

Notizen zum

# **Repetitorium Lineare Algebra II**

Jendrik Stelzner  
[s6jestel@uni-bonn.de](mailto:s6jestel@uni-bonn.de)

10. September 2017

Online verfügbar unter  
<https://goo.gl/2oDGjB>.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Diagonalisierbarkeit &amp; Freunde</b>	<b>1</b>
1.1	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	1
1.2	Das charakterische Polynom . . . . .	2
1.3	Das Minimalpolynom . . . . .	4
1.4	Diagonalisierbarkeit . . . . .	5
1.5	Trigonalisierbarkeit . . . . .	8
1.6	Spur und Determinante durch Eigenwerte . . . . .	9
1.7	Simultane Diagonalisierbarkeit . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Die Jordan-Normalform</b>	<b>10</b>
2.1	Definition . . . . .	10
2.2	Eindeutigkeit . . . . .	11
2.3	Existenz & Kochrezept . . . . .	12
2.4	Lösung des Ähnlichkeitsproblems . . . . .	17
2.5	Die Jordan–Chevalley-Zerlegung . . . . .	19
2.6	Implizite Bestimmen der Jordan-Normaform . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Grundlagen zu Bilinearformen</b>	<b>21</b>
3.1	Allgemeine Definitionen . . . . .	21
3.2	Quadratische Formen und Polarisation . . . . .	23
3.3	Orthogonalität . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Skalarprodukte</b>	<b>26</b>
4.1	Definitheit & Skalarprodukte . . . . .	26
4.2	Orthonormalbasen & Gram–Schmidt . . . . .	27
4.3	Rieszscher Darstellungssatz . . . . .	28
4.4	Die Adjungierte Abbildung . . . . .	29
4.5	Unitäre & orthogonale Matrizen . . . . .	30
4.6	Die Iwasawa-Zerlegung . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Normalenformen für normale Endomorphismen</b>	<b>31</b>
5.1	Normale Endomorphismen . . . . .	31
5.2	Unitäre & Orthogonale Endomorphismen . . . . .	33
5.3	Selbstadjungierte Endomorphismen . . . . .	35
5.4	Übersicht . . . . .	38
5.5	Polarzerlegung . . . . .	38

## Inhaltsverzeichnis

<b>6</b>	<b>Mehr zu Bilinearformen</b>	<b>40</b>
6.1	Darstellende Matrizen & Kongruenz . . . . .	40
6.2	Existenz von Orthogonalbasen . . . . .	41
6.3	Reelle symmetrische Bilinearformen . . . . .	42
6.4	Dualität . . . . .	44

# 1 Diagonalisierbarkeit & Freunde

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum, und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

## 1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

**Definition 1.1.**

- Sind  $\lambda \in K$  und  $v \in V$  mit  $v \neq 0$  und  $f(v) = \lambda v$ , so ist  $v$  ein Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Für alle  $\lambda \in K$  ist der Untervektorraum

$$V_\lambda(f) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$$

der Eigenraum von  $f$  zu  $\lambda$ . Die Zahl  $\dim V_\lambda(f)$  ist die geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ .

- Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in M_n(K)$ . Sind  $\lambda \in K$  und  $x \in K^n$  mit  $x \neq 0$  und  $Ax = \lambda x$ , so ist  $x$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Für alle  $\lambda \in K$  ist der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda(A) := \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

der Eigenraum von  $A$  zu  $\lambda$ . Die Zahl  $\dim(K^n)_\lambda(A)$  ist die geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ .

**Bemerkung 1.2.**

1. Ist  $A \in M_n(K)$  und  $f: K^n \rightarrow K^n$ ,  $x \mapsto Ax$  der zu  $A$  (bezüglich der Standardbasis) gehörige Endomorphismus, so stimmen die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume von  $A$  mit denen von  $f$  überein.

Es genügt daher im Folgenden, Definitionen und Aussagen für Endomorphismen zu anzugeben – für Matrizen gelten diese dann ebenfalls.

2. Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $K$ -Vektorraums  $V$ ,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $A := M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  die entsprechende darstellende Matrix. Bezüglich des zu  $\mathcal{B}$  zugehörigen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T =: [v]_{\mathcal{B}}$$

gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}}(V_\lambda(f)) = (K^n)_\lambda(A).$$

Es ist also  $v \in V$  genau dann ein Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda \in K$ , wenn  $[v]_{\mathcal{B}}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist.

Berechnungen lassen sich deshalb in Matrizenform durchführen.

Für theoretische Aussagen nutzen wir also Endomorphismen, und für konkrete Rechnungen nutzen wir Matrizen.

## 1.2 Das charakteristische Polynom

Es sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  und  $A := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  die zugehörige darstellende Matrix von  $f$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\ \iff & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \\ \iff & (K^n)_{\lambda}(A) \neq 0 \\ \iff & \ker(A - \lambda \mathbb{1}) \neq 0 \\ \iff & A - \lambda \mathbb{1} \text{ ist nicht invertierbar} \\ \iff & \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0. \end{aligned}$$

**Definition 1.3.** Das charakteristische Polynom von  $A$  ist definiert als

$$p_A(t) := \det(A - t\mathbb{1}) \in K[t].$$

Das charakteristische Polynom von  $f$  ist definiert als  $p_f(t) := p_A(t)$ .

Dass das charakteristische Polynom  $p_f(t)$  wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis  $\mathcal{B}$  abhängt, folgt aus dem folgenden Lemma:

**Lemma 1.4.** Ähnliche Endomorphismen, bzw. Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

Aus unserer anfänglichen Beobachtung erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom von  $f$ :

**Proposition 1.5.** Die Eigenwerte von  $f$  sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $p_f(t)$ .

**Definition 1.6.** Die Vielfachheit des Linearfaktors  $t - \lambda$  in  $p_f(t)$  ist die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$ .

**Beispiel 1.7.**

1. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

gilt

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 3 & 1-t & 2 \\ 2 & 3 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 + 15t + 18.$$

Die einzige reelle Nullstelle von  $p_A(t)$ , und somit der einzige reelle Eigenwert von  $A$ , ist 6. Der entsprechende Eigenraum ist

$$(\mathbb{R}^3)_6(A) = \ker(A - 6\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Es gilt  $p_A(t) = \det(A - t\mathbb{1}) = \det(A - t\mathbb{1})^T = \det(A^T - t\mathbb{1}) = p_{A^T}(t)$ .

3. Ist  $A$  eine obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n - t \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t) = (-1)^n (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind also genau die Diagonaleinträge  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

4. Ist allgemeiner  $A$  eine obere Blockdreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_r \end{pmatrix}$$

mit  $A_i \in M_{n_i}(K)$ , so gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} A_1 - t\mathbb{1}_{n_1} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_r - t\mathbb{1}_{n_r} \end{pmatrix} \\ &= \det(A_1 - t\mathbb{1}_{n_1}) \cdots \det(A_r - t\mathbb{1}_{n_r}) = p_{A_1}(t) \cdots p_{A_r}(t). \end{aligned}$$

## Die Koeffizienten des charakterischen Polynoms

Allgemein ist das charakteristische Polynom von  $A \in M_n(K)$  von der Form

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (\text{Spur } A) t^{n-1} + \dots + \det A.$$

**Beispiel 1.8.** Das charakteristische Polynom einer  $(2 \times 2)$ -Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$  ist gegeben durch

$$p_A(t) = t^2 - (\text{Spur } A)t + \det A = t^2 - (a + d)t + (ad - bc).$$

## 1.3 Das Minimalpolynom

**Lemma 1.9.** Ist  $v \in V$  ein Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda \in K$ , so ist  $v$  für jedes Polynom  $p \in K[t]$  ein Eigenvektor von  $p(f)$  zum Eigenwert  $p(\lambda)$ . Insbesondere sind die Eigenwerte von  $f$  Nullstellen von  $p$ , falls  $p(f) = 0$  gilt.

**Beispiel 1.10.**

1. Ist  $f$  nilpotent mit  $f^k = 0$ , so gilt  $q(f) = 0$  für das Polynom  $q(t) := t^k$ . Deshalb ist 0 der einzige mögliche Eigenwert von  $f$ .
2. Gilt  $f^3 = 3f - 2\text{id}_V$ , so gilt  $q(f) = 0$  für das Polynom  $q(t) := t^3 - 3t + 2$ . Es gilt  $q(t) = (t - 1)^2(t + 2)$ , also sind 1 und  $-2$  die einzigen möglichen Eigenwerte für  $f$ .
3. Gilt  $f^2 = -\text{id}_V$ , so hat  $f$  im Fall  $K = \mathbb{R}$  keine Eigenwerte, da das Polynom  $t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$  keine reellen Nullstellen hat.

**Definition 1.11.**

- Es sei

$$\text{Pol}(f) := \{p \in K[t] \mid p(f) = 0\}.$$

Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus  $\text{Pol}(f)$  ist das Minimalpolynom von  $f$ , und wird mit  $m_f(t) \in K[t]$  notiert.

- Für  $A \in M_n(K)$  sei

$$\text{Pol}(A) := \{p \in K[t] \mid p(A) = 0\}.$$

Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus  $\text{Pol}(A)$  ist das Minimalpolynom von  $A$ , und wird mit  $m_A(t) \in K[t]$  notiert.

**Bemerkung 1.12.** Man bemerke, dass stets  $m_f(f) = 0$  gilt; bis auf Normiertheit ist  $m_f$  das kleinstmögliche Polynom (außer dem Nullpolynom), das diese Eigenschaft hat.

**Bemerkung 1.13.** Die Wohldefiniertheit von  $\text{Pol}(f)$  nutzt die Endlichdimensionalität von  $V$ . Hierdurch wird sichergestellt, dass  $\text{Pol}(f) \neq 0$  gilt.

**Lemma 1.14.** Ist  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ , so gilt für  $A = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ , dass  $\text{Pol}(f) = \text{Pol}(A)$ . Somit gilt  $m_f = m_A$ .

**Korollar 1.15.** *Ähnliche Endomorphismen, bzw. Matrizen haben das gleiche Minimalpolynom.*

Die Definition des Minimalpolynoms lässt sich bis auf Normiertheit wie folgt umschreiben:

**Lemma 1.16.** *Es gilt*

$$\text{Pol}(f) = \{p \cdot m_f \mid p \in K[t]\}.$$

Für  $p \in K[t]$  gilt also genau dann  $p(f) = 0$ , wenn  $m_f \mid p$  gilt.

**Bemerkung 1.17.** Für  $p \in K[t]$  und  $\lambda \in K$  gilt genau dann  $p(\lambda) = 0$ , wenn  $(t - \lambda) \mid p(t)$  gilt. Man kann Lemma 1.16 als eine Verallgemeinerung hiervon verstehen.

**Satz 1.18** (Cayley–Hamilton). *Es gilt  $p_f(f) = 0$ , also  $m_f \mid p_f$ .*

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Nullstelle von  $m_f(t)$  auch eine Nullstelle von  $p_f(t)$ , also ein Eigenwert von  $f$ . Andererseits ist jeder Eigenwert von  $f$  nach Lemma 1.16 und Lemma 1.9 auch eine Nullstelle von  $m_f(t)$ . Somit sind die Nullstellen von  $m_f(t)$  genau die Eigenwerte von  $f$ . Also haben  $p_f(t)$  und  $m_f(t)$  die gleichen Nullstellen.

Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so zerfallen  $p_f(t)$  und  $m_f(t)$  somit in die gleichen Linearfaktoren. Die Vielfachheit im Minimalpolynom ist dabei nach dem Satz von Cayley–Hamilton jeweils kleiner ist als die Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

## 1.4 Diagonalisierbarkeit

**Lemma 1.19.** *Es seien  $v_1, \dots, v_n \in V$  Eigenvektoren von  $f$  zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  mit  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ . Dann sind  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig. Insbesondere ist die Summe  $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$  direkt.*

**Definition 1.20.**

- Der Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  heißt diagonalisierbar falls er die folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:
  1. Es gilt  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ .
  2. Es gilt  $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ .
  3. Es gilt  $\dim V = \sum_{\lambda \in K} \dim V_\lambda(f)$ .
  4. Es gilt  $\dim V \leq \sum_{\lambda \in K} \dim V_\lambda(f)$ .
  5. Es gibt eine Basis von  $V$  bestehend aus Eigenvektoren von  $f$ .
  6. Es gibt ein Erzeugendensystem von  $V$  bestehend aus Eigenvektoren von  $f$ .
  7. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass die darstellende Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  eine Diagonalmatrix ist.
- Eine Matrix  $A \in M_n(K)$  heißt diagonalisierbar, falls sie eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:



1. Es gilt  $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$ .
2. Es gilt  $K^n = \sum_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$ .
3. Es gilt  $n = \sum_{\lambda \in K} \dim((K^n)_\lambda(A))$ .
4. Es gilt  $n \leq \sum_{\lambda \in K} \dim((K^n)_\lambda(A))$ .
5. Es gibt eine Basis von  $K^n$  bestehend aus Eigenvektoren von  $A$ .
6. Es gibt ein Erzeugendensystem von  $K^n$  bestehend aus Eigenvektoren von  $A$ .
7. Die Matrix  $A$  ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h. es gibt  $S \in \text{GL}_n(K)$ , so dass  $SAS^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist.

**Beispiel 1.21.**

1. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p_A(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = -(t^2 - 3t + 2)(t - 1) = -(t - 1)^2(t - 2).$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind also 1 und 2. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$(\mathbb{R}^3)_1(A) = \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$(\mathbb{R}^3)_2(A) = \ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Also ist

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Somit ist  $A$  diagonalisierbar. Für die entsprechende Basiswechselmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \quad \text{gilt} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Falls das charakteristische Polynom  $p_f(t)$  in paarweise verschiedenen Linearfaktoren  $p_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$  zerfällt, so ist  $f$  diagonalisierbar:

Dann gibt es zu jedem Eigenwert  $\lambda_i$  einen Eigenvektor  $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$ , und die Familie  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  ist nach Lemma 1.19 linear unabhängig. Da  $n = \dim V$  gilt, ist  $\mathcal{B}$  bereits eine Basis von  $V$ .

Inbesondere sind Dreiecksmatrizen mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen diagonalisierbar.

3. Es sei  $\text{char } K \neq 2$ ,  $V$  ein zweidimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  und  $f: V \rightarrow V$  der eindeutige Endomorphismus mit  $f(v_1) = v_2$  und  $f(v_2) = v_1$ . Dann ist  $v_1 + v_2$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und  $v_1 - v_2$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $-1$ , und somit  $\mathcal{B} = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$  eine Basis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ . Also ist  $f$  diagonalisierbar mit

$$M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

4. Jede reelle, symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. Inbesondere sind für jede reelle Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  die Matrizen  $A + A^T$ ,  $AA^T$  und  $A^T A$  diagonalisierbar.

**Lemma 1.22.** *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. Der Endomorphismus  $f$  ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass die Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  diagonalisierbar ist.
3. Für jede Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist die Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  diagonalisierbar.

Ob der Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  diagonalisierbar ist, hängt nur vom Minimalpolynom  $m_f(t)$  ab:

**Proposition 1.23.** *Der Endomorphismus  $f$  ist genau dann diagonalisierbar, falls das Minimalpolynom  $m_f$  in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

Die Nullstellen von  $m_f$  sind dann, wie bereits gesehen, genau die Eigenwerte von  $f$ .

**Korollar 1.24.** *Ist  $q \in K[t]$  mit  $q(f) = 0$  (also  $m_f \mid q$ ), so dass  $q$  in paarweise verschiedene Linearfaktoren  $q(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$  zerfällt, so ist  $f$  diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .*

**Beispiel 1.25.**

1. Gilt  $f^2 = f$ , so gilt  $q(f) = 0$  für das Polynom  $q(t) := t^2 - t = t(t - 1)$ . Somit ist  $f$  diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 0 und 1.
2. Gilt  $f^2 = \text{id}_V$ , so gilt  $q(f) = 0$  für das Polynom  $q(t) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$ . Gilt  $\text{char } K \neq 2$ , so ist  $f$  somit diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 1 und  $-1$ .

Ist  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum, so gilt für die den eingeschränkten Endomorphismus  $f|_U: U \rightarrow U$ , dass  $m_f(f|_U) = m_f(f)|_U = 0$ , und somit dass  $(m_f|_U) \mid m_f$ .

**Korollar 1.26.** *Ist  $f$  diagonalisierbar, so ist auch  $f|_U$  diagonalisierbar.*

## 1.5 Trigonalisierbarkeit

**Definition 1.27.**

- Der Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  heißt trigonalisierbar, falls es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, so dass  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  eine obere Dreiecksmatrix ist.
- Eine Matrix  $A \in M_n(K)$  heißt trigonalisierbar, falls  $A$  ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist, d.h. falls es  $S \in GL_n(K)$  gibt, so dass  $SAS^{-1}$  eine obere Dreiecksmatrix ist.

**Lemma 1.28.** Die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist trigonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass die Matrix  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  trigonalisierbar ist.
3. Für jede Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist die Matrix  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  trigonalisierbar.

### Äquivalente Charakterisierungen

**Definition 1.29.** Eine Flagge, bzw. Fahne von  $V$  ist eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

mit  $\dim V_k = k$  für alle  $k$ . (Inbesondere ist  $n = \dim V$ .) Die Flagge heißt  $f$ -stabil falls  $f(V_k) \subseteq V_k$  für alle  $k$  gilt.

Ist  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  mit  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  in oberer Dreiecksform, so ist

$$0 \subsetneq \langle v_1 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$$

eine  $f$ -invariante Flagge von  $V$ . Ist andererseits

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V \tag{1}$$

eine Flagge von  $V$ , so ergibt sich durch Basisergänzung eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$ , so dass  $V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  für alle  $k$  gilt. Ist die Flagge (1)  $f$ -invariant, so ist die darstellende Matrix  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  eine obere Dreiecksmatrix.

Hierdurch ergibt sich die folgende Charakterisierung trigonalisierbarer Endomorphismen:

**Satz 1.30.** Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist trigonalisierbar.
2. Es gibt eine  $f$ -invariante Flagge von  $V$ .
3. Das charakteristische Polynom  $p_f(t)$  zerfällt in Linearfaktoren.

Inbesondere hängt die Trigonalisierbarkeit von  $f$  nur vom charakteristischen Polynom  $p_f(t)$  ab. Außerdem ist jeder Endomorphismus von  $V$  trigonalisierbar, falls  $K$  algebraisch abgeschlossen ist.

## 1.6 Spur und Determinante durch Eigenwerte

Zerfällt  $p_f(t)$  in Linearfaktoren  $p_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ , so ist  $f$  nach Satz 1.30 trigonalisierbar. Dann gilt

$$\text{Spur } f = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{und} \quad \det f = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Außerdem ist für jedes Polynom  $q \in K[t]$  auch der Endomorphismus  $q(f)$  trigonalisierbar, und es gilt

$$p_{q(f)}(t) = (t - q(\lambda_1)) \cdots (t - q(\lambda_n)).$$

## 1.7 Simultane Diagonalisierbarkeit

**Definition 1.31.**

- Eine Kollektion von Endomorphismen  $f_i: V \rightarrow V$ ,  $i \in I$  heißt simultan diagonalisierbar, falls es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, so dass  $M_{f_i, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  für jedes  $i \in I$  eine Diagonalmatrix ist.
- Eine Kollektion von Matrizen  $A_i \in M_n(K)$ ,  $i \in I$  heißt simultan diagonalisierbar, falls es  $S \in GL_n(K)$  gibt, so dass  $SA_iS^{-1}$  für jedes  $i \in I$  eine Diagonalmatrix ist.

**Lemma 1.32.** Für eine Kollektion von Endomorphismen  $f_i: V \rightarrow V$ ,  $i \in I$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Endomorphismen  $f_i$ ,  $i \in I$  sind simultan diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass die Kollektion von Matrizen  $M_{f_i, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ ,  $i \in I$  simultan diagonalisierbar sind.
3. Für jede Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  sind die Kollektion von Matrizen  $M_{f_i, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ ,  $i \in I$  simultan diagonalisierbar.

**Beispiel 1.33.** Sind die Endomorphismen  $f, g: V \rightarrow V$  simultan diagonalisierbar, so sind auch  $f + g$  und  $f \circ g$  diagonalisierbar.

**Proposition 1.34.** Für Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n$  sind simultan diagonalisierbar.
2. Die Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n$  sind diagonalisierbar und paarweise kommutierend, d.h. es gilt  $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$  für alle  $i, j$ .

## 2 Die Jordan-Normalform

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

### 2.1 Definition

**Definition 2.1.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \in K$  ist

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

der Jordanblock zu  $\lambda$  von Größe  $n$ .

**Definition 2.2.** Eine Matrix  $J \in M_n(K)$  der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

ist in Jordan-Normalform.

**Definition 2.3.**

1. Eine Jordan-Normalform einer Matrix  $A \in M_n(K)$  ist eine zu  $A$  ähnliche Matrix  $J \in M_n(K)$ , so dass  $J$  in Jordan-Normalform ist.
2. Eine Jordan-Normalform von  $f$  ist eine Jordan-Normalform der darstellenden Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  bezüglich einer Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ .

Der Endomorphismus  $f$  besitzt genau dann eine Jordan-Normalform  $J \in M_n(K)$ , falls es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, so dass  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} = J$  gilt. Wir bezeichnen eine solche Basis als *Jordanbasis* von  $f$ .

Eine *Jordanbasis*  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  einer Matrix  $A \in M_n(K)$  ist eine Jordanbasis der zu  $A$  (bezüglich der Standardbasis) gehörigen linearen Abbildung  $f_A: K^n \rightarrow K^n$ ,  $x \mapsto Ax$ . Dies ist äquivalent dazu, dass für die Matrix  $S = (v_1 \dots v_n) \in GL_n(K)$  die Matrix  $S^{-1}AS = M_{f_A, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  in Jordan-Normalform ist.

