Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 6

Jendrik Stelzner

20. Mai 2014

Aufgabe 1 (Konvergenzradius)

Da

$$\sum_n a_n z^{2n} = \sum_n a_n \left(z^2\right)^n$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^{2n}$

$$\sqrt{R} \text{ falls } R < \infty \quad \text{und} \quad \infty \text{ falls } R = \infty.$$

Für die Reihe $\sum_n a_n^2 z^n$ ergibt sich der Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^2|}} = \left(\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}}\right)^2 = R^2,$$

wobei wir $\infty^2 = \infty$ verstehen. Kombiniert ergibt sich damit, dass $\sum_n a_n^2 z^{2n}$ einen Konvergenzradius von R hat.

Da

$$0 < R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty.$$

Deshalb ist

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|/n!}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty.$$

Der Konvergenzradius von $\sum_n (a_n/n!) z^n$ ist daher ∞.

Aufgabe 2 (Abelscher Grenzwertsatz)

Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n (z-1)^n$ von $f = \log$ an der Stelle $x_0 := 1$. Induktiv ergibt sich, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \text{ für alle } n \geq 1 \text{ und } x > 0.$$

Daher ist

$$f(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \text{ für alle } n \geq 1.$$

Die Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Potenzreihe sind daher

$$a_0 = f(x_0) = 0 \text{ und } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Da

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $1/1 = 1$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$ konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ (dies folgt auch direkt daraus, dass (a_n) eine Nullfolge ist) und es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \log(x) \text{ für alle } 0 < x < 2.$$

Bekanntermaßen konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ nach dem Leibniz-Kriterium (aus Analysis 1 ist diese Reihe auch als alternierende harmonische Reihe bekannt). Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist daher

$$\log(2) = \lim_{x\uparrow 2} \log(x) = \lim_{x\uparrow 2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(2).$$

Aufgabe 3 (Bessel-Funktion)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} z^{2n}.$$

Da

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n!)^2 4^n}\right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{4(n!)^{2/n}} = 0$$

hat die Potenzreihe einen Konvergenzradius von ∞. Wir können J daher summandenweise ableiten. Deshalb ist

$$J'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 4^n} z^{2n-1} \text{ und}$$

$$J''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(n!)^2 4^n} z^{2n-2}.$$

Daher ist für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
z^2 J''(z) + zJ'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 4^n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 4^n} z^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)4^n} z^{2n} + (-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 4^n} z^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n^2}{(n!)^2 4^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{((n-1)!)^2 4^{n-1}} z^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n!)^2 4^n} z^{2n+2} \\
&= -z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} z^{2n} \\
&= -z^2 J(z).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Konstruktion von Stammfunktionen)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_{\gamma_z} \xi e^{\xi} \,\mathrm{d}\xi = \int_0^1 tze^{tz} z \,\mathrm{d}t = \int_0^1 tz^2 e^{tz} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[(tz-1)e^{tz}\right]_{t=0}^1 = (z-1)e^z + 1.
\end{aligned}$$

F ist offenbar auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$G(z) = \int_{\gamma_z} |\xi|^2 \,\mathrm{d}\xi = \int_0^1 |tz|^2 z \,\mathrm{d}t = |z|^2 z \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}|z|^2 z = \frac{1}{3} z^2 \overline{z}.$$

G ist an $z = 0$ komplex differenzierbar, da

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(h) - G(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^2 h}{3h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{3} |h|^2 = 0.$$

Für $z \neq 0$ ist G nicht komplex differenzierbar an z, denn ansonsten wäre nach der Quotientenregel auch

$$\overline{z} = \frac{G(z)}{(1/3)z^2}$$

komplex differenzierbar an z, was aber nicht gilt.

Aufgabe 5 (Interpretation des komplexen Kurvenintegrals)

1.

Wir bemerken zunächst, dass die Parametrisierung über $\operatorname{Im}\gamma$, d.h. $\nu : \operatorname{Im}\gamma \to \mathbb{C}$, problematisch ist, da γ nicht notwendigerweise injektiv ist, also $\operatorname{Im}\gamma$ Selbstschnitte haben kann. Wir parametrisieren daher ν über $[a, b]$.

Damit ν eine Normale ist, muss

$$\langle \nu(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Daher muss

$$\nu(t) \in (\mathbb{R}\gamma'(t))^{\perp} = i\mathbb{R}\gamma'(t) \text{ für alle } t \in [a, b].$$

(Man beachte, dass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, und dass Multiplikation mit i der Rotation um $\pi/2$ entspricht.) Da ν auch normiert ist, muss

$$\nu(t) = \pm i \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Da

$$|\gamma'(t)| = |J_\gamma(t)^T J_\gamma(t)| \text{ für alle } t \in [a, b]$$

zeigt dies die Aussage.

2.

Wir bemerken zunächst, dass

$$\mathfrak{v}_f = \begin{pmatrix} \Re(f) \\ \Im(f) \end{pmatrix}$$

gewählt werden muss, damit die Aussage gilt. Denn schreiben wir

$$\gamma_1 := \Re(\gamma), \gamma_2 = \Im(\gamma), u = \Re(f) \text{ und } v = \Im(f),$$

so ist

$$\begin{aligned} &\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ = &\int_a^b u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b u(\gamma(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Da für alle $t \in [a, b]$

$$\nu(t) = -i \left| J_\gamma(t)^T J_\gamma(t) \right|^{-1/2} \gamma'(t) = |\gamma'(t)|^{-1/2}(\gamma_2'(t) - i\gamma_1'(t))$$

ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathfrak{v}_{\overline{f}}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left\langle \mathfrak{v}_{\overline{f}}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathfrak{v}_{\overline{f}}\,\mathrm{d}\vec{\sigma} &= \int_a^b \left\langle \mathfrak{v}_{\overline{f}}(\gamma(t)), \nu(t) \right\rangle \left| J_\gamma(t)^T J_\gamma(t) \right|^{1/2} \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u(\gamma(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Das zeigt die Gleichheit.

3.

Es ist

$$\operatorname{div}(\mathfrak{v}_{\overline{f}}) = u_x + (-v)_y = u_x - v_y = 0,$$

denn aus der Holomorphie von f folgt, dass f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

erfüllt.

4.

Nach dem Satz von Gauß ist in der gegeben Situation

$$\Im\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_\gamma \mathfrak{v}_{\overline{f}}\,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathfrak{v}_{\overline{f}})\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_\Omega 0\,\mathrm{d}\lambda_2 = 0.$$

Da f holomorph ist, ist auch if holomorph. Daher ist nach analoger Argumentation

$$\Re\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \Im\left(i\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \Im\left(\int_\gamma if(z)\,\mathrm{d}z\right) = 0.$$

Also ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$