Einführung in die Algebra
Blatt 11

Jendrik Stelzner

9. Januar 2014

Aufgabe 11.1.

Es bezeichne $f \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von $z = \sqrt{3} + i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$. Dieses existiert, denn $\sqrt{3}$ und i sind algebraisch über $\mathbb{Q}$, also auch z.
Da z eine Nullstelle von f ist, und $z \notin \mathbb{R}$, ist auch $\bar{z} \neq z$ eine Nullstelle von f. Folglich hat f in $\mathbb{C}[X]$ die beiden Linearfaktoren $X - z, X - \bar{z} \in \mathbb{C}[X]$ und es ist $\deg f \geq 2$. Da

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - (z + \bar{z})X + |z|^2 = X^2 - 2\sqrt{3}X + 4 \notin \mathbb{Q}[X]$$

ist sogar $\deg f > 2$.
Es ist auch $\deg f > 3$: Wäre $\deg f = 3$, so hätte f zusätzlich zu z und $\bar{z}$ noch eine reelle Nullstelle (denn jedes Polynom ungeraden Gerades in $\mathbb{R}[X]$, und damit auch in $\mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$, hat eine reelle Nullstelle), es gäbe also ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f &= (X - z)(X - \bar{z})(X - \alpha) = (X^2 - 2\sqrt{3}X + 4)(X - \alpha) \\ &= X^3 - (2\sqrt{3} + \alpha)X^2 + (4 + 2\sqrt{3}\alpha)X - 4\alpha \in \mathbb{Q}[X]. \end{aligned}$$

Da $4\alpha \in \mathbb{Q}$ wäre bereits $\alpha \in \mathbb{Q}$ und wegen $2\sqrt{3} + \alpha \in \mathbb{Q}$ damit auch $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Dies ist offenbar ein Widerspruch. Also muss $\deg f > 3$.
Da z eine Nullstelle des Polynoms

$$(X - z)(X - \bar{z})(X + z)(X + \bar{z}) = X^4 - 4X^2 + 16 \in \mathbb{Q}[X]$$

ist, folgt aus dem obigen Beobachtungen, dass

$$f = X^4 - 4X^2 + 16.$$

Wäre nämlich f nicht das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}$, so wäre f wegen der offensichtlichen Normiertheit reduzibel. Dann gebe es ein normiertes Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $1 \leq \deg g \leq 3$ mit $g \mid f$ und $g(z) = 0$, was den obigen Beobachtungen widerspricht.