Lineare Algebra II
Repetitorium

Jendrik Stelzner

23. September 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Jordannormalform

1.1 Nilpotente Endomorphismus

Definition 1.1. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$ gibt. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt.

Lemma 1.2. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so ist f genau dann nilpotent, wenn für jede geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ nilpotent ist.

Notation 1.3. Für alle $n \geq 1$ sei

$$J_n \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Theorem 1.4. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus.

i) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und $n_1, \ldots, n_s \geq 1$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ sind eindeutig bis auf Permutation.

iii) Ist $f^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \ldots, s$.

Korollar 1.5. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ nilpotent, so gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $n_1, \ldots, n_s \geq 1$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ eindeutig bis auf Permutation, und ist $A^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \ldots, s$.

Lemma 1.6. Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und sind $U, W, \subseteq V$ zwei Untervektorräume mit $U \cap W = 0$, so gibt es einen Untervektorraum $\overline{W} \subseteq V$ mit $W \subseteq \overline{W}$ und $V = U \oplus \overline{W}$.

Beweis. Es sei $\mathcal{B}_1 = (u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von U und $\mathcal{B}_2 = (w_1, \ldots, w_s)$ eine Basis von W. Dann ist $\mathcal{B} \coloneqq (u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s)$ eine Basis von $U + W = U \oplus W$. Ergänze $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, \ldots, w_t)$ von V und setze $\overline{W} \coloneqq \langle w_1, \ldots, w_t \rangle$. $\square$

Beweis der Existenz in Theorem 1.4. Für alle $k \geq 0$ sei $N_k := \ker(f^k)$. Es sei $p := \min\{n \geq 0 \mid f^n\} = 0$ der Nilpotenzindex von f

Behauptung A. Für alle $k \geq 0$ ist $N_{k+1} = f^{-1}(N_k)$, und somit insbesondere $f(N_{k+1}) \subseteq N_k$.

Beweis. Es gilt

$$v \in f^{-1}(N_k) \iff f(v) \in N_k \iff f^k(f(v)) = 0 \iff f^{k+1}(v) = 0 \iff v \in N_{k+1}.$$

□

Behauptung B. Es Untervektorräume $W_1, \ldots, W_p \subseteq V$ so dass

i) $N_k = N_{k-1} \oplus W_k$ für alle $k = 1, \ldots, p$,

ii) $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$ für alle $k = 2, \ldots, p$, und

iii) die Einschränkung $f|_{W_k}$ ist injektiv für alle $k = 2, \ldots, p$.

Beweis. Beginne mit $W_p \subseteq V$, so dass $V = N_p = N_{p-1} \oplus W_p$. Ist W_{k+1} für ein $1 \leq k \leq p-1$ definiert, so ist

$$f(W_{k+1}) \subseteq f(N_{k+1}) \subseteq N_k,$$

und da

$$f^{-1}(N_{k-1}) \cap W_{k+1} = N_k \cap W_{k+1} = 0,$$

ist $f(W_{k+1}) \cap N_{k-1} = 0$. Nach Lemma 1.6 gibt es einen Untervektorraum $W_k \subseteq N_k$ mit $f(W_{k+1}) \subseteq W_k$ und $N_k = N_{k-1} \oplus W_k$. Die Injektivität von $f|_{W_k}$ für $k = 2, \ldots, p$ folgt aus

$$\ker(f|_{W_k}) = \ker(f) \cap W_k = N_1 \cap W_k \subseteq N_{k-1} \cap W_k = 0.$$

□

Wähle eine Basis $\mathcal{B}_p = (v_1^p, \ldots, v_{n_p}^p)$ von W_p. Wegen der Injektivität von f_{W_p} ist die Familie $f(\mathcal{B}_p) := (f(v_1^p), \ldots, f(v_{n_p}^p))$ linear unabhängig, und damit zu einer Basis

$$\mathcal{B}_p = \left(f(v_1^p), \ldots, f(v_{n_p}^p), v_1^{p-1}, \ldots, v_{n_{p-1}}^{p-1}\right)$$

von W_{p-1} ergänzbar. Iteratives Fortführen liefert für W_{p-i} eine Basis $\mathcal{B}_{p-i}$ de Form

$$\begin{matrix} f^i(v_1^p), & \ldots, & f^i(v_{n_p}^p) \\ f^{i-1}(v_1^p), & \ldots, & f^{i-1}(v_{n_p}^p) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{p-i}, & \ldots, & v_{n_{p-i}}^{p-i}. \end{matrix}$$

Da

$$\begin{aligned} V = N_p = N_{p-1} \oplus W_p = N_{p-2} \oplus W_{p-1} \oplus W_p = \cdots &= N_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_p \\ &= W_1 \oplus \cdots \oplus W_p \end{aligned}$$

ergibt sich durch Zusammenfügen der einzelnen Basen $\mathcal{B}_p, \dots, \mathcal{B}_1$ eine Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ von V von der Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
v_1^p, & \dots, & v_{n_p}^p, & & & & & & \\
f(v_1^p), & \dots, & f(v_{n_p}^p), & v_1^{p-1}, & \dots, & v_{n_{p-1}}^{p-1}, & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
f^{p-1}(v_1^p), & \dots, & f^{p-1}(v_{n_p}^p), & f^{p-2}(v_1^{p-1}), & \dots, & f^{p-2}(v_{n_{p-1}}^{p-1}), & \dots, & v_1^1, & \dots, & v_{n_1}^1.
\end{array}$$

Trägt man nun dieses zweidimensionale Schema von oben nach unten, von links nach rechts in eine Familie $\mathcal{B}$ ein, so ist dies die gewünschte Matrix. □

[Hier das konkrete Vorgehen angeben.]

1.2 Allgemeine Jordannormalform

Definition 1.7. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ und einen Skalar $\lambda \in K$ ist

$$V_\lambda^\sim(f) := \{v \in V \mid \text{es gibt } n \geq 1 \text{ mit } (f - \lambda \operatorname{id}_V)^n(v) = 0\}$$

der *Hauptraum* von f zu λ.

Lemma 1.8. Es sei $f\colon V \to V$ und $\lambda \in K$.

i) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

ii) Es gilt $V_\lambda(f) \subseteq V_\lambda^\sim(f)$.

iii) Es ist genau dann $V_\lambda^\sim(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.

iv) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist f-invariant.

v) Ist V endlichdimensional, so gibt es $N \geq 1$ mit $(f - \lambda \operatorname{id}_V)^N(v) = 0$ für alle $v \in V_\lambda^\sim(f)$, und es gilt $V_\lambda^\sim(f) = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)^N$.

Lemma 1.9. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

Notation 1.10. Für alle $n \geq 1$ und $\lambda \in K$ ist

$$J(n, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

der Jordanblock von Größe n zu(m Eigenwert) λ.

Theorem 1.11. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so dass $V = V^{\sim}_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus V^{\sim}_{\lambda_t}(f)$ für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in K$ von f.

i) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und $n_1^{(1)}, \ldots, n_{s_1}^{(1)}, \ldots, n_1^{(t)}, \ldots, n_{s_t}^{(t)} \geq 1$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J(n_1^{(1)}, \lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J(n_{s_1}^{(1)}, \lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J(n_1^{(t)}, \lambda_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(n_{s_t}^{(t)}, \lambda_1) \end{pmatrix}$$

ii) Die Zahlen $(n_1^{(1)}, \ldots, n_{s_1}^{(1)}), \ldots, (n_1^{(t)}, \ldots, n_{s_t}^{(t)})$ sind jeweils eindeutig bis auf Permutation.

iii) Es gilt $n_1^{(i)} + \cdots + n_{s_i}^{(i)} = \dim V^{\sim}_{\lambda}(f)$ für alle $i = 1, \ldots, t$.

iv) Für alle $i = 1, \ldots, t$ gilt $\max_{j=1,\ldots,s_i} n_j^{(i)} = \min\{p \geq 0 \mid (f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^p|_{V^{\sim}_{\lambda_i}(f)} = 0\}$.

[Hier das konkrete Vorgehen angeben]

1.3 Existenz der Hauptraumzerlegung

Lemma 1.12. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

i) Für alle $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ ist die Einschränkung $(f - \lambda \operatorname{id}_V)|_{V^{\sim}_{\mu}(f)}$ invertierbar.

ii) Für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in K$ ist die Summe $V^{\sim}_{\lambda_1}(f) + \cdots + V^{\sim}_{\lambda_t}(f)$ direkt.

