Algebra I
Blatt 5

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

18. Mai 2014

Aufgabe 1

(a)

Für $f, g : V \to k$ ist für alle $v \in V$

$$(fg)(v) = 0 \Leftrightarrow f(v)g(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \text{ oder } g(v) = 0.$$

Insbesondere ist daher für alle $f, g \in \mathcal{P}(V)$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(fg) &= \{v \in V \mid (fg)(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ oder } g(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \cup \{v \in V \mid g(v) = 0\} \\ &= \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g).\end{aligned}$$

(b)

Es ist

$$\begin{aligned}F &= \left(X^2 - 9\right)^2 + \left(Y^2 - 16\right)^2 + 2\left(X^2 + 9\right)\left(Y^2 - 16\right) \\ &= \left(\left(X^2 + 9\right) + \left(Y^2 - 16\right)\right)^2 - 36X^2 \\ &= \left(X^2 + 9 + Y^2 - 16 + 6X\right)\left(X^2 + 9 + Y^2 - 16 - 6X\right) \\ &= \left((X+3)^2 + Y^2 - 16\right)\left((X-3)^2 + Y^2 - 16\right).\end{aligned}$$

Es ist daher nach dem vorherigen Aufgabenteil

$$\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}\left((X+3)^2 + Y^2 - 16\right) \cup \mathcal{V}\left((X-3)^2 + Y^2 - 16\right)$$

die Vereinigung zweier Kreise, siehe Abbildung 1.

(c)

Wir bemerken, dass

$$X^2\left(1 - X^2\right) - Y^2 = -X^4 + X^2 - Y^2 = -\left(\left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 - \frac{1}{4}\right).$$

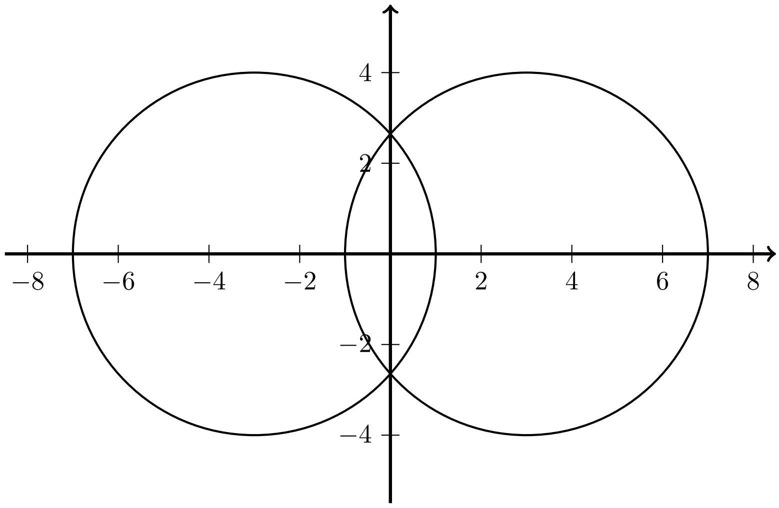

Abbildung 1: $\mathcal{V}(F)$ aus Aufgabe 1 (b).

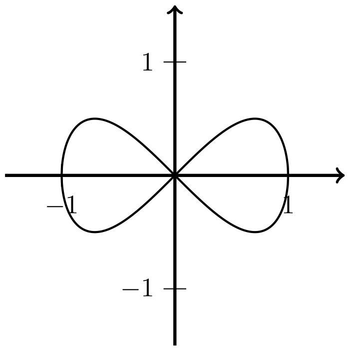

Abbildung 2: $\mathcal{V}\left(X^2\left(1-X^2\right)-Y^2\right)$ aus Aufgabe 1 (c).

