Algebra I
Blatt 2

Jendrik Stelzner

1. Mai 2014

Aufgabe 1

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass kG-Moduln als unitär verstanden werden, da die Aussage sonst offenbar nicht stimmt.

Es sei $\pi : G \times V \to V$ eine lineare Gruppenwirkung auf V. Diese entspricht einem Gruppenhomomorphismus $\tilde{\pi} : G \to \mathrm{GL}(V), g \mapsto \pi_g$ mit $\pi_g : v \mapsto g.v$. Wir können diesen zu einer Abbildung $\bar{\pi} : G \to \mathrm{End}(V), g \mapsto \pi_g$ ergänzen. Da der zugrundelegende k-Vektorraum von kG der freie k-Vektorraum über G ist, lässt sich $\bar{\pi}$ durch die universelle Eigenschaft des freien Vektorraums zu einer linearen Abbildung $\tau : kG \to \mathrm{End}(V)$ ergänzen, d.h. für alle $\sum_{g \in G} a_g g \in kG$ ist

$$\tau\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g \bar{\pi}(g) = \sum_{g \in G} a_g \pi_g.$$

Da G eine k-Basis von kG ist, und τ auf dieser Basis multiplikativ ist (denn $\tau_{|G} = \bar{\pi}$), ist τ auch ein Ringhomomorphismus, d.h. für alle $\sum_{g \in G} a_g g, \sum_{h \in G} b_h h \in kG$ ist

$$\begin{aligned}
&\tau\left(\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h\right)\right) = \tau\left(\sum_{g,h \in G} a_g b_h gh\right) \\
&= \sum_{g,h \in G} a_g b_h \pi_{gh} = \sum_{g,h \in G} a_g b_h \pi_g \pi_h = \left(\sum_{g \in G} a_g \pi_g\right)\left(\sum_{h \in G} b_h \pi_h\right) \\
&= \tau\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \tau\left(\sum_{h \in G} b_h h\right).
\end{aligned}$$

Da auch $\tau(1_{kG}) = \tau(e) = \pi_e = 1_{\mathrm{End}(V)}$ ist $\tau : kG \to \mathrm{End}(V)$ ein unitaler k-Algebrahomomorphismus. Bekanntermaßen entspricht τ einer kG-Modulstruktur auf V via

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot v := \tau\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)(v) &= \left(\sum_{g \in G} a_g \pi_g\right)(v) \\
&= \sum_{g \in G} a_g \pi_g(v) = \sum_{g \in G} a_g (g.v).
\end{aligned}$$

Andererseits entspricht eine kG-Modulstruktur auf V einem unitären k-Algebrahomomorphismus $\Phi : kG \to \text{End}(V), x \mapsto (v \mapsto x \cdot v)$. Insbesondere ist Φ ein unitärer Ringhomomorphismus, und induziert daher einen Gruppenhomomorphismus der Einheitengruppen

$$\tilde{\phi} : (kG)^\times \to (\text{End}(V))^\times = \text{GL}(V).$$

Da $G \subseteq (kG)^\times$ eine Unterguppe ist (denn g hat in kG das Inverse g^{-1}) beschränkt sich $\tilde{\phi}$ zu einem Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to \text{GL}(V)$. ϕ entspricht einer linearen G-Gruppenwirkung auf V via $g.v = \phi(g)(v)$ für alle $g \in G, v \in V$.

Die beiden Konstruktionen sind invers zueinander: Es sei $\pi : G \times V \to V$ eine lineare Gruppenwirkung auf V, $\tilde{\tau} : kG \to \text{End}(V)$ der entsprechende k-Algebrahomomorphismus, wie oben konstruiert, und $\pi' : G \to \text{GL}(V)$ der Gruppenhomomorphismus, der wie oben durch Einschränkung von τ auf G entsteht. Da für alle $g \in G, v \in V$

$$\pi'(g)(v) = \tau(g)(v) = \pi_g(v) = g.v$$

ist die lineare Gruppenaktion, die π' entspricht, genau π.

Ist andererseits $\Phi : kG \to \text{End}(V)$ ein unitärer k-Algebrahomomorhismus, $\pi : G \to \text{GL}(V)$ der wie oben beschriebene, durch Einschränkung entstehende Gruppenhomomorphismus, und $\Psi : kG \to \text{End}(V)$ der aus π entstehende k-Algebrahomomorphismus. Es ist klar, dass Φ und Ψ auf $G \subseteq kG$ übereinstimmen. Da G eine k-Basis von kG ist, ist daher $\Phi = \Psi$.