Der Satz von Rolle

Jendrik Stelzner

22. Dezember 2014

Wir wollen hier den Satz von Rolle angeben und beweisen. Als Vorbereitung hierdrauf wollen wir das Verhalten von differenzierbaren Funktionen an Extremstellen betrachten.

1 Extremstellen

Definition 1. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ und $x \in X$. f heißt *lokal maximal an* x, falls es eine Umgebung V von x gibt, so dass

$$f(x) \geq f(y) \quad \text{für alle } y \in V \cap X.$$

f heißt *lokal minimal an* x, falls es eine Umgebung V von x gibt, so dass

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{für alle } y \in V \cap X.$$

Ist f lokal maximal oder lokal minimal an x, so heißt f *lokal extremal an* x; dann heißt x eine *lokale Extremstelle von* f.

Im Eindimensionalen differenzierbare Funktionen lässt sich mithilfe der Ableitung eine notwendige Bedingungen für das Vorhandensein einer lokalen Extremstelle angeben.

Lemma 2. *Es sei $V \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von x und $f\colon V \to \mathbb{R}$ lokal extremal an x. Dann ist $f'(x) = 0$.*

Beweis. Wir zeigen, dass f nicht extremal an x ist, wenn $f'(x) \neq 0$. Wir beschränken uns dabei auf den Fall $f'(x) > 0$, der Fall $f'(x) < 0$ verläuft analog.

Da $f'(x) > 0$ ist

$$\lim_{h \to \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0.$$

Es gibt daher ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \quad \text{für alle } h \neq 0 \text{ mit } |h| < \varepsilon.$$

Für alle $0 < h < \varepsilon$ ist daher

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \Leftrightarrow f(x+h) - f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x+h) > f(x),$$

und für alle $-\varepsilon < h < 0$ ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \Leftrightarrow f(x+h) - f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x+h) < f(x).$$

Es ist daher

$$f(x) < f(y) \quad \text{für alle } y \in (x, x+\varepsilon)$$

und

$$f(x) > f(y) \quad \text{für alle } y \in (x-\varepsilon, x).$$

Es kann also f an x nicht extremal sein. □

Wir können nun den Satz von Rolle beweisen. (Wir benötigen auch noch, dass abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ kompakt sind — siehe hierzu die entsprechende Übersicht zu kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.)

Theorem 3 (Rolle). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $f(a) = f(b) = 0$. Ist f konstant, also $f = 0$, so ist die Aussage klar. Ansonsten gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) \neq 0$; daher ist

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) > 0 \quad \text{oder} \quad \inf_{x\in[a,b]} f(x) < 0.$$

Da $[a, b]$ kompakt ist werden beide Werte angenommen; es gibt also $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f(\xi) = \max_{x\in[a,b]} f(x) > 0 \quad \text{oder} \quad f(\xi) = \min_{x\in[a,b]} f(x) < 0.$$

Wir erhalten in beiden Fällen, dass ξ eine Extremstelle von f ist und dass $\xi \notin \{a, b\}$. Da $\xi \in (a, b)$ eine Extremstelle von f ist muss $f'(\xi) = 0$. □