Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 5

Jendrik Stelzner

11. Mai 2014

Aufgabe 1 (Kettenregel)

Sehen wir $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$, so ist f stetig differenzierbar. Setzen wir

$$u := \Re(f) = f_1 \text{ und } v := \Im(f) = f_2$$

so ist nach der Kettenregel für alle $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned} D(f \circ \gamma)(t) &= Df(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t) \\ &= \begin{pmatrix} u_x(\gamma(t)) & u_y(\gamma(t)) \\ v_x(\gamma(t)) & v_y(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \\ v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schreiben wir diesen Ausdruck wieder als komplexe Zahl, und nutzen wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$, so erhalten wir, dass für alle $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned} &(f \circ \gamma)'(t) \\ &= u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) + i(v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_y(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\ &= u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v_x(\gamma(t))\gamma_2'(t) + i(v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_x(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\ &= (u_x(\gamma(t)) + iv_x(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) \\ &= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t). \end{aligned}$$

Es gilt also überraschenderweise die Kettenregel.