

ALGEBRA I

BLATT 6

Thorben Kastenholz

Jendrik Stelzner

24. Mai 2014

Aufgabe 1 und Aufgabe 4

Im Folgenden sei k ein (nicht notwendigerweise unendlicher) Körper und V ein endlichdimensionaler k -Vektorraum.

Es sei $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Wir wollen untersuchen, in welchen Teilmengen von V X Zariski-dicht liegt, und wie sich Zariski-Dichtheit charakterisieren lässt.

Hierfür bemerken wir, dass die Teilmengen von V , in denen X Zariski-dicht liegt, unter Vereinigungen abgeschlossen sind: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Kollektion von Teilmengen mit $X \subseteq U_i \subseteq V$ für alle $i \in I$, so dass X für alle $i \in I$ Zariski-dicht in U_i liegt, so liegt X auch Zariski-dicht in

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Denn da $I \neq \emptyset$ ist $X \subseteq U \subseteq V$, und für $f \in \mathcal{P}(V)$ mit $f|_X = 0$ ist $f|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, also auch $f|_U = 0$.

Diese Beobachtung motiviert die folgende Definition:

Definition 1. Für $X \subseteq V$ ist

$$Z(X) := \bigcup \{Y \mid X \subseteq Y \subseteq V \text{ und } X \text{ liegt Zariski-dicht in } Y\}$$

der Zariski-Abschluss von X . X heißt Zariski-abgeschlossen, wenn $Z(X) = X$.

Mithilfe des Zariski-Abschlusses können wir nun den Begriff der Zariski-Dichtheit umformulieren.

Lemma 1. Sei $X \subseteq V$.

- a) X liegt genau dann Zariski-dicht in einer Teilmenge $Y \subseteq V$, wenn $X \subseteq Y \subseteq Z(X)$. Insbesondere ist $Z(X)$ die größte Teilmenge von V , in der $Z(X)$ Zariski-dicht liegt.
- b) X ist genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn X in keiner echt größeren Teilmenge von V Zariski-dicht liegt.
- c) $Z(X)$ ist die kleinste Zariski-abgeschlossene Menge, die X enthält.

Beweis. a) Liegt X Zariski-dicht in $Y \subseteq V$, so ist $Y \subseteq Z(X)$ nach der Definition von $Z(X)$. Da die Mengen, in denen X Zariski-dicht liegt, unter Vereinigung abgeschlossen sind, ist X Zariski-dicht in $Z(X)$, und damit ist auch in jeder Teilmenge $Y \subseteq Z(X)$ mit $X \subseteq Y$.

- b) Ist X Zariski-abgeschlossen, so gilt für jede Teilmenge $Y \subseteq V$, in der X Zariski-dicht liegt, dass $Y \subseteq Z(X) = X$ und somit $Y = X$. Liegt X in keiner echt größeren Teilmenge von V Zariski-dicht, so ist

$$\{Y \mid X \subseteq Y \subseteq V \text{ und } X \text{ liegt Zariski-dicht in } Y\} = \{X\}$$

und somit $Z(X) = X$.

- c) $Z(X)$ ist Zariski-abgeschlossen, denn liegt $Z(X)$ Zariski-dicht in $Y \subseteq V$, so liegt auch X Zariski-dicht in Y , weshalb $Y \subseteq Z(X)$ und somit $Y = Z(X)$. Für eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq V$ mit $X \subseteq Y \subseteq Z(X)$ ist, da X Zariski-dicht in $Z(X)$ liegt, auch Y Zariski-dicht in $Z(X)$. Da Y Zariski-abgeschlossen ist, ist $Z(X) = Y$. \square

Für Teilmengen $X \subseteq Y \subseteq V$ ist X genau dann Zariski-dicht in Y , wenn für jede Funktion $f \in \mathcal{P}(V)$ die Einschränkung $f|_Y$ bereits eindeutig durch $f|_X$ bestimmt ist. Dies legt die Vermutung nahe, dass sich Zariski-Abschluss und Zariski-Abgeschlossenheit von $X \subseteq V$ mithilfe von Mengen an Polynomfunktionen formulieren lassen.

Lemma 2. Sei $X \subseteq V$. Dann ist

$$Z(X) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)),$$

und X ist genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn

$$X = \mathcal{V}(\mathfrak{a}).$$

für eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}(V)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}(V)$. Sei $Y \subseteq V$, so dass $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ Zariski-dicht in Y liegt. Für alle $f \in \mathfrak{a}$ ist $f|_{\mathcal{V}(\mathfrak{a})} = 0$, also auch $f|_Y = 0$. Daher ist $Y \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a})$. Nach Lemma 1 ist $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ daher Zariski-abgeschlossen.

X ist Zariski-dicht in $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$, denn es ist $X \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ für alle $f \in \mathcal{P}(V)$ ist

$$f|_X = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{I}(X) \Rightarrow f|_{\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))} = 0$$

weshalb nach Lemma 1

$$X \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subseteq Z(X).$$

Da $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ Zariski-abgeschlossen ist, ist $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \supseteq Z(X)$. Also ist

$$Z(X) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)).$$

Insbesondere ist X genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn

$$X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)).$$

\square

Wie der Begriff der Zariski-Abgeschlossenheit bereits nahelegt, lassen sich die bisherigen Beobachtungen auch topologisch formulieren.

Lemma 3. Die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von V definieren eine Topologie auf V , in der die abgeschlossenen Mengen genau die Zariski-abgeschlossenen Mengen sind.

Beweis. $\emptyset = \mathcal{V}(\{1\})$ und $V = \mathcal{V}(\{0\})$ sind Zariski-abgeschlossen. Für eine Familien $(A_i)_{i \in I}$ von Zariski-abgeschlossenen Mengen ist nach Lemma 2 auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ Zariski-abgeschlossen, da

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(\mathcal{I}(A_i)) = \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{I}(A_i)\right).$$

Sind $A, B \subseteq V$ Zariski-abgeschlossen, so ist auch $A \cup B$ Zariski-abgeschlossen: Ist $A \cup B = V$ so ist nichts zu zeigen. Ansonsten sei $y \in V \setminus (A \cup B)$ beliebig aber fest. Da A Zariski-abgeschlossen ist, ist A nach Lemma 1 nicht Zariski-dicht in $A \cup \{y\}$. Es gibt deshalb ein $f \in \mathcal{P}(V)$ mit

$$f|_A = 0 \quad \text{und} \quad f(y) \neq 0$$

Analog gibt es $g \in \mathcal{P}(V)$ mit

$$g|_B = 0 \quad \text{und} \quad g(y) \neq 0$$

Es ist daher $fg \in \mathcal{P}(V)$ mit

$$(fg)|_{A \cup B} = 0 \quad \text{und} \quad (fg)(y) \neq 0$$

Also ist $A \cup B$ nicht Zariski-dicht in $A \cup B \cup \{y\}$. Wegen der Beliebigkeit von $y \in V \setminus (A \cup B)$ zeigt dies, dass $A \cup B$ in keiner echt größeren Teilmenge von V Zariski-dicht liegt, weshalb $A \cup B$ nach Lemma 1 Zariski-abgeschlossen ist.

Damit ergibt sich nun induktiv, dass für alle Zariski-abgeschlossenen Mengen $A_1, \dots, A_n \subseteq V$ auch $A_1 \cup \dots \cup A_n$ Zariski-abgeschlossen ist. \square