

# ANALYSIS III

## 8. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

12. Dezember 2013

### Aufgabe 1. (Vertauschung von Integralen)

a)

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x,y} \, d\mu(y) = \mu(\{x\}) \cdot 1 = 1,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\mu(y) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1 \, d\lambda = \infty.$$

Andererseits ist für alle  $y \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x,y} \, d\lambda(x) = \lambda(\{y\}) \cdot 1 = 0,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda(x) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mu = 0.$$

Insbesondere sind die beiden Doppelintegrale verschieden.

b)

Es ist für alle  $x \in (0, 1)$

$$\int_{(0,1)} g(x, y) \, d\lambda(y) = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy,$$

da  $g(x, y)$  für festes  $x \in (0, 1)$  auf  $[0, 1]$  stetig und beschränkt ist, also Lebesgue- und Riemann-integral übereinstimmen. Für obiges Integral ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy &= \int_0^1 \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2} \, dy - \int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy. \end{aligned} \tag{1}$$

Das Auseinanderziehen der Integrale ist möglich, da beide Integrale einzeln existieren, da die entsprechenden Funktionen auf  $[0, 1]$  für alle  $x \in (0, 1)$  stetig und beschränkt sind. Durch partielle Integration ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &= \int_0^1 y \cdot \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} dy = -y \frac{1}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^1 + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2} dy \\ &= -\frac{1}{1 + x^2} + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2} dy.\end{aligned}$$

Zusammen mit (1) ergibt sich damit, dass

$$\int_{(0,1)} g(x, y) d\lambda(y) = \frac{1}{1 + x^2}$$

für alle  $x \in (0, 1)$ . Da  $\frac{1}{1+x^2}$  auf  $[0, 1]$  stetig und beschränkt, und damit Riemann-integrierbar ist, gilt

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} \int_{(0,1)} g(x, y) d\lambda(y) d\lambda(x) &= \int_{(0,1)} \frac{1}{1 + x^2} d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \arctan(x) \Big|_{x=0}^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Für das andere Doppelintegral ergibt sich, da  $g(x, y) = -g(y, x)$  für alle  $x, y \in (0, 1)$  damit auch direkt, dass

$$\int_{(0,1)} \int_{(0,1)} g(x, y) d\lambda(x) d\lambda(y) = - \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} g(y, x) d\lambda(x) d\lambda(y) = -\frac{\pi}{4}.$$

Insbesondere sind die beiden Integrale verschieden.

Um  $\int_{(0,1)^2} |g| d\lambda_2$  zu bestimmen, bemerken wir, dass  $|g| \geq 0$  auf  $(0, 1)^2$  stetig, also Borell-messbar ist. Wäre  $\int_{(0,1)^2} |g| d\lambda_2 < \infty$ , so wäre  $|g|$  und damit auch  $g$  auf  $(0, 1)^2$  bezüglich  $\lambda_2$  integrierbar. Da  $(0, 1)^2 = (0, 1) \times (0, 1)$  und  $\lambda_2 = \lambda \times \lambda$  wären dann die beiden oben berechneten Integrale nach dem Satz von Fubini gleich. Da dies nicht der Fall ist, muss  $\int_{(0,1)^2} |g| d\lambda_2 = \infty$ .

Dies lässt sich auch nachrechnen: Es lässt sich auf  $\int_{(0,1)^2} |g| d\lambda_2$  der Satz von Tonelli anwenden, weshalb

$$\int_{(0,1)^2} |g| d\lambda_2 = \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} |g(x, y)| d\lambda(y) d\lambda(x).$$

Wir bemerken, dass, da  $|g|$  stetig auf  $[0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ist, für alle  $x \in (0, 1)$

$$\int_{(0,1)} |g(x, y)| d\lambda(y) = \int_0^1 \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dy \geq \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

Analog zu den vorherigen Berechnungen ergibt sich, dass

$$\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = y \frac{1}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^x = \frac{1}{2x}.$$

Da  $1/(2x)$  auf dem Intervall  $(0, 1)$  stetig ist, und auf jedem kompakten Teilintervall von  $(0, 1)$  Riemann-integrierbar, ergibt sich damit zusammengefasst

$$\int_{(0,1)^2} |g| d\lambda_2 \geq \int_{(0,1)} \frac{1}{2x} d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{2x} dx = \infty.$$

## Aufgabe 2. (Fast überall differenzierbar)

a)

Es sei

$$N := \{x \in [0, 1] : f \text{ ist nicht differenzierbar an der Stelle } x\}.$$

Da  $f$  fast überall differenzierbar ist, ist  $\lambda(N) = 0$  und  $f$  auf  $N^C \subseteq (0, 1)$  differenzierbar. Wir zeigen zunächst, dass  $g_k(x) \rightarrow f'(x)$  für  $k \rightarrow \infty$  punktweise auf  $N^C$ . Hierfür unterscheiden wir zwischen zwei Fällen:

Ist  $x = j/2^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ , so ist

$$g_k(x) = \frac{f(x + 2^{-k}) - f(x)}{2^{-k}} \text{ für alle } k \geq n,$$

und daher, da  $f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar ist,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + 2^{-k}) - f(x)}{2^{-k}} = f'(x).$$

Andernfalls bezeichne für alle  $k \in \mathbb{N}$  das Paar  $x_k^L < x < x_k^R$  mit  $x_k^R - x_k^L = 2^{-k}$  die Randpunkte des Intervalls, auf dem  $g_k$  als konstant definiert ist, und das  $x$  enthält. Es ergibt sich, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \frac{f(x_k^R) - f(x_k^L)}{2^{-k}} = \frac{f(x_k^R) - f(x)}{2^{-k}} + \frac{f(x) - f(x_k^L)}{2^{-k}} \\ &= \frac{f(x_k^R) - f(x)}{x_k^R - x} \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \frac{f(x) - f(x_k^L)}{x - x_k^L} \frac{x - x_k^L}{2^{-k}}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot f'(x) = \left( \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \frac{x - x_k^L}{2^{-k}} \right) f'(x) \\ &= \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} f'(x) + \frac{x - x_k^L}{2^{-k}} f'(x), \end{aligned}$$

also für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &g_k(x) - f'(x) \\ &= \left( \frac{f(x_k^R) - f(x)}{x_k^R - x} - f'(x) \right) \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \left( \frac{f(x) - f(x_k^L)}{x - x_k^L} - f'(x) \right) \frac{x - x_k^L}{2^{-k}}. \end{aligned}$$

Durch die Dreiecksungleichung ergibt sich für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &|g_k(x) - f'(x)| \\ &\leq \left| \frac{f(x_k^R) - f(x)}{x_k^R - x} - f'(x) \right| \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \left| \frac{f(x) - f(x_k^L)}{x - x_k^L} - f'(x) \right| \frac{x - x_k^L}{2^{-k}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^L = x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^R$  und  $f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar ist, gibt es  $n_L, n_R \in \mathbb{N}$  mit

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x_k^R) - f(x)}{x_k^R - x} - f'(x) \right| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq n_R \text{ und} \\ &\left| \frac{f(x) - f(x_k^L)}{x - x_k^L} - f'(x) \right| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq n_L. \end{aligned}$$

Es ergibt sich damit aus (2), dass für alle  $k \geq \max\{n_L, n_R\}$

$$|g_k(x) - f'(x)| < \varepsilon \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \varepsilon \frac{x - x_k^L}{2^{-k}} = \varepsilon \left( \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \frac{x - x_k^L}{2^{-k}} \right) = \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  zeigt dies, dass  $g_k(x) \rightarrow f'(x)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Da  $f' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  nach Definition Lebesgue-messbar ist, und  $g = f'$  auf  $N^c$ , folgt, da  $N$  eine Lebesgue-Nullmenge und das Lebesgue-Maß vollständig ist, dass auch  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar ist. (Vergleiche Satz 2.10.) Da  $f$  streng monoton steigend ist, ist  $g = f' \geq 0$  auf  $N^c$ . Das Integral  $\int_{(0,1)} f' d\lambda = \int_{N^c} f' d\lambda$  ist daher wohldefiniert. Aus der Definition von  $g_k$  ergibt sich auch direkt, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{N^c} g_k(x) d\lambda = \sum_{j=0}^{2^k-1} f((j+1)2^{-k}) - f(j2^{-k}) = f(1) - f(0).$$

Nach dem Lemma von Fatou ist daher

$$\int_{(0,1)} f' d\lambda = \int_{N^c} f' d\lambda = \int_{N^c} \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k d\lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{N^c} g_k d\lambda = f(1) - f(0).$$

Insbesondere ist  $0 \leq \int_{(0,1)} f' d\lambda < \infty$ , also  $f'$  über  $(0, 1)$  integrierbar bezüglich  $\lambda$ .

**b)**

Man betrachte die Kantormenge  $C \subseteq [0, 1]$  und die Kantorfunktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Es ist bekannt, dass  $f$  stetig und monoton steigend ist.  $f$  ist auch  $\lambda$ -fast überall differenzierbar: Für alle  $x \in [0, 1] \setminus C$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subseteq [0, 1] \setminus C$ .  $f$  ist auf  $B_\varepsilon(x)$  konstant, weshalb  $f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar mit  $f'(x) = 0$  ist. Mit  $\lambda(K) = 0$  ergibt sich die Behauptung.

