Einführung in die Algebra
Blatt 9

Jendrik Stelzner

16. Dezember 2013

Aufgabe 9.1.

Die Multiplikation $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul ist offenbar die Einschränkung der Multiplikation $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ des Körpers $\mathbb{Q}$. Die Torsionsfreiheit von $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul folgt daher direkt aus der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Q}$ als Köper.
$\mathbb{Q}$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul nicht endlich erzeugt: Sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen. Für $q \in \mathbb{Q}$ gibt es bekanntermaßen eindeutige $\nu_p(q) \in \mathbb{Z}$, für $p \in P$, und ein eindeutiges $\varepsilon(q) \in \{-1, 1\}$ mit $q = \varepsilon(q) \prod_{p \in P} p^{\nu_p(q)}$. Aus der Definition der Addition auf $\mathbb{Q}$ folgt, dass für alle $r, s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&nr + ms \\
&= n\varepsilon(r) \prod_{p \in P} p^{\nu_p(r)} + m\varepsilon(s) \prod_{p \in P} p^{\nu_p(s)} \\
&= \left(n\varepsilon(s) \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(s) > 0}} p^{\nu_p(s)} + m\varepsilon(r) \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(r) > 0}} p^{\nu_p(r)} \right) \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(r) < 0}} p^{\nu_p(r)} \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(s) < 0}} p^{\nu_p(s)}.
\end{aligned}$$

Inbesondere ist daher für jedes $p_0 \in P$

$$\begin{aligned}
&\nu_{p_0}(nr + ms) \\
&= \nu_{p_0} \left(\left(n\varepsilon(s) \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(s) > 0}} p^{\nu_p(s)} + m\varepsilon(r) \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(r) > 0}} p^{\nu_p(r)} \right) \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(r) < 0}} p^{\nu_p(r)} \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(s) < 0}} p^{\nu_p(s)} \right) \\
&= \underbrace{\nu_{p_0} \left(n\varepsilon(s) \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(s) > 0}} p^{\nu_p(s)} + m\varepsilon(r) \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(r) > 0}} p^{\nu_p(r)} \right)}_{\geq 0} + \nu_{p_0} \left(\prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(r) < 0}} p^{\nu_p(r)} \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(s) < 0}} p^{\nu_p(s)} \right) \\
&\geq \nu_{p_0} \left(\prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(r) < 0}} p^{\nu_p(r)} \prod_{\substack{p \in P \\ \nu_p(s) < 0}} p^{\nu_p(s)} \right) \geq -|\nu_{p_0}(r)| - |\nu_{p_0}(s)|
\end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich, dass für alle $q_1, \dots, q_t \in \mathbb{Q}$, $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{Z}$ und $p \in P$

$$\nu_p(n_1 q_1 + \ldots + n_t q_t) \geq -\sum_{i=1}^{t} \nu_p(q_i).$$

Inbesondere lässt sich deshalb $p^{-1-\sum_{i=1}^{t}\nu_p(q_i)}$ für $p \in P$ nicht als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von $q_1, \dots, q_t$ darstellen. Es hat deshalb $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul kein endliches Erzeugendensystem.
$\mathbb{Q}$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul nicht frei: Für $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ besitzt

$$rq\frac{p}{q} = pr = ps\frac{r}{s}$$

zwei unterschiedliche Linearkombinationen. Daher ist jede Familie von mindestens zwei rationalen Zahlen linear abhängig, insbesondere also jedes Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul, da ein solches unendlich ist.

Aufgabe 9.2.

