Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 3

Jendrik Stelzner

6. Mai 2014

Aufgabe 3.1:

Es sei X ein quasikompakter Raum. Wir nehmen an, dass X nicht folgenkompakt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Es gibt also für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x, so dass nur endlich viele Folgeglieder in U_x sind. Da U_x eine offene Umgebung von x enthält, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass alle U_x offen sind.

Es ist $\{U_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X quasikompakt ist gibt es daher $y_1, \ldots, y_n \in X$ mit $X = U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}$. Da $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ jeweils nur endlich viele Folgeglieder enthalten, enthält X nur endlich viele Folgeglieder — ein offensichtlicher Widerspruch.

Das zeigt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzt, und damit, dass X folgenkompakt ist. Also ist jeder quasikompakte Raum folgenkompakt.

Aufgabe 3.2:

Wir setzen $Y := X \times X$ und $\Delta := \Delta(X)$. Für $A, B \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}(A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in X : (x,x) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : x \in A \text{ und } x \in B \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,\end{aligned}$$

und deshalb

$$A \times B \subseteq Y - \Delta \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Da die Mengen der Form $U \times V \subseteq Y$ mit offenen $U, V \subseteq X$ eine Basis der Produkttopologie auf Y bilden, gilt

$$\begin{aligned}&W \subseteq Y \text{ ist offen} \\ \Leftrightarrow\,&\forall (x,y) \in W \text{ gibt es } U, V \subseteq X \text{ offen mit } (x,y) \in U \times V \subseteq W \\ \Leftrightarrow\,&\forall (x,y) \in W \text{ gibt es } U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V \text{ und } U \times V \subseteq W.\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt daher

$$\begin{aligned}
&\Delta \text{ ist abgeschlossen in } Y\\
\Leftrightarrow\, &Y-\Delta \text{ ist offen in } Y\\
\Leftrightarrow\, &\forall (x,y)\in (Y-\Delta)\exists U,V\subseteq X \text{ offen mit } x\in U, y\in V, U\times V\subseteq Y-\Delta\\
\Leftrightarrow\, &\forall (x,y)\in (Y-\Delta)\exists U,V\subseteq X \text{ offen mit } x\in U, y\in V, U\cap V=\emptyset\\
\Leftrightarrow\, &\forall x,y\in X \text{ mit } x\neq y\exists U,V\subseteq X \text{ offen mit } x\in U, y\in V, U\cap V=\emptyset\\
\Leftrightarrow\, &X \text{ ist Hausdorff.}
\end{aligned}$$

Fun fact: Ein alternativer, intuitiverer Beweis lässt sich mithilfe von Netzen formulieren: Es ist

$$\overline{\Delta} = \{h\in X\times X:\ \text{es gibt ein Netz } (h_\alpha) \text{ auf } \Delta \text{ mit } h_\alpha\to h \text{ in } X\times X.$$

Dass Δ abgeschlossen ist, ist daher äquivalent dazu, dass für jedes Netz (h_α) auf Δ, das gegen ein $h\in X\times X$ konvergiert, bereits $h\in\Delta$.

Wir bemerken, dass ein Netz (h_α) auf Δ von der Form

$$(h_\alpha) = (x_\alpha, x_\alpha)$$

ist, wobei (x_α) ein Netz auf X ist, und dass $h=(x,y)$ mit $x,y\in X$. Da ein Netz in einem Produktraum genau dann konvergiert, wenn es in jeder einzelnen Koordinate konvergiert, ist die obige Aussage äquivalent dazu, dass für jedes Netz (x_α) auf X und alle $x,y\in X$ mit $x_\alpha\to x$ und $x_\alpha\to y$ bereits $x=y$.

Es ist also Δ genau dann abgeschlossen in $X\times X$, wenn Grenzwerte von Netzen auf X eindeutig sind. Dies ist bekanntermaßen äquivalent dazu, dass X Hausdorff ist.

Aufgabe 3.3:

Es bezeichne $\sim_n$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ mit

$$x\sim_n y \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^\times \text{ mit } y=\lambda x.$$

Außerdem sei

$$S^n = \{x\in\mathbb{R}^{n+1} : \|x\|=1\}$$

die n-Sphäre und

$$\tilde{D}^n := \{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n : x_{n+1}\geq 0\}.$$

die „nördliche" Hemisphäre von S^n. Man bemerke, dass $\sim$ auf S^n genau die Antipodenpunkte miteinander identifiziert, also den Punkt $x\in S^n$ mit dem Punkt $-x\in S^n$. Es bezeichne außerdem $\sim_n^*$ die Äquivalenzrelation auf D^n, die die Antipodenpunkte des Randes von D^n miteinander identifziert, also jeden Punkt $x\in S^{n-1}\subseteq D^n$ mit dem Antipodenpunkt $-x\in S^{n-1}\subseteq D^n$. Es seien

