

# EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

## BLATT 4

Jendrik Stelzner

13. Mai 2014

### Aufgabe 4.1:

1.

Es sei  $W \subseteq X \times Y$  offen und beliebig aber fest. Da die Mengen der Form  $U \times V \subseteq X \times Y$  mit  $U \subseteq X$  offen und  $V \subseteq Y$  offen eine topologische Basis von  $X \times Y$  bilden, gibt es offene Mengen  $\{U_i | i \in I\} \subseteq X$  und  $\{V_i | i \in I\} \subseteq Y$  mit

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i).$$

Daher sind

$$p_1(W) = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X \text{ und } p_2(W) = \bigcup_{i \in I} V_i \subseteq Y$$

in den jeweiligen Räumen offen. Wegen der Beliebigkeit von  $W$  folgt, dass  $p_1$  und  $p_2$  offen sind.

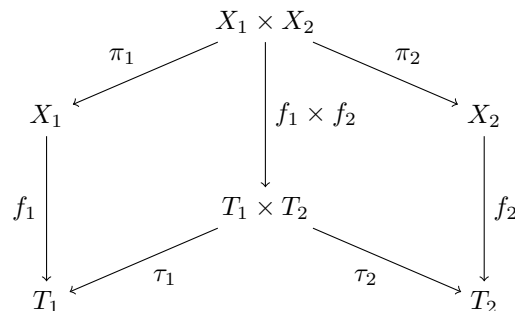
### Aufgabe 4.2:

**Lemma 1.** Seien  $X_1, X_2, T_1, T_2$  topologische Räume,  $f_1 : X_1 \rightarrow T_1$  und  $f_2 : X_2 \rightarrow T_2$  stetige Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow T_1 \times T_2, (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

stetig. Sind  $f_1$  und  $f_2$  offen, so ist auch  $f_1 \times f_2$  offen.

*Beweis.* Wir betrachten das kommutative Diagramm



wobei  $\pi_1, \pi_2, \tau_1$  und  $\tau_2$  die entsprechenden kanonischen Projektionen bezeichnet. Da  $\tau_1 \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \circ \pi_1$  und  $\tau_2 \circ (f_1 \times f_2) = f_2 \circ \pi_2$  stetig sind, ist es auch  $f_1 \times f_2$  (siehe Aufgabe 3).

Angenommen,  $f_1$  und  $f_2$  sind offen. Für offene Mengen  $U \subseteq X_1, V \subseteq X_2$  ist dann auch  $f_1(U) \subseteq T_1$  und  $f_2(V) \subseteq T_2$  offen, also

$$(f_1 \times f_2)(U \times V) = f_1(U) \times f_2(V) \subseteq T_1 \times T_2$$

offen. Da die Mengen der Form  $U \times V$  mit offenen Mengen  $U \subseteq X_1$  und  $V \subseteq X_2$  eine topologische Basis von  $X_1 \times X_2$  bilden, zeigt dies die Offenheit von  $f_1 \times f_2$ .  $\square$

Für alle  $j \in I$  bezeichne

$$\iota_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, x \mapsto (x, j)$$

und

$$\iota'_j : X_j \times Y \rightarrow \coprod_{i \in I} (X_i \times Y), (x, y) \mapsto ((x, y), j)$$

die entsprechenden kanonischen Inklusionen. Da  $\iota_j$  für alle  $j \in I$  stetig ist, ist nach Lemma 1 für alle  $j \in I$  auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota_j \times \text{id}_Y : X_j \times Y &\rightarrow \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y \\ (x, y) &\mapsto ((x, j), y). \end{aligned}$$

stetig. Deshalb gibt es nach der universellen Eigenschaft des Koproduktes eine stetige Abbildung

$$f : \coprod_{i \in I} (X_i \times Y) \rightarrow \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & X_j \times Y & \\ \iota'_j \swarrow & & \searrow \iota_j \times \text{id}_Y \\ \coprod_{i \in I} (X_i \times Y) & \xrightarrow{f} & \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y \end{array}$$

für alle  $j \in I$  kommutiert. Dabei ist für alle  $j \in I$  und  $x \in X_j, y \in Y$

$$f(((x, y), j)) = f(\iota'_j(x, y)) = (\iota_j \times \text{id}_Y)(x, y) = ((x, j), y).$$

$f$  ist offen: Seien  $j \in I$  und  $U \subseteq X_j \times Y$  offen beliebig aber fest. Da  $\iota_j$  per Definition des Koproduktes offen ist, und die Identität  $\text{id}_Y$  offenbar ebenfalls offen ist, ist nach Lemma 1 auch  $\iota_j \times \text{id}_Y$  offen. Daher ist

$$f(U \times \{j\}) = f(\iota'_j(U)) = (\iota_j \times \text{id}_Y)(U)$$

offen.

Da die Mengen der Form  $U \times \{j\} \subseteq \coprod_{i \in I} (X_i \times Y)$  mit  $j \in I$  und  $U \subseteq X_j$  offen eine topologische Basis von  $\coprod_{i \in I} (X_i \times Y)$  bilden, zeigt dies die Offenheit von  $f$ .

Da  $f$  offenbar auch bijektiv ist, ist  $f$  ein Homöomorphismus.

### Aufgabe 4.3:

Für alle  $j \in I$  bezeichnen wir die kanonische Projektion  $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  mit  $\pi_j$ , und für alle  $i \in I$  setzen wir  $f_i := f \circ \pi_i$ . Ist  $f$  stetig, so ist  $f_i$  als Verknüpfung stetiger Funktionen für alle  $i \in I$  stetig.

Angenommen  $f_i$  ist für alle  $i \in I$  stetig. Für paarweise verschiedene Indizes  $i_1, \dots, i_n \in I$  und beliebige offene Mengen  $U_1 \in X_{i_1}, \dots, U_n \in X_{i_n}$  setzen wir

$$P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} = \prod_{i \in I} \begin{cases} U_k & \text{falls } i = i_k, \\ X_i & \text{sonst,} \end{cases} \subseteq \prod_{i \in I} X_i.$$

Da die Mengen dieser Form eine topologische Basis von  $\prod_{i \in I} X_i$  bilden, genügt es zum Nachweis der Stetigkeit von  $f$  zu zeigen, dass

$$f^{-1} \left( P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} \right) \subseteq T$$

offen ist für alle paarweise verschiedenen Indizes  $i_1, \dots, i_n \in I$  und beliebige offene Mengen  $U_1 \in X_{i_1}, \dots, U_n \in X_{i_n}$ .

Seien also  $i_1, \dots, i_n$  und  $U_1, \dots, U_n$  wie zuvor beliebig aber fest. Wir bemerken, dass

$$P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} = \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k),$$

und deshalb

$$f^{-1} \left( P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} \right) = f^{-1} \left( \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k) \right) = \bigcap_{k=1}^n (\pi_{i_k} \circ f)^{-1}(U_k) = \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_k).$$

Da  $U_k$  für alle  $1 \leq k \leq n$  offen ist, und die  $f_i$  alle stetig sind, ist  $f_{i_k}^{-1}(U_k)$  für alle  $1 \leq k \leq n$  offen, also  $f^{-1}(P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n})$  als endlicher Schnitt offener Mengen offen. Wegen der Beliebigkeit von  $i_1, \dots, i_n$  und  $U_1, \dots, U_n$  zeigt dies die Stetigkeit von  $f$ .