(i)

Es handelt sich bei $\sim$ um eine Äquivalenzrelation: Für alle $(m,s) \in M \times S$ ist $1 \cdot ms = 1 \cdot ms$ mit $1 \in S$ und deshalb $(m,s) \sim (m,s)$. Also ist $\sim$ reflexiv. Ist $(m,s)\tilde{(}m',s')$ für $(m,s),(m',s') \in M \times S$, so gibt es ein $t \in S$ mit $ts'm = tsm'$. Da damit auch $tsm' = ts'm$ ist dann $(m',s') \sim (m,s)$. Also ist $\sim$ symmetrisch. Ist $(m,s)\tilde{(}m',s')\tilde{(}m'',s'')$, so gibt es $t, \tilde{t} \in S$ mit $ts'm = tsm'$ und $\tilde{t}s'm'' = \tilde{t}s''m'$. Da S unter der Multiplikation abgeschlossen ist, ist auch $t\tilde{t}s' \in S$. Da wegen der Kommutativität von R

$$t\tilde{t}s' \cdot s''m = \tilde{t}s'' \cdot ts'm = \tilde{t}s'' \cdot tsm' = ts \cdot \tilde{t}s''m' = ts \cdot \tilde{t}s'm'' = t\tilde{t}s' \cdot sm''$$

ist $(m,s) \sim (m'',s'')$. Daher ist $\sim$ transitiv.
Die Addition ist wohldefiniert: Für $\frac{m'}{s'}, \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}} \in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m'}{s'} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}$ gibt es ein $t \in S$ mit $t\tilde{s}m' = ts'\tilde{m}$. Wegen der Kommutativität von R ist dann für alle $(m,s) \in M \times S$

$$ts\tilde{s}(s'm + sm') = ts\tilde{s}s'm + ts^2\tilde{s}m' = ts\tilde{s}s'm + ts^2s'\tilde{m} = tss'(\tilde{s}m + s\tilde{m}),$$

und daher $\frac{s'm+sm'}{ss'} = \frac{\tilde{s}m+s\tilde{m}}{s\tilde{s}}$. Da der Ausdruck $\frac{sm'+s'm}{ss'}$ wegen der Kommutativität von R symmetrisch in (m,s) und (m',s') ist, folgt damit die Wohldefiniertheit der Addition.
Auch die Multiplikation ist wohldefiniert:Für $\frac{r}{s}, \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \in R[S^{-1}]$ mit $\frac{r}{s} = \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}$ gibt es ein $t \in S$ mit $tr\tilde{s} = t\tilde{r}s$, weshalb wegen der Kommutativität von R für alle $(m',s') \in M \times S$

$$t\tilde{s}s'rm' = tss'\tilde{r}m',$$

also $\frac{rm'}{ss'} = \frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'}$. Für $\frac{m'}{s'}, \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}} \in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m'}{s'} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}$ gibt es ein $t \in S$ mit $t\tilde{s}m' = ts'\tilde{m}$, weshalb wegen der Kommutativität von R für alle $(r,s) \in R \times S$

$$ts\tilde{s}rm' = tss'r\tilde{m},$$

also $\frac{rm'}{ss'} = \frac{r\tilde{m}}{s\tilde{s}}$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der Multiplikation.

$M[S^{-1}]$ bildet bezüglich der Addition ein abelsche Gruppe: Die Addition ist assoziativ, da für alle $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$

$$\begin{aligned}\frac{m}{s} + \left(\frac{m'}{s'} + \frac{m''}{s''}\right) &= \frac{m}{s} + \frac{s''m' + s'm''}{s's''} = \frac{s's''m + ss''m' + ss'm''}{ss's''} \\ &= \frac{s'm + sm'}{ss'} + \frac{m''}{s''} = \left(\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'}\right) + \frac{m''}{s''},\end{aligned}$$

und kommutativ, da für alle $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{ms' + m's}{ss'} = \frac{m's + ms'}{s's} = \frac{m'}{s'} + \frac{m}{s}.$$

Das Element $\frac{0}{1} \in M[S^{-1}]$ ist bezüglich der Addition neutral, da für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$

$$\frac{m}{s} + \frac{0}{1} = \frac{1 \cdot m + s \cdot 0}{s \cdot 1} = \frac{m}{s}.$$

