Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 8

Jendrik Stelzner

2. Juni 2014

Aufgabe 1

1.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \Re\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \Re\left(r^n e^{2\pi int}\right) 2\pi i r e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \Re\left(e^{2\pi int}\right) e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \cos(2\pi nt) e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos(2\pi nt)e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{2\pi int} + e^{-2\pi int}\right) e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2\pi i(1+n)t} + e^{2\pi i(1-n)t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\int_\gamma \Re\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \pi i r^2 & \text{falls } n = 1, \\ \pi i & \text{falls } n = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\int_\gamma \Im\left(z^n\right)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i r^{n+1} \int_0^1 \sin(2\pi nt)e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t \\ &= \pi r^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i(1+n)t} - e^{2\pi i(1-n)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} -\pi r^2 & \text{falls } n = 1, \\ \pi & \text{falls } n = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

2.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}^n \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \overline{re^{2\pi it}}^n 2\pi ire^{2\pi it}\,\mathrm{d}t = 2\pi ir^{n+1}\int_0^1 e^{2\pi i(1-n)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 2\pi ir^2 & \text{falls } n=1, \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

3.

Aufgabe 3

Da $[a,b]$ kompakt ist, und $f\circ\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ stetig ist, existiert das Maximum

$$M := \max_{a\le t\le b} |f(\gamma(t))|,$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t)\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le M\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = ML(\gamma).\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir fixieren zunächst einen Basispunkt $a\in U$. Wegen der Konvexität von U existieren für jedes $z\in\mathbb{C}$ der Weg

$$\gamma_z : [0,1]\to U \text{ mit } \gamma_z(t) := a + t(z-a) \text{ für alle } t\in[0,1].$$

Wir definieren $F : U\to\mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z \text{ für alle } z\in U,$$

und behaupten, dass F auf U eine Stammfunktion von f ist.

Sei $z_0\in U$ beliebig aber fest. Wir zeigen, dass F an z_0 komplex differenzierbar ist mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Hierfür definieren wir für alle $z\in\mathbb{C}$ den Weg

$$\Gamma_z : [0,1]\to U \text{ mit } \Gamma_z(t) := z_0 + t(z-z_0) \text{ für alle } t\in[0,1],$$

der wegen der Konvexität von U wohldefiniert ist. Für alle $z\in U$ ist dann

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\gamma_{z_0}+\Gamma_z-\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{z_0}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))(z-z_0)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

also

$$F(z) = F(z_0) + (z-z_0)\Delta(z),$$

wobei $\Delta : U \to \mathbb{C}$ als

$$\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,\mathrm{d}t \text{ für alle } z \in U$$

definiert ist.

Es ist klar, dass $\Delta(z_0) = f(z_0)$. Δ ist stetig an z_0, denn f ist stetig, und für alle $z \in U$ ist

$$\begin{aligned}
|\Delta(z) - \Delta(z_0)| &= \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \max_{0 \le t \le 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|.
\end{aligned}$$

Zusammen zeigt, dies, dass F an z_0 komplex differenzierbar ist mit $F'(z_0) = f(z)$. Aus der Beliebigkeit von $z_0 \in U$ folgt, dass F auf U holomorph ist mit $F' = f$. Also besitzt f auf U eine Stammfunktion.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer, offen und konvex. Für $z_1, z_2 \in U$ mit $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ und den Weg

$$\gamma : [0, 1] \to U, z_1 + t(z_2 - z_1)$$

ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \Re(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \Re(z_1 + t(z_2 - z_1))(z_2 - z_1)\,\mathrm{d}t \\
&= (z_2 - z_1) \int_0^1 x_1 + t(x_2 - x_1)\,\mathrm{d}t \\
&= (z_2 - z_1) \left(x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} \right) \\
&= (z_2 - z_1) \frac{x_1 + x_2}{2}.
\end{aligned}$$

Seien $x + iy, x' + iy' \in U$ mit $x \ne x'$ und $y \ne y'$, so dass $x' + iy \in U$. Für das von $x + iy$, $x' + iy'$ und $x + iy'$ aufgespannte Dreieck Δ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= (x' - x + i(y' - y)) \frac{x + x'}{2} + (x - x') \frac{x + x'}{2} + i(y - y') \frac{x + x}{2} \\
&= i(y' - y) \frac{x + x'}{2} - i(y' - y)x = \frac{i}{2}(y' - y)(x' - x) \ne 0.
\end{aligned}$$

Deshalb kann $\Re$ auf U kein Stammfunktion besitzen. Da jede nichtleere offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtleere, offene, konvexe Teilmenge besitzt, besitzt $\Re$ auf keiner nichtleeren offenen Mengen eine Stammfunktion. Daher besitzt auch $\Im$ auf keiner nichtleeren offenen Menge eine Stammfunktion, da wegen $\Re(z) = \Im(-iz)$ sonst auch $\Re$ dort eine Stammfunktion hätte.