Analysis III
6. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

26. November 2013

Aufgabe 1. Lipschitz-Stetigkeit und ein Lemma von Sard

a) und b)

Für alle $a = {}^{\mathrm{t}}(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $l \geq 0$ bezeichne

$$W_l(a) = \prod_{i=1}^{n} \left[a_i - \frac{l}{2}, a_i + \frac{l}{2}\right)$$

den halboffenen Würfel mit Seitenlänge l und Mittelpunkt a. Dieser ist bekanntermaßen Borell-, und damit auch Lebesgue-meßbar mit

$$\lambda_n(W_l(a)) = l^n.$$

Da jeder halboffene Würfel von dieser Form ist, gelten alle Aussagen, die im Folgenden für Würfel der form $W_l(a)$ gezeigt werden, für beliebige halboffene Würfel.
Zunächst zeigen wir, dass für alle $l \geq 0$ und $a \in \mathbb{R}$

$$\lambda_n^*(f(W_l(a))) \leq n^{n/2} L^n l^n = n^{n/2} L^n \lambda_n(W_l(a)). \tag{1}$$

Hierfür bemerken wir zunächst, dass die Hauptdiagonale von $W_l(a)$ genau $\sqrt{nl^2} = \sqrt{n}\, l$ lang ist, und daher

$$W_l(a) \subseteq B_{\sqrt{n}l/2}(a).$$

Wegen der Libschitz-Stetigkeit von f ist damit

$$f(W_l(a)) \subseteq f(B_{\sqrt{n}l/2}(a)) \subseteq B_{\sqrt{n}Ll/2}(f(a)) \subseteq W_{\sqrt{n}Ll}(f(a)).$$

Aus der Monotonie von λ_n^* folgt damit

$$\lambda_n^*(f(W_l(a))) \leq \lambda_n^* \left(W_{\sqrt{n}Ll}(f(a))\right) = n^{n/2} L^n l^n,$$

was (1) zeigt.
Wir zeigen nun, dass das Bild von Lebesgue-messbaren Mengen unter f Lebesgue-messbar ist. Sei hierfür $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wie aus einem früheren Übungszettel bekannt, ist die Lebesgue-Messbarkeit von A äuqivalent dazu, dass es Mengen $F \in F_\sigma$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A = F \cup N$ gibt, so dass $\lambda_n(N) = 0$, also N eine Lebesgue-Nullmenge ist (diese ist mit Sicherheit Lebesgue-messbar, da λ_n vollständig ist). Inbesondere ist

$$f(A) = f(F \cup N) = f(F) \cup f(N).$$

Behauptung 1: Es ist $f(F) \in F_\sigma$ sowie $\lambda_n^*(f(N)) = 0$. Insbesondere ist $f(N)$ wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes λ_n also Lebesgue-Nullmenge messbar.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $f(F) \in F_\sigma$. Da $F \in F_\sigma$ gibt es eine Folge $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Mengen, so dass $F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Folge $(K_l^k)_{l\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen durch

$$K_l^k := C_k \cap \overline{B_l(0)}.$$

Es ist $C_k = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} K_l^k$ und damit $F = \bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} K_l^k$. Da f stetig ist, ist das Bild kompakter Mengen unter f wieder kompakt, und damit auch abgeschlossen. Insbesondere ist $f\left(K_l^k\right)$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Es ist daher

$$f(F) = f\left(\bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} K_l^k\right) = \bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} f\left(K_l^k\right) \in F_\sigma.$$

Nun zeigen wir, dass $\lambda_n^*(f(N))$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da N eine Lebesgue-Nullmenge ist, gibt es, wie aus einem dem früheren Übungsblätter bekannt, eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von halboffenen Würfeln in $\mathbb{R}^n$ so dass $N \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(Q_k) \leq \varepsilon$. Es ist also auch

$$f(N) \subseteq f\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(Q_k).$$

Aus der Monotonie und Subadditivität von λ_n^*, sowie (1) folgt damit, dass

$$\begin{aligned}\lambda_n^*(f(N)) &\leq \lambda_n^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(Q_k)\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(f(Q_k)) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} n^{n/2} L^n \mu(Q_k) = n^{n/2} L^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(Q_k) \leq n^{n/2} L^n \varepsilon.\end{aligned}$$

