Lösungen und Bemerkungen

zu Übungsblatt 4

Jendrik Stelzner

26. Mai 2017

Aufgabe 3

Wir haben im Tutorium und auf dem Übungszettel die folgenden Aussagen gesehen:

Lemma 1. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Ist $(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von V, so dass $(u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von U ist, so ist $(\overline{w_1}, \dots, \overline{w_m})$ eine Basis von V/U.

Lemma 2. Es sei V ein K-Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Dann gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{f} : V/U \longrightarrow V/U$, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/U \arrow[r, "\bar{f}"] & V/U \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet $\pi : V \longrightarrow V/U$, $v \longmapsto \overline{v}$ die kanonische Projektion Die Abbildung $\bar{f}$ ist gegeben durch $\bar{f}(\overline{v}) = \overline{f(v)}$ für alle $v \in V$.

Lemma 3. Es sei V eine endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Es sei $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von V, so dass $\mathscr{B}_U = (u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von U ist. Dann gilt mit der Basis $\overline{\mathscr{B}} = (\overline{w_1}, \dots, \overline{w_m})$ von V/U, dass

$$\mathrm{M}_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wobei $A = \mathrm{M}_{f|_U,\mathscr{B}_U,\mathscr{B}_U} \in \mathrm{M}_n(K)$, $C = \mathrm{M}_{\bar{f},\overline{\mathscr{B}},\overline{\mathscr{B}}} \in \mathrm{M}_m(K)$ und $B \in \mathrm{M}(n \times m, K)$.

Wir möchten hier noch anmerken, dass sich die Blockform aus Lemma 3 zu der folgenden nützlichen Beobachtung verallgemeinern lässt:

Proposition 4. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Es sei

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots \subseteq U_{t-1} \subseteq U_t = V$$

eine aufsteigende Kette von f-invarianten Untervektorräumen U_i. Es sei

$$\mathscr{B} = \left(v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}, \dots, v_1^{(t)}, \dots, v_{n_t}^{(t)}\right)$$

eine Basis von V, so dass für jedes $i = 1, \dots, t$ die Teilfamilie

$$\mathscr{B}_i = \left(v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}, \dots, v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}\right)$$

eine Basis von U_i ist. (Eine solche Basis $\mathscr{B}$ entsteht beispielsweise durch wiederholte Basisergänzung.)

1. Die darstellende Matrix $\mathrm{M}_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}}$ ist von der Form

$$\mathrm{M}_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t \end{pmatrix} \tag{1}$$

   mit $A_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$ für alle $i = 1, \dots, t$.

2. Für alle $i = 1, \dots, t$ induziert f einen Endomorphismus

$$\bar{f_i}\colon U_i/U_{i-1} \longrightarrow U_i/U_{i-1}, \quad \overline{v} \longmapsto \overline{f(v)}$$

   und bezüglich der Basis $\overline{\mathscr{B}}_i \coloneqq \left(\overline{v_1^{(i)}}, \dots, \overline{v_{n_i}^{(i)}}\right)$ von U_i/U_{i-1} gilt $A_i = \mathrm{M}_{\bar{f_i},\overline{\mathscr{B}}_i,\overline{\mathscr{B}}_i}$. (Man bemerke, dass $U_0 = 0$ gilt, und somit $U_1/U_0 = U_1$ sowie $\bar{f_i} = f|_{U_1}$.)

Beispiel 5. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.

1. Lemma 3 ist ein Sonderfall von Proposition 4: Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum, so erhalten wir die Kette von f-invarianten Untervektoräumen

$$0 \subseteq U \subseteq V.$$

   Wendet man Proposition 4 auf hierauf an, so ergibt sich gerade Lemma 3.

2. Es sei

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_n = V$$

   eine aufsteigende Folge von f-invarianten Untervektorräumen mit $\dim U_k = k$ für alle $k = 0, \dots, n$, d.h. es handle sich um eine f-stabile Fahne. Dann liefert Proposition 4 gerade die Trigonalisierbarkeit von f (in (1) sind die Matrizen $A_1, \dots, A_n$ dann alle von Größe 1×1, weshalb die Matrix selbst eine obere Dreiecksmatrix ist).