Lemma 1.13. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V und sind $U, W \subseteq V$ zwei f-invariante Untervektorräume mit $V = U \oplus W$, so gilt

$$\chi_f(T) = \chi_{f|_U}(T) \cdot \chi_{f|_W}(T).$$

Lemma 1.14. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V und $\lambda \in K$. Ferner sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum mit $V = V^{\sim}_{\lambda}(f) \oplus U$. Dann ist λ kein Eigenwert von $f|_U$, und es gilt

$$\chi_f(T) = (T - \lambda)^{\dim V^{\sim}_{\lambda}(f)} \cdot \chi_{f|_U}(T).$$

Lemma 1.15 (Fitting). Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Für alle $k \geq 0$ sei

$$N_k := \ker f^k \quad \text{und} \quad R_k := \operatorname{im} f^k.$$

i) Es gilt

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

und

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$$

ii) Für $k \geq 0$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:
   a) $N_{k+1} = N_k$,
   b) $N_l = N_k$ für alle $l \geq k$,
   c) $R_{k+1} = R_k$,
   d) $R_l = R_k$ für alle $l \geq k$.

   (Wenn also eine der beiden Ketten einmal stabiliert, so sind beide Ketten von dort an stabil.)

iii) Die beiden Teilmengen $N := \bigcup_{k \geq 0} N_k$ und $R := \bigcap_{k \geq 0} R_k$ sind f-invariante Untervektorräume von V, und es gilt $V = N \oplus R$.

Theorem 1.16 (Existenz der Hauptraumzerlegung). Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann gibt es genau dann eine Hauptraumzerlegung von V bezüglich f, wenn das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Wenn es eine Hauptraumzerlegung gibt, dann ist f nach Theorem 1.11 trigonalisierbar. Somit zerfällt das charakteristische Polynom dann in Linearfaktoren.

Die umgekehrte Aussage verläuft per Induktion über die Dimension von V. Für $\dim V = 0$ ist die Aussage klar. Für $\dim V > 0$ sei $\chi_f(T) = (T-\lambda_1)^{n_1} \cdots (T-\lambda_s)^{n_s}$. Durch Anwenden von Fittings Lemma auf $f - \lambda_1 \operatorname{id}_V$ erhalten wir, dass

$$V = V^{\sim}_{\lambda_1} \oplus R,$$

wobei $R \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum ist. Nach Lemma 1.14 ist $\chi_{f|_R}(T) = (T - \lambda_2)^{n_2} \cdots (T - \lambda_s)^{n_s}$, und nach Induktionsvoraussetzung ist

$$R = R^{\sim}_{\lambda_2}(f|_R) \oplus \cdots \oplus R^{\sim}_{\lambda_s}(f|_R),$$

und somit insgesamt

$$V = V^{\sim}_{\lambda_1} \oplus R^{\sim}_{\lambda_2}(f|_R) \oplus \cdots \oplus R^{\sim}_{\lambda_s}(f|_R) \subseteq V^{\sim}_{\lambda_1} \oplus V^{\sim}_{\lambda_2}(f|_R) \oplus \cdots \oplus V^{\sim}_{\lambda_s}(f|_R) \subseteq V.$$

$\square$

Korollar 1.17. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so ist $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V^{\sim}_{\lambda}(f)$.

Korollar 1.18 (Cayley-Hamilton für algebraisch abgeschlossene Körper). Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V (bzw. $A \in \mathrm{M}_n(K)$), so ist $\chi_f(f) = 0$ (bzw. $\chi_A(A) = 0$).

Bemerkung 1.19. Für jeden Körper K gibt es einen algebraisch abgeschlossenen Körper $\overline{K}$, so dass K ein Unterkörper von $\overline{K}$ ist. Der Satz von Cayley-Hamilton gilt daher für beliebige Körper. Er kann auch ohne die Jordan-Normalform bewiesen werden (siehe etwa Fischer).

Korollar 1.20 (Abstrakte Jordanzerlegung). Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V (bzw. $A \in \mathrm{M}_n(K)$), so gibt es eindeutige Endomorphismen $d, n\colon V \to V$ (bzw. $D, N \in \mathrm{M}_n(K)$), so dass

a) $f = d + n$ (bzw. $A = D + N$),

b) d (bzw. D) ist diagonalisierbar und n (bzw. N) ist nilpotent,

c) d und n (bzw. D und N) kommutieren.

[Falls noch Zeit: Idee der Hauptraumzerlegung genauer erläutern, und allgemeines Lemma nennen.]

1.4 Homogene, lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen

Ist $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, so lassen sich die komplexen Lösungen der Differentialgleichung

$$Ay = y'$$

für $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ wie folgt finden:

Der Lösungsraum wird von den Spalten der Matrix $\exp(At)$ aufgefasst (wenn man diese als Funktionen von t betrachtet). Ist $S^{-1}AS = J$ eine Jordannormalform von A und $J = D+N$ die entsprechende Jordanzerlegung, so ist

$$\exp(At) = \exp(SJtS^{-1}) = S\exp(Jt)S^{-1} = S\exp(Dt)\exp(Nt)S^{-1},$$

wobei im letzen Schritt genutzt wird, dass D und N kommutieren.

2 Simultane Diagonalisierbarkeit

Lemma 2.1. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Ist $u \in U$ mit $u = v_1 + \cdots + v_n$, wobei $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ paarweise verschieden sind, so ist bereits $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage per Induktion über n. Für $n = 1$ gilt $v_1 = u \in U$. Ist $n \geq 2$, so gilt

$$f(u) = f(v_1) + \cdots + f(v_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

und somit

$$\begin{aligned} U \ni \lambda_1 u - f(u) &= \lambda_1(v_1 + \cdots + v_n) - (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \cdots + (\lambda_1 - \lambda_n)v_n. \end{aligned}$$

Da $(\lambda_1 - \lambda_i)v_i \in V_{\lambda_i}(f)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ergibt sich per Induktionsvoraussetzung, dass $(\lambda_1 - \lambda_i)v_i \in U$ für alle $i = 2, \ldots, n$. Da $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$ für alle $i = 2, \ldots, n$ (denn die λ_j sind paarweise verschieden) gilt $v_2, \ldots, v_n \in U$. Somit gilt auch $v_1 = u - v_2 - \cdots - v_n \in U$. □

Lemma 2.2. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, so ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.

Beweis. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ paarweise verschieden und $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$ für $i = 1, \ldots, n$, so dass $0 = v_1 + \cdots + v_n$. Anwenden von Lemma 2.1 auf den Untervektorraum $U = 0$ ergibt, dass $v_1, \ldots, v_n \in 0$ und somit $v_1, \ldots, v_n = 0$. □

Definition 2.3. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *diagonalisierbar*, falls $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda$.

Bemerkung 2.4. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V.

i) Nach Lemma 2.2 ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$. Es genügt also, jeden Vektor als Summe, bzw. Linearkombination von Eigenvektoren zu schreiben.

ii) Ist V endlichdimensional, so ist f genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von f besitzt.

    Ist nämlich $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ die Eigenwerte von f, so ist $V_\mu(f) = 0$ für alle $\mu \in K \smallsetminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ und somit $V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n}(f)$. Wählt man nun von jeder dieser endlich vielen Eigenräume eine Basis, so ergibt sich durch Zusammenfügen dieser Basen eine Basis von V, die aus Eigenvektoren besteht.

    Hat andererseits V eine Basis aus Eigenvektoren, so ist jeder Vektor $v \in V$ eine Linearkombination von Eigenvektoren und somit $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.

Proposition 2.5. Ist $f\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines K-Vektorraums V, so ist für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ auch die Einschränkung $f|_U\colon U \to U$ diagonalisierbar, und es gilt

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} [U \cap V_\lambda(f)].$$

Beweis. Es sei $u \in U$. Da f diagonalisierbar ist, gibt es paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$ mit $u = v_1 + \cdots + v_n$. Nach Lemma 2.1 gilt bereits $v_1, \ldots, v_n \in U$. Da damit $v_i \in U \cap V_{\lambda_i}(f) = U_{\lambda_i}(f|_U)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt, ergibt sich $u \in \sum_{i=1}^n U_{\lambda_i}(f|_U) = \sum_{\lambda \in K} U_\lambda(f|_U)$. Damit ist $U = \sum_\lambda U_\lambda(f)$, und somit $U = \bigoplus_\lambda U_\lambda(f|_U)$. Die letzte Gleichung ergibt sich mit $U_\lambda(f|_U) = U \cap V_\lambda(f)$. □

Definition 2.6. Eine Kollektion von Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n \colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *simultan diagonalisierbar*, falls

$$V = \bigoplus_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K} \Bigl(\underbrace{V_{\lambda_1}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\lambda_n}(f_n)}_{\text{gemeinsame Eigenvektoren}} \Bigr).$$

Bemerkung 2.7. Ist V endlichdimensional, so sind $f_1, \ldots, f_n \colon V \to V$ genau dann simultan diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von $f_1, \ldots, f_n$ besitzt.

