Analysis III

4. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

8. November 2013

Aufgabe 1. (Lebesgue-Stieltjes-Maße)

a)

Da μ endlich und monoton ist, ist μ auch beschränkt, denn für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$\mu(A) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

Aus der Beschränktheit von μ folgt die Beschränktheit von F_μ, da damit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) < \infty.$$

Die Monotonie von F_μ ergibt sich daraus, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ offenbar $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ und wegen der Monotonie von μ daher

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F_\mu(y).$$

Zum Nachweis der Rechtsstetigkeit sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine motonon fallende Folge auf $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Es gilt zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = F_\mu(x)$. Aus der Monotonie von F_μ folgt, dass $F_\mu(x) \leq F_\mu(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch

$$F_\mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n).$$

Zum Beweis der anderen Ungleichung sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir bemerken, dass die Folge $((x, x + \frac{1}{n}])_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist, und da μ ein beschränktes Maß ist daher

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \leq x_n \leq x + \frac{1}{N}$ für alle $n \geq n_0$. Aufgrund der endlichen Additivität von μ ergibt sich daher, dass für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
F_\mu(x_n) &= \mu((-\infty, x_n]) = \mu((-\infty, x] \cup (x, x_n]) = \mu((-\infty, x]) + \mu((x, x_n]) \\
&= F_\mu(x) + \mu((x, x_n]) \leq F_\mu(x) + \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{N}\right]\right) \leq F_\mu(x) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist auch

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) \leq F_\mu(x) + \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) \leq F_\mu(x).$$

Aufgabe 2. (Mengen)

Aufgabe 3. (Lebesgue-messbare Mengen)

Aufgabe 4. (Projektion des Lebesguemaßes)