Aufgabe 1. (*Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit*)

1. Es sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Spur} A = 0$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.
2. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ einen reellen Eigenwert hat.
3. Folgern Sie, dass jede nicht-triagonalisierbare Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.
   (*Tipp*: Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert λ von A auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert ist.)
4. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $k \geq 0$ mit $A^k = \mathbb{1}$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie alle möglichen Eigenwerte für A.
5. Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Spur} A = 0$ und $\operatorname{Spur} A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$. Entscheiden Sie auch, ob A diagonalisierbar ist.
6. Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Spur} A = 2$ und $\operatorname{Spur} A^2 = 4$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
7. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A^2 + A = 6\mathbb{1}$ und $\det A = 144$. Bestimmen Sie n.
8. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A^3 = 3A - 2$ und $A^3 + A^2 = A + \mathbb{1}$. Zeigen Sie, dass $A = \mathbb{1}$.

Aufgabe 2. (*Determinante und Potenzen der Spur*)
Zeigen Sie für alle $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ die Gleichheit

$$\det A = \frac{1}{6}(\operatorname{Spur} A)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{Spur} A^2)(\operatorname{Spur} A) + \frac{1}{3}(\operatorname{Spur} A^3).$$

Aufgabe 3. (*Diagonalisieren*)

1. Es sei
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$
   Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.
2. Es sei
$$A := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$
   Geben Sie eine Basis von K^{2n} aus Eigenvektoren von A an. Bestimmen Sie anschließend $p_A(t)$ sowie $\det A$.

   (*Tipp*: A vertauscht die Basisvektoren e_i und e_{n+i}.)

Aufgabe 4. (*Wurzeln und Potenzen*)
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad B := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

1. Geben Sie eine Matrix $C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $A = C^2$ an.
2. Berechnen Sie B^{2017}.
   (*Tipp*: Ignorieren Sie ggf. zunächst den Vorfaktor $1/\sqrt{2}$.)

Aufgabe 5. (*Cayley-Hamilton*)
Es sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie für $A \in \mathrm{M}_n(K)$, dass die Potenzen $\mathbb{1}, A, A^2, \dots, A^n$ linear abhängig sind.
2. Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $p \in K[t]$ mit $p(A) = A^{-1}$ gibt. Bestimmen Sie ein solches Polynom für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 6. (*Simultane Diagonalisierbarkeit*)

1. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und es seien $f, g\colon V \to V$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass auch $f \circ g$ diagonalisierbar ist.
2. Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

   simultan diagonalisierbar sind.

Aufgabe 7. (*Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*)
Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$. Es sei

$$\mathrm{Sym}_n(K) = \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Raum der symmetrischen Matrizen und

$$\mathrm{Alt}_n(K) = \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}_n(K)$ und $\mathrm{Alt}_n(K)$ Untervektorräume von $\mathrm{M}_n(K)$ sind, und dass $\mathrm{M}_n(K) = \mathrm{Sym}_n(K) \oplus \mathrm{Alt}_n(K)$ gilt.

   (*Hinweis*: Für die Abbildung $f\colon \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K)$, $A \mapsto A^T$ gilt $f^2 = \mathrm{id}$.)

2. Geben Sie Basen von $\mathrm{Sym}_n(K)$ und $\mathrm{Alt}_n(K)$ an.

Aufgabe 8.
Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$. Zeigen Sie, dass v für jedes Polynom $p \in K[t]$ ein Eigenvektor von $p(f)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$ ist.

2. Es sei K algebraisch abgeschlossen und $p \in K[t]$. Zeigen Sie, dass es für jeden Eigenwert μ von $p(f)$ einen Eigenwert λ von f mit $\mu = p(\lambda)$ gibt.
   (*Tipp*: Zeigen Sie zunächst, dass der Endomorphismus $(p - \lambda)(f)$ nicht injektiv ist. Zerlegen Sie anschließend $p - \lambda$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 9. (*Diagonalisieren über* $\mathbb{F}_5$)
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_5).$$

Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_5)$, so dass $S^{-1}AS$ in Diagonalform ist.