

Eine kurze Einführung in

Semidirekte Produkte

Jetzt mit noch weniger Kommutativität

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 14. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Direkte Produkte	2
1.1 Äußere direkte Produkte	2
1.2 Innere direkte Produkte	3
2 Semidirekte Produkte	7
2.1 Innere semidirekte Produkte	7
2.2 Äußere semidirekte Produkte	7
2.3 Spaltende Projektionen	7

1 Direkte Produkte

1.1 Äußere direkte Produkte

Definition

Es seien G und H zwei Gruppen. Auf der Menge $G \times H$ wird durch die Multiplikation

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

eine Gruppenstruktur definiert. Wir nennen die entstehende Gruppe das *äußere direkte Produkt* von G und H , und bezeichnen diese ebenfalls mit $G \times H$.

Einbettungen von G und H in $G \times H$

Die Gruppe $G \times H$ enthält die beiden Untergruppen

$$\overline{G} := G \times \{1\} \quad \text{und} \quad \overline{H} := \{1\} \times H.$$

Diese sind isomorph zu G , bzw. H , da sich die Gruppenmonomorphismen

$$\begin{aligned} i: G &\rightarrow G \times H, & g &\mapsto (g, 1), \\ j: H &\rightarrow G \times H, & h &\mapsto (1, h) \end{aligned}$$

zu Gruppenisomorphismen

$$i|_{\overline{G}}: G \rightarrow \overline{G} \quad \text{und} \quad j|_{\overline{H}}: H \rightarrow \overline{H}$$

einschränken. Wir können also G und H mit Untergruppen von $G \times H$ identifizieren. Wir werden diese Identifikation im Folgenden *nicht* implizit vornehmen, sondern stets explizit. Hierfür bezeichnen wir für $g \in G$ und $h \in H$ die entsprechenden Elemente aus $G \times H$ mit

$$\overline{g} := i(g) = (g, 1) \quad \text{und} \quad \overline{h} := j(h) = (1, h).$$

Vorstellungsmäßig unterscheiden wir im Folgenden allerdings nicht zwischen den Elementen g und \overline{g} , sowie den Elementen h und \overline{h} .

Universelle Eigenschaft von $G \times H$

Stellen wir uns G und H als Untergruppen von $G \times H$ vor, so kommutieren G und H miteinander, denn für alle $g \in G$, $h \in H$ gilt

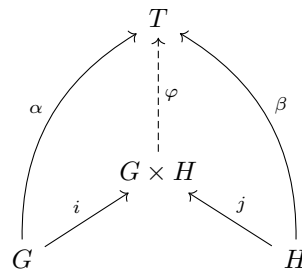
$$\overline{g}\overline{h} = (g, 1)(1, h) = (g, h) = (1, h)(g, 1) = \overline{h}\overline{g}.$$

Die beiden Inklusionen $i: G \rightarrow G \times H$ und $j: H \rightarrow G \times H$ betten also die Gruppen G und H in eine neue Gruppe $G \times H$ ein, in der G und H dann miteinander kommutieren. Tatsächlich ist $G \times H$ bereits universell mit dieser Eigenschaft:

Proposition 1. *Es sei T eine Gruppe, und es seien $\alpha: G \rightarrow T$ und $\beta: H \rightarrow T$ zwei Gruppenhomomorphismen, so dass*

$$\alpha(g)\beta(h) = \beta(h)\alpha(g)$$

für alle $g \in G, h \in H$ gilt. Dann gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \times H \rightarrow T$, der das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:



Die Gruppe $G \times H$ zusammen mit den beiden Inklusionen $i: G \rightarrow G \times H$ und $j: H \rightarrow G \times H$ ist also die „allgemeinste“ Möglichkeit, die Gruppen G und H auf kommutierende Weise zu einer gemeinsamen Gruppen $G \times H$ zusammenzufassen.

1.2 Innere direkte Produkte

Definition

Es sei G eine Gruppe, und es seien $H, K \leq G$ zwei Untergruppen. Wir wollen untersuchen, wann die Gruppe G dem direkten Produkt $H \times K$ entspricht, d.h. wann die Abbildung

$$\varphi: H \times K \rightarrow G, \quad (h, k) \mapsto hk$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Ist dies der Fall, so bezeichnen wir G als das *innere direkte Produkt* der beiden Untergruppen K und H .

Erste Charakterisierung

Wir charakterisieren zunächst, unter welchen Bedingungen φ ein Gruppenhomomorphismus ist, und wann φ surjektiv, bzw. injektiv ist.

- Für alle $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in K \times H$ gelten

$$\begin{aligned} \varphi((h_1, k_1)(h_2, k_2)) &= \varphi((h_1 h_2, k_1 k_2)) = h_1 h_2 k_1 k_2, \\ \varphi(h_1, k_1) \varphi(h_2, k_2) &= h_1 k_1 h_2 k_2. \end{aligned}$$

Somit ist φ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, falls

$$h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 h_2 k_1 k_2$$

für alle $h_1, h_2 \in K$, $k_1, k_2 \in H$ gilt. Indem man den Fall $h_1 = k_2 = 1$ betrachtet, ist dies ferner äquivalent dazu, dass

$$k_1 h_2 = h_2 k_1$$

für alle $h_1 \in K$, $k_2 \in H$ gilt. Also ist φ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn die Untergruppen K und H miteinander kommutieren.

