Analysis III
1. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

1. November 2013

Aufgabe 1. (Push-Forward und Pull-Back von σ-Algebren)

a)

Es gilt, die Axiome einer σ-Algebra für $f^*[\mathcal{A}]$ zu überprüfen.
Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, ist $X \in \mathcal{A}$, also $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ und somit $Y \in f^*[A]$. Für $B \in f^*[\mathcal{A}]$ ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, und da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist somit auch $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{A}$, also $B^c \in f^*[\mathcal{A}]$. Für eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $f^*[\mathcal{A}]$ ist $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und da $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, ist daher auch $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, und somit auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in f^*[\mathcal{A}]$.
Damit sind alle Axiome einer σ-Algebra für $f^*[\mathcal{A}]$ erfüllt.

b)

Es gilt, die Axiome einer σ-Algebra für $f_*[\mathcal{B}]$ zu überprüfen.
Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist, ist $Y \in \mathcal{B}$, und somit $X = f^{-1}(Y) \in f_*[\mathcal{B}]$. Für $A \in f_*[\mathcal{B}]$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $f^{-1}(B) = A$; da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, ist auch $B^c \in \mathcal{B}$ und somit $A^c = \left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c) \in f_*[\mathcal{B}]$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $f_*[\mathcal{B}]$, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $B_n \in \mathcal{B}$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$; da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$, und somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in f_*[\mathcal{B}]$.
$f_*[\mathcal{B}]$ erfüllt also alle Axiome einer σ-Algebra.

Aufgabe 2. (Gegenbeispiele)

a)

Wie in **Aufgabe 3** gezeigt handelt es sich bei $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ um σ-Algebren auf $\{1,2,3\}$, während $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_2$ keine σ-Algebra auf $\{1,2,3\}$ ist.

b)

Man betrachte

$$\mathcal{R} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

$\mathcal{R}$ ist eine Algebra auf $\mathbb{N}$: Offenbar ist $\emptyset \in \mathcal{R}$. Auch folgt aus der Definition direkt, dass $A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{R}$ für alle $A \subseteq \mathbb{N}$. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$; per Fallunterscheidung ergibt sich, dass auch $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$: Sind A_1 und A_2 beide endlich, so ist es auch $A_1 \cup A_2$, weshalb $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$. Ansonsten gibt es ein $i \in \{1, 2\}$, so dass A_i^c endlich ist, wobei durch passende Nummerierung o.B.d.A. davon ausgangen werden kann, dass $i = 1$. Es ist dann auch $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c \subseteq A_1^c$ endlich, also $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$. Dies zeigt, dass $\mathcal{R}$ eine Algebra ist.
$\mathcal{R}$ ist jedoch keine σ-Algebra, denn für

$$2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{2n\}}_{\in \mathcal{R}},$$

sind $2\mathbb{N}$ und $(2\mathbb{N})^c = 2\mathbb{N} + 1 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade}\}$ beide unendlich, und daher $2\mathbb{N} \notin \mathcal{R}$, was der σ-Additivität einer σ-Algebra widerspricht.

c)

Aus der Aufgabenstellung geht nicht klar hervor, ob $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf X sein sollte, oder ob es auch ausreicht, dass es ein $Y \subseteq X$ gibt, so dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist.
Ist eine σ-Algebra auf X gemeint, so betrachte man $X = \{1\}$ und $\mathcal{B} = \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ unter abzählbaren Schnitten und Vereinigungen abgeschlossen (sogar unter beliebigen), da aber $X \notin \mathcal{B}$ ist $\mathcal{B}$ keine σ-Algebra auf X.
Sofern es genügt, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ ist, so betrachte man $X = \{1, 2\}$ und $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Da zwar $\{1\} \in \mathcal{B}$, aber $\{1\}^c = \{2\} \notin \mathcal{B}$ ist $\mathcal{B}$ keine σ-Algebra auf X. Für alle $Y \subset X$ ist allerdings $\{1, 2\} \notin Y$, also $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{P}(Y)$ und $\mathcal{B}$ somit auch keine σ-Algebra auf Y.

d)

Man betrachte $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{4, 5\}$ mit $f(1) = f(2) = 4$ und $f(3) = 5$. Wie in **Aufgabe 3** gezeigt ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ eine σ-Algebra auf $\{1, 2, 3\}$. Es ist aber

$$\mathcal{B} := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{\emptyset, \{4\}, \{4, 5\}\}$$

keine σ-Algebra auf $\{4, 5\}$, da $\{4\} \in \mathcal{B}$ aber $\{4\}^c = \{5\} \notin \mathcal{B}$.

