Algebra I
Blatt 8

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

20. Juni 2014

Wir gehen im Folgenden stets davon aus, dass alle Ringe kommutativ sind.

Aufgabe 1

Lemma 1. *Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) M ist noethersch, d.h. jede aufsteigende Kette von Untermoduln von M

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

stabilisiert.

ii) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt über R.

Insbesondere ist ein kommutiver Ring R genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

in R stabilisiert.

Beweis. Angenommen, M ist noethersch. Es sei $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann definieren wir eine eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M wie folgt: Wir beginnen mit $M_0 := 0$. Ist M_i definiert und $M_i \neq M'$, so gibt es $m_{i+1} \in M' \smallsetminus M_i$, und wir setzen $M_{i+1} := M_i + Rm_{i+1}$; ansonsten setzen wir $M_{i+1} := M_i = M'$. Da M noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von Untermoduln von M. Nach Konstruktion der M_i gibt es daher $n \in \mathbb{N}$ mit

$$M' = M_n = Rm_1 + \dots + Rm_n = (m_1, \dots, m_n).$$

Also ist M' ein endlich erzeugter R-Modul.

Sei andererseits jeder Untermodul von M endlich erzeugt über R. Für eine aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von Untermoduln von M setzen wir

$$M' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k.$$

M' ist ein Untermodul von M und somit endlich erzeugt. Also gibt es $m_1, \ldots, m_n \in M'$ mit

$$M' = (m_1, \ldots, m_n).$$

Nach Definition von M' gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $m_1, \ldots, m_n \in M_N$. Es ist daher $M_N = M$ und somit auch $M_k = M$ für alle $k \geq N$. Also stabilisiert die Kette. $\square$

(a)

k ist kommutativ und noethersch, da k nur zwei Ideale enthält. Induktiv ergibt sich damit aus dem Hilbertschen Basissatz direkt, dass auch $k[x_1, \ldots, x_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ noethersch ist.

(b)

Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Wir nehmen an, dass $R[X]$ nicht noethersch ist. Nach Lemma 1 gibt es dann ein Ideal $I \subseteq R[X]$ das nicht endlich erzeugt über $R[X]$ ist. (Inbesondere ist $I \neq 0$.)

Wir definieren eine Folge $(f_i)_{i \geq 1}$ von Polynomen $f_i \in I$ wie folgt: Wir wählen $f_1 \in I \setminus \{0\}$ mit minimalen Grad. Ist f_i definiert, so ist, da I nicht endlich erzeugt ist,

$$(f_1, \ldots, f_i) \neq I.$$

Es sei dann $f_{i+1} \in I \setminus (f_1, \ldots, f_i)$ vom minimalen Grad. Man bemerke, dass stets $\deg f_i \leq \deg f_{i+1}$.

Für alle $i \geq 1$ definieren wir $a_i \in R$ als den Leitkoeffizienten von f_i und setzen

$$J_i := (a_1, \ldots, a_i) \subseteq R.$$

Da R noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette von Idealen

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \ldots$$

Es gibt also ein $n \geq 1$ mit

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) = J_{n+1} = J_n = (a_1, \ldots, a_n),$$

was äquivalent dazu ist, dass $a_{n+1} \in (a_1, \ldots, a_n)$. Es gibt also $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i.$$

Deshalb ist

$$g := \sum_{i=1}^{n} r_i f_i \cdot X^{\deg f_{n+1} - \deg f_i} \in (f_1, \ldots, f_n)$$

ein Polynom vom gleichem Grad und mit gleichen Leitkoeffizienten wie f_{n+1}. Da $f_{n+1} \notin (f_1, \ldots, f_n)$ ist auch $f_{n+1} - g \notin (f_1, \ldots, f_n)$. Da $\deg(f_{n+1} - g) < \deg f_{n+1}$ steht dies im Widerspruch zur Gradminimimalität von f_{n+1}.

Es ist also jedes Ideal in $R[X]$ endlich erzeugt, und $R[X]$ somit noethersch.

Aufgabe 2

(a)

Es sei

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $M' \subseteq M$ ein Untermodul ist, i die kanonische Inklusion, $M'' = M/M'$ und π die kanonische Projektion.

