

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

BLATT 3

Jendrik Stelzner

6. Mai 2014

Aufgabe 3.1:

Es sei X ein quasikompakter Raum. Wir nehmen an, dass X nicht folgenkompakt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf X , die keinen Häufungspunkt besitzt.

Es gibt also für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x , so dass nur endlich viele Folgenglieder in U_x sind. Da U_x eine offene Umgebung von x enthält, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass alle U_x offen sind.

Es ist $\{U_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X . Da X quasikompakt ist, gibt es daher $y_1, \dots, y_n \in X$ mit $X = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$. Da U_{y_1}, \dots, U_{y_n} jeweils nur endlich viele Folgenglieder enthalten, enthält X nur endlich viele Folgenglieder – ein offensichtlicher Widerspruch.

Das zeigt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzt, und damit, dass X folgenkompakt ist. Also ist jeder quasikompakte Raum folgenkompakt.

Aufgabe 3.2:

Wir setzen $Y := X \times X$ und $\Delta := \Delta(X)$. Für $A, B \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}(A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in X : (x, x) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : x \in A \text{ und } x \in B \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,\end{aligned}$$

und deshalb

$$A \times B \subseteq Y - \Delta \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Da die Mengen der Form $U \times V \subseteq Y$ mit offenen $U, V \subseteq X$ eine Basis der Produkttopologie auf Y bilden, gilt

$$\begin{aligned}W \subseteq Y \text{ ist offen} \\ \Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \text{ gibt es } U, V \subseteq X \text{ offen mit } (x, y) \in U \times V \subseteq W \\ \Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \text{ gibt es } U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V \text{ und } U \times V \subseteq W.\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt daher

$$\begin{aligned}
& \Delta \text{ ist abgeschlossen in } Y \\
& \Leftrightarrow Y - \Delta \text{ ist offen in } Y \\
& \Leftrightarrow \forall (x, y) \in (Y - \Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \times V \subseteq Y - \Delta \\
& \Leftrightarrow \forall (x, y) \in (Y - \Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \\
& \Leftrightarrow \forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \\
& \Leftrightarrow X \text{ ist Hausdorff.}
\end{aligned}$$

Fun fact: Ein alternativer, intuitiverer Beweis lässt sich mithilfe von Netzen formulieren: Es ist

$$\overline{\Delta} = \{h \in X \times X : \text{es gibt ein Netz } (h_\alpha) \text{ auf } \Delta \text{ mit } h_\alpha \rightarrow h \text{ in } X \times X\}.$$

Dass Δ abgeschlossen ist, ist daher äquivalent dazu, dass für jedes Netz (h_α) auf Δ , das gegen ein $h \in X \times X$ konvergiert, bereits $h \in \Delta$.

Wir bemerken, dass ein Netz (h_α) auf Δ von der Form

$$(h_\alpha) = (x_\alpha, x_\alpha)$$

ist, wobei (x_α) ein Netz auf X ist, und dass $h = (x, y)$ mit $x, y \in X$. Da ein Netz in einem Produktraum genau dann konvergiert, wenn es in jeder einzelnen Koordinate konvergiert, ist die obige Aussage äquivalent dazu, dass für jedes Netz (x_α) auf X und alle $x, y \in X$ mit $x_\alpha \rightarrow x$ und $x_\alpha \rightarrow y$ bereits $x = y$.

Es ist also Δ genau dann abgeschlossen in $X \times X$, wenn Grenzwerte von Netzen auf X eindeutig sind. Dies ist bekanntermaßen äquivalent dazu, dass X Hausdorff ist.

Aufgabe 3.3:

Es bezeichne \sim_n die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ mit

$$x \sim_n y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x.$$

Außerdem sei

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

die n -Sphäre und

$$\tilde{D}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}.$$

die „nördliche“ Hemisphäre von S^n . Man bemerke, dass \sim auf S^n genau die Antipodenpunkte miteinander identifiziert, also den Punkt $x \in S^n$ mit dem Punkt $-x \in S^n$. Es bezeichne außerdem \sim_n^* die Äquivalenzrelation auf D^n , die die Antipodenpunkte des Randes von D^n miteinander identifiziert, also jeden Punkt $x \in S^{n-1} \subseteq D^n$ mit dem Antipodenpunkt $-x \in S^{n-1} \subseteq D^n$. Es seien

$$\varphi_n : D^n \rightarrow \tilde{D}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$$

und

$$\psi_n : S^n / \sim_n \rightarrow \mathbb{R}P^n, [x]_{\sim_n} \mapsto [x]_{\sim_n}.$$

