Lineare Algebra II Repetitorium
Übungen, Tag 1

Jendrik Stelzner

25. September 2016

Übung 1.
Es sei V ein K-Vektorraum und $\mathrm{id} \coloneqq \mathrm{id}_V$.

1. Es sei $n \colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $\mathrm{id} - n$ invertierbar ist. (*Hinweis*: Betrachten Sie Endomorphismen der Form $\mathrm{id} + n + n^2 + \cdots + n^k$.)
2. Zeigen Sie ferner, dass $\lambda \, \mathrm{id} - n$ für alle $\lambda \neq 0$ invertierbar ist.
3. Es sei nun $f \colon V \to V$ ein beliebiger Endomorphismus und V endlichdimensional. Zeigen Sie für $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$, dass die Einschränkung $(f - \lambda \, \mathrm{id})|_{V^{\sim}_{\mu}(f)}$ invertierbar ist.

Übung 2.
Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils eine Jordannormalform über dem angegebenen Körper, inklusive einer entsprechenden Jordanbasis.

1. $A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.
2. $B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $K = \mathbb{Z}/2$.
3. $C \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.
4. $D \coloneqq \begin{pmatrix} -6 & 12 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -8 & 20 & 6 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{R}$.

5. $E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{Z}/3$.

Übung 3.
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

1. Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei Endomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker(f) + \dim \ker(g).$$

(*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass $g(\ker(f \circ g)) \subseteq \ker(f)$.)

2. Folgern Sie, dass für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\dim \ker(f^n) \leq n \cdot \dim \ker(f).$$

3. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
Wenn $f^{10} = 0$ und $\dim \ker(f) < 10$, dann ist $\dim V \leq 2016$.

Übung 4.
Es sei $e\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V mit $e^2 = e$. Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{im}(e) \oplus \ker(e)$.

Übung 5.
Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Für alle $k \geq 0$ sei $N_k := \ker(f^k)$ und $R_k := \operatorname{im}(f^k)$.

1. Zeigen Sie, dass $N_k \subseteq N_{k+1}$ und $R_k \supseteq R_{k+1}$ für alle $k \geq 0$, dass also

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \quad \text{und} \quad V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$$

2. Zeigen Sie, dass genau dann $N_{k+1} = N_k$, wenn $R_{k+1} = R_k$.
3. Es sei $k \geq 1$ mit $R_{k+1} = R_k$. Zeigen Sie, dass $R_{k+i} = R_k$ für alle $i \geq 0$. Folgern Sie, dass auch $N_{k+i} = N_k$ für alle $i \geq 0$.
4. Es seien $N := \bigcup_{k \geq 0} N_k$ und $R := \bigcap_{k \geq 0} R_k$.
   a) Zeigen Sie, dass N und R invariant unter f sind.
   b) Zeigen Sie, dass $V = N \oplus R$.

   (*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass es ein $k_0 \geq 0$ gibt, so dass $R = R_{k_0}$ und $N = N_{k_0}$).

Übung 6.

Bestimmen Sie die Lösungsräume der folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen. Dabei seien $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$$\left\{\begin{array}{ccrr} f' & = & -f & -6g, \\ g' & = & 2f & +6g; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ccrr} f' & = & -f & -g, \\ g' & = & 2f & +g; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ccrrr} f' & = & 2f & +2g & +3h, \\ g' & = & f & +3g & +3h, \\ h' & = & -f & -2f & -2h. \end{array}\right.$$

Lösung 2.

1. Das charakteristische Polynom:
$$T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = (T-1)^3$$
Eine mögliche Jordanbasis:
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
Entsprechend Jordannormalform:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Das charakteristische Polynom:
$$T^3 + T^2 + T + 1 = (T-1)^3$$
Eine mögliche Jordanbasis:
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
Entsprechend Jordannormalform:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

3. Das charakteristische Polynom:
$$(T-1)^4$$
Eine mögliche Jordanbasis:
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
Entsprechend Jordannormalform:
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

4. Das charakteristische Polynom:

$$T^3 - 2T^2 = T^2(T-2)$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechend Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

5. Das charakteristische Polynom:

$$T^4 + 2T^3 + T + 2 = (T-2)^3(T-1)$$

Eine mögliche Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Die entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 5.

1. Für $v \in N_k$ gilt $f^{k+1}(v) = f(f^k(v)) = f(0) = 0$ und somit auch $v \in N_{k+1}$. Deshalb ist $N_k \subseteq N_{k+1}$.

   Ist $v \in R_{k+1}$ so gibt es $w \in V$ mit $v = f^{k+1}(w) = f^k(f(w))$, weshalb $v \in \operatorname{im}(f^k) = R_k$. Deshalb ist $R_{k+1} \subseteq R_k$.

