# Einführung in die Komplexe Analysis
## Blatt 2

Jendrik Stelzner

21. April 2014

## Aufgabe 1 (Konjugierte Nullstellen)

Bekanntermaßen handelt es sich bei der Konjugation um einen $\mathbb{R}$-Algebraautomorphismus von $\mathbb{C}$ (dem einzigen neben der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$). Inbesondere ist $\bar{x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist daher für alle $\rho \in \mathbb{C}$

$$\overline{P(\rho)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{\rho}^k = P(\bar{\rho}).$$

Also ist für alle $\rho \in \mathbb{C}$

$$0 = P(\rho) \Leftrightarrow 0 = \overline{P(\rho)} \Leftrightarrow 0 = P(\bar{\rho}).$$

## Aufgabe 2 (Niveaulinien komplexwertiger Funktionen)

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

also

$$\Re\left(z^2\right) = x^2 - y^2 \text{ und } \Im\left(z^2\right) = 2xy.$$

Für die Niveaulinie von $\Re\left(z^2\right)$ für $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich, dass $x^2 - y^2 = c$ für $x^2 < c$ keine Lösung besitzt, und sonst, dass $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$. Für die Niveulinienen von $\Im\left(z^2\right) = 2xy$ ergibt sich für $c = 0$ die Vereinigung von reeler und imaginärer Achse, und für $c \neq 0$ gerade $y = 2/(cx)$. Für ein Bild der Niveulinien siehe Abbildung 1 auf Seite 2.

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2},$$

also

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ und } \Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

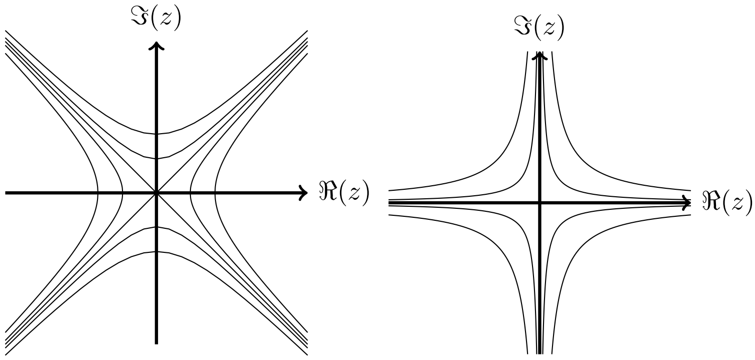


Abbildung 1: Niveulinien von $\Re\left(z^2\right)$ (links) und $\Im\left(z^2\right)$ (rechts).

Um die Niveulinien von $\Re(f)$ für $f : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}, z \mapsto z^{-1}$ zu bestimmen bemerken wir zunächst, dass $f$ involutiv ist. Es ist daher für alle $c \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\Re(f(z)) = c &\Leftrightarrow f(z) \in \{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \smallsetminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow z \in f^{-1}(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \smallsetminus \{0\}) \\ &\Leftrightarrow z \in f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \smallsetminus \{0\}).\end{aligned}$$

Wir bestimmen also $f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\})$. Für $c = 0$ erhalten wir so, dass

$$\Re(f(z)) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wir behaupten, dass für $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

$$f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} : \left| z - \frac{1}{2c} \right| = \frac{1}{2|c|} \right\}.$$

Dies ergibt sich daraus, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1 \smallsetminus \{1\}, \lambda \to (i\lambda + 1)/(i\lambda - 1)$ eine Bijektion ist, und für $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

$$\begin{aligned}&f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) = f(\{c - i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) = \left\{ \frac{1}{c - i\lambda} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{c - i\lambda} - \frac{1}{2c} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} = \left\{ \frac{c + i\lambda}{2c(c - i\lambda)} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} \\ &= -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\lambda + c}{i\lambda - c} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} = -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\frac{\lambda}{c} + 1}{i\frac{\lambda}{c} - 1} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} \\ &= -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2c} \left( S^1 \smallsetminus \{1\} \right) + \frac{1}{2c} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left| z - \frac{1}{2c} \right| = \frac{1}{2|c|} \right\}.\end{aligned}$$

Die Niveulinien von $\Re(1/z)$ sind also die imaginäre Achse ohne 0 und die Kreise mit Radius $1/(2|c|)$ um den Mittelpunkt $1/(2c)$ für $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

Für die Niveulinien von $\Im(1/z)$ bemerken wir, dass $\Im(1/z) = \Re(1/(iz))$. Die Niveulinien von $\Im(1/z)$ ergeben sich also aus denen von $\Re(1/z)$ durch Rotation um $\pi/2$.

