

# ANALYSIS III

## 7. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

5. Dezember 2013

### Aufgabe 1. (Eine Integralformel)

**a)**

Aus der Monotonie von  $\mu$  folgt, dass für  $a, b \in [0, \infty)$  mit  $a \leq b$

$$g(a) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \geq \mu(\{x \in X : f(x) \geq b\}) = g(b).$$

$g$  ist also monoton fallend und somit bekanntermaßen Borel-messbar.

**b)**

Zunächst zeigen wir die Aussage für einfache Funktionen: Sei  $f$  eine einfache Funktion mit Werten  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ , die auf Mengen  $A_1, \dots, A_n$  angenommen werden; wir setzen  $\alpha_0 := 0$ .

Ist  $\int_X f d\mu = \infty$ , so gibt es  $1 \leq i \leq n$  mit  $\alpha_i \neq 0$  und  $\mu(A_i) = \infty$ . Es ist daher  $g(t) = \mu\{x \in X : f(x) \geq t\} = \infty$  für alle  $t \in [0, \alpha_i]$ , und somit auch  $\int_{[0, \infty)} g = \infty$ .

Ansonsten nimmt  $g$  für  $i = 1, \dots, n$  auf dem Intervall  $(\alpha_{i-1}, \alpha_i]$  den konstanten Wert  $\sum_{j=1}^n \mu(A_j)$ , und auf  $(\alpha_n, \infty)$  den Wert 0 an. Es ist dann

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} g d\lambda &= \int_{(0, \infty)} g d\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda((\alpha_{i-1}, \alpha_i)) \sum_{j=i}^n \mu(A_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{j=i}^n \mu(A_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \mu(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (\alpha_j - \alpha_{i-1}) \mu(A_j) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_0) \mu(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2. (Funktionen mit verschwindendem Integral auf Anfangsstücken)

Wir zeigen, dass  $\int_U f d\lambda = 0$  für alle offenen Mengen  $U \subseteq (a, b)$ . Zunächst bemerken wir, dass für alle  $x \in (a, b)$

$$0 = \int_{(a,b)} f d\lambda = \int_{(a,x)} f d\lambda + \int_{(x,b)} f d\lambda = \int_{(x,b)} f d\lambda,$$

also für alle  $x, y \in (a, b)$  mit  $x < y$

$$0 = \int_{(a,b)} f d\lambda = \int_{(a,x)} f d\lambda + \int_{(x,y)} f d\lambda + \int_{(y,b)} f d\lambda = \int_{(x,y)} f d\lambda.$$

Sei nun  $U \subseteq (a, b)$  offen. Wie bereits letzte Woche gezeigt können wir  $U$  schreiben als  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , wobei  $U_n = \emptyset$  oder  $U_n$  ein offenes Intervall ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $g_n = \sum_{k=1}^n f \chi_{U_k}$  und  $g = f \chi_U$  ist  $g_n \rightarrow g$  punktweise auf ganz  $(a, b)$ . Da  $f$  integrierbar ist, ist es auch  $|f|$ , und wegen  $|g_n| \leq |f|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  nach dem Satz über dominierte Konvergenz daher

$$\begin{aligned} \int_U f d\lambda &= \int_{(a,b)} f \chi_U d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} \sum_{k=0}^n f \chi_{U_k} d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(a,b)} f \chi_{U_k} d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{U_k} f d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Es sei nun  $E_+ := \{x \in (a, b) : f(x) > 0\}$  mit  $\lambda(E_+) \leq b - a < \infty$ . Wegen der Regulärität des Lebesgue-Maßes und da  $\lambda(E_+) < \infty$  finden wir eine Folge  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  offener Mengen mit  $E_+ \subseteq U_n$  und  $\lambda(U_n \setminus E_+) \leq \frac{1}{n}$  für alle  $n$ . Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass die Folge  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fallend ist, da wir sonst die Folge  $(\bigcap_{k=1}^n U_k)_{n \in \mathbb{N}}$  betrachten. Es sei  $U := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ .

Es ist  $\int_U f d\lambda$ : Es ist  $f \chi_{U_n} \rightarrow f \chi_U$  punktweise auf ganz  $(a, b)$  und  $|f \chi_{U_n}| \leq |f|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , nach dem Satz über dominierte Konvergenz also

$$\int_U f d\lambda = \int_{(a,b)} f \chi_U d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} f \chi_{U_n} d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_n} f d\lambda = 0.$$

Es ist  $E_+ \subseteq U$  und, da  $\mu(U_0) < \infty$  und die Folge  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fallend ist,

$$\begin{aligned} \mu(U \setminus E_+) &= \mu \left( \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \setminus E_+ \right) = \mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \setminus E_+) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U_n \setminus E_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

Es ist also  $\int_{E_+} f d\lambda = \int_U f d\lambda = 0$ . Da  $f|_{E_+} > 0$  ist daher, wie aus der Vorlesung bekannt,  $f(x) = 0$  für  $\lambda$ -fast alle  $x \in E_+$ . Nach der Definition von  $E_+$  muss daher  $\lambda(E_+) = 0$ . Analog ergibt sich für  $E_- := \{x \in (a, b) : f(x) < 0\}$ , dass auch  $\lambda(E_-) = 0$ . Also ist

$$\lambda(\{x \in (a, b) : f(x) \neq 0\}) = \lambda(E_- \cup E_+) = \lambda(E_-) + \lambda(E_+) = 0.$$

### Aufgabe 3. (Ein Konvergenzresultat)

Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $f_n \rightarrow f$  auf ganz  $X$ , da die Menge  $\{x \in X : f_n \not\rightarrow f\}$  eine  $\mu$ -Nullmenge ist, also für das Integral  $\int_X |f_n - f| d\mu$  nicht von Bedeutung ist. Wegen  $f_n \geq 0$  für alle  $n$  folgt damit insbesondere, dass  $f \geq 0$ .

Da  $f$  und  $f_n$  für alle  $n$  integrierbar sind, ist es auch  $f - f_n$  und daher auch  $|f - f_n|$  für alle  $n$ . Nach der Dreiecksungleichung ist dabei  $|f_n - f| \leq f + f_n$  für alle  $n$ , also  $0 \leq f_n + f - |f_n - f|$  für alle  $n$ . Daher ist nach dem Lemma von Fatou

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n + f - |f_n - f| d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n + f - |f_n - f| d\mu. \quad (1)$$

Dabei ist

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n + f - |f_n - f| d\mu = \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} 2f d\mu = 2 \int_X f d\mu$$

und

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n + f - |f_n - f| d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} - \int_X |f_n - f| d\mu \\ &= 2 \int_X f d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu. \end{aligned}$$

Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$0 \leq - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu,$$

also

$$0 \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \geq 0,$$

und daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ .

### Aufgabe 4. (Gegenbeispiele)

a)

Es sei  $f = 0$  und  $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[-n,n]}$  für alle  $n \geq 1$ . Dann ist  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ , aber für alle  $n \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 2 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

Inbesondere konvergiert  $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$  nicht gegen  $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ .

b)

Diese Aussage ist totaler Blödsinn: Aus ihr folgt insbesondere, dass zwei Funktionen genau dann das gleiche Integral haben, wenn sie fast überall gleich sind. Ein einfaches und offensichtliches Gegenbeispiel ist  $f_n = \chi_{[-1,0]}$  unabhängig von  $n \in \mathbb{N}$  und  $f = \chi_{[0,1]}$ .

c)

Man betrachte  $f = 0$  und die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert als

$$f_{2^n - 1 + k} := \chi_{[k/2^n, (k+1)/2^n]}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $k = 0, \dots, n-1$ , d.h.  $f_0 = \chi_{[0,1]}$ ,  $f_1 = \chi_{[0,1/2]}$ ,  $f_2 = \chi_{[1/2,1]}$ ,  
 $f_{3+k} = \chi_{[k/4, (k+1)/4]}$  für  $k = 0, \dots, 3$ , usw.

Es ist offenbar

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda,$$

aber  $f_n \not\rightarrow f$  auf ganz  $[0,1]$ .