

Notizen zum

Repetitorium Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

11. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Diagonalisierbarkeit	3
1.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	3
1.2	Das charakterische Polynom	4
1.3	Das Minimalpolynom	4
1.4	Diagonalisierbarkeit	5
1.5	Simultane Diagonalisierbarkeit	6
1.6	Trigonalisierbarkeit	6
2	Jordan-Normalform	8
2.1	Definition	8
2.2	Eindeutigkeit	8
2.3	Existenz	9
2.4	Implizite Bestimmen der Jordan-Normaform	12
2.5	Lösung des Ähnlichkeitsproblems	12
3	Skalarprodukte & Co.	13
3.1	Allgemeine Definitionen	13
3.2	Orthogonalität	14
3.3	Skalarprodukte	15
3.4	Gram-Schmidt	15
3.5	Adjungierte Abbildung	16
4	Normalenformen für normale Endomorphismen	18
4.1	Anfängliche Definitionen	18
4.2	Normale Endomorphismen	18
4.2.1	Der komplexe Fall	19

4.2.2	Der reelle Fall	19
4.3	Unitäre & Orthogonale Endomorphismen	20
4.3.1	Der komplexe Fall	21
4.3.2	Der reelle Fall	21
4.4	Selbstadjungierte Endomorphismen	21
4.5	Übersicht	23
4.6	Polar- und Iwasawa-Zerlegung	23
5	Symmetrische Bilinearformen	25
5.1	Darstellende Matrizen & Kongruenz	25
5.2	Quadratische Formen und Polarisierung	26
5.3	Existenz von Orthogonalbasen	27
5.4	Sylvesterscher Trägheitssatz & Hauptachsentransformation	27
5.4.1	Sylvesterscher Trägheitssatz	27
5.4.2	Hauptachsentransformation	28
5.5	Dualität	29
5.5.1	Nicht-ausgeartetete Bilinearformen	29
5.5.2	Die Adjungierte Abbildung	30

1 Diagonalisierbarkeit

Im Folgenden sei K ein Körper. Im Rest des Abschnittes sei, sofern nicht anders angegeben, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum.

1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.1. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Sind $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$, so ist v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ . Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$V_\lambda(f) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \text{id}_V)$$

der Eigenraum von f zu λ .

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(K)$. Sind $\lambda \in K$ und $x \in K^n$ mit $x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$, so ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Für alle $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda(A) := \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

der Eigenraum von A zu λ .

Remark 1.2. 1. Ist $A \in M_n(K)$ und $f: K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$ der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige Endomorphismus, so stimmen die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume von A mit denen von f überein.

Es genügt daher im Folgenden, Definitionen und Aussagen für Endomorphismen zu angeben – für Matrizen gelten diese dann ebenfalls.

2. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V , $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A := M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Bezüglich des zu \mathcal{B} zugehörigen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T =: [v]_{\mathcal{B}}$$

gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}}(V_\lambda(f)) = (K^n)_\lambda(A).$$

Es ist also $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $[v]_{\mathcal{B}}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Berechnungen lassen sich deshalb in Matrizenform durchführen.

Für theoretische Aussagen nutzen wir also Endomorphismen, und für konkrete Rechnungen nutzen wir Matrizen.

1.2 Das charakterische Polynom

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, \mathcal{B} eine Basis von V und $A := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die entsprechende darstellende Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\ \iff & \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \\ \iff & (K^n)_\lambda(A) \neq 0 \\ \iff & \ker(A - \lambda I) \neq 0 \\ \iff & A - \lambda I \text{ ist nicht invertierbar} \\ \iff & \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Definition 1.3. Das charakterische Polynom von $A \in M_n(K)$ ist definiert als

$$p_A(t) := \det(A - tI) \in K[t].$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ ist definiert als $p_f(t) = p_A(t)$, wobei $A := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ die darstellende Matrix von f bezüglich einer Basis \mathcal{B} von V ist.

Dass das charakteristische Polynom $p_f(t)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis \mathcal{B} abhängt, folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1.4. Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakterische Polynom.

Aus unserer anfänglichen Beobachtung erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom:

Proposition 1.5. Die Eigenwerte von f genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_f(t)$.

1.3 Das Minimalpolynom

Lemma 1.6. Es sei $p \in K[t]$ ein Polynom mit $p(f) = 0$. Dann ist jeder Eigenwert von f eine Nullstelle von p .

Definition 1.7. Es sei

$$\text{Pol}(f) := \{p \in K[t] \mid p(f) = 0\}.$$

Das eindeutige normierte, von 0 verschiedene Polynom minimalen Grades aus $\text{Pol}(f)$ ist das Minimalpolynom von f , und wird mit $m_f(t) \in K[t]$ notiert.

Remark 1.8. Die Wohldefiniertheit von $\text{Pol}(f)$ nutzt die Endlichdimensionalität von V . Hierdurch wird sichergestellt, dass $\text{Pol}(f) \neq 0$ gilt.

Die Definition des Minimalpolynoms lässt sich bis auf Normiertheit wie folgt umschreiben:

Lemma 1.9. *Es gilt*

$$\text{Pol}(f) = \{p \cdot m_f \mid p \in K[t]\}.$$

Für $p \in K[t]$ gilt also genau dann $p(f) = 0$, wenn $m_f \mid p$. Insbesondere gilt $m_f(f) = 0$.

Satz 1.10 (Cayley–Hamilton). *Es gilt $p_f(f) = 0$, also $m_f \mid p_f$.*

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Nullstelle von $m_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also ein Eigenwert von f . Andererseits ist jeder Eigenwert von f nach Lemma 1.9 und Lemma 1.6 auch eine Nullstelle von $m_f(t)$. Somit sind die Nullstellen von $m_f(t)$ genau die Eigenwerte von f . Also haben $p_f(t)$ und $m_f(t)$ die gleichen Nullstellen. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfallen $p_f(t)$ und $m_f(t)$ somit in die gleichen Linearfaktoren, wobei die Vielfachheit im Minimalpolynom nach dem Satz von Cayley–Hamilton jeweils kleiner ist als die Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

1.4 Diagonalisierbarkeit

Lemma 1.11. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren von $f: V \rightarrow V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, d.h. es gelte $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig. Insbesondere ist die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ direkt.*

Definition 1.12. *Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ heißt diagonalisierbar falls er die folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.*
2. *Es gilt $V = \sum_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$.*
3. *Es gibt eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f .*
4. *Es gibt ein Erzeugendensystem von V bestehend aus Eigenvektoren von f .*
5. *Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass die darstellende Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt diagonalisierbar, falls sie eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. *Es gilt $K^n = \bigoplus_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.*
2. *Es gilt $K^n = \sum_{\lambda \in K} (K^n)_\lambda(A)$.*
3. *Es gibt eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A .*
4. *Es gibt ein Erzeugendensystem von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A .*
5. *Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h. es gibt $S \in \text{GL}_n(K)$, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.*

Lemma 1.13. *Für einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar ist.
3. Für jede Basis \mathcal{B} von V ist $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonalisierbar.

