Einführung in die Algebra
Blatt 3

Jendrik Stelzner

23. Januar 2014

Aufgabe 3.1.

Für $n \in \{1,2\}$ ist $\mathfrak{S}_n$ kommutativ, also $Z(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_1$ und $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$. Für $n \geq 3$ ist $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ die triviale Gruppe:
Sei $\pi \in Z(\mathfrak{S}_n)$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ die Rotation mit $\sigma(1) = 2$. Es gibt dann $s \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\pi(1) = \sigma^s(1)$. Da π mit allen Elementen in $\mathfrak{S}_n$ kommutiert, ist damit für alle $m \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi(m) = \pi(\sigma^m(1)) = \sigma^m(\pi(1)) = \sigma^m(\sigma^s(1)) \underset{(*)}{=} \sigma^s(\sigma^m(1)) = \sigma^s(m),$$

also $\sigma^s = \pi$, wobei bei $(*)$ die Kommutativität von $\langle\sigma\rangle$ genutzt wird. Da wegen der Kommutativität von $\sigma^s = \pi$

$$\tau_{12} = \sigma^s\, \tau_{12}\, (\sigma^s)^{-1} = \tau_{(1+s)(2+s)},$$

wobei τ_{kl} die Transposition von $k \bmod n$ und $l \bmod n$ bezeichnet, muss $s = 0$, also $\pi = \sigma^s = \mathrm{id}$. Dass $\mathrm{id} \in Z(\mathfrak{S}_n)$ ist klar, da $Z(\mathfrak{S}_n) \subseteq \mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe 3.2.

Lemma 1. Sei G eine endliche Gruppe, und seien $N_1, N_2 \subseteq G$ Normalteiler in G mit $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} N_1 \cdot \operatorname{ord} N_2$ und $N_1 \cap N_2 = \{1\}$. Dann ist $G \cong N_1 \times N_2$.

Beweis des Lemmas: Für $n_1 \in N_1$ und $n_2 \in N_2$ ist $n_1 n_2 = n_2 n_1$, denn N_1 und N_2 sind als Normalteiler invariant bezüglich Konjugation, weshalb

$$n_1 \cdot \underbrace{n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}}_{\in N_1} \in N_1 \text{ und } \underbrace{n_1 n_2 n_1^{-1}}_{\in N_2} \cdot n_2^{-1} \in N_2.$$

Aus $N_1 \cap N_2 = \{1\}$ folgt $n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1} = 1$, also $n_1 n_2 = n_2 n_1$. Es sei nun

$$\varphi : N_1 \times N_2 \to G, (n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2.$$

Aus der eben gezeigten Kommutativität folgt, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist, da für alle $(n_1, n_2), (n_1', n_2') \in N_1 \times N_2$

$$\begin{aligned} \varphi((n_1, n_2)(n_1', n_2')) = \varphi((n_1 n_1', n_2 n_2')) &= n_1 n_1' n_2 n_2' \\ &= n_1 n_2 n_1' n_2' = \varphi(n_1, n_2)\varphi(n_1', n_2'). \end{aligned}$$

φ ist injektiv, da für $(n_1, n_2) \in \operatorname{Ker} \varphi$

$$1 = \varphi(n_1, n_2) = n_1 n_2, \text{ also } N_2 \ni n_2 = n_1^{-1} \in N_1,$$

und daher $n_1 = n_2 = 1$. Da

$$\operatorname{ord} N_1 \times N_2 = \operatorname{ord} N_1 \cdot \operatorname{ord} N_2 = \operatorname{ord} G < \infty$$

folgt aus der Injektivität von φ direkt die Bijektivität. Da φ ein Gruppenisomorphismus ist, ist $G \cong N_1 \times N_2$. $\square$

Bemerkung 2. Sind p und q verschiedene Primzahlen und sind G und H Untergruppen einer Gruppe, so dass G eine p-Gruppe und H eine q-Gruppe ist, so ist $G \cap H = \{1\}$.

