

Anmerkungen und Lösungen zu

Einführung in die Algebra

Blatt 3

Jendrik Stelzner

Letzte Änderung: 11. November 2017

Aufgabe 1

(c)

Es gilt $S \trianglelefteq N_G(S)$ nach Definition von $N_G(S)$, und nach Annahme gilt $H \leq N_G(S)$. Nach einem der Isomorphiesätze ist deshalb HS eine Untergruppe von $N_G(S)$, sowie $H \cap S$ eine normale Untergruppe von H mit $HS/S \cong H/(H \cap S)$. Insbesondere ist HS/S mit der Multiplikation $\overline{g_1 g_2} = \overline{g_1} \overline{g_2}$ eine wohldefinierte Gruppe. Es handelt sich um eine p -Gruppe da

$$|HS/S| = |H/(H \cap S)| = \frac{|H|}{|H \cap S|} \mid |H|$$

und $|H|$ eine p -Gruppe ist.

(d)

Es gilt

$$|HS| = \frac{|HS|}{|S|} |S| = |HS/S| |S|.$$

Da HS/S und S beides p -Gruppen sind, ist deshalb auch HS eine p -Gruppe. Als p -Sylowuntergruppe ist S kardinalitäts- und damit auch inklusionsmaximal unter allen p -Untergruppen von G ; zusammen mit $S \leq HS$ folgt damit, dass bereits $S = HS$ gilt. Somit gelten $HS/S = S/S = 1$ und $H \leq HS = S$.

(e)

Für jede p -Sylowuntergruppe $S' \in \text{Syl}_p(G)$ gilt

$$\begin{aligned} S' \in \text{Syl}_p(G)^S &\iff \forall s \in S : s.S' = S' \iff \forall s \in S : sS's^{-1} = S' \\ &\iff \forall s \in S : s \in N_G(S') \iff S \leq N_G(S') \\ &\iff S \leq S' \iff S = S'. \end{aligned}$$

Dabei nutzen wir für die vorletzte Äquivalenz Aufgabenteil (d). Für die letzte Äquivalenz nutzen wir, dass $|S| = |S'|$ da S und S' zwei p -Sylowuntergruppen sind. Insgesamt zeigt dies, dass S der eindeutige Fixpunkt der gegebenen Wirkung ist.