Notizen zum

Repetitorium
Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

11. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Diagonalisierbarkeit

Im Folgenden sei K ein Körper. Im Rest des Abschnittes sei, sofern nicht anders angegeben, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.1. *Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sind $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$, so ist v ein* Eigenvektor *von f zum* Eigenwert *λ. Für alle $\lambda \in K$ ist der Unterverktorraum*

$$V_\lambda(f) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda f\} = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$$

der Eigenraum *von f zu λ.*

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Sind $\lambda \in K$ und $x \in K^n$ mit $x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$, so ist x ein Eigenvektor *von A zum* Eigenwert *λ. Für alle $\lambda \in K$ ist der Unterverktorraum*

$$(K^n)_\lambda(A) := \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

der Eigenraum *von A zu λ.*

Remark 1.2. 1. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $f\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige Endomorphismus, so stimmen die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume von A mit denen von f überein.

   Es genügt daher im Folgenden, Definitionen und Aussagen für Endomorphismen zu anzugeben – für Matrizen gelten diese dann ebenfalls.

2. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A := \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Bezüglich des zu $\mathcal{B}$ zugehörigen Isomorphismus

$$\Phi_\mathcal{B}\colon V \to K^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T =: [v]_\mathcal{B}$$

   gilt

$$\Phi_\mathcal{B}\left(V_\lambda(f)\right) = (K^n)_\lambda(A).$$

   Es ist also $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $[v]_\mathcal{B}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

   Berechnungen lassen sich deshalb in Matrizenform durchführen.

Für theoretische Aussagen nutzen wir also Endomorphismen, und für konkrete Rechnungen nutzen wir Matrizen.

1.2 Das charakterische Polynom

Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $A \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\ \iff & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \\ \iff & (K^n)_\lambda(A) \neq 0 \\ \iff & \ker(A - \lambda I) \neq 0 \\ \iff & A - \lambda I \text{ ist nicht invertierbar} \\ \iff & \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Definition 1.3. *Das* charakterische Polynom *von $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist definiert als*

$$p_A(t) \coloneqq \det(A - tI) \in K[t].$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist definiert als $p_f(t) = p_A(t)$, wobei $A \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die darstellende Matrix von f bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V ist.

Dass das charakteristische Polynom $p_f(t)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt, folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1.4. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakterische Polynom.*

Aus unserer anfänglichen Beobachtung erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom:

Proposition 1.5. *Die Eigenwerte von f sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_f(t)$.*

1.3 Das Minimalpolynom

Lemma 1.6. *Es sei $p \in K[t]$ ein Polynom mit $p(f) = 0$. Dann ist jeder Eigenwert von f eine Nullstelle von p.*

Definition 1.7. *Es sei*

$$\mathrm{Pol}(f) \coloneqq \{p \in K[t] \mid p(f) = 0\}.$$

Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus Pol(f) *ist das* Minimalpolynom *von f, und wird mit $m_f(t) \in K[t]$ notiert.*

Remark 1.8. Die Wohldefiniertheit von $\mathrm{Pol}(f)$ nutzt die Endlichdimensionalität von V. Hierdurch wird sichergestellt, dass $\mathrm{Pol}(f) \neq 0$ gilt.

Die Definition des Minimalpolynoms lässt sich bis auf Normiertheit wie folgt umschreiben:

Lemma 1.9. *Es gilt*

$$\operatorname{Pol}(f) = \{p \cdot m_f \mid p \in K[t]\}.$$

Für $p \in K[t]$ gilt also genau dann $p(f) = 0$, wenn $m_f \mid p$. Inbesondere gilt $m_f(f) = 0$.

Satz 1.10 (Cayley–Hamilton)**.** *Es gilt $p_f(f) = 0$, also $m_f \mid p_f$.*

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Nullstelle von $m_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also ein Eigenwert von f. Andererseits ist jeder Eigenwert von f nach Lemma 1.9 und Lemma 1.6 auch eine Nullstelle von $m_f(t)$. Somit sind die Nullstelle non $m_f(t)$ genau die Eigenwerte von f. Also haben $p_f(t)$ und $m_f(t)$ die gleichen Nullstellen. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfallen $p_f(t)$ und $m_f(t)$ somit in die gleichen Linearfaktoren, wobei die Vielfachheit im Minimalpolynom nach dem Satz von Cayley–Hamilton jeweils kleiner ist als die Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

1.4 Diagonalisierbarkeit

Lemma 1.11. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren von $f\colon V \to V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig. Inbesondere ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.*

Definition 1.12. *Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heiß* diagonalisierbar *falls er die folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.*
2. *Es gilt $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.*
3. *Es gibt eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f.*
4. *Es gibt ein Erzeugendensystem von V bestehend aus Eigenvektoren von f.*
5. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt diagonalisierbar*, falls sie eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gilt $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.*
2. *Es gilt $K^n = \sum_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.*
3. *Es gibt eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A.*
4. *Es gibt ein Erzeugendensystem von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A.*
5. *Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h. es gibt $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.*

Lemma 1.13. *Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist diagonlisierbar.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar ist.*

3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar.*

Ob ein Endomorphismus $f \colon V \to V$ diagonalisierbar ist, hängt nur vom Minimalpolynom $m_f(t)$ ab:

Proposition 1.14. *Der Endomorphismus f ist genau dann diagonalisierbar, falls m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

1.5 Simultane Diagonalisierbarkeit

Definition 1.15. *Eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Endomorphismen $f_i \colon V \to V$ heißt* simultan diagonalisierbar, *falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.*

Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Matrizen $A_i \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt simultan diagonalisierbar, *falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass SA_iS^{-1} für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.*

Lemma 1.16. *Für eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Endomorphismen $f_i \colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Familie von Endomorphismen $(f_i)_{i \in I}$ ist simultan diagonalisierbar.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Familie von Matrizen $(\mathrm{M}_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}})_{i \in I}$ simultan diagonalisierbar ist.*

