

# EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

## BLATT 7

Jendrik Stelzner

17. Juni 2014

### Aufgabe 7.1:

Wir gehen davon aus, dass  $X \neq \emptyset$ , damit der Begriff der Fundamentalgruppe für  $X$  Sinn ergibt.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\mathbb{R}, r_0) \\
 & \nearrow \tilde{f}_i & \downarrow \exp \\
 (X, x_0) & \xrightarrow{f_i} & (S^1, y_0)
 \end{array}$$

Abbildung 1: Liftung von  $f_i$ .

Es genügt zu zeigen, dass je zwei stetige Abbildungen  $f_1, f_2 : X \rightarrow S^1$  zueinander homotop sind. Es sei ein Basispunkt  $x_0 \in X$  fixiert,  $y_0 = f_1(x_0)$  und  $r_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(r_0) = y_0$ . Es ist

$$f_{1*}(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(S^1, y_0)$$

eine endliche Untergruppe, wegen

$$\pi_1(S^1, y_0) \cong \mathbb{Z}$$

also

$$f_1^*(\pi_1(X, x_0)) \cong 1$$

und somit

$$f_{1*}(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \exp_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0)).$$

Da  $X$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, gibt es deshalb nach dem Liftungssatz eine Liftung  $\tilde{f}_1 : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}, r_0)$  von  $f_1$ , siehe Abbildung 1. Analog gibt es auch eine Liftung  $\tilde{f}_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f_2$ . Da  $\mathbb{R}$  zusammenziehbar ist, ist  $\tilde{f}_1 \simeq \tilde{f}_2$  homotop. Daher ist auch

$$f_1 = \exp \tilde{f}_1 \simeq f_2 = \exp \tilde{f}_2.$$

## Aufgabe 7.2:

Es ist klar, dass

$$(X \times \mathbb{R}) \times \mathbb{Z} \rightarrow X \times \mathbb{R}, ((x, t), n) \mapsto (f^n(x), t - n).$$

eine Gruppenwirkung von  $\mathbb{Z}$  auf  $X \times \mathbb{R}$  definiert. Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ist die Abbildung

$$X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}, (x, t) \mapsto (x, t) \cdot n = (f^n(x), t - n)$$

stetig, da sie in jeder Koordinate stetig ist. Die Gruppenwirkung ist eigentlich diskontinuierlich, da für alle  $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$  für die Umgebung

$$U := X \times \left(t - \frac{1}{3}, t + \frac{1}{3}\right) \subseteq X \times \mathbb{R}$$

von  $(x, t)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$Un \cap U = X \times \left(t - \frac{1}{3} - n, t + \frac{1}{3} - n\right) \cap X \times \left(t - \frac{1}{3}, t + \frac{1}{3}\right) = \emptyset.$$

Es bezeichne  $\sim_{\mathbb{Z}}$  die durch die Gruppenwirkung induzierte Äquivalenzrelation auf  $X \times [0, 1]$  und der Homöomorphismus  $g : X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$  definiert als

$$g : X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}, (x, t) \mapsto (x, t) \cdot 1 = (f(x), t - 1).$$

Es bezeichne

$$\iota : X \times [0, 1] \rightarrow X \times \mathbb{R}$$

die kanonische Inklusion. Weiter seien

$$p : X \times [0, 1] \rightarrow T_f$$

und

$$\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow (X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$$

die kanonischen Projektionen. Es ist klar, dass  $\sim$  die Einschränkung von  $\sim_{\mathbb{Z}}$  auf  $X \times [0, 1]$  ist, und dass deshalb die stetige Funktion

$$\pi \iota : X \times [0, 1] \rightarrow (X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$$

als Bijektion

$$\varphi : T_f \rightarrow (X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft der Quotientenraumtopologie ebenfalls stetig. Wir erhalten daher das kommutative Diagramm in Abbildung 2.

