## Einführung in die Geometrie und Topologie Blatt 7

Jendrik Stelzner

16. Juni 2014

## Aufgabe 7.1:

Wir gehen davon aus, dass  $X \neq \emptyset$ , damit der Begriff der Fundamentalgruppe für X Sinn ergibt.

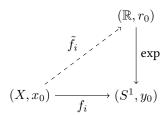


Abbildung 1: Liftung von  $f_i$ .

Es genügt zu zeigen, dass je zwei stetige Abbildungen  $f_1, f_2: X \to S^1$  zueinander homotop sind. Es sei ein Basispunkt  $x_0 \in X$  fixiert,  $y_0 = f_1(x_0)$  und  $r_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(r_0) = y_0$ . Es ist

$$f_{1*}(\pi_1(X,x_0)) \subseteq \pi_1(S^1,y_0)$$

eine endliche Untergruppe, wegen

$$\pi_1(S^1, y_0) \cong \mathbb{Z}$$

also

$$f_1^*(\pi_1(X, x_0)) \cong 1$$

und somit

$$f_{1*}(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \exp_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0)).$$

Da X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, gibt es deshalb nach dem Liftungssatz eine Liftung  $\tilde{f}_1:(X,x_0)\to(\mathbb{R},r_0)$  von  $f_1$ , siehe Abbildung 1. Analog gibt es auch eine Liftung  $\tilde{f}_2:X\to\mathbb{R}$  von  $f_2$ . Da  $\mathbb{R}$  zusammenziehbar ist, ist  $\tilde{f}_1\simeq \tilde{f}_2$  homotop. Daher ist auch

$$f_1 = \exp \tilde{f}_1 \simeq f_2 = \exp \tilde{f}_2.$$

## Aufgabe 7.3:

(a)

Die Multiplikation ist assoziativ, da für alle  $(n,m),(n',m'),(n'',m'')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 

$$\begin{split} &((n,m)\cdot(n',m'))\cdot(n'',m'')\\ &=(n+(-1)^mn',m+m')\cdot(n'',m'')\\ &=\left(n+(-1)^mn'+(-1)^{m+m'}n'',m+m'+m''\right)\\ &=\left(n+(-1)^m\left(n'+(-1)^{m'}n''\right),m+m'+m''\right)\\ &=(n,m)\cdot(n'+(-1)^m'n'',m'+m'')\\ &=(n,m)\cdot((n',m')\cdot(n'',m'')). \end{split}$$

Das Element  $(0,0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$  ist bezüglich der Multiplikation rechtsneutral, da für alle  $(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 

$$(n,m)\cdot(0,0) = (n+(-1)^0\cdot 0, m+0) = (n,m).$$

Das Element  $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  hat das Rechtsinverse  $((-1)^{m+1}n,-m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , da

$$(n,m) \cdot ((-1)^{m+1}n, -m) = (n + (-1)^m(-1)^{m+1}n, m - m) = (0,0).$$

Das zeigt, dass  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$  eine Gruppe ist. Sie ist nicht abelsch, da etwa

$$(1,0) \cdot (1,1) = (2,1) \neq (0,1) = (1,1) \cdot (1,0).$$

(b)

Es handelt sich um eine Gruppenwirkung von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}^2$ , da für alle  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 

$$(x,y) \cdot (0,0) = (x,y),$$

und für alle  $(n, m), (n', m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 

$$((x,y)\cdot(n,m))\cdot(n',m')$$

$$=((-1)^m(x+n),y+m)\cdot(n',m')$$

$$=\left((-1)^{m'}((-1)^m(x+n)+n'),y+m+m'\right)$$

$$=\left((-1)^{m+m'}(x+n+(-1)^mn'),y+m+m'\right)$$

$$=(x,y)\cdot(n+(-1)^mn',m+m')$$

$$=(x,y)\cdot((n,m)\cdot(n',m')).$$

Die Stetigkeit der Gruppenwirkung ist klar, da sie in jeder Komponente stetig ist. Die Gruppenwirkung ist eigentlich diskontinuierlich, denn für alle  $(x,y)\in\mathbb{R}^2$  ist

$$U = \left(x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3}\right) \times \left(y - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3}\right)$$

eine Umgebung von (x,y), für die für alle  $(n,m)\in\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}$  mit  $(n,m)\neq(0,0)$ 

$$U \cdot (n, m) \cap U = \emptyset.$$