

# Übungen zu Einführung in die Algebra

Jendrik Stelzner

20. November 2016

## Inhaltsverzeichnis

1	Gruppentheorie	2
2	Ringtheorie	6
3	Modultheorie	12
4	Körpertheorie	13

# 1 Gruppentheorie

## Übung 1. Ein Kriterium für maximale Untergruppen

Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe, so dass  $[G : H]$  endlich und prim ist. Zeigen Sie, dass  $H$  eine maximale echte Untergruppe von  $G$  ist. Entscheiden Sie, ob  $H$  notwendigerweise normal in  $G$  ist.

### Lösung 1.

Es sei  $p := [G : H]$ . Da  $p$  eine Primzahl ist gilt insbesondere  $p \neq 1$ , weshalb  $H$  eine echte Untergruppe von  $G$  ist. Ist  $K \subsetneq G$  eine echte Untergruppe von  $G$  mit  $H \subseteq K$ , so gilt wegen der Multiplikativität des Index, dass

$$p = [G : H] = [G : K][K : H].$$

Da  $p$  eine Primzahl ist, gilt entweder  $[G : K] = p$  und  $[K : H] = 1$ , oder  $[G : K] = 1$  und  $[K : H] = p$ . Es gilt  $[G : K] > 1$ , da  $K$  eine echte Untergruppe von  $G$  ist, und somit  $[K : H] = 1$ . Also ist  $K = H$ , und somit  $H$  eine maximale echte Untergruppe.

$H$  ist nicht notwendigerweise normal in  $G$ : Für  $G = S_3$  und  $H = \langle (1\ 2) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2)\}$  ist  $H$  zwar nicht normal in  $G$ , aber  $[G : H] = |G|/|H| = 6/2 = 3$  ist prim.

## Übung 2. Multiple Choice I

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen allgemein gültig sind, und geben sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

1. Ist  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  eine normale Untergruppe, so gilt  $G \cong (G/N) \times N$ .
2. Ist  $G$  eine endliche Gruppe, so dass  $G/N$  für normale Untergruppe  $N \subseteq G$  mit  $N \neq 1$  abelsch ist, so ist auch  $G$  abelsch.
3. Zwei Gruppen  $G_1$  und  $G_2$  sind genau dann isomorph, wenn  $G_1 \times H \cong G_2 \times H$  für jede Gruppe  $H$ .
4. Sind  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gruppen, so ist jede Untergruppe von  $G_1 \times G_2$  von der Form  $H_1 \times H_2$  für Untergruppen  $H_1 \subseteq G_1$  und  $H_2 \subseteq G_2$ .
5. Sind  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gruppen, so dass es Gruppenepimorphismen  $\phi: G_1 \rightarrow G_2$  und  $\psi: G_2 \rightarrow G_1$  gibt, so gilt  $G_1 \cong G_2$ .

### Lösung 2.

1. Die Aussage ist falsch: Es sei  $G = \mathbb{Z}$  und  $N = 2\mathbb{Z}$ . Dann ist

$$(G/N) \times N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}.$$

Es ist allerdings  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}$ , da  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$  ein Element der Ordnung 2 enthält (nämlich  $(1, 0)$ ),  $\mathbb{Z}$  aber nicht.

2. Die Aussage ist falsch: Die einzigen nicht-trivialen normalen Untergruppe von  $S_3$  sind  $N = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$  und  $S_3$  selbst. Der Quotient  $S_3/N$  hat Ordnung 2, weshalb  $S_3/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  abelsch ist, und  $S_3/S_3 = 1$  ist ohnehin abelsch. Die Gruppe  $S_3$  selbst ist allerdings nicht abelsch.

Alternativ ist  $A_n$  für  $n \geq 5$  einfach, weshalb  $A_n$  der einzige nicht-triviale Normalteiler von  $A_n$  ist, aber  $A_4$  ist für  $n \geq 4$  nicht abelsch.