Wir zeigen, dass  $\varphi$  auch offen ist. Hierfür sei  $U \subseteq T_f$  offen und nichtleer. Wir setzen

$$V := p^{-1}(U) \text{ und } W := \pi^{-1}(\varphi(U)).$$

Es ist klar, dass  $V$  offen in  $X \times [0, 1]$  ist, und dass  $W$  die Saturierung von  $V$  bezüglich  $\sim_{\mathbb{Z}}$  in  $X \times \mathbb{R}$  ist. Außerdem ist die Offenheit von  $\varphi(U)$  nach der Definition der Quotientenraumtopologie äquivalent zu der Offenheit von  $W$ .

Es sei  $(x, t) \in W$  beliebig aber fest.

$$\begin{array}{ccc}
X \times [0, 1] & \xrightarrow{\iota} & X \times \mathbb{R} \\
\downarrow p & & \downarrow \pi \\
T_f & \xrightarrow{\varphi} & (X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}
\end{array}$$

Abbildung 2: Homöomorphie zum Abbildungstorus.

Ist  $t \notin \mathbb{Z}$ , so gibt es  $(y, u) \in V$  mit  $(x, t) \sim_{\mathbb{Z}} (y, u)$ , also

$$(x, t) = (f^n(y), u - n) = g^n(y, u)$$

für passendes  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $V$  offen in  $X \times [0, 1]$  ist, gibt es eine offene Umgebung  $O \subseteq X$  von  $y$  und ein offenes Intervall  $(a, b) \subseteq [0, 1]$  mit  $u \in (a, b)$ , so dass

$$(y, u) \in O \times (a, b) \subseteq V.$$

Daher ist

$$(x, t) = g^n(y, u) \subseteq g^n(O \times (a, b)) = f^n(O) \times (a - n, b - n),$$

wobei  $f^n(O) \times (a - n, b - n)$  offen ist, da  $f$  ein Homöomorphismus ist.

Ist  $t \in \mathbb{Z}$ , so ist, da  $W$  die Saturierung von  $V$  bezüglich  $\sim_{\mathbb{Z}}$  ist, und  $V$  bezüglich  $\sim$  saturiert ist

$$(f^{t-1}(x), 1) = (x, t) \cdot (t - 1) \in V \text{ und } (f^t(x), 0) = (x, t) \cdot t \in V.$$

Da  $V$  in  $X \times [0, 1]$  offen ist, gibt es daher eine offene Umgebung  $O$  von  $f^{t-1}(x)$  und  $a \in (0, 1)$  mit

$$(f^{t-1}(x), 1) \in O \times (a, 1] \subseteq V \subseteq W,$$

und eine offene Umgebung  $O'$  von  $f^t(x)$  und  $a \in (0, 1)$  mit

$$(f^t(x), 0) \in O' \times [0, a) \subseteq V \subseteq W.$$

Da  $W$  bezüglich  $\sim_{\mathbb{Z}}$  saturiert ist, ist daher auch

$$g(O \times (a, 1]) = f(O) \times (a - 1, 0] \subseteq W,$$

wobei

$$(f^t(x), 0) = g(f^{t-1}(x), 1) \subseteq f(O) \times (a - 1, 0].$$

Es ist deshalb

$$\tilde{O} := (f(O) \cap O') \times (a - 1, b) \in W$$

eine offene Umgebung von  $(f^t(x), 0)$ . Daher ist  $g^{-t}(\tilde{O}) \subseteq W$  eine offene Umgebung von  $g^{-t}(f^t(x), 0) = (x, t)$ .

Da die Menge  $W$  um jeden ihrer Punkte eine offene Umgebung enthält, ist  $W$  offen. Wegen der Beliebigkeit von  $U$  zeigt dies, dass  $\varphi$  offen ist. Also ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus.

