Analysis III
4. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

23. Januar 2014

Aufgabe 1. (Lebesgue-Stieltjes-Maße)

a)

Da μ endlich und monoton ist, ist μ auch beschränkt, denn für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$\mu(A) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

Aus der Beschränktheit von μ folgt die Beschränktheit von F_μ, da damit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) < \infty.$$

Die Monotonie von F_μ ergibt sich daraus, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ offenbar $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ und wegen der Monotonie von μ daher

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F_\mu(y).$$

Zum Nachweis der Rechtsstetigkeit sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine motonon fallende Folge auf $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Es gilt zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = F_\mu(x)$. Aus der Monotonie von F_μ folgt direkt, dass $F_\mu(x) \leq F_\mu(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch

$$F_\mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n). \tag{1}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir bemerken, dass die Folge $((x, x + \frac{1}{n}])_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fallend ist, und daher

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu(\emptyset) = 0,$$

da μ ein Maß ist. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \leq x_n \leq x + \frac{1}{N}$ für alle $n \geq n_0$. Aufgrund der Monotonie und endlichen Additivität von μ ergibt sich, dass für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} F_\mu(x_n) &= \mu((-\infty, x_n]) = \mu((-\infty, x] \cup (x, x_n]) = \mu((-\infty, x]) + \mu((x, x_n]) \\ &= F_\mu(x) + \mu((x, x_n]) \leq F_\mu(x) + \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{N}\right]\right) < F_\mu(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) \leq F_\mu(x) + \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt daraus, dass

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) \leq F_\mu(x).$$

Zusammen mit (1) zeigt dies die Rechtsstetigkeit von F_μ.
Dass $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = 0$ ergibt sich ähnlich: Die Folge $((-\infty, -n])_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist fallend, also gilt

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, -n]) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Es gibt daher für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $F_\mu(-n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$; dabei folgt aus der Monotonie von F_μ, dass $F_\mu(x) < \varepsilon$ für alle $x \geq N$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = 0$.

Aufgabe 2. (Mengen)

Es sei $0 < \alpha < 1$ beliebig aber fest und $\beta := 1 - \alpha$.

a)

Die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt definiert: Man beginne mit $M_0 := [0, 1]$. M_1 konstruiert man aus M_0 indem man in der Mitte von M_0 das offene Intervall $\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}\right)$ mit Länge $\frac{\beta}{2}$ entfernt, d.h.

$$M_1 = [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}\right) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}, 1\right].$$

M_2 konstruiert man aus M_1 indem man aus jedem der beiden Intervalle in M_1 das jeweils mittige offene Intervall der Länge $\frac{\beta/4}{2} = \frac{\beta}{8}$ entfernt. M_3 ergibt sich aus M_2, indem man aus jedem der vier Intervalle in M_2 das jeweils mittige offene Intervall der Länge $\frac{\beta/8}{4} = \frac{\beta}{32}$ entfernt. Nach dem gleichen Prinzip konstruiert man rekursiv alle weiteren M_n.
Offenbar ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge M_n aus 2^n disjunkten, abgeschlossenen, gleichlangen Intervallen besteht; insbesondere ist M_n als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Die Intervalle haben zusammen eine Gesamtlänge von $1 - \beta \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ also jedes einzelne eine Länge von

$$\frac{1 - \beta \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}}{2^n}.$$

Es sei nun

$$M := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n.$$

Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist M ebenfalls abgeschlossen. Da $M_n \subseteq [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $M \subseteq [0, 1]$. M enthält keine nichtleere offene Menge: Für alle $x \in M$ ist $x \in M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also x für alle $n \in \mathbb{N}$ in einem Intervall der Länge

$$\frac{1 - \beta \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}}{2^n}$$

enthalten. Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\beta\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}}{2^n} = 0$$

gibt es in M keinen ε-Ball um x in M.
Es ist $\lambda(M) = \alpha$: Da alle M_n, sowie auch M, als abgeschlossene Mengen λ-messbar sind, und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein fallende Folge auf M_λ mit $\lambda(M_n) \leq \lambda([0,1]) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt daraus, dass λ ein Maß ist, dass

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(M_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \beta\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - \beta = \alpha.$$

Dabei ergibt sich $\mu(M_n)$ aus der endlichen Additivität von λ, sowie der Tatsache, dass M_n eine endliche Vereinigung disjunkter, abgeschlossener Intervalle ist, deren Maß genau ihre Länge ist.

b)

Wie in Aufgabenteil **a)** gezeigt enthält $[0,1]$ eine abgeschlossene Teilmenge A, die keine nichtleeren offenen Mengen enthält, und für die $\lambda(A) = \beta$ (da $0 < \alpha < 1$ ist auch $0 < \beta < 1$). Es sei

$$B := (0,1) \setminus A = (0,1) \cap A^c.$$

Da A abgeschlossen ist, ist B als endlicher Schnitt offener Mengen offen. Wegen der endlichen Additivität von μ ist

$$\lambda(B) = \lambda((0,1)) - \lambda(A) = 1 - \beta = \alpha.$$

B liegt dicht in $[0,1]$: Gebe es $x, y \in [0,1]$ mit $x < y$ und $z \notin B$ für alle $x \leq z \leq y$, so ist $(x,y) \subseteq A$ ein nichtleeres offenes Intervall, im Widerspruch zur Annahme, dass A kein solches enthält.

