Übungen zu Einführung in die Algebra

Jendrik Stelzner

17. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppentheorie

Übung 1. *Ein Kriterium für maximale Untergruppen*
Es sei G ein Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so dass $[G : H]$ endlich und prim ist. Zeigen Sie, dass H eine maximale echte Untergruppe von G ist. Entscheiden Sie, ob H notwendigerweise normal in G ist.

Übung 2. *Multiple Choice I*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen allgemein gültig sind, und geben sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

1. Sind G_1 und G_2 zwei Gruppen und $N_1 \subseteq G_1$ und $N_2 \subseteq G_2$ normale Untergruppen, so dass $G_1 \cong G_2$ und $N_1 \cong N_2$, so gilt $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$.
2. Ist G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine normale Untergruppe, so gilt $G \cong (G/N) \times N$.
3. Ist G eine endliche Gruppe, so dass G/N für jede nicht-triviale normale Untergruppe $N \subseteq G$ abelsch ist, so ist auch G abelsch.
4. Zwei Gruppen G_1 und G_2 sind genau dann isomorph, wenn $G_1 \times H \cong G_2 \times H$ für jede Gruppe H.
5. Sind G_1 und G_2 zwei Gruppen und $N_1 \subseteq G_1$ und $N_2 \subseteq G_2$ normale Untergruppen mit $N_1 \cong N_2$ und $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$, so gilt bereits $G_1 \cong G_2$.

Übung 3.
Es sei G eine Gruppe mit $\mathrm{Aut}(G) = 1$.

1. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
2. Zeigen Sie, dass $g = -g$ für alle $g \in G$.
3. Folgern Sie, dass es eine eindeutige $\mathbb{F}_2$-Vektorraumstruktur auf G gibt.
4. Folgern Sie, dass $G = 0$ oder $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2 Ringtheorie

Übung 4.
Es sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ gibt. (Dies bedeutet, dass der Ring $\mathbb{Z}$ ein Initialobjekt in der Kategorie der Ringe ist.)

Übung 5.
Es sei R ein kommutativer Ring.

1. Zeigen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ genau dann prim ist, wenn $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.
2. Zeigen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ genau dann maximal ist, wenn $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.

Übung 6. *Urbilder von Idealen*
Es seien R und S zwei kommutative Ringe und $\phi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Ideal in R ist.
2. Entscheiden Sie, ob $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal ist, wenn $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primideal ist.
3. Entscheiden Sie, ob $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal ist, wenn $\mathfrak{m} \subseteq S$ ein maximales Ideal ist.

Übung 7.
Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring R und eine Teilmenge $S \subseteq R$ mit den folgenden Eigenschaften:

- S ist abgeschlossen unter der Addition und Multiplikation von R, d.h. für alle $s_1, s_2 \in S$ ist auch $s_1 + s_2 \in S$ und $s_1 s_2 \in S$.
- Zusammen mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation aus R ist S ebenfalls ein (notwendigerweise kommutativer) Ring.
- S ist kein Unterring von R.

3 Lösungen

Lösung 1.
Es sei $p \coloneqq [G : H]$. Da p eine Primzahl ist gilt inbesondere $p \neq 1$, weshalb H eine echte Untergruppe von G ist. Ist $K \subsetneq G$ eine echte Untergruppe von G mit $H \subseteq K$, so gilt wegen der Multiplikativität des Index', dass

$$p = [G : H] = [G : K][K : H].$$

Da p eine Primzahl ist, gilt entweder $[G : K] = p$ und $[K : H] = 1$, oder $[G : K] = 1$ und $[K : H] = p$. Es gilt $[G : K] > 1$, da K eine echte Untergruppe von G ist, und somit $[K : H] = 1$. Also ist $K = H$, und somit H eine maximale echte Untergruppe.

H ist nicht notwendigerweise normal in G: Für $G = S_3$ und $H = \langle(1\,2)\rangle = \{\mathrm{id}, (1\,2)\}$ ist H zwar nicht normal in G, aber $[G : H] = |G|/|H| = 6/2 = 3$ ist prim.

Lösung 2.

1. Die Aussage ist falsch: Man betrachte beispielweise die Gruppen $G_1 = G_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}$ und die Untergruppen $N_1 = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}$ und $N_2 = \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z}$. Dann gilt $N_1 \cong N_2$ aber

   $$G_1/N_1 \cong \mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = G_2/N_2.$$

2. Die Aussage ist falsch: Es sei $G = \mathbb{Z}$ und $N = 2\mathbb{Z}$. Dann ist

   $$(G/N) \times N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}.$$

   Es ist allerdings $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}$, da $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 2 enthält (nämlich $(1, 0)$), $\mathbb{Z}$ aber nicht.

3. Die Aussage ist falsch: Die einzige nicht-trivialen normalen Untergruppe von S_3 sind $N = \langle(1\,2\,3)\rangle = \{\mathrm{id}, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$ und S_3 selbst. Der Quotient S_3/N hat Ordnung 2, weshalb $S_3/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abelsch ist, und $S_3/S_3 = 1$ ist ohnehin abelsch. Die Gruppe S_3 selbst ist allerdings nicht abelsch.

   Alternativ ist A_n für $n \geq 5$ einfach, weshalb A_n der einzige nicht-triviale Normalteiler von A_n ist, aber A_4 ist für $n \geq 4$ nicht abelsch.