- Die Abbildung φ ist surjektiv, wenn sich jedes Element $g \in G$ als $g = hk$ mit $h \in H$ und $k \in K$ darstellen lässt, d.h. wenn $G = HK$ gilt.
- Für alle $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ gilt

$$\varphi(h_1, k_1) = \varphi(h_2, k_2) \iff h_1 k_1 = h_2 k_2 \iff h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1}.$$

Man bemerke, dass das Element $x := h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1}$ dann bereits in $H \cap K$ enthalten ist.

- Gilt $H \cap K = 1$, so gilt $x = 1$, und somit $h_1 = h_2$ und $k_1 = k_2$. Somit gilt $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$, weshalb φ dann injektiv ist.
- Gilt andererseits $H \cap K \neq 1$, so gibt es ein Element $x \in H \cap K$ mit $x \neq 1$. Dann gilt $\varphi(x, x^{-1}) = 1 = \varphi(1, 1)$ aber $(x, x^{-1}) \neq (1, 1)$. Also ist φ dann nicht injektiv.

Zusammen zeigt dies, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $H \cap K = 1$ gilt.

Proposition 2. *Eine Gruppe G ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls H und K miteinander kommutieren, sowie $HK = G$ und $H \cap K = 1$ gelten.*

Zweite Charakterisierung

Wir wollen noch eine zweite Charakterisierung innerer direkte Produkte angeben:

- Wir nehmen zunächst an, dass G das innere direkte Produkt der Untergruppen H und K ist, dass also die Abbildung $\varphi: H \times K \rightarrow G$ ein Gruppenisomorphismus ist. Dann sind die Untergruppen $H, K \leq G$ bereits normal in G :
 - Man bemerke, dass die Untergruppen $\overline{H}, \overline{K} \leq H \times K$ normal sind. So gilt beispielsweise

$$(h, k)(h', 1)(h, k)^{-1} = (h, k)(h', 1)(h^{-1}, k^{-1}) = (hh'h^{-1}, kk^{-1}) = (hh'h^{-1}, 1),$$

was die Normalität von \overline{H} in $H \times K$ zeigt. Da φ ein Isomorphismus ist, folgt daraus, dass $H = \varphi(\overline{H})$ und $K = \varphi(\overline{K})$ normal in $\varphi(H \times K) = G$ sind.

- Alternativ lassen sich auch die Normalisatoren $N_G(H)$ und $N_G(K)$ betrachten: Es gilt stets $H \leq N_G(H)$, und da H und K miteinander kommutieren, gilt auch $K \leq N_G(H)$. Aus $G = HK$ folgt damit, dass bereits $G = N_G(H)$ gilt, dass also H normal in G ist. Analog ergibt sich die auch Normalität von K in G .

Unabhängig von der Vorgehensweise erhalten wir das folgende wichtige Resultat:

*Ist G das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$,
so sind H und K bereits beide normal in G .*

- Wir nehmen nun umgekehrt an, dass die Untergruppen $H, K \leq G$ beide normal sind, und dass $H \cap K = 1$ gilt. Dann kommutieren H und K auch schon miteinander. Für alle $h \in H$ und $k \in K$ gilt nämlich, dass

$$h \text{ und } k \text{ kommutieren miteinander} \iff hk = kh \iff hkh^{-1}k^{-1} = 1.$$

Da K normal ist, gilt dabei $hkh^{-1} \in K$, und somit auch $(hkh^{-1})k^{-1} \in K$. Analog gilt aber auch $h(kh^{-1}k^{-1}) \in H$. Somit gilt bereits $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = 1$. Also gilt $hkh^{-1}k^{-1} = 1$, weshalb h und k miteinander kommutieren.

Damit erhalten wir insgesamt, dass wir in Proposition 2 die Bedingung, dass H und K miteinander kommutieren, durch die Bedingung ersetzen können, dass H und K beide normal in G sind.

Proposition 3. *Eine Gruppe G ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls H und K beide normal in G sind, sowie $HK = G$ und $H \cap K = 1$ gelten.*

Für endliche Gruppen

Ist G endlich, so lässt sich dies Ausnutzen, um Proposition 2 und Proposition 3 umzuformulieren:

- Falls G das innere direkte Produkt von H und K ist, so ist $\varphi: H \times K \rightarrow G$ ein Isomorphismus, und somit insbesondere

$$|G| = |H \times K| = |H| \cdot |K|.$$

- Es gelte nun andererseits $|G| = |H| \cdot |K|$. Dann sind die Injektivität und Surjektivität von $\varphi: H \times K \rightarrow G$ äquivalent. In Proposition 2 und Proposition 3 genügt es deshalb jeweils, eine der beiden Bedingungen $HK = G$ und $H \cap K = 1$ zu fordern.

Damit erhalten wir für endliches G die folgenden (vier) Charakterisierungen innerer direkter Produkte:

Proposition 4. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Gruppen $H, K \leq G$, falls $|G| = |H| \cdot |K|$ gilt, und*

1. *die Untergruppen H und K kommutieren, oder*

2. die Untergruppen H und K beide normal sind,

und

1'. es gilt $H \cap K = 1$, oder

2'. es gilt $HK = G$.

Besonders hervorheben möchten wir an dieser Stelle die folgende der oberen Charakterisierungen:

Korollar 5. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls $|G| = |H| \cdot |K|$ gilt, H und K beide normal in G sind, und $H \cap K = 1$ gilt.*

2 Semidirekte Produkte

2.1 Innere semidirekte Produkte

2.2 Äußere semidirekte Produkte

2.3 Spaltende Projektionen