Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 2

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 9. November 2017

Aufgabe 1

(a)

Die Identität $\mathrm{id}_G \colon G \to G$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\ker \mathrm{id}_G = \{e\}$. Also ist die Untergruppe $\{e\}$ normal mit $G/\{e\} \cong \operatorname{im} \mathrm{id}_G = G$.

(b)

Wie auf dem ersten Übungszettel gesehen, ist für die Gruppe der Einheitswurzeln,

$$\mu_\infty(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\},$$

die Abbildung

$$f \colon \mathbb{Q} \to \mu_\infty(\mathbb{C}), \quad x \mapsto e^{2\pi i x}$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker f = \mathbb{Z}$. Folglich ist $\mathbb{Z}$ eine normale Untergruppe von $\mathbb{Q}$ (dies ergibt sich auch daraus, dass $\mathbb{Q}$ abelsch ist), und f induziert einen Isomorphismus

$$\overline{f} \colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mu_\infty(\mathbb{C}), \quad \overline{x} \mapsto f(x) = e^{2\pi i x}.$$

Inbesondere gilt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mu_\infty(\mathbb{C})$.

(c)

Die Abbildung $\mathrm{Im} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z = x + iy \mapsto y$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker \mathrm{Im} = \mathbb{R}$. Folglich ist $\mathbb{R}$ eine normale Untergruppe von $\mathbb{C}$ (dies ergibt sich auch daraus, dass $\mathbb{C}$ abelsch ist), und Im induziert einen Isomorphismus

$$\overline{\mathrm{Im}} \colon \mathbb{C}/\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \overline{z} \mapsto \mathrm{Im}\, z.$$

(d)

Die beiden Abbildungen

$$\mathbb{C}^\times \to S^1, \quad z \mapsto \frac{z}{|z|}$$

und

$$S^1 \to S^1, \quad z \mapsto z^2$$

sind surjektive Gruppenhomomorphismen. Deshalb ist auch ihre Verknüpfung, also die Abbildung

$$f\colon \mathbb{C}^\times \to S^1, \quad z \mapsto \left(\frac{z}{|z|}\right)^2$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Für $z \in \mathbb{C}^\times$ gilt dabei, dass

$$f(z) = 1 \iff \left(\frac{z}{|z|}\right)^2 = 1 \iff \frac{z}{|z|} = \pm 1 \iff z = \pm|z| \iff z \in \mathbb{R},$$

weshalb $\ker f = \mathbb{R}^\times$. Folglich ist $\mathbb{R}^\times$ eine normale Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ (dies ergibt sich auch daraus, dass $\mathbb{C}^\times$ abelsch ist), und f induziert einen Isomorphismus

$$\overline{f}\colon \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \to S^1, \quad \overline{z} \mapsto f(z) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^2.$$

Inbesondere gilt $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \cong S^1$.

(e)

Die Untergruppe $\mathrm{SO}(2) \leq \mathrm{SO}(3)$ ist nicht normal, denn für

$$R \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2) \quad \text{und} \quad S \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3)$$

gilt

$$\begin{aligned} SRS^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{SO}(2) \end{aligned}$$

(Anschaulich gesehen ist R die Rotation um die z-Achse zum 90°, während S eine Rotation ist, welche die drei Koordinatenachsen in der Reihenfolge $x \to y \to z \to x$ zyklisch permutiert. Vertauscht man die Achsen $z \to x$, so wird die Drehung um die z-Achse zur Drehung um die x-Achse.)

Bemerkung 1. Es sei $S^2 \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ die zweidimensionale Sphäre. Die orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ wirkt auf S^2 durch

$$R.x \coloneqq Rx \qquad \text{für alle } S \in \mathrm{SO}(3),\ x \in S^2.$$

Diese Wirkung ist transitiv, d.h. für alle $x, y \in S^2$ gibt es eine Rotation $R \in \mathrm{SO}(3)$ mit $R.x = y$. Der Stabilisator $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SO}(3)}(e_3)$ besteht aus all jeden Rotation, welche die z-Achse fixieren; es gilt also $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SO}(3)}(e_3) = \mathrm{SO}(2)$. Wir erhalten somit eine Bijektion

$$\mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2) \to S^2, \quad \overline{R} \mapsto R.e_3 = Re_3.$$

Wir können uns $\mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ also als die zweidimensionale Sphäre vorstellen. Allgemeiner gilt für alle $n \geq 1$, dass $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \cong S^n$ als topologische Räume.

