

ANALYSIS III

9. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

19. Dezember 2013

Aufgabe 1. (Riemann vs. Lebesgue)

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass f , bzw. der Ausdruck $\sin(x)/x$, an der Stelle $x = 0$ als $f(0) = 1$ definiert ist. Aus Analysis 1 ist bekannt, dass f dann auf ganz \mathbb{R} stetig differenzierbar ist.

a)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_{(0,\infty)} |f| d\lambda \geq \int_{[0,n\pi]} |f| d\lambda = \int_0^{n\pi} |f(x)| dx = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$$

Wir dürfen das Lebesgue- mit dem Riemann-Integral vertauschen, da $|f|$ auf $[0, n\pi]$ beschränkt und stetig ist. Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)| dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \end{aligned}$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{(0,\infty)} |f| d\lambda \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

also

$$\int_{(0,\infty)} |f| d\lambda \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Es ist also $\int_{(0,\infty)} |f| d\lambda = \infty$. Daher ist $|f|$ auf $(0, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar, also auch f nicht.

b) und c)

Sei $R \geq 0$ beliebig aber fest. Wir betrachten die Funktion

$$g : [0, R] \times [0, \infty) \rightarrow [-1, 1], (x, t) \mapsto \sin(x)e^{-xt}.$$

Diese ist stetig, also Borell-messbar. Wir zeigen zunächst, dass g integrierbar ist. Für $|g|$ lässt sich der Satz von Tonelli anwenden, weshalb

$$\begin{aligned}\int_{[0,R] \times [0,\infty)} |g| \, d\lambda_2 &= \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} |g(x,t)| \, d\lambda(t) \, d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} |\sin(x)| e^{-xt} \, d\lambda(t) \, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Da $|\sin(x)|e^{-xt}$ für alle $x \in [0, R]$ auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar ist, und auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-Integrierbar mit

$$\int_0^\infty |\sin(x)| e^{-xt} \, dt = |\sin(x)| \int_0^\infty e^{-xt} \, dt = \frac{|\sin(x)|}{x},$$

ist für alle $x \in [0, \mathbb{R}]$

$$\int_{[0,\infty)} |\sin(x)| e^{-xt} \, d\lambda(t) = \int_0^\infty |\sin(x)| e^{-xt} \, dt = \frac{|\sin(x)|}{x}.$$

Daher ist

$$\int_{[0,R] \times [0,\infty)} |g| \, d\lambda_2 = \int_{[0,R]} \frac{|\sin(x)|}{x} \, d\lambda(x) < \infty,$$

da $\lambda([0, R]) = R < \infty$ und $0 \leq |\sin(x)|/x \leq 1$. Es ist also $|g|$ integrierbar, und damit auch g .

Da g integrierbar ist, lässt sich für $\int_{[0,R] \times [0,\infty)} g \, d\lambda_2$ der Satz von Fubini anwenden. Wir bemerken aber zunächst analog zur obigen Argumentation, dass für alle $x \in [0, R]$

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} g(x,t) \, d\lambda(t) &= \int_{[0,\infty)} \sin(x) e^{-xt} \, d\lambda(t) \\ &= \sin(x) \int_{[0,\infty)} e^{-xt} \, d\lambda(t) = \frac{\sin(x)}{x}.\end{aligned}$$

Daher ergibt sich mit dem Satz von Fubini zum einen, dass

$$\begin{aligned}\int_{[0,R] \times [0,\infty)} g \, d\lambda_2 &= \int_{[0,R]} \int_{[0,\infty)} g(x,t) \, d\lambda(t) \, d\lambda(x) = \int_{[0,R]} \frac{\sin(x)}{x} \, d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,R]} f(x) \, d\lambda(x) = \int_0^R f(x) \, dx.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt genutzt, dass f auf $[0, R]$ beschränkt und stetig ist, also Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen.

Um das andere, aus dem Satz von Fubini folgende, Integral zu bestimmen, bemerken wir, dass für alle $t \in [0, \infty)$

$$\int_{[0,R]} g(x,t) \, d\lambda(x) = \int_{[0,R]} \sin(x) e^{-xt} \, d\lambda(x) = \int_0^R \sin(x) e^{-xt} \, dx.$$

Dabei haben wir genutzt, dass $g(x,t)$ für alle $t \in [0, \infty)$ auf $[0, R]$ beschränkt und stetig ist, also Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen. Es ergibt sich für alle

$t \in (0, \infty)$ durch partielle Integration, dass

$$\begin{aligned} \int_0^R \sin(x) e^{-xt} dx &= -\frac{1}{t} \sin(x) e^{-xt} \Big|_{x=0}^R + \frac{1}{t} \int_0^R \cos(x) e^{-xt} dx \\ &= \left(-\frac{1}{t} \sin(x) e^{-xt} - \frac{1}{t^2} \cos(x) e^{-xt} \right) \Big|_{x=0}^R - \frac{1}{t^2} \int_0^R \sin(x) e^{-xt} dx, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}_{=\frac{1+t^2}{t^2}} \int_0^R \sin(x) e^{-xt} dx &= \left(-\frac{1}{t} \sin(x) e^{-xt} - \frac{1}{t^2} \cos(x) e^{-xt} \right) \Big|_{x=0}^R \\ &= -\frac{1}{t} \sin(R) e^{-Rt} - \frac{1}{t^2} \cos(R) e^{-Rt} + \frac{1}{t^2}, \end{aligned}$$

und daher für alle $t \in (0, \infty)$

$$\int_0^R \sin(x) e^{-xt} dx = -\frac{t \sin(R) e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R) e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}.$$

Man bemerke, dass diese Gleichung auch für $t = 0$ gilt, da

$$\int_0^R \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_{x=0}^R = -\cos(R) + 1.$$

