

# Lineare Algebra II Repetitorium

## Übungen, Tag 4

Jendrik Stelzner

24. September 2016

### Übung 1.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  und  $\gamma: V \times V \rightarrow K$  zwei nicht-entartete symmetrische Bilinearformen. Es seien  $\Phi_V: V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto \beta(-, v)$  und  $\Phi_W: W \rightarrow W^*$ ,  $w \mapsto \gamma(-, w)$ . Zudem sei  $f: V \rightarrow W$  ein  $K$ -lineare Abbildung und  $f^T: W^* \rightarrow V^*$ ,  $\psi \mapsto \psi \circ f$  die duale Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass eine Abbildung  $f^*: W \rightarrow V$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f^*} & V \\ \Phi_W \downarrow & & \downarrow \Phi_V \\ W^* & \xrightarrow{f^T} & V^* \end{array}$$

genau dann zum kommutieren bringt, wenn

$$\gamma(f(v), w) = \beta(v, f^*(w)) \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

2. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Abbildung  $f^*$  gibt, die das obige Diagramm zum kommutieren bringt, und dass diese  $K$ -linear ist.

### Übung 2.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform und  $q: V \rightarrow K$ ,  $v \mapsto \beta(v, v)$  die zugehörige quadratische Form. Zeigen Sie:

1. Für  $\text{char}(K) \neq 2$  ist

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)}{2} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

2. Für  $\text{char}(K) \neq 2$ ,  $V \neq 0$  und  $\beta$  nicht-entartet gibt es ein  $v \in V$  mit  $q(v) \neq 0$ .

3. Im Fall  $\text{char}(K) = 2$  kann es verschiedene symmetrische Bilinearformen mit gleicher quadratischer Form geben. Geben Sie hierfür ein explizites Beispiel an.

### Übung 3.

Es seien

$$A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A_4 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie jeweils eine orthogonale Matrix  $O_i \in O(n)$ , so dass  $O_i^T A_i O_i$  in Diagonalgestalt vorliegt.
- Entscheiden Sie für die nicht-entarteten Fälle jeweils, ob es sich bei der Menge

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^{n_i} \mid x^T A_i x = 10\}$$

um eine Ellipse oder eine Hyperbel bzw. um ein Ellipsoid oder ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid handelt. Geben Sie jeweils die Länge der entsprechenden Hauptachsen an.

### Übung 4.

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für jeden reellen Vektorraum  $V$  und jede symmetrische Bilinearform  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\beta \neq 0$  gilt. Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel.

- Ist  $\beta(v, v) \geq 0$  für alle  $v \in V$ , so ist  $\beta(-, -)$  ein Skalarprodukt.
- Ist  $\mathcal{B} \subseteq V$  eine Basis von  $V$  mit  $\beta(v_1, v_2) > 0$  für alle  $v_1, v_2 \in \mathcal{B}$ , so ist  $\beta(-, -)$  ein Skalarprodukt.
- Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  gilt  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ .
- Die Teilmengen

$$U_+ := \{v \in V \mid \beta(v, v) \geq 0\} \quad \text{und} \quad U_- := \{v \in V \mid \beta(v, v) \leq 0\}$$

sind Untervektorräume von  $V$ .

- Für alle Untervektorräume  $U_1, U_2 \subseteq V$  gilt  $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ .
- Die Teilmenge  $U_0 := \{v \in V \mid \beta(v, v) = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- Ist  $\dim V < \infty$ , so gilt  $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$  für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$ .
- Ist  $\dim V < \infty$  und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit  $(U^\perp)^\perp = V$ , so ist  $U = V$ .

### Übung 5.

Es sei  $n \geq 1$ . Es sei

$$S_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

der Vektorraum der symmetrischen reellen Matrizen und

$$S_- := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

der Vektorraum der schiefsymmetrischen reellen Matrizen.

1. Zeigen Sie, dass  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  für alle  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .

2. Zeigen Sie, dass  $\sigma: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\sigma(A, B) := \text{tr}(AB) \quad \text{für alle } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass  $M_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-$ .

4. Zeigen Sie, dass  $S_+$  und  $S_-$  orthogonal zueinander bezüglich  $\sigma$  sind.

5. Zeigen Sie, dass die Einschränkung  $\sigma|_{S_+ \times S_+}$  positiv definit ist, und dass die Einschränkung  $\sigma|_{S_- \times S_-}$  negativ definit.

6. Bestimmen Sie eine Basis  $\mathcal{C}$  von  $M_2(\mathbb{R})$ , so dass  $M_{\mathcal{C}}(\sigma)$  in Diagonalgestalt ist und 1, -1, 0 die einzigen möglichen Diagonaleinträge sind.

### Übung 6.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathcal{C}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  die duale Basis von  $V^*$  und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform.

1. Zeigen Sie für die lineare Abbildung  $\Phi: V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto \beta(-, v)$ , dass

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}^*}(\Phi)_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

2. Es sei  $\Psi: V \rightarrow K^n$  der eindeutige Isomorphismus mit

$$\Psi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K,$$

dass  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  eindeutig dadurch bestimmt ist, dass

$$\beta(v, w) = \Psi(v)^T M_{\mathcal{C}}(\beta) \Psi(w) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

3. Folgern Sie, dass  $\beta$  genau dann symmetrisch ist, wenn  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  symmetrisch ist.

**Lösung 4.**

1. Die Aussage ist falsch. Man betrachte etwa  $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\beta(v, w) := v^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w = v_1 w_1$$

Für diese gilt  $\beta(v, v) = v_1^2 \geq 0$  für alle  $v \in \mathbb{R}^2$ , da  $\beta(e_2, e_2) = 0$  ist  $\beta$  aber nicht positiv definit.

2. Die Aussage ist falsch. Man betrachte etwa  $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\beta(v, w) := v^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} w = v_1 w_1 + 2v_1 w_2 + 2v_2 w_1 + v_2 w_2.$$

Für die Standardbasis  $\mathcal{B} := \{e_1, e_2\}$  gilt zwar  $\beta(e_i, e_j) \in \{1, 2\}$  für alle  $i, j = 1, 2$ , da  $\beta(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = -2 < 0$  ist  $\beta$  aber nicht positiv definit. (Da die Determinante der obigen Matrix  $-3$  ist, ergibt sich auch aus dem Hauptminorenkriterium, dass  $\beta$  nicht positiv definit ist.)

3. Die Aussage ist stimmt. Ist  $u \in U$  und  $v \in U^\perp$ , so ist  $\beta(u, v) = 0$  nach Definition von  $U^\perp$ , und somit  $u \in (U^\perp)^\perp$ .
4. Die Aussage ist falsch. Betrachtet man etwa das vorherige Beispiel  $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\beta(v, w) := v^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} w = v_1 w_1 + 2v_1 w_2 + 2v_2 w_1 + v_2 w_2,$$

so gilt  $e_1, e_2 \in U_+$ , da  $\beta(e_1, e_1) = \beta(e_2, e_2) = 1 \geq 0$ , da  $\beta(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = -2 < 0$  ist aber  $e_1 - e_2 \notin U_+$ .

5. Die Aussage ist wahr: Da  $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$  ist  $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp, U_2^\perp$  und somit  $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$ . Ist andererseits  $v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$  und  $u \in U_1 + U_2$ , so gibt es  $u_1 \in U_1$  und  $u_2 \in U_2$  mit  $u = u_1 + u_2$ , weshalb

$$\beta(v, u) = \beta(v, u_1 + u_2) = \underbrace{\beta(v, u_1)}_{=0} + \underbrace{\beta(v, u_2)}_{=0} = 0.$$

Also ist auch  $U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$ .

6. Die Aussage ist falsch. Betrachtet man etwa  $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\beta(v, w) := v^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w = v_1 w_2 + v_2 w_1,$$

so gilt  $e_1, e_2 \in U_0$ , aber  $e_1 + e_2 \notin U_0$  da  $\beta(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 2$ .

7. Die Aussage ist falsch. Betrachtet man etwa  $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\beta(v, w) := v^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w = v_1 w_1,$$

so gilt für den eindimensionalen Untervektorraum  $U = \mathcal{L}(e_2)$ , dass  $U^\perp = \mathbb{R}^2$ , und somit

$$\dim U + \dim U^\perp = 1 + 2 = 3 > 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

(Man hat aber stets  $\dim U + \dim U^\perp \geq \dim V$ .)

8. Die Aussage stimmt nicht. Betrachtet man etwa erneut  $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\beta(v, w) := v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 w_1,$$

so gilt für den echten Untervektorraum  $U := \mathcal{L}(e_1) \subsetneq \mathbb{R}^2$ , dass  $U^\perp = \mathcal{L}(e_2)$  und somit  $(U^\perp)^\perp = \mathbb{R}^2$ .

### Lösung 5.

1. Es ist

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA).$$

2. Die Bilinearität von  $\sigma$  ergibt sich durch direktes Nachrechnen, wobei man nutzt, dass die Matrixmultiplikation  $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ ,  $(A_1, A_2) \mapsto A_1 A_2$  bilinear ist, und dass die Spur  $\operatorname{tr}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  linear ist. Nach dem ersten Aufgabenteil ist  $\sigma$  symmetrisch.
3. Für  $A \in S_+ \cap S_-$  ist  $A = A^T = -A$  und somit  $A = 0$ , und jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  lässt sich als

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

schreiben, wobei der erste Summand symmetrisch ist und der zweite schiefsymmetrisch.

Alternativ lässt sich der Endomorphismus  $s: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  mit  $s(A) = (A + A^T)/2$  betrachten. Dieser ist idempotent, d.h. es gilt  $s^2 = s$ , weshalb  $M_n(\mathbb{R}) = \operatorname{im}(s) \oplus \ker(s)$ . Mit  $\operatorname{im}(s) = S_+$  und  $\ker(s) = S_-$  ergibt sich die Zerlegung.

