

# Lineare Algebra II

## Repetitorium

Jendrik Stelzner

19. September 2016

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Jordannormalform</b>	<b>3</b>
1.1	Nilpotente Endomorphismus . . . . .	3
1.2	Allgemeine Jordannormalform . . . . .	5
1.3	Existenz der Hauptraumzerlegung . . . . .	6
1.4	Homogene, lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Simultane Diagonalisierbarkeit</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Skalarprodukträume</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Normale Endomorphismen</b>	<b>14</b>
4.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften . . . . .	14
4.2	Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . . . . .	16
4.3	Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . . . . .	17
4.4	Orthogonale Projektionen . . . . .	18
4.5	Polarzerlegung . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen</b>	<b>20</b>
5.1	Definition quadratischer Formen . . . . .	20
5.2	Darstellende Matrizen für Bilinearformen . . . . .	21
5.3	Nicht-entartete Bilinearformen . . . . .	21
5.4	Normalenformen und Sylvesterscher Trägheitssatz . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Hauptachsentransformation</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Topologische Eigenschaften ausgewählter Matrixgruppen</b>	<b>25</b>
7.1	Definition der Gruppen . . . . .	25
7.2	Gruppentheoretische Begriffe . . . . .	25
7.3	Topologische Begriffe . . . . .	27

7.4	Topologie auf Matrixgruppen . . . . .	28
7.5	Koordinatenfreie Version . . . . .	28
<b>8</b>	<b>Orientierung</b>	<b>29</b>
<b>9</b>	<b>Sphärische Geometrie</b>	<b>30</b>

# 1 Jordannormalform

## 1.1 Nilpotente Endomorphismus

**Definition 1.1.** Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  heißt *nilpotent*, falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f^n = 0$  gibt. Eine Matrix  $A \in M_n(K)$  heißt nilpotent, falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A^n = 0$  gibt.

**Lemma 1.2.** Ist  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist  $f$  genau dann nilpotent, wenn für jede geordnete Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  die Matrix  $M_{\mathcal{B}}(f)$  nilpotent ist.

**Notation 1.3.** Für alle  $n \geq 1$  sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

**Theorem 1.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein nilpotenter Endomorphismus.

i) Es gibt eine geordnete Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $n_1, \dots, n_s \geq 1$ , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Zahlen  $n_1, \dots, n_s$  sind eindeutig bis auf Permutation.

iii) Ist  $f^N = 0$  für ein  $N \geq 1$ , so ist  $n_i \leq N$  für alle  $i = 1, \dots, s$ .

**Korollar 1.5.** Ist  $A \in M_n(K)$  nilpotent, so gibt es  $S \in GL_n(K)$  und  $n_1, \dots, n_s \geq 1$  mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Zahlen  $n_1, \dots, n_s$  eindeutig bis auf Permutation, und ist  $A^N = 0$  für ein  $N \geq 1$ , so ist  $n_i \leq N$  für alle  $i = 1, \dots, s$ .

**Lemma 1.6.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum, und sind  $U, W \subseteq V$  zwei Untervektorräume mit  $U \cap W = 0$ , so gibt es einen Untervektorraum  $\overline{W} \subseteq V$  mit  $W \subseteq \overline{W}$  und  $V = U \oplus \overline{W}$ .

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_r)$  eine Basis von  $U$  und  $\mathcal{B}_2 = (w_1, \dots, w_s)$  eine Basis von  $W$ . Dann ist  $\mathcal{B} := (u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s)$  eine Basis von  $U + W = U \oplus W$ . Ergänze  $\mathcal{B}$  zu einer Basis  $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s, w_{s+1}, \dots, w_t)$  von  $V$  und setze  $\overline{W} := \langle w_1, \dots, w_t \rangle$ .  $\square$

*Beweis der Existenz in Theorem 1.4.* Für alle  $k \geq 0$  sei  $N_k := \ker(f^k)$ . Es sei  $p := \min\{n \geq 0 \mid f^n = 0\}$  der Nilpotenzindex von  $f$

**Behauptung A.** Für alle  $k \geq 0$  ist  $N_{k+1} = f^{-1}(N_k)$ , und somit insbesondere  $f(N_{k+1}) \subseteq N_k$ .

*Beweis.* Es gilt

$$v \in f^{-1}(N_k) \iff f(v) \in N_k \iff f^k(f(v)) = 0 \iff f^{k+1}(v) = 0 \iff v \in N_{k+1}.$$

□

**Behauptung B.** Es Untervektorräume  $W_1, \dots, W_p \subseteq V$  so dass

- i)  $N_k = N_{k-1} \oplus W_k$  für alle  $k = 1, \dots, p$ ,
- ii)  $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$  für alle  $k = 2, \dots, p$ , und
- iii) die Einschränkung  $f|_{W_k}$  ist injektiv für alle  $k = 2, \dots, p$ .

*Beweis.* Beginne mit  $W_p \subseteq V$ , so dass  $V = N_p = N_{p-1} \oplus W_p$ . Ist  $W_{k+1}$  für ein  $1 \leq k \leq p-1$  definiert, so ist

$$f(W_{k+1}) \subseteq f(N_{k+1}) \subseteq N_k,$$

und da

$$f^{-1}(N_{k-1}) \cap W_{k+1} = N_k \cap W_{k+1} = 0,$$

ist  $f(W_{k+1}) \cap N_{k-1} = 0$ . Nach Lemma 1.6 gibt es einen Untervektorraum  $W_k \subseteq N_k$  mit  $f(W_{k+1}) \subseteq W_k$  und  $N_k = N_{k-1} \oplus W_k$ . Die Injektivität von  $f|_{W_k}$  für  $k = 2, \dots, p$  folgt aus

$$\ker(f|_{W_k}) = \ker(f) \cap W_k = N_1 \cap W_k \subseteq N_{k-1} \cap W_k = 0. \quad \square$$

Wähle eine Basis  $\mathcal{B}_p = (v_1^p, \dots, v_{n_p}^p)$  von  $W_p$ . Wegen der Injektivität von  $f|_{W_p}$  ist die Familie  $f(\mathcal{B}_p) := (f(v_1^p), \dots, f(v_{n_p}^p))$  linear unabhängig, und damit zu einer Basis

$$\mathcal{B}_p = (f(v_1^p), \dots, f(v_{n_p}^p), v_1^{p-1}, \dots, v_{n_{p-1}}^{p-1})$$

von  $W_{p-1}$  ergänzbar. Iteratives Fortführen liefert für  $W_{p-i}$  eine Basis  $\mathcal{B}_{p-i}$  de Form

$$\begin{array}{ccc} f^i(v_1^p), & \dots, & f^i(v_{n_p}^p) \\ f^{i-1}(v_1^p), & \dots, & f^{i-1}(v_{n_p}^p) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{p-i}, & \dots, & v_{n_{p-i}}^{p-i}. \end{array}$$

