Definitionen von Stetigkeit

Jendrik Stelzner

9. Dezember 2014

Im Folgenden wollen wir die unterschiedlichen Definitionen der Stetigkeit einer Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angebeben und ihre Äquivalenz beweisen.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Definitionen **1**
- 1.1 ε-δ-Stetigkeit . . . 1
- 1.2 Folgenstetigkeit . . . 2
- 1.3 Stetigkeit über Grenzwerte . . . 2
- 1.4 Äquivalenz der Stetigkeitsbegriffe . . . 3

2 Topologische Stetigkeit **5**

1 Grundlegende Definitionen

1.1 ε-δ-Stetigkeit

Definition 1. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ε-δ-stetig im Punkt* $x \in \mathbb{R}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung f heißt *ε-δ-stetig*, falls f ε-δ-stetig an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Beispiel(e). Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{aligned} \left|x^2 - y^2\right| &= |(x+y)(x-y)| = |x+y||x-y| \leq (|x| + |y|)|x-y| \\ &\leq (|x| + |x| + |x-y|)|x-y| = 2|x||x-y| + |x-y|^2, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir die Dreiecksungleichung für $|x + y| \leq |x| + |y|$ und $|y| = |x| + |x - y|$ nutzen. Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen:

Ist $x = 0$, so ist $|x^2 - y^2| = |y|^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wählt man dann $\delta := \sqrt{\varepsilon}$, so ist für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| = |x - y| < \delta$ auch $|x^2 - y^2| = |y|^2 < \varepsilon$.

Ist $x \neq 0$, so ergibt sich für $\delta := \min\{\varepsilon/(4|x|), \sqrt{\varepsilon/2}\}$ aus (1), dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$

$$\left|x^2 - y^2\right| \leq 2|x||x-y| + |x-y|^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das zeigt, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist

Übung 1.
Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ε-δ-stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f(x) > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(y) > 0$ für alle $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Gilt die Aussage auch für $f(x) < 0$ oder $f(x) \neq 0$?

Übung 2.
Es seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f ε-δ-stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ und g ε-δ-stetig an der Stelle $f(x)$, so ist die Komposition $g \circ f$ ε-δ-stetig an der Stelle x.

1.2 Folgenstetigkeit

Definition 2. Eine Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *folgenstetig an* $x \in \mathbb{R}$, falls für jedes Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

f heißt *folgenstetig*, falls f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ folgenstetig ist.

Beispiel(e). Wir betrachten erneut die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so folgt aus den bekannten Eigenschaften konvergenter Folgen, dass auch die Folge $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = x \cdot x = x^2.$$

Das zeigt, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ folgenstetig ist.

Übung 3.
Es seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beide folgenstetig an der Stelle $x \in R$. Zeigen Sie, dass auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ folgenstetig an der Stelle x sind.

1.3 Stetigkeit über Grenzwerte

Definition 3. Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}$ schreiben wir $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = y$, falls

für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, s.d. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x_0 - \delta < x < x_0$,

und bezeichnen y dann als den *linksseitigen Limes von f an* x_0. Analog schreiben wir $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = f(y)$, falls

für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, s.d. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Wir nennen y dann denn *rechtsseitigen Limes von f an* x_0. Existieren links- und rechtsseitiger Limes von f an x_0 und ist $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$, so nennen wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) := \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$$

den *beidseitgen Limes von f an* x_0.

Definition 4. Eine Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *linksstetig an der Stelle* $x \in \mathbb{R}$, falls $\lim_{y\uparrow x} f(y) = f(x)$. f heißt *rechtsstetig an der Stelle* x, falls $\lim_{y\downarrow x} f(y) = f(x)$.

f heißt *beidseitig stetig an* x, falls $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. (Insbesondere müssen die entsprechenden Grenzwerte existieren.)

f heißt *linksstetig*, falls f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ linksstetig ist, und *rechtsstetig*, falls f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ rechtsstetig ist. Ist f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ beidseitig stetig, so heißt f *beidseitig stetig*.

Bemerkung 5. Rechts-, Links- und beidseitige Limites sind eindeutig (sofern sie existieren).

Übung 4.
Zeigen Sie, dass f genau dann beidseitig stetig ist, wenn f links- und rechtsstetig ist.

Übung 5.
Zeigen Sie, dass für eine monoton steigende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Limes exitieren, und dass

$$\lim_{y\uparrow x} f(y) = \sup\{f(y) \mid y < x\} \quad \text{und} \quad \lim_{y\downarrow x} f(y) = \inf\{f(y) \mid y > x\}.$$

Wie sieht es für eine monoton fallende Funktion aus?

Übung 6.
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$ genau dann, wenn

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es } \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - y| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta \text{ und } x \neq x_0.$$

1.4 Äquivalenz der Stetigkeitsbegriffe

Wir wollen nun zeigen, dass die verschiedenen Stetigkeitsbegriffe äquivalent zueinander sind.

