

Analysis 3 – Übung 1

Jendrik Stelzner

22. Oktober 2013

Aufgabe 1. (Push-Forward und Pull-Back von σ -Algebren)

a)

Es gilt, die Axiome einer σ -Algebra für $f^*[\mathcal{A}]$ zu überprüfen.

Da \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X ist, ist $X \in \mathcal{A}$, also $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ und somit $Y \in f^*[\mathcal{A}]$. Für $B \in f^*[\mathcal{A}]$ ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, und da \mathcal{A} eine σ -Algebra ist somit auch $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}$, also $B^c \in f^*[\mathcal{A}]$. Für eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $f^*[\mathcal{A}]$ ist $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da \mathcal{A} unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, und daher $f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, und daher auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in f^*[\mathcal{A}]$.

Damit sind alle Axiome einer σ -Algebra für $f^*[\mathcal{A}]$ erfüllt.

b)

Es gilt, die Axiome einer σ -Algebra für $f_*[\mathcal{B}]$ zu überprüfen.

Da \mathcal{B} eine σ -Algebra auf Y ist, ist $Y \in \mathcal{B}$, und somit $X = f^{-1}(Y) \in f_*[\mathcal{B}]$. Für $A \in f_*[\mathcal{B}]$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $f^{-1}(B) = A$; da \mathcal{B} eine σ -Algebra ist, ist damit auch $B^c \in \mathcal{B}$ und somit $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in f_*[\mathcal{B}]$. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf $f_*[\mathcal{B}]$, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $B_n \in \mathcal{B}$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$; da \mathcal{B} als σ -Algebra ist, gilt damit auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$, und somit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \in f_*[\mathcal{B}]$.

$f_*[\mathcal{B}]$ erfüllt also alle Axiome einer σ -Algebra.