Notizen zum

Repetitorium Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner
s6jestel@uni-bonn.de

11. September 2017

Online verfügbar unter
`https://goo.gl/2oDGjB`.

Inhaltsverzeichnis

1 Diagonalisierbarkeit & Freunde **1**
1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 1
1.2 Das charakterische Polynom . . . 2
1.3 Das Minimalpolynom . . . 4
1.4 Diagonalisierbarkeit . . . 5
1.5 Trigonalisierbarkeit . . . 8
1.6 Spur und Determinante durch Eigenwerte . . . 9
1.7 Simultane Diagonalisierbarkeit . . . 9

2 Die Jordan-Normalform **10**
2.1 Definition . . . 10
2.2 Eindeutigkeit . . . 11
2.3 Existenz & Kochrezept . . . 12
2.4 Lösung des Ähnlichkeitsproblems . . . 17
2.5 Die Jordan–Chevalley-Zerlegung . . . 19
2.6 Implizite Bestimmen der Jordan-Normaform . . . 19

3 Grundlagen zu Bilinearformen **21**
3.1 Allgemeine Definitionen . . . 21
3.2 Quadratische Formen und Polarisation . . . 23
3.3 Orthogonalität . . . 24

4 Skalarprodukte **26**
4.1 Definitheit & Skalarprodukte . . . 26
4.2 Orthonormalbasen & Gram–Schmidt . . . 27
4.3 Rieszscher Darstellungssatz . . . 28
4.4 Die Adjungierte Abbildung . . . 29
4.5 Unitäre & orthogonale Matrizen . . . 30
4.6 Die Iwasawa-Zerlegung . . . 30

5 Normalenformen für normale Endomorphismen **31**
5.1 Normale Endomorphismen . . . 31
5.2 Unitäre & Orthogonale Endomorphismen . . . 33
5.3 Selbstadjungierte Endomorphismen . . . 35
5.4 Übersichten . . . 37
5.5 Polarzerlegung . . . 38

6 Mehr zu Bilinearformen **41**
6.1 Darstellende Matrizen & Kongruenz 41
6.2 Existenz von Orthogonalbasen 42
6.3 Reelle symmetrische Bilinearformen 43
6.4 Dualität 45

1 Diagonalisierbarkeit & Freunde

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.1.

- *Sind $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$, so ist v ein* Eigenvektor *von f zum* Eigenwert *λ. Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum*

$$V_\lambda(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = \lambda f\} = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$$

  der Eigenraum *von f zu λ. Die Zahl $\dim V_\lambda(f)$ ist die* geometrische Vielfachheit *von λ.*

- *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Sind $\lambda \in K$ und $x \in K^n$ mit $x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$, so ist x ein* Eigenvektor *von A zum* Eigenwert *λ. Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum*

$$(K^n)_\lambda(A) \coloneqq \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

  der Eigenraum *von A zu λ. Die Zahl $\dim(K^n)_\lambda(A)$ ist die* geometrische Vielfachheit *von λ.*

Bemerkung 1.2.

1. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $f\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige Endomorphismus, so stimmen die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume von A mit denen von f überein.

   Es genügt daher im Folgenden, Definitionen und Aussagen für Endomorphismen zu anzugeben – für Matrizen gelten diese dann ebenfalls.

2. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Bezüglich des zu $\mathcal{B}$ zugehörigen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}}\colon V \to K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T \eqqcolon [v]_{\mathcal{B}}$$

   gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}}\left(V_\lambda(f)\right) = (K^n)_\lambda(A).$$

Es ist also $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $[v]_{\mathcal{B}}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Berechnungen lassen sich deshalb in Matrizenform durchführen.

Für theoretische Aussagen nutzen wir also Endomorphismen, und für konkrete Rechnungen nutzen wir Matrizen.

1.2 Das charakterische Polynom

Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $A := \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die zugehörige darstellende Matrix von f. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\ \iff & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \\ \iff & (K^n)_\lambda(A) \neq 0 \\ \iff & \ker(A - \lambda\mathbb{1}) \neq 0 \\ \iff & A - \lambda\mathbb{1} \text{ ist nicht invertierbar} \\ \iff & \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0. \end{aligned}$$

Definition 1.3. *Das* charakterische Polynom *von A ist definiert als*

$$p_A(t) := \det(A - t\mathbb{1}) \in K[t].$$

Das charakteristische Polynom von f ist definiert als $p_f(t) := p_A(t)$.

Dass das charakteristische Polynom $p_f(t)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt, folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1.4. *Ähnliche Endomorphismen, bzw. Matrizen haben das gleiche charakterische Polynom.*

Aus unserer anfänglichen Beobachtung erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom von f:

Proposition 1.5. *Die Eigenwerte von f sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_f(t)$.*

Definition 1.6. *Die Vielfachheit des Linearfaktors $t - \lambda$ in $p_f(t)$ ist die* algebraische Vielfachheit *von λ.*

Beispiel 1.7.

1. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

gilt

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 3 & 1-t & 2 \\ 2 & 3 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 + 15t + 18.$$

Die einzige reelle Nullstelle von $p_A(t)$, und somit der einzige reelle Eigenwert von A, ist 6. Der entsprechende Eigenraum ist

$$(\mathbb{R}^3)_6(A) = \ker(A - 6\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Es gilt $p_A(t) = \det(A - t\mathbb{1}) = \det(A - t\mathbb{1})^T = \det(A^T - t\mathbb{1}) = p_{A^T}(t)$.

3. Ist A eine obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n - t \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t) = (-1)^n (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also genau die Diagonaleinträge $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

4. Ist allgemeiner A eine obere Blockdreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_r \end{pmatrix}$$

mit $A_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$, so gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} A_1 - t\mathbb{1}_{n_1} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_r - t\mathbb{1}_{n_r} \end{pmatrix} \\ &= \det(A_1 - t\mathbb{1}_{n_1}) \cdots \det(A_r - t\mathbb{1}_{n_r}) = p_{A_1}(t) \cdots p_{A_r}(t). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des charakterischen Polynoms

Allgemein ist das charakteristische Polynom von $A \in \mathrm{M}_n(K)$ von der Form

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(\operatorname{Spur} A)t^{n-1} + \cdots + \det A.$$

Beispiel 1.8. Das charakteristische Polynom einer (2×2)-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(K)$ ist gegeben durch

$$p_A(t) = t^2 - (\operatorname{Spur} A)t + \det A = t^2 - (a+d)t + (ad - bc).$$

1.3 Das Minimalpolynom

Lemma 1.9. *Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, so ist v für jedes Polynom $p \in K[t]$ ein Eigenvektor von $p(f)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$. Inbesondere sind die Eigenwerte von f Nullstellen von p, falls $p(f) = 0$ gilt.*

Beispiel 1.10.

1. Ist f nilpotent mit $f^k = 0$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) := t^k$. Deshalb ist 0 der einzige mögliche Eigenwert von f.
2. Gilt $f^3 = 3f - 2\,\mathrm{id}_V$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) := t^3 - 3t + 2$. Es gilt $q(t) = (t-1)^2(t+2)$, also sind 1 und -2 die einzigen möglichen Eigenwerte für f.
3. Gilt $f^2 = -\mathrm{id}_V$, so hat f im Fall $K = \mathbb{R}$ keine Eigenwerte, da das Polynom $t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ keine reellen Nullstellen hat.

Definition 1.11.

- *Es sei*
$$\mathrm{Pol}(f) := \{p \in K[t] \mid p(f) = 0\}.$$
Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\mathrm{Pol}(f)$ *ist das* Minimalpolynom *von f, und wird mit $m_f(t) \in K[t]$ notiert.*
- *Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sei*
$$\mathrm{Pol}(A) := \{p \in K[t] \mid p(A) = 0\}.$$
Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\mathrm{Pol}(A)$ *ist das* Minimalpolynom *von A, und wird mit $m_A(t) \in K[t]$ notiert.*

Bemerkung 1.12. Man bemerke, dass stets $m_f(f) = 0$ gilt; bis auf Normiertheit ist m_f das kleinstmögliche Polynom (außer dem Nullpolynom), das diese Eigenschaft hat.

Bemerkung 1.13. Die Wohldefiniertheit von $\mathrm{Pol}(f)$ nutzt die Endlichdimensionalität von V. Hierdurch wird sichergestellt, dass $\mathrm{Pol}(f) \neq 0$ gilt.

Lemma 1.14. *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V, so gilt für $A = \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$, dass* $\mathrm{Pol}(f) = \mathrm{Pol}(A)$. *Somit gilt $m_f = m_A$.*

Korollar 1.15. *Ähnliche Endomorphismen, bzw. Matrizen haben das gleiche Minimalpolynom.*

Die Definition des Minimalpolynoms lässt sich bis auf Normiertheit wie folgt umschreiben:

Lemma 1.16. *Es gilt*

$$\mathrm{Pol}(f) = \{p \cdot m_f \,|\, p \in K[t]\}.$$

Für $p \in K[t]$ gilt also genau dann $p(f) = 0$, wenn $m_f \mid p$ gilt.

Bemerkung 1.17. Für $p \in K[t]$ und $\lambda \in K$ gilt genau dann $p(\lambda) = 0$, wenn $(t - \lambda) \mid p(t)$ gilt. Man kann Lemma 1.16 als eine Verallgemeinerung hiervon verstehen.

Satz 1.18 (Cayley–Hamilton)**.** *Es gilt $p_f(f) = 0$, also $m_f \mid p_f$.*

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Nullstelle von $m_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also ein Eigenwert von f. Andererseits ist jeder Eigenwert von f nach Lemma 1.16 und Lemma 1.9 auch eine Nullstelle von $m_f(t)$. Somit sind die Nullstelle non $m_f(t)$ genau die Eigenwerte von f. Also haben $p_f(t)$ und $m_f(t)$ die gleichen Nullstellen.

Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfallen $p_f(t)$ und $m_f(t)$ somit in die gleichen Linearfaktoren. Die Vielfachheit im Minimalpolynom ist dabei nach dem Satz von Cayley–Hamilton jeweils kleiner ist als die Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

1.4 Diagonalisierbarkeit

Lemma 1.19. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig. Inbesondere ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.*

Definition 1.20.

