

# EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

## BLATT 3

Jendrik Stelzner

7. November 2013

### Aufgabe 3.1.

Für  $n = \{1, 2\}$  ist  $\mathfrak{S}_n$  kommutativ, also  $Z(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_1$  und  $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$ . Für  $n \geq 3$  ist  $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$  die triviale Untergruppe:

Sei  $\pi \in Z(\mathfrak{S}_n)$  und  $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$  die Rotation mit  $\sigma(1) = 2$ . Es gibt dann  $s \in \{0, \dots, n-1\}$  mit  $\pi(1) = \sigma^s(1)$ . Da  $\pi$  mit allen Elementen in  $\mathfrak{S}_n$  kommutiert, ist damit für alle  $m \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi(m) = \pi(\sigma^m(1)) = \sigma^m(\pi(1)) = \sigma^m(\sigma^s(1)) \stackrel{(*)}{=} \sigma^s(\sigma^m(1)) = \sigma^s(m),$$

also  $\sigma^s = \pi$ , wobei bei  $(*)$  die Kommutativität von  $\langle \sigma \rangle$  genutzt wird. Da wegen der Kommutativität von  $\sigma^s = \pi$

$$\tau_{12} = \sigma^s \tau_{12} (\sigma^s)^{-1} = \tau_{(1+s)(2+s)},$$

wobei  $\tau_{kl}$  die Transposition von  $k \bmod n$  und  $l \bmod n$  bezeichnet, muss  $s = 0$ , also  $\pi = \sigma^s = \text{id}$ . Dass  $\text{id} \in Z(\mathfrak{S}_n)$  ist allerdings klar, da  $Z(\mathfrak{S}_n) \subseteq \mathfrak{S}_n$  eine Untergruppe ist.

### Aufgabe 3.2.

Es sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $\text{ord } G = 5929 = 11^2 \cdot 7^2$ . Zum Lösen dieser Aufgabe hilft das folgende Lemma:

**Lemma 1.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe, und seien  $N_1, N_2 \subseteq G$  Normalteiler in  $G$  mit  $\text{ord } G = \text{ord } N_1 \cdot \text{ord } N_2$  und  $N_1 \cap N_2 = \{1\}$ . Dann ist  $G \cong N_1 \times N_2$ .

*Beweis des Lemmas:* Für  $n_1 \in N_1$  und  $n_2 \in N_2$  ist  $n_1 n_2 = n_2 n_1$ , denn  $N_1$  und  $N_2$  sind als Normalteiler invariant bezüglich Konjugation, weshalb

$$n_1 \cdot n_2 n_1^{-1} n_2^{-1} \in N_1 \text{ und } n_1 n_2 n_1^{-1} \cdot n_2^{-1} \in N_2.$$

Aus  $N_1 \cap N_2 = \{1\}$  folgt  $n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1} = 1$ , also  $n_1 n_2 = n_2 n_1$ . Es sei nun

$$\varphi : N_1 \times N_2 \rightarrow G, (n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2.$$

Aus der eben gezeigten Kommutativität folgt, dass  $\varphi$  ein Gruppenhomomorphismus ist, da für alle  $(n_1, n_2), (n'_1, n'_2) \in N_1 \times N_2$

$$\begin{aligned} \varphi((n_1, n_2)(n'_1, n'_2)) &= \varphi((n_1 n'_1, n_2 n'_2)) = n_1 n'_1 n_2 n'_2 \\ &= n_1 n_2 n'_1 n'_2 = \varphi(n_1, n_2) \varphi(n'_1, n'_2). \end{aligned}$$

$\varphi$  ist injektiv, da für  $(n_1, n_2) \in \text{Ker } \varphi$

$$1 = \varphi(n_1, n_2) = n_1 n_2,$$

also  $N_2 \ni n_2 = n_1^{-1} \in N_1$  und daher  $n_1 = n_2 = 1$ . Da

$$\text{ord } N_1 \times N_2 = \text{ord } N_1 \times \text{ord } N_2 = \text{ord } G < \infty$$

ist  $\varphi$  daher bijektiv. Da  $\varphi$  ein Gruppenisomorphismus ist, ist  $G \cong N_1 \times N_2$ .  $\square$

**Bemerkung 2.** Sind  $p$  und  $q$  verschiedene Primzahlen und ist  $G$  eine  $p$ -Gruppe und  $H$  eine  $q$ -Gruppe, so ist  $G \cap H = \{1\}$ : Nach dem Satz von Lagrange ist  $\text{ord } G \cap H$  ein Teiler von  $\text{ord } G$  und  $\text{ord } H$ , aus der Teilerfremdheit von  $p$  und  $q$  folgt daher, dass  $\text{ord } G \cap H = 1$ , also  $G \cap H = \{1\}$ .

