

# ANALYSIS III

## 3. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

2. November 2013

Betrachtet man zwei Mengen  $A$  und  $A'$  mit  $A = B_1 \cup B_2$  und  $A' = B'_1 \cup B'_2$  für  $B_1, B_2 \subseteq A$  und  $B'_1, B'_2 \subseteq A'$ , so ist es einfach so sehen, dass

$$A \times A' = (B_1 \times B'_1) \cup (B_1 \times B'_2) \cup (B_2 \times B'_1) \cup (B_2 \times B'_2).$$

Diese Beobachtung wird von dem folgenden Lemma verallgemeinert:

**Lemma 1:** Sei  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen über einer Indexmenge  $I$  und

$$A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j^i$$

für eine Familie von Mengen  $(B_j^i)_{j \in J_i}$  über einer Indexmenge  $J_i$  für alle  $i \in I$ . Dann gilt

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_j^i = \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

*Beweis des Lemmas:* Sei  $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ . Da  $a_i \in A_i$  für alle  $i \in I$ , gibt es für alle  $i \in I$  ein  $j_i \in J_i$  mit  $a_i \in B_{j_i}^i$ . Daher ist

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{j_i}^i \subseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i,$$

also ist

$$\prod_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Ist

$$(a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i,$$

so gibt es  $(j_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} J_i$  mit  $a_i \in B_{j_i}^i \subseteq A_i$  für alle  $i \in I$ , also  $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ . Daher ist

$$\prod_{i \in I} A_i \supseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Die Disjunktheit der Vereinigung ergibt sich aus der paarweisen Disjunktheit der  $B_j^i$ ,  $j \in J_i$ , für alle  $i \in I$ : Sind  $(j_i)_{i \in I}, (j'_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} J_i$  so dass

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{j_i}^i \cap \prod_{i \in I} B_{j'_i}^i$$

existiert, so muss  $a_i \in B_{j_i}^i$  und  $a_i \in B_{j'_i}^i$  für alle  $i \in I$ . Also muss  $B_{j_i}^i \cap B_{j'_i}^i \neq \emptyset$ , und damit  $j_i = j'_i$  für alle  $i \in I$ . □

## Aufgabe 1. (Volumen auf Quadern)

a)

Seien  $q, Q \in \mathcal{Q}$  mit  $q \subseteq Q$  beliebig aber fest. Es ist  $Q = \prod_{i=1}^n [A_i, B_i)$  mit  $A_i \leq B_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , und  $q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$  mit  $A_i \leq a_i \leq b_i \leq B_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dass  $[a_i, b_i) \subseteq [A_i, B_i)$  folgt daher, dass sich aus  $q \subseteq Q$  für die Projektion

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

ergibt, dass  $[a_i, b_i) = \pi_i(q) \subseteq \pi_i(Q) = [A_i, B_i)$  für je  $i = 1, \dots, n$ . Mit Lemma 1 ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} Q &= \prod_{i=1}^n [A_i, B_i) = \prod_{i=1}^n \left( \underbrace{[A_i, a_i)}_{:=C_1^i} \cup \underbrace{[a_i, b_i)}_{:=C_2^i} \cup \underbrace{[b_i, B_i)}_{:=C_3^i} \right) \\ &= \bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1, 2, 3\}^n} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \end{aligned}$$

die disjunkte Vereinigung von  $3^n$  Quadern  $q_1, \dots, q_{3^n} \in \mathcal{Q}$  ist, wobei  $q = \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i$  einer von diesen ist. Aufgrund der Additivität von  $\mu$  ist daher

$$\mu(Q) = \mu \left( \bigcup_{i=1}^{3^n} q_i \right) = \sum_{i=1}^{3^n} \mu(q_i) \geq \mu(q),$$

weshalb  $\mu$  monoton ist.

b)

