

Analysis 3 – Übung 2

Jendrik Stelzner

28. Oktober 2013

Aufgabe 1. (Monotone Klassen und σ -Algebren)

a)

Angenommen, \mathcal{A} ist eine Algebra. Nach der Definition einer Algebra ist damit $X \in \mathcal{A}$ und für alle $A \in \mathcal{A}$ auch $A^c \in \mathcal{A}$; es muss also nur noch die σ -Additivität gezeigt werden.

Sei hierfür $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf \mathcal{A} . Für alle $n \in N$ sei $B_n := \bigcup_{k=0}^n A_k$. Es ist offenbar $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Da $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge auf \mathcal{A} ist, und \mathcal{A} eine monotone Klasse, gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}.$$

Dies zeigt die σ -Additivität.

Ist andererseits \mathcal{A} eine σ -Algebra, so ist \mathcal{A} auch eine Algebra, da jede σ -Algebra auf X eine Algebra auf X ist (bekannt aus der Vorlesung).

b)

Wie aus der Vorlesung bekannt ist jede σ -Algebra eine monotone Klasse. Damit ist $\sigma(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse, die \mathcal{A} enthält. Da $m(\mathcal{A})$ die kleinste monotone Klasse ist, die \mathcal{A} enthält, ist daher $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

Um zu zeigen, dass auch $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, genügt es zu zeigen, dass $m(\mathcal{A})$ eine σ -Algebra ist: Da $\sigma(\mathcal{A})$ die kleinste σ -Algebra ist, die \mathcal{A} enthält, ist dann $m(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, genügt es nach Aufgabenteil a) zu zeigen, dass $m(\mathcal{A})$ eine Algebra ist.

Es ist $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$, da \mathcal{A} eine Algebra ist. Es muss noch die Abgeschlossenheit von \mathcal{A} unter Komplementbildung und endlichen Vereinigungen gezeigt werden.

Es sei $\mathcal{K} := \{M \in \mathcal{P}(X) : M^c \in m(\mathcal{A})\}$. \mathcal{K} ist eine monotone Klasse: Ist $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein wachsende Folge in \mathcal{K} , so ist $(K_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in $m(\mathcal{A})$, und somit

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n^c \in m(\mathcal{A}),$$

da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \in \mathcal{K}$. Ist $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in \mathcal{K} , so ist $(L_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in $m(\mathcal{A})$, und somit

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n^c \in m(\mathcal{A}),$$

da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, also $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n \in \mathcal{K}$. Dies zeigt, dass \mathcal{K} eine monotone Klasse ist.

Da \mathcal{A} eine Algebra ist, ist $A^c \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$ für alle $A \in \mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$. Da \mathcal{K} eine monotone Klasse ist, die \mathcal{A} enthält, ist daher $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{K}$. Also ist $A^c \in m(\mathcal{A})$ für alle $A \in m(\mathcal{A})$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von \mathcal{A} unter Komplementbildung.

Für $D \in m(\mathcal{A})$ sei $\mathcal{V}_D := \{M \in P(X) : D \cup M \in m(\mathcal{A})\}$. Auch \mathcal{V}_D ist eine monotone Klasse: Ist $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge auf \mathcal{V}_D , so ist $(V_n \cup D)_{n \in \mathbb{N}}$ ein wachsende Folge auf $m(\mathcal{A})$, und somit

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) \cup D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \cup D) \in m(\mathcal{A}),$$

da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, und daher $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \mathcal{V}_D$. Ist $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge auf \mathcal{V}_D , so $(W_n \cup D)$ eine fallende Folge auf $m(\mathcal{A})$, und somit

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n \right) \cup D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (W_n \cup D) \in m(\mathcal{A}),$$

da $m(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, und daher $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n \in \mathcal{V}_D$. Dies zeigt, dass \mathcal{V}_D eine monotone Klasse ist.

Sei $A \in \mathcal{A}$. Für $B \in \mathcal{A}$ ist $A \cup B \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$, da \mathcal{A} eine Algebra ist, und daher $B \in \mathcal{V}_A$, wegen der Beliebigkeit von B also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_A$. Da $m(\mathcal{A})$ die kleinste monotone Klasse ist, die \mathcal{A} enthält, ist daher $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}_A$. Also ist $A \cup B \in m(\mathcal{A})$ für alle $B \in m(\mathcal{A})$ und $A \in \mathcal{A}$. Dies bedeutet auch, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}_B$ für alle $B \in m(\mathcal{A})$. Da $m(\mathcal{A})$ die kleinste monotone Klasse ist, die \mathcal{A} enthält, ist daher $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}_B$ für alle $B \in m(\mathcal{A})$. Das bedeutet gerade, dass $A \cup B \in m(\mathcal{A})$ für alle $A, B \in m(\mathcal{A})$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Schnitte.