Analysis III
10. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

23. Januar 2014

Aufgabe 1. (Gegenbeispiele)

a)

Wir betrachten die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/\sqrt{x}$. Diese ist auf auf jedem kompakten Teilintervall von $(0,1)$ Riemann-integrierbar und $f = |f|$ ist auf $(0,1)$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\downarrow 0}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\downarrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_{x=s}^1 = \lim_{s\downarrow 0} 2 - 2\sqrt{s} = 2.$$

Also ist f auf $(0,1)$ auch Lebesgue-integrierbar, weshalb $f \in \mathcal{L}^1((0,1))$. Es ist jedoch $f \notin \mathcal{L}^2((0,1))$: Für alle $x \in (0,1)$ ist $|f(x)^2| = f(x)^2 = 1/x$. Für die Funktionenfolge

$$h_n := \chi_{[1/n,1)} f^2$$

gilt auf $(0,1)$ überall $h_n \leq h_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = f^2$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist also

$$\int_{(0,1)} |f|^2\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)} h_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[1/n,1)} h_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

b)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/(|x|+1)$. Es ist $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$: Für die Funktionenfolge

$$f_n := \chi_{[-n,n]} f$$

ist auf $\mathbb{R}$ überall $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f = |f|$. Daher ist nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[-n,n]} f_n\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n \frac{1}{|x|+1}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.\end{aligned}$$

Es ist jedoch $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: Für die Funktionenfolge

$$h_n := \chi_{[-n,n]} f^2$$

ist auf $\mathbb{R}$ überall $h_n \leq h_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = f^2 = |f|^2$. Also ist nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f^2 \, \mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f^2 \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{(|x|+1)^2} \, \mathrm{d}x = 2 \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Noch mehr Konvergenz)

a)

Angenommen, es ist $f_n \longrightarrow f$ im Maß. Dann ist offenbar auch $f_{n_j} \longrightarrow f$ im Maß für jede Teilfolge n_j. Daher gibt es für jede Teilfolge n_j eine Teilfolge j_k so dass $f_{n_{j_k}}(x) \longrightarrow f(x)$ punktweise für μ-fast alle $x \in \Omega$.
Die zu zeigende Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Man betrachte etwa den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ und die Funktionenfolge $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ auf $\mathbb{R}$. Es ist $f_n \longrightarrow 0$ punktweise, also ist auch $f_{n_{j_k}} \longrightarrow 0$ punktweise für alle Teilfolgen n_j und j_k. Es ist jedoch nicht $f_n \longrightarrow f$ im Maß. Die Implikation gilt jedoch für endliche Maßräume, weshalb wir die Implikation unter der zusätzlichen Annahme $\mu(\Omega) < \infty$ zeigen.
Angenommen, es ist nicht $f_n \longrightarrow f$ im Maß. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) \not\longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ und Teilfolge n_j so dass

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_{n_j}(x) - f(x)| \geq \delta\}) \geq \varepsilon \text{ für alle } j \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Es gibt daher keine Teilfolge j_k mit $f_{n_{j_k}} \longrightarrow f$ punktweise fast überall: Sonst gebe es wegen $\mu(\Omega) < \infty$ nämlich eine Teilfolge k_l mit $f_{n_{j_{k_l}}} \longrightarrow f$ im Maß, also insbesondere

$$\lim_{l\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \Omega : \left|f_{n_{j_{k_l}}}(x) - f(x)\right| \geq \delta\right\}\right) = 0,$$

was im Widerspruch zu (1) steht.

b)

Es sei

$$A := \{x \in \Omega : f_n(x) \not\rightarrow f(x) \text{ für } n \to \infty\}$$

und für alle $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$A_{\varepsilon,k} := \{x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Offenbar ist $A_{\varepsilon,k} \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Daher ist auch

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \Omega : \text{ es gibt } \varepsilon > 0 \text{ mit } |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq m} A_{1/n,k} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ ist nach der Tschebyschow-Ungleichung

$$\mu(A_{\varepsilon,k}) = \mu(\{x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |f_k - f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Daher ist für alle $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k}\right) \leq \sum_{k\geq m} \mu(A_{\varepsilon,k}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k\geq m} \int_\Omega |f_k - f| \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ ist

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k\geq m} \int_\Omega |f_k - f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Zusammen mit (2) folgt damit, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\mu\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k}\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k}\right) = 0,$$

denn es ist klar, dass es sich bei $(\bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k})_{m\in\mathbb{N}}$ um eine fallende Folge handelt, und es ist $\mu(\bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k}) < \infty$ für m groß genug. Also ist

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k\geq m} A_{1/n,k}\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k\geq m} A_{1/n,k}\right) = \sum_{n\geq 1} 0 = 0.$$

Daher ist $\mu(A) = 0$. Da nach Definition $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ für alle $x \in A^c$ konvergiert also $f_n \to f$ punktweise μ-fast überall.

