Einführung in die Algebra

Blatt 4

Jendrik Stelzner

9. November 2013

Aufgabe 4.1.

Aufgabe 4.2.

(i)

Es ist nach Definition

$$\operatorname{ord}\pi = \min\{n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \pi^n = \mathrm{id}\}. \tag{1}$$

Nun sind die x_i paarweise verschieden, und $\pi(x_i) = x_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, r-1$ und $\pi(x_r) = x_1$. Daher ist für $n = 1, \ldots, r-1$

$$\pi^n(x_1) = x_{1+n} \neq x_1,$$

also $\pi^n \neq \mathrm{id}$. Da allerdings für $i = 1, \ldots, n$

$$\pi^r(x_i) = x_i$$

ist $\operatorname{ord}\pi = r$ nach (1). Analog ergibt sich, dass $\operatorname{ord}\tau = s$.
Da π und τ fremd sind, kommutieren sie miteinander (aus der Vorlesung bekannt). Es kommutieren daher π^n und τ^m ist daher für alle $n, m \in \mathbb{N}$, da

$$\begin{aligned}\pi^n\tau^m &= \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \prod_{i=1}^{m}\tau = \tau \cdot \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \prod_{i=1}^{m-1}\tau = \tau^2 \cdot \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \prod_{i=1}^{m-2}\tau \\ &= \ldots = \prod_{i=1}^{m-1}\tau \cdot \prod_{i=1}^{n}\pi \cdot \tau = \prod_{i=1}^{m}\tau \cdot \prod_{i=1}^{n}\pi = \tau^m\pi^n.\end{aligned}$$

Auch folgt aus der Fremdheit von π und τ, dass $\langle\pi\rangle \cap \langle\tau\rangle = \{1\}$: Für $\sigma \in \langle\pi\rangle \cap \langle\tau\rangle$ ist $\pi^n = \sigma = \tau^m$ für passende $n, m \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq n \leq r-1$ und $0 \leq m \leq s-1$. Es ist dann für $i = 1, \ldots, r$

$$x_i = \pi^r(x_i) = \pi^{r-n}(\pi^n(x_i)) = \pi^{r-n}(\tau^m(x_i)) = \pi^{r-n}(x_i),$$

weshalb $r-n$ ein Teiler von r sein muss; wegen $r-n \leq r$ muss also $r-n = r$ und daher $n = 0$ und $\sigma = \pi^n = \mathrm{id}$.
Für alle $t \in \mathbb{N}, t \geq 1$ mit $(\pi\tau)^t = \mathrm{id}$ ist

$$\pi^t\tau^t = (\pi\tau)^t = \mathrm{id},$$

also $\pi^t = (\tau^t)^{-1} = \tau^{s-t} \in \langle\tau\rangle$. Wie oben bemerkt ist daher $\pi^t = \mathrm{id}$, also t ein Vielfaches von $\operatorname{ord}\pi = r$. Analog ergibt sich, dass t auch ein Vielfaches von $\operatorname{ord}\tau = s$ ist. Also ist $t \geq \mathrm{kgV}(r, s)$. Andererseits ist

$$(\pi\tau)^{\mathrm{kgV}(r,s)} = \pi^{\mathrm{kgV}(r,s)}\tau^{\mathrm{kgV}(r,s)} = \mathrm{id}^2 = \mathrm{id}\,.$$

Also ist $\operatorname{ord}\pi\tau = \mathrm{kgV}(r, s)$.

(ii)

Es ist

$$\begin{aligned} \sigma := &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 1 & 10 & 11 & 8 & 9 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ = &\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{=:\pi} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{=:\tau}. \end{aligned}$$

Nach Aufgabenteil (i) ist $\operatorname{ord}\pi = 6$ und $\operatorname{ord}\tau = 4$. Da π und τ fremde Zykeln sind ist daher

$$\begin{aligned} \sigma^{2013} &= (\pi\tau)^{2013} = \pi^{2013}\,\tau^{2013} = \pi^3\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 11 & 10 & 8 & 1 & 9 & 7 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.3.

Aufgabe 4.4.

Aufgabe 4.5.