Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 6

Jendrik Stelzner

15. Mai 2014

Aufgabe 1 (Konvergenzradius)

Da

$$\sum_n a_n z^{2n} = \sum_n a_n \left(z^2\right)^n$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^{2n}$

$$\sqrt{R} \text{ falls } R < \infty \quad \text{und} \quad \infty \text{ falls } R = \infty.$$

Für die Reihe $\sum_n a_n^2 z^n$ ergibt sich der Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^2|}} = \left(\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}}\right)^2 = R^2,$$

wobei wir $\infty^2 = \infty$ verstehen. Kombiniert ergibt sich damit, dass $\sum_n a_n^2 z^{2n}$ einen Konvergenzradius von R hat.

Da

$$0 < R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty.$$

Deshalb ist

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|/n!}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty.$$

Der Konvergenzradius von $\sum_n (a_n/n!) z^n$ ist daher ∞.