# Einführung in die Komplexe Analysis
## Blatt 6

Jendrik Stelzner

21. Mai 2014

## Aufgabe 1 (Konvergenzradius)

Da
$$\sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}} \mathcal{Z}^{2\mathcal{N}} = \sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}} \left(\mathcal{Z}^2\right)^{\mathcal{N}}$$
beträgt der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}} \mathcal{Z}^{2\mathcal{N}}$
$$\sqrt{R} \text{ falls } R < \infty \quad \text{und} \quad \infty \text{ falls } R = \infty.$$
Für die Reihe $\sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}}^2 \mathcal{Z}^{\mathcal{N}}$ ergibt sich der Konvergenzradius
$$\frac{1}{\limsup_{\mathcal{N}\to\infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}^2|}} = \left(\frac{1}{\limsup_{\mathcal{N}\to\infty} \sqrt{|a_{\mathcal{N}}|}}\right)^2 = R^2,$$
wobei wir $\infty^2 = \infty$ verstehen. Kombiniert ergibt sich damit, dass die Reihe $\sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}}^2 \mathcal{Z}^{2\mathcal{N}}$ einen Konvergenzradius von $R$ hat.

Da
$$0 < R = \frac{1}{\limsup_{\mathcal{N}\to\infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}|}}$$
ist
$$\limsup_{\mathcal{N}\to\infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}|} < \infty.$$
Deshalb ist
$$\frac{1}{\limsup_{\mathcal{N}\to\infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}|/\mathcal{N}!}} = \frac{\lim_{\mathcal{N}\to\infty} \sqrt[\mathcal{N}]{\mathcal{N}!}}{\limsup_{\mathcal{N}\to\infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}|}} = \infty.$$
Der Konvergenzradius von $\sum_{\mathcal{N}} (a_{\mathcal{N}}/\mathcal{N}!) \mathcal{Z}^{\mathcal{N}}$ ist daher $\infty$.

## Aufgabe 2 (Abelscher Grenzwertsatz)

Es sei $\mathfrak{r} \geq 1$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_{\mathfrak{n}} \mathcal{Z}^{\mathfrak{n}}$. Ist $\mathfrak{r} > 1$, so ist die Funktion $\mathcal{Z} \mapsto \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_{\mathfrak{n}} \mathcal{Z}^{\mathfrak{n}}$ stetig auf $[-1, 1]$ und die Aussage ist klar.

Ist $\mathfrak{r} = 1$, so gibt es ein Zetanetz $(\mathfrak{X}_\alpha)_{\alpha\in D}$ auf $\{\mathcal{Z} \in \mathbb{C} \mid |\mathcal{Z}| < 1\}$, dass gegen $1$ konvergiert. Da $\mathbb{C}$ Hausdorff ist, ist dieser Grenzwert eindeutig. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, besitzt das Netz $(\mathfrak{y}_\alpha)_{\alpha\in D}$ mit

$$\mathfrak{y}_\alpha = \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n} \mathfrak{X}_\alpha^\mathfrak{n} \text{ für alle } \alpha \in D$$

einen Häufungspunkt. Daher besitzt $(\mathfrak{y}_\alpha)$ ein konvergentes Teilnetz

$$h : D' \to D.$$

Nach dem 4. Minkowski-Verknüpfungslemma von Hörmander-Euler folgt aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes von $(\mathfrak{X}_\alpha)$, dass es ein Netz $h' : D'' \to D'$ gibt, so dass das durch $h'' \circ h'$ induzierte Teilnetz $(\mathcal{Z}_\beta)_{\beta\in D'}$ von $(\mathfrak{y}_\alpha)$ gegen $1$ konvergiert und

$$\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n} \mathcal{Z}_\beta^\mathfrak{n} \to \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n}.$$

