

Übungen zu Einführung in die Algebra

Jendrik Stelzner

25. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Gruppentheorie	2
2	Ringtheorie	6
3	Modultheorie	18
4	Körpertheorie	21

1 Gruppentheorie

Übung 1. Ein Kriterium für maximale Untergruppen

Es sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so dass $[G : H]$ endlich und prim ist. Zeigen Sie, dass H eine maximale echte Untergruppe von G ist. Entscheiden Sie, ob H notwendigerweise normal in G ist.

Lösung 1.

Es sei $p := [G : H]$. Da p eine Primzahl ist gilt insbesondere $p \neq 1$, weshalb H eine echte Untergruppe von G ist. Ist $K \subsetneq G$ eine echte Untergruppe von G mit $H \subseteq K$, so gilt wegen der Multiplikativität des Index, dass

$$p = [G : H] = [G : K][K : H].$$

Da p eine Primzahl ist, gilt entweder $[G : K] = p$ und $[K : H] = 1$, oder $[G : K] = 1$ und $[K : H] = p$. Es gilt $[G : K] > 1$, da K eine echte Untergruppe von G ist, und somit $[K : H] = 1$. Also ist $K = H$, und somit H eine maximale echte Untergruppe.

H ist nicht notwendigerweise normal in G : Für $G = S_3$ und $H = \langle (1\ 2) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2)\}$ ist H zwar nicht normal in G , aber $[G : H] = |G|/|H| = 6/2 = 3$ ist prim.

Übung 2. Multiple Choice I

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen allgemein gültig sind, und geben sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

1. Ist G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine normale Untergruppe, so gilt $G \cong (G/N) \times N$.
2. Ist G eine endliche Gruppe, so dass G/N für normale Untergruppe $N \subseteq G$ mit $N \neq 1$ abelsch ist, so ist auch G abelsch.
3. Zwei Gruppen G_1 und G_2 sind genau dann isomorph, wenn $G_1 \times H \cong G_2 \times H$ für jede Gruppe H .
4. Sind G_1 und G_2 zwei Gruppen, so ist jede Untergruppe von $G_1 \times G_2$ von der Form $H_1 \times H_2$ für Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und $H_2 \subseteq G_2$.
5. Sind G_1 und G_2 zwei Gruppen, so dass es Gruppenepimorphismen $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ und $\psi: G_2 \rightarrow G_1$ gibt, so gilt $G_1 \cong G_2$.

Lösung 2.

1. Die Aussage ist falsch: Es sei $G = \mathbb{Z}$ und $N = 2\mathbb{Z}$. Dann ist

$$(G/N) \times N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}.$$

Es ist allerdings $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}$, da $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 2 enthält (nämlich $(1, 0)$), \mathbb{Z} aber nicht.

2. Die Aussage ist falsch: Die einzigen nicht-trivialen normalen Untergruppe von S_3 sind $N = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ und S_3 selbst. Der Quotient S_3/N hat Ordnung 2, weshalb $S_3/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abelsch ist, und $S_3/S_3 = 1$ ist ohnehin abelsch. Die Gruppe S_3 selbst ist allerdings nicht abelsch.

Alternativ ist A_n für $n \geq 5$ einfach, weshalb A_n der einzige nicht-triviale Normalteiler von A_n ist, aber A_4 ist für $n \geq 4$ nicht abelsch.

3. Die Aussage ist wahr: Gilt $G_1 \cong G_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\phi: G_1 \rightarrow G_2$. Für jede Gruppe H ist dann $\phi \times \text{id}_H: G_1 \times H \rightarrow G_2 \times H$ ein Isomorphismus, und somit $G_1 \times H \cong G_2 \times H$. Gilt andererseits $G_1 \times H \cong G_2 \times H$ für jede Gruppe H , so gilt insbesondere $G_1 \cong G_1 \times 1 \cong G_2 \times 1 \cong G_2$.
4. Die Aussage ist falsch: Ist $G \neq 1$ eine Gruppe und $G_1 = G_2 = G$, so ist die Diagonale $\Delta = \{(g, g) \mid g \in G\}$ eine Untergruppe von $G_1 \times G_2 = G \times G$, die sich nicht als ein solches Produkt schreiben lässt.
5. Die Aussage ist falsch: Für die Gruppen

$$G_1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

und

$$G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

gibt es Gruppenepimorphismen

$$\phi: G_1 \rightarrow G_2, \quad (n_1, n_2, n_3, \dots) \mapsto (\overline{n_1}, n_2, n_3, \dots)$$

und

$$\psi: G_2 \rightarrow G_1, \quad (\overline{n_1}, n_2, n_3, \dots) \mapsto (n_2, n_3, \dots).$$

Es gilt aber $G_1 \not\cong G_2$, denn G_2 enthält ein Element der Ordnung 2, G_1 jedoch nicht.

Übung 3.

Es seien G_1 und G_2 zwei Gruppen, $N_1 \subseteq G_1$ und $N_2 \subseteq G_2$ zwei normale Untergruppen. Geben Sie jeweils Beispiele für die folgenden Situationen:

1. Es gilt $G_1 \cong G_2$ und $N_1 \cong N_2$, aber $G_1/N_1 \not\cong G_2/N_2$.
2. Es gilt $G_1 \cong G_2$ und $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$, aber $N_1 \not\cong N_2$.
3. Es gilt $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ und $N_1 \cong N_2$, aber $G_1 \not\cong G_2$.

Lösung 3.

1. Es seien $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$, sowie $N_1 = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}$ und $N_2 = \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z}$. Dann gilt $G_1 = G_2 \cong N_1 \cong N_2$ aber

$$G_1/N_1 \cong \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

2. Es seien $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$ und

$$N_1 := \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

und

$$N_2 := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

Dann gilt

$$G_1/N_1 \cong \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z} \cong \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

Es gilt aber $N_1 \not\cong N_2$, denn $N_1 \cong \mathbb{Z}$ ist zyklisch, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ aber nicht.

