Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 1

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 20. November 2017

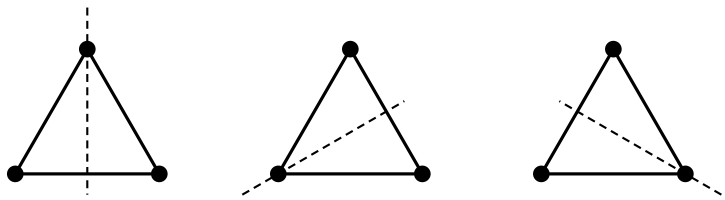
Aufgabe 4

Wir betrachten im Folgenden nur die Fälle $n \geq 3$, da die auf dem Übungszettel gegebene Defition für D_1 und D_2 nicht (ohne weiteres) funktoniert.

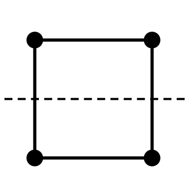
(a)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die (Anzahl der) Elemente von D_n zu bestimmen:

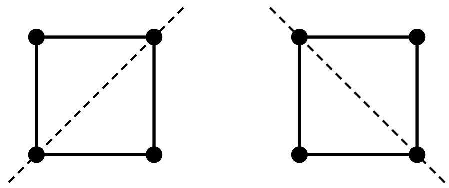
- Es gibt n Rotation, jeweils um Vielfache von $360°/n$, bzw. um $2\pi/n$. Zudem gibt es noch n Spiegelungen:
  - Ist n ungerade, so gehen die Spiegelungsachsen durch einen der Eckpunkte, sowie den Mittelpunkt der gegebenüberliegenden Kante.



  - Ist n gerade, so gibt es zwei Arten von Spiegelungen:
    * Es gibt $n/2$ Spiegelungen, deren Spiegelungsachse durch den Mittelpunkte einer Kante sowie den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante gehen.



* Es gibt $n/2$ Spiegelungen, deren Spiegelungsachse durch einen Eckspunkt sowie den gegenüberliegenden Eckpunkt gehen.



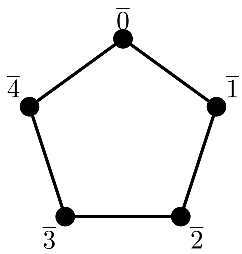
Damit ergeben sich insgesamt $2n$ Isometrien.

- Es sei x einer der Eckpunkte und x' einer der zu x benachbarten Eckpunkte. Dann ist jede Isometrie des n-Ecks durch die Wirkung auf den benachbarten Eckpunkten x und x' bereits eindeutig bestimmt.

  Der Eckpunkt x kann auf jeden der anderen Eckpunkte abgebildet werden, wofür es n Möglichkeiten gibt. Wird der Eckpunkt x auf einen Eckpunkt y abgebildet, so kann x' auf jeden der beiden zu y benachbarten Eckpunkt geschickt werden.

  Somit ergeben sich $2n$ Isometrien

Um zu zeigen, dass D_n nicht abelsch ist, nummerieren wir die Eckpunkte des n-Ecks mit den Elementent von $\mathbb{Z}/n$, so dass der Eckpunkt $\overline{k}$ mit den Eckpunkten $\overline{k-1}$ und $\overline{k+1}$ benachbart sind.



Die Rotation um $360°/n$ ist dann durch

$$r\colon \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n, \quad \overline{k} \mapsto \overline{k+1}$$

gegeben. Die Spiegelung, deren Achse durch den Eckpunkt $\overline{0}$ geht, ist dann durch

$$r\colon \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n, \quad \overline{k} \mapsto \overline{-k}$$

