1 Die Aussage

Proposition 1.1. Ist G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine normale Untergruppe vom Index 2, so ist N normal in G.

2 Möglichkeit 1 (mit Rechtsnebenklassen)

Die Äquivalenzrelation $\sim_L$ auf G mit

$$g_1 \sim_L g_2 \iff g_1^{-1} g_2 \in N \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G$$

hat als Äquivalenzklassen genau die Linksnebenklassen, d.h. es ist $[g]_L = gN$ für alle $g \in G$. Analog ergibt sich für die Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf G mit

$$g_1 \sim_R g_2 \iff g_1 g_2^{-1} \in N \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G,$$

dass die Äquivalenklassen mit den Rechtsnebenklassen übereinstimmen, dass also $[g]_R = Ng$ für alle $g \in G$.

Analog zu der Menge der Linksnebenklassen $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ bezeichne $N \backslash G := \{Ng \mid g \in G\}$ die Menge der Rechtsnebenklassen.

Behauptung A. Es gibt gleich viele Links- und Rechtsnebenklassen, d.h. es gilt

$$|G/N| = |N \backslash G|.$$

Beweis. Die Abbildung $i \colon G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ induziert Abbildungen

$$i_{L \to R} \colon G/N \to N \backslash G, \quad gN \mapsto i(gN) = Ng^{-1},$$

und

$$i_{R \to L} \colon N \backslash G \to G/N, \quad Ng \mapsto i(Ng) = g^{-1}N,$$

und da $i^2 = \mathrm{id}_G$ sind $i_{L \to R}$ und $i_{R \to L}$ invers zueinander, also Bijektionen. □

Behauptung B. Für alle $g \in G$ gilt

$$gN = N \iff g \in N \iff Ng = N.$$

Beweis. Da $N = 1N$ ist

$$N = gN \iff 1N = gN \iff 1 \sim_L g \iff 1^{-1} g \in N \iff g \in N.$$

Dass $Ng = N \iff g \in N$ ergibt sich analog. □

Beweis der Proposition. Da $[G : N] = 2$ gibt es nur zwei Linksnebenklassen. Wir wissen, dass $N = 1N$ eine dieser Linksnebenklassen ist. Da G die disjunkte Vereinigung der beiden Linksnebenklassen ist, muss $G - N = \{g \in G \mid g \notin N\}$ die andere Linksnebenklasse sein.

Da $[G : N] = 2$ auch die Anzahl der Rechtsnebenklassen ist, ergibt sich analog, dass N und $G - N$ die einzigen beiden Rechtsnebenklassen sind.

Die Normalität von N ergibt sich nun dadurch, dass $gN = Ng$ für alle $g \in G$: Ist $g \in N$, so ist dies klar, da N eine Untergruppe ist. Ist $g \notin N$, so ist $gN \neq N$, und es muss $gN = G - N$ gelten; analog muss dann auch $Ng = G - N$ gelten, und somit $gN = Ng$. □

Dass entscheidende an $[G : N] = 2$ ist also, dass es neben der "trivialen" Nebenklasse N nur eine "nicht-triviale" Links- und Rechtsnebenklasse gibt, und diese nicht-trivialen Nebenklasse(n) deshalb nichts kaputt machen können.

3 Möglichkeit 2 (ohne Rechtsnebenklassen)

Der folgende Beweist stammt (angeblich) aus Rotmans *Advanced Modern Algebra.*

Beweis der Proposition. Da $[G : N] = 2$ gibt es neben $N = 1N$ nur eine weitere Nebenklasse; da G die Vereinigung dieser beiden Linksnebenklassen ist, muss $G - N$ die andere Linksnebenklasse sein. Es sei $h \in G$ mit $G - N = hN$, wobei notwendigerweise $h \notin N$.

Es genügt zu zeigen, dass $gNg^{-1} \subseteq N$ für alle $g \in G$. Ist $g \in N$, so ist dies klar, dass N eine Untergruppe ist. Ist $g \notin N$, also $g \in G - N = hN$, so gibt es ein $n_1 \in N$ mit $g = hn_1$. Ist $gNg^{-1} \subseteq N$, so gilt die Aussage; ansonsten gibt es $n_2 \in N$ mit $gn_2g^{-1} \in G - N = hN$, und somit $gn_2g^{-1} = hn_3$ für ein $n_3 \in N$. Dann ist insgesamt

$$hn_3 = gn_2g^{-1} = (hn_1)n_2(hn_1)^{-1} = hn_1n_2n_1^{-1}h^{-1}.$$

Durch Multiplikation mit h^{-1} von links ergibt sich, dass

$$n_3 = n_1n_2n_1^{-1}h^{-1},$$

und umstellen ergibt, dass

$$h = n_3^{-1}n_1n_2n_1^{-1} \in N,$$

im Widerspruch zu $h \notin N$. □