Lösungen und Bemerkungen zu

Übungsblatt 12

Jendrik Stelzner

2. August 2017

Aufgabe 1

Wir berechnen im Folgenden die Polarzerlegung $A = SU$, wobei $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv semidefinit ist, und $U \in \mathrm{O}(n)$ orthogonal. Man könnte stattdessen auch die Zerlegung $A = U'S'$ berechnen, wir halten uns hier aber an die Konvention von Satz XIV.4 aus der Vorlesung.

Die Matrix S ist eindeutig bestimmt durch $S = \sqrt{AA^T}$, d.h. S ist die eindeutige symmetrische, positiv semidefinite Wurzel aus der symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix AA^T. Da A invertierbar ist (denn $\det A = -6 \neq 0$) ist auch S invertierbar, und U somit eindeutig bestimmt als $U = S^{-1}A$.

Wir betrachten also zunächst die Matrix

$$B \coloneqq AA^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 2 \\ & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & 2 \\ & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Als reelle, symmetrische Matrix ist B diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom von B ist gegeben durch

$$p_B(t) = -(t-1)(t^2 - 13t + 36) = -(t-1)(t-4)(t-9).$$

Die Eigenwerte von B sind also 1, 4 und 9; entsprechende Eigenvektoren sind gegeben durch

$$\tilde{v}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da es sich um Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten handelt, sind diese Vektoren linear unabhängig. Da B symmetrisch ist, sind sie sogar paarweise orthogonal zueinander. Um uns im Folgenden ein wenig Rechenarbeit zu ersparen, normieren wir die obigen Vektoren noch; wir erhalten somit die folgende Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B:

$$v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir nun die Basiswechselmatrix

$$C \coloneqq \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

für die

$$B = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 9 \end{pmatrix} C^{-1}$$

gilt. Somit erhalten wir, dass

$$S = \sqrt{AA^T} = \sqrt{B} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^{-1}$$

gilt. Da die Spalten von C eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden, ist C orthogonal. Deshalb gilt $C^{-1} = C^T$, und somit auch

$$S = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 11 & 2 \\ & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Das Inverse S^{-1} ergibt sich nun wahlweise durch den üblichen Gauß-Algorithmus, oder als

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \left(C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^{-1} \right)^{-1} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^{-1} C^{-1} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \frac{1}{6} C \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} C^{-1} = \frac{1}{6} C \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} C^T \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 14 & -2 \\ & -2 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nun, dass

$$U = S^{-1} A = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 14 & -2 \\ & -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 4 & 3 \\ & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 1. Anstelle der von uns genutzten Orthonormalbasis (v_1, v_2, v_3) hätte man auch eine beliebige nicht-orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B nutzen können, etwa $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$. Für die entsprechende Basiswechselmatrix $\tilde{C}$ gilt dann allerdings die Gleichheit $\tilde{C}^{-1} = \tilde{C}^T$ nicht mehr, weshalb auch noch $\tilde{C}^{-1}$ berechnet werden muss.

Aufgabe 2

Wir betrachten im Folgenden den Fall $K = \mathbb{C}$. Für den Fall $K = \mathbb{R}$ ersetze man jeweils $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, und $\mathrm{U}(-)$ durch $\mathrm{O}(-)$. Für $A \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C})$ schreiben im Folgenden abkürzend A^* anstelle von $\overline{A}^T$.

Lemma 2. Es sei $A \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C})$ und $r \coloneqq \operatorname{rg} A$. Dann gibt es $A' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ sowie $U_1 \in \mathrm{U}(m)$ und $U_2 \in \mathrm{U}(n)$, so dass

$$A = U_1 \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2.$$

Beweis. Es sei $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$, $x \longmapsto Ax$ die zu A (bezüglich der Standardbasen) gehörige lineare Abbildung. Bezüglich der Standardbasen $\mathcal{S}_n = (e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{S}_m = (e_1, \dots e_m)$ von $\mathbb{C}^m$ gilt $A = \mathrm{M}_{f,\mathcal{S}_n,\mathcal{S}_m}$.

