Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 4

Jendrik Stelzner

5. Mai 2014

Aufgabe 1

1.

Es seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, beliebig aber fest, sowie $\lambda := \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Für die Transpositionen $(1\ 2) \in S_4$ ist offenbar

$$\mathrm{DV}(z_2, z_1, z_3, z_4) = \frac{1}{\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Durch ekelhaftes Herumrechnen, auf das ich keine Lust hatte, sollte sich ergeben, dass die Translationen $(1;3)$ und $(1;4)$ die Ausdrücke der Form

$$1 - \lambda \text{ und } \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

ergeben. Da diese drei Transpositionen die S_4 erzeugen, folgt die zu zeigende Aussage dann direkt, da die gegebenen 6 möglichen Werte unter diesen Operationen abgeschlossen sind.

3.

Es genügt die Aussage für Elementarmatrizen nachzurechnen, da die $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ von diesen erzeugt wird, und die Abbildung $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \{\text{Möbustransformationen}\}, A \mapsto g_A$ bekanntermaßen ein Gruppenhomomorphismus ist.

Für die Matrix

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } g_I(z) = \frac{1}{z}$$

ist, sofern $z_1, z_2, z_3, z_4 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{DV}(g_I(z_1), g_I(z_2), g_I(z_3), g_I(z_4)) \\
&= \frac{(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4})}{(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4})} = \frac{\frac{z_3 - z_1}{z_1 z_3} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_2 z_4}}{\frac{z_3 - z_2}{z_2 z_3} \cdot \frac{z_4 - z_1}{z_1 z_4}} \\
&= \frac{z_2 z_3 z_1 z_4}{z_1 z_3 z_2 z_4} \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \\
&= \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4).
\end{aligned}$$

Für die Elementarmatrizen der Form

$$S_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{C}^\times \text{ und } g_{S_a}(z) = az$$

und die Elementarmatrizen

$$T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } b \in \mathbb{C} \text{ und } g_{T_b}(z) = z + b$$

ist die Invarianz offensichtlich.

4.

Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} z_2 - z_4 & -z_3(z_2 - z_4) \\ z_2 - z_3 & -z_4(z_2 - z_3) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

ist $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, denn z_2, z_3 und z_4 sind paarweise verschieden, und somit

$$\begin{aligned} \det(A) &= -z_4(z_2 - z_4)(z_2 - z_3) + z_3(z_2 - z_4)(z_2 - z_3) \\ &= (z_3 - z_4)(z_2 - z_4)(z_2 - z_3) \neq 0. \end{aligned}$$

Daher ist für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_2, z_3, z_4\}$

$$\mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z - z_4)} = \frac{(z_2 - z_4)z - z_3(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)z - z_4(z_2 - z_3)} = g_A(z).$$

Das zeigt, dass $\mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4)$ eine Möbiustransformation ist.

Es ist direkt klar, dass

$$\mathrm{DV}(z_2, z_2, z_3, z_4) = 1 \text{ und } \mathrm{DV}(z_3, z_2, z_3, z_4) = 0.$$

An der Stelle $z = z_4$ ist $\mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4)$ zwar streng genommen nicht definiert, es lässt sich aber g_A eindeutig zu einem Homöomorphismus $\tilde{g}_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen. Es gilt $\tilde{g}_A(z_4) = \infty$, denn für eine Folge (z_n) auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_4\}$ mit $z_n \to z_4$ für $n \to \infty$, und o.B.d.A. $z_n \neq \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\tilde{g}_A(z_n) = g_A(z_n) = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_n - z_3}{z_n - z_4} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \cdot \left(1 + \frac{z_4 - z_3}{z_n - z_4}\right),$$

also $|\tilde{g}_A(z_n)| \to \infty$ in $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$, und damit $\tilde{g}_A(z_n) \to \infty$ in $\hat{\mathbb{C}}$ für $n \to \infty$. Da $\tilde{g}_A$ folgenstetig ist, folgt, dass $\tilde{g}_A(z_4) = \infty$.

