Analysis III
11. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

23. Januar 2014

Aufgabe 1. (Dualität)

Für den Fall $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, mit $p \in [1, \infty]$, ist die Aussage bereits aus der Vorlesung bekannt. Es ist nämlich bekannt, dass die Abbildung

$$\psi : L^p(\Omega) \to \left(L^{p'}(\Omega)\right)^* \text{ mit } \psi(f)(g) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu \text{ für alle } g \in L^{p'}(\Omega)$$

wegen der σ-Endlichkeit des Maßraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $p \in [1, \infty]$ eine Isometrie ist, dass also

$$\begin{aligned}\|f\|_p = \|\psi(f)\| &= \sup\left\{|\psi(f)(g)| : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu\right| : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

Sei nun $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar und $p \in [1, \infty]$ mit $f \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$. Wir unterscheiden zwischen den drei Fällen $p = 1$, $p = \infty$ und $1 < p < \infty$.
Im Fall $p = 1$ lässt sich unabhängig von $M \in \mathbb{N}$ die Testfunktion $g_M = \operatorname{sgn}(f)$ wählen. Es ist klar, dass $g_M \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $\|g_M\|_\infty = 1$. Da $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$ ist

$$\int_\Omega f g_M \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu = \infty \geq M.$$

Ist $p = \infty$ so setzen wir für $M \in \mathbb{N}$

$$A_M := \{x \in \Omega : |f(x)| \geq M\}.$$

Offenbar ist $A_M \in \mathcal{A}$, und da $f \notin \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ ist $\mu(A_M) > 0$. Wegen der σ-Endlichkeit des Maßraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gibt es eine Menge $B_M \subseteq A_M$ mit $0 < \mu(B_M) < \infty$. Für die Funktion

$$g_M := \frac{\chi_{B_M}}{\mu(B_M)} \operatorname{sgn}(f)$$

ist $g_M \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $\|g_M\|_1 = 1$, da

$$\int_\Omega |g_M| \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(B_M)} \int_{B_M} 1 \,\mathrm{d}\mu = 1.$$

Auch ist

$$\int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(B_M)} \int_{B_M} |f| \, \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\mu(B_M)} \int_{B_M} M \, \mathrm{d}\mu = M.$$

Sei nun $1 < p < \infty$. Wegen der σ-Endlichkeit des Maßraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gibt es eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{A}$ mit $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, so dass $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\mu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Da $|f| : \Omega \to [0, \infty]$ messbar ist gibt es eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher, messbarer Funktionen mit $f_k \geq 0$ und $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} f_k = |f|$ punktweise überall. Aufgrund von Monotonie und Stetigkeit ist auch $(f_k^p)_{k\in N}$ eine Folge einfacher, messbarer Funktionen mit $f_k^p \geq 0$, $f_k^p \leq f_{k+1}^p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} f_k^p = |f|^p$.
Mehrfache Anwendung des Satzes über Monotone Konvergenz ergibt, dass

$$\infty = \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{B_n} f_k^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Es gibt daher $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_N} f_k^p \, \mathrm{d}\mu \geq (M+1)^p + 1,$$

also ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_{B_N} f_K^p \, \mathrm{d}\mu \geq (M+1)^p.$$

Wir setzen

$$h := \chi_{B_N} f_K$$

und bemerken auch direkt, dass $|f| \geq h \geq 0$.
Da $\mu(B_N) < \infty$ und f_K^p als einfache Funktion beschränkt ist, ist

$$\int_\Omega |h|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{B_N} f_K^p \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Es ist also $h \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ mit

$$\|h\|_p = \left(\int_\Omega |h|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = \left(\int_{B_N} f_K^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \geq M + 1.$$

Da $h \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ ist

$$\|h\|_p = \sup \left\{ \int_\Omega hg \, \mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1 \right\}.$$

Es gibt also ein $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ mit $\|g\|_{p'} \leq 1$, so dass

$$\int_\Omega hg \, \mathrm{d}\mu \geq \|h\|_p - 1 \geq M.$$

Für $g_M = \mathrm{sgn}(f)|g|$ ist $|g_M| = |g|$ und deshalb $g_M \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ mit $\|g_M\|_{p'} = 1$. Da $|f| \geq h \geq 0$ ist schließlich

$$\int_\Omega f g_M \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f||g| \, \mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega h|g| \, \mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega hg \, \mathrm{d}\mu \geq M.$$

Aufgabe 2. (Die Hölder-Ungleichung)

a)