Aufgabe 4

Nach Annahme kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd} \tag{2}$$

Mithilfe von Aufgabe 3

h ist bijektiv

Ist h bijektiv, also ein Isomorphismus, so ist $p_f(t) = p_g(t)$:

Es sei $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dann ist $\mathscr{C} = (w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i \coloneqq h(v_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ eine Basis von W, da h ein Isomorphismus ist. Es sei $A \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}} \in \mathrm{M}_n(K)$ die darstellende Matrix des Endomorphismus f bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

Behauptung 6. Es gilt auch $A = \mathrm{M}_{g,\mathscr{C},\mathscr{C}}$.

Beweis. Wir geben zwei mögliche Beweise an.

1. Es sei $B \coloneqq \mathrm{M}_{g,\mathscr{C},\mathscr{C}} \in \mathrm{M}_n(K)$. Die Einträge von A und B sind eindeutig dadurch festgelegt, dass
$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} v_i \quad \text{und} \quad g(w_j) = \sum_{i=1}^n B_{ij} w_j \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$
gilt. Wegen der Kommutativität des Diagrams (2) erhalten wir dabei aus den Gleichungen $f(v_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} v_i$ für $j = 1, \dots, n$, dass
$$g(w_j) = g(h(v_j)) = h(f(v_j)) = h\left(\sum_{i=1}^n A_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^n A_{ij} h(v_i) = \sum_{i=1}^n A_{ij} w_j$$
für alle $j = 1, \dots, n$ gilt. Also gilt bereits $A_{ij} = B_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ und somit $A = B$.

2. Wegen der Kommutativität von (2) gilt $h \circ f = g \circ h$, woraus sich durch Komposition mit h^{-1} von rechts ergibt, dass auch $h \circ f \circ h^{-1}$ gilt; es kommutiert also auch das folgende Diagramm:
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[u, "h^{-1}"] \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd} \tag{3}$$
Dass $h(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, ist äquivalent dazu, dass $\mathrm{M}_{h,\mathscr{B},\mathscr{C}} = I$ gilt, wobei $I \in \mathrm{M}_n(K)$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Daraus ergibt außerdem, dass auch $\mathrm{M}_{h^{-1},\mathscr{C},\mathscr{B}} = (\mathrm{M}_{h,\mathscr{B},\mathscr{C}})^{-1} = I^{-1} = I$ gilt. Ingesamt erhalten wir somit, dass
$$\mathrm{M}_{g,\mathscr{C},\mathscr{C}} = \mathrm{M}_{h \circ f \circ h^{-1},\mathscr{C},\mathscr{C}} = \mathrm{M}_{h,\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot \mathrm{M}_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}} \cdot \mathrm{M}_{h^{-1},\mathscr{C},\mathscr{B}} = I \cdot A \cdot I = A$$
gilt. □

Aus der Behauptung folgt nun insbesondere, dass $p_f(t) = p_A(t) = p_g(t)$ gilt.

h ist injektiv

Die lineare Abbildung h sei nun injektiv. Dann schränkt sich h zu einem Isomorphismus $h' : V \longrightarrow \operatorname{im} h$, $v \longmapsto h(v)$ ein.

Wegen der Kommutativität des Diagramms (2) ist der Untervektorraum $\operatorname{im} h \subseteq W$ bereits g-invariant, denn es gilt

$$g(\operatorname{im} h) = g(h(V)) = h(f(V)) \subseteq \operatorname{im} h.$$

Somit schränkt sich g zu einem Endomorphismus $g|_{\operatorname{im} h} : \operatorname{im} h \longrightarrow \operatorname{im} h$, $w \longmapsto g(w)$ ein.

