

# Analysis 3 — Übung 1

Jendrik Stelzner

24. Oktober 2013

## Aufgabe 1. (Push-Forward und Pull-Back von $\sigma$ -Algebren)

a)

Es gilt, die Axiome einer  $\sigma$ -Algebra für  $f^*[\mathcal{A}]$  zu überprüfen.

Da  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  ist, ist  $X \in \mathcal{A}$ , also  $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$  und somit  $Y \in f^*[\mathcal{A}]$ . Für  $B \in f^*[\mathcal{A}]$  ist  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , und da  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist somit auch  $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}$ , also  $B^c \in f^*[\mathcal{A}]$ . Für eine Folge  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $f^*[\mathcal{A}]$  ist  $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und da  $\mathcal{A}$  unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, ist daher auch  $f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ , und somit auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in f^*[\mathcal{A}]$ .

Damit sind alle Axiome einer  $\sigma$ -Algebra für  $f^*[\mathcal{A}]$  erfüllt.

b)

Es gilt, die Axiome einer  $\sigma$ -Algebra für  $f_*[\mathcal{B}]$  zu überprüfen.

Da  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  ist, ist  $Y \in \mathcal{B}$ , und somit  $X = f^{-1}(Y) \in f_*[\mathcal{B}]$ . Für  $A \in f_*[\mathcal{B}]$  gibt es ein  $B \in \mathcal{B}$  mit  $f^{-1}(B) = A$ ; da  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist auch  $B^c \in \mathcal{B}$  und somit  $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in f_*[\mathcal{B}]$ . Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $f_*[\mathcal{B}]$ , so gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $B_n \in \mathcal{B}$  mit  $A_n = f^{-1}(B_n)$ ; da  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$ , und somit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \in f_*[\mathcal{B}]$ .  $f_*[\mathcal{B}]$  erfüllt also alle Axiome einer  $\sigma$ -Algebra.

## Aufgabe 2. (Gegenbeispiele)

a)

Wie in **Aufgabe 3** gezeigt handelt es sich bei  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  und  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  um  $\sigma$ -Algebren auf  $\{1, 2, 3\}$ , während  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  keine  $\sigma$ -Algebra auf  $\{1, 2, 3\}$  ist.

b)

Man betrachte

$$\mathcal{R} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

$\mathcal{R}$  ist eine Algebra auf  $\mathbb{N}$ : Offenbar ist  $\emptyset \in \mathcal{R}$ . Auch folgt aus der Definition direkt, dass  $A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{R}$  für alle  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Seien  $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ ; per Fallunterscheidung ergibt

sich, dass auch  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$ : Sind  $A_1$  und  $A_2$  beide endlich, so ist es auch  $A_1 \cup A_2$ , weshalb  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$ . Ansonsten gibt es ein  $i \in \{1, 2\}$ , so dass  $A_i^c$  endlich ist, wobei durch passende Nummerierung o.B.d.A. davon ausgegangen werden kann, dass  $i = 1$ . Es ist dann auch  $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c \subseteq A_1^c$  endlich, also  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$ . Dies zeigt, dass  $\mathcal{R}$  eine Algebra ist.

$\mathcal{R}$  ist jedoch keine  $\sigma$ -Algebra, denn für

$$2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{2n\}}_{\in \mathcal{R}},$$

sind  $2\mathbb{N}$  und  $(2\mathbb{N})^c = 2\mathbb{N} + 1 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade}\}$  beide unendlich, und daher  $2\mathbb{N} \notin \mathcal{R}$ , was der  $\sigma$ -Additivität einer  $\sigma$ -Algebra widerspricht.

c)

Aus der Aufgabenstellung geht nicht klar hervor, ob  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  sein sollte, oder ob es auch ausreicht, dass es ein  $Y \subseteq X$  gibt, so dass  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  ist.

Ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  gemeint, so betrachte man  $X = \{1\}$  und  $\mathcal{B} = \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Offensichtlich ist  $\mathcal{B}$  unter abzählbaren Schnitten und Vereinigungen abgeschlossen (sogar unter beliebigen), da aber  $X \notin \mathcal{B}$  ist  $\mathcal{B}$  keine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

Sofern es genügt, dass  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf einer Teilmenge  $Y \subseteq X$  ist, so betrachte man  $X = \{1, 2\}$  und  $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ . Da zwar  $\{1\} \in \mathcal{B}$ , aber  $\{1\}^c = \{2\} \notin \mathcal{B}$  ist  $\mathcal{B}$  keine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Für alle  $Y \subset X$  ist allerdings  $\{1, 2\} \notin Y$ , also  $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{P}(Y)$  und  $\mathcal{B}$  somit auch keine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ .

d)

Man betrachte  $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}$  mit  $f(1) = f(2) = 4$  und  $f(3) = 5$ . Wie in Aufgabe 3 gezeigt ist  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\{1, 2, 3\}$ . Es ist aber

$$\mathcal{B} := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{\emptyset, \{4\}, \{4, 5\}\}$$

keine  $\sigma$ -Algebra auf  $\{4, 5\}$ , da  $\{4\} \in \mathcal{B}$  aber  $\{4\}^c = \{5\} \notin \mathcal{B}$ .

### Aufgabe 3. (Die $\sigma$ -Algebren auf einer dreielementigen Menge)

a)

Es ist

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c, \{1, 2, 3\}\},$$

wobei  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$  alle einelementigen, und  $\{1\}^c, \{2\}^c, \{3\}^c$  alle zweielementigen Teilmengen von  $\{1, 2, 3\}$  sind. Die verschiedenen  $\sigma$ -Algebren auf  $\{1, 2, 3\}$  lassen sich durch die jeweilige Anzahl der beinhalteten einelementigen Mengen klassifizieren. Sei im Folgenden  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\{1, 2, 3\}$ . Man bemerke, dass aufgrund der Abgeschlossenheit von  $\mathcal{A}$  unter Komplementbildung für alle  $x \in \{1, 2, 3\} : \{x\} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \{x\}^c \in \mathcal{A}$ .

Enthält  $\mathcal{A}$  keine einelementige Menge, so enthält  $\mathcal{A}$  nach der Bemerkung auch keine zweielementige Menge, es ist also  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$ .

Für alle  $x \in \{1, 2, 3\}$  gibt es die  $\sigma$ -Algebra  $\{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, \{1, 2, 3\}\}$  auf  $\{1, 2, 3\}$  (bekannt aus der Vorlesung). Dies sind die einzigen  $\sigma$ -Algebren, die genau eine einelementige Menge enthalten: Ist  $\{x\} \in \mathcal{A}$  für genau ein  $x \in \{1, 2, 3\}$ , so ist auch  $\{x\}^c \in \mathcal{A}$ . Für jede zweielementige Menge  $\{y\}^c \in \mathcal{A}$  muss auch  $\{y\} \in \mathcal{A}$ , also  $y = x$  und damit  $\{y\}^c = \{x\}^c$ . Also enthält  $\mathcal{A}$  neben  $\{x\}^c$  keine weiteren zweielementigen Mengen und es ist  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, \{1, 2, 3\}\}$ .

Gilt  $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{A}$  für zwei verschiedene  $x, y \in \{1, 2, 3\}$ , so ist auch  $\{x, y\}^c = (\{x\} \cup \{y\})^c \in \mathcal{A}$ , also ist  $\{z\} \in \mathcal{A}$  für alle  $z \in \{1, 2, 3\}$ . Es gibt also keine  $\sigma$ -Algebra auf  $\{1, 2, 3\}$  die genau zwei einelementige Mengen beinhaltet.

Ist  $\{x\} \in \mathcal{A}$  für alle  $x \in \{1, 2, 3\}$ , so ist wegen

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \sigma(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$$

bereits  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ .

Die einzigen  $\sigma$ -Algebren auf  $\{1, 2, 3\}$  sind somit  $\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}, \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$  sowie  $\{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, \{1, 2, 3\}\}$  für  $x \in \{1, 2, 3\}$ .

