Einführung in die Algebra

Blatt 5

Jendrik Stelzner

15. November 2013

Aufgabe 5.1.

Aufgabe 5.2.

Aufgabe 5.3.

Aufgabe 5.4.

Aufgabe 5.5.

(i)

Da $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R ist, ist $ar \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $r \in R$. Es ist nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}) &= \sum_{a \in \mathfrak{a}} aR[X] = \sum_{a \in \mathfrak{a}} \left\{ a \sum_{i=0}^{n} a_i X^i : n \geq 0, a_i \in R \right\} \\ &= \sum_{a \in \mathfrak{a}} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a a_i X^i : n \geq 0, a_i \in R \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i : n \geq 0, a_i \in \mathfrak{a} \right\}. \quad (1)\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Gleichheit bei (1) wie folgt:
Für alle $f = \sum_{i=0}^{n} a a_i X^i \in aR[X]$ ist $a a_i \in \mathfrak{a}$, da $a \in \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R ist, also f ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathfrak{a}$.
Andererseits ist jedes Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$ die Summe der Monome $f_i := a_i X^i \in a_i R[X]$. Also ist $f \in \sum_{i=1}^{n} a_i R[X]$.