Übungen zu Einführung in die Algebra

Jendrik Stelzner

10. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppentheorie

Übung 1. *Ein Kriterium für maximale Untergruppen*
Es sei G ein Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so dass $[G : H]$ endlich und prim ist. Zeigen Sie, dass H eine maximale echte Untergruppe von G ist. Entscheiden Sie, ob H notwendigerweise normal in G ist.

Übung 2.
Es sei G eine Gruppe mit $\mathrm{Aut}(G) = 1$.

1. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

2. Zeigen Sie, dass $g = -g$ für alle $g \in G$.

3. Folgern Sie, dass es eine eindeutige $\mathbb{F}_2$-Vektorraumstruktur auf G gibt.

4. Folgern Sie, dass $G = 0$ oder $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2 Ringtheorie

Übung 3. *Urbilder von Idealen*
Es seien R und S zwei kommutative Ringe und $\phi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Ideal in R ist.
2. Entscheiden Sie, ob $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal ist, wenn $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primideal ist.
3. Entscheiden Sie, ob $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal ist, wenn $\mathfrak{m} \subseteq S$ ein maximales Ideal ist.

3 Lösungen

Lösung 1.

Es sei $p \coloneqq [G : H]$. Da p eine Primzahl ist gilt inbesondere $p \neq 1$, weshalb H eine echte Untergruppe von G ist. Ist $K \subsetneq G$ eine echte Untergruppe von G mit $H \subseteq K$, so gilt wegen der Multiplikativität des Index', dass

$$p = [G : H] = [G : K][K : H].$$

Da p eine Primzahl ist, gilt entweder $[G : K] = p$ und $[K : H] = 1$, oder $[G : K] = 1$ und $[K : H] = p$. Es gilt $[G : K] > 1$, da K eine echte Untergruppe von G ist, und somit $[K : H] = 1$. Also ist $K = H$, und somit H eine maximale echte Untergruppe.

H ist nicht notwendigerweise normal in G: Für $G = S_3$ und $H = \langle (1\,2) \rangle = \{\mathrm{id}, (1\,2)\}$ ist H zwar nicht normal in G, aber $[G : H] = |G|/|H| = 6/2 = 3$ ist prim.

Lösung 2.

1. Für $g \in G$ sei $c_g \colon G \to G$ die Konjugation mit g. Dies ist ein Automorphismus von G, weshalb $c_g = \mathrm{id}_G$. Somit ist $g \in \mathrm{Z}(G)$.

2. Wegen der Kommutativität von G ist die Abbildung $n \colon G \to G$, $g \mapsto -g$ ein Automorphismus von G. Somit ist $n = \mathrm{id}_G$, also $-g = g$ für alle $g \in G$.

3. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist $2g = 0$ für alle $g \in G$. Deshalb gibt es eine eindeutige $\mathbb{F}_2$-Vektorraumstruktur auf G via

$$\overline{n} \cdot g = n \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},\, g \in G,$$

   wie sich durch direktes Nachrechnen ergibt.

4. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von G als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum. Ist $G \neq 0$ und $G \ncong \mathbb{Z}/2$, so ist $\dim_{\mathbb{F}_2} G \geq 2$. Es gibt daher $i_1, i_2 \in I$ with $i_1 \neq i_2$. Die Permutation

$$\sigma \colon \{b_i\}_{i \in I} \to \{b_i\}_{i \in I}, \quad b_j \mapsto \begin{cases} b_{i_2} & \text{falls } j = i_1, \\ b_{i_1} & \text{falls } j = i_2, \\ b_j & \text{sonst}, \end{cases}$$

   induziert einen nicht-trivialen $\mathbb{F}_2$-Vektorraumautomorphismus $\alpha \colon G \to G$ mit

$$\alpha\left(\sum_{i \in I} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_{\sigma(i)}.$$

   Dann ist α aber insbesondere ein nicht-trivialer Gruppenautomorphismus, im Widerspruch zu $\mathrm{Aut}(G) = 1$.

Lösung 3.

1. Es sei $\pi\colon S \to S/\mathfrak{a}$, $s \mapsto \overline{s}$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi\phi$ ein Ringhomomorphismus und somit $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Ideal in R.

2. Die Aussage gilt: Es sei $\pi\colon S \to S/\mathfrak{p}$, $s \mapsto \overline{s}$ die kanonische Projektion und $\mathfrak{q} := \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Der Quotient $S/\mathfrak{p}$ ist ein Integritätsbereich, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist $\mathfrak{q}$ ein Ideal in R, und da $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ induziert $\pi\phi$ einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\psi\colon R/\mathfrak{q} \to S/\mathfrak{p} \quad \overline{r} \mapsto \overline{\phi(r)}.$$

   Der Ring $\operatorname{im}(\pi\phi) \subseteq S/\mathfrak{p}$ ist als Unterring eines Integritätsbereichs ebenfalls ein Integritätsbereich. Somit ist $R/\mathfrak{q} \cong \operatorname{im}(\pi\phi)$ ein Integritätsbereich, also $\mathfrak{q}$ ein Primideal.

3. Die Aussage gilt nicht: Es sei etwa $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ die kanonische Inklusion. Dann ist $\mathfrak{m} := 0$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}$, aber $\phi^{-1}(0) = 0$ ist kein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$.