Aufgabe 3. ($\|f\|_\infty$ als Grenzwert von $\|f\|_p$)

Angenommen, es ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann ist für alle $p \in [1, \infty)$

$$\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|f\|_\infty^p = \mu(\Omega)\|f\|_\infty^p < \infty,$$

da $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ für μ-fast alle $x \in \Omega$, und damit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Da für alle $p \in [1, \infty)$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \mu(\Omega)^{1/p}\|f\|_\infty \leq \max\{1, \mu(\Omega)\}\|f\|_\infty \tag{3}$$

ist

$$\sup_{p\in[1,\infty)} \|f\|_p \leq \max\{1, \mu(\Omega)\}\|f\|_\infty < \infty.$$

Angenommen, es ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $p \in [1, \infty)$ und $\sup_{p \in [1,\infty)} \|f\|_p < \infty$. Für $M := \sup_{p \in [1,\infty)} \|f\|_p$ ist wegen der Tschebyschow-Ungleichung für alle $p \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| \geq M+1\}) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)|^p \geq (M+1)^p\}) \\
&\leq \frac{1}{(M+1)^p} \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \left(\frac{\|f\|_p}{M+1}\right)^p \leq \left(\frac{M}{M+1}\right)^p.
\end{aligned}$$

Da $0 \leq M/(M+1) < 1$ folgt damit, dass

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| \geq M+1\}) \leq \lim_{p \to \infty} \left(\frac{M}{M+1}\right)^p = 0,$$

also

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| \geq M+1\}) = 0.$$

Es ist daher $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. (*Bemerkung: Statt mit $M+1$ kann man auch mit $M+\varepsilon$ arbeiten, und erhält so sogar $\|f\|_\infty \leq M$.*)
Wir zeigen nun, dass unter den obigen Bedingungen

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Ist $f(x) = 0$ für μ-fast alle $x \in \Omega$, also $\|f\|_p = 0$ für ein $p \in [1, \infty]$, und damit auch $\|f\|_p = 0$ für alle $p \in [1, \infty]$, so ist nichts weiter zu zeigen. Es wird daher im Folgenden davon ausgegangen, dass nicht $f(x) = 0$ für μ-fast alle $x \in \Omega$. Insbesondere ist dann auch $\mu(\Omega) > 0$.
Aus diesen Annahmen folgt, dass $\|f\|_\infty > 0$. Sei $\|f\|_\infty \geq \varepsilon > 0$ beliebig aber fest, und

$$A := \{x \in \Omega : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}.$$

Nach Definition von $\|f\|_\infty$ und ε ist $\mu(A) > 0$. Für alle $p \in [1, \infty)$ ist

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \geq \left(\int_A |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\
&\geq \left(\int_A (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \mu(A)^{1/p}(\|f\|_\infty - \varepsilon),
\end{aligned}$$

und deshalb

$$\liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \liminf_{p \to \infty} \mu(A)^{1/p}(\|f\|_\infty - \varepsilon) = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $0 < \varepsilon \leq \|f\|_\infty$ folgt damit, dass

$$\liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty.$$

Andererseits folgt aus (3), dass

$$\limsup_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p \to \infty} \mu(\Omega)^{1/p} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Es ist also

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty,$$

und deshalb

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Aufgabe 4. (Die Ordnung der $\mathcal{L}^p$-Räume)

Lemma 1. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $p \in [1, \infty]$. Für alle $\alpha \in [1, p]$, mit $\alpha \neq \infty$ falls $p = \infty$, ist $|f|^\alpha \in \mathcal{L}^{p/\alpha}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\||f|^\alpha\|_{p/\alpha} = \|f\|_p^\alpha$.*

Beweis. Ist $p = \infty$, so ist für alle $M \geq 0$

$$\{x \in \Omega : |f(x)| \leq M\} = \{x \in \Omega : |f(x)|^\alpha \leq M^\alpha\}.$$

