

# Lineare Algebra II

## Repetitorium

Jendrik Stelzner

24. September 2016

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Jordannormalform</b>	<b>3</b>
1.1	Nilpotente Endomorphismus . . . . .	3
1.2	Allgemeine Jordannormalform . . . . .	5
1.3	Existenz der Hauptraumzerlegung . . . . .	6
1.4	Homogene, lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Simultane Diagonalisierbarkeit</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Skalarprodukträume</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Normale Endomorphismen</b>	<b>17</b>
4.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften . . . . .	17
4.2	Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . . . . .	19
4.3	Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . . . . .	21
4.4	Orthogonale Projektionen . . . . .	23
4.5	Polarzerlegung . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen</b>	<b>25</b>
5.1	Definition quadratischer Formen . . . . .	25
5.2	Darstellende Matrizen für Bilinearformen . . . . .	25
5.3	Nicht-entartete Bilinearformen . . . . .	26
5.4	Normalenformen und Sylvesterscher Trägheitssatz . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Hauptachsentransformation</b>	<b>31</b>
<b>7</b>	<b>Topologische Eigenschaften ausgewählter Matrixgruppen</b>	<b>32</b>
7.1	Definition der Gruppen . . . . .	32
7.2	Gruppentheoretische Begriffe . . . . .	32
7.3	Topologische Begriffe . . . . .	34

7.4	Topologie auf Matrixgruppen . . . . .	35
7.5	Koordinatenfreie Version . . . . .	36
<b>8</b>	<b>Orientierung</b>	<b>37</b>
8.1	Definition von Orientierung . . . . .	37
8.2	Normiertheit von alternierenden $n$ -Linearformen . . . . .	38
8.3	Normierte, alternierende $n$ -Linearformen . . . . .	38

# 1 Jordannormalform

## 1.1 Nilpotente Endomorphismus

**Definition 1.1.** Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  heißt *nilpotent*, falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f^n = 0$  gibt. Eine Matrix  $A \in M_n(K)$  heißt nilpotent, falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $A^n = 0$  gibt.

**Lemma 1.2.** Ist  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist  $f$  genau dann nilpotent, wenn für jede geordnete Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  die Matrix  $M_{\mathcal{B}}(f)$  nilpotent ist.

**Notation 1.3.** Für alle  $n \geq 1$  sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

**Theorem 1.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein nilpotenter Endomorphismus.

i) Es gibt eine geordnete Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $n_1, \dots, n_s \geq 1$ , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Zahlen  $n_1, \dots, n_s$  sind eindeutig bis auf Permutation.

iii) Ist  $f^N = 0$  für ein  $N \geq 1$ , so ist  $n_i \leq N$  für alle  $i = 1, \dots, s$ .

**Korollar 1.5.** Ist  $A \in M_n(K)$  nilpotent, so gibt es  $S \in GL_n(K)$  und  $n_1, \dots, n_s \geq 1$  mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Zahlen  $n_1, \dots, n_s$  eindeutig bis auf Permutation, und ist  $A^N = 0$  für ein  $N \geq 1$ , so ist  $n_i \leq N$  für alle  $i = 1, \dots, s$ .

**Lemma 1.6.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum, und sind  $U, W \subseteq V$  zwei Untervektorräume mit  $U \cap W = 0$ , so gibt es einen Untervektorraum  $\overline{W} \subseteq V$  mit  $W \subseteq \overline{W}$  und  $V = U \oplus \overline{W}$ .

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_r)$  eine Basis von  $U$  und  $\mathcal{B}_2 = (w_1, \dots, w_s)$  eine Basis von  $W$ . Dann ist  $\mathcal{B} := (u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s)$  eine Basis von  $U + W = U \oplus W$ . Ergänze  $\mathcal{B}$  zu einer Basis  $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s, w_{s+1}, \dots, w_t)$  von  $V$  und setze  $\overline{W} := \langle w_1, \dots, w_t \rangle$ .  $\square$

*Beweis der Existenz in Theorem 1.4.* Für alle  $k \geq 0$  sei  $N_k := \ker(f^k)$ . Es sei  $p := \min\{n \geq 0 \mid f^n = 0\}$  der Nilpotenzindex von  $f$

**Behauptung A.** Für alle  $k \geq 0$  ist  $N_{k+1} = f^{-1}(N_k)$ , und somit insbesondere  $f(N_{k+1}) \subseteq N_k$ .

*Beweis.* Es gilt

$$v \in f^{-1}(N_k) \iff f(v) \in N_k \iff f^k(f(v)) = 0 \iff f^{k+1}(v) = 0 \iff v \in N_{k+1}.$$

□

**Behauptung B.** Es Untervektorräume  $W_1, \dots, W_p \subseteq V$  so dass

- i)  $N_k = N_{k-1} \oplus W_k$  für alle  $k = 1, \dots, p$ ,
- ii)  $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$  für alle  $k = 2, \dots, p$ , und
- iii) die Einschränkung  $f|_{W_k}$  ist injektiv für alle  $k = 2, \dots, p$ .

*Beweis.* Beginne mit  $W_p \subseteq V$ , so dass  $V = N_p = N_{p-1} \oplus W_p$ . Ist  $W_{k+1}$  für ein  $1 \leq k \leq p-1$  definiert, so ist

$$f(W_{k+1}) \subseteq f(N_{k+1}) \subseteq N_k,$$

und da

$$f^{-1}(N_{k-1}) \cap W_{k+1} = N_k \cap W_{k+1} = 0,$$

ist  $f(W_{k+1}) \cap N_{k-1} = 0$ . Nach Lemma 1.6 gibt es einen Untervektorraum  $W_k \subseteq N_k$  mit  $f(W_{k+1}) \subseteq W_k$  und  $N_k = N_{k-1} \oplus W_k$ . Die Injektivität von  $f|_{W_k}$  für  $k = 2, \dots, p$  folgt aus

$$\ker(f|_{W_k}) = \ker(f) \cap W_k = N_1 \cap W_k \subseteq N_{k-1} \cap W_k = 0.$$

□

Wähle eine Basis  $\mathcal{B}_p = (v_1^p, \dots, v_{n_p}^p)$  von  $W_p$ . Wegen der Injektivität von  $f|_{W_p}$  ist die Familie  $f(\mathcal{B}_p) := (f(v_1^p), \dots, f(v_{n_p}^p))$  linear unabhängig, und damit zu einer Basis

$$\mathcal{B}_p = (f(v_1^p), \dots, f(v_{n_p}^p), v_1^{p-1}, \dots, v_{n_{p-1}}^{p-1})$$

von  $W_{p-1}$  ergänzbar. Iteratives Fortführen liefert für  $W_{p-i}$  eine Basis  $\mathcal{B}_{p-i}$  de Form

$$\begin{array}{ccc} f^i(v_1^p), & \dots, & f^i(v_{n_p}^p) \\ f^{i-1}(v_1^p), & \dots, & f^{i-1}(v_{n_p}^p) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{p-i}, & \dots, & v_{n_{p-i}}^{p-i}. \end{array}$$

Da

$$\begin{aligned} V = N_p &= N_{p-1} \oplus W_p = N_{p-2} \oplus W_{p-1} \oplus W_p = \dots = N_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_p \\ &= W_1 \oplus \dots \oplus W_p \end{aligned}$$

ergibt sich durch Zusammenfügen der einzelnen Basen  $\mathcal{B}_p, \dots, \mathcal{B}_1$  eine Basis  $\tilde{\mathcal{B}}$  von  $V$  von der Form

$$\begin{array}{ccccccc} v_1^p, & \dots, & v_{n_p}^p, & & & & \\ f(v_1^p), & \dots, & f(v_{n_p}^p), & v_1^{p-1}, & \dots, & v_{n_{p-1}}^{p-1}, & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ f^{p-1}(v_1^p), & \dots, & f^{p-1}(v_{n_p}^p), & f^{p-2}(v_1^{p-1}), & \dots, & f^{p-2}(v_{n_{p-1}}^{p-1}), & \dots, v_1^1, \dots, v_{n_1}^1. \end{array}$$

Trägt man nun dieses zweidimensionale Schema von oben nach unten, von links nach rechts in eine Familie  $\mathcal{B}$  ein, so ist dies die gewünschte Matrix.  $\square$

[Hier das konkrete Vorgehen angeben.]

## 1.2 Allgemeine Jordannormalform

**Definition 1.7.** Für einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  und einen Skalar  $\lambda \in K$  ist

$$V_\lambda^\sim(f) := \{v \in V \mid \text{es gibt } n \geq 1 \text{ mit } (f - \lambda \text{id}_V)^n(v) = 0\}$$

der *Hauptraum* von  $f$  zu  $\lambda$ .

**Lemma 1.8.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  und  $\lambda \in K$ .

- i) Der Hauptraum  $V_\lambda^\sim(f)$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- ii) Es gilt  $V_\lambda(f) \subseteq V_\lambda^\sim(f)$ .
- iii) Es ist genau dann  $V_\lambda^\sim(f) \neq 0$ , wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $f$  ist.
- iv) Der Hauptraum  $V_\lambda^\sim(f)$  ist  $f$ -invariant.
- v) Ist  $V$  endlichdimensional, so gibt es  $N \geq 1$  mit  $(f - \lambda \text{id}_V)^N(v) = 0$  für alle  $v \in V_\lambda^\sim(f)$ , und es gilt  $V_\lambda^\sim(f) = \ker(f - \lambda \text{id}_V)^N$ .

**Lemma 1.9.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ .

**Notation 1.10.** Für alle  $n \geq 1$  und  $\lambda \in K$  ist

$$J(n, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

der Jordanblock von Größe  $n$  zu(m Eigenwert)  $\lambda$ .

