haben bereits gesehen, dass sich Stetigkeit auf $\mathbb{R}$ auch durch Folgenstetigkeit verstehen lässt. Dies gilt auch für Stetigkeit im Mehrdimensionalen.

Lemma 8. *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \colon X \to \mathbb{R}^m$ und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist stetig an x.*

2. *Für jede Folge (x_n) auf X mit $x_n \to x$ konvergiert auch die Folge $(f(x_n))$ und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Beweis. Angenommen f ist stetig an x. Es sei (x_n) eine Folge auf X mit $x_n \to x$. Wir müssen zeigen, dass $f(x_n) \to f(x)$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da f stetig an x ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in X \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Da $x_n \to x$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x - x_n| < \delta$ für alle $n \geq N$. Wir erhalten damit, dass $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass $f(x_n) \to f(x)$.

Angenommen f ist nicht stetig an x. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $y \in X$ gibt, so dass zwar $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es daher für alle $n \geq 1$ ein $x_n \in X$ mit $|x - x_n| < 1/n$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Es ist dann (x_n) eine Folge auf X mit $x_n \to x$, aber $(f(x_n))$ konvergiert nicht gegen $f(x)$, da $|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Auch im Mehrdimensionalen bezeichnet man diese beiden Konvergenzbegriffe als *ε-δ-Stetigkeit* und *Folgenstetigkeit*.

Übung 8.

Zeigen Sie erneut die Stetigkeit der Projektionen $\pi_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_m) \to x_i$, indem Sie zeigen, dass sie folgenstetig sind.

Übung 9.

Untersuchen Sie ob sich die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lässt, d.h. ob es eine stetige Funktion $\hat{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\hat{f}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = f$.

Wir haben bereits gesehen, dass sich Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ durch Konvergenz in den einzelnen Koordinaten beschreiben lässt. Eine analoge Aussage gilt auch für die Stetigkeit: Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn sie in jeder Koordinate stetig ist.

Lemma 9. *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $f \colon X \to \mathbb{R}^k$ mit Koordinaten $f = (f_1, \dots, f_k)$, d.h. $f_1, \dots, f_k \colon X \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Dann ist f genau dann stetig an der Stelle $x \in X$, falls f_i für alle $1 \leq i \leq k$ stetig an der Stelle x ist.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass die f genau dann folgenstetig an x ist, wenn alle f_i alle folgenstetig an x sind. Es sei (x_n) eine Folge auf X mit $x_n \to x$. Dass $f(x_n) \to f(x)$ bedeutet in Koordinaten, dass

$$(f_1(x_n), \dots, f_k(x_n)) \to (f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

Dies ist nach Lemma 3 äquivalent dazu, dass $f_i(x_n) \to f_i(x)$ für alle $1 \leq i \leq k$. Dass f mit der Folge (x_n) verträglich ist, ist also äquivalent dazu, dass die f_i alle veträglich mit (x_n) sind. Deshalb ist f genau dann folgenstetig an x, wenn die f_i alle folgenstetig an x sind. □

4 Umgebungen und offene Mengen

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 10. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$B_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$

der *offene ε-Ball um x*.

Bemerkung 11. Im Eindimensionalen ist $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Bemerkung 12. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$ ist $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon'}(x)$ und für $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ ist $B_\varepsilon(x) \subsetneq B_{\varepsilon'}(x)$.

Mithilfe von ε-Bällen lassen sich die Begriffe einer Umgebung und einer offenen Menge auf das Mehrdimensionale verallgemeinern.

Definition 13. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Umgebung von x*, falls es es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq V$.

Übung 10.
Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. $\mathbb{R}^n$ ist eine Umgebung von x.
2. Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge mit $V \subseteq W$, so ist auch W eine Umgebung auf W.
3. Sind $V_1, \dots, V_s \subseteq \mathbb{R}^n$ Umgebungen von x, so ist auch $V_1 \cap \dots \cap V_s$ eine Umgebung von x.

Bemerkung 14. Ist X eine Menge, so ist ein *Filter auf X* eine Kollektion von Teilmengen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so dass

1. $\mathcal{F}$ ist nicht leer,
2. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
3. für alle $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{F}$ ist auch $S_1 \cap \dots \cap S_n \in \mathcal{F}$, und
4. ist $S \in \mathcal{F}$, so ist für alle $T \subseteq X$ mit $S \subseteq T$ auch $T \in \mathcal{F}$.

