

# Übungen zu Einführung in die Algebra

Jendrik Stelzner

18. Oktober 2016

## Inhaltsverzeichnis

1	Gruppentheorie	2
2	Ringtheorie	6
3	Lösungen	8

# 1 Gruppentheorie

## Übung 1. Ein Kriterium für maximale Untergruppen

Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe, so dass  $[G : H]$  endlich und prim ist. Zeigen Sie, dass  $H$  eine maximale echte Untergruppe von  $G$  ist. Entscheiden Sie, ob  $H$  notwendigerweise normal in  $G$  ist.

### Lösung 1.

Es sei  $p := [G : H]$ . Da  $p$  eine Primzahl ist gilt insbesondere  $p \neq 1$ , weshalb  $H$  eine echte Untergruppe von  $G$  ist. Ist  $K \subsetneq G$  eine echte Untergruppe von  $G$  mit  $H \subseteq K$ , so gilt wegen der Multiplikativität des Index, dass

$$p = [G : H] = [G : K][K : H].$$

Da  $p$  eine Primzahl ist, gilt entweder  $[G : K] = p$  und  $[K : H] = 1$ , oder  $[G : K] = 1$  und  $[K : H] = p$ . Es gilt  $[G : K] > 1$ , da  $K$  eine echte Untergruppe von  $G$  ist, und somit  $[K : H] = 1$ . Also ist  $K = H$ , und somit  $H$  eine maximale echte Untergruppe.

$H$  ist nicht notwendigerweise normal in  $G$ : Für  $G = S_3$  und  $H = \langle (1\ 2) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2)\}$  ist  $H$  zwar nicht normal in  $G$ , aber  $[G : H] = |G|/|H| = 6/2 = 3$  ist prim.

## Übung 2. Multiple Choice I

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen allgemein gültig sind, und geben sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

1. Ist  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  eine normale Untergruppe, so gilt  $G \cong (G/N) \times N$ .
2. Ist  $G$  eine endliche Gruppe, so dass  $G/N$  für jede nicht-triviale normale Untergruppe  $N \subseteq G$  abelsch ist, so ist auch  $G$  abelsch.
3. Zwei Gruppen  $G_1$  und  $G_2$  sind genau dann isomorph, wenn  $G_1 \times H \cong G_2 \times H$  für jede Gruppe  $H$ .
4. Sind  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gruppen, so ist jede Untergruppe von  $G_1 \times G_2$  von der Form  $H_1 \times H_2$  für Untergruppen  $H_1 \subseteq G_1$  und  $H_2 \subseteq G_2$ .
5. Sind  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gruppen, so dass es Gruppenepimorphismen  $G_1 \rightarrow G_2$  und  $G_2 \rightarrow G_1$  gibt, so gilt  $G_1 \cong G_2$ .

### Lösung 2.

1. Die Aussage ist falsch: Es sei  $G = \mathbb{Z}$  und  $N = 2\mathbb{Z}$ . Dann ist

$$(G/N) \times N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}.$$

Es ist allerdings  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}$ , da  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$  ein Element der Ordnung 2 enthält (nämlich  $(1, 0)$ ),  $\mathbb{Z}$  aber nicht.

2. Die Aussage ist falsch: Die einzigen nicht-trivialen normalen Untergruppe von  $S_3$  sind  $N = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$  und  $S_3$  selbst. Der Quotient  $S_3/N$  hat Ordnung 2, weshalb  $S_3/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  abelsch ist, und  $S_3/S_3 = 1$  ist ohnehin abelsch. Die Gruppe  $S_3$  selbst ist allerdings nicht abelsch.

Alternativ ist  $A_n$  für  $n \geq 5$  einfach, weshalb  $A_n$  der einzige nicht-triviale Normalteiler von  $A_n$  ist, aber  $A_4$  ist für  $n \geq 4$  nicht abelsch.

3. Die Aussage ist wahr: Gilt  $G_1 \cong G_2$ , so gibt es einen Isomorphismus  $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ . Für jede Gruppe  $H$  ist dann  $\phi \times \text{id}_H: G_1 \times H \rightarrow G_2 \times H$  ein Isomorphismus, und somit  $G_1 \times H \cong G_2 \times H$ . Gilt andererseits  $G_1 \times H \cong G_2 \times H$  für jede Gruppe  $H$ , so gilt insbesondere  $G_1 \cong G_1 \times 1 \cong G_2 \times 1 \cong G_2$ .
4. Die Aussage ist falsch: Ist  $G$  eine Gruppe mit  $G \neq 1$  und  $G_1 = G_2 = G$ , so ist  $\Delta = \{(g, g) \mid g \in G\}$  eine Untergruppe von  $G_1 \times G_2 = G \times G$ , die sich nicht als ein solches Produkt schreiben lässt.
5. Die Aussage ist falsch: Für die Gruppen

$$G_1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

und

$$G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

gibt es Gruppenepimorphismen

$$G_1 \rightarrow G_2, \quad (n_1, n_2, n_3, \dots) \mapsto (\overline{n_1}, n_2, n_3, \dots)$$

und

$$G_2 \rightarrow G_1, \quad (\overline{n_1}, n_2, n_3, \dots) \mapsto (n_2, n_3, \dots).$$

Es gilt aber  $G_1 \not\cong G_2$ , denn  $G_2$  enthält ein Element der Ordnung 2,  $G_1$  jedoch nicht.

