Lösung zu
Übungszettel 9, Aufgabe 1

Jendrik Stelzner

20. Januar 2016

Aufgabe 1.

i).

Wir zeigen die Aussage per Induktion über $\dim(V)$, wobei $\dim(V) \geq 1$.

Induktionsstart. Es sei $\dim(V) = 1$ und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus von V. Es sei nun $v \in V$ ein beliebiger Vektor mit $v \neq 0$. Dann ist $\mathcal{B} = (v)$ eine Basis von V. Da $\dim(V) = 1$ ist $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = (a)$ für einen Skalar $a \in K$. Insbesondere ist $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ in oberer Dreiecksform.

Induktionsvoraussetzung. Es sei $n \geq 2$ und für jeden Vektorraum U mit $\dim(U) = n-1$ und jeden Endomorphismus $f \colon U \to U$ gebe es eine Basis $\mathcal{B}$ von U, so dass $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h. $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ ist von der Form

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Induktionschritt. Es sei V ein Vektorraum von Dimension $\dim(V) = n$ und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus von V. Da K algebraisch abgeschlossen ist, existiert es einen Eigenvektor $b_1 \in V$ von f; es sei $\lambda \in K$ mit $f(b_1) = \lambda b_1$. Wir ergänzen b_1 zu einer Basis $\mathcal{B}' = (b_1, b_2', \dots, b_n')$ von V (der Strich gibt an, dass dies noch nicht die endgültigen Basiselement sind, die wir gerne hätten). Da $f(b_1) = \lambda b_1$ ist $A := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ von der Form

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Wir betrachten nun die abgeänderte Matrix $\tilde{A}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Es sei $\tilde{f} \colon V \to V$ der eindeutige Endomorphismus mit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\tilde{f}) = \tilde{A}$. Konkret ist

$$\tilde{f}(b_1) = \lambda b_1 \quad \text{und} \quad \tilde{f}(b'_j) = \sum_{i=2}^{n} a_{ij} b'_i \quad \text{für alle } 2 \leq j \leq n. \tag{2}$$

Inbesondere ist deshalb

$$f(b'_j) = a_{1j} b_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{ij} b'_i = a_{1j} b_1 + \tilde{f}(b'_j) \quad \text{für alle } 2 \leq j \leq n. \tag{3}$$

Dabei ergibt sich die erste Gleichung aus (1).

Es sei nun $\mathcal{C}' = (b_2, \ldots, b_n)$ und $U \coloneqq \mathcal{L}(\mathcal{C}') = \mathcal{L}(\{b'_2, \ldots, b'_n\})$. Wie in (2) gesehen ist $\tilde{f}(b'_j) \in U$ für alle $2 \leq j \leq n$, also $\tilde{f}(\{b'_2, \ldots, b'_n\}) \subseteq U$. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}(U) = \tilde{f}(\mathcal{L}(\{b'_2, \ldots, b'_n\})) &= \mathcal{L}(\tilde{f}(\{b'_2, \ldots, b'_n\})) \\ &= \mathcal{L}(\{\tilde{f}(b'_2), \ldots, \tilde{f}(b'_n)\}) \subseteq \mathcal{L}(U) = U. \end{aligned}$$

Also ist U *invariant* unter $\tilde{f}$. Deshalb können wir die Einschränkung $\tilde{f}|_U \colon U \to U$ mit $\tilde{f}|_U(u) = \tilde{f}(u)$ für alle $u \in U$ betrachten. (Für f hätten wir dies nicht tun können. Die abgeänderte Version $\tilde{f}$ von f betrachten wir genau deshalb, um diese Einschränkung zu haben. Man bemerke außerdem, dass

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}'}(\tilde{f}|_U) = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

gilt.)

