Algebra I
Blatt 3

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

8. Mai 2014

Aufgabe 1

(a)

Das Polynom

$$f(x,y) := (x+iy)^{2014}(x-iy)^{2014} = \left(x^2+y^2\right)^{2014}$$

ist symmetrisch, da $f(x,y) = f(y,x)$.

Das Polynom

$$g(x,y) := 4x^3 + 3y^4$$

ist nicht symmetrisch, da $g(x,y) \neq g(y,x)$.

Das Polynom

$$\begin{aligned} h(x,y) &:= x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3 + x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \\ &= x^5 + 3x^4y + 4x^3y^2 + 4x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \end{aligned}$$

ist symmetrisch, da $h(x,y) = h(y,x)$.

(b)

Es ist

$$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{2014} = \left((x+y)^2 - 2xy\right)^{2014} = \left(e_1^2 - 2e_2\right)^{2014}$$

und

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3 + x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \\ &= \left(x^2+y^2\right)\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right) \\ &= \left((x+y)^2 - 2xy\right)(x+y)^3 = \left(e_1^2 - 2e_2\right)e_1^3. \end{aligned}$$

(c)

Wir zeigen, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} = \mathbb{C}[e_1,e_2]$. Da e_1 und e_2 symmetrisch sind, und daher $e_1, e_2 \in \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$, ist klar, dass $\mathbb{C}[e_1,e_2] \subseteq \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$.

Um zu zeigen, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} \subseteq \mathbb{C}[e_1,e_2]$, zeigen wir zunächst per Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $x^n + y^n \in \mathbb{C}[e_1,e_2]$. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies Aussage klar.

Es sei daher $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für $n-1$ und $n-2$, d.h. es gelte $x^{n-1}+y^{n-1}, x^{n-2}+y^{n-2} \in \mathbb{C}[e_1, e_2]$. Dann ist auch

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= \left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)(x+y) - xy\left(x^{n-2}+y^{n-2}\right) \\ &= e_1\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right) - e_2\left(x^{n-2}+y^{n-2}\right) \in \mathbb{C}[e_1, e_2]. \end{aligned}$$

Sei nun $f \in \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$. Wir schreiben f als

$$f(x,y) = \sum_{n,m \geq 0} a_{nm} x^n y^m$$

mit $a_{nm} \in \mathbb{C}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{nm} = 0$ für fast alle $n, m \in \mathbb{N}$. Das f symmetrisch ist, bedeutet, dass $a_{nm} = a_{mn}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$\begin{aligned} f(x,y) = \sum_{n,m \geq 0} a_{nm} x^n y^m &= \sum_{n \geq 0} a_{nn} x^n y^n + \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ n \neq m}} a_{nm} x^n y^m \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{nn} x^n y^n + \sum_{n > m \geq 0} a_{nm}\left(x^n y^m + x^m y^n\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{nn} (xy)^n + \sum_{n > m \geq 0} a_{nm} (xy)^m \left(x^{n-m} + y^{n-m}\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{nn} e_2^n + \sum_{n > m \geq 0} a_{nm} e_2^m \left(x^{n-m} + y^{n-m}\right) \in \mathbb{C}[e_1, e_2]. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} \subseteq \mathbb{C}[e_1, e_2]$.

Aufgabe 2

(a)

Wir schreiben $S_2 = \{e, s\}$ mit $s^2 = e$. Wir definieren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}S_2$ als

$$v_1 := e + s \text{ und } v_2 := e - s.$$

Es ist klar, dass $\{v_1, v_2\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}S_2$ ist, dass wir also eine Zerlegung

$$\mathbb{C}S_2 = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2 \tag{1}$$

von $\mathbb{C}$-Vektorräumen haben. Wir bemerken, dass $\mathbb{C}v_1$ und $\mathbb{C}v_2$ bereits Unterdarstellungen von $\mathbb{C}S_2$ sind, da

$$e.v_1 = v_1, e.v_2 = v_2 \text{ und } s.v_1 = v_1, s.v_2 = -v_2.$$

(Da S_2 linear auf $\mathbb{C}S_2$ wirkt genügt es die entsprechende Abgeschlossenheit unter Gruppenwirkung auf einer Basis nachzurechnen.) Da $\mathbb{C}v_1$ und $\mathbb{C}v_2$ eindimensionale Darstellungen sind, sind $\mathbb{C}v_1$ und $\mathbb{C}v_2$ irreduzibel, und damit insbesondere auch unzerlegbar. Es ist also (1) eine Zerlegung in unzerlegbare Unterdarstellungen, die alle irreduzibel sind.

