

Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 11

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 23. Januar 2018

Aufgabe 1

(a)

Die Aussage ist *falsch*: Nach Aufgabe 2 von Zettel 10 gibt es einen Automorphismus $f: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Das Element $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ hat eine Quadratwurzel, das Element $-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ allerdings nicht. Es gibt deshalb keinen Körperhomomorphismus $\hat{f}: \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ mit $\hat{f}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Daher lässt sich f nicht zu einem Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ fortsetzen.

(b)

Die Aussage ist *falsch*: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes normierte Polynom $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ in quadratische und lineare Faktoren. Insbesondere ist $f(t)$ reduzibel, falls $\deg f(t) \geq 3$ gilt. Somit ist das gegebene Polynom reduzibel.

(c)

Die Aussage ist *wahr*: Eine einfache Lösung besteht darin, für $f(t)$ das konstante 1-Polynom zu wählen. Das Polynom $f(t)$ lässt sich aber auch nicht-konstant wählen: Gilt $S = \emptyset$, so lässt sich $f(t) = t$ wählen, und gilt $S \neq \emptyset$, so lässt sich $f(t) = 1 + \prod_{s \in S} (t - s)$ wählen.

(d)

Die Aussage ist *falsch*, da es keine endlichen algebraisch abgeschlossenen Körper gibt: Ist K ein endlicher Körper, so gibt es nach dem vorherigen Aufgabenteil ein nicht-konstantes Polynom $f(t) \in K[t]$ gibt, das in K keine Nullstelle hat.

(e)

Die Aussage ist *wahr*: Ist K ein endlicher Integritätsbereich, so ist K per Definition kommutativ und es gilt $K \neq 0$. Es bleibt daher zu zeigen, dass jedes Element $x \in K$, $x \neq 0$ ein Inverses besitzt.

Die Abbildung $\lambda_x: K \rightarrow K$, $y \mapsto xy$ ist injektiv, da K ein Integritätsbereich ist, denn für alle $y_1, y_2 \in K$ gilt

$$\begin{aligned}\lambda_x(y_1) = \lambda_x(y_2) &\implies xy_1 = xy_2 \implies x(y_1 - y_2) = 0 \\ &\implies y_1 - y_2 = 0 \implies y_1 = y_2.\end{aligned}$$

Wegen der Endlichkeit von K ist λ_x somit auch surjektiv. Insbesondere gibt es ein Element $y \in K$ mit $1 = \lambda_x(y) = xy$, so dass x eine Einheit in K ist.

Bemerkung 1. Ist $D \neq 0$ ein (nicht notwendigerweise kommutativer) links- und rechtsnullteilerfreier Ring, so ergibt sich nach der obigen Argumentation, dass jedes Element $x \in D$, $x \neq 0$ ein Links- und Rechtsinverses besitzt, und somit bereits ein beidseitig Inverses (der Leser sollte sich bewusst machen, dass diese Folgerung nicht trivial ist). Also ist D ein Schiefkörper.

Nach dem Satz von Wedderburn, ist jeder endliche Schiefkörper bereits kommutativ, und somit ein Körper. Dies gilt insbesondere für D .

Aufgabe 2

(a)

Da $\mathbb{Q} \subseteq K$ der Primkörper von K ist, gilt für den Körperhomomorphismus f , dass $f|_{\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}$. Für das Minimalpolynom $m_a(t) = \sum_i p_i t^i \in \mathbb{Q}[t]$ gilt $p_i \in \mathbb{Q}$ für alle i ; für jede Nullstelle $b \in S_a$ von $m_a(t)$ gilt somit

$$m_a(f(b)) = \sum_i p_i f(b)^i = \sum_i f(p_i) f(b)^i = f\left(\sum_i p_i b^i\right) = f(m_a(b)) = f(0) = 0,$$

und somit auch $f(b) \in S_a$.

(b)

Für jedes $a \in K$ ist die Menge S_a endlich, da das Polynom $m_a(t) \in \mathbb{Q}[t] \subseteq K[t]$ nur endlich viele Nullstellen hat. Die Einschränkung $f|_{S_a}^{S_a}: S_a \rightarrow S_a$ ist injektiv, da f als Körperhomomorphismus injektiv ist, und wegen der Endlichkeit von S_a somit auch surjektiv. Also gilt $f(S_a) = S_a$.

