Lösungen für den dritten Multiple Choice Test

Jendrik Stelzner

16. Februar 2016

1

Die Aussage ist **wahr**: Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}^*$ die zugehörige duale Basis von V^*. Der Rang $\operatorname{rang}(f)$ ist der Spaltenrang von $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ und der Rang $\operatorname{rang}(f^*)$ ist der Spaltenrang von $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}^*}(f^*)$. Da $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}^*}(f^*) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)^T$ ist $\operatorname{rang}(f^*)$ also der Zeilenrang von $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Die angegebene Gleichheit ist also genau die Gleichheit von Spalten- und Zeilenrang von $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

2

Die Aussage ist **wahr**: Es sei $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Es ist $0 \in U_0 \subseteq U$. Für $\lambda \in K$ und $u \in U$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u \in U_n$; da U_n ein Untervektorraum ist, ist deshalb auch $\lambda u \in U_n \subseteq U$. Sind schließlich $u, u' \in U$, so gibt es $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $u \in U_n$ und $U_{n'}$. Für $m = \max\{n, n'\}$ ist dann $u, u' \in U_m$ (da $U_n \subseteq U_m$ und $U_{n'} \subseteq U_m$), und somit auch $u + u' \in U_m \subseteq U$, da U_m ein Untervektorraum ist.

3

Die Aussage ist **falsch** falls $\operatorname{char} K = 2$, also etwa für $K = \mathbb{F}_2$. Dann ist nämlich $v_1 + v_2 = v_1 - v_2$. Ist $\operatorname{char} K \neq 2$, so gilt die Aussage: Sind dann $\lambda, \mu \in K$ mit

$$0 = \lambda(v_1 + v_2) + \mu(v_1 - v_2) = (\lambda + \mu)v_1 + (\lambda - \mu)v_2,$$

so ist $\lambda + \mu = \lambda - \mu = 0$, da (v_1, v_2) linear unabhängig ist, und Lösen dieses LGS ergibt $\lambda = \mu = 0$ (zum Lösen des LGS muss in einem Schritt durch 2 geteilt werden, weshalb sich die Notwendigkeit von $\operatorname{char} K \neq 2$ ergibt).

4

Die Aussage ist **wahr**: Ist $\mathcal{B}$ ein Basis von V und $\mathcal{B}^*$ die entsprechende duale Basis von V^*, so ist $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}^*}(f^*) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)^T$, weshalb $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}^*}(f^*)$ und $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ dasselbe charakteristische Polynom haben.

5

Die Aussage ist **falsch**: Betrachtet man etwa

$$f\colon K^2 \to K^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

so enthält die angegebene Menge die beiden Standardbasisvektoren e_1 und e_2, aber nicht $e_1 + e_2$. (Die angegebene Menge ist genau die Vereinigung der Eigenräume, und ist deshalb nur in Ausnahmefällen ein Untervektorraum. Nämlich genau dann, wenn f höchstens einen Eigenwert hat.)

6

Die Aussage ist **falsch** für $\operatorname{char} K \neq 2$, man betrachte $A = -\mathbb{1}_n$ für ungerades n, etwa $n = 1$. Es gilt allerdings, dass $\det(A) = \pm 1$, da

$$1 = \det(\mathbb{1}_n) = \det(AA^{-1}) = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2.$$

Bemerkung. Eine invertierbare Matrix A mit $A^{-1} = A^T$ heißt *orthogonal.* Die orthogonoalen Matrizen bilden eine Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(K)$, und für $K = \mathbb{R}$ entsprechen diese Matrizen genau den Drehungspiegelungen des $\mathbb{R}^n$.

7

Die Aussage ist **falsch**: Für $n = 1$ ist die Determinante gegeben durch

$$\det \colon \mathrm{Mat}(1 \times 1, K) \to K, \quad (a) \mapsto a,$$

und somit linear. (Für den Fall $n = 1$ entspricht die Multilinearität genau der Linearität. Für $n \geq 2$ ist dies nicht der Fall.)

8

Die Aussage ist **wahr**: Wir zeigen, dass $b_i = c_i$ für alle $1 \leq i \leq n$; hierfür fixieren wir ein solchen i. Dann ist $b_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Für alle $1 \leq k \leq n$ ist

$$\lambda_k = c_k^* \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j c_j \right) = c_k^*(b_i) = b_k^*(b_i) = \delta_{ik},$$

also $b_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} c_j = c_i$.

Bemerkung. Dies zeigt, dass die Abbildung

$$\{\text{geordnete Basen von } V\} \to \{\text{geordnete Basen von } V^*\}, \quad \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^*$$

injektiv ist. Sie ist auch surjektiv, also bijektiv. Mithilfe des natürlichen Isomorphismus $V \cong V^{**}$ lässt sich auch explizit eine Umkehrabbildung angeben.

9

Die Aussage ist **wahr**: Da $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist $\det(A) \neq 0$. Da $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ist auch $\det(A) \in \mathbb{R}$. Es ist auch $\mathrm{Adj}(A) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Somit ist schließlich $A^{-1} = \mathrm{Adj}(A)/\det(A) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

Alternativ lässt sich auf A der Gauß-Algorithmus zum Invertieren einer Matrix anwenden; alle dabei vorkommenden Matrizen, inklusive dem Zwischenergebnissen und dem Endergebniss, sind dabei reell.