Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 7

Jendrik Stelzner

17. Juni 2014

Aufgabe 7.1:

Wir gehen davon aus, dass $X \neq \emptyset$, damit der Begriff der Fundamentalgruppe für X Sinn ergibt.

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}, r_0) \arrow[d, "\exp"] \\ (X, x_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}_i"] \arrow[r, "f_i"'] & (S^1, y_0) \end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Liftung von f_i.

Es genügt zu zeigen, dass je zwei stetige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to S^1$ zueinander homotop sind. Es sei ein Basispunkt $x_0 \in X$ fixiert, $y_0 = f_1(x_0)$ und $r_0 \in \mathbb{R}$ mit $\exp(r_0) = y_0$. Es ist

$$f_{1*}(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(S^1, y_0)$$

eine endliche Untergruppe, wegen

$$\pi_1(S^1, y_0) \cong \mathbb{Z}$$

also

$$f_1^*(\pi_1(X, x_0)) \cong 1$$

und somit

$$f_{1*}(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \exp_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0)).$$

Da X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, gibt es deshalb nach dem Liftungssatz eine Liftung $\tilde{f}_1 : (X, x_0) \to (\mathbb{R}, r_0)$ von f_1, siehe Abbildung 1. Analog gibt es auch eine Liftung $\tilde{f}_2 : X \to \mathbb{R}$ von f_2. Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist $\tilde{f}_1 \simeq \tilde{f}_2$ homotop. Daher ist auch

$$f_1 = \exp \tilde{f}_1 \simeq f_2 = \exp \tilde{f}_2.$$

Aufgabe 7.2:

Es ist klar, dass

$$(X \times \mathbb{R}) \times \mathbb{Z} \to X \times \mathbb{R}, ((x,t),n) \mapsto (f^n(x), t-n)\,.$$

eine Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}$ auf $X \times \mathbb{R}$ definiert. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}, (x,t) \mapsto (x,t) \cdot n = (f^n(x), t-n)$$

stetig, da sie in jeder Koordinate stetig ist. Die Gruppenwirkung ist eigentlich diskontinuierlich, da für alle $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ für die Umgebung

$$U := X \times \left(t - \frac{1}{3}, t + \frac{1}{3}\right) \subseteq X \times \mathbb{R}$$

von (x,t) für alle $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$Un \cap U = X \times \left(t - \frac{1}{3} - n, t + \frac{1}{3} - n\right) \cap X \times \left(t - \frac{1}{3}, t + \frac{1}{3}\right) = \emptyset.$$

Es bezeichne $\sim_{\mathbb{Z}}$ die durch die Gruppenwirkung induzierte Äquivalenzrelation auf $X \times [0,1]$ und der Homöomorphismus $g : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ definiert als

$$g : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}, (x,t) \mapsto (x,t) \cdot 1 = (f(x), t-1)\,.$$

Es bezeichne

$$\iota : X \times [0,1] \to X \times \mathbb{R}$$

die kanonische Inklusion. Weiter seien

$$p : X \times [0,1] \to T_f$$

und

$$\pi : X \times \mathbb{R} \to (X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$$

die kanonischen Projektionen. Es ist klar, dass $\sim$ die Einschränkung von $\sim_{\mathbb{Z}}$ auf $X \times [0,1]$ ist, und dass deshalb die stetige Funktion

$$\pi\iota : X \times [0,1] \to (X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$$

als Bijektion

$$\varphi : T_f \to (X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft der Quotientenraumtopologie ebenfalls stetig. Wir erhalten daher das kommutative Diagramm in Abbildung 2.

Wir zeigen, dass φ auch offen ist. Hierfür sei $U \subseteq T_f$ offen und nichtleer. Wir setzen

$$V := p^{-1}(U) \text{ und } W := \pi^{-1}(\varphi(U)).$$

Es ist klar, dass V offen in $X \times [0,1]$ ist, und dass W die Saturierung von V bezüglich $\sim_{\mathbb{Z}}$ in $X \times \mathbb{R}$ ist. Außerdem ist die Offenheit von $\varphi(U)$ nach der Definition der Quotientenraumtopologie äquivalent zu der Offenheit von W.

Es sei $(x,t) \in W$ beliebig aber fest.

$$\begin{tikzcd}
X \times [0,1] \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & X \times \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
T_f \arrow[r, "\varphi"'] & (X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2: Homöomorphie zum Abbildungstorus.

