

ANALYSIS III

4. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

13. November 2013

Aufgabe 1. (Lebesgue-Stieltjes-Maße)

a)

Da μ endlich und monoton ist, ist μ auch beschränkt, denn für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$\mu(A) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

Aus der Beschränktheit von μ folgt die Beschränktheit von F_μ , da damit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) < \infty.$$

Die Monotonie von F_μ ergibt sich daraus, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ offenbar $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ und wegen der Monotonie von μ daher

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F_\mu(y).$$

Zum Nachweis der Rechtsstetigkeit sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge auf \mathbb{R} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Es gilt zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) = F_\mu(x)$. Aus der Monotonie von F_μ folgt direkt, dass $F_\mu(x) \leq F_\mu(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch

$$F_\mu(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n). \quad (1)$$

Zum Beweis der anderen Ungleichung sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir bemerken, dass die Folge $((x, x + \frac{1}{n}])_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fallend ist, und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu(\emptyset) = 0,$$

da μ ein beschränktes Maß ist. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right]\right) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \leq x_n \leq x + \frac{1}{N}$ für alle $n \geq n_0$. Aufgrund der Monotonie und endlichen Additivität von μ ergibt sich daher, dass für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} F_\mu(x_n) &= \mu((-\infty, x_n]) = \mu((-\infty, x] \cup (x, x_n]) = \mu((-\infty, x]) + \mu((x, x_n]) \\ &= F_\mu(x) + \mu((x, x_n]) \leq F_\mu(x) + \mu\left(\left(x, x + \frac{1}{N}\right]\right) \leq F_\mu(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) \leq F_\mu(x) + \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n) \leq F_\mu(x).$$

Zusammen mit (1) ergibt zeigt dies die Rechtsstetigkeit von F_μ .

Dass $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x) = 0$ ergibt sich ähnlich: Die Folge $((-\infty, -n])_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist fallend, also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, -n]) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Es gibt daher für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $F_\mu(-n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$; dabei folgt aus der Monotonie von F_μ , dass $F_\mu(x) < \varepsilon$ für alle $x \geq N$. Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt damit, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x) = 0$.

Aufgabe 2. (Mengen)

Es sei $0 < \alpha < 1$ beliebig aber fest und es sei $0 < \beta < 1$ definiert als $\beta := 1 - \alpha$.

a)

Die Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei wie folgt definiert: Man beginne mit $M_0 := [0, 1]$. M_1 konstruiert man aus M_0 indem man in der Mitte von M_0 das offene Intervall $\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}\right)$ mit Länge $\frac{\beta}{2}$ entfernt, d.h.

$$M_1 = [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}\right) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\beta}{4}, 1\right].$$

M_2 konstruiert man aus M_1 indem man aus jedem der beiden Intervalle in M_1 das jeweils offene mittige Intervall der Länge $\frac{\beta/4}{2} = \frac{\beta}{8}$ entfernt. M_3 ergibt sich aus M_2 , indem man aus jedem der vier Intervalle in M_2 das jeweils mittige offene Intervall der Länge $\frac{\beta/8}{4} = \frac{\beta}{32}$ entfernt. Nach dem gleichen Prinzip konstruiert man rekursiv alle weiteren M_n .

Offenbar ist $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge M_n aus 2^n disjunkten, abgeschlossenen, gleichlangen Intervallen besteht; insbesondere ist M_n als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Die Intervalle haben zusammen eine Gesamtlänge von $1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k}$ also jedes einzelne eine Länge von $\frac{1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k}}{2^n}$.

