Lösungen und Bemerkungen

zu Übungsblatt 4

Jendrik Stelzner

25. Mai 2017

Aufgabe 4

Nach Annahme kommutiert das folgende Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "h"] \\
W \arrow[r, "g"] & W
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Mithilfe von Aufgabe 3

h ist bijektiv

Ist h bijektiv, also ein Isomorphismus, so ist $p_f(t) = p_g(t)$:

Es sei $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dann ist $\mathscr{C} = (w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i \coloneqq h(v_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ eine Basis von W, da h ein Isomorphismus ist. Es sei $A \coloneqq \mathrm{M}_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}} \in \mathrm{M}_n(K)$ die darstellende Matrix des Endomorphismus f bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

Behauptung 1. Es gilt auch $A = \mathrm{M}_{g,\mathscr{C},\mathscr{C}}$.

Beweis. Wir geben zwei mögliche Beweise an.

1. Es sei $B \coloneqq \mathrm{M}_{g,\mathscr{C},\mathscr{C}} \in \mathrm{M}_n(K)$. Die Einträge von A und B sind eindeutig dadurch festgelegt, dass
$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} v_i \quad \text{und} \quad g(w_j) = \sum_{i=1}^n B_{ij} w_j \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$
gilt. Wegen der Kommutativität des Diagrams (1) erhalten wir dabei aus den Gleichungen $f(v_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} v_i$ für $j = 1, \dots, n$, dass
$$g(w_j) = g(h(v_j)) = h(f(v_j)) = h\left(\sum_{i=1}^n A_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^n A_{ij} h(v_i) = \sum_{i=1}^n A_{ij} w_j$$
für alle $j = 1, \dots, n$ gilt. Also gilt bereits $A_{ij} = B_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ und somit $A = B$.

2. Wegen der Kommutativität von (1) gilt $h \circ f = g \circ h$, woraus sich durch Komposition mit h^{-1} von rechts ergibt, dass auch $h \circ f \circ h^{-1}$ gilt; es kommutiert also auch das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[u, "h^{-1}"] \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd} \tag{2}$$

Dass $h(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt, ist äquivalent dazu, dass $\mathrm{M}_{h,\mathscr{B},\mathscr{C}} = I$ gilt, wobei $I \in \mathrm{M}_n(K)$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Daraus ergibt außerdem, dass auch $\mathrm{M}_{h^{-1},\mathscr{C},\mathscr{B}} = (\mathrm{M}_{h,\mathscr{B},\mathscr{C}})^{-1} = I^{-1} = I$ gilt. Ingesamt erhalten wir somit, dass

$$\mathrm{M}_{g,\mathscr{C},\mathscr{C}} = \mathrm{M}_{h\circ f\circ h^{-1},\mathscr{C},\mathscr{C}} = \mathrm{M}_{h,\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot \mathrm{M}_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}} \cdot \mathrm{M}_{h^{-1},\mathscr{C},\mathscr{B}} = I \cdot A \cdot I = A$$

gilt. □

Aus der Behauptung folgt nun insbesondere, dass $p_f(t) = p_A(t) = p_g(t)$ gilt.

h ist injektiv

Die lineare Abbildung h sei nun injektiv. Dann schränkt sich h zu einem Isomorphismus $h' : V \longrightarrow \operatorname{im} h$, $v \longmapsto h(v)$ ein.

Wegen der Kommutativität des Diagramms (1) ist der Untervektorraum $\operatorname{im} h \subseteq W$ bereits g-invariant, denn es gilt

$$g(\operatorname{im} h) = g(h(V)) = h(f(V)) \subseteq \operatorname{im} h.$$

Somit schränkt sich g zu einem Endomorphismus $g|_{\operatorname{im} h} : \operatorname{im} h \longrightarrow \operatorname{im} h$, $w \longmapsto g(w)$ ein.

