

# EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

## BLATT 4

Jendrik Stelzner

16. Mai 2014

**Lemma 1** (Universelle Eigenschaft des Koproduktes). *Es sei  $I$  eine nichtleere Menge und  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Dann besitzt das Koprodukt  $\coprod_{i \in I} X_i$  die folgende universelle Eigenschaft: Bezeichnet für alle  $j \in I$*

$$\iota_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, x \mapsto (x, j)$$

*die kanonische Inklusion, so gibt es für jeden topologischen Raum  $Y$  und jede Familie stetiger Abbildungen  $(f_i)_{i \in I}$ , so dass  $f_j : X_j \rightarrow Y$  für alle  $j \in I$ , eine eindeutige stetige Abbildung  $f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$  so dass  $f_j = f \circ \iota_j$  für alle  $j \in I$ , also das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X_j & & \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_j & \\ \coprod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*für alle  $j \in I$  kommutiert.*

*Beweis.* Angenommen, es existiert eine solche Abbildung  $f$ . Für  $(x, j) \in \coprod_{i \in I} X_i$  muss dann

$$f((x, j)) = f(\iota_j(x)) = f_j(x).$$

Das zeigt die Eindeutigkeit von  $f$ .

Zum Beweis der Existenz sei  $f$  wie oben definiert. Wir müssen zeigen, dass  $f$  stetig ist. Sie hierzu  $U \subseteq Y$  offen, beliebig aber fest. Wir bemerken, dass  $f_j^{-1}(U) \subseteq X_j$  für alle  $j \in I$  offen ist, da  $f_j$  für alle  $j \in I$  stetig ist. Nach der Definition des Koproduktes ist eine Teilmenge  $V \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$  genau offen ist, wenn  $\iota_j^{-1}(V)$  für alle  $j \in I$  offen ist. Da

$$\iota_j^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \iota_j)^{-1}(U) = f_j^{-1}(U)$$

für alle  $j \in I$  offen ist, ist daher  $f^{-1}(U) \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$  offen. Wegen der Beliebigkeit von  $U$  zeigt dies die Stetigkeit von  $f$ .  $\square$

## Aufgabe 4.1:

1.

Es sei  $W \subseteq X \times Y$  offen und beliebig aber fest. Da die Mengen der Form  $U \times V \subseteq X \times Y$  mit  $U \subseteq X$  offen und  $V \subseteq Y$  offen eine topologische Basis von  $X \times Y$  bilden, gibt es offene Mengen  $\{U_i | i \in I\} \subseteq X$  und  $\{V_i | i \in I\} \subseteq Y$  mit

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i).$$

Daher sind

$$p_1(W) = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X \text{ und } p_2(W) = \bigcup_{i \in I} V_i \subseteq Y$$

in den jeweiligen Räumen offen. Wegen der Beliebigkeit von  $W$  folgt, dass  $p_1$  und  $p_2$  offen sind.

2.

Bekanntermaßen ist  $[0, 1) \times [0, 1) \cong [0, 1)^2$ , wobei  $p_1$  und  $p_2$  den kanonischen Projektionen  $\pi_1, \pi_2 : [0, 1)^2 \rightarrow [0, 1)$  entsprechen. Diese sind nicht abgeschlossen: Es ist  $\overline{B_1((1, 1))} \subseteq \mathbb{R}^2$  abgeschlossen, also auch

$$C := [0, 1)^2 \cap \overline{B_1((1, 1))} \subseteq [0, 1)^2.$$

Es sind aber  $\pi_1(C) = \pi_2(C) = (0, 1)$  nicht abgeschlossen in  $[0, 1)$ .

3.

Da  $Y \neq \emptyset$  ist  $p_1$  surjektiv.

