

# Lösungen zu Zettel 1

Jendrik Stelzner

15. November 2016

## Aufgabe 1

Für je zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sei  $F(X, Y)$  die Menge der Funktionen  $X \rightarrow Y$ . Wir bezeichnen die übliche Adjunktionsabbildung mit

$$\Phi: F(R \times A, A) \rightarrow F(R, F(A, A)), \quad h \mapsto (r \mapsto h(r, -))$$

wobei wir für jede Funktion  $h: R \times A \rightarrow A$  und jedes  $r \in R$  mit  $h(r, -)$  die Funktion

$$h(r, -): A \rightarrow A, \quad a \mapsto h(r, a)$$

bezeichnen. Die Funktion  $\Phi$  ist eine Bijektion, und ihr Inverses ist durch

$$\Psi: F(R, F(A, A)) \rightarrow F(R \times A, A), \quad h \mapsto ((r, a) \mapsto h(r)(a))$$

gegeben.

**i)**

Es sei  $\mu \in F(R \times A, A)$  und  $f := \Phi(\mu) \in F(R, F(A, A))$ . Es gilt zu zeigen, dass  $\mu$  genau dann eine  $R$ -Modulstruktur auf  $A$  ist, wenn  $f$  ein Ringhomomorphismus nach  $\text{End}(A)$  ist. Das  $\mu$  eine  $R$ -Modulstruktur auf  $A$  ist, bedeutet, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M1) Für alle  $r \in R$  und  $a_1, a_2 \in A$  gilt  $\mu(r, a_1 + a_2) = \mu(r, a_1) + \mu(r, a_2)$ .

(M2) Für alle  $r_1, r_2 \in R$  und  $a \in A$  gilt  $\mu(r_1 + r_2, a) = \mu(r_1, a) + \mu(r_2, a)$ .

(M3) Für alle  $r_1, r_2 \in R$  und  $a \in A$  gilt  $\mu(r_1 \cdot r_2, a) = \mu(r_1, \mu(r_2, a))$ .

(M4) Für alle  $a \in A$  ist  $\mu(1, a) = a$ .

Dass  $f$  ein Ringhomomorphismus ist, bedeutet, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Für alle  $r \in R$  gilt  $f(r) \in \text{End}(A)$ , d.h. für alle  $r \in R$  und  $a_1, a_2 \in A$  gilt  $f(r)(a_1 + a_2) = f(r)(a_1) + f(r)(a_2)$ .

(R2) Für alle  $r \in R$  gilt  $f(r_1, r_2) = f(r_1) + f(r_2)$ , d.h. für alle  $r_1, r_2 \in R$  und  $a \in A$  gilt  $f(r_1 + r_2)(a) = f(r_1)(a) + f(r_2)(a)$ .

(R3) Für alle  $r \in R$  gilt  $f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \circ f(r_2)$ , d.h. für alle  $r_1, r_2 \in R$  und  $a \in A$  gilt  $f(r_1 \cdot r_2)(a) = f(r_1)(f(r_2)(a))$ .

(R4) Es gilt  $f(1) = \text{id}_A$ , d.h. für alle  $a \in A$  gilt  $f(1)(a) = a$ .

Da  $\mu(r, a) = f(r)(a)$  sind die Bedingungen in gegebener Nummerierung paarweise äquivalent zueinander (beispielsweise ist (M1) äquivalent zu (R1)). Also erfüllt  $\mu$  alle vier Bedingungen genau dann, wenn  $f$  alle vier Bedingungen erfüllt. Also ist  $\mu$  genau dann eine Modulstruktur, wenn  $f$  ein Ringhomomorphismus nach  $\text{End}(A)$  ist.

## ii)

Wir bezeichnen die gegebene geordnete Basis  $B$  von  $V$  mit  $B = (b_1, \dots, b_n)$ .

Die  $K$ -Vektorraumstruktur auf  $V$  entspricht einem Ringhomomorphismus

$$f: K \rightarrow \text{End}(V), \quad K \mapsto (v \mapsto \lambda \cdot v).$$

Das Bild von  $f$  liegt bereits im Unterring  $\text{End}_K(V)$ , denn für jedes  $\lambda \in K$  ist die Abbildung  $f(\lambda): V \rightarrow V, v \mapsto \lambda \cdot v$  nicht nur additiv, sondern auch  $K$ -linear (denn für alle  $\mu \in K$  ist  $f(\lambda)(\mu v) = \lambda \mu v = \mu \lambda v = \mu f(\lambda)(v)$ .) Deshalb können wir  $f$  als einen Ringhomomorphismus  $K \rightarrow \text{End}_K(V)$  auffassen. Der angegebene Ringisomorphismus  $g: \text{End}_K(V) \rightarrow \text{Mat}_n(K)$  ordnet jedem Endomorphismus  $L \in \text{End}_K(V)$  die darstellende Matrix  $M_B(L) \in \text{Mat}_n(K)$  zu. Für jedes  $\lambda \in K$  ist  $f(\lambda) = \lambda \text{id}_V$  und somit

$$g(f(\lambda)) = g(\lambda \text{id}_V) = M_B(\lambda \text{id}_V) = \lambda M_B(\text{id}_V) = \lambda I_n.$$

