Grenzwerte von Funktionen

Jendrik Stelzner

22. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Häufungspunkte

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon A \to \mathbb{R}$. Wir wollen untersuchen, wie sich f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ verhält, bzw. verhalten sollte. Um das Verhalten von f an x zu untersuchen, brauchen wir, dass f „in der Nähe“ von x definiert ist. Hierfür brauchen wir, dass x „nahe“ an A ist. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt von A*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $x \neq a$ gibt.

Wir bezeichnen die Menge aller Häufungspunkte von A mit A'.

Vorstellungsmäßig ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von $A \subseteq \mathbb{R}^n$, falls sich x *von außen* durch Punkte aus A annähern lässt.

Beispiel(e).

- $x = 0$ ist ein Häufungspunkt von $A := \{1/n \mid n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$: Da $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 1$ mit $|x - 1/n| < \varepsilon$, wobei klar ist, dass $1/n \neq 0$.

- Der Punkt $x = 2$ ist *kein* Häufungspunkt der Menge $A := [0, 1] \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$, denn das einzige $a \in A$ mit $|x - a| < 1/2$ ist $a = 2$.

- Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist jeder Punkt $x \in U$ ein Häufungspunkt von U: Da U offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es für $\omega := \min\{\varepsilon, \delta\}$ daher ein

$$y \in B_\omega(x) \subseteq B_\delta(x) \subseteq U \quad \text{mit } y \neq x,$$

und es gilt $\|x - y\| < \omega \leq \varepsilon$.

- Allgemeiner ergibt sich mit dieser Argumentation, dass $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, falls V eine Umgebung von x ist.

Übung 1.
Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass x genau dann ein Häufungspunkt von A ist, falls es eine Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ gibt, so dass $a_n \to x$.

Übung 2.
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich. Zeigen Sie, dass $M' = \emptyset$.

Übung 3.
Bestimmen Sie $\mathbb{Z}'$.

Übung 4.
Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Ist $A \subseteq B$, so ist $A' \subseteq B'$.
2. Es ist $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Übung 5.
Bestimmen Sie A' für $A \coloneqq [0,1] \cup [2,3]$.

2 Grenzwerte von Funktionen

Definition 2. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A. Für $y \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a) = y,$$

falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Wir nennen y dann den *Grenzwert von f an x über A*.

Beispiel(e).

- Wir betrachten die *Signumabbildung*

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

  0 ist ein gemeinsamer Häufungspunkt von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$, und es ist

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in (-\infty,0)}} f(x) = -1, \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in (0,\infty)}} f(x) = 1.$$

- Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}.$$

0 ist ein Häufungspunkt der beiden Mengen

$$A := \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad B := \left\{ \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

und es ist

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in A}} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in B}} f(x) = -1.$$

0 ist auch ein Häufungspunkt der Menge $(0, \infty)$, der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in (0,\infty)}} f(x)$$

existiert jedoch nicht.

Lemma 3. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f \colon A \to \mathbb{R}^k$ und $x \in \mathbb{R}^m$ ein Häufungspunkt von A. Für $y \in \mathbb{R}^k$ sind äquivalent:*

1. $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$.
2. *Für jede Folge (a_n) auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \to x$ gilt, dass auch $f(a_n) \to y$.*

(Da x ein Häufungspunkt von A ist, existiert auch eine entsprechende Folge.)

Beweis. ($1 \Rightarrow 2$) Es sei (a_n) eine Folge auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \to x$. Wir wollen zeigen, dass $f(a_n) \to y$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Da $a_n \to x$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x - a_n\| < \delta$ für alle $n \geq N$. Da $a_n \neq x$ ist deshalb $\|f(x) - f(a_n)\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

($2 \Rightarrow 1$) Angenommen es ist nicht $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = y$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $a \in A$ gibt, so dass zwar $x \neq a$ und $\|x - a\| < \delta$, aber $\|y - f(a)\| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es deshalb für alle $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $\|x - a_n\| < 1/n$ aber $\|y - f(a_n)\| \geq \varepsilon$. Dann ist (a_n) eine Folge auf $A \setminus \{x\}$ mit $a_n \to x$, aber nicht $f(a_n) \to y$. □

Mithilfe dieses Lemmas können wir viele Aussagen für die Grenzwerte von Folgen auf Grenzwerte von Funktionen übertragen.

