Algebra I
Blatt 2

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

1. Mai 2014

Aufgabe 1

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass kG-Moduln als unitär verstanden werden, da die Aussage sonst offenbar nicht stimmt.

Es sei $\pi : G \times V \to V$ eine lineare Gruppenwirkung auf V. Diese entspricht einem Gruppenhomomorphismus $\tilde{\pi} : G \to \mathrm{GL}(V), g \mapsto \pi_g$ mit $\pi_g : v \mapsto g.v$. Wir können diesen zu einer Abbildung $\overline{\pi} : G \to \mathrm{End}(V), g \mapsto \pi_g$ ergänzen. Da der zugrundelegende k-Vektorraum von kG der freie k-Vektorraum über G ist, lässt sich $\overline{\pi}$ durch die universelle Eigenschaft des freien Vektorraums zu einer linearen Abbildung $\tau : kG \to \mathrm{End}(V)$ ergänzen, d.h. für alle $\sum_{g \in G} a_g g \in kG$ ist

$$\tau\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g \overline{\pi}(g) = \sum_{g \in G} a_g \pi_g.$$

Da G eine k-Basis von kG ist, und τ auf dieser Basis multiplikativ ist (denn $\tau_{|G} = \overline{\pi}$), ist τ auch ein Ringhomomorphismus, d.h. für alle $\sum_{g \in G} a_g g, \sum_{h \in G} b_h h \in kG$ ist

$$\begin{aligned} &\tau\left(\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h\right)\right) = \tau\left(\sum_{g,h \in G} a_g b_h gh\right) \\ &= \sum_{g,h \in G} a_g b_h \pi_{gh} = \sum_{g,h \in G} a_g b_h \pi_g \pi_h = \left(\sum_{g \in G} a_g \pi_g\right)\left(\sum_{h \in G} b_h \pi_h\right) \\ &= \tau\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \tau\left(\sum_{h \in G} b_h h\right). \end{aligned}$$

Da auch $\tau(1_{kG}) = \tau(e) = \pi_e = 1_{\mathrm{End}(V)}$ ist $\tau : kG \to \mathrm{End}(V)$ ein unitaler k-Algebrahomomorphismus. Bekanntermaßen entspricht τ einer kG-Modulstruktur auf V via

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot v := \tau\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)(v) = \left(\sum_{g \in G} a_g \pi_g\right)(v) \\ = \sum_{g \in G} a_g \pi_g(v) = \sum_{g \in G} a_g (g.v). \end{aligned}$$

Andererseits entspricht eine kG-Modulstruktur auf V einem unitären k-Algebrahomomorphismus $\Phi : kG \to \mathrm{End}(V), x \mapsto (v \mapsto x \cdot v)$. Insbesondere ist Φ ein unitärer Ringhomomorphismus, und induziert daher einen Gruppenhomomorphismus der Einheitengruppen

$$\tilde{\phi} : (kG)^\times \to (\mathrm{End}(V))^\times = \mathrm{GL}(V).$$

Da $G \subseteq (kG)^\times$ eine Untergruppe ist (denn g hat in kG das Inverse g^{-1}) beschränkt sich $\tilde{\phi}$ zu einem Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$. ϕ entspricht einer linearen G-Gruppenwirkung auf V via $g.v = \phi(g)(v)$ für alle $g \in G, v \in V$.

Die beiden Konstruktionen sind invers zueinander: Es sei $\pi : G \times V \to V$ eine lineare Gruppenwirkung auf V, $\tilde{\tau} : kG \to \mathrm{End}(V)$ der entsprechende k-Algebrahomomorphismus, wie oben konstruiert, und $\pi' : G \to \mathrm{GL}(V)$ der Gruppenhomomorphismus, der wie oben durch Einschränkung von τ auf G entsteht. Da für alle $g \in G, v \in V$

$$\pi'(g)(v) = \tau(g)(v) = \pi_g(v) = g.v$$

ist die lineare Gruppenaktion, die π' entspricht, genau π.