Die Komposition  $K \xrightarrow{f} \text{End}_K(V) \xrightarrow{g} \text{Mat}_n(K)$  bildet als  $\lambda \in K$  auf  $\lambda I_n$  ab.

## iii)

Damit der Ausdruck  $\text{End}_{\text{End}_R(A)}(A)$  Sinn ergibt, müssen wir zunächst eine  $\text{End}_R(A)$ -Modulstruktur auf  $A$  definieren. Eine  $\text{End}_R(A)$ -Modulstruktur auf  $A$  zu definieren ist äquivalent dazu, einen Ringhomomorphismus  $\text{End}_R(A) \rightarrow \text{End}(A)$  anzugeben.

Der Ringhomomorphismus, der hier betrachtet werden soll, ist die kanonische Inklusion  $i: \text{End}_R(A) \rightarrow \text{End}(A), f \mapsto f$ . (Dies wird in der Aufgabenstellung recht schlecht – nämlich gar nicht – angegeben.) Die  $\text{End}_R(A)$ -Modulstruktur auf  $A$ , die  $i$  entspricht, ist durch

$$f \cdot a = i(f)(a) = f(a) \quad \text{für alle } f \in \text{End}_R(A), a \in A$$

gegeben.

Für  $g \in \text{End}(A)$  gilt genau dann  $g \in \text{End}_{\text{End}_R(A)}$ , wenn  $g(f \cdot a) = f \cdot g(a)$  für alle  $g \in G$ , d.h. wenn  $g(f(a)) = f(g(a))$  für alle  $a \in A$ . Also ist

$$\text{End}_{\text{End}_R(A)} = \{g \in \text{End}(A) \mid gf = fg \text{ für alle } f \in \text{End}_R(A)\}.$$

Ist  $g$  im Bild des zu  $\mu$  gehörigen Ringhomomorphismus  $R \rightarrow \text{End}(A)$ ,  $r \mapsto \mu(r, -)$ , so gibt es ein  $r \in R$  mit  $g = \mu(r, -)$ . Für alle  $a \in A$  ist dann  $g(a) = \mu(r, -)(a) = \mu(r, a) = r \cdot a$ , und für  $f \in \text{End}_R(A)$  ist deshalb

$$g(f(a)) = r \cdot f(a) = f(r \cdot a) = f(g(a)) \quad \text{für alle } a \in A.$$

Also ist dann  $g \in \text{End}_{\text{End}_R(A)}(A)$ .

#### iv)

Wir bemerken zunächst, dass die Aussage im Fall  $V = 0$  nicht gilt: Dann wäre nämlich  $\text{End}(V) = 0$  und für  $\text{End}_{\text{End}_K(V)}(V) \subseteq \text{End}(V)$  somit auch  $\text{End}_{\text{End}_K(V)}(V) = 0$ . Es gilt aber  $K \not\cong 0$ . Wir arbeiten daher im Folgenden unter der zusätzlichen Annahme, dass  $V \neq 0$ .

Nach dem vorherigen Aufgabenteil gilt  $\text{End}_{\text{End}_K(V)}(V) \subseteq \text{End}_K(V)$ , da  $K$  kommutativ ist. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \text{End}_{\text{End}_K(V)}(V) &= \{f \in \text{End}(V) \mid gf = fg \text{ für alle } g \in \text{End}_K(V)\} \\ &= \{f \in \text{End}_K(V) \mid gf = fg \text{ für alle } g \in \text{End}_K(V)\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Unter dem Isomorphismus  $M_B: \text{End}_K(V) \cong \text{Mat}_n(K)$ ,  $f \mapsto M_B(f)$  entspricht der Unterring  $\text{End}_{\text{End}_K(V)}(V) \subseteq \text{End}_K(V)$  dem Unterring

$$\{A \in \text{Mat}_n(K) \mid AB = BA \text{ für alle } B \in \text{Mat}_n(K)\} \subseteq \text{Mat}_n(K).$$

Wir bezeichnen diesen Unterring mit  $Z(\text{Mat}_n(K))$ .

