

# ANALYSIS III

## 3. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

1. November 2013

**Lemma 1:** Sei  $(A_n)_{n \in I}$  eine Familie von Mengen über einer Indexmenge  $I \subseteq \mathbb{N}$  und  $A_n = \bigcup_{m \in I_n} B_m^n$  für eine Familie von Mengen  $(B_m^n)_{m \in I_n}$  über einer Indexmenge  $I_n \subseteq \mathbb{N}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\prod_{n \in I} A_n = \prod_{n \in I} \bigcup_{m \in I_n} B_m^n = \bigcup_{(b_n) \in \prod_{n \in I} I_n} \prod_{n \in I} B_{b_n}^n.$$

(Die Indexmengen werden auf Teilmengen von  $\mathbb{N}$  eingeschränkt, und nicht etwa beliebig gewählt, um das Auswahlaxiom nicht nutzen zu müssen.)

*Beweis des Lemmas:* Sei  $(a_n)_{n \in I} \in \prod_{n \in I} A_n$ . Da  $a_n \in A_n$  für alle  $n \in I$ , gibt es für alle  $n \in I$  ein  $b_n \in I_n$  mit  $a_n \in B_{b_n}^n$ . Daher ist

$$(a_n)_{n \in I} \in \prod_{n \in I} B_{b_n}^n \subseteq \bigcup_{(b_n) \in \prod_{n \in I} I_n} \prod_{n \in I} B_{b_n}^n,$$

also  $\prod_{n \in I} A_n \subseteq \bigcup_{(b_n) \in \prod_{n \in I} I_n} \prod_{n \in I} B_{b_n}^n$ .

Ist  $(a_n)_{n \in I} \in \bigcup_{(b_n) \in \prod_{n \in I} I_n} \prod_{n \in I} B_{b_n}^n$ , so gibt es  $(b_n)_{n \in I} \in \prod_{n \in I}$  so dass  $a_n \in B_{b_n}^n \subseteq A_n$  für alle  $n \in I$ , und somit  $(a_n)_{n \in I} \in \prod_{n \in I} A_n$ . Also ist  $\prod_{n \in I} A_n \supseteq \bigcup_{(b_n) \in \prod_{n \in I} I_n} \prod_{n \in I} B_{b_n}^n$ .

Die Disjunktheit der Vereinigung ergibt sich aus der paarweisen Disjunktheit der  $B_n^m$ ,  $m \in I_n$ , für alle  $n \in I$ : Sind  $(b_n)_{n \in I}, (b'_n)_{n \in I} \in \prod_{n \in I} I_n$  so dass ein  $(a_n)_{n \in I} \in \prod_{n \in I} B_{b_n}^n \cap \prod_{n \in I} B_{b'_n}^n$  existiert, so muss  $a_n \in B_{b_n}^n$  und  $a_n \in B_{b'_n}^n$ , für alle  $n \in I$ . Also muss  $B_{b_n}^n \cap B_{b'_n}^n \neq \emptyset$ , und damit  $b_n = b'_n$  für alle  $n \in I$ .  $\square$

### Aufgabe 1. (Volumen auf Quadern)

a)

Seien  $q, Q \in \mathcal{Q}$  mit  $q \subseteq Q$  beliebig aber fest. Es ist  $Q = \prod_{i=1}^n [A_i, B_i]$  mit  $A_i \leq B_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  mit  $A_i \leq a_i \leq b_i \leq B_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dass  $[a_i, b_i] \subseteq [A_i, B_i]$  folgt daher, dass sich wegen  $q \subseteq Q$  mithilfe der Projektion  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  ergibt, dass  $[a_i, b_i] = \pi_i(q) \leq \pi_i(Q) = [A_i, B_i]$  für

je  $i = 1, \dots, n$ . Mit Lemma (1) ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} Q &= \prod_{i=1}^n [A_i, B_i] = \prod_{i=1}^n \left( \underbrace{[A_i, a_i]}_{:= C_1^i} \dot{\cup} \underbrace{[a_i, b_i]}_{:= C_2^i} \dot{\cup} \underbrace{[b_i, B_i]}_{:= C_3^i} \right) \\ &= \bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1, 2, 3\}^n} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \end{aligned}$$

die disjunkte Vereinigung von  $3^n$  Quadern  $q_1, \dots, q_{3^n}$  aus  $\mathcal{Q}$  ist, wobei  $q = \prod_{i=1}^n C_2^i$  einer von diesen ist. Aufgrund der Additivität von  $\mu$  ist daher

$$\mu(Q) = \mu \left( \bigcup_{i=1}^{3^n} q_i \right) = \sum_{i=1}^{3^n} \mu(q_i) \geq \mu(q),$$

weshalb  $\mu$  monoton ist.

