EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE Blatt 5

Jendrik Stelzner

25. Mai 2014

Aufgabe 5.1:

Wir nehmen zunächst an, dass $f:S^1\to X$ homotop zu einer konstanten Schlinge ist. Dann gibt es eine Homotopie $F:S^1\times [0,1]\to X$ mit

$$F(s,0) = {\rm const\ und}$$

$$F(s,1) = f(s)$$

für alle $s \in S$. Es sei

$$A := S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times [0,1]$$

und

$$\pi: S^1 \times [0,1] \to (S^1 \times [0,1]) / A$$

die kanonische Projektion.

Es ist klar, dass F als Abbildung

$$\tilde{F}: \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \to X$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig. Wir bemerken weiter, dass $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A \cong D^2$: Die Abbildung

$$\phi: S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

ist stetig und surjektiv, und faktorisiert als Bijektion

$$\psi: (S^1 \times [0,1]) / A \to D^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da $S^1 \times [0,1]$ als Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist auch $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A$ quasikompakt. Da D^2 Hausdorff ist, ist damit ψ bereits ein Homöomorphismus.

Durch den Isomorphismus ψ faktorisiert \tilde{F} als stetige Abbildung $\bar{F}: D^2 \to X$.

Insgesamt ergibt sich damit ein Diagramm wie in Abbildung 1. Dieses Diagram kommutiert: Nach Konstruktion ist $\phi=\psi\pi$, sowie $F=\tilde{F}\pi$ und $\tilde{F}=\bar{F}\psi$. Daher ist auch

$$F = \tilde{F}\pi = \bar{F}\psi\pi = \bar{F}\phi.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\bar{F}(s) = \bar{F}\phi(s, 1) = F(s, 1) = f(s)$$

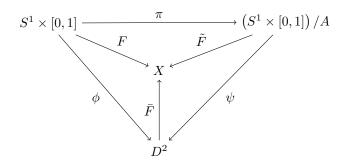


Abbildung 1: Mir fällt kein passender Titel ein.

ist \bar{F} eine stetige Fortsetzung von f auf D^2 .

Angenommen, $f:S^1\to X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\bar F:D^2\to X$ fortsetzen. Mithilfe der stetigen Abbildung

$$\phi: S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

erhalten wir dann die Homotopie

$$F := \bar{F}\phi : S^1 \times [0,1] \to X.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$F(s,0) = \bar{F}(\phi(s,0)) = \bar{F}(0) = \text{const und}$$

 $F(s,1) = \bar{F}(\phi(s,1)) = \bar{F}(s) = f(s)$

ist f homotop zu einer konstanten Schlinge.

Aufgabe 5.2:

Ist X zusammenziehbar, so gibt es einen einelementigen Raum * und eine Homotopieäquivalenz $\varphi:X\to *$. Diese induziert, wie aus Aufgabe 4.4 bekannt, für jeden Raum K eine Bijektion

$$\varphi_*^K : [K, X] \to [K, *], f \mapsto \varphi f.$$

Da [K,*] immer einelementig ist, ist dann [K,X] für jeden Raum K einelementig. Besteht [K,X] für jeden Raum K aus nur einem Element, so ist insbesondere [X,X] einelementig, also jede (konstante) Abbildung $X\to X$ homotop zu id $_X$.

Ist id $_X$ homotop zu einer konstanten Abbildung, so gibt es ein $x_0 \in X$, so dass id $_X \simeq f$ für die konstante Funktion $f: X \to X, x \mapsto x_0$. Für den Teilraum $* = \{x_0\}$ ist dann für die kanonische Inklusion $\iota: * \to X$ und $g: X \to *, x \mapsto x_0$

$$g\iota=\operatorname{id}_*\ \operatorname{und}\,\iota g=f\simeq\operatorname{id}_X.$$

Also ist g eine Homotopieäquivalenz und X deshalb zusammenziehbar.

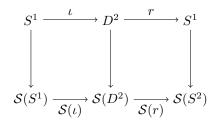


Abbildung 2: I dunno.

Aufgabe 5.3: (Brouwerscher Fixpunktsatz)

(i)

Für die Homotopie

$$F: D^2 \times [0,1], (x,t) = tx$$

ist für alle $x \in D^2$

$$F(x,0) = 0 = \text{const und}$$

 $F(x,1) = x = \text{id}_{D^2}(x).$

Deshalb ist id_{D^2} homotop zu einer konstanten Abbildung. Also ist D^2 zusammenziehbar und deshalb $\left[K,D^2\right]$ für jeden Raum K einelementig. Insbesondere ist daher $\mathcal{S}\left(D^2\right)=\left[S^1,D^2\right]$ einelementig.

Gibt es eine stetige Abbildung $r:D^2\to S^1$ mit $r_{|S^1}=\mathrm{id}_{S^1}$, so ergibt sich aus den Funktoreigenschaften von $X\mapsto \mathcal{S}(X)$ das kommutatives Diagram in Abbildung 2, wobei $\iota:S^1\to D^2$ die kanonische Inklusion bezeichnet.

Da $r\iota=\mathrm{id}_{S^1}$ muss auch $\mathcal{S}(r)\mathcal{S}(\iota)=\mathrm{id}_{\mathcal{S}(S^1)}$. Inbesondere muss daher $\mathcal{S}(r)$ surjektiv sein, da es $\mathcal{S}(\iota)$ als Rechtsinverses besitzt. Es ist jedoch $\mathcal{S}(D^2)$ einelementig und $\mathcal{S}(S^1)$ abzählbar unendlich (aus der Vorlesung bekannt). Dieser Widerspruch zeigt, dass keine solche Abbildung r existieren kann.

Aufgabe 5.4: (Fundamentalsatz der Algebra)

(i)

Sei $t\geq 0$ beliebig aber fest. Für $\iota_t:S^1\to\mathbb{C},z\mapsto tz$ ergibt sich das kommutative Diagram in Abbildung 3. Da \mathbb{C} zusammenziehbar ist (denn \mathbb{C} ist homöomorph zu \mathbb{R}^2), ist ι_t homotop zu einer konstanten Abbildung $c:S^1\to\mathbb{C}$, also $f=f\iota_t$ homotop zur

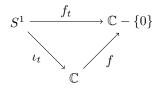


Abbildung 3: f_t faktorisiert durch ι_t über \mathbb{C} .

konstanten Abbildung fc. (Analog ergibt sich, dass jede stetige Funktion, die über einen zusammenziehbaren Raum faktorisiert, homotop zu einer konstanten Abbildung ist).

(ii)

Wir definieren

$$F: S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C} - \{0\}, 0$$

 $(z,t) \mapsto C^k z^k + t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l.$

F ist wohldefiniert, denn für alle $(z,t) \in S^1 \times [0,1]$ ist

$$|F(z,t)| = \left| C^k z^k + t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l \right| \ge \left| C^k z^k \right| - \left| t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l \right|$$

$$\ge C^k - t \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l \ge C^k - \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l > 0.$$

Es ist auch klar, dass F stetig ist, also eine Homotopie. Für alle $z \in S^1$ ist

$$F(z,0) = C^k z^k$$
 und $F(z,1) = \tilde{f}_C(z)$.

Das zeigt, dass $\tilde{f}_C \simeq (z \mapsto C^k z^k)$.

(iii)

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$H_k: S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}, z \mapsto z^k \text{ und } h_k: S^1 \to S^1, z \mapsto z^k.$$

Es ist klar, dass H_k und h_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ stetig sind. Es sei $k := \deg f$. Dann gibt es $C \ge 0$, so dass

$$C^k > \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l.$$

Nach Aufgabenteil (ii) ist dann $\tilde{f}_C \simeq C^k H_k$. Da $C^k H_k \simeq H_k$ via der Homotopie

$$S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C} - \{0\}, (z,t) \mapsto (t + (1-t)C^k) z^k$$

ist daher $\tilde{f}_C \simeq H_k$. Andererseits ist \tilde{f}_C nach Aufgabenteil (i) auch homotop zu einer konstanten Abbildung $c: S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}$.

Bezüglich der Projektion

$$q: \mathbb{C} - \{0\} \to S^1, z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

die offenbar stetig ist, ist daher auch

$$h_k = qH_k \simeq q\tilde{f}_C \simeq qc.$$

Es ist also h_k homotop zu einer konstanten Schlinge. Wir wissen, dass dies nur für k=0 der Fall ist. Also muss f ein konstantes Polynom sein.