Aufgabe 2

Schreiben wir $f_1(x + iy) := \Re(x + iy) = x$ als $f_1 = u_1 + iv_1$, so ist f_1 offenbar glatt mit

$$(u_1)_x = 1 \text{ und } (v_1)_y = 0.$$

Daher sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nirgends erfüllt, f_1 also nirgends komplex differenzierbar.

Die Abbildung $f_2(z) := \cos(z^2)$ ist nach der Kettenregel auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar: Denn $z \mapsto z^2$ ist als Polynom auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar, und cos ist wegen $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ nach Aufgabe 4 auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Die Abbildung $f_3(x + iy) := |x + iy|^2 = x^2 + y^2$ ist offenbar glatt, und mit $f_3 = u_3 + iv_3$ ist für alle $x + iy \in \mathbb{C}$

$$(u_3)_x(x + iy) = 2x \text{ und } (v_3)_y(x + iy) = 0 \text{ sowie}$$
$$(u_3)_y(x + iy) = 2y \text{ und } (v_3)_x(x + iy) = 0.$$

Daher ist f_3 nach den Cauchy-Riamannschen Differentialgleichungen nur an 0 komplex differenzierbar.

Für die glatte Funktion $f_4(x + iy) := xy - 2ixy$ mit $f_4 = u_4 + iv_4$ ist

$$(u_4)_x(x + iy) = y \text{ und } (v_4)_y(x + iy) = -2x \text{ sowie}$$
$$(u_4)_y(x + iy) = x \text{ und } (v_4)_x(x + iy) = -2y$$

für alle $x + iy \in \mathbb{C}$. f_4 ist nur an 0 komplex differenzierbar, da f_4 offenbar nur dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

Für $f_5(x + iy) := \exp(\Re(x + iy)) = \exp(x)$ ist mit $f_5 = u_5 + iv_5$

$$(u_5)_x(x + iy) = \exp(x) \text{ und } (v_5)_y(x + iy) = 0 \text{ für alle } x + iy \in \mathbb{C}.$$

Da $\exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist daher f_5 nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nirgends komplex differenzierbar.

Aufgabe 3

2.

Da f auf U holomorph ist, ist nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $(\Re(f))_x = (\Im(f))_y$ und $(\Re(f))_y = -(\Im(f))_x$ auf U. Nimmt f nur reelle Werte an, so ist $\Im(f) = 0$ und daher

$$(\Re(f))_x = (\Im(f))_y = 0 \text{ und } (\Re(f))_y = -(\Im(f))_x = 0 \text{ auf } U.$$

Sehen wir $U \subseteq \mathbb{R}^2$, so ist daher $\nabla\Re(f) = 0$ auf U. Da U wegzusammenhängend ist, ist damit $\Re(f)$ konstant auf U. Da $\Im(f) = 0$ ist deshalb f konstant auf U.

1.

Da f und g holomorph auf U sind, ist auch $i(f - g)$ holomorph auf U. Da

$$\Im(i(f - g)) = \Re(f - g) = \Re(f) - \Re(g) = 0$$

nimmt $i(f - g)$ auf U nur reelle Werte an. Nach Aufgabenteil 2 ist $i(f - g)$ daher konstant auf U. Also ist auch $\Im(f - g) = -\Re(i(f - g))$ konstant auf U.

3.

Wir schreiben $f = u + iv$. Wir zeigen per Induktion über den Totalgrad $\deg u$, dass f bereits ein komplexes Polynom ist.

Ist $\deg u = 0$, so ist u konstant. Nach Aufgabenteil 1 ist daher auch v konstant. Daher ist $f = u + iv$ ein konstantes komplexes Polynom.

Sei nun $n := \deg u$ mit $n \geq 1$ und es gelte die Aussage für $0, 1, \dots, n-1$. Da $f = u + iv$ auf U holomorph ist, ist es auch $f' = u_x + iv_x$. Da u ein Polynom in x und y ist, ist es auch u_x. Da $\deg f' < \deg f = n$ ist nach Induktionsvoraussetzung f' ein komplexes Polynom, d.h. es ist $f'(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ für alle $z \in U$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $a_k = 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Für das komplexe Polynom $F : U \to \mathbb{C}$ mit

$$F(z) := \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1} \text{ für alle } z \in U$$

ist $F' = f'$ auf U. Da U zusammenhängend ist daher $F - f$ konstant auf U. Also ist f ein komplexes Polynom.

