Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 6

Jendrik Stelzner

3. Juni 2014

Aufgabe 6.1: (Freie versus punktierte Schlingen)

Im Folgenden schreiben wir $I := [0, 1]$.

(a)

Es sei $x \in X$ beliebig aber fest. Es ist klar, dass die Inklusion

$$\left\{ f \,\middle|\, f : \left(S^1, 1\right) \to (X, x) \text{ ist stetig} \right\} \hookrightarrow \left\{ g \,\middle|\, g : S^1 \to X \text{ ist stetig} \right\}$$

wohldefiniert ist. Zusammen mit der kanonischen Projektion

$$\left\{ g \,\middle|\, g : S^1 \to X \text{ ist stetig} \right\} \to \mathcal{S}(X), g \mapsto [g]$$

ergibt sich damit eine wohldefinierte Abbildung

$$\left\{ f \,\middle|\, f : \left(S^1, 1\right) \to (X, x) \text{ ist stetig} \right\} \to \mathcal{S}(X), f \mapsto [f].$$

Um zu zeigen, dass diese über $\pi_1(X, x)$ faktorisiert, genügt es zu zeigen, dass für stetige Abbildungen $f, g : (S^1, 1) \to (X, x)$ mit $f \simeq g$ rel 1 auch $f \simeq g$. Dies ist aber klar.

(b)

Definition. *Sei X ein topologischer Raum und seien $v_1, \ldots, v_n : I \to X$ Wege mit $v_i(1) = v_{i+1}(0)$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Dann bezeichnen wir mit $v_1 * \cdots * v_n$ den Weg*

$$v_1 * \cdots * v_n : I \to X, t \mapsto \begin{cases} v_1(nt) & \textit{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ v_2(nt-1) & \textit{falls } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n} \\ v_3(nt-2) & \textit{falls } \frac{2}{n} \leq t \leq \frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots \\ v_n(nt-(n-1)) & \textit{falls } \frac{n-1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Bemerkung 1. Es ist bekannt und klar, dass die „Verknüpfung“ $*$ assoziativ bis auf Homotopie ist. Es ist auch klar, dass für eine zusammenziehbare Schlinge C und einen Weg v mit entsprechenden Anfangs-, bzw. Endpunkt

$$C * v \simeq v \qquad \text{bzw.} \qquad v * C \simeq v.$$

Lemma 2. *Sei X ein topologischer Raum und seien $v_1, \ldots, v_n : I \to X$ Wege, $n \geq 2$, mit $v_i(1) = v_{i+1}(0)$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ und $v_n(1) = v_1(0)$. Dann ist*

$$v_1 * v_2 * \cdots * v_n \simeq v_2 * \cdots * v_n * v_1.$$

Beweis. Wir fassen die Schlingen $v_1 * v_2 * \cdots * v_n$ und $v_2 * \cdots * v_n * v_1$ in natürlicher Weise als Abbildungen

$$f : (S^1, 1) \to (X, v_1(0)) \text{ und } g : (S^1, 1) \to (X, v_2(0))$$

auf. Dann ist $g(z) = f(e^{2\pi i/n} z)$ für alle $z \in S^1$, eine entsprechende Homotopie also gegeben durch

$$F : S^1 \times I \to X, (z, t) \mapsto f\left(e^{t \cdot 2\pi i/n} z\right)$$

□

Sei nun erneut $x \in X$ beliebig aber fest. Es sei

$$\varphi : \pi_1(X, x) \to \mathcal{S}(X)$$

die Vergiss-Abbildung.

Angenommen, φ ist surjektiv. Dann gibt es für jeden Punkt $y \in X$ eine Schlinge $f : (S^1, 1) \to (X, x)$, so dass f homotop zur konstanten Schlinge

$$g : S^1 \to X, z \mapsto y$$

ist. Es gibt also eine Homotopie

$$F : S^1 \times I \to X$$

mit $F(z, 0) = f(z)$ und $F(z, 1) = y$ für alle $z \in S^1$. Es ist daher

$$\gamma : I \to X, t \mapsto F(1, t)$$

eine stetige Abbildung mit

$$\gamma(0) = F(1, 0) = f(1) = x \text{ und } \gamma(1) = F(1, 1) = y.$$

Das zeigt, dass X wegzusammenhängend ist.

