

Notizen zum

Repetitorium Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner
s6jestel@uni-bonn.de

8. September 2017

Online verfügbar unter
<https://goo.gl/2oDGjB>.

Inhaltsverzeichnis

1	Diagonalisierbarkeit & Freunde	1
1.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	1
1.2	Das charakterische Polynom	2
1.3	Das Minimalpolynom	4
1.4	Diagonalisierbarkeit	5
1.5	Trigonalisierbarkeit	8
1.6	Spur und Determinante durch Eigenwerte	9
1.7	Simultane Diagonalisierbarkeit	9
2	Die Jordan-Normalform	10
2.1	Definition	10
2.2	Eindeutigkeit	11
2.3	Existenz & Kochrezept	11
2.4	Lösung des Ähnlichkeitsproblems	16
2.5	Die Jordan–Chevalley-Zerlegung	17
2.6	Implizite Bestimmen der Jordan-Normaform	18
3	Grundlagen zu Bilinearformen	20
3.1	Allgemeine Definitionen	20
3.2	Quadratische Formen und Polarisation	22
3.3	Orthogonalität	23
4	Skalarprodukte	25
4.1	Definitheit & Skalarprodukte	25
4.2	Orthonormalbasen & Gram–Schmidt	26
4.3	Rieszscher Darstellungssatz	27
4.4	Die Adjungierte Abbildung	28
4.5	Unitäre & orthogonale Matrizen	29
4.6	Die Iwasawa-Zerlegung	29
5	Normalenformen für normale Endomorphismen	30
5.1	Normale Endomorphismen	30
5.2	Unitäre & Orthogonale Endomorphismen	32
5.3	Selbstadjungierte Endomorphismen	34
5.4	Übersicht	37
5.5	Polarzerlegung	37

Inhaltsverzeichnis

6	Mehr zu Bilinearformen	39
6.1	Darstellende Matrizen & Kongruenz	39
6.2	Existenz von Orthogonalbasen	40
6.3	Reelle symmetrische Bilinearformen	41
6.4	Dualität	43

1 Diagonalisierbarkeit & Freunde

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.1.

- Sind $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$, so ist v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ . Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$V_\lambda(f) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$$

der Eigenraum von f zu λ . Die Zahl $\dim V_\lambda(f)$ ist die geometrische Vielfachheit von λ .

- Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(K)$. Sind $\lambda \in K$ und $x \in K^n$ mit $x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$, so ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda(A) := \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

der Eigenraum von A zu λ . Die Zahl $\dim(K^n)_\lambda(A)$ ist die geometrische Vielfachheit von λ .

Bemerkung 1.2.

1. Ist $A \in M_n(K)$ und $f: K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$ der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige Endomorphismus, so stimmen die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume von A mit denen von f überein.

Es genügt daher im Folgenden, Definitionen und Aussagen für Endomorphismen zu anzugeben – für Matrizen gelten diese dann ebenfalls.

2. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V , $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A := M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Bezüglich des zu \mathcal{B} zugehörigen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T =: [v]_{\mathcal{B}}$$

gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}}(V_\lambda(f)) = (K^n)_\lambda(A).$$

Es ist also $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $[v]_{\mathcal{B}}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Berechnungen lassen sich deshalb in Matrizenform durchführen.

Für theoretische Aussagen nutzen wir also Endomorphismen, und für konkrete Rechnungen nutzen wir Matrizen.

1.2 Das charakterische Polynom

Es sei \mathcal{B} eine Basis von V und $A := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die zugehörige darstellende Matrix von f . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\ \iff & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \\ \iff & (K^n)_{\lambda}(A) \neq 0 \\ \iff & \ker(A - \lambda \mathbb{1}) \neq 0 \\ \iff & A - \lambda \mathbb{1} \text{ ist nicht invertierbar} \\ \iff & \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0. \end{aligned}$$

Definition 1.3. Das charakterische Polynom von A ist definiert als

$$p_A(t) := \det(A - t\mathbb{1}) \in K[t].$$

Das charakteristische Polynom von f ist definiert als $p_f(t) := p_A(t)$.

Dass das charakteristische Polynom $p_f(t)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis \mathcal{B} abhängt, folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1.4. Ähnliche Endomorphismen, bzw. Matrizen haben das gleiche charakterische Polynom.

Aus unserer anfänglichen Beobachtung erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom von f :

Proposition 1.5. Die Eigenwerte von f sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_f(t)$.

Definition 1.6. Die Vielfachheit des Linearfaktors $t - \lambda$ in $p_f(t)$ ist die algebraische Vielfachheit von λ .

Beispiel 1.7.

1. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

gilt

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 3 & 1-t & 2 \\ 2 & 3 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 + 15t + 18.$$

Die einzige reelle Nullstelle von $p_A(t)$, und somit der einzige reelle Eigenwert von A , ist 6. Der entsprechende Eigenraum ist

$$(\mathbb{R}^3)_6(A) = \ker(A - 6\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Es gilt $p_A(t) = \det(A - t\mathbb{1}) = \det(A - t\mathbb{1})^T = \det(A^T - t\mathbb{1}) = p_{A^T}(t)$.

3. Ist A eine obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n - t \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t) = (-1)^n (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also genau die Diagonaleinträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

4. Ist allgemeiner A eine obere Blockdreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_r \end{pmatrix}$$

mit $A_i \in M_{n_i}(K)$, so gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} A_1 - t\mathbb{1}_{n_1} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_r - t\mathbb{1}_{n_r} \end{pmatrix} \\ &= \det(A_1 - t\mathbb{1}_{n_1}) \cdots \det(A_r - t\mathbb{1}_{n_r}) = p_{A_1}(t) \cdots p_{A_r}(t). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des charakterischen Polynoms

Allgemein ist das charakteristische Polynom von $A \in M_n(K)$ von der Form

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (\text{Spur } A) t^{n-1} + \dots + \det A.$$

Beispiel 1.8. Das charakteristische Polynom einer (2×2) -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ ist gegeben durch

$$p_A(t) = t^2 - (\text{Spur } A)t + \det A = t^2 - (a + d)t + (ad - bc).$$

1.3 Das Minimalpolynom

Lemma 1.9. Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, so ist v für jedes Polynom $p \in K[t]$ ein Eigenvektor von $p(f)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$. Insbesondere sind die Eigenwerte von f Nullstellen von p , falls $p(f) = 0$ gilt.

Beispiel 1.10.

1. Ist f nilpotent mit $f^k = 0$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) := t^k$. Deshalb ist 0 der einzige mögliche Eigenwert von f .
2. Gilt $f^3 = 3f - 2\text{id}_V$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) := t^3 - 3t + 2$. Es gilt $q(t) = (t - 1)^2(t + 2)$, also sind 1 und -2 die einzigen möglichen Eigenwerte für f .
3. Gilt $f^2 = -\text{id}_V$, so hat f im Fall $K = \mathbb{R}$ keine Eigenwerte, da das Polynom $t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ keine reellen Nullstellen hat.

Definition 1.11.

- Es sei

$$\text{Pol}(f) := \{p \in K[t] \mid p(f) = 0\}.$$

Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\text{Pol}(f)$ ist das Minimalpolynom von f , und wird mit $m_f(t) \in K[t]$ notiert.

- Für $A \in M_n(K)$ sei

$$\text{Pol}(A) := \{p \in K[t] \mid p(A) = 0\}.$$

Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\text{Pol}(A)$ ist das Minimalpolynom von A , und wird mit $m_A(t) \in K[t]$ notiert.

Bemerkung 1.12. Man bemerke, dass stets $m_f(f) = 0$ gilt; bis auf Normiertheit ist m_f das kleinstmögliche Polynom (außer dem Nullpolynom), das diese Eigenschaft hat.

Bemerkung 1.13. Die Wohldefiniertheit von $\text{Pol}(f)$ nutzt die Endlichdimensionalität von V . Hierdurch wird sichergestellt, dass $\text{Pol}(f) \neq 0$ gilt.

Lemma 1.14. Ist \mathcal{B} eine Basis von V , so gilt für $A = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$, dass $\text{Pol}(f) = \text{Pol}(A)$. Somit gilt $m_f = m_A$.

Korollar 1.15. *Ähnliche Endomorphismen, bzw. Matrizen haben das gleiche Minimalpolynom.*

Die Definition des Minimalpolynoms lässt sich bis auf Normiertheit wie folgt umschreiben:

Lemma 1.16. *Es gilt*

$$\text{Pol}(f) = \{p \cdot m_f \mid p \in K[t]\}.$$

Für $p \in K[t]$ gilt also genau dann $p(f) = 0$, wenn $m_f \mid p$ gilt.

Bemerkung 1.17. Für $p \in K[t]$ und $\lambda \in K$ gilt genau dann $p(\lambda) = 0$, wenn $(t - \lambda) \mid p(t)$ gilt. Man kann Lemma 1.16 als eine Verallgemeinerung hiervon verstehen.

Satz 1.18 (Cayley–Hamilton). *Es gilt $p_f(f) = 0$, also $m_f \mid p_f$.*

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Nullstelle von $m_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also ein Eigenwert von f . Andererseits ist jeder Eigenwert von f nach Lemma 1.16 und Lemma 1.9 auch eine Nullstelle von $m_f(t)$. Somit sind die Nullstelle von $m_f(t)$ genau die Eigenwerte von f . Also haben $p_f(t)$ und $m_f(t)$ die gleichen Nullstellen.

Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfallen $p_f(t)$ und $m_f(t)$ somit in die gleichen Linearfaktoren. Die Vielfachheit im Minimalpolynom ist dabei nach dem Satz von Cayley–Hamilton jeweils kleiner ist als die Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

1.4 Diagonalisierbarkeit

Lemma 1.19. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig. Insbesondere ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.*

Definition 1.20.

- Der Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ heißt diagonalisierbar falls er die folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:
 1. Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.
 2. Es gilt $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.
 3. Es gilt $\dim V = \sum_{\lambda \in K} \dim V_\lambda(f)$.
 4. Es gilt $\dim V \leq \sum_{\lambda \in K} \dim V_\lambda(f)$.
 5. Es gibt eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f .
 6. Es gibt ein Erzeugendensystem von V bestehend aus Eigenvektoren von f .
 7. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass die darstellende Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.
- Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt diagonalisierbar, falls sie eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Es gilt $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.
2. Es gilt $K^n = \sum_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.
3. Es gilt $n = \sum_{\lambda \in K} \dim((K^n)_\lambda(A))$.
4. Es gilt $n \leq \sum_{\lambda \in K} \dim((K^n)_\lambda(A))$.
5. Es gibt eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A .
6. Es gibt ein Erzeugendensystem von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A .
7. Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h. es gibt $S \in \text{GL}_n(K)$, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel 1.21.

1. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p_A(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = -(t^2 - 3t + 2)(t - 1) = -(t - 1)^2(t - 2).$$

Die Eigenwerte von A sind also 1 und 2. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$(\mathbb{R}^3)_1(A) = \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$(\mathbb{R}^3)_2(A) = \ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Also ist

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A . Somit ist A diagonalisierbar. Für die entsprechende Basiswechselmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \quad \text{gilt} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Falls das charakteristische Polynom $p_f(t)$ in paarweise verschiedenen Linearfaktoren $p_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ zerfällt, so ist f diagonalisierbar:

Dann gibt es zu jedem Eigenwert λ_i einen Eigenvektor $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$, und die Familie $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ist nach Lemma 1.19 linear unabhängig. Da $n = \dim V$ gilt, ist \mathcal{B} bereits eine Basis von V .

Inbesondere sind Dreiecksmatrizen mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen diagonalisierbar.

3. Es sei $\text{char } K \neq 2$, V ein zweidimensionaler K -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ und $f: V \rightarrow V$ der eindeutige Endomorphismus mit $f(v_1) = v_2$ und $f(v_2) = v_1$. Dann ist $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $v_1 - v_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 , und somit $\mathcal{B} = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von f . Also ist f diagonalisierbar mit

$$M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

4. Jede reelle, symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. Inbesondere sind für jede reelle Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ die Matrizen $A + A^T$, AA^T und $A^T A$ diagonalisierbar.

Lemma 1.22. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass die Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ diagonalisierbar ist.
3. Für jede Basis \mathcal{B} von V ist die Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ diagonalisierbar.

Ob der Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ diagonalisierbar ist, hängt nur vom Minimalpolynom $m_f(t)$ ab:

Proposition 1.23. *Der Endomorphismus f ist genau dann diagonalisierbar, falls das Minimalpolynom m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

Die Nullstellen von m_f sind dann, wie bereits gesehen, genau die Eigenwerte von f .

Korollar 1.24. *Ist $q \in K[t]$ mit $q(f) = 0$ (also $m_f \mid q$), so dass q in paarweise verschiedene Linearfaktoren $q(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ zerfällt, so ist f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Beispiel 1.25.

1. Gilt $f^2 = f$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) := t^2 - t = t(t - 1)$. Somit ist f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 0 und 1.
2. Gilt $f^2 = \text{id}_V$, so gilt $q(f) = 0$ für das Polynom $q(t) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$. Gilt $\text{char } K \neq 2$, so ist f somit diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 1 und -1 .

Ist $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum, so gilt für die den eingeschränkten Endomorphismus $f|_U: U \rightarrow U$, dass $m_f(f|_U) = m_f(f)|_U = 0$, und somit dass $(m_f|_U) \mid m_f$.

Korollar 1.26. *Ist f diagonalisierbar, so ist auch $f|_U$ diagonalisierbar.*

1.5 Trigonalisierbarkeit

Definition 1.27.

- Der Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ heißt *trigonalisierbar*, falls es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
- Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt *trigonalisierbar*, falls A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist, d.h. falls es $S \in GL_n(K)$ gibt, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Lemma 1.28. Die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist trigonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass die Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar ist.
3. Für jede Basis \mathcal{B} von V ist die Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar.

Äquivalente Charakterisierungen

Definition 1.29. Eine *Flagge*, bzw. *Fahne* von V ist eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

mit $\dim V_k = k$ für alle k . (Inbesondere ist $n = \dim V$.) Die Flagge heißt *f-stabil* falls $f(V_k) \subseteq V_k$ für alle k gilt.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V mit $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in oberer Dreiecksform, so ist

$$0 \subsetneq \langle v_1 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$$

eine *f*-invariante Flagge von V . Ist andererseits

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V \tag{1}$$

eine Flagge von V , so ergibt sich durch Basisergänzung eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , so dass $V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ für alle k gilt. Ist die Flagge (1) *f*-invariant, so ist die darstellende Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix.

Hierdurch ergibt sich die folgende Charakterisierung trigonalisierbarer Endomorphismen:

Satz 1.30. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist trigonalisierbar.
2. Es gibt eine *f*-invariante Flagge von V .
3. Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.

Inbesondere hängt die Trigonalisierbarkeit von f nur vom charakteristischen Polynom $p_f(t)$ ab. Außerdem ist jeder Endomorphismus von V trigonalisierbar, falls K algebraisch abgeschlossen ist.

1.6 Spur und Determinante durch Eigenwerte

Zerfällt $p_f(t)$ in Linearfaktoren $p_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$, so ist f nach Satz 1.30 trigonalisierbar. Dann gilt

$$\text{Spur } f = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{und} \quad \det f = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Außerdem ist für jedes Polynom $q \in K[t]$ auch der Endomorphismus $q(f)$ trigonalisierbar, und es gilt

$$p_{q(f)}(t) = (t - q(\lambda_1)) \cdots (t - q(\lambda_n)).$$

1.7 Simultane Diagonalisierbarkeit

Definition 1.31.

- Eine Kollektion von Endomorphismen $f_i: V \rightarrow V$, $i \in I$ heißt simultan diagonalisierbar, falls es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{f_i, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.
- Eine Kollektion von Matrizen $A_i \in M_n(K)$, $i \in I$ heißt simultan diagonalisierbar, falls es $S \in GL_n(K)$ gibt, so dass SA_iS^{-1} für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.

Lemma 1.32. Für eine Kollektion von Endomorphismen $f_i: V \rightarrow V$, $i \in I$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Endomorphismen f_i , $i \in I$ sind simultan diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass die Kollektion von Matrizen $M_{f_i, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$, $i \in I$ simultan diagonalisierbar sind.
3. Für jede Basis \mathcal{B} von V sind die Kollektion von Matrizen $M_{f_i, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$, $i \in I$ simultan diagonalisierbar.

Beispiel 1.33. Sind die Endomorphismen $f, g: V \rightarrow V$ simultan diagonalisierbar, so sind auch $f + g$ und $f \circ g$ diagonalisierbar.

Proposition 1.34. Für Endomorphismen $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Endomorphismen f_1, \dots, f_n sind simultan diagonalisierbar.
2. Die Endomorphismen f_1, \dots, f_n sind diagonalisierbar und paarweise kommutierend, d.h. es gilt $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für alle i, j .

2 Die Jordan-Normalform

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

2.1 Definition

Definition 2.1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ ist

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

der Jordanblock zu λ von Größe n .

Definition 2.2. Eine Matrix J der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

ist in Jordan-Normalform.

Definition 2.3. Eine Jordan-Normalform einer Matrix $A \in M_n(K)$ ist eine zu A ähnliche Matrix $J \in M_n(K)$, so dass J in Jordan-Normalform ist.

Eine Jordan-Normalform von f ist eine Jordan-Normalform der darstellenden Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ bezüglich einer Basis \mathcal{B} von V .

Der Endomorphismus f besitzt genau dann eine Jordan-Normalform $J \in M_n(K)$, falls es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = J$ gilt. Wir bezeichnen eine solche Basis als *Jordanbasis* von f .

Eine *Jordanbasis* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ einer Matrix $A \in M_n(K)$ ist eine Jordanbasis der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörigen linearen Abbildung $f_A: K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$. Dies ist äquivalent dazu, dass für die Matrix $S = (v_1 \dots v_n) \in GL_n(K)$ die Matrix $S^{-1}AS = M_{f_A,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in Jordan-Normalform ist.

2.2 Eindeutigkeit

Es sei J eine Matrix in Jordan-Normalform, also

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Für alle $\lambda \in K$ gilt dann

$$\dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k = \sum_{k'=1}^k \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } \geq k'.$$

Für die Zahlen $d_k(\lambda) := \dim \ker(J - \lambda \mathbb{1})^k$ gilt deshalb

$$d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) = \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } \geq k$$

und somit

$$\begin{aligned} & \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \\ &= \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } \geq k \\ & \quad - \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } \geq (k+1) \\ &= (d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda)) - (d_{k+1}(\lambda) - d_k(\lambda)) \\ &= 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ist $A \in M_n(K)$ und $\lambda \in K$ eine Jordan-Normalform von A , so sind A und J ähnlich, weshalb für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ auch $(A - \lambda \mathbb{1})^k$ und $(J - \lambda \mathbb{1})^k$ ähnlich sind. Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ gilt deshalb $\dim \ker(A - \lambda)^k = \dim \ker(J - \lambda)^k$. Aus der obigen Berechnung ergibt sich deshalb für die Zahlen $d_k(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k$, dass

$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \text{ in } J = 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Damit ergibt sich insbesondere die folgende Eindeutigkeit der Jordan-Normalform:

Proposition 2.4. *Je zwei Jordan-Normalformen einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus stimmen bis auf Permutation der Jordanblöcke überein.*

Es ergibt daher Sinn, von der Jordan-Normalform einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus zu sprechen.

