

# Lösungen zu Aufgabe 2, Zettel 3

Jendrik Stelzner

24. November 2016

## Notationen

Im Folgenden werden konvergente Reihen stets in der Form  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$  geschrieben. Endliche Summen werden in der Form  $\sum_i a_i$  oder  $\sum_{i=0}^n a_i$  geschrieben; die zweite Notation werden wir nur nutzen, wenn wir konkrete Summationsgrenzen angeben. Elemente des Potenzreihenrings  $R[[T]]$  fassen wir als formale Summen auf, und werden diese als  $\sum_i a_i T^i$  schreiben.

Wir wählen diese Konvention, um zu unterscheiden, welche Summen unabhängig von den Topologien sind ( $\sum_i$  und  $\sum_{i=0}^n$ ), und bei welchen Summen es sich um Reihen handelt, die mithilfe von Topologien definiert sind ( $\sum_{i=0}^{\infty}$ ).

i)

Für alle  $f, g \in R[[T]]$  gilt

$$d_q(f, g) = 0 \iff q^{-\nu(f-g)} = 0 \iff \nu(f-g) = \infty \iff f-g=0 \iff f=g.$$

Für jedes  $h \in R[[T]]$  und alle  $n \geq 0$  gilt genau dann  $h_n \neq 0$  wenn  $-h_n \neq 0$ , weshalb  $\nu(h) = \nu(-h)$ . Für alle  $f, g \in R[[T]]$  gilt deshalb

$$d_q(f, g) = q^{-\nu(f-g)} = q^{-\nu(g-f)} = d_q(g, f).$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung fixieren wir  $f, g, h \in R[[T]]$ . Es gilt zu zeigen, dass

$$q^{-\nu(f-h)} \leq q^{-\nu(f-g)} + q^{-\nu(g-h)}. \quad (1)$$

Hierfür zeigen wir, dass bereits die stärkere Ungleichung

$$q^{-\nu(f-h)} \leq \max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\} \quad (2)$$

gilt. (Wir zeigen also, dass in (1) bereits einer der beiden Summanden ausreicht. Um welchen es sich dabei handelt hängt allerdings von  $f$ ,  $g$  und  $h$  ab.) Da

$$\max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\} = q^{\max\{-\nu(f-g), -\nu(g-h)\}} = q^{-\min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}}$$

gilt

$$q^{-\nu(f-h)} \leq \max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\} \iff \nu(f-h) \geq \min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}.$$

Diese letzte Ungleichung gilt, denn für alle  $0 \leq n < \min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}$  gilt  $f_n = g_n$  und  $g_n = h_n$ , und somit auch  $f_n = h_n$ .

**Bemerkung 1.** Eine Metrik  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  auf einer Menge  $X$ , die neben der gewöhnlichen Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X$$

sogar schon die stärkere Ungleichung

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad \text{für alle } x, y, z \in X$$

erfüllt, heißt *Ultrametrik*. Wir haben gezeigt, dass  $d_q$  eine Ultrametrik auf  $R[[T]]$  ist.

Wir merken noch an, dass die Metrik  $d_q$  translationsinvariant ist, d.h. es gilt

$$d_q(f+h, g+h) = d_q(f, g) \quad \text{für alle } f, g, h \in R[[T]]. \quad (3)$$

## ii)

Für  $f \in R[[T]]$  und eine Folge  $(f^{(i)})_i$  von Potenzreihen  $f^{(i)} \in R[[T]]$  gilt

$$\begin{aligned} & f^{(i)} \rightarrow f \text{ für } i \rightarrow \infty \text{ bezüglich } d_q \\ \iff & d_q(f^{(i)}, f) \rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty \\ \iff & q^{-\nu(f^{(i)}-f)} \rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty \\ \iff & -\nu(f^{(i)}-f) \rightarrow -\infty \text{ für } i \rightarrow \infty \\ \iff & \nu(f^{(i)}-f) \rightarrow \infty \text{ für } i \rightarrow \infty \\ \iff & \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } \nu(f^{(i)}-f) \geq n \text{ für alle } i \geq j \\ \iff & \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } f_m^{(i)} = f_m \text{ für alle } i \geq j, m < n \\ \iff & \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } f_n^{(i)} = f_n \text{ für alle } i \geq j. \end{aligned}$$

Es gilt also  $f^{(i)} \rightarrow f$  genau dann wenn für jedes  $n \geq 0$  gilt, dass  $f_n^{(i)} = f_n$  für  $i$  groß genug. (Man beachte, dass es von  $n$  abhängt, wann  $f_n^{(i)}$  konstant wird. Insbesondere wird die Folge  $f^{(i)}$  selbst nicht notwendigerweise konstant.) Das zeigt insbesondere, dass die Folge  $(f^{(i)})_i$  genau dann konvergiert, wenn für jedes  $n \geq 0$  die Folge der Koeffizienten  $(f_n^{(i)})_i$  konstant wird.

Wir haben auch gezeigt, dass sich der Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)}$  dann koeffizientenweise bestimmen lässt.

Eine Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$  konvergiert per Definition genau dann, wenn die Folge  $(g^{(j)})_j$  der Partialsummen  $g^{(j)} := \sum_{i=0}^j f^{(i)}$  konvergiert. Wie bereits gezeigt ist dies äquivalent dazu, dass für jedes  $n \geq 0$  die Koeffizientenfolge  $(g_n^{(j)})_j$  konstant wird. Dies bedeutet gerade, dass es für jedes  $n \geq 0$  ein  $j \geq 0$  gibt, so dass  $g_n^{(k_1)} = g_n^{(k_2)}$  für alle  $k_1 \geq k_2 \geq j$ ; da  $g_n^{(k_1)} - g_n^{(k_2)} = \sum_{i=k_2+1}^{k_1} f_n^{(i)}$  ist dies äquivalent dazu, dass  $f_n^{(i)} = 0$  für alle  $i > j$ .

Da sich der Grenzwert einer konvergenten Folge  $(f^{(i)})_i$  von Potenzreihen  $f^{(i)} \in R[[T]]$  koeffizientenweise bestimmen lässt, ergibt sich, dass sich auch der Grenzwert einer konvergenten Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$  von Potenzreihen  $f^{(i)} \in R[[T]]$  koeffizientenweise berechnen lässt, d.h. für alle  $n \geq 0$  gilt  $(\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)})_n = \sum_i f_n^{(i)}$ .

