Einführung in die Algebra

Blatt 4

Jendrik Stelzner

23. Januar 2014

Aufgabe 4.1.

Sei G eine Gruppe der Ordnung 8. Gibt es ein $g \in G$ mit $\operatorname{ord} g = 8$, so ist $\langle g \rangle = G$, also G zyklisch, und daher $G \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass kein solches Element in G existiert.
Zunächst wird der Fall untersucht, dass G abelsch ist (G wird hierfür additiv geschrieben): Durch eine Reihe von Fallunterscheidungen finden wir eine Untergruppe $H \subseteq G$ der Ordnung 4 und ein Element $g \in G - H$ der Ordnung 2:
Da G eine 2-Gruppe der Ordnung 8 ist, gibt es, wie aus der Vorlesung bekannt, eine Untergruppe $H' \subseteq G$ mit $\operatorname{ord} H' = 4$. Sei $g' \in G \setminus H'$. Ist $\operatorname{ord} g' = 2$, so sei $H := H'$ und $g := g'$. Ist $\operatorname{ord} g' = 4$, so wird zwischen zwei Fällen unterschieden: Ist $2g' \notin H'$, so sei $H := H'$ und $g := 2g'$. Ist $2g' \in H'$, so wird erneut zwischen zwei Fällen unterschieden: Bekanntermaßen ist entweder $H' \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $H' \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Ist $H' \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, so ist $H' = \langle a \rangle$ für ein $a \in H'$. Da $2g' \in H$ mit $\operatorname{ord} 2g' = 2$ muss $2g' = 2a$. Es sei in diesem Fall $H := H'$ und $g := a + g'$. Ist $H' \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, so gibt es neben $2g'$ noch ein weiteres $a \in H'$ mit $\operatorname{ord} a = 2$. Es sei dann $H := \langle g' \rangle$ und $g := a$.
Es ist nun $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} H \cdot \operatorname{ord} \langle g \rangle$ sowie $H \cap \langle g \rangle = 0$, wobei 0 die triviale Gruppe bezeichnet (additiv geschrieben). Da G kommutativ ist, sind H und $\langle g \rangle$ beide normal in G. Es ist daher (wie bereits letzte Woche gezeigt)

$$G \cong H \times \langle g \rangle \cong H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Da $\operatorname{ord} H = 4$ ist $H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, und daher

$$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ oder } G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3.$$

Es wird nun der Fall untersucht, dass G nicht abelsch ist: Da G nicht abelsch ist, gibt es ein $a \in G$ mit $a^2 \neq 1$. Da $\operatorname{ord} a$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G = 8$ ist, muss dabei $\operatorname{ord} a = 4$. Es ist also $\langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$. Da $(G : \langle a \rangle) = 2$ ist $\langle a \rangle$ normal in G. Sei $b \in G - \langle a \rangle$. Da $\langle a \rangle \subsetneq \langle a, b \rangle \subseteq G$ ist $\operatorname{ord} \langle a, b \rangle > \operatorname{ord} \langle a \rangle = 4$, also $\operatorname{ord} \langle a, b \rangle = 8$, und deswegen $G = \langle a, b \rangle$. Es ist also

$$G = \{1, b, a, ab, a^2, a^2b, a^3, a^3b\}.$$

Insbesondere kommutieren a und b nicht miteinander, da G sonst abelsch wäre. Da $\langle a \rangle$ normal in G ist, ist $bab^{-1} \in \langle a \rangle$. Da $\operatorname{ord} bab^{-1} = \operatorname{ord} a$ muss $bab^{-1} = a$ oder $bab^{-1} = a^3$. Da aber $bab^{-1} = a \Leftrightarrow ba = ab$ muss $bab^{-1} = a^3$, also $ba = a^3b$. Für $b \langle a \rangle \in G/\langle a \rangle$ ist $b + \langle a \rangle \neq 1 + \langle a \rangle$, da $b \notin \langle a \rangle$, wegen $\operatorname{ord} G/\langle a \rangle = 2$ jedoch

