Analysis III
9. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

23. Januar 2014

Da ich diese Woche keine Lust auf Analysis hatte, habe ich nur zwei der Aufgaben bearbeitet.

Aufgabe 1. (Riemann vs. Lebesgue)

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass f, bzw. der Ausdruck $\sin(x)/x$, an der Stelle $x = 0$ als $f(0) = 1$ definiert ist. Aus Analysis 1 ist bekannt, dass f dann auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

a)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_{(0,\infty)} |f| d\lambda \geq \int_{[0,n\pi]} |f| d\lambda = \int_0^{n\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} \,\mathrm{d}x$$

Wir dürfen das Lebesgue- mit dem Riemann-Integral vertauschen, da $|f|$ auf $[0, n\pi]$ beschränkt und stetig ist. Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} \,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)| \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi},\end{aligned}$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{(0,\infty)} |f| \,\mathrm{d}\lambda \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

also

$$\int_{(0,\infty)} |f| \,\mathrm{d}\lambda \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Es ist also $\int_{(0\infty)} |f| \,\mathrm{d}\lambda = \infty$. Daher ist $|f|$ auf $(0, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar, also auch f nicht.

b) und c)

Sei $R \geq 0$ beliebig aber fest. Wir betrachten die Funktion

$$g : [0, R] \times [0, \infty) \to [-1, 1], (x, t) \mapsto \sin(x) e^{-xt}.$$

Diese ist stetig, also Borell-messbar. Wir zeigen zunächst, dass g integrierbar ist. Für $|g|$ lässt sich der Satz von Tonelli anwenden, weshalb

$$\begin{aligned}\int_{[0,R]\times[0,\infty)} |g| \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} |g(x,t)| \,\mathrm{d}\lambda(t) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} |\sin(x)| e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(t) \,\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

Da $|\sin(x)|e^{-xt}$ für alle $x \in [0, R]$ auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar ist, und auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-Integrierbar mit

$$\int_0^\infty |\sin(x)| e^{-xt} \,\mathrm{d}t = |\sin(x)| \int_0^\infty e^{-xt} \,\mathrm{d}t = \frac{|\sin(x)|}{x},$$

ist für alle $x \in [0, R]$

$$\int_{[0,\infty)} |\sin(x)| e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_0^\infty |\sin(x)| e^{-xt} \,\mathrm{d}t = \frac{|\sin(x)|}{x}.$$

Daher ist

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty)} |g| \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{[0,R]} \frac{|\sin(x)|}{x} \,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty,$$

da $\lambda([0, R]) = R < \infty$ und $0 \leq |\sin(x)|/x \leq 1$. Es ist also $|g|$ integrierbar, und damit auch g.

Da g integrierbar ist, lässt sich für $\int_{[0,R]\times[0,\infty)} g \,\mathrm{d}\lambda_2$ der Satz von Fubini anwenden. Wir bemerken aber zunächst analog zur obigen Argumentation, dass für alle $x \in [0, R]$

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} g(x,t) \,\mathrm{d}\lambda(t) &= \int_{[0,\infty)} \sin(x) e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \sin(x) \int_{[0,\infty)} e^{-xt} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{\sin(x)}{x},\end{aligned}$$

wobei auch genutzt wird, dass $|g|$ auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Daher ergibt sich mit dem Satz von Fubini zum einen, dass

$$\begin{aligned}\int_{[0,R]\times[0,\infty)} g \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} g(x,t) \,\mathrm{d}\lambda(t) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,R]} \frac{\sin(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{[0,R]} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^R f(x) \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt genutzt, dass f auf $[0, R]$ beschränkt und stetig ist, also Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen.

Um das andere, aus dem Satz von Fubini folgende, Integral zu bestimmen, bemerken wir, dass für alle $t \in [0, \infty)$

$$\int_{[0,R]} g(x,t)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,R]} \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x.$$

Dabei haben wir genutzt, dass $g(x,t)$ für alle $t \in [0,\infty)$ auf $[0,R]$ beschränkt und stetig ist, also Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen. Es ergibt sich für alle $t \in (0,\infty)$ durch partielle Integration, dass

$$\begin{aligned}\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{t}\sin(x)e^{-xt}\Big|_{x=0}^R + \frac{1}{t}\int_0^R \cos(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{t}\sin(x)e^{-xt} - \frac{1}{t^2}\cos(x)e^{-xt}\right)\Big|_{x=0}^R - \frac{1}{t^2}\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\underbrace{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}_{=\frac{1+t^2}{t^2}}\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= \left(-\frac{1}{t}\sin(x)e^{-xt} - \frac{1}{t^2}\cos(x)e^{-xt}\right)\Big|_{x=0}^R \\ &= -\frac{1}{t}\sin(R)e^{-Rt} - \frac{1}{t^2}\cos(R)e^{-Rt} + \frac{1}{t^2},\end{aligned}$$

und daher für alle $t \in (0,\infty)$

$$\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x = -\frac{t\sin(R)e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R)e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}.$$

Man bemerke, dass diese Gleichung auch für $t = 0$ gilt, da

$$\int_0^R \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)|_{x=0}^R = -\cos(R) + 1.$$

Nach dem Satz von Fubini gilt also auch

$$\begin{aligned}\int_{[0,R]\times[0,\infty)} g\,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[0,\infty)}\int_{[0,R]} g(x,t)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \int_{[0,\infty)} -\frac{t\sin(R)e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R)e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t),\end{aligned}$$

wobei aus dem Satz auch folgt, dass dieses hässliche Integral existiert. Zusammengefasst ergibt sich also aus dem Satz von Fubini

$$\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,\infty)} -\frac{t\sin(R)e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R)e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t),$$

