

# Lösungen zu Aufgabe 3, Zettel 2

Jendrik Stelzner

19. November 2016

i)

Für alle  $f, g \in R[[T]]$  gilt

$$d_q(f, g) = 0 \iff q^{-\nu(f-g)} = 0 \iff \nu(f-g) = \infty \iff f-g=0 \iff f=g.$$

Für jedes  $h \in R[[T]]$  und  $i \geq 0$  ist genau dann  $h_i \neq 0$  wenn  $-h_i \neq 0$ , weshalb  $\nu(h) = \nu(-h)$ .  
Für alle  $f, g \in R[[T]]$  gilt deshalb

$$d_q(f, g) = q^{-\nu(f-g)} = q^{-\nu(g-f)} = d_q(g, f).$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung fixieren wir  $f, g, h \in R[[T]]$ . Es gilt zu zeigen, dass

$$q^{-\nu(f-h)} \leq q^{-\nu(f-g)} + q^{-\nu(g-h)}. \quad (1)$$

Hierfür zeigen wir, dass bereits

$$q^{-\nu(f-h)} \leq \max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\}.$$

(Wir zeigen also, dass in (1) bereits einer der beiden Summanden ausreicht. Um welchen es sich dabei handelt hängt allerdings von  $f, g$  und  $h$  ab.) Da

$$\max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\} = q^{\max\{-\nu(f-g), -\nu(g-h)\}} = q^{-\min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}}$$

gilt

$$q^{-\nu(f-h)} \leq \max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\} \iff \nu(f-h) \geq \min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}.$$

Diese letzte Ungleichung gilt, denn für alle  $0 \leq i < \min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}$  gilt  $f_i = g_i$  und  $g_i = h_i$ , und somit auch  $f_i = h_i$ .

Wir merken noch an, dass die Metrik  $d_q$  translationsinvariant ist, d.h. es gilt

$$d_q(f+h, g+h) = d_q(f, g) \quad \text{für alle } f, g, h \in R[[T]].$$

## ii)

Für  $f \in R[[T]]$  und eine Folge  $(f^{(i)})_i$  von Elementen  $f^{(i)} \in R[[T]]$  gilt

$$\begin{aligned}
& f^{(i)} \rightarrow f \text{ für } i \rightarrow \infty \text{ bezüglich } d_q \\
& \iff d_q(f^{(i)}, f) \rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty \\
& \iff q^{-\nu(f^{(i)}-f)} \rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty \\
& \iff -\nu(f^{(i)}-f) \rightarrow -\infty \text{ für } i \rightarrow \infty \\
& \iff \nu(f^{(i)}-f) \rightarrow \infty \text{ für } i \rightarrow \infty \\
& \iff \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } \nu(f^{(i)}-f) \geq n \text{ für alle } i \geq j \\
& \iff \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } f_m^{(i)} = f_m \text{ für alle } m \leq n, i \geq j \\
& \iff \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } f_n^{(i)} = f_n \text{ für alle } i \geq j.
\end{aligned}$$

Es gilt also  $f^{(i)} \rightarrow f$  genau dann wenn für jedes  $n \geq 0$  gilt, dass  $f_n^{(i)} = f_n$  für  $i$  groß genug. (Man beachte, dass es von  $n$  abhängt, wann  $f_n^{(i)}$  konstant wird. Insbesondere wird die Folge  $f^{(i)}$  selbst nicht notwendigerweise konstant.) Das zeigt insbesondere, dass die Folge  $(f^{(i)})_i$  genau dann konvergiert, wenn für jedes  $n \geq 0$  die Folge der Koeffizienten  $(f_n^{(i)})_i$  konstant wird.

Wir haben auch gezeigt, dass sich der Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)}$  dann koeffizientenweise bestimmen lässt.