**Theorem 1.11.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ , so dass  $V = V_{\lambda_1}^{\sim}(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t}^{\sim}(f)$  für die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$  von  $f$ .

i) Es gibt eine geordnete Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}, \dots, n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)} \geq 1$ , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J(n_1^{(1)}, \lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J(n_{s_1}^{(1)}, \lambda_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J(n_1^{(t)}, \lambda_t) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J(n_{s_t}^{(t)}, \lambda_t) \end{pmatrix}$$

ii) Die Zahlen  $(n_1^{(1)}, \dots, n_{s_1}^{(1)}), \dots, (n_1^{(t)}, \dots, n_{s_t}^{(t)})$  sind jeweils eindeutig bis auf Permutation.

iii) Es gilt  $n_1^{(i)} + \cdots + n_{s_i}^{(i)} = \dim V_{\lambda_i}^{\sim}(f)$  für alle  $i = 1, \dots, t$ .

iv) Für alle  $i = 1, \dots, t$  gilt  $\max_{j=1, \dots, s_i} n_j^{(i)} = \min\{p \geq 0 \mid (f - \lambda_i \text{id}_V)^p|_{V_{\lambda_i}^{\sim}(f)} = 0\}$ .

[Hier das konkrete Vorgehen angeben]

### 1.3 Existenz der Hauptraumzerlegung

**Lemma 1.12.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ .

i) Für alle  $\lambda, \mu \in K$  mit  $\lambda \neq \mu$  ist die Einschränkung  $(f - \lambda \text{id}_V)|_{V_{\mu}^{\sim}(f)}$  invertierbar.

ii) Für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$  ist die Summe  $V_{\lambda_1}^{\sim}(f) + \cdots + V_{\lambda_t}^{\sim}(f)$  direkt.

**Lemma 1.13.** Ist  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$  und sind  $U, W \subseteq V$  zwei  $f$ -invariante Untervektorräume mit  $V = U \oplus W$ , so gilt

$$\chi_f(T) = \chi_{f|_U}(T) \cdot \chi_{f|_W}(T).$$

**Lemma 1.14.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums  $V$  und  $\lambda \in K$ . Ferner sei  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum mit  $V = V_{\lambda}^{\sim}(f) \oplus U$ . Dann ist  $\lambda$  kein Eigenwert von  $f|_U$ , und es gilt

$$\chi_f(T) = (T - \lambda)^{\dim V_{\lambda}^{\sim}(f)} \cdot \chi_{f|_U}(T).$$

**Lemma 1.15 (Fitting).** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ . Für alle  $k \geq 0$  sei

$$N_k := \ker f^k \quad \text{und} \quad R_k := \text{im } f^k.$$

i) Es gilt

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

und

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \dots$$

ii) Für  $k \geq 0$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a)  $N_{k+1} = N_k$ ,
- b)  $N_l = N_k$  für alle  $l \geq k$ ,
- c)  $R_{k+1} = R_k$ ,
- d)  $R_l = R_k$  für alle  $l \geq k$ .

(Wenn also eine der beiden Ketten einmal stabilisiert, so sind beide Ketten von dort an stabil.)

iii) Die beiden Teilmengen  $N := \bigcup_{k \geq 0} N_k$  und  $R := \bigcap_{k \geq 0} R_k$  sind  $f$ -invariante Untervektorräume von  $V$ , und es gilt  $V = N \oplus R$ .

**Theorem 1.16** (Existenz der Hauptraumzerlegung). Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ . Dann gibt es genau dann eine Hauptraumzerlegung von  $V$  bezüglich  $f$ , wenn das charakteristische Polynom  $\chi_f(T)$  in Linearfaktoren zerfällt.

*Beweis.* Wenn es eine Hauptraumzerlegung gibt, dann ist  $f$  nach Theorem 1.11 trigonalisierbar. Somit zerfällt das charakteristische Polynom dann in Linearfaktoren.

Die umgekehrte Aussage verläuft per Induktion über die Dimension von  $V$ . Für  $\dim V = 0$  ist die Aussage klar. Für  $\dim V > 0$  sei  $\chi_f(T) = (T - \lambda_1)^{n_1} \dots (T - \lambda_s)^{n_s}$ . Durch Anwenden von Fittings Lemma auf  $f - \lambda_1 \text{id}_V$  erhalten wir, dass

$$V = V_{\lambda_1}^\sim \oplus R,$$

wobei  $R \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum ist. Nach Lemma 1.14 ist  $\chi_{f|_R}(T) = (T - \lambda_2)^{n_2} \dots (T - \lambda_s)^{n_s}$ , und nach Induktionsvoraussetzung ist

$$R = R_{\lambda_2}^\sim(f|_R) \oplus \dots \oplus R_{\lambda_s}^\sim(f|_R),$$

und somit insgesamt

$$V = V_{\lambda_1}^\sim \oplus R_{\lambda_2}^\sim(f|_R) \oplus \dots \oplus R_{\lambda_s}^\sim(f|_R) \subseteq V_{\lambda_1}^\sim \oplus V_{\lambda_2}^\sim(f|_R) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}^\sim(f|_R) \subseteq V.$$

□

**Korollar 1.17.** Ist  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\sim(f)$ .

**Korollar 1.18** (Cayley-Hamilton für algebraisch abgeschlossene Körper). Ist  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$  (bzw.  $A \in M_n(K)$ ), so ist  $\chi_f(f) = 0$  (bzw.  $\chi_A(A) = 0$ ).

**Bemerkung 1.19.** Für jeden Körper  $K$  gibt es einen algebraisch abgeschlossenen Körper  $\overline{K}$ , so dass  $K$  ein Unterkörper von  $\overline{K}$  ist. Der Satz von Cayley-Hamilton gilt daher für beliebige Körper. Er kann auch ohne die Jordan-Normalform bewiesen werden (siehe etwa Fischer).

**Korollar 1.20** (Abstrakte Jordanzerlegung). Ist  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$  (bzw.  $A \in M_n(K)$ ), so gibt es eindeutige Endomorphismen  $d, n: V \rightarrow V$  (bzw.  $D, N \in M_n(K)$ ), so dass

- a)  $f = d + n$  (bzw.  $A = D + N$ ),
- b)  $d$  (bzw.  $D$ ) ist diagonalisierbar und  $n$  (bzw.  $N$ ) ist nilpotent,
- c)  $d$  und  $n$  (bzw.  $D$  und  $N$ ) kommutieren.

[Falls noch Zeit: Idee der Hauptraumzerlegung genauer erläutern, und allgemeines Lemma nennen.]

## 1.4 Homogene, lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen

Ist  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , so lassen sich die komplexen Lösungen der Differentialgleichung

$$Ay = y'$$

für  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  wie folgt finden:

Der Lösungsraum wird von den Spalten der Matrix  $\exp(At)$  aufgefasst (wenn man diese als Funktionen von  $t$  betrachtet). Ist  $S^{-1}AS = J$  eine Jordannormalform von  $A$  und  $J = D + N$  die entsprechende Jordanzerlegung, so ist

$$\exp(At) = \exp(SJtS^{-1}) = S \exp(Jt) S^{-1} = S \exp(Dt) \exp(Nt) S^{-1},$$

wobei im letzten Schritt genutzt wird, dass  $D$  und  $N$  kommutieren.



## 2 Simultane Diagonalisierbarkeit

**Lemma 2.1.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $K$ -Vektorraums  $V$  und  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum. Ist  $u \in U$  mit  $u = v_1 + \dots + v_n$ , wobei  $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  paarweise verschieden sind, so ist bereits  $v_1, \dots, v_n \in U$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage per Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  gilt  $v_1 = u \in U$ . Ist  $n \geq 2$ , so gilt

$$f(u) = f(v_1) + \dots + f(v_n) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

und somit

$$\begin{aligned} U \ni \lambda_1 u - f(u) &= \lambda_1(v_1 + \dots + v_n) - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_n)v_n. \end{aligned}$$

Da  $(\lambda_1 - \lambda_i)v_i \in V_{\lambda_i}(f)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  ergibt sich per Induktionsvoraussetzung, dass  $(\lambda_1 - \lambda_i)v_i \in U$  für alle  $i = 2, \dots, n$ . Da  $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 2, \dots, n$  (denn die  $\lambda_j$  sind paarweise verschieden) gilt  $v_2, \dots, v_n \in U$ . Somit gilt auch  $v_1 = u - v_2 - \dots - v_n \in U$ .  $\square$

**Lemma 2.2.** Ist  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist die Summe  $\sum_{\lambda \in K} V_{\lambda}(f)$  direkt.

*Beweis.* Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  paarweise verschieden und  $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$  für  $i = 1, \dots, n$ , so dass  $0 = v_1 + \dots + v_n$ . Anwenden von Lemma 2.1 auf den Untervektorraum  $U = 0$  ergibt, dass  $v_1, \dots, v_n \in 0$  und somit  $v_1, \dots, v_n = 0$ .  $\square$

**Definition 2.3.** Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  heißt *diagonalisierbar*, falls  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_{\lambda}(f)$ .

**Bemerkung 2.4.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $K$ -Vektorraums  $V$ .

- i) Nach Lemma 2.2 ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $V = \sum_{\lambda \in K} V_{\lambda}(f)$ . Es genügt also, jeden Vektor als Summe, bzw. Linearkombination von Eigenvektoren zu schreiben.
- ii) Ist  $V$  endlichdimensional, so ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $f$  besitzt.

Ist nämlich  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_{\lambda}(f)$  und sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  die Eigenwerte von  $f$ , so ist  $V_{\mu}(f) = 0$  für alle  $\mu \in K \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  und somit  $V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(f)$ . Wählt man nun von jeder dieser endlich vielen Eigenräume eine Basis, so ergibt sich durch Zusammenfügen dieser Basen eine Basis von  $V$ , die aus Eigenvektoren besteht.

Hat andererseits  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren, so ist jeder Vektor  $v \in V$  eine Linearkombination von Eigenvektoren und somit  $V = \sum_{\lambda \in K} V_{\lambda}(f)$ .

