Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 4

Jendrik Stelzner

20. Mai 2014

Lemma 1 (Universelle Eigenschaft des Koproduktes). *Es sei I eine nichtleere Menge und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann besitzt das Koprodukt $\coprod_{i \in I} X_i$ die folgende universelle Eigenschaft: Bezeichnet für alle $j \in I$*

$$\iota_j : X_j \to \coprod_{i \in I} X_i, x \mapsto (x, j)$$

die kanonische Inklusion, so gibt es für jeden topologischen Raum Y und jede Familie von Abbildungen $(f_i)_{i \in I}$ mit

$$f_j : X_j \to Y \text{ für alle } j \in I$$

eine eindeutige Abbildung $f : \coprod_{i \in I} X_i \to Y$, so dass $f_j = f \circ \iota_j$ für alle $j \in I$, also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[d, "\iota_j"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \coprod_{i \in I} X_i \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

für alle $j \in I$ kommutiert. f ist genau dann stetig, wenn f_j für alle $j \in I$ stetig ist.

Beweis. Dass $f_j = f \circ \iota_j$ für alle $j \in I$ ist offenbar äquivalent dazu, dass für alle $(x, j) \in \coprod_{i \in I} X_i$

$$f((x, j)) = f(\iota_j(x)) = f_j(x).$$

Definiert man f hierdurch, so ist f offenbar wohldefiniert. Das zeigt die Existenz. Die Eindeutigkeit ist klar, da jedes Element $y \in \coprod_{i \in I} X_i$ von der Form $y = (x, j)$ mit $j \in I$ und $x \in X_j$ ist.

Ist f stetig, so ist $f_j = f \circ \iota_j$ für alle $j \in I$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen ebenfalls stetig, da die Inklusion ι_j für alle $j \in I$ stetig ist.

Ist f_j für alle $j \in I$ stetig, so ergibt sich die Stetigkeit von f wie folgt: Es sei $U \subseteq Y$ offen, beliebig aber fest. Da f_j für alle $j \in I$ stetig ist, ist $f_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ für alle $j \in I$ offen. Da nach der Definition des Koproduktes eine Teilmenge $V \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ genau offen ist, wenn $\iota_j^{-1}(V) \subseteq X_j$ für alle $j \in I$ offen ist, und

$$\iota_j^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \iota_j)^{-1}(U) = f_j^{-1}(U)$$

für alle $j \in I$ offen ist, ist daher $f^{-1}(U) \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ offen. Wegen der Beliebigkeit von U zeigt dies die Stetigkeit von f. $\square$

Aufgabe 4.1:

1.

Es sei $W \subseteq X \times Y$ offen und beliebig aber fest. Da

$$\{U \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}$$

eine topologische Basis von $X \times Y$ ist, gibt es offene Mengen $\{U_i \subseteq X \mid i \in I\}$ und $\{V_i \subseteq Y \mid i \in I\}$ mit

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i).$$

Daher sind

$$p_1(W) = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X \text{ und } p_2(W) = \bigcup_{i \in I} V_i \subseteq Y$$

in den jeweiligen Räumen offen. Wegen der Beliebigkeit von W folgt, dass p_1 und p_2 offen sind.

2.

Bekanntermaßen ist $[0,1) \times [0,1) = [0,1)^2$, wobei p_1 und p_2 den kanonischen Projektionen $\pi_1, \pi_2 : [0,1)^2 \to [0,1)$ entsprechen. Diese sind nicht abgeschlossen: Es ist $\overline{B_1((1,1))} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, also auch

$$C := [0,1)^2 \cap \overline{B_1((1,1))}.$$

abgeschlossen in $[0,1)^2$. Da $\pi_1(C) = \pi_2(C) = (0,1)$ nicht abgeschlossen in $[0,1)$ ist, sind π_1 und π_2 nicht abgeschlossen.

3.

Da $Y \neq \emptyset$ ist p_1 surjektiv.

Es ist daher $U \subseteq X$ genau dann offen, wenn $p_1^{-1}(U) = U \times Y \subseteq X \times Y$ offen ist: Ist U offen, so ist klar, dass auch $U \times Y$ offen ist. Ist andererseits $U \times Y$ offen, so ist wegen der Offenheit und Surjektivität von p_1 auch

$$U = p_1(p_1^{-1}(U)) = p_1(U \times Y)$$

offen. Da $U \subseteq X$ genau dann offen ist, wenn $p_1^{-1}(U)$ offen ist, ist p_1 eine Quotientenraumabbildung.

Aufgabe 4.2:

Lemma 2. *Seien X_1, X_2, T_1, T_2 topologische Räume, $f_1 : X_1 \to T_1$ und $f_2 : X_2 \to T_2$ stetige Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung*

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to T_1 \times T_2, (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

stetig. Sind f_1 und f_2 offen, so ist auch $f_1 \times f_2$ offen.

