

ANALYSIS III

6. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

26. November 2013

Aufgabe 1. Lipschitz-Stetigkeit und ein Lemma von Sard

a) und b)

Für alle $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $l \geq 0$ bezeichne

$$W_l(a) = \prod_{i=1}^n \left[a_i - \frac{l}{2}, a_i + \frac{l}{2} \right)$$

den halboffenen Würfel mit Seitenlänge l und Mittelpunkt a . Dieser ist bekanntermaßen Borell-, und damit auch Lebesgue-meßbar mit

$$\lambda_n(W_l(a)) = l^n.$$

Da jeder halboffene Würfel von dieser Form ist, gelten alle Aussagen, die im Folgenden für Würfel der Form $W_l(a)$ gezeigt werden, für beliebige halboffene Würfel.

Zunächst zeigen wir, dass für alle $l \geq 0$ und $a \in \mathbb{R}$

$$\lambda_n^*(f(W_l(a))) \leq n^{n/2} L^n l^n = n^{n/2} L^n \lambda_n(W_l(a)). \quad (1)$$

Hierfür bemerken wir zunächst, dass die Hauptdiagonale von $W_l(a)$ genau $\sqrt{n}l^2 = \sqrt{n}l$ lang ist, und daher

$$W_l(a) \subseteq B_{\sqrt{n}l/2}(a).$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f ist damit

$$f(W_l(a)) \subseteq f(B_{\sqrt{n}l/2}(a)) \subseteq B_{\sqrt{n}Ll/2}(f(a)) \subseteq W_{\sqrt{n}Ll}(f(a)).$$

Aus der Monotonie von λ_n^* folgt damit

$$\lambda_n^*(f(W_l(a))) \leq \lambda_n^*(W_{\sqrt{n}Ll}(f(a))) = n^{n/2} L^n l^n,$$

was (1) zeigt.

Wir zeigen nun, dass das Bild von Lebesgue-messbaren Mengen unter f Lebesgue-messbar ist. Sei hierfür $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wie aus einem früheren Übungszettel bekannt, ist die Lebesgue-Messbarkeit von A äquivalent dazu, dass es Mengen $F \in \mathcal{F}_\sigma$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A = F \cup N$ gibt, so dass $\lambda_n(N) = 0$, also N eine Lebesgue-Nullmenge ist (diese ist mit Sicherheit Lebesgue-messbar, da λ_n vollständig ist). Insbesondere ist

$$f(A) = f(F \cup N) = f(F) \cup f(N).$$

Behauptung 1. Es ist $f(F) \in F_\sigma$ sowie $\lambda_n^*(f(N)) = 0$. Insbesondere ist $f(N)$ wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes λ_n also Lebesgue-Nullmenge messbar.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $f(F) \in F_\sigma$. Da $F \in F_\sigma$ gibt es eine Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Mengen, so dass $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Folge $(K_l^k)_{l \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen durch

$$K_l^k := C_k \cap \overline{B_l(0)}.$$

Es ist $C_k = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} K_l^k$ und damit $F = \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} K_l^k$. Da f stetig ist, ist das Bild kompakter Mengen unter f wieder kompakt, und damit auch abgeschlossen. Insbesondere ist $f(K_l^k)$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Es ist daher

$$f(F) = f\left(\bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} K_l^k\right) = \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} f(K_l^k) \in F_\sigma.$$

Nun zeigen wir, dass $\lambda_n^*(f(N)) = 0$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da N eine Lebesgue-Nullmenge ist, gibt es, wie aus einem dem früheren Übungsblätter bekannt, eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von halboffenen Würfeln in \mathbb{R}^n so dass $N \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Vol}(Q_k) \leq \varepsilon$. Es ist also auch

$$f(N) \subseteq f\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(Q_k).$$

Aus der Monotonie und Subadditivität von λ_n^* , sowie (1) folgt damit, dass

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(f(N)) &\leq \lambda_n^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(Q_k)\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(f(Q_k)) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} n^{n/2} L^n \mu(Q_k) = n^{n/2} L^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(Q_k) \leq n^{n/2} L^n \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ ergibt dies, dass $\lambda_n^*(f(N)) = 0$. □

Aus dieser Behauptung folgt aufgrund der bereits oben genannten, zur Lebesgue-Messbarkeit äquivalenten, Bedingung nun direkt, dass $f(A) = f(F) \cup f(N)$ wieder Lebesgue-messbar ist.

