**Anmerkungen und Lösungen zu**

# Einführung in die Algebra

**Blatt 7**

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 11. Dezember 2017

## Aufgabe 3

### (a)

Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$W_n = \{e^{2\pi ik/n} \mid k = 0, \dots, n-1\} \quad = \{\cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n) \mid k = 0, \dots, n-1\}$$

Aus $\cos(2\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -1/2$ und $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ folgen damit, dass

$$\begin{aligned} W_2 &= \{1, -1\}\,, \\ W_3 &= \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\,, \\ W_4 &= \{1, i, -1, -i\}\,. \end{aligned}$$

### (b)

Für alle $n \geq 1$ ist die Abbildung

$$\varphi_n \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times\,, \quad k \mapsto e^{2\pi ik/n}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\operatorname{im} \varphi_n = W_n$ und $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$. Somit ist $W_n$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$, und $\varphi_n$ induziert nach der universellen Eigenschaft des Quotienten einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/n \to W_n, \quad \overline{k} \mapsto \varphi_n(k) = e^{2\pi ik/n}.$$

Die Abbildung

$$\varphi_\infty \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}^\times\,, \quad \frac{p}{q} \mapsto e^{2\pi i p/q}\,,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\operatorname{im}\varphi_\infty = \bigcup_{n\geq 1} W_n =: W_\infty$ und $\ker \mathbb{Z}$. Somit ist $W_\infty$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$, und $\varphi_\infty$ induziert nach der universellen Eigenschaft des Quotienten einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to W_\infty\,, \quad \overline{\frac{p}{q}} \mapsto \varphi_\infty\left(\frac{p}{q}\right) = e^{2\pi i p/q}\,.$$

**Bemerkung 1.** Wir werden sehen, dass für einen beliebigen Körper $K$ die Gruppe der Einheitswurzeln

$$W_n(K) \coloneqq \{x \in K \mid x^n = 1\}$$

zyklisch ist; dies wird daraus folgen, dass jede endliche Untergruppe $H \leq K^\times$ zylisch ist. Gilt $\operatorname{char}(K) = 0$, so hat die Gruppe $W_n(K)$ Ordnung $n$; gilt hingegen $\operatorname{char}(K) = p > 0$, und ist $n = p^r m$ mit $p \nmid m$, so hat die Gruppe $W_n(K)$ Ordnung $m$.