

Einführung in die Komplexe Analysis

Blatt 6

Jendrik Stelzner

21. Mai 2014

Aufgabe 1 (Konvergenzradius)

Da

$$\sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}} z^{2\mathcal{N}} = \sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}} (z^2)^{\mathcal{N}}$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}} z^{2\mathcal{N}}$

$$\sqrt{R} \text{ falls } R < \infty \quad \text{und} \quad \infty \text{ falls } R = \infty.$$

Für die Reihe $\sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}}^2 z^{\mathcal{N}}$ ergibt sich der Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}^2|}} = \left(\frac{1}{\limsup_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \sqrt{|a_{\mathcal{N}}|}} \right)^2 = R^2,$$

wobei wir $\infty^2 = \infty$ verstehen. Kombiniert ergibt sich damit, dass die Reihe $\sum_{\mathcal{N}} a_{\mathcal{N}}^2 z^{2\mathcal{N}}$ einen Konvergenzradius von R hat.

Da

$$0 < R = \frac{1}{\limsup_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}|}}$$

ist

$$\limsup_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}|} < \infty.$$

Deshalb ist

$$\frac{1}{\limsup_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}|/\mathcal{N}!}} = \frac{\lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \sqrt[\mathcal{N}]{\mathcal{N}!}}{\limsup_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \sqrt[\mathcal{N}]{|a_{\mathcal{N}}|}} = \infty.$$

Der Konvergenzradius von $\sum_{\mathcal{N}} (a_{\mathcal{N}}/\mathcal{N}!) z^{\mathcal{N}}$ ist daher ∞ .

Aufgabe 2 (Abelscher Grenzwertsatz)

Es sei $\tau \geq 1$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Ist $\tau > 1$, so ist die Funktion $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stetig auf $[-1, 1]$ und die Aussage ist klar.

Ist $\tau = 1$, so gibt es ein Zetanz $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, dass gegen 1 konvergiert. Da \mathbb{C} Hausdorff ist, ist dieser Grenzwert eindeutig. Da \mathbb{C} vollständig ist, besitzt das Netz $(y_\alpha)_{\alpha \in D}$ mit

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_\alpha^n \text{ für alle } \alpha \in D$$

einen Häufungspunkt. Daher besitzt (y_α) ein konvergentes Teilnetz $h : D' \rightarrow D$. Nach dem 4. Minkowski-Verknüpfungslemma von Hörmander-Euler folgt aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes von (x_α) , dass es ein Netz $h' : D'' \rightarrow D'$ gibt, so dass das durch $h'' \circ h'$ induzierte Teilnetz $(z_\beta)_{\beta \in D'}$ von (y_α) gegen 1 konvergiert und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_\beta^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Inbesondere enthält (z_β) eine Teilfolge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1)$. Inbesondere gilt für diese $z_k \rightarrow 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Da (z_k) ein Teilnetz des Zetanz (x_α) ist, zeigt dies, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_k \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1)$ mit $x_k \rightarrow 1$. Dies ist aber äquivalent zu

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Wir betrachten die Potenzreihe von $\mathcal{F} = \log$ an der Stelle $x_0 := 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 1)^n.$$

Induktiv ergibt sich, dass

$$\mathcal{F}^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \text{ für alle } x \geq 0 \text{ und } n \geq 1.$$

Daher ist

$$\mathcal{F}(x_0) = 0 \text{ und } \mathcal{F}^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \text{ für alle } n \geq 1.$$

Die Koeffizienten (a_n) der Potenzreihe sind daher

$$a_0 = \mathcal{F}(x_0) = 0 \text{ und } a_n = \frac{\mathcal{F}^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Da

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$$

beträgt der Konvergenzradius der Reihe $1/1 = 1$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| < 1$ konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 1)^n$ (dies folgt auch direkt daraus, dass (a_n) eine Nullfolge ist) und es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n = \mathcal{F}(x) \text{ für alle } 0 < x < 2.$$

