

Übungen zu Einführung in die Algebra

Jendrik Stelzner

6. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Gruppentheorie	2
2	Ringtheorie	6

1 Gruppentheorie

Übung 1. Ein Kriterium für maximale Untergruppen

Es sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so dass $[G : H]$ endlich und prim ist. Zeigen Sie, dass H eine maximale echte Untergruppe von G ist. Entscheiden Sie, ob H notwendigerweise normal in G ist.

Lösung 1.

Es sei $p := [G : H]$. Da p eine Primzahl ist gilt insbesondere $p \neq 1$, weshalb H eine echte Untergruppe von G ist. Ist $K \subsetneq G$ eine echte Untergruppe von G mit $H \subseteq K$, so gilt wegen der Multiplikativität des Index, dass

$$p = [G : H] = [G : K][K : H].$$

Da p eine Primzahl ist, gilt entweder $[G : K] = p$ und $[K : H] = 1$, oder $[G : K] = 1$ und $[K : H] = p$. Es gilt $[G : K] > 1$, da K eine echte Untergruppe von G ist, und somit $[K : H] = 1$. Also ist $K = H$, und somit H eine maximale echte Untergruppe.

H ist nicht notwendigerweise normal in G : Für $G = S_3$ und $H = \langle (1\ 2) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2)\}$ ist H zwar nicht normal in G , aber $[G : H] = |G|/|H| = 6/2 = 3$ ist prim.

Übung 2. Multiple Choice I

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen allgemein gültig sind, und geben sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

1. Ist G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine normale Untergruppe, so gilt $G \cong (G/N) \times N$.
2. Ist G eine endliche Gruppe, so dass G/N für normale Untergruppe $N \subseteq G$ mit $N \neq 1$ abelsch ist, so ist auch G abelsch.
3. Zwei Gruppen G_1 und G_2 sind genau dann isomorph, wenn $G_1 \times H \cong G_2 \times H$ für jede Gruppe H .
4. Sind G_1 und G_2 zwei Gruppen, so ist jede Untergruppe von $G_1 \times G_2$ von der Form $H_1 \times H_2$ für Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und $H_2 \subseteq G_2$.
5. Sind G_1 und G_2 zwei Gruppen, so dass es Gruppenepimorphismen $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ und $\psi: G_2 \rightarrow G_1$ gibt, so gilt $G_1 \cong G_2$.

Lösung 2.

1. Die Aussage ist falsch: Es sei $G = \mathbb{Z}$ und $N = 2\mathbb{Z}$. Dann ist

$$(G/N) \times N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}.$$

Es ist allerdings $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}$, da $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 2 enthält (nämlich $(1, 0)$), \mathbb{Z} aber nicht.

2. Die Aussage ist falsch: Die einzigen nicht-trivialen normalen Untergruppe von S_3 sind $N = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ und S_3 selbst. Der Quotient S_3/N hat Ordnung 2, weshalb $S_3/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abelsch ist, und $S_3/S_3 = 1$ ist ohnehin abelsch. Die Gruppe S_3 selbst ist allerdings nicht abelsch.

Alternativ ist A_n für $n \geq 5$ einfach, weshalb A_n der einzige nicht-triviale Normalteiler von A_n ist, aber A_4 ist für $n \geq 4$ nicht abelsch.

3. Die Aussage ist wahr: Gilt $G_1 \cong G_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\phi: G_1 \rightarrow G_2$. Für jede Gruppe H ist dann $\phi \times \text{id}_H: G_1 \times H \rightarrow G_2 \times H$ ein Isomorphismus, und somit $G_1 \times H \cong G_2 \times H$. Gilt andererseits $G_1 \times H \cong G_2 \times H$ für jede Gruppe H , so gilt insbesondere $G_1 \cong G_1 \times 1 \cong G_2 \times 1 \cong G_2$.
4. Die Aussage ist falsch: Ist G eine Gruppe mit $G \neq 1$ und $G_1 = G_2 = G$, so ist $\Delta = \{(g, g) \mid g \in G\}$ eine Untergruppe von $G_1 \times G_2 = G \times G$, die sich nicht als ein solches Produkt schreiben lässt.
5. Die Aussage ist falsch: Für die Gruppen

$$G_1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

und

$$G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

gibt es Gruppenepimorphismen

$$\phi: G_1 \rightarrow G_2, \quad (n_1, n_2, n_3, \dots) \mapsto (\overline{n_1}, n_2, n_3, \dots)$$

und

$$\psi: G_2 \rightarrow G_1, \quad (\overline{n_1}, n_2, n_3, \dots) \mapsto (n_2, n_3, \dots).$$

Es gilt aber $G_1 \not\cong G_2$, denn G_2 enthält ein Element der Ordnung 2, G_1 jedoch nicht.

