Übungen zu Einführung in die Algebra

Jendrik Stelzner

25. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Körpertheorie

Übung 1.
Zeigen Sie, dass für einen kommutativen Ring K die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. K ist ein Körper.
2. K hat genau zwei Ideale.
3. Das Nullideal in K ist maximal.

Lösung 1.
(1 $\implies$ 2) Da K ein Körper ist gilt $0 \neq K$, also hat K mindestens zwei Ideale. Ist $I \subseteq K$ ein Ideal mit $I \neq 0$, so gibt es ein $x \in I$ mit $x \neq 0$. Dann ist x eine Einheit in K, somit $K = (x) \subseteq I$ und deshalb $I = K$. Also sind 0 und K die einzigen Ideale in K.

(2 $\implies$ 3) Es muss $0 \neq K$, denn sonst wäre 0 das einzige Ideal in K. Also sind 0 und K die einzigen beiden Ideale in K. Ist $I \subseteq K$ ein Ideal mit $0 \subsetneq I$, so muss bereits $I = K$. Also ist 0 ein maximales Ideal.

(3 $\implies$ 1) Da $0 \subseteq K$ maximal ist, ergibt sich, dass $K \cong K/0$ ein Körper ist.

Übung 2.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass K unendlich ist.

Lösung 2.
Wäre K endlich, so wäre

$$p(T) := 1 + \prod_{\lambda \in K} (T - \lambda) \in K[T]$$

ein Polynom positiven Grades ohne Nullstellen (denn $p(x) = 1$ für alle $x \in K$). Dies stünde im Widerspruch zur algebraischen Abgeschlossenheit von K.

Übung 3.
Es seien $p, q \in K[T]$ zwei normierte irreduzible Polynome mit $p \neq q$. Zeigen Sie, dass p und q in $\overline{K}$ keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Lösung 3.
Gebe es eine gemeinsame Nullstelle $\alpha \in \overline{K}$ von p und q, so wären p und q beide das Minimalpolynom von α über K, und somit $p = q$.

Übung 4.
Es sei $K(\alpha)/K$ eine endliche, zyklische Körpererweiterung von ungeraden Grad. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

Lösung 4.
Da $K(\alpha^2) \subseteq K(\alpha)$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $\alpha^2 \in K(\alpha)$. Wir nehmen an, dass $\alpha^2 \notin K(\alpha)$. Dann ist das normierte quadratische Polynom $P(T) \coloneqq T^2 - \alpha^2 \in K(\alpha^2)[T]$ irreduzibel mit $P(\alpha) = 0$, und deshalb das Minimalpolynom von α über $K(\alpha^2)$. Es ist also $[K(\alpha) : K(\alpha^2)] = 2$. Damit gilt

$$[K(\alpha) : K] = [K(\alpha) : K(\alpha^2)][K(\alpha^2) : K] = 2[K(\alpha^2) : K],$$

was im Widerspruch dazu steht, dass $[K(\alpha) : K]$ ungerade ist.

Übung 5.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass bereits $L = K$ gilt.

Lösung 5.
Es sei $\alpha \in L$. Da L/K algebraisch ist, gibt es ein normiertes Polynom $P \in K[T]$ mit $P \neq 0$ und $P(\alpha) = 0$. Da K algebraisch abgeschlossen ist zerfällt P in Linearfaktoren, also $P(T) = (T - a_1) \cdots (T - a_n)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $n = \deg P$. Da

$$0 = P(\alpha) = (\alpha - a_1) \cdots (\alpha - a_n)$$

muss bereits $\alpha = a_i$ für ein $1 \leq i \leq n$, und somit $\alpha \in K$.

Übung 6.
Zeigen Sie, dass endliche Körpererweiterungen algebraisch sind.

Lösung 6.
Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung und $x \in L$. Für den K-Untervektorraum $\langle \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle_K \subseteq L$ gilt

$$\dim_K \langle \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle_K \leq \dim_K L = [L : K] < \infty,$$

weshalb die Potenzen x^n mit $n \in \mathbb{N}$ linear abhängig über K sind. Also gibt es eine nichttriviale Linearkombination

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit $n \geq 1$ und $a_n, \ldots, a_0 \in K$ mit $a_n \neq 0$. Für das Polynom

$$P(T) \coloneqq a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 \in K[T]$$

gilt also $P(x) = 0$, weshalb x algebraisch über K ist.

Übung 7.
Es sei L/K eine Körpererweiterung und es seien $\alpha, \beta \in L$. Zeigen Sie, dass α und β genau dann beide algebraisch über K sind, wenn $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ beide algebraisch über K sind.

Bemerkung. Da π und e transzenent (über $\mathbb{Q}$) sind, muss $\pi + e$ oder $\pi \cdot e$ transzendent sein. Es ist nicht bekannt, welches von beiden.

Lösung 7.

Sind α und β algebraisch über K, so ist $K(\alpha,\beta)/K$ eine algebraische Körpererweiterung. Da $\alpha+\beta, \alpha\beta \in K(\alpha,\beta)$ sind $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ dann algebraisch über K.

Es seien nun $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch über K. Dann ist $K(\alpha+\beta,\alpha\beta)/K$ eine algebraische Erweiterung. Auch die Erweiterung $K(\alpha,\beta)/K(\alpha+\beta,\alpha\beta)$ ist algebraisch, da α und β Nullstellen des Polynoms

$$P(T) \coloneqq (T-\alpha)(T-\beta) = T^2 - (\alpha+\beta)T + \alpha\beta \in K(\alpha+\beta,\alpha\beta)[T]$$

sind. Wegen der Transitivität von Algebraizität folgt, dass auch $K(\alpha,\beta)/K$ algebraisch ist, also α und β algebraisch über K sind.