# Einführung in die Algebra
## Blatt 3

Jendrik Stelzner

7. November 2013

## Aufgabe 3.1.

Für $n = \{1, 2\}$ ist $\mathfrak{S}_n$ kommutativ, also $Z(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_1$ und $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$. Für $n \geq 3$ ist $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ die triviale Untergruppe:
Sei $\pi \in Z(\mathfrak{S}_n)$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ die Rotation mit $\sigma(1) = 2$. Es gibt dann $s \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\pi(1) = \sigma^s(1)$. Da $\pi$ mit allen Elementen in $\mathfrak{S}_n$ kommutiert, ist damit für alle $m \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi(m) = \pi(\sigma^m(1)) = \sigma^m(\pi(1)) = \sigma^m(\sigma^s(1)) \underset{(*)}{=} \sigma^s(\sigma^m(1)) = \sigma^s(m),$$

also $\sigma^s = \pi$, wobei bei $(*)$ die Kommutativität von $\langle\sigma\rangle$ genutzt wird. Da wegen der Kommutativität von $\sigma^s = \pi$

$$\tau_{12} = \sigma^s \, \tau_{12} \, (\sigma^s)^{-1} = \tau_{(1+s)(2+s)},$$

wobei $\tau_{kl}$ die Transposition von $k$ mod $n$ und $l$ mod $n$ bezeichnet, muss $s = 0$, also $\pi = \sigma^s = \mathrm{id}$. Dass $\mathrm{id} \in Z(\mathfrak{S}_n)$ ist allerdings klar, da $Z(\mathfrak{S}_n) \subseteq \mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe ist.

## Aufgabe 3.2.

Es sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $\operatorname{ord} G = 5929 = 11^2 \cdot 7^2$. Zum Lösen dieser Aufgabe hilft das folgende Lemma:

**Lemma 1.** Sei $G$ eine endliche Gruppe, und seien $N_1, N_2 \subseteq G$ Normalteiler in $G$ mit $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} N_1 \cdot \operatorname{ord} N_2$ und $N_1 \cap N_2 = \{1\}$. Dann ist $G \cong N_1 \times N_2$.

*Beweis des Lemmas:* Für $n_1 \in N_1$ und $n_2 \in N_2$ ist $n_1 n_2 = n_2 n_1$, denn $N_1$ und $N_2$ sind als Normalteiler invariant bezüglich Konjugation, weshalb

$$n_1 \cdot n_2 n_1^{-1} n_2^{-1} \in N_1 \text{ und } n_1 n_2 n_1^{-1} \cdot n_2^{-1} \in N_2.$$

Aus $N_1 \cap N_2 = \{1\}$ folgt $n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1} = 1$, also $n_1 n_2 = n_2 n_1$. Es sei nun

$$\varphi : N_1 \times N_2 \to G, (n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2.$$

Aus der eben gezeigten Kommutativität folgt, dass $\varphi$ ein Gruppenhomomorphismus ist, da für alle $(n_1, n_2), (n_1', n_2') \in N_1 \times N_2$

$$\begin{aligned} \varphi((n_1, n_2)(n_1', n_2')) = \varphi((n_1 n_1', n_2 n_2')) &= n_1 n_1' n_2 n_2' \\ &= n_1 n_2 n_1' n_2' = \varphi(n_1, n_2)\varphi(n_1', n_2'). \end{aligned}$$

$\varphi$ ist injektiv, da für $(n_1, n_2) \in \operatorname{Ker} \varphi$

$$1 = \varphi(n_1, n_2) = n_1 n_2,$$

also $N_2 \ni n_2 = n_1^{-1} \in N_1$ und daher $n_1 = n_2 = 1$. Da

$$\operatorname{ord} N_1 \times N_2 = \operatorname{ord} N_1 \times \operatorname{ord} N_2 = \operatorname{ord} G < \infty$$

ist $\varphi$ daher bijektiv. Da $\varphi$ ein Gruppenisomorphismus ist, ist $G \cong N_1 \times N_2$. □

**Bemerkung 2.** Sind $p$ und $q$ verschiedene Primzahlen und ist $G$ ein $p$-Gruppe und $H$ eine $q$-Gruppe, so ist $G \cap H = \{1\}$: Nach dem Satz von Lagrange ist $\operatorname{ord} G \cap H$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G$ und $\operatorname{ord} H$, aus der Teilerfremdheit von $p$ und $q$ folgt daher, dass $\operatorname{ord} G \cap H = 1$, also $G \cap H = \{1\}$.

Es sei $s$ die Anzahl der 11-Sylowgruppen in $G$. Nach den Sylowsätzen ist

$$s \mid \operatorname{ord} G = 11^2 \cdot 7^2, \qquad s \equiv 1 \mod 11.$$

Da $s \equiv 1 \bmod 11$ darf $s$ kein Vielfaches von 11 sein, zusammen mit $s \mid 11^2 \cdot 7^2$ ergibt sich daraus $s \in \{1, 7, 49\}$. Da jedoch

$$7 \not\equiv 1 \not\equiv 49 \mod 11$$

muss $s = 1$. Insbesondere ist die eindeutige 11-Sylowgruppe $S_{11} \subseteq G$, die nach den Sylowsätzen existiert, daher ein Normalteiler in $G$. Analoges ergibt sich für die Anzahl $r$ der 7-Sylowgruppen in $G$: Es muss