$$\varphi_n : D^n\to\tilde{D}^n, (x_1,\dots,x_n)\mapsto\left(x_1,\dots,x_n,\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

und

$$\psi_n : S^n/{\sim_n}\to\mathbb{R}P^n, [x]_{\sim_n}\mapsto [x]_{\sim_n}.$$

Wir haben bereits letze Woche gezeigt, dass

$$D^n/{\sim_n^*} \cong \tilde{D}^n/{\sim_n} \cong S^n/{\sim_n} \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/{\sim_n} \cong \mathbb{R}P^n,$$

wobei der Homöomorphismus $D^n/{\sim_n^*} \cong \tilde{D}^n/{\sim_n}$ durch φ_n induziert wird, der Homöomorphismus $\tilde{D}^n/{\sim_n} \cong S^n/{\sim_n}$ durch die kanonische Inklusion $\tilde{D}^n \hookrightarrow S^n$ induziert wird, und der Homöomorphismus $S^n/{\sim_n} \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/{\sim_n}$ durch ψ gegeben ist, also durch die kanonische Inklusion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ induziert wird. Auch haben wir im Laufe des Nachweises dieser Homöomorphien gezeigt, dass $S^n/{\sim_n}$ Hausdorff ist.

1.

Dies haben wir bereits letzte Woche gezeigt.

2.

Dies folgt direkt daraus, dass $S^n/{\sim_n} \cong \mathbb{R}P^n$, und dass $S^n/{\sim_n}$ Hausdorff ist.

3.

Es ist offenbar $\sim$ die Einschränkung von $\sim_2$ auf S^2. Es bezeichne $\pi : S^2 \to S^2/{\sim}$ die kanonische Projektion. Wir setzen

$$\begin{aligned}
S &:= \left\{ (x, y, z) \in S^2 : z \geq \frac{1}{2} \text{ oder } z \leq -\frac{1}{2} \right\}, \\
T &:= \left\{ (x, y, z) \in S^2 : -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ und} \\
R &:= S \cap T = \left\{ (x, y, z) \in S^2 : z = -\frac{1}{2} \text{ oder } z = \frac{1}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass S, T und R abgeschlossen in S^2 sind, und dass sie saturiert bezüglich $\sim$ sind, dass also $\pi^{-1}(\pi(X)) = X$ für alle $X \in \{S, T, R\}$. Insbesondere sind daher auch $\pi(S), \pi(T)$ und $\pi(R)$ abgeschlossen in $S^2/{\sim}$. (Denn die abgeschlossenen Mengen in $S^2/{\sim}$ sind genau die Bilder von abgeschlossenen, saturierten Teilmengen von S^2 unter π.)

Bekanntermaßen ist $S^2/{\sim} \cong \mathbb{R}P^2$. Es sei $f : S^2/{\sim} \to \mathbb{R}P^2$ ein Homöomorphismus (man kann etwa f als ψ_2 wählen). Wir setzen

$$A := f(\pi(S)), B := f(\pi(T)) \text{ und } C := A \cap B.$$

Wir bemerken dabei direkt, dass $C = f(\pi(R))$, da

$$\begin{aligned}
C = A \cap B &= f(\pi(S)) \cap f(\pi(T)) = f(\pi(S) \cap \pi(T)) \\
&= f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S) \cap \pi(T)))) = f(\pi(\pi^{-1}(\pi(S)) \cap \pi^{-1}(\pi(T)))) \\
&= f(\pi(S \cap T)) = f(\pi(R)).
\end{aligned}$$

Da $\pi(X)$ für alle $X \in \{S, T, R\}$ abgeschlossen in $S^2/{\sim}$ ist, und f ein Homöomorphismus ist, sind A, B und C abgeschlossen in $\mathbb{R}P^2$.

Da $f : S^2/{\sim} \to \mathbb{R}P^n$ ein Homöomorphismus ist, ist klar, dass auch die Einschränkung

$$\pi(S) \to f(\pi(S)) = A, x \mapsto f(x)$$

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\text{can.}"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ S/{\sim} \arrow[rr, "g"'] & & \pi(S) \end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Die Homöomorphie von $S/{\sim}$ und $\pi(S)$.

ein Homöomorphismus ist. Daher ist $\pi(S) \cong A$.

Wir bemerken, dass $S/{\sim} \cong \pi(S)$: Die stetige Abbildung $S \to \pi(S), x \mapsto \pi(x)$ faktorisiert offenbar als Bijektion $S/{\sim} \to \pi(S)$ (denn es ist $\pi(s) = \pi(s') \Leftrightarrow s \sim s'$), die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist (da π stetig ist). Da S kompakt ist (denn S^2 ist kompakt und $S \subseteq S^2$ abgeschlossen) und $\pi(S)$ Hausdorff ist (denn $\pi(S) \subseteq S^2/{\sim}$ mit $S^2/{\sim}$ Hausdorff) ist g bereits ein Homöomorphismus. Dies lässt sich in dem kommutativen Diagram von Abbildung 1 zusammenfassen.

