Analysis III
7. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

5. Dezember 2013

Aufgabe 1. (Eine Integralformel)

a)

Für $a, b \in [0, \infty)$ mit $a \leq b$ ist

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} \supseteq \{x \in X : f(x) \geq b\},$$

also wegen der Monotonie des Maßes μ

$$g(a) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \geq \mu(\{x \in X : f(x) \geq b\}) = g(b).$$

g ist also monoton fallend und somit bekanntermaßen Borel-messbar.

b)

Wir zeigen die Aussage zunächst für einfache Funktionen: Sei f eine einfache Funktion mit Werten $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, die auf Mengen $A_1, \ldots, A_n$ angenommen werden; wir setzen $\alpha_0 := 0$.
Es ist $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \infty$ genau dann, wenn es ein $1 \leq i \leq n$ mit $\alpha_i \neq 0$ und $\mu(A_i) = \infty$ gibt. Es ist daher $g(t) = \mu\{x \in X : f(x) \geq t\} = \infty$ für alle $t \in [0, \alpha_i]$, und somit auch $\int_{[0,\infty)} g = \infty$.
Ansonsten nimmt g für $i = 1, \ldots, n$ auf dem Intervall $(\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ den konstanten Wert $\sum_{j=i}^n \mu(A_j) < \infty$, und auf (α_n, ∞) den Wert 0 an. Es ist dann

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} g \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{(0,\infty)} g \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda((\alpha_{i-1}, \alpha_i) \sum_{j=i}^n \mu(A_j) \\
&= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{j=i}^n \mu(A_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \mu(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \mu(A_j) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_0) \mu(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Eine Vereinfachung auf allgemeine Funktionen ist mir leider nicht gelungen, hier jedoch mein Ansatz: Da $f \geq 0$ messbar ist, gibt es eine Folge einfacher Funktionen

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \leq f_{n+1}$ für alle n und $f_n \to f$ punktweise auf ganz X. Für jedes n definiere man die fallende Umordnung von f_n,

$$g_n : [0,\infty) \to [0,\infty], t \mapsto \mu(\{x \in X : f_n(x) \geq t\}).$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Wie gerade gezeigt ist für alle n

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} g_n \, \mathrm{d}\lambda.$$

Also ist

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} g_n \, \mathrm{d}\lambda.$$

Es ist nun leider nicht klar, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} g_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty)} g \, \mathrm{d}\lambda.$$

Aus der Monotonie der f_n folgt zwar leicht dass auch die g_n monoton sind, dass also $g_n \leq g_{n+1}$ für alle n, und dass $g_n \leq g$ für alle n, wie man sich jedoch an einfachen Beispielen (etwa für konstantes f) klarmachen kann, konvergiert g_n nicht auf ganz $[0,\infty)$ gegen g, so dass eine Anwendung der Konvergenzsätze nicht ohne Weiteres möglich ist. Das Lebesgue-Maß der Stellen zu ermitteln, an denen $g_n \not\to g$ stellte sich dabei als problematischer heraus als ich vermutet hatte. Daher kann ich derzeit höchstens schlussfolgern, dass

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} g_n \, \mathrm{d}\lambda \leq \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} g \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty)} g \, \mathrm{d}\lambda.$$

Nur in dem Sonderfall, dass $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \infty$ ergibt sich auch daraus schon die zu zeigende Gleichheit.

Aufgabe 2. (Funktionen mit verschwindendem Integral auf Anfangsstücken)

Wir zeigen, dass $\int_U f \, \mathrm{d}\lambda = 0$ für alle offenen Mengen $U \subseteq (a,b)$. Zunächst bemerken wir, dass für alle $x \in (a,b)$

$$0 = \int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{(a,x)} f \, \mathrm{d}\lambda + \int_{(x,b)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{(x,b)} f \, \mathrm{d}\lambda,$$

also für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$

$$0 = \int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{(a,x)} f \, \mathrm{d}\lambda + \int_{(x,y)} f \, \mathrm{d}\lambda + \int_{(y,b)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{(x,y)} f \, \mathrm{d}\lambda.$$

Sei nun $U \subseteq (a,b)$ offen. Wie bereits letzte Woche gezeigt können wir U schreiben als $U = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} U_n$, wobei $U_n = \emptyset$ oder U_n ein offenes Intervall ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $g_n = \sum_{k=1}^n f\chi_{U_k}$ und $g = f\chi_U$ ist $g_n \to g$ punktweise auf ganz (a,b). Da f integrierbar ist, ist es auch $|f|$, und wegen $|g_n| \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\begin{aligned}\int_U f \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{(a,b)} f\chi_U \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(a,b)} \sum_{k=0}^{n} f\chi_{U_k} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(a,b)} f\chi_{U_k} \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{U_k} f \,\mathrm{d}\lambda = 0.\end{aligned}$$

