Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 2

Jendrik Stelzner

19. April 2014

Aufgabe 1 (Konjugierte Nullstellen)

Bekanntermaßen handelt es sich bei der Konjugation um einen $\mathbb{R}$-Algebraautomorphismus von $\mathbb{C}$ (dem einzigen neben der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$). Inbesondere ist $\bar{x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist daher für alle $\rho \in \mathbb{C}$

$$\overline{P(\rho)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{\rho}^k = P(\bar{\rho}).$$

Also ist für alle $\rho \in \mathbb{C}$

$$0 = P(\rho) \Leftrightarrow 0 = \overline{P(\rho)} \Leftrightarrow 0 = P(\bar{\rho}).$$

Aufgabe 2 (Niveaulinien komplexwertiger Funktionen)

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

also

$$\Re\left(z^2\right) = x^2 - y^2 \text{ und } \Im\left(z^2\right) = 2xy.$$

Für die Niveaulinie von $\Re\left(z^2\right)$ für $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich, dass $x^2 - y^2 = c$ für $x^2 < c$ keine Lösung besitzt, und sonst, dass $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$. Für die Niveulinienen von $\Im\left(z^2\right) = 2xy$ ergibt sich für $c = 0$ die Vereinigung von reeler und imaginärer Achse, und für $c \neq 0$ gerade $y = 2/(cx)$. Für ein Bild der Niveulinean siehe Abbildung Aufgabe 2.

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2},$$

also

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ und } \Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

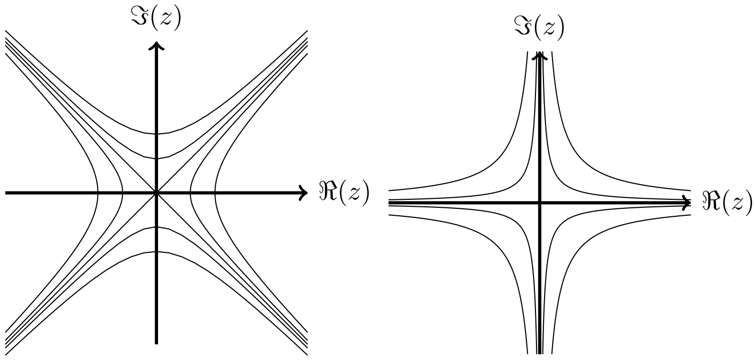

Abbildung 1: Niveulinien von $\Re\left(z^2\right)$ und $\Im\left(z^2\right)$.

Aufgabe 3 (Real- und Imaginärteil quadratischer Funktionen)

Wir behaupten, dass $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ genau dann Realteil des komplexen Polynoms $P(z) = Az^2 + Bz + C$ ist, wenn $c = -a$.

Ist $c = -a$, so ist für beliebiges $b \in \mathbb{R}$

$$p(x,y) = ax^2 + bxy - ay^2 = \Re\left(\left(a - \frac{1}{2}bi\right)(x+iy)^2\right).$$

Sei andererseits $p = \Re(P)$. Da

$$\Re(C) = \Re(P(0)) = p(0,0) = 0$$

ist $p = \Re(Az^2 + Bz)$, wir können also o.B.d.A. davon ausgehen, dass $C = 0$. Da für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &= p(x,y) - p(-x,-y) = \Re(P(z)) - \Re(P(-z)) \\ &= \Re(P(z) - P(-z)) = \Re(Bz - B(-z)) = \Re(2Bz) = 2\Re(Bz) \end{aligned}$$

ist $\Re(Bz) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da $0 = \Re(B\bar{B}) = \Re(|B|^2) = |B|^2$ folgt daraus, dass $B = 0$. Also ist $P(z) = Az^2$ für $A = x_A + iy_A \in \mathbb{C}$. Es ist daher

$$p(x,y) = \Re(Az^2) = \Re((x_A + iy_A)(x+iy)^2) = x_Ax^2 - 2y_Axy - x_Ay^2,$$

was die Behauptung zeigt.

Man bemerke noch, dass p genau dann Imaginärteil eines komplexen Polynoms vom Grad n ist, wenn p Realteil eines komplexen Polynoms vom Grad n ist, denn $p = \Im(P) \Leftrightarrow p = \Re(-iP)$, bzw. $p = \Re(P) \Leftrightarrow p = \Im(iP)$ für jedes komplexe Polynom P. Also ist p genau dann Imaginärteil eines Polynoms $P(z) = Az^2+Bz+C$, wenn $a = -c$.

Aufgabe 4 Betrag der Exponentialabbildung

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$|e^z| = \left|e^{\Re(z)+i\Im(z)}\right| = \left|e^{\Re(z)}e^{i\Im(z)}\right| = \left|e^{\Re(z)}\right|\left|e^{i\Im(z)}\right| = e^{\Re(z)}.$$