3. Die Aussage ist wahr: Gilt  $G_1 \cong G_2$ , so gibt es einen Isomorphismus  $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ . Für jede Gruppe  $H$  ist dann  $\phi \times \text{id}_H: G_1 \times H \rightarrow G_2 \times H$  ein Isomorphismus, und somit  $G_1 \times H \cong G_2 \times H$ . Gilt andererseits  $G_1 \times H \cong G_2 \times H$  für jede Gruppe  $H$ , so gilt insbesondere  $G_1 \cong G_1 \times 1 \cong G_2 \times 1 \cong G_2$ .
4. Die Aussage ist falsch: Ist  $G \neq 1$  eine Gruppe und  $G_1 = G_2 = G$ , so ist die Diagonale  $\Delta = \{(g, g) \mid g \in G\}$  eine Untergruppe von  $G_1 \times G_2 = G \times G$ , die sich nicht als ein solches Produkt schreiben lässt.
5. Die Aussage ist falsch: Für die Gruppen

$$G_1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

und

$$G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

gibt es Gruppenepimorphismen

$$\phi: G_1 \rightarrow G_2, \quad (n_1, n_2, n_3, \dots) \mapsto (\overline{n_1}, n_2, n_3, \dots)$$

und

$$\psi: G_2 \rightarrow G_1, \quad (\overline{n_1}, n_2, n_3, \dots) \mapsto (n_2, n_3, \dots).$$

Es gilt aber  $G_1 \not\cong G_2$ , denn  $G_2$  enthält ein Element der Ordnung 2,  $G_1$  jedoch nicht.

### Übung 3.

Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gruppen,  $N_1 \subseteq G_1$  und  $N_2 \subseteq G_2$  zwei normale Untergruppen. Geben Sie jeweils Beispiele für die folgenden Situationen:

1. Es gilt  $G_1 \cong G_2$  und  $N_1 \cong N_2$ , aber  $G_1/N_1 \not\cong G_2/N_2$ .
2. Es gilt  $G_1 \cong G_2$  und  $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ , aber  $N_1 \not\cong N_2$ .
3. Es gilt  $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$  und  $N_1 \cong N_2$ , aber  $G_1 \not\cong G_2$ .

**Lösung 3.**

1. Es seien  $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$ , sowie  $N_1 = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}$  und  $N_2 = \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $G_1 = G_2 \cong N_1 \cong N_2$  aber

$$G_1/N_1 \cong \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

2. Es seien  $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$  und

$$N_1 := \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

und

$$N_2 := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

Dann gilt

$$G_1/N_1 \cong \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z} \cong \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

Es gilt aber  $N_1 \not\cong N_2$ , denn  $N_1 \cong \mathbb{Z}$  ist zyklisch,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  aber nicht.

3. Es seien  $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und  $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , sowie  $N_1 = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$  und  $N_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0$ . Wegen der Kommutativität von  $G_1$  und  $G_2$  handelt es sich jeweils um eine normale Untergruppe. Da  $N_1$  und  $N_2$  beide zweielementig sind, gilt

$$N_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong N_2$$

(denn  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist die bis auf Isomorphie eindeutige zweielementige Gruppe). Nach dem zweiten (oder dritten) Isomorphiesatz gilt

$$G_1/N_1 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

und für den anderen Quotienten gilt

$$\begin{aligned} G_2/N_2 &= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0) \\ &\cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \oplus ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/0) \cong 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also gilt auch  $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ . Es gilt aber  $G_1 \not\cong G_2$ , da  $G_1$  ein Element der Ordnung 4 enthält,  $G_2$  jedoch nicht.

**Übung 4. Gruppen mit trivialer Automorphismengruppe**

Es sei  $G$  eine Gruppe mit  $\text{Aut}(G) = 1$ .

1. Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.
2. Zeigen Sie, dass  $g = -g$  für alle  $g \in G$ .
3. Folgern Sie, dass es eine eindeutige  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraumstruktur auf  $G$  gibt.
4. Folgern Sie, dass  $G = 0$  oder  $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Lösung 4.**

1. Für  $g \in G$  sei  $c_g: G \rightarrow G$  die Konjugation mit  $g$ . Dies ist ein Automorphismus von  $G$ , weshalb  $c_g = \text{id}_G$ . Somit ist  $g \in Z(G)$ .
2. Wegen der Kommutativität von  $G$  ist die Abbildung  $n: G \rightarrow G, g \mapsto -g$  ein Automorphismus von  $G$ . Somit ist  $n = \text{id}_G$ , also  $-g = g$  für alle  $g \in G$ .
3. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist  $2g = 0$  für alle  $g \in G$ . Deshalb gibt es eine eindeutige  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraumstruktur auf  $G$  via

$$\bar{n} \cdot g = n \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, g \in G,$$

wie sich durch direktes Nachrechnen ergibt.

4. Es sei  $(b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $G$  als  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum. Ist  $G \neq 0$  und  $G \not\cong \mathbb{Z}/2$ , so ist  $\dim_{\mathbb{F}_2} G \geq 2$ . Es gibt daher  $i_1, i_2 \in I$  with  $i_1 \neq i_2$ . Die Permutation

$$\sigma: \{b_i\}_{i \in I} \rightarrow \{b_i\}_{i \in I}, \quad b_j \mapsto \begin{cases} b_{i_2} & \text{falls } j = i_1, \\ b_{i_1} & \text{falls } j = i_2, \\ b_j & \text{sonst,} \end{cases}$$

induziert einen nicht-trivialen  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraumautomorphismus  $\alpha: G \rightarrow G$  mit

$$\alpha \left( \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_{\sigma(i)}.$$

Dann ist  $\alpha$  aber insbesondere ein nicht-trivialer Gruppenautomorphismus, im Widerspruch zu  $\text{Aut}(G) = 1$ .

## 2 Ringtheorie

**Übung 5.** *Initialobjekte in der Kategorie der Ringe*

1. Zeigen Sie, dass es für jeden Ring  $R$  einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow R$  gibt. (Dies bedeutet, dass der Ring  $\mathbb{Z}$  ein Initialobjekt in der Kategorie der Ringe ist.)
2. Es sei  $Z$  ein Ring, so dass es für jeden Ring  $R$  einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $Z \rightarrow R$  gibt. Zeigen Sie, dass  $Z \cong \mathbb{Z}$ .

**Lösung 5.**

1. Ist  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow R$  ein Ringhomomorphismus, so ist  $\phi(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$ . Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ist damit

$$\phi(n) = \phi(n \cdot 1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot \phi(1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot 1_R.$$

Also ist  $\phi$  eindeutig. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich auch, dass  $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow R$  mit

$$\psi(n) := n \cdot 1_R \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

2. Es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow Z$  sowie einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\psi: Z \rightarrow \mathbb{Z}$ . Es ist auch  $\psi \circ \phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Ringhomomorphismus. Die Identität  $\text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ebenfalls ein Ringhomomorphismus ist. Da es genau einen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  gibt, muss sowohl  $\psi \circ \phi$  als auch  $\text{id}_{\mathbb{Z}}$  dieser eindeutige Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  sein. Folglich ist  $\psi \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ . Analog ergibt sich, dass  $\phi \circ \psi = \text{id}_Z$ .

**Übung 6.**

Es sei  $R$  ein Ring. Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen der Menge der Ringhomomorphismen  $\mathbb{Z}[T] \rightarrow R$  und  $R$ .

**Lösung 6.**

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z}[T] \rightarrow R\} &\rightarrow \{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z} \rightarrow R\} \times R, \\ \phi &\mapsto (\phi|_{\mathbb{Z}}, \phi(T)) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist. Da es genau einen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow R$  gibt, ergibt sich ferner, dass die Abbildung

$$\{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z} \rightarrow R\} \times R \rightarrow R, \quad (\psi, r) \mapsto r$$

eine Bijektion ist. Damit ergibt sich insgesamt eine Bijektion

$$\{\text{Ringhomomorphismen } \mathbb{Z}[T] \rightarrow R\} \rightarrow R, \quad \phi \mapsto \phi(T).$$

### Übung 7.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring.

1. Zeigen Sie, dass ein Ideal  $\mathfrak{p} \subseteq R$  genau dann prim ist, wenn  $R/\mathfrak{p}$  ein Integritätsbereich ist.
2. Zeigen Sie, dass ein Ideal  $\mathfrak{m} \subseteq R$  genau dann maximal ist, wenn  $R/\mathfrak{m}$  ein Körper ist.

