

# EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

## BLATT 5

Jendrik Stelzner

22. Mai 2014

### Aufgabe 5.1:

Wir nehmen zunächst an, dass  $f : S^1 \rightarrow X$  homotop zu einer konstanten Schlinge ist. Dann gibt es eine Homotopie  $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$  mit

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \text{const und} \\ F(s, 1) &= f(s) \end{aligned}$$

für alle  $s \in S$ . Es sei

$$A := S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times [0, 1]$$

und

$$\pi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow (S^1 \times [0, 1]) / A$$

die kanonische Projektion.

Es ist klar, dass  $F$  als Abbildung

$$\tilde{F} : (S^1 \times [0, 1]) / A \rightarrow X$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig.

Wir bemerken weiter, dass  $(S^1 \times [0, 1]) / A \cong D^2$ : Die Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow D^2, (s, t) \mapsto ts$$

ist stetig und surjektiv, und faktorisiert als Bijektion

$$\psi : (S^1 \times [0, 1]) / A \rightarrow D^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da  $S^1 \times [0, 1]$  als Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist auch  $(S^1 \times [0, 1]) / A$  quasikompakt. Da  $D^2$  Hausdorff ist, ist damit  $\psi$  bereits ein Homöomorphismus.

Durch den Isomorphismus  $\psi$  faktorisiert  $\tilde{F}$  als stetige Abbildung  $\bar{F} : D^2 \rightarrow X$ .

Insgesamt ergibt sich damit ein Diagramm wie in Abbildung 1. Dieses Diagramm kommutiert: Nach Konstruktion ist  $\phi = \psi\pi$ , sowie  $F = \tilde{F}\pi$  und  $\tilde{F} = \bar{F}\psi$ . Daher ist auch

$$F = \tilde{F}\pi = \bar{F}\psi\pi = \bar{F}\phi.$$

Da für alle  $s \in S^1$

$$\bar{F}(s) = \bar{F}\phi(s, 1) = F(s, 1) = f(s)$$

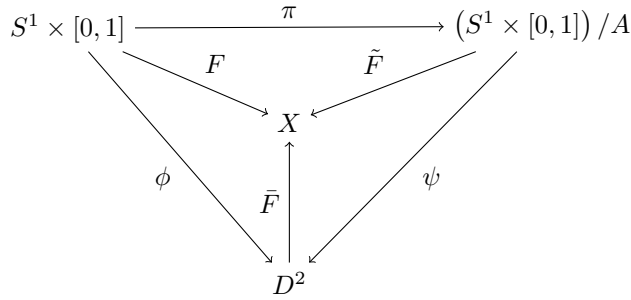


Abbildung 1: Mir fällt kein passender Titel ein.

ist  $\bar{F}$  eine stetige Fortsetzung von  $f$  auf  $D^2$ .

Angenommen,  $f : S^1 \rightarrow X$  lässt sich zu einer stetigen Abbildung  $\bar{F} : D^2 \rightarrow X$  fortsetzen. Mithilfe der stetigen Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow D^2, (s, t) \mapsto ts$$

erhalten wir dann die Homotopie

$$F := \bar{F}\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X.$$

Da für alle  $s \in S^1$

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \bar{F}(\phi(s, 0)) = \bar{F}(0) = \text{const und} \\ F(s, 1) &= \bar{F}(\phi(s, 1)) = \bar{F}(s) = f(s) \end{aligned}$$

ist  $f$  homotop zu einer konstanten Schlinge.

## Aufgabe 5.2:

Ist  $X$  zusammenziehbar, so gibt es einen einelementigen Raum  $*$  und eine Homotopieäquivalenz  $\varphi : X \rightarrow *$ . Diese induziert, wie aus Aufgabe 4.4 bekannt, für jeden Raum  $K$  eine Bijektion

$$\varphi_*^K : [K, X] \rightarrow [K, *], f \mapsto \varphi f.$$

Da  $[K, *]$  immer einelementig ist, ist dann  $[K, X]$  für jeden Raum  $K$  einelementig.

Besteht  $[K, X]$  für jeden Raum  $K$  aus nur einem Element, so ist insbesondere  $[X, X]$  einelementig, also jede (konstante) Abbildung  $X \rightarrow X$  homotop zu  $\text{id}_X$ .

Ist  $\text{id}_X$  homotop zu einer konstanten Abbildung, so gibt es ein  $x_0 \in X$ , so dass  $\text{id}_X \simeq f$  für die konstante Funktion  $f : X \rightarrow X, x \mapsto x_0$ . Für den Teilraum  $* = \{x_0\}$  ist dann für die kanonische Inklusion  $\iota : * \rightarrow X$  und  $g : X \rightarrow *, x \mapsto x_0$

$$g\iota = \text{id}_* \text{ und } \iota g = f \simeq \text{id}_X.$$

Also ist  $g$  eine Homotopieäquivalenz und  $X$  deshalb zusammenziehbar.