

# ANALYSIS III

## 3. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

7. November 2013

Betrachtet man zwei Mengen  $A$  und  $A'$  mit  $A = B_1 \cup B_2$  und  $A' = B'_1 \cup B'_2$  für  $B_1, B_2 \subseteq A$  und  $B'_1, B'_2 \subseteq A'$ , so ist es einfach so sehen, dass

$$A \times A' = (B_1 \times B'_1) \cup (B_1 \times B'_2) \cup (B_2 \times B'_1) \cup (B_2 \times B'_2).$$

Diese Beobachtung wird von dem folgenden Lemma verallgemeinert:

**Lemma 1:** Sei  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen über einer Indexmenge  $I$  und

$$A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j^i$$

für eine Familie von Mengen  $(B_j^i)_{j \in J_i}$  über einer Indexmenge  $J_i$  für alle  $i \in I$ . Dann gilt

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_j^i = \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

*Beweis des Lemmas:* Sei  $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ . Für alle  $i \in I$  gibt es wegen  $a_i \in A_i$  ein  $j'_i \in J_i$  mit  $a_i \in B_{j'_i}^i$ . Daher ist

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{j'_i}^i \subseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i,$$

und daher

$$\prod_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Ist

$$(a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i,$$

so gibt es  $(j_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} J_i$  mit  $a_i \in B_{j_i}^i \subseteq A_i$  für alle  $i \in I$ , also  $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ . Daher ist

$$\prod_{i \in I} A_i \supseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Die Disjunktheit der Vereinigung ergibt sich aus der paarweisen Disjunktheit der  $B_j^i$ ,  $j \in J_i$ , für alle  $i \in I$ : Sind  $(j_i)_{i \in I}, (j'_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} J_i$  so dass

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{j_i}^i \cap \prod_{i \in I} B_{j'_i}^i$$

existiert, so muss  $a_i \in B_{j_i}^i$  und  $a_i \in B_{j'_i}^i$  für alle  $i \in I$ . Also muss  $B_{j_i}^i \cap B_{j'_i}^i \neq \emptyset$ , und damit  $j_i = j'_i$  für alle  $i \in I$ .  $\square$

## Aufgabe 1. (Volumen auf Quadern)

a)

Seien  $q, Q \in \mathcal{Q}$  mit  $q \subseteq Q$  beliebig aber fest. Es ist  $Q = \prod_{i=1}^n [A_i, B_i)$  mit  $A_i \leq B_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , und  $q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$  mit  $A_i \leq a_i \leq b_i \leq B_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dass  $[a_i, b_i) \subseteq [A_i, B_i)$  folgt für  $i = 1, \dots, n$  daher, dass sich aus  $q \subseteq Q$  für die Projektion

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

ergibt, dass

$$[a_i, b_i) = \pi_i(q) \subseteq \pi_i(Q) = [A_i, B_i).$$

Mit Lemma 1 ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} Q &= \prod_{i=1}^n [A_i, B_i) = \prod_{i=1}^n \left( \underbrace{[A_i, a_i)}_{:=C_1^i} \cup \underbrace{[a_i, b_i)}_{:=C_2^i} \cup \underbrace{[b_i, B_i)}_{:=C_3^i} \right) \\ &= \bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1, 2, 3\}^n} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \end{aligned}$$

die disjunkte Vereinigung von  $3^n$  Quadern  $q_1, \dots, q_{3^n} \in \mathcal{Q}$  ist, wobei  $q = \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i$  einer von diesen ist. Aufgrund der endlichen Additivität von  $\mu$  ist daher

$$\mu(Q) = \mu \left( \bigcup_{i=1}^{3^n} q_i \right) = \sum_{i=1}^{3^n} \mu(q_i) \geq \mu(q),$$

was die Monotonie von  $\mu$  zeigt.

b)

Wegen der Translationsinvarianz von  $\mu$  kann für alle  $Q \in \mathcal{Q}$  o.b.d.A. davon ausgegangen werden, dass  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i)$  mit  $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Auch folgt aus der Invarianz von  $\mu$  bezüglich Transposition, der endlichen Additivität von  $\mu$  und Lemma 1, dass für alle  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i) \in \mathcal{Q}$  und  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m_i a_i) \right) = m_1 \cdots m_n \mu(Q), \quad (1)$$

da

$$\begin{aligned} \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m_i a_i) \right) &= \mu \left( \prod_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} \underbrace{[(j-1)a_i, ja_i)}_{:=C_j^i} \right) \\ &= \mu \left( \bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left( \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) \\ &= \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left( \prod_{i=1}^n [(c_i - 1)a_i, c_i a_i) \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu(Q) \\ &= m_1 \cdots m_n \mu(Q). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daher aus der Normierung, dass

