Analysis III
11. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

16. Januar 2014

Aufgabe 1. (Dualität)

Für den Fall, dass $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ ist die Aussage bereits aus der Vorlesung bekannt. Es ist nämlich bekannt, dass die Abbildung

$$\psi : L^p(\Omega) \to \left(L^{p'}(\Omega)\right)^* \text{ mit } \psi(f)(g) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu \text{ für alle } g \in L^{p*}(\Omega)$$

wegen der σ-Endlichkeit des Maßraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $p \in [1, \infty]$ eine Isometrie ist, dass also

$$\begin{aligned}\|f\|_p = \|\psi(f)\| &= \sup\left\{|\psi(f)(g)| : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

Sei nun $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar und $p \in [0, \infty]$ mit $f \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$. Wir unterscheiden zwischen den drei Fällen $p = 1$, $p = \infty$ und $1 < p < \infty$.
Ist $p = 1$, so lässt sich für alle $M \in \mathbb{N}$ die Testfunktion $g_M = \operatorname{sgn}(f)$ wählen. Es ist klar, dass $g_M \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $\|g_M\|_\infty = 1$, da $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$ ist

$$\int_\Omega fg_M \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu = \infty \geq M.$$

Ist $p = \infty$ so setzen wir für beliebiges aber festes $M \in \mathbb{N}$

$$A := \{x \in \Omega : |f(x)| \geq M\}.$$

Offenbar ist $A \in \mathcal{A}$, und da $f \notin \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ ist $\mu(A) > 0$. Wegen der σ-Endlichkeit des Maßraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gibt es eine Menge $B \subseteq A$ mit $0 < \mu(B) < \infty$. Für die Funktion

$$g_M := \frac{\chi_B}{\mu(B)} \operatorname{sgn}(f)$$

ist $g_M \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $\|g_M\|_1 = 1$, da

$$\int_\Omega |g_M| \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B 1 \,\mathrm{d}\mu = 1.$$

Es ist

$$\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\mu(B)} \int_B M \,\mathrm{d}\mu = M.$$

Sei nun $1 < p < \infty$. Wegen der σ-Endlichkeit des Maßraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gibt es eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{A}$ mit $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, so dass $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\mu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Da $|f| : \Omega \to [0, \infty]$ messbar ist gibt es eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher, messbarer Funktionen mit $f_k \geq 0$, $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} f_k = |f|$ punktweise. Aufgrund von Monotonie und Stetigkeit ist auch $(f_k^p)_{k\in N}$ eine Folge einfacher, messbarer Funktionen mit $f_k^p \geq 0$, $f_k^p \leq f_{k+1}^p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} f_k^p = |f|^p$. Mehrfache Anwendung des Satzes über Monotone Konvergenz ergibt, dass

$$\infty = \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{B_n} f_k^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Es gibt daher $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_N} f_k^p \, \mathrm{d}\mu \geq (M+1)^p + 1,$$

also ein $K \in \mathbb{N}$

$$\int_{B_N} f_K^p \, \mathrm{d}\mu \geq (M+1)^p.$$

Wir definieren

$$h := \chi_{B_N} f_K$$

und bemerken direkt, dass $|f| \geq h \geq 0$.
Da f_K^p als einfache Funktion beschränkt ist, und $\mu(B_N) < \infty$, ist

$$\int_\Omega |h|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{B_N} f_K^p \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Daher ist $h \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ mit

$$\|h\|_p = \left(\int_\Omega |h|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = \left(\int_{B_N} f_K^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \geq M + 1.$$

Da $h \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ ist

$$\|h\|_p = \sup \left\{ \int_\Omega hg \, \mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1 \right\}.$$

Es gibt also ein $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega hg \, \mathrm{d}\mu \geq \|h\|_p - 1 \geq M.$$

Für $g_M = \mathrm{sgn}(f)|g|$ ist $g_M \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ mit $\|g_M\|_{p'} = 1$, da $|g_M| = |g|$. Da $|f| \geq h \geq 0$ ist

$$\int_\Omega f g_M \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f||g| \, \mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega h|g| \, \mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega hg \, \mathrm{d}\mu \geq M.$$

Aufgabe 2. (Die Hölder-Ungleichung)

a)

Ist $r = \infty$, so ist auch $p = q = \infty$. Für $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ ist dann

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Das zeigt, dass $fg \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und die geforderte Ungleichung gilt.
Ist $r \in [1, \infty)$, so folgt aus $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, dass $|f|^r \in \mathcal{L}^{p/r}(\Omega)$ mit $\||f|^r\|_{p/r} = \|f\|_p^r$, und aus $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, dass $|g|^r \in \mathcal{L}^{q/r}(\Omega)$ mit $\||g|^r\|_{q/r} = \|f\|_q^r$. Da

