Lösungen und zusätzliche Bemerkungen

zu Übungsblatt 1

Jendrik Stelzner

7. Mai 2017

Aufgabe 3

(a)

Da I eine Untergruppe der additiven Gruppe von R ist, ist aus der Linearen Algebra I ist bekannt, dass

- $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf R definiert,
- durch $\overline{x} + \overline{y} \coloneqq \overline{x+y}$ eine wohldefiniert binäre Verknüpfung von R/I definiert wird,
- R/I durch $+$ zu einer abelschen Gruppe wird.

Es bleibt zu zeigen, dass

- durch $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$ eine wohldefiniert binäre Verknüpfüng auf R/I definiert wird,
- diese Multiplikation $\cdot$ auf R/I assoziativ ist,
- diese Multiplikation $\cdot$ auf R/I kommutativ ist,
- es für diese Multiplikation $\cdot$ auf R/I ein Einselement gibt,
- die Distributivgesetze für die Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf R/I gelten.

Für die Wohldefiniertheit der Multiplikation seien $x, x, y, y' \in R$ with $\overline{x} = \overline{x'}$ und $\overline{y} = \overline{y'}$. Dann gilt $x - x', y - y' \in I$ und somit auch

$$xy - x'y' = xy - xy' + xy' - x'y' = x\underbrace{(y - y')}_{\in I} + \underbrace{(x - x')}_{\in I} y' \in I,$$

also $\overline{xy} = \overline{x'y'}$. Das zeigt die Wohldefiniertheit der Multiplikation. Für alle $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in R/I$ gilt

$$\overline{x} \cdot (\overline{y} \cdot \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{yz} = \overline{xyz} = \overline{xy} \cdot \overline{z} = (\overline{x} \cdot \overline{y}) \cdot \overline{z},$$

was die Assoziativität der Multiplikation zeigt. Für alle $\overline{x}, \overline{y} \in R/I$ gilt

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy} = \overline{yx} = \overline{y} \cdot \overline{x},$$

was die Kommutativität der Multiplikation zeigt. Das Element $\overline{1} \in R/I$ ist ein Einselement für die Multiplikation, denn für alle $\overline{x} \in R/I$ gilt

$$\overline{1} \cdot \overline{x} = \overline{1 \cdot x} = \overline{x}.$$

Die Distributivität der Multiplikation im ersten Argument ergibt sich darus, dass für alle $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in R/I$ die Gleichheit

$$(\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{z} = \overline{x + y} \cdot \overline{z} = \overline{(x + y)z} = \overline{xz + yz} = \overline{xz} + \overline{yz} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z}$$

gilt. Da die Multiplikation auf R/I kommutativ ist, ergibt sich hieraus auch die Distributivität im zweiten Argument.

Ingesamt zeig dies, dass R/I mit der gegeben Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.

(b)

Als Ringhomomorphismus ist φ insbesondere ein Gruppenhomomorphismus zwischen den unterliegenden additiven Gruppen von R und S; deshalb gilt

$$\varphi(0) = 0$$

und somit $0 \in \ker \varphi$, und für jedes $x \in \ker \varphi$ gilt

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) = -0 = 0$$

und somit auch $-x \in \ker \varphi$. Für alle $x, y \in \ker \varphi$ gilt außerdem

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0 + 0 = 0,$$

und somit auch $x + y \in \ker \varphi$. Das zeigt, dass $\ker \varphi$ eine Untergruppe der additiven Gruppe von R ist. Für alle $r \in R$ und $x \in \ker \varphi$ gilt

$$\varphi(rx) = \varphi(r)\varphi(x) = \varphi(r) \cdot 0 = 0,$$

und somit auch $rx \in \ker \varphi$. Somit ist $\ker \varphi$ bereits ein Ideal in R.

(c)

Wir betrachten den kommutativen Ring R/I und die Abbildung $\pi \colon R \to R/I$, $x \mapsto \overline{x}$. Dies ist ein Ringhomomorphismus, denn für alle $x, y \in R$ gilt

$$\pi(x + y) = \overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y} = \pi(x) + \pi(y)$$

sowie

$$\pi(x \cdot y) = \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y} = \pi(x) \cdot \pi(y)$$

sowie $\pi(1) = \overline{1} = 1_{R/I}$. Für den Ringhomomorphismus π gilt

$$\begin{aligned} \ker \pi &= \{x \in R \mid \pi(x) = 0\} = \{x \in R \mid \overline{x} = 0\} \\ &= \{x \in R \mid x \sim 0\} = \{x \in R \mid x \in I\} = I, \end{aligned}$$

was die gegebene Behauptung zeigt.

Bemerkung 1. Die Konstruktion des Quotientenringes R/I funktioniert auch für einen nicht-kommutativen Ring, sofern man fordert, dass I ein beidseitiges Ideal ist, d.h. dass $rx, xr \in I$ für alle $x \in I$ und $r \in R$ gilt. Analog zu den letzten beiden Aufgabenteilen ergibt sich dann, dass $I \subseteq R$ genau dann beidseitiges Ideal ist, wenn es einen Ring S und einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ mit $\ker \varphi = I$ gibt.

