Lineare Algebra II Repetitorium
Übungen, Tag 4

Jendrik Stelzner

23. September 2016

Übung 1.
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für alle $n \geq 1$ gelten.

1. Die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind die beiden Untergruppen
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+ = \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\}$$
und
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_- = \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S < 0\}.$$

2. Für alle $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ liegen entweder A und B in derselben Zusammenhangskomponente, oder A und $-B$ liegen in derselben Zusammenhangskomponente.

3. Von den beiden Wegzusammenhangskomponente von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist $\mathrm{O}(n)$ diejenige, welche die Einheitsmatrix enthält.

4. Die schiefsymmetrischen Matrizen $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ bilden eine wegzusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Ist $n \geq 2$, so hat die Gruppe $\mathrm{U}(n) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten.

6. Es ist $G = \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid S^{-1} = -S\}$ eine zusammenhängende, aber nicht wegzusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

7. Jede Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.

8. Die Menge der Drehmatrizen
$$D := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \,\middle|\, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$
ist eine wegzusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Übung 2.
Es sei $n \geq 1$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht zusammenhängend ist.
2. Folgern Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n)$ nicht zusammenhängend sind.
3. Wieso lassen sich die obigen Argumente nicht zu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ verallgemeinern?

Übung 3.
Es sei V ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum und $d \colon V^{\times 3} \to \mathbb{R}$ eine alternierende Trilinearform.

1. Zeigen Sie, dass es für alle $v_1, v_2 \in V$ genau ein $v_1 \times v_2 \in V$ gibt, so dass
$$\langle v_1 \times v_2, w \rangle = d(v_1, v_2, w) \quad \text{für alle } w \in V.$$
2. Zeigen Sie, dass $- \times - \colon V \times V \to V$ bilinear und alternierend ist.

Es sei nun (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von V, so dass $d(v_1, v_2, v_3) = 1$.

3. Zeigen Sie, dass $v_1 \times v_2 = v_3$, $v_1 \times v_3 = -v_2$ und $v_2 \times v_3 = v_1$.
4. Folgern Sie, dass allgemeiner
$$\begin{aligned} &(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) \times (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) v_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) v_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v_3. \end{aligned}$$

Übung 4.
Es sei V ein K-Vektorraum und $[-,-] \colon V \times V \to V$ eine alternierend bilineare Abbildung. Für jedes $x \in V$ sei
$$\mathrm{ad}_x \coloneqq [x, -] \colon V \to V, \quad y \mapsto [x, y].$$
Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. Die alternierende Bilinearform $[-,-]$ erfüllt die Jacobi-Identität, d.h. es ist
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$
2. Es gilt $\mathrm{ad}_x([y, z]) = [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)]$ für alle $x, y, z \in V$. (Man sagt, dass ad_x eine Derivation bezüglich $[-,-]$ ist.)

Übung 5.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $A, B \in V$ seien zwei lineare unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass es genau einen normierten Vektor $\mathfrak{t}_{AB} \in V$ mit den folgenden Bedingungen gibt:

- Es ist $\mathfrak{t}_{AB} \in \mathcal{L}(A, B)$.
- Es gilt $\mathfrak{t}_{AB} \perp A$.
- Es gilt $\langle \mathfrak{t}_{AB}, B \rangle > 0$.

Skizzieren Sie die Situation.