**Proposition 2.5.** Ist  $f: V \rightarrow V$  ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist für jeden  $f$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  auch die Einschränkung  $f|_U: U \rightarrow U$  diagonalisierbar, und es gilt

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} [U \cap V_{\lambda}(f)].$$

*Beweis.* Es sei  $u \in U$ . Da  $f$  diagonalisierbar ist, gibt es paarweise verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  und  $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$  mit  $u = v_1 + \dots + v_n$ . Nach Lemma 2.1 gilt bereits  $v_1, \dots, v_n \in U$ . Da damit  $v_i \in U \cap V_{\lambda_i}(f) = U_{\lambda_i}(f|_U)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt, ergibt sich  $u \in \sum_{i=1}^n U_{\lambda_i}(f|_U) = \sum_{\lambda \in K} U_{\lambda}(f|_U)$ . Damit ist  $U = \sum_{\lambda} U_{\lambda}(f)$ , und somit  $U = \bigoplus_{\lambda} U_{\lambda}(f|_U)$ . Die letzte Gleichung ergibt sich mit  $U_{\lambda}(f|_U) = U \cap V_{\lambda}(f)$ .  $\square$

**Definition 2.6.** Eine Kollektion von Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  heißt *simultan diagonalisierbar*, falls

$$V = \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K} \left( \underbrace{V_{\lambda_1}(f_1) \cap \dots \cap V_{\lambda_n}(f_n)}_{\text{gemeinsame Eigenvektoren}} \right).$$

**Bemerkung 2.7.** Ist  $V$  endlichdimensional, so sind  $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$  genau dann simultan diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von  $f_1, \dots, f_n$  besitzt.

**Theorem 2.8.** Eine Kollektion von Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  ist genau dann simultan diagonalisierbar, wenn die Endomorphismen kommutieren und jeweils einzeln diagonalisierbar sind.

**Lemma 2.9.** Sind  $f, g: V \rightarrow V$  zwei kommutierende Endomorphismen eines  $K$ -Vektorraums  $V$ , so ist  $V_{\lambda}(f)$  für alle  $\lambda \in K$  invariant unter  $g$ .

*Beweis von Theorem 2.8.* Ist  $v \in V$  ein gemeinsamer Eigenvektor von  $f_1, \dots, f_n$ , so gilt  $f_i(f_j(v)) = f_j(f_i(v))$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ , denn ist  $f_i(v) = \lambda_i v$ , so gilt

$$f_i(f_j(v)) = f_i(\lambda_j v) = \lambda_j f_i(v) = \lambda_j \lambda_i v = \lambda_i \lambda_j v = \lambda_i f_j(v) = f_j(\lambda_i v) = f_j(f_i(v)).$$

Sind  $f_1, \dots, f_n$  simultan diagonalisierbar, so ist jeder Vektor  $v \in V$  die Summe von gemeinsamen Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$ , also  $v = v_1 + \dots + v_n$ , weshalb

$$f_i(f_j(v)) = f_i(f_j(v_1)) + \dots + f_i(f_j(v_n)) = f_j(f_i(v_1)) + \dots + f_j(f_i(v_n)) = f_j(f_i(v)).$$

Also gilt dann  $f_i f_j = f_j f_i$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ .

Umgekehrt seien nun  $f_1, \dots, f_n$  kommutierend und einzeln diagonalisierbar. Wir zeigen per Induktion über  $n$ , dass  $f_1, \dots, f_n$  simultan diagonalisierbar sind. Für  $n = 1$  ist nichts zu zeigen.

Es sei nun  $n \geq 2$ . Da  $f_1$  diagonalisierbar ist, gilt  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_{\lambda}(f_1)$ . Da  $f_1, \dots, f_n$  kommutieren ist  $V_{\lambda}(f_1)$  für alle  $\lambda \in K$  invariant unter  $f_2, \dots, f_n$ . Da  $f_2, \dots, f_n$  diagonalisierbar sind, sind es auch die Einschränkungen  $f_i|_{V_{\lambda}(f_1)}$  für alle  $i = 2, \dots, n$  und  $\lambda \in K$ . Da  $f_2, \dots, f_n$  kommutieren, kommutieren auch diese Einschränkungen. Per Induktionsvoraussetzung gilt daher

$$\begin{aligned} V_{\lambda}(f_1) &= \bigoplus_{\lambda_2, \dots, \lambda_n} \left( (V_{\lambda}(f_1))_{\lambda_2}(f_2|_{V_{\lambda}(f_1)}) \cap \dots \cap (V_{\lambda}(f_1))_{\lambda_n}(f_n|_{V_{\lambda}(f_1)}) \right) \\ &= \bigoplus_{\lambda_2, \dots, \lambda_n} \left( V_{\lambda}(f_1) \cap V_{\lambda_2}(f_2) \cap \dots \cap V_{\lambda_n}(f_n) \right). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
 V &= \bigoplus_{\lambda_1 \in K} V_{\lambda_1}(f_1) = \bigoplus_{\lambda_1 \in K} \bigoplus_{\lambda_2, \dots, \lambda_n \in K} \left( V_{\lambda_1}(f_1) \cap V_{\lambda_2}(f_2) \cap V_{\lambda_n}(f_n) \right) \\
 &= \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K} \left( V_{\lambda_1}(f_1) \cap \dots \cap V_{\lambda_n}(f_n) \right).
 \end{aligned}$$

□

### 3 Skalarprodukträume

**Definition 3.1.** Eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  heißt  $(\mathbb{C})$ -antilinear

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{und} \quad f(\lambda v_1) = \bar{\lambda} f(v_1)$$

für alle  $v_1, v_2 \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Definition 3.2.** Es sei  $K$  ein Körper.

i) Eine Abbildung  $b: V \times W \rightarrow Z$  mit  $K$ -Vektorräumen  $V, W, Z$  heißt  $K$ -bilinear, falls

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b(v_2, w), \\ b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2), \\ b(\lambda v, w) &= \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w) \end{aligned}$$

für alle  $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$  und  $\lambda \in K$ . Ist zusätzlich  $Z = K$ , so ist  $b$  eine *Bilinearform*. Gilt außerdem noch  $V = W$  und

$$b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so ist  $b$  eine *symmetrische Bilinearform*.

ii) Eine Abbildung  $s: V \times W \rightarrow Z$  mit  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen  $V, W, Z$  heißt *sesquilinear*, falls

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b(v_2, w), \\ b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2), \\ b(\lambda v, w) &= \lambda b(v, w) \quad \text{und} \quad b(v, \lambda w) = \bar{\lambda} b(v, w) \end{aligned}$$

für alle  $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ist zusätzlich  $Z = \mathbb{C}$ , so ist  $s$  eine *Sesquilinearform*. Gilt außerdem noch  $V = W$  und

$$s(v_1, v_2) = \overline{s(v_2, v_1)} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt  $s$  *hermitsch*.

**Lemma 3.3.** Ist  $s: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  eine hermitsche Bilinearform, so ist  $s(v, v) \in \mathbb{R}$  für alle  $v \in V$ .

**Notation 3.4.** Es ist  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Definition 3.5.** Eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform)  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  heißt

- i) *positiv definit*, falls  $\langle v, v \rangle > 0$  für alle  $v \in V$  mit  $v \neq 0$ ,
- ii) *positiv semidefinit*, falls  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$ ,
- iii) *negativ definit*, falls  $\langle v, v \rangle < 0$  für alle  $v \in V$  mit  $v \neq 0$ ,

- iv) *negativ semidefinit*, falls  $\langle v, v \rangle \leq 0$  für alle  $v \in V$ , und
- v) *indefinit*, wenn sie keine der obigen Bedingungen erfüllt.

**Definition 3.6.** Ein *Skalarprodukt* auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine positiv definite, symmetrische (bzw. hermitesche) Bilinearform (bzw. Sesquilinearform)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ .

Ein *Skalarproduktraum* ist ein Tupel  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bestehend aus einem Vektorraum  $V$  und einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$ .

**Bemerkung 3.7.** Man spricht meist nur von einem Skalarproduktraum  $V$ , nennt das Skalarprodukt also nicht explizit mit. Im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  spricht man auch von einem *euklidischen Vektorraum*, und im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  von einem *unitären Vektorraum*.

**Beispiel 3.8.** Das *Standardskalarprodukt* auf  $\mathbb{R}^n$  ist durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

definiert. Das *Standardskalarprodukt* auf  $\mathbb{C}^n$  ist durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = x^T \overline{y} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}^n$$

definiert

**Definition 3.9.** Für einen Skalarproduktraum  $V$  und  $v \in V$  ist  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . Der Vektor  $v$  heißt *normiert*, wenn  $\|v\| = 1$ .

**Proposition 3.10** (Cauchy-Schwarz). Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

**Definition 3.11.** Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist der (*unorientierte*) *Winkel* zwischen zwei Vektoren  $v, w \in V$  der eindeutige Winkel  $\theta \in [0, \pi]$  mit

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|},$$

und er wird mit  $\angle(v, w)$  bezeichnet.

**Korollar 3.12.** Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Norm auf  $V$ .

*Beweis.* Die Dreiecksungleichung ergibt sich durch

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 3.13** (Polarisationsformel). Ist  $V$  ein euklidischer Vektorraum, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Ist  $V$  ein unitärer Vektorraum, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} + i \frac{\|v + iw\|^2 - \|v\|^2 - \overbrace{\|iw\|^2}^{=\|w\|^2}}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Das Skalarprodukt ist durch die Norm also eindeutig bestimmt.

**Bemerkung 3.14.** Ist  $v \in V$  mit  $v \neq 0$ , so ist der Vektor  $v/\|v\|$  normiert. Man sagt, dass man  $v$  normiert.

**Definition 3.15.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum.

- i) Zwei Vektoren  $u, w \in V$  heißen *orthogonal (zueinander)*, geschrieben als  $u \perp w$ , wenn  $\langle u, w \rangle = 0$ .
- ii) Zwei Untervektorräume  $U, W \subseteq V$  heißen *orthogonal (zueinander)*, wenn  $u \perp w$  für alle  $u \in U$  und  $w \in W$ .
- iii) Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $U$  (in  $V$ ).

**Bemerkung 3.16.** Zwei Vektoren  $v, w \in V$  eines Skalarproduktraums  $V$  sind genau dann orthogonal zueinander, wenn  $\angle(v, w) = \pi/2 (= 90^\circ)$ .

**Lemma 3.17.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum.

- i) Ist ein Vektor  $v \in V$  zu jedem Vektor  $w \in V$  orthogonal, so gilt bereits  $v = 0$ .
- ii) Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist  $U \cap U^\perp = 0$ .