(b)

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ beliebig aber fest. Für $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zerlegen wir die Darstellung $\mathbb{C}G$ von G in die direkte Summe von n irreduzibeln Unterdarstellungen $U_1, \ldots, U_n$.

Sei hierfür $w \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Schreiben wir $g_k := k + n\mathbb{Z}$ für $k \in \mathbb{Z}$, so definieren wir $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}G$ durch $v_j := \sum_{k=0}^{n-1} w^{(j-1)k}$ für alle $1 \leq j \leq n$, also

$$\begin{aligned}
v_1 &= g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1}, \\
v_2 &= g_0 + wg_1 + w^2 g_2 + \ldots + w^{n-1} g_{n-1}, \\
v_3 &= g_0 + w^2 g_1 + w^4 g_2 + \ldots + w^{2(n-1)} g_{n-1} \\
v_4 &= g_0 + w^3 g_1 + w^9 g_2 + \ldots + w^{3(n-1)} g_{n-1} \\
&\vdots \\
v_n &= g_0 + w^{n-1} g_1 + w^{2(n-1)} g_2 + \ldots + w^{(n-1)(n-1)} g_{n-1}.
\end{aligned}$$

Da w eine primitive n-te Einheitswurzel ist, sind $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$ paarweise verschieden. Da Elemente $v_1, \ldots, v_n$ sind daher linear unabhängig, denn es ist

$$\det \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
1 & w & w^2 & \ldots & w^{n-2} & w^{n-1} \\
1 & w^2 & w^4 & \ldots & w^{2(n-2)} & w^{2(n-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & w^{n-2} & w^{2(n-2)} & \ldots & w^{(n-2)(n-2)} & w^{(n-1)(n-2)} \\
1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \ldots & w^{(n-2)(n-1)} & w^{(n-1)(n-1)}
\end{pmatrix}$$
$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (w^{j-1} - w^{i-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (w^j - w^i) \neq 0.$$

Zur Bestimmung der Determinante beachte man, dass es sich bei der Matrix um eine Vandermonde-Matrix handelt.

Für alle $1 \leq i \leq n$ setzen wir $U_i := \mathbb{C}v_i$. Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind erhalten wir eine Zerlegung

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \tag{2}$$

von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Wir bemerken, dass $U_1, \ldots, U_n$ Unterdarstellungen von $\mathbb{C}G$ sind, denn es ist für jedes $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned}
g_1.v_j = g_1.\sum_{k=0}^{n-1} w^{(j-1)k} g_k &= \sum_{k=0}^{n-1} w^{(j-1)k} g_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} w^{(j-1)(k-1)} g_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} w^{(j-1)(k-1)} g_k + w^{(j-1)(n-1)} g_n \\
&= w^{-(j-1)} \sum_{k=1}^{n} w^{(j-1)k} g_k + w^{-(j-1)} g_0 \\
&= w^{-(j-1)} \sum_{k=0}^{n} w^{(j-1)k} g_k = w^{-(j-1)} v_j \in U_j.
\end{aligned}$$

Dabei nutzen wir, dass $w^{n-1} = w^n w^{-1} = w^{-1}$ und $g_n = g_0$. Da G von g_1 erzeugt wird, zeigt dies bereits, dass U_j eine Unterdarstellung von $\mathbb{C}G$ ist.

Da die Darstellungen U_j für alel $1 \leq j \leq n$ eindimensional ist, ist U_j für alle $1 \leq j \leq n$ irreduzibel, und damit insbesondere unzerlegbar. Daher ist (2) bereits eine Zerlegegung in unzerlegbare Unterdarstellungen, die alle irreduzibel sind.

Zuletzt merken wir noch an, dass der vorherige Aufgabenteil nur eine Sonderfall von diesem ist, da $S_2 \cong Z/2\mathbb{Z}$.

