

# Lineare Algebra II Repetitorium

## Übungen, Tag 4

Jendrik Stelzner

22. September 2016

### Übung 1.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  und  $\gamma: V \times V \rightarrow K$  zwei nicht-entartete symmetrische Bilinearformen. Es seien  $\Phi_V: V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto \beta(-, v)$  und  $\Phi_W: W \rightarrow W^*$ ,  $w \mapsto \gamma(-, w)$ . Zudem sei  $f: V \rightarrow W$  ein  $K$ -lineare Abbildung und  $f^T: W^* \rightarrow V^*$ ,  $\psi \mapsto \psi \circ f$  die duale Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass eine Abbildung  $f^*: W \rightarrow V$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f^*} & V \\ \Phi_W \downarrow & & \downarrow \Phi_V \\ W^* & \xrightarrow{f^T} & V^* \end{array}$$

genau dann zum kommutieren bringt, wenn

$$\gamma(f(v), w) = \beta(v, f^*(w)) \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

2. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Abbildung  $f^*$  gibt, die das obige Diagramm zum kommutieren bringt, und dass diese  $K$ -linear ist.

### Übung 2.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform und  $q: V \rightarrow K$ ,  $v \mapsto \beta(v, v)$  die zugehörige quadratische Form. Zeigen Sie:

1. Für  $\text{char}(K) \neq 2$  ist

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)}{2} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

2. Für  $\text{char}(K) \neq 2$ ,  $V \neq 0$  und  $\beta$  nicht-entartet gibt es ein  $v \in V$  mit  $q(v) \neq 0$ .

3. Im Fall  $\text{char}(K) = 2$  kann es verschiedene symmetrische Bilinearformen mit gleicher quadratischer Form geben. Geben Sie hierfür ein explizites Beispiel an.

### Übung 3.

Es seien

$$A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A_4 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie jeweils eine orthogonale Matrix  $O_i \in O(n)$ , so dass  $O_i^T A_i O_i$  in Diagonalgestalt vorliegt.
- Entscheiden Sie für die nicht-entarteten Fälle jeweils, ob es sich bei der Menge

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^{n_i} \mid x^T A_i x = 10\}$$

um eine Ellipse oder eine Hyperbel bzw. um ein Ellipsoid oder ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid handelt. Geben Sie jeweils die Länge der entsprechenden Hauptachsen an.

### Übung 4.

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für jeden reellen Vektorraum  $V$  und jede symmetrische Bilinearform  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\beta \neq 0$  gilt. Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel.

- Ist  $\beta(v, v) \geq 0$  für alle  $v \in V$ , so ist  $\beta(-, -)$  ein Skalarprodukt.
- Ist  $\mathcal{B} \subseteq V$  eine Basis von  $V$  mit  $\beta(v_1, v_2) > 0$  für alle  $v_1, v_2 \in \mathcal{B}$ , so ist  $\beta(-, -)$  ein Skalarprodukt.
- Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  gilt  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ .
- Die Teilmengen

$$U_+ := \{v \in V \mid \beta(v, v) \geq 0\} \quad \text{und} \quad U_- := \{v \in V \mid \beta(v, v) \leq 0\}$$

sind Untervektorräume von  $V$ .

- Für alle Untervektorräume  $U_1, U_2 \subseteq V$  gilt  $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ .
- Die Teilmenge  $U_0 := \{v \in V \mid \beta(v, v) = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- Ist  $\dim V < \infty$ , so gilt  $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$  für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$ .
- Ist  $\dim V < \infty$  und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit  $(U^\perp)^\perp = V$ , so ist  $U = V$ .

### Übung 5.

Es sei  $n \geq 1$ . Es seien

$$S_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

der Vektorraum der symmetrischen reellen Matrizen und

$$S_- := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

der Vektorraum der schiefsymmetrischen reellen Matrizen.

1. Zeigen Sie, dass  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  für alle  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .

2. Zeigen Sie, dass  $\sigma: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\sigma(A, B) := \text{tr}(AB) \quad \text{für alle } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass  $M_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-$ .

4. Zeigen Sie, dass  $S_+$  und  $S_-$  orthogonal zueinander bezüglich  $\sigma$  sind.

5. Zeigen Sie, dass die Einschränkung  $\sigma|_{S_+ \times S_+}$  positiv definit ist, und dass die Einschränkung  $\sigma|_{S_- \times S_-}$  negativ definit.

6. Bestimmen Sie eine Basis  $\mathcal{C}$  von  $M_2(\mathbb{R})$ , so dass  $M_{\mathcal{C}}(\sigma)$  in Diagonalgestalt ist und 1, -1, 0 die einzigen möglichen Diagonaleinträge sind.

### Übung 6.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathcal{C}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  die duale Basis von  $V^*$  und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform.

1. Zeigen Sie für die lineare Abbildung  $\Phi: V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto \beta(-, v)$ , dass

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}^*}(\Phi)_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

2. Es sei  $\Psi: V \rightarrow K^n$  der eindeutige Isomorphismus mit

$$\Psi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K,$$

dass  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  eindeutig dadurch bestimmt ist, dass

$$\beta(v, w) = \Psi(v)^T M_{\mathcal{C}}(\beta) \Psi(w) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

3. Folgern Sie, dass  $\beta$  genau dann symmetrisch ist, wenn  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  symmetrisch ist.

**Lösung 3.**

Dritte Matrix:  $T^3 - 6T^2 + 3T + 10$ , Nullstellen  $-1, 2, 5$ . Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vierte Matrix:  $T^3 - 6T^2 + 9T = T(T - 3)^2$ . Eigenvektoren (nicht orthogonal):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$