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = r\,\frac{1}{r} = 1$$

ist nach der Hölder-Ungleichung

$$\int_\Omega |fg|^r \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|^r |g|^r \,\mathrm{d}\mu \leq \||f|^r\|_{p/r} \||g|^r\|_{q/r} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

Dass die rechte Seite der Gleichung endlich ist, zeigt, dass $fg \in \mathcal{L}^r(\Omega)$. Außerdem folgt, dass

$$\|fg\|_r = \left(\int_\Omega |fg|^r \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

b)

Wir zeigen die Aussage per Induktion über $k \geq 1$.

Induktionsanfang: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen, und für $k = 2$ handelt es sich um den vorherigen Aufgabenteil. □

Induktionsschritt: Es sei nun $k \geq 3$ und es gelte die Aussage für $k - 1$ und 2. Wegen $\sum_{i=1}^k 1/p_i = 1/r$ ist

$$\sum_{i=1}^{k-1} 1/p_i = 1/r - 1/p_k.$$

Ist $1/r - 1/p_k = 0$, so ist $r = p_k$ und $p_1 = \ldots = p_{k-1} = \infty$. Für $1 \leq r < \infty$ ist

$$\int_\Omega \left|\prod_{i=1}^k f_i\right|^r \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \prod_{i=1}^k |f_i|^r \,\mathrm{d}\mu \leq \prod_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_\infty^r \int_\Omega |f_k|^r \,\mathrm{d}\mu = \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}^r,$$

also $\prod_{i=1}^k f_i \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ mit $\| \prod_{i=1}^k f_i\| \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}$. Für $r = \infty$ ist

$$\left|\prod_{i=1}^k f_i\right| = \prod_{i=1}^k |f_i| \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_\infty \ \mu\text{-fast überall},$$

also $\prod_{i=1}^k f_i \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^r(\Omega)$ mit der entsprechenden Ungleichung.
Ist $1/r - 1/p_k > 0$, so ist $1/r - 1/p_k \leq 1/r$ und daher

$$s := \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p_k}} \geq r \geq 1.$$

Da $\sum_{i=1}^{k-1} 1/p_i = 1/s$ ist nach der Induktionsvoraussetzung $\prod_{i=1}^{k-1} f_i \in \mathcal{L}^s(\Omega)$ mit

$$\left\| \prod_{i=1}^{k-1} f_i \right\|_s \leq \prod_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_{p_i}.$$

Da $p_k, r, s \in [1,\infty]$ mit $1/p_k + 1/s = 1/r$ ist wegen $\mathcal{L}^{p_k}(\Omega)$ und $\prod_{i=1}^{k-1} f_i \in \mathcal{L}^s(\Omega)$ nach Induktionsvoraussetzung

$$\prod_{i=1}^{k} f_i = \left(\prod_{i=1}^{k-1} f_i \right) f_k \in \mathcal{L}^r(\Omega)$$

mit

$$\left\| \prod_{i=1}^{k} f_i \right\|_r \leq \left\| \prod_{i=1}^{k-1} f_i \right\|_s \|f_k\|_{p_k} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}.$$

□

Aufgabe 3. (Die Dichtheit von einfachen Funktionen in L^p)

Bemerkung 1. *Für $p \in [1,\infty)$ und $x, y \geq 0$ mit $x \leq y$ ist*

$$(x+y)^p \geq x^p + y^p$$

und

$$(y-x)^p \leq y^p - x^p.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit

$$\psi(t) = (x+t)^p - x^p - t^p \text{ für alle } t \in [0,\infty).$$

Es ist $\psi \in C^1([0,\infty))$ mit

$$\psi'(t) = p(x+t)^{p-1} - pt^{p-1} = p((x+t)^{p-1} - t^{p-1}).$$

Es ist $\psi(0) = 0$ und $\psi'(t) \geq 0$ für alle $t \in (0,\infty)$. Also ist $\psi(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,\infty)$. Insbesondere ist

$$(x+y)^p - x^p - y^p = \psi(y) \geq 0,$$

was die erste Gleichung zeigt. Da $y - x \geq 0$ ist

$$y^p = (y - x + x)^p \geq (y-x)^p + x^p,$$

was die zweite Gleichung zeigt. □

Wir betrachten die beiden Fälle $p \in [0,\infty)$ und $p = \infty$ getrennt. Zunächst betrachten wir den Fall $p \in [0,\infty)$.
Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $f \geq 0$. Wie wir wissen gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher, messbarer Funktionen mit $f_n \geq 0$ und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Aufgrund von Monotonie ist $0 \leq f^p$, sowie $0 \leq f_n^p$ und $f_n^p \leq f_{n+1}^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und aufgrund von Stetigkeit ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)^p = f(x)^p \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist daher