Übung 10 zeigt, dass die Umgebungen eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ einen Filter bilden.

Definition 15. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, falls es für alle $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Übung 11.
Zeigen Sie, dass offene ε-Bälle offen sind, d.h. dass $B_\varepsilon(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ offen ist.

Übung 12.
Zeigen Sie, dass $V \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}^n$ ist, falls es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und $U \subseteq V$ gibt.

Übung 13.
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass das offene Intervall (a, b) offen ist. Zeigen sie ferner, dass das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ nicht offen ist.

Übung 14.
Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}$$

offen ist.

Beweis. Es sei $x \in U$, also $\|x\| > 1$. Wir setzen

$$\varepsilon := \|x\| - 1.$$

Da $\|x\| > 1$ ist $\varepsilon > 0$. Wir behaupten, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Dies ergibt sich daraus, dass für alle $y \in B_\varepsilon(x)$

$$\|y\| = \|x - (x - y)\| \geq |\|x\| - \|x - y\|| \geq \|x\| - \|y - x\| > \|x\| - (\|x\| - 1) = 1,$$

und somit $y \in U$. $\square$

Übung 15.
Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften offener Mengen:

1. Die Teilmengen $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen.
2. Sind $U_1, \ldots, U_s \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist auch der Schnitt $U_1 \cap \cdots \cap U_s$ offen. Endliche Schnitte offener Mengen sind also offen.
3. Gilt die Aussage auch für unendliche Schnitte?
4. Für eine Kollektion $\{U_i \mid i \in I\}$ offener Mengen $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Lemma 16. *Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn U eine Umgebung für jedes $x \in U$ ist.*

Beweis. Wenn U offen ist, gibt es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, so dass U eine Umgebung von x ist. Also ist U für jedes $x \in U$ eine Umgebung.

Angenommen, U ist für jedes $x \in U$ eine Umgebung. Dann gibt es für alle $x \in U$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$. Dann ist

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U,$$

also $U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$. Da ε-Bälle offen sind, ist U als Vereinigung offener Mengen offen.

Der zweite Teil lässt sich auch per Widerspruch beweisen: Ist U nicht offen, so gibt es ein $x \in U$, so dass U keine Umgebung von x ist. Dann gibt es kein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Dann ist U auch keine Umgebung von x. Also ist U nicht für jedes $x \in U$ eine Umgebung. $\square$

4.2 Charakterisierung von Folgenkonvergenz

Per Definition ist für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$

$$\|x - y\| < \varepsilon \Leftrightarrow y \in B_\varepsilon(x).$$

Wir können daher die Definition der Folgenkonvergenz auch durch ε-Bälle angeben: Ist (x_n) eine Folge auf $\mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned}
&(x_n) \text{ konvergiert mit } x_n \to x \text{ für } n \to \infty \\
\Leftrightarrow\, &\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es } N \in \mathbb{N} \text{ mit } \|x - x_n\| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \\
\Leftrightarrow\, &\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es } N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n \in B_\varepsilon(x) \text{ für alle } n \geq N \\
\Leftrightarrow\, &\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ ist } x_n \in B_\varepsilon(x) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 17. Wir sagen, dass eine Eigenschaft für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ gilt, wenn sie nur für endlich viele n nicht gilt. Dass eine Eigenschaft nicht für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ist äquivalent dazu, dass sie für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ nicht gilt.

Aus der obigen Formulierung kann man durch Verwendung des Umgebungsbegriffes auch noch das ε entfernen.

Lemma 18. *Es sei (x_n) eine Folge auf $\mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Dann sind äquivalent:*

1. *(x_n) konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*
2. *Für jede Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von x ist $x_n \in V$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Angenommen (x_n) konvergiert gegen x. Ist $V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Umgebung von x, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Da $x_n \to x$ ist $x_n \in B_\varepsilon(x) \subseteq V$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Angenommen (x_n) konvergiert nicht gegen x. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $x_n \notin B_\varepsilon(x)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. $B_\varepsilon(x)$ ist aber eine Umgebung von x. $\square$

4.3 Charakterisierung von Stetigkeit

Auch der Begriff der Stetigkeit lässt sich durch die Begriffe der ε-Bälle formulieren: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, so ist für $x \in X$

$$\begin{aligned}
&f \text{ ist stetig an } x \\
\Leftrightarrow\, &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow\, &\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0 \text{ mit } f(B_\delta(x) \cap X) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \\
\Leftrightarrow\, &\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(x) \cap X \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))).
\end{aligned}$$

Übung 16.
Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *isolierter Punkt*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \cap X = \{x\}$. Zeigen Sie, dass f an allen isolierten Punkten stetig ist.