Das zeigt, dass
$$S/{\sim} \cong \pi(S) \cong A.$$
Komplett analog ergibt sich, dass auch $T/{\sim} \cong B$ und $R/{\sim} \cong C$. Wir zeigen nun, dass $S/{\sim} \cong D^2, T/{\sim} \cong M$ und $R/{\sim} \cong S^1$. Dabei ist die Homöomorphie $T/{\sim} \cong M$ bereits aus Aufgabe 2.3 bekannt.

Für die Homöomorphie $S/{\sim} \cong D^2$ betrachten wir die Abbildung
$$h : S \to D^2 \text{ mit } h(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}(x,y) & \text{falls } z > 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(x,y) & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$
Diese ist offenbar wohldefiniert und surjektiv. (Man beachte, dass für alle $(x,y,z) \in S$
$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1-z^2} \leq \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
und Gleichheit für $z = \pm 1/2$ gilt.) Es ist auch klar, dass h stetig ist (h ist auf den beiden Zusammenhangskomponenten, in die S zerfällt, offenbar stetig, und somit auch auf ganz S). Offenbar faktorisiert h als Bijektion $\tilde{h} : S/{\sim} \to D^2$, die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da $S/{\sim}$ als Quotient eines quasi-kompakten Raumes selbser quasi-kompakt ist, und D^2 Hausdorff ist, ist $\tilde{h}$ bereits ein Homöomorphismus.

Wir haben gezeigt, dass
$$A \cong \pi(S) \cong S/{\sim} \cong D^2.$$
Komplett analog zeigt man auch dass $R/{\sim} \cong S^1$, und damit, dass
$$C \cong \pi(R) \cong R/{\sim} \cong S^1.$$

Aufgabe 3.4:

1.

Wir zeigen zunächst, dass jedes Element von $\mathrm{SO}(3)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt.

Sei zunächst $A \in \mathrm{SO}(2)$. Wir behaupten, dass es ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ gibt, so dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Hierfür betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Da

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

muss $a = d$ und $b = -c$, also

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Da

$$1 = \det A = a^2 + c^2$$

gibt es also ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ mit $a = \cos\varphi$ und $c = \sin\varphi$. Das zeigt die Behauptung.

Für $B \in \mathrm{O}(2)$ mit $B \notin \mathrm{SO}(2)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \in \mathrm{SO}(2),$$

also gibt es ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom χ_B von B gilt daher

$$\begin{aligned} \chi_B &= (-t + \sin\varphi)(-t - \sin\varphi) - \cos^2\varphi \\ &= t^2 - \sin^2\varphi - \cos^2\varphi = t^2 - 1 \\ &= (t+1)(t-1). \end{aligned}$$

Also besitzt B einen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Das zeigt, dass jede orthogonale Matrix $B \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt. (Diese Aussage ist auch geometrisch klar.)

Sei nun $C \in \mathrm{SO}(3)$. Da χ_C ein reelles Polynom ungeraden Grades ist, besitzt χ_C eine reelle Nullstelle, d.h. C besitzt einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Da für einen entsprechenden Eigenvektor v gilt, dass

$$\|v\| = \|Cv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$$

muss $|\lambda| = 1$, also $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ (da v ein Eigenvektor ist, muss $v \neq 0$ und damit $\|v\| \neq 0$). Angenommen es ist $\lambda = -1$. Indem wir das orthogonale Komplement von $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ in $\mathbb{R}^3$ betrachtent, also $\langle v \rangle_R^{\perp}$, können wir C durch einen passenden Basiswechsel eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & A \end{pmatrix}$$

überführen, wobei $A \in \mathrm{O}(2)$. Da $1 = \det C = -\det A$ muss $\det A = -1$, also $A \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$. Nach der obigen Diskussion besitzt daher A einen Eigenvektor zum Eigenwert 1, also auch C.

Insbesondere lässt sich jede Matrix $A \in \mathrm{SO}(3)$ durch einen passenden Basiswechsel in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit $A' \in \mathrm{SO}(2)$ überführen, also in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [-\pi, \pi]$, wobei A auf $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ durch Rotation um den Winkel φ operiert, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist.

Sei nun $f \in \mathrm{SO}(3)$ mit Eigenvektor v zum Eigenwert 1, so dass f auf $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ durch Rotation um den Winkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$ wirkt. Durch Normierung können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $v \in S^2 \subseteq D^3$. Es hat dann f unter p das Urbild $(\varphi/\pi) \cdot v$.

3.

Der Fall $p(x) = p(y) = E$ ist trivial, es muss dann $x = y = 0$. Wir betrachten daher im Folgenden den Fall, dass $p(x) = p(y) \neq E$, also $x, y \neq 0$.

