

# Lösungen und zusätzliche Bemerkungen

zu Übungsblatt 2

Jendrik Stelzner

15. Mai 2017

## Aufgabe 1

(a)

**Lemma 1.** Es sei  $R$  ein Ring.

1. Für alle  $x \in R$  gilt  $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$ .
2. Für alle  $x, y \in R$  gilt  $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ .

*Beweis.* 1. Es gilt  $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ , und durch Subtraktion von  $0 \cdot x$  ergibt sich, dass  $0 = 0 \cdot x$ . Analog ergibt sich, dass auch  $x \cdot 0 = 0$  gilt.

2. Es gilt  $xy + (-x)y = (x + (-x))y = 0 \cdot y = 0$ , weshalb  $(-x)y = -(xy)$  gilt. Analog ergibt sich, dass auch  $x(-y) = -(xy)$  gilt.  $\square$

Es gilt  $0 \in Z(R)$  da  $0 \cdot y = 0 = y \cdot 0$  für alle  $y \in R$  gilt. Für  $x_1, x_2 \in Z(R)$  gilt

$$(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y = yx_1 + yx_2 = y(x_1 + x_2) \quad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch  $x_1 + x_2 \in Z(R)$ . Für jedes  $x \in R$  gilt

$$(-x)y = -(xy) = -(yx) = y(-x) \quad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch  $-x \in Z(R)$ . Insgesamt zeigt dies, dass  $Z(R)$  eine Untergruppe der additiven Gruppe von  $R$  ist. Es gilt  $1 \in Z(R)$  da  $1 \cdot y = y = y \cdot 1$  für alle  $y \in R$  gilt. Für alle  $x_1, x_2 \in Z(R)$  gilt

$$(x_1 x_2)y = x_1 x_2 y = x_1 y x_2 = y x_1 x_2 = y(x_1 x_2) \quad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch  $x_1, x_2 \in Z(R)$ . Insgesamt zeigt dies, dass  $Z(R)$  ein Unterring von  $R$  ist.

Zusätzlich bemerken wir noch, dass für jedes  $x \in Z(R)$  mit  $x \in R^\times$  auch  $x^{-1} \in Z(R)$  gilt, denn dann gilt

$$x^{-1}y = x^{-1}yxx^{-1} = x^{-1}xyx^{-1} = yx^{-1} \quad \text{für alle } y \in R.$$

(b)

Es sei  $K$  ein Körper. Wir zeigen, dass

$$Z(M_n(K)) = K \cdot I = \{\lambda \cdot I \mid \lambda \in K\}$$

gilt, wobei  $I \in M_n(K)$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Dass  $K \cdot I \subseteq Z(M_n(K))$  gilt, ergibt sich direkt daraus, dass

$$(\lambda I)A = \lambda A = A \cdot (\lambda I) \quad \text{für alle } \lambda \in K, A \in M_n(K)$$

gilt. Andererseits sei  $C \in Z(M_n(K))$ . Für alle  $i, j = 1, \dots, n$  sei  $E_{ij} \in M_n(K)$  die Matrix deren  $(i, j)$ -ter Eintrag 1 ist, und deren andere Einträge alle 0 sind, d.h. es gilt

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{(i,j),(k,l)} = \delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (k, l) = (i, j), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{für alle } k, l = 1, \dots, n.$$

Wir zeigen nun in zwei Schritten, dass bereits  $C = \lambda \cdot I$  für ein passendes  $\lambda \in K$  gilt: Im ersten Schritt zeigen wir, dass  $C$  eine Diagonalmatrix ist, und im zweiten Schritt zeigen wir dann, dass alle Diagonaleinträge von  $C$  bereits gleich sind.

Wir geben die Rechnungen zunächst in einer kompakten, formellastigen Form an. Anschließend geben wir die gleiche Argumentation noch einmal in anschaulicheren, dafür aber etwas längeren Form an.

