Lineare Algebra II
Repetitorium

Jendrik Stelzner

16. September 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Jordannormalform

1.1 Nilpotente Endomorphismus

Definition 1.1. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$ gibt. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt.

Lemma 1.2. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so ist f genau dann nilpotent, wenn für jede geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ nilpotent ist.

Notation 1.3. Für alle $n \geq 1$ sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Theorem 1.4. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus.

i) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und $n_1, \ldots, n_s \geq 1$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ sind eindeutig bis auf Permutation.

iii) Ist $f^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \ldots, s$.

Korollar 1.5. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ nilpotent, so gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $n_1, \ldots, n_s \geq 1$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ eindeutig bis auf Permutation, und ist $A^N = 0$ für ein $N \geq 1$, so ist $n_i \leq N$ für alle $i = 1, \ldots, s$.

Lemma 1.6. Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und sind $U, W, \subseteq V$ zwei Untervektorräume mit $U \cap W = 0$, so gibt es einen Untervektorraum $\overline{W} \subseteq V$ mit $W \subseteq \overline{W}$ und $V = U \oplus \overline{W}$.

1.2 Allgemeine Jordannormalform

Definition 1.7. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ und einen Skalar $\lambda \in K$ ist

$$V_\lambda^\sim(f) := \{v \in V \mid \text{es gibt } n \geq 1 \text{ mit } (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^n(v) = 0\}$$

der *Hauptraum* von f zu λ.

Lemma 1.8. Es sei $f\colon V \to V$ und $\lambda \in K$.

i) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

ii) Es gilt $V_\lambda(f) \subseteq V_\lambda^\sim(f)$.

iii) Es ist genau dann $V_\lambda^\sim(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.

iv) Der Hauptraum $V_\lambda^\sim(f)$ ist f-invariant.

v) Ist V endlichdimensional, so gibt es $N \geq 1$ mit $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N(v) = 0$ für alle $v \in V$, und es gilt $V_\lambda^\sim(f) = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N$.

Lemma 1.9. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

Notation 1.10. Für alle $n \geq 1$ und $\lambda \in K$ ist

$$J(n,\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

der Jordanblock von Größe n zu(m Eigenwert) λ.

Theorem 1.11. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so dass $V = V_{\lambda_1}^\sim(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t}^\sim(f)$ für die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ von f.

i) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und $n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}, \dots, n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)} \geq 1$, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J(n_1^{(1)},\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J(n_{s_1}^{(1)},\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J(n_1^{(t)},\lambda_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(n_{s_t}^{(t)},\lambda_1) \end{pmatrix}$$

ii) Die Zahlen $(n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}), \dots, (n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)})$ sind jeweils eindeutig bis auf Permutation.

iii) Es gilt $n_1^{(i)} + \cdots + n_{s_i}^{(i)} = \dim V_\lambda^\sim(f)$ für alle $i = 1, \dots, t$.

1.3 Existenz der Hauptraumzerlegung

Lemma 1.12. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

i) Für alle $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ ist die Einschränkung $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)|_{V^{\sim}_{\mu}(f)}$ invertierbar.

ii) Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ ist die Summe $V^{\sim}_{\lambda_1}(f) + \cdots + V^{\sim}_{\lambda_t}(f)$ direkt.

Lemma 1.13. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V und $\lambda \in K$. Ferner sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum mit $V = V^{\sim}_{\lambda}(f) \oplus U$. Dann ist λ kein Eigenwert von $f|_U$, und es gilt

$$\chi_f(T) = (T - \lambda)^{\dim V^{\sim}_{\lambda}(f)} \cdot \chi_{f|_U}(T).$$

Lemma 1.14 (Fitting). Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Für alle $k \geq 0$ sei

$$N_k \coloneqq \ker f^k \quad \text{und} \quad R_k \coloneqq \operatorname{im} f^k.$$

i) Es gilt

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

und

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$$

ii) Für $k \geq 0$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $N_{k+1} = N_k$,

b) $N_l = N_k$ für alle $l \geq k$,

c) $R_{k+1} = R_k$,

d) $R_l = R_k$ für alle $l \geq k$.

(Wenn also eine der beiden Ketten einmal stabiliert, so sind beide Ketten von dort an stabil.)

iii) Die beiden Teilmengen $N \coloneqq \bigcup_{k \geq 0} N_k$ und $R \coloneqq \bigcap_{k \geq 0} R_k$ sind f-invariante Untervektorräume von V, und es gilt $V = N \oplus R$.

