Eine kurze Einführung in

Semidirekte Produkte

Jetzt mit noch weniger Kommutativität

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 19. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Äußere direkte Produkte

1.1 Definition

Es seien G und H zwei Gruppen. Auf der Menge $G \times H$ wird durch die Multiplikation

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) \coloneqq (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

eine Gruppenstruktur definiert. Wir nennen die entstehende Gruppe das *äußere direkte Produkt* von G und H, und bezeichnen diesese mit $G \times H$.

1.2 Einbettungen von G und H in $G \times H$

Die Gruppe $G \times H$ enthält die beiden Untergruppen

$$\overline{G} \coloneqq G \times \{1\} \quad \text{und} \quad \overline{H} \coloneqq \{1\} \times H\,.$$

Diese sind isomorph zu G, bzw. H, da sich die Gruppenmonomorphismen

$$\begin{aligned} i\colon G \to G \times H, &\quad g \mapsto (g, 1)\,, \\ j\colon H \to G \times H, &\quad h \mapsto (1, h) \end{aligned}$$

zu Gruppenisomorphismen

$$i|^{\overline{G}}\colon G \to \overline{G} \quad \text{und} \quad j|^{\overline{H}}\colon H \to \overline{H}$$

einschränken. Wir können also G und H mit Untergruppen von $G \times H$ identifizieren. Wir werden diese Identifikation im Folgenden *nicht* implizit vornehmen, sondern stets explizit. Hierfür bezeichnen wir für $g \in G$ und $h \in H$ die entsprechenden Elemente aus $G \times H$ mit

$$\overline{g} \coloneqq i(g) = (g, 1) \quad \text{und} \quad \overline{h} \coloneqq j(h) = (1, h).$$

Vorstellungsmäßig unterscheiden wir im Folgenden allerdings nicht zwischen den Elementen g und $\overline{g}$, sowie den Elementen h und $\overline{h}$.

1.3 Universelle Eigenschaft von $G \times H$

Stellen wir uns G und H als Untergruppen von $G \times H$ vor, so kommutieren G und H miteinander: Für alle $g \in G$, $h \in H$ gilt

$$\overline{g}\overline{h} = (g, 1)(1, h) = (g, h) = (1, h)(g, 1) = \overline{h}\overline{g}\,.$$

Die Inklusionen $i\colon G \to G \times H$ und $j\colon H \to G \times H$ betten also G und H in eine Gruppe $G \times H$ ein, in der G und H dann miteinander kommutieren. Tatsächlich ist $G \times H$ bereits universell mit dieser Eigenschaft:

Proposition 1. *Es sei T eine Gruppe, und es seien $\alpha\colon G \to T$ und $\beta\colon H \to T$ zwei Gruppenhomomorphismen, so dass*

$$\alpha(g)\beta(h) = \beta(h)\alpha(g) \qquad \text{für alle } g \in G,\ h \in H$$

gilt. Dann gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \times H \to T$, der die folgenden beiden Diagramme zum Kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[rr, "\varphi"] & & T \\ & G \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times H \arrow[rr, "\varphi"] & & T \\ & H \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Die Gruppe $G \times H$ zusammen mit den beiden Inklusionen $i\colon G \to G \times H$ und $j\colon H \to G \times H$ sind also die „allgemeinste“ Möglichkeit, G und H auf kommutierende Weise zu einer gemeinsamen Gruppen $G \times H$ zusammenzufassen.

2 Innere direkte Produkte

2.1 Definition

Es sei G eine Gruppe, und es seien $H, K \leq G$ zwei Untergruppen. Wir wollen untersuchen, wann G dem direkten Produkt $K \times H$ entspricht, d.h. wann die Abbildung

$$\varphi\colon H \times K \to G, \quad (h,k) \mapsto hk$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Wir bezeichnen G dann als das *innere direkte Produkt* der Untergruppen K und H.

2.2 Erste Charakterisierung

Wir wollen charakterisieren, wann φ ein Gruppenhomomorphismus ist, und wann φ surjektiv, bzw. injektiv ist.

- Für alle $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in K \times H$ gelten

  $$\begin{aligned} \varphi((h_1,k_1)(h_2,k_2)) = \varphi((h_1h_2, k_1k_2)) &= h_1h_2k_1k_2\,, \\ \varphi(h_1,k_1)\varphi(h_2,k_2) &= h_1k_1h_2k_2\,. \end{aligned}$$

  Somit ist φ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, falls

  $$h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1k_2 \qquad \text{für alle } h_1, h_2 \in K,\ k_1, k_2 \in H$$

  gilt. Indem man den Fall $h_1 = k_2 = 1$ betrachtet, ist dies ferner äquivalent dazu, dass

  $$k_1h_2 = h_2k_1 \qquad \text{für alle } h_1 \in K,\ k_2 \in H$$

  gilt. Also ist φ genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn K und H miteinander kommutieren.

- Die Abbildung φ ist surjektiv, wenn sich jedes Element $g \in G$ als $g = hk$ mit $h \in H$ und $k \in K$ darstellen lässt, d.h. wenn $G = HK$ gilt.