### Kompakte Version

- Wir zeigen, dass  $C$  eine Diagonalmatrix ist: Für jede Matrix  $A \in M_n(K)$  gilt  $CA = AC$ . In Koeffizienten bedeutet dies, dass

$$\sum_{k=0}^n C_{ik}A_{kj} = (CA)_{ij} = (AC)_{ij} = \sum_{k=0}^n A_{ik}C_{kj} \quad \text{für alle } A \in M_n(K) \text{ und } i, j = 1, \dots, n \quad (1)$$

gilt. Indem wir die Matrix  $A = E_{ii}$  betrachten, erhalten wir dabei zum einen, dass

$$\sum_{k=0}^n C_{ik}(E_{ii})_{kj} = \sum_{k=0}^n C_{ik}\delta_{ik}\delta_{ij} = \delta_{ij}C_{ii} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n$$

gilt, und zum anderen, dass

$$\sum_{k=0}^n (E_{ii})_{ik}C_{kj} = \sum_{k=0}^n \delta_{ik}C_{kj} = C_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 0, \dots, n$$

gilt. Für alle  $1 \leq i \neq j \leq n$  erhalten wir somit aus (1), dass  $0 = \delta_{ij}C_{ii} = C_{ij}$  gilt. (Für  $i = j$  erhalten wir nur die triviale Aussage, dass  $C_{ii} = \delta_{ij}C_{ii} = C_{ij} = C_{ii}$  gilt.) Das zeigt, dass  $C$  eine Diagonalmatrix ist.

- Es seien nun  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  die Diagonaleinträge von  $C$ , d.h. es gelte  $C_{ii} = \lambda_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt  $C_{ik} = \delta_{ik}\lambda_i$  für alle  $i, k = 1, \dots, n$ , bzw. äquivalent  $C_{kj} = \delta_{jk}\lambda_j$  für alle  $j, k = 1, \dots, n$ . Die beiden Seiten von Gleichung (1) vereinfacht sich somit zu

$$\sum_{k=0}^n C_{ik}A_{kj} = \sum_{k=0}^n \delta_{ik}\lambda_i A_{kj} = \lambda_i A_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n A_{ik}C_{kj} = \sum_{k=0}^n A_{ik}\delta_{jk}\lambda_j = \lambda_j A_{ij},$$

und Gleichung (1) selbst vereinfacht sich somit zu

$$\lambda_i A_{ij} = \lambda_j A_{ij} \quad \text{für alle } A \in M_n(K) \text{ und } i, j = 1, \dots, n.$$

Indem wir die Matrix  $A = E_{ij}$  mit  $A_{ij} = 1$  betrachten, erhalten wir somit, dass  $\lambda_i = \lambda_j$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  gilt. Also gilt  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$  und somit  $C = \lambda I$ .

### Anschauliche Version

Wir wollen zunächst eine Anschauung dafür entwickeln, wie Multiplikation mit Diagonalmatrizen funktioniert:

**Beobachtung 2.** Sind  $D_1 \in M_m(K)$  und  $D_2 \in M_n(K)$  zwei Diagonalmatrizen

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix},$$

so lassen sich für eine beliebige Matrix  $A \in M(m \times n, K)$  die Produkte  $D_1 A$  und  $A D_2$  als

$$D_1 A = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{11} & \dots & \lambda_1 A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m A_{m1} & \dots & \lambda_m A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 A_{11} & \dots & \mu_n A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1 A_{m1} & \dots & \mu_n A_{mn} \end{pmatrix}$$

berechnen. Durch Multiplikation mit  $D_1$  von links wird also die  $i$ -te Zeile von  $A$  mit  $\lambda_i$  multipliziert, und durch Multiplikation mit  $D_2$  von rechts wird die  $j$ -te Spalte von  $A$  mit  $\mu_j$  multipliziert. Dies lässt sich schematisch als

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_m z_m \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 s_1 & \dots & \mu_n s_n \end{pmatrix}$$

darstellen.

Wir zeigen nun noch einmal in zwei Schritten, dass  $C = \lambda \cdot I$  für ein passendes  $\lambda \in K$  gilt:

- Wir zeigen zunächst, dass  $C$  eine Diagonalmatrix ist: Hierfür sei  $1 \leq i \leq n$ . Dann ist  $E_{ii}$  eine Diagonalmatrix, deren  $i$ -ter Diagonaleintrag 1 ist, und deren Diagonaleinträge sonst alle verschwinden. Da  $C \in Z(M_n(K))$  gilt, erhalten wir, dass  $CE_{ii} = E_{ii}C$ . Nach Beobachtung 2 entsteht dabei die Matrix  $CE_{ii}$  aus  $C$ , indem die  $i$ -te Spalte unverändert bleibt, aber alle anderen Spalten durch die Nullspalte ersetzt werden. Analog entsteht  $E_{ii}C$  aus  $C$ , indem die  $i$ -te Zeile unverändert bleibt, aber alle anderen Zeilen durch die Nullzeile ersetzt werden. Anschaulich gesehen gilt also, dass

