# Einführung in die Algebra — Blatt 1

Jendrik Stelzner

23. Oktober 2013

## Aufgabe 1.1.

**Bemerkung.** Sei $G$ eine Gruppe und $H \subset G$ ein Untergruppe mit $(G : H) = 2$. Dann ist $H$ ein Normalteiler in $G$.

*Beweis der Bemerkung.* Da $(G : H) = 2$ zerfällt in $G$ in zwei Links- bzw. Rechtsnebenklassen, nämlich je $H$ und $H^c$. Für alle $g \in H$ ist damit $gH = H = Hg$ und für alle $g \in H^c$ ist $gH = H^c = Hg$. □

Es ist $S_3 = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}\}$, wobei $\sigma = (1,2,3)$, $\sigma^2 = (3,2,1)$, $\tau_{12} = (1,2)$, $\tau_{13} = (1,3)$ und $\tau_{23} = (2,3)$.
Da $\operatorname{ord} S_3 = 3! = 6$ folgt aus dem Satz von Lagrange, dass $\operatorname{ord} H \in \{1,2,3,6\}$ für jede Untergruppe $H \subseteq G$ von $G$. Neben den beiden trivialen Untergruppen $\{\mathrm{id}\}$ und $S_3$ kann $S_3$ also nur zwei- oder dreielementige Untegruppen enthalten.
Offenbar sind $\langle\tau_{12}\rangle = \{\mathrm{id}, \tau_{12}\}$, $\langle\tau_{13}\rangle = \{\mathrm{id}, \tau_{13}\}$ und $\langle\tau_{23}\rangle = \{\mathrm{id}, \tau_{23}\}$ Untergruppen der Ordnung 2 . Dies sind auch die einzigen Untergruppen dieser Ordnung: Ist $H = \{\mathrm{id}, a\}$ eine Untergruppe mit $\operatorname{ord} H = 2$, so muss $a^2 = \mathrm{id}$, also $a$ selbstinvers sein. Die einzigen selbstinversen Elemente in $S_3$ sind aber $\tau_{12}$, $\tau_{13}$ und $\tau_{23}$.
Offenbar ist $\langle\sigma\rangle = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\}$ eine Untergruppe der Ordnung 3. Es ist auch die einzige Untergruppe dieser Ordnung: Ist $H = \{\mathrm{id}, a, b\}$ eine Untergruppe mit $\operatorname{ord} H = 3$, so ist, wie aus der Vorlesung bekannt, $H$ zyklisch und von $a$ und $b$ erzeugt. Insbesondere muss daher $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b = \operatorname{ord} H = 3$. Die einzigen beiden Elemente in $S_3$ mit Ordnung 3 sind jedoch $\sigma$ und $\sigma^2$.
Die Untergruppen von $S_3$ sind also $\{\mathrm{id}\}$, $\langle\tau_{12}\rangle$, $\langle\tau_{13}\rangle$, $\langle\tau 23\rangle$, $\langle\sigma\rangle$ und $S_3$.
$\{id\}$ und $S_3$ sind trivialerweise Nullteiler in $S_3$. Aus der Bemerkung folgt, dass auch $\langle\sigma\rangle$ ein Normalteiler in $S_3$ ist, da $(S_3 : \langle\sigma\rangle) = 2$. $\langle\tau_{12}\rangle$, $\langle\tau_{13}\rangle$ und $\langle\tau 23\rangle$ sind keine Normalteiler in $S_3$, denn

$$\begin{aligned}
&\tau_{23}\{\mathrm{id}, \tau_{12}\} = \{\tau_{23}, \sigma^2\} \neq \{\tau_{23}, \sigma\} = \{\mathrm{id}, \tau_{12}\}\tau_{23}, \\
&\tau_{12}\{\mathrm{id}, \tau_{13}\} = \{\tau_{12}, \sigma^2\} \neq \{\tau_{12}, \sigma\} = \{\mathrm{id}, \tau_{13}\}\tau_{12} \text{ und} \\
&\tau_{12}\{\mathrm{id}, \tau_{23}\} = \{\tau_{12}, \sigma\} \neq \{\tau_{12}, \sigma^2\} = \{\mathrm{id}, \tau_{23}\}\tau_{12}.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 1.2.

