

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE UND TOPOLOGIE

BLATT 4

Jendrik Stelzner

16. Mai 2014

Lemma 1 (Universelle Eigenschaft des Koproduktes). *Es sei I eine nichtleere Menge und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann besitzt das Koprodukt $\coprod_{i \in I} X_i$ die folgende universelle Eigenschaft: Bezeichnet für alle $j \in I$*

$$\iota_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, x \mapsto (x, j)$$

die kanonische Inklusion, so gibt es für jeden topologischen Raum Y und jede Familie von Abbildungen $(f_i)_{i \in I}$ mit

$$f_j : X_j \rightarrow Y \text{ für alle } j \in I$$

eine eindeutige Abbildung $f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$, so dass $f_j = f \circ \iota_j$ für alle $j \in I$, also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_j & & \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_j & \\ \coprod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

für alle $j \in I$ kommutiert. f ist genau dann stetig, wenn f_j für alle $j \in I$ stetig ist.

Beweis. Dass $f_j = f \circ \iota_j$ für alle $j \in I$ ist offenbar äquivalent dazu, dass für alle $(x, j) \in \coprod_{i \in I} X_i$

$$f((x, j)) = f(\iota_j(x)) = f_j(x).$$

Definiert man f hierdurch, so ist f offenbar wohldefiniert. Das zeigt die Existenz. Die Eindeutigkeit ist klar, da jedes Element $y \in \coprod_{i \in I} X_i$ von der Form $y = (x, j)$ mit $j \in I$ und $x \in X_j$ ist.

Ist f stetig, so ist $f_j = f \circ \iota_j$ für alle $j \in I$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen ebenfalls stetig, da die Inklusion ι_j für alle $j \in I$ stetig ist.

Ist f_j für alle $j \in I$ stetig, so ergibt sich die Stetigkeit von f wie folgt: Es sei $U \subseteq Y$ offen, beliebig aber fest. Da f_j für alle $j \in I$ stetig ist, ist $f_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ für alle $j \in I$ offen. Nach der Definition des Koproduktes ist eine Teilmenge $V \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ genau offen ist, wenn $\iota_j^{-1}(V) \subseteq X_j$ für alle $j \in I$ offen ist. Da

$$\iota_j^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \iota_j)^{-1}(U) = f_j^{-1}(U)$$

für alle $j \in I$ offen ist, ist daher $f^{-1}(U) \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ offen. Wegen der Beliebigkeit von U zeigt dies die Stetigkeit von f . \square

Aufgabe 4.1:

1.

Es sei $W \subseteq X \times Y$ offen und beliebig aber fest. Da die Mengen der Form $U \times V \subseteq X \times Y$ mit $U \subseteq X$ offen und $V \subseteq Y$ offen eine topologische Basis von $X \times Y$ bilden, gibt es offene Mengen $\{U_i | i \in I\} \subseteq X$ und $\{V_i | i \in I\} \subseteq Y$ mit

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i).$$

Daher sind

$$p_1(W) = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X \text{ und } p_2(W) = \bigcup_{i \in I} V_i \subseteq Y$$

in den jeweiligen Räumen offen. Wegen der Beliebigkeit von W folgt, dass p_1 und p_2 offen sind.

2.

Bekanntermaßen ist $[0, 1) \times [0, 1) \cong [0, 1)^2$, wobei p_1 und p_2 den kanonischen Projektionen $\pi_1, \pi_2 : [0, 1)^2 \rightarrow [0, 1)$ entsprechen. Diese sind nicht abgeschlossen: Es ist $\overline{B_1((1, 1))} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, also auch

$$C := [0, 1)^2 \cap \overline{B_1((1, 1))} \subseteq [0, 1)^2.$$

Es sind aber $\pi_1(C) = \pi_2(C) = (0, 1)$ nicht abgeschlossen in $[0, 1)$.

3.

Da $Y \neq \emptyset$ ist p_1 surjektiv.

Es ist daher $U \subseteq X$ genau dann offen, wenn $p_1^{-1}(U) = U \times Y \subseteq X \times Y$ offen ist: Ist U offen, so ist es klar, dass auch $U \times Y$ offen ist. Ist andererseits $U \times Y$ offen, so ist wegen der Offenheit und Surjektivität von p_1 auch

$$U = p_1(p_1^{-1}(U)) = p_1(U \times Y)$$

offen. Da $U \subseteq X$ genau dann offen ist, wenn $p_1^{-1}(U)$ offen ist, ist p_1 eine Quotientenraumabbildung.

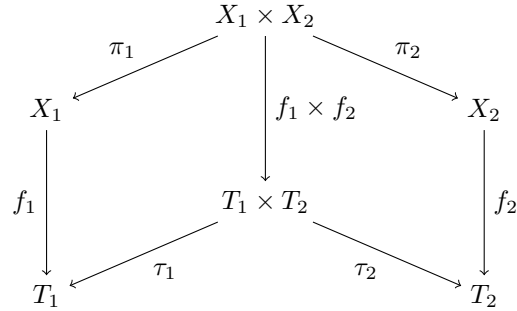
Aufgabe 4.2:

Lemma 2. Seien X_1, X_2, T_1, T_2 topologische Räume, $f_1 : X_1 \rightarrow T_1$ und $f_2 : X_2 \rightarrow T_2$ stetige Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow T_1 \times T_2, (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

stetig. Sind f_1 und f_2 offen, so ist auch $f_1 \times f_2$ offen.

