

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

BLATT 7

Jendrik Stelzner

4. Dezember 2013

Aufgabe 7.1.

Aufgabe 7.2.

Aufgabe 7.3.

Definition. Für einen Ring R bezeichnet

$$\text{nil}(R) := \{x \in R : x^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

das Nilradikal von R .

Bemerkung 1. Sei R ein kommutativer Ring. Dann gilt

- (i) $\text{nil}(R)$ ist ein Ideal von R .
- (ii) Für $e \in R^*$ und $a \in \text{nil}(R)$ ist $e + a \in R^*$.

Beweis. (i)

Es ist $0 \in \text{nil}(R)$, also $\text{nil}(R)$ nicht leer. Für $a, b \in \text{nil}(R)$ gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $a^n = b^m = 0$, also ist

$$(a + b)^{n+m} = \sum_{k=1}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^{n+m-k} b^k = 0$$

und daher $a + b \in \text{nil}(R)$. Auch ist für alle $r \in R$

$$(ar)^n = a^n r^n = 0,$$

also $ar \in R$. Insbesondere ist daher für alle $a \in \text{nil}(R)$ auch $-a = (-1) \cdot a \in R$.

(ii)

Für $e \in R^*$ und $a \in \text{nil}(R)$ mit $a^n = 0$ ist $1 - ae^{-1} \in R^*$, da $(ae^{-1})^n = 0$ und daher

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-ae^{-1})^k \right) (1 + ae^{-1}) = 1 + (-1)^{n-1} (ae^{-1})^n = 1.$$

Daher ist auch $e + a = e(1 + ae^{-1}) \in R^*$. □

Da $\text{nil}(R) \subseteq \text{nil}(R[X])$ ist auch $(\text{nil}(R)) \subseteq \text{nil}(R[X])$. Dabei ist, wie in einem früheren Übungsblatt gezeigt,

$$(\text{nil}(R)) = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i : n \geq 0, a_i \in \text{nil}(R) \text{ für alle } i \right\}.$$

Nach Bemerkung 1 ist also das Polynom $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ mit $n \geq 0$, $a_0 \in R^*$ und $a_i \in \text{nil}(R)$ für alle i invertierbar.

Sei andererseits $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X]$, mit $n \geq 0$ und $a_n \neq 0$, invertierbar, d.h. es gibt ein $g = \sum_{i=0}^m b_i X^i \in R[X]$, mit $m \geq 0$ und $b_m \neq 0$, so dass $fg = 1$. Da damit $a_0 b_0 = 1$ müssen a_0 und b_0 invertierbar sein. Ist $n > 0$, so bemerken wir:

Behauptung 2. Es ist $a_n^{k+1} b_{m-k} = 0$ für $k = 0, \dots, m$.

Beweis. Der Beweis verläuft per Induktion über k .

Induktionsanfang. Für $k = 0$ gilt: Wäre $a_n b_m \neq 0$, so wäre

$$0 = \deg(1) = \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) = n + m \geq n > 0.$$

Induktionsschritt. Sei $1 \leq k \leq n$ und gelte die Aussage für $k - 1$. Da $fg = 1$ ist

$$0 = \sum_{\mu+\nu=n+m-k} a_\mu b_\nu.$$

Multiplikation der Gleichung mit a_n^k ergibt

$$0 = \sum_{\mu+\nu=n+m-k} a_n^k a_\mu b_\nu \stackrel{\text{IV.}}{=} a_n^{k+1} b_{m-k}.$$

□

Aus Behauptung 2 folgt insbesondere, dass $a_n^{m+1} b_0 = 0$. Da b_0 invertierbar ist, ist a_n daher nilpotent. Da nach Bemerkung 1 daher auch $f - a_n X^n$ invertierbar ist, ergibt sich durch Wiederholung der obigen Argumentation induktiv, dass a_i für alle $1 \leq i \leq n$ nilpotent ist.

Aufgabe 7.4.

Definition. Sei R ein kommutativer Ring. Für $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[X]]$ bezeichnet

$$\text{Deg}(p) := \begin{cases} \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\} & \text{falls } p \neq 0, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

den Grad von p .

Für einen kommutativen Ring R und $p, q \in R[[X]]$ ist

$$\text{Deg}(p + q) \geq \min\{\text{Deg}(p), \text{Deg}(q)\} \text{ und } \text{Deg}(pq) \geq \text{Deg}(p) + \text{Deg}(q). \quad (1)$$

Ist R darüber hinaus nullteilerfrei, so gilt sogar

$$\text{Deg}(pq) = \text{Deg}(p) + \text{Deg}(q). \quad (2)$$

Die Beweise der entsprechenden Aussage laufen analog zu den Beweisen der entsprechenden Aussagen für die Gradfunktion \deg von $R[X]$.