Dabei ist klar, dass $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$ für alle $s \in S$. Jedes Element $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$ hat $\frac{-m}{s} \in M[S^{-1}]$ als additiv inverses Element, da

$$\frac{m}{s} + \frac{-m}{s} = \frac{sm - sm}{s^2} = \frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}.$$

Dies zeigt, dass $M[S^{-1}]$ bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe bildet.
Durch die definierte Multiplikation wird $M[S^{-1}]$ zu einem $R[S^{-1}]$-Modul: Seien im Folgenden $\frac{r}{s}, \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \in R[S^{-1}]$ und $\frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$ beliebig aber fest. Es ist

$$1_{R[S^{-1}]} \frac{m'}{s'} = \frac{1_R}{1_R} \frac{m'}{s'} = \frac{1_R\, m'}{1_R\, s'} = \frac{m'}{s'}.$$

Daher gilt für alle $\hat{s} \in S$ die Kürzungsregel

$$\frac{\hat{s}m'}{\hat{s}s'} = \frac{\hat{s}}{\hat{s}} \frac{m'}{s'} = 1_{R[S^{-1}]} \frac{m'}{s'} = \frac{m'}{s'}.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned}\frac{r}{s}\left(\frac{m'}{s'} + \frac{m''}{s''}\right) &= \frac{r}{s}\frac{s''m' + s'm''}{s's''} = \frac{rs''m' + rs'm''}{ss's''} \\ &= \frac{rss''m' + rss'm''}{s^2s's''} = \frac{rm'}{ss'} + \frac{rm''}{ss''} = \frac{r}{s}\frac{m'}{s'} + \frac{r}{s}\frac{m''}{s''}.\end{aligned}$$

Auch ist deshalb

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{s} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\right)\frac{m'}{s'} &= \frac{r\tilde{s} + \tilde{r}s}{s\tilde{s}}\frac{m'}{s'} = \frac{r\tilde{s}m' + \tilde{r}sm'}{s\tilde{s}s'} \\ &= \frac{r\tilde{s}s'm' + \tilde{r}ss'm'}{s\tilde{s}(s')^2} = \frac{rm'}{ss'} + \frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'} = \frac{r}{s}\frac{m'}{s'} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\frac{m'}{s'}.\end{aligned}$$

Da auch

$$\frac{r}{s}\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\frac{m'}{s'}\right) = \frac{r}{s}\frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'} = \frac{r\tilde{r}m'}{s\tilde{s}s'} = \frac{r\tilde{r}}{s\tilde{s}}\frac{m'}{s'} = \left(\frac{r}{s}\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}\right)\frac{m'}{s'}$$

ist $M[S^{-1}]$ bezüglich der definierten Multiplikation ein $R[S^{-1}]$-Modul.

(ii)

Da für jedes $s \in S$ die Abbildung $n \mapsto sn$ in N bijektiv ist, gibt es für alle $n' \in N$ und $s \in S$ ein eindeutiges $n \in N$ mit $sn = n'$, für das wir im Folgenden $\frac{n'}{s}$ schreiben werden. Für alle $n \in N$ und $s \in S$ ist nach Definition ist $s\frac{n}{s} = n$.

Behauptung 1. *Es gelten die folgenden Rechenregeln:*

(i) Für alle $n, n' \in N$ und $s, s' \in S$ ist $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$ genau dann wenn $s'n = sn'$.

(ii) Für alle $n, n' \in N$ und $s \in S$ ist $\frac{n+n'}{s} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s}$.

(iii) Für alle $n, n' \in N$ und $s, s' \in S$ ist $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{s'n+sn'}{ss'}$.

(iv) Für alle $n \in N$, $s \in S$, und $r \in R$ ist $r\,\frac{n}{s} = \frac{rn}{s}$.

Beweis. ***(i)***

Ist $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$, so ist

$$s'n = s's\frac{n}{s} = s's\frac{n'}{s'} = ss'\frac{n'}{s'} = sn'.$$

Gilt andererseits $sn' = s'n$, so ist

$$s's\,\frac{n}{s} = s'n = sn' = ss'\frac{n'}{s'} = s's\,\frac{n'}{s'},$$

wegen der Injektivität der Multiplikation mit $s's \in S$ also $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$.

