Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 5

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 16. Dezember 2017

Aufgabe 4

(a)

Für alle $(a,s) \in R \times S$ gilt $(a,s) \sim (a,s)$, denn für $1 \in S$ gilt

$$1 \cdot (as - as) = 0\,.$$

Also ist $\sim$ reflexiv. Für $(a,s),(a',s') \in R \times S$ mit $(a,0s) \sim (a',s')$ gibt es $t \in S$ mit

$$t \cdot (as' - a's) = 0\,.$$

Dann gilt

$$t \cdot (a's - as') = -t \cdot (as' - a's) = 0\,,$$

und somit auch $(a',s') \sim (a,s)$. Das zeigt, dass $\sim$ symmetrisch ist.

Für alle $(a,s),(a',s'),(a'',s'') \in R \times S$ mit $(a,s) \sim (a',s')$ und $(a',s') \sim (a'',s'')$ gibt es $t,u \in S$ mit

$$t \cdot (as' - a's) = 0 \quad \text{und} \quad u \cdot (a's'' - a''s') = 0\,,$$

also mit

$$t \cdot as' = t \cdot a's \quad \text{und} \quad u \cdot a's'' = u \cdot a''s'\,.$$

Diese Gleichungen lassen sich so lesen, dass sich in Anwesenheit des Elements t die Ersetzung $as' \to a's$ durchführen lässt, und in Anwesenheit des Elements u die Ersetzung $a's'' \to a''s'$. In Anwesenheit des Elementes $s'tu$ lässt sich dann auch die Ersetzung $as'' \to a''s$ durchführen, denn es gilt

$$s'tu \cdot a''s = st \cdot u \cdot a''s' = st \cdot u \cdot a's'' = s''u \cdot t \cdot a's = s''u \cdot t \cdot as' = s'tu \cdot as''\,.$$

Das zeigt die Transitivität von $\sim$.

Ingesamt zeigt dies, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Anstelle von $[a, s]$ schreiben wir im Folgenden

$$\frac{a}{s}$$

oder a/s für die Äquivalenzklasse von $(a, s) \in R \times S$.

(b)

Es seien $(a, s), (a', s'), (b, t), (b', t') \in R \times S$ mit $(a, s) \sim (a', s')$ und $(b, t) \sim (b', t')$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in S$ mit

$$u_1 \cdot (as' - a's) = 0 \quad \text{und} \quad u_2 \cdot (bt' - b't) = 0\,,$$

also mit

$$u_1 \cdot as' = u_1 \cdot a's \quad \text{und} \quad u_2 \cdot bt' = u_2 \cdot b't\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u_1u_2 \cdot (at + bs)s't' &= (u_1u_2 \cdot ats't') + (u_1u_2 \cdot bss't') \\ &= (u_2tt' \cdot u_1 \cdot as') + (u_1ss' \cdot u_2 \cdot bt') \\ &= (u_2tt' \cdot u_1 \cdot a's) + (u_1ss' \cdot u_2 \cdot b't) \\ &= (u_1u_2 \cdot a'stt') + (u_1u_2 \cdot b'ss't) = u_1u_2 \cdot (a't' + b's')st \end{aligned}$$

und somit

$$u_1u_2 \cdot ((at + bs)s't' - (a't' + b's')st) = 0\,,$$

also

$$\frac{at + bs}{st} = \frac{a't' + b's'}{s't'}\,.$$

Das zeigt, dass die Addition

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st}$$

auf $S^{-1}R$ wohldefiniert ist.

Außerdem gilt

$$u_1u_2 \cdot abs't' = (u_1 \cdot as')(u_2 \cdot bt') = (u_1 \cdot a's)(u_2 \cdot b't) = u_1u_2 \cdot a'b'st$$

und somit

$$u_1u_2 \cdot (abs't' - a'b'st) = 0\,,$$

also

$$\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}.$$

Das zeigt, dass die Multiplikation

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}$$

auf $S^{-1}R$ wohldefiniert ist.