Wir betrachten zunächst den Fall $r = \infty$. Da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} = 0$$

ist $p = q = \infty$. Es ist klar, dass für alle $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Das zeigt, dass $fg \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und die Ungleichung gilt.
Ist $r \in [1, \infty)$, so folgt aus $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, dass $|f|^r \in \mathcal{L}^{p/r}(\Omega)$ mit $\||f|^r\|_{p/r} = \|f\|_p^r$, und aus $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, dass $|g|^r \in \mathcal{L}^{q/r}(\Omega)$ mit $\||g|^r\|_{q/r} = \|f\|_q^r$. Dass dabei $p/r, q/r \geq 1$ folgt daraus, dass $1/p, 1/q \leq 1/r$, also $p, q \geq r$.
Da

$$\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = r\,\frac{1}{r} = 1$$

ist nach der Hölder-Ungleichung

$$\int_\Omega |fg|^r \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|^r |g|^r \,\mathrm{d}\mu \leq \||f|^r\|_{p/r} \||g|^r\|_{q/r} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

Dass die rechte Seite der Gleichung endlich ist, zeigt, dass $fg \in \mathcal{L}^r(\Omega)$. Außerdem folgt, dass

$$\|fg\|_r = \left(\int_\Omega |fg|^r \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

b)

Wir zeigen die Aussage per Induktion über $k \geq 1$.

Induktionsanfang: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen, und für $k = 2$ handelt es sich um die Aussage des vorherigen Aufgabenteils. □

Induktionsschritt: Es sei nun $k \geq 3$ und es gelte die Aussage für $k - 1$ und 2. Wegen $\sum_{i=1}^k 1/p_i = 1/r$ ist

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p_k}.$$

Ist $1/r - 1/p_k = 0$, so ist $r = p_k$ und $p_1 = \ldots = p_{k-1} = \infty$. Für $1 \leq r < \infty$ ist dann

$$\int_\Omega \left|\prod_{i=1}^k f_i\right|^r \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \prod_{i=1}^k |f_i|^r \,\mathrm{d}\mu \leq \prod_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_\infty^r \int_\Omega |f_k|^r \,\mathrm{d}\mu = \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}^r,$$

also $\prod_{i=1}^k f_i \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ mit $\|\prod_{i=1}^k f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}$. Für $r = \infty$ ist

$$\left|\prod_{i=1}^k f_i\right| = \prod_{i=1}^k |f_i| \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_\infty \ \mu\text{-fast überall},$$

also $\prod_{i=1}^k f_i \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^r(\Omega)$ mit $\| \prod_{i=1}^k f_i\|_\infty \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_\infty = \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}$.
Im Fall $1/r - 1/p_k > 0$ ist, da $1/r - 1/p_k \leq 1/r$,

$$s := \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p_k}} \geq r \geq 1.$$

Da $\sum_{i=1}^{k-1} 1/p_i = 1/s$ ist nach der Induktionsvoraussetzung $\prod_{i=1}^{k-1} f_i \in \mathcal{L}^s(\Omega)$ mit

$$\left\| \prod_{i=1}^{k-1} f_i \right\|_s \leq \prod_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_{p_i}.$$

Da $p_k, r, s \in [1, \infty]$ mit $1/p_k + 1/s = 1/r$, und $f_k \in \mathcal{L}^{p_k}(\Omega)$ und $\prod_{i=1}^{k-1} f_i \in \mathcal{L}^s(\Omega)$, ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\prod_{i=1}^{k} f_i = \left(\prod_{i=1}^{k-1} f_i \right) f_k \in \mathcal{L}^r(\Omega)$$

mit

$$\left\| \prod_{i=1}^{k} f_i \right\|_r \leq \left\| \prod_{i=1}^{k-1} f_i \right\|_s \|f_k\|_{p_k} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}.$$

□

c)

Im Folgenden wird häufig der Satz von Tonelli genutzt. Die entsprechenden Umformungen werden mit (T) markiert.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass $p = \infty$, $q = \infty$ oder $r = \infty$. Ist etwa $p = \infty$, so muss $q = r = 1$. Es ist dann

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x)g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x,y) \\
&\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x,y) \\
&\underset{(T)}{=} \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |h(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)| \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \|f\|_\infty \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_n(y) = \|f\|_\infty \|g\|_1 \|h\|_1.
\end{aligned}$$

Die Fälle $q = \infty$ und $r = \infty$ lassen sich analog abhandeln.
Als Nächstes betrachten wir den Fall, dass $p = 1$, $q = 1$ oder $r = 1$. Ist etwa $p = 1$,

so ist $1/q + 1/r = 1$ und daher

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x)g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x,y) \\
\underset{(T)}{=}& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \\
\underset{(*)}{\leq}& \|g\|_q \|h\|_r \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \|f\|_1 \|g\|_q \|h\|_r.
\end{aligned}$$

