Einführung in die Algebra

Blatt 3

Jendrik Stelzner

6. November 2013

Aufgabe 3.1.

Für $n = \{1, 2\}$ ist $\mathfrak{S}_n$ kommutativ, also $Z(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_1$ und $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$. Für $n \geq 3$ ist $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ die triviale Untergruppe:
Sei $\pi \in Z(\mathfrak{S}_n)$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ die Rotation mit $\sigma(1) = 2$. Es gibt dann $s \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\pi(1) = \sigma^s(1)$. Da π mit allen Elementen in $\mathfrak{S}_n$ kommutiert, ist damit für alle $m \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi(m) = \pi(\sigma^m(1)) = \sigma^m(\pi(1)) = \sigma^m(\sigma^s(1)) \underset{(*)}{=} \sigma^s(\sigma^m(1)) = \sigma^s(m),$$

also $\sigma^s = \pi$, wobei bei $(*)$ die Kommutativität von $\langle\sigma\rangle$ genutzt wird. Da wegen der Kommutativität von $\sigma^s = \pi$

$$\tau_{12} = \sigma^s \, \tau_{12} \, (\sigma^s)^{-1} = \tau_{(1+s)(2+s)},$$

wobei τ_{kl} die Transposition von $k \bmod n$ und $l \bmod n$ bezeichnet, muss $s = 0$, also $\pi = \sigma^s = \mathrm{id}$. Dass $\mathrm{id} \in Z(\mathfrak{S}_n)$ ist allerdings klar, da $Z(\mathfrak{S}_n) \subseteq \mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe ist.