

# ALGEBRA I

## BLATT 8

Thorben Kastenholz  
Jendrik Stelzner

20. Juni 2014

### Aufgabe 1

**Lemma 1.** *Es sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann sind äquivalent:*

- i)  $M$  ist noethersch, d.h. jede aufsteigende Kette von Untermoduln von  $M$

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

stabilisiert.

- ii) Jeder Untermodul von  $M$  ist endlich erzeugt über  $R$ .

*Insbesondere ist ein kommutativer Ring  $R$  genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen*

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

*in  $R$  stabilisiert.*

*Beweis.* Angenommen,  $M$  ist noethersch. Es sei  $M' \subseteq M$  ein Untermodul. Dann definieren wir eine aufsteigende Folge von Untermoduln von  $M'$  wie folgt: Wir beginnen mit  $M_0 := 0$ . Ist  $M_i$  definiert und  $M_i \neq M'$ , so gibt es  $m_{i+1} \in M' \setminus M_i$ , und wir setzen  $M_{i+1} := M_i + Rm_{i+1}$ ; ansonsten setzen wir  $M_{i+1} := M_i = M'$ . Da  $M$  noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \dots$$

von Untermoduln von  $M$ . Nach Konstruktion der  $M_i$  gibt es daher  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$M' = M_n = Rm_1 + \dots + Rm_n = (m_1, \dots, m_n).$$

Das zeigt, dass  $M'$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul ist.

Sei andererseits jeder Untermodul von  $M$  endlich erzeugt über  $R$ . Für eine aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von Untermoduln von  $M$  setzen wir

$$M' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k.$$

$M'$  ist ein Untermodul von  $M$  und somit endlich erzeugt. Nach Annahme gibt es daher  $m_1, \dots, m_n \in M'$  mit

$$M' = (m_1, \dots, m_n).$$

Nach Definition von  $M'$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $m_1, \dots, m_n \in M_N$ . Es ist daher  $M_N = M$  und somit auch  $M_k = M$  für alle  $k \geq N$ . Also stabilisiert die Kette.  $\square$

**(a)**

Da  $k$  kommutativ ist und nur zwei Ideale enthält, ist  $k$  offenbar noethersch. Induktiv ergibt sich damit aus dem Hilbertschen Basissatz direkt, dass auch  $k[x_1, \dots, x_n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  noethersch ist.

**(b)**

Es sei  $R$  ein kommutativer noetherscher Ring. Angenommen,  $R[X]$  ist nicht noethersch. Nach Lemma 1 gibt es dann ein Ideal  $I \subseteq R[X]$  das nicht endlich erzeugt über  $R[X]$  ist. (Inbesondere ist  $I \neq 0$ .)

Wir definieren eine Folge  $(f_i)_{i \geq 1}$  von Polynomen  $f_i \in I$  wie folgt: Wir wählen  $f_1 \in I \setminus \{0\}$  mit minimalen Grad. Ist  $f_i$  definiert, so ist, da  $I$  nicht endlich erzeugt ist,

$$(f_1, \dots, f_i) \neq I.$$

Es sei dann  $f_{i+1} \in I \setminus (f_1, \dots, f_i)$  vom minimalen Grad. Man bemerke, dass stets  $\deg f_i \leq \deg f_{i+1}$ .

Für alle  $i \geq 1$  definieren wir  $a_i \in R$  als den Leitkoeffizienten von  $f_i$  und setzen

$$J_i := (a_1, \dots, a_i) \subseteq R.$$

Da  $R$  noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette von Idealen

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$$

Es gibt also ein  $n \geq 1$  mit

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) = J_{n+1} = J_n = (a_1, \dots, a_n),$$

was äquivalent dazu ist, dass  $a_{n+1} \in (a_1, \dots, a_n)$ . Es gibt also  $r_1, \dots, r_n \in R$  mit

