Algebra I
Blatt 3

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

8. Mai 2014

Aufgabe 1

(a)

Das Polynom

$$f(x,y) := (x+iy)^{2014}(x-iy)^{2014} = \left(x^2+y^2\right)^{2014}$$

ist symmetrisch, da $f(x,y) = f(y,x)$.

Das Polynom

$$g(x,y) := 4x^3 + 3y^4$$

ist nicht symmetrisch, da $g(x,y) \neq g(y,x)$.

Das Polynom

$$\begin{aligned} h(x,y) &:= x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3 + x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \\ &= x^5 + 3x^4y + 4x^3y^2 + 4x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \end{aligned}$$

ist symmetrisch, da $h(x,y) = h(y,x)$.

(b)

Es ist

$$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{2014} = \left((x+y)^2 - 2xy\right)^{2014} = \left(e_1^2 - 2e_2\right)^{2014}$$

und

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3 + x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \\ &= \left(x^2+y^2\right)\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right) \\ &= \left((x+y)^2 - 2xy\right)(x+y)^3 = \left(e_1^2 - 2e_2\right)e_1^3. \end{aligned}$$

(c)

Wir zeigen, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} = \mathbb{C}[e_1,e_2]$. Da e_1 und e_2 symmetrisch sind, und daher $e_1, e_2 \in \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$, ist klar, dass $\mathbb{C}[e_1,e_2] \subseteq \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$.

Um zu zeigen, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} \subseteq \mathbb{C}[e_1,e_2]$, zeigen wir zunächst per Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $x^n + y^n \in \mathbb{C}[e_1,e_2]$. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies Aussage klar.

Es sei daher $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für $n-1$ und $n-2$, d.h. es gelte $x^{n-1}+y^{n-1}, x^{n-2}+y^{n-2} \in \mathbb{C}[e_1, e_2]$. Dann ist auch

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= \left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)(x+y) - xy\left(x^{n-2}+y^{n-2}\right) \\ &= e_1\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right) - e_2\left(x^{n-2}+y^{n-2}\right) \in \mathbb{C}[e_1, e_2]. \end{aligned}$$

Sei nun $f \in \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$. Wir schreiben f als

$$f(x,y) = \sum_{n,m \geq 0} a_{nm} x^n y^m$$

mit $a_{nm} \in \mathbb{C}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{nm} = 0$ für fast alle $n, m \in \mathbb{N}$. Das f symmetrisch ist, bedeutet, dass $a_{nm} = a_{mn}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$\begin{aligned} f(x,y) = \sum_{n,m \geq 0} a_{nm} x^n y^m &= \sum_{n \geq 0} a_{nn} x^n y^n + \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ n \neq m}} a_{nm} x^n y^m \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{nn} x^n y^n + \sum_{n > m \geq 0} a_{nm}\left(x^n y^m + x^m y^n\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{nn} (xy)^n + \sum_{n > m \geq 0} a_{nm} (xy)^m \left(x^{n-m} + y^{n-m}\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{nn} e_2^n + \sum_{n > m \geq 0} a_{nm} e_2^m \left(x^{n-m} + y^{n-m}\right) \in \mathbb{C}[e_1, e_2]. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} \subseteq \mathbb{C}[e_1, e_2]$.