# Lösung zu Zettel 4, Aufgabe 4

Jendrik Stelzner

18. November 2016

## 1 Kurze Version

Es sei $J \subseteq R_S$ ein Ideal. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass

$$I := \left\{ r \in R \,\middle|\, \frac{r}{1} \in J \right\}$$

ein Ideal in $R$ ist. Nach Annahme ist $I$ ein Hauptideal, also $I = (a)$ für ein $a \in R$. Aus $a \in I$ ergibt sich, dass $a/1 \in J$, und damit auch $(a/1) \subseteq J$. Für $r/s \in J$ gilt $r/1 = (s/1)(r/s) \in J$ und somit $r \in I$. Deshalb gilt $r = xa$ für ein $x \in R$, und somit

$$\frac{r}{s} = \frac{xa}{s} = \frac{x}{s}\frac{a}{1} \in \left(\frac{a}{1}\right).$$

Also gilt auch $J \subseteq (a/1)$. Insgesamt ist somit $J = (a/1)$ ein Hauptideal.

## 2 Bessere Version

**Lemma 1.** *Ist $f \colon R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen $R_1$ und $R_2$, und $I \subseteq R_2$ ein Ideal, so ist das Urbild $f^{-1}(I)$ ein Ideal in $R_1$.*

*Beweis.* Die Aussage lässt sich durch explizites Nachrechnen zeigen: Da $f(0) = 0 \in I$ ist $0 \in f^{-1}(I)$. Für $x, y \in f^{-1}(I)$ gilt $f(x), f(y) \in I$, also auch $f(x+y) = f(x) + f(y) \in I$, und somit $x + y \in f^{-1}(I)$. Für $x \in f^{-1}(I)$ gilt $f(x) \in I$, und somit für alle $r \in R$ auch $f(rx) = f(r)f(x) \in I$, also $rx \in f^{-1}(I)$.

Die Aussage lässt sich auch geschickt zeigen: Die kanonische Projektion $\pi \colon R_2 \to R_2/I$, $x \mapsto \overline{x}$ ist ein Ringhomomorphismus mit $\ker \pi = I$. Die Komposition $\pi \circ f \colon R_1 \to R_2/I$ ist deshalb ein Ringhomomorphismus mit

$$\ker(\pi \circ f) = (\pi \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(\pi^{-1}(0)) = f^{-1}(I).$$

Als Kern eines Ringhomomorphismus ist auch $f^{-1}(I)$ ein Ideal. □

**Definition 2.** *Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.*

1. *Ist $I \subseteq R$ ein Ideal, so ist $I^e \coloneqq \{r/s \mid r \in I, s \in S\} \subseteq R_S$ (die extension of $I$).*

2. *Ist $J \subseteq R_S$ ein Ideal, so ist $J^c \coloneqq \{r \in R \mid r/1 \in J\} \subseteq R$ (die contraction of $J$).*

**Proposition 3.** *Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.*

1. *Ist $I \subseteq R$ ein Ideal, so ist $I^e \subseteq R_S$ ein Ideal.*

2. *Für jede Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Elementen $a_i \in R$ gilt $(a_i \mid i \in I)^e = (a_i/1 \mid i \in I)$.*

3. *Ist $J \subseteq R_S$ ein Ideal, so ist $J^c \subseteq R$ ein Ideal.*

4. *Für jedes Ideal $J \subseteq R_S$ ist $J^{ce} = J$.*

*Beweis.* 1. Da $0 \in I$ ist $0_{R_S} = 0/1 \in I^e$. Für $r_1/s_1, r_2/s_2 \in R_S$ gilt $r_1, r_2 \in I$, somit auch $r_1 s_2 + r_2 s_1 \in I$ und damit $(r_1/s_1) + (r_2/s_2) = (r_1 s_2 + r_2 s_1)/(s_1 s_2) \in I^e$. Für $r/s \in I^e$ und beliebiges $r'/s' \in R_S$ ist $r \in I$, somit auch $rr' \in I$, und deshalb auch $(r/s)(r'/s') = (rr')/(ss') \in I^e$.

2. Für alle $i \in I$ ist $a_i/1 \in I^e$, und somit ist $(a_i/1 \mid i \in I) \subseteq I^e$. Für $r/s \in I^e$ ist $r \in I$ und somit $r = \sum_{i \in I} x_i a_i$ mit $x_i \in R$ und $x_i = 0$ für fast alle $i \in I$. Deshalb ist

$$\frac{r}{s} = \frac{\sum_{i \in I} x_i a_i}{s} = \sum_{i \in I} \frac{x_i a_i}{s} = \sum_{i \in I} \frac{x_i}{s} \frac{a_i}{s} \in \left( \frac{a_i}{1} \,\middle|\, i \in I \right).$$

   Das zeigt, dass auch $I^e \subseteq (a_i/1 \mid i \in I)$.

3. Bezüglich des Ringhomomorphismus $f \colon R \to R_S, r \mapsto r/1$ gilt $J^c = f^{-1}(J)$, also ist $J^c$ nach Lemma 1 ein Ideal in $R$.

4. Ist $r/s \in J^{ce}$, so ist $r \in J^c$ und somit $r/1 \in J$. Damit ist auch $r/s = (1/s)(r/1) \in J$. Also ist $J^{ce} \subseteq J$. Ist $r/s \in J$ so ist $r/1 = (s/1)(r/s) \in J$ und somit $r \in J^c$. Damit ist $r/s \in J^{ce}$. Also ist $J \subseteq J^{ce}$.

□

**Korollar 4.** *Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.*

1. *Ist $R$ noethersch, so ist auch $R_S$ nothersch.*

2. *Ist jedes Ideal in $R$ ein Hauptideal, so ist auch jedes Ideal in $R_S$ ein Hauptideal.*

*Beweis.* Es sei $J \subseteq R_S$ ein Ideal. Nach Proposition 3 ist $I \coloneqq J^c$ ein Ideal in $R$ mit $J = I^e$. Nach Proposition 3 benötigt $J$ höchstens so viele Erzeuger wie $I$. Ist $I$ endlich erzeugt, so ist deshalb auch $J$ endlich erzeugt, und ist $I$ ein Hauptideal, so ist auch $J$ ein Hauptideal. □