

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

BLATT 1

Jendrik Stelzner

19. April 2014

Aufgabe 1.1:

Da in der Aufgabenstellung nicht angegeben ist, bezüglich welcher Topologien die Räume betrachtet werden sollen, gehen wir davon aus, dass die durch die euklidische Norm $\|\cdot\|$ induzierte Topologie gemeint ist.

Wir definieren

$$f : \text{inn}(D^2) \rightarrow \text{inn}(D^2), x \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{1-\|x\|} & -\sin \frac{1}{1-\|x\|} \\ \sin \frac{1}{1-\|x\|} & \cos \frac{1}{1-\|x\|} \end{pmatrix} \cdot x.$$

f ist wohldefiniert, denn

$$\text{inn}(D^2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}.$$

und $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \text{inn}(D^2)$, da Rotationsmatrizen orthogonal sind.

Wir behaupten, dass f ein Homöomorphismus von $\text{inn}(D^2)$ ist.

Zum Nachweis der Bijektivität definieren wir

$$g : \text{inn}(D^2) \rightarrow \text{inn}(D^2), x \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{1-\|x\|} & \sin \frac{1}{1-\|x\|} \\ -\sin \frac{1}{1-\|x\|} & \cos \frac{1}{1-\|x\|} \end{pmatrix} \cdot x.$$

Die Wohldefiniertheit von g ergibt sich analog zu der von f . Da $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \text{inn}(D^2)$ sieht man, dass $(fg)(x) = x$ und $(gf)(x) = x$ für alle $x \in \text{inn}(D^2)$, also $fg = gf = \text{id}_{\text{inn}(D^2)}$. Das zeigt, dass f bijektiv ist mit $g = f^{-1}$.

Die Stetigkeit von f und g ergibt sich direkt daraus, dass sie Verknüpfung stetiger Funktionen sind. Das zeigt, dass f ein Homöomorphismus ist.

Wir behaupten weiter, dass sich f nicht zu einer stetigen Abbildung $D^2 \rightarrow D^2$ fortsetzen lässt. Angenommen, es gebe eine solche stetige Fortsetzung F von f . Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ auf D^2 mit

$$a_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n\pi} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Offenbar gilt $a_n \rightarrow e_1 = (1, 0)^T$ für $n \rightarrow \infty$ in D^2 . Aufgrund der Folgenstetigkeit von F (in metrischen Räumen ist Folgenstetigkeit äquivalent zu Stetigkeit) ist daher auch $F(a_n) \rightarrow F(e_1)$ für $n \rightarrow \infty$ in D^2 . Da $a_n \in \text{inn}(D^2)$ für alle $n \geq 1$ ist jedoch

$$F(a_n) = f(a_n) = \begin{pmatrix} \cos(n\pi) & -\sin(n\pi) \\ \sin(n\pi) & \cos(n\pi) \end{pmatrix} a_n = (-1)^n a_n \text{ für alle } n \geq 1,$$

und die Folge $((-1)^n a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert in D^2 offensichtlich nicht. Dieser Widerspruch zeigt, dass f keine stetige Fortsetzung $D^2 \rightarrow D^2$ besitzt.

Aufgabe 1.2:

(a)

Angenommen $[0, 1]$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es $U, V \subseteq [0, 1]$ mit $U, V \neq \emptyset$ und $[0, 1] = U \cup V$, so dass U und V offen in $[0, 1]$ sind. Dabei können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass $1 \in V$.

Wir bemerken, dass für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf U mit $a_n \rightarrow a$ in \mathbb{R} auch $a \in U$ ist: Da V offen in $[0, 1]$ ist gibt es $W \subseteq \mathbb{R}$ offen, so dass $V = [0, 1] \cap W$. Es ist daher $U = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - W)$ abgeschlossen in \mathbb{R} , und deshalb $a \in U$. (Aus der Analysis ist bereits bekannt, dass eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf A mit $a_n \rightarrow a$ in \mathbb{R} auch $a \in A$.) Analog ergibt sich, dass für jede Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf V mit $b_n \rightarrow b$ in \mathbb{R} schon $b \in V$.

Sei nun $c = \sup U$. Da $\emptyset \neq U \subseteq [0, 1]$ ist $c \in [0, 1]$, also entweder $c \in U$ oder $c \in V$. Da es nach Definition von c eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U mit $a_n \rightarrow c$ in \mathbb{R} gibt, muss $c \in U$. Insbesondere ist daher $c \notin V$ und $c < 1$.

