Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 5

Jendrik Stelzner

12. Mai 2014

Aufgabe 1 (Kettenregel)

Sehen wir $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$, so ist f stetig differenzierbar. Setzen wir

$$u := \Re(f) = f_1 \text{ und } v := \Im(f) = f_2$$

so ist nach der Kettenregel für alle $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} D(f \circ \gamma)(t) &= Df(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t) \\ &= \begin{pmatrix} u_x(\gamma(t)) & u_y(\gamma(t)) \\ v_x(\gamma(t)) & v_y(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \\ v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schreiben wir diesen Ausdruck wieder als komplexe Zahl, und nutzen wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$, so erhalten wir, dass für alle $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} &(f \circ \gamma)'(t) \\ &= u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) + i(v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_y(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\ &= u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v_x(\gamma(t))\gamma_2'(t) + i(v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_x(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\ &= (u_x(\gamma(t)) + iv_x(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) \\ &= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t). \end{aligned}$$

Es gilt also überraschenderweise die Kettenregel.

Aufgabe 2 (Ausdehnung von Kurven)

Wir gehen davon aus, dass γ zweimal differenzierbar ist, und dass

$$\Psi, \Phi : (0, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

differenzierbar sind. Setzen wir

$$\gamma_1 := \Re(\gamma) \text{ und } \gamma_2 := \Im(\gamma),$$

so ist

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &:= \Re(f(x,y)) = \gamma_1(x) + \Psi(x,y)\gamma_1'(x) - \Phi(x,y)\gamma_2'(x), \\
v(x,y) &:= \Im(f(x,y)) = \gamma_2(x) + \Psi(x,y)\gamma_2'(x) + \Phi(x,y)\gamma_1'(x).
\end{aligned}
$$

Daher ist für alle $(x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \gamma_1'(x) + \Psi_x(x,y)\gamma_1'(x) + \Psi(x,y)\gamma_1''(x) \\
&\quad - \Phi_x(x,y)\gamma_2'(x) - \Phi(x,y)\gamma_2''(x), \\
v_x(x,y) &= \gamma_2'(x) + \Psi_x(x,y)\gamma_2'(x) + \Psi(x,y)\gamma_2''(x) \\
&\quad + \Phi_x(x,y)\gamma_1'(x) + \Phi(x,y)\gamma_1''(x), \\
u_y(x,y) &= \Psi_y(x,y)\gamma_1'(x) - \Phi_y(x,y)\gamma_2'(x), \\
v_y(x,y) &= \Psi_y(x,y)\gamma_2'(x) + \Phi_y(x,y)\gamma_2'(x).
\end{aligned}
$$

Dass f holomorph ist, ist äquivalent dazu, dass f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dass also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

Für den Fall, dass $\gamma(t) = t^2$, bemerken wir, dass sich γ zu $f : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ fortsetzen lässt. Wählen wir

$$
\begin{aligned}
&\Psi(x,y) : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -\frac{y^2}{2x} \text{ und} \\
&\Phi(x,y) : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y,
\end{aligned}
$$

so haben wir $\Psi(x,0) = \Psi_y(x,0) = \Phi(x,0) = 0$ für alle $x \in (0,1)$ und für alle $x + iy \in (0,1) \times \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f(x+iy) &= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \\
&= x^2 + \left(-\frac{y^2}{2x}\right) \cdot 2x + iy \cdot 2x \\
&= \gamma(x) + \Psi(x,y)\gamma'(x) + i\Phi(x,y)\gamma'(x).
\end{aligned}
$$