Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 5

Jendrik Stelzner

25. Mai 2014

Aufgabe 5.1:

Wir nehmen zunächst an, dass $f : S^1 \to X$ homotop zu einer konstanten Schlinge ist. Dann gibt es eine Homotopie $F : S^1 \times [0,1] \to X$ mit

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \text{const} \text{ und} \\ F(s,1) &= f(s) \end{aligned}$$

für alle $s \in S$. Es sei

$$A := S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times [0,1]$$

und

$$\pi : S^1 \times [0,1] \to \left(S^1 \times [0,1]\right)/A$$

die kanonische Projektion.

Es ist klar, dass F als Abbildung

$$\tilde{F} : \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \to X$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig.

Wir bemerken weiter, dass $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A \cong D^2$: Die Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

ist stetig und surjektiv, und faktorisiert als Bijektion

$$\psi : \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \to D^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da $S^1 \times [0,1]$ als Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist auch $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A$ quasikompakt. Da D^2 Hausdorff ist, ist damit ψ bereits ein Homöomorphismus.

Durch den Isomorphismus ψ faktorisiert $\tilde{F}$ als stetige Abbildung $\bar{F} : D^2 \to X$.

Insgesamt ergibt sich damit ein Diagramm wie in Abbildung 1. Dieses Diagramm kommutiert: Nach Konstruktion ist $\phi = \psi\pi$, sowie $F = \tilde{F}\pi$ und $\tilde{F} = \bar{F}\psi$. Daher ist auch

$$F = \tilde{F}\pi = \bar{F}\psi\pi = \bar{F}\phi.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\bar{F}(s) = \bar{F}\phi(s,1) = F(s,1) = f(s)$$

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \times [0,1] \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "F"] \arrow[ddr, "\phi"'] & & \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \arrow[dl, "\tilde{F}"'] \arrow[ddl, "\psi"] \\
& X & \\
& D^2 \arrow[u, "\bar{F}"] &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1: Mir fällt kein passender Titel ein.

ist $\bar{F}$ eine stetige Fortsetzung von f auf D^2.

Angenommen, $f : S^1 \to X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\bar{F} : D^2 \to X$ fortsetzen. Mithilfe der stetigen Abbildung

$$\phi : S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

erhalten wir dann die Homotopie

$$F := \bar{F}\phi : S^1 \times [0,1] \to X.$$

Da für alle $s \in S^1$

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \bar{F}(\phi(s,0)) = \bar{F}(0) = \text{const und} \\ F(s,1) &= \bar{F}(\phi(s,1)) = \bar{F}(s) = f(s) \end{aligned}$$

ist f homotop zu einer konstanten Schlinge.

Aufgabe 5.2:

Ist X zusammenziehbar, so gibt es einen einelementigen Raum $*$ und eine Homotopieäquivalenz $\varphi : X \to *$. Diese induziert, wie aus Aufgabe 4.4 bekannt, für jeden Raum K eine Bijektion

$$\varphi_*^K : [K,X] \to [K,*], f \mapsto \varphi f.$$

Da $[K,*]$ immer einelementig ist, ist dann $[K,X]$ für jeden Raum K einelementig.

Besteht $[K,X]$ für jeden Raum K aus nur einem Element, so ist insbesondere $[X,X]$ einelementig, also jede (konstante) Abbildung $X \to X$ homotop zu id_X.

Ist id_X homotop zu einer konstanten Abbildung, so gibt es ein $x_0 \in X$, so dass $\mathrm{id}_X \simeq f$ für die konstante Funktion $f : X \to X, x \mapsto x_0$. Für den Teilraum $* = \{x_0\}$ ist dann für die kanonische Inklusion $\iota : * \to X$ und $g : X \to *, x \mapsto x_0$

$$g\iota = \mathrm{id}_* \text{ und } \iota g = f \simeq \mathrm{id}_X .$$

Also ist g eine Homotopieäquivalenz und X deshalb zusammenziehbar.

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & D^2 \arrow[r, "r"] \arrow[d] & S^1 \arrow[d] \\
\mathcal{S}(S^1) \arrow[r, "\mathcal{S}(\iota)"'] & \mathcal{S}(D^2) \arrow[r, "\mathcal{S}(r)"'] & \mathcal{S}(S^2)
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2: I dunno.