(c)

Für jedes $a \in K$ gilt $a \in S_a$, weshalb $K = \bigcup_{a \in K} S_a$ gilt. Damit folgt, dass

$$f(K) = f\left(\bigcup_{a \in K} S_a\right) = \bigcup_{a \in K} f(S_a) = \bigcup_{a \in K} S_a = K$$

gilt. Somit ist der Körperhomomorphismus f surjektiv, und somit bereits ein Körperisomorphismus (als Körperhomomorphismus ist f insbesondere injektiv).

Aufgabe 3

(a)

Mit $f(t) = \sum_i a_i t^i$ und $g(t) = \sum_i b_i t^i$ gilt $(r \cdot f + s \cdot g)(t) = \sum_i (r \cdot a_i + s \cdot b_i) t^i$, und somit

$$\begin{aligned}(r \cdot f + s \cdot g)'(t) &= \sum_i i(r \cdot a_i + s \cdot b_i) t^{i-1} = r \cdot \sum_i i a_i t^{i-1} + s \cdot \sum_i i b_i t^{i-1} \\ &= r \cdot f'(t) + s \cdot g'(t).\end{aligned}$$

(b)

Mit $f(t) = \sum_i a_i t^i$ und $g(t) = \sum_j b_j t^j$ gilt $(f \cdot g)(t) = \sum_{i,j} a_i b_j t^{i+j}$ und somit

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(t) &= \sum_{i,j} a_i b_j (i+j) t^{i+j-1} = \sum_{i,j} a_i b_j i t^{i+j-1} + \sum_{i,j} a_i b_j j t^{i+j-1} \\ &= \left(\sum_i a_i i t^{i-1}\right) \left(\sum_j b_j t^j\right) + \left(\sum_i a_i t^i\right) \left(\sum_j b_j j t^{j-1}\right) \\ &= f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t).\end{aligned}$$

(c)

Hat $f(t)$ keine 9 verschiedenen Nullstellen, so hat $f(t)$ in \mathbb{F}_9 , und somit auch in $\overline{\mathbb{F}_3}$ eine mehrfache Nullstelle. Da $f(t)$ irreduzibel ist, gilt somit (wie in der Vorlesung gezeigt), dass $f'(t) = 0$. Insbesondere ist dann jedes $x \in \mathbb{F}_9$ eine Nullstelle von $f'(t)$.

(d)

Mit „doppelten“ Nullstellen sind in dieser Aufgaben die mehrfachen Nullstellen gemeint.

(i)

Für das gegebene Polynom $f(t) := t^6 + t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t$ gilt

$$f'(t) = 5t^4 - 4t^3 - 2t + 1 = 2t^4 + 2t^3 + t + 1 = t^4 + t^3 + 2t + 2.$$

Es gibt nun (mindestens) zwei Vorgehensweisen: Wir bestimmen jeweils die gemeinsamen Nullstellen von $f(t)$ und $f'(t)$; dies sind dann genau die mehrfachen Nullstellen von $f(t)$ und $f'(t)$.

- Es gilt

$$\begin{aligned} f'(t) &= t^4 + t^3 + 2t + 2 = t^3(t+1) + 2(t+1) \\ &= (t^3 + 2)(t+1) = (t+2)^3(t+1) = (t-1)^3(t-1). \end{aligned}$$

(Dabei nutzen wir für die Umformung $(t^3+2) = (t+2)^3$, dass $\text{char}(\mathbb{F}_9) = 3$ gilt.) Also zerfällt $f'(t)$ bereits über \mathbb{F}_3 in Linearfaktoren, und die auftretenden Nullstellen sind 1 und -1 . Dabei ist 1 auch eine Nullstelle von $f(t)$, -1 hingegen nicht.

Somit ist 1 die einzige gemeinsame Nullstelle von $f(t)$ und $f'(t)$, und somit auch die einzige mehrfache Nullstelle von $f(t)$.