Auch hier lässen sich ε und δ durch Verwendung von Umgebungen und offenen Mengen umgehen: Lokal lässt sich Stetigkeit durch Umgebungen charakterisieren und global durch offene Mengen.

Lemma 19. *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon X \to \mathbb{R}^m$.*

1. *Es sei $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

   (a) *f ist stetig an x.*

   (b) *Für jede Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^m$ von $f(x)$ gibt es eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x mit*
   $$f^{-1}(W) = V \cap X.$$

2. *Es sind äquivalent:*

   (a) *f ist stetig.*

   (b) *Für jede offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit*
   $$f^{-1}(V) = U \cap X.$$

Beweis. 1. (1a $\Rightarrow$ 1b) Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq W$. Da f stetig an x ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$B_\delta(x) \cap X \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(W).$$

(1b $\Rightarrow$ 1a) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $B_\varepsilon(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$ ist, gibt es eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x mit $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) = V \cap X$, also $f(V \cap X) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Da V eine Umgebung von x ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq V$. Da

$$f(B_\delta(x)) \subseteq f(V) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$$

ist damit

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in Y \text{ mit } \|x - y\| < \delta.$$

2. Zum Beweis dieser Äquivalenz werden wir die gerade gezeigte Äquivalenz verwenden.

   (2a $\Rightarrow$ 2b) Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge. Da f stetig ist, ist f an jeder Stelle $x \in X$ stetig. Für jedes $x \in f^{-1}(W) \subseteq X$ ist W eine Umgebung von $f(x)$. Also gibt es nach dem ersten Teil des Lemmas für jedes $x \in f^{-1}(W)$ eine Umgebung V_x von x mit $f^{-1}(W) = V_x \cap X$. Für jedes x ist V_x eine Umgebung von x, es gibt also ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq V_x$. Wir betrachten die offene Menge $U \coloneqq \bigcup_{x \in X} B_{\varepsilon_x}(x)$. Es ist

   $$\begin{aligned} f^{-1}(W) &= \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} B_{\varepsilon_x}(x) \cap X \\ &\subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} \underbrace{V_x \cap X}_{= f^{-1}(W)} = f^{-1}(W), \end{aligned}$$

   und damit bereits

   $$f^{-1}(W) = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} B_\varepsilon(x) \cap X = U \cap X.$$

   (2b $\Rightarrow$ 2a) Es sei $x \in X$. Es sei W eine Umgebung von $f(x)$. Da W eine Umgebung von $f(x)$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq W$. Nach

Annahme gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(B_\varepsilon(x)) = U \cap X$. Da $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(x))$ muss $x \in U$. Also ist U eine Umgebung von x (denn U ist offen). Wir setzen

$$V \coloneqq f^{-1}(W) \cup U.$$

Da U eine Umgebung von x ist, und $U \subseteq V$, ist auch V eine Umgebung von x. Für diese Umgebung V von x gilt

$$\begin{aligned} V \cap X &= (f^{-1}(W) \cup U) \cap X = (f^{-1}(W) \cap X) \cup (U \cap X) \\ &= f^{-1}(W) \cup f^{-1}(B_\varepsilon(x)) = f^{-1}(W). \end{aligned}$$

Das zeigt nach dem ersten Teil des Lemmas, dass f stetig an x ist. □

Bemerkung 20. Wir erhalten insbesondere, dass eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau dann stetig ist, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ auch ihr Urbild $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist.

Die Charakterisierung von Stetigkeit durch Umgebungen und offene Mengen mag zunächst sehr kompliziert und unpraktisch erscheinen; ihn der Praxis ist erspart sie jedoch viel Rechenarbeit. Eine häufige Anwendung dieser Charakterisierung besteht etwa darin, dass man die Offenheit einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ zeigt, indem man eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ konstuiert, so dass $U = f^{-1}(V)$; dies kann zu kurzen und eleganten Beweisen führen.

