

# ALGEBRA I

## BLATT 6

Thorben Kastenholz

Jendrik Stelzner

24. Mai 2014

### Aufgabe 1 und Aufgabe 4

Im Folgenden sei  $k$  ein (nicht notwendigerweise unendlicher) Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $k$ -Vektorraum. Für Teilmengen  $X \subseteq V$  wollen wir untersuchen, in welchen Teilmengen von  $V$   $X$  Zariski-dicht liegt, und wie sich Zariski-Dichtheit charakterisieren lässt.

Hierfür bemerken wir, dass die Teilmengen von  $V$ , in denen  $X$  Zariski-dicht liegt, unter Vereinigung abgeschlossen sind: Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine nichtleere Kollektion von Mengen mit  $X \subseteq U_i \subseteq V$  für alle  $i \in I$ , so dass  $X$  für alle  $i \in I$  Zariski-dicht in  $U_i$  liegt, so liegt  $X$  auch Zariski-dicht in

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Denn es ist  $I \neq \emptyset$  und deshalb  $X \subseteq U \subseteq V$ , und für  $f \in \mathcal{P}(V)$  mit  $f|_X = 0$  ist  $f|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , also auch  $f|_U = 0$ .

Diese Beobachtung motiviert die folgende Definition:

**Definition 1.** Für  $X \subseteq V$  ist

$$Z(X) := \bigcup \{Y \mid X \subseteq Y \subseteq V \text{ und } X \text{ liegt Zariski-dicht in } Y\}$$

der Zariski-Abschluss von  $X$ .  $X$  heißt Zariski-abgeschlossen, wenn  $Z(X) = X$ .

Mithilfe des Zariski-Abschlusses können wir nun den Begriff der Zariski-Dichtheit charakterisieren.

**Lemma 1.** Sei  $X \subseteq V$ .

- a)  $X$  liegt genau dann Zariski-dicht in  $Y \subseteq V$ , wenn  $X \subseteq Y \subseteq Z(X)$ . Insbesondere ist  $Z(X)$  die größte Teilmenge von  $V$ , in der  $X$  Zariski-dicht liegt.
- b)  $X$  ist genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn  $X$  in keiner echt größeren Teilmenge von  $V$  Zariski-dicht liegt.
- c)  $Z(X)$  ist die kleinste Zariski-abgeschlossene Menge, die  $X$  enthält.

**Beweis.** a) Liegt  $X$  Zariski-dicht in  $Y \subseteq V$ , so ist  $X \subseteq Y$ , und nach der Definition von  $Z(X)$  auch  $Y \subseteq Z(X)$ . Da die Mengen, in denen  $X$  Zariski-dicht liegt, unter Vereinigung abgeschlossen sind, ist  $X$  Zariski-dicht in  $Z(X)$ , und damit ist auch in jeder Teilmenge  $Y \subseteq Z(X)$  mit  $X \subseteq Y$ .

- b) Ist  $X$  Zariski-abgeschlossen, so gilt für jede Teilmenge  $Y \subseteq V$ , in der  $X$  Zariski-dicht liegt, dass  $Y \subseteq Z(X) = X$ . Liegt andererseits  $X$  in keiner echt größeren Teilmenge von  $V$  Zariski-dicht, so ist

$$\{Y \mid X \subseteq Y \subseteq V \text{ und } X \text{ liegt Zariski-dicht in } Y\} = \{X\}$$

und somit  $Z(X) = X$ .

- c)  $Z(X)$  ist Zariski-abgeschlossen, denn  $X$  liegt Zariski-dicht in  $Z(X)$ . Für jede Teilmenge  $Y \subseteq V$ , in der  $Z(X)$  Zariski-dicht liegt, liegt deshalb auch  $X$  Zariski-dicht, weshalb  $Y \subseteq Z(X)$ .

Für eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge  $Y \subseteq V$  mit  $X \subseteq Y \subseteq Z(X)$  ist, da  $X$  Zariski-dicht in  $Z(X)$  liegt, auch  $Y$  Zariski-dicht in  $Z(X)$ . Da  $Y$  Zariski-abgeschlossen ist, also in keiner echt größeren Teilmenge von  $V$  Zariski-dicht liegt, ist  $Z(X) = Y$ .  $\square$

Für Teilmengen  $X \subseteq Y \subseteq V$  ist  $X$  genau dann Zariski-dicht in  $Y$ , wenn für jede Funktion  $f \in \mathcal{P}(V)$  die Einschränkung  $f|_Y$  bereits eindeutig durch  $f|_X$  bestimmt ist. Dies legt die Vermutung nahe, dass sich der Zariski-Abschluss und die Zariski-Abgeschlossenheit von  $X \subseteq V$  mithilfe von Polynomfunktionen formulieren lassen.

