

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

BLATT 9

Jendrik Stelzner

18. Dezember 2013

Aufgabe 9.1.

Die Multiplikation $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ von \mathbb{Q} als \mathbb{Z} -Modul ist offenbar die Einschränkung der Multiplikation $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ des Körpers \mathbb{Q} . Die Torsionsfreiheit von \mathbb{Q} als \mathbb{Z} -Modul folgt daher direkt aus der Nullteilerfreiheit von \mathbb{Q} als Körper.

\mathbb{Q} ist als \mathbb{Z} -Modul nicht endlich erzeugt, denn für $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_n}{s_n} \in \mathbb{Q}$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \frac{r_1}{s_1} + \dots + \mathbb{Z} \frac{r_n}{s_n} &\subseteq \mathbb{Z} \frac{1}{s_1} + \dots + \mathbb{Z} \frac{1}{s_n} \\ &\subseteq \mathbb{Z} \frac{1}{s_1 \cdots s_n} + \dots + \mathbb{Z} \frac{1}{s_1 \cdots s_n} = \mathbb{Z} \frac{1}{s_1 \cdots s_n} \subsetneq \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

\mathbb{Q} ist als \mathbb{Z} -Modul nicht frei: Für $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ besitzt

$$rq \frac{p}{q} = pr = ps \frac{r}{s}$$

zwei verschiedene Linearkombinationen. Daher ist jede Familie von mindestens zwei rationalen Zahlen linear abhängig. Insbesondere also jedes Erzeugendensystem von \mathbb{Q} als \mathbb{Z} -Modul, da ein solches unendlich ist.

Aufgabe 9.2.

(i)

Es handelt sich bei \sim um eine Äquivalenzrelation auf $M \times S$: Für alle $(m, s) \in M \times S$ ist $1 \cdot sm = 1 \cdot sm$ mit $1 \in S$ und deshalb $(m, s) \sim (m, s)$. Also ist \sim reflexiv. Ist $(m, s) \sim (m', s')$ für $(m, s), (m', s') \in M \times S$, so gibt es ein $t \in S$ mit $ts'm = tsm'$. Da damit auch $tsm' = ts'm$ ist $(m', s') \sim (m, s)$. Also ist \sim symmetrisch. Ist $(m, s) \sim (m', s') \sim (m'', s'')$, so gibt es $t, \tilde{t} \in S$ mit

$$ts'm = tsm' \text{ und } \tilde{t}s'm'' = \tilde{t}s''m'.$$

Da S unter der Multiplikation abgeschlossen ist, ist auch $t\tilde{t}s' \in S$. Da wegen der Kommutativität von R

$$t\tilde{t}s' \cdot s''m = \tilde{t}s'' \cdot ts'm = \tilde{t}s'' \cdot tsm' = ts \cdot \tilde{t}s''m' = ts \cdot \tilde{t}s'm'' = t\tilde{t}s' \cdot sm''$$

ist $(m, s) \sim (m'', s'')$. Daher ist \sim transitiv. Dies zeigt, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

Die Addition ist wohldefiniert: Für $\frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m'}{s'} = \frac{m''}{s''}$ gibt es ein $t \in S$ mit $ts''m' = ts'm''$. Wegen der Kommutativität von R ist für alle $(m, s) \in M \times S$

$$\begin{aligned} tss''(s'm + sm') &= tss's''m + ts^2s''m' \\ &= tss's''m + ts^2s'm'' = tss'(s''m + sm''), \end{aligned}$$

und deshalb $\frac{s'm + sm'}{ss'} = \frac{s''m + sm''}{ss''}$. Da der Ausdruck $\frac{sm' + s'm}{ss'}$ wegen der Kommutativität von R symmetrisch in (m, s) und (m', s') ist, folgt damit die Wohldefiniertheit der Addition.

Auch die Multiplikation ist wohldefiniert: Für $\frac{r}{s}, \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \in R[S^{-1}]$ mit $\frac{r}{s} = \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}$ gibt es ein $t \in S$ mit $t\tilde{r}s = tr\tilde{s}$, weshalb wegen der Kommutativität von R für alle $(m', s') \in M \times S$

$$t\tilde{s}s'rm' = tss'\tilde{r}m',$$

also $\frac{rm'}{ss'} = \frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'}$. Für $\frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m'}{s'} = \frac{m''}{s''}$ gibt es ein $t \in S$ mit $ts''m' = ts'm''$, weshalb wegen der Kommutativität von R für alle $(r, s) \in R \times S$

$$tss''rm' = tss'rm'',$$

also $\frac{rm'}{ss'} = \frac{rm''}{ss''}$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der Multiplikation.

