

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

BLATT 2

Jendrik Stelzner

28. April 2014

Aufgabe 2.1:

Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Kollektion \mathcal{B} von Umgebungen von x heißt Umgebungsbasis von x , falls es für jede Umgebung N von x ein $M \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $M \subseteq N$.

Wir sagen, dass X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, bzw. dass X erstabzählbar ist, falls es für alle $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis \mathcal{B}_x von x gibt.

Bemerkung 1. Jeder metrische Raum ist erstabzählbar. Für einen metrischen Raum X und $x \in X$ bildet nämlich

$$\mathcal{B}_x := \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$

offensichtlich eine Umgebungsbasis von x .

Bemerkung 2. Besitzt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis \mathcal{B} , so besitzt x auch eine abzählbare Umgebungsbasis \mathcal{U} von offenen Umgebungen. Es enthält nämlich jedes $B \in \mathcal{B}$ eine offene Umgebung U_B von x . Es sei dann

$$\mathcal{U} := \{U_B : B \in \mathcal{B}\}.$$

Dass \mathcal{U} eine Umgebungsbasis von x ist, folgt daraus, dass es für jede Umgebung N von x ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $B \subseteq N$, und deshalb

$$U_B \subseteq B \subseteq N.$$

Bemerkung 3. Sind X, Y topologische Räume und $X \cong Y$, so ist offenbar X genau dann erstabzählbar, wenn Y erstabzählbar ist.

Die drei Räume A, B, C sind paarweise nicht homöomorph zueinander. Zunächst zeigen wir, dass die hawaiischen Ohrring als einziger der drei Räume kompakt sind.

Der Raum A ist nicht kompakt, da ein Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn X in \mathbb{R}^n abgeschlossen und beschränkt ist. Da A offenbar nicht beschränkt ist, ist A nicht kompakt.

Die hawaiischen Ohrringe sind kompakt: Ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von B in \mathbb{R}^2 , so gibt es ein $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $0 \in U_0$. Da U_0 offen in \mathbb{R}^2 ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq U_0$. Es sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, so dass $N > 1/\varepsilon$. Bezeichnet K_n den Kreis mit Mittelpunkt $(0, 1/n)$ und Radius $1/n$ für alle $n \geq 1$, so ist also

$$B = \bigcup_{n \geq 1} K_n \subseteq U_0 \cup \bigcup_{n=1}^N K_n.$$

Da alle K_n offenbar abgeschlossen und beschränkt sind, also kompakt, und die endliche Vereinigung kompakter Mengen offenbar kompakt ist, besitzt \mathcal{U} als offene Überdeckung von $\bigcup_{n=1}^N K_n$ eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ von $\bigcup_{n=1}^N K_n$. Es ist daher $\mathcal{V} \cup \{U_0\} \subseteq \mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von B . Das zeigt, dass die hawaiischen Ohrringe kompakt ist.

Der Raum C ist nicht kompakt. Bezeichnet $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ die kanonische Projektion, so ist nach der Definition der Quotiententopologie eine Teilmenge $U \subset C$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in \mathbb{R} ist. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ oder $A \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ist $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, also ist $\pi(U)$ offen in C für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$, für die $U \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ oder $U \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Für die offene Überdeckung

$$\mathcal{U} := \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_{1/3}(n) \right\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{(n, n+1)\}$$

von \mathbb{R} ist daher $\mathcal{V} := \{\pi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von C . Da es für alle $n + 1/2$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eine eindeutige Menge in \mathcal{U} gibt, die $n + 1/2$ enthält, und π auf $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ injektiv ist, folgt daraus, dass es für alle $\pi(n + 1/2)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eine eindeutige Menge in \mathcal{V} gibt, die $\pi(n + 1/2)$ enthält. Deshalb besitzt \mathcal{V} keine endliche Teilüberdeckung. Das zeigt, dass C nicht kompakt ist.

Damit haben wir gezeigt, dass die hawaiischen Ohrringe kompakt ist, A und C aber nicht. Also sind die hawaiischen Ohrring zu keinem der anderen beiden Räume homöomorph.

Nach Bemerkung 1 ist A erstabzählbar. Wir zeigen nun noch, dass C nicht erstabzählbar ist, wodurch sich nach Bemerkung 3 ergibt, dass auch A und C nicht homöomorph sind.