Theorem 2.8. Eine Kollektion von Endomorphismes $f_1, \ldots, f_n \colon V \to V$ eines K-Vektorraums V ist genau dann simultan diagonalisierbar, wenn die Endomorphismen kommutieren und jeweils einzeln diagonalisierbar sind.

Lemma 2.9. Sind $f, g \colon V \to V$ zwei kommutierende Endomorphismen eines K-Vektorraums V, so ist $V_\lambda(f)$ für alle $\lambda \in K$ invariant unter g.

Beweis von Theorem 2.8. Ist $v \in V$ ein gemeinsamer Eigenvektor von $f_1, \ldots, f_n$, so gilt $f_i(f_j(v)) = f_j(f_i(v))$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$, denn ist $f_i(v) = \lambda_i v$, so gilt

$$f_i(f_j(v)) = f_i(\lambda_j v) = \lambda_j f_i(v) = \lambda_j \lambda_i v = \lambda_i \lambda_j v = \lambda_i f_j(v) = f_j(\lambda_i v) = f_j(f_i(v)).$$

Sind $f_1, \ldots, f_n$ simultan diagonalisierbar, so ist jeder Vektor $v \in V$ die Summe von gemeinsamen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, also $v = v_1 + \cdots + v_n$, weshalb

$$f_i(f_j(v)) = f_i(f_j(v_1)) + \cdots + f_i(f_j(v_n)) = f_j(f_i(v_1)) + \cdots + f_j(f_i(v_n)) = f_j(f_i(v)).$$

Also gilt dann $f_i f_j = f_j f_i$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Umgekehrt seien nun $f_1, \ldots, f_n$ kommutierend und einzeln diagonalisierbar. Wir zeigen per Induktion über n, dass $f_1, \ldots, f_n$ simultan diagonalisierbar sind. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

Es sei nun $n \geq 2$. Da f_1 diagonalisierbar ist, gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f_1)$. Da $f_1, \ldots, f_n$ kommutieren ist $V_\lambda(f_1)$ für alle $\lambda \in K$ invariant unter $f_2, \ldots, f_n$. Da $f_2, \ldots, f_n$ diagonalisierbar sind, sind es auch die Einschränkungen $f_i|_{V_\lambda(f_1)}$ für alle $i = 2, \ldots, n$ und $\lambda \in K$. Da $f_2, \ldots, f_n$ kommutieren, kommutieren auch diese Einschränkungen. Per Induktionsvoraussetzung gilt daher

$$\begin{aligned} V_\lambda(f_1) &= \bigoplus_{\lambda_2, \ldots, \lambda_n} \Bigl((V_\lambda(f_1))_{\lambda_2}(f_2|_{V_\lambda(f_1)}) \cap \cdots \cap (V_\lambda(f_1))_{\lambda_n}(f_n|_{V_\lambda(f_1)}) \Bigr) \\ &= \bigoplus_{\lambda_2, \ldots, \lambda_n} \Bigl(V_\lambda(f_1) \cap V_{\lambda_2}(f_2) \cap V_{\lambda_n}(f_n) \Bigr). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
V = \bigoplus_{\lambda_1 \in K} V_{\lambda_1}(f_1) &= \bigoplus_{\lambda_1 \in K} \bigoplus_{\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K} \left(V_{\lambda_1}(f_1) \cap V_{\lambda_2}(f_2) \cap V_{\lambda_n}(f_n) \right) \\
&= \bigoplus_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K} \left(V_{\lambda_1}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\lambda_n}(f_n) \right).
\end{aligned}
$$

□

3 Skalarprodukträume

Definition 3.1. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen V und W heißt ($\mathbb{C}$-)*antilinear*

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{und} \quad f(\lambda v_1) = \overline{\lambda} f(v_1)$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definition 3.2. Es sei K ein Körper.

i) Eine Abbildung $b\colon V \times W \to Z$ mit K-Vektorräumen V, W, Z heißt *K-bilinear*, falls

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b(v_2, w), \\ b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2), \\ b(\lambda v, w) &= \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w) \end{aligned}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$. Ist zusätzlich $Z = K$, so ist b eine *Bilinearform*. Gilt außerdem noch $V = W$ und

$$b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so ist b eine *symmetrische Bilinearform*.

ii) Eine Abbildung $s\colon V \times W \to Z$ mit $\mathbb{C}$-Vektorräumen V, W, Z heißt *sesquilinear*, falls

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b(v_2, w), \\ b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2), \\ b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w) &\text{ und } b(v, \lambda w) = \overline{\lambda}(w) \end{aligned}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist zusätzlich $Z = \mathbb{C}$, so ist s eine *Sesquilinearform*. Gilt außerdem noch $V = W$ und

$$s(v_1, v_2) = \overline{s(v_2, v_1)} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt s heißt *hermitsch*.

Lemma 3.3. Ist $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitsche Bilinearform, so ist $s(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

Notation 3.4. Es ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 3.5. Eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt

i) *positiv definit*, falls $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$,

ii) *positiv semidefinit*, falls $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$,

iii) *negativ definit*, falls $\langle v, v \rangle < 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$,

iv) *negativ semidefinit*, falls $\langle v, v\rangle \leq 0$ für alle $v \in V$, und

v) *indefinit*, wenn sie keine der obigen Bedingungen erfüllt.

Definition 3.6. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine positiv definite, symmetrische (bzw. hermitsche) Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$.

Ein Skalarproduktraum ist ein Tupel $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.

Bemerkung 3.7. Man spricht meist nur von einem Skalarproduktraum V, nennt das Skalarprodukt also nicht explizit mit. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spricht man auch von einem *euklidischen Vektorraum*, und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ von einem *unitären Vektorraum*

Beispiel 3.8. Das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$ ist durch

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

definiert. Das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{C}^n$ ist durch

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x^T \overline{y} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}^n$$

definiert

Definition 3.9. Für einen Skalarproduktraum V und $v \in V$ ist $\|v\| \coloneqq \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Der Vektor v heißt *normiert*, wenn $\|v\| = 1$.

Proposition 3.10 (Cauchy-Schwarz). Ist V ein Skalarproduktraum, so ist

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Definition 3.11. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist der *(unorientierte) Winkel* zwischen zwei Vektoren $v, w \in V$ der eindeutige Winkel $\theta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|},$$

und er wird mit $\sphericalangle(v, w)$ bezeichnet.

Korollar 3.12. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V.

Beweis. Die Dreiecksungleichung ergibt sich durch

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &\leq \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square\end{aligned}$$

Lemma 3.13 (Polarisationsformel). Ist V ein euklidischer Vektorraum, so ist

$$\langle v, w\rangle = \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Ist V ein unitärer Vektorraum, so ist

$$\langle v, w\rangle = \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} + i\frac{\|v+iw\|^2 - \|v\|^2 - \overbrace{\|iw\|^2}^{=\|w\|^2}}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Das Skalarprodukt ist durch die Norm also eindeutig bestimmt.

Bemerkung 3.14. Ist $v \in V$ mit $v \neq 0$, so ist der Vektor $v/\|v\|$ normiert. Man sagt, dass man v normiert.

Definition 3.15. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Zwei Vektoren $u, w \in V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, geschrieben als $u \perp w$, wenn $\langle u, w\rangle = 0$.

ii) Zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, wenn $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

iii) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U (in V).

Bemerkung 3.16. Zwei Vektoren $v, w \in V$ eines Skalarproduktraums V sind genau dann orthogonal zueinander, wenn $\sphericalangle(v, w) = \pi/2 (= 90°)$.

Lemma 3.17. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Ist ein Vektor $v \in V$ zu jedem Vektor $w \in V$ orthogonal, so gilt bereits $v = 0$.

ii) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $U \cap U^\perp = 0$.

