Lösungen und zusätzliche Bemerkungen

zu Übungsblatt 2

Jendrik Stelzner

13. Mai 2017

Aufgabe 1

(a)

Lemma 1. Es sei R ein Ring.

1. Für alle $x \in R$ gilt $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$.
2. Für alle $x, y \in R$ gilt $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.

Beweis. 1. Es gilt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

und durch Subtraktion von $0 \cdot x$ ergibt sich, dass $0 = 0 \cdot x$. Analog ergibt sich, dass $x \cdot 0 = 0$.

2. Es gilt

$$xy + (-x)y = (x + (-x))y = 0 \cdot y = 0,$$

weshalb $(-x)y = -(xy)$. Analog ergibt sich, dass $x(-y) = -(xy)$. □

Es gilt $0 \in \mathrm{Z}(R)$ da $0 \cdot y = 0 = y \cdot 0$ für alle $y \in R$. Für $x_1, x_2 \in \mathrm{Z}(R)$ gilt

$$(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y = y x_1 + y x_2 = y(x_1 + x_2) \qquad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch $x_1 + x_2 \in \mathrm{Z}(R)$. Für jedes $x \in R$ gilt

$$(-x)y = -(xy) = -(yx) = y(-x) \qquad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch $-x \in \mathrm{Z}(R)$. Insgesamt zeigt dies, dass $\mathrm{Z}(R)$ eine Untergruppe der additiven Gruppe von R ist.

Es gilt $1 \in \mathrm{Z}(R)$ da $1 \cdot y = y = y \cdot 1$ für alle $y \in R$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathrm{Z}(R)$ gilt

$$(x_1 x_2)y = x_1 x_2 y = x_1 y x_2 = y x_1 x_2 = y(x_1 x_2) \qquad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch $x_1, x_2 \in \mathrm{Z}(R)$. Insgesamt zeigt dies, dass $\mathrm{Z}(R)$ ein Unterring von R ist.

Zusätzlich bemerken wir noch, dass für jedes $x \in \mathrm{Z}(R)$ mit $x \in R^\times$ auch $x^{-1} \in \mathrm{Z}(R)$ gilt, denn

$$x^{-1}y = x^{-1}yxx^{-1} = x^{-1}xyx^{-1} = yx^{-1} \qquad \text{für alle } y \in R.$$

(b)

Es sei K ein Körper. Wir zeigen, dass

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K)) = K \cdot I = \{\lambda \cdot I \mid \lambda \in K\}$$

gilt, wobei $I \in \mathrm{M}_n(K)$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Dass $K \cdot I \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K))$ ergibt sich direkt daraus, dass

$$(\lambda I)A = \lambda A = A \cdot (\lambda I) \qquad \text{für alle } \lambda \in K,\, A \in \mathrm{M}_n(K).$$

Andererseits sei $C \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K))$. Für alle $i, j = 1, \dots, n$ sei $E_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die Matrix deren (i,j)-ter Eintrag 1 ist, und deren andere Einträge alle 0 sind, d.h. es gilt

$$(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (k,l) = (i,j), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{für alle } k, l = 1, \dots, n.$$

Wir zeigen nun in zwei Schritten, dass $C = \lambda \cdot I$ für ein $\lambda \in K$ gilt: In einem ersten Schritt zeigen wir, dass C eine Diagonalmatrix ist, und in dem darauffolgenden zweiten Schritt zeigen wir, dass alle Diagonaleinträge von C gleich sind.

Wir geben die Rechnungen zunächst einer kompakte Form an. Anschließend geben wir die Argumentation noch einmal in einer längeren, dafür aber anschaulicheren Form an.