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm



wobei π_1, π_2, τ_1 und τ_2 die entsprechenden kanonischen Projektionen bezeichnet. Da $\tau_1 \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \circ \pi_1$ und $\tau_2 \circ (f_1 \times f_2) = f_2 \circ \pi_2$ stetig sind, ist es auch $f_1 \times f_2$ (siehe Aufgabe 3).

Angenommen, f_1 und f_2 sind offen. Für offene Mengen $U \subseteq X_1, V \subseteq X_2$ ist dann auch $f_1(U) \subseteq T_1$ und $f_2(V) \subseteq T_2$ offen, also

$$(f_1 \times f_2)(U \times V) = f_1(U) \times f_2(V) \subseteq T_1 \times T_2$$

offen. Da die Mengen der Form $U \times V$ mit offenen Mengen $U \subseteq X_1$ und $V \subseteq X_2$ eine topologische Basis von $X_1 \times X_2$ bilden, zeigt dies die Offenheit von $f_1 \times f_2$. \square

Für alle $j \in I$ bezeichne

$$\iota_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, x \mapsto (x, j)$$

und

$$\iota'_j : X_j \times Y \rightarrow \coprod_{i \in I} (X_i \times Y), (x, y) \mapsto ((x, y), j)$$

die entsprechenden kanonischen Inklusionen. Da ι_j für alle $j \in I$ stetig ist, ist nach Lemma 2 für alle $j \in I$ auch die Abbildung

$$\begin{aligned}
\iota_j \times \text{id}_Y : X_j \times Y &\rightarrow \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y \\
(x, y) &\mapsto ((x, j), y).
\end{aligned}$$

stetig. Deshalb gibt es nach der universellen Eigenschaft des Koproduktes (siehe Lemma 1) eine stetige Abbildung

$$f : \coprod_{i \in I} (X_i \times Y) \rightarrow \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
& X_j \times Y & \\
\iota'_j \swarrow & & \searrow \iota_j \times \text{id}_Y \\
\coprod_{i \in I} (X_i \times Y) & \xrightarrow{f} & \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) \times Y
\end{array}$$

für alle $j \in I$ kommutiert. Dabei ist für alle $j \in I$ und $x \in X_j, y \in Y$

$$f(((x, y), j)) = f(\iota'_j(x, y)) = (\iota_j \times \text{id}_Y)(x, y) = ((x, j), y).$$

f ist offen: Seien $j \in I$ und $U \subseteq X_j \times Y$ offen beliebig aber fest. Da ι_j per Definition des Koproduktes offen ist, und die Identität id_Y offenbar ebenfalls offen ist, ist nach Lemma 2 auch $\iota_j \times \text{id}_Y$ offen. Daher ist

$$f(U \times \{j\}) = f(\iota'_j(U)) = (\iota_j \times \text{id}_Y)(U)$$

offen.

Da die Mengen der Form $U \times \{j\} \subseteq \coprod_{i \in I} (X_i \times Y)$ mit $j \in I$ und $U \subseteq X_j$ offen eine topologische Basis von $\coprod_{i \in I} (X_i \times Y)$ bilden, zeigt dies die Offenheit von f .

Da f offenbar auch bijektiv ist, ist f ein Homöomorphismus.

Aufgabe 4.3:

Für alle $j \in I$ bezeichnen wir die kanonische Projektion $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ mit π_j , und für alle $i \in I$ setzen wir $f_i := f \circ \pi_i$. Ist f stetig, so ist f_i als Verknüpfung stetiger Funktionen für alle $i \in I$ stetig.

Angenommen f_i ist für alle $i \in I$ stetig. Für paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ und beliebige offene Mengen $U_1 \in X_{i_1}, \dots, U_n \in X_{i_n}$ setzen wir

$$P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} = \prod_{i \in I} \begin{cases} U_k & \text{falls } i = i_k, \\ X_i & \text{sonst,} \end{cases} \subseteq \prod_{i \in I} X_i.$$

Da die Mengen dieser Form eine topologische Basis von $\prod_{i \in I} X_i$ bilden, genügt es zum Nachweis der Stetigkeit von f zu zeigen, dass

$$f^{-1} \left(P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} \right) \subseteq T$$

offen ist für alle paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ und beliebige offene Mengen $U_1 \in X_{i_1}, \dots, U_n \in X_{i_n}$.