b)

Wegen der Invarianz von  $\mu$  kann für alle  $Q \in \mathcal{Q}$  o.b.d.A. davon ausgegangen werden, dass  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i]$  mit  $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Auch folgt aus der Invarianz von  $\mu$  bezüglich Transposition, der endlichen Additivität von  $\mu$  und Lemma 1, dass für alle  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i] \in \mathcal{Q}$  und  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m_i a_i] \right) = m_1 \cdots m_n \mu(Q),$$

da

$$\begin{aligned} \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m_i a_i] \right) &= \mu \left( \prod_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} \underbrace{[(j-1)a_i, ja_i]}_{:= C_j^i} \right) \\ &= \mu \left( \bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left( \prod_{i=1}^n C_{c_i}^i \right) \\ &= \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu \left( \prod_{i=1}^n [(c_i - 1)a_i, c_i a_i] \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu(Q) \\ &= m_1 \cdots m_n \mu(Q). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daher aus der Normierung, dass  $\mu(\prod_{i=1}^n [0, m_i]) = \prod_{i=1}^n m_i$  für alle  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i] \in \mathcal{Q}$  beliebig aber fest. Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, m a_i] \right) = m^n \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, a_i] \right) = m^n \mu(Q),$$

sowie wegen der Monotonie von  $\mu$  auch

$$\prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor = \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, \lfloor ma_i \rfloor) \right) \leq \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) \text{ und}$$

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [0, ma_i) \right) \leq \mu \left( \prod_{i=1}^n [0, \lceil ma_i \rceil) \right) = \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil,$$

also für  $m \geq 1$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor \leq \mu(Q) \leq \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil = \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m}. \quad (1)$$

Nun ist  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = m$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , da

$$x - \frac{1}{m} = \frac{mx - 1}{m} \leq \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq \frac{mx}{m} = x$$

für alle  $m \geq 1$  und daher  $x \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq x$ , also  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$ . Analog ergibt sich, dass auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil mx \rceil}{m} = x$ . Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} \leq \mu(Q) \text{ und}$$

$$\mu(Q) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} \leq \prod_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} = \prod_{i=1}^n a_i,$$

also  $\mu(Q) = \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n (a_i - 0)$ .

## Aufgabe 2. (Nullmengen)

a)

Aus der Aufgabenstellung geht meiner Meinung nach nicht klar hervor, ob  $A$  als

$$\tilde{A}_1 := \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \text{ oder als}$$

$$\tilde{A}_2 := \{x \in X : x \in M \text{ für unendlich viele } M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}\}$$

definiert wird. Für den Beweis dieses Aufgabenteiles genügt es allerdings davon auszugehen, dass  $A = \tilde{A}_1$ , da  $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_1$ : Ist  $x \in \tilde{A}_2$ , so gibt es unendlich viele  $M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x \in M$ ; insbesondere gibt es daher unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \in A_n$ . Man bemerke jedoch, dass im Allgemeinen  $\tilde{A}_1 \subsetneq \tilde{A}_2$ : Ist etwa  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konstant mit  $A_1 \neq \emptyset$ , so ist  $\tilde{A}_1 = A_1 \neq \emptyset$ , aber  $\tilde{A}_2 = \emptyset$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $\mu(A_k) \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist die Folge der Partiälsummen  $(\sum_{k=1}^n \mu(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$  monoton steigend. Da sie nach Annahme nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Es gibt daher ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$ . Da  $\mu$  ein Maß ist folgt daraus, dass

$$\mu \left( \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Da  $A = \tilde{A}_1$  gibt es für alle  $x \in A$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  und  $x \in A_n$ . Insbesondere ist daher  $A \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ . Aufgrund der Monotonie von  $\mu$  folgt, dass

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon$  folgt damit, dass  $\mu(A) = 0$ .

b)

Es sei  $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  und  $\mu$  das Zählmaß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , sowie  $A_k := \{1, \dots, k\}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es ist dann  $\{1\} \subseteq A$ , unabhängig davon ob  $A = \tilde{A}_1$  oder  $A = \tilde{A}_2$ . Wegen der Monotonie des Maßes ist daher  $\mu(A) \geq \mu(\{1\}) = 1$ , also  $\mu(A) \neq 0$ . (Ist  $A = \tilde{A}_1$ , so ist sogar  $A = \mathbb{N}$  und somit  $\mu(A) = \infty$ .)

**Aufgabe 3. (Vom äußeren Maß zum Maß)**

**Aufgabe 4. (Verschiedene äußere Maße)**