$b^2 + \langle a \rangle = (b + \langle a \rangle)^2 = 1 + \langle a \rangle$, also $b^2 \in \langle a \rangle$. Da $\operatorname{ord} b = 2$ oder $\operatorname{ord} b = 4$ ist $\operatorname{ord} b^2 = 1$ oder $\operatorname{ord} b^2 = 2$. Also muss $b^2 = 1$ oder $b^2 = a^2$. Es wird nun zwischen diesen beiden Fällen unterschieden:
Ist $b^2 = 1$, so ist die G durch die Eigenschaften

$$\operatorname{ord} a = 4, \quad \operatorname{ord} b = 2, \quad G = \langle a, b \rangle, \quad ba = a^3 b \tag{1}$$

bereits eindeutig charakterisiert: Aus diesen Bedingungen ergibt sich für G durch direktes Ausrechnen die Verknüpfungstabelle

$\cdot$	1	b	a	ab	a^2	a^2b	a^3	a^3b
1	1	b	a	ab	a^2	a^2b	a^3	a^3b
b	b	1	a^3b	a^3	a^2b	a^2	ab	a
a	a	ab	a^2	a^2b	a^3	a^3b	1	b
ab	ab	a	b	1	a^3b	a^3	a^2b	a^2
a^2	a^2	a^2b	a^3	a^3b	1	b	a	ab
a^2b	a^2b	a^2	ab	a	b	1	a^3b	a^3
a^3	a^3	a^3b	1	b	a	ab	a^2	a^2b
a^3b	a^3b	a^3	a^2b	a^2	ab	a	b	1

Insbesondere ist G durch diese Bedingungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, d.h. jede Gruppe H, in der es Element g, h gibt, die (1) erfüllen, ist zu G isomorph. Daraus ergibt sich, dass $G \cong D_4$: Für $\sigma, \tau \in D_4$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist $\sigma^4 = \tau^2 = \mathrm{id}$, $D_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$ sowie $\tau\sigma = \sigma^3\tau$. Also ist $G \cong D_4$.
Im Fall $b^2 = a^2$ geht man analog vor: Durch die Bedingungen

$$\operatorname{ord} a = 4, \quad b^2 = a^2, \quad G = \langle a, b \rangle, \quad ba = a^3 b \tag{2}$$

ergibt sich die Verknüpfungstabelle

$\cdot$	1	b	a	ab	a^2	a^2b	a^3	a^3b
1	1	b	a	ab	a^2	a^2b	a^3	a^3b
b	b	a^2	a^3b	a	a^2b	1	ab	a^3
a	a	ab	a^2	a^2b	a^3	a^3b	1	b
ab	ab	a^3	b	a^2	a^3b	a	a^2b	1
a^2	a^2	a^2b	a^3	a^3b	1	b	a	ab
a^2b	a^2b	1	ab	a^3	b	a^2	a^3b	a
a^3	a^3	a^3b	1	b	a	ab	a^2	a^2b
a^3b	a^3b	a	a^2b	1	ab	a^3	b	a^2

In diesem Fall ergibt sich, dass $G \cong Q_8$, wobei Q_8 die Quaternionengruppe bezeichnet (in der Form in der sie auf dem ersten Übungszettel angegeben war), da $I, J \in Q_8$ die Bedingungen (2) erfüllen: Es ist $\operatorname{ord} I = 4$, $I^2 = -E = J^2$ sowie $JI = -IJ = I^3 J$.

Aufgabe 4.2.

(i)

Es ist nach Definition

$$\operatorname{ord}\pi = \min\{n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \pi^n = \mathrm{id}\}. \tag{3}$$

