Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 5

Jendrik Stelzner

12. Mai 2014

Aufgabe 1 (Kettenregel)

Sehen wir $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$, so ist f stetig differenzierbar. Setzen wir

$$u := \Re(f) = f_1 \text{ und } v := \Im(f) = f_2$$

so ist nach der Kettenregel für alle $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
D(f \circ \gamma)(t) &= Df(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t) \\
&= \begin{pmatrix} u_x(\gamma(t)) & u_y(\gamma(t)) \\ v_x(\gamma(t)) & v_y(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \\ v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Schreiben wir diesen Ausdruck wieder als komplexe Zahl, und nutzen wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$, so erhalten wir, dass für alle $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&(f \circ \gamma)'(t) \\
&= u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) + i(v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_y(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\
&= u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v_x(\gamma(t))\gamma_2'(t) + i(v_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_x(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\
&= (u_x(\gamma(t)) + iv_x(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) \\
&= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).
\end{aligned}$$

Es gilt also überraschenderweise die Kettenregel.

Aufgabe 2 (Ausdehnung von Kurven)

Wir gehen davon aus, dass γ zweimal differenzierbar ist, und dass

$$\Psi, \Phi : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

differenzierbar sind. Setzen wir

$$\gamma_1 := \Re(\gamma) \text{ und } \gamma_2 := \Im(\gamma),$$

so ist

$$\begin{aligned}
u(x,y) &:= \Re(f(x,y)) = \gamma_1(x) + \Psi(x,y)\gamma_1'(x) - \Phi(x,y)\gamma_2'(x),\\
v(x,y) &:= \Im(f(x,y)) = \gamma_2(x) + \Psi(x,y)\gamma_2'(x) + \Phi(x,y)\gamma_1'(x).
\end{aligned}$$

Daher ist für alle $(x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \gamma_1'(x) + \Psi_x(x,y)\gamma_1'(x) + \Psi(x,y)\gamma_1''(x)\\
&\quad - \Phi_x(x,y)\gamma_2'(x) - \Phi(x,y)\gamma_2''(x),\\
v_x(x,y) &= \gamma_2'(x) + \Psi_x(x,y)\gamma_2'(x) + \Psi(x,y)\gamma_2''(x)\\
&\quad + \Phi_x(x,y)\gamma_1'(x) + \Phi(x,y)\gamma_1''(x),\\
u_y(x,y) &= \Psi_y(x,y)\gamma_1'(x) - \Phi_y(x,y)\gamma_2'(x),\\
v_y(x,y) &= \Psi_y(x,y)\gamma_2'(x) + \Phi_y(x,y)\gamma_2'(x).
\end{aligned}$$

Dass f holomorph ist, ist äquivalent dazu, dass f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dass also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

Für den Fall, dass $\gamma(t) = t^2$, bemerken wir, dass sich γ zu $f : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ fortsetzen lässt. Wählen wir

$$\begin{aligned}
&\Psi(x,y) : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -\frac{y^2}{2x} \text{ und}\\
&\Phi(x,y) : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y,
\end{aligned}$$

so haben wir $\Psi(x,0) = \Psi_y(x,0) = \Phi(x,0) = 0$ für alle $x \in (0,1)$ und für alle $x + iy \in (0,1) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy\\
&= x^2 + \left(-\frac{y^2}{2x}\right) \cdot 2x + iy \cdot 2x\\
&= \gamma(x) + \Psi(x,y)\gamma'(x) + i\Phi(x,y)\gamma'(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Potenzreihenentwicklung)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist bekanntermaßen

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Für $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1, i\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \frac{1}{z^3 - iz^2 - z + i}$$

hat eine Potenzreihenentwicklung um die Entwicklungstelle 0 einen Konvergenzradius von höchstens 1, da f bei $1, -1$ und i Singularitäten aufweist. Für jedes $z \in \mathbb{C}$

mit $|z| < 1$ ist auch $|z^4| = |z|^4 < 1$, und somit

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^3 - iz^2 - z + i} = \frac{z - (-i)}{(z^3 + (-i)z^2 + (-i)^2 z + (-i)^3)(z - (-i))} \\
&= \frac{z + i}{z^4 - 1} = -(z+i)\frac{1}{1 - z^4} = -(z+i)\sum_{k=0}^{\infty} \left(z^4\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} -(z+i)z^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} -z^{4k+1} - iz^{4k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,
\end{aligned}
$$

mit

$$
a_n = \begin{cases} -i & \text{falls } n \equiv 0 \bmod 4, \\ -1 & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Also lässt sich f um 0 mit einer Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 entwickeln.