Lösungen zu
Aufgabe 3, Zettel 2

Jendrik Stelzner

19. November 2016

i)

Für alle $f, g \in R[\![T]\!]$ gilt

$$d_q(f,g) = 0 \iff q^{-\nu(f-g)} = 0 \iff \nu(f-g) = \infty \iff f-g = 0 \iff f = g.$$

Für jedes $h \in R[\![T]\!]$ und $i \geq 0$ ist genau dann $h_i \neq 0$ wenn $-h_i \neq 0$, weshalb $\nu(h) = \nu(-h)$. Für alle $f, g \in R[\![T]\!]$ gilt deshalb

$$d_q(f,g) = q^{-\nu(f-g)} = q^{-\nu(g-f)} = d_q(g,f).$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung fixieren wir $f, g, h \in R[\![T]\!]$. Es gilt zu zeigen, dass

$$q^{-\nu(f-h)} \leq q^{-\nu(f-g)} + q^{-\nu(g-h)}. \tag{1}$$

Hierfür zeigen wir, dass bereits

$$q^{-\nu(f-h)} \leq \max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\}.$$

(Wir zeigen also, dass in (1) bereits einer der beiden Summanden ausreicht. Um welchen es sich dabei handelt hängt allerdings von f, g und h ab.) Da

$$\max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\} = q^{\max\{-\nu(f-g), -\nu(g-h)\}} = q^{-\min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}}$$

gilt

$$q^{-\nu(f-h)} \leq \max\{q^{-\nu(f-g)}, q^{-\nu(g-h)}\} \iff \nu(f-h) \geq \min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}.$$

Diese letzte Ungleichung gilt, denn für alle $0 \leq i < \min\{\nu(f-g), \nu(g-h)\}$ gilt $f_i = g_i$ und $g_i = h_i$, und somit auch $f_i = h_i$.

Wir merken noch an, dass die Metrik d_q translationsinvariant ist, d.h. es gilt

$$d_q(f+h, g+h) = d_q(f,g) \qquad \text{für alle } f, g, h \in R[\![T]\!].$$

ii)

Für $f \in R[\![T]\!]$ und eine Folge $(f^{(i)})_i$ von Elementen $f^{(i)} \in R[\![T]\!]$ gilt

$$\begin{aligned}
& f^{(i)} \to f \text{ für } i \to \infty \text{ bezüglich } d_q \\
\iff{} & d_q(f^{(i)}, f) \to 0 \text{ für } i \to \infty \\
\iff{} & q^{-\nu(f^{(i)}-f)} \to 0 \text{ für } i \to \infty \\
\iff{} & -\nu(f^{(i)} - f) \to -\infty \text{ für } i \to \infty \\
\iff{} & \nu(f^{(i)} - f) \to \infty \text{ für } i \to \infty \\
\iff{} & \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } \nu(f^{(i)} - f) \geq n \text{ für alle } i \geq j \\
\iff{} & \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } f^{(i)}_m = f_m \text{ für alle } m \leq n, i \geq j \\
\iff{} & \text{für jedes } n \geq 0 \text{ gibt es ein } j \geq 0 \text{ mit } f^{(i)}_n = f_n \text{ für alle } i \geq j.
\end{aligned}$$

Es gilt also $f^{(i)} \to f$ genau dann wenn für jedes $n \geq 0$ gilt, dass $f^{(i)}_n = f_n$ für i groß genug. (Man beachte, dass es von n abhängt, wann $f^{(i)}_n$ konstant wird. Insbesondere wird die Folge $f^{(i)}$ selbst nicht notwendigerweise konstant.) Das zeigt insbesondere, dass die Folge $(f^{(i)})_i$ genau dann konvergiert, wenn für jedes $n \geq 0$ die Folge der Koeffizienten $(f^{(i)}_n)_i$ konstant wird.

Wir haben auch gezeigt, dass sich der Grenzwert $\lim_{i\to\infty} f^{(i)}$ dann koeffizientenweise bestimmen lässt.

Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$ konvergiert per Definition genau dann, wenn die Folge $(g^{(j)})_j$ der Partialsummen $g^{(j)} := \sum_{i=0}^{j} f^{(i)}$ konvergiert. Wie bereits gezeigt ist dies äquivalent dazu, dass für jedes $n \geq 0$ die Koeffizientenfolge $(g^{(j)}_n)_j$ konstant wird. Dies bedeutet gerade, dass es für jedes $n \geq 0$ ein $k \geq 0$ gibt, so dass $g^{(j_1)}_n = g^{(j_2)}_n$ für alle $j_1 \geq j_2 \geq k$; wegen $g^{(j_1)}_n - g^{(j_2)}_n = \sum_{i=j_2+1}^{j_1} f^{(i)}_n$ ist dies äquivalent dazu, dass $f^{(i)}_n = 0$ für alle $i > k$.

