

ALGEBRA I

BLATT 8

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

20. Juni 2014

Wir gehen im Folgenden stets davon aus, dass alle Ringe kommutativ sind.

Aufgabe 1

Lemma 1. *Es sei R ein Ring und M ein R -Modul. Dann sind äquivalent:*

- i) *M ist noethersch, d.h. jede aufsteigende Kette von Untermoduln von M*

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

stabilisiert.

- ii) *Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt über R .*

Insbesondere ist ein kommutativer Ring R genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

in R stabilisiert.

Beweis. Angenommen, M ist noethersch. Es sei $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann definieren wir eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M wie folgt: Wir beginnen mit $M_0 := 0$. Ist M_i definiert und $M_i \neq M'$, so gibt es $m_{i+1} \in M' \setminus M_i$, und wir setzen $M_{i+1} := M_i + Rm_{i+1}$; ansonsten setzen wir $M_{i+1} := M_i = M'$. Da M noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von Untermoduln von M . Nach Konstruktion der M_i gibt es daher $n \in \mathbb{N}$ mit

$$M' = M_n = Rm_1 + \dots + Rm_n = (m_1, \dots, m_n).$$

Also ist M' ein endlich erzeugter R -Modul.

Sei andererseits jeder Untermodul von M endlich erzeugt über R . Für eine aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von Untermoduln von M setzen wir

$$M' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k.$$

M' ist ein Untermodul von M und somit endlich erzeugt. Also gibt es $m_1, \dots, m_n \in M'$ mit

$$M' = (m_1, \dots, m_n).$$

Nach Definition von M' gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $m_1, \dots, m_n \in M_N$. Es ist daher $M_N = M$ und somit auch $M_k = M$ für alle $k \geq N$. Also stabilisiert die Kette. \square

(a)

k ist kommutativ und noethersch, da k nur zwei Ideale enthält. Induktiv ergibt sich damit aus dem Hilbertschen Basissatz direkt, dass auch $k[x_1, \dots, x_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ noethersch ist.

(b)

Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Wir nehmen an, dass $R[X]$ nicht noethersch ist. Nach Lemma 1 gibt es dann ein Ideal $I \subseteq R[X]$ das nicht endlich erzeugt über $R[X]$ ist. (Inbesondere ist $I \neq 0$.)

Wir definieren eine Folge $(f_i)_{i \geq 1}$ von Polynomen $f_i \in I$ wie folgt: Wir wählen $f_1 \in I \setminus \{0\}$ mit minimalen Grad. Ist f_i definiert, so ist, da I nicht endlich erzeugt ist,

$$(f_1, \dots, f_i) \neq I.$$

Es sei dann $f_{i+1} \in I \setminus (f_1, \dots, f_i)$ vom minimalen Grad. Man bemerke, dass stets $\deg f_i \leq \deg f_{i+1}$.

Für alle $i \geq 1$ definieren wir $a_i \in R$ als den Leitkoeffizienten von f_i und setzen

$$J_i := (a_1, \dots, a_i) \subseteq R.$$

Da R noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette von Idealen

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$$

Es gibt also ein $n \geq 1$ mit

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) = J_{n+1} = J_n = (a_1, \dots, a_n),$$

was äquivalent dazu ist, dass $a_{n+1} \in (a_1, \dots, a_n)$. Es gibt also $r_1, \dots, r_n \in R$ mit

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^n r_i a_i.$$

Deshalb ist

$$g := \sum_{i=1}^n r_i f_i \cdot X^{\deg f_{n+1} - \deg f_i} \in (f_1, \dots, f_n)$$

ein Polynom vom gleichem Grad und mit gleichen Leitkoeffizienten wie f_{n+1} . Da $f_{n+1} \notin (f_1, \dots, f_n)$ ist auch $f_{n+1} - g \notin (f_1, \dots, f_n)$. Da $\deg(f_{n+1} - g) < \deg f_{n+1}$ steht dies im Widerspruch zur Gradminimalität von f_{n+1} .

Es ist also jedes Ideal in $R[X]$ endlich erzeugt, und $R[X]$ somit noethersch.

Aufgabe 2

(a)

Es sei

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $M' \subseteq M$ ein Untermodul ist, i die kanonische Inklusion, $M'' = M/M'$ und π die kanonische Projektion.

