Einführung in die Geometrie und Topologie
Blatt 3

Jendrik Stelzner

6. Mai 2014

Aufgabe 3.1:

Es sei X ein quasikompakter Raum. Wir nehmen an, dass X nicht folgenkompakt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Es gibt also für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x, so dass nur endlich viele Folgeglieder in U_x sind. Da U_x eine offene Umgebung von x enthält, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass die U_x alle offen sind.

Es ist $\{U_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X quasikompakt ist gibt es daher $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Da $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ jeweils nur endlich viele Folgeglieder enthalten, enthält X nur endlich viele Folgeglieder – ein offensichtlicher Widerspruch.

Das zeigt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzt, und damit, dass X folgenkompakt ist. Also ist jeder quasikompakte Raum folgenkompakt.

Aufgabe 3.2:

Wir setzen $Y := X \times X$ und $\Delta := \Delta(X)$. Für $A, B \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}(A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in X : (x,x) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : x \in A \text{ und } x \in B \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,\end{aligned}$$

also

$$A \times B \subseteq Y - \Delta \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Da die Mengen der Form $U \times V \subseteq Y$ mit offenen $U, V \subseteq X$ eine Basis der Produkttopologie auf Y bilden, gilt

$$\begin{aligned}&W \subseteq Y \text{ ist offen} \\ \Leftrightarrow\ &\forall (x,y) \in W \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } (x,y) \in U \times V \subseteq W \\ \Leftrightarrow\ &\forall (x,y) \in W \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, y \in V \text{ und } U \times V \subseteq W.\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt daher

$$\begin{aligned}
&\Delta \text{ ist abgeschlossen in } Y\\
\Leftrightarrow\, & Y-\Delta \text{ ist offen in } Y\\
\Leftrightarrow\, & \forall (x,y)\in (Y-\Delta) \exists U,V\subseteq X \text{ offen mit } x\in U, y\in V, U\times V\subseteq Y-\Delta\\
\Leftrightarrow\, & \forall (x,y)\in (Y-\Delta) \exists U,V\subseteq X \text{ offen mit } x\in U, y\in V, U\cap V=\emptyset\\
\Leftrightarrow\, & \forall x,y\in X \text{ mit } x\neq y \exists U,V\subseteq X \text{ offen mit } x\in U, y\in V, U\cap V=\emptyset\\
\Leftrightarrow\, & X \text{ ist Hausdorffsch.}
\end{aligned}$$

Fun fact: Ein alternativer, intuitiverer Beweis lässt sich mithilfe von Netzen formulieren: Dass Δ abgeschlossen ist, ist äquivalent dazu, dass für jedes Netz (h_α) auf Δ, das gegen ein $h\in X\times X$ konvergiert, bereits $h\in\Delta$. Da $(h_\alpha)=(x_\alpha,x_\alpha)$ für ein Netz x_α auf X und $h=(x,y)$ mit $x,y\in X$ ist dies äquivalent dazu, dass für jedes Netz (x_α) auf X mit $x_\alpha\to x$ und $x_\alpha\to y$ bereits $x=y$. Dies bedeudet gerade, dass Grenzwerte von Netzen auf X eindeutig sind, was bekanntermaßen äquivalent dazu ist, dass X Hausdorff ist.