Algebra I
Blatt 8

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

20. Juni 2014

Aufgabe 1

Lemma 1. *Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) M ist noethersch, d.h. jede aufsteigende Kette von Untermoduln von M

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$$

stabilisiert.

ii) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt über R.

Insbesondere ist ein kommutiver Ring R genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$$

in R stabilisiert.

Beweis. Angenommen, M ist noethersch. Es sei $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann definieren wir eine eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M' wie folgt: Wir beginnen mit $M_0 := 0$. Ist M_i definiert und $M_i \neq M'$, so gibt es $m_{i+1} \in M' \setminus M_i$, und wir setzen $M_{i+1} := M_i + Rm_{i+1}$; ansonsten setzen wir $M_{i+1} := M_i = M'$. Da M noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \ldots$$

von Untermoduln von M. Nach Konstruktion der M_i gibt es daher $n \in \mathbb{N}$ mit

$$M' = M_n = Rm_1 + \ldots + Rm_n = (m_1, \ldots, m_n).$$

Das zeigt, dass M' ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Sei andererseits jeder Untermodul von M endlich erzeugt über R. Für eine aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$$

von Untermoduln von M setzen wir

$$M' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k.$$

M' ist ein Untermodul von M und somit endlich erzeugt. Nach Annahme gibt es daher $m_1, \dots, m_n \in M'$ mit

$$M' = (m_1, \dots, m_n).$$

Nach Definition von M' gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $m_1, \dots, m_n \in M_N$. Es ist daher $M_N = M$ und somit auch $M_k = M$ für alle $k \geq N$. Also stabilisiert die Kette. $\square$

(a)

Da k kommutativ ist und nur zwei Ideale enthält, ist k offenbar noethersch. Induktiv ergibt sich damit aus dem Hilbertschen Basissatz direkt, dass auch $k[x_1, \dots, x_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ noethersch ist.

(b)

Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Angenommen, $R[X]$ ist nicht noethersch. Nach Lemma 1 gibt es dann ein Ideal $I \subseteq R[X]$ das nicht endlich erzeugt über $R[X]$ ist. (Inbesondere ist $I \neq 0$.)

Wir definieren eine Folge $(f_i)_{i \geq 1}$ von Polynomen $f_i \in I$ wie folgt: Wir wählen $f_1 \in I \setminus \{0\}$ mit minimalen Grad. Ist f_i definiert, so ist, da I nicht endlich erzeugt ist,

$$(f_1, \dots, f_i) \neq I.$$

Es sei dann $f_{i+1} \in I \setminus (f_1, \dots, f_i)$ vom minimalen Grad. Man bemerke, dass stets $\deg f_i \leq \deg f_{i+1}$.

Für alle $i \geq 1$ definieren wir $a_i \in R$ als den Leitkoeffizienten von f_i und setzen

$$J_i := (a_1, \dots, a_i) \subseteq R.$$

Da R noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette von Idealen

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$$

Es gibt also ein $n \geq 1$ mit

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) = J_{n+1} = J_n = (a_1, \dots, a_n),$$

was äquivalent dazu ist, dass $a_{n+1} \in (a_1, \dots, a_n)$. Es gibt also $r_1, \dots, r_n \in R$ mit

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i.$$

Deshalb ist

$$g := \sum_{i=1}^{n} r_i f_i \cdot X^{\deg f_{n+1} - \deg f_i} \in (f_1, \dots, f_n)$$

ein Polynom mit gleichem Grad und gleichen Leitkoeffizienten wie f_{n+1}. Da $f_{n+1} \notin (f_0, \dots, f_n)$ ist auch $f_{n+1} - g \notin (f_1, \dots, f_n)$. Da $\deg(f_{n+1} - g) < \deg f_{n+1}$ steht dies im Widerspruch zur Gradminimimalität von f_{n+1}.

Es ist also jedes Ideal in $R[X]$ endlich erzeugt, und somit $R[X]$ somit noethersch.