Da $(c, 1] \subseteq V$ gibt es eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf V mit $b_n \rightarrow c$ in \mathbb{R} . Daher muss $c \in V$, was im Widerspruch zu $c \notin V$ steht.

Das zeigt, dass es keine solchen Mengen U und V geben kann. Also muss $[0, 1]$ zusammenhängend sein.

(b)

Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Angenommen, X wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U, V \neq \emptyset$, so dass $X = U \cup V$. Es sei $x \in U$ und $y \in V$.

Da X wegzusammenhängend ist gibt es eine stetige Abbildung $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\lambda(0) = x$ und $\lambda(1) = y$. Es ist daher

$$[0, 1] = \lambda^{-1}(X) = \lambda^{-1}(U \cup V) = \lambda^{-1}(U) \cup \lambda^{-1}(V),$$

mit $\lambda^{-1}(U) \neq \emptyset$ da $0 \in \lambda^{-1}(U)$ und $\lambda^{-1}(V) \neq \emptyset$ da $1 \in \lambda^{-1}(V)$. Da U, V offen in X sind und λ stetig ist, sind $\lambda^{-1}(U), \lambda^{-1}(V)$ offen in $[0, 1]$. Es folgt, dass $[0, 1]$ nicht zusammenhängend ist, was falsch ist.

Das zeigt, dass es keine solchen Mengen U und V gibt. Also ist X zusammenhängend.

Aufgabe 1.3:

(a)

Wir bemerken zunächst, dass

$$A := \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\}$$

wegzusammenhängend ist, da für $(x, \sin(1/x)), (y, \sin(1/y)) \in A$ der Weg

$$\lambda : [0, 1] \rightarrow A, t \mapsto \left(x + (y - x)t, \sin \frac{1}{x + (y - x)t} \right)$$

mit $\lambda(0) = (x, \sin(1/x))$ und $\lambda(1) = (y, \sin(1/y))$ existiert. Insbesondere ist A daher zusammenhängend.

Angenommen S ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es $U, V \subseteq S$ offen in S mit $U, V \neq \emptyset$ und $S = U \cup V$. Es ist entweder $A \subseteq U$ oder $A \subseteq V$, denn A ist zusammenhängend und es ist

$$A = A \cap S = A \cap (U \cup V) = (A \cap U) \cup (A \cap V)$$

mit $A \cap U, A \cap V \subseteq A$ offen in A . Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $A \subseteq V$.

Sei $x \in U$. Da $A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$ muss $x \in S - A = \{0\} \times [-1, 1]$. Da U offen in S ist gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \cap S \subseteq U$ für $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x - y\| < \varepsilon\}$. Es ist aber klar, dass $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$, und daher

$$U \cap V \supseteq B_\varepsilon(x) \cap S \cap A = B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset,$$

was im Widerspruch zur Disjunktheit von U und V steht. Es kann also keine solchen Mengen U und V geben, weshalb S zusammenhängend ist.

(b)

Angenommen S ist wegzusammenhängend. Dann gibt es einen Weg $\lambda : [0, 1] \rightarrow S$ mit $\lambda(0) = (1, \sin 1)$ und $\lambda(1) = (0, 0)$. Wir setzen $A := \text{Im } \lambda$.

Wir behaupten, dass $(t, \sin(1/t)) \in A$ für alle $0 < t \leq 1$. Um dies zu zeigen sei $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ die Projektion auf die erste Koordinate. Die Abbildung

$$\pi \circ \lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig. Da $(\pi \circ \lambda)(0) = 1$ und $(\pi \circ \lambda)(1) = 0$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es für alle $0 < t \leq 1$ ein $u_t \in [0, 1]$ mit $\pi(\lambda(u_t)) = t$ gibt. Für $y_t := \lambda(u_t)$ ist dann $y_t \in A$ mit $\pi(y_t) = t$. Nach Definition von A folgt, dass $y_t = (t, \sin(1/t))$.