$$CE_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_{ii}C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ C_{i1} & \cdots & C_{ii} & \cdots & C_{in} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Da nach Annahme  $CE_{ii} = E_{ii}C$  gilt, erhalten wir, dass in der  $i$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte von  $C$  bis auf den gemeinsamen Eintrag  $C_{ii}$  alle anderen Einträge verschwinden müssen, d.h. für alle  $j = 0, \dots, \hat{i}, \dots, n$  gilt  $C_{ij} = 0$  und  $C_{ji} = 0$ . Da dies für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt, erhalten wir, dass in jeder Spalte (und in jeder Zeile) von  $C$  alle nicht-Diagonaleinträge verschwinden. Also ist  $C$  eine Diagonalmatrix.

- Für alle  $i = 1, \dots, n$  sei  $\lambda_i \in K$  der  $i$ -te Diagonaleintrag von  $C$ , d.h. es gelte

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, dass alle Diagonaleinträge von  $C$  bereits gleich sind: Es seien  $1 \leq i \neq j \leq n$ . Der einzige nicht-verschwindende Eintrag von  $E_{ij}$  befindet sich in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte von  $E_{ij}$ . Aus Beobachtung 2 folgt nun, dass  $CE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$  und  $E_{ij}C = \lambda_j E_{ij}$ . Anschaulich lässt sich die Anwendung von Beobachtung 2 als

$$CE_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$E_{ij}C = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

notieren. Durch Vergleich der Einträge  $(CE_{ij}) = \lambda_i$  und  $(E_{ij}C) = \lambda_j$  ergibt sich hieraus, dass  $\lambda_i = \lambda_j$  gilt. Das dies für alle  $1 \leq i \neq j \leq n$  gilt, muss bereits  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ , und somit  $C = \lambda I$ .

### Weitere Bemerkungen

**Bemerkung 3.** Die Idee der obigen Rechnung lässt sich grob wie folgt beschreiben:

Es sei  $C \in M_n(K)$ . Dass  $C$  mit einer Matrix  $A \in M_n(K)$  kommutiert, dass also  $CA = AC$  gilt, ist eine zusätzliche Bedingung an  $C$ . Dabei hängt es von der Matrix  $A$  ab, wie restriktiv diese Bedingung ist:

- Betrachtet man etwa  $A = I$ , so erhält man die Bedingung  $C = C$ . Diese Bedingung liefert uns keine näheren Informationen über  $C$ .
- Betrachtet man  $A = E_{ii}$  für ein  $1 \leq i \leq n$ , so liefert uns die Bedingungen  $CA = AC$ , dass in der  $i$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte von  $A$  bis auf den gemeinsamen Diagonaleintrag  $A_{ii}$  jeder andere Diagonaleintrag verschwindet.
- Betrachtet man eine Diagonalmatrix  $A$  mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j,$$

so erhalten wir durch Beobachtung 2 aus der Bedingung  $CA = AC$ , dass

$$\lambda_j C_{ij} = (CA)_{ij} = (AC)_{ij} = \lambda_i C_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Da  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für alle  $1 \leq i \neq j \leq n$  gilt, folgt daraus, dass  $C_{ij} = 0$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$  gilt. Also muss  $C$  bereits eine Diagonalmatrix sein.

Je mehr Matrizen mit  $C$  kommutieren, desto mehr Bedingungen werden an  $C$  gestellt, und desto mehr Restriktionen gibt es bezüglich des Aussehens von  $C$ .

Ist nun  $C \in Z(M_n(K))$  so gilt für jede Matrix  $A \in M_n(K)$  die entsprechende Bedingung  $AC = CA$ . Indem wir für  $A$  „ausreichend viele“ passende Matrizen betrachten, erhalten wir unterschiedliche Restriktionen an die Form von  $C$ . Die Hoffnung ist, hierdurch bereits die gewünschte Form  $C = \lambda \cdot I$  mit  $\lambda \in K$  zu erzwingen.

