Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 5

Jendrik Stelzner

12. Mai 2014

Aufgabe 1 (Kettenregel)

Sehen wir $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$, so ist f stetig differenzierbar. Setzen wir

$$u := \Re(f) = f_1 \text{ und } v := \Im(f) = f_2$$

so ist nach der Kettenregel für alle $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
D(f \circ \gamma)(t) &= Df(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t) \\
&= \begin{pmatrix} u_x(\gamma(t)) & u_y(\gamma(t)) \\ v_x(\gamma(t)) & v_y(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \\ v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Schreiben wir diesen Ausdruck wieder als komplexe Zahl, und nutzen wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$, so erhalten wir, dass für alle $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&(f \circ \gamma)'(t) \\
&= u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) + i(v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_y(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\
&= u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v_x(\gamma(t))\gamma_2'(t) + i(v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_x(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\
&= (u_x(\gamma(t)) + iv_x(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) \\
&= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).
\end{aligned}$$

Es gilt also überraschenderweise die Kettenregel.

Aufgabe 2 (Ausdehnung von Kurven)

Wir gehen davon aus, dass γ zweimal differenzierbar ist, und dass

$$\Psi, \Phi : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

differenzierbar sind. Setzen wir

$$\gamma_1 := \Re(\gamma) \text{ und } \gamma_2 := \Im(\gamma),$$

so ist

$$\begin{aligned}
u(x,y) &:= \Re(f(x,y)) = \gamma_1(x) + \Psi(x,y)\gamma_1'(x) - \Phi(x,y)\gamma_2'(x),\\
v(x,y) &:= \Im(f(x,y)) = \gamma_2(x) + \Psi(x,y)\gamma_2'(x) + \Phi(x,y)\gamma_1'(x).
\end{aligned}$$

Daher ist für alle $(x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \gamma_1'(x) + \Psi_x(x,y)\gamma_1'(x) + \Psi(x,y)\gamma_1''(x)\\
&\quad - \Phi_x(x,y)\gamma_2'(x) - \Phi(x,y)\gamma_2''(x),\\
v_x(x,y) &= \gamma_2'(x) + \Psi_x(x,y)\gamma_2'(x) + \Psi(x,y)\gamma_2''(x)\\
&\quad + \Phi_x(x,y)\gamma_1'(x) + \Phi(x,y)\gamma_1''(x),\\
u_y(x,y) &= \Psi_y(x,y)\gamma_1'(x) - \Phi_y(x,y)\gamma_2'(x),\\
v_y(x,y) &= \Psi_y(x,y)\gamma_2'(x) + \Phi_y(x,y)\gamma_2'(x).
\end{aligned}$$

Dass f holomorph ist, ist äquivalent dazu, dass f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dass also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

Für den Fall, dass $\gamma(t) = t^2$, bemerken wir, dass sich γ zu $f : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ fortsetzen lässt. Wählen wir

$$\begin{aligned}
&\Psi(x,y) : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -\frac{y^2}{2x} \text{ und}\\
&\Phi(x,y) : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y,
\end{aligned}$$

so haben wir $\Psi(x,0) = \Psi_y(x,0) = \Phi(x,0) = 0$ für alle $x \in (0,1)$ und für alle $x + iy \in (0,1) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy\\
&= x^2 + \left(-\frac{y^2}{2x}\right) \cdot 2x + iy \cdot 2x\\
&= \gamma(x) + \Psi(x,y)\gamma'(x) + i\Phi(x,y)\gamma'(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Potenzreihenentwicklung)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist bekanntermaßen

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Für $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1, i\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \frac{1}{z^3 - iz^2 - z + i}$$

hat eine Potenzreihenentwicklung um die Entwicklungstelle 0 einen Konvergenzradius von höchstens 1, da f bei $1, -1$ und i Singularitäten aufweist. Für jedes $z \in \mathbb{C}$

mit $|z| < 1$ ist auch $|z^4| = |z|^4 < 1$, und somit

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3 - iz^2 - z + i} = \frac{z - (-i)}{(z^3 + (-i)z^2 + (-i)^2 z + (-i)^3)(z - (-i))} \\ &= \frac{z+i}{z^4 - 1} = -(z+i)\frac{1}{1 - z^4} = -(z+i)\sum_{k=0}^{\infty} \left(z^4\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} -(z+i)z^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} -z^{4k+1} - iz^{4k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} -i & \text{falls } n \equiv 0 \bmod 4, \\ -1 & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also lässt sich f um 0 mit einer Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 entwickeln.

Aufgabe 4 (Wirtingerkalkül)

1.

