

Aufgabe 1. (*Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit*)

1. Es sei $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $\text{Spur } A = 0$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.
2. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \text{M}_3(\mathbb{R})$ einen reellen Eigenwert hat.
3. Folgern Sie, dass jede nicht-triagonalisierbare Matrix $A \in \text{M}_3(\mathbb{R})$ über \mathbb{C} diagonalisierbar ist.
4. Es sei $A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$ und $k \geq 0$ mit $f^k = \mathbb{1}$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie alle möglichen Eigenwerte für A .
5. Es sei $A \in \text{M}_2(\mathbb{C})$ mit $\text{Spur } A = 2$ und $\text{Spur } A^2 = 4$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte von A .
6. Es sei $A \in \text{M}_2(\mathbb{C})$ mit $\text{Spur } A = 0$ und $\text{Spur } A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$.
7. Zeigen Sie für alle $A \in \text{M}_3(\mathbb{C})$ die Gleichheit

$$\det A = \frac{1}{6}(\text{Spur } A)^3 - \frac{1}{2}(\text{Spur } A^2)(\text{Spur } A) + \frac{1}{3}(\text{Spur } A^3).$$

8. Es sei $A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A^2 + A = 6\mathbb{1}$ und $\det A = 144$. Bestimmen Sie n .
9. Es sei $A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A^3 = 3A - 2$ und $A^3 + A^2 = A + \mathbb{1}$. Zeigen Sie, dass $A = \mathbb{1}$.

Aufgabe 2. (*Diagonalisieren*)

1. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \text{M}_3(\mathbb{F}_5).$$

Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_5)$, so dass $S^{-1}AS$ in Diagonalform ist.

2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{M}_n(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ in Diagonalform ist.

3. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \in \text{M}_n(\mathbb{R}).$$

Geben Sie eine Basis von K^{2n} aus Eigenvektoren von A an. Bestimmen Sie anschließend $p_A(t)$ sowie $\det A$.

(*Tip:* A vertauscht die Basisvektoren e_i und e_{n+i} .)

Aufgabe 3. (*Wurzeln und Potenzen*)

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad B := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

1. Geben Sie eine Matrix $C \in M_2(\mathbb{C})$ mit $A = C^2$ an.
2. Berechnen Sie B^{2017} .

Aufgabe 4. (*Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*)

Es sei K ein Körper mit $\text{char } K \neq 2$. Es sei

$$\text{Sym}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Raum der symmetrischen Matrizen und

$$\text{Alt}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen.

1. Zeigen Sie, dass $\text{Sym}_n(K)$ und $\text{Alt}_n(K)$ Untervektorräume von $M_n(K)$ sind, und dass $M_n(K) = \text{Sym}_n(K) \oplus \text{Alt}_n(K)$ gilt.
(Hinweis: Für die Abbildung $f: V \rightarrow V$, $A \mapsto A^T$ gilt $f^2 = \text{id}$.)
2. Geben Sie Basen von $\text{Sym}_n(K)$ und $\text{Alt}_n(K)$ an.

Aufgabe 5. (*Cayley-Hamilton*)

Es sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie für $A \in M_n(K)$, dass die Potenzen $1, A, A^2, \dots, A^n$ linear abhängig sind.
2. Es sei $A \in \text{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $p \in K[t]$ mit $p(A) = A^{-1}$ gibt. Bestimmen Sie ein solches Polynom für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 6. (*Simultane Diagonalisierbarkeit*)

1. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, und es seien $f, g: V \rightarrow V$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass auch $f \circ g$ diagonalisierbar ist.
2. Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

simultan diagonalisierbar sind.

3. Es seien $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $S \in GL_3(\mathbb{R})$, so dass $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ in Diagonalgestalt sind.