Lösungen zu Zettel 1

Jendrik Stelzner

23. November 2016

Aufgabe 1

Für je zwei Mengen X und Y sei $F(X, Y)$ die Menge der Funktionen $X \to Y$. Wir notieren die übliche Adjunktionsabbildung mit

$$\Phi \colon F(R \times A, A) \to F(R, F(A, A)), \quad h \mapsto (r \mapsto h(r, -))$$

wobei wir für jede Funktion $h \colon R \times A \to A$ und jedes $r \in R$ mit $h(r, -)$ die Funktion

$$h(r, -) \colon A \to A, \quad a \mapsto h(r, a)$$

bezeichnen. Die Funktion Φ ist eine Bijektion, und ihr Inverses ist durch

$$\Psi \colon F(R, F(A, A)) \to F(R \times A, A), \quad h \mapsto ((r, a) \mapsto h(r)(a))$$

gegeben.

i)

Es sei $\mu \in F(R \times A, A)$ und $f := \Phi(\mu) \in F(R, F(A, A))$. Es gilt zu zeigen, dass μ genau dann eine R-Modulstruktur auf A ist, wenn f ein Ringhomomorphismus nach $\mathrm{End}(A)$ ist. Dass μ eine R-Modulstruktur auf A ist, bedeutet, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M1) Für alle $r \in R$ und $a_1, a_2 \in A$ gilt $\mu(r, a_1 + a_2) = \mu(r, a_1) + \mu(r, a_2)$.

(M2) Für alle $r_1, r_2 \in R$ und $a \in A$ gilt $\mu(r_1 + r_2, a) = \mu(r_1, a) + \mu(r_2, a)$.

(M3) Für alle $r_1, r_2 \in R$ und $a \in A$ gilt $\mu(r_1 \cdot r_2, a) = \mu(r_1, \mu(r_2, a))$.

(M4) Für alle $a \in A$ gilt $\mu(1, a) = a$.

Dass f ein Ringhomomorphismus nach $\mathrm{End}(A)$ ist, bedeutet, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Für alle $r \in R$ gilt $f(r) \in \mathrm{End}(A)$, d.h. für alle $r \in R$ und $a_1, a_2 \in A$ gilt

$$f(r)(a_1 + a_2) = f(r)(a_1) + f(r)(a_2).$$

(R2) Für alle $r \in R$ gilt $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$, d.h. für alle $r_1, r_2 \in R$ und $a \in A$ gilt $f(r_1 + r_2)(a) = f(r_1)(a) + f(r_2)(a)$.

(R3) Für alle $r_1, r_2 \in R$ gilt $f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \circ f(r_2)$, d.h. für alle $r_1, r_2 \in R$ und $a \in A$ gilt $f(r_1 \cdot r_2)(a) = f(r_1)(f(r_2)(a))$.

(R4) Es gilt $f(1) = \mathrm{id}_A$, d.h. für alle $a \in A$ gilt $f(1)(a) = a$.

Da $\mu(r, a) = f(r)(a)$ sind die Bedingungen in gegebener Nummerierung paarweise äquivalent zueinander (bespielsweise ist (M1) äquivalent zu (R1)). Also erfüllt μ genau dann alle vier Bedingungen, wenn f alle vier Bedingungen erfüllt. Deshalb ist μ genau dann eine R-Modulstruktur auf A, wenn f ein Ringhomomorphismus nach $\mathrm{End}(A)$ ist.

ii)

Wir bezeichnen die gegebene geordnete Basis B von V mit $B = (b_1, \dots, b_n)$. Die K-Vektorraumstruktur auf V entspricht einem Ringhomomorphismus

$$f\colon K \to \mathrm{End}(V), \quad K \mapsto (v \mapsto \lambda \cdot v).$$

Das Bild von f liegt bereits im Unterring $\mathrm{End}_K(V) \subseteq \mathrm{End}(V)$, denn für jedes $\lambda \in K$ ist die Abbildung $f(\lambda)\colon V \to V$, $v \mapsto \lambda \cdot v$ nicht nur additiv, sondern auch K-linear (denn für alle $\mu \in K$ ist $f(\lambda)(\mu v) = \lambda\mu v = \mu\lambda v = \mu f(\lambda)(v)$.) Dashalb können wir f als einen Ringhomomorphismus $f\colon K \to \mathrm{End}_K(V)$ auffassen. Der angegebene Ringisomorphismus $g\colon \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{Mat}_n(K)$ ordnet jedem Endomorphismus $L \in \mathrm{End}_K(V)$ die darstellende Matrix $\mathrm{M}_B(L) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ zu. Für jedes $\lambda \in K$ ist $f(\lambda) = \lambda\,\mathrm{id}_V$ und somit

$$g(f(\lambda)) = g(\lambda\,\mathrm{id}_V) = \mathrm{M}_B(\lambda\,\mathrm{id}_V) = \lambda\,\mathrm{M}_B(\mathrm{id}_V) = \lambda I_n.$$