(c)

Wir setzen $G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, und für $n \in \mathbb{Z}$ setzen wir $g_n := n + 3\mathbb{Z} \in G$. Wir bemerken, dass

$$U := \langle g_0 + g_1 + g_2 \rangle_{\mathbb{F}_3}$$

eine Unterdarstellung von $\mathbb{F}_3 G$, denn G wird von g_1 erzeugt, und

$$g_1.(g_0 + g_1 + g_2) = g_1 + g_2 + g_3 = g_1 + g_2 + g_0 \in U.$$

Da $0 \neq U \neq \mathbb{F}_3 G$ zeigt dies, dass $\mathbb{F}_3 G$ reduzibel ist.

$\mathbb{F}_3 G$ ist jedoch unzerlegbar: Angenommen, $\mathbb{F}_3 G$ wäre zerlegbar. Dann hat $\mathbb{F}_3 G$ nicht-triviale Unterdarstellungen U_1, U_2 mit $\mathbb{F}_3 G = U_1 \oplus U_2$.

Die lineare Wirkung von g_1 lässt sich bezüglich der Basis $\{g_0, g_1, g_2\}$ von $\mathbb{F}_3 G$ als Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{F}_3[X]$ von A ist

$$\chi_A = (-t)^3 + 1 = -\left(t^3 - 1\right) = -(t-1)^3,$$

da $\operatorname{char} \mathbb{F}_3 = 3$. Da U_1 und U_2 Unterdarstellungen von $\mathbb{C}G$ sind, sind U_1 und U_2 invariant unter A. Bezeichnet $A_{|U_1}$ die Einschränkung der linearen Wirkung von g_1 auf U_1, und analog $A_{|U_2}$ die Einschränkung auf U_2, so ist daher

$$\chi_A = \chi_{A|U_1} \cdot \chi_{A|U_2}.$$

Da $\chi_A = -(t-1)^3$ und $\dim_{\mathbb{F}_3} U_1, \dim_{\mathbb{F}_3} U_2 \geq 1$ muss es in U_1 und U_2 daher Eigenvektoren von A zum Eigenwert 1 geben. Da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ müssen diese linear unabhängig sein. Daher muss der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 mindestens zweidimensional sein.

Durch kurzes Nachrechnen ergibt sich jedoch, dass

$$\ker(A - I) = \langle g_0 + g_1 + g_2 \rangle_{\mathbb{F}_3} = U$$

nur eindimensional ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\mathbb{F}_3 G$ unzerlegbar ist.

Aufgabe 3

(a)

Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $\xi_i \in \operatorname{End}(k[x_1, \dots, x_n])$ definiert als $\xi_i(p) := x_i \cdot p$ für alle $p \in k[x_1, \dots, x_n]$ die Multiplikation mit x_i, und $\zeta_i \in \operatorname{End}(k[x_1, \dots, x_n])$ definiert als $\zeta_i(p) := \partial p / \partial x_i$ für alle $p \in k[x_1, \dots, x_n]$ die formale Ableitung nach x_i.

Nach der universellen Eigenschaft der freien Algebra gibt es einen eindeutigen K-Algebrahomomorphismus $\psi : k\langle X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle \to \mathrm{End}(V)$, so dass $\psi(X_i) = \xi_i$ und $\psi(\partial_i) = \zeta_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Wir bemerken, nun, dass $I \subseteq \ker \psi$: Es ist klar, dass die Endomorphismen ξ_i und ξ_j für alle $1 \leq i, j \leq n$ miteinander kommutieren, und daher $X_i X_j - X_j X_i \in \ker \psi$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Genau so ist es auch klar, dass $\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i \in \ker \psi$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $\partial_i X_j - X_j \partial_i \in \ker \psi$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \leq j$. Es ist allerdings $\partial_j X_j - X_j \partial_j \in \ker \psi$ für kein $1 \leq i \leq n$, denn für alle

$$pa = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} \lambda_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in k[x_1, \dots, x_n]$$

ist für alle $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned}
&\psi(\partial_j X_j - X_j \partial_j)(p) = \zeta_j(\xi_j(p)) - \xi_j(\zeta_j(p)) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} (i_j + 1) \lambda_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} - \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} i_j \lambda_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} \lambda_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = p = \psi(1)(p)
\end{aligned}$$

