Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 3

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 20. November 2017

Aufgabe 1

(a)

Es gilt
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$
Wir zählen, wie häufig der Primfaktor p in $n!$ vorkommt:

Jeder p-te Faktor ist durch p teilbar, d.h. in $\lfloor n/p \rfloor$ vielen der Faktoren kommt der Primfaktor p vor. In jedem p^2-ten Faktor kommt er sogar zweimal vor, und im jedem p^3-ten dreimal, usw. Somit kommt der Primfaktore p in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdots n$ ingesamt $\sum_{i=1}^{\infty} \lfloor n/p^i \rfloor$ mal vor. Inbesondere ist die Summe endlich.

(b)

Wegen der Additivität von ν_p (es gilt $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt
$$\nu_p\left(\binom{p^r m}{p^k}\right) = \nu_p\left(\frac{(p^r m)!}{(p^k)!(p^r m - p^k)!}\right) = \nu_p((p^r m)!) - \nu_p((p^k)!) - \nu_p((p^r m - p^k)!).$$
Dabei gelten
$$\begin{aligned} \nu_p((p^r m!)) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^r m}{p^i} \right\rfloor &= \sum_{i=1}^{k} p^{r-i} m + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^r m}{p^i} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^{k} p^{r-i} m + \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^{r-k} m}{p^j} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k} p^{r-i} m + \nu_p((p^{r-k} m)!) \end{aligned}$$

sowie

$$\nu_p((p^k)!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^k}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k} p^{k-i}$$

und

$$\begin{aligned}
\nu_p((p^r m - p^k)!) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^r m - p^k}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k} (p^{r-i} m - p^{k-i}) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^r m - p^k}{p^i} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=1}^{k} (p^{r-i} m - p^{k-i}) + \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{p^{r-k} m - 1}{p^j} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=1}^{k} (p^{r-i} m - p^{k-i}) + \nu_p((p^{r-k} m - 1)!).
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned}
\nu_p\left(\binom{p^r m}{p^k}\right) &= \nu_p((p^{r-k}m)!) - \nu_p((p^{r-k}m - 1)!) \\
&= \nu_p\left(\frac{(p^{r-k}m)!}{(p^{r-k}m-1)!}\right) = \nu_p(p^{r-k}m) = r - k,
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit nutzen, dass $p \nmid m$.

(c)

Es gilt $S \trianglelefteq N_G(S)$ nach Definition von $N_G(S)$, und nach Annahme gilt $H \leq N_G(S)$. Nach einem der Isomorphiesätze ist deshalb HS eine Untergruppe von $N_G(S)$, sowie $H \cap S$ eine normale Untergruppe von H mit $HS/S \cong H/(H \cap S)$. Inbesondere ist HS/S mit der Multiplikation $\overline{g_1 g_2} = \overline{g_1 g_2}$ eine wohldefinierte Gruppe. Es handelt sich um eine p-Gruppe da

$$|HS/S| = |H/(H \cap S)| = \frac{|H|}{|H \cap S|} \,\Big|\, |H|$$

und $|H|$ eine p-Gruppe ist.

(d)

Es gilt

$$|HS| = \frac{|HS|}{|S|}\,|S| = |HS/S|\,|S|.$$

Da HS/S und S beides p-Gruppen sind, ist deshalb auch HS eine p-Gruppe. Als p-Sylowuntergruppe ist S kardinalitäts- und damit auch inklusionsmaximal unter allen p-Untergruppen von G; zusammen mit $S \leq HS$ folgt damit, dass bereits $S = HS$ gilt. Somit gelten $HS/S = S/S = 1$ und $H \leq HS = S$.

(e)

Für jede p-Sylowuntergruppe $S' \in \mathrm{Syl}_p(G)$ gilt

$$\begin{aligned} S' \in \mathrm{Syl}_p(G)^S &\iff \forall s \in S : s.S' = S' \iff \forall s \in S : sS's^{-1} = S' \\ &\iff \forall s \in S : s \in N_G(S') \iff S \leq N_G(S') \\ &\iff S \leq S' \iff S = S'. \end{aligned}$$

Dabei nutzen wir für die vorletzte Äquivalenz Aufgabenteil (d). Für die letzte Äquivalenz nutzen wir, dass $|S| = |S'|$ da S und S' zwei p-Sylowuntergruppen sind. Ingesamt zeigt dies, dass S der eindeutige Fixpunkt der gegebenen Wirkung ist.

(f)

Nach der Bahnengleichung gilt

$$\begin{aligned} |\mathrm{Syl}_p(G)| &= \sum_{\mathcal{O} \in \mathrm{Syl}_p(G)/S} |\mathcal{O}| = \left|\mathrm{Syl}_p(G)^S\right| + \sum_{\substack{\mathcal{O} \in \mathrm{Syl}_p(G)/S \\ |\mathcal{O}|>1}} |\mathcal{O}| \\ &= \left|\mathrm{Syl}_p(G)^S\right| + \sum_{\substack{\mathcal{O} \in \mathrm{Syl}_p(G)/S \\ |\mathcal{O}|>1,\, S' \in \mathcal{O}}} (S : S_{S'}). \end{aligned}$$

Dabei gilt für $\mathcal{O} \in \mathrm{Syl}_p(G)/S$ und $S' \in \mathcal{O}$ mit $(S : S_{S'}) = |\mathcal{O}| > 1$ wegen $(S : S_{S'}) \mid |S|$, dass $(S : S_{S'})$ eine nicht-trivale p-Potenz ist; inbesondere ist $(S : S_{S'})$ ein Vielfaches von p. Zudem gilt nach Aufgabenteil (e), dass $|\mathrm{Syl}_p(G)| = 1$. Ingesamt gilt somit

$$|\mathrm{Syl}_p(G)| = \underbrace{\left|\mathrm{Syl}_p(G)^S\right|}_{=1} + \underbrace{\sum_{\substack{\mathcal{O} \in \mathrm{Syl}_p(G)/S \\ |\mathcal{O}|>1,\, S' \in \mathcal{O}}} (S : S_{S'})}_{\text{Vielfaches von } p} \equiv 1 \mod p.$$

(g)

Die Gruppe G wirkt $\mathrm{Syl}_p(G)$ durch Konjugation, d.h. durch

$$g.S' = gS'g^{-1} \qquad \text{für alle } g \in G,\ S' \in \mathrm{Syl}_p(G).$$

Nach dem zweiten Sylowsatz ist diese Wirkung transitiv, d.h. für jedes $S' \in \mathrm{Syl}_p(G)$ gibt es ein $g \in G$ mit $g.S = S'$. Dabei gilt

$$G_S = \{g \in G \mid g.S = S\} = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\} = N_G(S).$$

Somit gilt

$$|\mathrm{Syl}_p(G)| = |G.S| = (G : G_S) = (G : N_G(S)).$$

Dabei gilt

$$m = \frac{|G|}{|S|} = (G : S) = (G : N_G(S))(N_G(S) : S)$$

und somit

$$|\mathrm{Syl}_p(G)| = (G : N_G(S)) \mid m.$$