Analysis III
6. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

26. November 2013

Aufgabe 1. Lipschitz-Stetigkeit und ein Lemma von Sard

a) und b)

Für alle $a = {}^{\mathrm{t}}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $l \geq 0$ bezeichne

$$W_l(a) = \prod_{i=1}^{n} \left[a_i - \frac{l}{2}, a_i + \frac{l}{2}\right)$$

den halboffenen Würfel mit Seitenlänge l und Mittelpunkt a. Dieser ist bekanntermaßen Borell-, und damit auch Lebesgue-meßbar mit

$$\lambda_n(W_l(a)) = l^n.$$

Da jeder halboffene Würfel von dieser Form ist, gelten alle Aussagen, die im Folgenden für Würfel der form $W_l(a)$ gezeigt werden, für beliebige halboffene Würfel.
Zunächst zeigen wir, dass für alle $l \geq 0$ und $a \in \mathbb{R}$

$$\lambda_n^*(f(W_l(a))) \leq n^{n/2} L^n l^n = n^{n/2} L^n \lambda_n(W_l(a)). \tag{1}$$

Hierfür bemerken wir zunächst, dass die Hauptdiagonale von $W_l(a)$ genau $\sqrt{nl^2} = \sqrt{n}\, l$ lang ist, und daher

$$W_l(a) \subseteq B_{\sqrt{n}l/2}(a).$$

Wegen der Libschitz-Stetigkeit von f ist damit

$$f(W_l(a)) \subseteq f(B_{\sqrt{n}l/2}(a)) \subseteq B_{\sqrt{n}Ll/2}(f(a)) \subseteq W_{\sqrt{n}Ll}(f(a)).$$

Aus der Monotonie von λ_n^* folgt damit

$$\lambda_n^*(f(W_l(a))) \leq \lambda_n^*\left(W_{\sqrt{n}Ll}(f(a))\right) = n^{n/2} L^n l^n,$$

was (1) zeigt.
Wir zeigen nun, dass das Bild von Lebesgue-messbaren Mengen unter f Lebesgue-messbar ist. Sei hierfür $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wie aus einem früheren Übungszettel bekannt, ist die Lebesgue-Messbarkeit von A äuqivalent dazu, dass es Mengen $F \in F_\sigma$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A = F \cup N$ gibt, so dass $\lambda_n(N) = 0$, also N eine Lebesgue-Nullmenge ist (diese ist mit Sicherheit Lebesgue-messbar, da λ_n vollständig ist). Inbesondere ist

$$f(A) = f(F \cup N) = f(F) \cup f(N).$$

Behauptung 1. *Es ist $f(F) \in F_\sigma$ sowie $\lambda_n^*(f(N)) = 0$. Insbesondere ist $f(N)$ wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes λ_n also Lebesgue-Nullmenge messbar.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $f(F) \in F_\sigma$. Da $F \in F_\sigma$ gibt es eine Folge $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Mengen, so dass $F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Folge $(K_l^k)_{l\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen durch

$$K_l^k := C_k \cap \overline{B_l(0)}.$$

Es ist $C_k = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} K_l^k$ und damit $F = \bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} K_l^k$. Da f stetig ist, ist das Bild kompakter Mengen unter f wieder kompakt, und damit auch abgeschlossen. Insbesondere ist $f\left(K_l^k\right)$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Es ist daher

$$f(F) = f\left(\bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} K_l^k\right) = \bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} f\left(K_l^k\right) \in F_\sigma.$$

Nun zeigen wir, dass $\lambda_n^*(f(N))$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da N eine Lebesgue-Nullmenge ist, gibt es, wie aus einem dem früheren Übungsblätter bekannt, eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von halboffenen Würfeln in $\mathbb{R}^n$ so dass $N \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(Q_k) \le \varepsilon$. Es ist also auch

$$f(N) \subseteq f\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(Q_k).$$

Aus der Monotonie und Subadditivität von λ_n^*, sowie (1) folgt damit, dass

$$\begin{aligned}
\lambda_n^*(f(N)) &\le \lambda_n^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(Q_k)\right) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(f(Q_k)) \\
&\le \sum_{k\in\mathbb{N}} n^{n/2} L^n \mu(Q_k) = n^{n/2} L^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(Q_k) \le n^{n/2} L^n \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ ergibt dies, dass $\lambda_n^*(f(N)) = 0$. □