$$r \mid \operatorname{ord} G = 11^2 \cdot 7^2, \qquad r \equiv 1 \mod 7,$$

also $r \in \{1, 11, 121\}$, und wegen

$$11 \not\equiv 1 \not\equiv 121 \mod 7$$

daher $r = 1$. Also ist auch die eindeutige, nach den Sylowsätzen existierende 7-Sylowgruppe $S_7 \subseteq G$ ein Normalteiler in $G$.
Da $\operatorname{ord} S_{11} = 11^2$ und $\operatorname{ord} S_7 = 7^2$ ist $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} S_{11} \cdot \operatorname{ord} S_7$. Nach Bemerkung 2 ist auch $S_{11} \cap S_7 = \{1\}$. Nach Lemma 1 ist ist also $G \cong S_{11} \times S_7$. Da $\operatorname{ord} S_{11}$ und $\operatorname{ord} S_7$ Quadrate von Primzahlen sind, sind $S_{11}$ und $S_7$, wie aus der Vorlesung bekannt, abelsch. Also ist $G$ als Produkt abelscher Gruppen ebenfalls abelsch.

# Aufgabe 3.3.

## (i)

Durch

$$G \times G/H \to G/H, (g, aH) \mapsto gaH$$

wird eine Aktion von $G$ auf der Menge der Linksnebenklassen $G/H$ definiert. Diese Aktion entspricht dem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to S(G/H), g \mapsto (aH \mapsto gaH).$$

Es ist daher

$$\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \cdot \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi.$$

Da $\operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$ ein Teiler von $\operatorname{ord} S(G/H) = (G : H)!$ ist, $\operatorname{ord} G$ jedoch kein Teiler von $(G : H)!$, muss $\operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \neq 1$, also $\operatorname{Ker} \varphi$ nichttrivial sein. $\operatorname{Ker} \varphi$ ist als Kern eines Gruppenhomomorphismus normal in $G$. Es ist $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H$, denn für alle $n \in \operatorname{Ker} \varphi$ ist $nH = H$, da $H$ eine Linksnebenklasse in $G/H$ ist, also $n \in H$. Damit ist $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H$ ein nichttrivialer Normalteiler von $G$.

### (ii)

Es gilt zu bemerken, dass die Aussage nur unter der zusätzlichen Bedingung $k > 0$ gilt: Ansonsten ist die triviale Gruppe mit $p = 2$, $k = 0$ und $m = 1$ ein Gegenbeispiel. Es wird daher die Aussage unter der zusätzlichen Annahme $k > 0$ gezeigt:
Nach den Sylowsätzen gibt es eine $p$-Sylowgruppe $S \subseteq G$. Da $S$ eine maximale $p$-Untergruppe ist, ist $\operatorname{ord} S = p^k$, also $(G : S) = m$. Wegen den Annahmen $k > 0$ und $p > m$ ist daher

$$\operatorname{ord} G = p^k m \nmid m! = (G : S)!.$$

Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es daher einen nicht trivialen Normalteiler $N \subseteq S \subseteq G$ von $G$ in $S$.

## Aufgabe 3.4.

### (i)

Da $S \subseteq H$ ein $p$-Sylowgruppe in $H$ ist, ist $S \subseteq G$ eine $p$-Gruppe in $G$. Nach den Sylowsätzen gibt es daher eine $p$-Sylowgruppe $T \subseteq G$ mit $S \subseteq T$. Da $S \subseteq H$ und $S \subseteq T$ ist $S \subseteq T \cap H$. Da $T \cap H \subseteq T$ eine $p$-Gruppe in $H$ ist, und $S$ als Sylowgruppe in $H$ bereits eine in $H$ maximale $p$-Gruppe ist, muss bereits $S = T \cap H$.

### (ii)

Sei $S \trianglelefteq G$ eine normale $p$-Sylowgruppe in $G$. Sei $T := S \cap H$. Als Untergruppe ist $T \subseteq S$ eine $p$-Gruppe. Wie aus der Vorlesunge bekannt ist $T$ normal in $H$. Nach den Sylowsätzen gibt es eine Sylowgruppe $T' \subseteq H$ mit $T \subseteq T'$. Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es daher eine Sylowgruppe $S' \subseteq G$ mit $T' = S' \cap H$. Da $S$ normal ist, ist $S$, wie aus der Vorlesung bekannt, die einzige $p$-Sylowgruppe in $G$. Also muss $S = S'$, und damit $T = T'$. Also ist $T$ eine normale $p$-Sylowgruppen $H$.

### (iii)

Sei $S \subseteq H$ eine $p$-Sylowgruppe; eine solche existiert nach den Sylowsätzen. Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es eine $p$-Sylowgruppe $T' \subseteq G$ mit $S = T' \cap H$. Da $T$ und $T'$ $p$-Sylowgruppen in $G$ sind, sind sie konjugiert zueinander, d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $T' = gTg^{-1}$. Da $H$ normal in $G$ ist, ist $gHg^{-1} = H$ sowie

$$g^{-1}Sg \subseteq g^{-1}Hg = H.$$

Insbesondere ist $g^{-1}Sg$ wieder eine Untergruppe von $H$ mit $\operatorname{ord} g^{-1}Sg = \operatorname{ord} S$ (da $\operatorname{inn}_g$ ein Automorphismus ist), also eine $p$-Sylowgruppe in $H$. Da nun

$$\begin{aligned} T \cap H &= g^{-1}g(T \cap H)g^{-1}g = g^{-1}\left(g(T \cap H)g^{-1}\right)g \\ &= g^{-1}\left(\left(gTg^{-1}\right) \cap \left(gHg^{-1}\right)\right)g = g^{-1}(T' \cap H)g = g^{-1}Sg \end{aligned}$$

ist diese $p$-Sylowgruppe gerade $T \cap H$.