Algebra I
Blatt 3

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

8. Mai 2014

Aufgabe 1

(a)

Das Polynom

$$f(x,y) := (x+iy)^{2014}(x-iy)^{2014} = \left(x^2+y^2\right)^{2014}$$

ist symmetrisch, da $f(x,y) = f(y,x)$.

Das Polynom

$$g(x,y) := 4x^3 + 3y^4$$

ist nicht symmetrisch, da $g(x,y) \neq g(y,x)$.

Das Polynom

$$\begin{aligned} h(x,y) &:= x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3 + x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \\ &= x^5 + 3x^4y + 4x^3y^2 + 4x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \end{aligned}$$

ist symmetrisch, da $h(x,y) = h(y,x)$.

(b)

Es ist

$$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{2014} = \left((x+y)^2 - 2xy\right)^{2014} = \left(e_1^2 - 2e_2\right)^{2014}$$

und

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3 + x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 \\ &= \left(x^2+y^2\right)\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right) \\ &= \left((x+y)^2 - 2xy\right)(x+y)^3 = \left(e_1^2 - 2e_2\right)e_1^3. \end{aligned}$$

(c)

Wir zeigen, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} = \mathbb{C}[e_1,e_2]$. Da e_1 und e_2 symmetrisch sind, und daher $e_1, e_2 \in \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$, ist klar, dass $\mathbb{C}[e_1,e_2] \subseteq \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$.

Um zu zeigen, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} \subseteq \mathbb{C}[e_1,e_2]$, zeigen wir zunächst per Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $x^n + y^n \in \mathbb{C}[e_1,e_2]$. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies Aussage klar.

Es sei daher $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für $n-1$ und $n-2$, d.h. es gelte $x^{n-1}+y^{n-1}, x^{n-2}+y^{n-2} \in \mathbb{C}[e_1, e_2]$. Dann ist auch

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= \left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)(x+y) - xy\left(x^{n-2}+y^{n-2}\right) \\ &= e_1\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right) - e_2\left(x^{n-2}+y^{n-2}\right) \in \mathbb{C}[e_1, e_2]. \end{aligned}$$

Sei nun $f \in \mathbb{C}[x,y]^{S_2}$. Wir schreiben f als

$$f(x,y) = \sum_{n,m\geq 0} a_{nm} x^n y^m$$

mit $a_{nm} \in \mathbb{C}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{nm} = 0$ für fast alle $n, m \in \mathbb{N}$. Das f symmetrisch ist, bedeutet, dass $a_{nm} = a_{mn}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$\begin{aligned} f(x,y) = \sum_{n,m\geq 0} a_{nm} x^n y^m &= \sum_{n\geq 0} a_{nn} x^n y^n + \sum_{\substack{n,m\geq 0 \\ n\neq m}} a_{nm} x^n y^m \\ &= \sum_{n\geq 0} a_{nn} x^n y^n + \sum_{n>m\geq 0} a_{nm}\left(x^n y^m + x^m y^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} a_{nn} (xy)^n + \sum_{n>m\geq 0} a_{nm} (xy)^m \left(x^{n-m} + y^{n-m}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} a_{nn} e_2^n + \sum_{n>m\geq 0} a_{nm} e_2^m \left(x^{n-m} + y^{n-m}\right) \in \mathbb{C}[e_1, e_2]. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\mathbb{C}[x,y]^{S_2} \subseteq \mathbb{C}[e_1, e_2]$.

Aufgabe 2

(a)

Wir schreiben $S_2 = \{e, s\}$ mit $s^2 = e$. Wir definieren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}S_2$ als

$$v_1 := e + s \text{ und } v_2 := e - s.$$

Es ist klar, dass $\{v_1, v_2\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}S_2$ ist, dass wir also eine Zerlegung

$$\mathbb{C}S_2 = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2 \tag{1}$$

von $\mathbb{C}$-Vektorräumen haben. Wir bemerken, dass $\mathbb{C}v_1$ und $\mathbb{C}v_2$ bereits Unterdarstellungen von $\mathbb{C}S_2$ sind, da

$$e.v_1 = v_1, e.v_2 = v_2 \text{ und } s.v_1 = v_1, s.v_2 = -v_2.$$

(Da S_2 linear auf $\mathbb{C}S_2$ wirkt genügt es die entsprechende Abgeschlossenheit unter Gruppenwirkung auf einer Basis nachzurechnen.) Da $\mathbb{C}v_1$ und $\mathbb{C}v_2$ eindimensionale Darstellungen sind, sind $\mathbb{C}v_1$ und $\mathbb{C}v_2$ irreduzibel, und damit insbesondere auch unzerlegbar. Es ist also (1) eine Zerlegung in unzerlegbare Unterdarstellungen, die alle irreduzibel sind.

(b)

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ beliebig aber fest. Für $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zerlegen wir die Darstellung $\mathbb{C}G$ von G in die direkte Summe von n irreduzibeln Unterdarstellungen $U_1, \ldots, U_n$.

