Notizen zum

Repetitorium
Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

16. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Diagonalisierbarkeit & Verwandte

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.1.

- *Sind* $\lambda \in K$ *und* $v \in V$ *mit* $v \neq 0$ *und* $f(v) = \lambda v$, *so ist* v *ein* Eigenvektor *von* f *zum* Eigenwert λ. *Für alle* $\lambda \in K$ *ist der Untervektorraum*

$$V_\lambda(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = \lambda f\} = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$$

  der Eigenraum *von* f *zu* λ. *Die Zahl* $\dim V_\lambda(f)$ *ist die* geometrische Vielfachheit *von* λ.

- *Es sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A \in \mathrm{M}_n(K)$. *Sind* $\lambda \in K$ *und* $x \in K^n$ *mit* $x \neq 0$ *und* $Ax = \lambda x$, *so ist* x *ein* Eigenvektor *von* A *zum* Eigenwert λ. *Für alle* $\lambda \in K$ *ist der Untervektorraum*

$$(K^n)_\lambda(A) \coloneqq \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

  der Eigenraum *von* A *zu* λ. *Die Zahl* $\dim(K^n)_\lambda(A)$ *ist die* geometrische Vielfachheit *von* λ.

Bemerkung 1.2.

1. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $f\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige Endomorphismus, so stimmen die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume von A mit denen von f überein.

   Es genügt daher im Folgenden, Definitionen und Aussagen für Endomorphismen zu anzugeben – für Matrizen gelten diese dann ebenfalls.

2. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Bezüglich des zu $\mathcal{B}$ zugehörigen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}}\colon V \to K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T \eqqcolon [v]_{\mathcal{B}}$$

   gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}}(V_\lambda(f)) = (K^n)_\lambda(A).$$

Es ist also $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $[v]_{\mathcal{B}}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Berechnungen lassen sich deshalb in Matrizenform durchführen.

Für theoretische Aussagen nutzen wir also Endomorphismen, und für konkrete Rechnungen nutzen wir Matrizen.

1.2 Das charakterische Polynom

Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $A := \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die zugehörige darstellende Matrix von f. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\ \iff & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \\ \iff & (K^n)_\lambda(A) \neq 0 \\ \iff & \ker(A - \lambda \mathbb{1}) \neq 0 \\ \iff & A - \lambda\mathbb{1} \text{ ist nicht invertierbar} \\ \iff & \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0. \end{aligned}$$

Definition 1.3. *Das* charakterische Polynom *von A ist definiert als*

$$p_A(t) := \det(A - t\mathbb{1}) \in K[t].$$

Das charakteristische Polynom von f ist definiert als $p_f(t) := p_A(t)$.

Dass das charakteristische Polynom $p_f(t)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt, folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1.4. *Ähnliche Endomorphismen, bzw. Matrizen haben das gleiche charakterische Polynom.*

Aus unserer anfänglichen Beobachtung erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom von f:

Proposition 1.5. *Die Eigenwerte von f sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_f(t)$. Die Vielfachheit des Linearfaktors $t - \lambda$ in $p_f(t)$ ist die* algebraische Vielfachheit *von λ.*

Beispiel 1.6.

1. Für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$
gilt
$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 3 & 1-t & 2 \\ 2 & 3 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 + 15t + 18.$$

Die einzige reelle Nullstelle von $p_A(t)$, und somit der einzige reelle Eigenwert von A, ist 6. Der entsprechende Eigenraum ist

$$(\mathbb{R}^3)_6(A) = \ker(A - 6\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Es gilt $p_A(t) = \det(A - t\mathbb{1}) = \det(A - t\mathbb{1})^T = \det(A^T - t\mathbb{1}) = p_{A^T}(t)$.

3. Ist A eine obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n - t \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t) = (-1)^n (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also genau die Diagonaleinträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

4. Ist allgemeiner A eine obere Blockdreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_r \end{pmatrix}$$

mit $A_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$, so gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} A_1 - t\mathbb{1}_{n_1} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_r - t\mathbb{1}_{n_r} \end{pmatrix} \\ &= \det(A_1 - t\mathbb{1}_{n_1}) \cdots \det(A_r - t\mathbb{1}_{n_r}) = p_{A_1}(t) \cdots p_{A_r}(t). \end{aligned}$$

Allgemein ist das charakteristische Polynom von $A \in \mathrm{M}_n(K)$ von der Form

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (\operatorname{Spur} A) t^{n-1} + \cdots + \det A.$$

Beispiel 1.7. Das charakteristische Polynom einer (2×2)-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(K)$ ist gegeben durch

$$p_A(t) = t^2 - (\operatorname{Spur} A)t + \det A = t^2 - (a + d)t + (ad - bc).$$

1.3 Das Minimalpolynom

Lemma 1.8. *Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, so ist v für jedes Polynom $p \in K[t]$ ein Eigenvektor von $p(f)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$. Inbesondere sind die Eigenwerte von f Nullstellen von p, falls $p(f) = 0$ gilt.*

Beispiel 1.9.

1. Ist f nilpotent mit $f^k = 0$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) \coloneqq t^k$. Deshalb ist 0 der einzige mögliche Eigenwert von f.
2. Gilt $f^3 = 3f - 2\,\mathrm{id}_V$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) \coloneqq t^3 - 3t + 2$. Es gilt $q(t) = (t-1)^2(t+2)$, also sind 1 und -2 die einzigen möglichen Eigenwerte für f.
3. Gilt $f^2 = -\,\mathrm{id}_V$, so hat f im Fall $K = \mathbb{R}$ keine Eigenwerte.

Definition 1.10.

- *Es sei*
$$\mathrm{Pol}(f) \coloneqq \{p \in K[t] \mid p(f) = 0\}.$$
Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\mathrm{Pol}(f)$ *ist das* Minimalpolynom *von f, und wird mit $m_f(t) \in K[t]$ notiert.*
- *Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sei*
$$\mathrm{Pol}(A) \coloneqq \{p \in K[t] \mid p(A) = 0\}.$$
Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\mathrm{Pol}(A)$ *ist das* Minimalpolynom *von A, und wird mit $m_A(t) \in K[t]$ notiert.*

Bemerkung 1.11. Die Wohldefiniertheit von $\mathrm{Pol}(f)$ nutzt die Endlichdimensionalität von V. Hierdurch wird sichergestellt, dass $\mathrm{Pol}(f) \neq 0$ gilt.

Lemma 1.12. *Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so gilt für $A = \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$, dass* $\mathrm{Pol}(f) = \mathrm{Pol}(A)$. *Somit gilt $m_f = m_A$.*

Korollar 1.13. *Ähnliche Endomorphismen, bzw. Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.*

Die Definition des Minimalpolynoms lässt sich bis auf Normiertheit wie folgt umschreiben:

Lemma 1.14. *Es gilt*
$$\mathrm{Pol}(f) = \{p \cdot m_f \mid p \in K[t]\}.$$
Für $p \in K[t]$ gilt also genau dann $p(f) = 0$, wenn $m_f \mid p$. Inbesondere gilt $m_f(f) = 0$.

Satz 1.15 (Cayley–Hamilton)**.** *Es gilt $p_f(f) = 0$, also $m_f \mid p_f$.*

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Nullstelle von $m_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also ein Eigenwert von f. Andererseits ist jeder Eigenwert von f nach Lemma 1.14 und Lemma 1.8 auch eine Nullstelle von $m_f(t)$. Somit sind die Nullstelle non $m_f(t)$ genau die Eigenwerte von f. Also haben $p_f(t)$ und $m_f(t)$ die gleichen Nullstellen.

Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfallen $p_f(t)$ und $m_f(t)$ somit in die gleichen Linearfaktoren. Die Vielfachheit im Minimalpolynom ist dabei nach dem Satz von Cayley–Hamilton jeweils kleiner ist als die Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

1.4 Diagonalisierbarkeit

Lemma 1.16. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig. Inbesondere ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.*

Definition 1.17. *Der Endomorphismus $f \colon V \to V$ heiß* diagonalisierbar *falls er die folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.*
2. *Es gilt $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.*
3. *Es gilt $\dim V = \sum_{\lambda \in K} \dim V_\lambda(f)$.*
4. *Es gibt eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f.*
5. *Es gibt ein Erzeugendensystem von V bestehend aus Eigenvektoren von f.*
6. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt diagonalisierbar*, falls sie eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gilt $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.*
2. *Es gilt $K^n = \sum_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.*
3. *Es gilt $n = \sum_{\lambda \in K} \dim\left((K^n)_\lambda(A)\right)$.*
4. *Es gibt eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A.*
5. *Es gibt ein Erzeugendensystem von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A.*
6. *Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h. es gibt $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.*

Beispiel 1.18.

1. Falls das charakteristische Polynom $p_f(t)$ in paarweise verschieden Linearfaktoren $p_f(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$ zerfällt, so ist f diagonalisierbar:

   Dann gibt es zu jedem Eigenwert λ_i einen Eigenvektor $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$, und die Familie $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ist nach Lemma 1.16 linear unabhängig. Da $n = \dim V$ gilt, ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

2. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, V ein zweidimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ und $f\colon V \to V$ der eindeutige Endomorphismus mit $f(v_1) = v_2$ und $f(v_2) = v_1$. Dann ist $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $v_1 - v_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, und somit $\mathcal{B} = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von f. Also ist f diagonalisierbar.

3. Jede reelle, symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. Inbesondere sind für jede reelle Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die Matrizen $A + A^T$, AA^T und A^TA diagonalisierbar.

