

# EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

## BLATT 6

Jendrik Stelzner

23. Januar 2014

### Aufgabe 6.1.

Es sei  $n > 1$  so dass

$$a^n = a \text{ für alle } a \in R, \quad (1)$$

und  $\mathfrak{p}$  ein Primideal in  $R$ . Da  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist, ist  $R/\mathfrak{p}$  ein Integritätsring, sowie  $R/\mathfrak{p} \neq 0$ , da  $\mathfrak{p}$  von  $R$  verschieden ist. Da  $R$  kommutativ ist, ist es auch  $R/\mathfrak{p}$ , und es ist offensichtlich, dass die Bedingung (1) auf  $R/\mathfrak{p}$  vererbt wird. Da für alle  $r \in R/\mathfrak{p}$  mit  $r \neq 0$

$$r \cdot r^{n-1} = r^n = r = r \cdot 1,$$

folgt, wie bereits letzte Woche gezeigt, wegen der Nullteilerfreiheit von  $R/\mathfrak{p}$ , dass  $r^{n-1} = 1$  für alle  $r \in R/\mathfrak{p}$ . Also ist für alle  $r \in R/\mathfrak{p}$  mit  $r \neq 0$

$$r r^{n-2} = r^{n-1} = 1,$$

d.h. alle  $r \in R/\mathfrak{p}$  mit  $r \neq 0$  sind multiplikativ invertierbar. Zusammen mit der Kommutativität von  $R/\mathfrak{p}$  und  $R/\mathfrak{p} \neq 0$  zeigt dies, dass  $R/\mathfrak{p}$  ein Körper ist. Dies ist äquivalent dazu, dass  $\mathfrak{p}$  ein maximales Ideal in  $R$  ist.

### Aufgabe 6.2.

**Bemerkung 1.** Sei  $R$  ein nicht notwendigerweise kommutativer Ring. Für  $x, y \in R$  ist genau dann  $xy \in R^*$ , wenn  $x, y \in R^*$ .

*Beweis.* Sind  $x, y \in R^*$  so ist auch  $xy \in R^*$ , da die Einheitengruppe unter Multiplikation abgeschlossen ist.

Sei andererseits  $c := xy \in R^*$ . Da  $c \in R^*$  gibt es  $c^{-1} \in R^*$  mit  $cc^{-1} = 1$ . Es ist daher

$$x(y c^{-1}) = (xy) c^{-1} = c c^{-1} = 1,$$

also  $x \in R^*$  mit  $x^{-1} = y c^{-1}$ . Damit ist auch

$$y(c^{-1} x) = (y c^{-1}) x = x^{-1} x = 1,$$

also auch  $y \in R^*$ . □

Für alle  $a \in \ker \varphi$  ist  $1 - a$  multiplikativ invertierbar: Für  $n \geq 1$  mit  $a^n = 0$  ergibt sich, dass

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})(1 - a) = 1 - a^n = 1 \text{ und} \\ (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) = 1 - a^n = 1.$$

Folglich ist

$$1 + \ker \varphi = 1 - \ker \varphi \subseteq R^*.$$

Wir bemerken auch, dass

$$x \in 1 + \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 1,$$

denn da  $1 \in \varphi^{-1}(\{1\})$  ist  $1 + \ker \varphi$  als Nebenklasse von 1 bezüglich  $\ker \varphi$  die Faser  $\varphi^{-1}(\{1\})$  von  $1 \in S$  unter  $\varphi$ .

Bekanntermaßen induziert  $\varphi$  einen Gruppenhomomorphismus  $\varphi|_{R^*} : R^* \rightarrow S^*$  der entsprechenden Einheitengruppen. Die Surjektivität von  $\varphi$  vererbt sich dabei auf  $\varphi|_{R^*}$ : Für  $s \in S^*$  gibt es  $r, r' \in R$  mit  $\varphi(r) = s$  und  $\varphi(r') = s^{-1}$ . Es ist

$$\varphi(rr') = \varphi(r)\varphi(r') = ss^{-1} = 1,$$

also wie oben bemerkt  $rr' \in 1 + \ker \varphi \subseteq R^*$ . Nach Bemerkung 1 ist daher  $r \in R^*$ . Es ist nun nach den obigen Beobachtungen

$$\ker \varphi|_{R^*} = \{x \in R^* : \varphi(x) = 1\} = R^* \cap \varphi^{-1}(\{1\}) \\ = R^* \cap (1 + \ker \varphi) = 1 + \ker \varphi.$$