Die Komposition $K \xrightarrow{f} \mathrm{End}_K(V) \xrightarrow{g} \mathrm{Mat}_n(K)$ bildet also $\lambda \in K$ auf $\lambda I_n \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ab.

iii)

Damit der Ausdruck $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_R(A)}(A)$ Sinn ergibt, müssen wir zunächst eine $\mathrm{End}_R(A)$-Modulstruktur auf A definieren. Eine $\mathrm{End}_R(A)$-Modulstruktur auf A zu definieren ist äquivalent dazu, einen Ringhomomorphismus $\mathrm{End}_R(A) \to \mathrm{End}(A)$ anzugeben.

Der Ringhomomorphismus, der hier betrachtet werden soll, ist die kanonische Inklusion $i\colon \mathrm{End}_R(A) \to \mathrm{End}(A)$, $f \mapsto f$. (Dies wird in der Aufgabenstellunge nur schlecht – nämlich gar nicht – angegeben.) Die $\mathrm{End}_R(A)$-Modulstruktur auf A, die i entspricht, ist durch

$$f \cdot a = i(f)(a) = f(a) \qquad \text{für alle } f \in \mathrm{End}_R(A),\ a \in A$$

gegeben.

Für $g \in \mathrm{End}(A)$ gilt genau dann $g \in \mathrm{End}_{\mathrm{End}_R(A)}$, wenn $g(f \cdot a) = f \cdot g(a)$ für alle $f \in \mathrm{End}_R(A)$ und $a \in A$, d.h. wenn $g(f(a)) = f(g(a))$ für alle $f \in \mathrm{End}_R(A)$ und $a \in A$. Also ist

$$\mathrm{End}_{\mathrm{End}_R(A)} = \{g \in \mathrm{End}(A) \mid gf = fg \text{ für alle } f \in \mathrm{End}_R(A)\}.$$

Liegt g im Bild des zu μ gehörigen Ringhomomorphismus $R \to \mathrm{End}(A)$, $r \mapsto \mu(r, -)$, so gibt es ein $r \in R$ mit $g = \mu(r, -)$. Für alle $a \in A$ ist dann $g(a) = \mu(r, -)(a) = \mu(r, a) = r \cdot a$, und für $f \in \mathrm{End}_R(A)$ ist deshalb

$$g(f(a)) = r \cdot f(a) = f(r \cdot a) = f(g(a)) \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Also gilt $g \in \mathrm{End}_{\mathrm{End}_R(A)}(A)$.

iv)

Wir bemerken zunächst, dass die Aussage im Fall $V = 0$ nicht gilt: Dann wäre nämlich $\mathrm{End}(V) = 0$ und für $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}(V) \subseteq \mathrm{End}(V)$ somit auch $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}(V) = 0$. Es gilt aber $K \ncong 0$. Wir arbeiten daher im Folgenden unter der zusätzlichen Annahme, dass $V \neq 0$.

Nach dem vorherigen Aufgabenteil gilt $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}(V) \subseteq \mathrm{End}_K(V)$, da K kommutativ ist. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}(V) &= \{f \in \mathrm{End}(V) \mid gf = fg \text{ für alle } g \in \mathrm{End}_K(V)\} \\ &= \{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid gf = fg \text{ für alle } g \in \mathrm{End}_K(V)\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Unter dem Isomorphismus $\mathrm{M}_B \colon \mathrm{End}_K(V) \cong \mathrm{Mat}_n(K)$, $f \mapsto \mathrm{M}_B(f)$ entspricht der Unterring $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}(V) \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ dem Unterring

$$\{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid AB = BA \text{ für alle } B \in \mathrm{Mat}_n(K)\} \subseteq \mathrm{Mat}_n(K).$$

Wir bezeichnen diesen Unterring mit $\mathrm{Z}(\mathrm{Mat}_n(K))$.