Eine Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$  konvergiert per Definition genau dann, wenn die Folge  $(g^{(j)})_j$  der Partialsummen  $g^{(j)} := \sum_{i=0}^j f^{(i)}$  konvergiert. Wie bereits gezeigt ist dies äquivalent dazu, dass für jedes  $n \geq 0$  die Koeffizientenfolge  $(g_n^{(j)})_j$  konstant wird. Dies bedeutet gerade, dass es für jedes  $n \geq 0$  ein  $k \geq 0$  gibt, so dass  $g_n^{(j_1)} = g_n^{(j_2)}$  für alle  $j_1 \geq j_2 \geq k$ ; wegen  $g_n^{(j_1)} - g_n^{(j_2)} = \sum_{i=j_2+1}^{j_1} f_n^{(i)}$  ist dies äquivalent dazu, dass  $f_n^{(i)} = 0$  für alle  $i > k$ .

Außerdem zeigt die obige Argumentation, dass sich der Grenzwert der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$  dann koeffizientenweise berechnen lässt, d.h. für alle  $n \geq 0$  gilt  $(\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)})_n = \sum_{i=0}^{\infty} f_n^{(i)}$ .

Wir wollen den Leser an dieser Stelle darauf aufmerksam machen, dass sich Konvergenzverhalten einer Folge, bzw. Reihe in  $R[[T]]$  nicht von dem gewählten Parameter  $q > 1$  abhängt.

**Bemerkung 1.** Versieht man den Ring  $R$  mit der diskreten Topologie, bzw. der diskreten Metrik, so entspricht der topologische Raum  $R[[T]]$  zusammen mit den stetigen Projektionen  $\pi_i: R[[T]] \rightarrow R, f \mapsto f_i$  dem abzählbaren topologischen Produkt  $\prod_{i \geq 0} R$ .

## iii)

Für alle  $n, i \geq 0$  gilt  $(T^i)_n = \delta_{in}$ ; für fixiertes  $n \geq 0$  ist deshalb  $(T^i)_n = 0$  für alle  $n > i$ . Wie im Aufgabenteil ii) gesehen, ist deshalb  $T^i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$  bezüglich  $d_q$ .

Für  $f \in R[[T]]$  konvergiert die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i$ , denn für jedes  $n \geq 0$  gilt  $(f_i T^i)_n = f_i \delta_{in}$ , und für  $i > n$  verschwindet dieser Term. Durch koeffizientenweises Berechnen des Grenzwertes ergibt sich, dass

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i \right)_n = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i T^i)_n = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \delta_{in} = f_n \quad \text{für alle } n \geq 0,$$

und somit  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i = f$ .

## iv)

### Unabhängigkeit der Topologie vom Parameter $q$

Es seien  $q_1, q_2 > 0$ . Es gilt zu zeigen, dass eine Teilmenge  $U \subseteq R[[T]]$  genau dann offen bezüglich  $d_{q_1}$  ist, wenn sie offen bezüglich  $d_{q_2}$  ist. Dies ist äquivalent dazu, dass eine Teilmenge  $C \subseteq R[[T]]$  genau dann abgeschlossen bezüglich  $d_{q_1}$  ist, wenn sie abgeschlossen bezüglich  $d_{q_2}$  ist. Hierfür genügt es zu zeigen, dass eine Teilmenge  $C \subseteq R[[T]]$  genau dann folgenabgeschlossen bezüglich  $d_{q_1}$  ist, wenn sie folgenabgeschlossen bezüglich  $d_{q_2}$  ist.

In Aufgabenteil ii) haben wir gesehen, dass das Konvergenzverhalten einer Folge  $(f^{(i)})_i$  von Elementen  $f^{(i)} \in R[[T]]$  bezüglich den Metriken  $d_{q_1}$  und  $d_{q_2}$  nicht von den Parametern  $q_1$  und  $q_2$  abhängt, d.h. für jedes  $f \in R[[T]]$  gilt genau dann  $f^{(i)} \rightarrow f$  bezüglich  $d_{q_1}$  wenn  $f^{(i)} \rightarrow f$  bezüglich  $d_{q_2}$ . Deshalb ist  $C \subseteq R[[T]]$  genau dann folgenabgeschlossen bezüglich  $d_{q_1}$ , wenn es folgenabgeschlossen bezüglich  $d_{q_2}$  ist.