Kompakte Version

- Wir zeigen, dass C eine Diagonalmatrix ist: Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt $CA = AC$. In Koeffizienten bedeutet dies, dass

$$\sum_{k=0}^{n} C_{ik}A_{kj} = (CA)_{ij} = (AC)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik}C_{kj} \tag{1}$$

  für alle $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $i, j = 1, \dots n$ gilt. Indem wir die Matrix $A = E_{ii}$ betrachten, erhalten wir dabei zum einen, dass

$$\sum_{k=0}^{n} C_{ik}(E_{ii})_{kj} = \sum_{k=0}^{n} C_{ik}\delta_{ik}\delta_{ij} = \delta_{ij}C_{ii} \qquad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n,$$

  und zum anderen, dass

$$\sum_{k=0}^{n} (E_{ii})_{ik}C_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}C_{kj} = C_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 0, \dots, n.$$

  Für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ erhalten wir somit aus (1), dass $0 = \delta_{ij}C_{ii} = C_{ij}$ gilt. (Für $i = j$ erhalten wir nur die triviale Aussage, dass $C_{ii} = \delta_{ij}C_{ii} = C_{ij} = C_{ii}$ gilt.) Das zeigt, dass C eine Diagonalmatrix ist.

- Es seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ die Diagonaleinträge von C, d.h. es gelte $C_{ii} = \lambda_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann gilt $C_{ik} = \delta_{ik}\lambda_i$ für alle $i, k = 1, \dots, n$, bzw. äquivalent $C_{kj} = \delta_{jk}\lambda_j$ für alle $j, k = 1, \dots, n$. Die beiden Seiten von Gleichung (1) vereinfacht sich somit zu

  $$\sum_{k=0}^{n} C_{ik}A_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}\lambda_i A_{kj} = \lambda_i A_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} A_{ik}C_{kj} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik}\delta_{jk}\lambda_j = \lambda_j A_{ij},$$

  und Gleichung (1) selbst vereinfacht sich somit zu

  $$\lambda_i A_{ij} = \lambda_j A_{ij} \qquad \text{für alle } A \in \mathrm{M}_n(K) \text{ und } i, j = 1, \dots, n.$$

  Indem wir die Matrix $A = E_{ij}$ mit $A_{ij} = 1$ betrachten, erhalten wir somit, dass $\lambda_i = \lambda_j$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt. Also gilt $\lambda_1 = \dots = \lambda_j =: \lambda$ und somit $C = \lambda I$.

Anschauliche Version

Wir wollen zunächst eine Anschauung dafür entwickeln, wie Multiplikation mit Diagonalmatrizen funktioniert:

Beobachtung 2. Sind $D_1 \in \mathrm{M}_m(K)$ und $D_2 \in \mathrm{M}_n(K)$ zwei Diagonalmatrizen

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix},$$

so lassen sich für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ die Produkte $D_1 A$ und AD_2 als

$$D_1 A = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{11} & \cdots & \lambda_1 A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m A_{m1} & \cdots & \lambda_m A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad AD_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 A_{11} & \cdots & \mu_n A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1 A_{m1} & \cdots & \mu_n A_{mn} \end{pmatrix}$$

berechnen. Durch Multiplikation mit D_1 von links wird also die i-te Zeile von A mit λ_i multipliziert, und durch Multiplikation mit D_2 von rechts wird die j-te Spalte von A mit μ_j multipliziert. Dies lässt sich schematisch als

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \hline \vdots \\ \hline z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \lambda_m z_m \end{pmatrix},$$

und

$$\left(\begin{array}{c|c|c} s_1 & \cdots & s_n \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mu_1 s_1 & \cdots & \mu_n s_n \end{array}\right)$$

darstellen.

Wir zeigen nun in den angekündigten zwei Schritten, dass $C = \lambda \cdot I$ für ein $\lambda \in K$:

- Wir zeigen zunächst, dass C eine Diagonalmatrix ist: Hierfür sei $1 \leq i \leq n$. Dann ist E_{ii} eine Diagonalmatrix, deren i-tere Diagonaleintrag 1 ist, und deren Diagonaleinträge sonst alle verschwinden. Da $C \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K))$ gilt, erhalten wir, dass $CE_{ii} = E_{ii}C$. Nach Beobachtunng 2 entsteht dabei die Matrix CE_{ii} aus C, indem die i-te Spalte unverändert bleibt, aber alle anderen Spalten durch die Nullspalte ersetzt werden. Analog entsteht $E_{ii}C$ aus C, indem die i-te Zeilen unverändert bleibt, aber alle anderen Zeilen durch die Nullzeile ersetzt werden. Anschaulich gesehen gilt also, dass

$$CE_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

  und

$$E_{ii}C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ C_{i1} & \cdots & C_{ii} & \cdots & C_{in} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

