Aufgabe 1.
Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform.

1. Zeigen Sie, dass es im Fall $\beta \neq 0$ ein $v \in V$ mit $\beta(v,v) \neq 0$ gibt.
(*Hinweis*: Betrachten Sie die Polarisationsformeln.)
2. Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement $\dim \langle v \rangle^{\perp} = \dim V - 1$ gilt.
(*Hinweis*: Betrachten Sie die lineare Abbildung $\beta(-,v)\colon V \to K$.)
3. Folgern Sie, dass $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$ gilt.
4. Zeigen Sie induktiv, dass es eine Orthogonalbasis von V bezüglich β gibt.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass

$$\beta\colon K^2 \times K^2 \to K, \quad \text{mit} \quad \beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf K^2 definiert.

Aufgabe 3.
Es sei $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ die nicht-ausgeartete Bilinearform mit $\beta(A,B) = \mathrm{Spur}(AB)$.

1. Zeigen Sie, dass die Untervektorräume $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezüglich β orthogonal zueinander sind.
2. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $\beta|_{\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})}$ positiv definit ist, und die Einschränkung $\beta|_{\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})}$ negativ definit.
3. Bestimmen Sie die Signatur von β.
4. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ bezüglich β.

Aufgabe 4.
Es seien V, W zwei K-Vektorräume und $\beta_V \in \mathrm{BF}(V)$, $\beta_W \in \mathrm{BF}(W)$ nicht-ausgeartete Bilinearformen. Es sei $f\colon V \to W$ ein Funktion mit

$$\beta_W(f(v_1), f(v_2)) = \beta_V(v_1, v_2) \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5.
Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform. Es sei $U \subseteq V$ ein total isotroper Untervektorraum, d.h. es gelte $\beta(u,u) = 0$ für alle $u \in U$. Zeigen Sie, dass $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$ gilt. (*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass $U \subseteq U^{\perp}$ gilt.)

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie für die gegebenen quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^n$ jeweils die Signatur der zugehörigen symmetrischen Bilinearform.

1. $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2$.
2. $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2$ mit $a \in \mathbb{R}$.
3. $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 15x_2^2 + 6x_1x_2$.
4. $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.
5. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$.
6. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 7x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Aufgabe 7.
Es sei

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie Rang und Signatur von $\beta \in \mathrm{BF}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\beta(x, y) \coloneqq x^T A y \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 8.
Für alle $n \geq 1$ seien

$$A_n \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $a_n \coloneqq \det A_n$.

1. Zeigen Sie induktiv für alle $n \geq 3$, dass $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ gilt.
2. Zeigen Sie für alle $n \geq 2$, dass $a_{n+1} - a_n \geq a_n - a_{n-1}$ gilt.
3. Folgern Sie, dass $a_n > 0$ für alle $n \geq 1$ gilt.
4. Folgern Sie, dass die Matrix A_n für alle $n \geq 1$ positiv definit ist.

Aufgabe 9.
Es seien

$$A_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_4 \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 8 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang und die Signatur von A_i, sowie eine orthogonale Matrix $U_i \in \mathrm{O}(n_i)$, so dass die Matrix $U_i^T A_i U_i$ in Diagonalform ist.

Aufgabe 10.
Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ symmetrisch mit $\det A < 0$. Bestimmen Sie den Rang und die Signatur von A.