Lineare Algebra II
Repetitorium

Jendrik Stelzner

18. September 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Jordannormalform

1.1 Nilpotente Endomorphismus

Definition 1.1. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$ gibt. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt.

Lemma 1.2. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so ist f genau dann nilpotent, wenn für jede geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ nilpotent ist.

Notation 1.3. Für alle $n \geq 1$ sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Theorem 1.4. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus.

i) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und $n_1, \ldots, n_s \geq 1$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ sind eindeutig bis auf Permutation.

iii) Ist $f^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \ldots, s$.

Korollar 1.5. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ nilpotent, so gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $n_1, \ldots, n_s \geq 1$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ eindeutig bis auf Permutation, und ist $A^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \ldots, s$.

Lemma 1.6. Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und sind $U, W, \subseteq V$ zwei Untervektorräume mit $U \cap W = 0$, so gibt es einen Untervektorraum $\overline{W} \subseteq V$ mit $W \subseteq \overline{W}$ und $V = U \oplus \overline{W}$.

1.2 Allgemeine Jordannormalform

Definition 1.7. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ und einen Skalar $\lambda \in K$ ist

$$V_\lambda^\sim(f) := \{v \in V \mid \text{es gibt } n \geq 1 \text{ mit } (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^n(v) = 0\}$$

der *Hauptraum* von f zu λ.

Lemma 1.8. Es sei $f\colon V \to V$ und $\lambda \in K$.

i) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

ii) Es gilt $V_\lambda(f) \subseteq V_\lambda^\sim(f)$.

iii) Es ist genau dann $V_\lambda^\sim(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.

iv) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist f-invariant.

v) Ist V endlichdimensional, so gibt es $N \geq 1$ mit $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N(v) = 0$ für alle $v \in V$, und es gilt $V_\lambda^\sim(f) = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N$.

Lemma 1.9. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

Notation 1.10. Für alle $n \geq 1$ und $\lambda \in K$ ist

$$J(n,\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

der Jordanblock von Größe n zu(m Eigenwert) λ.

Theorem 1.11. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so dass $V = V_{\lambda_1}^\sim(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}^\sim(f)$ für die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ von f.

i) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und $n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}, \dots, n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)} \geq 1$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J(n_1^{(1)},\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J(n_{s_1}^{(1)},\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J(n_1^{(t)},\lambda_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(n_{s_t}^{(t)},\lambda_1) \end{pmatrix}$$

ii) Die Zahlen $(n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}), \dots, (n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)})$ sind jeweils eindeutig bis auf Permutation.

iii) Es gilt $n_1^{(i)} + \dots + n_{s_i}^{(i)} = \dim V_\lambda^\sim(f)$ für alle $i = 1, \dots, t$.

1.3 Existenz der Hauptraumzerlegung

Lemma 1.12. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

i) Für alle $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ ist die Einschränkung $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)|_{V^\sim_\mu(f)}$ invertierbar.

ii) Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ ist die Summe $V^\sim_{\lambda_1}(f) + \cdots + V^\sim_{\lambda_t}(f)$ direkt.

Lemma 1.13. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V und $\lambda \in K$. Ferner sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum mit $V = V^\sim_\lambda(f) \oplus U$. Dann ist λ kein Eigenwert von $f|_U$, und es gilt

$$\chi_f(T) = (T-\lambda)^{\dim V^\sim_\lambda(f)} \cdot \chi_{f|_U}(T).$$

Lemma 1.14 (Fitting). Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Für alle $k \geq 0$ sei

$$N_k \coloneqq \ker f^k \quad \text{und} \quad R_k \coloneqq \operatorname{im} f^k.$$

i) Es gilt

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

und

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$$

ii) Für $k \geq 0$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $N_{k+1} = N_k$,

b) $N_l = N_k$ für alle $l \geq k$,

c) $R_{k+1} = R_k$,

d) $R_l = R_k$ für alle $l \geq k$.

(Wenn also eine der beiden Ketten einmal stabiliert, so sind beide Ketten von dort an stabil.)

iii) Die beiden Teilmengen $N \coloneqq \bigcup_{k\geq 0} N_k$ und $R \coloneqq \bigcap_{k \geq 0} R_k$ sind f-invariante Untervektorräume von V, und es gilt $V = N \oplus R$.

Theorem 1.15 (Existenz der Hauptraumzerlegung). Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann gibt es genau dann eine Hauptraumzerlegung von V bezüglich f, wenn das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ in Linearfaktoren zerfällt.

