Analysis III
9. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

19. Dezember 2013

Aufgabe 1. (Riemann vs. Lebesgue)

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass f, bzw. der Ausdruck $\sin(x)/x$, an der Stelle $x = 0$ als $f(0) = 1$ definiert ist. Aus Analysis 1 ist bekannt, dass f dann auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

a)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_{(0,\infty)} |f| d\lambda \geq \int_{[0,n\pi]} |f| d\lambda = \int_0^{n\pi} |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} \, \mathrm{d}x$$

Wir dürfen das Lebesgue- mit dem Riemann-Integral vertauschen, da $|f|$ auf $[0, n\pi]$ beschränkt und stetig ist. Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} \, \mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} \, \mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi},\end{aligned}$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{(0,\infty)} |f| \, \mathrm{d}\lambda \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

also

$$\int_{(0,\infty)} |f| \, \mathrm{d}\lambda \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Es ist also $\int_{(0\infty)} |f| \, \mathrm{d}\lambda = \infty$. Daher ist $|f|$ auf $(0, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar, also auch f nicht.

b) und c)

Sei $R \geq 0$ beliebig aber fest. Wir betrachten die Funktion

$$g : [0, R] \times [0, \infty) \to [-1, 1], (x, t) \mapsto \sin(x) e^{-xt}.$$

Diese ist stetig, also Borell-messbar. Wir zeigen zunächst, dass g integrierbar ist. Für $|g|$ lässt sich der Satz von Tonelli anwenden, weshalb

$$\begin{aligned}\int_{[0,R]\times[0,\infty)} |g| \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} |g(x,t)| \,\mathrm{d}\lambda(t) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} |\sin(x)| e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(t) \,\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

Da $|\sin(x)|e^{-xt}$ für alle $x \in [0,R]$ auf jedem kompakten Teilintervall von $[0,\infty)$ Riemann-integrierbar ist, und auf $[0,\infty)$ uneigentlich Riemann-Integrierbar mit

$$\int_0^\infty |\sin(x)| e^{-xt} \,\mathrm{d}t = |\sin(x)| \int_0^\infty e^{-xt} \,\mathrm{d}t = \frac{|\sin(x)|}{x},$$

ist für alle $x \in [0, \mathbb{R}]$

$$\int_{[0,\infty)} |\sin(x)| e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_0^\infty |\sin(x)| e^{-xt} \,\mathrm{d}t = \frac{|\sin(x)|}{x}.$$

Daher ist

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty)} |g| \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{[0,R]} \frac{|\sin(x)|}{x} \,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty,$$

da $\lambda([0,R]) = R < \infty$ und $0 \leq |\sin(x)|/x \leq 1$. Es ist also $|g|$ integrierbar, und damit auch g.

Da g integrierbar ist, lässt sich für $\int_{[0,R]\times[0,\infty)} g \,\mathrm{d}\lambda_2$ der Satz von Fubini anwenden. Wir bemerken aber zunächst analog zur obigen Argumentation, dass für alle $x \in [0,R]$

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} g(x,t) \,\mathrm{d}\lambda(t) &= \int_{[0,\infty)} \sin(x) e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \sin(x) \int_{[0,\infty)} e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{\sin(x)}{x},\end{aligned}$$

wobei auch genutzt wird, dass $|g|$ auf $[0,\infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Daher ergibt sich mit dem Satz von Fubini zum einen, dass

$$\begin{aligned}\int_{[0,R]\times[0,\infty)} g \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} g(x,t) \,\mathrm{d}\lambda(t) \,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{[0,R]} \frac{\sin(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ = \int_{[0,R]} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^R f(x) \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt genutzt, dass f auf $[0,R]$ beschränkt und stetig ist, also Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen.

