

**Aufgabe 1.** (*Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit*)

1. Es sei  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  mit  $\text{Spur } A = 0$ . Zeigen Sie, dass  $A$  diagonalisierbar ist.
2. Zeigen Sie, dass jede Matrix  $A \in \text{M}_3(\mathbb{R})$  einen reellen Eigenwert hat.
3. Folgern Sie, dass jede nicht-triagonalisierbare Matrix  $A \in \text{M}_3(\mathbb{R})$  über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar ist.  
(*Tipp*: Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  auch  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert ist.)
4. Es sei  $A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$  und  $k \geq 0$  mit  $A^k = \mathbb{1}$ . Zeigen Sie, dass  $A$  diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie alle möglichen Eigenwerte für  $A$ .
5. Es sei  $A \in \text{M}_2(\mathbb{C})$  mit  $\text{Spur } A = 0$  und  $\text{Spur } A^2 = -2$ . Bestimmen Sie  $\det A$ . Entscheiden Sie auch, ob  $A$  diagonalisierbar ist.
6. Es sei  $A \in \text{M}_2(\mathbb{C})$  mit  $\text{Spur } A = 2$  und  $\text{Spur } A^2 = 4$ . Zeigen Sie, dass  $A$  diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ .
7. Es sei  $A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$  mit  $A^2 + A = 6\mathbb{1}$  und  $\det A = 144$ . Bestimmen Sie  $n$ .
8. Es sei  $A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$  mit  $A^3 = 3A - 2$  und  $A^3 + A^2 = A + \mathbb{1}$ . Zeigen Sie, dass  $A = \mathbb{1}$ .

**Aufgabe 2.** (*Determinante und Potenzen der Spur*)

Zeigen Sie für alle  $A \in \text{M}_3(\mathbb{C})$  die Gleichheit

$$\det A = \frac{1}{6}(\text{Spur } A)^3 - \frac{1}{2}(\text{Spur } A^2)(\text{Spur } A) + \frac{1}{3}(\text{Spur } A^3).$$

**Aufgabe 3.** (*Diagonalisieren*)

1. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{M}_n(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$  und zeigen Sie, dass  $A$  diagonalisierbar ist.

2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \in \text{M}_n(\mathbb{R}).$$

Geben Sie eine Basis von  $K^{2n}$  aus Eigenvektoren von  $A$  an. Bestimmen Sie anschließend  $p_A(t)$  sowie  $\det A$ .

(*Tipp*:  $A$  vertauscht die Basisvektoren  $e_i$  und  $e_{n+i}$ .)

**Aufgabe 4.** (*Wurzeln und Potenzen*)

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad B := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

1. Geben Sie eine Matrix  $C \in M_2(\mathbb{C})$  mit  $A = C^2$  an.
2. Berechnen Sie  $B^{2017}$ .  
(*Tipp:* Ignorieren Sie ggf. zunächst den Vorfaktor  $1/\sqrt{2}$ .)

**Aufgabe 5.** (*Cayley-Hamilton*)

Es sei  $K$  ein Körper.

1. Zeigen Sie für  $A \in M_n(K)$ , dass die Potenzen  $1, A, A^2, \dots, A^n$  linear abhängig sind.
2. Es sei  $A \in GL_n(K)$ . Zeigen Sie, dass es ein Polynom  $p \in K[t]$  mit  $p(A) = A^{-1}$  gibt. Bestimmen Sie ein solches Polynom für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

**Aufgabe 6.** (*Simultane Diagonalisierbarkeit*)

1. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum, und es seien  $f, g: V \rightarrow V$  zwei diagonalisierbare Endomorphismen mit  $f \circ g = g \circ f$ . Zeigen Sie, dass auch  $f \circ g$  diagonalisierbar ist.
2. Bestimmen Sie alle  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

simultan diagonalisierbar sind.

**Aufgabe 7.** (*Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*)

Es sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char } K \neq 2$ . Es sei

$$\text{Sym}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Raum der symmetrischen Matrizen und

$$\text{Alt}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen.

1. Zeigen Sie, dass  $\text{Sym}_n(K)$  und  $\text{Alt}_n(K)$  Untervektorräume von  $M_n(K)$  sind, und dass  $M_n(K) = \text{Sym}_n(K) \oplus \text{Alt}_n(K)$  gilt.

(Hinweis: Für die Abbildung  $f: V \rightarrow V$ ,  $A \mapsto A^T$  gilt  $f^2 = \text{id}$ .)

2. Geben Sie Basen von  $\text{Sym}_n(K)$  und  $\text{Alt}_n(K)$  an.

**Aufgabe 8.**

Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

1. Es sei  $v \in V$  ein Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda \in K$ . Zeigen Sie, dass  $v$  für jedes Polynom  $p \in K[t]$  ein Eigenvektor von  $p(f)$  zum Eigenwert  $p(\lambda)$  ist.
2. Es sei  $K$  algebraisch abgeschlossen und  $p \in K[t]$ . Zeigen Sie, dass es für jeden Eigenwert  $\mu$  von  $p(f)$  einen Eigenwert  $\lambda$  von  $f$  mit  $\mu = p(\lambda)$  gibt.  
(Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass der Endomorphismus  $(p - \lambda)(f)$  nicht injektiv ist. Zerlegen Sie anschließend  $p - \lambda$  in Linearfaktoren.

**Aufgabe 9.** (Diagonalisieren über  $\mathbb{F}_5$ )

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_5).$$

Bestimmen Sie eine Matrix  $S \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_5)$ , so dass  $S^{-1}AS$  in Diagonalform ist.