Lemma 1.19. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist diagonlisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar ist.*
3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar.*

Beispiel 1.20. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p_A(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = -(t^2 - 3t + 2)(t-1) = -(t-1)^2(t-2).$$

Die Eigenwerte von A sind also 1 und 2. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$(\mathbb{R}^3)_1(A) = \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$(\mathbb{R}^3)_2(A) = \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Also ist

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. Somit ist A diagonalisierbar. Für die entsprechende Basiswechselmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \quad \text{gilt} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Ob der Endomorphismus $f\colon V \to V$ diagonalisierbar ist, hängt nur vom Minimalpolynom $m_f(t)$ ab:

Proposition 1.21. *Der Endomorphismus f ist genau dann diagonalisierbar, falls das Minimalpolynom m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

Die Nullstellen von m_f sind dann, wie bereits oben gesehen, genau die Eigenwerte von f.

Beispiel 1.22.

1. Gilt $f^2 = f$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) := t^2 - t = t(t-1)$. Da $m_f \mid q$ gilt, zerällt somit m_f in die möglichen Linearfaktoren t und $t-1$. Somit ist f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 0 und 1.

2. Gilt $f^2 = \mathrm{id}_V$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$. Gilt $\operatorname{char} K \neq 2$, so ist f somit diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 1 und -1.

Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum, so gilt für die den eingeschränkten Endomorphismus $f|_U\colon U \to U$, dass $m_f(f|_U) = m_f(f)|_U = 0$, und somit dass $m_{f|_U} \mid m_f$.

Korollar 1.23. *Ist f diagonalisierbar, so ist auch $f|_U$ diagonalisierbar.*

1.5 Trigonalisierbarkeit

1.5.1 Definition von Trigonalisierbarkeit

Definition 1.24. *Der Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt trigonalisierbar, falls A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist, d.h. falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Lemma 1.25. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist trigonalisierbar.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar ist.*

3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar.*

1.5.2 Äquivalente Charakterisierungen

Definition 1.26. *Eine* Flagge *von V ist eine aufsteigende Kette von Unterverktorräumen*

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

mit $\dim V_k = k$ *für alle k. (Inbesondere ist* $n = \dim V$*). Die Flagge heißt* f-stabil *wenn* $f(V_k) \subseteq V_k$ *für alle k gilt.*

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V mit $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in oberer Dreiecksform, so ist

$$0 \subsetneq \langle v_1 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$$

eine f-invariante Flagge von V. Ist andererseits

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V \tag{1.1}$$

eine Flagge von V, so ergibt sich durch Basisergänzung eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, so dass $V_k = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ für alle k gilt. Ist die Flagge (1.1) f-invariant, so ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix.

Hierdurch ergibt sich die folgende Charakterisierung triagonalisierbarer Endomorphismen:

Satz 1.27. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist trigonalisierbar.*
2. *Es gibt eine f-invariante Flagge von V.*
3. *Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.*

Inbesondere hängt die Trigonalisierbarkeit von f nur vom charakteristischen Polynom $p_f(t)$ ab. Außerdem ist jeder Endomorphismus von V trigonalisierbar, falls K algebraisch abgeschlossen ist.

1.6 Spur und Determinante durch Eigenwerte

Zerfällt $p_f(t)$ in Linearfaktoren $p_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$, so ist f nach Satz 1.27 trigonalisierbar. Dann gilt

$$\operatorname{Spur} f = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{und} \quad \det f = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Außerdem ist für jedes Polynom $q \in K[t]$ auch der Endomorphismus $q(f)$ trigonalisierbar, und es gilt

$$p_{q(f)}(t) = (t - q(\lambda_1)) \cdots (t - q(\lambda_n)).$$

1.7 Simultane Diagonalisierbarkeit

Definition 1.28. *Eine Kollektion f_i, $i \in I$ von Endomorphismen $f_i \colon V \to V$ heißt* simultan diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.*

Eine Kollektion A_i, $i \in I$ von Matrizen $A_i \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt simultan diagonalisierbar*, falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass SA_iS^{-1} für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.*

Lemma 1.29. *Für eine Kollektion f_i, $i \in I$ von Endomorphismen $f_i \colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Endomorphismen f_i, $i \in I$ sind simultan diagonalisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrizen $\mathrm{M}_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}}$, $i \in I$ simultan diagonalisierbar sind.*
3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V sind die Matrizen $\mathrm{M}_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}}$, $i \in I$ simultan diagonalisierbar.*

Beispiel 1.30. Sind die Endomorphismen $f, g \colon V \to V$ simultan diagonalisierbar, so sind auch $f + g$ und $f \circ g$ diagonalisierbar.

Proposition 1.31. *Für Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n \colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ sind simultan diagonalisierbar.*
2. *Die Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ sind diagonalisierbar und paarweise kommutierend, d.h. es gilt $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für alle i, j.*

2 Die Jordan-Normalform

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

2.1 Definition

Definition 2.1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ ist*

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

der Jordanblock *zu λ von Größe n.*

Definition 2.2. *Eine Matrix J der Form*

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

ist in Jordan-Normalform*.*

Definition 2.3. *Eine* Jordan-Normalform *einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist eine zu A ähnliche Matrix $J \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass J in Jordan-Normalform ist.*

Eine Jordan-Normalform von f ist eine Jordan-Normalform der darstellenden Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V.

Der Endomorphismus f besitzt genau dann eine Jordan-Normalform $J \in \mathrm{M}_n(K)$, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = J$ gilt. Wir bezeichnen eine solche Basis als *Jordanbasis* von f.

Eine *Jordanbasis* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist eine Jordanbasis der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörigen linearen Abbildung $f_A\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$. Dies ist äquivalent dazu, dass für die Matrix $S = (v_1 \dots v_n) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix $S^{-1}AS = \mathrm{M}_{f_A,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in Jordan-Normalform ist.

2.2 Eindeutigkeit

Es sei J eine Matrix in Jordan-Normalform, also

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Für alle $\lambda \in K$ gilt dann

$$\dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k = \sum_{k'=1}^{k} \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k'.$$

Für die Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k$ gilt deshalb

$$d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) = \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k$$

und somit

$$\begin{aligned} &\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \\ = &\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq k \\ &- \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe} \geq (k+1) \\ = &(d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda)) - (d_{k+1}(\lambda) - d_k(\lambda)) \\ = &2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $\lambda \in K$ eine Jordan-Normalform von A, so sind A und J ähnlich, weshalb für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ auch $(A - \lambda \mathbb{1})^k$ und $(J - \lambda \mathbb{1})^k$ ähnlich sind. Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ gilt deshalb $\dim \ker(A - \lambda)^k = \dim \ker(J - \lambda)^k$. Aus der obigen Berechnung ergibt sich deshalb für die Zahlen $d_k(\lambda) \coloneqq \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k$, dass

$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \text{ in } J = 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Damit ergibt sich inbesondere die folgende Eindeutigkeit der Jordan-Normalform:

Proposition 2.4. *Je zwei Jordan-Normalformen einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus stimmen bis auf Permutation der Jordanblöcke überein.*

Es ergibt daher Sinn, von *der* Jordan-Normalform einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus zu sprechen.

2.3 Existenz & Kochrezept

Definition 2.5.

- *Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei*

$$V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid (f - \lambda \operatorname{id}_V)^k(v) = 0\} = \ker(f - \operatorname{id}_V)^k.$$

Der Untervektorraum

$$V_\lambda^\infty(f) \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} V_\lambda^k(f) = \bigl\{v \in V \mid \textit{es gibt } k \geq 0 \textit{ mit } (f - \lambda \operatorname{id}_V)^k(v) = 0\bigr\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum *von f zu λ.*

- *Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei*

$$(K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid (A - \lambda \mathbb{1})^k x = 0\} = \ker(A - \mathbb{1})^k.$$

Der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda^\infty(A) \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} (K^n)_\lambda^k(A) = \bigl\{x \in K^n \mid \textit{es gibt } k \geq 0 \textit{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k x = 0\bigr\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum *von A zu λ.*

Beispiel 2.6. Der Endomorphismus f ist genau dann nilpotent, wenn $V_0^\infty(f) = V$.

Lemma 2.7.

1. *Es gilt genau dann $V_\lambda^\infty(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.*
2. *Die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$ ist direkt.*

Mithilfe der verallgemeinerten Eigenräume ergibt sich eine Charakterisierung der Existenz der Jordan-Normalform:

Satz 2.8. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.*
2. *Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$.*
3. *Die Jordan-Normalform von f existiert.*

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt, so lässt sich die Jordan-Normalform von A sowie eine zugehörige Jordanbasis nach dem folgenden *Kochrezept* berechnen:

- Man bestimme die Eigenwerte von A, etwa indem man $p_A(t)$ berechnet und anschließend die Nullstellen herausfindet.
- Für jeden Eigenwert λ von A führe man die folgenden Schritte durch:
  - Man berechne die iterierten Kerne $\ker(A - \lambda\mathbb{1}), \ker(A - \lambda\mathbb{1})^2, \dots, \ker(A - \lambda\mathbb{1})^m$ bis zu dem Punkt, an dem eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
    - Die Dimension $\dim \ker(A - \lambda\mathbb{1})^m$ ist die algebraische Vielfachheit von λ in $p_A(t)$.

