Einführung in die Algebra — Blatt 2

Jendrik Stelzner

31. Oktober 2013

Aufgabe 2.1.

Auf X' sei eine G-Aktion definiert als

$$G \times X' \to X', (g, H(\tilde{g}, x)) \mapsto g * H(\tilde{g}, x) := H(g\tilde{g}, x),$$

wobei $H(\tilde{g}, x) \in X'$ die Bahn von $(\tilde{g}, x) \in G \times X$ bezeichnet. Es handelt sich bei $*$ um ein G-Aktion, da für alle $H(g, x) \in X'$

$$1 * H(g, x) = H(1 \cdot g, x) = H(g, x)$$

und für $g_1, g_2 \in G$ und $H(\tilde{g}, x) \in X'$

$$g_1 * (g_2 * H(\tilde{g}, x)) = g_1 * H(g_2\tilde{g}, x) = H(g_1 g_2 \tilde{g}, x) = (g_1 g_2) * H(\tilde{g}, x).$$

Weiter sei die H-Abbildung Φ definiert als

$$\Phi : X \mapsto X', x \mapsto H(1, x).$$

Φ ist eine H-Abbildung, da für alle $h \in H$ und $x \in X$

$$\Phi(hx) = H(1, hx) = H(h, x) = h * H(1, x) = h * \Phi(x).$$

Dabei gilt des zu bemerken, dass $H(1, hx) = H(h, x)$, da

$$H(1, hx) = (Hh^{-1})(1, hx) = H(h^{-1}(1, hx)) = H(h, x),$$

wobei die Multiplikation die in der Aufgabe gegebene H-Aktion auf $G \times X$ ist.
Es gilt nun zu zeigen, dass $f \mapsto f \circ \Phi$ eine Bijektion zwischen der Menge der G-Abbildungen von X' nach Y und der Menge der H-Abbildungen von X nach Y definiert.
Es gilt zunächst die Wohldefiniertheit der induzierten Abbildung zu überprüfen, d.h. dass für eine G-Abbildung $f : X' \to Y$ die Komposition $f \circ \Phi$ eine H-Abbildung von X nach Y ist. Dies ist aber der Fall, da offenbar $f \circ \Phi : X \to Y$, und für alle $h \in H$ und $x \in X$.

$$\begin{aligned}(f \circ \Phi)(hx) &= f(H(1, hx)) = f(H(h, x)) \\ &= f(h * H(1, x)) = hf(H(1, x)) = h(f \circ \Phi)(x).\end{aligned}$$

Die Injektivität ergibt sich daraus, dass für G-Abbildungen $f, f' : X \to Y$ mit $f \circ \Phi = f' \circ \Phi$ für alle $H(g, x) \in X'$

$$\begin{aligned}f(H(g, x)) &= f(g * H(1, x)) = g * f(H(1, x)) = g * (f \circ \Phi)(x) \\ &= g * (f' \circ \Phi)(x) = g * f'(H(1, x)) = f'(g * H(1, x)) = f'(H(g, x)),\end{aligned}$$

also $f = f'$.
Die Surjektivität der Abbildung ergibt sich daraus, dass sich für jede H-Abbildung $\psi : X \to Y$ eine G-Abbildung $f : X' \to Y$ konstruieren lässt, so dass $\psi = f \circ \Phi$: Für $H(g, x) \in X'$ sei $f(H(g, x)) := g\psi(x)$. Dieser Ausdruck ist wohldefiniert, denn ist $H(g, x) = H(g', x')$, so ist $(g', x') = h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$ für ein $h \in H$ und somit

$$g\psi(x) = gh^{-1}h\psi(x) = gh^{-1}\psi(hx) = g'\psi(x').$$

f ist eine G-Abbildung, da für alle $g \in G$ und $H(\tilde{g}, x) \in X'$

$$f(g * H(\tilde{g}, x)) = f(H(g\tilde{g}, x)) = g\tilde{g}\psi(x) = gf(H(\tilde{g}, x)).$$

Aufgabe 2.2.

Angenommen, es ist $\operatorname{ord} Z = 1$, also $Z = \{1\}$, aber die Anzahl der Konjugationsklassen in G ist echt größer als $\frac{\operatorname{ord} G}{p}$. Sei dann $x_1, \ldots, x_n$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen von $G - \{1\}$; nach Annahme ist dabei $n \geq \frac{\operatorname{ord} G}{p}$. Es ist nun $(G : Z_{x_i}) \neq 1$ für $i = 1, \ldots, n$, da sonst $Z_{x_i} = G$, also $1 \neq x_i \in Z$, im Widerspruch zur Annahme dass $Z = \{1\}$. Da $(G : Z_{x_i})$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G$ ist, muss daher $(G : Z_{x_i}) \geq p$ für $i = 1, \ldots, n$. Es ist daher

$$\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} Z + \sum_{i=1}^{n} (G : Z_{x_i}) \geq 1 + \frac{\operatorname{ord} G}{p} p = 1 + \operatorname{ord} G,$$

also $0 = 1$, was offensichtlich falsch ist. Also muss, wenn die Anzahl den Konjugationsklassen in G echt größer als $\frac{\operatorname{ord} G}{p}$ ist, $\operatorname{ord} Z \geq 2$.

