Aufgabe 1.
Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Skalarprodukt auf V gibt, so dass $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

Aufgabe 2.
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle -,- \rangle_1$ und $\langle -,- \rangle_2$ seien zwei Skalarprodukte auf V mit

$$\langle v_1, v_2 \rangle_1 = 0 \iff \langle v_1, v_2 \rangle_2 = 0 \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass $\langle -,- \rangle_2 = c \langle -,- \rangle_1$ gilt.

Aufgabe 3.
Es seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ gibt, bezüglich dessen die Familie (v_1, v_2) orthonormal ist.
2. Geben Sie eine Matrix $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ an, so dass die Bilinearform $\langle -,- \rangle_B \in \mathrm{BF}(\mathbb{R}^3)$ mit
$$\langle x, y \rangle_B := x^T B y \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^3$$
ein solches Skalarprodukt ist.

Aufgabe 4.
Es seien V und W endlichdimensionale Skalarprodukträume und es sei $f\colon V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass $\ker f = (\operatorname{im} f^{\mathrm{ad}})^\perp$ und $\operatorname{im} f = (\ker f^{\mathrm{ad}})^\perp$ gelten.

Aufgabe 5.
Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass es für jede Flagge
$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$
eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V gibt, so dass $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ für alle i gilt.
2. Zeigen Sie, dass es für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in oberer Dreiecksform ist.

Aufgabe 6.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

1. orthogonal,
2. unitär,
3. hermitesch.

Bestimmen Sie jeweils alle möglichen Werte von $\det A$.