

ALGEBRA I

BLATT 1

Jendrik Stelzner

24. April 2014

Aufgabe 1

Wir betrachten zunächst $H = \mathrm{SL}_2(K)$. Es ist klar, dass $H \cdot 0 = \{0\}$. Wir behaupten, dass $H \cdot x = K^2 \setminus \{0\}$ für alle $x \in K^2 \setminus \{0\}$. Da Bahnen entweder disjunkt oder gleich sind, reicht es hierfür zu zeigen, dass $H \cdot e_1 = K^2 \setminus \{0\}$.

Es sei $x = (x_1, x_2)^T \in K^2 \setminus \{0\}$. Ist $x_1 \neq 0$ so gilt für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1^{-1} \end{pmatrix},$$

dass $\det A = 1$, also $A \in H$, und $Ae_1 = x$. Ist $x_2 \neq 0$ so gilt für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2^{-1} \\ x_2 & 0 \end{pmatrix},$$

dass $\det B = 1$, also $B \in H$, und $Be_1 = x$. Da $x \neq 0$ muss $x_1 \neq 0$ oder $x_2 \neq 0$, also $x \in H \cdot e_1$. Die Beliebigkeit von $x \in K^2 \setminus \{0\}$ zeigt, dass $H \cdot e_1 = K^2 \setminus \{0\}$.

Für die natürliche Darstellung von $G = \mathrm{GL}_2(K)$ auf K^2 ergibt sich, dass $G \cdot 0 = \{0\}$. Da $H \leq G$ eine Untergruppe ist, so dass die Aktion von H auf K^2 durch die von G induziert wird, ist für alle $x \in K^2 \setminus \{0\}$

$$K^2 \setminus \{0\} = H \cdot x \subseteq G \cdot x \subseteq K^2 \setminus \{0\},$$

also $G \cdot x = K^2 \setminus \{0\}$.

Für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_{e_1}$$

muss

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = Ae_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie daher $1 = \det A = d$. Also ist $H_{e_1} \subseteq U$. Es ist aber auch klar, dass $U \subseteq H_{e_1}$, denn es ist $\det B = 1$ und $Be_1 = e_1$ für alle $B \in U$. Daher ist $U = H_{e_1}$.

Dass für jedes $x \in K^2 \setminus \{0\}$ die Stabilisatorgruppe H_x zu U konjugiert ist, folgt direkt daraus, dass x und e_1 die gleiche Bahn und damit konjugierte Stabilisatorgruppen haben.

Aufgabe 2

Um uns die Aufgabe zu erleichtern übertragen wir zunächst einige Aussagen, die wir für Polynome in einer Variablen kennen, auf Polynome in mehreren Variablen.

Lemma 1. Sei K ein unendlicher Körper und $n \geq 1$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{P}(K^n), p \mapsto ((\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto p(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

von Polynomen auf die entsprechenden Polynomsfunktionen injektiv. Insbesondere gilt für $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ für alle } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

bereit, dass $f = g$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage per Induktion über $n \geq 1$.

Induktionsanfang. Es sei $n = 1$. Für $f, g \in K[X_1]$ mit $f(\lambda) = g(\lambda)$ für alle $\lambda \in K$ ist $(f - g)(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in K$. Da K unendlich ist hat $f - g$ daher unendlich viele Nullstellen. Daher muss $f - g = 0$, also $f = g$.

Induktionsschritt. Es sei $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für alle kleineren $k \geq 1$. Da φ offenbar K -linear ist (eigentlich sogar ein K -Algebromomorphismus), genügt es zu zeigen, dass $\ker \varphi = 0$. Sei also $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \text{ für alle } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K.$$

Wir können f als

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^i$$

schreiben, wobei $p_i \in K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $p_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$ ist

$$g_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}}(X_n) := f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, X_n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) X_n^i.$$

ein Polynom in nur noch einer Variablen mit

$$g_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}}(\lambda) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda) = 0 \text{ für alle } \lambda \in K.$$

Es muss daher nach Induktionsvoraussetzung für $k = 1$ bereits $g_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}} = 0$ für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$. Also ist für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$

$$p_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung für $k = n - 1$ bedeutet dies für alle $i \in \mathbb{N}$, dass bereits $p_i = 0$. Also ist bereits $f = 0$.

□

Da die Abbildung von Polynomen auf Polynomsfunktionen offenbar surjektiv ist, ist φ sogar ein K -Algebraisomorphismus (falls K unendlich ist). Wir werden daher im Folgenden nicht mehr zwischen Polynomen und Polynomsfunktionen unterscheiden, sofern wir uns über einem unendlichen Körper befinden.

