Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 2

Jendrik Stelzner

29. April 2014

Aufgabe 2.1:

Definition. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Kollektion $\mathcal{B}$ von Umgebungen von x heißt* Umgebungsbasis *von x, falls es für jede Umgebung N von x ein $M \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $M \subseteq N$.*

Wir sagen, dass X das erste Abzählbarkeitsaxiom *erfüllt, bzw. dass X* erstabzählbar *ist, falls es für alle $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}_x$ von x gibt.*

Bemerkung 1. Jeder metrische Raum ist erstabzählbar. Für einen metrischen Raum X und $x \in X$ bildet nämlich

$$\mathcal{B}_x := \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$

offensichtlich eine Umgebungsbasis von x.

Bemerkung 2. Besitzt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}$, so besitzt x auch eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U}$ von offenen Umgebungen. Es enthält nämlich jedes $B \in \mathcal{B}$ eine offene Umgebung U_B von x. Es sei dann

$$\mathcal{U} := \{U_B : B \in B\}.$$

Dass $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von x ist, folgt daraus, dass es für jede Umgebung N von x ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $B \subseteq N$, und deshalb

$$U_B \subseteq B \subseteq N.$$

Bemerkung 3. Sind X, Y topologische Räume und $X \cong Y$, so ist offenbar X genau dann erstabzählbar, wenn Y erstabzählbar ist.

Die drei Räume A, B, C sind paarweise nicht homöomorph zueinander. Zunächst zeigen wir, dass die hawaiischen Ohrring als einziger der drei Räume kompakt sind.

Der Raum A ist nicht kompakt, da ein Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn X in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist. Da A offenbar nicht beschränkt ist, ist A nicht kompakt.

Die hawaiischen Ohrringe sind kompakt: Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von B in $\mathbb{R}^2$, so gibt es ein $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $0 \in U_0$. Da U_0 offen in $\mathbb{R}^2$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq U_0$. Es sei $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$, so dass $N > 1/\varepsilon$. Bezeichnet K_n den Kreis mit Mittelpunkt $(0, 1/n)$ und Radius $1/n$ für alle $n \geq 1$, so ist also

$$B = \bigcup_{n \geq 1} K_n \subseteq U_0 \cup \bigcup_{n=1}^{N} K_n.$$

Da alle K_n offenbar abgeschlossen und beschränkt sind, also kompakt, und die endliche Vereinigung kompakter Mengen offenbar kompakt ist, besitzt $\mathcal{U}$ als offene Überdeckung von $\bigcup_{n=1}^N K_n$ eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ von $\bigcup_{n=1}^N K_n$. Es ist daher $\mathcal{V} \cup \{U_0\} \subseteq \mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von B. Das zeigt, dass die hawaiischen Ohrringe kompakt ist.

Der Raum C ist nicht kompakt. Bezeichnet $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ die kanonische Projektion, so ist nach der Definition der Quotiententopologie eine Teilmenge $U \subset C$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}$ ist. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ oder $A \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ist $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, also ist $\pi(U)$ offen in C für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$, für die $U \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ oder $U \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Für die offene Überdeckung

$$\mathcal{U} := \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_{1/3}(n) \right\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{(n, n+1)\}$$

von $\mathbb{R}$ ist daher $\mathcal{V} := \{\pi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von C. Da es für alle $n + 1/2$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eine eindeutige Menge in $\mathcal{U}$ gibt, die $n + 1/2$ enthält, und π auf $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ injektiv ist, folgt daraus, dass es für alle $\pi(n + 1/2)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eine eindeutige Menge in $\mathcal{V}$ gibt, die $\pi(n + 1/2)$ enthält. Deshalb besitzt $\mathcal{V}$ keine endliche Teilüberdeckung. Das zeigt, dass C nicht kompakt ist.

Damit haben wir gezeigt, dass die hawaiischen Ohhringe kompakt ist, A und C aber nicht. Also sind die hawaiischen Ohrring zu keinem der anderen beiden Räume homöomorph.

Nach Bemerkung 1 ist A erstabzählbar. Wir zeigen nun noch, dass C nicht erstabzählbar ist, wodurch sich nach Bemerkung 3 ergibt, dass auch A und C nicht homöomorph sind.

Angenommen, C ist erstabzählbar. Dann hat $\pi(0) \in C$ nach Bemerkung 2 eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$ von offenen Umgebungen. Wir schreiben $V_n := \pi^{-1}(U_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und setzen

$$\mathcal{V} := \{V_n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $\mathbb{Z} \subseteq V_n$, da $\pi(0) \in U_n$, und dass V_n offen ist, da U_n offen ist und π stetig. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gibt es daher ein $r_n > 0$ so dass $B_{r_n}(n) \subseteq V_n$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$r'_n := \min\{r_n/2, 1/3\}$$

und setzen

$$W := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_{r'_n}(n).$$

W ist eine offene Menge mit $\mathbb{Z} \subseteq W$ und $W \subsetneq V_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei sich W und V_n um je überabzählbar viele Element unterschieden. Daher ist $\pi(W) \subseteq C$ eine offene Umgebung von $\pi(0) \in C$ mit $\pi(W) \subsetneq U_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von $\pi(0)$ ist.