Beispiel(e).

- Wir wollen zeigen, dass die Menge

$$U \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}$$

offen ist. Hierfür betrachten wir die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|.$$

Wir wissen bereits, dass f stetig ist. Da die Menge $(1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ offen ist, ist auch $U = f^{-1}((0, \infty))$ offen.

- Die Offenheit von ε-Bällen ergibt sich dadurch, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, y \mapsto \|x - y\|$$

stetig ist, die Menge $(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ offen ist, und $B_\varepsilon(x) = f^{-1}((0, \varepsilon))$.

Übung 17.
Zeigen Sie, dass die Menge

$$U \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y + 2 > y^2 - 6x^3\}$$

offen ist.

Beweis. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$x + 3y + 2 > y^2 - 6x^3 \Leftrightarrow 6x^3 + x - y^2 + 3y > 2.$$

Da die Projektionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_i$ für $i = 1, 2$ stetig sind, ist nach den üblichen Rechenregel für stetige Funktionen auch

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 6x^3 + x - y^2 + 3y$$

stetig. Da $(2, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ offen ist, ergibt sich, dass auch $U = f^{-1}((2, \infty))$ offen ist. □

Übung 18.
Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ die Menge

$$U := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| > \varepsilon\}$$

offen ist.

5 Abgeschlossene Mengen

Definition 21. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement $A^c \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist.

Definition 22. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$\overline{B}_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\}$$

der *abgeschlossene ε-Ball um x.*

Beispiel(e).

- Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ abgeschlossen, denn $[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ ist offen.
- Abgeschlossene ε-Bälle sind abgeschlossen, denn für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ist

  $$\overline{B}_\varepsilon(x)^c = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| > \varepsilon\}$$

  offen.
- Punkte sind abgeschlossen, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist die einpunktige Menge $A\{x\} \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen: Es ist $\{x\}^c = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ ist $y \neq x$ und somit $\varepsilon := \|x - y\| > 0$. Da $x \notin B_\varepsilon(y)$ ist $B_\varepsilon(y) \subseteq A^{\{}x\}$. Das zeigt, dass $A \setminus \{x\}$ offen ist, also $\{x\}$ abgeschlossen.
- Das offene Intervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht abgeschlossen, denn

  $$(0, 1)^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$$

  ist nicht offen (die Menge enthält keine ε-Bälle um 0 oder 1).
- Es lässt sich zeigen, dass die einzigen Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind.

Man beachte, dass nicht jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen ist. $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ etwa ist nicht offen (die Menge enthält keinen ε-Ball um 0) aber auch nicht abgeschlossen, da

$$[0, 1)^c = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$$

nicht offen ist (denn die Menge enthält keinen ε-Ball um 1).

Übung 19.
Zeigen Sie:

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen.
2. Sind $A_1, \dots, A_s \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so ist auch $A_1 \cup \dots \cup A_s$ abgeschlossen.
3. Ist $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Kollektion von abgeschlossenen Teilmengen $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

Übung 20.
Es seien M und N Mengen und $f\colon M \to N$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $Y \subseteq N$
$$f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c.$$
(Also ist $f^{-1}(N \setminus Y) = M \setminus f^{-1}(Y)$.)

Wie wir bereits gesehen haben, ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau dann offen, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ auch das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Wir können diese Stetigkeit nun auch über Abgeschlossen Mengen charakterisieren:

Lemma 23. *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon \mathbb{R}^m$. Dann ist f genau dann stetig, falls es für jede abgeschlossene Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^m$ eine abgeschlossen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f^{-1}(C) = A \cap X$.*

Insbesondere ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau dann offen, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen sind.

Beweis. Angenommen f ist stetig. Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen. Da C abgeschlossen ist, ist C^c offen. Da f stetig ist, gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(C^c) = U \cap X$. Daher ist
$$f^{-1}(C) = X \setminus (X \setminus f^{-1}(C)) = X \setminus f^{-1}(C^c) = X \setminus (U \cap X) = U^c \cap X.$$
Da U offen ist, ist U^c abgeschlossen.