Es sei $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/\ker f$, $x \longmapsto \overline{x}$ die kanonische Projektion und $i : \operatorname{im} f \longrightarrow \mathbb{C}^m$, $y \longmapsto y$ die kanonische Inklusion. Nach dem Homomorphiesatz induziert f einen wohldefinierten Isomorphismus

$$\overline{f} : \mathbb{C}^n/\ker f \longrightarrow \operatorname{im} f, \quad \overline{x} \longmapsto f(x).$$

Dabei ist $\overline{f}$ die eindeutige Abbildung, die das folgende Diagram zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C}^m \\ \mathbb{C}^n/\ker f \arrow[r, "\overline{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Es sei $\mathcal{B}'' = (v_{r+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von $\ker f = \ker A$. Wir ergänzen $\mathcal{B}''$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{C}^n$. Dann ist $\mathcal{B}' \coloneqq (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r})$ eine Basis von $\mathbb{C}^n/\ker f$. Ferner sei $\mathcal{C}' = (w_1, \dots, w_r)$ eine Basis von $\operatorname{im} f = \operatorname{im} A$, und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine ergänzte Basis von $\mathbb{C}^m$.

Es gilt nun, dass

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{M}_{i,\mathcal{C}',\mathcal{C}}\, \mathrm{M}_{\overline{f},\mathcal{B}',\mathcal{C}'}\, \mathrm{M}_{p,\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,.$$

Dabei ist die darstellende Matrix $A \coloneqq \mathrm{M}_{\overline{f},\mathcal{B}',\mathcal{C}'} \in \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ ist invertierbar, da $\overline{f}$ ein Isomorphismus ist. Außerdem gelten

$$\mathrm{M}_{p,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(r \times n, \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad \mathrm{M}_{i,\mathcal{C}',\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m \times r, \mathbb{C}).$$

Somit gilt ingesamt, dass

$$\mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit den beiden Basiswechselmatrizen $U_1 = \mathrm{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{C}^m},\mathscr{C},\mathscr{S}_m}$ und $U_2 = \mathrm{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n},\mathscr{S}_n,\mathscr{B}}$ erhalten wir nun, dass

$$A = \mathrm{M}_{f,\mathscr{S}_n,\mathscr{S}_m} = \mathrm{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{C}^m},\mathscr{C},\mathscr{S}_m}\ \mathrm{M}_{f,\mathscr{B},\mathscr{C}}\ \mathrm{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n},\mathscr{S}_n,\mathscr{B}} = U_1 \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2.$$

Die Spalten von U_2 sind genau die Basis $\mathscr{B}$, und die Spalten von U_1^{-1} sind genau die Basis $\mathscr{C}$. Die Matrizen U_1 und U_2 sind also genau dann unitär, falls die beiden Basen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$ jeweils orthonormal sind. Da Basisergänzung auch für Orthonormalbasen funktoniert, lassen sich $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$ zusätzlich zu den bisherigen Bedingungen als orthonormal wählen. □

Es seien nun A', $\tilde{U}_1$ und $\tilde{U}_2$ wie in Lemma 2. Es sei $A' = SV$ die Polarzerlegung von A, wobei $S \in \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ hermitesch und positiv semidefinit ist, und $V \in \mathrm{U}(r)$ unitär. Da S hermitesch ist, gibt es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^r$ besteht aus Eigenvektoren von S, wobei alle Eigenwerte von S reell sind. Es gibt also $W \in \mathrm{U}(r)$ und $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$ mit

$$S = WDW^{-1} \quad \text{wobei} \quad D \coloneqq \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{pmatrix}.$$

Da S positiv semidefinit ist, gilt dabei $d_1, \dots, d_r \geq 0$. Da A' invertierbar ist, gilt dies auch für S, weshalb sogar bereits $d_1, \dots, d_r > 0$ gilt. Durch passende Nummerierung der Eigenwerte können wir ferner davon ausgehen, dass $d_1 \geq \cdots \geq d_r > 0$ gilt. Wir erhalten nun ingesamt, dass

$$\begin{aligned} A &= \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} SV & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} WDW^{-1}V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 \\ &= \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \tilde{U}_2. \end{aligned}$$

Die Matrix $W^{-1}V$ ist unitär, da W und V unitär sind. Da W und $W^{-1}V$ unitär sind, gilt dies auch für die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Somit sind auch

$$U_1 \coloneqq \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2' \coloneqq \tilde{U}_2 \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

unitär. Mit $U_2 \coloneqq (U_2')^{-1} = (U_2')^* \in \mathrm{U}(n)$ erhalten wir nun die gewünschte Zerlegung

$$A = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2' = U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^*$$

Damit ergibt sich nun auch, dass

$$A^* = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^* = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^{-1}.$$

Somit gilt

$$A^*A = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^{-1} U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} = U_2 \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1}.$$

Die Matrix A^*A ist also ähnlich zu der Diagonalmatrix $\left(\begin{smallmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, wobei

$$D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r^2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A^*A sind folglich $d_1^2, \dots, d_r^2$, sowie im Fall $n > r$ auch noch 0.

