Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 5

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 14. Dezember 2017

Aufgabe 4

(a)

Für alle $(a, s) \in R \times S$ gilt $(a, s) \sim (a, s)$, denn für $1 \in S$ gilt

$$1 \cdot (as - as = 0\,.$$

Also ist $\sim$ reflexiv. Für alle $(a, s), (a', s') \in R \times S$ mit $(a, 0s) \sim (a', s')$ gibt es ein $t \in S$ mit

$$t \cdot (as' - a's) = 0\,.$$

Dann gilt

$$t \cdot (a's - as') = t \cdot (-(as' - a's)) = -(t \cdot (as' - a's)) = -0 = 0\,,$$

und somit ebenfalls $(a', s') \sim (a, s)$. Das zeigt, dass $\sim$ symmetrisch ist.

Für alle $(a, s), (a', s'), (a'', s'') \in R \times S$ mit $(a, s) \sim (a', s')$ und $(a', s') \sim (a'', s'')$ gibt es $t, u \in S$ mit

$$t \cdot (a's - as') = 0 \quad \text{und} \quad u \cdot (a''s' - a's'') = 0\,,$$

also mit

$$t \cdot as' = t \cdot a's \quad \text{und} \quad u \cdot a's'' = u \cdot a''s'\,.$$

Diese Gleichungen sollte man so lesen, dass sich in Anwesenheit des Elements t die Ersetzung $as' \to a's$ durchführen lässt, und in Anwesenheit des Elements u die Ersetzung $a's'' \to a''s'$. In Anwesenheit des Elementes $s'tu$ lässt sich dann auch die Ersetzung $as'' \to a''s$ durchführen, da

$$s'tu \cdot a''s = st \cdot u \cdot a''s' = st \cdot u \cdot a's'' = s''u \cdot t \cdot a's = s''u \cdot t \cdot as' = s'tu \cdot as''$$

gilt. Das zeigt die Transitivität von $\sim$.

Ingesamt zeigt dies, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Anstelle von $[a, s]$ schreiben wir im Folgenden

$$\frac{a}{s}$$

oder a/s für die Äquivalenzklasse von $(a, s) \in R \times S$.

(b)

Es seien $(a, s), (a', s'), (b, t), (b', t') \in R \times S$ mit $(a, s) \sim (a', s')$ und $(b, t) \sim (b', t')$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in S$ mit

$$u_1 \cdot (as' - a's) = 0 \quad \text{und} \quad u_2 \cdot (bt' - b't) = 0\,,$$

also mit

$$u_1 \cdot as' = u_1 \cdot a's \quad \text{und} \quad u_2 \cdot bt' = u_2 \cdot b't\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u_1u_2 \cdot (at + bs)s't' &= (u_1u_2 \cdot ats't') + (u_1u_2 \cdot bss't') \\ &= (u_2tt' \cdot u_1 \cdot as') + (u_1ss' \cdot u_2 \cdot bt') \\ &= (u_2tt' \cdot u_1 \cdot a's) + (u_1ss' \cdot u_2 \cdot b't) \\ &= (u_1u_2 \cdot a'stt') + (u_1u_2 \cdot b'ss't) = u_1u_2 \cdot (a't' + b's')st \end{aligned}$$

und somit

$$u_1u_2 \cdot ((at + bs)s't' - (a't' + b's')) = 0\,,$$

also

$$\frac{at + bs}{st} = \frac{a't' + b's'}{s't'}\,.$$

Das zeigt, dass die Addition

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st}$$

auf $S^{-1}R$ wohldefiniert ist.

Außerdem gilt

$$u_1u_2 \cdot abs't' = (u_1 \cdot as')(u_2 \cdot bt') = (u_1 \cdot a's)(u_2 \cdot b't) = u_1u_2 \cdot a'b'st$$

und somit

$$u_1u_2 \cdot (abs't' - a'b'st) = 0\,,$$

also

$$\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}.$$

Das zeigt, dass die Multiplikation

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

auf $S^{-1}R$ wohldefiniert ist.

Das folgende Lemma erweist sich zum Rechnen in $S^{-1}R$ als sehr nützlich:

Lemma 1 (Kürzen von Brüchen)**.** *Für alle $a/s \in S^{-1}R$ und $t \in S$ gilt*

$$\frac{a}{s} = \frac{at}{st}\,.$$

Beweis. Für $1 \in S$ gilt $1 \cdot (ast - ats) = 0$, also gilt $(a, s) \sim (at, st)$. □

Hieraus ergibt sich insbesondere, dass $0/1 = 0/s$ für alle $s \in S$ gilt, da

$$\frac{0}{s} = \frac{0 \cdot s}{1 \cdot s} = \frac{0}{1}$$

gilt.

Die Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation, sowie die Distributivität folgen durch direktes Nachrechnen. Das Einselement in $S^{-1}R$ ist $1/1$, denn für alle $a/s \in S^{-1}R$ gilt

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{s \cdot 1} = \frac{a}{s}\,.$$

Das Nullelement ist $0/1$, denn für alle $a/s \in S^{-1}R$ gilt

$$\frac{a}{s} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot s}{s \cdot 1} = \frac{a}{s}\,.$$

Das additiv Inverse Element zu $a/s \in S^{-1}R$ ist $(-a)/s$, denn es gilt

$$\frac{a}{s} + \frac{-a}{s} = \frac{as - as}{s^2} = \frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}\,.$$

Ingesamt zeigt dies, dass $S^{-1}R$ mit der gegebenen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring ergibt.