Daher ist auch $|f|^\alpha \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $\||f|^\alpha\|_\infty = \|f\|_\infty^\alpha$. Ist $p < \infty$, so ist

$$\int_\Omega (|f|^\alpha)^{p/\alpha} \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

also $|f|^\alpha \in \mathcal{L}^{p/\alpha}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, und es ist

$$\||f|^\alpha\|_{p/\alpha} = \left(\int_\Omega (|f|^\alpha)^{p/\alpha} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\alpha/p} = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\alpha/p} = \|f\|_p^\alpha.$$

□

a)

Für $p = q$ ist nichts zu zeigen, weshalb im Folgenden nur der Fall $p < q$ betrachtet wird. Ist $q = \infty$, so ergeben sich die Aussagen direkt aus **Aufgabe 3**, und aus (3) insbesondere die Ungleichung $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ mit $C = \max\{\mu(\Omega), 1\}$. Daher wird im Folgenden nur der Fall $p < q < \infty$ betrachtet.
Sei $f \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nach Lemma 1 ist $|f|^p \in \mathcal{L}^{q/p}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\||f|^p\|_{q/p} = \|f\|_q^p$. Da $\mu(\Omega) < \infty$ ist $1 \in \mathcal{L}^{1/(1-p/q)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit

$$\|1\|_{1/(1-p/q)} = \left(\int_\Omega 1^{1/(1-p/q)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1-p/q} = \left(\int_\Omega 1 \, \mathrm{d}\mu \right)^{1-p/q} = \mu(\Omega)^{1-p/q}$$

Nach der Hölder-Ungleichung ist daher

$$\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega 1 \cdot |f|^p \leq \|1\|_{1/(1-p/q)} \big\||f|^p\big\|_{q/p} = \mu(\Omega)^{1-p/q} \|f\|_q^p.$$

Also ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \leq \mu(\Omega)^{1/p - 1/q} \|f\|_q.$$

b)

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $p \in [1, \infty)$ beliebig aber fest. Für den Fall $p = 1$ ist nichts zu zeigen, weshalb im Folgenden nur der Fall $1 < p$ betrachtet wird. Da $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist nach Lemma 1 auch $|f|^{p-1} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\|f^{p-1}\|_\infty = \|f\|_\infty^{p-1}$. Da $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist daher nach der Hölder-Ungleichung

$$\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \cdot |f|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_1 \||f|^{p-1}\|_\infty = \|f\|_1 \|f\|_\infty^{p-1}.$$

Es ist daher $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \leq \|f\|_1^{1/p} \|f\|_\infty^{(p-1)/p}.$$

c)

Ist $p = q$, so ist zwangsweise auch $r = p = q$ und die Aussagen gelten offenbar; auch wenn $p < q$ und $r = p$ oder $r = q$ sind sie offensichtlich. Es wird daher im Folgenden nur der Fall $p < r < q$ betrachtet.
Wir bemerken direkt, dass es in diesem Fall ein eindeutiges $\theta \in [0, 1]$ mit $1/r = (1 - \theta)/p + \theta/q$ gibt, wobei $\theta \in (0, 1)$, da die Abbildung $[0, 1] \to [1/q, 1/p], \theta \mapsto (1 - \theta)/p + \theta/q$ eine Bijektion ist.
Da $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $f \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist nach Lemma 1 sowohl

$$|f|^{r(1-\theta)} \in \mathcal{L}^{p/(r(1-\theta))}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ mit } \||f|^{r(1-\theta)}\|_{p/(r(1-\theta))} = \|f\|_p^{r(1-\theta)}$$

als auch

$$|f|^{r\theta} \in \mathcal{L}^{q/(r\theta)}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ mit } \|f^{r\theta}\|_{q/(r\theta)} = \|f\|_q^{r\theta}.$$

Dabei ist $p/(r(1 - \theta)), q/(r\theta) > 1$, da $(1 - \theta)/p, \theta/q < 1$. Da

$$\frac{r(1-\theta)}{p} + \frac{r\theta}{q} = r\left(\frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}\right) = 1$$

ist nach der Hölderungleichung

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|^{r(1-\theta)}|f|^{r\theta} \,\mathrm{d}\mu &\leq \||f|^{r(1-\theta)}\|_{p/(r(1-\theta))}\|f^{r\theta}\|_{q/(r\theta)} \\ &= \|f\|_p^{r(1-\theta)}\|f\|_q^{r\theta}.\end{aligned}$$

Es ist also $f \in \mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit

$$\|f\|_r = \left(\int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r} \leq \|f\|_p^{1-\theta}\|f\|_q^\theta.$$