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^n r_i a_i.$$

Deshalb ist

$$g := \sum_{i=1}^n r_i f_i \cdot X^{\deg f_{n+1} - \deg f_i} \in (f_1, \dots, f_n)$$

ein Polynom mit gleichem Grad und gleichen Leitkoeffizienten wie  $f_{n+1}$ . Da  $f_{n+1} \notin (f_1, \dots, f_n)$  ist auch  $f_{n+1} - g \notin (f_1, \dots, f_n)$ . Da  $\deg(f_{n+1} - g) < \deg f_{n+1}$  steht dies im Widerspruch zur Gradminimalität von  $f_{n+1}$ .

Es ist also jedes Ideal in  $R[X]$  endlich erzeugt, und somit  $R[X]$  somit noethersch.

## Aufgabe 2

(a)

Es sei

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $M' \subseteq M$  ein Untermodul ist,  $i$  die kanonische Inklusion,  $M'' = M/M'$  und  $\pi$  die kanonische Projektion.

Angenommen,  $M$  ist noethersch. Jede aufsteigende Ketten von Untermoduln

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von  $M'$  ist auch eine aufsteigende Kette von Untermoduln von  $M$  und stabilisiert somit. Also ist  $M'$  noethersch. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$$

von  $M'' = M/M'$  liefert eine aufsteigende Kette von Untermoduln

$$\pi^{-1}(N_0) \subseteq \pi^{-1}(N_1) \subseteq \pi^{-1}(N_2) \subseteq \dots$$

von  $M$ , die  $M'$  enthalten. Da  $M$  noethersch ist stabilisiert diese Kette, und da  $\pi$  surjektiv ist, und somit

$$\pi(\pi^{-1}(N_i)) = N_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

stabilisiert auch die Kette in  $M''$ . Also ist  $M''$  noethersch. (Aus den Beweisen geht auch direkt hervor, dass Untermoduln und Quotientenmoduln noetherscher Moduln ebenfalls noethersch sind.)

Angenommen,  $M'$  und  $M''$  sind noethersch. Es sei dann

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Untermoduln von  $M$ . Für alle  $i \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$M'_i := M' \cap M_i \text{ und } M''_i := \pi(M_i)$$

und erhalten so aufsteigende Ketten von Untermoduln von  $M'$  und  $M''$ . Da diese noethersch sind stabilisieren dies Ketten. Es gibt also  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$M'_n = M'_N \text{ und } M''_n = M''_N \text{ für alle } n \geq N.$$

Daher ist auch  $M_n = M_N$  für alle  $n \geq N$ . (Denn für alle  $n \geq N$  enthalten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_N & \xrightarrow{i} & M_N & \xrightarrow{\pi} & M''_N & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M'_n & \xrightarrow{i} & M_n & \xrightarrow{\pi} & M''_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nach dem Fünferlemma ist die Inklusion bereits eine Gleichheit.)

**(b)**

Sind  $M_1, M_2$  zwei noethersche  $R$ -Moduln, so ist auch  $M_1 \oplus M_2$  noethersch. Dies ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2 \rightarrow 0.$$

Induktiv ergibt sich daher, dass für beliebige noethersche  $R$ -Moduln  $M_1, \dots, M_n$  auch  $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$  noethersch ist. Ist  $R$  noethersch, und somit noethersch als Modul über sich selbst, so ist daher insbesondere  $R^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  als  $R$ -Modul noethersch.

Für einen endlich erzeugten  $R$ -Modul  $M$  gibt es  $m_1, \dots, m_n \in M$ , so dass der Modulhomomorphismus

$$f : R^n \rightarrow M, (r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i m_i$$

surjektiv ist. Da  $R^n$  noethersch als  $R$ -Modul ist, und  $M \cong R^n / \ker f$  ist damit auch  $M$  noethersch über  $R$ .

