Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 8

Jendrik Stelzner

1. Juni 2014

Aufgabe 1

1.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \Re\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \Re\left(r^n e^{2\pi int}\right) 2\pi i r e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \Re\left(e^{2\pi int}\right) e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \cos(2\pi nt) e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos(2\pi nt) e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{2\pi int} + e^{-2\pi int}\right) e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2\pi i(1+n)t} + e^{2\pi i(1-n)t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\int_\gamma \Re\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \pi i r^2 & \text{falls } n = 1, \\ \pi i & \text{falls } n = -1, \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Analog ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\int_\gamma \Im\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \sin(2\pi nt) e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t \\ &= \pi r^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i(1+n)t} - e^{2\pi i(1-n)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} -\pi r^2 & \text{falls } n = 1, \\ \pi & \text{falls } n = -1, \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

2.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}^n \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \overline{re^{2\pi it}}^n 2\pi i r e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i r^{n+1}\int_0^1 e^{2\pi i(1-n)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 2\pi i r^2 & \text{falls } n=1, \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Da $[a,b]$ kompakt ist, und $f\circ\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ stetig ist, existiert das Maximum

$$M := \max_{a\leq t\leq b} |f(\gamma(t))|,$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = ML(\gamma).\end{aligned}$$