Es sei andererseits $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist U^c abgeschlossen, es gibt also nach Annahe eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(U^c) = A \cap X$. Analog zur vorherigen Rechnung ergibt sich, dass
$$f^{-1}(U) = A^c \cap X;$$
da A abgeschlossen ist, ist A^c offen, also ist f stetig an x. □

Diese Charakterisierung stetiger Abbildungen erlaubt es uns mit wenig Arbeit die Abgeschlossenheit einer Menge zu überprüfen.

Beispiel(e).

- Die n-dimensionale Sphäre
$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$
ist abgeschlossen, denn die Norm
$$f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$$
ist stetig, $\{1\} \in \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und $S^n = f^{-1}(\{1\})$.

- Der n-dimensionale Einheitswürfel $[0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen: Für $1 \leq i \leq n$ definieren wir

  $$A_i \coloneqq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

  Es ist klar, dass $[0,1]^n = A_1 \cap \dots \cap A_n$. Da (beliebige) Schnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind, genügt es zu zeigen, dass die A_i abgeschlossen sind. Dies ergibt sich daraus, dass die kanonischen Projektionen $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig sind, das Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $A_i = \pi_i^{-1}([0,1])$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Eine wichtige Eigeschaft von abgeschlossenen Mengen besteht darin, dass sie unter Grenzwerten von Folgen abgeschlossen sind.

Lemma 24. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

1. *A ist abgeschlossen.*
2. *Für jede Folge (a_n) auf A, die in $\mathbb{R}^n$ konvergiert, ist auch $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$.*

Beweis. Angenommen A ist abgeschlossen. Es sei (x_n) eine konvergente Folge auf $\mathbb{R}^n$ mit $x_n \to x$ aber $x \notin A$. Da $x \notin A$ ist $x \in A^c$, und da A abgeschlossen ist, ist A^c offen. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A^c$. Da $x_n \to x$ ist $x_n \in B_\varepsilon(x)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $x_n \in A^c$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, bzw. äquivalent $x_n \in A$ für nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere kann (x_n) keine Folge auf A sein.

Angenommen A ist nicht abgeschlossen. Dann ist A^c nicht offen. Es gibt also ein $x \in A^c$, so dass $B_\varepsilon(x) \nsubseteq A^c$ für alle $\varepsilon > 0$, bzw. äquivalent $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Insbesondere gibt es daher für alle $n \geq 1$ ein $a_n \in A$ mit $\|x - a_n\| < 1/n$. Dann ist per Konstruktion $a_n \to x$, aber da $x \in A^c$ ist $x \notin A$. ☐

Beispiel(e).

- Wir betrachten noch einmal die n-dimensionale Sphäre

  $$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

  Ist (x_n) eine Folge auf S^n, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ konvergiert, so ist $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit der Norm $\|\cdot\|$ ist dann auch

  $$\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

  also $x \in S^n$. Also ergibt sich auch durch diese Charakterisierung der Abgeschlossenheit, dass S^n abgeschlossen ist.

- Allgmeiner ergibt sich so auch die Aussage, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind: Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen. Für jede Folge (x_n) auf $f^{-1}(A)$ ist dann $f(x_n) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert (x_n) gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, so konvergiert $f(x_n)$ wegen der Stetigkeit von f gegen $f(x)$. Da A abgeschlossen ist muss auch $f(x) \in A$. Damit ist dann auch $x \in f^{-1}(A)$.

- Auch die Abgeschlossenheit des Einheitswürfels $[0,1]^m \subseteq \mathbb{R}^m$ ergibt sich durch die Abgeschlossenheit unter Grenzwerten: Es sei (x_n) eine Folge auf $[0,1]^m$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^m$ konvergiert. In Koordinaten sei $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$. Da $x_n \to x$ ist $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$ für alle $1 \leq i \leq m$. Da $0 \leq x_n^{(i)} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $0 \leq x^{(i)} \leq 1$ für alle $0 \leq i \leq m$. Also ist auch $x \in [0,1]^m$.

Das letzte Beispiel lässt sich Verallgemeinern:

Übung 21.

Es seien $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $A_1 \times \cdots \times A_m \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen ist.

