Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 6

Jendrik Stelzner

3. Juni 2014

Im Folgenden schreiben wir $I := [0,1]$.

Aufgabe 6.1: (Freie versus punktierte Schlingen)

(a)

Es sei $x \in X$ beliebig aber fest. Es ist klar, dass die Inklusion

$$\left\{f \mid f : \left(S^1, 1\right) \to (X, x) \text{ ist stetig}\right\} \hookrightarrow \left\{g \mid g : S^1 \to X \text{ ist stetig}\right\}$$

wohldefiniert ist. Zusammen mit der kanonischen Projektion

$$\left\{g \mid g : S^1 \to X \text{ ist stetig}\right\} \to \mathcal{S}(X), g \mapsto [g]$$

ergibt sich damit eine wohldefinierte Abbildung

$$\left\{f \mid f : \left(S^1, 1\right) \to (X, x) \text{ ist stetig}\right\} \to \mathcal{S}(X), f \mapsto [f].$$

Um zu zeigen, dass diese über $\pi_1(X, x)$ faktorisiert, genügt es zu zeigen, dass für stetige Abbildungen $f, g : (S^1, 1) \to (X, x)$ mit $f \simeq g$ rel 1 auch $f \simeq g$. Dies ist aber klar.

(b)

Definition. *Sei X ein topologischer Raum und seien $v_1, \dots, v_n : I \to X$ Wege mit $v_i(1) = v_{i+1}(0)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$. Dann bezeichnen wir mit $v_1 * \dots * v_n$ den Weg*

$$v_1 * \dots * v_n : I \to X, t \mapsto \begin{cases} v_1(nt) & \textit{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ v_2(nt-1) & \textit{falls } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}, \\ v_3(nt-2) & \textit{falls } \frac{2}{n} \leq t \leq \frac{3}{n}, \\ \vdots & \vdots \\ v_n(nt-n+1) & \textit{falls } \frac{n-1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Bemerkung 1. Es ist bekannt und klar, dass die „Verknüpfung“ $*$ assoziativ bis auf Homotopie ist. Es ist auch klar, dass für eine Schlinge C mit $C \simeq \text{const}$ rel 1, bzw. $C \simeq \text{const}$ rel 0, und einen Weg v mit entsprechenden Anfangs-, bzw. Endpunkt

$$C * v \simeq v \text{ rel } 1 \qquad \text{bzw.} \qquad v * C \simeq v \text{ rel } 0.$$

Lemma 2. *Sei X ein topologischer Raum und seien $v_1, \dots, v_n : I \to X$ Wege mit $v_i(1) = v_{i+1}(0)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ und $v_n(1) = v_1(0)$. Dann ist*

$$v_1 * v_2 * \cdots * v_n \simeq v_2 * \cdots * v_n * v_1.$$

Beweis. Wir fassen die Schlingen $v_1 * v_2 * \cdots * v_n$ und $v_2 * \cdots * v_n * v_1$ in natürlicher Weise als Abbildungen

$$f : (S^1, 1) \to (X, v_1(0)) \text{ und } g : (S^1, 1) \to (X, v_2(0))$$

auf. Dann ist $g(z) = f(e^{2\pi i/n} z)$ für alle $z \in S^1$ und eine entsprechende Homotopie durch

$$F : S^1 \times I \to X, (z, t) \mapsto f\left(e^{t \cdot 2\pi i/n} z\right)$$

gegeben. □

Sei nun erneut $x \in X$ beliebig aber fest. Es sei

$$\varphi : \pi_1(X, x) \to \mathcal{S}(X)$$

die Vergiss-Abbildung.

Angenommen, φ ist surjektiv. Dann gibt es für jeden Punkt $y \in X$ eine Schlinge $f : (S^1, 1) \to (X, x)$, so dass f homotop zur konstanten Schlinge

$$g : S^1 \to X, z \mapsto y$$

ist. Es gibt also eine Homotopie

$$F : S^1 \times I \to X$$

mit $F(z, 0) = f(z)$ und $F(z, 1) = y$ für alle $z \in S^1$. Es ist daher

$$\gamma : I \to X, t \mapsto F(1, t)$$

eine stetige Abbildung mit

$$\gamma(0) = F(1, 0) = f(1) = x \text{ und } \gamma(1) = F(1, 1) = y.$$

Das zeigt, dass X wegzusammenhängend ist.