Aufgabe 2.2:

(b)

Es ist klar, dass R wegzusammenhängend ist und $R - (\{0\} \times [0, 4])$ in die beiden Wegzusammenhangskomponenten $[-1, 0) \times [0, 4]$ und $(0, 1] \times [0, 4]$ zerfällt. Da π_0

funktoriell ist, zerfällt daher auch $M - K$ in höchstens zwei Wegzusammenhangskomponenten, wobei $q([-1,0) \times [0,4])$ und $q((0,1] \times [0,4])$ wegzusammenhängend in $M - K$ sind. Wir zeigen, dass $M - K$ bereits wegzusammenhängend ist. Da Wegzusammenhangskomponenten entweder disjunkt oder gleich sind, und jede wegzusammenhängende Teilmenge in einer Wegzusammenhangskomponente liegt, reicht es hierfür zu zeigen, dass $q(X)$ wegzusammenhängend ist für

$$X := \{-1\} \times [0,4] \cup \{1\} \times [0,4].$$

Dies zeigen wir, indem wir zeigen, dass $q(X) \cong S^1$. (S^1 ist als Quotenten des wegzusammenhängenden Raumes $[0,1]$ ebenfalls wegzusammenhängend.)

Wir betrachten die Abbildung $f : X \to S^1$ mit

$$f(s,t) = \begin{cases} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) & \text{falls } s = 1, \\ -\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) & \text{falls } s = -1, \end{cases} = s\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right).$$

Es ist klar, dass f surjektiv ist und als Bijektion $\tilde{f}$ über $q(X)$ faktorisiert. Wir erhalten ein entsprechendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ q(X) \arrow[rr, "\tilde{f}"'] & & S^1 \end{tikzcd}$$

Wir bemerken, dass $\tilde{f}$ stetig ist: Wir zeigen, dass $\tilde{f}^{-1}(B_\varepsilon(x))$ in $q(X)$ offen ist für alle $x \in S^1$ und $\varepsilon > 0$, wobei wir zur einfacheren Notation

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in S^1 : \|x - y\| < \varepsilon\} \subseteq S^1$$

verstehen wollen. ($\|\cdot\|$ bezeichnet die übliche Norm auf $\mathbb{R}^2$.) Da diese ε-Bälle eine Basis der Topologie von S^1 bilden, zeigen wir damit die Stetigkeit von $\tilde{f}$. Wegen der Definition der Quotientenraumtopologie genügt es hierfür zu zeigen, dass $q^{-1}(\tilde{f}^{-1}(B_\varepsilon(x)))$ offen in X ist. Das Urbild eines solchen ε-Balles hat für passende $u, t \in (0,4)$ die Form

$$\begin{aligned} &\{1\} \times (u,t) \text{ oder} \\ &\{-1\} \times (u,t) \text{ oder} \\ &\{-1\} \times [0,u) \cup \{1\} \times (t,4] \text{ oder} \\ &\{-1\} \times (t,4] \cup \{1\} \times [0,u). \end{aligned}$$

Da all diese Mengen offen in X sind, zeigt dies die Stetigkeit von $\tilde{f}$.

Damit ist $\tilde{f}$ eine stetige Bijektion. Da S^1 hausdorff ist und $q(X)$ als Quotient des kompakten Raumes X ebenfalls quasikompakt ist, ist $\tilde{f}$ schon ein Homöomorphismus. Das zeigt, dass $q(X) \cong S^1$ und damit, dass $M - K$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2.3:

Lemma 4. *Es seien X und Y topologische Räume, $\varphi : X \to Y$ ein Homöomorphismus und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Es lässt sich auf Y ein Äquivalenzrelation $\sim_\varphi$*

definieren durch

$$x \sim x' \Leftrightarrow \varphi(x) \sim_\varphi \varphi(x') \textit{ für alle } x, x' \in X.$$

Für die entsprechenden Quotientenräume gilt, dass $X/\sim \cong Y/\sim_\varphi$.

Beweis. Es ist klar, dass $\sim_\varphi$ eine Äquivalenzrelation auf Y definiert, und dass φ eine Bijektion $\bar{\varphi} : X/\sim \to Y/\sim_\varphi$ induziert mit

$$\bar{\varphi} : [x]_\sim \mapsto [\varphi(x)]_{\sim_\varphi}.$$

Bezeichnen $\pi_X : X \to X/\sim$ und $\pi_Y : Y \to Y/\sim_\varphi$ die kanonischen Projektionen, so ergibt sich also das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X/\sim \arrow[r, "\bar{\varphi}"'] & Y/\sim_\varphi
\end{tikzcd}$$

Da $\pi_Y \circ \varphi$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist, und $\bar{\varphi} \circ \pi_X = \pi_Y \circ \varphi$ folgt aus der universellen Eigenschaft der Quotientenraumtopologie, dass $\bar{\varphi}$ stetig ist. Das zeigt, dass $\bar{\varphi}$ eine stetige Bijektion ist.