- Mithilfe des euklidischen Algorithmus ergibt sich, dass $(t-1)^3$ der größte gemeinsame Teiler von $f(t)$ und $f'(t)$ ist. Da die gemeinsamen Nullstellen von $f(t)$ und $f'(t)$ genau die Nullstellen dieses größten gemeinsamen Teilers sind, ist 1 die einzige mehrfache Nullstelle des Polynoms $f(t)$.

(e)

Für das gegebene Polynom $g(t) := t^{12} + t^6 + t^4 + 2t^3 + t$ gilt

$$g'(t) = 4t^3 + 1 = t^3 + 1 = (t+1)^3.$$

Da -1 eine Nullstelle von $g(t)$ ist, ist somit -1 die einzige gemeinsame Nullstelle des Polynoms $g(t)$.

Aufgabe 4

(a)

Wir bestimmen zunächst, wieviele $z \in K$ von der Form $z = x^2$ für passendes $x \in K$ ist, d.h. wie viele Zahlen aus K bereits Quadratzahlen sind. Da $0^2 = 0$ gilt, genügt es hierfür, die Elemente $z \in K \setminus \{0\} = K^\times$ zu betrachten.

Die Abbildung

$$q: K^\times \rightarrow K^\times, \quad x \mapsto x^2$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit

$$\ker q = \{x \in K^\times \mid x^2 = 1\} = \{1, -1\}$$

(denn dies sind genau die Nullstellen des Polynoms $t^2 - 1 = (t+1)(t-1) \in K[t]$).

1. Gilt $\text{char}(K) = 2$, so gilt $1 = -1$, so dass $\ker q = 1$ gilt. In diesem Fall ist q injektiv, und wegen der Endlichkeit von q somit bereits bijektiv. Also ist dann jedes $z \in K^\times$ ein Quadrat.
2. Gilt $\text{char}(K) \neq 2$, so gilt $1 \neq -1$, und somit $|\ker q| = 2$. Dann gilt

$$|\text{im } q| = \frac{|K^\times|}{|\ker q|} = \frac{|K| - 1}{2}.$$

Dann ist also genau die Hälfte aller $z \in K^\times$ ein Quadrat.

Im Fall $\text{char}(K) = 2$ folgt mit $0^2 = 0$, dass jedes $z \in K$ ein Quadrat ist, die Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto x^2$ also bijektiv ist. Im Fall $\text{char}(K) \neq 2$ folgt mit $0^2 = 0$ hingegen, dass

$$|\{x^2 \mid x \in K\}| = 1 + |\{x^2 \mid x \in K^\times\}| = 1 + \frac{|K| - 1}{2} = \frac{|K| + 1}{2}.$$

Da $a \in K^\times$ gilt, ist die Abbildung $K \rightarrow K, z \mapsto az$ bijektiv, und somit

$$|\{ax^2 \mid x \in K\}| = |\{x^2 \mid x \in K\}| = \begin{cases} |K| & \text{falls } \text{char}(K) = 2, \\ (|K| + 1)/2 & \text{falls } \text{char}(K) \neq 2. \end{cases}$$

(c)

Es gilt $\text{char}(K) = 2$, da $|K|$ gerade ist. Wie bereits gesehen ist die Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto ax^2$ deshalb bijektiv. Also ist auch die Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto 1 + ax^2$ bijektiv. Es gibt also für jedes $z \in K$ ein eindeutiges Element $x \in K$ mit $z = 1 + ax^2$.

(b)

Gilt $\text{char}(K) = 2$, ist also $|K|$ gerade, so lässt sogar noch $y = 0$ wählen, wie bereits gezeigt. Es bleibt also nur noch der Fall $\text{char}(K) \neq 2$ zu betrachten. Wie bereits gesehen, gelten dann

$$|\{1 + ax^2 \mid x \in K\}| = |\{ax^2 \mid x \in K\}| = |\{x^2 \mid x \in K\}| = \frac{|K| + 1}{2}$$

und

$$|\{-by^2 \mid y \in K\}| = |\{y^2 \mid y \in K\}| = |\{y^2 \mid y \in K\}| = \frac{|K| + 1}{2}.$$

Dabei gilt

$$\frac{|K| + 1}{2} + \frac{|K| + 1}{2} = |K| + 1 > |K|,$$

weshalb nach dem Schubfachprinzip

$$\{1 + ax^2 \mid x \in K\} \cap \{-by^2 \mid y \in K\} \neq \emptyset$$

gilt. Es gibt also $x, y \in K$ mit $1 + ax^2 = -by^2$, also mit $1 + ax^2 + by^2 = 0$.