- *Der Endomorphismus $f\colon V \to V$ heiß* diagonalisierbar *falls er die folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:*
  1. *Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.*
  2. *Es gilt $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.*
  3. *Es gilt $\dim V = \sum_{\lambda \in K} \dim V_\lambda(f)$.*
  4. *Es gilt $\dim V \leq \sum_{\lambda \in K} \dim V_\lambda(f)$.*
  5. *Es gibt eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f.*
  6. *Es gibt ein Erzeugendensystem von V bestehend aus Eigenvektoren von f.*
  7. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.*
- *Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt* diagonalisierbar*, falls sie eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gilt* $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.
2. *Es gilt* $K^n = \sum_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.
3. *Es gilt* $n = \sum_{\lambda \in K} \dim\left((K^n)_\lambda(A)\right)$.
4. *Es gilt* $n \leq \sum_{\lambda \in K} \dim\left((K^n)_\lambda(A)\right)$.
5. *Es gibt eine Basis von* K^n *bestehend aus Eigenvektoren von* A.
6. *Es gibt ein Erzeugendensystem von* K^n *bestehend aus Eigenvektoren von* A.
7. *Die Matrix* A *ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h. es gibt* $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, *so dass* SAS^{-1} *eine Diagonalmatrix ist.*

Beispiel 1.21.

1. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p_A(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = -(t^2 - 3t + 2)(t-1) = -(t-1)^2(t-2).$$

Die Eigenwerte von A sind also 1 und 2. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$(\mathbb{R}^3)_1(A) = \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$(\mathbb{R}^3)_2(A) = \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Also ist

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. Somit ist A diagonalisierbar. Für die entsprechende Basiswechselmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \quad \text{gilt} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Falls das charakteristische Polynom $p_f(t)$ in paarweise verschieden Linearfaktoren $p_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ zerfällt, so ist f diagonalisierbar:

Dann gibt es zu jedem Eigenwert λ_i einen Eigenvektor $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$, und die Familie $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ist nach Lemma 1.19 linear unabhängig. Da $n = \dim V$ gilt, ist $\mathcal{B}$ bereits eine Basis von V.

Inbesondere sind Dreiecksmatrizen mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen diagonalisierbar.

3. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, V ein zweidimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ und $f\colon V \to V$ der eindeutige Endomorphismus mit $f(v_1) = v_2$ und $f(v_2) = v_1$. Dann ist $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $v_1 - v_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, und somit $\mathcal{B} = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von f. Also ist f diagonalisierbar mit

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

4. Jede reelle, symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. Inbesondere sind für jede reelle Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die Matrizen $A + A^T$, AA^T und $A^T A$ diagonalisierbar.

Lemma 1.22. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist diagonlisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar ist.*
3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar.*

Ob der Endomorphismus $f\colon V \to V$ diagonalisierbar ist, hängt nur vom Minimalpolynom $m_f(t)$ ab:

Proposition 1.23. *Der Endomorphismus f ist genau dann diagonalisierbar, falls das Minimalpolynom m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

Die Nullstellen von m_f sind dann, wie bereits gesehen, genau die Eigenwerte von f.

Korollar 1.24. *Ist $q \in K[t]$ mit $q(f) = 0$ (also $m_f \mid q$), so dass q in paarweise verschiedene Linearfaktoren $q(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ zerfällt, so ist f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Beispiel 1.25.

1. Gilt $f^2 = f$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) := t^2 - t = t(t-1)$. Somit ist f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 0 und 1.
2. Gilt $f^2 = \mathrm{id}_V$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$. Gilt $\operatorname{char} K \neq 2$, so ist f somit diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 1 und -1.

Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum, so gilt für die den eingeschränkten Endomorphismus $f|_U\colon U \to U$, dass $m_f(f|_U) = m_f(f)|_U = 0$, und somit dass $(m_{f|_U}) \mid m_f$.

Korollar 1.26. *Ist f diagonalisierbar, so ist auch $f|_U$ diagonalisierbar.*

1.5 Trigonalisierbarkeit

Definition 1.27.

- *Der Endomorphismus* $f\colon V \to V$ *heißt trigonalisierbar, falls es eine Basis* $\mathcal{B}$ *von* V *gibt, so dass* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *eine obere Dreiecksmatrix ist.*
- *Eine Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(K)$ *heißt trigonalisierbar, falls* A *ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist, d.h. falls es* $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ *gibt, so dass* SAS^{-1} *eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Lemma 1.28. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist trigonalisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis* $\mathcal{B}$ *von* V*, so dass die Matrix* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *trigonalisierbar ist.*
3. *Für jede Basis* $\mathcal{B}$ *von* V *ist die Matrix* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *trigonalisierbar.*

Äquivalente Charakterisierungen

Definition 1.29. *Eine* Flagge*, bzw.* Fahne *von* V *ist eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen*

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

mit $\dim V_k = k$ *für alle* k*. (Insbesondere ist* $n = \dim V$*.) Die Flagge heißt* f-stabil *falls* $f(V_k) \subseteq V_k$ *für alle* k *gilt.*

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V mit $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in oberer Dreiecksform, so ist

$$0 \subsetneq \langle v_1 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$$

eine f-invariante Flagge von V. Ist andererseits

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V \tag{1}$$

eine Flagge von V, so ergibt sich durch Basisergänzung eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, so dass $V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ für alle k gilt. Ist die Flagge (1) f-invariant, so ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix.

Hierdurch ergibt sich die folgende Charakterisierung triagonalisierbarer Endomorphismen:

Satz 1.30. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist trigonalisierbar.*
2. *Es gibt eine* f*-invariante Flagge von* V*.*
3. *Das charakteristische Polynom* $p_f(t)$ *zerfällt in Linearfaktoren.*

Inbesondere hängt die Trigonalisierbarkeit von f nur vom charakteristischen Polynom $p_f(t)$ ab. Außerdem ist jeder Endomorphismus von V trigonalisierbar, falls K algebraisch abgeschlossen ist.

1.6 Spur und Determinante durch Eigenwerte

Zerfällt $p_f(t)$ in Linearfaktoren $p_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$, so ist f nach Satz 1.30 trigonalisierbar. Dann gilt

$$\operatorname{Spur} f = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{und} \quad \det f = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Außerdem ist für jedes Polynom $q \in K[t]$ auch der Endomorphismus $q(f)$ trigonalisierbar, und es gilt

$$p_{q(f)}(t) = (t - q(\lambda_1)) \cdots (t - q(\lambda_n)).$$

1.7 Simultane Diagonalisierbarkeit

Definition 1.31.

- *Eine Kollektion von Endomorphismen $f_i \colon V \to V$, $i \in I$ heißt* simultan diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.*

- *Eine Kollektion von Matrizen $A_i \in \mathrm{M}_n(K)$, $i \in I$ heißt* simultan diagonalisierbar*, falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass SA_iS^{-1} für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.*

Lemma 1.32. *Für eine Kollektion von Endomorphismen $f_i \colon V \to V$, $i \in I$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Endomorphismen f_i, $i \in I$ sind simultan diagonalisierbar.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Kollektion von Matrizen $\mathrm{M}_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}}$, $i \in I$ simultan diagonalisierbar sind.*

3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V sind die Kollektion von Matrizen $\mathrm{M}_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}}$, $i \in I$ simultan diagonalisierbar.*

Beispiel 1.33. Sind die Endomorphismen $f, g \colon V \to V$ simultan diagonalisierbar, so sind auch $f + g$ und $f \circ g$ diagonalisierbar.

Proposition 1.34. *Für Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n \colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ sind simultan diagonalisierbar.*

2. *Die Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ sind diagonalisierbar und paarweise kommutierend, d.h. es gilt $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für alle i, j.*

2 Die Jordan-Normalform

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

2.1 Definition

Definition 2.1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ ist*

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

der Jordanblock *zu λ von Größe n.*

Definition 2.2. *Eine Matrix $J \in \mathrm{M}_n(K)$ der Form*

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

ist in Jordan-Normalform.

Definition 2.3.

1. *Eine* Jordan-Normalform *einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist eine zu A ähnliche Matrix $J \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass J in Jordan-Normalform ist.*

2. *Eine Jordan-Normalform von f ist eine Jordan-Normalform der darstellenden Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V.*

Der Endomorphismus f besitzt genau dann eine Jordan-Normalform $J \in \mathrm{M}_n(K)$, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = J$ gilt. Wir bezeichnen eine solche Basis als *Jordanbasis* von f.

Eine *Jordanbasis* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist eine Jordanbasis der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörigen linearen Abbildung $f_A\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$. Dies ist äquivalent dazu, dass für die Matrix $S = (v_1 \dots v_n) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix $S^{-1}AS = \mathrm{M}_{f_A,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in Jordan-Normalform ist.

2.2 Eindeutigkeit

Es sei $J \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix in Jordan-Normalform, also

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Für alle $\lambda \in K$ gilt dann

$$\dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k = \sum_{k'=1}^{k} \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe mindestens } k'.$$

Für die Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k$ gilt deshalb

$$d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) = \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe mindestens } k$$

und somit

$$\begin{aligned} &\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \\ =\, &\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe mindestens } k \\ &- \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe mindestens } (k+1) \\ =\, &(d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda)) - (d_{k+1}(\lambda) - d_k(\lambda)) \\ =\, &2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ist J Jordan-Normalform von $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so sind A und J ähnlich, weshalb für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ auch $(A - \lambda \mathbb{1})^k$ und $(J - \lambda \mathbb{1})^k$ ähnlich sind. Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ gilt deshalb $\dim \ker(A - \lambda)^k = \dim \ker(J - \lambda)^k$. Aus der obigen Berechnung ergibt sich deshalb für die Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k$, dass

$$\begin{aligned} &\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \text{ in einer JNF von } A \\ =\, &2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich inbesondere die folgende Eindeutigkeit der Jordan-Normalform:

Proposition 2.4. *Je zwei Jordan-Normalformen einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus stimmen bis auf Permutation der Jordanblöcke überein.*

Es ergibt daher Sinn, von *der* Jordan-Normalform einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus zu sprechen.

2.3 Existenz & Kochrezept

Existenzkriterien

Definition 2.5.