Die x_i sind paarweise verschieden, und es ist $\pi(x_i) = x_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, r-1$ und $\pi(x_r) = x_1$. Daher ist für $n = 1, \ldots, r-1$

$$\pi^n(x_1) = x_{1+n} \neq x_1,$$

also $\pi^n \neq \mathrm{id}$. Da allerdings für $i = 1, \ldots, n$

$$\pi^r(x_i) = x_i$$

ist $\operatorname{ord}\pi = r$ nach (3). Analog ergibt sich, dass $\operatorname{ord}\tau = s$.
Da π und τ fremd sind, kommutieren sie miteinander (aus der Vorlesung bekannt). Es kommutieren daher π^n und τ^m ist daher für alle $n, m \in \mathbb{N}$, da

$$\pi^n\tau = \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \tau = \prod_{i=1}^{n-1}\pi \cdot \tau\pi = \prod_{i=1}^{n-2}\pi \cdot \tau\pi^2 = \ldots = \pi\tau\prod_{i=1}^{n-1}\pi = \tau\pi^n$$

und deshalb

$$\begin{aligned}\pi^n\tau^m &= \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \prod_{i=1}^{m}\tau = \tau \cdot \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \prod_{i=1}^{m-1}\tau = \tau^2 \cdot \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \prod_{i=1}^{m-2}\tau \\ &= \ldots = \prod_{i=1}^{m-1}\tau \cdot \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \tau = \prod_{i=1}^{m}\tau \cdot \prod_{i=1}^{n}\pi = \tau^m\pi^n.\end{aligned}$$

Auch folgt aus der Fremdheit von π und τ, dass $\langle\pi\rangle \cap \langle\tau\rangle = 1$: Für $\sigma \in \langle\pi\rangle \cap \langle\tau\rangle$ ist $\pi^n = \sigma = \tau^m$ für passende $n, m \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq n < r$ und $0 \leq m < s$. Es ist dann für $i = 1, \ldots, r$

$$x_i = \pi^r(x_i) = \pi^{r-n}(\pi^n(x_i)) = \pi^{r-n}(\tau^m(x_i)) = \pi^{r-n}(x_i),$$

weshalb $r - n$ ein Vielfaches von $\operatorname{ord}\pi = r$ sein muss; wegen $r - n \leq r$ muss also $r - n = r$ und daher $n = 0$ und $\sigma = \pi^n = \mathrm{id}$.
Für alle $t \in \mathbb{N}, t \geq 1$ mit $(\pi\tau)^t = \mathrm{id}$ ist

$$\pi^t\tau^t = (\pi\tau)^t = \mathrm{id},$$

also $\pi^t = (\tau^t)^{-1} = \tau^{s-t} \in \langle\tau\rangle$. Wie oben bemerkt ist daher $\pi^t = \mathrm{id}$, also t ein Vielfaches von $\operatorname{ord}\pi = r$. Analog ergibt sich, dass t auch ein Vielfaches von $\operatorname{ord}\tau = s$ ist. Also ist $t \geq \mathrm{kgV}(r, s)$. Andererseits ist

$$(\pi\tau)^{\mathrm{kgV}(r,s)} = \pi^{\mathrm{kgV}(r,s)}\tau^{\mathrm{kgV}(r,s)} = \mathrm{id}^2 = \mathrm{id}\,.$$

Also ist $\operatorname{ord}\pi\tau = \mathrm{kgV}(r, s)$.

(ii)

Es ist

$$\begin{aligned}\sigma := &\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 4 & 1 & 10 & 11 & 8 & 9 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5\end{pmatrix}\\ = &\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 4 & 11 & 5 & 8 & 2\end{pmatrix}}_{=:\pi}\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 10 & 6 & 9\end{pmatrix}}_{=:\tau}.\end{aligned}$$

Nach Aufgabenteil (i) ist $\operatorname{ord}\pi = 6$ und $\operatorname{ord}\tau = 4$. Da π und τ fremde Zykeln sind, ist daher

$$\begin{aligned}\sigma^{2013} &= (\pi\tau)^{2013} = \pi^{2013}\,\tau^{2013} = \pi^3\tau\\ &= \begin{pmatrix}1 & 4 & 11 & 5 & 8 & 2\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}3 & 10 & 6 & 9\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 10 & 6 & 9\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 5 & 11 & 10 & 8 & 1 & 9 & 7 & 4 & 3 & 6 & 2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3.