### Lösung 7.

Dies ist eine Standardaussage, deren Beweis sich in jedem Algebra-Buch findet.

### Übung 8.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal.

1. Definieren Sie das Radikal  $\sqrt{I}$  und zeigen Sie, dass  $\sqrt{I}$  ebenfalls ein Ideal ist.
2. Zeigen Sie, dass  $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ .
3. Zeigen Sie, dass  $\sqrt{I}$  genau dann ein echtes Ideal ist, wenn  $I$  ein echtes Ideal ist.

Ein Ring  $S$  heißt *reduziert*, falls 0 das einzige nilpotente Element von  $S$  ist.

4. Zeigen Sie, dass  $R/I$  genau dann reduziert ist, wenn  $I$  ein Radikalideal ist.
5. Zeigen Sie, dass jedes Primideal ein Radikalideal ist.

### Übung 9.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $\mathfrak{p} \subseteq R$  ein Ideal. Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{p}$  genau dann ein Primideal ist, wenn es einen Körper  $K$  und einen Ringhomomorphismus  $\phi: R \rightarrow K$  mit  $\ker \phi = \mathfrak{p}$  gibt.

### Lösung 9.

Ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal, so ist der Quotient  $R/\mathfrak{p}$  ein Integritätsbereich. Da die kanonische Inklusion  $R/\mathfrak{p} \rightarrow Q(R/\mathfrak{p})$  ein injektiver Ringhomomorphismus ist, folgt für die Komposition

$$\phi: R \xrightarrow{\pi} R/\mathfrak{p} \rightarrow Q(R/\mathfrak{p}),$$

dass  $\ker \phi = \ker \pi = \mathfrak{p}$ . (Hier bezeichnet  $\pi: R \rightarrow R/\mathfrak{p}$  die kanonische Projektion.) Da  $Q(R/\mathfrak{p})$  ein Körper ist, zeigt dies eine Implikation.

Gibt es andererseits einen Körper  $K$  und einen Ringhomomorphismus  $\phi: R \rightarrow K$  mit  $\mathfrak{p} = \ker \phi$ , so ist  $R/\mathfrak{p} \cong \operatorname{im} \phi \subseteq K$ . Der Körper  $K$  ist insbesondere ein Integritätsbereich, weshalb auch der Unterring  $\operatorname{im} \phi$  ein Integritätsbereich ist. Der Quotient  $R/\mathfrak{p}$  ist also ein Integritätsbereich und  $\mathfrak{p}$  somit ein Primideal.

### Übung 10.

Es sei  $K$  ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass es für jedes Polynom  $f \in K[X]$  einen eindeutigen  $K$ -linearen Ringhomomorphismus  $\phi_f: K[X] \rightarrow K[X]$  gibt, so dass  $\phi_f(X) = f$ . (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass  $\phi_f|_K = \text{id}_K$  gilt.)
2. Zeigen Sie, dass  $\phi_f$  genau dann ein Ringisomorphismus ist, wenn  $\deg f = 1$ .