Angenommen, X ist wegzusammenhängend. Sei dann $f : I \to X$ eine Schlinge, also insbesondere $f(0) = f(1)$, beliebig aber fest. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma : I \to X$ von x nach $f(0)$. Es sei $\gamma^{-1} : I \to X$ der umgekehrte Weg von $f(1)$ nach x, d.h. $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ für alle $t \in I$. Dann ist

$$g := \gamma * f * \gamma^{-1}$$

eine Schlinge mit $g(0) = g(1) = x$, und nach Lemma 2 ist

$$g = \gamma * f * \gamma^{-1} \simeq f * \gamma^{-1} * \gamma \simeq f * (\gamma^{-1} * \gamma) \simeq f,$$

da $\gamma^{-1} * \gamma$ relativ zu $f(0)$ zusammenziehbar ist. Also ist

$$\varphi([g]_{\pi_1(X,x)}) = [g] = [f].$$

Wegen der Beliebigkeit von f zeigt dies die Surjektivität von φ.

(c)

Auch hier sei $x \in X$ beliebig aber fest. Es seien $f, g : (I, \partial I) \to (X, x)$, so dass $[f]_{\pi_1(X,x)}$ und $[g]_{\pi_1(X,x)}$ konjugiert zueinander sind, d.h. dass es eine Schlinge $h : (I, \partial I) \to (X, x)$ gibt mit

$$[f]_{\pi_1(X,x)} = [h]_{\pi_1(X,x)}[g]_{\pi_1(X,x)}[h]^{-1}_{\pi_1(X,x)} = \left[h * g * h^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)}.$$

Es ist dann nach Lemma 2

$$\begin{aligned}[f] &= \varphi([f]_{\pi_1(X,x)}) = \varphi\left(\left[g * h * g^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)}\right) = \left[h * g * h^{-1}\right] \\ &= \left[g * h^{-1} * h\right] = [g],\end{aligned}$$

da $h^{-1} * h$ relativ zu $g(1)$ zusammenziehbar ist.

Andererseits seien $f, g : (I, \partial I) \to (X, x)$ Schlingen, so dass

$$[f]_{\pi_1(X,x)} = [g]_{\pi_1(X,x)},$$

also $f \simeq g$. Dann gibt es eine Homotopie $F : I \times I \to X$ mit $F(t, 0) = f(t)$ und $F(t, 1) = g(t)$ für alle $t \in I$, wobei zusätzlich

$$F(0, s) = F(1, s) \text{ für alle } s \in I.$$

Für alle $s \in I$ definieren wir

$$\gamma_s : I \to X \text{ mit } \gamma_s(t) := F(0, ts).$$

Für alle $s \in I$ ist

$$\gamma_s(0) = F(0, 0) = f(0) = x \text{ und } \gamma_s(1) = F(0, s),$$

also γ_s ein Weg von x zu $F(0, s)$. Auch ist

$$\gamma_1(1) = F(0, 1) = g(1) = x,$$

also γ_1 eine Schlinge mit $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = x$. Für alle $s \in I$ definieren wir auch

$$\gamma_s^{-1} : I \to X, t \mapsto \gamma_s(1 - t).$$

Wir betrachten die Homotopie $G : I \times I \to X$ mit

$$G(t, s) := \begin{cases} \gamma_s\left(\frac{3}{s}t\right) & \text{für } 0 \le t < \frac{s}{3}, \\ F\left(\frac{3t-s}{3-2s}, s\right) & \text{für } \frac{s}{3} \le t \le 1 - \frac{s}{3}, \\ \gamma_s^{-1}\left(\frac{3}{s}(t-1) + 1\right) & \text{für } 1 - \frac{s}{3} < t \le 1. \end{cases}$$

(Die Wohldefiniertheit und Stetigkeit von G ist klar.) Für alle $t \in I$ ist

$$G(t, 0) = F(t, 0) = f(t) \text{ und } G(t, 1) = \left(\gamma_1 * g * \gamma_1^{-1}\right)(t).$$

