

# Analysis 3 – Übung 2

Jendrik Stelzner

30. Oktober 2013

## Aufgabe 1. (Monotone Klassen und $\sigma$ -Algebren)

a)

Angenommen,  $\mathcal{A}$  ist eine Algebra. Nach der Definition einer Algebra ist damit  $X \in \mathcal{A}$  und für alle  $A \in \mathcal{A}$  auch  $A^c \in \mathcal{A}$ ; es muss also nur noch die  $\sigma$ -Additivität gezeigt werden.

Sei hierfür  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $\mathcal{A}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $B_n := \bigcup_{k=0}^n A_k$ . Es ist offenbar  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Da  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge auf  $\mathcal{A}$  ist, und  $\mathcal{A}$  eine monotone Klasse, gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}.$$

Dies zeigt die  $\sigma$ -Additivität.

Ist andererseits  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra, so ist  $\mathcal{A}$  auch eine Algebra, da jede  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  eine Algebra auf  $X$  ist (bekannt aus der Vorlesung).

b)

Wie aus der Vorlesung bekannt ist jede  $\sigma$ -Algebra eine monotone Klasse. Damit ist  $\sigma(\mathcal{A})$  eine monotone Klasse, die  $\mathcal{A}$  enthält. Da  $m(\mathcal{A})$  die kleinste monotone Klasse ist, die  $\mathcal{A}$  enthält, ist daher  $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ .

Um zu zeigen, dass auch  $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ , genügt es zu zeigen, dass  $m(\mathcal{A})$  eine  $\sigma$ -Algebra ist: Da  $\sigma(\mathcal{A})$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra ist, die  $\mathcal{A}$  enthält, ist dann  $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ . Da  $m(\mathcal{A})$  eine monotone Klasse ist, genügt es nach **Aufgabenteil a)** zu zeigen, dass  $m(\mathcal{A})$  eine Algebra ist.

Es ist  $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$ , da  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist. Es muss noch die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{A}$  unter Komplementbildung und endlichen Vereinigungen gezeigt werden.

Es sei  $\mathcal{K} := \{M \in \mathcal{P}(X) : M^c \in m(\mathcal{A})\}$ .  $\mathcal{K}$  ist eine monotone Klasse: Ist  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge in  $\mathcal{K}$ , so ist  $(K_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$  eine fallende Folge in  $m(\mathcal{A})$ , und somit

$$\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n^c \in m(\mathcal{A}),$$

da  $m(\mathcal{A})$  eine monotone Klasse ist, also  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \in \mathcal{K}$ . Ist  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine fallende Folge in  $\mathcal{K}$ , so ist  $(L_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge in  $m(\mathcal{A})$ , und somit

$$\left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n^c \in m(\mathcal{A}),$$

da  $m(\mathcal{A})$  eine monotone Klasse ist, also  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n \in \mathcal{K}$ . Dies zeigt, dass  $\mathcal{K}$  eine monotone Klasse ist.

Da  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist, ist  $A^c \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ , also  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$ . Da  $\mathcal{K}$  eine monotone Klasse ist, die  $\mathcal{A}$  enthält, ist daher  $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{K}$ . Also ist  $A^c \in m(\mathcal{A})$  für alle  $A \in m(\mathcal{A})$ . Dies zeigt die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{A}$  unter Komplementbildung.

Für  $D \in m(\mathcal{A})$  sei  $\mathcal{V}_D := \{M \in P(X) : D \cup M \in m(\mathcal{A})\}$ . Auch  $\mathcal{V}_D$  ist eine monotone Klasse: Ist  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge auf  $\mathcal{V}_D$ , so ist  $(V_n \cup D)_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge auf  $m(\mathcal{A})$ , und somit

$$\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) \cup D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \cup D) \in m(\mathcal{A}),$$

da  $m(\mathcal{A})$  eine monotone Klasse ist, und daher  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \mathcal{V}_D$ . Ist  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine fallende Folge auf  $\mathcal{V}_D$ , so  $(W_n \cup D)$  eine fallende Folge auf  $m(\mathcal{A})$ , und somit

$$\left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n \right) \cup D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (W_n \cup D) \in m(\mathcal{A}),$$

da  $m(\mathcal{A})$  eine monotone Klasse ist, und daher  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n \in \mathcal{V}_D$ . Dies zeigt, dass  $\mathcal{V}_D$  eine monotone Klasse ist.

