Einführung in die Algebra
Blatt 9

Jendrik Stelzner

18. Dezember 2013

Aufgabe 9.1.

Die Multiplikation $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul ist offenbar die Einschränkung der Multiplikation $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ des Körpers $\mathbb{Q}$. Die Torsionsfreiheit von $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul folgt daher direkt aus der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Q}$ als Köper.
$\mathbb{Q}$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul nicht endlich erzeugt, denn für $\frac{r_1}{s_1}, \ldots, \frac{r_n}{s_n} \in \mathbb{Q}$ ist

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\frac{r_1}{s_1} + \ldots + \mathbb{Z}\frac{r_n}{s_n} &\subseteq \mathbb{Z}\frac{1}{s_1} + \ldots + \mathbb{Z}\frac{1}{s_n} \\ &\subseteq \mathbb{Z}\frac{1}{s_1 \cdots s_n} + \ldots + \mathbb{Z}\frac{1}{s_1 \cdots s_n} = \mathbb{Z}\frac{1}{s_1 \cdots s_n} \subsetneq \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

$\mathbb{Q}$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul nicht frei: Für $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ besitzt

$$rq\frac{p}{q} = pr = ps\frac{r}{s}$$

zwei verschiedene Linearkombinationen. Daher ist jede Familie von mindestens zwei rationalen Zahlen linear abhängig. Insbesondere also jedes Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul, da ein solches unendlich ist.

Aufgabe 9.2.

(i)

Es handelt sich bei $\sim$ um eine Äquivalenzrelation auf $M \times S$: Für alle $(m,s) \in M \times S$ ist $1 \cdot sm = 1 \cdot sm$ mit $1 \in S$ und deshalb $(m,s) \sim (m,s)$. Also ist $\sim$ reflexiv. Ist $(m,s) \sim (m',s')$ für $(m,s),(m',s') \in M \times S$, so gibt es ein $t \in S$ mit $ts'm = tsm'$. Da damit auch $tsm' = ts'm$ ist $(m',s') \sim (m,s)$. Also ist $\sim$ symmetrisch. Ist $(m,s) \sim (m',s') \sim (m'',s'')$, so gibt es $t, \tilde{t} \in S$ mit

$$ts'm = tsm' \text{ und } \tilde{t}s'm'' = \tilde{t}s''m'.$$

Da S unter der Multiplikation abgeschlossen ist, ist auch $t\tilde{t}s' \in S$. Da wegen der Kommutativität von R

$$t\tilde{t}s' \cdot s''m = \tilde{t}s'' \cdot ts'm = \tilde{t}s'' \cdot tsm' = ts \cdot \tilde{t}s''m' = ts \cdot \tilde{t}s'm'' = t\tilde{t}s' \cdot sm''$$

ist $(m, s) \sim (m'', s'')$. Daher ist $\sim$ transitiv. Dies zeigt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
Die Addition ist wohldefiniert: Für $\frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m'}{s'} = \frac{m''}{s''}$ gibt es ein $t \in S$ mit $ts''m' = ts'm''$. Wegen der Kommutativität von R ist für alle $(m, s) \in M \times S$

$$\begin{aligned} t\,ss''(s'm + sm') &= tss's''m + ts^2s''m' \\ &= tss's''m + ts^2s'm'' = t\,ss'(s''m + sm''), \end{aligned}$$

und deshalb $\frac{s'm+sm'}{ss'} = \frac{s''m+sm''}{ss''}$. Da der Ausdruck $\frac{sm'+s'm}{ss'}$ wegen der Kommutativität von R symmetrisch in (m, s) und (m', s') ist, folgt damit die Wohldefiniertheit der Addition.
Auch die Multiplikation ist wohldefiniert: Für $\frac{r}{s}, \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \in R[S^{-1}]$ mit $\frac{r}{s} = \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}$ gibt es ein $t \in S$ mit $tr\tilde{s} = t\tilde{r}s$, weshalb wegen der Kommutativität von R für alle $(m', s') \in M \times S$

