

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

BLATT 5

Jendrik Stelzner

27. Mai 2014

Aufgabe 5.1:

Wir nehmen zunächst an, dass $f : S^1 \rightarrow X$ homotop zu einer konstanten Schlinge ist. Dann gibt es eine Homotopie $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ mit

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \text{const} \text{ und} \\ F(s, 1) &= f(s) \end{aligned}$$

für alle $s \in S$. Es sei

$$A := S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times [0, 1]$$

und

$$\pi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow (S^1 \times [0, 1]) / A$$

die kanonische Projektion.

Es ist klar, dass F als Abbildung

$$\tilde{F} : (S^1 \times [0, 1]) / A \rightarrow X$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig.

Wir bemerken weiter, dass $(S^1 \times [0, 1]) / A \cong D^2$: Die Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow D^2, (s, t) \mapsto ts$$

ist stetig und surjektiv, und faktorisiert als Bijektion

$$\psi : (S^1 \times [0, 1]) / A \rightarrow D^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da $S^1 \times [0, 1]$ als Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist auch $(S^1 \times [0, 1]) / A$ quasikompakt. Da D^2 Hausdorff ist, ist damit ψ bereits ein Homöomorphismus.

Über den Homöomorphismus ψ faktorisiert \tilde{F} als stetige Abbildung $\bar{F} : D^2 \rightarrow X$.

Insgesamt ergibt sich damit ein Diagramm wie in Abbildung 1. Dieses Diagramm kommutiert: Nach Konstruktion ist $\phi = \psi\pi$, sowie $F = \tilde{F}\pi$ und $\tilde{F} = \bar{F}\psi$. Daher ist auch

$$F = \tilde{F}\pi = \bar{F}\psi\pi = \bar{F}\phi.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\bar{F}(s) = \bar{F}\phi(s, 1) = F(s, 1) = f(s)$$

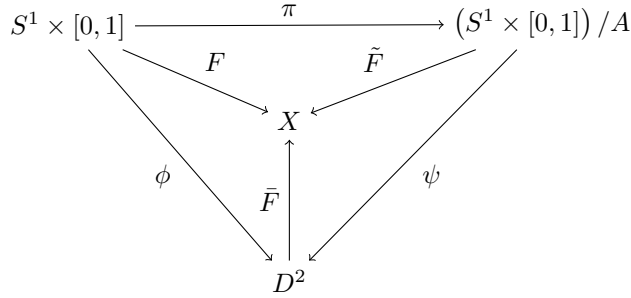


Abbildung 1: Faktorisierungen der Homotopie.

ist \bar{F} eine stetige Fortsetzung von f auf D^2 .

Angenommen, $f : S^1 \rightarrow X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\bar{F} : D^2 \rightarrow X$ fortsetzen. Mithilfe der stetigen Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow D^2, (s, t) \mapsto ts$$

erhalten wir dann die Homotopie

$$F := \bar{F}\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \bar{F}(\phi(s, 0)) = \bar{F}(0) = \text{const} \text{ und} \\ F(s, 1) &= \bar{F}(\phi(s, 1)) = \bar{F}(s) = f(s) \end{aligned}$$

ist f homotop zu einer konstanten Schlinge.

Aufgabe 5.2:

Ist X zusammenziehbar, so gibt es einen einelementigen Raum $*$ und eine Homotopieäquivalenz $\varphi : X \rightarrow *$. Diese induziert, wie aus Aufgabe 4.4 bekannt, für jeden Raum K eine Bijektion

$$\varphi_*^K : [K, X] \rightarrow [K, *], [f] \mapsto [\varphi f].$$

Da $[K, *]$ immer einelementig ist, ist dann $[K, X]$ für jeden Raum K einelementig.

Besteht $[K, X]$ für jeden Raum K aus nur einem Element, so ist insbesondere $[X, X]$ einelementig, also jede (konstante) Abbildung $X \rightarrow X$ homotop zu id_X .