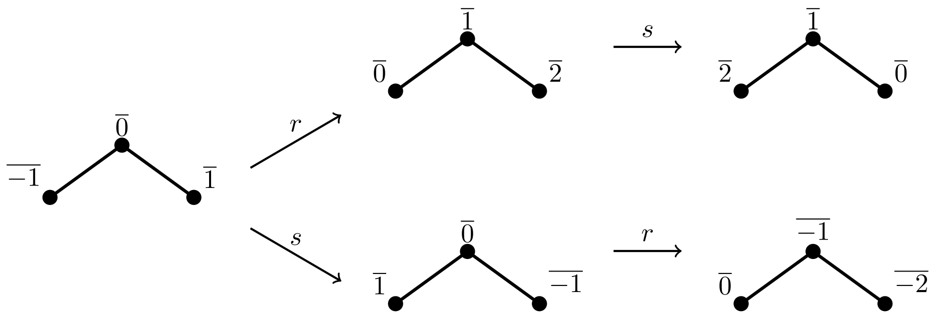
gegeben. Es gilt

$$(r \circ s)(\overline{0}) = r(s(\overline{0})) = r(\overline{0}) = \overline{1}$$

aber

$$(s \circ r)(\overline{0}) = s(r(\overline{0})) = s(\overline{0}) = \overline{-1},$$

wobei $\overline{1} \neq \overline{-1}$ da $n \geq 3$.



(b)

Das regelmäßige n-Eck lässt sich in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten, so dass der Nullpunkt $(0,0)$ der Schwerpunkt des n-Ecks ist, und einer der Eckpunkte der n-Ecks auf der x-Achse liegt. Dann lassen sich die Elemente von D_n als Rotationen und Spiegelungen der Ebene auffassen, und somit als Rotations- und Spiegelungsmatrizen. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Rotation um den Winkel α durch die Matrix

$$R_\alpha \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

gegeben, und die Spiegelung an der Gerade mit Winkel α (zur x-Achse) ist durch die Matrix

$$S_\alpha \coloneqq \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Gruppe D_n ist dann durch die Matrizen

$$\hat{D}_n \coloneqq \{R_{k2\pi/n} \,|\, k = 0, \dots, n-1\} \cup \{S_{k\pi/n} \,|\, k = 0, \dots, n-1\}$$

gegeben. Es ist $\hat{D}_n \leq \mathrm{O}(2)$ eine Untergruppe, weshalb wir den surjektiven Gruppenhomomorphismus $\det|_{\mathrm{O}(2)} \colon \mathrm{O}(2) \to \{1,-1\}$ zu einem Gruppenhomomorphismus $\det|_{\hat{D}_n} \colon \hat{D}_n \to \{1,-1\}$ einschränken. Es gilt $\det R_\alpha = 1$ und $\det S_\alpha = -1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, weshalb auch $\det|_{\hat{D}_n}$ noch surjektiv ist. Damit erhalten wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\hat{g} \colon D_n \to \{1,-1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ eine Rotation ist,} \\ -1 & \text{falls } x \text{ eine Spiegelung ist.} \end{cases}$$

Da $\{1,-1\} \cong \mathbb{Z}/2$ lässt sich $\hat{g}$ auch als ein Gruppenhomomorphismus

$$g \colon D_n \to \mathbb{Z}/2, \quad x \mapsto \begin{cases} \overline{0} & \text{falls } x \text{ eine Rotation ist,} \\ \overline{1} & \text{falls } x \text{ eine Spiegelung ist,} \end{cases}$$

auffassen.

(c)

Der Kern von g besteht genau aus den Rotationen.

Jedes Element $x \in D_n$ liefert einen Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{s}\colon \mathbb{Z} \to D_n, \quad n \mapsto x^n.$$

Ist x eine Spiegelung, so gilt $x \neq 1$ aber $x^2 = 1$, und somit $\ker \tilde{s} = 2\mathbb{Z}$. Somit induziert $\tilde{s}$ einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$s\colon \mathbb{Z}/2 \to D_n, \quad \overline{n} \mapsto x^n.$$

Dann gilt

$$(g \circ s)(\overline{1}) = g(s(\overline{1})) = g(x^1) = g(x) = \overline{1}.,$$

sowie $(g \circ s)(\overline{0}) = \overline{0}$ da $g \circ s$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Somit gilt $g \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2}$.

