Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 1

Jendrik Stelzner

12. April 2014

Aufgabe 1 (Real und Imaginärteil)

Es ist

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i(1+i)} = \frac{1}{i} = -i,$$

und

$$\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$

Da $i^2 = -1$ (also insbesondere $i^4 = 1$) ist für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$i^n = i^{(n \bmod 4)} \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0 \mod 4, \\ i & \text{falls } n \equiv 1 \mod 4, \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2 \mod 4, \\ -i & \text{falls } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Schließlich ist

$$\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n = \Re\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n + i\Im\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k &= \sum_{k=1}^{7} e^{ik\pi/4} = \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=4}^{7} e^{ik\pi/4} \\
&= \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=0}^{3} e^{ik\pi/4+i\pi} \\
&= -1 + \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=1}^{3} -e^{ik\pi/4} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Real- und Imaginärteile ergeben sich durch direktes Ablesen.

Aufgabe 2 (Betrag und Argument)

Es ist

$$|1+3i| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10} \text{ und } \arg(1+3i) = \arctan 3.$$

Wegen der 2π-Periodizität der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ ist

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)^9 - (1-i)^9 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^9 - \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^9 \\ &= 2^{9/2}(e^{i\pi/4} - e^{i\pi/4}) = 16((1+i)-(1-i)) \\ &= 32i, \end{aligned}$$

also

$$|z_1| = 32 \text{ und } \arg z_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Da $i^2 = -1$ und $i^4 = 1$ ist $z_2 = i^{2014} = -1$, also

$$|z_2| = 1 \text{ und } \arg z_2 = \pi.$$

Für $z_3 = \frac{1+ia}{1-ia}$ ist

$$|z_3| = \frac{|1+ia|}{|1-ia|} = \frac{|1+ia|}{|\overline{1+ia}|} = 1,$$

und da

$$\arg(1+ia) = \arctan a \text{ und } \arg(1-ia) = \arctan -a = -\arctan a.$$

ist

$$\arg z_3 = \arg(1+ia) - \arg(1-ia) = 2\arctan a.$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und

$$z_n = (i-1)^n = \left(\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{in3\pi/4}$$

ist $|z_n| = \sqrt{2}^n$ und $n\frac{3}{4}\pi$ ein Argument von z_n.

Aufgabe 3 (Bestimmte Teilmengen)

a)

Da $\Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und für alle $t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$

$$\frac{z-3}{1+i} = t \Leftrightarrow z = 3 + t(1+i)$$

ist

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) = 0 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{z-3}{1+i} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{3 + t(1+i) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Es handelt sich bei A_0 also um eine Gerade.

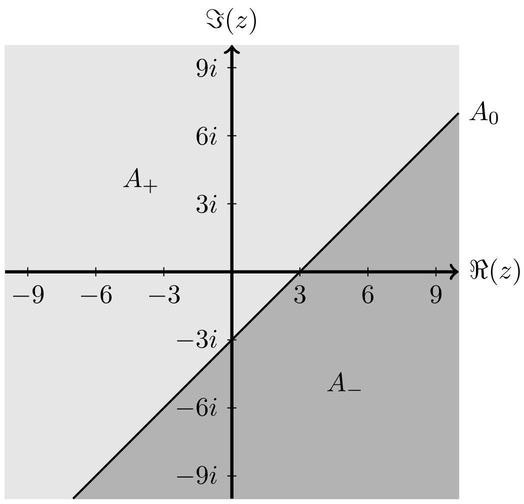
Analog ergibt sich nun auch, dass

$$A_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) > 0 \right\}$$
$$= \left\{ 3 + t(1+i) + y(i-1) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

und

$$A_- = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) > 0 \right\}$$
$$= \left\{ 3 + t(1+i) + y(i-1) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^- \right\}.$$

Es ist also A_+ der Teil der komplexen Ebene, der über A_0 liegt, und A_- der Teil der komplexen Ebene, der unter A_0 liegt. Zusammengefasst ergibt sich die folgende Skizze.



b)

Es ist $B = \emptyset$, denn für alle $z \in B$ ist

$$i = 3z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2 = 3|z|^2 - 2\Im(z) + 2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (Kleine Stereograpische Projektion)

Wir bemerken zunächst, dass der Ausdruck $(i\lambda + 1)/(i\lambda - 1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, da stets $i\lambda - 1 \neq 0$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch $i\lambda + 1 \neq i\lambda - 1$ (da $1 \neq -1$) und daher $(i\lambda + 1)/(i\lambda - 1) \neq 1$. Schließlich ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1}\right| = \frac{|i\lambda + 1|}{|i\lambda - 1|} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1.$$

Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{1\}, \lambda \mapsto \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1}$$

ist also wohldefiniert.
Da jedes $z \in S^1 \setminus \{1\}$ eine eindeutige Darstellung als $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (0, 2\pi)$ hat, genügt es zum Nachweis der Bijektivität von ψ zu zeigen, dass es für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$ genau ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\arg \psi(z) = \varphi$ gibt. (Wir fassen arg hier als eine Abbildung $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$ auf.)
Hierfür bemerken wir, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\arg(i\lambda + 1) = \arctan \lambda$$

sowie

$$\arg(i\lambda - 1) = \arg(-i\lambda + 1) - \pi = 2\pi - \arctan(\lambda) - \pi = \pi - \arctan \lambda.$$

Es ist also für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\arg \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} = 2\pi - (\arctan \lambda - (\pi - \arctan \lambda)) = \pi - 2 \arctan \lambda.$$

Da $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ bijektiv ist zeigt dies nach der obigen Überlegung die Bijektivität von ψ.