### Aufgabe 7.3:

(a)

Die Multiplikation ist assoziativ, da für alle  $(n, m), (n', m'), (n'', m'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 & ((n, m) \cdot (n', m')) \cdot (n'', m'') \\
 &= (n + (-1)^m n', m + m') \cdot (n'', m'') \\
 &= \left( n + (-1)^m n' + (-1)^{m+m'} n'', m + m' + m'' \right) \\
 &= \left( n + (-1)^m \left( n' + (-1)^{m'} n'' \right), m + m' + m'' \right) \\
 &= (n, m) \cdot (n' + (-1)^{m'} n'', m' + m'') \\
 &= (n, m) \cdot ((n', m') \cdot (n'', m'')).
 \end{aligned}$$

Das Element  $(0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ist bezüglich der Multiplikation rechtsneutral, da für alle  $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(n, m) \cdot (0, 0) = (n + (-1)^0 \cdot 0, m + 0) = (n, m).$$

Das Element  $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  hat das Rechtsinverse  $((-1)^{m+1} n, -m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , da

$$(n, m) \cdot ((-1)^{m+1} n, -m) = (n + (-1)^m (-1)^{m+1} n, m - m) = (0, 0).$$

Das zeigt, dass  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  eine Gruppe ist. Sie ist nicht abelsch, da etwa

$$(1, 0) \cdot (1, 1) = (2, 1) \neq (0, 1) = (1, 1) \cdot (1, 0).$$

(b)

Es handelt sich um eine Gruppenwirkung von  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}^2$ , da für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \cdot (0, 0) = (x, y),$$

und für alle  $(n, m), (n', m') \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  und  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 & ((x, y) \cdot (n, m)) \cdot (n', m') \\
 &= ((-1)^m (x + n), y + m) \cdot (n', m') \\
 &= \left( (-1)^{m'} ((-1)^m (x + n) + n'), y + m + m' \right) \\
 &= \left( (-1)^{m+m'} (x + n + (-1)^m n'), y + m + m' \right) \\
 &= (x, y) \cdot (n + (-1)^m n', m + m') \\
 &= (x, y) \cdot ((n, m) \cdot (n', m')).
 \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Gruppenwirkung ist klar, da sie in jeder Komponente stetig ist. Die Gruppenwirkung ist eigentlich diskontinuierlich, denn für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist

$$U = \left( x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3} \right) \times \left( y - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3} \right)$$

eine Umgebung von  $(x, y)$ , für die für alle  $(n, m) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  mit  $(n, m) \neq (0, 0)$

$$U \cdot (n, m) \cap U = \emptyset.$$

(c)

Es sei  $\sim_K$  die gegebene Äquivalenzrelation auf  $[0, 1] \times [0, 1]$  und  $\sim$  die durch die Gruppenwirkung von  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  erzeugte Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}^2$ . Es ist klar, dass  $\sim_K$  die Einschränkung von  $\sim$  auf  $[0, 1] \times [0, 1]$  ist. Bezeichnet  $\iota : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  die kanonische Inklusion, und bezeichnen

$$\pi_K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow ([0, 1] \times [0, 1]) / \sim_K = K$$

und

$$\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim$$

die kanonischen Projektionen, so faktorisiert deshalb  $\pi \iota$  über  $\pi_K$  zu einer Bijektion

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft der Quotientenraumtopologie stetig ist. Da  $\mathbb{R}^2$  Hausdorff ist, und die Gruppenwirkung von  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  eigentlich diskontinuierlich, ist auch  $\mathbb{R}^2 / \sim$  Hausdorff, und  $K$  ist als Quotient eines kompakten Raumes ebenfalls quasi-kompakt. Daher ist  $f$  bereits ein Homöomorphismus.

(d)

Offenbar ist  $K$  auch homöomorph zum Abbildungstorus von  $S^1$  unter der Konjugation.