Ist andererseits $\Phi : kG \to \mathrm{End}(V)$ ein unitärer k-Algebrahomomorhismus, $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ der wie oben beschriebene, durch Einschränkung entstehende Gruppenhomomorphismus, und $\Psi : kG \to \mathrm{End}(V)$ der aus π entstehende k-Algebrahomomorphismus. Es ist klar, dass Φ und Ψ auf $G \subseteq kG$ übereinstimmen. Da G eine k-Basis von kG ist, ist daher $\Phi = \Psi$.

Aufgabe 2

Es bezeichnen $\pi : G \times V \to V$ und $\tau : G \times W \to W$ die entsprechenden G-Wirkungen, sowie für alle $g \in G$

$$\pi_g : V \to V, g \mapsto g.v \text{ und } \tau_g : W \to W, g \mapsto g.w.$$

Da π und τ lineare Gruppenwirkungen sind, sind π_g und τ_g k-linear für alle $g \in G$.

(a)

Die gewöhnliche G-Wirkung auf $\mathrm{Maps}(W, V)$ ist definiert als

$$g.f = \pi_g \circ f \circ \tau_{g^{-1}}. \text{ für alle } f \in \mathrm{Maps}(W, V), g \in G.$$

$\mathrm{Hom}_k(W, V)$ ist unter dieser Gruppenaktion abgeschlossen, da für jede k-lineare Abbildung $f : W \to V$ und alle $g \in G$ auch $\pi_g \circ f \circ \tau_{g^{-1}} : W \to V$ k-linear ist. Also induziert die G-Wirkung auf $\mathrm{Maps}(W, V)$ eine G-Wirkung

$$\sigma : G \times \mathrm{Hom}_k(W, V) \to \mathrm{Hom}_k(W, V).$$

Da für alle $g \in G$ die Abbildung

$$\sigma_g : \mathrm{Hom}_k(W, V) \to \mathrm{Hom}_k(W, V), f \mapsto \pi_g \circ f \circ \tau_{g^{-1}}$$

k-linear in f ist, wirkt σ linear auf $\mathrm{Hom}_k(W, V)$. Das zeigt, dass $\mathrm{Hom}_k(W, V)$ vermöge σ eine Darstellung von G ist.

Im Falle $V = k$ hat σ die Form

$$\sigma_g : W^* \to W^*, f \mapsto f \circ \tau_{g^{-1}}.$$

Dies entspricht offenbar genau der dualen Darstellung von G.

(b)

Da V und W endlichdimensional sind, ist

$$\varphi : V \otimes_k W^* \to \mathrm{Hom}_k(W, V), v \otimes \lambda \mapsto (w \mapsto \lambda(w) \cdot v)$$

bekanntermaßen ein Isomorphismus von k-Vektorräumen. φ ist auch G-äquivariant, da für alle $g \in G, v \in V, \lambda \in W^*, w \in W$

$$\begin{aligned}\varphi(g.(v \otimes \lambda))(w) &= \varphi((g.v) \otimes (g.\lambda))(w) = (g.\lambda)(w) \cdot (g.v) \\ &= \lambda(g^{-1}.w) \cdot (g.v)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(g.\varphi(v \otimes \lambda))(w) &= (\pi_g \circ \varphi(v \otimes \lambda) \circ \tau_{g^{-1}})(w) \\ &= g.(\varphi(v \otimes \lambda)(g^{-1}.(w))) \\ &= g.(\lambda(g^{-1}.w) \cdot v) = \lambda(g^{-1}.w) \cdot (g.v),\end{aligned}$$

also $\varphi(g.(v \otimes \lambda)) = g.\varphi(v \otimes \lambda)$ für alle $g \in G, v \in V, \lambda \in W^*$, und deshalb $\varphi(g.x) = g.\varphi(x)$ für alle $g \in G, x \in V \otimes_k W^*$. (Die Elementartensoren $v \otimes \lambda$ mit $v \in V$ und $\lambda \in W^*$ sind ein Erzeugendensystem von $V \otimes_k W^*$, wegen der Linearität von $g.\varphi(x)$ und $\varphi(g.x)$ in x genügt es daher die Gleichheit der beiden Funktionen für Elementartensoren zu überprüfen.)