Außerdem zeigt die obige Argumentation, dass sich der Grenzwert der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}$ dann koeffizientenweise berechnen lässt, d.h. für alle $n \geq 0$ gilt $(\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)})_n = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}_n$.

Wir wollen den Leser an dieser Stelle darauf aufmerksam machen, dass sich Konvergenzverhalten einer Folge, bzw. Reihe in $R[\![T]\!]$ nicht von dem gewählten Parameter $q > 1$ abhängt.

Bemerkung 1. Versieht man den Ring R mit der diskreten Topologie, bzw. der diskreten Metrik, so entspricht der topologische Raum $R[\![T]\!]$ zusammen mit den stetigen Projektionen $\pi_i \colon R[\![T]\!] \to R$, $f \mapsto f_i$ dem abzählbaren topologischen Produkt $\prod_{i\geq 0} R$.

iii)

Für alle $n, i \geq 0$ gilt $(T^i)_n = \delta_{in}$; für fixiertes $n \geq 0$ ist deshalb $(T^i)_n = 0$ für alle $n > i$. Wie im Aufgabenteil ii) gesehen, ist deshalb $T^i \to 0$ for $i \to \infty$ bezüglich d_q.

Für $f \in R[\![T]\!]$ konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i$, denn für jedes $n \geq 0$ gilt $(f_i T^i)_n = f_i \delta_{in}$, und für $i > n$ verschwindet dieser Term. Durch koeffizientenweises Berechnen des Grenzwertes ergibt sich, dass

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i \right)_n = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i T^i)_n = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \delta_{in} = f_n \qquad \text{für alle } n \geq 0,$$

und somit $\sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i = f$.

iv)

Unabhängigkeit der Topologie vom Parameter q

Es seien $q_1, q_2 > 0$. Es gilt zu zeigen, dass eine Teilmenge $U \subseteq R[\![T]\!]$ genau dann offen bezüglich d_{q_1} ist, wenn sie offen bezüglich d_{q_2} ist. Dies ist äquivalent dazu, dass eine Teilmenge $C \subseteq R[\![T]\!]$ genau dann abgeschlossen bezüglich d_{q_1} ist, wenn sie abgeschlossen bezüglich d_{q_2} ist. Hierfür genügt es zu zeigen, dass eine Teilmenge $C \subseteq R[\![T]\!]$ genau dann folgenabgeschlossen bezüglich d_{q_1} ist, wenn sie folgenabgeschlossen bezüglich d_{q_2} ist.

In Aufgabenteil ii) haben wir gesehen, dass das Konvergenzverhalten einer Folge $(f^{(i)})_i$ von Elementen $f^{(i)} \in R[\![T]\!]$ bezüglich den Metriken d_{q_1} und d_{q_2} nicht von den Parametern q_1 und q_2 abhängt, d.h. für jedes $f \in R[\![T]\!]$ gilt genau dann $f^{(i)} \to f$ bezüglich d_{q_1} wenn $f^{(i)} \to f$ bezüglich d_{q_2}. Deshalb ist $C \subseteq R[\![T]\!]$ genau dann folgenabgeschlossen bezüglich d_{q_1}, wenn es folgenabgeschlossen bezüglich d_{q_2} ist.

Also ist die von d_q erzeugte Topologie unabhängig von q.

Stetigkeit der Ringoperationen

Es gilt zu zeigen, dass für je zwei konvergente Folgen $(f^{(i)})_i$ und $(g^{(i)})_i$ von Elementen $f^{(i)}, g^{(i)} \in R[\![T]\!]$ auch die Folgen $(f^{(i)} + g^{(i)})_i$ und $(f^{(i)} \cdot g^{(i)})_i$ konvergieren, und dass

$$\lim_{i \to \infty} \left(f^{(i)} + g^{(i)} \right) = \left(\lim_{i \to \infty} f^{(i)} \right) + \left(\lim_{i \to \infty} g^{(i)} \right)$$

und

$$\lim_{i \to \infty} \left(f^{(i)} \cdot g^{(i)} \right) = \left(\lim_{i \to \infty} f^{(i)} \right) \cdot \left(\lim_{i \to \infty} g^{(i)} \right)$$

Hierfür fixieren wir zwei solche konvergenten Folgen und schreiben $f \coloneqq \lim_{i \to \infty} f^{(i)}$ und $g \coloneqq \lim_{i \to \infty} g^{(i)}$.