2.3 Existenz & Kochrezept

Definition 2.5.

- Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei

$$V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid (f - \lambda \text{id}_V)^k(v) = 0\} = \ker(f - \lambda \text{id}_V)^k.$$

2 Die Jordan-Normalform

Der Untervektorraum

$$V_\lambda^\infty(f) := \bigcup_{k=0}^{\infty} V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid \text{es gibt } k \geq 0 \text{ mit } (f - \lambda \text{id}_V)^k(v) = 0\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum von f zu λ .

- Für $A \in M_n(K)$ und alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei

$$(K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid (A - \lambda \mathbb{1})^k x = 0\} = \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k.$$

Der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda^\infty(A) := \bigcup_{k=0}^{\infty} (K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid \text{es gibt } k \geq 0 \text{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k x = 0\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum von A zu λ .

Beispiel 2.6. Der Endomorphismus f ist genau dann nilpotent, wenn $V_0^\infty(f) = V$.

Lemma 2.7.

1. Es gilt genau dann $V_\lambda^\infty(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.
2. Die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$ ist direkt.

Mithilfe der verallgemeinerten Eigenräume ergibt sich eine Charakterisierung der Existenz der Jordan-Normalform:

Satz 2.8. *Die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.
2. Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$.
3. Die Jordan-Normalform von f existiert.

Ist $A \in M_n(K)$, so dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt, so lässt sich die Jordan-Normalform von A sowie eine zugehörige Jordanbasis nach dem folgenden *Kochrezept* berechnen:

- Man bestimme die Eigenwerte von A , etwa indem man $p_A(t)$ berechnet und anschließend die Nullstellen herausfindet.
- Für jeden Eigenwert λ von A führe man die folgenden Schritte durch:
 - Man berechne die iterierten Kerne $\ker(A - \lambda \mathbb{1}), \ker(A - \lambda \mathbb{1})^2, \dots, \ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$ bis zu dem Punkt, an dem eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
 - Die Dimension $\dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$ ist die algebraische Vielfachheit von λ in $p_A(t)$.

2 Die Jordan-Normalform

- Es gilt $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m = \ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m+1}$.
- Man bestimme Anhand der Zahlen $d_k(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k$ die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke zu λ von Größe k als

$$b_k(\lambda) := 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Aus den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ von A und den Zahlen $b_k(\lambda_i)$ erhalten wir bereits, wieviele Blöcke es zu welchen Eigenwert von welcher Größe gibt, d.h. wie die Jordan-Normalform von A (bis auf Permutation der Blöcke) aussehen wird. Insbesondere ist $d_1(\lambda)$ die Gesamtzahl der Jordanblöcke zu λ und die entsprechende Potenz m die maximal auftretende Blockgröße zu λ .

Zur Berechnung einer Jordanbasis von A geht man weiter wie folgt vor:

- Für jeden Eigenwert λ von A gehe man weiterhin wie folgt vor:
 - Man wähle Vektoren $v_1, \dots, v_{b_m} \in \ker A^m$ mit

$$\ker A^m = \ker A^{m-1} \oplus \langle v_1, \dots, v_{b_m} \rangle.$$

(Zur konkreten Berechnung ergänze man eine Basis $\ker A^{m-1}$ zu einer Basis von $\ker A^m$; dann kann man v_1, \dots, v_{b_m} als die neu hinzugekommenen Basisvektoren wählen.)

- Hierdurch ergeben sich für \mathcal{B} die ersten paar Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1, \\ &v_2, Av_2, \dots, A^{m-1}v_2, \\ &\dots, \\ &v_{b_m}, Av_{b_m}, \dots, A^{m-1}v_{b_m}. \end{aligned}$$

- Man wählt nun Vektoren $v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \in \ker A^{m-1}$, so dass

$$\ker A^{m-1} = \ker A^{m-2} \oplus \langle Av_1, \dots, Av_{b_m} \rangle \oplus \langle v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \rangle$$

gilt.

- Hierdurch erhält man für \mathcal{B} die weiteren Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v'_1, Av'_1, \dots, A^{m-2}v'_1, \\ &v'_2, Av'_2, \dots, A^{m-2}v'_2, \\ &\dots, \\ &v'_{b_{m-1}}, Av'_{b_{m-1}}, \dots, A^{m-2}v'_{b_{m-1}}. \end{aligned}$$

- Man wähle nun $v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \in \ker A^{m-2}$, so dass

$$\begin{aligned} &\ker A^{m-1} \\ &= \ker A^{m-2} \oplus \langle A^2v_1, \dots, A^2v_{b_m} \rangle \oplus \langle Av'_1, \dots, Av'_{b_{m-1}} \rangle \oplus \langle v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \rangle \end{aligned}$$

gilt.

2 Die Jordan-Normalform

- Hiermit ergeben sich für \mathcal{B} die Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v_1'', Av_1'', \dots, A^{m-2}v_1'', \\ &v_2'', Av_2'', \dots, A^{m-2}v_2'', \\ &\quad \dots, \\ &v_{b_{m-2}}'', Av_{b_{m-2}}'', \dots, A^{m-2}v_{b_{m-2}}''. \end{aligned}$$

Durch Weiterführen der obigen Schritte erhält man schließlich eine Basis \mathcal{B}_λ von $(K^n)_\lambda^\infty(A)$.

- Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von K^n , so ergibt sich Zusammenfügen der Basen $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_t}$ eine Basis \mathcal{B} von K^n . (Hier nutzen wir, dass $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda^\infty(A)$ gilt.)
- Die Basis \mathcal{B} ist eine Jordanbasis von A . Indem man die Basisvektoren als Spalten in eine Matrix C einträgt, erhält man schließlich $S \in \text{GL}_n(K)$, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist. Dabei sind die Blöcke zunächst nach den Eigenwerten in der zuvor gewählten Reihenfolge sortiert; die Blöcke zum gleichen Eigenwert sind nach absteigender Größe sortiert.

Beispiel 2.9. Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

gilt $p_A(t) = -(t-2)^3$. Also ist 2 der einzige Eigenwert von A . Es gilt

$$\ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit gilt $\dim \ker(A - 2\mathbb{1}) = 2$. Also gibt es zwei Jordanblöcke. Die Jordan-Normalform von A ist somit

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.10. Es sei V ein K -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_7)$ und $f: V \rightarrow V$ der eindeutige Endomorphismus mit $f(v_1) = f(v_2) = v_5$, $f(v_3) = f(v_4) = v_6$, $f(v_5) = f(v_6) = v_7$ und $f(v_7) = 0$. Es gilt $f^3 = 0$, also ist f nilpotent; insbesondere besitzt f eine Jordan-Normalform, wobei 0 der einzige auftretende Eigenwert ist.

2 Die Jordan-Normalform

Für die darstellende Matrix

$$A := M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = 0.$$

Somit gelten

$$\begin{aligned} \ker A &= \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6, e_7 \rangle, \\ \ker A^2 &= \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle, \\ \ker A^3 &= K^7. \end{aligned}$$

Mit $d_1 = \dim \ker A = 4$, $d_2 = \dim \ker A^2 = 6$ und $d_k = \dim \ker A^k = 7$ für $k \geq 3$ erhalten wir, dass $b_1 = 2d_1 - d_2 = 2$, $b_2 = 2d_2 - d_3 - d_1 = 1$, $b_3 = 2d_3 - d_4 - d_2 = 1$ und $b_k = 0$ für $k \geq 4$.

Die Jordan-Normalform von A (und damit von f) besteht also aus zwei Blöcken der Größe 1, einem Block der Größe 2 und einem Block der Größe 3 (jeweils zum Eigenwert 0). Wir bestimmen nun eine Jordanbasis:

- Wir benötigen zunächst $w_1 \in \ker A^3 = K^7$ mit $K^7 = \ker A^2 \oplus \langle w_1 \rangle$. Hierfür muss nur $w_1 \notin \ker A^2$ gelten. Wir wählen $w_1 := e_1$. Dann erhalten wir auch die weiteren Basisvektoren $Aw_1 = e_5$ und $A^2w_1 = e_7$.
- Als nächstes benötigen wir $w_2 \in \ker A^2$ mit

$$\ker A^2 = \ker A \oplus \langle Aw_1 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6, e_7 \rangle \oplus \langle e_5 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle.$$

Wir müssen also die Familie $(e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_5 - e_6, e_7)$ zu einer Basis von $\ker A^2$ ergänzen. Da

$$\langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_5 - e_6, e_7 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$$

können wir $w_2 := e_2 - e_3$ wählen. Damit erhalten wir außerdem den Basisvektoren $Aw_2 = e_5 - e_6$.

2 Die Jordan-Normalform

- Schließlich brauchen wir noch $w_3, w_4 \in \ker A$ mit

$$\ker A = \langle A^2 w_1 \rangle \oplus \langle A w_2 \rangle \oplus \langle w_3, w_4 \rangle = \langle e_7 \rangle \oplus \langle e_5 - e_6 \rangle \oplus \langle w_3, w_4 \rangle.$$

Wir müssen also die Familie $(e_5 - e_6, e_7)$ zu einer Basis von $\ker A$ ergänzen. Hierfür können wir $w_3 := e_1 - e_2$ und $w_4 := e_3 - e_4$ wählen.