Aus dieser Behauptung folgt aufgrund der bereits oben genannten, zur Lebesgue-Messbarkeit äquivalenten, Bedingung nun direkt, dass $f(A) = f(F) \cup f(N)$ wieder Lebesgue-messbar ist.
Insbesondere ergibt sich damit, dass die in (1) für das äußere Maß aufgestellte Ungleichung bereits für das Lebesgue-Maß selbst gilt, dass also

$$\lambda_n(f(W_l(a))) \le n^{n/2} L^n l^n = n^{n/2} L^n \lambda_n(W_l(a)). \tag{2}$$

Die Abschätzung (2) lässt sich nun direkt auf beliebige offene Mengen übertragen: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wie aus der Vorlesung bekannt, gibt es eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter, halboffener Würfel mit

$$U = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} Q_k.$$

Insbesondere sind U, sowie alle Q_k Lebesgue-messbar. Aufgrund der σ-Additivität von λ_n ergibt nun aus (2), dass

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(U)) &= \lambda_n\left(f\left(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} Q_k\right)\right) = \lambda_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(Q_k)\right)\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(f(Q_k)) \leq n^{n/2}L^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(Q_k)\\ &= n^{n/2}L^n\lambda_n\left(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} Q_k\right) = n^{n/2}L^n\lambda_n(U).\end{aligned}$$

Es ist also auch für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lambda_n(f(U)) \leq n^{n/2}L^n\lambda_n(U). \tag{3}$$

Nun werden wir die Regularität des Lebesgue-Maßes nutzen, um diese Abschätzung für alle Lebesgue-messbaren Mengen zu zeigen. Sei hierfür $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Aus der Regularität des Lebesgue-Maßes folgt, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq U$ und $\lambda_n(U) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon$ gibt. Es ist also wegen der Monotonie des Lebesgue-Maßes und (3)

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(A)) &\leq \lambda_n(f(U)) \leq n^{n/2}L^n\lambda_n(U)\\ &\leq n^{n/2}L^n(\lambda_n(A)+\varepsilon) = n^{n/2}L^n\lambda_n(A) + n^{n/2}L^n\varepsilon.\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit die Ungleichung

$$\lambda_n(f(A)) \leq n^{n/2}L^n\lambda_n(A).$$

c)

Lemma 2. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann ist f auf $[a, b]$ genau dann Lipschitz-stetig mit Konstante L, wenn $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a, b)$.*

Beweis. Ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L, so folgt wegen der Stetigkeits des Betrags, dass für alle $x \in (a, b)$

$$|f'(x)| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} \leq \lim_{h\to 0}\frac{L|h|}{|h|} = L.$$

Ist andererseits $f'(x) \leq L$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt aus der Mittelwertabschätzung direkt, dass für alle $x, y \in (a, b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

□

Lemma 3. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann gibt es eine höchstens abzählbare Familie I_k von offenen, nichtleeren Intervallen, so dass $U = \dot{\bigcup}_n I_k$.*

Beweis. Aus Analysis 2 bekannt, lässt sich eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ in offene, nichtleere, disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegen lässt. Im Falle von $\mathbb{R}$ sind dies gerade offene Intervalle. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass hierfür höchstens abzählbar viele Intervalle benötigt werden.
Wir bemerken, dass es für jedes I_k eine rationale Zahl $r_k \in I_k$ gibt. Aus der Disjunktheit der I_k folgt direkt, dass die Zuordnung $I_k \mapsto r_k$ injektiv ist. Da es nur abzählbar viele r_k gibt, gibt es damit auch nur abzählbar viele I_k. $\square$

Es sei
$$N := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$$
und für $a, b \in \mathbb{R}$
$$N_{a,b} := \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}.$$
Um zu zeigen, dass $f(N)$ Lebesgue-messbar mit $\lambda_n(f(N)) = 0$ ist, genügt es zu zeigen, dass $f(N_{a,b})$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar mit Maß $\lambda_n(f(N_{a,b})) = 0$ ist. Dann ergibt sich, dass

$$f(N) = f\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} N_{k/2,k/2+1}\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f\left(N_{k/2,k/2+1}\right)$$

als abzählbare Vereinigung von Lebesgue-messbaren Mengen Lebesgue-messbar ist, und

$$\lambda_n(f(N)) = \lambda_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f\left(N_{k/2,k/2+1}\right)\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_n\left(f\left(N_{k/2,k/2+1}\right)\right) = 0.$$