Wir wollen den Leser an dieser Stelle darauf aufmerksam machen, dass sich Konvergenzverhalten einer Folge, bzw. Reihe in  $R[[T]]$  nicht von dem gewählten Parameter  $q > 1$  abhängt.

**Bemerkung 2.** Versieht man den Ring  $R$  mit der diskreten Topologie, bzw. der diskreten Metrik, so entspricht der topologische Raum  $R[[T]]$  zusammen mit den stetigen Projektionen  $\pi_i: R[[T]] \rightarrow R, f \mapsto f_i$  dem abzählbaren topologischen Produkt  $\prod_{i \geq 0} R$ .

Insbesondere konvergiert dann eine Folge  $(f^{(i)})_i$  von Potenzreihen  $f^{(i)} \in R[[T]]$  genau dann in  $R[[T]]$ , wenn für jedes  $n \geq 0$  die Koeffizientenfolge  $(f_n^{(i)})_i$  in  $R$  konvergiert. Für den Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)}$  gilt dann  $(\lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)})_n = \lim_{i \rightarrow \infty} f_n^{(i)}$  für alle  $n \geq 0$ .

### iii)

Für alle  $n, i \geq 0$  gilt  $(T^i)_n = \delta_{in}$ ; für fixiertes  $n \geq 0$  ist deshalb  $(T^i)_n = 0$  für alle  $n > i$ . Wie im Aufgabenteil ii) gesehen, ist deshalb  $T^i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$  bezüglich  $d_q$ .

Für  $f \in R[[T]]$  konvergiert die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i$  bezüglich  $d_q$ , denn für alle  $n, i \geq 0$  gilt  $(f_i T^i)_n = f_i \delta_{in}$ , und für  $i > n$  verschwindet dieser Term. Durch koeffizientenweises Berechnen des Grenzwertes ergibt sich, dass

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i \right)_n = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i T^i)_n = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \delta_{in} = f_n \quad \text{für alle } n \geq 0,$$

und somit  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i = f$ .

### iv)

#### Unabhängigkeit der Topologie vom Parameter $q$

Es seien  $q_1, q_2 > 0$ . Es gilt zu zeigen, dass eine Teilmenge  $U \subseteq R[[T]]$  genau dann offen bezüglich  $d_{q_1}$  ist, wenn sie offen bezüglich  $d_{q_2}$  ist. Dies ist äquivalent dazu, dass eine Teilmenge  $C \subseteq R[[T]]$  genau dann abgeschlossen bezüglich  $d_{q_1}$  ist, wenn sie abgeschlossen bezüglich

$d_{q_2}$  ist. Dies ist äquivalent dazu, dass eine Teilmenge  $C \subseteq R[[T]]$  genau dann folgenabgeschlossen bezüglich  $d_{q_1}$  ist, wenn sie folgenabgeschlossen bezüglich  $d_{q_2}$  ist.

In Aufgabenteil ii) haben wir gesehen, dass das Konvergenzverhalten einer Folge  $(f^{(i)})_i$  von Potenzreihen  $f^{(i)} \in R[[T]]$  bezüglich den Metriken  $d_{q_1}$  und  $d_{q_2}$  nicht von den Parametern  $q_1$  und  $q_2$  abhängt, d.h. für jedes  $f \in R[[T]]$  gilt genau dann  $f^{(i)} \rightarrow f$  bezüglich  $d_{q_1}$  wenn  $f^{(i)} \rightarrow f$  bezüglich  $d_{q_2}$  gilt. Deshalb ist eine Teilmenge  $C \subseteq R[[T]]$  genau dann folgenabgeschlossen bezüglich  $d_{q_1}$ , wenn sie folgenabgeschlossen bezüglich  $d_{q_2}$  ist.

## Stetigkeit der Ringoperationen

**Erinnerung 3.** 1. Ein topologischer Ring lässt sich auf verschiedene (offenbar) äquivalente Weisen definieren:

- a) Ein *topologischer Ring* ist ein topologischer Raum  $R$  zusammen mit stetigen Abbildungen  $+: R \times R \rightarrow R$  und  $\cdot: R \times R \rightarrow R$  (wobei  $R \times R$  mit der Produkttopologie versehen wird), so dass  $(R, +, \cdot)$  ein Ring ist.
- b) Ein *topologischer Ring* ist ein Ring  $R$  zusammen mit einer Topologie  $T$  auf  $R$ , so dass die Addition und Multiplikation  $+, \cdot: R \times R \rightarrow R$  stetig sind (wobei  $R \times R$  mit der durch  $T$  induzierten Produkttopologie versehen wird).
- c) Ein *topologischer Ring* ist eine Menge  $R$  zusammen mit einer Teilmenge  $T \subseteq 2^R$  und zwei binären Verknüpfungen  $+, \cdot: R \times R \rightarrow R$ , so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
  - $T$  ist eine Topologie auf  $R$ .
  - $(R, +, \cdot)$  ist ein Ring.
  - Die Abbildungen  $+$  und  $\cdot$  sind stetig, wobei  $R \times R$  mit der durch  $T$  induzierten Produkttopologie versehen wird.

2. Ist  $M$  ein metrischer Raum, so ist eine Abbildung  $f: M \times M \rightarrow M$  genau dann stetig bezüglich der Produkttopologie auf  $M \times M$ , wenn für je zwei in  $M$  konvergente Folgen  $(x_n)_n$  und  $(y_n)_n$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$  gilt, dass auch  $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x, y)$ .

Es gilt zu zeigen, dass für je zwei konvergente Folgen  $(f^{(i)})_i$  und  $(g^{(i)})_i$  von Potenzreihen  $f^{(i)}, g^{(i)} \in R[[T]]$  auch die Folgen  $(f^{(i)} + g^{(i)})_i$  und  $(f^{(i)} \cdot g^{(i)})_i$  konvergieren, und dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f^{(i)} + g^{(i)}) = \left( \lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)} \right) + \left( \lim_{i \rightarrow \infty} g^{(i)} \right)$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f^{(i)} \cdot g^{(i)}) = \left( \lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)} \right) \cdot \left( \lim_{i \rightarrow \infty} g^{(i)} \right).$$

Hierfür fixieren wir zwei solche konvergenten Folgen und setzen  $f := \lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)}$  und  $g := \lim_{i \rightarrow \infty} g^{(i)}$ .

