Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 10

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 12. Januar 2018

Aufgabe 2

Es sei $\pi\colon K[t] \to K[t]/(p(t))$, $q \mapsto \overline{q}$ die kanonische Projektion. Da $p(t)$ das Minimalpolynom von a über K ist, faktorisiert der Auswertungshomomorphismus $\mathrm{ev}_a\colon K[t] \to L$, $\overline{q(t)} \mapsto q(a)$ über π zu einem Isomorphismus von Körper $\overline{\mathrm{ev}_a}\colon K[t]/(p(t)) \to K(a)$, $\overline{q(t)} \mapsto q(a)$, der das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd}
K(a) & K[t]/(p(t)) \arrow[l, "\overline{\mathrm{ev}_a}"'] \\
 & K[t] \arrow[u, "\pi"'] \arrow[ul, "\mathrm{ev}_a"]
\end{tikzcd}$$

Wir schreiben im Folgenden abkürzend $p'(t) \coloneqq f_*(p(t))$.

(a)

Es sei $\pi'\colon K'[t] \to K'[t]/(p'(t))$, $q'(t) \mapsto \overline{q'(t)}$ die kanonische Projektion. Da a' eine Nullstelle von $p'(t)$ ist, faktorisiert der Auswertungshomomorphismus $\mathrm{ev}_{a'}\colon K'[t] \to L'$ über einen Homomorphismus $\overline{\mathrm{ev}_{a'}}\colon K'[t]/(p'(t)) \to L'$, $\overline{q'(t)} \mapsto q'(a')$, der das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd}
K'[t](p'(t)) \arrow[r, "\overline{\mathrm{ev}_{a'}}"] & L' \\
K'[t] \arrow[u, "\pi'"] \arrow[ur, "\mathrm{ev}_{a'}"']
\end{tikzcd}$$

Es gilt $\ker \pi' = (p'(t))$ und somit $p(t) \in \ker(\pi' \circ f_*)$, weshalb $\pi' \circ f_*\colon K[t] \to K'[t]/(p'(t))$ nach dem Homomorphisatz einen Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon K[t]/(p(t)) \to K'[t]/(p'(t)) \quad \overline{q(t)} \mapsto \overline{f_*(q(t))}\,,$$

faktorisiert, der das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd}
K[t]/(p(t)) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & K'[t]/(q'(t)) \\
K[t] \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "f_*"] & K'[t] \arrow[u, "\pi'"']
\end{tikzcd}$$

Ingesamt haben wir damit das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K(a) & K[t]/(p(t)) \arrow[l, "\overline{\mathrm{ev}_a}"'] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & K'[t]/(p'(t)) \arrow[r, "\overline{\mathrm{ev}_{a'}}"] & L' \\
 & K[t] \arrow[ul, "\mathrm{ev}_a"] \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "f_*"] & K'[t] \arrow[u, "\pi'"'] \arrow[ur, "\mathrm{ev}_{a'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Der gesuchte Homomorphismus φ ist nun $\varphi := \overline{\mathrm{ev}_{a'}} \circ \tilde{\varphi} \circ \overline{\mathrm{ev}_a}^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
K(a) \arrow[rrr, bend left, "\varphi"] & K[t]/(p(t)) \arrow[l, "\overline{\mathrm{ev}_a}"'] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & K'[t]/(p'(t)) \arrow[r, "\overline{\mathrm{ev}_{a'}}"] & L' \\
 & K[t] \arrow[ul, "\mathrm{ev}_a"] \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "f_*"] & K'[t] \arrow[u, "\pi'"'] \arrow[ur, "\mathrm{ev}_{a'}"'] &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Betrachtet man, wie das Element $t \in K[t]$ in dem obigen Diagramm herumgeschoben wird, so erhalten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rrr, bend left, mapsto, "\varphi"] & \bar{t} \arrow[l, mapsto, "\overline{\mathrm{ev}_a}"'] \arrow[r, mapsto, "\tilde{\varphi}"] & \bar{t} \arrow[r, mapsto, "\overline{\mathrm{ev}_{a'}}"] & a' \\
 & t \arrow[ul, mapsto, "\mathrm{ev}_a"] \arrow[u, mapsto, "\pi"] \arrow[r, mapsto, "f_*"] & t \arrow[u, mapsto, "\pi'"'] \arrow[ur, mapsto, "\mathrm{ev}_{a'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt somit $\varphi(a) = a'$. Für jedes $x \in K$ erhalten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rrr, bend left, mapsto, "\varphi"] & \overline{x} \arrow[l, mapsto, "\overline{\mathrm{ev}_a}"'] \arrow[r, mapsto, "\tilde{\varphi}"] & \overline{f(x)} \arrow[r, mapsto, "\overline{\mathrm{ev}_{a'}}"] & f(x) \\
 & x \arrow[ul, mapsto, "\mathrm{ev}_a"] \arrow[u, mapsto, "\pi"] \arrow[r, mapsto, "f_*"] & f(x) \arrow[u, mapsto, "\pi'"'] \arrow[ur, mapsto, "\mathrm{ev}_{a'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Also gilt $\varphi|_K = f$.