**Definition 3.18.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum.

- i) Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren  $v_i \in V$  heißt *orthogonal*, wenn  $v_i \perp v_j$  für all  $i \neq j$ . Die Familie heißt *normiert*, falls  $v_i$  für alle  $i \in I$  normiert ist. Ist die Familie orthogonal und normiert, so heißt sie *orthonormal*.
- ii) Eine Teilmenge  $S \subseteq V$  heißt *orthogonal*, wenn  $v \perp w$  für alle  $v, w \in S$  mit  $v \neq w$ . Die Teilmenge heißt *normiert*, falls jeder Vektor  $v \in S$  normiert ist. Ist  $S$  orthogonal und normiert, so heißt  $S$  *orthonormal*.

**Lemma 3.19.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum.

1. Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren  $v_i \in V$  ist genau dann orthonormal wenn  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$  für alle  $i, j \in I$ .
2. Eine Teilmenge  $S \subseteq V$  ist genau dann orthonormal, wenn  $\langle v, w \rangle = \delta_{v,w}$  für alle  $v, w \in S$ .

**Lemma 3.20.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und  $(v_i)_{i \in I}$  eine orthogonale Familie von Vektoren  $v_i \in V$  mit  $v_i \neq 0$  für alle  $i \in I$ . Dann ist  $(v_i)_{i \in I}$  linear unabhängig. Insbesondere ist jede orthonormale Familie linear unabhängig.

**Definition 3.21.** Eine orthonormale Basis eines Skalarproduktraums  $V$  heißt *Orthonormalbasis* von  $V$ .

**Proposition 3.22.** Es sei  $(v_i)_{i \in I}$  eine Orthonormalbasis eines Skalarproduktraums  $V$ . Für jedes  $w \in V$  ist  $\langle w, v_i \rangle = 0$  für fast alle  $i \in I$ , und es gilt

$$w = \sum_{i \in I} \langle w, v_i \rangle v_i \quad \text{sowie} \quad \|w\|^2 = \sum_{i \in I} \langle w, v_i \rangle^2.$$

für alle  $w \in V$ . Für alle  $w_1, w_2 \in V$  gilt

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \sum_{i \in I} \langle w_1, v_i \rangle \langle v_i, w_2 \rangle.$$

**Theorem 3.23 (Gram-Schmidt).** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und  $(v_1, \dots, v_n)$  eine linear unabhängige Familie von Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Iterativ seien die Familien  $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$  und  $(w_1, \dots, w_n)$  durch

- $\tilde{w}_1 := v_1$ ,
- $w_i := \tilde{w}_i / \|\tilde{w}_i\|$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , und
- $\tilde{w}_i := v_i - \langle v_i, w_1 \rangle w_1 - \dots - \langle v_i, w_{i-1} \rangle w_{i-1}$  für alle  $i = 2, \dots, n$

definiert. Dann ist die Familie  $(w_1, \dots, w_n)$  orthonormal, und es gilt

$$\langle w_1, \dots, w_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

**Bemerkung 3.24.** Das obige Gram-Schmidt-Verfahren lässt sich auch auf unendliche abzählbare Familien  $(v_1, v_2, v_3, \dots)$  anwenden.

**Korollar 3.25.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum.

1. Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, und  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$  eine Orthonormalbasis von  $U$ , so lässt sich  $\mathcal{B}$  zu einer Orthonormalbasis  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$  von  $V$  ergänzen.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von  $V$ .
3. Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist  $V = U \oplus U^\perp$ .

**Korollar 3.26.** Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums  $V$ , so gilt  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$  und  $(U^\perp)^\perp = U$ .

*Beweis.* Dass  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$  ergibt sich aus  $V = U \oplus U^\perp$ . Es ergibt sich direkt, dass  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ , und da

$$\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim U$$

gilt bereits Gleichheit. □

**Proposition 3.27.** Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

injektiv und  $\mathbb{R}$ -linear (bzw.  $\mathbb{C}$ -antilinear). Ist  $V$  endlichdimensional, so ist  $\Phi$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen (bzw. Antiisomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen).



## 4 Normale Endomorphismen

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional, sofern nicht anders angegeben.

### 4.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

**Proposition 4.1.** Für zwei Skalarprodukträume  $V$  und  $W$  gibt es für jede  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  eine eindeutige  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $g: W \rightarrow V$  mit

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

**Definition 4.2.** In der Situation von Proposition 4.1 ist die Abbildung  $g$  die zu  $f$  *adjungierte* Abbildung, und wird mit  $f^*$  notiert.

**Definition 4.3.** Für  $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$  ist  $A^* := \overline{A}^t = (\overline{A})^t \in M(n \times m, \mathbb{K})$ .

**Proposition 4.4.** Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  und  $W$  ein Skalarproduktraum mit geordneter Orthonormalbasis  $\mathcal{C}$ . Für jede  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  gilt dann

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)^*.$$

**Proposition 4.5.** Es seien  $U, V, W$  drei Skalarprodukträume und  $f: V \rightarrow W, g: U \rightarrow V$  zwei  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen und  $\lambda \in K$

i) Es gilt  $\text{id}_V^* = \text{id}_V$  und  $(fg)^* = g^* f^*$ .

ii) Es gilt

a)  $(f^*)^* = f$ ,

b)  $(f + g)^* = f^* + g^*$  und

c)  $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$ .

Insbesondere ist die Abbildung  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V), f \mapsto f^*$  ein Isomorphismus (bzw. Antiisomorphismus) von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen (bzw.  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen).

iii) Die Abbildung  $f$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $f^*$  ein Isomorphismus ist.

**Definition 4.6.** Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums  $V$  heißt

i) *normal*, falls  $f$  und  $f^*$  kommutieren (also  $ff^* = f^*f$ ),

ii) *selbstadjungiert*, falls  $f = f^*$ ,

iii) *antiselbstadjungiert*, falls  $f^* = -f$ ,

iv) *orthogonal* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. *unitär* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) falls  $f$  ein Isomorphismus mit  $f^* = f^{-1}$  ist.

Für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sei

$$U(V) := \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sei

$$O(V) := \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ ist orthogonal}\}.$$

Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  heißt

- I) *normal*, falls  $A$  und  $A^*$  kommutieren (also  $AA^* = A^*A$ ),
- II) *selbstadjungiert*, falls  $A = A^*$ ,
- III) *antiselbstadjungiert*, falls  $A^* = -A$ ,
- IV) *orthogonal* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. *unitär* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) falls  $A$  invertierbar ist und  $A^* = A^{-1}$ .

Für alle  $n \geq 1$  seien

$$O(n) := \{O \in M_n(\mathbb{R}) \mid O \text{ ist orthogonal}\} \quad \text{und} \quad U(n) := \{U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ ist unitär}\}.$$

**Proposition 4.7.** i) Ist  $V$  ein Skalarproduktraum, so ist  $O(V)$ , bzw.  $U(V)$  eine Untergruppe von  $GL(V)$ .

ii) Für alle  $n \geq 1$  ist  $O(n)$ , bzw.  $U(n)$  eine Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{R})$ , bzw.  $GL_n(\mathbb{C})$ .

**Lemma 4.8.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums  $V$ , und  $\mathcal{B}$  eine geordnete Basis von  $V$ . Dann ist  $f$  genau dann normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär, wenn  $M_{\mathcal{B}}(f)$  normal, selbstadjungiert, antiselbstadjungiert, orthogonal, bzw. unitär ist.

**Proposition 4.9.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein normaler Endomorphismus eines Skalarproduktraums  $V$ .

- i) Für alle  $v \in V$  ist  $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$ .
- ii) Es ist  $V_{\lambda}(f^*) = V_{\bar{\lambda}}(f)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ , also haben  $f$  und  $f^*$  die gleichen Eigenvektoren zu jeweils konjugierten Eigenwerten.
- iii) Für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  mit  $\lambda \neq \mu$  ist  $V_{\lambda}(f) \perp V_{\mu}(f)$ .
- iv) Für  $v \in V$  und  $n \geq 1$  mit  $f^n(v) = 0$  ist bereits  $f(v) = 0$ .
- v) Für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist  $V_{\lambda}^{\sim}(f) = V_{\lambda}(f)$ .
- vi) Es ist  $\text{im } f^* = (\ker f)^{\perp}$  und  $\ker f^* = (\text{im } f)^{\perp}$ .
- vii) Ein Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist genau dann  $f$ -invariant, wenn  $U^{\perp}$  invariant unter  $f^*$  ist.

**Proposition 4.10.** Für einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums  $V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $f$  ist orthogonal (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. unitär (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), d.h.  $f$  ist ein Isomorphismus mit  $f^* = f^{-1}$ .
- ii) Es ist  $ff^* = \text{id}_V$ .
- iii) Es ist  $f^*f = \text{id}_V$ .
- iv) Für alle  $v \in V$  ist  $\|f(v)\| = \|v\|$ .
- v) Für alle  $v_1, v_2 \in V$  ist  $\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ .

**Korollar 4.11.** Für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $A$  ist orthogonal (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. unitär (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), d.h.  $A$  ist invertierbar mit  $A^* = A^{-1}$ .
- ii) Es ist  $AA^* = I$ .
- iii) Es ist  $A^*A = I$ .
- iv) Für alle  $x \in \mathbb{K}^n$  ist  $\|Ax\| = \|x\|$ .
- v) Für alle  $x, y \in \mathbb{K}^n$  ist  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ .
- vi) Die Spalten von  $A$  sind eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$ .
- vii) Die Zeilen von  $A$  sind eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$ .

## 4.2 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Theorem 4.12.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums  $V$ . Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- i)  $f$  ist normal.
- ii)  $V$  hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$ .
- iii) Für jeden  $f$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist auch  $U^\perp$  invariant unter  $f$ .

*Beweis.* [i]  $\implies$  [ii] Da  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen und  $V$  endlichdimensional ist, gibt es eine Hauptraumzerlegung  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ . Da  $f$  normal ist gilt  $V_\lambda(f)^\perp = V_\lambda(f)$  für alle  $\lambda \in K$ , weshalb bereits  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ . Also ist  $f$  diagonalisierbar. Für jedes  $\lambda \in K$  sei  $\mathcal{B}_\lambda$  eine Orthonormalbasis von  $V_\lambda(f)$ . Da die Summe  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$  orthogonal ist ergibt sich durch Zusammenfügen der  $\mathcal{B}_\lambda$  eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ .

[ii]  $\implies$  [i] Es sei  $\mathcal{B}$  eine geordnete Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ . Dann ist  $M_{\mathcal{B}}(f)$  eine Diagonalmatrix. Auch  $M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$  ist eine Diagonalmatrix. Deshalb kommutieren  $M_{\mathcal{B}}(f)$  und  $M_{\mathcal{B}}(f^*)$ , und somit auch  $f$  und  $f^*$ .

[ii]  $\implies$  [iii] Da  $f$  diagonalisierbar ist, ist auch die Einschränkung  $f|_U$  diagonalisierbar. Also ist  $U = \sum_{\lambda \in K} U_\lambda(f|_U)$ . Da jeder Eigenvektor von  $U$  auch ein Eigenvektor von  $f^*$  ist, ist  $U$  deshalb auch invariant unter  $f^*$ . Somit ist  $U^\perp$  invariant unter  $f$ .

[iii]  $\implies$  ii] Es sei  $v_1 \in V$  ein normierter Eigenvektor von  $V$ . Da  $U_1 := \langle v_1 \rangle$  invariant unter  $f$  ist, ist auch  $U_1^\perp$  invariant unter  $f$ . Es sei  $v_2 \in U_1^\perp$  ein normierter Eigenvektor von  $f|_{U_1^\perp}$  und  $U_2 := \langle v_1, v_2 \rangle$ . Iterativ ergeben sich somit orthonormale  $v_1, \dots, v_n \in V$  für alle  $1 \leq n \leq \dim V$ . Insbesondere ist  $(v_1, \dots, v_{\dim V})$  eine Orthonormalbasis von  $V$ .  $\square$

**Korollar 4.13.** Für  $A \in M_n(\mathbb{C})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $A$  ist normal.
- ii) Es gibt eine unitäre Matrix  $U \in U(n)$ , so dass  $UAU^{-1} = UAU^*$  in Diagonalgestalt ist.

*Beweis.* Wir versehen  $\mathbb{C}^n$  mit dem Standardskalarprodukt. Die Matrix  $A$  entspricht der linearen Abbildung  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $f(x) = Ax$  für alle  $x \in \mathbb{C}^n$ . Bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{S} = (e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathbb{C}^n$  ist  $M_{\mathcal{S}}(f) = A$  normal. Da  $\mathcal{S}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$  ist, folgt damit, dass  $f$  normal ist.

Es gibt also eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathbb{C}^n$ , so dass  $M_{\mathcal{B}}(f)$  eine Diagonalmatrix ist. Ist  $V \in M_n(\mathbb{C})$  die Matrix, deren Spalten die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind, so gilt  $M_{\mathcal{B}}(f) = V^{-1}AV$ .

Da die Spalten von  $V$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$  sind, ist  $V$  unitär. Folglich ist auch  $U := V^{-1}$  unitär, und  $UAU^{-1} = V^{-1}AV = M_{\mathcal{B}}(f)$  ist eine Diagonalmatrix.  $\square$

**Proposition 4.14.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums  $V$ .

- i)  $f$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $f$  normal mit reellen Eigenwerten ist.
- ii)  $f$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn  $f$  normal mit rein imaginären Eigenwerten ist.
- iii)  $f$  ist genau dann unitär, wenn  $f$  normal ist und alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

*Beweis.* Wir zeigen beispielsweise die dritte Aussage: Da unitäre Endomorphismen normal sind, genügt es zu zeigen, dass ein normaler Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  genau dann unitär ist, wenn alle Eigenwerte von  $f$  Betrag 1 haben.

Da  $f$  normal ist gibt es eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Nun ist  $f$  genau dann unitär, wenn  $M_{\mathcal{B}}(f^*)w = M_{\mathcal{B}}(f^{-1})w$ . Da

$$M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

gilt dies genau dann, wenn  $\lambda_i \overline{\lambda_i} = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Da  $\lambda_i \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2$  zeigt dies die Aussage.  $\square$

**Korollar 4.15.** Es sei  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

- i)  $A$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn es  $U \in U(n)$  gibt, so dass  $UAU^{-1}$  eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.
- ii)  $A$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn es  $U \in U(n)$  gibt, so dass  $UAU^{-1}$  eine Diagonalmatrix mit rein imaginären Diagonaleinträgen ist.
- iii)  $A$  ist genau dann unitär, wenn es  $U \in U(n)$  gibt, so dass  $UAU^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge alle Betrag 1 haben.

**Korollar 4.16.** Es sei  $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

- i) Ist  $V$  ein unitärer Vektorraum mit  $\dim V \geq 1$ , so ist  $\det(U(V)) = S^1$ .
- ii) Für alle  $n \geq 1$  ist  $\det(U(n)) = S^1$ .

### 4.3 Normalenformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

**Notation 4.17.** Für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$  sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

**Theorem 4.18.** Für einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines euklidischen Vektorraum  $V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $f$  ist normal.
- ii) Es gibt eine geordnete Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ ,  $r_1, \dots, r_t > 0$  und  $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in (0, \pi)$ .

Dabei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  die Eigenwerte von  $f$ , und die Paare  $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_t, \varphi_t)$  sind eindeutig bis auf Permutation.

**Korollar 4.19.** Für einen Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $A$  ist normal.

ii) Es gibt eine Matrix  $O \in O(n)$ , so dass

$$OAO^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_t D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ ,  $r_1, \dots, r_t > 0$  und  $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in (0, \pi)$ .

Dabei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  die Eigenwerte von  $A$ , und die Paare  $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_t, \varphi_t)$  sind eindeutig bis auf Permutation.

**Proposition 4.20.** Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums  $V$ .

- i)  $f$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $f$  normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.18  $t = 0$  gilt, also wenn  $V$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$  besitzt.
- ii)  $f$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn  $f$  normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.18  $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$  und  $\varphi_1 = \dots = \varphi_t = \pi/2$  gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & -r_1 & \\ & & & r_1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -r_t \\ & & & & & r_t & 0 \end{pmatrix}$$

- iii)  $f$  ist genau dann orthogonal, wenn  $f$  normal ist und in der Normalenform von Theorem 4.18  $\lambda_i = \pm 1$  für alle  $i = 1, \dots, s$  und  $r_1 = \dots = r_t = 1$  gilt:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_t) \end{pmatrix}$$

**Korollar 4.21.** Es sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

- i)  $A$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $A$  normal ist, und in der Normalenform von Korollar 4.19  $t = 0$  gilt, also wenn es  $O \in O(n)$  gibt, so dass  $OAO^{-1}$  in Diagonalgestalt ist.
  - ii)  $A$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn  $A$  normal ist und in der Normalenform von Korollar 4.19  $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$  und  $\varphi_1 = \dots = \varphi_t = \pi/2$  gilt.
  - iii)  $A$  ist genau dann orthogonal, wenn  $A$  normal ist und in der Normalenform von Korollar 4.19  $\lambda_i = \pm 1$  für alle  $i = 1, \dots, s$  und  $r_1 = \dots = r_t = 1$  gilt.
- Korollar 4.22.** i) Ist  $V$  ein euklidischer Vektorraum mit  $\dim V \geq 1$ , so ist  $\det(O(V)) = \{1, -1\}$ .
- ii) Für alle  $n \geq 1$  ist  $\det(O(n)) = \{1, -1\}$ .

## 4.4 Orthogonale Projektionen

**Lemma 4.23.** Sind  $U, W \subseteq V$  Untervektorräume eines  $K$ -Vektorraums  $V$  mit  $V = U \oplus W$ , so gibt es genau eine lineare Abbildung  $P: V \rightarrow V$  mit

$$P(u + w) = u \quad \text{für alle } u \in U, w \in W.$$

**Definition 4.24.** i) In der Situation von Lemma 4.23 heißt  $P$  die *Projektion auf  $U$  entlang  $W$* .

- ii) Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums  $V$ , so heißt die Projektion auf  $U$  entlang  $U^\perp$  die *orthogonale Projektion auf  $U$* . Sie ist die eindeutige lineare Abbildung  $P: V \rightarrow V$  mit  $P(u + w) = u$  für alle  $u \in U$  und  $w \in U^\perp$ .

**Proposition 4.25.** i) Für einen Endomorphismus  $P: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a) Es gilt  $P^2 = P$ .
  - b)  $P$  ist die Projektion auf  $\text{im}(P)$  entlang  $\ker(P)$ .
- ii) Für einen Endomorphismus  $P: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums  $V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:
- a) Es gilt  $P^2 = P$  und  $P$  ist normal.
  - b)  $P$  ist die orthogonale Projektion auf  $\text{im}(P)$ .

**Korollar 4.26.** Ein Endomorphismus  $P: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums ist genau dann die orthogonale Projektion auf  $\text{im}(P)$ , wenn es eine geordnete Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

## 4.5 Polarzerlegung

**Definition 4.27.** i) Ein selbstadjungierter Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines Skalarproduktraums  $V$  heißt *positiv*, wenn alle Eigenwerte von  $f$  positiv sind.

ii) Eine selbstadjungierte Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  heißt positiv, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.

**Lemma 4.28.** i) Ist  $V$  ein Skalarproduktraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Automorphismus, so sind  $ff^*$  und  $f^*f$  positiv selbstadjungiert.

ii) Für alle  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  sind  $AA^*$  und  $A^*A$  positiv selbstadjungiert.

**Proposition 4.29** (Wurzeln). i) Ist  $f: V \rightarrow V$  ein positiver selbstadjungierter Endomorphismus, so gibt es einen eindeutigen positiven selbstadjungierten Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = g^2$ .

ii) Ist  $A \in M_n(\mathbb{K})$  positiv selbstadjungiert, so gibt es eine eindeutige positive selbstadjungierte Matrix  $B \in M_n(\mathbb{K})$  mit  $A = B^2$ .