Aufgabe 3. (Lebesgue-messbare Mengen)

$(i) \Rightarrow (ii)$

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Wie aus der Vorlesung bekannt ist

$$A = \sup\{\lambda_n^*(K) : K \subseteq A, K \text{ ist kompakt}\}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ gibt es daher eine abgeschlossene Teilmenge $K_k \subseteq A$ mit

$$\lambda_n^*(K_k) + \frac{1}{k} \geq \lambda_n^*(A). \tag{2}$$

Es sei $K := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_n$. Da alle K_k kompakt und damit auch abgeschlossen sind, ist nach Definition $K \in F_\sigma$. Da alle K_k abgeschlossen sind, also $K_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$, ist wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ unter abzählbaren Vereinigungen auch $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es ist $\mu(K) = \mu(A)$: Da $K \subseteq A$ folgt $\mu(K) \leq \mu(A)$ aus der Monotonie von μ. Wegen der Monotonie von μ folgt aus (2) auch, dass für alle $k \geq 1$

$$\mu(K) + \frac{1}{k} \geq \mu(K_k) + \frac{1}{k} \geq \lambda_n^*(A)$$

Für $k \to \infty$ ergibt sich damit, dass $\mu(K) \geq \mu(A)$.
Sei $N := A \setminus K$. Aus der endlichen Additivität von μ ergibt sich aus $\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(K)$, dass

$$\lambda_n^*(N) = \lambda_n^*(A) - \lambda_n^*(K) = 0.$$

Es ist also $K \in F_\sigma$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n^*(N) = 0$ und $A = K \cup N$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Es ist $A_1 \in F_\sigma$ sowie

$$\begin{aligned}\lambda_n^*((A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A)) &\leq \lambda_n^*(A \setminus A_1) + \lambda_n^*(A_1 \setminus A) \\ &\leq \lambda^*(A_2) + \lambda_n^*(\emptyset) = 0.\end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$

Da $B \in F_\sigma$ ist $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ für abgeschlossene Mengen $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$. Es ist also auch $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, also B messbar. Da

$$\lambda_n^*(\underbrace{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}_{=:C}) = 0$$

ist auch C messbar. Da $\mathcal{M}_{\lambda_n^*}$ eine σ-Algebra ist, ist damit auch

$$A = (B \cup C) \setminus (B \cap C) = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in \mathcal{M}_{\lambda_n^*},$$

also A messbar.

Aufgabe 4. (Projektion des Lebesguemaßes)

a)

Es gilt die Axiome eines äußeren Maßes zu überprüfen: Es ist

$$\mu^*(\emptyset) = \lambda_1^*(\pi(\emptyset)) = \lambda_1^*(\emptyset) = 0.$$

Für $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist $\pi(A) \subseteq \pi(B)$, also wegen der Monotonie von λ_1^*

$$\mu^*(A) = \lambda_1^*(\pi(A)) \leq \lambda_1^*(\pi(B)) = \mu^*(B),$$

was die Monotonie von μ^* zeigt. μ^* ist subadditiv, denn λ_1^* ist als äußeres Maß auf $\mathbb{R}$ subadditiv, weshalb für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \lambda_1^*\left(\pi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = \lambda_1^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi(A_n)\right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_1^*(\pi(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).\end{aligned}$$

b)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) B ist μ^*-messbar.

(ii) $\pi(B)$ ist λ_1^*-messbar.

(iii) Es gibt λ_1^*-messbare Mengen $B_0, B_1 \subseteq \mathbb{R}$ mit $B_0 \subseteq B_1$, $\lambda_1^*(B_1 \setminus B_0) = 0$ und $B_0 \times \mathbb{R} \subseteq B \subseteq B_1 \times \mathbb{R}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Es gilt zu zeigen, dass

$$\lambda_1^*(A) = \lambda_1^*(A \cap \pi(B)) + \lambda(A \cap \pi(B)^c).$$

Aufgrund der Subadditivität von λ_1^* genügt es hierfür zu zeigen, dass

$$\lambda_1^*(A) \geq \lambda_1^*(A \cap \pi(B)) + \lambda_1^*(A \cap \pi(B)^c).$$