4. Ist  $A_+ \in S_+$  und  $A_- \in S_-$ , so ist

$$\begin{aligned} \sigma(A_+, A_-) &= \operatorname{tr}(A_+ A_-) = \operatorname{tr}((A_+ A_-)^T) = \operatorname{tr}(A_-^T A_+^T) \\ &= \operatorname{tr}(-(A_-) A_+) = -\operatorname{tr}(A_- A_+) = -\sigma(A_-, A_+) = -\sigma(A_+, A_-) \end{aligned}$$

und somit  $\sigma(A_+, A_-) = 0$ .

5. Für alle  $A \in S_+$  ist

$$\sigma(A, A) = \operatorname{tr}(AA) = \operatorname{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^n (AA^T)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} A_{ji}^T = \sum_{i,j=1,\dots,n} A_{ij}^2 \geq 0$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $A_{ij} = 0$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ , wenn also  $A = 0$ .

Ist andererseits  $A \in S_-$ , so ergibt sich analog zur obigen Rechnung, dass

$$\sigma(A, A) = - \sum_{i,j=1,\dots,n} A_{ij}^2 \leq 0,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $A = 0$ .

6. Da  $\sigma|_{S_+ \times S_+}$  positiv definit und  $\sigma|_{S_- \times S_-}$  negativ definit ist, wissen wir nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz bereits, dass der Diagonaleintrag 1 mit Vielfachheit  $\dim(S_+) = 3$  auftreten wird, und der Diagonaleintrag  $-1$  mit Vielfachheit 1.

Da die Summe  $M_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-$  orthogonal ist, genügt es für jeden dieser beiden Untervektorräume eine entsprechende Basis bezüglich der Einschränkung  $\sigma|_{S_+ \times S_+}$ , bzw.  $\sigma|_{S_- \times S_-}$  zu finden, und diese anschließend zusammenzuführen.

Für den eindimensionalen Raum  $S_-$  beginnen wir mit dem Basisvektor

$$\tilde{A}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für diesen gilt  $\sigma(\tilde{A}_1, \tilde{A}_1) = -2$ , weshalb wir  $\tilde{A}_1$  zu

$$A_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

normieren.

Für  $S_+$  beginnen wir mit den drei Basisvektoren

$$\tilde{A}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\sigma_{S_+ \times S_+}$  positiv definit, also ein Skalarprodukt ist, können wir nun das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden. (Zur einfacheren Berechnung von  $\sigma|_{S_+ \times S_+}$  kann man sich zunächst überlegen, dass  $\sigma(A, B) = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$  für alle  $A, B \in S_+$ .) Damit erhalten wir für  $S_+$  die Basis

$$A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir somit eine Basis  $\mathcal{C} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  von  $M_n(\mathbb{R})$  mit

$$M_{\mathcal{C}}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung 6.**

1. Ist  $A := M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}^*}(\Phi)$ , so ist  $\Phi(v_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} v_i^*$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Deshalb ist zum einen

$$\Phi(v_j)(v_i) = \beta(-, v_j)(v_i) = \beta(v_i, v_j)$$

und zum anderen

$$\Phi(v_j)(v_i) = \sum_{k=1}^n A_{kj} v_k^*(v_i) = \sum_{k=1}^n A_{kj} \delta_{ki} = A_{ij},$$

und somit  $A_{ij} = \beta(v_i, v_j)$  for all  $i, j = 1, \dots, n$ .

2. Sind  $v, w \in V$  mit  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  und  $w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ , so ist

$$\beta(v, w) = \beta\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \beta(v_i, v_j).$$

Für  $A \in M_n(\mathbb{R})$  gilt andererseits

$$\Phi(v)^T A \Phi(w) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1,\dots,n} \lambda_i \mu_j A_{ij}.$$

Somit ist  $\beta(v, w) = \Phi(v)^T A \Phi(w)$  für alle  $v, w \in V$  äquivalent dazu, dass  $A_{ij} = \beta(v_i, v_j)$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ , was nach dem vorherigen Aufgabenteil äquivalent zu  $A = M_{\mathcal{C}}(\Phi)$  ist. (Man beachte für die Eindeutigkeit, dass

$$A_{ij} = e_i A e_j = \Phi(v_i)^T A \Phi(v_j) = \beta(v_i, v_j)$$

gelten muss.)

3. Da  $\mathcal{C}$  eine Basis von  $V$  ist, ist  $\beta$  genau dann symmetrisch, wenn  $\beta(v_i, v_j) = \beta(v_j, v_i)$  for alle  $i, j = 1, \dots, n$ . Wegen  $M_{\mathcal{C}}(\Phi)_{ij} = \beta(v_i, v_j)$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  ist dies genau dann der Fall, wenn  $M_{\mathcal{C}}(\Phi)_{ij} = M_{\mathcal{C}}(\Phi)_{ji}$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ , wenn also  $M_{\mathcal{C}}(\Phi)$  symmetrisch ist.