Folglich ist  $1 + \ker \varphi$  ein Normalteiler von  $R^*$  und

$$R^*/(1 + \ker \varphi) \cong S^*.$$

## Bemerkung

**Bemerkung 2.** Ist  $R$  ein kommutativer Ring, so ist jedes echte Ideal  $\mathfrak{a} \subsetneq R$  in einem maximalen Ideal von  $R$  enthalten.

*Beweis.* Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ein Ideal mit  $\mathfrak{a} \neq R$ . Die Menge

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq R : I \text{ ist ein Ideal in } R \text{ mit } I \neq R \text{ und } \mathfrak{a} \subseteq I\} \subseteq \mathcal{P}(R).$$

ist bezüglich der Teilmengenrelation  $\subseteq$  partiell geordnet. Da  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$  ist  $\mathcal{I}$  nichtleer. Es sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$  eine nichtleere Kette.  $\mathcal{C}$  besitzt eine obere Schranke in  $\mathcal{I}$ . Um dies zu zeigen, nutzen wir die folgende Bemerkung:

**Bemerkung 3.** Sei  $G$  eine abelsche Gruppe, und  $(G_i)_{i \in I}$  eine Kette von Untergruppen von  $G$ , d.h. für alle  $i \in I$  ist  $G_i$  eine Untergruppe von  $G$  und für  $i, j \in I$  ist  $G_i \subseteq G_j$  oder  $G_j \subseteq G_i$ . Dann ist

$$\sum_{i \in I} G_i = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

*Beweis.* Für alle  $i \in I$  ist  $G_i \subseteq \sum_{j \in I} G_j$ , also ist auch  $\bigcup_{i \in I} G_i \subseteq \sum_{i \in I} G_i$ . Für  $x \in \sum_{i \in I} G_i$  gibt es Indizes  $i_1, \dots, i_n \in I$  und Elemente  $g_{i_1} \in G_{i_1}, \dots, g_{i_n} \in G_{i_n}$  mit  $x = \sum_{j=1}^n g_{i_j}$ . Da die  $G_i$  bezüglich  $\subseteq$  total geordnet sind, gibt es ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $G_{i_j} \subseteq G_{i_k}$  für  $j = 1, \dots, n$ . Insbesondere ist  $g_{i_j} \in G_{i_k}$  für  $j = 1, \dots, n$ , also auch  $x \in G_{i_k}$ . Damit ist  $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$ , also  $\sum_{i \in I} G_i \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ .  $\square$

Aus dieser Behauptung folgt, dass

$$C := \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I = \sum_{I \in \mathcal{C}} I$$

ein Ideal in  $R$  ist. Für alle  $I \in \mathcal{C}$  gilt, dass  $I \neq R$ , also  $1 \notin I$ , und daher auch  $1 \notin C$ , also  $C \neq R$ . Auch ist  $\mathfrak{a} \subseteq I \subseteq C$  für  $I \in \mathcal{C}$ . Es ist also  $C \in \mathcal{I}$ , und deshalb  $C$  eine obere Schranke für  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{I}$ .

Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass es ein  $M \in \mathcal{I}$  gibt, dass bezüglich  $\subseteq$  maximal in  $\mathcal{I}$  ist.  $M$  ist ein maximales Ideal in  $R$ : Für jedes Ideal  $M'$  mit  $M \subseteq M' \subsetneq R$  ist  $\mathfrak{a} \subseteq M \subseteq M'$  und  $M' \neq R$ , also  $M' \in \mathcal{I}$ . Wegen der Maximalität von  $M$  in  $\mathcal{I}$  ist daher  $M' = M$ .  $\square$

### Aufgabe 6.3.

**Bemerkung 4.** Für alle  $a \in R$  ist  $a$  genau dann eine Einheit, wenn  $a$  in keinem maximalen Ideal von  $R$  enthalten ist.

*Beweis.* Ist  $a$  keine Einheit, so ist  $(a) \neq R$ ; wäre nämlich  $(a) = R$ , so gebe es insbesondere ein  $b \in R$  mit  $ab = 1$ . Da  $(a)$  ein echtes Ideal von  $R$  ist, folgt aus Bemerkung 2, dass es ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $R$  mit

$$a \in (a) \subseteq \mathfrak{m}$$

gibt.

Ist andererseits  $a$  eine Einheit, so folgt für jedes Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  mit  $a \in \mathfrak{a}$ , dass auch  $1 = aa^{-1} \in \mathfrak{a}$ , also  $\mathfrak{a} = R$ . Insbesondere ist  $\mathfrak{a}$  nicht maximal.  $\square$

Aufgrund von Bemerkung 4 reicht nun zu zeigen, dass  $a \in R$  genau dann in jedem maximalen Ideal von  $R$  liegt, wenn  $1 - ab$  für alle  $b \in R$  in keinem maximalen Ideal von  $R$  liegt. Dabei wird im Folgenden der Fall  $R = 0$  ausgeschlossen, da die Aussage in diesem Fall offenbar erfüllt ist. Nach Bemerkung 2 enthält  $R \neq 0$  mindestens ein maximales Ideal, da  $0 \subseteq R$  ein echtes Ideal ist.

Angenommen,  $a$  liegt in jedem maximalen Ideal von  $R$ . Gibt es ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $R$ , und  $b \in R$  mit  $1 - ab \in \mathfrak{m}$ , so ist wegen  $a \in \mathfrak{m}$  auch  $ab \in \mathfrak{m}$ , also  $1 = 1 - ab + ab \in \mathfrak{m}$ . Damit ist  $\mathfrak{m} = R$ , was der Maximalität von  $\mathfrak{m}$  widerspricht. Also ist  $1 - ab \notin \mathfrak{m}$  für jedes  $b \in R$  und maximale Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $R$ .

Angenommen, es gibt ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $R$  mit  $a \notin \mathfrak{m}$ . Dann ist  $(a) + \mathfrak{m}$  ein Ideal von  $R$  mit  $\mathfrak{m} \subsetneq (a) + \mathfrak{m}$ , wegen der Maximalität von  $\mathfrak{m}$  also  $(a) + \mathfrak{m} = R$ . Insbesondere gibt es ein  $b \in R$  und  $m \in \mathfrak{m}$  mit  $ab + m = 1$ . Es ist also  $1 - ab = m \in \mathfrak{m}$  nach Bemerkung 4 keine Einheit.

### Aufgabe 6.4.

**Definition.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Das Jacobson-Radikal von  $R$  ist der Schnitt über alle maximalen Ideale von  $R$ ,

$$J(R) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \subseteq R \\ \mathfrak{a} \text{ maximales Ideal}}} \mathfrak{a}.$$

Wie in Aufgabe 6.3. gezeigt ist diese Definition äquivalent zu

$$J(R) = \{a \in R : 1 - ab \in R^* \text{ für alle } b \in R\}.$$

Es ist  $J(R) = 0$ : Aufgrund der Nullteilerfreiheit von  $R$  ist für alle  $a \in J(R)$  mit  $a \neq 0$  die Abbildung

$$R \rightarrow R^*, b \mapsto 1 - ab$$

injektiv. Dies ist aber nicht möglich, da  $R$  unendlich und  $R^*$  endlich ist. Also gibt es kein  $a \in J(R)$  mit  $a \neq 0$ .

Angenommen  $R$  enthält nur endlich viele maximale Ideale  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ . Da maximale Ideale immer paarweise koprim sind, folgt aus dem chinesischen Restsatz, dass

$$R / \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \cong \prod_{i=1}^n R / \mathfrak{m}_i.$$

Dabei ist  $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i = J(R) = 0$ . Also ergibt sich aus der obigen Gleichung, dass

$$R \cong \prod_{i=1}^n R / \mathfrak{m}_i. \quad (2)$$

Da die  $\mathfrak{m}_i$  maximale Ideale von  $R$  sind, sind die Faktoringe  $R / \mathfrak{m}_i$  Körper. Da  $R$  unendlich ist, muss mindestens einer dieser Körper unendlich sein. Durch passende Nummerierung der  $\mathfrak{m}_i$  können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass  $R / \mathfrak{m}_1$  unendlich ist. Insbesondere ist auch  $(R / \mathfrak{m}_1)^* = R / \mathfrak{m}_1 \setminus \{0\}$  unendlich.

