Wir wollen eine streng monoton steigende Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$ für alle $n \geq 1$ konstruieren, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty,$$

aber die Häufigkeit der genutzten Summanden gegen 0 geht, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}|}{n} = 0. \tag{1}$$

Die Idee der Konstruktion ist die folgende: Wir beginnen mit $a_1 = 1$. Nun nehmen wir jeden zweiten Summanden hinzu, bis die Summe der bisherigen Summanden mindestens 2 beträgt. Wir haben also also $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$ usw. bis zu a_M, so dass $\sum_{k=1}^{M} 1/a_k \geq 2$. Dann nehmen wir jeden dritten Summanden hinzu, bis die bisherige Summe mindstens 3 beträgt. Dies führen wir dann fort, wobei im n-ten Schritt der Konstruktion solange jeder n-te Summand hinzugefügt wird, bis die bisherige Summe mindestens n beträgt.

Für die so konstruierte Reihe gilt nach Konstruktion $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$. Andererseits wird für jedes $m \geq 1$ nach dem m-ten Schritt nur noch höchstens jeder m-te Summand hinzugefügt, weshalb die Häufigkeit der genutzen Summanden gegen 0 geht.

Wir wollen diese Konstruktion nun formalisieren: Im ersten Schritt setzen wir $a_1 \coloneqq 1$, $b_1^{(1)} \coloneqq 1$, und $\nu(1) \coloneqq 1$.

Im zweiten Schritt beginnen setzen wir zunächst $b_1^{(2)} \coloneqq a_1 + 2 = 3$. Da $1/3 < 1$ setzen wir weiter $b_2^{(2)} \coloneqq a_1 + 4 = 5$. Da auch noch $1/3 + 1/5 = 8/15 < 1$ wählen wir weiter $b_3^{(2)} \coloneqq a_1 + 6 = 7$. Wir führen diesen Vorgang bis zu dem minimalen $\nu(2) \in \mathbb{N}$ fort, so dass

$$\frac{1}{b_1^{(2)}} + \frac{1}{b_2^{(2)}} + \cdots + \frac{1}{b_{\nu(2)}^{(2)}} = \frac{1}{a_1 + 2} + \frac{1}{a_1 + 4} + \cdots + \frac{1}{a_1 + 2\nu(2)} \geq 1.$$

Ein solches $\nu(2)$ existiert, da $\sum_{m=1}^{\infty} 1/(a_1 + 2m) = \infty$. (Es ergibt sich, dass $\nu(2) = 7$, wir müssen also bis zum Summanden $1/15$ gehen.) Wir defineren dann a_2, ..., $a_{1+\nu(2)}$ durch

$$a_2 \coloneqq b_1^{(2)}, a_3 \coloneqq b_2^{(2)}, \ldots, a_{1+\nu(n)} \coloneqq b_{\nu(n)}^{(n)}.$$

Die Zahl $\nu(2)$ gibt also an, wie viele Summanden wir im zweiten Schritt hinzugefügt haben.

Haben wir bereits $n - 1$ solcher Schritte durchlaufen, so haben wir bereits die Folgenwerte a_1, ..., $a_{\nu(1)+\cdots+\nu(n-1)}$ definiert; zur besseren Lesbarkeit schreiben wir $k \coloneqq \nu(1) + \cdots + \nu(n-1)$. Wir wählen im n-ten Schritt dann die minimale Anzahl neuer Summanden $\nu(n) \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{a_k + n} + \frac{1}{a_k + 2n} + \cdots + \frac{1}{a_k + \nu(n)n} \geq 1,$$

und setzen

$$a_{k+i} \coloneqq b_i^{(n)} \coloneqq a_k + in \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq \nu(n).$$

Ein solches $\nu(n)$ existiert, da $\sum_{i=1}^{\infty} 1/(a_k + in) = \infty$. Die Zahl $\nu(n)$ gibt also an, wie viele Summanden im n-ten Schritt hinzugefügt wurden.

Da wir in jedem der Schritte mindestens einen Summanden hinzunehmen, ist a_n für alle $n \geq 1$ definiert; es ist auch klar, dass die Folge (a_n) streng monoton steigend ist. Aus der Konstruktion wird auch sofort ersichtlch, dass für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \geq \sum_{k=1}^{\nu(1)+\cdots+\nu(m)} a_k \\ &= \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=\nu(1)+\cdots+\nu(n-1)+1}^{\nu(1)+\cdots+\nu(n)} a_k = \sum_{n=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu(n)} b_i^{(n)}}_{\geq 1} \geq m,\end{aligned}$$

also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Wir wollen nun noch zeigen, dass auch (1) erfüllt ist. Sei hierfür $m \geq 1$ beliebig aber fest. Wir bemerken, dass ab $c \coloneqq a_{\nu(1)+\cdots+\nu(m-1)+1} = b_1^{(m)}$ nur noch höchstens jeder m-te Summand hinzugefügt wird. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned}&|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}| \\ &\leq |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, c\}\}| + |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \ldots, n\}\}| \\ &\leq c + |\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \ldots, n\}\}| .\end{aligned}$$

Da ab c nur noch höchstens jeder m-te Summand hinzugefügt wird, ist dabei für alle $n \geq c$

$$\begin{aligned}&|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{c, \ldots, n\}\}| \\ &\leq |\{c + \ell m \mid \ell \in \mathbb{N}\} \cap \{c, \ldots, n\}| \\ &= |\{\ell m \mid \ell \in \mathbb{N}\} \cap \{0, \ldots, n-c\}| \\ &\leq \frac{n-c+1}{m}.\end{aligned}$$

Für alle $n \geq c$ ist daher

$$|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}| \leq c + \frac{n-c+1}{m},$$

und somit

$$\frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}|}{n} \leq \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n-c+1}{n}.$$

Da

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n-c+1}{n} = \frac{1}{m}$$

ist damit auch

$$\begin{aligned}&\limsup_{n \to \infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1, \ldots, n\}\}|}{n} \\ &\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n-c+1}{n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{c}{n} + \frac{1}{m} \frac{n-c+1}{n} \\ &= \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $m \geq 1$ folgt damit, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1,\ldots,n\}\}|}{n} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1,\ldots,n\}\}|}{n} \leq 0, \end{aligned}$$

und somit bereits

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in \{1,\ldots,n\}\}|}{n} = 0.$$