

Anmerkungen und Lösungen zu

# Einführung in die Algebra

Blatt 3

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 11. November 2017

## Aufgabe 1

**(c)**

Es gilt  $S \trianglelefteq N_G(S)$  nach Definition von  $N_G(S)$ , und nach Annahme gilt  $H \leq N_G(S)$ . Nach einem der Isomorphiesätze ist deshalb  $HS$  eine Untergruppe von  $N_G(S)$ , sowie  $H \cap S$  eine normale Untergruppe von  $H$  mit  $HS/S \cong H/(H \cap S)$ . Insbesondere ist  $HS/S$  mit der Multiplikation  $\overline{g_1 g_2} = \overline{g_1} \overline{g_2}$  eine wohldefinierte Gruppe. Es handelt sich um eine  $p$ -Gruppe da

$$|HS/S| = |H/(H \cap S)| = \frac{|H|}{|H \cap S|} \mid |H|$$

und  $|H|$  eine  $p$ -Gruppe ist.

**(d)**

Es gilt

$$|HS| = \frac{|HS|}{|S|} |S| = |HS/S| |S|.$$

Da  $HS/S$  und  $S$  beides  $p$ -Gruppen sind, ist deshalb auch  $HS$  eine  $p$ -Gruppe. Als  $p$ -Sylowgruppe ist  $S$  kardinalitäts- und damit auch inklusionsmaximal unter allen  $p$ -Untergruppen von  $G$ ; zusammen mit  $S \leq HS$  folgt damit, dass bereits  $S = HS$  gilt. Somit gelten  $HS/S = S/S = 1$  und  $H \leq HS = S$ .