Es sei  $s$  die Anzahl der 11-Sylowgruppen in  $G$ . Nach den Sylowsätzen ist

$$s \mid \text{ord } G = 11^2 \cdot 7^2, \quad s \equiv 1 \pmod{11}.$$

Da  $s \equiv 1 \pmod{11}$  darf  $s$  kein Vielfaches von 11 sein, zusammen mit  $s \mid 11^2 \cdot 7^2$  ergibt sich daraus  $s \in \{1, 7, 49\}$ . Da jedoch

$$7 \not\equiv 1 \not\equiv 49 \pmod{11}$$

muss  $s = 1$ . Insbesondere ist die eindeutige 11-Sylowgruppe  $S_{11} \subseteq G$ , die nach den Sylowsätzen existiert, daher ein Normalteiler in  $G$ . Analoges ergibt sich für die Anzahl  $r$  der 7-Sylowgruppen in  $G$ : Es muss

$$r \mid \text{ord } G = 11^2 \cdot 7^2, \quad r \equiv 1 \pmod{7},$$

also  $r \in \{1, 11, 121\}$ , und wegen

$$11 \not\equiv 1 \not\equiv 121 \pmod{7}$$

daher  $r = 1$ . Also ist auch die eindeutige, nach den Sylowsätzen existierende 7-Sylowgruppe  $S_7 \subseteq G$  ein Normalteiler in  $G$ .

Da  $\text{ord } S_{11} = 11^2$  und  $\text{ord } S_7 = 7^2$  ist  $\text{ord } G = \text{ord } S_{11} \cdot \text{ord } S_7$ . Nach Bemerkung 2 ist auch  $S_{11} \cap S_7 = \{1\}$ . Nach Lemma 1 ist also  $G \cong S_{11} \times S_7$ . Da  $\text{ord } S_{11}$  und  $\text{ord } S_7$  Quadrate von Primzahlen sind, sind  $S_{11}$  und  $S_7$ , wie aus der Vorlesung bekannt, abelsch. Also ist  $G$  als Produkt abelscher Gruppen ebenfalls abelsch.

### Aufgabe 3.3.

(i)

Durch

$$G \times G/H \rightarrow G/H, (g, aH) \mapsto gaH$$

wird eine Aktion von  $G$  auf der Menge der Linksnebenklassen  $G/H$  definiert. Diese Aktion entspricht dem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \rightarrow S(G/H), g \mapsto (aH \mapsto gaH).$$

Es ist daher

$$\text{ord } G = \text{ord } \text{Ker } \varphi \cdot \text{ord } \text{Im } \varphi.$$

Da  $\text{ord } \text{Im } \varphi$  ein Teiler von  $\text{ord } S(G/H) = (G : H)!$  ist,  $\text{ord } G$  jedoch kein Teiler von  $(G : H)!$ , muss  $\text{ord } \text{Ker } \varphi \neq 1$ , also  $\text{Ker } \varphi$  nichttrivial sein.  $\text{Ker } \varphi$  ist als Kern eines Gruppenhomomorphismus normal in  $G$ . Es ist  $\text{Ker } \varphi \subseteq H$ , denn für alle  $n \in \text{Ker } \varphi$  ist  $nH = H$ , da  $H$  eine Linksnebenklasse in  $G/H$  ist, also  $n \in H$ . Damit ist  $\text{Ker } \varphi \subseteq H$  ein nichttrivialer Normalteiler von  $G$ .

(ii)

Es gilt zu bemerken, dass die Aussage nur unter der zusätzlichen Bedingung  $k > 0$  gilt: Ansonsten ist die triviale Gruppe mit  $p = 2, k = 0$  und  $m = 1$  ein Gegenbeispiel. Es wird daher die Aussage unter der zusätzlichen Annahme  $k > 0$  gezeigt: Nach den Sylowsätzen gibt es eine  $p$ -Sylowgruppe  $S \subseteq G$ . Da  $S$  eine maximale  $p$ -Untergruppe ist, ist  $\text{ord } S = p^k$ , also  $(G : S) = m$ . Wegen den Annahmen  $k > 0$  und  $p > m$  ist daher

$$\text{ord } G = p^k m \nmid m! = (G : S)!.$$

Nach Aufgabenteil (i) gibt es daher einen nicht trivialen Normalteiler  $N \subseteq S \subseteq G$  von  $G$  in  $S$ .

### Aufgabe 3.4.

(i)

Da  $S \subseteq H$  eine  $p$ -Sylowgruppe in  $H$  ist, ist  $S \subseteq G$  eine  $p$ -Gruppe in  $G$ . Nach den Sylowsätzen gibt es daher eine  $p$ -Sylowgruppe  $T \subseteq G$  mit  $S \subseteq T$ . Da  $S \subseteq H$  und  $S \subseteq T$  ist  $S \subseteq T \cap H$ . Da  $T \cap H \subseteq T$  eine  $p$ -Gruppe in  $H$  ist, und  $S$  als Sylowgruppe in  $H$  bereits eine in  $H$  maximale  $p$ -Gruppe ist, muss bereits  $S = T \cap H$ .

