Einführung in die Algebra
Blatt 5

Jendrik Stelzner

16. November 2013

Aufgabe 5.1.

(i)

Nach Definition von N_H ist $gH = Hg$ für alle $g \in N_H$. Da $x \in N_H$, ist $\langle x \rangle \subseteq N_H$ eine Untergruppe, und insbesondere $\langle x \rangle H = H \langle x \rangle$. Es ist

$$1 = 1 \cdot 1 \in \langle x \rangle H,$$

und für $a, b \in \langle x \rangle$ mit $a = x^n h$ und $b = x^m \tilde{h}$ ist

$$ab^{-1} = x^n h \tilde{h}^{-1} x^{-m} \in \langle x \rangle H \langle x \rangle = \langle x \rangle \langle x \rangle H = \langle x \rangle H.$$

Da $\langle x \rangle, H \subseteq N_H$ ist $\langle x \rangle H$ eine Untergruppe von N_H, also insbesondere von G.

(ii)

Angenommen, es ist $N_H \neq H$. Dann gibt es ein $x \in N_H$ mit $x \notin H$. Wie oben gezeigt ist $\langle x \rangle H$ eine Untergruppe von N_H. Offenbar ist $H \subsetneq \langle x \rangle H$ eine echte Untergruppe, und da H normal in N_H ist, ist H auch normal in $\langle x \rangle H$. Auch ist

$$\langle x \rangle H / H \cong \langle x \rangle / H \cap \langle x \rangle$$

zyklisch, da $\langle x \rangle$ zyklisch ist, und somit insbesondere abelsch. Da H auflösbar ist, gibt es eine Normalreihe

$$1 = H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq \ldots \subsetneq H_n = H$$

mit abelschen Faktoren. Es folgt nun, dass

$$1 = H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq \ldots \subsetneq H_n \subsetneq H_{n+1} = \langle x \rangle H$$

eine Normalreihe von $\langle x \rangle H$ mit abelschen Faktoren ist. Das steht aber im Widerspruch zur Maximalität von H, da H eine echte Untergruppe von $\langle x \rangle H$ ist. Also ist bereits $N_H = H$.

Aufgabe 5.2.

(i)

Bemerkung 1. Sei $n \geq 2$. Dann ist $(\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n) = 2$. Insbesondere ist $\mathfrak{A}_n$ normal in $\mathfrak{S}_n$ (dies folgt auch aus $\mathfrak{A}_n = \operatorname{Ker}\operatorname{sgn}$).

Beweis. Sei $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ und φ die Linkstranslation mit τ. Aufgrund der Injektivität von φ induziert φ eine injektive Abbildung von der Menge aller gerader Permutation $\mathfrak{A}$ in die Menge aller ungerader Permutationen $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}$, sowie auch eine injektive Abbildung von $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$. Es ist daher

$$\operatorname{ord}\mathfrak{A}_n \leq |\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n| \leq \operatorname{ord}\mathfrak{A}_n,$$

also $\operatorname{ord}\mathfrak{A}_n = |\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n|$ und somit $\operatorname{ord}\mathfrak{S}_n = 2\operatorname{ord}\mathfrak{A}_n$. □

Sei $\sigma \in H$ eine ungerade Permutation. Es ist $H\mathfrak{A}_n = \mathfrak{S}_n$: Da $\mathfrak{A}_n \subseteq H\mathfrak{A}_n$ enthält $H\mathfrak{A}$ alle geraden Permutationen. Jede ungerade Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ lässt sich als

$$\pi = \sigma \cdot \sigma\pi$$

schreiben, wobei $\sigma \in H$ und $\sigma\pi$ als Produkt zweier ungerader Permutationen gerade ist, also in $\mathfrak{A}_n$ ist. Also ist $\pi \in H\mathfrak{A}_n$.
Nach Bemerkung 1 ist $\mathfrak{A}_n$ normal in $\mathfrak{S}_n$ mit $(\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n) = 2$. Also ist $\mathfrak{A}_n \cap H$ normal in H mit

$$H/\mathfrak{A}_n \cap H \cong H\mathfrak{A}_n/\mathfrak{A}_\mathfrak{n} = \mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n.$$

Insbesondere ist daher

$$(H : \mathfrak{A} \cap H) = \operatorname{ord} H/\mathfrak{A}_n \cap H = \operatorname{ord}\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n = (\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n) = 2.$$

(ii)