## 2.2 Eindeutigkeit

Es sei  $J \in M_n(K)$  eine Matrix in Jordan-Normalform, also

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Für alle  $\lambda \in K$  gilt dann

$$\dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k = \sum_{k'=1}^k \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe mindestens } k'.$$

Für die Zahlen  $d_k(\lambda) := \dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k$  gilt deshalb

$$d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) = \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe mindestens } k$$

und somit

$$\begin{aligned} & \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \\ &= \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe mindestens } k \\ & \quad - \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe mindestens } (k+1) \\ &= (d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda)) - (d_{k+1}(\lambda) - d_k(\lambda)) \\ &= 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ist  $J$  Jordan-Normalform von  $A \in M_n(K)$ , so sind  $A$  und  $J$  ähnlich, weshalb für alle  $\lambda \in K$  und  $k \geq 0$  auch  $(A - \lambda \mathbb{1})^k$  und  $(J - \lambda \mathbb{1})^k$  ähnlich sind. Für alle  $\lambda \in K$  und  $k \geq 0$  gilt deshalb  $\dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k = \dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k$ . Aus der obigen Berechnung ergibt sich deshalb für die Zahlen  $d_k(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k$ , dass

$$\begin{aligned} & \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \text{ in einer JNF von } A \\ &= 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insbesondere die folgende Eindeutigkeit der Jordan-Normalform:

**Proposition 2.4.** *Je zwei Jordan-Normalformen einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus stimmen bis auf Permutation der Jordanblöcke überein.*

Es ergibt daher Sinn, von der Jordan-Normalform einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus zu sprechen.

## 2.3 Existenz & Kochrezept

### Existenzkriterien

**Definition 2.5.**

- Für alle  $\lambda \in K$  und  $k \geq 0$  sei

$$V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid (f - \lambda \operatorname{id}_V)^k(v) = 0\} = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)^k.$$

Der Untervektorraum

$$V_\lambda^\infty(f) := \bigcup_{k=0}^{\infty} V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid \text{es gibt } k \geq 0 \text{ mit } (f - \lambda \operatorname{id}_V)^k(v) = 0\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum von  $f$  zu  $\lambda$ .

- Für  $A \in M_n(K)$  und alle  $\lambda \in K$  und  $k \geq 0$  sei

$$(K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid (A - \lambda \mathbb{1})^k x = 0\} = \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k.$$

Der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda^\infty(A) := \bigcup_{k=0}^{\infty} (K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid \text{es gibt } k \geq 0 \text{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k x = 0\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum von  $A$  zu  $\lambda$ .

**Beispiel 2.6.** Der Endomorphismus  $f$  ist genau dann nilpotent, wenn  $V_0^\infty(f) = V$ . (Hier nutzen wir, dass  $V$  endlichdimensional ist.)

**Lemma 2.7.**

- Es gilt genau dann  $V_\lambda^\infty(f) \neq 0$ , wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $f$  ist.
- Die Summe  $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$  ist direkt.

Mithilfe der verallgemeinerten Eigenräume ergibt sich eine Charakterisierung der Existenz der Jordan-Normalform:

**Satz 2.8.** Die folgenden Bedingungen äquivalent:

- Das charakteristische Polynom  $p_f(t)$  zerfällt in Linearfaktoren.
- Es gilt  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$ .
- Die Jordan-Normalform von  $f$  existiert.

Dabei bezeichnet man die Zerlegung  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$  als die *verallgemeinerte Eigenraumzerlegung* bezüglich  $f$ .

**Beispiel 2.9.** Ist  $f$  nilpotent, so gilt  $V = V_0^\infty(f)$ , also  $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$  und somit  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$ . Also existiert die verallgemeinerte Eigenraumzerlegung bezüglich  $f$ , und somit auch die Jordan-Normalform von  $f$ .

Nilpotente Endomorphismen besitzen also immer eine Jordan-Normalform.

### Kochrezept

Ist  $A \in M_n(K)$ , so dass das charakteristische Polynom  $p_A(t)$  in Linearfaktoren zerfällt, so lässt sich die Jordan-Normalform von  $A$  sowie anschließend auch eine zugehörige Jordanbasis nach dem folgenden *Kochrezept* berechnen:

- Man bestimme die Eigenwerte von  $A$ , etwa indem man das charakteristische Polynom  $p_A(t)$  berechnet, und anschließend die Nullstellen von  $p_A(t)$  herausfindet.
- Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  führe man die folgenden Schritte durch:
  - Man berechne die iterierten Kerne  $\ker(A - \lambda \mathbb{1}), \ker(A - \lambda \mathbb{1})^2, \dots, \ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$  bis zu dem Punkt, an dem eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
    - Die Dimension von  $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$  ist gleich der algebraische Vielfachheit von  $\lambda$  in  $p_A(t)$ .
    - Es gilt  $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m = \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m+1}$ .
  - Man bestimme Anhand der Zahlen  $d_k(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k$  die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke zu  $\lambda$  von Größe  $k$  als

$$b_k(\lambda) := 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Aus den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  von  $A$  und den Zahlen  $b_k(\lambda_i)$  erhalten wir bereits, wieviele Blöcke es zu welchen Eigenwert von welcher Größe gibt, d.h. wie die Jordan-Normalform von  $A$  (bis auf Permutation der Blöcke) aussehen wird. Insbesondere ist  $d_1(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})$  die Gesamtzahl der Jordanblöcke zu  $\lambda$  und die entsprechende Potenz  $m$  die maximale auftretende Blöckgröße zu  $\lambda$ .

Zur Berechnung einer Jordanbasis von  $A$  kann man weiterhin wie folgt vorgehen:

- Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  berechnet man eine Basis  $\mathcal{B}_\lambda$  von  $(K^n)_\lambda^\infty(A)$  wie folgt:
  - Man wähle Vektoren  $v_1, \dots, v_{b_m} \in \ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$  mit

$$\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m = \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-1} \oplus \langle v_1, \dots, v_{b_m} \rangle.$$

(Zur konkreten Berechnung ergänze man eine Basis  $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-1}$  zu einer Basis von  $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$ ; dann kann man  $v_1, \dots, v_{b_m}$  als die neu hinzugekommenen Basisvektoren wählen.)

- Hierdurch ergeben sich für  $\mathcal{B}_\lambda$  die ersten paar Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v_1, (A - \lambda \mathbb{1})v_1, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-1}v_1, \\ &v_2, (A - \lambda \mathbb{1})v_2, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-1}v_2, \\ &\quad \dots, \\ &v_{b_m}, (A - \lambda \mathbb{1})v_{b_m}, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-1}v_{b_m}. \end{aligned}$$



## 2 Die Jordan-Normalform

- Man wählt nun Vektoren  $v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \in \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-1}$ , so dass

$$\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-1} = \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-2} \oplus \langle Av_1, \dots, Av_{b_m} \rangle \oplus \langle v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \rangle$$

gilt.

- Hierdurch erhält man für  $\mathcal{B}_\lambda$  die weitere Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v'_1, (A - \lambda \mathbb{1})v'_1, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-2}v'_1, \\ &v'_2, (A - \lambda \mathbb{1})v'_2, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-2}v'_2, \\ &\quad \dots, \\ &v'_{b_{m-1}}, (A - \lambda \mathbb{1})v'_{b_{m-1}}, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-2}v'_{b_{m-1}}. \end{aligned}$$

- Man wähle nun  $v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \in \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-2}$ , so dass

$$\begin{aligned} &\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-1} \\ &= \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-2} \oplus \langle A^2v_1, \dots, A^2v_{b_m} \rangle \oplus \langle Av'_1, \dots, Av'_{b_{m-1}} \rangle \oplus \langle v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \rangle \end{aligned}$$

gilt.

- Hiermit ergeben sich für  $\mathcal{B}_\lambda$  die Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v''_1, (A - \lambda \mathbb{1})v''_1, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-2}v''_1, \\ &v''_2, (A - \lambda \mathbb{1})v''_2, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-2}v''_2, \\ &\quad \dots, \\ &v''_{b_{m-2}}, (A - \lambda \mathbb{1})v''_{b_{m-2}}, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-2}v''_{b_{m-2}}. \end{aligned}$$

Durch Weiterführen der obigen Schritte erhält man schließlich eine Basis  $\mathcal{B}_\lambda$  von  $(K^n)_\lambda^\infty(A)$ .

- Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die paarweise verschiedenen Eigenwerte von  $A$ , so ergibt sich durch Hintereinanderlegen der Basen  $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_t}$  eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $K^n$ . (Hier nutzen wir, dass  $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda^\infty(A)$  gilt.)
- Die Basis  $\mathcal{B}$  ist eine Jordanbasis von  $A$ . Indem man die Basisvektoren von  $\mathcal{B}$  als Spalten in eine Matrix  $S$  einträgt, erhält man schließlich  $S \in \text{GL}_n(K)$ , so dass  $S^{-1}AS$  in Jordan-Normalform ist. Dabei sind die Blöcke zunächst nach den Eigenwerten in der zuvor gewählten Reihenfolge sortiert, und die Blöcke zum gleichen Eigenwert sind jeweils nach absteigender Größe sortiert.

**Beispiel 2.10.** Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{M}_3(\mathbb{C})$$

## 2 Die Jordan-Normalform

gilt  $p_A(t) = -(t-2)^3$ . Also ist 2 der einzige Eigenwert von  $A$ . Es gilt

$$\ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit gilt  $\dim \ker(A - 2\mathbb{1}) = 2$ . Also gibt es zwei Jordanblöcke. Die Jordan-Normalform von  $A$  ist somit

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung einer Jordanbasis von  $A$  gehen wir wie folgt vor:

- Wir benötigen einen Vektor  $v_1 \in \ker(A - 2\mathbb{1})^2$  mit  $\ker(A - 2\mathbb{1})^2 = \ker(A - 2\mathbb{1}) \oplus \langle v_1 \rangle$ , also einen Vektor  $v_1 \in \mathbb{C}^3$  mit  $v_1 \notin \ker(A - 2\mathbb{1})$ . Hierfür bietet sich etwa der Vektor

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an. Damit erhalten wir auch den weiteren Basisvektor

$$(A - 2\mathbb{1})v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Nun benötigen wir noch einen Vektor  $v_2 \in \ker(A - 2\mathbb{1})$  mit

$$\ker(A - 2\mathbb{1}) = \langle (A - 2\mathbb{1})v_1 \rangle \oplus v_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus v_2.$$

Hierfür lässt sich etwa

$$v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen.

Insgesamt haben wir somit für  $A$  die Jordanbasis

$$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von  $\mathbb{C}^3$ . Für die entsprechende Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$$

## 2 Die Jordan-Normalform

gilt dann, dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 2.11.** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_7)$  und  $f: V \rightarrow V$  der eindeutige Endomorphismus mit  $f(v_1) = f(v_2) = v_5$ ,  $f(v_3) = f(v_4) = v_6$ ,  $f(v_5) = f(v_6) = v_7$  und  $f(v_7) = 0$ . Es gilt  $f^3(v_i) = 0$  für alle  $i$ , und deshalb  $f^3 = 0$ . Also ist  $f$  nilpotent, und besitzt somit eine Jordan-Normalform; dabei ist 0 der einzige auftretende Eigenwert.

Für die darstellende Matrix

$$A := M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = 0.$$

Somit gelten

$$\begin{aligned} \ker A &= \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6, e_7 \rangle, \\ \ker A^2 &= \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, \\ \ker A^3 &= K^7. \end{aligned}$$

Mit  $d_1 = \dim \ker A = 4$ ,  $d_2 = \dim \ker A^2 = 6$  und  $d_k = \dim \ker A^k = 7$  für  $k \geq 3$  erhalten wir, dass  $b_1 = 2d_1 - d_2 = 2$ ,  $b_2 = 2d_2 - d_3 - d_1 = 1$ ,  $b_3 = 2d_3 - d_4 - d_2 = 1$  und  $b_k = 0$  für  $k \geq 4$ .