Es ist insbesondere  $\int_{(0,1)} f'(x) d\lambda = 0$ , aber  $f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$ .

### Aufgabe 3. (Integralberechnung)

**a)**

Für alle  $k \geq 1$  definieren wir  $g_k^1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$g_k^1(x) := xe^{-kx} \text{ für alle } x > 0.$$

Für alle  $k \geq 1$  gilt:  $g_k^1$  ist auf  $(0, \infty)$  stetig und beschränkt (denn  $\lim_{x \rightarrow 0} g_k(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} g_k^1(x) = 0$ ), und auf jedem kompakten Teilintervall von  $(0, \infty)$  Riemann-integrierbar.  $|g_k^1| = g_k^1$  ist auf  $(0, \infty)$  auch uneigentlich Riemann-integrierbar, da

$$\begin{aligned} \int_0^\infty xe^{-kx} dx &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s xe^{-kx} dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{k}xe^{-kx} \right|_{x=0}^s + \frac{1}{k} \int_0^s e^{-kx} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{k}xe^{-kx} - \frac{1}{k^2}e^{-kx} \right|_{x=0}^s = \lim_{s \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{k}se^{-ks} - \frac{1}{k^2}e^{-ks} \right|_{x=0}^s + \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist daher  $g_k^1$  auf  $(0, \infty)$  auch Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{(0, \infty)} g_k^1 d\lambda = \int_0^\infty g_k^1(x) dx = \frac{1}{k^2}.$$

Wir bemerken nun, dass für alle  $x > 0$

$$\sum_{k \geq 1} e^{-kx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1},$$

da es sich um eine geometrische Reihe handelt. Es ist daher  $f_1(x) = \sum_{k \geq 1} g_k^1(x)$  für alle  $x \in (0, \infty)$ . Da  $f_1$  nur eine Unstetigkeitsstelle besitzt, ist  $f_1$  Borell-messbar, und für das Integral  $\int_{\mathbb{R}} f_1 d\lambda$  ergibt sich nun wegen  $|g_k^1| \geq 0$  für alle  $k \geq 1$  nach dem Satz von Beppo Levi das

$$\int_{\mathbb{R}} f_1 d\lambda = \int_{(0, \infty)} f_1 d\lambda = \int_{(0, \infty)} \sum_{k \geq 1} g_k^1 d\lambda = \sum_{k \geq 1} \int_{(0, \infty)} g_k^1 d\lambda = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}.$$

**b)**

Da  $0 \leq f_2 \leq f_1$ , und  $f_1$  über  $\mathbb{R}$  integrierbar ist, ist es auch  $f_2$ . Für alle  $k \geq 1$  definieren wir die Funktion  $g_k^2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$g_k^2(x) := (-1)^{k+1} x e^{-kx} = (-1)^{k+1} g_k^1(x) \text{ für alle } x > 0.$$

Für alle  $k \geq 1$  ist  $g_k$  auf  $(0, \infty)$  uneigentlich Riemann-integrierbar, da

$$\int_0^\infty g_k^2(x) dx = (-1)^{k+1} \int_0^\infty g_k^1(x) dx = (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}.$$

Da  $|g_k^2| = g_k^1$  über  $(0, \infty)$  uneigentlich Riemann-integrierbar ist, ist  $g_k^2$  über  $(0, \infty)$  auch Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{(0, \infty)} g_k^2 d\lambda = \int_0^\infty g_k^2(x) dx = (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}.$$

Für alle  $k \geq 1$  definieren wir nun  $h_k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$h_j = \sum_{j=1}^k g_k^2.$$

Wir bemerken, dass für alle  $x \geq 0$

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k e^{-kx} = \sum_{k \geq 1} (-e^{-x})^k = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{1}{e^x + 1}$$

Also ist für alle  $x > 0$

$$f_2(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 1} g_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x).$$

Da für alle  $k \geq 1$  auch

$$|h_k| \leq \sum_{j=1}^k |g_k^2| = \sum_{j=1}^k g_k^1 \leq f_1,$$

und  $f_1$  über  $(0, \infty)$  bezüglich  $\lambda$  integrierbar ist, ergibt sich mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_2 \, d\lambda &= \int_{(0, \infty)} f_2 \, d\lambda = \int_{(0, \infty)} \lim_{k \rightarrow \infty} h_k \, d\lambda \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} h_k \, d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} \sum_{j=1}^k g_j^2 \, d\lambda \\ &= \sum_{j \geq 1} \int_{(0, \infty)} g_j^2 \, d\lambda = \sum_{j \geq 1} (-1)^{j+1} \frac{1}{j^2}. \end{aligned}$$