Der Banachsche Fixpunktsatz

Jendrik Stelzner

6. Dezember 2014

Wir wollen hier (als Übung für den Leser) den Banachschen Fixpunktsatz für $\mathbb{R}$ formulieren und beweisen.

Definition 1. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Kontraktion*, falls es eine Konstante $0 \leq L < 1$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Übung 1.
Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion ist.

$$\begin{aligned} f &: x \mapsto \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \\ g &: x \mapsto x^2 \\ h &: x \mapsto |x|^{1/2} \end{aligned}$$

Übung 2.
Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gebe es eine Konstante $L > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist. Folgern Sie, dass Kontraktionen stetig sind.

Bemerkung 2. Eine solche Abbildung nennt man *Lipschitz-stetig* (mit Konstante L).

Theorem 3 (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion. Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt, d.h. es existiert genau ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $T(\xi) = \xi$. Außerdem gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \xi$. (Hier bezeichnet T^n die n-fache Hintereinanderschaltung von T mit sich selbst.)*

Übung 3.
Es sei $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion.

1. Zeigen Sie die Eindeutigkeit des Fixpunktes von T. (Wir setzen hier noch keine Existenz voraus.)
2. Zeigen Sie, dass für jeden Startewert $x \in \mathbb{R}$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \coloneqq T^n(x)$ konvergiert. (*Hinweis*: Zeigen Sie, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt.)
3. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\xi \coloneqq \lim_{n\to\infty} T^n(x)$ ein Fixpunkt von T ist.

Bemerkung 4. Der Banachsche Fixpunktsatz gilt allgemeiner für alle vollständige metrische Räume. Der Beweis hierfür läuft analog.

Lösung 1.
f ist eine Kontraktion, da für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y) = \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right| = \frac{1}{4}|x - y|$$

mit $1/4 < L$. g ist keine Kontraktion, denn

$$|g(2) - g(1)| = |2^2 - 1^2| = 3 > 1 = |2 - 1|.$$

h ist keine Kontrakiton. Ansonsten gebe es $0 \leq L < 1$ mit $|h(x) - h(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Insbesondere wäre dann für alle $n \geq 1$

$$\frac{1}{n^{1/2}} = \left|h\left(\frac{1}{n}\right) - h(0)\right| \leq L\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{L}{n}$$

und somit $n^{1/2} \leq L$.

Lösung 2.
f erfüllt an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ das ε-δ-Kriterium, denn für beliebiges $\varepsilon > 0$ und ergibt sich für $\delta := \varepsilon/L$, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Also ist f (Lipschitz-)stetig. Kontraktionen sind per Definition genau die Lipschitz-stetigen Abbildung mit Konstante $L < 1$.

Lösung 3.
Es sei $0 \leq L < 1$, so dass $|T(x) - T(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Es seien ξ und ζ zwei Fixpunkte von T. Dann ist

   $$|\xi - \zeta| = |T(\xi) - T(\zeta)| \leq L|\xi - \zeta|.$$

   Da $L \neq 1$ folgt, dass $|\xi - \zeta| = 0$ und somit $\xi = \zeta$.

2. Für alle $n \geq 1$ ist

   $$|x_{n+1} - x_n| = |T(x_n) - T(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}|.$$

   Für $M := |x_1 - x_0|$ ergibt sich damit induktiv, dass

   $$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n|x_1 - x_0| = ML^n.$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $N' \in \mathbb{N}$ und $m, m' \geq N$, wobei o.B.d.A. $m \geq m'$, ist daher

   $$\begin{aligned} |x_m - x_{m'}| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{m'+1} - x_{m'}| \\ &\leq ML^{m-1} + \cdots + ML^{m'} = ML^{m'} \sum_{k=0}^{m-1-m'} L^k \\ &\leq ML^{N'} \sum_{k=0}^{\infty} L^k = \frac{M}{1-L} L^{N'}. \end{aligned}$$

   Da $\lim_{N' \to \infty} M/(1-L)L^{N'} = 0$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $M/(1-L)L^N < \varepsilon$, und damit insbesondere $|x_m - x_{m'}| < \varepsilon$ für alle $m, m' \geq N$. Dies zeigt, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

3. T ist eine Kontraktion, und damit insbesondere stetig. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir unter Verwendung der Folgenstetigkeit für $\xi := \lim_{n\to\infty} T^n(x)$, dass

$$T(\xi) = T\left(\lim_{n\to\infty} T^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = \xi.$$