Aufgabe 3

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 1$: Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, dass $\beta(x, y) = 0$. Also gilt in diesem Fall $\beta = 0$, und somit $\operatorname{rg} \beta = 0$ und $\operatorname{sgnt} \beta = 0$.

Wir fixieren nun ein $n \geq 2$. Für die Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$ gilt $\beta(e_i, e_j) = 1$ für alle $i \neq j$, sowie $\beta(e_i, e_i) = 0$ für alle i. Die darstellende Matrix $A \coloneqq \mathrm{M}(\beta, \mathcal{S}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist deshalb von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist reell und symmmetrisch, und somit diagonalisierbar; es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Eigenwerte von A. Ferner sei n_+ die Anzahl der positiven Eigenwerte, n_- die Anzahl der negativen Eigenwerte und n_0 die Vielfachheit[1] des Eigenwerts 0. Dann gilt $n = n_+ + n_- + n_0$, $\operatorname{rg} \beta = \operatorname{rg} A = n - n_0 = n_+ + n_-$ und $\operatorname{sgnt} A = n_+ - n_-$.

Zur Bestimmung der Eigenwerte von A bemerke man, dass in der Matrix $A + I$ alle Einträge gleich 1 sind. Es folgt, dass $\dim \ker(A + I) = n - 1$ gilt (eine Basis von $\ker(A + I)$ ist gegeben durch $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$), und somit $\mu_1 = -1$ ein Eigenwert von A zur Vielfachheit $n - 1$ ist. Ferner ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu_2 = n - 1$ (denn alle Zeilensummen von A sind $n - 1$). Da der Eigenraum zum Eigenwert μ_1 bereits Dimension $n - 1$ hat, kann der Eigenraum zum Eigenwert μ_2 höchstens Dimension 1 haben; folglich ist er eindimensional.

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \mu_1 = -1$ und $\lambda_n = \mu_2 = n - 1$. Somit gilt zum einen $n_0 = 0$, also $\operatorname{rg} A = n - 0 = n$, und zum anderen gelten $n_+ = 1$ und $n_- = n - 1$, also $\operatorname{sgnt} A = n_+ - n_- = 2 - n$.

[1] Da A diagonalisierbar ist, muss hier nicht zwischen algebraischer und geometrischer Vielfachheit unterschieden werden.

Aufgabe 4

a)

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt

$$\beta(x,x) = \langle x,x\rangle + \langle Ax,Ax\rangle + \cdots + \langle A^{k-1}x, A^{k-1}x\rangle = \|x\|^2 + \underbrace{\|Ax\|^2 + \cdots + \|A^{k-1}x\|^2}_{\geq 0} \geq \|x\|^2 > 0,$$

da das Standardskalarprodukt $\langle -,-\rangle$ positiv definit ist. Also ist β eine positiv definitive, symmetrische Bilinearform, d.h. ein Skalarprodukt.

Ferner gilt $\langle A^k x, A^k y\rangle = \langle x,y\rangle$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ da A^k orthogonal ist, und somit auch

$$\begin{aligned}\beta(Ax,Ay) &= \langle Ax,Ay\rangle + \langle A^2x, A^2x\rangle + \cdots + \langle A^{k-1}x, A^{k-1}y\rangle + \langle A^k x, A^k y\rangle \\ &= \langle Ax,Ay\rangle + \langle A^2x, A^2x\rangle + \cdots + \langle A^{k-1}x, A^{k-1}y\rangle + \langle x,y\rangle = \beta(x,y).\end{aligned}$$

b)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \longmapsto Ax$ die zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige lineare Abbildung. Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1,\dots,e_n)$ gilt $A = \mathrm{M}_{f,\mathcal{S},\mathcal{S}}$.

Im vorherigen Aufgabenteil haben wir gezeigt, dass β ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist, und dass $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n,\beta)$ gilt. Ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich β, so ist deshalb die Matrix $U \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ orthogonal. Für die Basiswechselmatrix $C \coloneqq \mathrm{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},\mathcal{S},\mathcal{B}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt somit

$$U = \mathrm{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},\mathcal{S},\mathcal{B}}\ \mathrm{M}_{f,\mathcal{S},\mathcal{S}}\ \mathrm{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},\mathcal{B},\mathcal{S}} = \mathrm{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},\mathcal{S},\mathcal{B}}\ \mathrm{M}_{f,\mathcal{S},\mathcal{S}}\ \mathrm{M}^{-1}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},\mathcal{S},\mathcal{B}} = CAC^{-1}.$$