

# EINFÜHRUNG IN DIE KOMPLEXE ANALYSIS

## BLATT 1

Jendrik Stelzner

13. April 2014

### Aufgabe 1 (Real und Imaginärteile)

Es ist

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i(1+i)} = \frac{1}{i} = -i,$$

und

$$\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$

Da  $i^2 = -1$  (also insbesondere  $i^4 = 1$ ) ist für alle  $n \in \mathbb{Z}$

$$i^n = i^{(n \bmod 4)} \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ i & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ -i & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Schließlich ist

$$\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n = \Re\left(\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n\right) + i\Im\left(\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n\right)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k &= \sum_{k=1}^7 e^{ik\pi/4} = \sum_{k=1}^3 e^{ik\pi/4} + \sum_{k=4}^7 e^{ik\pi/4} \\ &= \sum_{k=1}^3 e^{ik\pi/4} + \sum_{k=0}^3 e^{ik\pi/4+i\pi} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^3 e^{ik\pi/4} + \sum_{k=1}^3 -e^{ik\pi/4} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Real- und Imaginärteile ergeben sich durch direktes Ablesen.

## Aufgabe 2 (Betrag und Argument)

Es ist

$$|1 + 3i| = \sqrt{1 + 3^2} = \sqrt{10} \text{ und } \arg(1 + 3i) = \arctan 3.$$

Wegen der  $2\pi$ -Periodizität der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$  ist

$$\begin{aligned} z_1 &= (1 + i)^9 - (1 - i)^9 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^9 - \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^9 \\ &= 2^{9/2}(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}) = 16((1 + i) - (1 - i)) \\ &= 32i, \end{aligned}$$

also

$$|z_1| = 32 \text{ und } \arg z_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Da  $i^2 = -1$  und  $i^4 = 1$  ist  $z_2 = i^{2014} = -1$ , also

$$|z_2| = 1 \text{ und } \arg z_2 = \pi.$$

Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $z_3 = \frac{1+ia}{1-ia}$  ist

$$|z_3| = \frac{|1 + ia|}{|1 - ia|} = \frac{|1 + ia|}{|\overline{1 + ia}|} = 1,$$

und da

$$\arg(1 + ia) = \arctan a \text{ und } \arg(1 - ia) = \arctan -a = -\arctan a.$$

ist

$$\arg z_3 = \arg(1 + ia) - \arg(1 - ia) = 2 \arctan a.$$

Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und

$$z_n = (i - 1)^n = \left(\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right)^n = 2^{n/2}e^{in3\pi/4}$$

ist  $|z_n| = 2^{n/2}$  und  $n\frac{3}{4}\pi$  ein Argument von  $z_n$ .

## Aufgabe 3 (Bestimmte Teilmengen)

1.

Da  $\Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , und für alle  $t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$

$$\frac{z - 3}{1 + i} = t \Leftrightarrow z = 3 + t(1 + i)$$

ist

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z - 3}{1 + i}\right) = 0 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{z - 3}{1 + i} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{3 + t(1 + i) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Es handelt sich bei  $A_0$  also um eine Gerade.

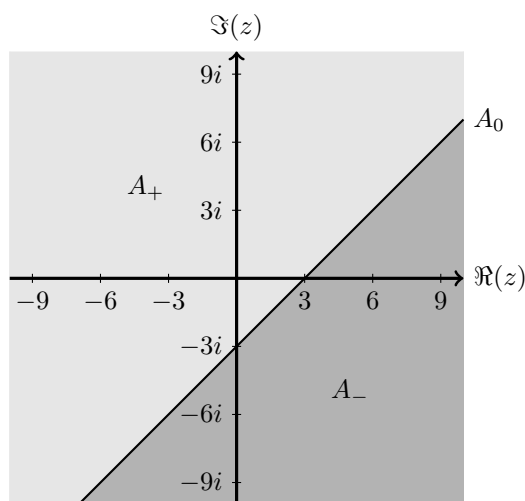
Analog ergibt sich nun auch, dass

$$\begin{aligned} A_+ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im \left( \frac{z-3}{1+i} \right) > 0 \right\} \\ &= \{ 3 + t(1+i) + y(i-1) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_- &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im \left( \frac{z-3}{1+i} \right) < 0 \right\} \\ &= \{ 3 + t(1+i) + y(i-1) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^- \}. \end{aligned}$$

Es ist also  $A_+$  der Teil der komplexen Ebene, der über  $A_0$  liegt, und  $A_-$  der Teil der komplexen Ebene, der unter  $A_0$  liegt. Zusammengefasst ergibt sich die folgende Skizze.



