Analysis 3 — Übung 3

Jendrik Stelzner

1. November 2013

Aufgabe 1. (Volumen auf Quadern)

Aufgabe 2. (Nullmengen)

a)

Aus der Aufgabenstellung geht meiner Meinung nach nicht klar hervor, ob A als

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &:= \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\} \text{ oder als} \\ \tilde{A}_2 &:= \{x \in X : x \in M \text{ für unendlich viele } M \in \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\} \end{aligned}$$

definiert wird. Für den Beweis diesen Aufgabenteiles genügt es allerdings davon auszugehen, dass $A = \tilde{A}_1$, da $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_1$: Ist $x \in \tilde{A}_2$, so gibt es unendlich viele $M \in \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x \in M$; insbesondere gibt es daher unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$. Man bemerke jedoch, dass im Allgemeinen $\tilde{A}_1 \subsetneq \tilde{A}_2$: Ist etwa $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant mit $A_1 \neq \emptyset$, so ist $\tilde{A}_1 = A_1 \neq \emptyset$, aber $\tilde{A}_2 = \emptyset$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da $\mu(A_k) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^n \mu(A_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend. Da sie nach Annahme nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Es gibt daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^\infty A_k < \varepsilon$. Da μ ein Maß ist folgt daraus, dass

$$\mu\left(\bigcup_{k=N}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=N}^\infty \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Da $A = \tilde{A}_1$ gibt es für alle $x \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ und $x \in A_n$. Insbesondere ist daher $A \subseteq \bigcup_{k=N}^\infty A_k$. Aufgrund der Monotonie von μ folgt, dass

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k=N}^\infty A_k\right) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von ε folgt damit, dass $\mu(A) = 0$.

b)

Es sei $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, sowie $A_k := \{1, \ldots, k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\{1\} \subseteq A$, unabhängig davon ob $A = \tilde{A}_1$ oder $A = \tilde{A}_2$. Wegen der Monotonie des Maßes ist daher $\mu(A) \geq \mu(\{1\}) = 1$, also $\mu(A) \neq 0$. (Ist $A = \tilde{A}_1$, so ist sogar $A = \mathbb{N}$ und somit $\mu(A) = \infty$.)

Aufgabe 3. **(Vom äußeren Maß zum Maß)**

Aufgabe 4. **(Verschiedene äußere Maße)**