Analysis III
3. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

1. November 2013

Lemma: Sei $(A_n)_{n\in I}$ eine Familie von Mengen über einer Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ und $A_n = \dot{\bigcup}_{m\in I_n} B_m^n$ für eine Familie von Mengen $(B_m^n)_{m\in I_n}$ über einer Indexmenge $I_n \subseteq \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\prod_{n\in I} A_n = \dot{\bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n}} \prod_{n\in I} B_{b_n}^n.$$

(Die Indexmengen werden auf Teilmengen von $\mathbb{N}$ eingeschränkt, und nicht etwa beliebig gewählt, um das Auswahlaxiom nicht nutzen zu müssen.)

Beweis des Lemmas: Sei $(a_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} A_n$. Da $a_n \in A_n$ für alle $n \in I$, gibt es für alle $n \in I$ ein $b_n \in I_n$ mit $a_n \in B_{b_n}^n$. Daher ist

$$(a_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} B_{b_n}^n \subseteq \bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in I} B_{b_n}^n,$$

also $\prod_{n\in I} A_n \subseteq \bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in I} B_{b_n}^n$.
Ist $(a_n)_{n\in I} \in \bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in\mathbb{N}} B_{b_n}^n$, so gibt es $(b_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I}$ so dass $a_n \in B_{b_n}^n \subseteq A_n$ für alle $n \in I$, und somit $(a_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} A_n$. Also ist $\prod_{n\in I} A_n \supseteq \bigcup_{(b_n)\in\prod_{n\in I} I_n} \prod_{n\in I} B_{b_n}^n$.
Die Disjunktheit der Vereinigung ergibt sich aus der paarweisen Disjunktheit der B_n^m, $m \in I_n$, für alle $n \in I$: Sind $(b_n)_{n\in I}, (b'_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} I_n$ so dass ein $(a_n)_{n\in I} \in \prod_{n\in I} B_{b_n}^n \cap \prod_{n\in I} B_{b'_n}^n$ existiert, so muss $a_n \in B_{b_n}^n$ und $a_n \in B_{b'_n}^n$, für alle $n \in I$. Also muss $B_{b_n}^n \cap B_{b'_n}^n \neq \emptyset$, und damit $b_n = b'_n$ für alle $n \in I$. $\square$

Aufgabe 1. (Volumen auf Quadern)

Im Folgenden nutze ich für die Familie halboffener Quader in $\mathbb{R}^n$ die Notation

$$\mathcal{Q}_n := \left\{ \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) : a_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

und bezeichne mit μ_n die entsprechende Abbildung auf $\mathcal{Q}_n$.

a)

Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gibt es für alle $q, Q \in \mathcal{Q}_n$ mit $q \subseteq Q$ paarweise disjunkte Quader $q_1, \ldots, q_{2n+1} \in \mathcal{Q}_n$ mit $q = q_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$ und $Q = \bigcup_{k=1}^{2n+1} q_k$.

Beweis: Die Aussage lässt sich per Induktion über n zeigen.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann ist $Q = [A, B)$ mit $A \leq B$ und $q = [a, b)$ mit $A \leq a \leq b \leq B$. Es ist dann $Q = [A, a) \,\dot\cup\, q \,\dot\cup\, [b, B)$.

Induktionsschritt: Sei $n > 2$ und gelte die Aussage für $n-1$. Es ist $Q = \prod_{i=1}^{n} [A_i, B_i)$ mit $A_i \leq B_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ mit $A_i \leq a_i \leq b_i \leq B_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Es sei $Q' := \prod_{i=1}^{n-1} [A_i, B_i)$ und $q' := \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i)$. Da $q \subseteq Q$ ist $q' \subseteq Q'$, nach Induktionsvoraussetzung gibt es daher paarweise disjunkte Quader $q'_1, \ldots, q'_{2n-1} \in \mathcal{Q}_{n-1}$ mit $Q' = \bigcup_{i=1}^{2n-1} q'_1$ und $q' = q'_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Für $i = 1, \ldots, 2n-1$ sei $q_i := q'_i \times [A_n, B_n) \in \mathcal{Q}_n$. Es ist $Q = \bigcup_{i=1}^{2n-1} q_i$, und aus der Disjunktheit der q'_i folgt die Disjunktheit der q_i. Mit $q_{2n} := q'_j \times [A_n, a_n)$ und $q_{2n+1} := q'_j \times [b_n, B_n)$ ist $q_j = q_{2n} \,\dot\cup\, q \,\dot\cup\, q_{2n+1}$, also $Q = q \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2n+1} q_i$ als disjunkte Vereinigung. □

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest und seien $Q, q \in \mathcal{Q}_n$ mit $q \subseteq Q$. Wie oben gezeigt gibt es paarweise disjunkte Quader $q_1, \ldots, q_{2n+1} \in \mathcal{Q}_n$ mit $Q = \bigcup_{i=1}^{2n+1} q_i$ und $q = q_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$. Aufgrund der Additivität von μ_n ist daher

$$\mu_n(Q) = \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{2n+1} q_i\right) = \sum_{i=1}^{2n+1} \mu_n(q_i) \geq \mu_n(q),$$

d.h. μ_n ist monoton.

Aufgabe 2. (Nullmengen)

a)

Aus der Aufgabenstellung geht meiner Meinung nach nicht klar hervor, ob A als

$$\tilde{A}_1 := \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \text{ oder als}$$
$$\tilde{A}_2 := \{x \in X : x \in M \text{ für unendlich viele } M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}\}$$

definiert wird. Für den Beweis diesen Aufgabenteiles genügt es allerdings davon auszugehen, dass $A = \tilde{A}_1$, da $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_1$: Ist $x \in \tilde{A}_2$, so gibt es unendlich viele $M \in \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x \in M$; insbesondere gibt es daher unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$. Man bemerke jedoch, dass im Allgemeinen $\tilde{A}_1 \subsetneq \tilde{A}_2$: Ist etwa $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstant mit $A_1 \neq \emptyset$, so ist $\tilde{A}_1 = A_1 \neq \emptyset$, aber $\tilde{A}_2 = \emptyset$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\mu(A_k) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend. Da sie nach Annahme nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Es gibt daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} A_k < \varepsilon$. Da μ ein Maß ist folgt daraus, dass

$$\mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Da $A = \tilde{A}_1$ gibt es für alle $x \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ und $x \in A_n$. Insbesondere ist daher $A \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Aufgrund der Monotonie von μ folgt, dass

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von ε folgt damit, dass $\mu(A) = 0$.

b)

Es sei $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, sowie $A_k := \{1, \dots, k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\{1\} \subseteq A$, unabhängig davon ob $A = \tilde{A}_1$ oder $A = \tilde{A}_2$. Wegen der Monotonie des Maßes ist daher $\mu(A) \geq \mu(\{1\}) = 1$, also $\mu(A) \neq 0$. (Ist $A = \tilde{A}_1$, so ist sogar $A = \mathbb{N}$ und somit $\mu(A) = \infty$.)

Aufgabe 3. (Vom äußeren Maß zum Maß)

Aufgabe 4. (Verschiedene äußere Maße)