## EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE Blatt 5

#### Jendrik Stelzner

27. Mai 2014

### Aufgabe 5.1:

Wir nehmen zunächst an, dass  $f:S^1\to X$  homotop zu einer konstanten Schlinge ist. Dann gibt es eine Homotopie  $F:S^1\times [0,1]\to X$  mit

$$F(s,0)=\mathrm{const}\,\,\mathrm{und}\,\,$$

$$F(s,1) = f(s)$$

für alle  $s \in S$ . Es sei

$$A := S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times [0,1]$$

und

$$\pi: S^1 \times [0,1] \to (S^1 \times [0,1]) / A$$

die kanonische Projektion.

Es ist klar, dass F als Abbildung

$$\tilde{F}: \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \to X$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig. Wir bemerken weiter, dass  $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A \cong D^2$ : Die Abbildung

$$\phi: S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

ist stetig und surjektiv, und faktorisiert als Bijektion

$$\psi: (S^1 \times [0,1]) / A \to D^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da  $S^1 \times [0,1]$  als Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist auch  $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A$  quasikompakt. Da  $D^2$  Hausdorff ist, ist damit  $\psi$  bereits ein Homöomorphismus.

Über den Homö<br/>omorphismus  $\psi$ faktorisiert  $\tilde{F}$ als stetige Abbildung <br/>  $\bar{F}:D^2\to X.$  Insgesamt ergibt sich damit ein Diagramm wie in Abbildung 1. Dieses Diagramm kommutiert: Nach Konstruktion ist  $\phi=\psi\pi,$  sowi<br/>e $F=\tilde{F}\pi$ und  $\tilde{F}=\bar{F}\psi.$  Daher ist auch

$$F = \tilde{F}\pi = \bar{F}\psi\pi = \bar{F}\phi.$$

Da für alle  $s \in S^1$ 

$$\bar{F}(s) = \bar{F}\phi(s, 1) = F(s, 1) = f(s)$$

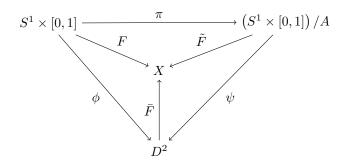


Abbildung 1: Faktorisierungen der Homotopie.

ist  $\bar{F}$  eine stetige Fortsetzung von f auf  $D^2$ .

Angenommen,  $f:S^1\to X$  lässt sich zu einer stetigen Abbildung  $\bar F:D^2\to X$  fortsetzen. Mithilfe der stetigen Abbildung

$$\phi: S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

erhalten wir dann die Homotopie

$$F := \bar{F}\phi : S^1 \times [0,1] \to X.$$

Da für alle  $s \in S^1$ 

$$F(s,0) = \bar{F}(\phi(s,0)) = \bar{F}(0) = \text{const und}$$
  
 $F(s,1) = \bar{F}(\phi(s,1)) = \bar{F}(s) = f(s)$ 

ist f homotop zu einer konstanten Schlinge.

# Aufgabe 5.2:

Ist X zusammenziehbar, so gibt es einen einelementigen Raum \* und eine Homotopieäquivalenz  $\varphi:X\to *$ . Diese induziert, wie aus Aufgabe 4.4 bekannt, für jeden Raum K eine Bijektion

$$\varphi_*^K : [K, X] \to [K, *], [f] \mapsto [\varphi f].$$

Da [K,\*] immer einelementig ist, ist dann [K,X] für jeden Raum K einelementig. Besteht [K,X] für jeden Raum K aus nur einem Element, so ist insbesondere [X,X] einelementig, also jede (konstante) Abbildung  $X\to X$  homotop zu id $_X$ .

Ist id $_X$  homotop zu einer konstanten Abbildung, so gibt es ein  $x_0 \in X$ , so dass id $_X \simeq f$  für die konstante Funktion  $f: X \to X, x \mapsto x_0$ . Für den Teilraum  $* = \{x_0\}$  ist dann für die kanonische Inklusion  $\iota: * \to X$  und  $g: X \to *, x \mapsto x_0$ 

$$g\iota=\operatorname{id}_*\ \operatorname{und}\,\iota g=f\simeq\operatorname{id}_X.$$

Also ist g eine Homotopieäquivalenz und X deshalb zusammenziehbar.

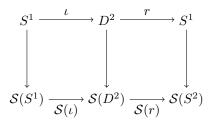


Abbildung 2: Funktoreigenschaften von  $X \mapsto \mathcal{S}(X)$ .