- Es gilt $\ker(A - \lambda\mathbb{1})^m = \ker(A - \lambda\mathbb{1})^{m+1}$.
- Man bestimme Anhand der Zahlen $d_k(\lambda) := \dim\ker(A - \lambda\mathbb{1})^k$ die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke zu λ von Größe k als
$$b_k(\lambda) := 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Aus den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ von A und den Zahlen $b_k(\lambda_i)$ erhalten wir bereits, wieviele Blöcke es zu welchen Eigenwert von welcher Größe gibt, d.h. wie die Jordan-Normalform von A (bis auf Permutation der Blöcke) aussehen wird. Inbesondere ist $d_1(\lambda)$ die Gesamtzahl der Jordanblöcke zu λ und die entsprechende Potenz m die maximal auftretende Blöckgröße zu λ.

Zur Berechnung einer Jordanbasis von A geht man weiter wie folgt vor:

- Für jeden Eigenwert λ von A gehe man weiterhin wie folgt vor:
  - Man wähle Vektoren $v_1, \dots, v_{b_m} \in \ker A^m$ mit
  $$\ker A^m = \ker A^{m-1} \oplus \langle v_1, \dots, v_{b_m} \rangle .$$
  (Zur konkreten Berechnung ergänze man eine Basis $\ker A^{m-1}$ zu einer Basis von $\ker A^m$; dann kann man $v_1, \dots, v_{b_m}$ als die neu hinzugekommenen Basisvektoren wählen.)
  - Hierdurch ergeben sich für $\mathcal{B}$ die ersten paar Basisvektoren
  $$\begin{gathered} v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1, \\ v_2, Av_2, \dots, A^{m-1}v_2, \\ \dots, \\ v_{b_m}, Av_{b_m}, \dots, A^{m-1}v_{b_m}. \end{gathered}$$
  - Man wählt nun Vektoren $v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \in \ker A^{m-1}$, so dass
  $$\ker A^{m-1} = \ker A^{m-2} \oplus \langle Av_1, \dots, Av_{b_m} \rangle \oplus \left\langle v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \right\rangle$$
  gilt.
  - Hierdurch erhält man für $\mathcal{B}$ die weiteren Basisvektoren
  $$\begin{gathered} v'_1, Av'_1, \dots, A^{m-2}v'_1, \\ v'_2, Av'_2, \dots, A^{m-2}v'_2, \\ \dots, \\ v'_{b_{m-1}}, Av'_{b_{m-1}}, \dots, A^{m-2}v'_{b_{m-1}}. \end{gathered}$$
  - Man wähle nun $v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \in \ker A^{m-2}$, so dass
  $$\begin{aligned} &\ker A^{m-1} \\ &= \ker A^{m-2} \oplus \left\langle A^2v_1, \dots, A^2v_{b_m} \right\rangle \oplus \left\langle Av'_1, \dots, Av'_{b_{m-1}} \right\rangle \oplus \left\langle v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \right\rangle \end{aligned}$$
  gilt.

∘ Hiermit ergeben sich für $\mathcal{B}$ die Basisvektoren

$$\begin{gathered} v_1'', Av_1'', \dots, A^{m-2}v_1'', \\ v_2'', Av_2'', \dots, A^{m-2}v_2'', \\ \dots, \\ v_{b_{m-2}}'', Av_{b_{m-2}}'', \dots, A^{m-2}v_{b_{m-2}}''. \end{gathered}$$

Durch Weiterführen der obigen Schritte erhält man schließlich eine Basis $\mathcal{B}_\lambda$ von $(K^n)^\infty_\lambda(A)$.

- Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von K^n, so ergibt sich Zusammenfügen der Basen $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_t}$ eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n. (Hier nutzen wir, dass $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)^\infty_\lambda(A)$ gilt.)
- Die Basis $\mathcal{B}$ ist eine Jordanbasis von A. Indem man die Basisvektoren als Spalten in eine Matrix C einträgt, erhält man schließlich $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist. Dabei sind die Blöcke zunächst nach den Eigenwerten in der zuvor gewählten Reihenfolge sortiert; die Blöcke zum gleichen Eigenwert sind nach absteigender Größe sortiert.

Beispiel 2.9. Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$$

gilt $p_A(t) = -(t-2)^3$. Also ist 2 der einzige Eigenwert von A. Es gilt

$$\ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit gilt $\dim \ker(A - 2\mathbb{1}) = 2$. Also gibt es zwei Jordanblöcke. Die Jordan-Normalform von A ist somit

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.10. Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_7)$ und $f \colon V \to V$ der eindeutige Endomorphismus mit $f(v_1) = f(v_2) = v_5$, $f(v_3) = f(v_4) = v_6$, $f(v_5) = f(v_6) = v_7$ und $f(v_7) = 0$. Es gilt $f^3 = 0$, also ist f nilpotent; insbesondere besitzt f eine Jordan-Normalform, wobei 0 der einzige auftretende Eigenwert ist.

Für die darstellende Matrix

$$A \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = 0.$$

Somit gelten

$$\begin{aligned} \ker A &= \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6, e_7 \rangle \,, \\ \ker A^2 &= \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle \,, \\ \ker A^3 &= K^7. \end{aligned}$$

Mit $d_1 = \dim \ker A = 4$, $d_2 = \dim \ker A^2 = 6$ und $d_k = \ker \ker A^k = 7$ für $k \geq 3$ erhalten wir, dass $b_1 = 2d_1 - d_2 = 2$, $b_2 = 2d_2 - d_3 - d_1 = 1$, $b_3 = 2d_3 - d_4 - d_2 = 1$ und $b_k = 0$ für $k \geq 4$.

Die Jordan-Normalform von A (und damit von f) besteht also aus zwei Blöcken der Größe 1, einem Block der Größe 2 und einem Block der Größe 3 (jeweils zum Eigenwert 0). Wir Bestimmen nun eine Jordanbasis:

- Wir benötigen zunächst $w_1 \in \ker A^3 = K^7$ mit $K^7 = \ker A^2 \oplus \langle w_1 \rangle$. Hierfür muss nur $w_1 \notin \ker A^2$ gelten. Wir wählen $w_1 \coloneqq e_1$. Dann erhalten wir auch die weiteren Basisvektoren $Aw_1 = e_5$ und $A^2 w_1 = e_7$.

- Als nächstes benötigen wir $w_2 \in \ker A^2$ mit

  $$\ker A^2 = \ker A \oplus \langle Aw_1 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6, e_7 \rangle \oplus \langle e_5 \rangle \oplus \langle w_2 \rangle \,.$$

  Wir müssen also die Familie $(e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_5 - e_6, e_7)$ zu einer Basis von $\ker A^2$ ergänzen. Da

  $$\langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_5 - e_6, e_7 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$$

  können wir $w_2 \coloneqq e_2 - e_3$ wählen. Damit erhalten wir außerdem den Basisvektoren $Aw_2 = e_5 - e_6$.

- Schließlich brauchen wir noch $w_3, w_4 \in \ker A$ mit

  $$\ker A = \left\langle A^2 w_1 \right\rangle \oplus \langle A w_2 \rangle \oplus \langle w_3, w_4 \rangle = \langle e_7 \rangle \oplus \langle e5 - e_6 \rangle \oplus \langle w_3, w_4 \rangle .$$

  Wir müssen also die Familie $(e_5 - e_6, e_7)$ zu einer Basis von $\ker A$ ergänzen. Hierfür können wir $w_3 \coloneqq e_1 - e_2$ und $w_4 \coloneqq e_3 - e_4$ wählen.

Ingesamt haben wir somit die Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$, bzw. die Basiswechselmatrix

$$S \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{C},\mathcal{C}} = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4 Lösung des Ähnlichkeitsproblems

Es seien $f, g \colon V \to V$ zwei Endorphismen, die jeweils eine Jordan-Normalform besitzen.

Satz 2.11. *Die Endomorphismen f und g sind genau dann ähnlich, wenn sie (bis auf Permutation der Blöcke) die gleiche Jordan-Normalform besitzen.*

Also sind $f, g \colon V \to V$ genau dann ähnlich, wenn ihre charakteristischen Polynome

$$p_f(t) = p_g(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$$

übereinstimmen, und wenn für jeden Eigenwert λ_i gilt, dass

$$\dim \ker(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k = \dim \ker(g - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k \qquad \text{für alle } k = 1, \dots, n_i.$$

Beispiel 2.12.

1. Für nilpotente Matrizen existiert immer eine verallgemeinerte Eigenraumzerlegung. Deshalb sind zwei nilpotente Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ genau dann ähnlich, wenn $\dim \ker A^k = \dim \ker B^k$ für alle $k \geq 0$ gilt.

2. Es seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

   Dann gilt $p_{A_1}(t) = p_{A_2}(t) = p_{A_3}(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Da 2 ein jeweils algebraische Vielfachheit 1 hat, gilt

$$\dim\ker(A_1 - 2\mathbb{1}) = \dim\ker(A_2 - 2\mathbb{1}) = \dim\ker(A_3 - 2\mathbb{1}) = 1.$$

   Für den Eigenwerte 1 ergeben sich die Dimensionen

$$\dim\ker(A_1 - \mathbb{1}) = \dim\ker(A_1 - \mathbb{1}) = 1 \quad \text{und} \quad \dim\ker(A_3 - \mathbb{1}) = 2,$$

   also ist A_3 zu keiner der beiden anderen Matrizen ähnlich. Da ferner

$$\dim\ker(A_1 - \mathbb{1})^2 = \dim\ker(A_2 - \mathbb{1})^2 = 2$$

   gilt, sind A_1 und A_2 ähnlich.