Bemerkung 2. Im Falle $R = \mathbb{Z}$ und $I = (n) = n\mathbb{Z} = \{an \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist die Konstruktion von $R/I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bereits aus Lineare Algebra I bekannt.

Aufgabe 4

(a)

Die Kommutativität des Diagrams

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & S \\ R/I \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

ist äquivalent dazu, dass $\overline{\varphi}(\overline{x}) = \varphi(x)$ für alle $x \in R/I$. Dies zeigt die Eindeutigkeit von $\overline{\varphi}$.

Zum Beweis der Existenz gilt es zu zeigen, dass durch

$$\overline{\varphi}\colon R/I \to S, \quad \overline{x} \mapsto \varphi(x)$$

ein wohldefinierter Ringhomomorphismus gegeben ist:

Für $x, y \in R$ mit $\overline{x} = \overline{y}$ gilt $x - y \in \ker \varphi$ und somit $0 = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$, also $\varphi(x) = \varphi(y)$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von $\overline{\varphi}$. Dass $\overline{\varphi}$ ein Ringhomomorphismus ist, ergibt sich durch direktes Nachrechnen, denn für alle $\overline{x}, \overline{y} \in R/I$ gilt

$$\overline{\varphi}(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{\varphi}(\overline{x + y}) = \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \overline{\varphi}(\overline{x}) + \overline{\varphi}(\overline{y}).$$

und

$$\overline{\varphi}(\overline{x} \cdot \overline{y}) = \overline{\varphi}(\overline{x \cdot y}) = \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \overline{\varphi}(\overline{x}) \cdot \overline{\varphi}(\overline{y}),$$

und es gilt $\overline{\varphi}(1_{R/I}) = \overline{\varphi}(\overline{1_R}) = \varphi(1_R) = 1_S$.

(b)

Es gilt
$$\operatorname{im}\overline{\varphi} = \{\overline{\varphi}(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R/I\} = \{\varphi(x) \mid x \in R\} = \operatorname{im}\varphi,$$
also ist $\overline{\varphi}$ genau dann surjektiv, wenn φ surjektiv ist. Außerdem gilt
$$\begin{aligned}\ker\overline{\varphi} &= \{\overline{x} \in R/I \mid \overline{\varphi}(\overline{x}) = 0\} = \{\overline{x} \in R/I \mid \varphi(x) = 0\} \\ &= \{\overline{x} \in R/I \mid x \in \ker\varphi\} = \{\overline{x} \mid x \in \ker\varphi\} = \{x + I \mid x \in \ker\varphi\} = (\ker\varphi)/I.\end{aligned}$$
Deshalb gilt
$$\overline{\varphi} \text{ ist injektiv} \iff \ker\overline{\varphi} = \{0\} \iff (\ker\varphi)/I = \{0\} \iff \ker\varphi = I.$$

Das Bild $\operatorname{im}\varphi$ ist ein kommutativer Unterring von S:

Es gilt $0 = \varphi(0) \in \operatorname{im}\varphi$. Für $y \in \operatorname{im}\varphi$ gibt es $x \in R$ mit $y = \varphi(x)$, weshalb auch $-y = -\varphi(x) = \varphi(-x) \in \operatorname{im}\varphi$. Für $y_1, y_2 \in \operatorname{im}\varphi$ gibt es $x_1, x_2 \in R$ mit $y_1 = \varphi(x_1)$ und $y_2 = \varphi(x_2)$, weshalb auch $y_1 + y_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \in \operatorname{im}\varphi$. Das zeigt, dass $\operatorname{im}\varphi$ eine Untergruppe der additiven Gruppe von S ist.

Es gilt $1_S = \varphi(1_R) \in \operatorname{im}\varphi$. Für alle $y_1, y_2 \in \operatorname{im}\varphi$ gibt es $x_1, x_2 \in R$ mit $y_1 = \varphi(x_1)$ und $y_2 = \varphi(x_2)$, weshalb auch $y_1 y_2 = \varphi(x_1)\varphi(x_2) = \varphi(x_1 x_2) \in \operatorname{im}\varphi$. Das zeigt, dass $\operatorname{im}\varphi$ bereits ein Unterring von S ist.

Wir können nun φ als einen surjektiven Ringhomorphismus $\varphi\colon R \to \operatorname{im}\varphi$ auffassen. Aus den bereits gezeigten Aussagen erhalten wir, dass φ einen bijektiven Ringhomomorphismus, also einen Ringisomorphismus $\overline{\varphi}\colon R/I \to \operatorname{im}\varphi, \overline{x} \mapsto \varphi(x)$ induziert. Somit gilt $R/I \cong \operatorname{im}\varphi$.