Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 6

Jendrik Stelzner

3. Juni 2014

Im Folgenden schreiben wir $I := [0,1]$.

Aufgabe 6.1: (Freie versus punktierte Schlingen)

(a)

Es sei $x \in X$ beliebig aber fest. Es ist klar, dass die Inklusion

$$\left\{f \,\middle|\, f : \left(S^1, 1\right) \to (X,x) \text{ ist stetig}\right\} \hookrightarrow \left\{g \,\middle|\, g : S^1 \to X \text{ ist stetig}\right\}$$

wohldefiniert ist. Zusammen mit der kanonischen Projektion

$$\left\{g \,\middle|\, g : S^1 \to X \text{ ist stetig}\right\} \to \mathcal{S}(X), g \mapsto [g]$$

ergibt sich damit eine wohldefinierte Abbildung

$$\left\{f \,\middle|\, f : \left(S^1, 1\right) \to (X,x) \text{ ist stetig}\right\} \to \mathcal{S}(X), f \mapsto [f].$$

Um zu zeigen, dass diese über $\pi_1(X,x)$ faktorisiert, genügt es zu zeigen, dass für stetige Abbildungen $f, g : (S^1, 1) \to (X, x)$ mit $f \simeq g$ rel 1 auch $f \simeq g$. Dies ist aber klar.

(b)

Definition. *Sei X ein topologischer Raum und seien $v_1, \ldots, v_n : I \to X$ Wege mit $v_i(1) = v_{i+1}(0)$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Dann bezeichnen wir mit $v_1 * \cdots * v_n$ den Weg*

$$v_1 * \cdots * v_n : I \to X, t \mapsto \begin{cases} v_1(nt) & \textit{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ v_2(nt-1) & \textit{falls } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n} \\ v_3(nt-2) & \textit{falls } \frac{2}{n} \leq t \leq \frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots \\ v_n(nt-(n-1)) & \textit{falls } \frac{n-1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Bemerkung 1. Es ist bekannt und klar, dass die „Verknüpfung“ $*$ assoziativ bis auf Homotopie ist. Es ist auch klar, dass für eine zusammenziehbare Schlinge C und einen Weg v mit entsprechenden Anfangs-, bzw. Endpunkt

$$C * v \simeq v \qquad \text{bzw.} \qquad v * C \simeq v.$$

Lemma 2. *Sei X ein topologischer Raum und seien $v_1, \dots, v_n : I \to X$ Wege, $n \geq 2$, mit $v_i(1) = v_{i+1}(0)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ und $v_n(1) = v_1(0)$. Dann ist*

$$v_1 * v_2 * \cdots * v_n \simeq v_2 * \cdots * v_n * v_1.$$

Beweis. Wir fassen die Schlingen $v_1 * v_2 * \cdots * v_n$ und $v_2 * \cdots * v_n * v_1$ in natürlicher Weise als Abbildungen

$$f : (S^1, 1) \to (X, v_1(0)) \text{ und } g : (S^1, 1) \to (X, v_2(0))$$

auf. Dann ist $g(z) = f(e^{2\pi i/n} z)$ für alle $z \in S^1$, eine entsprechende Homotopie also gegeben durch

$$F : S^1 \times I \to X, (z, t) \mapsto f\left(e^{t \cdot 2\pi i/n} z\right)$$

□

Sei nun erneut $x \in X$ beliebig aber fest. Es sei

$$\varphi : \pi_1(X, x) \to \mathcal{S}(X)$$

die Vergiss-Abbildung.

Angenommen, φ ist surjektiv. Dann gibt es für jeden Punkt $y \in X$ eine Schlinge $f : (S^1, 1) \to (X, x)$, so dass f homotop zur konstanten Schlinge

$$g : S^1 \to X, z \mapsto y$$

ist. Es gibt also eine Homotopie

$$F : S^1 \times I \to X$$

mit $F(z, 0) = f(z)$ und $F(z, 1) = y$ für alle $z \in S^1$. Es ist daher

$$\gamma : I \to X, t \mapsto F(1, t)$$

eine stetige Abbildung mit

$$\gamma(0) = F(1, 0) = f(1) = x \text{ und } \gamma(1) = F(1, 1) = y.$$

Das zeigt, dass X wegzusammenhängend ist.

