

# EINFÜHRUNG IN DIE KOMPLEXE ANALYSIS

## BLATT 2

Jendrik Stelzner

23. April 2014

### Aufgabe 1 (Konjugierte Nullstellen)

Bekanntermaßen handelt es sich bei der Konjugation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x + iy \rightarrow x - iy$  um einen  $\mathbb{R}$ -Algebraautomorphismus von  $\mathbb{C}$  (dem einzigen neben der Identität  $\text{id}_{\mathbb{C}}$ ). Insbesondere ist  $\bar{\bar{x}} = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Es ist daher für alle  $\rho \in \mathbb{C}$

$$\overline{P(\rho)} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k \rho^k} = \sum_{k=0}^n a_k \bar{\rho}^k = P(\bar{\rho}).$$

Also ist für alle  $\rho \in \mathbb{C}$

$$0 = P(\rho) \Leftrightarrow 0 = \overline{P(\rho)} \Leftrightarrow 0 = P(\bar{\rho}).$$

### Aufgabe 2 (Niveaulinien komplexwertiger Funktionen)

Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ist

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

also

$$\Re(z^2) = x^2 - y^2 \text{ und } \Im(z^2) = 2xy.$$

Für die Niveaulinie von  $\Re(z^2)$  für  $c \in \mathbb{R}$  ergibt sich, dass  $x^2 - y^2 = c$  für  $x^2 < c$  keine Lösung besitzt, und sonst, dass  $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$ . Für die Niveaulinien von  $\Im(z^2) = 2xy$  ergibt sich für  $c = 0$  die Vereinigung von reeller und imaginärer Achse, und  $y = 2/(cx)$  für  $c \neq 0$ . Für ein Bild der Niveaulinien siehe Abbildung 1 auf Seite 2.

Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

also

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ und } \Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Um die Niveaulinien von  $\Re(f)$  für  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^{-1}$  zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass  $f$  involutiv ist. Es ist daher für alle  $c \in \mathbb{R}$  und  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \Re(f(z)) = c &\Leftrightarrow f(z) \in \{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow z \in f^{-1}(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}) \\ &\Leftrightarrow z \in f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

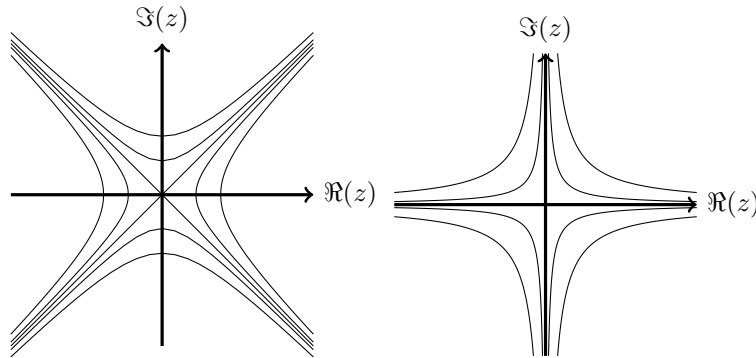


Abbildung 1: Niveulinien von  $\Re(z^2)$  (links) und  $\Im(z^2)$  (rechts).

Wir bestimmen also  $f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\})$ . Für  $c = 0$  erhalten wir so, dass

$$\Re(f(z)) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wir behaupten, dass für  $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

$$f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left| z - \frac{1}{2c} \right| = \frac{1}{2|c|} \right\}.$$

Dies ergibt sich daraus, dass die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \setminus \{1\}, \lambda \rightarrow (i\lambda + 1)/(i\lambda - 1)$  eine Bijektion ist, und für  $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ .

$$\begin{aligned} f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) &= f(\{c - i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) = \left\{ \frac{1}{c - i\lambda} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{c - i\lambda} - \frac{1}{2c} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} = \left\{ \frac{c + i\lambda}{2c(c - i\lambda)} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} \\ &= -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\lambda + c}{i\lambda - c} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} = -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\frac{\lambda}{c} + 1}{i\frac{\lambda}{c} - 1} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} \\ &= -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} = -\frac{1}{2c} (S^1 \setminus \{1\}) + \frac{1}{2c} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left| z - \frac{1}{2c} \right| = \frac{1}{2|c|} \right\}. \end{aligned}$$

Die Niveulinien von  $\Re(1/z)$  sind also die imaginäre Achse ohne 0 und die Kreise mit Radius  $1/(2|c|)$  um den Mittelpunkt  $1/(2c)$  für  $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ .

Für die Niveulinien von  $\Im(1/z)$  bemerken wir, dass  $\Im(1/z) = \Re(1/(iz))$ . Die Niveulinien von  $\Im(1/z)$  ergeben sich also aus denen von  $\Re(1/z)$  durch Rotation um  $\pi/2$ .

Skizziert sehen die Niveulinien aus wie in Abbildung 2 auf Seite 3.

### Aufgabe 3 (Real- und Imaginärteil quadratischer Funktionen)

Wir behaupten, dass  $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  genau dann Realteil eines komplexen Polynoms  $P$  der Form  $P(z) = Az^2 + Bz + C$  mit  $A, B, C \in \mathbb{C}$  ist,

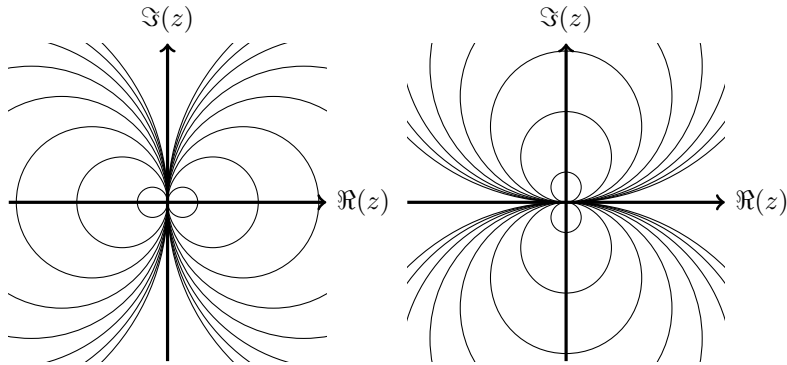


Abbildung 2: Niveaulinien von  $\Re(1/z)$  (links) und  $\Im(1/z)$  (rechts).

wenn  $c = -a$ .

Ist  $c = -a$ , so ist für beliebiges  $b \in \mathbb{R}$

$$p(x, y) = ax^2 + bxy - ay^2 = \Re \left( \left( a - \frac{1}{2}bi \right) (x + iy)^2 \right).$$

Sei andererseits  $p = \Re(P)$  für ein komplexes Polynom  $P$  wie oben. Da

$$\Re(C) = \Re(P(0)) = p(0, 0) = 0$$

ist  $p = \Re(Az^2 + Bz)$ , wir können also o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $C = 0$ . Da für alle  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &= p(x, y) - p(-x, -y) = \Re(P(z)) - \Re(P(-z)) \\ &= \Re(P(z) - P(-z)) = \Re(Bz - B(-z)) = \Re(2Bz) = 2\Re(Bz) \end{aligned}$$

ist  $\Re(Bz) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Da  $0 = \Re(B\bar{B}) = \Re(|B|^2) = |B|^2$  folgt, dass  $B = 0$ . Also ist  $P(z) = Az^2$  für  $A = x_A + iy_A \in \mathbb{C}$ . Es ist daher

$$p(x, y) = \Re(Az^2) = \Re((x_A + iy_A)(x + iy)^2) = x_Ax^2 - 2y_Axy - x_Ay^2,$$

was die Behauptung zeigt.

Man bemerke noch, dass  $p$  genau dann Imaginärteil eines komplexen Polynoms vom Grad  $n$  ist, wenn  $p$  Realteil eines komplexen Polynoms vom Grad  $n$  ist, denn  $p = \Im(P) \Leftrightarrow p = \Re(-iP)$ , bzw.  $p = \Re(P) \Leftrightarrow p = \Im(iP)$  für jedes komplexe Polynom  $P$ . Also ist  $p$  genau dann Imaginärteil eines passenden 2komplexen Polynoms  $P$  der Form  $P(z) = Az^2 + Bz + C$  mit  $A, B, C \in \mathbb{C}$ , wenn  $a = -c$ .