Ist id_X homotop zu einer konstanten Abbildung, so gibt es ein $x_0 \in X$, so dass $\text{id}_X \simeq f$ für die konstante Funktion $f : X \rightarrow X, x \mapsto x_0$. Für den Teilraum $* = \{x_0\}$ ist dann für die kanonische Inklusion $\iota : * \rightarrow X$ und $g : X \rightarrow *, x \mapsto x_0$

$$g\iota = \text{id}_* \text{ und } \iota g = f \simeq \text{id}_X.$$

Also ist g eine Homotopieäquivalenz und X deshalb zusammenziehbar.

$$\begin{array}{ccccc}
S^1 & \xrightarrow{\iota} & D^2 & \xrightarrow{r} & S^1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{S}(S^1) & \xrightarrow{\mathcal{S}(\iota)} & \mathcal{S}(D^2) & \xrightarrow{\mathcal{S}(r)} & \mathcal{S}(S^1)
\end{array}$$

Abbildung 2: Funktoreigenschaften von $X \mapsto \mathcal{S}(X)$.

Aufgabe 5.3: (Brouwerscher Fixpunktsatz)

(i)

Für die Homotopie

$$F : D^2 \times [0, 1] \rightarrow D^2, (x, t) = tx$$

ist für alle $x \in D^2$

$$F(x, 0) = 0 = \text{const und}$$

$$F(x, 1) = x = \text{id}_{D^2}(x).$$

Deshalb ist id_{D^2} homotop zu einer konstanten Abbildung. Also ist D^2 zusammenziehbar, und deshalb $[K, D^2]$ für jeden Raum K einelementig. Insbesondere ist daher $\mathcal{S}(D^2) = [S^1, D^2]$ einelementig.

Gibt es eine stetige Abbildung $r : D^2 \rightarrow S^1$ mit $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$, so ergibt sich aus den Funktoreigenschaften von $X \mapsto \mathcal{S}(X)$ das kommutatives Diagramm in Abbildung 2, wobei $\iota : S^1 \rightarrow D^2$ die kanonische Inklusion bezeichnet.

Da $r\iota = \text{id}_{S^1}$ ist auch

$$\mathcal{S}(r)\mathcal{S}(\iota) = \mathcal{S}(r\iota) = \mathcal{S}(\text{id}_{S^1}) = \text{id}_{\mathcal{S}(S^1)}$$

Inbesondere muss daher $\mathcal{S}(r)$ surjektiv sein, da es $\mathcal{S}(\iota)$ als Rechtsinverses besitzt. Es ist jedoch $\mathcal{S}(D^2)$ einelementig und $\mathcal{S}(S^1)$ abzählbar unendlich (aus der Vorlesung bekannt). Dieser Widerspruch zeigt, dass keine solche Abbildung r existieren kann.

(ii)

Für alle $x \in D^2$ definieren wir

$$h_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } h_x(t) := f(x) + t(x - f(x))$$

und

$$T_x := \{t \in \mathbb{R} \mid \|h_x(t)\| \leq 1\} = \{t \in \mathbb{R} \mid h_x(t) \in D^2\},$$

wobei klar ist, dass h_x für alle $x \in D^2$ stetig ist.

Für alle $x \in D^2$ ist $T_x \neq \emptyset$, da $f(x) = h_x(0) \in D^2$, also $0 \in T_x$ für alle $x \in D^2$. Wegen der Konvexität von D^2 ist T_x für alle $x \in D^2$ ein Intervall. Da $\|h_x\|$ stetig ist, und $T_x = \|h_x\|^{-1}([0, 1])$ ist T_x auch abgeschlossen, also für alle $x \in D^2$ von der Form $T_x = [u_x, m_x]$ mit $u_x, m_x \in \mathbb{R}$, wobei $m_x \geq 0 \geq u_x$. Da $f(x) - x \neq 0$ und $x, f(x) \in D^2$ ist auch klar, dass $m_x > 0$.

$$\begin{array}{ccc}
S^1 & \xrightarrow{f_t} & \mathbb{C} - \{0\} \\
& \searrow \iota_t & \nearrow f \\
& \mathbb{C} &
\end{array}$$

Abbildung 3: f_t faktorisiert durch ι_t über \mathbb{C} .

Aus dem üblichen Analysis-1-Argument folgt auch, dass

$$\|h_x(u_x)\| = \|h_x(m_x)\| = 1,$$

also $h_x(u_x), h_x(m_x) \in S^1$. Da die durch h_x beschriebenen Gerade den Kreis S^1 in höchstens zwei Punkten schneidet, ist auch $\|h_x(t)\| < 1$ für alle $u_x < t < m_x$.