Außerdem ist $G(0, s) = G(1, s) = x$ für alle $s \in I$. Das zeigt, dass

$$f \simeq \gamma_1 * g * \gamma_1^{-1} \text{ rel } \partial I,$$

also dass

$$[f]_{\pi_1(X,x)} = \left[\gamma_1 * g * \gamma_1^{-1}\right]_{\pi_1(X,x)} = [\gamma_1]_{\pi_1(X,x)} [g]_{\pi_1(X,x)} [\gamma_1]^{-1}_{\pi_1(X,x)}.$$

Aufgabe 6.2:

(a)

Da A und B wegzusammenhängend sind, und $A \cap B \neq \emptyset$, ist $X = A \cup B$ wegzusammenhängend. Insbesondere ist daher

$$\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,x') \text{ für alle } x, x' \in X.$$

Um zu zeigen, dass $\pi_1(X,x)$ für alle $x \in X$ trivial ist, genügt es daher zu zeigen, dass $\pi_1(X,x)$ für irgendein $x \in X$ trivial ist. Sei hierfür $x \in A \cap B \neq \emptyset$.

Es sei $f : (I, \partial I) \to (X,x)$ eine Schlinge. Da A und B offen sind, und $X = A \cup B$, ist $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ wegen der Stetigkeit von f eine offene Überdeckung von I. Da I ein kompakter metrischer Raum ist, gibt es nach dem Lemma von Lebesgue ein $\delta > 0$, so dass jede Teilmenge $M \subseteq I$ mit $\operatorname{diam} M < \delta$ komplett in $f^{-1}(A)$ oder $f^{-1}(B)$ enthalten ist. Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ groß genug, dass die Teilintervalle

$$I_k := \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right] \subseteq I \text{ für } k = 1, \ldots, m$$

je komplett in $f^{-1}(A)$ oder $f^{-1}(B)$ enthalten ist. Dann ist $f(I_k) \subseteq A$ oder $f(I_k) \subseteq B$ für alle $k = 1, \ldots, m$.

Wir definieren

$$x_k := f\left(\frac{k}{m}\right) \text{ für alle } k = 0, \ldots, m.$$

Inbesondere ist

$$x_0 = x_m = x.$$

Da A, B und $A \cap B$ wegzusammenhängend sind, gibt es für alle $k = 1, \ldots, m-1$ einen Weg

$$\lambda_k : I \to X$$

von x nach x_k, der je komplett in A verläuft, wenn $x_k \in A$, bzw. komplett in B verläuft, wenn $x_k \in B$, bzw. komplett in $A \cap B$ verläuft, wenn $x_k \in A \cap B$. Für alle $k = 1, \ldots, m$ definieren wir außerdem den Weg $f_k : I \to X$ mit

$$f_k(t) := f\left(\frac{k-1}{m} + \frac{t}{m}\right) \text{ für alle } t \in I$$

von x_{k-1} nach x_k. Man bemerke, dass $\operatorname{Im} f_k = f(I_k)$ für alle $k = 1, \ldots, m$. Es ist nun offenbar

$$\begin{aligned}
&f \\
&= f_1 * f_2 * \cdots * f_m \\
&\simeq f_1 * \left(\lambda_1^{-1}\lambda_1\right) * f_2 * \left(\lambda_2^{-1}\lambda_2\right) * f_3 * \cdots * f_{m-1} * \left(\lambda_{m-1}^{-1}\lambda_{m-1}\right) * f_m \text{ rel } x \\
&\simeq \left(f_1 * \lambda_1^{-1}\right) * \left(\lambda_1 * f_2 * \lambda_2^{-1}\right) * \cdots * \left(\lambda_{m-2} * f_{m-1} * \lambda_{m-1}^{-1}\right) \\
&\quad * \left(\lambda_{m-1} * f_m\right) \text{ rel } x.
\end{aligned}$$

Die Wege $f_1 * \lambda_1^{-1}, \lambda_1 * f_2 * \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_{m-2} * f_{m-1} * \lambda_{m-1}^{-1}$ und $\lambda_{m-1} * f_m$ jeweils Schleifen, die von x ausgehen, und sich jeweils komplett in A oder B befinden. Daher sind sie alle zusammenziehbar relativ zu x, denn A und B sind einfach zusammenhängend. Daher ist auch f relativ zu x zusammenziehbar.

Aus der Beliebigkeit von f folgt, dass $\pi_1(X,x)$ trivial ist.