Also ist die von  $d_q$  erzeugte Topologie unabhängig von  $q$ .

### Stetigkeit der Ringoperationen

Es gilt zu zeigen, dass für je zwei konvergente Folgen  $(f^{(i)})_i$  und  $(g^{(i)})_i$  von Elementen  $f^{(i)}, g^{(i)} \in R[[T]]$  auch die Folgen  $(f^{(i)} + g^{(i)})_i$  und  $(f^{(i)} \cdot g^{(i)})_i$  konvergieren, und dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f^{(i)} + g^{(i)}) = \left( \lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)} \right) + \left( \lim_{i \rightarrow \infty} g^{(i)} \right)$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f^{(i)} \cdot g^{(i)}) = \left( \lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)} \right) \cdot \left( \lim_{i \rightarrow \infty} g^{(i)} \right)$$

Hierfür fixieren wir zwei solche konvergenten Folgen und schreiben  $f := \lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)}$  und  $g := \lim_{i \rightarrow \infty} g^{(i)}$ .

Es sei  $n \geq 0$ . Aus  $f^{(i)} \rightarrow f$  und  $g^{(i)} \rightarrow g$  ergibt sich nach Aufgabenteil ii), dass es ein  $j \geq 0$  gibt, so dass  $f_n^{(i)} = f_n$  und  $g_n^{(i)} = g_n$  für alle  $i \geq j$ . Es sei  $j \geq j_f, j_g$ . Für alle  $i \geq j$  ist

$$(f^{(i)} + g^{(i)})_n = f_n^{(i)} + g_n^{(i)} = f_n + g_n = (f + g)_n.$$

Aus der Beliebigkeit von  $n \geq 0$  folgt nach Aufgabenteil ii), dass  $f^{(i)} + g^{(i)} \rightarrow f + g$ .

Für das Produkt gehen wir analog vor: Es sei  $n \geq 0$ . Da  $f^{(i)} \rightarrow f$  und  $g^{(i)} \rightarrow g$  ergibt sich nach Aufgabenteil ii), dass es ein  $j \geq 0$  gibt, so dass  $f_k^{(i)} = g_k^{(i)}$  für alle  $k = 0, \dots, n$  und  $i \geq j$ . Für alle  $i \geq j$  ist damit auch

$$(f^{(i)} \cdot g^{(i)})_n = \sum_{k=0}^n f_k^{(i)} g_{n-k}^{(i)} = \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} = (f \cdot g)_n.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $n$  zeigt dies nach Aufgabenteil ii), dass  $f^{(i)} \cdot g^{(i)} \rightarrow f \cdot g$ .

Die Stetigkeit der Inversion ergibt sich ähnlich: Es sei  $(f^{(i)})_i$  eine Folge von Einheiten  $f^{(i)} \in R[[T]]^\times$  und  $f \in R[[T]]^\times$  mit  $f^{(i)} \rightarrow f$  für  $i \rightarrow \infty$ . Es sei  $g := f^{-1}$  und für alle  $i \geq 0$  sei  $g^{(i)} := (f^{(i)})^{-1}$ . Es gilt zu zeigen, dass auch  $g^{(i)} \rightarrow g$  für  $i \rightarrow \infty$ .