Es sei $n \geq 0$. Aus $f^{(i)} \to f$ und $g^{(i)} \to g$ ergibt sich nach Aufgabenteil ii), dass es ein $j \geq 0$ gibt, so dass $f_n^{(i)} = f_n$ und $g_n^{(i)} = g_n$ für alle $i \geq j$. Es sei $j \geq j_f, j_g$. Für alle $i \geq j$ ist

$$(f^{(i)} + g^{(i)})_n = f_n^{(i)} + g_n^{(i)} = f_n + g_n = (f + g)_n.$$

Aus der Beliebigkeit von $n \geq 0$ folgt nach Aufgabenteil ii), dass $f^{(i)} + g^{(i)} \to f + g$.

Für das Produkt gehen wir analog vor: Es sei $n \geq 0$. Da $f^{(i)} \to f$ und $g^{(i)} \to g$ ergibt sich nach Aufgabenteil ii), dass es ein $j \geq 0$ gibt, so dass $f_k^{(i)} = g_k^{(i)}$ für alle $k = 0, \dots, n$ und $i \geq j$. Für alle $i \geq j$ ist damit auch

$$(f^{(i)} \cdot g^{(i)})_n = \sum_{k=0}^{n} f_k^{(i)} g_{n-k}^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} = (f \cdot g)_n.$$

Wegen der Beliebigkeit von n zeigt dies nach Aufgabenteil ii), dass $f^{(i)} \cdot g^{(i)} \to f \cdot g$.

Die Stetigkeit der Inversion ergibt sich ähnlich: Es sei $(f^{(i)})_i$ eine Folge von Einheiten $f^{(i)} \in R[\![T]\!]^\times$ und $f \in R[\![T]\!]^\times$ mit $f^{(i)} \to f$ für $i \to \infty$. Es sei $g := f^{-1}$ und für alle $i \geq 0$ sei $g^{(i)} := (f^{(i)})^{-1}$. Es gilt zu zeigen, dass auch $g^{(i)} \to g$ für $i \to \infty$.

Wir fixieren ein $n \geq 0$. Da $f^{(i)} \to f$ gibt es ein $j \geq 0$ mit $f_k^{(i)} = f_k$ für alle $i \geq j$ und $0 \leq k \leq n$. Wir zeigen dass $g_k^{(i)} = g_k$ für alle $i \geq j$ und $0 \leq k \leq n$, per Induktion über k: Für alle $i \geq j$ ist $g_0 = f_0^{-1} = (f_0^{(i)})^{-1} = g_0^{(i)}$. Gilt $g_k^{(i)} = g_k$ für alle $0 \leq k < n$ und $i \geq j$, so ergibt sich, dass

$$g_{k+1} = -g_0 \sum_{\ell=0}^{k} g_\ell f_{k+1-\ell} = -g_0^{(i)} \sum_{\ell=0}^{k} g_\ell^{(i)} f_{k+1-\ell}^{(i)} = g_{k+1}^{(i)}.$$

Ingesamt zeigt dies, dass es für jedes $n \geq 0$ ein $j \geq 0$, so dass $g_k^{(i)} = g_k$ für alle $0 \leq k \leq n$ und $i \geq j$; insbesondere ist $g_n^{(i)} = g_n$ für alle $i \geq j$. Das zeigt, dass $g^{(i)} \to g$ für $i \to \infty$.

Bemerkung 2. Die Menge der Einheiten $R[\![T]\!]^\times$ ist als Teilmenge von $R[\![T]\!]$ sowohl offen als auch abgeschlossen:

Es sei $(f^{(i)})_i$ eine Folge in $R[\![T]\!]^\times$ die gegen ein $f \in R[\![T]\!]$ konvergiert. Für alle $i \geq 0$ ist $f_0^{(i)} \in R^\times$, da $f^{(i)}$ invertierbar ist. Es gibt ein $j \geq 0$ mit $f_0 = f_0^{(i)}$ für alle $i \geq j$. Also ist auch $f_0 \in R^\times$, und somit $f \in R[\![T]\!]^\times$. Das zeigt, dass $R[\![T]\!]^\times$ folgenabgeschlossen in $R[\![T]\!]$ ist, und somit abgeschlossen in $R[\![T]\!]$.

Analog ergibt sich, dass auch $R[\![T]\!] \smallsetminus R[\![T]\!]^\times$ abgeschlossen ist, und $R[\![T]\!]^\times$ somit offen.