Angenommen, M ist noethersch. Jede aufsteigende Ketten von Untermoduln

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von M' ist auch eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M und stabilisiert somit. Also ist M' noethersch. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$$

von $M'' = M/M'$ liefert eine aufsteigende Kette von Untermoduln

$$M' \subseteq \pi^{-1}(N_0) \subseteq \pi^{-1}(N_1) \subseteq \pi^{-1}(N_2) \subseteq \dots$$

von M . Da M noethersch ist stabilisiert diese Kette, und da π surjektiv ist, und somit

$$\pi(\pi^{-1}(N_i)) = N_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N},$$

stabilisiert auch die Kette in M'' . Also ist M'' noethersch. (Aus den Beweisen geht auch direkt hervor, dass Untermoduln und Quotientenmoduln noetherscher Moduln ebenfalls noethersch sind.)

Angenommen, M' und M'' sind noethersch. Es sei dann

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M . Für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$M'_i := M' \cap M_i \text{ und } M''_i := \pi(M_i)$$

und erhalten so aufsteigende Ketten von Untermoduln von M' und M'' . Da diese noethersch sind stabilisieren diese Ketten. Es gibt also $N \in \mathbb{N}$ mit

$$M'_n = M'_N \text{ und } M''_n = M''_N \text{ für alle } n \geq N.$$

Daher ist auch $M_n = M_N$ für alle $n \geq N$. (Denn für alle $n \geq N$ enthalten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_N & \xrightarrow{i} & M_N & \xrightarrow{\pi} & M''_N & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M'_n & \xrightarrow{i} & M_n & \xrightarrow{\pi} & M''_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nach dem Fünferlemma ist die Inklusion $M_N \hookrightarrow M_n$ bereits eine Gleichheit.)

(b)

Sind M_1, M_2 zwei noethersche R -Moduln, so ist auch $M_1 \oplus M_2$ noethersch. Dies ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2 \rightarrow 0.$$

Induktiv ergibt sich daher, dass für beliebige noethersche R -Moduln M_1, \dots, M_n auch $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ noethersch ist. Ist R noethersch, und somit noethersch als Modul über sich selbst, so ist daher insbesondere R^n für alle $n \in \mathbb{N}$ als R -Modul noethersch.

Für einen endlich erzeugten R -Modul M gibt es $m_1, \dots, m_n \in M$, so dass der R -Modulhomomorphismus

$$f : R^n \rightarrow M, (r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i m_i$$

surjektiv ist. Da R^n noethersch als R -Modul ist, und $M \cong R^n / \ker f$ ist damit auch M noethersch über R .

(c)

Es bezeichne $\pi : R \rightarrow R/I$ die kanonische Projektion. π ist sowohl ein Ringhomomorphismus als auch ein R -Modulhomomorphismus, wobei für alle $r, s \in R$

$$r \cdot \pi(s) = \pi(rs) = \pi(r)\pi(s),$$

also für alle $r \in R, m \in R/I$

$$r \cdot m = \pi(r) \cdot m.$$

Da R als R -Modul noethersch ist, ist auch der Quotientenmodul R/I noethersch über R . Offenbar entsprechen die Ideale in R/I genau den R -Untermoduln von R/I . Jedes Ideal $J \subseteq R/I$ ist daher endlich erzeugt als R -Modul, weshalb es $m_1, \dots, m_n \in J$ gibt, so dass

$$J = \sum_{i=1}^n Rm_i = \sum_{i=1}^n \pi(R)m_i = \sum_{i=1}^n (R/I)m_i.$$

Das zeigt, dass J auch als Ideal in R/I endlich erzeugt ist. Da jedes Ideal in R/I endlich erzeugt ist, ist R/I als Ring noethersch.

Aufgabe 3

Da C als A -Algebra endlich erzeugt ist, gibt es $x_1, \dots, x_n \in C$ mit

$$C = A[x_1, \dots, x_n],$$

und da C als B -Modul endlich erzeugt ist, gibt es $y_1, \dots, y_n \in C$ mit

$$C = By_1 + \dots + By_n.$$

Inbesondere gibt es daher für alle $1 \leq i \leq n$ Koeffizienten $b_{ij} \in B, 1 \leq j \leq m$ mit

$$x_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} y_j \text{ für alle } i = 1, \dots, n,$$

und für alle $1 \leq i, j \leq n$ Koeffizienten $b_{ijk} \in B$, $1 \leq k \leq n$ mit

$$y_i y_j = \sum_{k=1}^n b_{ijk} y_k.$$

Wir setzen

$$B_0 := A[b_{ij}, b_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq n].$$

Da A noethersch und kommutativ ist, ist auch

$$A[x_1, \dots, x_{n^2+n^3}]$$

noethersch (dies ergibt sich analog zum Aufgabe 1 (a)), und somit nach Aufgabe 2 (c) auch B_0 als Quotient dieses Polynomringes.