Definition 3.18. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *orthogonal*, wenn $v_i \perp v_j$ für all $i \neq j$. Die Familie heißt *nomiert*, falls v_i für alle $i \in I$ normiert ist. Ist die Familie orthogonal und normiert, so heißt sie *orthonormal*.

ii) Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *orthogonal*, wenn $v \perp w$ für alle $v, w \in S$ mit $v \neq w$. Die Teilmenge heißt *nomiert*, falls jeder Vektor $v \in S$ normiert ist. Ist S orthogonal und normiert, so heißt S *orthonormal*.

Lemma 3.19. Es sei V ein Skalarproduktraum.

1. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ ist genau dann orthonormal wenn $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.

2. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist genau dann orthonormal, wenn $\langle v, w\rangle = \delta_{v,w}$ für alle $v, w \in S$.

Lemma 3.20. Es sei V ein Skalarproduktraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine orthogonale Familie von Vektoren $v_i \in V$ mit $v_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig. Insbesondere ist jede orthonormale Familie linear unabhängig.

Definition 3.21. Eine orthonormale Basis eines Skalarproduktraums V heißt *Orthonormalbasis* von V.

Proposition 3.22. Es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis eines Skalarproduktraums V. Für jedes $w \in V$ ist $\langle w, v_i\rangle = 0$ für fast alle $i \in I$, und es gilt

$$w = \sum_{i\in I} \langle w, v_i\rangle\, v_i \quad \text{sowie} \quad \|w\|^2 = \sum_{i\in I} \langle w, v_i\rangle^2 .$$

für alle $w \in V$. Für alle $w_1, w_2 \in V$ gilt

$$\langle w_1, w_2\rangle = \sum_{i\in I} \langle w_1, v_i\rangle \langle v_i, w_2\rangle .$$

Theorem 3.23 (Gram-Schmidt). Es sei V ein Skalarproduktraum und $(v_1, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Iterativ seien die Familien $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ durch

- $\tilde{w}_1 \coloneqq v_1$,
- $w_i \coloneqq \tilde{w}_i / \|\tilde{w}_i\|$ für alle $i = 1, \dots, n$, und
- $\tilde{w}_i \coloneqq v_i - \langle v_i, w_1\rangle\, w_1 - \dots - \langle v_i, w_{i-1}\rangle\, w_{i-1}$ für alle $i = 2, \dots, n$

definiert. Dann ist die Familie $(w_1, \dots, w_n)$ orthonormal, und es gilt

$$\langle w_1, \dots, w_i\rangle = \langle v_1, \dots, v_i\rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Bemerkung 3.24. Das obige Gram-Schmidt-Verfahren lässt sich auch auf unendliche abzählbare Familien $(v_1, v_2, v_3, \dots)$ anwenden.

Korollar 3.25. Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum.

1. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ eine Orthonormalbasis von U, so lässt sich $\mathcal{B}$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ von V ergänzen.

2. Es gibt eine Orthonormalbasis von V.

3. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $V = U \oplus U^\perp$.

Korollar 3.26. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums V, so gilt $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis. Dass $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ ergibt sich aus $V = U \oplus U^\perp$. Es ergibt sich direkt, dass $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, und da

$$\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim U$$

gilt bereits Gleichheit. $\square$

Proposition 3.27. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung

$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle$$

injektiv und $\mathbb{R}$-linear (bzw. $\mathbb{C}$-antilinear). Ist V endlichdimensional, so ist Φ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen (bzw. Antiisomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen).

4 Normale Endomorphismen

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional, sofern nicht anders angegeben.

4.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Proposition 4.1. Für zwei Skalarprodukträume V und W gibt es für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutige $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon W \to V$ mit

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Definition 4.2. In der Situation von Proposition 4.1 ist die Abbildung g die zu f *adjungierte* Abbildung, und wird mit f^* notiert.

Definition 4.3. Für $A \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{K})$ ist $A^* := \overline{A^t} = (\overline{A})^t \in \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{K})$.

Proposition 4.4. Es sei V ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ und W ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis $\mathcal{C}$. Für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt dann

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^*.$$

Proposition 4.5. Es seien U, V, W drei Skalarprodukträume und $f\colon V \to W$, $g\colon U \to V$ zwei $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen und $\lambda \in K$

i) Es gilt $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$ und $(fg)^* = g^* f^*$.

ii) Es gilt
   a) $(f^*)^* = f$,
   b) $(f + g)^* = f^* + g^*$ und
   c) $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$.

   Insbesondere ist die Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$, $f \mapsto f^*$ ein Isomorphismus (bzw. Antiisomorphismus) von $\mathbb{R}$-Vektorräumen (bzw. $\mathbb{C}$-Vektorräumen).

iii) Die Abbildung f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f^* ein Isomorphismus ist.

Definition 4.6. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V heißt

i) *normal*, falls f und f^* kommutieren (also $ff^* = f^*f$),

ii) *selbstadjungiert*, falls $f = f^*$,

iii) *antiselbstadjungiert*, falls $f^* = -f$,

iv) *orthogonal* (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. *unitär* (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) falls f ein Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$ ist.

Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei

$$\mathrm{U}(V) \coloneqq \{f \colon V \to V \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei

$$\mathrm{O}(V) \coloneqq \{f \colon V \to V \mid f \text{ ist orthogonal.}\}$$

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ heißt

I) *normal*, falls A und A^* kommutieren (also $AA^* = A^*A$),

II) *selbstadjungiert*, falls $A = A^*$,

III) *antiselbstadjungiert*, falls $A^* = -A$,

IV) *orthogonal* (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. *unitär* (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) falls A invertierbar ist und $A^* = A^{-1}$.

Für alle $n \geq 1$ seien

$$\mathrm{O}(n) \coloneqq \{O \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid O \text{ ist orthogonal}\} \quad \text{und} \quad \mathrm{U}(n) \coloneqq \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ ist unitär}\}.$$

Proposition 4.7. i) Ist V ein Skalarproduktraum, so ist $\mathrm{O}(V)$, bzw. $\mathrm{U}(V)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$.

ii) Für alle $n \geq 1$ ist $\mathrm{O}(n)$, bzw. $\mathrm{U}(n)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Lemma 4.8. Es sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums V, und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Dann ist f genau dann normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär, wenn $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär ist.

Proposition 4.9. Es sei $f \colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus eines Skalarproduktraums V.

i) Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$.

ii) Es ist $V_\lambda(f^*) = V_{\overline{\lambda}}(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, also haben f und f^* die gleichen Eigenvektoren zu jeweils konjugierten Eigenwerten.

iii) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq \mu$ ist $V_\lambda(f) \perp V_\mu(f)$.

iv) Für $v \in V$ und $n \geq 1$ mit $f^n(v) = 0$ ist bereits $f(v) = 0$.

v) Für alle $\lambda \in V$ ist $V_\lambda^\sim(f) = V_\lambda(f)$.

vi) Es ist $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$ und $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$.

vii) Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ist genau dann f-invariant, wenn $U^\perp$ invariant unter f^* ist.

Proposition 4.10. Für einen Endomorphismus $f \colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) f ist orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), d.h. f ist ein Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$.

ii) Es ist $ff^* = \mathrm{id}_V$.

iii) Es ist $f^*f = \mathrm{id}_V$.

iv) Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|v\|$.

v) Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist $\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$.

Korollar 4.11. Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), d.h. A ist invertierbar mit $A^* = A^{-1}$.

ii) Es ist $AA^* = I$.

iii) Es ist $A^*A = I$.

iv) Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ ist $\|Ax\| = \|x\|$.

v) Für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ ist $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

vi) Die Spalten von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$.

vii) Die Zeilen von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$.

4.2 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Theorem 4.12. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums V. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

i) f ist normal.

ii) V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

iii) Für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch $U^\perp$ invariant unter f.

Beweis. [i) $\implies$ ii)] Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen und V endlichdimensional ist, gibt es eine Hauptraumzerlegung $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\sim(f)$. Da f normal ist gilt $V_\lambda^\sim(f) = V_\lambda(f)$ für alle $\lambda \in K$, weshalb bereits $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$. Also ist f diagonalisierbar. Für jedes $\lambda \in K$ sei $\mathcal{B}_\lambda$ eine Orthonormalbasis von $V_\lambda(f)$. Da die Summe $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ orthogonal ist ergibt sich durch Zusammenfügen der $\mathcal{B}_\lambda$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V.

[ii) $\implies$ i)] Es sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f. Dann ist $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f)$ eine Diagonalmatrix. Auch $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f^*) = \mathrm{M}_\mathcal{B}(f)^*$ ist eine Diagonalmatrix. Deshalb kommutierne $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f)$ und $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f^*)$, und somit auch f und f^*.