Skizziert sehen die Niveulinien aus wie in Abbildung 2 auf Seite 3.

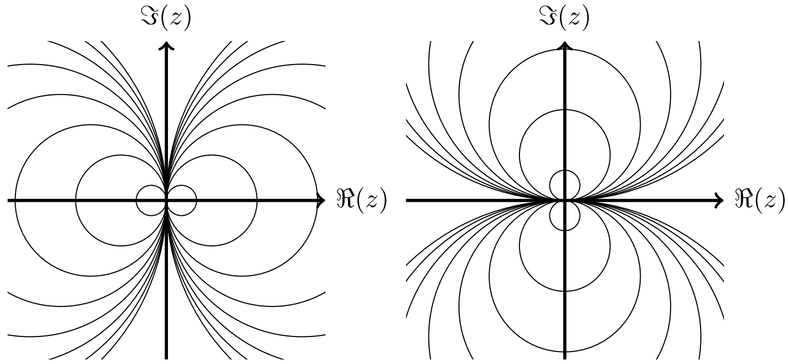


Abbildung 2: Niveulinien von $\Re(1/z)$ und $\Im(1/z)$.

## Aufgabe 3 (Real- und Imaginärteil quadratischer Funktionen)

Wir behaupten, dass $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ genau dann Realteil des komplexen Polynoms $P(z) = Az^2 + Bz + C$ ist, wenn $c = -a$.

Ist $c = -a$, so ist für beliebiges $b \in \mathbb{R}$

$$p(x,y) = ax^2 + bxy - ay^2 = \Re\left(\left(a - \frac{1}{2}bi\right)(x+iy)^2\right).$$

Sei andererseits $p = \Re(P)$. Da

$$\Re(C) = \Re(P(0)) = p(0,0) = 0$$

ist $p = \Re(Az^2 + Bz)$, wir können also o.B.d.A. davon ausgehen, dass $C = 0$. Da für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &= p(x,y) - p(-x,-y) = \Re(P(z)) - \Re(P(-z)) \\ &= \Re(P(z) - P(-z)) = \Re(Bz - B(-z)) = \Re(2Bz) = 2\Re(Bz) \end{aligned}$$

ist $\Re(Bz) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da $0 = \Re(B\bar{B}) = \Re(|B|^2) = |B|^2$ folgt daraus, dass $B = 0$. Also ist $P(z) = Az^2$ für $A = x_A + iy_A \in \mathbb{C}$. Es ist daher

$$p(x,y) = \Re(Az^2) = \Re((x_A + iy_A)(x+iy)^2) = x_A x^2 - 2y_A xy - x_A y^2,$$

was die Behauptung zeigt.

Man bemerke noch, dass $p$ genau dann Imaginärteil eines komplexen Polynoms vom Grad $n$ ist, wenn $p$ Realteil eines komplexen Polynoms vom Grad $n$ ist, denn $p = \Im(P) \Leftrightarrow p = \Re(-iP)$, bzw. $p = \Re(P) \Leftrightarrow p = \Im(iP)$ für jedes komplexe Polynom $P$. Also ist $p$ genau dann Imaginärteil eines Polynoms $P(z) = Az^2 + Bz + C$, wenn $a = -c$.

## Aufgabe 4 Betrag der Exponentialabbildung

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$|e^z| = \left|e^{\Re(z) + i\Im(z)}\right| = \left|e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}\right| = \left|e^{\Re(z)}\right| \left|e^{i\Im(z)}\right| = e^{\Re(z)}.$$