3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist die Familie von Matrizen $(\mathrm{M}_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}})_{i \in I}$ simultan diagonalisierbar.*

Proposition 1.17. *Für Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Familie $(f_1, \dots, f_n)$ sind simultan diagonalisierbar.*

2. *Die Endomorphismen $f_1, \dots, f_n$ sind diagonalisierbar und sind paarweise kommutierend, d.h. es gilt $f_i f_j = f_j f_i$ für alle i, j.*

1.6 Trigonalisierbarkeit

Definition 1.18. *Ein Endomorphismus $f \colon V \to V$ heißt trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt trigonalisierbar, falls A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist, d.h. falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Lemma 1.19. *Für einen Endomorphismus $f \colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist trigonalisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar ist.*
3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar.*

Die Trigonalisierbarkeit eines Endomorphismus $f\colon V \to V$ hängt nur von dem charakterischen Polynom $p_f(t)$ ab:

Proposition 1.20. *Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom $p_f(t)$ in Linearfaktoren zerfällt.*

Insbesondere ist jeder Endomorphismus $f\colon V \to V$ trigonalisierbar, falls K algebraisch abgeschlossen ist.

2 Jordan-Normalform

Im Folgenden sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

2.1 Definition

Definition 2.1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ ist*

$$J_n(\lambda) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

der Jordanblock *zu λ von Größe n.*

Definition 2.2. *Eine Matrix J der Form*

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

ist in Jordan-Normalform*.*

Definition 2.3. *Eine* Jordan-Normalform *einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist eine zu A ähnliche Matrix $J \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass J in Jordan-Normalform ist.*

Eine Jordan-Normalform von f ist eine Jordan-Normalform der darstellenden Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V.

Der Endomorphismus f besitzt genau dann eine Jordan-Normalform $J \in \mathrm{M}_n(K)$, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = J$ gilt. Wir bezeichnen eine solche Basis als *Jordanbasis* von f.

Eine *Jordanbasis* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist eine Jordanbasis der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörigen linearen Abbildung $f_A\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$. Dies ist äquivalent dazu, dass für die Matrix $C = (v_1|\cdots|v_n) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix $S^{-1}AS = \mathrm{M}_{f_A,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in Jordan-Normalform ist.

2.2 Eindeutigkeit

Es sei J eine Matrix in Jordan-Normalform, also

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Für alle $\lambda \in K$ gilt dann

$$\dim \ker(J - \lambda I)^k = \sum_{k'=1}^{k} \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k'.$$

Für die Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \dim \ker(J - \lambda I)^k$ gilt deshalb

$$d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) = \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \\
={}&\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k \\
&- \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq (k+1) \\
={}&(d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda)) - (d_{k+1}(\lambda) - d_k(\lambda)) \\
={}&2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).
\end{aligned}$$

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $\lambda \in K$ eine Jordan-Normalform von A, so sind A und J ähnlich, weshalb für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ auch $(A - \lambda I)^k$ und $(J - \lambda I)^k$ ähnlich sind. Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ gilt deshalb $\dim \ker(A - \lambda)^k = \dim \ker(J - \lambda)^k$. Aus der obigen Berechnung ergibt sich deshalb für die Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \ker(A - \lambda I)^k$, dass

$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \text{ in } J = 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Damit ergibt sich inbesondere die folgende Eindeutigkeit der Jordannormalform:

Proposition 2.4. *Je zwei Jordannormalformen einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus stimmen bis auf Permutation der Jordanblöcke überein.*

Es ergibt daher Sinn, von *der* Jordannormalform einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus zu sprechen.

2.3 Existenz

Definition 2.5. *Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei*

$$V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid (f - \lambda \operatorname{id}_V)^k(v) = 0\} = \ker(f - \operatorname{id}_V)^k.$$

Der Unterverktorraum

$$V_\lambda^\infty(f) \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} V_\lambda^k(f) = \left\{v \in V \mid \textit{es gibt } k \geq 0 \textit{ mit } (f - \lambda \operatorname{id}_V)^k(v) = 0\right\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum *von f zu λ. Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei*

$$(K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid (A - \lambda I)^k x = 0\} = \ker(A - I)^k.$$

Der Untervektorraum

$$(K^n)^\infty_\lambda(A) := \bigcup_{k=0}^{\infty} (K^n)^k_\lambda(A) = \big\{x \in K^n \mid \textit{es gibt } k \geq 0 \textit{ mit } (A - \lambda I)^k x = 0\big\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum *von A zu λ.*

Lemma 2.6. *1. Es gilt genau dann $V^\infty_\lambda(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.*

2. Die Summe $\sum_{\lambda \in K} V^\infty_\lambda(f)$ ist direkt.

Mithilfe der verallgemeinerten Eigenräume ergibt sich eine Charakterisierung der Existenz der Jordan-Normalform:

Satz 2.7. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.

2. Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V^\infty_\lambda(f)$.

3. Die Jordan-Normalform von f existiert.

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt, so lässt sich die Jordan-Normalform von A sowie eine zugehörige Jordanbasis wie folgt berechnen:

- Man bestimme die Eigenwerte von A, etwa indem man $p_A(t)$ berechnet und anschließend die Nullstellen herausfindet.
- Für jeden Eigenwert λ von A führe man die folgenden Schritte durch:
  - Man berechne die iterierten Kerne $\ker(A - \lambda I), \ker(A - \lambda I)^2, \ldots, \ker(A - \lambda I)^m$ bis zu dem Punkt, an dem eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
    - Die Dimension $\dim \ker(A - \lambda I)^m$ ist die algebraische Vielfachheit von λ in $p_A(t)$.
    - Es gilt $\ker(A - \lambda I)^m = \ker(A - \lambda I)^{m+1}$.
  - Man bestimme Anhand der Zahlen $d_k(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda I)^k$ die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke zu λ von Größe k als

$$b_k(\lambda) := 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Aus den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von A und den Zahlen $b_k(\lambda_i)$ erhalten wir bereits, wieviele Blöcke es zu welchen Eigenwert von welcher Größe gibt, d.h. wie die Jordannormalform von A (bis auf Permutation der Blöcke) aussehen wird. Inbesondere ist $d_1(\lambda)$ die Gesamtzahl der Jordanblöcke zu λ und die entsprechende Potenz m die maximal auftretende Blöckgröße zu λ.