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ als

$$a_n := \frac{1}{n\pi + \pi/2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

und die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow S, t \mapsto \left(t, \sin \frac{1}{t}\right).$$

Man bemerke, dass

$$f(a_n) = (a_n, (-1)^n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$T_n := \{t \in [0, 1] : \lambda(t) = f(a_n)\} \text{ und } t_n = \sup T_n.$$

Nach der obigen Behauptung ist $T_n \neq \emptyset$ und damit $t_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir bemerken, dass $\lambda(t_n) = f(a_n) = (a_n, (-1)^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach Definition von t_n eine Folge $(b_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ auf T_n mit $b_k^n \rightarrow t_n$ für $k \rightarrow \infty$. Aus der Folgenstetigkeit von λ folgt daher, dass

$$\lambda(t_n) = \lambda\left(\lim_{k \rightarrow \infty} b_k^n\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(b_k^n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a_n) = (a_n, (-1)^n).$$

Wir haben eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ konstruiert mit $\lambda(t_n) = (a_n, (-1)^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ähnlich zur obigen Argumentation ergibt sich unter Verwendung von π , dem Zwischenwertsatz und der Monotonie von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dass die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

Da die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Da λ folgenstetig ist konvergiert also auch die Folge

$$(\lambda(t_n))_{n \in \mathbb{N}} = ((a_n, (-1)^n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall, da die Folge $(-1)^n$ nicht konvergiert. Dieser Widerspruch zeigt, dass ein solcher Weg λ nicht existiert, dass also S nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 1.4:

(a)

Für alle $x, y \in X$ ist

$$d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

und

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1} = \frac{d(y, x)}{d(y, x) + 1} = d'(y, x),$$

da d eine Metrik auf X ist. Die Dreiecksungleichung für d' ergibt sich aus der Dreiecksungleichung für d durch

$$\begin{aligned} d'(x, z) &= \frac{d(x, z)}{d(x, z) + 1} = 1 - \frac{1}{d(x, z) + 1} \leq 1 - \frac{1}{d(x, y) + d(y, z) + 1} \\ &= \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d'(x, y) + d'(y, z) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in X$. Das zeigt, dass d'' eine Metrik auf X ist.

(b)

Für alle $x, y \in X$ ist

$$d''(x, y) = 0 \Leftrightarrow \min\{d(x, y), 1\} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

und

$$d''(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} = \min\{d(y, x), 1\} = d''(y, x),$$

da d eine Metrik auf X ist. Die Dreiecksungleichung für d'' ergibt sich aus der Dreiecksungleichung für d durch

$$\begin{aligned} d''(x, z) &= \min\{d(x, z), 1\} \leq \min\{d(x, y) + d(y, z), 1\} \\ &\leq \min\{d(x, y), 1\} + \min\{d(y, z), 1\} = d''(x, y) + d''(y, z) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in X$. Dabei haben wir genutzt, dass

$$\min\{a + b, c\} \leq \min\{a + b, a + c, c + b, 2c\} = \min\{a, c\} + \min\{b, c\}$$

für alle $a, b, c \geq 0$.

(c)

Es ist klar, dass d und d'' die gleiche Topologie induzieren, denn für eine Teilmenge $U \subseteq X$ und einen Punkt $x \in U$ gibt es genau dann ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, wenn es ein $0 < \varepsilon' \leq 1$ mit $B_{\varepsilon'}(x) \subseteq U$ gibt. (Existiert ein solches ε' , so kann man $\varepsilon = \varepsilon'$ wählen; existiert ein solches ε , so kann man $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$ wählen.)

d' und d'' induzieren die gleiche Topologie auf X , da

$$d'(x, y) \leq d''(x, y) \leq 2d'(x, y) \text{ für alle } x, y \in X,$$

was sich aus

$$\frac{a}{a+1} \leq \min\{a, 1\} \leq \frac{2a}{a+1} \text{ für alle } a \geq 0.$$

ergibt.

Der erste Teil der Ungleichung folgt daraus, dass für alle $a \geq 0$

$$\frac{a}{a+1} \leq a \text{ und } \frac{a}{a+1} \leq 1$$

und damit

$$\frac{a}{a+1} \leq \min\{a, 1\}.$$

Der zweite Teil der Ungleichung ergibt sich wegen

$$\min\{a, 1\} \leq \frac{2a}{a+1} \Leftrightarrow (a+1)\min\{a, 1\} \leq 2a \text{ für alle } a \geq 0$$

durch eine einfache Fallunterscheidung: Für $0 \leq a < 1$ ist

$$(a+1)a \leq 2a \Leftrightarrow a(1-a) \geq 0,$$

was offenbar gilt, und für $a \geq 1$ ist

$$a+1 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1.$$

Das zeigt, dass auch d' und d'' die gleiche Topologie induzieren.