**Lemma 2.** Sei  $X \subseteq V$ . Dann ist

$$Z(X) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)),$$

und  $X$  ist genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn

$$X = \mathcal{V}(\mathfrak{a}).$$

für eine Teilmenge  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}(V)$ .

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}(V)$ . Sei  $Y \subseteq V$ , so dass  $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$  Zariski-dicht in  $Y$  liegt. Für alle  $f \in \mathfrak{a}$  ist  $f|_{\mathcal{V}(\mathfrak{a})} = 0$ , also auch  $f|_Y = 0$ . Daher ist  $Y \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a})$ . Da  $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$  in keiner echt größeren Teilmenge von  $V$  Zariski-dicht liegt, ist  $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$  nach Lemma 1 Zariski-abgeschlossen.

$X$  ist Zariski-dicht in  $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ , da  $X \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$  und für alle  $f \in \mathcal{P}(V)$

$$f|_X = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{I}(X) \Rightarrow f|_{\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))} = 0.$$

Deshalb ist

$$X \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subseteq Z(X).$$

Da  $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$  Zariski-abgeschlossen ist, ist auch  $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \supseteq Z(X)$ . Also ist

$$Z(X) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)).$$

Insbesondere ist  $X$  genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn

$$X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)).$$

$\square$

Wie der Begriff der Zariski-Abgeschlossenheit bereits nahelegt, lassen sich die bisherigen Beobachtungen auch topologisch formulieren.

**Lemma 3.** Die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von  $V$  definieren eine Topologie auf  $V$ , in der die abgeschlossenen Mengen genau die Zariski-abgeschlossenen Mengen sind.

*Beweis.*  $\emptyset = \mathcal{V}(\{1\})$  und  $V = \mathcal{V}(\{0\})$  sind Zariski-abgeschlossen. Für eine Familien  $(A_i)_{i \in I}$  von Zariski-abgeschlossenen Mengen ist nach Lemma 2 auch  $\bigcap_{i \in I} A_i$  Zariski-abgeschlossen, da

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(\mathcal{I}(A_i)) = \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{I}(A_i)\right).$$

Sind  $A, B \subseteq V$  Zariski-abgeschlossen, so ist auch  $A \cup B$  Zariski-abgeschlossen: Ist  $A \cup B = V$  so ist nichts zu zeigen. Ansonsten sei  $y \in V \setminus (A \cup B)$  beliebig aber fest. Da  $A$  Zariski-abgeschlossen ist, ist  $A$  nicht Zariski-dicht in  $A \cup \{y\}$ . Es gibt deshalb ein  $f \in \mathcal{P}(V)$  mit

$$f|_A = 0 \quad \text{und} \quad f(y) \neq 0$$

Analog gibt es  $g \in \mathcal{P}(V)$  mit

$$g|_B = 0 \quad \text{und} \quad g(y) \neq 0$$

Für  $fg \in \mathcal{P}(V)$  ist deshalb

$$(fg)|_{A \cup B} = 0 \quad \text{und} \quad (fg)(y) \neq 0$$

Also ist  $A \cup B$  nicht Zariski-dicht in  $A \cup B \cup \{y\}$ . Wegen der Beliebigkeit von  $y \in V \setminus (A \cup B)$  zeigt dies, dass  $A \cup B$  in keiner echt größeren Teilmenge von  $V$  Zariski-dicht liegt, weshalb  $A \cup B$  Zariski-abgeschlossen ist.

Daraus ergibt sich induktiv, dass  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  für alle Zariski-abgeschlossenen Mengen  $A_1, \dots, A_n \subseteq V$  ebenfalls Zariski-abgeschlossen ist.  $\square$

## Aufgabe 2

Für alle

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(k)$$

ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix},$$

also

$$\text{tr}(A) = a + d \quad \text{und} \quad \text{tr}_2(A) = a^2 + d^2.$$

Für  $I, J \subseteq M_2(k)$  mit

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\text{tr}(I) = \text{tr}(J) = \text{tr}_2(I) = \text{tr}_2(J) = 0.$$

Deshalb ist  $f(I) = f(J)$  für alle  $f \in k[\text{tr}, \text{tr}_2]$ . Für  $\det \in \mathcal{P}(M_2(k))^{\text{GL}_2(k)}$  ist jedoch

$$\det(I) = 1 \neq 0 = \det(J).$$

Das zeigt, dass  $\det \notin k[\text{tr}, \text{tr}_2]$ . Also wird  $\mathcal{P}(M_2(k))^{\text{GL}_2(k)}$  nicht von  $\text{tr}, \text{tr}_2$  erzeugt.