Algebra I
Blatt 8

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

20. Juni 2014

Aufgabe 1

Lemma 1. *Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) M ist noethersch, d.h. jede aufsteigende Kette von Untermoduln von M

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$$

stabilisiert.

ii) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt über R.

Insbesondere ist ein kommutiver Ring R genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$$

in R stabilisiert.

Beweis. Angenommen, M ist noethersch. Es sei $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann definieren wir eine eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M' wie folgt: Wir beginnen mit $M_0 := 0$. Ist M_i definiert und $M_i \neq M'$, so gibt es $m_{i+1} \in M' \smallsetminus M_i$, und wir setzen $M_{i+1} := M_i + Rm_{i+1}$; ansonsten setzen wir $M_{i+1} := M_i = M'$. Da M noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \ldots$$

von Untermoduln von M. Nach Konstruktion der M_i gibt es daher $n \in \mathbb{N}$ mit

$$M' = M_n = Rm_1 + \ldots + Rm_n = (m_1, \ldots, m_n).$$

Das zeigt, dass M' ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Sei andererseits jeder Untermodul von M endlich erzeugt über R. Für eine aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$$

von Untermoduln von M setzen wir

$$M' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k.$$

M' ist ein Untermodul von M und somit endlich erzeugt. Nach Annahme gibt es daher $m_1, \dots, m_n \in M'$ mit

$$M' = (m_1, \dots, m_n).$$

Nach Definition von M' gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $m_1, \dots, m_n \in M_N$. Es ist daher $M_N = M$ und somit auch $M_k = M$ für alle $k \geq N$. Also stabilisiert die Kette. $\square$

(a)

Da k kommutativ ist und nur zwei Ideale enthält, ist k offenbar noethersch. Induktiv ergibt sich damit aus dem Hilbertschen Basissatz direkt, dass auch $k[x_1, \dots, x_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ noethersch ist.

(b)

Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Angenommen, $R[X]$ ist nicht noethersch. Nach Lemma 1 gibt es dann ein Ideal $I \subseteq R[X]$ das nicht endlich erzeugt über $R[X]$ ist. (Inbesondere ist $I \neq 0$.)

Wir definieren eine Folge $(f_i)_{i \geq 1}$ von Polynomen $f_i \in I$ wie folgt: Wir wählen $f_1 \in I \setminus \{0\}$ mit minimalen Grad. Ist f_i definiert, so ist, da I nicht endlich erzeugt ist,

$$(f_1, \dots, f_i) \neq I.$$

Es sei dann $f_{i+1} \in I \setminus (f_1, \dots, f_i)$ vom minimalen Grad. Man bemerke, dass stets $\deg f_i \leq \deg f_{i+1}$.

Für alle $i \geq 1$ definieren wir $a_i \in R$ als den Leitkoeffizienten von f_i und setzen

$$J_i := (a_1, \dots, a_i) \subseteq R.$$

Da R noethersch ist, stabilisiert die aufsteigende Kette von Idealen

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$$

Es gibt also ein $n \geq 1$ mit

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) = J_{n+1} = J_n = (a_1, \dots, a_n),$$

was äquivalent dazu ist, dass $a_{n+1} \in (a_1, \dots, a_n)$. Es gibt also $r_1, \dots, r_n \in R$ mit

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i.$$

Deshalb ist

$$g := \sum_{i=1}^{n} r_i f_i \cdot X^{\deg f_{n+1} - \deg f_i} \in (f_1, \dots, f_n)$$

ein Polynom mit gleichem Grad und gleichen Leitkoeffizienten wie f_{n+1}. Da $f_{n+1} \notin (f_0, \dots, f_n)$ ist auch $f_{n+1} - g \notin (f_1, \dots, f_n)$. Da $\deg(f_{n+1} - g) < \deg f_{n+1}$ steht dies im Widerspruch zur Gradminimimalität von f_{n+1}.

Es ist also jedes Ideal in $R[X]$ endlich erzeugt, und somit $R[X]$ somit noethersch.

Aufgabe 2

(a)

Es sei
$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$$
eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $M' \subseteq M$ ein Untermodul ist, i die kanonische Inklusion, $M'' = M/M'$ und π die kanonische Projektion.

Angenommen, M ist noethersch. Jede aufsteigende Ketten von Untermoduln
$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$
von M' ist auch eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M und stabilisiert somit. Also ist M' noethersch. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln
$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$$
von $M'' = M/M'$ liefert eine aufsteigende Kette von Untermoduln
$$\pi^{-1}(N_0) \subseteq \pi^{-1}(N_1) \subseteq \pi^{-1}(N_2) \subseteq \dots$$
von M, die M' enthalten. Da M noethersch ist stabilisiert diese Kette, und da π surjektiv ist, und somit
$$\pi(\pi^{-1}(N_i)) = N_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$
stabilisiert auch die Kette in M''. Also ist M'' noethersch.

Angenommen, M' und M'' sind noethersch. Es sei dann
$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$
eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen wir
$$M_i' := M' \cap M_i \text{ und } M_i'' := \pi(M_i)$$
und erhalten so aufsteigende Ketten von Untermoduln von M' und M''. Da diese noethersch sind stabilisieren dies Ketten. Es gibt also $N \in \mathbb{N}$ mit
$$M_n' = M_N' \text{ und } M_n'' = M_N'' \text{ für alle } n \geq N.$$
Daher ist auch $M_n = M_N$ für alle $n \geq N$. (Denn für alle $n \geq N$ enthalten wir das folgende kommutive Diagramm mit exakten Zeilen.
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_N' \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M_N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & M_N'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & M_n' \arrow[r, "i"] & M_n \arrow[r, "\pi"] & M_n'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
Nach dem Fünferlemma ist die Inklusion bereits eine Gleichheit.)

(b)

Sind M_1, M_2 zwei noethersche R-Moduln, so ist auch $M_1 \oplus M_2$ noethersch. Dies ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0.$$

Induktiv ergibt sich daher, dass für beliebige noethersche R-Moduln $M_1, \ldots, M_n$ auch $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ noethersch ist. Ist R noethersch, und somit noethersch als Modul über sich selbst, so ist daher insbesonder R^n für alle $n \in \mathbb{N}$ als R-Modul noethersch.

Für einen endlich erzeugten R-Modul M gibt es $m_1, \ldots, m_n \in M$, so dass der Modulhomomorphismus

$$f : R^n \to M, (r_1, \ldots, r_n) \to \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$$

surjektiv ist. Da R^n noethersch ist, ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker f \hookrightarrow R^n \xrightarrow{f} M \to 0,$$

dass auch M noethersch ist.