Lösung zu Übungszettel 12

Jendrik Stelzner

15. Februar 2016

Aufgabe 1

i)

Es seien U, V und W K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to U$ linear Abbildungen. Dann ist
$$(g \circ f)^{\times k} = g^{\times k} \circ f^{\times k},$$
denn für alle $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ ist
$$\begin{aligned}(g \circ f)^{\times k}(v_1, \dots, v_k) &= ((g \circ f)(v_1), \dots, (g \circ f)(v_k)) = (g(f(v_1)), \dots, g(f(v_k))) \\ &= g^{\times k}(f(v_1), \dots, f(v_k)) = g^{\times k}(f^{\times k}(v_1, \dots, v_k)) \\ &= (g^{\times k} \circ f^{\times k})(v_1, \dots, v_k).\end{aligned}$$
Für alle $\psi \in \mathrm{Alt}_k(U)$ ist daher
$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}_k(g \circ f)(\psi) &= \psi \circ (g \circ f)^{\times k} = \psi \circ g^{\times k} \circ f^{\times k} = \mathrm{Alt}_k(g)(\psi) \circ f^{\times k} \\ &= \mathrm{Alt}_k(f)(\mathrm{Alt}_k(g)(\psi)) = (\mathrm{Alt}_k(f) \circ \mathrm{Alt}_k(g))(\psi),\end{aligned}$$
und somit $\mathrm{Alt}_k(g \circ f) = \mathrm{Alt}_k(f) \circ \mathrm{Alt}_k(g)$.

Zum anderen ist $\mathrm{id}_V^{\times k} = \mathrm{id}_{V^k}$, denn für alle $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ ist
$$\mathrm{id}_V^{\times k}(v_1, \dots, v_k) = (\mathrm{id}_V(v_1), \dots, \mathrm{id}_V(v_k)) = (v_1, \dots, v_k).$$
Somit ist für alle $\psi \in \mathrm{Alt}_k(V)$
$$\mathrm{Alt}_k(\mathrm{id})(\psi) = \psi \circ \mathrm{id}_V^{\times k} = \psi \circ \mathrm{id}_{V^k} = \psi,$$
und somit $\mathrm{Alt}_k(\mathrm{id}) = \mathrm{id}_{\mathrm{Alt}_k(V)}$.

ii)

Es sei nun V endlichdimensional mit $n \coloneqq \dim V$ und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Wir zeigen, dass $\mathrm{Alt}_n(f)$ durch Multiplikation mit $\det(f)$ gegeben ist, indem wir zeigen, dass $\mathrm{Alt}_n(f)(\psi) = \det(f)\psi$ für alle $\psi \in \mathrm{Alt}_n(V)$. Hierfür fixieren wir $\psi \in \mathrm{Alt}_n(V)$.

Es sei $\mathcal{B} \coloneqq (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $A \coloneqq \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Dann ist ψ eindeutig durch den Wert $\psi(b_1, \dots, b_n)$ bestimmt; für alle $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ mit

$v_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(i)} b_j$ ist nämlich

$$\begin{aligned}
\psi(v_1, \dots, v_n) &= \psi\left(\sum_{j_1=1}^n \lambda_{j_1}^{(1)} b_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^n \lambda_{j_n}^{(1)} b_{j_n}\right) \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^n \lambda_{j_1}^{(1)} \cdots \lambda_{j_n}^{(n)} \psi(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma(1)} \cdots \lambda_{\sigma(n)} \psi(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \lambda_{\sigma(1)} \cdots \lambda_{\sigma(n)} \psi(b_1, \dots, b_n).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Gleichheit die Multilinearität von ψ genutzt. In der dritten Gleichheit nutzen wir, dass ψ alternierend ist (also $\psi(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) = 0$ falls $j_i = j_{i'}$ für $i \neq i'$), und daher die Summanden überleben, für die $j_1, \dots, j_n$ paarweise verschieden sind, also eine Permutation von $1, \dots, n$ sind. In der letzten Gleichheit haben wir genutzt, dass ψ antisymmetrisch ist (da ψ alternierend ist), und daher das Vertauschen der Argumente $b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}$ einer Vorzeichenänderung von $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ entspricht.

Um zu zeigen, dass $\operatorname{Alt}_k(f)(\psi) = \det(f)\psi$, genügt es deshalb zu zeigen, dass $\operatorname{Alt}_k(f)(\psi)(b_1, \dots, b_n) = \det(f)\psi(b_1, \dots, b_n)$.

Ähnlich wie zur obigen Rechnung erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt}_k(f)(\psi)(b_1, \dots, b_n) &= (\psi \circ f^{\times n})(b_1, \dots, b_n) = \psi(f(b_1), \dots, f(b_n)) \\
&= \psi\left(\sum_{i_1=1}^n A_{i_1,1} b_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n A_{i_n,n} b_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^n A_{i_1,1} \cdots A_{i_n,n} \psi(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n} \psi(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n} \psi(b_1, \dots, b_n).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (A^T)_{1,\sigma(1)} \cdots (A^T)_{n,\sigma(n)} \\
&= \det(A^T) = \det(A).
\end{aligned}$$

Eingesetzt erhalten wir somit

$$\operatorname{Alt}_n(f)(\psi)(b_1, \dots, b_n) = \det(A)\psi(b_1, \dots, b_n),$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 2

Möglichkeit 1

Da $\det(A) \neq 0$ ist A invertierbar. Deshalb ist $Ax = b \iff x = A^{-1}b$; insbesondere gibt es für jedes $b \in K^n$ genau ein $x \in K^n$ mit $Ax = b$, nämlich $x = A^{-1}b$. Nach der Cramerschen Regel ist $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A)$, also

$$\begin{aligned} x_k = (A^{-1}b)_k &= \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{Adj}(A)b)_k = \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Adj}(A)_{ki} b_i \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(A^{(i,k)}) b_i, \end{aligned}$$

wobei $A^{(i,k)}$ den (i,k)-ten Minor von A bezeichnet. Dabei ist nun $A^{(i,k)} = A_{k,b}^{(i,k)}$ für alle $1 \leq i \leq n$, da $A_{k,b}$ aus A entsteht, indem die k-te Spalte durch b ersetzt wird. Deshalb ist auch $(A_{k,b})_{i,k} = b_i$. Damit ergibt sich aus der obigen Gleichung weiter

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(A^{(i,k)}) b_i \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(A_{k,b}^{(i,k)}) (A_{k,b})_{i,k} = \frac{1}{\det(A)} \det(A_{k,b}), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung nutzen, dass $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(A_{k,b}^{(i,k)}) (A_{k,b})_{i,k)}$ die Entwicklung von $\det(A_{k,b})$ nach der k-ten Spalte ist (also die Spalte, in der b steht).

Möglichkeit 2

Wir fixieren $b \in K^n$.Wie in der ersten Möglichkeit ergibt sich, dass es genau ein $x \in K^n$ mit $Ax = b$ gibt.

Für alle $1 \leq j \leq j$ sei a_j der j-te Spaltenvektor von A, also $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Es ist nun

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j,$$

und außerdem $A_{k,b} = (a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Da $Ax = b$ ist

$$\begin{aligned} A_{k,b} = A_{k,Ax} &= (a_1, \ldots, a_{k-1}, Ax, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ &= \left(a_1, \ldots, a_{k-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_{k+1}, \ldots, a_n \right). \end{aligned}$$

Wegen der Multilinearität der Determinante in den Spalten ist

$$\begin{aligned} \det A_{k,b} &= \det \left(a_1, \ldots, a_{k-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_{k+1}, \ldots, a_n \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_j, a_{k+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Da die Determinante auch alternierend in den Spalten ist, überlebt nur der Summand für $j = k$. Deshalb ist

$$\begin{aligned}\det A_{k,b} &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1, \dots, a_{k-1}, a_j, a_{k+1}, \dots, a_n) \\ &= x_k \det(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = x_k \det(A).\end{aligned}$$

Teilen wir beide Seiten der obigen Gleichung durch $\det(A)$ so erhalten wir $x_k = \det(A_{k,b}) / \det(A)$, was zu zeigen war.

Aufgabe 3

Die Definition, die in auf dem Aufgabenzettel gegeben wurde, hat das Problem, dass die entsprechende Abbildung $P\colon S_n \to \mathrm{GL}_n(K)$ kein Gruppenhomomorphismus ist; stattdessen ist $P(\sigma\tau) = P(\tau)P(\sigma)$ für alle $\pi, \sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ (man bezeichnet P als einen *Antihomomorphismus von Gruppen*). Wir geben daher zunächst die eigentliche Definition an:

Für jedes $\sigma \in S_n$ sei $P(\sigma) \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ die eindeutige Matrix mit

$$P(\sigma)e_j = e_{\sigma(j)} \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n,$$

wobei $(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis des K^n bezeichnet. Die j-te Spalte von $P(\sigma)$ ist also $e_{\sigma(j)}$. In Koordinaten ist somit ist für alle $1 \leq i, j \leq n$

$$P(\sigma)_{ij} = (P(\sigma)e_j)_i = (e_{\sigma(j)})_i = \delta_{i,\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

i)

Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ ist

$$P(\sigma)P(\tau)e_j = P(\sigma)e_{\tau(j)} = e_{\sigma(\tau(j))} = e_{(\sigma\circ\tau)(j)} = P(\sigma\tau)e_j \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n,$$

und somit ist $P(\sigma)P(\tau) = P(\sigma\tau)$. Dies lässt sich auch in Koordinaten nachrechnen, da für alle $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned}(P(\sigma)P(\tau))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} P(\sigma)_{ik} P(\tau)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\tau(j)} \\ &= \delta_{i,\sigma(\tau(j))} = \delta_{i,(\sigma\tau)(j)} = P(\sigma\tau)_{ij}.\end{aligned}$$

Außerdem ist $P(\mathrm{id}) = \mathbb{1}_n$, denn

$$P(\mathrm{id})e_j = e_{\mathrm{id}(j)} = e_j = \mathbb{1}_n e_j \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n,$$

bzw. in Koordinaten

$$(P(\mathrm{id}))_{ij} = \delta_{i,\mathrm{id}(j)} = \delta_{ij} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

Damit erhalten wir nun, dass

$$P(\sigma)P(\sigma^{-1}) = P(\sigma\sigma^{-1}) = P(\mathrm{id}) = \mathbb{1}_n \quad \text{für alle } \sigma \in S_n,$$

dass also $P(\sigma)$ für alle $\sigma \in S_n$ invertierbar ist mit $P(\sigma)^{-1} = P(\sigma^{-1})$. Dass $P\colon S_n \to \mathrm{GL}_n(K)$ nun ein Gruppenhomomorphismus ist, also $P(\sigma\tau) = P(\sigma)P(\tau)$ für alle $\sigma, \tau \in S_n$, haben wir bereits gezeigt.

ii)

Es sei $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ die Menge aller Matrizen, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 hat und sonst nur 0. Es gilt zu zeigen, dass $\mathcal{P} = \mathrm{im} P$.

Es sei $A \in \mathrm{im} P$. Dann gibt es $\sigma \in S_n$ mit $A = P(\sigma)$. Da $A_{ij} = P(\sigma)_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$ hat A in der i-ten Zeile genau eine 1, nämlich in der $\sigma^{-1}(i)$-ten Spalte, und sonst nur 0, und in der j-ten Spalte genau eine 1, nämlich in der $\sigma(j)$-ten Zeile, und sonst nur 0. Also ist $A \in \mathcal{P}$.