Dabei wird bei $(*)$ die Hölder-Ungleichung genutzt. Die Fälle $q = 1$ und $r = 1$ lassen sich analog abhandeln. Dabei muss man im Fale $q = 1$ allerdings den Transformationssatz nutzen: Es ist dann $1/p + 1/r = 1$, und es ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x)g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x,y) \\
\underset{(T)}{=}& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \\
\underset{(*)}{=}& \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)h(y+x)| \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(y)h(y+x)| \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \\
\underset{(T)}{=}& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(y)h(y+x)| \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)h(y+x)| \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \\
\underset{(**)}{\leq}& \|f\|_p \|h\|_r \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \,\mathrm{d}\lambda_n(y) = \|f\|_p \|g\|_1 \|h\|_r.
\end{aligned}$$

Dabei wird bei $(*)$ der Transformationssatz genutzt (bezüglich des Diffeomorphismus $\varphi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y \mapsto y + x$) und bei $(**)$ die Hölder-Ungleichung.
Zuletzt betrachten wir Fall, dass $1 < p, q, r < \infty$. Es ist dann auch $1 < p', q', r' < \infty$. Da

$$3 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 2 + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}$$

ist

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Wir betrachten die Hilfsfunktionen $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mit

$$\begin{aligned}
\alpha(x,y) &:= |g(y-x)|^{q/p'} |h(y)|^{r/p'}, \\
\beta(x,y) &:= |f(x)|^{p/q'} |h(y)|^{r/q'} \text{ und} \\
\gamma(x,y) &:= |f(x)|^{p/r'} |g(y-x)|^{q/r'}.
\end{aligned}$$

Offenbar sind α, β und γ messbar.

Es ist $\alpha \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\|\alpha\|_{p'} = \|g\|_q^{q/p'} \|h\|_r^{r/p'}$, denn

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\alpha(x,y)|^{p'} \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |g(y-x)|^q |h(y)|^r \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x,y) \\
&\underset{(T)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)|^q |h(y)|^r \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |h(y)|^r \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)|^q \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \,\mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \|g\|_q^q \int_{\mathbb{R}^n} |h(y)|^r \,\mathrm{d}\lambda_n(y) = \|g\|_q^q \|h\|_r^r.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich auch, dass $\beta \in \mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\|\beta\|_{q'} = \|f\|_p^{p/q'} \|h\|_r^{r/q'}$, und dass $\gamma \in \mathcal{L}^{r'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\|\gamma\|_{r'} = \|f\|_p^{p/r'} \|g\|_q^{q/r'}$.
Wir bemerken nun, dass

$$\frac{p}{q'} + \frac{p}{r'} = p\left(\frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}\right) = p\left(1 - \frac{1}{p'}\right) = p\,\frac{1}{p} = 1, \text{ sowie}$$
$$\frac{q}{p'} + \frac{q}{r'} = 1 \text{ und } \frac{r}{p'} + \frac{r}{q'} = 1.$$

Damit ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil, dass

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x) g(y-x) h(y)| \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x)|^{p/q'+p/r'} |g(y-x)|^{q/p'+q/r'} |h(y)|^{r/p'+r/q'} \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\alpha\beta\gamma| \,\mathrm{d}\lambda_{2n} \le \|\alpha\|_{p'} \|\beta\|_{q'} \|\gamma\|_{r'} \\
&= \|f\|_p^{p/q'+p/r'} \|g\|_q^{q/p'+q/r'} \|h\|_r^{r/p'+r/q'} = \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. (Die Dichtheit von einfachen Funktionen in L^p)

Bemerkung 1. *Für $p \in [1,\infty)$ und $x, y \ge 0$ mit $x \le y$ ist*

$$(x+y)^p \ge x^p + y^p$$

und

$$(y-x)^p \le y^p - x^p.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(t) = (x+t)^p - x^p - t^p \text{ für alle } t \in [0,\infty).$$

Es ist $\psi \in C^1([0,\infty))$ mit

$$\psi'(t) = p(x+t)^{p-1} - pt^{p-1} = p((x+t)^{p-1} - t^{p-1}).$$

Es ist $\psi(0) = 0$ und $\psi'(t) \geq 0$ für alle $t \in (0, \infty)$. Also ist $\psi(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, \infty)$. Insbesondere ist

$$(x + y)^p - x^p - y^p = \psi(y) \geq 0,$$

was die erste Gleichung zeigt. Da $y - x \geq 0$ ist

$$y^p = (y - x + x)^p \geq (y - x)^p + x^p,$$

was die zweite Gleichung zeigt. □

Wir betrachten die beiden Fälle $1 \leq p < \infty$ und $p = \infty$ getrennt. Zunächst betrachten wir den Fall $1 \leq p < \infty$.
Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $f \geq 0$. Wie wir wissen gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher, messbarer Funktionen mit $f_n \geq 0$ und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Aufgrund von Monotonie ist $0 \leq f^p$, sowie $0 \leq f_n^p$ und $f_n^p \leq f_{n+1}^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und aufgrund von Stetigkeit ist

