Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 1

Jendrik Stelzner

12. April 2014

Aufgabe 1 (Real und Imaginärteil)

Es ist
$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i(1+i)} = \frac{1}{i} = -i,$$
und
$$\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$
Da $i^2 = -1$ (also insbesondere $i^4 = 1$) ist für alle $n \in \mathbb{Z}$
$$i^n = i^{(n \bmod 4)} \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0 \mod 4, \\ i & \text{falls } n \equiv 1 \mod 4, \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2 \mod 4, \\ -i & \text{falls } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$
Schließlich ist
$$\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n = \Re\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n + i\Im\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n$$
und
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k &= \sum_{k=1}^{7} e^{ik\pi/4} = \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=4}^{7} e^{ik\pi/4} \\ &= \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=0}^{3} e^{ik\pi/4+i\pi} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=1}^{3} -e^{ik\pi/4} \\ &= -1.\end{aligned}$$
Die entsprechenden Real- und Imaginärteile ergeben sich durch direktes Ablesen.

Aufgabe 2 (Betrag und Argument)

Es ist

$$|1+3i| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10} \text{ und } \arg(1+3i) = \arctan 3.$$

Wegen der 2π-Periodizität der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ ist

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)^9 - (1-i)^9 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^9 - \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^9 \\ &= 2^{9/2}(e^{i\pi/4} - e^{i\pi/4}) = 16((1+i) - (1-i)) \\ &= 32i, \end{aligned}$$

also

$$|z_1| = 32 \text{ und } \arg z_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Da $i^2 = -1$ und $i^4 = 1$ ist $z_2 = i^{2014} = -1$, also

$$|z_2| = 1 \text{ und } \arg z_2 = \pi.$$

Für $z_3 = \frac{1+ia}{1-ia}$ ist

$$|z_3| = \frac{|1+ia|}{|1-ia|} = \frac{|1+ia|}{|\overline{1+ia}|} = 1,$$

und da

$$\arg(1+ia) = \arctan a \text{ und } \arg(1-ia) = \arctan -a = -\arctan a.$$

ist

$$\arg z_3 = \arg(1+ia) - \arg(1-ia) = 2\arctan a.$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und

$$z_n = (i-1)^n = \left(\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{in3\pi/4}$$

ist $|z_n| = \sqrt{2}^n$ und $n\frac{3}{4}\pi$ ein Argument von z_n.

Aufgabe 3 (Bestimmte Teilmengen)

1.

Da $\Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und für alle $t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$

$$\frac{z-3}{1+i} = t \Leftrightarrow z = 3 + t(1+i)$$

ist

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) = 0\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{z-3}{1+i} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{3 + t(1+i) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Es handelt sich bei A_0 also um eine Gerade.

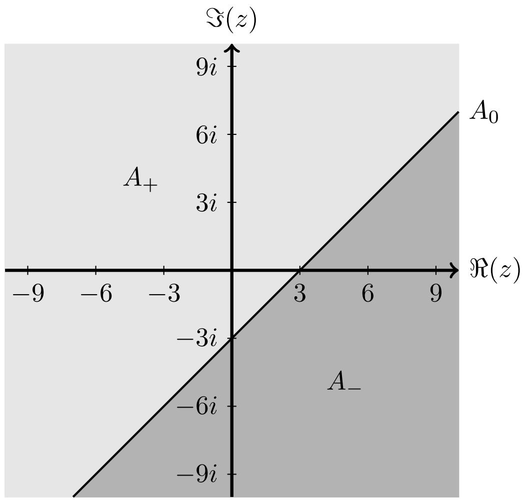
Analog ergibt sich nun auch, dass

$$\begin{aligned} A_+ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) > 0 \right\} \\ &= \left\{ 3 + t(1+i) + y(i-1) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_- &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) > 0 \right\} \\ &= \left\{ 3 + t(1+i) + y(i-1) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^- \right\}. \end{aligned}$$

Es ist also A_+ der Teil der komplexen Ebene, der über A_0 liegt, und A_- der Teil der komplexen Ebene, der unter A_0 liegt. Zusammengefasst ergibt sich die folgende Skizze.



2.

