Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 5

Jendrik Stelzner

22. Mai 2014

Aufgabe 5.1:

Wir nehmen zunächst an, dass $f : S^1 \to X$ homotop zu einer konstanten Schlinge ist. Dann gibt es eine Homotopie $F : S^1 \times [0,1] \to X$ mit

$$F(s,0) = \text{const} \text{ und}$$
$$F(s,1) = f(s)$$

für alle $s \in S$. Es sei

$$A := S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times [0,1]$$

und

$$\pi : S^1 \times [0,1] \to \left(S^1 \times [0,1]\right)/A$$

die kanonische Projektion.

Es ist klar, dass F als Abbildung

$$\tilde{F} : \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \to X$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig.

Wir bemerken weiter, dass $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A \cong D^2$: Die Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

ist stetig und surjektiv, und faktorisiert als Bijektion

$$\psi : \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \to D^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da $S^1 \times [0,1]$ als Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist auch $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A$ quasikompakt. Da D^2 Hausdorff ist, ist damit ψ bereits ein Homöomorphismus.

Durch den Isomorphismus ψ faktorisiert $\tilde{F}$ als stetige Abbildung $\bar{F} : D^2 \to X$.

Insgesamt ergibt sich damit ein Diagramm wie in Abbildung 1. Dieses Diagramm kommutiert: Nach Konstruktion ist $\phi = \psi\pi$, sowie $F = \tilde{F}\pi$ und $\tilde{F} = \bar{F}\psi$. Daher ist auch

$$F = \tilde{F}\pi = \bar{F}\psi\pi = \bar{F}\phi.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\bar{F}(s) = \bar{F}\phi(s,1) = F(s,1) = f(s)$$

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \times [0,1] \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "F"] \arrow[ddr, "\phi"'] & & \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \arrow[dl, "\tilde{F}"'] \arrow[ddl, "\psi"] \\
& X & \\
& D^2 \arrow[u, "\bar{F}"] &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1: Mir fällt kein passender Titel ein.

ist $\bar{F}$ eine stetige Fortsetzung von f auf D^2.

Angenommen, $f : S^1 \to X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\bar{F} : D^2 \to X$ fortsetzen. Mithilfe der stetigen Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

erhalten wir dann die Homotopie

$$F := \bar{F}\phi : S^1 \times [0,1] \to X.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \bar{F}(\phi(s,0)) = \bar{F}(0) = \text{const} \text{ und} \\ F(s,1) &= \bar{F}(\phi(s,1)) = \bar{F}(s) = f(s) \end{aligned}$$

ist f homotop zu einer konstanten Schlinge.