Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 2

Jendrik Stelzner

22. April 2014

Aufgabe 1 (Konjugierte Nullstellen)

Bekanntermaßen handelt es sich bei der Konjugation um einen $\mathbb{R}$-Algebraautomorphismus von $\mathbb{C}$ (dem einzigen neben der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$). Inbesondere ist $\bar{x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist daher für alle $\rho \in \mathbb{C}$

$$\overline{P(\rho)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{\rho}^k = P(\bar{\rho}).$$

Also ist für alle $\rho \in \mathbb{C}$

$$0 = P(\rho) \Leftrightarrow 0 = \overline{P(\rho)} \Leftrightarrow 0 = P(\bar{\rho}).$$

Aufgabe 2 (Niveaulinien komplexwertiger Funktionen)

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

also

$$\Re\left(z^2\right) = x^2 - y^2 \text{ und } \Im\left(z^2\right) = 2xy.$$

Für die Niveaulinie von $\Re\left(z^2\right)$ für $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich, dass $x^2 - y^2 = c$ für $x^2 < c$ keine Lösung besitzt, und sonst, dass $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$. Für die Niveulinienen von $\Im\left(z^2\right) = 2xy$ ergibt sich für $c = 0$ die Vereinigung von reeler und imaginärer Achse, und für $c \neq 0$ gerade $y = 2/(cx)$. Für ein Bild der Niveulinien siehe Abbildung 1 auf Seite 2.

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2},$$

also

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ und } \Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

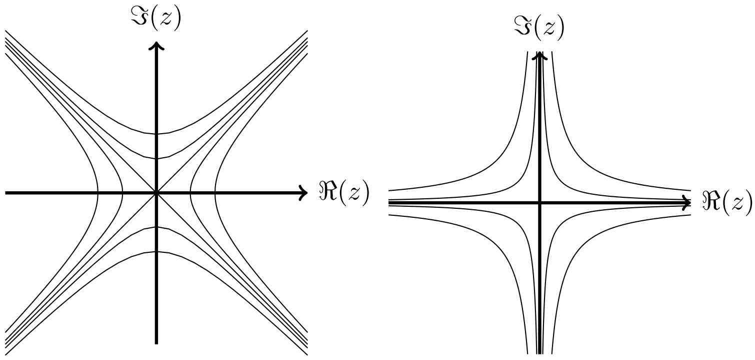

Abbildung 1: Niveulinien von $\Re\left(z^2\right)$ (links) und $\Im\left(z^2\right)$ (rechts).

Um die Niveulinien von $\Re(f)$ für $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^{-1}$ zu bestimmen bemerken wir zunächst, dass f involutiv ist. Es ist daher für alle $c \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\Re(f(z)) = c &\Leftrightarrow f(z) \in \{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow z \in f^{-1}(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}) \\ &\Leftrightarrow z \in f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}).\end{aligned}$$

Wir bestimmen also $f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\})$. Für $c = 0$ erhalten wir so, dass

$$\Re(f(z)) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wir behaupten, dass für $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

$$f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left| z - \frac{1}{2c} \right| = \frac{1}{2|c|} \right\}.$$

Dies ergibt sich daraus, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1 \setminus \{1\}, \lambda \to (i\lambda + 1)/(i\lambda - 1)$ eine Bijektion ist, und für $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

$$\begin{aligned}&f(\{c + i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) = f(\{c - i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}) = \left\{ \frac{1}{c - i\lambda} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{c - i\lambda} - \frac{1}{2c} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} = \left\{ \frac{c + i\lambda}{2c(c - i\lambda)} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} \\ &= -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\lambda + c}{i\lambda - c} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} = -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\frac{\lambda}{c} + 1}{i\frac{\lambda}{c} - 1} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2c} \\ &= -\frac{1}{2c} \left\{ \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2c} \left(S^1 \setminus \{1\} \right) + \frac{1}{2c} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left| z - \frac{1}{2c} \right| = \frac{1}{2|c|} \right\}.\end{aligned}$$

Die Niveulinien von $\Re(1/z)$ sind also die imaginäre Achse ohne 0 und die Kreise mit Radius $1/(2|c|)$ um den Mittelpunkt $1/(2c)$ für $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

Für die Niveulinien von $\Im(1/z)$ bemerken wir, dass $\Im(1/z) = \Re(1/(iz))$. Die Niveulinien von $\Im(1/z)$ ergeben sich also aus denen von $\Re(1/z)$ durch Rotation um $\pi/2$.