Definieren wir

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto\left(x^2,y\right),$$

und den Kreis

$$K:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0\right\}$$

so ist daher

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\left(X^2\left(1-X^2\right)-Y^2\right)&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0\right\}\\&=f^{-1}(K).\end{aligned}$$

Es ergibt sich daher das Bild wie in Abbildung 2

Aufgabe 2

(a)

Es ist bekannt, dass $\varphi*$ ein k-Algebrahomorphismus ist. Daher ist φ^* genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi^* = 0$. Da für alle $f \in \mathcal{P}(V)$

$$\begin{aligned} f \in \ker \varphi^* &\Leftrightarrow \varphi^*(f) = 0 \\ &\Leftrightarrow f \circ \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow (f \circ \varphi)(w) = 0 \text{ für alle } w \in W \\ &\Leftrightarrow f(y) = 0 \text{ für alle } y \in \varphi(W) \end{aligned}$$

ist $\ker \varphi^* = 0$ genau dann, wenn

$$f_{|\varphi(W)} = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Diese Äquivalenz gilt genau dann, wenn $\varphi(W)$ Zariski-dicht in V liegt.

(b)

Wir bemerken zunächst, dass es für alle $w, w' \in W$ eine polynomielle Funktion $f \in \mathcal{P}(W)$ gibt mit $f(w) \neq f(w')$. Denn wählen wir eine Basis $w_1, \dots, w_n$ von W (möglich, da W endlichdimensional ist), so können wir w und w' eindeutig als

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \quad \text{und} \quad w' = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i w_i$$

schreiben. Da $w \neq w'$ gibt es $1 \leq j \leq n$ mit $\lambda_j \neq \lambda'_j$. Für

$$\pi : W \to k, \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i \mapsto \mu_j$$

ist offenbar $\pi \in \mathcal{P}(W)$, und da $\lambda_j \neq \lambda'_j$ ist $\pi(w) \neq \pi(w')$.

Ist φ nicht injektiv, so gibt es $w, w' \in W$ mit $\varphi(w) = \varphi(w')$. Da dann für alle $f \in \mathcal{P}(V)$

$$\varphi^*(f)(w) = f(\varphi(w)) = f(\varphi(w')) = \varphi^*(f)(w')$$

ist $g(w) = g(w')$ für alle $g \in \operatorname{Im} \varphi^*$. Aus der obigen Beobachtung folgt damit, dass φ^* nicht surjektiv ist.

(c)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3.$$

Diese ist offenbar polynomiell und bijektiv. Die induzierte Abbildung

$$\varphi^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), f \mapsto \left(x \mapsto f\left(x^3\right)\right)$$

ist aber offenbar nicht surjektiv.

Aufgabe 3

Sei $f \in \mathcal{P}(V)$ mit $f_{|\varphi(X)} = 0$. Dann ist $f \circ \varphi = \varphi^*(f) \in \mathcal{P}(W)$ mit $(f \circ \varphi)_{|X} = 0$. Da X Zariski-dicht in Y liegt. ist daher bereits $(f \circ \varphi)_{|Y} = 0$. Also ist $f_{|\varphi(Y)} = 0$.

Aufgabe 4

Wir definieren $\Xi : k^n \to M_n(k)$ durch

$$\Xi(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_n \\ 1 & 0 & & & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & a_2 \\ & & & 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

und setzen

$$Z := \{\Xi(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}.$$

Insbesondere ist

$$X = \left\{ SAS^{-1} \,\middle|\, A \in Z, S \in \mathrm{GL}_n(k) \right\}. \tag{1}$$

(b)

Angenommen, es ist $A \in X$. Dann gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ und $a_1, \dots, a_n \in k$ mit

$$A = S\Xi(a_1, \dots, a_n)S^{-1}.$$

Setzen wir $v = Se_1$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von k^n bezeichnet, so ergibt sich induktiv, dass $A^{k-1}v = Se_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Da $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ und $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von k^n ist, ist daher auch $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ eine Basis von k^n.

Gibt es andererseits $v \in k^n$, so dass $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ linear unabhängig sind, so ist, da $\dim k^n = n$, dies bereits eine Basis von k^n. Schreiben wir

$$A^n v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A^{i-1} v,$$

so ist A bezüglich der Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, deren Spalten $v, \dots, A^{n-1}v$ sind, von der Form

$$A = S\Xi(\lambda_n, \dots, \lambda_1)S^{-1}.$$

Also ist $A \in X$.

(c)

Es ist klar, dass $h \in \mathcal{P}(M_n(k) \times k^n)$, und dass $h \neq 0$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Y deshalb Zariski-dicht in $M_n(k) \times k^n$ liegt.