## Aufgabe 7.4:

Es ist klar, dass die Inklusion

$$j : X \rightarrow X \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, 0),$$

stetig ist. Aus Aufgabe 7.2 ist bekannt, dass die Abbildung

$$p : X \times \mathbb{R} \rightarrow T_f, (x, t) \mapsto [(x, t)].$$

eine Überlagerungsabbildung ist. Da offenbar  $\iota = pj$  ist  $\iota$  ebenfalls stetig. Bezeichnen

$$\pi_1 : X \times \mathbb{R} \rightarrow X \text{ und } \pi_2 : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

die kanonischen Projektionen, so ist es klar, dass die Abbildung

$$\exp \pi_2 : X \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

über  $T_f$  faktorisiert, wobei es sich bei der faktorisierten Abbildung offenbar um  $q$  handelt. Insbesondere ist  $q$  daher wohldefiniert. Aus der universellen Eigenschaft des Quotientenraumtopologie folgt weiter, dass  $q$  stetig ist. Insgesamt erhalten wir damit das kommutative Diagramm in Abbildung 3.

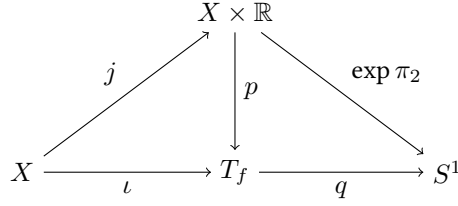


Abbildung 3: Ein Diagramm.

**(a)**

Es sei  $x \in X$  beliebig aber fest. Da

$$\iota_* = (pj)_* = p_*j_*$$

genügt es für die Injektivität von  $\iota_*$  zu zeigen, dass

$$j_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X \times \mathbb{R}, (x, 0))$$

und

$$p_* : \pi_1(X \times \mathbb{R}, (x, 0)) \rightarrow \pi_1(T_f, \iota(x))$$

injektiv sind. Da  $p$  eine Überlagerungsabbildung ist, ist  $p_*$  bekanntermaßen injektiv.

Es sei  $\gamma : (S^1, 1) \rightarrow (X, x)$  mit  $[\gamma] \in \ker j_*$ . Dann ist

$$j\gamma : (S^1, 1) \rightarrow (X \times \mathbb{R}, (x, 0))$$

homotop zur konstanten Schleife relativ zu 1. Es gibt also eine Homotopie

$$F : S^1 \times I \rightarrow X \times \mathbb{R},$$

so dass

$$F(z, 0) = j\gamma(z) \text{ und } F(z, 1) = (x, 0) \text{ für alle } z \in S^1$$

und

$$F(0, t) = (x, 0) \text{ für alle } t \in I.$$

Es ist dann

$$\pi_1 F : S^1 \times I \rightarrow X$$

eine Homotopie von  $\gamma$  zur konstanten Schleife relativ zu 1. Daher ist  $[\gamma]$  das neutrale Element. Das zeigt, dass  $\ker j_*$  trivial ist, also  $j_*$  injektiv.

**(b)**

Es sei  $[(x, t)] \in T_f$  beliebig aber fest.

Da  $x$  wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\gamma : [t-1, t] \rightarrow X$  von  $f(x)$  nach  $x$ . Es ist daher

$$\tilde{\gamma} : [t-1, t] \rightarrow X \times \mathbb{R}, s \mapsto (\gamma(s), s)$$

ein Weg von  $(f(x), t-1)$  nach  $(x, t)$ . Daher ist

$$p\tilde{\gamma} : [t-1, t] \rightarrow T_f, s \mapsto [(\gamma(s), s)]$$

eine Schlinge mit

$$p\tilde{\gamma}(0) = p\tilde{\gamma}(1) = [(x, t)].$$

Über die Abbildung

$$\exp : [t - 1, t] \rightarrow S^1$$

faktoriisiert  $p\tilde{\gamma}$  als eindeutige, nach der universellen Eigenschaft der Quotientenraumtopologie stetige, Abbildung

$$s : S^1 \rightarrow T_f,$$

d.h.  $p\tilde{\gamma} = s \exp$ . Wir bemerken, dass auch

$$qp\tilde{\gamma} = \exp.$$

Wir erhalten also die beiden kommutativen Diagramme in Abbildung TODO.