Es sei  $n \geq 0$ . Aus  $f^{(i)} \rightarrow f$  und  $g^{(i)} \rightarrow g$  ergibt sich nach Aufgabenteil ii), dass es ein  $j \geq 0$  gibt, so dass  $f_n^{(i)} = f_n$  und  $g_n^{(i)} = g_n$  für alle  $i \geq j$ . Für alle  $i \geq j$  ist

$$(f^{(i)} + g^{(i)})_n = f_n^{(i)} + g_n^{(i)} = f_n + g_n = (f + g)_n.$$

Aus der Beliebigkeit von  $n \geq 0$  folgt nach Aufgabenteil ii), dass  $f^{(i)} + g^{(i)} \rightarrow f + g$ .

Für das Produkt gehen wir analog vor: Es sei  $n \geq 0$ . Da  $f^{(i)} \rightarrow f$  und  $g^{(i)} \rightarrow g$  ergibt sich nach Aufgabenteil ii), dass es ein  $j \geq 0$  gibt, so dass  $f_m^{(i)} = g_m^{(i)}$  für alle  $i \geq j$  und  $m = 0, \dots, n$ . Für alle  $i \geq j$  ist damit

$$\left(f^{(i)} \cdot g^{(i)}\right)_n = \sum_{m=0}^n f_m^{(i)} g_{n-m}^{(i)} = \sum_{m=0}^n f_m g_{n-m} = (f \cdot g)_n.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $n$  zeigt dies nach Aufgabenteil ii), dass  $f^{(i)} \cdot g^{(i)} \rightarrow f \cdot g$ .

Die Stetigkeit der Inversion ergibt sich ähnlich: Es sei  $(f^{(i)})_i$  eine Folge von Einheiten  $f^{(i)} \in R[[T]]^\times$  und  $f \in R[[T]]^\times$  mit  $f^{(i)} \rightarrow f$  für  $i \rightarrow \infty$ . Es sei  $g := f^{-1}$  und für alle  $i \geq 0$  sei  $g^{(i)} := (f^{(i)})^{-1}$ . Es gilt zu zeigen, dass auch  $g^{(i)} \rightarrow g$  für  $i \rightarrow \infty$ .

Wir fixieren ein  $n \geq 0$ . Da  $f^{(i)} \rightarrow f$  gibt es ein  $j \geq 0$  mit  $f_m^{(i)} = f_m$  für alle  $i \geq j$  und  $m = 0, \dots, n$ . Per Induktion über  $m = 0, \dots, n$  zeigen wir, dass  $g_m^{(i)} = g_m$  für alle  $i \geq j$ : Für alle  $i \geq j$  ist  $g_0 = f_0^{-1} = (f_0^{(i)})^{-1} = g_0^{(i)}$ . Gilt  $g_m^{(i)} = g_m$  für alle  $i \geq j$  und  $0 \leq m < n$ , so ergibt sich, dass

$$g_{m+1}^{(i)} = -g_0^{(i)} \sum_{l=0}^m g_l^{(i)} f_{m+1-l}^{(i)} = -g_0 \sum_{l=0}^m g_l f_{m+1-l} = g_{m+1}.$$

Insgesamt zeigt dies, dass es für jedes  $n \geq 0$  ein  $j \geq 0$ , so dass  $g_m^{(i)} = g_m$  für alle  $i \geq j$  und  $m = 0, \dots, n$ ; insbesondere ist  $g_n^{(i)} = g_n$  für alle  $i \geq j$ . Das zeigt, dass  $g^{(i)} \rightarrow g$  für  $i \rightarrow \infty$ .

**Bemerkung 4.** Die Menge der Einheiten  $R[[T]]^\times$  ist als Teilmenge von  $R[[T]]$  sowohl offen als auch abgeschlossen:

Es sei  $(f^{(i)})_i$  eine Folge in  $R[[T]]^\times$  die gegen ein  $f \in R[[T]]$  konvergiert. Für alle  $i \geq 0$  gilt  $f_0^{(i)} \in R^\times$ , da  $f^{(i)}$  invertierbar ist. Es gibt ein  $j \geq 0$  mit  $f_0 = f_0^{(i)}$  für alle  $i \geq j$ , also gilt auch  $f_0 \in R^\times$ . Somit gilt auch  $f \in R[[T]]^\times$ . Das zeigt, dass  $R[[T]]^\times$  folgenabgeschlossen in  $R[[T]]$  ist, und somit abgeschlossen in  $R[[T]]$ .

Analog ergibt sich, dass auch  $R[[T]] \setminus R[[T]]^\times$  abgeschlossen ist, und  $R[[T]]^\times$  somit offen.

Die Aussage lässt sich auch abstrakter einsehen: Versieht man  $R$  wie in Bemerkung 2 mit der diskreten Topologie, bzw. der diskreten Metrik, so ist die Projektion auf den konstanten Koeffizienten  $\pi_0: R[[T]] \rightarrow R, f \mapsto f_0$  stetig. Für jede Menge von Koeffizienten  $C \subseteq R$  sind dann die Urbilder  $\pi_0^{-1}(C)$  und  $\pi_0^{-1}(R \setminus C) = R[[T]] \setminus \pi_0^{-1}(C)$  offen in  $R[[T]]$ . Wählt man  $C = R^\times$ , so ergibt sich die Aussage.

## v)

Es genügt zu zeigen, dass  $R[[T]]$  bezüglich  $d_q$  vollständig ist. Die Menge der Cauchyfolgen stimmt dann mit der Menge der konvergenten Folgen überein, und diese ist unabhängig von  $q$ , da die durch  $d_q$  induzierte Topologie unabhängig von  $q$  ist.

Ist  $(f^{(i)})_i$  eine Cauchyfolge in  $R[[T]]$  bezüglich  $d_q$ , so gilt insbesondere  $d_q(f^{(i+1)}, f^{(i)}) \rightarrow 0$ . Wegen der Translationsinvarianz von  $d_q$  (siehe (3)) gilt deshalb  $d_q(f^{(i+1)} - f^{(i)}, 0) \rightarrow 0$ ,

also  $f^{(i+1)} - f^{(i)} \rightarrow 0$ . Nach Aufgabenteil ii) gibt es deshalb für jedes  $n \geq 0$  ein  $j \geq 0$  mit  $f_n^{(i+1)} - f_n^{(i)} = 0$  für alle  $i \geq j$ , also  $f_n^{(i+1)} = f_n^{(i)}$  für alle  $i \geq j$ ; die Folge  $(f_n^{(i)})_i$  ist also konstant für  $i \geq j$ . Nach Aufgabenteil ii) zeigt dies, dass die Folge  $(f^{(i)})_i$  konvergiert.

vi)

## Beweis der Kontraktionseigenschaft

**Behauptung 5.** Für alle  $f, g \in R[[T]]$  gilt

$$\nu(fg) \geq \nu(g) \quad \text{und} \quad \nu(Tg) = \nu(g) + 1.$$

Ist  $f \in T \cdot R[[T]]$ , so gilt  $\nu(fg) \geq \nu(g) + 1$ .