**(c)**

Es bezeichne  $\pi : R \rightarrow R/I$  die kanonische Projektion.  $\pi$  ist sowohl ein Ringhomomorphismus als auch ein  $R$ -Modulhomomorphismus, wobei für alle  $r, s \in R$

$$r \cdot \pi(s) = \pi(rs) = \pi(r)\pi(s),$$

also für alle  $r \in R, m \in R/I$

$$r \cdot m = \pi(r) \cdot m.$$

Da  $R$  als  $R$ -Modul noethersch ist, ist auch der Quotientenmodul  $R/I$  noethersch über  $R$ . Offenbar entsprechen die Ideale in  $R/I$  genau den  $R$ -Untermoduln von  $R/I$ . Ein Ideal  $J \subseteq R/I$  ist daher als  $R$ -Modul endlich erzeugt, es gibt also  $m_1, \dots, m_n \in J$  mit

$$J = \sum_{i=1}^n Rm_i = \sum_{i=1}^n \pi(R)m_i = \sum_{i=1}^n (R/I)m_i.$$

Das zeigt, dass  $J$  als Ideal in  $R/I$  endlich erzeugt ist. Da jedes Ideal in  $R/I$  endlich erzeugt ist, ist  $R/I$  als Ring noethersch.

### Aufgabe 3

Wir gehen im folgenden davon aus, dass  $A, B$  und  $C$  kommutativ sind.

Da  $C$  als  $A$ -Algebra endlich erzeugt ist, gibt es  $x_1, \dots, x_n \in C$  mit

$$C = A[x_1, \dots, x_n],$$

und da  $C$  als  $B$ -Modul endlich erzeugt ist, gibt es  $y_1, \dots, y_n \in C$  mit

$$C = By_1 + \dots + By_n.$$

Inbesondere gibt es daher für alle  $1 \leq i \leq n$  Koeffizienten  $b_{ij} \in B, 1 \leq j \leq m$  mit

$$x_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} y_j \text{ für alle } i = 1, \dots, n,$$

und für alle  $1 \leq i, j \leq n$  Koeffizienten  $b_{ijk} \in B, 1 \leq k \leq n$  mit

$$y_i y_j = \sum_{k=1}^n b_{ijk} y_k.$$

Wir setzen

$$B_0 := A[b_{ij}, b_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq n]$$

Da  $A$  noethersch und kommutativ ist, ist auch

$$A[x_1, \dots, x_{n^2+n^3}]$$

noethersch (dies ergibt sich analog zum Aufgabe 1 (a)), und somit nach Aufgabe 2 (c) auch  $B_0$  als Quotient dieses Polynomringes.

Wir behaupten, dass

$$B_0 y_1 + \dots + B_0 y_n = C.$$

Dass  $\sum_{i=1}^n B_0 y_i \subseteq C$  ist klar. Andererseits ist für alle  $1 \leq r, s \leq n$

$$x_r x_s = \left( \sum_{i=1}^m b_{ri} y_i \right) \left( \sum_{j=1}^m b_{sj} y_j \right) = \sum_{i,j=1}^m b_{ri} b_{sj} y_i y_j = \sum_{i,j,k=1}^m b_{ri} b_{sj} b_{ijk} y_k,$$

also  $x_r x_s \in C$ . Analog ergibt sich induktiv, dass  $x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} \in \sum_{i=1}^n B_0 y_i$  für alle  $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}$ . Da  $C$  als  $A$ -Modul von diesen Elementen erzeugt wird, folgt, dass  $C \subseteq \sum_{i=1}^n B_0 y_i$ .

Es ist also  $C$  ein endlich erzeugter  $B_0$ -Modul. Da  $B_0$  noethersch ist, ist  $C$  damit nach Aufgabe 2 (b) noethersch als  $B_0$ -Modul. Daher ist  $B \subseteq C$  als  $B_0$ -Modul ebenfalls endlich erzeugt. Es gibt also  $z_1, \dots, z_s \in B$  mit

$$B_0 z_1 + \dots + B_0 z_s = B.$$

Es ist daher

$$A[b_{ij}, b_{ijk}, z_l \mid 1 \leq i, j, k \leq n, 1 \leq l \leq s] = B_0[z_l \mid 1 \leq l \leq s] = B,$$

also  $B$  als  $A$ -Algebra endlich erzeugt.

