# Lösungen zu Zettel 1

Jendrik Stelzner

11. November 2016

## Aufgabe 1

Für je zwei Mengen $X$ und $Y$ sei $F(X,Y)$ die Menge der Funktionen $X \to Y$. Wir bezeichnen die übliche Adjunktionsabbildung mit

$$\Phi\colon F(R \times A, A) \to F(R, F(A,A)), \quad h \mapsto (r \mapsto h(r,-))$$

wobei wir für jede Funktion $h\colon R \times A \to A$ und jedes $r \in R$ mit $h(r,-)$ die Funktion

$$h(r,-)\colon A \to A, \quad a \mapsto h(r,a)$$

bezeichnen. Die Funktion $\Phi$ ist eine Bijektion, und ihr Inverses ist durch

$$\Psi\colon F(R, F(A,A)) \to F(R \times A, A), \quad h \mapsto ((r,a) \mapsto h(r)(a))$$

gegeben.

### i)

Es sei $\mu \in F(R \times A, A)$ und $f := \Phi(f) \in F(R, F(A,A))$. Es gilt zu zeigen, dass $\mu$ genau dann eine $R$-Modulstruktur auf $A$ ist, wenn $f$ ein Ringhomomorphismus nach $\mathrm{End}(A)$ ist. Das $\mu$ eine $R$-Modulstruktur auf $A$ ist, bedeutet, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M1) Für alle $r \in R$ und $a_1, a_2 \in A$ gilt $\mu(r, a_1 + a_2) = \mu(r, a_1) + \mu(r, a_2)$.

(M2) Für alle $r_1, r_2 \in R$ und $a \in A$ gilt $\mu(r_1 + r_2, a) = \mu(r_1, a) + \mu(r_2, a)$.

(M3) Für alle $r_1, r_2 \in R$ und $a \in A$ gilt $\mu(r_1 \cdot r_2, a) = \mu(r_1, \mu(r_2, a))$.

(M4) Für alle $a \in A$ ist $\mu(1, a) = a$.

Dass $f$ ein Ringhomomorphismus ist, bedeutet, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Für alle $r \in R$ gilt $f(r) \in \mathrm{End}(A)$, d.h. für alle $r \in R$ und $a_1, a_2 \in A$ gilt $f(r)(a_1 + a_2) = f(r)(a_1) + f(r)(a_2)$.

(R2) Für alle $r \in R$ gilt $f(r_1, r_2) = f(r_1) + f(r_2)$, d.h. für alle $r_1, r_2 \in R$ und $a \in A$ gilt $f(r_1 + r_2)(a) = f(r_1)(a) + f(r_2)(a)$.

(R3) Für alle $r \in R$ gilt $f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \circ f(r_2)$, d.h. für alle $r_1, r_2 \in R$ und $a \in A$ gilt $f(r_1 \cdot r_2)(a) = f(r_1)(f(r_2)(a))$.

(R4) Es gilt $f(1) = \mathrm{id}_A$, d.h. für alle $a \in A$ gilt $f(1)(a) = a$.

Da $\mu(r, a) = f(r)(a)$ sind die Bedingungen in gegebener Nummerierung paarweise äquivalent zueinander (bespielsweise ist (M1) äquivalent zu (R1)). Also erfüllt $\mu$ alle vier Bedingungen genau dann, wenn $f$ alle vier Bedingungen erfüllt. Also ist $\mu$ genau dann eine Modulstruktur, wenn $f$ ein Ringhomomorphismus nach $\mathrm{End}(A)$ ist.

## ii)

Wir bezeichnen die gegebene geordnete Basis $B$ von $V$ mit $B = (b_1, \ldots, b_n)$.

Die $K$-Vektorraumstruktur auf $V$ entspricht einem Ringhomomorphismus

$$f\colon K \to \mathrm{End}(V), \quad K \mapsto (v \mapsto \lambda \cdot v).$$

Das Bild von $f$ liegt bereits im Unterring $\mathrm{End}_K(V)$, denn für jedes $\lambda \in K$ ist die Abbildung $f(\lambda)\colon V \to V$, $v \mapsto \lambda \cdot v$ nicht nur additiv, sondern auch $K$-linear (denn für alle $\mu \in K$ ist $f(\lambda)(\mu v) = \lambda\mu v = \mu\lambda v = \mu f(\lambda)(v)$.) Dashalb können wir $f$ als einen Ringhomomorphismus $K \to \mathrm{End}_K(V)$ auffassen. Der angegebene Ringisomorphismus $g\colon \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{Mat}_n(K)$ ordnet jedem Endomorphismus $L \in \mathrm{End}_K(V)$ die darstellende Matrix $\mathrm{M}_B(L) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ zu. Für jedes $\lambda \in K$ ist $f(\lambda) = \lambda\,\mathrm{id}_V$ und somit

$$g(f(\lambda)) = g(\lambda\,\mathrm{id}_V) = \mathrm{M}_B(\lambda\,\mathrm{id}_V) = \lambda\,\mathrm{M}_B(\mathrm{id}_V) = \lambda I_n.$$

Die Komposition $K \xrightarrow{f} \mathrm{End}_K(V) \xrightarrow{g} \mathrm{Mat}_n(K)$ bildet als $\lambda \in K$ auf $\lambda I_n$ ab.

## iii)

Damit der Ausdruck $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_R(A)}(A)$ Sinn ergibt, müssen wir zunächst eine $\mathrm{End}_R(A)$-Modulstruktur auf $A$ definieren. Eine $\mathrm{End}_R(A)$-Modulstruktur auf $A$ zu definieren ist äquivalent dazu, einen Ringhomomorphismus $\mathrm{End}_R(A) \to \mathrm{End}(A)$ anzugeben.

