

ANALYSIS III

7. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

5. Dezember 2013

Aufgabe 1. (Eine Integralformel)

a)

Aus der Monotonie von μ folgt, dass für $a, b \in [0, \infty)$ mit $a \leq b$

$$g(a) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \geq \mu(\{x \in X : f(x) \geq b\}) = g(b).$$

g ist also monoton fallend und somit bekanntermaßen Borel-messbar.

b)

Zunächst zeigen wir die Aussage für einfache Funktionen: Sei f eine einfache Funktion mit Werten $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, die auf Mengen A_1, \dots, A_n angenommen werden; wir setzen $\alpha_0 := 0$.

Ist $\int_X f \, d\mu = \infty$, so gibt es $1 \leq i \leq n$ mit $\alpha_i \neq 0$ und $\mu(A_i) = \infty$. Es ist daher $g(t) = \mu\{x \in X : f(x) \geq t\} = \infty$ für alle $t \in [0, \alpha_i]$, und somit auch $\int_{[0, \infty)} g = \infty$.

Ansonsten nimmt g für $i = 1, \dots, n$ auf dem Intervall $(\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ den konstanten Wert $\sum_{j=1}^n \mu(A_j)$, und auf (α_n, ∞) den Wert 0 an. Es ist dann

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} g \, d\lambda &= \int_{(0, \infty)} g \, d\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda((\alpha_{i-1}, \alpha_i]) \sum_{j=i}^n \mu(A_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{j=i}^n \mu(A_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \mu(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (\alpha_j - \alpha_{i-1}) \mu(A_j) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_0) \mu(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Funktionen mit verschwindendem Integral auf Anfangsstücken)

Wir zeigen, dass $\int_U f \, d\lambda = 0$ für alle offenen Mengen $U \subseteq (a, b)$. Zunächst bemerken wir, dass für alle $x \in (a, b)$

$$0 = \int_{(a,b)} f \, d\lambda = \int_{(a,x)} f \, d\lambda + \int_{(x,b)} f \, d\lambda = \int_{(x,b)} f \, d\lambda,$$

also für alle $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$

$$0 = \int_{(a,b)} f \, d\lambda = \int_{(a,x)} f \, d\lambda + \int_{(x,y)} f \, d\lambda + \int_{(y,b)} f \, d\lambda = \int_{(x,y)} f \, d\lambda.$$

Sei nun $U \subseteq (a, b)$ offen. Wie bereits letzte Woche gezeigt können wir U schreiben als $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$, wobei $U_n = \emptyset$ oder U_n ein offenes Intervall ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $g_n = \sum_{k=1}^n f \chi_{U_k}$ und $g = f \chi_U$ ist $g_n \rightarrow g$ punktweise auf ganz (a, b) . Da f integrierbar ist, ist es auch $|f|$, und wegen $|g_n| \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach dem Satz über dominierte Konvergenz daher

$$\begin{aligned} \int_U f \, d\lambda &= \int_{(a,b)} f \chi_U \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} \sum_{k=0}^n f \chi_{U_k} \, d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(a,b)} f \chi_{U_k} \, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{U_k} f \, d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Es sei nun $E_+ := \{x \in (a, b) : f(x) > 0\}$ mit $\lambda(E_+) \leq b - a < \infty$. Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes und da $\lambda(E_+) < \infty$ finden wir eine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Mengen mit $E_+ \subseteq U_n$ und $\lambda(U_n \setminus E_+) \leq \frac{1}{n}$ für alle n . Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass die Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fallend ist, da wir sonst die Folge $(\bigcap_{k=1}^n U_k)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachten. Es sei $U := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Es ist $\int_U f \, d\lambda$: Es ist $f \chi_{U_n} \rightarrow f \chi_U$ punktweise auf ganz (a, b) und $|f \chi_{U_n}| \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, nach dem Satz über dominierte Konvergenz also

$$\int_U f \, d\lambda = \int_{(a,b)} f \chi_U \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} f \chi_{U_n} \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_n} f \, d\lambda = 0.$$

Es ist $E_+ \subseteq U$ und, da $\mu(U_0) < \infty$ und die Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fallend ist,

$$\begin{aligned} \mu(U \setminus E_+) &= \mu\left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) \setminus E_+\right) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \setminus E_+)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U_n \setminus E_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

Es ist also $\int_{E_+} f \, d\lambda = \int_U f \, d\lambda = 0$. Da $f|_{E_+} > 0$ ist daher, wie aus der Vorlesung bekannt, $f(x) = 0$ für λ -fast alle $x \in E_+$. Nach der Definition von E_+ muss daher $\lambda(E_+) = 0$. Analog ergibt sich für $E_- := \{x \in (a, b) : f(x) < 0\}$, dass auch $\lambda(E_-) = 0$. Also ist

$$\lambda(\{x \in (a, b) : f(x) \neq 0\}) = \lambda(E_- \cup E_+) = \lambda(E_-) + \lambda(E_+) = 0.$$

Aufgabe 3. (Ein Konvergenzresultat)

Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $f_n \rightarrow f$ auf ganz X , da die Menge $\{x \in X : f_n \not\rightarrow f\}$ eine μ -Nullmenge ist, also für das Integral $\int_X |f_n - f| d\mu$ nicht von Bedeutung ist. Wegen $f_n \geq 0$ für alle n folgt damit insbesondere, dass $f \geq 0$. Da f und f_n für alle n integrierbar sind, ist es auch $f - f_n$ und daher auch $|f - f_n|$ für alle n . Nach der Dreiecksungleichung ist dabei $|f_n - f| \leq f + f_n$ für alle n , also $0 \leq f_n + f - |f_n - f|$ für alle n . Daher ist nach dem Lemma von Fatou

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n + f - |f_n - f| d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n + f - |f_n - f| d\mu. \quad (1)$$

Dabei ist

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n + f - |f_n - f| d\mu = \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} 2f d\mu = 2 \int_X f d\mu$$

und

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n + f - |f_n - f| d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} - \int_X |f_n - f| d\mu \\ &= 2 \int_X f d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu. \end{aligned}$$

Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$0 \leq - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu,$$

also

$$0 \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \geq 0,$$

und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Aufgabe 4. (Gegenbeispiele)

a)

Es sei $f = 0$ und $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[-n, n]}$ für alle $n \geq 1$. Dann ist $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf \mathbb{R} , aber für alle $n \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 2 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

Inbesondere konvergiert $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ nicht gegen $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

b)

Diese Aussage ist totaler Blödsinn: Aus ihr folgt insbesondere, dass zwei Funktionen genau dann das gleich Integral haben, wenn sie fast überall gleich sind. Ein einfaches und offensichtliches Gegenbeispiel ist $f_n = \chi_{[-1, 0]}$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ und $f = \chi_{[0, 1]}$.

c)

Man betrachte $f = 0$ und die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert als

$$f_{2^n-1+k} := \chi_{[k/2^n, (k+1)/2^n]}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \dots, 2^n - 1$, d.h. $f_0 = \chi_{[0,1]}$, $f_1 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_2 = \chi_{[1/2,1]}$,
 $f_{3+k} = \chi_{[k/4, (k+1)/4]}$ für $k = 0, \dots, 3$, usw.

Es ist offenbar

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda,$$

aber $f_n \not\rightarrow f$ auf ganz $[0, 1]$.