

Lineare Algebra II Repetitorium

Übungen, Tag 3

Jendrik Stelzner

23. September 2016

Im Folgenden seien alle auftretenden Skalarprodukträume endlichdimensional.

Übung 1.

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein normaler Endomorphismus eines Skalarproduktraums V . Zeigen Sie:

1. Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$.
2. Es ist $V_\lambda(f^*) = V_{\bar{\lambda}}(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq \mu$ ist $V_\lambda(f) \perp V_\mu(f)$.
4. Für $v \in V$ und $n \geq 1$ mit $f^n(v) = 0$ ist bereits $f(v) = 0$.
5. Folgern Sie, dass $V_\lambda^\sim(f) = V_\lambda(f)$ für alle $\lambda \in K$.

Zeigen Sie außerdem für einen beliebigen Endomorphismus $g: V \rightarrow V$:

6. Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ist genau dann g -invariant, wenn U^\perp invariant unter g^* ist.
7. Es ist $\dim \ker(g) = \dim \ker(g^*)$.
8. Es ist $\operatorname{im}(g^*) = (\ker g)^\perp$ und $\ker g^* = (\operatorname{im} g)^\perp$.
9. Folgern Sie, dass $V = \operatorname{im}(f) \oplus \ker(f)$ mit $\operatorname{im}(f) \perp \ker(f)$.

Übung 2.

Zeigen Sie, dass für einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eines Skalarproduktraums V die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Es gilt $ff^* = \operatorname{id}_V$.
2. Es gilt $f^*f = \operatorname{id}_V$.
3. f ist ein Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$.
4. Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist $\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$.

5. Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|v\|$.

Übung 3.

Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Zeigen Sie, dass genau dann $A^*A = I$, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n bilden.
2. Zeigen Sie, dass genau dann $AA^* = I$, wenn die Zeilen von A eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n bilden.

Übung 4.

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums V . Zeigen Sie die folgende Aussagen ohne Verwendung entsprechender Normalenformen:

1. Ist f selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte von f reell.
2. Ist f antiselbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte von f rein imaginär.
3. Ist f unitär, bzw. orthogonal, so haben alle Eigenwerte von f Betrag 1.

Übung 5.

Es sei $n \geq 1$.

1. Zeigen Sie, dass $\det(U) \in S^1$ für alle $U \in U(n)$, und dass $\det: U(n) \rightarrow S^1$ surjektiv ist.
2. Zeigen Sie, dass $\det(O) \in \{1, -1\}$ für alle $O \in O(n)$, und dass $\det: O(n) \rightarrow \{1, -1\}$ surjektiv ist.

Übung 6.

Es sei V ein Skalarproduktraum.

1. Es sei $v \in V$ ein normierter Vektor. Zeigen Sie, dass die Abbildung $P_v: V \rightarrow V$ mit $P_v(w) = \langle w, v \rangle v$ die orthogonale Projektion auf die Gerade $\mathcal{L}(v)$ ist.
2. Es sei (v_1, \dots, v_n) eine orthonormale Familie von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass $P := P_{v_1} + \dots + P_{v_n}$ die orthogonale Projektion auf den Untervektorraum $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ ist.

Übung 7.

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums V .

1. Zeigen Sie: Ist f selbstadjungiert, so ist f genau dann positiv, wenn

$$\langle f(v), v \rangle > 0 \quad \text{für alle } v \in V \text{ mit } v \neq 0.$$

2. Zeigen Sie für $f \in GL(V)$, dass ff^* und f^*f positiv selbstadjungiert sind.

Übungszettel finden sich online unter folgender URL:

<https://github.com/cionx/Lineare-Algebra-2-Repetitorium-SS-16>