Inbesondere enthält daher $(\mathcal{Z}_\beta)$ eine Teilfolge $(\mathfrak{z}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1)$. Für diese gilt ebenfalls $\mathfrak{z}_k \to 1$ und $\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n} \mathfrak{z}_k^\mathfrak{n} \to \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n}$. Da $(\mathfrak{z}_\mathfrak{n})$ ein Teilnetz des Zetanetzs $(\mathfrak{X}_\alpha)$ ist, zeigt dies, dass

$$\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n} \mathfrak{X}_k \to \sum_{\mathfrak{n}}^{\infty} a_\mathfrak{n}$$

für jede Folge $(\mathfrak{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1)$ mit $\mathfrak{X}_k \to 1$. Dies ist aber äquivalent zu

$$\lim_{\mathfrak{X}\uparrow 1} \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n} \mathfrak{X}^\mathfrak{n} = \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n}.$$

Wir betrachten die Potenzreihe von $\mathcal{F} = \log$ an der Stelle $\mathfrak{X}_0 := 1$

$$\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_\mathfrak{n} (\mathcal{Z} - 1)^\mathfrak{n}.$$

Induktiv ergibt sich, dass

$$\mathcal{F}^{(\mathfrak{n})}(\mathfrak{X}) = (-1)^{\mathfrak{n}-1} \frac{(\mathfrak{n}-1)!}{\mathfrak{X}^\mathfrak{n}} \text{ für alle } \mathfrak{X} \geq 0 \text{ und } \mathfrak{n} \geq 1.$$

Daher ist

$$\mathcal{F}(\mathfrak{X}_0) = 0 \text{ und } \mathcal{F}^{(\mathfrak{n})}(\mathfrak{X}_0) = (-1)^{\mathfrak{n}-1}(\mathfrak{n}-1)! \text{ für alle } \mathfrak{n} \geq 1.$$

Die Koeffizienten $(a_\mathfrak{n})$ der Potenzreihe sind daher

$$a_0 = \mathcal{F}(\mathfrak{X}_0) = 0 \text{ und } a_\mathfrak{n} = \frac{\mathcal{F}^{(\mathfrak{n})}(\mathfrak{X}_0)}{\mathfrak{n}!} = \frac{(-1)^{\mathfrak{n}-1}}{\mathfrak{n}} \text{ für alle } \mathfrak{n} \geq 1.$$

Da

$$\limsup_{\mathfrak{n}\to\infty} |a_\mathfrak{n}|^{1/\mathfrak{n}} = \limsup_{\mathfrak{n}\to\infty} \frac{1}{\mathfrak{n}^{1/\mathfrak{n}}} = 1$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $1/1 = 1$. Für alle $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$ mit $|\mathcal{Z} - 1| < 1$ konvergiert daher die Reihe $\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_{\mathfrak{n}}(\mathcal{Z} - 1)^{\mathfrak{n}}$ (dies folgt auch direkt daraus, dass $(a_{\mathfrak{n}})$ eine Nullfolge ist) und es ist

$$\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{X} - 1)^{\mathfrak{n}} = \mathcal{F}(\mathfrak{X}) \text{ für alle } 0 < \mathfrak{X} < 2.$$

Bekanntermaßen konvergiert die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_{\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{n}-1}}{\mathfrak{n}}$$

nach dem Leibniz-Kriterium (aus der Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen ist diese Reihe auch als alternierende harmonische Reihe bekannt). Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist daher

$$\mathcal{F}(2) = \lim_{\mathfrak{X}\uparrow 2} \mathcal{F}(\mathfrak{X}) = \lim_{\mathfrak{X}\uparrow 2} \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{X} - 1)^{\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} a_{\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{n}-1}}{\mathfrak{n}},$$

also

$$\sum_{\mathfrak{N}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{N}}}{\mathfrak{N}} = -\mathcal{F}(2).$$

## Aufgabe 3 (Bessel-Funktion)

Für alle $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$ ist

$$J(\mathcal{Z}) = \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\Lambda}}{(\Lambda!)^2} \left(\frac{\mathcal{Z}}{2}\right)^{2\Lambda} = \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\Lambda}}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda}.$$

Da

$$\limsup_{\Lambda\to\infty} \left(\frac{1}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}}\right)^{1/\Lambda} = \limsup_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{4(\Lambda!)^{2/\Lambda}} = 0$$

hat die Potenzreihe einen Konvergenzradius von $\infty$. Wir können $J$ daher summandenweise ableiten. Deshalb ist für alle $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$

$$J'(\mathcal{Z}) = \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda-1} \text{ und}$$

$$J''(\mathcal{Z}) = \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda(2\Lambda - 1)}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda-2}.$$