Ob ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ diagonalisierbar ist, hängt nur vom Minimalpolynom $m_f(t)$ ab:

Proposition 1.14. *Der Endomorphismus f ist genau dann diagonalisierbar, falls m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

1.5 Simultane Diagonalisierbarkeit

Definition 1.15. *Eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Endomorphismen $f_i: V \rightarrow V$ heißt simultan diagonalisierbar, falls es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.*

Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Matrizen $A_i \in M_n(K)$ heißt simultan diagonalisierbar, falls es $S \in GL_n(K)$ gibt, so dass SA_iS^{-1} für jedes $i \in I$ eine Diagonalmatrix ist.

Lemma 1.16. *Für eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Endomorphismen $f_i: V \rightarrow V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. Die Familie von Endomorphismen $(f_i)_{i \in I}$ ist simultan diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass die Familie von Matrizen $(M_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}})_{i \in I}$ simultan diagonalisierbar ist.
3. Für jede Basis \mathcal{B} von V ist die Familie von Matrizen $(M_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}})_{i \in I}$ simultan diagonalisierbar.

Proposition 1.17. *Für Endomorphismen $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. Die Familie (f_1, \dots, f_n) sind simultan diagonalisierbar.
2. Die Endomorphismen f_1, \dots, f_n sind diagonalisierbar und sind paarweise kommutierend, d.h. es gilt $f_i f_j = f_j f_i$ für alle i, j .

1.6 Trigonalisierbarkeit

Definition 1.18. *Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ heißt trigonalisierbar, falls es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt trigonalisierbar, falls A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist, d.h. falls es $S \in GL_n(K)$ gibt, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Lemma 1.19. *Für einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. Der Endomorphismus f ist trigonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass die darstellende Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar ist.
3. Für jede Basis \mathcal{B} von V ist die darstellende Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ trigonalisierbar.

Die Trigonalisierbarkeit eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ hängt nur von dem charakteristischen Polynom $p_f(t)$ ab:

Proposition 1.20. *Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom $p_f(t)$ in Linearfaktoren zerfällt.*

Insbesondere ist jeder Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ trigonalisierbar, falls K algebraisch abgeschlossen ist.

2 Jordan-Normalform

Im Folgenden sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V .

2.1 Definition

Definition 2.1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ ist

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

der Jordanblock zu λ von Größe n .

Definition 2.2. Eine Matrix J der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

ist in Jordan-Normalform.

Definition 2.3. Eine Jordan-Normalform einer Matrix $A \in M_n(K)$ ist eine zu A ähnliche Matrix $J \in M_n(K)$, so dass J in Jordan-Normalform ist.

Eine Jordan-Normalform von f ist eine Jordan-Normalform der darstellenden Matrix $M_{f,B,B}$ bezüglich einer Basis B von V .

Der Endomorphismus f besitzt genau dann eine Jordan-Normalform $J \in M_n(K)$, falls es eine Basis B von V gibt, so dass $M_{f,B,B} = J$ gilt. Wir bezeichnen eine solche Basis als *Jordanbasis* von f .

Eine *Jordanbasis* $B = (v_1, \dots, v_n)$ einer Matrix $A \in M_n(K)$ ist eine Jordanbasis der zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörigen linearen Abbildung $f_A: K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$. Dies ist äquivalent dazu, dass für die Matrix $C = (v_1 | \dots | v_n) \in GL_n(K)$ die Matrix $S^{-1}AS = M_{f_A,B,B}$ in Jordan-Normalform ist.

2.2 Eindeutigkeit

Es sei J eine Matrix in Jordan-Normalform, also

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Für alle $\lambda \in K$ gilt dann

$$\dim \ker(J - \lambda I)^k = \sum_{k'=1}^k \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } \geq k'.$$

Für die Zahlen $d_k(\lambda) := \dim \ker(J - \lambda I)^k$ gilt deshalb

$$d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) = \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } \geq k$$

und somit

$$\begin{aligned} & \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \\ &= \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } \geq k \\ & \quad - \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } \geq (k+1) \\ &= (d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda)) - (d_{k+1}(\lambda) - d_k(\lambda)) \\ &= 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ist $A \in M_n(K)$ und $\lambda \in K$ eine Jordan-Normalform von A , so sind A und J ähnlich, weshalb für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ auch $(A - \lambda I)^k$ und $(J - \lambda I)^k$ ähnlich sind. Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ gilt deshalb $\dim \ker(A - \lambda)^k = \dim \ker(J - \lambda)^k$. Aus der obigen Berechnung ergibt sich deshalb für die Zahlen $d_k(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda I)^k$, dass

$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda \text{ von Größe } k \text{ in } J = 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Damit ergibt sich insbesondere die folgende Eindeutigkeit der Jordannormalform:

Proposition 2.4. *Je zwei Jordannormalformen einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus stimmen bis auf Permutation der Jordanblöcke überein.*

Es ergibt daher Sinn, von der Jordannormalform einer Matrix, bzw. eines Endomorphismus zu sprechen.

2.3 Existenz

Definition 2.5. *Für alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei*

$$V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid (f - \lambda \text{id}_V)^k(v) = 0\} = \ker(f - \lambda \text{id}_V)^k.$$

Der Untervektorraum

$$V_\lambda^\infty(f) := \bigcup_{k=0}^{\infty} V_\lambda^k(f) = \{v \in V \mid \text{es gibt } k \geq 0 \text{ mit } (f - \lambda \text{id}_V)^k(v) = 0\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum von f zu λ . Für $A \in M_n(K)$ und alle $\lambda \in K$ und $k \geq 0$ sei

$$(K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid (A - \lambda I)^k x = 0\} = \ker(A - \lambda I)^k.$$

Der Untervektorraum

$$(K^n)_\lambda^\infty(A) := \bigcup_{k=0}^{\infty} (K^n)_\lambda^k(A) = \{x \in K^n \mid \text{es gibt } k \geq 0 \text{ mit } (A - \lambda I)^k x = 0\}$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum von A zu λ .