3. Da A_1 und A_2 in unterer, bzw. oberer Jordan-Normalform sind, sieht man direkt, dass Sie nicht diagonalisierbar sind.

   Die Matrix A_3 ist hingegen eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke beide diagonalisierbar sind: Der obere Block ist diagonalisierbar, da es sich um eine obere Dreicksmatrix mit paarweise verschieden Diagonaleinträgen handelt. Also ist auch A_3 diagonalisierbar.

   Hierdurch sieht man bereits, dass A_3 nicht ähnlich zu A_1 oder A_2 ist. Dass A_1 und A_2 ähnlich sind, erkennt man dann aus der folgenden Aussage:

4. Besitzt $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Jordan-Normalform, so sind A und A^T ähnlich. Inbesondere sind jede Matrix in unterer Jordan-Normalform ähnlich zu der entsprechenden oberen Jordan-Normalform.

2.5 Die Jordan–Chevalley-Zerlegung

Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, der die Bedingungen aus Satz 2.8 erfüllt.

Proposition 2.13 (Jordan–Chevalley-Zerlegung)**.** *Es gibt eine eindeutige Zerlegung $f = d + n$ in einen diagonalisierbaren Endomorphismus d und einen nilpotenten Endomorphismus n nilpotent ist, dass d und n kommutieren.*

Die Jordan–Chevalley-Zerlegung ist eine „koordinatenfreie“ Version der Jordan-Normalform; die Existenz dieser Zerlegung ist äquivalent zur Existenz der Jordan-Normalform.

Beispiel 2.14. Für die Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

und die Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A = S \begin{pmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Die Jordan–Chevalley-Zerlegung $A = D + N$ ist somit gegeben durch

$$D = S \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} S^{-1} = S(2\mathbb{1})S^{-1} = 2\mathbb{1}SS^{-1} = 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$N = S \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.6 Implizite Bestimmen der Jordan-Normaform

Es sei $J \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Jordan-Normalform von f.

- Für das charakteristische Polynom $p_f(t) = p_J(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt

  $$n_i = \dim V_\lambda^\infty(f) = \text{wie oft } \lambda_i \text{ auf der Diagonalen von } J \text{ steht}$$

- Es gilt

  $$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ in } J = \dim\ker(f - \mathrm{id}_V) = n - \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}_V).$$

  Inbesondere ist $n - \mathrm{rg}\, f$ die Anzahl der Jordanblöcke zu 0.

- Für das Minimalpolynom $m_f(t) = m_J(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt

  $$m_i = \text{maximale auftretende Größe eines Jordanblockes zu } \lambda_i \text{ in } J$$

- Ist allgemeiner $q(t) \in K[t]$ ein Polymom mit $q(t) = (t - \lambda_1)^{m'_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m'_s}$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und $q(f) = 0$, so ergeben sich die folgenden beiden Restriktionen an J:
  1. Jeder Eigenwert von f kommt in $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ vor (siehe Lemma 1.8),
  2. Es gilt $m_f \mid q$. Deshalb ist $m_f = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$ mit $m_i \leq m'_i$ für alle i. Also sind die Jordanblöcke zu λ_i in J jeweils höchstens m'_i groß.

Zusammen mit den Beobachtungen aus Abschnitt 1.6 kann man hierdurch für kleine Matrizen bereits Aussagen über die Jordan-Normalform treffen, ohne die Matrix selbst zu kennen.

Beispiel 2.15. Es sei $A \in \mathrm{M}_6(\mathbb{C})$ mit $(A - 2\mathbb{1})^2(A - 3\mathbb{1}) = 0$ und $\operatorname{Spur} A = 14$.

Dann sind 2 und 3 die einzigen möglichen Eigenwerte von A. Aus $\operatorname{Spur} A = 14$ erhält man, dass 2 mit algebraischer Vielfachheit 4 vorkommt, und 3 mit algebraischer Vielfachheit 2. Außerdem folgt aus $(A - 2\mathbb{1})^2(A - 3\mathbb{1}) = 0$, dass die Jordanblöcke zu 2 höchstens 2 groß sind, und die Jordanblöcke zu 3 alle Größe 1 haben.

Damit ergeben sich bis auf Permutation der Jordanblöcke die folgenden drei möglichen Jordan-Normalformen:

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

In den ersten beiden Fällen ist $(t-2)^2(t-1)$ das Minimalpolynom, im dritten Fall ist es $(t-2)(t-3)$.

3 Bilinearformen

Notation 3.1. *Für alle* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *schreiben wir* $A^* := \overline{A}^T$.

Definition 3.2. *Die Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *heißt* hermitesch*, falls* $A = A^*$ *gilt.*

Beispiel 3.3.

1. Eine reelle Matrix ist genau dann hermitesch, wenn sie symmetrisch ist.
2. Ist allgemeiner $A = B + iC$ mit $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, so ist A genau dann hermitesch, wenn B symmetrisch und C schiefsymmetrisch ist.

Im Folgenden sei K ein Körper, und U, V und W seien K-Vektorräume.

3.1 Allgemeine Definitionen

Definition 3.4.

- *Eine Abbildung* $\beta\colon V \times W \to U$ *heißt* K-bilinear*, falls*

$$\begin{aligned} \beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) = \lambda\beta(v, w) \quad &\textit{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \lambda\beta(v, w) \end{aligned}$$

  für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ *und* $\lambda \in K$ *gilt.*

- *Gilt zusätzlich* $U = K$*, so ist* β *eine* Bilinearform*. Es ist*

$$\mathrm{BF}(V, W) := \{\beta\colon V \times W \to K \mid \beta \textit{ ist eine Bilinearform}\}.$$

- *Gilt zusätzlich* $V = W$ *und*

$$\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) \qquad \textit{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

  so heißt β symmetrisch*. Es sind*

$$\mathrm{BF}(V) := \mathrm{BF}(V, V)$$

  sowie

$$\mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V) := \{\beta \in \mathrm{BF}(V) \mid \beta \textit{ ist symmetrisch}\}.$$

Definition 3.5. *Es sei* $K = \mathbb{C}$.

- *Eine Abbildung* $\beta\colon V \times W \to U$ *heißt* sesquilinear*, falls*

$$\begin{aligned} \beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) = \lambda\beta(v, w) \quad &\textit{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \overline{\lambda}\beta(v, w) \end{aligned}$$

  für alle $v, v_1, v_2 \in V$*,* $w, w_1, w_2 \in W$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gilt.*

- *Gilt zusätzlich* $U = \mathbb{C}$*, so ist* β *eine* Sesquilinearform*. Es ist*

$$\mathrm{SF}(V, W) \coloneqq \{\beta\colon V \times W \to \mathbb{C} \mid \beta \textit{ ist eine Sesquilinearform}\}.$$

- *Gilt zusätzlich* $V = W$ *und*

$$\beta(v_1, v_2) = \overline{\beta(v_2, v_1)} \qquad \textit{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

  so heißt β hermitesch*. Es sind*

$$\mathrm{SF}(V) \coloneqq \mathrm{SF}(V, V)$$

  sowie

$$\mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V) \coloneqq \{\beta \in \mathrm{BF}(V) \mid \beta \textit{ ist hermitesch}\}.$$

Definition 3.6. *Für* $K = \mathbb{C}$ *heißt eine Abbildung* $f\colon V \to W$ halblinear *falls*

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \textit{und} \quad f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ *und* $\lambda \in K$ *gilt.*

Eine Abbildung $\beta\colon V \times W \to U$ ist genau dann K-bilinear, wenn für alle $v \in V$ und $w \in W$ die Abbildungen

$$\beta(v, -)\colon W \to U, \quad w' \mapsto \beta(v, w')$$

und

$$\beta(-, w)\colon V \to U, \quad v' \mapsto \beta(v', w)$$

linear sind.

Im Fall $K = \mathbb{C}$ ist β genau dann sesquilinear, wenn die Abbildung $\beta(-, w)\colon V \to U$ für jedes $w \in W$ linear ist, und die Abbildung $\beta(v, -)\colon W \to U$ für jedes $v \in V$ halblinear ist.

Beispiel 3.7.

1. Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist die Abbildung

$$\beta_A\colon K^n \times K^n \to K \quad \text{mit} \quad \beta_A(x, y) = x^T A y$$

   eine Bilinearform; β_A ist genau dann symmetrisch, wenn A symmetrisch ist.

Jede Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(K^n)$ ist von dieser Form: Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ die Matrix mit $A_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ für alle i, j, so gilt

$$\beta_A(e_i, e_j) = A_{ij} = \beta(e_i, e_j) \qquad \text{für alle } i, j$$

und somit $\beta = \beta_A$ wegen der Bilinearität von β und β_A.

Damit ergibt sich ein Isomorphismus $\mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{BF}(K^n)$, $A \mapsto \beta_A$.

2. Analog ergibt sich aus jeder Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine Sesquilinearform

$$\beta_A \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad \beta_A(x, y) = x^T A \overline{y},$$

und somit insgesamt ein Isomorphismus $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{SF}(\mathbb{C}^n)$, $A \mapsto \beta_A$. Die hermiteschen Sesquilinearformen entsprechen dabei genau den hermiteschen Matrizen.

3.2 Quadratische Formen und Polarisation

Es gelte $\operatorname{char} K \neq 2$.

