Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 7

Jendrik Stelzner

16. Juni 2014

Aufgabe 7.3:

(a)

Die Multiplikation ist assoziativ, da für alle $(n,m),(n',m'),(n'',m'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&((n,m)\cdot(n',m'))\cdot(n'',m'') \\
&= (n+(-1)^m n', m+m')\cdot(n'',m'') \\
&= \left(n+(-1)^m n' + (-1)^{m+m'} n'', m+m'+m''\right) \\
&= \left(n+(-1)^m \left(n' + (-1)^{m'} n''\right), m+m'+m''\right) \\
&= (n,m)\cdot(n'+(-1)^{m'}n'', m'+m'') \\
&= (n,m)\cdot((n',m')\cdot(n'',m'')).
\end{aligned}$$

Das Element $(0,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist bezüglich der Multiplikation rechtsneutral, da für alle $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(n,m)\cdot(0,0) = (n+(-1)^0\cdot 0, m+0) = (n,m).$$

Das Element $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hat das Rechtsinverse $((-1)^{m+1}n, -m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, da

$$(n,m)\cdot\left((-1)^{m+1}n, -m\right) = (n+(-1)^m(-1)^{m+1}n, m-m) = (0,0).$$

Das zeigt, dass $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ eine Gruppe ist. Sie ist nicht abelsch, da etwa

$$(1,0)\cdot(1,1) = (2,1) \neq (0,1) = (1,1)\cdot(1,0).$$

(b)

Es handelt sich um eine Gruppenwirkung von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$, da für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y)\cdot(0,0) = (x,y),$$

und für alle $(n,m),(n',m') \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ und $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&((x,y)\cdot(n,m))\cdot(n',m')\\
=&((-1)^m(x+n),y+m)\cdot(n',m')\\
=&\Big((-1)^{m'}((-1)^m(x+n)+n'),y+m+m'\Big)\\
=&\Big((-1)^{m+m'}(x+n+(-1)^m n'),y+m+m'\Big)\\
=&(x,y)\cdot(n+(-1)^m n',m+m')\\
=&(x,y)\cdot((n,m)\cdot(n',m')).
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Gruppenwirkung ist klar, da sie in jeder Komponente stetig ist. Die Gruppenwirkung ist eigentlich diskontinuierlich, denn für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$U = \left(x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3}\right) \times \left(y - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3}\right)$$

eine Umgebung von (x,y), für die für alle $(n,m) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ mit $(n,m) \neq (0,0)$

$$U \cdot (n,m) \cap U = \emptyset.$$