Analysis III
5. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

20. November 2013

Aufgabe 1. (Transformationsregel des Lebesguemaßes)

Aufgabe 2. (Vervollständigung von Maßen)

a)

Man bemerke, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich μ eine Nullmenge ist. Da es für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $A = \emptyset \cup B$ oder $A = \{0\} \cup \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, ist $\mathcal{A}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, denn $\emptyset, \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

b)

Es sei

$$\tilde{\mathcal{A}_0} := \bigcup_{A \subseteq \mathbb{R}^2} \{A \cup (0 \times \mathbb{R}), A \setminus (0 \times \mathbb{R})\}.$$

$\tilde{\mathcal{A}_0}$ enthält genau die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die $0 \times \mathbb{R}$ ganz oder gar nicht beinhalten. Es gilt $\tilde{\mathcal{A}_0} = \mathcal{A}$.
Sei $A \in \tilde{\mathcal{A}_0}$. Ist $(0,0) \notin A$, so ist $A = \emptyset \cup A$, wobei $\emptyset \in \mathcal{A}$ und A in der Nullmenge $\mathbb{R}^2 \setminus (0 \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \in \mathcal{A}$ enthalten ist, also $A \in \mathcal{A}_0$. Ist $(0,0) \in A$, so ist $A = (0 \times \mathbb{R}) \cup (A \setminus (0 \times \mathbb{R}))$ analog in $\mathcal{A}_0$ enthalten. Also ist $\tilde{\mathcal{A}_0} \subseteq \mathcal{A}_0$.
Sei $A \in \mathcal{A}_0$. Es gibt es $B \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ mit $N \subseteq M$ für eine Nullmenge $M \in \mathcal{A}$ sodass $A = B \cup N$. Da M ein Nullmenge ist, ist $(0,0) \notin M$, also $(0 \times \mathbb{R}) \cap M = \emptyset$. Daher ist $(0,0) \in A$ genau dann wenn $(0,0) \in B$. Dies gilt genau dann, wenn $(0 \times \mathbb{R}) \subseteq B$, und genau dann nicht, wenn $(0 \times \mathbb{R}) \cap B = \emptyset$. Es ist also $(0 \times \mathbb{R})$ entweder ganz oder gar nicht in A, und daher $A \in \tilde{\mathcal{A}_0}$. Es ist also $\mathcal{A}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{A}_0}$.

Aufgabe 3. (Fast stetige Funktionen)

a)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Da N abzählbar ist, ist $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (Jede abzählbare Menge A lässt sich als

$$A = \bigcup_{a \in A} [a-1, a] \cap [a, a+1]$$

darstellen.) Es ist also auch $M := \mathbb{R}^n \setminus N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition von N ist $f_{|M} : M \to \mathbb{R}^n$ stetig. Es ist daher

$$A := \{x \in M : f_{|M}(x) \leq t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

da stetige Funktionen immer messbar sind. Da N abzählbar ist, ist es auch

$$N' := \{x \in N : f(x) \leq t\},$$

also $N' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Daher ist auch

$$\{x \in N : f(x) \leq t\} = A \cup N' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

also f Borell-messbar.

b)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest, und $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < t\}$. Ist $A = \mathbb{R}$, so ist A Borell-messbar. Ansonsten ist A ein Intervall der Form (a, ∞) oder $[a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Auch in diesen Fällen ist A Borell-messbar.

c)

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Da $\lambda(N) = 0$ und das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_\lambda)$ vollständig ist, ist $N \in \mathcal{M}_\lambda$. Da $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_\lambda$ ist daher auch $M = \mathbb{R}^n \setminus N \in \mathcal{M}_\lambda$. Nach Definition ist $f_{|M}$ stetig, also

$$A := \{x \in M : f_{|M}(x) \leq t\} \in \mathcal{M}_\lambda,$$

Borell- und damit auch Lebesgue-messbar ist. Für

$$N' := \{x \in N : f(x) \leq t\}$$

ist $N' \subseteq N$, wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes also auch $\lambda(N') \in \mathcal{M}_\lambda$. Damit ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\} = A \cup N' \in \mathcal{M}_\lambda,$$

also f Lebesgue-messbar.

d)

Es genügt zu zeigen, dass $\overline{A_{2\varepsilon}} \subseteq A_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Denn dann ist

$$N = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} A_q \supseteq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_{2q}} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_q} \supseteq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} A_q, = N$$

also

$$N = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}} \overline{A_q} \in F_\sigma.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Es ist klar, dass $A_{2\varepsilon} \subseteq A_\varepsilon$. O.b.d.A sei $a \in \partial A_{2\varepsilon}$ und $\delta := \limsup_{y \to a} |f(y) - f(a)|$ (gibt es kein solches a, so ist nichts mehr zu zeigen). Angenommen, es ist $\delta < \varepsilon$. Dann gibt es ein $\omega > 0$, so dass $|f(y) - f(a)| < \delta$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|a - y| < \omega$. Da $a \in \partial A_{2\varepsilon}$ gibt es ein $x \in A_{2\varepsilon}$ mit $|x - a| < \omega$. Es ist

$$\limsup_{y \to x} |f(y) - f(x)| \leq \limsup_{y \to x} |f(y) - f(a)| + \limsup_{y \to x} |f(a) - f(x)| < 2\delta < 2\varepsilon,$$

im Widerspuch zu $x \in A_{2\varepsilon}$. Also muss $\delta \geq \varepsilon$, und somit $a \in A_\varepsilon$.

Aufgabe 4. (Reguläre Maße)