

# EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

## BLATT 3

Jendrik Stelzner

6. Mai 2014

### Aufgabe 3.1:

Es sei  $X$  ein quasikompakter Raum. Wir nehmen an, dass  $X$  nicht folgenkompakt ist. Dann gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $X$ , die keinen Häufungspunkt besitzt.

Es gibt also für jedes  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x$  von  $x$ , so dass nur endlich viele Folgenglieder in  $U_x$  sind. Da  $U_x$  eine offene Umgebung von  $x$  enthält, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass alle  $U_x$  offen sind.

Es ist  $\{U_x : x \in X\}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Da  $X$  quasikompakt ist, gibt es daher  $y_1, \dots, y_n \in X$  mit  $X = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ . Da  $U_{y_1}, \dots, U_{y_n}$  jeweils nur endlich viele Folgenglieder enthalten, enthält  $X$  nur endlich viele Folgenglieder – ein offensichtlicher Widerspruch.

Das zeigt, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt besitzt, und damit, dass  $X$  folgenkompakt ist. Also ist jeder quasikompakte Raum folgenkompakt.

### Aufgabe 3.2:

Wir setzen  $Y := X \times X$  und  $\Delta := \Delta(X)$ . Für  $A, B \subseteq X$  ist

$$\begin{aligned}(A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in X : (x, x) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : x \in A \text{ und } x \in B \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,\end{aligned}$$

und deshalb

$$A \times B \subseteq Y - \Delta \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Da die Mengen der Form  $U \times V \subseteq Y$  mit offenen  $U, V \subseteq X$  eine Basis der Produkttopologie auf  $Y$  bilden, gilt

$$\begin{aligned}W \subseteq Y \text{ ist offen} \\ \Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \text{ gibt es } U, V \subseteq X \text{ offen mit } (x, y) \in U \times V \subseteq W \\ \Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \text{ gibt es } U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V \text{ und } U \times V \subseteq W.\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt daher

$$\begin{aligned}
& \Delta \text{ ist abgeschlossen in } Y \\
& \Leftrightarrow Y - \Delta \text{ ist offen in } Y \\
& \Leftrightarrow \forall (x, y) \in (Y - \Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \times V \subseteq Y - \Delta \\
& \Leftrightarrow \forall (x, y) \in (Y - \Delta) \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \\
& \Leftrightarrow \forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \\
& \Leftrightarrow X \text{ ist Hausdorff.}
\end{aligned}$$

Fun fact: Ein alternativer, intuitiverer Beweis lässt sich mithilfe von Netzen formulieren: Es ist

$$\overline{\Delta} = \{h \in X \times X : \text{es gibt ein Netz } (h_\alpha) \text{ auf } \Delta \text{ mit } h_\alpha \rightarrow h \text{ in } X \times X\}.$$

Dass  $\Delta$  abgeschlossen ist, ist daher äquivalent dazu, dass für jedes Netz  $(h_\alpha)$  auf  $\Delta$ , das gegen ein  $h \in X \times X$  konvergiert, bereits  $h \in \Delta$ .

Wir bemerken, dass ein Netz  $(h_\alpha)$  auf  $\Delta$  von der Form

$$(h_\alpha) = (x_\alpha, x_\alpha)$$

ist, wobei  $(x_\alpha)$  ein Netz auf  $X$  ist, und dass  $h = (x, y)$  mit  $x, y \in X$ . Da ein Netz in einem Produktraum genau dann konvergiert, wenn es in jeder einzelnen Koordinate konvergiert, ist die obige Aussage äquivalent dazu, dass für jedes Netz  $(x_\alpha)$  auf  $X$  und alle  $x, y \in X$  mit  $x_\alpha \rightarrow x$  und  $x_\alpha \rightarrow y$  bereits  $x = y$ .