Sei nun $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $(0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$. Um den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\int_0^{R_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ zu bestimmen (und ob dieser überhaupt existiert), betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} -\frac{t\sin(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

Wir wollen den Grenzwert und das Integral mithilfe des Satzes über dominierte Konvergenz vertauschen. Offenbar ist für alle $t \in [0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{t\sin(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Auch ist für alle $n \in \mathbb{N}$ für alle $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{t\sin(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right| \\
&\leq \frac{t|\sin(R_n)|e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{|\cos(R_n)|e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \\
&\leq 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist auf $[0, \infty)$ Lebesgue-integrierbar: Sie ist auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar, nichtnegativ, und das uneigentliche Riemanintegral

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{s\to\infty}\int_0^s 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{2}{R_n}e^{-R_n t} + \arctan(t)\right)\bigg|_{t=0}^{s} \\
&= \lim_{s\to\infty} -\frac{2}{R_n}e^{-R_n s} + \arctan(s) + \frac{2}{R_n} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{R_n}
\end{aligned}$$

existiert. Daher ist die Funktion auf $[0, \infty)$ auch Lebesgue-integrierbar.
Wir können also den Satz über dominierte Konvergenz anwenden, und erhalten, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} -\frac{t\sin(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} -\frac{t\sin(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n)e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t).
\end{aligned}$$

Die Funktion $1/(1+t^2)$ auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar ist, nichtnegativ und auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty} \arctan(t)|_{t=0}^{s} = \lim_{s\to\infty}\arctan(s) = \frac{\pi}{2}.$$

Daher stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral überein, d.h. es ist

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist also

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{R_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Aus der Beliebigkeit der Folge R_n auf $(0, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ folgt, dass bereits

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 4. (Kugeln)

Für alle $N \geq 1$ und $R \geq 0$ ist

$$\lambda_N \left(B_R^N\right) = R^N \alpha_N,$$

denn für die Diagonalmatrix $T = \operatorname{diag}(R, \ldots, R) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gilt

$$\lambda_N \left(B_R^N\right) = \lambda_N \left(T(B_R^1)\right) = |\det(T)|\, \lambda_N(B_R^1) = R^N \alpha_N.$$

Sei nun $N \geq 3$ beliebig aber fest. Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned}
\left(B_1^N\right)_{(x_1,x_2)} &= \left\{ (x_3, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2} : \sum_{i=1}^{N-2} x_i^2 \leq 1 \right\} \\
&= \left\{ (x_3, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2} : \sum_{i=3}^{N-2} x_i^2 \leq 1 - (x_1^2 + x_2^2) \right\} \\
&= B^{N-2}_{1-\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^N\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{N-2}\right)$ und $\lambda_N = \lambda_2 \times \lambda_{N-2}$ ergibt sich aus der Definition des Produktmaßes, dass

$$\begin{aligned}
\alpha_N = \lambda_N \left(B_1^N\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_{N-2} \left(\left(B_1^N\right)_{(x,y)} \right) \mathrm{d}\lambda_2(x, y) \\
&= \int_A \lambda_{N-2} \left(B^{N-2}_{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \right) \mathrm{d}\lambda_2(x, y) \\
&= \alpha_{N-2} \int_A \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}^{N-2}\, \mathrm{d}\lambda_2(x, y)
\end{aligned}$$

wobei

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Umwandeln in Polarkoordinaten ergibt, dass

$$\begin{aligned}
&\int_A \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}^{N-2}\, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) \\
= &\int_{(0,1)\times(0,2\pi)} r\sqrt{1 - ((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}^{N-2}\, \mathrm{d}\lambda_2(r, \varphi) \\
= &\int_{(0,1)\times(0,2\pi)} r\sqrt{1 - r^2}^{N-2}\, \mathrm{d}\lambda_2(r, \varphi).
\end{aligned}$$

(Streng genommen müssten wir A zuerst durch eine passende offene Menge ersetzen. Es ist jedoch klar, dass der Rand von A für den Integral nicht von Bedeutung ist, da es sich um eine Nullmenge handelt, so dass wir

$$A' = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\} = A^\circ$$

wählen können.) Anwenden des Satzes von Tonelli ergibt, dass

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)\times(0,2\pi)} r\sqrt{1 - r^2}^{N-2}\, \mathrm{d}\lambda_2(r, \varphi) &= \int_{(0,1)} \int_{(0,2\pi)} r\sqrt{1 - r^2}^{N-2}\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_{(0,1)} r\sqrt{1 - r^2}^{N-2}\, \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Da die Funktion $r\sqrt{1-r^2}^{N-2}$ auf $(0,1)$ beschränkt und stetig ist, entspricht das Lebesgue-Integral dem Riemann-Integral. Dabei ergibt sich mit den Substitutionen $r = \sin t,\ \mathrm{d}r = \cos t\,\mathrm{d}t$ und $\cos t = x$ und $-\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}^{N-2}\,\mathrm{d}r &= \int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos^{N-1}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 x^{N-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{N-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^N}{N}\bigg|_{x=0}^1 = \frac{1}{N}.\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich damit, dass

$$\alpha_N = 2\pi N^{-1}\alpha_{N-2}.$$