Bemerkungen

- Manche Autoren schreiben D_{2n} statt D_n, d.h. D_{2n} ist die Diedergruppe von Ordnung $2n$.
- Ist $r \in D_n$ eine Rotation um den Winkel $2\pi/n$ und $s \in D_n$ eine Spiegelung, so gilt
  - $\mathrm{ord}(r) = n$,
  - $\mathrm{ord}(s) = 2$,
  - $sr = r^{-1}s$.

  Durch diese Bedingunegn sind die Elemente und die Gruppenstruktur von D_n bereits eindeutig bestimmt:
  - Es gilt $\langle r \rangle = \{1, r, \dots, r^{n-1}\}$ mit $|\langle r \rangle| = n$. Für $\langle r \rangle s = \{s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$ gilt dann auch $|\langle r \rangle s| = n$.
  - Es gilt $s \notin \langle r \rangle$, da s keine Rotation ist. Deshalb sind $\langle r \rangle$ und $\langle r \rangle s$ disjunkt.
  - Da $|D_n| = 2n = n+n = |\langle r \rangle| + |\langle r \rangle s|$ gilt, ist D_n bereits die disjunkte Vereinigung von $\langle r \rangle$ und $\langle r \rangle s$. Es lässt sich also jedes Element $x \in D_n$ als $x = r^i s^j$ mit eindeutigen $0 \leq i \leq n-1$ und $0 \leq j \leq 1$ darstellen.

  Das zeigt, dass die Elemente von D_n eindeutig bestimmt sind.
  - Aus $sr = r^{-1}s$ folgt, dass $srs^{-1} = r$. Da die Abbildung $c\colon G \to G$, $x \mapsto sxs^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt ferner, dass bereits $sr^is^{-1} = r^{-i}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Für alle $i \in \mathbb{Z}$ und $j \in \mathbb{Z}$ gilt also $s^j r^i = r^{(-1)^j i} s^j$ (da $s^2 = 1$ gilt, genügt es, die Fälle $j = 0$ und $j = 1$ zu betrachten).
  - Für alle $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ gilt somit

    $$r^i s^j r^k s^l = r^i r^{(-1)^j k} s^j s^l = r^{i+(-1)^j} s^{j+l} = r^{(i+(-1)^j) \bmod 2} s^{(j+l) \bmod 2}$$

  Also ist auch die Gruppenstruktur auf D_n bereits bestimmt.

- Inbesondere ließe sich die Diedergruppe D_n auch auf rein algebraische Weise als die Menge $(\mathbb{Z}/n) \times (\mathbb{Z}/2)$ zusammen mit der Verknüpfung

$$(\bar{i}, \bar{j}) \cdot (\bar{k}, \bar{l}) \coloneqq (\bar{i} + (-1)^j \bar{k}, \bar{j} + \bar{l}) \tag{1}$$

  definieren.

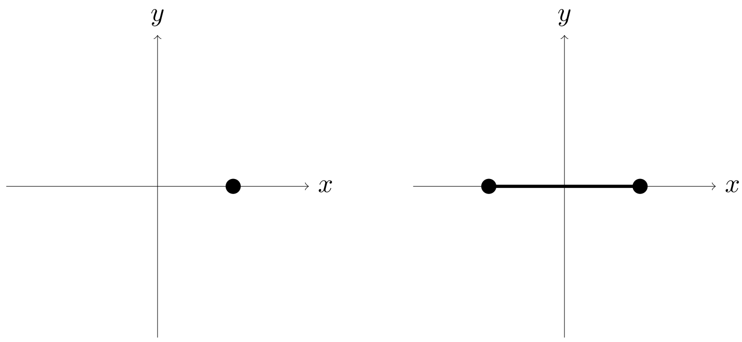
- Auf diese Weise lassen sich auch die Gruppen D_1 und D_2 definieren:
  - Die Gruppe D_1 lässt sich als die Menge $(\mathbb{Z}/1) \times (\mathbb{Z}/2)$ mit Verknüpfung (1) definieren. Dann ist die Bijektion $(\mathbb{Z}/1) \times (\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$, $(x, y) \mapsto y$ ein Gruppenhomomoprhismus, und somit $D_1 \cong \mathbb{Z}/2$.
  - Die Gruppe D_1 lässt sich als die Menge $(\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2)$ mit Verknüpfung (1) definieren. Für die Gruppe $P \coloneqq (\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2)$ mit der „üblichen“ Produkt-Gruppenstruktur ist dann die Abbildung

$$P \to D_2, \quad (x, y) \mapsto (x + y, y)$$

    ein Gruppenhomomorphismus, und somit $D_2 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ als Gruppen.