Bemerkung 2. Es sei K ein unendlicher Körper, $n \geq 1$ und $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist $\text{supp}(f) = \emptyset$ oder $\text{supp}(f)$ unendlich. Insbesondere ist für $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ für fast alle } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

bereits $f = g$.

Beweis. Wir nehmen an, die Aussage gilt nicht. Dann gibt es $f \in K[X_1, \dots, X_n]$, so dass $\text{supp}(f) \neq \emptyset$ und $\text{supp}(f)$ endlich ist. Es sei dann $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{supp}(f)$. Wir betrachten das Polynom $g \in K[X]$ mit

$$g(X) := f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, X).$$

Es ist $\text{supp}(g) \neq \emptyset$, da $g(\lambda_n) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$ und $\text{supp}(g)$ endlich, da $\text{supp}(f)$ endlich ist. Da K unendlich ist, hat g unendlich viele Nullstellen. Also muss bereits $g = 0$, was im Widerspruch zu $\text{supp}(g) \neq \emptyset$ steht. Es kann also ein solches g und daher auch ein solches f nicht geben.

Für $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ für fast alle } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

ist $\text{supp}(f - g)$ endlich. Also muss $\text{supp}(f - g) = \emptyset$ und damit nach Lemma 1 bereits $f - g = 0$ und daher $f = g$. \square

(a)

Da K unendlich ist, können wir $K[X, Y]$ nach Lemma 1 mit den Polynomsfunktionen $\mathcal{P}(K^2)$ identifizieren. Die natürliche Darstellung von $G = \text{GL}_2(K)$ auf K^2 induziert bekanntermaßen eine lineare Gruppenwirkung von G auf $\mathcal{P}(K^2)$ vermöge

$$(A.p)(x) = p(A^{-1}x) \text{ für alle } A \in G, x \in K^2.$$

Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

ist daher für alle $p \in K[X, Y]$

$$(A.p)(X, Y) = p(aX + bY, cX + dY).$$

Für $X, Y \in K[X, Y]$ ist daher

$$A.X = aX + bY \text{ und } A.Y = cX + dY.$$

(b)

Es ist klar, dass $K \subseteq K[X, Y]^G$. Es gilt daher nur noch zu zeigen, dass $K[X, Y] \subseteq K$. Sei hierfür $p \in K[X, Y]$. Für $x \in K^2 \setminus \{0\}$ gibt es nach Aufgabe 1 eine Matrix $A \in G$ mit $A^{-1}x = e_1$. Daher ist

$$p(x) = (A.p)(x) = p(A^{-1}.x) = p(e_1).$$

Dass zeigt, dass p auf $K^2 \setminus \{0\}$ konstant ist. Nach Bemerkung 2 ist daher p bereits auf ganz K^2 konstant, also nach Lemma 1 bereits $p \in K$. (Es ist klar, dass bei der Identifikation $K[X, Y] \cong \mathcal{P}(K^2)$ die konstanten Polynome auf naheliegende Weise genau den konstanten Polynomsfunktionen entsprechen.)

Für $\mathrm{SL}_2(K)$ ist die Argumentation analog, da die natürliche Wirkung von $\mathrm{SL}_2(K)$ auf K^2 zu den gleichen Bahnen führt wie die Wirkung von $\mathrm{GL}_2(K)$.

(c)

Für $p \in K[X, Y]$ mit $p \in K[Y]$ ist für alle $A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$

$$(A.p)(X, Y) = p(X - sY, Y) = p(X, Y).$$

Daher ist $U \subseteq K[X, Y]^U$.

Sei andererseits $p \in K[X, Y]^U$. Dann ist für alle $A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$

$$p(X, Y) = (A.p)(X, Y) = p(X - sY, Y).$$

Wir bemerken, dass daher $p(x, y) = p(x', y)$ für alle $y \neq 0, x, x' \in K$, da

$$p(x, y) = p(x - ((x' - x)y^{-1})y, y) = p(x', y).$$

Wir definieren $q \in K[X, Y]$ mit $q \in K[X, Y]$ als $q(X, Y) = p(0, Y)$. Für alle $x \in K$ ist für alle $y \neq 0$

$$q(x, y) = p(0, y) = p(x, y).$$

Nach Bemerkung 2 muss daher bereits $q(x, y) = p(x, y)$ für alle $x, y \in K$. Nach Lemma 1 ist daher bereits $p = q$, also $p \in K[Y]$. Das zeigt, dass $K[X, Y]^U \subseteq K[Y]$.

Aufgabe 3

(a)

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Polynomrings setzt sich die Abbildung

$$X_i \mapsto x_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

zu einem eindeutigen Ringhomomorphismus

$$\phi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow S(V^*)$$

fort. Aufgrund der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra $S(V^*)$ setzt sich die lineare Abbildung

$$V^* \rightarrow k[X_1, \dots, X_n] \text{ definiert durch } x_i \mapsto X_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

zu einem eindeutigen k -Algebrahomomorphismus $\psi : S(V^*) \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ fort.

