Lösungen zu Zettel 1

Jendrik Stelzner

11. November 2016

Aufgabe 2

Zur Belustigung bezeichnen wir die gegebene Abbildung mit

$$\begin{aligned}\Xi\colon\ &\{\varphi\colon R[T] \to S \mid \varphi \text{ ist ein Ringhomomorphismus}\}\\ &\quad\to \{\psi\colon R \to S \mid \psi \text{ ist ein Ringhomomorphismus}\} \times S,\\ &\varphi \mapsto (\varphi|_R, \varphi(T)).\end{aligned}$$

i)

Es sei $\varphi\colon R[T] \to S$ ein Ringhomomorphismus. Es seien $\psi := \varphi|_R$ und $s := \varphi(T)$. Für jedes $\sum_i a_i T^i \in R[T]$ gilt dann

$$\varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) = \sum_i \varphi(a_i)\varphi(T)^i = \sum_i \psi(a_i) s^i.$$

Deshalb ist φ durch ψ und s schon eindeutig bestimmt. Somit ist Ξ injektiv.

ii)

Falls (ψ, s) im Bild von Ξ liegt, so gibt es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R[T] \to S$ mit $\psi = \varphi|_R$ und $s = \varphi(T)$. Dann gilt

$$\psi(r)s = \varphi(r)\varphi(T) = \varphi(rT) = \varphi(Tr) = \varphi(T)\varphi(r) = s\psi(r) \qquad \text{für alle } r \in R,$$

wobei sich die mittlere Gleichheit aus der Kommutativität von $R[T]$ ergibt.

Es sei nun andererseits (ψ, s) ein Paar bestehend aus einem Ringhomomorphismus $\psi\colon R \to S$ und einem Element $s \in S$, so dass $\psi(r)s = s\psi(r)$ für alle $r \in R$. Um zu zeigen, dass (ψ, s) im Bild von Ξ liegt, müssen wir zeigen, das es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R[T] \to S$ gibt, so dass $\psi = \varphi|_R$ und $s = \varphi(T)$. Aus dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir, wie φ aussehen muss. Wir definieren deshalb die Abbildung

$$\varphi\colon R[T] \to S, \quad \sum_i a_i T^i \mapsto \sum_i \psi(a_i) s^i.$$

Da $\varphi|_R = \psi$ und $\varphi(T) = s$ gilt es nur noch zeigen, dass φ ein Ringhomomorphismus ist.

Für alle $f, g \in R[T]$ mit $f = \sum_i a_i T^i$ und $g = \sum_i b_i T^i$ gelten

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= \varphi\left(\sum_i a_i T^i + \sum_i b_i T^i\right) = \varphi\left(\sum_i (a_i + b_i) T^i\right) = \sum_i (a_i + b_i) s^i \\ &= \sum_i a_i s^i + \sum_i b_i s^i = \varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) + \varphi\left(\sum_i b_i TWi\right) = \varphi(f) + \varphi(g),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi(f \cdot g) &= \varphi\left(\left(\sum_i a_i T^i\right) \cdot \left(\sum_i b_i T^i\right)\right) = \varphi\left(\sum_i \sum_{j+k=i} a_j b_k T^i\right) \\ &= \sum_i \psi\left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) s^i = \sum_i \sum_{j+k=i} \psi(a_j)\psi(b_k) s^i \\ &= \left(\sum_i \psi(a_i) s^i\right) \cdot \left(\sum_i \psi(b_i) s^i\right) = \varphi\left(\sum_i a_i T^i\right) \cdot \varphi\left(\sum_i b_i T^i\right) \\ &= \varphi(f) \cdot \varphi(g).\end{aligned}$$

Also ist φ additiv und multiplikativ. Da

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot T^0) = \psi(1) s^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

ist φ auch unitär. Insgesamt zeigt dies, dass φ ein Ringhomomorphismus ist.