Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 1

Jendrik Stelzner

18. April 2014

Aufgabe 1.1:

Da in der Aufgabenstellung nicht angegeben ist, bezüglich welcher Topologien die Räume betrachtet werden sollen, gehen wir davon aus, dass die durch die euklidische Norm $\|\cdot\|$ induzierte Topologie gemeint ist.

Wir definieren

$$f : \operatorname{inn}\left(D^2\right) \to \operatorname{inn}\left(D^2\right), x \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{1-\|x\|} & -\sin\frac{1}{1-\|x\|} \\ \sin\frac{1}{1-\|x\|} & \cos\frac{1}{1-\|x\|} \end{pmatrix} \cdot x.$$

f ist wohldefiniert, denn

$$\operatorname{inn}\left(D^2\right) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}.$$

und $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \operatorname{inn}\left(D^2\right)$, da Rotationsmatrizen orthogonal sind.

Wir behaupten, dass f ein Homöomorphismus von $\operatorname{inn}\left(D^2\right)$ ist.

Zum Nachweis der Bijektivität definieren wir

$$g : \operatorname{inn}\left(D^2\right) \to \operatorname{inn}\left(D^2\right), x \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{1-\|x\|} & \sin\frac{1}{1-\|x\|} \\ -\sin\frac{1}{1-\|x\|} & \cos\frac{1}{1-\|x\|} \end{pmatrix} \cdot x.$$

Die Wohldefiniertheit von g ergibt sich analog zu der von f. Da $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \operatorname{inn}\left(D^2\right)$ sieht man, dass $(fg)(x) = x$ und $(gf)(x) = x$ für alle $x \in \operatorname{inn}\left(D^2\right)$, also $fg = gf = \mathrm{id}_{\operatorname{inn}(D^2)}$. Das zeigt, dass f bijektiv ist mit $g = f^{-1}$.

Die Stetigkeit von f und g ergibt sich direkt daraus, dass sie Verknüpfung stetiger Funktionen sind. Das zeigt, dass f ein Homöomorphismus ist.

Wir behaupten weiter, dass sich f nicht zu einer stetigen Abbildung $D^2 \to D^2$ fortsetzen lässt. Angenommen, es gebe eine solche stetige Fortsetzung F von f. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf D^2 mit

$$a_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n\pi} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Offenbar gilt $a_n \to e_1 = (1,0)^T$ für $n \to \infty$ in D^2. Aufgrund der Folgenstetigkeit von F (in metrischen Räumen ist Folgenstetigkeit äquivalent zu Stetigkeit) ist daher auch $F(a_n) \to F(e_1)$ für $n \to \infty$ in D^2. Da $a_n \in \operatorname{inn}(D^2)$ für alle $n \geq 1$ ist jedoch

$$F(a_n) = f(a_n) = \begin{pmatrix} \cos(n\pi) & -\sin(n\pi) \\ \sin(n\pi) & \cos(n\pi) \end{pmatrix} a_n = (-1)^n a_n \text{ für alle } n \geq 1,$$

und die Folge $((-1)^n a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert in D^2 offensichtlich nicht. Dieser Widerspruch zeigt, dass f keine stetige Fortsetzung $D^2 \to D^2$ besitzt.

Aufgabe 1.2:

(a)

Angenommen $[0,1]$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es $U, V \subseteq [0,1]$ mit $U, V \neq \emptyset$ und $[0,1] = U \mathbin{\dot\cup} V$, so dass U und V offen in $[0,1]$ sind. Dabei können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass $1 \in V$.

Wir bemerken, dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U mit $a_n \to a$ in $\mathbb{R}$ auch $a \in U$ ist: Da V offen in $[0,1]$ ist gibt es $W \subseteq \mathbb{R}$ offen, so dass $V = [0,1] \cap W$. Es ist daher $U = [0,1] \cap (\mathbb{R} - W)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$, und deshalb $a \in U$. (Aus der Analysis ist bereits bekannt, dass eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A mit $a_n \to a$ in $\mathbb{R}$ auch $a \in A$.) Analog ergibt sich, dass für jede Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf V mit $b_n \to b$ in $\mathbb{R}$ schon $b \in V$.

Sei nun $c = \sup U$. Da $\emptyset \neq U \subseteq [0,1]$ ist $c \in [0,1]$, also entweder $c \in U$ oder $c \in V$. Da es nach Definition von c eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $a_n \to c$ in $\mathbb{R}$ gibt, muss $c \in U$. Inbesondere ist daher $c \notin V$ und $c < 1$.

Da $(c, 1] \subseteq V$ gibt es eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf V mit $b_n \to c$ in $\mathbb{R}$. Daher muss $c \in V$, was im Widerspruch zu $c \notin V$ steht.