- *Für alle* $\lambda \in K$ *und* $k \geq 0$ *sei*
$$V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid (f - \lambda \operatorname{id}_V)^k(v) = 0\} = \ker(f - \operatorname{id}_V)^k.$$
Der Unterverktorraum
$$V_\lambda^\infty(f) \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} V_\lambda^k(f) = \left\{v \in V \mid \textit{es gibt } k \geq 0 \textit{ mit } (f - \lambda \operatorname{id}_V)^k(v) = 0\right\}$$
ist der verallgemeinerte Eigenraum *von* f *zu* λ.
- *Für* $A \in \mathrm{M}_n(K)$ *und alle* $\lambda \in K$ *und* $k \geq 0$ *sei*
$$(K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid (A - \lambda \mathbb{1})^k x = 0\} = \ker(A - \mathbb{1})^k.$$
Der Unterverktorraum
$$(K^n)_\lambda^\infty(A) \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} (K^n)_\lambda^k(A) = \left\{x \in K^n \mid \textit{es gibt } k \geq 0 \textit{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k x = 0\right\}$$
ist der verallgemeinerte Eigenraum *von* A *zu* λ.

Beispiel 2.6. Der Endomorphismus f ist genau dann nilpotent, wenn $V_0^\infty(f) = V$. (Hier nutzen wir, dass V endlichdimensional ist.)

Lemma 2.7.

1. *Es gilt genau dann* $V_\lambda^\infty(f) \neq 0$, *wenn* λ *ein Eigenwert von* f *ist.*
2. *Die Summe* $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$ *ist direkt.*

Mithilfe der verallgemeinerten Eigenräume ergibt sich eine Charakterisierung der Existenz der Jordan-Normalform:

Satz 2.8. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Das charakteristische Polynom* $p_f(t)$ *zerfällt in Linearfaktoren.*
2. *Es gilt* $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$.
3. *Die Jordan-Normalform von* f *existiert.*

Dabei beizeichnet man die Zerlegung $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$ als die *verallgemeinerte Eigenraumzerlegung* bezüglich f.

Beispiel 2.9. Ist f nilpotent, so gilt $V = V_0^\infty(f)$, also $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$ und somit $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$. Also existiert die verallgemeinerte Eigenraumzerlegung bezüglich f, und somit auch die Jordan-Normalform von f.

Nilpotente Endomorphismen besitzen also immer eine Jordan-Normalform.

Kochrezept

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt, so lässt sich die Jordan-Normalform von A sowie anschließend auch eine zugehörige Jordanbasis nach dem folgenden *Kochrezept* berechnen:

- Man bestimme die Eigenwerte von A, etwa indem man das charakteristische Polynom $p_A(t)$ berechnet, und anschließend die Nullstellen von $p_A(t)$ herausfindet.
- Für jeden Eigenwert λ von A führe man die folgenden Schritte durch:
  - Man berechne die iterierten Kerne $\ker(A - \lambda \mathbb{1}), \ker(A - \lambda \mathbb{1})^2, \dots, \ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$ bis zu dem Punkt, an dem eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
    - Die Dimension von $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$ ist gleich der algebraische Vielfachheit von λ in $p_A(t)$.
    - Es gilt $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m = \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m+1}$.
  - Man bestimme Anhand der Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k$ die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke zu λ von Größe k als

$$b_k(\lambda) \coloneqq 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Aus den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ von A und den Zahlen $b_k(\lambda_i)$ erhalten wir bereits, wieviele Blöcke es zu welchen Eigenwert von welcher Größe gibt, d.h. wie die Jordan-Normalform von A (bis auf Permutation der Blöcke) aussehen wird. Inbesondere ist $d_1(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})$ die Gesamtzahl der Jordanblöcke zu λ und die entsprechende Potenz m die maximale auftretende Blöckgröße zu λ.

Zur Berechnung einer Jordanbasis von A kann man weiterhin wie folgt vorgehen:

- Für jeden Eigenwert λ von A berechnet man eine Basis $\mathcal{B}_\lambda$ von $(K^n)^\infty_\lambda(A)$ wie folgt:
  - Man wähle Vektoren $v_1, \dots, v_{b_m} \in \ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$ mit

$$\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m = \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-1} \oplus \langle v_1, \dots, v_{b_m} \rangle .$$

  (Zur konkreten Berechnung ergänze man eine Basis $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-1}$ zu einer Basis von $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$; dann kann man $v_1, \dots, v_{b_m}$ als die neu hinzugekommenen Basisvektoren wählen.)
  - Hierdurch ergeben sich für $\mathcal{B}_\lambda$ die ersten paar Basisvektoren

$$\begin{gathered} v_1, (A - \lambda \mathbb{1})v_1, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-1} v_1, \\ v_2, (A - \lambda \mathbb{1})v_2, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-1} v_2, \\ \dots, \\ v_{b_m}, (A - \lambda \mathbb{1})v_{b_m}, \dots, (A - \lambda \mathbb{1})^{m-1} v_{b_m}. \end{gathered}$$

◦ Man wählt nun Vektoren $v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \in \ker(A - \lambda\mathbb{1})^{m-1}$, so dass

$$\ker(A - \lambda\mathbb{1})^{m-1} = \ker(A - \lambda\mathbb{1})^{m-2} \oplus \langle Av_1, \dots, Av_{b_m} \rangle \oplus \left\langle v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \right\rangle$$

gilt.

◦ Hierdurch erhält man für $\mathcal{B}_\lambda$ die weitere Basisvektoren

$$\begin{gathered} v'_1, (A - \lambda\mathbb{1})v'_1, \dots, (A - \lambda\mathbb{1})^{m-2} v'_1, \\ v'_2, (A - \lambda\mathbb{1})v'_2, \dots, (A - \lambda\mathbb{1})^{m-2} v'_2, \\ \dots, \\ v'_{b_{m-1}}, (A - \lambda\mathbb{1})v'_{b_{m-1}}, \dots, (A - \lambda\mathbb{1})^{m-2} v'_{b_{m-1}}. \end{gathered}$$

◦ Man wähle nun $v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \in \ker(A - \lambda\mathbb{1})^{m-2}$, so dass

$$\begin{aligned} &\ker(A - \lambda\mathbb{1})^{m-1} \\ &= \ker(A - \lambda\mathbb{1})^{m-2} \oplus \left\langle A^2 v_1, \dots, A^2 v_{b_m} \right\rangle \oplus \left\langle Av'_1, \dots, Av'_{b_{m-1}} \right\rangle \oplus \left\langle v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \right\rangle \end{aligned}$$

gilt.

◦ Hiermit ergeben sich für $\mathcal{B}_\lambda$ die Basisvektoren

$$\begin{gathered} v''_1, (A - \lambda\mathbb{1})v''_1, \dots, (A - \lambda\mathbb{1})^{m-2} v''_1, \\ v''_2, (A - \lambda\mathbb{1})v''_2, \dots, (A - \lambda\mathbb{1})^{m-2} v''_2, \\ \dots, \\ v''_{b_{m-2}}, (A - \lambda\mathbb{1})v''_{b_{m-2}}, \dots, (A - \lambda\mathbb{1})^{m-2} v''_{b_{m-2}}. \end{gathered}$$

Durch Weiterführen der obigen Schritte erhält man schließlich eine Basis $\mathcal{B}_\lambda$ von $(K^n)^\infty_\lambda(A)$.

- Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A, so ergibt sich durch Hintereinanderlegen der Basen $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_t}$ eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n. (Hier nutzen wir, dass $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)^\infty_\lambda(A)$ gilt.)

- Die Basis $\mathcal{B}$ ist eine Jordanbasis von A. Indem man die Basisvektoren von $\mathcal{B}$ als Spalten in eine Matrix S einträgt, erhält man schließlich $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist. Dabei sind die Blöcke zunächst nach den Eigenwerten in der zuvor gewählten Reihenfolge sortiert, und die Blöcke zum gleichen Eigenwert sind jeweils nach absteigender Größe sortiert.

Beispiel 2.10. Für die Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$$

gilt $p_A(t) = -(t-2)^3$. Also ist 2 der einzige Eigenwert von A. Es gilt

$$\ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit gilt $\dim \ker(A-2\mathbb{1}) = 2$. Also gibt es zwei Jordanblöcke. Die Jordan-Normalform von A ist somit

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung einer Jordanbasis von A gehen wir wie folgt vor:

- Wir benötigen einen Vektor $v_1 \in \ker(A-2\mathbb{1})^2$ mit $\ker(A-2\mathbb{1})^2 = \ker(A-2\mathbb{1}) \oplus \langle v_1 \rangle$, also einen Vektor $v_1 \in \mathbb{C}^3$ mit $v_1 \notin \ker(A-2\mathbb{1})$. Hierfür bietet sich etwa der Vektor

  $$v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  an. Damit erhalten wir auch den weiteren Basisvektor

  $$(A - 2\mathbb{1})v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Nun benötigen wir noch einen Vektor $v_2 \in \ker(A - 2\mathbb{1})$ mit

  $$\ker(A - 2\mathbb{1}) = \langle (A - 2\mathbb{1})v_1 \rangle \oplus v_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus v_2.$$

  Hierfür lässt sich etwa

  $$v_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  wählen.

Insgesamt haben wir somit für A die Jordanbasis

$$\mathcal{B} \coloneqq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{C}^3$. Für die entsprechende Matrix

$$S \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$$

gilt dann, dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.11. Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_7)$ und $f\colon V \to V$ der eindeutige Endomorphismus mit $f(v_1) = f(v_2) = v_5$, $f(v_3) = f(v_4) = v_6$, $f(v_5) = f(v_6) = v_7$ und $f(v_7) = 0$. Es gilt $f^3(v_i) = 0$ für alle i, und deshalb $f^3 = 0$. Also ist f nilpotent, und besitzt somit eine Jordan-Normalform; dabei ist 0 der einzige auftretende Eigenwert.

Für die darstellende Matrix

$$A \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = 0.$$

Somit gelten

$$\begin{aligned} \ker A &= \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6, e_7 \rangle, \\ \ker A^2 &= \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, \\ \ker A^3 &= K^7. \end{aligned}$$

Mit $d_1 = \dim \ker A = 4$, $d_2 = \dim \ker A^2 = 6$ und $d_k = \ker \ker A^k = 7$ für $k \geq 3$ erhalten wir, dass $b_1 = 2d_1 - d_2 = 2$, $b_2 = 2d_2 - d_3 - d_1 = 1$, $b_3 = 2d_3 - d_4 - d_2 = 1$ und $b_k = 0$ für $k \geq 4$.