**Bemerkung 1.** Allgemein wird für einen Ring  $R$  die Teilmenge

$$Z(R) := \{r \in R \mid rs = sr \text{ für alle } s \in R\}$$

als das *Zentrum* von  $R$  bezeichnet. Es handelt sich hierbei um einen kommutativen Unterring von  $R$ . In (1) haben wir formuliert, dass  $\text{End}_{\text{End}_K(V)}(V) = Z(\text{End}_K(V))$ .

Wir haben nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Mat}_n(K) & \longleftrightarrow Z(\text{Mat}_n(K)) \\ \psi \nearrow & \uparrow M_B & \uparrow M_B \\ K & & \\ \phi \searrow & \text{End}_K(V) & \longleftrightarrow \text{End}_{\text{End}_K(V)}(V) \end{array}$$

Dabei ist  $\phi: K \rightarrow \text{End}_K(V)$ ,  $\lambda \mapsto \lambda \text{id}_V$  und  $\psi: K \rightarrow \text{Mat}_n(K)$ ,  $\lambda \mapsto \lambda I$ .

Da im  $\phi \subseteq \text{End}_{\text{End}_K(V)}$  ist auch im  $\psi \subseteq Z(\text{Mat}_n(K))$ . Die Bijektivität der Einschränkung  $\phi: K \rightarrow \text{End}_{\text{End}_K(V)}$  ist äquivalent dazu, dass die Einschränkung  $\psi: K \rightarrow Z(\text{Mat}_n(K))$  ein Isomorphismus ist. Da  $V \neq 0$  ist  $n = \dim V \geq 1$  und  $\psi$  deshalb injektiv. Für die Surjektivität von  $\psi$  müssen wir das folgende Lemma beweisen:

**Lemma 2.** Es gilt  $Z(\text{Mat}_n(K)) = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$ .

*Beweis.* Es sei  $D = (d_{ij}) \in Z(\text{Mat}_n(K))$ . Für alle  $1 \leq i, j \leq n$  sei  $E_{ij} \in \text{Mat}_n(K)$  die Matrix, deren  $(i, j)$ -ter Eintrag 1 ist, und deren Einträge sonst alle 0 sind (die  $j$ -te Spalte von  $E_{ij}$  ist also  $e_i$ , und alle anderen Spalten sind 0).

Wir zeigen zunächst, dass  $D$  eine Diagonalmatrix ist. Hierfür fixieren wir ein  $1 \leq i \leq n$ . Die Matrix  $DE_{ii}$  ergibt sich aus  $D$ , indem bis auf die  $i$ -te Spalte alle Spalten gelöscht werden, d.h. es gilt

$$DE_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1,i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei es sich bei der mittig gesetzten Spalte um die  $i$ -te handelt. Die Matrix  $E_{ii}D$  ergibt sich auch  $D$ , indem bis auf die  $i$ -te Zeile alle Zeilen gelöscht werden, d.h. es gilt

$$DE_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{i,n-1} & d_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei es sich bei der mittig gesetzten Zeile um die  $i$ -te handelt. Da  $D \in Z(\text{Mat}_n(K))$  ist  $DE_{ii} = E_{ii}D$ , die beiden obigen Matrizen stimmen also überein. Durch Vergleich der Einträge erhalten wir, dass  $d_{ij} = 0$  für alle  $j \neq i$  und  $d_{ki} = 0$  für alle  $k \neq i$ . Da dies für jedes  $1 \leq i \leq n$  gilt, erhalten wir insgesamt, dass  $d_{ij} = 0$  für alle  $i \neq j$ . Somit ist  $D$  eine Diagonalmatrix.

Um zu zeigen, dass  $D$  bereits eine Skalarmatrix ist (d.h. ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix) müssen wir noch zeigen, dass  $d_{ii} = d_{jj}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ . Hierfür bemerken wir, dass

$$DE_{ij} = d_{ii}E_{ij} \quad \text{und} \quad E_{ij}D = d_{jj}E_{ij} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n,$$

Da  $DE_{ij} = E_{ij}D$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$  ergibt sich, dass  $d_{ii}E_{ij} = d_{jj}E_{ij}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ , und somit  $d_{ii} = d_{jj}$ .  $\square$

**Bemerkung 3.** Allgemein gilt für jeden Ring  $R$ , dass

$$Z(\text{Mat}_n(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} r & & \\ & \ddots & \\ & & r \end{pmatrix} \mid r \in Z(R) \right\}.$$

Hierfür muss  $R$  weder kommutativ sein, noch eine 1 haben.

