Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 2

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 4. November 2017

Aufgabe 5

Für $g, h \in G$ schreiben wir im Folgenden abkürzend $[g, h] \coloneqq ghg^{-1}h^{-1}$. Dann ist $[G, G] = \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$.

Lemma 1. *Für $S \subseteq G$ und jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ gilt*

$$\varphi(\langle S \rangle) = \langle \varphi(S) \rangle.$$

Beweis. Wir geben zwei mögliche Beweise an:

- Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(\langle S \rangle) &= \varphi(\{s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \geq 0, s_1, \dots, s_n \in S, \varepsilon_i = \pm 1\}) \\
&= \{\varphi(s_1)^{\varepsilon_1} \cdots \varphi(s_n)^{\varepsilon_n} \mid n \geq 0, s_1, \dots, s_n \in S, \varepsilon_i = \pm 1\} \\
&= \{t_1^{\varepsilon_1} \cdots t_n^{\varepsilon_n} \mid n \geq 0, t_1, \dots, t_n \in \varphi(S), \varepsilon_i = \pm 1\} = \langle \varphi(S) \rangle.
\end{aligned}$$

- Es ist $\varphi(\langle S \rangle)$ eine Untergruppe von H, denn Bilder von Untergruppen sind Untergruppen. Es gilt $\varphi(S) \subseteq \varphi(\langle S \rangle)$ da $S \subseteq \langle S \rangle$. Somit gilt $\langle \varphi(S) \rangle \subseteq \varphi(\langle S \rangle)$, denn $\langle \varphi(S) \rangle$ ist die kleinste Untergruppe von H, die $\varphi(S)$ enthält.

  Andererseits ist $\varphi^{-1}(\langle \varphi(S) \rangle)$ eine Untergruppe von G, denn Urbilder von Untergruppen sind Untergruppen. Dabei gilt $S \subseteq \varphi^{-1}(\langle \varphi(S) \rangle)$ da $\varphi(S) \subseteq \langle \varphi(S) \rangle$. Somit gilt auch $\langle S \rangle \subseteq \varphi^{-1}(\langle \varphi(S) \rangle)$, denn $\langle S \rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G, die S enthält. Deshalb gilt auch $\varphi(\langle S \rangle) \subseteq \langle \varphi(S) \rangle$. $\square$

(a)

Lemma 2. *Es sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.*

1. *Für alle* $g_1, g_2 \in G$ *gilt* $\varphi([g_1, g_2]) = [\varphi(g), \varphi(g_2)]$.

2. *Es gilt* $\varphi([G, G]) = [\varphi(G), \varphi(G)]$.

Beweis. 1. Es gilt

$$\varphi([h_1, h_2]) = \varphi(h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)\varphi(h_1)^{-1}\varphi(h_2)^{-1} = [\varphi(h_1), \varphi(h_2)]$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi([G, G]) &= \varphi(\langle [g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G \rangle) = \langle \varphi([g_1, g_2]) \mid g_1, g_2 \in G \rangle \\ &= \langle [\varphi(g_1), \varphi(g_2)] \mid g_1, g_2 \in G \rangle = \langle [h_1, h_2] \mid h_1, h_2 \in \varphi(G) \rangle = [\varphi(G), \varphi(G)].\end{aligned}$$

□

Da für jedes $g \in G$ die Konjugationsabbildung $\varphi_g \colon G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$ ein Gruppenautomorphismus ist, gilt

$$g[G, G]g^{-1} = \varphi_g([G, G]) = [\varphi_g(G), \varphi_g(G)] = [G, G].$$

Bemerkung 3. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt *charakteristisch*, falls $\varphi(H) = H$ für jeden Gruppenautomorphismus $\varphi \colon G \to G$ gilt. Die obige Rechnung zeigt eigentlich, dass

- $[G, G]$ eine charakteristische Untergruppe von G ist, und
- charakteristische Untergruppen stets normal sind.

Anschaulich gesehen ist eine Untergruppe $H \leq G$ charakteristisch, wenn sie sich durch die Gruppenstruktur von G beschreiben lässt, bzw. sich aus dieser ergibt: Weitere Beispiele für eine charakteristische Untergruppen sind das Zentrum $\mathrm{Z}(G)$, sowie die iterierten Kommutatorgruppen $G^{(n)}$ mit $G^{(1)} = G$ und $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$.

(b)

Lemma 4. *Für jede Untergruppe* $H \leq G$ *gilt* $[H, H] \leq [G, G]$.

Beweis. Es gilt $[H, H] = \langle [h_1, h_2] \mid h_1, h_2 \in H \rangle \leq \langle [g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G \rangle = [G, G]$. □

Für jede perfekte Untergruppe $P \leq G$ gilt $P = [P, P] \leq [G, G]$.