Aufgabe 5 (Verschärfte Dreiecksungleichng)

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zunächst beliebig aber fest, wobei $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Wir zeigen zunächst, dass $|z + w| \leq |z| + |w|$. Da $|z + w|, |z| + |w| \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
&|z + w| \leq |z| + |w| \\
\Leftrightarrow\ &|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \\
\Leftrightarrow\ &(x + u)^2 + (y + v)^2 \leq (x^2 + y^2) + 2|zw| + (u^2 + v^2) \\
\Leftrightarrow\ &xu + yv \leq |zw|. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ist $xu + yv < 0 \leq |zw|$ so zeigt dies die Ungleichung. Ist hingegen $xu + yv \geq 0$ so ergibt sich durch weiteres Umformen, dass

$$\begin{aligned}
&xu + yv \leq |zw| \\
\Leftrightarrow\ &(xu + yv)^2 \leq |zw|^2 = |z|^2|w|^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \\
\Leftrightarrow\ &2xuyv \leq x^2v^2 + y^2u^2 \\
\Leftrightarrow\ &0 \leq (xv - yu)^2, \qquad (2)
\end{aligned}$$

was offenbar gilt. Dies zeigt die gewünschte Ungleichung. (Der aufmerksame Leser merkt zusätzlich, dass bereits (1) aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erfüllt ist.)
Wir behaupten nun, dass die Gleichheit $|z + w| = |z| + |w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$ genau dann gilt, wenn $z = 0$ oder $w = 0$ oder es ein $\lambda > 0$ gibt mit $w = \lambda z$. Dass die Gleichheit in diesen Fällen gilt ist klar (im letzten der drei Fälle gilt

$$|z + w| = |(1 + \lambda)z| = (1 + \lambda)|z| = |z| + \lambda|z| = |z| + |\lambda z| = |z| + |w|).$$

Ist hingegen $|z+w| = |z| + |w|$, so ergibt sich, indem man die obige Herleitung mit Gleichheit statt der Abschätzung $\leq$ wiederholt, aus (2), dass

$$0 = (xv - yu)^2 \Rightarrow 0 = xv - yu = \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass $(x, y), (v, u) \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig sind, es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $(u, v) = \lambda(x, y)$. Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$0 \leq |zw| = xu + yv = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2,$$

also im Falle $(x, y), (u, v) \neq 0$ (und damit insbesondere $\|(x, y)\|^2 > 0$) $\lambda > 0$ sein muss.
Die umgekehrte Dreiecksungleichung ergibt sich daraus, dass nach der bereits gezeigten Ungleichung für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$|z| = |w + z - w| \leq |w| + |z - w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z - w| \text{ und}$$
$$|w| = |z + w - z| \leq |z| + |w - z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|,$$

also

$$||z| - |w|| = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \leq |z - w|.$$

Die auf dem Aufgabenblatt angegebene Form ergibt sich nun durch

$$||z| - |w| = ||z| - | - w|| \leq |z - (-w)| = |z + w|$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
Wir behaupten, dass die Gleichheit $||z| - |w|| = |z + w|$ genau dann gilt, wenn $z = 0$ oder $w = 0$ oder $w = -\lambda z$ für ein $\lambda > 0$. Ist $z = 0$ oder $w = 0$ so ist die Gleichheit offenbar erfüllt, und ist $w = -\lambda z$ für ein $\lambda > 0$, so ist

$$\begin{aligned} |z + w| = |(1 - \lambda)z| = |1 - \lambda||z| &= \begin{cases} (1 - \lambda)|z| & \text{falls } \lambda \leq 1 \\ (\lambda - 1)|z| & \text{falls } \lambda > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} |z| - |w| & \text{falls } \lambda \leq 1 \\ |w| - |z| & \text{falls } \lambda > 1 \end{cases} = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \\ &= ||z| - |w||. \end{aligned}$$

Man bemerke hierfür, dass $|z| \geq \lambda|z| = |w|$ für $\lambda \leq 1$ und $|z| \leq \lambda|z| = |w|$ für $\lambda > 1$.
Ist andererseits $||z| - |w|| = |z + w|$ mit $z, w \neq 0$, so können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass $|z| \geq |w|$ und erhalten so, dass

$$|z| - |w| = |z + w| \Rightarrow |z| = |z + w| + |w| = |z + w| + | - w|.$$

Es ist nach der obigen Diskussion also $z + w = 0$ (also $w = -z$) oder $-w = 0$ (was im Widerspruch zu $w \neq 0$ steht) oder $z + w = -\lambda w$ und damit $w = -\frac{1}{1+\lambda} z$ für ein $\lambda > 0$.