

Lineare Algebra II

Repetitorium

Jendrik Stelzner

16. September 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Jordannormalform	2
1.1	Nilpotente Endomorphismus	2
1.2	Allgemeine Jordannormalform	3
1.3	Existenz der Hauptraumzerlegung	4
2	Skalarprodukträume	6

1 Jordannormalform

1.1 Nilpotente Endomorphismus

Definition 1.1. Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eines K -Vektorraums V heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$ gibt. Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt.

Lemma 1.2. Ist $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V , so ist f genau dann nilpotent, wenn für jede geordnete Basis \mathcal{B} von V die Matrix $M_{\mathcal{B}}(f)$ nilpotent ist.

Notation 1.3. Für alle $n \geq 1$ sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Theorem 1.4. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus.

i) Es gibt eine geordnete Basis \mathcal{B} von V und $n_1, \dots, n_s \geq 1$, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Zahlen n_1, \dots, n_s sind eindeutig bis auf Permutation.

iii) Ist $f^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \dots, s$.

Korollar 1.5. Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent, so gibt es $S \in GL_n(K)$ und $n_1, \dots, n_s \geq 1$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Zahlen n_1, \dots, n_s eindeutig bis auf Permutation, und ist $A^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \dots, s$.

Lemma 1.6. Ist V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, und sind $U, W \subseteq V$ zwei Untervektorräume mit $U \cap W = 0$, so gibt es einen Untervektorraum $\overline{W} \subseteq V$ mit $W \subseteq \overline{W}$ und $V = U \oplus \overline{W}$.

1.2 Allgemeine Jordannormalform

Definition 1.7. Für einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ und einen Skalar $\lambda \in K$ ist

$$V_\lambda^\sim(f) := \{v \in V \mid \text{es gibt } n \geq 1 \text{ mit } (f - \lambda \text{id}_V)^n(v) = 0\}$$

der *Hauptraum* von f zu λ .

Lemma 1.8. Es sei $f: V \rightarrow V$ und $\lambda \in K$.

- i) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist ein Untervektorraum von V .
- ii) Es gilt $V_\lambda(f) \subseteq V_\lambda^\sim(f)$.
- iii) Es ist genau dann $V_\lambda^\sim(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.
- iv) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist f -invariant.
- v) Ist V endlichdimensional, so gibt es $N \geq 1$ mit $(f - \lambda \text{id}_V)^N(v) = 0$ für alle $v \in V$, und es gilt $V_\lambda^\sim(f) = \ker(f - \lambda \text{id}_V)^N$.

Lemma 1.9. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V .

Notation 1.10. Für alle $n \geq 1$ und $\lambda \in K$ ist

$$J(n, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

der Jordanblock von Größe n zu (m Eigenwert) λ .

Theorem 1.11. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V , so dass $V = V_{\lambda_1}^\sim(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}^\sim(f)$ für die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ von f .

- i) Es gibt eine geordnete Basis \mathcal{B} von V und $n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}, \dots, n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)} \geq 1$, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J(n_1^{(1)}, \lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & J(n_{s_1}^{(1)}, \lambda_1) & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J(n_1^{(t)}, \lambda_t) & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(n_{s_t}^{(t)}, \lambda_t) \end{pmatrix}$$

- ii) Die Zahlen $(n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}), \dots, (n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)})$ sind jeweils eindeutig bis auf Permutation.
- iii) Es gilt $n_1^{(i)} + \dots + n_{s_i}^{(i)} = \dim V_{\lambda_i}^\sim(f)$ für alle $i = 1, \dots, t$.

1.3 Existenz der Hauptraumzerlegung

Lemma 1.12. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V .

- i) Für alle $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ ist die Einschränkung $(f - \lambda \text{id}_V)|_{V_\mu^\sim(f)}$ invertierbar.
- ii) Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ ist die Summe $V_{\lambda_1}^\sim(f) + \dots + V_{\lambda_t}^\sim(f)$ direkt.

Lemma 1.13. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V und $\lambda \in K$. Ferner sei $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum mit $V = V_\lambda^\sim(f) \oplus U$. Dann ist λ kein Eigenwert von $f|_U$, und es gilt

$$\chi_f(T) = (T - \lambda)^{\dim V_\lambda^\sim(f)} \cdot \chi_{f|_U}(T).$$

Lemma 1.14 (Fitting). Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V . Für alle $k \geq 0$ sei

$$N_k := \ker f^k \quad \text{und} \quad R_k := \text{im } f^k.$$

- i) Es gilt

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

und

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \dots$$

- ii) Für $k \geq 0$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a) $N_{k+1} = N_k$,
- b) $N_l = N_k$ für alle $l \geq k$,
- c) $R_{k+1} = R_k$,
- d) $R_l = R_k$ für alle $l \geq k$.

(Wenn also eine der beiden Ketten einmal stabilisiert, so sind beide Ketten von dort an stabil.)

- iii) Die beiden Teilmengen $N := \bigcup_{k \geq 0} N_k$ und $R := \bigcap_{k \geq 0} R_k$ sind f -invariante Untervektorräume von V , und es gilt $V = N \oplus R$.

Theorem 1.15 (Existenz der Hauptraumzerlegung). Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V . Dann gibt es genau dann eine Hauptraumzerlegung von V bezüglich f , wenn das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ in Linearfaktoren zerfällt.

Korollar 1.16. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V , so ist $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\sim(f)$.

Korollar 1.17. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V (bzw. $A \in M_n(K)$), so ist $\chi_f(f) = 0$ (bzw. $\chi_A(A) = 0$).