(b)

Es sei $n > 1$. Wir schreiben $S^n = A \cup B$ mit

$$A = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \,|\, x_{n+1} \neq 1\} \text{ und}$$
$$B = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \,|\, x_{n+1} \neq -1\} .$$

A und B sind offenbar offen in S^n, und durch die entsprechenden stereografischen Projektionen wissen wir, dass $A \cong \mathbb{R}^n$ und $B \cong \mathbb{R}^n$. Da $\mathbb{R}^n$ offenbar einfach zusammenhängend ist, sind es daher auch A und B (wegen der Funktorialität von π_1). Offenbar ist $A \cap B \neq \emptyset$ wegzusammenhängend (hier benutzen wir, dass $n > 1$). Nach Aufgabenteil (a) ist deshalb auch S^n einfach zusammenhängend.

Aufgabe 6.3:

Es sei $(x, x') \in X \times X'$ beliebig aber fest. Da $p : E \to X$ eine Überlagerung ist, gibt es eine Umgebung $U \subseteq X$ von x, einen diskreten Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \to U \times D$, so dass das Diagramm in Abbildung 1 kommutiert.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times D \arrow[d, "\pi_1"] \\ U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"'] & U \end{tikzcd}$$

Abbildung 1: $p : E \to X$ ist eine Überlagerung.

Analog gibt es, da $p' : E' \to X'$ eine Überlagerung ist, eine Umgebung $U' \subseteq X'$ von x', einen diskreten Raum D' und einen Homöomorphismus $\phi' : p'^{-1}(U) \to U' \times D'$, so dass das Diagramm in Abbildung 2 kommutiert.

$$\begin{tikzcd} p'^{-1}(U) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "p'"'] & U' \times D' \arrow[d, "\pi_1'"] \\ U' \arrow[r, "\mathrm{id}_{U'}"'] & U' \end{tikzcd}$$

Abbildung 2: $p' : E' \to X'$ ist eine Überlagerung.

Es ist nun $U \times U' \subseteq X \times X'$ eine Umgebung von (x, x') in $X \times X'$ mit

$$(p \times p')^{-1} (U \times U') = p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U').$$

Die Homöomorphismen ϕ und ϕ' liefern uns einen Homöomorphismus

$$\tilde{\phi} : p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U') \cong (U \times D) \times (U' \times D') \cong (U \times U') \times (D \times D').$$

$$
\begin{tikzcd}
(p \times p')^{-1}(U \times U') \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "p \times p'"'] & (U \times U') \times (D \times D') \arrow[d, "\tilde{\pi}_1"] \\
U \times U' \arrow[r, "\mathrm{id}_{U \times U'}"'] & U \times U'
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 3: $p' : E' \to X'$ ist eine Überlagerung.

Zusammen liefert dies das kommutative Diagramm in Abbildung 3. Dabei ist klar, dass $D \times D'$ ebenfalls diskret ist.

Wegen der Beliebigkeit von $(x, x') \in X \times X'$ zeigt dies, dass

$$p \times p' : E \times E' \to X \times X'$$

eine Überlagerung ist. Es ist auch klar, dass sich die Blätterzahl von $(x, x') \in X \times X'$ als Produkt der Blätterzahl von x und der Blätterzahl von x' ergibt.

(a)

Aus der Definition von $Y \times_X E$ erhalten wir das kommutative Diagramm in Abbildung 4.

$$
\begin{tikzcd}
Y \times_X E \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
E \arrow[r, "p"'] & X
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 4: Das Faserprodukt $Y \times_X E$.

Se $y \in Y$ beliebig aber fest. Da $p : E \to X$ eine Überdeckung ist, gibt es eine Umgebung $U \subseteq X$ von $f(y) \in X$, einen diskreten Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \to U \times D$, so dass das Diagramm in Abbildung 5 kommutiert.

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times D \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"'] & U
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 5: $p : E \to X$ ist eine Überlagerung.

Wir erweitern das Diagramm in Abbildung 5 zu dem Diagramm in Abbildung 6. Dabei wollen wir den Homöomorphismus ϕ zu einem Homöomorphismus Φ liften.

$$\begin{tikzcd}
\pi_2^{-1}(p^{-1}(U)) \arrow[r, dashed, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_2"'] & f^{-1}(U) \times D \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_D"] \\
p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times D \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"'] & U
\end{tikzcd}$$

Abbildung 6: $p : E \to X$ ist eine Überlagerung.