[ii) $\implies$ iii)] Da f diagonalisierbar ist, ist auch die Einschränkung $f|_U$ diagonalisierbar. Also ist $U = \sum_{\lambda \in K} U_\lambda(f|_U)$. Da jeder Eigenvektor von U auch ein Eigenvektor von f^* ist, ist U deshalb auch invariant unter f^*. Somit ist $U^\perp$ invariant unter f.

[iii) $\implies$ ii)] Es sei $v_1 \in V$ ein normierter Eigenvektor von V. Da $U_1 \coloneqq \langle v_1 \rangle$ invariant unter f ist, ist auch $U_1^\perp$ invariant unter f. Es sei $v_2 \in U_1^\perp$ ein normierter Eigenvektor von $f|_U$ und $U_2 \coloneqq \langle u_1, u_2 \rangle$. Iterativ ergeben sich somit orthonormale $v_1, \dots, v_n \in V$ für alle $1 \leq n \leq \dim V$. Insbesondere ist $(v_1, \dots, v_{\dim V})$ eine Orthonormalbasis von V. □

Korollar 4.13. Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist normal.

ii) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$, so dass $UAU^{-1} = UAU^*$ in Diagonalgestalt ist.

Beweis. Wir versehen $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Die Matrix A entpsricht der linearen Abbildung $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{C}^n$ ist $\mathrm{M}_\mathcal{S}(f) = A$ normal. Da $\mathcal{S}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ ist, folgt damit, dass f normal ist.

Es gibt also eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{C}^n$, so dass $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f)$ eine Diagonalmatrix ist. Ist $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ die Matrix, deren Spalten die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind, so gilt $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f) = V^{-1}AV$.

Da die Spalten von V ein Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ sind, ist V unitär. Folglich ist auch $U \coloneqq V^{-1}$ unitär, und $UAU^{-1} = V^{-1}AU = \mathrm{M}_\mathcal{B}(f)$ ist eine Diagonalmatrix. □

Proposition 4.14. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums V.

i) f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f normal mit reellen Eigenwerten ist.

ii) f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn f normal mit rein imaginären Eigenwerten ist.

iii) f ist genau dann unitär, wenn f normal ist und alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

Beweis. Wir zeigen beispielsweise die dritte Aussage: Da unitäre Endomorphismen normal sind, genügt es zu zeigen, dass ein normaler Endomorphismus $f\colon V \to V$ genau dann unitär ist, wenn alle Eigenwerte von f Betrag 1 haben.

Da f normal ist gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Nun ist f genau dann unitär, wenn $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f^*)w = \mathrm{M}_\mathcal{B}(f^{-1})$. Da

$$\mathrm{M}_\mathcal{B}(f^*) = \mathrm{M}_\mathcal{B}(f)^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

gilt dies genau dann, wenn $\lambda_i \overline{\lambda_i} = 1$ für alle $i = 1, \dots n$. Da $\lambda_i \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2$ zeigt dies die Aussage. □

Korollar 4.15. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

i) A ist genau dann selbstadjungiert, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.

ii) A ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix mit rein imaginären Diagonaleinträgen ist.

iii) A ist genau dann unitär, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge alle Betrag 1 haben.

Korollar 4.16. Es sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

i) Ist V ein unitärer Vektorraum mit $\dim V \geq 1$, so ist $\det(\mathrm{U}(V)) = S^1$.

ii) Für alle $n \geq 1$ ist $\det(\mathrm{U}(n)) = S^1$.

4.3 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Notation 4.17. Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Theorem 4.18. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines euklidischen Vektorraum V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) f ist normal.

ii) Es gibt eine geordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, $r_1, \ldots, r_t > 0$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_t \in (0, \pi)$.

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Eigenwerte von f, und die Paare $(r_1, \varphi_1), \ldots, (r_t, \varphi_t)$ sind eindeutig bis auf Permutation.

Korollar 4.19. Für einen Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist normal.

ii) Es gibt eine Matrix $O \in \mathrm{O}(n)$, so dass

$$OAO^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_t > 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in (0, \pi)$.

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die Eigenwerte von A, und die Paare $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_t, \varphi_t)$ sind eindeutig bis auf Permutation.

Proposition 4.20. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums V.

i) f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.18 $t = 0$ gilt, also wenn V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f besitzt.

ii) f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn f normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.18 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$ und $\varphi_1 = \cdots = \varphi_t = \pi/2$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -r_1 & & & \\ & & & r_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -r_t \\ & & & & & & r_t & 0 \end{pmatrix}$$

iii) f ist genau dann orthogonal, wenn f normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.18 $\lambda_i = \pm 1$ für alle $i = 1, \dots, s$ und $r_1 = \cdots = r_t = 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

Korollar 4.21. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

i) A ist genau dann selbstadjungiert, wenn A normal ist, und in der Normalenform von Korollar 4.19 $t = 0$ gilt, also wenn es $O \in \mathrm{O}(n)$ gibt, so dass OAO^{-1} in Diagonalgestalt ist.

ii) A ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn A normal ist und in der Normalenform von Korollar 4.19 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$ und $\varphi_1 = \cdots = \varphi_t = \pi/2$ gilt.

iii) A ist genau dann orthogonal, wenn A normal ist und in der Normalenform von Korollar 4.19 $\lambda_i = \pm 1$ für alle $i = 1, \ldots, s$ und $r_1 = \cdots = r_t = 1$ gilt.

Korollar 4.22. i) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V \geq 1$, so ist $\det(\mathrm{O}(V)) = \{1, -1\}$.

ii) Für alle $n \geq 1$ ist $\det(\mathrm{O}(n)) = \{1, -1\}$.

4.4 Orthogonale Projektionen

Lemma 4.23. Sind $U, W \subseteq V$ Untervektorräume eines K-Vektorraums V mit $V = U \oplus W$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $P \colon V \to V$ mit

$$P(u + w) = u \quad \text{für alle } u \in U, w \in W.$$

Definition 4.24. i) In der Situation von Lemma 4.23 heißt P die *Projektion* auf U entlang W.

ii) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums V, so heißt die Projektion auf U entlang $U^\perp$ die *orthogonale Projektion* auf U. Sie ist die eindeutige lineare Abbildung $P \colon V \to V$ mit $P(u + w) = u$ für alle $u \in U$ und $w \in U^\perp$.

Proposition 4.25. i) Für einen Endomorphismus $P \colon V \to V$ eines K-Vektorraums V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) Es gilt $P^2 = P$.

b) P ist die Projektion auf $\mathrm{im}(P)$ entlang $\ker(P)$.

ii) Für einen Endomorphismus $P \colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) Es gilt $P^2 = P$ und P ist normal.

b) P ist die orthogonale Projektion auf $\mathrm{im}(P)$.

Korollar 4.26. Ein Endomorphismus $P \colon V \to V$ eines Skalarproduktraums ist genau dann die orthogonale Projektion auf $\mathrm{im}(P)$, wenn es eine geordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5 Polarzerlegung

Definition 4.27. i) Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V heißt *positiv*, wenn alle Eigenwerte von f positiv sind.

ii) Eine selbstadjungierte Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ heißt positiv, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

Lemma 4.28. i) Ist V ein Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein Automorphismus, so sind ff^* und f^*f positiv selbstadjungiert.

ii) Für alle $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sind AA^* und A^*A positiv selbstadjungiert.

Proposition 4.29 (Wurzeln). i) Ist $f\colon V \to V$ ein positiver selbstadjungierter Endomorphismus, so gibt es einen eindeutigen positiven selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = g^2$.

ii) Ist $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ positiv selbstadjungiert, so gibt es eine eindeutige positive selbstadjungierte Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mit $A = B^2$.

Theorem 4.30 (Polarzerlegung). Ist $f \in \mathrm{GL}(V)$ für einen Skalarproduktraum V, so gibt es eindeutige positive selbstadjungierte Endomorphismen $s_1, s_2\colon V \to V$ und eindeutige $u_1, u_2 \in \mathrm{U}(V)$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), bzw. $u_1, u_2 \in \mathrm{O}(V)$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) mit

$$f = u_1 s_1 = s_2 u_2.$$

5 Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen

5.1 Definition quadratischer Formen

Definition 5.1. Ist V ein K-Vektorraum, so ist eine Abbildung $q\colon V \to K$ eine *quadratische Form* wenn es eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ gibt, so dass

$$q(v) = \langle v, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Lemma 5.2 (Polarisationsformel). Ist V ein K-Vektorraum mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und $q\colon V \to K$ die zugehörige quadratische Form, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Korollar 5.3. Ist V ein K-Vektorraum mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist die Abbildung

$$\begin{gathered} \{\text{Bilinearformen } V \times V \to K\} \to \{\text{quadratische Formen } V \to K\}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle \mapsto (v \mapsto \langle v, v \rangle) \end{gathered}$$

eine Bijektion.