Skizziert sehen die Niveulinien aus wie in Abbildung 2 auf Seite 3.

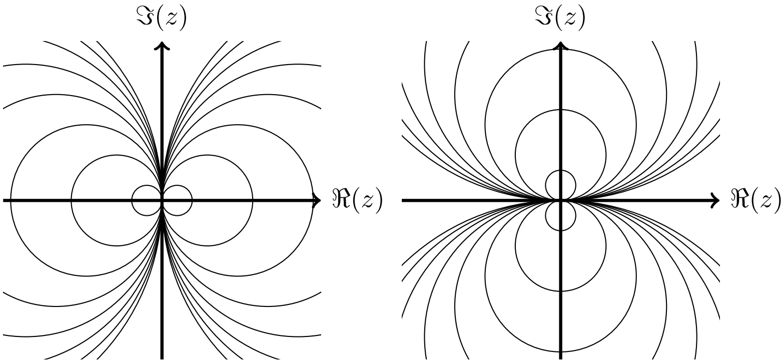

Abbildung 2: Niveulinien von $\Re(1/z)$ und $\Im(1/z)$.

Aufgabe 3 (Real- und Imaginärteil quadratischer Funktionen)

Wir behaupten, dass $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ genau dann Realteil des komplexen Polynoms $P(z) = Az^2 + Bz + C$ ist, wenn $c = -a$.

Ist $c = -a$, so ist für beliebiges $b \in \mathbb{R}$

$$p(x,y) = ax^2 + bxy - ay^2 = \Re\left(\left(a - \frac{1}{2}bi\right)(x+iy)^2\right).$$

Sei andererseits $p = \Re(P)$. Da

$$\Re(C) = \Re(P(0)) = p(0,0) = 0$$

ist $p = \Re(Az^2 + Bz)$, wir können also o.B.d.A. davon ausgehen, dass $C = 0$. Da für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &= p(x,y) - p(-x,-y) = \Re(P(z)) - \Re(P(-z)) \\ &= \Re(P(z) - P(-z)) = \Re(Bz - B(-z)) = \Re(2Bz) = 2\Re(Bz) \end{aligned}$$

ist $\Re(Bz) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da $0 = \Re(B\bar{B}) = \Re(|B|^2) = |B|^2$ folgt daraus, dass $B = 0$. Also ist $P(z) = Az^2$ für $A = x_A + iy_A \in \mathbb{C}$. Es ist daher

$$p(x,y) = \Re(Az^2) = \Re((x_A + iy_A)(x+iy)^2) = x_A x^2 - 2y_A xy - x_A y^2,$$

was die Behauptung zeigt.

Man bemerke noch, dass p genau dann Imaginärteil eines komplexen Polynoms vom Grad n ist, wenn p Realteil eines komplexen Polynoms vom Grad n ist, denn $p = \Im(P) \Leftrightarrow p = \Re(-iP)$, bzw. $p = \Re(P) \Leftrightarrow p = \Im(iP)$ für jedes komplexe Polynom P. Also ist p genau dann Imaginärteil eines Polynoms $P(z) = Az^2 + Bz + C$, wenn $a = -c$.