Zusammen mit $\partial_i X_j - X_j \partial_i \in \ker \psi$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ zeigt dies, dass

$$\partial_i Xj - X_j \partial_i - \delta_{ij} 1 \in \ker \psi \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

Da $\ker \psi$ ein beidseitiges Ideal ist, ist damit $I \subseteq \ker \psi$. Nach dem Homomorphisatz faktorisiert ψ als eindeutiger K-Algebrahomomorphismus

$$\varphi : k\langle X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle / I \to \mathrm{End}(k[x_1, \dots, x_n]).$$

Dieser entspricht bekanntermaßen einer $\mathcal{A}$-Modulstruktur auf $k[x_1, \dots, x_n]$ via

$$a \cdot p = \varphi(a)(p) \text{ für alle } a \in \mathcal{A}, p \in k[x_1, \dots, x_n].$$

Nach der Konstruktion von φ ist dabei

$$X_i \cdot p = \xi_i(p) \text{ und } \partial_i \cdot p = \zeta_i(z) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n, p \in k[x_1, \dots, x_n]. \tag{3}$$

(Wir arbeiten hier etwas unsauber, indem wir nicht zwischen das Element $X_i \in k\langle X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ und die entsprechende Restklasse $\overline{X_i} \in \mathcal{A}$ gleich notieren.)

Es ist klar, dass die von φ induzierte $\mathcal{A}$-Modulstruktur auf $k[x_1, \dots, x_n]$ die eindeutige $\mathcal{A}$-Modulstruktur auf $k[x_1, \dots, x_n]$ ist, die (3) erfüllt, denn $\mathcal{A}$ wird als K-Algebra von den Elementen $X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ erzeugt, und die Wirkung dieser Elemente auf $k[x_1, \dots, x_n]$ ist durch (3) eindeutig bestimmt.

(b)

Es ist klar, dass die Elemente der Form

$$a_1 \cdots a_r \in \mathcal{A} \text{ mit } r \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in \{X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n\} \text{ für alle } 1 \leq i \leq r$$

ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ als k-Vektorraum sind. Es genügt daher zu zeigen, dass sich jedes solche Element als k-Linearkombination von den Elementen $X^\alpha \partial^\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ schreiben lässt. Wir zeigen dies per Induktion über r.

Für $r = 0$ und $r = 1$ ist die Aussage klar. Es sei daher $r \geq 2$ und es gelte die Aussage für $r - 1$. Es seien $a_1, \ldots, a_r \in \{X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$ beliebig aber fest. Ist $a_i \in \{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ für alle $1 \leq i \leq r$ so kommutieren die a_i miteinander und die Aussage ist klar.

Ist $a_1 = X_j$ für ein $1 \leq j \leq n$ so können wir $a_2 \cdots a_r$ nach Induktionsvoraussetzung als

$$a_2 \cdots a_n = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n} \lambda_{\alpha,\beta} X^\alpha \partial^\beta$$

schreiben. Da die X_i miteinander kommutieren ist dann auch

$$a_1 \cdots a_n = Xj \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n} \lambda_{\alpha,\beta} X^\alpha \partial^\beta = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n} \lambda_{\alpha,\beta} X_j X^\alpha \partial^\beta$$

eine entsprechende k-Linearkombination.

Ist keiner der beiden oberen Fälle erfüllt, so setzen wir

$$s := \min\{1 \leq i \leq r : a_i \in \{X_1, \ldots, X_n\}\}.$$

und $1 \leq j \leq n$, so dass $a_s = X_j$. Wir betrachten den Ausdruck

$$a_1 \cdots a_s.$$

Da $a_1, \ldots, a_{s-1} \in \{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ können wir

$$a_1 \cdots a_s = \partial^\beta X_j$$

mit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ schreiben. Ist $\beta_j = 0$, so folgt aus $\partial_i X_j = X_j \partial_i$ für $i \neq j$ weiter, dass

$$a_1 \cdots a_r == \partial^\beta X_j a_{s+1} \cdots a_r = X_j \partial^\beta a_{s+1} \cdots a_r.$$

Damit befinden wir uns dann in einem der vorherigen Fälle.