Aufgabe 5.3: (Brouwerscher Fixpunktsatz)

(i)

Für die Homotopie

$$F : D^2 \times [0,1], (x,t) = tx$$

ist für alle $x \in D^2$

$$\begin{aligned} F(x,0) &= 0 = \text{const und} \\ F(x,1) &= x = \mathrm{id}_{D^2}(x). \end{aligned}$$

Deshalb ist id_{D^2} homotop zu einer konstanten Abbildung. Also ist D^2 zusammenziehbar und deshalb $\left[K, D^2\right]$ für jeden Raum K einelementig. Insbesondere ist daher $\mathcal{S}\left(D^2\right) = \left[S^1, D^2\right]$ einelementig.

Gibt es eine stetige Abbildung $r : D^2 \to S^1$ mit $r_{|S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$, so ergibt sich aus den Funktoreigenschaften von $X \mapsto \mathcal{S}(X)$ das kommutatives Diagram in Abbildung 2, wobei $\iota : S^1 \to D^2$ die kanonische Inklusion bezeichnet.

Da $r\iota = \mathrm{id}_{S^1}$ muss auch $\mathcal{S}(r)\mathcal{S}(\iota) = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(S^1)}$. Inbesondere muss daher $\mathcal{S}(r)$ surjektiv sein, da es $\mathcal{S}(\iota)$ als Rechtsinverses besitzt. Es ist jedoch $\mathcal{S}(D^2)$ einelementig und $\mathcal{S}(S^1)$ abzählbar unendlich (aus der Vorlesung bekannt). Dieser Widerspruch zeigt, dass keine solche Abbildung r existieren kann.

Aufgabe 5.4: (Fundamentalsatz der Algebra)

(i)

Sei $t \geq 0$ beliebig aber fest. Für $\iota_t : S^1 \to \mathbb{C}, z \mapsto tz$ ergibt sich das kommutative Diagram in Abbildung 3. Da $\mathbb{C}$ zusammenziehbar ist (denn $\mathbb{C}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^2$), ist ι_t homotop zu einer konstanten Abbildung $c : S^1 \to \mathbb{C}$, also $f = f\iota_t$ homotop zur

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[rr, "f_t"] \arrow[dr, "\iota_t"'] & & \mathbb{C} - \{0\} \\
& \mathbb{C} \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3: f_t faktorisiert durch ι_t über $\mathbb{C}$.

konstanten Abbildung fc. (Analog ergibt sich, dass jede stetige Funktion, die über einen zusammenziehbaren Raum faktorisiert, homotop zu einer konstanten Abbildung ist).

(ii)

Wir definieren

$$\begin{aligned} F : S^1 \times [0,1] &\to \mathbb{C} - \{0\}, 0 \\ (z,t) &\mapsto C^k z^k + t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l. \end{aligned}$$

F ist wohldefiniert, denn für alle $(z,t) \in S^1 \times [0,1]$ ist

$$\begin{aligned} |F(z,t)| &= \left| C^k z^k + t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l \right| \geq \left| C^k z^k \right| - \left| t \sum_{l=0}^{k-1} a_l C^l z^l \right| \\ &\geq C^k - t \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l \geq C^k - \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l > 0. \end{aligned}$$

Es ist auch klar, dass F stetig ist, also eine Homotopie. Für alle $z \in S^1$ ist

$$F(z,0) = C^k z^k \quad \text{und} \quad F(z,1) = \tilde{f}_C(z).$$

Das zeigt, dass $\tilde{f}_C \simeq \left(z \mapsto C^k z^k\right)$.

(iii)

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$H_k : S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}, z \mapsto z^k \text{ und } h_k : S^1 \to S^1, z \mapsto z^k.$$

Es ist klar, dass H_k und h_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ stetig sind. Es sei $k := \deg f$. Dann gibt es $C \geq 0$, so dass

$$C^k > \sum_{l=0}^{k-1} |a_l| C^l.$$

Nach Aufgabenteil (ii) ist dann $\tilde{f}_C \simeq C^k H_k$. Da $C^k H_k \simeq H_k$ via der Homotopie

$$S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C} - \{0\}, (z,t) \mapsto \left(t + (1-t)C^k\right) z^k$$

ist daher $\tilde{f}_C \simeq H_k$. Andererseits ist $\tilde{f}_C$ nach Aufgabenteil (i) auch homotop zu einer konstanten Abbildung $c : S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}$.

Bezüglich der Projektion

$$q : \mathbb{C} - \{0\} \to S^1, z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

die offenbar stetig ist, ist daher auch

$$h_k = qH_k \simeq q\tilde{f}_C \simeq qc.$$

Es ist also h_k homotop zu einer konstanten Schlinge. Wir wissen, dass dies nur für $k = 0$ der Fall ist. Also muss f ein konstantes Polynom sein.