

# ANALYSIS III

## 11. AUFGABENBLATT

Jendrik Stelzner

13. Januar 2014

### Aufgabe 1. (Dualität)

Für den Fall, dass  $f \in L^p(\Omega)$  ist die Aussage bereits aus der Vorlesung bekannt. Es ist nämlich bekannt, dass die Abbildung

$$\psi : L^p(\Omega) \rightarrow \left( L^{p'}(\Omega) \right)^* \text{ mit } \psi(f)(g) = \int_{\Omega} fg \, d\mu \text{ für alle } g \in L^{p'}(\Omega)$$

wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit des Maßraums  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  für alle  $p \in [1, \infty]$  eine Isometrie ist, dass also

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \|\psi(f)\| = \sup \left\{ |\psi(f)(g)| : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega} fg \, d\mu : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Sei nun  $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  messbar und  $p \in [0, \infty]$  mit  $f \notin L^p(\Omega)$ . Wir unterscheiden zwischen den drei Fällen  $p = 1$ ,  $p = \infty$  und  $1 < p < \infty$ .

Ist  $p = 1$ , so lässt sich für alle  $M \in \mathbb{N}$  die Testfunktion  $g_M = \operatorname{sgn}(f)$  wählen. Es ist klar, dass  $g_M \in L^\infty(\Omega)$  mit  $\|g_M\|_\infty = 1$ , da  $f \notin L^1(\Omega)$  ist

$$\int_{\Omega} fg_M \, d\mu = \int_{\Omega} |f| \, d\mu = \infty \geq M.$$

Ist  $p = \infty$  so setzen wir für beliebiges aber festes  $M \in \mathbb{N}$

$$A := \{x \in \Omega : |f(x)| \geq M\}.$$

Offenbar ist  $A \in \mathcal{A}$ , und da  $f \notin L^\infty(\Omega)$  ist  $\mu(A) > 0$ . Wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit des Maßraums  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  gibt es eine Menge  $B \subseteq A$  mit  $0 < \mu(B) < \infty$ . Für die Funktion

$$g_M := \frac{\chi_B}{\mu(B)} \operatorname{sgn}(f)$$

ist  $g_M \in L^1(\Omega)$  mit  $\|g_M\|_1 = 1$ , da

$$\int_{\Omega} |g_M| \, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B 1 \, d\mu = 1.$$

Es ist

$$\int_{\Omega} fg \, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| \, d\mu \geq \frac{1}{\mu(B)} \int_B M \, d\mu = M.$$

Sei nun  $1 < p < \infty$ . Wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit des Maßraumes  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  gibt es eine Folge  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{A}$  mit  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ , so dass  $B_n \subseteq B_{n+1}$  und  $\mu(B_n) < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Da  $|f| : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar ist gibt es eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  einfacher, messbarer Funktionen mit  $f_k \geq 0$ ,  $f_k \leq f_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = |f|$  punktweise. Aufgrund von Monotonie und Stetigkeit ist auch  $(f_k^p)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge einfacher, messbarer Funktionen mit  $f_k^p \geq 0$ ,  $f_k^p \leq f_{k+1}^p$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^p = |f|^p$ . Mehrfache Anwendung des Satzes über Monotone Konvergenz ergibt, dass

$$\infty = \int_{\Omega} |f|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} |f|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_n} f_k^p d\mu.$$

Es gibt daher  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_N} f_k^p d\mu \geq (M+1)^p + 1,$$

also ein  $K \in \mathbb{N}$

$$\int_{B_N} f_K^p d\mu \geq (M+1)^p.$$

Wir definieren

$$h := \chi_{B_N} f_K$$

und bemerken direkt, dass  $|f| \geq h \geq 0$ .

