

Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 4

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 18. November 2017

Aufgabe 3

(b)

Wir haben im Tutorium gesehen, dass für $A \in M_n(K)$ die Implikationen

A ist nicht injektiv $\implies A$ ist ein Linksnulleiler

und

A ist nicht surjektiv $\implies A$ ist ein Rechtsnulleiler

gelten. Dabei handelt es sich tatsächlich schon um Äquivalenzen. Aus der linearen Algebra wissen wir dabei, dass wegen der Endlichdimensionalität von K^n die Injektivität und Surjektivität von A äquivalent sind. Deshalb kann der Matrizenring $M_n(K)$ keine Beispiele liefern.

Im Tutorium haben wir dieses Problem dadurch gelöst, dass wir den endlichdimensionalen K -Vektorraum K^n durch einen unendlichdimensionalen K -Vektorraum V ersetzt haben, und anstelle von $M_n(K) \cong \text{End}(K^n)$ den Endomorphismenring $\text{End}(V)$ betrachtet haben.

Ein anderer Ansatz besteht darin, die Einträge der Matrizen nicht aus einem Körper K zu wählen:

- Ein erster Ansatz besteht darin, anstelle eines Körpers K einen passenden kommutativen Ring R zu betrachten, und dann im Matrizenring $M_n(R)$ nach Beispielen zu suchen. Aufgrund der folgenden Resultate aus der kommutativen Algebra wird dies allerdings nicht zum Erfolg führen:

Lemma 1. *Ist R ein kommutativer Ring, so gilt für $A \in M_n(R)$ genau dann $\ker A \neq 0$, wenn $\det A \in R$ ein Nulleiler ist.*

Korollar 2. *Ist R ein kommutativer Ring, so sind für $A \in M_n(R)$ die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- i) Die Matrix A ist ein Linksnulleiter in $M_n(R)$.
 - ii) Der Skalar $\det A$ ist ein Nulleiter in R .
 - iii) Die Matrix A ist ein Rechtsnulleiter in $M_n(R)$.
- Der obige Ansatz lässt sich dadurch reparieren, dass man die Matrixeinträge aus verschiedenen kommutativen Ringen wählt. So kann man etwa

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/2 \right\}$$

mit der Addition

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & \bar{b}' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & \overline{ab' + bc'} \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$$

betrachten. Dass R mit den oberen Operationen tatsächlich einen Ring bildet, erkennt man durch direktes Nachrechnen; wir werden auch später noch ein weiteres Argument hierfür sehen. In diesem Ring lässt sich dann die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$$

betrachten. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

weshalb A ein Linksnulleiter ist. Andererseits gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 0 & c \end{pmatrix};$$

wobei genau dann $2a = 0$, wenn $a = 0$. Deshalb ist A kein Rechtsnulleiter.

- Im Tutorium kam die Frage auf, ob es auch Beispiele in passenden endlichen Ringen gibt. Wie sich herausstellt¹, ist dies nicht möglich:
Lemma 3. *Ist R ein endlicher (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring und $r \in R$ kein Links-, bzw. Rechtsnulleiter, so ist r eine Einheit.*

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass r kein Linksnulleiter ist; der Fall, dass r kein Rechtsnulleiter ist, verläuft analog.

Nach Annahme ist dann die Abbildung

$$\pi_r: R \rightarrow R, \quad a \mapsto ra$$

¹Siehe <https://math.stackexchange.com/a/45220/300783>.

injektiv, und wegen der Endlichkeit von R somit bereits bijektiv. Die Bijektion π_r ist also ein Element der symmetrischen Gruppe

$$S(R) = \{\pi: R \rightarrow R \mid \pi \text{ ist eine Bijektion}\}.$$

Die Gruppe $S(R)$ ist endlich, da R endlich ist. Also hat π_r endliche Ordnung, d.h. es gibt $n \geq 1$ mit $\pi_r^n = \text{id}_R$. Dabei ist die Abbildung π_r^n durch Multiplikation mit r^n gegeben. Also ist r^n linksneutral bezüglich der Multiplikation, und somit bereits $r^n = 1$. Folglich ist r eine Einheit mit $r^{-1} = r^{n-1}$. \square

Korollar 4. *Ist R ein endlicher (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring, so ist jedes Element $r \in R$ entweder eine Einheit oder ein beidseitiger Nullteiler.*