Hierfür definieren wir

$$\Phi : \pi_2^{-1}(p^{-1}(U)) \to f^{-1}(U) \times D, (y, e) \mapsto \big(y, \mathrm{pr}_2\, \phi(e)\big)\,,$$

wobei $\mathrm{pr}_2 : U \times D \to D$ die kanonische Projektion bezeichnet. Φ ist wohldefiniert, denn für $(y, e) \in \pi_2^{-1}(p^{-1}(U))$ ist

$$f(y) = p(e) = p\pi_2(y, e) \in U.$$

Außerdem definieren wir

$$\Psi : f^{-1}(U) \times D \to \pi_2^{-1}(p^{-1}(U)), (y, d) \mapsto \big(y, \phi^{-1}(f(y), d)\big)\,.$$

Ψ ist wohldefiniert, denn für $(f, d) \in f^{-1}(U) \times D$ ist

$$p\left(\pi_2\left(y, \phi^{-1}(f(y), d)\right)\right) = p\left(\phi^{-1}(f(y), d)\right) = \mathrm{pr}_1(f(y), d) = f(y) \in U.$$

Es ist klar, dass Φ und Ψ stetig sind. Wir bemerken, dass Φ und Ψ invers zueinander sind. Für $(y, e) \in \pi_2^{-1}(p^{-1}(U))$ ist

$$\Psi\Phi(y, e) = \Psi\left(y, \mathrm{pr}_2\, \phi(e)\right) = \left(y, \phi^{-1}(f(y), \mathrm{pr}_2\, \phi(e))\right)\,,$$

wobei

$$e = \phi^{-1}\phi e = \phi^{-1}\left(p(e), \mathrm{pr}_2\, \phi(e)\right) = \phi^{-1}\left(f(y), \mathrm{pr}_2\, \phi(e)\right)\,.$$

Für $(y, d) \in f^{-1}(U) \times D$ ist

$$\Phi\Psi(y, d) = \Phi\left(y, \phi^{-1}(f(y), d)\right) = \left(y, \mathrm{pr}_2\, \phi\phi^{-1}(f(y), d)\right) = (y, d).$$

Also ist Φ ein Homöomorphismus. Das Diagramm in Abbildung 6 kommutiert auch, denn für $(y, e) \in \pi_2^{-1}(p^{-1}(U))$ ist

$$\begin{aligned}
\phi\pi_2(y, e) = \phi(e) &= (p(e), \mathrm{pr}_2\, \phi(e)) = (f(y), \mathrm{pr}_2\, \phi(e)) \\
&= (f \times \mathrm{id}_D)(y, \mathrm{pr}_2\, \phi(e)) = (f \times \mathrm{id}_D)\Phi(y, e).
\end{aligned}$$

Wegen der Kommutativität des Diagramms in Abbildung 4 ist $p\pi_2 = f\pi_1$, also

$$\pi_2^{-1}(p^{-1}(U)) = \pi_1^{-1}(f^{-1}(U)).$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{-1}(f^{-1}(U)) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & f^{-1}(U) \times D \arrow[d, "\tau_1"] \\
f^{-1}(U) \arrow[r, "\mathrm{id}_{f^{-1}(U)}"'] & f^{-1}(U)
\end{tikzcd}$$

Abbildung 7: $\pi_1 : Y \times_X E \to Y$ ist eine Überlagerung.

Da f stetig ist und U eine Umgebung von $f(y)$ ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von y. Damit erhalten wir das Diagramm in 7. Dieses kommutiert, denn für alle $(y, e) \in \pi_1^{-1}(f^-1(U))$ ist

$$\pi_1((y, e)) = y = \tau_1(y, \mathrm{pr}_2\, \phi(e)) = \tau_1 \Phi(y, e).$$

Wegen der Beliebigkeit von $y \in Y$ zeigt dies, dass $\pi_1 : Y \times_X E \to Y$ eine Überlagerung ist. Aus der obigen Konstruktion geht direkt hervor, dass die Blätterzahl von $y \in Y$ bezüglich dieser Überlagerung der Blätterzahl von $f(y) \in X$ bezüglich der Überdeckung $p : E \to X$ entspricht.