Es ist daher  $U \subseteq X$  genau dann offen, wenn  $p_1^{-1}(U) = U \times Y \subseteq X \times Y$  offen ist: Ist  $U$  offen, so ist es klar, dass auch  $U \times Y$  offen ist. Ist andererseits  $U \times Y$  offen, so ist wegen der Offenheit und Surjektivität von  $p_1$  auch

$$U = p_1(p_1^{-1}(U)) = p_1(U \times Y)$$

offen. Da  $U \subseteq X$  genau dann offen ist, wenn  $p_1^{-1}(U)$  offen ist, ist  $p_1$  eine Quotientenraumabbildung.

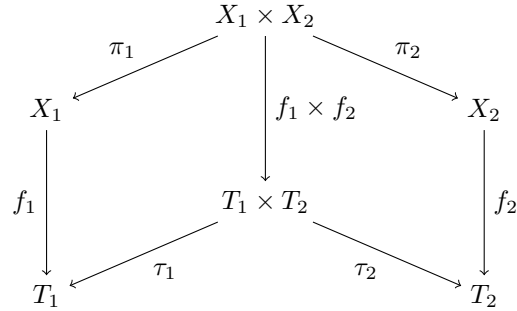
## Aufgabe 4.2:

**Lemma 2.** Seien  $X_1, X_2, T_1, T_2$  topologische Räume,  $f_1 : X_1 \rightarrow T_1$  und  $f_2 : X_2 \rightarrow T_2$  stetige Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow T_1 \times T_2, (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

stetig. Sind  $f_1$  und  $f_2$  offen, so ist auch  $f_1 \times f_2$  offen.

*Beweis.* Wir betrachten das kommutative Diagramm



wobei  $\pi_1, \pi_2, \tau_1$  und  $\tau_2$  die entsprechenden kanonischen Projektionen bezeichnet. Da  $\tau_1 \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \circ \pi_1$  und  $\tau_2 \circ (f_1 \times f_2) = f_2 \circ \pi_2$  stetig sind, ist es auch  $f_1 \times f_2$  (siehe Aufgabe 3).

Angenommen,  $f_1$  und  $f_2$  sind offen. Für offene Mengen  $U \subseteq X_1, V \subseteq X_2$  ist dann auch  $f_1(U) \subseteq T_1$  und  $f_2(V) \subseteq T_2$  offen, also

$$(f_1 \times f_2)(U \times V) = f_1(U) \times f_2(V) \subseteq T_1 \times T_2$$

offen. Da die Mengen der Form  $U \times V$  mit offenen Mengen  $U \subseteq X_1$  und  $V \subseteq X_2$  eine topologische Basis von  $X_1 \times X_2$  bilden, zeigt dies die Offenheit von  $f_1 \times f_2$ .  $\square$

Für alle  $j \in I$  bezeichne

$$\iota_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, x \mapsto (x, j)$$

und

$$\iota'_j : X_j \times Y \rightarrow \coprod_{i \in I} (X_i \times Y), (x, y) \mapsto ((x, y), j)$$

die entsprechenden kanonischen Inklusionen. Da  $\iota_j$  für alle  $j \in I$  stetig ist, ist nach Lemma 2 für alle  $j \in I$  auch die Abbildung

$$\begin{aligned}
\iota_j \times \text{id}_Y : X_j \times Y &\rightarrow \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y \\
(x, y) &\mapsto ((x, j), y).
\end{aligned}$$

stetig. Deshalb gibt es nach der universellen Eigenschaft des Koproduktes (siehe Lemma 1) eine stetige Abbildung

$$f : \coprod_{i \in I} (X_i \times Y) \rightarrow \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
& X_j \times Y & \\
\iota'_j \swarrow & & \searrow \iota_j \times \text{id}_Y \\
\coprod_{i \in I} (X_i \times Y) & \xrightarrow{f} & \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y
\end{array}$$

für alle  $j \in I$  kommutiert. Dabei ist für alle  $j \in I$  und  $x \in X_j, y \in Y$

$$f(((x, y), j)) = f(\iota'_j(x, y)) = (\iota_j \times \text{id}_Y)(x, y) = ((x, j), y).$$

$f$  ist offen: Seien  $j \in I$  und  $U \subseteq X_j \times Y$  offen beliebig aber fest. Da  $\iota_j$  per Definition des Koproduktes offen ist, und die Identität  $\text{id}_Y$  offenbar ebenfalls offen ist, ist nach Lemma 2 auch  $\iota_j \times \text{id}_Y$  offen. Daher ist

$$f(U \times \{j\}) = f(\iota'_j(U)) = (\iota_j \times \text{id}_Y)(U)$$

offen.

