

# ANALYSIS III

## 4. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

13. November 2013

### Aufgabe 1. (Lebesgue-Stieltjes-Maße)

a)

Da  $\mu$  endlich und monoton ist, ist  $\mu$  auch beschränkt, denn für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ist

$$\mu(A) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

Aus der Beschränktheit von  $\mu$  folgt die Beschränktheit von  $F_\mu$ , da damit für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) < \infty.$$

Die Monotonie von  $F_\mu$  ergibt sich daraus, dass für  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq y$  offenbar  $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$  und wegen der Monotonie von  $\mu$  daher

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F_\mu(y).$$

Zum Nachweis der Rechtsstetigkeit sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge auf  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ . Es gilt zu zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) = F_\mu(x)$ . Aus der Monotonie von  $F_\mu$  folgt direkt, dass  $F_\mu(x) \leq F_\mu(x_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also auch

$$F_\mu(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n). \quad (1)$$

Zum Beweis der anderen Ungleichung sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Wir bemerken, dass die Folge  $((x, x + \frac{1}{n}])_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  fallend ist, und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu(\emptyset) = 0,$$

da  $\mu$  ein beschränktes Maß ist. Es gibt also ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x \leq x_n \leq x + \frac{1}{N}$  für alle  $n \geq n_0$ . Aufgrund der Monotonie und endlichen Additivität von  $\mu$  ergibt sich daher, dass für alle  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} F_\mu(x_n) &= \mu((-\infty, x_n]) = \mu((-\infty, x] \cup (x, x_n]) = \mu((-\infty, x]) + \mu((x, x_n]) \\ &= F_\mu(x) + \mu((x, x_n]) \leq F_\mu(x) + \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{N}\right]\right) \leq F_\mu(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) \leq F_\mu(x) + \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt damit, dass auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) \leq F_\mu(x).$$

Zusammen mit (1) ergibt zeigt dies die Rechtsstetigkeit von  $F_\mu$ .

Dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x) = 0$  ergibt sich ähnlich: Die Folge  $((-\infty, -n])_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  ist fallend, also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, -n]) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Es gibt daher für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $F_\mu(-n) < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ ; dabei folgt aus der Monotonie von  $F_\mu$ , dass  $F_\mu(x) < \varepsilon$  für alle  $x \geq N$ . Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt damit, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x) = 0$ .

## Aufgabe 2. (Mengen)

Es sei  $0 < \alpha < 1$  beliebig aber fest und es sei  $0 < \beta < 1$  definiert als  $\beta := 1 - \alpha$ .

a)

Die Folge  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei wie folgt definiert: Man beginne mit  $M_0 := [0, 1]$ .  $M_1$  konstruiert man aus  $M_0$  indem man in der Mitte von  $M_0$  das offene Intervall  $\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}\right)$  mit Länge  $\frac{\beta}{2}$  entfernt, d.h.

$$M_1 = [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}\right) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}, 1\right].$$

$M_2$  konstruiert man aus  $M_1$  indem man aus jedem der beiden Intervalle in  $M_1$  das jeweils offene mittige Intervall der Länge  $\frac{\beta/4}{2} = \frac{\beta}{8}$  entfernt.  $M_3$  ergibt sich aus  $M_2$ , indem man aus jedem der vier Intervalle in  $M_2$  das jeweils mittige offene Intervall der Länge  $\frac{\beta/8}{4} = \frac{\beta}{32}$  entfernt. Nach dem gleichen Prinzip konstruiert man rekursiv alle weiteren  $M_n$ .

Offenbar ist  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine fallende Folge, wobei für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $M_n$  aus  $2^n$  disjunkten, abgeschlossenen, gleichlangen Intervallen besteht; insbesondere ist  $M_n$  als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Die Intervalle haben zusammen eine Gesamtlänge von  $1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k}$  also jedes einzelne eine Länge von  $\frac{1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k}}{2^n}$ .