Es ist $\psi \circ \phi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ringhomomorphismus, und für alle $i = 1, \dots, n$ ist $(\psi \circ \phi)(X_i) = X_i$. Aufgrund der universellen Eigenschaft des Polynomrings ist daher $\psi \circ \phi = \text{id}_{k[X_1, \dots, X_n]}$. (Denn es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ mit $X_i \mapsto X_i$ für $i = 1, \dots, n$, und dieser ist offenbar $\text{id}_{k[X_1, \dots, X_n]}$.)

ϕ ist offenbar auch k -linear und somit ein k -Algebrahomomorphismus. Also ist $\phi \circ \psi : S(V^*) \rightarrow S(V^*)$ ein k -Algebrahomomorphismus. Da $(\phi \circ \psi)(x_i) = x_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ muss wegen der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra bereits $\phi \circ \psi = \text{id}_{S(V^*)}$. (Denn es gibt einen eindeutigen k -Algebrahomomorphismus $S(V^*) \rightarrow S(V^*)$, der die lineare Abbildung $\text{id}_{V^*} : V^* \rightarrow V^*$ fortsetzt, und dieser ist offenbar $\text{id}_{S(V^*)}$.)

Das zeigt, dass ϕ ein k -Algebraisomorphismus ist mit $\phi^{-1} = \psi$. Dieser ist durch die universellen Eigenschaft des Polynomrings $k[X_1, \dots, X_n]$ und $\phi(X_i) = x_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ eindeutig bestimmt.

(b)

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Polynomrings setzt sich die Abbildung

$$X_j \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto \lambda_j \right) \in \mathcal{P}(V)$$

zu einem eindeutigen Ringhomomorphismus $\rho : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{P}(V)$ fort, der von der Form

$$k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{P}(V), p \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right)$$

ist. Es ist klar, dass dieser auch k -linear, und somit ein k -Algebrahomomorphismus ist. ρ ist nach Definition von $\mathcal{P}(V)$ offensichtlich surjektiv.

Ist k unendlich, so folgt aus Lemma 1, dass es einen k -Algebraisomorphismus

$$k[X_1, \dots, X_n] \cong \mathcal{P}(k^n) \text{ mit } p \mapsto ((\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)).$$

gibt. Die Basis b_1, \dots, b_n von V liefert einen k -Vektorraumisomorphismus

$$V \rightarrow k^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Es ist klar, dass dieser k -Vektorraumisomorphismus auch einen k -Algebraisomorphismus

$$\mathcal{P}(k^n) \rightarrow \mathcal{P}(V), p \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right)$$

induziert. Damit ergibt sich insgesamt ein k -Algebraisomorphismus

$$k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{P}(V), p \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right).$$

Dieser ist gerade ρ . Das zeigt, dass ρ ein k -Algebraisomorphismus ist, wenn k unendlich ist.

Ist k endlich mit q Elementen, so ist ρ nicht injektiv, denn $k[X_1, \dots, X_n]$ ist unendlich, aber $\mathcal{P}(V) \subseteq \text{Abb}(V, k)$ und $\text{Abb}(V, k)$ ist endlich, da V und k endlich sind.

Es gilt sogar $\mathcal{P}(V) = \text{Abb}(V, k)$: Um zu zeigen, dass $\text{Abb}(V, k) \subseteq \mathcal{P}(V)$, bemerken wir, dass $\text{Abb}(V, k)$ die k -Basis $\{\chi_v : v \in V\}$ besitzt. Für $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i^v b^i \in V$ können wir die Polynomsfunktion $h^v \in \mathcal{P}(V)$ definieren als

$$h^v \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \right) := \prod_{j=1}^n \prod_{\mu \in k^\times} (\mu + \lambda_j^v - \lambda_j).$$

Es ist $h^v(w) = 0$ genau dann wenn $w \neq v$ für alle $v, w \in V$. Daher ist für alle $v \in V$

$$\chi_v = \frac{1}{h^v(v)} h^v \in \mathcal{P}(V).$$

Da k aus q Elementen besteht ist bekanntermaßen $\lambda^q - \lambda = 0$ für alle $\lambda \in k$. Daher ist $X_i^q - X_i \in \ker \rho$ für alle $i = 1, \dots, n$. Da ρ ein Ringhomomorphismus ist, ist damit auch

$$I := (X_1^q - X_1, \dots, X_n^q - X_n) \subseteq \ker \rho.$$

Um $\ker \rho \subseteq I$ zu zeigen betrachten wir die zugrunde liegenden k -Vektorräume. Da die Ideale I und $\ker \rho$ Untervektorräume von $k[X_1, \dots, X_n]$ sind, gilt aufgrund des Homomorphiesatzes und der Isomorphiesätze

$$\mathcal{P}(V) \cong k[X_1, \dots, X_n] / \ker \rho \cong (k[X_1, \dots, X_n] / I) / (\ker \rho / I) \quad (1)$$

