Aufgabe 1.

1. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass es für jeden diagonalisierbaren Endomorphismus $f\colon V \to V$ ein Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen f selbstadjungiert ist.
2. Wieso gilt die analoge Aussage für komplexe Vektorräume nicht?

Aufgabe 2.

1. Es sei V ein endlichdimensionalerunitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus mit $\langle f(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass bereits $f = 0$ gilt.
(*Hinweis*: Betrachten Sie die Eigenwerte von f.)
2. Zeigen Sie, dass die analoge Aussage im reellen im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 3.

Es sei $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $\|f(v)\| = \left\|f^{\mathrm{ad}}(v)\right\|$ für alle $v \in V$ gilt.
2. Folgern Sie, dass $\ker f = \ker f^{\mathrm{ad}}$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $f - \lambda \operatorname{id}_V$ normal ist.
4. Folgern Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ die Gleichheit $V_\lambda(f) = V_{\overline{\lambda}}(f^{\mathrm{ad}})$ gilt.
5. Folgern Sie, dass $V_\lambda(f) \perp V_\mu(f)$ für alle $\lambda \neq \mu$ gilt.

Aufgabe 4.

Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:
   a) Der Endomorphismus f ist *antiselbstadjungiert*, d.h. es gilt $f^{\mathrm{ad}} = -f$.
   b) Der Endomorphismus f ist normal, und alle Eigenwerte von f sind rein imaginär (d.h. aus $i\mathbb{R}$).
2. Zeigen Sie, dass $f - \operatorname{id}_V$ und $f + \operatorname{id}_V$ Isomorphismen sind.
3. Zeigen Sie, dass $(f - \operatorname{id}_V)^{-1} \circ (f + \operatorname{id}_V)$ eine Isometrie ist.

Aufgabe 5.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, so dass $p_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt.

1. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, falls A normal ist.
2. Zeigen Sie, dass $A^2 = \mathbb{1}$ gilt, falls A orthogonal ist.

Aufgabe 6.
Es sei $A \in \mathrm{O}(n)$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass bereits $A = \mathbb{1}$ gilt.

Aufgabe 7.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f, g \colon V \to V$ ein selbstadjungierte Endomorphismen.

1. Zeigen Sie, dass $f = 0$ gilt, falls f nilpotent ist
2. Zeigen Sie, dass $f^2 = \mathrm{id}_V$ gilt, falls f orthogonal ist.
3. Zeigen Sie, dass $f = g$ gilt, falls es ein $n \geq 0$ mit $(f - g)^n = 0$ gibt.

Aufgabe 8.
Es sei $A \in \mathrm{U}(n)$.

1. Zeigen Sie, dass $|\operatorname{Spur} A| \leq n$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass genau dann Gleichheit gilt, wenn A ein Vielfaches von $\mathbb{1}$ ist.

Aufgabe 9.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Zeigen Sie, dass es eindeutige hermitesche Matrizen $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B + iC$ gibt.
2. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn B und C kommutieren.
3. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige hermitesche Matrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und schiefhermitesche Matrix $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (d.h. $E^* = -E$) mit $A = D + E$ gibt.
4. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn D und E kommutieren.
5. Wie hängen die bedien Zerlegungen $A = B + iC$ ud $A = D + E$ zusammen?

Aufgabe 10. (*Spiegelungen*)
Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Für jedes $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$ sei

$$s_\alpha \colon V \to V, \quad \text{mit} \quad s_\alpha(x) := x - 2\frac{\langle x, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha.$$

Ferner seien $L_\alpha := \mathbb{R}\alpha$ und $H_\alpha := L_\alpha^\perp$.

1. Zeigen Sie, dass $L_\alpha = V_{-1}(s_\alpha)$ und $H_\alpha = V_1(s_\alpha)$.

Also ist s_α die orthogonale Spiegelung an der Hyperebene H_α.

2. Zeigen Sie, dass s_α orthogonal ist.
3. Zeigen Sie, dass $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$ für alle $t \in \mathrm{O}(V)$ gilt.

Aufgabe 11.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Entscheiden Sie, weche Implikationen zwischen den folgenden Aussagen gelten:

1. Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten.
2. Der Endomorphismus f ist orthogonal mit positiven Eigenwerten.
3. Der Endomorphismus f ist normal mit $\det f > 0$.
4. Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert und orthogonal.

Aufgabe 12.
Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in \mathrm{O}(n)\mathbb{R}$, die obere Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 13.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ hermitesch und negativ semidefinit.

1. Zeigen Sie, dass es eine schiefhermitesche Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $B^2 = A$ gibt.
2. Entscheiden Sie, ob B eindeutig ist.