(ii)

Es ist

$$s\left(\frac{n}{s} + \frac{n'}{s}\right) = s\,\frac{n}{s} + s\,\frac{n'}{s} = n + n',$$

also $\frac{n+n'}{s} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s}$.

(iii)

Es ist

$$ss'\left(\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'}\right) = s's\frac{n}{s} + ss'\frac{n'}{s'} = s'n + sn',$$

also $\frac{s'n+sn'}{ss'} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'}$.

(iv)

Es ist

$$sr\,\frac{n}{s} = rs\,\frac{n}{s} = rn,$$

also $r\,\frac{n}{s} = \frac{rn}{s}$. □

Gibt es eine entsprechende Abbildung ψ, so ist ist für alle $\frac{m}{1} \in M[S^{-1}]$

$$\psi\left(\frac{m}{1}\right) = \psi(\varphi(m)) = \varphi'(m),$$

und damit auch für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$

$$s\,\psi\left(\frac{m}{s}\right) = \psi\left(s\,\frac{m}{s}\right) = \psi\left(\frac{sm}{s}\right) = \psi\left(\frac{m}{1}\right) = \varphi'(m),$$

also $\psi\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{\varphi'(m)}{s}$. ψ ist also eindeutig.
Sei nun ψ so definert. ψ ist dann wohldefiniert: Für $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ gibt es ein $t \in S$ mit $ts'm = tsm'$. Es ist daher

$$ts'\varphi'(m) = \varphi'(ts'm) = \varphi(tsm') = ts\varphi'(m'),$$

also $s'\varphi'(m) = s\varphi'(m')$ und deshalb $\frac{\varphi'(m)}{s} = \frac{\varphi'(m')}{s'}$. Es gilt zu zeigen, dass ψ ein R-Modulhomomorphismus ist. Dies ist der Fall, da für alle $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$ ist

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'}\right) &= \psi\left(\frac{s'm + sm'}{ss'}\right) = \frac{\varphi'(s'm + sm')}{ss'} \\ &= \frac{s'\varphi'(m) + s\varphi'(m')}{ss'} = \frac{\varphi'(m)}{s} + \frac{\varphi'(m')}{s'} = \psi\left(\frac{m}{s}\right) + \psi\left(\frac{m'}{s'}\right)\end{aligned}$$

und für alle $r \in R$ und $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$

$$\psi\left(r\,\frac{m}{s}\right) = \psi\left(\frac{rm}{s}\right) = \frac{\varphi'(rm)}{s} = \frac{r\varphi'(m)}{s} = r\,\frac{\varphi'(m)}{s} = r\,\psi\left(\frac{m}{s}\right).$$

(iii)

Es sei $\varphi_M : M \to M[S^{-1}], m \mapsto \frac{m}{1}$, φ_N und φ_P seien analog definiert. Zusammen mit der exakten Sequenz

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

ergibt sich damit das folgende Diagram, in welcher die obere Zeile exakt ist.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_N"'] & P \arrow[d, "\varphi_P"'] \\ M[S^{-1}] & N[S^{-1}] & P[S^{-1}] \end{tikzcd}$$

Wir bemerken, dass für alle $s \in S$ die Abbildung $\tau_s : M[S^{-1}] \to M[S^{-1}], \frac{m'}{s'} \mapsto s\frac{m'}{s'} = \frac{sm'}{s'}$ auf dem R-Modul $M[S^{-1}]$ bijektiv ist, denn für die Abbildung $\tau_{1/s} : M[S^{-1}] \to M[S^{-1}], \frac{m'}{s'} \mapsto \frac{1}{s}\frac{m'}{s'} = \frac{m'}{ss'}$ ist $\tau_s\tau_{1/s} = \tau_{1/s}\tau_s = \mathrm{id}_{M[S^{-1}]}$. Analoges gilt für $N[S^{-1}]$ und $P[S^{-1}]$.

