Analysis 3 — Übung 2

Jendrik Stelzner

30. Oktober 2013

Aufgabe 1. (Monotone Klassen und σ-Algebren)

a)

Angenommen, $\mathcal{A}$ ist eine Algebra. Nach der Definition einer Algebra ist damit $X \in \mathcal{A}$ und für alle $A \in \mathcal{A}$ auch $A^c \in \mathcal{A}$; es muss also nur noch die σ-Additivität gezeigt werden.
Sei hierfür $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $\mathcal{A}$. Für alle $n \in N$ sei $B_n := \bigcup_{k=0}^n A_k$. Es ist offenbar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Da $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge auf $\mathcal{A}$ ist, und $\mathcal{A}$ eine monotone Klasse, gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}.$$

Dies zeigt die σ-Additivität.
Ist andererseits $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so ist $\mathcal{A}$ auch eine Algebra, da jede σ-Algebra auf X eine Algebra auf X ist (bekannt aus der Vorlesung).

b)

Wie aus der Vorlesung bekannt ist jede σ-Algebra eine monotone Klasse. Damit ist $\sigma(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse, die $\mathcal{A}$ enthält. Da $m(\mathcal{A})$ die kleinste monotone Klasse ist, die $\mathcal{A}$ enthält, ist daher $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.
Um zu zeigen, dass auch $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, genügt es zu zeigen, dass $m(\mathcal{A})$ eine σ-Algebra ist: Da $\sigma(\mathcal{A})$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{A}$ enthält, ist dann $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.
Da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, genügt es nach **Aufgabenteil a)** zu zeigen, dass $m(\mathcal{A})$ eine Algebra ist.
Es ist $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$, da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist. Es muss noch die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung und endlichen Vereinigungen gezeigt werden.
Es sei $\mathcal{K} := \{M \in \mathcal{P}(X) : M^c \in m(\mathcal{A})\}$. $\mathcal{K}$ ist eine monotone Klasse: Ist $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein wachsende Folge in $\mathcal{K}$, so ist $(K_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge in $m(\mathcal{A})$, und somit

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n^c \in m(\mathcal{A}),$$

da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \in \mathcal{K}$. Ist $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge in $\mathcal{K}$, so ist $(L_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in $m(\mathcal{A})$, und somit

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n^c \in m(\mathcal{A}),$$

da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n \in \mathcal{K}$. Dies zeigt, dass $\mathcal{K}$ eine monotone Klasse ist.
Da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, ist $A^c \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$ für alle $A \in \mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ eine monotone Klasse ist, die $\mathcal{A}$ enthält, ist daher $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{K}$. Also ist $A^c \in m(\mathcal{A})$ für alle $A \in m(\mathcal{A})$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung.
Für $D \in m(\mathcal{A})$ sei $\mathcal{V}_D := \{M \in P(X) : D \cup M \in m(\mathcal{A})\}$. Auch $\mathcal{V}_D$ ist eine monotone Klasse: Ist $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge auf $\mathcal{V}_D$, so ist $(V_n \cup D)_{n\in\mathbb{N}}$ ein wachsende Folge auf $m(\mathcal{A})$, und somit

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) \cup D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V_n \cup D) \in m(\mathcal{A}),$$

da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, und daher $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathcal{V}_D$. Ist $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge auf $\mathcal{V}_D$, so $(W_n \cup D)$ eine fallende Folge auf $m(\mathcal{A})$, und somit

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n\right) \cup D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (W_n \cup D) \in m(\mathcal{A}),$$

da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, und daher $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n \in \mathcal{V}_D$. Dies zeigt, dass $\mathcal{V}_D$ eine monotone Klasse ist.
Sei $A \in \mathcal{A}$. Für $B \in \mathcal{A}$ ist $A \cup B \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$, da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, und daher $B \in \mathcal{V}_A$, wegen der Beliebigkeit von B also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_A$. Da $m(\mathcal{A})$ die kleinste monotone Klasse ist, die $\mathcal{A}$ enthält, ist daher $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}_A$. Also ist $A \cup B \in m(\mathcal{A})$ für alle $B \in m(\mathcal{A})$ und $A \in \mathcal{A}$. Dies bedeutet auch, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_B$ für alle $B \in m(\mathcal{A})$. Da $m(\mathcal{A})$ die kleinste monotone Klasse ist, die $\mathcal{A}$ enthält, ist daher $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}_B$ für alle $B \in m(\mathcal{A})$. Das bedeutet gerade, dass $A \cup B \in m(\mathcal{A})$ für alle $A, B \in m(\mathcal{A})$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Schnitte.