Ist $\beta_j \neq 0$, so bemerken wir, dass sich aus $\partial_j X_j = X_j \partial_j + 1$ induktiv ergibt, dass

$$\partial_j^n X_j = X_j \partial_j^n + n\partial_j^{n-1} \text{ für alle } n \geq 1,$$

denn für $n = 1$ gilt die Aussage, und wenn die Aussage für n gilt, so ist

$$\begin{aligned}
\partial_j^{n+1} X_j &= \partial_j \left(\partial_j^n X_j\right) = \partial_j \left(X_j \partial_j^n + n\partial_j^{n-1}\right) = \partial_j X_j \partial_j^n + n\partial_j^n \\
&= (X_j \partial_j + 1)\partial_j^n + n\partial_j^n = X_j \partial_j^{n+1} + (n+1)\partial_j^n.
\end{aligned}$$

Da $\partial_i X_j = X_j \partial_i$ für $i \neq j$ ist daher

$$\begin{aligned}
a_1 \cdots a_s = \partial^\beta X_j &= \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n} X_j \\
&= \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_{j-1}^{\beta_{j-1}} \left(X_j \partial_j^{\beta_j} + \beta_j \partial_j^{\beta_j - 1}\right) \partial_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots \partial_n^{\beta_n} \\
&= X_j \partial^\beta + \beta_j \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_{j-1}^{\beta_{j-1}} \partial_j^{\beta_j - 1} \partial_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots \partial_n^{\beta_n} \\
&= X_j \partial^\beta + \beta_j \partial^{\beta'}
\end{aligned}$$

mit

$$\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_j - 1, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n)$$

Daher ist

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_r &= \left(X_j \partial^\beta + \beta_j \partial^{\beta'} \right) a_{s+1} \cdots a_r \\ &= X_j \partial^\beta a_{s+1} \cdots a_r + \beta_j \partial^{\beta'} a_{s+1} \cdots a_r. \end{aligned}$$

Der erste Summand lässt sich nach einem der vorherigen Fälle als eine entsprechende k-Linearkombination schreiben, und der zweite nach Induktionsvoraussetzung.

Damit haben wir gezeigt, dass die Elemente der Form $X^\alpha \partial^\beta$ ein k-Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ sind. Die Elemente sind auch linear unabhängig: Angenommen, es gebe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k \setminus \{0\}$ und $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{N}^n$, so dass $X^{\alpha^1} \partial^{\beta^1}, \dots, X^{\alpha^r} \partial^{\beta^r}$ paarweise verschieden sind, mit

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X^{\alpha^i} \partial^{\beta^i} = 0.$$

Sei dann $\beta^* \in \{\beta^1, \dots, \beta^r\}$, so dass $|\beta^*|$ minimal ist. Wir betrachten das Polynom

$$p := x^{\beta^*} = x_1^{\beta_1^*} \cdots x_n^{\beta_n^*} \in k[x_1, \dots, x_n].$$

Wegen der Minimalität von $|\beta^*|$ muss für alle $\beta \in \{\beta^1, \dots \beta^r\}$ entweder $\beta = \beta^*$ oder $\beta_i > \beta_i^*$ für ein $1 \leq i \leq n$, und damit $\partial^\beta \cdot p = 0$. Für

$$I = \{1 \leq i \leq r : \beta^i = \beta^*\} \neq \emptyset$$

muss also bereits

$$0 = 0 \cdot p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X^{\alpha^i} \partial^{\beta^i} \cdot p = \sum_{i \in I} \lambda_i X^{\alpha^i} \partial^{\beta^*} \cdot p, = \sum_{i \in I} \lambda_i \beta^*! X^{\alpha^i},$$

wobei wir die Notation $\beta^*! = \beta_1! \cdots \beta_n!$ verwenden. Da die Elemente $X^{\alpha^i} \partial^{\beta^i}$ für $i \in I$ paarweise verschieden sind, aber $\beta_i = \beta^*$ für alle $i \in I$, müssen die Elemente α_i für $i \in I$ paarweise verschieden sein. Also sind die Elemente X^{α^i} mit $i \in I$ in $k[x_1, \dots, x_n]$ linear unabhängig. Daher muss $\lambda_i \beta^*! = 0$ für alle $i \in I$, wegen $\operatorname{char} k \neq 0$ also $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Da $I \neq \emptyset$ ist das ein Widerspruch dazu, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$.