Da

$$\begin{aligned} V = N_p &= N_{p-1} \oplus W_p = N_{p-2} \oplus W_{p-1} \oplus W_p = \dots = N_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_p \\ &= W_1 \oplus \dots \oplus W_p \end{aligned}$$

ergibt sich durch Zusammenfügen der einzelnen Basen  $\mathcal{B}_p, \dots, \mathcal{B}_1$  eine Basis  $\tilde{\mathcal{B}}$  von  $V$  von der Form

$$\begin{array}{ccccccc} v_1^p, & \dots, & v_{n_p}^p, & & & & \\ f(v_1^p), & \dots, & f(v_{n_p}^p), & v_1^{p-1}, & \dots, & v_{n_{p-1}}^{p-1}, & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ f^{p-1}(v_1^p), & \dots, & f^{p-1}(v_{n_p}^p), & f^{p-2}(v_1^{p-1}), & \dots, & f^{p-2}(v_{n_{p-1}}^{p-1}), & \dots, v_1^1, \dots, v_{n_1}^1. \end{array}$$

Trägt man nun dieses zweidimensionale Schema von oben nach unten, von links nach rechts in eine Familie  $\mathcal{B}$  ein, so ist dies die gewünschte Matrix.  $\square$

[Hier das konkrete Vorgehen angeben.]

## 1.2 Allgemeine Jordannormalform

**Definition 1.7.** Für einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  und einen Skalar  $\lambda \in K$  ist

$$V_\lambda^\sim(f) := \{v \in V \mid \text{es gibt } n \geq 1 \text{ mit } (f - \lambda \text{id}_V)^n(v) = 0\}$$

der *Hauptraum* von  $f$  zu  $\lambda$ .

**Lemma 1.8.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  und  $\lambda \in K$ .

- i) Der Hauptraum  $V_\lambda^\sim(f)$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- ii) Es gilt  $V_\lambda(f) \subseteq V_\lambda^\sim(f)$ .
- iii) Es ist genau dann  $V_\lambda^\sim(f) \neq 0$ , wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $f$  ist.
- iv) Der Hauptraum  $V_\lambda^\sim(f)$  ist  $f$ -invariant.
- v) Ist  $V$  endlichdimensional, so gibt es  $N \geq 1$  mit  $(f - \lambda \text{id}_V)^N(v) = 0$  für alle  $v \in V$ , und es gilt  $V_\lambda^\sim(f) = \ker(f - \lambda \text{id}_V)^N$ .

**Lemma 1.9.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ .

**Notation 1.10.** Für alle  $n \geq 1$  und  $\lambda \in K$  ist

$$J(n, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

der Jordanblock von Größe  $n$  zu (m Eigenwert)  $\lambda$ .

**Theorem 1.11.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ , so dass  $V = V_{\lambda_1}^{\sim}(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t}^{\sim}(f)$  für die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$  von  $f$ .

i) Es gibt eine geordnete Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}, \dots, n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)} \geq 1$ , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J(n_1^{(1)}, \lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J(n_{s_1}^{(1)}, \lambda_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J(n_1^{(t)}, \lambda_t) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J(n_{s_t}^{(t)}, \lambda_t) \end{pmatrix}$$

ii) Die Zahlen  $(n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}), \dots, (n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)})$  sind jeweils eindeutig bis auf Permutation.

iii) Es gilt  $n_1^{(i)} + \cdots + n_{s_i}^{(i)} = \dim V_{\lambda_i}^{\sim}(f)$  für alle  $i = 1, \dots, t$ .

iv) Für alle  $i = 1, \dots, t$  gilt  $\max_{j=1, \dots, s_i} n_j^{(i)} = \min\{p \geq 0 \mid (f - \lambda_i \text{id}_V)^p|_{V_{\lambda_i}^{\sim}(f)} = 0\}$ .

[Hier das konkrete Vorgehen angeben]

### 1.3 Existenz der Hauptraumzerlegung

**Lemma 1.12.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ .

i) Für alle  $\lambda, \mu \in K$  mit  $\lambda \neq \mu$  ist die Einschränkung  $(f - \lambda \text{id}_V)|_{V_{\mu}^{\sim}(f)}$  invertierbar.

ii) Für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$  ist die Summe  $V_{\lambda_1}^{\sim}(f) + \cdots + V_{\lambda_t}^{\sim}(f)$  direkt.

**Lemma 1.13.** Ist  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$  und sind  $U, W \subseteq V$  zwei  $f$ -invariante Untervektorräume mit  $V = U \oplus W$ , so gilt

$$\chi_f(T) = \chi_{f|_U}(T) \cdot \chi_{f|_W}(T).$$

**Lemma 1.14.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums  $V$  und  $\lambda \in K$ . Ferner sei  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum mit  $V = V_{\lambda}^{\sim}(f) \oplus U$ . Dann ist  $\lambda$  kein Eigenwert von  $f|_U$ , und es gilt

$$\chi_f(T) = (T - \lambda)^{\dim V_{\lambda}^{\sim}(f)} \cdot \chi_{f|_U}(T).$$

**Lemma 1.15 (Fitting).** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ . Für alle  $k \geq 0$  sei

$$N_k := \ker f^k \quad \text{und} \quad R_k := \text{im } f^k.$$

i) Es gilt

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

und

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \dots$$

ii) Für  $k \geq 0$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a)  $N_{k+1} = N_k$ ,
- b)  $N_l = N_k$  für alle  $l \geq k$ ,
- c)  $R_{k+1} = R_k$ ,
- d)  $R_l = R_k$  für alle  $l \geq k$ .

(Wenn also eine der beiden Ketten einmal stabilisiert, so sind beide Ketten von dort an stabil.)

iii) Die beiden Teilmengen  $N := \bigcup_{k \geq 0} N_k$  und  $R := \bigcap_{k \geq 0} R_k$  sind  $f$ -invariante Untervektorräume von  $V$ , und es gilt  $V = N \oplus R$ .

**Theorem 1.16** (Existenz der Hauptraumzerlegung). Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ . Dann gibt es genau dann eine Hauptraumzerlegung von  $V$  bezüglich  $f$ , wenn das charakteristische Polynom  $\chi_f(T)$  in Linearfaktoren zerfällt.

*Beweis.* Wenn es eine Hauptraumzerlegung gibt, dann ist  $f$  nach Theorem 1.11 trigonalisierbar. Somit zerfällt das charakteristische Polynom dann in Linearfaktoren.

