Einführung in die Algebra
Blatt 7

Jendrik Stelzner

29. November 2013

Aufgabe 7.1.

Aufgabe 7.2.

Aufgabe 7.3.

Aufgabe 7.4.

Definition. *Sei R ein kommutativer Ring. Für $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[\![x]\!]$ bezeichnet*

$$\operatorname{Deg}(p) := \begin{cases} \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\} & \textit{falls } f \neq 0, \\ \infty & \textit{sonst.} \end{cases}$$

den Grad von p.

Für einen kommutativen Ring R und $p, q \in R[\![x]\!]$ ist

$$\operatorname{Deg}(p+q) \geq \min\{\operatorname{Deg}(p), \operatorname{Deg}(q)\} \text{ und } \operatorname{Deg}(pq) \geq \operatorname{Deg}(p) + \operatorname{Deg}(q). \tag{1}$$

Ist R darüber hinaus nullteilerfrei, so gilt sogar

$$\operatorname{Deg}(pq) = \operatorname{Deg}(p) + \operatorname{Deg}(q). \tag{2}$$

Die Beweise der entsprechenden Aussage laufen analog zu den Beweisen der entsprechenden Aussagen für die Gradfunktion deg von $R[X]$.

(i)

Ist R kein Integritätsring, so ist auch $R[X] \subsetneq R[\![x]\!]$ kein Integritätsring, also auch $R[\![x]\!]$ nicht. Ist $R[\![x]\!]$ kein Integritätsring, so gibt es $p, q \in R[\![x]\!]$ mit $p, q \neq 0$, also $\operatorname{Deg}(p), \operatorname{Deg}(q) < \infty$, aber $pq = 0$, also $\operatorname{Deg}(pq) = \infty$. Mit (2) folgt, dass R kein Integritätsring ist.

(ii)

Ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[\![x]\!]$ invertierbar, so gibt es $q = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \in R[\![x]\!]$ mit $pq = 1$. Insbesondere ist daher

$$1 = (pq)_1 = a_0 b_0,$$

also a_0 invertierbar.
Ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[\![x]\!]$ mit a_0 invertierbar, so definieren wir eine Folge $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auf R rekursiv durch

$$b_0 := a_0^{-1} \text{ und } b_i := -a_0^{-1} \sum_{j=1}^{i} a_j b_{n-j},$$

und $q := \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ als die entsprechende Potenzreihe. Für $e = pq$ ergibt sich dann für alle $i \in \mathbb{N}$

$$e_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = \sum_{j=1}^{i} a_j b_{i-j} + a_0 b_i = \sum_{j=1}^{i} a_j b_{i-j} - \sum_{j=1}^{i} a_j b_{n-j} = 0.$$

Also ist $e = 1$ und p daher invertierbar mit $p^{-1} = q$. Inbesondere ergibt sich das folgende Lemma:

Lemma 1. *Sei K ein Körper und seien $p, q \in K[\![x]\!]$. Dann gilt:*

1. *p ist genau dann invertierbar, wenn* $\operatorname{Deg} p = 0$.
2. *Ist* $\operatorname{Deg} p = \operatorname{Deg} q$*, so sind p und q assoziiert. Ist* $\operatorname{Deg} p = \operatorname{Deg} q < \infty$*, so sind p und q assoziiert zu $X^{\operatorname{Deg} p}$.*
3. *Ist* $\operatorname{Deg} p \geq \operatorname{Deg} q$*, so ist $q \mid p$.*

Beweis. ***(i)***

$p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ ist genau dann invertierbar, wenn a_0 invertierbar ist, also genau dann wenn $a_0 \neq 0$, was wiederum äquivalent zu $\operatorname{Deg} a_0 = 0$ ist.

(ii)

Ist $p = q = 0$ so ist nichts zu zeigen. Ansonsten ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \neq 0$, also $p = X^{\operatorname{Deg} p} p'$ für $p' = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+\operatorname{Deg} p} X^i$ mit $a_{\operatorname{Deg} p} \neq 0$. Nach *(i)* ist p' invertierbar, also p assoziiert zu $X^{\operatorname{Deg} p}$. Analog ergibt sich, dass q assoziiert zu $X^{\operatorname{Deg} q}$ ist. Mit $\operatorname{Deg} p = \operatorname{Deg} q$ folt damit auch die Assoziiertheit von p und q.

(iii)

Ist $\operatorname{Deg} p = \infty$, so ist $p = 0$ und nichts zu zeigen. Ansonsten ist $p = X^{\operatorname{Deg} p - \operatorname{Deg} q} p'$ wobei p' assozziert zu q ist, also $p = X^{\operatorname{Deg} p - \operatorname{Deg} q} cq$ für $c \in K^*$. □

(iii)

f ist in $\mathbb{Z}[X]$ nicht irreduzibel, da $f = (X+1)(X+2)$.
Seien $p, q \in \mathbb{Z}[\![x]\!]$ mit $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ und $q = \sum_{j=0}^{\infty} b_i X^i$ so dass $pq = f$. Dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich, dass $a_0 b_0 = 2$. Da $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, und $2 \in \mathbb{Z}$ irreduzibel ist, ist a_0 oder b_0 eine Einheit. Entsprechend ist p oder q eine Einheit. Also ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[\![x]\!]$.

Aufgabe 7.5.

Lemma 2. $K[\![x]\!]$ *bildet mit der Gradabbildung* Deg *einen euklidischen Ring.*

Beweis. Da K nullteilerfrei ist, ist $K[\![x]\!]$ ein Integritätsring. Seien $f, g \in K[\![x]\!]$ mit $g \neq 0$. Es gilt zu zeigen, dass es $q, r \in K[\![x]\!]$ gibt, so dass $f = qg + r$ mit $r = 0$ oder $\operatorname{Deg} r < \operatorname{Deg} g$. Ist $\operatorname{Deg} f < \operatorname{Deg} g$ so genügt es $q = 0$ und $r = f$ zu wählen. Ist $\operatorname{Deg} f \geq \operatorname{Deg} g$, so folgt aus 1, dass $g \mid f$, es kann also q mit $f = qg$ und $r = 0$ gewählt werden. $\square$

Aus Lemma 2 folgt direkt, dass $K[\![x]\!]$ ein Hautidealring ist. Für jedes Ideal $(a) \neq 0$ von $K[\![x]\!]$ folgt mit Lemma 1, dass a assoziert zu $X^{\operatorname{Deg} a}$ ist, und da $K[\![x]\!]$ ein Integritätsring ist, daher $(a) = \left(X^{\operatorname{Deg} a}\right)$. Folglich sind die Ideale in $K[\![x]\!]$ gerade 0 und (X^n) für $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist (X) das eindeutige maximale Ideal in $K[\![x]\!]$, weshalb $K[\![x]\!]$ lokal ist (dies lässt sich auch direkt aus Lemma 1 folgern).