

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

BLATT 6

Jendrik Stelzner

3. Juni 2014

Im Folgenden schreiben wir $I := [0, 1]$.

Aufgabe 6.1: (Freie versus punktierte Schlingen)

(a)

Es sei $x \in X$ beliebig aber fest. Es ist klar, dass die Inklusion

$$\{f \mid f : (S^1, 1) \rightarrow (X, x) \text{ ist stetig}\} \hookrightarrow \{g \mid g : S^1 \rightarrow X \text{ ist stetig}\}$$

wohldefiniert ist. Zusammen mit der kanonischen Projektion

$$\{g \mid g : S^1 \rightarrow X \text{ ist stetig}\} \rightarrow \mathcal{S}(X), g \mapsto [g]$$

ergibt sich damit eine wohldefinierte Abbildung

$$\{f \mid f : (S^1, 1) \rightarrow (X, x) \text{ ist stetig}\} \rightarrow \mathcal{S}(X), f \mapsto [f].$$

Um zu zeigen, dass diese über $\pi_1(X, x)$ faktorisiert, genügt es zu zeigen, dass für stetige Abbildungen $f, g : (S^1, 1) \rightarrow (X, x)$ mit $f \simeq g \text{ rel } 1$ auch $f \simeq g$. Dies ist aber klar.

(b)

Definition. Sei X ein topologischer Raum und seien $v_1, \dots, v_n : I \rightarrow X$ Wege mit $v_i(1) = v_{i+1}(0)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$. Dann bezeichnen wir mit $v_1 * \dots * v_n$ den Weg

$$v_1 * \dots * v_n : I \rightarrow X, t \mapsto \begin{cases} v_1(nt) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ v_2(nt - 1) & \text{falls } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n} \\ v_3(nt - 2) & \text{falls } \frac{2}{n} \leq t \leq \frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots \\ v_n(nt - (n-1)) & \text{falls } \frac{n-1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Bemerkung 1. Es ist bekannt und klar, dass die „Verknüpfung“ $*$ assoziativ bis auf Homotopie ist. Es ist auch klar, dass für eine zusammenziehbare Schlinge C und einen Weg v mit entsprechenden Anfangs-, bzw. Endpunkt

$$C * v \simeq v \quad \text{bzw.} \quad v * C \simeq v.$$

Lemma 2. Sei X ein topologischer Raum und seien $v_1, \dots, v_n : I \rightarrow X$ Wege, $n \geq 2$, mit $v_i(1) = v_{i+1}(0)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ und $v_n(1) = v_1(0)$. Dann ist

$$v_1 * v_2 * \dots * v_n \simeq v_2 * \dots * v_n * v_1.$$

Beweis. Wir fassen die Schlingen $v_1 * v_2 * \dots * v_n$ und $v_2 * \dots * v_n * v_1$ in natürlicher Weise als Abbildungen

$$f : (S^1, 1) \rightarrow (X, v_1(0)) \text{ und } g : (S^1, 1) \rightarrow (X, v_2(0))$$

auf. Dann ist $g(z) = f(e^{2\pi i/n} z)$ für alle $z \in S^1$, eine entsprechende Homotopie also gegeben durch

$$F : S^1 \times I \rightarrow X, (z, t) \mapsto f\left(e^{t \cdot 2\pi i/n} z\right)$$

□

Sei nun erneut $x \in X$ beliebig aber fest. Es sei

$$\varphi : \pi_1(X, x) \rightarrow \mathcal{S}(X)$$

die Vergiss-Abbildung.

Angenommen, φ ist surjektiv. Dann gibt es für jeden Punkt $y \in X$ eine Schlinge $f : (S^1, 1) \rightarrow (X, x)$, so dass f homotop zur konstanten Schlinge

$$g : S^1 \rightarrow X, z \mapsto y$$

ist. Es gibt also eine Homotopie

$$F : S^1 \times I \rightarrow X$$

mit $F(z, 0) = f(z)$ und $F(z, 1) = y$ für alle $z \in S^1$. Es ist daher

$$\gamma : I \rightarrow X, t \mapsto F(1, t)$$

eine stetige Abbildung mit

$$\gamma(0) = F(1, 0) = f(1) = x \text{ und } \gamma(1) = F(1, 1) = y.$$

Das zeigt, dass X wegzusammenhängend ist.

