

# ANALYSIS III

## 6. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

26. November 2013

### Aufgabe 1. Lipschitz-Stetigkeit und ein Lemma von Sard

#### a) und b)

Für alle  $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $l \geq 0$  bezeichne

$$W_l(a) = \prod_{i=1}^n \left[ a_i - \frac{l}{2}, a_i + \frac{l}{2} \right]$$

den halboffenen Würfel mit Seitenlänge  $l$  und Mittelpunkt  $a$ . Dieser ist bekanntermaßen Borell-, und damit auch Lebesgue-meßbar mit

$$\lambda_n(W_l(a)) = l^n.$$

Da jeder halboffene Würfel von dieser Form ist, gelten alle Aussagen, die im Folgenden für Würfel der Form  $W_l(a)$  gezeigt werden, für beliebige halboffene Würfel.

Zunächst zeigen wir, dass für alle  $l \geq 0$  und  $a \in \mathbb{R}$

$$\lambda_n^*(f(W_l(a))) \leq n^{n/2} L^n l^n = n^{n/2} L^n \lambda_n(W_l(a)). \quad (1)$$

Hierfür bemerken wir zunächst, dass die Hauptdiagonale von  $W_l(a)$  genau  $\sqrt{nl^2} = \sqrt{n}l$  lang ist, und daher

$$W_l(a) \subseteq B_{\sqrt{n}l/2}(a).$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  ist damit

$$f(W_l(a)) \subseteq f(B_{\sqrt{n}l/2}(a)) \subseteq B_{\sqrt{n}Ll/2}(f(a)) \subseteq W_{\sqrt{n}Ll}(f(a)).$$

Aus der Monotonie von  $\lambda_n^*$  folgt damit

$$\lambda_n^*(f(W_l(a))) \leq \lambda_n^*(W_{\sqrt{n}Ll}(f(a))) = n^{n/2} L^n l^n,$$

was (1) zeigt.

Wir zeigen nun, dass das Bild von Lebesgue-messbaren Mengen unter  $f$  Lebesgue-messbar ist. Sei hierfür  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Lebesgue-messbare Menge. Wie aus einem früheren Übungszettel bekannt, ist die Lebesgue-Messbarkeit von  $A$  äquivalent dazu, dass es Mengen  $F \in F_\sigma$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $A = F \cup N$  gibt, so dass  $\lambda_n(N) = 0$ , also  $N$  eine Lebesgue-Nullmenge ist (diese ist mit Sicherheit Lebesgue-messbar, da  $\lambda_n$  vollständig ist). Inbesondere ist

$$f(A) = f(F \cup N) = f(F) \cup f(N).$$

**Behauptung 1.** Es ist  $f(F) \in F_\sigma$  sowie  $\lambda_n^*(f(N)) = 0$ . Insbesondere ist  $f(N)$  wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes  $\lambda_n$  also Lebesgue-Nullmenge messbar.

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass  $f(F) \in F_\sigma$ . Da  $F \in F_\sigma$  gibt es eine Folge  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$  abgeschlossener Mengen, so dass  $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir eine Folge  $(K_l^k)_{l \in \mathbb{N}}$  kompakter Mengen durch

$$K_l^k := C_k \cap \overline{B_l(0)}.$$

Es ist  $C_k = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} K_l^k$  und damit  $F = \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} K_l^k$ . Da  $f$  stetig ist, ist das Bild kompakter Mengen unter  $f$  wieder kompakt, und damit auch abgeschlossen. Insbesondere ist  $f(K_l^k)$  für alle  $k, l \in \mathbb{N}$  abgeschlossen. Es ist daher

$$f(F) = f\left(\bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} K_l^k\right) = \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} f(K_l^k) \in F_\sigma.$$

Nun zeigen wir, dass  $\lambda_n^*(f(N)) = 0$ . Sei hierfür  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Da  $N$  eine Lebesgue-Nullmenge ist, gibt es, wie aus einem dem früheren Übungsblätter bekannt, eine Folge  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von halboffenen Würfeln in  $\mathbb{R}^n$  so dass  $N \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$  und  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Vol}(Q_k) \leq \varepsilon$ . Es ist also auch

$$f(N) \subseteq f\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(Q_k).$$

Aus der Monotonie und Subadditivität von  $\lambda_n^*$ , sowie (1) folgt damit, dass

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(f(N)) &\leq \lambda_n^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(Q_k)\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(f(Q_k)) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} n^{n/2} L^n \mu(Q_k) = n^{n/2} L^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(Q_k) \leq n^{n/2} L^n \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  ergibt dies, dass  $\lambda_n^*(f(N)) = 0$ .  $\square$

Aus dieser Behauptung folgt aufgrund der bereits oben genannten, zur Lebesgue-Messbarkeit äquivalenten, Bedingung nun direkt, dass  $f(A) = f(F) \cup f(N)$  wieder Lebesgue-messbar ist.