Die Jordan-Normalform von A (und damit von f) besteht also aus zwei Blöcken der Größe 1, einem Block der Größe 2 und einem Block der Größe 3 (jeweils zum Eigenwert 0); sie ist also

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun eine entsprechende Jordanbasis:

- Wir benötigen zunächst $w_1 \in \ker A^3 = K^7$ mit $K^7 = \ker A^2 \oplus \langle w_1 \rangle$. Hierfür muss nur $w_1 \notin \ker A^2$ gelten. Wir wählen $w_1 \coloneqq e_1$. Dann erhalten wir auch die weiteren Basisvektoren $Aw_1 = e_5$ und $A^2 w_1 = e_7$.
- Als nächstes benötigen wir $w_2 \in \ker A^2$ mit

  $$\ker A^2 = \ker A \oplus \langle Aw_1 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6, e_7 \rangle \oplus \langle e_5 \rangle \oplus \langle w_2 \rangle .$$

  Wir müssen also die Familie $(e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_5 - e_6, e_7)$ zu einer Basis von $\ker A^2$ ergänzen. Da

  $$\langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_5 - e_6, e_7 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$$

  gilt, können wir $w_2 \coloneqq e_2 - e_3$ wählen. Damit erhalten wir außerdem den Basisvektoren $Aw_2 = e_5 - e_6$.
- Schließlich brauchen wir noch $w_3, w_4 \in \ker A$ mit

  $$\ker A = \left\langle A^2 w_1 \right\rangle \oplus \langle Aw_2 \rangle \oplus \langle w_3, w_4 \rangle = \langle e_7 \rangle \oplus \langle e_5 - e_6 \rangle \oplus \langle w_3, w_4 \rangle .$$

  Wir müssen also die Familie $(e_5 - e_6, e_7)$ zu einer Basis von $\ker A$ ergänzen. Hierfür können wir $w_3 \coloneqq e_1 - e_2$ und $w_4 \coloneqq e_3 - e_4$ wählen.

Ingesamt haben wir somit die Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$, bzw. die Basiswechselmatrix

$$S \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{C},\mathcal{C}} = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4 Lösung des Ähnlichkeitsproblems

Es seien $f, g \colon V \to V$ zwei Endorphismen, die jeweils eine Jordan-Normalform besitzen.

Satz 2.12. *Die Endomorphismen f und g sind genau dann ähnlich, wenn sie (bis auf Permutation der Blöcke) die gleiche Jordan-Normalform besitzen.*

Also sind $f, g\colon V \to V$ genau dann ähnlich, wenn ihre charakteristischen Polynome

$$p_f(t) = p_g(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_s)^{n_s}$$

übereinstimmen, und wenn für jeden Eigenwert λ_i gilt, dass

$$\dim\ker(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k = \dim\ker(g - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k \qquad \text{für alle } k = 1, \ldots, n_i.$$

Beispiel 2.13.

1. Für nilpotente Matrizen existiert immer eine verallgemeinerte Eigenraumzerlegung. Deshalb sind zwei nilpotente Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ genau dann ähnlich, wenn $\dim\ker A^k = \dim\ker B^k$ für alle $k \geq 0$ gilt.

2. Es seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

   Dann gilt $p_{A_1}(t) = p_{A_2}(t) = p_{A_3}(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Da 2 jeweils eine algebraische Vielfachheit 1 hat, gilt

$$\dim\ker(A_1 - 2\mathbb{1}) = \dim\ker(A_2 - 2\mathbb{1}) = \dim\ker(A_3 - 2\mathbb{1}) = 1.$$

   Für den Eigenwerte 1 ergeben sich die Dimensionen

$$\dim\ker(A_1 - \mathbb{1}) = \dim\ker(A_1 - \mathbb{1}) = 1 \quad \text{und} \quad \dim\ker(A_3 - \mathbb{1}) = 2,$$

   also ist A_3 zu keiner der beiden anderen Matrizen ähnlich. Da ferner

$$\dim\ker(A_1 - \mathbb{1})^2 = \dim\ker(A_2 - \mathbb{1})^2 = 2$$

   gilt, sind A_1 und A_2 ähnlich.

3. Da A_1 und A_2 in unterer, bzw. oberer Jordan-Normalform sind, sieht man direkt, dass Sie nicht diagonalisierbar sind.

   Die Matrix A_3 ist hingegen eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke beide diagonalisierbar sind: Der obere Block ist diagonalisierbar, da es sich um eine obere Dreicksmatrix mit paarweise verschieden Diagonaleinträgen handelt. Also ist auch A_3 diagonalisierbar.

   Hierdurch sieht man bereits, dass A_3 nicht ähnlich zu A_1 oder A_2 ist.

4. Dass A_1 und A_2 ähnlich sind, erkennt man auch wie folgt:

   Besitzt $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Jordan-Normalform, so sind A und A^T ähnlich. Insbesondere sind jede Matrix in unterer Jordan-Normalform ähnlich zu der entsprechenden oberen Jordan-Normalform.

2.5 Die Jordan–Chevalley-Zerlegung

Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, der die Bedingungen aus Satz 2.8 erfüllt (d.h. f besitzt eine Jordan-Normalform.)

Proposition 2.14 (Jordan–Chevalley-Zerlegung)**.** *Es gibt eine eindeutige Zerlegung $f = d + n$ in einen diagonalisierbaren Endomorphismus d und einen nilpotenten Endomorphismus n, so dass d und n kommutieren.*

Die Jordan–Chevalley-Zerlegung ist eine „koordinatenfreie“ Version der Jordan-Normalform; die Existenz dieser Zerlegung ist äquivalent zur Existenz der Jordan-Normalform.

Beispiel 2.15. Für die Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

und die Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Jordan–Chevalley-Zerlegung $A = D + N$ ist somit gegeben durch

$$D = S\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}}_{=2\mathbb{1}}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$N = S\begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}S^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.6 Implizite Bestimmen der Jordan-Normaform

Es sei $J \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Jordan-Normalform von f.

- Für das charakteristische Polynom $p_f(t) = p_J(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt

  $$n_i = \dim V^\infty_{\lambda_i}(f) = \text{wie oft } \lambda_i \text{ auf der Diagonalen von } J \text{ steht}$$

- Es gilt

  $$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ in } J = \dim\ker(f - \mathrm{id}_V) = n - \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}_V).$$

  Inbesondere ist $n - \mathrm{rg}\, f$ die Anzahl der Jordanblöcke zu 0.

- Für das Minimalpolynom $m_f(t) = m_J(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_s)^{m_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt

$$m_i = \text{maximale auftretende Größe eines Jordanblockes zu } \lambda_i \text{ in } J$$

- Ist allgemeiner $q(t) \in K[t]$ ein Polymom mit $q(t) = (t-\lambda_1)^{m'_1} \cdots (t-\lambda_s)^{m'_s}$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt, und $q(f) = 0$, so ergeben sich die folgenden beiden Restriktionen an J:
  1. Jeder Eigenwert von f kommt in $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ vor (siehe Lemma 1.9),
  2. Es gilt $m_f \mid q$. Deshalb ist $m_f = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_s)^{m_s}$ mit $m_i \leq m'_i$ für alle i. Also sind die Jordanblöcke zu λ_i in J jeweils höchstens m'_i groß.

Zusammen mit den Beobachtungen aus Abschnitt 1.6 kann man hierdurch für kleine Matrizen bereits Aussagen über die Jordan-Normalform treffen, ohne die Matrix selbst zu kennen.

Beispiel 2.16. Es sei $A \in \mathrm{M}_6(\mathbb{C})$ mit $(A - 2\mathbb{1})^2(A - 3\mathbb{1}) = 0$ und $\operatorname{Spur} A = 14$.

Dann sind 2 und 3 die einzigen möglichen Eigenwerte von A. Aus $\operatorname{Spur} A = 14$ erhält man, dass 2 mit algebraischer Vielfachheit 4 vorkommt, und 3 mit algebraischer Vielfachheit 2. Außerdem folgt aus $(A - 2\mathbb{1})^2(A - 3\mathbb{1}) = 0$, dass die Jordanblöcke zu 2 höchstens 2 groß sind, und die Jordanblöcke zu 3 alle Größe 1 haben.

Damit ergeben sich bis auf Permutation der Jordanblöcke die folgenden drei möglichen Jordan-Normalformen:

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

In den ersten beiden Fällen ist $(t-2)^2(t-1)$ das Minimalpolynom, im dritten Fall ist es $(t-2)(t-3)$.

3 Grundlagen zu Bilinearformen

Im Folgenden sei K ein Körper, und U, V und W seien K-Vektorräume.

Notation 3.1. *Für alle* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *schreiben wir* $A^* \coloneqq \overline{A}^T$.

Definition 3.2. *Die Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *heißt* hermitesch*, falls* $A = A^*$ *gilt.*

Beispiel 3.3.

1. Eine reelle Matrix ist genau dann hermitesch, wenn sie symmetrisch ist.
2. Ist allgemeiner $A = B + iC$ mit $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, so ist A genau dann hermitesch, wenn B symmetrisch und C schiefsymmetrisch ist.

3.1 Allgemeine Definitionen

Definition 3.4.

- *Eine Abbildung* $\beta\colon V \times W \to U$ *heißt* K-bilinear*, falls*

$$\begin{gathered}\beta(v_1 + v_2, w) = \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w),\\ \beta(v, w_1 + w_2) = \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2),\\ \beta(\lambda v, w) = \lambda\beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \lambda\beta(v, w)\end{gathered}$$

  für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ *und* $\lambda \in K$ *gilt.*

- *Gilt zusätzlich* $U = K$*, so ist* β *eine* Bilinearform*. Es ist*

$$\mathrm{BF}(V, W) \coloneqq \{\beta\colon V \times W \to K \mid \beta \text{ ist eine Bilinearform}\}.$$

- *Gilt zusätzlich* $V = W$ *und*

$$\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

  so heißt β symmetrisch*. Es sind*

$$\mathrm{BF}(V) \coloneqq \mathrm{BF}(V, V)$$

  sowie

$$\mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V) \coloneqq \{\beta \in \mathrm{BF}(V) \mid \beta \text{ ist symmetrisch}\}.$$

Definition 3.5. *Es sei $K = \mathbb{C}$.*

- *Eine Abbildung $\beta\colon V \times W \to U$ heißt* sesquilinear*, falls*

$$\beta(v_1 + v_2, w) = \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w),$$
$$\beta(v, w_1 + w_2) = \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2),$$
$$\beta(\lambda v, w) = \lambda\beta(v, w) \quad \textit{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \overline{\lambda}\beta(v, w)$$

  für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

- *Gilt zusätzlich $U = \mathbb{C}$, so ist β eine* Sesquilinearform*. Es ist*

$$\mathrm{SF}(V, W) := \{\beta\colon V \times W \to \mathbb{C} \mid \beta \textit{ ist eine Sesquilinearform}\}.$$

- *Gilt zusätzlich $V = W$ und*

$$\beta(v_1, v_2) = \overline{\beta(v_2, v_1)} \qquad \textit{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

  so heißt β hermitesch*. Es sind*

$$\mathrm{SF}(V) := \mathrm{SF}(V, V)$$

  sowie

$$\mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V) := \{\beta \in \mathrm{SF}(V) \mid \beta \textit{ ist hermitesch}\}.$$

Definition 3.6. *Für $K = \mathbb{C}$ heißt eine Abbildung $f\colon V \to W$* halblinear *falls*

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \textit{und} \quad f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$ gilt.