Wir haben bereits letzte Woche gezeigt, dass

$$D^n / \sim_n^* \cong \tilde{D}^n / \sim_n \cong S^n / \sim_n \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim_n \cong \mathbb{R}P^n,$$

wobei der Homöomorphismus $D^n / \sim_n^* \cong \tilde{D}^n / \sim_n$ durch φ_n induziert wird, der Homöomorphismus $\tilde{D}^n / \sim_n \cong S^n / \sim_n$ durch die kanonische Inklusion $\tilde{D}^n \hookrightarrow S^n$ induziert wird, und der Homöomorphismus $S^n / \sim_n \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim_n$ durch ψ gegeben ist, also durch die kanonische Inklusion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ induziert wird. Auch haben wir im Laufe des Nachweises dieser Homöomorphismen gezeigt, dass S^n / \sim_n Hausdorff ist.

1.

Dies haben wir bereits letzte Woche gezeigt.

2.

Dies folgt direkt daraus, dass $S^n / \sim_n \cong \mathbb{R}P^n$, und dass S^n / \sim_n Hausdorff ist.

3.

Es ist offenbar \sim die Einschränkung von \sim_2 auf S^2 . Es bezeichne $\pi : S^2 \rightarrow S^2 / \sim$ die kanonische Projektion. Wir setzen

$$\begin{aligned} S &:= \left\{ (x, y, z) \in S^2 : z \geq \frac{1}{2} \text{ oder } z \leq -\frac{1}{2} \right\}, \\ T &:= \left\{ (x, y, z) \in S^2 : -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ und} \\ R &:= S \cap T = \left\{ (x, y, z) \in S^2 : z = -\frac{1}{2} \text{ oder } z = \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass S, T und R abgeschlossen in S^2 sind, und dass sie saturiert bezüglich \sim sind, dass also $\pi^{-1}(\pi(X)) = X$ für alle $X \in \{S, T, R\}$. Insbesondere sind daher auch $\pi(S), \pi(T)$ und $\pi(R)$ abgeschlossen in S^2 / \sim . (Denn die abgeschlossenen Mengen in S^2 / \sim sind genau die Bilder von abgeschlossenen, saturierten Teilmengen von S^2 unter π .)

Bekanntermaßen ist $S^2 / \sim \cong \mathbb{R}P^2$. Es sei $f : S^2 / \sim \rightarrow \mathbb{R}P^2$ ein Homöomorphismus (man kann etwa f als ψ_2 wählen). Wir setzen

$$A := f(\pi(S)), B := f(\pi(T)) \text{ und } C := A \cap B.$$

Wir bemerken dabei direkt, dass $C = f(\pi(R))$, da

$$\begin{aligned} C &= A \cap B = f(\pi(S)) \cap f(\pi(T)) = f(\pi(S) \cap \pi(T)) \\ &= f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S) \cap \pi(T)))) = f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S)) \cap \pi^{-1}(\pi(T)))) \\ &= f(\pi(S \cap T)) = f(\pi(R)). \end{aligned}$$

Da $\pi(X)$ für alle $X \in \{S, T, R\}$ abgeschlossen in S^2 / \sim ist, und f ein Homöomorphismus ist, sind A, B und C abgeschlossen in $\mathbb{R}P^2$.

Da $f : S^2 / \sim \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ein Homöomorphismus ist, ist klar, dass auch die Einschränkung

$$\pi(S) \rightarrow f(\pi(S)) = A, x \mapsto f(x)$$

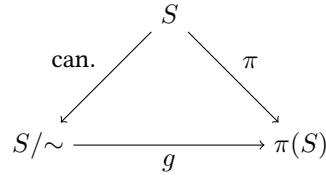


Abbildung 1: Die Homöomorphie von S/\sim und $\pi(S)$.

ein Homöomorphismus ist. Daher ist $\pi(S) \cong A$.

Wir bemerken, dass $S/\sim \cong \pi(S)$: Die stetige Abbildung $S \rightarrow \pi(S), x \mapsto \pi(x)$ faktorisiert offenbar als Bijektion $S/\sim \rightarrow \pi(S)$ (denn es ist $\pi(s) = \pi(s') \Leftrightarrow s \sim s'$), die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist (da π stetig ist). Da S kompakt ist (denn S^2 ist kompakt und $S \subseteq S^2$ abgeschlossen) und $\pi(S)$ Hausdorff ist (denn $\pi(S) \subseteq S^2/\sim$ mit S^2/\sim Hausdorff) ist g bereits ein Homöomorphismus. Dies lässt sich in dem kommutativen Diagramm von Abbildung 1 zusammenfassen.