Angenommen, X ist wegzusammenhängend. Sei dann $f : I \to X$ eine Schlinge, also insbesondere $f(0) = f(1)$, beliebig aber fest. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma : I \to X$ von x nach $f(0)$. Es sei $\gamma^{-1} : I \to X$ der umgekehrte Weg von $f(1)$ nach x, d.h. $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ für alle $t \in I$. Dann ist

$$g := \gamma * f * \gamma^{-1}$$

eine Schlinge mit $g(0) = g(1) = x$, und nach Lemma 2 ist

$$g = \gamma * f * \gamma^{-1} \simeq f * \gamma^{-1} * \gamma \simeq f * (\gamma^{-1} * \gamma) \simeq f,$$

da $\gamma^{-1} * \gamma$ offenbar zusammenziehbar ist. Also ist

$$\varphi([g]_{\pi_1}(X, x)) = [g] = [f].$$

Wegen der Beliebigkeit von f zeigt dies die Surjektivität von φ.

(c)

Auch hier sei $x \in X$ beliebig aber fest. Es seien $f, g : (I, \partial I) \to (X, x)$, so dass $[f]_{\pi_1(X,x)}$ und $[g]_{\pi_1(X,x)}$ konjugiert zueinander sind, d.h. dass es eine Schlinge $h : (I, \partial I) \to (X, x)$ gibt mit

$$[f]_{\pi_1(X,x)} = [h]_{\pi_1(X,x)}[g]_{\pi_1(X,x)}[h]^{-1}_{\pi_1(X,x)} = \left[h * g * h^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)}.$$

Es ist dann nach Lemma 2

$$\begin{aligned}[f] &= \varphi([f]_{\pi_1(X,x)}) = \varphi\left(\left[g * h * g^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)}\right) = \left[h * g * h^{-1}\right] \\ &= \left[g * h^{-1} * h\right] = [g].\end{aligned}$$

Andererseits seien $f, g : (I, \partial I) \to (X, x)$ Schlingen, so dass $f \simeq g$. Dann gibt es eine Homotopie $F : I \times I \to X$ mit $F(t, 0) = f(t)$ und $F(t, 1) = g(t)$ für alle $t \in I$, wobei zusätzlich

$$F(0, s) = F(1, s) \text{ für alle } s \in I.$$

Für alle $s \in I$ definieren wir

$$\gamma_s : I \to X \text{ mit } \gamma_s(t) := F(0, ts).$$

Für alle $s \in I$

$$\gamma_s(0) = F(0, 0) = f(0) = x \text{ und } \gamma_s(1) = F(0, s),$$

also γ_s ein Weg von x zu $F(0, s)$. Auch ist

$$\gamma_1(1) = F(0, 1) = g(1) = x,$$

also γ_1 eine Schlinge mit $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = x$. Für alle $s \in I$ definieren wir auch

$$\gamma_s^{-1} : I \to X, t \mapsto \gamma_s(1 - t).$$

Wir betrachten die Homotopie $G : I \times I \to X$ mit

$$G(t, s) := \begin{cases} \gamma_s\left(\frac{3}{s}t\right) & \text{für } 0 \leq t < \frac{s}{3} \\ F\left(\frac{3t-s}{3-2s}, s\right) & \text{für } \frac{s}{3} \leq t \leq 1 - \frac{s}{3} \\ \gamma_s^{-1}\left(\frac{3}{s}(t-1)+1\right) & \text{für } 1 - \frac{s}{3} < t \leq 1. \end{cases}.$$

Für alle $t \in I$ ist

$$G(t, 0) = F(t, 0) = f(t) \text{ und } G(t, 1) = \left(\gamma_1 * g * \gamma_1^{-1}\right)(t).$$

Außerdem ist $G(0, s) = G(1, s) = x$ für alle $s \in I$. Das zeigt, dass

$$f \simeq \gamma_1 * g * \gamma_1^{-1} \text{ rel } \partial I,$$

also dass

$$[f]_{\pi_1(X,x)} = \left[\gamma_1 * g * \gamma_1^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)} = \left[\gamma_1 g \gamma_1^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)}.$$