### **Aufgabe 5.3:** (Brouwerscher Fixpunktsatz)

(i)

Für die Homotopie

$$F: D^2 \times [0,1] \to D^2, (x,t) = tx$$

ist für alle  $x \in D^2$ 

$$F(x,0) = 0 = \text{const und}$$
  
 $F(x,1) = x = \text{id}_{D^2}(x).$ 

Deshalb ist  $\mathrm{id}_{D^2}$  homotop zu einer konstanten Abbildung. Also ist  $D^2$  zusammenziehbar, und deshalb  $\left[K,D^2\right]$  für jeden Raum K einelementig. Insbesondere ist daher  $\mathcal{S}\left(D^2\right)=\left[S^1,D^2\right]$  einelementig.

Gibt es eine stetige Abbildung  $r:D^2\to S^1$  mit  $r_{|S^1}=\mathrm{id}_{S^1}$ , so ergibt sich aus den Funktoreigenschaften von  $X\mapsto \mathcal{S}(X)$  das kommutatives Diagramm in Abbildung 2, wobei  $\iota:S^1\to D^2$  die kanonische Inklusion bezeichnet.

Da  $r\iota=\mathrm{id}_{S^1}$  ist auch

$$S(r)S(\iota) = S(r\iota) = S(\mathrm{id}_{S^1}) = \mathrm{id}_{S(S^1)}$$

Inbesondere muss daher S(r) surjektiv sein, da es  $S(\iota)$  als Rechtsinverses besitzt. Es ist jedoch  $S(D^2)$  einelementig und  $S(S^1)$  abzählbar unendlich (aus der Vorlesung bekannt). Dieser Widerspruch zeigt, dass keine solche Abbildung r existieren kann.

# Aufgabe 5.4: (Fundamentalsatz der Algebra)

(i)

Sei  $t\geq 0$  beliebig aber fest. Für  $\iota_t:S^1\to\mathbb{C},z\mapsto tz$  ergibt sich das kommutative Diagramm in Abbildung 3. Da  $\mathbb{C}$  zusammenziehbar ist (denn  $\mathbb{C}$  ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ ), ist  $\iota_t$  homotop zu einer konstanten Abbildung  $c:S^1\to\mathbb{C}$ , also  $f_t=f\iota_t$  homotop zur konstanten Abbildung fc. (Analog ergibt sich, dass jede stetige Funktion, die über einen zusammenziehbaren Raum faktorisiert, homotop zu einer konstanten Abbildung ist).

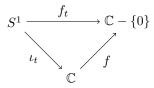


Abbildung 3:  $f_t$  faktorisiert durch  $\iota_t$  über  $\mathbb{C}$ .

(ii)

Wir definieren

$$F: S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C} - \{0\},$$
 
$$(z,t) \mapsto C^k z^k + t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l.$$

F ist wohldefiniert, denn für alle  $(z,t) \in S^1 \times [0,1]$  ist

$$|F(z,t)| = \left| C^k z^k + t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l \right| \ge \left| C^k z^k \right| - \left| t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l \right|$$

$$\ge C^k - t \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l \ge C^k - \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l > 0.$$

Es ist auch klar, dass Fstetig ist, also eine Homotopie ist. Für alle  $z \in S^1$  ist

$$F(z,0) = C^k z^k$$
 und  $F(z,1) = \tilde{f}_C(z)$ .

Das zeigt, dass  $\tilde{f}_C \simeq (z \mapsto C^k z^k)$ .

(iii)

Für  $k \in \mathbb{Z}$  sei

$$H_k: S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}, z \mapsto z^k \text{ und } h_k: S^1 \to S^1, z \mapsto z^k.$$

Es ist klar, dass  $H_k$  und  $h_k$  für alle  $k\in\mathbb{Z}$  stetig sind. Es sei  $k:=\deg f$ . Dann gibt es  $C\geq 0$ , so dass

$$C^k > \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l.$$

Nach Aufgabenteil (ii) ist dann  $\tilde{f}_C \simeq C^k H_k$ . Da $C^k H_k \simeq H_k$  via der Homotopie

$$S^1\times[0,1]\to\mathbb{C}-\{0\},(z,t)\mapsto\left(t+(1-t)C^k\right)z^k$$

ist daher  $\tilde{f}_C \simeq H_k$ . Andererseits ist  $\tilde{f}_C$  nach Aufgabenteil (i) auch homotop zu einer konstanten Abbildung  $c: S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}$ .

Bezüglich der Projektion

$$q: \mathbb{C} - \{0\} \to S^1, z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

die offenbar stetig ist, ist daher auch

$$h_k = qH_k \simeq q\tilde{f}_C \simeq qc.$$

Es ist also  $h_k$  homotop zu einer konstanten Schlinge. Wir wissen, dass dies nur für k=0 der Fall ist. Also muss f ein konstantes Polynom sein.