

Grenzwerte von Funktionen

Jendrik Stelzner

14. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Häufungspunkte	1
2	Grenzwerte von Funktionen	2
3	Links- rechts- und beidseitige Grenzwerte	4
4	Uneigentliche Grenzwerte	5
5	Lösungen der Übungen	6

1 Häufungspunkte

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen untersuchen, wie sich f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ verhält, bzw. verhalten sollte. Hierfür betrachten wir die folgenden beiden Ansätze:

1. Falls $x \in A$, was ist $f(x)$?
2. Was verhält sich f in der Nähe von x ?

Der zweite Ansatz hat den Vorteil, dass wir ihn auch für $x \notin A$ nutzen können, sofern f in der Nähe von x definiert ist.

Falls $x \in A$ können wir auch untersuchen, inwiefern sich die Ergebnisse der beiden Ansätze unterscheiden, d.h. inwiefern das Verhalten von f an der Stelle x mit dem Verhalten in der Nähe von x verträglich ist.

Definition 1. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von A , falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $|x - a| < \varepsilon$ und $x \neq a$ gibt.

Wir bezeichnen die Menge aller Häufungspunkte von A mit A' .

Vorstellungsmäßig ist $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $A \subseteq \mathbb{R}$, falls sich x von außen durch Punkte aus A annähern lässt.

Beispiel(e). • $x = 0$ ist ein Häufungspunkte der Menge $A := \{1/n \mid n \geq 1\}$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 1$ mit $|x - 1/n| < \varepsilon$, und es ist $1/n \neq 0$.

- Der Punkt $x = 2$ ist *kein* Häufungspunkt der Menge $A := [0, 1] \cup \{2\}$, denn das einzige $a \in A$ mit $|x - a| < 1/2$ ist $a = 2$.

Übung 1.

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass x genau dann ein Häufungspunkt von A ist, falls es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, so dass $a_n \in A \setminus \{x\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

Übung 2.

Es sei M eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass $M' = \emptyset$.

Übung 3.

Bestimmen Sie \mathbb{Z}' .

Übung 4.

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Ist $A \subseteq B$, so ist $A' \subseteq B'$.
2. Es ist $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Übung 5.

Bestimmen Sie A' für $A := [0, 1] \cup [2, 3]$.

2 Grenzwerte von Funktionen

Definition 2. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von A . Für $y \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = y,$$

falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } a \neq x.$$

Wir nennen y dann den *Grenzwert von f an x über A* .

Beispiel(e). • Wir betrachten die *Signumabbildung*

$$\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Der Punkt 0 ist ein Häufungspunkt von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$, und es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (-\infty, 0)}} f(x) = -1, \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, \infty)}} f(x) = 1.$$

• Wir betrachten die Abbildung

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}.$$

0 ist ein Häufungspunkt der beiden Mengen

$$A := \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad B := \left\{ \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

und es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in B}} f(x) = -1.$$

0 ist auch ein Häufungspunkt der Menge $(0, \infty)$, der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, \infty)}} f(x)$$

existiert jedoch nicht.

Lemma 3. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von A . Für $y \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = x$.
2. Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in A \setminus \{x\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x)$.

Mithilfe dieses Lemmas können wir viele Aussagen für die Grenzwerte von Folgen auf Grenzwerte von Funktionen übertragen.

Proposition 4. Es seien $A \subseteq \mathbb{R}$, x ein Häufungspunkt von A , $f, f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$ ist eindeutig (wenn er existiert).
2. Existieren die Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \rightarrow x, a \in B} f_2(a)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} (f_1 + f_2)(a)$ und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (f_1 + f_2)(a) = \left(\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_1(a) \right) + \left(\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

3. Existiert der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$, so existiert auch $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} (\lambda f)(a)$, und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (\lambda f)(a) = \lambda \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a).$$

4. Existieren die Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \rightarrow x, a \in B} f_2(a)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a, a \in A} (f_1 \cdot f_2)(a)$ und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} (f_1 \cdot f_2)(a) = \left(\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_1(a) \right) \cdot \left(\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f_2(a) \right).$$