Da

$$qs \exp = qp\tilde{\gamma} = \exp$$

folgt aus der Surjektivität von  $\exp : [t - 1, t] \rightarrow S^1$ , dass  $qs = \text{id}_{S^1}$ . Da

$$q : (T_f, [(x, t)]) \rightarrow (S^1, \exp(t))$$

und

$$s : (S^1, \exp(t)) = (T_f, [(x, t)])$$

ist deshalb

$$q_* s_* = (qs)_* = \text{id}_{S^1} = \text{id}_{\pi_1(S^1, \exp(t))}.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $[(x, t)] \in T_f$  zeigt dies, dass  $q_*$  split-surjektiv ist.

### (c)

Es sei  $x \in X$  beliebig aber fest.

Es sei zunächst  $[\tilde{\gamma}] \in \text{im } \iota_*$ . Dann gibt es  $\gamma : (S^1, 1) \rightarrow (X, x)$  mit  $\tilde{\gamma} = \iota\gamma$ . Da für alle  $z \in S^1$

$$q\tilde{\gamma}(z) = q\iota\gamma(z) = q([\gamma(z), 0]) = \exp(0) = 1$$

ist  $q_*([\tilde{\gamma}])$  das neutrale Element, also  $[\tilde{\gamma}] \in \ker q_*$ . Das zeigt, dass  $\text{im } \iota_* \subseteq \ker q_*$ .

Sei andererseits  $[\tilde{\gamma}] \in \ker q_*$ . Da  $p$  ein Überlagerungsabbildung ist, lässt sich die Schlinge  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow T_f$  nach dem Wege-Liftungssatz zu einem Weg  $\gamma : X \times I \rightarrow S^1$  mit Anfangspunkt  $(x, 0)$  liften. Da

$$p\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = p\gamma(1)$$

ist  $p\gamma(1) = (x, 0)$ . Da die Schlinge

$$q\tilde{\gamma} = qp\gamma = \exp \pi_2\gamma$$

nullhomotop ist, muss sie Windungszahl 0 haben. Da die Windungszahl ist gerade  $\pi_2\gamma(0) - \pi_2\gamma(1)$  ist, muss also

$$\pi_2\gamma(0) = \pi_2\gamma(1).$$

Da  $\gamma(0)$  und  $\gamma(1)$  in der zweiten Koordinate übereinstimmen, und  $p\gamma(0) = p\gamma(1)$  müssen sie auch in der ersten Koordinate übereinstimmen. (Da für festes  $t \in \mathbb{R}$  in

$X \times \{t\}$  keine Punkte miteinander identifiziert werden.) Also ist  $\gamma(0) = \gamma(1)$  und  $\gamma$  somit ebenfalls eine Schlinge.

Wir betrachten die Homotopie

$$F : [0, 1] \times I \rightarrow X \times \mathbb{R}, (t, s) \mapsto (\pi_1(\gamma(t)), s\pi_2(\gamma(t))).$$

Da für alle  $t \in [0, 1]$

$$F(t, 0) = (\pi_1(\gamma(t)), 0) \text{ und } F(t, 1) = \gamma(t),$$

sowie für alle  $s \in [0, 1]$

$$F(0, s) = F(1, s) = (x, 0)$$

ist  $F$  eine Homotopie von  $\gamma$  zu einer Schlinge  $\tau$ , die komplett in  $X \times \{0\}$  liegt, relativ zum Anfangs- und Endpunkt. Es ist daher

$$pF : [0, 1] \times I \rightarrow T_f$$

eine Homotopie von  $\tilde{\gamma}$  zu einer Schlinge  $\tilde{\tau}$ , die komplett in  $p(X \times \{0\}) = \text{im } \iota$  liegt, relativ zum Anfangs- und Endpunkt. Daher ist

$$[\tilde{\gamma}] = [\tilde{\tau}].$$

Da  $\tau$  komplett in  $X \times \{0\}$  verläuft ist auch

$$\tilde{\tau} = p\tau = \iota\pi_1\tau,$$

also

$$[\tilde{\tau}] = \iota_*[\pi_1\tau] \in \text{im } \iota_*.$$

Dies zeigt, dass  $\ker q_* \subseteq \text{im } \iota_*$ .