Da $p(x) = p(y)$, haben $p(x)$ und $p(y)$ die gleiche Rotationsachso, nämlich $\langle x \rangle_{\mathbb{R}}$, bzw. $\langle y \rangle_{\mathbb{R}}$. Daher müssen x und y linear abhängig sein.

Ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda > 0$, so rotieren $p(x)$ und $p(y)$ gleichorientiert, also um den Winkel $\pi \cdot \|x\|$ und $\pi \cdot \|y\|$. Da $\|x\|, \|y\| \leq 1$ muss daher $\|x\| = \|y\| = \lambda\|x\|$, also $\lambda = 1$ und somit $x = y$.

Ist $y = \lambda x$ für ein $\lambda < 0$, so rotieren $p(x)$ und $p(y)$ unterschiedlich orientiert, also um die Winkel $\pi \cdot \|x\|$ und $\pi \cdot \|y\|$. Damit diese Rotationen gleich, muss $\|x\| = \|y\| = 1$, da $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Es ist dann $\lambda = -1$ und somit $x = -y$.

2.

Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim\, = \,\sim_3^*$ auf D^3, die jeden Punkt $x \in S^2 \subseteq D^3$ mit seinem Antipodenpunkt $-x$ identifiziert. Durch den vorherigen Aufgabenteil ergibt sich, dass $x \sim y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$ für alle $x, y \in D^3$. Daher faktorisiert p als Bijektion $\tilde{p} : D^3/{\sim} \to \mathrm{SO}(3)$, die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist (denn p ist nach Annahme stetig). Da $D^3/{\sim}$ als Quotient eines quasikompakten Raumes ebenfalls quasikompakt ist, und $\mathrm{SO}(3) \subseteq \mathbb{R}^9$ Hausdorff ist, ist $\tilde{p}$ bereits ein Homöomorphismus.

Wir betrachten das kommutative Diagramm in Abbildung 2. Da $\tilde{p}$ und π offenbar Quotientenabbildungen sind, ist es offenbar auch $p = \tilde{p} \circ \pi$, denn für $U \subseteq \mathrm{SO}(3)$ ist

$$U \text{ ist offen } \Leftrightarrow \tilde{p}^{-1}(U) \text{ ist offen } \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}\left(\tilde{p}^{-1}(U)\right) \text{ ist offen.}$$

4.

Wir haben letzte Woche gezeigt, dass das Diagramm in Abbildung 3 kommutiert, und dass $\tilde{q}$ ein Homöomorphismus ist. Da π eine Quotientenabbildung ist, ist damit analog zur obigen Argumentation auch q eine Quotientenabbildung. ($\tilde{q}$ entspricht dem Homöomorphismus $D^3/{\sim_3^*} \cong \mathbb{R}P^3$).

$$\begin{tikzcd} D^3 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{SO}(3) \\ & D^3 \arrow[ur, "\tilde{p}"'] & \end{tikzcd}$$

Abbildung 2: p ist eine Quotientenabbildung.

$$\begin{tikzcd} D^3 \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}P(3) \\ & D^3 \arrow[ur, "\tilde{q}"'] & \end{tikzcd}$$

Abbildung 3: q ist eine Quotientenabbildung.

5.

Für alle $x, y \in D^3$ ist $q(x) = q(y)$ genau dann, wenn $\pi(x) = \pi(y)$, also wenn $x \sim_3^* y$, also wenn $x = y$ oder $x, y \in S^2 \subseteq D^3$ mit $x = -y$.

6.

Zusammengefasst haben wir nun das kommutative Diagramm wie in Abbildung 4. Da $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ Homöomorphismen sind ist auch $f := \tilde{p} \circ \tilde{q}^{-1} : \mathbb{R}P^3 \to \mathrm{SO}(3)$ ein Homöomorphismus, und da das Diagramm kommutiert ist

$$f \circ q = \tilde{p} \circ \tilde{q}^{-1} \circ q = \tilde{p} \circ \pi = p.$$

f ist auch durch die Eigenschaft, dass $f \circ q = p$ bereits eindeutig bestimmt: Ist nämlich $g : \mathbb{R}P^3 \to \mathrm{SO}(3)$ eine stetige Abbildung mit $g \circ q = p$, so ist

$$g(q(x)) = p(x) = f(q(x)) \text{ für alle } x \in D^3,$$

und da q surjektiv ist damit bereits $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}P^3$, und somit $f = g$.

$$\begin{tikzcd} & D^3 \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathrm{SO}(3) & D^3/{\sim} \arrow[l, "\tilde{p}"] \arrow[r, "\tilde{q}"'] & \mathbb{R}P^3 \end{tikzcd}$$

Abbildung 4: Die bisherigen Diagramme zusammengefasst.