Aufgabe 1.
Es sei $K(a)/K$ eine einfache algebraische Körpererweiterung.

1. Zeigen Sie, dass $[K(a):K]_{\mathrm{sep}} \leq [K(a):K]$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass genau dann Gleichheit gilt, wenn a separabel ist.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass der Frobenius-Automorphismus $\sigma\colon \overline{\mathbb{F}_p} \to \overline{\mathbb{F}_p}$ unendliche Ordnung hat.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie mithilfe der Galoiskorrespondenz, dass es genau dann eine Einbettung $\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^m}$ gibt, wenn $n \mid m$ gilt.

Aufgabe 4.
Es sei $\zeta_3 \coloneqq e^{2\pi i/3}$. Auf dem gestrigen Aufgabenzettel wurde bereits gezeigt, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) : \mathbb{Q}] = 6$ gilt; dies darf im Folgenden ohne erneuten Beweis genutzt werden.

1. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)/\mathbb{Q}$ galoissch ist.
2. Folgern Sie, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)/\mathbb{Q}) \cong S_3$.
   (*Hinweis*: Konstruieren Sie zunächst eine Einbettung $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)/\mathbb{Q}) \hookrightarrow S_3$.)

Aufgabe 5.
Es sei p prim und $\zeta_p \coloneqq e^{2\pi i/p}$.

1. Bestimmen Sie den Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}, \zeta_p) : \mathbb{Q}]$.
2. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}, \zeta_p)/\mathbb{Q}$ galoissch ist.

Aufgabe 6.
Es sei $L \coloneqq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

1. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ galoissch ist.

Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ liegt.

2. Zeigen Sie, dass $[L : \mathbb{Q}] = 8$ gilt.
3. Konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Z}/2)^3$.
4. Betrachten Sie die folgenden Unterkörper von L:
   a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   b) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$
   c) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$

   Bestimmen Sie die Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, denen diese Unterkörper unter der Galoiskorrespondenz entsprechen, sowie die Ordnungen dieser Untergruppen.

Lösungen

Lösung 5.

1. Es handelt sich bei $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}, \zeta_p)$ um das Kompositum von $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p})$ und $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.
   - Das Minimalpolynom von $\sqrt[p]{p}$ über $\mathbb{Q}$ ist $t^p - p \in \mathbb{Q}[t]$, wobei sich die Irreduziblität aus dem Eisenstein-Kriterium ergibt. Es gilt deshalb $[\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}) : \mathbb{Q}] = p$.
   - Es ist ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel. Das Minimalpolynom von ζ_p ist deshalb das p-te Kreisteilungspolynom $\Phi_p = t^{p-1} + \cdots + t + 1 \in \mathbb{Q}[t]$. Es gilt deshalb $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$.

   Da p und $p-1$ teilerfremd sind, gilt somit

   $$[\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}, \zeta_p) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p})\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}) : \mathbb{Q}][\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p(p-1)\,.$$

2. Es gilt

   $$\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}, \zeta_p) = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}, \zeta_p \sqrt[p]{p}, \dots, \zeta_p^{p-1} \sqrt[p]{p})\,,$$

   wobei $\sqrt[p]{p}, \zeta_p \sqrt[p]{p}, \dots, \zeta_p^{p-1} \sqrt[p]{p}$ genau die p-ten Einheitswurzeln sind. Es ist deshalb $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}, \zeta_p)$ ein Zerfällungskörper des Poylnoms $t^p - p \in \mathbb{Q}[t]$, und die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p}, \zeta_p)/\mathbb{Q}$ ist somit normal. Die Erweiterung ist separabel, da $\mathbb{Q}$ perfekt ist, da $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ gilt.