Sei  $M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ . Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist  $M$  auch abgeschlossen. Da  $M_n \subseteq [0, 1]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist auch  $M \subseteq [0, 1]$ .  $M$  enthält keine nichtleere offene Menge: Für alle  $x \in M$  ist  $x \in M_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also für alle  $n \in \mathbb{N}$  in einem Intervall der Länge  $\frac{1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k}}{2^n}$ . Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k}}{2^n} = 0$$

kann es daher keine  $\varepsilon$ -Ball um  $x$  in  $M$  geben. Es ist  $\lambda(M) = 0$ : Da  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine fallende Folge mit  $\lambda(M_n) \leq \lambda([0, 1]) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist, und  $\lambda$  ein Maß, ist

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k} = 1 - \beta = \alpha.$$

**b)**

Wie in Aufgabenteil **a)** gezeigt enthält  $[0, 1]$  eine abgeschlossene Teilmenge  $A$ , die keine nichtleeren offenen Mengen enthält, und für die  $\lambda(A) = \beta$ . Es sei

$$B := (0, 1) \setminus A = (0, 1) \cap A^c.$$

Da  $A$  abgeschlossen ist, ist  $B$  offen. Wegen der endlichen Additivität von  $\mu$  ist daher

$$\mu(B) = \mu((0, 1)) - \mu(A) = 1 - \beta = \alpha.$$

$B$  liegt dicht in  $[0, 1]$ : Gebe es  $x, y \in [0, 1]$  mit  $x < y$  und  $z \notin B$  für alle  $x \leq z \leq y$ , so ist  $(x, y) \subseteq A$  ein nichtleeres offenes Intervall, im Widerspruch zur Annahme, dass  $A$  kein solches enthält.

### Aufgabe 3. (Lebesgue-messbare Mengen)

$(i) \Rightarrow (ii)$

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar. Wie aus der Vorlesung bekannt ist

$$A = \sup\{\lambda_n^*(K) : K \subseteq A, K \text{ ist kompakt}\}.$$

Für alle  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$  gibt es daher eine abgeschlossene Teilmenge  $K_k \subseteq A$  mit

$$\lambda_n^*(K_k) + \frac{1}{k} \geq \lambda_n^*(A). \quad (2)$$

Es sei  $K := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k$ . Da alle  $K_k$  kompakt und damit auch abgeschlossen sind, ist nach Definition  $K \in F_\sigma$ , sowie wegen der  $\sigma$ -Additiv von  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  auch  $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Es ist  $\mu(K) = \mu(A)$ : Da  $K \subseteq A$  ist  $\mu(K) \leq \mu(A)$  wegen der Monotonie von  $\mu$ . Wegen der Monotonie von  $\mu$  folgt aus (2) auch, dass für alle  $k \geq 1$

$$\mu(K) \geq \mu(K_k) \geq \lambda_n^*(A) - \frac{1}{k}.$$

Für  $k \rightarrow \infty$  ergibt sich damit, dass  $\mu(K) \geq \mu(A)$ .

Sei  $N := A \setminus K$ . Aus der endlichen Additivität von  $\mu$  ergibt sich aus  $\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(K)$ , dass

$$\lambda_n^*(N) = \lambda_n^*(A) - \lambda_n^*(K) = 0.$$

Es ist also  $K \in F_\sigma, N \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\lambda_n^*(N) = 0$  und  $A = K \cup N$ .

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Es ist  $A_1 \in F_\sigma$  sowie

$$\begin{aligned} \lambda_n^*((A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A)) &\leq \lambda_n^*(A \setminus A_1) + \lambda_n^*(A_1 \setminus A) \\ &\leq \lambda^*(A_2) + \lambda_n^*(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

Da  $B \in F_\sigma$  ist  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  für abgeschlossene Mengen  $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es ist also auch  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , also  $B$  messbar. Da

$$\lambda_n^*(\underbrace{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}_{=:C}) = 0$$

ist auch  $C$  messbar. Da  $\mathcal{M}_{\lambda_n^*}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist damit auch

$$A = (B \cup C) \setminus (B \cap C) = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in \mathcal{M}_{\lambda_n^*},$$

also  $A$  messbar.