Angenommen, M ist noethersch. Jede aufsteigende Ketten von Untermoduln

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von M' ist auch eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M und stabilisiert somit. Also ist M' noethersch. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$$

von $M'' = M/M'$ liefert eine aufsteigende Kette von Untermoduln

$$M' \subseteq \pi^{-1}(N_0) \subseteq \pi^{-1}(N_1) \subseteq \pi^{-1}(N_2) \subseteq \dots$$

von M. Da M noethersch ist stabilisiert diese Kette, und da π surjektiv ist, und somit

$$\pi(\pi^{-1}(N_i)) = N_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N},$$

stabilisiert auch die Kette in M''. Also ist M'' noethersch. (Aus den Beweisen geht auch direkt hervor, dass Untermoduln und Quotientenmoduln noetherscher Moduln ebenfalls noethersch sind.)

Angenommen, M' und M'' sind noethersch. Es sei dann

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$M'_i := M' \cap M_i \text{ und } M''_i := \pi(M_i)$$

und erhalten so aufsteigende Ketten von Untermoduln von M' und M''. Da diese noethersch sind stabilisieren diese Ketten. Es gibt also $N \in \mathbb{N}$ mit

$$M'_n = M'_N \text{ und } M''_n = M''_N \text{ für alle } n \geq N.$$

Daher ist auch $M_n = M_N$ für alle $n \geq N$. (Denn für alle $n \geq N$ enthalten wir das folgende kommutive Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M'_N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M_N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & M''_N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & M'_n \arrow[r, "i"] & M_n \arrow[r, "\pi"] & M''_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nach dem Fünferlemma ist die Inklusion $M_N \hookrightarrow M_n$ bereits eine Gleichheit.)

(b)

Sind M_1, M_2 zwei noethersche R-Moduln, so ist auch $M_1 \oplus M_2$ noethersch. Dies ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0.$$

Induktiv ergibt sich daher, dass für beliebige noethersche R-Moduln $M_1, \ldots, M_n$ auch $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ noethersch ist. Ist R noethersch, und somit noethersch als Modul über sich selbst, so ist daher insbesondere R^n für alle $n \in \mathbb{N}$ als R-Modul noethersch.

Für einen endlich erzeugten R-Modul M gibt es $m_1, \ldots, m_n \in M$, so dass der R-Modulhomomorphismus

$$f : R^n \to M, (r_1, \ldots, r_n) \to \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$$

surjektiv ist. Da R^n noethersch als R-Modul ist, und $M \cong R^n / \ker f$ ist damit auch M noethersch über R.

(c)

Es bezeichne $\pi : R \to R/I$ die kanonische Projektion. π ist sowohl ein Ringhomomorphismus als auch ein R-Modulhomomorphismus, wobei für alle $r, s \in R$

$$r \cdot \pi(s) = \pi(rs) = \pi(r)\pi(s),$$

also für alle $r \in R, m \in R/I$

$$r \cdot m = \pi(r) \cdot m.$$

Da R als R-Modul noethersch ist, ist auch der Quotientenmodul R/I noethersch über R. Offenbar entsprechen die Ideale in R/I genau den R-Untermoduln von R/I. Jedes Ideal $J \subseteq R/I$ ist daher endlich erzeugt als R-Modul, weshalb es $m_1, \ldots, m_n \in J$ gibt, so dass

$$J = \sum_{i=1}^{n} R m_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(R) m_i = \sum_{i=1}^{n} (R/I) m_i.$$

Das zeigt, dass J auch als Ideal in R/I endlich erzeugt ist. Da jedes Ideal in R/I endlich erzeugt ist, ist R/I als Ring noethersch.

Aufgabe 3

Da C als A-Algebra endlich erzeugt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_n \in C$ mit

$$C = A[x_1, \ldots, x_n],$$

und da C als B-Modul endlich erzeugt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_n \in C$ mit

$$C = By_1 + \ldots + By_n.$$

Inbesondere gibt es daher für alle $1 \leq i \leq n$ Koeffizienten $b_{ij} \in B, 1 \leq j \leq m$ mit

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_j \text{ für alle } i = 1, \ldots, n,$$

und für alle $1 \leq i, j \leq n$ Koeffizienten $b_{ijk} \in B, 1 \leq k \leq n$ mit

$$y_i y_j = \sum_{k=1}^{n} b_{ijk} y_k.$$

Wir setzen

$$B_0 := A[b_{ij}, b_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq n].$$

Da A noethersch und kommutativ ist, ist auch

$$A[x_1, \ldots, x_{n^2+n^3}]$$

noethersch (dies ergibt sich analog zum Aufgabe 1 (a)), und somit nach Aufgabe 2 (c) auch B_0 als Quotient dieses Polynomringes.

