

Einführung in die Komplexe Analysis

Blatt 8

Jendrik Stelzner

1. Juni 2014

Aufgabe 1

1.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \Re(z^n) \, dz &= \int_0^1 \Re(r^n e^{2\pi i n t}) 2\pi i r e^{2\pi i t} \, dt \\ &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \Re(e^{2\pi i n t}) e^{2\pi i t} \, dt \\ &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \cos(2\pi n t) e^{2\pi i t} \, dt,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos(2\pi n t) e^{2\pi i t} \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{2\pi i n t} + e^{-2\pi i n t}) e^{2\pi i t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2\pi i (1+n)t} + e^{2\pi i (1-n)t} \, dt.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\int_{\gamma} \Re(z^n) \, dz = \begin{cases} \pi i r^2 & \text{falls } n = 1, \\ \pi i & \text{falls } n = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \Im(z^n) \, dz &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \sin(2\pi n t) e^{2\pi i t} \, dt \\ &= \pi r^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i (1+n)t} - e^{2\pi i (1-n)t} \, dt \\ &= \begin{cases} -\pi r^2 & \text{falls } n = 1, \\ \pi & \text{falls } n = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

2.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \bar{z}^n dz &= \int_0^1 \overline{re^{2\pi it}}^n 2\pi i r e^{2\pi it} dt = 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i(1-n)t} dt \\ &= \begin{cases} 2\pi i r^2 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

3.

Aufgabe 3

Da $[a, b]$ kompakt ist, und $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, existiert das Maximum

$$M := \max_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))|,$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = ML(\gamma).\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir fixieren zunächst einen Basispunkt $a \in U$. Wegen der Konvexität von U existieren für jedes $z \in \mathbb{C}$ der Weg

$$\gamma_z : [0, 1] \rightarrow U \text{ mit } \gamma_z(t) := a + t(z - a) \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Wir definieren $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z) dz \text{ für alle } z \in U,$$

und behaupten, dass F auf U eine Stammfunktion von f ist.

Sei $z_0 \in U$ beliebig aber fest. Wir zeigen, dass F an z_0 komplex differenzierbar ist mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Hierfür definieren wir für alle $z \in \mathbb{C}$ den Weg

$$\Gamma_z : [0, 1] \rightarrow U \text{ mit } \Gamma_z(t) := z_0 + t(z - z_0) \text{ für alle } t \in [0, 1],$$

der wegen der Konvexität von U wohldefiniert ist. Für alle $z \in U$ ist dann

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\gamma_{z_0} + \Gamma_z - \gamma_z} f(z) dz = \int_{\gamma_{z_0}} f(z) dz - \int_{\gamma_z} f(z) dz + \int_{\Gamma_z} f(z) dz \\ &= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt,\end{aligned}$$

also

$$F(z) = F(z_0) + (z - z_0)\Delta(z),$$

wobei $\Delta : U \rightarrow \mathbb{C}$ als

$$\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) \, dt \text{ für alle } z \in U$$

definiert ist.

Es ist klar, dass $\Delta(z_0) = f(z_0)$. Δ ist stetig an z_0 , denn f ist stetig, und für alle $z \in U$ ist

$$\begin{aligned} |\Delta(z) - \Delta(z_0)| &= \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0) \, dt \right| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Zusammen zeigt, dies, dass F an z_0 komplex differenzierbar ist mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Aus der Beliebigkeit von $z_0 \in U$ folgt, dass F auf U holomorph ist mit $F' = f$. Also besitzt f auf U eine Stammfunktion.