Analysis III

8. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

23. Januar 2014

Aufgabe 1. (Vertauschung von Integralen)

a)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x,y}\,\mathrm{d}\mu(y) = \mu(\{x\}) \cdot 1 = 1,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\,\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

Andererseits ist für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x,y}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(\{y\}) \cdot 1 = 0,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Insbesondere sind die beiden Doppelintegrale verschieden.

b)

Es ist für alle $x \in (0,1)$

$$\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y,$$

da $g(x,y)$ für festes $x \in (0,1)$ auf $[0,1]$ stetig und beschränkt ist, also Lebesgue- und Riemann-integral übereinstimmen. Für obiges Integral ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{1}$$

Das Auseinanderziehen der Integrale ist möglich, da beide Integrale einzeln existieren, da die entsprechenden Funktionen auf $[0,1]$ für alle $x \in (0,1)$ stetig und beschränkt sind. Durch partielle Integration ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y &= -y\frac{1}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}^1 + \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Zusammen mit (1) ergibt sich damit, dass

$$\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in (0,1)$. Da $\frac{1}{1+x^2}$ auf $[0,1]$ stetig und beschränkt, und damit Riemann-integrierbar ist, gilt

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{(0,1)} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \arctan(x)|_{x=0}^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Für das andere Doppelintegral ergibt sich, da $g(x,y) = -g(y,x)$ für alle $x, y \in (0,1)$ damit auch direkt, dass

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = -\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} g(y,x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = -\frac{\pi}{4}.$$

Insbesondere sind die beiden Integrale verschieden.
Um $\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2$ zu bestimmen, bemerken wir, dass $|g| \geq 0$ auf $(0,1)^2$ stetig, also Borell-messbar ist. Wäre $\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2 < \infty$, so wäre $|g|$ und damit auch g auf $(0,1)^2$ bezüglich λ_2 integrierbar. Da $(0,1)^2 = (0,1) \times (0,1)$ und $\lambda_2 = \lambda \times \lambda$ wären dann die beiden oben berechneten Integrale nach dem Satz von Fubini gleich. Da dies nicht der Fall ist, muss $\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2 = \infty$.
Dies lässt sich auch nachrechnen: Es lässt sich auf $\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2$ der Satz von Tonelli anwenden, weshalb

$$\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{(0,1)}\int_{(0,1)} |g(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Wir bemerken, dass, da $|g|$ stetig auf $[0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist, für alle $x \in (0,1)$

$$\int_{(0,1)} |g(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \geq \int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Analog zu den vorherigen Berechnungen ergibt sich, dass

$$\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = y\frac{1}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}^x = \frac{1}{2x}.$$

Da $1/(2x)$ auf dem Intervall $(0,1)$ stetig ist, und auf jedem kompakten Teilintervall von $(0,1)$ Riemann-integrierbar, ergibt sich damit zusammengefasst

$$\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2 \geq \int_{(0,1)} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Aufgabe 2. (Fast überall differenzierbar)

a)

Es sei

$$N := \{x \in [0,1] : f \text{ ist nicht differenzierbar an der Stelle } x\}.$$

Da f fast überall differenzierbar ist, ist $\lambda(N) = 0$ und f auf $N^C \subseteq (0,1)$ differenzierbar. Wir zeigen zunächst, dass $g_k(x) \to f'(x)$ für $k \to \infty$ punktweise auf N^C. Hierfür unterscheiden wir zwischen zwei Fällen:
Ist $x = j/2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, so ist

$$g_k(x) = \frac{f(x + 2^{-k}) - f(x)}{2^{-k}} \text{ für alle } k \geq n,$$

und daher, da f an der Stelle x differenzierbar ist,

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x + 2^{-k}) - f(x)}{2^{-k}} = f'(x).$$

