Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 4

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 20. November 2017

Aufgabe 3

(b)

Wir haben im Tutorium gesehen, dass für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ die Implikationen

$$A \text{ ist nicht injektiv} \implies A \text{ ist ein Linksnullteiler}$$

und

$$A \text{ ist nicht surjektiv} \implies A \text{ ist ein Rechtsnullteiler}$$

gelten. Dabei handelt es sich tatsächlich schon um Äquivalenzen. Aus der linearen Algebra wissen wir dabei, dass wegen der Endlichdimensionalität von K^n die Injektivität und Surjektivität von A äquivalent sind. Deshalb kann der Matrizenring $\mathrm{M}_n(K)$ keine Beispiele liefern.

Im Tutorium haben wir dieses Problem dadurch gelöst, dass wir den endlichdimensionalen K-Vektorraums K^n durch einen unendlichdimensionalen K-Vektorraum V ersetzt haben, also anstelle von $\mathrm{M}_n(K) \cong \mathrm{End}(K^n)$ den Endomorphismenring $\mathrm{End}(V)$ betrachtet haben.

Ein anderer Ansatz besteht darin, die Einträge der Matrizen nicht aus einem Körper K zu wählen:

- Ein erster Ansatz besteht darin, anstelle eines Körpers K einen passenden kommutativen Ring R zu betrachten, und dann im Matrizenring $\mathrm{M}_n(R)$ nach Beispielen zu suchen. Aufgrund der folgenden Resultate aus der kommutativen Algebra wird dies allerdings nicht zum Erfolg führen:
  Lemma 1. *Ist R ein kommutativer Ring, so gilt für $A \in \mathrm{M}_n(R)$ genau dann $\ker A \neq 0$, wenn $\det A \in R$ ein Nullteiler ist.*
  Korollar 2. *Ist R ein kommutativer Ring, so sind für $A \in \mathrm{M}_n(R)$ die folgenden Bedingungen äquivalent:*

i) Die Matrix A ist ein Linksnullteiler in $\mathrm{M}_n(R)$.

ii) Der Skalar $\det A$ *ist ein Nullteiler in* R.

iii) Die Matrix A ist ein Rechtsnullteiler in $\mathrm{M}_n(R)$.

- Der obige Ansatz lässt sich dadurch reparieren, dass man die Matrixeinträge aus verschiedenen kommutativen Ringen wählt. So kann man etwa

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, c \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/2 \right\}$$

  mit der Addition

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 & c + c' \end{pmatrix}$$

  und der Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & \overline{b'} \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & \overline{ab' + bc'} \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$$

  betrachten. Dass R mit den oberen Operationen tatsächlich einen Ring bildet, erkennt man durch direktes Nachrechnen. In diesem Ring lässt sich dann die Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$$

  betrachten. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

  weshalb A ein Linknullteiler ist. Andererseits gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ & c \end{pmatrix};$$

  wobei genau dann $2a = 0$, wenn $a = 0$. Deshalb ist A kein Rechtsnullteiler.

Im Tutorium kam die Frage auf, ob es auch Beispiele in endlichen Ringen gibt. Wie sich (entgegen meiner spontanen Vermutung) herausstellt[1], ist dies nicht möglich:

Lemma 3. *Ist R ein endlicher (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring und $r \in R$ kein Links-, bzw. Rechtsnullteiler, so ist r eine Einheit.*

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass r kein Linksnullteiler ist; der Fall, dass r kein Rechtsnullteiler ist, verläuft analog. Nach Annahme ist dann die Abbildung

$$\pi_r \colon R \to R, \quad a \mapsto ra$$

[1] Siehe `https://math.stackexchange.com/a/45220/300783`.

injektiv, und wegen der Endlichkeit von R somit bereits bijektiv. Die Bjiektion π_r ist also ein Element der symmetrischen Gruppe

$$S(R) = \{\pi\colon R \to R \mid \pi \text{ ist eine Bijektion}\}.$$

Die Gruppe $S(R)$ ist endlich, da R endlich ist. Also hat π_r endliche Ordnung, d.h. es gibt $n \geq 1$ mit $\pi_r^n = \mathrm{id}_R$. Dabei ist die Abbildung π_r^n durch Multiplikation mit r^n gegeben. Also ist r^n linksneutral bezüglich der Multiplikation, und somit bereits $r^n = 1$. Folglich ist r eine Einheit mit $r^{-1} = r^{n-1}$. □

Korollar 4. *Ist R ein endlicher (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring, so ist jedes Element $r \in R$ entweder eine Einheit oder ein beidseitiger Nullteiler.*

Beweis. Ist r keine Einheit, so ist r nach Lemma 3 ein beidseitiger Nullteiler. Außerdem sind Einheiten niemals Nullteiler. □