Aufgabe 6.4:

Wir bemerken zunächst, dass für jeden topologischen Raum E und jede Gruppe G, die stetig (von rechts) auf X wirkt, für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\pi_g : E \to E, e \mapsto eg$$

ein Homöomorphismus ist, denn π_g ist bekanntermaßen bijekitv, und

$$\pi_g^{-1} = \pi_{g^{-1}}$$

ist ebenfalls stetig.

(a)

Ist $G = 1$, so ist nichts zu zeigen. Ansonsten seien $e_0 \in E$ und $g \in G - \{1\}$ beliebig aber fest.

Da $\pi_g : E \to E$ stetig ist, ist auch die Abbildung

$$f : E \to E \times E, (e, \mapsto eg) = (\mathrm{id}_E(e), \pi_g(e))$$

stetig. Da $g \neq 1$ und G frei auf E wirkt, ist $\operatorname{Im} f \cap \Delta = \emptyset$, wobei $\Delta \subseteq E \times E$ die Diagonale bezeichnet. Da E Hausdorff ist, ist Δ abgeschlossen in $E \times E$, also $E \times E - \Delta$ offen in $E \times E$. Da $(e_0, e_0 g) \in \operatorname{Im} f \subseteq E \times E - \Delta$ gibt es deshalb $U, V \subseteq E$ offen mit $(e_0, e_0 g) \in U \times V \subseteq E \times E - \Delta$. Inbesondere ist $U \times V \cap \Delta = \emptyset$, also $U \cap V = \emptyset$.

Da π_{g-1} ein Homöomorphismus ist, ist $\pi_{g^{-1}}(V) = Vg^{-1}$ offen, und da $e_0 g \in V$ ist $e_0 \in Vg^{-1}$. Wir setzen

$$W = U \cap Vg^{-1}.$$

W ist eine offene Umgebung von e_0 mit

$$\begin{aligned} W \cap Wg &= \left(U \cap Vg^{-1}\right) \cap \left(U \cap Vg^{-1}\right) g \\ &= U \cap Vg^{-1} \cap Ug \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset, \end{aligned}$$

also $W \cap Wg = \emptyset$.

Wir finden also für jedes $g \in G - \{1\}$ eine offene Umgebung U_g von e_0 mit

$$U_g \cap U_g g = \emptyset.$$

Wir setzen

$$U := \bigcap \{U_g \mid g \in G - \{1\}\}.$$

Da G endlich ist, ist auch U ein offene Umgebung von e_0, und für alle $g \in G - \{1\}$ ist

$$U \cap Ug \subseteq U_g \cap U_g g = \emptyset,$$

also $U \cap Ug = \emptyset$. Wegen der Beliebigkeit von $e_0 \in E$ zeigt dies, dass G eigentlich diskontinuierlich auf E wirkt.

Fun fact: Die Aufgabe lässt sich auch auf intuitive Weise mithilfe von Netzen lösen. Wir setzen

$$D := \{U \subseteq E \mid U \text{ ist eine Umgebung von } E\}$$

und ordnen D via

$$U \geq V \Leftrightarrow U \subseteq V,$$

und erhalten so eine geordnete Menge. Ist $U \cap Ug = \emptyset$ für jedes $U \in D$, so gibt es für jedes $U \in D$ Elemente $x_D, y_D \in D$ mit $y_U = x_U g = \pi_g(X_U)$. Für die beiden Netze $(x_U)_{U \in D}$o und $(y_U)_{U \in D}$ ist klar, dass $x_u \to e_0$ und $y_0 \to e_0$. Da π_g stetig ist, ist deshalb auch

$$y_U = x_U g = \pi_g(x_U) \to \pi_g(e_0) = e_0 g.$$

Da E Hausdorff ist, sind Grenzwerte von Netzen eindeutig. Daher ist $e_0 = e_0 g$. Dies steht wegen $g \neq 1$ im Widerspruch dazu, dass G frei auf E wirkt. Also muss es ein $U \in D$ geben mit $U \cap Ug = \emptyset$.

(b)

Es sei $p : E \to E/G$ die kanonische Projektion. Seien $y_0 \in E/G$ und $x_0 \in E$ mit $p(x_0) = y_0$ beliebig aber fest. Da G eigentlich diskontinuierlich auf E wirkt, gibt es eine offene Umgebung U von x_0, so dass $U \cap Ug = \emptyset$ für alle $g \in G - \{1\}$.