(i)

Ist R kein Integritätsring, so ist auch $R[X] \subsetneq R[[x]]$ kein Integritätsring, also auch $R[[x]]$ nicht. Ist $R[[x]]$ kein Integritätsring, so gibt es $p, q \in R[[x]]$ mit $p, q \neq 0$, also $\text{Deg}(p), \text{Deg}(q) < \infty$, aber $pq = 0$, also $\text{Deg}(pq) = \infty$. Mit (2) folgt, dass R kein Integritätsring ist.

(ii)

Ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[x]]$ invertierbar, so gibt es $q = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \in R[[x]]$ mit $pq = 1$. Insbesondere ist daher

$$1 = (pq)_1 = a_0 b_0,$$

also a_0 invertierbar.

Ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[x]]$ mit a_0 invertierbar, so definieren wir eine Folge $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auf R rekursiv durch

$$b_0 := a_0^{-1} \text{ und } b_i := -a_0^{-1} \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j},$$

und $q := \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ als die entsprechende Potenzreihe. Für $e = pq$ ergibt sich dann für alle $i \in \mathbb{N}$

$$e_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} = \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j} + a_0 b_i = \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j} - \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j} = 0.$$

Also ist $e = 1$ und p daher invertierbar mit $p^{-1} = q$. Insbesondere ergibt sich das folgende Lemma:

Lemma 3. Sei K ein Körper und seien $p, q \in K[[x]]$. Dann gilt:

- (i) p ist genau dann invertierbar, wenn $\text{Deg } p = 0$.
- (ii) Ist $\text{Deg } p = \text{Deg } q$, so sind p und q assoziiert. Ist $\text{Deg } p = \text{Deg } q < \infty$, so sind p und q assoziiert zu $X^{\text{Deg } p}$.
- (iii) Ist $\text{Deg } p \geq \text{Deg } q$, so ist $q \mid p$.

Beweis. (i)

$p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ ist genau dann invertierbar, wenn a_0 invertierbar ist, also genau dann wenn $a_0 \neq 0$, was wiederum äquivalent zu $\text{Deg } a_0 = 0$ ist.

(ii)

Ist $p = q = 0$ so ist nichts zu zeigen. Ansonsten ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \neq 0$, also $p = X^{\text{Deg } p} p'$ für $p' = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+\text{Deg } p} X^i$ mit $a_{\text{Deg } p} \neq 0$. Nach (i) ist p' invertierbar, also p assoziiert zu $X^{\text{Deg } p}$. Analog ergibt sich, dass q assoziiert zu $X^{\text{Deg } q}$ ist. Mit $\text{Deg } p = \text{Deg } q$ folgt damit auch die Assoziiertheit von p und q .

(iii)

Ist $\text{Deg } p = \infty$, so ist $p = 0$ und nichts zu zeigen. Ansonsten ist $p = X^{\text{Deg } p - \text{Deg } q} p'$ wobei p' assoziiert zu q ist, also $p = X^{\text{Deg } p - \text{Deg } q} c q$ für $c \in K^*$. \square

(iii)

f ist in $\mathbb{Z}[X]$ nicht irreduzibel, da $f = (X + 1)(X + 2)$.

Seien $p, q \in \mathbb{Z}[[x]]$ mit $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ und $q = \sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j$ so dass $pq = f$. Dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich, dass $a_0 b_0 = 2$. Da $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, und $2 \in \mathbb{Z}$ irreduzibel ist, ist a_0 oder b_0 eine Einheit. Entsprechend ist p oder q eine Einheit. Also ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[[x]]$.

Aufgabe 7.5.

Lemma 4. $K[[x]]$ bildet mit der Gradabbildung Deg einen euklidischen Ring.

Beweis. Da K nullteilerfrei ist, ist $K[[x]]$ ein Integritätsring. Seien $f, g \in K[[x]]$ mit $g \neq 0$. Es gilt zu zeigen, dass es $q, r \in K[[x]]$ gibt, so dass $f = qg + r$ mit $r = 0$ oder $\text{Deg } r < \text{Deg } g$. Ist $\text{Deg } f < \text{Deg } g$ so genügt es $q = 0$ und $r = f$ zu wählen. Ist $\text{Deg } f \geq \text{Deg } g$, so folgt aus 3, dass $g \mid f$, es kann also q mit $f = qg$ und $r = 0$ gewählt werden. \square

Aus Lemma 4 folgt direkt, dass $K[[x]]$ ein Hauptidealring ist. Für jedes Ideal $(a) \neq 0$ von $K[[x]]$ folgt mit Lemma 3, dass a assoziiert zu $X^{\text{Deg } a}$ ist, und da $K[[x]]$ ein Integritätsring ist, daher $(a) = (X^{\text{Deg } a})$. Folglich sind die Ideale in $K[[x]]$ gerade 0 und (X^n) für $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist (X) das eindeutige maximale Ideal in $K[[x]]$, weshalb $K[[x]]$ lokal ist (dies lässt sich auch direkt aus Lemma 3 folgern).