2.

Es ist  $B = \emptyset$ , denn für alle  $z \in B$  ist

$$i = 3z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2 = 3|z|^2 - 2\Im(z) + 2 \in \mathbb{R}.$$

Die zeichnerische Darstellung der leeren Menge lassen wir dem geneigten Leser als kreative Übung.

3.

Es ist

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| z + \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{4} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z^2 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Es ist also  $C$  das Urbild des Kreises mit Radius  $1/2$  um den Mittelpunkt  $1/2$  unter der Abbildung  $z \mapsto z^2$ .

Um dieses Urbild zu skizzieren betrachten wir daher zunächst das Urbild eines einzelnen Punktes  $z = re^{i\varphi}$ ,  $r \geq 0$ , welcher im oberen Quadranten der komplexen Ebene liegt (d.h.  $\Im(z), \Re(z) \geq 0$ ). Da dieses gerade aus den beiden Punkten  $\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$  und  $-\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$  besteht, ergibt sich für den gesamten Kreis das Urbild wie in der Abbildung.

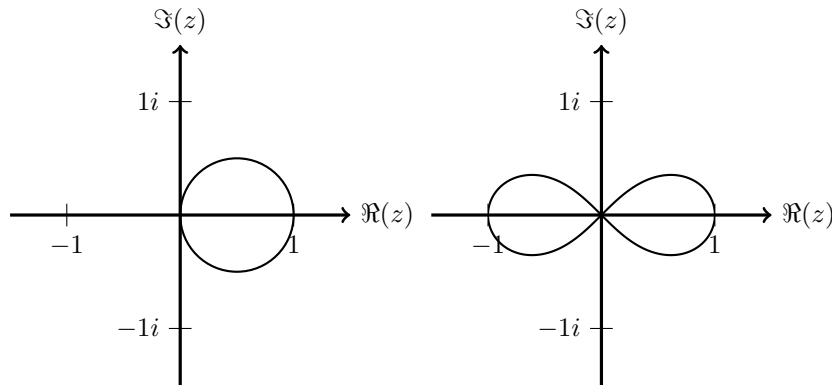


Abbildung 1: Der Kreis (links) und sein Urbild (rechts).

(Man beachte etwa, dass die imaginäre Achse als Tangente des Kreises der Winkelhalbierende, bzw. deren konjugiertes, als Tangente von  $C$  entspricht.)

## Aufgabe 4 (Kleine Stereographische Projektion)

Wir bemerken zunächst, dass der Ausdruck  $(i\lambda + 1)/(i\lambda - 1)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  wohldefiniert ist, da stets  $i\lambda - 1 \neq 0$ . Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist auch  $i\lambda + 1 \neq i\lambda - 1$  (da  $1 \neq -1$ ) und daher  $(i\lambda + 1)/(i\lambda - 1) \neq 1$ . Schließlich ist für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} \right| = \frac{|i\lambda + 1|}{|i\lambda - 1|} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1.$$

Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \setminus \{1\}, \lambda \mapsto \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1}$$

ist also wohldefiniert.

Da jedes  $z \in S^1 \setminus \{1\}$  eine eindeutige Darstellung als  $z = e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in (0, 2\pi)$  hat, genügt es zum Nachweis der Bijektivität von  $\psi$  zu zeigen, dass es für alle  $\varphi \in (0, 2\pi)$  genau ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\varphi$  ein Argument von  $\psi(\lambda)$  ist.

Hierfür bemerken wir für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dass  $\arctan \lambda$  ein Argument von  $i\lambda + 1$  ist und  $-\pi - \arctan \lambda$  ein Argument von  $i\lambda - 1$ .

Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist daher

$$\arctan \lambda - (-\pi - \arctan \lambda) = \pi + 2 \arctan \lambda$$

ein Argument von  $\psi(\lambda)$ . Da  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  bijektiv ist zeigt dies nach der obigen Überlegung die Bijektivität von  $\psi$ .