Bemerkung 1. Allgemein wird für einen Ring R die Teilmenge

$$\mathrm{Z}(R) := \{r \in R \mid rs = sr \text{ für alle } s \in R\}$$

als das *Zentrum* von R bezeichnet. Es handelt sich hierbei um einen kommutativen Unterring von R. In (1) haben wir formuliert, dass $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}(V) = Z(\mathrm{End}_K(V))$.

Wir haben nun das folgende kommutative Diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Mat}_n(K) & \mathrm{Z}(\mathrm{Mat}_n(K)) \arrow[l, hook'] \\
K \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \\
 & \mathrm{End}_K(V) \arrow[uu, "\mathrm{M}_B"'] & \mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}(V) \arrow[l, hook'] \arrow[uu, "\mathrm{M}_B"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\phi\colon K \to \mathrm{End}_K(V)$, $\lambda \mapsto \lambda\,\mathrm{id}_V$ und $\psi\colon K \to \mathrm{Mat}_n(K)$, $\lambda \mapsto \lambda I$.

Da im $\phi \subseteq \mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}$ ist auch im $\psi \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{Mat}_n(K))$. Die Bijektivität der Einschränkung $\phi\colon K \to \mathrm{End}_{\mathrm{End}_K(V)}$ ist äquivalent dazu, dass die Einschränkung $\psi\colon K \to \mathrm{Z}(\mathrm{Mat}_n(K))$ ein Isomorphismus ist. Da $V \neq 0$ ist $n = \dim V \geq 1$ und ψ deshalb injektiv. Für die Surjektivität von ψ müssen wir das folgende Lemma beweisen:

Lemma 2. *Es gilt* $Z(\mathrm{Mat}_n(K)) = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$.

Beweis. Es sei $D = (d_{ij}) \in Z(\mathrm{Mat}_n(K))$. Für alle $1 \leq i, j \leq n$ sei $E_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Matrix, deren (i,j)-ter Eintrag 1 ist, und deren Einträge sonst alle 0 sind (die j-te Spalte von E_{ij} ist also e_i, und alle anderen Spalten sind 0).

Wir zeigen zunächst, dass D eine Diagonalmatrix ist. Hierfür fixieren wir ein $1 \leq i \leq n$. Die Matrix DE_{ii} ergibt sich aus D, indem bis auf die i-te Spalte alle Spalten gelöscht werden, d.h. es gilt

$$DE_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1,i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei es sich bei der mittig gesetzen Spalte um die i-te handelt. Die Matrix $E_{ii}D$ ergibt sich auch D, indem bis auf die i-te Zeile alle Zeilen gelöscht werden, d.h. es gilt

$$DE_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{i,n-1} & d_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei es sich bei der mittig gesetzen Zeile um die i-te handelt. Da $D \in \mathrm{Z}(\mathrm{Mat}_n(K))$ ist $DE_{ii} = E_{ii}D$, die beiden obigen Matrizen stimmen also überein. Durch Vergleich der Einträge erhalten wir, dass $d_{ij} = 0$ für alle $j \neq i$ und $d_{ki} = 0$ für alle $k \neq i$. Da dies für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt, erhalten wir insgesamt, dass $d_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Somit ist D eine Diagonalmatrix.

Um zu zeigen, dass D bereits eine Skalarmatrix ist (d.h. ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix) müssen wir noch zeigen, dass $d_{ii} = d_{jj}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Hierfür bemerken wir, dass

$$DE_{ij} = d_{ii}E_{ij} \quad \text{und} \quad E_{ij}D = d_{jj}E_{ij} \qquad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n,$$

Da $DE_{ij} = E_{ij}D$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ ergibt sich, dass $d_{ii}E_{ij} = d_{jj}E_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, und somit $d_{ii} = d_{jj}$. □

Bemerkung 3. Allgemein gilt für jeden Ring R, dass

$$\mathrm{Z}(\mathrm{Mat}_n(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} r & & \\ & \ddots & \\ & & r \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathrm{Z}(R) \right\}.$$

Hierfür muss R weder kommutativ sein, noch eine 1 haben.

Für kommutative Ringe mit 1 gilt der Beweis von Lemma 2 unverändert (man muss nur K durch R ersetzen.)