Da für jede Einheit  $\lambda \in R / \mathfrak{m}_1$  das Element  $(\lambda, 1, 1, \dots, 1) \in \prod_{i=1}^n R / \mathfrak{m}_i$  ebenfalls eine Einheit ist (das multiplikativ Inverse ist  $(\lambda^{-1}, 1, 1, \dots, 1)$ ), folgt aus (2), dass  $R$  unendlich viele Einheiten besitzt. Dies ist ein Widerspruch zur Endlichkeit von  $R^*$ . Also besitzt  $R$  unendlich viele maximale Ideale.

## Aufgabe 6.5.

Da  $\mathbb{Z}[i]$  euklidisch ist (im Folgenden auch „toll“ genannt), gibt es in  $\mathbb{Z}[i]$  eine, bis auf Assoziiertheit eindeutige Primfaktorzerlegung für jedes  $z \in \mathbb{Z}[i]$  mit  $z \neq 0$ .

Wir bemerken zunächst, dass  $2 + i$  und  $2 - i$  prim in  $\mathbb{Z}[i]$  sind: Alle  $z \in \mathbb{Z}[i]$  mit  $|z| < |2 + i| = 5$ , d.h. alle  $z \in \mathbb{Z}[i]$ , die als Teiler von  $2 + i$  in Frage kommen, sind assoziiert zu  $1, 1 + i, 2, 2 + i$  oder  $2 - i$  (die Einheiten in  $\mathbb{Z}[i]$  sind gerade  $1, i, -1$  und  $-i$ ). Da  $2 + i$  aus diesen Repräsentanten tatsächlich nur von  $1$  und  $2 + i$  geteilt wird, ist  $2 + i$  irreduzibel in  $\mathbb{Z}[i]$ . Da  $\mathbb{Z}[i]$  toll ist, ist  $2 + i$  damit auch prim. Analog ergibt sich, dass auch  $2 - i$  prim in  $\mathbb{Z}[i]$  ist. Da  $\mathbb{Z}[i]$  toll ist, und  $2 + i$  und  $2 - i$  nicht assoziiert sind, ist daher jeder ggT von  $2 + i$  und  $2 - i$  zu  $1$  assoziiert, d.h.  $\text{ggT}(2 + i, 2 - i) \equiv 1$ . Weiter bemerken wir, dass  $5 + 3i = (1 + i)(4 - i)$ . Es ergibt sich, dass  $1 + i$  und  $4 - i$  prim in  $\mathbb{Z}[i]$  sind: Es ergibt sich analog zur obigen Argumentation, dass  $1 + i$  prim in  $\mathbb{Z}[i]$  ist, da jeder mögliche Teiler von  $1 + i$  zu  $1$  oder  $1 + i$  assoziiert ist. Die möglichen Teiler von  $4 - i$  sind assoziiert zu

$$1, 1 + i, 2, 2 + i, 2 - i, 2 + 2i, 3, 3 + i, 3 - i, 3 + 2i, 3 - 2i, 4, 4 + i \text{ oder } 4 - i.$$

Dabei wird  $4 - i$  von diesen Repräsentanten nur von  $1$  und  $4 - i$  tatsächlich geteilt. Also ist  $4 - i$  irreduzibel, und daher auch prim. Da  $\mathbb{Z}[i]$  toll ist, ist jeder Primfaktor von  $\text{ggT}(5 + 3i, 18 + 8i)$  auch ein Primfaktor von  $5 + 3i$  und von  $18 + 8i$ . Da  $(1 + i) \mid (18 + 8i)$  und  $(4 - i) \nmid (18 + 8i)$  ist  $\text{ggT}(5 + 3i, 18 + 8i) \equiv 1 + i$ .