(c)

(i)

Es ist klar, dass die Abbildung

$$\varphi : k \to \mathrm{End}_k(V), x \mapsto x \,\mathrm{id}_V$$

k-linear ist. Sie ist auch g-äquivariant, da für alle $g \in G, \lambda \in k, v \in V$

$$\begin{aligned}(g.\varphi(\lambda))(v) &= (\pi_g \circ \varphi(\lambda) \circ \pi_{g^{-1}})(v) = g.(\varphi(\lambda)(g^{-1}.v)) = g.(\lambda(g^{-1}.v)) \\ &= \lambda(g.g^{-1}.v) = \lambda v = \varphi(\lambda)(v) = \varphi(g.\lambda)(v),\end{aligned}$$

also $g.\varphi(\lambda) = \varphi(g.\lambda)$ für alle $g \in G, \lambda \in k$.

(ii)

Da die Abbildung $V \times V^* \to k, (v, \lambda) \mapsto \lambda(v)$ offenbar k-bilinear ist, induziert sie eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \otimes V^* \to k, v \otimes \lambda \mapsto \lambda(v).$$

Diese ist g-äquivariant, da für alle $g \in G, v \in V, \lambda \in V^*$

$$\begin{aligned}\varphi(g.(v \otimes \lambda)) &= \varphi((g.v) \otimes (g.\lambda)) = (g.\lambda)(g.v) \\ &= \lambda(g^{-1}.g.v) = \lambda(v) = g.\lambda(v) = g.\varphi(v \otimes \lambda).\end{aligned}$$

Der Isomorphismus $V \otimes V^* \cong \mathrm{End}_k(V)$ ist durch

$$f : V \otimes V^* \to \mathrm{End}_k(V), v \otimes \lambda \mapsto (w \mapsto \lambda(w) \cdot v)$$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes V^* \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{End}_k(V) \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] \\
& k
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Die induzierte Abbildung ψ.

gegeben. Dieser induziert eine eindeutige Abbildung $\psi : \mathrm{End}_k(V) \to k$, so dass das Diagramm in Abbildung 1 kommutiert. Offenbar ist $\psi = \varphi f^{-1}$.

Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $v_1^*, \ldots, v_n^*$ die entsprechende duale Basis von V^*. Dann ist $(v_i \otimes v_j^*)_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Basis von $V \otimes V^*$, und $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Basis von $\mathrm{End}_k(V)$, wobei

$$E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i = \begin{cases} v_i & \text{falls } k = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da für alle $1 \leq i, j, k \leq n$

$$f(v_i \otimes v_j^*)(v_k) = v_j^*(v_k) \cdot v_i = \delta_{jk} v_i = E_{ij}(v_k)$$

ist $f(v_i \otimes v_j^*) = E_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Für $A \in \mathrm{End}_k(V)$ mit $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ ist daher

$$\begin{aligned} \psi(A) = \psi\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}\right) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \psi(E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi(f^{-1}(E_{ij})) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi(v_i \otimes v_j^*) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_j^*(v_i) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \mathrm{tr}(A). \end{aligned}$$

Es ist also $\psi = \mathrm{tr}$.

(d)

Bemerkung 1. Wir fixieren eine Gruppe G und einen Körper k. Es bezeichne $\mathbf{Rep}_G^k$ die Kategorie, deren Objekte die Darstellungen von G über k sind, zusammen mit den Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_G^k}(V, W) = \mathrm{Hom}_G(V, W)$$

für alle Darstellungen von V, W von G über k. Die Verknüpfung zweier Morphismen ist ihre Verknüpfung als Funktionen. (Es ist bekannt, dass $\mathbf{Rep}_G^k$ tatsächlich eine Kategorie ist.)