Es ist $B = \emptyset$, denn für alle $z \in B$ ist

$$i = 3z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2 = 3|z|^2 - 2\Im(z) + 2 \in \mathbb{R}.$$

3.

Es ist

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \left| z + \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{4} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| z^2 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Es ist also C das Urbild des Kreises mit Radius $1/2$ um den Mittelpunkt $1/2$ unter der Abbildung $z \mapsto z^2$.
Um dieses Urbild zu skizzieren betrachten wir daher zunächst das Urbild eines einzelnen Punktes $z = re^{i\varphi}, r \geq 0$, welcher im oberen Qudranten der komplexen Ebene liegt (d.h. $\Im(z), \Re(z) \geq 0$). Da dieses gerade aus den beiden Punkten $\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ und

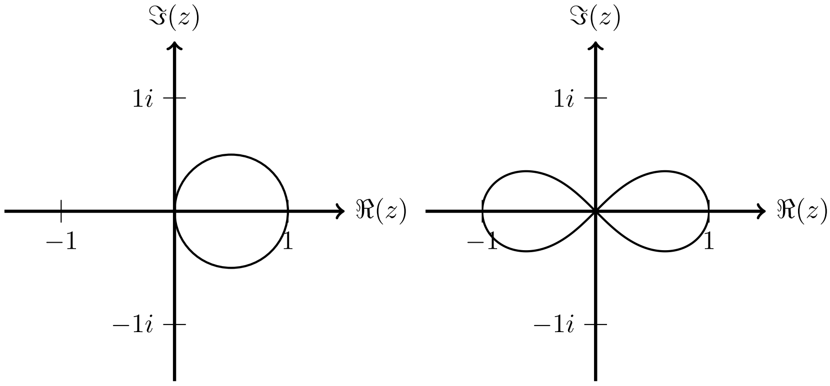


Abbildung 1: Der Kreis (links) und sein Urbild (rechts).

$-\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ besteht, ergibt sich für den gesamten Kreis das Urbild wie in der obigen Abbildung.
(Man beachte etwa, dass die imaginäre Achse als Tangente des Kreises der Winkelhalbierende, bzw. deren konjugiertes, als Tangente von C entspricht.)

Aufgabe 4 (Kleine Stereograpische Projektion)

Wir bemerken zunächst, dass der Ausdruck $(i\lambda + 1)/(i\lambda - 1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, da stets $i\lambda - 1 \neq 0$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch $i\lambda + 1 \neq i\lambda - 1$ (da $1 \neq -1$) und daher $(i\lambda + 1)/(i\lambda - 1) \neq 1$. Schließlich ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1}\right| = \frac{|i\lambda + 1|}{|i\lambda - 1|} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1.$$

Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{1\}, \lambda \mapsto \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1}$$

ist also wohldefiniert.
Da jedes $z \in S^1 \setminus \{1\}$ eine eindeutige Darstellung als $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (0, 2\pi)$ hat, genügt es zum Nachweis der Bijektivität von ψ zu zeigen, dass es für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$ genau ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\arg \psi(z) = \varphi$ gibt. (Wir fassen arg hier als eine Abbildung $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$ auf.)
Hierfür bemerken wir, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\arg(i\lambda + 1) = \arctan \lambda$$

sowie

$$\arg(i\lambda - 1) = \arg(-i\lambda + 1) - \pi = 2\pi - \arctan(\lambda) - \pi = \pi - \arctan \lambda.$$

Es ist also für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\arg \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} = 2\pi - (\arctan \lambda - (\pi - \arctan \lambda)) = \pi - 2 \arctan \lambda.$$

Da $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ bijektiv ist zeigt dies nach der obigen Überlegung die Bijektivität von ψ.

