Lösungen zu den Anwesenheitsaufgaben vom 3. Februar 2016

Jendrik Stelzner

16. Februar 2016

Aufgabe 1

Möglichkeit 1

Es gilt

$$\begin{aligned}
A_1 \cdots A_m \text{ ist invertierbar} &\iff \det(A_1 \cdots A_m) \neq 0 \\
&\iff \det(A_1) \cdots \det(A_m) \neq 0 \\
&\iff \text{für alle } 1 \leq i \leq m \text{ ist } \det(A_i) \neq 0 \\
&\iff \text{für alle } 1 \leq i \leq m \text{ ist } A_i \text{ invertierbar.}
\end{aligned}$$

Möglichkeit 2

Zunächst bemerken wir, dass, wenn A_i für alle $1 \leq i \leq m$ invertierbar ist, auch $A = A_1 \cdots A_m$ invertierbar ist, da

$$(A_m^{-1} \cdots A_1^{-1})A = A_m^{-1} \cdots A_1^{-1} A_1 \cdots A_m = \mathbb{1}_n.$$

Nun können wir Induktion über m nutzen: Für $m = 1$ ist die Aussage klar. Für $m = 2$ ist

$$\mathbb{1}_n = (A_1 A_2)^{-1} \cdot (A_1 A_2) = ((A_1 A_2)^{-1} A_1) \cdot A_2,$$

also ist A_2 invertierbar (mit $A_2^{-1} = (A_1 A_2)^{-1} A_1$). Da $A_1 A_2$ und A_2^{-1} invertierbar sind, ist auch das Produkt $A_1 = (A_1 A_2) A_2^{-1}$ invertierbar.

Der Induktionsschrit $m \to m+1$ verläuft ähnlich: Da

$$\mathbb{1}_n = (A_1 \cdots A_{m+1})^{-1} \cdot (A_1 \cdots A_{m+1}) = ((A_1 \cdots A_{m+1})^{-1} A_1 \cdots A_m) \cdot A_{m+1}$$

ist A_{m+1} invertierbar (mit $A_{m+1}^{-1} = (A_1 \cdots A_{m+1})^{-1} A_1 \cdots A_m$). Da A_{m+1} und $A_1 \cdots A_{m+1}$ invertierbar sind ist auch $A_1 \cdots A_m = (A_1 \cdots A_m A_{m+1}) A_{m+1}^{-1}$ invertierbar. Nach Induktionsvoraussetzung sind deshalb auch $A_1, \ldots, A_m$ invertierbar.

Aufgabe 2

a)

Für Matrizen entsprechender Größe

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

ist die i-te Zeile von BC das b_i-fache von C. Durch direktes Hinsehen ergibt sich, dass alle Zeilen von A Vielfache von $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sind, nämlich das 1-fache, 2-fache und (-3)-fache. Wir wählen deshalb

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass tatsächlich $A = BC$.

b)

Durch die Assoziativität der Matrixmultiplikation erhalten wir

$$A^{2016} = (BC)^{2016} = B(CB)^{2015}C.$$

Mit der (1×1)-Matrix $CB = (-1)$ erhalten wir

$$A^{2016} = B(-1)^{2015}C = B(-1)C = -BC = -A.$$

Aufgabe 3

Wegen der Injektivität von f ist die Einschränkung $f\colon U \to \operatorname{im}(f)$ ein Isomorphismus, womit wir $\dim \operatorname{im}(f) = \dim U$ erhalten. Da g surjektiv ist, erhalten wir außerdem $\operatorname{im}(g) = W$. Durch die Dimensionsformel erhalten wir nun

$$\dim V = \dim \ker(g) + \dim \operatorname{im}(g) = \dim \operatorname{im}(f) + \dim \operatorname{im}(g) = \dim U + \dim W.$$

Aufgabe 4

Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation solcher Matrizen verläuft also durch Addition der oberen rechten Einträge. Für alle $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist daher insbesondere

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}1 & 1+2i\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix}1 & -3i\\ 0 & 1\end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix}1 & 1-i\\ 0 & 1\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1 & -3+i\\ 0 & 1\end{pmatrix}^4 \\
&= \begin{pmatrix}1 & 2(1+2i)+5(-3i)+2a+3(1-i)+4(-3+i)\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2a-7-10i\\ 0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir müssen also die Gleichung

$$2a-7-10i = 1$$

lösen, wodurch sich $a = 4+5i$ ergibt.