Beweis. Nach dem Satz von Lagrange ist $\operatorname{ord} G \cap H$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G$ und $\operatorname{ord} H$, aus der Teilerfremdheit von p und q folgt daher, dass $\operatorname{ord} G \cap H = 1$, also $G \cap H = \{1\}$. $\square$

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $\operatorname{ord} G = 5929 = 11^2 \cdot 7^2$. Es sei s die Anzahl der 11-Sylowgruppen in G. Nach den Sylowsätzen ist

$$s \mid \operatorname{ord} G = 11^2 \cdot 7^2, \qquad s \equiv 1 \mod 11.$$

Da $s \equiv 1 \mod 11$ ist s kein Vielfaches von 11. Zusammen mit $s \mid 11^2 \cdot 7^2$ ergibt sich daraus, dass $s \in \{1, 7, 49\}$. Da jedoch

$$7 \not\equiv 1 \not\equiv 49 \mod 11$$

muss $s = 1$. Insbesondere ist die eindeutige 11-Sylowgruppe $S_{11} \subseteq G$, die nach den Sylowsätzen existiert, daher ein Normalteiler in G. Analoges ergibt sich für die Anzahl r der 7-Sylowgruppen in G: Es muss

$$r \mid \operatorname{ord} G = 11^2 \cdot 7^2, \qquad r \equiv 1 \mod 7,$$

also $r \in \{1, 11, 121\}$, und wegen

$$11 \not\equiv 1 \not\equiv 121 \mod 7$$

daher $r = 1$. Also ist auch die eindeutige, nach den Sylowsätzen existierende 7-Sylowgruppe $S_7 \subseteq G$ ein Normalteiler in G.
Da $\operatorname{ord} S_{11} = 11^2$ und $\operatorname{ord} S_7 = 7^2$ ist $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} S_{11} \cdot \operatorname{ord} S_7$. Nach Bemerkung 2 ist auch $S_{11} \cap S_7 = \{1\}$. Nach Lemma 1 ist ist also $G \cong S_{11} \times S_7$. Da $\operatorname{ord} S_{11}$ und $\operatorname{ord} S_7$ Quadrate von Primzahlen sind, sind S_{11} und S_7, wie aus der Vorlesung bekannt, abelsch. Also ist G als Produkt abelscher Gruppen ebenfalls abelsch.

Aufgabe 3.3.

(i)

Durch

$$G \times G/H \to G/H, (g, aH) \mapsto gaH$$

wird eine Aktion von G auf der Menge der Linksnebenklassen G/H definiert (die Wohldefiniertheit ist klar). Diese Aktion entspricht dem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to S(G/H), g \mapsto (aH \mapsto gaH).$$

Es ist daher

$$\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \cdot \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi.$$

Da $\operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$ nach dem Satz von Lagrange ein Teiler von $\operatorname{ord} S(G/H) = (G : H)!$ ist, $\operatorname{ord} G$ jedoch kein Teiler von $(G : H)!$, muss $\operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \neq 1$, also $\operatorname{Ker} \varphi$ nichttrivial sein. $\operatorname{Ker} \varphi$ ist als Kern eines Gruppenhomomorphismus normal in G. Auch ist $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H$, denn für alle $n \in \operatorname{Ker} \varphi$ ist $nH = H$, da $H \in G/H$, also $n \in H$. Damit ist $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H$ ein nichttrivialer Normalteiler von G.

(ii)

Es gilt zu bemerken, dass die Aussage nur unter der zusätzlichen Bedingung $k > 0$ gilt: Ansonsten ist die triviale Gruppe mit $p = 2$, $k = 0$ und $m = 1$ ein Gegenbeispiel. Es wird daher die Aussage unter der zusätzlichen Annahme $k > 0$ gezeigt:
Nach den Sylowsätzen gibt es eine p-Sylowgruppe $S \subseteq G$. Da $p \nmid m$ ist $\operatorname{ord} S = p^k$, also $(G : S) = m$. Wegen den Annahmen $k > 0$ und $p > m$ ist daher

$$\operatorname{ord} G = p^k m \nmid m! = (G : S)!.$$

Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es daher einen nicht trivialen Normalteiler $N \subseteq S \subseteq G$ von G in S.

Aufgabe 3.4.

(i)

Da $S \subseteq H$ ein p-Sylowgruppe in H ist, ist $S \subseteq G$ eine p-Gruppe in G. Nach den Sylowsätzen gibt es daher eine p-Sylowgruppe $T \subseteq G$ mit $S \subseteq T$. Da $S \subseteq H$ und $S \subseteq T$ ist $S \subseteq T \cap H$. Da $T \cap H \subseteq T$ eine p-Gruppe in H ist, und S als Sylowgruppe in H bereits eine in H maximale p-Gruppe ist, muss bereits $S = T \cap H$.