Das zeigt, dass

$$S/\sim \cong \pi(S) \cong A.$$

Komplett analog ergibt sich, dass auch $T/\sim \cong B$ und $R/\sim \cong C$. Wir zeigen nun, dass $S/\sim \cong D^2$, $T/\sim \cong M$ und $R/\sim \cong S^1$. Dabei ist die Homöomorphie $T/\sim \cong M$ bereits aus Aufgabe 2.3 bekannt.

Für die Homöomorphie $S/\sim \cong D^2$ betrachten wir die Abbildung

$$h : S \rightarrow D^2 \text{ mit } h(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}(x, y) & \text{falls } z > 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(x, y) & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$

Diese ist offenbar wohldefiniert und surjektiv. (Man beachte, dass für alle $(x, y, z) \in S$

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und Gleichheit für $z = \pm 1/2$ gilt.) Es ist auch klar, dass h stetig ist (h ist auf den beiden Zusammenhangskomponenten, in die S zerfällt, offenbar stetig, und somit auch auf ganz S). Offenbar faktorisiert h als Bijektion $\tilde{h} : S/\sim \rightarrow D^2$, die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da S/\sim als Quotient eines quasi-kompakten Raumes selber quasi-kompakt ist, und D^2 Hausdorff ist, ist \tilde{h} bereits ein Homöomorphismus.

Wir haben gezeigt, dass

$$A \cong \pi(S) \cong S/\sim \cong D^2.$$

Komplett analog zeigt man auch dass $R/\sim \cong S^1$, und damit, dass

$$C \cong \pi(R) \cong R/\sim \cong S^1.$$

Aufgabe 3.4:

1.

Wir zeigen zunächst, dass jedes Element von $\text{SO}(3)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt.

Sei zunächst $A \in \text{SO}(2)$. Wir behaupten, dass es ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ gibt, so dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Hierfür betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Da

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

muss $a = d$ und $b = -c$, also

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Da

$$1 = \det A = a^2 + c^2$$

gibt es also ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ mit $a = \cos \varphi$ und $c = \sin \varphi$. Das zeigt die Behauptung.

Für $B \in \text{O}(2)$ mit $B \notin \text{SO}(2)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \in \text{SO}(2),$$

also gibt es ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom χ_B von B gilt daher

$$\begin{aligned} \chi_B &= (-t + \sin \varphi)(-t - \sin \varphi) - \cos^2 \varphi \\ &= t^2 - \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = t^2 - 1 \\ &= (t + 1)(t - 1). \end{aligned}$$

Also besitzt B einen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Das zeigt, dass jede orthogonale Matrix $B \in \text{O}(2) - \text{SO}(2)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt. (Diese Aussage ist auch geometrisch klar.)

Sei nun $C \in \text{SO}(3)$. Da χ_C ein reelles Polynom ungeraden Grades ist, besitzt χ_C eine reelle Nullstelle, d.h. C besitzt einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Da für einen entsprechenden Eigenvektor v gilt, dass

$$\|v\| = \|Cv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$$

muss $|\lambda| = 1$, also $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ (da v ein Eigenvektor ist, muss $v \neq 0$ und damit $\|v\| \neq 0$). Angenommen es ist $\lambda = -1$. Indem wir das orthogonale Komplement von $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ in \mathbb{R}^3 betrachten, also $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, können wir C durch einen passenden Basiswechsel eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & A & \end{pmatrix}$$

überführen, wobei $A \in O(2)$. Da $1 = \det C = -\det A$ muss $\det A = -1$, also $A \in O(2) - SO(2)$. Nach der obigen Diskussion besitzt daher A einen Eigenvektor zum Eigenwert 1, also auch C .

Insbesondere lässt sich jede Matrix $A \in SO(3)$ durch einen passenden Basiswechsel in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit $A' \in SO(2)$ überführen, also in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [-\pi, \pi]$, wobei A auf $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ durch Rotation um den Winkel φ operiert, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist.

Sei nun $f \in SO(3)$ mit Eigenvektor v zum Eigenwert 1, so dass f auf $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ durch Rotation um den Winkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$ wirkt. Durch Normierung können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $v \in S^2 \subseteq D^3$. Es hat dann f unter p das Urbild $(\varphi/\pi) \cdot v$.

3.

Der Fall $p(x) = p(y) = E$ ist trivial, es muss dann $x = y = 0$. Wir betrachten daher im Folgenden den Fall, dass $p(x) = p(y) \neq E$, also $x, y \neq 0$.