Nach dem vorherigen Aufgabenteil gibt es für den R-Modulhomomorphismus $\varphi_N f : M \to N[S^{-1}]$ einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $\bar{f} : M[S^{-1}] \to N[S^{-1}]$ mit $\bar{f}\varphi_M = \varphi_N f$. Analog gibt es einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $\bar{g} : N[S^{-1}] \to P[S^{-1}]$ mit $\bar{g}\varphi_N = \varphi_P g$. Das bedeutet, dass diese beiden Homomorphismen die beiden eindeutigen sind, für die das folgende Diagram kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_N"'] & P \arrow[d, "\varphi_P"'] \\
M[S^{-1}] \arrow[r, "\exists!\,\bar{f}"'] & N[S^{-1}] \arrow[r, "\exists!\,\bar{g}"'] & P[S^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Aus dem bisherigen Aufgabenteil ergibt sich auch direkt, dass $\bar{f}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(s)}{s}$ für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$, und $\bar{g}\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{g(n)}{s}$ für alle $\frac{n}{s} \in N[S^{-1}]$. (Man beachte etwa, dass $\varphi' = \varphi_N f$ und für das Element $n = \frac{n'}{s'} \in N[S^{-1}]$ und $s \in S$ die Notation aus dem vorherigen Aufgabenteil $\frac{n}{s}$ das Element $\frac{n'}{ss'}$ beschreibt.)
Die R-Modulhomomorphismen $\bar{f}$ und $\bar{g}$ sind auch $R[S^{-1}]$-Modulhomomorphismen. Für alle $\frac{r}{s} \in R[S^{-1}]$ und $\frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$ ist

$$\bar{f}\left(\frac{r}{s}\frac{m'}{s'}\right) = \bar{f}\left(\frac{rm'}{ss'}\right) = \frac{f(rm')}{ss'} = \frac{rf(m')}{ss'} = \frac{r}{s}\frac{f(m')}{s'} = \frac{r}{s}\bar{f}\left(\frac{m'}{s'}\right).$$

Für $\bar{g}$ läuft der Beweis analog.
Aus der Exaktheit der R-Modulhomomorphismen

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

folgt die Exaktheit der $R[S^{-1}]$-Modulhomomorphismen

$$M[S^{-1}] \xrightarrow{\bar{f}} N[S^{-1}] \xrightarrow{\bar{g}} P[S^{-1}].$$

Für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$ ist

$$(\bar{g}\bar{f})\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{gf(m)}{s} = \frac{0}{s} = \frac{0}{1},$$

da $gf = 0$, also $\operatorname{Im}\bar{f} \subseteq \operatorname{Ker}\bar{g}$.
Für alle $\frac{n}{s} \in N[S^{-1}]$ ist

$$\bar{g}\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \frac{g(n)}{s} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \exists\, t \in S : tg(n) = 0.$$

Für ein solches t ist

$$tg(n) = 0 \Leftrightarrow g(tn) = 0 \Leftrightarrow tn \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists\, m \in M : f(m) = tn.$$

Also gibt es für $\frac{n}{s} \in \operatorname{Ker}\bar{g}$ ein $t \in S$ und $m \in M$ mit $f(m) = tn$, weshalb

$$\bar{f}\left(\frac{m}{ts}\right) = \frac{f(m)}{ts} = \frac{tn}{ts} = \frac{n}{s}.$$

Also ist $\operatorname{Ker}\bar{g} \subseteq \operatorname{Im}\bar{f}$.

Aufgabe 9.3.