Es ist also  $\Delta$  genau dann abgeschlossen in  $X \times X$ , wenn Grenzwerte von Netzen auf  $X$  eindeutig sind. Dies ist bekanntermaßen äquivalent dazu, dass  $X$  Hausdorff ist.

### Aufgabe 3.3:

Es bezeichne  $\sim$  die Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  mit

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x.$$

Außerdem sei

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

die  $n$ -Sphäre und

$$\tilde{D}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}.$$

die „nördliche“ Hemisphäre der  $S^n$ . Man bemerke, dass  $\sim$  auf  $S^n$  genau die Antipodenpunkte miteinander identifiziert, also den Punkt  $x \in S^n$  mit dem Punkt  $-x \in S^n$ . Es bezeichne außerdem  $\sim^*$  die Äquivalenzrelation auf  $D^n$ , die die Antipodenpunkte des Randes von  $D^n$  miteinander identifiziert, also jeden Punkt  $x \in S^{n-1} \subseteq D^n$  mit dem Antipodenpunkt  $-x \in S^{n-1} \subseteq D^n$ . Es seien

$$\varphi : D^n \rightarrow \tilde{D}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

und

$$\psi : S^n / \sim \rightarrow \mathbb{R}P^n, [x]_\sim \mapsto [x]_\sim.$$

Wir haben bereits letzte Woche gezeigt, dass

$$D^n/\sim^* \cong \tilde{D}^n/\sim \cong S^n/\sim \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim \cong \mathbb{R}P^n,$$

wobei der Homöomorphismus  $D^n/\sim^* \cong \tilde{D}^n/\sim$  durch  $\varphi$  induziert wird, der Homöomorphismus  $\tilde{D}^n/\sim \cong S^n/\sim$  durch die kanonische Inklusion  $\tilde{D}^n \hookrightarrow S^n$  induziert wird, und der Homöomorphismus  $S^n/\sim \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$  durch  $\psi$  gegeben ist. Auch haben wir im Laufe des Nachweises dieser Homöomorphismen gezeigt, dass  $S^n/\sim$  Hausdorff ist.

1.

Dies haben wir bereits letzte Woche gezeigt.

2.

Dies folgt direkt daraus, dass  $S^n/\sim \cong \mathbb{R}P^n$ , und dass  $S^n/\sim$  Hausdorff ist.

3.

Es bezeichne  $\sim$  die Äquivalenzrelation auf  $S^2$ , die jeden Punkt  $x \in S^2$  mit dem Antipodenpunkt  $-x \in S^2$  identifiziert, sowie  $\pi : S^2 \rightarrow S^2/\sim$  die kanonische Projektion. Wir setzen

$$\begin{aligned} S &:= \left\{ (x, y, z) \in S^2 : z \geq \frac{1}{2} \text{ oder } z \leq -\frac{1}{2} \right\}, \\ T &:= \left\{ (x, y, z) \in S^2 : -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ und} \\ R &:= S \cap T = \left\{ (x, y, z) \in S^2 : z = -\frac{1}{2} \text{ oder } z = \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass  $S, T$  und  $R$  abgeschlossen in  $S^2$  sind. Wir bemerken auch, dass die drei Mengen saturiert bezüglich  $\sim$  sind, dass also  $\pi^{-1}(\pi(X)) = X$  für alle  $X \in \{S, T, R\}$ . Insbesondere sind daher auch  $\pi(S), \pi(T)$  und  $\pi(R)$  abgeschlossen in  $S^2/\sim$ .

