Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 3

Jendrik Stelzner

6. Mai 2014

Aufgabe 3.1:

Es sei X ein quasikompakter Raum. Wir nehmen an, dass X nicht folgenkompakt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Es gibt also für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x, so dass nur endlich viele Folgeglieder in U_x sind. Da U_x eine offene Umgebung von x enthält, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass alle U_x offen sind.

Es ist $\{U_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X quasikompakt ist gibt es daher $y_1, \ldots, y_n \in X$ mit $X = U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}$. Da $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ jeweils nur endlich viele Folgeglieder enthalten, enthält X nur endlich viele Folgeglieder — ein offensichtlicher Widerspruch.

Das zeigt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzt, und damit, dass X folgenkompakt ist. Also ist jeder quasikompakte Raum folgenkompakt.

Aufgabe 3.2:

Wir setzen $Y := X \times X$ und $\Delta := \Delta(X)$. Für $A, B \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}(A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in X : (x,x) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : x \in A \text{ und } x \in B \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,\end{aligned}$$

und deshalb

$$A \times B \subseteq Y - \Delta \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Da die Mengen der Form $U \times V \subseteq Y$ mit offenen $U, V \subseteq X$ eine Basis der Produkttopologie auf Y bilden, gilt

$$\begin{aligned}&W \subseteq Y \text{ ist offen} \\ \Leftrightarrow &\forall (x,y) \in W \text{ gibt es } U, V \subseteq X \text{ offen mit } (x,y) \in U \times V \subseteq W \\ \Leftrightarrow &\forall (x,y) \in W \text{ gibt es } U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V \text{ und } U \times V \subseteq W.\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt daher

$$\begin{aligned}
&\Delta \text{ ist abgeschlossen in } Y \\
\Leftrightarrow\, &Y - \Delta \text{ ist offen in } Y \\
\Leftrightarrow\, &\forall (x,y) \in (Y-\Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \times V \subseteq Y - \Delta \\
\Leftrightarrow\, &\forall (x,y) \in (Y-\Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \\
\Leftrightarrow\, &\forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \\
\Leftrightarrow\, &X \text{ ist Hausdorff.}
\end{aligned}$$

Fun fact: Ein alternativer, intuitiverer Beweis lässt sich mithilfe von Netzen formulieren: Es ist

$$\overline{\Delta} = \{h \in X \times X : \text{ es gibt ein Netz } (h_\alpha) \text{ auf } \Delta \text{ mit } h_\alpha \to h \text{ in } X \times X.$$

Dass Δ abgeschlossen ist, ist daher äquivalent dazu, dass für jedes Netz (h_α) auf Δ, das gegen ein $h \in X \times X$ konvergiert, bereits $h \in \Delta$.

Wir bemerken, dass ein Netz (h_α) auf Δ von der Form

$$(h_\alpha) = (x_\alpha, x_\alpha)$$

ist, wobei (x_α) ein Netz auf X ist, und dass $h = (x, y)$ mit $x, y \in X$. Da ein Netz in einem Produktraum genau dann konvergiert, wenn es in jeder einzelnen Koordinate konvergiert, ist die obige Aussage äquivalent dazu, dass für jedes Netz (x_α) auf X und alle $x, y \in X$ mit $x_\alpha \to x$ und $x_\alpha \to y$ bereits $x = y$.

Es ist also Δ genau dann abgeschlossen in $X \times X$, wenn Grenzwerte von Netzen auf X eindeutig sind. Dies ist bekanntermaßen äquivalent dazu, dass X Hausdorff ist.

Aufgabe 3.3:

Es bezeichne $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ mit

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x.$$

Außerdem sei

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

die n-Sphäre und

$$\tilde{D}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}.$$

die „nördliche" Hemisphäre der S^n. Man bemerke, dass $\sim$ auf S^n genau die Antipodenpunkte miteinander identifiziert, also den Punkt $x \in S^n$ mit dem Punkt $-x \in S^n$. Es bezeichne außerdem $\sim^*$ die Äquivalenzrelation auf D^n, die die Antipodenpunkte des Randes von D^n miteinander identifziert, also jeden Punkt $x \in S^{n-1} \subseteq D^n$ mit dem Antipodenpunkt $-x \in S^{n-1} \subseteq D^n$. Es seien

$$\varphi : D^n \to \tilde{D}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$$