Aufgabe 3. (Die σ-Algebren auf einer dreielementigen Menge)

a)

Es ist

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c, \{1, 2, 3\}\},$$

wobei $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ alle einelementigen, und $\{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c$ alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$ sind. Die verschiedenen σ-Algebren auf $\{1, 2, 3\}$ lassen sich durch die jeweilige Anzahl der beinhalteten einelementigen Mengen klassifizieren. Sei im Folgenden $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\{1, 2, 3\}$. Man bemerke, dass aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung für alle $x \in \{1, 2, 3\} : \{x\} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \{x\}^c \in \mathcal{A}$.

Enthält $\mathcal{A}$ keine einelementige Menge, so enthält $\mathcal{A}$ nach der Bemerkung auch keine zweielementige Menge, es ist also $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2,3\}\}$.
Für alle $x \in \{1,2,3\}$ gibt es die σ-Algebra $\{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, \{1,2,3\}\}$ auf $\{1,2,3\}$ (bekannt aus der Vorlesung). Dies sind die einzigen σ-Algebren, die genau eine einelementige Menge enthalten: Ist $\{x\} \in \mathcal{A}$ für genau ein $x \in \{1,2,3\}$, so ist auch $\{x\}^c \in \mathcal{A}$. Für jede zweielementige Menge $\{y\}^c \in \mathcal{A}$ muss auch $\{y\} \in \mathcal{A}$, also $y = x$ und damit $\{y\}^c = \{x\}^c$. Also enthält $\mathcal{A}$ neben $\{x\}^c$ keine weiteren zweielmentigen Mengen und es ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, \{1,2,3\}\}$.
Gilt $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{A}$ für zwei verschiedene $x, y \in \{1,2,3\}$, so ist auch $\{x,y\}^c = (\{x\} \cup \{y\})^c \in \mathcal{A}$, also ist $\{z\} \in \mathcal{A}$ für alle $z \in \{1,2,3\}$. Es gibt also keine σ-Algebra auf $\{1,2,3\}$ die genau zwei einelementige Mengen beinhaltet.
Ist $\{x\} \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \{1,2,3\}$, so ist wegen

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \sigma(\{\{1\},\{2\},\{3\}\}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

bereits $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.
Die einzigen σ-Algebren auf $\{1,2,3\}$ sind somit $\{\emptyset, \{1,2,3\}\}, \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ sowie $\{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, \{1,2,3\}\}$ für $x \in \{1,2,3\}$.

Aufgabe 4. (Ein Gegenbeispiel von Vitali in zwei Dimensionen)

a)

Die Abbildung

$$A : \mathbb{Q} \to SO(2), q \mapsto \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenmonomorphismus von $(\mathbb{Q}, +)$ nach $(SO(2), \cdot)$: Für $p, q \in \mathbb{Q}$ ist

$$\begin{aligned} A(p)A(q) &= \begin{pmatrix} \cos p & -\sin p \\ \sin p & \cos p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos p \cos q - \sin p \sin q & -\cos p \sin q - \sin p \cos q \\ \sin p \cos q + \cos p \sin q & -\sin p \sin q + \cos p \cos q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(p+q) & -\sin(p+q) \\ \sin(p+q) & \cos(p+q) \end{pmatrix} = A(p+q), \end{aligned}$$

also ist A ein Gruppenhomomorphismus. A ist injektiv, denn für $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $A(p) = A(q)$ muss $\cos p = \cos q$ und $\sin p = \sin q$ gelten, also auch

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p = \cos q + i \sin q = e^{iq}.$$

Da die Abbildung $[0, 2\pi) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto e^{i\varphi}$ bijektiv ist, und erweitert auf $\mathbb{R}$ (2π)-periodisch ist, muss $p - q = 2n\pi$ für ein $n \in \mathbb{Z}$; wäre $n \neq 0$, so wäre $\pi = \frac{p-q}{2n} \in \mathbb{Q}$, was bekanntermaßen nicht gilt. Also muss $n = 0$ und damit $p = q$.
Da A ein Gruppenmonomorphismus ist, ist

$$G := \operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} : q \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq SO(2)$$

eine abzählbar unendliche Untergruppe von $SO(2)$.

b)

Die Relation ist reflexiv, da $A(0) = I \in G$ und $\frac{x}{|x|} = I\frac{x}{|x|}$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Die Relation ist symmetrisch, denn ist $x \sim y$, so gibt es ein $R \in G$ mit $\frac{x}{|x|} = R\frac{y}{|y|}$. Da G eine Gruppe ist, ist auch $R^{-1} \in G$, und da $R^{-1}\frac{x}{|x|} = R^{-1}R\frac{y}{|y|} = I\frac{y}{|y|} = \frac{y}{|y|}$, gilt daher auch $y \sim x$.
Die Relation ist transitiv, denn ist $x \sim y$ und $y \sim z$, so gibt es $R, S \in G$ mit $\frac{x}{|x|} = R\frac{y}{|y|}$ und $\frac{y}{|y|} = S\frac{z}{|z|}$. Da G eine Gruppe ist, ist auch $RS \in G$, und da $\frac{x}{|x|} = R\frac{y}{|y|} = (RS)\frac{z}{|z|}$ folgt daher auch $x \sim z$.

