Grundlegendes zur Konvergenz von Reihen

Jendrik Stelzner

4. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitung

Wir werden einige grundlegende Eigenschaften über die Konvergenz von Folgen nutzen, die bisher nicht gezeigt wurden. Wir überlassen die entsprechenden Beweise den geneigten Lesern als Übung.

Üb. 1 — Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|.$$

Üb. 2 — Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $C \in \mathbb{R}$ gilt: Es gibt genau dann $y < C$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq y$ für alle $n \geq N$, falls $\limsup_{n\to\infty} a_n < C$.

2 Definition

Definition 1. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der *Partialsummen* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

definiert; s_n heißt die *n-te Partialsumme* (der Folge (a_n)). Diese Folge der Partialsummen bezeichnet man als *Reihe* und schreibt man als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, d.h. konvergiert die Folge der Partialsummen (s_n), so bezeichnet man den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ ebenfalls als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und nennt dies den *Wert der Reihe*. Die Folge (a_n) heißt dann summierbar.

Für $N \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ als die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+N}$ definiert.

Bemerkung 2. Die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ wird nach dieser Definition als die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k+N}$ verstanden. Alternativ kann man die Reihe auch als die Folge der Partialsummen $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s'_n := \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

definieren. Dies macht praktisch keinen Unterschied, da dann

$$s'_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n < N, \\ s_{n-N} & \text{falls } n \geq N. \end{cases}$$

Die Folge (s'_n) ist also die Folge (s_n) mit Nullen aufgefüllt.

Man bemerke, dass man mit der Notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sowohl die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch der Grenzwert dieser Folge bezeichnet. Soll also gezeigt werden, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist damit gemeint, dass die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren soll. Soll der Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimmt werden, so soll der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ ermittelt werden.

Definition 3. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Die Folge (a_n) heißt dann absolut summierbar.

Bemerkung 4. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, also $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, so schreibt man für $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ebenfalls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet man aber in diesen Fällen nicht als konvergent.

3 Grundlegende Eigenschaften

Lemma 5. *Konvergiert für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$, so ist (a_n) eine Nullfolge, d.h.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Wir betrachten die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert bedeutet gerade, dass die Folge (s_n) konvergiert. Es sei

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Wir bemerken nun, dass für alle $n \geq 1$

$$s_n - s_{n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = a_n.$$

Durch die üblichen Rechenregeln konvergenter Folgen ergibt sich daher, dass

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

für $n \to \infty$. Also ist (a_n) konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Proposition 6. *1. Konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

2. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ so konvergiert für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k)$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

3. Für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergiert. Es ist dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich direkt aus den bekannten Rechenregeln für endliche Summen und konvergente Folgen. Ein genaues Formulieren bleibt den Lesern als Übung überlassen. □

Korollar 7. *Die Menge der summierbaren Folgen*

$$\Sigma := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ ist summierbar}\}$$

bildet unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und die Abbildung

$$\Sigma \to \mathbb{R}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ist $\mathbb{R}$-linear.

Wir erhalten aus dem Lemma auch, dass $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$, denn wir haben

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0.$$

Lemma 8. *Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, so ist*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis des Lemmas. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent, so haben wir $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$ und die Aussage ist klar. Ansonsten gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach der Dreiecksungleichung für endliche Summen

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$

so dass wir im Grenzwert

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

haben. □

Wir wollen nun auf den Zusammenhang zwischen konvergenten und absolut konvergenten Reihen zurückkommen.

Proposition 9. *Ist eine Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, also $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Wir wollen zeigen, dass (s_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir für alle $m, m' \ge n$

$$|s_m - s_{m'}| = \left|\sum_{k=\min\{m,m'\}}^{\max\{m,m'\}} a_k\right| \le \sum_{k=\min\{m,m'\}}^{\max\{m,m'\}} |a_k| \le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Aus der obigen Ungleichung ergibt sich damit, dass $m, m' \ge N$ ist dann $|s_m - s_{m'}| < \varepsilon$. □

Lemma 10. *Es seien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *Reihen mit* $0 \le a_n \le b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Beweis. Für die Partialsummen gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Die Aussage ergibt sich damit direkt daraus, dass Monotonie von Folgen unter Grenzwerten erhalten bleibt. □

4 Konvergenzkriterien

4.1 Majoranten- und Minorantenkriterium

Lemma 11. *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und eine Reihe reeller Zahlen und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $b_n \ge 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ist $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. (Dies ist das* Majorantenkriterium.*)*
2. *Ist $b_n \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent. (Dies ist das* Minorantenkriterium.*)*

Beweis. 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

also die Folge von Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt, und somit konvergent.

2. Wäre $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so würde die Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergieren, und nach dem Majorantenkriterium würde auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, im Widerspruch zu Annahme.

□

4.2 Quotientenkriterium

Proposition 12. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gebe $0 \leq y < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+1}/a_n| < y$ für alle $n \geq N$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| &= \sum_{k=N}^{\infty} |a_N| \prod_{j=N}^{k-1} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = |a_N| \sum_{k=N}^{\infty} \prod_{j=N}^{k-1} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \\ &\leq |a_N| \sum_{k=N}^{\infty} y^{k-N} = |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{|a_N|}{1-y},\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \frac{|a_N|}{1-y} < \infty.$$ □

4.3 Wurzelkriterium

Proposition 13. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und es gebe $y < 1$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n|^{1/n} < y$ für alle $n \geq N$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.*

Beweis. Für alle $n \geq N$ gilt $|a_n|^{1/n} < y$ und damit $|a_n| < y^n$. Daher ist

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} y^k = y^N \sum_{k=N}^{\infty} y^{k-N} = y^N \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{y^N}{1-y},$$

und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| + \frac{y^N}{1-y} < \infty.$$ □

4.4 Cauchysches Verdichtungskriterium

Proposition 14. *Es sei* $(a_n)_{n\geq 1}$ *eine monoton fallende Folge mit* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$ *konvergiert.*

Beweis. Wir haben

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k.$$

Da (a_n) monoton fallend ist, ist für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \leq 2^\ell a_{2^\ell}$$

sowie

$$\sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_k \geq 2^\ell a_{2^{\ell+1}}.$$

Konvergiert die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$, so konvergiert wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$$

dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so konvergiert wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}}$$

dann auch die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}}$, und wegen

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$$

damit auch die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$. □

4.5 Leibniz-Kriterium

Proposition 15. *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge mit* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Dann konvergiert die alternierende Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

5 Beispiele

5.1 Endliche Reihen

5.2 Die geometrische Reihe

5.3 Die allgemeine harmonische Reihe

5.4 Die (alternierende) harmonische Reihe

5.5 Weitere Beispiele

6 Potenzreihen

6.1 Definition

6.2 Konvergenzradius

6.3 Beispiele

7 Lösungen der Aufgaben

Lösung (Üb. 1) — Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$||a| - |a_n|| \leq |a - a_n| < \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $|a_n| \to |a|$ für $n \to \infty$.

Lösung (Üb. 2) — Gibt es solche y und N, so ist $\sup_{k\geq N} a_k \leq y$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq N} a_k \leq y < 1.$$

Sei andererseits $x := \limsup_{n\to\infty} a_n < C$. Da $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k$ gibt es wegen der ε-Charakterisierung des Infimums für alle $\varepsilon > 0$ ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{k\geq N'} a_k < x + \varepsilon$. Für $\varepsilon := (C - x)/2$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{k\geq N} a_k < x + \varepsilon = \frac{C + x}{2} < C.$$

Wählen wir $y := x + \varepsilon = (C + x)/2$ so ist also $y < C$ und $a_k \leq y$ für alle $k \geq N$.