Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 3

Jendrik Stelzner

6. Mai 2014

Aufgabe 3.1:

Es sei X ein quasikompakter Raum. Wir nehmen an, dass X nicht folgenkompakt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Es gibt also für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x, so dass nur endlich viele Folgeglieder in U_x sind. Da U_x eine offene Umgebung von x enthält, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass die U_x alle offen sind.

Es ist $\{U_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X quasikompakt ist gibt es daher $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Da $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ jeweils nur endlich viele Folgeglieder enthalten, enthält X nur endlich viele Folgeglieder — ein offensichtlicher Widerspruch.

Das zeigt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzt, und damit, dass X folgenkompakt ist. Also ist jeder quasikompakte Raum folgenkompakt.

Aufgabe 3.2:

Wir setzen $Y := X \times X$ und $\Delta := \Delta(X)$. Für $A, B \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}(A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in X : (x,x) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : x \in A \text{ und } x \in B \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,\end{aligned}$$

also

$$A \times B \subseteq Y - \Delta \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Da die Mengen der Form $U \times V \subseteq Y$ mit offenen $U, V \subseteq X$ eine Basis der Produkttopologie auf Y bilden, gilt

$$\begin{aligned}&W \subseteq Y \text{ ist offen} \\ \Leftrightarrow\, &\forall (x,y) \in W \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } (x,y) \in U \times V \subseteq W \\ \Leftrightarrow\, &\forall (x,y) \in W \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V \text{ und } U \times V \subseteq W.\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt daher

$$
\begin{aligned}
&\Delta \text{ ist abgeschlossen in } Y\\
\Leftrightarrow\, & Y - \Delta \text{ ist offen in } Y\\
\Leftrightarrow\, & \forall (x,y) \in (Y-\Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \times V \subseteq Y - \Delta\\
\Leftrightarrow\, & \forall (x,y) \in (Y-\Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset\\
\Leftrightarrow\, & \forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset\\
\Leftrightarrow\, & X \text{ ist Hausdorffsch.}
\end{aligned}
$$

Fun fact: Ein alternativer, intuitiverer Beweis lässt sich mithilfe von Netzen formulieren: Dass Δ abgeschlossen ist, ist äquivalent dazu, dass für jedes Netz (h_α) auf Δ, das gegen ein $h \in X \times X$ konvergiert, bereits $h \in \Delta$. Da $(h_\alpha) = (x_\alpha, x_\alpha)$ für ein Netz x_α auf X und $h = (x, y)$ mit $x, y \in X$ ist dies äquivalent dazu, dass für jedes Netz (x_α) auf X mit $x_\alpha \to x$ und $x_\alpha \to y$ bereits $x = y$. Dies bedeutet gerade, dass Grenzwerte von Netzen auf X eindeutig sind, was bekanntermaßen äquivalent dazu ist, dass X Hausdorff ist.

Aufgabe 3.3:

Es bezeichne $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ mit

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x.$$

Außerdem sei

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

die n-Sphäre und

$$\tilde{D}^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}.$$

die „nördliche“ Hemisphäre der S^n. Man bemerke, dass $\sim$ auf S^n genau die Antipodenpunkte miteinander identifiziert, also den Punkt $x \in S^n$ mit dem Punkt $-x \in S^n$. Es bezeichne außerdem $\sim^*$ die Äquivalenzrelation auf D^n, die die Antipodenpunkte des Randes von D^n miteinander identfiziert, also jeden Punkt $x \in S^{n-1} \subseteq D^n$ mit dem Antipodenpunkt $-x \in S^{n-1} \subseteq D^n$. Es seien

$$\varphi : D^n \to \tilde{D}^n, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$$

und

$$\psi : S^n/\sim \to \mathbb{R}P^n, [x]_\sim \mapsto [x]_\sim.$$

Wir haben bereits letze Woche gezeigt, dass

$$D^n/\sim^* \cong \tilde{D}^n/\sim \cong S^n/\sim \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim \cong \mathbb{R}P^n,$$

wobei der Homöomorphismus $D^n/\sim^*, \cong \tilde{D}^n/\sim$ durch φ induziert wird, der Homöomorphismus $\tilde{D}^n/\sim \cong S^n/\sim$ durch die kanonische Inklusion $\tilde{D}^n \hookrightarrow S^n$ induziert wird, und der Homöomorphismus $S^n/\sim \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$ durch ψ gegeben ist. Auch haben wir im Laufe des Nachweises dieser Homöomorphien gezeigt, dass $S^n/\sim$ Hausdorff ist.

1.

Dies haben wir bereits letzte Woche gezeigt.

2.

Dies folgt direkt daraus, dass $S^n/\sim \cong \mathbb{R}P^n$, und dass $S^n/\sim$ Hausdorff ist.

3.