Aufgabe 5

Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{L}(K,V) \to V, \quad f \mapsto f(1).$$

Φ ist linear, denn für alle $f, g \in \mathcal{L}(K,V)$ und $\lambda \in K$ ist

$$\Phi(f+g) = (f+g)(1) = f(1)+g(1) = \Phi(f)+\Phi(g)$$

und

$$\Phi(\lambda f) = (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda\Phi(f).$$

Φ ist injektiv, denn für $f, g \in \mathcal{L}(K,V)$ mit $\Phi(f) = \Phi(g)$ ist $f(1) = g(1)$, und somit

$$f(\lambda) = f(\lambda\cdot 1) = \lambda f(1) = \lambda g(1) = g(\lambda \cdot 1) = g(\lambda) \quad \text{für alle } \lambda \in K,$$

also $f = g$. Φ ist auch surjektiv: Für $v \in V$ sei

$$f_v\colon K \to V, \quad \lambda \mapsto \lambda v.$$

Die Abbildung f_v ist linear, denn für alle $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ und $\mu \in K$ ist

$$f(\lambda_1+\lambda_2) = (\lambda_1+\lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v = f_v(\lambda_1) + f_v(\lambda_2)$$

und

$$f(\mu\lambda) = (\mu\lambda)v = \mu(\lambda v) = \mu f_v(\lambda).$$

Da nun $\Phi(f_v) = f_v(1) = 1\cdot v = v$ ist $v \in \operatorname{im}(\Phi)$.

Aufgabe 6

Statt $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ schreiben wir im Folgenden abkürzend $(a_n)_n$.

a)

R ist linear, denn für alle $(a_n)_n, (b_n)_n \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} R((a_n)_n + (b_n)_n) = R((a_n + b_n)_n) &= (a_{n-1} + b_{n-1})_n \\ &= (a_{n-1})_n + (b_{n-1})_n = R((a_n)_n) + R((b_n)_n) \end{aligned}$$

und

$$R(\lambda(a_n)_n) = R((\lambda a_n)_n) = (\lambda a_{n-1})_n = \lambda(a_{n-1})_n = \lambda R((a_n)_n)$$

Komplett analog ergibt sich, dass auch der *Linksshift*

$$L\colon V \to V, \quad (a_n)_n \mapsto (a_{n+1})_n$$

linear ist. Da

$$R(L((a_n)_n)) = R((a_{n+1})_n) = (a_n)_n \quad \text{and} \quad L(R((a_n)_n)) = L((a_{n-1})_n) = (a_n)_n$$

ist R bijektiv mit $R^{-1} = L$.

b)

Für die konstante Folge $(1)_n = (\dots, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ ist $R((1)_n) = (1)_n$. Da $(1)_n \neq 0$ ist $(1)_n$ ein Eigenvektor von R zum Eigenwert 1. (Man kann auch jede andere konstante Folge wählen, mit Ausnahme der konstanten Nullfolge, die das Nullelement in V ist.)

c)