## Aufgabe 4

Wir nehmen an, dass  $K$  nicht algebraisch über  $k$  sei. Es seien  $x_1, \dots, x_m \in K$  mit

$$K = k[x_1, \dots, x_m].$$

Es sei  $A \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$  eine maximale Menge algebraisch unabhängiger Elemente. (Eine solche existiert, da es nur endlich viele Teilmengen gibt.) Wir können durch

passende Nummerierung o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $A = \{x_1, \dots, x_r\}$ . Nach Annahme ist  $r \geq 1$ , da die  $x_i$  sonst alle algebraisch über  $k$  wären, und somit auch  $K$  algebraisch über  $k$ . Wir setzen

$$F := k(x_1, \dots, x_r).$$

Für alle  $r < k \leq n$  ist die Familie  $x_1, \dots, x_r, x_k$  algebraisch abgänglich über  $k$  ist, also  $x_k$  algebraisch über  $F$ . Daher ist die Körpererweiterung

$$F \subseteq K = F(x_{r+1}, \dots, x_n)$$

algebraisch. Da sie von endlich vielen algebraischen Elementen erzeugt wird, ist sie sogar endlich, d.h.  $K$  ist als  $F$ -Vektorraum endlich. Insbesondere ergibt sich daher aus Aufgabe 3, dass  $F$  als  $k$ -Algebra endlich erzeugt ist. Es gibt also  $y_1, \dots, y_s \in F$  mit

$$F = k[y_1, \dots, y_s].$$

Da die  $x_1, \dots, x_r$  algebraisch unabhängig sind, ist  $k[x_1, \dots, x_r]$  isomorph zum Polynomring in  $r$  Variablen über  $k$ , und  $F$  zu dessen Quotientenkörper. Daher gibt es für alle  $i = 0, \dots, s$  Polynome  $f_i, g_i \in k[x_1, \dots, x_r]$  mit  $y_i = f_i/g_i$ .

Es sei  $\bar{k}$  ein algebraischer Abschluss von  $k$ . Wir setzen

$$X := \mathcal{V}(\{g_i \mid 1 \leq i \leq s\}) = \mathcal{V}\left(\prod_{i=1}^s g_i\right).$$

Wir bemerken, dass  $X \neq \bar{k}^r$ , denn die Inklusion

$$k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_r] \cong \mathcal{P}(\bar{k}).$$

ist ein injektiver, unitärer Ringhomomorphismus, und da  $g_i \neq 0$  für alle  $1 \leq i \leq s$  ist auch  $\prod_{i=1}^s g_i \neq 0$ . Also gibt es  $z \in \bar{k}^r$  mit  $\prod_{i=1}^s g_i(z) \neq 0$ .

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : F \rightarrow \text{Abb}(\bar{k}^r \setminus X, \bar{k}), \left[ \frac{f}{g} \right] \mapsto \left( x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \right),$$

wobei die Wohldefiniertheit klar ist. Für alle  $1 \leq i \leq r$  sei

$$h_i \in k[x_i] \subseteq k[x_1, \dots, x_r] \subseteq F$$

das Minimalpolynom von  $z_i$  über  $k$  (da  $x_i$  transzendent über  $k$  ist, können wir  $k[x_i]$  als Polynomring über  $k$  verstehen). Wir setzen  $h := \varphi(\prod_{i=1}^r h_i)$ . Da  $h \neq 0$  ist  $h$  in  $F$  invertierbar, also auch  $\varphi(h)$  in  $\text{Abb}(\bar{k}^r \setminus X, \bar{k})$ . Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass  $\varphi(h)(z) = 0$ .