Für kommutative Ringe mit 1 gilt der Beweis von Lemma 2 unverändert (man muss nur  $K$  durch  $R$  ersetzen.)

Für nicht-kommutative Ringe mit 1 muss man noch einen weiteren Schritt hinzufügen, um einzusehen, dass die Skalare aus dem Zentrum  $Z(R)$  stammen müssen.

Für Ringe 1 lässt sich "künstlich eine 1 hinzufügen", wodurch sich die Aussage auf den Fall von Ringen mit 1 zurückführen lässt.

## Aufgabe 2

Zur Belustigung bezeichnen wir die gegebene Abbildung mit

$$\begin{aligned}\Xi: \{ \varphi: R[T] \rightarrow S \mid \varphi \text{ ist ein Ringhomomorphismus} \} \\ \rightarrow \{ \psi: R \rightarrow S \mid \psi \text{ ist ein Ringhomomorphismus} \} \times S, \\ \varphi \mapsto (\varphi|_R, \varphi(T)).\end{aligned}$$

**i)**

Es sei  $\varphi: R[T] \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus. Es seien  $\psi := \varphi|_R$  und  $s := \varphi(T)$ . Für jedes  $\sum_i a_i T^i \in R[T]$  gilt dann

$$\varphi \left( \sum_i a_i T^i \right) = \sum_i \varphi(a_i) \varphi(T)^i = \sum_i \psi(a_i) s^i.$$

Deshalb ist  $\varphi$  durch  $\psi$  und  $s$  schon eindeutig bestimmt. Somit ist  $\Xi$  injektiv.

**ii)**

Falls  $(\psi, s)$  im Bild von  $\Xi$  liegt, so gibt es einen Ringhomomorphismus  $\varphi: R[T] \rightarrow S$  mit  $\psi = \varphi|_R$  und  $s = \varphi(T)$ . Dann gilt

$$\psi(r)s = \varphi(r)\varphi(T) = \varphi(rT) = \varphi(Tr) = \varphi(T)\varphi(r) = s\psi(r) \quad \text{für alle } r \in R,$$

wobei sich die mittlere Gleichheit aus der Kommutativität von  $R[T]$  ergibt.

Umgekehrt sei  $(\psi, s)$  ein Paar bestehend aus einem Ringhomomorphismus  $\psi: R \rightarrow S$  und einem Element  $s \in S$ , so dass  $\psi(r)s = s\psi(r)$  für alle  $r \in R$ . Um zu zeigen, dass  $(\psi, s)$  im Bild von  $\Xi$  liegt, müssen wir zeigen, dass es einen Ringhomomorphismus  $\varphi: R[T] \rightarrow S$  gibt, so dass  $\psi = \varphi|_R$  und  $s = \varphi(T)$ . Aus dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir, wie  $\varphi$  aussehen muss. Wir definieren deshalb die Abbildung

$$\varphi: R[T] \rightarrow S, \quad \sum_i a_i T^i \mapsto \sum_i \psi(a_i) s^i.$$

Da  $\varphi|_R = \psi$  und  $\varphi(T) = s$  gilt es nur noch zeigen, dass  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus ist.

Für alle  $f, g \in R[T]$  mit  $f = \sum_i a_i T^i$  und  $g = \sum_i b_i T^i$  gelten

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= \varphi\left(\sum_i a_i T^i + \sum_i b_i T^i\right) = \varphi\left(\sum_i (a_i + b_i) T^i\right) = \sum_i (a_i + b_i) s^i \\ &= \sum_i a_i s^i + \sum_i b_i s^i = \varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) + \varphi\left(\sum_i b_i T^i\right) = \varphi(f) + \varphi(g),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi(f \cdot g) &= \varphi\left(\left(\sum_i a_i T^i\right) \cdot \left(\sum_i b_i T^i\right)\right) = \varphi\left(\sum_i \sum_{j+k=i} a_j b_k T^i\right) \\ &= \sum_i \psi\left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) s^i = \sum_i \sum_{j+k=i} \psi(a_j) \psi(b_k) s^i \\ &= \left(\sum_i \psi(a_i) s^i\right) \cdot \left(\sum_i \psi(b_i) s^i\right) = \varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) \cdot \varphi\left(\sum_i b_i T^i\right) \\ &= \varphi(f) \cdot \varphi(g).\end{aligned}$$

Also ist  $\varphi$  additiv und multiplikativ. Da

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot T^0) = \psi(1) s^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

ist  $\varphi$  auch unitär. Insgesamt zeigt dies, dass  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus ist.