Die Jordan-Normalform von  $A$  (und damit von  $f$ ) besteht also aus zwei Blöcken der Größe 1, einem Block der Größe 2 und einem Block der Größe 3 (jeweils zum Eigenwert 0); sie ist also

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2 Die Jordan-Normalform

Wir bestimmen nun eine entsprechende Jordanbasis:

- Wir benötigen zunächst  $w_1 \in \ker A^3 = K^7$  mit  $K^7 = \ker A^2 \oplus \langle w_1 \rangle$ . Hierfür muss nur  $w_1 \notin \ker A^2$  gelten. Wir wählen  $w_1 := e_1$ . Dann erhalten wir auch die weiteren Basisvektoren  $Aw_1 = e_5$  und  $A^2w_1 = e_7$ .
- Als nächstes benötigen wir  $w_2 \in \ker A^2$  mit

$$\ker A^2 = \ker A \oplus \langle Aw_1 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6, e_7 \rangle \oplus \langle e_5 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle.$$

Wir müssen also die Familie  $(e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_5 - e_6, e_7)$  zu einer Basis von  $\ker A^2$  ergänzen. Da

$$\langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_5 - e_6, e_7 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$$

gilt, können wir  $w_2 := e_2 - e_3$  wählen. Damit erhalten wir außerdem den Basisvektoren  $Aw_2 = e_5 - e_6$ .

- Schließlich brauchen wir noch  $w_3, w_4 \in \ker A$  mit

$$\ker A = \langle A^2w_1 \rangle \oplus \langle Aw_2 \rangle \oplus \langle w_3, w_4 \rangle = \langle e_7 \rangle \oplus \langle e_5 - e_6 \rangle \oplus \langle w_3, w_4 \rangle.$$

Wir müssen also die Familie  $(e_5 - e_6, e_7)$  zu einer Basis von  $\ker A$  ergänzen. Hierfür können wir  $w_3 := e_1 - e_2$  und  $w_4 := e_3 - e_4$  wählen.

Insgesamt haben wir somit die Basis  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ , bzw. die Basiswechselmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$M_{f,\mathcal{C},\mathcal{C}} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Lösung des Ähnlichkeitsproblems

Es seien  $f, g: V \rightarrow V$  zwei Endorphismen, die jeweils eine Jordan-Normalform besitzen.

## 2 Die Jordan-Normalform

**Satz 2.12.** *Die Endomorphismen  $f$  und  $g$  sind genau dann ähnlich, wenn sie (bis auf Permutation der Blöcke) die gleiche Jordan-Normalform besitzen.*

Also sind  $f, g: V \rightarrow V$  genau dann ähnlich, wenn ihre charakteristischen Polynome

$$p_f(t) = p_g(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$$

übereinstimmen, und wenn für jeden Eigenwert  $\lambda_i$  gilt, dass

$$\dim \ker(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k = \dim \ker(g - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n_i.$$

**Beispiel 2.13.**

1. Für nilpotente Matrizen existiert immer eine verallgemeinerte Eigenraumzerlegung. Deshalb sind zwei nilpotente Matrizen  $A, B \in M_n(K)$  genau dann ähnlich, wenn  $\dim \ker A^k = \dim \ker B^k$  für alle  $k \geq 0$  gilt.
2. Es seien  $A_1, A_2, A_3 \in M_3(\mathbb{C})$  mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt  $p_{A_1}(t) = p_{A_2}(t) = p_{A_3}(t) = -(t-1)^2(t-2)$ . Da 2 jeweils eine algebraische Vielfachheit 1 hat, gilt

$$\dim \ker(A_1 - 2\mathbb{1}) = \dim \ker(A_2 - 2\mathbb{1}) = \dim \ker(A_3 - 2\mathbb{1}) = 1.$$

Für den Eigenwerte 1 ergeben sich die Dimensionen

$$\dim \ker(A_1 - \mathbb{1}) = \dim \ker(A_2 - \mathbb{1}) = 1 \quad \text{und} \quad \dim \ker(A_3 - \mathbb{1}) = 2,$$

also ist  $A_3$  zu keiner der beiden anderen Matrizen ähnlich. Da ferner

$$\dim \ker(A_1 - \mathbb{1})^2 = \dim \ker(A_2 - \mathbb{1})^2 = 2$$

gilt, sind  $A_1$  und  $A_2$  ähnlich.

3. Da  $A_1$  und  $A_2$  in unterer, bzw. oberer Jordan-Normalform sind, sieht man direkt, dass Sie nicht diagonalisierbar sind.

Die Matrix  $A_3$  ist hingegen eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke beide diagonalisierbar sind: Der obere Block ist diagonalisierbar, da es sich um eine obere Dreiecksmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen handelt. Also ist auch  $A_3$  diagonalisierbar.

Hierdurch sieht man bereits, dass  $A_3$  nicht ähnlich zu  $A_1$  oder  $A_2$  ist.

4. Dass  $A_1$  und  $A_2$  ähnlich sind, erkennt man auch wie folgt:

Besitzt  $A \in M_n(K)$  eine Jordan-Normalform, so sind  $A$  und  $A^T$  ähnlich. Insbesondere sind jede Matrix in unterer Jordan-Normalform ähnlich zu der entsprechenden oberen Jordan-Normalform.

## 2.5 Die Jordan–Chevalley-Zerlegung

Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, der die Bedingungen aus Satz 2.8 erfüllt (d.h.  $f$  besitzt eine Jordan-Normalform.)

**Proposition 2.14** (Jordan–Chevalley-Zerlegung). *Es gibt eine eindeutige Zerlegung  $f = d + n$  in einen diagonalisierbaren Endomorphismus  $d$  und einen nilpotenten Endomorphismus  $n$ , so dass  $d$  und  $n$  kommutieren.*

Die Jordan–Chevalley-Zerlegung ist eine „koordinatenfreie“ Version der Jordan-Normalform; die Existenz dieser Zerlegung ist äquivalent zur Existenz der Jordan-Normalform.

**Beispiel 2.15.** Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

und die Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Jordan–Chevalley-Zerlegung  $A = D + N$  ist somit gegeben durch

$$D = S \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$N = S \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

## 2.6 Implizite Bestimmen der Jordan-Normalform

Es sei  $J \in M_n(K)$  eine Jordan-Normalform von  $f$ .

- Für das charakteristische Polynom  $p_f(t) = p_J(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$  mit  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$  gilt

$$n_i = \dim V_{\lambda_i}^\infty(f) = \text{wie oft } \lambda_i \text{ auf der Diagonalen von } J \text{ steht}$$

- Es gilt

$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ in } J = \dim \ker(f - \text{id}_V) = n - \text{rg}(f - \text{id}_V).$$

Inbesondere ist  $n - \text{rg } f$  die Anzahl der Jordanblöcke zu 0.

## 2 Die Jordan-Normalform

- Für das Minimalpolynom  $m_f(t) = m_J(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$  mit  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$  gilt

$m_i = \text{maximale auftretende Größe eines Jordanblockes zu } \lambda_i \text{ in } J$

- Ist allgemeiner  $q(t) \in K[t]$  ein Polynom mit  $q(t) = (t - \lambda_1)^{m'_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m'_s}$ , wobei  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$  gilt, und  $q(f) = 0$ , so ergeben sich die folgenden beiden Restriktionen an  $J$ :
  1. Jeder Eigenwert von  $f$  kommt in  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  vor (siehe Lemma 1.9),
  2. Es gilt  $m_f \mid q$ . Deshalb ist  $m_f = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$  mit  $m_i \leq m'_i$  für alle  $i$ . Also sind die Jordanblöcke zu  $\lambda_i$  in  $J$  jeweils höchstens  $m'_i$  groß.

Zusammen mit den Beobachtungen aus Abschnitt 1.6 kann man hierdurch für kleine Matrizen bereits Aussagen über die Jordan-Normalform treffen, ohne die Matrix selbst zu kennen.

**Beispiel 2.16.** Es sei  $A \in M_6(\mathbb{C})$  mit  $(A - 2\mathbb{1})^2(A - 3\mathbb{1}) = 0$  und  $\text{Spur } A = 14$ .

Dann sind 2 und 3 die einzigen möglichen Eigenwerte von  $A$ . Aus  $\text{Spur } A = 14$  erhält man, dass 2 mit algebraischer Vielfachheit 4 vorkommt, und 3 mit algebraischer Vielfachheit 2. Außerdem folgt aus  $(A - 2\mathbb{1})^2(A - 3\mathbb{1}) = 0$ , dass die Jordanblöcke zu 2 höchstens 2 groß sind, und die Jordanblöcke zu 3 alle Größe 1 haben.

Damit ergeben sich bis auf Permutation der Jordanblöcke die folgenden drei möglichen Jordan-Normalformen:

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

In den ersten beiden Fällen ist  $(t - 2)^2(t - 1)$  das Minimalpolynom, im dritten Fall ist es  $(t - 2)(t - 3)$ .

## 3 Grundlagen zu Bilinearformen

Im Folgenden sei  $K$  ein Körper, und  $U$ ,  $V$  und  $W$  seien  $K$ -Vektorräume.

**Notation 3.1.** Für alle  $M_n(\mathbb{C})$  schreiben wir  $A^* := \overline{A}^T$ .

**Definition 3.2.** Die Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  heißt hermitesch, falls  $A = A^*$  gilt.

**Beispiel 3.3.**

1. Eine reelle Matrix ist genau dann hermitesch, wenn sie symmetrisch ist.
2. Ist allgemeiner  $A = B + iC$  mit  $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ , so ist  $A$  genau dann hermitesch, wenn  $B$  symmetrisch und  $C$  schiefsymmetrisch ist.

### 3.1 Allgemeine Definitionen

**Definition 3.4.**

- Eine Abbildung  $\beta: V \times W \rightarrow U$  heißt  $K$ -bilinear, falls

$$\begin{aligned}\beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) &= \lambda \beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \lambda \beta(v, w)\end{aligned}$$

für alle  $v, v_1, v_2 \in V$ ,  $w, w_1, w_2 \in W$  und  $\lambda \in K$  gilt.

- Gilt zusätzlich  $U = K$ , so ist  $\beta$  eine Bilinearform. Es ist

$$\text{BF}(V, W) := \{\beta: V \times W \rightarrow K \mid \beta \text{ ist eine Bilinearform}\}.$$

- Gilt zusätzlich  $V = W$  und

$$\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt  $\beta$  symmetrisch. Es sind

$$\text{BF}(V) := \text{BF}(V, V)$$

sowie

$$\text{BF}^{\text{sym}}(V) := \{\beta \in \text{BF}(V) \mid \beta \text{ ist symmetrisch}\}.$$



### 3 Grundlagen zu Bilinearformen

**Definition 3.5.** Es sei  $K = \mathbb{C}$ .

- Eine Abbildung  $\beta: V \times W \rightarrow U$  heißt sesquilinear, falls

$$\begin{aligned}\beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) &= \lambda \beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \bar{\lambda} \beta(v, w)\end{aligned}$$

für alle  $v, v_1, v_2 \in V$ ,  $w, w_1, w_2 \in W$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt.