Um das andere, aus dem Satz von Fubini folgende, Integral zu bestimmen, bemerken wir, dass für alle $t \in [0,\infty)$

$$\int_{[0,R]} g(x,t) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,R]} \sin(x) e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^R \sin(x) e^{-xt} \,\mathrm{d}x.$$

Dabei haben wir genutzt, dass $g(x,t)$ für alle $t \in [0,\infty)$ auf $[0,R]$ beschränkt und stetig ist, also Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen. Es ergibt sich für alle $t \in (0,\infty)$ durch partielle Integration, dass

$$\begin{aligned}\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{t}\sin(x)e^{-xt}\Big|_{x=0}^{5} + \frac{1}{t}\int_0^R \cos(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{t}\sin(x)e^{-xt} - \frac{1}{t^2}\cos(x)e^{-xt}\right)\Bigg|_{x=0}^{R} - \frac{1}{t^2}\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\underbrace{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}_{=\frac{1+t^2}{t^2}}\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= \left(-\frac{1}{t}\sin(x)e^{-xt} - \frac{1}{t^2}\cos(x)e^{-xt}\right)\Bigg|_{x=0}^{R} \\ &= -\frac{1}{t}\sin(R)e^{-Rt} - \frac{1}{t^2}\cos(R)e^{-Rt} + \frac{1}{t^2},\end{aligned}$$

und daher für alle $t \in (0,\infty)$

$$\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x = -\frac{t\sin(R)e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R)e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}.$$

Man bemerke, dass diese Gleichung auch für $t = 0$ gilt, da

$$\int_0^R \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)|_{x=0}^R = -\cos(R) + 1.$$

Nach dem Satz von Fubini gilt also auch

$$\begin{aligned}\int_{[0,R]\times[0,\infty)} g\,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[0,\infty)}\int_{[0,R]} g(x,t)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \int_{[0,\infty)} -\frac{t\sin(R)e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R)e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t),\end{aligned}$$

wobei aus dem Satz auch folgt, dass dieses hässliche Integral existiert. Zusammengefasst ergibt sich also aus dem Satz von Fubini

$$\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,\infty)} -\frac{t\sin(R)e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R)e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t),$$

Sei nun $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $(0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$. Um den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\int_0^{R_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ zu bestimmen (und ob dieser überhaupt existiert), betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} -\frac{t\sin(R_n)e^{-R_nt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n)e^{-R_nt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

Wir wollen den Grenzwert und das Integral mithilfe des Satzes über dominierte Konvergenz vertauschen. Offenbar ist für alle $t \in [0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{t\sin(R_n)e^{-R_nt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n)e^{-R_nt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Auch ist für alle $n \in \mathbb{N}$ für alle $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{t \sin(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \right| \\
&\leq \frac{t |\sin(R_n)| e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{|\cos(R_n)| e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \\
&\leq 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist auf $[0, \infty)$ Lebesgue-integrierbar: Sie ist auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar, nichtnegativ, und das uneigentliche Riemanintegral

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t &= \lim_{s \to \infty} \int_0^s 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{s \to \infty} \left(-\frac{2}{R_n} e^{-R_n t} + \arctan(t) \right) \Bigg|_{t=0}^{s} \\
&= \lim_{s \to \infty} -\frac{2}{R_n} e^{-R_n s} + \arctan(s) + \frac{2}{R_n} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{R_n}
\end{aligned}$$

existiert. Daher ist die Funktion auf $[0, \infty)$ auch Lebesgue-integrierbar.
Wir können also den Satz über dominierte Konvergenz anwenden, und erhalten, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \to \infty} \int_{[0,\infty)} -\frac{t \sin(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \int_{[0,\infty)} \lim_{n \to \infty} -\frac{t \sin(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t).
\end{aligned}$$

Die Funktion $1/(1+t^2)$ auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar ist, nichtnegativ und auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \lim_{s \to \infty} \int_0^s \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \lim_{s \to \infty} \arctan(t)|_{t=0}^{s} = \lim_{s \to \infty} \arctan(s) = \frac{\pi}{2}.$$

Daher stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral überein, d.h. es ist

