Notizen zum

Repetitorium
Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

7. August 2017

1 Diagonalisierbarkeit und Jordan-Normalform

Im Folgenden sei K ein Körper.

1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.1. Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sind $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$, so ist v ein *Eigenvektor* von f zum *Eigenwert* λ. Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$V_\lambda(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = \lambda f\} = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$$

der *Eigenraum* von f zu λ.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Sind $\lambda \in K$ und $x \in K^n$ mit $x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$, so ist x ein *Eigenvektor* von A zum *Eigenwert* λ. Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda(A) \coloneqq \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

der *Eigenraum* von A zu λ.

Remark 1.2. 1. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $f\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige Endomorphismus, so stimmen die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume von A mit denen von f überein.

Es genügt daher im Folgenden, Definitionen und Aussagen für Endomorphismen zu anzugeben – für Matrizen gelten diese dann ebenfalls.

2. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A \coloneqq M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Bezüglich

des zu $\mathcal{B}$ zugehörigen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}}\colon V \to K^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T =: [v]_{\mathcal{B}}$$

gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}}\left(V_\lambda(f)\right) = (K^n)_\lambda(A).$$

Es ist also $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $[v]_{\mathcal{B}}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Berechnungen lassen sich deshalb in Matrizenform durchführen.

Für theoretische Aussagen nutzen wir also Endomorphismen, und für konkrete Rechnungen nutzen wir Matrizen.

Lemma 1.3. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren von $f\colon V \to V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig. Inbesondere ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.*

Definition 1.4. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heiß *diagonalisierbar* falls er die folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.
2. Es gilt $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.
3. Es gibt eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f.
4. Es gibt ein Erzeugendensystem von V bestehend aus Eigenvektoren von f.

1.2 Das charakterische Polynom

Im Rest des Abschnittes sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $A := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\
\iff & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \\
\iff & (K^n)_\lambda(A) \neq 0 \\
\iff & \ker(A - \lambda I) \neq 0 \\
\iff & A - \lambda I \text{ ist nicht invertierbar} \\
\iff & \det(A - \lambda I) = 0.
\end{aligned}$$

Definition 1.5. Das *charakterische Polynom* von $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist definiert als

$$p_A(t) := \det(A - tI) \in K[t],$$

das charakteristische Polynom von f ist definiert als $p_f(t) = p_A(t)$.

Dass das charakteristische Polynom $p_f(t)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt, folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1.6. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakterische Polynom.*

Aus unserer anfänglichen Beobachtung erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom:

Proposition 1.7. *Die Eigenwerte von f genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_f(t)$.*

1.3 Das Minimalpolynom

Lemma 1.8. *Es sei $p \in K[t]$ ein Polynom mit $p(f) = 0$. Dann ist jeder Eigenwert von f eine Nullstelle von p.*

Definition 1.9. Es sei

$$\operatorname{Pol}(f) \coloneqq \{p \in K[t] \mid p(f) = 0\}.$$

Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\operatorname{Pol}(f)$ ist das *Minimalpolynom* von f, und wird mit $m_f(t) \in K[t]$ notiert.

Remark 1.10. Die Wohldefiniertheit von $\operatorname{Pol}(f)$ nutzt die Endlichdimensionalität von V. Hierdurch wird sichergestellt, dass $\operatorname{Pol}(f) \neq 0$ gilt.

Die Definition des Minimalpolynoms lässt sich bis auf Normiertheit wie folgt umschreiben:

Lemma 1.11. *Es gilt*

$$\operatorname{Pol}(f) = \{p \cdot m_f \mid p \in K[t]\}.$$

Für $p \in K[t]$ gilt also genau dann $p(f) = 0$, wenn $m_f \mid p$. Inbesondere gilt $m_f(f) = 0$.

Satz 1.12 (Cayley–Hamilton)**.** *Es gilt $p_f(f) = 0$, also $m_f \mid p_f$.*

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Nullstelle von $m_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also ein Eigenwert von f. Andererseits ist jeder Eigenwert von f nach Lemma 1.11 und Lemma 1.8 auch eine Nullstelle von $m_f(t)$. Somit sind die Nullstelle non $m_f(t)$ genau die Eigenwerte von f. Also haben $p_f(t)$ und $m_f(t)$ die gleichen Nullstellen. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfallen $p_f(t)$ und $m_f(t)$ somit in die gleichen Linearfaktoren, wobei die Vielfachheit im Minimalpolynom nach dem Satz von Cayley–Hamilton jeweils kleiner ist als die Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

Proposition 1.13. *Der Endomorphismus f ist genau dann diagonalisierbar, falls m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*