

ANALYSIS III

3. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

2. November 2013

Betrachtet man zwei Mengen A und A' mit $A = B_1 \cup B_2$ und $A' = B'_1 \cup B'_2$ für $B_1, B_2 \subseteq A$ und $B'_1, B'_2 \subseteq A'$, so ist es einfach so sehen, dass

$$A \times A' = (B_1 \times B'_1) \cup (B_1 \times B'_2) \cup (B_2 \times B'_1) \cup (B_2 \times B'_2).$$

Diese Beobachtung wird von dem folgenden Lemma verallgemeinert:

Lemma 1: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen über einer Indexmenge I und

$$A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j^i$$

für eine Familie von Mengen $(B_j^i)_{j \in J_i}$ über einer Indexmenge J_i für alle $i \in I$. Dann gilt

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_j^i = \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Beweis des Lemmas: Sei $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. Da $a_i \in A_i$ für alle $i \in I$, gibt es für alle $i \in I$ ein $j_i \in J_i$ mit $a_i \in B_{j_i}^i$. Daher ist

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{j_i}^i \subseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i,$$

also ist

$$\prod_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Ist

$$(a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i,$$

so gibt es $(j_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} J_i$ mit $a_i \in B_{j_i}^i \subseteq A_i$ für alle $i \in I$, also $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. Daher ist

$$\prod_{i \in I} A_i \supseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Die Disjunktheit der Vereinigung ergibt sich aus der paarweisen Disjunktheit der B_j^i , $j \in J_i$, für alle $i \in I$: Sind $(j_i)_{i \in I}, (j'_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} J_i$ so dass

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{j_i}^i \cap \prod_{i \in I} B_{j'_i}^i$$

existiert, so muss $a_i \in B_{j_i}^i$ und $a_i \in B_{j'_i}^i$ für alle $i \in I$. Also muss $B_{j_i}^i \cap B_{j'_i}^i \neq \emptyset$, und damit $j_i = j'_i$ für alle $i \in I$. \square

Aufgabe 1. (Volumen auf Quadern)

a)

Seien $q, Q \in \mathcal{Q}$ mit $q \subseteq Q$ beliebig aber fest. Es ist $Q = \prod_{i=1}^n [A_i, B_i]$ mit $A_i \leq B_i$ für $i = 1, \dots, n$, und $q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ mit $A_i \leq a_i \leq b_i \leq B_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dass $[a_i, b_i] \subseteq [A_i, B_i]$ folgt daher, dass sich aus $q \subseteq Q$ für die Projektion

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

ergibt, dass $[a_i, b_i] = \pi_i(q) \subseteq \pi_i(Q) = [A_i, B_i]$ für je $i = 1, \dots, n$. Mit Lemma 1 ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} Q &= \prod_{i=1}^n [A_i, B_i] = \prod_{i=1}^n \left(\underbrace{[A_i, a_i]}_{:= C_1^i} \cup \underbrace{[a_i, b_i]}_{:= C_2^i} \cup \underbrace{[b_i, B_i]}_{:= C_3^i} \right) \\ &= \bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1, 2, 3\}^n} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \end{aligned}$$

die disjunkte Vereinigung von 3^n Quadern $q_1, \dots, q_{3^n} \in \mathcal{Q}$ ist, wobei $q = \prod_{i=1}^n C_2^i$ einer von diesen ist. Aufgrund der Additivität von μ ist daher

$$\mu(Q) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^{3^n} q_i \right) = \sum_{i=1}^{3^n} \mu(q_i) \geq \mu(q),$$

weshalb μ monoton ist.

b)