Wir zeigen nun die entsprechende Aussage für die $N_{a,b}$. Seien hierfür $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Wir betrachten nur den Fall $a < b$, da sonst $N_{a,b} = \emptyset$ und die Aussage trivialerweise stimmt.
Zunächst zeigen wir, dass $f(N_{a,b})$ Lebesgue-messbar ist. Hierfür bemerken wir zum einen, dass $\tilde{f} := f_{|(a,b)}$ stetig differenzierbar ist, also $\tilde{f}' = f'_{|(a,b)}$ als stetige Funktion Borell-messbar. Daher ist

$$N_{a,b} = \{x \in (a, b) : \tilde{f}'(x) = 0\}$$

Borell-, und damit auch Lebesgue-messbar. Zum anderen bemerken wir, dass die Einschränkung $\tilde{f}$ Lipschitz-stetig ist: Da f' auf $[a, b]$ stetig ist, ist f' auf $[a, b]$, und somit auch auf (a, b), beschränkt. Aus Lemma 2 folgt damit, f auf $[a, b]$ Lipschitz-stetig ist. Damit ist auch $\tilde{f}$ auf (a, b) Lipschitz-stetig. Aus den vorherigen Aufgabenteilen folgt damit, dass $f(N_{a,b})$ als Bild einer Lebesgue-messbaren Menge unter einer Lipschitz-stetigen Funktion ebenfalls Lebesgue-messbar ist.
Nun zeigen wir, dass $\lambda_n(f(N_{a,b})) = 0$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}'$ gibt es für alle $x \in N_{a,b}$ ein $\delta_x > 0$, so dass $|\tilde{f}'(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_{\delta_x}(x)$. Da (a, b) offen ist, kann dabei $\delta_x > 0$ so klein gewählt werden, dass $B_{\delta_x}(x) \subseteq (a, b)$. Es sei
$$U := \bigcup_{x\in N_{a,b}} B_{\delta_x}(x).$$
U ist als Vereinigung offener Mengen offen, und es ist

$$N_{a,b} \subseteq U \subseteq (a, b).$$

Es seien $U_k = (a_k, b_k)$ die Zusammenhangskomponenten von U. Nach Lemma 3 sind diese höchstens abzählbar viele. Für alle k ist U_k als offenes Intervall Borell- und damit auch Lebesgue-messbar, wegen der Lipschitz-Stetigkeit von $\tilde{f}$ ist also auch $\tilde{f}(U_k)$ für alle k Lebesgue-messbar. Dabei folgt aus der Konstruktion von U, dass $\tilde{f}'(x) < \varepsilon$ für alle $x \in U \supseteq U_k$, aus Lemma 2 also, dass $\tilde{f}_{|U_k}$ für alle k Lipschitz-stetig mit Konstante ε ist. Aus den vorherigen Aufgabenteilen folgt damit, dass für alle k

$$\lambda_n(f(U_k)) \leq n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n(U_k).$$

Wegen der Monotonie und σ-Additivität von λ_n ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned}
\lambda_n(f(N_{a,b})) \leq \lambda_n(f(U)) = \lambda_n\left(f\left(\dot{\bigcup_k} U_k\right)\right) &= \sum_k \lambda_n(f(U_k)) \\
&\leq n^{n/2} L^n \sum_k \lambda_n(U_k) = n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n\left(\dot{\bigcup_k} U_k\right) \\
&= n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n(U) \leq n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n((a,b)) = n^{n/2} \varepsilon^n (b-a).
\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass

$$\lambda_n(f(N_{a,b}) = 0.$$

Aufgabe 2. Funktionen als Maße

Aufgabe 3. Positive Funktionen

Aufgabe 4. Konvergenz von Funktionen

a)