Da die Mengen der Form  $U \times \{j\} \subseteq \coprod_{i \in I} (X_i \times Y)$  mit  $j \in I$  und  $U \subseteq X_j$  offen eine topologische Basis von  $\coprod_{i \in I} (X_i \times Y)$  bilden, zeigt dies die Offenheit von  $f$ .

Da  $f$  offenbar auch bijektiv ist, ist  $f$  ein Homöomorphismus.

### Aufgabe 4.3:

Für alle  $j \in I$  bezeichnen wir die kanonische Projektion  $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  mit  $\pi_j$ , und für alle  $i \in I$  setzen wir  $f_i := f \circ \pi_i$ . Ist  $f$  stetig, so ist  $f_i$  als Verknüpfung stetiger Funktionen für alle  $i \in I$  stetig.

Angenommen  $f_i$  ist für alle  $i \in I$  stetig. Für paarweise verschiedene Indizes  $i_1, \dots, i_n \in I$  und beliebige offene Mengen  $U_1 \in X_{i_1}, \dots, U_n \in X_{i_n}$  setzen wir

$$P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} = \prod_{i \in I} \begin{cases} U_k & \text{falls } i = i_k, \\ X_i & \text{sonst,} \end{cases} \subseteq \prod_{i \in I} X_i.$$

Da die Mengen dieser Form eine topologische Basis von  $\prod_{i \in I} X_i$  bilden, genügt es zum Nachweis der Stetigkeit von  $f$  zu zeigen, dass

$$f^{-1} \left( P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} \right) \subseteq T$$

offen ist für alle paarweise verschiedenen Indizes  $i_1, \dots, i_n \in I$  und beliebige offene Mengen  $U_1 \in X_{i_1}, \dots, U_n \in X_{i_n}$ .

Seien also  $i_1, \dots, i_n$  und  $U_1, \dots, U_n$  wie zuvor beliebig aber fest. Wir bemerken, dass

$$P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} = \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k),$$

und deshalb

$$f^{-1} \left( P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} \right) = f^{-1} \left( \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k) \right) = \bigcap_{k=1}^n (\pi_{i_k} \circ f)^{-1}(U_k) = \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_k).$$

Da  $U_k$  für alle  $1 \leq k \leq n$  offen ist, und die  $f_i$  alle stetig sind, ist  $f_{i_k}^{-1}(U_k)$  für alle  $1 \leq k \leq n$  offen, also  $f^{-1}(P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n})$  als endlicher Schnitt offener Mengen offen. Wegen der Beliebigkeit von  $i_1, \dots, i_n$  und  $U_1, \dots, U_n$  zeigt dies die Stetigkeit von  $f$ .

## Aufgabe 4.4:

**Lemma 3.** Seien  $X', X, Y, Y'$  topologische Räume und  $f, g, h, k$  stetige Abbildungen mit

$$\begin{aligned} f &: X \rightarrow Y, \\ g &: X \rightarrow Y, \\ h &: X' \rightarrow X \text{ und} \\ k &: Y \rightarrow Y'. \end{aligned}$$

Ist  $f \simeq g$ , so ist auch  $fh \simeq gh$  und  $kf \simeq kg$ .