$M[S^{-1}]$ bildet bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe: Die Addition ist assoziativ, da für alle $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \left(\frac{m'}{s'} + \frac{m''}{s''} \right) &= \frac{m}{s} + \frac{s''m' + s'm''}{s's''} = \frac{s's''m + ss''m' + ss'm''}{ss's''} \\ &= \frac{s'm + sm'}{ss'} + \frac{m''}{s''} = \left(\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} \right) + \frac{m''}{s''}, \end{aligned}$$

und kommutativ, da für alle $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} = \frac{sm' + s'm}{s's} = \frac{m'}{s'} + \frac{m}{s}.$$

Das Element $\frac{0}{1} \in M[S^{-1}]$ ist bezüglich der Addition neutral, da für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$

$$\frac{m}{s} + \frac{0}{1} = \frac{1 \cdot m + s \cdot 0}{s \cdot 1} = \frac{m}{s}.$$

Dabei bemerken wir direkt, dass $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$ für alle $s \in S$. Jedes Element $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$ hat $\frac{-m}{s} \in M[S^{-1}]$ als additiv inverses Element, da

$$\frac{m}{s} + \frac{-m}{s} = \frac{sm - sm}{s^2} = \frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}.$$

Dies zeigt, dass $M[S^{-1}]$ bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe bildet.

Zusammen mit der definierten Multiplikation wird die abelsche Gruppe $M[S^{-1}]$ zu einem $R[S^{-1}]$ -Modul: Es seien $\frac{r}{s}, \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \in R[S^{-1}]$ und $\frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''} \in M[S^{-1}]$ beliebig aber fest. Es ist

$$1_{R[S^{-1}]} \frac{m'}{s'} = \frac{1_R m'}{1_R s'} = \frac{1_R m'}{1_R s'} = \frac{m'}{s'}.$$

Wir bemerken, dass für alle $\hat{s} \in S$ die Kürzungsregel

$$\frac{\hat{s}m'}{\hat{s}s'} = \frac{\hat{s}}{\hat{s}} \frac{m'}{s'} = 1_{R[S^{-1}]} \frac{m'}{s'} = \frac{m'}{s'}$$

gilt. Es ist daher

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} \left(\frac{m'}{s'} + \frac{m''}{s''} \right) &= \frac{r}{s} \frac{s''m' + s'm''}{s's''} = \frac{rs''m' + rs'm''}{ss's''} \\ &= \frac{rss''m' + rss'm''}{s^2s's''} = \frac{rm'}{ss'} + \frac{rm''}{ss''} = \frac{r}{s} \frac{m'}{s'} + \frac{r}{s} \frac{m''}{s''}. \end{aligned}$$

Auch ist deshalb

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{s} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \right) \frac{m'}{s'} &= \frac{r\tilde{s} + \tilde{r}s}{s\tilde{s}} \frac{m'}{s'} = \frac{r\tilde{s}m' + \tilde{r}sm'}{s\tilde{s}s'} \\ &= \frac{r\tilde{s}s'm' + \tilde{r}ss'm'}{s\tilde{s}(s')^2} = \frac{rm'}{ss'} + \frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'} = \frac{r}{s} \frac{m'}{s'} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \frac{m'}{s'}. \end{aligned}$$

Da auch

$$\frac{r}{s} \left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \frac{m'}{s'} \right) = \frac{r}{s} \frac{\tilde{r}m'}{\tilde{s}s'} = \frac{r\tilde{r}m'}{s\tilde{s}s'} = \frac{r\tilde{r}}{s\tilde{s}} \frac{m'}{s'} = \left(\frac{r}{s} \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \right) \frac{m'}{s'},$$

ist $M[S^{-1}]$ bezüglich der definierten Multiplikation ein $R[S^{-1}]$ -Modul.

(ii)

Da für jedes $s \in S$ die Abbildung $n \mapsto sn$ in N bijektiv ist, gibt es für alle $n' \in N$ und $s \in S$ ein eindeutiges $n \in N$ mit $sn = n'$, für das wir im Folgenden $\frac{n'}{s}$ schreiben werden. Für alle $n \in N$ und $s \in S$ ist also nach Definition ist $s \frac{n}{s} = n$.