Ist $t \notin \mathbb{Z}$, so gibt es $(y, u) \in V$ mit $(x, t) \sim_{\mathbb{Z}} (y, u)$, also

$$(x, t) = (f^n(y), u - n) = g^n(y, u)$$

für passendes $n \in \mathbb{N}$. Da V offen in $X \times [0, 1]$ ist, gibt es eine offene Umgebung $O \subseteq X$ von y und ein offenes Intervall $(a, b) \subseteq [0, 1]$ mit $u \in (a, b)$, so dass

$$(y, u) \in O \times (a, b) \subseteq V.$$

Daher ist

$$(x, t) = g^n(y, u) \subseteq g^n(O \times (a, b)) = f^n(O) \times (a - n, b - n),$$

wobei $f^n(O) \times (a - n, b - n)$ offen ist, da f ein Homöomorphismus ist.

Ist $t \in \mathbb{Z}$, so ist, da W die Saturierung von V bezüglich $\sim_{\mathbb{Z}}$ ist, und V bezüglich $\sim$ saturiert ist

$$\big(f^{t-1}(x), 1\big) = (x, t) \cdot (t - 1) \in V \text{ und } \big(f^t(x), 0\big) = (x, t) \cdot t \in V.$$

Da V in $X \times [0, 1]$ offen ist, gibt es daher eine offene Umgebung O von $f^{t-1}(x)$ und $a \in (0, 1)$ mit

$$\big(f^{t-1}(x), 1\big) \in O \times (a, 1] \subseteq V \subseteq W,$$

und eine offene Umgebung O' von $f^t(x)$ und $a \in (0, 1)$ mit

$$\big(f^t(x), 0\big) \in O' \times [0, b) \subseteq V \subseteq W.$$

Da W bezüglich $\sim_{\mathbb{Z}}$ saturiert ist, ist daher auch

$$g\,(O \times (a, 1]) = f(O) \times (a - 1, 0] \subseteq W,$$

wobei

$$\big(f^t(x), 0\big) = g\left(f^{t-1}(x), 1\right) \subseteq f(O) \times (a - 1, 0].$$

Es ist deshalb

$$\tilde{O} := (f(O) \cap O') \times (a - 1, b) \in W$$

eine offene Umgebung von $(f^t(x), 0)$. Daher ist $g^{-t}(\tilde{O}) \subseteq W$ eine offene Umgebung von $g^{-t}(f^t(x), 0) = (x, t)$.

Da die Menge W um jeden ihrerer Punkte einen offene Umgebung enthält, ist W offen. Wegen der Beliebigkeit von U zeigt dies, dass φ offen ist. Also ist φ ein Homöomorphismus.

Aufgabe 7.3:

(a)

Die Multiplikation ist assoziativ, da für alle $(n,m),(n',m'),(n'',m'') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&((n,m)\cdot(n',m'))\cdot(n'',m'') \\
&= (n+(-1)^m n', m+m')\cdot(n'',m'') \\
&= \left(n+(-1)^m n' + (-1)^{m+m'} n'', m+m'+m''\right) \\
&= \left(n+(-1)^m \left(n' + (-1)^{m'} n''\right), m+m'+m''\right) \\
&= (n,m)\cdot(n'+(-1)^{m'}n'', m'+m'') \\
&= (n,m)\cdot((n',m')\cdot(n'',m'')).
\end{aligned}$$

Das Element $(0,0) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ist bezüglich der Multiplikation rechtsneutral, da für alle $(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$(n,m)\cdot(0,0) = (n+(-1)^0\cdot 0, m+0) = (n,m).$$

Das Element $(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ hat das Rechtsinverse $((-1)^{m+1}n, -m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, da

$$(n,m)\cdot\left((-1)^{m+1}n,-m\right) = (n+(-1)^m(-1)^{m+1}n, m-m) = (0,0).$$

Das zeigt, dass $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$ eine Gruppe ist. Sie ist nicht abelsch, da etwa

$$(1,0)\cdot(1,1) = (2,1) \neq (0,1) = (1,1)\cdot(1,0).$$

(b)

Es handelt sich um eine Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$, da für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$(x,y)\cdot(0,0) = (x,y),$$

und für alle $(n,m),(n',m')\in\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$ und $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&((x,y)\cdot(n,m))\cdot(n',m') \\
&= ((-1)^m(x+n), y+m)\cdot(n',m') \\
&= \left((-1)^{m'}((-1)^m(x+n)+n'), y+m+m'\right) \\
&= \left((-1)^{m+m'}(x+n+(-1)^m n'), y+m+m'\right) \\
&= (x,y)\cdot(n+(-1)^m n', m+m') \\
&= (x,y)\cdot((n,m)\cdot(n',m')).
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Gruppenwirkung ist klar, da sie in jeder Komponente stetig ist. Die Gruppenwirkung ist eigentlich diskontinuierlich, denn für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist

$$U = \left(x-\frac{1}{3}, x+\frac{1}{3}\right)\times\left(y-\frac{1}{3}, y+\frac{1}{3}\right)$$

eine Umgebung von (x,y), für die für alle $(n,m)\in\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$ mit $(n,m)\neq(0,0)$

$$U\cdot(n,m)\cap U = \emptyset.$$

(c)