$$t\,\tilde{s}s'rm' = t\,ss'\tilde{r}m',$$

also $\frac{rm'}{ss'} = \frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'}$. Für $\frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m'}{s'} = \frac{m''}{s''}$ gibt es ein $t \in S$ mit $ts''m' = ts'm''$, weshalb wegen der Kommutativität von R für alle $(r, s) \in R \times S$

$$t\,ss''rm' = t\,ss'rm'',$$

also $\frac{rm'}{ss'} = \frac{rm''}{ss''}$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der Multiplikation.
$M[S^{-1}]$ bildet bezüglich der Addition ein abelsche Gruppe: Die Addition ist assoziativ, da für alle $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \left(\frac{m'}{s'} + \frac{m''}{s''}\right) &= \frac{m}{s} + \frac{s''m' + s'm''}{s's''} = \frac{s's''m + ss''m' + ss'm''}{ss's''} \\ &= \frac{s'm + sm'}{ss'} + \frac{m''}{s''} = \left(\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'}\right) + \frac{m''}{s''}, \end{aligned}$$

und kommutativ, da für alle $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} = \frac{sm' + s'm}{s's} = \frac{m'}{s'} + \frac{m}{s}.$$

Das Element $\frac{0}{1} \in M[S^{-1}]$ ist bezüglich der Addition neutral, da für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$

$$\frac{m}{s} + \frac{0}{1} = \frac{1 \cdot m + s \cdot 0}{s \cdot 1} = \frac{m}{s}.$$

Dabei bemerken wir direkt, dass $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$ für alle $s \in S$. Jedes Element $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$ hat $\frac{-m}{s} \in M[S^{-1}]$ als additiv inverses Element, da

$$\frac{m}{s} + \frac{-m}{s} = \frac{sm - sm}{s^2} = \frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}.$$

Dies zeigt, dass $M[S^{-1}]$ bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe bildet.
Zusammen mit der definierten Multiplikation wird die abelsche Gruppe $M[S^{-1}]$ zu einem $R[S^{-1}]$-Modul: Es seien $\frac{r}{s}, \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \in R[S^{-1}]$ und $\frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$ beliebig aber fest. Es ist

$$1_{R[S^{-1}]}\,\frac{m'}{s'} = \frac{1_R}{1_R}\,\frac{m'}{s'} = \frac{1_R\,m'}{1_R\,s'} = \frac{m'}{s'}.$$

Wir bemerken, dass für alle $\hat{s} \in S$ die Kürzungsregel

$$\frac{\hat{s}m'}{\hat{s}s'} = \frac{\hat{s}}{\hat{s}}\,\frac{m'}{s'} = 1_{R[S^{-1}]}\,\frac{m'}{s'} = \frac{m'}{s'}$$

gilt. Es ist daher

$$\begin{aligned} \frac{r}{s}\left(\frac{m'}{s'} + \frac{m''}{s''}\right) &= \frac{r}{s}\,\frac{s''m' + s'm''}{s's''} = \frac{rs''m' + rs'm''}{ss's''} \\ &= \frac{rss''m' + rss'm''}{s^2s's''} = \frac{rm'}{ss'} + \frac{rm''}{ss''} = \frac{r}{s}\,\frac{m'}{s'} + \frac{r}{s}\,\frac{m''}{s''}. \end{aligned}$$

Auch ist deshalb

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{s} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\right)\frac{m'}{s'} &= \frac{r\tilde{s} + \tilde{r}s}{s\tilde{s}}\,\frac{m'}{s'} = \frac{r\tilde{s}m' + \tilde{r}sm'}{s\tilde{s}s'} \\ &= \frac{r\tilde{s}s'm' + \tilde{r}ss'm'}{s\tilde{s}(s')^2} = \frac{rm'}{ss'} + \frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'} = \frac{r}{s}\,\frac{m'}{s'} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\,\frac{m'}{s'}. \end{aligned}$$

