# Einführung in die Algebra
## Blatt 5

Jendrik Stelzner

15. November 2013

## Aufgabe 5.1.

## Aufgabe 5.2.

## Aufgabe 5.3.

**Bemerkung 1.** Sei $R$ ein Ring mit mindestens zwei Elementen. Dann ist $0 \neq 1$ in $R$.

*Beweis.* Da $R$ mindestens zwei Elemente hat, gibt es ein $a \in R$ mit $a \neq 0$. Für $1 \in R$ ist

$$1 \cdot a = a \neq 0 = 0 \cdot a,$$

also $0 \neq 1$. □

## Aufgabe 5.4.

### (ii)

Für alle $a \in R$ ist

$$a^2 + 1 = a + 1 = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

also $2a = 0$. Insbesondere ist $a = -a$.

### (i)

Für alle $a, b \in R$ ist

$$ab - ba = ab + ba = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = a + b - a - b = 0,$$

also $ab = ba$, und daher $R$ kommutativ.

### (iii)

Seien $a, b \in R$ mit $a \neq b$. Es ist

$$(a-b)ab = a^2b - ab^2 = ab - ab = 0.$$

Da $a \neq b$ ist $a - b \neq 0$, wegen der Nullteilerfreiheit von $R$ also $ab = 0$. Wegen der Nullteilerfreiheit ist also $a = 0$ oder $b = 0$. Aus der Beliebigkeit von $a$ und $b$ folgt, dass es neben $0$ nur ein weiters Element in $R$ gibt. Also ist $R = \{0, 1\}$. Betrachtet man die Verknüpfungstabellen von R,

| $+$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $0$ |

und

| $\cdot$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ |

so ist $R$ offenbar isomorph zu $\mathbb{F}_2$.

## Aufgabe 5.5.

### (i)

Da $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $R$ ist, ist $ar \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $r \in R$. Es ist nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}) &= \sum_{a \in \mathfrak{a}} aR[X] = \sum_{a \in \mathfrak{a}} \left\{ a \sum_{i=0}^{n} a_i X^i : n \geq 0, a_i \in R \right\} \\ &= \sum_{a \in \mathfrak{a}} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a a_i X^i : n \geq 0, a_i \in R \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i : n \geq 0, a_i \in \mathfrak{a} \right\}. \quad (1)\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Gleichheit bei (1) wie folgt:
Für alle $f = \sum_{i=0}^{n} a a_i X^i \in aR[X]$ ist $a a_i \in \mathfrak{a}$, da $a \in \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $R$ ist, also $f$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathfrak{a}$.
Andererseits ist jedes Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$ die Summe der Monome $f_i := a_i X^i \in a_i R[X]$. Also ist $f \in \sum_{i=1}^{n} a_i R[X]$.