Korollar 1.16. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so ist $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V^\sim_\lambda(f)$.

Korollar 1.17. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V (bzw. $A \in \mathrm{M}_n(K)$), so ist $\chi_f(f) = 0$ (bzw. $\chi_A(A) = 0$).

Korollar 1.18 (Abstrakte Jordanzerlegung). Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so gibt es eindeutige Endomorphismen $d, n\colon V \to V$, so dass

a) $f = d + n$,

b) d ist diagonalisierbar und n ist nilpotent,

c) d und n kommutieren

2 Simultane Diagonalisierbarkeit

Lemma 2.1. Ist $f \in V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, so ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.

Definition 2.2. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *diagonalisierbar*, falls $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda$.

Bemerkung 2.3. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V.

i) Nach Lemma 2.1 ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.

ii) Ist V endlichdimensional, so ist f genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von f besitzt.

Proposition 2.4. Ist $f\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines K-Vektorraums V, so ist für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ auch die Einschränkung $f|_U : U \to U$ diagonalisierbar, und es gilt

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} [U \cap V_\lambda(f)].$$

Definition 2.5. Zwei Endomorphismen $f, g\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißen *simultan diagonalisierbar*, falls

$$V = \bigoplus_{\lambda, \mu \in K} [V_\lambda(f) \cap V_\mu(g)].$$

Bemerkung 2.6. Sind $f, g\colon V \to V$ zwei Endomorphismen eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so sind f und g genau dann simultan diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von f und g besitzt.

Proposition 2.7. Zwei Endomorphismen $f, g\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V sind genau dann simultan diagonalisierbar, wenn sie beide diagonalisierbar sind und kommutieren.

3 Skalarprodukträume

Definition 3.1. i) Eine Abbildung $b\colon V \times W \to Z$ mit K-Vektorräumen V, W, Z heißt *K-bilinear*, falls

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b_(v_2, w), \\ b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2), \\ b(\lambda v, w) &= \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w) \end{aligned}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$. Ist zusätzlich $Z = K$, so ist b eine *Bilinearform*. Gilt außerden noch $V = W$ und

$$b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so ist b eine *symmetrische Bilinearform*.

ii) Eine Abbildung $s\colon V \times W \to Z$ mit $\mathbb{C}$-Vektorräumen V, W, Z heißt *sesquilinear*, falls

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b_(v_2, w), \\ b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2), \\ b(\lambda v, w) &= \lambda b(v, w) \text{ und } b(v, \lambda w) = \overline{\lambda}(w) \end{aligned}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist zusätzlich $Z = \mathbb{C}$, so ist s eine *Sesquilinearform*. Gilt außerdem noch $V = W$ und

$$s(v_1, v_2) = \overline{s(v_2, v_1)} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt s heißt *hermitsch*.

Lemma 3.2. Ist $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitsche Bilinearform, so ist $s(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

Notation 3.3. Es ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 3.4. Eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt

i) *positiv definit*, falls $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$,

ii) *positiv semidefinit*, falls $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$,

iii) *negativ definit*, falls $\langle v, v \rangle < 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$,

iv) *negativ semidefinit*, falls $\langle v, v \rangle \leq 0$ für alle $v \in V$, und

v) *indefinit*, wenn sie keine der obigen Bedingungen erfüllt.

Definition 3.5. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine positiv definite, symmetrische (bzw. hermitsche) Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$.

Ein Skalarproduktraum ist ein Tupel $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.

Bemerkung 3.6. Man spricht meist nur von einem Skalarproduktraum V, nennt das Skalarprodukt also nicht explizit mit. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spricht man auch von einem *euklidischen Vektorraum*, und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ von einem *unitären Vektorraum*

Definition 3.7. Für einen Skalarproduktraum V und $v \in V$ ist $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Der Vektor v heißt *normiert*, wenn $\|v\| = 1$.

Proposition 3.8 (Cauchy-Schwarz). Ist V ein Skalarproduktraum, so ist

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Korollar 3.9. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V.

Bemerkung 3.10. Ist $v \in V$ mit $v \neq 0$, so ist der Vektor $v/\|v\|$ normiert. Man sagt, dass man v normiert.

