Einführung in die Komplexe Analysis
Blatt 7

Jendrik Stelzner

21. Mai 2014

Aufgabe 1 (Konvergenzverhalten von Potenzreihen)

Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass die Entwicklungsstelle der Potenzreihe bei $z_0 = 0$ liegt. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Da diese Reihe auf ganz $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert gibt es ein $M \in \mathbb{N}, M \geq 1$, so dass

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right| < \frac{1}{2} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}, m \geq M.$$

Für alle $m \geq M$ ist daher für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |a_m z^m| &= \left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right| + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n \right| < 1, \end{aligned}$$

also für alle $x \in \mathbb{R}, x > 0$

$$|a_m| < \frac{1}{x^m} \text{ für alle } m \geq M.$$

Da $1/x^m \to 0$ für $x \to \infty$ (denn $m \geq M \geq 1$) folgt, dass

$$a_m = 0 \text{ für alle } m \geq M.$$

Daher ist f ein Polynom (dessen Grad höchstens $M - 1$ ist).