- Gilt zusätzlich  $U = \mathbb{C}$ , so ist  $\beta$  eine Sesquilinearform. Es ist

$$\text{SF}(V, W) := \{\beta: V \times W \rightarrow \mathbb{C} \mid \beta \text{ ist eine Sesquilinearform}\}.$$

- Gilt zusätzlich  $V = W$  und

$$\beta(v_1, v_2) = \overline{\beta(v_2, v_1)} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt  $\beta$  hermitesch. Es sind

$$\text{SF}(V) := \text{SF}(V, V)$$

sowie

$$\text{SF}^{\text{her}}(V) := \{\beta \in \text{SF}(V) \mid \beta \text{ ist hermitesch}\}.$$

**Definition 3.6.** Für  $K = \mathbb{C}$  heißt eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  halblinear falls

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$$

für alle  $v, v_1, v_2 \in V$  und  $\lambda \in K$  gilt.

Eine Abbildung  $\beta: V \times W \rightarrow U$  ist genau dann  $K$ -bilinear, wenn für alle  $v \in V$  und  $w \in W$  die Abbildungen

$$\beta(v, -): W \rightarrow U, \quad w' \mapsto \beta(v, w')$$

und

$$\beta(-, w): V \rightarrow U, \quad v' \mapsto \beta(v', w)$$

linear sind.

Im Fall  $K = \mathbb{C}$  ist  $\beta$  genau dann sesquilinear, wenn die Abbildung  $\beta(-, w): V \rightarrow U$  für jedes  $w \in W$  linear ist, und die Abbildung  $\beta(v, -): W \rightarrow U$  für jedes  $v \in V$  halblinear ist.

**Beispiel 3.7.**

1. Für jede Matrix  $A \in M(m \times n, K)$  ist die Abbildung

$$\beta_A: K^m \times K^n \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \beta_A(x, y) = x^T A y$$

eine Bilinearform. Für  $n = m$  ist  $\beta_A$  genau dann symmetrisch, wenn  $A$  symmetrisch ist.

Jede Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(K^m, K^n)$  ist von dieser Form: Ist  $A \in M(m \times n, K)$  die Matrix mit  $A_{ij} = \beta(e_i, e_j)$  für alle  $i, j$ , so gilt

$$\beta_A(e_i, e_j) = e_i^T A e_j = A_{ij} = \beta(e_i, e_j) \quad \text{für alle } i, j$$

und somit  $\beta = \beta_A$  wegen der Bilinearität von  $\beta$  und  $\beta_A$ .

Damit ergibt sich ein Isomorphismus  $M(m \times n, K) \rightarrow \text{BF}(K^m, K^n)$ ,  $A \mapsto \beta_A$ .

2. Analog ergibt sich aus jeder Matrix  $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$  eine Sesquilinearform

$$\beta_A: \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad \beta_A(x, y) = x^T A \bar{y},$$

und somit insgesamt ein Isomorphismus  $M(m \times n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SF}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ ,  $A \mapsto \beta_A$ . Die hermiteschen Sesquilinearformen entsprechen dabei genau den hermiteschen Matrizen.

## 3.2 Quadratische Formen und Polarisierung

Es gelte  $\text{char } K \neq 2$ .

**Proposition 3.8.** Für  $Q: V \rightarrow K$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Es gibt eine Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(V)$  mit  $Q(v) = \beta(v, v)$  für alle  $v \in V$ .
2. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  und Koeffizienten  $c_{ij} \in K$  mit

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \in K. \quad (1)$$

3. Für jede Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  gibt Koeffizienten  $c_{ij} \in K$ , so dass (1) gilt.
4. Es gilt  $Q(av) = a^2 Q(v)$  für alle  $v \in V$  und  $a \in K$ , und die Abbildung

$$\beta: V \times V \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \beta(v, w) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

ist bilinear.

**Definition 3.9.** Eine Abbildung  $Q: V \rightarrow K$ , die eine, und damit alle Eigenschaften aus Proposition 3.8 erfüllt, heißt quadratische Form auf  $V$ . Es ist

$$\text{Quad}(V) := \{Q: V \rightarrow K \mid Q \text{ ist eine quadratische Form}\}$$

der  $K$ -Vektorraum der quadratischen Formen auf  $K$  (mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Jede Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(V)$  liefert eine quadratische Form

$$Q_\beta: V \rightarrow K, \quad v \mapsto \beta(v, v).$$

Andererseits liefert jede quadratische Form  $Q: V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform  $\beta_Q \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$  durch

$$\beta_Q(v, w) := \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V. \quad (2)$$

Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander, und liefern einen Isomorphismus

$$\text{BF}^{\text{sym}}(V) \longleftrightarrow \text{Quad}(V), \quad \beta \mapsto Q_\beta, \quad Q \longleftarrow \beta_Q.$$

Wir bezeichnen (2) als eine *Polarisationsformel*; sie erlaubt es uns, aus der quadratischen Form  $Q$  die ursprüngliche symmetrische Bilinearform  $\beta$  zurückzugewinnen. Neben (2) gilt auch noch die Polarisationsformel

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2)}{4} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

**Bemerkung 3.10.** Proposition 3.8 gilt auch für  $\text{char } K = 2$ , sofern man den Ausdruck  $(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))/2$  durch  $Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$  ersetzt.

Auch für Sesquilinearformen gibt es eine Polarisationsformel: Ist  $\beta \in \text{SF}(V)$  eine Sesquilinearform (nicht notwendigerweise hermitesch!), so gilt für die Abbildung  $Q: V \rightarrow V, v \mapsto Q(v, v)$ , dass

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2) + iQ(v_1 + iv_2) - iQ(v_1 - iv_2)}{4}$$

für alle  $v_1, v_2 \in V$

### 3.3 Orthogonalität

Es sei  $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$  eine symmetrische Bilinearform, bzw.  $K = \mathbb{C}$  und  $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$  eine hermitesche Sesquilinearform.

**Definition 3.11.**

- Zwei Vektoren  $v_1, v_2 \in V$  sind orthogonal zueinander, notiert mit  $v_1 \perp v_2$ , falls  $\beta(v_1, v_2) = 0$  gilt.

### 3 Grundlagen zu Bilinearformen

- Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist

$$U^\perp = \{v \in V \mid \beta(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

das orthogonale Komplement von  $U$  bezüglich  $\beta$ .

- Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren  $v_i \in V$  heißt orthogonal, falls  $v_i \perp v_j$  für alle  $i \neq j$  gilt.
- Eine Orthogonalbasis ist eine orthogonale Basis.
- Ein Vektor  $v \in V$  heißt normiert falls  $\beta(v, v) = 1$  gilt.
- Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren  $v_i \in V$  heißt normiert, falls  $v_i$  für jedes  $i \in I$  normiert ist.
- Eine Orthonormalbasis ist eine orthogonale, normierte Basis.

## 4 Skalarprodukte

Im Folgenden sei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

Wir erweitern Definition 3.6 auf  $\mathbb{K}$ -Vektorräume:

**Definition 4.1.** Eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  heißt halblinear falls

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$$

für alle  $v, v_1, v_2 \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt.

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  entspricht dies genau Definition 3.6. Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist Halblinearität das Gleiche wie Linearität.

### 4.1 Definitheit & Skalarprodukte

Für eine hermitesche Sesquilinearform  $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$  gilt  $\beta(v, v) \in \mathbb{R}$  für alle  $v \in V$ . Daher ergibt die folgende Definition Sinn:

**Definition 4.2.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ , oder  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$ . Dann ist  $\beta$

- positiv definit, falls  $\beta(v, v) > 0$  für alle  $v \neq 0$  gilt,
- positiv semidefinit, falls  $\beta(v, v) \geq 0$  für alle  $v \neq 0$  gilt,
- negativ definit, falls  $\beta(v, v) < 0$  für alle  $v \neq 0$  gilt,
- negativ semidefinit, falls  $\beta(v, v) \leq 0$  für alle  $v \neq 0$  gilt,
- indefinit, falls keiner der obigen Fälle eintritt.

**Definition 4.3.**

- Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum  $V$  ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Ein euklidischer Vektorraum ein reeller Vektorraum  $V$  zusammen mit einem Skalarprodukt auf  $V$ .
- Ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum  $V$  ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf  $V$ . Ein unitärer Vektorraum ist ein komplexer Vektorraum  $V$  zusammen mit einem Skalarprodukt auf  $V$ .

## 4 Skalarprodukte

*Wir bezeichnen euklidische Vektorräume und unitäre Vektorräume auch als Skalarprodukträume. Das zugehörige Skalarprodukt schreiben wir als  $\langle -, - \rangle$ .*

### Beispiel 4.4.

1. Das *Standardskalarprodukt* auf  $\mathbb{K}^n$  ist definiert als

$$\langle x, y \rangle := x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

2. Auf  $M_n(\mathbb{K})$  wird durch

$$\langle A, B \rangle := \text{Spur}(AB^*) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \overline{B_{ij}}$$

ein Skalarprodukt definiert. Identifiziert man  $M_n(\mathbb{K})$  mithilfe der Standardbasis  $(E_{ij})_{i,j=1}^n$  mit  $\mathbb{K}^{n^2}$ , so entspricht dies dem Standardskalarprodukt

3. Auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $C([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist stetig}\}$  wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} \, dt$$

ein Skalarprodukt definiert.

4. Auf dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $P = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\}$  wird durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} \, dt$$

ein Skalarprodukt definiert. Die Familie  $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$  ist orthonormal bezüglich dieses Skalarprodukts.

**Definition 4.5.** Die Norm eines Vektors  $v \in V$  ist definiert als  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

**Bemerkung 4.6.** Es handelt sich hierbei um eine Norm im Sinne der Analysis.

**Beispiel 4.7.** Die Norm des Standardskalarprodukts auf  $\mathbb{K}^n$  ist

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

## 4.2 Orthonormalbasen & Gram–Schmidt

Ist  $V$  ein reeller, bzw. komplexer Vektorraum und  $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$  eine symmetrische Bilinearform, bzw.  $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$  eine hermitesche Bilinearform, so dass es eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  bezüglich  $\beta$  gibt, so ist  $\beta$  bereits ein Skalarprodukt:

## 4 Skalarprodukte

Für jeden Vektor  $v \in V$  mit  $v \neq 0$  gibt es in der Darstellung  $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$  einen Index  $i$  mit  $x_i \neq 0$ , weshalb

$$\beta(v, v) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{x_j} \underbrace{\beta(v_i, v_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0.$$

Mithilfe des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungs-Verfahrens erhalten wir auch die Umkehrung: Jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum  $V$  besitzt eine Orthonormalbasis.

Es seien  $v_1, \dots, v_n \in V$  linear unabhängig. Induktiv konstruiere man Vektoren  $w_1, \dots, w_n \in V$  wie folgt:

- Man beginnt mit  $w_1 := v_1 / \|v_1\|$ .
- Falls  $w_1, \dots, w_i$  definiert sind, so konstruiert man  $w_{i+1}$  in zwei Schritten:
  - Man berechne den Vektor  $\tilde{w}_{i+1} := v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \langle v_{i+1}, w_j \rangle w_j$ . Der Vektor  $\tilde{w}_{i+1}$  ist orthogonal zu  $w_1, \dots, w_i$ .
  - Aus der linearen Unabhängigkeit von  $v_1, \dots, v_n$  folgt, dass  $\tilde{w}_{i+1} \neq 0$  gilt. Somit lässt sich  $\tilde{w}_{i+1}$  normieren, und man erhält  $w_{i+1} := \tilde{w}_{i+1} / \|\tilde{w}_{i+1}\|$ .