(f)

Die Untergruppe $\mathrm{O}(2) \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist nicht normal, denn für

$$S \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2) \quad \text{und} \quad T \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

gilt

$$\begin{aligned} TST^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{O}(2). \end{aligned}$$

(Anschaulich gesehen ist S die Spiegelung an der Winkelhalbierenden, d.h. S vertauscht die beiden Standardbasisvektoren e_1 und e_2. Die Matrix T erfüllt $Te_1 = e_1$ und $Te_2 = e_1 + e_2$. Die obige Komposition TST^{-1} vertauscht deshalb die beiden Vektoren e_1 und $e_1 + e_2$, und ist somit nicht längenerhaltend.)

(g)

Die Abbildung $\det|_{\mathrm{O}(n)} \colon \mathrm{O}(n) \to \mathbb{R}^\times$ ist aufgrund der Multiplikativität der Determinante ein Gruppenhomomorphismus, und es gilt $\ker \det|_{\mathrm{O}(n)} = \mathrm{SO}(n)$. Für jede orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ gilt $SS^T = I$ und somit

$$1 = \det I = \det(SS^T) = (\det S)(\det S^T) = \det(S)^2,$$

also $\det(S) = \pm 1$. Andererseits gilt für

$$S_\pm \coloneqq \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n)$$

dass $\det S_\pm = \pm 1$. Somit gilt $\operatorname{im} \det|_{\mathrm{O}(n)} = \{1, -1\}$. Also induziert $\det|_{\mathrm{O}(n)}$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{O}(n)/\operatorname{SO}(n) \to \operatorname{im}\det|_{\mathrm{O}(n)} = \{1,-1\}, \quad \overline{S} \mapsto \det S.$$

Inbesondere gilt $\mathrm{O}(n)/\operatorname{SO}(n) \cong \operatorname{im}\det|_{\mathrm{O}(n)} \cong \mathbb{Z}/2$.

(h)

Für $n = 1$ ist S_1 trivial, und somit $S_1 \leq WB_1$ normal mit $WB_1/S_1 \cong WB_1$. Für $n \geq 2$ ist $S_n \leq WB_n$ nicht normal: Wir betrachten die Permutation

$$\tau \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

und die Vorzeichen-Permutation

$$\pi \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ -1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in WB_n.$$

(D.h. es gilt $\pi(\pm 1) = \mp 1$ und $\pi(\pm i) = \pm i$ für alle $2 \leq i \leq n$.) Dann gilt

$$\pi\tau\pi^{-1} = \pi\tau\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -2 & -1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \notin S_n.$$

(i)

Die Untergruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ is nicht normal, denn für

$$S \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad D \coloneqq \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

gilt

$$DSD^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 4

(a)

Bemerkung 2. Für Permuationen in Zykelschreibe die folgenden nützlichen Rechenregeln:

- Für alle paarweise verschiedenen Zahlen $1 \leq a_1, \dots, a_r \leq n$ gilt

$$(a_1 \; \cdots \; a_r) = (a_1 \; a_2) \cdots (a_{r-1} \; a_r).$$

- Für alle paarweise verschiedenen Zahlen $1 \leq a_1, \ldots, a_r \leq n$ und jede Permutation $\pi \in S_n$ gilt
$$\pi(a_1 \; \cdots \; a_r)\pi^{-1} = (\pi(a_1) \; \cdots \; \pi(a_r)).$$

Für $n = 1$ ist S_1 trivial, und $S_1 \leq WB_1$ somit normal. Inbesondere ist die angegebene Verknüpfung dann wohldefiniert. Wir betrachten daher im Folgenden nur den Fall $n \geq 2$.

