Algebra I
Blatt 1

Jendrik Stelzner

23. April 2014

Aufgabe 1

Wir betrachten zunächst $H = \mathrm{SL}_2(K)$. Es ist klar, dass $H.0 = \{0\}$. Wir behaupten, dass $H.x = K^2 \smallsetminus \{0\}$ für alle $x \in K^2 \smallsetminus \{0\}$. Da Bahnen entweder disjunkt oder gleich sind, reicht es hierfür zu zeigen, dass $H.e_1 = K^2 \smallsetminus \{0\}$.

Es sei $x = (x_1, x_2)^T \in K^2 \smallsetminus \{0\}$. Ist $x_1 \neq 0$ so gilt für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1^{-1} \end{pmatrix},$$

dass $\det A = 1$, also $A \in H$, und $Ae_1 = x$. Ist $x_2 \neq 0$ so gilt für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2^{-1} \\ x_2 & 0 \end{pmatrix},$$

dass $\det B = 1$, also $B \in H$, und $Be_1 = x$. Da $x \neq 0$ muss $x_1 \neq 0$ oder $x_2 \neq 0$, also $x \in H.e_1$. Die Beliebigkeit von $x \in K^2 \smallsetminus \{0\}$ zeigt, dass $H.e_1 = K^2 \smallsetminus \{0\}$.

Für die natürliche Darstellung von $G = \mathrm{GL}_2(K)$ auf K^2 ergibt sich, dass $G.0 = \{0\}$. Da $H \leq G$ eine Untergruppe ist, so dass die Aktion von H auf K^2 durch die von G induziert wird, ist für alle $x \in K^2 \smallsetminus \{0\}$

$$K^2 \smallsetminus \{0\} = H.x \subseteq G.x \subseteq K^2 \smallsetminus \{0\},$$

also $G.x = K^2 \smallsetminus \{0\}$.

Für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_{e_1}$$

muss

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = Ae_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie daher $1 = \det A = d$. Also ist $H_{e_1} \subseteq U$. Es ist aber auch klar, dass $U \subseteq H_{e_1}$, denn es ist $\det B = 1$ und $Be_1 = e_1$ für alle $B \in U$. Daher ist $U = H_{e_1}$.

Dass für jedes $x \in K^2 \setminus \{0\}$ die Stabilisatorgruppe H_x zu U konjugiert ist, folgt direkt daraus, dass x und e_1 die gleiche Bahn und damit konjugierte Stabilisatorgruppen haben.

Aufgabe 2

Um uns die Aufgabe zu erleichtern übertragen wir zunächst einige Aussagen, die wir für Polynome in einer Variablen kennen, auf Polynome in mehreren Variablen.

Lemma 1. *Sei K ein unendlicher Körper und $n \geq 1$. Dann ist die Abbildung*

$$\varphi : K[X_1, \ldots, X_n] \to \mathcal{P}(K^n), p \mapsto ((\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$$

von Polynomen auf die entsprechenden Polynomsfunktionen injektiv. Insbesondere gilt für $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ für alle } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$$

bereit, dass $f = g$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage per Induktion über $n \geq 1$.

Induktionsanfang. Es sei $n = 1$. Für $f, g \in K[X_1]$ mit $f(\lambda) = g(\lambda)$ für alle $\lambda \in K$ ist $(f - g)(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in K$. Da K unendlich ist hat $f - g$ daher unendlich viele Nullstellen. Daher muss $f - g = 0$, also $f = g$.

Induktionsschritt. Es sei $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für alle kleineren $k \geq 1$. Da φ offenbar K-linear ist (eigentlich sogar ein K-Algebrahomomorphismus), genügt es zu zeigen, dass $\ker \varphi = 0$. Sei also $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0 \text{ für alle } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K.$$

Wir können f als

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^i$$

schreiben, wobei $p_i \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $p_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ ist

$$g_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}}(X_n) := f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, X_n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) X_n^i.$$

ein Polynom in nur noch einer Variablen mit

$$g_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}}(\lambda) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda) = 0 \text{ für alle } \lambda \in K.$$

Es muss daher nach Induktionsvoraussetzung für $k = 1$ bereits $g_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}} = 0$ für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$. Also ist für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$

$$p_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung für $k = n - 1$ bedeutet dies für alle $i \in \mathbb{N}$, dass bereits $p_i = 0$. Also ist bereits $f = 0$.

$\square$

Da die Abbildung von Polynomen auf Polynomsfunktionen offenbar surjektiv ist, ist φ sogar ein K-Algebraisomorphismus (falls K unendlich ist). Wir werden daher im Folgenden nicht mehr zwischen Polynomen und Polynomsfunktionen unterscheiden, sofern wir uns über einem unendlichen Körper befinden.

