

ANALYSIS III

11. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

12. Januar 2014

Aufgabe 2. (Die Hölder-Ungleichung)

a)

Ist $r = \infty$, so ist auch $p = q = \infty$. Für $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ ist dann

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Das zeigt, dass $fg \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und die geforderte Ungleichung gilt.

Ist $r \in [1, \infty)$, so folgt aus $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, dass $|f|^r \in \mathcal{L}^{p/r}(\Omega)$ mit $\| |f|^r \|_{p/r} = \|f\|_p^r$, und aus $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, dass $|g|^r \in \mathcal{L}^{q/r}(\Omega)$ mit $\| |g|^r \|_{q/r} = \|g\|_q^r$. Da

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = r \frac{1}{r} = 1$$

ist nach der Hölder-Ungleichung

$$\int_{\Omega} |fg|^r d\mu = \int_{\Omega} |f|^r |g|^r d\mu \leq \| |f|^r \|_{p/r} \| |g|^r \|_{q/r} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

Dass die rechte Seite der Gleichung endlich ist, zeigt, dass $fg \in \mathcal{L}^r(\Omega)$. Außerdem folgt, dass

$$\|fg\|_r = \left(\int_{\Omega} |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Aufgabe 3. (Die Dichtheit von einfachen Funktionen in L^p)

Bemerkung 1. Für $p \in [1, \infty)$ und $x, y \geq 0$ mit $x \leq y$ ist

$$(x+y)^p \geq x^p + y^p$$

und

$$(y-x)^p \leq y^p - x^p.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\psi(t) = (x+t)^p - x^p - t^p \text{ für alle } t \in [0, \infty).$$

Es ist $\psi \in C^1([0, \infty))$ mit

$$\psi'(t) = p(x+t)^{p-1} - pt^{p-1} = p((x+t)^{p-1} - t^{p-1}).$$

Es ist $\psi(0) = 0$ und $\psi'(t) \geq 0$ für alle $t \in (0, \infty)$. Also ist $\psi(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, \infty)$. Insbesondere ist

$$(x+y)^p - x^p - y^p = \psi(y) \geq 0,$$

was die erste Gleichung zeigt. Da $y - x \geq 0$ ist

$$y^p = (y-x+x)^p \geq (y-x)^p + x^p,$$

was die zweite Gleichung zeigt. \square

Wir betrachten die beiden Fälle $p \in [0, \infty)$ und $p = \infty$ getrennt. Zunächst betrachten wir den Fall $p \in [0, \infty)$.

Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $f \geq 0$. Wie wir wissen gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher, messbarer Funktionen mit $f_n \geq 0$ und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Aufgrund von Monotonie ist $0 \leq f^p$, sowie $0 \leq f_n^p$ und $f_n^p \leq f_{n+1}^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und aufgrund von Stetigkeit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)^p = f(x)^p \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n^p d\mu = \int_{\Omega} f^p d\mu.$$

Da $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $f \geq 0$ ist die rechte Seite der Gleichung endlich, wegen der Monotonie von $(f_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ also auch auch die linke für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist daher $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f^p - f_n^p d\mu = \int_{\Omega} f^p d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n^p d\mu = 0.$$

Nach Bemerkung 1 ist daher

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f - f_n)^p d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f^p - f_n^p d\mu = 0,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f - f_n)^p d\mu = 0$$

und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Sei nun $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ beliebig. Es ist auch $|f| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, und es gibt eine Folge einfacher Funktionen $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |||f| - f'_n||_p = 0$. Wir definieren die Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f'_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt direkt daraus, dass $|f'_n| = |f_n|$. Auch ist

$$|f(x) - f_n(x)| \geq ||f(x)| - f'_n(x)|| \text{ für alle } x \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist daher

$$\|f - f_n\|_p = \left(\int_{\Omega} |f - f_n|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} ||f| - f'_n|^p \right)^{1/p} = \||f| - f'_n\|_p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \||f| - f'_n\|_p = 0$ folgt daher, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Sei nun $p = \infty$. Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $f \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n \geq 1}$ auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ als

$$f_n(x) := \sup \left\{ \frac{k}{n} \leq f(x) : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dass $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und f_n einfach ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ direkt daraus, dass $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Es ist auch klar, dass

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Es ist daher $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/n$ für alle $n \geq 1$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$. Sei nun $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ beliebig. Offenbar ist auch $|f| \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, und wir finden eine Folge einfacher Funktionen $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \||f| - f'_n\|_\infty = 0$. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f'_n.$$

Dass $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt direkt daraus, dass $|f_n| = |f'_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$|f(x) - f_n(x)| \leq ||f(x)| - f'_n(x)| \text{ für alle } x \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist $\|f - f_n\|_\infty \leq \||f| - f'_n\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \||f| - f'_n\|_\infty = 0$ folgt daher, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.