3. Es seien $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie $N_1 = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ und $N_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0$. Wegen der Kommutativität von G_1 und G_2 handelt es sich jeweils um eine normale Untergruppe. Da N_1 und N_2 beide zweielementig sind, gilt

$$N_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong N_2$$

(denn $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist die bis auf Isomorphie eindeutige zweielementige Gruppe). Nach dem zweiten (oder dritten) Isomorphiesatz gilt

$$G_1/N_1 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

und für den anderen Quotienten gilt

$$\begin{aligned} G_2/N_2 &= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0) \\ &\cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \oplus ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/0) \cong 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also gilt auch $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. Es gilt aber $G_1 \not\cong G_2$, da G_1 ein Element der Ordnung 4 enthält, G_2 jedoch nicht.

Übung 4. Gruppen mit trivialer Automorphismengruppe

Es sei G eine Gruppe mit $\text{Aut}(G) = 1$.

1. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
2. Zeigen Sie, dass $g = -g$ für alle $g \in G$.
3. Folgern Sie, dass es eine eindeutige \mathbb{F}_2 -Vektorraumstruktur auf G gibt.
4. Folgern Sie, dass $G = 0$ oder $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lösung 4.

1. Für $g \in G$ sei $c_g: G \rightarrow G$ die Konjugation mit g . Dies ist ein Automorphismus von G , weshalb $c_g = \text{id}_G$. Somit ist $g \in Z(G)$.
2. Wegen der Kommutativität von G ist die Abbildung $n: G \rightarrow G, g \mapsto -g$ ein Automorphismus von G . Somit ist $n = \text{id}_G$, also $-g = g$ für alle $g \in G$.
3. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist $2g = 0$ für alle $g \in G$. Deshalb gibt es eine eindeutige \mathbb{F}_2 -Vektorraumstruktur auf G via

$$\bar{n} \cdot g = n \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, g \in G,$$

wie sich durch direktes Nachrechnen ergibt.

4. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von G als \mathbb{F}_2 -Vektorraum. Ist $G \neq 0$ und $G \not\cong \mathbb{Z}/2$, so ist $\dim_{\mathbb{F}_2} G \geq 2$. Es gibt daher $i_1, i_2 \in I$ with $i_1 \neq i_2$. Die Permutation

$$\sigma: \{b_i\}_{i \in I} \rightarrow \{b_i\}_{i \in I}, \quad b_j \mapsto \begin{cases} b_{i_2} & \text{falls } j = i_1, \\ b_{i_1} & \text{falls } j = i_2, \\ b_j & \text{sonst,} \end{cases}$$

induziert einen nicht-trivialen \mathbb{F}_2 -Vektorraumautomorphismus $\alpha: G \rightarrow G$ mit

$$\alpha \left(\sum_{i \in I} \lambda_i b_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_{\sigma(i)}.$$

Dann ist α aber insbesondere ein nicht-trivialer Gruppenautomorphismus, im Widerspruch zu $\text{Aut}(G) = 1$.

2 Ringtheorie

Übung 5. *Initialobjekte in der Kategorie der Ringe*

1. Zeigen Sie, dass es für jeden Ring R einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow R$ gibt. (Dies bedeutet, dass der Ring \mathbb{Z} ein Initialobjekt in der Kategorie der Ringe ist.)
2. Es sei Z ein Ring, so dass es für jeden Ring R einen eindeutigen Ringhomomorphismus $Z \rightarrow R$ gibt. Zeigen Sie, dass $Z \cong \mathbb{Z}$.

Lösung 5.

1. Ist $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\phi(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist damit

$$\phi(n) = \phi(n \cdot 1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot \phi(1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot 1_R.$$

Also ist ϕ eindeutig. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich auch, dass $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow R$ mit

$$\psi(n) := n \cdot 1_R \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

2. Es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow Z$ sowie einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\psi: Z \rightarrow \mathbb{Z}$. Es ist auch $\psi \circ \phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ein Ringhomomorphismus. Die Identität $\text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ebenfalls ein Ringhomomorphismus ist. Da es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ gibt, muss sowohl $\psi \circ \phi$ als auch $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ dieser eindeutige Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sein. Folglich ist $\psi \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Analog ergibt sich, dass $\phi \circ \psi = \text{id}_Z$.

Übung 6.

Es sei R ein Ring. Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen der Menge der Ringhomomorphismen $\mathbb{Z}[T] \rightarrow R$ und R .

Lösung 6.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z}[T] \rightarrow R\} &\rightarrow \{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z} \rightarrow R\} \times R, \\ \phi &\mapsto (\phi|_{\mathbb{Z}}, \phi(T)) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist. Da es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow R$ gibt, ergibt sich ferner, dass die Abbildung

$$\{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z} \rightarrow R\} \times R \rightarrow R, \quad (\psi, r) \mapsto r$$

eine Bijektion ist. Damit ergibt sich insgesamt eine Bijektion

$$\{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z}[T] \rightarrow R\} \rightarrow R, \quad \phi \mapsto \phi(T).$$

Übung 7.

Es sei R ein kommutativer Ring.

1. Zeigen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ genau dann prim ist, wenn R/\mathfrak{p} ein Integritätsbereich ist.
2. Zeigen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ genau dann maximal ist, wenn R/\mathfrak{m} ein Körper ist.

Lösung 7.

Dies ist eine Standardaussage, deren Beweis sich in jedem Algebra-Buch findet.

Übung 8.

Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal.

1. Definieren Sie das Radikal \sqrt{I} und zeigen Sie, dass \sqrt{I} ein Ideal mit $I \subseteq \sqrt{I}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Zeigen Sie, dass \sqrt{I} genau dann ein echtes Ideal ist, wenn I ein echtes Ideal ist.

Ein Ideal I ist ein *Radikalideal*, wenn $I = \sqrt{I}$ für ein Ideal $J \subseteq I$.

4. Zeigen Sie, dass I genau dann ein Radikalideal ist, wenn $\sqrt{I} = I$.

Ein Ring S heißt *reduziert*, falls 0 das einzige nilpotente Element von S ist.

5. Zeigen Sie, dass R/I genau dann reduziert ist, wenn I ein Radikalideal ist.
6. Zeigen Sie, dass jedes Primideal ein Radikalideal ist.

Lösung 8.

1. Das Radikal \sqrt{I} ist als

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n \in I\}$$

definiert. Für alle $x \in I$ gilt $x^1 = x \in I$, weshalb $I \subseteq \sqrt{I}$.

