Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 1

Jendrik Stelzner

8. April 2014

Aufgabe 1 (Real und Imaginärteil)

Es ist
$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i(1+i)} = \frac{1}{i} = -i,$$
und
$$\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$
Da $i^2 = -1$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$
$$i^n = i^{(n \bmod 4)} \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0 \mod 4 \\ i & \text{falls } n \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2 \mod 4 \\ -i & \text{falls } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}.$$
Schließlich ist
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k &= \sum_{k=1}^{7} e^{ik\pi/4} = \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=4}^{7} e^{ik\pi/4} \\ &= \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=0}^{3} e^{ik\pi/4+\pi} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{3} e^{ik\pi/4} + \sum_{k=1}^{3} -e^{ik\pi/4} \\ &= -1. \end{aligned}$$
Die entsprechenden Real- und Imaginärteile ergeben sich durch direktes ablesen.

Aufgabe 2 (Betrag und Argument)

Es ist
$$|1+3i| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10} \text{ und } \arg(1+3i) = \arctan 3.$$

Wegen der 2π-Periodizität der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ ist

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)^9 - (1-i)^9 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^9 - \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^9 \\ &= \sqrt{2}^9(e^{i\pi/4} - e^{i\pi/4}) = 16\sqrt{2}((1+i) - (1-i)) \\ &= 32\sqrt{2}i, \end{aligned}$$

also

$$|z_1| = 32\sqrt{2} \text{ und } \arg z_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Da $i^2 = -1$ ist $z_2 = i^{2014} = -1$, also

$$|z_2| = 1 \text{ und } \arg z_2 = \pi.$$

Für $z_3 = \frac{1+ia}{1-ia}$ ist

$$|z_3| = \frac{|1+ia|}{|1-ia|} = 1,$$

und da

$$\arg(1+ia) = \arctan a \text{ und } \arg(1-ia) = \arctan -a = -\arctan a.$$

ist

$$\arg z_3 = \arg(1+ia) - \arg(1-ia) = 2\arctan a.$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und

$$z_n = (i-1)^n = \left(\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{in3\pi/4}$$

ist $|z_n| = \sqrt{2}^n$ und $n\frac{3}{4}\pi$ ein Argument von z_n.