  Da nach Annahme $CE_{ii} = E_{ii}C$ gilt, erhalte wir, dass in der i-ten Zeile und i-ten Spalte von C bis auf den gemeinsamen Eintrag C_{ii} alle anderen Einträge verschwinden müssen, d.h. für alle $j = 0, \dots, \hat{i}, \dots, n$ gilt $C_{ij} = 0$ und $C_{ji} = 0$. Da dies für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, erhalten wir, dass in jeder Spalte (und in jeder Zeile) von C alle nicht-Diagonaleinträge verschwinden. Also ist C eine Diagonalmatrix.

- Für alle $i = 1, \dots, n$ sei $\lambda_i \in K$ der i-te Diagonaleintrag von C, d.h. es gelte

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Wir zeigen, dass alle Diagonaleinträge von C bereits gleich sind: Es seien $1 \leq i \neq j \leq n$. Der einzige nicht-verschwindende Eintrag von E_{ij} befindet sich in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von E_{ij}. Aus Beobachtung 2 folgt nun, dass $CE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$ und $E_{ij}C = \lambda_j E_{ij}$. Anschaulich lässt sich die Anwendung von Beobachtung 2 als

$$CE_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & \lambda_i & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$E_{ij}C = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & \lambda_j & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

notieren. Da $E_{ij} \neq 0$ gilt, folgt aus $\lambda_i E_{ij} = \lambda_j E_{ij}$, dass $\lambda_i = \lambda_j$. Das dies für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ gilt, muss bereits $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n =: \lambda$, und somit $C = \lambda I$.

Weitere Bemerkungen

Bemerkung 3. Die Idee der obigen Rechnung lässt sich grob wie folgt beschreiben:

Es sei $C \in \mathrm{M}_n(K)$. Dass C mit einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ kommutiert, dass also $CA = AC$ gilt, ist eine zusätzliche Bedingung an C. Dabei hängt es von der Matrix A ab, wie restriktiv diese Bedingung ist:

- Betrachtet man etwa $A = I$, so erhält man die Bedingung $C = C$. Diese Bedingung liefert uns keine näheren Informationen über C.

- Betrachtet man $A = E_{ii}$ für ein $1 \leq i \leq n$, so liefert uns die Bedingungen $CA = AC$, dass in der i-ten Zeile und i-ten Spalte von A bis auf den gemeinsamen Diagonaleintrag A_{ii} jeder andere Diagonaleintrag verschwindet.

- Betrachtet man eine Diagonalmatrix A mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, also

  $$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j,$$

  so erhalten wir durch Beobachtung 2 aus der Bedingung $CA = AC$, dass

  $$\lambda_j C_{ij} = (CA)_{ij} = (AC)_{ij} = \lambda_i C_{ij} \qquad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

  Da $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ gilt, folgt daraus, dass $C_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt. Also muss C bereits eine Diagonalmatrix sein.

Je mehr Matrizen mit C kommutieren, desto mehr Bedingungen werden an C gestellt, und desto mehr Restriktionen gibt es bezüglich des Aussehens von C.

Ist nun $C \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K))$ so gilt für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ die entsprechende Bedingung $AC = CA$. Indem wir für A „ausreichend viele" passende Matrizen betrachten, erhalten wir unterschiedliche Restriktionen an die Form von C. Die Hoffnung ist, hierdurch bereits die gewünschte Form $C = \lambda \cdot I$ mit $\lambda \in K$ zu erzwingen.