Das folgende Lemma erweist sich zum Rechnen in $S^{-1}R$ als sehr nützlich:

Lemma 1 (Kürzen von Brüchen). *Für alle $a/s \in S^{-1}R$ und $t \in S$ gilt*

$$\frac{a}{s} = \frac{at}{st}\,.$$

Beweis. Für $1 \in S$ gilt $1 \cdot (ast - ats) = 0$, also gilt $(a, s) \sim (at, st)$. □

Aus Lemma 1 ergibt sich insbesondere, dass $0/1 = 0/s$ für alle $s \in S$ gilt, denn

$$\frac{0}{s} = \frac{0 \cdot s}{1 \cdot s} = \frac{0}{1}\,.$$

Die Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation, sowie die Distributivität folgen durch direktes Nachrechnen. Das Einselement in $S^{-1}R$ ist $1/1$, denn für alle $a/s \in S^{-1}R$ gilt

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{s \cdot 1} = \frac{a}{s}\,.$$

Das Nullelement ist $0/1$, denn für alle $a/s \in S^{-1}R$ gilt

$$\frac{a}{s} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot s}{s \cdot 1} = \frac{a}{s}\,.$$

Das additiv Inverse Element zu $a/s \in S^{-1}R$ ist $(-a)/s$, denn es gilt

$$\frac{a}{s} + \frac{-a}{s} = \frac{as - as}{s^2} = \frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}\,.$$

Ingesamt zeigt dies, dass $S^{-1}R$ mit der gegebenen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring bildet.

Bemerkung 2. Ist R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge, so ist die Abbildung $f\colon R \to R_S$, $r \mapsto r/1$ ein Ringhomomorphismus. (Dies lässt sich durch direktes Nachrechnen überprüfen.)

Für jedes $s \in S$ ist das Element $f(s) = s/1 \in S^{-1}R$ eine Einheit, da

$$\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1} = 1_{S^{-1}R}$$

gilt. In dem Ring $S^{-1}R$ werden die Elemente aus S also zu Einheiten.

Der Ring $S^{-1}R$ zusammen mit dem Homomorphismus f ist möglichst allgemein (d.h. *universell*) mit dieser Eigenschaft: Ist T ein Ring und $g\colon R \to T$ ein Ringhomomorphismus, so dass $g(s)$ für jedes $s \in S$ eine Einheit in T ist, so gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\overline{g}\colon S^{-1}R \to T$, der das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$
\begin{tikzcd}
S^{-1}R \arrow[r, "\overline{g}"] & T \\
R \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Der Homomorphismus $\overline{g}$ ist gegeben durch

$$\overline{g}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{g(a)}{g(s)} = g(a)g(s)^{-1} \qquad \text{für alle } \frac{a}{s} \in S^{-1}R\,.$$

Man bezeichnet dies als die *universelle Eigenschaft der Lokalisierung*.

Bemerkung 3. Man beachte aber, dass der Ringhomomorphismus $f\colon R \to S^{-1}R$, $r \mapsto r/1$ im Allgemeinen nicht injektiv ist: Für alle $r \in R$ gilt

$$r \in \ker f \iff \frac{r}{1} = \frac{0}{1} \iff \exists s \in S : rs = 0\,.$$

Somit ist f genau dann injektiv, wenn für alle $s \in S$ und $r \in R$ mit $rs = 0$ bereits $r = 0$ folgt, d.h. wenn S keine Nullteiler enthält.

Ist inbesondere R ein Integritätsbereich, so ist im Fall $0 \notin S$ der Ringhomomorphismus $f\colon R \to S^{-1}R$ stets injektiv. Dann lässt sich R als ein Unterring von $S^{-1}R$ auffassen.

(c)

Da R ein Integritätsbereich ist, gilt $1 \neq 0$, und somit $1 \in S$. Für alle $s, t \in S$ gilt $s, t \neq 0$, wegen der Nullteilerfreiheit von R also auch $st \neq 0$, und somit $st \in S$. Das zeigt, dass S eine multiplikative Menge ist.