Eine Abbildung $\beta\colon V \times W \to U$ ist genau dann K-bilinear, wenn für alle $v \in V$ und $w \in W$ die Abbildungen

$$\beta(v, -)\colon W \to U, \quad w' \mapsto \beta(v, w')$$

und

$$\beta(-, w)\colon V \to U, \quad v' \mapsto \beta(v', w)$$

linear sind.

Im Fall $K = \mathbb{C}$ ist β genau dann sesquilinear, wenn die Abbildung $\beta(-, w)\colon V \to U$ für jedes $w \in W$ linear ist, und die Abbildung $\beta(v, -)\colon W \to U$ für jedes $v \in V$ halblinear ist.

Beispiel 3.7.

1. Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ ist die Abbildung

$$\beta_A \colon K^m \times K^n \to K \quad \text{mit} \quad \beta_A(x, y) = x^T A y$$

eine Bilinearform. Für $n = m$ ist β_A genau dann symmetrisch, wenn A symmetrisch ist.

Jede Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(K^m, K^n)$ ist von dieser Form: Ist $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ die Matrix mit $A_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ für alle i, j, so gilt

$$\beta_A(e_i, e_j) = e_i^T A e_j = A_{ij} = \beta(e_i, e_j) \qquad \text{für alle } i, j$$

und somit $\beta = \beta_A$ wegen der Bilinearität von β und β_A.

Damit ergibt sich ein Isomorphismus $\mathrm{M}(m \times n, K) \to \mathrm{BF}(K^m, K^n)$, $A \mapsto \beta_A$.

2. Analog ergibt sich aus jeder Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C})$ eine Sesquilinearform

$$\beta_A \colon \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad \beta_A(x, y) = x^T A \overline{y},$$

und somit insgesamt ein Isomorphismus $\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C}) \to \mathrm{SF}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, $A \mapsto \beta_A$. Die hermiteschen Sesquilinearformen entsprechen dabei genau den hermiteschen Matrizen.

3.2 Quadratische Formen und Polarisation

Es gelte $\operatorname{char} K \neq 2$.

Proposition 3.8. *Für $Q \colon V \to K$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Es gibt eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ mit $Q(v) = \beta(v, v)$ für all $v \in V$.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und Koeffizienten $c_{ij} \in K$ mit*

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j \qquad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \in K. \tag{1}$$

3. *Für jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V gibt Koeffizienten $c_{ij} \in K$, so dass (1) gilt.*

4. *Es gilt $Q(av) = a^2 Q(v)$ für alle $v \in V$ und $a \in K$, und die Abbildung*

$$\beta \colon V \times V \to K \quad \text{mit} \quad \beta(v, w) = \frac{Q(v + w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

ist bilinear.

Definition 3.9. *Eine Abbildung $Q\colon V \to K$, die eine, und damit alle Eigenschaften aus Proposition 3.8 erfüllt, heißt* quadratische Form *auf V. Es ist*

$$\mathrm{Quad}(V) := \{Q\colon V \to K \mid Q \text{ ist eine quadratische Form}\}$$

der K-Vektorraum der quadratischen Formen auf K (mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Jede Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ liefert eine quadratische Form

$$Q_\beta\colon V \to K, \quad v \mapsto \beta(v, v).$$

Andererseits liefert jede quadratische Form $Q\colon V \to K$ eine symmetrische Bilinearform $\beta_Q \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ durch

$$\beta_Q(v, w) := \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2} \qquad \text{für alle } v, w \in V. \tag{2}$$

Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander, und liefern einen Isomorphismus

$$\mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V) \longleftrightarrow \mathrm{Quad}(V), \quad \beta \longmapsto Q_\beta, \quad Q \longleftarrow\!\shortmid \beta_Q.$$

Wir bezeichnen (2) als eine *Polarisationsformel*; sie erlaubt es uns, aus der quadratischen Form Q die ursprüngliche symmetrische Bilinearform β zurückzugewinnen. Neben (2) gilt auch noch die Polarisationsformel

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2)}{4} \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Bemerkung 3.10. Proposition 3.8 gilt auch für $\operatorname{char} K = 2$, sofern man den Ausdruck $(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))/2$ durch $Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ ersetzt.

Auch für Sesquilinearformen gibt es eine Polarisationsformel: Ist $\beta \in \mathrm{SF}(V)$ eine Sesquilinearform (nicht notwendigerweise hermitesch!), so gilt für die Abbildung $Q\colon V \to V$, $v \mapsto Q(v, v)$, dass

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2) + iQ(v_1 + iv_2) - iQ(v_1 - iv_2)}{4}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$

3.3 Orthogonalität

Es sei $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform, bzw. $K = \mathbb{C}$ und $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$ eine hermitsche Sesquilinearform.

Definition 3.11.

- *Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ sind* orthogonal zueinander*, notiert mit $v_1 \perp v_2$, falls $\beta(v_1, v_2) = 0$ gilt.*

- *Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist*

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \beta(v,u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

  das orthogonale Komplement *von U bezüglich β.*

- *Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt* orthogonal*, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$ gilt.*
- *Eine* Orthogonalbasis *ist eine orthogonale Basis.*
- *Ein Vektor $v \in V$ heißt* normiert *falls $\beta(v,v) = 1$ gilt.*
- *Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt* normiert*, falls v_i für jedes $i \in I$ normiert ist.*
- *Eine* Orthonormalbasis *ist eine orthogonale, normierte Basis.*

4 Skalarprodukte

Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Wir erweitern Definition 3.6 auf $\mathbb{K}$-Vektorräume:

Definition 4.1. *Eine Abbildng $f\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heißt* halblinear *falls*

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entspricht dies genau Definition 3.6. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist Halblinearität das Gleiche wie Linearität.

4.1 Definitheit & Skalarprodukte

Für eine hermitsche Sesquilinearform $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$ gilt $\beta(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Daher ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 4.2. *Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$, oder V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$. Dann ist β*

- positiv definit*, falls $\beta(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- positiv semidefinit*, falls $\beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- negativ definit*, falls $\beta(v, v) < 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- negativ semidefinit*, falls $\beta(v, v) \leq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- indefinit*, falls keiner der obigen Fälle eintritt.*

Definition 4.3.

- *Ein* Skalarprodukt *auf einem reellen Vektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V. Ein* euklidischer Vektorraum *ein reeller Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.*
- *Ein* Skalarprodukt *auf einem komplexen Vektorraum V ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf V. Ein* unitärer Vektorraum *ist ein komplexer Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.*

Wir bezeichnen euklidische Vektorräume und unitäre Vektorräume auch als Skalarprodukträume*. Das zugehörige Skalarprodukt schreiben wir als* $\langle -, - \rangle$*.*

Beispiel 4.4.

1. Das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{K}^n$ ist definiert als
$$\langle x, y \rangle \coloneqq x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$
2. Auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ wird durch
$$\langle A, B \rangle \coloneqq \mathrm{Spur}(AB^*) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \overline{B_{ij}}$$
ein Skalarprodukt definiert. Identifiziert man $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mithilfe der Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1}^n$ mit $\mathbb{K}^{n^2}$, so entspricht dies dem Standardskalarprodukt
3. Auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist stetig}\}$ wird durch
$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$
ein Skalarprodukt definiert.
4. Auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $P = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\}$ wird durch
$$\langle f, g \rangle \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$
ein Skalarprodukt definiert. Die Familie $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ ist orthonormal bezüglich dieses Skalarprodukts.

Definition 4.5. *Die* Norm *eines Vektors $v \in V$ ist definiert als $\|v\| \coloneqq \sqrt{\langle v, v \rangle}$.*

Bemerkung 4.6. Es handelt sich hierbei um eine Norm im Sinne der Analysis.

Beispiel 4.7. Die Norm des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{K}^n$ ist
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

4.2 Orthonormalbasen & Gram–Schmidt

Ist V ein reeller, bzw. komplexer Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform, bzw. $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$ eine hermitesche Bilinearform, so dass es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V bezüglich β gibt, so ist β bereits ein Skalarprodukt:

Für jeden Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es in der Darstellung $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ einen Index i mit $x_i \neq 0$, weshalb

$$\beta(v,v) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{x_j} \underbrace{\beta(x_i, x_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0.$$

Mithilfe des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungs-Verfahrens erhalten wir auch die Umkehrung: Jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum V besitzt eine Orthonormalbasis.

Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig. Induktiv konstruiere man Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in V$ wie folgt:

- Man beginnt mit $w_1 \coloneqq w_1 / \|w_1\|$.
- Falls $w_1, \ldots, w_i$ definiert sind, so konstruiert man w_{i+1} in zwei Schritten:
  - Man berechne den Vektor $\tilde{w}_{i+1} \coloneqq v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \langle v_{i+1}, w_j \rangle w_j$. Der Vektor $\tilde{w}_{i+1}$ ist orthogonal zu $w_1, \ldots, w_i$.
  - Aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ folgt, dass $\tilde{w}_{i+1} \neq 0$ gilt. Somit lässt sich $\tilde{w}_{i+1}$ normieren, und man erhält $w_{i+1} \coloneqq \tilde{w}_{i+1} / \|\tilde{w}_{i+1}\|$.

Die entstehende Familie $(w_1, \ldots, w_n)$ ist orthonormal mit

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle w_1, \ldots, w_i \rangle \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Sind dabei $v_1, \ldots, v_i$ bereits orthonormal, so gilt $w_j = v_j$ für alle $j = 1, \ldots, i$.

Satz 4.8. *Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so lässt sich jede Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen. Inbesondere existiert eine Orthonormalbasis für V.*

Korollar 4.9. *Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt $V = U \oplus U^\perp$. Deshalb gelten auch $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ und $(U^\perp)^\perp = U$.*

Bemerkung 4.10. Wendet man das Gram–Schmidt Verfahren auf linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ an, so ergeben sich für das minimale i mit $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1} \rangle$ zwar noch orthonormale Vektoren $w_1, \ldots, w_{i-1}$, dann aber $\tilde{w}_i = 0$.

