Aufgabe 1.
Man gebe gebe jeweils die größte Zahl $n \geq 1$ an, so dass die Jordan-Normalform aller $(n \times n)$-Matrizen durch die folgenden Informationen bis auf Permutation der Jordanblöcke eindeutig bestimmt ist:

1. Das charakteristische Polynom $p_A(t)$.
2. Das Minimalpolynom $p_A(t)$.
3. Die Dimension aller Eigenräume $\dim(\mathbb{C}^n)_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
4. Das Minimalpolynom $m_A(t)$ und die Dimension aller Eigenräume $\dim(\mathbb{C}^n)_\lambda(A)$.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen in $\mathrm{M}_6(K)$.

Aufgabe 3.
Es seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $\dim(\mathbb{C}^n)^\infty_\lambda(A) \leq 3$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn $p_A = p_B$ und $m_A = m_B$ gelten.

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Jordan-Normalform und das Minimalpolynom der Matrix

$$A_a := \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit den angegebenen Eigenschaften jeweils alle möglichen Jordan-Normalformen bis auf Permutaiton der Jordanblöcke.

1. $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ ist nicht diagonalisierbar mit $\operatorname{Spur} A = 0$.
2. Es gilt $A^3 = 0$ und alle nicht-trivialen Eigenräume von A sind eindimensional.
3. Es gilt $p_A(t) = (t-2)(t+2)^3$ und $(A - 2\mathbb{1})(A + 2\mathbb{1}) = 0$.
4. Es gilt $p_A(t) = t^3 - t$.
5. Es gilt $p_A(t) = (t^2 - 5t + 6)^2$, und alle Eigenräume von A sind entweder null- oder eindimensional.
6. Es gilt $A^2 = A$ und alle nicht-trivialen Eigenräume von A sind zweidimensional.
7. Es gilt $p_A(t) = t^5$ und alle Eigenräume von A sind entweder null- oder zweidimensional.
8. Es gilt $p_A(t) = (t+3)^3 t^2$ und A hat keine zweidimensionalen Eigenräume.

9. Es gilt $p_A(t) = t^5 - 2t^4$.
10. Es gilt $p_A(t) = (t-3)^4(t-5)^4$ und $(A - 3\mathbb{1})^2(A - 5\mathbb{1})^2 = 0$.
11. $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Spur} A = \det A = 0$.
12. $A \in \mathrm{M}_8(\mathbb{C})$ mit $(A - \mathbb{1})(A^5 - A^4) = 0$, $\operatorname{Spur} A = 2$ und $\operatorname{rg} A = 6$.
13. $A \in \mathrm{M}_7(\mathbb{C})$ mit $A^5 = A^4$, $\operatorname{Spur} A = 2$ und $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 + 1 = 4$.
14. $A \in \mathrm{M}_6(\mathbb{C})$ mit $m_A(t) = (t-1)^2(t-2)^3$ und $\dim V_2(A) = 1$.
15. $p_A = (t-1)^2(t-2)(t-7)^2$, $\operatorname{Spur} A = 6$, $\det A = 4$, $\operatorname{rg}(A - \mathbb{1}) = 3$.
16. $p_A(t) = (t-4)^3(t+3)^2$ und $m_A(t) = (t-4)(t+3)^2$
17. $p_A(t) = (t+2)^4(t-1)^2$, $\operatorname{rg}(A + 2\mathbb{1}) > \operatorname{rg}(A + 2\mathbb{1})^2 = 2$ und $\operatorname{rg}(A - \mathbb{1}) = 5$.
18. $A \in \mathrm{M}_7(\mathbb{C})$ mit $A^7 - 2A^5 + A^3 = 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A + \mathbb{1}) = 6$, $\operatorname{Spur} A = 0$.
19. $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$ mit $A^3 = 0$ und $\operatorname{rg} A = 3$.

Aufgabe 6.

1. Es sei $A = D + N$ mit $D, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ die Jordan–Chevalley-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass bereits $D, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ gilt.
2. Über $\mathbb{R}$ besitzt nicht jede Matrix eine Jordan-Normalform, und somit auch nicht jede Matrix eine Jordan–Chevalley-Zerlegung. Wieso steht dies nicht im Widerspruch zu der obigen Aussage?

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils die Jordan-Normalform:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}), \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_2),$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}), \quad A_4 := \begin{pmatrix} -6 & 12 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 20 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),$$

$$A_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{F}_3).$$

Aufgabe 8.

Es sei V ein K-Vektorraum, und $f, g\colon V \to V$ seien zwei kommutierende Endomorphismen. Zeigen Sie, dass $V_\lambda(f)$ und $V_\lambda^\infty(f)$ invariant unter g sind.