# Analysis III
## 8. Aufgabenblatt

Jendrik Stelzner

12. Dezember 2013

## Aufgabe 1. Vertauschung von Integralen

### a)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x,y}\,\mathrm{d}\mu(y) = \mu(\{x\}) \cdot 1 = 1,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\,\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

Andererseits ist für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x,y}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(\{y\}) \cdot 1 = 0,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Insbesondere sind die beiden Doppelintegrale verschieden.

### b)

Es ist für alle $1 \in (0,1)$

$$\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y,$$

da $g(x,y)$ für festes $x \in (0,1)$ auf $[0,1]$ stetig ist, also Lebesgue- und Riemannintegral übereinstimmen. Für obiges Integral ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1}$$

Das Auseinanderziehen der Integrale ist möglich, da beide existieren, da die entsprechenden Funktionen auf $[0,1]$ stets stetig und beschränkt sind. Durch partielle Integration ergibt sich, dass

$$\int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = -y\frac{1}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}^1 + \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}$$
$$= -\frac{1}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Zusammen mit (1) ergibt sich damit, dass

$$\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in (0,1)$. Da $\frac{1}{1+x^2}$ auf $[0,1]$ stetig und beschränkt, und damit Riemann-integrierbar ist, gilt

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{(0,1)} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \arctan(x)|_{x=0}^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Für das andere Doppelintegral ergibt sich, da $g(x,y) = -g(y,x)$ für alle $x,y \in (0,1)$, aus dem gerade berechneten Integral, dass

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = -\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} g(y,x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) = -\frac{\pi}{4}.$$

Insbesondere sind die beiden Integrale verschieden.
Um $\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2$ zu bestimmen, bemerken wir, dass $|g| \geq 0$ auf $(0,1)^2$ stetig, also Borell-messbar ist. Wäre $\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2 < \infty$, so wäre $|g|$ und damit auch $g$ auf $(0,1)^2$ bezüglich $\lambda_2$ integrierbar. Da $(0,1)^2 = (0,1)\times(0,1)$ und $\lambda_2 = \lambda\times\lambda$ wären dann die beiden oben berechneten Integrale nach dem Satz von Fubini gleich. Da dies nicht der Fall ist, muss $\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2 = \infty$.
Dies lässt sich auch nachrechnen: Es lässt sich auf $\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2$ der Satz von Tonelli anwenden, weshalb

$$\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{(0,1)}\int_{(0,1)} |g(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Wir bemerken, dass, da $|g|$ stetig auf $[0,1]\setminus\{(0,0)\}$ ist, für alle $x \in (0,1)$

$$\int_{(0,1)} |g(x,y)|\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \geq \int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Analog zu den vorherigen Berechnungen ergibt sich, dass

$$\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = y\frac{1}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}^x = \frac{1}{2x}.$$

Da $\frac{1}{2x}$ auf $(0,1)$ stetig ist, und auf jedem kompakten Teilintervall von $(0,1)$ Riemann-integrierbar, ergibt sich damit zusammengefasst

$$\int_{(0,1)^2} |g|\,\mathrm{d}\lambda_2 \geq \int_{(0,1)} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$