Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional.

Aufgabe 1. (*Existenz von Skalarprodukten*)

Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

Aufgabe 2. (*Kern und Bild der adjungierten Abbildung*)

Es seien V und W Skalarprodukträume und es sei $f\colon V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass $\ker f^{\mathrm{ad}} = (\operatorname{im} f)^{\perp}$ und $\operatorname{im} f^{\mathrm{ad}} = (\ker f)^{\perp}$ gelten.

Aufgabe 3. (*Endomorphismen mit $\langle f(v), v\rangle = 0$*)

1. Es sei V ein Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit $\langle f(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass bereits $f = 0$ gilt.
   (*Tipp*: Betrachten Sie die Eigenwerte von f.)

2. Es sei nun V ein unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\langle f(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass bereits $f = 0$ gilt.
   (*Tipp*: Betrachten Sie die Sesquilinearform $\beta \in \mathrm{SF}(V)$ mit $\beta(v_1, v_2) = \langle f(v_1), v_2\rangle$, und nutzen Sie Polarisation.)

Aufgabe 4.

Es seien V und W Skalarprodukträume und es sei $f\colon V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt $\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$.

2. Für alle $v \in V$ gilt $\|f(v)\| = \|v\|$.

Aufgabe 5.

Es sei V ein unitärer Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass es für jede Flagge

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

   eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i\rangle$ für alle i gilt.

2. Zeigen Sie, dass es für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ in oberer Dreiecksform ist.

Aufgabe 6.

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ orthogonal, unitär, bzw. hermitesch. Bestimmen Sie jeweils alle möglichen Werte von $\det A$.