

**Aufgabe 1.**

Man gebe jeweils die größte Zahl  $n \geq 1$  an, so dass die Jordan-Normalform aller  $(n \times n)$ -Matrizen durch die folgenden Informationen bis auf Permutation der Jordanblöcke eindeutig bestimmt ist:

1. Das charakteristische Polynom  $p_A(t)$ .
2. Das Minimalpolynom  $p_A(t)$ .
3. Die Dimension aller Eigenräume  $\dim(\mathbb{C}^n)_\lambda(A)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
4. Das Minimalpolynom  $m_A(t)$  und die Dimension aller Eigenräume  $\dim(\mathbb{C}^n)_\lambda(A)$ .

**Aufgabe 2.**

Es seien  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  mit  $\dim(\mathbb{C}^n)_\lambda^\infty(A) \leq 3$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass  $A$  und  $B$  genau dann ähnlich sind, wenn  $p_A = p_B$  und  $m_A = m_B$  gelten.

**Aufgabe 3.**

Bestimmen Sie die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen in  $M_6(K)$ .

**Aufgabe 4.**

Bestimmen Sie für jedes  $a \in \mathbb{R}$  die Jordan-Normalform und das Minimalpolynom der Matrix

$$A_a := \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5.**

1. Es sei  $A = D + N$  mit  $D, N \in M_n(\mathbb{C})$  die Jordan–Chevalley-Zerlegung einer Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie, dass bereits  $D, N \in M_n(\mathbb{R})$  gilt.  
(Tipp: Nutzen Sie komplexe Konjugation.)
2. Über  $\mathbb{R}$  besitzt nicht jede Matrix eine Jordan-Normalform, und somit auch nicht jede Matrix eine Jordan–Chevalley-Zerlegung. Wieso steht dies nicht im Widerspruch zu der obigen Aussage?

**Aufgabe 6.**

Bestimmen Sie für eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $n \geq 1$  mit den angegebenen Eigenschaften jeweils alle möglichen Jordan-Normalformen bis auf Permutation der Jordanblöcke.

1.  $A \in M_2(\mathbb{C})$  ist nicht diagonalisierbar mit  $\text{Spur } A = 0$ .
2. Es gilt  $A^3 = 0$  und alle nicht-trivialen Eigenräume von  $A$  sind eindimensional.
3. Es gelten  $p_A(t) = (t-2)(t+2)^3$  und  $(A-2\mathbb{1})(A+2\mathbb{1}) = 0$ .
4. Es gilt  $p_A(t) = t^3 - t$ .

5. Es gilt  $p_A(t) = (t^2 - 5t + 6)^2$  und alle Eigenräume von  $A$  sind entweder null- oder eindimensional.
6. Es gilt  $A^2 = A$  und alle nicht-trivialen Eigenräume von  $A$  sind zweidimensional.
7. Es gilt  $p_A(t) = t^5$ , alle Eigenräume von  $A$  sind entweder null- oder zweidimensional.
8. Es gilt  $p_A(t) = (t + 3)^3 t^2$  und  $A$  hat keine zweidimensionalen Eigenräume.
9. Es gilt  $p_A(t) = t^5 - 2t^4$  und alle nicht-trivialen Eigenräume von  $A$  haben die gleiche Dimension.
10. Es gilt  $p_A(t) = (t - 3)^4(t - 5)^4$  und  $(A - 3\mathbb{1})^2(A - 5\mathbb{1})^2 = 0$ .
11.  $A \in M_3(\mathbb{C})$  mit  $\text{Spur } A = \det A = 0$ .
12.  $A \in M_8(\mathbb{C})$  mit  $(A - \mathbb{1})(A^5 - A^4) = 0$ ,  $\text{Spur } A = 2$  und  $\text{rg } A = 6$ .
13.  $A \in M_7(\mathbb{C})$  mit  $A^5 = A^4$ ,  $\text{Spur } A = 2$  und  $\text{rg } A = \text{rg } A^2 + 1 = 4$ .
14.  $A \in M_6(\mathbb{C})$  mit  $m_A(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$  und  $\dim V_2(A) = 1$ .
15. Es gelten  $p_A = (t - 1)^2(t - 2)(t - 7)^2$ ,  $\text{Spur } A = 6$ ,  $\det A = 4$ ,  $\text{rg}(A - \mathbb{1}) = 3$ .
16. Es gelten  $p_A(t) = (t - 4)^3(t + 3)^2$  und  $m_A(t) = (t - 4)(t + 3)^2$ .
17.  $A \in M_5(\mathbb{C})$  mit  $A^3 = 0$  und  $\text{rg } A = 3$ .
18.  $A \in M_7(\mathbb{C})$  mit  $A^7 - 2A^5 + A^3 = 0$ ,  $\text{rg } A = \text{rg}(A + \mathbb{1}) = 6$ ,  $\text{Spur } A = 0$ .
19. Es gelten  $p_A(t) = (t + 2)^4(t - 1)^2$ ,  $\text{rg}(A + 2\mathbb{1}) > \text{rg}(A + 2\mathbb{1})^2 = 2$  und  $\text{rg}(A - \mathbb{1}) = 5$ .