Zur Berechnung einer Jordanbasis von A geht man weiter wie folgt vor:

- Für jeden Eigenwert λ von A gehe man weiterhin wie folgt vor:
  - Man wähle linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_{b_m} \in \ker A^m$ mit
    $$\ker A^m = \ker A^{m-1} \oplus \langle v_1, \dots, v_{b_m} \rangle .$$
    (Zur konkreten Berechnung ergänze man eine Basis $\ker A^{m-1}$ zu einer Basis von $\ker A^m$; dann kann man $v_1, \dots, v_{b_m}$ als die neu hinzugekommenen Basisvektoren wählen.)
  - Hierdurch ergeben sich für $\mathcal{B}$ die ersten paar Basisvektoren
    $$\begin{gathered} v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1, \\ v_2, Av_2, \dots, A^{m-1}v_2, \\ \dots, \\ v_{b_m}, Av_{b_m}, \dots, A^{m-1}v_{b_m}. \end{gathered}$$
  - Man wählt nun linear unabhängige Vektoren $v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \in \ker A^{m-1}$, so dass
    $$\ker A^{m-1} = \ker A^{m-2} \oplus \langle Av_1, \dots, Av_{b_m} \rangle \oplus \left\langle v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \right\rangle$$
    gilt.
  - Hierdurch erhält man für $\mathcal{B}$ die weiteren Basisvektoren
    $$\begin{gathered} v'_1, Av'_1, \dots, A^{m-2}v'_1, \\ v'_2, Av'_2, \dots, A^{m-2}v'_2, \\ \dots, \\ v'_{b_{m-1}}, Av'_{b_{m-1}}, \dots, A^{m-2}v'_{b_{m-1}}. \end{gathered}$$
  - Man wähle nun $v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \in \ker A^{m-2}$, so dass
    $$\begin{aligned} &\ker A^{m-1} \\ &= \ker A^{m-2} \oplus \left\langle A^2v_1, \dots, A^2v_{b_m} \right\rangle \oplus \left\langle Av'_1, \dots, Av'_{b_{m-1}} \right\rangle \oplus \left\langle v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \right\rangle \end{aligned}$$
    gilt.
  - Hiermit ergeben sich für $\mathcal{B}$ die Basisvektoren
    $$\begin{gathered} v''_1, Av''_1, \dots, A^{m-2}v''_1, \\ v''_2, Av''_2, \dots, A^{m-2}v''_2, \\ \dots, \\ v''_{b_{m-2}}, Av''_{b_{m-2}}, \dots, A^{m-2}v''_{b_{m-2}}. \end{gathered}$$

  Durch Weiterführen der obigen Schritte erhält man schließlich eine Basis $\mathcal{B}_\lambda$ von $(K^n)^\infty_\lambda(A)$.

- Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von K^n, so ergibt sich Zusammenfügen der Basen $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_t}$ eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n.
- Die Basis $\mathcal{B}$ ist eine Jordanbasis von A: Indem man die (in der obigen Reihenfolge entstandenen) Basisvektoren als Spalten in eine Matrix C einträgt, erhält man schließlich $C \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $C^{-1}AC$ in Jordan-Normalform ist. Dabei sind die Blöcke zunächst nach den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ (in dieser Reihenfolge) sortiert; die Blöcke zum gleichen Eigenwert sind nach absteigender Größe sortiert.

2.4 Implizite Bestimmen der Jordan-Normaform

Es sei $J \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Jordan-Normalform von f.

- Für das charakteristische Polynom $p_f(t) = p_J(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ gelten
$$\operatorname{Spur} f = \operatorname{Spur} J = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{und} \quad \det f = \det J = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$
- Für das charakteristische Polynom $p_f(t) = p_J(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt
$$n_i = \dim V_\lambda^\infty(f) = \text{wie oft } \lambda_i \text{ auf der Diagonalen von } J \text{ steht}$$
- Es gilt
$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu 0 in } J = \dim \ker f = n - \operatorname{rg} f.$$
- Für das Minimalpolynom $m_f(t) = m_J(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt
$$m_i = \text{maximale auftrettende Größe eines Jordanblockes zu } \lambda_i \text{ in } J$$
- Ist allgemeiner $q(t) \in K[t]$ ein Polymom mit $q(t) = (t - \lambda_1)^{m_1'} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s'}$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und $q(f) = 0$, so ergeben sich die folgenden beiden Restriktionen an J:
  1. Jeder Eigenwert von f kommt in $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ vor (siehe Lemma 1.6),
  2. Es gilt $m_f \mid q$. Deshalb ist $m_f = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$ mit $m_i \leq m_i'$ für alle i. Also sind die Jordanblöcke zu λ_i in J jeweils höchstens m_i' groß.

Für kleine Matrizen kann man hierdurch bereits Aussagen über die Jordan-Normalform treffen, ohne die Matrix selbst zu kennen.