Lemma 3.11 (Polarisationsformel). Ist V ein euklidischer Vektorraum, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Ist V ein unitärer Vektorraum, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} + i \frac{\|v + iw\| - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Definition 3.12. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Zwei Vektoren $u, w \in V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, geschrieben als $u \perp w$, wenn $\langle u, w \rangle = 0$.

ii) Zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, wenn $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

iii) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U (in V).

Lemma 3.13. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Ist ein Vektor $v \in V$ zu jedem Vektor $w \in V$ orthogonal, so gilt bereits $v = 0$.

ii) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $U \cap U^\perp = 0$.

Definition 3.14. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *orthogonal*, wenn $v_i \perp v_j$ für all $i \neq j$. Die Familie heißt *nomiert*, falls v_i für alle $i \in I$ normiert ist. Ist die Familie orthogonal und normiert, so heißt sie *orthonormal*.

ii) Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *orthogonal*, wenn $v \perp w$ für alle $v, w \in S$ mit $v \neq w$. Die Teilmenge heißt *nomiert*, falls jeder Vektor $v \in S$ normiert ist. Ist S orthogonal und normiert, so heißt S *orthonormal*.

Lemma 3.15. Es sei V ein Skalarproduktraum.

1. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ ist genau dann orthonormal, wenn $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.

2. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist genau dann orthonormal, wenn $\langle v, w \rangle = \delta_{v,w}$ für alle $v, w \in S$.

Lemma 3.16. Es sei V ein Skalarproduktraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine orthogonale Familie von Vektoren $v_i \in V$ mit $v_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig. Insbesondere ist jede orthonormale Familie linear unabhängig.

Definition 3.17. Eine orthonormale Basis eines Skalarproduktraums V heißt *Orthonormalbasis* von V.

Proposition 3.18. Es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis eines Skalarproduktraums V.

1. Für jedes $v \in V$ ist $\langle v, v_i \rangle = 0$ für fast alle $i \in I$, und es gilt

$$v = \sum_{i\in I} \langle v, v_i \rangle \, v_i \quad \text{sowie} \quad \|v\|^2 = \sum_{i\in I} \langle v, v_i \rangle^2 .$$

2. Für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i\in I} \langle v, v_i \rangle \, \langle w, v_i \rangle .$$

Theorem 3.19 (Gram-Schmidt). Es sei V ein Skalarproduktraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$. Iterativ seien die Familien $(\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n)$ und $(w_1, \ldots, w_n)$ durch $\tilde{w}_1 \coloneqq v_1$, $w_i \coloneqq \tilde{w}_i / \|\tilde{w}_i\|$ und

$$\tilde{w}_i \coloneqq v_i - \langle v_i, w_1 \rangle \, w_1 - \cdots - \langle v_i, w_{i-1} \rangle \, w_{i-1}$$

definiert. Dann ist die Familie $(w_1, \ldots, w_n)$ orthonormal, und es gilt

$$\langle w_1, \ldots, w_i \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Korollar 3.20. Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum.

1. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$ eine Orthonormalbasis von U, so lässt sich $\mathcal{B}$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ von V ergänzen.

2. Es gibt eine Orthonormalbasis von V.

3. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $V = U \oplus U^{\perp}$.

Proposition 3.21. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung

$$\Phi \colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

injektiv und $\mathbb{R}$-linear (bzw. $\mathbb{C}$-antilinear). Ist V endlichdimensional, so ist Φ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen (bzw. Antiisomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen).

4 Normale Endomorphismen

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional, sofern nicht anders angegeben.

4.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Proposition 4.1. Für zwei Skalarprodukträume V und W gibt es für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutige $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon W \to V$ mit

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Definition 4.2. In der Situation von Proposition 4.1 ist die Abbildung g die zu f *adjungierte* Abbildung, und wird mit f^* notiert.

Proposition 4.3. Es seien U, V, W drei Skalarprodukträume.

i) Es gilt $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$, und für alle linearen Abbildungen $f\colon V \to W$ und $g\colon U \to V$ gilt

$$(fg)^* = g^* f^*.$$

ii) Ist $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch f^* ein Isomorphismus.

iii) Für alle $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $f, g\colon V \to W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

   a) $(f^*)^* = f$,

   b) $(f+g)^* = f^* + g^*$ und

   c) $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$.

   Insbesondere ist die Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$, $f \mapsto f^*$ ein Isomorphismus (bzw. Antiisomorphismus) von $\mathbb{R}$-Vektorräumen (bzw. $\mathbb{C}$-Vektorräumen).

