

# EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

## BLATT 9

Jendrik Stelzner

16. Dezember 2013

### Aufgabe 9.1.

Die Multiplikation  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  von  $\mathbb{Q}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul ist offenbar die Einschränkung der Multiplikation  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  des Körpers  $\mathbb{Q}$ . Die Torsionsfreiheit von  $\mathbb{Q}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul folgt daher direkt aus der Nullteilerfreiheit von  $\mathbb{Q}$  als Körper.

$\mathbb{Q}$  ist als  $\mathbb{Z}$ -Modul nicht endlich erzeugt, denn für  $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_n}{s_n} \in \mathbb{Q}$  ist offenbar

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \frac{r_1}{s_1} + \dots + \mathbb{Z} \frac{r_n}{s_n} &\subseteq \mathbb{Z} \frac{1}{s_1} + \dots + \mathbb{Z} \frac{1}{s_n} \\ &\subseteq \mathbb{Z} \frac{1}{s_1 \cdots s_n} + \dots + \mathbb{Z} \frac{1}{s_1 \cdots s_n} \subseteq \mathbb{Z} \frac{1}{s_1 \cdots s_n} \subsetneq \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

$\mathbb{Q}$  ist als  $\mathbb{Z}$ -Modul nicht frei: Für  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  besitzt

$$rq \frac{p}{q} = pr = ps \frac{r}{s}$$

zwei unterschiedliche Linearkombinationen. Daher ist jede Familie von mindestens zwei rationalen Zahlen linear abhängig, insbesondere also jedes Erzeugendensystem von  $\mathbb{Q}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul, da ein solches unendlich ist.

### Aufgabe 9.2.

### Aufgabe 9.3.

Für die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

ist  $f$  injektiv, also  $M \cong \operatorname{Im} f \subseteq N$ , und  $g$  surjektiv, also  $P \cong N / \ker g = N / \operatorname{Im} f$ . Da die Länge eines Moduls invariant unter Isomorphie ist, können wir daher o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $M \subseteq N$  ein Untermodul ist und  $P = N/M$ . Es gilt also zu zeigen, dass

$$l_A(N) = l_A(M) + l_A(N/M).$$

Es bezeichne  $\pi : N \rightarrow N/M$  die kanonische Projektion. Offenbar induziert  $\pi$  eine Bijektion zwischen den Untermodulen von  $N$ , die  $M$  beinhalten, und den Untermodulen von  $N/M$ . Daher ergibt sich aus jeder Kette von  $M$

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r = M$$

der Länge  $r$  und Kette von  $N/M$

$$0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_s = N/M$$

der Länge  $s$  eine Kette von  $N$

$$0 = M_0 \subsetneq \dots \subsetneq M_r = \pi^{-1}(P_0) \subsetneq \dots \subsetneq \pi^{-1}(P_s) = N$$

der Länge  $r + s$ . Daher ist

$$l_A(N) \geq l_A(M) + l_A(N/M).$$

Andererseits ergibt sich aus einer Kette

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_t = N$$

der Länge  $t$  von  $N$  eine Kette

$$0 = M \cap N_0 \subsetneq M \cap N_1 \subseteq \dots \subseteq M \cap N_t = M$$

von  $M$  und eine Kette

$$0 = \pi(N_0) \subseteq \pi(N_1) \subseteq \dots \subseteq \pi(N_t) = N$$

von  $N$ . Da  $\pi = N$  und  $N_i \subsetneq N_{i+1}$  für alle  $i = 0, \dots, t-1$  ist  $M \cap N_i \subsetneq M \cap N_{i+1}$  oder  $\pi(N_i) \subsetneq \pi(N_{i+1})$  für alle  $i = 0, \dots, t-1$ . Deshalb ist

$$l_A(N) \leq l_A(M) + l_A(N/M).$$

## Aufgabe 9.4.

## Aufgabe 9.5.

(i)

Es bezeichne  $T(\bigoplus_{i \in I} M_i)$  den Torsionsuntermodul von  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  und für alle  $i \in I$  bezeichne  $T(M_i) = T_i$  den Torsionsuntermodul von  $M_i$ . Es ist  $\bigoplus_{i \in I} T_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$  und

$$T\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigoplus_{i \in I} T(M_i) = \bigoplus_{i \in I} T_i.$$

Für  $(m_i)_{i \in I} \in T(\bigoplus_{i \in I} M_i)$  gibt ein  $r \in R \setminus \{0\}$  mit  $r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I} = 0$ , also  $rm_i = 0$  für alle  $i \in I$ . Daher ist  $m_i \in T_i$  für alle  $i \in I$ . Da  $m_i = 0$  für fast alle  $i \in I$  ist  $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} T_i$ .

Für  $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} T_i$  ist  $m_i = 0$  für fast alle  $i \in I$ . Es seien  $i_1, \dots, i_n \in I$  genau die Indizes mit  $m_{i_j} \neq 0$ . Da  $m_{i_j} \in T_{i_j}$  für alle  $j = 1, \dots, n$  gibt es für alle  $j = 1, \dots, n$  ein  $r_j \in R \setminus \{0\}$  mit  $r_j m_{i_j} = 0$ . Da  $R$  kommutativ ist, ist daher  $(r_1 \cdots r_n) m_i = 0$  für alle  $i \in I$ , also  $(r_1 \cdots r_n)(m_i)_{i \in I} = 0$ . Da  $R$  ein Integritätsring ist, ist  $r_1 \cdots r_n \neq 0$ , da  $r_j \neq 0$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Daher ist  $(m_i)_{i \in I} \in T(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ .

(ii)

Es bezeichne  $P \subseteq \mathbb{N}$  die Menge aller Primzahlen. Für alle  $p \in P$  ist  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  eine abelsche Gruppe, die wir in naheliegender Weise als  $\mathbb{Z}$ -Modul auffassen. Jedes  $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  mit  $x \neq 0$  hat Ordnung  $p$ , weshalb  $n \cdot x = 0 \Leftrightarrow p \mid n$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Da jedes  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Torsionsmodul ist, ist

$$\prod_{p \in P} T(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Dies ist kein Torsionsmodul: Für  $(1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p \in P} \in \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{Z}$  mit

$$n \cdot (1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p \in P} = (n \cdot 1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_{p \in P} = 0$$

muss  $n \mid p$  für alle  $p \in P$ , also  $n = 0$ . Deshalb ist  $\prod_{p \in P} T(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  nicht isomorph zum Torsionsmodul  $T(\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .