

ANALYSIS III

3. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

3. November 2013

Betrachtet man zwei Mengen A und A' mit $A = B_1 \cup B_2$ und $A' = B'_1 \cup B'_2$ für $B_1, B_2 \subseteq A$ und $B'_1, B'_2 \subseteq A'$, so ist es einfach so sehen, dass

$$A \times A' = (B_1 \times B'_1) \cup (B_1 \times B'_2) \cup (B_2 \times B'_1) \cup (B_2 \times B'_2).$$

Diese Beobachtung wird von dem folgenden Lemma verallgemeinert:

Lemma 1: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen über einer Indexmenge I und

$$A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j^i$$

für eine Familie von Mengen $(B_j^i)_{j \in J_i}$ über einer Indexmenge J_i für alle $i \in I$. Dann gilt

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_j^i = \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Beweis des Lemmas: Sei $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. Für alle $i \in I$ gibt es wegen $a_i \in A_i$ ein $j_i \in J_i$ mit $a_i \in B_{j_i}^i$. Daher ist

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{j_i}^i \subseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i,$$

also ist

$$\prod_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Ist

$$(a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i,$$

so gibt es $(j_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} J_i$ mit $a_i \in B_{j_i}^i \subseteq A_i$ für alle $i \in I$, also $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. Daher ist

$$\prod_{i \in I} A_i \supseteq \bigcup_{(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i} \prod_{i \in I} B_{j_i}^i.$$

Die Disjunktheit der Vereinigung ergibt sich aus der paarweisen Disjunktheit der B_j^i , $j \in J_i$, für alle $i \in I$: Sind $(j_i)_{i \in I}, (j'_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} J_i$ so dass

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{j_i}^i \cap \prod_{i \in I} B_{j'_i}^i$$

existiert, so muss $a_i \in B_{j_i}^i$ und $a_i \in B_{j'_i}^i$ für alle $i \in I$. Also muss $B_{j_i}^i \cap B_{j'_i}^i \neq \emptyset$, und damit $j_i = j'_i$ für alle $i \in I$. \square

Aufgabe 1. (Volumen auf Quadern)

a)

Seien $q, Q \in \mathcal{Q}$ mit $q \subseteq Q$ beliebig aber fest. Es ist $Q = \prod_{i=1}^n [A_i, B_i]$ mit $A_i \leq B_i$ für $i = 1, \dots, n$, und $q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ mit $A_i \leq a_i \leq b_i \leq B_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dass $[a_i, b_i] \subseteq [A_i, B_i]$ folgt für $i = 1, \dots, n$ daher, dass sich aus $q \subseteq Q$ für die Projektion

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

ergibt, dass

$$[a_i, b_i] = \pi_i(q) \subseteq \pi(Q) = [A_i, B_i].$$

Mit Lemma 1 ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} Q &= \prod_{i=1}^n [A_i, B_i] = \prod_{i=1}^n \left(\underbrace{[A_i, a_i]}_{:= C_1^i} \cup \underbrace{[a_i, b_i]}_{:= C_2^i} \cup \underbrace{[b_i, B_i]}_{:= C_3^i} \right) \\ &= \bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1, 2, 3\}^n} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \end{aligned}$$

die disjunkte Vereinigung von 3^n Quadern $q_1, \dots, q_{3^n} \in \mathcal{Q}$ ist, wobei $q = \prod_{i=1}^n C_2^i$ einer von diesen ist. Aufgrund der Additivität von μ ist daher

$$\mu(Q) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^{3^n} q_i \right) = \sum_{i=1}^{3^n} \mu(q_i) \geq \mu(q),$$

was die Monotonie von μ zeigt.

b)

