Einführung in die Komplexe Analysis

Blatt 8

Jendrik Stelzner

2. Juni 2014

Aufgabe 1

1.

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \Re\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \Re\left(r^n e^{2\pi i n t}\right) 2\pi i r e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \Re\left(e^{2\pi i n t}\right) e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \cos(2\pi n t) e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(2\pi n t) e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{2\pi i n t} + e^{-2\pi i n t}\right) e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2\pi i(1+n)t} + e^{2\pi i(1-n)t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\int_\gamma \Re\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \pi i r^2 & \text{falls } n = 1, \\ \pi i & \text{falls } n = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \Im\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \sin(2\pi n t) e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t \\
&= \pi r^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i(1+n)t} - e^{2\pi i(1-n)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} -\pi r^2 & \text{falls } n = 1, \\ \pi & \text{falls } n = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

2.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}^n \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \overline{re^{2\pi it}}^n 2\pi i r e^{2\pi it} \,\mathrm{d}t = 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i(1-n)t} \,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 2\pi i r^2 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

3.

Wir zeigen nur eine schwächere Aussage: Es sei $r > 0$ so klein, so dass $B_r(z_0) \subseteq U$ und sich f auf $B_r(z_0)$ als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$$

darstellen lässt. Dann ist auch

$$f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (z - z_0)^{n-1} \text{ für alle } z \in B_r(z_0),$$

und insbesondere $f'(z_0) = a_1$. Definieren wir für $0 < \rho < r$

$$\gamma_\rho : [0,1] \to U \text{ als } \gamma(t) := z_0 + \rho e^{2\pi it} \text{ für alle } t \in [0,1],$$

so ist

$$\begin{aligned}\oint_{|z-z_0|=\rho} \overline{f(z)} \,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\rho} \overline{f(z)} \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \overline{f(\gamma(t))} \gamma'(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \overline{f(z_0 + \rho e^{2\pi it})} \cdot 2\pi i \rho e^{2\pi it} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \overline{\sum_{n=0}^\infty a_n \left(\rho e^{2\pi it}\right)^n} \cdot 2\pi i \rho e^{2\pi it} \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^\infty \overline{a_n} \int_0^1 \overline{\rho e^{2\pi it}}^n \cdot 2\pi i \rho e^{2\pi it} \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^\infty \overline{a_n} \int_{\gamma_\rho} \overline{z}^n \,\mathrm{d}z = \overline{a_1} \cdot 2\pi i \rho^2 = 2\pi i \rho^2 \overline{f'(z_0)}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir genutzt, dass die Potenzreihe auf $\overline{B_\rho(z_0)}$ gleichmäßig konvergiert, und Summe und Integral deshalb vertauscht werden dürfen. Die Werte der einzelnen Wegintegrale ergeben sich aus dem vorherigen Aufgabenteil.

Aufgabe 3

Da $[a,b]$ kompakt ist, und $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig ist, existiert das Maximum

$$M := \max_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))|,$$

und es gilt

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\le M\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = ML(\gamma).$$

Aufgabe 4

Wir fixieren zunächst einen Basispunkt $a \in U$. Wegen der Konvexität von U existieren für jedes $z \in \mathbb{C}$ der Weg

$$\gamma_z : [0,1] \to U \text{ mit } \gamma_z(t) := a + t(z-a) \text{ für alle } t \in [0,1].$$

Wir definieren $F : U \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z \text{ für alle } z \in U,$$

und behaupten, dass F auf U eine Stammfunktion von f ist.

Sei $z_0 \in U$ beliebig aber fest. Wir zeigen, dass F an z_0 komplex differenzierbar ist mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Hierfür definieren wir für alle $z \in \mathbb{C}$ den Weg

$$\Gamma_z : [0,1] \to U \text{ mit } \Gamma_z(t) := z_0 + t(z-z_0) \text{ für alle } t \in [0,1],$$

der wegen der Konvexität von U wohldefiniert ist. Für alle $z \in U$ ist dann

$$0 = \int_{\gamma_{z_0}+\Gamma_z-\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{z_0}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))(z-z_0)\,\mathrm{d}t,$$

also

$$F(z) = F(z_0) + (z-z_0)\Delta(z),$$

wobei $\Delta : U \to \mathbb{C}$ als

$$\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))\,\mathrm{d}t \text{ für alle } z \in U$$

definiert ist.

Es ist klar, dass $\Delta(z_0) = f(z_0)$. Δ ist stetig an z_0, denn f ist stetig, und für alle $z \in U$ ist

$$|\Delta(z) - \Delta(z_0)| = \left|\int_0^1 f(z_0+t(z-z_0)) - f(z_0)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\le \max_{0\le t\le 1} |f(z_0+t(z-z_0)) - f(z_0)|.$$

Zusammen zeigt dies, dass F an z_0 komplex differenzierbar ist mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Aus der Beliebigkeit von $z_0 \in U$ folgt, dass F auf U holomorph ist mit $F' = f$. Also besitzt f auf U eine Stammfunktion.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer, offen und konvex. Für $z_1, z_2 \in U$ mit $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ und den Weg

$$\gamma : [0,1] \to U, z_1 + t(z_2 - z_1)$$

ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \Re(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \Re(z_1 + t(z_2 - z_1))(z_2 - z_1)\,\mathrm{d}t \\ &= (z_2 - z_1)\int_0^1 x_1 + t(x_2 - x_1)\,\mathrm{d}t \\ &= (z_2 - z_1)\left(x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}\right) \\ &= (z_2 - z_1)\frac{x_1 + x_2}{2}.\end{aligned}$$

Seien $x + iy, x' + iy' \in U$ mit $x \neq x'$ und $y \neq y'$, so dass $x' + iy \in U$ (es ist klar, dass solche Punkte existieren). Für das von $x + iy, x' + iy'$ und $x + iy'$ aufgespannte Dreieck Δ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= (x' - x + i(y' - y))\frac{x + x'}{2} + (x - x')\frac{x + x'}{2} + i(y - y')\frac{x + x}{2} \\ &= i(y' - y)\frac{x + x'}{2} - i(y' - y)x = \frac{i}{2}(y' - y)(x' - x) \neq 0.\end{aligned}$$

Deshalb kann $\Re$ auf U kein Stammfunktion besitzen. Da jede nichtleere offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtleere, offene, konvexe Teilmenge besitzt, besitzt $\Re$ auf keiner nichtleeren offenen Mengen eine Stammfunktion. Daher besitzt auch $\Im$ auf keiner nichtleeren offenen Menge eine Stammfunktion, da wegen $\Re(z) = \Im(-iz)$ sonst auch $\Re$ dort eine Stammfunktion besäße.