Wir definieren

$$g : D^2 \rightarrow S^1, x \mapsto h_x(m_x),$$

und behaupten, dass g stetig ist. Da h_x für alle $x \in X$ stetig ist, genügt es hierfür zu zeigen, dass m_x stetig von x abhängt.

Seien hierfür $x \in D^2, m_x > \varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir bemerken, dass $\|h_x(t)\|$ für festes t stetig von x abhängt. Es ist $h_x(m_x + \varepsilon) > 1$, daher gibt es $\delta_1 > 0$ mit $\|h_{x'}(m_x + \varepsilon)\| > 1$ für alle $x' \in B_{\delta_1}(x)$, also $m_{x'} < m_x + \varepsilon$ für alle $x' \in B_{\delta_1}(x)$. Da $h_x(m_x - \varepsilon) < 1$ gibt es auch ein $\delta_2 > 0$, so dass $\|h_{x'}(m_x - \varepsilon)\| < 1$ für alle $x' \in B_{\delta_2}(x)$, also $m_{x'} > m_x - \varepsilon$ für alle $x' \in B_{\delta_2}(x)$. Für $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ist also

$$|m_{x'} - m_x| < \varepsilon \text{ für alle } x' \in B_\delta(x).$$

Dies zeigt die Stetigkeit von $x \mapsto m_x$, und damit auch von g .

Wir bemerken weiter, dass $g(x) = x$ für alle $x \in S^1$: Es ist klar, dass $h_x(1) = x$, also $1 \in T_x$. Da $\|h_x(1)\| = 1$ ist auch $1 \not< m_x$. Wegen $m_x = \max T_x$ muss also $m_x = 1$ und deshalb $g(x) = h_x(1) = x$.

Insgesamt zeigt dies, dass $g : D^2 \rightarrow S^1$ eine Retraktion, im Widerspruch zu Aufgabenteil (i).

Aufgabe 5.4: (Fundamentalsatz der Algebra)

(i)

Sei $t \geq 0$ beliebig aber fest. Für $\iota_t : S^1 \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto tz$ ergibt sich das kommutative Diagramm in Abbildung 3. Da \mathbb{C} zusammenziehbar ist (denn \mathbb{C} ist homöomorph zu \mathbb{R}^2), ist ι_t homotop zu einer konstanten Abbildung $c : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, also $f_t = f_{\iota_t}$ homotop zur konstanten Abbildung $f \cdot c$. (Analog ergibt sich, dass jede stetige Funktion, die über einen zusammenziehbaren Raum faktorisiert, homotop zu einer konstanten Abbildung ist).

(ii)

Wir definieren

$$F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\},$$

$$(z, t) \mapsto C^k z^k + t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l.$$

F ist wohldefiniert, denn für alle $(z, t) \in S^1 \times [0, 1]$ ist

$$|F(z, t)| = \left| C^k z^k + t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l \right| \geq |C^k z^k| - \left| t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l \right|$$

$$\geq C^k - t \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l \geq C^k - \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l > 0.$$

Es ist auch klar, dass F stetig ist, also eine Homotopie ist. Für alle $z \in S^1$ ist

$$F(z, 0) = C^k z^k \quad \text{und} \quad F(z, 1) = \tilde{f}_C(z).$$

Das zeigt, dass $\tilde{f}_C \simeq (z \mapsto C^k z^k)$.

(iii)

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$H_k : S^1 \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}, z \mapsto z^k \quad \text{und} \quad h_k : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^k.$$

Es ist klar, dass H_k und h_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ stetig sind. Es sei $k := \deg f$. Dann gibt es $C \geq 0$, so dass

$$C^k > \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l.$$

Nach Aufgabenteil (ii) ist dann $\tilde{f}_C \simeq C^k H_k$. Da $C^k H_k \simeq H_k$ via der Homotopie

$$S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}, (z, t) \mapsto (t + (1-t)C^k) z^k$$

ist daher $\tilde{f}_C \simeq H_k$. Andererseits ist \tilde{f}_C nach Aufgabenteil (i) auch homotop zu einer konstanten Abbildung $c : S^1 \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$.

Bezüglich der Projektion

$$q : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow S^1, z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

die offenbar stetig ist, ist daher auch

$$h_k = qH_k \simeq q\tilde{f}_C \simeq qc.$$

Es ist also h_k homotop zu einer konstanten Schlinge. Wir wissen, dass dies nur für $k = 0$ der Fall ist. Also muss f ein konstantes Polynom sein.