Da $\mathcal{C}'$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von U ist, ist es bereits eine Basis von U. Also ist $\dim(U) = n - 1$. Wir können nun die Induktionsvoraussetzung auf U und $\tilde{f}|_U$ anwenden. Nach dieser gibt es eine Basis $\mathcal{C} = (b_2, \ldots, b_n)$ von U, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\tilde{f}|_U)$ eine obere Dreiecksform hat, also

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\tilde{f}|_U) = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Man beachte die geshifteten Indizes, wie bereits bei $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}'}(\tilde{f}|_U)$ in (4).) Inbesondere ist also

$$\tilde{f}(b_j) = \tilde{f}|_U(b_j) = \sum_{i=2}^{j} c_{ij} b_i \quad \text{für alle } 2 \leq j \leq n.$$

(Die Summe geht jeweils nur bis j, da alle weiteren Einträge in der j-ten Zeile 0 sind.)

Es sei nun $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Dies ist eine Basis von V: Es ist $b_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Außerdem ist $\mathcal{C}$ eine Basis von U, weshalb auch $b'_2, \ldots, b'_n \in U = \mathcal{L}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Also sind alle Basisvektoren von $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ enthalten; da $\mathcal{B}'$ ein Erzeugendensystem von V ist, ist deshalb auch $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V. Da $\mathcal{B}$ genau n-Elemente enthält, wobei $n = \dim(V)$, ist $\mathcal{B}$ bereits ein minimales Erzeugendensystem von V, und somit eine Basis von V.

Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksform hat: Wir haben unveränderterweise $f(b_1) = \lambda b_1$. Für alle $2 \leq j \leq n$ ist $b_j = \sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} b'_k$ für passende Koeffizienten $\mu_2^{(j)}, \ldots, \mu_n^{(j)} \in K$, da $b_j \in U = \mathcal{L}(\mathcal{C}') = \mathcal{L}(\{b'_2, \ldots, b'_n\})$. Zusammen mit (3) ergibt sich für alle $2 \leq j \leq n$, dass

$$\begin{aligned} f(b_j) &= f\left(\sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} b'_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} f(b'_k) = \sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} (a_{1k} b_1 + \tilde{f}(b'_k)) \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} a_{1k} b_1\right) + \sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} \tilde{f}(b'_k) = \left(\sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} a_{1k} b_1\right) + \tilde{f}\left(\sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} b'_k\right) \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} a_{1k}\right) b_1 + \tilde{f}(b_j) \,. \end{aligned}$$

Für alle $2 \leq j \leq n$ setzen wir $c_{1j} := \sum_{k=2}^{n} \mu_k^{(j)} a_{1k}$. Da $\tilde{f}(b_j) = \sum_{i=2}^{j} c_{ij} b_i$ (für alle $2 \leq j \leq n$) erhalten wir damit, dass

$$f(b_j) = c_{1j} b_1 + \sum_{i=2}^{j} c_{ij} b_i = \sum_{i=1}^{j} c_{ij} b_i \quad \text{für alle } 2 \leq j \leq n.$$

Zusammen mit $f(b_1) = \lambda b_1$ erhalten wir damit, dass

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} .$$

also ist $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix.

ii).

Für diesen Aufgabenteil benötigen wir nicht, dass K algebraisch abgeschlossen ist.

Wir machen zunächst einige grundlegende Beobachtungen über Dreiecksmatrizen und Zeilenstufenform. Hierfür sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

1. Ist A in Zeilenstufenform, so ist A auch eine obere Dreiecksmatrix.
2. Ist andererseits A eine obere Dreiecksmatrix, so ist A nicht notwendigerweise in Zeilenstufenform. Siehe etwa
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine obere Dreiecksmatrix, also $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq j < i \leq n$, so ist genau dann $\mathrm{rang}(A) = n$, bzw. äquivalent $\ker(A) = \{0\}$, wenn die Diagonaleinträge von A alle verschieden von Null sind, also $a_{ii} \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

   Ist nämlich $a_{ii} \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, so ist A tatsächlich in Zeilenstufenform. Da $a_{nn} \neq 0$ hat A keine Nullzeilen, und somit $\mathrm{rang}(A) = n$.