Da es in $\mathfrak{S}_1$ keine Transpositionen gibt, wird im Folgenden der Fall $n \geq 2$ betrachtet. Wie aus der Vorlesung bekannt bilden die Transpositionen ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{S}_n$. Es sind hierfür jedoch schon die Transpositionen τ_m der Form $\tau_m := \begin{pmatrix}1 & m\end{pmatrix}$ mit $m \in \{2, \dots, n\}$ ausreichend, da sich jede Transposition $(a, b) \in \mathfrak{S}_n$ als

$$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} = \tau_a\tau_b\tau_a$$

schreiben lässt. φ ist also durch die Bilder dieser $n-1$ Transpositionen bereits eindeutig bestimmt.
Die τ_m kommutieren nicht miteinander, da für $m, m' \in \{2, \dots, n\}$ mit $m \neq m'$

$$\tau_{m'}\tau_m = \begin{pmatrix}m & m' & 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}m' & m & 1\end{pmatrix} = \tau_m\tau_{m'}.$$

Daraus folgt, dass auch die Transpositionen der Form $\varphi(\tau_m)$ nicht miteinander kommutieren, also insbesondere nicht fremd zueinander sind: Gibt es $m, m' \in \{2, \dots, n\}$ mit

$$\varphi(\tau_m)\varphi(\tau_{m'}) = \varphi(\tau_{m'})\varphi(\tau_m),$$

so ist

$$\varphi(\tau_m\tau_{m'}) = \varphi(\tau_m)\varphi(\tau_{m'}) = \varphi(\tau_{m'})\varphi(\tau_m) = \varphi(\tau_{m'}\tau_m),$$

wegen der Injektivität von φ also $\tau_m\tau_{m'} = \tau_{m'}\tau_m$ und daher $m = m'$.
Für $m \in \mathbb{N}$ seien $a_m, b_m \in \{1, \dots, n\}$ so dass $\varphi(\tau_m) = \begin{pmatrix}a_m & b_m\end{pmatrix}$. Da die τ_m paarweise verschieden sowie nicht fremd sind, gibt es wegen der Injektivität von φ für alle $m, m' \in \{2, \dots, m\}$ genau ein $i \in \{a_m, b_m\}$ und genau ein $j \in \{a_{m'}, b_{m'}\}$ mit $i = j$.

Behauptung 1. Es ist $\bigcap_{m=2}^{n}\{a_m, b_m\} \neq \emptyset$.

Beweis. Für $n \in \{2, 3\}$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $n \geq 4$. Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Sei $m_0 := \min\{k \in \{2, \dots, n\} : \bigcap_{m=2}^{k}\{a_m, b_m\} = \emptyset\}$. Da τ_2 und τ_3 nicht fremd sind, ist $m_0 \geq 4$. Wegen der Minimalität von m_0 gibt es ein

$a \in \{1, \dots, n\}$, so dass $a \in \{a_m, b_m\}$ für alle $m \in \{2, \dots, m_0 - 1\}$. Da die τ_m paarweise verschieden sind gibt es auch $c_2, \dots, c_{m_0 - 1} \in \{1, \dots, n\}$ mit $\{a_m, b_m\} = \{a, c_m\}$ für alle $m \in \{2, \dots, m_0 - 1\}$. Nach Definition von m_0 muss $a \notin \{a_{m_0}, b_{m_0}\}$. Da jedoch τ_{m_0} nicht fremd zu τ_2 und τ_3 ist, muss $c_2, c_3 \in \{a_{m_0}, b_{m_0}\}$, da c_2 und c_3 verschieden sind, ist also $\{a_{m_0}, b_{m_0}\} = \{c_2, c_3\}$. Es ist daher

$$\begin{aligned}\varphi(\tau_{m_0}) &= \begin{pmatrix} a_{m_0} & b_{m_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \varphi(\tau_2)\varphi(\tau_3)\varphi(\tau_2) = \varphi(\tau_2 \tau_3 \tau_2),\end{aligned}$$

wegen der Injektivität von φ also

$$\begin{pmatrix} 1 & m_0 \end{pmatrix} = \tau_{m_0} = \tau_2 \tau_3 \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist offenbar ein Widerspruch. $\square$