6 Lösungen

Lösung 1.
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\| = \|y + x - y\| \leq \|y\| + \|x - y\|$$

und damit $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, sowie

$$\|y\| = \|x + y - x\| \leq \|x\| + \|y - x\| \leq \|x\| + \|x - y\|$$

und damit $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Es ist

$$|\|x\| - \|y\|| = \|x\| - \|y\| \quad \text{oder} \quad |\|x\| - \|y\|| = \|y\| - \|x\|;$$

in beiden Fällen erhalten wir, dass $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Lösung 2.

1. Für alle $x, y \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} &\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ \Leftrightarrow\, &x + y \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \\ \Leftrightarrow\, &0 \leq \sqrt{xy}, \end{aligned}$$

   was offenbar gilt.

2. Für alle $1 \leq i \leq n$ ist wegen der Monotonie der Wurzel

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i|,$$

   was die erste Ungleichung zeigt. Die zweite Ungleichung folgt mithilfe der Subadditivität der Wurzel durch

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Lösung 3.
Es seien $\xi_n = u_n + iv_n$ und $\zeta_n = x_n + iy_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegungen in Real- und Imaginärteile, sowie $\xi = u + iv$ und $\zeta = x + iy$ die Zerlegungen der Grenzwerte in Real- und Imaginärteile. Dass $\xi_n \to \xi$ ist äquivalent dazu, dass $u_n \to u$ und $v_n \to v$, und dass $\zeta_n \to \zeta$ ist äquivalent dazu, dass $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Nach Lemma 3 und den bekannten Rechenregeln für die Grenzwerte reelle Folgen folgt damit, dass

$$\begin{aligned} \xi_n \cdot \zeta_n &= (u_n + iv_n) \cdot (x_n + iy_n) = (u_n x_n - v_n y_n) + i(u_n y_n + v_n x_n) \\ &\to (ux - vy) + i(uy + vx) = (u + iv) \cdot (x + iy) = \xi \cdot \zeta. \end{aligned}$$

Lösung 4.
Wir wissen bereits, dass für alle $n, n' \in \mathbb{N}$

$$\left|x_n^{(i)} - x_{n'}^{(i)}\right| \leq \|x_n - x_{n'}\| \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m,$$

und dass

$$\|x_n - x_{n'}\| \leq \sum_{i=1}^{m} \left|x_n^{(i)} - x_{n'}^{(i)}\right|.$$

Ist (x_n) eine Cauchy-Folge, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_n - x_{n'}\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und somit auch $|x_n^{(i)} - x_{n'}^{(i)}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Es sei andererseits $(x_n^{(i)})$ für alle $1 \leq i \leq n$ eine Cauchy-Folge. Wir wollen zeigen, dass dann auch (x_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Für jedes $1 \leq i \leq m$ gibt es, da $(x_n^{(i)})$ eine Cauchy-Folge ist, ein $N_i \in \mathbb{N}$ mit $|x_n^{(i)} - x_{n'}^{(i)}| < \varepsilon/m$ für alle $1 \leq i \leq m$. Wir setzen $N \coloneqq \max_{1 \leq i \leq m} N_i$. Für alle $n, n' \geq N$ ist dann

$$\|x_n - x_{n'}\| \leq \sum_{i=1}^{m} \left|x_n^{(i)} - x_{n'}^{(i)}\right| < \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Lösung 5.
Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt. Wir wollen zeigen, dass f stetig an x ist. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ ist nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||.$$

Für $\delta \coloneqq \varepsilon$ ist daher $\|x - y\| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \delta$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass f an x stetig ist, und aus der Beliebigkeit von $x \in \mathbb{R}^n$ folgt, dass x stetig ist.

Lösung 6.
Für den Beweis fixieren wir ein beliebiges $1 \leq i \leq n$. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest. Wir wollen zeigen, dass π_i stetig an x ist. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir wissen, dass für alle $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $|x_i - y_i| \leq \|x - y\|$ gilt. Für $\delta \coloneqq \varepsilon$ haben wir daher, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \delta$

$$|\pi_i(x) - \pi_i(y)| = |x_i - y_i| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass π_i stetig an x ist, und wegen der Beliebigkeit von $x \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir weiter, dass π_i stetig ist.