Korollar 1.18 (Abstrakte Jordanzerlegung). Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V , so gibt es eindeutige Endomorphismen $d, n: V \rightarrow V$, so dass

- a) $f = d + n$,
- b) d ist diagonalisierbar und n ist nilpotent,
- c) d und n kommutieren

2 Skalarprodukträume

Definition 2.1. i) Eine Abbildung $b: V \times W \rightarrow Z$ mit K -Vektorräumen V, W, Z heißt *K -bilinear*, falls

$$b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b(v_2, w),$$

$$b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2),$$

$$b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$. Ist zusätzlich $Z = K$, so ist b eine *Bilinearform*. Gilt außerdem noch $V = W$ und

$$b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so ist b eine *symmetrische Bilinearform*.

ii) Eine Abbildung $s: V \times W \rightarrow Z$ mit \mathbb{C} -Vektorräumen V, W, Z heißt *sesquilinear*, falls

$$b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b(v_2, w),$$

$$b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2),$$

$$b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w) \text{ und } b(v, \lambda w) = \overline{\lambda} b(v, w)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist zusätzlich $Z = \mathbb{C}$, so ist s eine *Sesquilinearform*. Gilt außerdem noch $V = W$ und

$$s(v_1, v_2) = \overline{s(v_2, v_1)} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt s *hermitsch*.

Lemma 2.2. Ist $s: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Bilinearform, so ist $s(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

Notation 2.3. Es ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 2.4. Eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt

i) *positiv definit*, falls $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$,

ii) *positiv semidefinit*, falls $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$,

iii) *negativ definit*, falls $\langle v, v \rangle < 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$,

iv) *negativ semidefinit*, falls $\langle v, v \rangle \leq 0$ für alle $v \in V$, und

v) *indefinit*, wenn sie keine der obigen Bedingungen erfüllt.

Definition 2.5. Ein *Skalarprodukt* auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V ist eine positiv definite, symmetrische (bzw. hermitesche) Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Ein *Skalarproduktraum* ist ein Tupel $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V .

Bemerkung 2.6. Man spricht meist nur von einem Skalarproduktraum V , nennt das Skalarprodukt also nicht explizit mit. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spricht man auch von einem *euklidischen Vektorraum*, und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ von einem *unitären Vektorraum*.

Definition 2.7. Für einen Skalarproduktraum V und $v \in V$ ist $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Der Vektor v heißt *normiert*, wenn $\|v\| = 1$.

Proposition 2.8 (Cauchy-Schwarz). Ist V ein Skalarproduktraum, so ist

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Korollar 2.9. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm auf V .

Bemerkung 2.10. Ist $v \in V$ mit $v \neq 0$, so ist der Vektor $v/\|v\|$ normiert. Man sagt, dass man v normiert.

Definition 2.11. Es sei V ein Skalarproduktraum.

- i) Zwei Vektoren $u, w \in V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, geschrieben als $u \perp w$, wenn $\langle u, w \rangle = 0$.
- ii) Zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, wenn $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.
- iii) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U (in V).

Lemma 2.12. Es sei V ein Skalarproduktraum.

- i) Ist ein Vektor $v \in V$ zu jedem Vektor $w \in V$ orthogonal, so gilt bereits $v = 0$.
- ii) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Definition 2.13. Es sei V ein Skalarproduktraum.

- i) Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *orthogonal*, wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$. Die Familie heißt *normiert*, falls v_i für alle $i \in I$ normiert ist. Ist die Familie orthogonal und normiert, so heißt sie *orthonormal*.
- ii) Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *orthogonal*, wenn $v \perp w$ für alle $v, w \in S$ mit $v \neq w$. Die Teilmenge heißt *normiert*, falls jeder Vektor $v \in S$ normiert ist. Ist S orthogonal und normiert, so heißt S *orthonormal*.

Lemma 2.14. Es sei V ein Skalarproduktraum.

1. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ ist genau dann orthonormal, wenn $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.
2. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist genau dann orthonormal, wenn $\langle v, w \rangle = \delta_{v,w}$ für alle $v, w \in S$.

Lemma 2.15. Es sei V ein Skalarproduktraum und $(v_i)_{i \in I}$ eine orthogonale Familie von Vektoren $v_i \in V$ mit $v_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Dann ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig. Insbesondere ist jede orthonormale Familie linear unabhängig.

Definition 2.16. Eine orthonormale Basis eines Skalarproduktraums V heißt *Orthonormalbasis* von V .

Proposition 2.17. Es sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis eines Skalarproduktraums V .

1. Für jedes $v \in V$ ist $\langle v, v_i \rangle = 0$ für fast alle $i \in I$, und es gilt

$$v = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i \quad \text{sowie} \quad \|v\|^2 = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle^2.$$

2. Für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle \langle w, v_i \rangle.$$

Theorem 2.18 (Gram-Schmidt). Es sei V ein Skalarproduktraum und (v_1, \dots, v_n) eine linear unabhängige Familie von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Iterativ seien die Familien $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$ und (w_1, \dots, w_n) durch $\tilde{w}_1 := v_1$, $w_i := \tilde{w}_i / \|\tilde{w}_i\|$ und

$$\tilde{w}_i := v_i - \langle v_i, w_1 \rangle w_1 - \dots - \langle v_i, w_{i-1} \rangle w_{i-1}$$

definiert. Dann ist die Familie (w_1, \dots, w_n) orthonormal, und es gilt

$$\langle w_1, \dots, w_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Korollar 2.19. Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum.

1. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ eine Orthonormalbasis von U , so lässt sich \mathcal{B} zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ von V ergänzen.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von V .
3. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $V = U \oplus U^\perp$.

Proposition 2.20. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

injektiv und \mathbb{R} -linear (bzw. \mathbb{C} -antilinear). Ist V endlichdimensional, so ist Φ ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen (bzw. Antiisomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen).