Einführung in die Algebra
Blatt 10

Jendrik Stelzner

7. Januar 2014

Aufgabe 10.4.

Für einen beliebigen Körper K und beliebiges $g \in K[X]$ mit $\deg g \geq 1$ gilt, da $K[X]$ ein Hauptidealring ist, bekanntermaßen

$$K[X]/(g) \text{ ist ein Körper } \Leftrightarrow (g) \text{ ist maximal } \Leftrightarrow g \text{ ist irreduzibel.}$$

Da das Polynom $f = X^3 - 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, nicht jedoch in $\mathbb{R}[X]$, ist $\mathbb{Q}[X]/(f)$ ein Körper, $\mathbb{R}[X]/(f)$ jedoch nicht.

Aufgabe 10.5.

(i)

Da α und β algebraisch über K sind, ist die Körpererweiterung $K(\alpha, \beta)/K$ algebraisch und $K(\alpha, \beta) = K[\alpha, \beta]$. Insbesondere ist daher $(\alpha^k \beta^l)_{k,l \in \mathbb{N}}$ ein K-Erzeugendensystem von $K(\alpha, \beta)$.
Sei nun $x_1, \ldots, x_m \in K(\alpha)$ eine K-Basis von $K(\alpha)$ und $y_1, \ldots, y_n \in K(\beta)$ eine K-Basis von $K(\beta)$. Es ist $(x_i y_j)_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$ ein K-Erzeugendensystem von $K(\alpha, \beta)$, und damit insbesondere

$$K[(\alpha, \beta) : K] = \dim_K(K(\alpha, \beta)) \leq mn$$

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gibt es nämlich (eindeutige) $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k \in K$ mit $\alpha^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k x_i$ und $\mu_1^l, \ldots, \mu_n^l \in K$ mit $\beta^l = \sum_{j=1}^n \mu_j^l y_j$, weshalb

$$\alpha^k \beta^l = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \mu_j^l y_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i^k \mu_j^l x_i y_j.$$

da $(\alpha^k \beta^l)_{k,l \in \mathbb{N}}$ ein K-Erzeugendensystem von $K(\alpha, \beta)$ ist, ist es daher auch $(x_i y_j)_{i,j}$.

(ii)

Aus der Kette von Körpererweiterungen

$$K \subseteq K(\alpha) \subseteq K(\alpha, \beta)$$

ergibt sich durch den Gradsatz, dass

$$[K(\alpha, \beta) : K] = [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K],$$

also

$$m = [K(\alpha) : K] \mid [K(\alpha, \beta) : K]$$

Analog ergibt sich, dass auch $n \mid [K(\alpha, \beta) : K]$. Folglich ist auch

$$\text{kgV}(m, n) \mid [K(\alpha, \beta)].$$

Dabei ist $\text{kgV}(m, n) = mn$, da m und n teilerfremd sind. Mit $[K(\alpha, \beta) : K] \geq 1$ ergibt sich damit, dass $mn \leq [K(\alpha, \beta) : K]$. Da auch $[K(\alpha, \beta) : K] \leq mn$ ist also

$$[K(\alpha, \beta) : K] = mn.$$