**Eine kurze Einführung in**

# Semidirekte Produkte

**Jetzt mit noch weniger Kommutativität**

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 14. Januar 2018

## Inhaltsverzeichnis

**1 Direkte Produkte** **2**
1.1 Äußere direkte Produkte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
1.2 Innere direkte Produkte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

**2 Semidirekte Produkte** **8**
2.1 Innere semidirekte Produkte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
2.2 Äußere semidirekte Produkte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
2.3 Spaltende Projektionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

# 1 Direkte Produkte

## 1.1 Äußere direkte Produkte

### Definition

Es seien $G$ und $H$ zwei Gruppen. Auf der Menge $G \times H$ wird durch die Multiplikation

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) \coloneqq (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

eine Gruppenstruktur definiert. Wir nennen die entstehende Gruppe das *äußere direkte Produkt* von $G$ und $H$, und bezeichnen diese ebenfalls mit $G \times H$.

### Einbettungen von $G$ und $H$ in $G \times H$

Die Gruppe $G \times H$ enthält die beiden Untergruppen

$$\overline{G} \coloneqq G \times \{1\} \quad \text{und} \quad \overline{H} \coloneqq \{1\} \times H\,.$$

Diese sind isomorph zu $G$, bzw. $H$, da sich die Gruppenmonomorphismen

$$\begin{aligned} i \colon G \to G \times H, &\quad g \mapsto (g, 1)\,, \\ j \colon H \to G \times H, &\quad h \mapsto (1, h) \end{aligned}$$

zu Gruppenisomorphismen

$$i|^{\overline{G}} \colon G \to \overline{G} \quad \text{und} \quad j|^{\overline{H}} \colon H \to \overline{H}$$

einschränken. Wir können also $G$ und $H$ mit Untergruppen von $G \times H$ identifizieren. Wir werden diese Identifikation im Folgenden *nicht* implizit vornehmen, sondern stets explizit. Hierfür bezeichnen wir für $g \in G$ und $h \in H$ die entsprechenden Elemente aus $G \times H$ mit

$$\overline{g} \coloneqq i(g) = (g, 1) \quad \text{und} \quad \overline{h} \coloneqq j(h) = (1, h).$$

Vorstellungsmäßig unterscheiden wir im Folgenden allerdings nicht zwischen den Elementen $g$ und $\overline{g}$, sowie den Elementen $h$ und $\overline{h}$.

### Universelle Eigenschaft von $G \times H$

Stellen wir uns $G$ und $H$ als Untergruppen von $G \times H$ vor, so kommutieren $G$ und $H$ miteinander, denn für alle $g \in G$, $h \in H$ gilt

$$\overline{g}\,\overline{h} = (g, 1)(1, h) = (g, h) = (1, h)(g, 1) = \overline{h}\,\overline{g}\,.$$

Die beiden Inklusionen $i\colon G \to G \times H$ und $j\colon H \to G \times H$ betten also die Gruppen $G$ und $H$ in eine neue Gruppe $G \times H$ ein, in der $G$ und $H$ dann miteinander kommutieren. Tatsächlich ist $G \times H$ bereits universell mit dieser Eigenschaft:

**Proposition 1.** *Es sei $T$ eine Gruppe, und es seien $\alpha\colon G \to T$ und $\beta\colon H \to T$ zwei Gruppenhomomorphismen, so dass*

$$\alpha(g)\beta(h) = \beta(h)\alpha(g)$$

*für alle $g \in G$, $h \in H$ gilt. Dann gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \times H \to T$, der das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:*

$$\begin{tikzcd}
 & T & \\
 & G \times H \arrow[u, dashed, "\varphi"'] & \\
G \arrow[ur, "i"] \arrow[uur, bend left, "\alpha"] & & H \arrow[ul, "j"'] \arrow[uul, bend right, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Die Gruppe $G \times H$ zusammen mit den beiden Inklusionen $i\colon G \to G \times H$ und $j\colon H \to G \times H$ ist also die „allgemeinste“ Möglichkeit, die Gruppen $G$ und $H$ auf kommutierende Weise zu einer gemeinsamen Gruppen $G \times H$ zusammenzufassen.

## 1.2 Innere direkte Produkte

### Definition

Es sei $G$ eine Gruppe, und es seien $H, K \leq G$ zwei Untergruppen. Wir wollen untersuchen, wann die Gruppe $G$ dem direkten Produkt $H \times K$ entspricht, d.h. wann die Abbildung

$$\varphi\colon H \times K \to G\,, \quad (h,k) \mapsto hk$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Ist dies der Fall, so bezeichnen wir $G$ als das *innere direkte Produkt* der beiden Untergruppen $K$ und $H$.

