Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 3

Jendrik Stelzner

29. April 2014

Aufgabe 3.1:

Es sei X ein quasikompakter Raum. Wir nehmen an, dass X nicht folgenkompakt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf X, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Es gibt also für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x, so dass nur endlich viele Folgeglieder in U_x sind. Da U_x eine offene Umgebung von x enthält, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass die U_x alle offen sind.

Es ist $\{U_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X quasikompakt ist gibt es daher $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Da $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ jeweils nur endlich viele Folgeglieder enthalten, enthält X nur endlich viele Folgeglieder — ein offensichtlicher Widerspruch.

Das zeigt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzt, und damit, dass X folgenkompakt ist. Also ist jeder quasikompakte Raum folgenkompakt.

Aufgabe 3.2:

Wir setzen $Y := X \times X$ und $\Delta := \Delta(X)$. Für $A, B \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}(A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in X : (x,x) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : x \in A \text{ und } x \in B \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,\end{aligned}$$

also

$$A \times B \subseteq Y - \Delta \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Da die Mengen der Form $U \times V \subseteq Y$ mit offenen $U, V \subseteq X$ eine Basis der Produkttopologie auf Y bilden, gilt

$$\begin{aligned}&W \subseteq Y \text{ ist offen} \\ \Leftrightarrow\ &\forall (x,y) \in W \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } (x,y) \in U \times V \subseteq W \\ \Leftrightarrow\ &\forall (x,y) \in W \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V \text{ und } U \times V \subseteq W.\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt daher

$$
\begin{aligned}
&\Delta \text{ ist abgeschlossen in } Y \\
\Leftrightarrow\ & Y - \Delta \text{ ist offen in } Y \\
\Leftrightarrow\ & \forall (x,y) \in (Y - \Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \times V \subseteq Y - \Delta \\
\Leftrightarrow\ & \forall (x,y) \in (Y - \Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \\
\Leftrightarrow\ & \forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \\
\Leftrightarrow\ & X \text{ ist Hausdorffsch.}
\end{aligned}
$$