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m_i) \right) = \prod_{i=1}^n m_i \text{ für alle } m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Sei nun  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i) \in \mathcal{Q}$  beliebig aber fest. Mithilfe von (1) und (2) lässt sich nun das Volumen skaliert Versionen von  $Q$  durch Quader mit natürlichen Längen geschickt abschätzen: Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) = m^n \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, a_i) \right) = m^n \mu(Q),$$

sowie wegen der Monotonie von  $\mu$  auch

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor &= \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, \lfloor ma_i \rfloor) \right) \leq \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) \text{ und} \\ \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) &\leq \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, \lceil ma_i \rceil) \right) = \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil, \end{aligned}$$

also für  $m \geq 1$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor \leq \mu(Q) \leq \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil = \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m}. \quad (3)$$

Nun ist  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , da

$$x - \frac{1}{m} = \frac{mx - 1}{m} \leq \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq \frac{mx}{m} = x$$

für alle  $m \geq 1$  und daher

$$x \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq x,$$

Analog ergibt sich, dass auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil mx \rceil}{m} = x$ . Aus (3) ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_i &= \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} \leq \mu(Q) \text{ und} \\ \mu(Q) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} \leq \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} = \prod_{i=1}^n a_i, \end{aligned}$$

also  $\mu(Q) = \prod_{i=1}^n a_i$ .

## Aufgabe 2. (Nullmengen)

a)

Aus der Aufgabenstellung geht meiner Meinung nach nicht klar hervor, ob  $A$  als

$$\tilde{A}_1 := \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \text{ oder als}$$

$$\tilde{A}_2 := \{x \in X : x \in M \text{ für unendlich viele } M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}\}$$

definiert wird. Für den Beweis diesen Aufgabenteiles genügt es allerdings davon auszugehen, dass  $A = \tilde{A}_1$ , da  $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_1$ : Ist  $x \in \tilde{A}_2$ , so gibt es unendlich viele  $M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x \in M$ ; insbesondere gibt es daher unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \in A_n$ . Man bemerke jedoch, dass im Allgemeinen  $\tilde{A}_1 \subsetneq \tilde{A}_2$ : Ist etwa  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konstant mit  $A_1 \neq \emptyset$ , so ist  $\tilde{A}_1 = A_1 \neq \emptyset$ , aber  $\tilde{A}_2 = \emptyset$ . Zunächst gilt es zu zeigen, dass  $A$  messbar ist, d.h. dass  $A \in \mathcal{A}$ . Dies ist der Fall, da

$$\begin{aligned} A = \tilde{A} &= \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x \in X : \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es } m \geq n \text{ mit } x \in A_m\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $\mu(A_k) \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist die Folge der Partialsummen  $(\sum_{k=1}^n \mu(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$  monoton steigend. Da sie nach Annahme nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Es gibt daher ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$ . Da  $\mu$  ein Maß ist, folgt daraus, dass

$$\mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Da  $A = \tilde{A}_1$  gibt es für alle  $x \in A$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  und  $x \in A_n$ . Insbesondere ist daher  $A \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ . Aufgrund der Monotonie von  $\mu$  folgt, dass

$$0 = \mu(\emptyset) \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt damit, dass  $\mu(A) = 0$ .

**b)**

Es sei  $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  und  $\mu$  das Zählmaß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , sowie  $A_k := \{1, \dots, k\}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es ist dann  $\{1\} \subseteq A$ , unabhängig davon ob  $A = \tilde{A}_1$  oder  $A = \tilde{A}_2$ . Wegen der Monotonie des Maßes ist daher

$$\mu(A) \geq \mu(\{1\}) = 1 \neq 0.$$

### Aufgabe 3. (Vom äußeren Maß zum Maß)

**a)**

Es ist  $\mu^*(\emptyset) = 0$ , da für die Folge  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definiert als  $A_k := \emptyset \in \mathcal{A}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  offenbar  $\emptyset = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ , und daher

$$\mu^*(\emptyset) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 0 = 0.$$

Dass  $\mu^*(0) \geq 0$  folgt direkt daraus, dass  $\mu$  nur nicht-negative Werte annimmt, und die Menge

$$\left\{ (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \emptyset \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

nichtleer ist, da  $\mathcal{A}$  als Algebra nicht leer ist.