Lemma 2.6. 1. Es gilt genau dann $V_\lambda^\infty(f) \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von f ist.

2. Die Summe $\sum_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$ ist direkt.

Mithilfe der verallgemeinerten Eigenräume ergibt sich eine Charakterisierung der Existenz der Jordan-Normalform:

Satz 2.7. Die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.

2. Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda^\infty(f)$.

3. Die Jordan-Normalform von f existiert.

Ist $A \in M_n(K)$, so dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt, so lässt sich die Jordan-Normalform von A sowie eine zugehörige Jordanbasis wie folgt berechnen:

- Man bestimme die Eigenwerte von A , etwa indem man $p_A(t)$ berechnet und anschließend die Nullstellen herausfindet.
- Für jeden Eigenwert λ von A führe man die folgenden Schritte durch:
 - Man berechne die iterierten Kerne $\ker(A - \lambda I), \ker(A - \lambda I)^2, \dots, \ker(A - \lambda I)^m$ bis zu dem Punkt, an dem eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:
 - Die Dimension $\dim \ker(A - \lambda I)^m$ ist die algebraische Vielfachheit von λ in $p_A(t)$.
 - Es gilt $\ker(A - \lambda I)^m = \ker(A - \lambda I)^{m+1}$.
 - Man bestimme Anhand der Zahlen $d_k(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda I)^k$ die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke zu λ von Größe k als

$$b_k(\lambda) := 2d_k(\lambda) - d_{k-1}(\lambda) - d_{k+1}(\lambda).$$

Aus den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ von A und den Zahlen $b_k(\lambda_i)$ erhalten wir bereits, wieviele Blöcke es zu welchen Eigenwert von welcher Größe gibt, d.h. wie die Jordannormalform von A (bis auf Permutation der Blöcke) aussehen wird. Insbesondere ist $d_1(\lambda)$ die Gesamtzahl der Jordanblöcke zu λ und die entsprechende Potenz m die maximal auftretende Blöckgröße zu λ .

Zur Berechnung einer Jordanbasis von A geht man weiter wie folgt vor:

- Für jeden Eigenwert λ von A gehe man weiterhin wie folgt vor:
 - Man wähle linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_{b_m} \in \ker A^m$ mit

$$\ker A^m = \ker A^{m-1} \oplus \langle v_1, \dots, v_{b_m} \rangle.$$

(Zur konkreten Berechnung ergänze man eine Basis $\ker A^{m-1}$ zu einer Basis von $\ker A^m$; dann kann man v_1, \dots, v_{b_m} als die neu hinzugekommenen Basisvektoren wählen.)

- Hierdurch ergeben sich für \mathcal{B} die ersten paar Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1, \\ &v_2, Av_2, \dots, A^{m-1}v_2, \\ &\dots, \\ &v_{b_m}, Av_{b_m}, \dots, A^{m-1}v_{b_m}. \end{aligned}$$

- Man wählt nun linear unabhängige Vektoren $v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \in \ker A^{m-1}$, so dass

$$\ker A^{m-1} = \ker A^{m-2} \oplus \langle Av_1, \dots, Av_{b_m} \rangle \oplus \langle v'_1, \dots, v'_{b_{m-1}} \rangle$$

gilt.

- Hierdurch erhält man für \mathcal{B} die weiteren Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v'_1, Av'_1, \dots, A^{m-2}v'_1, \\ &v'_2, Av'_2, \dots, A^{m-2}v'_2, \\ &\dots, \\ &v'_{b_{m-1}}, Av'_{b_{m-1}}, \dots, A^{m-2}v'_{b_{m-1}}. \end{aligned}$$

- Man wähle nun $v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \in \ker A^{m-2}$, so dass

$$\begin{aligned} &\ker A^{m-1} \\ &= \ker A^{m-2} \oplus \langle A^2v_1, \dots, A^2v_{b_m} \rangle \oplus \langle Av'_1, \dots, Av'_{b_{m-1}} \rangle \oplus \langle v''_1, \dots, v''_{b_{m-2}} \rangle \end{aligned}$$

gilt.

- Hiermit ergeben sich für \mathcal{B} die Basisvektoren

$$\begin{aligned} &v''_1, Av''_1, \dots, A^{m-2}v''_1, \\ &v''_2, Av''_2, \dots, A^{m-2}v''_2, \\ &\dots, \\ &v''_{b_{m-2}}, Av''_{b_{m-2}}, \dots, A^{m-2}v''_{b_{m-2}}. \end{aligned}$$

Durch Weiterführen der obigen Schritte erhält man schließlich eine Basis \mathcal{B}_λ von $(K^n)_\lambda^\infty(A)$.

- Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von K^n , so ergibt sich Zusammenfügen der Basen $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_{\lambda_t}$ eine Basis \mathcal{B} von K^n .
- Die Basis \mathcal{B} ist eine Jordanbasis von A : Indem man die (in der obigen Reihenfolge entstandenen) Basisvektoren als Spalten in eine Matrix C einträgt, erhält man schließlich $C \in \text{GL}_n(K)$, so dass $C^{-1}AC$ in Jordan-Normalform ist. Dabei sind die Blöcke zunächst nach den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ (in dieser Reihenfolge) sortiert; die Blöcke zum gleichen Eigenwert sind nach absteigender Größe sortiert.

2.4 Implizite Bestimmen der Jordan-Normalform

Es sei $J \in \text{M}_n(K)$ eine Jordan-Normalform von f .

