Lineare Algebra II Repetitorium
Übungen, Tag 1

Jendrik Stelzner

19. September 2016

Übung 1.
Es sei V ein K-Vektorraum und $\mathrm{id} \coloneqq \mathrm{id}_V$.

1. Es sei $n\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $\mathrm{id} + n$ invertierbar ist. (*Hinweis*: Betrachten Sie Endomorphismen der Form $\mathrm{id} + n + n^2 + \cdots + n^k$.)
2. Zeigen Sie ferner, dass $\lambda \, \mathrm{id} + n$ für alle $\lambda \neq 0$ invertierbar ist.
3. Es sei nun $f\colon V \to V$ ein beliebiger Endomorphismus und V endlichdimensional. Zeigen Sie für $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$, dass die Einschränkung $(f - \lambda_n \, \mathrm{id})|_{V_\mu^\sim(f)}$ invertierbar ist.

Übung 2.
Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils eine Jordannormalform über dem angegebenen Körper, inklusive einer entsprechenden Jordanbasis.

1. $A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.
2. $B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $K = \mathbb{Z}/2$.
3. $C \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.
4. $D \coloneqq \begin{pmatrix} -6 & 12 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -8 & 20 & 6 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.

5. $E \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{Z}/3$.

Übung 3.
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

1. Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei Endomorphismen. Zeigen Sie, dass
$$\dim\ker(f \circ g) \leq \dim\ker(f) + \dim\ker(g).$$
(*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass $g(\ker(f \circ g)) \subseteq \ker(f)$.)

2. Folgern Sie, dass für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ die folgende Ungleichung gilt:
$$\dim\ker(f^n) \leq n \cdot \dim\ker(f).$$

3. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
Wenn $f^{10} = 0$ und $\dim\ker(f) < 10$, dann ist $\dim V \leq 2016$.

Übung 4.
Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Für alle $k \geq 0$ sei $N_k \coloneqq \ker(f^k)$ und $R_k \coloneqq \operatorname{im}(f^k)$.

1. Zeigen Sie, dass genau dann $N_{k+1} = N_k$, wenn $R_{k+1} = R_k$.
2. Es sei $k \geq 1$ mit $R_{k+1} = R_k$. Zeigen Sie, dass $R_{k+i} = R_k$ für alle $i \geq 0$.
3. Es seien $N \coloneqq \bigcup_{k \geq 0} N_k$ und $R \coloneqq \bigcap_{k \geq 0} R_k$.
   a) Zeigen Sie, dass N und R invariant unter f sind.
   b) Zeigen Sie, dass $V = N \oplus R$.

Übung 5.
Bestimmen Sie die Lösungsräume der folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen. Dabei seien $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$$\left\{\begin{array}{rcrr} f' & = & -f & -6g, \\ g' & = & 2f & +6g; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrr} f' & = & -f & -g, \\ g' & = & 2f & +g; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrrr} f' & = & 2f & +2g & +3h, \\ g' & = & f & +3g & +3h, \\ h' & = & -f & -2f & -2h. \end{array}\right.$$

Lösung 2.

1. Das charakteristische Polynom:

$$T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = (T-1)^3$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechend Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Das charakteristische Polynom:

$$T^3 + T^2 + T + 1 = (T-1)^3$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechend Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

3. Das charakteristische Polynom:

$$(T-1)^4$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechend Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

4. Das charakteristische Polynom:
$$T^3 - 2T^2 = T^2(T-2)$$
Eine mögliche Jordanbasis:
$$\left(\begin{pmatrix}12\\-6\\36\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$
Entsprechend Jordannormalform:
$$\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

5. Das charakteristische Polynom:
$$T^4 + 2T^3 + T + 2 = (T-2)^3(T-1)$$
Eine mögliche Jordanbasis:
$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$
Die entsprechende Jordannormalform:
$$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{pmatrix}$$

Lösung 5.

1. Charakteristisches Polynom:
$$T^2 - 5T + 6 = (T-2)(T-3)$$
Jordanbasis:
$$\left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right).$$
Entsprechende Jordannormalform:
$$\begin{pmatrix}2 & \\ & 3\end{pmatrix}$$
Die Basiswechselmatrix ist selbstinvers. Matrixexponential:
$$\begin{pmatrix}4e^{2t} - 3e^{3t} & 6e^{2t} - 6e^{3t}\\ -2e^{2t} + 2e^{3t} & -3e^{2t} + 4e^{3t}\end{pmatrix}$$

2. Charakteristisches Polynom:

$$T^2 + 1 = (T - i)(T + i)$$

Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-i \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}$$

Inverse der Basiswechselmatrix:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2i & 1-i \\ 2i & 1+i \end{pmatrix}$$

Matrixexponential:

$$\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) & -\sin(t) \\ 2\sin(t) & \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

3. Charakteristisches Polynom:

$$T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = (T - 1)^3$$

Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse der Basiswechselmatrix:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrixexponential:

$$e^t \begin{pmatrix} 1+t & 2t & 3t \\ t & 1+2t & 3t \\ -t & -2t & 1-3t \end{pmatrix}$$