### Übung 3.

Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gruppen,  $N_1 \subseteq G_1$  und  $N_2 \subseteq G_2$  zwei normale Untergruppen. Geben Sie jeweils Beispiele für die folgenden Situationen:

1. Es gilt  $G_1 \cong G_2$  und  $N_1 \cong N_2$ , aber  $G_1/N_1 \not\cong G_2/N_2$ .
2. Es gilt  $G_1 \cong G_2$  und  $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ , aber  $N_1 \not\cong N_2$ .
3. Es gilt  $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$  und  $N_1 \cong N_2$ , aber  $G_1 \not\cong G_2$ .

**Lösung 3.**

1. Es seien  $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$ , sowie  $N_1 = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}$  und  $N_2 = \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $G_1 = G_2 \cong N_1 \cong N_2$  aber

$$G_1/N_1 \cong \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

2. Es seien  $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$  und

$$N_1 := \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

und

$$N_2 := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

Dann gilt

$$G_1/N_1 \cong \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z} \cong \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

Es gilt aber  $N_1 \not\cong N_2$ , denn  $N_1 \cong \mathbb{Z}$  ist zyklisch,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  aber nicht.

3. Es seien  $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und  $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , sowie  $N_1 = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$  und  $N_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0$ . Wegen der Kommutativität von  $G_1$  und  $G_2$  handelt es sich jeweils um eine normale Untergruppe. Da  $N_1$  und  $N_2$  beide zweielementig sind, gilt

$$N_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong N_2$$

(denn  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist die bis auf Isomorphie eindeutige zweielementige Gruppe). Nach dem zweiten (oder dritten) Isomorphiesatz gilt

$$G_1/N_1 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

und für den anderen Quotienten gilt

$$\begin{aligned} G_2/N_2 &= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0) \\ &\cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \oplus ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/0) \cong 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also gilt auch  $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ . Es gilt aber  $G_1 \not\cong G_2$ , da  $G_1$  ein Element der Ordnung 4 enthält,  $G_2$  jedoch nicht.

**Übung 4.**

Es sei  $G$  eine Gruppe mit  $\text{Aut}(G) = 1$ .

1. Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.
2. Zeigen Sie, dass  $g = -g$  für alle  $g \in G$ .
3. Folgern Sie, dass es eine eindeutige  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraumstruktur auf  $G$  gibt.
4. Folgern Sie, dass  $G = 0$  oder  $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Lösung 4.**

1. Für  $g \in G$  sei  $c_g: G \rightarrow G$  die Konjugation mit  $g$ . Dies ist ein Automorphismus von  $G$ , weshalb  $c_g = \text{id}_G$ . Somit ist  $g \in Z(G)$ .
2. Wegen der Kommutativität von  $G$  ist die Abbildung  $n: G \rightarrow G, g \mapsto -g$  ein Automorphismus von  $G$ . Somit ist  $n = \text{id}_G$ , also  $-g = g$  für alle  $g \in G$ .
3. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist  $2g = 0$  für alle  $g \in G$ . Deshalb gibt es eine eindeutige  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraumstruktur auf  $G$  via

$$\bar{n} \cdot g = n \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, g \in G,$$

wie sich durch direktes Nachrechnen ergibt.

4. Es sei  $(b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $G$  als  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum. Ist  $G \neq 0$  und  $G \not\cong \mathbb{Z}/2$ , so ist  $\dim_{\mathbb{F}_2} G \geq 2$ . Es gibt daher  $i_1, i_2 \in I$  with  $i_1 \neq i_2$ . Die Permutation

$$\sigma: \{b_i\}_{i \in I} \rightarrow \{b_i\}_{i \in I}, \quad b_j \mapsto \begin{cases} b_{i_2} & \text{falls } j = i_1, \\ b_{i_1} & \text{falls } j = i_2, \\ b_j & \text{sonst,} \end{cases}$$

induziert einen nicht-trivialen  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraumautomorphismus  $\alpha: G \rightarrow G$  mit

$$\alpha \left( \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_{\sigma(i)}.$$

Dann ist  $\alpha$  aber insbesondere ein nicht-trivialer Gruppenautomorphismus, im Widerspruch zu  $\text{Aut}(G) = 1$ .

## 2 Ringtheorie

### Übung 5.

Es sei  $R$  ein Ring. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow R$  gibt. (Dies bedeutet, dass der Ring  $\mathbb{Z}$  ein Initialobjekt in der Kategorie der Ringe ist.)