2.5 Lösung des Ähnlichkeitsproblems

Satz 2.8. *Zwei Endomorphismen $f, g \colon V \to V$ sind genau dann ähnlich, wenn sie (bis auf Permutation der Blöcke) die gleiche Jordan-Normalform besitzen.*

3 Skalarprodukte & Co.

Im Folgenden sei K ein Körper. Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

3.1 Allgemeine Definitionen

Definition 3.1. *Es seien U, V und W K-Vektorräume.*

- *Eine Abbildung $\beta\colon V \times W \to U$ heißt K-*bilinear*, falls*

$$\begin{aligned} \beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) = \lambda\beta(v, w) \quad \textit{und} \quad \beta(v, \lambda w) &= \lambda\beta(v, w) \end{aligned}$$

  für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$ gilt. Gilt zusätzlich $U = K$, so ist β eine Bilinearform*. Es ist*

$$\mathrm{BF}(V, W) \coloneqq \{\beta\colon V \times W \to K \mid \beta \textit{ ist eine Bilinearform}\}.$$

- *Gilt zusätzlich $V = W$ und*

$$\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1)$$

  für alle $v_1, v_2 \in V$, so heißt β symmetrisch*. Es sind*

$$\mathrm{BF}(V) \coloneqq \mathrm{BF}(V, V)$$

  sowie

$$\mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V) \coloneqq \{\beta \in \mathrm{BF}(V) \mid \beta \textit{ ist symmetrisch}\}.$$

Definition 3.2. *Es seien U, V und W $\mathbb{C}$-Vektorräume.*

- *Eine Abbildung $\beta\colon V \times W \to U$ heißt* sesquilinear*, falls*

$$\begin{aligned} \beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) = \lambda\beta(v, w) \quad \textit{und} \quad \beta(v, \lambda w) &= \overline{\lambda}\beta(v, w) \end{aligned}$$

  für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Gilt zusätzlich $U = \mathbb{C}$, so ist β eine Sesquilinearform*. Es ist*

$$\mathrm{SF}(V, W) \coloneqq \{\beta\colon V \times W \to \mathbb{C} \mid \beta \textit{ ist eine Sesquilinearform}\}.$$

- *Gilt zusätzlich $V = W$ und*

$$\beta(v_1, v_2) = \overline{\beta(v_2, v_1)}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$, so heißt β hermitesch. *(Für alle $v \in V$ gilt dann $\beta(v,v) \in \mathbb{R}$.) Es sind*

$$\mathrm{SF}(V) \coloneqq \mathrm{SF}(V, V)$$

sowie

$$\mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V) \coloneqq \{\beta \in \mathrm{BF}(V) \mid \beta \textit{ ist hermitesch}\}.$$

Definition 3.3. *Eine Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W ist* halblinear *falls*

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \textit{und} \quad f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

Eine Abbildung $\beta\colon V \times W \to U$ ist genau dann K-bilinear, wenn die Abbildungen

$$\beta(v, -)\colon W \to U, \quad w \mapsto \beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(-, w)\colon V \to U, \quad v \mapsto \beta(v, w)$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$ linear sind. Eine Abbildung $\beta\colon V \times W \to U$ ist genau dann sesquilinear, wenn die Abbildung $\beta(v, -)\colon W \to U$ für jedes $v \in V$ halblinear ist, und die Abbildung $\beta(-, w)\colon V \to U$ für jedes $w \in W$ linear ist.

3.2 Orthogonalität

Es sei V ein K-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform, bzw. $K = \mathbb{C}$ und $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$ eine hermitsche Sesquilinearform.

Definition 3.4.
- *Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ sind* orthogonal zueinander*, im Zeichen $v_1 \perp v_2$, falls $\beta(v_1, v_2) = 0$ gilt.*
- *Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $U^{\perp} = \{v \in V \mid \beta(v, u) = 0 \textit{ für alle } u \in U\}$ das* orthogonale Komplement *von U bezüglich β.*
- *Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt* orthogonal*, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$ gilt.*
- *Eine* Orthogonalbasis *ist eine orthogonale Basis.*
- *Ein Vektor $v \in V$ heißt* normiert *falls $\beta(v, v) = 1$.*
- *Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt* normiert*, falls v_i für jedes $i \in I$ normiert ist.*
- *Eine* Orthonormalbasis *ist eine orthogonale, normierte Basis.*

3.3 Skalarprodukte

Für eine hermitsche Sesquilinearform $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$ gilt $\beta(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Daher ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 3.5. *Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$, oder V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$. Dann ist β*

- positiv definit*, falls $\beta(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- positiv semidefinit*, falls $\beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- negativ definit*, falls $\beta(v, v) < 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- negativ semidefinit*, falls $\beta(v, v) \leq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- indefinit*, falls keiner der obigen Fälle eintritt.*

Definition 3.6.
- *Ein* Skalarprodukt *ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform, bzw. hermitsche Sesquilinearform.*
- *Ein* euklidischer Vektorraum *ein ein reeller Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.*
- *Ein* unitärer Vektorraum *ist ein komplexer Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.*

Wir bezeichnen euklidische Vektorräume und unitäre Vektorräume auch als Skalarprodukträume*. Das Skalarprodukt schreiben wir häufig nur als $\langle -, - \rangle$.*

Definition 3.7. *Es sei V ein Skalarproduktraum. Die* Norm *eines Vektors $v \in V$ ist definiert als $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.*

3.4 Gram-Schmidt

Es sei V ein Skalarproduktraum. Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig. Induktiv konstruiere man Vektoren $w_1, \dots, w_n \in V$ wie folgt:

- Man beginnt mit $w_1 := w_1 / \|w_1\|$.
- Falls $w_1, \dots, w_i$ definiert sind, so konstruiert man w_{i+1} in zwei Schritten:
  - Man berechne den Vektor $\tilde{w}_{i+1} := v_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \langle v_{i+1}, w_j \rangle w_j$. Der Vektor $\tilde{w}_{i+1}$ ist orthogonal zu $w_1, \dots, w_i$.
  - Aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_n$ folgt, dass $\tilde{w}_{i+1} \neq 0$ gilt. Somit lässt sich $\tilde{w}_{i+1}$ normieren, und man erhält $w_{i+1} := \tilde{w}_{i+1} / \|\tilde{w}_{i+1}\|$.