*Beweis.* Für alle  $0 \leq n < \nu(g)$  gilt  $g_n = 0$  und somit auch

$$(fg)_n = \sum_{m=0}^n f_m \underbrace{g_{n-m}}_{=0} = 0.$$

Deshalb ist  $\nu(fg) \geq \nu(g)$ . (Tatsächlich ergibt sich mit der obigen Argumentation, dass  $\nu(fg) \geq \nu(f) + \nu(g)$ . Ist  $R$  ein Integritätsbereich, so handelt es sich hierbei um eine Gleichheit.) Aus  $(Tg)_0 = 0$  und  $(Tg)_n = g_{n-1}$  für alle  $n \geq 1$  ergibt sich, dass  $\nu(Tg) = \nu(g) + 1$ . Ist  $f \in T \cdot R[[T]]$  so gibt es ein  $f' \in R[[T]]$  mit  $f = Tf'$ . Deshalb gilt dann

$$\nu(fg) = \nu(Tf'g) = \nu(f'g) + 1 \geq \nu(g) + 1. \quad \square$$

Für alle  $f \in T \cdot R[[T]]$  und  $g \in R[[T]]$  bezeichnen wir die gegebene Abbildung mit

$$\phi_{f,g}: R[[T]] \rightarrow R[[T]], \quad x \mapsto g - fx.$$

Mit Behauptung 5 erhalten wir für alle  $x_1, x_2 \in R[[T]]$ , dass

$$\begin{aligned} d_q(\phi_{f,g}(x_1), \phi_{f,g}(x_2)) &= d_q(g - fx_1, g - fx_2) = q^{-\nu((g-fx_1)-(g-fx_2))} \\ &= q^{-\nu(f(x_2-x_1))} = q^{-(\nu(x_2-x_1)+1)} = q^{-1} q^{-\nu(x_2-x_1)} \\ &= q^{-1} d_q(x_2, x_1) = q^{-1} d_q(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Da  $q > 1$  ist  $0 < q^{-1} < 1$ . Damit haben wir gezeigt, dass  $\phi_{f,g}$  bezüglich  $d_q$  eine Kontraktion ist (mit möglicher Kontraktionskonstante  $q^{-1}$ ).

## Bestimmung der Einheiten

**Behauptung 6.** Ist  $f \in R[[T]]$  mit  $f_0 = 1$ , so gilt  $f \in R[[T]]^\times$ .

*Beweis.* Wir betrachten die abgeänderte Potenzreihe

$$g := g - 1 = g - f_0 = \sum_{i \geq 1} f_i T^i \in T \cdot R[[T]].$$

Dann ist  $\phi_{g,1}: R[[T]] \rightarrow R[[T]]$  eine Kontraktion bezüglich  $d_q$ . Da  $R[[T]]$  bezüglich  $d_q$  ein vollständiger metrischer Raum ist, können wir auf  $\phi_{g,1}$  den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Somit erhalten wir einen (eindeutigen) Fixpunkt  $x \in R[[T]]$  von  $\phi_{g,1}$ . Es gilt nun  $x = \phi_{g,1}(x) = 1 - gx$  und somit  $x(1 + g) = 1$ . Also ist  $1 + g = f$  eine Einheit (mit  $f^{-1} = x$ ).  $\square$

Ist  $f \in R[[T]]$  eine Einheit, so gibt es ein  $g \in R[[T]]$  mit  $fg = 1$ . Für die konstanten Terme gilt  $1 = (fg)_0 = f_0 g_0$  und somit  $f_0 \in R^\times$  (mit  $f_0^{-1} = g_0$ ).

Ist andererseits  $f \in R[[T]]$  mit  $f_0 \in R^\times$ , so lässt sich  $f$  als  $f = f_0(f_0^{-1}f)$  schreiben. Da  $(f_0^{-1}f)_0 = f_0^{-1}f_0 = 1$  ist  $f_0^{-1}f$  nach Behauptung 6 eine Einheit in  $R[[T]]$ . Da auch  $f_0 \in R^\times \subseteq R[[T]]^\times$  ist  $f = f_0 \cdot (f_0^{-1}f)$  das Produkt zweier Einheiten, und damit ebenfalls eine Einheit.

## vii)

**Erinnerung 7.** Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  eines topologischen Raums  $X$  heißt *dicht in  $X$* , falls sie eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Es gilt  $\overline{A} = X$ .
2. Für jede nicht-leere offene Menge  $U \subseteq X$  gilt  $U \cap A \neq \emptyset$ .
3. Für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Umgebung  $U \subseteq X$  von  $x$  gibt es ein  $a \in A$  mit  $a \in U$ .
4. Für jedes  $x \in X$  gibt es ein Netz  $(x_\alpha)_\alpha$  mit  $x_\alpha \in A$  und  $x_\alpha \rightarrow x$ .

Falls  $X$  metrisierbar ist (insbesondere also, wenn  $X$  ein metrischer Raum ist), bzw.  $X$  erst-abzählbar ist, so führt die Äquivalenz von Abgeschlossenheit und Folgenabgeschlossenheit in  $X$  zu einer weiter äquivalenten Bedingung:

5. Für jedes  $x \in X$  gibt es eine Folge  $(x_n)_n$  mit  $x_n \in A$  und  $x_n \rightarrow x$ .

Für  $f \in R[[T]]$  gilt für die Folge  $(f^{(i)})_i$  von Polynomen  $f^{(i)} := \sum_{j=0}^i f_j T^j \in R[T]$  nach Aufgabenteil ii), dass  $f^{(i)} \rightarrow f$  für  $i \rightarrow \infty$ . Also ist  $R[T]$  dicht in  $R[[T]]$ .

