

Anmerkungen und Lösungen zu  
**Einführung in die Algebra**  
Blatt 5

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 15. Dezember 2017

**Aufgabe 4**

**(a)**

Für alle  $(a, s) \in R \times S$  gilt  $(a, s) \sim (a, s)$ , denn für  $1 \in S$  gilt

$$1 \cdot (as - as) = 0.$$

Also ist  $\sim$  reflexiv. Für alle  $(a, s), (a', s') \in R \times S$  mit  $(a, 0s) \sim (a', s')$  gibt es ein  $t \in S$  mit

$$t \cdot (as' - a's) = 0.$$

Dann gilt

$$t \cdot (a's - as') = t \cdot -(as' - a's) = -(t \cdot (as' - a's)) = -0 = 0,$$

und somit ebenfalls  $(a', s') \sim (a, s)$ . Das zeigt, dass  $\sim$  symmetrisch ist.

Für alle  $(a, s), (a', s'), (a'', s'') \in R \times S$  mit  $(a, s) \sim (a', s')$  und  $(a', s') \sim (a'', s'')$  gibt es  $t, u \in S$  mit

$$t \cdot (a's - as') = 0 \quad \text{und} \quad u \cdot (a''s' - a's'') = 0,$$

also mit

$$t \cdot as' = t \cdot a's \quad \text{und} \quad u \cdot a's'' = u \cdot a''s'.$$

Diese Gleichungen sollte man so lesen, dass sich in Anwesenheit des Elements  $t$  die Ersetzung  $as' \rightarrow a's$  durchführen lässt, und in Anwesenheit des Elements  $u$  die Ersetzung  $a's'' \rightarrow a''s'$ . In Anwesenheit des Elementes  $s'tu$  lässt sich dann auch die Ersetzung  $as'' \rightarrow a''s$  durchführen, da

$$s'tu \cdot a''s = st \cdot u \cdot a''s' = st \cdot u \cdot a's'' = s''u \cdot t \cdot a's = s''u \cdot t \cdot as' = s'tu \cdot as''$$

gilt. Das zeigt die Transitivität von  $\sim$ .

Ingesamt zeigt dies, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist. Anstelle von  $[a, s]$  schreiben wir im Folgenden

$$\frac{a}{s}$$

oder  $a/s$  für die Äquivalenzklasse von  $(a, s) \in R \times S$ .

## (b)

Es seien  $(a, s), (a', s'), (b, t), (b', t') \in R \times S$  mit  $(a, s) \sim (a', s')$  und  $(b, t) \sim (b', t')$ . Dann gibt es  $u_1, u_2 \in S$  mit

$$u_1 \cdot (as' - a's) = 0 \quad \text{und} \quad u_2 \cdot (bt' - b't) = 0,$$

also mit

$$u_1 \cdot as' = u_1 \cdot a's \quad \text{und} \quad u_2 \cdot bt' = u_2 \cdot b't.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u_1 u_2 \cdot (at + bs)s't' &= (u_1 u_2 \cdot ats't') + (u_1 u_2 \cdot bss't') \\ &= (u_2 tt' \cdot u_1 \cdot as') + (u_1 ss' \cdot u_2 \cdot bt') \\ &= (u_2 tt' \cdot u_1 \cdot a's) + (u_1 ss' \cdot u_2 \cdot b't) \\ &= (u_1 u_2 \cdot a'stt') + (u_1 u_2 \cdot b'ss't) = u_1 u_2 \cdot (a't' + b's')st \end{aligned}$$

und somit

$$u_1 u_2 \cdot ((at + bs)s't' - (a't' + b's')st) = 0,$$

also

$$\frac{at + bs}{st} = \frac{a't' + b's'}{s't'}.$$

Das zeigt, dass die Addition

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st}$$

auf  $S^{-1}R$  wohldefiniert ist.

Außerdem gilt

$$u_1 u_2 \cdot abs't' = (u_1 \cdot as')(u_2 \cdot bt') = (u_1 \cdot a's)(u_2 \cdot b't) = u_1 u_2 \cdot a'b'st$$

und somit

$$u_1 u_2 \cdot (abs't' - a'b'st) = 0,$$

also

$$\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}.$$

Das zeigt, dass die Multiplikation

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

auf  $S^{-1}R$  wohldefiniert ist.

