Einführung in die Algebra
Blatt 3

Jendrik Stelzner

6. November 2013

Aufgabe 3.1.

Für $n = \{1, 2\}$ ist $\mathfrak{S}_n$ kommutativ, also $Z(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_1$ und $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$. Für $n \geq 3$ ist $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ die triviale Untergruppe:
Sei $\pi \in Z(\mathfrak{S}_n)$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ die Rotation mit $\sigma(1) = 2$. Es gibt dann $s \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\pi(1) = \sigma^s(1)$. Da π mit allen Elementen in $\mathfrak{S}_n$ kommutiert, ist damit für alle $m \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi(m) = \pi(\sigma^m(1)) = \sigma^m(\pi(1)) = \sigma^m(\sigma^s(1)) \underset{(*)}{=} \sigma^s(\sigma^m(1)) = \sigma^s(m),$$

also $\sigma^s = \pi$, wobei bei $(*)$ die Kommutativität von $\langle \sigma \rangle$ genutzt wird. Da wegen der Kommutativität von $\sigma^s = \pi$

$$\tau_{12} = \sigma^s \, \tau_{12} \, (\sigma^s)^{-1} = \tau_{(1+s)(2+s)},$$

wobei τ_{kl} die Transposition von $k \bmod n$ und $l \bmod n$ bezeichnet, muss $s = 0$, also $\pi = \sigma^s = \mathrm{id}$. Dass $\mathrm{id} \in Z(\mathfrak{S}_n)$ ist allerdings klar, da $Z(\mathfrak{S}_n) \subseteq \mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe 3.2.

Aufgabe 3.3.

(i)

Durch

$$G \times G/H \to G/H, (g, aH) \mapsto gaH$$

wird eine Aktion von G auf der Menge der Linksnebenklassen G/H definiert. Diese Aktion entspricht dem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to S(G/H), g \mapsto (aH \mapsto gaH).$$

Es ist daher

$$\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \cdot \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi.$$

Da $\operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$ ein Teiler von $\operatorname{ord} S(G/H) = (G : H)!$ ist, $\operatorname{ord} G$ jedoch kein Teiler von $(G : H)!$, muss $\operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \neq 1$, also $\operatorname{Ker} \varphi$ nichttrivial sein. $\operatorname{Ker} \varphi$ ist als Kern eines Gruppenhomomorphismus normal in G. Es ist $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H$, denn für alle $n \in \operatorname{Ker} \varphi$ ist $nH = H$, da H eine Linksnebenklasse in G/H ist, also $n \in H$. Damit ist $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H$ ein nichttrivialer Normalteiler von G.

(ii)

Es gilt zu bemerken, dass die Aussage nur unter der zusätzlichen Bedingung $k > 0$ gilt: Ansonsten ist die triviale Gruppe mit $p = 2$, $k = 0$ und $m = 1$ ein Gegenbeispiel. Es wird daher die Aussage unter der zusätzlichen Annahme $k > 0$ gezeigt:
Nach den Sylowsätzen gibt es eine p-Sylowgruppe $S \subseteq G$. Da S eine maximale p-Untergruppe ist, ist $\operatorname{ord} S = p^k$, also $(G : S) = m$. Wegen den Annahmen $k > 0$ und $p > m$ ist daher

$$\operatorname{ord} G = p^k m \nmid m! = (G : S)!.$$

Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es daher einen nicht trivialen Normalteiler $N \subseteq S \subseteq G$ von G in S.