Aufgabe 5 (Verschärfte Dreiecksungleichng)

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zunächst beliebig aber fest, wobei $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Wir zeigen zunächst, dass $|z+w| \leq |z| + |w|$. Da $|z+w|, |z|+|w| \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} & |z+w| \leq |z| + |w| \\ \Leftrightarrow\, & |z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2 \\ \Leftrightarrow\, & (x+u)^2 + (y+v)^2 \leq (x^2+y^2) + 2|zw| + (u^2+v^2) \\ \Leftrightarrow\, & xu + yv \leq |zw|. \end{aligned} \tag{1}$$

Ist $xu + yv < 0 \leq |zw|$ so zeigt dies die Ungleichung. Ist hingegen $xu + yv \geq 0$ so ergibt sich durch weiteres Umformen, dass

$$\begin{aligned} & xu + yv \leq |zw| \\ \Leftrightarrow\, & (xu+yv)^2 \leq |zw|^2 = |z|^2|w|^2 = (x^2+y^2)(u^2+v^2) \\ \Leftrightarrow\, & 2xuyv \leq x^2v^2 + y^2u^2 \\ \Leftrightarrow\, & 0 \leq (xv-yu)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

was offenbar gilt. Dies zeigt die gewünschte Ungleichung. (Der aufmerksame Leser merkt zusätzlich, dass bereits (1) aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erfüllt ist.)

Wir behaupten nun, dass die Gleichheit $|z+w| = |z| + |w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$ genau dann gilt, wenn $z = 0$ oder $w = 0$ oder es ein $\lambda > 0$ gibt mit $w = \lambda z$. Dass die Gleichheit in diesen Fällen gilt ist klar (im letzten der drei Fälle gilt

$$|z+w| = |(1+\lambda)z| = (1+\lambda)|z| = |z| + \lambda|z| = |z| + |\lambda z| = |z| + |w|).$$

Ist hingegen $|z+w| = |z| + |w|$, so ergibt sich, indem man die obige Herleitung mit Gleichheit statt der Abschätzung $\leq$ wiederholt, aus (2), dass

$$0 = (xv - yu)^2 \Rightarrow 0 = xv - yu = \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass $(x, y), (v, u) \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig sind, es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $(u, v) = \lambda(x, y)$. Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$0 \leq |zw| = xu + yv = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2,$$

also im Falle $(x, y), (u, v) \neq 0$ (und damit insbesondere $\|(x, y)\|^2 > 0$) $\lambda > 0$ sein muss.

Die umgekehrte Dreiecksungleichung ergibt sich daraus, dass nach der bereits gezeigten Ungleichung für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{gathered} |z| = |w + z - w| \leq |w| + |z - w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z - w| \text{ und} \\ |w| = |z + w - z| \leq |z| + |w - z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|, \end{gathered}$$

also

$$||z| - |w|| = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \leq |z - w|.$$

Die auf dem Aufgabenblatt angegebene Form ergibt sich nun durch

$$||z| - |w| = ||z| - |-w|| \leq |z - (-w)| = |z + w|$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
Wir behaupten, dass die Gleichheit $||z| - |w|| = |z + w|$ genau dann gilt, wenn $z = 0$ oder $w = 0$ oder $w = -\lambda z$ für ein $\lambda > 0$. Ist $z = 0$ oder $w = 0$ so ist die Gleichheit offenbar erfüllt, und ist $w = -\lambda z$ für ein $\lambda > 0$, so ist

$$\begin{aligned}|z + w| = |(1 - \lambda)z| = |1 - \lambda||z| &= \begin{cases}(1-\lambda)|z| & \text{falls } \lambda \leq 1\\ (\lambda - 1)|z| & \text{falls } \lambda > 1\end{cases}\\ &= \begin{cases}|z| - |w| & \text{falls } \lambda \leq 1\\ |w| - |z| & \text{falls } \lambda > 1\end{cases} = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\}\\ &= ||z| - |w||.\end{aligned}$$

Man bemerke hierfür, dass $|z| \geq \lambda|z| = |w|$ für $\lambda \leq 1$ und $|z| \leq \lambda|z| = |w|$ für $\lambda > 1$.
Ist andererseits $||z| - |w|| = |z + w|$ mit $z, w \neq 0$, so können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass $|z| \geq |w|$ und erhalten so, dass

$$|z| - |w| = |z + w| \Rightarrow |z| = |z + w| + |w| = |z + w| + |-w|.$$

Es ist nach der obigen Diskussion also $z + w = 0$ (also $w = -z$) oder $-w = 0$ (was im Widerspruch zu $w \neq 0$ steht) oder $z + w = -\lambda w$ und damit $w = -\frac{1}{1+\lambda}z$ für ein $\lambda > 0$.