- Für das charakteristische Polynom $p_f(t) = p_J(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ gelten

$$\text{Spur } f = \text{Spur } J = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{und} \quad \det f = \det J = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

- Für das charakteristische Polynom $p_f(t) = p_J(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt

$$n_i = \dim V_{\lambda_i}^{\infty}(f) = \text{wie oft } \lambda_i \text{ auf der Diagonalen von } J \text{ steht}$$

- Es gilt

$$\text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda_i \text{ in } J = \dim \ker f - \text{rg } f.$$

- Für das Minimalpolynom $m_f(t) = m_J(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt

$$m_i = \text{maximale auftretende Größe eines Jordanblockes zu } \lambda_i \text{ in } J$$

- Ist allgemeiner $q(t) \in K[t]$ ein Polynom mit $q(t) = (t - \lambda_1)^{m'_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m'_s}$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und $q(f) = 0$, so ergeben sich die folgenden beiden Restriktionen an J :

1. Jeder Eigenwert von f kommt in $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ vor (siehe Lemma 1.6),
2. Es gilt $m_f \mid q$. Deshalb ist $m_f = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$ mit $m_i \leq m'_i$ für alle i . Also sind die Jordanblöcke zu λ_i in J jeweils höchstens m'_i groß.

Für kleine Matrizen kann man hierdurch bereits Aussagen über die Jordan-Normalform treffen, ohne die Matrix selbst zu kennen.

2.5 Lösung des Ähnlichkeitsproblems

Satz 2.8. *Zwei Endomorphismen $f, g: V \rightarrow V$ sind genau dann ähnlich, wenn sie (bis auf Permutation der Blöcke) die gleiche Jordan-Normalform besitzen.*

3 Skalarprodukte & Co.

Im Folgenden sei K ein Körper. Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

3.1 Allgemeine Definitionen

Definition 3.1. Es seien U, V und W K -Vektorräume.

- Eine Abbildung $\beta: V \times W \rightarrow U$ heißt K -bilinear, falls

$$\begin{aligned}\beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) &= \lambda \beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \lambda \beta(v, w)\end{aligned}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$ gilt. Gilt zusätzlich $U = K$, so ist β eine Bilinearform. Es ist

$$\text{BF}(V, W) := \{\beta: V \times W \rightarrow K \mid \beta \text{ ist eine Bilinearform}\}.$$

- Gilt zusätzlich $V = W$ und

$$\beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1)$$

für alle $v_1, v_2 \in V$, so heißt β symmetrisch. Es sind

$$\text{BF}(V) := \text{BF}(V, V)$$

sowie

$$\text{BF}^{\text{sym}}(V) := \{\beta \in \text{BF}(V) \mid \beta \text{ ist symmetrisch}\}.$$

Definition 3.2. Es seien U, V und W \mathbb{C} -Vektorräume.

- Eine Abbildung $\beta: V \times W \rightarrow U$ heißt sesquilinear, falls

$$\begin{aligned}\beta(v_1 + v_2, w) &= \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w), \\ \beta(v, w_1 + w_2) &= \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2), \\ \beta(\lambda v, w) &= \lambda \beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(v, \lambda w) = \bar{\lambda} \beta(v, w)\end{aligned}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Gilt zusätzlich $U = \mathbb{C}$, so ist β eine Sesquilinearform. Es ist

$$\text{SF}(V, W) := \{\beta: V \times W \rightarrow \mathbb{C} \mid \beta \text{ ist eine Sesquilinearform}\}.$$

- Gilt zusätzlich $V = W$ und

$$\beta(v_1, v_2) = \overline{\beta(v_2, v_1)}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$, so heißt β hermitesch. (Für alle $v \in V$ gilt dann $\beta(v, v) \in \mathbb{R}$.)
Es sind

$$\text{SF}(V) := \text{SF}(V, V)$$

sowie

$$\text{SF}^{\text{her}}(V) := \{\beta \in \text{BF}(V) \mid \beta \text{ ist hermitesch}\}.$$

Definition 3.3. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen V und W ist halblinear falls

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

Eine Abbildung $\beta: V \times W \rightarrow U$ ist genau dann K -bilinear, wenn die Abbildungen

$$\beta(v, -): W \rightarrow U, \quad w \mapsto \beta(v, w) \quad \text{und} \quad \beta(-, w): V \rightarrow U, \quad v \mapsto \beta(v, w)$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$ linear sind. Eine Abbildung $\beta: V \times W \rightarrow U$ ist genau dann sesquilinear, wenn die Abbildung $\beta(v, -): W \rightarrow U$ für jedes $v \in V$ halblinear ist, und die Abbildung $\beta(-, w): V \rightarrow U$ für jedes $w \in W$ linear ist.

3.2 Orthogonalität

Es sei V ein K -Vektorraum und $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform, bzw. $K = \mathbb{C}$ und $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$ eine hermitsche Sesquilinearform.

Definition 3.4. • Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ sind orthogonal zueinander, im Zeichen $v_1 \perp v_2$, falls $\beta(v_1, v_2) = 0$ gilt.

- Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $U^\perp = \{v \in V \mid \beta(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ das orthogonale Komplement von U bezüglich β .
- Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt orthogonal, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$ gilt.
- Eine Orthogonalbasis ist eine orthogonale Basis.
- Ein Vektor $v \in V$ heißt normiert falls $\beta(v, v) = 1$.
- Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt normiert, falls v_i für jedes $i \in I$ normiert ist.
- Eine Orthonormalbasis ist eine orthogonale, normierte Basis.

3.3 Skalarprodukte

Für eine hermitesche Sesquilinearform $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$ gilt $\beta(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Daher ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 3.5. *Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$, oder V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\beta \in \text{SF}^{\text{her}}(V)$. Dann ist β*

- positiv definit, falls $\beta(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,
- positiv semidefinit, falls $\beta(v, v) \geq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,
- negativ definit, falls $\beta(v, v) < 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,
- negativ semidefinit, falls $\beta(v, v) \leq 0$ für alle $v \neq 0$ gilt,
- indefinit, falls keiner der obigen Fälle eintritt.

Definition 3.6. • *Ein Skalarprodukt ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform, bzw. hermitesche Sesquilinearform.*

- *Ein euklidischer Vektorraum ist ein reeller Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V .*
- *Ein unitärer Vektorraum ist ein komplexer Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V .*

Wir bezeichnen euklidische Vektorräume und unitäre Vektorräume auch als Skalarprodukträume. Das Skalarprodukt schreiben wir häufig nur als $\langle -, - \rangle$.