Seien  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  mit  $A \subseteq B$ . Die Monotonie von  $\mu^*$ , dass also  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ , ergibt sich daraus, dass für alle  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $B_k \in \mathcal{A}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$  auch  $A \subseteq B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ . Also ist

$$\begin{aligned} S_B &:= \left\{ (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right\} \\ &\subseteq \left\{ (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\} =: S_A, \end{aligned}$$

und daher

$$\mu^*(A) = \inf_{(A_k) \in S_A} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \leq \inf_{(B_k) \in S_B} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu^*(B).$$

Die abzählbare Subadditivität von  $\mu^*$  ergibt sich wie folgt: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest und  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $\mathcal{P}(X)$ . Es gibt nach der Definition von  $\mu^*$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine Folge  $(B_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{A}$  mit  $A_k \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^k$  und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n^k) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Da daher

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{k, n \in \mathbb{N}} B_n^k$$

ist nach der Definition von  $\mu^*$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) &\leq \mu^*\left(\bigcup_{k, n \in \mathbb{N}} B_n^k\right) \leq \sum_{k, n \in \mathbb{N}} \mu(B_n^k) \\ &\leq \sum_{k, n \in \mathbb{N}} \left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k)\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt damit, dass

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$

**b)**

Es gilt zu zeigen, dass für alle  $A \subseteq X$  und  $B \in \mathcal{A}$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest,  $A \subseteq X$  und  $B \in \mathcal{A}$ . Nach der Definition von  $\mu^*$  gibt es eine Folge  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{A}$  mit  $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  und

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k). \quad (4)$$

Da  $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  ist

$$A \cap B \subseteq \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \cap B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B),$$

wobei  $A_k \cap B \in \mathcal{A}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , sowie analog auch  $A \cap B^c \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B^c)$  mit  $A_k \cap B^c \in \mathcal{A}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Aufgrund der endlichen Additivität von  $\mu$  und der Definition sowie Monotonie von  $\mu^*$  ist daher

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu((A_k \cap B) \cup (A_k \cap B^c)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu(A_k \cap B) + \mu(A_k \cap B^c)) \\ &= \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k \cap B) \right) + \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k \cap B^c) \right) \\ &\geq \mu^* \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B) \right) + \mu^* \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B^c) \right) \\ &\geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c). \end{aligned}$$

Zusammen mit (4) ergibt sich damit, dass

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt damit, dass

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

c)

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest und  $A \in \mathcal{A}$ . Sei  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $\mathcal{A}$  mit  $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  und

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $B_k := A \cap A_k \in \mathcal{A}$ . Es ist

$$A = A \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap A_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k,$$

wegen der  $\sigma$ -Additivität und Monotonie von  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$  also

$$\mu(A) = \mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ .

Dass andererseits  $\mu(A) \geq \mu^*(A)$  folgt direkt aus der Definition von  $\mu^*$  unter Betrachtung der Folge  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $A_0 := A$  und  $A_k := \emptyset$  für alle  $k \geq 1$ , für die  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  und  $\mu(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$ .

d)

Es bezeichne  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ , wie in der Vorlesung, die Menge aller  $\mu^*$ -messbaren Mengen. Nach Aufgabenteil b) ist  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ , und wie aus der Vorlesung bekannt ist  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ein  $\sigma$ -Algebra. Folglich ist  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Wie aus der Vorlesung bekannt ist die Einschränkung von  $\mu^*$  auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  ein Maß auf  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ , also die Einschränkung von  $\mu^*$  auf  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$  ein Maß auf  $\sigma(\mathcal{A})$ . Dass dieses auf  $\mathcal{A}$  mit  $\mu$  übereinstimmt wird in Aufgabenteil c) gezeigt.

#### Aufgabe 4. (Verschiedene äußere Maße)

a)

$\mu_1^*$  ist ein äußeres Maß auf  $\mathbb{N}$ :

Nach Definition ist  $\mu_1^*(\emptyset) = 0$ .

Für  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$  mit  $\mu_1^*(A) > \mu_1^*(B)$  muss  $\mu_1^*(A) = 1$ , also  $A$  nichtleer, und  $\mu_1^*(B) = 0$ , also  $B$  leer, sein; dies kann aber offenbar nicht sein. Also ist  $\mu_1^*$  monoton.

