Einführung in die Algebre — Blatt 1

Jendrik Stelzner

23. Oktober 2013

Aufgabe 1.1.

Aufgabe 1.2.

Aufgabe 1.3.

(i)

Wie aus der Vorlesung bekannt reicht es zu zeigen, dass $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in G$. Sei hierzu $g \in G$ beliebig aber fest. Es sei $\mathrm{inn}_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$; wie aus Lineare Algebra I bekannt ist inn_g ein Gruppenautomorphismus von G. Daher ist insbesondere $\operatorname{ord} H = \operatorname{ord} \mathrm{inn}_g(H)$. Da aber H nach Annahme die einzige Untergruppe von G mit Ordung $\operatorname{ord} H$ ist, muss $gHg^{-1} = \mathrm{inn}_g(H) = H$. Aus der Beliebigkeit von g folgt damit die zu zeigende Aussage.

(ii)

Bemerkung. Seien G und G' Gruppen, G endlich, und $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \operatorname{Ker} \varphi \cdot \operatorname{ord} \operatorname{Im} \varphi$.

Beweis der Bemerkung. Wie aus der Vorlesung bekannt, ist $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$, also insbesondere $(G : \operatorname{Ker}\varphi) = \operatorname{ord} G/\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{ord}\operatorname{Im}\varphi$. Da nach dem Satz von Lagrange $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord}\operatorname{Ker}\varphi \cdot (G : \operatorname{Ker}\varphi)$ ist $(G : \operatorname{Ker}\varphi) = \frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord}\operatorname{Ker}\varphi}$. Gleichsetzen ergibt nun, dass $\frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord}\operatorname{Ker}\varphi} = \operatorname{ord}\operatorname{Im}\varphi$, also $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord}\operatorname{Ker}\varphi \cdot \operatorname{ord}\operatorname{Im}\varphi$. □

Sei F eine Untergruppe von G mit $\operatorname{ord} F = \operatorname{ord} H$. Es gilt zu zeigen, dass $F = H$. Hierzu betrachte man die kanonische Abbildung $\pi : G \to G/H$. Da F eine Untergruppe von G ist, ist $\pi(F)$ eine Untergruppe von $\pi(G) = G/H$, insbesondere ist nach dem Satz von Lagrange daher $\operatorname{ord}\pi(F)$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G/H = (G : H)$. Betrachtet man die Komposition

$$\varphi : F \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/H$$

so ist $\operatorname{Ker}\varphi = F \cap H$ und $\operatorname{Im}\varphi = \pi(F)$, nach der Bemerkung also

$$\operatorname{ord} H = \operatorname{ord} F = \operatorname{ord}\pi(F) \cdot \operatorname{ord} F \cap H.$$

Es ist also $\operatorname{ord}\pi(F)$ auch ein Teiler von $\operatorname{ord} H$. Da $\operatorname{ord} H$ und $(G : H)$ teilerfremd sind, muss $\operatorname{ord}\pi(F) = 1$, also $\pi(F) = \{1\}$ und daher $F \subseteq \operatorname{Ker}\pi = H$. Da $\operatorname{ord} F = \operatorname{ord} H$ gilt daher $F = H$.

Aufgabe 1.4.

(i)

Da, wie aus der Vorlesung bekannt, $\langle g \rangle$ für alle $g \in G$ eine Untergruppe von G ist, ist nach dem Satz von Lagrange $\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} \langle g \rangle$ für alle $g \in G$ ein Teiler von $\operatorname{ord} G$, und somit ebenfalls ungerade.
Da $aba = b \Leftrightarrow b = a^{-1}ba^{-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b^{2n+1} = a(baa^{-1}ba^{-1}a)^n ba = ab^{2n+1}a.$$

Da $\operatorname{ord} b$ ungerade ist, ist damit insbesondere

$$e = b^{\operatorname{ord} b} = ab^{\operatorname{ord} b}a = aea = a^2,$$

also a selbstinvers. Da damit $\langle a \rangle = \{e, a\}$, aber $\operatorname{ord} a$ ungerade ist, muss $a = e$.

(ii)

Da $c = abcba$ ist $cb = abcbab = ab \cdot cb \cdot ab$, nach Aufgabenteil **(i)** ist daher $ab = e$.

Aufgabe 1.5.

Es ist
$$U \cong U/\{1\} = U/(U \cap N) \cong UN/N,$$
wobei die letzte Isomorphie aus dem ersten Isomorphiesatz folgt. Analog ergibt sich, dass $V \cong VN/N$. Für $U \cong V$ ist es daher hinreichend, dass $UN = VN = G$. Dies ergibt sich durch Fallunterscheidung:
Ist $N = \{1\}$, so ist $N \subset U$ und $N \subset V$, also $U = V = G$ und damit insbesondere $UN = VN = G$.
Ist $N \neq \{1\}$, so ist gibt es wegen $U \cap N = \{1\}$ ein $u \in U$ mit $u \notin N$. Es ist dann $uN \subseteq UN$ aber $uN \cap N = \emptyset$, da $aN = N \Leftrightarrow a \in N$ für alle $a \in G$. Daher ist $UN \neq N$, also $N \subset UN$ und damit $UN = G$. Analog ergibt sich, dass auch $VN = G$.