Wäre die angegebene binäre Verknüpfung wohldefiniert, so würde für die Transposition $\tau \coloneqq (1 \; (n+1)) \in S_{n+1}$ gelten, dass

$$\tau S_n = \tau S_n \cdot \operatorname{id} S_n = \tau S_n \cdot (1\;2) S_n = \tau (1\;2) S_n.$$

Dies gilt aber nicht, da

$$\tau(1\;2)\tau^{-1} = (\tau(1) \; \tau(2)) = (2 \; (n+1)) \notin S_n$$

Wäre S_n normal in S_{n+1}, so wäre die angegebene Verknüpfung wohldefiniert; folglich kann S_n nicht normal in S_{n+1} sein.

Bemerkung 3. Ist allgemeiner G ein Gruppe und $H \leq G$ eine nicht-normale Untergruppe, so gibt es $h \in H$ und $g \in G$ mit $ghg^{-1} \notin H$. Führt man dann in der obigen Rechnung die Ersetzung

$$S_{n+1} \to G, \quad S_n \to H, \quad \tau \to g, \quad (1\;2) \to h$$

durch, so ergibt sich, dass die binäre Verknüpfung

$$(G/H) \times (G/H) \to G/H, \quad (\overline{g_1}, \overline{g_2}) \mapsto \overline{g_1 g_2}$$

nicht wohldefiniert ist. Diese Verknüpfung ist also *genau dann* wohldefiniert, wenn H normal in G ist.

(b)

Es seien

$$\mathcal{G} \coloneqq \{U \mid K \leq U \leq G\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H} \coloneqq \{W \mid W \leq H, \}$$

sowie

$$\mathcal{G}^{\trianglelefteq} \coloneqq \{U \mid K \leq U \trianglelefteq G\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^{\trianglelefteq} \coloneqq \{W \mid W \trianglelefteq H\}.$$

Alle Untergruppen

Es gilt zunächst zu zeigen, dass die Abbildung

$$\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}, \quad U \mapsto \varphi(U)$$

eine wohldefinierte Bijektion ist.

Die Abbildung ψ ist wohldefiniert, denn für jede Untergruppe $U \leq G$ ist die Einschränkung $\varphi|_U$ ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus, und somit $\varphi(U) = \operatorname{im} \varphi|_U$ eine Untergruppe von H.

Zum Nachweis der Bijektivität betrachten wir die Abbildung

$$\psi' \colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}, \quad W \mapsto \varphi^{-1}(W)$$

Die Abbildung ψ' ist wohldefiniert:

Lemma 4. *Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon G \to H$ und jede Untergruppe $W \leq H$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(W)$ eine Untergruppe von G.*

Beweis. Wir geben zwei mögliche Beweise:

- Es gilt $\varphi(1) = 1 \in W$ und somit $1 \in \varphi^{-1}(W)$. Für alle $g_1, g_2 \in \varphi^{-1}(W)$ gilt $\varphi(g_1), \varphi(g_2) \in W$ und somit auch $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \in W$, also $g_1 g_2 \in \varphi^{-1}(W)$. Für jedes $g \in \varphi^{-1}(W)$ gilt $\varphi(g) \in W$ und somit auch $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \in W$, also $g^{-1} \in \varphi^{-1}(W)$.
- Die Gruppe H wirkt von links auf H/W durch $h.\overline{h'} \coloneqq \overline{hh'}$, und es gilt

  $$\operatorname{Stab}_H(\overline{1}) = \{h \in H \mid h.\overline{1} = \overline{1}\} = \{h \in H \mid \overline{h} = \overline{1}\} = W.$$

  Über φ lässt sich diese Gruppenwirkung zu einer Linkswirkung von G auf H/W mit $g.\overline{h} \coloneqq \varphi(g).\overline{h} = \overline{\varphi(g)h}$ zurückziehen. Dies lässt sich auf (mindestens) zwei Weisen sehen:

  - Es gilt $1_G.\overline{h} = \varphi(1_G).\overline{h} = 1_H.\overline{h} = \overline{h}$, und für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt

    $$g_1.(g_2.\overline{h}) = \varphi(g_1).(\varphi(g_2).\overline{h}) = (\varphi(g_1)\varphi(g_2)).\overline{h} = \varphi(g_1 g_2).\overline{h} = (g_1 g_2).\overline{h}.$$