Definition 3.7. *Es sei V ein Skalarproduktraum. Die Norm eines Vektors $v \in V$ ist definiert als $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.*

3.4 Gram-Schmidt

Es sei V ein Skalarproduktraum. Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig. Induktiv konstruiere man Vektoren $w_1, \dots, w_n \in V$ wie folgt:

- Man beginnt mit $w_1 := v_1 / \|v_1\|$.
- Falls w_1, \dots, w_i definiert sind, so konstruiert man w_{i+1} in zwei Schritten:
 - Man berechne den Vektor $\tilde{w}_{i+1} := v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \langle v_{i+1}, w_j \rangle w_j$. Der Vektor \tilde{w}_{i+1} ist orthogonal zu w_1, \dots, w_i .
 - Aus der linearen Unabhängigkeit von v_1, \dots, v_n folgt, dass $\tilde{w}_{i+1} \neq 0$ gilt. Somit lässt sich \tilde{w}_{i+1} normieren, und man erhält $w_{i+1} := \tilde{w}_{i+1} / \|\tilde{w}_{i+1}\|$.

Die entstehende Familie (w_1, \dots, w_n) ist orthonormal mit

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle w_1, \dots, w_i \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Hieraus folgen die Existenzaussagen über Orthonormalbasen:

Satz 3.8. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so lässt sich jede Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen. Insbesondere existiert eine Orthonormalbasis für V .

Korollar 3.9. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gelten $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Remark 3.10. Wendet man das Gram-Schmidt Verfahren auf linear abhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ an, so ergeben sich für das minimale i mit $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$ zwar noch orthonormale Vektoren w_1, \dots, w_{i-1} , aber dann $\tilde{w}_i = 0$.

3.5 Adjungierte Abbildung

Es sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen Skalarprodukträumen V und W .

Proposition 3.11. Es gibt eine eindeutige Abbildung $f^{\text{ad}}: W \rightarrow V$ mit

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^{\text{ad}}(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W, \quad (1)$$

und f^{ad} ist linear.

Lemma 3.12. • Es gilt $(f^{\text{ad}})^{\text{ad}} = f$.

- Es gilt $\text{id}_V^{\text{ad}} = \text{id}_V$.
- Es gilt $(f \circ g)^{\text{ad}} = g^{\text{ad}} \circ f^{\text{ad}}$.
- Die Abbildung $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W, V), f \mapsto f^{\text{ad}}$ ist antilinear.

In orthonormalen Koordinaten entspricht das Adjungieren einer linearen Abbildung dem Transponieren-Konjugieren.

Notation 3.13. Für alle $M_n(\mathbb{K})$ schreiben wir $A^* := \overline{A}^T$.

Lemma 3.14. Ist \mathcal{B} eine Orthonormalbasis von V und \mathcal{C} eine Orthonormalbasis von W , so gilt

$$M_{f^{\text{ad}}, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}}^*.$$

Die adjungierte Abbildung $f^{\text{ad}}: W \rightarrow V$ hängt eng mit der dualen Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*, \varphi \mapsto \varphi \circ f$ zusammen:

Das Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ auf V liefert eine Abbildung

$$\Phi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\langle -, - \rangle$ im ersten Argument linear ist, und halblinier, da $\Phi_{\mathcal{B}}$ linear im zweiten Argument ist. Die Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}}$ ist bereits ein Isomorphismus, denn es gilt $\dim V^* = \dim V$ und $\Phi_{\mathcal{B}}$ ist injektiv¹, denn für $v \in \ker \Phi_{\mathcal{B}}$

¹Hier nutzen wir, dass die aus der Linearen Algebra I bekannten Aussagen über linearen Abbildungen auch für halbliniere Abbildungen gelten.

gilt $\langle -, v \rangle = \Phi_{\mathcal{B}}(v) = 0$, also $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 0$ und somit $v = 0$. Gleiches gilt für $\Phi_{\mathcal{C}}: W \rightarrow W^*, w \mapsto \langle -, w \rangle$.

Die Bedingung (1) ist äquivalent dazu, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \\ \Phi_{\mathcal{B}} \uparrow & & \uparrow \Phi_{\mathcal{C}} \\ V & \xleftarrow{f^{\text{ad}}} & W \end{array}$$

Somit ist f^{ad} eindeutig bestimmt als $f^{\text{ad}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \Phi_{\mathcal{C}}$.

4 Normalenformen für normale Endomorphismen

Es seien V und W endlichdimensionale Skalarprodukträume.

4.1 Anfängliche Definitionen

Definition 4.1. • Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt unitär im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bzw. orthogonal im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Die Matrix A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
 2. Es gilt $AA^* = I$.
 3. Es gilt $A^*A = I$.
 4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n .
 5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n (betrachtet als Zeilenvektoren).
- Es seien

$$U(n) := \{U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U \text{ ist unitär}\}$$

und

$$O(n) := \{U \in M_n(\mathbb{R}) \mid U \text{ ist orthogonal}\}.$$

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix um den Winkel φ .

4.2 Normale Endomorphismen

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums V .

Definition 4.2. Der Endomorphismus f heißt normal falls f und f^{ad} kommutieren, d.h. falls $f \circ f^{\text{ad}} = f^{\text{ad}} \circ f$ gilt. Eine Matrix A heißt normal, falls A und A^* kommutieren, d.h. falls $AA^* = A^*A$ gilt.

Lemma 4.3. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass die darstellende Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ normal ist.
3. Für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist die darstellende Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ normal.

4.2.1 Der komplexe Fall

Satz 4.4. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist unitär.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f .
3. Der Endomorphismus von f ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.

Korollar 4.5. Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von A .
3. Die Matrix A ist diagonalisierbar und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.
4. Es gibt eine unitäre Matrix $U \in U(n)$, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.

4.2.2 Der reelle Fall

Satz 4.6. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist normal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von der Form

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_t & & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_s > 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ ist. Diese Form ist bis auf Permutation der Diagonalblöcke eindeutig.

Korollar 4.7. Für $A \in M_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist normal.
2. Es gibt eine orthonormale Matrix $U \in O(n)$, so dass $U^{-1}AU$ in der Form (2) ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke.

4.3 Unitäre & Orthogonale Endomorphismen

Definition 4.8. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt *unitär* im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bzw. *orthogonal* im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

gilt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei

$$U(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid f \text{ ist unitär}\}$$

und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei

$$O(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid f \text{ ist orthogonal}\}$$

Lemma 4.9. • Unitäre und orthogonale Abbildungen sind injektiv.

- Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist genau dann unitär, bzw. orthogonal, falls f eine Isometrie ist, d.h. falls

$$\|f(v)\| = \|v\| \quad \text{für alle } v \in V \text{ gilt.}$$

- Es ist $U(V) \subseteq GL(V)$, bzw. $O(V) \subseteq GL(V)$ eine Untergruppe.