c)

Da ich die bisher definierte Äquivalenzrelation $\sim$ nicht mag, betrachte ich eine leicht abgeänderte Version; ich nenne diese ebenfalls $\sim$, da ich die Äquivalenzrelation aus **Aufgabenteil b)** nicht mehr nutzen werde, und $\sim$ der praktischste Name ist:
Durch $x \sim y :\Leftrightarrow$ es existiert $R \in G : x = Ry$ wird auf $B_1(0) \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation definiert. Der Beweis hierfür verläuft komplett analog zu **Aufgabenteil b)**. Dabei ist $Rx \in B_1(0) \setminus \{0\}$ für alle $R \in SO(2)$ und $x \in B_1(0)$, denn es ist $\|R\|_{\text{op}} \leq \|R\| = 1$ für alle $R \in G$ und damit $\|Rx\| \leq \|x\| \leq 1$ für alle $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$, sowie $Ry = 0 \Leftrightarrow y = 0$ für alle $R \in G$ und $y \in B_1(0) \setminus \{0\}$, da R einen Vektorraumautomorphismus beschreibt, also $R(B_1(0) \setminus \{0\}) \subseteq B_1(0) \setminus \{0\}$. Insbesondere ist daher $\bigcup_{R \in G} RA \subset B_1(0) \setminus \{0\}$ für alle $A \subseteq B_1(0) \setminus \{0\}$.
Sei nun $M \subseteq B_1(0) \setminus \{0\}$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von $\sim$, d.h. es gibt für jedes $y \in B_1(0) \setminus \{0\}$ genau ein $x \in M$ mit $x \sim y$ (um die Existenz einer solchen Menge zu garantieren wird das Auswahlaxiom genutzt). Für alle $R \in G$ sei $M_R = RM = \{Rx : x \in M\}$. Es ist dann $B_1(0) \setminus \{0\} = \dot{\bigcup}_{R \in G} M_R$:
Es ist $M_R \cap M_S = \emptyset$ für $R, S \in G$ mit $R \neq S$, denn gibt es ein $y \in B_1(0) \setminus \{0\}$ mit $y \in M_R \cap M_S$, so ist $y = Rx$ und $y = Sx'$ mit $x, x' \in M$. Dann ist aber $Rx = Sx'$, also $x' = S^{-1}Rx$ und somit $x' \sim x$. Nach der Konstruktion von M ist daher $x = x'$, und damit $x = S^{-1}Rx$, also $S^{-1}R = I$ und somit auch $R = S$, im Widerspruch zu $R \neq S$. Andererseits gibt es für jedes $y \in B_1(0) \setminus \{0\}$ nach der Konstruktion von M ein $x \in M$ mit $y \sim x$, so dass also $y = Sx \in M_S \subseteq \bigcup_{R \in G} M_R$ für ein $S \in G$.
Angenommen es gibt eine Abbildung μ mit den geforderten Eigenschaften. Es ist dann insbesondere $\mu(M_R) = \mu(RM) = \mu(M)$ für alle $R \in G \subseteq SO(2)$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} 1 = \mu(B_1(0) \setminus \{0\}) &= \mu\left(\dot{\bigcup_{R \in G}} M_R\right) \\ &= \sum_{R \in G} \mu(M_R) = \sum_{R \in G} \mu(M) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu(M) = 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned}$$

was in jedem Fall ein Widerspruch ist. Es kann also keine solche Funktion μ geben.

d)

Es sei für alle $B \in B_1(0)$

$$\mu(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es sind dann alle geforderten Eigenschaften erfüllt:
Es ist $\mu(B_1(0)) = 1$, da $0 \in B_1(0)$.
Für jede Folge disjunkter Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $B_1(0)$ gilt: Ist $0 \notin A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie auch $0 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, also

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Gibt es hingegen ein $m \in \mathbb{N}$ mit $0 \in A_m$, so folgt aus der Disjunktheit der A_n, dass $0 \notin A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq m$; es ist jedoch $0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, und damit

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

μ erfüllt also die geforderte σ-Additivität.
Da für alle $R \in SO(2)$ die Matrix R einen Vektorraumautomorphismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschreibt, ist $\operatorname{Ker} R = \{0\}$, also $0 \in RA \Leftrightarrow 0 \in A$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Es ist daher $\mu(RA) = 1 \Leftrightarrow 0 \in RA \Leftrightarrow 0 \in A \Leftrightarrow \mu(A) = 1$, also $\mu(RA) = \mu(A)$ für alle $R \in SO(2)$ und $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (man bemerke, dass diese Äquivalenz bereits eine Gleichheit impliziert, da μ nur zwei mögliche Werte annehmen kann).