Bekanntermaßen ist  $S^2/\sim \cong \mathbb{R}P^2$ . Es sei  $f : S^2/\sim \rightarrow \mathbb{R}P^2$  ein Homöomorphismus. Wir setzen

$$A := f(\pi(S)), B := f(\pi(T)) \text{ und } C := A \cap B.$$

Wir bemerken dabei direkt, dass  $C = f(\pi(R))$ , da

$$\begin{aligned} C &= A \cap B = f(\pi(S)) \cap f(\pi(T)) = f(\pi(S) \cap \pi(T)) \\ &= f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S) \cap \pi(T)))) = f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S)) \cap \pi^{-1}(\pi(T)))) \\ &= f(\pi(S \cap T)) = f(\pi(R)). \end{aligned}$$

Da  $\pi(X)$  für alle  $X \in \{S, T, R\}$  abgeschlossen in  $S^2/\sim$  ist, und  $f$  ein Homöomorphismus ist, sind  $A, B$  und  $C$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}P^2$ .

Da  $f : S^2/\sim \rightarrow \mathbb{R}P^n$  ein Homöomorphismus ist, ist klar, dass auch die Einschränkung

$$\pi(S) \rightarrow f(\pi(S)) = A, x \mapsto f(x)$$

ein Homöomorphismus ist. Daher ist  $\pi(S) \cong A$ .

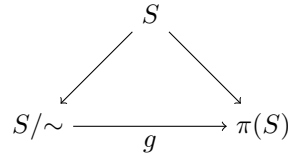


Abbildung 1: Die Homöomorphie von  $S/\sim$  und  $\pi(S)$ .

Wir bemerken, dass auch  $S/\sim \cong \pi(S)$ : Die stetige Abbildung  $S \rightarrow \pi(S), x \mapsto \pi(x)$  faktorisiert offenbar als Bijektion  $S/\sim \rightarrow \pi(S)$  (denn es ist  $\pi(s) = \pi(s') \Leftrightarrow s \sim s'$ ), die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da  $S$  kompakt ist (denn  $S^2$  ist kompakt und  $S \subseteq S^2$  abgeschlossen) und  $\pi(S)$  Hausdorff ist (denn  $\pi(S) \subseteq S^2/\sim$  mit  $S^2/\sim$  Hausdorff) ist  $g$  bereits ein Homöomorphismus. Dies lässt sich in dem kommutativen Diagramm von Abbildung 1 zusammenfassen.

Das zeigt, dass  $S/\sim \cong A$ . Komplet analog ergibt sich, dass auch  $T/\sim \cong B$  und  $R/\sim \cong C$ . Wir zeigen nun, dass  $S/\sim \cong D^2$ ,  $T/\sim \cong M$  und  $R/\sim \cong S^1$ . Dabei ist die Homöomorphie  $T/\sim \cong M$  bereits aus Aufgabe 2.3 bekannt.

Für die Homöomorphie  $S/\sim \cong D^2$  betrachten wir die Abbildung

$$h : S \rightarrow D^2, (x, y, z) \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}(x, y).$$

Diese ist offenbar wohldefiniert und surjektiv. (Man beachte, dass für alle  $(x, y, z) \in S$

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und Gleichheit für  $z = \pm 1/2$  gilt.) Es ist auch klar, dass  $h$  stetig ist, und dass  $h$  als Bijektion  $\tilde{h} : S/\sim \rightarrow D^2$  faktorisiert, die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da  $S/\sim$  als Quotient eines quasi-kompakten Raumes selber quasi-kompakt ist, und  $D^2$  Hausdorff ist, ist  $\tilde{h}$  bereits ein Homöomorphismus.

Wir haben gezeigt, dass

$$A \cong \pi(S) \cong S/\sim \cong D^2.$$

Komplett analog zeigt man auch dass  $R/\sim \cong S^1$ , und damit, dass

$$C \cong \pi(R) \cong R/\sim \cong S^1.$$

### Aufgabe 3.4:

1.

Wir zeigen zunächst, dass jedes Element von  $\text{SO}(3)$  einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt.

Sei zunächst  $A \in \text{SO}(2)$ . Wir behaupten, dass es ein  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  gibt, so dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Da

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

muss  $a = d$  und  $b = -c$ , also

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Da

$$1 = \det A = a^2 + c^2$$

gibt es also ein  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  mit  $a = \cos \varphi$  und  $c = \sin \varphi$ . Das zeigt die Behauptung.