Lösung 7.
Es sei $x \in A$ beliebig aber fest. Wir wollen zeigen, dass f stetig an x ist. Sie hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $A \subseteq B$ ist auch $x \in B$. Da $f\colon B \to \mathbb{R}^m$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x - b\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(b)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } b \in B.$$

Da $A \subseteq B$ ist deshalb auch

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A.$$

Da $f|_A(a) = f(a)$ für alle $a \in A$ zeigt dies wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$, dass $f|_A$ stetig an x ist. Wegen der Beliebigkeit von $a \in A$ folgt damit, dass $f|_A$ stetig ist.

Lösung 8.

Für den Beweis fixieren ein beliebiges $1 \leq i \leq m$. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest. Wir wollen zeigen, dass π_i an x folgenstetig ist. Sei hierfür (x_n) eine Folge auf $\mathbb{R}^n$ mit $x_n \to x$; in Koordinaten sei $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Dass $x_n \to x$ bedeutet insbesondere, das $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$. Es ist also

$$\pi_i(x_n) = x_n^{(i)} \to x.$$

Das zeigt, dass π_i folgenstetig an x ist, und wegen der Beliebigkeit von $x \in \mathbb{R}^n$, dass π_i folgenstetig ist.

Lösung 9.

Angenommen, f ließe sich zu einer stetigen Funktion $\hat{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Wir betrachten die beiden Folgen (x_n) und (y_n) auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \quad \text{und} \quad y_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Da $1/n \to 0$ ist $x_n \to (0,0)$ und $y_n \to (0,0)$ nach Lemma 3. Da $\hat{f}$ stetig ist konvergieren auch die Folgen $(\hat{f}(x_n))$ und $(\hat{f}(y_n))$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(x_n) = \hat{f}(0,0) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}(y_n).$$

Da $\hat{f}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = f$ ist $\hat{f}(x_n) = f(x_n)$ und $\hat{f}(y_n) = f(y_n)$ für alle $n \geq 1$. Also konvergieren die Folgen $(f(x_n))$ und $(f(y_n))$ und es ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \hat{f}(0,0) = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Wir haben jedoch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

f lässt sich also nicht stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fortsetzen.

Lösung 10.

1. Für beliebige $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n$, also ist $\mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x.
2. Da V eine Umgebung von x ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Da $V \subseteq W$ ist damit auch $B_\varepsilon(x) \subseteq W$. Also ist W eine Umgebung von x.

3. Da die V_i Umgebungen von x sind, gibt es für jedes $1 \leq i \leq s$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq V_i$. Für $\varepsilon := \min_{1 \leq i \leq s} \varepsilon_i > 0$ ist daher

$$B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq V_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq s.$$

Also ist auch $B_\varepsilon(x) \subseteq V_1 \cap \cdots \cup V_s$. Also ist $V_1 \cap \cdots \cap V_s$ eine Umgebung von x.

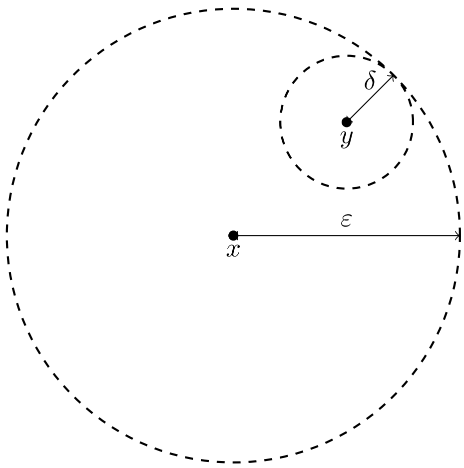
Lösung 11.
Es sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Um zu zeigen, dass $B_\varepsilon(x)$ offen ist, müssen wir zeigen, dass es für jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Sei hierfür $y \in B_\varepsilon(x)$ beliebig aber fest. Wir setzen

$$\delta := \varepsilon - |x - y|.$$

Da $|x - y| < \varepsilon$ ist $\delta > 0$. Für alle $z \in B_\delta(y)$ ist

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < |x - y| + \delta = |x - y| + \varepsilon - |x - y| = \varepsilon,$$

und somit $z \in B_\varepsilon(x)$. Also ist $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$.



Aus der Beliebigkeit von $y \in B_\varepsilon(x)$ folgt, dass $B_\varepsilon(x)$ offen ist.

Lösung 12.
Angenommen, V ist eine Umgebung von x. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Dann ist $B_\varepsilon(x)$ eine offene Menge mit $x \in B_\varepsilon(x)$ und $B_\varepsilon(x) \subseteq V$.