Es sei nun andererseits $A \in \mathcal{P}$. Für jeden Spaltenindex $1 \leq j \leq n$ hat A genau eine 1 in der j-ten Spalte, und sonst nur 0; es gibt daher eine Funktion $\sigma \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}, j \mapsto \sigma(j)$ mit $A_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ (die eindeutige 1 in der j-ten Spalte von A liegt also in der $\sigma(j)$-ten Zeile).

Die Funktion σ ist injektiv, denn gebe es $1 \leq j \neq j' \leq n$ mit $\sigma(j) = \sigma(j')$, so hätte A zwei Einsen in der $\sigma(j)$-ten Zeile (nämlich in der j-ten und j'-ten Spalte). Da $\{1, \dots, n\}$ endlich ist, ist σ damit bereits bijektiv, also $\sigma \in S_n$.

Da $A_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)} = P(\sigma)_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ ist $A = P(\sigma) \in \mathrm{im} P$. Insgesammt zeigt dies, dass $\mathcal{P} = \mathrm{im} P$.

iii)

Für $\sigma \in S_n$ ist

$$\begin{aligned}
\det P(\sigma) = \det P(\sigma)^T &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) (P(\sigma)^T)_{1,\tau(1)} \cdots (P(\sigma)^T)_{n,\tau(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) P(\sigma)_{\tau(1),1} \cdots P(\sigma)_{\tau(n),n} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) \delta_{\tau(1),\sigma(1)} \cdots \delta_{\tau(n),\sigma(n)}
\end{aligned}$$

Es überlebt also nur ein Summand, nämlich der für $\tau = \sigma$, so dass

$$\det P(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma) \delta_{\sigma(1),\sigma(1)} \cdots \delta_{\sigma(n),\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot 1 \cdots 1 = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Aufgabe 4

Wir zeigen die Aussage per Induktion über n.

Induktionsanfang. Es sei $n = 1$. Für $x \in K^1$ ist $V(x) = (1)$ und somit

$$\det V(x) = \det(1) = 1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 1} (x_j - x_i),$$

das es sich bei der rechten Sei um das leere Produkt handelt.

Auch für $n = 2$ ergibt sich durch direktes Nachrechnen, dass für $x \in K^2$

$$V(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det V(x) = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i).$$

Induktionsvoraussetzung. Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Induktionschritt. Es sei $x \in K^{n+1}$. Dann ist

$$V(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Wir ziehen nun von der letzten Spalte von $V(x)$ das x_1-fache der vorletzten Spalte ab, anschließend von der vorletzten Spalte das x_1-fache der vorvorletzten Spalte, ..., von der dritten Spalte das x_1-fache der zweiten Spalte und von der zweiten Spalte das x_1-fache der ersten Spalte. Damit erhalten wir die Matrix $V'(x)$ mit

$$\begin{aligned} &V'(x) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 & \cdots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^3 - x_1 x_3^2 & \cdots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & x_{n+1}^3 - x_1 x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1) x_2 & (x_2 - x_1) x_2^2 & \cdots & (x_2 - x_1) x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1) x_3 & (x_3 - x_1) x_3^2 & \cdots & (x_3 - x_1) x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1} & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^2 & \cdots & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die durchgeführter elementaren Zeilenoperationen die Determinante invariant lassen, ist $\det V(x) = \det V'(x)$. Durch Entwickeln von $\det V'(x)$ und der Multilinearität der Determinante ergibt sich nun

$$\begin{aligned} &\det V'(x) \\ &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1) x_2 & (x_2 - x_1) x_2^2 & \cdots & (x_2 - x_1) x_2^{n-1} \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1) x_3 & (x_3 - x_1) x_3^2 & \cdots & (x_3 - x_1) x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1} & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^2 & \cdots & (x_{n+1} - x_1) x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (x_{n+1} - x_1) \cdots (x_2 - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \cdot \det V(x') \end{aligned}$$

mit $x' = (x_2, \ldots, x_{n+1})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\det V(x') = \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i),$$

und somit ist

$$\begin{aligned}\det V(x) = \det V'(x) &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \cdot V(x') \\ &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i).\end{aligned}$$