Die umgekehrte Aussage verläuft per Induktion über die Dimension von  $V$ . Für  $\dim V = 0$  ist die Aussage klar. Für  $\dim V > 0$  sei  $\chi_f(T) = (T - \lambda_1)^{n_1} \dots (T - \lambda_s)^{n_s}$ . Durch Anwenden von Fittings Lemma auf  $f - \lambda_1 \text{id}_V$  erhalten wir, dass

$$V = V_{\lambda_1}^\sim \oplus R,$$

wobei  $R \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum ist. Nach Lemma 1.14 ist  $\chi_{f|_R}(T) = (T - \lambda_2)^{n_2} \dots (T - \lambda_s)^{n_s}$ , und nach Induktionsvoraussetzung ist

$$R = R_{\lambda_2}^\sim(f|_R) \oplus \dots \oplus R_{\lambda_s}^\sim(f|_R),$$

und somit insgesamt

$$V = V_{\lambda_1}^\sim \oplus R_{\lambda_2}^\sim(f|_R) \oplus \dots \oplus R_{\lambda_s}^\sim(f|_R) \subseteq V_{\lambda_1}^\sim \oplus V_{\lambda_2}^\sim(f|_R) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}^\sim(f|_R) \subseteq V.$$

□

**Korollar 1.17.** Ist  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\sim(f)$ .

**Korollar 1.18** (Cayley-Hamilton für algebraisch abgeschlossene Körper). Ist  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$  (bzw.  $A \in M_n(K)$ ), so ist  $\chi_f(f) = 0$  (bzw.  $\chi_A(A) = 0$ ).

**Korollar 1.19** (Abstrakte Jordanzerlegung). Ist  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ , so gibt es eindeutige Endomorphismen  $d, n: V \rightarrow V$ , so dass

- a)  $f = d + n$ ,
- b)  $d$  ist diagonalisierbar und  $n$  ist nilpotent,
- c)  $d$  und  $n$  kommutieren

[Falls noch Zeit: Idee genauer erläutern, und allgemeines Lemma nennen.]

## 1.4 Homogene, lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen

Ist  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , so lassen sich die komplexen Lösungen der Differentialgleichung

$$Ay = y'$$

für  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  wie folgt finden:

Der Lösungsraum wird von den Spalten der Matrix  $\exp(At)$  aufgefasst (wenn man diese als Funktionen von  $t$  betrachtet). Ist  $SAS^{-1} = J = D + N$  die Jordanzerlegung von  $A$ , so ist

$$\exp(At) = \exp(S^{-1}JtS) = S^{-1} \exp(Jt)S = S^{-1} \exp(Dt) \exp(Nt)S,$$

wobei im letzten Schritt genutzt wird, dass  $D$  und  $N$  kommutieren.



## 2 Simultane Diagonalisierbarkeit

**Lemma 2.1.** Ist  $f \in V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist die Summe  $\sum_{\lambda \in K} V_{\lambda}(f)$  direkt.

**Definition 2.2.** Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  heißt *diagonalisierbar*, falls  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_{\lambda}$ .

**Bemerkung 2.3.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $K$ -Vektorraums  $V$ .

- i) Nach Lemma 2.1 ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $V = \sum_{\lambda \in K} V_{\lambda}(f)$ .
- ii) Ist  $V$  endlichdimensional, so ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $f$  besitzt.

**Proposition 2.4.** Ist  $f: V \rightarrow V$  ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist für jeden  $f$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  auch die Einschränkung  $f|_U: U \rightarrow U$  diagonalisierbar, und es gilt

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} [U \cap V_{\lambda}(f)].$$

**Definition 2.5.** Zwei Endomorphismen  $f, g: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  heißen *simultan diagonalisierbar*, falls

$$V = \bigoplus_{\lambda, \mu \in K} [V_{\lambda}(f) \cap V_{\mu}(g)].$$

**Bemerkung 2.6.** Sind  $f, g: V \rightarrow V$  zwei Endomorphismen eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ , so sind  $f$  und  $g$  genau dann simultan diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von  $f$  und  $g$  besitzt.

**Proposition 2.7.** Zwei Endomorphismen  $f, g: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  sind genau dann simultan diagonalisierbar, wenn sie beide diagonalisierbar sind und kommutieren.

### 3 Skalarprodukträume

**Definition 3.1.** i) Eine Abbildung  $b: V \times W \rightarrow Z$  mit  $K$ -Vektorräumen  $V, W, Z$  heißt *K-bilinear*, falls

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b(v_2, w), \\ b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2), \\ b(\lambda v, w) &= \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w) \end{aligned}$$

für alle  $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$  und  $\lambda \in K$ . Ist zusätzlich  $Z = K$ , so ist  $b$  eine *Bilinearform*. Gilt außerdem noch  $V = W$  und

$$b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so ist  $b$  eine *symmetrische Bilinearform*.

ii) Eine Abbildung  $s: V \times W \rightarrow Z$  mit  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen  $V, W, Z$  heißt *sesquilinear*, falls

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b(v_2, w), \\ b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2), \\ b(\lambda v, w) &= \lambda b(v, w) \text{ und } b(v, \lambda w) = \overline{\lambda} b(v, w) \end{aligned}$$

für alle  $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ist zusätzlich  $Z = \mathbb{C}$ , so ist  $s$  eine *Sesquilinearform*. Gilt außerdem noch  $V = W$  und

$$s(v_1, v_2) = \overline{s(v_2, v_1)} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt  $s$  *hermitsch*.

**Lemma 3.2.** Ist  $s: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  eine hermitesche Bilinearform, so ist  $s(v, v) \in \mathbb{R}$  für alle  $v \in V$ .

**Notation 3.3.** Es ist  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Definition 3.4.** Eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform)  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  heißt

- i) *positiv definit*, falls  $\langle v, v \rangle > 0$  für alle  $v \in V$  mit  $v \neq 0$ ,
- ii) *positiv semidefinit*, falls  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$ ,
- iii) *negativ definit*, falls  $\langle v, v \rangle < 0$  für alle  $v \in V$  mit  $v \neq 0$ ,
- iv) *negativ semidefinit*, falls  $\langle v, v \rangle \leq 0$  für alle  $v \in V$ , und
- v) *indefinit*, wenn sie keine der obigen Bedingungen erfüllt.

**Definition 3.5.** Ein *Skalarprodukt* auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine positiv definite, symmetrische (bzw. hermitesche) Bilinearform (bzw. Sesquilinearform)  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ .

Ein Skalarproduktraum ist ein Tupel  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bestehend aus einem Vektorraum  $V$  und einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$ .

**Bemerkung 3.6.** Man spricht meist nur von einem Skalarproduktraum  $V$ , nennt das Skalarprodukt also nicht explizit mit. Im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  spricht man auch von einem *euklidischen Vektorraum*, und im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  von einem *unitären Vektorraum*.

**Definition 3.7.** Für einen Skalarproduktraum  $V$  und  $v \in V$  ist  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . Der Vektor  $v$  heißt *normiert*, wenn  $\|v\| = 1$ .

**Proposition 3.8** (Cauchy-Schwarz). Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

**Definition 3.9.** Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist der (*unorientierte*) Winkel zwischen zwei Vektoren  $v, w \in V$  der eindeutige Winkel  $\theta \in [0, \pi]$  mit

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|},$$

und er wird mit  $\angle(v, w)$  bezeichnet.

**Korollar 3.10.** Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Norm auf  $V$ .

**Bemerkung 3.11.** Ist  $v \in V$  mit  $v \neq 0$ , so ist der Vektor  $v/\|v\|$  normiert. Man sagt, dass man  $v$  normiert.