Dabei ist $\dim_k \mathcal{P}(V) = \dim_k \text{Abb}(V, k) = q^n$ und $\dim_k k[X_1, \dots, X_n] / I = q^n$, da

$$\{X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} : \nu_1, \dots, \nu_n \in \{0, \dots, q-1\}\}$$

ein k -Basis von $k[X_1, \dots, X_n] / I$ ist. Aus (1) ergibt sich damit, dass $\dim_k \ker \rho / I = 0$, also $\ker \rho / I = 0$ und deshalb $\ker \rho \subseteq I$.

Aufgabe 4

(a)

Wir zeigen zunächst, dass $H = \text{GL}_2(\mathbb{C})$ auf $F^{(n)}$ wirkt. Wir wissen aus Aufgabe 2, dass H linear auf $K[X, Y]$ per

$$(A.p)(x) = p(A^{-1}.x) \text{ für alle } A \in H, x \in \mathbb{C}^2, p \in K[X, Y]$$

wirkt, also

$$(A.p)(X, Y) = p(aX + bY, cX + dY) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H, p \in K[X, Y].$$

Wir bemerken, dass $F^{(n)}$ eine Unterdarstellung dieser Darstellung von G ist. Da H von Matrizen der Form

$$I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_\mu := \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}^\times, \mu \in \mathbb{C}$$

erzeugt wird, genügt es hierfür die Abgeschlossenheit von $F^{(n)}$ unter der Wirkung dieser Matrizen zu zeigen. Dies gilt, denn für alle $p = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} Y^k \in F^{(n)}$ ist

$$(I.p)(X, Y) = p.(Y, X) \in F^{(n)},$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}^\times$

$$(B_\lambda.p)(X, Y) = p(\lambda X, Y) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^{n-k} X^{n-k} Y^k \in F^{(n)}$$

und für alle $\mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (C_\mu.p)(X, Y) &= p(X + \mu Y, Y) = \sum_{k=0}^n a_k (X + \mu Y)^{n-k} Y^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} X^l \mu^{n-k-l} Y^{n-k-l} Y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} a_k \binom{n-k}{l} \mu^{n-k-l} X^l Y^{n-l} \in F^{(n)}, \end{aligned}$$

da $X^l Y^{n-l} \in F^{(n)}$ für alle $0 \leq l \leq n$ und $F^{(n)}$ ein \mathbb{C} -Vektorraum ist.

Da H linear auf $F^{(n)}$ wirkt, wirkt H auch linear auf $\mathcal{P}(F^{(n)})$ via

$$(A.p)(v) = p(A^{-1}.v) \text{ für alle } A \in H, p \in \mathcal{P}(F^{(n)}), v \in F^{(n)}.$$

Da $G \leq H$ eine Untergruppe ist, induziert die lineare Gruppenwirkung von H auf $F^{(n)}$ und $\mathcal{P}(F^{(n)})$ eine lineare Gruppenwirkung von G auf diesen Räumen.

(b)

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ und das Polynom

$$f_A(X, Y) := \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2$$

ist $f_A \in F^{(n)}$ mit $D(f) = \det A$. (Diese Schreibweise ist unproblematisch, da wir wegen Lemma 1 nicht zwischen Polynomen und Polynomsfunktionen unterscheiden müssen.) Sei nun $f = a_0X^2 + 2a_1XY + a_2Y^2 \in F^{(n)}$. Mit der symmetrischen Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

können wir f schreiben als $f = f_B$. Für $S \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ ist auch $(S^{-1})^T B S^{-1}$ symmetrisch, da

$$\left((S^{-1})^T B S^{-1} \right)^T = (S^{-1})^T B^T S^{-1} = (S^{-1})^T B S^{-1}.$$

Es ist $S.f = f_{(S^{-1})^T B S^{-1}}$, da

$$\begin{aligned} (S.f)(X, Y) &= (S.f_B)(X, Y) \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} (S^{-1})^T B S^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= f_{(S^{-1})^T B S^{-1}}(X, Y). \end{aligned}$$

Da $\det S^{-1} = 1$ ist daher

$$\begin{aligned} D(S.f) &= D\left(f_{(S^{-1})^T B S^{-1}}\right) = \det\left((S^{-1})^T B S^{-1}\right) \\ &= \det B = D(f_B) = D(f). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $D(f)$ G -invariant ist.