Wegen der Endlichdimensionalität von $\mathrm{M}_n(K)$ lassen sich dabei die Famlie von $n^2 \cdot |K|$ vielen Bedingungen

$$CA = AC \qquad \text{für alle } A \in \mathrm{M}_n(K)$$

auf bereits n^2 viele Bedingungen reduzieren: Ist $\{A_1, \ldots, A_{n^2}\}$ eine K-Basis von $\mathrm{M}_n(K)$ und gilt $CA_i = A_iC$ für alle $i = 1, \ldots, n^2$, so gilt bereits $CA = AC$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(K)$, denn mit $A = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i$ erhält man die Gleichungskette

$$CA = C\left(\sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i C A_i = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i C = \left(\sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i\right) C = AC.$$

Betrachtet man nun die (naheliegende) Basis $\mathcal{B} = \{E_{ij} \mid i, j = 1, \ldots n\}$ von $\mathrm{M}_n(K)$, so gilt für $C \in \mathrm{M}_n(K)$ also, dass genau dann $C \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K))$ gilt, wenn $CE_{ij} = E_{ij}C$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ gilt. Da die Matrizen aus $\mathcal{B}$ eine möglichst einfache Form haben, sind die Bedingungen $CE_{ij} = E_{ij}C$ dabei ebenfalls möglich einfach.

Bemerkung 4. Wir haben in unseren Beweis nur genutzt, dass K ein kommutativer Ring ist. Mit unveränderten Beweis ergibt sich deshalb, dass

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R)) = R \cdot I \qquad \text{für jeden kommutativen Ring } R \tag{2}$$

gilt. Möchte man auch nicht-kommutative Ringe betrachten, so lässt sich (2) zu

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R)) = \mathrm{Z}(R) \cdot I \qquad \text{für jeden Ring } R \tag{3}$$

erweitern; ist dabei R kommutativ, so gilt $\mathrm{Z}(R) = R$ (dies ist nur eine Umformulierung der Kommutativität von R), und (3) vereinfacht sich wieder zu (2).

Ein Beweis für (3) ergibt sich durch leichte Abänderung, bzw. Erweiterung unseres Beweises für (2): Es ergibt sich wie zuvor, dass $\mathrm{Z}(R) \cdot I \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R))$ gilt.

Zum Beweis der Inklusion $\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R)) \subseteq \mathrm{Z}(R) \cdot I$ zeigt man für $C \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R))$ ebenfalls zunächst, dass

$$C = r \cdot I \qquad \text{für ein } r \in R \tag{4}$$

gilt. Im Fall $R = K$ haben wir für unseren Beweis von (4) die Kommutativität von K nicht genutzt; für den allgemeinen Fall können wir deshalb unseren zweischritten Beweis unverändert übernehmen.

In einem dritten Schritt muss nun noch gezeigt werden, dass bereits $r \in \mathrm{Z}(R)$ gilt. Dies ergibt sich daraus, dass für alle $s \in R$ die Gleichheitskette

$$(rs) \cdot I = (r \cdot I)(s \cdot I) = C(s \cdot I) = (s \cdot I)C = (s \cdot I)(r \cdot I) = (sr) \cdot I$$

gilt, und somit durch Vergleich der Diagonaleinträge bereits $rs = sr$ für alle $s \in R$.

(c)

Wir zeigen, dass

$$\mathrm{Z}(R[t]) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \in R[t] \,\middle|\, a_i \in \mathrm{Z}(R) \text{ für alle } i \right\} = \mathrm{Z}(R)[t]$$

gilt. Die zweite Gleichheit gilt, da es sich hierbei um die Definition von $\mathrm{Z}(R)[t]$ handelt.

Ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in \mathrm{Z}(R)[t]$, so gilt $a_i b = b a_i$ für alle $b \in R$ und $i \geq 0$. Für jedes $q = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \in R[t]$ gilt deshalb

$$\begin{aligned} pq &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j t^{i+j} = \sum_{i,j=0}^{\infty} b_j a_i t^{j+i} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) = qp. \end{aligned}$$

Also gilt $p \in \mathrm{Z}(R[t])$.

Andererseits sei $p \in \mathrm{Z}(R[t])$. Dann gilt $pq = qp$ für jedes $q \in R[t]$. Für alle $b \in R$ gilt dann

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_i b)t^i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right)(bt^0) = (bt^0)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}(b a_i)t^i.$$

Für jedes $i \geq 0$ gilt also $b a_i = a_i b$ für alle $b \in R$ (denn zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten gleich sind). Dies bedeutet gerade, dass $a_i \in \mathrm{Z}(R)$ für alle $i \geq 0$ gilt.