Die entstehende Familie $(w_1, \dots, w_n)$ ist orthonormal mit

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle w_1, \dots, w_i \rangle \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Hieraus folgen die Existenzaussagen über Orthonormalbasen:

Satz 3.8. *Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so lässt sich jede Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen. Inbesondere existiert eine Orthonormalbasis für V.*

Korollar 3.9. *Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gelten $V = U \oplus U^{\perp}$ und $(U^{\perp})^{\perp} = U$.*

Remark 3.10. Wendet man das Gram-Schmidt Verfahren auf linear abhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ an, so ergeben sich für das minimale i mit $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$ zwar noch orthonormale Vektoren $w_1, \dots, w_{i-1}$, aber dann $\tilde{w}_i = 0$.

3.5 Adjungierte Abbildung

Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Skalarprodukträumen V und W.

Proposition 3.11. *Es gibt eine eindeutige Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ mit*

$$\langle f(v), w \rangle = \left\langle v, f^{\mathrm{ad}}(w) \right\rangle \qquad \textit{für alle } v \in V,\ w \in W, \tag{1}$$

und f^{ad} ist linear.

Lemma 3.12. • *Es gilt $(f^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = f$.*

- *Es gilt $\mathrm{id}_V^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_V$.*
- *Es gilt $(f \circ g)^{\mathrm{ad}} = g^{\mathrm{ad}} \circ f^{\mathrm{ad}}$.*
- *Die Abbildung $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W, V)$, $f \mapsto f^{\mathrm{ad}}$ ist antilinear.*

In orthonormalen Koordinaten entspricht das Adjungieren einer linearen Abbildung dem Transponieren-Konjugieren.

Notation 3.13. *Für alle $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ schreiben wir $A^* := \overline{A}^T$.*

Lemma 3.14. *Ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C}$ eine Orthonormalbasis von W, so gilt*

$$\mathrm{M}_{f^{\mathrm{ad}}, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = \mathrm{M}^*_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}}\,.$$

Die adjungierte Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ hängt eng mit der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ zusammen:

Das Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ auf V liefert eine Abbildung

$$\Phi_{\mathcal{B}}\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle\,.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\langle -, - \rangle$ im ersten Argument linear ist, und halblinear, da $\Phi_{\mathcal{B}}$ linear im zweiten Argument ist. Die Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}}$ ist bereits ein Isomorphismus, denn es gilt $\dim V^* = \dim V$ und $\Phi_{\mathcal{B}}$ ist injektiv[1], denn für $v \in \ker \Phi_{\mathcal{B}}$

[1] Hier nutzen wir, dass die aus der Linearen Algebra I bekannten Aussagen über linearen Abbildungen auch für halblineare Abbildungen gelten.

gilt $\langle -, v\rangle = \Phi_{\mathcal{B}}(v) = 0$, also $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = 0$ und somit $v = 0$. Gleiches gilt für $\Phi_{\mathcal{C}} \colon W \to W^*$, $w \mapsto \langle -, w\rangle$.

Die Bedingung (1) ist äquivalent dazu, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V^* & W^* \arrow[l, "f^*"'] \\
V \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[l, "f^{\mathrm{ad}}"] \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{C}}"']
\end{tikzcd}$$

Somit ist f^{ad} eindeutig bestimmt als $f^{\mathrm{ad}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \Phi_{\mathcal{C}}$.

4 Normalenformen für normale Endomorphismen

Es seien V und W endlichdimensionale Skalarprodaukträume.

4.1 Anfängliche Definitionen

Definition 4.1. • *Eine Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *heißt* unitär *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *bzw.* orthogonal *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *falls sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Die Matrix* A *ist invertierbar mit* $A^{-1} = A^*$.
2. *Es gilt* $AA^* = I$.
3. *Es gilt* $A^*A = I$.
4. *Die Spalten von* A *bilden eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{K}^n$.
5. *Die Zeilen von* A *bilden eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{K}^n$ *(betrachtet als Zeilenvektoren).*

• *Es seien*

$$\mathrm{U}(n) \coloneqq \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \,|\, U \text{ ist unitär}\}$$

und

$$\mathrm{O}(n) \coloneqq \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, U \text{ ist orthogonal}\}.$$

Für alle $\varphi \in$ sei

$$D(\varphi) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix um den Winkel φ.

4.2 Normale Endomorphismen

Es sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums V.

Definition 4.2. *Der Endomorphismus* f *heißt* normal *falls* f *und* f^{ad} *kommutieren, d.h. falls* $f \circ f^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} \circ f$ *gilt. Eine Matrix* A *heißt normal, falls* A *und* A^* *kommutieren, d.h. falls* $AA^* = A^*A$ *gilt.*

Lemma 4.3. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist normal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V, *so dass die darstellende Matrix* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *normal ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V *ist die darstellende Matrix* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *normal.*

4.2.1 Der komplexe Fall

Satz 4.4. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist unitär.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.*
3. *Der Endomorphismus von f ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*

Korollar 4.5. *Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist normal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von A.*
3. *Die Matrix A ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*
4. *Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.*

4.2.2 Der reelle Fall

Satz 4.6. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist normal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von der Form*

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix} \tag{2}$$

   mit $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_s > 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ ist. Diese Form ist bis auf Permutation der Diagonalblöcke eindeutig.