Proposition 3.8. *Für $Q \colon V \to K$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Es gibt eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ mit $Q(v) = \beta(v, v)$ für all $v \in V$.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und Koeffizienten $c_{ij} \in K$ mit*

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j \qquad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \in K. \tag{3.1}$$

3. *Für jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V gibt Koeffizienten $c_{ij} \in K$, so dass (3.1) gilt.*
4. *Es gilt $Q(av) = a^2 Q(v)$ für alle $v \in V$ und $a \in K$, und die Abbildung*

$$\beta \colon V \times V \to K \quad \text{mit} \quad \beta(v, w) = \frac{Q(v + w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

   ist bilinear.

Definition 3.9. *Eine Abbildung $Q \colon V \to K$, die eine, und damit alle Eigenschaften aus Proposition 3.8 erfüllt, heißt* quadratische Form *auf V. Es ist*

$$\mathrm{Quad}(V) \coloneqq \{Q \colon V \to K \mid Q \text{ ist eine quadratische Form}\}$$

der K-Vektorraum der quadratischen Formen auf K (mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Jede Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ liefert eine quadratische Form

$$Q_\beta \colon V \to K, \quad v \mapsto \beta(v, v).$$

Andererseits liefert jede quadratische Form $Q\colon V \to K$ eine symmetrische Bilinearform $\beta_Q \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ durch

$$\beta_Q(v, w) \coloneqq \frac{Q(v + w) - Q(v) - Q(w)}{2} \qquad \text{für alle } v, w \in V. \tag{3.2}$$

Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander, und liefern einen Isomorphismus

$$\mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V) \longleftrightarrow \mathrm{Quad}(V), \quad \beta \longmapsto Q_\beta, \quad Q \longleftarrow\!\shortmid \beta_Q.$$

Wir bezeichnen (3.2) als eine *Polarisationsformel*; sie erlaubt es uns, aus der quadratischen Form Q die ursprüngliche symmetrische Bilinearform β zurückzugewinnen. Neben (3.2) gilt auch noch die Polarisationsformel

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2)}{4} \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Bemerkung 3.10. Proposition 3.8 gilt auch für $\operatorname{char} K = 2$, sofern man den Ausdruck $(Q(v + w) - Q(v) - Q(w))/2$ durch $Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$ ersetzt.

Auch für Sesquilinearformen gibt es eine Polarisationsformel: Ist $\beta \in \mathrm{SF}(V)$ eine Sesquilinearform (nicht notwendigerweise hermitesch), so gilt für die Abbildung $Q\colon V \to V$, $v \mapsto Q(v, v)$, dass

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2) + iQ(v_1 + iv_2) - iQ(v_1 - iv_2)}{4}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$

3.3 Orthogonalität

Es sei $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform, bzw. $K = \mathbb{C}$ und $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$ eine hermitsche Sesquilinearform.

Definition 3.11.

- *Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ sind* orthogonal zueinander*, notiert mit $v_1 \perp v_2$, falls $\beta(v_1, v_2) = 0$ gilt.*
- *Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist*

  $$U^\perp = \{v \in V \mid \beta(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

  das orthogonale Komplement *von U bezüglich β.*

- *Eine Familie* $(v_i)_{i\in I}$ *von Vektoren* $v_i \in V$ *heißt* orthogonal*, falls* $v_i \perp v_j$ *für alle* $i \neq j$ *gilt.*
- *Eine* Orthogonalbasis *ist eine orthogonale Basis.*
- *Ein Vektor* $v \in V$ *heißt* normiert *falls* $\beta(v, v) = 1$.
- *Eine Familie* $(v_i)_{i\in I}$ *von Vektoren* $v_i \in V$ *heißt* normiert*, falls* v_i *für jedes* $i \in I$ *normiert ist.*
- *Eine* Orthonormalbasis *ist eine orthogonale, normierte Basis.*

4 Skalarprodukte

Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Wir erweitern Definition 3.6 auf $\mathbb{K}$-Vektorräume:

Definition 4.1. *Eine Abbildng $f\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heißt* halblinear *falls*

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \textit{und} \quad f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entspricht dies genau Definition 3.6. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist Halblinearität das Gleiche wie Linearität.

4.1 Definitheit & Skalarprodukte

Für eine hermitsche Sesquilinearform $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$ gilt $\beta(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Daher ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 4.2. *Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$, oder V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$. Dann ist β*

- positiv definit*, falls $\beta(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- positiv semidefinit*, falls $\beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- negativ definit*, falls $\beta(v, v) < 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- negativ semidefinit*, falls $\beta(v, v) \leq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,*
- indefinit*, falls keiner der obigen Fälle eintritt.*

Definition 4.3.

- *Ein* Skalarprodukt *auf einem reellen Vektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V. Ein* euklidischer Vektorraum *ein reeller Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.*
- *Ein* Skalarprodukt *auf einem komplexen Vektorraum V ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf V. Ein* unitärer Vektorraum *ist ein komplexer Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.*

Wir bezeichnen euklidische Vektorräume und unitäre Vektorräume auch als Skalarprodukträume. *Das zugehörige Skalarprodukt schreiben wir als* $\langle -, - \rangle$.

Definition 4.4.

1. *Das* Standardskalarprodukt *auf* $\mathbb{K}^n$ *ist definiert als*

$$\langle x, y \rangle := x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

2. *Auf* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *wird durch*

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}(AB^*) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \overline{B_{ij}}$$

ein Skalarprodukt definiert. Identifiziert man $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *mithilfe der Standardbasis* $(E_{ij})_{i,j=1}^n$ *mit* $\mathbb{K}^{n^2}$, *so entspricht dies dem Standardskalarprodukt*

3. *Auf dem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist stetig}\}$ *wird durch*

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

ein Skalarprodukt definiert.

4. *Auf dem* $\mathbb{C}$*-Vektorraum* $P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\}$ *wird durch*

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

ein Skalarprodukt definiert. Die Familie $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ *ist orthonormal bezüglich dieses Skalarprodukts.*

Definition 4.5. *Die* Norm *eines Vektors* $v \in V$ *ist definiert als* $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Bemerkung 4.6. Es handelt sich hierbei um eine Norm im Sinne der Analysis.

Beispiel 4.7. Die Norm des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{K}^n$ ist

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

4.2 Orthonormalbasen & Gram–Schmidt

Ist V ein reeller, bzw. komplexer Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform, bzw. $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$ eine hermitesche Bilinearform, so dass es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V bezüglich β gibt, so ist β bereits ein Skalarprodukt:

Für jeden Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es in der Darstellung $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ein i mit $x_i \neq 0$, weshalb

$$\beta(v,v) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{x_j}\, \underbrace{\beta(x_i, x_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0.$$

Mithilfe des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungs-Verfahrens erhalten wir auch die Umkehrung: Jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum V besitzt eine Orthonormalbasis.

Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig. Induktiv konstruiere man Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in V$ wie folgt:

- Man beginnt mit $w_1 \coloneqq w_1 / \|w_1\|$.
- Falls $w_1, \ldots, w_i$ definiert sind, so konstruiert man w_{i+1} in zwei Schritten:
  - Man berechne den Vektor $\tilde{w}_{i+1} \coloneqq v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \langle v_{i+1}, w_j \rangle w_j$. Der Vektor $\tilde{w}_{i+1}$ ist orthogonal zu $w_1, \ldots, w_i$.
  - Aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ folgt, dass $\tilde{w}_{i+1} \neq 0$ gilt. Somit lässt sich $\tilde{w}_{i+1}$ normieren, und man erhält $w_{i+1} \coloneqq \tilde{w}_{i+1} / \|\tilde{w}_{i+1}\|$.

Die entstehende Familie $(w_1, \ldots, w_n)$ ist orthonormal mit

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle w_1, \ldots, w_i \rangle \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Sind dabei $v_1, \ldots, v_i$ bereits orthonormal, so gilt $w_j = v_j$ für alle $j = 1, \ldots, i$.

Satz 4.8. *Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so lässt sich jede Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen. Inbesondere existiert eine Orthonormalbasis für V.*

Korollar 4.9. *Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt $V = U \oplus U^\perp$. Deshalb gelten $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ und $(U^\perp)^\perp = U$.*

Bemerkung 4.10. Wendet man das Gram–Schmidt Verfahren auf linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ an, so ergeben sich für das minimale i mit $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1} \rangle$ zwar noch orthonormale Vektoren $w_1, \ldots, w_{i-1}$, dann aber $\tilde{w}_i = 0$.

4.3 Rieszscher Darstellungssatz

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum. Die Abbildung

$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ist wohldefiniert, da $\langle -, - \rangle$ linear im ersten Argument ist. Außerdem ist Φ halblinear, da $\langle -, - \rangle$ halblinear im zweiten Argument ist.

Satz 4.11. *Die Abbildung Φ ist ein halblinearer Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.*

Der Rieszsche Darstellungssatz besagt also, dass sich jedes $\varphi \in V^*$ eindeutig als $\varphi = \langle -, v \rangle$ mit $v \in V$ darstellen lässt.

4.4 Die Adjungierte Abbildung

Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Skalarprodukträumen V und W.

Proposition 4.12. *Es gibt eine eindeutige Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ mit*

$$\langle f(v), w\rangle = \left\langle v, f^{\mathrm{ad}}(w)\right\rangle \qquad \text{für alle } v \in V,\ w \in W, \tag{4.1}$$

und f^{ad} ist linear.

Lemma 4.13.