## Aufgabe 4. (Projektion des Lebesguemaßes)

a)

Es gilt die Axiome eines äußeren Maßes zu überprüfen: Es ist

$$\mu^*(\emptyset) = \lambda_1^*(\pi(\emptyset)) = \lambda_1^*(\emptyset) = 0.$$

Für  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$  ist  $\pi(A) \subseteq \pi(B)$ , also wegen der Monotonie von  $\lambda_1^*$

$$\mu^*(A) = \lambda_1^*(\pi(A)) \leq \lambda_1^*(\pi(B)) = \mu^*(B),$$

was die Monotonie von  $\mu^*$  zeigt.  $\mu^*$  ist subadditiv, denn  $\lambda_1^*$  ist als äußeres Maß auf  $\mathbb{R}$  subadditiv, weshalb für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \lambda_1^*\left(\pi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = \lambda_1^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi(A_n)\right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_1^*(\pi(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n). \end{aligned}$$

b)

Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $B$  ist  $\mu^*$ -messbar.
- (ii)  $\pi(B)$  ist  $\lambda_1^*$ -messbar.
- (iii) Es gibt  $\lambda_1^*$ -messbare Mengen  $B_0, B_1 \subseteq \mathbb{R}$  mit  $B_0 \subseteq B_1$ ,  $\lambda_1^*(B_1 \setminus B_0) = 0$  und  $B_0 \times \mathbb{R} \subseteq B \subseteq B_1 \times \mathbb{R}$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  beliebig aber fest. Es gilt zu zeigen, dass

$$\lambda_1^*(A) = \lambda_1^*(A \cap \pi(B)) + \lambda_1^*(A \cap \pi(B)^c).$$

Aufgrund der Subadditivität von  $\lambda_1^*$  genügt es hierfür zu zeigen, dass

$$\lambda_1^*(A) \geq \lambda_1^*(A \cap \pi(B)) + \lambda_1^*(A \cap \pi(B)^c).$$

Wer bemerken zunächst, dass  $\mu(B)^c \subseteq \mu(B^c)$ : Für  $y \in \mu(B)^c$  ist  $y \notin \mu(B)$ . Aus der Surjektivität von  $\pi$  folgt, dass es  $x \in \mathbb{R}^2$  mit  $\pi(x) = y$  gibt. Da  $y \notin \pi(B)$  ist  $x \notin B$ . Also ist  $x \in B^c$  und daher  $y \in \mu(B^c)$ .  
Auch ist für alle  $C \in \mathbb{R}^2$