**Lemma 3.12** (Polarisationsformel). Ist  $V$  ein euklidischer Vektorraum, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Ist  $V$  ein unitärer Vektorraum, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} + i \frac{\|v + iw\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

**Definition 3.13.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum.

- i) Zwei Vektoren  $u, w \in V$  heißen *orthogonal (zueinander)*, geschrieben als  $u \perp w$ , wenn  $\langle u, w \rangle = 0$ .
- ii) Zwei Untervektorräume  $U, W \subseteq V$  heißen *orthogonal (zueinander)*, wenn  $u \perp w$  für alle  $u \in U$  und  $w \in W$ .
- iii) Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $U$  (in  $V$ ).

**Lemma 3.14.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum.

- i) Ist ein Vektor  $v \in V$  zu jedem Vektor  $w \in V$  orthogonal, so gilt bereits  $v = 0$ .
- ii) Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist  $U \cap U^\perp = 0$ .

**Definition 3.15.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum.

- i) Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren  $v_i \in V$  heißt *orthogonal*, wenn  $v_i \perp v_j$  für alle  $i \neq j$ . Die Familie heißt *normiert*, falls  $v_i$  für alle  $i \in I$  normiert ist. Ist die Familie orthogonal und normiert, so heißt sie *orthonormal*.
- ii) Eine Teilmenge  $S \subseteq V$  heißt *orthogonal*, wenn  $v \perp w$  für alle  $v, w \in S$  mit  $v \neq w$ . Die Teilmenge heißt *normiert*, falls jeder Vektor  $v \in S$  normiert ist. Ist  $S$  orthogonal und normiert, so heißt  $S$  *orthonormal*.

**Lemma 3.16.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum.

1. Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren  $v_i \in V$  ist genau dann orthonormal, wenn  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$  für alle  $i, j \in I$ .
2. Eine Teilmenge  $S \subseteq V$  ist genau dann orthonormal, wenn  $\langle v, w \rangle = \delta_{v,w}$  für alle  $v, w \in S$ .

**Lemma 3.17.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und  $(v_i)_{i \in I}$  eine orthogonale Familie von Vektoren  $v_i \in V$  mit  $v_i \neq 0$  für alle  $i \in I$ . Dann ist  $(v_i)_{i \in I}$  linear unabhängig. Insbesondere ist jede orthonormale Familie linear unabhängig.

**Definition 3.18.** Eine orthonormale Basis eines Skalarproduktraums  $V$  heißt *Orthonormalbasis* von  $V$ .

**Proposition 3.19.** Es sei  $(v_i)_{i \in I}$  eine Orthonormalbasis eines Skalarproduktraums  $V$ .

- i) Für jedes  $v \in V$  ist  $\langle v, v_i \rangle = 0$  für fast alle  $i \in I$ , und es gilt

$$v = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i \quad \text{sowie} \quad \|v\|^2 = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle^2.$$

- ii) Für alle  $v, w \in V$  gilt

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle \langle w, v_i \rangle.$$

**Theorem 3.20 (Gram-Schmidt).** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und  $(v_1, \dots, v_n)$  eine linear unabhängige Familie von Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Iterativ seien die Familien  $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$  und  $(w_1, \dots, w_n)$  durch  $\tilde{w}_1 := v_1$ ,  $w_i := \tilde{w}_i / \|\tilde{w}_i\|$  und

$$\tilde{w}_i := v_i - \langle v_i, w_1 \rangle w_1 - \dots - \langle v_i, w_{i-1} \rangle w_{i-1}$$

definiert. Dann ist die Familie  $(w_1, \dots, w_n)$  orthonormal, und es gilt

$$\langle w_1, \dots, w_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

**Korollar 3.21.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum.

1. Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, und  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$  eine Orthonormalbasis von  $U$ , so lässt sich  $\mathcal{B}$  zu einer Orthonormalbasis  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$  von  $V$  ergänzen.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von  $V$ .
3. Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist  $V = U \oplus U^\perp$ .

**Proposition 3.22.** Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

injektiv und  $\mathbb{R}$ -linear (bzw.  $\mathbb{C}$ -antilinear). Ist  $V$  endlichdimensional, so ist  $\Phi$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen (bzw. Antiisomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen).

## 4 Normale Endomorphismen

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional, sofern nicht anders angegeben.

### 4.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

**Proposition 4.1.** Für zwei Skalarprodukträume  $V$  und  $W$  gibt es für jede  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  eine eindeutige  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $g: W \rightarrow V$  mit

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

**Definition 4.2.** In der Situation von Proposition 4.1 ist die Abbildung  $g$  die zu  $f$  *adjungierte* Abbildung, und wird mit  $f^*$  notiert.

**Proposition 4.3.** Es seien  $U, V, W$  drei Skalarprodukträume.

- i) Es gilt  $\text{id}_V^* = \text{id}_V$ , und für alle linearen Abbildungen  $f: V \rightarrow W$  und  $g: U \rightarrow V$  gilt

$$(fg)^* = g^* f^*.$$

- ii) Ist  $f: V \rightarrow W$  ein Isomorphismus, so ist auch  $f^*$  ein Isomorphismus.

- iii) Für alle  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $f, g: V \rightarrow W$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt

- a)  $(f^*)^* = f$ ,
- b)  $(f + g)^* = f^* + g^*$  und
- c)  $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$ .

Insbesondere ist die Abbildung  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$ ,  $f \mapsto f^*$  ein Isomorphismus (bzw. Antiisomorphismus) von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen (bzw.  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen).

**Definition 4.4.** Für  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$  ist  $A^* := \overline{A}^t = (\overline{A})^t \in M(n \times m, \mathbb{K})$ .

**Proposition 4.5.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  und  $W$  ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis  $\mathcal{C}$ . Für jede  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  gilt dann

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)^*.$$

**Definition 4.6.** Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums  $V$  heißt

- i) *normal*, falls  $f$  und  $f^*$  kommutieren (also  $ff^* = f^*f$ ),
- ii) *selbstadjungiert*, falls  $f = f^*$ ,
- iii) *antiselbstadjungiert*, falls  $f^* = -f$ ,
- iv) *orthogonal* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. *unitär* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) falls  $f$  ein Isomorphismus mit  $f^* = f^{-1}$  ist.

Für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sei

$$U(V) := \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sei

$$O(V) := \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ ist orthogonal}\}.$$

Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  heißt

- I) *normal*, falls  $A$  und  $A^*$  kommutieren (also  $AA^* = A^*A$ ),
- II) *selbstadjungiert*, falls  $A = A^*$ ,
- III) *antiselbstadjungiert*, falls  $A^* = -A$ ,
- IV) *orthogonal* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. *unitär* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) falls  $A$  invertierbar ist und  $A^* = A^{-1}$ .