Seien $c_1, \dots, c_n \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so dass $\{a_m, b_m\} = \{c_1, c_m\}$ für alle $m \in \{2, \dots, m\}$; die Existenz entsprechender Elemente folgt aus der Behauptung 1 und der Fremdheit der τ_m. $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sei definiert als

$$\pi(c_1) := 1 \text{ und } \pi(c_m) := m \text{ für alle } m \in \{2, \dots, n\}.$$

Durch direktes Nachrechen ergibt sich nun, dass $\varphi = \mathrm{inn}_\pi$, also $\varphi(x) = \pi^{-1} \cdot x \cdot \pi$ für alle $x \in \mathfrak{S}_n$: Wie zu Beginn bemerkt genügt es dies für die τ_m zu zeigen. Da für alle $m \in \{2, \dots, n\}$

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_m \end{pmatrix} = \pi^{-1} \begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \pi$$

ist dies der Fall. Es ist also $\varphi = \mathrm{inn}_\pi$.

Aufgabe 4.4.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Da $[G, G]$ eine Untergruppe von G ist, ist $1 \in [G, G]$, also $1 \in G_n$, da $1^n = 1 \in [G, G]$. Für alle $g \in G_n$ ist wegen $g^n \in [G, G]$ auch $(g^{-1})^n = (g^n)^{-1} \in [G, G]$, also $g^{-1} \in G_n$. Dass für $g, h \in G_n$ auch $gh \in G_n$ ergibt sich mithilfe der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 2. Sei G eine Gruppe und seien $g, h \in G$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $c \in [G, G]$ mit

$$(gh)^n = g^n h^n c.$$

Beweis. Der Beweis verläuft per Induktion über n.

Induktionsanfang. Sei $n = 0$. Dann ist

$$(gh)^n = (gh)^0 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = g^0 h^0 \cdot 1 = g^n h^n \cdot 1.$$

Induktionsschritt. Sei $n \geq 1$ und gelte die Aussage für $n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $c \in [G, G]$ mit $(gh)^{n-1} = g^{n-1} h^{n-1} c$. Es ist daher

$$\begin{aligned}(gh)^n &= gh(gh)^{n-1} = ghg^{n-1}h^{n-1}c \\ &= g^n h \left[h^{-1}, g^{1-n}\right] h^{n-1} c = g^n h^n \left[h^{-1}, g^{1-n}\right] \left[\left[h^{-1}, g^{1-n}\right]^{-1}, h^{1-n}\right] c.\end{aligned}$$

Da $[G, G]$ eine Untergruppe von G ist, ist

$$\left[h^{-1}, g^{1-n}\right] \left[\left[h^{-1}, g^{1-n}\right]^{-1}, h^{1-n}\right] c \in [G, G]. \qquad \square$$

Da $[G,G]$ ein Untergruppe von G ist, und $g^n, h^n \in [G,G]$, ist für $c \in [G,G]$ mit $(gh)^n = g^n h^n c$ auch $(gh)^n = g^n h^n c \in [G,G]$.
Es gilt noch zu zeigen, dass G_n normal in G ist, dass also für $g \in G_n$ und $h \in G$ auch $hgh^{-1} \in G_n$. Da $g^n \in [G,G]$ und $[G,G]$ normal in G ist, gilt

$$(hgh^{-1})^n = h(g^n)h^{-1} \in [G,G],$$

also auch $hgh^{-1} \in G_n$.
Die kürzere Lösung der ganzen Aufgabe besteht darin, in G_n den Kern des Gruppenhomomorphismus

$$G \xrightarrow{can.} G/[G,G] \longrightarrow G/[G,G]$$

mit $g \mapsto [g] \mapsto [g]^n = [g^n]$ zu erkennen. Das die zweite Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt daraus, dass $G/[G,G]$ abelsch ist.

Aufgabe 4.5.