## Aufgabe 4 Betrag der Exponentialabbildung

Für alle  $z \in \mathbb{C}$  ist

$$|e^z| = \left| e^{\Re(z) + i\Im(z)} \right| = \left| e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)} \right| = \left| e^{\Re(z)} \right| \left| e^{i\Im(z)} \right| = e^{\Re(z)}.$$

## Aufgabe 5 (Der Sinus im Komplexen)

Wir bemerken zunächst, dass für alle  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\sin(x + iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \cos(x) + i \frac{e^{-y} + e^y}{2i} \sin(x) \\ &= \cosh(y) \sin(x) + i \sinh(y) \cos(x).\end{aligned}\tag{1}$$

Es sei nun

$$\begin{aligned}S^+ &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re(z) = \frac{\pi}{2}, \Im(z) \geq 0 \right\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + \lambda i : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \right\}, \\ S^- &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re(z) = -\frac{\pi}{2}, \Im(z) \leq 0 \right\} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + \lambda i : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq 0 \right\},\end{aligned}$$

sowie

$$T := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| < \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ x + iy : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da für alle  $\pi/2 + i\lambda \in S^+$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\lambda\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(i\lambda) + \sin(i\lambda) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(i\lambda) = \cosh(\lambda)$$

und  $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  bijektiv ist, ist  $\sin : S^+ \rightarrow [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$  bijektiv. Analog ist für alle  $\pi/2 + i\lambda \in S^-$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + i\lambda\right) = -\cosh(\lambda),$$

also  $\sin : S^- \rightarrow (-\infty, -1] \subseteq \mathbb{R}$  bijektiv.

Um die Bijektivität  $\sin : S^+ \cup S^- \cup T \rightarrow \mathbb{C}$  zu zeigen, genügt es nun zu zeigen, dass

$$\sin : T \rightarrow \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)) =: A$$

bijektiv ist.

Hierfür bemerken wir zunächst, dass tatsächlich  $\sin z \in A$  für alle  $x + iy = z \in T$ , denn da  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$  ist  $\Re(\sin z) = \sin(x) \in (-1, 1)$  für  $y = 0$  und  $\Im(z) \neq 0$  für  $y \neq 0$ .

Als Nächstes zeigen wir, dass  $\sin : T \rightarrow A$  injektiv ist. Seien  $x + iy, x' + iy' \in T$  mit  $\sin(x + iy) = \sin(x' + iy')$ .

Ist  $x \neq x'$  und  $y \neq y'$ , so bemerken wir zunächst, dass aus (1) folgt, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(x) &= \operatorname{sgn}(\cosh(y) \sin(x)) = \operatorname{sgn}(\cosh(y') \sin(x')) = \operatorname{sgn}(x') \text{ und} \\ \operatorname{sgn}(y) &= \operatorname{sgn}(\sinh(y) \cos(x)) = \operatorname{sgn}(\sinh(y') \cos(x')) = \operatorname{sgn}(y').\end{aligned}$$

Es muss also bereits  $|x| \neq |x'|$  und  $|y| \neq |y'|$ . Wir können dabei o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $|x| < |x'|$ . Da daher  $|\sin(x)| < |\sin(x')|$  folgt aus

$$\cosh(y) |\sin(x)| = \cosh(y') |\sin(x')|,$$

dass  $\cosh(y) > \cosh(y')$ , also  $|y| > |y'|$ . Aus  $|x| < |x'|$  und  $|y| > |y'|$  folgt, dass  $|\sinh(y)| > |\sinh(y')|$  und  $\cos(x) > \cos(x')$ , also

$$|\sinh(y)| \cos(x) > |\sinh(y')| \cos(x').$$

Dies steht wegen (1) im Widerspruch zu  $\sin(x + iy) = \sin(x' + iy')$ . Es muss also  $x = x'$  oder  $y = y'$ .

Ist  $x = x'$ , so folgt aus (1), dass  $\sinh y = \sinh y'$  (da  $\cos(x) = \cos(x') \neq 0$ ), also  $y = y'$  (denn  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist bijektiv). Ist  $y = y'$ , so folgt aus (1), dass  $\sin(x) = \sin(x')$  (denn  $\cosh y = \cosh y' \neq 0$ ), also  $x = x'$  (denn  $\sin(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-1, 1)$  ist bijektiv).

