

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

BLATT 6

Jendrik Stelzner

22. November 2013

Aufgabe 5.1.

Es sei $n > 1$ so dass

$$a^n = a \text{ für alle } a \in R, \quad (1)$$

und \mathfrak{p} ein Primideal in R . Da \mathfrak{p} ein Primideal ist, ist R/\mathfrak{p} ein Integritätsring, sowie $R/\mathfrak{p} \neq 0$, da \mathfrak{p} von R verschieden ist. Da R kommutativ ist, ist es auch R/\mathfrak{p} , und es ist offensichtlich, dass die Bedingung (1) auf R/\mathfrak{p} vererbt wird. Da für alle $r \in R/\mathfrak{p}$ mit $r \neq 0$

$$r \cdot r^{n-1} = r^n = r = r \cdot 1,$$

folgt, wie bereits letzte Woche gezeigt, wegen der Nullteilerfreiheit von R/\mathfrak{p} , dass $r^{n-1} = 1$ für alle $r \in R/\mathfrak{p}$. Als ist für alle $r \in R/\mathfrak{p}$ mit $r \neq 0$

$$r r^{n-2} = r^{n-1} = 1,$$

d.h. alle $r \in R/\mathfrak{p}$ mit $r \neq 0$ sind multiplikativ invertierbar. Zusammen mit der Kommutativität von R/\mathfrak{p} und $R/\mathfrak{p} \neq 0$ zeigt dies, dass R/\mathfrak{p} ein Körper ist. Dies ist äquivalent dazu, dass \mathfrak{p} ein maximales Ideal ist.

Aufgabe 5.2.

Für alle $a \in \ker \varphi$ ist $1 - a$ multiplikativ invertierbar: Für $n \geq 1$ mit $a^n = 0$ ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})(1 - a) &= 1 - a^n = 1 \text{ und} \\ (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) &= 1 - a^n = 1. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$1 + \ker \varphi = 1 - \ker \varphi \subseteq R^*.$$

Wir bemerken auch, dass

$$x \in 1 + \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 1,$$

denn da $1 \in \varphi^{-1}(\{1\})$ ist $1 + \ker \varphi$ als Nebenklasse von 1 bezüglich $\ker \varphi$ die Faser $\varphi^{-1}(\{1\})$ von $1 \in S$ unter φ .

Bekanntermaßen induziert φ einen Gruppenhomomorphismus $\varphi|_{R^*} : R^* \rightarrow S^*$ der entsprechenden Einheitengruppen. Die Surjektivität von φ vererbt sich dabei auf $\varphi|_{R^*}$: Für $s \in S^*$ gibt es $r, r' \in R$ mit $\varphi(r) = s$ und $\varphi(r') = s^{-1}$. Es ist

$$\varphi(rr') = \varphi(r)\varphi(r') = ss^{-1} = 1,$$

also wie oben bemerkt $rr' \in 1 + \ker \varphi \subseteq R^*$. Es ist nun nach den obigen Beobachtungen

$$\ker \varphi|_{R^*} = \{x \in R^* : \varphi(x) = 1\} = R^* \cap \varphi^{-1}(\{1\}) = R^* \cap (1 + \ker \varphi) = 1 + \ker \varphi.$$

Folglich ist $1 + \ker \varphi$ ein Normalteiler von R^* und

$$R^*/(1 + \ker \varphi) \cong S^*.$$