Lösung zu Zettel 10, Aufgabe 4

Jendrik Stelzner

22. Januar 2017

Lemma 1. Es sei R ein Ring.

1. Es sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Moduln, und für jedes $i \in I$ sei $N_i \subseteq M_i$ ein Untermodul. Dann ist $\bigoplus_{i \in I} N_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$ ein Untermodul, und die Abbildung

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \Big/ \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \to \bigoplus_{i \in I} (M_i / N_i), \qquad [(m_i)_{i \in I}] \mapsto ([m_i])_{i \in I}$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus von R-Moduln.

2. Es sei $\phi\colon F \to G$ ein Modulhomomorphismus zwischen freien R-Moduln endlichen Ranks; es gebe eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von F und eine Basis $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ von G, so dass ϕ bezüglich dieser Basen durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, R)$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Dann gilt $G / \operatorname{im} \phi \cong R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_r) \oplus R^{m-r}$.

Beweis. 1. Es ist klar, dass $\bigoplus_{i \in I} N_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$ ein Untermodul ist. Die Abbildung

$$\varphi\colon \bigoplus_{i \in I} M_i \to \bigoplus_{i \in I} (M_i / N_i), \quad (m_i)_{i \in I} \mapsto ([m_i])_{i \in I}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus von R-Moduln, und induziert daher einen Isomorphismus von R-Moduln

$$\overline{\varphi}\colon \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \Big/ \ker \varphi \to \bigoplus_{i \in I} (M_i / N_i), \quad [(m_i)_{i \in I}] \mapsto ([m_i])_{i \in I}$$

Für $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ gilt

$$(m_i)_{i\in I} \in \ker\varphi \iff [m_i] = 0 \text{ für alle } i \in I \iff m_i \in N_i \text{ für alle } i \in I,$$

weshalb $\ker\varphi = \bigoplus_{i\in I} N_i$.

2. Es gilt
$$G = Rc_1 \oplus \cdots \oplus Rc_m \quad \text{und} \quad \operatorname{im}\phi = (a_1)c_1 \oplus \cdots \oplus (a_r)c_r$$
und deshalb
$$\begin{aligned} G/\operatorname{im}\phi &= (Rc_1 \oplus \cdots \oplus Rc_m)/\left((a_1)c_1 \oplus \cdots \oplus (a_r)c_r\right) \\ &\cong (\underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{m})/((a_1) \oplus \cdots \oplus (a_r) \oplus \underbrace{0 \oplus \cdots \oplus 0}_{m-r}) \\ &\cong R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_r) \oplus \underbrace{R/0 \oplus \cdots \oplus R/0}_{m-r} \\ &\cong R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_r) \oplus R^{m-r}. \end{aligned}$$
□

Es sei nun R ein euklidischer Ring und $\phi\colon R^n \to R^m$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Um den Quotienten $R^m/\operatorname{im}\phi$ bis auf Isomorphie zu bestimmen, lässt sich wie folgt vorgehen:

1. Bezüglich der Standardbasen von R^n und R^m wird der Homomorphismus ϕ durch eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, R)$ dargestellt. (Die Matrix A ist dadurch gegeben, dass $\phi(x) = Ax$ für alle $x \in R^n$.)

2. Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen entsteht aus der Matrix A eine Matrix $A' \in \operatorname{Mat}(m \times n, R)$ in Smith-Normalform. D.h. es ist
$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
mit $a_i \mid a_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, r-1$.

3. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von R^n und eine Basis $\mathcal{C}$ von R^m, so dass ϕ bezüglich dieser Basen durch die Matrix A' dargestellt wird. Nach Lemma 1 ist deshalb
$$R^m/\operatorname{im}\phi \cong R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_r) \oplus R^{m-r}.$$

Bemerkung 2. 1. Die Bedingung $a_i \mid a_{i+1}$ ist für die Berechnung des Quotienten nicht notwendig. Die Matrix A' muss also nicht in der Smith-Normalform sein, sondern nur in passender Diagonalgestalt.

2. Die obige Berechnungsmethode zeigt, dass für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, R)$ der Quotient R^m/AR^n bis auf Isomorphie nur von der Smith-Normalform von A abhängt.

   Wir betrachten nun die folgenden Matrizen mit ganzzahligen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -16 & 18 \end{pmatrix}$$

Für diese Matrizen ergeben sich über $\mathbb{Z}$ die folgenden Smith-Normalformen:

$$A' = B' = C' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 6 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich, dass

$$\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}/(1) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}^1 \cong \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}$$

und ebenso $\mathbb{Z}^3/B\mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^3/C\mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}$. Außerdem ergibt sich, dass

$$\mathbb{Z}^2/D\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/6.$$