Einführung in die Algebra — Blatt 2

Jendrik Stelzner

29. Oktober 2013

Aufgabe 2.1.

Auf X' sei eine G-Aktion definiert als

$$G \times X' \to X', (g, H(\tilde{g}, x)) \mapsto g * H(\tilde{g}, x) := H(g\tilde{g}, x),$$

wobei $H(\tilde{g}, x) \in X'$ die Bahn von $(\tilde{g}, x) \in G \times X$ bezeichnet. Es handelt sich bei $*$ um ein G-Aktion, da für alle $H(g, x) \in X'$

$$1 * H(g, x) = H(1 \cdot g, x) = H(g, x)$$

und für $g_1, g_2 \in G$ und $H(\tilde{g}, x) \in X'$

$$g_1 * (g_1 * H(\tilde{g}, x)) = g_1 * H(g_2\tilde{g}, x) = H(g_1 g_2 \tilde{g}, x) = (g_1 g_2) * H(\tilde{g}, x).$$

Weiter sei die H-Abbildung Φ definiert als

$$\Phi : X \mapsto X', x \mapsto H(1, x).$$

Φ ist eine H-Abbildung, da für alle $h \in H$ und $x \in X$

$$\Phi(hx) = H(1, hx) = H(h, x) = h * H(1, x) = h * \Phi(x).$$

Dabei gilt des zu bemerken, dass $H(1, hx) = H(h, x)$, da

$$H(1, hx) = (Hh^{-1})(1, hx) = H(h^{-1}(1, hx)) = H(h, x),$$

wobei die Multiplikation die in der Aufgabe gegebene H-Aktion auf $G \times X$ ist.
Es gilt nun zu zeigen, dass $f \mapsto f \circ \Phi$ eine Bijektion zwischen der Menge der G-Abbildungen von X' nach Y und der Menge der H-Abbildungen von X nach Y definiert.
Es gilt zunächst die Wohldefiniertheit der induzierten Abbildung zu überprüfen, d.h. dass für eine G-Abbildung $f : X' \to Y$ die Komposition $f \circ \Phi$ eine H-Abbildung von X nach Y ist. Dies ist aber der Fall, da offenbar $f \circ \Phi : X \to Y$, und für alle $h \in H$ und $x \in X$.

$$\begin{aligned}(f \circ \Phi)(hx) &= f(H(1, hx)) = f(H(h, x)) \\ &= f(h * H(1, x)) = hf(H(1, x)) = h(f \circ \Phi)(x).\end{aligned}$$

Die Injektivität ergibt sich daraus, dass für G-Abbildungen $f, f' : X \to Y$ mit $f \circ \Phi = f' \circ \Phi$ für alle $H(g, x) \in X'$

$$\begin{aligned}f(H(g, x)) &= f(g * H(1, x)) = g * f(H(1, x)) = g * (f \circ \Phi)(x) \\ &= g * (f' \circ \Phi)(x) = g * f'(H(1, x)) = f'(g * H(1, x)) = f'(H(g, x)),\end{aligned}$$

also $f = f'$.
Die Surjektivität der Abbildung ergibt sich daraus, dass sich für jede H-Abbildung $\psi : X \to Y$ eine G-Abbildung $f : X' \to Y$ konstruieren lässt, so dass $\psi = f \circ \Phi$: Für $H(g, x) \in X'$ sei $f(H(g, x)) := g\psi(x)$. Dieser Ausdruck ist wohldefiniert, denn ist $H(g, x) = H(g', x')$, so ist $(g', x') = h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$ für ein $h \in H$ und somit

$$g\psi(x) = gh^{-1}h\psi(x) = gh^{-1}\psi(hx) = g'\psi(x').$$

f ist eine G-Abbildung, da für alle $g \in G$ und $H(\tilde{g}, x)$

$$f(g * H(\tilde{g}, x)) = f(H(g\tilde{g}, x)) = g\tilde{g}\psi(x) = gf(H(\tilde{g}, x)).$$

Aufgabe 2.2.

Aufgabe 2.3.

Aufgabe 2.4.

Aufgabe 2.5.

Da das Zentrum Z von G ein Teiler von $\operatorname{ord} G = p^3$ ist, muss $\operatorname{ord} Z \in \{1, p, p^2, p^3\}$.
Es ergibt sich jedoch, dass $\operatorname{ord} Z = p$ sein muss:
Da Z abelsch ist, G jedoch nicht, muss $Z \neq G$ und somit $\operatorname{ord} Z \neq p^3$.
Wäre $\operatorname{ord} Z = p^2$, so wäre $\operatorname{ord} G/Z = \frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} Z} = p$, also G/Z zyklisch, und G daher, wie aus der Vorlesung bekannt, abelsch.
Auch ist aus der Vorlesung bekannt, dass $Z \neq \{1\}$, da G eine nichttriviale p-Gruppe ist.
Es muss also $\operatorname{ord} Z = p$.