Behauptung 1. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- (i) Für alle $n, n' \in N$ und $s, s' \in S$ ist $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$ genau dann wenn $s'n = sn'$.
- (ii) Für alle $n, n' \in N$ und $s \in S$ ist $\frac{n+n'}{s} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s}$.
- (iii) Für alle $n, n' \in N$ und $s, s' \in S$ ist $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{s'n+sn'}{ss'}$.
- (iv) Für alle $n \in N$, $s \in S$, und $r \in R$ ist $r \frac{n}{s} = \frac{rn}{s}$.

Beweis. (i)

Ist $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$, so ist

$$s'n = s's \frac{n}{s} = s's \frac{n'}{s'} = ss' \frac{n'}{s'} = sn'.$$

Gilt andererseits $sn' = s'n$, so ist

$$s's \frac{n}{s} = s'n = sn' = ss' \frac{n'}{s'} = s's \frac{n'}{s'},$$

wegen der Injektivität der Multiplikation mit $s's \in S$ also $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$.

(ii)

Es ist

$$s \left(\frac{n}{s} + \frac{n'}{s} \right) = s \frac{n}{s} + s \frac{n'}{s} = n + n',$$

$$\text{also } \frac{n+n'}{s} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s}.$$

(iii)

Es ist

$$ss' \left(\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} \right) = s's \frac{n}{s} + ss' \frac{n'}{s'} = s'n + sn',$$

$$\text{also } \frac{s'n+sn'}{ss'} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'}.$$

(iv)

Es ist

$$sr \frac{n}{s} = rs \frac{n}{s} = rn,$$

$$\text{also } r \frac{n}{s} = \frac{rn}{s}.$$

□

Wir gehen davon aus, dass diese Rechenregeln dem Leser nicht allzu überraschend erscheinen, sodass wir sie im Weiteren ohne Erinnerung an diese Behauptung nutzen werden.

Gibt es eine entsprechende Abbildung ψ , so ist für alle $\frac{m}{1} \in M[S^{-1}]$

$$\psi \left(\frac{m}{1} \right) = \psi(\varphi(m)) = \varphi'(m),$$

und damit auch für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$

$$s \psi \left(\frac{m}{s} \right) = \psi \left(s \frac{m}{s} \right) = \psi \left(\frac{sm}{s} \right) = \psi \left(\frac{m}{1} \right) = \varphi'(m),$$

also $\psi \left(\frac{m}{s} \right) = \frac{\varphi'(m)}{s}$. ψ ist also eindeutig.

Sei nun ψ durch $\psi \left(\frac{m}{s} \right) = \frac{\varphi'(m)}{s}$ definiert. ψ ist wohldefiniert: Für $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$ mit $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ gibt es ein $t \in S$ mit $ts'm = tsm'$. Es ist daher

$$ts'\varphi'(m) = \varphi'(ts'm) = \varphi'(tsm') = ts\varphi'(m'),$$

also $s'\varphi'(m) = s\varphi'(m')$ und deshalb $\frac{\varphi'(m)}{s} = \frac{\varphi'(m')}{s'}$.

Es gilt zu zeigen, dass ψ ein R -Modulhomomorphismus ist. Dies ergibt sich durch einfaches Nachrechnen: Für alle $\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$ ist

$$\begin{aligned} \psi \left(\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} \right) &= \psi \left(\frac{s'm + sm'}{ss'} \right) = \frac{\varphi'(s'm + sm')}{ss'} \\ &= \frac{s'\varphi'(m) + s\varphi'(m')}{ss'} = \frac{\varphi'(m)}{s} + \frac{\varphi'(m')}{s'} = \psi \left(\frac{m}{s} \right) + \psi \left(\frac{m'}{s'} \right), \end{aligned}$$

und für alle $r \in R$ und $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$ ist

$$\psi \left(r \frac{m}{s} \right) = \psi \left(\frac{rm}{s} \right) = \frac{\varphi'(rm)}{s} = \frac{r\varphi'(m)}{s} = r \frac{\varphi'(m)}{s} = r \psi \left(\frac{m}{s} \right).$$

(iii)

Es sei $\varphi_M : M \rightarrow M[S^{-1}]$, $m \mapsto \frac{m}{1}$, sowie φ_N und φ_P analog definiert. Zusammen mit der exakten Sequenz

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

ergibt sich damit das folgende Diagramm, in welcher die obere Zeile exakt ist.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P \\ \varphi_M \downarrow & & \varphi_N \downarrow & & \varphi_P \downarrow \\ M[S^{-1}] & & N[S^{-1}] & & P[S^{-1}] \end{array}$$

Wir bemerken, dass für alle $s \in S$ die Abbildung

$$\tau_s : M[S^{-1}] \rightarrow M[S^{-1}], \frac{m'}{s'} \mapsto s \frac{m'}{s'} = \frac{sm'}{s'}$$

auf dem R -Modul $M[S^{-1}]$ bijektiv ist, denn für die Abbildung

$$\tau_{1/s} : M[S^{-1}] \rightarrow M[S^{-1}], \frac{m'}{s'} \mapsto \frac{1}{s} \frac{m'}{s'} = \frac{m'}{ss'}$$

ist $\tau_s \tau_{1/s} = \tau_{1/s} \tau_s = \text{id}_{M[S^{-1}]}$. Für $N[S^{-1}]$ und $P[S^{-1}]$ zeigt man auf gleiche Weise die analogen Aussagen.