## Aufgabe 4. (Ein Gegenbeispiel von Vitali in zwei Dimensionen)

a)

Die Abbildung

$$A : \mathbb{Q} \rightarrow SO(2), q \mapsto \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenmonomorphismus von  $(\mathbb{Q}, +)$  nach  $(SO(2), \cdot)$ : Für  $p, q \in \mathbb{Q}$  ist

$$\begin{aligned} A(p)A(q) &= \begin{pmatrix} \cos p & -\sin p \\ \sin p & \cos p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos p \cos q - \sin p \sin q & -\cos p \sin q - \sin p \cos q \\ \sin p \cos q + \cos p \sin q & -\sin p \sin q + \cos p \cos q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(p+q) & -\sin(p+q) \\ \sin(p+q) & \cos(p+q) \end{pmatrix} = A(p+q), \end{aligned}$$

also ist  $A$  ein Gruppenhomomorphismus.  $A$  ist injektiv, denn für  $p, q \in \mathbb{Q}$  mit  $A(p) = A(q)$  muss  $\cos p = \cos q$  und  $\sin p = \sin q$  gelten, also

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p = \cos q + i \sin q = e^{iq}.$$

Da die Abbildung  $[0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto e^{i\varphi}$  bijektiv ist, und erweitert auf  $\mathbb{R}$   $(2\pi)$ -periodisch ist, muss  $p - q = 2n\pi$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ ; wäre  $n \neq 0$ , so wäre  $\pi = \frac{p-q}{2n} \in \mathbb{Q}$ , was bekanntermaßen nicht gilt. Also muss  $n = 0$  und damit  $p = q$ .

Da  $A$  ein Gruppenmonomorphismus ist, ist

$$G := \text{Im } A = \left\{ \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} : q \in \mathbb{Q} \right\}$$

eine abzählbar unendliche Untergruppe von  $SO(2)$ .

b)

Die Relation ist reflexiv, da  $A(0) = I \in G$  und  $\frac{x}{|x|} = I \frac{x}{|x|}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Die Relation ist symmetrisch, denn ist  $x \sim y$ , so gibt es ein  $R \in G$  mit  $\frac{x}{|x|} = R \frac{y}{|y|}$ .

Da  $G$  eine Gruppe ist, ist auch  $R^{-1} \in G$ , und da  $R^{-1} \frac{x}{|x|} = R^{-1} R \frac{y}{|y|} = I \frac{y}{|y|} = \frac{y}{|y|}$ , gilt daher auch  $y \sim x$ .

Die Relation ist transitiv, denn ist  $x \sim y$  und  $y \sim z$ , so gibt es  $R, S \in G$  mit  $\frac{x}{|x|} = R \frac{y}{|y|}$  und  $\frac{y}{|y|} = S \frac{z}{|z|}$ . Da  $G$  eine Gruppe ist, ist auch  $RS \in G$ , und da  $\frac{x}{|x|} = R \frac{y}{|y|} = (RS) \frac{z}{|z|}$  folgt daher auch  $x \sim z$ .

c)

Da ich die bisher definierte Äquivalenzrelation  $\sim$  nicht mag, betrachte ich eine leicht abgeänderte Version; ich nenne diese ebenfalls  $\sim$ , da ich die Äquivalenzrelation aus **Aufgabenteil b)** nicht mehr nutzen werde, und  $\sim$  der praktischste Name ist:

Durch  $x \sim y :\Leftrightarrow$  es existiert  $R \in G : x = Ry$  wird auf  $B_1(0) \setminus \{0\}$  eine Äquivalenzrelation definiert. Der Beweis hierfür verläuft komplett analog zu **Aufgabenteil b)**. Dabei ist  $Rx \in B_1(0) \setminus \{0\}$  für alle  $R \in SO(2)$  und  $x \in B_1(0)$ , denn es ist  $0 < \|B\|_{\text{op}} \leq \|B\| = 1$  für alle  $B \in G$ , und damit  $\|Rx\| \leq \|x\| \leq 1$  für alle  $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$ , also  $R(B_1(0) \setminus \{0\}) \subseteq B_1(0) \setminus \{0\}$ . Insbesondere ist daher  $\bigcup_{R \in G} RA \subseteq B_1(0) \setminus \{0\}$  für alle  $A \subseteq B_1(0) \setminus \{0\}$ .