Wir fixieren ein  $n \geq 0$ . Da  $f^{(i)} \rightarrow f$  gibt es ein  $j \geq 0$  mit  $f_k^{(i)} = f_k$  für alle  $i \geq j$  und  $0 \leq k \leq n$ . Wir zeigen dass  $g_k^{(i)} = g_k$  für alle  $i \geq j$  und  $0 \leq k \leq n$ , per Induktion über  $k$ : Für alle  $i \geq j$  ist  $g_0 = f_0^{-1} = (f_0^{(i)})^{-1} = g_0^{(i)}$ . Gilt  $g_k^{(i)} = g_k$  für alle  $0 \leq k < n$  und  $i \geq j$ , so ergibt sich, dass

$$g_{k+1} = -g_0 \sum_{\ell=0}^k g_\ell f_{k+1-\ell} = -g_0^{(i)} \sum_{\ell=0}^k g_\ell^{(i)} f_{k+1-\ell}^{(i)} = g_{k+1}^{(i)}.$$

Insgesamt zeigt dies, dass es für jedes  $n \geq 0$  ein  $j \geq 0$ , so dass  $g_k^{(i)} = g_k$  für alle  $0 \leq k \leq n$  und  $i \geq j$ ; insbesondere ist  $g_n^{(i)} = g_n$  für alle  $i \geq j$ . Das zeigt, dass  $g^{(i)} \rightarrow g$  für  $i \rightarrow \infty$ .

**Bemerkung 2.** Die Menge der Einheiten  $R[[T]]^\times$  ist als Teilmenge von  $R[[T]]$  sowohl offen als auch abgeschlossen:

Es sei  $(f^{(i)})_i$  eine Folge in  $R[[T]]^\times$  die gegen ein  $f \in R[[T]]$  konvergiert. Für alle  $i \geq 0$  ist  $f_0^{(i)} \in R^\times$ , da  $f^{(i)}$  invertierbar ist. Es gibt ein  $j \geq 0$  mit  $f_0 = f_0^{(i)}$  für alle  $i \geq j$ . Also ist auch  $f_0 \in R^\times$ , und somit  $f \in R[[T]]^\times$ . Das zeigt, dass  $R[[T]]^\times$  folgenabgeschlossen in  $R[[T]]$  ist, und somit abgeschlossen in  $R[[T]]$ .

Analog ergibt sich, dass auch  $R[[T]] \setminus R[[T]]^\times$  abgeschlossen ist, und  $R[[T]]^\times$  somit offen.

Die Aussage lässt sich auch abstrakter einsehen: Versieht man  $R$  mit der diskreten Topologie, bzw. der diskreten Metrik, so ist die Projektion auf den konstanten Koeffizienten  $\pi_0: R[[T]] \rightarrow R$ ,  $f \mapsto f_0$  stetig. Für jede Menge von Koeffizienten  $C \subseteq R$  sind dann die Urbilder  $\pi_0(C)$  und  $\pi_0(R \setminus C) = R[[T]] \setminus \pi_0(C)$  offen in  $R[[T]]$ . Wählt man  $C = R^\times$ , so ergibt sich die Aussage.

## v)

Es genügt zu zeigen, dass  $R[[T]]$  bezüglich  $d_q$  vollständig ist. Die Menge der Cauchyfolgen stimmt dann mit der Menge der konvergenten Folgen überein, und diese ist unabhängig von  $q$ , da die Topologie unabhängig von  $q$  ist.

Ist  $(f^{(i)})_i$  eine Cauchyfolge in  $R[[T]]$  bezüglich  $d_q$ , so ist insbesondere  $d_q(f^{(i+1)}, f^{(i)}) \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ . Wegen der Translationsinvarianz von  $d_q$  ist  $d_q(f^{(i+1)} - f^{(i)}, 0) \rightarrow 0$ , also  $f^{(i+1)} - f^{(i)} \rightarrow 0$ . Nach Aufgabenteil ii) gibt es deshalb für jedes  $n \geq 0$  ein  $j \geq 0$  mit

$f_n^{(i+1)} - f_n^{(i)} = 0$  für alle  $i \geq j$ , also  $f_n^{(i+1)} = f_n^{(i)}$  für alle  $i \geq j$ , weshalb die Folge  $(f_n^{(i)})_i$  für  $i \geq j$  konstant ist. Nach Aufgabenteil ii) konvergiert die Folge  $(f^{(i)})_i$  deshalb.

vi)

## Nachweis der Kontraktion

**Behauptung.** Für alle  $f, g \in R[[T]]$  gilt

$$\nu(fg) \geq \nu(g) \quad \text{und} \quad \nu(Tg) = \nu(g) + 1.$$

Ist  $f \in T \cdot R[[T]]$ , so gilt  $\nu(fg) \geq \nu(g) + 1$ .

