Analysis III
10. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

5. Januar 2014

Aufgabe 1. Gegenbeispiele

a)

Wir betrachten die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/\sqrt{x}$. Diese ist auf auf jedem kompakten Teilintervall von $(0,1)$ Riemann-integrierbar und $f = |f|$ ist auf $(0,1)$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\downarrow 0} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\downarrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_{x=s}^1 = \lim_{s\downarrow 0} 2 - 2\sqrt{s} = 2.$$

Also ist f auf $(0,1)$ auch Lebesgue-integrierbar, weshalb $f \in \mathcal{L}((0,1))$. Es ist jedoch $f^2 \notin \mathcal{L}^2((0,1))$: Für alle $x \in (0,1)$ ist $|f(x)^2| = f(x)^2 = 1/x$. Für die Funktionenfolge

$$h_n := \chi_{[1/n,1)} f^2$$

gilt auf $(0,1)$ überall $h_n \leq h_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = f^2$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist also

$$\int_{(0,1)} |f|^2\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} h_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1)} h_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

b)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/(x+1)$. Es ist $f \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$: Für die Funktionenfolge

$$f_n := \chi_{[-n,n]} f$$

ist auf $\mathbb{R}$ überall $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f = |f|$. Daher ist nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f_n\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2 \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.
\end{aligned}$$

Es ist jedoch $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: Für die Funktionenfolge

$$h_n := \chi_{[-n,n]} f^2$$

ist auf $\mathbb{R}$ überall $h_n \le h_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = f^2 = |f|^2$. Also ist nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f^2 \,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f^2 \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{(x+1)^2} \,\mathrm{d}x = 2 \lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} < \infty.
\end{aligned}$$