Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 7

Jendrik Stelzner

16. Juni 2014

Aufgabe 7.3:

(a)

Die Multiplikation ist assoziativ, da für alle $(n,m),(n',m'),(n'',m'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&((n,m)\cdot(n',m'))\cdot(n'',m'') \\
&= (n+(-1)^m n', m+m')\cdot(n'',m'') \\
&= \left(n+(-1)^m n' + (-1)^{m+m'} n'', m+m'+m''\right) \\
&= \left(n+(-1)^m \left(n' + (-1)^{m'} n''\right), m+m'+m''\right) \\
&= (n,m)\cdot(n'+(-1)^{m'}n'', m'+m'') \\
&= (n,m)\cdot((n',m')\cdot(n'',m'')).
\end{aligned}$$

Das Element $(0,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist bezüglich der Multiplikation rechtsneutral, da für alle $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(n,m)\cdot(0,0) = (n+(-1)^0\cdot 0, m+0) = (n,m).$$

Das Element $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hat das Rechtsinverse $((-1)^{m+1}n, -m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, da

$$(n,m)\cdot\left((-1)^{m+1}n,-m\right) = (n+(-1)^m(-1)^{m+1}n, m-m) = (0,0).$$

Das zeigt, dass $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ eine Gruppe ist. Sie ist nicht abelsch, da etwa

$$(1,0)\cdot(1,1) = (2,1) \neq (0,1) = (1,1)\cdot(1,0).$$