Definition 5.4. Es sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

i) Zwei Vektoren $u, w \in V$ sind *orthogonal (zueinander)* bezüglich β falls $\beta(u, w) = 0$.

ii) Zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$ heißen *orthogonal (zueinander)* bezüglich β falls $\beta(u, w) = 0$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

iii) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist der Untervektorraum

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U in V bezüglich β.

iv) Der Untervektorraum

$$\mathrm{rad}(\beta) \coloneqq \{v \in V \mid \beta(t, v) = 0 \text{ für alle } t \in V\}$$

ist das *Radikal* von β.

5.2 Darstellende Matrizen für Bilinearformen

Lemma 5.5. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{C}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis von V^*. Für eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ und Bilinearform $\beta\colon V \times V \to K$ sind die folgende Bedingungen äquivalent:

i) Für alle $i, j = 1, \ldots, n$ ist $B_{ij} = \beta(v_i, v_j)$.

ii) Für die lineare Abbildung $\Phi\colon V \to V^*$, $v \mapsto \beta(-, v)$ ist $B = \mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^*}(\Phi)$.

Definition 5.6. In der Situation von Lemma 5.5 ist B die *darstellende Matrix* von β bezüglich der Basis $\mathcal{C}$, und wird mit $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ notiert.

Lemma 5.7. Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{C}$ eine geordnete Basis von V, so ist die Abbildung

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}\colon \{\text{Bilinearformen } V \times V \to K\} \to \mathrm{M}_n(K), \quad \beta \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Lemma 5.8. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\beta\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Für den induzierten Isomorphismus

$$\Phi\colon V \to K^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

gilt die Identität

$$\beta(v_1, v_2) = \Phi(v_1)^T \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) \Phi(v_2) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Korollar 5.9. Ist $\beta\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V, so ist β genau dann symmetrisch, wenn für jede geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ symmetrisch ist.

Lemma 5.10. Ist $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei geordnete Basen von V, so ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\beta) = (T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^T \, \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) \, T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}.$$

5.3 Nicht-entartete Bilinearformen

Definition 5.11. Eine symmetrische Bilinearform $\beta\colon V \times V \to K$ heißt *nicht-entartet*, falls es für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ ein $w \in V$ mit $\beta(w, v) \neq 0$ gibt.

Proposition 5.12. Ist V ein K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Die Bilinearform β ist nicht-entartet.

ii) Es gilt $\mathrm{rad}(\beta) = 0$.

iii) Die lineare Abbildung $\Phi\colon V \to V^*$, $v \mapsto \beta(-, v)$ ist injektiv.

Ist V endlichdimensional, so kommen die folgenden Bedingungen hinzu:

iv) Φ ist ein Isomorphismus.

v) Für jede geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ invertierbar.

Beweis. [i) $\iff$ ii)] Folgt direkt aus Definition von $\mathrm{rad}(\beta)$.
[ii) $\iff$ iii)] Folgt durch $\mathrm{rad}(\beta) = \ker \Phi$.
[iii) $\iff$ iv)] Folgt wegen $\dim V < \infty$.
[iv) $\iff$ v)] Folgt wegen $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^*}(\Phi)$. □

Proposition 5.13. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische, nicht-entartete Bilinearform und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gilt $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis. Die Abbildung $\rho\colon V^* \to U^*, \psi \mapsto \psi|_U$ ist surjektiv, und $\Phi\colon V \to V^*, v \mapsto \beta(-, v)$ ist bijektiv. Also ist $\rho \circ \Phi$ surjektiv. Da $\ker(\rho \circ \Phi) = U^\perp$ folgt die erste Aussage wegen $\dim U = \dim U^*$ aus der Dimensionsformel. Die zweite Aussage folgt wegen $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ und

$$\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim U.$$

□

Proposition 5.14. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Die Einschränkung $\beta|_{U \times U}$ ist nicht-entartet.

ii) Es ist $U \cap U^\perp = 0$.

iii) Es ist $U + U^\perp = V$.

iv) Es ist $V = U \oplus U^\perp$.

5.4 Normalenformen und Sylvesterscher Trägheitssatz

Theorem 5.15. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Die Anzahl der Nullen auf der Diagonalen ist eindeutig bestimmt und entspricht $\dim \mathrm{rad}(\beta)$.

Lemma 5.16. Ist $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-entartete Bilinearform mit $V \neq 0$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so gibt es für die zugehörige quadratische Form $q\colon V \to K$ ein $v \in V$ mit $q(v) \neq 0$.

Beweis von Theorem 5.15. Ist β nicht-entartet, so gibt es einen Untervektorraum $U \subseteq V$ mit $V = U \oplus \operatorname{rad}(\beta)$. Ist $\mathcal{C}' = (u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von U und $\mathcal{D} = (v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von $\operatorname{rad}(\beta)$, so gilt für die Basis $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$ von V, dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathcal{C}'}(\beta|_{U\times U}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es genügt daher die Aussage für nicht-entartete Bilinearformen zu zeigen.

Es sei also β nicht-entartet. Wir nutzen Induktion über $\dim V$; für $\dim V = 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei nun $\dim V > 0$. Dann gibt es ein $v_1 \in V$ mit $q(v_1) \neq 0$, und es sei $U := \langle v_1 \rangle$. Dann ist $\beta|_{U\times U}$ nicht-entartet und deshalb $V = U \oplus U^\perp$ mit $\dim U^\perp = \dim V - 1$. Per Induktionsvoraussetzung gibt es eine Basis $\mathcal{D} = (v_2, \ldots, v_n)$ von $U^\perp$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\beta_{U^\perp \times U^\perp}) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 2, \ldots, n$. Dann ist $\mathcal{C} := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, und für $\lambda_1 := q(v_1) \neq 0$ gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Korollar 5.17. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, wobei $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und K quadratisch abgeschlossen ist. Ist $\beta \colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, so gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0. \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der Nullen auf der Diagonalen ist eindeutig bestimmt und entspricht $\dim \operatorname{rad}(\beta)$.

Korollar 5.18 (Sylvesterscher Trägheitssatz). Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta \colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

i) Es eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r && \\ & -I_s & \\ && 0_t \end{pmatrix}$$

mit $I_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $0_m \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$.

ii) Ist $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t)$ und

$$\begin{aligned} D_+ &\coloneqq \langle u_1, \dots, u_r \rangle, \\ D_- &\coloneqq \langle v_1, \dots, v_s \rangle, \\ S_+ &\coloneqq \langle u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t \rangle, \\ S_- &\coloneqq \langle v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t \rangle, \end{aligned}$$

so ist $\beta|_{D_+ \times D_+}$ positiv definit, $\beta|_{D_- \times D_-}$ ist negativ definit, $\beta|_{S_+ \times S_+}$ ist positiv semidefinit und $\beta|_{S_- \times S_-}$ ist negativ semidefinit. Außerdem ist $\mathrm{rad}(\beta) = \langle w_1, \dots, w_t \rangle$.

iii) Es gilt

$$\begin{aligned} r &= \max \{\dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist positiv definit.}\} \\ s &= \max \{\dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist negativ definit.}\} \\ r + t &= \max \{\dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist positiv semidefinit.}\} \\ s + t &= \max \{\dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist negativ semidefinit.}\} \end{aligned}$$

Insbesondere ist das Tupel (r, s, t) durch β eindeutig bestimmt.

iv) β ist genau dann

a) positiv definit, wenn $r = \dim V$,
b) negativ definit, wenn $s = \dim V$,
c) positiv semidefinit, wenn $r + t = \dim V$,
d) negativ semidefinit, wenn $s + t = \dim V$,
e) nicht-entwartet, wenn $t = 0$.

Lemma 5.19. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sei eine symmetrische Bilinearform und $U, W \subseteq V$ seien zwei Untervektorräume, so dass $\beta|_{U \times U}$ positiv definit und $\beta|_{W \times W}$ negativ semidefinit ist, bzw. $\beta|_{U \times U}$ positiv semidefinit und $\beta|_{W \times W}$ negativ definit ist. Dann ist $U \cap W = 0$.