Insbesondere ist somit $0 \in \sqrt{I}$, da $0 \in I$. Für $x, y \in \sqrt{I}$ gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $x^n, y^m \in I$. Für alle $k = 0, \dots, n+m$ gilt deshalb $x^k \in I$ oder $y^{n+m-k} \in I$, und somit auch

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \in I.$$

Deshalb ist auch $x+y \in \sqrt{I}$. Für $r \in R$ und $x \in I$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in I$, weshalb auch

$$(rx)^n = r^n x^n \in I.$$

Somit ist auch $rx \in \sqrt{I}$.

2. Wir wissen bereits, dass $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$. Für $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in \sqrt{I}$, und somit auch noch $m \in \mathbb{N}$ mit $(x^n)^m \in I$. Damit ist $x^{nm} \in I$, weshalb auch $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$.
3. I ist genau dann ein echtes Ideal, wenn $1 \notin I$. Da $1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann $1 \notin I$, wenn $1 \notin \sqrt{I}$. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass \sqrt{I} ein echtes Ideal ist.
4. Gilt $I = \sqrt{I}$ so erfüllt I die definierende Eigenschaft eines Radikalideals (mit $J = I$). Ist andererseits $I = \sqrt{J}$ für ein Ideal $J \subseteq R$, so gilt

$$\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{J}} = \sqrt{J} = I.$$

5. Der Quotient R/I ist genau reduziert, wenn

$$\text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \bar{x}^n = 0 \implies \bar{x} = 0 \quad \text{für alle } x \in R. \quad (1)$$

Dabei gilt $\bar{x}^n = \overline{x^n}$ für alle $x \in R$ und $n \in \mathbb{N}$, und für alle $y \in R$ gilt genau dann $\bar{y} = 0$, wenn $y \in I$. Daher ist (1) äquivalent dazu, dass

$$\text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in I \implies x \in I \quad \text{für alle } x \in R. \quad (2)$$

Durch Einsetzen der Definition von \sqrt{I} ergibt sich aus (2) die äquivalente Bedingung

$$x \in \sqrt{I} \implies x \in I \quad \text{für alle } x \in R.$$

Dies bedeutet gerade, dass $\sqrt{I} \subseteq I$. Da $I \subseteq \sqrt{I}$ ist dies äquivalent dazu, dass $I = \sqrt{I}$, dass also I ein Radikalideal ist.

6. Der Quotient R/\mathfrak{p} ist ein Integritätsbereich, da \mathfrak{p} ein Primideal ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil genügt es zu zeigen, dass jeder Integritätsbereich S reduziert ist. Dies folgt direkt daraus, dass für jedes $x \in S$ mit $x^n = 0$ aus der Nullteilerfreiheit von S folgt, dass $x = 0$.

Übung 9.

Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass \mathfrak{p} genau dann ein Primideal ist, wenn es einen Körper K und einen Ringhomomorphismus $\phi: R \rightarrow K$ mit $\ker \phi = \mathfrak{p}$ gibt.

Lösung 9.

Ist \mathfrak{p} ein Primideal, so ist der Quotient R/\mathfrak{p} ein Integritätsbereich. Da die kanonische Inklusion $R/\mathfrak{p} \rightarrow Q(R/\mathfrak{p})$ ein injektiver Ringhomomorphismus ist, folgt für die Komposition

$$\phi: R \xrightarrow{\pi} R/\mathfrak{p} \rightarrow Q(R/\mathfrak{p}),$$

dass $\ker \phi = \ker \pi = \mathfrak{p}$. (Hier bezeichnet $\pi: R \rightarrow R/\mathfrak{p}$ die kanonische Projektion.) Da $Q(R/\mathfrak{p})$ ein Körper ist, zeigt dies eine Implikation.

Gibt es andererseits einen Körper K und einen Ringhomomorphismus $\phi: R \rightarrow K$ mit $\mathfrak{p} = \ker \phi$, so ist $R/\mathfrak{p} \cong \text{im } \phi \subseteq K$. Der Körper K ist insbesondere ein Integritätsbereich,

weshalb auch der Unterring im ϕ ein Integritätsbereich ist. Der Quotient R/\mathfrak{p} ist also ein Integritätsbereich und \mathfrak{p} somit eine Primideal.

Übung 10.

Es sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass es für jedes Polynom $f \in K[X]$ einen eindeutigen K -linearen Ringhomomorphismus $\phi_f: K[X] \rightarrow K[X]$ gibt, so dass $\phi_f(X) = f$.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\phi_f|_K = \text{id}_K$ gilt.)
2. Zeigen Sie, dass ϕ_f genau dann ein Ringisomorphismus ist, wenn $\deg f = 1$.

Übung 11. Funktorialität der Einheitengruppe

Ist R ein kommutativer Ring, so ist

$$R^\times := \{x \in R \mid x \text{ ist eine Einheit}\}$$

die Einheitengruppe von R . Zeigen Sie:

1. Ist R ein kommutativer Ring, so bildet R^\times mit der Multiplikation aus R eine abelsche Gruppe.
2. Sind R und S zwei kommutativer Ringe und ist $\phi: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so induziert ϕ per Einschränkung einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi^\times: R^\times \rightarrow S^\times, \quad x \mapsto \phi(x).$$

3. Für jeden Ring kommutativen R gilt $\text{id}_R^\times = \text{id}_{R^\times}$, und für alle kommutativen Ringe R_1, R_2 und R_3 und Ringhomomorphismen $\phi: R_1 \rightarrow R_2$ und $\psi: R_2 \rightarrow R_3$ gilt $(\psi\phi)^\times = \psi^\times \phi^\times$.
4. Ist R ein kommutativer Ring und $\phi: R \rightarrow S$ ein Isomorphismus von Ringen, so ist $\phi^\times: R^\times \rightarrow S^\times$ ein Isomorphismus von Gruppen.

(Die Aussagen gelten auch für nichtkommutative Ringe, wobei R^\times dann im Allgemeinen nicht abelsch ist. Dabei ist ein Element $r \in R$ eines nichtkommutativen Rings R eine Einheit, wenn es $s \in R$ mit $rs = 1 = sr$ gibt. Es genügt auch, dass es $s, t \in R$ mit $rs = 1 = tr$ gibt; dann gilt bereits $s = t$.)

Lösung 11.

1. Die Multiplikation in R^\times ist assoziativ, da sie es in R ist. Dass R^\times abelsch ist ergibt sich aus der Kommutativität von R . Es gilt $1 \in R^\times$, und da 1 in ganz R neutral bezüglich der Multiplikation ist, gilt dies auch in R^\times . Für jedes $x \in R^\times$ gibt es ein $y \in R$ mit $xy = 1$. Dann gilt auch $y \in R^\times$ und y ist auch in R^\times invers zu x .
2. Für $x \in R^\times$ gilt

$$1 = \phi(1) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1}).$$

Deshalb ist $\phi(x)$ eine Einheit in S (mit $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1})$), und somit $\phi(x) \in S^\times$. Das zeigt, dass die Einschränkung ϕ^\times wohldefiniert ist. Da ϕ multiplikativ ist, gilt dies auch für ϕ^\times , weshalb ϕ^\times ein Gruppenhomomorphismus ist.

3. Da $\text{id}_R^\times(x) = \text{id}_R(x) = x = \text{id}_{R^\times}(x)$ für alle $x \in X$ gilt, ist $\text{id}_R^\times = \text{id}_{R^\times}$. Für alle $x \in R_1$ gilt

$$(\psi^\times \phi^\times)(x) = \psi^\times(\phi^\times(x)) = \psi(\phi(x)) = (\psi\phi)(x) = (\psi\phi)^\times(x).$$

Deshalb ist $(\psi^\times \phi^\times) = (\psi\phi)^\times$.

4. Es sei $\psi := \phi^{-1}: S \rightarrow R$. Es gilt

$$\phi^\times \psi^\times = (\phi\psi)^\times = (\phi\phi^{-1})^\times = \text{id}_S^\times = \text{id}_{S^\times}$$

und analog auch $\psi^\times \phi^\times = \text{id}_{R^\times}$. Also ist der Gruppenhomomorphismus ϕ^\times bijektiv mit $(\phi^\times)^{-1} = (\phi^{-1})^\times$, und somit ein Gruppenisomorphismus.

Übung 12. Urbilder von Idealen

Es seien R und S zwei kommutative Ringe und $\phi: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Ideal in R ist.
2. Entscheiden Sie, ob $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal ist, wenn $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primideal ist.
3. Entscheiden Sie, ob $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal ist, wenn $\mathfrak{m} \subseteq S$ ein maximales Ideal ist.

Lösung 12.

1. Es sei $\pi: S \rightarrow S/\mathfrak{a}$, $s \mapsto \bar{s}$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi\phi$ ein Ringhomomorphismus und somit $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Ideal in R .
2. Die Aussage gilt: Es sei $\pi: S \rightarrow S/\mathfrak{p}$, $s \mapsto \bar{s}$ die kanonische Projektion und $\mathfrak{q} := \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Der Quotient S/\mathfrak{p} ist ein Integritätsbereich, da \mathfrak{p} ein Primideal ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist \mathfrak{q} ein Ideal in R , und da $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ induziert $\pi\phi$ einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\psi: R/\mathfrak{q} \rightarrow S/\mathfrak{p} \quad \bar{r} \mapsto \overline{\phi(r)}.$$

Der Ring $\text{im}(\pi\phi) \subseteq S/\mathfrak{p}$ ist als Unterring eines Integritätsbereichs ebenfalls ein Integritätsbereich. Somit ist $R/\mathfrak{q} \cong \text{im}(\pi\phi)$ ein Integritätsbereich, also \mathfrak{q} ein Primideal.

3. Die Aussage gilt nicht: Es sei etwa $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ die kanonische Inklusion. Dann ist $\mathfrak{m} := 0$ ein maximales Ideal in \mathbb{Q} , aber $\phi^{-1}(0) = 0$ ist kein maximales Ideal in \mathbb{Z} , da $\mathbb{Z}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Übung 13.

Es sei R ein kommutativer Ring. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ zwei Ideale mit $\mathfrak{a} = (x_i \mid i \in I)$ und $\mathfrak{b} = (y_j \mid j \in J)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (x_i y_j \mid i \in I, j \in J).$$

Lösung 13.

Für alle $i \in I$ und $j \in J$ folgt aus $x_i \in \mathfrak{a}$ und $y_j \in \mathfrak{b}$, dass $x_i y_j \in \mathfrak{ab}$. Daraus folgt, dass $(x_i y_j \mid i \in I, j \in J) \subseteq \mathfrak{ab}$. Sind andererseits $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$, so ist $a = \sum_{i \in I} r_i x_i$ und $b = \sum_{j \in J} s_j y_j$ mit $r_i, s_j \in R$, wobei $r_i = 0$ für fast alle $i \in I$ und $s_j = 0$ für fast alle $j \in J$. Deshalb ist

$$ab = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} r_i s_j x_i y_j \in (x_i y_j \mid i \in I, j \in J).$$

Da jedes Element aus \mathfrak{ab} von der Form $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ mit $a_k \in \mathfrak{a}$ und $b_k \in \mathfrak{b}$ ist, folgt daraus, dass $\mathfrak{ab} \subseteq (x_i y_j \mid i \in I, j \in J)$.

Übung 14. Zur Definition von Unterringen

Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring R und eine Teilmenge $S \subseteq R$ mit den folgenden Eigenschaften:

- S ist abgeschlossen unter der Addition und Multiplikation von R , d.h. für alle $s_1, s_2 \in S$ ist auch $s_1 + s_2 \in S$ und $s_1 s_2 \in S$.
- Zusammen mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation aus R ist S ebenfalls ein (notwendigerweise kommutativer) Ring.
- S ist kein Unterring von R .

Lösung 14.

Es sei $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \times 0 = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Offenbar ist S unter der Addition und Multiplikation abgeschlossen. Zusammen mit der Einschränkung dieser Operationen bildet S einen kommutativen Ring, für den $S \cong \mathbb{Z}$ gilt. Da $1_R = (1, 1) \notin S$ ist S allerdings kein Unterring von R .

Übung 15.

Es sei R ein kommutativer Ring.

1. Definieren Sie, wann zwei Elemente von R assoziiert sind.
2. Zeigen Sie, dass Assoziiertheit eine Äquivalenzrelation ist.
3. Es sei nun R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass zwei Elemente $a, b \in R$ genau dann assoziiert sind, wenn $(a) = (b)$.

Lösung 15.

1. Ein Element $y \in R$ ist assoziiert zu einem Element $x \in R$, wenn es eine Einheit $\varepsilon \in R^\times$ mit $y = \varepsilon x$ gibt.

