Analysis III
5. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

20. November 2013

Aufgabe 1. (Transformationsregel des Lebesguemaßes)

Aufgabe 2. (Vervollständigung von Maßen)

a)

Man bemerke, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich μ eine Nullmenge ist. Da es für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $A = \emptyset \cup B$ oder $A = \{0\} \cup \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, ist $\mathcal{A}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, denn $\emptyset, \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

b)

Es sei

$$\tilde{\mathcal{A}_0} := \bigcup_{A \subseteq \mathbb{R}^2} \{A \cup (0 \times \mathbb{R}), A \setminus (0 \times \mathbb{R})\}.$$

$\tilde{\mathcal{A}_0}$ enthält genau die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die $0 \times \mathbb{R}$ ganz oder gar nicht beinhalten. Es gilt $\tilde{\mathcal{A}_0} = \mathcal{A}$.
Sei $A \in \tilde{\mathcal{A}_0}$. Ist $(0,0) \notin A$, so ist $A = \emptyset \cup A$, wobei $\emptyset \in \mathcal{A}$ und A in der Nullmenge $\mathbb{R}^2 \setminus (0 \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \in \mathcal{A}$ enthalten ist, also $A \in \mathcal{A}_0$. Ist $(0,0) \in A$, so ist $A = (0 \times \mathbb{R}) \cup (A \setminus (0 \times \mathbb{R}))$ analog in $\mathcal{A}_0$ enthalten. Also ist $\tilde{\mathcal{A}_0} \subseteq \mathcal{A}_0$.
Sei $A \in \mathcal{A}_0$. Es gibt es $B \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $N \subseteq M$ für eine Nullmenge $M \in \mathcal{A}$ sodass $A = B \cup N$. Da M ein Nullmenge ist, ist $(0,0) \notin M$, also $(0 \times \mathbb{R}) \cap M = \emptyset$. Daher ist $(0,0) \in A$ genau dann wenn $(0,0) \in B$. Dies gilt genau dann, wenn $(0 \times \mathbb{R}) \subseteq B$, und genau dann nicht, wenn $(0 \times \mathbb{R}) \cap B = \emptyset$. Es ist also $(0 \times \mathbb{R})$ entweder ganz oder gar nicht in A, und daher $A \in \tilde{\mathcal{A}_0}$. Es ist also $\mathcal{A}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{A}_0}$.

Aufgabe 3. (Fast stetige Funktionen)

a)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Da N abzählbar ist, ist $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (Jede abzählbare Menge A lässt sich als

$$A = \bigcup_{a \in A} [a-1, a] \cap [a, a+1]$$

darstellen.) Es ist also auch $M := \mathbb{R}^n \setminus N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition von N ist $f_{|M} : M \to \mathbb{R}^n$ stetig. Es ist daher

$$A := \{x \in M : f_{|M}(x) \leq t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

da stetige Funktionen immer messbar sind. Da N abzählbar ist, ist es auch

$$N' := \{x \in N : f(x) \leq t\},$$

also $N' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Daher ist auch

$$\{x \in N : f(x) \leq t\} = A \cup N' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

also f Borell-messbar.

b)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest, und $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < t\}$. Ist $A = \mathbb{R}$, so ist A Borell-messbar. Ansonsten ist A ein Intervall der Form (a, ∞) oder $[a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Auch in diesen Fällen ist A Borell-messbar.

c)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Da $\lambda(N) = 0$ und das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_\lambda)$ vollständig ist, ist $N \in \mathcal{M}_\lambda$. Da $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_\lambda$ ist daher auch $M = \mathbb{R}^n \setminus N \in \mathcal{M}_\lambda$. Nach Definition ist $f_{|M}$ stetig, also

$$A := \{x \in M : f_{|M}(x) \leq t\} \in \mathcal{M}_\lambda,$$

Borell- und damit auch Lebesgue-messbar ist. Für

$$N' := \{x \in N : f(x) \leq t\}$$

ist $N' \subseteq N$, wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes also auch $\lambda(N') \in \mathcal{M}_\lambda$. Damit ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\} = A \cup N' \in \mathcal{M}_\lambda,$$

also f Lebesgue-messbar.

d)