Dass zeigt, dass für  $x + iy, x' + iy' \in T$  mit  $\sin(x + iy) = \sin(x' + iy')$  bereits  $x = x'$  und  $y = y'$ , also  $x + iy = x' + iy'$ . Das zeigt, dass  $\sin : T \rightarrow A$  injektiv ist.

Zuletzt zeigen wir, dass  $\sin : T \rightarrow A$  surjektiv ist, also  $A = \sin(T)$ . Indem man  $x = 0$ , bzw.  $y = 0$  fest wählt, wird aus (1) klar, dass  $i\mathbb{R} \in \sin(T)$ , bzw.  $(-1, 1) \in \sin(T)$ . Aus (1) ergibt sich auch direkt, dass  $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin z}$  und  $\sin(-z) = -\sin z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Da  $T$  unter  $z \mapsto -z$  und  $z \mapsto \bar{z}$  abgeschlossen ist, genügt es daher zum Nachweis der Surjektivität zu zeigen, dass  $A' \subseteq \sin(T)$  für

$$A' = \{z \in A : \Re(z), \Im(z) > 0\} = \{x + iy : x, y \in (0, \infty)\}.$$

Sei  $z \in A'$  beliebig aber fest. Man bemerke, dass  $|z| > 0$  und  $\arg(z) \in (0, \pi/2)$ . Für  $y > 0$  betrachten wir die Abbildung

$$\varphi_y : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \sin(x + iy) = \cosh(y) \sin(x) + i \sinh(y) \cos(x).$$

Offenbar ist  $\varphi_y(0) = i \sinh(y)$  und  $\varphi_y(\pi/2) = \cosh(y)$ . Insbesondere ist daher

$$\arg(\varphi_y(0)) = \frac{\pi}{2} \text{ und } \arg\left(\varphi_y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0,$$

wobei klar ist, dass  $\arg \circ \varphi_y : [0, \pi/2] \rightarrow [0, \pi/2]$  stetig und streng monoton fallend ist. Insbesondere gibt es daher ein eindeutiges  $x_y \in (0, \pi/2)$  mit  $\arg(\varphi_y(x_y)) = \arg(z)$ , wobei klar ist, dass  $x_y$  stetig von  $y$  abhängt.

Wir bemerken, dass  $\sinh(y) \leq |\varphi_y(x)| \leq \cosh(y)$  für alle  $y > 0$  und  $x \in [0, \pi/2]$ , da nach (1)

$$|\varphi_y(x)| = \sqrt{\cosh^2(y) \sin^2(x) + \sinh^2(y) \cos^2(x)}$$

und

$$\begin{aligned} & \sqrt{\cosh^2(y) \sin^2(x) + \sinh^2(y) \cos^2(x)} \\ &= \sqrt{(1 + \sinh^2(y)) \sin^2(x) + \sinh^2(y) \cos^2(x)} \\ &= \sqrt{\sin^2(x) + \sinh^2(y)} \geq \sinh(y) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \sqrt{\cosh^2(y) \sin^2(x) + \sinh^2(y) \cos^2(x)} \\ &= \sqrt{\cosh^2(y) \sin^2(x) + (\cosh^2(y) - 1) \cos^2(x)} \\ &= \sqrt{\cosh^2(y) - \cos^2(x)} \leq \cosh(y). \end{aligned}$$

Insbesondere gibt es daher  $0 < y_- < y_+$ , so dass  $|\varphi_{y_-}(x_{y_-})| < |z| < |\varphi_{y_+}(x_{y_+})|$ . Da  $x_y$  stetig von  $y$  abhängt, und damit auch  $|\varphi_y(x_y)|$ , gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein  $y_- < y_0 < y_+$  mit  $|\varphi_{y_0}(x_{y_0})| = |z|$ . Da nach Konstruktion auch  $\arg(\varphi_{y_0}(x_{y_0})) = \arg(z)$  folgt damit, dass  $\varphi_{y_0}(x_{y_0}) = \sin(x_{y_0} + iy_0) = z$ . Da  $x_{y_0} \in (0, \pi/2)$  und  $y_0 > 0$ , also  $x_{y_0} + iy_0 \in T$ , zeigt dies, dass  $A' \subseteq \sin(T)$ , und damit die Surjektivität von  $\sin : T \rightarrow A$ .