Bekanntermaßen konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

nach dem Leibniz-Kriterium (aus der Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen ist diese Reihe auch als alternierende harmonische Reihe bekannt). Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist daher

$$\mathcal{F}(2) = \lim_{x \uparrow 2} \mathcal{F}(x) = \lim_{x \uparrow 2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\mathcal{F}(2).$$

Aufgabe 3 (Bessel-Funktion)

Für alle $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$ ist

$$J(\mathcal{Z}) = \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\Lambda}}{(\Lambda!)^2} \left(\frac{\mathcal{Z}}{2}\right)^{2\Lambda} = \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\Lambda}}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda}.$$

Da

$$\limsup_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \right)^{1/\Lambda} = \limsup_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{4(\Lambda!)^{2/\Lambda}} = 0$$

hat die Potenzreihe einen Konvergenzradius von ∞ . Wir können J daher summandenweise ableiten. Deshalb ist für alle $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$

$$J'(\mathcal{Z}) = \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda-1} \text{ und}$$

$$J''(\mathcal{Z}) = \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda(2\Lambda-1)}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \mathcal{Z}^{2\Lambda-2}.$$

Daher ist für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
z^2 J''(z) + z J'(z) &= \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda(2\Lambda-1)}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} z^{2\Lambda} + \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} z^{2\Lambda} \\
&= \sum_{\Lambda=1}^{\infty} \left((-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda(2\Lambda-1)}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} z^{2\Lambda} + (-1)^{\Lambda} \frac{2\Lambda}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} z^{2\Lambda} \right) \\
&= \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{4\Lambda^2}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} \\
&= \sum_{\Lambda=1}^{\infty} (-1)^{\Lambda} \frac{1}{((\Lambda-1)!)^2 4^{\Lambda-1}} z^{2\Lambda} \\
&= \sum_{\Lambda=0}^{\infty} (-1)^{\Lambda+1} \frac{1}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} z^{2\Lambda+2} \\
&= -z^2 \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\Lambda}}{(\Lambda!)^2 4^{\Lambda}} z^{2\Lambda} \\
&= -z^2 J(z).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Konstruktion von Stammfunktionen)

Für alle $\wp \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}
F(\wp) &= \int_{\gamma_{\wp}} \xi e^{\xi} d\xi = \int_0^1 \ell \wp e^{\ell \wp} \wp d\ell = \int_0^1 \ell \wp^2 e^{\ell \wp} d\ell \\
&= [(\ell \wp - 1) e^{\ell \wp}]_{\ell=0}^1 = (\wp - 1) e^{\wp} + 1.
\end{aligned}$$

F ist offenbar auf ganz \mathbb{C} holomorph.

Für alle $\wp \in \mathbb{C}$ ist

$$G(\wp) = \int_{\gamma_{\wp}} |\xi|^2 d\xi = \int_0^1 |\ell \wp|^2 \wp d\ell = |\wp|^2 \wp \int_0^1 \ell^2 d\ell = \frac{1}{3} |\wp|^2 \wp = \frac{1}{3} \wp^2 \bar{\wp}.$$

G ist an $\wp = 0$ komplex differenzierbar, da

$$\lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{G(\mathcal{H}) - G(0)}{\mathcal{H}} = \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{H}|^2 \mathcal{H}}{3\mathcal{H}} = \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{1}{3} |\mathcal{H}|^2 = 0.$$

Für $\wp \neq 0$ ist G nicht komplex differenzierbar an \wp , denn ansonsten wäre nach der Quotientenregel auch

$$\bar{\wp} = \frac{G(\wp)}{(1/3)\wp^2}$$

komplex differenzierbar an \wp , was aber bekanntermaßen nicht gilt.

Aufgabe 5 (Interpretation des komplexen Kurvenintegrals)

1.