(ii)

Sei $S \subseteq G$ eine normale p-Sylowgruppe in G. Sei $T := S \cap H$. Als Untergruppe $T \subseteq S$ ist T eine p-Gruppe. Wie aus der Vorlesung bekannt ist T normal in H. Nach den Sylowsätzen gibt es eine Sylowgruppe $T' \subseteq H$ mit $T \subseteq T'$. Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es eine Sylowgruppe $S' \subseteq G$ mit $T' = S' \cap H$. Da S normal ist, ist S, wie aus der Vorlesung bekannt, die einzige p-Sylowgruppe in G. Also muss $S = S'$, und damit $T = T'$. Also ist T eine normale p-Sylowgruppen H.

(iii)

Sei $S \subseteq H$ eine p-Sylowgruppe; eine solche existiert nach den Sylowsätzen. Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es eine p-Sylowgruppe $T' \subseteq G$ mit $S = T' \cap H$. Da T und T' p-Sylowgruppen in G sind, sind sie konjugiert zueinander, d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $T' = gTg^{-1}$. Da H normal in G ist, ist $gHg^{-1} = H$, sowie

$$g^{-1}Sg \subseteq g^{-1}Hg = H.$$

Insbesondere ist $g^{-1}Sg$ wieder eine Untergruppe von H mit $\operatorname{ord} g^{-1}Sg = \operatorname{ord} S$ (da $\operatorname{inn}_{g^{-1}}$ ein Automorphismus ist), also eine p-Sylowgruppe in H. Da nun

$$\begin{aligned} T \cap H &= g^{-1}g(T \cap H)g^{-1}g = g^{-1}\left(g(T \cap H)g^{-1}\right)g \\ &= g^{-1}\left(\left(gTg^{-1}\right) \cap \left(gHg^{-1}\right)\right)g = g^{-1}(T' \cap H)g = g^{-1}Sg \end{aligned}$$

ist diese p-Sylowgruppe gerade $T \cap H$.

Aufgabe 3.5.

Es ist $\operatorname{ord} G = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$. Für $p \in \{2,3,11\}$ sei s_p die Anzahl der p-Sylowgruppen in G. Nach den Sylowsätzen ist für alle $p \in \{2,3,11\}$

$$s_p \mid \operatorname{ord} G = 2^2 \cdot 3 \cdot 11, \qquad s_p \equiv 1 \mod p.$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich direkt, dass $s_2 \in \{1,3,11,33\}$, $s_3 \in \{1,4,22\}$ und $s_{11} \in \{1,12\}$ (vgl. **Aufgabe 3.2.**). Dabei besitzt G für $p \in \{2,3,11\}$ genau dann eine normale p-Sylowgruppe, wenn $s_p = 1$.
Angenommen, G besitzt keine normale p-Sylowgruppe. Dann muss $s_2 \geq 3$, $s_3 \geq 4$ und $s_{11} = 12$. Es ergeben sich dann die folgenden Beobachtungen:

- Die 2-Sylowgruppen haben Ordung $2^2 = 4$, die 3-Sylowgruppen Ordnung 3 und die 11-Sylowgruppen Ordnung 11.

- Sylowgruppen zu verschiedenen Primzahlen haben nach Bemerkung 2 triviale Schnitte.

- p-Sylowgruppen gleicher Primzahlen haben für $p = 11$ oder $p = 3$ ebenfalls nur trivale Schnitte, da für zwei verschiedene solche p-Sylowgruppen S_p und S'_p für den Schnitt $S_p \cap S'_p$ die Ordnung $\operatorname{ord} S_p \cap S'_p$ ein Teiler von $\operatorname{ord} S_p = \operatorname{ord} S'_p = p$ ist, also im Falle $\operatorname{ord} S_p \cap S'_p \neq 1$ bereits $\operatorname{ord} S_p \cap S'_p = p$ und damit $S_p = S_p \cap S'_p = S'_p$.

- Der Schnitt zweier verschiedener 2-Sylowgruppen ist entweder trivial oder von Ordnung 2. Drei solche Gruppen verfügen zusammen über mindestens 5 verschiedene Elemente.

Zusammen ergibt sich damit, dass G mindestens

$$12 \cdot 11 - 12 + 4 \cdot 3 - 4 + 5 = 133$$

verschiedene Elemente hat. Da aber $\operatorname{ord} = 132$ kann dies nicht sein. Also ist $s_p = 1$ für ein $p \in \{2,3,11\}$, weshalb G ein normale p-Sylowgruppe besitzt.