Wegen der Invarianz von μ kann für alle $Q \in \mathcal{Q}$ o.b.d.A. davon ausgegangen werden, dass $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i]$ mit $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $i = 1, \dots, n$. Auch folgt aus der Invarianz von μ bezüglich Transposition, der endlichen Additivität von μ und Lemma 1, dass für alle $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i] \in \mathcal{Q}$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$

$$\mu \left(\prod_{i=1}^n [0, m_i a_i] \right) = m_1 \cdots m_n \mu(Q),$$

da

$$\begin{aligned} \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, m_i a_i] \right) &= \mu \left(\prod_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} \underbrace{[(j-1)a_i, ja_i]}_{:= C_j^i} \right) \\ &= \mu \left(\bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left(\prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) \\ &= \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left(\prod_{i=1}^n [(c_i - 1)a_i, c_i a_i] \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu(Q) \\ &= m_1 \cdots m_n \mu(Q). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daher aus der Normierung, dass

$$\mu \left(\prod_{i=1}^n [0, m_i) \right) = \prod_{i=1}^n m_i \text{ für alle } m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i) \in \mathcal{Q}$ beliebig aber fest. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu \left(\prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) = m^n \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, a_i) \right) = m^n \mu(Q),$$

sowie wegen der Monotonie von μ auch

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor &= \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, \lfloor ma_i \rfloor) \right) \leq \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) \text{ und} \\ \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) &\leq \mu \left(\prod_{i=1}^n [0, \lceil ma_i \rceil) \right) = \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil, \end{aligned}$$

also für $m \geq 1$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor \leq \mu(Q) \leq \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil = \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m}. \quad (1)$$

Nun ist $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da

$$x - \frac{1}{m} = \frac{mx - 1}{m} \leq \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq \frac{mx}{m} = x$$

für alle $m \geq 1$ und daher

$$x \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq x,$$

also $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$. Analog ergibt sich, dass auch $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil mx \rceil}{m} = x$. Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_i &= \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} \leq \mu(Q) \text{ und} \\ \mu(Q) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} \leq \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} = \prod_{i=1}^n a_i, \end{aligned}$$

also $\mu(Q) = \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n (a_i - 0)$.

Aufgabe 2. (Nullmengen)

a)

Aus der Aufgabenstellung geht meiner Meinung nach nicht klar hervor, ob A als

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &:= \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \text{ oder als} \\ \tilde{A}_2 &:= \{x \in X : x \in M \text{ für unendlich viele } M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}\} \end{aligned}$$

definiert wird. Für den Beweis diesen Aufgabenteiles genügt es allerdings davon auszugehen, dass $A = \tilde{A}_1$, da $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_1$: Ist $x \in \tilde{A}_2$, so gibt es unendlich viele $M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x \in M$; insbesondere gibt es daher unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$. Man bemerke jedoch, dass im Allgemeinen $\tilde{A}_1 \subsetneq \tilde{A}_2$: Ist etwa $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstant mit $A_1 \neq \emptyset$, so ist $\tilde{A}_1 = A_1 \neq \emptyset$, aber $\tilde{A}_2 = \emptyset$.

Zunächst gilt es zu zeigen, dass A messbar ist, d.h. dass $A \in \mathcal{A}$. Dies ist der Fall, da

$$\begin{aligned} A = \tilde{A} &= \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x \in X : \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es } m \geq n \text{ mit } x \in A_m\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\mu(A_k) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge der Parti-alsummen $(\sum_{k=1}^n \mu(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend. Da sie nach Annahme nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Es gibt daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$. Da μ ein Maß ist folgt daraus, dass

$$\mu \left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Da $A = \tilde{A}_1$ gibt es für alle $x \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ und $x \in A_n$. Insbesondere ist daher $A \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Aufgrund der Monotonie von μ folgt, dass

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu \left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \right) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von ε folgt damit, dass $\mu(A) = 0$.

b)

Es sei $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, sowie $A_k := \{1, \dots, k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\{1\} \subseteq A$, unabhängig davon ob $A = \tilde{A}_1$ oder $A = \tilde{A}_2$. Wegen der Monotonie des Maßes ist daher

$$\mu(A) \geq \mu(\{1\}) = 1 \neq 0.$$

Aufgabe 3. (Vom äußereren Maß zum Maß)

a)

