Aufgabe 1. (*Bestimmtheit der Jordan-Normalform*)
Man gebe gebe jeweils die größte Zahl $n \geq 1$ an, so dass die Jordan-Normalform aller komplexen $(n \times n)$-Matrizen durch die folgenden Informationen bis auf Permutation der Jordanblöcke eindeutig bestimmt ist:

1. Das charakteristische Polynom $p_A(t)$.
2. Das Minimalpolynom $p_A(t)$.
3. Die Dimension aller Eigenräume $\dim(\mathbb{C}^n)_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
4. Das Minimalpolynom $m_A(t)$ und die Dimension aller Eigenräume $\dim(\mathbb{C}^n)_\lambda(A)$.

Aufgabe 2. (*Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen*)
Bestimmen Sie die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen in $\mathrm{M}_6(K)$.

Aufgabe 3. (*Jordan–Chevalley-Zerlegung reeller Matrizen*)

1. Es sei $A = D + N$ mit $D, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ die Jordan–Chevalley-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass bereits $D, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ gilt.
(*Tipp*: Nutzen Sie komplexe Konjugation.)
2. Über $\mathbb{R}$ besitzt nicht jede Matrix eine Jordan-Normalform, und somit auch nicht jede Matrix eine Jordan–Chevalley-Zerlegung. Wieso steht dies nicht im Widerspruch zu der obigen Aussage?

Aufgabe 4. (*Implizites Bestimmen von Jordan-Normalformen*)
Bestimmen Sie für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$ mit den angegebenen Eigenschaften jeweils alle möglichen Jordan-Normalformen bis auf Permutation der Jordanblöcke.

1. Es gelten $p_A(t) = (t-4)^3(t+3)^2$ und $m_A(t) = (t-4)(t+3)^2$.
2. $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ ist nicht diagonalisierbar mit $\operatorname{Spur} A = 0$.
3. Es gilt $A^3 = 0$ und alle nicht-trivialen Eigenräume von A sind eindimensional.
4. Es gelten $p_A(t) = (t-2)(t+2)^3$ und $(A - 2\mathbb{1})(A + 2\mathbb{1}) = 0$.
5. Es gilt $p_A(t) = t^3 - t$.
6. Es gilt $p_A(t) = (t^2 - 5t + 6)^2$ und alle Eigenräume von A sind entweder null- oder eindimensional.
7. Es gilt $A^2 = A$ und alle nicht-trivialen Eigenräume von A sind zweidimensional.
8. Es gilt $p_A(t) = (t+3)^3 t^2$ und A hat keine zweidimensionalen Eigenräume.
9. Es gilt $p_A(t) = t^5 - 2t^4$ und alle nicht-trivialen Eigenräume von A haben die gleiche Dimension.

10. $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Spur} A = \det A = 0$.

11. $A \in \mathrm{M}_8(\mathbb{C})$ mit $(A - \mathbb{1})(A^5 - A^4) = 0$, $\operatorname{Spur} A = 2$ und $\operatorname{rg} A = 6$.

Aufgabe 5. (*Jordan-Normalform in Abhängigkeit von einem Parameter*)
Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Jordan-Normalform und das Minimalpolynom der Matrix

$$A_a := \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Lösungen

Lösung 5.
Da A_a eine obere Dreiecksmatrix ist, ergibt sich durch direktes Ablesen das charakteristische Polynom

$$p_{A_a}(t) = -(t-2)^2 \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Da das charakteristische Polynom von A_a in Linearfaktoren zerfällt, gibt es eine Jordan-Normalform für A_a über $\mathbb{R}$. Aus dem charakteristischen Polynom $p_{A_a}(t)$ erhalten wir, dass 2 der einzige Eigenwert von A ist; es kommen also nur Jordanblöcke zum Eigenwert 2 vor. Dabei ist die Jordan-Normalform von A_a bereits eindeutig dadurch bestimmt, wie viele Jordanblöcke vorkommen, da A_a eine (3×3)-Matrix ist. Diese Anzahl an Jordanblöcken ist dabei genau $\dim\ker(A_a - 2\mathbb{1})$.

Es gilt

$$A_a - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

und somit

$$\ker(A_a - 2\mathbb{1}) = \begin{cases} \langle e_1 \rangle & \text{falls } a \neq -1, 2, \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \text{falls } a = -1, \\ \langle e_1, e_3 \rangle & \text{falls } a = 2, \end{cases}$$

also

$$\dim\ker(A_a - 2\mathbb{1}) = \begin{cases} 2 & \text{falls } a = -1 \text{ oder } a = 2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den Fällen $a = -1$ und $a = 2$ gibt es also zwei Jordanblöcke, einen von Größe 2 und einen von Größe 1. Die Jordan-Normalform ist in diesen Fällen durch

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das zugehörige Minimalpolynom ist $m_{A_{-1}}(t) = m_{A_2}(t) = (t-2)^2$ (denn die Vielfachheit des Linearfaktors $t-2$ im Minimalpolynom $m_{A_a}(t)$ entspricht der maximalen auftretenden Blockgröße zum Eigenwert 2).

In allen anderen Fällen gibt es genau einen Jordanblock, notwendigerweise von Größe 3. Die Jordan-Normalform ist in diesen Fällen durch

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das zugehörige Minimalpolynom ist $m_{A_a}(t) = (t-2)^3$ (für $a \neq -1, 2$).