Es bezeichne $\sim$ die Äquivalenzrelation auf S^2, die jeden Punkt $x \in S^2$ mit dem Antipodenpunkt $-x \in S^2$ identifiziert, sowie $\pi : S^2 \to S^2/\sim$ die kanonische Projektion. Wir setzen

$$\begin{aligned}
S &:= \left\{(x,y,z) \in S^2 : z \geq \frac{1}{2} \text{ oder } z \leq -\frac{1}{2}\right\}, \\
T &:= \left\{(x,y,z) \in S^2 : -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}\right\} \text{ und} \\
R &:= S \cap T = \left\{(x,y,z) \in S^2 : z = -\frac{1}{2} \text{ oder } z = \frac{1}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass S, T und R abgeschlossen in S^2 sind. Wir bemerken auch, dass die drei Mengen saturiert bezüglich $\sim$ sind, dass also $\pi^{-1}(\pi(X)) = X$ für alle $X \in \{S, T, R\}$. Insbesondere sind daher auch $\pi(S), \pi(T)$ und $\pi(R)$ abgeschlossen in $S/\sim$.

Bekanntermaßen ist $S^2/\sim \cong \mathbb{R}P^2$. Es sei $f : S^2/\sim \to \mathbb{R}P^2$ ein Homöomorphismus. Wir setzen

$$A := f(\pi(S)), B := f(\pi(T)) \text{ und } C := A \cap B.$$

Wir bemerken dabei direkt, dass $C = f(\pi(R))$, da

$$\begin{aligned}
C = A \cap B &= f(\pi(S)) \cap f(\pi(T)) = f(\pi(S) \cap \pi(T)) \\
&= f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S) \cap \pi(T)))) = f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S)) \cap \pi^{-1}(\pi(T)))) \\
&= f(\pi(S \cap T)) = f(\pi(R)).
\end{aligned}$$

Da $\pi(X)$ für alle $X \in \{S, T, R\}$ abgeschlossen in $S^2/\sim$ ist, und f ein Homöomorphismus ist, sind A, B und C abgeschlossen in $\mathbb{R}P^2$.

Da $f : S^2/\sim \to \mathbb{R}P^n$ ein Homöomorphismus ist, ist klar, dass auch die Einschränkung

$$\pi(S) \to f(\pi(S)) = A, x \mapsto f(x)$$

ein Homöomorphismus ist. Daher ist $\pi(S) \cong A$.

Wir bemerken, dass auch $S/\sim \cong \pi(S)$: Die stetige Abbildung $S \to \pi(S), x \mapsto \pi(x)$ faktorisiert offenbar als Bijektion $S/\sim \to \pi(S)$ (denn es ist $\pi(s) = \pi(s') \Leftrightarrow s \sim s'$), die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da S kompakt ist (denn S^2 ist kompakt und $S \subseteq S^2$ abgeschlossen) und $\pi(S)$ Hausdorff ist (denn $\pi(S) \subseteq S^2/\sim$ mit $S^2/\sim$ Hausdorff) ist g bereits ein Homöomorphismus. Dies lässt sich in dem kommutativen Diagram von Abbildung 1 zusammenfassen.

Das zeigt, dass $S/\sim \cong A$. Komplett analog ergibt sich, dass auch $T/\sim \cong B$ und $R/\sim \cong C$. Wir zeigen nun, dass $S/\sim \cong D^2$, $T/\sim \cong M$ und $R/\sim \cong S^1$. Dabei ist die Homöomorphie $T/\sim \cong M$ bereits aus Aufgabe 2.3 bekannt.

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S/{\sim} \arrow[rr, "g"'] & & \pi(S)
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Die Homöomorphie von $S/{\sim}$ und $\pi(S)$.

Für die Homöomorphie $S/{\sim} \cong D^2$ betrachten wir die Abbildung

$$h : S \to D^2, (x, y, z) \to \frac{\sqrt{3}}{2}(x, y).$$

Diese ist offenbar wohldefiniert und surjektiv. (Man beachte, dass für alle $(x, y, z) \in S$

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und Gleichheit für $z = \pm 1/2$ gilt.) Es ist auch klar, dass h stetig ist, und dass h als Bijektion $\tilde{h} : S/{\sim} \to D^2$ faktorisiert, die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da $S/{\sim}$ als Quotient eines quasi-kompakten Raumes selbser quasi-kompakt ist, und D^2 Hausdorff ist, ist $\tilde{h}$ bereits ein Homöomorphismus.

Wir haben gezeigt, dass

$$A \cong \pi(S) \cong S/{\sim} \cong D^2.$$

Komplett analog zeigt man auch dass $R/{\sim} \cong S^1$, und damit, dass

$$C \cong \pi(R) \cong R/{\sim} \cong S^1.$$