Für $x, y \in R$ schreiben wir im Folgenden $x \sim y$, wenn y assoziiert zu x ist.

2. Für jedes $x \in R$ ist $x \sim x$ da $x = 1 \cdot x$ mit $1 \in R^\times$. Für $x, y \in R$ mit $x \sim y$ gibt es $\varepsilon \in R^\times$ mit $y = \varepsilon x$; dann ist $\varepsilon^{-1} \in R^\times$ mit $x = \varepsilon^{-1}y$ und deshalb $y \sim x$. Für $x, y, z \in R$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$ gibt es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R^\times$ mit $y = \varepsilon_1 x$ und $z = \varepsilon_2 y$; dann ist $\varepsilon_2 \varepsilon_1 \in R^\times$ mit $z = \varepsilon_2 y = \varepsilon_2 \varepsilon_1 x$ und somit $x \sim z$.

3. Für $x, y \in R$ mit $x \sim y$ gibt es $\varepsilon \in R^\times$ mit $x = \varepsilon y$. Dann ist $R\varepsilon = R$ und deshalb

$$(x) = \{rx \mid r \in R\} = \{r\varepsilon y \mid r \in R\} = \{r'y \mid r' \in R\varepsilon\} = \{r'y \mid r' \in R\} = (y).$$

Ist andererseits $(x) = (y)$ so ist $x \in (y)$ und $y \in (x)$, also gibt es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R$ mit $y = \varepsilon_1 x$ und $x = \varepsilon_2 y$. Dann ist $y = \varepsilon_1 x = \varepsilon_1 \varepsilon_2 y$, und da R ein Integritätsbereich ist, somit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$. Also ist ε_1 eine Einheit mit $\varepsilon_1^{-1} = \varepsilon_2$. Da $y = \varepsilon_1 x$ ist $x \sim y$.

Übung 16.

Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.

1. Zeigen Sie, dass R_S noethersch ist, wenn R noethersch ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie, dass R_S ein Hauptidealring ist, wenn R ein Hauptidealring ist.

Übung 17.

Es sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal.

1. Zeigen Sie, dass R/I noethersch ist, wenn R noethersch ist.
2. Zeigen Sie widerlegen, dass R/I ein Hauptidealring ist, wenn R ein Hauptidealring ist.

Übung 18.

Für jedes $d \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] := \mathbb{Z}[i\sqrt{d}] = \{a + i\sqrt{d}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Es darf im Folgenden ohne Beweis genutzt werden, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ ein Unterring von \mathbb{C} ist.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ein euklidischer Ring ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist.
3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein euklidischer Ring ist.

Übung 19.

Es sei R ein euklidischer Ring. Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealring ist.

Lösung 19.

Als euklidischer Ring ist R insbesondere ein Integritätsbereich. Es sei $g: R \rightarrow \mathbb{N}$ die Gradabbildung und $I \subseteq R$ ein Ideal. Ist $I = 0$ so ist $I = (0)$, wir betrachten daher den Fall $I \neq 0$. Dann gibt es ein bezüglich g minimales $a \in I$, d.h. $a \in I$ mit $a \neq 0$ und $g(a) \leq g(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \neq 0$. Es gilt $(a) \subseteq I$ und es handelt sich bereits um Gleichheit: Ist $x \in I$ so gibt es $b, r \in R$ mit $x = ab + r$, und entweder $r = 0$ oder $g(r) < g(a)$. Da $r = x - ab \in I$ kann $g(r) < g(a)$ wegen der Minimalität von a nicht eintreten. Also ist $r = 0$ und somit $x = ab \in (a)$.

Übung 20.

Es sei K ein kommutativer Ring, so dass $K[X]$ ein Hauptidealring ist. Zeigen Sie, dass K bereits ein Körper ist.

Lösung 20.

Wir geben zwei mögliche Beweise:

1. Es sei $a \in K$ mit $a \neq 0$. Das Ideal (a, X) ist nach Annahme ein Hauptideal. Also gibt es ein Polynom $f \in K[X]$ mit

$$(a, X) = (f). \quad (3)$$

Wegen Gleichung (3) gilt $f \mid a$, d.h. es gibt $g \in K[X]$ mit $fg = a$. Entscheidend ist nun die folgende Beobachtung:

Behauptung 1. Die übliche Gradabbildung $\deg: K[X] \rightarrow \mathbb{N}$ ist additiv.

Beweis. As Hauptidealring ist $K[X]$ insbesondere ein Integritätsbereich. Also ist auch der Unterring $K \subseteq K[X]$ ein Integritätsbereich, woraus die Aussage folgt. \square

Aus Behauptung 1 erhalten wir, dass

$$0 = \deg(a) = \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g).$$

Es muss $\deg(f) = \deg(g) = 0$ gelten und somit bereits $f, g \in K$.

Da $f \in (a, X)$ gibt es $p, q \in K[X]$ mit $f = ap + Xq$. Da $f \in K$ und $\deg(Xq) \geq 1$ ergibt sich durch Vergleich des 0-ten Koeffizienten, dass $f = f_0 = a_0p_0 = ap_0$. Deshalb gilt bereits $f = ap_0 \in (a)$. Wir haben also

$$(a, X) = (f) \subseteq (a) \subseteq (a, X)$$

und somit $(a, X) = (a)$.

Es gibt deshalb $h \in K[X]$ mit $X = ah$. Durch Gradvergleich erhalten wir, dass

$$1 = \deg(X) = \deg(ah) = \deg(a) + \deg(h) = 0 + \deg(h) = \deg(h)$$

und deshalb $h(X) = b_1X + b_0$ für $b_1, b_0 \in K$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir aus der Gleichung

$$X = ah(X) = a(b_1X + b_0) = ab_1X + ab_0,$$

dass $ab_1 = 1$. Das zeigt, dass $a \in A$ eine Einheit ist.

2. Der obige Beweis lässt sich leicht ändern. Wir zeigen, dass das Ideal (X) maximal ist. Ansonsten gebe es $a \in K[X]$, so dass $(X) \subsetneq (a, X) \subsetneq K[X]$. Da $(a, X) = (a_0, X)$ können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $a \in K$. Wie zuvor ergibt sich, dass $(a, X) = (X)$, was $(X) \subsetneq (a, X)$ widerspricht. Also ist (X) maximal, und $K \cong K[X]/(X)$ somit ein Körper.