Angenommen, X ist wegzusammenhängend. Sei dann $f : I \rightarrow X$ eine Schlinge, also insbesondere $f(0) = f(1)$, beliebig aber fest. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma : I \rightarrow X$ von x nach $f(0)$. Es sei $\gamma^{-1} : I \rightarrow X$ der umgekehrte Weg von $f(1)$ nach x , d.h. $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ für alle $t \in I$. Dann ist

$$g := \gamma * f * \gamma^{-1}$$

eine Schlinge mit $g(0) = g(1) = x$, und nach Lemma 2 ist

$$g = \gamma * f * \gamma^{-1} \simeq f * \gamma^{-1} * \gamma \simeq f * (\gamma^{-1} * \gamma) \simeq f,$$

da $\gamma^{-1} * \gamma$ offenbar zusammenziehbar ist. Also ist

$$\varphi([g]_{\pi_1(X, x)}) = [g] = [f].$$

Wegen der Beliebigkeit von f zeigt dies die Surjektivität von φ .

(c)

Auch hier sei $x \in X$ beliebig aber fest. Es seien $f, g : (I, \partial I) \rightarrow (X, x)$, so dass $[f]_{\pi_1(X, x)}$ und $[g]_{\pi_1(X, x)}$ konjugiert zueinander sind, d.h. dass es eine Schlinge $h : (I, \partial I) \rightarrow (X, x)$ gibt mit

$$[f]_{\pi_1(X, x)} = [h]_{\pi_1(X, x)} [g]_{\pi_1(X, x)} [h]_{\pi_1(X, x)}^{-1} = [h * g * h^{-1}]_{\pi_1(X, x)}.$$

Es ist dann nach Lemma 2

$$\begin{aligned} [f] &= \varphi([f]_{\pi_1(X, x)}) = \varphi\left([g * h * g^{-1}]_{\pi_1(X, x)}\right) = [h * g * h^{-1}] \\ &= [g * h^{-1} * h] = [g]. \end{aligned}$$

Andererseits seien $f, g : (I, \partial I) \rightarrow (X, x)$ Schlingen, so dass $f \simeq g$. Dann gibt es eine Homotopie $F : I \times I \rightarrow X$ mit $F(t, 0) = f(t)$ und $F(t, 1) = g(t)$ für alle $t \in I$, wobei zusätzlich

$$F(0, s) = F(1, s) \text{ für alle } s \in I.$$

Für alle $s \in I$ definieren wir

$$\gamma_s : I \rightarrow X \text{ mit } \gamma_s(t) := F(0, ts).$$

Für alle $s \in I$

$$\gamma_s(0) = F(0, 0) = f(0) = x \text{ und } \gamma_s(1) = F(0, s),$$

also γ_s ein Weg von x zu $F(0, s)$. Auch ist

$$\gamma_1(1) = F(0, 1) = g(1) = x,$$

also γ_1 eine Schlinge mit $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = x$. Für alle $s \in I$ definieren wir auch

$$\gamma_s^{-1} : I \rightarrow X, t \mapsto \gamma_s(1 - t).$$

Wir betrachten die Homotopie $G : I \times I \rightarrow X$ mit

$$G(t, s) := \begin{cases} \gamma_s\left(\frac{3}{s}t\right) & \text{für } 0 \leq t < \frac{s}{3} \\ F\left(\frac{3t-s}{3-2s}, s\right) & \text{für } \frac{s}{3} \leq t \leq 1 - \frac{s}{3} \\ \gamma_s^{-1}\left(\frac{3}{s}(t-1) + 1\right) & \text{für } 1 - \frac{s}{3} < t \leq 1. \end{cases}$$

Für alle $t \in I$ ist

$$G(t, 0) = F(t, 0) = f(t) \text{ und } G(t, 1) = (\gamma_1 * g * \gamma_1^{-1})(t).$$