Aufgabe 2. (Ein Zugang zur Borelschen σ-Algebra)

a)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen beliebig aber fest. Es gilt zu zeigen, dass $U \in F_\sigma$, d.h. dass es eine abzählbar unendliche Familie $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Sei $x \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Es sei $r(x) \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r(x) < \frac{\varepsilon}{3}$ und $q(x) \in \mathbb{Q}^n$ mit $q(x) \in B_{r(x)}(x)$ (solche $r(x)$ und $q(x)$ existieren, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ liegt). Aufgrund der Symmetrie einer Metrik ist nun $x \in \overline{B_{r(x)}(q(x))}$. Auch ist $\overline{B_{r(x)}(q(x))} \subseteq U$, denn für alle $y \in \overline{B_{r(x)}(q(x))}$ ist nach der Dreiecksungleichung

$$|y - x| \leq |y - q(x)| + |q(x) - x| \leq 2r(x) < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

also $y \in B_\varepsilon(x) \subseteq U$.
Da nun

$$\{B_{r(x)}(q(x)) : x \in U\} \subseteq \{B_r(q) : r \in \mathbb{Q}, r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$$

abzählbar ist, gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass

$$V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{r(x_n)}(q(x_n))} = \bigcup_{x\in U} \overline{B_{r(x)}(q(x))}.$$

Es gilt nun, dass $U = V$: Für alle $x \in U$ gilt

$$x \in \overline{B_{r(x)}(q(x))} \subseteq \bigcup_{x \in U} \overline{B_{r(x)}(q(x))} = V$$

und für alle $x \in V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r(x_n)}(q(x_n))$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x \in \overline{B_{r(x_n)}(q(x_n))} \subseteq U.$$

Das zeigt, dass $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_{r(x_n)}(q(x_n))} \in F_\sigma$.
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Da K abgeschlossen ist, ist K^c offen. Wie eben gezeigt gibt es daher eine Folge abgeschlossener Mengen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $K^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Insbesondere ist K_n^c für alle $n \in \mathbb{N}$ offen, und damit

$$K = (K^c)^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n^c \in G_\delta.$$

b)

$\sigma(\mathcal{G}_n) = \delta(\mathcal{G}_n)$

Da bekanntermaßen für alle $U, V \in \mathcal{G}_n$ auch $U \cap V \in \mathcal{G}_n$, ist, wie aus der Vorlesung bekannt, $\sigma(\mathcal{G}_n) = \delta(\mathcal{G}_n)$.

$\sigma(\mathcal{G}_n) \supseteq m(\mathcal{G}_n)$

Da $\mathcal{G}_n \subseteq \sigma(\mathcal{G}_n)$ und $\sigma(\mathcal{G}_n)$ als σ-Algebra eine monotone Klasse ist, und $m(\mathcal{G}_n)$ die kleinste monotone Klasse ist, die $\mathcal{G}_n$ enthält, ist auch $\sigma(\mathcal{G}_n) \supseteq m(\mathcal{G}_n)$.

$m(\mathcal{G}_n) \supseteq F_\sigma \cap G_\delta$

Für $A \in F_\sigma \cap G_\delta$ ist $A \in G_\delta$, es gibt also eine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{G}_n$ mit $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n := \bigcap_{k=1}^n U_k$; $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine fallende Folge auf $\mathcal{G}_n$, da endliche Schnitte offener Mengen offen sind, und es gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = A$. Da $m(\mathcal{G}_n)$ ein monotone Klasse mit $\mathcal{G}_n \subseteq m(\mathcal{G}_n)$ ist, ist $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine fallende Folge auf $\mathcal{G}_n$. Also ist $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in m(\mathcal{G}_n)$. Das zeigt, dass $F_\sigma \cap G_\delta \subseteq m(\mathcal{G}_n)$.

$F_\sigma \cap G_\delta \supseteq \sigma(\mathcal{G}_n)$

Wegen der Minimalitätseigenschaft von $\sigma(\mathcal{G}_n)$ genügt es zu zeigen, dass $F_\sigma \cap G_\delta$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{G}_n \in F_\sigma \cap G_\delta$ ist.
Wie aus dem Hinweis bekannt ist $F_\sigma \cap G_\delta$ bereits eine Algebra, es genügt also die Abgeschlossenheit bezüglich abzählbarer Vereinigungen zu zeigen. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf $F_\sigma \cap G_\delta$. Da $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Folge auf F_σ ist, gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(K_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ mit $A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k^n$. Es ist daher

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k^n = \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} K_k^n \in F_\sigma.$$

Da $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Folge auf G_δ ist, gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(U_k^n)_{k \in K}$ von offenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ mit $A_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k^n$. Es ist daher auch

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k^n \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_k^n}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n} \in G_\delta.$$

Also ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in F_\sigma \cap G_\delta$.
Dass $\mathcal{G}_n \subseteq F_\sigma \cap G_\delta$ folgt daraus, dass für alle $U \in \mathcal{G}_n$, wie in Aufgabenteil **a)** gezeigt, $U \in F_\sigma$, und auch $U = U \cap \bigcap_{n\geq 1} \mathbb{R}^n \in G_\delta$.