Der erste Beweis hat den Vorteil, dass er für einen beliebigen kommutativen Ring R zeigt, dass (a, X) für $a \in R$ genau dann ein Hauptidealring ist, wenn $a \in R^\times$. Somit ist beispielsweise $(2, X) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ kein Hauptideal.

Übung 21.

Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass es in $K[X]$ unendlich viele irreduzible, normierte Polynome gibt.

Übung 22.

Es seien R und R' zwei kommutative Ringe, $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge und $f: R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $S' := f(S)$ eine multiplikative Teilmenge von R' ist.
2. Zeigen Sie, dass f einen Ringhomomorphismus $f_S: R_S \rightarrow R'_{S'}$ induziert.

Lösung 22.

1. Da $1 \in S$ ist $1 = f(1) \in f(S) = S'$. Für $s'_1, s'_2 \in S'$ gibt es $s_1, s_2 \in S$ mit $s'_1 = f(s_1)$ und $s'_2 = f(s_2)$, und damit ist auch $s'_1 s'_2 = f(s_1) f(s_2) = f(s_1 s_2) \in f(S) = S'$.
2. Es seien $i: R \rightarrow R_S, r \mapsto r/1$ und $i': R' \rightarrow R'_{S'}, r' \mapsto r'/1$ die kanonischen Ringhomomorphismen. Die Komposition $i' \circ f: R \rightarrow R'_{S'}$ bildet $s \in S$ auf die Einheit $f(s)/1 \in R'_{S'}$ ab. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung induziert $i' \circ f$ einen eindeutigen Ringhomomorphismus $f_S: R_S \rightarrow R'_{S'}$ mit $f_S i = i' f$, d.h. so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \downarrow i & & \downarrow i' \\ R_S & \xrightarrow{f_S} & R'_{S'} \end{array}$$

Übung 23.

Es sei R ein kommutativer Ring.

1. Zeigen Sie, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ die Teilmenge

$$\mathfrak{a}[X] := \left\{ \sum_i f_i X^i \in R[X] \mid f_i \in \mathfrak{a} \text{ für alle } i \right\}$$

ein Ideal in $R[X]$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}[X]$ ein Primideal in $R[X]$, wenn $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal ist.
3. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathfrak{m}[X]$ notwendigerweise ein maximales Ideal in $R[X]$ ist, wenn $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein maximales Ideal ist.

Lösung 23.

1. Die kanonische Projektion $\pi: R \rightarrow R/\mathfrak{a}$, $x \mapsto \bar{x}$ induziert nach der universellen Eigenschaft des Polynomrings $R[X]$ einen Ringhomomorphismus $\varphi: R[X] \rightarrow (R/\mathfrak{a})[X]$ mit $\varphi|_R = \pi$ und $\varphi(X) = \pi(X)$, und dieser ist gegeben durch

$$\varphi\left(\sum_i f_i X^i\right) = \sum_i \pi(f_i) X^i = \sum_i \bar{f}_i X^i.$$

Für $f = \sum_i f_i X^i \in R[X]$ ist genau dann $f \in \ker \varphi$, wenn $\bar{f}_i = 0$ für alle i , also genau dann, wenn $f_i \in \ker \pi = \mathfrak{a}$ für alle i . Somit ist $\ker \varphi = \mathfrak{a}[X]$ ein Ideal in $R[X]$.

2. Es seien π und φ wie zuvor. Wegen der Surjektivität von π ist auch φ surjektiv. Somit induziert φ einen Ringisomorphismus

$$\psi: R[X]/\mathfrak{p}[X] \rightarrow (R/\mathfrak{p})[X], \quad \overline{\sum_i f_i X^i} \mapsto \sum_i \bar{f}_i X^i.$$

Der Quotient R/\mathfrak{p} ist ein Integritätsbereich, da \mathfrak{p} ein Primideal in R ist. Somit ist auch $(R/\mathfrak{p})[X]$ ein Integritätsbereich. Da der Quotient $R[X]/\mathfrak{a}[X]$ ein Integritätsbereich ist, folgt, dass $\mathfrak{p}[X]$ ein Primideal in $R[X]$ ist.

3. Ist K ein Körper, so ist $0 \subseteq K$ ein maximales Ideal, und es gilt $\mathfrak{m}[X] = 0$. Der Quotient $K[X]/\mathfrak{m}[X] \cong (K/0)[X] \cong K[X]$ ist kein Körper, da $0 \neq X \in K[X]$ keine Einheit ist. Also ist $\mathfrak{m}[X]$ nicht maximal in $K[X]$.

Tatsächlich kann $\mathfrak{m}[X]$ nicht maximal in $R[X]$ sein, da $R[X]/\mathfrak{m}[X] \cong (R/\mathfrak{m})[X]$, aber es keinen Ring R' gibt, so dass $R'[X]$ ein Körper ist (siehe Übung 24).

Übung 24.

Zeigen Sie, dass es keinen Ring R gibt, so dass $R[X]$ ein Körper ist.

Lösung 24.

Gebe es einen solchen Ring R , so wäre R kommutativ, da $R \subseteq R[X]$ ein Unterring ist. Es wäre auch $R \neq 0$ da $0[X] = 0$ kein Körper ist. Dann wäre aber $0 \neq X \in R[X]$ keine Einheit und $R[X]$ somit kein Körper.

Übung 25.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$.

Übung 26.

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Zeigen Sie, dass $R_f \cong R[X]/(fX - 1)$.

Lösung 26.