Für nicht-kommutative Ringe mit 1 muss man noch einen weiteren Schritt hinzufügen, um einzusehen, dass die Skalare aus dem Zentrum $\mathrm{Z}(R)$ stammen müssen.

Für Ringe 1 lässt sich "künstlich eine 1 hinzufügen", wodurch sich die Aussage auf den Fall von Ringen mit 1 zurückführen lässt.

v)

Es sei R ein nicht-kommutativer Ring. Als R-Modul betrachten wir R selbst, d.h. wir betrachten $A := R$, und die Multiplikation der R-Modulstruktur auf A entspricht der Ringmultiplikation von R.

Da R nicht kommutativ ist gibt es $r_1, r_2 \in R$ mit $r_1 r_2 \neq r_2 r_1$. Die Abbildung

$$\lambda_{r_1} \colon A \to A, \quad a \mapsto r_1 \cdot a$$

ist deshalb nicht R-linear, denn

$$\lambda_{r_1}(r_2 \cdot 1) = \lambda_{r_1}(r_2) = r_1 r_2 \neq r_2 r_1 = r_2(r_1 \cdot 1) = r_2 \lambda_{r_1}(1).$$

Aufgabe 2

Zur Belustigung bezeichnen wir die gegebene Abbildung mit

$$\begin{aligned} \Xi \colon\ & \{\varphi \colon R[T] \to S \mid \varphi \text{ ist ein Ringhomomorphismus}\} \\ & \quad \to \{\psi \colon R \to S \mid \psi \text{ ist ein Ringhomomorphismus}\} \times S, \\ & \varphi \mapsto (\varphi|_R, \varphi(T)). \end{aligned}$$

i)

Es sei $\varphi \colon R[T] \to S$ ein Ringhomomorphismus. Es seien $\psi := \varphi|_R$ und $s := \varphi(T)$. Für jedes $\sum_i a_i T^i \in R[T]$ gilt dann

$$\varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) = \sum_i \varphi(a_i)\varphi(T)^i = \sum_i \psi(a_i) s^i.$$

Deshalb ist φ durch ψ und s schon eindeutig bestimmt. Somit ist Ξ injektiv.

ii)

Falls (ψ, s) im Bild von Ξ liegt, so gibt es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R[T] \to S$ mit $\psi = \varphi|_R$ und $s = \varphi(T)$. Dann gilt

$$\psi(r)s = \varphi(r)\varphi(T) = \varphi(rT) = \varphi(Tr) = \varphi(T)\varphi(r) = s\psi(r) \qquad \text{für alle } r \in R,$$

wobei sich die mittlere Gleichheit aus der Kommutativität von $R[T]$ ergibt.

Umgekehrt sei (ψ, s) ein Paar bestehend aus einem Ringhomomorphismus $\psi\colon R \to S$ und einem Element $s \in S$, so dass $\psi(r)s = s\psi(r)$ für alle $r \in R$. Um zu zeigen, dass (ψ, s) im Bild von Ξ liegt, müssen wir zeigen, das es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R[T] \to S$ gibt, so dass $\psi = \varphi|_R$ und $s = \varphi(T)$. Aus dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir, wie φ aussehen muss. Wir definieren deshalb die Abbildung

$$\varphi\colon R[T] \to S, \quad \sum_i a_i T^i \mapsto \sum_i \psi(a_i) s^i.$$

Da $\varphi|_R = \psi$ und $\varphi(T) = s$ gilt es nur noch zeigen, dass φ ein Ringhomomorphismus ist.

Für alle $f, g \in R[T]$ mit $f = \sum_i a_i T^i$ und $g = \sum_i b_i T^i$ gelten

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= \varphi\left(\sum_i a_i T^i + \sum_i b_i T^i\right) = \varphi\left(\sum_i (a_i + b_i) T^i\right) = \sum_i (a_i + b_i) s^i \\ &= \sum_i a_i s^i + \sum_i b_i s^i = \varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) + \varphi\left(\sum_i b_i TWi\right) = \varphi(f) + \varphi(g),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi(f \cdot g) &= \varphi\left(\left(\sum_i a_i T^i\right) \cdot \left(\sum_i b_i T^i\right)\right) = \varphi\left(\sum_i \sum_{j+k=i} a_j b_k T^i\right) \\ &= \sum_i \psi\left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) s^i = \sum_i \sum_{j+k=i} \psi(a_j)\psi(b_k) s^i \\ &= \left(\sum_i \psi(a_i) s^i\right) \cdot \left(\sum_i \psi(b_i) s^i\right) = \varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) \cdot \varphi\left(\sum_i b_i T^i\right) \\ &= \varphi(f) \cdot \varphi(g).\end{aligned}$$