Aufgabe 4 Betrag der Exponentialabbildung

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$|e^z| = \left|e^{\Re(z) + i\Im(z)}\right| = \left|e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}\right| = \left|e^{\Re(z)}\right| \left|e^{i\Im(z)}\right| = e^{\Re(z)}.$$

Aufgabe 5 (Der Sinus im Komplexen)

Wir bemerken zunächst, dass für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\cos(x) + i\frac{e^{-y}+e^{y}}{2i}\sin(x) \\ &= \cosh(y)\sin(x) + i\sinh(y)\cos(x). \qquad (1)\end{aligned}$$

Es sei nun

$$\begin{aligned} S^+ &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re(z) = \frac{\pi}{2}, \Im(z) \geq 0 \right\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + \lambda i : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \right\}, \\ S^- &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re(z) = -\frac{\pi}{2}, \Im(z) \leq 0 \right\} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + \lambda i : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq 0 \right\}, \end{aligned}$$

sowie

$$T := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| < \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ x + iy : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da für alle $\pi/2 + i\lambda \in S^+$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\lambda\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(i\lambda) + \sin(i\lambda)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(i\lambda) = \cosh(\lambda)$$

und $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ bijektiv ist, ist $\sin : S^+ \to [1,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ bijektiv. Analog ist für alle $\pi/2 + i\lambda \in S^-$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + i\lambda\right) = -\cosh(\lambda),$$

also $\sin : S^- \to (-\infty, -1] \subseteq \mathbb{R}$ bijektiv.

Um die Bijektivität $\sin : S^+ \cup S^- \cup T \to \mathbb{C}$ zu zeigen, genügt es nun zu zeigen, dass

$$\sin : T \to \mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,\infty)) =: A$$

bijektiv ist.

Hierfür bemerken wir zunächst, dass tatsächlich $\sin z \in A$ für alle $x+iy = z \in T$, denn da $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist $\Re(\sin z) = \sin(x) \in (-1,1)$ für $y = 0$ und $\Im(z) \neq 0$ für $y \neq 0$.

Als Nächstes zeigen wir, dass $\sin : T \to A$ injektiv ist. Seien $x + iy, x' + iy' \in T$ mit $\sin(x+iy) = \sin(x'+iy')$.

Ist $x \neq x'$ und $y \neq y'$, so bemerken wir zunächst, dass aus (1) folgt, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(x) &= \operatorname{sgn}(\cosh(y)\sin(x)) = \operatorname{sgn}(\cosh(y')\sin(x')) = \operatorname{sgn}(x') \text{ und} \\ \operatorname{sgn}(y) &= \operatorname{sgn}(\sinh(y)\cos(x)) = \operatorname{sgn}(\sinh(y')\cos(x')) = \operatorname{sgn}(y'). \end{aligned}$$

Es muss also bereits $|x| \neq |x'|$ und $|y| \neq |y'|$. Wir können dabei o.B.d.A. davon ausgehen, dass $|x| < |x'|$. Da daher $|\sin(x)| < |\sin(x')|$ folgt aus

$$\cosh(y)|\sin(x)| = \cosh(y')|\sin(x')|,$$

dass $\cosh(y) > \cosh(y')$, also $|y| > |y'|$. Aus $|x| < |x'|$ und $|y| < |y'|$ folgt, dass $|\sinh(y)| > |\sinh(y')|$ und $\cos(x) > \cos(x')$, also

$$|\sinh(y)|\cos(x) > |\sinh(y')|\cos(x').$$

Dies steht wegen (1) im Widerspruch zu $\sin(x + iy) = \sin(x' + iy')$. Es muss also $x = x'$ oder $y = y'$.

Ist $x = x'$, so folgt aus (1), dass $\sinh y = \sinh y'$ (da $\cos(x) = \cos(x') \neq 0$), also $y = y'$ (denn $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv). Ist $y = y'$, so folgt aus (1), dass $\sin(x) = \sin(x')$ (denn $\cosh y = \cosh y' \neq 0$), also $x = x'$ (denn $\sin(-\pi/2, \pi/2) \to (-1, 1)$ ist bijektiv).