Bemerkung 1. Wer keine Lust auf Diagramme hat, kann die obigen beiden Diagramme auch in Gleichungsketten übersetzen: Es gilt

$$\varphi(a) = \varphi(\mathrm{ev}_a(t)) = \varphi(\overline{\mathrm{ev}_a}(\bar{t})) = \overline{\mathrm{ev}_{a'}}(\tilde{\varphi}(\bar{t})) = \overline{\mathrm{ev}_{a'}}(\overline{f_*(t)}) = \overline{\mathrm{ev}_{a'}}(\bar{t}) = \mathrm{ev}_{a'}(t) = a' \,,$$

und für jedes $x \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(\mathrm{ev}_a(x)) = \varphi(\overline{\mathrm{ev}_a}(\overline{x})) = \overline{\mathrm{ev}_{a'}}(\tilde{\varphi}(\overline{x})) \\ &= \overline{\mathrm{ev}_{a'}}(\overline{f_*(x)}) = \overline{\mathrm{ev}_{a'}}(\overline{f(x)}) = \mathrm{ev}_{a'}(f(x)) = f(x) \,, \end{aligned}$$

und somit $\varphi|_K = f$.

(b)

Ist $\varphi\colon K(a) \to L'$ ein Körperhomomorphismus mit $\varphi|_K = f$, so gilt für das Element $a' \coloneqq \varphi(a) \in L$ mit $p(t) = \sum_i p_i t^i$, dass

$$\begin{aligned} p'(a') &= f_*(p(t))(\varphi(a)) = \left(\sum_i f(p_i) t^i\right)(\varphi(a)) = \left(\sum_i \varphi(p_i) t^i\right)(\varphi(a)) \\ &= \sum_i \varphi(p_i)\varphi(a)^i = \varphi\left(\sum_i p_i a^i\right) = \varphi(p(a)) = \varphi(0) = 0 \,. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass die gegebene Abbildung wohldefiniert ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist sie surjektiv. Sie ist injektiv, denn $K(a)$ wird als Ring von $K \cup \{a\}$ erzeugt, weshalb jeder Ringhomomorphismus $\varphi\colon K(a) \to L$ durch die Einschränkung $\varphi|_K$ und das Bildelement $\varphi(a)$ bereits eindeutig bestimmt ist.

(c)

Indem wir K' durch $f(K)$ ersetzen, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass der Körperhomomorphismus f surjektiv ist. Dann ist auch f_* surjektiv. Es gilt $K'(a') = \operatorname{im} \mathrm{ev}_{a'}$, denn a' ist algebraisch über K', da a' eine Nullstelle des Polynoms $p'(t) \in K'[t]$ ist (es gilt $p'(t) = f_*(p(t) \neq 0$, da $p(t) \neq 0$ gilt, und f_* wegen der Injektvität von f ebenfalls injektiv ist). Aus der Kommutativität des Diagramm (1) und der Surjektvitäten von ev_a und f_* folgt somit, dass

$$\operatorname{im} \varphi = \operatorname{im}(\varphi \circ \mathrm{ev}_a) = \operatorname{im}(\mathrm{ev}'_{a'} \circ f_*) = \operatorname{im} \mathrm{ev}_{a'} = K'(a') = \varphi(K)(\varphi(a)) \,.$$