Korollar 4.7. *Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist normal.*
2. *Es gibt eine orthonormale Matrix $U \in \mathrm{O}(n)$, so dass $U^{-1}AU$ in der Form (2) ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke.*

4.3 Unitäre & Orthogonale Endomorphismen

Definition 4.8. *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ heißt* unitär *im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bzw.* orthogonal *im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls*

$$\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

gilt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei

$$\mathrm{U}(V) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei

$$\mathrm{O}(V) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist orthogonal}\}$$

Lemma 4.9.
- *Unitäre und orthogonale Abbildungen sind injektiv.*
- *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist genau dann unitär, bzw. orthogonal, falls f eine Isometrie ist, d.h. falls*

$$\|f(v)\| = \|v\| \qquad \text{für alle } v \in V \text{ gilt.}$$

- *Es ist $\mathrm{U}(V) \subseteq \mathrm{GL}(V)$, bzw. $\mathrm{O}(V) \subseteq \mathrm{GL}(V)$ eine Untergruppe.*

Für den zweiten Punkt aus Lemma 4.9 nutzt man die *Polarisierungsformeln*: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt

$$\langle v_1, v_2\rangle = \frac{\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2}{2} = \frac{\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2}{4},$$

und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$\langle v_1, v_2\rangle = \frac{\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 + i\,\|v_1 + iv_2\|^2 - i\,\|v_1 - iv_2\|^2}{4}.$$

Es sei nun $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Lemma 4.10. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.*
2. *Der Endomorphismus f ist ein Isomorphismus mit $f^{-1} = f^{\mathrm{ad}}$.*
3. *Es gilt $f \circ f^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_V$.*
4. *Es gilt $f^{\mathrm{ad}} \circ f = \mathrm{id}_V$.*

Lemma 4.11. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ unitär ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ unitär.*

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind diese unitären Matrizen dabei bereits orthogonal.

4.3.1 Der komplexe Fall

Satz 4.12. *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist unitär.*

2. *Der Endomorphismus* f *ist normal,und für jeden Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$ *von* f *gilt* $|\lambda| = 1$.

Korollar 4.13. *Für eine Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix* A *ist unitär.*

2. *Die Matrix* A *ist normal, und für jeden Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$ *von* A *gilt* $|\lambda| = 1$.

4.3.2 Der reelle Fall

Satz 4.14. *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist orthogonal.*

2. *Es gibt eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V, *so dass* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *von der Form*

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix} \tag{3}$$

   mit $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ *ist. Diese Form ist bis auf Permutation der Diagonalblöcke eindeutig. (Inbesondere ist die Anzahl der Einsen und Minus-Einsen jeweils eindeutig.)*

Korollar 4.15. *Für* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix* A *ist normal.*

2. *Es gibt eine orthonormale Matrix* $U \in \mathrm{O}(n)$, *so dass* $U^{-1}AU$ *in der Form* (3) *ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke.*

4.4 Selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei nun $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Definition 4.16. *Der Endomorphismus* f *heißt* selbstadjungiert, *falls* $f^{\mathrm{ad}} = f$ *gilt. Eine Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *heißt* hermitesch, *falls* $A^* = A$ *gilt.*

Inbesondere ist eine reelle Matrix genau dann hermitesch, wenn sie symmetrisch ist.

Lemma 4.17. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch.*

Satz 4.18. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f, und alle Eigenwerte von f sind reell.*
3. *Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*

Korollar 4.19. *Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist hermitesch.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A, und alle Eigenwerte von A sind reell.*
3. *Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.*
4. *Die Matrix A ist diagonalisierbar, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lässt sich die Matrix U reell wählen, und somit als $U \in \mathrm{O}(n)$.

Definition 4.20. *Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f\colon V \to V$ (bzw. eine hermitesche Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) heißt* positiv definit *falls die symmetrische Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ (bzw. $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$) mit $\beta(v_1, v_2) := \langle f(v_1), v_2\rangle$ positiv definit ist.*

Analog sind für f (bzw. A) die Eigenschaften positiv semidefinit*,* negativ definit*,* negativ semidefinit *und* indefinit *definiert.*

Korollar 4.21. *Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f\colon V \to V$, (bzw. eine hermitesche Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von f (bzw. A) positiv sind.*

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

4.5 Übersicht

Die verschiedenen Normalenformen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

	Charakterisierung durch f^{ad}	$\mathbb{K}=\mathbb{C}$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$
normal	$ff^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}}f$	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s)\end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R},\ r_i > 0,\ \varphi_i \in (0,\pi)$
unitär, orthogonal	$f^{\mathrm{ad}} = f^{-1}$	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\begin{pmatrix}\pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s)\end{pmatrix}$ $\varphi_i \in (0,\pi)$
selbstadjungiert	$f^{\mathrm{ad}} = f$		$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

4.6 Polarzerlegung und Iwasawa-Zerlegung

Lemma 4.22.

- *Für jeden positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus $f\colon V \to V$ gibt es eine eindeutigen positiv semidefinitinen selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = g^2$.*
- *Für jede positiv semidefinite hermitesche Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ gibt es eine eindeutige positiv semidefinite hermitesche Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mit $A = B^2$.*

In der Situation von Lemma 4.22 schreiben wir $g = \sqrt{f}$ (bzw. $B = \sqrt{A}$).

Satz 4.23 (Polarzerlegung)**.**

- *Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gibt es einen selbstadjungierten Endomorphismus $s\colon V \to V$ und einen unitären, bzw. orthogonalen Endomorphismus $u\colon V \to V$ mit $f = s \circ u$. Der Endomorphismus s ist eindeutig bestimmt durch $s = \sqrt{f \circ f^{\mathrm{ad}}}$. Ist f invertierbar, so ist auch u eindeutig.*

- *Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ gibt eine hermitesche Matrix $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ und eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mit $A = SU$. Die Matrix S ist eindeutig bestimmt durch $S = \sqrt{AA^*}$. Ist A invertierbar, so ist auch U eindeutig.*

Satz 4.24 (Iwasawa-Zerlegung)**.** *Es seien $K, A, N \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ die folgenden Untergruppen:*

- *Es ist $K = \mathrm{U}(n)$, bzw. $K = \mathrm{O}(n)$.*
- *A besteht aus den Diagonalmatrizen mit reellen, positiven Diagonaleinträgen.*
- *N besteht aus den obenen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.*

Dann gibt es für jede Matrix $s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eindeutige Matrizen $k \in K$, $a \in A$ und $n \in N$ mit $s = kan$, d.h. die Abbildung

$$K \times A \times N \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

ist eine Bijektion.

Warnung 4.25. Diese Bijektion ist i.A. kein Gruppenhomomorphismus. Sie ist aber ein Homöomorphismus (und sogar ein Diffeomorphismus).