Ingesamt haben wir somit die Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$, bzw. die Basiswechselmatrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$M_{f,\mathcal{C},\mathcal{C}} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4 Lösung des Ähnlichkeitsproblems

Es seien $f, g: V \rightarrow V$ zwei Endomorphismen, die jeweils eine Jordan-Normalform besitzen.

Satz 2.11. *Die Endomorphismen f und g sind genau dann ähnlich, wenn sie (bis auf Permutation der Blöcke) die gleiche Jordan-Normalform besitzen.*

Also sind $f, g: V \rightarrow V$ genau dann ähnlich, wenn ihre charakteristischen Polynome

$$p_f(t) = p_g(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$$

übereinstimmen, und wenn für jeden Eigenwert λ_i gilt, dass

$$\dim \ker(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k = \dim \ker(g - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n_i.$$

Beispiel 2.12.

1. Für nilpotente Matrizen existiert immer eine verallgemeinerte Eigenraumzerlegung. Deshalb sind zwei nilpotente Matrizen $A, B \in M_n(K)$ genau dann ähnlich, wenn $\dim \ker A^k = \dim \ker B^k$ für alle $k \geq 0$ gilt.

2 Die Jordan-Normalform

2. Es seien $A_1, A_2, A_3 \in M_3(\mathbb{C})$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $p_{A_1}(t) = p_{A_2}(t) = p_{A_3}(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Da 2 eine jeweils algebraische Vielfachheit 1 hat, gilt

$$\dim \ker(A_1 - 2\mathbb{1}) = \dim \ker(A_2 - 2\mathbb{1}) = \dim \ker(A_3 - 2\mathbb{1}) = 1.$$

Für den Eigenwert 1 ergeben sich die Dimensionen

$$\dim \ker(A_1 - \mathbb{1}) = \dim \ker(A_2 - \mathbb{1}) = 1 \quad \text{und} \quad \dim \ker(A_3 - \mathbb{1}) = 2,$$

also ist A_3 zu keiner der beiden anderen Matrizen ähnlich. Da ferner

$$\dim \ker(A_1 - \mathbb{1})^2 = \dim \ker(A_2 - \mathbb{1})^2 = 2$$

gilt, sind A_1 und A_2 ähnlich.

3. Da A_1 und A_2 in unterer, bzw. oberer Jordan-Normalform sind, sieht man direkt, dass Sie nicht diagonalisierbar sind.

Die Matrix A_3 ist hingegen eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke beide diagonalisierbar sind: Der obere Block ist diagonalisierbar, da es sich um eine obere Dreiecksmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen handelt. Also ist auch A_3 diagonalisierbar.

Hierdurch sieht man bereits, dass A_3 nicht ähnlich zu A_1 oder A_2 ist. Dass A_1 und A_2 ähnlich sind, erkennt man dann aus der folgenden Aussage:

4. Besitzt $A \in M_n(K)$ eine Jordan-Normalform, so sind A und A^T ähnlich. Insbesondere sind jede Matrix in unterer Jordan-Normalform ähnlich zu der entsprechenden oberen Jordan-Normalform.

2.5 Die Jordan–Chevalley-Zerlegung

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, der die Bedingungen aus Satz 2.8 erfüllt.

Proposition 2.13 (Jordan–Chevalley-Zerlegung). *Es gibt eine eindeutige Zerlegung $f = d + n$ in einen diagonalisierbaren Endomorphismus d und einen nilpotenten Endomorphismus n . Nilpotent ist, dass d und n kommutieren.*

Die Jordan–Chevalley-Zerlegung ist eine „koordinatenfreie“ Version der Jordan-Normalform; die Existenz dieser Zerlegung ist äquivalent zur Existenz der Jordan-Normalform.

Beispiel 2.14. Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

und die Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A = S \begin{pmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung $A = D + N$ ist somit gegeben durch

$$D = S \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} S^{-1} = S(2\mathbb{1})S^{-1} = 2\mathbb{1}SS^{-1} = 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$N = S \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.6 Implizite Bestimmen der Jordan-Normaform

Es sei $J \in M_n(K)$ eine Jordan-Normalform von f .

- Für das charakteristische Polynom $p_f(t) = p_J(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt

$$n_i = \dim V_\lambda^\infty(f) = \text{wie oft } \lambda_i \text{ auf der Diagonalen von } J \text{ steht}$$

- Es gilt

$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ in } J = \dim \ker(f - \text{id}_V) = n - \text{rg}(f - \text{id}_V).$$

Inbesondere ist $n - \text{rg } f$ die Anzahl der Jordanblöcke zu 0.

- Für das Minimalpolynom $m_f(t) = m_J(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt

$$m_i = \text{maximale auftretende Größe eines Jordanblockes zu } \lambda_i \text{ in } J$$

- Ist allgemeiner $q(t) \in K[t]$ ein Polynom mit $q(t) = (t - \lambda_1)^{m'_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m'_s}$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und $q(f) = 0$, so ergeben sich die folgenden beiden Restriktionen an J :
 - Jeder Eigenwert von f kommt in $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ vor (siehe Lemma 1.9),
 - Es gilt $m_f \mid q$. Deshalb ist $m_f = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$ mit $m_i \leq m'_i$ für alle i . Also sind die Jordanblöcke zu λ_i in J jeweils höchstens m'_i groß.

2 Die Jordan-Normalform

Zusammen mit den Beobachtungen aus Abschnitt 1.6 kann man hierdurch für kleine Matrizen bereits Aussagen über die Jordan-Normalform treffen, ohne die Matrix selbst zu kennen.

Beispiel 2.15. Es sei $A \in M_6(\mathbb{C})$ mit $(A - 2\mathbb{1})^2(A - 3\mathbb{1}) = 0$ und $\text{Spur } A = 14$.

Dann sind 2 und 3 die einzigen möglichen Eigenwerte von A . Aus $\text{Spur } A = 14$ erhält man, dass 2 mit algebraischer Vielfachheit 4 vorkommt, und 3 mit algebraischer Vielfachheit 2. Außerdem folgt aus $(A - 2\mathbb{1})^2(A - 3\mathbb{1}) = 0$, dass die Jordanblöcke zu 2 höchstens 2 groß sind, und die Jordanblöcke zu 3 alle Größe 1 haben.

Damit ergeben sich bis auf Permutation der Jordanblöcke die folgenden drei möglichen Jordan-Normalformen:

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

In den ersten beiden Fällen ist $(t - 2)^2(t - 1)$ das Minimalpolynom, im dritten Fall ist es $(t - 2)(t - 3)$.

3 Grundlagen zu Bilinearformen

Notation 3.1. Für alle $M_n(\mathbb{C})$ schreiben wir $A^* := \overline{A}^T$.

Definition 3.2. Die Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt hermitesch, falls $A = A^*$ gilt.

Beispiel 3.3.

1. Eine reelle Matrix ist genau dann hermitesch, wenn sie symmetrisch ist.
2. Ist allgemeiner $A = B + iC$ mit $B, C \in M_n(\mathbb{R})$, so ist A genau dann hermitesch, wenn B symmetrisch und C schiefsymmetrisch ist.

Im Folgenden sei K ein Körper, und U, V und W seien K -Vektorräume.

3.1 Allgemeine Definitionen

Definition 3.4.

- Eine Abbildung $\beta: V \times W \rightarrow U$ heißt K -bilinear, falls

$$\begin{aligned}\beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) &= \lambda \beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \lambda \beta(v, w)\end{aligned}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$ gilt.

- Gilt zusätzlich $U = K$, so ist β eine Bilinearform. Es ist

$$\text{BF}(V, W) := \{\beta: V \times W \rightarrow K \mid \beta \text{ ist eine Bilinearform}\}.$$

- Gilt zusätzlich $V = W$ und

$$\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt β symmetrisch. Es sind

$$\text{BF}(V) := \text{BF}(V, V)$$

sowie

$$\text{BF}^{\text{sym}}(V) := \{\beta \in \text{BF}(V) \mid \beta \text{ ist symmetrisch}\}.$$

Definition 3.5. Es sei $K = \mathbb{C}$.

3 Grundlagen zu Bilinearformen

- Eine Abbildung $\beta: V \times W \rightarrow U$ heißt sesquilinear, falls

$$\begin{aligned}\beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) &= \lambda \beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \bar{\lambda} \beta(v, w)\end{aligned}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

- Gilt zusätzlich $U = \mathbb{C}$, so ist β eine Sesquilinearform. Es ist

$$\text{SF}(V, W) := \{\beta: V \times W \rightarrow \mathbb{C} \mid \beta \text{ ist eine Sesquilinearform}\}.$$

- Gilt zusätzlich $V = W$ und

$$\beta(v_1, v_2) = \overline{\beta(v_2, v_1)} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

so heißt β hermitesch. Es sind

$$\text{SF}(V) := \text{SF}(V, V)$$

sowie

$$\text{SF}^{\text{her}}(V) := \{\beta \in \text{BF}(V) \mid \beta \text{ ist hermitesch}\}.$$

Definition 3.6. Für $K = \mathbb{C}$ heißt eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ halblinear falls

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$ gilt.

Eine Abbildung $\beta: V \times W \rightarrow U$ ist genau dann K -bilinear, wenn für alle $v \in V$ und $w \in W$ die Abbildungen

$$\beta(v, -): W \rightarrow U, \quad w' \mapsto \beta(v, w')$$

und

$$\beta(-, w): V \rightarrow U, \quad v' \mapsto \beta(v', w)$$

linear sind.

