Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 4

Jendrik Stelzner

3. Mai 2014

Aufgabe 4

1.

Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}\exp(z) &= \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) \\ &= \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) \\ &= \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Es ist daher klar, dass exp, aufgefasst als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, glatt ist. Da

$$\begin{aligned}(\Re(\exp))_x(x+iy) &= \exp(x)\cos(y) = (\Im(\exp))_y(x+iy) \text{ und} \\ (\Re(\exp))_y(x+iy) &= -\exp(x)\sin(y) = -(\Im(\exp))_x(x+iy).\end{aligned}$$

erfüllt exp die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf ganz $\mathbb{C}$. Also ist exp auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\exp'(x+iy) &= (\Re(\exp))_x(x+iy) + i(\Im(\exp))_x(x+iy) \\ &= \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y) = \exp(x+iy).\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ stetig ist: Für offene Intervalle $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ und $(c, d) \subseteq (-\pi, \pi)$ ist

$$\begin{aligned}&\log^{-1}((a,b) \times (c,d)) \\ =\ &\exp((a,b) \times (c,d)) \\ =\ &\{z \in \mathbb{C}^- : \exp(a) < |z| < \exp(b) \text{ und } c < \arg(z) < d\} \\ =\ &|\cdot|^{-1}((\exp(a), \exp(b))) \cap \arg^{-1}((c,d))\end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von $\arg : \mathbb{C}^- \to (-\pi, \pi)$ und $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ offen. Da die Produktmengen von offene Intervallen der obigen Form eine topologische Basis von $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ bilden, zeigt dies die Stetigkeit.

Wir zeigen, dass log für alle $z \in \mathbb{C}^-$ komplex differenzierbar an z ist, und dass $\log'(z) = 1/z$. Es sei (z_n) eine Folge auf $\mathbb{C}^-$ mit $z_n \neq z$ für alle n und $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Wir setzen $w_n := \log(z_n)$ für alle n und $w := \log(z)$. Wegen der Stetigkeit von log ist $w_n \to w$ für $n \to \infty$. Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(z_n) - \log(z)}{z_n - z} = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n - w}{\exp(w_n) - \exp(w)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\exp(w_n)-\exp(w)}{w_n - w}}$$
$$= \frac{1}{\exp'(w)} = \frac{1}{\exp(w)} = \frac{1}{z}.$$

Aus der Beliebigkeit der Folge (z_n) folgt die Behauptung.

2.

Für $z \in \mathbb{C}^-$ lässt sich der Ausdruck z^n mit $n \in \mathbb{Z}$ sowohl als

$$z^n := \begin{cases} \prod_{i=1}^n z & \text{falls } n > 0, \\ 1 & \text{falls } n = 0, \\ 1/z^{-n} & \text{falls } n < 0, \end{cases}$$

als auch als $\exp(n \log(z))$ verstehen. Diese beiden Bedeutungen sind infsofern konsistent zueinander, dass $\exp(n \log(z)) = z^n$ für all $n \in \mathbb{Z}$: Es ist klar, dass

$$\exp(0 \cdot \log(z)) = 1$$

und

$$\exp(1 \cdot \log(z)) = z,$$

und daher auch

$$\exp(-1 \cdot \log(z)) \cdot z = \exp(-1 \cdot \log(z)) \cdot \exp(\log(z)) = \exp(0) = 1,$$

also $\exp(-1 \cdot \log(z)) = 1/z = z^{-1}$. Für alle anderen $n \in \mathbb{Z}$ ergibt sich die Aussage induktiv aus diesen Fällen.

Da exp auf $\mathbb{C}$ und log auf $\mathbb{C}^-$ komplex differenzierbar ist, ergibt sich aus der Kettenregel, dass für alle $s \in \mathbb{C}$ auch

$$f_s : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C} \text{ mit } f_s(z) = z^s = \exp(s \log(z))$$

komplex differenzierbar auf $\mathbb{C}^-$ ist, und

$$f_s'(z) = \exp(s \log(z)) \cdot s \cdot \frac{1}{z} = s \cdot z^{s-1}.$$