*Beweis.* Sei

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

eine Homotopie mit  $F(x, 0) = f(x)$  und  $F(x, 1) = g(x)$  für alle  $x \in X$ . Da  $h$  und  $\text{id}_{[0,1]}$  stetig sind, ist nach Lemma 2 auch

$$h \times \text{id}_{[0,1]} : X' \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1].$$

stetig. Daher ist auch die Verknüpfung

$$F_h := F \circ (h \times \text{id}_{[0,1]}) : X' \times [0, 1] \rightarrow Y$$

stetig.  $F_h$  ist eine Homotopie und für alle  $x' \in X'$  ist

$$\begin{aligned} F_h(x', 0) &= F(h(x'), 0) = f(h(x')) = (fh)(x') \text{ und} \\ F_h(x', 1) &= F(h(x'), 1) = g(h(x')) = (gh)(x'). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass  $fh \simeq gh$ .

Da  $k$  und  $F$  stetig sind, ist auch die Verknüpfung

$$F_k := k \circ F : X \times [0, 1] \rightarrow Y'.$$

stetig.  $F_k$  ist eine Homotopie, und für alle  $x \in X$  ist

$$\begin{aligned} F_k(x, 0) &= k(F(x, 0)) = k(f(x)) = (kf)(x) \text{ und} \\ F_k(x, 1) &= k(F(x, 1)) = k(g(x)) = (kg)(x). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass  $kf \simeq kg$ . □

Zunächst nehmen wir an, dass  $\varphi : X \rightarrow Y$  ist eine Homotopieäquivalenz ist. Dann gibt es eine stetige Abbildung  $\psi : Y \rightarrow X$  so dass

$$\psi\varphi \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad \varphi\psi \simeq \text{id}_Y.$$

Sei  $K$  ein beliebiger topologischer Raum und

$$\varphi_* : [K, X] \rightarrow [K, Y], [f] \mapsto [\varphi f].$$

$\varphi_*$  ist wohldefiniert, denn für  $f, g : K \rightarrow X$  mit  $f \simeq g$  ist nach Lemma 3 auch  $\varphi f \simeq \varphi g$ . Analog definieren wir

$$\psi_* : [K, Y] \rightarrow [K, X], [g] \mapsto [\psi g].$$

Da  $\psi\varphi \simeq \text{id}_X$  ist nach Lemma 3

$$\psi\varphi f \simeq \text{id}_X f = f \text{ für alle } f : K \rightarrow X,$$

und da  $\varphi\psi \simeq \text{id}_Y$  ist nach Lemma 3

$$\varphi\psi g \simeq \text{id}_Y g = g \text{ für alle } g : K \rightarrow Y.$$

Also ist

$$\begin{aligned} (\psi_*\varphi_*)([f]) &= [\psi\varphi f] = [f] \text{ für alle } [f] \in [K, X] \text{ und} \\ (\varphi_*\psi_*)([g]) &= [\varphi\psi g] = [g] \text{ für alle } [g] \in [K, Y]. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass  $\varphi_*$  bijektiv ist, und dass  $\psi_* = \varphi_*^{-1}$ .

Nun nehmen wir an, dass  $\varphi : X \rightarrow Y$  stetig ist und für jeden topologischen Raum  $K$  die induzierte Abbildung

$$\varphi_*^K : [K, X] \rightarrow [K, Y], [f] \mapsto [\varphi f].$$

eine Bijektion ist. Wegen der Surjektivität von  $\varphi_*^Y$  gibt es existiert ein  $\psi : Y \rightarrow X$  mit  $[\varphi\psi] = [\text{id}_Y]$ , also  $\varphi\psi \simeq \text{id}_Y$ . Da  $\varphi\psi \simeq \text{id}_Y$  ist nach Lemma 3

$$\varphi_*^X([\psi\varphi]) = [\varphi\psi\varphi] = [\varphi] = \varphi_*^X([\text{id}_X]),$$

wegen der Injektivität von  $\varphi_*^X$  also  $[\psi\varphi] = [\text{id}_X]$  und deshalb  $\psi\varphi \simeq \text{id}_X$ . Das zeigt, dass  $\varphi$  eine Homotopieäquivalenz ist.