Angenommen, X ist wegzusammenhängend. Sei dann $f : I \to X$ eine Schlinge, also insbesondere $f(0) = f(1)$, beliebig aber fest. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma : I \to X$ von x nach $f(0)$. Es sei $\gamma^{-1} : I \to X$ der umgekehrte Weg von $f(1)$ nach x, d.h. $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ für alle $t \in I$. Dann ist

$$g := \gamma * f * \gamma^{-1}$$

eine Schlinge mit $g(0) = g(1) = x$, und nach Lemma 2 ist

$$g = \gamma * f * \gamma^{-1} \simeq f * \gamma^{-1} * \gamma \simeq f * (\gamma^{-1} * \gamma) \simeq f,$$

da $\gamma^{-1} * \gamma$ offenbar zusammenziehbar ist. Also ist

$$\varphi([g]_{\pi_1}(X, x)) = [g] = [f].$$

Wegen der Beliebigkeit von f zeigt dies die Surjektivität von φ.

(c)

Auch hier sei $x \in X$ beliebig aber fest. Es seien $f, g : (I, \partial I) \to (X, x)$, so dass $[f]_{\pi_1(X,x)}$ und $[g]_{\pi_1(X,x)}$ konjugiert zueinander sind, d.h. dass es eine Schlinge $h : (I, \partial I) \to (X, x)$ gibt mit

$$[f]_{\pi_1(X,x)} = [h]_{\pi_1(X,x)}[g]_{\pi_1(X,x)}[h]^{-1}_{\pi_1(X,x)} = \left[h * g * h^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)}.$$

Es ist dann nach Lemma 2

$$\begin{aligned}[f] &= \varphi([f]_{\pi_1(X,x)}) = \varphi\left(\left[g * h * g^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)}\right) = \left[h * g * h^{-1}\right] \\ &= \left[g * h^{-1} * h\right] = [g].\end{aligned}$$

Andererseits seien $f, g : (I, \partial I) \to (X, x)$ Schlingen, so dass $f \simeq g$. Dann gibt es eine Homotopie $F : I \times I \to X$ mit $F(t, 0) = f(t)$ und $F(t, 1) = g(t)$ für alle $t \in I$, wobei zusätzlich

$$F(0, s) = F(1, s) \text{ für alle } s \in I.$$

Für alle $s \in I$ definieren wir

$$\gamma_s : I \to X \text{ mit } \gamma_s(t) := F(0, ts).$$

Für alle $s \in I$

$$\gamma_s(0) = F(0, 0) = f(0) = x \text{ und } \gamma_s(1) = F(0, s),$$

also γ_s ein Weg von x zu $F(0, s)$. Auch ist

$$\gamma_1(1) = F(0, 1) = g(1) = x,$$

also γ_1 eine Schlinge mit $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = x$. Für alle $s \in I$ definieren wir auch

$$\gamma_s^{-1} : I \to X, t \mapsto \gamma_s(1 - t).$$

Wir betrachten die Homotopie $G : I \times I \to X$ mit

$$G(t, s) := \begin{cases} \gamma_s\left(\frac{3}{s}t\right) & \text{für } 0 \le t < \frac{s}{3} \\ F\left(\frac{3t-s}{3-2s}, s\right) & \text{für } \frac{s}{3} \le t \le 1 - \frac{s}{3} \\ \gamma_s^{-1}\left(\frac{3}{s}(t-1) + 1\right) & \text{für } 1 - \frac{s}{3} < t \le 1. \end{cases}$$

Für alle $t \in I$ ist

$$G(t, 0) = F(t, 0) = f(t) \text{ und } G(t, 1) = \left(\gamma_1 * g * \gamma_1^{-1}\right)(t).$$

Außerdem ist $G(0, s) = G(1, s) = x$ für alle $s \in I$. Das zeigt, dass

$$f \simeq \gamma_1 * g * \gamma_1^{-1} \text{ rel } \partial I,$$

also dass

$$[f]_{\pi_1(X,x)} = \left[\gamma_1 * g * \gamma_1^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)} = \left[\gamma_1 g \gamma_1^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)}.$$

Aufgabe 6.2:

(a)

Da A und B wegzusammenhängend sind, und $A \cap B \neq \emptyset$, ist $X = A \cup B$ wegzusammenhängend. Insbesondere ist daher

$$\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,x') \text{ für alle } x, x' \in X.$$

Um zu zeigen, dass $\pi_1(X,x)$ für alle $x \in X$ trivial ist, genügt es daher zu zeigen, dass $\pi_1(X,x)$ für irgendeine $x \in X$ trivial ist. Sei hierfür $x \in A \cap B \neq \emptyset$.