Insbesondere ergibt sich damit, dass die in (1) für das äußere Maß aufgestellte Ungleichung bereits für das Lebesgue-Maß selbst gilt, dass also

$$\lambda_n(f(W_l(a))) \leq n^{n/2} L^n l^n = n^{n/2} L^n \lambda_n(W_l(a)). \quad (2)$$

Die Abschätzung (2) lässt sich nun direkt auf beliebige offene Mengen übertragen: Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Wie aus der Vorlesung bekannt, gibt es eine Folge  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter, halboffener Würfel mit

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k.$$

Insbesondere sind  $U$ , sowie alle  $Q_k$  Lebesgue-messbar. Aufgrund der  $\sigma$ -Additivität von  $\lambda_n$  ergibt nun aus (2), dass

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(U)) &= \lambda_n\left(f\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k\right)\right) = \lambda_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(Q_k)\right) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(f(Q_k)) \leq n^{n/2} L^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(Q_k) \\ &= n^{n/2} L^n \lambda_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k\right) = n^{n/2} L^n \lambda_n(U).\end{aligned}$$

Es ist also auch für alle offenen Mengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lambda_n(f(U)) \leq n^{n/2} L^n \lambda_n(U). \quad (3)$$

Nun werden wir die Regularität des Lebesgue-Maßes nutzen, um diese Abschätzung für alle Lebesgue-messbaren Mengen zu zeigen. Sei hierfür  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Lebesgue-messbare Menge und  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Aus der Regularität des Lebesgue-Maßes folgt, dass es eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $A \subseteq U$  und  $\lambda_n(U) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon$  gibt. Es ist also wegen der Monotonie des Lebesgue-Maßes und (3)

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(A)) &\leq \lambda_n(f(U)) \leq n^{n/2} L^n \lambda_n(U) \\ &\leq n^{n/2} L^n (\lambda_n(A) + \varepsilon) = n^{n/2} L^n \lambda_n(A) + n^{n/2} L^n \varepsilon.\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt damit die Ungleichung

$$\lambda_n(f(A)) \leq n^{n/2} L^n \lambda_n(A).$$

c)

**Lemma 2.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  genau dann Lipschitz-stetig mit Konstante  $L$ , wenn  $|f'(x)| \leq L$  für alle  $x \in (a, b)$ .

*Beweis.* Ist  $f$  Lipschitz-stetig mit Konstante  $L$ , so folgt wegen der Stetigkeit des Betrags, dass für alle  $x \in (a, b)$

$$|f'(x)| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L|h|}{|h|} = L.$$

Ist andererseits  $f'(x) \leq L$  für alle  $x \in (a, b)$ , so folgt aus der Mittelwertabschätzung direkt, dass für alle  $x, y \in (a, b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

□

**Lemma 3.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen. Dann gibt es eine höchstens abzählbare Familie  $I_k$  von offenen, nichtleeren Intervallen, so dass  $U = \bigcup_n I_k$ .

*Beweis.* Aus Analysis 2 bekannt, lässt sich eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  in offene, nicht-leere, disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegen lässt. Im Falle von  $\mathbb{R}$  sind dies gerade offene Intervalle. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass hierfür höchstens abzählbar viele Intervalle benötigt werden.

Wir bemerken, dass es für jedes  $I_k$  eine rationale Zahl  $r_k \in I_k$  gibt. Aus der Disjunkttheit der  $I_k$  folgt direkt, dass die Zuordnung  $I_k \mapsto r_k$  injektiv ist. Da es nur abzählbar viele  $r_k$  gibt, gibt es damit auch nur abzählbar viele  $I_k$ .  $\square$