Wir bemerken, dass für $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 \neq g_2$ auch $Ug_1 \cap Ug_2 = \emptyset$, da

$$\pi_{g_1^{-1}}(Ug_1 \cap Ug_2) = U \cap Ug_2 g_1^{-1} = \emptyset.$$

Für $V := p(U)$ ist daher

$$p^{-1}(V) = p^{-1}(p(U)) = U^{\text{sat}} = UG = \dot{\bigcup_{g \in G}} Ug.$$

Dabei ist klar, dass

$$\dot{\bigcup_{g \in G}} Ug \cong \coprod_{g \in G} Ug \cong \coprod_{g \in G} U \cong U \times G,$$

wobei wir G als diskreten Raum auffassen. (Man beachte, dass π_g einen Homöomorphismus $U \cong Ug$ induziert. Der Homöomorphismus $U \times G \cong \dot{\bigcup}_{g \in G} Ug$ durch

$$\xi : U \times G \to \dot{\bigcup_{g \in G}} Ug, (u, g) \mapsto ug$$

gegeben.

Wir bemerken, dass sich p zu einem Hömomorphismus $\tilde{p} : U \cong V$ beschränkt: Die Surjektivität und Stetigkeit sind klar. Die Injektivität von $\tilde{p}$ ergibt sich daraus, dass für $x, x' \in U$ mit $\tilde{p}(x) = \tilde{p}(x')$ ein $g \in G$ existiert mit $x' = xg$, wegen $U \cap Ug' = \emptyset$ für $g' \in G - \{1\}$ also $g = 1$ und damit $x' = x$ ist. $\tilde{p}$ ist offen, denn für eine offene Teilmenge $W \subseteq U$ ist W auch offen in E, da U offen ist, also auch

$$\pi^{-1}(p(W)) = WG = \dot{\bigcup_{g \in G}} Wg$$

offen in E, und mati $p(W) = \tilde{p}(W)$ offen in E/G, also auch offen in $p(V)$.

Damit ist auch

$$\dot{\bigcup_{g \in G}} Ug \cong V \times G$$

durch den Homöomorphismus

$$\zeta : V \times G \to \dot{\bigcup_{g \in G}} Ug, (v, g) \mapsto \tilde{p}^{-1}(v)g.$$

Damit ergibt sich insgesamt das kommutierende Diagramm in Abbildung 8. (Das Dia-

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, "\zeta^{-1}"] \arrow[d, "p"'] & V \times D \arrow[d, "\pi_1"] \\
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"'] & V
\end{tikzcd}$$

Abbildung 8: $p : E \to E/G$ ist eine Überlagerung.

gramm kommutiert, da für alle $(v, g) \in V \times G$

$$\pi_1(v, g) = v$$

und

$$p\zeta(v, g) = p(\tilde{p}^{-1}(v)g) = p(\tilde{p}^{-1}(v)) = \tilde{p}(\tilde{p}^{-1}(v)) = v,$$

also $\pi_1 = p\zeta$ und somit $\pi_1\zeta^{-1} = p$.)

Aus der Beliebigkeit von $y_0 \in E/G$ folgt, dass $p : E \to E/G$ eine Überlagerung ist. Die Blätterzahl ist offenbar $|G|$.

(c)

Die Gruppe $G = \mathbb{Z}/2 = \{1, -1\}$ wirkt stetig von rechts auf S^n via

$$x.1 = x \text{ und } x.(-1) = -x \text{ für alle } x \in S^n.$$

Die induzierte Äquivalenzrelation $\sim$ auf S^n identifiziert jeden Punkt mit seinem Antipodenpunkt. Da G endlich ist, die offenbar stetig und frei auf dem Hausdorff-Raum S^n wirkt, ist die Gruppenwirkung nach Aufgabenteil (a) eigentlich diskontinuierlich. Nach Aufgabenteil (b) ist daher die Quotientenabbildung $p : S^n \to S^n/\!\sim$ eine zweiblättrige Überlagerung. Da diese der Quotientenabbildung $S^n \to \mathbb{R}P^n$ entspricht, zeigt dies die Aussage.