Wegen der Endlichdimensionalität von  $M_n(K)$  lassen sich dabei die Familie von  $n^2 \cdot |K|$  vielen Bedingungen

$$CA = AC \quad \text{für alle } A \in M_n(K)$$

auf bereits  $n^2$  viele Bedingungen reduzieren: Ist  $\{A_1, \dots, A_{n^2}\}$  eine  $K$ -Basis von  $M_n(K)$  und gilt  $CA_i = A_i C$  für alle  $i = 1, \dots, n^2$ , so gilt bereits  $CA = AC$  für alle  $A \in M_n(K)$ , denn mit  $A = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i$  erhält man die Gleichungskette

$$CA = C \left( \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i \right) = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i CA_i = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i C = \left( \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i \right) C = AC.$$

Betrachtet man nun die (naheliegende) Basis  $\mathcal{B} = \{E_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$  von  $M_n(K)$ , so gilt für  $C \in M_n(K)$  also, dass genau dann  $C \in Z(M_n(K))$  gilt, wenn  $CE_{ij} = E_{ij}C$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  gilt. Da die Matrizen aus  $\mathcal{B}$  eine möglichst einfache Form haben, sind die Bedingungen  $CE_{ij} = E_{ij}C$  dabei ebenfalls möglich einfach.

**Bemerkung 4.** Wir haben in unseren Beweis nur genutzt, dass  $K$  ein kommutativer Ring ist. Mit unveränderten Beweis ergibt sich deshalb, dass

$$Z(M_n(R)) = R \cdot I \quad \text{für jeden kommutativen Ring } R \quad (2)$$

gilt. Möchte man auch nicht-kommutative Ringe betrachten, so lässt sich (2) zu

$$Z(M_n(R)) = Z(R) \cdot I \quad \text{für jeden Ring } R \quad (3)$$

erweitern; ist dabei  $R$  kommutativ, so gilt  $Z(R) = R$  (dies ist nur eine Umformulierung der Kommutativität von  $R$ ), und (3) vereinfacht sich wieder zu (2).

Ein Beweis für (3) ergibt sich durch leichte Abänderung, bzw. Erweiterung unseres Beweises für (2): Es ergibt sich wie zuvor, dass  $Z(R) \cdot I \subseteq Z(M_n(R))$  gilt.

Zum Beweis der Inklusion  $Z(M_n(R)) \subseteq Z(R) \cdot I$  zeigt man für  $C \in Z(M_n(R))$  ebenfalls zunächst, dass

$$C = r \cdot I \quad \text{für ein } r \in R \quad (4)$$

gilt. Im Fall  $R = K$  haben wir für unseren Beweis von (4) die Kommutativität von  $K$  nicht genutzt; für den allgemeinen Fall können wir deshalb unseren zweischritten Beweis unverändert übernehmen.

In einem dritten Schritt muss nun noch gezeigt werden, dass bereits  $r \in Z(R)$  gilt. Dies ergibt sich daraus, dass für alle  $s \in R$  die Gleichheitskette

$$(rs) \cdot I = (r \cdot I)(s \cdot I) = C(s \cdot I) = (s \cdot I)C = (s \cdot I)(r \cdot I) = (sr) \cdot I$$

gilt, und somit durch Vergleich der Diagonaleinträge bereits  $rs = sr$  für alle  $s \in R$ .

## (c)

Wir zeigen, dass

$$Z(R[t]) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in R[t] \mid a_i \in Z(R) \text{ für alle } i \right\} = Z(R)[t]$$

gilt. Die zweite Gleichheit gilt, da es sich hierbei um die Definition von  $Z(R)[t]$  handelt.

Ist  $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in Z(R)[t]$ , so gilt  $a_i b = b a_i$  für alle  $b \in R$  und  $i \geq 0$ . Für jedes  $q = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \in R[t]$  gilt deshalb

$$pq = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j t^{i+j} = \sum_{j,i=0}^{\infty} b_j a_i t^{j+i} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right) = qp.$$

Also gilt  $p \in Z(R[t])$ .

Andererseits sei  $p \in Z(R[t])$ . Dann gilt  $pq = qp$  für jedes  $q \in R[t]$ . Für alle  $b \in R$  gilt dann

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i b) t^i = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right) (b t^0) = (b t^0) \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (b a_i) t^i.$$

Für jedes  $i \geq 0$  gilt also  $b a_i = a_i b$  für alle  $b \in R$  (denn zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten gleich sind). Dies bedeutet gerade, dass  $a_i \in Z(R)$  für alle  $i \geq 0$  gilt.

