Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 6

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 16. Dezember 2017

Aufgabe 4

(a)

Wir bemerken zunächst einige (intuitive) Aussagen über Primfaktorzerlegungen in faktoriellen Ringen:

Lemma 1. *Es seien $x, y \in R$ mit $x, y \neq 0$, so dass x ein Teiler von y ist. Dann lässt sich jede Primfaktorzerlegung $x = \varepsilon p_1 \cdots p_n$ von x zu einer Primfaktorzerlegung $y = \varepsilon' p_1 \cdots p_n p_{n+1} \cdots p_m$ von y ergänzen.*

Beweis. Es gibt $z \in R$ mit $xz = y$, und es gilt $z \neq 0$, da $y \neq 0$ gilt. Also besitzt z eine Primfaktorzerlegung $z = \delta p_{n+1} \cdots p_m$. Dann gilt

$$y = xz = \varepsilon\delta p_1 \cdots p_n p_{n+1} \cdots p_m \,,$$

und die Aussage ergibt sich mit $\varepsilon' := \varepsilon\delta$. □

Für $x \in R$, $x \neq 0$ mit Primfaktorzerlegung $x = \varepsilon p_1 \cdots p_n$ bezeichnen wir mit $\nu(x) := n$ die Anzahl der vorkommenden Primfaktoren (inklusive Vielfachheit). Die Zahl $\nu(x)$ ist wohldefiniert, da die Primfaktorzerlegung bis Einheiten und Permutation der Faktoren eindeutig ist.

Lemma 2. *Es seien $x, y \in R$ mit $x, y \neq 0$.*

1. *Es gilt genau dann $\nu(x) = 0$, wenn x eine Einheit ist.*
2. *Es gilt $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$.*
3. *Ist x ein Teiler von y, so gilt $\nu(x) \leq \nu(y)$.*
4. *Ist x ein echter Teiler von y, also $(y) \subsetneq (x)$, so gilt $\nu(x) < \nu(y)$.*

Beweis.

1. In der Primfaktorzerlegung $x = \varepsilon p_1 \cdots p_n$ gilt $n = 0$ und somit $x = \varepsilon \in R^\times$.
2. Da R ein Integritätsbereich ist, gilt auch $xy \neq 0$. Es seien $x = \varepsilon p_1 \cdots p_n$ und $y = \delta q_1 \cdots q_m$ Primfaktorzerlegungen. Dann
$$xy = (\varepsilon\delta) p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_m$$
eine Primfaktorzerlegung von xy und somit
$$\nu(xy) = n + m = \nu(x) + \nu(y) \,.$$
3. Es gibt $z \in R$ mit $y = xz$. Es gilt $z \neq 0$, da $y \neq 0$ gilt, weshalb $\nu(z)$ definiert ist. Somit gilt
$$\nu(y) = \nu(xz) = \nu(x) + \nu(z) \leq \nu(x) \,.$$
4. Ansonsten gilt in der obigen Situation $\nu(z) = 0$, weshalb z dann eine Einheit ist. Deshalb gilt dann
$$(y) = (xz) = (x) \,.$$
□

(i)

Es sei $p \in R$ irreduzibel, und es seien $x, y \in R$ mit $p \mid xy$. Gilt $x = 0$ oder $y = 0$, so gilt $p \mid x$ oder $p \mid y$.

Ansonsten gibt es Primfaktorzerlegungen $x = \delta q_1 \cdots q_n$ und $y = \delta' q'_1 \cdots q'_m$ Primfaktorzerlegungen. Dann ist
$$xy = (\delta\delta') q_1 \cdots q_n q'_1 \cdots q'_m \tag{1}$$
eine Primfaktorzerlegung von xy. Da p irreduzibel ist und $p \mid xy$ gilt, lässt sich p nach Lemma 1 zu einer Primfaktorzerlegung
$$xy = \varepsilon p p_2 \cdots p_r \tag{2}$$
ergänzen. Da R faktoriell ist, sind die beiden Primfaktorzerlegungen (1) und (2) eindeutig bis auf Einheiten und Permutation. Es gilt deshalb $p \mid q_i$ oder $p \mid q'_i$ für passendes i, und somit $p \mid x$ oder $p \mid y$.

(ii)

Wir nehmen an, dass nicht jede aufsteigende Kette von Hauptidealen stabilisieren würde. Dann gibt es eine unendliche echt aufsteigende Kette von Hauptidealen
$$(a_0) \subsetneq (a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq (a_3) \subsetneq (a_4) \subsetneq \cdots$$
Dann gilt $a_i \neq 0$ für alle $i \geq 1$ (denn sonst wäre $(a_i) = 0$ für ein solches i, und damit bereits $(a_i) = \cdots = (a_0) = 0$), und für jedes $i \geq 1$ ist a_{i+1} ein echter Teiler von a_i. Nach Lemma 2 erhalten wir eine unendliche absteigende Kette
$$\nu(a_1) > \nu(a_2) > \nu(a_3) > \nu(a_4) > \cdots$$
Dies ist aber nicht möglich.