Wegen der Invarianz von μ kann für alle $Q \in \mathcal{Q}$ o.b.d.A. davon ausgegangen werden, dass $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i]$ mit $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $i = 1, \dots, n$. Auch folgt aus der Invarianz von μ bezüglich Transposition, der endlichen Additivität von μ und Lemma 1, dass für alle $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i] \in \mathcal{Q}$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$

$$\mu \left(\prod_{i=1}^n [0, m_i a_i] \right) = m_1 \cdots m_n \mu(Q),$$

da

$$\begin{aligned} \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, m_i a_i] \right) &= \mu \left(\prod_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} \underbrace{[(j-1)a_i, ja_i]}_{:= C_j^i} \right) \\ &= \mu \left(\bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left(\prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) \\ &= \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left(\prod_{i=1}^n [(c_i - 1)a_i, c_i a_i] \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu(Q) \\ &= m_1 \cdots m_n \mu(Q). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daher aus der Normierung, dass

$$\mu \left(\prod_{i=1}^n [0, m_i) \right) = \prod_{i=1}^n m_i \text{ für alle } m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i) \in \mathcal{Q}$ beliebig aber fest. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu \left(\prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) = m^n \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, a_i) \right) = m^n \mu(Q),$$

sowie wegen der Monotonie von μ auch

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor &= \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, \lfloor ma_i \rfloor) \right) \leq \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) \text{ und} \\ \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) &\leq \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, \lceil ma_i \rceil) \right) = \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil, \end{aligned}$$

also für $m \geq 1$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor \leq \mu(Q) \leq \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil = \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m}. \quad (1)$$

Nun ist $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da

$$x - \frac{1}{m} = \frac{mx - 1}{m} \leq \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq \frac{mx}{m} = x$$

für alle $m \geq 1$ und daher

$$x \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq x,$$

also $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$. Analog ergibt sich, dass auch $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil mx \rceil}{m} = x$. Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_i &= \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} \leq \mu(Q) \text{ und} \\ \mu(Q) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} \leq \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} = \prod_{i=1}^n a_i, \end{aligned}$$

also $\mu(Q) = \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n (a_i - 0)$.

Aufgabe 2. (Nullmengen)

a)

Aus der Aufgabenstellung geht meiner Meinung nach nicht klar hervor, ob A als

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &:= \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \text{ oder als} \\ \tilde{A}_2 &:= \{x \in X : x \in M \text{ für unendlich viele } M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}\} \end{aligned}$$

definiert wird. Für den Beweis diesen Aufgabenteiles genügt es allerdings davon auszugehen, dass $A = \tilde{A}_1$, da $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_1$: Ist $x \in \tilde{A}_2$, so gibt es unendlich viele $M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x \in M$; insbesondere gibt es daher unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$. Man bemerke jedoch, dass im Allgemeinen $\tilde{A}_1 \subsetneq \tilde{A}_2$: Ist etwa $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstant mit $A_1 \neq \emptyset$, so ist $\tilde{A}_1 = A_1 \neq \emptyset$, aber $\tilde{A}_2 = \emptyset$.

Zunächst gilt es zu zeigen, dass A messbar ist, d.h. dass $A \in \mathcal{A}$. Dies ist der Fall, da

$$\begin{aligned} A &= \tilde{A} = \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x \in X : \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es } m \geq n \text{ mit } x \in A_m\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\mu(A_k) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge der Partiellsummen $(\sum_{k=1}^n \mu(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend. Da sie nach Annahme nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Es gibt daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$. Da μ ein Maß ist folgt daraus, dass

$$\mu \left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Da $A = \tilde{A}_1$ gibt es für alle $x \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ und $x \in A_n$. Insbesondere ist daher $A \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Aufgrund der Monotonie von μ folgt, dass

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu \left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \right) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von ε folgt damit, dass $\mu(A) = 0$.

b)

Es sei $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, sowie $A_k := \{1, \dots, k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\{1\} \subseteq A$, unabhängig davon ob $A = \tilde{A}_1$ oder $A = \tilde{A}_2$. Wegen der Monotonie des Maßes ist daher

$$\mu(A) \geq \mu(\{1\}) = 1 \neq 0.$$

Aufgabe 3. (Vom äußeren Maß zum Maß)

Aufgabe 4. (Verschiedene äußere Maße)