Außerdem ist $G(0, s) = G(1, s) = x$ für alle $s \in I$. Das zeigt, dass

$$f \simeq \gamma_1 * g * \gamma_1^{-1} \text{ rel } \partial I,$$

also dass

$$[f]_{\pi_1(X, x)} = [\gamma_1 * g * \gamma_1^{-1}]_{\pi_1(X, x)} = [\gamma_1 g \gamma_1^{-1}]_{\pi_1(X, x)}.$$

Aufgabe 6.2:

(a)

Da A und B wegzusammenhängend sind, und $A \cap B \neq \emptyset$, ist $X = A \cup B$ wegzusammenhängend. Insbesondere ist daher

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, x') \text{ für alle } x, x' \in X.$$

Um zu zeigen, dass $\pi_1(X, x)$ für alle $x \in X$ trivial ist, genügt es daher zu zeigen, dass $\pi_1(X, x)$ für irgendeine $x \in X$ trivial ist. Sei hierfür $x \in A \cap B \neq \emptyset$.

Es sei $f : (I, \partial I) \rightarrow (X, x)$ eine Schlinge. Da A und B offen sind, und $X = A \cup B$, ist $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ wegen der Stetigkeit von f eine offene Überdeckung von I . Da I ein kompakter metrischer Raum ist, gibt es nach dem Lemma von Lebesgue ein $\delta > 0$, so dass jede Teilmenge $M \subseteq I$ mit $\text{diam } M < \delta$ komplett in $f^{-1}(A)$ oder $f^{-1}(B)$ enthalten ist. Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ groß genug, dass die Teilintervalle

$$I_k := \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right] \subseteq I \text{ für } k = 1, \dots, m$$

je komplett in $f^{-1}(A)$ oder $f^{-1}(B)$ enthalten ist. Dann ist $f(I_k) \subseteq A$ oder $f(I_k) \subseteq B$ für alle $k = 1, \dots, m$.

Wir definieren

$$x_k := f\left(\frac{k}{m}\right) \text{ für alle } k = 0, \dots, m.$$

Inbesondere ist

$$x_0 = x_m = x.$$

Da A , B und $A \cap B$ wegzusammenhängend sind, gibt es für alle $k = 1, \dots, m-1$ einen Weg

$$\lambda_k : [0, 1] \rightarrow X$$

von x nach x_k , der je komplett in A verläuft, wenn $x_k \in A$, komplett in B verläuft, wenn $x_k \in B$, bzw. komplett in $A \cap B$ verläuft, wenn $x_k \in A \cap B$. Für alle $k = 1, \dots, m$ definieren wir außerdem den Weg

$$f_k : [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } f_k(t) := f\left(\frac{k-1}{m} + \frac{t}{m}\right).$$

Man bemerke, dass $\text{Im } f_k = f(I_k)$ für alle $k = 1, \dots, m$, sowie $f_k(0) = x_{k-1}$ und $f_k(1) = x_k$ für alle $k = 1, \dots, m$. Es ist nun offenbar

$$\begin{aligned} f &= f_1 * f_2 * \dots * f_m \\ &\simeq f_1 * (\lambda_1^{-1} \lambda_1) * f_2 * (\lambda_2^{-1} \lambda_2) * f_3 * \dots * f_{m-1} * (\lambda_{m-1}^{-1} \lambda_{m-1}) * f_m \\ &\simeq (f_1 \lambda_1^{-1}) * (\lambda_1 * f_2 * \lambda_2^{-1}) * \dots * (\lambda_{m-2} * f_{m-1} * \lambda_{m-1}^{-1}) * (\lambda_{m-1} * f_m) \end{aligned}$$

relativ zu x . Nun sind die Wege $f_1 * \lambda_1^{-1}$, $\lambda_1 * f_2 * \lambda_2^{-1}$, \dots , $\lambda_{m-2} * f_{m-1} * \lambda_{m-1}^{-1}$ und $\lambda_{m-1} * f_m$ jeweils Schleifen, die von x ausgehen, und sich jeweils komplett in A oder B befinden. Daher sind sie alle zusammenziehbar relativ zu x , denn A und B sind einfach zusammenhängend. Daher ist auch f relativ zu x zusammenziehbar. (Man fügt die einzelnen Homotopien einfach passend zusammen.)

Aus der Beliebigkeit von f folgt, dass $\pi_1(X, x)$ trivial ist.