Für  $B \in \mathrm{O}(2)$  mit  $B \notin \mathrm{SO}(2)$  ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \in \mathrm{SO}(2),$$

also gibt es ein  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom  $\chi_B$  von  $B$  gilt daher

$$\begin{aligned} \chi_B &= (-t + \sin \varphi)(-t - \sin \varphi) - \cos^2 \varphi \\ &= t^2 - \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = t^2 - 1 \\ &= (t + 1)(t - 1). \end{aligned}$$

Also besitzt  $B$  einen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Das zeigt, dass jedes Matrix  $B \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$  einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt. (Diese Aussage ist auch geometrisch klar.)

Sei nun  $C \in \mathrm{SO}(3)$ . Da  $\chi_C$  ein reelles Polynom ungeraden Grades ist, besitzt  $\chi_C$  eine reelle Nullstelle, d.h.  $C$  besitzt einen reellen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Da für einen entsprechenden Eigenvektor  $v$  gilt, dass

$$\|v\| = \|Cv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$$

muss  $|\lambda| = 1$ , also  $\lambda = 1$  oder  $\lambda = -1$ . Angenommen es ist  $\lambda = -1$ . Indem wir das orthogonale Komplement von  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$  in  $\mathbb{R}^3$  betrachten, also  $\langle v \rangle_R^\perp$ , können wir  $C$  durch einen passenden Basiswechsel eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & A \end{pmatrix}$$

überführen, wobei  $A \in \mathrm{O}(2)$ . Da  $1 = \det C = -1 \det A$  muss  $\det A = -1$ , also  $A \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$ . Nach der obigen Diskussion besitzt daher  $A$  einen Eigenvektor zum Eigenwert 1, also auch  $C$ .

Insbesondere lässt sich jede Matrix  $A \in \mathrm{SO}(3)$  durch einen passenden Basiswechsel in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

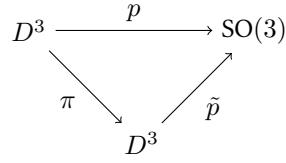


Abbildung 2:  $p$  ist eine Quotientenabbildung.

mit  $A' \in \mathrm{SO}(2)$  überführen, also in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

mit  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ , wobei  $A$  auf  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$  durch Rotation um den Winkel  $\varphi$  operiert, wobei  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert 1 ist.

Sei nun  $f \in \mathrm{SO}(3)$  mit Eigenvektor  $v$  zum Eigenwert 1, so dass  $f$  auf  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$  durch Rotation um den Winkel  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  wirkt. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $v \in S^2 \subseteq D^3$ . Es hat dann  $f$  unter  $p$  offensichtlich das Urbild  $(\varphi/\pi)v$ .

### 3.

Der Fall  $p(x) = p(y) = E$  ist trivial, es müssen dann  $x = y = 0$ . Wir betrachten daher im Folgenden den Fall, dass  $p(x) = p(y) \neq E$ , also insbesondere  $x, y \neq 0$ .

Da  $p(x) = p(y)$ , haben  $p(x)$  und  $p(y)$  die gleiche Rotationsachse, nämlich  $\langle x \rangle_{\mathbb{R}}$ , bzw.  $\langle y \rangle_{\mathbb{R}}$ . Daher müssen  $x$  und  $y$  linear abhängig sein.

Ist  $y = \lambda x$  für ein  $\lambda > 0$ , so rotieren  $p(x)$  und  $p(y)$  gleichorientiert, also um den Winkel  $\pi \cdot \|x\|$  und  $\pi \cdot \|y\|$ . Es muss daher  $\|x\| = \|y\| = \lambda\|x\|$ , also  $\lambda = 1$  und somit  $x = y$ .