Bevor wir zeigen, dass $\operatorname{Quot}(R)$ ein Körper ist, wollen wir anmerken, dass sich die Gleichheitsregel für Brüche in der gegebenen Situation vereinfachen lässt: Für zwei Brüche $a/s, b/t \in \operatorname{Quot}(R)$ gilt

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \iff \exists u \in S : u \cdot (at - bs) = 0\,.$$

Dabei gilt $u \neq 0$ (da $S = R \smallsetminus \{0\}$), weshalb wegen der Nullteilerfreiheit von R bereits

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \iff at = bs \tag{1}$$

gilt. Wir können Brüche in $\operatorname{Quot}(R)$ also auf die „naive“ Art und Weise vergleichen.

Bemerkung 4. Ist allgemeiner R ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge mit $0 \notin S$, so gilt für $a/s, b/t \in \operatorname{Quot}(R)$ genau dann $a/s = b/t$, wenn $at = bs$ gilt. Dies ergibt sich ohne Änderungen aus der obigen Rechnung. Für nichttriviale (d.h. vom Nullring verschiedene) Lokalisierungen von Integritätsbereichen gilt also die „naive“ Gleichheitsregel für Brüche.

Es gilt $0_R \neq 1_R$, da R ein Integritätsbereich ist. Damit gilt auch $0_{\mathrm{Quot}(R)} \neq 1_{\mathrm{Quot}(R)}$, denn es gilt

$$\frac{0}{1} = \frac{1}{1} \iff 0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \iff 0 = 1\,.$$

Es sei nun $a/s \in S^{-1}R$ mit $(a/s) \neq 0$. Dann gilt insbesondere $a \neq 0$, weshalb der Bruch $s/a \in \mathrm{Quot}(R)$ wohldefiniert ist. Es gilt

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1} = 1_{S^{-1}R}\,,$$

was zeigt, dass a/s eine Einheit in $\mathrm{Quot}(R)$ ist.

Das zeigt, dass der kommutative Ring $\mathrm{Quot}(R)$ bereits ein Körper ist.

Bemerkung 5. Nach Bemerkung 3 ist der Ringhomomorphismus $R \to \mathrm{Quot}(R)$, $r \mapsto r/1$ injektiv, wodurch sich R als einen Unterring von $\mathrm{Quot}(R)$ auffassen lässt. Da jeder Unterring eines Körpers auch ein Integritätsbereich ist, erhalten wir damit eine neue Charakterisierung von Integritätsbereichen:

Integritätsbereiche sind genau die Unterringe von Körpern.

Dies liefert auch eine mögliche Erklärung, warum der Nullring bei der Definition eines Integritätsbereiches ausgeschlossen wird: Es handelt sich nicht um den Unterring eines Körpers.

Bemerkung 6. Ist allgemeiner R ein kommutativer Ring und $P \trianglelefteq R$ ein Primideal, so ist $S_P := R \smallsetminus P$ eine multiplikative Teilmenge: Es gilt $1 \notin P$ da $P \neq R$ gilt, und somit $1 \in S_P$. Für alle $x, y \in S_P$ gilt $x, y \notin P$, und somit auch $xy \notin P$ (da P prim ist), und deshalb $xy \in S_P$.

Man bezeichnet den Ring $R_P := S_P^{-1}R$ als die *Lokalisierung von R an P*. Bei R_P behandelt es sich um einen sogenannten *lokalen Ring*, d.h. R_P besitzt genau ein maximales Ideal (nämlich $S_P^{-1}P$). Diese Konstruktion spielt eine wichtige Rolle in der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie.

Ist dabei R ein Integritätsbereich, so ist $0 \trianglelefteq R$ ein Primideal, und es folgt, dass $S = S_0 = R \smallsetminus \{0\}$ eine multiplikative Teilmenge ist. Zudem ist dann $S_0^{-1}0 = S^{-1}0 = 0$ das eindeutige maximale Ideal von $S^{-1}R$. Inbesondere ist das Nullideal in $S^{-1}R$ maximal, und $S^{-1}R$ somit ein Körper.