Theorem 1.15 (Existenz der Hauptraumzerlegung). Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann gibt es genau dann eine Hauptraumzerlegung von V bezüglich f, wenn das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ in Linearfaktoren zerfällt.

Korollar 1.16. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so ist $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V^{\sim}_{\lambda}(f)$.

Korollar 1.17. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V (bzw. $A \in \mathrm{M}_n(K)$), so ist $\chi_f(f) = 0$ (bzw. $\chi_A(A) = 0$).

Korollar 1.18 (Abstrakte Jordanzerlegung). Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so gibt es eindeutige Endomorphismen $d, n\colon V \to V$, so dass

a) $f = d + n$,

b) d ist diagonalisierbar und n ist nilpotent,

c) d und n kommutieren

2 Simultane Diagonalisierbarkeit

Lemma 2.1. Ist $f \in V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, so ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.

Definition 2.2. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *diagonalisierbar*, falls $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda$.

Bemerkung 2.3. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V.

i) Nach Lemma 2.1 ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.

ii) Ist V endlichdimensional, so ist f genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von f besitzt.

Proposition 2.4. Ist $f\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines K-Vektorraums V, so ist für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ auch die Einschränkung $f|_U : U \to U$ diagonalisierbar, und es gilt

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} [U \cap V_\lambda(f)].$$

Definition 2.5. Zwei Endomorphismen $f, g\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißen *simultan diagonalisierbar*, falls

$$V = \bigoplus_{\lambda, \mu \in K} [V_\lambda(f) \cap V_\mu(g)].$$

Bemerkung 2.6. Sind $f, g\colon V \to V$ zwei Endomorphismen eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so sind f und g genau dann simultan diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von f und g besitzt.

Proposition 2.7. Zwei Endomorphismen $f, g\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V sind genau dann simultan diagonalisierbar, wenn sie beide diagonalisierbar sind und kommutieren.

3 Skalarprodukträume

Definition 3.1. i) Eine Abbildung $b\colon V \times W \to Z$ mit K-Vektorräumen V, W, Z heißt *K-bilinear*, falls

$$b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b_(v_2, w),$$
$$b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2),$$
$$b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$. Ist zusätzlich $Z = K$, so ist b eine *Bilinearform*. Gilt außerden noch $V = W$ und

$$b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so ist b eine *symmetrische Bilinearform*.

ii) Eine Abbildung $s\colon V \times W \to Z$ mit $\mathbb{C}$-Vektorräumen V, W, Z heißt *sesquilinear*, falls

$$b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b_(v_2, w),$$
$$b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2),$$
$$b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w) \text{ und } b(v, \lambda w) = \overline{\lambda}(w)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist zusätzlich $Z = \mathbb{C}$, so ist s eine *Sesquilinearform*. Gilt außerdem noch $V = W$ und

$$s(v_1, v_2) = \overline{s(v_2, v_1)} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt s heißt *hermitsch*.

Lemma 3.2. Ist $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitsche Bilinearform, so ist $s(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

Notation 3.3. Es ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 3.4. Eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt

i) *positiv definit*, falls $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$,

ii) *positiv semidefinit*, falls $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$,

iii) *negativ definit*, falls $\langle v, v \rangle < 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$,

iv) *negativ semidefinit*, falls $\langle v, v \rangle \leq 0$ für alle $v \in V$, und

v) *indefinit*, wenn sie keine der obigen Bedingungen erfüllt.

Definition 3.5. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine positiv definite, symmetrische (bzw. hermitsche) Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$.

Ein Skalarproduktraum ist ein Tupel $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.

Bemerkung 3.6. Man spricht meist nur von einem Skalarproduktraum V, nennt das Skalarprodukt also nicht explizit mit. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spricht man auch von einem *euklidischen Vektorraum*, und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ von einem *unitären Vektorraum*

Definition 3.7. Für einen Skalarproduktraum V und $v \in V$ ist $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Der Vektor v heißt *normiert*, wenn $\|v\| = 1$.

Proposition 3.8 (Cauchy-Schwarz). Ist V ein Skalarproduktraum, so ist

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Korollar 3.9. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V.

Bemerkung 3.10. Ist $v \in V$ mit $v \neq 0$, so ist der Vektor $v/\|v\|$ normiert. Man sagt, dass man v normiert.

