

# Lösung zu Zettel 10, Aufgabe 4

Jendrik Stelzner

26. Januar 2017

**Lemma 1.** Es sei  $R$  ein Ring.

1. Es sei  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $R$ -Moduln, und für jedes  $i \in I$  sei  $N_i \subseteq M_i$  ein Untermodul. Dann ist  $\bigoplus_{i \in I} N_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$  ein Untermodul, und die Abbildung

$$\left( \bigoplus_{i \in I} M_i \right) / \left( \bigoplus_{i \in I} N_i \right) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i / N_i), \quad [(m_i)_{i \in I}] \mapsto ([m_i])_{i \in I}$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus von  $R$ -Moduln.

2. Es sei  $\phi: F \rightarrow G$  ein Modulhomomorphismus zwischen freien  $R$ -Moduln endlichen Rangs; es gebe eine Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  von  $F$  und eine Basis  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$  von  $G$ , so dass  $\phi$  bezüglich dieser Basen durch eine Matrix  $A \in \text{Mat}(m \times n, R)$  der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Dann gilt  $G / \text{im } \phi \cong R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_r) \oplus R^{m-r}$ .

*Beweis.* 1. Es ist klar, dass  $\bigoplus_{i \in I} N_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$  ein Untermodul ist. Die Abbildung

$$\varphi: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i / N_i), \quad (m_i)_{i \in I} \mapsto ([m_i])_{i \in I}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus von  $R$ -Moduln, und induziert daher einen Isomorphismus von  $R$ -Moduln

$$\bar{\varphi}: \left( \bigoplus_{i \in I} M_i \right) / \ker \varphi \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i / N_i), \quad [(m_i)_{i \in I}] \mapsto ([m_i])_{i \in I}.$$

Für  $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$  gilt

$$(m_i)_{i \in I} \in \ker \varphi \iff [m_i] = 0 \text{ für alle } i \in I \iff m_i \in N_i \text{ für alle } i \in I,$$

weshalb  $\ker \varphi = \bigoplus_{i \in I} N_i$ .

2. Es gelten

$$G = Rc_1 \oplus \cdots \oplus Rc_m \quad \text{und} \quad \text{im } \phi = (a_1)c_1 \oplus \cdots \oplus (a_r)c_r$$

und deshalb

$$\begin{aligned} G/\text{im } \phi &= (Rc_1 \oplus \cdots \oplus Rc_m) / ((a_1)c_1 \oplus \cdots \oplus (a_r)c_r) \\ &\cong \underbrace{(R \oplus \cdots \oplus R)}_m / ((a_1) \oplus \cdots \oplus (a_r) \oplus \underbrace{0 \oplus \cdots \oplus 0}_{m-r}) \\ &\cong R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_r) \oplus \underbrace{R/0 \oplus \cdots \oplus R/0}_{m-r} \\ &\cong R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_r) \oplus R^{m-r}. \end{aligned} \quad \square$$

Es sei nun  $R$  ein euklidischer Ring und  $\phi: R^n \rightarrow R^m$  ein Homomorphismus von  $R$ -Moduln. Um den Quotienten  $R^m / \text{im } \phi$  bis auf Isomorphie zu bestimmen, lässt sich wie folgt vorgehen:

1. Bezüglich der Standardbasen von  $R^n$  und  $R^m$  wird der Homomorphismus  $\phi$  durch eine Matrix  $A \in \text{Mat}(m \times n, R)$  dargestellt. (Die Matrix  $A$  ist dadurch gegeben, dass  $\phi(x) = Ax$  für alle  $x \in R^n$ .)
2. Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen entsteht aus der Matrix  $A$  eine Matrix  $A' \in \text{Mat}(m \times n, R)$  in Smith-Normalform. D.h. es ist

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

mit  $a_i \mid a_{i+1}$  für alle  $i = 1, \dots, r-1$ .

3. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $R^n$  und eine Basis  $\mathcal{C}$  von  $R^m$ , so dass  $\phi$  bezüglich dieser Basen durch die Matrix  $A'$  dargestellt wird. Nach Lemma 1 ist deshalb

$$R^m / \text{im } \phi \cong R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_r) \oplus R^{m-r}.$$

**Bemerkung 2.** 1. Die Bedingung  $a_i \mid a_{i+1}$  ist für die Berechnung des Quotienten nicht notwendig. Die Matrix  $A'$  muss also nicht in der Smith-Normalform sein, sondern nur in passender Diagonalgestalt.

2. Die obige Berechnungsmethode zeigt, dass für eine Matrix  $A \in \text{Mat}(m \times n, R)$  der Quotient  $R^m / AR^n$  bis auf Isomorphie nur von der Smith-Normalform von  $A$  abhängt.

Wir betrachten nun die folgenden Matrizen mit ganzzahligen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -16 & 18 \end{pmatrix}$$

Für diese Matrizen ergeben sich über  $\mathbb{Z}$  die folgenden Smith-Normalformen (die konkreten Berechnungen finden sich im nächsten Abschnitt):

$$A' = B' = C' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 6 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich, dass

$$\mathbb{Z}^3 / A\mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}/(1) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}^1 \cong \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}$$

und ebenso  $\mathbb{Z}^3 / B\mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}^3 / C\mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}$ . Außerdem ergibt sich, dass

$$\mathbb{Z}^2 / D\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3.$$

Dabei nutzen wir den Chinesischen Restklassensatz, um einen Isomorphismus von Ringen, und damit insbesondere von abelschen Gruppen,  $\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$  zu erhalten.

## A Berechnung der Smith-Normalformen

Im Folgenden bringen wir die Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in Smith-Normalform.

$$\begin{aligned} A : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 6 & 7 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$