

# Lösungen und zusätzliche Bemerkungen

## zu Übungsblatt 1

Jendrik Stelzner

14. Mai 2017

### Aufgabe 2

Es sei  $R$  ein Integritätsbereich.

**Bemerkung 1.** Der Quotientenkörper des Integritätsbereichs der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  ist der Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , d.h.  $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ .

**Bemerkung 2.** Die Abbildung  $i: R \rightarrow Q(R)$ ,  $r \mapsto r/1$  ist ein injektiver Ringhomomorphismus: Es handelt sich um einen Ringhomomorphismus, denn für alle  $r_1, r_2 \in R$  gilt

$$i(r_1) + i(r_2) = \frac{r_1}{1} + \frac{r_2}{1} = \frac{r_1 + r_2}{1} = i(r_1 + r_2)$$

und

$$i(r_1) \cdot i(r_2) = \frac{r_1}{1} \cdot \frac{r_2}{1} = \frac{r_1 r_2}{1} = i(r_1 r_2),$$

und es gilt  $i(1_R) = 1_R/1_R = 1_{Q(R)}$ . Ist  $r \in \ker i$ , so gilt  $r/0 = 0/1$  und somit  $r \cdot 1 = 0 \cdot 0$ , also  $r = 0$ . Deshalb ist  $\ker i = 0$  und  $i$  somit injektiv.

Da  $i$  ein injektiver Ringhomomorphismus ist, lässt sich  $i$  durch Einschränkung als ein Ringisomorphismus  $R \rightarrow \text{im } i$  auffassen, d.h.  $\text{im } i$  ist ein zu  $R$  isomorpher Unterring von  $Q(R)$ , und ein entsprechender Isomorphismus ist durch  $r \mapsto r/1$  gegeben.

Anschaulich gesehen ist  $Q(R)$  der „kleinstmögliche“ Körper, der  $R$  enthält. Dies lässt sich durch die *universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers* formalisieren:

Ist  $K$  ein beliebiger Körper und  $j: R \rightarrow K$  ein injektiver Ringhomomorphismus, so gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\bar{j}: Q(R) \rightarrow K$ , der das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ Q(R) & \xrightarrow{\bar{j}} & K \end{array} \quad (1)$$

*Beweis.* Für alle  $r/s \in Q(R)$  muss

$$\bar{j}\left(\frac{r}{s}\right) = \bar{j}\left(\frac{r}{1} \left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) = \bar{j}(i(r)i(s)^{-1}) = \bar{j}(i(r))\bar{j}(i(s))^{-1} = j(r)j(s)^{-1} = \frac{j(r)}{j(s)}$$

gelten, was die Eindeutigkeit von  $\bar{j}$  zeigt. (Hier nutzen wir, dass  $\bar{j}(x^{-1}) = \bar{j}(x)^{-1}$  für alle  $x \in Q(R)$  mit  $x \neq 0$  gelten muss, da  $1_K = \bar{j}(1_{Q(R)}) = \bar{j}(xx^{-1}) = \bar{j}(x)\bar{j}(x^{-1})$  gilt.)

Andererseits definiert

$$\bar{j}: Q(R) \rightarrow K, \quad \frac{r}{s} \mapsto \frac{j(r)}{j(s)}$$

einen wohldefinierten Ringhomomorphismus:

Für  $r/s = r'/s' \in Q(R)$  gilt  $rs' = r's$  und somit auch

$$j(r)j(s') = j(rs') = j(r's) = j(r')j(s). \quad (2)$$

Wegen der Injektivität von  $j$  folgt aus  $s, s' \neq 0$ , dass auch  $j(s), j(s') \neq 0$  gilt. Die Gleichung (2) lässt sich deshalb durch  $j(s)$  und durch  $j(s')$  teilen, wodurch sich  $j(r)/j(s) = j(r')/j(s')$  ergibt. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von  $\bar{j}$ .