Wegen der Invarianz von  $\mu$  kann für alle  $Q \in \mathcal{Q}$  o.b.d.A. davon ausgegangen werden, dass  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i)$  mit  $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Auch folgt aus der Invarianz von  $\mu$  bezüglich Transposition, der endlichen Additivität von  $\mu$  und Lemma 1, dass für alle  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i) \in \mathcal{Q}$  und  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m_i a_i) \right) = m_1 \cdots m_n \mu(Q),$$

da

$$\begin{aligned} \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m_i a_i) \right) &= \mu \left( \prod_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} \underbrace{[(j-1)a_i, ja_i)}_{:=C_j^i} \right) \\ &= \mu \left( \bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left( \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) \\ &= \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left( \prod_{i=1}^n [(c_i - 1)a_i, c_i a_i) \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu(Q) \\ &= m_1 \cdots m_n \mu(Q). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daher aus der Normierung, dass

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m_i] \right) = \prod_{i=1}^n m_i \text{ für alle } m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i] \in \mathcal{Q}$  beliebig aber fest. Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, ma_i] \right) = m^n \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, a_i] \right) = m^n \mu(Q),$$

sowie wegen der Monotonie von  $\mu$  auch

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor &= \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, \lfloor ma_i \rfloor] \right) \leq \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, ma_i] \right) \text{ und} \\ \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, ma_i] \right) &\leq \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, \lceil ma_i \rceil] \right) = \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil, \end{aligned}$$

also für  $m \geq 1$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor \leq \mu(Q) \leq \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil = \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m}. \quad (1)$$

Nun ist  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , da

$$x - \frac{1}{m} = \frac{mx - 1}{m} \leq \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq \frac{mx}{m} = x$$

für alle  $m \geq 1$  und daher

$$x \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq x,$$

also  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$ . Analog ergibt sich, dass auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil mx \rceil}{m} = x$ . Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_i &= \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} \leq \mu(Q) \text{ und} \\ \mu(Q) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} \leq \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} = \prod_{i=1}^n a_i, \end{aligned}$$

also  $\mu(Q) = \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n (a_i - 0)$ .

## Aufgabe 2. (Nullmengen)

a)

Aus der Aufgabenstellung geht meiner Meinung nach nicht klar hervor, ob  $A$  als

$$\tilde{A}_1 := \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \text{ oder als}$$

$$\tilde{A}_2 := \{x \in X : x \in M \text{ für unendlich viele } M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}\}$$

definiert wird. Für den Beweis diesen Aufgabenteiles genügt es allerdings davon auszugehen, dass  $A = \tilde{A}_1$ , da  $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_1$ : Ist  $x \in \tilde{A}_2$ , so gibt es unendlich viele  $M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x \in M$ ; insbesondere gibt es daher unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \in A_n$ . Man bemerke jedoch, dass im Allgemeinen  $\tilde{A}_1 \subsetneq \tilde{A}_2$ : Ist etwa  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konstant mit  $A_1 \neq \emptyset$ , so ist  $\tilde{A}_1 = A_1 \neq \emptyset$ , aber  $\tilde{A}_2 = \emptyset$ . Zunächst gilt es zu zeigen, dass  $A$  messbar ist, d.h. dass  $A \in \mathcal{A}$ . Dies ist der Fall, da

$$\begin{aligned} A = \tilde{A} &= \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x \in X : \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es } m \geq n \text{ mit } x \in A_m\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $\mu(A_k) \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist die Folge der Partialsummen  $(\sum_{k=1}^n \mu(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$  monoton steigend. Da sie nach Annahme nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Es gibt daher ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$ . Da  $\mu$  ein Maß ist folgt daraus, dass

$$\mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Da  $A = \tilde{A}_1$  gibt es für alle  $x \in A$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  und  $x \in A_n$ . Insbesondere ist daher  $A \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ . Aufgrund der Monotonie von  $\mu$  folgt, dass

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon$  folgt damit, dass  $\mu(A) = 0$ .

**b)**

Es sei  $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  und  $\mu$  das Zählmaß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , sowie  $A_k := \{1, \dots, k\}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es ist dann  $\{1\} \subseteq A$ , unabhängig davon ob  $A = \tilde{A}_1$  oder  $A = \tilde{A}_2$ . Wegen der Monotonie des Maßes ist daher

$$\mu(A) \geq \mu(\{1\}) = 1 \neq 0.$$

**Aufgabe 3. (Vom äußeren Maß zum Maß)**

**Aufgabe 4. (Verschiedene äußere Maße)**