Für den zweiten Punkt aus Lemma 4.9 nutzt man die *Polarisierungsformeln*: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2}{2} = \frac{\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2}{4},$$

und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 + i\|v_1 + iv_2\|^2 - i\|v_1 - iv_2\|^2}{4}.$$

Es sei nun $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Lemma 4.10. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.
2. Der Endomorphismus f ist ein Isomorphismus mit $f^{-1} = f^{\text{ad}}$.
3. Es gilt $f \circ f^{\text{ad}} = \text{id}_V$.
4. Es gilt $f^{\text{ad}} \circ f = \text{id}_V$.

Lemma 4.11. Die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist unitär, bzw. orthogonal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass die darstellende Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ unitär ist.
3. Für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist die darstellende Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ unitär.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind diese unitären Matrizen dabei bereits orthogonal.

4.3.1 Der komplexe Fall

Satz 4.12. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist unitär.
2. Der Endomorphismus f ist normal, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von f gilt $|\lambda| = 1$.

Korollar 4.13. Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist unitär.
2. Die Matrix A ist normal, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt $|\lambda| = 1$.

4.3.2 Der reelle Fall

Satz 4.14. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Der Endomorphismus f ist orthogonal.
2. Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von der Form

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & D(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in (0, \pi)$ ist. Diese Form ist bis auf Permutation der Diagonalblöcke eindeutig. (Inbesondere ist die Anzahl der Einsen und Minus-Einsen jeweils eindeutig.)

Korollar 4.15. Für $A \in M_n(\mathbb{R})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Matrix A ist normal.
2. Es gibt eine orthonormale Matrix $U \in O(n)$, so dass $U^{-1}AU$ in der Form (3) ist. Diese Form ist eindeutig bis auf Permutation der Diagonalblöcke.

4.4 Selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei nun $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Definition 4.16. Der Endomorphismus f heißt selbstadjungiert, falls $f^{\text{ad}} = f$ gilt. Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt hermitesch, falls $A^* = A$ gilt.

Inbesondere ist eine reelle Matrix genau dann hermitesch, wenn sie symmetrisch ist.

Lemma 4.17. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch ist.*
3. *Für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hermitesch.*

Satz 4.18. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f , und alle Eigenwerte von f sind reell.*
3. *Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*

Korollar 4.19. *Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist hermitesch.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A , und alle Eigenwerte von A sind reell.*
3. *Es gibt eine unitäre Matrix $U \in U(n)$, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonaleinträgen ist.*
4. *Die Matrix A ist diagonalisierbar, und die Eigenräume sind orthogonal zueinander.*

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lässt sich die Matrix U reell wählen, und somit als $U \in O(n)$.

Definition 4.20. *Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ (bzw. eine hermitesche Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$) heißt positiv definit falls die symmetrische Bilinearform $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ (bzw. $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(\mathbb{R}^n)$) mit $\beta(v_1, v_2) := \langle f(v_1), v_2 \rangle$ positiv definit ist.*

Analog sind für f (bzw. A) die Eigenschaften positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert.

Korollar 4.21. *Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f: V \rightarrow V$, (bzw. eine hermitesche Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$) ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von f (bzw. A) positiv sind.*

Für positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit und indefinit definiert gelten die analogen Aussagen.

4.5 Übersicht

Die verschiedenen Normalenformen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

	Charakterisierung durch f^{ad}	$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
normal	$ff^{\text{ad}} = f^{\text{ad}}f$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t & & \\ & & & r_1 D(\varphi_1) & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r_s D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}, r_i > 0, \varphi_i \in (0, \pi)$
unitär, orthogonal	$f^{\text{ad}} = f^{-1}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $ \lambda_i = 1$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 & & \\ & & & D(\varphi_1) & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D(\varphi_s) \end{pmatrix}$ $\varphi_i \in (0, \pi)$
selbstadjungiert	$f^{\text{ad}} = f$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$	

4.6 Polar- und Iwasawa-Zerlegung

Lemma 4.22. • Für jeden positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ gibt es einen eindeutigen positiv semidefiniten selbstadjungierten Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = g^2$.

- Für jede positiv semidefinite hermitesche Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ gibt es eine eindeutige positiv semidefinite hermitesche Matrix $B \in M_n(\mathbb{K})$ mit $A = B^2$.

In der Situation von Lemma 4.22 schreiben wir $g = \sqrt{f}$ (bzw. $B = \sqrt{A}$).

Satz 4.23 (Polarzerlegung). • Für jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ gibt es einen selbstadjungierten Endomorphismus $s: V \rightarrow V$ und einen unitären, bzw. orthogonalen Endomorphismus $u: V \rightarrow V$ mit $f = s \circ u$. Der Endomorphismus s ist eindeutig bestimmt durch $s = \sqrt{f \circ f^{\text{ad}}}$. Ist f invertierbar, so ist auch u eindeutig.

- Für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ gibt eine hermitesche Matrix $S \in M_n(\mathbb{K})$ und eine unitäre, bzw. orthogonale Matrix $U \in M_n(\mathbb{K})$ mit $A = SU$. Die Matrix S ist eindeutig bestimmt durch $S = \sqrt{AA^*}$. Ist A invertierbar, so ist auch U eindeutig.

Satz 4.24 (Iwasawa-Zerlegung). Es seien $K, A, N \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ die folgenden Untergruppen:

- Es ist $K = U(n)$, bzw. $K = O(n)$.
- A besteht aus den Diagonalmatrizen mit reellen, positiven Diagonaleinträgen.
- N besteht aus den oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.

Dann gibt es für jede Matrix $s \in GL_n(\mathbb{K})$ eindeutige Matrizen $k \in K$, $a \in A$ und $n \in N$ mit $s = kan$, d.h. die Abbildung

$$K \times A \times N \rightarrow GL_n(\mathbb{K}), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

ist eine Bijektion.

Warnung 4.25. Diese Bijektion ist i.A. kein Gruppenhomomorphismus. Sie ist aber ein Homöomorphismus (und sogar ein Diffeomorphismus).

5 Symmetrische Bilinearformen

Im Folgenden sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum.

