Analysis III
5. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

21. November 2013

Aufgabe 1. (Transformationsregel des Lebesguemaßes)

a)

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Aus der Definition des Lebesgue-Maßes folgt, dass es eine Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von n-dimensionalen offenen Intervallen gibt, so dass $N \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ und $\lambda_n(N) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_k)$. Dabei ist gerade $\mathrm{Vol}(I_k) = \lambda_n(I_k)$ für alle k.
Da jedes der I_k offen ist, gibt es, wie aus der Vorlesung bekannt, für alle $k \in \mathbb{N}$ eine disjunkte Familie halboffener Würfel $(C_l^k)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $I_k = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} C_l^k$ für alle k. (Im Skript ist dies **Lemma 1.32**; auch wenn dort im Satz nur von halboffenen Quadern gesprochen wird, handelt es sich bei den genutzten Quadern offenbar um Würfel.)
Es ist also $(C_l^k)_{k,l\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung von N mit paarweise disjunkten, halboffenen Würfeln, wobei aufgrund der σ-Additivität von λ_n

$$\sum_{k,l\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(C_l^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \lambda_n(C_l^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n\left(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} C_l^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(I_n) < \varepsilon.$$

Das Umsortieren der Summanden ist deshalb möglich, da diese alle nicht-negativ sind.

b)

Ist $\alpha_i \geq 0$ für alle i, so ist offenbar

$$T(Q) = T\left([0,l)^n\right) = \prod_{i=1}^n [0, \alpha_i l), \tag{1}$$

ein mehrdimensionales Intervall, also

$$\lambda_n(T(Q)) = \prod_{i=1}^n |\alpha_i| l = \left(\prod_{i=1}^n |\alpha_i|\right) l^n = \left(\prod_{i=1}^n |\alpha_i|\right) \lambda_n(Q). \tag{2}$$

Ist $\alpha_i < 0$ für ein i, so muss man in (1) das Intervall $[0, \alpha_i l)$ durch $(\alpha_i l, 0]$ ersetzen. Die Aussage (2) bleibt jedoch unverändert, da das Volumen eines Quaders, da es sich um ein mehrdimensionales Intervall handelt, nur von dessen Seitenlängen abhängt.
Es zu bemerken, dass aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes diese Gleichung (2) für alle halboffenen Würfel, unabhängig von ihrer konkreten Position im $\mathbb{R}^n$ gilt.

Sei nun $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wie im vorherigen Aufgabenteil gezeigt, gibt es eine Familie $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von halboffenen Würfeln mit $N \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(Q_k) < \varepsilon$. Es ist also

$$\begin{aligned}
\lambda_n(T(N)) = \lambda_n\left(T\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\right)\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(T(Q_k)) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^n |\alpha_i|\right) \lambda_n(Q_k) = \left(\prod_{i=1}^n |\alpha_i|\right) \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(Q_k) \\
&< \left(\prod_{i=1}^n |\alpha_i|\right) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aus der Endlichkeit des Produkts $\prod_{i=1}^n |\alpha_i|$ und der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass $\lambda_n(T(N)) = 0$.

Aufgabe 2. (Vervollständigung von Maßen)

a)

Man bemerke, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich μ eine Nullmenge ist. Da es für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $A = \emptyset \cup B$ oder $A = \{0\} \cup \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, ist $\mathcal{A}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, denn $\emptyset, \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

b)

Es sei

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 := \bigcup_{A\subseteq\mathbb{R}^2} \{A \cup (0\times\mathbb{R}), A \setminus (0\times\mathbb{R})\}.$$