Im Fall $K = \mathbb{C}$ ist β genau dann sesquilinear, wenn die Abbildung $\beta(-, w): V \rightarrow U$ für jedes $w \in W$ linear ist, und die Abbildung $\beta(v, -): W \rightarrow U$ für jedes $v \in V$ halblinear ist.

Beispiel 3.7.

1. Für jede Matrix $A \in \text{M}(m \times n, K)$ ist die Abbildung

$$\beta_A: K^m \times K^n \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \beta_A(x, y) = x^T A y$$

eine Bilinearform. Für $n = m$ ist β_A genau dann symmetrisch, wenn A symmetrisch ist.

3 Grundlagen zu Bilinearformen

Jede Bilinearform $\beta \in \text{BF}(K^m, K^n)$ ist von dieser Form: Ist $A \in M(m \times n, K)$ die Matrix mit $A_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ für alle i, j , so gilt

$$\beta_A(e_i, e_j) = e_i^T A e_j = A_{ij} = \beta(e_i, e_j) \quad \text{für alle } i, j$$

und somit $\beta = \beta_A$ wegen der Bilinearität von β und β_A .

Damit ergibt sich ein Isomorphismus $M(m \times n, K) \rightarrow \text{BF}(K^m, K^n)$, $A \mapsto \beta_A$.

2. Analog ergibt sich aus jeder Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ eine Sesquilinearform

$$\beta_A: \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad \beta_A(x, y) = x^T A \bar{y},$$

und somit insgesamt ein Isomorphismus $M(m \times n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SF}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, $A \mapsto \beta_A$.

Die hermiteschen Sesquilinearformen entsprechen dabei genau den hermiteschen Matrizen.

3.2 Quadratische Formen und Polarisation

Es gelte $\text{char } K \neq 2$.

Proposition 3.8. Für $Q: V \rightarrow K$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Es gibt eine Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ mit $Q(v) = \beta(v, v)$ für all $v \in V$.
2. Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und Koeffizienten $c_{ij} \in K$ mit

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \in K. \quad (1)$$

3. Für jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V gibt Koeffizienten $c_{ij} \in K$, so dass (1) gilt.
4. Es gilt $Q(av) = a^2 Q(v)$ für alle $v \in V$ und $a \in K$, und die Abbildung

$$\beta: V \times V \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \beta(v, w) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

ist bilinear.

Definition 3.9. Eine Abbildung $Q: V \rightarrow K$, die eine, und damit alle Eigenschaften aus Proposition 3.8 erfüllt, heißt quadratische Form auf V . Es ist

$$\text{Quad}(V) := \{Q: V \rightarrow K \mid Q \text{ ist eine quadratische Form}\}$$

der K -Vektorraum der quadratischen Formen auf V (mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation).

3 Grundlagen zu Bilinearformen

Jede Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ liefert eine quadratische Form

$$Q_\beta: V \rightarrow K, \quad v \mapsto \beta(v, v).$$

Andererseits liefert jede quadratische Form $Q: V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform $\beta_Q \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ durch

$$\beta_Q(v, w) := \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V. \quad (2)$$

Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander, und liefern einen Isomorphismus

$$\text{BF}^{\text{sym}}(V) \longleftrightarrow \text{Quad}(V), \quad \beta \mapsto Q_\beta, \quad Q \longleftarrow \beta_Q.$$

Wir bezeichnen (2) als eine *Polarisationsformel*; sie erlaubt es uns, aus der quadratischen Form Q die ursprüngliche symmetrische Bilinearform β zurückzugewinnen. Neben (2) gilt auch noch die Polarisationsformel

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2)}{4} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Bemerkung 3.10. Proposition 3.8 gilt auch für $\text{char } K = 2$, sofern man den Ausdruck $(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))/2$ durch $Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ ersetzt.

Auch für Sesquilinearformen gibt es eine Polarisationsformel: Ist $\beta \in \text{SF}(V)$ eine Sesquilinearform (nicht notwendigerweise hermitesch), so gilt für die Abbildung $Q: V \rightarrow V, v \mapsto Q(v, v)$, dass

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2) + iQ(v_1 + iv_2) - iQ(v_1 - iv_2)}{4}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$

3.3 Orthogonalität

Es sei $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform, bzw. $K = \mathbb{C}$ und $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$ eine hermitsche Sesquilinearform.

Definition 3.11.

- Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ sind orthogonal zueinander, notiert mit $v_1 \perp v_2$, falls $\beta(v_1, v_2) = 0$ gilt.
- Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist

$$U^\perp = \{v \in V \mid \beta(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

das orthogonale Komplement von U bezüglich β .

3 Grundlagen zu Bilinearformen

- Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt orthogonal, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$ gilt.
- Eine Orthogonalbasis ist eine orthogonale Basis.
- Ein Vektor $v \in V$ heißt normiert falls $\beta(v, v) = 1$.
- Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt normiert, falls v_i für jedes $i \in I$ normiert ist.
- Eine Orthonormalbasis ist eine orthogonale, normierte Basis.

4 Skalarprodukte

Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Wir erweitern Definition 3.6 auf \mathbb{K} -Vektorräume:

Definition 4.1. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen V und W heißt halblinear falls

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \bar{\lambda}f(v)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entspricht dies genau Definition 3.6. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist Halblinearität das Gleiche wie Linearität.

4.1 Definitheit & Skalarprodukte

Für eine hermitesche Sesquilinearform $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$ gilt $\beta(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Daher ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 4.2. Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$, oder V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$. Dann ist β

- positiv definit, falls $\beta(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,
- positiv semidefinit, falls $\beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,
- negativ definit, falls $\beta(v, v) < 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,
- negativ semidefinit, falls $\beta(v, v) \leq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,
- indefinit, falls keiner der obigen Fälle eintritt.

Definition 4.3.

- Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V . Ein euklidischer Vektorraum ein reeller Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V .
- Ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum V ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf V . Ein unitärer Vektorraum ist ein komplexer Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V .

4 Skalarprodukte

Wir bezeichnen euklidische Vektorräume und unitäre Vektorräume auch als Skalarprodukträume. Das zugehörige Skalarprodukt schreiben wir als $\langle -, - \rangle$.

Definition 4.4.

1. Das Standardskalarprodukt auf \mathbb{K}^n ist definiert als

$$\langle x, y \rangle := x^T y = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

2. Auf $M_n(\mathbb{K})$ wird durch

$$\langle A, B \rangle := \text{Spur}(AB^*) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \overline{B_{ij}}$$

ein Skalarprodukt definiert. Identifiziert man $M_n(\mathbb{K})$ mithilfe der Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1}^n$ mit \mathbb{K}^{n^2} , so entspricht dies dem Standardskalarprodukt

3. Auf dem \mathbb{K} -Vektorraum $C([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist stetig}\}$ wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

ein Skalarprodukt definiert.

4. Auf dem \mathbb{C} -Vektorraum $P = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\}$ wird durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

ein Skalarprodukt definiert. Die Familie $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ ist orthonormal bezüglich dieses Skalarprodukts.

Definition 4.5. Die Norm eines Vektors $v \in V$ ist definiert als $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Bemerkung 4.6. Es handelt sich hierbei um eine Norm im Sinne der Analysis.

Beispiel 4.7. Die Norm des Standardskalarprodukts auf \mathbb{K}^n ist

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

4.2 Orthonormalbasen & Gram–Schmidt

Ist V ein reeller, bzw. komplexer Vektorraum und $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform, bzw. $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$ eine hermitesche Bilinearform, so dass es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V bezüglich β gibt, so ist β bereits ein Skalarprodukt:

4 Skalarprodukte

Für jeden Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es in der Darstellung $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ein i mit $x_i \neq 0$, weshalb

$$\beta(v, v) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{x_j} \underbrace{\beta(v_i, v_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0.$$

Mithilfe des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungs-Verfahrens erhalten wir auch die Umkehrung: Jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum V besitzt eine Orthonormalbasis.

Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig. Induktiv konstruiere man Vektoren $w_1, \dots, w_n \in V$ wie folgt:

- Man beginnt mit $w_1 := v_1 / \|v_1\|$.
- Falls w_1, \dots, w_i definiert sind, so konstruiert man w_{i+1} in zwei Schritten:
 - Man berechne den Vektor $\tilde{w}_{i+1} := v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \langle v_{i+1}, w_j \rangle w_j$. Der Vektor \tilde{w}_{i+1} ist orthogonal zu w_1, \dots, w_i .
 - Aus der linearen Unabhängigkeit von v_1, \dots, v_n folgt, dass $\tilde{w}_{i+1} \neq 0$ gilt. Somit lässt sich \tilde{w}_{i+1} normieren, und man erhält $w_{i+1} := \tilde{w}_{i+1} / \|\tilde{w}_{i+1}\|$.

Die entstehende Familie (w_1, \dots, w_n) ist orthonormal mit

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle w_1, \dots, w_i \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Sind dabei v_1, \dots, v_i bereits orthonormal, so gilt $w_j = v_j$ für alle $j = 1, \dots, i$.

Satz 4.8. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so lässt sich jede Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen. Insbesondere existiert eine Orthonormalbasis für V .

Korollar 4.9. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt $V = U \oplus U^\perp$. Deshalb gelten $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Bemerkung 4.10. Wendet man das Gram–Schmidt Verfahren auf linear abhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ an, so ergeben sich für das minimale i mit $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$ zwar noch orthonormale Vektoren w_1, \dots, w_{i-1} , dann aber $\tilde{w}_i = 0$.