Nach dem Satz von Fubini gilt also auch

$$\begin{aligned} \int_{[0,R] \times [0,\infty)} g d\lambda_2 &= \int_{[0,\infty)} \int_{[0,R]} g(x,t) d\lambda(x) d\lambda(t) \\ &= \int_{[0,\infty)} -\frac{t \sin(R) e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R) e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t), \end{aligned}$$

wobei aus dem Satz auch folgt, dass dieses hässliche Integral existiert. Zusammengefasst ergibt sich also aus dem Satz von Fubini

$$\int_0^R f(x) dx = \int_{[0,\infty)} -\frac{t \sin(R) e^{-Rt}}{1+t^2} - \frac{\cos(R) e^{-Rt}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t),$$

Sei nun $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf $(0, \infty)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Um den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{R_n} f(x) dx$ zu bestimmen (und ob dieser überhaupt existiert), betrachten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,\infty)} -\frac{t \sin(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t).$$

Wir wollen den Grenzwert und das Integral mithilfe des Satzes über dominierte Konvergenz vertauschen. Offenbar ist für alle $t \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{t \sin(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Auch ist für alle $n \in \mathbb{N}$ für alle $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{t \sin(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \right| \\ & \leq \frac{t |\sin(R_n)| e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{|\cos(R_n)| e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \\ & \leq 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist auf $[0, \infty)$ Lebesgue-integrierbar: Sie ist auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar, nichtnegativ, und das uneigentliche Riemannintegral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2} dt &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s 2e^{-R_n t} + \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{R_n} e^{-R_n t} + \arctan(t) \right) \Big|_{t=0}^s \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} -\frac{2}{R_n} e^{-R_n s} + \arctan(s) + \frac{2}{R_n} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{R_n} \end{aligned}$$

existiert. Daher ist die Funktion auf $[0, \infty)$ auch Lebesgue-integrierbar.

Wir können also den Satz über dominierte Konvergenz anwenden, und erhalten, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} -\frac{t \sin(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) \\ &= \int_{[0, \infty)} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{t \sin(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} - \frac{\cos(R_n) e^{-R_n t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) \\ &= \int_{[0, \infty)} \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t). \end{aligned}$$

Die Funktion $1/(1+t^2)$ auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar ist, nichtnegativ und auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \arctan(t) \Big|_{t=0}^s = \lim_{s \rightarrow \infty} \arctan(s) = \frac{\pi}{2}.$$

Daher ist

$$\int_{[0, \infty)} \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{R_n} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aus der Beliebigkeit der Folge R_n auf $(0, \infty)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ folgt, dass bereits

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 4. (Kugeln)

Für alle $N \geq 1$ und $R \geq 0$ ist

$$\lambda_N(B_R^N) = R^N \alpha_N,$$

denn für die Diagonalmatrix $T = \text{diag}(R, \dots, R) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ gilt

$$\lambda_N(B_R^N) = \lambda_N(T(B_R^1)) = |\det(T)| \lambda_N(B_R^1) = R^N \alpha_N.$$

Sei nun $N \geq 3$ beliebig aber fest. Für alle $(x_1, x) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned} (B_1^N)_{(x_1, x_2)} &= \left\{ (x_3, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2} : \sum_{i=1}^{N-2} x_i^2 \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ (x_3, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2} : \sum_{i=3}^{N-2} x_i^2 \leq 1 - (x_1^2 + x_2^2) \right\} \\ &= B_{\frac{N-2}{1-\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}}}^{N-2}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-2})$ und $\lambda_N = \lambda_2 \times \lambda_{N-2}$ ergibt sich aus der Definition des Produktmaßes, dass

$$\begin{aligned} \alpha_N &= \lambda_N(B_1^N) = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_{N-2}((B_1^N)_{(x,y)}) \, d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_A \lambda_{N-2}\left(B_{\frac{N-2}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}}^{N-2}\right) \, d\lambda_2(x, y) \\ &= \alpha_{N-2} \int_A \sqrt{1-(x^2+y^2)}^{N-2} \, d\lambda_2(x, y) \end{aligned}$$

wobei

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Umwandeln in Polarkoordinaten ergibt, dass

$$\begin{aligned} &\int_A \sqrt{1-(x^2+y^2)}^{N-2} \, d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_{(0,1) \times (0,2\pi)} r \sqrt{1-((r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2)}^{N-2} \, d\lambda_2(r, \varphi) \\ &= \int_{(0,1) \times (0,2\pi)} r \sqrt{1-r^2}^{N-2} \, d\lambda_2(r, \varphi). \end{aligned}$$

Anwenden des Satzes von Tonelli ergibt, dass

$$\begin{aligned} \int_{(0,1) \times (0,2\pi)} r \sqrt{1-r^2}^{N-2} \, d\lambda_2(r, \varphi) &= \int_{(0,1)} \int_{(0,2\pi)} r \sqrt{1-r^2}^{N-2} \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \int_{(0,1)} r \sqrt{1-r^2}^{N-2} \, dr. \end{aligned}$$

Da die Funktion $r \sqrt{1-r^2}^{N-2}$ auf $(0, 1)$ beschränkt und stetig ist, entspricht das Lebesgue-Integral dem Riemann-Integral. Dabei ergibt sich mit den Substitutionen

$r = \sin t$, $dr = \cos t \, dt$ und $\cos t = x$ und $-\sin t = dx$, dass

$$\begin{aligned} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} \, dr &= \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos^{N-1}(t) \, dt = - \int_1^0 x^{N-1} \, dx \\ &= \int_0^1 x^{N-1} \, dx = \left. \frac{x^N}{N} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich damit, dass

$$\alpha_N = 2\pi N^{-1} \alpha_{N-2}.$$