**Beweis.** Für alle  $0 \leq i < \nu(g)$  gilt  $g_i = 0$  und somit auch

$$(fg)_i = \sum_{j=0}^i f_j \underbrace{g_{i-j}}_{=0} = 0.$$

Deshalb ist  $\nu(fg) \geq \nu(g)$ . (Tatsächlich ergibt sich mit der obigen Argumentation, dass  $\nu(fg) \geq \nu(f) + \nu(g)$ . Ist  $R$  ein Integritätsbereich, so handelt es sich hierbei um eine Gleichheit.)

Aus  $(Tg)_0 = 0$  und  $(Tg)_i = (Tg)_{i-1}$  für alle  $i \geq 1$  ergibt sich direkt, dass  $\nu(Tg) = \nu(g) + 1$ . Ist  $f \in T \cdot R[[T]]$  so gibt es ein  $f' \in R[[T]]$  mit  $f = Tf'$ . Deshalb gilt dann

$$\nu(fg) = \nu(Tf'g) = \nu(f'g) + 1 \geq \nu(g) + 1. \quad \square$$

Für alle  $f \in T \cdot R[[T]]$  und  $g \in R[[T]]$  bezeichnen wir die gegebene Abbildung mit

$$\phi_{f,g}: R[[T]] \rightarrow R[[T]], \quad x \mapsto g - fx.$$

Aus der obigen Behauptung erhalten wir für alle  $x_1, x_2 \in R[[T]]$ , dass

$$\begin{aligned} d_q(\phi_{f,g}(x_1), \phi_{f,g}(x_2)) &= d_q(g - fx_1, g - fx_2) = q^{-\nu((g-fx_1)-(g-fx_2))} \\ &= q^{-\nu(f(x_2-x_1))} \leq q^{-(\nu(x_2-x_1)+1)} = q^{-1} q^{-\nu(x_2-x_1)} \\ &= q^{-1} d_q(x_2, x_1) = q^{-1} d_q(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Da  $q > 1$  ist  $0 < q^{-1} < 1$ . Damit haben wir gezeigt, dass  $\phi_{f,g}$  bezüglich  $d_q$  eine Kontraktion ist (mit möglicher Kontraktionskonstante  $q^{-1}$ ).

## Bestimmung der Einheiten

Ist  $f \in R[[T]]$  eine Einheit, so gibt es ein  $g \in R[[T]]$  mit  $fg = 1$ . Dann muss  $1 = (fg)_0 = f_0 g_0$  und somit  $f_0 \in R^\times$  (mit  $f_0^{-1} = g_0$ ).

Es sei nun andererseits  $f \in R[[T]]$  mit  $f_0 \in R^\times$ .

Im Fall  $f_0 = 1$  betrachten wir die abgeänderte Potenzreihe

$$f' := f - 1 = f - f_0 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i T^i \in T \cdot R[[T]].$$

Dann ist  $\phi_{f',1}: R[[T]] \rightarrow R[[T]]$  eine Kontraktion bezüglich  $d_q$ . Da  $R[[T]]$  bezüglich  $d_q$  ein vollständiger metrischer Raum ist, können wir auf  $\phi_{f',1}$  den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Somit erhalten wir einen (eindeutigen) Fixpunkt  $x \in R[[T]]$  von  $\phi_{f',1}$ . Es gilt nun  $x = \phi_{f',1}(x) = 1 - f'x$  und somit  $x(1 + f') = 1$ . Also ist  $1 + f' = f$  eine Einheit (mit  $f^{-1} = x$ ).

