Algebra I
Blatt 5

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

18. Mai 2014

Aufgabe 1

(a)

Für $f, g : V \to k$ ist für alle $v \in V$

$$(fg)(v) = 0 \Leftrightarrow f(v)g(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \text{ oder } g(v) = 0.$$

Insbesondere ist daher für alle $f, g \in \mathcal{P}(V)$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(fg) &= \{v \in V \mid (fg)(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ oder } g(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \cup \{v \in V \mid g(v) = 0\} \\ &= \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g).\end{aligned}$$

(b)

Es ist

$$\begin{aligned}F &= \left(X^2 - 9\right)^2 + \left(Y^2 - 16\right)^2 + 2\left(X^2 + 9\right)\left(Y^2 - 16\right) \\ &= \left(\left(X^2 + 9\right) + \left(Y^2 - 16\right)\right)^2 - 36X^2 \\ &= \left(X^2 + 9 + Y^2 - 16 + 6X\right)\left(X^2 + 9 + Y^2 - 16 - 6X\right) \\ &= \left((X+3)^2 + Y^2 - 16\right)\left((X-3)^2 + Y^2 - 16\right).\end{aligned}$$

Es ist daher nach dem vorherigen Aufgabenteil

$$\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}\left((X+3)^2 + Y^2 - 16\right) \cup \mathcal{V}\left((X-3)^2 + Y^2 - 16\right)$$

die Vereinigung zweier Kreise, siehe Abbildung 1.

(c)

Wir bemerken, dass

$$X^2\left(1 - X^2\right) - Y^2 = -X^4 + X^2 - Y^2 = -\left(\left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 - \frac{1}{4}\right).$$

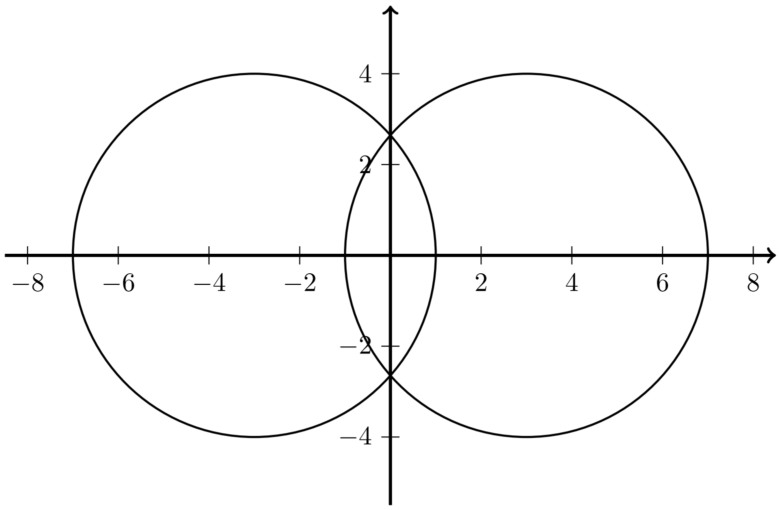

Abbildung 1: $\mathcal{V}(F)$ aus Aufgabe 1 (b).

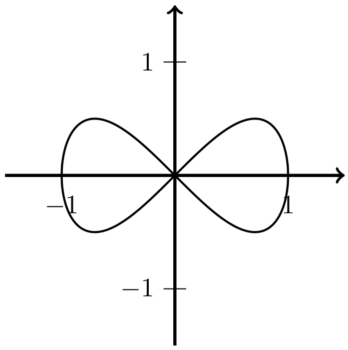

Abbildung 2: $\mathcal{V}\left(X^2\left(1-X^2\right)-Y^2\right)$ aus Aufgabe 1 (c).

Definieren wir

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto\left(x^2,y\right),$$

und den Kreis

$$K:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0\right\}$$

so ist daher

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\left(X^2\left(1-X^2\right)-Y^2\right)&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0\right\}\\&=f^{-1}(K).\end{aligned}$$

Es ergibt sich daher das Bild wie in Abbildung 2

Aufgabe 2

(a)

Es ist bekannt, dass $\varphi*$ ein k-Algebrahomorphismus ist. Daher ist φ^* genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi^* = 0$. Da für alle $f \in \mathcal{P}(V)$

$$\begin{aligned} f \in \ker \varphi^* &\Leftrightarrow \varphi^*(f) = 0 \\ &\Leftrightarrow f \circ \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow (f \circ \varphi)(w) = 0 \text{ für alle } w \in W \\ &\Leftrightarrow f(y) = 0 \text{ für alle } y \in \varphi(W) \end{aligned}$$

ist $\ker \varphi^* = 0$ genau dann, wenn

$$f_{|\varphi(W)} = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Diese Äquivalenz gilt genau dann, wenn $\varphi(W)$ Zariski-dicht in V liegt.

(b)

Wir bemerken zunächst, dass es für alle $w, w' \in W$ eine polynomielle Funktion $f \in \mathcal{P}(W)$ gibt mit $f(w) \neq f(w')$. Denn wählen wir eine Basis $w_1, \dots, w_n$ von W (möglich, da W endlichdimensional ist), so können wir w und w' eindeutig als

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \quad \text{und} \quad w' = \sum_{i=1}^n \lambda_i' w_i$$

schreiben. Da $w \neq w'$ gibt es $1 \leq j \leq n$ mit $\lambda_j \neq \lambda_j'$. Für

$$\pi : W \to k, \sum_{i=1}^n \mu_i w_i \mapsto \mu_j$$

ist offenbar $\pi \in \mathcal{P}(W)$, und da $\lambda_j \neq \lambda_j'$ ist $\pi(w) \neq \pi(w')$.

Ist φ nicht injektiv, so gibt es $w, w' \in W$ mit $\varphi(w) = \varphi(w')$. Da dann für alle $f \in \mathcal{P}(V)$

$$\varphi^*(f)(w) = f(\varphi(w)) = f(\varphi(w')) = \varphi^*(f)(w')$$

ist $g(w) = g(w')$ für alle $g \in \operatorname{Im} \varphi^*$. Aus der obigen Beobachtung folgt damit, dass φ^* nicht surjektiv ist.

(c)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3.$$

Diese ist offenbar polynomiell und bijektiv. Die induzierte Abbildung

$$\varphi^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), f \mapsto \left(x \mapsto f\left(x^3\right)\right)$$

ist aber offenbar nicht surjektiv.