Da auch

$$\frac{r}{s}\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\,\frac{m'}{s'}\right) = \frac{r}{s}\,\frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'} = \frac{r\tilde{r}m'}{s\tilde{s}s'} = \frac{r\tilde{r}}{s\tilde{s}}\,\frac{m'}{s'} = \left(\frac{r}{s}\,\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\right)\frac{m'}{s'},$$

ist $M[S^{-1}]$ bezüglich der definierten Multiplikation ein $R[S^{-1}]$-Modul.

(ii)

Da für jedes $s \in S$ die Abbildung $n \mapsto sn$ in N bijektiv ist, gibt es für alle $n' \in N$ und $s \in S$ ein eindeutiges $n \in N$ mit $sn = n'$, für das wir im Folgenden $\frac{n'}{s}$ schreiben werden. Für alle $n \in N$ und $s \in S$ ist also nach Definition ist $s\frac{n}{s} = n$.

Behauptung 1. *Es gelten die folgenden Rechenregeln:*

(i) Für alle $n, n' \in N$ und $s, s' \in S$ ist $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$ genau dann wenn $s'n = sn'$.

(ii) Für alle $n, n' \in N$ und $s \in S$ ist $\frac{n+n'}{s} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s}$.

(iii) Für alle $n, n' \in N$ und $s, s' \in S$ ist $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{s'n+sn'}{ss'}$.

(iv) Für alle $n \in N$, $s \in S$, und $r \in R$ ist $r\,\frac{n}{s} = \frac{rn}{s}$.

Beweis. ***(i)***

Ist $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$, so ist

$$s'n = s's\frac{n}{s} = s's\frac{n'}{s'} = ss'\frac{n'}{s'} = sn'.$$

Gilt andererseits $sn' = s'n$, so ist

$$s's\,\frac{n}{s} = s'n = sn' = ss'\frac{n'}{s'} = s's\,\frac{n'}{s'},$$

wegen der Injektivität der Multiplikation mit $s's \in S$ also $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$.

(ii)

Es ist

$$s\left(\frac{n}{s}+\frac{n'}{s}\right)=s\,\frac{n}{s}+s\,\frac{n'}{s}=n+n',$$

also $\frac{n+n'}{s}=\frac{n}{s}+\frac{n'}{s}$.

(iii)

Es ist

$$ss'\left(\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}\right)=s's\frac{n}{s}+ss'\frac{n'}{s'}=s'n+sn',$$

also $\frac{s'n+sn'}{ss'}=\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}$.

(iv)

Es ist

$$sr\,\frac{n}{s}=rs\,\frac{n}{s}=rn,$$

also $r\,\frac{n}{s}=\frac{rn}{s}$. □

Wir gehen davon aus, dass diese Rechenregeln dem Leser nicht allzu überraschend erscheinen, sodass wir sie im Weiteren ohne Erinnerung an diese Behauptung nutzen werden.
Gibt es eine entsprechende Abbildung ψ, so ist für alle $\frac{m}{1}\in M[S^{-1}]$

$$\psi\left(\frac{m}{1}\right)=\psi(\varphi(m))=\varphi'(m),$$

und damit auch für alle $\frac{m}{s}\in M[S^{-1}]$

$$s\,\psi\left(\frac{m}{s}\right)=\psi\left(s\,\frac{m}{s}\right)=\psi\left(\frac{sm}{s}\right)=\psi\left(\frac{m}{1}\right)=\varphi'(m),$$

also $\psi\left(\frac{m}{s}\right)=\frac{\varphi'(m)}{s}$. ψ ist also eindeutig.
Sei nun ψ durch $\psi\left(\frac{m}{s}\right)=\frac{\varphi'(m)}{s}$ definert. ψ ist wohldefiniert: Für $\frac{m}{s},\frac{m'}{s'}\in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m}{s}=\frac{m'}{s'}$ gibt es ein $t\in S$ mit $ts'm=tsm'$. Es ist daher