Definition 5.20. Es sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Ist $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist β genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren der Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ positiv sind.

6 Hauptachsentransformation

Handschriftliche Notizen.

7 Topologische Eigenschaften ausgewählter Matrixgruppen

7.1 Definition der Gruppen

Definition 7.1. Für alle $n \geq 1$ seien

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}_n(K) &:= \{S \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det S = 1\}, \\
\mathrm{SU}(n) &:= \{S \in \mathrm{U}(n) \mid \det S = 1\} = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \\
\mathrm{SO}(n) &:= \{S \in \mathrm{O}(n) \mid \det S = 1\} = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Proposition 7.2. i) Für jeden Körper K ist $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine Untergruppe.

ii) Die Teilmengen $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind Untergruppen.

iii) Die Teilmengen $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sind Untergruppen.

iv) Es gelten die folgenden Untergruppenrelationen:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{O}(n) \arrow[rr, hook] \arrow[dl, hook] & & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \arrow[dl, hook] \\
\mathrm{U}(n) \arrow[rr, hook] & & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \\
& \mathrm{SO}(n) \arrow[rr, hook] \arrow[dl, hook] \arrow[uu, hook] & & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \arrow[dl, hook] \arrow[uu, hook] \\
\mathrm{SU}(n) \arrow[rr, hook] \arrow[uu, hook] & & \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \arrow[uu, hook] &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Bemerkung 7.3. Man beachte die verschiedenen gegenüberliegenden Seiten des Würfels: Der Boden des Würfels entsteht aus dem Deckel durch die zusätzliche Bedingung $\det S = 1$. Der Rücken des Würfels ist die reelle Version, die Vorderseite die komplexe Version. Die linkse Seite des Würfels entsteht aus der rechten, indem man Kompatiblität mit dem Skalarprodukt fordert.

7.2 Gruppentheoretische Begriffe

Definition 7.4. Ist $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist

$$\ker(\phi) := \{g \in G \mid \phi(g) = 1\}$$

der *Kern* von ϕ.

Lemma 7.5. Ist ϕ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\ker(\phi)$ eine Untergruppe von G.

Proposition 7.6. Es sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine Untergruppe. Durch

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1} g_2 \in N \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in N$$

wird eine Äquivalenzrelation auf G definiert, und für $G/N := G/\sim$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Für alle $g \in G$ ist $gN = Ng$.

ii) Für alle $g \in G$ ist $gNg^{-1} = N$.

iii) Für alle $g \in G$ ist $gNg^{-1} \subseteq N$.

iv) Die Multiplikation $\cdot\colon (G/N) \times (G/N) \to G/N$ mit

$$\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} := \overline{g_1 \cdot g_2} \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G$$

ist wohldefiniert. (G/N ist mit dieser Multiplikation automatisch eine Gruppe. Dies ist dann die eindeutige Gruppenstruktur auf G/N, so dass die kanonische Projektion $\rho\colon G \to G/N$, $g \mapsto \overline{g}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Es gilt dann $N = \ker \rho$.)

v) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to H$ mit $N = \ker \phi$.

Definition 7.7. Es sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine Untergruppe. Der *Index* von N in G ist $[G : N] := |G/N|$. Ist eine der Bedingungen von Proposition 7.6 erfüllt (und damit alle Bedingungen), so ist die Untergruppe N ein *Normalteiler* in G.

Bemerkung 7.8. Untergruppen vom Index 2 sind immer normal.

Bemerkung 7.9. Ist $N \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist die Äquivalenzklasse von $g \in G$ bezüglich der in Proposition 7.6 definierten Äquivalenzrelation genau die sogenannte *Linksnebenklasse* $gN = \{gn \mid n \in N\}$. Die Äquivalenzklasse von g ist also eine (um g verschobene) Kopie von N. Inbesondere ist $|gN| = |N|$, und somit

$$|G| = [G : N] \cdot |N|.$$

Zur Berechnung des Index einer Untergruppe wollen wir den folgenden Satz zitieren:

Theorem 7.10 (1. Isomorphiesatz). Ist $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so induziert ϕ einen Gruppenisomorphismus $\psi\colon G/\ker(\phi) \to \operatorname{im}(\phi)$ mit $\psi(\overline{g}) = \phi(g)$ für alle $g \in G$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g \mapsto \overline{g}"'] & H \\ G/\ker(\phi) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Korollar 7.11. Ist $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $[G : \ker \phi] = |\operatorname{im} \phi|$.

Proposition 7.12. Es sei $n \geq 1$.

i) Für jeden Körper K ist $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine normale Untergruppe mit Index

$$[\mathrm{GL}_n(K) : \mathrm{SL}_n(K)] = |K^\times| = |K| - 1.$$

Inbesondere ist $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})] = \infty$ und $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})] = \infty$.

ii) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$ ist eine normale Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+] = 2$.

iii) $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n)$ ist eine normale Untergruppe mit $[\mathrm{U}(n) : \mathrm{SU}(n)] = \infty$.

iv) $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{O}(n)$ ist eine normale Untergruppe mit $[\mathrm{O}(n) : \mathrm{SO}(n)] = 2$.

Inbesondere ist im Würfel (1) der Boden normal im Deckel.

7.3 Topologische Begriffe

Definition 7.13. Es sei X ein metrischer Raum. Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$. Für $x := \gamma(0)$ und $y := \gamma(1)$ ist γ ein *Weg von x nach y* in X.

Lemma 7.14. Ist X ein metrischer Raum, so wird durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y.$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Definition 7.15. Es sei X ein metrischer Raum. Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation aus Lemma 7.14 heißen *Wegzusammenhangskomponenten* von X. X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es nur eine Wegzusammenhangskomponente gibt, d.h. wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg von x nach y gibt.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt wegzusammenhängend, wenn Y bezüglich der Metrik $d|_{Y\times Y}$ wegzusammenhängend ist.

Definition 7.16. Ein metrischer Raum X heißt *unzusammenhängend*, wenn es disjunkte, offene, echte Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq X$ gibt, so dass $X = U_1 \cup U_2$. Ist X heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht unzusammenhängend ist.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt (un)zusammenhängend, wenn Y bezüglich $d|_{Y\times Y}$ (un)zusammenhängend ist.

Proposition 7.17. Es seien X und Y zwei metrische Räume.

i) Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.

ii) Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $Z \subseteq X$ eine (weg)zusammenhängende Teilmenge, so ist auch $f(Z) \subseteq Y$ (weg)zusammenhängend.

iii) Sind $Z_1, Z_2 \subseteq X$ zwei (weg)zusammenhängende Teilmengen mit $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, so ist auch $Z_1 \cup Z_2$ (weg)zusammenhängend.

iv) Durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt eine zusammenhängende Teilmenge } Z \subseteq X \text{ mit } x, y \in Z$$

wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Definition 7.18. Ist X ein metrischer Raum, so sind die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ wie in Proposition 7.17 die *Zusammenhangskomponenten* von X.

Bemerkung 7.19. Die Zusammenhangskomponenten von X sind die maximalen zusammenhängenden Teilmengen von X. Jede zusammenhängende Teilmenge $Z \subseteq X$ ist in einer der Zusammenhangskomponenten von X enthalten. Insbesondere ist jede Wegzusammenhangskomponente in einer Zusammenhangskomponente enthalten.

7.4 Topologie auf Matrixgruppen

Im Folgenden fixieren wir eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Die Norm induziert eine Metrik d auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ durch $d(A, B) := \|A-B\|$. Jede Teilmenge $X \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ erbt durch die Einschränkung $d|_{X\times X}$ die Struktur eines metrischen Raums.

Lemma 7.20. Es sei $n \geq 1$.

i) Die Projektionen $p_{ij} \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ mit $i, j = 1, \dots, n$ und

$$p_{ij}(A) := A_{ij} \quad \text{für alle } A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

sind stetig.

ii) Ist X ein metrischer Raum, so ist eine Abbildung $f = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \colon X \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ genau dann stetig, wenn f_{ij} für alle $i, j = 1, \dots, n$ stetig ist.

Theorem 7.21. Es sei $n \geq 1$.

i) Die Teilmengen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind abgeschlossen.

ii) Die Teilmengen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind offen.

iii) Als Teilmenge von $\mathrm{O}(n)$ ist $\mathrm{SO}(n)$ auch offen.

iv) Die Gruppen $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ sind kompakt.

