

Lineare Algebra II Repetitorium

Übungen, Tag 1

Jendrik Stelzner

19. September 2016

Übung 1.

Es sei V ein K -Vektorraum und $\text{id} := \text{id}_V$.

1. Es sei $n: V \rightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $\text{id} - n$ invertierbar ist. (Hinweis: Betrachten Sie Endomorphismen der Form $\text{id} + n + n^2 + \dots + n^k$.)
2. Zeigen Sie ferner, dass $\lambda \text{id} - n$ für alle $\lambda \neq 0$ invertierbar ist.
3. Es sei nun $f: V \rightarrow V$ ein beliebiger Endomorphismus und V endlichdimensional. Zeigen Sie für $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$, dass die Einschränkung $(f - \lambda \text{id})|_{V_\mu \sim (f)}$ invertierbar ist.

Übung 2.

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils eine Jordannormalform über dem angegebenen Körper, inklusive einer entsprechenden Jordanbasis.

1. $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.

2. $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $K = \mathbb{Z}/2$.

3. $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.

4. $D := \begin{pmatrix} -6 & 12 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -8 & 20 & 6 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.

$$5. E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } K = \mathbb{Z}/3.$$

Übung 3.

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum.

1. Es seien $f, g: V \rightarrow V$ zwei Endomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker(f) + \dim \ker(g).$$

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $g(\ker(f \circ g)) \subseteq \ker(f)$.)

2. Folgern Sie, dass für jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\dim \ker(f^n) \leq n \cdot \dim \ker(f).$$

3. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

Wenn $f^{10} = 0$ und $\dim \ker(f) < 10$, dann ist $\dim V \leq 2016$.

Übung 4.

Es sei $e: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V mit $e^2 = e$. Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{im}(e) \oplus \ker(e)$.

Übung 5.

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V . Für alle $k \geq 0$ sei $N_k := \ker(f^k)$ und $R_k := \operatorname{im}(f^k)$.

1. Zeigen Sie, dass $N_k \subseteq N_{k+1}$ und $R_k \supseteq R_{k+1}$ für alle $k \geq 0$, dass also

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \quad \text{und} \quad V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$$

2. Zeigen Sie, dass genau dann $N_{k+1} = N_k$, wenn $R_{k+1} = R_k$.
3. Es sei $k \geq 1$ mit $R_{k+1} = R_k$. Zeigen Sie, dass $R_{k+i} = R_k$ für alle $i \geq 0$. Folgern Sie, dass auch $N_{k+i} = N_k$ für alle $i \geq 0$.
4. Es seien $N := \bigcup_{k \geq 0} N_k$ und $R := \bigcap_{k \geq 0} R_k$.
 - a) Zeigen Sie, dass N und R invariant unter f sind.
 - b) Zeigen Sie, dass $V = N \oplus R$.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es ein $k_0 \geq 0$ gibt, so dass $R = R_{k_0}$ und $N = N_{k_0}$).

Übung 6.

Bestimmen Sie die Lösungsräume der folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen. Dabei seien $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} f' &= -f & -6g, \\ g' &= 2f & +6g; \end{cases} \quad \begin{cases} f' &= -f & -g, \\ g' &= 2f & +g; \end{cases} \quad \begin{cases} f' &= 2f & +2g & +3h, \\ g' &= f & +3g & +3h, \\ h' &= -f & -2f & -2h. \end{cases}$$

Lösung 2.

1. Das charakteristische Polynom:

$$T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = (T - 1)^3$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechend Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Das charakteristische Polynom:

$$T^3 + T^2 + T + 1 = (T - 1)^3$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechend Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

3. Das charakteristische Polynom:

$$(T - 1)^4$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechend Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

4. Das charakteristische Polynom:

$$T^3 - 2T^2 = T^2(T - 2)$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechend Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

5. Das charakteristische Polynom:

$$T^4 + 2T^3 + T + 2 = (T - 2)^3(T - 1)$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Die entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 6.

1. Charakteristisches Polynom:

$$T^2 - 5T + 6 = (T - 2)(T - 3)$$

Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 2 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

Die Basiswechselmatrix ist selbstinvers. Matrixexponential:

$$\begin{pmatrix} 4e^{2t} - 3e^{3t} & 6e^{2t} - 6e^{3t} \\ -2e^{2t} + 2e^{3t} & -3e^{2t} + 4e^{3t} \end{pmatrix}$$

2. Charakteristisches Polynom:

$$T^2 + 1 = (T - i)(T + i)$$

Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-i \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}$$

Inverse der Basiswechselmatrix:

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i & 1-i \\ 2i & 1+i \end{pmatrix}$$

Matrixexponential:

$$\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) & -\sin(t) \\ 2 \sin(t) & \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

3. Charakteristisches Polynom:

$$T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = (T - 1)^3$$

Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse der Basiswechselmatrix:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrixexponential:

$$e^t \begin{pmatrix} 1+t & 2t & 3t \\ t & 1+2t & 3t \\ -t & -2t & 1-3t \end{pmatrix}$$