Es sei $f : (I, \partial I) \to (X, x)$ eine Schlinge. Da A und B offen sind, und $X = A \cup B$, ist $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ wegen der Stetigkeit von f eine offene Überdeckung von I. Da I ein kompakter metrischer Raum ist, gibt es nach dem Lemma von Lebesgue ein $\delta > 0$, so dass jede Teilmenge $M \subseteq I$ mit $\operatorname{diam} M < \delta$ komplett in $f^{-1}(A)$ oder $f^{-1}(B)$ enthalten ist. Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ groß genug, dass die Teilintervalle

$$I_k := \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right] \subseteq I \text{ für } k = 1, \ldots, m$$

je komplett in $f^{-1}(A)$ oder $f^{-1}(B)$ enthalten ist. Dann ist $f(I_k) \subseteq A$ oder $f(I_k) \subseteq B$ für alle $k = 1, \ldots, m$.

Wir definieren

$$x_k := f\left(\frac{k}{m}\right) \text{ für alle } k = 0, \ldots, m.$$

Inbesondere ist

$$x_0 = x_m = x.$$

Da A, B und $A \cap B$ wegzusammenhängend sind, gibt es für alle $k = 1, \ldots, m-1$ einen Weg

$$\lambda_k : [0,1] \to X$$

von x nach x_k, der je komplett in A verläuft, wenn $x_k \in A$, komplett in B verläuft, wenn $x_k \in B$, bzw. komplett in $A \cap B$ verläuft, wenn $x_k \in A \cap B$. Für alle $k = 1, \ldots, m$ definieren wir außerdem den Weg

$$f_k : [0,1] \to X \text{ mit } f_k(t) := f\left(\frac{k-1}{m} + \frac{t}{m}\right).$$

Man bemerke, dass $\operatorname{Im} f_k = f(I_k)$ für alle $k = 1, \ldots, m$, sowie $f_k(0) = x_{k-1}$ und$f_k(1) = x_k$ für alle $k = 1, \ldots, m$. Es ist nun offenbar

$$\begin{aligned} f &= f_1 * f_2 * \cdots * f_m \\ &\simeq f_1 * \left(\lambda_1^{-1}\lambda_1\right) * f_2 * \left(\lambda_2^{-1}\lambda_2\right) * f_3 * \cdots * f_{m-1} * \left(\lambda_{m-1}^{-1}\lambda_{m-1}\right) * f_m \\ &\simeq \left(f_1\lambda_1^{-1}\right) * \left(\lambda_1 * f_2 * \lambda_2^{-1}\right) * \cdots * \left(\lambda_{m-2} * f_{m-1} * \lambda_{m-1}^{-1}\right) * \left(\lambda_{m-1} * f_m\right) \end{aligned}$$

relativ zu x. Nun sind die Wege $f_1 * \lambda_1^{-1}, \lambda_1 * f_2 * \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_{m-2} * f_{m-1}\lambda_{m-1}^{-1}$ und $\lambda_{m-1} * f_m$ jeweils Schleifen, die von x ausgehen, und sich jeweils komplett in A oder B befinden. Daher sind sie alle zusammenziehbar relativ zu x, denn A und B sind einfach zusammenhängend. Daher ist auch f relativ zu x zusammenziehbar. (Man fügt die einzelnen Homotopien einfach passend zusammen.)

Aus der Beliebigkeit von f folgt, dass $\pi_1(X,x)$ trivial ist.

(b)

Es sei $n > 1$. Wir schreiben $S^n = A \cup B$ mit

$$A = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \neq -1\} \text{ und}$$
$$B = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \neq 1\}\,.$$

A und B sind offenbar offen in S^n, und durch die entsprechenden stereografischen Projektionen wissen wir, dass $A \cong \mathbb{R}^n$ und $B \cong \mathbb{R}^n$. Da $\mathbb{R}^n$ offenbar einfach zusammenhängend ist, sind es daher auch A und B (wegen der Funktorialität von π_1). Offenbar ist $A \cap B \neq \emptyset$ wegzusammenhängend (hier benutzen wir, dass $n > 1$). Nach Aufgabenteil (a) ist deshalb auch S^n einfach zusammenhängend.