### Übung 11. Funktorialität der Einheitengruppe

Ist  $R$  ein Ring, so ist

$$R^\times := \{x \in R \mid x \text{ ist eine Einheit}\}$$

die Einheitengruppe von  $R$ . Zeigen Sie:

1. Ist  $R$  ein Ring, so bildet  $R^\times$  bezüglich der Multiplikation aus  $R$  eine Gruppe.
2. Sind  $R$  und  $S$  zwei Ringe und ist  $\phi: R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus, so induziert  $\phi$  per Einschränkung einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi^\times: R^\times \rightarrow S^\times, \quad x \mapsto \phi(x).$$

3. Für jeden Ring  $R$  gilt  $\text{id}_R^\times = \text{id}_{R^\times}$ , und für alle Ringhomomorphismen  $\phi: R_1 \rightarrow R_2$  und  $\psi: R_2 \rightarrow R_3$  gilt  $(\psi\phi)^\times = \psi^\times \phi^\times$ .

(Hinweis: Zum Verständnis genügt es kommutative Ringe zu betrachten. Die Aussage ist aber auch für nicht-kommutative Ringe von Bedeutung.)

### Übung 12. Urbilder von Idealen

Es seien  $R$  und  $S$  zwei kommutative Ringe und  $\phi: R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq S$  das Urbild  $\phi^{-1}(\mathfrak{a})$  ein Ideal in  $R$  ist.
2. Entscheiden Sie, ob  $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$  ein Primideal ist, wenn  $\mathfrak{p} \subseteq S$  ein Primideal ist.
3. Entscheiden Sie, ob  $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$  ein maximales Ideal ist, wenn  $\mathfrak{m} \subseteq S$  ein maximales Ideal ist.

### Lösung 12.

1. Es sei  $\pi: S \rightarrow S/\mathfrak{a}$ ,  $s \mapsto \bar{s}$  die kanonische Projektion. Dann ist  $\pi\phi$  ein Ringhomomorphismus und somit  $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{a})$  ein Ideal in  $R$ .
2. Die Aussage gilt: Es sei  $\pi: S \rightarrow S/\mathfrak{p}$ ,  $s \mapsto \bar{s}$  die kanonische Projektion und  $\mathfrak{q} := \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ . Der Quotient  $S/\mathfrak{p}$  ist ein Integritätsbereich, da  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist  $\mathfrak{q}$  ein Ideal in  $R$ , und da  $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$  induziert  $\pi\phi$  einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\psi: R/\mathfrak{q} \rightarrow S/\mathfrak{p} \quad \bar{r} \mapsto \overline{\phi(r)}.$$

Der Ring  $\text{im}(\pi\phi) \subseteq S/\mathfrak{p}$  ist als Unterring eines Integritätsbereichs ebenfalls ein Integritätsbereich. Somit ist  $R/\mathfrak{q} \cong \text{im}(\pi\phi)$  ein Integritätsbereich, also  $\mathfrak{q}$  ein Primideal.



3. Die Aussage gilt nicht: Es sei etwa  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  die kanonische Inklusion. Dann ist  $\mathfrak{m} := 0$  ein maximales Ideal in  $\mathbb{Q}$ , aber  $\phi^{-1}(0) = 0$  ist kein maximales Ideal in  $\mathbb{Z}$ , da  $\mathbb{Z}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}$  kein Körper ist.

### Übung 13.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring. Es seien  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$  zwei Ideale mit  $\mathfrak{a} = (x_i \mid i \in I)$  und  $\mathfrak{b} = (y_j \mid j \in J)$ . Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (x_i y_j \mid i \in I, j \in J).$$

### Lösung 13.

Für alle  $i \in I$  und  $j \in J$  folgt aus  $x_i \in \mathfrak{a}$  und  $y_j \in \mathfrak{b}$ , dass  $x_i y_j \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ . Daraus folgt, dass  $(x_i y_j \mid i \in I, j \in J) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ . Sind andererseits  $a \in \mathfrak{a}$  und  $b \in \mathfrak{b}$ , so ist  $a = \sum_{i \in I} r_i x_i$  und  $b = \sum_{j \in J} s_j y_j$  mit  $r_i, s_j \in R$ , wobei  $r_i = 0$  für fast alle  $i \in I$  und  $s_j = 0$  für fast alle  $j \in J$ . Deshalb ist

$$ab = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} r_i s_j x_i y_j \in (x_i y_j \mid i \in I, j \in J).$$

Da jedes Element aus  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$  von der Form  $\sum_{k=1}^n a_k b_k$  mit  $a_k \in \mathfrak{a}$  und  $b_k \in \mathfrak{b}$  ist, folgt daraus, dass  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq (x_i y_j \mid i \in I, j \in J)$ .