Dass  $\bar{j}$  ein Ringhomomorphismus ist, ergibt sich durch direktes Nachrechnen, denn für alle  $r_1/s_1, r_2/s_2 \in Q(R)$  gilt

$$\begin{aligned} \bar{j}\left(\frac{r_1}{s_1}\right) + \bar{j}\left(\frac{r_2}{s_2}\right) &= \frac{j(r_1)}{j(s_1)} + \frac{j(r_2)}{j(s_2)} = \frac{j(r_1)j(s_2) + j(r_2)j(s_1)}{j(s_1)j(s_2)} \\ &= \frac{j(r_1s_2 + r_2s_1)}{j(s_1s_2)} = \bar{j}\left(\frac{r_1s_2 + r_2s_1}{s_1s_2}\right) = \bar{j}\left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right). \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \bar{j}\left(\frac{r_1}{s_1}\right) \cdot \bar{j}\left(\frac{r_2}{s_2}\right) &= \frac{j(r_1)}{j(s_1)} \cdot \frac{j(r_2)}{j(s_2)} = \frac{j(r_1)j(r_2)}{j(s_1)j(s_2)} = \frac{j(r_1r_2)}{j(s_1s_2)} = \bar{j}\left(\frac{r_1r_2}{s_1s_2}\right) \\ &= \bar{j}\left(\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2}\right), \end{aligned}$$

und es gilt  $\bar{j}(1_{Q(R)}) = \bar{j}(1_R/1_R) = j(1_R)/j(1_R) = 1_K/1_K = 1_K$ . □

**Bemerkung 3.** Ringhomomorphismen zwischen zwei Körpern sind stets injektiv: Es seien  $K$  und  $L$  zwei Körper. Gebe es einen nicht-injektiven Ringhomomorphismus  $\varphi: K \rightarrow L$ , so würde  $\ker \varphi \neq 0$  gelten. Dann gebe es ein  $x \in K$  mit  $x \neq 0$  und  $\varphi(x) = 0$ . Dann würde auch

$$0 = 0 \cdot \varphi(x^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(1) = 1,$$

gelten, was aber in Körpern per Definition nicht gilt. Folglich muss  $\ker \varphi = 0$  gelten, und  $\varphi$  somit injektiv sein.

Inbesondere erhalten wir in dem kommutativen Diagramm (1), dass auch der Ringhomomorphismus  $\bar{j}$  injektiv ist, und somit einen Isomorphismus von Körpern  $Q(R) \rightarrow \text{im } \bar{j}$  induziert. Dies entspricht der Anschauung, dass jeder Körper, der den Integritätsbereich  $R$  enthält, auch schon den Quotientenkörper  $Q(R)$  enthalten muss.

So muss etwa jeder Körper, der die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  enthält, auch schon die rationalen Zahlen  $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$  enthalten.

**Bemerkung 4.** Auf die übliche Weise ergibt sich, dass das Paar  $(Q(R), i)$  durch die obige universelle Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist:

Es sei  $(Q', i')$  ein weiteres Paar, bestehend aus einem Körper  $Q'$  und einem injektiven Ringhomomorphismus  $i' : R \rightarrow Q'$ , so dass es für jeden Körper  $K$  und jeden injektiven Ringhomomorphismus  $j : R \rightarrow K$  einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\bar{j} : Q' \rightarrow K$  gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ i' \swarrow & & \searrow j \\ Q' & \xrightarrow{\bar{j}} & K \end{array} \quad (3)$$

Dann gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\varphi : Q(R) \rightarrow Q'$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ i \swarrow & & \searrow i' \\ Q(R) & \xrightarrow{\varphi} & Q' \end{array} \quad (4)$$

zum Kommutieren bringt, und  $\varphi$  ist ein Isomorphismus:

Die Existenz und Eindeutigkeit von  $\varphi$  ergeben sich dadurch, dass man die universelle Eigenschaft des Paares  $(Q(R), i)$  auf den injektiven Ringhomomorphismus  $i' : R \rightarrow Q'$  anwendet. Analog ergibt sich Anwenden der analogen Eigenschaft von  $(Q', i')$  auf den injektiven Ringhomomorphismus  $i : R \rightarrow Q(R)$ , dass es einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\psi : Q' \rightarrow Q(R)$  gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ i \swarrow & & \searrow i' \\ Q(R) & \xleftarrow{\psi} & Q' \end{array} \quad (5)$$

kommutiert. Durch Zusammenfügen von (4) und (5) ergibt sich das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & R & & \\ & i \swarrow & & \searrow i' & \\ Q(R) & \xrightarrow{\varphi} & Q' & \xrightarrow{\psi} & Q(R) \end{array} \quad (6)$$

Hieraus ergibt sich durch Vergessen des mittleren vertikalen Pfeils das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ i \swarrow & & \searrow i \\ Q(R) & \xrightarrow{\psi \circ \varphi} & Q(R) \end{array} \quad (7)$$