Das zeigt, dass es keine solchen Mengen U und V geben kann. Also muss $[0,1]$ zusammenhängend sein.

(b)

Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Angenommen, X wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U, V \neq \emptyset$, so dass $X = U \mathbin{\dot\cup} V$. Es sei $x \in U$ und $y \in V$.

Da X wegzusammenhängend ist gibt es eine stetige Abbildung $\lambda : [0,1] \to X$ mit $\lambda(0) = x$ und $\lambda(1) = y$. Es ist daher

$$[0,1] = \lambda^{-1}(X) = \lambda^{-1}(U \mathbin{\dot\cup} V) = \lambda^{-1}(U) \mathbin{\dot\cup} \lambda^{-1}(V),$$

mit $\lambda^{-1}(U) \neq \emptyset$ da $0 \in \lambda^{-1}(U)$ und $\lambda^{-1}(V) \neq \emptyset$ da $1 \in \lambda^{-1}(V)$. Da U, V offen in X sind und λ stetig ist, sind $\lambda^{-1}(U), \lambda^{-1}(V)$ offen in $[0,1]$. Es folgt, dass $[0,1]$ nicht zusammenhängend ist, was falsch ist.

Das zeigt, dass es keine solchen Mengen U und V gibt. Also ist X zusammenhängend.

Aufgabe 1.4:

(a)

Für alle $x, y \in X$ ist

$$d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

und

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} = \frac{d(y,x)}{d(y,x)+1} = d'(y,x),$$

da d eine Metrik auf X ist. Die Dreiecksungleichung für d' ergibt sich aus der Dreiecksungleichung für d durch

$$\begin{aligned} d'(x,z) &= \frac{d(x,z)}{d(x,z)+1} = 1 - \frac{1}{d(x,z)+1} \leq 1 - \frac{1}{d(x,y)+d(y,z)+1} \\ &= \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d'(x,y) + d'(y,z) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in X$. Das zeigt, dass d'' eine Metrik auf X ist.

(b)

Für alle $x, y \in X$ ist

$$d''(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{d(x,y), 1\} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

und

$$d''(x,y) = \min\{d(x,y), 1\} = \min\{d(y,x), 1\} = d''(y,x),$$

da d eine Metrik auf X ist. Die Dreiecksungleichung für d'' ergibt sich aus der Dreiecksungleichung für d durch

$$\begin{aligned} d''(x,z) &= \min\{d(x,z), 1\} \leq \min\{d(x,y) + d(y,z), 1\} \\ &\leq \min\{d(x,y), 1\} + \min\{d(y,z), 1\} = d''(x,y) + d''(y,z) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in X$. Dabei haben wir genutzt, dass

$$\min\{a+b, c\} \leq \min\{a+b, a+c, c+b, 2c\} = \min\{a, c\} + \min\{b, c\}$$

für alle $a, b, c \geq 0$.

(c)

Es ist klar, dass d und d'' die gleich Topologie induzieren, denn für eine Teilmenge $U \subseteq X$ und einen Punkt $x \in U$ gibt es genau dann ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, wenn es ein $0 < \varepsilon\text{'} \leq 1$ mit $B_{\varepsilon'}(x) \subseteq U$ gibt. (Existiert ein solches ε', so kann man $\varepsilon = \varepsilon'$ wählen; existiert ein solches ε, so kann man $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$ wählen.)

d' und d'' induzieren die gleiche Topologie auf X, da

$$d'(x,y) \leq d''(x,y) \leq 2d'(x,y) \text{ für alle } x, y \in X,$$

was sich aus

$$\frac{a}{a+1} \leq \min\{a, 1\} \leq \frac{2a}{a+1} \text{ für alle } a \geq 0.$$

ergibt.

Der erste Teil der Ungleichung folgt daraus, dass für alle $a \geq 0$

$$\frac{a}{a+1} \leq a \text{ und } \frac{a}{a+1} \leq 1$$

und damit

$$\frac{a}{a+1} \leq \min\{a, 1\}.$$

Der zweite Teil der Ungleichung ergibt sich wegen

$$\min\{a,1\} \leq \frac{2a}{a+1} \Leftrightarrow (a+1)\min\{a,1\} \leq 2a \text{ für alle } a \geq 0$$

durch eine einfache Fallunterscheidung: Für $0 \leq a < 1$ ist

$$(a+1)a \leq 2a \Leftrightarrow a(1-a) \geq 0,$$

was offenbar gilt, und für $a \geq 1$ ist

$$a+1 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1.$$

Das zeigt, dass auch d' und d'' die gleiche Topologie induzieren.