## Aufgabe 2

Es sei  $d \in \mathbb{N}$ . Wir geben zwei mögliche Beweise für die zu zeigenden Aussagen.

### (a) Beweis durch Zauberei

Vollständigkeitshalber geben wir die im Tutorium genutzte Argumentation noch einmal.

**Erinnerung 5.** Es seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen. Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  ist genau dann injektiv, wenn sie ein Linksinverses besitzt, d.h. wenn es eine Funktion  $g: B \rightarrow A$  mit  $g \circ f = \text{id}_A$  gibt. Analog ist  $f$  genau dann surjektiv, wenn  $f$  ein Rechtsinverses besitzt, d.h. wenn es eine Funktion  $g: B \rightarrow A$  mit  $f \circ g = \text{id}_B$  gibt.

**Bemerkung 6.** Dass jede Surjektion  $f: A \rightarrow B$  ein Rechtsinverses besitzt, ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Für lineare Injektionen, bzw. Surjektionen lassen sich ein entsprechendes Links- bzw. Rechtsinverses ebenfalls linear wählen.

**Lemma 7.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  linear.

1.  $f$  ist genau dann injektiv, wenn  $f$  ein lineares Linksinverses besitzt, d.h. wenn es eine lineare Abbildung  $g: W \rightarrow V$  mit  $g \circ f = \text{id}_V$  gibt.
2.  $f$  ist genau dann surjektiv, wenn  $f$  ein lineares Rechtsinverses besitzt, d.h. wenn es eine lineare Abbildung  $g: W \rightarrow V$  mit  $f \circ g = \text{id}_W$  gibt.

**Warnung 8.** Ist  $f: V \rightarrow W$  linear und injektiv (bzw. surjektiv) und ist  $g: W \rightarrow V$  ein Linksinverses (bzw. Rechtsinverses) zu  $f$ , so muss  $g$  im Allgemeinen nicht linear sein. Lemma 7 sagt, dass es ein lineares Linksinverses (bzw. Rechtsinverses) gibt, nicht aber, dass bereits jedes Linksinverse (bzw. Rechtsinverse) schon linear ist.

**Proposition 9.** Es seien  $U, V$  und  $W$  drei  $K$ -Vektorräume, und es sei  $d \in \mathbb{N}$ .

1. Für alle linearen Abbildungen  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow W$  gilt

$$\bigwedge^d (f \circ g) = \bigwedge^d f \circ \bigwedge^d g.$$

2. Es gilt  $\bigwedge^d \text{id}_V = \text{id}_{\bigwedge^d V}$ .

Wir haben im Tutorium bereits einen Beweis hierfür gegeben; wir geben den gleichen Beweis hier noch einmal an, allerdings in einer diagrammatischen Form.

*Beweis.* 1. Die beiden Abbildungen  $\bigwedge^d f$  und  $\bigwedge^d g$  sind die eindeutigen lineare Abbildung  $\bigwedge^d U \rightarrow \bigwedge^d V$ , bzw.  $\bigwedge^d V \rightarrow \bigwedge^d W$ , so dass die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U^d & \xrightarrow{f^{*d}} & V^d \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \wedge \\ \bigwedge^d U & \xrightarrow{\bigwedge^d f} & \bigwedge^d V \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} V^d & \xrightarrow{g^{*d}} & W^d \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \wedge \\ \bigwedge^d V & \xrightarrow{\bigwedge^d g} & \bigwedge^d W \end{array}$$

kommutieren, wobei  $\wedge$  die jeweils kanonischen Abbildungen bezeichnet. Durch Zusammenfügen dieser beiden kommutativen Diagramme ergibt sich das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} U^d & \xrightarrow{f^{*d}} & V^d & \xrightarrow{g^{*d}} & W^d \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \wedge & & \downarrow \wedge \\ \bigwedge^d U & \xrightarrow{\bigwedge^d f} & \bigwedge^d V & \xrightarrow{\bigwedge^d g} & \bigwedge^d W \end{array}$$

Durch Entfernen des mittleren vertikalen Pfeils und die Gleichheit  $g^{*d} \circ f^{*d} = (g \circ f)^{*d}$  erhalten wir hieraus das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U^d & \xrightarrow{(g \circ f)^{*d}} & W^d \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \wedge \\ \bigwedge^d U & \xrightarrow{\bigwedge^d g \circ \bigwedge^d f} & \bigwedge^d W \end{array}$$

Dabei ist  $\bigwedge^d g \circ \bigwedge^d f$  als Komposition zweier linearer Abbildungen ebenfalls linear. Nun ist aber  $\bigwedge^d (g \circ f)$  die eindeutige lineare Abbildung  $\bigwedge^d U \rightarrow \bigwedge^d W$  die dieses Diagramm zum kommutieren bringt. Folglich müssen beide Abbildungen übereinstimmen, d.h. es gilt  $\bigwedge^d g \circ \bigwedge^d f = \bigwedge^d (g \circ f)$ .