(c)

Es sei $\mathcal{P} \coloneqq \{P \leq G \mid P \text{ ist perfekt}\}$ die Menge der perfekten Untergrupppen von G. Dann ist

$$\mathrm{Perf}(P) \coloneqq \left\langle \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \right\rangle,$$

die kleinste Untergruppe von G, die alle perfekten Untergruppen enthält. Für jede perfekte Untergruppe $P \in \mathcal{P}$ gilt

$$[\operatorname{Perf}(G), \operatorname{Perf}(G)] = \langle [g,h] \mid g,h \in \operatorname{Perf}(G) \rangle \supseteq \langle [g,h] \mid g,h \in P \rangle = [P,P] = P,$$

und somit $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \subseteq [\operatorname{Perf}(G), \operatorname{Perf}(G)]$. Somit gilt auch

$$\operatorname{Perf}(G) = \left\langle \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \right\rangle \subseteq [\operatorname{Perf}(G), \operatorname{Perf}(G)],$$

was zeigt, dass $\operatorname{Perf}(G)$ perfekt ist. Per Konstruktion enthält $\operatorname{Perf}(G)$ jede perfekte Untergruppe von G.

(d)

Lemma 5. *Ist P perfekt, so ist für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon P \to H$ auch $\varphi(P)$ perfekt, d.h. Bilder von perfekten Gruppen sind ebenfalls perfekt.*

Beweis. Es gilt $[\varphi(P), \varphi(P)] = \varphi([P,P]) = \varphi(P)$. □

Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon G \to G$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\operatorname{Perf}(G)) = \varphi\left(\left\langle \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \right\rangle\right) = \left\langle \varphi\left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P\right) \right\rangle = \left\langle \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \varphi(P) \right\rangle \\ \subseteq \left\langle \bigcup_{P' \in \mathcal{P}} P' \right\rangle = \operatorname{Perf}(G).\end{aligned}$$

Für jedes $g \in G$ ist die Konjugationsabbildung $\varphi_g \colon G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus, und somit

$$g \operatorname{Perf}(G) g^{-1} = \varphi_g(\operatorname{Perf}(G)) \subseteq \operatorname{Perf}(G).$$

Bemerkung 6. Jeder Gruppenautomorphismus $\varphi \colon G \to G$ induziert eine Bijektion $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto \varphi(P)$, weshalb $\varphi(\operatorname{Perf}(G)) = \operatorname{Perf}(G)$. Die Untergruppe $\operatorname{Perf}(G) \leq G$ ist also charakteristisch im Sinne von Bemerkung 3, und somit normal.

(e)

Da $\operatorname{Perf}(G) \trianglelefteq G$ normal ist, induziert die Gruppenstruktur von G eine Gruppenstuktur auf $G/\operatorname{Perf}(G)$ mit

$$(G/\operatorname{Perf}(G)) \times (G/\operatorname{Perf}(G)) \to G/\operatorname{Perf}(G), \quad (\overline{g_1}, \overline{g_2}) \mapsto \overline{g_1 g_2}.$$

(f)

(i)

Es gilt

$$G/\operatorname{Perf}(G) \text{ ist trivial} \iff G = \operatorname{Perf}(G) \iff G \text{ ist perfekt.}$$

(ii)

Lemma 7. *Ist $N \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe, so ist G/N genau dann abelsch, wenn $[G,G] \leq N$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} G/N \text{ ist abelsch} &\iff \overline{g}\overline{h} = \overline{h}\overline{g} \text{ für alle } g,h \in G \\ &\iff \overline{g}\overline{h}\overline{g}^{-1}\overline{h}^{-1} = 1 \text{ für alle } g,h \in G \\ &\iff \overline{ghg^{-1}h^{-1}} = 1 \text{ für alle } g,h \in G \\ &\iff \overline{[g,h]} = 1 \text{ für alle } g,h \in G \\ &\iff [g,h] \in N \text{ für alle } g,h \in G \iff [G,G] \leq N. \end{aligned}$$

□

Es gilt

$$G/\operatorname{Perf}(G) \text{ ist abelsch} \iff [G,G] \leq \operatorname{Perf}(G)$$

Ist nun $[G,G]$ perfekt, so gilt $[G,G] \leq \operatorname{Perf}(G)$. Gilt andererseits $[G,G] \leq \operatorname{Perf}(G)$, so gilt nach Aufgabenteil (b) auch $\operatorname{Perf}(G) \leq [G,G]$ und somit $[G,G] = \operatorname{Perf}(G)$; inbesondere ist $[G,G]$ dann perfekt.