Algebra I
Blatt 8

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

19. Juni 2014

Aufgabe 1

Lemma 1. *Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) M ist noethersch, d.h. jede aufsteigende Kette von Untermoduln von M

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

stabilisiert.

ii) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt über R.

Beweis. Angenommen, M ist noethersch. Es sei $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann definieren wir eine eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M' wie folgt: Wir beginnen mit $M_0 := 0$. Ist M_i definiert und $M_i \neq M'$, so gibt es $m_{i+1} \in M' \smallsetminus M_i$, und wir setzen $M_{i+1} := M_i + Rm_{i+1}$; ansonsten setzen wir $M_{i+1} := M_i = M'$. Da M noethersch ist, stabilisert die aufsteigende Kette

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \dots$$

von Untermoduln von M. Nach Konstruktion der M_i gibt es daher $n \in \mathbb{N}$ mit

$$M' = M_n = Rm_1 + \dots + Rm_n = (m_1, \dots, m_n).$$

Das zeigt, dass M' ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Sei andererseits jeder Untermodul von M endlich erzeugt über R. Für eine aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von Untermoduln von M setzen wir

$$M' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k.$$

M' ist ein Untermodul von M und somit endlich erzeugt. Nach Annahme gibt es daher $m_1, \dots, m_n \in M'$ mit

$$M' = (m_1, \dots, m_n).$$

Nach Definition von M' gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $m_1, \dots, m_n \in M_N$. Es ist daher $M_N = M$ und somit auch $M_k = M$ für alle $k \geq N$. Also stabilisert die Kette. □

Insbesondere ist ein kommutiver Ring R genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

in R stabilisiert.

(a)

Da k kommutativ ist und nur zwei Ideale enthält, ist k offenbar noethersch. Induktiv ergibt sich damit aus dem Hilbertschen Basissatz direkt, dass auch $k[x_1, \dots, x_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ noethersch ist.