  - Die Gruppenwirkung von H auf H/W entspricht dem Gruppenhomomorphismus $\alpha \colon H \to S(H/W)$ mit $\alpha(h)(\overline{h'}) = \overline{hh'}$. Die Komposition $\alpha \circ \varphi \colon G \to S(H/W)$ ist dann ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus, und entspricht einer Gruppenwirkung von G auf H/W mit

    $$g.\overline{h} = (\alpha \circ \varphi)(g)(h) = \alpha(\varphi(g))(h) = \overline{\varphi(g)h}.$$

  Es folgt, dass

  $$\begin{aligned} \operatorname{Stab}_G(\overline{1}) &= \{g \in G \mid g.\overline{1} = \overline{1}\} = \{g \in G \mid \varphi(g).\overline{1} = \overline{1}\} \\ &= \{g \in G \mid \varphi(g) \in \operatorname{Stab}_H(\overline{1})\} = \{g \in G \mid \varphi(g) \in W\} = \varphi^{-1}(W) \end{aligned}$$

  eine Untergruppe von G ist. □

Aus der Surjektivität ergibt sich für jede Untergruppe $W \leq H$, dass

$$\psi(\psi'(W)) = \varphi(\varphi^{-1}(W)) = W,$$

weshalb $\psi \circ \psi' = \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$.

Lemma 5. *Ist $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt mit $K := \ker \varphi$ für jede Untergruppe $U \leq G$, dass $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = UK$.*

Beweis. Es gelten $U \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(U))$ sowie $K = \varphi^{-1}(1) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(U))$, und somit gilt $UK \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(U))$. Ist andererseits $g \in \varphi^{-1}(\varphi(U))$, so gilt $\varphi(g) \in \varphi(U)$, weshalb es $u \in U$ mit $\varphi(g) = \varphi(u)$ gibt. Dann gilt $g = u \cdot u^{-1}g$, wobei $u^{-1}g \in \ker \varphi$ da $\varphi(u^{-1}g) = \varphi(u)^{-1}\varphi(g) = 1$. □

Für jede Untergruppe $U \leq G$ mit $K \leq U$ gilt somit, dass

$$\psi'(\psi(U)) = \varphi^{-1}(\varphi(U)) = UK = U,$$

weshalb $\psi' \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$.

Ingesamt zeigt dies, dass ψ eine Bijektion ist, und dass $\psi^{-1} = \psi'$.

Normale Untergruppen

Die Aussage gilt auch dann noch, wenn man „Untergruppen“ durch „normale Untergruppen“ ersetzt. Hierfür genügt es zu zeigen, dass sich ψ und ψ' zu Abbildungen $\mathcal{G}^{\trianglelefteq} \to \mathcal{H}^{\trianglelefteq}$ und $\mathcal{H}^{\trianglelefteq} \to \mathcal{G}^{\trianglelefteq}$ einschränken. Dies ergibt sich aus dem Folgenden:

Lemma 6. *Es sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.*

1. *Für jede normale Untergruppe $W \trianglelefteq H$ ist auch $\varphi^{-1}(W) \leq G$ normal.*

2. *Ist φ surjektiv, so ist für jede normale Untergruppe $U \trianglelefteq G$ auch $\varphi(U) \leq H$ normal.*

Beweis. 1. Wir geben zwei Beweise:

- Für $h \in \varphi^{-1}(W)$ gilt für jedes $g \in G$ dass

  $$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\underbrace{\varphi(h)}_{\in W}\varphi(g)^{-1} \in W,$$

  und somit dass $ghg^{-1} \in W$.

- Die kanonische Projektion $p\colon H \to H/W$, $h \mapsto \overline{h}$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $W = \ker p = p^{-1}(1)$. Deshalb ist $p \circ \varphi\colon G \to H/W$ ein Gruppenhomomorphismus mit

  $$\ker(p \circ \varphi) = (p \circ \varphi)^{-1}(1) = \varphi^{-1}(p^{-1}(1)) = p^{-1}(W).$$

2. Für jedes $h \in H$ gibt es ein $g \in G$ mit $h = \varphi(g)$, weshalb

$$h\varphi(U)h^{-1} = \varphi(g)\varphi(U)\varphi(g)^{-1} = \varphi(gUg^{-1}) = \varphi(U).$$ □

(c)