Die Projektion $\pi : M_n(k) \times k^n \to M_n(k)$ ist linear und deshalb insbesondere polynomiell. Deshalb liegt, wie aus Aufgabe 3 bekannt, $\pi(Y)$ Zariski-dicht in $\pi(M_n(k) \times k^n) = M_n(k)$.

Dabei ist für alle $A \in M_n(k)$ genau dann $A \in \pi(Y)$, wenn es ein $v \in k^n$ gibt, so dass $\det(v, A_v, \dots, A^{n-1}v) \neq 0$, also $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ linear unabhängin sind. Daher ist $\pi(Y) = X$ nach Aufgabenteil (b).

(d)

Zunächst zeigen wir per Induktion über $n \geq 1$, dass für alle $a_1, \ldots, a_n \in k$

$$P_{\Xi(a_1,\ldots,a_n)}(t) = t^n - \sum_{i=1}^{n} a_t t^{n-i}.$$

Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Sei daher $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für $n - 1$. Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt dann

$$P_{\Xi(a_1,\ldots,a_n)}(t) = \det \begin{pmatrix} t & & & & -a_n \\ -1 & t & & & -a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & t & -a_2 \\ & & & -1 & t - a_1 \end{pmatrix}$$

$$= t \begin{pmatrix} t & & & & -a_{n-1} \\ -1 & t & & & -a_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & t & -a_2 \\ & & & -1 & t - a_1 \end{pmatrix} - (-1)^{n-1} a_n \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & t & & & \\ & -1 & t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & t \\ & & & & -1 \end{pmatrix}}_{\in M_{n-1}(k)}$$

$$= t P_{\Xi(a_1,\ldots,a_{n-1})}(t) - a_n \underset{\text{IV}}{=} t \left(t^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i t^{n-1-i} \right) - a_n$$

$$= t^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i t^{n-i} - a_n = t^n - \sum_{i=1}^{n} a_i t^{n-i}.$$

Setzen wir $A := \Xi(a_1, \ldots, a_n)$ für $a_1, \ldots, a_n \in k$, so ist

$$t^n - \sum_{i=1}^{n} a_i t^{n-i} = P_A(t) = t^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i s_i(A) t^{n-i},$$

und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich, dass

$$a_i = (-1)^{n+i} s_i(A) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

(e)

Sei $f \in \mathcal{P}(M_n(k))^{\mathrm{GL}_n(k)}$. Da $f \in \mathcal{P}(M_n(k))$ gibt es $\tilde{p} \in k[X_{11}, \ldots, X_{nn}]$, so dass f bezüglich der Basis $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ von $M_n(k)$ die Form

$$f\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \right) = \tilde{p}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) \text{ für alle } (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(k)$$

hat. Insbesondere gibt es daher $p' \in k[X_1, \ldots, X_n]$, so dass

$$f\left(\Xi(a_1, \ldots, a_n)\right) = p'(a_1, \ldots, a_n) \text{ für alle } a_1, \ldots, a_n \in k..$$

Für alle $A = \Xi(a_1, \ldots, a_n) \in Z$ ist

$$a_i = (-1)^{i+1} s_i(A)$$

und daher

$$f(A) = p'(a_1, \ldots, a_n) = p'\left(s_1, -s_2, \ldots, (-1)^{n+1} s_n\right)(A).$$

Für $p \in k[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$p(X_1, \ldots, X_n) = p'(X_1, -X_2, X_3, \ldots, (-1)^{n+1} X_n)$$

ist daher

$$f(A) = p(s_1, \ldots, s_n)(A) \text{ für alle } A \in Z.$$

Da f und $p(s_1, \ldots, s_n)$ invariant unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ sind, ist wegen (1) auch

$$f(A) = p(s_1, \ldots, s_n)(A) \text{ für alle } A \in X.$$

Da X Zariski-dicht in $M_n(k)$ liegt, ist daher bereits

$$f(A) = p(s_1, \ldots, s_n)(A) \text{ für alle } A \in M_n(k).$$

Also ist

$$f = p(s_1, \ldots, s_n) \in k[s_1, \ldots, s_n].$$