Da $\operatorname{ord} H > 2$ enthält H eine $\pi \neq \mathrm{id}$ gerader Ordnung: Da H nichttrivial ist, gibt es ein $\sigma \in H$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}$. Ist σ gerade, so sei $\pi := \sigma$. Ist σ ungerade so wird zwischen zwei Fällen unterschieden: Ist σ nicht selbstinvers, so sei $\pi := \sigma^2$. Ist σ selbstinvers, so muss H wegen $\operatorname{ord} H > 2$ noch ein weiteres Element $\tau \in H - \{\mathrm{id}, \sigma\}$ beinhalten. Wiederholt man die oberen Schritte für τ, so findet man entweder ein entsprechendes Element π oder auch τ ist selbstinvers. Sind σ und τ selbstinvers, so sei $\pi := \sigma\tau$.
Es folgt, dass $H \cap \mathfrak{A}_n \supseteq \{\mathrm{id}, \pi\}$ nichttrivial ist. Da $\mathfrak{A}_n$ normal in $\mathfrak{S}_n$ ist, ist $H \cap \mathfrak{A}_n$ normal in H. Da H einfach ist, folgt, dass $H \cap \mathfrak{A}_n = H$ ist. Also ist $H \subseteq \mathfrak{A}_n$ eine Untergruppe.

Aufgabe 5.3.

Bemerkung 2. Sei R ein Ring mit mindestens zwei Elementen. Dann ist sind Null- und Einselement in R verschieden.

Beweis. Da R mindestens zwei Elemente besitzt, gibt es ein $a \in R$ mit $a \neq 0$. Es ist

$$1 \cdot a = a \neq 0 = 0 \cdot a,$$

also $0 \neq 1$. □

Bemerkung 3. Sei R ein Integritätsring. Gibt es für $b \in R$ ein $a \in R$ mit $a \neq 0$ und $ab = a$ oder $ba = a$, so ist bereits $b = 1$. Insbesondere gilt für jede Ringerweiterung $R' \subseteq R$ mit $R' \neq 0$, dass R' genau dann ein Einselement beinhaltet, wenn $1 \in R'$.

Beweis. Da $a \neq 0$ impliziert die Nullteilerfreiheit von R direkt die Injektivität der Links-, bzw. Rechtsmultiplikation mit a. Da $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ ist daher $b = 1$. $\square$

Nach Aufgabenstellung ist R ein kommutativer Ring mit Einselement. Da R mindestens zwei Elemente besitzt folgt aus Bemerkung 2, dass $0 \neq 1$. Es gilt also nur noch zu zeigen, dass es für jedes $a \in R$ mit $a \neq 0$ ein multiplikativ Inverses $b \in R$ mit $ab = 1$ gibt.
Sei $a \in R$ mit $a \neq 0$ beliebig aber fest und $\mathfrak{a} := (a)$ das von a erzeugte Ideal in R. Da $a \in \mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a} \neq 0$, und es gilt bereits $\mathfrak{a} = R$: Als Ideal ist $\mathfrak{a}$ eine additive Untergruppe von R sowie unter der Multiplikation abgeschlossen, wobei sich Assoziativität, Kommutativität und Distributivität der Multiplikation von R auf $\mathfrak{a}$ vererben. Aus der entsprechenden Eigenschaft von R folgt, dass $\mathfrak{a}$ ein Ring mit Einselement bildet. Aus Bemerkung 3 folgt damit, dass $1 \in \mathfrak{a}$, und daher bereits $\mathfrak{a} = R$. Da $aR = \mathfrak{a} = R$ gibt es insbesondere ein $b \in R$ mit $ab = 1$.

Aufgabe 5.4.

(ii)

Für alle $a \in R$ ist

$$a^2 + 1 = a + 1 = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

also $2a = 0$. Insbesondere ist $a = -a$.

(i)

Für alle $a, b \in R$ ist

$$ab - ba = ab + ba = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = a + b - a - b = 0,$$

also $ab = ba$, und daher R kommutativ.

(iii)

Seien $a, b \in R$ mit $a \neq b$. Es ist

$$(a-b)ab = a^2 b - ab^2 = ab - ab = 0.$$

Da $a \neq b$ ist $a - b \neq 0$, wegen der Nullteilerfreiheit von R also $ab = 0$. Wegen der Nullteilerfreiheit ist also $a = 0$ oder $b = 0$. Aus der Beliebigkeit von a und b folgt, dass es neben 0 nur ein weiters Element in R gibt. Da aus Bemerkung 2 folgt, dass $0 \neq 1$, ist also $R = \{0, 1\}$. Betrachtet man die Verknüpfungstabellen von R,

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

,

so ist R offenbar isomorph zu $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 5.5.

