Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 6

Jendrik Stelzner

20. Mai 2014

Aufgabe 1 (Konvergenzradius)

Da

$$\sum_n a_n z^{2n} = \sum_n a_n \left(z^2\right)^n$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^{2n}$

$$\sqrt{R} \text{ falls } R < \infty \quad \text{und} \quad \infty \text{ falls } R = \infty.$$

Für die Reihe $\sum_n a_n^2 z^n$ ergibt sich der Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^2|}} = \left(\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}}\right)^2 = R^2,$$

wobei wir $\infty^2 = \infty$ verstehen. Kombiniert ergibt sich damit, dass $\sum_n a_n^2 z^{2n}$ einen Konvergenzradius von R hat.

Da

$$0 < R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty.$$

Deshalb ist

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|/n!}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty.$$

Der Konvergenzradius von $\sum_n (a_n/n!) z^n$ ist daher ∞.

Aufgabe 2 (Abelscher Grenzwertsatz)

Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n (z-1)^n$ von $f = \log$ an der Stelle $x_0 := 1$. Induktiv ergibt sich, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \text{ für alle } n \geq 1 \text{ und } x > 0.$$

Daher ist

$$f(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \text{ für alle } n \geq 1.$$

Die Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Potenzreihe sind daher

$$a_0 = f(x_0) = 0 \text{ und } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Da

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $1/1 = 1$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$ konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ (dies folgt auch direkt daraus, dass (a_n) eine Nullfolge ist) und es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \log(x) \text{ für alle } 0 < x < 2.$$

Bekanntermaßen konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n$ nach dem Leibniz-Kriterium (aus Analysis 1 ist diese Reihe auch als alternierende harmonische Reihe bekannt). Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist daher

$$\log(2) = \lim_{x\uparrow 2} \log(x) = \lim_{x\uparrow 2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(2).$$