Notizen zum

Repetitorium
Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

8. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Diagonalisierbarkeit

Im Folgenden sei K ein Körper. Im Rest des Abschnittes sei, sofern nicht anders angegeben, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.1. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sind $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$, so ist v ein *Eigenvektor* von f zum *Eigenwert* λ. Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$V_\lambda(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = \lambda f\} = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$$

der *Eigenraum* von f zu λ.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Sind $\lambda \in K$ und $x \in K^n$ mit $x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$, so ist x ein *Eigenvektor* von A zum *Eigenwert* λ. Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda(A) \coloneqq \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

der *Eigenraum* von A zu λ.

Remark 1.2. 1. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $f\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige Endomorphismus, so stimmen die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume von A mit denen von f überein.

Es genügt daher im Folgenden, Definitionen und Aussagen für Endomorphismen zu anzugeben – für Matrizen gelten diese dann ebenfalls.

2. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A \coloneqq M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Bezüglich des zu $\mathcal{B}$ zugehörigen Isomorphismus

$$\Phi_\mathcal{B}\colon V \to K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T \eqqcolon [v]_\mathcal{B}$$

gilt

$$\Phi_\mathcal{B}\left(V_\lambda(f)\right) = (K^n)_\lambda(A).$$

Es ist also $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $[v]_\mathcal{B}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Berechnungen lassen sich deshalb in Matrizenform durchführen.

Für theoretische Aussagen nutzen wir also Endomorphismen, und für konkrete Rechnungen nutzen wir Matrizen.

1.2 Das charakterische Polynom

Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $A \coloneqq M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\ \iff & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \\ \iff & (K^n)_\lambda(A) \neq 0 \\ \iff & \ker(A - \lambda I) \neq 0 \\ \iff & A - \lambda I \text{ ist nicht invertierbar} \\ \iff & \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Definition 1.3. Das *charakterische Polynom* von $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist definiert als

$$p_A(t) \coloneqq \det(A - tI) \in K[t].$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist definiert als $p_f(t) = p_A(t)$, wobei $A \coloneqq M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die darstellende Matrix von f bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V ist.

Dass das charakteristische Polynom $p_f(t)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt, folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1.4. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakterische Polynom.*

Aus unserer anfänglichen Beobachtung erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom:

Proposition 1.5. *Die Eigenwerte von f genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_f(t)$.*

1.3 Das Minimalpolynom

Lemma 1.6. *Es sei $p \in K[t]$ ein Polynom mit $p(f) = 0$. Dann ist jeder Eigenwert von f eine Nullstelle von p.*

Definition 1.7. Es sei

$$\mathrm{Pol}(f) \coloneqq \{p \in K[t] \mid p(f) = 0\}.$$

Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\mathrm{Pol}(f)$ ist das *Minimalpolynom* von f, und wird mit $m_f(t) \in K[t]$ notiert.

Remark 1.8. Die Wohldefiniertheit von $\mathrm{Pol}(f)$ nutzt die Endlichdimensionalität von V. Hierdurch wird sichergestellt, dass $\mathrm{Pol}(f) \neq 0$ gilt.

Die Definition des Minimalpolynoms lässt sich bis auf Normiertheit wie folgt umschreiben:

Lemma 1.9. *Es gilt*

$$\mathrm{Pol}(f) = \{p \cdot m_f \mid p \in K[t]\}.$$

Für $p \in K[t]$ gilt also genau dann $p(f) = 0$, wenn $m_f \mid p$. Inbesondere gilt $m_f(f) = 0$.

Satz 1.10 (Cayley–Hamilton)**.** *Es gilt $p_f(f) = 0$, also $m_f \mid p_f$.*

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Nullstelle von $m_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also ein Eigenwert von f. Andererseits ist jeder Eigenwert von f nach Lemma 1.9 und Lemma 1.6 auch eine Nullstelle von $m_f(t)$. Somit sind die Nullstelle non $m_f(t)$ genau die Eigenwerte von f. Also haben $p_f(t)$ und $m_f(t)$ die gleichen Nullstellen. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfallen $p_f(t)$ und $m_f(t)$ somit in die gleichen Linearfaktoren, wobei die Vielfachheit im Minimalpolynom nach dem Satz von Cayley–Hamilton jeweils kleiner ist als die Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

1.4 Diagonalisierbarkeit

Lemma 1.11. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren von $f\colon V \to V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig. Inbesondere ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.*

Definition 1.12. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heiß *diagonalisierbar* falls er die folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.
2. Es gilt $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.
3. Es gibt eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f.
4. Es gibt ein Erzeugendensystem von V bestehend aus Eigenvektoren von f.
5. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die darstellende Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt *diagonalisierbar*, falls sie eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Es gilt $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.
2. Es gilt $K^n = \sum_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.
3. Es gibt eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A.
4. Es gibt ein Erzeugendensystem von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A.
5. Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h. es gibt $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Lemma 1.13. *Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist diagonlisierbar.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar ist.*

3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar.*

Ob ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ diagonalisierbar ist, hängt nur vom Minimalpolynom $m_f(t)$ ab:

Proposition 1.14. *Der Endomorphismus f ist genau dann diagonalisierbar, falls m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

1.5 Simultane Diagonalisierbarkeit

Definition 1.15. Eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Endomorphismen $f_i\colon V \to V$ heißt *simultan diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.

Eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Matrizen $A_i \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt *simultan diagonalisierbar*, falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass SA_iS^{-1} für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.

Lemma 1.16. *Für eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Endomorphismen $f_i\colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Familie von Endomorphismen $(f_i)_{i\in I}$ ist simultan diagonalisierbar.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Familie von Matrizen $(M_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}})_{i\in I}$ simultan diagonalisierbar ist.*

3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist die Familie von Matrizen $(M_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}})_{i\in I}$ simultan diagonalisierbar.*

1.6 Trigonalisierbarkeit

Definition 1.17. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt trigonalisierbar, falls A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist, d.h. falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Lemma 1.18. *Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist trigonalisierbar.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die darstellende Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar ist.*

3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist die darstellende Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar.*

Die Trigonalisierbarkeit eines Endomorphismus $f: V \to V$ hängt nur von dem charakterischen Polynom $p_f(t)$ ab:

Proposition 1.19. *Ein Endomorphismus $f: V \to V$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom $p_f(t)$ in Linearfaktoren zerfällt.*

Insbesondere ist jeder Endomorphismus $f: V \to V$ trigonalisierbar, falls K algebraisch abgeschlossen ist.

2 Jordan-Normalform

Im Folgenden sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

2.1 Definition

Definition 2.1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ ist

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

der *Jordanblock* zu λ von Größe n.

Definition 2.2. Eine Matrix J der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

ist in *Jordan-Normalform*.

Definition 2.3. Eine *Jordan-Normalform* einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist eine zu A ähnliche Matrix $J \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass J in Jordan-Normalform ist.

Eine Jordan-Normalform von f ist eine Jordan-Normalform der darstellenden Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V.

Der Endomorphismus f besitzt genau dann eine Jordan-Normalform $J \in \mathrm{M}_n(K)$, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = J$ gilt. Wir bezeichnen eine solche Basis als *Jordanbasis* von f.

Eine *Jordanbasis* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist eine Jordanbasis der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörigen linearen Abbildung $f_A\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$. Dies ist äquivalent dazu, dass für die Matrix $C = (v_1|\cdots|v_n) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix $S^{-1}AS = M_{f_A,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in Jordan-Normalform ist.

2.2 Eindeutigkeit

Es sei J eine Matrix in Jordan-Normalform, also

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Für alle $\lambda \in K$ gilt dann

$$\dim \ker(J - \lambda I)^k = \sum_{k'=1}^{k} \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k'.$$

Für die Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \dim \ker(J - \lambda I)^k$ gilt deshalb

$$d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) = \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \\
= &\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k \\
&- \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq (k+1) \\
= &(d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda)) - (d_{k+1}(\lambda) - d_k(\lambda)) \\
= &2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).
\end{aligned}$$

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $\lambda \in K$ eine Jordan-Normalform von A, so sind A und J ähnlich, weshalb für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ auch $(A - \lambda I)^k$ und $(J - \lambda I)^k$ ähnlich sind. Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ gilt deshalb $\dim \ker(A - \lambda)^k = \dim \ker(J - \lambda)^k$. Aus der obigen Berechnung ergibt sich deshalb für die Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \ker(A - \lambda I)^k$, dass

$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \text{ in } J = 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Damit ergibt sich inbesondere die folgende Eindeutigkeit der Jordannormalform:

Proposition 2.4. *Je zwei Jordannormalformen einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus stimmen bis auf Permutation der Jordanblöcke überein.*

Es ergibt daher Sinn, von *der* Jordannormalform einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus zu sprechen.

2.3 Existenz

Definition 2.5. Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei

$$V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid (f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^k(v) = 0\} = \ker(f - \mathrm{id}_V)^k.$$

Der Untervektorraum

$$V_\lambda^\infty(f) \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} V_\lambda^k(f) = \left\{v \in V \mid \text{es gibt } k \geq 0 \text{ mit } (f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^k(v) = 0\right\}$$

ist der *verallgemeinerte Eigenraum* von f zu λ. Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei

$$(K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid (A - \lambda I)^k x = 0\} = \ker(A - I)^k.$$

Der Untervektorraum

$$(K^n)^\infty_\lambda(A) := \bigcup_{k=0}^{\infty} (K^n)^k_\lambda(A) = \big\{x \in K^n \,|\, \text{es gibt } k \geq 0 \text{ mit } (A - \lambda I)^k x = 0\big\}$$

ist der *verallgemeinerte Eigenraum* von A zu λ.

Lemma 2.6. *1. Es gilt genau dann $V^\infty_\lambda(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.*

2. Die Summe $\sum_{\lambda \in K} V^\infty_\lambda(f)$ ist direkt.

Mithilfe der verallgemeinerten Eigenräume ergibt sich eine Charakterisierung der Existenz der Jordan-Normalform:

Satz 2.7. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.

2. Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V^\infty_\lambda(f)$.

3. Die Jordan-Normalform von f existiert.

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt, so lässt sich die Jordan-Normalform von A sowie eine zugehörige Jordanbasis wie folgt berechnen:

- Man bestimme die Eigenwerte von A, etwa indem man $p_A(t)$ berechnet und anschließend die Nullstellen herausfindet.
- Für jeden Eigenwert λ von A führe man die folgenden Schritte durch:
  - Man berechne die iterierten Kerne $\ker(A-\lambda I), \ker(A-\lambda I)^2, \ldots, \ker(A-\lambda I)^m$ bis zu dem Punkt, an dem eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
    * Die Dimension $\dim \ker(A - \lambda I)^m$ ist die algebraische Vielfachheit von λ in $p_A(t)$.
    * Es gilt $\ker(A - \lambda I)^m = \ker(A - \lambda I)^{m+1}$.
  - Man bestimme Anhand der Zahlen $d_k(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda I)^k$ die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke zu λ von Größe k als

$$b_k(\lambda) := 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Aus den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von A und den Zahlen $b_k(\lambda_i)$ erhalten wir bereits, wieviele Blöcke es zu welchen Eigenwert von welcher Größe gibt, d.h. wie die Jordannormalform von A (bis auf Permutation der Blöcke) aussehen wird. Inbesondere ist $d_1(\lambda)$ die Gesamtzahl der Jordanblöcke zu λ und die entsprechende Potenz m die maximal auftretende Blöckgröße zu λ.

Zur Berechnung einer Jordanbasis von A geht man weiter wie folgt vor:

- Für jeden Eigenwert λ von A gehe man weiterhin wie folgt vor:
  - Man wähle linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_{b_m} \in \ker A^m$ mit
$$\ker A^m = \ker A^{m-1} \oplus \langle v_1, \ldots, v_{b_m} \rangle .$$
(Ergänzt man eine Basis von $\ker A^{m-1}$ zu einer Basis von $\ker A^m$, so sind $v_1, \ldots, v_{b_m}$ die neu hinzugekommenen Basisvektoren.)
  - Hierdurch ergeben sich für $\mathcal{B}$ die ersten paar Basisvektoren
$$\begin{gathered} v_1, Av_1, \ldots, A^{m-1}v_1, \\ v_2, Av_2, \ldots, A^{m-1}v_2, \\ \ldots, \\ v_{b_m}, Av_{b_m}, \ldots, A^{m-1}v_{b_m}. \end{gathered}$$
  - Man wählt nun linear unabhängige Vektoren $v_1', \ldots, v_{b_{m-1}}' \in \ker A^{m-1}$, so dass
$$\ker A^{m-1} = \ker A^{m-2} \oplus \langle Av_1, \ldots, Av_{b_m} \rangle \oplus \left\langle v_1', \ldots, v_{b_{m-1}}' \right\rangle$$
gilt.
  - Hierdurch erhält man für $\mathcal{B}$ die weiteren Basisvektoren
$$\begin{gathered} v_1', Av_1', \ldots, A^{m-2}v_1', \\ v_2', Av_2', \ldots, A^{m-2}v_2', \\ \ldots, \\ v_{b_{m-1}}', Av_{b_{m-1}}', \ldots, A^{m-2}v_{b_{m-1}}'. \end{gathered}$$
  - Man wähle nun $v_1'', \ldots, v_{b_{m-2}}'' \in \ker A^{m-2}$, so dass
$$\begin{aligned} &\ker A^{m-1} \\ &= \ker A^{m-2} \oplus \left\langle A^2v_1, \ldots, A^2v_{b_m} \right\rangle \oplus \left\langle Av_1', \ldots, Av_{b_{m-1}}' \right\rangle \oplus \left\langle v_1'', \ldots, v_{b_{m-2}}'' \right\rangle \end{aligned}$$
gilt.
  - Hiermit ergeben sich für $\mathcal{B}$ die Basisvektoren
$$\begin{gathered} v_1'', Av_1'', \ldots, A^{m-2}v_1'', \\ v_2'', Av_2'', \ldots, A^{m-2}v_2'', \\ \ldots, \\ v_{b_{m-2}}'', Av_{b_{m-2}}'', \ldots, A^{m-2}v_{b_{m-2}}''. \end{gathered}$$

  Durch Weiterführen der obigen Schritte erhält man schließlich eine Basis $\mathcal{B}_\lambda$ von $(K^n)^\infty_\lambda(A)$.

- Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von K^n, so ergibt sich Zusammenfügen der Basen $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{B}_{\lambda_t}$ eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n.
- Die Basis $\mathcal{B}$ ist eine Jordanbasis von A: Indem man die (in der obigen Reihenfolge entstandenen) Basisvektoren als Spalten in eine Matrix C einträgt, erhält man schließlich $C \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $C^{-1}AC$ in Jordan-Normalform ist. Dabei sind die Blöcke zunächst nach den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ (in dieser Reihenfolge) sortiert; die Blöcke zum gleichen Eigenwert sind nach absteigender Größe sortiert.