4. Die Aussage ist wahr: Gilt $G_1 \cong G_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\phi \colon G_1 \to G_2$. Für jede Gruppe H ist dann $\phi \times \mathrm{id}_H \colon G_1 \times H \to G_2 \times H$ ein Isomorphismus, und somit $G_1 \times H \cong G_2 \times H$. Gilt andererseits $G_1 \times H \cong G_2 \times H$ für jede Gruppe H, so gilt inbesondere $G_1 \cong G_1 \times 1 \cong G_2 \times 1 \cong G_2$.

5. Die Aussage ist falsch: Man betrachte die beiden abelschen Gruppen $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie die jeweiligen Untergruppen $N_1 = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ und $N_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0$. Wegen der Kommutativität von G_1 und G_2 handelt es sich jeweils um eine normale Untergruppe. Da N_1 und N_2 beide zweielementig sind, gilt

   $$N_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong N_2$$

(denn $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist die bis auf Isomorphie eindeutige zweielementige Gruppe). Nach dem zweiten (oder dritten) Isomorphiesatz gilt

$$G_1/N_1 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

und für den anderen Quotienten gilt

$$\begin{aligned} G_2/N_2 &= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0) \\ &\cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \oplus ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/0) \cong 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also gilt auch $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. Es gilt aber $G_1 \not\cong G_2$, da G_1 ein Element der Ordnung 4 enthält, G_2 jedoch nicht.

Lösung 3.

1. Für $g \in G$ sei $c_g \colon G \to G$ die Konjugation mit g. Dies ist ein Automorphismus von G, weshalb $c_g = \mathrm{id}_G$. Somit ist $g \in \mathrm{Z}(G)$.

2. Wegen der Kommutativität von G ist die Abbildung $n\colon G \to G$, $g \mapsto -g$ ein Automorphismus von G. Somit ist $n = \mathrm{id}_G$, also $-g = g$ für alle $g \in G$.

3. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist $2g = 0$ für alle $g \in G$. Deshalb gibt es eine eindeutige $\mathbb{F}_2$-Vektorraumstruktur auf G via

$$\overline{n} \cdot g = n \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, g \in G,$$

wie sich durch direktes Nachrechnen ergibt.

4. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von G als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum. Ist $G \neq 0$ und $G \not\cong \mathbb{Z}/2$, so ist $\dim_{\mathbb{F}_2} G \geq 2$. Es gibt daher $i_1, i_2 \in I$ with $i_1 \neq i_2$. Die Permutation

$$\sigma\colon \{b_i\}_{i \in I} \to \{b_i\}_{i \in I}, \quad b_j \mapsto \begin{cases} b_{i_2} & \text{falls } j = i_1, \\ b_{i_1} & \text{falls } j = i_2, \\ b_j & \text{sonst,} \end{cases}$$

induziert einen nicht-trivialen $\mathbb{F}_2$-Vektorraumautomorphismus $\alpha\colon G \to G$ mit

$$\alpha\left(\sum_{i \in I} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_{\sigma(i)}.$$

Dann ist α aber insbesondere ein nicht-trivialer Gruppenautomorphismus, im Widerspruch zu $\mathrm{Aut}(G) = 1$.

Lösung 4.
Ist $\phi\colon \mathbb{Z} \to R$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\phi(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist damit

$$\phi(n) = \phi(n \cdot 1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot \phi(1_{\mathbb{Z}}) = n \cdot 1_R.$$

Also ist ϕ eindeutig. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich auch, dass $\psi\colon \mathbb{Z} \to R$ mit

$$\psi(n) \coloneqq n \cdot 1_R \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Lösung 5.
Dies ist eine Standardaussage, deren Beweis sich in jedem Algebra-Buch findet.

Lösung 6.

1. Es sei $\pi\colon S \to S/\mathfrak{a}$, $s \mapsto \overline{s}$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi\phi$ ein Ringhomomorphismus und somit $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Ideal in R.

2. Die Aussage gilt: Es sei $\pi\colon S \to S/\mathfrak{p}$, $s \mapsto \overline{s}$ die kanonische Projektion und $\mathfrak{q} \coloneqq \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Der Quotient $S/\mathfrak{p}$ ist ein Integritätsbereich, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist $\mathfrak{q}$ ein Ideal in R, und da $\ker(\pi\phi) = \phi^{-1}(\ker \pi) = \phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ induziert $\pi\phi$ einen injektiven Ringhomomorphismus

   $$\psi\colon R/\mathfrak{q} \to S/\mathfrak{p} \quad \overline{r} \mapsto \overline{\phi(r)}.$$

   Der Ring $\operatorname{im}(\pi\phi) \subseteq S/\mathfrak{p}$ ist als Unterring eines Integritätsbereichs ebenfalls ein Integritätsbereich. Somit ist $R/\mathfrak{q} \cong \operatorname{im}(\pi\phi)$ ein Integritätsbereich, also $\mathfrak{q}$ ein Primideal.

3. Die Aussage gilt nicht: Es sei etwa $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ die kanonische Inklusion. Dann ist $\mathfrak{m} \coloneqq 0$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}$, aber $\phi^{-1}(0) = 0$ ist kein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$, da $\mathbb{Z}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Lösung 7.
Es sei $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \times 0 = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Offenbar ist S unter der Addition und Multiplikation abgeschlossen. Zusammen mit der Einschränkung dieser Operationen bildet S einen kommutativen Ring, für den $S \cong \mathbb{Z}$ gilt. Da $1_R = (1, 1) \notin S$ ist S allerdings kein Unterring von R.