### Erste Charakterisierung

Wir charakterisieren zunächst, unter welchen Bedingungen $\varphi$ ein Gruppenhomomorphismus ist, und wann $\varphi$ surjektiv, bzw. injektiv ist.

- Für alle $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in K \times H$ gelten

$$\begin{aligned}
\varphi((h_1,k_1)(h_2,k_2)) = \varphi((h_1h_2, k_1k_2)) = h_1h_2k_1k_2\,, \\
\varphi(h_1,k_1)\varphi(h_2,k_2) = h_1k_1h_2k_2\,.
\end{aligned}$$

Somit ist $\varphi$ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, falls

$$h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 h_2 k_1 k_2$$

für alle $h_1, h_2 \in K$, $k_1, k_2 \in H$ gilt. Indem man den Fall $h_1 = k_2 = 1$ betrachtet, ist dies ferner äquivalent dazu, dass

$$k_1 h_2 = h_2 k_1$$

für alle $h_1 \in K$, $k_2 \in H$ gilt. Also ist $\varphi$ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn die Untergruppen $K$ und $H$ miteinander kommutieren.

- Die Abbildung $\varphi$ ist surjektiv, wenn sich jedes Element $g \in G$ als $g = hk$ mit $h \in H$ und $k \in K$ darstellen lässt, d.h. wenn $G = HK$ gilt.
- Für alle $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ gilt

  $$\varphi(h_1, k_1) = \varphi(h_2, k_2) \iff h_1 k_1 = h_2 k_2 \iff h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1}\,.$$

  Man bemerke, dass das Element $x := h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1}$ dann bereits in $H \cap K$ enthalten ist.

  - Gilt $H \cap K = 1$, so gilt $x = 1$, und somit $h_1 = h_2$ und $k_1 = k_2$. Somit gilt $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$, weshalb $\varphi$ dann injektiv ist.
  - Gilt andererseits $H \cap K \neq 1$, so gibt es ein Element $x \in H \cap K$ mit $x \neq 1$. Dann gilt $\varphi(x, x^{-1}) = 1 = \varphi(1,1)$ aber $(x, x^{-1}) \neq (1,1)$. Also ist $\varphi$ dann nicht injektiv.

  Zusammen zeigt dies, dass $\varphi$ genau dann injektiv ist, wenn $H \cap K = 1$ gilt.

**Proposition 2.** *Eine Gruppe $G$ ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls $H$ und $K$ miteinander kommutieren, sowie $HK = G$ und $H \cap K = 1$ gelten.*

## Zweite Charakterisierung

Wir wollen noch eine zweite Charakterisierung innerer direkte Produkte angeben:

- Wir nehmen zunächst an, dass $G$ das innere direkte Produkt der Untergruppen $H$ und $K$ ist, dass also die Abbildung $\varphi\colon H \times K \to G$ ein Gruppenisomorphismus ist. Dann sind die Untergruppen $H, K \leq G$ bereits normal in $G$:
  - Man bemerke, dass die Untergruppen $\overline{H}, \overline{K} \leq H \times K$ normal sind. So gilt beispielsweise

    $$(h,k)(h',1)(h,k)^{-1} = (h,k)(h',1)(h^{-1},k^{-1}) = (hh'h^{-1}, kk^{-1}) = (hh'h^{-1}, 1)\,,$$

    was die Normalität von $\overline{H}$ in $H \times K$ zeigt. Da $\varphi$ ein Isomorphismus ist, folgt daraus, dass $H = \varphi(\overline{H})$ und $K = \varphi(\overline{K})$ normal in $\varphi(H \times K) = G$ sind.

- ◦ Alternativ lassen sich auch die Normalisatoren $N_G(H)$ und $N_G(K)$ betrachten: Es gilt stets $H \leq N_G(H)$, und da $H$ und $K$ miteinander kommutieren, gilt auch $K \leq N_G(H)$. Aus $G = HK$ folgt damit, dass bereits $G = N_G(H)$ gilt, dass also $H$ normal in $G$ ist. Analog ergibt sich die auch Normalität von $K$ in $G$.