Proposition 6. *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist ε-δ-stetig an der Stelle x.*
2. *f ist folgenstetig an der Stelle x.*
3. *f ist beidseitig stetig an der Stelle x.*

Beweis. ($1 \Rightarrow 2$) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da f ε-δ-stetig an x ist, gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \delta$. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|x - x_n| < \delta$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ ist also $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Das zeigt, dass f folgenstetig an x ist.

($2 \Rightarrow 1$) Angenommen, f ist nicht ε-δ-stetig an x. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass es für jedes $\delta > 0$ ein $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ gibt. Insbesondere gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_n| < 1/n$ und $|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Es ist dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ aber nicht $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Dies steht im Widerspruch zur Folgenstetigkeit von f an x.

($1 \Rightarrow 3$) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da f ε-δ-stetig an x ist, gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$. Inbesondere ist $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x)$ und für alle $y \in (x, x + \delta)$. Also ist f sowohl rechts- als auch linksstetig an x, und somit beidseitig stetig an x.

(3 $\Rightarrow$ 1) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da f beidseitig stetig an x ist, existiert der beidseitige Limes $\lim_{y\to x} f(y)$ und es ist $f(x) = \lim_{y\to x} f(y)$. Nach Übung 6 gibt daher $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ und $x \neq y$; für $x = y$ gilt dies offenbar ebenfalls. Also ist f ε-δ-stetig an x. $\square$

Statt zwischen den verschiedenen Stetigkeitsbegriffen zu unterscheiden, sprechen wir von nun an nur noch von Stetigkeit.

Übung 7.
Es sei

$$\mathcal{O} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

Zeigen Sie:

1. Alle konstanten Funktionen sind in $\mathcal{O}$ enthalten.

2. $\mathcal{O}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, d.h. für alle $f, g \in \mathcal{O}$ ist $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und für alle $f \in \mathcal{O}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

3. Zeigen Sie, dass für zwei stetige Abbildungen $f, g \in \mathcal{O}$ das das punktweise Produkt $f \cdot g$ stetig ist, d.h. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Insgesamt zeigt dies, dass $\mathcal{O}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra bildet. (Um genau zu sein zeigt es, dass $\mathcal{O}$ eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

Übung 8.

1. Zeigen Sie, dass der Betrag

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$

stetig ist.

2. Folgern Sie, dass für zwei stetige Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ stetig sind, wobei für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\max(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad \min(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Übung 9.
Es seien

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass sich f nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt, d.h. es gibt keine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung g stetig ist.

3. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $s : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die in einer Umgebung von x_0 beschränkt sei, d.h. es gebe ein $\varepsilon > 0$ und eine Konstante $C > 0$, so dass $|s(x)| \leq C$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $x \neq x_0$. Zeigen Sie: Für eine stetige Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x_0) = 0$ ist die Abbildung $h \cdot s$ stetig an x_0.

2 Topologische Stetigkeit

Definition 7. Für $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir den *offenen ε-Ball um x* als

$$B_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}.$$

Definition 8. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, falls es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon \subseteq U$.

Beispiel(e).

1. Die leere Menge ist offen, da die Bedingung dort leer ist.
2. Offene Intervalle sind offen: Ist $I = (a, b)$ eine offenes Intervall und $x \in I$, so ist für
$$\varepsilon \coloneqq \min\{x - a, b - x\}$$
auch $B_\varepsilon(x) \subseteq I$.
3. Abgeschlossene nicht-leere Intervalle sind nicht offen: Ist $I = [a, b]$ eine abgeschlossenen Intervall, dass nicht leer ist (also $a \leq b$), so gibt es kein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(a) \subseteq I$, dann es ist $a - \varepsilon/2 \in B_\varepsilon(x)$, aber $a - \varepsilon/2 \notin I$.

Lemma 9.

1. *Die leere Menge $\emptyset$ sowie $\mathbb{R}$ selbst sind offen.*
2. *Ist $\{U_i \mid i \in I\}$ eine beliebige Kollektion offener Mengen, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.*
3. *Sind $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{R}$ offen, so ist auch der Schnitt $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ offen.*

Definition 10. Es sei $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Umgebung von x*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq V$.

Übung 10.
Zeigen Sie, dass eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ genau dann offen ist, wenn U für jedes $x \in U$ eine Umgebung von x ist.

Übung 11.
Zeigen Sie, dass eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ genau Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}$ ist, wenn es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in U \subseteq V$ gibt.

Übung 12.
Zeigen Sie:

1. Ist $V \subseteq \mathbb{R}$ Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}$, so auch jedes Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}$ mit $V \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von V
2. Sind $V_1, \ldots, V_n \subseteq \mathbb{R}$ Umgebungen von $x \in \mathbb{R}$, so ist auch $V_1 \cap \cdots \cap V_n$ eine Umgebung von x.