Es sei

$$N := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$$

und für  $a, b \in \mathbb{R}$

$$N_{a,b} := \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}.$$

Um zu zeigen, dass  $f(N)$  Lebesgue-messbar mit  $\lambda_n(f(N)) = 0$  ist, genügt es zu zeigen, dass  $f(N_{a,b})$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar mit Maß  $\lambda_n(f(N_{a,b})) = 0$  ist. Dann ergibt sich, dass

$$f(N) = f \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_{k/2, k/2+1} \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f(N_{k/2, k/2+1})$$

als abzählbare Vereinigung von Lebesgue-messbaren Mengen Lebesgue-messbar ist, und

$$\lambda_n(f(N)) = \lambda_n \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f(N_{k/2, k/2+1}) \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_n(f(N_{k/2, k/2+1})) = 0.$$

Wir zeigen nun die entsprechende Aussage für die  $N_{a,b}$ . Seien hierfür  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebig aber fest. Wir betrachten nur den Fall  $a < b$ , da sonst  $N_{a,b} = \emptyset$  und die Aussage trivialerweise stimmt.

Zunächst zeigen wir, dass  $f(N_{a,b})$  Lebesgue-messbar ist. Hierfür bemerken wir zum einen, dass  $\tilde{f} := f|_{(a,b)}$  stetig differenzierbar ist, also  $\tilde{f}' = f'|_{(a,b)}$  als stetige Funktion Borell-messbar. Daher ist

$$N_{a,b} = \{x \in (a, b) : \tilde{f}'(x) = 0\}$$

Borell-, und damit auch Lebesgue-messbar. Zum anderen bemerken wir, dass die Einschränkung  $\tilde{f}$  Lipschitz-stetig ist: Da  $f'$  auf  $[a, b]$  stetig ist, ist  $f'$  auf  $[a, b]$ , und somit auch auf  $(a, b)$ , beschränkt. Aus Lemma 2 folgt damit,  $f$  auf  $[a, b]$  Lipschitz-stetig ist. Damit ist auch  $\tilde{f}$  auf  $(a, b)$  Lipschitz-stetig. Aus den vorherigen Aufgabenteilen folgt damit, dass  $f(N_{a,b})$  als Bild einer Lebesgue-messbaren Menge unter einer Lipschitz-stetigen Funktion ebenfalls Lebesgue-messbar ist.

Nun zeigen wir, dass  $\lambda_n(f(N_{a,b})) = 0$ . Sei hierfür  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest. Wegen der Stetigkeit von  $\tilde{f}'$  gibt es für alle  $x \in N_{a,b}$  ein  $\delta_x > 0$ , so dass  $|\tilde{f}'(y)| < \varepsilon$  für alle  $y \in B_{\delta_x}(x)$ . Da  $(a, b)$  offen ist, kann dabei  $\delta_x > 0$  so klein gewählt werden, dass  $B_{\delta_x}(x) \subseteq (a, b)$ . Es sei

$$U := \bigcup_{x \in N_{a,b}} B_{\delta_x}(x).$$

$U$  ist als Vereinigung offener Mengen offen, und es ist

$$N_{a,b} \subseteq U \subseteq (a, b).$$

Es seien  $U_k = (a_k, b_k)$  die Zusammenhangskomponenten von  $U$ . Nach Lemma 3 sind diese höchstens abzählbar viele. Für alle  $k$  ist  $U_k$  als offenes Intervall Borell- und damit auch Lebesgue-messbar, wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $\tilde{f}$  ist also auch  $\tilde{f}(U_k)$  für alle  $k$  Lebesgue-messbar. Dabei folgt aus der Konstruktion von  $U$ , dass  $\tilde{f}'(x) < \varepsilon$  für alle  $x \in U \supseteq U_k$ , aus Lemma 2 also, dass  $\tilde{f}|_{U_k}$  für alle  $k$  Lipschitz-stetig mit Konstante  $\varepsilon$  ist. Aus den vorherigen Aufgabenteilen folgt damit, dass für alle  $k$

$$\lambda_n(f(U_k)) \leq n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n(U_k).$$

Wegen der Monotonie und  $\sigma$ -Additivität von  $\lambda_n$  ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} \lambda_n(f(N_{a,b})) &\leq \lambda_n(f(U)) = \lambda_n\left(f\left(\bigcup_k U_k\right)\right) = \sum_k \lambda_n(f(U_k)) \\ &\leq n^{n/2} L^n \sum_k \lambda_n(U_k) = n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n\left(\bigcup_k U_k\right) \\ &= n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n(U) \leq n^{n/2} \varepsilon^n \lambda_n((a, b)) = n^{n/2} \varepsilon^n (b - a). \end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt damit, dass

$$\lambda_n(f(N_{a,b})) = 0.$$