Einführung in die Algebra
Blatt 11

Jendrik Stelzner

16. Januar 2014

Aufgabe 11.1.

Es bezeichne $f \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von $z = \sqrt{3} + i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$. Dieses existiert, denn $\sqrt{3}$ und i sind algebraisch über $\mathbb{Q}$, also z.
Da z eine Nullstelle von f ist, und $f \in \mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$, ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von f. Da $z \notin \mathbb{R}$ ist dabei $\bar{z} \neq z$. Folglich hat f in $\mathbb{C}[X]$ die beiden Linearfaktoren $X - z, X - \bar{z} \in \mathbb{C}[X]$. Inbesondere ist $\deg f \geq 2$. Da

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - (z + \bar{z})X + |z|^2 = X^2 - 2\sqrt{3}X + 4 \notin \mathbb{Q}[X]$$

ist sogar $\deg f > 2$.
Es ist auch $\deg f > 3$: Wäre $\deg f = 3$, so hätte f zusätzlich zu z und $\bar{z}$ noch eine reelle Nullstelle (denn jedes Polynom ungeraden Gerades in $\mathbb{R}[X]$, und damit auch in $\mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$, hat eine reelle Nullstelle). Da f normiert ist gäbe es also ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f &= (X - z)(X - \bar{z})(X - \alpha) = (X^2 - 2\sqrt{3}X + 4)(X - \alpha) \\ &= X^3 - (2\sqrt{3} + \alpha)X^2 + (4 + 2\sqrt{3}\,\alpha)X - 4\alpha \in \mathbb{Q}[X]. \end{aligned}$$

Es wäre daher $4\alpha \in \mathbb{Q}$, also bereits $\alpha \in \mathbb{Q}$, und wegen $2\sqrt{3} + \alpha \in \mathbb{Q}$ damit auch $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Da dies nicht gilt, ist $\deg f > 3$.
Da z eine Nullstelle des normierten Polynoms

$$(X - z)(X - \bar{z})(X + z)(X + \bar{z}) = X^4 - 4X^2 + 16 \in \mathbb{Q}[X]$$

ist, folgt aus dem obigen Beobachtungen, dass

$$f = X^4 - 4X^2 + 16.$$

Wäre nämlich $X^4 - 4X^2 + 16$ nicht das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}$, so müsste $X^4 - 4X^2 + 16$ reduzibel sein. Dann gebe es ein normiertes Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $1 \leq \deg g \leq 3$ mit $g \mid f$ und $g(z) = 0$, was den obigen Beobachtungen widerspricht.

Aufgabe 11.2.

f ist normiert und nach dem Eisensteinkriterium mit der Primzahl $p = 3$ auch irreduzibel. Folglich ist f bereits das Minimalpolynom von x. Deshalb ist $\mathbb{Q}[X]/(f) \cong \mathbb{Q}(x)$, wobei ein entsprechender Körperisomorphismus durch

$$\varphi : \mathbb{Q}[X]/(f) \to \mathbb{Q}(x) \text{ mit } \varphi(\bar{q}) = q \text{ für alle } q \in \mathbb{Q} \text{ und } \varphi\left(\overline{X}\right) = x$$

gegeben ist. Da $\deg f = 3$ ist $\bar{1}, \overline{X}, \overline{X}^2$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}/(f)$. Also ist $1, x, x^2$ als Bild dieser Basis unter φ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(x)$.
Da x eine Nullstelle von f ist, ist

$$0 = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned}
&105x^2 - 261x - 81 \\
=&105x^2 - 261x - 81 + (x^2 + 6x + 27)(x^3 - 6x^2 + 9x + 3) \\
=&x^5
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&69x^2 - 153x - 47 \\
=&69x^2 - 153x - 47 + (3x + 16)(x^3 - 6x^2 + 9x + 3) \\
=&3x^4 - 2x^3 + 1.
\end{aligned}$$

Da offenbar $x \neq -2$ existiert das Element $1/(x + 2) \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Da

$$\begin{aligned}
(x+2)\left(\frac{1}{47}x^2 - \frac{8}{47}x + \frac{25}{47}\right) &= \frac{1}{47}x^3 - \frac{6}{47}x^2 + \frac{9}{47}x + \frac{50}{47} \\
&= \frac{1}{47}\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 3\right) + 1 = 1
\end{aligned}$$

ist

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{47}x^2 - \frac{8}{47}x + \frac{25}{47}.$$

Aufgabe 11.3.

Sei K ein endlicher Körper. Für das Polynom

$$f := 1 + \prod_{\lambda \in K}(X - \lambda) \in K[X]$$

ist $f(x) = 1$ für alle $x \in K$. Es halt also f keine Nullstelle in K, weshalb K nicht algebraisch abgeschlossen ist. Es gibt daher keinen endlichen, algebraisch abgeschlossenen Körper.
Die Aussage folgt auch aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1. *Für einen Körper K gibt es unendlich viele normierte, irreduzible Polynome in $K[X]$.*

Beweis. Der Beweis läuft analog zum klassischen Beweis des Satzes von Euklid. Angenommen, die Menge

$$P := \{g \in K[X] : g \text{ ist normiert und irreduzibel}\}$$

ist endlich. Wir wissen, dass P ein Repräsentantensystem der Primelemente in $K[X]$ ist, und sich jedes Element $f \in K[X], f \neq 0$ eindeutig als Produkt

$$f = \varepsilon g_1 \cdots g_n$$

mit $\varepsilon \in K$ und $g_1, \ldots, g_n \in P$ schreiben lässt. Es sei

$$f := \prod_{g \in P} g.$$

Für alle $g \in P$ ist $g \mid f$ und $g \nmid 1$, also $g \nmid (f+1)$. Da offenbar $f + 1 \neq 0$ steht dies im Widerspruch zur Existenz einer Primfaktorzerlegung von $f + 1$. □

Korollar 2. *Jeder algebraisch abgeschlossene Körper besitzt unendlich viele Elemente.*

Beweis. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Da jedes Polynom aus $K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt ist

$$\{f \in K[X] : f \text{ ist normiert und irreduzibel}\} = \{X - \lambda \in K[X] : \lambda \in K\}.$$

Da die linke Menge nach Lemma 1 unendlich ist, ist es auch die rechte. Es muss also K unendlich sein. □