Insbesondere ergibt sich damit, dass die in (1) für das äußere Maß aufgestellte Ungleichung bereits für das Lebesgue-Maß selbst gilt, dass also

$$\lambda_n(f(W_l(a))) \leq n^{n/2} L^n l^n = n^{n/2} L^n \lambda_n(W_l(a)). \quad (2)$$

Die Abschätzung (2) lässt sich nun direkt auf beliebige offene Mengen übertragen: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wie aus der Vorlesung bekannt, gibt es eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter, halboffener Würfel mit

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k.$$

Insbesondere sind U , sowie alle Q_k Lebesgue-messbar. Aufgrund der σ -Additivität von λ_n ergibt nun aus (2), dass

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(U)) &= \lambda_n\left(f\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k\right)\right) = \lambda_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(Q_k)\right) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(f(Q_k)) \leq n^{n/2} L^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(Q_k) \\ &= n^{n/2} L^n \lambda_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k\right) = n^{n/2} L^n \lambda_n(U).\end{aligned}$$

Es ist also auch für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lambda_n(f(U)) \leq n^{n/2} L^n \lambda_n(U). \quad (3)$$

Nun werden wir die Regularität des Lebesgue-Maßes nutzen, um diese Abschätzung für alle Lebesgue-messbaren Mengen zu zeigen. Sei hierfür $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Aus der Regularität des Lebesgue-Maßes folgt, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq U$ und $\lambda_n(U) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon$ gibt. Es ist also wegen der Monotonie des Lebesgue-Maßes und (3)

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(A)) &\leq \lambda_n(f(U)) \leq n^{n/2} L^n \lambda_n(U) \\ &\leq n^{n/2} L^n (\lambda_n(A) + \varepsilon) = n^{n/2} L^n \lambda_n(A) + n^{n/2} L^n \varepsilon.\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit die Ungleichung

$$\lambda_n(f(A)) \leq n^{n/2} L^n \lambda_n(A).$$

c)

Lemma 2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Dann ist f auf $[a, b]$ genau dann Lipschitz-stetig mit Konstante L , wenn $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a, b)$.

Beweis. Ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L , so folgt wegen der Stetigkeits des Betrags, dass für alle $x \in (a, b)$

$$|f'(x)| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L|h|}{|h|} = L.$$

Ist andererseits $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt aus der Mittelwertabschätzung direkt, dass für alle $x, y \in (a, b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

□

Lemma 3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann gibt es eine höchstens abzählbare Familie I_k von offenen, nichtleeren Intervallen, so dass $U = \bigcup_k I_k$.

Beweis. Aus Analysis 2 bekannt, lässt sich eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ in offene, nicht-leere, disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegen lässt. Im Falle von \mathbb{R} sind dies gerade offene Intervalle. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass hierfür höchstens abzählbar viele Intervalle benötigt werden.

Wir bemerken, dass es für jedes I_k eine rationale Zahl $r_k \in I_k$ gibt. Aus der Disjunktheit der I_k folgt direkt, dass die Zuordnung $I_k \mapsto r_k$ injektiv ist. Da es nur abzählbar viele r_k gibt, gibt es damit auch nur abzählbar viele I_k . \square