2. Die Abbildung  $\bigwedge^d \text{id}_V$  ist die eindeutige lineare Abbildung  $\bigwedge^d V \rightarrow \bigwedge^d V$  die das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} V^d & \xrightarrow{\text{id}_V^{*d}} & V^d \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \wedge \\ \bigwedge^d V & \xrightarrow{\bigwedge^d \text{id}_V} & \bigwedge^d V \end{array}$$



Dabei gilt  $\text{id}_V^{\times d} = \text{id}_{V^d}$ , weshalb auch die lineare Abbildung  $\text{id}_{\bigwedge^d V}$  das Diagramm zum kommutieren bringt. Es folgt, dass beide Abbildungen bereits übereinstimmen, dass also  $\bigwedge^d \text{id}_V = \text{id}_{\bigwedge^d V}$  gilt.  $\square$

Ist nun  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Ist  $f$  injektiv, so gibt es nach Lemma 7 eine lineare Abbildung  $g : W \rightarrow V$  mit  $g \circ f = \text{id}_V$ ; dann gilt nach Proposition 9 auch  $\bigwedge^d g \circ \bigwedge^d f = \text{id}_{\bigwedge^d V}$  und somit nach Proposition 9, dass  $\bigwedge^d f$  injektiv ist. Ist  $f$  surjektiv, so ergibt sich durch analoge Argumentation mithilfe eines Rechtsinversen von  $f$ , dass auch  $\bigwedge^d f$  surjektiv ist.

## (b) Beweis mit Elementen

### Surjektivität

Es sei  $f : V \rightarrow W$  eine surjektive lineare Abbildung. Für alle  $w_1, \dots, w_d \in W$  gibt es dann  $v_1, \dots, v_d \in V$  mit  $f(v_i) = w_i$  für alle  $i = 1, \dots, d$ , weshalb

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_d = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_d) = \left( \bigwedge^d f \right) (v_1, \dots, v_d) \in \text{im } \bigwedge^d f$$

gilt. Da  $\bigwedge^d W$  von den Elementen  $w_1 \wedge \dots \wedge w_d$  mit  $w_1, \dots, w_d \in W$  erzeugt wird, folgt hieraus, dass bereits  $\text{im } \bigwedge^d f = \bigwedge^d W$  gilt. Also ist auch  $\bigwedge^d f$  surjektiv.

### Injektivität

**Proposition 10.** Es sei  $V$  ein Vektorraum und  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , wobei  $(I, \leq)$  eine linear geordnete Menge ist. Dann bilden die Elemente

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d} \quad \text{mit} \quad i_1, \dots, i_d \in I, i_1 < \dots < i_d$$

eine Basis von  $\bigwedge^d V$ .

**Bemerkung 11.** Mithilfe des Auswahlaxioms lässt sich zeigen, dass es auf jeder Menge  $I$  eine lineare Ordnung  $\leq$  gibt. Tatsächlich besagt der zum Auswahlaxiom äquivalente *Wohlordnungssatz*, dass es auf jeder Menge  $I$  eine Wohlordnung gibt, d.h. eine lineare Ordnung, bezüglich dessen jede nicht-leere Teilmenge  $J \subseteq I$  ein minimales Element besitzt.

Wir erinnern auch noch an die folgende Aussage aus der Linearen Algebra I:

**Lemma 12.** Es sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Ist  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , so dass die Familie  $(f(v_i))_{i \in I}$  ebenfalls linear unabhängig ist, so ist  $f$  injektiv.

