Analysis III
10. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

5. Januar 2014

Aufgabe 1. (Gegenbeispiele)

a)

Wir betrachten die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/\sqrt{x}$. Diese ist auf auf jedem kompakten Teilintervall von $(0,1)$ Riemann-integrierbar und $f = |f|$ ist auf $(0,1)$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\downarrow 0} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\downarrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_{x=s}^1 = \lim_{s\downarrow 0} 2 - 2\sqrt{s} = 2.$$

Also ist f auf $(0,1)$ auch Lebesgue-integrierbar, weshalb $f \in \mathcal{L}((0,1))$. Es ist jedoch $f^2 \notin \mathcal{L}^2((0,1))$: Für alle $x \in (0,1)$ ist $|f(x)^2| = f(x)^2 = 1/x$. Für die Funktionenfolge

$$h_n := \chi_{[1/n,1)} f^2$$

gilt auf $(0,1)$ überall $h_n \leq h_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = f^2$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist also

$$\int_{(0,1)} |f|^2\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} h_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1)} h_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

b)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/(x+1)$. Es ist $f \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$: Für die Funktionenfolge

$$f_n := \chi_{[-n,n]} f$$

ist auf $\mathbb{R}$ überall $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f = |f|$. Daher ist nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f_n\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^n \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2 \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.
\end{aligned}$$

Es ist jedoch $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: Für die Funktionenfolge

$$h_n := \chi_{[-n,n]} f^2$$

ist auf $\mathbb{R}$ überall $h_n \leq h_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = f^2 = |f|^2$. Also ist nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f^2 \,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f^2 \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{(x+1)^2} \,\mathrm{d}x = 2 \lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Noch mehr Konvergenz)

a)

Angenommen, es ist $f_n \longrightarrow f$ im Maß. Dann ist offenbar auch $f_{n_j} \longrightarrow f$ im Maß für jede Teilfolge n_j. Daher gibt es für jede Teilfolge n_j eine Teilfolge j_k so dass $f_{n_{j_k}} \longrightarrow f$ punktweise für μ-fast alle $x \in \Omega$.
Die zu zeigende Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Man betrachte etwa den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ und die Funktionenfolge $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ auf $\mathbb{R}$. Es ist $f_n \longrightarrow 0$ punktweise, also ist auch $f_{n_{j_k}} \longrightarrow 0$ punktweise für alle Teilfolgeen n_j und j_k. Es ist jedoch nicht $f_n \longrightarrow f$ im Maß. Die Implikation gilt jedoch für endliche Maßräume, weshalb wir die Implikation unter der zusätzlichen Annahme $\mu(\Omega) < \infty$ zeigen.
Angenommen, es ist nicht $f_n \longrightarrow f$ im Maß. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) \not\longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ und Teilfolge n_j so dass

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_{n_j}(x) - f(x)| \geq \delta\}) \geq \varepsilon \text{ für alle } j \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Es gibt daher keine Teilfolge j_k mit $f_{n_{j_k}} \longrightarrow f$ punktweise fast überall: Sonst gebe es wegen $\mu(\Omega) < \infty$ nämlich eine Teilfolge k_l mit $f_{n_{j_{k_l}}} \longrightarrow f$ im Maß, also insbesondere

$$\lim_{l\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \Omega : \left|f_{n_{j_{k_l}}} - f(x)\right| \geq \delta\right\}\right) = 0,$$

was im Widerspruch zu (1) steht.

b)

Es sei

$$A := \{x \in \Omega : f_n(x) \not\to f(x) \text{ für } n \to \infty\}$$

und für alle $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$A_{\varepsilon,k} := \{x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Offenbar ist $A_{\varepsilon,k} \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Daher ist auch

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \Omega : \text{ es gibt } \varepsilon > 0 \text{ mit } |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq m} A_{1/n,k} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ ist nach der Tschebyschow-Ungleichung

$$\mu(A_{\varepsilon,k}) = \mu(\{x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |f_k(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\mu.$$

Daher ist für alle $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k}\right) \leq \sum_{k\geq m} \mu(A_{\varepsilon,k}) \leq \sum_{k\geq m} \int_\Omega |f_k(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Da

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

ist für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k\geq m} \int_\Omega |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Zusammen mit (2) folgt damit, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\mu\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k}\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k}\right) = 0,$$

denn es ist klar, dass es sich bei $(\bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k})_{m\in\mathbb{N}}$ um eine fallende Folge handelt, und es ist $\mu(\bigcup_{k\geq m} A_{\varepsilon,k}) < \infty$ für m groß genug. Also ist

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k\geq m} A_{1/n,k}\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k\geq m} A_{1/n,k}\right) = \sum_{n\geq 1} 0 = 0.$$

Daher ist $\mu(A) = 0$. Da nach Definition $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ für alle $x \in A^c$ konvergiert also $f_n \to f$ punktweise μ-fast überall.