Lineare Algebra II Repetitorium
Übungen, Tag 2

Jendrik Stelzner

20. September 2016

Übung 1.
Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei kommutierende Endomorphismen eines K-Vektorraums V.

1. Zeigen Sie, dass $V_\lambda(f)$ für alle $\lambda \in K$ invariant unter g ist.
2. Entscheiden Sie, ob auch $V_\lambda^\sim(f)$ für alle $\lambda \in K$ invariant unter g ist.

Es seien nun $H, E\colon V \to V$ zwei Endomorphismen mit $HE - EH = 2E$.

3. Zeigen Sie, dass $E(V_\lambda(H)) \subseteq V_{\lambda+2}(H)$ für alle $\lambda \in K$.

Übung 2.
Beweisen Sie die Chauchy-Schwarz-Ungleichung.

Übung 3.
Es sei V ein Skalarproduktraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren mit $v_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie, dass die Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist, wenn sie orthogonal ist. Entscheiden Sie, ob auch die Umkehrung gilt.

Übung 4.
Es sei V eine endlichdimensionaler Skalarproduktraum.

1. Zeigen Sie, dass eine Famlie $(v_1, \dots, v_m)$ genau dann orthonormal ist, wenn sie sich durch das Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens nicht ändert.
2. Zeigen Sie, dass sich jede orthonormale Familie $(v_1, \dots, v_m)$ von Vektoren $v_i \in V$ zu einer Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ von V ergänzen lässt.
3. Folgern Sie, dass V eine Orthonormalbasis besitzt.
4. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Gleichheit $V = U \oplus U^\perp$ gilt.

Übung 5.
Es sei V ein Skalarproduktraum.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$
wohldefiniert und $\mathbb{R}$-linear, bzw. $\mathbb{C}$-antilinear ist.

2. Zeigen Sie, dass Φ injektiv ist.

Von nun an sei V zusätzlich endlichdimensional, und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Orthonormalbasis von V.

3. Folgern Sie, dass Φ ein Isomorphismus ist.

4. Zeigen Sie, dass $\Phi(\mathcal{B}) \coloneqq (\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_n))$ mit der zu $\mathcal{B}$ dualen Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ von V^* übereinstimmt.

Übung 6.
Es seien V und W zwei endichdimensionale Skalarprodukträume und $\Phi_V\colon V \to V^*$ und $\Phi_W\colon W \to W^*$ die zugehörigen Isomorphismen mit $\Phi_V(v) = \langle -, v \rangle$ und $\Phi_W(w) = \langle -, w \rangle$ für alle $v \in V$ und $w \in W$.

Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, und $f^T\colon W^* \to V^*$ die zugehörige duale Abbildung, d.h. es ist $f^T(\psi) \coloneqq \psi \circ f$ für alle $\psi \in W^*$.

Zeigen Sie, dass die adjungierte Abbildung $f^*\colon W \to V$ die eindeutig Abbildung ist, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\Phi_W"'] & V \arrow[d, "\Phi_V"] \\
W^* \arrow[r, "f^T"] & V^*
\end{tikzcd}$$

Übung 7.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale Skalarprodukträume. Es sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C}$ eine geordnete Orthonormalbasis von W. Zeigen Sie, dass für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ die Gleichheit $\mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^*$ gilt.

Lösung 2.

Es seien $v, w \in V$. Die Fälle $v = 0$ und $w = 0$ sind klar, es genügt daher den Fall $v, w \neq 0$ zu betrachten. Es ist

$$0 \leq \left\langle v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w, v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle = \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}$$

und somit $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$.

Sind v und w linear abhängig, so gilt $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$, und durch Einsetzen ergibt sich $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\|w\|$. Gilt andererseits die Gleichheit $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\|$, so gilt in der obigen Zeile $0 = v - \langle v, w\rangle / \|w\|^2$, weshalb v und w linear abhängig sind.