Übung 3.

Es seien G_1 und G_2 zwei Gruppen, $N_1 \subseteq G_1$ und $N_2 \subseteq G_2$ zwei normale Untergruppen. Geben Sie jeweils Beispiele für die folgenden Situationen:

1. Es gilt $G_1 \cong G_2$ und $N_1 \cong N_2$, aber $G_1/N_1 \not\cong G_2/N_2$.
2. Es gilt $G_1 \cong G_2$ und $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$, aber $N_1 \not\cong N_2$.
3. Es gilt $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ und $N_1 \cong N_2$, aber $G_1 \not\cong G_2$.

Lösung 3.

1. Es seien $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$, sowie $N_1 = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}$ und $N_2 = \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z}$. Dann gilt $G_1 = G_2 \cong N_1 \cong N_2$ aber

$$G_1/N_1 \cong \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

2. Es seien $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$ und

$$N_1 := \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

und

$$N_2 := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

Dann gilt

$$G_1/N_1 \cong \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z} \cong \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

Es gilt aber $N_1 \not\cong N_2$, denn $N_1 \cong \mathbb{Z}$ ist zyklisch, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ aber nicht.

3. Es seien $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie $N_1 = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ und $N_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0$. Wegen der Kommutativität von G_1 und G_2 handelt es sich jeweils um eine normale Untergruppe. Da N_1 und N_2 beide zweielementig sind, gilt

$$N_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong N_2$$

(denn $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist die bis auf Isomorphie eindeutige zweielementige Gruppe). Nach dem zweiten (oder dritten) Isomorphiesatz gilt

$$G_1/N_1 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

und für den anderen Quotienten gilt

$$\begin{aligned} G_2/N_2 &= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0) \\ &\cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \oplus ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/0) \cong 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also gilt auch $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. Es gilt aber $G_1 \not\cong G_2$, da G_1 ein Element der Ordnung 4 enthält, G_2 jedoch nicht.

Übung 4.

Es sei G eine Gruppe mit $\text{Aut}(G) = 1$.

1. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
2. Zeigen Sie, dass $g = -g$ für alle $g \in G$.
3. Folgern Sie, dass es eine eindeutige \mathbb{F}_2 -Vektorraumstruktur auf G gibt.
4. Folgern Sie, dass $G = 0$ oder $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lösung 4.

1. Für $g \in G$ sei $c_g: G \rightarrow G$ die Konjugation mit g . Dies ist ein Automorphismus von G , weshalb $c_g = \text{id}_G$. Somit ist $g \in Z(G)$.
2. Wegen der Kommutativität von G ist die Abbildung $n: G \rightarrow G, g \mapsto -g$ ein Automorphismus von G . Somit ist $n = \text{id}_G$, also $-g = g$ für alle $g \in G$.
3. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist $2g = 0$ für alle $g \in G$. Deshalb gibt es eine eindeutige \mathbb{F}_2 -Vektorraumstruktur auf G via

$$\bar{n} \cdot g = n \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, g \in G,$$

wie sich durch direktes Nachrechnen ergibt.

4. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von G als \mathbb{F}_2 -Vektorraum. Ist $G \neq 0$ und $G \not\cong \mathbb{Z}/2$, so ist $\dim_{\mathbb{F}_2} G \geq 2$. Es gibt daher $i_1, i_2 \in I$ with $i_1 \neq i_2$. Die Permutation

$$\sigma: \{b_i\}_{i \in I} \rightarrow \{b_i\}_{i \in I}, \quad b_j \mapsto \begin{cases} b_{i_2} & \text{falls } j = i_1, \\ b_{i_1} & \text{falls } j = i_2, \\ b_j & \text{sonst,} \end{cases}$$

induziert einen nicht-trivialen \mathbb{F}_2 -Vektorraumautomorphismus $\alpha: G \rightarrow G$ mit

$$\alpha \left(\sum_{i \in I} \lambda_i b_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_{\sigma(i)}.$$

Dann ist α aber insbesondere ein nicht-trivialer Gruppenautomorphismus, im Widerspruch zu $\text{Aut}(G) = 1$.