Damit ergibt sich aus dem vorherigen Aufgabenteil, dass es für den R -Modulhomomorphismus $(\varphi_N f) : M \rightarrow N[S^{-1}]$ einen eindeutigen R -Modulhomomorphismus $\bar{f} : M[S^{-1}] \rightarrow N[S^{-1}]$ mit $\bar{f} \varphi_M = \varphi_N f$ gibt. Analog gibt es einen eindeutigen R -Modulhomomorphismus $\bar{g} : N[S^{-1}] \rightarrow P[S^{-1}]$ mit $\bar{g} \varphi_N = \varphi_P g$. Das bedeutet, dass diese beiden Homomorphismen die beiden eindeutigen sind, für die das folgende Diagramm von R -Modulhomomorphismen kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P \\ \varphi_M \downarrow & & \varphi_N \downarrow & & \varphi_P \downarrow \\ M[S^{-1}] & \xrightarrow{\exists! \bar{f}} & N[S^{-1}] & \xrightarrow{\exists! \bar{g}} & P[S^{-1}] \end{array}$$

Aus dem letzten Aufgabenteil ergibt sich auch direkt, dass

$$\begin{aligned} \bar{f} \left(\frac{m}{s} \right) &= \frac{f(m)}{s} \text{ für alle } \frac{m}{s} \in M[S^{-1}] \text{ und} \\ \bar{g} \left(\frac{n}{s} \right) &= \frac{g(n)}{s} \text{ für alle } \frac{n}{s} \in N[S^{-1}]. \end{aligned}$$

(Man beachte, dass $\varphi' = \varphi_N f$ und für das Element $n = \frac{n'}{s'} \in N[S^{-1}]$ und $s \in S$ die Notation $\frac{n}{s}$ aus dem vorherigen Aufgabenteil das Element $\frac{n'}{ss'}$ beschreibt. Analoges gilt für \bar{g} und $M[S^{-1}]$.)

Die R -Modulhomomorphismen \bar{f} und \bar{g} sind auch $R[S^{-1}]$ -Modulhomomorphismen, denn für alle $\frac{r}{s} \in R[S^{-1}]$ und $\frac{m'}{s'} \in M[S^{-1}]$ ist

$$\bar{f}\left(\frac{r}{s} \frac{m'}{s'}\right) = \bar{f}\left(\frac{rm'}{ss'}\right) = \frac{f(rm')}{ss'} = \frac{rf(m')}{ss'} = \frac{r}{s} \frac{f(m')}{s'} = \frac{r}{s} \bar{f}\left(\frac{m'}{s'}\right),$$

und für \bar{g} läuft der Beweis analog.

Aus der Exaktheit der R -Modulhomomorphismen

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

folgt die Exaktheit der $R[S^{-1}]$ -Modulhomomorphismen

$$M[S^{-1}] \xrightarrow{\bar{f}} N[S^{-1}] \xrightarrow{\bar{g}} P[S^{-1}].$$

Da $gf = 0$ ist für alle $\frac{m}{s} \in M[S^{-1}]$

$$(\bar{g}\bar{f})\left(\frac{m}{s}\right) = \bar{g}\left(\frac{f(m)}{s}\right) = \frac{(gf)(m)}{s} = \frac{0}{s} = \frac{0}{1},$$

also $\text{Im } \bar{f} \subseteq \text{Ker } \bar{g}$.

Für alle $\frac{n}{s} \in N[S^{-1}]$ ist

$$\bar{g}\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \frac{g(n)}{s} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \exists t \in S : tg(n) = 0.$$

Dabei ist für alle $t \in S$

$$tg(n) = 0 \Leftrightarrow g(tn) = 0 \Leftrightarrow tn \in \text{Ker } g = \text{Im } f \Leftrightarrow \exists m \in M : f(m) = tn.$$

Also gibt es für $\frac{n}{s} \in \text{Ker } \bar{g}$ ein $t \in S$ und $m \in M$ mit $f(m) = tn$, weshalb

$$\bar{f}\left(\frac{m}{ts}\right) = \frac{f(m)}{ts} = \frac{tn}{ts} = \frac{n}{s}$$

und daher $\text{Ker } \bar{g} \subseteq \text{Im } \bar{f}$.