Für alle  $n \geq 1$  seien

$$O(n) := \{O \in M_n(\mathbb{R}) \mid O \text{ ist orthogonal}\} \quad \text{und} \quad U(n) := \{U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ ist unitär}\}.$$

**Proposition 4.7.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums  $V$ , und  $\mathcal{B}$  eine geordnete Basis von  $V$ . Dann ist  $f$  genau dann normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär, wenn  $M_{\mathcal{B}}(f)$  normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär ist.

**Proposition 4.8.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein normaler Endomorphismus eines Skalarproduktraums  $V$ .

- i) Für alle  $v \in V$  ist  $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$ .
- ii) Es ist  $V_{\lambda}(f^*) = V_{\bar{\lambda}}(f)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- iii) Für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  mit  $\lambda \neq 0$  ist  $V_{\lambda}(f) \perp V_{\mu}(f)$ .
- iv) Für  $v \in V$  und  $n \geq 1$  mit  $f^n(v) = 0$  ist bereits  $f(v) = 0$ .
- v) Für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist  $V_{\lambda}^{\sim}(f) = V_{\lambda}(f)$ .
- vi) Es ist  $\text{im } f^* = (\ker f)^{\perp}$  und  $\ker f^* = (\text{im } f)^{\perp}$ .
- vii) Ein Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist genau dann  $f$ -invariant, wenn  $U^{\perp}$  invariant unter  $f^*$  ist.

**Proposition 4.9.** Für einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums  $V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $f$  ist orthogonal (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. unitär (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), d.h.  $f$  ist ein Isomorphismus mit  $f^* = f^{-1}$ .
- ii) Es ist  $ff^* = \text{id}_V$ .

- iii) Es ist  $f^*f = \text{id}_V$ .
- iv) Für alle  $v \in V$  ist  $\|f(v)\| = \|v\|$ .
- v) Für alle  $v, w \in V$  ist  $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ .

**Korollar 4.10.** Für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $A$  ist orthogonal (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. unitär (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), d.h.  $A$  ist invertierbar mit  $A^* = A^{-1}$ .
- ii) Es ist  $AA^* = I$ .
- iii) Es ist  $A^*A = I$ .
- iv) Für alle  $x \in \mathbb{K}^n$  ist  $\|Ax\| = \|x\|$ .
- v) Für alle  $x, y \in \mathbb{K}^n$  ist  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ .
- vi) Die Spalten von  $A$  sind eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$ .
- vii) Die Zeilen von  $A$  sind eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$ .

## 4.2 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Theorem 4.11.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums  $V$ . Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- i)  $f$  ist normal.
- ii)  $V$  hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$ .
- iii) Für jeden  $f$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist auch  $U^\perp$  invariant unter  $f$ .

**Korollar 4.12.** Für  $A \in M_n(\mathbb{C})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $A$  ist normal.
- ii) Es gibt eine unitäre Matrix  $U \in U(n)$ , so dass  $UAU^{-1}$  in Diagonalgestalt ist.

**Proposition 4.13.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums  $V$ .

- i)  $f$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $f$  normal mit reellen Eigenwerten ist.
- ii)  $f$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn  $f$  normal mit rein imaginären Eigenwerten ist.
- iii)  $f$  ist genau dann unitär, wenn  $f$  normal ist und alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

**Korollar 4.14.** Es sei  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

- i)  $A$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn es  $U \in U(n)$  gibt, so dass  $UAU^{-1}$  eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.



- ii)  $A$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn es  $U \in U(n)$  gibt, so dass  $UAU^{-1}$  eine Diagonalmatrix mit rein imaginären Diagonaleinträgen ist.
- iii)  $A$  ist genau dann unitär, wenn es  $U \in U(n)$  gibt, so dass  $UAU^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge alle Betrag 1 haben.

**Korollar 4.15.** Für alle  $n \geq 1$  ist  $\det(U(n)) = S^1$ , wobei  $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

### 4.3 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

**Notation 4.16.** Für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$  sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

**Theorem 4.17.** Für einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines euklidischen Vektorraum  $V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $f$  ist normal.
- ii) Es gibt eine geordnete Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}, r_1, \dots, r_t > 0$  und  $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in (0, \pi)$ .

Dabei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  die Eigenwerte von  $f$ , und die Paare  $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_t, \varphi_t)$  sind eindeutig bis auf Permutation.

**Korollar 4.18.** Für eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $A$  ist normal.
- ii) Es gibt eine Matrix  $O \in O(n)$ , so dass

$$OAO^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}, r_1, \dots, r_t > 0$  und  $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in (0, \pi)$ .

Dabei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  die Eigenwerte von  $A$ , und die Paare  $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_t, \varphi_t)$  sind eindeutig bis auf Permutation.

**Proposition 4.19.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums  $V$ .

- i)  $f$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $f$  normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.17  $t = 0$  gilt, also wenn  $V$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$  besitzt.
- ii)  $f$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn  $f$  normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.17  $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$  und  $\varphi_1 = \dots = \varphi_t = \pi/2$  gilt.
- iii)  $f$  ist genau dann orthogonal, wenn  $f$  normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.17  $\lambda_i = \pm 1$  für alle  $i = 1, \dots, s$  und  $r_1 = \dots = r_t = 1$  gilt.

**Korollar 4.20.** Es sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

- i)  $A$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $A$  normal ist, und in der Normalenform von Korollar 4.18  $t = 0$  gilt, also wenn es  $O \in O(n)$  gibt, so dass  $OAO^{-1}$  in Diagonalgestalt ist.
- ii)  $A$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn  $A$  normal ist und in der Normalenform von Korollar 4.18  $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$  und  $\varphi_1 = \dots = \varphi_t = \pi/2$  gilt.
- iii)  $A$  ist genau dann orthogonal, wenn  $A$  normal ist und in der Normalenform von Korollar 4.18  $\lambda_i = \pm 1$  für alle  $i = 1, \dots, s$  und  $r_1 = \dots = r_t = 1$  gilt.

**Korollar 4.21.** Für alle  $n \geq 1$  ist  $\det(O(n)) = \{1, -1\}$ .

## 4.4 Orthogonale Projektionen

**Lemma 4.22.** Sind  $U, W \subseteq V$  Untervektorräume eines  $K$ -Vektorraums  $V$  mit  $V = U \oplus W$ , so gibt es genau eine lineare Abbildung  $P: V \rightarrow V$  mit

$$P(u + w) = u \quad \text{für alle } u \in U, w \in W.$$

**Definition 4.23.** i) In der Situation von Lemma 4.22 heißt  $P$  die *Projektion auf  $U$  entlang  $W$* .

- ii) Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums  $V$ , so heißt die Projektion auf  $U$  entlang  $U^\perp$  die *orthogonale Projektion auf  $U$* .

**Proposition 4.24.** i) Für einen Endomorphismus  $P: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a) Es gilt  $P^2 = P$ .
- b)  $P$  ist die Projektion auf  $\text{im}(P)$  entlang  $\ker(P)$ .

- ii) Für einen Endomorphismus  $P: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums  $V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a) Es gilt  $P^2 = P$  und  $P$  ist normal.
- b)  $P$  ist die orthogonale Projektion auf  $\text{im}(P)$ .

## 4.5 Polarzerlegung

**Definition 4.25.** i) Ein selbstadjungierter Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums  $V$  heißt *positiv*, wenn alle Eigenwerte von  $f$  positiv sind.

ii) Eine selbstadjungierte Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  heißt positiv, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.

**Proposition 4.26.** 1. Ist  $f: V \rightarrow V$  ein positiver selbstadjungierter Endomorphismus, so gibt es einen eindeutigen positiven selbstadjungierten Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = g^2$ .

2. Ist  $A \in M_n(\mathbb{K})$  positiv selbstadjungiert, so gibt es eine eindeutige positive selbstadjungierte Matrix  $B \in M_n(\mathbb{K})$  mit  $A = B^2$ .

**Theorem 4.27.** i) Ist  $f \in \text{GL}(V)$  für einen Skalarproduktraum, so gibt es eindeutige positive selbstadjungierte Endomorphismen  $g_1, g_2: V \rightarrow V$  und eindeutige  $s_1, s_2 \in \text{U}(V)$  (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), bzw.  $s_1, s_2 \in \text{O}(V)$  (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) mit

$$f = s_1 g_1 = g_2 s_2.$$

## 5 Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen

### 5.1 Definition quadratischer Formen

**Definition 5.1.** Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform, so ist

$$q: V \rightarrow K, \quad v \mapsto \langle v, v \rangle$$

die zu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gehörige *quadratische Form*.

Eine Abbildung  $q': V \rightarrow K$  heißt *quadratische Form*, wenn es eine symmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle' : V \times V \rightarrow K$  gibt, so dass  $q'$  die zu  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  gehörige quadratische Form ist.

**Lemma 5.2.** Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\text{char } K \neq 2$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform und  $q: V \rightarrow K$  die zugehörige quadratische Form, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

**Korollar 5.3.** Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\text{char}(K) \neq 2$ , so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Bilinearformen } V \times V \rightarrow K\} &\rightarrow \{\text{quadratische Formen } V \rightarrow K\}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle &\mapsto (v \mapsto \langle v, v \rangle) \end{aligned}$$

eine Bijektion.

**Definition 5.4.** Es sei  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform.

- i) Zwei Vektoren  $u, w \in V$  sind *orthogonal (zueinander)* bezüglich  $\beta$  falls  $\beta(u, w) = 0$ .
- ii) Zwei Untervektorräume  $U, W \subseteq V$  heißen *orthogonal (zueinander)* bezüglich  $\beta$  falls  $\beta(u, w) = 0$  für alle  $u \in U$  und  $w \in W$ .
- iii) Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so ist der Untervektorraum

$$U^\perp = \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $U$  in  $V$  bezüglich  $\beta$ .

- iv) Der Untervektorraum

$$\text{rad}(\beta) := \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in V\}$$

ist das *Radikal* von  $\beta$ .

## 5.2 Darstellende Matrizen für Bilinearformen

**Lemma 5.5.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  eine geordnete Basis von  $V$  und  $\mathcal{C}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  die duale Basis von  $V^*$ . Für eine Matrix  $B \in M_n(K)$  und Bilinearform  $\beta: V \times V \rightarrow K$  sind die folgende Bedingungen äquivalent:

- i) Für alle  $i, j = 1, \dots, n$  ist  $B_{ij} = \beta(v_i, v_j)$ .
- ii) Für die lineare Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta(-, v)$$

ist  $B = M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}^*}(\Phi)$ .

**Definition 5.6.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit geordneter Basis  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ , und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform, so heißt die Matrix  $B \in M_n(K)$  mit

$$B_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n$$

die *darstellende Matrix* von  $\beta$  bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$ , und wird mit  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  notiert.

**Lemma 5.7.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\mathcal{C}$  eine geordnete Basis von  $V$ , so ist die Abbildung

$$M_{\mathcal{C}}: \{\text{Bilinearformen } V \times V \rightarrow K\} \rightarrow M_n(K), \quad \beta \mapsto M_{\mathcal{C}}(\beta)$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen.

**Lemma 5.8.** Es sei  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  eine geordnete Basis eines  $K$ -Vektorraums  $V$  und

$$\Phi: V \rightarrow K^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

der induzierte Isomorphismus. Ist  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform, so ist

$$\beta(v, w) = \Phi(v)^T M_{\mathcal{C}}(\beta) \Phi(w) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

**Korollar 5.9.** Ist  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$ , so ist  $\beta$  genau dann symmetrisch, wenn für jede geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$  die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  symmetrisch ist.

## 5.3 Nicht-entartete Bilinearformen

**Definition 5.10.** Eine symmetrische Bilinearform  $\beta: V \times V \rightarrow K$  heißt *nicht-entartet*, falls es für jedes  $v \in V$  mit  $v \neq 0$  ein  $w \in V$  mit  $\beta(w, v) \neq 0$  gibt.

**Proposition 5.11.** Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i) Die Bilinearform  $\beta$  ist nicht-entartet.
- ii) Es gilt  $\text{rad}(\beta) = 0$ .
- iii) Die lineare Abbildung  $\Phi: V \rightarrow V^*, v \mapsto \beta(-, v)$  ist injektiv.

Ist  $V$  endlichdimensional, so kommen die folgenden Bedingungen hinzu:

- iv)  $\Phi$  ist ein Isomorphismus.
- v) Für jede geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$  ist die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  invertierbar.

**Proposition 5.12.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform. Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i) Die Einschränkung  $\beta|_{U \times U}$  ist nicht-entartet.
- ii) Es ist  $U \cap U^\perp = 0$ .
- iii) Es ist  $V = U \oplus U^\perp$ .

## 5.4 Normalenformen und Sylvesterscher Trägheitssatz

**Theorem 5.13.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit  $\text{char}(K) \neq 2$  und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Die Anzahl der Nullen auf der Diagonalen ist eindeutig bestimmt und entspricht  $\dim \text{rad}(\beta)$ .

**Lemma 5.14.** Ist  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine nicht-entartete Bilinearform mit  $V \neq 0$  und  $\text{char}(K) \neq 2$ , und  $q: V \rightarrow K$  die zugehörige quadratische Form, dann gibt es  $v \in V$  mit  $q(v) \neq 0$ .

**Korollar 5.15.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum, wobei  $\text{char}(K) \neq 2$  und  $K$  quadratisch abgeschlossen ist. Ist  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform, so gibt es eine geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der Nullen auf der Diagonalen ist eindeutig bestimmt und entspricht  $\dim \text{rad}(\beta)$ .

