

ANALYSIS III

5. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

18. November 2013

Aufgabe 1. (Transformationsregel des Lebesguemaßes)

Aufgabe 2. (Vervollständigung von Maßen)

a)

Man bemerke, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich μ eine Nullmenge ist. Da es für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $A = \emptyset \cup B$ oder $A = \{0\} \cup \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, ist $\mathcal{A}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, denn $\emptyset, \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

b)

Es sei

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 := \bigcup_{A \subseteq \mathbb{R}^2} \{A \cup (0 \times \mathbb{R}), A \setminus (0 \times \mathbb{R})\}.$$

$\tilde{\mathcal{A}}_0$ enthält genau die Teilmengen von \mathbb{R}^2 , die $0 \times \mathbb{R}$ ganz oder gar nicht beinhalten. Es gilt $\tilde{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}$.

Sei $A \in \tilde{\mathcal{A}}_0$. Ist $(0, 0) \notin A$, so ist $A = \emptyset \cup A$, wobei $\emptyset \in \mathcal{A}$ und A in der Nullmenge $\mathbb{R}^2 \setminus (0 \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \in \mathcal{A}$ enthalten ist, also $A \in \mathcal{A}_0$. Ist $(0, 0) \in A$, so ist $A = (0 \times \mathbb{R}) \cup (A \setminus (0 \times \mathbb{R}))$ analog in \mathcal{A}_0 enthalten. Also ist $\tilde{\mathcal{A}}_0 \subseteq \mathcal{A}_0$.

Sei $A \in \mathcal{A}_0$. Es gibt es $B \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $N \subseteq M$ für eine Nullmenge $M \in \mathcal{A}$ sodass $A = B \cup N$. Da M ein Nullmenge ist, ist $(0, 0) \notin M$, also $(0 \times \mathbb{R}) \cap M = \emptyset$. Daher ist $(0, 0) \in A$ genau dann wenn $(0, 0) \in B$. Dies gilt genau dann, wenn $(0 \times \mathbb{R}) \subseteq B$, und genau dann nicht, wenn $(0 \times \mathbb{R}) \cap B = \emptyset$. Es ist also $(0 \times \mathbb{R})$ entweder ganz oder gar nicht in A , und daher $A \in \tilde{\mathcal{A}}_0$. Es ist also $\mathcal{A}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_0$.

Aufgabe 3. (Fast stetige Funktionen)

Aufgabe 4. (Reguläre Maße)