  Ähnlich wie die Diedergruppen D_n mit $n \geq 3$ lassen sich die Diedergruppen D_1 und D_2 ebenfalls geometrisch definieren:

  - Das regelmäßige 1-Eck und 2-Eck lassen sich wie folgt in $\mathbb{R}^2$ einbetten:



    Die Diedergruppe D_n für $n = 1, 2$ besteht dann aus all jeden Isometrien der umgebenen Ebene $\mathbb{R}^2$, welche diese eingebettete Version des n-Ecks unverändert lassen:

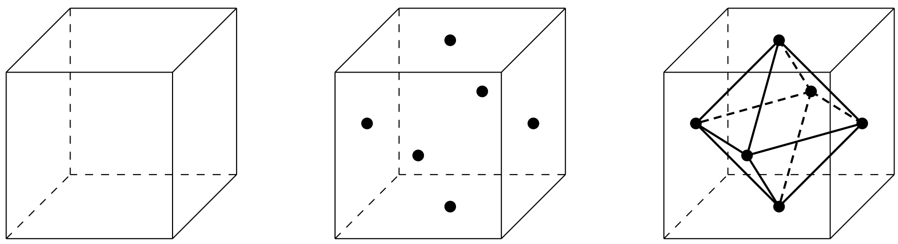
    * Die Diedergruppe D_1 besteht also aus all jenen Isometrien der Ebene, welche den Punkt $(1, 0)$ unverändert lassen. Hierfür kommen nur die Identität und die Spiegelung an der x-Achse in Frage. Somit gilt $D_1 \cong \mathbb{Z}/2$.
    * Die Diedergruppe D_2 besteht aus all jenen Isometrien der Ebene, welche das eingezeichnete Interval $[-1, 1] \times \{0\}$ unverändert lassen. Dies sind die Identität, die Spiegelung an den beiden Achsen, sowie die Komposition dieser beiden Spiegelungen (welche die Spiegelung am Koordinatenursprung ist). Da die Spiegelungen an den Achsen miteinander kommutieren, ergibt sich, dass $D_2 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Aufgabe 5

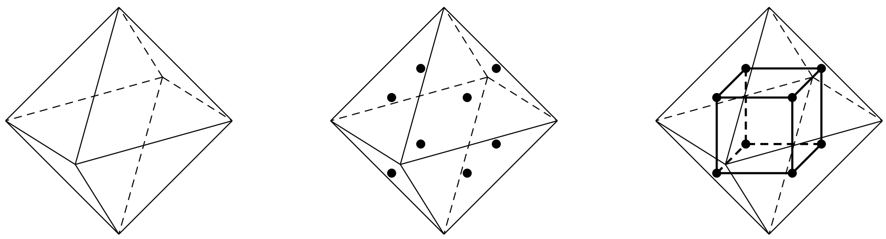
Dualer Körper

Bevor wir mit der Aufgabe selbst beginnen, merken wir zunächst an, dass man anstelle des Oktaeders auch den Würfel benutzen könnte, da es sich um *duale* platonische Körper handelt: Der zu einem Polyeder P duale Polyeder P' hat als Knotenmenge die Mittelpunkte der Seiten von P, und je zwei Mittelpunkte sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Seiten aneinander liegen.