Die entstehende Familie  $(w_1, \dots, w_n)$  ist orthonormal mit

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle w_1, \dots, w_i \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Sind dabei  $v_1, \dots, v_i$  bereits orthonormal, so gilt  $w_j = v_j$  für alle  $j = 1, \dots, i$ .

**Satz 4.8.** *Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so lässt sich jede Orthonormalbasis von  $U$  zu einer Orthonormalbasis von  $V$  ergänzen. Insbesondere existiert eine Orthonormalbasis für  $V$ .*

**Korollar 4.9.** *Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  gilt  $V = U \oplus U^\perp$ . Deshalb gelten auch  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$  und  $(U^\perp)^\perp = U$ .*

**Bemerkung 4.10.** Wendet man das Gram–Schmidt Verfahren auf linear abhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$  an, so ergeben sich für das minimale  $i$  mit  $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$  zwar noch orthonormale Vektoren  $w_1, \dots, w_{i-1}$ , dann aber  $\tilde{w}_i = 0$ .

### 4.3 Rieszscher Darstellungssatz

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum. Die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ist wohldefiniert, da  $\langle -, - \rangle$  linear im ersten Argument ist. Außerdem ist  $\Phi$  halblinear, da  $\langle -, - \rangle$  halblinear im zweiten Argument ist.

**Satz 4.11.** *Die Abbildung  $\Phi$  ist ein halblinearer Isomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen.*

Der Rieszsche Darstellungssatz besagt also, dass sich jedes  $\varphi \in V^*$  eindeutig als  $\varphi = \langle -, v \rangle$  mit  $v \in V$  darstellen lässt.

## 4.4 Die Adjungierte Abbildung

Es sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Skalarprodukträumen  $V$  und  $W$ .

**Proposition 4.12.** *Es gibt eine eindeutige Abbildung  $f^{\text{ad}}: W \rightarrow V$  mit*

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^{\text{ad}}(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W, \quad (1)$$

und  $f^{\text{ad}}$  ist linear.

**Lemma 4.13.**

- Es gilt  $(f^{\text{ad}})^{\text{ad}} = f$ .
- Es gilt  $\text{id}_V^{\text{ad}} = \text{id}_V$ .
- Es gilt  $(f \circ g)^{\text{ad}} = g^{\text{ad}} \circ f^{\text{ad}}$ .
- Ist  $f$  ein Isomorphismus, so gilt  $(f^{-1})^{\text{ad}} = (f^{\text{ad}})^{-1}$ .
- Die Abbildung  $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W, V)$ ,  $f \mapsto f^{\text{ad}}$  ist halblinear; es gelten also

$$(f + g)^{\text{ad}} = f^{\text{ad}} + g^{\text{ad}} \quad \text{und} \quad (\lambda f)^{\text{ad}} = \bar{\lambda} f^{\text{ad}}.$$

In orthonormalen Koordinaten entspricht das Adjungieren einer linearen Abbildung dem Transponieren-Konjugieren.

**Lemma 4.14.** *Ist  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und  $\mathcal{C}$  eine Orthonormalbasis von  $W$ , so gilt*

$$M_{f^{\text{ad}}, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}}^*.$$

Die adjungierte Abbildung  $f^{\text{ad}}: W \rightarrow V$  hängt eng mit der dualen Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$ ,  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$  zusammen: Die Skalarprodukte auf  $V$  und  $W$  entsprechen den halblinearen Isomorphismen

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle \quad \text{und} \quad \Phi_W: W \rightarrow W^*, \quad w \mapsto \langle -, w \rangle.$$

Die Bedingung (1) ist äquivalent dazu, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \\ \Phi_V \uparrow & & \uparrow \Phi_W \\ V & \xleftarrow{f^{\text{ad}}} & W \end{array}$$

Somit ist  $f^{\text{ad}}$  eindeutig bestimmt als  $f^{\text{ad}} = \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ .



## 4.5 Unitäre & orthogonale Matrizen

**Definition 4.15.**

- Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  heißt unitär im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , bzw. orthogonal im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , falls sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:
  1. Die Matrix  $A$  ist invertierbar mit  $A^{-1} = A^*$ .
  2. Es gilt  $AA^* = \mathbb{1}$ .
  3. Es gilt  $A^*A = \mathbb{1}$ .
  4. Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$ .
  5. Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$  (betrachtet als Zeilenvektoren).
- Es seien

$$U(n) := \{U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ ist unitär}\}$$

und

$$O(n) := \{U \in M_n(\mathbb{R}) \mid U \text{ ist orthogonal}\}.$$

**Lemma 4.16.** Unitäre, bzw. orthogonale Matrizen sind invertierbar, und die Teilmengen  $U(n) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$  und  $O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$  sind Untergruppen.

## 4.6 Die Iwasawa-Zerlegung

**Satz 4.17** (Iwasawa-Zerlegung). Es seien  $K, A, N \subseteq GL_n(\mathbb{K})$  die folgenden Untergruppen:

- Es ist  $K = U(n)$ , bzw.  $K = O(n)$ .
- $A$  besteht aus den Diagonalmatrizen mit reellen, positiven Diagonaleinträgen.
- $N$  besteht aus den oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.

Dann gibt es für jede Matrix  $s \in GL_n(\mathbb{K})$  eindeutige Matrizen  $k \in K$ ,  $a \in A$  und  $n \in N$  mit  $s = kan$ , d.h. die Abbildung

$$K \times A \times N \rightarrow GL_n(\mathbb{K}), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

ist eine Bijektion.

**Warnung 4.18.** Diese Bijektion ist i.A. kein Gruppenhomomorphismus. Sie ist aber ein Homöomorphismus (und sogar ein Diffeomorphismus).

## 5 Normalenformen für normale Endomorphismen

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale Skalarprodukträume. Für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$  sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix um den Winkel  $\varphi$ .

### 5.1 Normale Endomorphismen

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

**Definition 5.1.**

- Der Endomorphismus  $f$  heißt *normal* falls  $f$  und  $f^{\text{ad}}$  kommutieren, d.h. falls  $f \circ f^{\text{ad}} = f^{\text{ad}} \circ f$  gilt.
- Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  heißt *normal*, falls  $A$  und  $A^*$  kommutieren, d.h. falls  $AA^* = A^*A$  gilt.

**Lemma 5.2.** Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass die Matrix  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  normal ist.
3. Für jede Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist die Matrix  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  normal.

#### 5.1.1 Der komplexe Fall

**Satz 5.3.** Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .
3. Der Endomorphismus von  $f$  ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.

**Korollar 5.4.** Für eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix  $A$  ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$ .
3. Die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.
4. Es gibt eine unitäre Matrix  $U \in U(n)$ , so dass  $U^{-1}AU$  eine Diagonalmatrix ist.

Ist  $A \in M_n(\mathbb{C})$  eine normale Matrix, so lässt sich zum Berechnen einer Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$  wie folgt vorgehen:

- Man berechne eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$ .
- Man wende für jeden Eigenwert von  $A$  das Gram–Schmidt-Verfahren auf die zugehörigen Basisvektoren aus  $\mathcal{B}$  an.

### 5.1.2 Der reelle Fall

**Satz 5.5.** Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  von der Form

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$ ,  $r_1, \dots, r_s > 0$  und  $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$  ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke.

**Bemerkung 5.6.** Das charakteristische Polynom der Drehstreckmatrix  $rD(\varphi)$  ist  $(t - \lambda)(t - \bar{\lambda}) = t^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)t + |\lambda|^2$  mit  $\lambda = re^{i\varphi}$ .

In (1) entsprechen die reellen Diagonaleinträge also den reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $p_A(t)$ , und die Drehstreckmatrizen  $r_i D(\varphi_i)$  den Paaren  $(\lambda, \bar{\lambda})$  von rein komplexen Nullstellen von  $p_A(t)$ .

Insbesondere lässt sich die Normalenform (1) aus dem charakteristischen Polynom  $p_f(t)$  ablesen, was die Eindeutigkeit zeigt.

**Beispiel 5.7.** Es sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $f$  normal mit charakteristischem Polynom

$$p_A(t) = (t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 2t + 2).$$

Es gilt  $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$  mit  $i = e^{i\pi/2}$  und  $t^2 - 2t + 2 = (t - \lambda)(t - \bar{\lambda})$  mit  $\lambda = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ . Die zu  $f$  gehörige Normalenform ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & D(\pi/2) & \\ & & & \sqrt{2}D(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

**Korollar 5.8.** Für  $A \in M_n(\mathbb{R})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix  $A$  ist normal.
2. Es gibt eine orthonormale Matrix  $U \in O(n)$ , so dass  $U^{-1}AU$  in der Form (1) ist, und es gilt die gleiche Eindeutigkeit.

## 5.2 Unitäre & Orthogonale Endomorphismen

**Definition 5.9.** Eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  heißt unitär im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , bzw. orthogonal im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , falls

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

gilt. Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sei

$$U(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sei

$$O(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid f \text{ ist orthogonal}\}$$

**Lemma 5.10.** • Unitäre und orthogonale Abbildungen sind injektiv.

- Es ist  $U(V) \subseteq GL(V)$ , bzw.  $O(V) \subseteq GL(V)$  eine Untergruppe.

Aus den Polarisationsformeln aus Abschnitt 3.2 für symmetrische Bilinearformen, bzw. Sesquilinearformen, erhält man die folgende Charakterisierung unitärer, bzw. orthogonaler Transformationen:

**Lemma 5.11.** Eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  ist genau dann unitär, bzw. orthogonal, falls  $f$  eine Isometrie ist, d.h. falls  $\|f(v)\| = \|v\|$  für alle  $v \in V$  gilt.

Es sei nun  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

**Lemma 5.12.** Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist unitär, bzw. orthogonal.
2. Der Endomorphismus  $f$  ist ein Isomorphismus mit  $f^{-1} = f^{\text{ad}}$ .
3. Es gilt  $f \circ f^{\text{ad}} = \text{id}_V$ .

4. Es gilt  $f^{\text{ad}} \circ f = \text{id}_V$ .

**Lemma 5.13.** Die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist unitär, bzw. orthogonal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  unitär, bzw. orthogonal ist.
3. Für jede Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  unitär, bzw. orthogonal.

### 5.2.1 Der komplexe Fall

**Satz 5.14.** Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist unitär.
2. Der Endomorphismus  $f$  ist normal, und für jeden Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $f$  gilt  $|\lambda| = 1$ .

**Korollar 5.15.** Für eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix  $A$  ist unitär.
2. Die Matrix  $A$  ist normal, und für jeden Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $A$  gilt  $|\lambda| = 1$ .

### 5.2.2 Der reelle Fall

**Satz 5.16.** Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist orthogonal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass  $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$  von der Form

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit  $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$  ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke. (Insbesondere ist die Anzahl der Einsen und Minus-Einsen jeweils eindeutig bestimmt.)