Es sei

$$N := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$$

und für $a, b \in \mathbb{R}$

$$N_{a,b} := \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}.$$

Um zu zeigen, dass $f(N)$ Lebesgue-messbar mit $\lambda_n(f(N)) = 0$ ist, genügt es zu zeigen, dass $f(N_{a,b})$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar mit Maß $\lambda_n(f(N_{a,b})) = 0$ ist. Dann ergibt sich, dass

$$f(N) = f\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_{k/2, k/2+1}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f(N_{k/2, k/2+1})$$

als abzählbare Vereinigung von Lebesgue-messbaren Mengen Lebesgue-messbar ist, und

$$\lambda_n(f(N)) = \lambda_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f(N_{k/2, k/2+1})\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_n(f(N_{k/2, k/2+1})) = 0.$$

Wir zeigen nun die entsprechende Aussage für die $N_{a,b}$. Seien hierfür $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Wir betrachten nur den Fall $a < b$, da sonst $N_{a,b} = \emptyset$ und die Aussage trivialerweise stimmt.

Zunächst zeigen wir, dass $f(N_{a,b})$ Lebesgue-messbar ist. Hierfür bemerken wir zum einen, dass $\tilde{f} := f|_{(a,b)}$ stetig differenzierbar ist, also $\tilde{f}' = f'|_{(a,b)}$ als stetige Funktion Borell-messbar. Daher ist

$$N_{a,b} = \{x \in (a, b) : \tilde{f}'(x) = 0\}$$

Borell-, und damit auch Lebesgue-messbar. Zum anderen bemerken wir, dass die Einschränkung \tilde{f} Lipschitz-stetig ist: Da f' auf $[a, b]$ stetig ist, ist f' auf $[a, b]$, und somit auch auf (a, b) , beschränkt. Aus Lemma 2 folgt damit, f auf $[a, b]$ Lipschitz-stetig ist. Damit ist auch \tilde{f} auf (a, b) Lipschitz-stetig. Aus den vorherigen Aufgabenteilen folgt damit, dass $f(N_{a,b})$ als Bild einer Lebesgue-messbaren Menge unter einer Lipschitz-stetigen Funktion ebenfalls Lebesgue-messbar ist.

Nun zeigen wir, dass $\lambda_n(f(N_{a,b})) = 0$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wegen der Stetigkeit von \tilde{f}' gibt es für alle $x \in N_{a,b}$ ein $\delta_x > 0$, so dass $|\tilde{f}'(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_{\delta_x}(x)$. Da (a, b) offen ist, kann dabei $\delta_x > 0$ so klein gewählt werden, dass $B_{\delta_x}(x) \subseteq (a, b)$. Es sei

$$U := \bigcup_{x \in N_{a,b}} B_{\delta_x}(x).$$

U ist als Vereinigung offener Mengen offen, und es ist

$$N_{a,b} \subseteq U \subseteq (a, b).$$

Es seien $U_k = (a_k, b_k)$ die Zusammenhangskomponenten von U . Nach Lemma 3 sind diese höchstens abzählbar viele. Für alle k ist U_k als offenes Intervall Borell- und damit auch Lebesgue-messbar, wegen der Lipschitz-Stetigkeit von \tilde{f} ist also auch $\tilde{f}(U_k)$ für alle k Lebesgue-messbar. Dabei folgt aus der Konstruktion von U , dass $\tilde{f}'(x) < \varepsilon$ für alle $x \in U \supseteq U_k$, aus Lemma 2 also, dass $\tilde{f}|_{U_k}$ für alle k Lipschitz-stetig mit Konstante ε ist. Aus den vorherigen Aufgabenteilen folgt damit, dass für alle k

$$\lambda_n(f(U_k)) \leq n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n(U_k).$$

Wegen der Monotonie und σ -Additivität von λ_n ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} \lambda_n(f(N_{a,b})) &\leq \lambda_n(f(U)) = \lambda_n\left(f\left(\bigcup_k U_k\right)\right) = \sum_k \lambda_n(f(U_k)) \\ &\leq n^{n/2} \varepsilon^n \sum_k \lambda_n(U_k) = n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n\left(\bigcup_k U_k\right) \\ &= n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n(U) \leq n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n((a, b)) = n^{n/2} \varepsilon^n (b - a). \end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass

$$\lambda_n(f(N_{a,b})) = 0.$$