  Unabhängig von der Vorgehensweise erhalten wir das folgende wichtige Resultat:

  *Ist $G$ das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$,*
  *so sind $H$ und $K$ bereits beide normal in $G$.*

- Wir nehmen nun umgekehrt an, dass die Untergruppen $H, K \leq G$ beide normal sind, und dass $H \cap K = 1$ gilt. Dann kommutieren $H$ und $K$ auch schon miteinander. Für alle $h \in H$ und $k \in K$ gilt nämlich, dass

  $$h \text{ und } k \text{ kommutieren miteinander} \iff hk = kh \iff hkh^{-1}k^{-1} = 1\,.$$

  Da $K$ normal ist, gilt dabei $hkh^{-1} \in K$, und somit auch $(hkh^{-1})k^{-1} \in K$. Analog gilt aber auch $h(kh^{-1}k^{-1}) \in H$. Somit gilt bereits $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = 1$. Also gilt $hkh^{-1}k^{-1} = 1$, weshalb $h$ und $k$ miteinander kommutieren.

Damit erhalten wir ingesamt, dass wir in Proposition 2 die Bedingung, dass $H$ und $K$ miteinander kommutieren, durch die Bedingung ersetzen können, dass $H$ und $K$ beide normal in $G$ sind.

**Proposition 3.** *Eine Gruppe $G$ ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls $H$ und $K$ beide normal in $G$ sind, sowie $HK = G$ und $H \cap K = 1$ gelten.*

## Für endliche Gruppen

Ist $G$ endlich, so lässt sich dies Ausnutzen, um Proposition 2 und Proposition 3 umzuformulieren:

- Falls $G$ das innere direkte Produkt von $H$ und $K$ ist, so ist $\varphi\colon H \times K \to G$ ein Isomorphismus, und somit inbesondere

  $$|G| = |H \times K| = |H| \cdot |K|\,.$$

- Es gelte nun andererseits $|G| = |H| \cdot |K|$. Dann sind die Injektvität und Surjektivität von $\varphi\colon H \times K \to G$ äquivalent. In Proposition 2 und Proposition 3 genügt es deshalb jeweils, eine der beiden Bedingungen $HK = G$ und $H \cap K = 1$ zu fordern.

Damit erhalten wir für endliches $G$ die folgenden (vier) Charakterisierungen innerer direkter Produkte:

**Proposition 4.** *Eine endliche Gruppe $G$ ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Gruppen $H, K \leq G$, falls $|G| = |H| \cdot |K|$ gilt, und*

*1. die Untergruppen $H$ und $K$ kommutieren, oder*

*2. die Untergruppen $H$ und $K$ beide normal sind,*

*und*

*1'. es gilt $H \cap K = 1$, oder*

*2'. es gilt $HK = G$.*

Besonders hervorheben möchten wir an dieser Stelle die folgende der oberen Charakterisierungen:

**Korollar 5.** *Eine endliche Gruppe $G$ ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls $|G| = |H| \cdot |K|$ gilt, $H$ und $K$ beide normal in $G$ sind, und $H \cap K = 1$ gilt.*

**Beispiel 6.**

1. Für teilerfremde $n, m \geq 1$ betrachten wir die abelsche Gruppe $G \coloneqq \mathbb{Z}/(nm)$. Die Untergruppen $H \coloneqq n\mathbb{Z}/(nm)$ und $K \coloneqq m\mathbb{Z}/(nm)$ sind normal in $G$, da $G$ abelsch ist. Es gelten $|H| = nm/n = m$ und $|K| = nm/m = n$. Da $|H \cap K|$ ein Teiler von $|H| = m$ und $|K| = n$ ist, folgt damit aus der Teilerfremdheit von $n$ und $m$, dass $|H \cap K| = 1$ und somit $H \cap K = 0$. Außerdem gilt $|G| = mn = |H||K|$. Somit erhalten wir nach Korollar 5, dass $G$ das innere Produkt der Untergruppen $H$ und $K$ ist.

   Inbesondere gilt $G \cong H \times K$. Die Gruppen $H$ und $K$ sind als Untergruppen der zyklischen Gruppe $G$ ebenfalls zyklisch. Also gelten $H \cong \mathbb{Z}/m$ und $K \cong \mathbb{Z}/n$. Damit erhalten wir, dass
   $$\mathbb{Z}/(mn) \cong \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n\,.$$

2. Ist allgemeiner $A$ eine endliche abelsche Gruppe, und sind $B, C \leq A$ zwei Untergruppen mit $B \cap C = 0$ und $B + C = 0$, oder äquivalent $|B||C| = |A|$, so gilt $A \cong B \times C$.