Aufgabe 2.3.

Zunächst gilt es zu bemerken, dass $x \in X$ genau dann ein Fixpunkt von G ist, falls $gx = x$ für alle $g \in G$, also $G_x = G$, und somit $(G : G_x) = 1$. Da $Gx = \{x\}$ ist x auch der einzige Repräsentant der Bahn von x.
Sei $x_1, \ldots, x_n$ ein Respräsentantensystem der Bahnen auf X. Dann ist nach der Bahnengleichung

$$17 = \operatorname{ord} X = \sum_{i=1}^{n} (G : G_{x_i}),$$

wobei für je $i = 1, \ldots, n$ der Index $(G : G_{x_i})$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G$ ist, und daher $(G : G_{x_i}) \in \{1, 7, 11, 77\}$. Betrachtet man nun alle Möglichkeiten, 17 als Summe aus diesen Zahlen darzustellen, so ergibt sich, dass

$$17 = 11 + 6 \cdot 1 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 7 + 10 \cdot 1 = 17 \cdot 1.$$

Es gibt also in jedem möglichen Fall paarweise verschiedene $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $(G : G_{x_{i_j}}) = 1$. Also sind x_{i_1}, x_{i_2} und x_{i_3} drei (paarweise verschiedene) Fixpunkte von G.

Aufgabe 2.4.

(i)

Es sei $x_1, \dots, x_n$ ein Repräsentantensystem der Bahnen auf X. Für $i = 1, \dots, n$ gilt: Da $(G : G_{x_i})$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G = p^k$ ist, ist $(G : G_{x_i}) = p^{l_i}$ für ein $l_i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Durch passende Durchnummerierung der x_i kann davon ausgegangen werden, dass es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $(G : G_{x_i}) = 1$, also $l_i = 0$, für $i = 1, \dots, j$, und $(G : G_{x_i}) \geq p$, also $l_i \geq 1$ für $i > j$. Insbesondere sind $x_1, \dots, x_j$ die Fixpunkte von G (vergleiche anfänglich Bemerkung in **Aufgabe** 2.3).
Nach der Bahnengleichung ist nun

$$\operatorname{ord} X = \sum_{i=1}^{n} (G : G_{x_i}) = j + \sum_{i=j+1}^{n} p^{l_i} = j + p \sum_{i=j+1}^{n} \underbrace{p^{l_i - 1}}_{\in \mathbb{N}},$$

also insbesondere $\operatorname{ord} X \equiv j \pmod{p}$. Da j gerade die Anzahl der Fixpunkte von G ist, ist dies die zu zeigende Aussage.

(ii)

Zunächst gilt es zu bemerken, dass die zu zeigende Aussage für $N = \{1\}$ nicht gilt. Im Folgenden wird sie daher unter der zusätzlichen Annahme $N \neq \{1\}$ gezeigt.
Da N ein Normalteiler ist, ist $gNg^{-1} = N$ für alle $g \in G$. Also ist $h \in Gh \subseteq N$ für alle $h \in N$, wobei $Gh = \{ghg^{-1} : g \in G\}$ die Bahn von h unter der Konjugationsaktion ist. Es folgt, dass N die disjunkte Vereinigung von Bahnen ist. Angenommen $N \cap Z = \{1\}$. Da $Z = \{g \in G : Gg = \{g\}\}$ ist dann 1 das einzige Element $h \in N$ mit $Gh = \{h\}$. Nach der Klassengleichung ist daher

$$\operatorname{ord} N = 1 + \sum_{i=1}^{n} (G : Z_{x_i}),$$

wobei $x_1, \dots, x_n$ ein Repräsentantensystem der Bahnen in $N - \{1\}$ ist. Da $\operatorname{ord} N$ sowie jedes $(G : Z_{x_i})$ als Teiler von $\operatorname{ord} G = p^k$ eine Potenz von p ist, ergibt sich, dass

$$p^n = 1 + n_1 p + \ldots + n_m p^m$$

für passende $n, m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, wobei $n \geq 1$ wegen der Annahme $N \neq \{1\}$. Es folgt, dass

$$1 = p^n - n_m p^m - \ldots - n_1 p = p(p^{n-1} - n_m p^{m-1} - \ldots - n_1).$$

Also ist p ein Teiler von 1, was offensichtlich nicht stimmt. Daher muss $N \cap Z \supsetneq \{1\}$.

Aufgabe 2.5.

Da das Zentrum Z von G ein Teiler von $\operatorname{ord} G = p^3$ ist, muss $\operatorname{ord} Z \in \{1, p, p^2, p^3\}$.
Es ergibt sich jedoch, dass $\operatorname{ord} Z = p$ sein muss:
Da Z abelsch ist, G jedoch nicht, muss $Z \neq G$ und somit $\operatorname{ord} Z \neq p^3$.
Wäre $\operatorname{ord} Z = p^2$, so wäre $\operatorname{ord} G/Z = \frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} Z} = p$, also G/Z zyklisch, und G daher, wie aus der Vorlesung bekannt, abelsch.
Auch ist aus der Vorlesung bekannt, dass $Z \neq \{1\}$, da G eine nichttriviale p-Gruppe ist.
Es muss also $\operatorname{ord} Z = p$.