Es sei nun $E_+ := \{x \in (a,b) : f(x) > 0\}$ mit $\lambda(E_+) \leq b - a < \infty$. Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes und da $\lambda(E_+) < \infty$ finden wir eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen mit $E_+ \subseteq U_n$ und $\lambda(U_n \setminus E_+) \leq \frac{1}{n}$ für alle n. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge auf (a,b) ist, da wir sonst die Folge $((a,b) \cap \bigcap_{k=1}^n U_k)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Es sei $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
Es ist $\int_U f \,\mathrm{d}\lambda = 0$: Es ist $f\chi_{U_n} \to f\chi_U$ punktweise auf ganz (a,b) und $|f\chi_{U_n}| \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, nach dem Satz über dominierte Konvergenz also

$$\int_U f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{(a,b)} f\chi_U \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(a,b)} f\chi_{U_n} \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} f \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Es ist $E_+ \subseteq U$ und, da $\lambda(U_0) \leq \lambda((a,b)) = b - a < \infty$ und die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist,

$$\begin{aligned}\lambda(U \setminus E_+) &= \lambda\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \setminus E_+\right) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus E_+)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda(U_n \setminus E_+) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.\end{aligned}$$

Es ist also $\int_{E_+} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_U f \,\mathrm{d}\lambda = 0$. Da $f_{|E_+} > 0$ ist daher, wie aus der Vorlesung bekannt, $f(x) = 0$ für λ-fast alle $x \in E_+$. Nach der Definition von E_+ muss daher $\lambda(E_+) = 0$. Analog ergibt sich für $E_- := \{x \in (a,b) : f(x) < 0\}$, dass auch $\lambda(E_-) = 0$. Also ist

$$\lambda(\{x \in (a,b) : f(x) \neq 0\}) = \lambda(E_- \mathbin{\dot\cup} E_+) = \lambda(E_-) + \lambda(E_+) = 0.$$

Aufgabe 3. (Ein Konvergenzresultat)

Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $f_n \to f$ auf ganz X, da die Menge $\{x \in X : f_n \not\to f\}$ eine μ-Nullmenge ist, also für das Integral $\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu$ nicht von Bedeutung ist.
Wegen $f_n \geq 0$ für alle n folgt aus $f_n \to f$ punktweise auf ganz X, dass $f \geq 0$. Da f und f_n für alle n integrierbar sind, ist es auch $f - f_n$ und daher auch $|f - f_n|$ für alle n. Nach der Dreiecksungleichung ist dabei $|f_n - f| \leq f + f_n$ für alle n, also $0 \leq f_n + f - |f_n - f|$ für alle n. Daher ist nach dem Lemma von Fatou

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (f_n + f - |f_n - f|) \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n + f - |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Dabei ist

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (f_n + f - |f_n - f|) \,\mathrm{d}\mu = \int_X 2f \,\mathrm{d}\mu = 2\int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

da $f_n \to f$ punktweise auf ganz X, und

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n + f - |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} - \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \\
&= 2 \int_X f \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

da $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$0 \leq - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu,$$

also

$$0 \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \geq 0,$$

und daher $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Aufgabe 4. (Gegenbeispiele)

a)

Es sei $f = 0$ und $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$ für alle $n \geq 1$. Dann ist $f_n \to f$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$, aber für alle $n \geq 1$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 2 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Inbesondere konvergiert $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda$ für $n \to \infty$ nicht gegen $\int_{\mathbb{R}} f \lambda$.

b)

Diese Aussage ist totaler Blödsinn: Aus ihr folgt insbesondere, dass zwei integrierbare Funktionen genau dann das gleich Lebesgue-Integral haben, wenn sie fast überall gleich sind. Ein einfaches und offensichtliches Gegenbeispiel ist $f_n = \chi_{[-1,0]}$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ und $f = \chi_{[0,1]}$.

c)

Man betrachte $f = 0$ und die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als

$$f_{2^n - 1 + k} := \chi_{[k/2^n, (k+1)/2^n]}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, d.h. $f_0 = \chi_{[0,1]}$, $f_1 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_2 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_{3+k} = \chi_{[k/4,(k+1)/4]}$ für $k = 0, \ldots, 3$, usw.
Es ist offenbar

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda,$$

aber $f_n \not\to f$ auf ganz $[0,1]$.