## Einführung in die Geometrie und Topologie Blatt 5

Jendrik Stelzner

22. Mai 2014

## Aufgabe 5.1:

Wir nehmen zunächst an, dass  $f:S^1\to X$  homotop zu einer konstanten Schlinge ist. Dann gibt es eine Homotopie  $F:S^1\times [0,1]\to X$  mit

$$F(s,0)=\mathrm{const}\,\,\mathrm{und}\,\,$$

$$F(s,1) = f(s)$$

für alle  $s \in S$ . Es sei

$$A := S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times [0,1]$$

und

$$\pi: S^1 \times [0,1] \to (S^1 \times [0,1]) / A$$

die kanonische Projektion.

Es ist klar, dass F als Abbildung

$$\tilde{F}: \left(S^1 \times [0,1]\right)/A \to X$$

faktorisiert. Diese ist nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig. Wir bemerken weiter, dass  $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A \cong D^2$ : Die Abbildung

$$\phi: S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

ist stetig und surjektiv, und faktorisiert als Bijektion

$$\psi: (S^1 \times [0,1]) / A \to D^2,$$

die nach der universellen Eigenschaft des Quotienten stetig ist. Da  $S^1 \times [0,1]$  als Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist auch  $\left(S^1 \times [0,1]\right)/A$  quasikompakt. Da  $D^2$  Hausdorff ist, ist damit  $\psi$  bereits ein Homöomorphismus.

Durch den Isomorphismus  $\psi$  faktorisiert  $\tilde{F}$  als stetige Abbildung  $\bar{F}: D^2 \to X$ .

Insgesamt ergibt sich damit ein Diagramm wie in Abbildung 1. Dieses Diagram kommutiert: Nach Konstruktion ist  $\phi=\psi\pi$ , sowie  $F=\tilde{F}\pi$  und  $\tilde{F}=\bar{F}\psi$ . Daher ist auch

$$F = \tilde{F}\pi = \bar{F}\psi\pi = \bar{F}\phi.$$

Da für alle  $s \in S^1$ 

$$\bar{F}(s) = \bar{F}\phi(s, 1) = F(s, 1) = f(s)$$

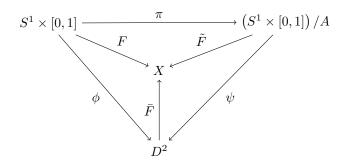


Abbildung 1: Mir fällt kein passender Titel ein.

ist  $\bar{F}$  eine stetige Fortsetzung von f auf  $D^2$ .

Angenommen,  $f:S^1\to X$  lässt sich zu einer stetigen Abbildung  $\bar F:D^2\to X$  fortsetzen. Mithilfe der stetigen Abbildung

$$\phi: S^1 \times [0,1] \to D^2, (s,t) \mapsto ts$$

erhalten wir dann die Homotopie

$$F := \bar{F}\phi : S^1 \times [0,1] \to X.$$

Da für alle  $s \in S^1$ 

$$F(s,0) = \bar{F}(\phi(s,0)) = \bar{F}(0) = \text{const und}$$
  
 $F(s,1) = \bar{F}(\phi(s,1)) = \bar{F}(s) = f(s)$ 

ist f homotop zu einer konstanten Schlinge.

## Aufgabe 5.2:

Ist X zusammenziehbar, so gibt es einen einelementigen Raum \* und eine Homotopieäquivalenz  $\varphi:X\to *$ . Diese induziert, wie aus Aufgabe 4.4 bekannt, für jeden Raum K eine Bijektion

$$\varphi_*^K : [K, X] \to [K, *], f \mapsto \varphi f.$$

Da [K,\*] immer einelementig ist, ist dann [K,X] für jeden Raum K einelementig. Besteht [K,X] für jeden Raum K aus nur einem Element, so ist insbesondere [X,X] einelementig, also jede (konstante) Abbildung  $X\to X$  homotop zu id $_X$ .

Ist id $_X$  homotop zu einer konstanten Abbildung, so gibt es ein  $x_0 \in X$ , so dass id $_X \simeq f$  für die konstante Funktion  $f: X \to X, x \mapsto x_0$ . Für den Teilraum  $* = \{x_0\}$  ist dann für die kanonische Inklusion  $\iota: * \to X$  und  $g: X \to *, x \mapsto x_0$ 

$$g\iota=\operatorname{id}_*\ \operatorname{und}\,\iota g=f\simeq\operatorname{id}_X.$$

Also ist g eine Homotopieäquivalenz und X deshalb zusammenziehbar.

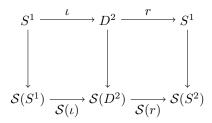


Abbildung 2: I dunno.

## Aufgabe 5.3:

(i)

Für die Homotopie

$$F: D^2 \times [0,1], (x,t) = tx$$

ist für alle  $x \in D^2$ 

$$F(x,0) = 0 = \text{const und}$$
  
 $F(x,1) = x = \text{id}_{D^2}(x).$ 

Deshalb ist id $_{D^2}$  homotop zu einer konstanten Abbildung. Also ist  $D^2$  zusammenziehbar und deshalb  $\left[K,D^2\right]$  für jeden Raum K einelementig. Insbesondere ist daher  $\mathcal{S}\left(D^2\right)=\left[S^1,D^2\right]$  einelementig.

Gibt es eine stetige Abbildung  $r:D^2\to S^1$  mit  $r_{|S^1}=\mathrm{id}_{S^1}$ , so ergibt sich aus den Funktoreigenschaften von  $X\mapsto \mathcal{S}(X)$  das kommutatives Diagram in Abbildung 2, wobei  $\iota:S^1\to D^2$  die kanonische Inklusion bezeichnet.

Da  $r\iota=\mathrm{id}_{S^1}$  muss auch  $\mathcal{S}(r)\mathcal{S}(\iota)=\mathrm{id}_{\mathcal{S}(S^1)}$ . Inbesondere muss daher  $\mathcal{S}(r)$  surjektiv sein, da es  $\mathcal{S}(\iota)$  als Rechtsinverses besitzt. Es ist jedoch  $\mathcal{S}(D^2)$  einelementig und  $\mathcal{S}(S^1)$  abzählbar unendlich (aus der Vorlesung bekannt). Dieser Widerspruch zeigt, dass keine solche Abbildung r existieren kann.