- Der zum Würfel duale Körper ist der Oktaeder:



- Der zum Oktaeder duale Körper ist der Würfel:

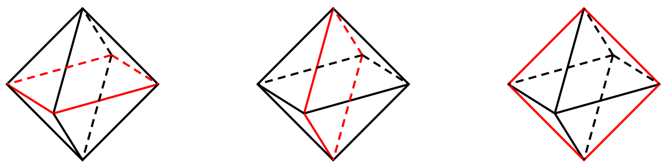


Da Oktaeder und Würfel dual zueinander sind, haben beide Körper die gleiche Isometriegruppe. Wir werden uns im Folgenden aber den Oktaeder nutzen (wie in der Aufgabenstellung).

Elemente von Okt

Wir geben mehrere Möglichkeiten an, die Anzahl der Elemente von Okt zu bestimmen:

- Im Oktaeder gibt es drei Vierecke:

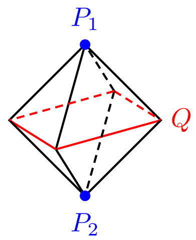


  Wir bezeichnen mit Q das erste der Quadrate.

  Jede Isometrie des Oktaeders muss diese drei Vierecke permutieren, d.h. Okt wirkt auf der dreielementigen Menge der Vierecke. Diese Wirkung ist transitv, da sich

Q durch passende Drehungen zu den beiden anderen Quadraten umwandeln lässt. Bezeichnet $H \coloneqq \mathrm{Okt}_Q$ den Stabilisator des ausgewählten Quadrats Q, so gilt also $|\mathrm{Okt}|/|H| = 3$. Es genügt daher im Folgenden, die Kardinalität der Untergruppe H zu bestimmen.

Es gibt zwei Eckpunkte, P_1 und P_2, die sich nicht in dem ausgewählten Quadrat befinden:

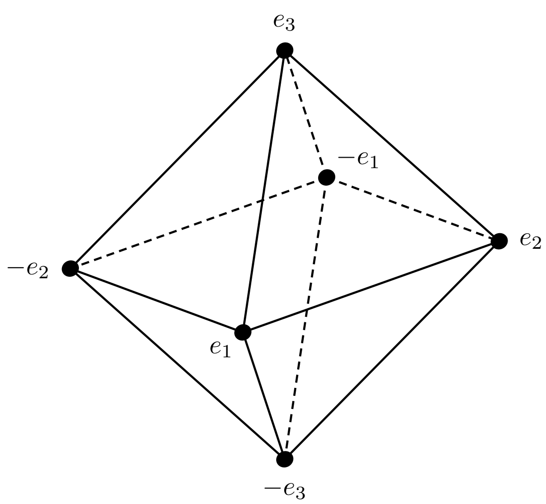


Jede Isometrie des Oktaeders, welche das Quadrat Q fixiert, muss diese beiden Eckpunkte permutieren, d.h. die Gruppe H wirkt auf $\{P_1, P_2\}$. Diese Wirkung ist transitiv, denn H enthält die Spiegelung an der Q-Ebene, und diese Spiegelung bildet P_1 auf P_2 ab. Für den Stabilisator $K \coloneqq H_{P_1}$ gilt somit, dass $|H|/|K| = 2$. Es genügt daher, die Kardinalität der Untergruppe K zu bestimmen.

Die Isometrien des Oktaeders, welche die Eckpunkte P_1 und P_2 fixieren, entsprechen genau den Isometrien des Quadrats Q. Es gilt also $K \cong D_4$, und somit $|K| = |D_4| = 8$. Somit gilt

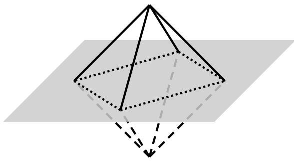
$$|\mathrm{Okt}| = 3 \cdot 2 \cdot |K| = 3 \cdot 2 \cdot 8 = 48.$$

- Wir können den Oktaeder so in den Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten, dass die Eckpunkte des Oktaeders genau die Punkte $\pm e_i$ sind:

