Algebra I
Blatt 9

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

26. Juni 2014

Aufgabe 2

Sei zunächst $p > 0$ prim und $m \geq 1$. Wir bemerken, dass $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ genau dann semisimple ist, wenn $m = 1$.

Hierfür bemerken wir zunächst, dass $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ unzerlegbar ist. Denn ist

$$\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k,$$

so muss $|G_i| \mid p^m$ für alle $i = 1, \ldots, k$, also $|G_i| = p^{m_i}$ mit $m_i \leq m$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Für ein Element $a \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ ist dann

$$\operatorname{ord} a \leq \operatorname{kgV}(|G_1|, \ldots, |G_k|) = p^{\max_{i=1,\ldots,k} m_i}.$$

Da $\operatorname{ord} 1 = m$ für $1 \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ muss $\max_{i=1,\ldots,k} m_i = m$, also $|G_i| = p^m = |\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}|$ für ein $1 \leq i \leq k$, und somit bereits $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} = G_i$.

Da $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ unzerlegbar ist, ist $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ genau dann semisimple, wenn es irreduzibel ist, also genau dann, wenn $m = 1$.

Für den allgemeinen Fall sei $n \geq 1$. Es sei $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$ eine Primfaktorzerlegung von n mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und $\nu_i \geq 1$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, ist

$$n\mathbb{Z} = (n) = (\operatorname{kgV}(p_1^{\nu_1}, \ldots, p_k^{\nu_k})) = \bigcap_{i=1}^{k} (p_i^{\nu_i}).$$

Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, ist

$$(p_i^{\nu_i}) + (p_j^{\nu_j}) = (\operatorname{ggT}(p_i^{\nu_i}, p_j^{\nu_j})) = (1) = \mathbb{Z},$$

für $i \neq j$. Die Ideale $(p_i^{\nu_i})$ sind also paarweise koprim zueinander. Nach dem chinesischen Restklassensatz gibt es also einen Isomorphismus von Ringen

$$\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/\bigcap_{i=1}^{k} (p_i^{\nu_i}) \cong \prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/(p_i^{\nu_i}),$$

also insbesondere einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/(p_i^{\nu_i})\mathbb{Z}.$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann semisimple, wenn jeder dieser Summanden semisimple ist. Nach der obigen Beobachtung gilt dies genau dann, wenn $\nu_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, k$, wenn also n quadratfrei ist.