Aufgabe 4

1.

Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}\exp(z) &= \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) \\ &= \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) \\ &= \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Es ist daher klar, dass exp, aufgefasst als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, glatt ist. Da

$$\begin{aligned}(\Re(\exp))_x(x+iy) &= \exp(x)\cos(y) = (\Im(\exp))_y(x+iy) \text{ und} \\ (\Re(\exp))_y(x+iy) &= -\exp(x)\sin(y) = -(\Im(\exp))_x(x+iy).\end{aligned}$$

erfüllt exp die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf ganz $\mathbb{C}$. Also ist exp auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\exp'(x+iy) &= (\Re(\exp))_x(x+iy) + i(\Im(\exp))_x(x+iy) \\ &= \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y) = \exp(x+iy).\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ stetig ist: Für offene Intervalle $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ und $(c,d) \subseteq (-\pi, \pi)$ ist

$$\begin{aligned}&\log^{-1}((a,b) \times (c,d)) \\ &= \exp((a,b) \times (c,d)) \\ &= \{z \in \mathbb{C}^- : \exp(a) < |z| < \exp(b) \text{ und } c < \arg(z) < d\} \\ &= |\cdot|^{-1}((\exp(a), \exp(b))) \cap \arg^{-1}((c,d))\end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von $\arg : \mathbb{C}^- \to (-\pi, \pi)$ und $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ offen. Da die Produktmengen von offene Intervallen der obigen Form eine topologische Basis von $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ bilden, zeigt dies die Stetigkeit.

Wir zeigen, dass log für alle $z \in \mathbb{C}^-$ komplex differenzierbar an z ist, und dass $\log'(z) = 1/z$. Es sei (z_n) eine Folge auf $\mathbb{C}^-$ mit $z_n \neq z$ für alle n und $z_n \to z$ für

$n \to \infty$. Wir setzen $w_n := \log(z_n)$ für alle n und $w := \log(z)$. Wegen der Stetigkeit von log ist $w_n \to w$ für $n \to \infty$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log(z_n) - \log(z)}{z_n - z} &= \lim_{n\to\infty} \frac{w_n - w}{\exp(w_n) - \exp(w)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\exp(w_n)-\exp(w)}{w_n - w}} \\
&= \frac{1}{\exp'(w)} = \frac{1}{\exp(w)} = \frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit der Folge (z_n) folgt die Behauptung.

2.

Für $z \in \mathbb{C}^-$ lässt sich der Ausdruck z^n mit $n \in \mathbb{Z}$ sowohl als

$$z^n := \begin{cases} \prod_{i=1}^n z & \text{falls } n > 0, \\ 1 & \text{falls } n = 0, \\ 1/z^{-n} & \text{falls } n < 0, \end{cases}$$

als auch als $\exp(n \log(z))$ verstehen. Diese beiden Bedeutungen sind infsofern konsistent zueinander, dass $\exp(n \log(z)) = z^n$ für all $n \in \mathbb{Z}$: Es ist klar, dass

$$\exp(0 \cdot \log(z)) = 1$$

und

$$\exp(1 \cdot \log(z)) = z,$$

und daher auch

$$\exp(-1 \cdot \log(z)) \cdot z = \exp(-1 \cdot \log(z)) \cdot \exp(\log(z)) = \exp(0) = 1,$$

also $\exp(-1 \cdot \log(z)) = 1/z = z^{-1}$. Für alle anderen $n \in \mathbb{Z}$ ergibt sich die Aussage induktiv aus diesen Fällen.

Da exp auf $\mathbb{C}$ und log auf $\mathbb{C}^-$ komplex differenzierbar ist, ergibt sich aus der Kettenregel, dass für alle $s \in \mathbb{C}$ auch

$$f_s : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C} \text{ mit } f_s(z) = z^s = \exp(s \log(z))$$

komplex differenzierbar auf $\mathbb{C}^-$ ist, und

$$f_s'(z) = \exp(s \log(z)) \cdot s \cdot \frac{1}{z} = s \cdot z^{s-1}.$$