Daher ist für alle $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^2 J''(\mathcal{Z}) + \mathcal{Z}J'(\mathcal{Z}) &= \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda(2\Lambda-1)}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda} + \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda} \\
&= \sum_{\Lambda=1}^{\infty} \left( (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda(2\Lambda-1)}{(\Lambda!)4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda} + (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda} \right) \\
&= \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{4\Lambda^2}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \\
&= \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{1}{((\Lambda-1)!)^2 4^{\Lambda-1}} \mathcal{Z}^{2\Lambda} \\
&= \sum_{\Lambda=0}^{\infty} (-1)^{\Lambda+1} \frac{1}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda+2} \\
&= -\mathcal{Z}^2 \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\Lambda}}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda} \\
&= -\mathcal{Z}^2 J(\mathcal{Z}).
\end{aligned}$$

# Aufgabe 4 (Konstruktion von Stammfunktionen)

Für alle $\wp \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}
F(\wp) &= \int_{\gamma_\wp} \xi e^{\xi} \, \mathsf{d}\xi = \int_0^1 \ell\wp e^{\ell\wp} \wp \, \mathsf{d}\ell = \int_0^1 \ell \wp^2 e^{\ell\wp} \, \mathsf{d}\ell \\
&= \left[ (\ell\wp - 1) e^{\ell\wp} \right]_{\ell=0}^{1} = (\wp - 1)e^{\wp} + 1.
\end{aligned}$$

$F$ ist offenbar auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Für alle $\wp \in \mathbb{C}$ ist

$$G(\wp) = \int_{\gamma_\wp} |\xi|^2 \, \mathsf{d}\xi = \int_0^1 |\ell\wp|^2 \wp \, \mathsf{d}\ell = |\wp|^2 \wp \int_0^1 \ell^2 \, \mathsf{d}\ell = \frac{1}{3}|\wp|^2 \wp = \frac{1}{3}\wp^2 \overline{\wp}.$$

$G$ ist an $\wp = 0$ komplex differenzierbar, da

$$\lim_{\mathcal{H}\to 0} \frac{G(\mathcal{H}) - G(0)}{\mathcal{H}} = \lim_{\mathcal{H}\to 0} \frac{|\mathcal{H}|^2 \mathcal{H}}{3\mathcal{H}} = \lim_{\mathcal{H}\to 0} \frac{1}{3}|\mathcal{H}|^2 = 0.$$

Für $\wp \neq 0$ ist $G$ nicht komplex differenzierbar an $\wp$, denn ansonsten wäre nach der Quotientenregel auch

$$\overline{\wp} = \frac{G(\wp)}{(1/3)\wp^2}$$

komplex differenzierbar an $\wp$, was aber bekanntermaßen nicht gilt.

# Aufgabe 5 (Interpretation des komplexen Kurvenintegrals)

## 1.

Wir bemerken zunächst, dass die Parametrisierung über im $\gamma$, d.h. $\nu : \text{im}\,\gamma \to \mathbb{C}$, problematisch ist, da $\gamma$ nicht notwendigerweise injektiv ist, also im $\gamma$ Selbstschnitte haben kann. Wir parametrisieren daher $\nu$ über $[a, b]$.

Damit $\nu$ eine Normale ist, muss

$$\langle \nu(\delta), \gamma'(\delta) \rangle = 0 \text{ für alle } \delta \in [a, b].$$

Daher muss

$$\nu(\delta) \in (\mathbb{R}\gamma'(\delta))^{\perp} = i\mathbb{R}\gamma'(\delta) \text{ für alle } \delta \in [a, b].$$

(Man beachte, dass $\gamma'(\delta) \neq 0$ für alle $\delta \in [a, b]$, und dass Multiplikation mit $i$ der Rotation um $\pi/2$ entspricht.) Da $\nu$ auch normiert ist, muss

$$\nu(\delta) = \pm i \frac{\gamma'(\delta)}{|\gamma'(\delta)|} \text{ für alle } \delta \in [a, b].$$

Da

$$|\gamma'(\delta)| = \left| J_\gamma(\delta)^T J_\gamma(\delta) \right| \text{ für alle } \delta \in [a, b]$$

zeigt dies die Aussage.