4.3 Rieszscher Darstellungssatz

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum. Die Abbildung

$$\Phi \colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ist wohldefiniert, da $\langle -, - \rangle$ linear im ersten Argument ist. Außerdem ist Φ halblinear, da $\langle -, - \rangle$ halblinear im zweiten Argument ist.

Satz 4.11. *Die Abbildung Φ ist ein halblinearer Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.*

Der Rieszsche Darstellungssatz besagt also, dass sich jedes $\varphi \in V^*$ eindeutig als $\varphi = \langle -, v \rangle$ mit $v \in V$ darstellen lässt.

4.4 Die Adjungierte Abbildung

Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Skalarprodukträumen V und W.

Proposition 4.12. *Es gibt eine eindeutige Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ mit*

$$\langle f(v), w\rangle = \left\langle v, f^{\mathrm{ad}}(w)\right\rangle \qquad \text{für alle } v \in V,\ w \in W, \tag{1}$$

und f^{ad} ist linear.

Lemma 4.13.

- *Es gilt $(f^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = f$.*
- *Es gilt $\mathrm{id}_V^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_V$.*
- *Es gilt $(f \circ g)^{\mathrm{ad}} = g^{\mathrm{ad}} \circ f^{\mathrm{ad}}$.*
- *Ist f ein Isomorphismus, so gilt $(f^{-1})^{\mathrm{ad}} = (f^{\mathrm{ad}})^{-1}$.*
- *Die Abbildung $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W, V)$, $f \mapsto f^{\mathrm{ad}}$ ist halblinear; es gelten also*

$$(f+g)^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} + g^{\mathrm{ad}} \quad \text{und} \quad (\lambda f)^{\mathrm{ad}} = \overline{\lambda} f^{\mathrm{ad}}.$$

In orthonormalen Koordinaten entspricht das Adjungieren einer linearen Abbildung dem Transponieren-Konjugieren.

Lemma 4.14. *Ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C}$ eine Orthonormalbasis von W, so gilt*

$$\mathrm{M}_{f^{\mathrm{ad}},\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{M}^*_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}\,.$$

Die adjungierte Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ hängt eng mit der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ zusammen: Die Skalarprodukte auf V und W entsprechen den halblinearen Isomorphismen

$$\Phi_V\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle \quad \text{und} \quad \Phi_W\colon W \to W^*, \quad w \mapsto \langle -, w\rangle\,.$$

Die Bedingung (1) ist äquivalent dazu, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "f^*"'] \\ V \arrow[u, "\Phi_V"] & W \arrow[l, "f^{\mathrm{ad}}"] \arrow[u, "\Phi_W"'] \end{tikzcd}$$

Somit ist f^{ad} eindeutig bestimmt als $f^{\mathrm{ad}} = \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$.

4.5 Unitäre & orthogonale Matrizen

Definition 4.15.

- *Eine Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *heißt* unitär *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *bzw.* orthogonal *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *falls sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*
  1. *Die Matrix* A *ist invertierbar mit* $A^{-1} = A^*$.
  2. *Es gilt* $AA^* = \mathbb{1}$.
  3. *Es gilt* $A^*A = \mathbb{1}$.
  4. *Die Spalten von* A *bilden eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{K}^n$.
  5. *Die Zeilen von* A *bilden eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{K}^n$ (*betrachtet als Zeilenvektoren*).
- *Es seien*

  $$\mathrm{U}(n) \coloneqq \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \,|\, U \text{ ist unitär}\}$$

  und

  $$\mathrm{O}(n) \coloneqq \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, U \text{ ist orthogonal}\}.$$

Lemma 4.16. *Unitäre, bzw. orthogonale Matrizen sind invertierbar, und die Teilmengen* $\mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *und* $\mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *sind Untergruppen.*

4.6 Die Iwasawa-Zerlegung

Satz 4.17 (Iwasawa-Zerlegung)**.** *Es seien* $K, A, N \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *die folgenden Untergruppen:*

- *Es ist* $K = \mathrm{U}(n)$, *bzw.* $K = \mathrm{O}(n)$.
- A *besteht aus den Diagonalmatrizen mit reellen, positiven Diagonaleinträgen.*
- N *besteht aus den oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.*

Dann gibt es für jede Matrix $s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *eindeutige Matrizen* $k \in K$, $a \in A$ *und* $n \in N$ *mit* $s = kan$, *d.h. die Abbildung*

$$K \times A \times N \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

ist eine Bijektion.

Warnung 4.18. Diese Bijektion ist i.A. kein Gruppenhomomorphismus. Sie ist aber ein Homöomorphismus (und sogar ein Diffeomorphismus).

5 Normalenformen für normale Endomorphismen

Es seien V und W endlichdimensionale Skalarprodukträume. Für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix um den Winkel φ.

5.1 Normale Endomorphismen

Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Definition 5.1.

- *Der Endomorphismus f heißt* normal *falls f und f^{ad} kommutieren, d.h. falls $f \circ f^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} \circ f$ gilt.*
- *Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ heißt normal, falls A und A^* kommutieren, d.h. falls $AA^* = A^*A$ gilt.*

Lemma 5.2. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist normal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ normal ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V ist die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ normal.*

5.1.1 Der komplexe Fall

Satz 5.3. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist normal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.*
3. *Der Endomorphismus von f ist diagonalisierbar mit orthogonalen Eigenräumen.*

Korollar 5.4. *Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist normal.*

2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A.*

3. *Die Matrix A ist diagonalisierbar mit orthogonalen Eigenräumen.*

4. *Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.*

Ist $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine normale Matrix, so lässt sich zum Berechnen einer Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A wie folgt vorgehen:

- Man berechne eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A.
- Man wende für jeden Eigenwert von A das Gram–Schidtsch-Verfahren auf die zugehörigen Basisvektoren von $\mathcal{B}$ an.

5.1.2 Der reelle Fall

Satz 5.5. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist normal.*

2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von der Form*

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_s > 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke.

Bemerkung 5.6. Das charakteristische Polynom der Drehstreckmatrix $rD(\varphi)$ ist $(t-\lambda)(t-\overline{\lambda}) = t^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda) + |\lambda|^2$ mit $\lambda = re^{i\varphi}$.

In (1) entsprechen die reellen Diagonaleinträge also den reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(t)$, und die Drehstreckmatrizen $r_i D(\varphi_i)$ den Paaren $(\lambda, \overline{\lambda})$ von rein komplexen Nullstelen von $p_A(t)$.

Insbesondere lässt sich die Normalenform (1) aus dem charakteristischen Polynom $p_f(t)$ ablesen, was die Eindeutig zeigt.

Beispiel 5.7. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und f normal mit charakteristischen Polynom

$$p_f(t) = (t-1)(t+1)(t^2+1)(t^2-2t+2).$$

Es gilt $t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$ mit $i = e^{i\pi/2}$ und $t^2 - 2t + 2 = (t-\lambda)(t-\overline{\lambda})$ mit $\lambda = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Die zu f gehörige Normalenform ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & D(\pi/2) & \\ & & & \sqrt{2}D(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

Korollar 5.8. *Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist normal.*
2. *Es gibt eine orthogonale Matrix $U \in \mathrm{O}(n)$, so dass $U^{-1}AU$ in der Form (1) ist, und es gilt die gleiche Eindeutigkeit.*

5.2 Unitäre & Orthogonale Endomorphismen

Definition 5.9. *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ heißt* unitär *im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bzw.* orthogonal *im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls*

$$\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V$$

gilt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei

$$\mathrm{U}(V) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei

$$\mathrm{O}(V) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist orthogonal}\}$$

Lemma 5.10.
- *Unitäre und orthogonale Abbildungen sind injektiv.*
- *Unitäre und orthogonale Endomorphismen sind bereits Isomorphismen, und die Teilmenge $\mathrm{U}(V) \subseteq \mathrm{GL}(V)$, bzw. $\mathrm{O}(V) \subseteq \mathrm{GL}(V)$ ist eine Untergruppe.*

Aus den Polarisationsformeln aus Abschnitt 3.2 für symmetrische Bilinearformen, bzw. Sesquilinearformen, erhält man die folgende Charakterisierung unitärer, bzw. orthogonaler Transformationen:

Lemma 5.11. *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist genau dann unitär, bzw. orthogonal, falls f eine Isometrie ist, d.h. falls $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$ gilt.*

Es sei nun $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Lemma 5.12. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.*
2. *Der Endomorphismus f ist ein Isomorphismus mit $f^{-1} = f^{\mathrm{ad}}$.*
3. *Es gilt $f \circ f^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_V$.*
4. *Es gilt $f^{\mathrm{ad}} \circ f = \mathrm{id}_V$.*

Lemma 5.13. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ unitär, bzw. orthogonal ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ unitär, bzw. orthogonal.*

5.2.1 Der komplexe Fall

Ist f unitär, so ist f auch normal, da $f \circ f^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_V = f^{\mathrm{ad}} \circ f$. Ist andererseits f normal, so gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \mathrm{M}_{f\circ f^{\mathrm{ad}},\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}\, \mathrm{M}_{f^{\mathrm{ad}},\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}\, \mathrm{M}^*_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} & f \text{ ist unitär} \\ \iff & f \circ f^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_V \\ \iff & \mathrm{M}_{f\circ f^{\mathrm{ad}},\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathbb{1} \\ \iff & |\lambda_i|^2 = 1 \text{ für alle } i \\ \iff & |\lambda_i| = 1 \text{ für alle } i. \end{aligned}$$

Satz 5.14. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist unitär.*
2. *Der Endomorphismus f ist normal,und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von f gilt $|\lambda| = 1$.*

Korollar 5.15. *Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist unitär.*
2. *Die Matrix A ist normal, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt $|\lambda| = 1$.*

5.2.2 Der reelle Fall

Ähnlich zu der obigen Argumentation ergibt sich aus Satz 5.5 die folgende Charakterisierung orthogonaler Endomorphismen:

Satz 5.16. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist orthogonal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von der Form*

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke. (Insbesondere ist die Anzahl der Einsen und Minus-Einsen jeweils eindeutig bestimmt.)