- *Es gilt $(f^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = f$.*
- *Es gilt $\mathrm{id}_V^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_V$.*
- *Es gilt $(f \circ g)^{\mathrm{ad}} = g^{\mathrm{ad}} \circ f^{\mathrm{ad}}$.*
- *Ist f ein Isomorphismus, so gilt $(f^{-1})^{\mathrm{ad}} = (f^{\mathrm{ad}})^{-1}$.*
- *Die Abbildung $\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(W,V)$, $f \mapsto f^{\mathrm{ad}}$ ist halblinear.*

In orthonormalen Koordinaten entspricht das Adjungieren einer linearen Abbildung dem Transponieren-Konjugieren.

Lemma 4.14. *Ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C}$ eine Orthonormalbasis von W, so gilt*

$$\mathrm{M}_{f^{\mathrm{ad}},\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{M}^*_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}\,.$$

Die adjungierte Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ hängt eng mit der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ zusammen: Die Skalarprodukte auf V und W entsprechen den halblinearen Isomorphismen

$$\Phi_V\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle \quad \text{und} \quad \Phi_W\colon W \to W^*, \quad w \mapsto \langle -, w\rangle$$

Die Bedingung (4.1) ist äquivalent dazu, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V^* & W^* \arrow[l, "f^*"'] \\
V \arrow[u, "\Phi_V"] & W \arrow[l, "f^{\mathrm{ad}}"] \arrow[u, "\Phi_W"']
\end{tikzcd}$$

Somit ist f^{ad} eindeutig bestimmt als $f^{\mathrm{ad}} = \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$.

4.5 Unitäre & orthogonale Matrizen

Definition 4.15.

- *Eine Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *heißt* unitär *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, bzw.* orthogonal *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, falls sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*
  1. *Die Matrix* A *ist invertierbar mit* $A^{-1} = A^*$*.*
  2. *Es gilt* $AA^* = \mathbb{1}$*.*
  3. *Es gilt* $A^*A = \mathbb{1}$*.*
  4. *Die Spalten von* A *bilden eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{K}^n$*.*
  5. *Die Zeilen von* A *bilden eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{K}^n$ *(betrachtet als Zeilenvektoren).*
- *Es seien*

$$\mathrm{U}(n) \coloneqq \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \,|\, U \text{ ist unitär}\}$$

und

$$\mathrm{O}(n) \coloneqq \{U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, U \text{ ist orthogonal}\}.$$

Lemma 4.16. *Es sind* $\mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *und* $\mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *Untergruppen.*

4.6 Die Iwasawa-Zerlegung

Satz 4.17 (Iwasawa-Zerlegung)**.** *Es seien* $K, A, N \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *die folgenden Untergruppen:*

- *Es ist* $K = \mathrm{U}(n)$*, bzw.* $K = \mathrm{O}(n)$*.*
- A *besteht aus den Diagonalmatrizen mit reellen, positiven Diagonaleinträgen.*
- N *besteht aus den obenen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.*

Dann gibt es für jede Matrix $s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *eindeutige Matrizen* $k \in K$*,* $a \in A$ *und* $n \in N$ *mit* $s = kan$*, d.h. die Abbildung*

$$K \times A \times N \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

ist eine Bijektion.

Warnung 4.18. Diese Bijektion ist i.A. kein Gruppenhomomorphismus. Sie ist aber ein Homöomorphismus (und sogar ein Diffeomorphismus).

5 Normalenformen für normale Endomorphismen

Es seien V und W endlichdimensionale Skalarprodukträume.

Für alle $\varphi \in$ sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix um den Winkel φ.

5.1 Normale Endomorphismen

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Definition 5.1.

- *Der Endomorphismus f heißt* normal *falls f und f^{ad} kommutieren, d.h. falls $f \circ f^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} \circ f$ gilt.*
- *Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ heißt normal, falls A und A^* kommutieren, d.h. falls $AA^* = A^*A$ gilt.*

Lemma 5.2. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist normal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ normal ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V ist die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ normal.*

5.1.1 Der komplexe Fall

Satz 5.3. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist normal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.*
3. *Der Endomorphismus von f ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*

Korollar 5.4. *Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist normal.*

2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A.*

3. *Die Matrix A ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*

4. *Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.*

Ist $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine normale Matrix, so lässt sich zum Berechnen einer Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A wie folgt vorgehen:

- Man berechne eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A.
- Man wende für jeden Eigenwert von A das Gram–Schidtsch-Verfahren auf die zugehörigen Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ an.

5.1.2 Der reelle Fall

Satz 5.5. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist normal.*

2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von der Form*

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_s > 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke.

Bemerkung 5.6. Das charakteristische Polynom der Drehstreckmatrix $rD(\varphi)$ ist $(t-\lambda)(t-\overline{\lambda}) = t^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda) + |\lambda|$ mit $\lambda = re^{i\varphi}$.
In (5.1) entsprechen die reellen Diagonaleinträge also den reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(t)$, und die Drehstreckmatrizen $r_i D(\varphi_i)$ den Paaren $(\lambda, \overline{\lambda})$ von rein komplexen Nullstelen von $p_A(t)$.
Insbesondere lässt sich die Normalenform (5.1) aus dem charakteristischen Polynom $p_f(t)$ ablesen, was die Eindeutig zeigt.

Beispiel 5.7. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und f normal mit charakteristischen Polynom

$$p_A(t) = (t-1)(t+1)(t^2+1)(t^2-2t+2).$$

Es gilt $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$ mit $i = e^{i\pi/2}$ und $t^2 - 2t + 2 = (t - \lambda)(t - \overline{\lambda})$ mit $\lambda = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Die zu f gehörige Normalenform ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & D(\pi/2) & \\ & & & \sqrt{2}D(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

Korollar 5.8. *Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist normal.*

2. *Es gibt eine orthonormale Matrix $U \in \mathrm{O}(n)$, so dass $U^{-1}AU$ in der Form (5.1) ist, und es gilt die gleiche Eindeutigkeit.*

5.2 Unitäre & Orthogonale Endomorphismen

Definition 5.9. *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ heißt* unitär *im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bzw.* orthogonal *im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls*

$$\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

gilt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei

$$\mathrm{U}(V) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei

$$\mathrm{O}(V) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist orthogonal}\}$$

Lemma 5.10. • *Unitäre und orthogonale Abbildungen sind injektiv.*

- *Es ist $\mathrm{U}(V) \subseteq \mathrm{GL}(V)$, bzw. $\mathrm{O}(V) \subseteq \mathrm{GL}(V)$ eine Untergruppe.*

Aus den Polarisationsformeln aus Abschnitt 3.2 für symmetrische Bilinearformen, bzw. Sesquilinearformen, erhält man die folgende Charakterisierung unitärer, bzw. orthogonaler Transformationen:

Lemma 5.11. *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist genau dann unitär, bzw. orthogonal, falls f eine Isometrie ist, d.h. falls $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$ gilt.*

Es sei nun $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Lemma 5.12. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.*

2. *Der Endomorphismus f ist ein Isomorphismus mit $f^{-1} = f^{\mathrm{ad}}$.*

3. *Es gilt $f \circ f^{\mathrm{ad}} = \mathrm{id}_V$.*

4. Es gilt $f^{\mathrm{ad}} \circ f = \mathrm{id}_V$.

Lemma 5.13. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist unitär, bzw. orthogonal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V*, so dass* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *unitär, bzw. orthogonal ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V *ist* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *unitär, bzw. orthogonal.*

5.2.1 Der komplexe Fall

Satz 5.14. *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist unitär.*
2. *Der Endomorphismus* f *ist normal,und für jeden Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$ *von* f *gilt* $|\lambda| = 1$.

Korollar 5.15. *Für eine Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix* A *ist unitär.*
2. *Die Matrix* A *ist normal, und für jeden Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$ *von* A *gilt* $|\lambda| = 1$.

5.2.2 Der reelle Fall

Satz 5.16. *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *sind die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus* f *ist orthogonal.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V*, so dass* $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ *von der Form*

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in (0, \pi)$ *ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke. (Insbesondere ist die Anzahl der Einsen und Minus-Einsen jeweils eindeutig bestimmt.)*

Korollar 5.17. *Für* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix* A *ist normal.*
2. *Es gibt eine orthonormale Matrix* $U \in \mathrm{O}(n)$*, so dass* $U^{-1}AU$ *in der Form (5.2) ist, und es gilt die gleiche Eindeutigkeit.*

5.3 Selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei nun $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Definition 5.18. *Der Endomorphismus f heißt* selbstadjungiert*, falls $f^{\mathrm{ad}} = f$ gilt.*

Lemma 5.19. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V ist die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch.*

5.3.1 Normalenform

Satz 5.20. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f, und alle Eigenwerte von f sind reell.*
3. *Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*

Korollar 5.21. *Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist hermitesch.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A, und alle Eigenwerte von A sind reell.*
3. *Die Matrix A ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*
4. *Es gibt eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix U, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.*

Beispiel 5.22.

1. Es sei
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$
   Es gilt
$$p_A(t) = -t^3 + 2t^2 + t - 2 = -(t-1)(t-2)(t+1),$$

also sind 1, 2 und -1 die Eigenwerte von A. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$(\mathbb{R}^3)_1(A) = \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$(\mathbb{R}^3)_2(A) = \ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$(\mathbb{R}^3)_{-1}(A) = \ker(A + \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Durch Normieren der obigen Eigenvektoren ergibt sich die Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

bestehend aus Eigenvektoren von A.