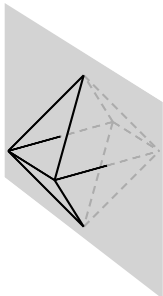


Jede Isometrie des Oktaeders bildet gegenüberliegende Eckpunkte auf gegenüberliegende Eckpunkte ab; deshalb liefert jede Isometrie $w \in \mathrm{Okt}$ des Oktaeders eine Vorzeichenpermutation $\pi_w \in \mathrm{WB}_3$: Falls w den Eckpunkt e_i auf den Eckpunkt εe_j mit $\varepsilon = \pm 1$ abbildet, so gilt $\pi_w(i) = \varepsilon j$. Hierdurch ergibt sich ein Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathrm{Okt} \to \mathrm{WB}_3$, $w \mapsto \pi_w$. Jede Isometrie des Oktaeders ist durch die Wirkung auf den Eckpunkten bereits eindeutig bestimmt, weshalb φ injektiv ist.

Die Spiegelung an der e_1-e_2-Ebene wird auf die Vorzeichenpermutation $\pi \in \mathrm{WB}_3$ mit $\pi(3) = -3$ und $\pi(\pm i) = \pm i$ für $i = 1, 2$ abgebildet, d.h. auf den Vorzeichenwechsel von 3.



Analog ergibt sich, dass auch die anderen beiden Vorzeichenwechsel im Bild von φ liegen. Betrachtet man die Spiegelung an der $(e_1 + e_2)$-e_3-Ebene, so wird diese auf die Transposition $(1\ 2) \in S_3 \leq \mathrm{WB}_3$ abgebildet.



Analog ergibt sich, dass auch alle anderen Transpositionen aus S_3 im Bild von φ liegen. Da WB_3 von den Vorzeichenwechseln und Transpositionen erzeugt wird, ergibt sich damit insgesamt, dass φ surjektiv ist.

Der Gruppenhomomorphismus φ ist also bereits ein Isomorphismus. Somit gilt $\mathrm{Okt} \cong \mathrm{WB}_3$, und insbesondere $|\mathrm{Okt}| = |\mathrm{WB}_3| = 2^3 \cdot 3! = 8 \cdot 6 = 48$.

- Es sei P ein beliebiger Eckpunkt des Oktaeders. Durch die Isometrien des Oktaeders lässt sich der Eckpunkt P auf jeden der Eckpunkte abbilden; für den Bildpunkt P' von P gibt es also 6 Möglichkeiten.

  Es sei Q ein zu P benachbarter Eckpunkt. Durch die Isometrien des Oktaeders wird Q auf einen zu P' benachbarten Eckpunkt abgebildet; durch eventuelles Nachschalten mit Rotationen um die P'-Achse lässt sich dabei jeder zu P' benachbarten Eckpunkte erreichen. Für den Bildpunkt Q' von Q gibt es also 4 Möglichkeiten.

  Es sei R ein zu P und Q benachbarter Eckpunkt. Die Isometrien des Quaders bilden R auf einen zu P' und Q' benachbarten Eckpunkt ab; durch eventuelles Nachschalten mit der Spiegelung an der P'-Q'-Ebene können dabei beide mögliche Eckpunkte erreicht werden. Für den Bildpunkt R' von R gibt es also 2 Möglichkeiten.

Durch die Wirkung auf den drei benachbarten Eckpunkten P, Q und R sind die Isometrien des Oktaeders bereits eindeutig bestimmt. Also gilt $|\mathrm{Okt}| = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.

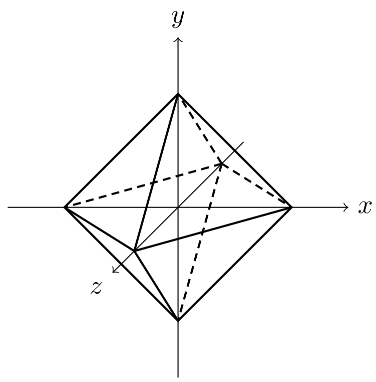
Alternativ lassen sich die 48 Isometrien des Oktraheders auch explizit auflisten. Dies wird hier aus den folgenden Gründen nicht getan:

- Ohne eines der obigen Argumentationen ist nicht klar, ob man alle Isometrien gefunden hat.
- Der Autor hat keine Lust, 48 weitere Bilder zu zeichnen.
- Wir benötigen im Folgenden keine explizite Beschreibung aller Isometrien.