Mit der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ ergibt dies, dass $\lambda_n^*(f(N)) = 0$. □

Aus dieser Behauptung folgt aufgrund der bereits oben genannten, zur Lebesgue-Messbarkeit äquivalenten, Bedingung nun direkt, dass $f(A) = f(F) \cup f(N)$ wieder Lebesgue-messbar ist.
Insbesondere ergibt sich damit, dass die in (1) für das äußere Maß aufgestellte Ungleichung bereits für das Lebesgue-Maß selbst gilt, dass also

$$\lambda_n(f(W_l(a))) \leq n^{n/2} L^n l^n = n^{n/2} L^n \lambda_n(W_l(a)). \tag{2}$$

Die Abschätzung (2) lässt sich nun direkt auf beliebige offene Mengen übertragen: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wie aus der Vorlesung bekannt, gibt es eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter, halboffener Würfel mit

$$U = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} Q_k.$$

Insbesondere sind U, sowie alle Q_k Lebesgue-messbar. Aufgrund der σ-Additivität von λ_n ergibt nun aus (2), dass

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(U)) &= \lambda_n\left(f\left(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} Q_k\right)\right) = \lambda_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(Q_k)\right) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(f(Q_k)) \leq n^{n/2}L^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(Q_k) \\ &= n^{n/2}L^n\lambda_n\left(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} Q_k\right) = n^{n/2}L^n\lambda_n(U).\end{aligned}$$

Es ist also auch für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lambda_n(f(U)) \leq n^{n/2}L^n\lambda_n(U). \tag{3}$$

Nun werden wir die Regularität des Lebesgue-Maßes nutzen, um diese Abschätzung für alle Lebesgue-messbaren Mengen zu zeigen. Sei hierfür $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Aus der Regularität des Lebesgue-Maßes folgt, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq U$ und $\lambda_n(U) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon$ gibt. Es ist also wegen der Monotonie des Lebesgue-Maßes und (3)

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(A)) &\leq \lambda_n(f(U)) \leq n^{n/2}L^n\lambda_n(U) \\ &\leq n^{n/2}L^n(\lambda_n(A) + \varepsilon) = n^{n/2}L^n\lambda_n(A) + n^{n/2}L^n\varepsilon.\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit die Ungleichung

$$\lambda_n(f(A)) \leq n^{n/2}L^n\lambda_n(A).$$

c)

Lemma 2: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C^1((a,b),\mathbb{R})$. Dann ist f genau dann Lipschitz-stetig mit Konstante L, wenn $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis. Ist f Lipschitz-stetig mit konstante L, so folgt wegen der Stetigkeits des Betrags für alle $x \in (a,b)$, dass

$$|f'(x)| = \left|\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq \lim_{h\to 0} \frac{L|h|}{|h|} = L.$$

Ist andererseits $f'(x) \leq L$ für alle $x \in (a,b)$, so folgt mit der Mittelwertabschätzung direkt dass für alle $x, y \in (a,b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

□

Lemma 3: Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann gibt es eine höchstens abzählbare Familie I_k von offenen, nichtleeren Intervallen, so dass $U = \dot\bigcup_n I_k$.

Beweis. Aus Analysis 2 bekannt, lässt sich eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ in offene, nichtleere, disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegen lässt. Im Falle von $\mathbb{R}$ sind dies gerade offene Intervalle. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass hierfür höchstens abzählbar viele Intervalle benötigt werden.
Wir bemerken, dass es für jedes I_k eine rationale Zahl $r_k \in I_k$ gibt. Aus der Disjunktheit der I_k folgt direkt, dass die Zuordnung $I_k \mapsto r_k$ injektiv ist. Da es nur abzählbar viele r_k gibt, gibt es damit auch nur abzählbar viele I_k. □