Sei  $A \in \mathcal{A}$ . Für  $B \in \mathcal{A}$  ist  $A \cup B \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$ , da  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist, und daher  $B \in \mathcal{V}_A$ , wegen der Beliebigkeit von  $B$  also  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_A$ . Da  $m(\mathcal{A})$  die kleinste monotone Klasse ist, die  $\mathcal{A}$  enthält, ist daher  $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}_A$ . Also ist  $A \cup B \in m(\mathcal{A})$  für alle  $B \in m(\mathcal{A})$  und  $A \in \mathcal{A}$ . Dies bedeutet auch, dass  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_B$  für alle  $B \in m(\mathcal{A})$ . Da  $m(\mathcal{A})$  die kleinste monotone Klasse ist, die  $\mathcal{A}$  enthält, ist daher  $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}_B$  für alle  $B \in m(\mathcal{A})$ . Das bedeutet gerade, dass  $A \cup B \in m(\mathcal{A})$  für alle  $A, B \in m(\mathcal{A})$ . Dies zeigt die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Schnitte.

## Aufgabe 2. (Ein Zugang zur Borelschen $\sigma$ -Algebra)

a)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen beliebig aber fest. Es gilt zu zeigen, dass  $U \in F_\sigma$ , d.h. dass es eine abzählbar unendliche Familie  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt, so dass  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

Sei  $x \in U$ . Da  $U$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Es sei  $r(x) \in \mathbb{Q}$  mit  $0 < r(x) < \frac{\varepsilon}{3}$  und  $q(x) \in \mathbb{Q}^n$  mit  $q(x) \in B_{r(x)}(x)$  (solche  $r(x)$  und  $q(x)$  existieren, dass  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$ , bzw.  $\mathbb{Q}^n$  dicht in  $\mathbb{R}^n$  liegt). Aufgrund der Symmetrie einer Metrik ist nun  $x \in \overline{B_{r(x)}(q(x))}$ . Auch ist  $\overline{B_{r(x)}(q(x))} \subseteq U$ , denn für alle  $y \in \overline{B_{r(x)}(q(x))}$  ist nach der Dreiecksungleichung

$$|y - x| \leq |y - q(x)| + |q(x) - x| \leq 2r(x) < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

also  $y \in B_\varepsilon(x) \subseteq U$ .

Da nun

$$\{B_{r(x)}(q(x)) : x \in U\} \subseteq \{B_r(q) : r \in \mathbb{Q}, r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$$

abzählbar ist, gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so dass

$$V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_{r(x_n)}(q(x_n))} = \bigcup_{x \in U} \overline{B_{r(x)}(q(x))}.$$

Es gilt nun, dass  $U = V$ : Für alle  $x \in U$  gilt

$$x \in \overline{B_{r(x)}(q(x))} \subseteq \bigcup_{x \in U} \overline{B_{r(x)}(q(x))} = V$$

und für alle  $x \in V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r(x_n)}(q(x_n))$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$x \in \overline{B_{r(x_n)}(q(x_n))} \subseteq U.$$

Das zeigt, dass  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_{r(x_n)}(q(x_n))} \in F_\sigma$ .

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen. Da  $K$  abgeschlossen ist, ist  $K^c$  offen. Wie eben gezeigt gibt es daher eine Folge abgeschlossener Mengen  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $K^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Insbesondere ist  $K_n^c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  offen, und damit

$$K = (K^c)^c = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n^c \in G_\delta.$$

**b)**

$$\sigma(\mathcal{G}_n) = \delta(\mathcal{G}_n)$$

Da bekanntermaßen für alle  $U, V \in \mathcal{G}_n$  auch  $U \cap V \in \mathcal{G}_n$ , ist, wie aus der Vorlesung bekannt,  $\sigma(\mathcal{G}_n) = \delta(\mathcal{G}_n)$ .

$$\sigma(\mathcal{G}_n) \supseteq m(\mathcal{G}_n)$$

Da  $\mathcal{G}_n \subseteq \sigma(\mathcal{G}_n)$  und  $\sigma(\mathcal{G}_n)$  als  $\sigma$ -Algebra eine monotone Klasse ist, und  $m(\mathcal{G}_n)$  die kleinste monotone Klasse ist, die  $\mathcal{G}_n$  enthält, ist auch  $\sigma(\mathcal{G}_n) \supseteq m(\mathcal{G}_n)$ .