Bemerkung 7.22. Ist $A \subseteq Y \subseteq X$ und A abgeschlossen in X, so ist A auch abgeschlossen in Y. Dementsprechende ergeben sich aus 7.21 noch weitere Aussagen. So ist etwa $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ abgeschlossen in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SO}(n)$ abgeschlossen in $\mathrm{O}(n)$.

Theorem 7.23. Es sei $n \geq 1$.

i) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.

ii) Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.

iii) Die Gruppe $\mathrm{U}(n)$ ist wegzusammenhängend.

iv) Die Gruppe $\mathrm{SU}(n)$ ist wegzusammenhängend.

v) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$$

und

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^- := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S < 0\}.$$

vi) Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend.

vii) Die Gruppe $\mathrm{O}(n)$ besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$\mathrm{SO}(n) = \{S \in \mathrm{O}(n) \mid \det S = 1\} \quad \text{und} \quad \mathrm{SO}(n)^- := \{S \in \mathrm{O}(n) \mid \det S = -1\}.$$

viii) Die Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist wegzusammehängend.

7.5 Koordinatenfreie Version

Ist V ein Skalarprodukt Vektorraum mit $n := \dim V \geq 1$. Wir fixieren eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Ist $\mathcal{C}$ eine Orthonormalbasis von V, so ist der Isomorphismus

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}\colon\ \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad f \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f)$$

auch ein Homöomorphismus und induziert Homöomorphismen und Gruppenisomorphismen $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}(V) \cong \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sowie $\mathrm{O}(V) \cong \mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(V) \cong \mathrm{SO}(n)$, bzw. $\mathrm{U}(V) \cong \mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(V) \cong \mathrm{SU}(n)$.

Inbesondere gelten die obigen Resultate für $\mathrm{GL}(V)$ und $\mathrm{SL}(V)$, sowie $\mathrm{O}(V)$ und $\mathrm{SO}(V)$, bzw. $\mathrm{U}(V)$ und $\mathrm{SU}(V)$.

8 Orientierung

Im Folgenden sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

8.1 Definition von Orientierung

[Male Bild aus Fischer.]

Idee: Wollen zwischen positiv und negativ orietierten Basen unterscheiden.

Lemma 8.1. Es seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ zwei Basen von V. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Für den eindeutigen Automorphismus $\Phi\colon V \to V$ mit $\Phi(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt $\det(\Phi) > 0$.

ii) Für alle alternierende n-Linearformen $\omega\colon V^{\times k} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_n) > 0 \iff \omega(w_1, \dots, w_n) > 0.$$

Beweis. Für jede alternierende n-Linearform $\omega\colon V^{\times k} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \omega(\Phi(ve_1), \dots, \Phi(v_n)) = \det(\Phi) \cdot \omega(v_1, \dots, v_n). \qquad \square$$

Definition 8.2. Zwei geordnete Basen von V heißen *gleichorientiert*, wenn sie die Bedingungen aus Lemma 8.1 erfüllen.

Lemma 8.3. Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, so ist Gleichorientiertheit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geordneten Basen von V.

Definition 8.4. Es sei A der eindimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum der alternierenden n-Linearformen $V^{\times n} \to \mathbb{R}$. Für alle $\omega_1, \omega_2 \in A \setminus \{0\}$ sei

$$\omega_1 \sim \omega_2 \iff \text{es gibt } \lambda > 0 \text{ mit } \omega_2 = \lambda\omega_1.$$

Lemma 8.5. In der Situation von Definition 8.4 definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Bemerkung 8.6. Es gibt nun vier Möglichkeiten eine Orietierung auf V anzugeben:

- Man gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ als positiv orientiert vor. Eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V heißt dann positiv orientiert, wenn sie gleichorientiert zu $\mathcal{B}$ ist.
- Man wählt eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation der Gleichorientiertheit. Eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von V heißt dann positiv orientiert, wenn sie in dieser Äquivalenzklasse enthalten ist.
- Man gibt eine alternierende n-Linearform $\omega\colon V^{\times n} \to \mathbb{R}$ vor. Eine geordnete Basis $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ von V heißt dann positiv orientiert, wenn $\omega(v_1, \dots, v_n)$.
- Man gibt eine Äquivalenzklasse O von alternierenden n-Linearformen bezüglich $\sim$ an. Eine geordnete Basis $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ von V heißt dann positiv orientiert, wenn $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ für alle $\omega \in O$.

Definition 8.7. Eine Orientierung auf V ist eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ wie in Definition 8.4.

Bemerkung 8.8. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ wählt man d meistens durch $d(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Dies ist die *Standardorientierung* von $\mathbb{R}^n$.

8.2 Normiertheit von alternierenden n-Linearformen

Theorem 8.9. Es sei V ein n-dimensionaler Skalarproduktraum für $\dim V \geq 1$. Für jede alternierende n-Linearform $d\colon V^{\times n} \to K$ mit $d \neq 0$ gibt es eine eindeutige positive reelle Zahl c_d, so dass

$$\begin{vmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, w_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, w_n \rangle \end{vmatrix} = c_d d(v_1, \ldots, v_n) \overline{d(w_1, \ldots, w_n)}$$

für alle $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in V$.

Definition 8.10. Eine alternierende n-Linearform auf einem n-dimensionalen Skalarproduktraum $V \neq 0$ heißt *normiert*, falls $c_d = 1$.

Lemma 8.11. Ist $V \neq 0$ ein n-dimensionaler Skalarproduktraum und $d\colon V^{\times n} \to \mathbb{K}$ eine alternierende n-Linearform, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) d ist normiert.

ii) Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V mit $|d(v_1, \ldots, v_n)| = 1$.

iii) Füre jede Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gilt $|d(v_1, \ldots, v_n)| = 1$.

Beweis. Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gilt $c_d = 1/|d(v_1, \ldots, v_n)|^2$. □

Lemma 8.12. Es sei $V \neq 0$ ein Skalarproduktraum und $\omega_1\colon V^{\times n} \to \mathbb{K}$ eine normierte alternierende n-Linearform. Dann ist eine alternierende n-Linearform $\omega_2\colon V^{\times n} \to \mathbb{K}$ genau dann normiert, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$ und $\omega_1 = \lambda\omega_2$ gibt.

8.3 Normierte, alternierende nLinearformen

Im Folgenden sei $V \neq 0$ ein euklidischer Vektorraum und $d\colon V^{\times n} \to \mathbb{R}$ eine normiertie, alternierende n-Linearform. Indem wir diese als positiv auszeichnen, erhalten wir eine Orientierung auf V.

Definition 8.13. Es sei $\dim V = 2$. Für $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1, v_2 \neq 0$ ist der unorientierte Winkel zwischen v_1, v_2 das eindeutige Element $\theta \in [0, 2\pi)$ mit

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \quad \text{und} \quad \sin(\theta) = \frac{d(v, w)}{\|v\| \|w\|}.$$

Lemma 8.14. Es sei V ein dreidimensionaler orientierter, euklidischer Vektorraum. Ist d die eindeutige positive, normierte alternierende n-Linearform auf V, so gibt es für alle $v_1, v_2 \in V$ ein eindeutiges Element $v_1 \times v_2 \in V$ mit

$$\langle v_1 \times v_2, w \rangle = d(v_1, v_2, w) \quad \text{für alle } w \in V.$$

Definition 8.15. In der Situation von Lemma 8.14 heißt $v_1 \times v_2$ das *Vektorprodukt von* v_1 *und* v_2.

Theorem 8.16 (Eigenschaften des Vektorprodukts). Es sei V wie in Lemma 8.14.

i) Die Abbildung $V \times V \to V$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \times v_2$ ist bilinear und alternierend.

ii) Ist (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von V, so gilt

$$v_1 \times v_2 = v_3, \quad v_1 \times v_3 = -v_2, \quad v_2 \times v_3 = v_3.$$

Allgemeiner gilt

$$\begin{aligned} &(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) \times (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) v_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) v_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v_3. \end{aligned}$$

iii) Es gilt die Jacobi-Identität

$$u \times (v \times w) + v \times (u \times w) + w \times (u \times v) = 0 \quad \text{für alle } u, v, w \in V.$$

iv) Es gilt

$$\langle v_1 \times v_2, w_1 \times w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \langle v_2, w_1 \rangle .$$

v) Es gilt

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

vi) Ist θ der unorienierte Winkel zwischen $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1, v_2 \neq 0$, so gilt

$$\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\| \|v_2\| \sin(\theta).$$