Aufgabe 1

Für $m \geq 1$ seien $A_1, \ldots, A_m \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und es sei $A := A_1 \cdots A_m$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn A_i für alle $1 \leq i \leq m$ invertierbar ist.

Aufgabe 2

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

a)

Geben Sie $B \in \mathrm{Mat}(3 \times 1, \mathbb{Q})$ und $C \in \mathrm{Mat}(1 \times 3, \mathbb{Q})$ mit $A = BC$ an.

b)

Berechnen Sie A^{2016}.

Aufgabe 3

Es seien U, V und W K-Vektorräume, $f\colon U \to V$ ein Monomorphismus und $g\colon V \to W$ ein Epimorphismus, und es gelte $\mathrm{im} f = \ker g$. Zeigen Sie, dass

$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ das Produkt

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C}.$$

Bestimmen Sie anschließend alle $a \in \mathbb{C}$ für die

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & -3+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(K, V) \cong V$, indem Sie einen entsprechenden Isomorphismus angeben.

Aufgabe 6

Es sei

$$V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$$

der reelle Vektorraum der beidseitigen Folgen; die Addition und Skalarmultiplikation von V erfolgen punktweise, d.h. für alle $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} + (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Ferner sei

$$R\colon V \to V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

der *Rechtsshift*.

a)

Zeigen Sie, dass R ein Automorphismus von V ist, und geben Sie R^{-1} an.

b)

Bestimmen Sie, ob R einen Eigenwert hat. Geben Sie gegebenenfalls einen solchen Eigenwert sowie einen zugehörigen Eigenvektor an.

d*)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von R, sowie die jeweils zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 7

Die *Spur* einen quadratischen Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ist die Summe ihrer Diagonaleinträge, d.h.

$$\mathrm{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

a)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{spur}\colon \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K$ linear ist.

b)

Zeigen Sie für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ die Gleichheit

$$\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA).$$

c)

Folgern Sie für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Gleichheit

$$\mathrm{spur}(SAS^{-1}) = \mathrm{spur}(A).$$

d)

Folgern Sie: Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit $n \geq 1$ und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, so gilt für je zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V die Gleichheit

$$\mathrm{spur}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{spur}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)).$$

(Man bezeichnet den obigen Ausdruck als die Spur von f und schreibt für diesen $\mathrm{spur}(f)$.)

e)

Es sei

$$\mathfrak{sl}_n(K) := \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K) \mid \mathrm{spur}(A) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{sl}_n(K) \subseteq \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ein $(n^2 - 1)$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ist.

f)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$ habe die beiden Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Zeigen Sie, dass $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ und $\mathrm{spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. Folgern Sie, dass für das charakteristische Polynom von A die Gleichheit

$$\chi_A(T) = T^2 - \mathrm{spur}(A)T + \det(A)$$

gilt. (*Hinweis*: Nutzen Sie, dass A konjugiert zu einer oberen Dreiecksmatrix ist.)