## Aufgabe 5 (Verschärfte Dreiecksungleichung)

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$  zunächst beliebig aber fest, wobei  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  mit  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ . Wir zeigen zunächst, dass  $|z + w| \leq |z| + |w|$ . Da  $|z + w|, |z| + |w| \geq 0$  ist

$$\begin{aligned} |z + w| &\leq |z| + |w| \\ \Leftrightarrow |z + w|^2 &\leq (|z| + |w|)^2 \\ \Leftrightarrow (x + u)^2 + (y + v)^2 &\leq (x^2 + y^2) + 2|zw| + (u^2 + v^2) \\ \Leftrightarrow xu + yv &\leq |zw|. \end{aligned} \quad (1)$$

Ist  $xu + yv < 0 \leq |zw|$  so zeigt dies die Ungleichung. Ist hingegen  $xu + yv \geq 0$  so ergibt sich durch weiteres Umformen, dass

$$\begin{aligned} xu + yv &\leq |zw| \\ \Leftrightarrow (xu + yv)^2 &\leq |zw|^2 = |z|^2 |w|^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \\ \Leftrightarrow 2xuyv &\leq x^2 v^2 + y^2 u^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (xv - yu)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

was offenbar gilt. Dies zeigt die gewünschte Ungleichung. (Der aufmerksame Leser merkt natürlich, dass bereits (1) aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erfüllt ist.)

Wir behaupten nun, dass die Gleichheit  $|z + w| = |z| + |w|$  für  $z, w \in \mathbb{C}$  genau dann gilt, wenn  $z = 0$  oder  $w = 0$  oder es ein  $\lambda > 0$  gibt mit  $w = \lambda z$ . Dass die Gleichheit in diesen Fällen gilt ist klar (im letzten der drei Fälle gilt

$$|z + w| = |(1 + \lambda)z| = (1 + \lambda)|z| = |z| + \lambda|z| = |z| + |\lambda z| = |z| + |w|).$$

Ist hingegen  $|z + w| = |z| + |w|$ , so ergibt sich, indem man die obige Herleitung mit Gleichheit statt der Abschätzung  $\leq$  wiederholt, aus der (2) entsprechenden Gleichung, dass

$$0 = (xv - yu)^2 \Rightarrow 0 = xv - yu = \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass  $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$  linear abhängig sind, es also ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt mit  $(u, v) = \lambda(x, y)$ . Aus der (1) entsprechenden Gleichung ergibt sich weiter, dass

$$0 \leq |zw| = xu + yv = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2,$$

also im Falle  $(x, y), (u, v) \neq 0$  (und damit insbesondere  $\|(x, y)\|^2 > 0$ ), dass  $\lambda > 0$  sein muss.

Die umgekehrte Dreiecksungleichung ergibt sich daraus, dass nach der bereits gezeigten Ungleichung für alle  $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |z| &= |w + z - w| \leq |w| + |z - w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z - w| \text{ und} \\ |w| &= |z + w - z| \leq |z| + |w - z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|, \end{aligned}$$

also

$$||z| - |w|| = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \leq |z - w|.$$

Die auf dem Aufgabenblatt angegebene Form ergibt sich nun für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  durch

$$||z| - |w|| = ||z| - |-w|| \leq |z - (-w)| = |z + w|.$$

Wir behaupten, dass die Gleichheit  $||z| - |w|| = |z + w|$  genau dann gilt, wenn  $z = 0$  oder  $w = 0$  oder  $w = -\lambda z$  für ein  $\lambda > 0$ . Ist  $z = 0$  oder  $w = 0$  so ist die Gleichheit offenbar erfüllt, und ist  $w = -\lambda z$  für ein  $\lambda > 0$ , so ist

$$\begin{aligned} |z + w| &= |(1 - \lambda)z| = |1 - \lambda||z| = \begin{cases} (1 - \lambda)|z| & \text{falls } \lambda \leq 1 \\ (\lambda - 1)|z| & \text{falls } \lambda > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} |z| - |w| & \text{falls } \lambda \leq 1 \\ |w| - |z| & \text{falls } \lambda > 1 \end{cases} = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \\ &= ||z| - |w||. \end{aligned}$$

Man bemerke hierfür, dass  $|z| \geq \lambda|z| = |w|$  für  $\lambda \leq 1$  und  $|z| \leq \lambda|z| = |w|$  für  $\lambda > 1$ .

Ist andererseits  $||z| - |w|| = |z + w|$  mit  $z, w \neq 0$ , so können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $|z| \geq |w|$  und erhalten so, dass

$$|z| - |w| = |z + w| \Rightarrow |z| = |z + w| + |w| = |z + w| + |-w|.$$

Es ist nach der obigen Diskussion für Bedingungen von Gleichheit bei der normalen Dreiecksungleichung also  $z + w = 0$  (also  $w = -z$ ) oder  $-w = 0$  (was wir wegen  $w \neq 0$  ausschließen können) oder  $z + w = -\lambda w$  und damit  $w = -\frac{1}{1+\lambda}z$  für ein  $\lambda > 0$ .