## viii)

### Motivation

Ein Ringhomomorphismus  $\psi: R[T] \rightarrow S$  ist eindeutig durch die Einschränkung  $\varphi := \psi|_R$  und das Bild  $s := \psi(T)$  bestimmt: Für ein beliebiges Polynom  $\sum_i a_i T^i \in R[T]$  gilt dann, dass

$$\psi\left(\sum_i a_i T^i\right) = \sum_i \psi(a_i) s^i; \quad (4)$$

da  $a_i = 0$  für fast alle  $i$  gilt, ist auch  $\psi(a_i) = 0$  für fast alle  $i$ , und die Summe  $\sum_i \psi(a_i)s^i$  somit wohldefiniert. Umgekehrt liefert jedes Paar  $(\varphi, s)$  bestehend aus einem Ringhomomorphismus  $\varphi: R \rightarrow S$  und einem Element  $s \in S$  durch (4) einen Ringhomomorphismus  $\psi: R[[T]] \rightarrow S$ , und die beiden Konstruktionen sind invers zueinander.

Es ist naheliegend dieses Ergebnis auf den Potenzreihenring  $R[[T]]$  verallgemeinern zu wollen: Ein Ringhomomorphismus  $\psi: R[[T]] \rightarrow S$  sollte mit  $\varphi := \psi|_R$  und  $s := \psi(T)$  durch  $\psi(\sum_i a_i T^i) = \sum_i \varphi(a_i)s^i$  eindeutig bestimmt sein.

Die oben genutzte Bedingung, dass  $a_i = 0$  für fast alle  $i$ , gilt nun aber nicht mehr. Daher ergibt der Ausdruck  $\sum_i \varphi(a_i)s^i$  im Allgemeinen keinen Sinn. Man kann ihm aber Sinn verleihen, indem man fordert, dass  $S$  ein topologischer Ring ist: Dann kann  $\sum_i \varphi(a_i)s^i$  als eine Reihe verstanden werden.

Damit diese Reihe konvergiert muss die Wahl von  $s$  allerdings noch passend eingeschränkt werden; für  $s = 1$  und  $\sum_i a_i T^i = \sum_i T^i$  (also  $a_i = 1$  für alle  $i$ ) ergibt etwa die Summe  $\sum_i 1$  im Allgemeinen keinen Sinn. Außerdem sollte  $\psi$  stetig sein, damit  $\psi$  auch mit diesen unendlichen Summen verträglich ist.

Bevor wir uns ans Rechnen machen, wollen wir noch abkürzende Begriffe einführen:

**Definition 8.** Es sei  $a: \mathbb{N}^2 \rightarrow R$  eine Matrix.

1. Die Matrix  $a$  heißt *zeilenendlich*, wenn in jeder Zeile von  $a$  fast alle Einträge verschwinden, d.h. für jedes  $i \in \mathbb{N}$  gilt  $a_{ij} = 0$  für fast alle  $j \in \mathbb{N}$ .
2. Die Matrix  $a$  heißt *spaltenendlich*, wenn in jeder Spalte von  $a$  fast alle Einträge verschwinden, d.h. für jedes  $j \in \mathbb{N}$  gilt  $a_{ij} = 0$  für fast alle  $i \in \mathbb{N}$ .
3. Es sei  $\varphi: R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus und  $s \in S$ . Ist die Matrix  $a$  zeilen- und spaltenendlich, so heißt sie  $(\varphi, s)$ -kompatibel, bzw. *kompatibel zu*  $(\varphi, s)$ , wenn die beiden Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} (\sum_j \varphi(a_{ij})s^i)$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} (\sum_i \varphi(a_{ij})s^i)$  konvergieren und für die entsprechenden Grenzwerte  $\sum_{i=0}^{\infty} (\sum_j \varphi(a_{ij})s^i) = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_i \varphi(a_{ij})s^i)$  gilt.

**Bemerkung 9.** Die Begriffe von Zeilen- und Spaltenendlichkeit einer Matrix sind weit verbreitet. Der Begriff von  $(\varphi, s)$ -Kompatibilität hingegen wird hier der Nützlichkeit wegen ad-hoc eingefügt.

## Von Ringhomomorphismen $\psi: R[[T]] \rightarrow S$ zu Paaren $(\varphi, s)$

Es sei  $\psi: R[[T]] \rightarrow S$  ein stetiger Ringhomomorphismus. Es seien  $\varphi := \psi|_R$  und  $s := \psi(T)$ . Dann ist  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus, und es gilt zu zeigen, jede zeilen- und spaltenendliche Matrix  $a: \mathbb{N}^2 \rightarrow R$  kompatibel mit  $(\varphi, s)$  ist. Hierfür fixieren wir eine solche Matrix.

Für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  seien  $f^{(i)} := \sum_j a_{ij}T^j$  und  $g^{(j)} := \sum_i a_{ij}T^i$ ; da  $a$  zeilen- und spaltenendlich ist, sind beide Summen endlich.

**Behauptung 10.** Die beiden Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}$  konvergieren, und für die beiden Grenzwerte gilt  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}$ .

*Beweis.* Für alle  $n \geq 0$  gilt  $f_n^{(i)} = (\sum_j a_{ij})\delta_{ni}$ , und deshalb  $f_n^{(i)} = 0$  alle  $i \neq n$ . Nach Aufgabenteil ii) gilt deshalb  $f^{(i)} \rightarrow 0$ , weshalb die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$  konvergiert. Für den



Grenzwert  $f := \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$  ergibt sich durch koeffizientenweises Berechnen, dass

$$f_n = \sum_i f_n^{(i)} = \sum_i \left( \sum_j a_{ij} \right) \delta_{in} = \sum_j a_{nj} \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Für alle  $n \geq 0$  gilt  $g_n^{(j)} = a_{nj}$  für alle  $j \geq 0$ . Wegen der Spaltenendlichkeit von  $a$  gilt für jedes  $n \geq 0$ , dass  $g_n^{(j)} = a_{nj} = 0$  für fast alle  $j \geq 0$ . Nach Aufgabenteil ii) ist deshalb  $g^{(j)} \rightarrow 0$ , weshalb die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}$  konvergiert. Für den Grenzwert  $g := \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}$  ergibt sich durch koeffizientenweises Berechnen, dass

$$g_n = \sum_j g_n^{(j)} = \sum_j a_{nj} \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Für alle  $n \geq 0$  gilt  $f_n = g_n$  und somit  $f = g$ . □