Es genügt zu zeigen, dass $\overline{A_{2\varepsilon}} \subseteq A_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Denn dann ist

$$N = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} A_q \supseteq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_{2q}} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_q} \supseteq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} A_q, = N$$

also

$$N = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_q} \in F_\sigma.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es ist klar, dass $A_{2\varepsilon} \subseteq A_\varepsilon$. O.b.d.A sei $a \in \partial A_{2\varepsilon}$ und $\delta := \limsup_{y \to a} |f(y) - f(a)|$ (gibt es kein solches a, so ist nichts mehr zu zeigen). Angenommen, es ist $\delta < \varepsilon$. Dann gibt es ein $\omega > 0$, so dass $|f(y) - f(a)| < \delta$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|a - y| < \omega$. Da $a \in \partial A_{2\varepsilon}$ gibt es ein $x \in A_{2\varepsilon}$ mit $|x - a| < \omega$. Es ist

$$\limsup_{y \to x} |f(y) - f(x)| \leq \limsup_{y \to x} |f(y) - f(a)| + \limsup_{y \to x} |f(a) - f(x)| < 2\delta < 2\varepsilon,$$

im Widerspuch zu $x \in A_{2\varepsilon}$. Also muss $\delta \geq \varepsilon$, und somit $a \in A_\varepsilon$.

Aufgabe 4. (Reguläre Maße)

a)

Sei $A \in B(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest.

(ii) $\Rightarrow$ (iv)

Es gibt eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A^c \subseteq U$ und

$$\mu(U) \leq \mu(A^c) + \varepsilon.$$

Es ergibt sich wegen der Endlichkeit von μ, dass

$$\mu(U^c) = \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(U) \geq \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(A^c) - \varepsilon = \mu(A) - \varepsilon.$$

Da $U^c \subseteq A$ abgeschlossen ist, und $\varepsilon > 0$ beliebig, zeigt dies (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $C \subseteq A^c$ abgeschlossen mit

$$\mu(C) \geq \mu(A^c) - \varepsilon.$$

Es ist dann wegen der Endlichkeit von μ

$$\mu(C^c) = \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(C) \leq \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(A^c) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon.$$

Da $C^c \supseteq A$ offen ist, und $\varepsilon > 0$, zeigt dies (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Da jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ auch abgeschlossen ist, gilt

$$\begin{aligned} A &= \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\} \\ &\leq \sup\{\mu(K) : C \subseteq A, C \text{ abgeschlossen}\} \leq A, \end{aligned}$$

also

$$A = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ abgeschlossen}\}.$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii)

Es gibt ein $C \subseteq A$ abgeschlossen mit $\mu(C) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu(A)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$C_k := C \cap \overline{B_0(k)}.$$

C_k ist für alle k abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Da $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt

$$\lim_{k \to \infty} \mu(C_k) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k\right) = \mu(C).$$

Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C_N) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu(C)$. Da daher

$$\mu(C_N) + \varepsilon \geq \mu(C) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu(A),$$

und $C_N \subseteq C \subseteq A$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, ist, folgt (iii) aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$.

b)

Es sei
$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \text{(ii) und (iv) gelten für } A\}.$$
$\mathcal{A}$ bildet eine σ-Algebra.
Es ist klar, dass $\mathbb{R}^n$ (ii) und (iv) erfüllt.
Für $A \in \mathcal{A}$ gilt (ii), d.h. es gibt für beliebiges aber festes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supseteq A$ mit $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$. Für A^c gilt dann, dass $U^c \subseteq A^c$ eine abgeschlossene Menge mit

$$\mu(U^c) = \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(U) \geq \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(A) - \varepsilon = \mu(A^c) - \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass (iv) für A^c gilt. Da (ii) und (iv) äquivalent sind, ist daher auch $A^c \in \mathcal{A}$.
Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen mit $A_k \in \mathcal{A}$ für alle k und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es gibt für alle k eine abgeschlossene Menge $C_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $C_k \subseteq A_k$ und

$$\mu(A_k \setminus C_k) = \mu(A_k) - \mu(C_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Es ist daher
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k =: C \subseteq A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$
eine abgeschlossene Teilmenge mit

$$A \setminus C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \setminus C_k).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\mu(A) - \mu(C) = \mu(A \setminus C) &\leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \setminus C_k\right) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k \setminus C_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon,\end{aligned}$$

also $\mu(A) \leq \mu(C) + \varepsilon$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ erfüllt A daher (iv), also auch (ii), ist also in $\mathcal{A}$ enthalten.
Trivialerweise erfüllt jede offene Menge Bedingung (ii), und damit auch (iv). Also sind alle offenen Mengen in $\mathcal{A}$ enthalten. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die kleinste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft ist, muss $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}$. Da nach Definition $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist daher $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}$. Es erfüllen also alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Bedingungen (ii) und (iv), also auch (iii). Da Bedingung (i) direkt aus der Endlichkeit von μ folgt, ist μ daher regulär.