Algebra I
Blatt 11

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

10. Juli 2014

Aufgabe 3

Wir behaupten, dass $R/\mathfrak{m}$ bis auf Isomorphie der einzige einfache R-Modul ist.

Wir bemerken zunächst folgendes: Für ein Linksideal $I \subseteq R$ entsprechen die R-Untermoduln von R/I in bijektiver Weise den Linksdealen von R, die I enthalten via

$$\{J \subseteq R \mid J \text{ ist ein Linksideal mit } I \subseteq J\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{R\text{-Untermoduln von } R/I\}$$
$$J \mapsto J/I,$$

Daher ist R/I genau dann irreduzibel als R-Modul, wenn I ein maximales Linksideal in R ist. Inbesondere ist daher $R/\mathfrak{m}$ ein einfacher R-Modul.

Ist andererseits M ein einfacher R-Modul, so gibt es $m \in M$ mit $m \neq 0$. Da R unitär ist, ist $Rm \neq 0$ und wegen der Irreduziblität von M somit $Rm = M$. Wir erhalten so einen R-Modulepimorphismus

$$\pi : R \to M, r \mapsto rm.$$

$\ker \pi$ ist ein Untermodul, also Linksideal, in R, und da M einfach ist, ist $\ker \pi$ ein maximales Linksideal. Also ist $\ker \pi = \mathfrak{m}$. Somit ist

$$M \cong R/\ker \pi = R/\mathfrak{m}.$$