Anwenden von  $\psi$  auf die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$  ergibt wegen der Additivität und Stetigkeit von  $\psi$ , dass auch die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} \psi(f^{(i)})$  konvergiert. Dabei gilt

$$\psi \left( \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi(f^{(i)}) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi \left( \sum_j a_{ij} T^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_j \varphi(a_{ij}) s^i.$$

Analog ergibt sich, dass auch die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi(g^{(j)})$  konvergiert, und dass

$$\psi \left( \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_i \varphi(a_{ij}) s^i.$$

Also konvergieren die beiden Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_j \varphi(a_{ij}) s^i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_i \varphi(a_{ij}) s^i$ , und aus der Gleichheit  $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}$  ergibt sich, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_j \varphi(a_{ij}) s^i = \psi \left( \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)} \right) = \psi \left( \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_i \varphi(a_{ij}) s^i.$$

### Von Paaren $(\varphi, s)$ zu Ringhomomorphismen $\psi: R[[T]] \rightarrow S$

Es sei nun  $(\varphi, s)$  ein Paar, so dass jede zeilen- und spaltenendlich  $a: \mathbb{N}^2 \rightarrow R$  kompatibel zu  $(\varphi, s)$  ist. Wir konstruieren in mehreren Schritten einen stetigen Ringhomomorphismus  $\psi: R[[T]] \rightarrow S$  mit  $\psi|_R = \varphi$  und  $\psi(T) = s$ .

#### Schritt 0: Die Idee

Wegen der Stetigkeit von  $\psi$  und Dichtheit von  $R[T] \subseteq R[[T]]$  sollte  $\psi$  durch die Einschränkung  $\psi|_{R[T]}$  bereits eindeutig bestimmt sein; dass  $S$  Hausdorff ist, ist hierfür eine technische

Voraussetzung. Die Einschränkung  $\psi|_{R[T]}: R[T] \rightarrow S$  ist auf rein algebraisch Weise durch die Einschränkung  $\psi|_R$  und das Bildelement  $\psi(T)$  eindeutig bestimmt.

Für die Konstruktion wollen wir diese Argumentation umgekehren: Wir erweitern das Paar  $(\varphi, s)$  zu einem Ringhomomorphismus  $\tilde{\psi}: R[T] \rightarrow S$ , den wir eindeutig zu einer Abbildung  $\psi: R[[T]] \rightarrow S$  fortsetzen, indem wir beliebige Potenzreihen  $f \in R[[T]]$  durch Polynome  $f^{(i)} \in R[T]$  approximieren. Anschließend überprüfen wir, dass  $\psi$  ein stetiger Ringhomomorphismus ist.

Die angegebene technische Bedingung an  $s \in S$  wird dabei auf zwei Weisen genutzt: Zum einen sorgt die Konvergenz der Reihen dafür, dass gewissen Grenzwerte existieren, was die genutzten Approximationsargumente erlaubt. Die Gleichheit der beiden Reihen wird dafür genutzt diese Grenzwerte genauer zu bestimmen.

### Schritt 1: Konstruktion von $\tilde{\psi}: R[T] \rightarrow S$

Nach der universellen Eigenschaft des Polynomrings  $R[T]$  entspricht das Paar  $(\varphi, s)$  einem eindeutigen Ringhomomorphismus  $\tilde{\psi}: R[T] \rightarrow S$  mit  $\tilde{\psi}|_R = \varphi$  und  $\tilde{\psi}(T) = s$ , und dieser ist gegeben durch

$$\tilde{\psi} \left( \sum_i a_i T^i \right) = \sum_i \varphi(a_i) s^i \quad \text{für alle } \sum_i a_i T^i \in R[T].$$

### Schritt 2: Konvergiert $(f^{(i)})_i$ mit $f^{(i)} \in R[T]$ in $R[[T]]$ so konvergiert $\tilde{\psi}(f^{(i)})_i$ in $S$

Ist  $(f^{(i)})_i$  eine in  $R[[T]]$  konvergente Folge von Polynomen  $f^{(i)} \in R[T]$  so konvergiert auch die Bildfolge  $(\tilde{\psi}(f^{(i)}))_i$ .

Wir definieren die Folge  $(g^{(i)})_i$  von Polynomen  $g^{(i)} \in R[T]$  durch  $g^{(0)} := f^{(0)}$  und  $g^{(i)} := f^{(i)} - f^{(i-1)}$  für alle  $i \geq 1$ . Dann ist  $\sum_{j=0}^i g^{(j)} = f^{(i)}$  für alle  $i \geq 0$ , und somit auch

$$\tilde{\psi}(f^{(i)}) = \tilde{\psi} \left( \sum_{j=0}^i g^{(j)} \right) = \sum_{j=0}^i \tilde{\psi}(g^{(j)}) \quad \text{für alle } i \geq 0.$$

Es gilt also zu zeigen, dass die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\psi}(g^{(j)})$  konvergiert.

Da die Folge  $f^{(i)}$  konvergiert, wissen wir, dass die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}$  konvergiert. Die Matrix  $a: \mathbb{N}^2 \rightarrow R$ ,  $(i, j) \mapsto g_i^{(j)}$  ist zeilen- und spaltenendlich: Für jedes  $j \geq 0$  ist  $g^{(j)}$  ein Polynom und somit  $g_i^{(j)} = 0$  für fast alle  $i \geq 0$ . Da die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}$  konvergiert, gilt nach Aufgabenteil ii) für jedes  $i \geq 0$ , dass  $g_i^{(j)} = 0$  für fast alle  $j \geq 0$ .

Da die Matrix  $a$  zeilen- und spaltenendlich ist, konvergiert die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_i \varphi(g_i^{(j)}) s^i$  nach Annahme. Da

$$\sum_i \varphi(g_i^{(j)}) s^i = \tilde{\psi} \left( \sum_i g_i^{(j)} T^i \right) = \tilde{\psi}(g^{(j)}) \quad \text{für alle } j \geq 0$$

ist dies genau die Konvergenz der Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\psi}(g^{(j)})$ .