$$ts'\varphi'(m)=\varphi'(ts'm)=\varphi(tsm')=ts\varphi'(m'),$$

also $s'\varphi'(m)=s\varphi'(m')$ und deshalb $\frac{\varphi'(m)}{s}=\frac{\varphi'(m')}{s'}$.
Es gilt zu zeigen, dass ψ ein R-Modulhomomorphismus ist. Dies ergibt sich durch einfaches Nachrechnen: Für alle $\frac{m}{s},\frac{m'}{s'}\in M[S^{-1}]$ ist

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{m}{s}+\frac{m'}{s'}\right)=\psi\left(\frac{s'm+sm'}{ss'}\right)&=\frac{\varphi'(s'm+sm')}{ss'}\\&=\frac{s'\varphi'(m)+s\varphi'(m')}{ss'}=\frac{\varphi'(m)}{s}+\frac{\varphi'(m')}{s'}=\psi\left(\frac{m}{s}\right)+\psi\left(\frac{m'}{s'}\right),\end{aligned}$$

und für alle $r\in R$ und $\frac{m}{s}\in M[S^{-1}]$ ist

$$\psi\left(r\,\frac{m}{s}\right)=\psi\left(\frac{rm}{s}\right)=\frac{\varphi'(rm)}{s}=\frac{r\varphi'(m)}{s}=r\,\frac{\varphi'(m)}{s}=r\,\psi\left(\frac{m}{s}\right).$$

(iii)

Es sei $\varphi_M : M \to M[S^{-1}], m \mapsto \frac{m}{1}$, sowie φ_N und φ_P analog definiert. Zusammen mit der exakten Sequenz

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

ergibt sich damit das folgende Diagram, in welcher die obere Zeile exakt ist.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_N"'] & P \arrow[d, "\varphi_P"'] \\ M[S^{-1}] & N[S^{-1}] & P[S^{-1}] \end{tikzcd}$$

Wir bemerken, dass für alle $s \in S$ die Abbildung

$$\tau_s : M[S^{-1}] \to M[S^{-1}], \frac{m'}{s'} \mapsto s\frac{m'}{s'} = \frac{sm'}{s'}$$

auf dem R-Modul $M[S^{-1}]$ bijektiv ist, denn für die Abbildung

$$\tau_{1/s} : M[S^{-1}] \to M[S^{-1}], \frac{m'}{s'} \mapsto \frac{1}{s}\frac{m'}{s'} = \frac{m'}{ss'}$$

ist $\tau_s\tau_{1/s} = \tau_{1/s}\tau_s = \mathrm{id}_{M[S^{-1}]}$. Für $N[S^{-1}]$ und $P[S^{-1}]$ zeigt man auf gleiche Weise die analogen Aussagen.
Damit ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil, dass es für den R-Modulhomomorphismus $(\varphi_N f) : M \to N[S^{-1}]$ einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $\bar{f} : M[S^{-1}] \to N[S^{-1}]$ mit $\bar{f}\varphi_M = \varphi_N f$ gibt. Analog gibt es einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $\bar{g} : N[S^{-1}] \to P[S^{-1}]$ mit $\bar{g}\varphi_N = \varphi_P g$. Das bedeutet, dass diese beiden Homomorphismen die beiden eindeutigen sind, für die das folgende Diagram von R-Modulhomomorphismen kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_N"'] & P \arrow[d, "\varphi_P"'] \\ M[S^{-1}] \arrow[r, "\exists!\, \bar{f}"'] & N[S^{-1}] \arrow[r, "\exists!\, \bar{g}"'] & P[S^{-1}] \end{tikzcd}$$

Aus dem letzten Aufgabenteil ergibt sich auch direkt, dass

$$\bar{f}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(m)}{s} \text{ für alle } \frac{m}{s} \in M[S^{-1}] \text{ und}$$
$$\bar{g}\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{g(n)}{s} \text{ für alle } \frac{n}{s} \in N[S^{-1}].$$

(Man beachte, dass $\varphi' = \varphi_N f$ und für das Element $n = \frac{n'}{s'} \in N[S^{-1}]$ und $s \in S$ die Notation $\frac{n}{s}$ aus dem vorherigen Aufgabenteil das Element $\frac{n'}{ss'}$ beschreibt. Analoges gilt für $\bar{g}$ und $M[S^{-1}]$.)