Proposition 4. *Es seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, f_1, f_2 \colon A \to \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A.*

1. *Der Grenzwert $\lim_{a \to x, a \in A} f(a)$ ist eindeutig (wenn er existiert).*
2. *Existieren die Grenzwerte $\lim_{a \to x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \to x, a \in B} f_2(a)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to a, a \in A} (f_1 + f_2)(a)$ und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} (f_1 + f_2)(a) = \left(\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f_1(a) \right) + \left(\lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

3. *Existiert der Grenzwert* $\lim_{a\to x, a\in A} f(a)$*, so existiert auch* $\lim_{a\to x, a\in A}(\lambda f)(a)$*, und es gilt*
$$\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} (\lambda f)(a) = \lambda \lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} f(a).$$

Im Fall $n = 1$*, also für* $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$*, gilt auch eine Verträglichkeit mit Multiplikation und Division.*

4. *Existieren die Grenzwerte* $\lim_{a\to x, a\in A} f_1(a)$ *und* $\lim_{a\to x, a\in B} f_2(a)$*, so existiert auch der Grenzwert* $\lim_{x\to a, a\in A}(f_1 \cdot f_2)(a)$ *und es gilt*
$$\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} (f_1 \cdot f_2)(a) = \left(\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} f_1(a)\right) \cdot \left(\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} f_2(a)\right).$$

5. *Existieren die beiden Grenzwerte* $\lim_{a\to x, a\in A} f_1(a)$ *und* $\lim_{a\to x, a\in A} f_2(a)$*, und ist* $f_2(a) \neq 0$ *für alle* $a \in A \setminus \{x\}$ *sowie* $\lim_{a\to x, a\in A} f_2(a) \neq 0$*, so existiert auch der Grenzwert* $\lim_{a\to x, a\in A} f_1(a)/f_2(a)$ *und es gilt*
$$\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{\lim_{a\to x, a\in A} f_1(a)}{\lim_{a\to x, a\in A} f_2(a)}$$

(Sehen wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$*, so ergibt sich auch eine Verträglichkeit mit der Multiplikation und Division im Komplexen; hierdrauf wollen wir jetzt aber nicht weiter eingehen.)*

Wie wir bereits gesehen haben, können für eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit gemeinsamen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}^n$ die beiden Grenzwerte $\lim_{a\to x, a\in A} f(a)$ und $\lim_{b\to x, b\in B} f(b)$ existieren, aber dennoch
$$\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} f(a) \neq \lim_{\substack{b\to x\\ b\in B}} f(b).$$
Es kann auch passieren, dass einer der beiden Grenzwerte existiert, der andere jedoch nicht. Es gibt also im Allgemeinen keinen Zusammehang zwischen dem Grenzwert von f über A und dem Grenzwert über B. Unter bestimmten Umständen lassen sich die entsprechenden Grenzwerte dennoch vergleichen:

Lemma 5. *Es seien* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $f\colon B \to \mathbb{R}^m$*. Ist* $x \in \mathbb{R}^n$ *ein gemeinsamer Häufungspunkt von* A *und* B*, sodass* $\lim_{b\to x, b\in B} f(b)$ *existiert, so existiert auch der Grenzwert* $\lim_{a\to x, a\in A} f(a)$*, und es gilt*
$$\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} f(a) = \lim_{\substack{b\to x\\ b\in B}} f(b).$$

Beweis. Zur besseren Lesbarkeit setzen wir $y \coloneqq \lim_{b\to x, b\in B} f(b)$. Wir wollen zeigen, dass auh $\lim_{a\to x, x\in A} f(a) = y$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $y = \lim_{b\to x, b\in B} f(b)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass
$$\|x - b\| < \delta \Rightarrow \|y - f(b)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } b \in B \text{ mit } b \neq x.$$
Da $A \subseteq B$ ist daher insbesondere
$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|y - f(a)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$
Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{a\to x, a\in A} f(a) = y$. $\square$

Korollar 6. *Es sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}$. Es seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen, so dass $x \in \mathbb{R}$ ein gemeinsamer Häufungspunkt von A, B ist, und die beiden Grenzwerte $\lim_{a\to x, a\in A} f(a)$ und $\lim_{b\to x, b\in B} f(b)$ existieren. Ist x auch ein Häufungspunkt von $A \cap B$, so ist*

$$\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} f(a) = \lim_{\substack{b\to x\\ b\in B}} f(b).$$

Beweis. Da die beiden Grenzwerte $\lim_{a\to x, a\in A} f(a)$ und $\lim_{b\to x, b\in B} f(b)$ existieren, und $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$, erhalten wir aus Lemma 5, dass auch der Grenzwert $\lim_{c\to x, c\in A\cap B} f(c)$ existiert und

$$\lim_{\substack{a\to x\\ a\in A}} f(a) = \lim_{\substack{c\to x\\ c\in A\cap B}} f(c) = \lim_{\substack{b\to x\\ b\in B}} f(b). \qquad \square$$

3 Links-, rechts- und beidseitige Grenzwerte

Wir wollen uns nun einem Sonderfall von Funktionsgrenzwerten zuwenden.

Definition 7. Es sei $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Gibt es ein $r > 0$, so dass $(x - r, x) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a\uparrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a\to x\\ a\in(x-r,x)}} f(a),$$

und nennen dies den *linksseitigen Grenzwert von f an x*.

Gibt es ein $r > 0$, so dass $(x, x + r) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a\downarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a\to x\\ a\in(x,x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *rechtsseitigen Grenzwert von f an x*.

Existiert ein $r > 0$, so dass $(x - r, x) \cup (x, x + r) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a\to x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a\to x\\ a\in(x-r,x)\cup(x,x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *beidseitigen Grenzwert von f an x*.

Die Wohldefiniertheit der jeweiligen Ausdrücke, also die Unabhängigkeit von r, ergibt sich aus Lemma 5.

