Analysis 3 — Übung 1

Jendrik Stelzner

22. Oktober 2013

Aufgabe 1. (Push-Forward und Pull-Back von σ-Algebren)

a)

Es gilt, die Axiome einer σ-Algebra für $f^*[\mathcal{A}]$ zu überprüfen.
Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, ist $X \in \mathcal{A}$, also $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ und somit $Y \in f^*[A]$. Für $B \in f^*[\mathcal{A}]$ ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, und da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist somit auch $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{A}$, also $B^c \in f^*[\mathcal{A}]$. Für eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $f^*[\mathcal{A}]$ ist $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, und daher $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, und daher auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in f^*[\mathcal{A}]$.
Damit sind alle Axiome einer σ-Algebra für $f^*[\mathcal{A}]$ erfüllt.

b)

Es gilt, die Axiome einer σ-Algebra für $f_*[\mathcal{B}]$ zu überprüfen.
Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist, ist $Y \in \mathcal{B}$, und somit $X = f^{-1}(Y) \in f_*[\mathcal{B}]$. Für $A \in f_*[\mathcal{B}]$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $f^{-1}(B) = A$; da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, ist damit auch $B^c \in \mathcal{B}$ und somit $A^c = \left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c) \in f_*[\mathcal{B}]$. Ist $(A_n)_{n\in N}$ eine Folge auf $f_*[\mathcal{B}]$, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $B_n \in \mathcal{B}$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$; da $\mathcal{B}$ als σ-Algebra ist, gilt damit auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$, und somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in N} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in f_*[\mathcal{B}]$.
$f_*[\mathcal{B}]$ erfüllt also alle Axiome einer σ-Algebra.

Aufgabe 2. (Gegenbeispiele)

Aufgabe 3. (Die σ-Algebren auf einer dreielementigen Menge)

a)

Es ist

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c, \{1,2,3\}\},$$

wobei $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ alle einelementigen, und $\{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c$ alle zweielementigen Teilmengen von $\{1,2,3\}$ sind. Die verschiedenen σ-Algebren auf $\{1,2,3\}$ lassen sich durch die jeweilige Anzahl der einelementigen Mengen klassifizieren. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\{1,2,3\}$. Wir bemerken, dass aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung für alle $x \in \{1,2,3\} : \{x\} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \{x\}^c \in \mathcal{A}$.

Enthält $\mathcal{A}$ keine einelementige Menge, so enthält $\mathcal{A}$ nach der Bemerkung auch keine zweielementige Menge, es ist also $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2,3\}\}$.
Für alle $y \in \{1,2,3\}$ gibt es offenbar die σ-Algebra $\{\emptyset, \{y\}, \{y\}^c, \{1,2,3\}\}$ auf $\{1,2,3\}$. Dies sind die einzigen σ-Algebren, die genau eine einelementige Menge enthalten: Ist $\{x\} \in \mathcal{A}$ für genau ein $x \in \{1,2,3\}$, so ist auch $\{x\}^c \in \mathcal{A}$. Für jede zweielementige Menge $\{y\}^c \in \mathcal{A}$, muss auch $\{y\} \in \mathcal{A}$, und damit $y = x$ und $\{y\}^c = \{x\}^c$.
Gilt $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{A}$ für zwei verschiedene $x, y \in \{1,2,3\}$, so ist auch $\{x,y\}^c = (\{x\} \cup \{y\})^c \in \mathcal{A}$, also ist $\{z\} \in \mathcal{A}$ für alle $z \in \{1,2,3\}$. Es gibt also keine σ-Algebra auf $\{1,2,3\}$ die genau zwei einelementige Mengen beinhaltet.
Ist $\{x\} \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \{1,2,3\}$, so ist wegen

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \sigma(\{\{1\},\{2\},\{3\}\}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

bereits $\{A\} = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.
Die einzigen σ-Algebren auf $\{1,2,3\}$ sind somit $\{\emptyset, \{1,2,3\}\}, \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ sowie $\{\emptyset, \{x,\}, \{x\}^c, \{1,2,3\}\}$ für die verschiedenen $x \in \{1,2,3\}$.