Da  $f_K^p$  als einfache Funktion beschränkt ist, und  $\mu(B_N) < \infty$ , ist

$$\int_{\Omega} |h|^p d\mu = \int_{B_N} f_K^p d\mu < \infty.$$

Daher ist  $h \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  mit

$$\|h\|_p = \left( \int_{\Omega} |h|^p d\mu \right)^{1/p} = \left( \int_{B_N} f_K^p d\mu \right)^{1/p} \geq M+1.$$

Da  $h \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  ist

$$\|h\|_p = \sup \left\{ \int_{\Omega} hg d\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1 \right\}.$$

Es gibt also ein  $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} hg d\mu \geq \|h\|_p - 1 \geq M.$$

Für  $g_M = \text{sgn}(f)|g|$  ist  $g_M \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$  mit  $\|g_M\|_{p'} = 1$ , da  $|g_M| = |g|$ . Da  $|f| \geq h \geq 0$  ist

$$\int_{\Omega} fg_M d\mu = \int_{\Omega} |f||g| d\mu \geq \int_{\Omega} h|g| d\mu \geq \int_{\Omega} hg d\mu \geq M.$$

## Aufgabe 2. (Die Hölder-Ungleichung)

a)

Ist  $r = \infty$ , so ist auch  $p = q = \infty$ . Für  $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  ist dann

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Das zeigt, dass  $fg \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  und die geforderte Ungleichung gilt.

Ist  $r \in [1, \infty)$ , so folgt aus  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ , dass  $|f|^r \in \mathcal{L}^{p/r}(\Omega)$  mit  $\| |f|^r \|_{p/r} = \|f\|_p^r$ , und aus  $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ , dass  $|g|^r \in \mathcal{L}^{q/r}(\Omega)$  mit  $\| |g|^r \|_{q/r} = \|g\|_q^r$ . Da

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = r \frac{1}{r} = 1$$

ist nach der Hölder-Ungleichung

$$\int_{\Omega} |fg|^r d\mu = \int_{\Omega} |f|^r |g|^r d\mu \leq \| |f|^r \|_{p/r} \| |g|^r \|_{q/r} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

Dass die rechte Seite der Gleichung endlich ist, zeigt, dass  $fg \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ . Außerdem folgt, dass

$$\|fg\|_r = \left( \int_{\Omega} |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

b)

Wir zeigen die Aussage per Induktion über  $k \geq 1$ .

**Induktionsanfang:** Für  $k = 1$  ist nichts zu zeigen, und für  $k = 2$  handelt es sich um die Hölder-Ungleichung.  $\square$

**Induktionsschritt:** Es sei nun  $k \geq 3$  und es gelte die Aussage für  $k - 1$  und 2. Wegen  $\sum_{i=1}^k 1/p_i = 1/r$  ist

$$\sum_{i=1}^{k-1} 1/p_i = 1/r - 1/p_k.$$

Ist  $1/r - 1/p_k = 0$ , so ist  $r = p_k$  und  $p_1 = \dots = p_{k-1} = \infty$ . Für  $1 \leq r < \infty$  ist

$$\int_{\Omega} \left| \prod_{i=1}^k f_i \right|^r d\mu = \int_{\Omega} \prod_{i=1}^k |f_i|^r d\mu \leq \prod_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_\infty^r \int_{\Omega} |f_k|^r d\mu = \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}^r,$$

also  $\prod_{i=1}^k f_i \in \mathcal{L}^r(\Omega)$  mit  $\| \prod_{i=1}^k f_i \| \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}$ . Für  $r = \infty$  ist

$$\left| \prod_{i=1}^k f_i \right| = \prod_{i=1}^k |f_i| \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_\infty \text{ } \mu\text{-fast überall},$$

also  $\prod_{i=1}^k f_i \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^r(\Omega)$  mit der entsprechenden Ungleichung.