Nach der universellen Eigenschaft von  $(Q(R), i)$  ist  $\psi \circ \varphi$  dabei bereits der *eindeutige* Ringhomomorphismus  $Q(R) \rightarrow Q(R)$ , der das Diagramm (7) zum Kommutieren bringt. Andererseits bringt auch  $\text{id}_{Q(R)} : Q(R) \rightarrow Q(R)$  das Diagramm zum Kommutieren. Somit muss

bereits  $\psi \circ \varphi = \text{id}_{Q(R)}$  gelten. Analog ergibt sich, dass auch  $\varphi \circ \psi = \text{id}_{Q'}$  gilt. Also ist  $\varphi$  ein Isomorphismus mit  $\varphi^{-1} = \psi$ .

## Aufgabe 3

### (a)

Da  $I$  eine Untergruppe der unterliegenden additiven Gruppe von  $R$  ist, ist aus der Linearen Algebra I bekannt, dass

- $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $R$  definiert,
- durch  $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$  eine wohldefinierte binäre Verknüpfung von  $R/I$  definiert wird,
- $R/I$  durch  $+$  zu einer abelschen Gruppe wird.

Es bleibt zu zeigen, dass

- durch  $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$  eine wohldefinierte binäre Verknüpfung auf  $R/I$  definiert wird,
- diese Multiplikation assoziativ ist,
- diese Multiplikation kommutativ ist,
- es für diese Multiplikation ein Einselement gibt,
- die Distributivgesetze für die Addition  $+$  und Multiplikation  $\cdot$  auf  $R/I$  gelten.

Für die Wohldefiniertheit der Multiplikation seien  $x, x', y, y' \in R$  with  $\bar{x} = \bar{x'}$  und  $\bar{y} = \bar{y'}$ . Dann gilt  $x - x', y - y' \in I$  und somit auch

$$xy - x'y' = xy - xy' + xy' - x'y' = x \underbrace{(y - y')}_{\in I} + \underbrace{(x - x')}_{\in I} y' \in I,$$

also  $\overline{xy} = \overline{x'y'}$ . Das zeigt die Wohldefiniertheit der Multiplikation. Für alle  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R/I$  gilt

$$\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) = \bar{x} \cdot \overline{yz} = \overline{xy z} = \overline{xy} \cdot \bar{z} = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z},$$

was die Assoziativität der Multiplikation zeigt. Für alle  $\bar{x}, \bar{y} \in R/I$  gilt

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy} = \overline{yx} = \bar{y} \cdot \bar{x},$$

was die Kommutativität der Multiplikation zeigt. Das Element  $\bar{1} \in R/I$  ist ein Einselement für die Multiplikation, denn für alle  $\bar{x} \in R/I$  gilt

$$\bar{1} \cdot \bar{x} = \overline{1 \cdot x} = \bar{x}.$$

Die Distributivität der Multiplikation im ersten Argument ergibt sich daraus, dass für alle  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R/I$  die Gleichheit

$$(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \overline{(x + y)z} = \overline{xz + yz} = \overline{xz} + \overline{yz} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}$$

gilt. Da die Multiplikation auf  $R/I$  kommutativ ist, ergibt sich hieraus auch die Distributivität im zweiten Argument.

Insgesamt zeigt dies, dass  $R/I$  mit der gegebenen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.

**Bemerkung 5.** Im Falle  $R = \mathbb{Z}$  und  $I = (n) = n\mathbb{Z} = \{an \mid a \in \mathbb{Z}\}$  ist die Konstruktion von  $R/I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  bereits aus der Linearen Algebra I bekannt.

**Bemerkung 6.** Die Konstruktion des Quotientenringes  $R/I$  funktioniert auch für einen nicht-kommutativen Ring, sofern man fordert, dass  $I$  ein beidseitiges Ideal ist, d.h. dass  $rx, xr \in I$  für alle  $x \in I$  und  $r \in R$  gilt.