4.3 Rieszscher Darstellungssatz

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum. Die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ist wohldefiniert, da $\langle -, - \rangle$ linear im ersten Argument ist. Außerdem ist Φ halblinear, da $\langle -, - \rangle$ halblinear im zweiten Argument ist.

Satz 4.11. Die Abbildung Φ ist ein halblinearer Isomorphismus von \mathbb{K} -Vektorräumen.

Der Rieszsche Darstellungssatz besagt also, dass sich jedes $\varphi \in V^*$ eindeutig als $\varphi = \langle -, v \rangle$ mit $v \in V$ darstellen lässt.

4.4 Die Adjungierte Abbildung

Es sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Skalarprodukträumen V und W .

Proposition 4.12. *Es gibt eine eindeutige Abbildung $f^{\text{ad}}: W \rightarrow V$ mit*

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^{\text{ad}}(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W, \quad (1)$$

und f^{ad} ist linear.

Lemma 4.13.

- Es gilt $(f^{\text{ad}})^{\text{ad}} = f$.
- Es gilt $\text{id}_V^{\text{ad}} = \text{id}_V$.
- Es gilt $(f \circ g)^{\text{ad}} = g^{\text{ad}} \circ f^{\text{ad}}$.
- Ist f ein Isomorphismus, so gilt $(f^{-1})^{\text{ad}} = (f^{\text{ad}})^{-1}$.
- Die Abbildung $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W, V)$, $f \mapsto f^{\text{ad}}$ ist halblinear.

In orthonormalen Koordinaten entspricht das Adjungieren einer linearen Abbildung dem Transponieren-Konjugieren.

Lemma 4.14. *Ist \mathcal{B} eine Orthonormalbasis von V und \mathcal{C} eine Orthonormalbasis von W , so gilt*

$$M_{f^{\text{ad}}, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}}^*.$$

Die adjungierte Abbildung $f^{\text{ad}}: W \rightarrow V$ hängt eng mit der dualen Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ zusammen: Die Skalarprodukte auf V und W entsprechen den halblinearen Isomorphismen

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle \quad \text{und} \quad \Phi_W: W \rightarrow W^*, \quad w \mapsto \langle -, w \rangle$$

Die Bedingung (1) ist äquivalent dazu, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \\ \Phi_V \uparrow & & \uparrow \Phi_W \\ V & \xleftarrow{f^{\text{ad}}} & W \end{array}$$

Somit ist f^{ad} eindeutig bestimmt als $f^{\text{ad}} = \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$.

4.5 Unitäre & orthogonale Matrizen

Definition 4.15.

- Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt unitär im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bzw. orthogonal im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:
 1. Die Matrix A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
 2. Es gilt $AA^* = \mathbb{1}$.
 3. Es gilt $A^*A = \mathbb{1}$.
 4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n .
 5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n (betrachtet als Zeilenvektoren).
- Es seien

$$U(n) := \{U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ ist unitär}\}$$

und

$$O(n) := \{U \in M_n(\mathbb{R}) \mid U \text{ ist orthogonal}\}.$$

Lemma 4.16. Es sind $U(n) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ und $O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ Untergruppen.

4.6 Die Iwasawa-Zerlegung

Satz 4.17 (Iwasawa-Zerlegung). Es seien $K, A, N \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ die folgenden Untergruppen:

- Es ist $K = U(n)$, bzw. $K = O(n)$.
- A besteht aus den Diagonalmatrizen mit reellen, positiven Diagonaleinträgen.
- N besteht aus den oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.

Dann gibt es für jede Matrix $s \in GL_n(\mathbb{K})$ eindeutige Matrizen $k \in K$, $a \in A$ und $n \in N$ mit $s = kan$, d.h. die Abbildung

$$K \times A \times N \rightarrow GL_n(\mathbb{K}), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

ist eine Bijektion.

Warnung 4.18. Diese Bijektion ist i.A. kein Gruppenhomomorphismus. Sie ist aber ein Homöomorphismus (und sogar ein Diffeomorphismus).

5 Normalenformen für normale Endomorphismen

Es seien V und W endlichdimensionale Skalarprodukträume. Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix um den Winkel φ .

5.1 Normale Endomorphismen

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Definition 5.1.

- Der Endomorphismus f heißt *normal* falls f und f^{ad} kommutieren, d.h. falls $f \circ f^{\text{ad}} = f^{\text{ad}} \circ f$ gilt.
- Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt *normal*, falls A und A^* kommutieren, d.h. falls $AA^* = A^*A$ gilt.

Lemma 5.2. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass die Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ normal ist.
3. Für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist die Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ normal.

5.1.1 Der komplexe Fall

Satz 5.3. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f .
3. Der Endomorphismus von f ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.

Korollar 5.4. Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A .
3. Die Matrix A ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.
4. Es gibt eine unitäre Matrix $U \in U(n)$, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.

Ist $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine normale Matrix, so lässt sich zum Berechnen einer Orthonormalbasis von \mathbb{C}^n aus Eigenvektoren von A wie folgt vorgehen:

- Man berechne eine Basis \mathcal{B} von \mathbb{C}^n aus Eigenvektoren von A .
- Man wende für jeden Eigenwert von A das Gram–Schmidt-Verfahren auf die zugehörigen Basisvektoren aus \mathcal{B} an.

5.1.2 Der reelle Fall

Satz 5.5. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von der Form

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_s > 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke.

Bemerkung 5.6. Das charakteristische Polynom der Drehstreckmatrix $rD(\varphi)$ ist $(t - \lambda)(t - \bar{\lambda}) = t^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)t + |\lambda|^2$ mit $\lambda = re^{i\varphi}$.

In (1) entsprechen die reellen Diagonaleinträge also den reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(t)$, und die Drehstreckmatrizen $r_i D(\varphi_i)$ den Paaren $(\lambda, \bar{\lambda})$ von rein komplexen Nullstellen von $p_A(t)$.

Insbesondere lässt sich die Normalenform (1) aus dem charakteristischen Polynom $p_f(t)$ ablesen, was die Eindeutigkeit zeigt.

Beispiel 5.7. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und f normal mit charakteristischem Polynom

$$p_A(t) = (t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 2t + 2).$$

5 Normalenformen für normale Endomorphismen

Es gilt $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$ mit $i = e^{i\pi/2}$ und $t^2 - 2t + 2 = (t - \lambda)(t - \bar{\lambda})$ mit $\lambda = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Die zu f gehörige Normalenform ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & D(\pi/2) & \\ & & & \sqrt{2}D(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

Korollar 5.8. Für $A \in M_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist normal.
2. Es gibt eine orthonormale Matrix $U \in O(n)$, so dass $U^{-1}AU$ in der Form (1) ist, und es gilt die gleiche Eindeutigkeit.

5.2 Unitäre & Orthogonale Endomorphismen

Definition 5.9. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt unitär im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bzw. orthogonal im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

gilt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei

$$U(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei

$$O(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid f \text{ ist orthogonal}\}$$

Lemma 5.10. • Unitäre und orthogonale Abbildungen sind injektiv.

- Es ist $U(V) \subseteq GL(V)$, bzw. $O(V) \subseteq GL(V)$ eine Untergruppe.

Aus den Polarisationsformeln aus Abschnitt 3.2 für symmetrische Bilinearformen, bzw. Sesquilinearformen, erhält man die folgende Charakterisierung unitärer, bzw. orthogonaler Transformationen:

Lemma 5.11. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist genau dann unitär, bzw. orthogonal, falls f eine Isometrie ist, d.h. falls $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

Es sei nun $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Lemma 5.12. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.
2. Der Endomorphismus f ist ein Isomorphismus mit $f^{-1} = f^{\text{ad}}$.
3. Es gilt $f \circ f^{\text{ad}} = \text{id}_V$.

4. Es gilt $f^{\text{ad}} \circ f = \text{id}_V$.

Lemma 5.13. Die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ unitär, bzw. orthogonal ist.
3. Für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ unitär, bzw. orthogonal.

5.2.1 Der komplexe Fall

Satz 5.14. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist unitär.
2. Der Endomorphismus f ist normal, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von f gilt $|\lambda| = 1$.

Korollar 5.15. Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist unitär.
2. Die Matrix A ist normal, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt $|\lambda| = 1$.

5.2.2 Der reelle Fall

Satz 5.16. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist orthogonal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von der Form

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke. (Insbesondere ist die Anzahl der Einsen und Minus-Einsen jeweils eindeutig bestimmt.)

Korollar 5.17. Für $A \in M_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist normal.
2. Es gibt eine orthonormale Matrix $U \in O(n)$, so dass $U^{-1}AU$ in der Form (2) ist, und es gilt die gleiche Eindeutigkeit.

5.3 Selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei nun $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Definition 5.18. Der Endomorphismus f heißt selbstadjungiert, falls $f^{\text{ad}} = f$ gilt.

Lemma 5.19. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass die Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch ist.
3. Für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist die Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch.

5.3.1 Normalenform

Satz 5.20. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f , und alle Eigenwerte von f sind reell.
3. Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.

Korollar 5.21. Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist hermitesch.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A , und alle Eigenwerte von A sind reell.
3. Die Matrix A ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.
4. Es gibt eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix U , so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.

Beispiel 5.22.

1. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Es gilt

$$p_A(t) = -t^3 + 2t^2 + t - 2 = -(t-1)(t-2)(t+1),$$

5 Normalenformen für normale Endomorphismen

also sind 1, 2 und -1 die Eigenwerte von A . Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^3)_1(A) &= \ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\(\mathbb{R}^3)_2(A) &= \ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\(\mathbb{R}^3)_{-1}(A) &= \ker(A + \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.\end{aligned}$$

Durch Normieren der obigen Eigenvektoren ergibt sich die Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

bestehend aus Eigenvektoren von A .