Definition 3.11. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Zwei Vektoren $u, w \in V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, geschrieben als $u \perp w$, wenn $\langle u, w\rangle = 0$.

ii) Zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, wenn $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

iii) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U (in V).

Lemma 3.12. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Ist ein Vektor $v \in V$ zu jedem Vektor $w \in V$ orthogonal, so gilt bereits $v = 0$.

ii) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $U \cap U^\perp = 0$.

Definition 3.13. Es sei V ein Skalarproduktraum.

i) Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *orthogonal*, wenn $v_i \perp v_j$ für all $i \neq j$. Die Familie heißt *nomiert*, falls v_i für alle $i \in I$ normiert ist. Ist die Familie orthogonal und normiert, so heißt sie *orthonormal*.

ii) Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *orthogonal*, wenn $v \perp w$ für alle $v, w \in S$ mit $v \neq w$. Die Teilmenge heißt *nomiert*, falls jeder Vektor $v \in S$ normiert ist. Ist S orthogonal und normiert, so heißt S *orthonormal*.

Lemma 3.14. Es sei V ein Skalarproduktraum.

1. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ ist genau dann orthonormal, wenn $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.

2. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist genau dann orthonormal, wenn $\langle v, w\rangle = \delta_{v,w}$ für alle $v, w \in S$.

Lemma 3.15. Es sei V ein Skalarproduktraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine orthogonale Familie von Vektoren $v_i \in V$ mit $v_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig. Insbesondere ist jede orthonormale Familie linear unabhängig.

Definition 3.16. Eine orthonormale Basis eines Skalarproduktraums V heißt *Orthonormalbasis* von V.

Proposition 3.17. Es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis eines Skalarproduktraums V.

1. Für jedes $v \in V$ ist $\langle v, v_i\rangle = 0$ für fast alle $i \in I$, und es gilt
$$v = \sum_{i\in I} \langle v, v_i\rangle\, v_i \quad \text{sowie} \quad \|v\|^2 = \sum_{i\in I} \langle v, v_i\rangle^2 .$$

2. Für alle $v, w \in V$ gilt
$$\langle v, w\rangle = \sum_{i\in I} \langle v, v_i\rangle \langle w, v_i\rangle .$$

Theorem 3.18 (Gram-Schmidt). Es sei V ein Skalarproduktraum und $(v_1, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Iterativ seien die Familien $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ durch $\tilde{w}_1 := v_1$, $w_i := \tilde{w}_i / \|\tilde{w}_i\|$ und

$$\tilde{w}_i := v_i - \langle v_i, w_1\rangle\, w_1 - \cdots - \langle v_i, w_{i-1}\rangle\, w_{i-1}$$

definiert. Dann ist die Familie $(w_1, \dots, w_n)$ orthonormal, und es gilt

$$\langle w_1, \dots, w_i\rangle = \langle v_1, \dots, v_i\rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Korollar 3.19. Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum.

1. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ eine Orthonormalbasis von U, so lässt sich $\mathcal{B}$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ von V ergänzen.

2. Es gibt eine Orthonormalbasis von V.

3. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $V = U \oplus U^\perp$.

Proposition 3.20. Ist V ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung

$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle$$

injektiv und $\mathbb{R}$-linear (bzw. $\mathbb{C}$-antilinear). Ist V endlichdimensional, so ist Φ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen (bzw. Antiisomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen).

4 Normale Endomorphismen

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional, sofern nicht anders angegeben.

4.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Proposition 4.1. Für zwei Skalarprodukträume V und W gibt es für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutige $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon W \to V$ mit

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Definition 4.2. In der Situation von Proposition 4.1 ist die Abbildung g die zu f *adjungierte* Abbildung, und wird mit f^* notiert.

Proposition 4.3. Es seien U, V, W drei Skalarprodukträume.

i) Es gilt $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$, und für alle linearen Abbildungen $f\colon V \to W$ und $g\colon U \to V$ gilt

$$(fg)^* = g^* f^*.$$

ii) Ist $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch f^* ein Isomorphismus.

iii) Für alle $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $f, g\colon V \to W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt
   a) $(f^*)^* = f$,
   b) $(f+g)^* = f^* + g^*$ und
   c) $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$.

   Insbesondere ist die Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$, $f \mapsto f^*$ ein Isomorphismus (bzw. Antiisomorphismus) von $\mathbb{R}$-Vektorräumen (bzw. $\mathbb{C}$-Vektorräumen).