Aufgabe 3. (Gegenbeispiele)

a)

Sei $X = (0,1)$. Wie aus der Vorlesung bekannt ist

$$\mu : \mathcal{P}(X)\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$. Für die fallende Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ mit $A_n := \left(0, \frac{1}{n}\right)$ ist jedoch

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty.$$

b)

Bemerkung. Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann ist für alle $c > 0$

$$\mu' : \mathcal{A} \to [0,\infty] \text{ mit } \mu'(A) = c\mu(A)$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$.

Beweis der Bemerkung. Es ist $\mu(\emptyset) = c \cdot 0 = 0$. Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkter Mengen auf $\mathcal{A}$ ist

$$\mu'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = c \cdot \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = c\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c\mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(A_n).$$

□

Für alle $n \geq 1$ ist

$$\mu_n : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty] \text{ mit } \mu(A) = \begin{cases} \frac{|A|}{n} & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

als skalares Vielfaches des Zählmaßes ($c = \frac{1}{n}$) ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$: Auch existiert für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist jedoch μ kein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, da μ wegen

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) = \mu(\mathbb{N}) = \infty \neq 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}).$$

nicht σ-additiv ist.

c)

Es sei $X := \{1,2\}$ und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Es sei $\mu : \mathcal{A} \to (-\infty, \infty)$ definiert als $\mu(\emptyset) := 0$, $\mu(\{1\}) := 1$, $\mu(\{2\}) := -1$ und $\mu(\{1,2\}) := 0$. Offenbar erfüllt μ die geforderten Eigenschaften auf $(X, \mathcal{A})$. Es ist aber $|\mu|$ kein Maß auf $(X, \mathcal{A})$, da

$$|\mu|(\{1,2\}) = 0 \neq 2 = |\mu(\{1\})| + |\mu(\{2\})| = |\mu|(\{1\}) + |\mu|(\{2\}),$$

$|\mu|$ also nicht endlich additiv ist.

Aufgabe 4. (Monotone Folgen von Maßen)

a)

μ ist wohldefiniert: Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist die Folge $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend, und wie aus Analysis I bekannt ist eine monoton steigend Folge entweder beschränkt, und damit konvergent, oder divergent gegen ∞.
Für paarweise dijunkte $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu_n(A_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k),$$

da jedes der μ_n als Maß endlich additiv ist und die einzelnen Grenzwerte alle existieren. μ ist also endlich additiv. Wie aus der Vorlesung bekannt ist μ daher genau dann ein Maß, wenn $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ für jede wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{A}$. Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein wachsende Folge.
Die Monotonie von μ folgt bereits aus der endlichen Additivität, denn für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ ist $B = A \mathbin{\dot\cup} (B \setminus A)$, also $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, also $\mu(A) \leq \mu(B)$.
Aufgrund der Monotonie von μ ist nun $\mu(A_m) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also auch $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
Da die Folge von Maßen $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton steigend im Sinne der Aufgabenstellung ist, ist $\mu_m(A_n) \leq \mu(A_n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, also auch $\lim_{n\to\infty} \mu_m(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da μ_m für alle $m \in \mathbb{N}$ ein Maß ist, ist dabei für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_m(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

also auch

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu_m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dies zeigt die Gleichheit.

b)

Bemerkung. Sei $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(X, \mathcal{A})$. Dann ist auch $\mu := \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_m$ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$.

Beweis der Bemerkung. Es ist

$$\mu(\emptyset) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_m(\emptyset) = \sum_{m\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge disjunkter Mengen auf $\mathcal{A}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_m(A_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_m(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),\end{aligned}$$

wobei die entsprechenden Umordnungen wegen der Nichtnegativität aller Summanden gültig sind. □

Aus der Bemerkung folgt nun direkt, dass $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}$ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ definiert.
Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $\mathbb{R}$ so, dass μ auf beschränkten Mengen endlich ist, so ist insbesondere $\mu([-r,r]) < \infty$ für alle $r > 0$, d.h. für alle $r > 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in [-r,r]$. Für alle $r > 0$ ist daher $|x_n| > r$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, was genau dann der Fall ist, wenn $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$.
Dies Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge auf $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$, und $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge, so gibt es ein $r > 0$ mit $A \subseteq [-r,r]$. Da $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| > r$, also $x_n \notin [-r,r]$, für alle $n > n_0$. Es ist daher $\mu(A) \leq \mu([-r,r]) \leq n_0 + 1$ endlich.
μ ist genau dann nicht σ-endlich, wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $x_n = x$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$:
Gibt es ein solches x, so ist $\mu(A) = \infty$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in A$. Notwendige Bedingung für σ-Endlichkeit ist aber, dass es ein $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in B$ und $\mu(B) < \infty$ gibt.
Gibt es kein solches x, so sei $X := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Punktmenge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := [n, n+1] \setminus X$. Aus der Konstruktion der A_n geht direkt hervor, dass $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Auch ist nach Annahme $\mu(\{x_n\}) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei nun definiert als $B_{2n} := A_n$ und $B_{2n+1} := x_n$ für je alle $n \in \mathbb{N}$; man bemerke, dass $\mu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da auch

$$\mathbb{R} = X \cup (\mathbb{R} \setminus X) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

ist μ daher σ-endlich.