Sei nun  $M \subset B_1(0) \setminus \{0\}$  ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von  $\sim$ , d.h. es gibt für jedes  $y \in B_1(0) \setminus \{0\}$  genau ein  $x \in M$  mit  $x \sim y$  (um die Existenz einer solchen Menge zu garantieren wird das Auswahlaxiom genutzt). Für alle  $R \in G$  sei  $M_R = RM = \{Rx : x \in M\}$ . Es ist dann  $B_1(0) \setminus \{0\} = \bigcup_{R \in G} M_R$ :

Es ist  $M_R \cap M_S = \emptyset$  für  $R, S \in G$  mit  $R \neq S$ , denn gibt es ein  $y \in B_1(0) \setminus \{0\}$  mit  $y \in M_R \cap M_S$ , so ist  $y = Rx$  und  $y = Sx'$  mit  $x, x' \in M$ . Dann ist aber  $Rx = Sx'$ , also  $x' = S^{-1}Rx$  und somit  $x' \sim x$ . Nach der Konstruktion von  $M$  ist daher  $x = x'$ , und damit  $x = S^{-1}Rx$ , also  $S^{-1}R = I$  und somit auch  $R = S$ , im Widerspruch zu  $R \neq S$ . Andererseits gibt es für jedes  $y \in B_1(0) \setminus \{0\}$  nach der Konstruktion von  $M$  ein  $x \in M$  mit  $y \sim x$ , so dass also  $y = Sx \in M_S \subseteq \bigcup_{R \in G} M_R$  für ein  $S \in G$ .

Angenommen, es gibt eine Abbildung  $\mu$  mit den geforderten Eigenschaften. Es ist dann insbesondere  $\mu(M_R) = \mu(RM) = \mu(M)$  für alle  $R \in G$ . Es folgt, dass

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(B_1(0) \setminus \{0\}) = \mu\left(\bigcup_{R \in G} M_R\right) \\ &= \sum_{R \in G} \mu(M_R) = \sum_{R \in G} \mu(M) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu(M) = 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned}$$

was in jedem Fall ein Widerspruch ist. Es kann also keine solche Funktion  $\mu$  geben.

d)

Es sei für alle  $B \in B_1(0)$

$$\mu(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es sind dann alle geforderten Eigenschaften erfüllt:

Es ist  $\mu(B_1(0)) = 1$ , da  $0 \in B_1(0)$ .

Für jede Folge disjunkter Mengen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $B_1(0)$  gilt: Ist  $0 \notin A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\mu(A_n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  sowie auch  $0 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , also

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Gibt es hingegen ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $0 \in A_m$ , so folgt aus der Disjunktheit der  $A_n$ , dass  $0 \notin A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}, n \neq m$ ; es ist jedoch  $0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , und damit

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

$\mu$  erfüllt also die geforderte  $\sigma$ -Additivität.

Da für alle  $R \in SO(2)$  die Matrix  $R$  einen Vektorraumautomorphismus  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  beschreibt, ist  $\text{Ker } R = \{0\}$ , also  $0 \in RA \Leftrightarrow 0 \in A$  für alle  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ . Es ist daher  $\mu(RA) = 1 \Leftrightarrow 0 \in RA \Leftrightarrow 0 \in A \Leftrightarrow \mu(A) = 1$ , also  $\mu(RA) = \mu(A)$  für alle  $R \in SO(2)$  und  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  (man bemerke, dass die Äquivalenz eine Gleichheit in allen Fällen impliziert, da  $\mu$  nur zwei mögliche Werte annehmen kann).