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist also

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{R_n} f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Aus der Beliebigkeit der Folge R_n auf $(0, \infty)$ mit $\lim_{n \to \infty} R_n = \infty$ folgt, dass bereits

$$\int_0^\infty f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{R \to \infty} \int_0^R f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 4. (Kugeln)

Für alle $N \geq 1$ und $R \geq 0$ ist

$$\lambda_N\left(B_R^N\right) = R^N \alpha_N,$$

denn für die Diagonalmatrix $T = \operatorname{diag}(R, \ldots, R) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ gilt

$$\lambda_N\left(B_R^N\right) = \lambda_N\left(T(B_R^1)\right) = |\det(T)|\,\lambda_N(B_R^1) = R^N \alpha_N.$$

Sei nun $N \geq 3$ beliebig aber fest. Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned}
\left(B_1^N\right)_{(x_1,x_2)} &= \left\{(x_3, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2} : \sum_{i=1}^{N-2} x_i^2 \leq 1\right\} \\
&= \left\{(x_3, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2} : \sum_{i=3}^{N-2} x_i^2 \leq 1 - (x_1^2 + x_2^2)\right\} \\
&= B^{N-2}_{1-\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^N\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{N-2}\right)$ und $\lambda_N = \lambda_2 \times \lambda_{N-2}$ ergibt sich aus der Definition des Produktmaßes, dass

$$\begin{aligned}
\alpha_N = \lambda_N\left(B_1^N\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_{N-2}\left(\left(B_1^N\right)_{(x,y)}\right) \mathrm{d}\lambda_2(x,y) \\
&= \int_A \lambda_{N-2}\left(B^{N-2}_{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\right) \mathrm{d}\lambda_2(x,y) \\
&= \alpha_{N-2} \int_A \sqrt{1-(x^2+y^2)}^{\,N-2} \mathrm{d}\lambda_2(x,y)
\end{aligned}$$

wobei

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Umwandeln in Polarkoordinaten ergibt, dass

$$\begin{aligned}
&\int_A \sqrt{1-(x^2+y^2)}^{\,N-2} \mathrm{d}\lambda_2(x,y) \\
= &\int_{(0,1)\times(0,2\pi)} r\sqrt{1-((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}^{\,N-2} \mathrm{d}\lambda_2(r,\varphi) \\
= &\int_{(0,1)\times(0,2\pi)} r\sqrt{1-r^2}^{\,N-2} \mathrm{d}\lambda_2(r,\varphi).
\end{aligned}$$

(Streng genommen müssten wir A zuerst durch eine passende offene Menge ersetzen. Es ist jedoch klar, dass der Rand von A für den Integral nicht von Bedeutung ist, da es sich um eine Nullmenge handelt, so dass wir

$$A' = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\} = A^\circ$$

wählen können.) Anwenden des Satzes von Tonelli ergibt, dass

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)\times(0,2\pi)} r\sqrt{1-r^2}^{\,N-2} \mathrm{d}\lambda_2(r,\varphi) &= \int_{(0,1)} \int_{(0,2\pi)} r\sqrt{1-r^2}^{\,N-2} \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_{(0,1)} r\sqrt{1-r^2}^{\,N-2} \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Da die Funktion $r\sqrt{1-r^2}^{N-2}$ auf $(0,1)$ beschränkt und stetig ist, entspricht das Lebesgue-Integral dem Riemann-Integral. Dabei ergibt sich mit den Substitutionen $r = \sin t,\ \mathrm{d}r = \cos t\, \mathrm{d}t$ und $\cos t = x$ und $-\sin t\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}^{N-2}\, \mathrm{d}r &= \int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos^{N-1}(t)\, \mathrm{d}t = -\int_1^0 x^{N-1}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{N-1}\, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^N}{N}\right|_{x=0}^1 = \frac{1}{N}.\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich damit, dass

$$\alpha_N = 2\pi N^{-1}\alpha_{N-2}.$$