Lineare Algebra II
Repetitorium

Jendrik Stelzner

15. September 2016

1 Jordannormalform

1.1 Nilpotente Endomorphismus

Definition 1.1. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$ gibt. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt.

Lemma 1.2. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so ist f genau dann nilpotent, wenn für jede geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ nilpotent ist.

Notation 1.3. Für alle $n \geq 1$ sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Theorem 1.4. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus.

i) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und $n_1, \dots, n_s \geq 1$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Zahlen $n_1, \dots, n_s$ sind eindeutig bis auf Permutation.

iii) Ist $f^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \dots, s$.

Korollar 1.5. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ nilpotent, so gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $n_1, \dots, n_s \geq 1$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Zahlen $n_1, \dots, n_s$ eindeutig bis auf Permutation, und ist $A^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \dots, s$.

Lemma 1.6. Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und sind $U, W, \subseteq V$ zwei Untervektorräume mit $U \cap W = 0$, so gibt es einen Untervektorraum $\overline{W} \subseteq V$ mit $W \subseteq \overline{W}$ und $V = U \oplus \overline{W}$.

1.2 Allgemeine Jordannormalform

Definition 1.7. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ und einen Skalar $\lambda \in K$ ist

$$V_\lambda^\sim(f) := \{v \in V \mid \text{es gibt } n \geq 1 \text{ mit } (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^n(v) = 0\}$$

der *Hauptraum* von f zu λ.

Lemma 1.8. Es sei $f\colon V \to V$ und $\lambda \in K$.

i) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

ii) Es gilt $V_\lambda(f) \subseteq V_\lambda^\sim(f)$.

iii) Es ist genau dann $V_\lambda^\sim(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.

iv) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist f-invariant.

v) Ist V endlichdimensional, so gibt es $N \geq 1$ mit $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N(v) = 0$ für alle $v \in V$, und es gilt $V_\lambda^\sim(f) = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N$.

Lemma 1.9. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

Notation 1.10. Für alle $n \geq 1$ und $\lambda \in K$ ist

$$J(n,\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

der Jordanblock von Größe n zu(m Eigenwert) λ.

Theorem 1.11. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so dass $V = V_{\lambda_1}^\sim(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t}^\sim(f)$ für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in K$ von f.

i) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und $n_1^{(1)}, \ldots, n_{s_1}^{(1)}, \ldots, n_1^{(t)}, \ldots, n_{s_t}^{(t)} \geq 1$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J(n_1^{(1)},\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J(n_{s_1}^{(1)},\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J(n_1^{(t)},\lambda_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(n_{s_t}^{(t)},\lambda_1) \end{pmatrix}$$

ii) Die Zahlen $(n_1^{(1)}, \ldots, n_{s_1}^{(1)}), \ldots, (n_1^{(t)}, \ldots, n_{s_t}^{(t)})$ sind jeweils eindeutig bis auf Permutation.

iii) Es gilt $n_1^{(i)} + \cdots + n_{s_i}^{(i)} = \dim V_\lambda^\sim(f)$ für alle $i = 1, \ldots, t$.

1.3 Existenz der Hauptraumzerlegung

Lemma 1.12. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

i) Für alle $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ ist die Einschränkung $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)|_{V^{\sim}_{\mu}(f)}$ invertierbar.

ii) Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ ist die Summe $V^{\sim}_{\lambda_1}(f) + \cdots + V^{\sim}_{\lambda_t}(f)$ direkt.

Lemma 1.13. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V und $\lambda \in K$. Ferner sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum mit $V = V^{\sim}_{\lambda}(f) \oplus U$. Dann ist λ kein Eigenwert von $f|_U$, und es gilt

$$\chi_f(T) = (T - \lambda)^{\dim V^{\sim}_{\lambda}(f)} \cdot \chi_{f|_U}(T).$$

Lemma 1.14 (Fitting). Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Für alle $k \geq 0$ sei

$$N_k \coloneqq \ker f^k \quad \text{und} \quad R_k \coloneqq \operatorname{im} f^k.$$

i) Es gilt

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

und

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$$

ii) Für $k \geq 0$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $N_{k+1} = N_k$,

b) $N_l = N_k$ für alle $l \geq k$,

c) $R_{k+1} = R_k$,

d) $R_l = R_k$ für alle $l \geq k$.

(Wenn also eine der beiden Ketten einmal stabiliert, so sind beide Ketten von dort an stabil.)

iii) Die beiden Teilmengen $N \coloneqq \bigcup_{k \geq 0} N_k$ und $R \coloneqq \bigcap_{k \geq 0} R_k$ sind f-invariante Untervektorräume von V, und es gilt $V = N \oplus R$.

Theorem 1.15 (Existenz der Hauptraumzerlegung). Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann gibt es genau dann eine Hauptraumzerlegung von V bezüglich f, wenn das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ in Linearfaktoren zerfällt.

Korollar 1.16. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so ist $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V^{\sim}_{\lambda}(f)$.

Korollar 1.17. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V (bzw. $A \in \mathrm{M}_n(K)$), so ist $\chi_f(f) = 0$ (bzw. $\chi_A(A) = 0$).

Korollar 1.18 (Abstrakte Jordanzerlegung). Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so gibt es eindeutige Endomorphismen $d, n\colon V \to V$, so dass

a) $f = d + n$,

b) d ist diagonalisierbar und n ist nilpotent,

c) d und n kommutieren