(i)

Da $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R ist, ist $ar \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $r \in R$. Es ist daher

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}) &= \sum_{a\in\mathfrak{a}} a\,R[X] = \sum_{a\in\mathfrak{a}} \left\{ a \sum_{i=0}^{n} a_i X^i : n \geq 0, a_i \in R \right\} \\ &= \sum_{a\in\mathfrak{a}} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a a_i X^i : n \geq 0, a_i \in R \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i : n \geq 0, a_i \in \mathfrak{a} \right\}. \quad (1)\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Gleichheit bei (1) wie folgt:
Für alle $f = \sum_{i=0}^{n} a a_i X^i \in aR[X]$ ist $aa_i \in \mathfrak{a}$, da $a \in \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R ist, also f ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathfrak{a}$.
Andererseits ist jedes Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$ die Summe der Monome $f_i := a_i X^i \in a_i R[X]$. Also ist $f \in \sum_{i=1}^{n} a_i R[X]$.

(ii)

Lemma 4. Seien R, R' Ringe und $\phi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Dann induziert ϕ einen Ringhomomorphismus $\psi : R[X] \to R'[X]$ mit

$$\psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) := \sum_{i=0}^{n} \phi(a_i) X^i.$$

Dabei ist

$$\operatorname{Ker}\psi = \left\{ f \in R[X] : f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ mit } n \geq 0 \text{ und } a_i \in \operatorname{Ker}\phi \text{ für alle } i \right\}$$

und

$$\operatorname{Im}\psi = \left\{ g \in R'[X] : g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \text{ mit } n \geq 0 \text{ und } b_i \in \operatorname{Im}\phi \text{ für alle } i \right\}.$$

Insbesondere ist ψ genau dann injektiv, wenn ϕ injektiv ist, und ψ genau dann surjektiv, wenn ϕ surjektiv ist.

Beweis. Es gilt zunächst zu zeigen, dass ψ ein Ringhomomorphismus ist. Es seien $f, g \in R[X]$ mit $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ und $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$. Es ist

$$\begin{aligned}\psi(f+g) &= \psi\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \phi(a_i + b_i) X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (\phi(a_i) + \phi(b_i)) X^i = \sum_{i=0}^{n} \phi(a_i) X^i + \sum_{i=0}^{n} \phi(b_i) X^i \\ &= \psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) + \psi\left(\sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right) = \psi(f) + \psi(g),\end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\psi(fg) &= \psi\left(\sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{\mu+\nu=i} a_\mu b_\nu\right) X^i\right) = \sum_{i=0}^{2n} \phi\left(\sum_{\mu+\nu=i} a_\mu b_\nu\right) X^i \\
&= \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{\mu+\nu=i} \phi(a_\mu)\phi(b_\nu)\right) X^i = \left(\sum_{i=0}^{n} \phi(a_i) X^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \phi(b_i) X^i\right) \\
&= \psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \psi\left(\sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right) = \psi(f)\,\psi(g).
\end{aligned}
$$

ψ ist auch unitär, da

$$\psi(1) = \psi(1 \cdot X^0) = \phi(1) \cdot X^0 = 1 \cdot X^0 = 1.$$

Dies zeigt, dass ψ ein Ringhomomorphismus ist.
Es ist $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ genau dann in $\operatorname{Ker}\psi$, wenn $\psi(f) = 0$, also $\phi(a_i) = 0$ für alle i, also $a_i \in \operatorname{Ker}\phi$ für alle i.
Andererseits ist $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \in R'[X]$ genau dann in $\operatorname{Im}\psi$, wenn es ein $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ mit $\psi(f) = g$ gibt, also $\phi(a_i) = b_i$ für alle i, also $b_i \in \operatorname{Im}\phi$ für alle i. $\square$

Bemerkung 5. Betrachtet man $R[X]$ als abzählbare direkte Summe der additiven Gruppe von R mit sich selbst, so folgt das obige Lemma fast direkt daraus, dass dann $\psi = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \phi$. Nur dass ψ bezüglich $\cdot$ ein Monoidhomomorphismus ist, folgt dann nicht direkt, da die Multiplikation in $R[X]$ nicht komponentenweise ist.

Es sei $\pi : R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Da π ein Ringepimorphismus ist, folgt aus Lemma 4, dass π einen Ringepimorphismus $\psi : R[X] \twoheadrightarrow (R/\mathfrak{a})[X]$ induziert. Auch folgt wegen $\operatorname{Ker}\pi = \mathfrak{a}$ aus dem Lemma, dass $\operatorname{Ker}\psi$ genau aus den Polynomen besteht, deren Koeffizienten alle in $\mathfrak{a}$ liegen; wie im vorherigen Aufgabenteil gezeigt, ist dies gerade $\mathfrak{b}$. Es ist daher

$$R[X]/\mathfrak{b} = R[X]/\operatorname{Ker}\psi \cong \operatorname{Im}\psi = (R/\mathfrak{a})[X].$$