Lösungen zu Übungszettel 7

Jendrik Stelzner

6. Januar 2016

Aufgabe 2.

Es sei $\mathcal{S} \subseteq K$ eine L-Basis von K und $\mathcal{B} \subseteq V$ eine K-Basis von V. Wir zeigen, dass

$$\mathcal{C} \coloneqq \{\mu b \mid (\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}\}$$

eine L-Basis von V ist, wobei die Elemente μb mit $(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}$ paarweise verschieden sind.

Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{C}$ ein L-Erzeugendensystem von V ist; hierfür fixieren wir zunächst ein $v \in V$. Da $\mathcal{B}$ ist ein K-Erzeugendensystem von V ist, gibt es $\lambda_b \in K$ mit $b \in \mathcal{B}$, so dass $\lambda_b = 0$ für fast alle $b \in B$ und $v = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b$.

Da $\mathcal{S}$ ein L-Erzeugendensystem von K ist, gibt es nun für jedes $b \in \mathcal{B}$ Koeffizienten $c_\mu^b \in L$ mit $\mu \in \mathcal{S}$, so dass $c_\mu^b = 0$ für fast alle $\mu \in L$ und $\lambda_b = \sum_{\mu \in \mathcal{S}} c_\mu^b \mu$.

Ist dabei $b \in \mathcal{B}$ mit $\lambda_b = 0$, so ist dabei $c_\mu^b = 0$ für alle $\mu \in L$, da $\mathcal{S}$ auch linear unabhängig über L ist. Somit ist $c_\mu^b = 0$ für fast alle $(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}$. Da

$$v = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b = \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{\mu \in \mathcal{S}} c_\mu^b \mu b = \sum_{(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}} c_\mu^b \, \mu b$$

ist somit $v \in \mathcal{L}_L(\mathcal{C})$. Also ist $\mathcal{C}$ ein L-Erzeugendensystem von V.

Sind andererseits $c_\mu^b \in L$ mit $(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}$, so dass $c_\mu^b = 0$ für fast alle $(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}$ und $0 = \sum_{(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}} c_\mu^b \, \mu b$, so ist

$$0 = \sum_{(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}} c_\mu^b \, \mu b = \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{\mu \in \mathcal{S}} c_\mu^b \, \mu b = \sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\sum_{\mu \in \mathcal{S}} c_\mu^b \mu \right) b.$$

Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig über K ist, folgt hieraus, dass $\sum_{\mu \in \mathcal{S}} c_\mu^b \mu = 0$ für alle $b \in \mathcal{B}$. Da $\mathcal{S}$ linear unabhängig über L ist, ist bereits $c_\mu^b = 0$ für alle $(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}$. Also ist $\mathcal{C}$ auch linear unabhängig über L und die Elemente μb mit $(\mu, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{B}$ sind paarweise verschieden.

Somit ist $\mathcal{C}$ ein L-Basis von V und

$$\#\mathcal{C} = \#(\mathcal{S} \times \mathcal{B}) = (\#\mathcal{S}) \cdot (\#\mathcal{B}).$$

Da $\dim_L(K) = \#\mathcal{S}$, $\dim_K(V) = \#\mathcal{B}$ und $\dim_L(V) = \#\mathcal{C}$ folgt daraus, dass

$$\dim_L(V) = \dim_L(K) \cdot \dim_K(V).$$

Man bemerke, dass $\dim_K(V) > 0$ da $V \neq 0$, und dass $\dim_L(K) > 0$ da $K \neq 0$. Daher $\dim_L(V) < \infty$ genau dann, wenn $\dim_L(K) < \infty$ und $\dim_K(V) < \infty$.

Aufgabe 3.

Für alle $w_1, w_2 \in W$ ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2))) \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2))) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2), \end{aligned}$$

und für alle $\lambda \in K$ und $w \in W$ ist

$$f^{-1}(\lambda w) = f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(w))) = f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(w))) = \lambda f^{-1}(w).$$

Also ist auch f^{-1} linear.

Aufgabe 4.

Für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zeigen wir die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Für jedes Erzeugendensystem S von V ist $f(S)$ ein Erzeugendensystem von W.

(ii) Es gibt eine Teilmenge $S \subseteq V$, so dass $f(S)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(iii) f ist surjektiv.

((i) $\implies$ (ii)) Dies ergibt sich direkt daraus, dass man das Erzeugendensystem $S = V$ betrachtet.

((ii) $\implies$ (iii)) Da $f(S)$ ein Erzeugendensystem von W ist, gilt $\mathcal{L}(f(S)) = W$. Also ist

$$W = \mathcal{L}(f(S)) = f(\mathcal{L}(S)) \subseteq f(V) \subseteq W,$$

also bereits $f(V) = W$. Somit ist f surjektiv.

((iii) $\implies$ (i)) Da f surjektiv ist, ist $f(V) = W$. Ist $S \subseteq V$ ein Erzeugendensystem, so gilt deshalb

$$\mathcal{L}(f(S)) = f(\mathcal{L}(S)) = f(V) = W.$$

Also ist $f(S)$ ein Erzeugendensystem von W.

Das zeigt die Äquivalenz der Aussagen. Gilt nun eine (und damit alle) dieser Aussagen und ist $\mathcal{B} \subseteq V$ eine Basis, so ist $f(\mathcal{B}) \subseteq W$ nach (i) ein Erzeugendensystem von W. Also ist dann

$$\dim V = |\mathcal{B}| \geq |f(\mathcal{B})| \geq \dim W.$$

Aufgabe 5.

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

und für alle $1 \leq j \leq n$ sei

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

der j-te Spaltenvektor von A.

i).

Die Matrix $\tilde{A}$ entstehe aus A durch elementare Zeilenumformungen und sei in Zeilenstufenform.

Dass die Zeilen von A linear unabhängig sind, ist äquivalent dazu, dass die $\tilde{A}$ keine Nullzeilen enthält.

Da $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform ist, enthält $\tilde{A}$ genau dann keine Nullzeilen, wenn das lineare Gleichungssystem $\tilde{A}x = y$ für alle $y \in K^m$ eine Lösung hat

Da $\tilde{A}$ durch A aus elementaren Zeilenumformungen hervorgeht, hat das lineare Gleichungssystem $\tilde{A}x = y$ genau dann für jedes $y \in K^m$ eine Lösung, wenn das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ für alle $y \in K^m$ ein Lösung hat (diese Lösungen müssen allerdings nicht notwendigerweise gleich sein).

Dass das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ für jedes $y \in K^m$ eine Lösung hat, bedeutet aber nichts anderes, als dass die Abbildung $A \cdot -$ surjektiv ist.

Also sind die Zeilen von A genau dann linear unabhängig, falls $A \cdot -$ surjektiv ist.

ii).

Für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ ist

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_n a_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \cdots + \lambda_n a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n. \end{aligned}$$

Dass $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$ eine Linearkombination der Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ ist, ist also äquivalent dazu, dass

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0.$$

Also sind die Spalten von A genau dann linear unabhängig, wenn $\ker(A) = 0$, also A injektiv ist.