Da $\operatorname{ord}[G,G] = 2$ ist $[G,G] = \{1,\sigma\}$ für ein selbstinverses Element $\sigma \in G$. G ist nicht abelsch, denn sonst wäre $[G,G] = 1$. G ist insbesondere nichttrivial.
Für alle $g \in G$ ist $g^2 \in Z$, wobei Z das Zentrum von G bezeichnet: Es ist für alle $h \in G$

$$\begin{aligned} g^2h &= ghg\left[g^{-1},h^{-1}\right] = hg\left[g^{-1},h^{-1}\right]g\left[g^{-1},h^{-1}\right] \\ &= hg\left[g^{-1},h^{-1}\right]\left[h^{-1},g\right]g, \end{aligned} \tag{4}$$

da

$$g\left[g^{-1},h^{-1}\right] = gg^{-1}h^{-1}gh = h^{-1}gh = h^{-1}ghg^{-1}g = \left[h^{-1},g\right]g.$$

Es ist nun

$$\left[g^{-1},h^{-1}\right] = 1 \Leftrightarrow g^{-1} \in Z_{\{h^{-1}\}} \Leftrightarrow g \in Z_{\{h^{-1}\}} \Leftrightarrow \left[h^{-1},g\right] = 1,$$

da $Z_{\{h^{-1}\}}$ eine Untergruppe von G ist. Da $\operatorname{ord}[G,G] = 2$ und $\left[g^{-1},h^{-1}\right], \left[h^{-1},g\right] \in [G,G]$ folgt daraus, dass $\left[g^{-1},h^{-1}\right] = \left[h^{-1},g\right]$, und da jedes Element in $[G,G]$ selbstinvers ist, daher auch $\left[g^{-1},h^{-1}\right]\left[h^{-1},g\right] = 1$. Aus (4) folgt daher, dass $g^2h = hg^2$. Aus der Beliebigkeit von $h \in G$ folgt damit $g^2 \in Z$.
Da $Z = \operatorname{Ker}\operatorname{inn}$ bedeutet dies, dass $\operatorname{inn}_g^2 = \operatorname{inn}_{g^2} = \operatorname{id}$ für alle $g \in G$, dass also alle $\varphi \in \operatorname{Inn}(G)$ selbstinvers sind. Dies hat zwei wichtige Konsequenzen: Zum einen folgt aus der folgenden Bemerkung, dass $\operatorname{ord}\operatorname{Inn}(G)$ gerade ist.

Bemerkung 3. Sei G eine nichttriviale Gruppe, so dass alle $g \in G$ selbstinvers sind. Dann ist $\operatorname{ord} G$ gerade.

Beweis. Da G nichttrivial ist, gibt es ein $g \in G - 1$. Da $g \neq 1$ selbstinvers ist, ist $\operatorname{ord} g = 2$. Da $\operatorname{ord} g$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G$ ist, ist $\operatorname{ord} G$ gerade. □

Dass $\operatorname{Inn}(G)$ nichttrival ist, ergibt sich daraus, dass $\operatorname{Inn}(G) \cong G/Z$. Wäre $\operatorname{Inn}(G)$ trivial, so wäre $G = Z$, also G abelsch.
Zum anderen folgt, da jedes $\varphi \in \operatorname{Inn}(G)$ selbstinvers ist, dass $\operatorname{Inn}(G) \cong G/Z$ abelsch ist. Wegen der entsprechenden Minimalitätseigenschaft von $[G,G]$ folgt daraus, dass $[G,G] \subseteq Z$ eine Untergruppe ist. Da $[G,G]$ normal in G ist, ist $[G,G]$ auch normal Z. (Dies folgt auch aus der Kommutativität von Z.)

Aus dem zweiten Isomorphiesatz folgt nun, dass

$$G/Z \cong (G/[G,G])/(Z/[G,G]).$$

Insbesondere ist

$$\operatorname{ord} G/Z = \frac{\operatorname{ord} G/[G,G]}{\operatorname{ord} Z/[G,G]}.$$

Da $\operatorname{ord} G/Z = \operatorname{ord} \operatorname{Inn}(G)$ gerade ist, ist also auch $(G : [G,G]) = \operatorname{ord} G/[G,G]$ gerade.