Algebra I
Blatt 6

Thorben Kastenholz
Jendrik Stelzner

30. Mai 2014

Aufgabe 1 und Aufgabe 4

Im Folgenden sei k ein (nicht notwendigerweise unendlicher) Körper und V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Für $X \subseteq V$ wollen wir untersuchen, in welchen Teilmengen von V X Zariski-dicht liegt, und wie sich Zariski-Dichtheit charakterisieren lässt.

Hierfür bemerken wir, dass die Teilmengen von V, in denen X Zariski-dicht liegt, unter Vereinigung abgeschlossen sind: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Kollektion von Mengen mit $X \subseteq U_i \subseteq V$ für alle $i \in I$, so dass X für alle $i \in I$ Zariski-dicht in U_i liegt, so liegt X auch Zariski-dicht in

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Denn es ist $I \neq \emptyset$, und deshalb $X \subseteq U \subseteq V$, und für $f \in \mathcal{P}(V)$ mit $f_{|X} = 0$ ist $f_{|U_i} = 0$ für alle $i \in I$, also auch $f_{|U} = 0$.

Diese Beobachtung motiviert die folgende Definition:

Definition 1. *Für $X \subseteq V$ ist*

$$Z(X) := \bigcup \{Y \mid X \subseteq Y \subseteq V \text{ und } X \text{ liegt Zariski-dicht in } Y\}$$

der Zariski-Abschluss von X. X heißt Zariski-abgeschlossen, wenn $Z(X) = X$.

Mithilfe des Zariski-Abschlusses können wir nun den Begriff der Zariski-Dichtheit charakterisieren.

Lemma 1. *Sei $X \subseteq V$.*

a) X liegt genau dann Zariski-dicht in $Y \subseteq V$, wenn $X \subseteq Y \subseteq Z(X)$. Inbesondere ist $Z(X)$ die größte Teilmenge von V, in der X Zariski-dicht liegt.

b) X ist genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn X in keiner echt größeren Teilmenge von V Zariski-dicht liegt.

c) $Z(X)$ ist die kleinste Zariski-abgeschlossene Menge, die X enthält.

Beweis. a) Liegt X Zariski-dicht in $Y \subseteq V$, so ist ist $X \subseteq Y$, und nach der Definition von $Z(X)$ auch $Y \subseteq Z(X)$. Da die Mengen, in denen X Zariski-dicht liegt, unter Vereinigung abgeschlossen sind, liegt X Zariski-dicht in $Z(X)$, und damit auch in jeder Teilmenge $Y \subseteq Z(X)$ mit $X \subseteq Y$.

b) Ist X Zariski-abgeschlossen, so gilt für jede Teilmenge $Y \subseteq V$, in der X Zariski-dicht liegt, dass $Y \subseteq Z(X) = X$. Liegt andererseits X in keiner echt größeren Teilmenge von V Zariski-dicht, so ist

$$\{Y \mid X \subseteq Y \subseteq V \text{ und } X \text{ liegt Zariski-dicht in } Y\} = \{X\}$$

und somit $Z(X) = X$.

c) $Z(X)$ ist Zariski-abgeschlossen: X liegt Zariski-dicht in $Z(X)$. Für jede Teilmenge $Y \subseteq V$, in der $Z(X)$ Zariski-dicht liegt, liegt deshalb auch X Zarisk-dicht, weshalb $Y \subseteq Z(X)$.

Für eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq V$ mit $X \subseteq Y \subseteq Z(X)$ ist, da X Zariski-dicht in $Z(X)$ liegt, auch Y Zariski-dicht in $Z(X)$. Da Y Zariski-abgeschlossen ist, also in keiner echt größeren Teilmenge von V Zariski-dicht liegt, ist $Z(X) = Y$. □

Für Teilmengen $X \subseteq Y \subseteq V$ ist X genau dann Zariski-dicht in Y, wenn für jede polynomielle Funktion $f \in \mathcal{P}(V)$ die Einschränkung $f_{|Y}$ bereits eindeutig durch $f_{|X}$ bestimmt ist. Dies legt die Vermutung nahe, dass sich der Zariski-Abschluss und die Zariski-Abgeschlossenheit von $X \subseteq V$ mithilfe von Polynomfunktionen formulieren lassen.

Lemma 2. *Sei $X \subseteq V$. Dann ist*

$$Z(X) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)),$$

und X ist genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn

$$X = \mathcal{V}(\mathfrak{a}).$$

für eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}(V)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}(V)$ und $Y \subseteq V$, so dass $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ Zariski-dicht in Y liegt. Für alle $f \in \mathfrak{a}$ ist $f_{|\mathcal{V}(\mathfrak{a})} = 0$, also auch $f_{|Y} = 0$. Daher ist $Y \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a})$. Da $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ deswegen in keiner echt größeren Teilmenge von V Zariski-dicht liegt, ist $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ nach Lemma 1 Zariski-abgeschlossen.

