Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 9

Jendrik Stelzner

15. Juni 2014

Aufgabe 1 (Stammgebiete und Stammfunktionen)

1.

$\mathbb{C}$ ist ein konvexes Gebiet. Daher besitzt, wie auf dem letzten Zettel gezeigt, jede ganze Funktion eine Stammfunktion. Also ist $\mathbb{C}$ ein Stammgebiet.

$\mathbb{C} \setminus \{i\}$ ist kein Stammgebiet, denn

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z-i}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, aber da

$$\int_{\partial D_1(i)} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{\partial D_1(i)} \frac{1}{z-i} \,\mathrm{d}z = \int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0$$

besitzt f auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ keine Stammfunktion.

2.

Da S_1 und S_2 offen sind, ist auch $S_1 \cup S_2$ offen. Es sei $f : S_1 \cup S_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Da S_1 ein Stammgebiet ist, besitzt $f_{|S_1} : S_1 \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F_1 : S_1 \to \mathbb{C}$. Da S_2 ein Stammgebiet ist, besitzt $f_{|S_2} : S_2 \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F_2 : S_2 \to \mathbb{C}$. Da

$$F'_{1|S_1 \cap S_2} = f_{|S_1 \cap S_2} = F'_{2|S_1 \cap S_2}$$

und $S_1 \cap S_2$ zusammenhängend ist, gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$F_1(z) = F_2(z) \text{ für alle } z \in S_1 \cap S_2.$$

Es ist daher

$$F : S_1 \cup S_2 \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} F_1(z) & \text{falls } z \in S_1 \\ F_2(z) + c \text{ falls } z \in S_2 \end{cases}$$

eine Stammfunktion von f auf $S_1 \cup S_2$.

Es besitzt also jede auf $S_1 \cup S_2$ holomorphe Funkion dort auch eine Stammfunktion. Ist zusätzlich $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, so ist $S_1 \cup S_2$ auch zusammenhängend und daher ein Stammgebiet.

Wir betrachten weiter die Gebiete

$$\begin{aligned} R^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}, \\ R^- &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}, \\ I^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \text{ und} \\ I^- &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}. \end{aligned}$$

Diese sind konvex und somit Stammgebiete. Da

$$\begin{aligned} R^+ \cap R^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0 \text{ oder } \Im(z) > 0\} \text{ und} \\ I^+ \cap I^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0 \text{ oder } \Im(z) < 0\} \end{aligned}$$

nichtleer und zusammenhängend sind, sind $R^+ \cup I^+$ und $R^- \cup I^-$ Stammgebiete. Es ist jedoch

$$\begin{aligned} &(R^+ \cup I^+) \cap (R^- \cap I^-) \\ =&\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0, \Im(z) < 0 \text{ oder } \Re(z) < 0, \Im(z) > 0\} \end{aligned}$$

nicht zusammenhängend und das Gebiet

$$(R^+ \cup I^+) \cup (R^- \cup I^-) = \mathbb{C}^*$$

ist kein Stammgebiet. (Denn die Funktion

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist auf $\mathbb{C}^*$ holomorph, besitzt wegen

$$\int_{\partial D_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$$

keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$.)

Aufgabe 2 (Weierstraßscher Konvergenzsatz)

Lemma 1. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\alpha : [0,1] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Es sei $f_n : |\alpha| \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die auf $|\alpha|$ lokal gleichmäßig gegen $f : |\alpha| \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha f_n(z)\,dz.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass α stetig differenzierbar ist und f_n auf $|\alpha|$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Da α stetig differenzierbar ist, gibt es wegen der Kompaktheit von $[0,1]$ ein $C > 0$ mit $|\alpha'(t)| < C$ für alle $t \in [0,1]$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da f_n auf $|\alpha|$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{C} \text{ für alle } n \geq N, z \in |\alpha|.$$

Daher ist

$$|f(\alpha(t))\alpha'(t) - f_n(\alpha(t))\alpha'(t)| \leq \varepsilon \text{ für alle } n \geq N, t \in [0,1].$$

Das zeigt, dass $(f_n \circ \alpha)\alpha'$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $(f \circ \alpha)\alpha'$ konvergiert. Daher ist

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha f_n(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Fall, dass α stetig differenzierbar ist, und f_n auf $|\alpha|$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gibt es für jeden Punkt $z \in |\alpha|$ eine offene Umgebung $U_z \subseteq U$ von z, so dass f_n auf $U_z \cap |\alpha|$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Wegen der Kompaktkeit von $|\alpha|$ hat die offene Überdeckung $\{U_z \mid z \in |\alpha|\}$ von $|\alpha|$ eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also $V_1, \ldots, V_n \in \{U_z \mid z \in |\alpha|\}$, so dass

$$|\alpha| \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

und f_n für alle $k = 1, \ldots, n$ auf $V_k \cap |\alpha|$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Wegen der Endlichkeit dieser Überdeckung konvergiert f_n auch auf

$$(V_1 \cap |\alpha|) \cup \ldots \cup (V_n \cap |\alpha|) = (V_1 \cup \ldots \cup V_n) \cap |\alpha| = |\alpha|$$

gleichmäßig gegen f. Die Aussage ergibt sich daher aus dem vorherigen Fall.