5 Symmetrische Bilinearformen

Im Folgenden sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

5.1 Darstellende Matrizen & Kongruenz

Definition 5.1. *Die* darstellende Matrix *einer Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ist die Matrix*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) := \begin{pmatrix} \beta(v_1, v_1) & \beta(v_1, v_2) & \cdots & \beta(v_1, v_n) \\ \beta(v_2, v_1) & \beta(v_2, v_2) & \cdots & \beta(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_n, v_1) & \beta(v_n, v_2) & \cdots & \beta(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.2. *Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und*

$$V \to K^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: [v]$$

der zugehörige Isomorphismus $V \to K^n$.

1. *Für alle $w_1, w_2 \in V$ gilt $\beta(w_1, w_2) = [w_1]^T A [w_2]$.*
2. *Die Abbildung*
$$\mathrm{BF}(V) \to \mathrm{M}_n(K), \quad \beta \mapsto \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$$
ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Lemma 5.3. *Für $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Bilinearform β ist symmetrisch.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch ist.*
3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch.*

Lemma 5.4. *Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei Basen von V, und ist $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ eine Bilinearform, so gilt*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \mathrm{M}_{\mathrm{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{C}}^T \, \mathrm{M}(\beta, \mathcal{C}) \, \mathrm{M}_{\mathrm{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{C}} \,.$$

Definition 5.5. *Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ heißen* kongruent *zueinander, falls es $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A = C^T B C$ gibt.*

Kongruente Matrizen stellen also die gleiche Bilinearform bezüglich verschiedener Basen dar, d.h. für $n = \dim V$ sind zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ genau dann kongruent, falls es eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ sowie Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $A = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{A})$ und $B = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ gelten.

Korollar 5.6. *Konkruenz ist eine Äquivalenzrelation auf* $\mathrm{M}_n(K)$*.*

Da der Rang einer Matrix invariant unter Kongruenz ist, ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 5.7. *Der* Rang *einer Bilinearform* $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ *ist* $\operatorname{rg}\beta := \operatorname{rg}\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$*, wobei* $\mathcal{B}$ *eine Basis von* V *ist.*

5.2 Quadratische Formen und Polarisation

Proposition 5.8. *Für eine Abbildung* $Q\colon V \to K$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Es gibt eine Bilinearform* $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ *mit* $Q(v) = \beta(v, v)$ *für all* $v \in V$*.*
2. *Es gibt eine Basis* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ *von* V *und Koeffizienten* $c_{ij} \in K$*, so dass*
$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \qquad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \in K \tag{4}$$
gilt.
3. *Für jede Basis* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ *von* V *gibt Koeffizienten* $c_{ij} \in K$*, so dass* (4) *gilt.*
4. *Es gilt* $Q(av) = a^2 Q(v)$ *für alle* $v \in V$ *und* $a \in K$*, und die Abbildung*
$$\beta\colon V \times V \to K, \quad \text{mit} \quad \beta(v, w) = Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$$
ist bilinear.

Definition 5.9. *Eine Abbildung* $Q\colon V \to K$*, die eine, und damit alle Eigenschaften aus Proposition 5.8 erfüllt, heißt* quadratische Form *auf* V*. Es ist*

$$\mathrm{Quad}(V) := \{Q\colon V \to K \mid Q \text{ ist eine quadratische Form}\}$$

der K*-Vektorraum der quadratischen Formen auf* K *(mit punktweiser Addition und punktweiser Skalarmultiplikation).*

Es sei nun $\operatorname{char} K \neq 2$. Dann gibt es auf V eine 1:1-Korrespondenz zwischen den symmetrischen Bilinearformen und den quadratischen Formen: Jede symmetrische Bilinearform β liefert eine quadratische Form

$$Q_\beta\colon V \to K, \quad v \mapsto \beta(v, v).$$

Andererseits liefert jede quadratische Form $Q\colon V \to K$ eine symmetrische Bilinearform $\beta_Q \in \mathrm{BF}(V)$ durch

$$\beta_Q(v, w) := \frac{Q(v + w) - Q(v) - Q(w)}{2} \qquad \text{für alle } v, w \in V. \tag{5}$$

Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander, und liefern einen Isomorphismus

$$\mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V) \longleftrightarrow \mathrm{Quad}(V), \quad \beta \longmapsto Q_\beta, \quad Q \longleftarrow\!\shortmid \beta_Q.$$

Wir bezeichnen (5) als eine *Polarisationsformel*; sie erlaubt es uns, aus der quadratischen Form Q die ursprüngliche symmetrische Form β zurückzugewinnen. Neben (5) gilt auch noch die Polarisationsformel

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2)}{4} \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

5.3 Existenz von Orthogonalbasen

Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform.

Satz 5.10. *Es gibt eine Orthogonalbasis von V bezüglich β.*

Korollar 5.11. *Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.*

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine symmetrische Matrix, so lässt sich eine Diagonalform wie in Korollar 5.11 sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mithilfe von *simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen* berechnen:

- Man bringe die Matrix durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform, und somit insbesondere in obere Dreiecksform.
- Nach jeder elementaren Zeilenumformung führt die man die analoge elementare Spaltenumformung durch. Hierdurch bleibt die Matrix symmetrisch.

Als Ergebnis erhält man somit eine Matrix symmetrische Matrix B, die in oberer Dreiecksform ist. Also ist B eine Diagonalmatrix. Eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $C^T AC = B$ erhält man, indem man die genutzen elementaren Spaltenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix I anwendet. (Nutzt man anstelle der Spaltenumformungen die Zeilenumformungen, so erhält man stattdessen C^T.)