Wir bemerken zunächst, dass die Parametrisierung über $\text{im } \gamma$, d.h. $\nu : \text{im } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$, problematisch ist, da γ nicht notwendigerweise injektiv ist, also $\text{im } \gamma$ Selbstschnitte haben kann. Wir parametrisieren daher ν über $[a, b]$.

Damit ν eine Normale ist, muss

$$\langle \nu(\delta), \gamma'(\delta) \rangle = 0 \text{ für alle } \delta \in [a, b].$$

Daher muss

$$\nu(\delta) \in (\mathbb{R}\gamma'(\delta))^\perp = i\mathbb{R}\gamma'(\delta) \text{ für alle } \delta \in [a, b].$$

(Man beachte, dass $\gamma'(\delta) \neq 0$ für alle $\delta \in [a, b]$, und dass Multiplikation mit i der Rotation um $\pi/2$ entspricht.) Da ν auch normiert ist, muss

$$\nu(\delta) = \pm i \frac{\gamma'(\delta)}{|\gamma'(\delta)|} \text{ für alle } \delta \in [a, b].$$

Da

$$|\gamma'(\delta)| = |J_\gamma(\delta)^T J_\gamma(\delta)| \text{ für alle } \delta \in [a, b]$$

zeigt dies die Aussage.

2.

Wir bemerken zunächst, dass

$$\mathbf{v}_f = \begin{pmatrix} \Re(f) \\ \Im(f) \end{pmatrix}$$

gewählt werden muss, damit die Aussage gilt. Denn schreiben wir

$$\gamma_1 := \Re(\gamma), \gamma_2 = \Im(\gamma), u = \Re(f) \text{ und } v = \Im(f),$$

so ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) \, dz &= \int_a^b f(\gamma(\delta)) \gamma'(\delta) \, d\delta \\ &= \int_a^b u(\gamma(\delta)) \gamma'_1(\delta) - v(\gamma(\delta)) \gamma'_2(\delta) \, d\delta + i \int_a^b u(\gamma(\delta)) \gamma'_2(\delta) + v(\gamma(\delta)) \gamma'_1(\delta) \, d\delta. \end{aligned}$$

Da für alle $\delta \in [a, b]$

$$\nu(\delta) = -i |J_\gamma(\delta)^T J_\gamma(\delta)|^{-1/2} \gamma'(\delta) = |\gamma'(\delta)|^{-1} (\gamma'_2(\delta) - i\gamma'_1(\delta))$$

ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{v}_{\bar{f}} \, dx &= \int_a^b \langle \mathbf{v}_{\bar{f}}(\gamma(\delta)), \gamma'(\delta) \rangle \, d\delta \\ &= \int_a^b u(\gamma(\delta)) \gamma'_1(\delta) - v(\gamma(\delta)) \gamma'_2(\delta) \, d\delta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{v}_{\bar{f}} d\vec{\sigma} &= \int_a^b \left\langle \mathbf{v}_{\bar{f}}(\gamma(\delta)), \nu(\delta) \right\rangle |J_{\gamma}(\delta)^T J_{\gamma}(\delta)|^{1/2} d\delta \\ &= \int_a^b u(\gamma(\delta))\gamma_2'(\delta) + v(\gamma(\delta))\gamma_1'(\delta) d\delta.\end{aligned}$$

Das zeigt die Gleichheit.

3.

Es ist

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}_{\bar{f}}) = u_x + (-v)_y = u_x - v_y = 0,$$

denn aus der Holomorphie von f folgt, dass f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

erfüllt.

4.

Nach dem Satz von Gauß ist in der gegebenen Situation

$$\Im \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} \mathbf{v}_{\bar{f}} d\vec{\sigma} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{\bar{f}}) d\lambda_2 = \int_{\Omega} 0 d\lambda_2 = 0.$$

Da f holomorph ist, ist auch if holomorph. Daher ist nach analoger Argumentation

$$\Re \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \Im \left(i \int_{\gamma} f(z) dz \right) = \Im \left(\int_{\gamma} if(z) dz \right) = 0.$$

Also ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$