Ist  $y = \lambda x$  für ein  $\lambda < 0$ , so rotieren  $p(x)$  und  $p(y)$  unterschiedlich orientiert, also um die Winkel  $\pi \cdot \|x\|$  und  $\pi \cdot \|y\|$ . Damit diese Rotationen gleich sind, muss  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Es ist dann  $\lambda = -1$  und somit  $x = -y$ .

### 3.

Wir betrachten die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $D^3$ , die jeden Punkt  $x \in S^2 \subseteq D^3$  mit seinem Antipodenpunkt  $-x$  identifiziert. Durch den vorherigen Aufgabenteil ergibt sich, dass  $x \sim y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$  für alle  $x, y \in D^3$ . Daher faktorisiert  $p$  als Bijektion  $\tilde{p} : D^3/\sim \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ , die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist (denn  $p$  ist nach Annahme stetig). Da  $D^3/\sim$  als Quotient eines quasikompakten Raumes ebenfalls quasikompakt ist, und  $\mathrm{SO}(3) \subseteq \mathbb{R}^9$  Hausdorff ist, ist  $\tilde{p}$  bereits ein Homöomorphismus.

Wir betrachten das kommutative Diagramm in Abbildung 2. Da  $\tilde{p}$  und  $\pi$  offenbar Quotientenabbildungen sind, ist es offenbar auch  $p = \tilde{p} \circ \pi$ , denn für  $U \subseteq \mathrm{SO}(3)$  ist

$$U \text{ ist offen} \Leftrightarrow \tilde{p}^{-1}(U) \text{ ist offen} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\tilde{p}^{-1}(U)) \text{ ist offen.}$$

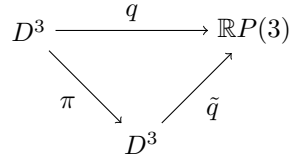


Abbildung 3:  $q$  ist eine Quotientenabbildung.

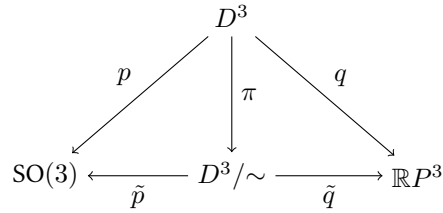


Abbildung 4: Alles zusammen.

4.

Wir haben letzte Woche gezeigt, dass das Diagramm in Abbildung 3 kommutiert, und dass  $\tilde{q}$  ein Homöomorphismus ist. Da  $\pi$  eine Quotientenabbildung ist, ist damit analog zur obigen Argumentation auch  $q$  eine Quotientenabbildung. ( $\tilde{q}$  entspricht dem Homöomorphismus  $D^n/\sim^* \cong \mathbb{R}P^n$ ).

5.

Es ist  $q(x) = q(y)$  genau dann, wenn  $\pi(x) = \pi(y)$ , also wenn  $x \sim^* y$ , also wenn  $x = y$  oder  $x, y \in S^2 \subseteq D^3$  mit  $x = -y$ .

6.

Wir haben das kommutative Diagramm wie in Abbildung 4. Da  $\tilde{p}$  und  $\tilde{q}$  Homöomorphismen sind ist auch  $f : \tilde{p} \circ \tilde{q}^{-1} : \mathbb{R}P^3 \rightarrow \text{SO}(3)$  ein Homöomorphismus, und da das Diagramm kommutiert ist

$$f \circ q = \tilde{p} \circ \tilde{q}^{-1} \circ q = \tilde{p} \circ \pi = p.$$

$f$  ist auch durch die Eigenschaft, dass  $f \circ q = p$  bereits eindeutig bestimmt: Ist nämlich  $g : \mathbb{R}P^3 \rightarrow \text{SO}(3)$  eine stetige Abbildung mit  $g \circ q = p$ , so ist

$$g(q(x)) = p(x) = f(q(x)) \text{ für alle } x \in D^3,$$

da  $q$  surjektiv ist also bereits  $g(x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}P^3$  und somit  $f = g$ .