**Schritt 3: Konvergiert**  $R[T] \ni f^{(i)} \rightarrow f$  **in**  $R[[T]]$  **so gilt**  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(f^{(i)}) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i$

Ist  $(f^{(i)})_i$  eine Folge von Polynomen  $f^{(i)} \in R[T]$  mit  $f^{(i)} \rightarrow f \in R[[T]]$ , so gilt für den Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(f^{(i)})$ , der nach dem vorherigen Schritt existiert, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(f^{(i)}) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(f_i) s^i.$$

Die Folge  $(g^{(j)})_j$  von Polynomen  $g^{(j)} \in R[T]$  sei definiert wie zuvor. Wie oben gesehen gilt  $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}$ , und die Matrix  $\mathbb{N}^2 \rightarrow R$ ,  $(i, j) \mapsto g_i^{(j)}$  ist zeilen- und spaltenendlich. Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(f^{(i)}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\psi}(g^{(j)}) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\psi}\left(\sum_i g_i^{(j)} T^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_i \varphi(g_i^{(j)}) s^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_j \varphi(g_i^{(j)}) s^i = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi\left(\sum_j g_i^{(j)}\right) s^i = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}\right)_i\right) s^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(f_i) s^i. \end{aligned}$$

#### Schritt 4: Definition von $\psi$

Wir können nun  $\psi$  definieren: Es sei  $f \in R[[T]]$ . Wegen der Dichtheit von  $R[T]$  in  $R[[T]]$  gibt es eine Folge  $(f^{(i)})_i$  von Polynomen  $f^{(i)} \in R[T]$  mit  $f^{(i)} \rightarrow f$ . Nach den vorherigen Schritten konvergiert die Bildfolge  $(\tilde{\psi}(f^{(i)}))_i$ , und der Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(f^{(i)}) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i$  hängt nur von  $f$  ab. Daher ist

$$\psi(f) := \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(f^{(i)}) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i$$

wohldefiniert. Wir merken auch noch an, dass  $\psi|_{R[T]} = \tilde{\psi}$ .

#### Schritt 5: Stetigkeit von $\psi$

Es lässt sich zeigen, dass  $\psi$  stetig ist; ein Beweis hierfür wird noch hinzugefügt werden.

**Bemerkung 11.** Beim Beweis der Stetigkeit von  $\psi$  erweist sich unter den gegebenen Bedingungen als problematisch:

Nimmt man zusätzlich an, dass  $S$  metrisierbar ist, so lässt sich ein relativ kurzes Diagonalfolgenargument nutzen. Auch eine Argumentation über gleichmäßige Stetigkeit ist dann möglich. Insbesondere können in beiden Fällen Sätze aus der Analysis zitiert werden.

Dass  $S$  jedoch a priori nur ein weiter hausdorffscher topologischer Ring ist, macht das ganze deutlich schwieriger. Der einzige Beweis, den der Autor bisher gefunden hat, nutzt ein für diese Vorlesung übermäßiges Maß an point set topology, und nutzt (und beweist) ad-hoc einige Eigenschaften topologischer Gruppen.

Wir wollen aber zumindest anmerken, dass  $\psi$  die eindeutige stetige Fortsetzung von  $\tilde{\psi}$  auf  $R[[T]]$  ist: Ist  $\psi': R[[T]] \rightarrow S$  eine stetige Fortsetzung von  $\psi$ , so gibt es für jedes  $f \in R[[T]]$  eine Folge  $(f^{(i)})_i$  von Polynomen  $f^{(i)} \in R[T]$  mit  $f^{(i)} \rightarrow f$ , weshalb

$$\psi'(f) = \psi' \left( \lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \psi' \left( f^{(i)} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\psi} \left( f^{(i)} \right) = \psi(f).$$

#### Schritt 6: $\psi$ ist ein Ringhomomorphismus

Es seien  $f, g \in R[[T]]$  und  $(f^{(i)})_i, (g^{(i)})_i$  zwei Folgen von Polynomen  $f^{(i)}, g^{(i)} \in R[T]$  mit  $f^{(i)} \rightarrow f$  und  $g^{(i)} \rightarrow g$ . Aus der Stetigkeit der Addition von  $R[[T]]$  folgt, dass auch  $f^{(i)} + g^{(i)} \rightarrow f + g$ . Aus der Stetigkeit der Addition von  $S$  und der Stetigkeit von  $\psi$  ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned} \psi(f) + \psi(g) &= \left( \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\psi} \left( f^{(i)} \right) \right) + \left( \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\psi} \left( g^{(i)} \right) \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \tilde{\psi} \left( f^{(i)} \right) + \tilde{\psi} \left( g^{(i)} \right) \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\psi} \left( f^{(i)} + g^{(i)} \right) = \tilde{\psi} \left( \lim_{i \rightarrow \infty} \left( f^{(i)} + g^{(i)} \right) \right) = \psi(f + g). \end{aligned}$$

Also ist  $\psi$  additiv. Analog ergibt sich, dass  $\psi$  multiplikativ ist. Außerdem gilt

$$\psi(1) = \psi(T^0) = \psi \left( \sum_i \delta_{i,0} T^i \right) = \sum_i \varphi(\delta_{i,0}) s^i = \sum_i \delta_{i,0} s^i = s^0 = 1.$$

#### Schritt 7: Die beiden Konstruktionen sind invers zueinander

Es sei  $\psi: R[[T]] \rightarrow S$  ein stetiger Ringhomomorphismus. Es seien  $\varphi := \psi|_R$  und  $s := \psi(T)$ . Dann ist jede zeilen- und spaltenendliche Matrix  $a: \mathbb{N}^2 \rightarrow R$  kompatibel mit  $(\varphi, s)$ . Es sei  $\tilde{\theta}: R[T] \rightarrow S$  der eindeutige Ringhomomorphismus mit  $\tilde{\theta}|_R = \varphi$  und  $\tilde{\theta}(T) = s$ , und es sei  $\theta: R[[T]] \rightarrow S$  die eindeutige stetige Fortsetzung von  $\tilde{\theta}$ . Die Einschränkung  $\tilde{\psi} := \psi|_{R[T]}: R[T] \rightarrow S$  ist ein Ringhomomorphismus, für den  $\tilde{\psi}|_R = \psi|_{R[T]}|_R = \psi|_R = \varphi$  und  $\tilde{\psi}(T) = \psi(T) = s$  gilt. Deshalb gilt  $\tilde{\psi} = \tilde{\theta}$  nach der Eindeutigkeit von  $\tilde{\theta}$ . Damit ist  $\psi$  eine stetige Fortsetzung von  $\tilde{\psi} = \tilde{\theta}$  auf  $R[[T]]$ ; wegen der Eindeutigkeit dieser Fortsetzung ist  $\psi = \theta$ .

