Analysis 3 — Übung 1

Jendrik Stelzner

23. Oktober 2013

Aufgabe 1. (Push-Forward und Pull-Back von σ-Algebren)

a)

Es gilt, die Axiome einer σ-Algebra für $f^*[\mathcal{A}]$ zu überprüfen.
Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, ist $X \in \mathcal{A}$, also $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ und somit $Y \in f^*[\mathcal{A}]$. Für $B \in f^*[\mathcal{A}]$ ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, und da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist somit auch $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{A}$, also $B^c \in f^*[\mathcal{A}]$. Für eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $f^*[\mathcal{A}]$ ist $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, und daher $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, und daher auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in f^*[\mathcal{A}]$.
Damit sind alle Axiome einer σ-Algebra für $f^*[\mathcal{A}]$ erfüllt.

b)

Es gilt, die Axiome einer σ-Algebra für $f_*[\mathcal{B}]$ zu überprüfen.
Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist, ist $Y \in \mathcal{B}$, und somit $X = f^{-1}(Y) \in f_*[\mathcal{B}]$. Für $A \in f_*[\mathcal{B}]$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $f^{-1}(B) = A$; da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, ist damit auch $B^c \in \mathcal{B}$ und somit $A^c = \left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c) \in f_*[\mathcal{B}]$. Ist $(A_n)_{n\in N}$ eine Folge auf $f_*[\mathcal{B}]$, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $B_n \in \mathcal{B}$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$; da $\mathcal{B}$ als σ-Algebra ist, gilt damit auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$, und somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in N} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in f_*[\mathcal{B}]$.
$f_*[\mathcal{B}]$ erfüllt also alle Axiome einer σ-Algebra.

Aufgabe 2. (Gegenbeispiele)

a)

Wie in **Aufgabe 3** gezeigt handelt es sich bei $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ um σ-Algebren auf $\{1,2,3\}$, für die $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_2$ keine σ-Algebra auf $\{1,2,3\}$ ist.

b)

Man betrachte

$$\mathcal{R} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

$\mathcal{R}$ ist eine Algebra auf $\mathbb{N}$ ist: Offenbar ist $\emptyset \in \mathcal{R}$. Auch folgt aus der Definition direkt, dass $A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{R}$ für alle $A \subseteq \mathbb{N}$. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$; per Fallunterscheidung

ergibt sich, dass auch $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$: Sind A_1 und A_2 beide endlich, so ist es auch $A_1 \cup A_2$, also $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$. Ansonsten gibt es ein $i \in \{1, 2\}$, so dass A_i^c endlich ist, wobei durch passende Nummerierung o.B.d.A. davon ausgangen werden kann, dass $i = 1$. Es ist dann auch $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c \subseteq A_1^c$ endlich, also $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$. Dies zeigt, dass $\mathbb{R}$ eine Algebra ist.
$\mathcal{R}$ ist aber keine σ-Algebra, da $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{2n\} \notin \mathcal{R}$, denn $2\mathbb{N}$ und $(2\mathbb{N})^c = 2\mathbb{N} + 1 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade}\}$ sind beide unendlich.

c)

Aus der Aufgabenstellung geht nicht klar hervor, ob $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf X sein soll, oder ob es auch ausreicht, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf $Y \subseteq X$ ist.
Ist eine σ-Algebra auf X gemeint, so sei $X = \{1\}$ und $\mathcal{B} = \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ unter abzählbaren Schnitten und Vereinigungen abgeschlossen (offenbar sogar unter beliebigen), da aber $X \notin \mathcal{B}$ ist $\mathcal{B}$ keine σ-Algebra auf X.
Sofern es genügt, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ ist, so betrachte man $X = \{1, 2\}$ und $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Da $X \notin \mathcal{B}$ ist $\mathcal{B}$ keine σ-Algebra auf X. Für alle $Y \subset X$ ist allerdings $\{1, 2\} \notin Y$, also $\mathcal{B}$ kein Mengensystem auf $\mathcal{P}(Y)$, und damit keine σ-Algebra auf Y.

d)

Man betrachte $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{4, 5\}$ mit $f(1) = f(2) = 4$ und $f(3) = 5$. Wie in **Aufgabe 3** gezeigt ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ eine σ-Algebra auf $\{1, 2, 3\}$. Es ist aber

$$\mathcal{B} := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{\emptyset, \{4\}, \{4, 5\}\}$$

keine σ-Algebra auf $\{4, 5\}$, da $\{4\} \in \mathcal{B}$ aber $\{4\}^c = \{5\} \notin \mathcal{B}$.

Aufgabe 3. (Die σ-Algebren auf einer dreielementigen Menge)

a)

Es ist

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c, \{1, 2, 3\}\},$$

wobei $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ alle einelementigen, und $\{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c$ alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$ sind. Die verschiedenen σ-Algebren auf $\{1, 2, 3\}$ lassen sich durch die jeweilige Anzahl der einelementigen Mengen klassifizieren. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\{1, 2, 3\}$. Wir bemerken, dass aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung für alle $x \in \{1, 2, 3\} : \{x\} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \{x\}^c \in \mathcal{A}$.
Enthält $\mathcal{A}$ keine einelementige Menge, so enthält $\mathcal{A}$ nach der Bemerkung auch keine zweielementige Menge, es ist also $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$.
Für alle $y \in \{1, 2, 3\}$ gibt es offenbar die σ-Algebra $\{\emptyset, \{y\}, \{y\}^c, \{1, 2, 3\}\}$ auf $\{1, 2, 3\}$ (bekannt aus der Vorlesung). Dies sind die einzigen σ-Algebren, die genau eine einelementige Menge enthalten: Ist $\{x\} \in \mathcal{A}$ für genau ein $x \in \{1, 2, 3\}$, so ist auch $\{x\}^c \in \mathcal{A}$. Für jede zweielementige Menge $\{y\}^c \in \mathcal{A}$, muss auch $\{y\} \in \mathcal{A}$, und damit $y = x$ und $\{y\}^c = \{x\}^c$.

Gilt $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{A}$ für zwei verschiedene $x, y \in \{1, 2, 3\}$, so ist auch $\{x, y\}^c = (\{x\} \cup \{y\})^c \in \mathcal{A}$, also ist $\{z\} \in \mathcal{A}$ für alle $z \in \{1, 2, 3\}$. Es gibt also keine σ-Algebra auf $\{1, 2, 3\}$ die genau zwei einelementige Mengen beinhaltet.
Ist $\{x\} \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \{1, 2, 3\}$, so ist wegen

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \sigma(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$$

bereits $\{A\} = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
Die einzigen σ-Algebren auf $\{1, 2, 3\}$ sind somit $\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}, \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ sowie $\{\emptyset, \{x, \}, \{x\}^c, \{1, 2, 3\}\}$ für die verschiedenen $x \in \{1, 2, 3\}$.