### Übung 14. Zur Definition von Unterringen

Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring  $R$  und eine Teilmenge  $S \subseteq R$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $S$  ist abgeschlossen unter der Addition und Multiplikation von  $R$ , d.h. für alle  $s_1, s_2 \in S$  ist auch  $s_1 + s_2 \in S$  und  $s_1 s_2 \in S$ .
- Zusammen mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation aus  $R$  ist  $S$  ebenfalls ein (notwendigerweise kommutativer) Ring.
- $S$  ist kein Unterring von  $R$ .

### Lösung 14.

Es sei  $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und  $S = \mathbb{Z} \times 0 = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Offenbar ist  $S$  unter der Addition und Multiplikation abgeschlossen. Zusammen mit der Einschränkung dieser Operationen bildet  $S$  einen kommutativen Ring, für den  $S \cong \mathbb{Z}$  gilt. Da  $1_R = (1, 1) \notin S$  ist  $S$  allerdings kein Unterring von  $R$ .

### Übung 15.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring.

1. Definieren Sie, wann zwei Elemente von  $R$  assoziiert sind.
2. Es sei nun  $R$  ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass zwei Elemente  $a, b \in R$  genau dann assoziiert sind, wenn  $(a) = (b)$ .

**Übung 16.**

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $S \subseteq R$  eine multiplikative Teilmenge.

1. Zeigen Sie, dass  $R_S$  noethersch ist, wenn  $R$  noethersch ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie, dass  $R_S$  ein Hauptidealring ist, wenn  $R$  ein Hauptidealring ist.

**Übung 17.**

Es sei  $R$  ein Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal.

1. Zeigen Sie, dass  $R/I$  noethersch ist, wenn  $R$  noethersch ist.
2. Zeigen Sie widerlegen, dass  $R/I$  ein Hauptidealring ist, wenn  $R$  ein Hauptidealring ist.

**Übung 18.**

Für jedes  $d \in \mathbb{N}$  sei

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] := \mathbb{Z}[i\sqrt{d}] = \{a + i\sqrt{d}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Es darf im Folgenden ohne Beweis genutzt werden, dass  $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$  ein Unterring von  $\mathbb{C}$  ist.

1. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  ein euklidischer Ring ist.
2. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  ein euklidischer Ring ist.
3. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  kein euklidischer Ring ist.

**Übung 19.**

Es sei  $R$  ein euklidischer Ring. Zeigen Sie, dass  $R$  ein Hauptidealring ist.

**Übung 20.**

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring, so dass  $R[X]$  ein Hauptidealring ist. Zeigen Sie, dass  $R$  bereits ein Körper ist.

**Übung 21.**

Es sei  $K$  ein Körper. Zeigen Sie, dass es in  $K[X]$  unendlich viele irreduzible, normierte Polynome gibt.

**Übung 22.**

Es seien  $R$  und  $R'$  zwei kommutative Ringe,  $S \subseteq R$  eine multiplikative Teilmenge und  $f: R \rightarrow R'$  ein Ringhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass  $S' := f(S)$  eine multiplikative Teilmenge von  $R'$  ist.
2. Zeigen Sie, dass  $f$  einen Ringhomomorphismus  $f_S: R_S \rightarrow R'_{S'}$  induziert.

**Übung 23.**

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$ .

**Übung 24.**

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $f \in R$ . Zeigen Sie, dass  $R_f \cong R[X]/(fX - 1)$ .

**Übung 25.**

Bestimmen Sie die Einheitengruppe  $\mathbb{Z}[i]^\times$ .

