Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 11

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 14. Januar 2018

Aufgabe 1

(a)

Die Aussage ist *falsch*: Nach Aufgabe 2 von Zettel 10 gibt es einen Automorphismus $f \colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Das Element $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ hat eine Quadratwurzel, das Element $-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ allerdings nicht. Es gibt deshalb keinen Körperhomomorphismus $\hat{f} \colon \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ mit $\hat{f}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Daher lässt sich f nicht zu einem Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ fortsetzen.

(b)

Die Aussage ist *falsch*: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes normierte Polynom $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ in quadratische und lineare Faktoren. Inbesondere ist $f(t)$ reduzibel, falls $\deg f(t) \geq 3$ gilt. Somit ist das gegebene Polynom reduzibel.

(c)

Die Aussage ist *wahr*: Eine einfache Lösung besteht darin, für $f(t)$ das konstante 1-Polynom zu wählen. Das Polynom $f(t)$ lässt sich aber auch nicht-konstant wählen: Gilt $S = \emptyset$, so lasst sich $f(t) = t$ wählen, und gilt $S \neq \emptyset$, so lässt sich $f(t) = 1 + \prod_{s \in S}(t - s)$ wählen.

(d)

Die Aussage ist *falsch*, da es keine endlichen algebraisch abgeschlossenen Körper gibt: Ist K ein endlicher Körper, so gibt es nach dem vorherigen Aufgabenteil ein nicht-konstantes Polynom $f(t) \in K[t]$ gibt, das in K keine Nullstelle hat.

(e)

Die Aussage ist *wahr*: Ist K ein endlicher Integritätsbereich, so ist K per Definition kommutative und es gilt $K \neq 0$. Es bleibt daher zu zeigen, dass jedes Element $x \in K$, $x \neq 0$ ein Inverses besitzt.

Die Abbildung $\lambda_x \colon K \to K$, $y \mapsto xy$ ist injektiv, da K ein Integritätsbereich ist, denn für alle $y_1, y_2 \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_x(y_1) = \lambda_x(y_2) \implies xy_1 = xy_2 &\implies x(y_1 - y_2) = 0 \\ &\implies y_1 - y_2 = 0 \implies y_1 = y_2\,. \end{aligned}$$

Wegen der Endlichkeit von K ist λ_x somit auch surjektiv. Inbesondere gibt es ein Element $y \in K$ mit $1 = \lambda_x(y) = xy$, so dass x eine Einheit in K ist.

Bemerkung 1. Ist $D \neq 0$ ein (nicht notwendigerweise kommutativer) links- und rechtsnullteilerfreier Ring, so ergibt sich nach der obigen Argumentation, dass jedes Element $x \in D$, $x \neq 0$ ein Links- und Rechtsinverses besitzt, und somit bereits ein beidseitig Inverses (der Leser sollte sich bewusst machen, dass diese Folgerung nicht trivial ist). Also ist D ein Schiefkörper.

Nach dem Satz von Wedderburn, ist jeder endliche Schiefkörper bereits kommutativ, und somit ein Körper. Dies gilt insbesondere für D.

Aufgabe 2

(a)

Da $\mathbb{Q} \subseteq K$ der Primkörper von K ist, gilt für den Körperhomomorphismus f, dass $f|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Für das Minimalpolynom $m_a(t) = \sum_i p_i t^i \in \mathbb{Q}[t]$ gilt $p_i \in \mathbb{Q}$ für alle i; für jede Nullstelle $b \in S_a$ von $m_a(t)$ gilt somit

$$m_a(f(b)) = \sum_i p_i f(b)^i = \sum_i f(p_i) f(b)^i = f\left(\sum_i p_i b^i\right) = f(m_a(b)) = f(0) = 0\,,$$

und somit auch $f(b) \in S_a$.

(b)

Für jedes $a \in K$ ist die Menge S_a endlich, da das Polynom $m_a(t) \in \mathbb{Q}[t] \subseteq K[t]$ nur endlich viele Nullstellen hat. Die Einschränkung $f|_{S_a}^{S_a} \colon S_a \to S_a$ ist injektiv, da f als Körperhomomorphismus injektiv ist, und wegen der Endlichkeit von S_a somit auch surjektiv. Also gilt $f(S_a) = S_a$.

(c)

Für jedes $a \in K$ gilt $a \in S_a$, weshalb $K = \bigcup_{a\in K} S_a$ gilt. Damit folgt, dass

$$f(K) = f\left(\bigcup_{a\in K} S_a\right) = \bigcup_{a\in K} f(S_a) = \bigcup_{a\in K} S_a = K$$

gilt. Somit ist der Körperhomomorphismus f surjektiv, und somit bereits ein Körperisomorphismus (als Körperhomomorphismus ist f insbesondere injektiv).