Es sei andererseits  $(\varphi, s)$  ein Paar bestehend aus einem Ringhomomorphismus  $\varphi: R \rightarrow S$  und einem Element  $s \in S$ , so dass jede zeilen- und spaltenendliche Matrix  $\mathbb{N}^2 \rightarrow R$  kompatibel mit  $(\varphi, s)$  ist. Es sei  $\tilde{\psi}: R[T] \rightarrow S$  der eindeutige Ringhomomorphismus mit  $\tilde{\psi}|_R = \varphi$  und  $\tilde{\psi}(T) = s$ , und es sei  $\psi: R[[T]] \rightarrow S$  die eindeutige stetige Fortsetzung von  $\tilde{\psi}$ . Für das zu  $\psi$  gehörige Paar  $(\varphi', s')$  mit  $\varphi' = \psi|_R$  und  $s' = \psi(T)$  gilt  $\varphi' = \psi|_R = \tilde{\psi}|_R = \varphi$  und  $s' = \psi(T) = \tilde{\psi}(T) = s$ , also  $(\varphi', s') = (\varphi, s)$ .

## ix)

Es sei  $\iota: R \rightarrow R[[T]]$ ,  $r \mapsto r = rT^0$  die kanonische Inklusion und  $f \in T \cdot R[[T]]$ . Es gilt zu zeigen, dass das Paar  $(\iota, f)$  im Sinne des vorherigen Aufgabenteiles einen wohldefinierten

stetigen Ringendomorphismus

$$\psi: R[[T]] \rightarrow R[[T]], \quad \sum_i a_i T^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i f^i$$

induziert. (Auf dem Übungszettel wird die Inklusion  $\iota$  unglücklicherweise mit  $\text{id}_R$  notiert.) Hierfür müssen wir überprüfen, dass jede zeilen- und spaltenendliche Matrix  $a: \mathbb{N}^2 \rightarrow R$  mit  $(\iota, f)$  kompatibel ist.

Hierfür bemerken wir, dass aus  $f \in T \cdot R[[T]]$  folgt, dass  $f^i \in T^i \cdot R[[T]]$  für alle  $i \geq 0$ , denn wegen  $f \in T \cdot R[[T]]$  ist  $f = Tg$  für ein  $g \in R[[T]]$ , und somit  $f^i = T^i g^i$  für alle  $i \geq 0$ .

Für jedes  $i \geq 0$  gilt  $f^i \in T^i \cdot R[[T]]$  und somit auch  $\sum_j a_{ij} f^i \in T^i \cdot R[[T]]$ . Deshalb gilt  $(\sum_j a_{ij} f^i)_n = 0$  für alle  $i > n$ , also  $\sum_j a_{ij} f^i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ . Nach Aufgabenteil ii) konvergiert deshalb die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} (\sum_j a_{ij} f^i)$ , und für alle  $n \geq 0$  ergibt sich durch koeffizientenweises Berechnen des Grenzwertes, dass

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_j a_{ij} f^i \right) \right)_n = \sum_i \left( \sum_j a_{ij} f^i \right)_n = \sum_i \sum_j a_{ij} (f^i)_n.$$

Für die Konvergenz der Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} (\sum_i a_{ij} f^i)$  gilt es zu zeigen, dass  $\sum_i a_{ij} f^i \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ , dass es also für jedes  $n \geq 0$  ein  $J \geq 0$  mit  $(\sum_i a_{ij} f^i)_n = 0$  für alle  $j \geq J$  gibt. Für jedes  $j \geq 0$  gilt wie zuvor für alle  $n \geq 0$ , dass

$$\left( \sum_i a_{ij} f^i \right)_n = \sum_i a_{ij} (f^i)_n = \sum_{i=0}^n a_{ij} (f^i)_n.$$

Wegen der Zeilenendlichkeit von  $a$  gibt es für jedes  $i = 0, \dots, n$  ein  $J_i \geq 0$  mit  $a_{ij} = 0$  für alle  $j \geq J_i$ . Für  $J := \max_{i=1, \dots, n} J_i$  gilt dann  $a_{ij} = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $j \geq J$ . Für jedes  $j \geq J$  ist also  $(\sum_i a_{ij} f^i)_n = \sum_{i=0}^n a_{ij} (f^i)_n = 0$ .

Die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} (\sum_i a_{ij} f^i)$  konvergiert also, und für jedes  $n \geq 0$  ergibt sich durch koeffizientenweises Berechnen des Grenzwertes, dass

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_i a_{ij} f^i \right) \right)_n = \sum_j \left( \sum_i a_{ij} f^i \right)_n = \sum_j \sum_i a_{ij} (f^i)_n.$$

Wegen der Endlichkeit der Summen  $\sum_i \sum_j a_{ij} (f^i)_n$  und  $\sum_j \sum_i a_{ij} (f^i)_n$  ergibt sich für die beiden konvergenten Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_j a_{ij} f^i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_i a_{ij} f^i$ , dass

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_j a_{ij} f^i \right) \right)_n = \sum_i \sum_j a_{ij} (f^i)_n = \sum_j \sum_i a_{ij} (f^i)_n = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_i a_{ij} f^i \right) \right)_n$$

für alle  $n \geq 0$ , und somit  $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_j a_{ij} f^i = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_i a_{ij} f^i$ .

**x)**

Wir geben einen alternativen Beweis von Behauptung 6. Die Charakterisierung der Einheitengruppe  $R[[T]]^\times$  ergibt sich dann wie im Rest von Aufgabenteil vi).

Es sei  $f \in R[[T]]$  mit  $f_0 = 1$ . Die Potenzreihe

$$g := f - 1 = \sum_{i \geq 1} f_i T^i \in T \cdot R[[T]]$$

induziert nach dem vorherigen Aufgabenteil zu einen stetigen Ringendomorphismus

$$\psi: R[[T]] \rightarrow R[[T]], \quad \sum_i a_i T^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^i.$$

Inbesondere gilt  $f = 1 + g = \psi(1 + T)$ .

Da  $(1 + T)(\sum_i (-1)^i T^i) = 1$  gilt, ist  $1 + T$  eine Einheit in  $R[[T]]$ . Deshalb ist auch  $\psi(1 + T) = 1 + g = f$  eine Einheit in  $R[[T]]$  mit

$$f^{-1} = \psi(1 + T)^{-1} = \psi((1 + T)^{-1}) = \psi\left(\sum_i (-1)^i T^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i g^i.$$