

EINFÜHRUNG IN DIE KOMPLEXE ANALYSIS

BLATT 1

Jendrik Stelzner

7. April 2014

Aufgabe 1 (Real und Imaginärteil)

Es ist

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i(1+i)} = \frac{1}{i} = -i,$$

und

$$\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$

Da $i^2 = -1$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$i^n = i^{(n \bmod 4)} \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ i & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}.$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^k &= \sum_{k=1}^7 e^{ik\pi/4} = \sum_{k=1}^3 e^{ik\pi/4} + \sum_{k=4}^7 e^{ik\pi/4} \\ &= \sum_{k=1}^3 e^{ik\pi/4} + \sum_{k=0}^3 e^{ik\pi/4+\pi} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^3 e^{ik\pi/4} + \sum_{k=1}^3 -e^{ik\pi/4} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Real- und Imaginärteile ergeben sich durch direktes ablesen.