Definition 4.4. Für $A \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{K})$ ist $A^* := \overline{A^t} = (\overline{A})^t \in \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{K})$.

Proposition 4.5. Es sei V ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ und W ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis $\mathcal{C}$. Für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt dann

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^*.$$

Definition 4.6. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V heißt

i) *normal*, falls f und f^* kommutieren (also $ff^* = f^*f$),

ii) *selbstadjungiert*, falls $f = f^*$,

iii) *antiselbstadjungiert*, falls $f^* = -f$,

iv) *orthogonal* (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. *unitär* (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) falls f ein Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$ ist.

Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei

$$\mathrm{U}(V) := \{f : V \to V \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei

$$\mathrm{O}(V) := \{f : V \to V \mid f \text{ ist orthogonal.}\}$$

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ heißt

I) *normal*, falls A und A^* kommutieren (also $AA^* = A^*A$),

II) *selbstadjungiert*, falls $A = A^*$,

III) *antiselbstadjungiert*, falls $A^* = -A$,

IV) *orthogonal* (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. *unitär* (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) falls A invertierbar ist und $A^* = A^{-1}$.

Für alle $n \geq 1$ seien

$$\mathrm{O}(n) := \{O \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid O \text{ ist orthogonal}\} \quad \text{und} \quad \mathrm{U}(n) := \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ ist unitär}\}.$$

Proposition 4.7. Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums V, und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Dann ist f genau dann normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär, wenn $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär ist.

Proposition 4.8. Es sei $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus eines Skalarproduktraums V.

i) Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$.

ii) Es ist $V_\lambda(f^*) = V_{\overline{\lambda}}(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

iii) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$ ist $V_\lambda(f) \perp V_\mu(f)$.

iv) Für $v \in V$ und $n \geq 1$ mit $f^n(v) = 0$ ist bereits $f(v) = 0$.

v) Für alle $\lambda \in V$ ist $V^\sim_\lambda(f) = V_\lambda(f)$.

vi) Es ist $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$ und $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$.

vii) Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ist genau dann f-invariant, wenn $U^\perp$ invariant unter f^* ist.

Proposition 4.9. Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ eines Skalarproduktraums V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) f ist orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), d.h. f ist ein Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$.

ii) Es ist $ff^* = \mathrm{id}_V$.

iii) Es ist $f^* f = \mathrm{id}_V$.

iv) Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|v\|$.

v) Für alle $v, w \in V$ ist $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

Korollar 4.10. Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), d.h. A ist invertierbar mit $A^* = A^{-1}$.

ii) Es ist $AA^* = I$.

iii) Es ist $A^* A = I$.

iv) Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ ist $\|Ax\| = \|x\|$.

v) Für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ ist $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.

vi) Die Spalten von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$.

vii) Die Zeilen von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$.

4.2 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Theorem 4.11. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums V. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

i) f ist normal.

ii) V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

iii) Für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch $U^\perp$ invariant unter f.

Korollar 4.12. Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist normal.

ii) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$, so dass UAU^{-1} in Diagonalgestalt ist.

Proposition 4.13. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums V.

i) f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f normal mit reellen Eigenwerten ist.

ii) f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn f normal mit rein imaginären Eigenwerten ist.

iii) f ist genau dann unitär, wenn f normal ist und alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

Korollar 4.14. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

i) A ist genau dann selbstadjungiert, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.

ii) A ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix mit rein imaginären Diagonaleinträgen ist.

iii) A ist genau dann unitär, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge alle Betrag 1 haben.

Korollar 4.15. Für alle $n \geq 1$ ist $\det(\mathrm{U}(n)) = S^1$, wobei $S^1 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

4.3 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Notation 4.16. Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ sei

$$D(\varphi) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Theorem 4.17. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines euklidischen Vektorraum V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) f ist normal.

ii) Es gibt eine geordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, $r_1, \ldots, r_t > 0$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_t \in (0, \pi)$.

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Eigenwerte von f, und die Paare $(r_1, \varphi_1), \ldots, (r_t, \varphi_t)$ sind eindeutig bis auf Permutation.

Korollar 4.18. Für einen Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist normal.

ii) Es gibt eine Matrix $O \in \mathrm{O}(n)$, so dass

$$OAO^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, $r_1, \ldots, r_t > 0$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_t \in (0, \pi)$.

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die Eigenwerte von A, und die Paare $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_t, \varphi_t)$ sind eindeutig bis auf Permutation.

