

EINFÜHRUNG IN DIE KOMPLEXE ANALYSIS

BLATT 6

Jendrik Stelzner

21. Mai 2014

Aufgabe 1 (Konvergenzradius)

Da

$$\sum_n a_n z^{2n} = \sum_n a_n (z^2)^n$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^{2n}$

$$\sqrt{R} \text{ falls } R < \infty \quad \text{und} \quad \infty \text{ falls } R = \infty.$$

Für die Reihe $\sum_n a_n^2 z^n$ ergibt sich der Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n^2|}} = \left(\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \right)^2 = R^2,$$

wobei wir $\infty^2 = \infty$ verstehen. Kombiniert ergibt sich damit, dass $\sum_n a_n^2 z^{2n}$ einen Konvergenzradius von R hat.

Da

$$0 < R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty.$$

Deshalb ist

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|/n!}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty.$$

Der Konvergenzradius von $\sum_n (a_n/n!)z^n$ ist daher ∞ .

Aufgabe 2 (Abelscher Grenzwertsatz)

Es sei $R \geq 1$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Ist $R > 1$, so ist die Funktion $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stetig auf $[-1, 1]$ und die Aussage ist klar.

Ist $R = 1$, so gibt es ein Zetanetz $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, dass gegen 1 konvergiert. Da \mathbb{C} Hausdorff ist, ist dieser Grenzwert eindeutig. Da \mathbb{C} vollständig ist, besitzt das Netz $(y_\alpha)_{\alpha \in D}$ mit

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_\alpha^n \text{ für alle } \alpha \in D$$

einen Häufungspunkt. Daher besitzt (y_α) ein konvergentes Teilnetz $h : D' \rightarrow D$. Nach dem 4. Minkowski-Verknüpfungslemma von Hörmander-Euler folgt aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes von (x_α) , dass es ein Netz $h' : D'' \rightarrow D'$ gibt, so dass das durch $h'' \circ h'$ induzierte Teilnetz $(z_\beta)_{\beta \in D'}$ von (y_α) gegen 1 konvergiert und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_\beta^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Inbesondere enthält (z_β) eine Teilfolge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1)$. Inbesondere gilt für diese $\xi_k \rightarrow 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi_k^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Da (ξ_n) ein Teilnetz des Zetanetzes (x_α) ist, zeigt dies, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_k^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1)$ mit $x_k \rightarrow 1$. Dies ist aber äquivalent zu $\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Wir betrachten die Potenzreihe von $f = \log$ an der Stelle $x_0 := 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 1)^n.$$

Induktiv ergibt sich, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \text{ für alle } x \geq 0 \text{ und } n \geq 1.$$

Daher ist

$$f(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \text{ für alle } n \geq 1.$$

Die Koeffizienten (a_n) der Potenzreihe sind daher

$$a_0 = f(x_0) = 0 \text{ und } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Da

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $1/1 = 1$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| < 1$ konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 1)^n$ (dies folgt auch direkt daraus, dass (a_n) eine Nullfolge ist) und es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n = \log(x) \text{ für alle } 0 < x < 2.$$

Bekanntermaßen konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ nach dem Leibniz-Kriterium (aus der Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen ist diese Reihe auch als alternierende harmonische Reihe bekannt). Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist daher

$$\log(2) = \lim_{x \uparrow 2} \log(x) = \lim_{x \uparrow 2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(2).$$

Aufgabe 3 (Bessel-Funktion)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} z^{2n}.$$

Da

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n!)^2 4^n} \right)^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4(n!)^{2/n}} = 0$$

hat die Potenzreihe einen Konvergenzradius von ∞ . Wir können J daher summandenweise ableiten. Deshalb ist

$$J'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 4^n} z^{2n-1} \text{ und}$$

$$J''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 4^n} z^{2n-2}.$$

Daher ist für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 J''(z) + z J'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 4^n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 4^n} z^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 4^n} z^{2n} + (-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 4^n} z^{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n^2}{(n!)^2 4^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{((n-1)!)^2 4^{n-1}} z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n!)^2 4^n} z^{2n+2} \\ &= -z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} z^{2n} \\ &= -z^2 J(z). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Konstruktion von Stammfunktionen)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_z} \xi e^{\xi} d\xi = \int_0^1 t z e^{tz} z dt = \int_0^1 t z^2 e^{tz} dt \\ &= [(tz-1)e^{tz}]_{t=0}^1 = (z-1)e^z + 1. \end{aligned}$$