Es ist $\mu^*(\emptyset) = 0$, da für die Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert als $A_k := \emptyset \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ offenbar $\emptyset = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, und daher

$$\mu^*(\emptyset) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 0 = 0.$$

Dass $\mu^*(0) \geq 0$ folgt direkt daraus, dass μ nur nicht-negative Werte annimmt, und die Menge

$$\left\{ (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \emptyset \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

nicht leer ist, da \mathcal{A} als Algebra nicht leer ist.

Seien $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \subseteq B$. Die Monotonie von μ^* , dass also $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, ergibt sich daraus, dass für alle $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $B_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ auch $A \subseteq B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Also ist

$$\begin{aligned} S_B &:= \left\{ (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right\} \\ &\subseteq \left\{ (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\} =: S_A, \end{aligned}$$

und daher

$$\mu^*(A) = \inf_{(A_k) \in S_A} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \leq \inf_{(B_k) \in S_B} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu^*(B).$$

Die abzählbare Subadditivität von μ^* ergibt sich wie folgt: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest und $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf $\mathcal{P}(X)$. Es gibt nach der Definition von μ^* für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(B_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ auf \mathcal{A} mit $A_k \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^k$ und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n^k) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Da daher

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{k, n \in \mathbb{N}} B_n^k$$

ist nach der Definition von μ^*

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k, n \in \mathbb{N}} \mu(B_n^k) \leq \sum_{k, n \in \mathbb{N}} \left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k)\right) + \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$

b)

Es gilt zu zeigen, dass für alle $A \subseteq X$ und $B \in \mathcal{A}$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest, $A \subseteq X$ und $B \in \mathcal{A}$. Nach der Definition von μ^* gibt es eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf \mathcal{A} mit $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k). \tag{2}$$

Da $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ ist

$$A \cap B \subseteq \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B),$$

wobei $A_k \cap B \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sowie analog auch $A \cap B^c \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B^c)$ mit $A_k \cap B^c \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aufgrund der endlichen Additivität von μ und der Definition sowie Monotonie von μ^* ist daher

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu((A_k \cap B) \cup (A_k \cap B^c)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu(A_k \cap B) + \mu(A_k \cap B^c)) \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k \cap B) \right) + \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k \cap B^c) \right) \\ &\geq \mu^* \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B) \right) + \mu^* \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap B^c) \right) \\ &\geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c). \end{aligned}$$

Zusammen mit (2) ergibt sich damit, dass

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

c)

sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest und $A \in \mathcal{A}$. Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf \mathcal{A} mit $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $B_k := A \cap A_k \in \mathcal{A}$. Es ist

$$A = A \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap A_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k,$$

wegen der σ -Additivität und Monotonie von μ auf \mathcal{A} also

$$\mu(A) = \mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

Dass andererseits $\mu(A) \geq \mu^*(A)$ folgt direkt aus der Definition von μ^* unter Be- trachtung der Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $A_0 := A$ und $A_k := \emptyset$ für alle $k \geq 1$, für die $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und $\mu(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$.

d)

Es bezeichne \mathcal{M}_{μ^*} , wie in der Vorlesung, die Menge aller μ^* -messbaren Mengen. Nach Aufgabenteil b) ist $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, und wie aus der Vorlesung bekannt ist \mathcal{M}_{μ^*} ein σ -Algebra. Folglich ist $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Wie aus der Vorlesung bekannt ist die Einschränkung von μ^* auf \mathcal{M}_{μ^*} ein Maß auf \mathcal{M}_{μ^*} , also die Einschränkung von μ^* auf $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$. Dass dieses auf \mathcal{A} mit μ übereinstimmt wurde in Aufgabenteil c) gezeigt.

Aufgabe 4. (Verschiedene äußere Maße)