Das folgende Lemma erweist sich zum Rechnen in  $S^{-1}R$  als sehr nützlich:

**Lemma 1** (Kürzen von Brüchen). *Für alle  $a/s \in S^{-1}R$  und  $t \in S$  gilt*

$$\frac{a}{s} = \frac{at}{st}.$$

*Beweis.* Für  $1 \in S$  gilt  $1 \cdot (ast - ats) = 0$ , also gilt  $(a, s) \sim (at, st)$ . □

Hieraus ergibt sich insbesondere, dass  $0/1 = 0/s$  für alle  $s \in S$  gilt, da

$$\frac{0}{s} = \frac{0 \cdot s}{1 \cdot s} = \frac{0}{1}$$

gilt.

Die Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation, sowie die Distributivität folgen durch direktes Nachrechnen. Das Einselement in  $S^{-1}R$  ist  $1/1$ , denn für alle  $a/s \in S^{-1}R$  gilt

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{s \cdot 1} = \frac{a}{s}.$$

Das Nullelement ist  $0/1$ , denn für alle  $a/s \in S^{-1}R$  gilt

$$\frac{a}{s} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot s}{s \cdot 1} = \frac{a}{s}.$$

Das additiv Inverse Element zu  $a/s \in S^{-1}R$  ist  $(-a)/s$ , denn es gilt

$$\frac{a}{s} + \frac{-a}{s} = \frac{as - as}{s^2} = \frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}.$$

Insgesamt zeigt dies, dass  $S^{-1}R$  mit der gegebenen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring ergibt.

**Bemerkung 2.** Ist  $R$  ein kommutativer Ring und  $S \subseteq R$  eine multiplikative Teilmenge, so ist die Abbildung  $f: R \rightarrow R_S$  ein Ringhomomorphismus. (Dies ergibt sich durch direktes Nachrechnen.)

Für jedes  $s \in S$  ist das Element  $f(s) = s/1 \in S^{-1}R$  eine Einheit, da

$$\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1} = 1_{S^{-1}R}$$

gilt. In dem Ring  $S^{-1}R$  werden die Elemente aus  $S$  also Einheiten.

Der Ring  $S^{-1}R$  (zusammen mit dem Homomorphismus  $f$ ) ist universell mit dieser Eigenschaft: Ist  $T$  ein Ring und  $g: R \rightarrow T$  ein Ringhomomorphismus, so dass  $g(s)$  für jedes  $s \in S$  eine Einheit ist, so gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\hat{\varphi}: S^{-1}R \rightarrow T$ , der das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R & \xrightarrow{\hat{g}} & T \\ f \uparrow & \nearrow g & \\ R & & \end{array}$$

Der Homomorphismus  $\hat{g}$  ist gegeben durch

$$\hat{g}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{g(a)}{g(s)} = g(a)g(s)^{-1} \quad \text{für alle } \frac{a}{s} \in S^{-1}R.$$

**Bemerkung 3.** Man beachte aber, dass der Ringhomomorphismus  $f: R \rightarrow S^{-1}R$ ,  $r \mapsto r/1$  im Allgemeinen nicht injektiv ist: Für alle  $r \in R$  gilt

$$r \in \ker f \iff \frac{r}{1} = \frac{0}{1} \iff \exists s \in S : rs = 0.$$

Somit ist  $f$  genau dann injektiv, wenn für alle  $s \in S$  und  $r \in R$  mit  $rs = 0$  bereits  $r = 0$  folgt, d.h. wenn  $S$  keine Nullteiler enthält.

Ist insbesondere  $R$  ein Integritätsbereich, so ist im Fall  $0 \notin S$  der Ringhomomorphismus  $f: R \rightarrow S^{-1}R$  stets injektiv. Dann lässt sich  $R$  als ein Unterring von  $S^{-1}R$  auffassen.

### (c)

Da  $R$  ein Integritätsbereich ist, gilt  $1 \neq 0$ , und somit  $1 \in S$ . Für alle  $s, t \in S$  gilt  $s, t \neq 0$ , wegen der Nullteilerfreiheit von  $R$  also  $st \neq 0$  und somit  $st \in S$ . Das zeigt, dass  $S$  eine multiplikative Menge ist.