5.4 Sylvesterscher Trägheitssatz & Hauptachsentransformation

Für diesen Unterabschnitt sei $K = \mathbb{R}$

5.4.1 Sylvesterscher Trägheitssatz

Es sei $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrischen Bilinearform.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthogonalbasis von V bezüglich β, so ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ von der Form

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

wobei $d_i = \beta(v_i, v_i)$ gilt. Sind $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit $\mu_i \neq 0$, so ist auch $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i = \mu_i v_i$ eine Basis von V, und es gilt

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1^2 d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 d_n \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich in (6) die Diagonaleinträge um Quadratzahlen aus $\mathbb{R}$ abändern. Hiermit erhält man aus Satz 5.10 den Sylvesterschen Trägheitssatz:

Korollar 5.12 (Sylvesterscher Trägheitssatz)**.** *Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$$

gilt. Die Zahlen p, q und r sind eindeutig bestimmt durch

$$p = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ positiv definit ist}\}$$

und

$$q = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ negativ definit ist}\},$$

sowie durch $p + q + r = n$. Zudem gilt $\operatorname{rg} \beta = p + q$.

Definition 5.13. *In der Situation von Korollar 5.12 heißt die Zahl $p - q$ die* Signatur *von β.*

Man bemerke, dass sich die Zahlen p, q und r aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz bereits aus der Form (6) ablesen lassen: Die Zahl p ist die Anzahl der positiven Diagonaleinträge, die Zahl q ist die Anzahl der negativen Diagonaleinträge, und r ist die Häufigkeit von 0 als Diagonaleintrag.

5.4.2 Hauptachsentransformation

Ist $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$ eine symmetrische Bilinearform, so gilt für die symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $A_{ij} = \beta(e_i, e_j)$, dass

$$\beta(x, y) = x^T A y \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Nach Korollar 4.19 gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Ist λ_i der zu v_i gehörige Eigenwert, so gilt

$$\beta(v_i, v_j) = v_i^T A v_j = \lambda_j v_i^T v_j = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Somit ist $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich β und

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.14. *Es seien p, q und r die Zahlen aus dem Sylvesterscher Trägheitssatz für β. Dann ist p die Anzahl der positiven Eigenwerte von A, q die Anzahl der negativen Eigenwerte, und r die Vielfachheit des Eigenwerts 0.*

Lemma 5.15 (Hauptminorenkriterium)**.** *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv, wenn alle führenden Hauptminoren positiv sind.*

5.5 Dualität

Es sei W ein weiterer endlichdimensionaler K-Vektorraum

5.5.1 Nicht-ausgeartetet Bilinearformen

Es sei $\beta \in \mathrm{BF}(V, W)$ eine Bilinearform. Die Bilinearform β entspricht einer linearen Abbildung

$$\beta_1 \colon W \to V^*, \quad w \mapsto \beta(-, w),$$

sowie einer linearen Abbildung

$$\beta_2 \colon V \to W^*, \quad v \mapsto \beta(v, -).$$

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W, so können wir als Verallgemeinerung von Definition 5.1 die darstellende Matrix

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \coloneqq \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) & \cdots & \beta(v_1, w_m) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) & \cdots & \beta(v_2, w_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_n, w_1) & \beta(v_n, w_2) & \cdots & \beta(v_n, w_m) \end{pmatrix}.$$

betrachten. Dann gilt bezüglich der dualen Basen $\mathcal{B}^*$ von V^* und $\mathcal{C}^*$ on W^*, dass

$$\mathrm{M}_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \quad \text{und} \quad \mathrm{M}_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T$$

Insbesondere gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & \beta_1 \text{ ist ein Isomorphismus} \\ \iff & \mathrm{M}_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \mathrm{M}_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \beta_2 \text{ ist ein Isomorphismus.} \end{aligned}$$

Definition 5.16. *Eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V, W)$ heißt* nicht-ausgeartet*, falls Sie eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Die lineare Abbildung β_1 ist ein Isomorphismus.*

2. *Die lineare Abbildung β_2 ist ein Isomorphismus.*

3. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ invertierbar ist.*

4. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ invertierbar.*

5. *Es gelten (mindestes) zwei (und damit bereits alle drei) der folgenden Bedingungen:*
   a) *Es gilt $\dim V = \dim W$.*
   b) *Für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es ein $w \in W$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ (d.h. β_2 ist injektiv).*
   c) *Für jedes $w \in W$ mit $w \neq 0$ gibt es ein $v \in V$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ (d.h. β_1 ist injektiv).*

Wir betrachten nun den Fall, dass $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V ist. Für die beiden zugehörigen linearen Abbildungen $\beta_1, \beta_2 \colon V \to V^*$ gilt dann $\beta_1 = \beta_2$.

Definition 5.17. *Das* Radikal *von β ist der Unterverktorraum*

$$\operatorname{rad} \beta \coloneqq \{v \in V \mid \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V.$$

Es gilt $\operatorname{rad} \beta = \ker \beta_1 = \ker \beta_2$, weshalb β genau dann nicht ausgeartet ist, wenn $\operatorname{rad} \beta = 0$ gilt.

5.5.2 Die Adjungierte Abbildung

Es seien $\beta \in \mathrm{BF}(V, V')$ und $\gamma \in \mathrm{BF}(W, W')$ zwei nicht-ausgeartete Bilinearformen. Dann gibt es für jede lineare Abbildung $f \colon V \to W$ eine eindeutige lineare Abbildung $f^{\mathrm{ad}} \colon W' \to V'$ mit

$$\gamma(f(v), w') = \beta(v, f^{\mathrm{ad}}(w')) \qquad \text{für alle } v \in V,\ w' \in W' \tag{7}$$

gilt. Dies ergibt sich wie bereits in 3.5 dadurch, dass (7) äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
V^* & W^* \arrow[l, "f^*"'] \\
V' \arrow[u, "\beta_1"] & W' \arrow[l, "f^{\mathrm{ad}}"] \arrow[u, "\gamma_1"']
\end{tikzcd}$$

ist. Also ist f^{ad} eindeutig als $f^{\mathrm{ad}} = \beta_1^{-1} \circ f^* \circ \beta_1'$ bestimmt.