Algebra I
Blatt 10

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

3. Juli 2014

Aufgabe 1

Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine k-Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine k-Basis von W. Für eine Darstellung X von A schreiben wir

$$\rho_X : A \to \mathrm{End}_k(X), a \mapsto (x \mapsto ax)$$

(a)

Ist $V \cong W$, so gibt es einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ von Darstellungen von A. Inbesondere ist φ k-linear und somit $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ eine k-Basis von W. Es sei $a \in A$ beliebig aber fest. Bezeichnet A die darstellende Matrix von $\rho_V(a)$ bezüglich $\{v_1, \ldots, v_n\}$, so ist dies, da φ ein k-Algebrahomomorphismus ist, auch die darstellende Matrix von $\rho_W(a)$ bezüglich $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$. Inbesondere ist deshalb

$$\chi_V(a) = \mathrm{tr}\, A = \chi_W(a).$$

(b)

Es sei $a \in A$ beliebig aber fest. Da a komponentenweise auf $V \oplus W$ wirkt, ist die darstellende Matrix von $\rho_{V \oplus W}$ bezüglich der k-Basis

$$\{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_m)\}$$

von $V \oplus W$ der Form

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

wobei A die darstellende Matrix von $\rho_V(a)$ bezüglich $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist, und B die darstellende Matrix von $\rho_W(a)$ bezüglich der Basis $\{w_1, \ldots, w_m\}$ ist. Inbesondere ist daher

$$\chi_{V \oplus W}(a) = \mathrm{tr}\, C = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B = \chi_V(a) + \chi_W(a).$$

(c)

Da $\rho_V(e) = \mathrm{id}_V$ ist die darstellende Matrix von $\rho_V(e)$ bezüglich jeder Basis von V die $n \times n$-Einheitsmatrix über k, und somit

$$\chi_V(e) = n \bmod \mathrm{char}\, k = \dim_k(V) \bmod \mathrm{char}\, k.$$

(d)

Es sei $a \in A$ beliebig aber fest. Bezeichnet A die darstellende Matrix von $\rho_V(a)$ bezüglich $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und B die darstellende Matrix von $\rho_W(a)$ bezüglich $\{w_1, \ldots, w_m\}$, so ist, da $\rho_{V \otimes W}(a) = \rho(V)(a) \otimes \rho(W)(a)$, die darstellende Matrix von $\rho_{V \otimes W}(a)$ bezüglich der k-Basis

$$\{v_1 \otimes w_1, v_1, \otimes w_2, \ldots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, \ldots, v_n \otimes w_m\}$$

von $V \otimes W$ von der Form

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \ldots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\chi_{V \otimes W}(a) = \operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B = \chi_V(a)\chi_W(a).$$

(e)

Es sei $g \in G$ beliebig aber fest. Bezeichnet A die darstellende Matrix von $\rho_V(g)$ bezüglich $\{v_1, \ldots, v_n\}$, so ist die A^{-1} die darstellende Matrix von $\rho_V\left(g^{-1}\right)$ bezüglich $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $A^* = (A^{-1})^T$ die darstellende Matrix von $\rho_{V^*}(g)$ bezüglich $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$. Deshalb ist

$$\chi_{V^*}(g) = \operatorname{tr}\left(\left(A^{-1}\right)^T\right) = \operatorname{tr}\left(A^{-1}\right) = \chi_V\left(g^{-1}\right).$$

Aufgabe 2

(a)

Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ wirke auf V, indem $1 \in G$ durch eine Rotation um $2\pi/3$ und $2 \in G$ eine Rotation um $4\pi/3$ (in gleicher Orientierung) wirkt. Es ist klar, dass V so zu einer Darstellung von G wird. Diese ist irreduzibel: Ist $U \subseteq V$ eine Unterdarstellung mit $U \neq 0$, so gibt es $v \in U$ mit $v \neq 0$. Da v und $1.v$ linear unabhängig sind, ist dann bereits $U = \langle v, 1.v \rangle = V$.

Aufgabe 3

(a)

Da kG als k-Vektorraum von $G \subseteq kG$ erzeugt wird, ist $f \in Z(kG)$ genau dann, wenn $f \cdot \chi_g = \chi_g \cdot f$ für alle $g \in G$. Dabei ist für alle $h \in G$

$$(f \cdot \chi_g)(h) = \sum_{y \in G} f(y) \cdot \chi_g\left(y^{-1}h\right) = f\left(hg^{-1}\right)$$

und

$$(\chi_g \cdot f)(h) = \sum_{y \in G} \chi_g(y) \cdot f\left(y^{-1}h\right) = f\left(g^{-1}h\right).$$

Mit $h' = hg^{-1}$ erhalten wir so, dass $f \in Z(kG)$ genau dann, wenn für alle $h' \in G$

$$f(h') = f\left(hg^{-1}\right) = f\left(g^{-1}h\right) = f\left(g^{-1}hg\right).$$