Aus der Kommutativität des Diagramms (2) folgt dann die Kommutativität des eingeschränkten Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle h'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ \operatorname{im} h & \xrightarrow{g|_{\operatorname{im} h}} & \operatorname{im} h \end{array}$$

Wegen der Bijektivität von h' erhalten wir, dass $p_f(t) = p_{g|_{\operatorname{im} h}}(t)$, und aus Aufgabe 3 erhalten wir, dass $p_{g|_{\operatorname{im} h}}(t) \mid p_g(t)$. Somit gilt $p_f(t) \mid p_g(t)$. Insbesondere ist jede Nullstelle von $p_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_g(t)$, also jeder Eigenwert von f auch ein Eigenwert von g.

h ist surjektiv

Die lineare Abbildung h sei nun surjektiv. Dann induziert h einen Isomorphismus von K-Vektorräumen $\bar{h} : V/\ker h \longrightarrow W$, $\overline{v} \longmapsto h(v)$.

Aus der Kommutativität des Diagramms (2) folgt nun, dass der Untervektorraum $\ker h \subseteq V$ bereits f-invariant ist, denn es gilt

$$h(f(\ker h)) = g(h(\ker h)) = g(\{0\}) = \{0\}.$$

Nach Aufgabe 3 induziert f einen Endomorphismus $\bar{f} : V/\ker h \longrightarrow V/\ker h$, $\overline{v} \longmapsto \overline{f(v)}$.

Aus der Kommutativität des Diagramms (2) folgt die Kommutativität des induzierten Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V/\ker h & \xrightarrow{\bar{f}} & V/\ker h \\ {\scriptstyle \bar{h}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}} \\ W & \xrightarrow{g} & W \end{array}$$

Wegen der Bijektivität von $\bar{h}$ gilt $p_{\bar{f}}(t) = p_g(t)$. Nach Aufgabe 3 gilt außerdem $p_{\bar{f}} \mid p_f(t)$. Somit gilt $p_g(t) \mid p_f(t)$. Deshalb ist jede Nullstelle von $p_g(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also jeder Eigenwert von g auch ein Eigenwert von f.

Von Hand

Aus der Kommutativität des Diagramms (2) folgt für alle $\lambda \in K$ die Kommutativität des folgenden abgeänderten Diagramms:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f-\lambda \operatorname{id}_V"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[r, "g-\lambda \operatorname{id}_W"] & W \end{tikzcd} \tag{4}$$

Die Kommutativität von (2) ist nämlich äquivalent zu der Gleichheit $h \circ f = g \circ h$. Daraus folgt für alle $\lambda \in K$, dass

$$h \circ (f - \lambda \operatorname{id}_V) = h \circ f - \lambda h = g \circ h - \lambda h = (g - \lambda \operatorname{id}_W) \circ h$$

gilt, was gerade die Kommutativität von (4) bedeutet.

h ist injektiv

Es sei h injektiv und $\lambda \in K$. Ist λ kein Eigenwert von g, so ist $g - \lambda \operatorname{id}_W$ injektiv. Wegen der Injektivität von h und Kommutativität von (4) ist damit auch $(g - \lambda \operatorname{id}_W) \circ h = h \circ (f - \lambda \operatorname{id}_V)$ injektiv. Somit ist auch $f - \lambda \operatorname{id}_V$ injektiv, also λ kein Eigenwert von f.

h ist surjektiv

Es sei h surjektiv und $\lambda \in K$. Ist λ kein Eigenwert von f, so ist $f - \lambda \operatorname{id}_V$ injektiv. Wegen der Endlichdimensionalität von V ist $f - \lambda \operatorname{id}_V$ somit auch surjektiv. Wegen der Surjektivität von h und der Kommutativität von (4) ist damit auch $h \circ (f - \lambda \operatorname{id}_V) = (g - \lambda \operatorname{id}_W) \circ h$ surjektiv. Somit ist auch $g - \lambda \operatorname{id}_W$ surjektiv. Wegen der Endlichdimensionalität ist $g - \lambda \operatorname{id}_W$ deshalb auch injektiv, also λ kein Eigenwert von g.