Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 1

Jendrik Stelzner

12. April 2014

Aufgabe 1 (Real und Imaginärteil)

Es ist

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i(1+i)} = \frac{1}{i} = -i,$$

und

$$\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$

Da $i^2 = -1$ (also insbesondere $i^4 = 1$) ist für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$i^n = i^{(n \bmod 4)} \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0 \mod 4, \\ i & \text{falls } n \equiv 1 \mod 4, \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2 \mod 4, \\ -i & \text{falls } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Schließlich ist

$$\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n = \Re\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n + i\Im\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right)^n$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k &= \sum_{k=1}^{7} e^{ik\pi/4} = \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=4}^{7} e^{ik\pi/4} \\ &= \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=0}^{3} e^{ik\pi/4+i\pi} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=1}^{3} -e^{ik\pi/4} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Real- und Imaginärteile ergeben sich durch direktes Ablesen.

Aufgabe 2 (Betrag und Argument)

Es ist

$$|1+3i| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10} \text{ und } \arg(1+3i) = \arctan 3.$$

Wegen der 2π-Periodizität der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ ist

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)^9 - (1-i)^9 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^9 - \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^9 \\ &= 2^{9/2}(e^{i\pi/4} - e^{i\pi/4}) = 16((1+i) - (1-i)) \\ &= 32i, \end{aligned}$$

also

$$|z_1| = 32 \text{ und } \arg z_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Da $i^2 = -1$ und $i^4 = 1$ ist $z_2 = i^{2014} = -1$, also

$$|z_2| = 1 \text{ und } \arg z_2 = \pi.$$

Für $z_3 = \frac{1+ia}{1-ia}$ ist

$$|z_3| = \frac{|1+ia|}{|1-ia|} = \frac{|1+ia|}{|\overline{1+ia}|} = 1,$$

und da

$$\arg(1+ia) = \arctan a \text{ und } \arg(1-ia) = \arctan -a = -\arctan a.$$

ist

$$\arg z_3 = \arg(1+ia) - \arg(1-ia) = 2\arctan a.$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und

$$z_n = (i-1)^n = \left(\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{in3\pi/4}$$

ist $|z_n| = \sqrt{2}^n$ und $n\frac{3}{4}\pi$ ein Argument von z_n.

Aufgabe 3 (Bestimmte Teilmengen)

a)

Da $\Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und für alle $t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$

$$\frac{z-3}{1+i} = t \Leftrightarrow z = 3 + t(1+i)$$

ist

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) = 0 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{z-3}{1+i} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{3 + t(1+i) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Es handelt sich bei A_0 also um eine Gerade.

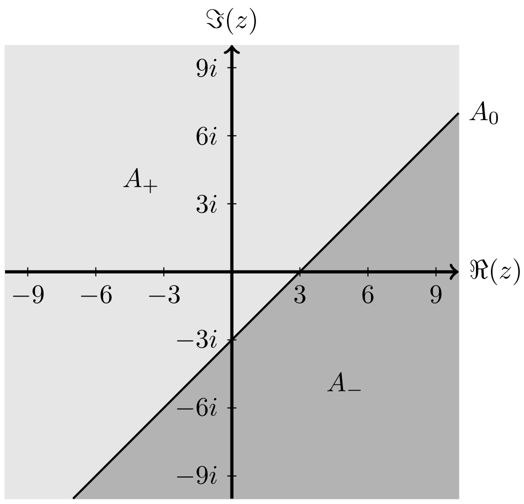
Analog ergibt sich nun auch, dass

$$\begin{aligned} A_+ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) > 0 \right\} \\ &= \left\{ 3 + t(1+i) + y(i-1) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_- &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-3}{1+i}\right) > 0 \right\} \\ &= \left\{ 3 + t(1+i) + y(i-1) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^- \right\}. \end{aligned}$$

Es ist also A_+ der Teil der komplexen Ebene, der über A_0 liegt, und A_- der Teil der komplexen Ebene, der unter A_0 liegt. Zusammengefasst ergibt sich die folgende Skizze.



b)

Es ist $B = \emptyset$, denn für alle $z \in B$ ist

$$i = 3z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2 = 3|z|^2 - 2\Im(z) + 2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (Kleine Stereograpische Projektion)

Wir bemerken zunächst, dass der Ausdruck $(i\lambda + 1)/(i\lambda - 1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, da stets $i\lambda - 1 \neq 0$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch $i\lambda + 1 \neq i\lambda - 1$ (da $1 \neq -1$) und daher $(i\lambda + 1)/(i\lambda - 1) \neq 1$. Schließlich ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} \right| = \frac{|i\lambda + 1|}{|i\lambda - 1|} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1.$$

Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{1\}, \lambda \mapsto \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1}$$

ist also wohldefiniert.
Da jedes $z \in S^1 \setminus \{1\}$ eine eindeutige Darstellung als $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (0, 2\pi)$ hat, genügt es zum Nachweis der Bijektivität von ψ zu zeigen, dass es für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$ genau ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\arg \psi(z) = \varphi$ gibt. (Wir fassen arg hier als eine Abbildung $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$ auf.)
Hierfür bemerken wir, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\arg(i\lambda + 1) = \arctan \lambda$$

sowie

$$\arg(i\lambda - 1) = \arg(-i\lambda + 1) - \pi = 2\pi - \arctan(\lambda) - \pi = \pi - \arctan \lambda.$$

Es ist also für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\arg \frac{i\lambda + 1}{i\lambda - 1} = 2\pi - (\arctan \lambda - (\pi - \arctan \lambda)) = \pi - 2 \arctan \lambda.$$

Da $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ bijektiv ist zeigt dies nach der obigen Überlegung die Bijektivität von ψ.