$$A \cap \pi(C) = \pi((A \times \mathbb{R}) \cap C), \quad (3)$$

da

$$\begin{aligned} A \cap \pi(C) &= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ und } x \in \pi(C)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ und } (x, y) \in C \text{ für ein } y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A \times \mathbb{R} \text{ und } (x, y) \in C \text{ für ein } y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in (A \times \mathbb{R}) \cap C \text{ für ein } y \in \mathbb{R}\} \\ &= \pi((A \times \mathbb{R}) \cap C). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned} \lambda_1^*(A \cap \pi(B)) + \lambda_1^*(A \cap \pi(B)^c) &\stackrel{\mu \text{ monoton}}{\leq} \lambda_1^*(A \cap \pi(B)) + \lambda_1^*(A \cap \pi(B^c)) \\ &= \lambda_1^*(\pi((A \times \mathbb{R}) \cap B)) + \lambda_1^*(\pi((A \times \mathbb{R}) \cap B^c)) \\ &= \mu^*((A \times \mathbb{R}) \cap B) + \mu^*((A \times \mathbb{R}) \cap B^c) \stackrel{B \mu^* \text{-messbar}}{=} \mu^*(A \times \mathbb{R}) \\ &= \lambda_1^*(\pi(A \times \mathbb{R})) = \lambda_1^*(A). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $\mu(B)$   $\lambda_1^*$ -messbar ist.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Da  $\pi(B)$   $\lambda_1^*$ -messbar ist, folgt aus **Aufgabe 3**, dass es  $A_1 \in F_\sigma$  und  $A_2 \subseteq \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1^*(A_2) = 0$  gibt, so dass  $\pi(B) = A_1 \cup A_2$ .  $A_1$  ist messbar: Nach Definition ist  $A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  für eine Familie  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abgeschlossener Mengen auf  $\mathbb{R}$ . Da alle  $K_n$  als abgeschlossene Mengen  $\lambda_1^*$ -messbar sind, und  $\mathcal{M}_{\lambda_1^*}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist wegen der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathcal{M}_{\lambda_1^*}$  damit auch  $A_1$   $\lambda_1^*$ -messbar.  
Sei nun  $B_0 := A_1$  und  $B_1 := A_1 \cup A_2 = \pi(B)$ .  $B_0$  und  $B_1$  sind  $\lambda_1^*$ -messbar, und wegen der Monotonie von  $\lambda_1^*$  ist

$$\lambda_1^*(B_1 \setminus B_0) \leq \lambda_1^*(A_2) = 0.$$

Da  $B_0 \subseteq \pi(B) = B_1$  ist auch

$$B_0 \times \mathbb{R} = \pi^{-1}(B_0) \subseteq B \subseteq \pi^{-1}(B_1) = B_1 \times \mathbb{R}.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  beliebig aber fest. Es gilt zu zeigen, dass

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Wegen der Subadditivität von  $\mu^*$  genügt es zu zeigen, dass

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Es ist

$$A \cap (B_0 \times \mathbb{R}) \subseteq A \cap B \subseteq A \cap (B_1 \times \mathbb{R}).$$

Wegen (3) ist daher

$$\pi(A \cap B) \subseteq \pi(A \cap (B_1 \times \mathbb{R})) = \pi(A) \cap B_1, \quad (4)$$

Analog ergibt sich wegen

$$(B_0 \times \mathbb{R})^c = \pi^{-1}(B_0)^c = \pi^{-1}(B_0^c) = (B_0^c \times \mathbb{R})$$

auch, dass

$$A \cap B^c \subseteq A \cap (B_0 \times \mathbb{R})^c = A \cap (B_0^c \times \mathbb{R}),$$

und wegen (3) daher

$$\pi(A \cap B^c) \subseteq \pi(A \cap (B_0 \times \mathbb{R})^c) = \pi(A \cap (B_0^c \times \mathbb{R})) = \pi(A) \cap B_0^c. \quad (5)$$

Zusammengefasst ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} & \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \\ &= \lambda_1^*(\pi(A \cap B)) + \lambda_1^*(\pi(A \cap B^c)) \\ &\leq \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_1) + \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_0^c) \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_1) + \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_0^c \cap B_1) + \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_0^c \cap B_1^c) \quad (7)$$

$$= \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_1) + \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_1^c) \quad (8)$$

$$= \lambda_1^*(\pi(A)) = \mu^*(A), \quad (9)$$

wobei bei (6) die Monotonie von  $\lambda_1^*$  in Kombination mit (4) und (5) genutzt wird, bei (7) die  $\lambda_1^*$ -messbarkeit von  $B_1$ , bei (8) die Monotonie von  $\lambda_1^*$  und dass

$$B_0^c \cap B_1 = B_1 \setminus B_0$$

eine Nullmenge ist, sowie dass

$$B_0^c \cap B_1^c = (B_0 \cup B_1)^c = B_1^c,$$

und bei (9) noch einmal die  $\lambda_1^*$ -Messbarkeit von  $B_1$ . Dies zeigt die  $\mu^*$ -Messbarkeit von  $B$ .