Analysis III
4. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

9. November 2013

Aufgabe 1. (Lebesgue-Stieltjes-Maße)

a)

Da μ endlich und monoton ist, ist μ auch beschränkt, denn für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$\mu(A) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

Aus der Beschränktheit von μ folgt die Beschränktheit von F_μ, da damit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) < \infty.$$

Die Monotonie von F_μ ergibt sich daraus, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ offenbar $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ und wegen der Monotonie von μ daher

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F_\mu(y).$$

Zum Nachweis der Rechtsstetigkeit sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine motonon fallende Folge auf $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Es gilt zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = F_\mu(x)$. Aus der Monotonie von F_μ folgt, dass $F_\mu(x) \leq F_\mu(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch

$$F_\mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n).$$

Zum Beweis der anderen Ungleichung sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir bemerken, dass die Folge $((x, x + \frac{1}{n}])_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist, und da μ ein beschränktes Maß ist daher

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \leq x_n \leq x + \frac{1}{N}$ für alle $n \geq n_0$. Aufgrund der endlichen Additivität von μ ergibt sich daher, dass für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} F_\mu(x_n) &= \mu((-\infty, x_n]) = \mu((-\infty, x] \cup (x, x_n]) = \mu((-\infty, x]) + \mu((x, x_n]) \\ &= F_\mu(x) + \mu((x, x_n]) \leq F_\mu(x) + \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{N}\right]\right) \leq F_\mu(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) \le F_\mu(x) + \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) \le F_\mu(x).$$

Aufgabe 2. (Mengen)

Es sei $0 < \alpha < 1$ beliebig aber fest und es sei $0 < \beta < 1$ definiert als $\beta := 1 - \alpha$.

a)

Die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt definiert: Man beginne mit $M_0 := [0,1]$. M_1 konstruiert man aus M_0 indem man in der Mitte von M_0 das offene Intervall $\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}\right)$ mit Länge $\frac{\beta}{2}$ entfernt, d.h.

$$M_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}\right) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}, 1\right].$$

M_2 konstruiert man aus M_1 indem man aus jedem der beiden Intervalle in M_1 das jeweils offene mittige Intervall der Länge $\frac{\beta/4}{2} = \frac{\beta}{8}$ entfernt. M_3 ergibt sich aus M_2, indem man aus jedem der vier Intervalle in M_2 das jeweils mittige offene Intervall der Länge $\frac{\beta/8}{4} = \frac{\beta}{32}$ entfernt. Nach dem gleichen Prinzip konstruiert man rekursiv alle weiteren M_n.
Offenbar ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge M_n aus 2^n disjunkten, abgeschlossenen, gleichlangen Intervallen besteht; insbesondere ist M_n als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Die Intervalle haben zusammen eine Gesamtlänge von $1 - \beta \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ also jedes einzelne eine Länge von $\frac{1-\beta\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}}{2^n}$.
Sei $M := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist M auch abgeschlossen. Da $M_n \subseteq [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $M \subseteq [0,1]$. M enthält keine nichtleere offene Menge: Für alle $x \in M$ ist $x \in M_n$ für alle $n \in N$, also für alle $n \in \mathbb{N}$ in einem Intervall der Länge $\frac{1-\beta\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}}{2^n}$. Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\beta\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}}{2^n} = 0$$

kann es daher keine ε-Ball um x in M geben. Es ist $\lambda(M) = 0$: Da $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein fallende Folge mit $\lambda(M_n) \le \lambda([0,1]) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und λ ein Maß, ist

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(M_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \beta \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - \beta = \alpha.$$

b)

Wie in Aufgabenteil **a)** gezeigt enthält $[0,1]$ eine abgeschlossene Teilmenge A, die keine nichtleeren offenen Mengen enthält, und für die $\lambda(A) = \beta$. Es sei

$$B := (0,1) \setminus A = (0,1) \cap A^c.$$

Da A abgeschlossen ist, ist B offen. Wegen der endlichen Additivität von μ ist daher

$$\mu(B) = \mu((0,1)) - \mu(a) = 1 - \beta = \alpha.$$

B liegt dicht in $[0,1]$: Gebe es $x, y \in [0,1]$ mit $x < y$ und $z \notin B$ für alle $x \leq z \leq y$, so ist $(x,y) \subseteq A$ ein nichtleeres offenes Intervall, im Widerspruch zur Annahme, dass A kein solches enthält.

Aufgabe 3. (Lebesgue-messbare Mengen)

$(i) \Rightarrow (ii)$

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Wie aus der Vorlesung bekannt ist

$$A = \sup\{\lambda_n^*(K) : K \subseteq A, K \text{ ist kompakt}\}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ gibt es daher eine abgeschlossene Teilmenge $K_k \subseteq A$ mit

$$\lambda_n^*(K_k) + \frac{1}{k} \geq \lambda_n^*(A). \tag{1}$$

Es sei $K := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_n$. Da alle K_k kompakt und damit auch abgeschlossen sind, ist nach Definition $K \in F_\sigma$, sowie wegen der σ-Additiv von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auch $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es ist $\mu(K) = \mu(A)$: Da $K \subseteq A$ ist $\mu(K) \leq \mu(A)$ wegen der Monotonie von μ. Wegen der Monotonie von μ folgt aus (1) auch, dass für alle $k \geq 1$

$$\mu(K) \geq \mu(K_k) \geq \lambda_n^*(A) - \frac{1}{k}.$$

Für $k \to \infty$ ergibt sich damit, dass $\mu(K) \geq \mu(A)$.
Sei $N := A \setminus K$. Aus der endlichen Additivität von μ ergibt sich aus $\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(K)$, dass

$$\lambda_n^*(N) = \lambda_n^*(A) - \lambda_n^*(K) = 0.$$

Es ist also $K \in F_\sigma$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n^*(N) = 0$ und $A = K \cup N$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Es ist $A_1 \in F_\sigma$ sowie

$$\begin{aligned}\lambda_n^*((A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A)) &\leq \lambda_n^*(A \setminus A_1) + \lambda_n^*(A_1 \setminus A) \\ &\leq \lambda^*(A_2) + \lambda_n^*(\emptyset) = 0.\end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$

Da $B \in F_\sigma$ ist $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ für abgeschlossene Mengen $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$. Es ist also auch $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, also B messbar. Da

$$\lambda_n^*(\underbrace{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}_{=:C}) = 0$$

ist auch C messbar. Da $\mathcal{M}_{\lambda_n^*}$ eine σ-Algebra ist, ist damit auch

$$A = (B \cup C) \setminus (B \cap C) = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in \mathcal{M}_{\lambda_n^*},$$

also A messbar.

Aufgabe 4. (Projektion des Lebesguemaßes)