Algebra I
Blatt 5

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

16. Mai 2014

Aufgabe 1

(a)

Für $f, g : V \to k$ ist für alle $v \in V$

$$(fg)(v) = 0 \Leftrightarrow f(v)g(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \text{ oder } g(v) = 0.$$

Insbesondere ist daher für alle $f, g \in \mathcal{P}(V)$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(fg) &= \{v \in V \mid (fg)(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ oder } g(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \cup \{v \in V \mid g(v) = 0\} \\ &= \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g).\end{aligned}$$

(b)

Es ist

$$\begin{aligned}F &= \left(X^2 - 9\right)^2 + \left(Y^2 - 16\right)^2 + 2\left(X^2 + 9\right)\left(Y^2 - 16\right) \\ &= \left(\left(X^2 + 9\right) + \left(Y^2 - 16\right)\right)^2 - 36X^2 \\ &= \left(X^2 + 9 + Y^2 - 16 + 6X\right)\left(X^2 + 9 + Y^2 - 16 - 6X\right) \\ &= \left((X+3)^2 + Y^2 - 16\right)\left((X-3)^2 + Y^2 - 16\right).\end{aligned}$$

Es ist daher nach dem vorherigen Aufgabenteil

$$\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}\left((X+3)^2 + Y^2 - 16\right) \cup \mathcal{V}\left((X-3)^2 + Y^2 - 16\right)$$

die Vereinigung zweier Kreise, siehe Abbildung 1.

(c)

Wir bemerken, dass

$$X^2\left(1 - X^2\right) - Y^2 = -X^4 + X^2 - Y^2 = -\left(\left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 - \frac{1}{4}\right).$$

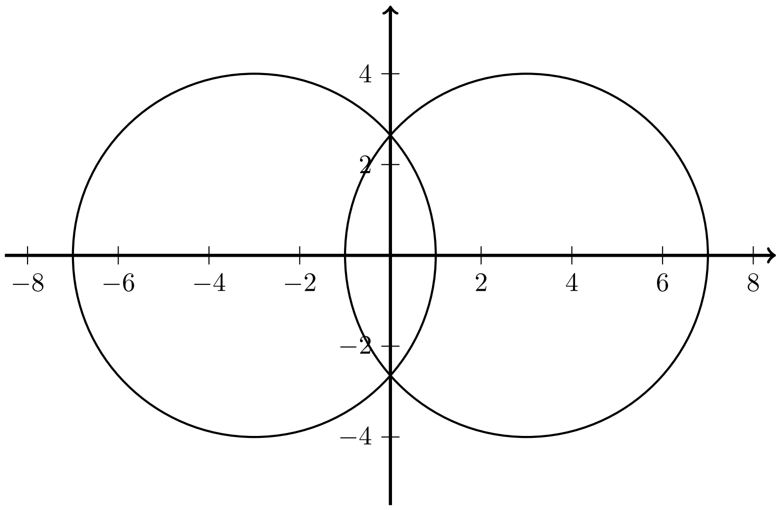

Abbildung 1: $\mathcal{V}(F)$ aus Aufgabe 1 (b).

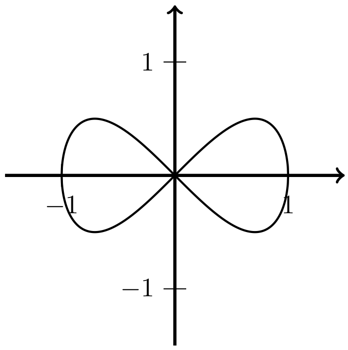

Abbildung 2: $\mathcal{V}\left(X^2\left(1-X^2\right)-Y^2\right)$ aus Aufgabe 1 (c).

Definieren wir

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto\left(x^2,y\right),$$

und den Kreis

$$K:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0\right\}$$

so ist daher

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\left(X^2\left(1-X^2\right)-Y^2\right)&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0\right\}\\&=f^{-1}(K).\end{aligned}$$

Es ergibt sich daher das Bild wie in Abbildung 2