# Einführung in die Algebra

## Blatt 3

Jendrik Stelzner

6. November 2013

## Aufgabe 3.1.

Für $n = \{1, 2\}$ ist $\mathfrak{S}_n$ kommutativ, also $Z(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_1$ und $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$. Für $n \geq 3$ ist $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ die triviale Untergruppe:
Sei $\pi \in Z(\mathfrak{S}_n)$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ die Rotation mit $\sigma(1) = 2$. Es gibt dann $s \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\pi(1) = \sigma^s(1)$. Da $\pi$ mit allen Elementen in $\mathfrak{S}_n$ kommutiert, ist damit für alle $m \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi(m) = \pi(\sigma^m(1)) = \sigma^m(\pi(1)) = \sigma^m(\sigma^s(1)) \underset{(*)}{=} \sigma^s(\sigma^m(1)) = \sigma^s(m),$$

also $\sigma^s = \pi$, wobei bei $(*)$ die Kommutativität von $\langle\sigma\rangle$ genutzt wird. Da wegen der Kommutativität von $\sigma^s = \pi$

$$\tau_{12} = \sigma^s\, \tau_{12}\, (\sigma^s)^{-1} = \tau_{(1+s)(2+s)},$$

wobei $\tau_{kl}$ die Transposition von $k \bmod n$ und $l \bmod n$ bezeichnet, muss $s = 0$, also $\pi = \sigma^s = \mathrm{id}$. Dass $\mathrm{id} \in Z(\mathfrak{S}_n)$ ist allerdings klar, da $Z(\mathfrak{S}_n) \subseteq \mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe ist.

## Aufgabe 3.2.

## Aufgabe 3.3.

### (i)

Durch

$$G \times G/H \to G/H, (g, aH) \mapsto gaH$$

wird eine Aktion von $G$ auf der Menge der Linksnebenklassen $G/H$ definiert. Diese Aktion entspricht dem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to S(G/H), g \mapsto (aH \mapsto gaH).$$

Es ist daher

$$\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \cdot \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi.$$

Da $\operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$ ein Teiler von $\operatorname{ord} S(G/H) = (G : H)!$ ist, $\operatorname{ord} G$ jedoch kein Teiler von $(G : H)!$, muss $\operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \neq 1$, also $\operatorname{Ker} \varphi$ nichttrivial sein. $\operatorname{Ker} \varphi$ ist als Kern eines Gruppenhomomorphismus normal in $G$. Es ist $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H$, denn für alle $n \in \operatorname{Ker} \varphi$ ist $nH = H$, da $H$ eine Linksnebenklasse in $G/H$ ist, also $n \in H$. Damit ist $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq H$ ein nichttrivialer Normalteiler von $G$.

## (ii)

Es gilt zu bemerken, dass die Aussage nur unter der zusätzlichen Bedingung $k > 0$ gilt: Ansonsten ist die triviale Gruppe mit $p = 2$, $k = 0$ und $m = 1$ ein Gegenbeispiel. Es wird daher die Aussage unter der zusätzlichen Annahme $k > 0$ gezeigt:
Nach den Sylowsätzen gibt es eine $p$-Sylowgruppe $S \subseteq G$. Da $S$ eine maximale $p$-Untergruppe ist, ist $\operatorname{ord} S = p^k$, also $(G : S) = m$. Wegen den Annahmen $k > 0$ und $p > m$ ist daher

$$\operatorname{ord} G = p^k m \nmid m! = (G : S)!.$$

Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es daher einen nicht trivialen Normalteiler $N \subseteq S \subseteq G$ von $G$ in $S$.

# Aufgabe 3.4.

## (i)

Da $S \subseteq H$ ein $p$-Sylowgruppe in $H$ ist, ist $S \subseteq G$ eine $p$-Gruppe in $G$. Nach den Sylowsätzen gibt es daher eine $p$-Sylowgruppe $T \subseteq G$ mit $S \subseteq T$. Da $S \subseteq H$ und $S \subseteq T$ ist $S \subseteq T \cap H$. Da $T \cap H \subseteq T$ eine $p$-Gruppe in $H$ ist, und $S$ als Sylowgruppe in $H$ bereits eine in $H$ maximale $p$-Gruppe ist, muss bereits $S = T \cap H$.

## (ii)

Sei $S \trianglelefteq G$ eine normale $p$-Sylowgruppe in $G$. Sei $T := S \cap H$. Als Untergruppe ist $T \subseteq S$ eine $p$-Gruppe. Wie aus der Vorlesunge bekannt ist $T$ normal in $H$. Nach den Sylowsätzen gibt es eine Sylowgruppe $T' \subseteq H$ mit $T \subseteq T'$. Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es daher eine Sylowgruppe $S' \subseteq G$ mit $T' = S' \cap H$. Da $S$ normal ist, ist $S$, wie aus der Vorlesung bekannt, die einzige $p$-Sylowgruppe in $G$. Also muss $S = S'$, und damit $T = T'$. Also ist $T$ eine normale $p$-Sylowgruppen $H$.

## (iii)

Sei $S \subseteq H$ eine $p$-Sylowgruppe; eine solche existiert nach den Sylowsätzen. Nach Aufgabenteil **(i)** gibt es eine $p$-Sylowgruppe $T' \subseteq G$ mit $S = T' \cap H$. Da $T$ und $T'$ $p$-Sylowgruppen in $G$ sind, sind sie konjugiert zueinander, d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $T' = gTg^{-1}$. Da $H$ normal in $G$ ist, ist auch $gHg^{-1} = H$. Es ist daher

$$S = T' \cap H = gTg^{-1} \cap gHg^{-1} = g(T \cap H)g^{-1},$$

wobei genutzt wird, dass $\operatorname{inn}_g$ als Automorphismus bijektiv ist. Da $S$ und $T \cap H$ konjugiert zueinder sind, und $S$ eine $p$-Sylowgruppe in $H$ ist, ist auch $T \cap H$ eine $p$-Sylowgruppe in $H$.