Da $p(x) = p(y)$, haben $p(x)$ und $p(y)$ die gleiche Rotationsachse, nämlich $\langle x \rangle_{\mathbb{R}}$, bzw. $\langle y \rangle_{\mathbb{R}}$. Daher müssen x und y linear abhängig sein.

Ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda > 0$, so rotieren $p(x)$ und $p(y)$ gleichorientiert, also um den Winkel $\pi \cdot \|x\|$ und $\pi \cdot \|y\|$. Da $\|x\|, \|y\| \leq 1$ muss daher $\|x\| = \|y\| = \lambda\|x\|$, also $\lambda = 1$ und somit $x = y$.

Ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda < 0$, so rotieren $p(x)$ und $p(y)$ unterschiedlich orientiert, also um die Winkel $\pi \cdot \|x\|$ und $\pi \cdot \|y\|$. Damit diese Rotationen gleich, muss $\|x\| = \|y\| = 1$, da $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Es ist dann $\lambda = -1$ und somit $x = -y$.

2.

Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim = \sim_3^*$ auf D^3 , die jeden Punkt $x \in S^2 \subseteq D^3$ mit seinem Antipodenpunkt $-x$ identifiziert. Durch den vorherigen Aufgabenteil ergibt sich, dass $x \sim y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$ für alle $x, y \in D^3$. Daher faktorisiert p als Bijektion $\tilde{p} : D^3/\sim \rightarrow SO(3)$, die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist (denn p ist nach Annahme stetig). Da D^3/\sim als Quotient eines quasikompakten Raumes ebenfalls quasikompakt ist, und $SO(3) \subseteq \mathbb{R}^9$ Hausdorff ist, ist \tilde{p} bereits ein Homöomorphismus.

Wir betrachten das kommutative Diagramm in Abbildung 2. Da \tilde{p} und π offenbar Quotientenabbildungen sind, ist es offenbar auch $p = \tilde{p} \circ \pi$, denn für $U \subseteq SO(3)$ ist

$$U \text{ ist offen} \Leftrightarrow \tilde{p}^{-1}(U) \text{ ist offen} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\tilde{p}^{-1}(U)) \text{ ist offen.}$$

4.

Wir haben letzte Woche gezeigt, dass das Diagramm in Abbildung 3 kommutiert, und dass \tilde{q} ein Homöomorphismus ist. Da π eine Quotientenabbildung ist, ist damit analog zur obigen Argumentation auch q eine Quotientenabbildung. (\tilde{q} entspricht dem Homöomorphismus $D^3/\sim_3^* \cong \mathbb{R}P^3$).

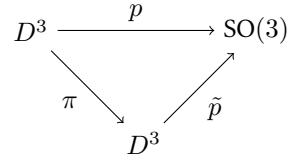


Abbildung 2: p ist eine Quotientenabbildung.

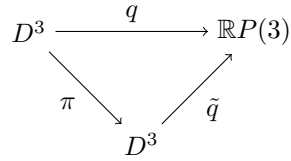


Abbildung 3: q ist eine Quotientenabbildung.

5.

Für alle $x, y \in D^3$ ist $q(x) = q(y)$ genau dann, wenn $\pi(x) = \pi(y)$, also wenn $x \sim_3^* y$, also wenn $x = y$ oder $x, y \in S^2 \subseteq D^3$ mit $x = -y$.

6.

Zusammengefasst haben wir nun das kommutative Diagramm wie in Abbildung 4. Da \tilde{p} und \tilde{q} Homöomorphismen sind ist auch $f := \tilde{p} \circ \tilde{q}^{-1} : \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ ein Homöomorphismus, und da das Diagramm kommutiert ist

$$f \circ q = \tilde{p} \circ \tilde{q}^{-1} \circ q = \tilde{p} \circ \pi = p.$$

f ist auch durch die Eigenschaft, dass $f \circ q = p$ bereits eindeutig bestimmt: Ist nämlich $g : \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ eine stetige Abbildung mit $g \circ q = p$, so ist

$$g(q(x)) = p(x) = f(q(x)) \text{ für alle } x \in D^3,$$

und da q surjektiv ist damit bereits $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}P^3$, und somit $f = g$.

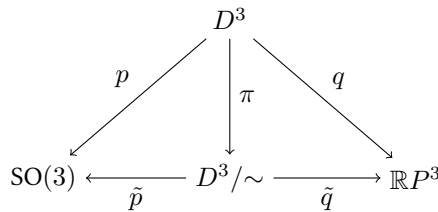


Abbildung 4: Die bisherigen Diagramme zusammengefasst.