Aufgabe 2

(a)

Es sei
$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$$
eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $M' \subseteq M$ ein Untermodul ist, i die kanonische Inklusion, $M'' = M/M'$ und π die kanonische Projektion.

Angenommen, M ist noethersch. Jede aufsteigende Ketten von Untermoduln
$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$
von M' ist auch eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M und stabilisiert somit. Also ist M' noethersch. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln
$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$$
von $M'' = M/M'$ liefert eine aufsteigende Kette von Untermoduln
$$\pi^{-1}(N_0) \subseteq \pi^{-1}(N_1) \subseteq \pi^{-1}(N_2) \subseteq \dots$$
von M, die M' enthalten. Da M noethersch ist stabilisiert diese Kette, und da π surjektiv ist, und somit
$$\pi(\pi^{-1}(N_i)) = N_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$
stabilisiert auch die Kette in M''. Also ist M'' noethersch. (Aus den Beweisen geht auch direkt hervor, dass Untermoduln und Quotientenmoduln noetherscher Moduln ebenfalls noethersch sind.)

Angenommen, M' und M'' sind noethersch. Es sei dann
$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$
eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen wir
$$M'_i := M' \cap M_i \text{ und } M''_i := \pi(M_i)$$
und erhalten so aufsteigende Ketten von Untermoduln von M' und M''. Da diese noethersch sind stabilisieren dies Ketten. Es gibt also $N \in \mathbb{N}$ mit
$$M'_n = M'_N \text{ und } M''_n = M''_N \text{ für alle } n \geq N.$$
Daher ist auch $M_n = M_N$ für alle $n \geq N$. (Denn für alle $n \geq N$ enthalten wir das folgende kommutive Diagramm mit exakten Zeilen.
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M'_N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M_N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & M''_N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & M'_n \arrow[r, "i"] & M_n \arrow[r, "\pi"] & M''_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
Nach dem Fünferlemma ist die Inklusion bereits eine Gleichheit.)

(b)

Sind M_1, M_2 zwei noethersche R-Moduln, so ist auch $M_1 \oplus M_2$ noethersch. Dies ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0.$$

Induktiv ergibt sich daher, dass für beliebige noethersche R-Moduln $M_1, \ldots, M_n$ auch $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ noethersch ist. Ist R noethersch, und somit noethersch als Modul über sich selbst, so ist daher insbesonder R^n für alle $n \in \mathbb{N}$ als R-Modul noethersch.

Für einen endlich erzeugten R-Modul M gibt es $m_1, \ldots, m_n \in M$, so dass der Modulhomomorphismus

$$f : R^n \to M, (r_1, \ldots, r_n) \to \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$$

surjektiv ist. Da R^n noethersch als R-Modul ist, und $M \cong R^n / \ker f$ ist damit auch M noethersch über R.

(c)

Es bezeichne $\pi : R \to R/I$ die kanonische Projektion. π ist sowohl ein Ringhomomorphismus als auch ein R-Modulhomomorphismus, wobei für alle $r, s \in R$

$$r \cdot \pi(s) = \pi(rs) = \pi(r)\pi(s),$$

also für alle $r \in R, m \in R/I$

$$r \cdot m = \pi(r) \cdot m.$$

Da R als R-Modul noethersch ist, ist auch der Quotientenmodul R/I noethersch über R. Offenbar entsprechen die Ideale in R/I genau den R-Untermoduln von R/I. Ein Ideal $J \subseteq R/I$ ist daher als R-Modul endlich erzeugt, es gibt also $m_1, \ldots, m_n \in J$ mit

$$J = \sum_{i=1}^{n} R m_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(R) m_i = \sum_{i=1}^{n} (R/I) m_i.$$

Das zeigt, dass J als Ideal in R/I endlich erzeugt ist. Da jedes Ideal in R/I endlich erzeugt ist, ist R/I als Ring noethersch.