2 Ringtheorie

Übung 5. *Initialobjekte in der Kategorie der Ringe*

1. Zeigen Sie, dass es für jeden Ring R einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow R$ gibt. (Dies bedeutet, dass der Ring \mathbb{Z} ein Initialobjekt in der Kategorie der Ringe ist.)
2. Es sei Z ein Ring, so dass es für jeden Ring R einen eindeutigen Ringhomomorphismus $Z \rightarrow R$ gibt. Zeigen Sie, dass $Z \cong \mathbb{Z}$.

Lösung 5.

1. Ist $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\phi(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist damit

$$\phi(n) = \phi(n \cdot 1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot \phi(1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot 1_R.$$

Also ist ϕ eindeutig. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich auch, dass $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow R$ mit

$$\psi(n) := n \cdot 1_R \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

2. Es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow Z$ sowie einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\psi: Z \rightarrow \mathbb{Z}$. Es ist auch $\psi \circ \phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ein Ringhomomorphismus. Die Identität $\text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ebenfalls ein Ringhomomorphismus ist. Da es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ gibt, muss sowohl $\psi \circ \phi$ als auch $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ dieser eindeutige Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sein. Folglich ist $\psi \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Analog ergibt sich, dass $\phi \circ \psi = \text{id}_Z$.

Übung 6.

Es sei R ein kommutativer Ring.

1. Zeigen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ genau dann prim ist, wenn R/\mathfrak{p} ein Integritätsbereich ist.
2. Zeigen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ genau dann maximal ist, wenn R/\mathfrak{m} ein Körper ist.

Lösung 6.

Dies ist eine Standardaussage, deren Beweis sich in jedem Algebra-Buch findet.

Übung 7.

Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass \mathfrak{p} genau dann ein Primideal ist, wenn es einen Körper K und einen Ringhomomorphismus $\phi: R \rightarrow K$ mit $\ker \phi = \mathfrak{p}$ gibt.

Beweis. Ist \mathfrak{p} ein Primideal, so ist R/\mathfrak{p} ein Integritätsbereich. Da die kanonische Inklusion $R/\mathfrak{p} \rightarrow Q(R/\mathfrak{p})$ ein injektiver Ringhomomorphismus ist, folgt für die Komposition

$$\phi: R \xrightarrow{\pi} R/\mathfrak{p} \rightarrow Q(R/\mathfrak{p}),$$

dass $\ker \phi = \ker \pi = \mathfrak{p}$. (Hier bezeichnet $\pi: R \rightarrow R/\mathfrak{p}$ die kanonische Projektion.) Da $Q(R/\mathfrak{p})$ ein Körper ist, zeigt dies eine Implikation.

Gibt es andererseits einen Körper K und einen Ringhomomorphismus $\phi: R \rightarrow K$ mit $\mathfrak{p} = \ker \phi$, so ist $R/\mathfrak{p} \cong \text{im } \phi \subseteq K$. Der Körper K ist insbesondere ein Integritätsbereich, weshalb auch der Unterring $\text{im } \phi$ ein Integritätsbereich ist. Der Quotient R/\mathfrak{p} ist also ein Integritätsbereich und \mathfrak{p} somit ein Primideal. \square

Übung 8.

Ist R ein Ring, so ist

$$R^\times := \{x \in R \mid x \text{ ist eine Einheit}\}$$

die Einheitsgruppe von R . Zeigen Sie:

1. Ist R ein Ring, so bildet R^\times bezüglich der Multiplikation aus R eine Gruppe.
2. Sind R und S zwei Ringe und ist $\phi: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so induziert ϕ per Einschränkung einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi^\times: R^\times \rightarrow S^\times, \quad x \mapsto \phi(x).$$

3. Für jeden Ring R gilt $\text{id}_R^\times = \text{id}_{R^\times}$, und für alle Ringhomomorphismen $\phi: R_1 \rightarrow R_2$ und $\psi: R_2 \rightarrow R_3$ gilt $(\psi\phi)^\times = \psi^\times \phi^\times$.