Nach Definition ist $f_n \to f$ fast überall genau dann, wenn die Menge N der Stellen, an denen f_n nicht punktweise gegen f konvergiert, eine μ-Nullmenge ist. Für alle $\varepsilon > 0$ sei

$$\begin{aligned}
N_\varepsilon &:= \{x \in X : \text{ für alle } n \geq \mathbb{N} \text{ gibt es } m \geq n : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $N_\varepsilon \in \mathcal{A}$ für alle $\varepsilon > 0$: Aus der Messbarkeit von f und der f_m für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt, dass auch $|f_m - f|$ für alle $m \in \mathbb{N}$ messbar ist. Daher ist

$$\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{A}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Die Messbarkeit von N_ε ergibt sich daher aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ bezüglich abzählbarer Schnitte und Vereinigungen.
N lässt sich nun schreiben als

$$N = \bigcup_{\varepsilon > 0} N_\varepsilon = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} N_q.$$

Da $N_\varepsilon \in \mathcal{A}$ für alle $\varepsilon > 0$ ist auch N als abzählbare Vereinigung der N_q in $\mathcal{A}$ enthalten. Es ist nun einfach zu sehen, dass N genau dann eine μ-Nullmenge ist, wenn jedes der N_ε eine μ-Nullmenge ist: Dies ergibt sich direkt aus der Monotonie von μ und daraus, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$N_\varepsilon \subseteq N = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} N_q.$$

b)

Wie bereits im vorherigen Aufgabenteil erläutert ist für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$

$$\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{A}.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ bezüglich abzählbarer Vereinigungen ist daher für alle $\varepsilon > 0$

$$\left(\bigcup_{m \geq n} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine monoton fallende Folge auf $\mathcal{A}$. Ist μ ein endlich Maß, so ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned} &\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu \left(\bigcup_{m \geq n} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right). \end{aligned}$$

Die zu zeigend Aussage ergibt sich daher direkt aus dem vorherigen Aufgabenteil.

c)

Es sei $f := 0$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := \chi_{[n,n+1]}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. es ist $f_n \to f$ punktweise auf ganz $\mathbb{R}$. Für beliebiges $0 < \varepsilon \leq 1$ ist dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{m \geq n} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = [n, \infty),$$

und damit insbesondere

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_1 \left(\bigcup_{m \geq n} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right) = \lim_{n \to \infty} \lambda_1([n, \infty)) = \infty.$$

d)

Zunächst nehmen wir an, dass $f_n \to f$ fast überall. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ sei

$$A_{n,\delta} := \bigcup_{m \geq n} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \delta\}.$$

Man bemerke, dass $A_{n,\delta} \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$, und dass

$$A_{n,\delta}^c = \{x : |f_m(x) - f(x)| < \delta \text{ für alle } m \geq n\}. \tag{4}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Aus Aufgabenteil **b)** folgt, dass für alle $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n,\delta}) = 0.$$

Inbesondere gibt es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ so dass

$$\mu(A_{N_k,\varepsilon/2^{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Es sei

$$A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{N_k,\varepsilon/2^{k+1}}.$$

Wir bemerken nun, dass $A \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, und das wegen der Monotonie von μ

$$\mu(A) = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{N_k,\varepsilon/2^{k+1}}\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_{N_k,\varepsilon/2^{k+1}}) < \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Andererseits ist

$$X \setminus A = A^c = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{N_k,\varepsilon/2^{k+1}}\right)^c = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A^c_{N_k,\varepsilon/2^{k+1}}.$$

Es folgt daher aus (4), dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $m \geq N_k$

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \text{ für alle } x \in X \setminus A.$$

Dies zeigt, dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf $X \setminus A$.
Nun nehmen wir an, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Menge $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf A_ε^c. Wie zuvor bezeichne N die Menge aller Stellen, an denen nicht $f_n \to f$ punktweise. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $\varepsilon > 0$ auf A_ε^c gleichmäßig, und damit insbesondere punktweise gegen f konvergiert, muss $N \subseteq A_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Also ist

$$N \subseteq \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>0}} A_q =: B.$$

Dabei ist $B \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen ist. Aus der Monotonie von μ ergibt sich auch, dass

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>0}} A_q\right) \leq \mu(A_q) = q$$

für alle $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$. Also ist $\mu(B) = 0$. Dies zeigt, dass N vernachlässigbar ist, also $f_n \to f$ punktweise fast überall.