Einführung in die Algebra
Blatt 9

Jendrik Stelzner

15. Dezember 2013

Aufgabe 9.1.

Aufgabe 9.2.

Aufgabe 9.3.

Für die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

ist f injektiv, also $M \cong \operatorname{Im} f \subseteq N$, und g surjektiv, also $P \cong N/\ker g = N/\operatorname{Im} f$. Da die Länge eines Moduls invariant unter Isomorphie ist, können wir daher o.B.d.A. davon ausgehen, dass $M \subseteq N$ ein Untermodul ist und $P = N/M$. Es gilt also zu zeigen, dass

$$l_A(N) = l_A(M) + l_A(N/M).$$

Es bezeichne $\pi : N \to N/M$ die kanonische Projektion. Offenbar induziert π ein Bijektion zwischen den Untermodulen von N, die M beinhalten, und den Untermodulen von N/M. Daher ergibt sich aus jeder Kette von M

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M$$

der Länge r und Kette von N/M

$$0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_s = N/M$$

der Länge s eine Kette von N

$$0 = M_0 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = \pi^{-1}(P_0) \subsetneq \ldots \subsetneq \pi^{-1}(P_r) = N$$

der Länge $r + s$. Daher ist

$$l_A(N) \geq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Andererseits ergibt sich aus einer Kette

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_t = N$$

der Länge t von N eine Kette

$$0 = M \cap N_0 \subsetneq M \cap N_1 \subseteq \ldots \subseteq M \cap N_t = M$$

von M und eine Kette

$$0 = \pi(N_0) \subseteq \pi(N_1) \subseteq \ldots \subseteq \pi(N_t) = N$$

von N. Da $\ker \pi = N$ und $N_i \subsetneq N_{i+1}$ für alle $i = 0, \ldots, t-1$ ist $M \cap N_i \subsetneq M \cap N_{i+1}$ oder $\pi(N_i) \subsetneq \pi(N_{i+1})$ für alle $i = 0, \ldots, t-1$. Deshalb ist

$$l_A(N) \leq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Aufgabe 9.4.

Aufgabe 9.5.