5.1 Darstellende Matrizen & Kongruenz

Definition 5.1. Die darstellende Matrix einer Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ist die Matrix

$$M(\beta, \mathcal{B}) := \begin{pmatrix} \beta(v_1, v_1) & \beta(v_1, v_2) & \cdots & \beta(v_1, v_n) \\ \beta(v_2, v_1) & \beta(v_2, v_2) & \cdots & \beta(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_n, v_1) & \beta(v_n, v_2) & \cdots & \beta(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.2. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und

$$V \rightarrow K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: [v]$$

der zugehörige Isomorphismus $V \rightarrow K^n$.

1. Für alle $w_1, w_2 \in V$ gilt $\beta(w_1, w_2) = [w_1]^T A [w_2]$.

2. Die Abbildung

$$\text{BF}(V) \rightarrow M_n(K), \quad \beta \mapsto M(\beta, \mathcal{B})$$

ist ein Isomorphismus von K -Vektorräumen.

Lemma 5.3. Für $\beta \in \text{BF}(V)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Bilinearform β ist symmetrisch.
2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V , so dass $M(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch ist.
3. Für jede Basis \mathcal{B} von V ist $M(\beta, \mathcal{B})$ symmetrisch.

Lemma 5.4. Sind \mathcal{B} und \mathcal{C} zwei Basen von V , und ist $\beta \in \text{BF}(V)$ eine Bilinearform, so gilt

$$M(\beta, \mathcal{B}) = M_{\text{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{C}}^T M(\beta, \mathcal{C}) M_{\text{id}_V, \mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Definition 5.5. Zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ heißen kongruent zueinander, falls es $C \in \text{GL}_n(K)$ mit $A = C^T B C$ gibt.

Kongruente Matrizen stellen also die gleiche Bilinearform bezüglich verschiedener Basen dar, d.h. für $n = \dim V$ sind zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ genau dann kongruent, falls es eine Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ sowie Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} von V gibt, so dass $A = M(\beta, \mathcal{A})$ und $B = M(\beta, \mathcal{B})$ gelten.

Korollar 5.6. Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf $M_n(K)$.

Da der Rang einer Matrix invariant unter Kongruenz ist, ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 5.7. Der Rang einer Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ ist $\text{rg } \beta := \text{rg } M(\beta, \mathcal{B})$, wobei \mathcal{B} eine Basis von V ist.

5.2 Quadratische Formen und Polarisation

Proposition 5.8. Für eine Abbildung $Q: V \rightarrow K$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Es gibt eine Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V)$ mit $Q(v) = \beta(v, v)$ für alle $v \in V$.
2. Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und Koeffizienten $c_{ij} \in K$, so dass

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \in K \quad (4)$$

gilt.

3. Für jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V gibt Koeffizienten $c_{ij} \in K$, so dass (4) gilt.
4. Es gilt $Q(av) = a^2 Q(v)$ für alle $v \in V$ und $a \in K$, und die Abbildung

$$\beta: V \times V \rightarrow K, \quad \text{mit} \quad \beta(v, w) = Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$$

ist bilinear.

Definition 5.9. Eine Abbildung $Q: V \rightarrow K$, die eine, und damit alle Eigenschaften aus Proposition 5.8 erfüllt, heißt quadratische Form auf V . Es ist

$$\text{Quad}(V) := \{Q: V \rightarrow K \mid Q \text{ ist eine quadratische Form}\}$$

der K -Vektorraum der quadratischen Formen auf K (mit punktweiser Addition und punktweiser Skalarmultiplikation).

Es sei nun $\text{char } K \neq 2$. Dann gibt es auf V eine 1:1-Korrespondenz zwischen den symmetrischen Bilinearformen und den quadratischen Formen: Jede symmetrische Bilinearform β liefert eine quadratische Form

$$Q_\beta: V \rightarrow K, \quad v \mapsto \beta(v, v).$$

Andererseits liefert jede quadratische Form $Q: V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform $\beta_Q \in \text{BF}(V)$ durch

$$\beta_Q(v, w) := \frac{Q(v + w) - Q(v) - Q(w)}{2} \quad \text{für alle } v, w \in V. \quad (5)$$

Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander, und liefern einen Isomorphismus

$$\text{BF}^{\text{sym}}(V) \longleftrightarrow \text{Quad}(V), \quad \beta \mapsto Q_\beta, \quad Q \longleftarrow \beta_Q.$$

Wir bezeichnen (5) als eine *Polarisationsformel*; sie erlaubt es uns, aus der quadratischen Form Q die ursprüngliche symmetrische Form β zurückzugewinnen. Neben (5) gilt auch noch die Polarisationsformel

$$\beta(v_1, v_2) = \frac{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1 - v_2)}{4} \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

5.3 Existenz von Orthogonalbasen

Es sei $\text{char } K \neq 2$ und $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform.

Satz 5.10. *Es gibt eine Orthogonalbasis von V bezüglich β .*

Korollar 5.11. *Für jede symmetrische Matrix $A \in M_n(K)$ gibt es eine Matrix $S \in \text{GL}_n(K)$, so dass $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.*

Ist $A \in M_n(K)$ eine symmetrische Matrix, so lässt sich eine Diagonalform wie in Korollar 5.11 sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix $S \in \text{GL}_n(K)$ mithilfe von *simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen* berechnen:

- Man bringe die Matrix durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform, und somit insbesondere in obere Dreiecksform.
- Nach jeder elementaren Zeilenumformung führt die man die analoge elementare Spaltenumformung durch. Hierdurch bleibt die Matrix symmetrisch.

Als Ergebnis erhält man somit eine Matrix symmetrische Matrix B , die in oberer Dreiecksform ist. Also ist B eine Diagonalmatrix. Eine Matrix $S \in \text{GL}_n(K)$ mit $C^T A C = B$ erhält man, indem man die genutzten elementaren Spaltenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix I anwendet. (Nutzt man anstelle der Spaltenumformungen die Zeilenumformungen, so erhält man stattdessen C^T .)