Wer dennoch eine vollständige Liste aller Isometrien haben möchte, kann online eine Liste aller Isometrien des Würfels finden[1] und nutzten, dass der Oktaeder dual zum Würfel ist.

Gruppenhomomorphismen $h\colon \mathrm{Okt} \to \mathbb{Z}/2$ und $t\colon \mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Okt}$

Wir können den Oktaeder so in den Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten, so dass die Achsen des Oktaeders auf den Koordinatenachsen liegen.



Damit können die Isometrien des Oktaeders als Isometrien des umgebenden Raums $\mathbb{R}^3$ aufgefasst werden, und somit als orthogonale Transformationen von $\mathbb{R}^3$. Mithilfe der Determinante ergibt sich dann, wie für die Diedergruppen, ein Gruppenhomomorphismus

$$h\colon \mathrm{Okt} \to \mathbb{Z}/2, \quad w \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } w \text{ eine Rotation ist,} \\ 1 & \text{falls } w \text{ eine Spiegelung oder Drehspiegelung ist.} \end{cases}$$

Jede Spiegelung $w \in \mathrm{Okt}$ liefert dann, wie bei den Diedergruppen, einen Gruppenhomomorphismus

$$t\colon \mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Okt}, \quad \overline{n} \mapsto w^n$$

[1] Siehe www.pentoma.de/symmetrien-von-figuren-aus-wuerfeln.

mit $g \circ t = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2}$. Der Kern $\mathrm{Okt}^+ := \ker g \leq \mathrm{Okt}$ besteht genau aus der Untergruppe der Rotationen. Es gilt

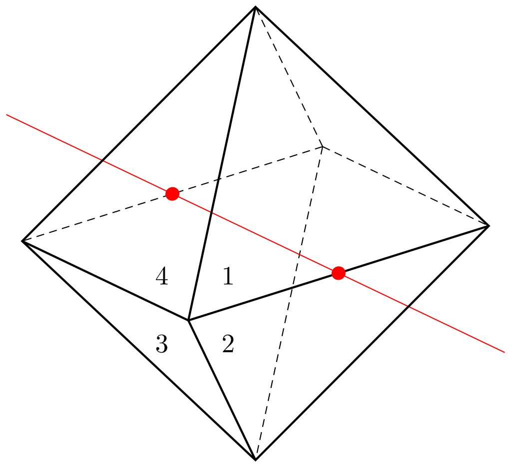
$$\frac{|\mathrm{Okt}|}{|\mathrm{Okt}^+|} = |\mathbb{Z}/2| = 2$$

und somit $|\mathrm{Okt}^+| = |\mathrm{Okt}|/2 = 48/2 = 24$.

Gruppenisomorphismus $\mathrm{Okt}^+ \to S^4$

Der Oktaeder besteht 4 Paaren von gegenüberliegenden Seiten. Wir nummerieren diese Paare mit 1, 2, 3, 4. Da jede Isometrie des Oktaeders diese Paare permutiert, erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $k\colon \mathrm{Okt}^+ \to S_4$. Wir zeigen, dass k bereits ein Isomorphismus ist. Da $|\mathrm{Okt}^+| = 24 = |S_4|$ gilt, genügt es zu zeigen, dass k surjektiv ist. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{im} k$ alle Transpositionen enthält, da S_4 von diesen erzeugt wird.

Hierfür betrachte man die Rotation (um 180°) um die Gerade, die durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten geht.



In dem obigen Beispiel vertauscht die Rotation die beiden Seiten 1 und 2, und bildet die Seiten 3 und 4 jeweils auf die gegenüberliegende Seite ab. Von k wird diese Rotation also auf die Transposition $(1\ 2)$ abgebildet. Ingesamt gibt es 6 solche Rotationen, welche wegen der Injektivität von k auf die 6 Transpositionen in S_4 abgebildet werden.

Insgesamt zeigt dies die Surjektivität von k, und somit dass k ein Isomorphismus ist.