$\tilde{\mathcal{A}}_0$ enthält genau die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die $0 \times \mathbb{R}$ ganz oder gar nicht beinhalten.
Es gilt $\tilde{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}$.
Sei $A \in \tilde{\mathcal{A}}_0$. Ist $(0,0) \notin A$, so ist $A = \emptyset \cup A$, wobei $\emptyset \in \mathcal{A}$ und A in der Nullmenge $\mathbb{R}^2 \setminus (0\times\mathbb{R}) = (\mathbb{R}\setminus 0)\times\mathbb{R} \in \mathcal{A}$ enthalten ist, also $A \in \mathcal{A}_0$. Ist $(0,0) \in A$, so ist $A = (0\times\mathbb{R}) \cup (A \setminus (0\times\mathbb{R}))$ analog in $\mathcal{A}_0$ enthalten. Also ist $\tilde{\mathcal{A}}_0 \subseteq \mathcal{A}_0$.
Sei $A \in \mathcal{A}_0$. Es gibt es $B \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $N \subseteq M$ für eine Nullmenge $M \in \mathcal{A}$ sodass $A = B \cup N$. Da M ein Nullmenge ist, ist $(0,0) \notin M$, also $(0\times\mathbb{R}) \cap M = \emptyset$. Daher ist $(0,0) \in A$ genau dann wenn $(0,0) \in B$. Dies gilt genau dann, wenn $(0\times\mathbb{R}) \subseteq B$, und genau dann nicht, wenn $(0\times\mathbb{R}) \cap B = \emptyset$. Es ist also $(0\times\mathbb{R})$ entweder ganz oder gar nicht in A, und daher $A \in \tilde{\mathcal{A}}_0$. Es ist also $\mathcal{A}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_0$.

Aufgabe 3. (Fast stetige Funktionen)

a)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Da N abzählbar ist, ist $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (Jede abzählbare Menge A lässt sich als

$$A = \bigcup_{a\in A} [a-1, a] \cap [a, a+1]$$

darstellen.) Es ist also auch $M := \mathbb{R}^n \setminus N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition von N ist $f_{|M} : M \to \mathbb{R}^n$ stetig. Es ist daher

$$A := \{x \in M : f_{|M}(x) \leq t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

da stetige Funktionen immer messbar sind. Da N abzählbar ist, ist es auch

$$N' := \{x \in N : f(x) \leq t\},$$

also $N' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Daher ist auch

$$\{x \in N : f(x) \leq t\} = A \cup N' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

also f Borell-messbar.

b)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest, und $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < t\}$. Ist $A = \mathbb{R}$, so ist A Borell-messbar. Ansonsten ist A ein Intervall der Form (a, ∞) oder $[a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Auch in diesen Fällen ist A Borell-messbar.

c)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Da $\lambda(N) = 0$ und das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_\lambda)$ vollständig ist, ist $N \in \mathcal{M}_\lambda$. Da $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_\lambda$ ist daher auch $M = \mathbb{R}^n \setminus N \in \mathcal{M}_\lambda$. Nach Definition ist $f_{|M}$ stetig, also

$$A := \{x \in M : f_{|M}(x) \leq t\} \in \mathcal{M}_\lambda,$$

Borell- und damit auch Lebesgue-messbar ist. Für

$$N' := \{x \in N : f(x) \leq t\}$$

ist $N' \subseteq N$, wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes also auch $\lambda(N') \in \mathcal{M}_\lambda$. Damit ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\} = A \cup N' \in \mathcal{M}_\lambda,$$

also f Lebesgue-messbar.

d)

Es genügt zu zeigen, dass $\overline{A_{2\varepsilon}} \subseteq A_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Denn dann ist

$$N = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} A_q \supseteq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_{2q}} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_q} \supseteq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} A_q, = N$$

also

$$N = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_q} \in F_\sigma.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es ist klar, dass $A_{2\varepsilon} \subseteq A_\varepsilon$. O.b.d.A sei $a \in \partial A_{2\varepsilon}$ und $\delta := \limsup_{y \to a} |f(y) - f(a)|$ (gibt es kein solches a, so ist nichts mehr zu zeigen). Angenommen, es ist $\delta < \varepsilon$. Dann gibt es ein $\omega > 0$, so dass $|f(y) - f(a)| < \delta$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|a - y| < \omega$. Da $a \in \partial A_{2\varepsilon}$ gibt es ein $x \in A_{2\varepsilon}$ mit $|x - a| < \omega$. Es ist

$$\limsup_{y \to x} |f(y) - f(x)| \leq \limsup_{y \to x} |f(y) - f(a)| + \limsup_{y \to x} |f(a) - f(x)| < 2\delta < 2\varepsilon,$$

im Widerspuch zu $x \in A_{2\varepsilon}$. Also muss $\delta \geq \varepsilon$, und somit $a \in A_\varepsilon$.