**Korollar 5.16** (Sylvesterscher Trägheitssatz). Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform.

i) Es eine geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0_t \end{pmatrix}$$

mit  $I_n \in M_n(\mathbb{R})$  und  $0_m \in M_m(\mathbb{R})$ .

ii) Ist  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t)$  und

$$\begin{aligned} D_+ &:= \langle u_1, \dots, u_r \rangle, \\ D_- &:= \langle v_1, \dots, v_s \rangle, \\ S_+ &:= \langle u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t \rangle, \\ S_- &:= \langle v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t \rangle, \end{aligned}$$

so ist  $\beta|_{D_+ \times D_+}$  positiv definit,  $\beta|_{D_- \times D_-}$  ist negativ definit,  $\beta|_{S_+ \times S_+}$  ist positiv semidefinit und  $\beta|_{S_- \times S_-}$  ist negativ semidefinit. Außerdem ist  $\text{rad}(\beta) = \langle w_1, \dots, w_t \rangle$ .

iii) Es gilt

$$\begin{aligned} r &= \max \{ \dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist positiv definit.} \} \\ s &= \max \{ \dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist negativ definit.} \} \\ r + t &= \max \{ \dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist positiv semidefinit.} \} \\ s + t &= \max \{ \dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist negativ semidefinit.} \} \end{aligned}$$

Insbesondere ist das Tupel  $(r, s, t)$  durch  $\beta$  eindeutig bestimmt.

iv)  $\beta$  ist genau dann

- a) positiv definit, wenn  $r = \dim V$ ,
- b) negativ definit, wenn  $s = \dim V$ ,
- c) positiv semidefinit, wenn  $r + t = \dim V$ ,
- d) negativ semidefinit, wenn  $s + t = \dim V$ ,
- e) nicht-entartet, wenn  $t = 0$ .

## 6 Hauptachsentransformation

Handschriftliche Notizen.



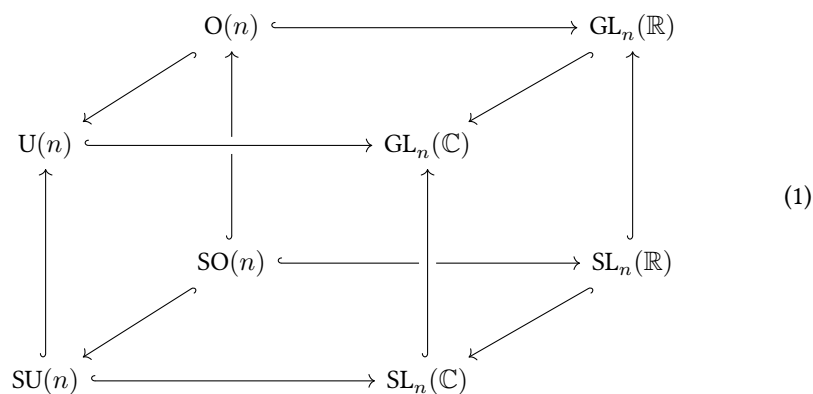
## 7 Topologische Eigenschaften ausgewählter Matrixgruppen

### 7.1 Definition der Gruppen

**Definition 7.1.** Für alle  $n \geq 1$  seien

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n(K) &:= \{S \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det S = 1\}, \\ \mathrm{SU}(n) &:= \{S \in \mathrm{U}(n) \mid \det S = 1\} = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \\ \mathrm{SO}(n) &:= \{S \in \mathrm{O}(n) \mid \det S = 1\} = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

**Proposition 7.2.** i) Für jeden Körper  $K$  ist  $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$  eine Untergruppe.  
 ii) Die Teilmengen  $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  sind Untergruppen.  
 iii) Die Teilmengen  $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  sind Untergruppen.  
 iv) Es gelten die folgenden Untergruppenrelationen:



**Bemerkung 7.3.** Man beachte die verschiedenen gegenüberliegenden Seiten des Würfels: Der Boden des Würfels entsteht aus dem Deckel durch die zusätzliche Bedingung  $\det S = 1$ . Der Rücken des Würfels ist die reelle Version, die Vorderseite die komplexe Version. Die linke Seite des Würfels entsteht aus der rechten, indem man Kompatibilität mit dem Skalarprodukt fordert.

### 7.2 Gruppentheoretische Begriffe

**Proposition 7.4.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  eine Untergruppe. Durch

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in N \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in N$$

wird eine Äquivalenzrelation auf  $G$  definiert, und für  $G/N := G/\sim$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i) Für alle  $g \in G$  ist  $gN = Ng$ .
- ii) Für alle  $g \in G$  ist  $gNg^{-1} = N$ .
- iii) Für alle  $g \in G$  ist  $gNg^{-1} \subseteq N$ .
- iv) Die Multiplikation  $\cdot: (G/N) \times (G/N) \rightarrow G/N$  mit

$$\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} := \overline{g_1 \cdot g_2} \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G$$

ist wohldefiniert. ( $G/N$  ist mit dieser Multiplikation automatisch eine Gruppe. Dies ist dann die eindeutige Gruppenstruktur auf  $G/N$ , so dass die kanonische Projektion  $G \rightarrow G/N, g \mapsto \overline{g}$  ein Gruppenhomomorphismus ist.)

- v) Es gibt eine Gruppe  $H$  und einen Gruppenhomomorphismus  $\phi: G \rightarrow H$  mit  $N = \ker \phi$ .

**Definition 7.5.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  eine Untergruppe. Der *Index* von  $N$  in  $G$  ist  $[G : N] := |G/N|$ . Ist eine der Bedingungen von Proposition 7.4 erfüllt (und damit alle Bedingungen), so ist die Untergruppe  $N$  ein *Normalteiler* in  $G$ .

**Bemerkung 7.6.** Untergruppen vom Index 2 sind immer normal.

**Bemerkung 7.7.** Ist  $N \subseteq G$  eine Untergruppe, so ist die Äquivalenzklasse von  $g \in G$  bezüglich der in Proposition 7.4 definierten Äquivalenzrelation genau die sogenannte *Linksnebenklasse*  $gN = \{gn \mid n \in N\}$ . Die Äquivalenzklasse von  $g$  ist also eine (um  $g$  verschobene) Kopie von  $N$ . Insbesondere ist  $|gN| = |N|$ , und somit

$$|G| = [G : N] \cdot |N|.$$

Zur Berechnung des Index einer Untergruppe wollen wir den folgenden Satz zitieren:

**Theorem 7.8** (1. Isomorphiesatz). Ist  $\phi: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus, so induziert  $\phi$  einen Gruppenisomorphismus  $\psi: G/\ker(\phi) \rightarrow \text{im}(\phi)$  mit  $\psi(\overline{g}) = \phi(g)$  für alle  $g \in G$ .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ g \mapsto \overline{g} \downarrow & \nearrow \psi & \\ G/\ker(\phi) & & \end{array}$$

**Korollar 7.9.** Ist  $\phi: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus, so ist  $[G : \ker \phi] = |\text{im } \phi|$ .

**Proposition 7.10.** Es sei  $n \geq 1$ .

- i) Für jeden Körper  $K$  ist  $\text{SL}_n(K) \subseteq \text{GL}_n(K)$  eine normale Untergruppe.
- ii)  $\text{GL}_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$  ist eine normale Untergruppe von  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  mit  $[\text{GL}_n(\mathbb{R}) : \text{GL}_n(\mathbb{R})^+] = 2$ .
- iii)  $\text{SU}(n) \subseteq \text{U}(n)$  ist eine normale Untergruppe mit  $[\text{U}(n) : \text{SU}(n)] = \infty$ .
- iv)  $\text{SO}(n) \subseteq \text{O}(n)$  ist eine normale Untergruppe mit  $[\text{O}(n) : \text{SO}(n)] = 2$ .

Inbesondere ist im Würfel (1) der Boden normal im Deckel.

### 7.3 Topologische Begriffe

**Definition 7.11.** Es sei  $X$  ein metrischer Raum. Eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  ist ein *Weg* in  $X$ . Für  $x := \gamma(0)$  und  $y := \gamma(1)$  ist  $\gamma$  ein *Weg von  $x$  nach  $y$*  in  $X$ .

**Lemma 7.12.** Ist  $X$  ein metrischer Raum, so wird durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y.$$

eine Äquivalenzrelation auf  $X$  definiert.

**Definition 7.13.** Es sei  $X$  ein metrischer Raum. Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation aus Lemma 7.12 heißen *Wegzusammenhangskomponenten* von  $X$ .  $X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es nur eine Wegzusammenhangskomponente gibt, d.h. wenn es für alle  $x, y \in X$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt.

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn  $Y$  bezüglich der Metrik  $d|_{Y \times Y}$  wegzusammenhängend ist.

**Definition 7.14.** Ein metrischer Raum  $X$  heißt *unzusammenhängend*, wenn es disjunkte, offene, echte Teilmengen  $U_1, U_2 \subseteq X$  gibt, so dass  $X = U_1 \cup U_2$ . Ist  $X$  nicht *unzusammenhängend*, so heißt  $X$  *zusammenhängend*.

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt (un)zusammenhängend, wenn  $Y$  bezüglich  $d|_{Y \times Y}$  (un)zusammenhängend ist.

**Proposition 7.15.** Es seien  $X$  und  $Y$  zwei metrische Räume.

- i) Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  auch zusammenhängend.
- ii) Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $Z \subseteq X$  eine (weg)zusammenhängende Teilmenge, so ist auch  $f(Z) \subseteq Y$  (weg)zusammenhängend.
- iii) Sind  $Z_1, Z_2 \subseteq X$  zwei (weg)zusammenhängende Teilmengen mit  $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ , so ist auch  $Z_1 \cup Z_2$  (weg)zusammenhängend.
- iv) Durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt eine zusammenhängende Teilmenge } Z \subseteq X \text{ mit } x, y \in Z$$

wird eine Äquivalenzrelation auf  $X$  definiert.

**Definition 7.16.** Ist  $X$  ein metrischer Raum, so sind die Äquivalenzklassen bezüglich  $\sim$  wie in Proposition 7.15 die *Zusammenhangskomponenten* von  $X$ .

**Bemerkung 7.17.** Jede zusammenhängende Teilmenge  $Z \subseteq X$  ist in einer der Zusammenhangskomponenten von  $X$  enthalten. Insbesondere ist jede Wegzusammenhangskomponente in einer Zusammenhangskomponente enthalten.

## 7.4 Topologie auf Matrixgruppen

Im Folgenden fixieren wir eine Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $M_n(\mathbb{C})$ . Die Norm induziert eine Metrik  $d$  auf  $M_n(\mathbb{C})$  durch  $d(A, B) := \|A - B\|$ . Jede Teilmenge  $X \subseteq M_n(\mathbb{C})$  erbt durch die Einschränkung  $d|_{X \times X}$  die Struktur eines metrischen Raums.

**Lemma 7.18.** i) Die Projektionen  $p_{ij}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $i, j = 1, \dots, n$  und

$$p_{ij}(A) := A_{ij} \quad \text{für alle } A \in M_n(\mathbb{C}).$$

sind stetig.

ii) Ist  $X$  ein metrischer Raum, so ist eine Abbildung  $f = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n}: X \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  genau dann stetig, wenn sie in jeder Komponente stetig ist.

**Theorem 7.19.** Es sei  $n \geq 1$ .

- i) Die Teilmengen  $SL_n(\mathbb{C}), U(n), SU(n), SL_n(\mathbb{R}), O(n), SO(n) \subseteq M_n(\mathbb{C})$  sind abgeschlossen.
- ii) Die Teilmengen  $GL_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$  und  $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$  sind offen.
- iii) Als Teilmenge von  $O(n)$  ist  $SO(n)$  auch offen.
- iv) Die Gruppen  $U(n), O(n), SU(n)$  und  $SO(n)$  sind kompakt.

**Bemerkung 7.20.** Ist  $Y \subseteq X$  und  $A \subseteq Y$ , so dass  $A$  abgeschlossen in  $X$  ist, so ist  $A$  auch abgeschlossen in  $Y$ . Dementsprechende ergeben sich aus 7.19 noch weitere Aussagen. So ist etwa  $SL_n(\mathbb{C})$  abgeschlossen in  $GL_n(\mathbb{C})$  und  $SO(n)$  abgeschlossen in  $O(n)$ .

**Theorem 7.21.** Es sei  $n \geq 1$ .

- i) Die Gruppe  $GL_n(\mathbb{C})$  ist wegzusammenhängend.
- ii) Die Gruppe  $SL_n(\mathbb{C})$  ist wegzusammenhängend.
- iii) Die Gruppe  $U(n)$  ist wegzusammenhängend.
- iv) Die Gruppe  $SU(n)$  ist wegzusammenhängend.
- v) Die Gruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$GL_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$$

und

$$GL_n(\mathbb{R})^- := \{S \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det S < 0\}.$$

- vi) Die Gruppe  $SL_n(\mathbb{R})$  ist wegzusammenhängend.
- vii) Die Gruppe  $O(n)$  besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten
$$SO(n) = \{S \in O(n) \mid \det S = 1\} \quad \text{und} \quad SO(n)^- := \{S \in O(n) \mid \det S = -1\}.$$
- viii) Die Gruppe  $SO(n)$  ist wegzusammenhängend.

## 7.5 Koordinatenfreie Version

## 8 Orientierung

**Lemma 8.1.** Es seien  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$  zwei Basen eines  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i) Für den eindeutigen Automorphismus  $\Phi: V \rightarrow V$  mit  $\Phi(v_i) = w_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt  $\det(\Phi) > 0$ .
- ii) Für alle alternierende  $n$ -Linearformen  $\omega: V^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_n) > 0 \iff \omega(w_1, \dots, w_n) > 0.$$

**Definition 8.2.** Zwei geordnete Basen eines  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$  heißen *gleichorientiert*, wenn sie die Bedingungen aus Lemma 8.1 erfüllen.

**Lemma 8.3.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so ist Gleichorientiertheit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geordneten Basen von  $V$ .

## 9 Sphärische Geometrie