Das Element $\bar{f} \in R[X]/(fX - 1)$ ist eine Einheit mit $\bar{f}^{-1} = \bar{X}$ da

$$\bar{f} \bar{X} = \overline{fX} = \bar{1} = 1.$$

Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung R_f induziert der Ringhomomorphismus $R \rightarrow R[X] \rightarrow R[X]/(fX - 1)$ einen Ringhomomorphismus $\varphi: R_f \rightarrow R[X]/(fX - 1)$ mit

$$\varphi\left(\frac{r}{f^k}\right) = \frac{\bar{r}}{\bar{f}^k} = \bar{r} \bar{X}^k = \overline{rX^k}.$$

Andererseits induziert der kanonische Ringhomomorphismus $i: R \rightarrow R_f, r \mapsto r/1$ nach der universellen Eigenschaft des Polynomrings $R[X]$ einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\tilde{\psi}: R[X] \rightarrow R_f$ mit $\tilde{\psi}|_R = i$ und $\tilde{\psi}(X) = 1/f$, und dieser ist gegeben durch

$$\tilde{\psi}\left(\sum_i r_i X^i\right) = \sum_i \frac{r_i}{f^i}.$$

Dann gilt insbesondere

$$\tilde{\psi}(fX - 1) = \tilde{\psi}(f)\tilde{\psi}(X) - \tilde{\psi}(1) = \frac{f}{1} \frac{1}{f} - \frac{1}{1} = 0.$$

Also faktorisiert $\tilde{\psi}$ über einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\psi: R[X]/(fX - 1) \rightarrow R_f$ mit $\psi(\bar{p}) = \tilde{\psi}(p)$ für alle $p \in R[X]$, d.h. es ist

$$\psi\left(\overline{\sum_i r_i X^i}\right) = \sum_i \frac{r_i}{f^i} \quad \text{für alle } \sum_i r_i X^i \in R[X].$$

Die beiden Ringhomomorphismen φ und ψ sind invers zueinander: Für alle $r/f^k \in R_f$ gilt

$$\psi\left(\varphi\left(\frac{r}{f^k}\right)\right) = \psi\left(\overline{rX^k}\right) = \frac{r}{f^k},$$

und für alle $\sum_i r_i X^i \in R[X]$ gilt

$$\varphi\left(\psi\left(\overline{\sum_i r_i X^i}\right)\right) = \varphi\left(\sum_i \frac{r_i}{f^i}\right) = \sum_i \varphi\left(\frac{r_i}{f^i}\right) = \overline{\sum_i r_i X^i}.$$

Also ist φ ein Isomorphismus mit $\varphi^{-1} = \psi$.

Übung 27.

Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[i]^\times$.

Lösung 27.

Ein Element $z \in \mathbb{Z}[i]$ ist genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}[i]$, wenn $z \neq 0$ und $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$ (hier bezeichnet $z^{-1} = 1/z$ das Inverse von z in \mathbb{C}). Für die Elemente $1, -1, i, -i \in \mathbb{Z}[i]$ ist dies erfüllt. Ist $z \in \mathbb{Z}[i]$ mit $z \neq 0$ und $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$, so ist

$$1 = |1|^2 = |zz^{-1}|^2 = |z|^2 |z^{-1}|^2. \quad (4)$$

Für alle $w \in \mathbb{Z}[i]$ mit $w = a + ib$ gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ und deshalb $|w|^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$. In (4) gilt deshalb, dass $|z|^2, |z^{-1}|^2 \in \mathbb{Z}$, und somit $|z|^2 \in \mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. Also gilt $|z|^2 = 1$. Ist $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ so ist also $a^2 + b^2 = 1$ und somit entweder $a = 0$ und $b = \pm 1$, oder $a = \pm 1$ und $b = 0$. Es ist also $z \in \{1, -1, i, -i\}$. Insgesamt zeigt dies, dass $\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}$.

Übung 28.

Formulieren und beweisen Sie den Hilbertschen Basissatz.

3 Modultheorie

Übung 29.

Zeigen Sie, dass es auf jeder abelschen Gruppe genau eine \mathbb{Z} -Modulstruktur gibt.

Lösung 29.

Es sei A eine abelsche Gruppe. Aus der Vorlesung ist die Bijektion

$$\begin{aligned} \{\mathbb{Z}\text{-Modulstrukturen } \mathbb{Z} \times A \rightarrow A\} &\longleftrightarrow \{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(A)\}, \\ \mu &\longmapsto (n \mapsto (a \mapsto \mu(n, a))), \\ ((n, a) \mapsto \phi(n)(a)) &\longleftarrow \phi. \end{aligned}$$

bekannt. Dabei ist

$$\text{End}(A) = \{f: A \rightarrow A \mid f \text{ ist additiv}\}$$

ein Ring unter punktwiser Addition und Komposition. Da es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(A)$ gibt (siehe Übung 5) folgt die Aussage.

Übung 30.

Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Es sei $I \subseteq R$ ein Ideal.

1. Zeigen Sie, dass sich die R -Modulstruktur auf M genau dann zu einer R/I -Modulstruktur fortsetzen lässt, wenn $IM = 0$ (d.h. wenn $am = 0$ für alle $a \in I$ und $m \in M$).
2. Es sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, dass sich die R -Modulstruktur auf M genau dann zu einer R_S -Modulstruktur fortsetzen lässt, wenn für jedes $s \in S$ die Abbildung $\lambda_s: M \rightarrow M, m \mapsto sm$ bijektiv ist.

Übung 31.

Es sei M ein endlich erzeugter R -Modul. Zeigen Sie, dass jedes Erzeugendensystem $S \subseteq M$ ein endliches Erzeugendensystem enthält.

Lösung 31.

Es sei $\{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ ein endliches Erzeugendensystem. Da S ein Erzeugendensystem ist, lässt sich jedes m_i als $m_i = r_{i,1}s_{i,1} + \dots + r_{i,t_i}s_{i,t_i}$ mit $t_i \geq 0, s_{i,1}, \dots, s_{i,t_i} \in S$ und $r_{i,1}, \dots, r_{i,t_i} \in R$ schreiben. Für $S' := \{s_{i,j} \mid i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t_i\}$ gilt dann $m_i \in \langle S' \rangle$ für alle $i = 1, \dots, s$ und deshalb

$$M = \langle m_1, \dots, m_s \rangle \subseteq \langle S' \rangle \subseteq M.$$

Also ist $\langle S' \rangle = M$ und somit S' ein endliches Erzeugendensystem von M .

Übung 32.

Es sei $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln.

1. Zeigen Sie, dass P endlich erzeugt ist, wenn M endlich erzeugt ist.

2. Zeigen Sie, dass M endlich erzeugt ist, wenn P und N endlich erzeugt sind.

Übung 33. *Charakterisierungen noetherscher Moduln*

Es sei M ein R -Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Jeder R -Untermodul von M ist endlich erzeugt.
2. Jede aufsteigende Kette

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq N_4 \subseteq \dots$$

von R -Moduln stabilisiert, i.e. es gibt ein $i \geq 0$ mit $N_j = N_i$ für alle $j \geq i$.