## (b)

Als Ringhomomorphismus ist  $\varphi$  insbesondere ein Gruppenhomomorphismus zwischen den unterliegenden additiven Gruppen von  $R$  und  $S$ ; deshalb gilt

$$\varphi(0) = 0$$

und somit  $0 \in \ker \varphi$ , und für jedes  $x \in \ker \varphi$  gilt

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) = -0 = 0$$

und somit auch  $-x \in \ker \varphi$ . Für alle  $x, y \in \ker \varphi$  gilt außerdem

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0 + 0 = 0,$$

und somit auch  $x + y \in \ker \varphi$ . Das zeigt, dass  $\ker \varphi$  eine Untergruppe der additiven Gruppe von  $R$  ist. (Eventuell wurde dies auch schon in der Linearen Algebra I gezeigt.) Für alle  $r \in R$  und  $x \in \ker \varphi$  gilt

$$\varphi(rx) = \varphi(r)\varphi(x) = \varphi(r) \cdot 0 = 0,$$

und somit auch  $rx \in \ker \varphi$ . Somit ist  $\ker \varphi$  bereits ein Ideal in  $R$ .

**Beispiel 7.** Ist  $K$  ein Körper, so sind  $\{0\}, K \subseteq K$  die einzigen beiden Ideale in  $K$ : Ist nämlich  $I \subseteq K$  ein Ideal mit  $I \neq \{0\}$ , so gibt es ein  $x \in I$  mit  $x \neq 0$ . Dann gilt auch  $1 = x^{-1}x \in I$ , und für jedes  $y \in K$  somit auch  $y = y \cdot 1 \in I$ . Deshalb gilt dann bereits  $I = K$ .

Ist nun  $R$  ein Ring und  $\varphi : K \rightarrow R$  ein Ringhomomorphismus, so ist  $\ker \varphi \subseteq K$  ein Ideal. Ist  $R \neq 0$ , so gilt  $0_R \neq 1_R$  und deshalb  $1_K \notin \ker \varphi$ . Somit muss nach der obigen Beobachtung bereits  $\ker \varphi = 0$  gelten, und  $\varphi$  deshalb injektiv sein.

Ringhomomorphismen aus Körpern heraus sind also injektiv, sofern sie nicht ausgerechnet in den Nullring gehen.

## (c)

Wir betrachten den kommutativen Ring  $R/I$  und die Abbildung  $\pi : R \rightarrow R/I, x \mapsto \bar{x}$ . Dies ist ein Ringhomomorphismus, denn für alle  $x, y \in R$  gilt

$$\pi(x + y) = \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} = \pi(x) + \pi(y)$$

sowie

$$\pi(x \cdot y) = \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y} = \pi(x) \cdot \pi(y),$$

und es gilt  $\pi(1_R) = \overline{1_R} = 1_{R/I}$ . Für den Ringhomomorphismus  $\pi$  gilt

$$\ker \pi = \{x \in R \mid \pi(x) = 0\} = \{x \in R \mid \overline{x} = \overline{0}\} = \{x \in R \mid x - 0 \in I\} = \{x \in R \mid x \in I\} = I,$$

was die gegebene Behauptung zeigt.

**Bemerkung 8.** Analog zu den letzten beiden Aufgabenteilen ergibt sich für einen nicht-kommutativen Ring  $R$ , dass  $I \subseteq R$  genau dann beidseitiges Ideal ist, wenn es einen Ring  $S$  und einen Ringhomomorphismus  $\varphi : R \rightarrow S$  mit  $\ker \varphi = I$  gibt.

## Aufgabe 4

### (a)

Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ R/I & & \end{array}$$

ist äquivalent dazu, dass  $\bar{\varphi}(\overline{x}) = \varphi(x)$  für alle  $x \in R/I$  gilt. Dies zeigt bereits die Eindeutigkeit von  $\bar{\varphi}$ .

Zum Beweis der Existenz von  $\bar{\varphi}$  gilt es zu zeigen, dass durch

$$\bar{\varphi} : R/I \rightarrow S, \quad \overline{x} \mapsto \varphi(x)$$

ein wohldefinierter Ringhomomorphismus gegeben ist:

Für  $x, y \in R$  mit  $\overline{x} = \overline{y}$  gilt  $x - y \in \ker \varphi$  und somit  $0 = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$ , also  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Dies zeigt die Wohldefiniertheit von  $\bar{\varphi}$ . Durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass  $\bar{\varphi}$  ein Ringhomomorphismus ist, denn für alle  $\overline{x}, \overline{y} \in R/I$  gilt

$$\bar{\varphi}(\overline{x} + \overline{y}) = \bar{\varphi}(\overline{x + y}) = \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \bar{\varphi}(\overline{x}) + \bar{\varphi}(\overline{y}).$$

und

$$\bar{\varphi}(\overline{x \cdot y}) = \bar{\varphi}(\overline{x} \cdot \overline{y}) = \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \bar{\varphi}(\overline{x}) \cdot \bar{\varphi}(\overline{y}),$$

und es gilt  $\bar{\varphi}(1_{R/I}) = \bar{\varphi}(\overline{1_R}) = \varphi(1_R) = 1_S$ .