und

$$\psi : S^n/\sim \to \mathbb{R}P^n, [x]_\sim \mapsto [x]_\sim.$$

Wir haben bereits letze Woche gezeigt, dass

$$D^n/\sim^* \cong \tilde{D}^n/\sim \cong S^n/\sim \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim \cong \mathbb{R}P^n,$$

wobei der Homöomorphismus $D^n/\sim^*, \cong \tilde{D}^n/\sim$ durch φ induziert wird, der Homöomorphismus $\tilde{D}^n/\sim \cong S^n/\sim$ durch die kanonische Inklusion $\tilde{D}^n \hookrightarrow S^n$ induziert wird, und der Homöomorphismus $S^n/\sim \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$ durch ψ gegeben ist. Auch haben wir im Laufe des Nachweises dieser Homöomorphien gezeigt, dass $S^n/\sim$ Hausdorff ist.

1.

Dies haben wir bereits letzte Woche gezeigt.

2.

Dies folgt direkt daraus, dass $S^n/\sim \cong \mathbb{R}P^n$, und dass $S^n/\sim$ Hausdorff ist.

3.

Es bezeichne $\sim$ die Äquivalenzrelation auf S^2, die jeden Punkt $x \in S^2$ mit dem Antipodenpunkt $-x \in S^2$ identifiziert, sowie $\pi : S^2 \to S^2/\sim$ die kanonische Projektion. Wir setzen

$$\begin{aligned}
S &:= \left\{ (x,y,z) \in S^2 : z \geq \frac{1}{2} \text{ oder } z \leq -\frac{1}{2} \right\}, \\
T &:= \left\{ (x,y,z) \in S^2 : -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ und} \\
R &:= S \cap T = \left\{ (x,y,z) \in S^2 : z = -\frac{1}{2} \text{ oder } z = \frac{1}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass S, T und R abgeschlossen in S^2 sind. Wir bemerken auch, dass die drei Mengen saturiert bezüglich $\sim$ sind, dass also $\pi^{-1}(\pi(X)) = X$ für alle $X \in \{S, T, R\}$. Insbesondere sind daher auch $\pi(S), \pi(T)$ und $\pi(R)$ abgeschlossen in $S/\sim$.

Bekanntermaßen ist $S^2/\sim \cong \mathbb{R}P^2$. Es sei $f : S^2/\sim \to \mathbb{R}P^2$ ein Homöomorphismus. Wir setzen

$$A := f(\pi(S)), B := f(\pi(T)) \text{ und } C := A \cap B.$$

Wir bemerken dabei direkt, dass $C = f(\pi(R))$, da

$$\begin{aligned}
C = A \cap B &= f(\pi(S)) \cap f(\pi(T)) = f(\pi(S) \cap \pi(T)) \\
&= f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S) \cap \pi(T)))) = f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S)) \cap \pi^{-1}(\pi(T)))) \\
&= f(\pi(S \cap T)) = f(\pi(R)).
\end{aligned}$$

Da $\pi(X)$ für alle $X \in \{S, T, R\}$ abgeschlossen in $S^2/\sim$ ist, und f ein Homöomorphismus ist, sind A, B und C abgeschlossen in $\mathbb{R}P^2$.

Da $f : S^2/\sim \to \mathbb{R}P^n$ ein Homöomorphismus ist, ist klar, dass auch die Einschränkung

$$\pi(S) \to f(\pi(S)) = A, x \mapsto f(x)$$

ein Homöomorphismus ist. Daher ist $\pi(S) \cong A$.

$$
\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S/\sim \arrow[rr, "g"'] & & \pi(S)
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1: Die Homöomorphie von $S/\sim$ und $\pi(S)$.

Wir bemerken, dass auch $S/\sim \cong \pi(S)$: Die stetige Abbildung $S \to \pi(S), x \mapsto \pi(x)$ faktorisiert offenbar als Bijektion $S/\sim \to \pi(S)$ (denn es ist $\pi(s) = \pi(s') \Leftrightarrow s \sim s'$), die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da S kompakt ist (denn S^2 ist kompakt und $S \subseteq S^2$ abgeschlossen) und $\pi(S)$ Hausdorff ist (denn $\pi(S) \subseteq S^2/\sim$ mit $S^2/\sim$ Hausdorff) ist g bereits ein Homöomorphismus. Dies lässt sich in dem kommutativen Diagram von Abbildung 1 zusammenfassen.