Übung 9. Urbilder von Idealen

Es seien R und S zwei kommutative Ringe und $\phi: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Ideal in R ist.
2. Entscheiden Sie, ob $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal ist, wenn $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primideal ist.
3. Entscheiden Sie, ob $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal ist, wenn $\mathfrak{m} \subseteq S$ ein maximales Ideal ist.

Lösung 9.

1. Es sei $\pi: S \rightarrow S/\mathfrak{a}$, $s \mapsto \bar{s}$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi\phi$ ein Ringhomomorphismus und somit $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Ideal in R .
2. Die Aussage gilt: Es sei $\pi: S \rightarrow S/\mathfrak{p}$, $s \mapsto \bar{s}$ die kanonische Projektion und $\mathfrak{q} := \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Der Quotient S/\mathfrak{p} ist ein Integritätsbereich, da \mathfrak{p} ein Primideal ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist \mathfrak{q} ein Ideal in R , und da $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ induziert $\pi\phi$ einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\psi: R/\mathfrak{q} \rightarrow S/\mathfrak{p} \quad \bar{r} \mapsto \overline{\phi(r)}.$$

Der Ring $\text{im}(\pi\phi) \subseteq S/\mathfrak{p}$ ist als Unterring eines Integritätsbereichs ebenfalls ein Integritätsbereich. Somit ist $R/\mathfrak{q} \cong \text{im}(\pi\phi)$ ein Integritätsbereich, also \mathfrak{q} ein Primideal.

3. Die Aussage gilt nicht: Es sei etwa $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ die kanonische Inklusion. Dann ist $\mathfrak{m} := 0$ ein maximales Ideal in \mathbb{Q} , aber $\phi^{-1}(0) = 0$ ist kein maximales Ideal in \mathbb{Z} , da $\mathbb{Z}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Übung 10.

Es sei R ein kommutativer Ring. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ zwei Ideale mit $\mathfrak{a} = (x_i \mid i \in I)$ und $\mathfrak{b} = (y_j \mid j \in J)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (x_i y_j \mid i \in I, j \in J).$$

Lösung 10.

Für alle $i \in I$ und $j \in J$ folgt aus $x_i \in \mathfrak{a}$ und $y_j \in \mathfrak{b}$, dass $x_i y_j \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Daraus folgt, dass $(x_i y_j \mid i \in I, j \in J) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Sind andererseits $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$, so ist $a = \sum_{i \in I} r_i x_i$ und $b = \sum_{j \in J} s_j y_j$ mit $r_i, s_j \in R$, wobei $r_i = 0$ für fast alle $i \in I$ und $s_j = 0$ für fast alle $j \in J$. Deshalb ist

$$ab = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} r_i s_j x_i y_j \in (x_i y_j \mid i \in I, j \in J).$$

Da jedes Element aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ von der Form $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ mit $a_k \in \mathfrak{a}$ und $b_k \in \mathfrak{b}$ ist, folgt daraus, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq (x_i y_j \mid i \in I, j \in J)$.

Übung 11.

Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring R und eine Teilmenge $S \subseteq R$ mit den folgenden Eigenschaften:

- S ist abgeschlossen unter der Addition und Multiplikation von R , d.h. für alle $s_1, s_2 \in S$ ist auch $s_1 + s_2 \in S$ und $s_1 s_2 \in S$.
- Zusammen mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation aus R ist S ebenfalls ein (notwendigerweise kommutativer) Ring.
- S ist kein Unterring von R .

Lösung 11.

Es sei $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \times 0 = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Offenbar ist S unter der Addition und Multiplikation abgeschlossen. Zusammen mit der Einschränkung dieser Operationen bildet S einen kommutativen Ring, für den $S \cong \mathbb{Z}$ gilt. Da $1_R = (1, 1) \notin S$ ist S allerdings kein Unterring von R .