Wir bemerken zunächst, dass für $V \in \mathbf{Rep}_G^k$

$$V^G = \{v \in V : g.v = v \text{ für alle } g \in G\}$$

eine Unterdarstellung von G ist, auf der G trivial wirkt.

Beweis. Sei $V \in \mathbf{Rep}_G^k$ beliebig aber fest. Bezeichnet $\pi : G \times V \to V$ die Gruppenwirkung auf V, so ist

$$\begin{aligned} V^G &= \bigcap_{g \in G} \{v \in V : g.v = v\} = \bigcap_{g \in G} \{v \in V : \pi_g(v) = v\} \\ &= \bigcap_{g \in G} \{v \in V : (\pi_g - \mathrm{id}_V)(v) = 0\} = \bigcap_{g \in G} \ker(\pi_g - \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

ein Untervektorraum von V. Dass G trivial auf V^G wirkt ist offensichtlich. □

Als Nächstes bemerken wir, dass für $V, W \in \mathbf{Rep}_G^k$ jeder Homomorphismus von Darstellungen $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ durch Einschränkung einen Homomorphismus (von Darstellungen) $f^G : V^G \to W^G$ induziert.

Beweis. Für alle $v \in V^G$ ist

$$g.(f(v)) = f(g.v) = f(v) \text{ für alle } g \in G,$$

also $f(v) \in W^G$ für alle $v \in V^G$. Daher ist

$$f^G : V^G \to W^G, v \mapsto f(v)$$

eine wohldefinierte k-lineare Abbildung. Dass f G-äquivariant ist, folgt direkt daraus, dass G trivial auf V^G und W^G wirkt. □

Zusammengefasst ergibt dies, dass $T : \mathbf{Rep}_G^k \to \mathbf{Rep}_G^k$ mit

$$\begin{aligned} T(V) &:= V^G \text{ für alle } V \in \mathbf{Rep}_G^k \text{ und} \\ T(f) &:= f^G \text{ für alle } f \in \mathrm{Hom}_G(V, W) \text{ mit } V, W \in \mathbf{Rep}_G^k \end{aligned}$$

ein (kovarianter) Funktor ist.

Beweis. Es ist klar, dass $T(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V^V = \mathrm{id}_{T(V)}$ für alle $V \in \mathbf{Rep}_G^k$. Auch ist klar, dass T mit der Komposition verträglich ist, da es sich bei $T(f)$ für $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ um die Einschränkung von f handelt. □

Seien nun G und k wieder wie in der Aufgabe. Wir wissen, dass

$$\mathrm{Hom}_k(k, V) \in \mathbf{Rep}_G^k \text{ und } V \in \mathbf{Rep}_G^k.$$

Die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Hom}_k(k, V) \to V, f \mapsto f(1)$$

ist offenbar ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. φ ist auch G-äquivariant, da für alle $g \in G$ und $f \in \mathrm{Hom}_k(k, V)$

$$\varphi(g.f) = (g.f)(1) = g.f(g^{-1}.1) = g.f(1) = g.\varphi(f).$$

Es ist also φ ein Isomorphismus von Darstellungen. Da T (definiert wie in der Bemerkung) ein Funktor ist, erhalten wir einen Isomorphismus von Darstellungen

$$\psi : (\mathrm{Hom}_k(k, V))^G \to V^G, f \mapsto f(1).$$

Da $(\mathrm{Hom}_k(k, V))^G = \mathrm{Hom}_G(k, V)$ zeigt dies die Aussage.

Aufgabe 3

Es bezeichne $\pi : G \times V \to V$ die G-Wirkung auf V und $\pi^* : G \times V^* \to V^*$ die duale G-Wirkung auf V^*.