Wir behaupten, dass

$$B_0 y_1 + \ldots + B_0 y_n = C.$$

Dass $\sum_{i=1}^{n} B_0 y_i \subseteq C$ ist klar. Andererseits ist für alle $1 \leq r, s \leq m$

$$x_r x_s = \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ri} y_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} b_{sj} y_j \right) = \sum_{i,j=1}^{m} b_{ri} b_{sj} y_i y_j = \sum_{i,j,k=1}^{m} b_{ri} b_{sj} b_{ijk} y_k,$$

also $x_r x_s \in C$. Analog ergibt sich induktiv, dass $x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} \in \sum_{i=1}^{n} B_0 y_i$ für alle $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N}$. Da C als A-Modul von diesen Elementen erzeugt wird, folgt, dass $C \subseteq \sum_{i=1}^{n} B_0 y_i$.

Es ist also C ein endlich erzeugter B_0-Modul. Da B_0 noethersch ist, ist C damit nach Aufgabe 2 (b) noethersch als B_0-Modul. Daher ist $B \subseteq C$ als B_0-Modul ebenfalls endlich erzeugt. Es gibt also $z_1, \ldots, z_s \in B$ mit

$$B_0 z_1 + \ldots + B_0 z_s = B.$$

Es ist daher

$$A[b_{ij}, b_{ijk}, z_l \mid 1 \leq i, j, k \leq n, 1 \leq l \leq s] = B_0[z_l \mid 1 \leq l \leq s] = B,$$

also B als A-Algebra endlich erzeugt.

Aufgabe 4

Wir nehmen an, dass K nicht algebraisch über k ist. Es seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K = k[x_1, \ldots, x_n].$$

Es sei $A \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine maximale Menge algebraisch unabhängiger Elemente. (Eine solche existiert, da es nur endlich viele Teilmengen gibt.) Wir können durch passende Nummerierung o.B.d.A. davon ausgehen, dass $A = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Nach Annahme ist $r \geq 1$, da die x_i sonst alle algebraisch über k wären, und somit auch K algebraisch über k wäre. Wir setzen

$$F := k(x_1, \ldots, x_r).$$

Für alle $r < k \leq n$ ist die Menge $\{x_1, \ldots, x_r, x_k\}$ algebraisch abgängig über k ist, x_k algebraisch über F. Daher ist die Körpererweiterung

$$F \subseteq K = F(x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

algebraisch. Da sie von endlich vielen algebraischen Elementen erzeugt wird, ist sie sogar endlich, d.h. K ist als F-Vektorraum endlich-dimensional. Inbesondere ergibt sich daher aus Aufgabe 3, dass F als k-Algebra endlich erzeugt ist. Es gibt deshalb $y_1, \ldots, y_s \in F$, so dass

$$F = k[y_1, \ldots, y_s].$$

Da die $x_1, \ldots, x_r$ algebraisch unabhängig sind, ist $k[x_1, \ldots, x_r]$ isomorph zum Polynomring in r Variablen über k, und F zu dessen Quotientenkörper. Daher gibt es für alle $i = 1, \ldots, s$ Polynome $f_i, g_i \in k[x_1, \ldots, x_r]$ mit $y_i = f_i/g_i$.

Es sei $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluss von k. Wir definieren $X \subseteq \bar{k}^r$ als

$$X := \mathcal{V}(\{g_i \mid 1 \leq i \leq s\}) = \mathcal{V}\left(\prod_{i=1}^{s} g_i\right).$$

Wir bemerken, dass $X \neq \bar{k}^r$, denn die Inklusion

$$k[x_1, \ldots, x_r] \hookrightarrow \bar{k}[x_1, \ldots, x_r] \cong \mathcal{P}\left(\bar{k}^r\right).$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus, und da $g_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq s$ ist auch $\prod_{i=1}^{s} g_i \neq 0$. Also gibt es $z \in \bar{k}^r$ mit $\prod_{i=1}^{n} g_i(z) \neq 0$.

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : F \to \mathrm{Abb}\left(\bar{k}^r \smallsetminus X, \bar{k}\right), \left[\frac{f}{g}\right] \mapsto \left(x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}\right),$$

wobei die Wohldefiniertheit klar ist. Für alle $1 \leq i \leq r$ sei

$$h_i \in k[x_i] \subseteq k[x_1, \ldots, x_r] \subseteq F$$

das Minimalpolynom von z_i über k (da x_i transzendend über k ist, können wir $k[x_i]$ als Polynomring über k verstehen). Wir setzten $h := \varphi(\prod_{i=1}^{r} h_i)$. Da $h \neq 0$ ist h in F invertierbar, also auch $\varphi(h)$ in $\mathrm{Abb}(\bar{k}^r \smallsetminus X, \bar{k})$. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass $\varphi(h)(z) = 0$.