Aufgabe 1. (*Diagonalisieren*)

1. Es sei
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_5).$$
Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_5)$, so dass $S^{-1}AS$ in Diagonalform ist.

2. Es sei
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ in Diagonalform ist.

3. Es sei
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$
Geben Sie eine Basis von K^{2n} aus Eigenvektoren von A an. Bestimmen Sie anschließend $p_A(t)$ sowie $\det A$.

   (*Tipp*: A vertauscht die Basisvektoren e_i und e_{n+i}.)

Aufgabe 2. (*Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit*)

1. Es sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Spur} A = 0$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

2. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ einen reellen Eigenwert hat.

3. Folgern Sie, dass jede nicht-triagonalisierbare Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

4. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $k \geq 0$ mit $f^k = I$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie alle möglichen Eigenwerte für A.

5. Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Spur} A = 2$ und $\operatorname{Spur} A^2 = 4$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

6. Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Spur} A = 0$ und $\operatorname{Spur} A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$.

7. Zeigen Sie für alle $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ die Gleichheit
$$\det A = \frac{1}{6}(\operatorname{Spur} A)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{Spur} A^2)(\operatorname{Spur} A) + \frac{1}{3}(\operatorname{Spur} A^3).$$

8. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A^2 + A = 6I$ und $\det A = 144$. Bestimmen Sie n.

9. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A^3 = 3A - 2$ und $A^3 + A^2 = A + I$. Zeigen Sie, dass $A = I$.

Aufgabe 3. (*Cayley-Hamilton*)
Es sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie für $A \in \mathrm{M}_n(K)$, dass die Potenzen $I, A, A^2, \dots, A^n$ linear abhängig sind.

2. Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $p \in K[t]$ mit $p(A) = A^{-1}$ gibt. Bestimmen Sie ein solches Polynom für die Matrix
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 4. (*Simultane Diagonalisierbarkeit*)

1. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und es seien $f, g\colon V \to V$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass auch $f \circ g$ diagonalisierbar ist.

2. Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die beiden Matrizen
$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
simultan diagonalisierbar sind.

3. Es seien $A, B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ mit
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ in Diagonalgestalt sind.

Aufgabe 5. (*Links- und Rechtsshift*)
Es sei $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in K\}$ der Vektorraum der K-wertigen Folgen. Es sei
$$R\colon V \to V, \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$$
der Rechts-Shift-Operator, sowie
$$L\colon V \to V, \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots)$$
der Links-Shift-Operator.

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte von R, sowie die zugehörigen Eigenräume.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte von L, sowie die zugehörigen Eigenräume.