Also ist φ additiv und multiplikativ. Da

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot T^0) = \psi(1) s^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

ist φ auch unitär. Insgesamt zeigt dies, dass φ ein Ringhomomorphismus ist.

iii)

In den vorherigen Aufgabenteilen haben wir Bijektionen konstruiert:

$$\begin{aligned}
&\{K[T]\text{-Modulstrukturen } \mu\colon K[T]\times V\to V\}\\
\longleftrightarrow\;&\{\text{Ringhomomorphismen } \phi\colon K[T]\to \mathrm{End}(V)\}\\
\longleftrightarrow\;&\left\{(\psi,f)\;\middle|\;\begin{array}{c}\psi\colon K\to\mathrm{End}(V)\text{ ist ein Ringhomomorphismus,}\\ f\in\mathrm{End}(V)\text{ mit } f\psi(\lambda)=\psi(\lambda)f \text{ für alle } \lambda\in K\end{array}\right\}\\
\longleftrightarrow\;&\left\{(\nu,f)\;\middle|\;\begin{array}{c}K\text{-Modulstrukturen } \nu\colon K\times V\to V\\ f\in\mathrm{End}(V)\text{ mit } f(\nu(\lambda,-))=\nu(\lambda,f(-)) \text{ für alle } \lambda\in K\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Dass eine $K[T]$-Modulstruktur $\mu\colon K[T]\times V\to V$ die gegebene K-Vektorraumstruktur von V erweitert, bedeutet, dass $\mu(\lambda,v)=\lambda\cdot v$ für alle $\lambda\in K$, $v\in V$. Die obige Bijektionskette schränkt sich dadurch wie folgt ein:

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{c}K[T]\text{-Modulstrukturen } \mu\colon K[T]\times V\to V\text{, die}\\ \text{die gegebene } K\text{-Vektorraumstruktur erweitern.}\end{array}\right\}\\
\longleftrightarrow\;&\left\{\begin{array}{c}\text{Ringhomomorphismen } \phi\colon K[T]\to\mathrm{End}(V)\\ \text{mit } \phi(\lambda)(v)=\lambda v \text{ für alle } \lambda\in K, v\in V\end{array}\right\}\\
\longleftrightarrow\;&\left\{(\psi,f)\;\middle|\;\begin{array}{c}\psi\colon K\to\mathrm{End}(V)\text{ ist ein Ringhomomorphismus}\\ \text{mit } \psi(\lambda)(v)=\lambda\cdot v \text{ für alle } \lambda\in K, v\in V,\\ f\in\mathrm{End}(V)\text{ mit } f\psi(\lambda)=\psi(\lambda)f \text{ für alle } \lambda\in K\end{array}\right\}\\
\longleftrightarrow\;&\left\{(\nu,f)\;\middle|\;\begin{array}{c}K\text{-Modulstrukturen } \nu\colon K\times V\to V\\ \text{mit } \nu(\lambda,v)=\lambda\cdot v \text{ für alle } \lambda\in K, v\in V,\\ f\in\mathrm{End}(V)\text{ mit } f(\nu(\lambda,-))=\nu(\lambda,f(-)) \text{ für alle } \lambda\in K\end{array}\right\}\\
\longleftrightarrow\;&\{f\in\mathrm{End}(V)\mid f(\lambda\cdot v)=\lambda\cdot f(v)\text{ für alle }\lambda\in K, v\in V\}\\
=\;&\mathrm{End}_K(V).
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine Bijektion zwischen denjenigen $K[T]$-Modulstrukturen auf V, welche die K-Vektorraumstruktur erweitern, und den K-linearen Endomorphismen von V.

Konkret sieht diese Bijektion so aus, dass für $f\in\mathrm{End}_K(V)$ die entsprechende $K[T]$-Modulstruktur $\mu\colon K[T]\times V\to V$ durch

$$\mu\left(\sum_i a_iT^i, v\right)=\sum_i a_if^i(v)\qquad\text{für alle } \sum_i a_iT^i\in K[T],\, v\in V$$

gegeben ist.