Wer bemerken zunächst, dass $\pi(B)^c \subseteq \pi(B^c)$: Für $y \in \pi(B)^c$ ist $y \notin \pi(B)$. Aus der Surjektivität von π folgt, dass es $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\pi(x) = y$ gibt. Da $y \notin \pi(B)$ ist $x \notin B$. Also ist $x \in B^c$ und daher $y \in \pi(B^c)$.
Auch ist für alle $C \in \mathbb{R}^2$

$$A \cap \pi(C) = \pi((A \times \mathbb{R}) \cap C), \tag{3}$$

da

$$\begin{aligned}
A \cap \pi(C) &= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ und } x \in \pi(C)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ und } (x, y) \in C \text{ für ein } y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A \times \mathbb{R} \text{ und } (x, y) \in C \text{ für ein } y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in (A \times \mathbb{R}) \cap C \text{ für ein } y \in \mathbb{R}\} \\
&= \pi((A \times \mathbb{R}) \cap C).
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^*(A \cap \pi(B)) + \lambda_1^*(A \cap \pi(B)^c) \underset{\lambda_1^* \text{ monoton}}{\leq} \lambda_1^*(A \cap \pi(B)) + \lambda_1^*(A \cap \pi(B^c)) \\
&= \lambda_1^*(\pi((A \times \mathbb{R}) \cap B)) + \lambda_1^*(\pi((A \times \mathbb{R}) \cap B^c)) \\
&= \mu^*((A \times \mathbb{R}) \cap B) + \mu^*((A \times \mathbb{R}) \cap B^c) \underset{B\ \mu^* - \text{messbar}}{=} \mu^*(A \times \mathbb{R}) \\
&= \lambda_1^*(\pi(A \times \mathbb{R})) = \lambda_1^*(A).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\pi(B)$ λ_1^*-messbar ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Da $\pi(B)$ λ_1^*-messbar ist, folgt aus **Aufgabe 3**, dass es $A_1 \in F_\sigma$ und $A_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lambda_1^*(A_2) = 0$ gibt, so dass $\pi(B) = A_1 \cup A_2$. A_1 ist messbar: Nach Definition ist $A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ für eine Familie $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Mengen auf $\mathbb{R}$. Da alle

K_n als abgeschlossene Mengen λ_1^*-messbar sind, und $\mathcal{M}_{\lambda_1^*}$ eine σ-Algebra ist, ist wegen der „σ-Additivität" von $\mathcal{M}_{\lambda_1^*}$ damit auch A_1 λ_1^*-messbar.
Sei nun $B_0 := A_1$ und $B_1 := A_1 \cup A_2 = \pi(B)$. B_0 und B_1 sind λ_1^*-messbar, und wegen der Monotonie von λ_1^* ist

$$\lambda_1^*(B_1 \setminus B_0) \leq \lambda_1^*(A_2) = 0.$$

Da $B_0 \subseteq \pi(B) = B_1$ ist auch

$$B_0 \times \mathbb{R} = \pi^{-1}(B_0) \subseteq B \subseteq \pi^{-1}(B_1) = B_1 \times \mathbb{R}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebig aber fest. Es gilt zu zeigen, dass

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Wegen der Subadditivität von μ^* genügt es zu zeigen, dass

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Es ist

$$A \cap (B_0 \times \mathbb{R}) \subseteq A \cap B \subseteq A \cap (B_1 \times \mathbb{R}).$$

Wegen (3) ist daher

$$\pi(A \cap B) \subseteq \pi(A \cap (B_1 \times \mathbb{R})) = \pi(A) \cap B_1, \tag{4}$$

Analog ergibt sich wegen

$$(B_0 \times \mathbb{R})^c = \pi^{-1}(B_0)^c = \pi^{-1}(B_0^c) = (B_0^c \times \mathbb{R})$$

auch, dass

$$A \cap B^c \subseteq A \cap (B_0 \times \mathbb{R})^c = A \cap (B_0^c \times \mathbb{R}),$$

und wegen (3) daher

$$\pi(A \cap B^c) \subseteq \pi(A \cap (B_0 \times \mathbb{R})^c) = \pi(A \cap (B_0^c \times \mathbb{R})) = \pi(A) \cap B_0^c. \tag{5}$$

Zusammengefasst ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
&\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \\
&= \lambda_1^*(\pi(A \cap B)) + \lambda_1^*(\pi(A \cap B^c)) \\
&\leq \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_1) + \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_0^c) && (6)\\
&= \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_1) + \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_0^c \cap B_1) + \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_0^c \cap B_1^c) && (7)\\
&= \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_1) + \lambda_1^*(\pi(A) \cap B_1^c) && (8)\\
&= \lambda_1^*(\pi(A)) = \mu^*(A), && (9)
\end{aligned}$$

wobei bei (6) die Monotonie von λ_1^* in Kombination mit (4) und (5) genutzt wird, bei (7) die λ_1^*-messbarkeit von B_1, bei (8) die Monotonie von λ_1^* und dass

$$B_0^c \cap B_1 = B_1 \setminus B_0$$

eine Nullmenge ist, sowie dass

$$B_0^c \cap B_1^c = (B_0 \cup B_1)^c = B_1^c,$$

und bei (9) noch einmal die λ_1^*-Messbarkeit von B_1. Dies zeigt die μ^*-Messbarkeit von B.