Es sei $\sim_K$ die gegebene Äquivalenzrelation auf $[0,1] \times [0,1]$ und $\sim$ die durch die Gruppenwirkung von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ erzeugte Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$. Es ist klar, dass $\sim_K$ die Einschränkung von $\sim$ auf $[0,1] \times [0,1]$ ist. Bezeichnet $\iota : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die kanonische Inklusion, und bezeichnen

$$\pi_K : [0,1] \times [0,1] \to ([0,1] \times [0,1])/\sim_K = K$$

und

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$$

die kanonischen Projektionen, so faktorisiert deshalb $\pi\iota$ über π_K zu einer Bijektion

$$f : K \to \mathbb{R}^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft der Quotientenraumtopologie stetig ist. Da $\mathbb{R}^2$ Hausdorff ist, und die Gruppenwirkung von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ eigentlich diskontinuierlich, ist auch $\mathbb{R}/\sim$ Hausdorff, und K ist als Quotient eines kompakten Raumes ebenfalls quasikompakt. Daher ist f bereits ein Homöomorphismus.

Aufgabe 7.4:

Es ist klar, dass die Inklusion

$$j : X \to X \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, 0),$$

stetig ist. Aus Aufgabe 7.2 ist bekant, dass die Abbildung

$$p : X \times \mathbb{R} \to T_f, (x,t) \mapsto [(x,t)].$$

eine Überlagerungsabbildung ist. Da offenbar $\iota = pj$ ist ι ebenfalls stetig.

Bezeichnen

$$\pi_1 : X \times \mathbb{R} \to X \text{ und } \pi_2 : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

die kanonischen Projektionen, so ist es klar, dass die Abbildung

$$\exp \pi_2 : X \times \mathbb{R} \to S^1$$

über T_f faktorisiert, wobei es sich bei der faktorisierten Abbildung offenbar um q handelt. Inbesondere ist q daher wohldefiniert. Aus der universellen Eigenschaft des Quotientenraumtopologie folgt weiter, dass q stetig ist. Insgesamt erhalten wir damit das kommutative Diagramm in Abbildung 3.

(a)

Es sei $x \in X$ beliebig aber fest. Da

$$\iota_* = (pj)_* = p_* j_*$$

genügt es für die Injektivität von ι_* zu zeigen, dass

$$j_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X \times \mathbb{R}, (x, 0))$$

$$\begin{tikzcd}
& X \times \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "\exp \pi_2"] & \\
X \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "\iota"'] & T_f \arrow[r, "q"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3: Ein Diagramm.

und

$$p_* : \pi_1(X \times \mathbb{R}, (x, 0)) \to \pi_1(T_f, \iota(x))$$

injektiv sind. Da p eine Überlagerungsabbildung ist, ist p_* bekanntermaßen injektiv.

Es sei $\gamma : (S^1, 1) \to (X, x)$ mit $[\gamma] \in \ker j_*$. Dann ist

$$j\gamma : (S^1, 1) \to (X \times \mathbb{R}, (x, 0))$$

homotop zur konstanten Schleife relativ zu 1. Es gibt also eine Homotopie

$$F : S^1 \times I \to X \times \mathbb{R},$$

so dass

$$F(z, 0) = j\gamma(z) \text{ und } F(z, 1) = (x, 0) \text{ für alle } z \in S^1$$

und

$$F(0, t) = (x, 0) \text{ für alle } t \in I.$$

Es ist dann

$$\pi_1 F : S^1 \times I \to X$$

eine Homotopie von γ zur konstanten Schleife relativ zu 1. Daher ist $[\gamma]$ das neutrale Element. Das zeigt, dass $\ker j_*$ trivial ist, also j_* injektiv.

(b)

Es sei $[(x, t)] \in T_f$ beliebig aber fest.