X liegt Zariski-dicht in $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$, da $X \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ und für alle $f \in \mathcal{P}(V)$

$$f_{|X} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{I}(X) \Rightarrow f_{|\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))} = 0.$$

Deshalb ist

$$X \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subseteq Z(X).$$

Da $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ Zariski-abgeschlossen ist, ist auch $Z(X) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$. Also ist

$$Z(X) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)).$$

Insbesondere ist X genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn

$$X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)).$$

□

Wie der Begriff der Zariski-Abgeschlossenheit bereits nahelegt, lassen sich die bisherigen Beobachtungen auch topologisch formulieren.

Lemma 3. *Die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von V definieren eine Topologie auf V, in der die abgeschlossenen Mengen genau die Zariski-abgeschlossenen Mengen sind.*

Beweis. $\emptyset = \mathcal{V}(\mathcal{P}(V))$ und $V = \mathcal{V}(\emptyset)$ sind Zariski-abgeschlossen. Für eine Familien $(A_i)_{i\in I}$ von Zariski-abgeschlossenen Mengen ist nach Lemma 2 auch $\bigcap_{i\in I} A_i$ Zariski-abgeschlossen, da

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \mathcal{V}(\mathcal{I}(A_i)) = \mathcal{V}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{I}(A_i)\right).$$

Sind $A, B \subseteq V$ Zariski-abgeschlossen, so ist auch $A \cup B$ Zariski-abgeschlossen: Ist $A \cup B = V$ so ist nichts zu zeigen. Ansonsten sei $y \in V \setminus (A \cup B)$ beliebig aber fest. Da A Zariski-abgeschlossen ist, ist A nicht Zariski-dicht in $A \cup \{y\}$. Es gibt deshalb ein $f \in \mathcal{P}(V)$ mit

$$f_{|A} = 0 \quad \text{und} \quad f(y) \neq 0$$

Analog gibt es $g \in \mathcal{P}(V)$ mit

$$g_{|B} = 0 \quad \text{und} \quad g(y) \neq 0$$

Für $fg \in \mathcal{P}(V)$ ist deshalb

$$(fg)_{|A\cup B} = 0 \quad \text{und} \quad (fg)(y) \neq 0$$

Also ist $A \cup B$ nicht Zariski-dicht in $A \cup B \cup \{y\}$. Wegen der Beliebigkeit von $y \in V \setminus (A \cup B)$ zeigt dies, dass $A \cup B$ in keiner echt größeren Teilmenge von V Zariski-dicht liegt, weshalb $A \cup B$ Zariski-abgeschlossen ist.

Daraus ergibt sich induktiv, dass $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ für alle Zariski-abgeschlossenen Mengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq V$ ebenfalls Zariski-abgeschlossen ist. □

Aufgabe 2

Für alle

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(k)$$

ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{tr}(A) = a + d \text{ und } \mathrm{tr}_2(A) = a^2 + d^2.$$

Für $I, J \subseteq M_2(k)$ mit

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\mathrm{tr}(I) = \mathrm{tr}(J) = \mathrm{tr}_2(I) = \mathrm{tr}_2(J) = 0.$$

Deshalb ist $f(I) = f(J)$ für alle $f \in k[\mathrm{tr}, \mathrm{tr}_2]$. Für $\det \in \mathcal{P}(M_2(k))^{\mathrm{GL}_2(k)}$ ist jedoch

$$\det(I) = 1 \neq 0 = \det(J).$$

Das zeigt, dass $\det \notin k[\mathrm{tr}, \mathrm{tr}_2]$. Also wird $\mathcal{P}(M_2(k))^{\mathrm{GL}_2(k)}$ nicht von $\mathrm{tr}, \mathrm{tr}_2$ erzeugt.

Aufgabe 3

(a)

Bemerkung 4. Es sei R ein kommutativer Ring mit 1, und $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \subseteq R$ seien maximale Ideale mit $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$. Dann ist $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$.

Beweis. Es ist klar, dass $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \subseteq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. Andererseits sind $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ koprim, es gibt also $a \in \mathfrak{m}_1$ und $b \in \mathfrak{m}_2$ mit $a + b = 1$. Für $x \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ ist dann

$$x = x \cdot 1 = x(a+b) = xa + xb \in \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2.$$

$\square$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\mathcal{I}(\{p_1\})$ und $\mathcal{I}(\{p_2\})$ maximale Ideale sind mit $\mathcal{I}(\{p_1\}) \neq \mathcal{I}(\{p_2\})$. Daher ist nach der obigen Bemerkung

$$\mathcal{I}(\{p_1, p_2\}) = \mathcal{I}(\{p_1\} \cup \{p_2\}) = \mathcal{I}(\{p_1\}) \cap \mathcal{I}(\{p_2\}) = \mathcal{I}(\{p_1\}) \cdot \mathcal{I}(\{p_2\}).$$

(b)

Es sei k ein beliebiger Körper, $V = k$ und $X = Y = \{0\}$. Dann ist

$$\mathcal{I}(X \cup Y) = \mathcal{I}(\{0\}) = (x) \subseteq \mathcal{P}(V),$$

wobei $x : k \to k, \lambda \mapsto \lambda$. Daher ist

$$\mathcal{I}(X) \cdot \mathcal{I}(Y) = (x) \cdot (x) = (x \cdot x) = \left(x^2\right) \neq (x) = \mathcal{I}(X \cup Y).$$