Ist  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein Folge auf  $\mathbb{N}$ , so gilt es zum Beweis der abzählbaren Subadditivität zwischen zwei Fällen zu unterscheiden: Ist  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1^*(A_k) = 0$ , so müssen alle  $A_k$  leer sein, also auch  $\mu_1^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \mu_1^*(\emptyset) = 0$ . Ist hingegen  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1^*(A_k) \geq 1$ , so gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\mu_1^*(A_{k_0}) = 1$ , also  $A_{k_0}$  nichtleer. Daher ist auch  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  nichtleer und somit

$$\mu_1^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 1 = \mu_1^*(A_{k_0}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1^*(A_k).$$

Es ist  $\mathcal{M}_{\mu_1^*} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ : Wie aus der Vorlesung bekannt sind  $\emptyset$  und  $\mathbb{N}$ , d.h. der ganze Raum und sein Komplement, stets messbar. Für alle  $B \subseteq \mathbb{N}$  mit  $B \notin \{\emptyset, \mathbb{N}\}$  sind jedoch  $B$  und  $B^c$  nichtleer, und somit

$$\mu_1^*(\mathbb{N}) = 1 \neq 2 = \mu_1^*(B) + \mu_1^*(B^c) = \mu^*(\mathbb{N} \cap B) + \mu_1^*(\mathbb{N} \cap B^c).$$

b)

Wie aus der Vorlesung bekannt, ist  $\mu_2^*$  ein Maß auf  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ . Insbesondere ist  $\mu_2^*$  damit ein äußeres Maß auf  $\mathbb{N}$ , und alle  $B \subseteq \mathbb{N}$  sind wegen der endlichen Additivität von  $\mu_2^*$  messbar.

c)

$\mu_3^*$  ist kein äußeres Maß: Es ist zwar  $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$ , aber  $\mu_3^*(\mathbb{N}) = 1$  und  $\mu_3^*(\{n\}) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und daher

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right) = \mu_3^*(\mathbb{N}) = 1 > 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_3^*(\{n\}).$$

Also ist  $\mu_3^*$  nicht abzählbar subadditiv.

d)

$\mu_4^*$  ist kein äußeres Maß auf  $\mathbb{R}$ , denn es ist  $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$ , aber

$$\mu_4^*(\mathbb{R}) = 1 > 0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_4^*([k, k+1)),$$

also  $\mu_4^*$  nicht abzählbar subadditiv.

e)

$\mu_5^*$  ist ein äußeres Maß auf  $\mathbb{R}$ :

Nach Definition von  $\mu_5^*$  ist  $\mu_5^*(\emptyset) = 0$ .

Für  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$  mit  $\mu_5^*(A) > \mu_5^*(B)$ , so muss entweder  $A$  nichtleer und  $B$  leer, oder  $A$  unbeschränkt und  $B$  beschränkt sein. Beides ist ein offenkundiger Widerspruch. Also ist  $\mu_5^*$  monoton.

Sei  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Zum Beweis der Subadditivität wird zwischen drei Fällen unterschieden: Ist  $\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 0$ , so ist  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  leer, also  $A_k \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  leer für alle  $k \in \mathbb{N}$ . In diesem Fall ist also

$$\mu_5^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} 0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_5^*(A_k).$$

Ist  $\mu_5^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 1$ , so ist  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  nichtleer, es gibt also ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $A_{k_0}$  nichtleer. Also in diesem Fall

$$\mu_5^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 1 \leq \mu_5^*(A_{k_0}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_5^*(A_k).$$

Ist  $\mu_5^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \infty$ , so ist  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  unbeschränkt. Es gibt in diesem Fall zwei mögliche Unterfälle: Gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $A_{k_0}$  unbeschränkt, so ist

$$\mu_5^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \infty = \mu_5^*(A_{k_0}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_5^*(A_k).$$

Ansonsten muss es eine Teilfolge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geben, so dass  $A_{k_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  nichtleer und beschränkt ist. Auch in diesem Unterfall ist

$$\mu_5^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \infty = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_5^*(A_{k_n}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_5^*(A_k).$$

Dies zeigt die abzählbare Subadditivität von  $\mu_5^*$ .

Es ist  $\mathcal{M}_{\mu_5^*} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ , denn für alle  $B \subseteq \mathbb{R}$  mit  $B \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  sind  $B$  und  $B^c$  nichtleer, und daher für  $a \in B$  und  $a' \in B^c$

$$\begin{aligned} \mu_5^*({a, a'}) &= 1 \neq 2 = \mu_5^*({a}) + \mu_5^*({a'}) \\ &= \mu_5^*({a, a'} \cap B) + \mu_5^*({a, a'} \cap B^c). \end{aligned}$$