

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

BLATT 5

Jendrik Stelzner

22. Mai 2014

Aufgabe 5.1:

Wir nehmen zunächst an, dass $f : S^1 \rightarrow X$ homotop zu einer konstanten Schlinge ist. Dann gibt es eine Homotopie $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ mit

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \text{const und} \\ F(s, 1) &= f(s) \end{aligned}$$

für alle $s \in S$. Es sei

$$A := S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times [0, 1]$$

und

$$\pi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow (S^1 \times [0, 1]) / A$$

die kanonische Projektion.

Es ist klar, dass F als Abbildung

$$\tilde{F} : (S^1 \times [0, 1]) / A \rightarrow X$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig.

Wir bemerken weiter, dass $(S^1 \times [0, 1]) / A \cong D^2$: Die Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow D^2, (s, t) \mapsto ts$$

ist stetig und surjektiv, und faktorisiert als Bijektion

$$\psi : (S^1 \times [0, 1]) / A \rightarrow D^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da $S^1 \times [0, 1]$ als Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist auch $(S^1 \times [0, 1]) / A$ quasikompakt. Da D^2 Hausdorff ist, ist damit ψ bereits ein Homöomorphismus.

Durch den Isomorphismus ψ faktorisiert \tilde{F} als stetige Abbildung $\bar{F} : D^2 \rightarrow X$.

Insgesamt ergibt sich damit ein Diagramm wie in Abbildung 1. Dieses Diagramm kommutiert: Nach Konstruktion ist $\phi = \psi\pi$, sowie $F = \tilde{F}\pi$ und $\tilde{F} = \bar{F}\psi$. Daher ist auch

$$F = \tilde{F}\pi = \bar{F}\psi\pi = \bar{F}\phi.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\bar{F}(s) = \bar{F}\phi(s, 1) = F(s, 1) = f(s)$$

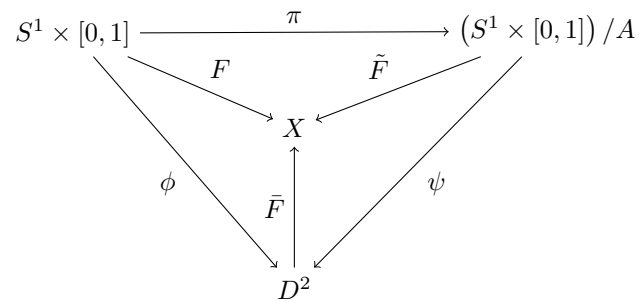


Abbildung 1: Mir fällt kein passender Titel ein.

ist \bar{F} eine stetige Fortsetzung von f auf D^2 .

Angenommen, $f : S^1 \rightarrow X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\bar{F} : D^2 \rightarrow X$ fortsetzen. Mithilfe der stetigen Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow D^2, (s, t) \mapsto ts$$

erhalten wir dann die Homotopie

$$F := \bar{F} \phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\begin{aligned}
 F(s, 0) &= \bar{F}(\phi(s, 0)) = \bar{F}(0) = \text{const} \text{ und} \\
 F(s, 1) &= \bar{F}(\phi(s, 1)) = \bar{F}(s) = f(s)
 \end{aligned}$$

ist f homotop zu einer konstanten Schlinge.