Lineare Algebra II Repetitorium
Übungen, Tag 3

Jendrik Stelzner

21. September 2016

Im Folgenden werden alle auftretenden Skalarprodukträume als endlichdimensional vorausgesetzt.

Übung 1.
Es sei $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus eines Skalarproduktraums V. Zeigen Sie:

1. Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$.
2. Es ist $V_\lambda(f^*) = V_{\overline{\lambda}}(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq \mu$ ist $V_\lambda(f) \perp V_\mu(f)$.
4. Für $v \in V$ und $n \geq 1$ mit $f^n(v) = 0$ ist bereits $f(v) = 0$. (*Hinweis*: Betrachen Sie zunächst den Fall $n = 2$.)
5. Folgern Sie, dass $V^\sim_\lambda(f) = V_\lambda(f)$ für alle $\lambda \in K$.

Zeigen Sie außerdem:

6. Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ist genau dann f-invariant, wenn $U^\perp$ invariant unter f^* ist.
7. Es ist $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$ und $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$.

Übung 2.
Zeigen Sie, dass für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Es gilt $ff^* = \mathrm{id}_V$.
2. Es gilt $f^*f = \mathrm{id}_V$.
3. f ist ein Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$.
4. Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist $\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$.

5. Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|v\|$.

Übung 3.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Zeigen Sie, dass genau dann $A^*A = I$, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ bilden.

2. Zeigen Sie, dass genau dann $AA^* = I$, wenn die Zeilen von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ bilden.

Übung 4.
Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums V. Zeigen Sie die folgende Aussagen ohne Verwendung entsprechender Normalenformen:

1. Ist f selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte von f reell.

2. Ist f antiselbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte von f rein imaginär.

3. Ist f unitär, so haben alle Eigenwerte von f Betrag 1.

Übung 5.
Es sei $n \geq 1$.

1. Zeigen Sie, dass $\det(U) \subseteq S^1$ für alle $U \in \mathrm{U}(n)$, und dass $\det\colon \mathrm{U}(n) \to S^1$ surjektiv ist.

2. Zeigen Sie, dass $\det(O) \subseteq \{1, -1\}$ für alle $O \in \mathrm{O}(n)$, und dass $\det\colon \mathrm{O}(n) \to \{1, -1\}$ surjektiv ist.

Übung 6.
Es sei V ein Skalarproduktraum.

1. Es sei $v \in V$ ein normierter Vektor. Zeigen Sie, dass die Abbildung $P_v\colon V \to V$ mit $P_v(w) = \langle w, v\rangle\, v$ die orthogonale Projektion auf die Gerade $\mathcal{L}(v)$ ist.

2. Es sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine orthonormale Familie von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass $P \coloneqq P_{v_1} + \cdots + P_{v_n}$ die orthogonale Projektion auf den Untervektorraum $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ ist.

Übung 7.
Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums V.

1. Zeigen Sie, dass f genau dann positiv ist, wenn $\langle f(v), v\rangle > 0$ für alle $v \in V$.

2. Zeigen Sie, dass ff^* und f^*f positiv selbstadjungiert sind.