Die R-Modulhomomorphismen $\bar{f}$ und $\bar{g}$ sind auch $R[S^{-1}]$-Modulhomomorphismen, denn für alle $\frac{r}{s} \in R[S^{-1}]$ und $\frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$ ist

$$\bar{f}\left(\frac{r}{s}\frac{m'}{s'}\right) = \bar{f}\left(\frac{rm'}{ss'}\right) = \frac{f(rm')}{ss'} = \frac{rf(m')}{ss'} = \frac{r}{s}\frac{f(m')}{s'} = \frac{r}{s}\bar{f}\left(\frac{m'}{s'}\right),$$

und für $\bar{g}$ läuft der Beweis analog.

Aus der Exaktheit der R-Modulhomomorphismen

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

folgt die Exaktheit der $R[S^{-1}]$-Modulhomomorphismen

$$M[S^{-1}] \xrightarrow{\bar{f}} N[S^{-1}] \xrightarrow{\bar{g}} P[S^{-1}].$$

Da $gf = 0$ ist für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$

$$(\bar{g}\bar{f})\left(\frac{m}{s}\right) = \bar{g}\left(\frac{f(m)}{s}\right) = \frac{(gf)(m)}{s} = \frac{0}{s} = \frac{0}{1},$$

also $\operatorname{Im}\bar{f} \subseteq \operatorname{Ker}\bar{g}$.

Für alle $\frac{n}{s} \in N[S^{-1}]$ ist

$$\bar{g}\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \frac{g(n)}{s} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \exists\, t \in S : tg(n) = 0.$$

Dabei ist für alle $t \in S$

$$tg(n) = 0 \Leftrightarrow g(tn) = 0 \Leftrightarrow tn \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists\, m \in M : f(m) = tn.$$

Also gibt es für $\frac{n}{s} \in \operatorname{Ker}\bar{g}$ ein $t \in S$ und $m \in M$ mit $f(m) = tn$, weshalb

$$\bar{f}\left(\frac{m}{ts}\right) = \frac{f(m)}{ts} = \frac{tn}{ts} = \frac{n}{s}$$

und daher $\operatorname{Ker}\bar{g} \subseteq \operatorname{Im}\bar{f}$.

Aufgabe 9.3.

Für die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

ist f injektiv, also $M \cong \operatorname{Im} f \subseteq N$, und g surjektiv, also $P \cong N/\ker g = N/\operatorname{Im} f$. Da die Länge eines Moduls invariant unter Isomorphie ist, genügt es daher zu zeigen, dass für einen Modul N und einen Untermodul $M \subseteq N$

$$l_A(N) = l_A(M) + l_A(N/M).$$

Es bezeichne $\pi : N \to N/M$ die kanonische Projektion. Offenbar induziert π ein Bijektion zwischen den Untermodulen von N, die M beinhalten, und den Untermodulen von N/M. Daher ergibt sich aus jeder Kette

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M$$

von M der Länge r und Kette

$$0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_s = N/M$$

von N/M der Länge s eine Kette

$$0 = M_0 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = \pi^{-1}(P_0) \subsetneq \ldots \subsetneq \pi^{-1}(P_r) = N$$

von N der Länge $r + s$. Daher ist

$$l_A(N) \geq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Andererseits ergibt sich aus einer Kette