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Da $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $f \geq 0$ ist die rechte Seite der Gleichung endlich, wegen der Monotonie von $(f_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ also auch auch die linke für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f^p - f_n^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n^p \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Nach Bemerkung 1 ist daher

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f - f_n)^p \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} f^p - f_n^p \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f - f_n)^p \, \mathrm{d}\mu = 0$$

und damit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
Sei nun $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ beliebig. Es ist auch $|f| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, und es gibt eine Folge einfacher Funktionen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \||f| - f_n'\|_p = 0$. Wir definieren die Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f_n' \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt direkt daraus, dass $|f_n'| = |f_n|$. Auch ist

$$|f(x) - f_n(x)| \geq ||f(x)| - f_n'(x)| \text{ für alle } x \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist daher

$$\|f - f_n\|_p = \left(\int_\Omega |f - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega ||f| - f_n'|^p \right)^{1/p} = \||f| - f_n'\|_p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n\to\infty} \||f| - f_n'\|_p = 0$ folgt daher, dass $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
Sei nun $p = \infty$. Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $f \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ als

$$f_n(x) := \sup \left\{ \frac{k}{n} \leq f(x) : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dass $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und f_n einfach ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ direkt daraus, dass $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Es ist auch klar, dass

$$\sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Es ist daher $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/n$ für alle $n \geq 1$, also $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.
Sei nun $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ beliebig. Offenbar ist auch $|f| \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, und wir finden eine Folge einfacher Funktionen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \||f| - f_n'\|_\infty = 0$. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f_n'.$$

Dass $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt direkt daraus, dass $|f_n| = |f_n'|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$|f(x) - f_n(x)| \leq ||f(x)| - f_n'(x)| \text{ für alle } x \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist $\|f - f_n\|_\infty \leq \||f| - f'\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n\to\infty} \||f| - f_n'\|_\infty = 0$ folgt daher, dass $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

Aufgabe 4. (Schwache Konvergenz)

a)

Sei $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ beliebig aber fest. Da $f, f_k \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist nach der Hölder-Ungleichung $fg, f_k g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist daher

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$$

genau dann, wenn

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k g \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (f_k - f)g \,\mathrm{d}\mu.$$

Da auch $f_k - f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ folgt mithilfe der Hölder-Ungleichung, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_\Omega (f_k - f)g \right| \leq \int_\Omega |f_k - f||g| \,\mathrm{d}\mu \leq \||f_k - f|\|_p \||g|\|_{p'} = \|f_k - f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Da $f_k \longrightarrow f$ in $L^p(\Omega)$ ist $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|p = 0$, also auch

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (f_k - f)g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

b)

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes auf $\mathbb{R}$ folgt aus $f_k \rightharpoonup f$ und $f_k \rightharpoonup h$, dass für alle $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$

$$\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega hg \,\mathrm{d}\mu.$$

Da nach der Hölder-Ungleichung beide Seiten der Gleichung endlich sind, folgt, dass

$$\int_\Omega (f - h)g \,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ für alle } g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega).$$

Daher ergibt sich aus **Aufgabe 1** wegen der σ-Endlichkeit des Maßraumes, und da $f - h \in L^p(\Omega)$, dass

$$\|f - h\|_p = \sup \left\{ \int_\Omega (f - h)g \,\mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega) \text{ mit } \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} = 0.$$

Also ist $f = h$ in $L^p(\Omega)$, da $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf L^p ist.

c)

Bemerkung 2. *Sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ sei $(a_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $\mathbb{R}$. Dann ist*

$$\sup_{i\in I} \liminf_{n\to\infty} a_n^i \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{i\in I} a_n^i.$$

Beweis. Für alle $j \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n^j \leq \sup_{i\in I} a_n^i.$$

Also ist für alle $j \in I$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^j \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{i\in I} a_n^i$$

und deshalb auch

$$\sup_{j\in I} \liminf_{n\to\infty} a_n^j \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{i\in I} a_n^i.$$

□

Zusammenfügen von **Aufgabe 1** und Bemerkung 2 ergibt, dass

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \sup\left\{\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega f_k g\,\mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \sup\left\{\int_\Omega f_k g\,\mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} = \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p.
\end{aligned}$$