Proposition 4.19. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums V.

i) f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.17 $t = 0$ gilt, also wenn V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f besitzt.

ii) f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn f normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.17 $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$ und $\varphi_1 = \dots = \varphi_t = \pi/2$ gilt.

iii) f ist genau dann orthogonal, wenn f normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.17 $\lambda_i = \pm 1$ für alle $i = 1, \dots, s$ und $r_1 = \dots = r_t = 1$ gilt.

Korollar 4.20. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

i) A ist genau dann selbstadjungiert, wenn A normal ist, und in der Normalenform von Korollar 4.18 $t = 0$ gilt, also wenn es $O \in \mathrm{O}(n)$ gibt, so dass OAO^{-1} in Diagonalgestalt ist.

ii) A ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn A normal ist und in der Normalenform von Korollar 4.18 $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$ und $\varphi_1 = \dots = \varphi_t = \pi/2$ gilt.

iii) A ist genau dann orthogonal, wenn A normal ist und in der Normalenform von Korollar 4.18 $\lambda_i = \pm 1$ für alle $i = 1, \dots, s$ und $r_1 = \dots = r_t = 1$ gilt.

Korollar 4.21. Für alle $n \geq 1$ ist $\det(\mathrm{O}(n)) = \{1, -1\}$.

4.4 Orthogonale Projektionen

Lemma 4.22. Sind $U, W \subseteq V$ Untervektorräume eines K-Vektorraums V mit $V = U \oplus W$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $P\colon V \to V$ mit

$$P(u + w) = u \quad \text{für alle } u \in U, w \in W.$$

Definition 4.23. i) In der Situation von Lemma 4.22 heißt P die *Projektion* auf U entlang W.

ii) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums V, so heißt die Projektion auf U entlang $U^\perp$ die *orthogonale Projektion* auf U.

Proposition 4.24. i) Für einen Endomorphismus $P\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) Es gilt $P^2 = P$.

b) P ist die Projektion auf $\mathrm{im}(P)$ entlang $\ker(P)$.

ii) Für einen Endomorphismus $P\colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) Es gilt $P^2 = P$ und P ist normal.

b) P ist die orthogonale Projektion auf $\mathrm{im}(P)$.

4.5 Cartan-Zerlegung

Definition 4.25. i) Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V heißt *positiv*, wenn alle Eigenwerte von f positiv sind.

ii) Eine selbtadjungierte Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ heißt positiv, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

5 Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen

5.1 Definition quadratischer Formen

Definition 5.1. Ist V ein K-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, so ist

$$q\colon V \to K, \quad v \mapsto \langle v, v \rangle$$

die zu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gehörige *quadratische Form*.

Eine Abbildung $q'\colon V \to K$ heißt *quadratische Form*, wenn es eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle' : V \times V \to K$ gibt, so dass q' die zu $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ gehörige quadratische Form ist.

Lemma 5.2. Ist V ein K-Vektorraum mit $\operatorname{char} K \neq 2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und $q\colon V \to K$ die zugehörige quadratische Form, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Korollar 5.3. Ist V ein K-Vektorraum mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, so ist die Abbildung

$$\{\text{Bilinearformen } V \times V \to K\} \to \{\text{quadratische Formen } V \to K\},$$
$$\langle \cdot, \cdot \rangle \mapsto (v \mapsto \langle v, v \rangle)$$

eine Bijektion.

Definition 5.4. Es sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

i) Zwei Vektoren $u, w \in V$ sind *orthogonal (zueinander)* bezüglich β falls $\beta(u, w) = 0$.

ii) Zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$ heißen *orthogonal (zueinander)* bezüglich β falls $\beta(u, w) = 0$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

iii) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist der Untervektorraum

$$U^\perp = \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U in V bezüglich β.

iv) Der Untervektorraum

$$\operatorname{rad}(\beta) \coloneqq \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in V\}$$

ist das *Radikal* von β.

5.2 Darstellende Matrizen für Bilinearformen

Lemma 5.5. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{C}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die duale Basis von V^*. Für eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ und Bilinearform $\beta\colon V \times V \to K$ sind die folgende Bedingungen äquivalent:

i) Für alle $i, j = 1, \dots, n$ ist $B_{ij} = \beta(v_i, v_j)$.

ii) Für die lineare Abbildung

$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \beta(-, v)$$

ist $B = \mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^*}(\Phi)$.