Es sei
$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\det S = 1 \neq 0$ ist $S \in \mathrm{GL}_2(k)$. Für alle $A \in \mathrm{SL}_2(k)$ ist $SAS^{-1} = (A^{-1})^T$, denn mit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
ist $1 = \det A = ad - bc$, also
$$\begin{aligned} SAS^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^T = \left(A^{-1}\right)^T. \end{aligned}$$

Bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2 von V und der dualen Basis e_1^*, e_2^* von V^* beschreibt S einen Vektorraumisomorphismus
$$\varphi : V \to V^* \text{ mit } \varphi(e_1) = e_2^* \text{ und } \varphi(e_2) = -e_1^*.$$
Wir behaupten, dass φ G-äquivariant. Hierzu bemerken wir, dass für alle $A \in G = \mathrm{SL}_2$ die darstellende Matrix von π_A bezüglich e_1, e_2 gerade A ist, und die darstellende Matrix von π_A^* bezüglich e_1^*, e_2^* damit, wie aus den Anwesenheitsaufgaben bekannt, $(A^{-1})^T$. φ hat bezüglich der Basen e_1, e_2 und e_1^*, e_2^* die darstellende Matrix S. Es ist daher
$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist } G\text{-äquivariant } &\Leftrightarrow \pi_A^* \circ \varphi = \varphi \circ \pi_A \text{ für alle } A \in G \\ &\Leftrightarrow \left(A^{-1}\right)^T S = SA \text{ für alle } A \in \mathrm{SL}_2(k) \\ &\Leftrightarrow \left(A^{-1}\right)^T = SAS^{-1} \text{ für alle } A \in \mathrm{SL}_2(k). \end{aligned}$$
Das zeigt, dass φ ein Isomorphismus von Darstellungen ist.

Aufgabe 4

Es sei k ein Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2$. Wir definieren einen Isomorphismus von k-Vektorräumen durch
$$\varphi : kS_2 \to k \times k \text{ mit } \varphi(e) = (1,1) \text{ und } \varphi(s) = (1,-1).$$
Da $\operatorname{char} k \neq 2$ ist $-1 \neq 1$, also φ tatsächlich ein k-Vektorraumisomorphismus. φ ist auf der Basis $\{e, s\}$ von kS_2 offenbar multiplikativ, d.h. für alle $x, y \in \{e, s\}$ ist $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Da φ linear ist, ist φ daher auch ein Ringhomomorphismus. Da $\varphi(1_{kS_2}) = \varphi(e) = 1_{k\times k}$ ist φ auch unitär. Das zeigt, dass φ ein k-Algebraisomorphismus ist. Da $k \cong \mathrm{Mat}(1 \times 1, k)$ zeigt dies, dass kS_2 isomorph zu einem Produkt von k-Matrixalgebren ist. Der Fall $k = \mathbb{C}$ ist ein Sonderfall hiervon, da $\operatorname{char} \mathbb{C} = 0$.

Ist $\operatorname{char} k = 2$, so ist eine Zerlegung nicht möglich: Wir nehmen an, es wäre möglich. Da $\dim_k kS_2 = 2$ muss eine solche Zerlegung von der Form

$$\varphi : kS_2 \cong k \times k$$

sein. Damit φ ein K-Algebraisomorphismus ist, muss

$$\varphi(e) = \varphi(1_{kS_2}) = 1_{k\times k} = (1,1).$$

Da $s^2 = 1$ muss $\varphi(s)^2 = 1_{k\times k}$, mit $(x,y) := \varphi(s)$ also

$$(1,1) = (x,y)^2 = (x^2, y^2).$$

Da $\operatorname{char} k = 2$ ist aber

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

weshalb dann

$$\varphi(s) = (1,1) = \varphi(e).$$

Dies steht im Widerspruch zur Injektivität von φ.