Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 5

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 14. Dezember 2017

Aufgabe 4

(a)

Für alle $(a, s) \in R \times S$ gilt $(a, s) \sim (a, s)$, denn für $1 \in S$ gilt

$$1 \cdot (as - as = 0\,.$$

Also ist $\sim$ reflexiv. Für alle $(a, s), (a', s') \in R \times S$ mit $(a, 0s) \sim (a', s')$ gibt es ein $t \in S$ mit

$$t \cdot (as' - a's) = 0\,.$$

Dann gilt

$$t \cdot (a's - as') = t \cdot (-(as' - a's)) = -(t \cdot (as' - a's)) = -0 = 0\,,$$

und somit ebenfalls $(a', s') \sim (a, s)$. Das zeigt, dass $\sim$ symmetrisch ist.

Für alle $(a, s), (a', s'), (a'', s'') \in R \times S$ mit $(a, s) \sim (a', s')$ und $(a', s') \sim (a'', s'')$ gibt es $t, u \in S$ mit

$$t \cdot (a's - as') = 0 \quad \text{und} \quad u \cdot (a''s' - a's'') = 0\,,$$

also mit

$$t \cdot as' = t \cdot a's \quad \text{und} \quad u \cdot a's'' = u \cdot a''s'\,.$$

Diese Gleichungen sollte man so lesen, dass sich in Anwesenheit des Elements t die Ersetzung $as' \to a's$ durchführen lässt, und in Anwesenheit des Elements u die Ersetzung $a's'' \to a''s'$. In Anwesenheit des Elementes $s'tu$ lässt sich dann auch die Ersetzung $as'' \to a''s$ durchführen, da

$$s'tu \cdot a''s = st \cdot u \cdot a''s' = st \cdot u \cdot a's'' = s''u \cdot t \cdot a's = s''u \cdot t \cdot as' = s'tu \cdot as''$$

gilt. Das zeigt die Transitivität von $\sim$. Ingesamt zeigt dies, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.