Es ist klar, dass der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x}$ auf $C^1(\Omega, \mathbb{C})$ $\mathbb{R}$-linear ist. Da für alle $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ und $z \in \Omega$

$$\frac{\partial (if)}{\partial x}(z) = \lim_{h \to 0} \frac{if(z+h) - if(z)}{h} = i \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = i\frac{\partial f}{\partial x}(z)$$

ist $\frac{\partial}{\partial x}$ auch $\mathbb{C}$-linear. Analog ergibt sich, dass auch $\frac{\partial}{\partial y}$ $\mathbb{C}$-linear ist. Daher sind auch $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ $\mathbb{C}$-linear.

Für den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x}$ gilt die Produktregel, denn schreiben wir

$$u^f := \Re(f), v^f := \Im(f) \text{ und } u^g := \Re(g), v^g := \Im(g),$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(fg) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u^f u^g - v^f v^g + iu^f v^g + iu^g v^f\right) \\ &= u^f_x u^g + u^f u^g_x - v^f_x v^g - v^f v^g_x + iu^f_x v^g + iu^f v^g_x + iu^g_x v^f + iu^g v^f_x \\ &= (u^f_x + iv^f_x)(u^g + iv^g) + (u^f + iv^f)(u^g_x + iv^g_x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} g + f\frac{\partial g}{\partial x}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man auch, dass für $\frac{\partial}{\partial y}$ die Produktregel gilt. Da daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(fg) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(fg) - i\frac{\partial}{\partial y}(fg)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} g + f\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} g - if\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) g + \frac{1}{2} f\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} g + f\frac{\partial g}{\partial z} \end{aligned}$$

gilt auch für $\frac{\partial}{\partial z}$ die Produktregel. Da damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}g\right) = \frac{\partial(f/g)}{\partial z}g + \frac{f}{g}\frac{\partial g}{\partial z} \\
\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}g &= \frac{\partial(f/g)}{\partial z}g^2 + f\frac{\partial g}{\partial z} \\
\Rightarrow \frac{\partial(f/g)}{\partial z} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}g - f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}.
\end{aligned}$$

gilt für $\frac{\partial}{\partial z}$ auch die Quotientenregel. Analog zeigt man, dass $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ die Quotienten- und Produktregel erfüllt.

2.

Schreiben wir $u := \Re(f)$ und $v := \Im(f)$, so folgt aus der $\mathbb{C}$-Linearität von $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_x + v_y + i(v_x - u_y)\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_x - v_y + i(v_x + u_y)\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Da $\Re\left(\bar{f}\right) = u$ und $\Im\left(\bar{f}\right) = -v$ ist daher

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y - i(v_x + u_y)\right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$$

und

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{1}{2}\left(u_x + v_y - i(v_x - u_y)\right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

3.

f ist genau dann holomorph auf Ω, wenn f auf Ω die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, also wenn

$$u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x.$$

Dies ist nach (2) offenbar äquivalent dazu, dass $\partial f/\partial \bar{z} = 0$. Ist f holomorph auf Ω, so gilt außerdem

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y = -i(u_y + iv_y),$$

also $\partial f/\partial z = f'$.

4.

Da $\Re\left(\bar{f}\right) = u$ und $\Im\left(\bar{f}\right) = -v$ ist $\bar{f}$ nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genau dann holomorph auf Ω, wenn

$$u_x = (-v)_y = -v_y \text{ und } u_y = -(-v_x) = v_x.$$

Nach (1) ist dies äquivalent dazu, dass $\partial f/\partial z = 0$. Ist $\bar{f}$ holomorph, so gilt nicht, wie auf dem Zettel behautet, $\partial\bar{f}/\partial\bar{z} = \left(\bar{f}\right)'$, sondern $\partial\bar{f}/\partial z = \left(\bar{f}\right)'$, da

$$f' = u_x - iv_x = -v_y - v_x,$$

und damit

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y - i(v_x + u_y)\right) = \left(\bar{f}\right)'.$$

5.

Es ist

$$\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - v_x u_y,$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\left(u_x + v_y + iv_x - iu_y\right)\left(u_x + v_y - iv_x + iu_y\right) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(u_x - v_y + iv_x + iu_y\right)\left(u_x - v_y - iv_x - iu_y\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((u_x + v_y)^2 - (iv_x - iu_y)^2 - (u_x - v_y)^2 + (iv_x + iu_y)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4u_x v_y + 4i^2 v_x u_y\right) = u_x v_y - v_x u_y
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 &= \frac{1}{4}\left|x_x + v_y + i(v_x - u_y)\right|^2 - \frac{1}{4}\left|u_x - v_y + i(v_x + u_y)\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((u_x + v_y)^2 + (v_x - u_y)^2 - (u_x - v_y)^2 - (v_x + u_y)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4u_x v_y - 4v_x u_y\right) = u_x v_y - v_x u_y.
\end{aligned}$$