Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional.

Aufgabe 1. (*Die Determinante als Bilinearform*)
Zeigen Sie, dass

$$\beta\colon K^2 \times K^2 \to K, \quad \text{mit} \quad \beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf K^2 definiert.

Aufgabe 2. (*Total isotrope Untervektorräume*)
Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform. Es sei $U \subseteq V$ ein total isotroper Untervektorraum, d.h. es gelte $\beta(u,u) = 0$ für alle $u \in U$. Zeigen Sie, dass $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$ gilt.
(*Tipp*: Zeigen Sie zunächst, dass $U \subseteq U^\perp$ gilt.)

Aufgabe 3. (*Eine symmetrische* (2×2)*-Matrix*)
Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ symmetrisch mit $\det A < 0$. Bestimmen Sie den Rang und die Signatur von A.

Aufgabe 4. (*Rang und Signatur I*)
Es sei

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie Rang und Signatur von $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\beta(x,y) \coloneqq x^T A y \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 5. (*Rang und Signatur II*)
Es sei

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie Rang und Signatur von $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{2n})$ mit

$$\beta(x,y) \coloneqq x^T A y \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 6. (*Symmetrische Bilinearformen über* $\mathbb{C}$)
Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, dass es mit $r \coloneqq \operatorname{rg} \beta$ eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. (*Anzahl von Kongruenzklassen*)
Es sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Bestimmen Sie die Anzahl der Kongruenzklassen

1. symmetrischer Bilinearformen auf V für $K = \mathbb{R}$,
2. symmetrischer, nicht-ausgearteter Bilinearformen auf V für $K = \mathbb{R}$,
3. symmetrischer Bilinearformen auf V für $K = \mathbb{C}$
4. symmetrischer, nicht-ausgearteter Bilinearformen auf V für $K = \mathbb{C}$.

Lösungen

Lösung 7.

1. Die Kongruenzklassen von symmetrischen Bilinearformen auf V entsprechen genau den Kongruenzklassen von reellen, symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen. Ein Repräsentantensystem dieser Kongruenzklassen ist nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz durch die Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \tag{1}$$
gegeben.
Für die Anzahl der Nullen, r, gibt es dabei $n+1$ viele Möglichkeiten. Für die restlichen $n-r$ vielen Diagonaleinträge gibt es dann $n-r+1$ viele Möglichkeiten, diese auf die Werte 1 und -1 aufzuteilen. Damit ergeben sich insgesamt
$$\sum_{r=0}^{n}(n-r+1) = \sum_{r'=1}^{n+1} r' = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \binom{n+2}{2}$$
viele Kongruenzklasse.

2. Wir gehen wie im vorherigen Aufgabenteil vor. Die Kongruenzklassen nicht-ausgearteter symmetrischen Bilinearformen auf V entsprechen dabei genau denn Matrizen der Form (1), die Rang n haben; also genau den Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & \\ & -\mathbb{1}_q \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$
Für die Anzahl der Einsen, p, gibt es dabei $n+1$ viele Möglichkeiten; die Anzahl der Minus-Einsen, q, ist dann dann durch $q = n-p$ bereits eindeutig bestimmt. Es ergeben sich also $n+1$ viele Kongruenzklassen.

3. Nach Aufgabe 6 entsprechen die Kongruenzklassen symmetrischer Bilinearformen auf V genau den Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & \\ & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}). \tag{2}$$
Für die Anzahl der Einsen, r, gibt es $n+1$ viele Möglichkeiten, und die Matrix ist durch die Zahl r bereits eindeutig bestimmt. Es gibt also $n+1$ viele Kongruenzklassen.

4. Die Kongruenzklassen nicht-ausgearteter, symmetrischer Bilinearformen auf V entsprechen genau Matrizen der Form (2) von Rang n; also genau Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$
Es gibt nur eine solche Matrix, nämlich $\mathbb{1}_n$. Also gibt es genau eine Kongruenzklasse.