3. Jede nicht-leere Menge \mathcal{S} bestehend aus R -Untermoduln von M besitzt ein (bezüglich der Inklusion) maximales Element.

Übung 34.

1. Geben Sie für einen passenden Ring R eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ von R -Moduln an, die nicht spaltet.
2. Es sei R ein kommutativer Ring und F ein freier R -Modul. Zeigen Sie, dass jede kurze exakte Sequenz von R -Moduln $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow 0$ spaltet.

Übung 35.

Es sei R ein kommutativer Ring und $I, J \subseteq R$ zwei Ideale, so dass $R/I \cong R/J$ als R -Moduln. Zeigen Sie, dass bereits $I = J$. (Hinweis: Betrachten Sie Annihilatoren.)

Lösung 35.

Für jedes Ideal $K \subseteq R$ gilt $\text{Ann}(R/K) = K$, weshalb $I = \text{Ann}(R/I) = \text{Ann}(R/J) = J$ gilt.

Übung 36. *Torsionsuntermoduln*

Es sei R ein Integritätsbereich.

1. Definieren Sie den Torsionsuntermodul $T(M)$ eines R -Moduls M , und zeigen Sie, dass es sich um einen R -Untermodul von M handelt.
2. Zeigen Sie, dass $T(M \oplus N) = T(M) \oplus T(N)$ für alle R -Moduln M und N .
3. Zeigen Sie, dass jeder freie R -Modul torsionsfrei ist.
4. Zeigen Sie für jeden R -Moduln M , dass $M/T(M)$ torsionsfrei ist.
5. Es sei $f: M \rightarrow N$ ein R -Modulhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

Wir bezeichnen die Einschränkung von $f: M \rightarrow N$ auf die entsprechenden Torsionsuntermoduln mit $T(f): T(M) \rightarrow T(N)$, $m \mapsto f(m)$.

6. Zeigen Sie, dass

a) $T(\text{id}_M) = \text{id}_{T(M)}$ für jeden R -Modul M , und

b) $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ für alle R -Modulhomomorphismen $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P$.

7. Zeigen Sie für jede exakte Sequenz von R -Moduln $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ die Exaktheit der Sequenz

$$0 \rightarrow T(M) \xrightarrow{T(f)} T(N) \xrightarrow{T(g)} T(P).$$

8. Zeigen Sie ferner, dass $T(g)$ surjektiv ist, falls P projektiv ist.

9. Geben Sie ein Beispiel für einen surjektiven R -Modulhomomorphismus $g: M \rightarrow P$ an, so dass $T(g)$ nicht surjektiv ist.

Übung 37.

Zeigen Sie, dass für jeden R -Moduln M die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. M wird von einem einzelnen Element erzeugt, d.h. es gibt $m \in M$ mit $M = \langle m \rangle_R$.
2. Es gilt $M \cong R/\text{Ann}(M)$ als R -Moduln.
3. Es gibt ein Ideal $I \subseteq R$ mit $R/I \cong M$ als R -Moduln.

Erfüllt M eine (und damit alle) dieser Bedingungen, so heißt M *zyklisch*.

Übung 38.

Ein R -Modul M heißt *einfach*, wenn M genau zwei Untermoduln hat.

1. Zeigen Sie, dass M genau dann einfach ist, wenn $M \neq 0$ und $0, M \subseteq M$ die einzigen beiden Untermoduln sind.
2. Zeigen Sie, dass für je zwei einfache R -Moduln M und N jeder R -Modulhomomorphismus $f: M \rightarrow N$ entweder 0 oder ein Isomorphismus ist.

4 Körpertheorie

Übung 39.

Zeigen Sie, dass für einen kommutativen Ring K die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. K ist ein Körper.
2. K hat genau zwei Ideale.
3. Das Nullideal in K ist maximal.

Lösung 39.

(1 \implies 2) Da K ein Körper ist gilt $0 \neq K$, also hat K mindestens zwei Ideale. Ist $I \subseteq K$ ein Ideal mit $I \neq 0$, so gibt es ein $x \in I$ mit $x \neq 0$. Dann ist x eine Einheit in K , somit $K = (x) \subseteq I$ und deshalb $I = K$. Also sind 0 und K die einzigen Ideale in K .

(2 \implies 3) Es muss $0 \neq K$, denn sonst wäre 0 das einzige Ideal in K . Also sind 0 und K die einzigen beiden Ideale in K . Ist $I \subseteq K$ ein Ideal mit $0 \subsetneq I$, so muss bereits $I = K$. Also ist 0 ein maximales Ideal.

(3 \implies 1) Da $0 \subseteq K$ maximal ist, ergibt sich, dass $K \cong K/0$ ein Körper ist.

Übung 40.

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass K unendlich ist.

Lösung 40.

Wäre K endlich, so wäre

$$p(T) := 1 + \prod_{\lambda \in K} (T - \lambda) \in K[T]$$

ein Polynom positiven Grades ohne Nullstellen (denn $p(x) = 1$ für alle $x \in K$). Dies stünde im Widerspruch zur algebraischen Abgeschlossenheit von K .

Übung 41.

Es seien $p, q \in K[T]$ zwei normierte irreduzible Polynome mit $p \neq q$. Zeigen Sie, dass p und q in \overline{K} keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Lösung 41.

Gebe es eine gemeinsame Nullstelle $\alpha \in \overline{K}$ von p und q , so wären p und q beide das Minimalpolynom von α über K , und somit $p = q$.

Übung 42.

Es sei $K(\alpha)/K$ eine endliche, zyklische Körpererweiterung von ungeraden Grad. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

Lösung 42.

Da $K(\alpha^2) \subseteq K(\alpha)$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $\alpha^2 \in K(\alpha)$. Wir nehmen an, dass $\alpha^2 \notin K(\alpha)$. Dann ist das normierte quadratische Polynom $P(T) := T^2 - \alpha^2 \in K(\alpha^2)[T]$ irreduzibel mit $P(\alpha) = 0$, und deshalb das Minimalpolynom von α über $K(\alpha^2)$. Es ist also $[K(\alpha) : K(\alpha^2)] = 2$. Damit gilt

$$[K(\alpha) : K] = [K(\alpha) : K(\alpha^2)][K(\alpha^2) : K] = 2[K(\alpha^2) : K],$$

was im Widerspruch dazu steht, dass $[K(\alpha) : K]$ ungerade ist.