(ii)

Sei  $S \trianglelefteq G$  eine normale  $p$ -Sylowgruppe in  $G$ . Sei  $T := S \cap H$ . Als Untergruppe ist  $T \subseteq S$  eine  $p$ -Gruppe. Wie aus der Vorlesung bekannt ist  $T$  normal in  $H$ . Nach den Sylowsätzen gibt es eine Sylowgruppe  $T' \subseteq H$  mit  $T \subseteq T'$ . Nach Aufgabenteil (i) gibt es daher eine Sylowgruppe  $S' \subseteq G$  mit  $T' = S' \cap H$ . Da  $S$  normal ist, ist  $S'$ , wie aus der Vorlesung bekannt, die einzige  $p$ -Sylowgruppe in  $G$ . Also muss  $S = S'$ , und damit  $T = T'$ . Also ist  $T$  eine normale  $p$ -Sylowgruppe in  $H$ .

(iii)

Sei  $S \subseteq H$  eine  $p$ -Sylowgruppe; eine solche existiert nach den Sylowsätzen. Nach Aufgabenteil (i) gibt es eine  $p$ -Sylowgruppe  $T' \subseteq G$  mit  $S = T' \cap H$ . Da  $T$  und  $T'$   $p$ -Sylowgruppen in  $G$  sind, sind sie konjugiert zueinander, d.h. es gibt ein  $g \in G$  mit  $T' = gTg^{-1}$ . Da  $H$  normal in  $G$  ist, ist  $gHg^{-1} = H$  sowie

$$g^{-1}Sg \subseteq g^{-1}Hg = H.$$

Insbesondere ist  $g^{-1}Sg$  wieder eine Untergruppe von  $H$  mit  $\text{ord } g^{-1}Sg = \text{ord } S$  (da  $\text{inn}_g$  ein Automorphismus ist), also eine  $p$ -Sylowgruppe in  $H$ . Da nun

$$\begin{aligned} T \cap H &= g^{-1}g(T \cap H)g^{-1}g = g^{-1}(g(T \cap H)g^{-1})g \\ &= g^{-1}((gTg^{-1}) \cap (gHg^{-1}))g = g^{-1}(T' \cap H)g = g^{-1}Sg \end{aligned}$$

ist diese  $p$ -Sylowgruppe gerade  $T \cap H$ .

### Aufgabe 3.5.

Es ist  $\text{ord } G = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ . Für  $p \in \{2, 3, 11\}$  bezeichne sei  $s_p$  die Anzahl der  $p$ -Sylowgruppen in  $G$ . Nach den Sylowsätzen ist für alle  $p \in \{2, 3, 11\}$

$$s_p \mid \text{ord } G = 2^2 \cdot 3 \cdot 11, \quad s_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich direkt, dass  $s_2 \in \{1, 3, 11, 33\}$ ,  $s_3 \in \{1, 4, 22\}$  und  $s_{11} \in \{1, 12\}$  (vgl. Aufgabe 3.2.). Dabei besitzt  $G$  für  $p \in \{2, 3, 11\}$  genau dann eine normale  $p$ -Sylowgruppe, wenn  $s_p = 1$ .

Angenommen,  $G$  besitzt keine normale  $p$ -Sylowgruppe. Dann muss  $s_2 \geq 3$ ,  $s_3 \geq 4$  und  $s_{11} = 12$ . Es ergeben sich dann die folgenden Beobachtungen:

- Die 2-Sylowgruppen haben Ordnung  $2^2 = 4$ , die 3-Sylowgruppen Ordnung 3 und die 11-Sylowgruppen Ordnung 11.
- Sylowgruppen zu verschiedenen Primzahlen nach Bemerkung 2 triviale Schnitte.
- $p$ -Sylowgruppen gleicher Primzahlen haben für  $p = 2$  oder  $p = 3$  ebenfalls nur triviale Schnitte, da für zwei solche  $p$ -Sylowgruppen  $S_p$  und  $S'_p$  für den Schnitt  $S_p \cap S'_p$  die Ordnung  $\text{ord } S_p \cap S'_p$  ein Teiler von  $\text{ord } S_p = \text{ord } S'_p = p$  ist, also im Falle  $\text{ord } S_p \cap S'_p \neq 1$  bereits  $\text{ord } S_p \cap S'_p = p$  und damit  $S_p = S_p \cap S'_p = S'_p$ .
- Der Schnitt zweier verschiedener 2-Sylowgruppen ist entweder trivial oder von Ordnung 2. Drei solche Gruppen verfügen zusammen über mindestens 5 verschiedene Elemente (das neutrale Element nur einmal gezählt).

Zusammen ergibt sich damit, dass  $G$  mindestens

$$12 \cdot 11 - 12 + 4 \cdot 3 - 3 + 5 = 135$$

verschiedene Elemente hat. Da aber  $\text{ord } G = 132$  kann dies nicht sein. Also ist  $s_p = 1$  für ein  $p \in \{2, 3, 11\}$ , so dass  $G$  eine normale  $p$ -Sylowgruppe besitzt.