Definition 4.4. Für $A \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{K})$ ist $A^* := \overline{A^t} = (\overline{A})^t \in \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{K})$.

Proposition 4.5. Es sei V ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ und W ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis $\mathcal{C}$. Für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt dann

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^*.$$

Definition 4.6. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V heißt

i) *normal*, falls f und f^* kommutieren (also $ff^* = f^*f$),

ii) *selbstadjungiert*, falls $f = f^*$,

iii) *antiselbstadjungiert*, falls $f^* = -f$,

iv) *orthogonal* (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. *unitär* (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) falls f ein Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$ ist.

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ heißt

I) *normal*, falls A und A^* kommutieren (also $AA^* = A^*A$),

II) *selbstadjungiert*, falls $A = A^*$,

III) *antiselbstadjungiert*, falls $A^* = -A$,

IV) *orthogonal* (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. *unitär* (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) falls A invertierbar ist und $A^* = A^{-1}$.

Für alle $n \geq 1$ seien

$$\mathrm{O}(n) \coloneqq \{O \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid O \text{ ist orthogonal}\} \quad \text{und} \quad \mathrm{U}(n) \coloneqq \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ ist unitär}\}.$$

Proposition 4.7. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums V, und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Dann ist f genau dann normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär, wenn $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär ist.

Proposition 4.8. Es sei $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus eines Skalarproduktraums V.

i) Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$.

ii) Es ist $V_\lambda(f^*) = V_{\overline{\lambda}}(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

iii) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$ ist $V_\lambda(f) \perp V_\mu(f)$.

iv) Für alle $\lambda \in V$ ist $V^{\sim}_\lambda(f) = V_\lambda(f)$.

v) Es ist $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$ und $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$.

vi) Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ist genau dann f-invariant, wenn $U^\perp$ invariant unter f^* ist.

Proposition 4.9. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Skalarproduktraums V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) f ist orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), d.h. f ist ein Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$.

ii) Es ist $ff^* = \mathrm{id}_V$.

iii) Es ist $f^*f = \mathrm{id}_V$.

iv) Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|v\|$.

v) Für alle $v, w \in V$ ist $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

Korollar 4.10. Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), d.h. A ist invertierbar mit $A^* = A^{-1}$.

ii) Es ist $AA^* = I$.

iii) Es ist $A^*A = I$.

iv) Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ ist $\|Ax\| = \|x\|$.

v) Für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ ist $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.

vi) Die Spalten von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$.

vii) Die Zeilen von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$.

4.2 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Theorem 4.11. Es sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums V. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

i) f ist normal.

ii) V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

iii) Für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch $U^\perp$ invariant unter f.

Korollar 4.12. Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist normal.

ii) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$, so dass UAU^{-1} in Diagonalgestalt ist.

Proposition 4.13. Es sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums V.

i) f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f normal mit reellen Eigenwerten ist.

ii) f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn f normal mit rein imaginären Eigenwerten ist.

iii) f ist genau dann unitär, wenn f normal ist und alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

Korollar 4.14. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

i) A ist genau dann selbstadjungiert, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.

ii) A ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix mit rein imaginären Diagonaleinträgen ist.

iii) A ist genau dann unitär, wenn es $U \in \mathrm{U}(n)$ gibt, so dass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge alle Betrag 1 haben.

4.3 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

4.3.1 Normale Endomorphismen

Notation 4.15. Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Theorem 4.16. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines euklidischen Vektorraum V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) f ist normal.

ii) Es gibt eine geordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_t > 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in (0, \pi)$.

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die Eigenwerte von f, und die Paare $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_t, \varphi_t)$ sind eindeutig bis auf Permutation.

Korollar 4.17. Für einen Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) A ist normal.

ii) Es gibt eine Matrix $O \in \mathrm{O}(n)$, so dass

$$OAO^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_t > 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in (0, \pi)$.

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die Eigenwerte von A, und die Paare $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_t, \varphi_t)$ sind eindeutig bis auf Permutation.

4.3.2 Selbstadjungierte Endomorphismen

Proposition 4.18. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines euklidischen Vektorraums ist genau dann selbstadjungiert, wenn es eine V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f besitzt.

Korollar 4.19. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn es eine orthogonale Matrix $O \in \mathrm{O}(n)$ gibt, so dass OAO^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

4.4 Antiselbstadjungiete Endomorphismen