Lösung zu Zettel 4, Aufgabe 4

Jendrik Stelzner

24. November 2016

Bemerkung 1. Aufgrund der bis zum 5. Übungszettel unterschiedlichen Verwendung des Begriffs *Hauptidealring* in der Vorlesung und den Übungszetteln galt es in dieser Aufgabe nur zu zeigen, dass für jeden Ring R, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, jede Lokalisierung R_S von R an einer multiplikativen Teilmenge $S \subseteq R$ die gleiche Eigenschaft hat.

Der Vollständigkeits halber wollen wir hier aber kurz diskutieren, unter welchen Umständen eine Lokalisierung eines Integritätsbereichs wieder ein Integritätsbereich ist: Hierfür sei R ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.

Ist $0 \in S$, so ist $R_S = 0$ und R_S somit kein Integritätsbereich.

Ist hingegen $0 \notin S$, so ist R ebenfalls ein Integritätsbereich: Es ist $1/1 \neq 0/1$, denn sonst gebe es $s \in S$ mit $s = s \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 0$, was $0 \notin S$ widerspreche. Da $1_{R_S} = 1/1 \neq 0/1 = 0_{R_S}$ ist $R_S \neq 0$. Sind $r_1/s_1, r_2/s_2 \in R_S$ mit

$$\frac{0}{1} = 0_{R_S} = \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2},$$

so gibt es ein $t \in S$ mit

$$0 = t(1 \cdot r_1 r_2 - 0 \cdot s_1 s_2) = t r_1 r_2.$$

Da R ein Integritätsbereich ist, folgt daraus, dass $t = 0$, $r_1 = 0$ oder $r_2 = 0$. Da $0 \notin S$ ist $t \neq 0$, also $r_1 = 0$ oder $r_2 = 0$. Somit gilt $r_1/s_1 = 0$ oder $r_2/s_2 = 0$, was die Nullteilerfreiheit von R_S zeigt.

1 Kurze Version

Es sei $J \subseteq R_S$ ein Ideal. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass

$$I := \left\{ r \in R \,\middle|\, \frac{r}{1} \in J \right\}$$

ein Ideal in R ist. (I kann äquivalent auch als $I = \{r \in R \mid r/s \in R_S \text{ für ein } s \in S\}$ definiert werden.) Nach Annahme ist I ein Hauptideal, also $I = (a)$ für ein $a \in R$. Aus $a \in I$ ergibt sich, dass $a/1 \in J$, und damit auch $(a/1) \subseteq J$. Für $r/s \in J$ gilt $r/1 = (s/1)(r/s) \in J$ und somit $r \in I$. Deshalb gilt $r = xa$ für ein $x \in R$, und somit

$$\frac{r}{s} = \frac{xa}{s} = \frac{x}{s}\frac{a}{1} \in \left(\frac{a}{1}\right).$$

Also gilt auch $J \subseteq (a/1)$. Insgesamt ist somit $J = (a/1)$ ein Hauptideal.

2 Bessere Version

Lemma 2. Ist $f: R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen R_1 und R_2, und $I \subseteq R_2$ ein Ideal, so ist das Urbild $f^{-1}(I)$ ein Ideal in R_1.

Beweis. Die Aussage lässt sich durch explizites Nachrechnen zeigen: Da $f(0) = 0 \in I$ ist $0 \in f^{-1}(I)$. Für $x, y \in f^{-1}(I)$ gilt $f(x), f(y) \in I$, also auch $f(x+y) = f(x) + f(y) \in I$, und somit $x + y \in f^{-1}(I)$. Für $x \in f^{-1}(I)$ gilt $f(x) \in I$, und somit für jedes $r \in R$ auch $f(rx) = f(r)f(x) \in I$, also $rx \in f^{-1}(I)$.