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dd, "f_1 \times f_2"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X_1 \arrow[dd, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
 & T_1 \times T_2 \arrow[dl, "\tau_1"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
T_1 & & T_2
\end{tikzcd}$$

wobei π_1, π_2, τ_1 und τ_2 die entsprechenden kanonischen Projektionen bezeichnet. Da $\tau_1 \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \circ \pi_1$ und $\tau_2 \circ (f_1 \times f_2) = f_2 \circ \pi_2$ stetig sind, ist es auch $f_1 \times f_2$ (siehe Aufgabe 3).

Angenommen, f_1 und f_2 sind offen. Für offene Mengen $U \subseteq X_1$, $V \subseteq X_2$ ist dann auch $f_1(U) \subseteq T_1$ und $f_2(V) \subseteq T_2$ offen, also

$$(f_1 \times f_2)(U \times V) = f_1(U) \times f_2(V) \subseteq T_1 \times T_2$$

offen. Da die Mengen der Form $U \times V$ mit offenen Mengen $U \subseteq X_1$ und $V \subseteq X_2$ eine topologische Basis von $X_1 \times X_2$ bilden, zeigt dies die Offenheit von $f_1 \times f_2$. $\square$

Für alle $j \in I$ bezeichne

$$\iota_j : X_j \to \coprod_{i \in I} X_i, x \mapsto (x, j)$$

und

$$\iota'_j : X_j \times Y \to \coprod_{i \in I} (X_i \times Y), (x, y) \mapsto ((x, y), j)$$

die entsprechenden kanonischen Inklusionen. Da ι_j für alle $j \in I$ stetig ist, ist nach Lemma 2 für alle $j \in I$ auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota_j \times \mathrm{id}_Y : X_j \times Y &\to \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y \\ (x, y) &\mapsto ((x, j), y). \end{aligned}$$

stetig. Deshalb gibt es nach der universellen Eigenschaft des Koproduktes (siehe Lemma 1) eine eindeutige stetige Abbildung

$$f : \coprod_{i \in I} (X_i \times Y) \to \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X_j \times Y \arrow[dl, "\iota'_j"'] \arrow[dr, "\iota_j \times \mathrm{id}_Y"] & \\
\coprod_{i \in I} (X_i \times Y) \arrow[rr, "f"] & & \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y
\end{tikzcd}$$

für alle $j \in I$ kommutiert. Dabei ist für alle $j \in I$ und $x \in X_j, y \in Y$

$$f(((x,y),j)) = f(\iota'_j(x,y)) = (\iota_j \times \mathrm{id}_Y)(x,y) = ((x,j),y).$$

f ist offen: Seien $j \in I$ und $U \subseteq X_j \times Y$ offen beliebig aber fest. Da ι_j per Definition des Koproduktes offen ist, und die Identität id_Y offenbar ebenfalls offen ist, ist nach Lemma 2 auch $\iota_j \times \mathrm{id}_Y$ offen. Daher ist

$$f(U \times \{j\}) = f(\iota'_j(U)) = (\iota_j \times \mathrm{id}_Y)(U)$$

offen.

Da die Mengen der Form $U \times \{j\} \subseteq \coprod_{i \in I}(X_i \times Y)$ mit $j \in I$ und $U \subseteq X_j \times Y$ offen eine topologische Basis von $\coprod_{i \in I}(X_i \times Y)$ bilden, zeigt dies die Offenheit von f.

Da f offenbar auch bijektiv ist, zeigt dies, dass f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 4.3:

Für alle $j \in I$ bezeichnen wir die kanonische Projektion $\prod_{i \in I} X_i \to X_j$ mit π_j, und für alle $i \in I$ setzen wir $f_i := f \circ \pi_i$. Ist f stetig, so ist f_i als Verknüpfung stetiger Funktionen für alle $i \in I$ stetig.

Angenommen f_i ist für alle $i \in I$ stetig. Für paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$ und beliebige offene Mengen $U_1 \in X_{i_1}, \ldots, U_n \in X_{i_n}$ setzen wir

$$P^{U_1,\ldots,U_n}_{i_1,\ldots,i_n} = \prod_{i \in I} \begin{cases} U_k & \text{falls } i = i_k, \\ X_i & \text{sonst,} \end{cases} \subseteq \prod_{i \in I} X_i.$$

Da die Mengen dieser Form eine topologische Basis von $\prod_{i \in I} X_i$ bilden, genügt es zum Nachweis der Stetigkeit von f zu zeigen, dass

$$f^{-1}\left(P^{U_1,\ldots,U_n}_{i_1,\ldots,i_n}\right) \subseteq T$$

offen ist für alle paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$ und beliebige offene Mengen $U_1 \in X_{i_1}, \ldots, U_n \in X_{i_n}$.