Dass zeigt, dass für $x + iy, x' + iy' \in T$ mit $\sin(x + iy) = \sin(x' + iy')$ bereits $x = x'$ und $y = y'$, also $x + iy = x' + iy'$. Das zeigt, dass $\sin : T \to A$ injektiv ist.

Zuletzt zeigen wir, dass $\sin : T \to A$ surjektiv ist, also $A = \sin(T)$. Indem man $x = 0$, bzw. $y = 0$ fest wählt, wird aus (1) klar, dass $i\mathbb{R} \in \sin(T)$, bzw. $(-1, 1) \in \sin(T)$. Aus (1) ergibt sich auch direkt, dass $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin z}$ und $\sin(-z) = -\sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da T unter $z \mapsto -z$ und $z \mapsto \bar{z}$ abgeschlossen ist, genügt es daher zum Nachweis der Surjektivität zu zeigen, dass $A' \subseteq \sin(T)$ für

$$A' = \{z \in A : \Re(z), \Im(z) > 0\} = \{x + iy : x, y \in (0, \infty)\}.$$

Sei $z \in A'$ beliebig aber fest. Man bemerke, dass $|z| > 0$ und $\arg(z) \in (0, \pi/2)$. Für $y > 0$ betrachten wir die Abbildung

$$\varphi_y : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C}, x \to \sin(x + iy) = \cosh(y)\sin(x) + i\sinh(y)\cos(x).$$

Offenbar ist $\varphi_y(0) = i\sinh(y)$ und $\varphi_y(\pi/2) = \cosh(y)$. Insbesondere ist daher

$$\arg(\varphi_y(0)) = \frac{\pi}{2} \text{ und } \arg\left(\varphi_y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0,$$

wobei klar ist, dass $\arg \circ \varphi_y : [0, \pi/2] \to [0, \pi/2]$ stetig und streng monoton fallend ist. Insbesondere gibt es daher ein eindeutiges $x_y \in (0, \pi/2)$ mit $\arg(\varphi_y(x_y)) = \arg(z)$, wobei klar ist, dass x_y stetig von y abhängt.

Wir bemerken, dass $\sinh(y) \leq |\varphi_y(x)| \leq \cosh(y)$ für alle $y > 0$ und $x \in [0, \pi/2]$, da nach (1)

$$|\varphi_y(x)| = \sqrt{\cosh^2(y)\sin^2(x) + \sinh^2(y)\cos(x)}$$

und

$$\begin{aligned} &\sqrt{\cosh^2(y)\sin^2(x) + \sinh^2(y)\cos^2(x)} \\ &= \sqrt{(1 + \sinh^2(y))\sin^2(x) + \sinh^2(y)\cos^2(x)} \\ &= \sqrt{\sin^2(x) + \sinh^2(y)} \geq \sinh(y) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\sqrt{\cosh^2(y)\sin^2(x) + \sinh^2(y)\cos^2(x)} \\ &= \sqrt{\cosh^2(y)\sin^2(x) + (\cosh^2(y) - 1)\cos^2(x)} \\ &= \sqrt{\cosh^2(y) - \cos^2(x)} \leq \cosh(y). \end{aligned}$$

Insbesondere gibt es daher $0 < y_- < y_+$, so dass $|\varphi_{y_-}(x_{y_-})| < |z| < |\varphi_{y_+}(x_{y_+})|$. Da x_y stetig von y abhängt, und damit auch $|\varphi_y(x_y)|$, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $y_- < y_0 < y_+$ mit $|\varphi_{y_0}(x_{y_0})| = |z|$. Da nach Konstruktion auch $\arg(\varphi_{y_0}(x_{y_0})) = \arg(z)$ folgt damit, dass $\varphi_{y_0}(x_{y_0}) = \sin(x_{y_0} + iy_0) = z$. Da $x_{y_0} \in (0, \pi/2)$ und $y_0 > 0$, also $x_{y_0} + iy_0 \in T$, zeigt dies die Surjektivität von $\sin : T \to A$.