F ist offenbar auf ganz \mathbb{C} holomorph.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$G(z) = \int_{\gamma_z} |\xi|^2 d\xi = \int_0^1 |tz|^2 z dt = |z|^2 z \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} |z|^2 z = \frac{1}{3} z^2 \bar{z}.$$

G ist an $z = 0$ komplex differenzierbar, da

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h) - G(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2 h}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3} |h|^2 = 0.$$

Für $z \neq 0$ ist G nicht komplex differenzierbar an z , denn ansonsten wäre nach der Quotientenregel auch

$$\bar{z} = \frac{G(z)}{(1/3)z^2}$$

komplex differenzierbar an z , was aber bekanntermaßen nicht gilt.

Aufgabe 5 (Interpretation des komplexen Kurvenintegrals)

1.

Wir bemerken zunächst, dass die Parametrisierung über γ , d.h. $\nu : \text{im } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$, problematisch ist, da γ nicht notwendigerweise injektiv ist, also im γ Selbstschnitte haben kann. Wir parametrisieren daher ν über $[a, b]$.

Damit ν eine Normale ist, muss

$$\langle \nu(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Daher muss

$$\nu(t) \in (\mathbb{R}\gamma'(t))^\perp = i\mathbb{R}\gamma'(t) \text{ für alle } t \in [a, b].$$

(Man beachte, dass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, und dass Multiplikation mit i der Rotation um $\pi/2$ entspricht.) Da ν auch normiert ist, muss

$$\nu(t) = \pm i \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Da

$$|\gamma'(t)| = |J_\gamma(t)^T J_\gamma(t)| \text{ für alle } t \in [a, b]$$

zeigt dies die Aussage.

2.

Wir bemerken zunächst, dass

$$\mathbf{v}_f = \begin{pmatrix} \Re(f) \\ \Im(f) \end{pmatrix}$$

gewählt werden muss, damit die Aussage gilt. Denn schreiben wir

$$\gamma_1 := \Re(\gamma), \gamma_2 = \Im(\gamma), u = \Re(f) \text{ und } v = \Im(f),$$

so ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) \, dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_a^b u(\gamma(t)) \gamma'_1(t) - v(\gamma(t)) \gamma'_2(t) \, dt + i \int_a^b u(\gamma(t)) \gamma'_2(t) + v(\gamma(t)) \gamma'_1(t) \, dt.\end{aligned}$$

Da für alle $t \in [a, b]$

$$\nu(t) = -i |J_{\gamma}(t)^T J_{\gamma}(t)|^{-1/2} \gamma'(t) = |\gamma'(t)|^{-1} (\gamma'_2(t) - i \gamma'_1(t))$$

ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{v}_{\bar{f}} \, dx &= \int_a^b \langle \mathbf{v}_{\bar{f}}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\ &= \int_a^b u(\gamma(t)) \gamma'_1(t) - v(\gamma(t)) \gamma'_2(t) \, dt\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{v}_{\bar{f}} \, d\vec{\sigma} &= \int_a^b \langle \mathbf{v}_{\bar{f}}(\gamma(t)), \nu(t) \rangle |J_{\gamma}(t)^T J_{\gamma}(t)|^{1/2} \, dt \\ &= \int_a^b u(\gamma(t)) \gamma'_2(t) + v(\gamma(t)) \gamma'_1(t) \, dt.\end{aligned}$$

Das zeigt die Gleichheit.

3.

Es ist

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{\bar{f}} \end{pmatrix} = u_x + (-v)_y = u_x - v_y = 0,$$

denn aus der Holomorphie von f folgt, dass f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

erfüllt.

4.

Nach dem Satz von Gauß ist in der gegebenen Situation

$$\Im \left(\int_{\gamma} f(z) \, dz \right) = \int_{\gamma} \mathbf{v}_{\bar{f}} \, d\vec{\sigma} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{\bar{f}} \end{pmatrix} \, d\lambda_2 = \int_{\Omega} 0 \, d\lambda_2 = 0.$$

Da f holomorph ist, ist auch if holomorph. Daher ist nach analoger Argumentation

$$\Re \left(\int_{\gamma} f(z) \, dz \right) = \Im \left(i \int_{\gamma} f(z) \, dz \right) = \Im \left(\int_{\gamma} if(z) \, dz \right) = 0.$$

Also ist

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0.$$