5.4 Sylvesterscher Trägheitssatz & Hauptachsentransformation

Für diesen Unterabschnitt sei $K = \mathbb{R}$

5.4.1 Sylvesterscher Trägheitssatz

Es sei $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ eine symmetrischen Bilinearform.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthogonalbasis von V bezüglich β , so ist die darstellende Matrix $M(\beta, \mathcal{B})$ von der Form

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

wobei $d_i = \beta(v_i, v_i)$ gilt. Sind $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit $\mu_i \neq 0$, so ist auch $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i = \mu_i v_i$ eine Basis von V , und es gilt

$$M(\beta, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1^2 d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 d_n \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich in (6) die Diagonaleinträge um Quadratzahlen aus \mathbb{R} abändern. Hiermit erhält man aus Satz 5.10 den Sylvesterschen Trägheitssatz:

Korollar 5.12 (Sylvesterscher Trägheitssatz). *Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann existiert eine Basis \mathcal{B} von V , so dass*

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$$

gilt. Die Zahlen p , q und r sind eindeutig bestimmt durch

$$p = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ positiv definit ist}\}$$

und

$$q = \max\{\dim U \mid U \subseteq V \text{ ist ein UVR, so dass } \beta|_{U \times U} \text{ negativ definit ist}\},$$

sowie durch $p + q + r = n$. Zudem gilt $\text{rg } \beta = p + q$.

Definition 5.13. *In der Situation von Korollar 5.12 heißt die Zahl $p - q$ die Signatur von β .*

Man bemerke, dass sich die Zahlen p , q und r aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz bereits aus der Form (6) ablesen lassen: Die Zahl p ist die Anzahl der positiven Diagonaleinträge, die Zahl q ist die Anzahl der negativen Diagonaleinträge, und r ist die Häufigkeit von 0 als Diagonaleintrag.

5.4.2 Hauptachsentransformation

Ist $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(\mathbb{R}^n)$ eine symmetrische Bilinearform, so gilt für die symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A_{ij} = \beta(e_i, e_j)$, dass

$$\beta(x, y) = x^T A y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Nach Korollar 4.19 gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von A . Ist λ_i der zu v_i gehörige Eigenwert, so gilt

$$\beta(v_i, v_j) = v_i^T A v_j = \lambda_j v_i^T v_j = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Somit ist \mathcal{B} eine Orthogonalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich β und

$$M(\beta, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.14. *Es seien p, q und r die Zahlen aus dem Sylvesterscher Trägheitssatz für β . Dann ist p die Anzahl der positiven Eigenwerte von A , q die Anzahl der negativen Eigenwerte, und r die Vielfachheit des Eigenwerts 0.*

Lemma 5.15 (Hauptminorenkriterium). *Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv, wenn alle führenden Hauptminoren positiv sind.*

5.5 Dualität

Es sei W ein weiterer endlichdimensionaler K -Vektorraum

5.5.1 Nicht-ausgeartet Bilinearformen

Es sei $\beta \in \text{BF}(V, W)$ eine Bilinearform. Die Bilinearform β entspricht einer linearen Abbildung

$$\beta_1: W \rightarrow V^*, \quad w \mapsto \beta(-, w),$$

sowie einer linearen Abbildung

$$\beta_2: V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto \beta(v, -).$$

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W , so können wir als Verallgemeinerung von Definition 5.1 die darstellende Matrix

$$M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) := \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) & \cdots & \beta(v_1, w_m) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) & \cdots & \beta(v_2, w_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_n, w_1) & \beta(v_n, w_2) & \cdots & \beta(v_n, w_m) \end{pmatrix}.$$

betrachten. Dann gilt bezüglich der dualen Basen \mathcal{B}^* von V^* und \mathcal{C}^* on W^* , dass

$$M_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} = M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \quad \text{und} \quad M_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} = M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T$$

Insbesondere gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & \beta_1 \text{ ist ein Isomorphismus} \\ \iff & M_{\beta_1, \mathcal{C}, \mathcal{B}^*} \text{ ist invertierbar} \\ \iff & M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ ist invertierbar} \\ \iff & M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})^T \text{ ist invertierbar} \\ \iff & M_{\beta_2, \mathcal{B}, \mathcal{C}^*} \text{ ist invertierbar} \\ \iff & \beta_2 \text{ ist ein Isomorphismus.} \end{aligned}$$

Definition 5.16. *Eine Bilinearform $\beta \in \text{BF}(V, W)$ heißt nicht-ausgeartet, falls Sie eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

1. *Die lineare Abbildung β_1 ist ein Isomorphismus.*

2. Die lineare Abbildung β_2 ist ein Isomorphismus.
3. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V und \mathcal{C} von W , so dass die darstellende Matrix $M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ invertierbar ist.
4. Für jede Basis \mathcal{B} von V und \mathcal{C} von W ist die darstellende Matrix $M(\beta, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ invertierbar.
5. Es gelten (mindestens) zwei (und damit bereits alle drei) der folgenden Bedingungen:
 - a) Es gilt $\dim V = \dim W$.
 - b) Für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es ein $w \in W$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ (d.h. β_2 ist injektiv).
 - c) Für jedes $w \in W$ mit $w \neq 0$ gibt es ein $v \in V$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ (d.h. β_1 ist injektiv).

Wir betrachten nun den Fall, dass $\beta \in \text{BF}^{\text{sym}}(V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V ist. Für die beiden zugehörigen linearen Abbildungen $\beta_1, \beta_2: V \rightarrow V^*$ gilt dann $\beta_1 = \beta_2$.

Definition 5.17. Das Radikal von β ist der Untervektorraum

$$\text{rad } \beta := \{v \in V \mid \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V\}.$$

Es gilt $\text{rad } \beta = \ker \beta_1 = \ker \beta_2$, weshalb β genau dann nicht ausgeartet ist, wenn $\text{rad } \beta = 0$ gilt.

5.5.2 Die Adjungierte Abbildung

Es seien $\beta \in \text{BF}(V, V')$ und $\gamma \in \text{BF}(W, W')$ zwei nicht-ausgeartete Bilinearformen. Dann gibt es für jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ eine eindeutige lineare Abbildung $f^{\text{ad}}: W' \rightarrow V'$ mit

$$\gamma(f(v), w') = \beta(v, f^{\text{ad}}(w')) \quad \text{für alle } v \in V, w' \in W' \quad (7)$$

gilt. Dies ergibt sich wie bereits in 3.5 dadurch, dass (7) äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \\ \beta_1 \uparrow & & \uparrow \gamma_1 \\ V' & \xleftarrow{f^{\text{ad}}} & W' \end{array}$$

ist. Also ist f^{ad} eindeutig als $f^{\text{ad}} = \beta_1^{-1} \circ f^* \circ \beta_1'$ bestimmt.