2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

Es gilt

$$A + 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit $\operatorname{rg}(A + 3\mathbb{1}) = 1$. Somit ist $\dim \ker(A + 3\mathbb{1}) = 2$. Also ist -3 ein Eigenwert von A von Vielfachheit 2. Der entsprechende Eigenraum ist

$$\ker(A + 3\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da $\operatorname{Spur} A = -3$ gilt, ist 3 der letzte übrige Eigenwert von A. Der entsprechende Eigenraum ist

$$\ker(A - 3\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit ist

$$\mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. Durch

- Anwenden des Gram–Schmidt-Verfahrens auf die ersten beiden Basisvektoren, und
- Normieren des dritten Basisvektors

ergibt sich die Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} := \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

aus Eigenvektoren von A.

5.3.2 Positive Endomorphismen & Co.

Selbstadjungierte Endomorphismen lassen sich als symmetrische Bilinearformen, bzw. hermitesche Sesquilinearform auffasen.

Definition 5.23.

- *Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt* positiv definit *falls die hermitesche Sesquilinearform $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(V)$, bzw. die symmetrische Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ mit $\beta(v_1, v_2) := \langle f(v_1), v_2 \rangle$ positiv definit ist.*
- *Eine hermitesche Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ heißt* positiv definit *falls die hermitesche Sesquilinearform $\beta \in \mathrm{SF}^{\mathrm{her}}(\mathbb{C}^n)$ mit $\beta(v_1, v_2) := v_1^T A \overline{v_2}$ positiv definit ist.*

Analog sind die Eigenschaften positiv semidefinit*,* negativ definit*,* negativ semidefinit *und* indefinit *definiert.*

Definition 5.24. *Für einen selbstadjungierten Endomorphismus $f\colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist positiv definit.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ positiv definit ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V ist die Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ positiv definit.*

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

Korollar 5.25.

- *Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von f positiv sind.*
- *Eine hermitesche Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.*

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

5.4 Übersicht

Die verschiedenen Normalenformen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

	Charakterisierung durch f^{ad}	$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
normal	$ff^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}}f$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R},\ r_i > 0,\ \varphi_i \in (0, \pi)$
unitär, orthogonal	$f^{\mathrm{ad}} = f^{-1}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\varphi_i \in (0, \pi)$
selbstadjungiert	$f^{\mathrm{ad}} = f$		$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

5.5 Polarzerlegung

Lemma 5.26.

- *Für jeden positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus $f\colon V \to V$ gibt es einen eindeutigen positiv semidefinitinen selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = g^2$.*
- *Für jede positiv semidefinite hermitesche Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ gibt es eine eindeutige positiv semidefinite hermitesche Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mit $A = B^2$.*

In der Situation von Lemma 5.26 schreiben wir $g = \sqrt{f}$ (bzw. $B = \sqrt{A}$).

Satz 5.27 (Polarzerlegung)**.**

- *Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gibt es einen selbstadjungierten Endomorphismus $s\colon V \to V$ und einen unitären, bzw. orthogonalen Endomorphismus $u\colon V \to V$ mit $f = s \circ u$. Der Endomorphismus s ist eindeutig bestimmt durch $s = \sqrt{f \circ f^{\mathrm{ad}}}$. Ist f invertierbar, so ist auch u eindeutig.*

- *Für jede Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *gibt eine hermitesche Matrix* $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *und eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix* $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *mit* $A = SU$*. Die Matrix* S *ist eindeutig bestimmt durch* $S = \sqrt{AA^*}$*. Ist* A *invertierbar, so ist auch* U *eindeutig.*

6 Allgemeine Bilinearformen

Im Folgenden sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

6.1 Darstellende Matrizen & Kongruenz

Definition 6.1. *Die* darstellende Matrix *einer Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ist die Matrix*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) \coloneqq \begin{pmatrix} \beta(v_1, v_1) & \beta(v_1, v_2) & \cdots & \beta(v_1, v_n) \\ \beta(v_2, v_1) & \beta(v_2, v_2) & \cdots & \beta(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_n, v_1) & \beta(v_n, v_2) & \cdots & \beta(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.2. *Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und*

$$V \to K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: [v]$$

der zugehörige Isomorphismus $V \to K^n$.

1. *Für alle $w_1, w_2 \in V$ gilt $\beta(w_1, w_2) = [w_1]^T A [w_2]$.*
2. *Die Abbildung*
$$\mathrm{BF}(V) \to \mathrm{M}_n(K), \quad \beta \mapsto \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$$
ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Lemma 6.3. *Für $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Bilinearform β ist symmetrisch.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch ist.*
3. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch.*

Lemma 6.4. *Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei Basen von V, und ist $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ eine Bilinearform, so gilt*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \mathrm{M}_{\mathrm{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{C}}^T \, \mathrm{M}(\beta, \mathcal{C}) \, \mathrm{M}_{\mathrm{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{C}} .$$

Definition 6.5. *Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ heißen* kongruent *zueinander, falls es $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A = C^T B C$ gibt.*

Kongruente Matrizen stellen also die gleiche Bilinearform bezüglich verschiedener Basen dar, d.h. für $n = \dim V$ sind zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ genau dann kongruent, falls es eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ sowie Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $A = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{A})$ und $B = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ gelten.

Korollar 6.6. *Konkruenz ist eine Äquivalenzrelation auf* $\mathrm{M}_n(K)$*.*

Da der Rang einer Matrix invariant unter Kongruenz ist, ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 6.7. *Der* Rang *einer Bilinearform* $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ *ist* $\operatorname{rg}\beta := \operatorname{rg}\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$*, wobei* $\mathcal{B}$ *eine Basis von* V *ist.*

Definition 6.8. *Zwei Bilinearformen* $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{BF}(V)$ *sind* kongruent*, wenn sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:*

1. *Es gibt eine Basis* $\mathcal{B}$ *von* V*, so dass* $\mathrm{M}(\beta_1, \mathcal{B})$ *und* $\mathrm{M}(\beta_2, \mathcal{B})$ *kongruent sind.*

2. *Für jede Basis* $\mathcal{B}$ *von* V *sind* $\mathrm{M}(\beta_1, \mathcal{B})$ *und* $\mathrm{M}(\beta_2, \mathcal{B})$ *kongruent.*

3. *Es gibt* $f \in \mathrm{GL}(V)$ *mit* $\beta_1(f(v_1), f(v_2)) = \beta_2(v_1, v_2)$ *für alle* $v_1, v_2 \in V$*.*

6.2 Existenz von Orthogonalbasen

Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ eine Bilinearform.

Falls eine eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V bezüglich β gibt, so ist β bereits symmetrisch, denn die Matrix

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \beta(v_1, v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \beta(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Es gilt auch die Umkehrung (da $\operatorname{char} K \neq 2$):

Satz 6.9. *Es gibt eine Orthogonalbasis von* V *bezüglich* β*.*

Korollar 6.10. *Für jede symmetrische Matrix* $A \in \mathrm{M}_n(K)$ *gibt es eine Basiswechselmatrix* $S \in \mathrm{GL}_n(K)$*, so dass* $S^T A S$ *eine Diagonalmatrix ist.*

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine symmetrische Matrix, so lässt sich eine Diagonalform wie in Korollar 6.10 sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mithilfe von *simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen* berechnen:

- Man wende elementare Zeilenumformungen auf die Matrix an.

- Nach jeder elementaren Zeilenumformung führt die man die analoge elementare Spaltenumformung durch. Hierdurch bleibt die Matrix symmetrisch.

Wie beim Gauß-Vefahren bringt man die Matrix hierdurch in Zeilenstufenform. Als Ergebnis erhält man eine symmetrische Matrix B in oberer Dreiecksform, also eine Diagonalmatrix. Eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^T AS = B$ erhält man, indem man die genutzen elementaren Spaltenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ anwendet. (Nutzt man anstelle der Spaltenumformungen die Zeilenumformungen, so erhält man stattdessen C^T.)

Beispiel 6.11. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch simultane Zeilen- und Spaltenumfomungen erhalten wir Folgendes:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: D.
\end{aligned}$$

Indem wir die entsprechenden Spaltenumformungen auf die Einheitsmatrix anwenden, erhalten wir eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_3(K)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: S.$$

Für die Matrizen D und S gilt nun, dass

$$S^T AS = D.$$

6.3 Reelle symmetrische Bilinearformen

Für diesen Unterabschnitt sei $K = \mathbb{R}$

6.3.1 Sylvesterscher Trägheitssatz

Es sei $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrischen Bilinearform.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthogonalbasis von V bezüglich β, so ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ von der Form

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

wobei $d_i = \beta(v_i, v_i)$ gilt. Sind $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit $\mu_i \neq 0$, so ist auch $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i = \mu_i v_i$ eine Basis von V, und es gilt

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1^2 d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 d_n \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich in (6.1) die Diagonaleinträge um Quadratzahlen aus $\mathbb{R}$ abändern. Hiermit erhält man aus Satz 6.9 den Sylvesterschen Trägheitssatz:

Korollar 6.12 (Sylvesterscher Trägheitssatz)**.** *Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass*

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$$

gilt. Die Zahlen p, q und r sind eindeutig bestimmt durch

$$p = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ positiv definit ist}\}$$

und

$$q = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ negativ definit ist}\},$$

sowie durch $p + q + r = n$. Zudem gilt $\operatorname{rg} \beta = p + q$.

Definition 6.13. *In der Situation von Korollar 6.12 heißt die Zahl $p - q$ die* Signatur *von β.*

Man bemerke, dass sich die Zahlen p, q und r aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz bereits aus der Form (6.1) ablesen lassen: Die Zahl p ist die Anzahl der positiven Diagonaleinträge, die Zahl q ist die Anzahl der negativen Diagonaleinträge, und r ist die Häufigkeit von 0 als Diagonaleintrag.