*Beweis.* Ist  $v \in \ker f$  mit  $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ , so folgt durch Anwenden von  $f$ , dass

$$0 = f(v) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(v_i)$$

gilt. Aus der linearen Unabhängigkeit der Familie  $(f(v_i))_{i \in I}$  folgt damit, dass  $\lambda_i = 0$  für alle  $i \in I$ , und somit bereits  $v = 0$ . Das zeigt, dass  $\ker f = 0$  gilt.  $\square$

Es sei  $f : V \rightarrow W$  eine injektive lineare Abbildung. Es sei  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ . Wegen der Injektivität von  $f$  ist auch die Familie  $(f(v_i))_{i \in I}$  linear unabhängig; diese Familie lässt sich deshalb zu einer Basis  $(w_j)_{j \in J}$  von  $W$  mit  $I \subseteq J$  und  $w_i = f(v_i)$  für alle  $i \in I$  ergänzen. Es sei  $\leq$  eine lineare Ordnung auf  $J$ . Dann erhalten wir eine Basis von  $\bigwedge^d V$  durch

$$\mathcal{B} = (v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} \mid i_1, \dots, i_d \in I, i_1 < \cdots < i_d)$$

und eine Basis von  $\bigwedge^d W$  durch

$$\mathcal{C} = (w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_d} \mid j_1, \dots, j_d \in J, j_1 < \cdots < j_d).$$

Für alle  $i_1, \dots, i_d \in I$  gilt dabei, dass

$$\left( \bigwedge^d f \right) (v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}) = f(v_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f(v_{i_d}) = w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_d}.$$

Also bildet  $\bigwedge^d f$  die Basis  $\mathcal{B}$  von  $\bigwedge^d V$  injektiv auf eine Teilfamilie der Basis  $\mathcal{C}$  von  $\bigwedge^d W$  ab, die wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\mathcal{C}$  ebenfalls linear unabhängig ist. Somit ist  $\bigwedge^d f$  nach Lemma 12 injektiv.

## Aufgabe 4

### (a)

Der Vollständigkeit halber geben wir die Konstruktion hier noch einmal an, wobei wir im Folgenden  $r, s \in \mathbb{N}$  fixieren.

#### Eindeutigkeit

**Lemma 13.** Es seien  $V_1, \dots, V_n, W$  Vektorräume, und für jedes  $i = 1, \dots, n$  sei  $E_i \subseteq V_i$  ein Erzeugendensystem von  $V_i$ . Sind  $f, g : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow W$  zwei multilineare Abbildungen mit

$$f(e_1, \dots, e_n) = g(e_1, \dots, e_n) \quad \text{für alle } e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n,$$

so gilt bereits  $f = g$ .

*Beweis.* Es seien  $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ . Für jedes  $i = 1, \dots, n$  lässt sich  $v_i$  als  $v_i = \sum_{e_i \in E_i} \lambda_{e_i}^{(i)} e_i$  darstellen. Wegen der Multilinearität von  $f$  und  $g$  folgt damit, dass

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= f \left( \sum_{e_1 \in E_1} \lambda_{e_1}^{(1)} e_1, \dots, \sum_{e_n \in E_n} \lambda_{e_n}^{(n)} e_n \right) = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ e_i \in E_i}} \lambda_{e_1}^{(1)} \cdots \lambda_{e_n}^{(n)} f(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ e_i \in E_i}} \lambda_{e_1}^{(1)} \cdots \lambda_{e_n}^{(n)} g(e_1, \dots, e_n) = \cdots = g(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

gilt. Somit gilt bereits  $f = g$ .  $\square$

Aus Lemma 13 ergibt sich direkt die Eindeutigkeit von  $\wedge$ , denn  $\bigwedge^r V$  wird von den Elementen  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$  mit  $v_i \in V$  erzeugt, und  $\bigwedge^s V$  von den Elementen  $w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$  mit  $w_j \in V$ .

### Existenz

Wir konstruieren die gewünschte Abbildung schrittweise.

1. Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$m_1 : V^r \times V^s \rightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad ((v_1, \dots, v_r), (w_1, \dots, w_s)) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s.$$

2. Für jedes  $x = (v_1, \dots, v_r) \in V^r$  sei

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_x &= m_1(x, -) : V^s \rightarrow \bigwedge^{r+s} V, \\ (w_1, \dots, w_s) &\mapsto m_1(x, (w_1, \dots, w_s)) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s. \end{aligned}$$

