Im Folgenden seien alle Vektorräume endlichdimensional.

Aufgabe 1. (*Diagonalisierbarkeit und Selbstadjungiertheit*)

1. Es sei V ein reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass es für jeden diagonalisierbaren Endomorphismus $f\colon V \to V$ ein Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen f selbstadjungiert ist.
2. Wieso gilt die analoge Aussage für komplexe Vektorräume nicht?

Aufgabe 2. (*Selbstadjungierte Endomorphismen*)
Es sei V ein Skalarproduktraum und $f, g\colon V \to V$ seien selbstadjungierte Endomorphismen.

1. Zeigen Sie, dass $f = 0$ gilt, falls f nilpotent ist
2. Zeigen Sie, dass $f^2 = \mathrm{id}_V$ gilt, falls f orthogonal ist.
3. Zeigen Sie, dass $f = g$ gilt, falls es ein $n \geq 0$ mit $(f - g)^n = 0$ gibt.

Aufgabe 3. (*Charakterisierung antiselbstadjungierter Endomorphismen*)
Es sei V ein unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Der Endomorphismus f ist *antiselbstadjungiert*, d.h. es gilt $f^{\mathrm{ad}} = -f$.
2. Der Endomorphismus f ist normal, und alle Eigenwerte von f sind rein imaginär (d.h. aus $i\mathbb{R}$).

Aufgabe 4. (*Zerlegung von Matrizen*)
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie:

1. Es gibt eindeutige hermitesche Matrizen $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B + iC$.
2. A ist genau dann normal, wenn B und C kommutieren.
3. Es gibt eine eindeutige hermitesche Matrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und schiefhermitesche Matrix $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (d.h. $E^* = -E$) mit $A = D + E$.
4. A genau dann normal ist, wenn D und E kommutieren.
5. Wie hängen die beiden Zerlegungen $A = B + iC$ ud $A = D + E$ zusammen?

Aufgabe 5. (*Wurzeln aus negativ semidefiniten Endomorphismen*)
Es sei V ein unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein selbstadjungierter, negativ semidefiniter Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass es einen antiselbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $g^2 = f$ gibt.
2. Entscheiden Sie, ob g eindeutig ist.