Seien also i_1, \dots, i_n und U_1, \dots, U_n wie zuvor beliebig aber fest. Wir bemerken, dass

$$P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} = \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k),$$

und deshalb

$$f^{-1} \left(P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n} \right) = f^{-1} \left(\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k) \right) = \bigcap_{k=1}^n (\pi_{i_k} \circ f)^{-1}(U_k) = \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_k).$$

Da U_k für alle $1 \leq k \leq n$ offen ist, und die f_i alle stetig sind, ist $f_{i_k}^{-1}(U_k)$ für alle $1 \leq k \leq n$ offen, also $f^{-1}(P_{i_1, \dots, i_n}^{U_1, \dots, U_n})$ als endlicher Schnitt offener Mengen offen. Wegen der Beliebigkeit von i_1, \dots, i_n und U_1, \dots, U_n zeigt dies die Stetigkeit von f .

Aufgabe 4.4:

Lemma 3. Seien X', X, Y, Y' topologische Räume und f, g, h, k stetige Abbildungen mit

$$\begin{aligned} f &: X \rightarrow Y, \\ g &: X \rightarrow Y, \\ h &: X' \rightarrow X \text{ und} \\ k &: Y \rightarrow Y'. \end{aligned}$$

Ist $f \simeq g$, so ist auch $fh \simeq gh$ und $kf \simeq kg$.

Beweis. Sei

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

eine Homotopie mit $F(x, 0) = f(x)$ und $F(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Da h und $\text{id}_{[0,1]}$ stetig sind, ist nach Lemma 2 auch

$$h \times \text{id}_{[0,1]} : X' \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1].$$

stetig. Daher ist auch die Verknüpfung

$$F_h := F \circ (h \times \text{id}_{[0,1]}) : X' \times [0, 1] \rightarrow Y$$

stetig. F_h ist eine Homotopie und für alle $x' \in X'$ ist

$$\begin{aligned} F_h(x', 0) &= F(h(x'), 0) = f(h(x')) = (fh)(x') \text{ und} \\ F_h(x', 1) &= F(h(x'), 1) = g(h(x')) = (gh)(x'). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $fh \simeq gh$.

Da k und F stetig sind, ist auch die Verknüpfung

$$F_k := k \circ F : X \times [0, 1] \rightarrow Y'.$$

stetig. F_k ist eine Homotopie, und für alle $x \in X$ ist

$$\begin{aligned} F_k(x, 0) &= k(F(x, 0)) = k(f(x)) = (kf)(x) \text{ und} \\ F_k(x, 1) &= k(F(x, 1)) = k(g(x)) = (kg)(x). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $kf \simeq kg$. □

Zunächst nehmen wir an, dass $\varphi : X \rightarrow Y$ ist eine Homotopieäquivalenz ist. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\psi : Y \rightarrow X$ so dass

$$\psi\varphi \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad \varphi\psi \simeq \text{id}_Y.$$

Sei K ein beliebiger topologischer Raum und

$$\varphi_* : [K, X] \rightarrow [K, Y], [f] \mapsto [\varphi f].$$

φ_* ist wohldefiniert, denn für $f, g : K \rightarrow X$ mit $f \simeq g$ ist nach Lemma 3 auch $\varphi f \simeq \varphi g$. Analog definieren wir

$$\psi_* : [K, Y] \rightarrow [K, X], [g] \mapsto [\psi g].$$

Da $\psi\varphi \simeq \text{id}_X$ ist nach Lemma 3

$$\psi\varphi f \simeq \text{id}_X f = f \text{ für alle } f : K \rightarrow X,$$

und da $\varphi\psi \simeq \text{id}_Y$ ist nach Lemma 3

$$\varphi\psi g \simeq \text{id}_Y g = g \text{ für alle } g : K \rightarrow Y.$$

Also ist

$$\begin{aligned} (\psi_*\varphi_*)([f]) &= [\psi\varphi f] = [f] \text{ für alle } [f] \in [K, X] \text{ und} \\ (\varphi_*\psi_*)([g]) &= [\varphi\psi g] = [g] \text{ für alle } [g] \in [K, Y]. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass φ_* bijektiv ist, und dass $\psi_* = \varphi_*^{-1}$.

Nun nehmen wir an, dass $\varphi : X \rightarrow Y$ stetig ist und für jeden topologischen Raum K die induzierte Abbildung

$$\varphi_*^K : [K, X] \rightarrow [K, Y], [f] \mapsto [\varphi f].$$

eine Bijektion ist. Wegen der Surjektivität von φ_*^Y gibt es existiert ein $\psi : Y \rightarrow X$ mit $[\varphi\psi] = [\text{id}_Y]$, also $\varphi\psi \simeq \text{id}_Y$. Da $\varphi\psi \simeq \text{id}_Y$ ist nach Lemma 3

$$\varphi_*^X([\psi\varphi]) = [\varphi\psi\varphi] = [\varphi] = \varphi_*^X([\text{id}_X]),$$

wegen der Injektivität von φ_*^X also $[\psi\varphi] = [\text{id}_X]$ und deshalb $\psi\varphi \simeq \text{id}_X$. Das zeigt, dass φ eine Homotopieäquivalenz ist.