Es gibt (mindestens) zwei Möglichkeiten, die Untergruppen von $\mathbb{Z}/12$ zu bestimmen:

- Da die Gruppe $\mathbb{Z}/12$ zyklisch ist, sind auch alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/12$ zyklisch. Hieraus ergeben sich die Untergruppen

$$\langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{5}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{11}\}, \qquad \langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{10}\rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\},$$
$$\langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{9}\rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}, \qquad \langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{8}\rangle = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}, \qquad \langle\overline{6}\rangle = \{\overline{0}, \overline{6}\}, \qquad \langle\overline{0}\rangle = \{\overline{0}\}.$$

- Nach Aufgabenteil (b) entsprechen die Untergruppen von $\mathbb{Z}/12$ bijektiv den Untergruppen von $\mathbb{Z}$, die $12\mathbb{Z}$ enthalten. Jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist zyklisch, da $\mathbb{Z}$ zyklisch ist, und somit von der Form $n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Dabei gilt genau dann $12\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$, wenn $12 \in n\mathbb{Z}$, wenn also $n \mid 12$. Die Untergruppen von $\mathbb{Z}/12$ entsprechen also bijektiv den Teilern von 12, und sind gegeben durch

$$\mathbb{Z}/12 = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{11}\}, \qquad 2\mathbb{Z}/12 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}, \qquad 3\mathbb{Z}/12 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\},$$
$$4\mathbb{Z}/12 = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}, \qquad 6\mathbb{Z}/12 = \{\overline{0}, \overline{6}\}, \qquad 12\mathbb{Z}/12 = \{\overline{0}\}.$$

Alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/12$ sind normal, da $\mathbb{Z}/12$ abelsch ist. Die entsprechenden Quotienten lassen sich auf (mindestens) zwei verschiedene Weisen berechnen:

- Nach einem der Isomorphiesätze gilt für jeden Teiler d von 12, dass

$$(\mathbb{Z}/12)/(d\mathbb{Z}/12) \cong \mathbb{Z}/d.$$

  Die entsprechenden Quotienten sind also

$$(\mathbb{Z}/12)/(\mathbb{Z}/12) \cong \mathbb{Z}/1 \cong 0, \quad (\mathbb{Z}/12)/(2\mathbb{Z}/12) \cong \mathbb{Z}/2, \quad (\mathbb{Z}/12)/(3\mathbb{Z}/12) \cong \mathbb{Z}/3,$$
$$(\mathbb{Z}/12)/(4\mathbb{Z}/12) \cong \mathbb{Z}/4, \quad (\mathbb{Z}/12)/(6\mathbb{Z}/12) \cong \mathbb{Z}/6, \quad (\mathbb{Z}/12)/(12\mathbb{Z}/12) \cong \mathbb{Z}/12.$$

- Da $\mathbb{Z}/12$ zyklisch ist, ist auch jeder Quotient von $\mathbb{Z}/12$ zyklisch. Für jede Untergruppe $H \leq \mathbb{Z}/12$ gilt deshalb

$$(\mathbb{Z}/12)/H \cong \mathbb{Z}/(12/|H|).$$

  Für jedes $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ gilt somit

$$(\mathbb{Z}/12)/\langle d\rangle \cong \mathbb{Z}/(12/|\langle d\rangle|) = \mathbb{Z}/(12/(12/d)) = \mathbb{Z}/d.$$

Aufgabe 5

Für $g, h \in G$ schreiben wir im Folgenden abkürzend $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Dann ist $[G, G] = \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$.

Lemma 7. *Für $S \subseteq G$ und jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ gilt*

$$\varphi(\langle S\rangle) = \langle \varphi(S)\rangle.$$

Beweis. Wir geben zwei mögliche Beweise an:

- Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\langle S\rangle) &= \varphi(\{s_1^{\varepsilon_1}\cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \geq 0, s_1,\dots,s_n \in S, \varepsilon_i = \pm 1\}) \\ &= \{\varphi(s_1)^{\varepsilon_1}\cdots \varphi(s_n)^{\varepsilon_n} \mid n \geq 0, s_1,\dots,s_n \in S, \varepsilon_i = \pm 1\} \\ &= \{t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_n^{\varepsilon_n} \mid n \geq 0, t_1,\dots,t_n \in \varphi(S), \varepsilon_i = \pm 1\} = \langle \varphi(S)\rangle.\end{aligned}$$

