

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional.

Aufgabe 1. (*Existenz von Skalarprodukten*)

Es sei \mathcal{B} eine Basis eines \mathbb{K} -Vektorraums V . Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen \mathcal{B} orthonormal ist.

Aufgabe 2. (*Kern und Bild der adjungierten Abbildung*)

Es seien V und W Skalarprodukträume und es sei $f: V \rightarrow W$ linear. Zeigen Sie, dass $\ker f^{\text{ad}} = (\text{im } f)^{\perp}$ und $\text{im } f^{\text{ad}} = (\ker f)^{\perp}$ gelten.

Aufgabe 3. (*Endomorphismen mit $\langle f(v), v \rangle = 0$*)

1. Es sei V ein Skalarproduktraum und $f: V \rightarrow V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit $\langle f(v), v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass bereits $f = 0$ gilt.
(*Tipp:* Betrachten Sie die Eigenwerte von f .)
2. Es sei nun V ein unitärer Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $\langle f(v), v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass bereits $f = 0$ gilt.
(*Tipp:* Betrachten Sie die Sesquilinearform $\beta \in \text{SF}(V)$ mit $\beta(v_1, v_2) = \langle f(v_1), v_2 \rangle$, und nutzen Sie Polarisation.)

Aufgabe 4. (*Charakterisierung linearer Isometrien*)

Es seien V und W Skalarprodukträume und es sei $f: V \rightarrow W$ linear. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt $\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$.
2. Für alle $v \in V$ gilt $\|f(v)\| = \|v\|$.

Aufgabe 5. (*Trigonalisierung durch Orthonormalbasen*)

Es sei V ein unitärer Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass es für jede Flagge

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V gibt, so dass $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ für alle i gilt.

2. Zeigen Sie, dass es für jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ in oberer Dreiecksform ist.

Aufgabe 6. (*Determinanten*)

Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ orthogonal, unitär, bzw. hermitesch. Bestimmen Sie jeweils alle möglichen Werte von $\det A$.