Analysis III
3. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

2. November 2013

Betrachtet man zwei Mengen A und A' mit $A = B_1 \dot\cup B_2$ und $A' = B_1' \dot\cup B_2'$, so ist es einfach so sehen, dass

$$A \times A' = B_1 \times B_1' \dot\cup B_1 \times B_2' \dot\cup B_2 \times B_1' \dot\cup B_2 \times B_2'.$$

Diese Beobachtung wird von dem folgenden Lemma verallgemeinert:

Lemma 1: Sei $(A_n)_{n\in I}$ eine Familie von Mengen über einer Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ und $A_n = \dot\bigcup_{m \in I_n} B_m^n$ für eine Familie von Mengen $(B_m^n)_{m\in I_n}$ über einer Indexmenge $I_n \subseteq \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\prod_{n\in I} A_n = \prod_{n \in I} \dot\bigcup_{m\in I_n} B_m^n = \dot\bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in I} B_{b_n}^n.$$

(Die Indexmengen werden auf Teilmengen von $\mathbb{N}$ eingeschränkt, und nicht etwa beliebig gewählt, um das Auswahlaxiom nicht nutzen zu müssen.)

Beweis des Lemmas: Sei $(a_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} A_n$. Da $a_n \in A_n$ für alle $n \in I$, gibt es für alle $n \in I$ ein $b_n \in I_n$ mit $a_n \in B_{b_n}^n$. Daher ist

$$(a_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} B_{b_n}^n \subseteq \bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in I} B_{b_n}^n,$$

also $\prod_{n\in I} A_n \subseteq \bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in I} B_{b_n}^n$.
Ist $(a_n)_{n\in I} \in \bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in\mathbb{N}} B_{b_n}^n$, so gibt es $(b_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I}$ so dass $a_n \in B_{b_n}^n \subseteq A_n$ für alle $n \in I$, und somit $(a_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} A_n$. Also ist $\prod_{n\in I} A_n \supseteq \bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in I} B_{b_n}^n$.
Die Disjunktheit der Vereinigung ergibt sich aus der paarweisen Disjunktheit der B_n^m, $m \in I_n$, für alle $n \in I$: Sind $(b_n)_{n\in I}, (b_n')_{n\in I} \in \prod_{n\in I} I_n$ so dass ein $(a_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} B_{b_n}^n \cap \prod_{n\in I} B_{b_n'}^n$ existiert, so muss $a_n \in B_{b_n}^n$ und $a_n \in B_{b_n'}^n$, für alle $n \in I$. Also muss $B_{b_n}^n \cap B_{b_n'}^n \neq \emptyset$, und damit $b_n = b_n'$ für alle $n \in I$. □

Aufgabe 1. (Volumen auf Quadern)

a)

Seien $q, Q \in \mathcal{Q}$ mit $q \subseteq Q$ beliebig aber fest. Es ist $Q = \prod_{i=1}^n [A_i, B_i)$ mit $A_i \leq B_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ mit $A_i \leq a_i \leq b_i \leq B_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Dass $[a_i, b_i) \subseteq [A_i, B_i)$ folgt daher, dass sich wegen $q \subseteq Q$ mithilfe der Projektion $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ ergibt, dass $[a_i, b_i) = \pi_i(q) \leq \pi(Q) = [A_i, B_i)$ für je $i = 1, \dots, n$. Mit Lemma (1) ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} Q = \prod_{i=1}^{n} [A_i, B_i) &= \prod_{i=1}^{n} \left(\underbrace{[A_i, a_i)}_{:=C_1^i} \,\dot{\cup}\, \underbrace{[a_i, b_i)}_{:=C_2^i} \,\dot{\cup}\, \underbrace{[b_i, B_i)}_{:=C_3^i} \right) \\ &= \dot{\bigcup_{(c_1, \dots, c_n) \in \{1,2,3\}^n}} \prod_{i=1}^{n} C_{c_i}^i \end{aligned}$$

die disjunkte Vereinigung von 3^n Quadern $q_1, \dots, q_{3^n}$ aus $\mathcal{Q}$ ist, wobei $q = \prod_{i=1}^n C_2^i$ einer von diesen ist. Aufgrund der Additivität von μ ist daher

$$\mu(Q) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{3^n} q_i \right) = \sum_{i=1}^{3^n} \mu(q_i) \geq \mu(q),$$

weshalb μ monoton ist.

b)