**Theorem 4.30** (Polarzerlegung). Ist  $f \in GL(V)$  für einen Skalarproduktraum  $V$ , so gibt es eindeutige positive selbstadjungierte Endomorphismen  $s_1, s_2: V \rightarrow V$  und eindeutige  $u_1, u_2 \in U(V)$  (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), bzw.  $u_1, u_2 \in O(V)$  (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) mit

$$f = u_1 s_1 = s_2 u_2.$$



## 5 Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen

### 5.1 Definition quadratischer Formen

**Definition 5.1.** Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, so ist eine Abbildung  $q: V \rightarrow K$  eine *quadratische Form* wenn es eine symmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$  gibt, so dass

$$q(v) = \langle v, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

**Lemma 5.2** (Polarisationsformel). Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\text{char}(K) \neq 2$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform und  $q: V \rightarrow K$  die zugehörige quadratische Form, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

**Korollar 5.3.** Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\text{char}(K) \neq 2$ , so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Bilinearformen } V \times V \rightarrow K\} &\rightarrow \{\text{quadratische Formen } V \rightarrow K\}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle &\mapsto (v \mapsto \langle v, v \rangle) \end{aligned}$$

eine Bijektion.

**Definition 5.4.** Es sei  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform.

- i) Zwei Vektoren  $u, w \in V$  sind *orthogonal (zueinander)* bezüglich  $\beta$  falls  $\beta(u, w) = 0$ .
- ii) Zwei Untervektorräume  $U, W \subseteq V$  heißen *orthogonal (zueinander)* bezüglich  $\beta$  falls  $\beta(u, w) = 0$  für alle  $u \in U$  und  $w \in W$ .
- iii) Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so ist der Untervektorraum

$$U^\perp = \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $U$  in  $V$  bezüglich  $\beta$ .

- iv) Der Untervektorraum

$$\text{rad}(\beta) := \{v \in V \mid \beta(t, v) = 0 \text{ für alle } t \in V\}$$

ist das *Radikal* von  $\beta$ .

### 5.2 Darstellende Matrizen für Bilinearformen

**Lemma 5.5.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  eine geordnete Basis von  $V$  und  $\mathcal{C}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  die duale Basis von  $V^*$ . Für eine Matrix  $B \in M_n(K)$  und Bilinearform  $\beta: V \times V \rightarrow K$  sind die folgende Bedingungen äquivalent:

- i) Für alle  $i, j = 1, \dots, n$  ist  $B_{ij} = \beta(v_i, v_j)$ .

ii) Für die lineare Abbildung  $\Phi: V \rightarrow V^*, v \mapsto \beta(-, v)$  ist  $B = M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}^*}(\Phi)$ .

**Definition 5.6.** In der Situation von Lemma 5.5 ist  $B$  die *darstellende Matrix* von  $\beta$  bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$ , und wird mit  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  notiert.

**Lemma 5.7.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\mathcal{C}$  eine geordnete Basis von  $V$ , so ist die Abbildung

$$M_{\mathcal{C}}: \{\text{Bilinearformen } V \times V \rightarrow K\} \rightarrow M_n(K), \quad \beta \mapsto M_{\mathcal{C}}(\beta)$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen.

**Lemma 5.8.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform und  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  eine geordnete Basis von  $V$ . Für den induzierten Isomorphismus

$$\Phi: V \rightarrow K^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

gilt die Identität

$$\beta(v_1, v_2) = \Phi(v_1)^T M_{\mathcal{C}}(\beta) \Phi(v_2) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

**Korollar 5.9.** Ist  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$ , so ist  $\beta$  genau dann symmetrisch, wenn für jede geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$  die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  symmetrisch ist.

**Lemma 5.10.** Ist  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und sind  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  zwei geordnete Basen von  $V$ , so ist

$$M_{\mathcal{D}}(\beta) = (T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^T M_{\mathcal{C}}(\beta) T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}.$$

### 5.3 Nicht-entartete Bilinearformen

**Definition 5.11.** Eine symmetrische Bilinearform  $\beta: V \times V \rightarrow K$  heißt *nicht-entartet*, falls es für jedes  $v \in V$  mit  $v \neq 0$  ein  $w \in V$  mit  $\beta(w, v) \neq 0$  gibt.

**Proposition 5.12.** Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i) Die Bilinearform  $\beta$  ist nicht-entartet.
- ii) Es gilt  $\text{rad}(\beta) = 0$ .
- iii) Die lineare Abbildung  $\Phi: V \rightarrow V^*, v \mapsto \beta(-, v)$  ist injektiv.

Ist  $V$  endlichdimensional, so kommen die folgenden Bedingungen hinzu:

- iv)  $\Phi$  ist ein Isomorphismus.

v) Für jede geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$  ist die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  invertierbar.

*Beweis.* [i]  $\iff$  [ii] Folgt direkt aus Definition von  $\text{rad}(\beta)$ .

[ii]  $\iff$  [iii] Folgt durch  $\text{rad}(\beta) = \ker \Phi$ .

[iii]  $\iff$  [iv] Folgt wegen  $\dim V < \infty$ .

[iv]  $\iff$  [v] Folgt wegen  $M_{\mathcal{C}}(\beta) = M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}^*}(\Phi)$ .  $\square$

**Proposition 5.13.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische, nicht-entartete Bilinearform und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann gilt  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$  und  $(U^\perp)^\perp = U$ .

*Beweis.* Die Abbildung  $\rho: V^* \rightarrow U^*$ ,  $\psi \mapsto \psi|_U$  ist surjektiv, und  $\Phi: V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto \beta(-, v)$  ist bijektiv. Also ist  $\rho \circ \Phi$  surjektiv. Da  $\ker(\rho \circ \Phi) = U^\perp$  folgt die erste Aussage wegen  $\dim U = \dim U^*$  aus der Dimensionsformel. Die zweite Aussage folgt wegen  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$  und

$$\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim U. \quad \square$$

**Proposition 5.14.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform. Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Die Einschränkung  $\beta|_{U \times U}$  ist nicht-entartet.

ii) Es ist  $U \cap U^\perp = 0$ .

iii) Es ist  $U + U^\perp = V$ .

iv) Es ist  $V = U \oplus U^\perp$ .

## 5.4 Normalenformen und Sylvesterscher Trägheitssatz

**Theorem 5.15.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit  $\text{char}(K) \neq 2$  und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Die Anzahl der Nullen auf der Diagonalen ist eindeutig bestimmt und entspricht  $\dim \text{rad}(\beta)$ .

**Lemma 5.16.** Ist  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine nicht-entartete Bilinearform mit  $V \neq 0$  und  $\text{char}(K) \neq 2$ , so gibt es für die zugehörige quadratische Form  $q: V \rightarrow K$  ein  $v \in V$  mit  $q(v) \neq 0$ .

*Beweis von Theorem 5.15.* Ist  $\beta$  nicht-entartet, so gibt es einen Untervektorraum  $U \subseteq V$  mit  $V = U \oplus \text{rad}(\beta)$ . Ist  $\mathcal{C}' = (u_1, \dots, u_n)$  eine Basis von  $U$  und  $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_m)$  eine Basis von  $\text{rad}(\beta)$ , so gilt für die Basis  $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$  von  $V$ , dass

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{C}'}(\beta|_{U \times U}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es genügt daher die Aussage für nicht-entartete Bilinearformen zu zeigen.

Es sei also  $\beta$  nicht-entartet. Wir nutzen Induktion über  $\dim V$ ; für  $\dim V = 0$  ist nichts zu zeigen. Es sei nun  $\dim V > 0$ . Dann gibt es ein  $v_1 \in V$  mit  $q(v_1) \neq 0$ , und es sei  $U := \langle v_1 \rangle$ . Dann ist  $\beta|_{U \times U}$  nicht-entartet und deshalb  $V = U \oplus U^\perp$  mit  $\dim U^\perp = \dim V - 1$ . Per Induktionsvoraussetzung gibt es eine Basis  $\mathcal{D} = (v_2, \dots, v_n)$  von  $U^\perp$ , so dass

$$M_{\mathcal{D}}(\beta|_{U^\perp \times U^\perp}) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 2, \dots, n$ . Dann ist  $\mathcal{C} := (v_1, v_2, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , und für  $\lambda_1 := q(v_1) \neq 0$  gilt

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

**Korollar 5.17.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum, wobei  $\text{char}(K) \neq 2$  und  $K$  quadratisch abgeschlossen ist. Ist  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform, so gibt es eine geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0. \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der Nullen auf der Diagonalen ist eindeutig bestimmt und entspricht  $\dim \text{rad}(\beta)$ .

**Korollar 5.18** (Sylvesterscher Trägheitssatz). Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform.

i) Es eine geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ , so dass

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0_t \end{pmatrix}$$

mit  $I_n \in M_n(\mathbb{R})$  und  $0_m \in M_m(\mathbb{R})$ .

ii) Ist  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t)$  und

$$\begin{aligned} D_+ &:= \langle u_1, \dots, u_r \rangle, \\ D_- &:= \langle v_1, \dots, v_s \rangle, \\ S_+ &:= \langle u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t \rangle, \\ S_- &:= \langle v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t \rangle, \end{aligned}$$

so ist  $\beta|_{D_+ \times D_+}$  positiv definit,  $\beta|_{D_- \times D_-}$  ist negativ definit,  $\beta|_{S_+ \times S_+}$  ist positiv semidefinit und  $\beta|_{S_- \times S_-}$  ist negativ semidefinit. Außerdem ist  $\text{rad}(\beta) = \langle w_1, \dots, w_t \rangle$ .

iii) Es gilt

$$\begin{aligned} r &= \max \{ \dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist positiv definit.} \} \\ s &= \max \{ \dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist negativ definit.} \} \\ r + t &= \max \{ \dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist positiv semidefinit.} \} \\ s + t &= \max \{ \dim W \mid W \subseteq V \text{ ist ein UVR und } \beta|_{W \times W} \text{ ist negativ semidefinit.} \} \end{aligned}$$

Insbesondere ist das Tupel  $(r, s, t)$  durch  $\beta$  eindeutig bestimmt.

iv)  $\beta$  ist genau dann

- a) positiv definit, wenn  $r = \dim V$ ,
- b) negativ definit, wenn  $s = \dim V$ ,
- c) positiv semidefinit, wenn  $r + t = \dim V$ ,
- d) negativ semidefinit, wenn  $s + t = \dim V$ ,
- e) nicht-entartet, wenn  $t = 0$ .