Korollar 5.17. *Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist normal.*
2. *Es gibt eine orthonormale Matrix $U \in \mathrm{O}(n)$, so dass $U^{-1}AU$ in der Form (2) ist, und es gilt die gleiche Eindeutigkeit.*

5.3 Selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Definition 5.18. *Der Endomorphismus f heißt* selbstadjungiert*, falls $f^{\mathrm{ad}} = f$ gilt.*

Lemma 5.19. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V ist die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch.*

5.3.1 Normalenform

Für den komplexen und den reellen Fall ergeben sich analog zu den vorherigen Argumentationen Normalenformen für selbstadjungierte Endomorphismen. Dabei stellt sich heraus, dass sich in beiden Fällen die gleiche Normalenform ergibt.

Satz 5.20. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.*

2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f, und alle Eigenwerte von f sind reell.*

3. *Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten und orthogonalen Eigenräumen.*

Korollar 5.21. *Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist hermitesch.*

2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A, und alle Eigenwerte von A sind reell.*

3. *Die Matrix A ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten und die orthogonalen Eigenräumen zueinander.*

4. *Es gibt eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix U, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.*

Beispiel 5.22.

1. Es sei
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$
Es gilt
$$p_A(t) = -t^3 + 2t^2 + t - 2 = -(t-1)(t-2)(t+1),$$
also sind 1, 2 und -1 die Eigenwerte von A. Die zugehörigen Eigenräume sind
$$(\mathbb{R}^3)_1(A) = \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$
$$(\mathbb{R}^3)_2(A) = \ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$
$$(\mathbb{R}^3)_{-1}(A) = \ker(A + \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$
Durch Normieren der obigen Eigenvektoren ergibt sich die Orthonormalbasis
$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$
bestehend aus Eigenvektoren von A.

2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

Es gilt

$$A + 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit $\operatorname{rg}(A + 3\mathbb{1}) = 1$. Somit ist $\dim \ker(A + 3\mathbb{1}) = 2$. Also ist -3 ein Eigenwert von A von Vielfachheit 2. Der entsprechende Eigenraum ist

$$\ker(A + 3\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da $\operatorname{Spur} A = -3$ gilt, ist 3 der letzte übrige Eigenwert von A. Der entsprechende Eigenraum ist

$$\ker(A - 3\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit ist

$$\mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. Durch

- Anwenden des Gram–Schmidt-Verfahrens auf die ersten beiden Basisvektoren, und
- Normieren des dritten Basisvektors

ergibt sich die Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} := \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

aus Eigenvektoren von A.

5.4 Übersichten

Im komplexen Fall gibt es für normale, unitäre und selbstadjungierte Endomorphismen f jeweils eine Orthonormalbasis auf Eigenvektoren. Dabei müssen die Eigenwerte von f jeweils "die gleiche"Gleichung erfüllen wie f selbst:

Endomorphismus f	Gleichung für f	Gleichung für die Eigenwerte λ	Bedeutung
normal	$ff^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}}f$	$\lambda\overline{\lambda} = \overline{\lambda}\lambda$	keine Einschränkung an λ
unitär	$ff^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}$	$\lambda\overline{\lambda} = 1$	$\lvert\lambda\rvert = 1$
selbstadjungiert	$f = f^{\mathrm{ad}}$	$\lambda = \overline{\lambda}$	$\lambda \in \mathbb{R}$

Die verschiedenen Normalenformen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

	Charakterisierung durch f^{ad}	$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
normal	$ff^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}}f$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R},\ r_i > 0,\ \varphi_i \in (0, \pi)$
unitär, orthogonal	$f^{\mathrm{ad}} = f^{-1}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\varphi_i \in (0, \pi)$
selbstadjungiert	$f^{\mathrm{ad}} = f$		$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

5.5 Polarzerlegung

Positive Endomorphismen & Co.

Selbstadjungierte Endomorphismen lassen sich als symmetrische Bilinearformen, bzw. hermitesche Sesquilinearform auffassen.

Definition 5.23.

- *Ein selbstadjungierter Endomorphismus* $f\colon V \to V$ *heißt* positiv definit *falls die hermitesche Sesquilinearform* $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$*, bzw. die symmetrische Bilinearform* $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ *mit* $\beta(v_1, v_2) := \langle f(v_1), v_2\rangle$ *positiv definit ist.*

- *Eine hermitesche Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *heißt* positiv definit *falls die hermitesche Sesquilinearform* $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(\mathbb{C}^n)$ *mit* $\beta(v_1, v_2) := v_1^T A\overline{v_2}$ *positiv definit ist.*

Analog sind die Eigenschaften positiv semidefinit*,* negativ definit*,* negativ semidefinit *und* indefinit *definiert.*

Definition 5.24. *Für einen selbstadjungierten Endomorphismus* $f\colon V \to V$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist positiv definit.*

2. *Es gibt eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V*, so dass* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *positiv definit ist.*

3. *Für jede Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V *ist* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *positiv definit.*

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

Korollar 5.25.

- *Ein selbstadjungierter Endomorphismus* $f\colon V \to V$ *ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von* f *positiv sind.*

- *Eine hermitesche Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von* A *positiv sind.*

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

Aus jeder reellen Zahl $x \geq 0$ lässt sich eine reelle Wurzel y ziehen; indem man zusätzlich fordert, dass $y \geq 0$ gilt, ist diese Wurzel eindeutig, und wird mit $y = \sqrt{x}$ bezeichnet. Diese Aussage verallgemeinert sich auf positiv semidefinite, selbstadjungierte Endomorphismen.

Lemma 5.26.

- *Für jeden positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus* $f\colon V \to V$ *gibt es einen eindeutigen positiv semidefinitinen selbstadjungierten Endomorphismus* $g\colon V \to V$ *mit* $f = g^2$*.*

- *Für jede positiv semidefinite hermitesche Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *gibt es eine eindeutige positiv semidefinite hermitesche Matrix* $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *mit* $A = B^2$*.*

In der Situation von Lemma 5.26 schreiben wir $g = \sqrt{f}$ (bzw. $B = \sqrt{A}$).

Die Polarzerlegung

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $z = ru$ schreiben, wobei $r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$ und $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| = 1$. Die Zahl r ist eindeutig bestimmt also $r = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Gilt $z \neq 0$, so ist auch u eindeutig bestimmt.

Diese Zerlegung verallgemeinert sich auf komplexe Endomorphismen, bzw. Matrizen.

Satz 5.27 (Polarzerlegung)**.**

- *Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gibt es einen selbstadjungierten Endomorphismus $s\colon V \to V$ und einen unitären, bzw. orthogonalen Endomorphismus $u\colon V \to V$ mit $f = s \circ u$. Der Endomorphismus s ist eindeutig bestimmt durch $s = \sqrt{f \circ f^{\mathrm{ad}}}$. Ist f invertierbar, so ist auch u eindeutig.*

- *Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ gibt eine hermitesche Matrix $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ und eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mit $A = SU$. Die Matrix S ist eindeutig bestimmt durch $S = \sqrt{AA^*}$. Ist A invertierbar, so ist auch U eindeutig.*

6 Mehr zu Bilinearformen

Im Folgenden seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume.

6.1 Darstellende Matrizen & Kongruenz

Definition 6.1.

- *Die* darstellende Matrix *einer Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V, W)$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ von V und einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ von W ist die Matrix*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) := \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) & \cdots & \beta(v_1, w_n) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) & \cdots & \beta(v_2, w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_m, w_1) & \beta(v_m, w_2) & \cdots & \beta(v_m, w_n) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m \times n, K).$$

- *Die* darstellende Matrix *einer Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) := \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.*

Proposition 6.2. *Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W, und es seien*

$$V \to K^m, \quad v = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_m)^T =: [v]_{\mathcal{B}}$$

und

$$W \to K^n, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i \mapsto (y_1, \dots, y_n)^T =: [w]_{\mathcal{C}}$$

die zugehörige Isomorphismen $V \to K^n$ und $W \to K^n$.

1. *Für $\beta \in \mathrm{BF}(V, W)$ ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ durch die Gleichheit*

$$\beta(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^T \cdot \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cdot [w]_{\mathcal{C}} \qquad \text{für alle } v \in V,\ w \in W$$

   eindeutig bestimmt.

2. *Die Abbildung*

$$\mathrm{BF}(V, W) \to \mathrm{M}(m \times n, K), \quad \beta \mapsto \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

   ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Lemma 6.3. *Für $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Bilinearform β ist symmetrisch.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch ist.*

3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch.*

Lemma 6.4. *Sind $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V und $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ zwei Basen von W, so gilt für jede Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V, W)$, dass*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathrm{M}^T_{\mathrm{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'} \, \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}', \mathcal{C}') \, \mathrm{M}_{\mathrm{id}_W, \mathcal{C}, \mathcal{C}'} \, .$$

Definition 6.5. *Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ heißen* kongruent *zueinander, falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A = S^T B S$ gibt.*

Kongruente Matrizen stellen die gleiche Bilinearform bezüglich verschiedener Basen dar, d.h. für $n = \dim V$ sind zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ genau dann kongruent, falls es eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ sowie Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $A = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{A})$ und $B = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ gelten.

Korollar 6.6. *Konkruenz ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}_n(K)$.*

Definition 6.7. *Zwei Bilinearformen $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{BF}(V)$ sind* kongruent*, wenn sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:*

1. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}(\beta_1, \mathcal{B})$ und $\mathrm{M}(\beta_2, \mathcal{B})$ kongruent sind.*

2. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V sind $\mathrm{M}(\beta_1, \mathcal{B})$ und $\mathrm{M}(\beta_2, \mathcal{B})$ kongruent.*

Definition 6.8. *Der* Rang *einer Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ ist $\mathrm{rg}\, \beta := \mathrm{rg}\, \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.*

6.2 Existenz von Orthogonalbasen

Es sei $\mathrm{char}\, K \neq 2$ und $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ eine Bilinearform.

Falls eine eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V bezüglich β gibt, so ist β bereits symmetrisch, denn die Matrix

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \beta(v_1, v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \beta(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Es gilt auch die Umkehrung (da $\mathrm{char}\, K \neq 2$):

Satz 6.9. *Ist β symmetrisch, so gibt es eine Orthogonalbasis von V bezüglich β.*

Korollar 6.10. *Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gibt es eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.*

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine symmetrische Matrix, so lässt sich eine Diagonalform wie in Korollar 6.10 sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mithilfe von *simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen* berechnen:

- Man wende elementare Zeilenumformungen auf die Matrix an.
- Nach jeder elementaren Zeilenumformung führt die man die analoge elementare Spaltenumformung durch. Hierdurch bleibt die Matrix symmetrisch.