Der beidseitige Grenzwert lässt sich auch als Kombination des links- und rechtsseitigen Grenzwertes definieren:

Lemma 8. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon A \to \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

1. *Der beidseitige Grenzwert $\lim_{a\to x} f(a)$ existiert und $\lim_{a\to x} f(a) = y$.*
2. *Die Grenzwerte $\lim_{a\uparrow x} f(a)$ und $\lim_{a\downarrow x} f(a)$ existieren und es ist*

$$\lim_{a\uparrow x} f(a) = y = \lim_{a\downarrow x} f(a).$$

4 Uneigentliche Grenzwerte

Definition 9. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von A. Wir schreiben dass $\lim_{a \to x, a \in A} f(x) = \infty$, falls es für alle $R > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(a)| \geq R \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } |x-a| < \delta \text{ und } a \neq x.$$

Wir schreiben $\lim_{a \to x, a \in A} f(x) = -\infty$, falls es für alle $R > 0$ eine $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(a)| \leq -R \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } |x-a| < \delta \text{ und } a \neq x.$$

Definition 10. Es sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit Definitionsbereits $X \subseteq \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}$ sagen wir, dass $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$, falls

1. es gibt $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ für alle $x \geq r_0$ definiert ist, und
2. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $r \geq r_0$, so dass $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x \geq r$.

Wir sagen, dass $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y$, falls

1. es gibt $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ für alle $x \leq r_0$ definiert ist, und
2. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $r \leq r_0$, so dass $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x \leq r$.

5 Lösungen der Übungen

Lösung 1.
Angenommen, x ist ein Häufungspunkt von A. Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $|x - a_n| < 1/n$. Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergiert per Konstruktion gegen x.

Angenommen, eine solche Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Inbesondere ist $a_N \in A$ mit $|x - a_N| < \varepsilon$ und $a_N \neq x$.

Lösung 2.
Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \notin M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \min_{m \in M} \|x - m\| > 0,$$

dass es kein $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ gibt. Also ist x dann kein Häufungspunkt von M. Ist $x \in M$, so ergibt sich für

$$\varepsilon := \begin{cases} \frac{1}{2} \min_{m \in M, m \neq x} \|x - m\| & \text{falls } |M| \geq 2 \\ 1 & \text{falls } M = \{x\}, \end{cases}$$

dass x das einzige $m \in M$ mit $\|x - m\| < \varepsilon$ ist. Also ist x auch dann kein Häufungspunkt von M.

Lösung 3.
Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ist $x \notin \mathbb{Z}$, so gibt es für

$$\varepsilon :- \frac{1}{2} \min\{\lceil x \rceil - x, x - \lfloor x \rfloor\}$$

kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < \varepsilon$. Also ist x dann kein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$. Ist andererseits $x \in \mathbb{Z}$, so gibt es außer x kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\|x - n\| < 1/2$, weshalb x auch dann kein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$ ist.

Also ist kein $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$, und somit $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

Lösung 4.

1. Es sei $x \in A'$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $a \neq x$. Da $a \in A \subseteq B$ folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon$ und $b \neq x$ gibt. Also ist x ein Häufungspunkt von B, also $b \in B'$. Aus der Beliebigkeit von $a \in A'$ folgt, dass $A' \subseteq B'$.

2. Da $A \subseteq A \cup B$ ist $A' \subseteq (A \cup B)'$, und da $B \subseteq A \cup B$ ist $B' \subseteq (A \cup B)'$. Also ist auch $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

   Angenommen, es ist $x \notin A' \cup B'$. Dann gibt es $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$, so dass es kein $a \in A$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$ und $x \neq a$ gibt, und auch kein $b \in B$ mit $\|x - b\| < \varepsilon$ und $x \neq b$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ gibt es daher kein $y \in A \cup B$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ und $y \neq x$. Also ist dann $x \notin (A \cup B)'$. Das zeigt, dass auch $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

Lösung 5.

Behauptung. *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *ist*

$$[a, b]' = [a, b].$$

Beweis der Behauptung. Für $x < a$ ist $a - x > 0$, es gibt aber kein $y \in [a, b]$ mit $\|x - y\| < a - x$; also ist dann $x \notin [a, b]'$ Analog ergibt sich, dass auch $x \notin [a, b]'$ für $x > b$. Also ist $[a, b]' \subseteq [a, b]$.

Dass $a, b \in [a, b]'$ ergibt sich durch die Folgen (x_n) auf $(a, b]$ und (y_n) auf $[a, b)$ mit

$$x_n := a + \frac{b-a}{n+1} \quad \text{und} \quad y_n := b - \frac{b-a}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $x \in [a, b]'$ für $a < x < b$ ergibt sich daraus, dass $[a, b]$ eine Umgebung für diese x ist. Damit ergibt sich, dass $[a, b] \subseteq [a, b]'$. □

Aus der Behauptung ergibt sich direkt, dass

$$([0, 1] \cup [2, 3])' = [0, 1]' \cup [2, 3]' = [0, 1] \cup [2, 3].$$