Ist  $1/r - 1/p_k > 0$ , so ist  $1/r - 1/p_k \leq 1/r$  und daher

$$s := \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p_k}} \geq r \geq 1.$$

Da  $\sum_{i=1}^{k-1} 1/p_i = 1/s$  ist nach der Induktionsvoraussetzung  $\prod_{i=1}^{k-1} f_i \in \mathcal{L}^s(\Omega)$  mit

$$\left\| \prod_{i=1}^{k-1} f_i \right\|_s \leq \prod_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_{p_i}.$$

Da  $p_k, r, s \in [1, \infty]$  mit  $1/p_k + 1/s = 1/r$  ist wegen  $\mathcal{L}^{p_k}(\Omega)$  und  $\prod_{i=1}^{k-1} f_i \in \mathcal{L}^s(\Omega)$  nach Induktionsvoraussetzung

$$\prod_{i=1}^k f_i = \left( \prod_{i=1}^{k-1} f_i \right) f_k \in \mathcal{L}^r(\Omega)$$

mit

$$\left\| \prod_{i=1}^k f_i \right\|_r \leq \left\| \prod_{i=1}^{k-1} f_i \right\|_s \|f_k\|_{p_k} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}.$$

□

### Aufgabe 3. (Die Dichtheit von einfachen Funktionen in $L^p$ )

**Bemerkung 1.** Für  $p \in [1, \infty)$  und  $x, y \geq 0$  mit  $x \leq y$  ist

$$(x+y)^p \geq x^p + y^p$$

und

$$(y-x)^p \leq y^p - x^p.$$

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$\psi(t) = (x+t)^p - x^p - t^p \text{ für alle } t \in [0, \infty).$$

Es ist  $\psi \in C^1([0, \infty))$  mit

$$\psi'(t) = p(x+t)^{p-1} - pt^{p-1} = p((x+t)^{p-1} - t^{p-1}).$$

Es ist  $\psi(0) = 0$  und  $\psi'(t) \geq 0$  für alle  $t \in (0, \infty)$ . Also ist  $\psi(t) \geq 0$  für alle  $t \in [0, \infty)$ . Insbesondere ist

$$(x+y)^p - x^p - y^p = \psi(y) \geq 0,$$

was die erste Gleichung zeigt. Da  $y - x \geq 0$  ist

$$y^p = (y - x + x)^p \geq (y - x)^p + x^p,$$

was die zweite Gleichung zeigt. □

Wir betrachten die beiden Fälle  $p \in [0, \infty)$  und  $p = \infty$  getrennt. Zunächst betrachten wir den Fall  $p \in [0, \infty)$ .

Sei zunächst  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  mit  $f \geq 0$ . Wie wir wissen gibt es eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einfacher, messbarer Funktionen mit  $f_n \geq 0$  und  $f_n \leq f_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  für alle  $x \in \Omega$ . Aufgrund von Monotonie ist  $0 \leq f^p$ , sowie  $0 \leq f_n^p$  und  $f_n^p \leq f_{n+1}^p$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und aufgrund von Stetigkeit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)^p = f(x)^p \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n^p d\mu = \int_{\Omega} f^p d\mu.$$

Da  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  und  $f \geq 0$  ist die rechte Seite der Gleichung endlich, wegen der Monotonie von  $(f_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$  also auch auch die linke für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es ist daher  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge einfacher Funktionen auf  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f^p - f_n^p d\mu = \int_{\Omega} f^p d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n^p d\mu = 0.$$

Nach Bemerkung 1 ist daher

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f - f_n)^p d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f^p - f_n^p d\mu = 0,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f - f_n)^p d\mu = 0$$

und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$ .