- Für $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ gilt

  $$\varphi(h_1,k_1) = \varphi(h_2,k_2) \iff h_1k_1 = h_2k_2 \iff h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1}\,.$$

  Man bemerke, dass das Element $x \coloneqq h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1}$ dann bereits in $H \cap K$ enthalten ist.

Gilt $H \cap K = 1$, so folgen die Gleichheiten $h_2^{-1} h_1 = 1$ und $k_2 k_2^{-1} = 1$, und somit $h_1 = h_2$ und $k_1 = k_2$, also die Gleichheit $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$. Also ist φ dann injektiv.

Gilt andererseits $H \cap K \neq 1$, so gibt es ein Element $x \in H \cap K$ mit $x \neq 1$. Dann gilt $\varphi(x, x^{-1}) = 1 = \varphi(1,1)$ aber $(x, x^{-1}) \neq (1,1)$. Also ist φ dann nicht injektiv.

Insgesamt zeigt dies, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $H \cap K = 1$ gilt.

Ingesamt erhalten wir damit das folgende Resultat:

Proposition 2. *Eine Gruppe G ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls H und K miteinander kommutieren, sowie $HK = G$ und $H \cap K = 1$ gelten.*

2.3 Zweite Charakterisierung

Wir wollen noch eine zweite Charakterisierung innerer direkte Produkte angeben:

- Wir nehmen zunächst an, dass G das innere direkte Produkt von H und K ist, dass also $\varphi\colon H \times K \to G$ ein Gruppenisomorphismus ist.

  Die Untergruppen $\overline{H}, \overline{K} \leq H \times K$ sind normal. Es gilt beispielsweise

  $$(h,k)(h',1)(h,k)^{-1} = (h,k)(h',1)(h^{-1},k^{-1}) = (hh'h^{-1}, kk^{-1}) = (hh'h^{-1}, 1)\,,$$

  was die Normalität von $\overline{H}$ in $H \times K$ zeigt. Da φ ein Isomorphismus ist, folgt daraus, dass $H = \varphi(\overline{H})$ und $K = \varphi(\overline{K})$ normal in $\varphi(H \times K) = G$ sind.

  Dass H und K normal in G sind, lässt sich auch direkt durch Betrachtung der Normalisatoren $N_G(H)$ und $N_G(K)$ erkennen: Es gilt stets $H \leq N_G(H)$, und da H und K miteinander kommutieren, gilt auch $K \leq N_G(H)$. Aus $G = HK$ folgt damit, dass bereits $G = N_G(H)$ gilt, dass also H normal in G ist. Analog ergibt sich die auch Normalität von K in G.

  Unabhängig von der Vorgehensweise erhalten wir das folgende wichtige Resultat:

  Ist G das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$,
  so sind H und K bereits beide normal in G.

- Wir nehmen nun umgekehrt an, dass die Untergruppen $H, K \leq G$ beide normal sind, und dass $H \cap K = G$ gilt. Dann kommutieren H und K auch schon miteinander. Für alle $h \in H$ und $k \in K$ gilt nämlich, dass

  $$h \text{ und } k \text{ kommutieren miteinander} \iff hk = kh \iff hkh^{-1}k^{-1} = 1\,.$$

  Da K normal ist, gilt dabei $hkh^{-1} \in K$, und somit auch $(hkh^{-1})k^{-1} \in K$. Analog gilt aber auch $h(kh^{-1}k^{-1}) \in H$. Somit gilt bereits $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = 1$. Also gilt $hkh^{-1}k^{-1} = 1$, weshalb h und k miteinander kommutieren.

Damit erhalten wir ingesamt, dass wir in Proposition 2 die Bedingung, dass H und K miteinander kommutieren, durch die Bedingung ersetzen können, dass H und K beide normal in G sind.

Proposition 3. *Eine Gruppe G ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls H und K beide normal in G sind, sowie $HK = G$ und $H \cap K = 1$ gelten.*

2.4 Für endliche Gruppen

Ist G endlich, so lässt sich dies Ausnutzen, um Proposition 2 und Proposition 3 umzuformulieren:

- Falls G das innere direkte Produkt von H und K ist, so ist $\varphi\colon H \times K \to G$ ein Isomorphismus, und somit inbesondere

$$|G| = |H \times K| = |H| \cdot |K| \,.$$

- Es gelte nun andererseits $|G| = |H| \cdot |K|$. Dann sind die Injektvität und Surjektivität von $\varphi\colon H \times K \to G$ äquivalent. In Proposition 2 und Proposition 3 genügt es deshalb jeweils, eine der beiden Bedingungen $HK = G$ und $H \cap K = 1$ zu fordern.

Damit erhalten wir für endliches G die folgenden (vier) Charakterisierungen innerer direkter Produkte:

Proposition 4. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Gruppen $H, K \leq G$, falls $|G| = |H| \cdot |K|$ gilt, und*

1. die Untergruppen H und K kommutieren, oder

2. die Untergruppen H und K beide normal sind,

und

1'. es gilt $H \cap K = 1$, oder

2'. es gilt $HK = G$.

Besonders hervorheben möchten wir die folgende der oberen Charakterisierungen:

Korollar 5. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann das innere direkte Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls $|G| = |H| \cdot |K|$ gilt, H und K beide normal in G sind, und $H \cap K = 1$ gilt.*