**Bemerkung 9.** Ist  $R$  ein nicht-kommutativer Ring und  $I \subseteq R$  ein beidseitiges Ideal, so gilt der Homomorphiesatz in gleicher Form und mit unveränderten Beweis.

**(b)**

Es gilt

$$\text{im } \bar{\varphi} = \{\bar{\varphi}(\bar{x}) \mid \bar{x} \in R/I\} = \{\varphi(x) \mid x \in R\} = \text{im } \varphi.$$

Insbesondere ist  $\bar{\varphi}$  genau dann surjektiv, wenn  $\varphi$  surjektiv ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\ker \bar{\varphi} &= \{\bar{x} \in R/I \mid \bar{\varphi}(\bar{x}) = 0\} = \{\bar{x} \in R/I \mid \varphi(x) = 0\} \\ &= \{\bar{x} \in R/I \mid x \in \ker \varphi\} = \{\bar{x} \mid x \in \ker \varphi\} = \{x + I \mid x \in \ker \varphi\} = (\ker \varphi)/I.\end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\bar{\varphi} \text{ ist injektiv} \iff \ker \bar{\varphi} = \{0\} \iff (\ker \varphi)/I = \{0\} \iff \ker \varphi = I.$$

**Behauptung 10.** Das Bild  $\text{im } \varphi$  ist ein kommutativer Unterring von  $S$ .

*Beweis.* Es gilt

$$0 = \varphi(0) \in \text{im } \varphi.$$

Für  $y \in \text{im } \varphi$  gibt es  $x \in R$  mit  $y = \varphi(x)$ , weshalb auch

$$-y = -\varphi(x) = \varphi(-x) \in \text{im } \varphi$$

gilt. Für  $y_1, y_2 \in \text{im } \varphi$  gibt es  $x_1, x_2 \in R$  mit  $y_1 = \varphi(x_1)$  und  $y_2 = \varphi(x_2)$ , weshalb auch

$$y_1 + y_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \in \text{im } \varphi$$

gilt. Das zeigt, dass  $\text{im } \varphi$  eine Untergruppe der additiven Gruppe von  $S$  ist.

Es gilt

$$1_S = \varphi(1_R) \in \text{im } \varphi.$$

Für alle  $y_1, y_2 \in \text{im } \varphi$  gibt es  $x_1, x_2 \in R$  mit  $y_1 = \varphi(x_1)$  und  $y_2 = \varphi(x_2)$ , weshalb auch

$$y_1 y_2 = \varphi(x_1) \varphi(x_2) = \varphi(x_1 x_2) \in \text{im } \varphi$$

gilt. Das zeigt, dass  $\text{im } \varphi$  bereits ein Unterring von  $S$  ist.

Für  $y_1, y_2 \in \text{im } \varphi$  gibt es  $x_1, x_2 \in R$  mit  $y_1 = \varphi(x_1)$  und  $y_2 = \varphi(x_2)$ . Aus der Kommutativität von  $\varphi$  ergibt sich dann, dass

$$y_1 y_2 = \varphi(x_1) \varphi(x_2) = \varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_2 x_1) = \varphi(x_2) \varphi(x_1) = y_2 y_1.$$

Also ist auch  $\text{im } \varphi$  kommutativ. □

Wir können nun  $\varphi$  als einen surjektiven Ringhomomorphismus  $R \rightarrow \text{im } \varphi$ ,  $r \mapsto \varphi(r)$  auffassen. Aus den bereits gezeigten Aussagen erhalten wir, dass  $\varphi$  einen bijektiven Ringhomomorphismus, also einen Ringisomorphismus  $\bar{\varphi} : R/I \rightarrow \text{im } \varphi$ ,  $\bar{x} \mapsto \varphi(x)$  induziert. Somit gilt  $R/I \cong \text{im } \varphi$ .

