# Einführung in die Geometrie und Topologie
## Blatt 7

Jendrik Stelzner

16. Juni 2014

## Aufgabe 7.1:

Wir gehen davon aus, dass $X \neq \emptyset$, damit der Begriff der Fundamentalgruppe für $X$ Sinn ergibt.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{R}, r_0) \arrow[d, "\exp"] \\
(X, x_0) \arrow[r, "f_i"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}_i"] & (S^1, y_0)
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Liftung von $f_i$.

Es genügt zu zeigen, dass je zwei stetige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to S^1$ zueinander homotop sind. Es sei ein Basispunkt $x_0 \in X$ fixiert, $y_0 = f_1(x_0)$ und $r_0 \in \mathbb{R}$ mit $\exp(r_0) = y_0$. Es ist

$$f_{1*}(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(S^1, y_0)$$

eine endliche Untergruppe, wegen

$$\pi_1(S^1, y_0) \cong \mathbb{Z}$$

also

$$f_1^*(\pi_1(X, x_0)) \cong 1$$

und somit

$$f_{1*}(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \exp_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0)).$$

Da $X$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, gibt es deshalb nach dem Liftungssatz eine Liftung $\tilde{f}_1 : (X, x_0) \to (\mathbb{R}, r_0)$ von $f_1$, siehe Abbildung 1. Analog gibt es auch eine Liftung $\tilde{f}_2 : X \to \mathbb{R}$ von $f_2$. Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist $\tilde{f}_1 \simeq \tilde{f}_2$ homotop. Daher ist auch

$$f_1 = \exp \tilde{f}_1 \simeq f_2 = \exp \tilde{f}_2.$$

## Aufgabe 7.3:

### (a)

Die Multiplikation ist assoziativ, da für alle $(n,m),(n',m'),(n'',m'') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&((n,m)\cdot(n',m'))\cdot(n'',m'')\\
&=(n+(-1)^m n', m+m')\cdot(n'',m'')\\
&=\left(n+(-1)^m n'+(-1)^{m+m'}n'', m+m'+m''\right)\\
&=\left(n+(-1)^m\left(n'+(-1)^{m'}n''\right), m+m'+m''\right)\\
&=(n,m)\cdot(n'+(-1)^{m'}n'', m'+m'')\\
&=(n,m)\cdot((n',m')\cdot(n'',m'')).
\end{aligned}$$

Das Element $(0,0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ist bezüglich der Multiplikation rechtsneutral, da für alle $(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$(n,m)\cdot(0,0)=(n+(-1)^0\cdot 0, m+0)=(n,m).$$

Das Element $(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ hat das Rechtsinverse $((-1)^{m+1}n,-m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, da

$$(n,m)\cdot\left((-1)^{m+1}n,-m\right)=(n+(-1)^m(-1)^{m+1}n, m-m)=(0,0).$$

Das zeigt, dass $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$ eine Gruppe ist. Sie ist nicht abelsch, da etwa

$$(1,0)\cdot(1,1)=(2,1)\neq(0,1)=(1,1)\cdot(1,0).$$

### (b)

Es handelt sich um eine Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$, da für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$(x,y)\cdot(0,0)=(x,y),$$

und für alle $(n,m),(n',m')\in\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$ und $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&((x,y)\cdot(n,m))\cdot(n',m')\\
&=((-1)^m(x+n), y+m)\cdot(n',m')\\
&=\left((-1)^{m'}((-1)^m(x+n)+n'), y+m+m'\right)\\
&=\left((-1)^{m+m'}(x+n+(-1)^m n'), y+m+m'\right)\\
&=(x,y)\cdot(n+(-1)^m n', m+m')\\
&=(x,y)\cdot((n,m)\cdot(n',m')).
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Gruppenwirkung ist klar, da sie in jeder Komponente stetig ist. Die Gruppenwirkung ist eigentlich diskontinuierlich, denn für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist

$$U=\left(x-\frac{1}{3}, x+\frac{1}{3}\right)\times\left(y-\frac{1}{3}, y+\frac{1}{3}\right)$$

eine Umgebung von $(x,y)$, für die für alle $(n,m)\in\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$ mit $(n,m)\neq(0,0)$

$$U\cdot(n,m)\cap U=\emptyset.$$