   Gibt es andererseits ein $1 \leq k \leq n$ mit $a_{kk} = 0$, betrachten wir das homogene lineare Gleichungsystem
$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$
   Dieses ist ein linearen Gleichungssystem in den k Variablen $x_1, \ldots, x_k$. Betrachten wir die $(k+1)$-te bis n-te Zeilen von (5), so sind diese 0, da A eine obere Dreiecksmatrix ist. Betrachten wir die k-te Zeile von (5), so ist diese $a_{kk}x_k = 0$; da $a_{kk} = 0$ ist auch diese Zeile 0. Also ist (5) ein homogenes LGS in k Variablen und $k-1$ Gleichungen. Also hat (5) nicht-triviale Lösungen. Ist $(y_1, \ldots, y_k)^T \in K^k$ eine nichttriviale Lösung des homogenen LGS (5), so ist $(y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)^T \in K^n$ eine Lösung des homogenen LGS $A \cdot x = 0$. Somit ist $\ker(A) \neq \{0\}$, also $\mathrm{rang}(A) < n$.

Es sei nun $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine obere Dreiecksmatrix. Ein Skalar $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von A, falls $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, also $\mathrm{rang}(A - \lambda I) < n$. Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, ist auch $A - \lambda I$ eine obere Dreiecksmatrix, wobei die Diagonaleinträge von $A - \lambda I$ genau $a_{11} - \lambda, \ldots, a_{nn} - \lambda$. Deshalb ist, wie oben gezeigt, $\mathrm{rang}(A - \lambda I) < n$ genau dann wenn $a_{ii} - \lambda = 0$ für ein $1 \leq i \leq n$, also genau dann, wenn $\lambda = a_{ii}$ für ein $1 \leq i \leq n$. Anders gesagt: λ ist genau dann ein Eigenwert von A, falls λ ein Diagonaleintrag von A ist.

Bemerkung. Die Aussage lässt sich sehr kurz mit der Hilfe des charakteristischen Polynoms lösen: Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge. Die Diagonaleinträge von $TI - A$ sind $T - a_{11}, \ldots, T - a_{nn}$, weshalb
$$\chi_A(T) = \det(TI - A) = (T - a_{11})(T - a_{22}) \cdots (T - a_{nn}).$$

Da die Eigenwerte von A genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(T)$ sind, sind genau $a_{11}, \dots, a_{nn}$ die Eigenwerte von A.

iii).

Angenommen, 0 ist der einzige Eigenwert von f. Wie im ersten Aufgabenteil gezeigt gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V, wobei $n = \dim(V)$, so dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wie im zweiten Aufgabenteil gezeigt sind die Diagonaleinträge $a_{11}, \dots, a_{nn}$ genau die Eigenwerte von $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, also von f. Da 0 der einzige Eigenwert von f ist, erhalten wir, dass $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$. Also ist

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

bereits eine *echte obere Dreickesmatrix*.

Wir zeigen per Induktion über k, dass dass $f^k(b_\ell) = 0$ für alle $1 \leq \ell \leq k \leq n$. Für den Fall $k = n$ ergibt sich, dass $f^n(b_\ell) = 0$ für alle $1 \leq \ell \leq n$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis von f ist, ist dann bereits $f^n(v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$, also $f^n = 0$.

Induktionschritt. Für $k = 1$ ist $f^k(b_1) = 0$, da in der erste Spalte von $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ alle Einträge null sind.

Induktionsvoraussetzung. Es sei $1 \leq k < n$ mit $f^k(b_\ell) = 0$ für alle $1 \leq l \leq k$.

Induktionschritt. Für alle $1 \leq \ell < k + 1$ ist

$$f^{k+1}(b_\ell) = f(f^k(b_\ell)) = f(0) = 0.$$

Zudem ist $f(b_{k+1}) = \sum_{\ell=1}^k a_{\ell,k+1} b_\ell$ (die Summe geht nur bis k, da der $(k+1)$-te Diagonaleintrag von $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ genau 0 ist) und somit

$$f^{k+1}(b_{k+1}) = f^k(f(b_{k+1}) = f^k \left(\sum_{\ell=1}^k a_{\ell,k+1} b_\ell \right) = \sum_{\ell=1}^k a_{\ell,k+1} \underbrace{f^k(b_\ell)}_{=0} = 0.$$

Also ist $f^{k+1}(b_\ell) = 0$ für alle $1 \leq \ell \leq k + 1$.