Algebra I
Blatt 11

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

10. Juli 2014

Aufgabe 3

Wir behaupten, dass $R/\mathfrak{m}$ bis auf Isomorphie der einzige einfache R-Modul ist.

Wir bemerken zunächst folgendes: Für ein Linksideal $I \subseteq R$ entsprechen die R-Untermoduln von R/I in bijektiver Weise den Linksdealen von R, die I enthalten via

$$\{J \subseteq R \mid J \text{ ist ein Linksideal mit } I \subseteq J\} \xleftrightarrow{1:1} \{R\text{-Untermoduln von } R/I\}$$
$$J \mapsto J/I,$$

Daher ist R/I genau dann irreduzibel als R-Modul, wenn I ein maximales Linksideal in R ist. Inbesondere ist daher $R/\mathfrak{m}$ ein einfacher R-Modul.

Ist andererseits M ein einfacher R-Modul, so gibt es $m \in M$ mit $m \neq 0$. Da R unitär ist, ist $Rm \neq 0$ und wegen der Irreduziblität von M somit $Rm = M$. Wir erhalten so einen R-Modulepimorphismus

$$\pi : R \to M, r \mapsto rm.$$

$\ker \pi$ ist ein Untermodul, also Linksideal, in R, und da M einfach ist, ist $\ker \pi$ ein maximales Linksideal. Also ist $\ker \pi = \mathfrak{m}$. Somit ist

$$M \cong R/\ker \pi = R/\mathfrak{m}.$$

Aufgabe 4

Wir gehen davon aus, dass A unitär ist.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir definieren

$$\varepsilon : A \to k, a \mapsto (a, 1).$$

Aus der k-Bilinearität von $(\cdot, \cdot)$ folgt die k-Linearität von ε. Da $(\cdot, \cdot)$ nicht entartet ist, gibt es für jedes $a \in A$ mit $a \neq 0$ ein $b \in A$ mit $(a, b) \neq 0$, also

$$\varepsilon(ba) = (ba, 1) = (b, a) = (a, b) \neq 0.$$

(b) $\Rightarrow$ (a)

Für alle $a, b \in A$ definieren wir

$$(a, b) := \varepsilon(ab).$$

Aus (b) folgt direkt, dass dies auf A eine nicht entartete symmetrische Bilinearform definiert. Die Assoziativität von $(\cdot, \cdot)$ folgt direkt aus der Assoziativität der Multiplikation auf A.

(b) $\Leftrightarrow$ (c)

Es genügt zu zeigen, dass die jeweiligen Bedingungen (ii) in (b) und in (c) äquivalent sind. Sei hierfür $\varepsilon : A \to k$ k-linear.

Da A unitär ist, enthält ker ε genau dann ein von 0 verschiedenes Linksideal, wenn es ein von 0 verschiedenes Links-Hauptideal enthält. Dies gilt genau dann, wenn es $a \in A$, $a \neq 0$ gibt mit $\varepsilon(ba) = 0$ für alle $b \in A$. Dass $\varepsilon(ba) = 0$ für alle $b \in A$ ist äquivalent dazu, dass es kein $b \in A$ gibt mit $\varepsilon(ba) \neq 0$.