Sei hierfür $w \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Schreiben wir $g_k := k + n\mathbb{Z}$ für $k \in \mathbb{Z}$, so definieren wir $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}G$ durch $v_j := \sum_{k=0}^{n-1} w^{(j-1)k}$ für alle $1 \leq j \leq n$, also

$$\begin{aligned}
v_1 &= g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1}, \\
v_2 &= g_0 + wg_1 + w^2 g_2 + \ldots + w^{n-1} g_{n-1}, \\
v_3 &= g_0 + w^2 g_1 + w^4 g_2 + \ldots + w^{2(n-1)} g_{n-1} \\
v_4 &= g_0 + w^3 g_1 + w^9 g_2 + \ldots + w^{3(n-1)} g_{n-1} \\
&\vdots \\
v_n &= g_0 + w^{n-1} g_1 + w^{2(n-1)} g_2 + \ldots + w^{(n-1)(n-1)} g_{n-1}.
\end{aligned}$$

Da w eine primitive n-te Einheitswurzel ist, sind $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$ paarweise verschieden. Da Elemente $v_1, \ldots, v_n$ sind daher linear unabhängig, denn es ist

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
1 & w & w^2 & \ldots & w^{n-2} & w^{n-1} \\
1 & w^2 & w^4 & \ldots & w^{2(n-2)} & w^{2(n-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & w^{n-2} & w^{2(n-2)} & \ldots & w^{(n-2)(n-2)} & w^{(n-1)(n-2)} \\
1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \ldots & w^{(n-2)(n-1)} & w^{(n-1)(n-1)}
\end{pmatrix} \\
= &\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w^{j-1} - w^{i-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (w^j - w^i) \neq 0.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Determinante beachte man, dass es sich bei der Matrix um eine Vandermonde-Matrix handelt.

Für alle $1 \leq i \leq n$ setzen wir $U_i := \mathbb{C}v_i$. Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind erhalten wir eine Zerlegung

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \tag{2}$$

von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Wir bemerken, dass $U_1, \ldots, U_n$ Unterdarstellungen von $\mathbb{C}G$ sind, denn es ist für jedes $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned}
g_1.v_j = g_1.\sum_{k=0}^{n-1} w^{(j-1)k} g_k &= \sum_{k=0}^{n-1} w^{(j-1)k} g_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} w^{(j-1)(k-1)} g_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} w^{(j-1)(k-1)} g_k + w^{(j-1)(n-1)} g_n \\
&= w^{-(j-1)} \sum_{k=1}^{n} w^{(j-1)k} g_k + w^{-(j-1)} g_0 \\
&= w^{-(j-1)} \sum_{k=0}^{n} w^{(j-1)k} g_k = w^{-(j-1)} v_j \in U_j.
\end{aligned}$$

Dabei nutzen wir, dass $w^{n-1} = w^n w^{-1} = w^{-1}$ und $g_n = g_0$. Da G von g_1 erzeugt wird, zeigt dies bereits, dass U_j eine Unterdarstellung von $\mathbb{C}G$ ist.

Da die Darstellungen U_j für alel $1 \leq j \leq n$ eindimensional ist, ist U_j für alle $1 \leq j \leq n$ irreduzibel, und damit insbesondere unzerlegbar. Daher ist (2) bereits eine Zerlegegung in unzerlegbare Unterdarstellungen, die alle irreduzibel sind.

Zuletzt merken wir noch an, dass der vorherige Aufgabenteil nur eine Sonderfall von diesem ist, da $S_2 \cong Z/2\mathbb{Z}$.

(c)

Wir setzen $G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, und für $n \in \mathbb{Z}$ setzen wir $g_n := n + 3\mathbb{Z} \in G$. Wir bemerken, dass

$$U := \langle g_0 + g_1 + g_2 \rangle_{\mathbb{F}_3}$$

eine Unterdarstellung von $\mathbb{F}_3 G$, denn G wird von g_1 erzeugt, und

$$g_1.(g_0 + g_1 + g_2) = g_1 + g_2 + g_3 = g_1 + g_2 + g_0 \in U.$$

Da $0 \neq U \neq \mathbb{F}_3 G$ zeigt dies, dass $\mathbb{F}_3 G$ reduzibel ist.

$\mathbb{F}_3 G$ ist jedoch unzerlegbar: Angenommen, $\mathbb{F}_3 G$ wäre zerlegbar. Dann hat $\mathbb{F}_3 G$ nicht-triviale Unterdarstellungen U_1, U_2 mit $\mathbb{F}_3 G = U_1 \oplus U_2$.

Die lineare Wirkung von g_1 lässt sich bezüglich der Basis $\{g_0, g_1, g_2\}$ von $\mathbb{F}_3 G$ als Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{F}_3[X]$ von A ist

$$\chi_A = (-t)^3 + 1 = -\left(t^3 - 1\right) = -(t-1)^3,$$

da $\operatorname{char} \mathbb{F}_3 = 3$. Da U_1 und U_2 Unterdarstellungen von $\mathbb{C}G$ sind, sind U_1 und U_2 invariant unter A. Bezeichnet $A_{|U_1}$ die Einschränkung der linearen Wirkung von g_1 auf U_1, und analog $A_{|U_2}$ die Einschränkung auf U_2, so ist daher

$$\chi_A = \chi_{A|U_1} \cdot \chi_{A|U_2}.$$

Da $\chi_A = -(t-1)^3$ und $\dim_{\mathbb{F}_3} U_1, \dim_{\mathbb{F}_3} U_2 \geq 1$ muss es in U_1 und U_2 daher Eigenvektoren von A zum Eigenwert 1 geben. Da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ müssen diese linear unabhängig sein. Daher muss der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 mindestens zweidimensional sein.

Durch kurzes Nachrechnen ergibt sich jedoch, dass

$$\ker(A - I) = \langle g_0 + g_1 + g_2 \rangle_{\mathbb{F}_3} = U$$

nur eindimensional ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\mathbb{F}_3 G$ unzerlegbar ist.