**Korollar 5.17.** Für  $A \in M_n(\mathbb{R})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix  $A$  ist normal.
2. Es gibt eine orthonormale Matrix  $U \in O(n)$ , so dass  $U^{-1}AU$  in der Form (2) ist, und es gilt die gleiche Eindeutigkeit.

## 5.3 Selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei nun  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

**Definition 5.18.** Der Endomorphismus  $f$  heißt selbstadjungiert, falls  $f^{\text{ad}} = f$  gilt.

**Lemma 5.19.** Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist selbstadjungiert.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass die Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  hermitesch ist.
3. Für jede Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist die Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  hermitesch.

### 5.3.1 Normalenform

**Satz 5.20.** Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist selbstadjungiert.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ , und alle Eigenwerte von  $f$  sind reell.
3. Der Endomorphismus  $f$  ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.

**Korollar 5.21.** Für  $A \in M_n(\mathbb{K})$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix  $A$  ist hermitesch.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$ , und alle Eigenwerte von  $A$  sind reell.
3. Die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.
4. Es gibt eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix  $U$ , so dass  $U^{-1}AU$  eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.

**Beispiel 5.22.**

1. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Es gilt

$$p_A(t) = -t^3 + 2t^2 + t - 2 = -(t-1)(t-2)(t+1),$$

also sind 1, 2 und  $-1$  die Eigenwerte von  $A$ . Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^3)_1(A) &= \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\(\mathbb{R}^3)_2(A) &= \ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\(\mathbb{R}^3)_{-1}(A) &= \ker(A + \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.\end{aligned}$$

Durch Normieren der obigen Eigenvektoren ergibt sich die Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

bestehend aus Eigenvektoren von  $A$ .

2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Es gilt

$$A + 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit  $\text{rg}(A + 3\mathbb{1}) = 1$ . Somit ist  $\dim \ker(A + 3\mathbb{1}) = 2$ . Also ist  $-3$  ein Eigenwert von  $A$  von Vielfachheit 2. Der entsprechende Eigenraum ist

$$\ker(A + 3\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da  $\text{Spur } A = -3$  gilt, ist 3 der letzte übrige Eigenwert von  $A$ . Der entsprechende Eigenraum ist

$$\ker(A - 3\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit ist

$$\mathcal{B}' := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Durch

- Anwenden des Gram–Schmidt-Verfahrens auf die ersten beiden Basisvektoren, und
- Normieren des dritten Basisvektors

ergibt sich die Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} := \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

aus Eigenvektoren von  $A$ .

### 5.3.2 Positive Endomorphismen & Co.

Selbstadjungierte Endomorphismen lassen sich als symmetrische Bilinearformen, bzw. hermitesche Sesquilinearform auffassen.

**Definition 5.23.**

- Ein selbstadjungierter Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  heißt positiv definit falls die hermitesche Sesquilinearform  $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$ , bzw. die symmetrische Bilinearform  $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$  mit  $\beta(v_1, v_2) := \langle f(v_1), v_2 \rangle$  positiv definit ist.
- Eine hermitesche Matrix  $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$  heißt positiv definit falls die hermitesche Sesquilinearform  $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(\mathbb{C}^n)$  mit  $\beta(v_1, v_2) := v_1^T A \bar{v}_2$  positiv definit ist.

Analog sind die Eigenschaften positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert.

**Definition 5.24.** Für einen selbstadjungierten Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus  $f$  ist positiv definit.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass die Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  positiv definit ist.
3. Für jede Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist die Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  positiv definit.

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

**Korollar 5.25.**

- Ein selbstadjungierter Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von  $f$  positiv sind.
- Eine hermitesche Matrix  $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$  ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.



## 5.4 Übersicht

Die verschiedenen Normalenformen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

	Charakterisierung durch $f^{\text{ad}}$	$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
normal	$ff^{\text{ad}} = f^{\text{ad}}f$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t & & \\ & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}, r_i > 0, \varphi_i \in (0, \pi)$
unitär, orthogonal	$f^{\text{ad}} = f^{-1}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $ \lambda_i  = 1$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 & & \\ & & D(\varphi_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\varphi_i \in (0, \pi)$
selbstadjungiert	$f^{\text{ad}} = f$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$	

## 5.5 Polarzerlegung

**Lemma 5.26.**

- Für jeden positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  gibt es einen eindeutigen positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = g^2$ .
- Für jede positiv semidefinite hermitesche Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  gibt es eine eindeutige positiv semidefinite hermitesche Matrix  $B \in M_n(\mathbb{K})$  mit  $A = B^2$ .

In der Situation von Lemma 5.26 schreiben wir  $g = \sqrt{f}$  (bzw.  $B = \sqrt{A}$ ).

**Satz 5.27** (Polarzerlegung).

- Für jeden Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  gibt es einen selbstadjungierten Endomorphismus  $s: V \rightarrow V$  und einen unitären, bzw. orthogonalen Endomorphismus  $u: V \rightarrow V$  mit  $f = s \circ u$ . Der Endomorphismus  $s$  ist eindeutig bestimmt durch  $s = \sqrt{f \circ f^{\text{ad}}}$ . Ist  $f$  invertierbar, so ist auch  $u$  eindeutig.

## 5 Normalenformen für normale Endomorphismen

- Für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  gibt eine hermitesche Matrix  $S \in M_n(\mathbb{K})$  und eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix  $U \in M_n(\mathbb{K})$  mit  $A = SU$ . Die Matrix  $S$  ist eindeutig bestimmt durch  $S = \sqrt{AA^*}$ . Ist  $A$  invertierbar, so ist auch  $U$  eindeutig.

## 6 Mehr zu Bilinearformen

Im Folgenden seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume.

### 6.1 Darstellende Matrizen & Kongruenz

**Definition 6.1.**

- Die darstellende Matrix einer Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(V, W)$  bezüglich einer Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$  von  $V$  und einer Basis  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$  von  $W$  ist die Matrix

$$M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) := \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) & \cdots & \beta(v_1, w_n) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) & \cdots & \beta(v_2, w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_m, w_1) & \beta(v_m, w_2) & \cdots & \beta(v_m, w_n) \end{pmatrix} \in M(m \times n, K).$$

- Die darstellende Matrix einer Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(V)$  bezüglich einer Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist  $M(\beta, \mathcal{B}) := M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ .

**Proposition 6.2.** Es sei  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$  eine Basis von  $W$ , und es seien

$$V \rightarrow K^m, \quad v = \sum_{i=1}^m x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_m)^T =: [v]_{\mathcal{B}}$$

und

$$W \rightarrow K^n, \quad w = \sum_{i=1}^n y_i w_i \mapsto (y_1, \dots, y_n)^T =: [w]_{\mathcal{C}}$$

die zugehörige Isomorphismen  $V \rightarrow K^m$  und  $W \rightarrow K^n$ .

- Für  $\beta \in \text{BF}(V, W)$  ist die darstellende Matrix  $M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  eindeutig dadurch bestimmt, dass  $\beta(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^T M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) [w]_{\mathcal{C}}$  für alle  $v \in V$ ,  $w \in W$  gilt.

- Die Abbildung

$$\text{BF}(V, W) \rightarrow M(m \times n, K), \quad \beta \mapsto M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen.

**Lemma 6.3.** Für  $\beta \in \text{BF}(V)$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- Die Bilinearform  $\beta$  ist symmetrisch.

2. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass  $M(\beta, \mathcal{B})$  symmetrisch ist.

3. Für jede Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist  $M(\beta, \mathcal{B})$  symmetrisch.

**Lemma 6.4.** Sind  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  zwei Basen von  $V$  und  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  zwei Basen von  $W$ , so gilt für jede Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(V, W)$ , dass

$$M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = M_{\text{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'}^T M(\beta, \mathcal{B}', \mathcal{C}') M_{\text{id}_W, \mathcal{C}, \mathcal{C}'}.$$

**Definition 6.5.** Zwei Matrizen  $A, B \in M_n(K)$  heißen kongruent zueinander, falls es  $S \in \text{GL}_n(K)$  mit  $A = S^T B S$  gibt.

Kongruente Matrizen stellen die gleiche Bilinearform bezüglich verschiedener Basen dar, d.h. für  $n = \dim V$  sind zwei Matrizen  $A, B \in M_n(K)$  genau dann kongruent, falls es eine Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(V)$  sowie Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, so dass  $A = M(\beta, \mathcal{A})$  und  $B = M(\beta, \mathcal{B})$  gelten.

**Korollar 6.6.** Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf  $M_n(K)$ .

**Definition 6.7.** Zwei Bilinearformen  $\beta_1, \beta_2 \in \text{BF}(V)$  sind kongruent, wenn sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:

1. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass  $M(\beta_1, \mathcal{B})$  und  $M(\beta_2, \mathcal{B})$  kongruent sind.
2. Für jede Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  sind  $M(\beta_1, \mathcal{B})$  und  $M(\beta_2, \mathcal{B})$  kongruent.
3. Es gibt  $f \in \text{GL}(V)$  mit  $\beta_1(f(v_1), f(v_2)) = \beta_2(v_1, v_2)$  für alle  $v_1, v_2 \in V$ .

**Definition 6.8.** Der Rang einer Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(V)$  ist  $\text{rg } \beta := \text{rg } M(\beta, \mathcal{B})$ , wobei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist.

## 6.2 Existenz von Orthogonalbasen

Es sei  $\text{char } K \neq 2$  und  $\beta \in \text{BF}(V)$  eine Bilinearform.

Falls eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  bezüglich  $\beta$  gibt, so ist  $\beta$  bereits symmetrisch, denn die Matrix

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \beta(v_1, v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \beta(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Es gilt auch die Umkehrung (da  $\text{char } K \neq 2$ ):

**Satz 6.9.** Es gibt eine Orthogonalbasis von  $V$  bezüglich  $\beta$ .

**Korollar 6.10.** Für jede symmetrische Matrix  $A \in M_n(K)$  gibt es eine Basiswechselmatrix  $S \in \text{GL}_n(K)$ , so dass  $S^T A S$  eine Diagonalmatrix ist.

Ist  $A \in M_n(K)$  eine symmetrische Matrix, so lässt sich eine Diagonalform wie in Korollar 6.10 sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix  $S \in GL_n(K)$  mithilfe von *simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen* berechnen:

- Man wende elementare Zeilenumformungen auf die Matrix an.
- Nach jeder elementaren Zeilenumformung führt die man die analoge elementare Spaltenumformung durch. Hierdurch bleibt die Matrix symmetrisch.

Wie beim Gauß-Verfahren bringt man die Matrix hierdurch in Zeilenstufenform. Als Ergebnis erhält man eine symmetrische Matrix  $B$  in oberer Dreiecksform, also eine Diagonalmatrix. Eine Matrix  $S \in GL_n(K)$  mit  $S^T A S = B$  erhält man, indem man die genutzten elementaren Spaltenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  anwendet. (Nutzt man anstelle der Spaltenumformungen die Zeilenumformungen, so erhält man stattdessen  $S^T$ .)

**Beispiel 6.11.** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch simultane Zeilen- und Spaltenumformungen erhalten wir Folgendes:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: D. \end{aligned}$$

Indem wir die entsprechenden Spaltenumformungen auf die Einheitsmatrix anwenden, erhalten wir eine Basiswechselmatrix  $S \in GL_3(K)$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: S.$$

Für die Matrizen  $D$  und  $S$  gilt nun, dass

$$S^T A S = D.$$

### 6.3 Reelle symmetrische Bilinearformen

Für diesen Unterabschnitt sei  $K = \mathbb{R}$

### 6.3.1 Sylvesterscher Trägheitssatz

Es sei  $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$  eine symmetrischen Bilinearform.