(b)

Es sei $n > 1$. Wir schreiben $S^n = A \cup B$ mit

$$A = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \neq -1\} \text{ und} \\ B = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \neq 1\}.$$

A und B sind offenbar offen in S^n , und durch die entsprechenden stereografischen Projektionen wissen wir, dass $A \cong \mathbb{R}^n$ und $B \cong \mathbb{R}^n$. Da \mathbb{R}^n offenbar einfach zusammenhängend ist, sind es daher auch A und B (wegen der Funktorialität von π_1). Offenbar ist $A \cap B \neq \emptyset$ wegzusammenhängend (hier benutzen wir, dass $n > 1$). Nach Aufgabenteil (a) ist deshalb auch S^n einfach zusammenhängend.

Aufgabe 6.3:

Es sei $(x, x') \in X \times X'$ beliebig aber fest. Da $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung ist, gibt es eine Umgebung $U \subseteq X$ von x , einen diskreten Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times D$, so dass das Diagramm in Abbildung 1 kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times D \\ p \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ U & \xrightarrow{\text{id}_U} & U \end{array}$$

Abbildung 1: $p : E \rightarrow X$ ist eine Überlagerung.

Analog gibt es, da $p' : E' \rightarrow X'$ eine Überlagerung ist, eine Umgebung $U' \subseteq X'$ von x' , einen diskreten Raum D' und einen Homöomorphismus $\phi' : p'^{-1}(U') \rightarrow U' \times D'$, so dass das Diagramm in Abbildung 2 kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} p'^{-1}(U') & \xrightarrow{\phi'} & U' \times D' \\ p' \downarrow & & \downarrow \pi'_1 \\ U' & \xrightarrow{\text{id}_{U'}} & U' \end{array}$$

Abbildung 2: $p' : E' \rightarrow X'$ ist eine Überlagerung.

Es ist nun $U \times U' \subseteq X \times X'$ eine Umgebung von (x, x') in $X \times X'$ mit

$$(p \times p')^{-1}(U \times U') = p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U').$$

Die Homöomorphismen ϕ und ϕ' liefern uns einen Homöomorphismus

$$\tilde{\phi} : p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U') \rightarrow (U \times D) \times (U' \times D') \cong (U \times U') \times (D \times D').$$

$$\begin{array}{ccc}
(p \times p')^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & (U \times U') \times (D \times D') \\
p \times p' \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi}_1 \\
U \times U' & \xrightarrow{\text{id}_{U \times U'}} & U \times U'
\end{array}$$

Abbildung 3: $p' : E' \rightarrow X'$ ist eine Überlagerung.

Zusammen liefert dies das kommutative Diagramm in Abbildung 3.

Wegen der Beliebigkeit von $(x, x') \in X \times X'$ zeigt dies, dass

$$p \times p' : E \times E' \rightarrow X \times X'$$

eine Überlagerung ist. Es ist auch klar, dass sich die Blätterzahl von $(x, x') \in X \times X'$ als Produkt der Blätterzahl von x und der Blätterzahl von x' ergibt.

(a)

Aus der Definition von $Y \times_X E$ erhalten wir das kommutative Diagramm in Abbildung 4.

$$\begin{array}{ccc}
Y \times_X E & \xrightarrow{\pi_1} & Y \\
\pi_2 \downarrow & & \downarrow f \\
E & \xrightarrow{p} & X
\end{array}$$

Abbildung 4: Das Faserprodukt $Y \times_X E$.

Se $y \in Y$ beliebig aber fest. Da $p : E \rightarrow X$ eine Überdeckung ist, gibt es eine Umgebung $U \subseteq X$ von $f(y) \in X$, einen diskreten Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times D$, so dass das Diagramm in Abbildung 5 kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times D \\
p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\
U & \xrightarrow{\text{id}_U} & U
\end{array}$$

Abbildung 5: $p : E \rightarrow X$ ist eine Überlagerung.

Wir erweitern das Diagramm in Abbildung 5 zu dem Diagramm in Abbildung 6. Dabei wollen wir den Homöomorphismus ϕ zu einem Homöomorphismus Φ liften.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_2^{-1}(p^{-1}(U)) & \xrightarrow{\Phi} & f^{-1}(U) \times D \\
\pi_2 \downarrow & & \downarrow f \times \text{id}_D \\
p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times D \\
p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\
U & \xrightarrow{\text{id}_U} & U
\end{array}$$

Abbildung 6: $p : E \rightarrow X$ ist eine Überlagerung.