2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Es gilt

$$A + 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit $\text{rg}(A + 3\mathbb{1}) = 1$. Somit ist $\dim \ker(A + 3\mathbb{1}) = 2$. Also ist -3 ein Eigenwert von A von Vielfachheit 2. Der entsprechende Eigenraum ist

$$\ker(A + 3\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da $\text{Spur } A = -3$ gilt, ist 3 der letzte übrige Eigenwert von A . Der entsprechende Eigenraum ist

$$\ker(A - 3\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit ist

$$\mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A . Durch

- Anwenden des Gram–Schmidt-Verfahrens auf die ersten beiden Basisvektoren, und
- Normieren des dritten Basisvektors

ergibt sich die Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3

$$\mathcal{B} := \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

aus Eigenvektoren von A .

5.3.2 Positive Endomorphismen & Co.

Selbstadjungierte Endomorphismen lassen sich als symmetrische Bilinearformen, bzw. hermitesche Sesquilinearform auffassen.

Definition 5.23.

- Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ heißt positiv definit falls die hermitesche Sesquilinearform $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$, bzw. die symmetrische Bilinearform $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ mit $\beta(v_1, v_2) := \langle f(v_1), v_2 \rangle$ positiv definit ist.
- Eine hermitesche Matrix $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$ heißt positiv definit falls die hermitesche Sesquilinearform $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(\mathbb{C}^n)$ mit $\beta(v_1, v_2) := v_1^T A \bar{v}_2$ positiv definit ist.

Analog sind die Eigenschaften positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert.

Definition 5.24. Für einen selbstadjungierten Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist positiv definit.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass die Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ positiv definit ist.
3. Für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist die Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ positiv definit.

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

Korollar 5.25.

- Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von f positiv sind.
- Eine hermitesche Matrix $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

5.4 Übersicht

Die verschiedenen Normalenformen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

	Charakterisierung durch f^{ad}	$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
normal	$ff^{\text{ad}} = f^{\text{ad}}f$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}, r_i > 0, \varphi_i \in (0, \pi)$
unitär, orthogonal	$f^{\text{ad}} = f^{-1}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $ \lambda_i = 1$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\varphi_i \in (0, \pi)$
selbstadjungiert	$f^{\text{ad}} = f$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$	

5.5 Polarzerlegung

Lemma 5.26.

- Für jeden positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ gibt es einen eindeutigen positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = g^2$.
- Für jede positiv semidefinite hermitesche Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ gibt es eine eindeutige positiv semidefinite hermitesche Matrix $B \in M_n(\mathbb{K})$ mit $A = B^2$.

In der Situation von Lemma 5.26 schreiben wir $g = \sqrt{f}$ (bzw. $B = \sqrt{A}$).

Satz 5.27 (Polarzerlegung).

- Für jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ gibt es einen selbstadjungierten Endomorphismus $s: V \rightarrow V$ und einen unitären, bzw. orthogonalen Endomorphismus $u: V \rightarrow V$ mit $f = s \circ u$. Der Endomorphismus s ist eindeutig bestimmt durch $s = \sqrt{f \circ f^{\text{ad}}}$. Ist f invertierbar, so ist auch u eindeutig.

5 Normalenformen für normale Endomorphismen

- Für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ gibt eine hermitesche Matrix $S \in M_n(\mathbb{K})$ und eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix $U \in M_n(\mathbb{K})$ mit $A = SU$. Die Matrix S ist eindeutig bestimmt durch $S = \sqrt{AA^*}$. Ist A invertierbar, so ist auch U eindeutig.

6 Mehr zu Bilinearformen

Im Folgenden seien V und W zwei endlichdimensionale K -Vektorräume.

6.1 Darstellende Matrizen & Kongruenz

Definition 6.1.

- Die darstellende Matrix einer Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V, W)$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ von V und einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ von W ist die Matrix

$$M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) := \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) & \cdots & \beta(v_1, w_n) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) & \cdots & \beta(v_2, w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_m, w_1) & \beta(v_m, w_2) & \cdots & \beta(v_m, w_n) \end{pmatrix} \in M(m \times n, K).$$

- Die darstellende Matrix einer Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ bezüglich einer Basis \mathcal{B} von V ist $M(\beta, \mathcal{B}) := M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Proposition 6.2. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W , und es seien

$$V \rightarrow K^m, \quad v = \sum_{i=1}^m x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_m)^T =: [v]_{\mathcal{B}}$$

und

$$W \rightarrow K^n, \quad w = \sum_{i=1}^n y_i w_i \mapsto (y_1, \dots, y_n)^T =: [w]_{\mathcal{C}}$$

die zugehörige Isomorphismen $V \rightarrow K^m$ und $W \rightarrow K^n$.

- Für $\beta \in \text{BF}(V, W)$ ist die darstellende Matrix $M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ eindeutig dadurch bestimmt, dass $\beta(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^T M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) [w]_{\mathcal{C}}$ für alle $v \in V$, $w \in W$ gilt.

- Die Abbildung

$$\text{BF}(V, W) \rightarrow M(m \times n, K), \quad \beta \mapsto M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

ist ein Isomorphismus von K -Vektorräumen.

Lemma 6.3. Für $\beta \in \text{BF}(V)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- Die Bilinearform β ist symmetrisch.

2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass $M(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch ist.

3. Für jede Basis \mathcal{B} von V ist $M(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch.

Lemma 6.4. Sind $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ zwei Basen von W , so gilt für jede Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V, W)$, dass

$$M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = M_{\text{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'}^T M(\beta, \mathcal{B}', \mathcal{C}') M_{\text{id}_W, \mathcal{C}, \mathcal{C}'}.$$

Definition 6.5. Zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ heißen kongruent zueinander, falls es $S \in \text{GL}_n(K)$ mit $A = S^T B S$ gibt.

Kongruente Matrizen stellen die gleiche Bilinearform bezüglich verschiedener Basen dar, d.h. für $n = \dim V$ sind zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ genau dann kongruent, falls es eine Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ sowie Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} von V gibt, so dass $A = M(\beta, \mathcal{A})$ und $B = M(\beta, \mathcal{B})$ gelten.

Korollar 6.6. Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf $M_n(K)$.

Definition 6.7. Zwei Bilinearformen $\beta_1, \beta_2 \in \text{BF}(V)$ sind kongruent, wenn sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:

1. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass $M(\beta_1, \mathcal{B})$ und $M(\beta_2, \mathcal{B})$ kongruent sind.
2. Für jede Basis \mathcal{B} von V sind $M(\beta_1, \mathcal{B})$ und $M(\beta_2, \mathcal{B})$ kongruent.
3. Es gibt $f \in \text{GL}(V)$ mit $\beta_1(f(v_1), f(v_2)) = \beta_2(v_1, v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

Definition 6.8. Der Rang einer Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ ist $\text{rg } \beta := \text{rg } M(\beta, \mathcal{B})$, wobei \mathcal{B} eine Basis von V ist.

6.2 Existenz von Orthogonalbasen

Es sei $\text{char } K \neq 2$ und $\beta \in \text{BF}(V)$ eine Bilinearform.

Falls eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V bezüglich β gibt, so ist β bereits symmetrisch, denn die Matrix

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \beta(v_1, v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \beta(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Es gilt auch die Umkehrung (da $\text{char } K \neq 2$):

Satz 6.9. Es gibt eine Orthogonalbasis von V bezüglich β .

Korollar 6.10. Für jede symmetrische Matrix $A \in M_n(K)$ gibt es eine Basiswechselmatrix $S \in \text{GL}_n(K)$, so dass $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.

Ist $A \in M_n(K)$ eine symmetrische Matrix, so lässt sich eine Diagonalform wie in Korollar 6.10 sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix $S \in GL_n(K)$ mithilfe von *simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen* berechnen:

- Man wende elementare Zeilenumformungen auf die Matrix an.
- Nach jeder elementaren Zeilenumformung führt die man die analoge elementare Spaltenumformung durch. Hierdurch bleibt die Matrix symmetrisch.

Wie beim Gauß-Verfahren bringt man die Matrix hierdurch in Zeilenstufenform. Als Ergebnis erhält man eine symmetrische Matrix B in oberer Dreiecksform, also eine Diagonalmatrix. Eine Matrix $S \in GL_n(K)$ mit $S^T A S = B$ erhält man, indem man die genutzten elementaren Spaltenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ anwendet. (Nutzt man anstelle der Spaltenumformungen die Zeilenumformungen, so erhält man stattdessen S^T .)

Beispiel 6.11. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch simultane Zeilen- und Spaltenumformungen erhalten wir Folgendes:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: D. \end{aligned}$$

Indem wir die entsprechenden Spaltenumformungen auf die Einheitsmatrix anwenden, erhalten wir eine Basiswechselmatrix $S \in GL_3(K)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: S.$$

Für die Matrizen D und S gilt nun, dass

$$S^T A S = D.$$

6.3 Reelle symmetrische Bilinearformen

Für diesen Unterabschnitt sei $K = \mathbb{R}$

6.3.1 Sylvesterscher Trägheitssatz

Es sei $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ eine symmetrischen Bilinearform.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthogonalbasis von V bezüglich β , so ist die darstellende Matrix $M(\beta, \mathcal{B})$ von der Form

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

wobei $d_i = \beta(v_i, v_i)$ gilt. Sind $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit $\mu_i \neq 0$, so ist auch $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i = \mu_i v_i$ eine Basis von V , und es gilt

$$M(\beta, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1^2 d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 d_n \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich in (1) die Diagonaleinträge um Quadratzahlen aus \mathbb{R} abändern. Hiermit erhält man aus Satz 6.9 den Sylvesterschen Trägheitssatz:

Korollar 6.12 (Sylvesterscher Trägheitssatz). *Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann existiert eine Basis \mathcal{B} von V , so dass*

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$$

gilt. Die Zahlen p , q und r sind eindeutig bestimmt durch

$$p = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ positiv definit ist}\}$$

und

$$q = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ negativ definit ist}\},$$

sowie durch $p + q + r = n$. Zudem gilt $\text{rg } \beta = p + q$.