Angenommen, es gibt eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und $U \subseteq V$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Da $U \subseteq V$ ist damit auch $B_\varepsilon(x) \subseteq V$, also ist V eine Umgebung von x.

Lösung 13.
Da

$$(a, b) = B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ist das offen Intervall (a, b) offen.

Um zu zeigen, dass das abgeschlossen Intervall $[a,b]$ nicht offen ist, betrachten wir den Punkt $a \in [a,b]$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \in B_\varepsilon(a) \quad \text{aber} \quad a - \frac{\varepsilon}{2} \notin [a,b],$$

und deshalb $B_\varepsilon(x) \nsubseteq [a,b]$. Also enthält $[a,b]$ keinen ε-Ball um a und ist daher nicht offen.

Lösung 15.

1. Da die leere Menge keine Element enthält ist die Bedingung, dass es für alle $x \in \emptyset$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \emptyset$ gibt, trivialerweise erfüllt. Dass $\mathbb{R}^n$ offen ist, ist ebenfalls klar, da $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ für alle $\varepsilon > 0$.

2. Ist $U_1 \cap \cdots \cap U_s = \emptyset$ so ist die Aussage klar. Ansonsten sei $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_s$. Dann ist $x \in U_i$ für alle $1 \leq i \leq s$. Da die U_i offen sind, gibt es für jedes $1 \leq i \leq s$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i$. Es sei $\varepsilon \coloneqq \min_{1 \leq i \leq s} \varepsilon_i$. Wir haben

$$B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq s,$$

   und somit $B_\varepsilon(x) \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_s$. Aus der Beliebigkeit von $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_s$ folgt, dass $U_1 \cap \cdots \cap U_s$ offen ist.

3. Für unendliche Schnitte gilt die Aussage nicht. Man betrachte etwa die offenen Intervalle

$$U_n \coloneqq (-1 - 1/n, 1 + 1/n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

   Wir wissen bereits, dass die U_n alle offen sind. Wir wissen aber auch, dass

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = [-1, 1]$$

   nicht offen ist.

4. Es sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U_j$. Es ist dann auch

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

   Aus der Beliebigkeit von $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ folgt, dass $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen ist.

Lösung 16.

Es sei $x \in X$ ein isolierter Punkt. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \cap X = \{x\}$. Für beliebige $\varepsilon > 0$ ist deshalb

$$f(B_\delta(x)) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \subseteq B_\varepsilon(f(x)),$$

und somit f stetig an x.

Lösung 18.
Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, y \mapsto \|x-y\|$ ist stetig, und die Teilmenge $(\varepsilon, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ ist offen, also ist $U = f^{-1}((\varepsilon, \infty))$ offen.

Lösung 19.

1. Da $\emptyset^c = \mathbb{R}^n$ offen ist, ist $\emptyset$ abgeschlossen, und da $(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$ offen ist, ist auch $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

2. Da $A_1, \ldots, A_s$ abgeschlossen sind, sind $A_1^c, \ldots, A_s^c$ offen. Also ist auch $A_1^c \cup \cdots \cup A_s^c$ offen. Da
$$A_1^c \cup \cdots \cup A_s^c = (A_1 \cap \cdots \cap A_s)^c$$
ist deshalb $A_1 \cap \cdots \cap A_s$ abgeschlossen.

3. Da die A_i abgeschlossen sind, ist A_i^c für alle $i \in I$ offen. Also ist auch
$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$
offen, und somit $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Lösung 20.
Für alle $x \in M$ ist
$$x \in f^{-1}(Y^c) \Leftrightarrow f(x) \in Y^c \Leftrightarrow f(x) \notin Y \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(Y))^c.$$

Lösung 21.
Es sei (x_n) eine Folge auf $A_1 \times A_m$ die gegen $x \in \mathbb{R}^m$ konvergiert. In Koordinaten gelte $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$. Da $x_n \to x$ ist $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$ für alle $1 \leq i \leq m$. Für alle $1 \leq i \leq m$ ist $x_n^{(i)} \in A_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und da A_i abgeschlossen ist damit auch $x^{(i)} \in A_i$. Es ist also $x \in A_1 \times \cdots \times A_m$.