Aus der Kommutativität des Diagramms (1) folgt dann die Kommutativität des eingeschränkten Diagramms

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h'"'] & V \arrow[d, "h'"] \\ \operatorname{im} h \arrow[r, "g|_{\operatorname{im} h}"] & \operatorname{im} h \end{tikzcd}$$

Wegen der Bijektivität von h' erhalten wir, dass $p_f(t) = p_{g|_{\operatorname{im} h}}(t)$, und aus Aufgabe 3 erhalten wir, dass $p_{g|_{\operatorname{im} h}}(t) \mid p_g(t)$. Somit gilt $p_f(t) \mid p_g(t)$. Insbesondere ist jede Nullstelle von $p_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_g(t)$, also jeder Eigenwert von f auch ein Eigenwert von g.

h ist surjektiv

Die lineare Abbildung h sei nun surjektiv. Dann induziert h einen Isomorphismus von K-Vektorräumen $\bar{h} : V/\ker h \longrightarrow W$, $\overline{v} \longmapsto h(v)$.

Aus der Kommutativität des Diagramms (1) folgt nun, dass der Untervektorraum $\ker h \subseteq V$ bereits f-invariant ist, denn es gilt

$$h(f(\ker h)) = g(h(\ker h)) = g(\{0\}) = \{0\}.$$

Nach Aufgabe 3 induziert f einen Endomorphismus $\bar{f}\colon V/\ker h \longrightarrow V/\ker h$, $\overline{v} \mapsto \overline{f(v)}$.

Aus der Kommutativität des Diagramms (1) folgt die Kommutativität des induzierten Diagramms

$$\begin{tikzcd} V/\ker h \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{h}"'] & V/\ker h \arrow[d, "\bar{h}"] \\ W \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Wegen der Bijektivität von $\bar{h}$ gilt $p_{\bar{f}}(t) = p_g(t)$. Nach Aufgabe 3 gilt außerdem $p_{\bar{f}} \mid p_f(t)$. Somit gilt $p_g(t) \mid p_f(t)$. Deshalb ist jede Nullstelle von $p_g(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also jeder Eigenwert von g auch ein Eigenwert von f.

Von Hand

Aus der Kommutativität des Diagramms (1) folgt für alle $\lambda \in K$ die Kommutativität des folgenden abgeänderten Diagramms:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f-\lambda\,\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[r, "g-\lambda\,\mathrm{id}_W"] & W \end{tikzcd} \tag{3}$$

Die Kommutativität von (1) ist nämlich äquivalent zu der Gleichheit $h \circ f = g \circ h$. Daraus folgt für alle $\lambda \in K$, dass

$$h \circ (f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = h \circ f - \lambda h = g \circ h - \lambda h = (g - \lambda\,\mathrm{id}_W) \circ h$$

gilt, was gerade die Kommutativität von (3) bedeutet.

h ist injektiv

Es sei h injektiv und $\lambda \in K$. Ist λ kein Eigenwert von g, so ist $g - \lambda\,\mathrm{id}_W$ injektiv. Wegen der Injektivität von h und Kommutativität von (3) ist damit auch $(g - \lambda\,\mathrm{id}_W) \circ h = h \circ (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ injektiv. Somit ist auch $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ injektiv, also λ kein Eigenwert von f.

h ist surjektiv

Es sei h surjektiv und $\lambda \in K$. Ist λ kein Eigenwert von f, so ist $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ injektiv. Wegen der Endlichdimensionalität von V ist $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ somit auch surjektiv. Wegen der Surjektivität von h und der Kommutativität von (3) ist damit auch $h \circ (f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = (g - \lambda\,\mathrm{id}_W) \circ h$ surjektiv. Somit ist auch $g - \lambda\,\mathrm{id}_W$ surjektiv. Wegen der Endlichdimensionalität ist $g - \lambda\,\mathrm{id}_W$ deshalb auch injektiv, also λ kein Eigenwert von g.