Zuletzt betrachten wir den Fall, dass α stückweise stetig differenzierbar ist und f_n auf $|\alpha|$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gibt es stetig differenzierbare Wege $\beta_1, \ldots, \beta_m : [0,1] \to \mathbb{C}$, so dass $\alpha = \beta_1 + \ldots + \beta_m$. Da (f_n) auf $|\alpha|$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, konvergiert (f_n) für alle $k = 1, \ldots, m$ auch auf $|\beta_k|$ lokal gleichmäßig gegen f. Daher ist nach dem vorherigen Fall

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^m \lim_{n\to\infty} \int_{\beta_k} f_n(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha f_n(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

□

Sei $\Delta \subseteq U$ ein abgeschlossenes Dreieck. Da die f_n alle holomorph sind ist nach dem Lemma von Goursat

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daher ist nach Lemma Aufgabe 2 auch

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Wegen der Beliebigkeit von Δ ist f nach dem Satz von Morera holomorph.

Aufgabe 3 (Holomorphe Fortsetzungen)

Sei $\Delta \subseteq U$ ein abgeschlossenes Dreiecks. Nach der verschärften Version des Lemmas von Goursat ist

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Wegen der Beliebigkeit von Δ ist f nach dem Satz von Morera holomorph.

Aufgabe 4 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)

1.

Es ergibt sich induktiv, dass

$$f^{(n)}(0) = a^n f(0) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für die ganze Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(0)e^{az}$$

mit $g(0) = f(0)$ ist daher

$$g^{(n)}(0) = a^n g(0) = a^n f(0) = f^{(n)}(0) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Identitätssatz ist daher bereits $f = g$.

2.

Wir zeigen zuerst die Existenz und dann die Eindeutigkeit einer entsprechenden Abbildung.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv

$$b_{n+1+m} := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{k+m},$$

wobei $b_0, \ldots, b_n$ bereits gegeben sind, und für alle $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$c_m := \frac{b_m}{m!}.$$

Wir setzen

$$M_a := \max\{|a_0|, \ldots, |a_n|, 1\} \text{ und } M_b := \max\{|b_0|, \ldots, |b_n|, 1\}.$$

Induktiv erhalten wir, dass

$$|b_k| \leq (n+1)^k M_a^k M_b.$$

Für $k = 0, \ldots, n$ ist die Aussage klar. Gilt die Aussage für $b_0, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+m}$, so ist

$$\begin{aligned} |b_{n+1+m}| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{k+m} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{k+m}| \\ &\leq M_a \sum_{k=0}^{n} |b_{k+m}| \underset{\mathrm{IV}}{\leq} M_a \sum_{k=0}^{n} (n+1)^{k+m} M_a^{k+m} M_b \\ &\leq M_a \cdot (n+1)(n+1)^{n+m} M_a^{n+m} M_b \\ &= (n+1)^{n+1+m} M_a^{n+1+m} M_b. \end{aligned}$$

Da damit

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k} &= \limsup_{k\to\infty}\frac{|b_k|^{1/k}}{(k!)^{1/k}} \\ &\leq \limsup_{k\to\infty}\frac{(n+1)M_a M_b^{1/(n+1+k)}}{((n+1+k)!)^{1/(n+1+k)}} = 0,\end{aligned}$$

ist $\limsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k} = 0$. Deshalb konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty c_k z^k$ auf ganz $\mathbb{C}$, die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$$

ist als ganz. Es ist klar, dass

$$f^{(k)}(0) = b_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Für die ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert als

$$g := f^{(n+1)} - \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}$$

ist daher für alle $m \in \mathbb{N}$

$$g^{(m)}(0) = f^{(n+1+m)}(0) - \sum_{k=0}^n a_k f^{(k+m)}(0) = b_{n+1+m} - \sum_{k=0}^n a_k b_{k+m} = 0.$$

Nach dem Identitätssatz ist daher $g = 0$, also

$$f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}$$

Dies zeigt die Existenz einer entsprechenden Abbildung.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine weitere ganze Funktion mit $\tilde{f}^{(k)} = b_k$ für alle $k = 0, \ldots, n$ und

$$\tilde{f}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n a_k \tilde{f}^{(k)}.$$

Da damit für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\tilde{f}^{(n+1+m)} = \sum_{k=0}^n a_k \tilde{f}^{(k+m)}$$

ergibt sich induktiv, dass $\tilde{f}^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen des Identitätssatzes folgt daraus, dass $\tilde{f} = f$.

3.

Die Funktion

$$f^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$$

ist ganz, da für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f^*(z+h) - f^*(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z} + \overline{h}) - f(\overline{z})}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \overline{\frac{f(\overline{z} + \overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}} = \overline{f'(\overline{z})}.
\end{aligned}$$

Da $f^*(x) = \overline{f(\overline{x})} = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und $\mathbb{R}$ nicht diskret ist, ist nach dem Identitätssatz bereits $f^* = f$, und deshalb

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$