Wir behaupten, dass

$$B_0 y_1 + \dots + B_0 y_n = C.$$

Dass $\sum_{i=1}^n B_0 y_i \subseteq C$ ist klar. Andererseits ist für alle $1 \leq r, s \leq m$

$$x_r x_s = \left(\sum_{i=1}^m b_{ri} y_i \right) \left(\sum_{j=1}^m b_{sj} y_j \right) = \sum_{i,j=1}^m b_{ri} b_{sj} y_i y_j = \sum_{i,j,k=1}^m b_{ri} b_{sj} b_{ijk} y_k,$$

also $x_r x_s \in C$. Analog ergibt sich induktiv, dass $x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} \in \sum_{i=1}^n B_0 y_i$ für alle $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}$. Da C als A -Modul von diesen Elementen erzeugt wird, folgt, dass $C \subseteq \sum_{i=1}^n B_0 y_i$.

Es ist also C ein endlich erzeugter B_0 -Modul. Da B_0 noethersch ist, ist C damit nach Aufgabe 2 (b) noethersch als B_0 -Modul. Daher ist $B \subseteq C$ als B_0 -Modul ebenfalls endlich erzeugt. Es gibt also $z_1, \dots, z_s \in B$ mit

$$B_0 z_1 + \dots + B_0 z_s = B.$$

Es ist daher

$$A[b_{ij}, b_{ijk}, z_l \mid 1 \leq i, j, k \leq n, 1 \leq l \leq s] = B_0[z_l \mid 1 \leq l \leq s] = B,$$

also B als A -Algebra endlich erzeugt.

Aufgabe 4

Wir nehmen an, dass K nicht algebraisch über k sei. Es seien $x_1, \dots, x_m \in K$ mit

$$K = k[x_1, \dots, x_m].$$

Es sei $A \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ eine maximale Menge algebraisch unabhängiger Elemente. (Eine solche existiert, da es nur endlich viele Teilmengen gibt.) Wir können durch passende Nummerierung o.B.d.A. davon ausgehen, dass $A = \{x_1, \dots, x_r\}$. Nach Annahme ist $r \geq 1$, da die x_i sonst alle algebraisch über k wären, und somit auch K algebraisch über k . Wir setzen

$$F := k(x_1, \dots, x_r).$$

Für alle $r < k \leq n$ ist die Familie x_1, \dots, x_r, x_k algebraisch abgänglich über k ist, also x_k algebraisch über F . Daher ist die Körpererweiterung

$$F \subseteq K = F(x_{r+1}, \dots, x_n)$$

algebraisch. Da sie von endlich vielen algebraischen Elementen erzeugt wird, ist sie sogar endlich, d.h. K ist als F -Vektorraum endlich. Insbesondere ergibt sich daher aus Aufgabe 3, dass F als k -Algebra endlich erzeugt ist. Es gibt also $y_1, \dots, y_s \in F$ mit

$$F = k[y_1, \dots, y_s].$$

Da die x_1, \dots, x_r algebraisch unabhängig sind, ist $k[x_1, \dots, x_r]$ isomorph zum Polynomring in r Variablen über k , und F zu dessen Quotientenkörper. Daher gibt es für alle $i = 0, \dots, s$ Polynome $f_i, g_i \in k[x_1, \dots, x_r]$ mit $y_i = f_i/g_i$.

Es sei \bar{k} ein algebraischer Abschluss von k . Wir setzen

$$X := \mathcal{V}(\{g_i \mid 1 \leq i \leq s\}) = \mathcal{V}\left(\prod_{i=1}^s g_i\right).$$

Wir bemerken, dass $X \neq \bar{k}^r$, denn die Inklusion

$$k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_r] \cong \mathcal{P}(\bar{k}).$$

ist ein injektiver, unitärer Ringhomomorphismus, und da $g_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq s$ ist auch $\prod_{i=1}^s g_i \neq 0$. Also gibt es $z \in \bar{k}^r$ mit $\prod_{i=1}^s g_i(z) \neq 0$.

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : F \rightarrow \text{Abb}(\bar{k}^r \setminus X, \bar{k}), \left[\frac{f}{g} \right] \mapsto \left(x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \right),$$

wobei die Wohldefiniertheit klar ist. Für alle $1 \leq i \leq r$ sei

$$h_i \in k[x_i] \subseteq k[x_1, \dots, x_r] \subseteq F$$

das Minimalpolynom von z_i über k (da x_i transzendent über k ist, können wir $k[x_i]$ als Polynomring über k verstehen). Wir setzten $h := \varphi(\prod_{i=1}^r h_i)$. Da $h \neq 0$ ist h in F invertierbar, also auch $\varphi(h)$ in $\text{Abb}(\bar{k}^r \setminus X, \bar{k})$. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass $\varphi(h)(z) = 0$.