Ist allgemeiner  $f_0 \in R^\times$ , so lässt sich  $f$  als  $f = f_0(f_0^{-1}f)$  schreiben. Nach der obigen Argumentation ist  $f_0^{-1}f$  eine Einheit in  $R[[T]]$ . Da auch  $f_0 \in R^\times \subseteq R[[T]]^\times$  ist  $f$  das Produkt zweier Einheiten, und damit ebenfalls eine Einheit.

## vii)

Für  $f \in R[[T]]$  und die Folge  $(f^{(i)})_i$  von Polynomen  $f^{(i)} := \sum_{j=0}^i f_j T^j \in R[T]$  gilt nach Aufgabenteil ii), dass  $f^{(i)} \rightarrow f$  für  $i \rightarrow \infty$ . Also ist  $R[T]$  dicht in  $R[[T]]$ .

## viii)

### Motivation

Ein Ringhomomorphismus  $\psi: R[T] \rightarrow S$  ist eindeutig durch die Einschränkung  $\varphi := \psi|_R$  und das Bild  $s := \psi(T)$  bestimmt: Für ein beliebiges Polynom  $\sum_i a_i T^i \in R[T]$  gilt dann, dass

$$\psi\left(\sum_i a_i T^i\right) = \sum_i \psi(a_i) s^i; \quad (2)$$

da  $a_i = 0$  für fast alle  $i$  gilt, ist auch  $\psi(a_i) = 0$  für fast alle  $i$ , und die Summe  $\sum_i \psi(a_i) s^i$  somit wohldefiniert. Umgekehrt liefert jedes Paar  $(\varphi, s)$  bestehend aus einem Ringhomomorphismus  $\varphi: R \rightarrow S$  und einem Element  $s \in S$  durch (2) einen Ringhomomorphismus  $\psi: R[T] \rightarrow S$ , und die beiden Konstruktionen sind invers zueinander.

Es ist naheliegend, dieses Ergebnis auf den Potenzreihenring  $R[[T]]$  zu verallgemeinern: Ein Ringhomomorphismus  $\psi: R[[T]] \rightarrow S$  sollte mit  $\varphi := \psi|_R$  und  $s := \psi(T)$  durch  $\psi(\sum_i a_i T^i) = \sum_i \varphi(a_i) s^i$  eindeutig bestimmt sein. Die oben genutzte Bedingung, dass  $a_i = 0$  für fast alle  $i$ , gilt nun aber nicht mehr; daher ergibt der Ausdruck  $\sum_i \varphi(a_i) s^i$  im Allgemeinen keinen Sinn.

Man kann diesen Ausdruck Sinn verleihen, indem man fordert, dass  $S$  ein topologischer Raum ist: Dann kann  $\sum_i \varphi(a_i) s^i$  als eine Reihe gesehen werden. Damit diese Reihe konvergiert muss die Wahl von  $s$  allerdings noch passend eingeschränkt werden; für  $s = 1$  und  $\sum_i a_i T^i = \sum_i T^i$  (also  $a_i = 1$  für alle  $i$ ) ergibt etwa die Summe  $\sum_i 1$  im Allgemeinen keinen Sinn.

Bevor wir uns an das Rechnen machen, wollen wir noch abkürzende Begriffe einführen:

**Definition 3.** Es sei  $a: \mathbb{N}^2 \rightarrow R$ .

1. Die Matrix  $a$  heißt *zeilenendlich*, wenn in jeder Zeile fast alle Einträge verschwinden, d.h. für jedes  $i \in \mathbb{N}$  gilt  $a_{ij} = 0$  für fast alle  $j \in \mathbb{N}$ .
2. Die Matrix  $a$  heißt *spaltenendlich*, wenn in jeder Spalte fast alle Einträge verschwinden, d.h. für jedes  $j \in \mathbb{N}$  gilt  $a_{ij} = 0$  für fast alle  $i \in \mathbb{N}$ .

**Ringhomomorphismen**  $\psi: R[[T]] \rightarrow S \rightsquigarrow$  **Paare**  $(\varphi, s)$