Ist  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Orthogonalbasis von  $V$  bezüglich  $\beta$ , so ist die darstellende Matrix  $M(\beta, \mathcal{B})$  von der Form

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

wobei  $d_i = \beta(v_i, v_i)$  gilt. Sind  $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$  mit  $\mu_i \neq 0$ , so ist auch  $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$  mit  $w_i = \mu_i v_i$  eine Basis von  $V$ , und es gilt

$$M(\beta, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1^2 d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 d_n \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich in (1) die Diagonaleinträge um Quadratzahlen aus  $\mathbb{R}$  abändern. Hiermit erhält man aus Satz 6.9 den Sylvesterschen Trägheitssatz:

**Korollar 6.12** (Sylvesterscher Trägheitssatz). *Es sei  $K = \mathbb{R}$ . Dann existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass*

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$$

*gilt. Die Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  sind eindeutig bestimmt durch*

$$p = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ positiv definit ist}\}$$

*und*

$$q = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ negativ definit ist}\},$$

*sowie durch  $p + q + r = n$ . Zudem gilt  $\text{rg } \beta = p + q$ .*

**Definition 6.13.** *In der Situation von Korollar 6.12 heißt die Zahl  $p - q$  die Signatur von  $\beta$ .*

Man bemerke, dass sich die Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz bereits aus der Form (1) ablesen lassen: Die Zahl  $p$  ist die Anzahl der positiven Diagonaleinträge, die Zahl  $q$  ist die Anzahl der negativen Diagonaleinträge, und  $r$  ist die Häufigkeit von 0 als Diagonaleintrag.

**Beispiel 6.14.** Es gibt 10 Kongruenzklassen von reellen symmetrischen  $(3 \times 3)$ -

Matrizen. Ein Repräsentantensystem ist durch die folgenden Matrizen gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner gibt es für alle  $n \geq 0$  genau  $\binom{n+2}{2}$  Kongruenzklassen reeller symmetrischer  $(n \times n)$ -Matrizen.

Ist  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , so ist die darstellende  $A := M(\beta, \mathcal{B})$  symmetrisch. Nach Korollar 5.21 gibt es eine Orthonormalbasis  $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathbb{R}^n$  bestehend aus Eigenvektoren von  $A$ . Es sei  $\lambda_i$  der zu  $v_i$  gehörige Eigenwert, und  $S := (v_1 \dots v_n)$ . Die Matrix  $S$  ist orthogonal, und für die Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$  mit  $M_{\text{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = S$  gilt

$$M(\beta, \mathcal{C}) = M_{\text{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}}^T M(\beta, \mathcal{B}) M_{\text{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = S^T A S = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Proposition 6.15.** *Es seien  $p, q$  und  $r$  die Zahlen aus dem Sylvesterscher Trägheitssatz für  $\beta$ . Dann ist  $p$  die Anzahl der positiven Eigenwerte von  $A$ ,  $q$  die Anzahl der negativen Eigenwerte, und  $r$  die Vielfachheit des Eigenwerts 0.*

**Lemma 6.16** (Hauptminorenkriterium). *Eine symmetrische Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ist genau dann positiv, wenn alle führenden Hauptminoren positiv sind.*

## 6.4 Dualität

Es sei  $W$  ein weiterer endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum

### 6.4.1 Nicht-ausgeartetet Bilinearformen

Es sei  $\beta \in \text{BF}(V, W)$  eine Bilinearform. Die Bilinearform  $\beta$  entspricht einer linearen Abbildung

$$\beta_1: W \rightarrow V^*, \quad w \mapsto \beta(-, w),$$

sowie einer linearen Abbildung

$$\beta_2: V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto \beta(v, -).$$

Ist  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  eine Basis von  $W$ , so gilt bezüglich der dualen Basen  $\mathcal{B}^*$  von  $V^*$  und  $\mathcal{C}^*$  von  $W^*$ , dass

$$M_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} = M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \quad \text{und} \quad M_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} = M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T$$

Insbesondere gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
 & \beta_1 \text{ ist ein Isomorphismus} \\
 \iff & M_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} \text{ ist invertierbar} \\
 \iff & M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ ist invertierbar} \\
 \iff & M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T \text{ ist invertierbar} \\
 \iff & M_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} \text{ ist invertierbar} \\
 \iff & \beta_2 \text{ ist ein Isomorphismus.}
 \end{aligned}$$

**Definition 6.17.** Eine Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(V, W)$  heißt nicht-ausgeartet, falls Sie eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Die lineare Abbildung  $\beta_1$  ist ein Isomorphismus.
2. Die lineare Abbildung  $\beta_2$  ist ein Isomorphismus.
3. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und Basis  $\mathcal{C}$  von  $W$ , so dass die darstellende Matrix  $M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  invertierbar ist.
4. Für jede Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und Basis  $\mathcal{C}$  von  $W$  ist die darstellende Matrix  $M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  invertierbar.
5. Es gelten (mindestes) zwei (und damit bereits alle drei) der folgenden Bedingungen:
  - a) Es gilt  $\dim V = \dim W$ .
  - b) Für jedes  $v \in V$  mit  $v \neq 0$  gibt es ein  $w \in W$  mit  $\beta(v, w) \neq 0$  (d.h.  $\beta_2$  ist injektiv).
  - c) Für jedes  $w \in W$  mit  $w \neq 0$  gibt es ein  $v \in V$  mit  $\beta(v, w) \neq 0$  (d.h.  $\beta_1$  ist injektiv).

**Beispiel 6.18.**

1. Es sei  $\beta \in \text{BF}(V, V^*)$  die Bilinearform mit  $\beta(v, \varphi) = \varphi(v)$ . Die lineare Abbildung  $\beta_1: V^* \rightarrow V^*$  ist die Identität  $\text{id}_{V^*}$ , also ist  $\beta$  nicht-ausgeartet. Die lineare Abbildung  $\beta_2: V \rightarrow V^{**}$  ist der natürliche Isomorphismus aus Lineare Algebra I.
2. Ist  $V$  ein euklidischer Vektorraum, so ist  $\langle -, - \rangle$  eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf  $V$ , da die Abbildung  $V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto \langle -, v \rangle$  nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein Isomorphismus ist.
3. Die symmetrische Bilinearform  $\beta \in \text{BF}(M_n(K))$  mit  $\beta(A, B) = \text{Spur}(AB)$  ist nicht-ausgeartet: Es sei  $(E_{ij})_{i,j=1}^n$  die Standardbasis von  $M_n(K)$ . Für alle  $i, j, k, l$  gilt

$$\beta(E_{ij}, E_{kl}) = \text{Spur}(E_{ij}E_{kl}) = \text{Spur}(\delta_{jk}E_{il}) = \delta_{jk} \text{Spur } E_{il} = \delta_{il}\delta_{jk} = \delta_{(i,l),(j,k)}.$$

Für  $A \in M_n(K)$  gilt deshalb

$$\beta(A, E_{ij}) = \beta\left(\sum_{k,l=1}^n A_{kl}E_{kl}, E_{ij}\right) = \sum_{k,l=1}^n A_{kl} \underbrace{\beta(E_{kl}, E_{ij})}_{=\delta_{(i,l),(j,k)}} = A_{ji}.$$

Für  $A \in M_n(K)$  mit  $A \neq 0$  gilt deshalb  $\beta(A, E_{ji}) \neq 0$ .



### 6.4.2 Die Adjungierte Abbildung

Es seien  $\beta_V \in \text{BF}(V, V')$  und  $\beta_W \in \text{BF}(W, W')$  zwei nicht-ausgeartete Bilinearformen. Dann gibt es für jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  eine eindeutige lineare Abbildung  $f^{\text{ad}}: W' \rightarrow V'$  mit

$$\beta_W(f(v), w') = \beta_V(v, f^{\text{ad}}(w')) \quad \text{für alle } v \in V, w' \in W' \quad (2)$$

gilt. Dies ergibt sich wie bereits in Abschnitt 4.4 dadurch, dass (2) äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \\ (\beta_V)_1 \uparrow & & \uparrow (\beta_W)_1 \\ V' & \xleftarrow{f^{\text{ad}}} & W' \end{array}$$

ist. Also ist  $f^{\text{ad}}$  eindeutig als  $f^{\text{ad}} = (\beta_V)_1^{-1} \circ f^* \circ (\beta_W)_1$  bestimmt.

#### Beispiel 6.19.

1. Es seien  $\beta_V \in \text{BF}(V, V^*)$  und  $\beta_W \in \text{BF}(W, W^*)$  die nicht-ausgearteten Bilinearformen mit  $\beta_V(v, \varphi) = \varphi(v)$  und  $\beta_W(w, \psi) = \psi(w)$ . Dann ist  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  die zu  $f: V \rightarrow W$  bezüglich  $\beta_V$  und  $\beta_W$  duale Abbildung, denn

$$\beta_W(f(v), \psi) = \psi(f(v)) = f^*(\psi)(v) = \beta_V(v, f^*(\psi)).$$

2. Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume. Dann sind die zugehörigen Skalarprodukte  $\langle -, - \rangle_V$  und  $\langle -, - \rangle_W$  nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen. Dann ist die zu  $f: V \rightarrow W$  bezüglich  $\beta_V$  und  $\beta_W$  adjungierte Abbildung die adjungierte Abbildung  $f^{\text{ad}}: W \rightarrow V$  aus Abschnitt 4.4.

### 6.4.3 Nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen

Wir betrachten nun den Fall, dass  $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$  ist. Für die beiden zugehörigen linearen Abbildungen  $\beta_1, \beta_2: V \rightarrow V^*$  gilt dann  $\beta_1 = \beta_2$ .

**Definition 6.20.** Das Radikal von  $\beta$  ist der Untervektorraum

$$\text{rad } \beta := \{v \in V \mid \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V\}.$$

Es gilt  $\text{rad } \beta = \ker \beta_1 = \ker \beta_2$ , weshalb  $\beta$  genau dann nicht ausgeartet ist, wenn  $\text{rad } \beta = 0$  gilt.

**Beispiel 6.21.** Es sei  $\text{char } K \neq 2$ . Dann gibt es eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  bezüglich  $\beta$ , so dass die darstellende Matrix  $M(\beta, \mathcal{B})$  von der Form

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$  gilt. Dann ist  $\text{rg } \beta = r$  und somit  $M(\beta, \mathcal{B})$  genau dann invertierbar, wenn  $r = n$  gilt.

Zusammen mit dem Sylvesterschen Trägheitssatz ergibt sich damit, dass es auf einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum bis auf Kongruenz genau  $n + 1$  nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen gibt.

Außerdem gilt in der obigen Situation, dass  $(v_{r+1}, \dots, v_n)$  eine Basis von  $\text{rad } \beta$  ist.

**Lemma 6.22.** Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  gilt

1.  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$  und
2.  $(U^\perp)^\perp = U$ ,

**Warnung 6.23.** Es gilt im Allgemeinen nicht, dass  $V = U \oplus U^\perp$ .