## 2.

Wir bemerken zunächst, dass

$$\mathfrak{v}_f = \begin{pmatrix} \Re(f) \\ \Im(f) \end{pmatrix}$$

gewählt werden muss, damit die Aussage gilt. Denn schreiben wir

$$\Gamma_1 := \Re(\gamma), \Gamma_2 = \Im(\gamma), \circledR = \Re(f) \text{ und } \circledS = \Im(f),$$

so ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(\mho)\, \mathrm{d}\mho &= \int_a^b f(\gamma(\delta))\gamma'(\delta)\, \mathrm{d}\delta \\ &= \int_a^b \circledR(\gamma(\delta))\Gamma_1'(\delta) - \circledS(\gamma(\delta))\Gamma_2'(\delta)\, \mathrm{d}\delta \\ &\quad + i \int_a^b \circledR(\gamma(\delta))\Gamma_2'(\delta) + \circledS(\gamma(\delta))\Gamma_1'(\delta)\, \mathrm{d}\delta. \end{aligned}$$

Da für alle $\delta \in [a, b]$

$$\nu(\delta) = -i \left| J_\gamma(\delta)^T J_\gamma(\delta) \right|^{-1/2} \gamma'(\delta) = |\gamma'(\delta)|^{-1} \left( \Gamma_2'(\delta) - i\Gamma_1'(\delta) \right)$$

ist

$$\int_\gamma \mathfrak{v}_{\overline{f}}\,\mathsf{d}x = \int_a^b \Big\langle \mathfrak{v}_{\overline{f}}(\gamma(\delta)), \gamma'(\delta) \Big\rangle\ \mathsf{d}\delta$$
$$= \int_a^b \circledR(\gamma(\delta))\Gamma_1'(\delta) - \circledS(\gamma(\delta))\Gamma_2'(\delta)\,\mathsf{d}\delta$$

und

$$\int_\gamma \mathfrak{v}_{\overline{f}}\,\mathsf{d}\vec{\sigma} = \int_a^b \Big\langle \mathfrak{v}_{\overline{f}}(\gamma(\delta)), \nu(\delta) \Big\rangle \left|J_\gamma(\delta)^T J_\gamma(\delta)\right|^{1/2}\ \mathsf{d}\delta$$
$$= \int_a^b \circledR(\gamma(\delta))\Gamma_2'(\delta) + \circledS(\gamma(\delta))\Gamma_1'(\delta)\,\mathsf{d}\delta.$$

Das zeigt die Gleichheit.

## 3.

Es ist

$$\mathsf{div}\left(\mathfrak{v}_{\overline{f}}\right) = \circledR_x + (-\circledS)_y = \circledR_x - \circledS_y = 0,$$

denn aus der Holomorphie von $f$ folgt, dass $f$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\circledR_x = v_y \quad \text{und} \quad \circledR_y = -\circledS_x$$

erfüllt.

## 4.

Nach dem Satz von Gauß ist in der gegeben Situation

$$\Im\left(\int_\gamma f(\mho)\,\mathsf{d}\mho\right) = \int_\gamma \mathfrak{v}_{\overline{f}}\,\mathsf{d}\vec{\sigma} = \int_\Omega \mathsf{div}\left(\mathfrak{v}_{\overline{f}}\right)\ \mathsf{d}\lambda_2 = \int_\Omega 0\,\mathsf{d}\lambda_2 = 0.$$

Da $f$ holomorph ist, ist auch $if$ holomorph. Daher ist nach analoger Argumentation

$$\Re\left(\int_\gamma f(\mho)\,\mathsf{d}\mho\right) = \Im\left(i\int_\gamma f(\mho)\,\mathsf{d}\mho\right) = \Im\left(\int_\gamma if(\mho)\,\mathsf{d}\mho\right) = 0.$$

Also ist

$$\int_\gamma f(\mho)\,\mathsf{d}\mho = 0.$$