Definition 5.6. Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$, und $\beta\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform, so heißt die Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit

$$B_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n$$

die *darstellende Matrix* von β bezüglich der Basis $\mathcal{C}$, und wird mit $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ notiert.

Lemma 5.7. Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{C}$ eine geordnete Basis von V, so ist die Abbildung

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}\colon \{\text{Bilinearformen } V \times V \to K\} \to \mathrm{M}_n(K), \quad \beta \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Lemma 5.8. Es sei $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis eines K-Vektorraums V und

$$\Phi\colon V \to K^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

der induzierte Isomorphismus. Ist $\beta\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform, so ist

$$\beta(v, w) = \Phi(v)^T \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) \Phi(w) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Korollar 5.9. Ist $\beta\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V, so ist β genau dann symmetrisch, wenn für jede geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ symmetrisch ist.

5.3 Nicht-entartete Bilinearformen

Definition 5.10. Eine symmetrische Bilinearform $\beta\colon V \times V \to K$ heißt *nicht-entartet*, falls es für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ ein $w \in V$ mit $\beta(w, v) \neq 0$ gibt.

Proposition 5.11. Ist V ein K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Die Bilinearform β ist nicht-entartet.

ii) Es gilt $\mathrm{rad}(\beta) = 0$.

iii) Die lineare Abbildung $\Phi\colon V \to V^*$, $v \mapsto \beta(-, v)$ ist injektiv.

Ist V endlichdimensional, so kommen die folgenden Bedingungen hinzu:

iv) Φ ist ein Isomorphismus.

v) Für jede geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ invertierbar.

Proposition 5.12. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Die Einschränkung $\beta|_{U \times U}$ ist nicht-entartet.

ii) Es ist $U \cap U^{\perp} = 0$.

iii) Es ist $V = U \oplus U^{\perp}$.

5.4 Normalenformen und Sylvesterscher Trägheitssatz

Theorem 5.13. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Die Anzahl der Nullen auf der Diagonalen ist eindeutig bestimmt und entspricht $\dim \mathrm{rad}(\beta)$.

Lemma 5.14. Ist $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-entartete Bilinearform mit $V \neq 0$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$, und $q\colon V \to K$ die zugehörige quadratische Form, dann gibt es $v \in V$ mit $q(v) \neq 0$.

Korollar 5.15. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, wobei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und K quadratisch abgeschlossen ist. Ist $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, so gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Nullen auf der Diagonalen ist eindeutig bestimmt und entspricht $\dim \operatorname{rad}(\beta)$.

Korollar 5.16 (Sylvesterscher Trägheitssatz). Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

i) Es eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r && \\ & -I_s & \\ && 0_t \end{pmatrix}$$

mit $I_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $0_m \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$.

ii) Ist $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t)$ und

$$\begin{aligned} D_+ &\coloneqq \langle u_1, \dots, u_r \rangle \,, \\ D_- &\coloneqq \langle v_1, \dots, v_s \rangle \,, \\ S_+ &\coloneqq \langle u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t \rangle \,, \\ S_- &\coloneqq \langle v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t \rangle \,, \end{aligned}$$

so ist $\beta|_{D_+ \times D_+}$ positiv definit, $\beta|_{D_- \times D_-}$ ist negativ definit, $\beta|_{S_+ \times S_+}$ ist positiv semidefinit und $\beta|_{S_- \times S_-}$ ist negativ semidefinit. Außerdem ist $\operatorname{rad}(\beta) = \langle w_1, \dots, w_t \rangle$.

iii) Es gilt

$$\begin{aligned} r &= \max \{\dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist positiv definit.}\} \\ s &= \max \{\dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist negativ definit.}\} \\ r + t &= \max \{\dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist positiv semidefinit.}\} \\ s + t &= \max \{\dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist negativ semidefinit.}\} \end{aligned}$$

Insbesondere ist das Tupel (r, s, t) durch β eindeutig bestimmt.

iv) β ist genau dann
   a) positiv definit, wenn $r = \dim V$,
   b) negativ definit, wenn $s = \dim V$,
   c) positiv semidefinit, wenn $r + t = \dim V$,
   d) negativ semidefinit, wenn $s + t = \dim V$,
   e) nicht-entwartet, wenn $t = 0$.

6 Hauptachsentransformation

Handschriftliche Notizen.