**Lösung 25.**

Ein Element  $z \in \mathbb{Z}[i]$  ist genau dann eine Einheit in  $\mathbb{Z}[i]$ , wenn  $z \neq 0$  und  $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$  (hier bezeichnet  $z^{-1} = 1/z$  das Inverse von  $z$  in  $\mathbb{C}$ ). Für die Elemente  $1, -1, i, -i \in \mathbb{Z}[i]$  ist dies erfüllt. Ist  $z \in \mathbb{Z}[i]$  mit  $z \neq 0$  und  $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$ , so ist

$$1 = |1|^2 = |zz^{-1}|^2 = |z|^2 |z^{-1}|^2. \quad (1)$$

Für alle  $w \in \mathbb{Z}[i]$  mit  $w = a + ib$  gilt  $a, b \in \mathbb{Z}$  und deshalb  $|w|^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$ . In (1) gilt deshalb, dass  $|z|^2, |z^{-1}|^2 \in \mathbb{Z}$ , und somit  $|z|^2 \in \mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$ . Also gilt  $|z|^2 = 1$ . Ist  $z = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  so ist also  $a^2 + b^2 = 1$  und somit entweder  $a = 0$  und  $b = \pm 1$ , oder  $a = \pm 1$  und  $b = 0$ . Es ist also  $z \in \{1, -1, i, -i\}$ . Insgesamt zeigt dies, dass  $\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}$ .

### 3 Modultheorie

#### Übung 26.

Zeigen Sie, dass es auf jeder abelschen Gruppe genau eine  $\mathbb{Z}$ -Modulstruktur gibt.

#### Übung 27.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Es sei  $I \subseteq R$  ein Ideal.

1. Zeigen Sie, dass sich die  $R$ -Modulstruktur auf  $M$  genau dann zu einer  $R/I$ -Modulstruktur fortsetzen lässt, wenn  $IM = 0$  (d.h. wenn  $am = 0$  für alle  $a \in I$  und  $m \in M$ ).
2. Es sei  $S \subseteq R$  eine multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, dass sich die  $R$ -Modulstruktur auf  $M$  genau dann zu einer  $R_S$ -Modulstruktur fortsetzen lässt, wenn für jedes  $s \in S$  die Abbildung  $\lambda_s: M \rightarrow M, m \mapsto sm$  bijektiv ist.

## 4 Körpertheorie

### Übung 28.

Zeigen Sie, dass für einen kommutativen Ring  $K$  die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1.  $K$  ist ein Körper.
2.  $K$  hat genau zwei Ideale.
3. Das Nullideal in  $K$  ist maximal.

### Lösung 28.

(1  $\implies$  2) Da  $K$  ein Körper ist gilt  $0 \neq K$ , also hat  $K$  mindestens zwei Ideale. Ist  $I \subseteq K$  ein Ideal mit  $I \neq 0$ , so gibt es ein  $x \in I$  mit  $x \neq 0$ . Dann ist  $x$  eine Einheit in  $K$ , somit  $K = (x) \subseteq I$  und deshalb  $I = K$ . Also sind  $0$  und  $K$  die einzigen Ideale in  $K$ .

(2  $\implies$  3) Es muss  $0 \neq K$ , denn sonst wäre  $0$  das einzige Ideal in  $K$ . Also sind  $0$  und  $K$  die einzigen beiden Ideale in  $K$ . Ist  $I \subseteq K$  ein Ideal mit  $0 \subsetneq I$ , so muss bereits  $I = K$ . Also ist  $0$  ein maximales Ideal.

(3  $\implies$  1) Da  $0 \subseteq K$  maximal ist, ergibt sich, dass  $K \cong K/0$  ein Körper ist.

### Übung 29.

Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass  $K$  unendlich ist.

### Lösung 29.

Wäre  $K$  endlich, so wäre

$$p(T) := 1 + \prod_{\lambda \in K} (T - \lambda) \in K[T]$$

ein Polynom positiven Grades ohne Nullstellen (denn  $p(x) = 1$  für alle  $x \in K$ ). Dies stünde im Widerspruch zur algebraischen Abgeschlossenheit von  $K$ .