Das zeigt, dass $S/\sim \cong A$. Komplett analog ergibt sich, dass auch $T/\sim \cong B$ und $R/\sim \cong C$. Wir zeigen nun, dass $S/\sim \cong D^2$, $T/\sim \cong M$ und $R/\sim \cong S^1$. Dabei ist die Homöomorphie $T/\sim \cong M$ bereits aus Aufgabe 2.3 bekannt.

Für die Homöomorphie $S/\sim \cong D^2$ betrachten wir die Abbildung

$$h : S \to D^2, (x, y, z) \to \frac{\sqrt{3}}{2}(x, y).$$

Diese ist offenbar wohldefiniert und surjektiv. (Man beachte, dass für alle $(x, y, z) \in S$

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und Gleichheit für $z = \pm 1/2$ gilt.) Es ist auch klar, dass h stetig ist, und dass h als Bijektion $\tilde{h} : S/\sim \to D^2$ faktorisiert, die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da $S/\sim$ als Quotient eines quasi-kompakten Raumes selbser quasi-kompakt ist, und D^2 Hausdorff ist, ist $\tilde{h}$ bereits ein Homöomorphismus.

Wir haben gezeigt, dass

$$A \cong \pi(S) \cong S/\sim \cong D^2.$$

Komplett analog zeigt man auch dass $R/\sim \cong S^1$, und damit, dass

$$C \cong \pi(R) \cong R/\sim \cong S^1.$$

Aufgabe 3.4:

1.

Wir zeigen zunächst, dass jedes Element von $\mathrm{SO}(3)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt.

Sei zunächst $A \in \mathrm{SO}(2)$. Wir behaupten, dass es ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ gibt, so dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Es sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Da
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
muss $a = d$ und $b = -c$, also
$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$
Da
$$1 = \det A = a^2 + c^2$$
gibt es also ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ mit $a = \cos\varphi$ und $c = \sin\varphi$. Das zeigt die Behauptung.

Für $B \in \mathrm{O}(2)$ mit $B \notin \mathrm{SO}(2)$ ist
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \in \mathrm{SO}(2),$$
also gibt es ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ mit
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}.$$
Für das charakteristische Polynom χ_B von B gilt daher
$$\begin{aligned} \chi_B &= (-t + \sin\varphi)(-t - \sin\varphi) - \cos^2\varphi \\ &= t^2 - \sin^2\varphi - \cos^2\varphi = t^2 - 1 \\ &= (t+1)(t-1). \end{aligned}$$
Also besitzt B einen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Das zeigt, dass jedes Matrix $B \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt. (Diese Aussage ist auch geometrisch klar.)

Sei nun $C \in \mathrm{SO}(3)$. Da χ_C ein reelles Polynom ungeraden Grades ist, besitzt χ_C eine reelle Nullstelle, d.h. C besitzt einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Da für einen entsprechenden Eigenvektor v gilt, dass
$$\|v\| = \|Cv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$$
muss $|\lambda| = 1$, also $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$. Angenommen es ist $\lambda = -1$. Indem wir das orthogonale Komplement von $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ in $\mathbb{R}^3$ betrachtent, also $\langle v \rangle_R^\perp$, können wir C durch einen passenden Basiswechsel eine Matrix der Form
$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & A \end{pmatrix}$$
überführen, wobei $A \in \mathrm{O}(2)$. Da $1 = \det C = -1 \det A$ muss $\det A = -1$, also $A \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$. Nach der obigen Diskussion besitzt daher A einen Eigenvektor zum Eigenwert 1, also auch C.

Insbesondere lässt sich jede Matrix $A \in \mathrm{SO}(3)$ durch einen passenden Basiswechsel in die Form
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

$$
\begin{tikzcd}
D^3 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{SO}(3) \\
& D^3 \arrow[ur, "\tilde{p}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2: p ist eine Quotientenabbildung.

mit $A' \in \mathrm{SO}(2)$ überführen, also in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [-\pi, \pi]$, wobei A auf $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ durch Rotation um den Winkel φ operiert, wobei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist.

Sei nun $f \in \mathrm{SO}(3)$ mit Eigenvektor v zum Eigenwert 1, so dass f auf $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ durch Rotation um den Winkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$ wirkt. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $v \in S^2 \subseteq D^3$. Es hat dann f unter p offensichtlich das Urbild $(\varphi/\pi)v$.

3.

