Im Folgenden seien alle Vektorräume endlich-dimensional.

Aufgabe 1.
Es seien V ein Skalarproduktraum.

1. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie für alle $v, w \in V$ mit $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ die Gleichungen

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad \text{und} \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

2. Zeigen Sie die Parallelogrammgleichung:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

Aufgabe 2. (*Existenz von Skalarprodukten*)
Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

Aufgabe 3.
Es seien V und W Skalarprodukträume und es sei $f\colon V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass $\ker f = (\operatorname{im} f^{\mathrm{ad}})^\perp$ und $\operatorname{im} f = (\ker f^{\mathrm{ad}})^\perp$ gelten.

Aufgabe 4. (*Endomorphismen mit $\langle f(v), v \rangle = 0$*)

1. Es sei V ein Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit $\langle f(v), v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass bereits $f = 0$ gilt.
   (*Tipp*: Betrachten Sie die Eigenwerte von f.)

2. Es sei nun V ein unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\langle f(v), v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass bereits $f = 0$ gilt.
   (*Tipp*: Betrachten Sie die Sesquilinearform $\beta \in \mathrm{SF}(V)$ mit $\beta(v_1, v_2) = \langle f(v_1), v_2 \rangle$.)

Aufgabe 5.
Es seien V und W Skalarprodukträume und es sei $f\colon V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt $\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$.

2. Für alle $v \in V$ gilt $\|f(v)\| = \|v\|$.

Aufgabe 6.
Es sei V ein unitärer Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass es für jede Flagge

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ für alle i gilt.

2. Zeigen Sie, dass es für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in oberer Dreiecksform ist.

Aufgabe 7.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ orthogonal, unitär, bzw. hermitesch. Bestimmen Sie jeweils alle möglichen Werte von $\det A$.