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_t = N$$

von N der Länge t eine Kette

$$0 = M \cap N_0 \subseteq M \cap N_1 \subseteq \ldots \subseteq M \cap N_t = M$$

von M und eine Kette

$$0 = \pi(N_0) \subseteq \pi(N_1) \subseteq \ldots \subseteq \pi(N_t) = N/M$$

von N/M. Da $\ker \pi = M$ und $N_i \subsetneq N_{i+1}$ für alle $i = 0, \ldots, t-1$ ist $M \cap N_i \subsetneq M \cap N_{i+1}$ oder $\pi(N_i) \subsetneq \pi(N_{i+1})$ für alle $i = 0, \ldots, t-1$. Deshalb ist

$$l_A(N) \leq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Aufgabe 9.4.

Wir zeigen zunächst, dass eine Familie $m_1, \ldots, m_n \in M$ genau dann linear unabhängig bezüglich R sind, wenn $\frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_n}{1} \in M[S^{-1}]$ linear unabhängig bezüglich $R[S^{-1}]$ ist.
Seien $m_1, \ldots, m_n \in M$ linear unabhängig. Für $\frac{r_1}{s_1}, \ldots, \frac{r_n}{s_n} \in R[S^{-1}]$ mit

$$\frac{r_1}{s_1}\frac{m_1}{1} + \ldots + \frac{r_n}{s_n}\frac{m_n}{1} = \frac{0}{1}$$

ist

$$\frac{r_1 s_2 \cdots s_n m_1 + s_1 r_2 s_3 \cdots s_n m_2 + \ldots + s_1 \cdots s_{n-1} r_n m_n}{s_1 \cdots s_n} = \frac{0}{1}.$$

Also gibt es ein $t \in S$ mit

$$\begin{aligned} 0 &= t(r_1 s_2 \cdots s_n m_1 + \ldots + s_1 \cdots s_{n-1} r_n m_n) \\ &= t r_1 s_2 \cdots s_n m_1 + \ldots + t s_1 \cdots s_{n-1} r_n m_n. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $m_1, \ldots, m_n$ bedeutet dies, dass

$$tr_1 s_2 \cdots s_n, \ldots, ts_1 \cdots s_{n-1} r_n = 0.$$

Da R nullteilerfrei ist, und $t, s_1, \ldots, s_n \neq 0$ (da $0 \notin S$) folgt, dass

$$r_1 = \ldots = r_n = 0, \text{ also } \frac{r_1}{s_1} = \ldots = \frac{r_n}{s_n} = 0.$$

Das zeigt, dass $\frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_n}{1}$ linear unabhängig sind.
Seien $\frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_n}{1} \in M[S^{-1}]$ linear unabhängig. Für $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit

$$r_1 m_1 + \ldots + r_n m_n = 0$$

ist

$$\frac{r_1}{1}\frac{m_1}{1} + \ldots + \frac{r_n}{1}\frac{m_n}{1} = \frac{r_1 m_1 + \ldots + r_n m_n}{1} = \frac{0}{1}.$$

Wegen der linearen Unabhänigkeit von $\frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_n}{1}$ ist

$$\frac{r_1}{1} = \ldots = \frac{r_n}{1} = \frac{0}{1}.$$

Dass daher $r_1 = \ldots = r_n = 0$ und damit $m_1, \ldots, m_n$ linear unabhängig sind, folgt daraus, dass die Abbildung $M \to M[S^{-1}], m \mapsto \frac{m}{1}$ injektiv ist: Für $m \in M$ mit $\frac{m}{1} = \frac{0}{1}$ gibt es ein $t \in S$ mit $tm = 0$. Da R nullteilerfrei ist, und $t \neq 0$, ist $m = 0$.
Daraus, dass sich aus jeder linear unabhängigen Familie $m_1, \ldots, m_n \in M$ eine linear unabhängige Familie $\frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_n}{1} \in M[S^{-1}]$ ergibt, folgt, dass $\operatorname{rg} M \leq \operatorname{rg} M[S^{-1}]$.
Zum Beweis der Ungleichung $\operatorname{rg} M[S^{-1}] \leq \operatorname{rg} M$ bemerken wir, dass für jede linear unabhängige Familie $\frac{m_1}{s_1}, \ldots, \frac{m_n}{s_n} \in M[S^{-1}]$ auch die Familie $\frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_n}{1} \in M[S^{-1}]$ linear unabhängig ist, und damit auch die Familie $m_1, \ldots, m_n \in M$: Für $\frac{r'_1}{s'_1}, \ldots, \frac{r'_n}{s'_n} \in R[S^{-1}]$ mit

