Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 9

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 21. Dezember 2017

Aufgabe 1

(a)

Die Aussage ist *wahr*:

Da M/K algebraisch ist, gibt es für jedes $a \in M$ ein Polynom $p(t) \in K[t]$ mit $p(t) \neq 0$ und $p(a) = 0$. Dann gilt auch $p(t) \in L[t]$, weshalb a algebrasich über M ist. Das zeigt, dass auch M/L algebraisch ist.

Jedes Element $a \in M$ ist algebraisch über K, da M/K algebraisch ist. Insbesondere ist jedes $a \in L$ algebraisch über K, und somit L/K algebraisch.

(b)

Die Aussage ist *wahr*, denn nach der Gradformel gilt

$$[M : K] = [M : L][L : K]\,,$$

und nach Annahme sind und $[M : L], [L : K] < \infty$ endlich.

(c)

Die Aussage ist *wahr*: Per Aufgabenstellung ist L ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$. Außerdem ist $\mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$. Es gibt deshalb nach der Vorlesung einen $\mathbb{R}$-Isomorphismus $L \to \mathbb{C}$. Insbesondere gilt

$$[L : \mathbb{R}] = \dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2\,.$$

(d)

Die Aussage ist *falsch*: Es sei $\alpha \coloneqq e^{2\pi i/5}$. Wir bemerken zunächst, dass das Element

$$\beta \coloneqq \alpha + \alpha^{-1} = \alpha + \overline{\alpha}$$

das Polynom $p(t) \coloneqq t^2 + t - 1$ erfüllt. Es ist nämlich α eine primitive 5-te Einheitswurzel weshalb $\Phi_5(\alpha) = 0$ gilt. Also gilt

$$\begin{aligned} 0 = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 &= \alpha^{-1} + \alpha^{-2} + \alpha^2 + \alpha + 1 \\ &= \alpha^{-1} + (\alpha^{-1} + \alpha)^2 - 2 + \alpha + 1 = \beta^2 + \beta - 1 \,. \end{aligned}$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, einzusehen, dass $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\beta)$ gilt:

- Das Polynom hat keine rationale Nullstelle, denn die beiden komplexen Nullstellen sind $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Somit gilt inbesondere $\beta \notin \mathbb{Q}$. (Man kann hier bereits erkennen, dass $\beta = (-1 + \sqrt{5})/2$ gilt.

Hieraus ergibt sich inbesondere auch, dass $p(t)$ irreduzibel ist, da es quadratisch ist.

- Das Polynom $p(t) = t^2 + t - 1 \in \mathbb{Z}[t]$ ist normiert und somit primitiv. Das Polynom $\overline{p}(t) = t^2 + t + 1 \in (\mathbb{Z}/2)[t]$ ist irreduzibel, da es quadratisch ist und keine Nullstellen besitzt (da $\overline{p}(0) = 1 = \overline{p}(1)$ gilt). Nach dem Reduktionskriterium ist $p(t)$ somit irreduzibel. Somit ist $p(t)$ das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$, weshalb $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = \deg p = 2$ gilt. Inbesondere gilt $\beta \notin \mathbb{Q}$.

- Das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$ ist $\Phi_5(t)$ (die Irreduziblität ist aus der Vorlesung bekannt), weshalb $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg \Phi_5 = 4$ gilt. Deshalb ist die Familie $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$. In dieser Basis gilt

  $$\beta = \alpha + \alpha^{-1} = \alpha + \alpha^4 = \alpha + -\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1 = -\alpha^3 - \alpha^2 - 1 \,.$$

  Inbesondere gilt $\beta \notin \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.

Es gilt $\mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$, da $\beta = \alpha + \alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt. Es ergibt sich auch auf verschieden Weisen, dass bereits $\mathbb{Q}(\beta) \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt.

- Nach den ersten beiden obigen Argumentationen ist $p(t)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$, und somit das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$. Also gilt $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = \deg p(t) = 2$. Nach der letzten der obigen Argumentation gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$. Es gilt somit

  $$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4 > 2 = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$$

  und deshalb $\mathbb{Q}(\alpha) \supsetneq \mathbb{Q}(\beta)$.

- Es gilt $\mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{R}$, da $\beta = \alpha + \overline{\alpha} \in \mathbb{R}$ gilt (sowie $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$). Es gilt aber auch $\alpha \notin \mathbb{R}$, und somit $\alpha \notin \mathbb{Q}(\beta)$. Also gilt $\mathbb{Q}(\beta) \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$.

Insgesamt ergibt sich, dass $\mathbb{Q}(\beta)$ ein echtere Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\beta) \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$ ist.

(e)

Die Aussage ist *wahr*: Das Minimalpolynom von $\alpha \coloneqq \sqrt[p]{q}$ über $\mathbb{Q}$ ist $p(t) \coloneqq t^p - q$, wobei sich die Irreduziblität aus dem Eisenstein-Kriterium ergibt. Folglich ist der Grad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = p$ prim. Für jeden Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt nun

$$p = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : K][K : \mathbb{Q}]$$

und somit

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : K] = 1 \quad \text{oder} \quad [K : \mathbb{Q}] = 1\,,$$

und somit

$$K = \mathbb{Q}(\alpha) \quad \text{oder} \quad K = \mathbb{Q}\,.$$