Beispiel 6.14. Es gibt 10 Kongruenzklassen von reellen symmetrischen (3×3)-Matrizen. Ein Repräsentantensystem ist durch die folgenden Matrizen gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner gibt es für alle $n \geq 0$ genau $\binom{n+2}{2}$ Kongruenzklassen reeller symmetrischer $(n \times n)$-Matrizen.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist die darstellende $A \coloneqq \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch. Nach Korollar 5.21 gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{D} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Es sei λ_i der zu v_i gehörige Eigenwert, und $S \coloneqq (v_1 \ldots v_n)$. Die Matrix S ist orthogonal, und für die Basis $\mathcal{C}$ von V mit $\mathrm{M}_{\mathrm{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = S$ gilt

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{C}) = \mathrm{M}^T_{\mathrm{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} \, \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}) \, \mathrm{M}_{\mathrm{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = S^T A S = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.15. *Es seien p, q und r die Zahlen aus dem Sylvesterscher Trägheitssatz für β. Dann ist p die Anzahl der positiven Eigenwerte von A, q die Anzahl der negativen Eigenwerte, und r die Vielfachheit des Eigenwerts 0.*

Lemma 6.16 (Hauptminorenkriterium)**.** *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv, wenn alle führenden Hauptminoren positiv sind.*

6.4 Dualität

Es sei W ein weiterer endlichdimensionaler K-Vektorraum

6.4.1 Nicht-ausgeartetet Bilinearformen

Es sei $\beta \in \mathrm{BF}(V, W)$ eine Bilinearform. Die Bilinearform β entspricht einer linearen Abbildung

$$\beta_1 \colon W \to V^*, \quad w \mapsto \beta(-, w),$$

sowie einer linearen Abbildung

$$\beta_2 \colon V \to W^*, \quad v \mapsto \beta(v, -).$$

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W, so können wir als Verallgemeinerung von Definition 6.1 die darstellende Matrix

$$\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \coloneqq \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) & \cdots & \beta(v_1, w_m) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) & \cdots & \beta(v_2, w_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_n, w_1) & \beta(v_n, w_2) & \cdots & \beta(v_n, w_m) \end{pmatrix}.$$

betrachten. Dann gilt bezüglich der dualen Basen $\mathcal{B}^*$ von V^* und $\mathcal{C}^*$ on W^*, dass

$$\mathrm{M}_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \quad \text{und} \quad \mathrm{M}_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} = \mathrm{M}(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T$$

Insbesondere gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} &\beta_1 \text{ ist ein Isomorphismus} \\ \iff &\mathrm{M}_{\beta_1,\mathcal{C},\mathcal{B}^*} \text{ ist invertierbar} \\ \iff &\mathrm{M}(\beta,\mathcal{B},\mathcal{C}) \text{ ist invertierbar} \\ \iff &\mathrm{M}(\beta,\mathcal{B},\mathcal{C})^T \text{ ist invertierbar} \\ \iff &\mathrm{M}_{\beta_2,\mathcal{B},\mathcal{C}^*} \text{ ist invertierbar} \\ \iff &\beta_2 \text{ ist ein Isomorphismus.} \end{aligned}$$

Definition 6.17. *Eine Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(V,W)$ heißt* nicht-ausgeartet*, falls Sie eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Die lineare Abbildung β_1 ist ein Isomorphismus.*
2. *Die lineare Abbildung β_2 ist ein Isomorphismus.*
3. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V und Basis $\mathcal{C}$ von W, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta,\mathcal{B},\mathcal{C})$ invertierbar ist.*
4. *Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V und Basis $\mathcal{C}$ von W ist die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta,\mathcal{B},\mathcal{C})$ invertierbar.*
5. *Es gelten (mindestes) zwei (und damit bereits alle drei) der folgenden Bedingungen:*
   a) *Es gilt $\dim V = \dim W$.*
   b) *Für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es ein $w \in W$ mit $\beta(v,w) \neq 0$ (d.h. β_2 ist injektiv).*
   c) *Für jedes $w \in W$ mit $w \neq 0$ gibt es ein $v \in V$ mit $\beta(v,w) \neq 0$ (d.h. β_1 ist injektiv).*

Beispiel 6.18.

1. Es sei $\beta \in \mathrm{BF}(V,V^*)$ die Bilinearform mit $\beta(v,\varphi) = \varphi(v)$. Die lineare Abbildung $\beta_1 \colon V^* \to V^*$ ist die Identität id_{V^*}, also ist β nicht-ausgeartet. Die lineare Abbildung $\beta_2 \colon V \to V^{**}$ ist der natürliche Isomorphismus aus Lineare Algebra I.
2. Ist V ein euklidscher Vektorraum, so ist $\langle -,- \rangle$ eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V, da die Abbildung $V \to V^*$, $v \mapsto \langle -, v \rangle$ nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein Isomorphismus ist.
3. Die symmetrische Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(\mathrm{M}_n(K))$ mit $\beta(A,B) = \mathrm{Spur}(AB)$ ist nicht-ausgeartet: Es sei $(E_{ij})_{i,j=1}^n$ die Standardbasis von $\mathrm{M}_n(K)$. Für alle i,j,k,l gilt
   $$\beta(E_{ij},E_{kl}) = \mathrm{Spur}(E_{ij}E_{kl}) = \mathrm{Spur}(\delta_{jk}E_{il}) = \delta_{jk}\,\mathrm{Spur}\,E_{il} = \delta_{il}\delta_{jk} = \delta_{(i,l),(j,k)}.$$
   Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt deshalb
   $$\beta(A,E_{ij}) = \beta\left(\sum_{k,l=1}^n A_{kl}E_{kl}, E_{ij}\right) = \sum_{k,l=1}^n A_{kl}\underbrace{\beta(E_{kl},E_{ij})}_{=\delta_{(i,l),(j,k)}} = A_{ji}.$$
   Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A \neq 0$ gilt deshalb $\beta(A,E_{ji}) \neq 0$.

6.4.2 Die Adjungierte Abbildung

Es seien $\beta_V \in \mathrm{BF}(V, V')$ und $\beta_W \in \mathrm{BF}(W, W')$ zwei nicht-ausgeartete Bilinearformen. Dann gibt es für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutige lineare Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W' \to V'$ mit

$$\beta_W(f(v), w') = \beta_V(v, f^{\mathrm{ad}}(w')) \qquad \text{für alle } v \in V,\ w' \in W' \tag{6.2}$$

gilt. Dies ergibt sich wie bereits in Abschnitt 4.4 dadurch, dass (6.2) äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
V^* & W^* \arrow[l, "f^*"'] \\
V' \arrow[u, "(\beta_V)_1"] & W' \arrow[l, "f^{\mathrm{ad}}"] \arrow[u, "(\beta_W)_1"']
\end{tikzcd}$$

ist. Also ist f^{ad} eindeutig als $f^{\mathrm{ad}} = (\beta_V)_1^{-1} \circ f^* \circ (\beta_W)_1$ bestimmt.

Beispiel 6.19.

1. Es seien $\beta_V \in \mathrm{BF}(V, V^*)$ und $\beta_W \in \mathrm{BF}(W, W^*)$ die nicht-ausgearteten Bilinearformen mit $\beta_V(v, \varphi) = \varphi(v)$ und $\beta_W(w, \psi) = \psi(w)$. Dann ist $f^*\colon W^* \to V^*$ die zu $f\colon V \to W$ bezüglich β_V und β_W duale Abbildung, denn

$$\beta_W(f(v), \psi) = \psi(f(v)) = f^*(\psi)(v) = \beta_V(v, f^*(\psi)).$$

2. Es seien V und W euklidische Vektorräume. Dann sind die zugehörigen Skalarprodukte $\langle -, - \rangle_V$ und $\langle -, - \rangle_W$ nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen. Dann ist die zu $f\colon V \to W$ bezüglich β_V und β_W adjungierte Abbildung die adjungierte Abbildung $f^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ aus Abschnitt 4.4.

6.4.3 Nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen

Wir betrachten nun den Fall, dass $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V ist. Für die beiden zugehörigen linearen Abbildungen $\beta_1, \beta_2\colon V \to V^*$ gilt dann $\beta_1 = \beta_2$.

Definition 6.20. *Das* Radikal *von β ist der Untervektorraum*

$$\operatorname{rad}\beta \coloneqq \{v \in V \mid \beta(v, v') = 0 \textit{ für alle } v' \in V.$$

Es gilt $\operatorname{rad}\beta = \ker\beta_1 = \ker\beta_2$, weshalb β genau dann nicht ausgeartet ist, wenn $\operatorname{rad}\beta = 0$ gilt.

Beispiel 6.21. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$. Dann gibt es eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V bezüglich β, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ von der Form

$$\mathrm{M}(\beta,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$ gilt. Dann ist $\operatorname{rg} \beta = r$ und somit $\mathrm{M}(\beta, \mathcal{B})$ genau dann invertierbar, wenn $r = n$ gilt.

Zusammen mit dem Sylvesterschen Trägheitssatz ergibt sich damit, dass es auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum bis auf Kongruenz genau $n+1$ nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen gibt.

Außerdem gilt in der obigen Situation, dass $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\operatorname{rad} \beta$ ist.

Lemma 6.22. *Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt*

1. $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ *und*

2. $(U^\perp)^\perp = U$,

Warnung 6.23. Es gilt im Allgemeinen nicht, dass $V = U \oplus U^\perp$.