Andernfalls bezeichne für alle $k \in \mathbb{N}$ das Paar $x_k^L < x < x_k^R$ mit $x_k^R - x_k^L = 2^{-k}$ die Randpunkte des Intervalls, auf dem g_k als konstant definiert ist, und das x enthält. Es ergibt sich, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \frac{f\left(x_k^R\right) - f\left(x_k^L\right)}{2^{-k}} = \frac{f\left(x_k^R\right) - f(x)}{2^{-k}} + \frac{f(x) - f\left(x_k^L\right)}{2^{-k}} \\ &= \frac{f\left(x_k^R\right) - f(x)}{x_k^R - x} \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \frac{f(x) - f\left(x_k^L\right)}{x - x_k^L} \frac{x - x_k^L}{2^{-k}}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 \cdot f'(x) &= \left(\frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \frac{x - x_k^L}{2^{-k}}\right) f'(x) \\ &= \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} f'(x) + \frac{x - x_k^L}{2^{-k}} f'(x), \end{aligned}$$

also für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &g_k(x) - f'(x) \\ &= \left(\frac{f\left(x_k^R\right) - f(x)}{x_k^R - x} - f'(x)\right) \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \left(\frac{f(x) - f\left(x_k^L\right)}{x - x_k^L} - f'(x)\right) \frac{x - x_k^L}{2^{-k}}. \end{aligned}$$

Durch die Dreiecksungleichung ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &|g_k(x) - f'(x)| \\ &\leq \left|\frac{f\left(x_k^R\right) - f(x)}{x_k^R - x} - f'(x)\right| \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \left|\frac{f(x) - f\left(x_k^L\right)}{x - x_k^L} - f'(x)\right| \frac{x - x_k^L}{2^{-k}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\lim_{k\to\infty} x_k^L = x = \lim_{k\to\infty} x_k^R$ und f an der Stelle x differenzierbar ist, gibt es $n_L, n_R \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{f\left(x_k^R\right) - f(x)}{x_k^R - x} - f'(x)\right| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq n_R \text{ und}$$

$$\left|\frac{f(x) - f\left(x_k^L\right)}{x - x_k^L} - f'(x)\right| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq n_L.$$

Es ergibt sich damit aus (2), dass für alle $k \geq \max\{n_L, n_R\}$

$$|g_k(x) - f'(x)| < \varepsilon \frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \varepsilon \frac{x - x_k^L}{2^{-k}} = \varepsilon \left(\frac{x_k^R - x}{2^{-k}} + \frac{x - x_k^L}{2^{-k}} \right) = \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ zeigt dies, dass $g_k(x) \to f'(x)$ für $k \to \infty$.
Da $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ nach Definition Lebesgue-messbar ist, und $g = f'$ auf N^C, folgt, da N eine Lebesgue-Nullmenge und das Lebesgue-Maß vollständig ist, dass auch $g : [0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist. (Vergleiche Satz 2.10.) Da f streng monoton steigend ist, ist $g = f' \geq 0$ auf N^c. Das Integral $\int_{(0,1)} f' \, \mathrm{d}\lambda = \int_{N^c} f' \, \mathrm{d}\lambda$ ist daher wohldefiniert. Aus der Definition von g_k ergibt sich auch direkt, dass für alle $k \in \mathbb{N}$.

$$\int_{N^c} g_k(x) \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{j=0}^{2^k - 1} f\left((j+1)2^{-k}\right) - f\left(j 2^{-k}\right) = f(1) - f(0).$$

Nach dem Lemma von Fatou ist daher

$$\int_{(0,1)} f' \, \mathrm{d}\lambda = \int_{N^c} f' \, \mathrm{d}\lambda = \int_{N^c} \liminf_{k\to\infty} g_k \, \mathrm{d}\lambda \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{N^c} g_k \, \mathrm{d}\lambda = f(1) - f(0).$$

Insbesondere ist $0 \leq \int_{(0,1)} f' \, \mathrm{d}\lambda < \infty$, also f' über $(0,1)$ integrierbar bezüglich λ.

b)

Man betrachte die Cantormenge $C \subseteq [0,1]$ und die Cantorfunktion $f : [0,1] \to [0,1]$. Es ist bekannt, dass f stetig und monoton steigend ist. f ist auch λ-fast überall differenzierbar: Für alle $x \in [0,1] \setminus C$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq [0,1] \setminus C$. f ist auf $B_\varepsilon(x)$ konstant, weshalb f an der Stelle x differenzierbar mit $f'(x) = 0$ ist. Mit $\lambda(C) = 0$ ergibt sich die Behauptung.
Es ist insbesondere $\int_{(0,1)} f'(x) \, \mathrm{d}\lambda = 0$, aber $f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$.