(d)

Die Abbildung $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto n/1$ ist injektiv. Für $S := \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ gilt deshalb

$$i(S) = i(\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}) = \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \subseteq \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\} = \mathbb{Q}^\times\,.$$

Nach der universellen Eigenschaft der Lokalsierung (siehe Bemerkung 2) induziert i deshalb einen Ringhomomorphismus

$$\bar{i}\colon \mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) = S^{-1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \quad \frac{p}{q} \mapsto \frac{i(p)}{i(q)} = \frac{p}{q}.$$

Der Ringhomomorphismus $\bar{i}$ ist surjektiv, und als Körperhomomorphismus auch injektiv. Die Injektivität von $\bar{i}$ lässt sich auch von Hand nachrechen, denn für alle $p/q \in \operatorname{Quot}(\mathbb{Z})$ gilt

$$\bar{i}\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \implies \frac{p}{q} = 0 \text{ in } \mathbb{Q} \implies p = 0 \text{ in } \mathbb{Z} \implies \frac{p}{q} = 0 \text{ in } \operatorname{Quot}(\mathbb{Z})\,.$$

Also ist $\bar{i}$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 7. Sofern die universelle Eigenschaft der Lokalisierung noch nicht zur Verfügung steht, so muss von Hand begründet werden, warum φ ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist:

1. Für alle $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ und $q_1, q_2 \in S$ mit $p_1/q_1 = p_2/q_2$ in $\operatorname{Quot}(\mathbb{Z})$ gilt $p_1 q_2 = p_2 q_1$ (siehe (1)) und somit auch $p_1/q_1 = p_2/q_2$ in $\mathbb{Q}$. Somit ist φ wohldefiniert.
2. Dass φ ein Ringhomomorphismus ist, ergibt sich durch direktes Nachrechnen.

Bemerkung 8. Ist R ein beliebiger Integritätsbereich und K ein Körper, so erhalten wir analog zur obigen Rechnung, dass jeder injektive Ringhomomorphismus $i\colon R \to K$ einen eindeutigen Körperhomomorphismus $\bar{i}\colon \operatorname{Quot}(R) \to K$ induziert, der für die Inklusion $j\colon R \to \operatorname{Quot}(R)$, $r \mapsto r/1$ das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Quot}(R) \arrow[r, "\bar{i}"] & K \\ R \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Man bemerke, dass dabei $\bar{i}$ als Körperhomomorphismus injektiv ist, also $\operatorname{Quot}(R)$ durch $\bar{i}$ mit einem Unterkörper von K identifiziert wird. Anschaulich bedeutet dies:

Es ist $\operatorname{Quot}(R)$ *ist der kleinste Körper, der* R *enthält.*

Jeder Körper K*, der* R *enthält, muss auch schon* $\operatorname{Quot}(R)$ *enthalten.*

Im Falle von $R = \mathbb{Z}$ und $K = \mathbb{Q}$ wird K als Körper bereits von R erzeugt, weshalb $\operatorname{Quot}(R)$ bereits ganz $\mathbb{Q}$ seien muss.

(e)

Wir gehen wie im vorherigen Aufgabenteil vor: Für die Inklusion $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $a \mapsto a$ gilt

$$\varphi(S) = S \subseteq \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\} = \mathbb{Q}^\times\,.$$

Deshalb induziert i nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung einen Ringhomomorphismus

$$\bar{i}\colon S^{-1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \quad \frac{a}{p^k} \mapsto \frac{i(a)}{i(p^k)} = \frac{a}{p^k}\,.$$

Insbesondere ist

$$\operatorname{im} \bar{i} = \left\{ \frac{a}{p^k} \,\middle|\, a, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\}$$

ein Unterring von $\mathbb{Q}$. Die Injektivität von $\bar{i}$ ergibt sich wie im vorherigen Aufgabenteil. Damit ergibt sich dann, dass $\bar{i}$ eine Isomorphismus $S^{-1}\mathbb{Z} \to \operatorname{im} \bar{i}$ induziert.