Da x wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma : [t-1, t] \to X$ von $f(x)$ nach x. Es ist daher

$$\tilde{\gamma} : [t-1, t] \to X \times \mathbb{R}, s \mapsto (\gamma(s), s)$$

ein Weg von $(f(x), t-1)$ nach (x, t). Daher ist

$$p\tilde{\gamma} : [t-1, t] \to T_f, s \mapsto [(\gamma(s), s)]$$

eine Schlinge mit

$$p\tilde{\gamma}(0) = p\tilde{\gamma}(1) = [(x, t)].$$

Über die Abbildung

$$\exp : [t-1, t] \to S^1$$

faktorisiert $p\tilde{\gamma}$ als eindeutige, nach der universellen Eigenschaft der Quotientenraumtopologie stetige, Abbildung

$$s : S^1 \to T_f,$$

d.h. $p\tilde{\gamma} = s \exp$. Wir bemerken, dass auch

$$qp\tilde{\gamma} = \exp .$$

Wir erhalten also die beiden kommutativen Diagramme in Abbildung TODO.

Da

$$qs \exp = qp\tilde{\gamma} = \exp$$

folgt aus der Surjektivität von $\exp : [t-1, t] \to S^1$, dass $qs = \mathrm{id}_{S^1}$. Da

$$q : (T_f, [(x,t)]) \to (S^1, \exp(t))$$

und

$$s : (S^1, \exp(t)) = (T_f, [(x,t)])$$

ist deshalb

$$q_* s_* = (qs)_* = \mathrm{id}_{S^1}{}_* = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1, \exp(t))} .$$

Wegen der Beliebigkeit von $[(x,t)] \in T_f$ zeigt dies, dass q_* split-surjektiv ist.

(c)

Es sei $x \in X$ beliebig aber fest.

Es sei zunächst $[\tilde{\gamma}] \in \operatorname{im} \iota_*$. Dann gibt es $\gamma : (S^1, 1) \to (X, x)$ mit $\tilde{\gamma} = \iota\gamma$. Da für alle $z \in S^1$

$$q\tilde{\gamma}(z) = q\iota\gamma(z) = q([(\gamma(z), 0)]) = \exp(0) = 1$$

ist $q_*([\tilde{\gamma}])$ das neutrale Element, also $[\tilde{\gamma}] \in \ker q_*$. Das zeigt, dass $\operatorname{im} \iota_* \subseteq \ker q_*$.

Sei andererseits $[\tilde{\gamma}] \in \ker q_*$. Da p ein Überlagerungsabbildung ist, lässt sich die Schlinge $\tilde{\gamma} : I \to T_f$ nach dem Wege-Liftungssatz zu einem Weg $\gamma : X \times I \to S^1$ mit Anfangpunkt $(x, 0)$ liften. Da

$$p\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = p\gamma(1)$$

ist $p\gamma(1) = (x, 0)$. Da die Schlinge

$$q\tilde{\gamma} = qp\gamma = \exp \pi_2 \gamma$$

nullhomotop ist, muss sie Windungszahl 0 haben. Da die Windungszahl ist gerade $\pi_2\gamma(0) - \pi_2\gamma(1)$ ist, muss also

$$\pi_2\gamma(0) = \pi_2\gamma(1).$$

Da $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ in der zweiten Koordinate übereinstimmen, und $p\gamma(0) = p\gamma(1)$ müssen sie auch in der ersten Koordinate übereinstimmen. (Da für festes $t \in \mathbb{R}$ in $X \times \{t\}$ keine Punkte miteinander identifiziert werden.) Also ist $\gamma(0) = \gamma(1)$ und γ somit ebenfalls eine Schlinge.

Wir betrachten die Homotopie

$$F : [0,1] \times I \to X \times \mathbb{R}, (t, s) \mapsto (\pi_1(\gamma(t)), s\pi_2(\gamma(t))).$$

Da für alle $t \in [0, 1]$

$$F(t, 0) = (\pi_1(\gamma(t)), 0) \text{ und } F(t, 1) = \gamma(t),$$

sowie für alle $s \in [0,1]$
$$F(0,s) = F(1,s) = (x,0)$$
ist F eine Homotopie von γ zu einer Schlinge τ, die komplett in $X \times \{0\}$ liegt, relativ zum Anfangs- und Endpunkt. Es ist daher
$$pF : [0,1] \times I \to T_f$$
eine Homotopie von $\tilde{\gamma}$ zu einer Schlinge $\tilde{\tau}$, die komplett in $p(X \times \{0\}) = \operatorname{im} \iota$ liegt, relativ zum Anfangs-und Endpunkt. Daher ist
$$[\tilde{\gamma}] = [\tilde{\tau}].$$
Da τ komplett in $X \times \{0\}$ verläuft ist auch
$$\tilde{\tau} = p\tau = \iota\pi_1\tau,$$
also
$$[\tilde{\tau}] = \iota_*[\pi_1\tau] \in \operatorname{im} \iota_*.$$
Dies zeigt, dass $\ker q_* \subseteq \operatorname{im} \iota_*$.