

Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 1

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 18. November 2017

Aufgabe 4

Wir betrachten im Folgenden nur die Fälle $n \geq 3$, da die auf dem Übungszettel gegebene Definition für D_1 und D_2 nicht (ohne weiteres) funktioniert.

(a)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die (Anzahl der) Elemente von D_n zu bestimmen:

- Es gibt n Rotationen, jeweils um Vielfache von $360^\circ/n$, bzw. um $2\pi/n$. Zudem gibt es noch n Spiegelungen:
 - Ist n ungerade, so gehen die Spiegelungsachsen durch einen der Eckpunkte, sowie den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante.
 - Ist n gerade, so gibt es zwei Arten von Spiegelungen:
 - * Es gibt $n/2$ Spiegelungen, deren Spiegelungsachse durch einen Eckpunkt sowie den gegenüberliegenden Eckpunkt gehen.
 - * Es gibt $n/2$ Spiegelungen, deren Spiegelungsachse durch den Mittelpunkt einer Kante sowie den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante gehen.

Damit ergeben sich insgesamt $2n$ Isometrien.

- Es sei x einer der Eckpunkte und x' einer der zu x benachbarten Eckpunkte. Dann ist jede Isometrie des n -Ecks durch die Wirkung auf den benachbarten Eckpunkten x und x' bereits eindeutig bestimmt.

Der Eckpunkt x kann auf jeden der anderen Eckpunkte abgebildet werden, wofür es n Möglichkeiten gibt. Wird der Eckpunkt x auf einen Eckpunkt y abgebildet, so kann x' auf jeden der beiden zu y benachbarten Eckpunkte geschickt werden.

Somit ergeben sich $2n$ Isometrien

Um zu zeigen, dass D_n nicht abelsch ist, nummerieren wir die Eckpunkte des n -Ecks mit den Elementen von \mathbb{Z}/n , so dass der Eckpunkt \bar{k} mit den Eckpunkten $\overline{k-1}$ und $\overline{k+1}$ benachbart sind.

Die Rotation um $360^\circ/n$ ist dann durch

$$r: \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/n, \quad \bar{k} \mapsto \overline{k+1}$$

gegeben. Die Spiegelung, deren Achse durch den Eckpunkt $\bar{0}$ geht, ist dann durch

$$r: \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/n, \quad \bar{k} \mapsto \overline{-k}$$

gegeben. Es gilt

$$(r \circ s)(\bar{0}) = r(s(\bar{0})) = r(\bar{0}) = \bar{1}$$

aber

$$(s \circ r)(\bar{0}) = s(r(\bar{0})) = s(\bar{0}) = \overline{-1},$$

wobei $\bar{1} \neq \overline{-1}$ da $n \geq 3$.

(b)

Das regelmäßige n -Eck lässt sich in die Ebene \mathbb{R}^2 einbetten, so dass der Nullpunkt $(0,0)$ der Schwerpunkt des n -Ecks ist, und einer der Eckpunkte der n -Ecks auf der x -Achse liegt. Dann lassen sich die Elemente von D_n als Rotationen und Spiegelungen der Ebene auffassen, und somit als Rotations- und Spiegelungsmatrizen. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Rotation um den Winkel α durch die Matrix

$$R_\alpha := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

gegeben, und die Spiegelung an der Gerade mit Winkel α (zur x -Achse) ist durch die Matrix

$$S_\alpha := \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Gruppe D_n ist dann durch die Matrizen

$$\hat{D}_n := \{R_{k2\pi/n} \mid k = 0, \dots, n-1\} \cup \{S_{k\pi/n} \mid k = 0, \dots, n-1\}$$

gegeben. Es ist $\hat{D}_n \leq O(2)$ eine Untergruppe, weshalb wir den surjektiven Gruppenhomomorphismus $\det|_{O(2)}: O(2) \rightarrow \{1, -1\}$ zu einem Gruppenhomomorphismus $\det|_{\hat{D}_n}: \hat{D}_n \rightarrow \{1, -1\}$ einschränken. Es gilt $\det R_\alpha = 1$ und $\det S_\alpha = -1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, weshalb auch $\det|_{\hat{D}_n}$ noch surjektiv ist. Damit erhalten wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: D_n \rightarrow \{1, -1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ eine Rotation ist,} \\ -1 & \text{falls } x \text{ eine Spiegelung ist.} \end{cases}$$

Da $\{1, -1\} \cong \mathbb{Z}/2$ lässt sich φ auch als ein Gruppenhomomorphismus $D_n \rightarrow \mathbb{Z}/2$ auffassen.