2. Wegen der Endlichdimensionalität von V gilt nach der Dimensionsformal (angewandt auf f^k und f^{k+1})

   $$\dim N_k + \dim R_k = \dim V = \dim N_{k+1} + \dim R_{k+1}$$

   und deshalb

   $$\dim N_k - \dim N_{k+1} = \dim R_{k+1} - \dim R_k.$$

   Da $N_k \subseteq N_{k+1}$ und $R_{k+1} \subseteq R_k$ gilt deshalb

   $$N_k = N_{k+1} \iff \dim N_k = \dim N_{k+1} \iff \dim R_k = \dim R_{k+1} \iff R_k = R_{k+1}.$$

3. Ist $R_k = R_{k+1}$, so gilt

$$\begin{aligned} R_{k+2} = \operatorname{im}(f^{k+2}) = f(\operatorname{im}(f^{k+1})) = f(R_{k+1}) = f(R_k) \\ = f(\operatorname{im}(f^k)) = \operatorname{im}(f^{k+1}) = R_{k+1}. \end{aligned}$$

   Induktiv ergibt sich nun, dass $R_{k+j} = R_{k+j+1}$ für alle $j \geq 0$, also

$$R_k = R_{k+1} = R_{k+2} = R_{k+3} = \cdots$$

   und somit $R_k = R_{k+i}$ für alle $i \geq 0$. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ergibt sich auch $N_{k+j} = N_{k+j+1}$ für alle $j \geq 0$ und somit $N_k = N_{k+i}$ für alle $i \geq 0$.

4. Für alle $k \geq 0$ ist

$$f(R_k) = f(\operatorname{im}(f^k)) = \operatorname{im}(f^{k+1}) = R_{k+1},$$

   sowie $f(N_{k+1}) \subseteq N_k$. Deshalb ist

$$f(R) = f\left(\bigcap_{k\geq 0} R_k\right) \subseteq \bigcap_{k\geq 0} f(R_k) \subseteq \bigcap_{k\geq 0} R_{k+1} = \bigcap_{k\geq 1} R_k = \bigcap_{k\geq 0} R_k = R.$$

   sowie

$$f(N) = f\left(\bigcup_{k\geq 0} N_k\right) = f\left(\bigcup_{k\geq 1} N_k\right) = \bigcup_{k\geq 1} f(N_k) \subseteq \bigcup_{k\geq 1} N_{k-1} = \bigcup_{k\geq 0} N_k = N.$$

   Somit sind R und N invariant unter f.

   Da V endichdimensional ist, können die Inklusionen in der Kette

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$$

   nicht alle echt sein. Es gibt als ein $k_0 \geq 0$ mit $R_{k_0} = R_{k_0+1}$. Nach den vorherigen Aufgabenteilen ist somit $R_{k_0+i} = R_{k_0}$ für alle $i \geq 0$, und damit auch $N_{k_0+i} = N_{k_0}$ für alle $i \geq 0$. Somit ist $N = \bigcup_{k\geq 0} N_k = N_{k_0}$ und $R = \bigcup_{k\geq 0} R_k = R_{k_0}$.

   Ist $v \in N \cap R = N_{k_0} \cap R_{k_0}$, so gibt es ein $w \in V$ mit $v = f^{k_0}(w)$. Da $f \in N_{k_0}$ gilt $0 = f^{k_0}(v) = f^{2k_0}(w)$, also $w \in N_{2k_0} = N_{k_0}$. Somit ist bereits $v = f^{k_0}(w) = 0$, und deshalb $N \cap R = 0$. Damit ist auch

$$\begin{aligned} \dim(N + R) = \dim N + \dim R = \dim N_{k_0} + \dim R_{k_0} \\ = \dim\ker(f^{k_0}) + \dim\operatorname{im}(f^{k_0}) = \dim V, \end{aligned}$$

   also $N + R = V$.

Lösung 6.

1. Charakteristisches Polynom:

$$T^2 - 5T + 6 = (T-2)(T-3)$$

Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 2 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

Die Basiswechselmatrix ist selbstinvers. Matrixexponential:

$$\begin{pmatrix} 4e^{2t} - 3e^{3t} & 6e^{2t} - 6e^{3t} \\ -2e^{2t} + 2e^{3t} & -3e^{2t} + 4e^{3t} \end{pmatrix}$$

2. Charakteristisches Polynom:

$$T^2 + 1 = (T-i)(T+i)$$

Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-i \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}$$

Inverse der Basiswechselmatrix:

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i & 1-i \\ 2i & 1+i \end{pmatrix}$$

Matrixexponential:

$$\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) & -\sin(t) \\ 2\sin(t) & \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

3. Charakteristisches Polynom:

$$T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = (T-1)^3$$

Jordanbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Entsprechende Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse der Basiswechselmatrix:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrixexponential:

$$e^t \begin{pmatrix} 1+t & 2t & 3t \\ t & 1+2t & 3t \\ -t & -2t & 1-3t \end{pmatrix}$$