Analysis III
11. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

12. Januar 2014

Aufgabe 3. (Die Dichtheit von einfachen Funktionen in L^p)

Bemerkung 1. *Für $p \in [1, \infty)$ und $x, y \geq 0$ mit $x \leq y$ ist*

$$(x+y)^p \geq x^p + y^p$$

und

$$(y-x)^p \leq y^p - x^p.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit

$$\psi(t) = (x+t)^p - x^p - t^p \text{ für alle } t \in [0, \infty).$$

Es ist $\psi \in C^1([0, \infty))$ mit

$$\psi'(t) = p(x+t)^{p-1} - pt^{p-1} = p((x+t)^{p-1} - t^{p-1}).$$

Es ist $\psi(0) = 0$ und $\psi'(t) \geq 0$ für alle $t \in (0, \infty)$. Also ist $\psi(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, \infty)$. Insbesondere ist

$$(x+y)^p - x^p - y^p = \psi(y) \geq 0,$$

was die erste Gleichung zeigt. Da $y - x \geq 0$ ist

$$y^p = (y - x + x)^p \geq (y-x)^p + x^p,$$

was die zweite Gleichung zeigt. □

Wir betrachten die beiden Fälle $p \in [0, \infty)$ und $p = \infty$ getrennt. Zunächst betrachten wir den Fall $p \in [0, \infty)$.
Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $f \geq 0$. Wie wir wissen gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher, messbarer Funktionen mit $f_n \geq 0$ und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Aufgrund von Monotonie ist $0 \leq f^p$, sowie $0 \leq f_n^p$ und $f_n^p \leq f_{n+1}^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und aufgrund von Stetigkeit ist

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x)^p = f(x)^p \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist daher

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Da $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $f \geq 0$ ist die rechte Seite der Gleichung endlich, wegen der Monotonie von $(f_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ also auch auch die linke für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f^p - f_n^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n^p \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Nach Bemerkung 1 ist daher

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f - f_n)^p \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} f^p - f_n^p \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f - f_n)^p \, \mathrm{d}\mu = 0$$

und damit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
Sei nun $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ beliebig. Es ist auch $|f| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, und es gibt eine Folge einfacher Funktionen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \||f| - f_n'\|_p = 0$. Wir definieren die Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f_n' \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt direkt daraus, dass $|f_n'| = |f_n|$. Auch ist

$$|f(x) - f_n(x)| \geq ||f(x)| - f_n'(x)| \text{ für alle } x \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist daher

$$\|f - f_n\|_p = \left(\int_\Omega |f - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega ||f| - f_n'|^p \right)^{1/p} = \||f| - f_n'\|_p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n\to\infty} \||f| - f_n'\|_p = 0$ folgt daher, dass $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
Sei nun $p = \infty$. Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $f \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ als

$$f_n(x) := \sup \left\{ \frac{k}{n} \leq f(x) : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dass $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und f_n einfach ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ direkt daraus, dass $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Es ist auch klar, dass

$$\sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Es ist daher $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/n$ für alle $n \geq 1$, also $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.
Sei nun $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ beliebig. Offenbar ist auch $|f| \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, und wir finden eine Folge einfacher Funktionen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \||f| - f_n'\|_\infty = 0$. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f_n'.$$

Dass $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt direkt daraus, dass $|f_n| = |f_n'|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$|f(x) - f_n(x)| \leq ||f(x)| - f_n'(x)| \text{ für alle } x \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist $\|f - f_n\|_\infty \leq \||f| - f'\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n\to\infty} \||f| - f_n'\|_\infty = 0$ folgt daher, dass $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.