Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 10

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 12. Januar 2018

Aufgabe 2

Es sei $\pi\colon K[t]\to K[t]/(p(t)), q\mapsto \overline{q}$ die kanonische Projektion. Da p(t) das Minimalpolynom von a über K ist, faktorisiert der Auswertungshomomorphismus $\operatorname{ev}_a\colon K[t]\to L,$ $\underline{q(t)}\mapsto q(a)$ über π zu einem Isomorphismus von Körper $\overline{\operatorname{ev}_a}\colon K[t]/(p(t))\to K(a),$ $q(t)\mapsto q(a)$, der das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$K(a) \xleftarrow{\overline{\operatorname{ev}_a}} K[t]/(p(t))$$

$$\uparrow^{\pi}$$

$$K[t]$$

Wir schreiben im Folgenden abkürzend $p'(t) := f_*(p(t))$.

(a)

Es sei π' : $K'[t] \to K'[t]/(p'(t))$, $q'(t) \mapsto \overline{q'(t)}$ die kanonische Projektion. Da a' eine Nullstelle von p'(t) ist, faktorisiert der Auswertungshomomorphismus $\operatorname{ev}_{a'}: K'[t] \to L'$ über einen Homomorphismus $\overline{\operatorname{ev}_{a'}}: K'[t]/(p'(t)) \to L'$, $\overline{q'(t)} \mapsto q'(a')$, der das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$K'[t](p'(t)) \xrightarrow{\text{ev}_{a'}} L'$$

$$K'[t]$$

Es gilt $\ker \pi' = (p'(t))$ und somit $p(t) \in \ker(\pi' \circ f_*)$, weshalb $\pi' \circ f_* \colon K[t] \to K'[t]/(p'(t))$ nach dem Homomorphisatz einen Homomorphismus

$$\tilde{\varphi} \colon K[t]/(p(t)) \to K'[t]/(p'(t)) \quad \overline{q(t)} \mapsto \overline{f_*(q(t))},$$

faktorisiert, der das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$K[t]/(p(t)) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} K'[t]/(q'(t))$$

$$\uparrow^{\pi} \qquad \uparrow^{\pi'}$$

$$K[t] \xrightarrow{f_*} K'[t]$$

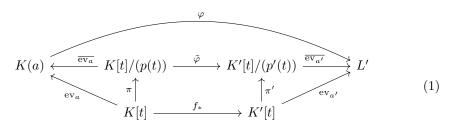
Ingesamt haben wir damit das folgende kommutierende Diagramm:

$$K(a) \xleftarrow{\overline{\operatorname{ev}_a}} K[t]/(p(t)) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} K'[t]/(p'(t)) \xrightarrow{\overline{\operatorname{ev}_{a'}}} L'$$

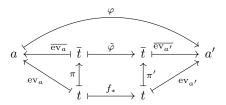
$$\uparrow^{\pi} \qquad \uparrow^{\pi'} \qquad \downarrow^{\pi'}$$

$$K[t] \xrightarrow{f_*} K'[t]$$

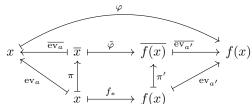
Der gesuchte Homomorphismus φ ist nun $\varphi := \overline{\operatorname{ev}_{a'}} \circ \tilde{\varphi} \circ \overline{\operatorname{ev}_a}^{-1}$.



Betrachtet man, wie das Element $t \in K[t]$ in dem obigen Diagramm herumgeschoben wird, so erhalten wir das folgende Diagramm:



Insbesondere gilt somit $\varphi(a)=a'$. Für jedes $x\in K$ erhalten wir das folgende Diagramm:



Also gilt $\varphi|_K = f$.

Bemerkung 1. Wer keine Lust auf Diagramme hat, kann die obigen beiden Diagramme auch in Gleichungsketten übersetzen: Es gilt

$$\varphi(a) = \varphi(\operatorname{ev}_a(t)) = \varphi(\overline{\operatorname{ev}_a}(\overline{t})) = \overline{\operatorname{ev}_{a'}}(\tilde{\varphi}(\overline{t})) = \overline{\operatorname{ev}_{a'}}(\overline{f_*(t)}) = \overline{\operatorname{ev}_{a'}}(\overline{t}) = \operatorname{ev}_{a'}(\overline{t}) = \operatorname{ev}_{a'}(t) = a',$$

und für jedes $x \in K$ gilt

$$\varphi(x) = \varphi(ev_a(x)) = \varphi(\overline{ev_a}(\overline{x})) = \overline{ev_{a'}}(\tilde{\varphi}(\overline{x}))$$
$$= \overline{ev_{a'}}(\overline{f_*(x)}) = \overline{ev_{a'}}(\overline{f(x)}) = ev_{a'}(f(x)) = f(x),$$

und somit $\varphi|_K = f$.

(b)

Ist $\varphi \colon K(a) \to L'$ ein Körperhomomorphismus mit $\varphi|_K = f$, so gilt für das Element $a' \coloneqq \varphi(a) \in L$ mit $p(t) = \sum_i p_i t^i$, dass

$$p'(a') = f_*(p(t))(\varphi(a)) = \left(\sum_i f(p_i)t^i\right)(\varphi(a)) = \left(\sum_i \varphi(p_i)t^i\right)(\varphi(a))$$
$$= \sum_i \varphi(p_i)\varphi(a)^i = \varphi\left(\sum_i p_i a^i\right) = \varphi(p(a)) = \varphi(0) = 0.$$

Das zeigt, dass die gegebene Abbildung wohldefiniert ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist sie surjektiv. Sie ist injektiv, denn K(a) wird als Ring von $K \cup \{a\}$ erzeugt, weshalb jeder Ringhomomorphismus $\varphi \colon K(a) \to L$ durch die Einschränkung $\varphi|_K$ und das Bildelement $\varphi(a)$ bereits eindeutig bestimmt ist.

(c)

Indem wir K' durch f(K) ersetzen, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass der Körperhomomorphismus f surjektiv ist. Dann ist auch f_* surjektiv. Es gilt $K'(a') = \operatorname{im}\operatorname{ev}_{a'}$, denn a' ist algebraisch über K', da a' eine Nullstelle des Polynoms $p'(t) \in K'[t]$ ist (es gilt $p'(t) = f_*(p(t) \neq 0$, da $p(t) \neq 0$ gilt, und f_* wegen der Injektvität von f ebenfalls injektiv ist). Aus der Kommutativität des Diagramm (1) und der Surjektvitäten von ev_a und f_* folgt somit, dass

$$\operatorname{im} \varphi = \operatorname{im} (\varphi \circ \operatorname{ev}_a) = \operatorname{im} (\operatorname{ev}'_{a'} \circ f_*) = \operatorname{im} \operatorname{ev}_{a'} = K'(a') = \varphi(K)(\varphi(a)) \,.$$