Einführung in die Algebra
Blatt 11

Jendrik Stelzner

9. Januar 2014

Aufgabe 11.1.

Es bezeichne $f \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von $z = \sqrt{3} + i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$. Dieses existiert, denn $\sqrt{3}$ und i sind algebraisch über $\mathbb{Q}$, also auch z.
Da z eine Nullstelle von f ist, und $z \notin \mathbb{R}$, ist auch $\bar{z} \neq z$ eine Nullstelle von f. Folglich hat f in $\mathbb{C}[X]$ die beiden Linearfaktoren $X - z, X - \bar{z} \in \mathbb{C}[X]$ und es ist $\deg f \geq 2$. Da

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - (z + \bar{z})X + |z|^2 = X^2 - 2\sqrt{3}X + 4 \notin \mathbb{Q}[X]$$

ist sogar $\deg f > 2$.
Es ist auch $\deg f > 3$: Wäre $\deg f = 3$, so hätte f zusätzlich zu z und $\bar{z}$ noch eine reelle Nullstelle (denn jedes Polynom ungeraden Gerades in $\mathbb{R}[X]$, und damit auch in $\mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$, hat eine reelle Nullstelle), es gäbe also ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f &= (X - z)(X - \bar{z})(X - \alpha) = (X^2 - 2\sqrt{3}X + 4)(X - \alpha) \\ &= X^3 - (2\sqrt{3} + \alpha)X^2 + (4 + 2\sqrt{3}\alpha)X - 4\alpha \in \mathbb{Q}[X]. \end{aligned}$$

Da $4\alpha \in \mathbb{Q}$ wäre bereits $\alpha \in \mathbb{Q}$ und wegen $2\sqrt{3} + \alpha \in \mathbb{Q}$ damit auch $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Dies ist offenbar ein Widerspruch. Also muss $\deg f > 3$.
Da z eine Nullstelle des Polynoms

$$(X - z)(X - \bar{z})(X + z)(X + \bar{z}) = X^4 - 4X^2 + 16 \in \mathbb{Q}[X]$$

ist, folgt aus dem obigen Beobachtungen, dass

$$f = X^4 - 4X^2 + 16.$$

Wäre nämlich f nicht das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}$, so wäre f wegen der offensichtlichen Normiertheit reduzibel. Dann gebe es ein normiertes Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $1 \leq \deg g \leq 3$ mit $g \mid f$ und $g(z) = 0$, was den obigen Beobachtungen widerspricht.

Aufgabe 11.2.

f ist normiert und nach dem Eisensteinkriterium mit der Primzahl $p = 3$ auch irreduzibel. Folglich ist f bereits das Minimalpolynom von x. Deshalb ist $\mathbb{Q}[X]/(f) \cong \mathbb{Q}(x)$, wobei ein entsprechender Körperisomorphismus durch

$$\varphi : \mathbb{Q}[X]/(f) \to \mathbb{Q}(x) \text{ mit } \varphi(\bar{q}) = q \text{ für alle } q \in \mathbb{Q} \text{ und } \varphi(\bar{X}) = x$$

gegeben ist. Da $\deg f = 3$ ist $\bar{1}, \bar{X}, \bar{X}^2$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}/(f)$. Also ist $1, x, x^2$ als Bild dieser Basis unter φ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(x)$.
Da x eine Nullstelle von f ist, ist

$$0 = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} & 105x^2 - 261x - 81 \\ =& 105x^2 - 261x - 81 + (x^2 + 6x + 27)(x^3 - 6x^2 + 9x + 3) \\ =& x^5 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & 69x^2 - 153x - 47 \\ =& 69x^2 - 153x - 47 + (3x + 16)(x^3 - 6x^2 + 9x + 3) \\ =& 3x^4 - 2x^3 + 1. \end{aligned}$$

Da offenbar $x \neq 0$ ist $1/(2x) \in \mathbb{Q}(\alpha)$ existent, und da

$$\begin{aligned} 2x\left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}\right) &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x \\ &= -\frac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 9x + 4) + 1 = 1 \end{aligned}$$

ist

$$\frac{1}{2x} = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}.$$

Aufgabe 11.3.

Lemma 1. *Für einen Körper K gibt es unendlich viele normierte, irreduzible Polynome in $K[X]$.*

Beweis. Der Beweis läuft analog zum klassischen Beweises des Satzes von Euklid. Angenommen, die Menge

$$P := \{g \in K[X] : g \text{ ist normiert und irreduzibel}\}$$

ist endlich. Wir wissen, dass P ein Repräsentantensystem der Primelemente in $K[X]$ ist, und dass sich jedes Element $f \in K[X]$ eindeutig als Produkt

$$f = \varepsilon g_1 \cdots g_n$$

mit $\varepsilon \in K$ und $g_1, \ldots, g_n \in P$ schreiben lässt. Es sei

$$f := \prod_{g \in P} g.$$

Da $\deg g \geq 1$ für alle $g \in P$ ist $g \nmid 1$ für alle $g \in P$, also $g \nmid (f+1)$ für alle $g \in P$. Also ist $f + 1 \in P$. Deshalb ist $(f + 1) \nmid (f + 1)$. Dies ist offenbar ein Widerspruch. □

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Da jedes Polynom aus $K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt ist

$$\{f \in K[X] : f \text{ ist normiert und irreduzibel}\} = \{X - \lambda \in K[X] : \lambda \in K\}.$$

Da die linke Menge nach Lemma 1 unendlich ist, ist es auch die rechte. Es muss also K unendlich sein.