Um zu zeigen, dass $\bar{\varphi}$ ein Homöomorphismus ist, bemerken wir, dass die Äquivalenzrelation $\sim_\varphi$ durch den Homöomorphismus φ^{-1} eine Äquivalenzrelation $(\sim_\varphi)_{\varphi^{-1}}$ auf X induziert mit

$$y \sim_\varphi y' \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y)(\sim_\varphi)_{\varphi^{-1}}\varphi^{-1}(y') \text{ für alle } y, y' \in Y.$$

Dabei ist direkt klar, dass $(\sim_\varphi)_{\varphi^{-1}} = \sim$. Wir erhalten also analog eine stetige Bijektion $\overline{\varphi^{-1}} : Y/\sim_\varphi \to X/\sim$ mit

$$\overline{\varphi^{-1}} : [y]_{\sim_\varphi} \mapsto [\varphi^{-1}(y)]_\sim,$$

für die offenbar $\overline{\varphi^{-1}} = \overline{\varphi}^{-1}$. Das zeigt, dass $\bar{\varphi}$ ein Homöomorphismus ist. $\square$

Wir bezeichnen die gegebene Äquivalenzrelation mit $\sim$ und setzen

$$S := \{(x, y, z) \in T : x \geq 0\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass $T/\sim \cong S/\sim$. Bezeichnet $\iota : S \to T$ die kanonische Inklusion und sind $q : T \to T/\sim$ und $\tilde{q} : S \to S/\sim$ die kanonischen Projektionen, so erhalten wir das folgende kommutatve Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\tilde{q}"'] & T \arrow[d, "q"] \\
S/\sim \arrow[r, "\tilde{\iota}"'] & T/\sim
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\tilde{\iota}$ die induzierte Abbildung, d.h. die eindeutige Abbildung, die das obige Diagramm kommutieren lässt. (Sie ist gegeben durch $\tilde{\iota} : [x]_\sim \mapsto [x]_\sim$.) Da ι und q stetig sind, ist es auch $q \circ \iota$. Da $q \circ \iota = \tilde{\iota} \circ \tilde{q}$ folgt aus der universellen Eigenschaft des Quotientenraums, dass $\tilde{\iota}$ stetig ist.

Da S jede Äquivalenzklasse von $\sim$ in T nichttrivial schneidet ist $\tilde{\iota}$ surjektiv. Es ist auch klar, dass $\tilde{\iota}$ injektiv ist. Also ist $\tilde{\iota}$ eine stetige Bijektion. Da S kompakt ist, und $S/\sim$ damit quasikompakt, genügt es für die Homöomorphie von $\tilde{\iota}$ zu zeigen, dass $T/\sim$ hausdorff ist.

Seien hierfür $x, y \in T$ mit $q(x) \neq q(y)$, also $x \neq y$ und $x \neq -y$. Da $x, y, -x$ und $-y$ paarweise verschieden sind und T hausdorff ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die ε-Bälle um $x, y, -x$ und $-y$ paarweise disjunkt sind. Da

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(B_\varepsilon(x))) &= B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(-x) \text{ und} \\ q^{-1}(q(B_\varepsilon(y))) &= B_\varepsilon(y) \cup B_\varepsilon(-y) \end{aligned}$$

offen in T sind, sind $q(B_\varepsilon(x))$ und $q(B_\varepsilon(y))$ disjunkte, in $T/\sim$ offene Mengen, die x, bzw. y enthalten. Da q surjektiv ist, zeigt dies, dass $T/\sim$ hausdorff ist.

Also ist $S/\sim \cong T/\sim$.

Wir bemerken auch, dass $[-1, 1] \times [0, 4] \cong S$, etwa durch passende Kugelkoordinaten

$$g : [-1, 1] \times [0, 4] \to S, (t, u) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t \arcsin(1/2)) \sin(u\pi/4) \\ \cos(t \arcsin(1/2)) \cos(u\pi/4) \\ \sin(t \arcsin(1/2)). \end{pmatrix}$$

Es ist bekannt, dass dies eine Homöomorphismus ist. g^{-1} induziert nach Lemma 4 durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation $\sim_{g^{-1}}$ auf S. Man sieht leicht, dass diese gerade $(t, 0)$ mit $(-t, 4)$ identifiziert für alle $t \in [-1, 1]$ und sonst keine Identifikationen vornimmt. Daher ist nach Lemma 4

$$S/\sim \cong ([-1, 1] \times [0, 4])/\sim_{g^{-1}} \cong M$$

wobei M das Möbiusband bezeichnet, wie in der vorherigen Aufgabe definiert wurde.