Der Fall $p(x) = p(y) = E$ ist trivial, es müssen dann $x = y = 0$. Wir betrachten daher im Folgenden den Fall, dass $p(x) = p(y) \neq E$, also insbesonder $x, y \neq 0$.

Da $p(x) = p(y)$, haben $p(x)$ und $p(y)$ die gleiche Rotationsachso, nämlich $\langle x \rangle_{\mathbb{R}}$, bzw. $\langle y \rangle_{\mathbb{R}}$. Daher müssen x und y linear abhängig sein.

Ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda > 0$, so rotieren $p(x)$ und $p(y)$ gleichorientiert, also um den Winkel $\pi \cdot \|x\|$ und $\pi \cdot \|y\|$. Es muss daher $\|x\| = \|y\| = \lambda \|x\|$, also $\lambda = 1$ und somit $x = y$.

Ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda < 0$, so rotieren $p(x)$ und $p(y)$ unterschiedlich orientiert, also um die Winkel $\pi \cdot \|x\|$ und $\pi \cdot \|y\|$. Damit diese Rotationen gleich sind, muss $\|x\| = \|y\| = 1$. Es ist dann $\lambda = -1$ und somit $x = -y$.

3.

Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ auf D^3, die jeden Punkt $x \in S^2 \subseteq D^3$ mit seinem Antipodenpunkt $-x$ identifiziert. Durch den vorherigen Aufgabenteil ergibt sich, dass $x \sim y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$ für alle $x, y \in D^3$. Daher faktorisiert p als Bijektion $\tilde{p} : D^3/{\sim} \to \mathrm{SO}(3)$, die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist (denn p ist nach Annahme stetig). Da $D^3/{\sim}$ als Quotient eines quasikompakten Raumes ebenfalls quasikompakt ist, und $\mathrm{SO}(3) \subseteq R^9$ Hausdorff ist, ist $\tilde{p}$ bereits ein Homöomorphismus.

Wir betrachten das kommutative Diagramm in Abbildung 2. Da $\tilde{p}$ und π offenbar Quotientenabbildungen sind, ist es offenbar auch $p = \tilde{p} \circ \pi$, denn für $U \subseteq \mathrm{SO}(3)$ ist

$$U \text{ ist offen } \Leftrightarrow \tilde{p}^{-1}(U) \text{ ist offen } \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}\left(\tilde{p}^{-1}(U)\right) \text{ ist offen.}$$

$$\begin{tikzcd}
D^3 \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}P(3) \\
& D^3 \arrow[ur, "\tilde{q}"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3: q ist eine Quotientenabbildung.

$$\begin{tikzcd}
& D^3 \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "q"] & \\
\mathrm{SO}(3) & D^3/{\sim} \arrow[l, "\tilde{p}"] \arrow[r, "\tilde{q}"'] & \mathbb{R}P^3
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4: Alles zusammen.

4.

Wir haben letzte Woche gezeigt, dass das Diagramm in Abbildung 3 kommutiert, und dass $\tilde{q}$ ein Homöomorphismus ist. Da π eine Quotientenabbildung ist, ist damit analog zur obigen Argumentation auch q eine Quotientenabbildung. ($\tilde{q}$ entspricht dem Homöomorphismus $D^n/{\sim^*} \cong \mathbb{R}P^n$).

5.

Es ist $q(x) = q(y)$ genau dann, wenn $\pi(x) = \pi(y)$, also wenn $x \sim^* y$, also wenn $x = y$ oder $x, y \in S^2 \subseteq D^3$ mit $x = -y$.

6.

Wir haben das kommutative Diagramm wie in Abbildung 4. Da $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ Homöomorphismen sind ist auch $f : \tilde{p} \circ \tilde{q}^{-1} : \mathbb{R}P^3 \to \mathrm{SO}(3)$ ein Homöomorphismus, und da das Diagramm kommutiert ist

$$f \circ q = \tilde{p} \circ \tilde{q}^{-1} \circ q = \tilde{p} \circ \pi = p.$$

f ist auch durch die Eigenschaft, dass $f \circ q = p$ bereits eindeutig bestimmt: Ist nämlich $g : \mathbb{R}P^3 \to \mathrm{SO}(3)$ eine stetige Abbildung mit $g \circ q = p$, so ist

$$g(q(x)) = p(x) = f(q(x)) \text{ für alle } x \in D^3,$$

da q surjektiv ist also bereits $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}P^3$ und somit $f = g$.