Für die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \overset{f}{\longrightarrow} N \overset{g}{\longrightarrow} P \longrightarrow 0$$

ist f injektiv, also $M \cong \operatorname{Im} f \subseteq N$, und g surjektiv, also $P \cong N/\ker g = N/\operatorname{Im} f$. Da die Länge eines Moduls invariant unter Isomorphie ist, können wir daher o.B.d.A. davon ausgehen, dass $M \subseteq N$ ein Untermodul ist und $P = N/M$. Es gilt also zu zeigen, dass

$$l_A(N) = l_A(M) + l_A(N/M).$$

Es bezeichne $\pi : N \to N/M$ die kanonische Projektion. Offenbar induziert π ein Bijektion zwischen den Untermodulen von N, die M beinhalten, und den Untermodulen von N/M. Daher ergibt sich aus jeder Kette von M

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M$$

der Länge r und Kette von N/M

$$0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_s = N/M$$

der Länge s eine Kette von N

$$0 = M_0 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = \pi^{-1}(P_0) \subsetneq \ldots \subsetneq \pi^{-1}(P_r) = N$$

der Länge $r + s$. Daher ist

$$l_A(N) \geq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Andererseits ergibt sich aus einer Kette

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_t = N$$

der Länge t von N eine Kette

$$0 = M \cap N_0 \subsetneq M \cap N_1 \subseteq \ldots \subseteq M \cap N_t = M$$

von M und eine Kette

$$0 = \pi(N_0) \subseteq \pi(N_1) \subseteq \ldots \subseteq \pi(N_t) = N$$

von N. Da $\ker \pi = N$ und $N_i \subsetneq N_{i+1}$ für alle $i = 0, \ldots, t-1$ ist $M \cap N_i \subsetneq M \cap N_{i+1}$ oder $\pi(N_i) \subsetneq \pi(N_{i+1})$ für alle $i = 0, \ldots, t-1$. Deshalb ist

$$l_A(N) \leq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Aufgabe 9.4.

Aufgabe 9.5.

(i)

Es bezeichne $T(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ den Torsionsuntermodul von $\bigoplus_{i \in I} M_i$ und für alle $i \in I$ bezeichne $T(M_i) = T_i$ den Torsionsuntermodul von M_i. Es ist $\bigoplus_{i \in I} T_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$

und

$$T\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) = \bigoplus_{i\in I} T(M_i) = \bigoplus_{i\in I} T_i.$$

Für $(m_i)_{i\in I} \in T\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)$ gibt ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $r(m_i)_{i\in I} = (rm_i)_{i\in I} = 0$, also $rm_i = 0$ für alle $i \in I$. Daher ist $m_i \in T_i$ für alle $i \in I$. Da $m_i = 0$ für fast alle $i \in I$ ist $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} T_i$.
Für $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus T_i$ ist $m_i = 0$ für fast alle $i \in I$. Es seien $i_1, \ldots, i_n \in I$ genau die Indizes mit $m_{i_j} \neq 0$. Da $m_{i_j} \in T_{i_j}$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gibt es für alle $j = 1, \ldots, n$ ein $r_j \in R \setminus \{0\}$ mit $r_j m_{i_j} \neq 0$. Da R kommutativ ist, ist daher $(r_1 \cdots r_n) m_i = 0$ für alle $i \in I$, also $(r_1 \cdots r_n)(m_i)_{i\in I} = 0$. Da R ein Integritätsring ist, ist $r_1 \cdots r_n \neq 0$, da $r_j \neq 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Daher ist $(m_i)_{i\in I} \in T(\bigoplus_{i\in I} M_i)$.

(ii)

Es bezeichne $P \subsetneq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen. Für alle $p \in P$ ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe, die wir in naheliegender Weise als $\mathbb{Z}$-Modul auffassen. Jedes $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $x \neq 0$ hat Ordnung p, weshalb $n \cdot x = 0 \Leftrightarrow p \mid n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da jedes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Torsionsmodul ist, ist

$$\prod_{p\in P} T(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Dies ist kein Torsionsmodul: Für $(1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p\in P} \in \prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$n \cdot (1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p\in P} = (n \cdot 1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p\in P} = 0$$

muss $n \mid p$ für alle $p \in P$, also $n = 0$. Deshalb ist $\prod_{p\in P} T(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ nicht isomorph zum Torsionsmodul $T(\prod_{p\in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.