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x)^p = f(x)^p \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist daher

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Da $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $f \geq 0$ ist die rechte Seite der Gleichung endlich, wegen der Monotonie von $(f_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ also auch auch die linke für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist daher $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f^p - f_n^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu - \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n^p \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Nach Bemerkung 1 ist daher

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \int_\Omega (f - f_n)^p \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f^p - f_n^p \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

also

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega (f - f_n)^p \, \mathrm{d}\mu = 0$$

und damit $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
Sei nun $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ beliebig. Es ist auch $|f| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, und es gibt eine Folge einfacher Funktionen $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $\lim_{n \to \infty} \||f| - f'_n\|_p = 0$. Wir definieren die Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f'_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass $f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt direkt daraus, dass $|f'_n| = |f_n|$. Auch ist

$$|f(x) - f_n(x)| \leq ||f(x)| - f'_n(x)| \text{ für alle } x \in \Omega, n \in \mathbb{N}.$$

Es ist daher

$$\|f - f_n\|_p = \left(\int_\Omega |f - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega ||f| - f'_n|^p \right)^{1/p} = \||f| - f'_n\|_p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n\to\infty} \||f| - f'_n\|_p = 0$ folgt daher, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Sei nun $p = \infty$. Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $f \geq 0$. Wir definieren die Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ als

$$f_n(x) := \sup\left\{\frac{k}{n} \leq f(x) : k \in \mathbb{N}\right\} \text{ für alle } x \in \Omega, n \geq 1.$$

Dass f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Funktion ist, und damit inbesondere $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt direkt daraus, dass $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Es ist auch klar, dass

$$\sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Es ist daher $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/n$ für alle $n \geq 1$, also $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.
Sei nun $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ beliebig. Offenbar ist auch $|f| \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, und wir finden eine Folge einfacher Funktionen $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \||f| - f'_n\|_\infty = 0$. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f'_n.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ direkt daraus, dass $|f_n| = |f'_n|$. Da

$$|f(x) - f_n(x)| \leq ||f(x)| - f'_n(x)| \text{ für alle } x \in \Omega, n \in \mathbb{N}$$

ist $\|f - f_n\|_\infty \leq \||f| - f'_n\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n\to\infty} \||f| - f'_n\|_\infty = 0$ folgt daher, dass $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

Aufgabe 4. (Schwache Konvergenz)

a)

Sei $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ beliebig aber fest. Da $f, f_k \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist nach der Hölder-Ungleichung $fg, f_k g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist daher

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$$

genau dann, wenn

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k g \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (f_k - f) g \,\mathrm{d}\mu.$$

Da auch $f_k - f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ folgt mithilfe der Hölder-Ungleichung, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_\Omega (f_k - f) g \right| \leq \int_\Omega |(f_k - f) g| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f_k - f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Da $f_k \longrightarrow f$ in $L^p(\Omega)$ ist $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0$, also auch

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (f_k - f) g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

b)

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes auf $\mathbb{R}$ folgt aus $f_k \rightharpoonup f$ und $f_k \rightharpoonup h$, dass für alle $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$

$$\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega hg \,\mathrm{d}\mu.$$

Da nach der Hölder-Ungleichung beide Seiten der Gleichung endlich sind, folgt, dass

$$\int_\Omega (f-h)g \,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ für alle } g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega).$$

Daher ergibt sich aus **Aufgabe 1** wegen der σ-Endlichkeit des Maßraumes, und da $f - h \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, dass

$$\|f-h\|_p = \sup\left\{\int_\Omega (f-h)g \,\mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} = 0.$$

Also ist $f = h$ in $L^p(\Omega)$, da $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf L^p ist.

c)

Bemerkung 2. *Sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ sei $(a_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $\mathbb{R}$. Dann ist*

$$\sup_{i\in I} \liminf_{n\to\infty} a_n^i \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{i\in I} a_n^i.$$

Beweis. Für alle $j \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n^j \leq \sup_{i\in I} a_n^i.$$

Also ist für alle $j \in I$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^j \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{i\in I} a_n^i$$

und deshalb auch

$$\sup_{j\in I} \liminf_{n\to\infty} a_n^j \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{i\in I} a_n^i.$$

□

Zusammenfügen von **Aufgabe 1** und Bemerkung 2 ergibt, dass

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \sup\left\{\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k g \,\mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \sup\left\{\int_\Omega f_k g \,\mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1\right\} = \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p.
\end{aligned}$$