### Lösung 5.

Ist  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow R$  ein Ringhomomorphismus, so ist  $\phi(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$ . Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ist damit

$$\phi(n) = \phi(n \cdot 1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot \phi(1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot 1_R.$$

Also ist  $\phi$  eindeutig. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich auch, dass  $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow R$  mit

$$\psi(n) := n \cdot 1_R \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

### Übung 6.

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring.

1. Zeigen Sie, dass ein Ideal  $\mathfrak{p} \subseteq R$  genau dann prim ist, wenn  $R/\mathfrak{p}$  ein Integritätsbereich ist.
2. Zeigen Sie, dass ein Ideal  $\mathfrak{m} \subseteq R$  genau dann maximal ist, wenn  $R/\mathfrak{m}$  ein Körper ist.

### Lösung 6.

Dies ist eine Standardaussage, deren Beweis sich in jedem Algebra-Buch findet.

### Übung 7.

Ist  $R$  ein Ring, so ist

$$R^\times := \{x \in R \mid x \text{ ist eine Einheit}\}$$

die *Einheitengruppe* von  $R$ . Zeigen Sie:

1. Ist  $R$  ein Ring, so bildet  $R^\times$  bezüglich der Multiplikation aus  $R$  eine Gruppe.
2. Sind  $R$  und  $S$  zwei Ringe und ist  $\phi: R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus, so induziert  $\phi$  per Einschränkung einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi^\times: R^\times \rightarrow S^\times, \quad x \mapsto \phi(x).$$

3. Für jeden Ring  $R$  gilt  $\text{id}_R^\times = \text{id}_{R^\times}$ , und für alle Ringhomomorphismen  $\phi: R_1 \rightarrow R_2$  und  $\psi: R_2 \rightarrow R_3$  gilt  $(\psi\phi)^\times = \psi^\times \phi^\times$ .

### Übung 8. Urbilder von Idealen

Es seien  $R$  und  $S$  zwei kommutative Ringe und  $\phi: R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq S$  das Urbild  $\phi^{-1}(\mathfrak{a})$  ein Ideal in  $R$  ist.
2. Entscheiden Sie, ob  $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$  ein Primideal ist, wenn  $\mathfrak{p} \subseteq S$  ein Primideal ist.
3. Entscheiden Sie, ob  $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$  ein maximales Ideal ist, wenn  $\mathfrak{m} \subseteq S$  ein maximales Ideal ist.

### Lösung 8.

1. Es sei  $\pi: S \rightarrow S/\mathfrak{a}$ ,  $s \mapsto \bar{s}$  die kanonische Projektion. Dann ist  $\pi\phi$  ein Ringhomomorphismus und somit  $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{a})$  ein Ideal in  $R$ .
2. Die Aussage gilt: Es sei  $\pi: S \rightarrow S/\mathfrak{p}$ ,  $s \mapsto \bar{s}$  die kanonische Projektion und  $\mathfrak{q} := \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ . Der Quotient  $S/\mathfrak{p}$  ist ein Integritätsbereich, da  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist  $\mathfrak{q}$  ein Ideal in  $R$ , und da  $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$  induziert  $\pi\phi$  einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\psi: R/\mathfrak{q} \rightarrow S/\mathfrak{p} \quad \bar{r} \mapsto \overline{\phi(r)}.$$

Der Ring  $\text{im}(\pi\phi) \subseteq S/\mathfrak{p}$  ist als Unterring eines Integritätsbereichs ebenfalls ein Integritätsbereich. Somit ist  $R/\mathfrak{q} \cong \text{im}(\pi\phi)$  ein Integritätsbereich, also  $\mathfrak{q}$  ein Primideal.

3. Die Aussage gilt nicht: Es sei etwa  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  die kanonische Inklusion. Dann ist  $\mathfrak{m} := 0$  ein maximales Ideal in  $\mathbb{Q}$ , aber  $\phi^{-1}(0) = 0$  ist kein maximales Ideal in  $\mathbb{Z}$ , da  $\mathbb{Z}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}$  kein Körper ist.

### Übung 9.

Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring  $R$  und eine Teilmenge  $S \subseteq R$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $S$  ist abgeschlossen unter der Addition und Multiplikation von  $R$ , d.h. für alle  $s_1, s_2 \in S$  ist auch  $s_1 + s_2 \in S$  und  $s_1 s_2 \in S$ .
- Zusammen mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation aus  $R$  ist  $S$  ebenfalls ein (notwendigerweise kommutativer) Ring.
- $S$  ist kein Unterring von  $R$ .

### Lösung 9.

Es sei  $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und  $S = \mathbb{Z} \times 0 = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Offenbar ist  $S$  unter der Addition und Multiplikation abgeschlossen. Zusammen mit der Einschränkung dieser Operationen bildet  $S$  einen kommutativen Ring, für den  $S \cong \mathbb{Z}$  gilt. Da  $1_R = (1, 1) \notin S$  ist  $S$  allerdings kein Unterring von  $R$ .