7 Topologische Eigenschaften ausgewählter Matrixgruppen

7.1 Definition der Gruppen

Definition 7.1. Für alle $n \geq 1$ seien

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}_n(K) &:= \{S \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det S = 1\}, \\
\mathrm{SU}(n) &:= \{S \in \mathrm{U}(n) \mid \det S = 1\} = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \\
\mathrm{SO}(n) &:= \{S \in \mathrm{O}(n) \mid \det S = 1\} = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Proposition 7.2. i) Für jeden Körper K ist $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine Untergruppe.

ii) Die Teilmengen $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind Untergruppen.

iii) Die Teilmengen $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sind Untergruppen.

iv) Es gelten die folgenden Untergruppenrelationen:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{O}(n) \arrow[rr, hook] \arrow[dl, hook] & & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \arrow[dl, hook] \\
\mathrm{U}(n) \arrow[rr, hook] & & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \\
& \mathrm{SO}(n) \arrow[uu, hook] \arrow[rr, hook] \arrow[dl, hook] & & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \arrow[uu, hook] \arrow[dl, hook] \\
\mathrm{SU}(n) \arrow[uu, hook] \arrow[rr, hook] & & \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \arrow[uu, hook] &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Bemerkung 7.3. Man beachte die verschiedenen gegenüberliegenden Seiten des Würfels: Der Boden des Würfels entsteht aus dem Deckel durch die zusätzliche Bedingung $\det S = 1$. Der Rücken des Würfels ist die reelle Version, die Vorderseite die komplexe Version. Die linkse Seite des Würfels entsteht aus der rechten, indem man Kompatiblität mit dem Skalarprodukt fordert.

7.2 Gruppentheoretische Begriffe

Proposition 7.4. Es sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine Untergruppe. Durch

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1} g_2 \in N \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in N$$

wird eine Äquivalenzrelation auf G definiert, und für $G/N := G/\sim$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Für alle $g \in G$ ist $gN = Ng$.

ii) Für alle $g \in G$ ist $gNg^{-1} = N$.

iii) Für alle $g \in G$ ist $gNg^{-1} \subseteq N$.

iv) Die Multiplikation $\cdot\colon (G/N) \times (G/N) \to G/N$ mit

$$\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} := \overline{g_1 \cdot g_2} \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G$$

ist wohldefiniert. (G/N ist mit dieser Multiplikation automatisch eine Gruppe. Dies ist dann die eindeutige Gruppenstruktur auf G/N, so dass die kanonische Projektion $G \to G/N$, $g \mapsto \overline{g}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.)

v) Es gibt eine Gruppe H und einen Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to H$ mit $N = \ker \phi$.

Definition 7.5. Es sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine Untergruppe. Der *Index* von N in G ist $[G : N] := |G/N|$. Ist eine der Bedingungen von Proposition 7.4 erfüllt (und damit alle Bedingungen), so ist die Untergruppe N ein *Normalteiler* in G.

Bemerkung 7.6. Untergruppen vom Index 2 sind immer normal.

Bemerkung 7.7. Ist $N \subseteq G$ eine Untegruppe, so ist die Äquivalenzklasse von $g \in G$ bezüglich der in Proposition 7.4 definierten Äquivalenzrelation genau die sogenannte *Linksnebenklasse* $gN = \{gn \mid n \in N\}$. Die Äquivalenzklasse von g ist also eine (um g verschobene) Kopie von N. Inbesondere ist $|gN| = |N|$, und somit

$$|G| = [G : N] \cdot |N|.$$

Zur Berechnung des Index einer Untergruppe wollen wir den folgenden Satz zitieren:

Theorem 7.8 (1. Isomorphiesatz). Ist $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so induziert ϕ einen Gruppenisomorphismus $\psi\colon G/\ker(\phi) \to \operatorname{im}(\phi)$ mit $\psi(\overline{g}) = \phi(g)$ für alle $g \in G$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g \mapsto \overline{g}"'] & H \\
G/\ker(\phi) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Korollar 7.9. Ist $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $[G : \ker \phi] = |\operatorname{im} \phi|$.

Proposition 7.10. Es sei $n \geq 1$.

i) Für jeden Körper K ist $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine normale Untergruppe.

ii) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$ ist eine normale Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+] = 2$.

iii) $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n)$ ist eine normale Untergruppe mit $[\mathrm{U}(n) : \mathrm{SU}(n)] = \infty$.

iv) $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{O}(n)$ ist eine normale Untergruppe mit $[\mathrm{O}(n) : \mathrm{SO}(n)] = 2$.

Inbesondere ist im Würfel (1) der Boden normal im Deckel.