Wie beim Gauß-Vefahren bringt man die Matrix hierdurch in Zeilenstufenform. Als Ergebnis erhält man eine symmetrische Matrix B in oberer Dreiecksform, also eine Diagonalmatrix. Eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^T A S = B$ erhält man, indem man die genutzen elementaren Spaltenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ anwendet. (Nutzt man anstelle der Spaltenumformungen die Zeilenumformungen, so erhält man stattdessen S^T.)

Beispiel 6.11. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch simultane Zeilen- und Spaltenumfomungen erhalten wir Folgendes:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: D. \end{aligned}$$

Indem wir die entsprechenden Spaltenumformungen auf die Einheitsmatrix anwenden, erhalten wir eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_3(K)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: S.$$

Für die Matrizen D und S gilt nun, dass

$$S^T A S = D.$$

6.3 Reelle symmetrische Bilinearformen

Für diesen Unterabschnitt sei $K = \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrischen Bilinearform.

Sylvesterscher Trägheitssatz

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthogonalbasis von V bezüglich β, so ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ von der Form

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $d_i = \beta(v_i, v_i)$ gilt. Sind $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ mit $\mu_i \neq 0$, so ist auch $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_i = \mu_i v_i$ eine Basis von V, und es gilt

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1^2 d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 d_n \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich in (1) die Diagonaleinträge um Quadratzahlen aus $\mathbb{R}$ abändern. Hiermit erhält man aus Satz 6.9 den Sylvesterschen Trägheitssatz:

Korollar 6.12 (Sylvesterscher Trägheitssatz)**.** *Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$$

gilt. Die Zahlen p, q und r sind eindeutig bestimmt durch

$$p = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \textit{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \textit{ positiv definit ist}\}$$

und

$$q = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \textit{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \textit{ negativ definit ist}\},$$

sowie durch $p + q + r = n$. Zudem gilt $\operatorname{rg} \beta = p + q$.

Definition 6.13. *In der Situation von Korollar 6.12 heißt die Zahl $p - q$ die* Signatur *von β.*

Man bemerke, dass sich die Zahlen p, q und r aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz bereits aus der Form (1) ablesen lassen: Die Zahl p ist die Anzahl der positiven Diagonaleinträge, die Zahl q ist die Anzahl der negativen Diagonaleinträge, und r ist die Häufigkeit von 0 als Diagonaleintrag.

Beispiel 6.14. Es gibt 10 Kongruenzklassen von reellen symmetrischen (3×3)-Matrizen. Ein Repräsentantensystem ist durch die folgenden Matrizen gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner gibt es für alle $n \geq 0$ genau $\binom{n+2}{2}$ Kongruenzklassen reeller symmetrischer $(n \times n)$-Matrizen.

Signatur durch Eigenwerte

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist die darstellende $A \coloneqq \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch. Nach Korollar 5.21 gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{D} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Es sei λ_i der zu v_i gehörige Eigenwert, und $S \coloneqq (v_1 \ldots v_n)$. Die Matrix S ist orthogonal, und für die Basis $\mathcal{C}$ von V mit $\mathrm{M}_{\mathrm{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = S$ gilt

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{C}) = \mathrm{M}^T_{\mathrm{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} \, \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) \, \mathrm{M}_{\mathrm{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = S^T A S = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.15. *Es seien p, q und r die Zahlen aus dem Sylvesterscher Trägheitssatz für β. Dann ist p die Anzahl der positiven Eigenwerte von A, q die Anzahl der negativen Eigenwerte, und r die Vielfachheit des Eigenwerts 0.*

Lemma 6.16 (Hauptminorenkriterium)**.** *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv, wenn alle führenden Hauptminoren positiv sind.*

6.4 Dualität

6.4.1 Nicht-ausgeartetet Bilinearformen

Es sei $\beta \in \mathrm{BF}(V, W)$ eine Bilinearform. Die Bilinearform β entspricht einer linearen Abbildung

$$\beta_1 \colon W \to V^*, \quad w \mapsto \beta(-, w),$$

sowie einer linearen Abbildung

$$\beta_2 \colon V \to W^*, \quad v \mapsto \beta(v, -).$$

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W, so gilt bezüglich der dualen Basen $\mathcal{B}^*$ von V^* und $\mathcal{C}^*$ on W^*, dass

$$\mathrm{M}_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \quad \text{und} \quad \mathrm{M}_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T$$

Insbesondere gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & \beta_1 \text{ ist ein Isomorphismus} \\ \iff & \mathrm{M}_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \mathrm{M}_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \beta_2 \text{ ist ein Isomorphismus.} \end{aligned}$$

Definition 6.17. *Eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V, W)$ heißt* nicht-ausgeartet*, falls Sie eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Die lineare Abbildung β_1 ist ein Isomorphismus.*
2. *Die lineare Abbildung β_2 ist ein Isomorphismus.*
3. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V und Basis $\mathcal{C}$ von W, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ invertierbar ist.*
4. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V und Basis $\mathcal{C}$ von W ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ invertierbar.*
5. *Es gelten mindestes zwei der folgenden Bedingungen:*
   a) *Es gilt $\dim V = \dim W$.*
   b) *Für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es ein $w \in W$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ (d.h. β_2 ist injektiv).*
   c) *Für jedes $w \in W$ mit $w \neq 0$ gibt es ein $v \in V$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ (d.h. β_1 ist injektiv).*
6. *Es gelten alle drei Bedingungen aus 5.*

Beispiel 6.18.

1. Es sei $\beta \in \mathrm{BF}(V, V^*)$ die Bilinearform mit $\beta(v, \varphi) = \varphi(v)$. Die lineare Abbildung $\beta_1 \colon V^* \to V^*$ ist die Identität id_{V^*}, also ist β nicht-ausgeartet. Die lineare Abbildung $\beta_2 \colon V \to V^{**}$ ist der natürliche Isomorphismus aus Lineare Algebra I.
2. Ist V ein euklidscher Vektorraum, so ist $\langle -, - \rangle$ eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V, da die Abbildung $V \to V^*$, $v \mapsto \langle -, v \rangle$ nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein Isomorphismus ist.
3. Die symmetrische Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(\mathrm{M}_n(K))$ mit $\beta(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$ ist nicht-ausgeartet: Es sei $(E_{ij})_{i,j=1}^n$ die Standardbasis von $\mathrm{M}_n(K)$. Für alle i, j, k, l gilt

   $$\beta(E_{ij}, E_{kl}) = \mathrm{Spur}(E_{ij} E_{kl}) = \mathrm{Spur}(\delta_{jk} E_{il}) = \delta_{jk} \,\mathrm{Spur}\, E_{il} = \delta_{il} \delta_{jk} = \delta_{(i,l),(j,k)}.$$

   Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt deshalb

   $$\beta(A, E_{ij}) = \beta\left(\sum_{k,l=1}^n A_{kl} E_{kl}, E_{ij} \right) = \sum_{k,l=1}^n A_{kl} \underbrace{\beta(E_{kl}, E_{ij})}_{=\delta_{(i,l),(j,k)}} = A_{ji}.$$

   Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A \neq 0$ gilt deshalb $\beta(A, E_{ji}) \neq 0$.

6.4.2 Die Adjungierte Abbildung

Es seien $\beta_V \in \mathrm{BF}(V, V')$ und $\beta_W \in \mathrm{BF}(W, W')$ zwei nicht-ausgeartete Bilinearformen. Dann gibt es für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutige lineare Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W' \to V'$ mit

$$\beta_W(f(v), w') = \beta_V(v, f^{\mathrm{ad}}(w')) \qquad \text{für alle } v \in V,\ w' \in W' \tag{2}$$

gilt. Dies ergibt sich wie bereits in Abschnitt 4.4 dadurch, dass (2) äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "f^*"'] \\ V' \arrow[u, "(\beta_V)_1"] & W' \arrow[l, "f^{\mathrm{ad}}"] \arrow[u, "(\beta_W)_1"'] \end{tikzcd}$$

ist. Also ist f^{ad} eindeutig als $f^{\mathrm{ad}} = (\beta_V)_1^{-1} \circ f^* \circ (\beta_W)_1$ bestimmt.

Beispiel 6.19.

1. Es seien $\beta_V \in \mathrm{BF}(V, V^*)$ und $\beta_W \in \mathrm{BF}(W, W^*)$ die nicht-ausgearteten Bilinearformen mit $\beta_V(v, \varphi) = \varphi(v)$ und $\beta_W(w, \psi) = \psi(w)$. Dann ist $f^*\colon W^* \to V^*$ die zu $f\colon V \to W$ bezüglich β_V und β_W duale Abbildung, denn

$$\beta_W(f(v), \psi) = \psi(f(v)) = f^*(\psi)(v) = \beta_V(v, f^*(\psi)).$$

2. Es seien V und W euklidische Vektorräume. Dann sind die zugehörigen Skalarprodukte $\langle -, - \rangle_V$ und $\langle -, - \rangle_W$ nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen. Dann ist die zu $f\colon V \to W$ bezüglich β_V und β_W adjungierte Abbildung die adjungierte Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ aus Abschnitt 4.4.

6.4.3 Nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen

Wir betrachten nun den Fall, dass $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V ist. Für die beiden zugehörigen linearen Abbildungen $\beta_1, \beta_2\colon V \to V^*$ gilt dann $\beta_1 = \beta_2$.

Definition 6.20. *Das* Radikal *von β ist der Untervektorraum*

$$\operatorname{rad} \beta \coloneqq \{v \in V \mid \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V\}.$$

Es gilt $\operatorname{rad} \beta = \ker \beta_1 = \ker \beta_2$, weshalb β genau dann nicht ausgeartet ist, wenn $\operatorname{rad} \beta = 0$ gilt.

Beispiel 6.21. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$. Dann gibt es eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V bezüglich β, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ von der Form

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$ gilt. Dann ist $\operatorname{rg} \beta = r$ und somit $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ genau dann invertierbar, wenn $r = n$ gilt.

Zusammen mit dem Sylvesterschen Trägheitssatz ergibt sich damit, dass es auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum bis auf Kongruenz genau $n + 1$ nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen gibt.

Außerdem gilt in der obigen Situation, dass $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\operatorname{rad} \beta$ ist.

Lemma 6.22. *Ist β nicht-ausgeartet, so gelten für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$, dass $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ und $(U^\perp)^\perp = U$.*

Warnung 6.23. Es gilt im Allgemeinen nicht, dass $V = U \oplus U^\perp$, selbst wenn β nicht-ausgeartet ist.