Übung 1.
Man entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn V ein Euklidischer Vektorraum ungerader Dimension ist, so hat die Gruppe $\mathrm{O}(V)$ einen offenen Normalteiler vom Index 2.

2. Jede echte offene Untergruppe von $\mathrm{GL}_{2016}(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend.

3. Sei $n \geq 2$ gerade und $T(x_1, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Für je zwei $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gehören entweder A und B oder A und TB zu derselben Zusammenhangskomponente von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. Wenn a, b und c die Seiten eines spärischen Dreieckes mit einem rechten Winkel bei C (also gegenüber der Seite c) sind, so gilt $\sin^2(c) = \sin^2(a) + \sin^2(b)$.

5. Wenn $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine $n \times n$-Matrix mit komplexen Koeffizienten ist, welche $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ für alle ganzzahligen $i, j \in [1, n]$ erfüllen, so ist der durch die Multiplikation mit A definierte Endomorphismus von $\mathbb{C}^n$ bezüglich des Standardskalarproduktes selbstadjungiert.

6. Sei N ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V mit $N^{50} = 0$ und $\dim(\ker(N)) < 50$, dann gilt $\dim V \leq 2016$.

7. Wenn β eine nichtgeartete Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V über einem beliebigen Körper und A ein Endomorphismus von V mit $\beta(Ax, Ay) = \beta(x, y)$ für alle $x, y \in V$ ist, so gilt $\det A = \pm 1$.

Lösung 1.

1. Die Aussage ist wahr, wie in der Vorlesung gezeigt.

2. Die Aussage ist wahr, wie wohl in der Vorlesung gezeigt wurde.

3. Die Aussage ist wahr: Es gilt $\det T = -1$ (denn für die Abbildung $T_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ gilt $\det T_i = -1$, und es gilt $T = T_1 \cdots T_{n-1}$). Deshalb haben entweder $\det A$ und $\det B$ die gleichen Vorzeichen, oder $\det A$ und $\det TB$ die gleichen Vorzeichen. Da die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ durch die Vorzeichen der Determinante bestimmt sind, ergibt sich die Aussage.

4. Die Aussage ist falsch; man betrachte etwa ein spärisches Dreieck mit drei rechten Winkeln, bei dem alle Seiten gleich lang sind.

5. Die Aussage ist wahr. Es sei $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$ die entsprechende Abbildung. Dass $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ ist äquivalent dazu, dass $A = A^*$, dass also A selbstadjungiert ist. Es gibt zwei einfache Möglichkeiten, die Aussage zu zeigen:

   Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{C}^n$ gilt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Da $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ ist folgt aus der Selbstadjungiert von A, dass f selbstadjungiert ist.

Alternativ ergibt sich für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ durch direktes Nachrechnen, dass

$$\langle f(x), y\rangle = \langle Ax, y\rangle = (Ax)^T\overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T \overline{A}\overline{y} = x^T \overline{Ay} = \langle x, Ay\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

6. Die Aussage ist falsch, es muss nur $\dim V \leq 50 \cdot \dim \ker f \leq 50 \cdot 49 = 2450$ gelten.
7. Die Aussage ist wahr.
8. Die Aussage ist wahr: Sind $p, q \in K[T]$ zwei Polynome mit $\deg p, \deg q \leq 2016$ und $p(x) = q(x)$ für alle $x \in K$, so hat das Polynom $p - q$ jedes Element des Körpers als Nullstelle. Wäre $p - q \neq 0$, so könnte $p - q$ wegen $\deg(p - q) \leq 2016$ aber höchstens 2016 Nullstellen haben. Also muss $p - q = 0$ gelten und somit $p = q$.