**Lemma 5.19.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine symmetrische Bilinearform und  $U, W \subseteq V$  seien zwei Untervektorräume, so dass  $\beta|_{U \times U}$  positiv definit und  $\beta|_{W \times W}$  negativ semidefinit ist, bzw.  $\beta|_{U \times U}$  positiv semidefinit und  $\beta|_{W \times W}$  negativ definit ist. Dann ist  $U \cap W = 0$ .

**Definition 5.20.** Es sei  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ . Ist  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , so ist  $\beta$  genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren der Matrix  $M_{\mathcal{C}}(\beta)$  positiv sind.

## 6 Hauptachsentransformation

Handschriftliche Notizen.

## 7 Topologische Eigenschaften ausgewählter Matrixgruppen

### 7.1 Definition der Gruppen

**Definition 7.1.** Für alle  $n \geq 1$  seien

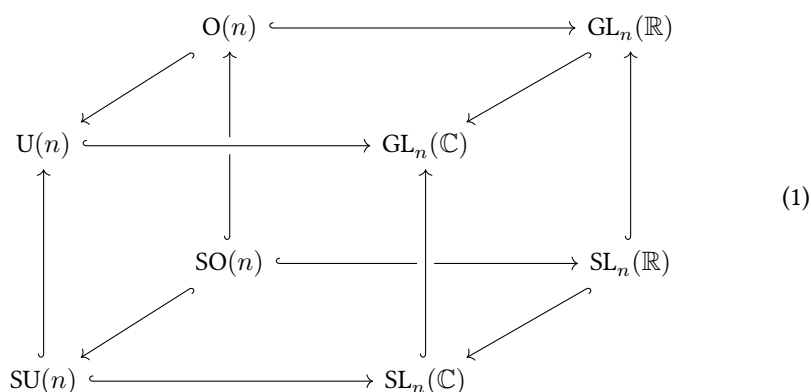
$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n(K) &:= \{S \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det S = 1\}, \\ \mathrm{SU}(n) &:= \{S \in \mathrm{U}(n) \mid \det S = 1\} = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \\ \mathrm{SO}(n) &:= \{S \in \mathrm{O}(n) \mid \det S = 1\} = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

**Proposition 7.2.** i) Für jeden Körper  $K$  ist  $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$  eine Untergruppe.

ii) Die Teilmengen  $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  sind Untergruppen.

iii) Die Teilmengen  $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  sind Untergruppen.

iv) Es gelten die folgenden Untergruppenrelationen:



**Bemerkung 7.3.** Man beachte die verschiedenen gegenüberliegenden Seiten des Würfels: Der Boden des Würfels entsteht aus dem Deckel durch die zusätzliche Bedingung  $\det S = 1$ . Der Rücken des Würfels ist die reelle Version, die Vorderseite die komplexe Version. Die linke Seite des Würfels entsteht aus der rechten, indem man Kompatibilität mit dem Skalarprodukt fordert.

### 7.2 Gruppentheoretische Begriffe

**Definition 7.4.** Ist  $\phi: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus, so ist

$$\ker(\phi) := \{g \in G \mid \phi(g) = 1\}$$

der *Kern* von  $\phi$ .

**Lemma 7.5.** Ist  $\phi$  ein Gruppenhomomorphismus, so ist  $\ker(\phi)$  eine Untergruppe von  $G$ .



**Proposition 7.6.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  eine Untergruppe. Durch

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in N \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G$$

wird eine Äquivalenzrelation auf  $G$  definiert, und für  $G/N := G/\sim$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i) Für alle  $g \in G$  ist  $gN = Ng$ .
- ii) Für alle  $g \in G$  ist  $gNg^{-1} = N$ .
- iii) Für alle  $g \in G$  ist  $gNg^{-1} \subseteq N$ .
- iv) Die Multiplikation  $\cdot: (G/N) \times (G/N) \rightarrow G/N$  mit

$$\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} := \overline{g_1 \cdot g_2} \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G$$

ist wohldefiniert.  $(G/N)$  ist mit dieser Multiplikation automatisch eine Gruppe. Dies ist dann die eindeutige Gruppenstruktur auf  $G/N$ , so dass die kanonische Projektion  $\rho: G \rightarrow G/N, g \mapsto \overline{g}$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Es gilt dann  $N = \ker \rho$ .

- v) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus  $\phi: G \rightarrow H$  mit  $N = \ker \phi$ .

**Definition 7.7.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  eine Untergruppe. Der *Index* von  $N$  in  $G$  ist  $[G : N] := |G/N|$ . Ist eine der Bedingungen von Proposition 7.6 erfüllt (und damit alle Bedingungen), so ist die Untergruppe  $N$  ein *Normalteiler* in  $G$ .

**Bemerkung 7.8.** Untergruppen vom Index 2 sind immer normal.

**Bemerkung 7.9.** Ist  $N \subseteq G$  eine Untergruppe, so ist die Äquivalenzklasse von  $g \in G$  bezüglich der in Proposition 7.6 definierten Äquivalenzrelation genau die sogenannte *Linksnebenklasse*  $gN = \{gn \mid n \in N\}$ . Die Äquivalenzklasse von  $g$  ist also eine (um  $g$  verschobene) Kopie von  $N$ . Insbesondere ist  $|gN| = |N|$ , und somit

$$|G| = [G : N] \cdot |N|.$$

Zur Berechnung des Index einer Untergruppe wollen wir den folgenden Satz zitieren:

**Theorem 7.10** (1. Isomorphiesatz). Ist  $\phi: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus, so induziert  $\phi$  einen Gruppenisomorphismus  $\psi: G/\ker(\phi) \rightarrow \text{im}(\phi)$  mit  $\psi(\overline{g}) = \phi(g)$  für alle  $g \in G$ .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ g \mapsto \overline{g} \downarrow & \nearrow \psi & \\ G/\ker(\phi) & & \end{array}$$

**Korollar 7.11.** Ist  $\phi: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus, so ist  $[G : \ker \phi] = |\text{im } \phi|$ .

**Proposition 7.12.** Es sei  $n \geq 1$ .

- i) Für jeden Körper  $K$  ist  $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$  eine normale Untergruppe mit Index

$$[\mathrm{GL}_n(K) : \mathrm{SL}_n(K)] = |K^\times| = |K| - 1.$$

Inbesondere ist  $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})] = \infty$  und  $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})] = \infty$ .

- ii)  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$  ist eine normale Untergruppe von  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  mit  $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+] = 2$ .

- iii)  $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n)$  ist eine normale Untergruppe mit  $[\mathrm{U}(n) : \mathrm{SU}(n)] = \infty$ .

- iv)  $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{O}(n)$  ist eine normale Untergruppe mit  $[\mathrm{O}(n) : \mathrm{SO}(n)] = 2$ .

Inbesondere ist im Würfel (1) der Boden normal im Deckel.

### 7.3 Topologische Begriffe

**Definition 7.13.** Es sei  $X$  ein metrischer Raum. Ein *Weg* in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ . Für  $x := \gamma(0)$  und  $y := \gamma(1)$  ist  $\gamma$  ein *Weg von  $x$  nach  $y$*  in  $X$ .

**Lemma 7.14.** Ist  $X$  ein metrischer Raum, so wird durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y.$$

eine Äquivalenzrelation auf  $X$  definiert.

**Definition 7.15.** Es sei  $X$  ein metrischer Raum. Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation aus Lemma 7.14 heißen *Wegzusammenhangskomponenten* von  $X$ .  $X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es nur eine Wegzusammenhangskomponente gibt, d.h. wenn es für alle  $x, y \in X$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt.

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn  $Y$  bezüglich der Metrik  $d|_{Y \times Y}$  wegzusammenhängend ist.

**Definition 7.16.** Ein metrischer Raum  $X$  heißt *unzusammenhängend*, wenn es disjunkte, offene, echte Teilmengen  $U_1, U_2 \subseteq X$  gibt, so dass  $X = U_1 \cup U_2$ . Ist  $X$  heißt *zusammenhängend*, wenn  $X$  nicht unzusammenhängend ist.

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt (un)zusammenhängend, wenn  $Y$  bezüglich  $d|_{Y \times Y}$  (un)zusammenhängend ist.

**Proposition 7.17.** Es seien  $X$  und  $Y$  zwei metrische Räume.

- i) Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  auch zusammenhängend.
- ii) Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $Z \subseteq X$  eine (weg)zusammenhängende Teilmenge, so ist auch  $f(Z) \subseteq Y$  (weg)zusammenhängend.
- iii) Sind  $Z_1, Z_2 \subseteq X$  zwei (weg)zusammenhängende Teilmengen mit  $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ , so ist auch  $Z_1 \cup Z_2$  (weg)zusammenhängend.

iv) Durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt eine zusammenhängende Teilmenge } Z \subseteq X \text{ mit } x, y \in Z$$

wird eine Äquivalenzrelation auf  $X$  definiert.

**Definition 7.18.** Ist  $X$  ein metrischer Raum, so sind die Äquivalenzklassen bezüglich  $\sim$  wie in Proposition 7.17 die *Zusammenhangskomponenten* von  $X$ .

**Bemerkung 7.19.** Die Zusammenhangskomponenten von  $X$  sind die maximalen zusammenhängenden Teilmengen von  $X$ . Jede zusammenhängende Teilmenge  $Z \subseteq X$  ist in einer der Zusammenhangskomponenten von  $X$  enthalten. Insbesondere ist jede Wegzusammenhangskomponente in einer Zusammenhangskomponente enthalten.

## 7.4 Topologie auf Matrixgruppen

Im Folgenden fixieren wir eine Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $M_n(\mathbb{C})$ . Die Norm induziert eine Metrik  $d$  auf  $M_n(\mathbb{C})$  durch  $d(A, B) := \|A - B\|$ . Jede Teilmenge  $X \subseteq M_n(\mathbb{C})$  erbt durch die Einschränkung  $d|_{X \times X}$  die Struktur eines metrischen Raums.

**Lemma 7.20.** Es sei  $n \geq 1$ .

i) Die Projektionen  $p_{ij}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $i, j = 1, \dots, n$  und

$$p_{ij}(A) := A_{ij} \quad \text{für alle } A \in M_n(\mathbb{C}).$$

sind stetig.

ii) Ist  $X$  ein metrischer Raum, so ist eine Abbildung  $f = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n}: X \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  genau dann stetig, wenn  $f_{ij}$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  stetig ist.