Der Eigenraum von R zu $0 \in \mathbb{R}$ ist genau $\ker R$. Da R ein Automorphismus ist, und somit insbesondere injektiv, ist $\ker R = \{0\}$. Also ist 0 kein Eigenwert von R.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ zeigen wir, dass λ ein Eigenwert von R ist, und geben den entsprechenden Eigenraum, der sich als eindimensional herausstellt, explizit an. Hierfür fixieren wir ein entsprechendes λ. Dass $(a_n)_n \in V$ ein Eigenvektor von R zum Eigenwert λ ist, ist äquivalent dazu, dass

$$(a_{n-1})_n = R((a_n)_n) = \lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n,$$

dass also $a_{n-1} = \lambda a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Folge $(\lambda^{-n})_n = (\dots, \lambda^2, \lambda, 1, \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \dots) \in V$ ist also ein Eigenvektor zum Eigenwert λ (man sieht auch direkt, dass das Verschieben der Folge nach rechts dem Multiplizieren der Einträge mit λ entspricht). Somit ist λ ein Eigenwert von R.

Ist $(a_n)_n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, so ergibt sich aus $a_{n-1} = \lambda a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ induktiv, dass $a_n = \lambda^{-n} a_0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, also

$$(a_n)_n = (\lambda^{-n} a_0)_n = a_0(\lambda^{-n})_n.$$

Somit ist der Eigenraum von R zum Eigenwert λ gegeben durch

$$E_{R,\lambda} = \{a(\lambda^{-n})_n \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Insbesondere ist der Eigenraum eindimensional mit Basis $\{(\lambda^{-n})_n\}$.

Aufgabe 7

a)

Für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $\lambda \in K$ ist

$$\mathrm{spur}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (A_{ii} + B_{ii}) = \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ii} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ii} \right) = \mathrm{spur}(A) + \mathrm{spur}(B)$$

und

$$\mathrm{spur}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda A_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \lambda\, \mathrm{spur}(A).$$

Also ist spur linear.

b)

Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ ist

$$\mathrm{spur}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \mathrm{spur}(BA).$$

(Auf dem Zettel war die Aussage nur für den Fall $n = m$ formuliert, der obige Beweis zeigt also tatsächlich eine leicht stärkere Aussage.)

c)

Für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist nach dem vorherigen Aufgabeneil

$$\mathrm{spur}(SAS^{-1}) = \mathrm{spur}(S(AS^{-1})) = \mathrm{spur}((AS^{-1})S) = \mathrm{spur}(AS^{-1}S) = \mathrm{spur}(A).$$

d)

Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist

$$\begin{aligned}\mathrm{spur}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)) &= \mathrm{spur}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)) \\ &= \mathrm{spur}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)^{-1}) = \mathrm{spur}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f))\end{aligned}$$

e)

Per Definition ist $\mathfrak{sl}_n(K) = \ker(\mathrm{spur})$. Also ist $\mathfrak{sl}_n(K)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Die lineare Abbildung $\mathrm{spur}\colon \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K$ ist surjektiv, denn für alle $\lambda \in K$ ist

$$\mathrm{spur}\begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda.$$

Also ist $\operatorname{im}(\operatorname{spur}) = K$ und somit

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{sl}_n(K) &= \dim \ker(\operatorname{spur}) = \dim \operatorname{Mat}(n \times n, K) - \dim \operatorname{im}(\operatorname{spur}) \\ &= \dim \operatorname{Mat}(n \times n, K) - \dim K = n^2 - 1.\end{aligned}$$

f)

Es sei $A \in \operatorname{Mat}(2 \times 2, K)$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, gibt es $S \in \operatorname{GL}_2(K)$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, a \in K$. Da das charakteristische Polynom, die Determinante und die Spur invariant unter Konjugation sind, ist $\chi_A(T) = \chi_{SAS^{-1}}(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2)$ sowie $\det(A) = \det(SAS^{-1}) = \lambda_1 \lambda_2$ und $\operatorname{spur}(A) = \operatorname{spur}(SAS^{-1}) = \lambda_1 + \lambda_2$. Damit ist nun

$$\chi_A(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2) = T^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)T + \lambda_1 \lambda_2 = T^2 - \operatorname{spur}(A)T + \det(A).$$

Dass λ_1 und λ_2 tatsächlich die beiden Eigenwerte von A sind, folgt aus $\chi_A(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2)$.