Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 4

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 18. November 2017

Aufgabe 4

(a)

Lemma 1. *Es sei R_i, $i \in I$ eine Familie von Ringen. Dann trägt $\prod_{i \in I} R_i$ eine Ringstruktur durch*

$$(r_i)_{i\in I} + (r'_i)_{i\in I} = (r_i + r'_i)_{i\in I} \quad \textit{und} \quad (r_i)_{i\in I} \cdot (r'_i)_{i\in I} = (r_i r'_i)_{i\in I}.$$

Beweis. Die Ringaxiome ergeben sich durch direktes Nachrechnen wie in Aufgabe 2 (c). Das Nullelement ist durch $0 = (0_{R_i})_{i\in I}$ gegeben, und das Einselement durch $1 = (1_{R_i})_{i\in I}$. □

Der hier beschrieben Ring ist $A = \prod_{i\geq 1} \mathbb{Z}/p_i$.

(b)

Es gilt $0 = (0, 0, 0, \dots) \in B$. Für $x, y \in B$ mit $x = (x_1, x_2, \dots)$ und $y = (y_1, y_2, \dots)$ gibt es $n, m \geq 1$ mit $x_i = 0$ für alle $i \geq n$ und $y_i = 0$ für alle $i \geq m$. Dann ist $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots)$ mit $x_i - y_i = 0$ für alle $i \geq \max(n, m)$, und somit $x - y \in B$.

(c)

Für jedes $x \in \mathbb{Z}/n$ gilt $n \cdot x = 0$. Für $x \in B$ mit $x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ gilt deshalb

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} p_i \cdot x = \prod_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) &= \left(\prod_{i=1}^{n} p_i \cdot x_1, \dots, \prod_{i=1}^{n} p_i \cdot x_n, 0, \dots\right) \\ &= \left(\prod_{i=2}^{n} p_i \cdot p_1 \cdot x_1, \dots, \prod_{i=1}^{n-1} p_i \cdot p_n \cdot x_n, 0, \dots\right) = (0, \dots, 0, 0, \dots).\end{aligned}$$

Somit hat x endliche Ordnung.

(d)

Gilt $\operatorname{ord}(1_R) = \infty$, so git auch $\exp(G) = \infty$. Es sei also $n \coloneqq \operatorname{ord}(1_R) < \infty$. Für jedes $r \in R$ gilt dann

$$n \cdot r = \underbrace{r + \cdots + r}_{n} = \underbrace{1_R \cdot r + \cdots + 1_R \cdot r}_{n} = \underbrace{(1_R + \cdots + 1_R)}_{n} \cdot r = (n \cdot 1_R) \cdot r = 0 \cdot r = 0,$$

und deshalb $\operatorname{ord}(r) \mid \operatorname{ord}(1_R)$. Somit gilt dann

$$\operatorname{kgV}\{\operatorname{ord}(r) \,|\, r \in R\} = \operatorname{ord}(1_R).$$

(e)

Für jedes $j \geq 1$ gilt für das Element $x^{(j)} \in B$ mit

$$x_i^{(j)} = \delta_{ij} \qquad \text{für alle } i \geq 1,$$

dass $\operatorname{ord}(x^{(j)}) = p_j$. Somit ist $\{\operatorname{ord}(x) \,|\, x \in B\} \supseteq \{\operatorname{ord}(x^{(j)}) \,|\, j \geq 1\} = \{p_j \,|\, j \geq 0\}$ und somit $\exp(B) = \infty$.

(f)

Gebe es eine Ringstruktur auf B, so wäre $\infty = \exp(B) = \operatorname{ord}(()1_B) < \infty$.

(g)

Das Einselement von A ist durch $1_A = (1, 1, 1, \dots) \notin B$ gegeben. Deshalb ist B kein Unterring von A.