

# ALGEBRA I

## BLATT 5

Thorben Kastenholz  
Jendrik Stelzner

18. Mai 2014

### Aufgabe 1

(a)

Für  $f, g : V \rightarrow k$  ist für alle  $v \in V$

$$(fg)(v) = 0 \Leftrightarrow f(v)g(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \text{ oder } g(v) = 0.$$

Insbesondere ist daher für alle  $f, g \in \mathcal{P}(V)$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(fg) &= \{v \in V \mid (fg)(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ oder } g(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \cup \{v \in V \mid g(v) = 0\} \\ &= \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g).\end{aligned}$$

(b)

Es ist

$$\begin{aligned}F &= (X^2 - 9)^2 + (Y^2 - 16)^2 + 2(X^2 + 9)(Y^2 - 16) \\ &= ((X^2 + 9) + (Y^2 - 16))^2 - 36X^2 \\ &= (X^2 + 9 + Y^2 - 16 + 6X)(X^2 + 9 + Y^2 - 16 - 6X) \\ &= ((X + 3)^2 + Y^2 - 16)((X - 3)^2 + Y^2 - 16).\end{aligned}$$

Es ist daher nach dem vorherigen Aufgabenteil

$$\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}((X + 3)^2 + Y^2 - 16) \cup \mathcal{V}((X - 3)^2 + Y^2 - 16)$$

die Vereinigung zweier Kreise, siehe Abbildung 1.

(c)

Wir bemerken, dass

$$X^2(1 - X^2) - Y^2 = -X^4 + X^2 - Y^2 = -\left(\left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 - \frac{1}{4}\right).$$

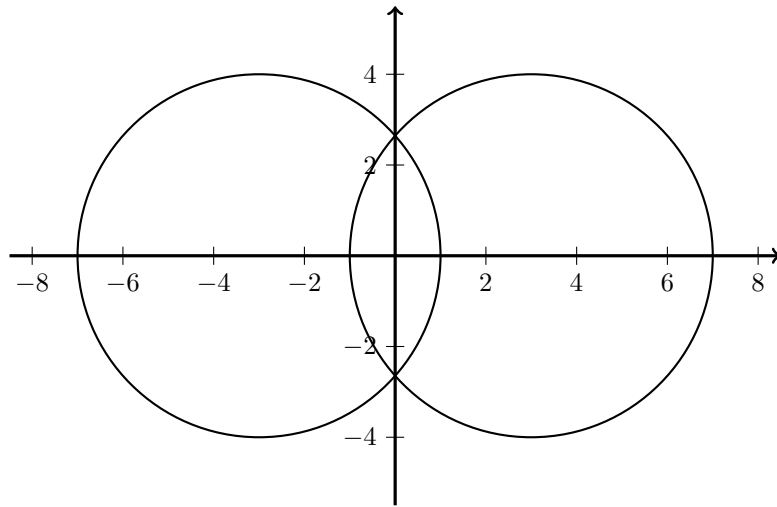


Abbildung 1:  $\mathcal{V}(F)$  aus Aufgabe 1 (b).

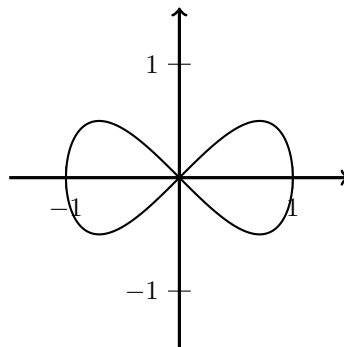


Abbildung 2:  $\mathcal{V}(X^2(1 - X^2) - Y^2)$  aus Aufgabe 1 (c).

Definieren wir

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2, y),$$

und den Kreis

$$K := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0 \right\}$$

so ist daher

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(X^2(1 - X^2) - Y^2) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0 \right\} \\ &= f^{-1}(K). \end{aligned}$$

Es ergibt sich daher das Bild wie in Abbildung 2

## Aufgabe 2

(a)

Es ist bekannt, dass  $\varphi^*$  ein  $k$ -Algebrahomomorphismus ist. Daher ist  $\varphi^*$  genau dann injektiv, wenn  $\ker \varphi^* = 0$ . Da für alle  $f \in \mathcal{P}(V)$

$$\begin{aligned} f \in \ker \varphi^* &\Leftrightarrow \varphi^*(f) = 0 \\ &\Leftrightarrow f \circ \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow (f \circ \varphi)(w) = 0 \text{ für alle } w \in W \\ &\Leftrightarrow f(y) = 0 \text{ für alle } y \in \varphi(W) \end{aligned}$$

ist  $\ker \varphi^* = 0$  genau dann, wenn

$$f|_{\varphi(W)} = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Diese Äquivalenz gilt genau dann, wenn  $\varphi(W)$  Zariski-dicht in  $V$  liegt.

(b)

Wir bemerken zunächst, dass es für alle  $w, w' \in W$  eine polynomielle Funktion  $f \in \mathcal{P}(W)$  gibt mit  $f(w) \neq f(w')$ . Denn wählen wir eine Basis  $w_1, \dots, w_n$  von  $W$  (möglich, da  $W$  endlichdimensional ist), so können wir  $w$  und  $w'$  eindeutig als

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \quad \text{und} \quad w' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i w_i$$

schreiben. Da  $w \neq w'$  gibt es  $1 \leq j \leq n$  mit  $\lambda_j \neq \lambda'_j$ . Für

$$\pi : W \rightarrow k, \sum_{i=1}^n \mu_i w_i \mapsto \mu_j$$

ist offenbar  $\pi \in \mathcal{P}(W)$ , und da  $\lambda_j \neq \lambda'_j$  ist  $\pi(w) \neq \pi(w')$ .

Ist  $\varphi$  nicht injektiv, so gibt es  $w, w' \in W$  mit  $\varphi(w) = \varphi(w')$ . Da dann für alle  $f \in \mathcal{P}(V)$

$$\varphi^*(f)(w) = f(\varphi(w)) = f(\varphi(w')) = \varphi^*(f)(w')$$

ist  $g(w) = g(w')$  für alle  $g \in \text{Im } \varphi^*$ . Aus der obigen Beobachtung folgt damit, dass  $\varphi^*$  nicht surjektiv ist.

(c)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3.$$

Diese ist offenbar polynomiell und bijektiv. Die induzierte Abbildung

$$\varphi^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), f \mapsto (x \mapsto f(x^3))$$

ist aber offenbar nicht surjektiv.

## Aufgabe 3

Sei  $f \in \mathcal{P}(V)$  mit  $f|_{\varphi(X)} = 0$ . Dann ist  $f \circ \varphi = \varphi^*(f) \in \mathcal{P}(W)$  mit  $(f \circ \varphi)|_X = 0$ . Da  $X$  Zariski-dicht in  $Y$  liegt, ist daher bereits  $(f \circ \varphi)|_Y = 0$ . Also ist  $f|_{\varphi(Y)} = 0$ .