Sei $M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist M auch abgeschlossen. Da $M_n \subseteq [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $M \subseteq [0, 1]$. M enthält keine nichtleere offene Menge: Für alle $x \in M$ ist $x \in M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also für alle $n \in \mathbb{N}$ in einem Intervall der Länge $\frac{1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k}}{2^n}$. Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k}}{2^n} = 0$$

kann es daher keine ε -Ball um x in M geben. Es ist $\lambda(M) = 0$: Da $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge mit $\lambda(M_n) \leq \lambda([0, 1]) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und λ ein Maß, ist

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \beta \sum_{k=1}^n 2^{-k} = 1 - \beta = \alpha.$$

b)

Wie in Aufgabenteil **a)** gezeigt enthält $[0, 1]$ eine abgeschlossene Teilmenge A , die keine nichtleeren offenen Mengen enthält, und für die $\lambda(A) = \beta$. Es sei

$$B := (0, 1) \setminus A = (0, 1) \cap A^c.$$

Da A abgeschlossen ist, ist B offen. Wegen der endlichen Additivität von μ ist daher

$$\mu(B) = \mu((0, 1)) - \mu(A) = 1 - \beta = \alpha.$$

B liegt dicht in $[0, 1]$: Gebe es $x, y \in [0, 1]$ mit $x < y$ und $z \notin B$ für alle $x \leq z \leq y$, so ist $(x, y) \subseteq A$ ein nichtleeres offenes Intervall, im Widerspruch zur Annahme, dass A kein solches enthält.

Aufgabe 3. (Lebesgue-messbare Mengen)

$(i) \Rightarrow (ii)$

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Wie aus der Vorlesung bekannt ist

$$A = \sup\{\lambda_n^*(K) : K \subseteq A, K \text{ ist kompakt}\}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ gibt es daher eine abgeschlossene Teilmenge $K_k \subseteq A$ mit

$$\lambda_n^*(K_k) + \frac{1}{k} \geq \lambda_n^*(A). \quad (2)$$

Es sei $K := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k$. Da alle K_k kompakt und damit auch abgeschlossen sind, ist nach Definition $K \in F_\sigma$, sowie wegen der σ -Additiv von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auch $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Es ist $\mu(K) = \mu(A)$: Da $K \subseteq A$ ist $\mu(K) \leq \mu(A)$ wegen der Monotonie von μ . Wegen der Monotonie von μ folgt aus (2) auch, dass für alle $k \geq 1$

$$\mu(K) \geq \mu(K_k) \geq \lambda_n^*(A) - \frac{1}{k}.$$

Für $k \rightarrow \infty$ ergibt sich damit, dass $\mu(K) \geq \mu(A)$.

Sei $N := A \setminus K$. Aus der endlichen Additivität von μ ergibt sich aus $\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(K)$, dass

$$\lambda_n^*(N) = \lambda_n^*(A) - \lambda_n^*(K) = 0.$$

Es ist also $K \in F_\sigma, N \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n^*(N) = 0$ und $A = K \cup N$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Es ist $A_1 \in F_\sigma$ sowie

$$\begin{aligned} \lambda_n^*((A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A)) &\leq \lambda_n^*(A \setminus A_1) + \lambda_n^*(A_1 \setminus A) \\ &\leq \lambda^*(A_2) + \lambda_n^*(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i)

Da $B \in F_\sigma$ ist $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ für abgeschlossene Mengen $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$. Es ist also auch $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, also B messbar. Da

$$\lambda_n^* \underbrace{((A \setminus B) \cup (B \setminus A))}_{=: C} = 0$$

ist auch C messbar. Da $\mathcal{M}_{\lambda_n^*}$ eine σ -Algebra ist, ist damit auch

$$A = (B \cup C) \setminus (B \cap C) = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in \mathcal{M}_{\lambda_n^*},$$

also A messbar.

Aufgabe 4. (Projektion des Lebesguemaßes)

a)

Es gilt die Axiome eines äußeren Maßes zu überprüfen: Es ist

$$\mu^*(\emptyset) = \lambda_1^*(\pi(\emptyset)) = \lambda_1^*(\emptyset) = 0.$$

Für $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist $\pi(A) \subseteq \pi(B)$, also wegen der Monotonie von λ_1^*

$$\mu^*(A) = \lambda_1^*(\pi(A)) \leq \lambda_1^*(\pi(B)) = \mu^*(B),$$

was die Monotonie von μ^* zeigt. μ^* ist subadditiv, denn λ_1^* ist als äußeres Maß auf \mathbb{R} subadditiv, weshalb für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \lambda_1^* \left(\pi \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right) = \lambda_1^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi(A_n) \right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_1^*(\pi(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n). \end{aligned}$$