Aufgabe 4. (Reguläre Maße)

a)

Sei $A \in B(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest.

(ii) $\Rightarrow$ (iv)

Es gibt eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A^c \subseteq U$ und

$$\mu(U) \leq \mu(A^c) + \varepsilon.$$

Es ergibt sich wegen der Endlichkeit von μ, dass

$$\mu(U^c) = \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(U) \geq \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(A^c) - \varepsilon = \mu(A) - \varepsilon.$$

Da $U^c \subseteq A$ abgeschlossen ist, und $\varepsilon > 0$ beliebig, zeigt dies (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $C \subseteq A^c$ abgeschlossen mit

$$\mu(C) \geq \mu(A^c) - \varepsilon.$$

Es ist dann wegen der Endlichkeit von μ

$$\mu(C^c) = \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(C) \leq \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(A^c) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon.$$

Da $C^c \supseteq A$ offen ist, und $\varepsilon > 0$, zeigt dies (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Da jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ auch abgeschlossen ist, gilt

$$\begin{aligned} A &= \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\} \\ &\leq \sup\{\mu(K) : C \subseteq A, C \text{ abgeschlossen}\} \leq A, \end{aligned}$$

also

$$A = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ abgeschlossen}\}.$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii)

Es gibt ein $C \subseteq A$ abgeschlossen mit $\mu(C) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu(A)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$C_k := C \cap \overline{B_0(k)}.$$

C_k ist für alle k abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Da $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \mu(C).$$

Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C_N) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu(C)$. Da daher

$$\mu(C_N) + \varepsilon \geq \mu(C) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu(A),$$

und $C_N \subseteq C \subseteq A$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, ist, folgt (iii) aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$.

b)

Es sei
$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \text{(ii) und (iv) gelten für } A\}.$$
$\mathcal{A}$ bildet eine σ-Algebra.
Es ist klar, dass $\mathbb{R}^n$ (ii) und (iv) erfüllt.
Für $A \in \mathcal{A}$ gilt (ii), d.h. es gibt für beliebiges aber festes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supseteq A$ mit $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$. Für A^c gilt dann, dass $U^c \subseteq A^c$ eine abgeschlossene Menge mit

$$\mu(U^c) = \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(U) \geq \mu(\mathbb{R}^n) - \mu(A) - \varepsilon = \mu(A^c) - \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass (iv) für A^c gilt. Da (ii) und (iv) äquivalent sind, ist daher auch $A^c \in \mathcal{A}$.
Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen mit $A_k \in \mathcal{A}$ für alle k und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es gibt für alle k eine abgeschlossene Menge $C_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $C_k \subseteq A_k$ und

$$\mu(A_k \setminus C_k) = \mu(A_k) - \mu(C_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Es ist daher
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k =: C \subseteq A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$
eine abgeschlossene Teilmenge mit

$$A \setminus C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \setminus C_k).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) - \mu(C) = \mu(A \setminus C) &\leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \setminus C_k\right) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k \setminus C_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also $\mu(A) \leq \mu(C) + \varepsilon$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ erfüllt A daher (iv), also auch (ii), ist also in $\mathcal{A}$ enthalten.
Trivialerweise erfüllt jede offene Menge Bedingung (ii), und damit auch (iv). Also sind alle offenen Mengen in $\mathcal{A}$ enthalten. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die kleinste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft ist, muss $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}$. Da nach Definition $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist daher $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}$. Es erfüllen also alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Bedingungen (ii) und (iv), also auch (iii). Da Bedingung (i) direkt aus der Endlichkeit von μ folgt, ist μ daher regulär.