## Aufgabe 1.3.

### (i)

Wie aus der Vorlesung bekannt reicht es zu zeigen, dass $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in G$. Sei hierzu $g \in G$ beliebig aber fest. Es sei $\operatorname{inn}_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$; wie aus Lineare Algebra I bekannt ist $\operatorname{inn}_g$ ein Gruppenautomorphismus von $G$. Daher ist insbesondere $\operatorname{ord} H = \operatorname{ord} \operatorname{inn}_g(H)$. Da aber $H$ nach Annahme die einzige Untergruppe von $G$ mit Ordung $\operatorname{ord} H$ ist, muss $gHg^{-1} = \operatorname{inn}_g(H) = H$. Aus der Beliebigkeit von $g$ folgt damit die zu zeigende Aussage.

### (ii)

**Bemerkung.** Seien $G$ und $G'$ Gruppen, $G$ endlich, und $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \cdot \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$.

*Beweis der Bemerkung.* Wie aus der Vorlesung bekannt, ist $G/\operatorname{Ker} \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$, also insbesondere $(G : \operatorname{Ker} \varphi) = \operatorname{ord} G/\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$. Da nach dem Satz von Lagrange $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \cdot (G : \operatorname{Ker} \varphi)$ ist $(G : \operatorname{Ker} \varphi) = \frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi}$. Gleichsetzen ergibt nun, dass $\frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi} = \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$, also $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \cdot \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$. □

Sei $F$ eine Untergruppe von $G$ mit $\operatorname{ord} F = \operatorname{ord} H$. Es gilt zu zeigen, dass $F = H$.
Hierzu betrachte man die kanonische Abbildung $\pi : G \to G/H$. Da $F$ eine Untergruppe von $G$ ist, ist $\pi(F)$ eine Untergruppe von $\pi(G) = G/H$, insbesondere ist nach dem Satz von Lagrange daher $\operatorname{ord} \pi(F)$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G/H = (G : H)$. Betrachtet man die Komposition

$$\varphi : F \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/H$$

so ist $\operatorname{Ker} \varphi = F \cap H$ und $\operatorname{Im} \varphi = \pi(F)$, nach der Bemerkung also

$$\operatorname{ord} H = \operatorname{ord} F = \operatorname{ord} \pi(F) \cdot \operatorname{ord} F \cap H.$$

Es ist also $\operatorname{ord} \pi(F)$ auch ein Teiler von $\operatorname{ord} H$. Da $\operatorname{ord} H$ und $(G : H)$ teilerfremd sind, muss $\operatorname{ord} \pi(F) = 1$, also $\pi(F) = \{1\}$ und daher $F \subseteq \operatorname{Ker} \pi = H$. Da $\operatorname{ord} F = \operatorname{ord} H$ gilt daher $F = H$.

## Aufgabe 1.4.

### (i)

Da, wie aus der Vorlesung bekannt, $\langle g \rangle$ für alle $g \in G$ eine Untergruppe von $G$ ist, ist nach dem Satz von Lagrange $\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} \langle g \rangle$ für alle $g \in G$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G$, und somit ebenfalls ungerade.
Da $aba = b \Leftrightarrow b = a^{-1}ba^{-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b^{2n+1} = a(baa^{-1}ba^{-1}a)^n ba = ab^{2n+1}a.$$

Da $\operatorname{ord} b$ ungerade ist, ist damit insbesondere

$$e = b^{\operatorname{ord} b} = ab^{\operatorname{ord} b}a = aea = a^2,$$

also $a$ selbstinvers. Da damit $\langle a \rangle = \{e, a\}$, aber $\operatorname{ord} a$ ungerade ist, muss $a = e$.

### (ii)

Da $c = abcba$ ist $cb = abcbab = ab \cdot cb \cdot ab$, nach Aufgabenteil **(i)** ist daher $ab = e$.

## Aufgabe 1.5.

Es ist

$$U \cong U/\{1\} = U/(U \cap N) \cong UN/N,$$

wobei die letzte Isomorphie aus dem ersten Isomorphiesatz folgt. Analog ergibt sich, dass $V \cong VN/N$. Für $U \cong V$ ist es daher hinreichend, dass $UN = VN = G$. Dies ergibt sich durch Fallunterscheidung:
Ist $N = \{1\}$, so ist $N \subset U$ und $N \subset V$, also $U = V = G$ und damit insbesondere $UN = VN = G$.
Ist $N \neq \{1\}$, so ist gibt es wegen $U \cap N = \{1\}$ ein $u \in U$ mit $u \notin N$. Es ist dann $uN \subseteq UN$ aber $uN \cap N = \emptyset$, da $aN = N \Leftrightarrow a \in N$ für alle $a \in G$. Daher ist $UN \neq N$, also $N \subset UN$ und damit $UN = G$. Analog ergibt sich, dass auch $VN = G$.