Aufgabe 9.3.

Für die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

ist f injektiv, also $M \cong \text{Im } f \subseteq N$, und g surjektiv, also $P \cong N/\ker g = N/\text{Im } f$. Da die Länge eines Moduls invariant unter Isomorphie ist, genügt es daher zu zeigen, dass für einen Modul N und einen Untermodul $M \subseteq N$

$$l_A(N) = l_A(M) + l_A(N/M).$$

Es bezeichne $\pi : N \rightarrow N/M$ die kanonische Projektion. Offenbar induziert π eine Bijektion zwischen den Untermodulen von N , die M beinhalten, und den Untermodulen von N/M . Daher ergibt sich aus jeder Kette

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r = M$$

von M der Länge r und Kette

$$0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_s = N/M$$

von N/M der Länge s eine Kette

$$0 = M_0 \subsetneq \dots \subsetneq M_r = \pi^{-1}(P_0) \subsetneq \dots \subsetneq \pi^{-1}(P_s) = N$$

von N der Länge $r + s$. Daher ist

$$l_A(N) \geq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Andererseits ergibt sich aus einer Kette

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_t = N$$

von N der Länge t eine Kette

$$0 = M \cap N_0 \subseteq M \cap N_1 \subseteq \dots \subseteq M \cap N_t = M$$

von M und eine Kette

$$0 = \pi(N_0) \subseteq \pi(N_1) \subseteq \dots \subseteq \pi(N_t) = N/M$$

von N/M . Da $\ker \pi = M$ und $N_i \subsetneq N_{i+1}$ für alle $i = 0, \dots, t-1$ ist $M \cap N_i \subsetneq M \cap N_{i+1}$ oder $\pi(N_i) \subsetneq \pi(N_{i+1})$ für alle $i = 0, \dots, t-1$. Deshalb ist

$$l_A(N) \leq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Aufgabe 9.4.

Aufgabe 9.5.

(i)

Für einen R -Modul M bezeichne $T(M) \subseteq M$ den Torsionsuntermodul von M . Für $i \in I$ schreiben wir $T_i := T(M_i)$. Es ist $\bigoplus_{i \in I} T_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$ und

$$T\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigoplus_{i \in I} T(M_i) = \bigoplus_{i \in I} T_i.$$

Für $(m_i)_{i \in I} \in T\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right)$ gibt ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I} = 0$, also $rm_i = 0$ für alle $i \in I$. Daher ist $m_i \in T_i$ für alle $i \in I$. Da $m_i = 0$ für fast alle $i \in I$ ist $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} T_i$.

Für $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} T_i$ ist $m_i = 0$ für fast alle $i \in I$. Es seien $i_1, \dots, i_n \in I$ genau die Indizes mit $m_{i_j} \neq 0$. Da $m_{i_j} \in T_{i_j}$ für alle $j = 1, \dots, n$ gibt es für alle $j = 1, \dots, n$ ein $r_j \in R \setminus \{0\}$ mit $r_j m_{i_j} = 0$. Da R kommutativ ist, ist daher $(r_1 \cdots r_n) m_i = 0$ für alle $i \in I$, also

$$(r_1 \cdots r_n)(m_i)_{i \in I} = ((r_1 \cdots r_n) m_i)_{i \in I} = 0.$$

Da R nullteilerfrei ist und $r_j \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$ ist $r_1 \cdots r_n \neq 0$. Daher ist $(m_i)_{i \in I} \in T\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right)$.

(ii)

Es bezeichne $P \subsetneq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen. Für alle $p \in P$ ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe, die wir als \mathbb{Z} -Modul auffassen. Jedes $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $x \neq 0$ hat Ordnung p , weshalb $n \cdot x = 0 \Leftrightarrow p \mid n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da jedes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Torsionsmodul ist, ist

$$\prod_{p \in P} T(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Dies ist als \mathbb{Z} -Modul kein Torsionsmodul: Für $(1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p \in P} \in \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$0 = n \cdot (1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p \in P} = (n \cdot 1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p \in P}$$

muss $p \mid n$ für alle $p \in P$, also $n = 0$. Deshalb ist $\prod_{p \in P} T(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ nicht isomorph zum Torsionsmodul $T(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.