Hierfür definieren wir

$$\Phi : \pi_2^{-1}(p^{-1}(U)) \rightarrow f^{-1}(U) \times D, (y, e) \mapsto (y, \text{pr}_2 \phi(e)),$$

wobei $\text{pr}_2 : U \times D \rightarrow D$ die kanonische Projektion bezeichnet. Φ ist wohldefiniert, denn für $(y, e) \in \pi_2^{-1}(p^{-1}(U))$ ist

$$f(y) = p(e) = p\pi_2(y, e) \in U.$$

Außerdem definieren wir

$$\Psi : f^{-1}(U) \times D \rightarrow \pi_2^{-1}(p^{-1}(U)), (y, d) \mapsto (y, \phi^{-1}(f(y), d)).$$

Ψ ist wohldefiniert, denn für $(f, d) \in f^{-1}(U) \times D$ ist

$$p(\pi_2((y, \phi^{-1}(f(y), d)))) = p(\phi^{-1}(f(y), d)) = \text{pr}_1((f(y), d)) = f(y) \in U,$$

Es ist klar, dass Φ und Ψ stetig sind. Φ und Ψ sind invers zueinander. Für $(y, e) \in \pi_2^{-1}(p^{-1}(U))$ ist

$$\Psi\Phi(y, e) = \Psi(y, \text{pr}_2 \phi(e)) = (y, \phi^{-1}(f(y), \text{pr}_2 \phi(e))),$$

wobei

$$e = \phi^{-1}\phi e = \phi^{-1}(p(e), \text{pr}_2 \phi(e)) = \phi^{-1}(f(y), \text{pr}_2 \phi(e)).$$

Für $(y, d) \in f^{-1}(U) \times D$ ist

$$\Phi\Psi(y, d) = \Phi(y, \phi^{-1}(f(y), d)) = (y, \text{pr}_2 \phi\phi^{-1}(f(y), d)) = (y, d).$$

Also ist Φ ein Homöomorphismus. Das Diagramm in Abbildung 6 kommutiert auch, denn für $(y, e) \in \pi_2^{-1}(p^{-1}(U))$ ist

$$\begin{aligned}
\phi\pi_2(y, e) &= \phi(e) = (p(e), \text{pr}_2 \phi(e)) = (f(y), \text{pr}_2 \phi(e)) \\
&= (f \times \text{id}_D)(y, \text{pr}_2 \phi(e)) = (f \times \text{id}_D)\Phi(y, e).
\end{aligned}$$

Wegen der Kommutativität des Diagramms in Abbildung 4 ist $p\pi_2 = f\pi_1$, also

$$\pi_2^{-1}(p^{-1}(U)) = \pi^{-1}(f^{-1}(U)).$$

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1^{-1}(f^{-1}(U)) & \xrightarrow{\Phi} & f^{-1}(U) \times D \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow \tau_1 \\
f^{-1}(U) & \xrightarrow{\text{id}_{f^{-1}(U)}} & f^{-1}(U)
\end{array}$$

Abbildung 7: $\pi_1 : Y \times_X E \rightarrow Y$ ist eine Überlagerung.

Da f stetig ist und U eine Umgebung von $f(y)$, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von y . Damit erhalten wir das Diagramm in 7. Dieses kommutiert, denn für alle $(y, e) \in \pi_1^{-1}(f^{-1}(U))$ ist

$$\pi_1((y, e)) = y = \tau_1((y, \text{pr}_2 \phi(e))) = \tau_1 \Phi((y, e)).$$

Wegen der Beliebigkeit von $y \in Y$ zeigt dies, dass $\pi_1 : Y \times_X E \rightarrow Y$ eine Überlagerung ist. Aus der obigen Konstruktion geht direkt hervor, dass die Blätterzahl von $y \in Y$ bezüglich dieser Überlagerung der Blätterzahl von $f(y) \in X$ bezüglich der Überdeckung $p : E \rightarrow X$ entspricht.