**Bemerkung 11.** Ist  $R$  ein nicht-kommutativer Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal, bzw.  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus, so gelten die Aussagen unverändert mit gleichen Beweis. (Der einzige Unterschied besteht darin, dass  $\text{im } \varphi$  nicht mehr notwendigerweise kommutativ ist.)

**Beispiel 12.** 1. Nach der universellen Eigenschaft des Polynomrings gibt es einen eindeutigen Homomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Algebren  $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\varphi(X) = i$ ; konkret ist  $\varphi$  durch  $\varphi(p) = p(i)$  für alle  $p \in \mathbb{R}[X]$  gegeben. Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $a + ib = \varphi(a + bX) \in \text{im } \varphi$ , weshalb  $\varphi$  surjektiv ist.

**Behauptung 13.** Es gilt  $\ker \varphi = (X^2 + 1) = \{f \cdot (X^2 + 1) \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$ .

*Beweis.* Für  $p \in (X^2 + 1)$  gibt es  $f \in \mathbb{R}[X]$  mit  $p = f \cdot (X^2 + 1)$ . Dann gilt

$$\varphi(p) = p(i) = f(i) \cdot (i^2 + 1) = f(i) \cdot 0 = 0,$$

und somit  $p \in \ker \varphi$ .

Gilt andererseits  $p \in \ker \varphi$ , so ist  $p(i) = \varphi(p) = 0$ . Durch Polynomdivision ergeben sich  $f, r \in \mathbb{R}[X]$  mit  $p = f \cdot (X^2 + 1) + r$  und  $\deg r < \deg(X^2 + 1) = 2$ . Also ist  $r$  von der Form  $r = a + bX$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wir erhalten, dass

$$0 = p(i) = f(i) \cdot \underbrace{(i^2 + 1)}_{=0} + r(i) = r(i) = a + bi.$$

Es folgt, dass  $a = b = 0$  gilt, und somit  $r = 0$ . Also ist bereits  $p = f \cdot (X^2 + 1) \in (X^2 + 1)$ .  $\square$

Damit ergibt sich, dass  $\varphi$  einen Ringisomorphismus

$$\bar{\varphi} : \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad p \mapsto p(i)$$

induziert. Dieser Isomorphismus kann so verstanden werden, dass  $\mathbb{C}$  aus  $\mathbb{R}$  durch hinzufügen eines Elements  $\bar{X}$  mit  $\bar{X}^2 + 1 = 0$  entsteht, wobei  $\bar{X}$  der üblichen komplexen Zahl  $i$  entspricht.

2. Es sei

$$\mathcal{C} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Q} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchyfolge}\}$$

der Raum der rationalen Cauchyfolgen. Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$  zwei rationale Cauchyfolgen, so sind auch  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rationale Cauchyfolgen. Zusammen mit dieser Addition und Multiplikation bildet  $\mathcal{C}$  einen kommutativen Ring; das Einselement ist durch die konstante 1-Folge  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben ( $\mathcal{C}$  enthält alle konstanten Folgen, da diese insbesondere konvergent und somit Cauchy sind).

Da jede rationale Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  konvergiert, ergibt sich eine wohldefinierte Abbildung

$$\lim : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Die Abbildung  $\lim$  ist ein Ringhomomorphismus, denn für alle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$  gilt

$$\begin{aligned} \lim((a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= \lim((a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = \lim((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) + \lim((b_n)_{n \in \mathbb{N}}). \end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned}\lim((a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= \lim((a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = \lim((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) \cdot \lim((b_n)_{n \in \mathbb{N}}).\end{aligned}$$

Da jede reelle Zahl als Grenzwert einer rationalen Cauchyfolge geschrieben werden kann (dies ist gerade die Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ ), ist  $\lim$  surjektiv. Außerdem gilt

$$\ker \lim = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C} \mid \lim((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 0\} = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\},$$

d.h. der Kern von  $\lim$  besteht aus genau den rationalen Cauchyfolgen, die auch Nullfolgen sind. Da aber jede Nullfolge bereits eine Cauchyfolge ist, ist der Kern von  $\lim$  durch

$$N = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Q} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, a_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty\}$$

gegeben. Somit ist  $N$  ein Ideal in  $\mathcal{C}$ , und  $\lim$  induziert einen Isomorphismus von Ringen

$$\mathcal{C}/N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \overline{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dies führt dazu, dass sich die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen konstruieren lassen, wobei zwei rationale Cauchyfolgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann äquivalent sind, wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} - (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.