Aufgabe 6

(a)

Die in dieser Aufgabe gezeigte Aussage, dass jede endliche abelsche Gruppe A zu einem direkten Produkt von zyklischen p -Gruppen isomorph ist (wobei p die Primfaktoren von $|A|$ durchläuft), verallgemeinert sich zum *Fundamentalsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen*.

Satz 2 (Fundamentalsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen). *Ist A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, so gilt*

$$A \cong \mathbb{Z}^r \times \prod_{i=1}^s (\mathbb{Z}/p_i^{\nu_i})$$

mit $r, s \geq 0$, $\nu_1, \dots, \nu_s \geq 1$ und p_1, \dots, p_s prim. Dabei sind die Zahlen r, s eindeutig, und die Paare $(p_1, \nu_1), \dots, (p_s, \nu_s)$ eindeutig bis auf Permutation.

Ist A eine endliche abelsche Gruppe, so muss $r = 0$ gelten, und wir erhalten die Aussage der Aufgabe. Wir erhalten sogar die Eindeutigkeit (bis auf Permutation der Faktoren) der Zerlegung von A in zyklische p -Gruppen.

Bemerkung 3. In der Praxis stellt sich häufig die Frage, wie für gegebene Elemente $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}^n$ die Gruppe

$$A := \mathbb{Z}^n / \langle a_1, \dots, a_m \rangle$$

aussieht. Da \mathbb{Z}^n als abelsche Gruppe von den (endlich vielen) Standardbasisvektoren $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}^n$ erzeugt wird, ist auch A endlich erzeugt. Nach Satz 2 gilt deshalb

$$A \cong \mathbb{Z}^r \times \prod_{i=1}^s (\mathbb{Z}/p_i^{\nu_i}).$$

Es gibt nun einen Algorithmus, um diese Zerlegung auch tatsächlich zu berechnen:

1. Man trage zunächst die a_1, \dots, a_n als Spalten in eine Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{Z})$ ein.
2. Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen (wobei man beim Skalieren der Zeilen und Spalten nur die Einheiten $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ nutzen darf) bringe man A in eine (2×2) -Blockgestalt

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_s & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

wobei $d_1, \dots, d_s \geq 1$.

3. Es gilt dann

$$A \cong \mathbb{Z}^{m-s} \times (\mathbb{Z}/d_1) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_s).$$

Mithilfe des chinesischen Restklassensatzes lassen sich dann die Faktoren \mathbb{Z}/d_i noch weiter in ein direktes Produkte von zyklischen p -Gruppen zerlegen.

Insbesondere lassen sich der Fundamentalsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen (inklusive der von uns gezeigten Aussagen über endliche abelsche Gruppen) auch rein algorithmisch begründen. (Zumindest die Existenz der entsprechenden Zerlegungen.)

Bemerkung 4. Der Fundamentalsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen verallgemeinert sich weiter zum *Fundamentalsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen* (den wir hier nicht angeben werden). Für den Hauptidealring \mathbb{Z} erhält man hieraus den Fundamentalsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen; für den Hauptidealring $K[t]$, wobei K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, erhält man (unter anderem) die Jordan-Normalform aus der linearen Algebra.

Insbesondere lassen sich die Beweise zu Aufgaben 5 und 6 in einen Beweis für die Existenz der Jordan-Normalform über algebraisch abgeschlossenen Körpern umschreiben. (Die Zerlegung einer endlichen abelschen Gruppe in ihre p -Sylowuntergruppen wird dabei durch die Zerlegung eines endlichdimensionalen Vektorraums in die verallgemeinerten Eigenräume, bzw. Haupträume ersetzt.) Hieraus ergibt sich auch, dass die Lösungen zu Aufgabe 5 nicht sehr viel besser als die Beweise für die Existenz der Jordan-Normalform sein können.