5. Existieren die beiden Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)$ und $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)$, und ist $f_2(a) \neq 0$ für alle $a \in A \setminus \{x\}$ sowie $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a) \neq 0$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)/f_2(a)$ und es gilt

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_1(a)}{\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f_2(a)}$$

Wie wir bereits gesehen haben, können für eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}$ und Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit gemeinsamen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}$ die beiden Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$ und $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ existieren, aber dennoch

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) \neq \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

Es kann auch passieren, dass einer der beiden Grenzwerte existiert, der andere jedoch nicht. Es gibt also im Allgemeinen keinen Zusammenhang zwischen dem Grenzwert von f über A und dem Grenzwert über B .

Lemma 5. *Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und $f: B \rightarrow \mathbb{R}$. Ist x ein gemeinsamer Häufungspunkt von A und B , sodass $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ existiert, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$, und es gilt*

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

Korollar 6. *Es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}$. Es seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen, so dass $x \in \mathbb{R}$ ein gemeinsamer Häufungspunkt von A, B ist, und die beiden Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a)$ und $\lim_{b \rightarrow x, b \in B} f(b)$ existieren. Ist x auch ein Häufungspunkt von $A \cap B$, so ist*

$$\lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} f(a) = \lim_{\substack{b \rightarrow x \\ b \in B}} f(b).$$

3 Links- rechts- und beidseitige Grenzwerte

Wir wollen uns nun einem Sonderfall von Funktionsgrenzwerten zuwenden.

Definition 7. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Gibt es ein $r > 0$, so dass $(x - r, x) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x-r, x)}} f(a),$$

und nennen dies den *linksseitigen Grenzwert von f an x* .

Gibt es ein $r > 0$, so dass $(x, x + r) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \downarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x, x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *rechtsseitigen Grenzwert von f an x* .

Existiert ein $r > 0$, so dass $(x - r, x) \cup (x, x + r) \subseteq A$, so schreiben wir

$$\lim_{a \rightarrow x} f(a) \quad \text{für} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in (x-r, x) \cup (x, x+r)}} f(a),$$

und nennen dies den *beidseitigen Grenzwert von f an x* .

Die Wohldefiniertheit der jeweiligen Ausdrücke, also die Unabhängigkeit von r , ergibt sich aus Lemma 5.

Der beidseitige Grenzwert lässt sich auch als Kombination des links- und rechtsseitigen Grenzwertes definieren:

Lemma 8. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. Der beidseitige Grenzwert $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$ existiert und $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$.
2. Die Grenzwerte $\lim_{a \uparrow x} f(a)$ und $\lim_{a \downarrow x} f(a)$ existieren und es ist

$$\lim_{a \uparrow x} f(a) = y = \lim_{a \downarrow x} f(a).$$

4 Uneigentliche Grenzwerte

Definition 9. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von A . Wir schreiben dass $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = \infty$, falls es für alle $R > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(a)| \geq R \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } |x - a| < \delta \text{ und } a \neq x.$$

Wir schreiben $\lim_{a \rightarrow x, a \in A} f(a) = -\infty$, falls es für alle $R > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(a)| \leq -R \quad \text{für alle } a \in A \text{ mit } |x - a| < \delta \text{ und } a \neq x.$$

Definition 10. Es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}$ sagen wir, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$, falls

1. es gibt $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ für alle $x \geq r_0$ definiert ist, und
2. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $r \geq r_0$, so dass $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x \geq r$.

Wir sagen, dass $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y$, falls

1. es gibt $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ für alle $x \leq r_0$ definiert ist, und
2. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $r \leq r_0$, so dass $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x \leq r$.

5 Lösungen der Übungen

Lösung 1.

Angenommen, x ist ein Häufungspunkt von A . Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $a_n \in A \setminus \{x\}$ mit $|x - a_n| < 1/n$. Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergiert per Konstruktion gegen x .

Angenommen, eine solche Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere ist $a_N \in A$ mit $|x - a_N| < \varepsilon$ und $a_N \neq x$.