Die Aussage lässt sich auch geschickt zeigen: Die kanonische Projektion $\pi: R_2 \to R_2/I$, $x \mapsto \overline{x}$ ist ein Ringhomomorphismus mit $\ker \pi = I$. Die Komposition $\pi \circ f: R_1 \to R_2/I$ ist deshalb ein Ringhomomorphismus mit

$$\ker(\pi \circ f) = (\pi \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(\pi^{-1}(0)) = f^{-1}(\ker \pi) = f^{-1}(I).$$

Als Kern eines Ringhomomorphismus ist auch $f^{-1}(I)$ ein Ideal. □

Definition 3. Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.

1. Ist $I \subseteq R$ ein Ideal, so sei $I^e := \{r/s \mid r \in I, s \in S\} \subseteq R_S$ (die *extension of* I).
2. Ist $J \subseteq R_S$ ein Ideal, so sei $J^c := \{r \in R \mid r/1 \in J\} \subseteq R$ (die *contraction of* J).

Proposition 4. Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.

1. Ist $I \subseteq R$ ein Ideal, so ist $I^e \subseteq R_S$ ein Ideal.
2. Für jede Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Elementen $a_i \in R$ gilt $(a_i \mid i \in I)^e = (a_i/1 \mid i \in I)$.
3. Ist $J \subseteq R_S$ ein Ideal, so ist $J^c \subseteq R$ ein Ideal.
4. Für jedes Ideal $J \subseteq R_S$ ist $J^{ce} = J$.

Beweis. 1. Da $0 \in I$ ist $0_{R_S} = 0/1 \in I^e$. Für $r_1/s_1, r_2/s_2 \in R_S$ gilt $r_1, r_2 \in I$, somit auch $r_1 s_2 + r_2 s_1 \in I$ und damit $(r_1/s_1) + (r_2/s_2) = (r_1 s_2 + r_2 s_1)/(s_1 s_2) \in I^e$. Für $r/s \in I^e$ und beliebiges $r'/s' \in R_S$ ist $r \in I$, somit auch $rr' \in I$, und deshalb auch $(r/s)(r'/s') = (rr')/(ss') \in I^e$.

2. Für alle $i \in I$ gilt $a_i/1 \in I^e$, und somit gilt $(a_i/1 \mid i \in I) \subseteq I^e$. Für $r/s \in I^e$ gilt $r \in I$ und somit $r = \sum_{i \in I} x_i a_i$ mit $x_i \in R$ und $x_i = 0$ für fast alle $i \in I$. Deshalb ist

$$\frac{r}{s} = \frac{\sum_{i \in I} x_i a_i}{s} = \sum_{i \in I} \frac{x_i a_i}{s} = \sum_{i \in I} \frac{x_i}{s} \frac{a_i}{1} \in \left(\frac{a_i}{1} \,\middle|\, i \in I \right).$$

   Das zeigt, dass auch $I^e \subseteq (a_i/1 \mid i \in I)$ gilt.

3. Bezüglich des Ringhomomorphismus $f: R \to R_S$, $r \mapsto r/1$ gilt $J^c = f^{-1}(J)$, also ist J^c nach Lemma 2 ein Ideal in R.

4. Ist $r/s \in J^{ce}$, so gilt $r \in J^c$ und deshalb $r/1 \in J$. Damit gilt auch $r/s = (1/s)(r/1) \in J$. Also gilt $J^{ce} \subseteq J$. Ist $r/s \in J$ so gilt $r/1 = (s/1)(r/s) \in J$ und somit $r \in J^c$. Damit gilt $r/s \in J^{ce}$. Also gilt auch $J \subseteq J^{ce}$.

□

Korollar 5. Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.

1. Ist R noethersch, so ist auch R_S noethersch.

2. Ist jedes Ideal in R ein Hauptideal, so ist auch jedes Ideal in R_S ein Hauptideal.

Beweis. Es sei $J \subseteq R_S$ ein Ideal. Nach Proposition 4 ist $I := J^c$ ein Ideal in R mit $J = I^e$. Nach Proposition 4 benötigt J höchstens so viele Erzeuger wie I. Ist I endlich erzeugt, so ist deshalb auch J endlich erzeugt, und ist I ein Hauptideal, so ist auch J ein Hauptideal. □