Aufgabe 3. (Integralberechnung)

a)

Für alle $k \geq 1$ definieren wir $g_k^1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ als

$$g_k^1(x) := x e^{-kx} \text{ für alle } x > 0.$$

Für alle $k \geq 1$ gilt: g_k^1 ist auf $(0,\infty)$ stetig und beschränkt (denn $\lim_{x\to 0} g_k(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g_k^1(x) = 0$), und auf jedem kompakten Teilintervall von $(0,\infty)$ Riemann-integrierbar. $|g_k^1| = g_k^1$ ist auf $(0,\infty)$ auch uneigentlich Riemann-integrierbar, da

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x e^{-kx} \, \mathrm{d}x &= \lim_{s\to\infty} \int_0^s x e^{-kx} \, \mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty} -\frac{1}{k} x e^{-kx} \Big|_{x=0}^s + \frac{1}{k} \int_0^s e^{-kx} \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{s\to\infty} -\frac{1}{k} x e^{-kx} - \frac{1}{k^2} e^{-kx} \Big|_{x=0}^s = \lim_{s\to\infty} -\frac{1}{k} s e^{-ks} - \frac{1}{k^2} e^{-ks} + \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist daher g_k^1 auf $(0,\infty)$ auch Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{(0,\infty)} g_k^1 \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty g_k^1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}.$$

Wir bemerken nun, dass für alle $x > 0$

$$\sum_{k\geq 1} e^{-kx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1},$$

da es sich um eine geometrische Reihe handelt. Es ist daher $f_1(x) = \sum_{k\geq 1} g_k^1(x)$ für alle $x \in (0,\infty)$. Da f_1 nur eine Unstetigkeitsstelle besitzt, ist f_1 Borell-messbar, und für das Integral $\int_{\mathbb{R}} f_1 \,\mathrm{d}\lambda$ ergibt sich nun wegen $|g_k^1| \geq 0$ für alle $k \geq 1$ nach dem Satz von Beppo Levi das

$$\int_{\mathbb{R}} f_1 \,\mathrm{d}\lambda = \int_{(0,\infty)} f_1 \,\mathrm{d}\lambda = \int_{(0,\infty)} \sum_{k\geq 1} g_k^1 \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k\geq 1} \int_{(0,\infty)} g_k^1 \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}.$$

b)

Die Messbarkeit von f_2 ergibt sich analog zu der von f_2, und da $0 \leq f_2 \leq f_1$, und f_1 über $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist, ist es auch f_2. Für alle $k \geq 1$ definieren wir die Funktion $g_k^2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ als

$$g_k^2(x) := (-1)^{k+1} x e^{-kx} = (-1)^{k+1} g_k^1(x) \text{ für alle } x > 0.$$

Für alle $k \geq 1$ ist g_k auf $(0,\infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar, da

$$\int_0^\infty g_k^2(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{k+1} \int_0^\infty g_k^1(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}.$$

Da $|g_k^2| = g_k^1$ über $(0,\infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, ist g_k^2 über $(0,\infty)$ auch Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{(0,\infty)} g_k^2 \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty g_k^2(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}.$$

Für alle $k \geq 1$ definieren wir nun $h_k : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ als

$$h_j = \sum_{j=1}^{k} g_k^2.$$

Wir bemerken, dass für alle $x > 0$

$$\sum_{k\geq 1} (-1)^k e^{-kx} = \sum_{k\geq 1} (-e^{-x})^k = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{e^x + 1}$$

Also ist für alle $x > 0$

$$f_2(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k\geq 1} g_k^2(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x).$$

Da für alle $k \geq 1$ auch

$$|h_k| \leq \sum_{j=1}^{k} |g_k^2| = \sum_{j=1}^{k} g_k^1 \leq f_1,$$

und f_1 über $(0,\infty)$ bezüglich λ integrierbar ist, ergibt sich mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_2 \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{(0,\infty)} f_2 \,\mathrm{d}\lambda = \int_{(0,\infty)} \lim_{k\to\infty} h_k \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{(0,\infty)} h_k \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{(0,\infty)} \sum_{j=1}^{k} g_j^2 \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \sum_{j\geq 1} \int_{(0,\infty)} g_j^2 \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{j\geq 1} (-1)^{j+1} \frac{1}{j^2}.
\end{aligned}$$