Bevor wir zeigen, dass  $\text{Quot}(R)$  ein Körper ist, wollen wir anmerken, dass sich die Gleichheitsregel für Brüche im Falle in der gegebenen Situation vereinfachen: Für zwei Brüche  $a/s, b/t \in \text{Quot}(R)$  gilt genau dann  $a/s = b/t$ , wenn es ein  $u \in S$  mit

$$u \cdot (at - bs) = 0$$

gibt. Dabei gilt  $u \neq 0$  (da  $S = R \setminus \{0\}$ ), weshalb dies nach der Nullteilerfreiheit von  $R$  bereits äquivalent dazu ist, dass  $at - bs = 0$  gilt. Es gilt also

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \iff at = bs.$$

Wir können Brüche in  $\text{Quot}(R)$  also auf die „naive“ Art und Weise vergleichen.

**Bemerkung 4.** Ist allgemeiner  $R$  ein Integritätsbereich und  $S \subseteq R$  eine multiplikative Teilmenge mit  $0 \notin S$ , so gilt für  $a/s, b/t \in \text{Quot}(R)$  genau dann  $a/s = b/t$ , wenn  $at = bs$  gilt. Dies ergibt sich unverändert aus der obigen Rechnung. Für nicht-triviale (also vom Nullring  $0$  verschiedene) Lokalisierungen von Integritätsbereichen gilt also die „naive“ Gleichheitsregel für Brüche.

Da  $R$  ein Integritätsbereich ist, gilt  $0_R \neq 1_R$ . Deshalb gilt auch  $0_{\text{Quot}(R)} \neq 1_{\text{Quot}(R)}$ , denn es gilt

$$\frac{0}{1} = \frac{1}{1} \iff 0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \iff 0 = 1.$$

Es sei nun  $a/s \in S^{-1}R$  mit  $a/s \neq 0$ . Dann gilt  $a \neq 0$ , weshalb der Bruch  $s/a \in \text{Quot}(R)$  wohldefiniert ist. Es gilt

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1} = 1_{S^{-1}R},$$

was zeigt, dass  $a/s$  eine Einheit in  $\text{Quot}(R)$  ist.

Zusammen zeigt dies, dass der kommutative Ring  $\text{Quot}(R)$  bereits ein Körper ist.

**Bemerkung 5.** Nach Bemerkung 3 lässt sich  $R$  durch den Ringhomomorphismus  $R \rightarrow \text{Quot}(R)$ ,  $r \mapsto r/1$  als einen Unterring von  $\text{Quot}(R)$  auffassen. Da jeder Unterring eines Körpers ein Integritätsbereich ist, erhalten wir damit eine Charakterisierung von Integritätsbereichen:

*Integritätsbereiche sind genau die Unterringe von Körpern.*

Dies liefert auch eine mögliche Erklärung, warum der Nullring kein Integritätsbereich ist: Es handelt sich nicht um den Unterring eines Körpers.

**Bemerkung 6.** Ist allgemeiner  $R$  ein kommutativer Ring und  $P \trianglelefteq R$  ein Primideal, so ist  $S_P := R \setminus P$  eine multiplikative Teilmenge: Es gilt  $1 \notin P$  da  $P \neq R$ , und somit  $1 \in S_P$ . Für alle  $x, y \in S_P$  gilt  $x, y \notin P$ , somit auch  $xy \notin P$  (da  $P$  prim ist), und deshalb  $xy \in S_P$ .

Man bezeichnet den Ring  $R_P := S_P^{-1}R$  als die *Lokalisierung von  $R$  an  $P$* . Bei  $R_P$  handelt es sich um einen sogenannten *lokalen Ring*, d.h.  $R_P$  besitzt genau ein maximales Ideal (nämlich  $S_P^{-1}P$ ). Diese Konstruktion spielt eine wichtige Rolle in der kommutativen Ringe und algebraischen Geometrie.

Ist dabei  $R$  ein Integritätsbereich, so ist  $0 \trianglelefteq R$  ein Primideal, und es folgt, dass  $S = S_0 = R \setminus \{0\}$  eine multiplikative Teilmenge ist. Zudem ist dann  $S_0^{-1}0 = S^{-1}0 = 0$  das eindeutige maximale Ideal von  $S^{-1}R$ . Insbesondere ist das Nullideal in  $S^{-1}R$  maximal, und  $S^{-1}R$  somit ein Körper.