

ALGEBRA I

BLATT 10

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

3. Juli 2014

Aufgabe 1

Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine k -Basis von V und $\{w_1, \dots, w_m\}$ eine k -Basis von W . Für eine Darstellung X von A schreiben wir

$$\rho_X : A \rightarrow \text{End}_k(X), a \mapsto (x \mapsto ax)$$

(a)

Ist $V \cong W$, so gibt es einen Isomorphismus $\varphi : V \rightarrow W$ von Darstellungen von A . Insbesondere ist φ k -linear und somit $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\}$ eine k -Basis von W . Es sei $a \in A$ beliebig aber fest. Bezeichnet A die darstellende Matrix von $\rho_V(a)$ bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$, so ist dies, da φ ein k -Algebrahomomorphismus ist, auch die darstellende Matrix von $\rho_W(a)$ bezüglich $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\}$. Insbesondere ist deshalb

$$\chi_V(a) = \text{tr } A = \chi_W(a).$$

(b)

Es sei $a \in A$ beliebig aber fest. Da a komponentenweise auf $V \oplus W$ wirkt, ist die darstellende Matrix von $\rho_{V \oplus W}$ bezüglich der k -Basis

$$\{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\}$$

von $V \oplus W$ der Form

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

wobei A die darstellende Matrix von $\rho_V(a)$ bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist, und B die darstellende Matrix von $\rho_W(a)$ bezüglich der Basis $\{w_1, \dots, w_m\}$ ist. Insbesondere ist daher

$$\chi_{V \oplus W}(a) = \text{tr } C = \text{tr } A + \text{tr } B = \chi_V(a) + \chi_W(a).$$

(c)

Da $\rho_V(e) = \text{id}_V$ ist die darstellende Matrix von $\rho_V(e)$ bezüglich jeder Basis von V die $n \times n$ -Einheitsmatrix über k , und somit

$$\chi_V(e) = n \bmod \text{char } k = \dim_k(V) \bmod \text{char } k.$$

(d)

Es sei $a \in A$ beliebig aber fest. Bezeichnet A die darstellende Matrix von $\rho_V(a)$ bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$ und B die darstellende Matrix von $\rho_W(a)$ bezüglich $\{w_1, \dots, w_m\}$, so ist, da $\rho_{V \otimes W}(a) = \rho(V)(a) \otimes \rho(W)(a)$, die darstellende Matrix von $\rho_{V \otimes W}(a)$ bezüglich der k -Basis

$$\{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_m\}$$

von $V \otimes W$ von der Form

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\chi_{V \otimes W}(a) = \operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^n a_{ii} \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B = \chi_V(a) \chi_W(a).$$

(e)

Es sei $g \in G$ beliebig aber fest. Bezeichnet A die darstellende Matrix von $\rho_V(g)$ bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$, so ist die A^{-1} die darstellende Matrix von $\rho_V(g^{-1})$ bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $A^* = (A^{-1})^T$ die darstellende Matrix von $\rho_{V^*}(g)$ bezüglich $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$. Deshalb ist

$$\chi_{V^*}(g) = \operatorname{tr} \left((A^{-1})^T \right) = \operatorname{tr} (A^{-1}) = \chi_V(g^{-1}).$$

Aufgabe 2

(a)

Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ wirke auf V , indem $1 \in G$ durch eine Rotation um $2\pi/3$ und $2 \in G$ eine Rotation um $4\pi/3$ (in gleicher Orientierung) wirkt. Es ist klar, dass V so zu einer Darstellung von G wird. Diese ist irreduzibel: Ist $U \subseteq V$ eine Unterdarstellung mit $U \neq 0$, so gibt es $v \in U$ mit $v \neq 0$. Da v und $1.v$ linear unabhängig sind, ist dann bereits $U = \langle v, 1.v \rangle = V$.