- Es ist $\varphi(\langle S\rangle)$ eine Untergruppe von H, denn Bilder von Untergruppen sind Untergruppen. Es gilt $\varphi(S) \subseteq \varphi(\langle S\rangle)$ da $S \subseteq \langle S\rangle$. Somit gilt $\langle\varphi(S)\rangle \subseteq \varphi(\langle S\rangle)$, denn $\langle\varphi(S)\rangle$ ist die kleinste Untergruppe von H, die $\varphi(S)$ enthält.

  Andererseits ist $\varphi^{-1}(\langle\varphi(S)\rangle)$ eine Untergruppe von G, denn Urbilder von Untergruppen sind Untergruppen. Dabei gilt $S \subseteq \varphi^{-1}(\langle\varphi(S)\rangle)$ da $\varphi(S) \subseteq \langle\varphi(S)\rangle$. Somit gilt auch $\langle S\rangle \subseteq \varphi^{-1}(\langle\varphi(S)\rangle)$, denn $\langle S\rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G, die S enthält. Deshalb gilt auch $\varphi(\langle S\rangle) \subseteq \langle\varphi(S)\rangle$. □

(a)

Lemma 8. *Es sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.*

1. *Für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt $\varphi([g_1, g_2]) = [\varphi(g), \varphi(g_2)]$.*
2. *Es gilt $\varphi([G,G]) = [\varphi(G), \varphi(G)]$.*

Beweis. 1. Es gilt

$$\varphi([h_1,h_2]) = \varphi(h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)\varphi(h_1)^{-1}\varphi(h_2)^{-1} = [\varphi(h_1), \varphi(h_2)]$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi([G,G]) &= \varphi(\langle [g_1,g_2] \mid g_1,g_2 \in G\rangle) = \langle \varphi([g_1,g_2]) \mid g_1,g_2 \in G\rangle \\ &= \langle [\varphi(g_1),\varphi(g_2)] \mid g_1,g_2 \in G\rangle = \langle [h_1,h_2] \mid h_1,h_2 \in \varphi(G)\rangle = [\varphi(G),\varphi(G)].\end{aligned}$$

□

Da für jedes $g \in G$ die Konjugationsabbildung $\varphi_g\colon G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$ ein Gruppenautomorphismus ist, gilt

$$g[G,G]g^{-1} = \varphi_g([G,G]) = [\varphi_g(G), \varphi_g(G)] = [G,G].$$

Bemerkung 9. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt *charakteristisch*, falls $\varphi(H) = H$ für jeden Gruppenautomorphismus $\varphi\colon G \to G$ gilt. Die obige Rechnung zeigt eigentlich, dass

- $[G, G]$ eine charakteristische Untergruppe von G ist, und
- charakteristische Untergruppen stets normal sind.

Anschaulich gesehen ist eine Untergruppe $H \leq G$ charakteristisch, wenn sie sich durch die Gruppenstruktur von G beschreiben lässt, bzw. sich aus dieser ergibt: Weitere Beispiele für eine charakteristische Untergruppen sind das Zentrum $\mathrm{Z}(G)$, sowie die iterierten Kommutatorgruppen $G^{(n)}$ mit $G^{(1)} = G$ und $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$.

(b)

Lemma 10. *Für jede Untergruppe $H \leq G$ gilt $[H, H] \leq [G, G]$.*

Beweis. Es gilt $[H, H] = \langle [h_1, h_2] \mid h_1, h_2 \in H \rangle \leq \langle [g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G \rangle = [G, G]$. □

Für jede perfekte Untergruppe $P \leq G$ gilt $P = [P, P] \leq [G, G]$.