**Theorem 7.21.** Es sei  $n \geq 1$ .

i) Die Teilmengen  $SL_n(\mathbb{C}), U(n), SU(n), SL_n(\mathbb{R}), O(n), SO(n) \subseteq M_n(\mathbb{C})$  sind abgeschlossen.

ii) Die Teilmengen  $GL_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$  und  $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$  sind offen.

iii) Als Teilmenge von  $O(n)$  ist  $SO(n)$  auch offen.

iv) Die Gruppen  $U(n), O(n), SU(n)$  und  $SO(n)$  sind kompakt.

**Bemerkung 7.22.** Ist  $A \subseteq Y \subseteq X$  und  $A$  abgeschlossen in  $X$ , so ist  $A$  auch abgeschlossen in  $Y$ . Dementsprechende ergeben sich aus 7.21 noch weitere Aussagen. So ist etwa  $SL_n(\mathbb{C})$  abgeschlossen in  $GL_n(\mathbb{C})$  und  $SO(n)$  abgeschlossen in  $O(n)$ .

**Theorem 7.23.** Es sei  $n \geq 1$ .

i) Die Gruppe  $GL_n(\mathbb{C})$  ist wegzusammenhängend.

ii) Die Gruppe  $SL_n(\mathbb{C})$  ist wegzusammenhängend.

iii) Die Gruppe  $U(n)$  ist wegzusammenhängend.

iv) Die Gruppe  $SU(n)$  ist wegzusammenhängend.

v) Die Gruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$GL_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$$

und

$$GL_n(\mathbb{R})^- := \{S \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det S < 0\}.$$

vi) Die Gruppe  $SL_n(\mathbb{R})$  ist wegzusammenhängend.

vii) Die Gruppe  $O(n)$  besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$SO(n) = \{S \in O(n) \mid \det S = 1\} \quad \text{und} \quad SO(n)^- := \{S \in O(n) \mid \det S = -1\}.$$

viii) Die Gruppe  $SO(n)$  ist wegzusammenhängend.

## 7.5 Koordinatenfreie Version

Ist  $V$  ein Skalarprodukt Vektorraum mit  $n := \dim V \geq 1$ . Wir fixieren eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .

Ist  $\mathcal{C}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , so ist der Isomorphismus

$$M_{\mathcal{C}}: \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad f \mapsto M_{\mathcal{C}}(f)$$

auch ein Homöomorphismus und induziert Homöomorphismen und Gruppenisomorphismen  $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{K})$ ,  $SL(V) \cong SL_n(\mathbb{K})$  sowie  $O(V) \cong O(n)$  und  $SO(V) \cong SO(n)$ , bzw.  $U(V) \cong U(n)$  und  $SU(V) \cong SU(n)$ .

Inbesondere gelten die obigen Resultate für  $GL(V)$  und  $SL(V)$ , sowie  $O(V)$  und  $SO(V)$ , bzw.  $U(V)$  und  $SU(V)$ .

## 8 Orientierung

Im Folgenden sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

### 8.1 Definition von Orientierung

[Male Bild aus Fischer.]

Idee: Wollen zwischen positiv und negativ orientierten Basen unterscheiden.

**Lemma 8.1.** Es seien  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$  zwei Basen von  $V$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i) Für den eindeutigen Automorphismus  $\Phi: V \rightarrow V$  mit  $\Phi(v_i) = w_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt  $\det(\Phi) > 0$ .
- ii) Für alle alternierende  $n$ -Linearformen  $\omega: V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_n) > 0 \iff \omega(w_1, \dots, w_n) > 0.$$

*Beweis.* Für jede alternierende  $n$ -Linearform  $\omega: V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \omega(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)) = \det(\Phi) \cdot \omega(v_1, \dots, v_n). \quad \square$$

**Definition 8.2.** Zwei geordnete Basen von  $V$  heißen *gleichorientiert*, wenn sie die Bedingungen aus Lemma 8.1 erfüllen.

**Lemma 8.3.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so ist Gleichorientiertheit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geordneten Basen von  $V$ .

**Definition 8.4.** Es sei  $A$  der eindimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der alternierenden  $n$ -Linearformen  $V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Für alle  $\omega_1, \omega_2 \in A \setminus \{0\}$  sei

$$\omega_1 \sim \omega_2 \iff \text{es gibt } \lambda > 0 \text{ mit } \omega_2 = \lambda \omega_1.$$

**Lemma 8.5.** In der Situation von Definition 8.4 definiert  $\sim$  eine Äquivalenzrelation.

**Bemerkung 8.6.** Es gibt nun vier Möglichkeiten eine Orientierung auf  $V$  anzugeben:

- Man gibt eine geordnete Basis  $\mathcal{B}$  als positiv orientiert vor. Eine geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$  heißt dann positiv orientiert, wenn sie gleichorientiert zu  $\mathcal{B}$  ist.
- Man wählt eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation der Gleichorientiertheit. Eine geordnete Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$  heißt dann positiv orientiert, wenn sie in dieser Äquivalenzklasse enthalten ist.
- Man gibt eine alternierende  $n$ -Linearform  $\omega: V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$  vor. Eine geordnete Basis  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  heißt dann positiv orientiert, wenn  $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ .
- Man gibt eine Äquivalenzklasse  $O$  von alternierenden  $n$ -Linearformen bezüglich  $\sim$  an. Eine geordnete Basis  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  heißt dann positiv orientiert, wenn  $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$  für alle  $\omega \in O$ .

**Definition 8.7.** Eine Orientierung auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse bezüglich  $\sim$  wie in Definition 8.4.

**Bemerkung 8.8.** Im Fall  $V = \mathbb{R}^n$  wählt man  $d$  meistens durch  $d(e_1, \dots, e_n) = 1$ . Dies ist die *Standardorientierung* von  $\mathbb{R}^n$ .

## 8.2 Normiertheit von alternierenden $n$ -Linearformen

**Theorem 8.9.** Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Skalarproduktraum für  $\dim V \geq 1$ . Für jede alternierende  $n$ -Linearform  $d: V^{\times n} \rightarrow K$  mit  $d \neq 0$  gibt es eine eindeutige positive reelle Zahl  $c_d$ , so dass

$$\begin{vmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, w_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, w_n \rangle \end{vmatrix} = c_d d(v_1, \dots, v_n) \overline{d(w_1, \dots, w_n)}$$

für alle  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in V$ .

**Definition 8.10.** Eine alternierende  $n$ -Linearform auf einem  $n$ -dimensionalen Skalarproduktraum  $V \neq 0$  heißt *normiert*, falls  $c_d = 1$ .

**Lemma 8.11.** Ist  $V \neq 0$  ein  $n$ -dimensionaler Skalarproduktraum und  $d: V^{\times n} \rightarrow \mathbb{K}$  eine alternierende  $n$ -Linearform, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- i)  $d$  ist normiert.
- ii) Es gibt eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  mit  $|d(v_1, \dots, v_n)| = 1$ .
- iii) Für jede Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  gilt  $|d(v_1, \dots, v_n)| = 1$ .

*Beweis.* Für jede Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  gilt  $c_d = 1/|d(v_1, \dots, v_n)|^2$ .  $\square$

**Lemma 8.12.** Es sei  $V \neq 0$  ein Skalarproduktraum und  $\omega_1: V^{\times n} \rightarrow \mathbb{K}$  eine normierte alternierende  $n$ -Linearform. Dann ist eine alternierende  $n$ -Linearform  $\omega_2: V^{\times n} \rightarrow \mathbb{K}$  genau dann normiert, wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{K}$  mit  $|\lambda| = 1$  und  $\omega_1 = \lambda \omega_2$  gibt.

## 8.3 Normierte, alternierende $n$ -Linearformen

Im Folgenden sei  $V \neq 0$  ein euklidischer Vektorraum und  $d: V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$  eine normierte, alternierende  $n$ -Linearform. Indem wir diese als positiv auszeichnen, erhalten wir eine Orientierung auf  $V$ .

**Definition 8.13.** Es sei  $\dim V = 2$ . Für  $v_1, v_2 \in V$  mit  $v_1, v_2 \neq 0$  ist der unorientierte Winkel zwischen  $v_1, v_2$  das eindeutige Element  $\theta \in [0, 2\pi)$  mit

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \quad \text{und} \quad \sin(\theta) = \frac{d(v, w)}{\|v\| \|w\|}.$$

**Lemma 8.14.** Es sei  $V$  ein dreidimensionaler orientierter, euklidischer Vektorraum. Ist  $d$  die eindeutige positive, normierte alternierende  $n$ -Linearform auf  $V$ , so gibt es für alle  $v_1, v_2 \in V$  ein eindeutiges Element  $v_1 \times v_2 \in V$  mit

$$\langle v_1 \times v_2, w \rangle = d(v_1, v_2, w) \quad \text{für alle } w \in V.$$

**Definition 8.15.** In der Situation von Lemma 8.14 heißt  $v_1 \times v_2$  das *Vektorprodukt von  $v_1$  und  $v_2$* .

**Theorem 8.16** (Eigenschaften des Vektorprodukts). Es sei  $V$  wie in Lemma 8.14.

- i) Die Abbildung  $V \times V \rightarrow V, (v_1, v_2) \mapsto v_1 \times v_2$  ist bilinear und alternierend.
- ii) Ist  $(v_1, v_2, v_3)$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , so gilt

$$v_1 \times v_2 = v_3, \quad v_1 \times v_3 = -v_2, \quad v_2 \times v_3 = v_1.$$

Allgemeiner gilt

$$\begin{aligned} & (a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) \times (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) v_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) v_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v_3. \end{aligned}$$

- iii) Es gilt die Jacobi-Identität

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0 \quad \text{für alle } u, v, w \in V.$$

- iv) Es gilt

$$\langle v_1 \times v_2, w_1 \times w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \langle v_2, w_1 \rangle.$$

- v) Es gilt

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

- vi) Ist  $\theta$  der unorientierte Winkel zwischen  $v_1, v_2 \in V$  mit  $v_1, v_2 \neq 0$ , so gilt

$$\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\| \|v_2\| \sin(\theta).$$