

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

BLATT 7

Jendrik Stelzner

29. November 2013

Aufgabe 7.1.

Aufgabe 7.2.

Aufgabe 7.3.

Aufgabe 7.4.

Definition. Sei R ein kommutativer Ring. Für $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[X]]$ bezeichnet

$$\text{Deg}(p) := \begin{cases} \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\} & \text{falls } p \neq 0, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

den Grad von p .

Für einen kommutativen Ring R und $p, q \in R[[X]]$ ist

$$\text{Deg}(p + q) \geq \min\{\text{Deg}(p), \text{Deg}(q)\} \text{ und } \text{Deg}(pq) \geq \text{Deg}(p) + \text{Deg}(q). \quad (1)$$

Ist R darüber hinaus nullteilerfrei, so gilt sogar

$$\text{Deg}(pq) = \text{Deg}(p) + \text{Deg}(q). \quad (2)$$

Die Beweise der entsprechenden Aussage laufen analog zu den Beweisen der entsprechenden Aussagen für die Gradfunktion \deg von $R[X]$.

(i)

Ist R kein Integritätsring, so ist auch $R[X] \subsetneq R[[X]]$ kein Integritätsring, also auch $R[[X]]$ nicht. Ist $R[[X]]$ kein Integritätsring, so gibt es $p, q \in R[[X]]$ mit $p, q \neq 0$, also $\text{Deg}(p), \text{Deg}(q) < \infty$, aber $pq = 0$, also $\text{Deg}(pq) = \infty$. Mit (2) folgt, dass R kein Integritätsring ist.

(ii)

Ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[x]]$ invertierbar, so gibt es $q = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \in R[[x]]$ mit $pq = 1$. Insbesondere ist daher

$$1 = (pq)_1 = a_0 b_0,$$

also a_0 invertierbar.

Ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[x]]$ mit a_0 invertierbar, so definieren wir eine Folge $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auf R rekursiv durch

$$b_0 := a_0^{-1} \text{ und } b_i := -a_0^{-1} \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j},$$

und $q := \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ als die entsprechende Potenzreihe. Für $e = pq$ ergibt sich dann für alle $i \in \mathbb{N}$

$$e_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} = \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j} + a_0 b_i = \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j} - \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j} = 0.$$

Also ist $e = 1$ und p daher invertierbar mit $p^{-1} = q$. Insbesondere ergibt sich das folgende Lemma:

Lemma 1. Sei K ein Körper und seien $p, q \in K[[x]]$. Dann gilt:

- (i) p ist genau dann invertierbar, wenn $\text{Deg } p = 0$.
- (ii) Ist $\text{Deg } p = \text{Deg } q$, so sind p und q assoziiert. Ist $\text{Deg } p = \text{Deg } q < \infty$, so sind p und q assoziiert zu $X^{\text{Deg } p}$.
- (iii) Ist $\text{Deg } p \geq \text{Deg } q$, so ist $q \mid p$.

Beweis. (i)

$p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ ist genau dann invertierbar, wenn a_0 invertierbar ist, also genau dann wenn $a_0 \neq 0$, was wiederum äquivalent zu $\text{Deg } a_0 = 0$ ist.

(ii)

Ist $p = q = 0$ so ist nichts zu zeigen. Ansonsten ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \neq 0$, also $p = X^{\text{Deg } p} p'$ für $p' = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+\text{Deg } p} X^i$ mit $a_{\text{Deg } p} \neq 0$. Nach (i) ist p' invertierbar, also p assoziiert zu $X^{\text{Deg } p}$. Analog ergibt sich, dass q assoziiert zu $X^{\text{Deg } q}$ ist. Mit $\text{Deg } p = \text{Deg } q$ folgt damit auch die Assoziiertheit von p und q .

(iii)

Ist $\text{Deg } p = \infty$, so ist $p = 0$ und nichts zu zeigen. Ansonsten ist $p = X^{\text{Deg } p - \text{Deg } q} p'$ wobei p' assoziiert zu q ist, also $p = X^{\text{Deg } p - \text{Deg } q} c q$ für $c \in K^*$. \square

(iii)

f ist in $\mathbb{Z}[X]$ nicht irreduzibel, da $f = (X+1)(X+2)$.
Seien $p, q \in \mathbb{Z}[[x]]$ mit $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ und $q = \sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j$ so dass $pq = f$. Dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich, dass $a_0 b_0 = 2$. Da $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, und $2 \in \mathbb{Z}$ irreduzibel ist, ist a_0 oder b_0 eine Einheit. Entsprechend ist p oder q eine Einheit. Also ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[[x]]$.

Aufgabe 7.5.

Lemma 2. $K[[x]]$ bildet mit der Gradabbildung Deg einen euklidischen Ring.

Beweis. Da K nullteilerfrei ist, ist $K[[x]]$ ein Integritätsring. Seien $f, g \in K[[x]]$ mit $g \neq 0$. Es gilt zu zeigen, dass es $q, r \in K[[x]]$ gibt, so dass $f = qg + r$ mit $r = 0$ oder $\text{Deg } r < \text{Deg } g$. Ist $\text{Deg } f < \text{Deg } g$ so genügt es $q = 0$ und $r = f$ zu wählen. Ist $\text{Deg } f \geq \text{Deg } g$, so folgt aus 1, dass $g \mid f$, es kann also q mit $f = qg$ und $r = 0$ gewählt werden. \square

Aus Lemma 2 folgt direkt, dass $K[[x]]$ ein Hauptidealring ist. Für jedes Ideal $(a) \neq 0$ von $K[[x]]$ folgt mit Lemma 1, dass a assoziiert zu $X^{\text{Deg } a}$ ist, und da $K[[x]]$ ein Integritätsring ist, daher $(a) = (X^{\text{Deg } a})$. Folglich sind die Ideale in $K[[x]]$ gerade 0 und (X^n) für $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist (X) das eindeutige maximale Ideal in $K[[x]]$, weshalb $K[[x]]$ lokal ist (dies lässt sich auch direkt aus Lemma 1 folgern).