Definition 6.13. *In der Situation von Korollar 6.12 heißt die Zahl $p - q$ die Signatur von β .*

Man bemerke, dass sich die Zahlen p , q und r aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz bereits aus der Form (1) ablesen lassen: Die Zahl p ist die Anzahl der positiven Diagonaleinträge, die Zahl q ist die Anzahl der negativen Diagonaleinträge, und r ist die Häufigkeit von 0 als Diagonaleintrag.

Beispiel 6.14. Es gibt 10 Kongruenzklassen von reellen symmetrischen (3×3) -

Matrizen. Ein Repräsentantensystem ist durch die folgenden Matrizen gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner gibt es für alle $n \geq 0$ genau $\binom{n+2}{2}$ Kongruenzklassen reeller symmetrischer $(n \times n)$ -Matrizen.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , so ist die darstellende $A := M(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch. Nach Korollar 5.21 gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ von \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von A . Es sei λ_i der zu v_i gehörige Eigenwert, und $S := (v_1 \dots v_n)$. Die Matrix S ist orthogonal, und für die Basis \mathcal{C} von V mit $M_{\text{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = S$ gilt

$$M(\beta, \mathcal{C}) = M_{\text{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}}^T M(\beta, \mathcal{B}) M_{\text{id}_V, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = S^T A S = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.15. *Es seien p, q und r die Zahlen aus dem Sylvesterscher Trägheitssatz für β . Dann ist p die Anzahl der positiven Eigenwerte von A , q die Anzahl der negativen Eigenwerte, und r die Vielfachheit des Eigenwerts 0.*

Lemma 6.16 (Hauptminorenkriterium). *Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv, wenn alle führenden Hauptminoren positiv sind.*

6.4 Dualität

Es sei W ein weiterer endlichdimensionaler K -Vektorraum

6.4.1 Nicht-ausgeartetet Bilinearformen

Es sei $\beta \in \text{BF}(V, W)$ eine Bilinearform. Die Bilinearform β entspricht einer linearen Abbildung

$$\beta_1: W \rightarrow V^*, \quad w \mapsto \beta(-, w),$$

sowie einer linearen Abbildung

$$\beta_2: V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto \beta(v, -).$$

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W , so gilt bezüglich der dualen Basen \mathcal{B}^* von V^* und \mathcal{C}^* von W^* , dass

$$M_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} = M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \quad \text{und} \quad M_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} = M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T$$

Insbesondere gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
 & \beta_1 \text{ ist ein Isomorphismus} \\
 \iff & M_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} \text{ ist invertierbar} \\
 \iff & M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ ist invertierbar} \\
 \iff & M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T \text{ ist invertierbar} \\
 \iff & M_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} \text{ ist invertierbar} \\
 \iff & \beta_2 \text{ ist ein Isomorphismus.}
 \end{aligned}$$

Definition 6.17. Eine Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V, W)$ heißt nicht-ausgeartet, falls Sie eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Die lineare Abbildung β_1 ist ein Isomorphismus.
2. Die lineare Abbildung β_2 ist ein Isomorphismus.
3. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V und Basis \mathcal{C} von W , so dass die darstellende Matrix $M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ invertierbar ist.
4. Für jede Basis \mathcal{B} von V und Basis \mathcal{C} von W ist die darstellende Matrix $M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ invertierbar.
5. Es gelten (mindestes) zwei (und damit bereits alle drei) der folgenden Bedingungen:
 - a) Es gilt $\dim V = \dim W$.
 - b) Für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es ein $w \in W$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ (d.h. β_2 ist injektiv).
 - c) Für jedes $w \in W$ mit $w \neq 0$ gibt es ein $v \in V$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ (d.h. β_1 ist injektiv).

Beispiel 6.18.

1. Es sei $\beta \in \text{BF}(V, V^*)$ die Bilinearform mit $\beta(v, \varphi) = \varphi(v)$. Die lineare Abbildung $\beta_1: V^* \rightarrow V^*$ ist die Identität id_{V^*} , also ist β nicht-ausgeartet. Die lineare Abbildung $\beta_2: V \rightarrow V^{**}$ ist der natürliche Isomorphismus aus Lineare Algebra I.
2. Ist V ein euklidischer Vektorraum, so ist $\langle -, - \rangle$ eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf V , da die Abbildung $V \rightarrow V^*$, $v \mapsto \langle -, v \rangle$ nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein Isomorphismus ist.
3. Die symmetrische Bilinearform $\beta \in \text{BF}(M_n(K))$ mit $\beta(A, B) = \text{Spur}(AB)$ ist nicht-ausgeartet: Es sei $(E_{ij})_{i,j=1}^n$ die Standardbasis von $M_n(K)$. Für alle i, j, k, l gilt

$$\beta(E_{ij}, E_{kl}) = \text{Spur}(E_{ij}E_{kl}) = \text{Spur}(\delta_{jk}E_{il}) = \delta_{jk} \text{Spur } E_{il} = \delta_{il}\delta_{jk} = \delta_{(i,l),(j,k)}.$$

Für $A \in M_n(K)$ gilt deshalb

$$\beta(A, E_{ij}) = \beta\left(\sum_{k,l=1}^n A_{kl}E_{kl}, E_{ij}\right) = \sum_{k,l=1}^n A_{kl} \underbrace{\beta(E_{kl}, E_{ij})}_{=\delta_{(i,l),(j,k)}} = A_{ji}.$$

Für $A \in M_n(K)$ mit $A \neq 0$ gilt deshalb $\beta(A, E_{ji}) \neq 0$.

6.4.2 Die Adjungierte Abbildung

Es seien $\beta_V \in \text{BF}(V, V')$ und $\beta_W \in \text{BF}(W, W')$ zwei nicht-ausgeartete Bilinearformen. Dann gibt es für jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ eine eindeutige lineare Abbildung $f^{\text{ad}}: W' \rightarrow V'$ mit

$$\beta_W(f(v), w') = \beta_V(v, f^{\text{ad}}(w')) \quad \text{für alle } v \in V, w' \in W' \quad (2)$$

gilt. Dies ergibt sich wie bereits in Abschnitt 4.4 dadurch, dass (2) äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \\ (\beta_V)_1 \uparrow & & \uparrow (\beta_W)_1 \\ V' & \xleftarrow{f^{\text{ad}}} & W' \end{array}$$

ist. Also ist f^{ad} eindeutig als $f^{\text{ad}} = (\beta_V)_1^{-1} \circ f^* \circ (\beta_W)_1$ bestimmt.

Beispiel 6.19.

1. Es seien $\beta_V \in \text{BF}(V, V^*)$ und $\beta_W \in \text{BF}(W, W^*)$ die nicht-ausgearteten Bilinearformen mit $\beta_V(v, \varphi) = \varphi(v)$ und $\beta_W(w, \psi) = \psi(w)$. Dann ist $f^*: W^* \rightarrow V^*$ die zu $f: V \rightarrow W$ bezüglich β_V und β_W duale Abbildung, denn

$$\beta_W(f(v), \psi) = \psi(f(v)) = f^*(\psi)(v) = \beta_V(v, f^*(\psi)).$$

2. Es seien V und W euklidische Vektorräume. Dann sind die zugehörigen Skalarprodukte $\langle -, - \rangle_V$ und $\langle -, - \rangle_W$ nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen. Dann ist die zu $f: V \rightarrow W$ bezüglich β_V und β_W adjungierte Abbildung die adjungierte Abbildung $f^{\text{ad}}: W \rightarrow V$ aus Abschnitt 4.4.

6.4.3 Nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen

Wir betrachten nun den Fall, dass $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V ist. Für die beiden zugehörigen linearen Abbildungen $\beta_1, \beta_2: V \rightarrow V^*$ gilt dann $\beta_1 = \beta_2$.

Definition 6.20. Das Radikal von β ist der Untervektorraum

$$\text{rad } \beta := \{v \in V \mid \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V\}.$$

Es gilt $\text{rad } \beta = \ker \beta_1 = \ker \beta_2$, weshalb β genau dann nicht ausgeartet ist, wenn $\text{rad } \beta = 0$ gilt.

Beispiel 6.21. Es sei $\text{char } K \neq 2$. Dann gibt es eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V bezüglich β , so dass die darstellende Matrix $M(\beta, \mathcal{B})$ von der Form

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ gilt. Dann ist $\text{rg } \beta = r$ und somit $M(\beta, \mathcal{B})$ genau dann invertierbar, wenn $r = n$ gilt.

Zusammen mit dem Sylvesterschen Trägheitssatz ergibt sich damit, dass es auf einem n -dimensionalen reellen Vektorraum bis auf Kongruenz genau $n + 1$ nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen gibt.

Außerdem gilt in der obigen Situation, dass (v_{r+1}, \dots, v_n) eine Basis von $\text{rad } \beta$ ist.

Lemma 6.22. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt

1. $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ und
2. $(U^\perp)^\perp = U$,

Warnung 6.23. Es gilt im Allgemeinen nicht, dass $V = U \oplus U^\perp$.