7.3 Topologische Begriffe

Definition 7.11. Es sei X ein metrischer Raum. Eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ ist ein *Weg* in X. Für $x := \gamma(0)$ und $y := \gamma(1)$ ist γ ein *Weg von x nach y* in X.

Lemma 7.12. Ist X ein metrischer Raum, so wird durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y.$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Definition 7.13. Es sei X ein metrischer Raum. Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation aus Lemma 7.12 heißen *Wegzusammenhangskomponenten* von X. X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es nur eine Wegzusammenhangskomponente gibt, d.h. wenn es für alle $x, y \in M$ einen Weg von x nach y gibt.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt wegzusammenhängend, wenn Y bezüglich der Metrik $d|_{Y \times Y}$ wegzusammenhängend ist.

Definition 7.14. Ein metrischer Raum X heißt *unzusammenhängend*, wenn es disjunkte, offene, echte Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq X$ gibt, so dass $X = U_1 \cup U_2$. Ist X heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht unzusammenhängend ist.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt (un)zusammenhängend, wenn Y bezüglich $d|_{Y \times Y}$ (un)zusammenhängend ist.

Proposition 7.15. Es seien X und Y zwei metrische Räume.

i) Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.

ii) Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $Z \subseteq X$ eine (weg)zusammenhängende Teilmenge, so ist auch $f(Z) \subseteq Y$ (weg)zusammenhängend.

iii) Sind $Z_1, Z_2 \subseteq X$ zwei (weg)zusammenhängende Teilmengen mit $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, so ist auch $Z_1 \cup Z_2$ (weg)zusammenhängend.

iv) Durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt eine zusammenhängende Teilmenge } Z \subseteq X \text{ mit } x, y \in Z$$

wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Definition 7.16. Ist X ein metrischer Raum, so sind die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ wie in Proposition 7.15 die *Zusammenhangskomponenten* von X.

Bemerkung 7.17. Jede zusammenhängende Teilmenge $Z \subseteq X$ ist in einer der Zusammenhangskomponenten von X enthalten. Insbesondere ist jede Wegzusammenhangskomponente in einer Zusammenhangskomponente enthalten.

7.4 Topologie auf Matrixgruppen

Im Folgenden fixieren wir eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Die Norm induziert eine Metrik d auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ durch $d(A, B) := \|A-B\|$. Jede Teilmenge $X \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ erbt durch die Einschränkung $d|_{X\times X}$ die Struktur eines metrischen Raums.

Lemma 7.18. i) Die Projektionen $p_{ij}\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ mit $i, j = 1, \dots, n$ und

$$p_{ij}(A) := A_{ij} \quad \text{für alle } A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

sind stetig.

ii) Ist X ein metrischer Raum, so ist eine Abbildung $f = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n}\colon X \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ genau dann stetig, wenn sie in jeder Komponente stetig ist.

Theorem 7.19. Es sei $n \geq 1$.

i) Die Teilmengen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind abgeschlossen.

ii) Die Teilmengen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind offen.

iii) Als Teilmenge von $\mathrm{O}(n)$ ist $\mathrm{SO}(n)$ auch offen.

iv) Die Gruppen $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ sind kompakt.

Bemerkung 7.20. Ist $Y \subseteq X$ und $A \subseteq Y$, so dass A abgeschlossen in X ist, so ist A auch abgeschlossen in Y. Dementsprechende ergeben sich aus 7.19 noch weitere Aussagen. So ist etwa $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ abgeschlossen in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SO}(n)$ abgeschlossen in $\mathrm{O}(n)$.

Theorem 7.21. Es sei $n \geq 1$.

i) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.

ii) Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.

iii) Die Gruppe $\mathrm{U}(n)$ ist wegzusammenhängend.

iv) Die Gruppe $\mathrm{SU}(n)$ ist wegzusammenhängend.

v) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$$

und

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^- := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S < 0\}.$$

vi) Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend.

vii) Die Gruppe $\mathrm{O}(n)$ besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$\mathrm{SO}(n) = \{S \in \mathrm{O}(n) \mid \det S = 1\} \quad \text{und} \quad \mathrm{SO}(n)^- := \{S \in \mathrm{O}(n) \mid \det S = -1\}.$$

viii) Die Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist wegzusammehängend.

8 Orientierung

Lemma 8.1. Es seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei geordnete Basen eines n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i)

9 Sphärische Geometrie