(c)

Es sei $\mathcal{P} := \{P \leq G \mid P \text{ ist perfekt}\}$ die Menge der perfekten Untergrupppen von G. Dann ist

$$\mathrm{Perf}(P) := \left\langle \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \right\rangle,$$

die kleinste Untergruppe von G, die alle perfekten Untergruppen enthält. Für jede perfekte Untergruppe $P \in \mathcal{P}$ gilt

$$[\mathrm{Perf}(G), \mathrm{Perf}(G)] = \langle [g, h] \mid g, h \in \mathrm{Perf}(G) \rangle \supseteq \langle [g, h] \mid g, h \in P \rangle = [P, P] = P,$$

und somit $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \subseteq [\mathrm{Perf}(G), \mathrm{Perf}(G)]$. Somit gilt auch

$$\mathrm{Perf}(G) = \left\langle \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \right\rangle \subseteq [\mathrm{Perf}(G), \mathrm{Perf}(G)],$$

was zeigt, dass $\mathrm{Perf}(G)$ perfekt ist. Per Konstruktion enthält $\mathrm{Perf}(G)$ jede perfekte Untergruppe von G.

(d)

Lemma 11. *Ist P perfekt, so ist für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon P \to H$ auch $\varphi(P)$ perfekt, d.h. Bilder von perfekten Gruppen sind ebenfalls perfekt.*

Beweis. Es gilt $[\varphi(P), \varphi(P)] = \varphi([P, P]) = \varphi(P)$. □

Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to G$ gilt

$$\varphi(\operatorname{Perf}(G)) = \varphi\left(\left\langle \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P \right\rangle\right) = \left\langle \varphi\left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P\right) \right\rangle = \left\langle \bigcup_{P\in\mathcal{P}} \varphi(P) \right\rangle \subseteq \left\langle \bigcup_{P'\in\mathcal{P}} P' \right\rangle = \operatorname{Perf}(G).$$

Für jedes $g \in G$ ist die Konjugationsabbildung $\varphi_g\colon G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus, und somit

$$g \operatorname{Perf}(G) g^{-1} = \varphi_g(\operatorname{Perf}(G)) \subseteq \operatorname{Perf}(G).$$

Bemerkung 12. Jeder Gruppenautomorphismus $\varphi\colon G \to G$ induziert eine Bijektion $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto \varphi(P)$, weshalb $\varphi(\operatorname{Perf}(G)) = \operatorname{Perf}(G)$. Die Untergruppe $\operatorname{Perf}(G) \leq G$ ist also charakteristisch im Sinne von Bemerkung 9, und somit normal.

(e)

Da $\operatorname{Perf}(G) \trianglelefteq G$ normal ist, induziert die Gruppenstruktur von G eine Gruppenstuktur auf $G/\operatorname{Perf}(G)$ mit

$$(G/\operatorname{Perf}(G)) \times (G/\operatorname{Perf}(G)) \to G/\operatorname{Perf}(G), \quad (\overline{g_1}, \overline{g_2}) \mapsto \overline{g_1 g_2}.$$

(f)

(i)

Es gilt

$$G/\operatorname{Perf}(G) \text{ ist trivial} \iff G = \operatorname{Perf}(G) \iff G \text{ ist perfekt.}$$

(ii)

Lemma 13. *Ist $N \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe, so ist G/N genau dann abelsch, wenn $[G,G] \leq N$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} G/N \text{ ist abelsch} &\iff \overline{g}\,\overline{h} = \overline{h}\,\overline{g} \text{ für alle } g,h \in G \\ &\iff \overline{g}\,\overline{h}\,\overline{g}^{-1}\overline{h}^{-1} = 1 \text{ für alle } g,h \in G \\ &\iff \overline{ghg^{-1}h^{-1}} = 1 \text{ für alle } g,h \in G \\ &\iff \overline{[g,h]} = 1 \text{ für alle } g,h \in G \\ &\iff [g,h] \in N \text{ für alle } g,h \in G \iff [G,G] \leq N. \end{aligned}$$

□

Es gilt

$$G/\operatorname{Perf}(G) \text{ ist abelsch} \iff [G,G] \leq \operatorname{Perf}(G)$$

Ist nun $[G,G]$ perfekt, so gilt $[G,G] \leq \operatorname{Perf}(G)$. Gilt andererseits $[G,G] \leq \operatorname{Perf}(G)$, so gilt nach Aufgabenteil (b) auch $\operatorname{Perf}(G) \leq [G,G]$ und somit $[G,G] = \operatorname{Perf}(G)$; inbesondere ist $[G,G]$ dann perfekt.