Seien also $i_1, \ldots, i_n$ und $U_1, \ldots, U_n$ wie zuvor beliebig aber fest. Wir bemerken, dass

$$P^{U_1,\ldots,U_n}_{i_1,\ldots,i_n} = \bigcap_{k=1}^{n} \pi^{-1}_{i_k}(U_k),$$

und deshalb

$$f^{-1}\left(P^{U_1,\ldots,U_n}_{i_1,\ldots,i_n}\right) = f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \pi^{-1}_{i_k}(U_k)\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (\pi_{i_k} \circ f)^{-1}(U_k) \quad = \bigcap_{k=1}^{n} f^{-1}_{i_k}(U_k).$$

Da U_k für alle $1 \leq k \leq n$ offen ist, und die f_i alle stetig sind, ist $f^{-1}_{i_k}(U_k)$ für alle $1 \leq k \leq n$ offen, also $f^{-1}(P^{U_1,\ldots,U_n}_{i_1,\ldots,i_n})$ als endlicher Schnitt offener Mengen offen. Wegen der Beliebigkeit von $i_1, \ldots, i_n$ und $U_1, \ldots, U_n$ zeigt dies die Stetigkeit von f.

Aufgabe 4.4:

Lemma 3. *Seien X', X, Y, Y' topologische Räume und f, g, h, k stetige Abbildungen mit*

$$\begin{aligned} &f : X \to Y, \\ &g : X \to Y, \\ &h : X' \to X \textit{ und} \\ &k : Y \to Y'. \end{aligned}$$

Ist $f \simeq g$, so ist auch $fh \simeq gh$ und $kf \simeq kg$.

Beweis. Sei

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

eine Homotopie mit $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Da h und $\mathrm{id}_{[0,1]}$ stetig sind, ist nach Lemma 2 auch

$$h \times \mathrm{id}_{[0,1]} : X' \times [0,1] \to X \times [0,1].$$

stetig. Daher ist auch die Verknüpfung

$$F_h := F \circ (h \times \mathrm{id}_{[0,1]}) : X' \times [0,1] \to Y$$

stetig, also eine Homotopie. Für alle $x' \in X'$ ist

$$\begin{aligned} F_h(x',0) &= F(h(x'),0) = f(h(x')) = (fh)(x') \text{ und} \\ F_h(x',1) &= F(h(x'),1) = g(h(x')) = (gh)(x'). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $fh \simeq gh$.

Da k und F stetig sind, ist auch die Verknüpfung

$$F_k := k \circ F : X \times [0,1] \to Y'.$$

stetig, also eine Homotopie. Für alle $x \in X$ ist

$$\begin{aligned} F_k(x,0) &= k(F(x,0)) = k(f(x)) = (kf)(x) \text{ und} \\ F_k(x,1) &= k(F(x,1)) = k(g(x)) = (kg)(x). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $kf \simeq kg$. □

Zunächst nehmen wir an, dass $\varphi : X \to Y$ ist eine Homotopieäquivalenz ist, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $\psi : Y \to X$, so dass

$$\psi\varphi \simeq \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad \varphi\psi \simeq \mathrm{id}_Y .$$

Sei K ein beliebiger topologischer Raum und

$$\varphi_* : [K, X] \to [K, Y], [f] \mapsto [\varphi f].$$

φ_* ist wohldefiniert, denn für stetige Abbildungen $f, g : K \to X$ mit ist $f \simeq g$ ist nach Lemma 3 auch $\varphi f \simeq \varphi g$. Analog definieren wir

$$\psi_* : [K, Y] \to [K, X], [g] \mapsto [\psi g].$$

Da $\psi\varphi \simeq \mathrm{id}_X$ ist nach Lemma 3

$$\psi\varphi f \simeq \mathrm{id}_X\, f = f \text{ für alle } f : K \to X,$$

und da $\varphi\psi \simeq \mathrm{id}_Y$ ist nach Lemma 3

$$\varphi\psi g \simeq \mathrm{id}_Y\, g = g \text{ für alle } g : K \to Y.$$

Also ist

$$(\psi_*\varphi_*)([f]) = [\psi\varphi f] = [f] \text{ für alle } [f] \in [K, X] \text{ und}$$
$$(\varphi_*\psi_*)([g]) = [\varphi\psi g] = [g] \text{ für alle } [g] \in [K, Y].$$

Das zeigt, dass φ_* bijektiv ist, und dass $\psi_* = \varphi_*^{-1}$.

Nun nehmen wir an, dass $\varphi : X \to Y$ stetig ist und für jeden topologischen Raum K die induzierte Abbildung

$$\varphi_*^K : [K, X] \to [K, Y], [f] \mapsto [\varphi f].$$

eine Bijektion ist. Wegen der Surjektivität von φ_*^Y existiert eine stetige Abbildung $\psi : Y \to X$ mit

$$\varphi_*^Y(\psi) = [\varphi\psi] = [\mathrm{id}_Y],$$

also $\varphi\psi \simeq \mathrm{id}_Y$. Da $\varphi\psi \simeq \mathrm{id}_Y$ ist nach Lemma 3

$$\varphi_*^X([\psi\varphi]) = [\varphi\psi\varphi] = [\varphi] = \varphi_*^X([\mathrm{id}_X]),$$

wegen der Injektivität von φ_*^X also $[\psi\varphi] = [\mathrm{id}_X]$ und deshalb $\psi\varphi \simeq \mathrm{id}_X$. Das zeigt, dass φ eine Homotopieäquivalenz ist.