Bemerkung 2. *Es sei K ein unendlicher Körper, $n \geq 1$ und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\operatorname{supp}(f) = \emptyset$ oder $\operatorname{supp}(f)$ unendlich. Insbesondere ist für $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit*

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ für fast alle } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$$

bereits $f = g$.

Beweis. Wir nehmen an, die Aussage gilt nicht. Dann gibt es $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, so dass $\operatorname{supp}(f) \neq \emptyset$ und $\operatorname{supp}(f)$ endlich ist. Es sei dann $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \operatorname{supp}(f)$. Wir betrachten das Polynom $g \in K[X]$ mit

$$g(X) := f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, X).$$

Es ist $\operatorname{supp}(g) \neq \emptyset$, da $g(\lambda_n) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$ und $\operatorname{supp}(g)$ endlich, da $\operatorname{supp}(f)$ endlich ist. Da K unendlich ist, hat g unendlich viele Nullstellen. Also muss bereits $g = 0$, was im Widerspruch zu $\operatorname{supp}(g) \neq \emptyset$ steht. Es kann also ein solches g und daher auch ein solches f nicht geben.

Für $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ für fast alle } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$$

ist $\operatorname{supp}(f - g)$ endlich. Also muss $\operatorname{supp}(f - g) = \emptyset$ und damit nach Lemma 1 bereits $f - g = 0$ und daher $f = g$. □

(a)

Da K unendlich ist, können wir $K[X, Y]$ nach Lemma 1 mit den Polynomsfunktionen $\mathcal{P}\left(K^2\right)$ identifizieren. Die natürliche Darstellung von $G = \mathrm{GL}_2(K)$ auf K^2 induziert bekanntermaßen eine lineare Gruppenwirkung von G auf $\mathcal{P}\left(K^2\right)$ vermöge

$$(A.p)(x) = p\left(A^{-1}x\right) \text{ für alle } A \in G, x \in K^2.$$

Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

ist daher für alle $p \in K[X, Y]$

$$(A.p)(X, Y) = p(aX + bY, cX + dY).$$

Für $X, Y \in K[X, Y]$ ist daher

$$A.X = aX + bY \text{ und } A.X = cX + dY.$$

(b)

Es ist klar, dass $K \subseteq K[X,Y]^G$. Es gilt daher nur noch zu zeigen, dass $K[X,Y] \subseteq K$. Sei hierfür $p \in K[X,Y]$. Für $x \in K^2 \setminus \{0\}$ gibt es nach Aufgabe 1 eine Matrix $A \in G$ mit $A^{-1}x = e_1$. Daher ist

$$p(x) = (A.p)(x) = p\left(A^{-1}.x\right) = p(e_1).$$

Dass zeigt, dass p auf $K^2 \setminus \{0\}$ konstant ist. Nach Bemerkung 2 ist daher p bereits auf ganz K^2 konstant, also nach Lemma 1 bereits $p \in K$. (Es ist klar, dass bei der Identifikation $K[X,Y] \cong \mathcal{P}\left(K^2\right)$ die konstanten Polynome auf naheliegende Weise genau den konstanen Polynomsfunktionen entsprechen.)

Für $\mathrm{SL}_2(K)$ ist die Argumentation analog, da die natürliche Wirkung von $\mathrm{SL}_2(K)$ auf K^2 zu den gleichen Bahnen führt wie die Wirkung von $\mathrm{GL}_2(K)$.

(c)

Für $p \in K[X,Y]$ mit $p \in K[Y]$ ist für alle $A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$

$$(A.p)(X,Y) = p(X - sY, Y) = p(X,Y).$$

Daher ist $U \subseteq K[X,Y]^U$.

Sei andererseits $p \in K[X,Y]^U$. Dann ist für alle $A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$

$$p(X,Y) = (A.p)(X,Y) = p(X - sY, Y).$$

Wir bemerken, dass daher $p(x,y) = p(x',y)$ für alle $y \neq 0, x, x' \in K$, da

$$p(x,y) = p\left(x - \left((x'-x)y^{-1}\right)y, y\right) = p(x',y).$$

Wir definieren $q \in K[X,Y]$ mit $q \in K[X,Y]$ als $q(X,Y) = p(0,Y)$. Für alle $x \in K$ ist für alle $y \neq 0$

$$q(x,y) = p(0,y) = p(x,y).$$

Nach Bemerkung 2 muss daher bereits $q(x,y) = p(x,y)$ für alle $x, y \in K$. Nach Lemma 1 ist daher bereits $p = q$, also $p \in K[Y]$. Das zeigt, dass $K[X,Y]^U \subseteq K[Y]$.