Der Ringhomomorphismus, der hier betrachtet werden soll, ist die kanonische Inklusion $i\colon \mathrm{End}_R(A) \to \mathrm{End}(A)$, $f \mapsto f$. (Dies wird in der Aufgabenstellung recht schlecht – nämlich gar nicht – angegeben.) Die $\mathrm{End}_R(A)$-Modulstruktur auf $A$, die $i$ entspricht, ist durch

$$f \cdot a = i(f)(a) = f(a) \qquad \text{für alle } f \in \mathrm{End}_R(A),\ a \in A$$

gegeben.

Für $g \in \mathrm{End}(A)$ gilt genau dann $g \in \mathrm{End}_{\mathrm{End}_R(A)}$, wenn $g(f \cdot a) = f \cdot g(a)$ für alle $g \in G$, d.h. wenn $g(f(a)) = f(g(a))$ für alle $a \in A$. Also ist

$$\mathrm{End}_{\mathrm{End}_R(A)} = \{g \in \mathrm{End}(A) \mid gf = fg \text{ für alle } f \in \mathrm{End}_R(A)\}.$$

Ist $g$ im Bild des zu $\mu$ gehörigen Ringhomomorphismus $R \to \operatorname{End}(A)$, $r \mapsto \mu(r, -)$, so gibt es ein $r \in R$ mit $g = \mu(r, -)$. Für alle $a \in A$ ist dann $g(a) = \mu(r, -)(a) = \mu(r, a) = r \cdot a$, und für $f \in \operatorname{End}_R(A)$ ist deshalb

$$g(f(a)) = r \cdot f(a) = f(r \cdot a) = f(g(a)) \qquad \text{für alle } a \in A.$$

# Aufgabe 2

Zur Belustigung bezeichnen wir die gegebene Abbildung mit

$$\begin{aligned} \Xi\colon \ &\{\varphi\colon R[T] \to S \mid \varphi \text{ ist ein Ringhomomorphismus}\} \\ &\quad \to \{\psi\colon R \to S \mid \psi \text{ ist ein Ringhomomorphismus}\} \times S, \\ &\varphi \mapsto (\varphi|_R, \varphi(T)). \end{aligned}$$

## i)

Es sei $\varphi\colon R[T] \to S$ ein Ringhomomorphismus. Es seien $\psi := \varphi|_R$ und $s := \varphi(T)$. Für jedes $\sum_i a_i T^i \in R[T]$ gilt dann

$$\varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) = \sum_i \varphi(a_i)\varphi(T)^i = \sum_i \psi(a_i) s^i.$$

Deshalb ist $\varphi$ durch $\psi$ und $s$ schon eindeutig bestimmt. Somit ist $\Xi$ injektiv.

## ii)

Falls $(\psi, s)$ im Bild von $\Xi$ liegt, so gibt es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R[T] \to S$ mit $\psi = \varphi|_R$ und $s = \varphi(T)$. Dann gilt

$$\psi(r)s = \varphi(r)\varphi(T) = \varphi(rT) = \varphi(Tr) = \varphi(T)\varphi(r) = s\psi(r) \qquad \text{für alle } r \in R,$$

wobei sich die mittlere Gleichheit aus der Kommutativität von $R[T]$ ergibt.

Umgekehrt sei $(\psi, s)$ ein Paar bestehend aus einem Ringhomomorphismus $\psi\colon R \to S$ und einem Element $s \in S$, so dass $\psi(r)s = s\psi(r)$ für alle $r \in R$. Um zu zeigen, dass $(\psi, s)$ im Bild von $\Xi$ liegt, müssen wir zeigen, das es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R[T] \to S$ gibt, so dass $\psi = \varphi|_R$ und $s = \varphi(T)$. Aus dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir, wie $\varphi$ aussehen muss. Wir definieren deshalb die Abbildung

$$\varphi\colon R[T] \to S, \quad \sum_i a_i T^i \mapsto \sum_i \psi(a_i) s^i.$$

Da $\varphi|_R = \psi$ und $\varphi(T) = s$ gilt es nur noch zeigen, dass $\varphi$ ein Ringhomomorphismus ist.

Für alle $f, g \in R[T]$ mit $f = \sum_i a_i T^i$ und $g = \sum_i b_i T^i$ gelten

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= \varphi\left(\sum_i a_i T^i + \sum_i b_i T^i\right) = \varphi\left(\sum_i (a_i + b_i) T^i\right) = \sum_i (a_i + b_i) s^i \\ &= \sum_i a_i s^i + \sum_i b_i s^i = \varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) + \varphi\left(\sum_i b_i TWi\right) = \varphi(f) + \varphi(g),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi(f \cdot g) &= \varphi\left(\left(\sum_i a_i T^i\right) \cdot \left(\sum_i b_i T^i\right)\right) = \varphi\left(\sum_i \sum_{j+k=i} a_j b_k T^i\right) \\ &= \sum_i \psi\left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) s^i = \sum_i \sum_{j+k=i} \psi(a_j)\psi(b_k) s^i \\ &= \left(\sum_i \psi(a_i) s^i\right) \cdot \left(\sum_i \psi(b_i) s^i\right) = \varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) \cdot \varphi\left(\sum_i b_i T^i\right) \\ &= \varphi(f) \cdot \varphi(g).\end{aligned}$$

Also ist $\varphi$ additiv und multiplikativ. Da

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot T^0) = \psi(1) s^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

ist $\varphi$ auch unitär. Insgesamt zeigt dies, dass $\varphi$ ein Ringhomomorphismus ist.