Sei nun  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  beliebig. Es ist auch  $|f| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ , und es gibt eine Folge einfacher Funktionen  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \||f| - f'_n\|_p = 0$ . Wir definieren die Folge einfacher Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f'_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dass  $f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt direkt daraus, dass  $|f'_n| = |f_n|$ . Auch ist

$$|f(x) - f_n(x)| \geq ||f(x)| - f'_n(x)|| \text{ für alle } x \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist daher

$$\|f - f_n\|_p = \left( \int_{\Omega} |f - f_n|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int_{\Omega} ||f| - f'_n|^p d\mu \right)^{1/p} = \||f| - f'_n\|_p$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \||f| - f'_n\|_p = 0$  folgt daher, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$ . Sei nun  $p = \infty$ . Sei zunächst  $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  mit  $f \geq 0$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Folge einfacher Funktionen  $(f_n)_{n \geq 1}$  auf  $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  als

$$f_n(x) := \sup \left\{ \frac{k}{n} \leq f(x) : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dass  $n \in \mathbb{N}$   $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  und  $f_n$  einfach ist, folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$  direkt daraus, dass  $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ . Es ist auch klar, dass

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Es ist daher  $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/n$  für alle  $n \geq 1$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ .

Sei nun  $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  beliebig. Offenbar ist auch  $|f| \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ , und wir finden eine Folge einfacher Funktionen  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \||f| - f'_n\|_\infty = 0$ . Wir definieren die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einfacher Funktionen auf  $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  als

$$f_n := \operatorname{sgn}(f) f'_n.$$

Dass  $f_n \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt direkt daraus, dass  $|f_n| = |f'_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Da

$$|f(x) - f_n(x)| \leq ||f(x)| - f'_n(x)|| \text{ für alle } x \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist  $\|f - f_n\|_\infty \leq ||f| - f'||_\infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} ||f| - f'||_\infty = 0$  folgt daher, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ .

#### Aufgabe 4. (Schwache Konvergenz)

a)

Sei  $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$  beliebig aber fest. Da  $f, f_k \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist nach der Hölder-Ungleichung  $fg, f_k g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es ist daher

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k g \, d\mu = \int_{\Omega} fg \, d\mu$$

genau dann, wenn

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k g \, d\mu - \int_{\Omega} fg \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_k - f)g \, d\mu.$$

Da auch  $f_k - f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  folgt mithilfe der Hölder-Ungleichung, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_{\Omega} (f_k - f)g \right| \leq \int_{\Omega} |f_k - f||g| \, d\mu \leq \|f_k - f\|_p \|g\|_{p'} = \|f_k - f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Da  $f_k \rightarrow f$  in  $L^p(\Omega)$  ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_p = 0$ , also auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_k - f)g \, d\mu = 0.$$

b)

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes auf  $\mathbb{R}$  folgt aus  $f_k \rightarrow f$  und  $f_k \rightarrow h$ , dass für alle  $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} fg \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k g \, d\mu = \int_{\Omega} hg \, d\mu.$$

Da nach der Hölder-Ungleichung beide Seiten der Gleichung endlich sind, folgt, dass

$$\int_{\Omega} (f - h)g \, d\mu = 0 \text{ für alle } g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega).$$

Daher ergibt sich aus **Aufgabe 1** wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit des Maßraumes, und da  $f - h \in L^p(\Omega)$ , dass

$$\|f - h\|_p = \sup \left\{ \int_{\Omega} (f - h)g \, d\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega) \text{ mit } \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} = 0.$$

Also ist  $f = h$  in  $L^p(\Omega)$ , da  $\|\cdot\|_p$  eine Norm auf  $L^p$  ist.

c)

**Bemerkung 2.** Sei  $I$  eine Indexmenge und für alle  $i \in I$  sei  $(a_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $\mathbb{R}$ . Dann ist

$$\sup_{i \in I} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^i \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} a_n^i.$$

*Beweis.* Für alle  $j \in I$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$a_n^j \leq \sup_{i \in I} a_n^i.$$

Also ist für alle  $j \in I$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^j \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} a_n^i$$

und deshalb auch

$$\sup_{j \in I} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^j \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} a_n^i.$$

□

Zusammenfügen von **Aufgabe 1** und **Bemerkung 2** ergibt, dass

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \sup \left\{ \int_{\Omega} fg \, d\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k g \, d\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \int_{\Omega} f_k g \, d\mu : g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega), \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_p. \end{aligned}$$