Wegen der Invarianz von μ kann für alle $Q \in \mathcal{Q}$ o.b.d.A. davon ausgegangen werden, dass $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i)$ mit $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $i = 1, \dots, n$. Auch folgt aus der Invarianz von μ bezüglich Transposition, der endlichen Additivität von μ und Lemma 1, dass für alle $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i) \in \mathcal{Q}$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n} [0, m_i a_i) \right) = m_1 \cdots m_n \, \mu(Q),$$

da

$$\begin{aligned} \mu\left(\prod_{i=1}^{n} [0, m_i a_i) \right) &= \mu\left(\prod_{i=1}^{n} \dot{\bigcup}_{j=1}^{m_i} \underbrace{[(j-1)a_i, j a_i)}_{:=C_j^i} \right) \\ &= \mu\left(\dot{\bigcup}_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \prod_{i=1}^{n} C_{c_i}^i \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu\left(\prod_{i=1}^{n} C_{c_i}^i \right) \\ &= \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu\left(\prod_{i=1}^{n} [(c_i - 1)a_i, c_i a_i) \right) = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in \prod_{i=1}^n \{1, \dots, m_i\}} \mu(Q) \\ &= m_1 \cdots m_n \, \mu(Q). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daher aus der Normierung, dass $\mu\left(\prod_{i=1}^n [0, m_i)\right) = \prod_{i=1}^n m_i$ für alle $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Sei nun $Q = \prod_{i=1}^n [0, a_i) \in \mathcal{Q}$ beliebig aber fest. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n} [0, m a_i) \right) = m^n \mu\left(\prod_{i=1}^{n} [0, a_i) \right) = m^n \mu(Q),$$

sowie wegen der Monotonie von μ auch

$$\prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor = \mu\left(\prod_{i=1}^n [0, \lfloor ma_i \rfloor)\right) \leq \mu\left(\prod_{i=1}^n [0, ma_i)\right) \text{ und}$$
$$\mu\left(\prod_{i=1}^n [0, ma_i)\right) \leq \mu\left(\prod_{i=1}^n [0, \lceil ma_i \rceil)\right) = \prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil,$$

also für $m \geq 1$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \frac{1}{m^n}\prod_{i=1}^n \lfloor ma_i \rfloor \leq \mu(Q) \leq \frac{1}{m^n}\prod_{i=1}^n \lceil ma_i \rceil = \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m}. \tag{1}$$

Nun ist $\lim_{m\to\infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = m$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da

$$x - \frac{1}{m} = \frac{mx-1}{m} \leq \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq \frac{mx}{m} = x$$

für alle $m \geq 1$ und daher $x \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \leq x$, also $\lim_{m\to\infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$. Analog ergibt sich, dass auch $\lim_{m\to\infty} \frac{\lceil mx \rceil}{m} = x$. Aus (1) ergibt sich damit, dass

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n \lim_{m\to\infty} \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} = \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lfloor ma_i \rfloor}{m} \leq \mu(Q) \text{ und}$$
$$\mu(Q) \leq \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} \leq \prod_{i=1}^n \lim_{m\to\infty} \frac{\lceil ma_i \rceil}{m} = \prod_{i=1}^n a_i,$$

also $\mu(Q) = \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n (a_i - 0)$.

Aufgabe 2. (Nullmengen)

a)

Aus der Aufgabenstellung geht meiner Meinung nach nicht klar hervor, ob A als

$$\tilde{A}_1 := \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \text{ oder als}$$
$$\tilde{A}_2 := \{x \in X : x \in M \text{ für unendlich viele } M \in \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\}$$

definiert wird. Für den Beweis diesen Aufgabenteiles genügt es allerdings davon auszugehen, dass $A = \tilde{A}_1$, da $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_1$: Ist $x \in \tilde{A}_2$, so gibt es unendlich viele $M \in \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x \in M$; insbesondere gibt es daher unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$. Man bemerke jedoch, dass im Allgemeinen $\tilde{A}_1 \subsetneq \tilde{A}_2$: Ist etwa $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant mit $A_1 \neq \emptyset$, so ist $\tilde{A}_1 = A_1 \neq \emptyset$, aber $\tilde{A}_2 = \emptyset$.
Zunächst gilt es zu zeigen, dass A messbar ist, d.h. dass $A \in \mathcal{A}$. Dies ist der Fall, da

$$\begin{aligned} A = \tilde{A} &= \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x \in X : \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gibt es } m \geq n \text{ mit } x \in A_m\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\mu(A_k) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend. Da sie nach Annahme nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Es gibt daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} A_k < \varepsilon$. Da μ ein Maß ist folgt daraus, dass

$$\mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Da $A = \tilde{A}_1$ gibt es für alle $x \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ und $x \in A_n$. Insbesondere ist daher $A \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Aufgrund der Monotonie von μ folgt, dass

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von ε folgt damit, dass $\mu(A) = 0$.

b)

Es sei $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, sowie $A_k := \{1, \dots, k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\{1\} \subseteq A$, unabhängig davon ob $A = \tilde{A}_1$ oder $A = \tilde{A}_2$. Wegen der Monotonie des Maßes ist daher $\mu(A) \geq \mu(\{1\}) = 1$, also $\mu(A) \neq 0$. (Ist $A = \tilde{A}_1$, so ist sogar $A = \mathbb{N}$ und somit $\mu(A) = \infty$.)

Aufgabe 3. (Vom äußeren Maß zum Maß)

Aufgabe 4. (Verschiedene äußere Maße)