$$m(\mathcal{G}_n) \supseteq F_\sigma \cap G_\delta$$

Für  $A \in F_\sigma \cap G_\delta$  ist  $A \in G_\delta$ , es gibt also eine Folge  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{G}_n$  mit  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $B_n := \bigcap_{k=1}^n U_k$ ;  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine fallende Folge auf  $\mathcal{G}_n$ , da endliche Schnitte offener Mengen offen sind, und es gilt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = A$ . Da  $m(\mathcal{G}_n)$  eine monotone Klasse mit  $\mathcal{G}_n \subseteq m(\mathcal{G}_n)$  ist, ist  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch eine fallende Folge auf  $\mathcal{G}_n$ . Also ist  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in m(\mathcal{G}_n)$ . Das zeigt, dass  $F_\sigma \cap G_\delta \subseteq m(\mathcal{G}_n)$ .

$$F_\sigma \cap G_\delta \supseteq \sigma(\mathcal{G}_n)$$

Wegen der Minimalitätseigenschaft von  $\sigma(\mathcal{G}_n)$  genügt es zu zeigen, dass  $F_\sigma \cap G_\delta$  eine  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{G}_n \in F_\sigma \cap G_\delta$  ist.

Wie aus dem Hinweis bekannt ist  $F_\sigma \cap G_\delta$  bereits eine Algebra, es genügt also die Abgeschlossenheit bezüglich abzählbarer Vereinigungen zu zeigen. Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $F_\sigma \cap G_\delta$ . Da  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch eine Folge auf  $F_\sigma$  ist, gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge  $(K_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  von abgeschlossenen Mengen von  $\mathbb{R}^n$  mit  $A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k^n$ . Es ist daher

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k^n = \bigcup_{n, k \in \mathbb{N}} K_k^n \in F_\sigma.$$

Da  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch eine Folge auf  $G_\delta$  ist, gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge  $(U_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  von offenen Mengen von  $\mathbb{R}^n$  mit  $A_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k^n$ . Es ist daher auch

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k^n \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_k^n}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n} \in G_\delta.$$

Also ist  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F_\sigma \cap G_\delta$ .

Dass  $\mathcal{G}_n \subseteq F_\sigma \cap G_\delta$  folgt daraus, dass für alle  $U \in \mathcal{G}_n$ , wie in Aufgabenteil a) gezeigt,  $U \in F_\sigma$ , und auch  $U = U \cap \bigcap_{n \geq 1} \mathbb{R}^n \in G_\delta$ .

### Aufgabe 3.

a)

Sei  $X = (0, 1)$ . Wie aus der Vorlesung bekannt ist

$$\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty] \text{ mit } \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß auf  $(X, \mathcal{P}(X))$ . Für die fallende Folge  $(A_n)_{n \geq 1}$  mit  $A_n := (0, \frac{1}{n})$  ist jedoch

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \infty = \infty.$$

b)

**Bemerkung.** Sei  $\mu$  ein Maß auf  $(X, \mathcal{A})$ . Dann ist für alle  $c > 0$

$$\mu' : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty] \text{ mit } \mu'(A) = c\mu(A)$$

ein Maß auf  $(X, \mathcal{A})$ .

*Beweis.* Es ist  $\mu'(\emptyset) = c \cdot 0 = 0$ . Für eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  disjunkter Mengen auf  $\mathcal{A}$  ist

$$\mu'\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = c \cdot \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = c \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c\mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A_n).$$

□

Für alle  $n \geq 1$  ist

$$\mu_n : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty] \text{ mit } \mu_n(A) = \begin{cases} \frac{|A|}{n} & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

als skalares Vielfaches des Zählmaßes ( $c = \frac{1}{n}$ ) ein Maß auf  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ : Auch existiert für alle  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\mu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist jedoch  $\mu$  kein Maß auf  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ , da  $\mu$  wegen

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right) = \mu(\mathbb{N}) = \infty \neq 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{n\}).$$

nicht  $\sigma$ -additiv ist.

c)

Es sei  $X := \{1, 2\}$  und  $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ . Es sei  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty)$  definiert als  $\mu(\emptyset) := 0$ ,  $\mu(\{1\}) := 1$ ,  $\mu(\{2\}) := -1$  und  $\mu(\{1, 2\}) := 0$ . Offenbar erfüllt  $\mu$  die geforderten Eigenschaften auf  $(X, \mathcal{A})$ . Es ist aber  $|\mu|$  kein Maß auf  $(X, \mathcal{A})$ , da

$$|\mu|(\{1, 2\}) = 0 \neq 2 = |\mu(\{1\})| + |\mu(\{2\})| = |\mu|(\{1\}) + |\mu|(\{2\}),$$

$|\mu|$  also nicht endlich additiv ist.