Die Aussage lässt sich auch abstrakter einsehen: Versieht man R mit der diskreten Topologie, bzw. der diskreten Metrik, so ist die Projektion auf den konstanten Koeffizienten $\pi_0 \colon R[\![T]\!] \to R$, $f \mapsto f_0$ stetig. Für jede Menge von Koeffizienten $C \subseteq R$ sind dann die Urbilder $\pi_0(C)$ und $\pi_0(R \smallsetminus C) = R[\![T]\!] \smallsetminus \pi_0(C)$ offen in $R[\![T]\!]$. Wählt man $C = R^\times$, so ergibt sich die Aussage.

v)

Es genügt zu zeigen, dass $R[\![T]\!]$ bezüglich d_q vollständig ist. Die Menge der Cauchyfolgen stimmt dann mit der Menge der konvergenten Folgen überein, und diese ist unabhängig von q, da die Topologie unabhängig von q ist.

Ist $(f^{(i)})_i$ eine Cauchyfolge in $R[\![T]\!]$ bezüglich d_q, so ist insbesondere $d_q(f^{(i+1)}, f^{(i)}) \to 0$ für $i \to \infty$. Wegen der Translationsinvarianz von d_q ist $d_q(f^{(i+1)} - f^{(i)}, 0) \to 0$, also $f^{(i+1)} - f^{(i)} \to 0$. Nach Aufgabenteil ii) gibt es deshalb für jedes $n \geq 0$ ein $j \geq 0$ mit

$f_n^{(i+1)} - f_n^{(i)} = 0$ für alle $i \geq j$, also $f_n^{(i+1)} = f_n^{(i)}$ für alle $i \geq j$, weshalb die Folge $(f_n^{(i)})_i$ für $i \geq j$ konstant ist. Nach Aufgabenteil ii) konvergiert die Folge $(f^{(i)})_i$ deshalb.

vi)

Nachweis der Kontraktion

Behauptung. Für alle $f, g \in R[\![T]\!]$ gilt

$$\nu(fg) \geq \nu(g) \quad \text{und} \quad \nu(Tg) = \nu(g) + 1.$$

Ist $f \in T \cdot R[\![T]\!]$, so gilt $\nu(fg) \geq \nu(g) + 1$.

Beweis. Für alle $0 \leq i < \nu(g)$ gilt $g_i = 0$ und somit auch

$$(fg)_i = \sum_{j=0}^{i} f_j \underbrace{g_{i-j}}_{=0} = 0.$$

Deshalb ist $\nu(fg) \geq \nu(g)$. (Tatsächlich ergibt sich mit der obigen Argumentation, dass $\nu(fg) \geq \nu(f) + \nu(g)$. Ist R ein Integritätsbereich, so handelt es sich hierbei um eine Gleichheit.) Aus $(Tg)_0 = 0$ und $(Tg)_i = (Tg)_{i-1}$ für alle $i \geq 1$ ergibt sich, dass $\nu(Tg) = \nu(g) + 1$. Ist $f \in T \cdot R[\![T]\!]$ so gibt es ein $f' \in R[\![T]\!]$ mit $f = Tf'$. Deshalb gilt dann

$$\nu(fg) = \nu(Tf'g) = \nu(f'g) + 1 \geq \nu(g) + 1. \qquad \square$$

Für alle $f \in T \cdot R[\![T]\!]$ und $g \in R[\![T]\!]$ bezeichnen wir die gegebene Abbildung mit

$$\phi_{f,g} \colon R[\![T]\!] \to R[\![T]\!], \quad x \mapsto g - fx.$$

Aus der obigen Behauptung erhalten wir für alle $x_1, x_2 \in R[\![T]\!]$, dass

$$\begin{aligned} d_q(\phi_{f,g}(x_1), \phi_{f,g}(x_2)) &= d_q(g - fx_1, g - fx_2) = q^{-\nu((g-fx_1)-(g-fx_2))} \\ &= q^{-\nu(f(x_2-x_1))} \leq q^{-(\nu(x_2-x_1)+1)} = q^{-1} q^{-\nu(x_2-x_1)} \\ &= q^{-1} d_q(x_2, x_1) = q^{-1} d_q(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Da $q > 1$ ist $0 < q^{-1} < 1$. Damit haben wir gezeigt, dass $\phi_{f,g}$ bezüglich d_q eine Kontraktion ist (mit möglicher Kontraktionskonstante q^{-1}).

Bestimmung der Einheiten

Ist $f \in R[\![T]\!]$ eine Einheit, so gibt es ein $g \in R[\![T]\!]$ mit $fg = 1$. Dann muss $1 = (fg)_0 = f_0 g_0$ und somit $f_0 \in R^\times$ (mit $f_0^{-1} = g_0$).