Angenommen, C ist erstabzählbar. Dann hat $\pi(0) \in C$ nach Bemerkung 2 eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$ von offenen Umgebungen. Wir schreiben $V_n := \pi^{-1}(U_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und setzen

$$\mathcal{V} := \{V_n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $\mathbb{Z} \subseteq V_n$, da $\pi(0) \in U_n$, und dass V_n offen ist, da U_n offen ist und π stetig. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gibt es daher ein $r_n > 0$ so dass $B_{r_n}(n) \subseteq V_n$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$r'_n := \min\{r_n/2, 1/3\}$$

und setzen

$$W := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_{r'_n}(n).$$

W ist eine offene Menge mit $\mathbb{Z} \subseteq W$ und $W \subsetneq V_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei sich W und V_n um je überabzählbar viele Element unterscheiden. Daher ist $\pi(W) \subseteq C$ eine offene Umgebung von $\pi(0) \in C$ mit $\pi(W) \subsetneq U_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass \mathcal{U} eine Umgebungsbasis von $\pi(0)$ ist.

Aufgabe 2.2:

(b)

Es ist klar, dass R wegzusammenhängend ist und $R - (\{0\} \times [0, 4])$ in die beiden Wegzusammenhangskomponenten $[-1, 0] \times [0, 4]$ und $(0, 1] \times [0, 4]$ zerfällt. Da π_0

funktoriell ist, zerfällt daher auch $M - K$ in höchstens zwei Wegzusammenhangskomponenten, wobei $q([-1, 0) \times [0, 4])$ und $q((0, 1] \times [0, 4])$ wegzusammenhängend in $M - K$ sind. Wir zeigen, dass $M - K$ bereits wegzusammenhängend ist. Da Wegzusammenhangskomponenten entweder disjunkt oder gleich sind, und jede wegzusammenhängende Teilmenge in einer Wegzusammenhangskomponente liegt, reicht es hierfür zu zeigen, dass $q(X)$ wegzusammenhängend ist für

$$X := \{-1\} \times [0, 4] \cup \{1\} \times [0, 4].$$

Dies zeigen wir, indem wir zeigen, dass $q(X) \cong S^1$. (S^1 ist als Quotienten des wegzusammenhängenden Raumes $[0, 1]$ ebenfalls wegzusammenhängend.)

Wir betrachten die Abbildung $f : X \rightarrow S^1$ mit

$$f(s, t) = \begin{cases} (\cos(\frac{\pi}{4}t), \sin(\frac{\pi}{4}t)) & \text{falls } s = 1, \\ -(\cos(\frac{\pi}{4}t), \sin(\frac{\pi}{4}t)) & \text{falls } s = -1, \end{cases} = s \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \right).$$

Es ist klar, dass f surjektiv ist und als Bijektion \tilde{f} über $q(X)$ faktorisiert. Wir erhalten ein entsprechendes kommutative Diagram.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ q \swarrow & & \searrow f \\ q(X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^1 \end{array}$$

Wir bemerken, dass \tilde{f} stetig ist: Wir zeigen, dass $\tilde{f}^{-1}(B_\varepsilon(x))$ in $q(X)$ offen ist für alle $x \in S^1$ und $\varepsilon > 0$, wobei wir zur einfacheren Notation

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in S^1 : \|x - y\| < \varepsilon\} \subseteq S^1$$

verstehen wollen. ($\|\cdot\|$ bezeichnet die übliche Norm auf \mathbb{R}^2 .) Da diese ε -Bälle eine Basis der Topologie von S^1 bilden, zeigen wir damit die Stetigkeit von \tilde{f} . Wegen der Definition der Quotientenraumtopologie genügt es hierfür zu zeigen, dass $q^{-1}(\tilde{f}^{-1}(B_\varepsilon(x)))$ offen in X ist. Das Urbild eines solchen ε -Balles hat für passende $u, t \in (0, 4)$ die Form

$$\begin{aligned} &\{1\} \times (u, t) \text{ oder} \\ &\{-1\} \times (u, t) \text{ oder} \\ &\{-1\} \times [0, u) \cup \{1\} \times (t, 4] \text{ oder} \\ &\{-1\} \times (t, 4] \cup \{1\} \times [0, u). \end{aligned}$$

Da all diese Mengen offen in X sind, zeigt dies die Stetigkeit von \tilde{f} .

Damit ist \tilde{f} eine stetige Bijektion. Da S^1 hausdorff ist und $q(X)$ als Quotient des kompakten Raumes X ebenfalls quasikompakt ist, ist \tilde{f} schon ein Homöomorphismus. Das zeigt, dass $q(X) \cong S^1$ und damit, dass $M - K$ wegzusammenhängend ist.