

# Einführung in die Komplexe Analysis

## Blatt 9

Jendrik Stelzner

14. Juni 2014

### Aufgabe 1 (Stammgebiete und Stammfunktionen)

1.

$\mathbb{C}$  ist ein konvexes Gebiet. Daher besitzt, wie auf dem letzten Zettel gezeigt, jede ganze Funktion eine Stammfunktion. Also ist  $\mathbb{C}$  ein Stammgebiet.

$\mathbb{C} \setminus \{i\}$  ist kein Stammgebiet, denn

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z-i}$$

ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ , aber da

$$\int_{\partial D_1(i)} f(z) dz = \int_{\partial D_1(i)} \frac{1}{z-i} dz = \int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$$

besitzt  $f$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{i\}$  keine Stammfunktion.

2.

Da  $S_1$  und  $S_2$  offen sind, ist auch  $S_1 \cup S_2$  offen. Es sei  $f : S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.

Da  $S_1$  ein Stammgebiet ist, besitzt  $f|_{S_1} : S_1 \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion  $F_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Da  $S_2$  ein Stammgebiet ist, besitzt  $f|_{S_2} : S_2 \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion  $F_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Da

$$F_1'|_{S_1 \cap S_2} = f|_{S_1 \cap S_2} = F_2'|_{S_1 \cap S_2}$$

und  $S_1 \cap S_2$  zusammenhängend ist, gibt es ein  $c \in \mathbb{C}$  mit

$$F_1(z) = F_2(z) \text{ für alle } z \in S_1 \cap S_2.$$

Es ist daher

$$F : S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} F_1(z) & \text{falls } z \in S_1 \\ F_2(z) + c & \text{falls } z \in S_2 \end{cases}$$

eine Stammfunktion von  $f$  auf  $S_1 \cup S_2$ .

Es besitzt also jede auf  $S_1 \cup S_2$  holomorphe Funktion dort auch eine Stammfunktion. Ist zusätzlich  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ , so ist  $S_1 \cup S_2$  auch zusammenhängend und daher ein Stammgebiet.

Wir betrachten weiter die Gebiete

$$\begin{aligned} R^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}, \\ R^- &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}, \\ I^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \text{ und} \\ I^- &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}. \end{aligned}$$

Diese sind konvex und somit Stammgebiete. Da

$$\begin{aligned} R^+ \cap R^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0 \text{ oder } \Re(z) < 0\} \text{ und} \\ I^+ \cap I^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \text{ oder } \Im(z) < 0\} \end{aligned}$$

nichtleer und zusammenhängend sind, sind  $R^+ \cup I^+$  und  $R^- \cup I^-$  Stammgebiete. Es ist jedoch

$$\begin{aligned} &(R^+ \cup I^+) \cap (R^- \cup I^-) \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0, \Im(z) < 0 \text{ oder } \Re(z) < 0, \Im(z) > 0\} \end{aligned}$$

nicht zusammenhängend und das Gebiet

$$(R^+ \cup I^+) \cup (R^- \cup I^-) = \mathbb{C}^*$$

ist kein Stammgebiet. (Denn die Funktion

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist auf  $\mathbb{C}^*$  holomorph, besitzt wegen

$$\int_{\partial D_1(0)} f(z) dz = \int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

keine Stammfunktion auf  $\mathbb{C}^*$ .)

## Aufgabe 2

**Lemma 1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Es sei  $f_n : |\alpha| \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge stetiger Funktionen, die auf  $|\alpha|$  lokal gleichmäßig gegen  $f : |\alpha| \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Dann ist

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha} f_n(z) dz.$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\alpha$  stetig differenzierbar ist und  $f_n$  auf  $|\alpha|$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Da  $\alpha$  stetig differenzierbar ist, gibt es wegen der Kompaktheit von  $[0, 1]$  ein  $C > 0$  mit  $|\alpha'(t)| < C$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $f_n$  auf  $|\alpha|$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{C} \text{ für alle } n \geq N, z \in |\alpha|.$$

Daher ist

$$|f(\alpha(t))\alpha'(t) - f_n(\alpha(t))\alpha'(t)| \leq \varepsilon \text{ für alle } n \geq N, t \in [0, 1].$$

Das zeigt, dass  $(f_n \circ \alpha)\alpha'$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen  $(f \circ \alpha)\alpha'$  konvergiert. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(z) dz &= \int_0^1 f(\alpha(t))\alpha'(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha(t))\alpha'(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(\alpha(t))\alpha'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha} f_n(z) dz. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Fall, dass  $\alpha$  stetig differenzierbar ist, und  $f_n$  auf  $|\alpha|$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dann gibt es für jeden Punkt  $z \in |\alpha|$  eine offene Umgebung  $U_z \subseteq U$  von  $z$ , so dass  $f_n$  auf  $U_z \cap |\alpha|$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Wegen der Kompaktheit von  $|\alpha|$  hat die offene Überdeckung  $\{U_z \mid z \in |\alpha|\}$  von  $|\alpha|$  eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also  $V_1, \dots, V_n \in \{U_z \mid z \in |\alpha|\}$ , so dass

$$|\alpha| \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n.$$

und  $f_n$  für alle  $k = 1, \dots, n$  auf  $V_k \cap |\alpha|$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Wegen der Endlichkeit dieser Überdeckung konvergiert  $f_n$  auch auf

$$(V_1 \cap |\alpha|) \cup \dots \cup (V_n \cap |\alpha|) = (V_1 \cup \dots \cup V_n) \cap |\alpha| = |\alpha|$$

gleichmäßig gegen  $f$ . Die Aussage ergibt sich daher aus dem vorherigen Fall.

Zuletzt betrachten wir den Fall, dass  $\alpha$  stückweise stetig differenzierbar ist und  $f_n$  auf  $|\alpha|$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dann gibt es stetig differenzierbare Wege  $\beta_1, \dots, \beta_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_m$ . Da  $(f_n)$  auf  $|\alpha|$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, konvergiert  $(f_n)$  für alle  $k = 1, \dots, m$  auch auf  $|\beta_k|$  lokal gleichmäßig gegen  $f$ . Daher ist nach dem vorherigen Fall

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(z) dz &= \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\beta_k} f_n(z) dz \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha} f_n(z) dz. \end{aligned}$$

□

Sei  $\Delta \subseteq U$  ein abgeschlossenen Dreieck. Da die  $f_n$  alle holomorph sind ist nach dem Lemma von Goursat

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daher ist nach Lemma Aufgabe 2 auch

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\Delta$  ist  $f$  nach dem Satz von Morera holomorph.