Es sei nun andererseits $f \in R[\![T]\!]$ mit $f_0 \in R^\times$.

Im Fall $f_0 = 1$ betrachten wir die abgeänderte Potenzreihe

$$f' \coloneqq f - 1 = f - f_0 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i T^i \in T \cdot R[\![T]\!].$$

Dann ist $\phi_{f',1}\colon R[\![T]\!] \to R[\![T]\!]$ eine Kontraktion bezüglich d_q. Da $R[\![T]\!]$ bezüglich d_q ein vollständiger metrischer Raum ist, können wir auf $\phi_{f',1}$ den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Somit erhalten wir einen (eindeutigen) Fixpunkt $x \in R[\![T]\!]$ von $\phi_{f',1}$. Es gilt nun $x = \phi_{f',1}(x) = 1 - f'x$ und somit $x(1 + f') = 1$. Also ist $1 + f' = f$ eine Einheit (mit $f^{-1} = x$).

Ist allgemeiner $f_0 \in R^\times$, so lässt sich f als $f = f_0(f_0^{-1} f)$ schreiben. Nach der obigen Argumentation ist $f_0^{-1} f$ eine Einheit in $R[\![T]\!]$. Da auch $f_0 \in R^\times \subseteq R[\![T]\!]^\times$ ist f das Produkt zweier Einheiten, und damit ebenfalls eine Einheit.

vii)

Für $f \in R[\![T]\!]$ und die Folge $(f^{(i)})_i$ von Polynomen $f^{(i)} := \sum_{j=0}^{i} f_j T^j \in R[T]$ gilt nach Aufgabenteil ii), dass $f^{(i)} \to f$ für $i \to \infty$. Also ist $R[T]$ dicht in $R[\![T]\!]$.

viii)

Motivation

Ein Ringhomomorphismus $\psi\colon R[T] \to S$ ist eindeutig durch die Einschränkung $\varphi := \psi|_R$ und das Bild $s := \psi(T)$ bestimmt: Für ein beliebiges Polynom $\sum_i a_i T^i \in R[T]$ gilt dann, dass

$$\psi\left(\sum_i a_i T^i\right) = \sum_i \psi(a_i) s^i; \tag{2}$$

da $a_i = 0$ für fast alle i gilt, ist auch $\psi(a_i) = 0$ für fast alle i, und die Summe $\sum_i \psi(a_i) s^i$ somit wohldefiniert. Umgekehrt liefert jedes Paar (φ, s) bestehend aus einem Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ und einen Element $s \in S$ durch (2) einen Ringhomomorphismus $\psi\colon R[T] \to S$, und die beiden Konstruktionen sind invers zueinander.

Es ist naheliegend, dieses Ergebnis auf den Potenzreihenring $R[\![T]\!]$ zu verallgemeinern: Ein Ringhomomorphismus $\psi\colon R[\![T]\!] \to S$ sollte mit $\varphi := \psi|_R$ und $s := \psi(T)$ durch $\psi(\sum_i a_i T^i) = \sum_i \varphi(a_i) s^i$ eindeutig bestimmt sein. Die oben genutzte Bedingung, dass $a_i = 0$ für fast alle i, gilt nun aber nicht mehr; daher ergibt der Ausdruck $\sum_i \varphi(a_i) s^i$ im Allgemeinen keinen Sinn.

Man kann diesen Ausdruck Sinn verleihen, indem man fordert, dass S ein topologischer Raum ist: Dann kann $\sum_i \varphi(a_i) s^i$ als eine Reihe gesehen werden. Damit diese Reihe konvergiert muss die Wahl von s allerdings noch passend eingeschränkt werden; für $s = 1$ und $\sum_i a_i T^i = \sum_i T^i$ (also $a_i = 1$ für alle i) ergibt etwa die Summe $\sum_i 1$ im Allgemeinen keinen Sinn.

Bevor wir uns an das Rechnen machen, wollen wir noch abkürzende Begriffe einführen:

Definition 3. *Es sei $a\colon \mathbb{N}^2 \to R$.*

1. *Die Matrix a heißt zeilenendlich, wenn in jeder Zeile fast alle Einträge verschwinden, d.h. für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $a_{ij} = 0$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$.*

2. *Die Matrix a heißt spaltenendlich, wenn in jeder Spalte fast alle Einträge verschwinden, d.h. für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt $a_{ij} = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.*

Ringhomomorphismen $\psi\colon R[\![T]\!] \to S \rightsquigarrow$ Paare (φ, s)