Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 9

Jendrik Stelzner

14. Juni 2014

Aufgabe 1 (Stammgebiete und Stammfunktionen)

1.

$\mathbb{C}$ ist ein konvexes Gebiet. Daher besitzt, wie auf dem letzten Zettel gezeigt, jede ganze Funktion eine Stammfunktion. Also ist $\mathbb{C}$ ein Stammgebiet.

$\mathbb{C} \setminus \{i\}$ ist kein Stammgebiet, denn

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z-i}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, aber da

$$\int_{\partial D_1(i)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D_1(i)} \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0$$

besitzt f auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ keine Stammfunktion.

2.

Da S_1 und S_2 offen sind, ist auch $S_1 \cup S_2$ offen. Es sei $f : S_1 \cup S_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Da S_1 ein Stammgebiet ist, besitzt $f_{|S_1} : S_1 \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F_1 : S_1 \to \mathbb{C}$. Da S_2 ein Stammgebiet ist, besitzt $f_{|S_2} : S_2 \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F_2 : S_2 \to \mathbb{C}$. Da

$$F'_{1|S_1 \cap S_2} = f_{|S_1 \cap S_2} = F'_{2|S_1 \cap S_2}$$

und $S_1 \cap S_2$ zusammenhängend ist, gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$F_1(z) = F_2(z) \text{ für alle } z \in S_1 \cap S_2.$$

Es ist daher

$$F : S_1 \cup S_2 \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} F_1(z) & \text{falls } z \in S_1 \\ F_2(z) + c \text{ falls } z \in S_2 \end{cases}$$

eine Stammfunktion von f auf $S_1 \cup S_2$.

Es besitzt also jede auf $S_1 \cup S_2$ holomorphe Funkion dort auch eine Stammfunktion. Ist zusätzlich $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, so ist $S_1 \cup S_2$ auch zusammenhängend und daher ein Stammgebiet.

Wir betrachten weiter die Gebiete

$$\begin{aligned} R^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}, \\ R^- &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}, \\ I^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \text{ und} \\ I^- &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}. \end{aligned}$$

Diese sind konvex und somit Stammgebiete. Da

$$\begin{aligned} R^+ \cap R^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0 \text{ oder } \Im(z) > 0\} \text{ und} \\ I^+ \cap I^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0 \text{ oder } \Im(z) < 0\} \end{aligned}$$

nichtleer und zusammenhängend sind, sind $R^+ \cup I^+$ und $R^- \cup I^-$ Stammgebiete. Es ist jedoch

$$\begin{aligned} &(R^+ \cup I^+) \cap (R^- \cap I^-) \\ =&\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0, \Im(z) < 0 \text{ oder } \Re(z) < 0, \Im(z) > 0\} \end{aligned}$$

nicht zusammenhängend und das Gebiet

$$(R^+ \cup I^+) \cup (R^- \cup I^-) = \mathbb{C}^*$$

ist kein Stammgebiet. (Denn die Funktion

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist auf $\mathbb{C}^*$ holomorph, besitzt wegen

$$\int_{\partial D_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$$

keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$.)