$$0 = \frac{r'_1}{s'_1}\frac{m_1}{1} + \ldots + \frac{r'_n}{s'_n}\frac{m_n}{1} = \frac{r'_1 s_1}{s'_1}\frac{m_1}{s_1} + \ldots + \frac{r'_n s_n}{s'_n}\frac{m_n}{s_n},$$

muss wegen der linearen Unabhängigkeit von $\frac{m_1}{s_1}, \ldots, \frac{m_n}{s_n}$

$$0 = \frac{r'_i s_i}{s'_i} = \frac{s_i}{1}\frac{r'_i}{s'_i} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Da $\frac{s_1}{1}, \ldots, \frac{s_n}{1} \in (R[S^{-1}])^*$ ist schon

$$\frac{r'_1}{s'_1} = \ldots = \frac{r'_n}{s'_n} = 0.$$

Aufgabe 9.5.

(i)

Für einen R-Modul M bezeichne $T(M) \subseteq M$ den Torsionsuntermodul von M. Für $i \in I$ schreiben wir $T_i := T(M_i)$. Es ist $\bigoplus_{i \in I} T_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$ und

$$T\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigoplus_{i \in I} T(M_i) = \bigoplus_{i \in I} T_i.$$

Für $(m_i)_{i\in I} \in T\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)$ gibt ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $r(m_i)_{i\in I} = (rm_i)_{i\in I} = 0$, also $rm_i = 0$ für alle $i \in I$. Daher ist $m_i \in T_i$ für alle $i \in I$. Da $m_i = 0$ für fast alle $i \in I$ ist $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} T_i$.
Für $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus T_i$ ist $m_i = 0$ für fast alle $i \in I$. Es seien $i_1, \dots, i_n \in I$ genau die Indizes mit $m_{i_j} \neq 0$. Da $m_{i_j} \in T_{i_j}$ für alle $j = 1, \dots, n$ gibt es für alle $j = 1, \dots, n$ ein $r_j \in R \setminus \{0\}$ mit $r_j m_{i_j} = 0$. Da R kommutativ ist, ist daher $(r_1 \cdots r_n)m_i = 0$ für alle $i \in I$, also

$$(r_1 \cdots r_n)(m_i)_{i\in I} = ((r_1 \cdots r_n)m_i)_{i\in I} = 0.$$

Da R nullteilerfrei ist und $r_j \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$ ist $r_1 \cdots r_n \neq 0$. Daher ist $(m_i)_{i\in I} \in T(\bigoplus_{i\in I} M_i)$.

(ii)

Es bezeichne $P \subsetneq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen. Für alle $p \in P$ ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe, die wir als $\mathbb{Z}$-Modul auffassen. Jedes $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $x \neq 0$ hat Ordnung p, weshalb $n \cdot x = 0 \Leftrightarrow p \mid n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da jedes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Torsionsmodul ist, ist

$$\prod_{p\in P} T(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Dies ist als $\mathbb{Z}$-Modul kein Torsionsmodul: Für $(1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p\in P} \in \prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$0 = n \cdot (1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p\in P} = (n \cdot 1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p\in P}$$

muss $p \mid n$ für alle $p \in P$, also $n = 0$. Deshalb ist $\prod_{p\in P} T(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ nicht isomorph zum Torsionsmodul $T(\prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.