3. Es sei $G$ eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = pq$ mit $p$ und $q$ prim, so dass $p < q$ und $p \nmid (q-1)$ gilt. Es sei $n_p$ die Anzahl der $p$-Sylowgruppen in $G$, und $n_q$ die Anzahl der $q$-Sylowgruppen.

   - Es gelten $n_p \equiv 1 \pmod p$ und $n_p \mid q$. Würde $n_p \neq 1$ gelten, so müsste $n_p = q$ gelten, und somit $q \equiv 1 \pmod p$, was aber im Widerspruch zu $p \nmid (q-1)$ steht. Also gilt $n_p = 1$. Es gibt also eine eindeutige $p$-Sylowuntergruppe $H \leq G$; da es sich um die einzige $p$-Sylowuntergruppe von $G$ handelt, ist $H$ normal.
   - Es gelten $n_q \equiv 1 \pmod q$ und $n_q \mid p$. Würde $n_q \neq 1$ gelten, so wäre $n_q \geq 1 + q$, was wegen $p < q$ im Widerspruch zu $p \mid n_q$ stünde. Somit gilt $n_q = 1$. Es gibt also eine eindeutige $q$-Sylowuntergruppe $K \leq G$, die notwendigerweise normal in $G$ ist.

   Die Ordnung $|H \cap K|$ teilt $|H| = p$ und $|K| = q$, weshalb $|H \cap K| = 1$ und somit $H \cap K = 1$ gilt. Außerdem gilt $|G| = pq = |H||K|$. Somit ergibt sich nach Korollar 5, dass $G$ das innere direkte Produkt der Gruppen $H$ und $K$ ist.

Inbesondere gilt $G \cong H \times K$. Da $|H| = p$ und $|K| = q$ prim sind, gelten $H \cong \mathbb{Z}/p$ und $K \cong \mathbb{Z}/q$. Damit erhalten wir aus der Teilerfremdheit von $p$ und $q$, dass

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q = \mathbb{Z}/(pq)\,.$$

4. Es sei $n \geq 1$ ungerade und es sei $G \coloneqq D_{2n}$ die Diedergruppe der Ordnung $|D_{2n}| = 2 \cdot 2n = 4n$. Ist $\rho \in D_{2n}$ eine Rotation um den Winkel $2\pi/(2n)$ und $\tau \in D_{2n}$ eine Spiegelung, so gilt

$$D_{2n} = \{1, \rho, \ldots, \rho^{2n-1}, \tau, \tau\rho, \ldots, \tau\rho^{2n-1}\}\,,$$

und Gruppenstruktur ist eindeutig durch die beiden *Relationen*

$$\rho^{2n} = 1\,, \quad \tau^2 = 1\,, \quad \tau\rho\tau^{-1} = \rho^{-1}$$

festgelegt: Für alle $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\tau^i \rho^j \cdot \tau^k \rho^l = \tau^i \tau^k \rho^{(-1)^k j} \rho^l = \tau^{i+k} \rho^{(-1)^k j + l}\,.$$

Das Zentrum von $D_{2n}$ ist

$$\mathrm{Z}(D_{2n}) = \{1, \rho^n\}\,,$$

wobei $\rho^n$ geometrisch gesehen die Rotation um 180° ist, also die Multiplikation mit $-1$. Außerdem ist

$$D \coloneqq \{\tau^i \rho^j \mid i \in \mathbb{Z}, j \in 2\mathbb{Z}\}$$

eine Untergruppe von $D_{2n}$ vom Index 2. Inbesondere sind $\mathrm{Z}(D_{2n})$ und $D$ normal in $D_{2n}$ mit $|D_{2n}| = 4n = 2 \cdot 2n = |\mathrm{Z}(D_{2n})| \cdot |D|$. Da $n$ ungerade ist, gilt $\rho^n \notin D$, und somit $\mathrm{Z}(D_{2n}) \cap D = 1$. Somit gilt nach Korollar 5, dass $D_{2n}$ das innere direkte Produkt der beiden Untergruppen $\mathrm{Z}(D_{2n})$ und $D$ ist.

Inbesondere gilt $D_{2n} \cong \mathrm{Z}(D_{2n}) \times D$. Dabei gelten $\mathrm{Z}(D_{2n}) \cong \mathbb{Z}/2$ und $D \cong D_n$, und somit

$$D_{2n} \cong D_n \times \mathbb{Z}/2\,.$$

# 2 Semidirekte Produkte

## 2.1 Innere semidirekte Produkte

## 2.2 Äußere semidirekte Produkte

## 2.3 Spaltende Projektionen