(Der Buchstabe  $\lambda$  steht hier für „Linksmultiplikation“.) Der Ausdruck  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$  ist in jeder seiner Komponenten multilinear, sowie insgesamt alternierend; die Abbildung  $\tilde{\lambda}_x$  ist deshalb multilinear und alternierend. Für jedes  $x \in V^r$  erhalten wir nach der universellen Eigenschaft der äußeren Potent, dass  $\tilde{\lambda}_x$  eine (eindeutige) lineare Abbildung  $\lambda_x : \bigwedge^s V \rightarrow \bigwedge^{r+s} V$  induziert, so dass

$$\lambda_x(w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = \tilde{\lambda}_x(w_1, \dots, w_s) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s \quad \text{für alle } w_1, \dots, w_s \in V$$

gilt. Ein allgemeines Element  $y \in \bigwedge^s V$  ist von der Form  $y = \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$ , und wegen der Linearität von  $\lambda_x$  gilt dann

$$\lambda_x(y) = \lambda_x \left( \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \right) = \sum_j b_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}.$$

Durch Zusammenfügen der Funktionen  $\lambda_x, x \in V^r$  erhalten wir eine wohldefinierte Funktion

$$m_2 : V^r \times \bigwedge^s V \rightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad (x, y) \mapsto \lambda_x(y).$$

Für  $x = (v_1, \dots, v_r)$  und  $y = \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$  gilt dabei

$$m_2 \left( (v_1, \dots, v_r), \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \right) = \sum_j b_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}.$$

3. Für jedes  $y \in \bigwedge^s V$  betrachten wir nun die Abbildung

$$\tilde{\rho}_y = m_2(-, y) : V^r \rightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad x \mapsto m_2(x, y).$$

(Der Buchstabe  $\rho$  steht hier für „Rechtsmultiplikation“.) Gilt  $y = \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$ , so gilt

$$\tilde{\rho}_y(v_1, \dots, v_r) = \sum_j b_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \quad \text{für alle } v_1, \dots, v_r \in V.$$

Für jedes  $j$  ist dabei der Ausdruck  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$  multilinear und alternierend in den Einträgen  $v_1, \dots, v_r$ ; dementsprechend ist auch  $\tilde{\rho}_y$  multilinear und alternierend. Nach der universellen Eigenschaft der äußeren Potenz erhalten wir für jedes  $y \in \bigwedge^s V$  eine (eindeutige) induzierte lineare Abbildung  $\rho_y : \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^{r+s} V$  mit

$$\rho_y(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_j b_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \quad \text{für alle } v_1, \dots, v_r \in V.$$

Für ein beliebiges Element  $x \in \bigwedge^r V$  von der Form  $x = \sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}$  gilt dabei wegen der Linearität von  $\rho_y$ , dass

$$\begin{aligned} \rho_y(x) &= \rho_y\left(\sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}\right) = \sum_i a_i \left(\sum_j b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}. \end{aligned}$$

Durch Zusammenfügen der Funktionen  $\rho_y$ ,  $y \in \bigwedge^s V$  erhalten wir eine wohldefinierte Funktion

$$m_3 : \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \rightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad (x, y) \mapsto \rho_y(x).$$

Mit  $x = \sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}$  und  $y = \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$  ist  $m_3(x, y)$  durch

$$m_3\left(\sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}, \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) = \sum_{i,j} a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$$

gegeben.

Es sei nun  $\wedge = m_3$ . Für alle  $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$  gilt nun, dass

$$\wedge(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\wedge$  bilinear ist. Wir zeigen die Linearität im ersten Argument, die Linearität im zweiten Argument ergibt sich dann analog:

Es seien  $x, y \in \bigwedge^r V$ ,  $z \in \bigwedge^s V$  und  $\lambda \in K$ . Mit den Darstellungen  $x = \sum_{i=1}^n a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}$ ,  $y = \sum_{i=n+1}^m a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}$  und  $z = \sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$  erhalten wir zum einen, dass

$$\begin{aligned}
& (x + y) \wedge z \\
&= \left( \sum_{i=1}^n a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} + \sum_{i=n+1}^m a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \right) \\
&= \left( \sum_{i=1}^m a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} + \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=1}^l a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \\
&= \cdots = (x \wedge z) + (y \wedge z),
\end{aligned}$$

und zum anderen, dass

$$\begin{aligned}
(\lambda x) \wedge z &= \left( \lambda \sum_{i=1}^m a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \right) \\
&= \left( \sum_{i=1}^m \lambda a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \lambda a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \\
&= \lambda \left( \left( \sum_{i=1}^m a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \right) \right) = \lambda(x \wedge z).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Bilinearität von  $\wedge$  im ersten Argument.

**Bemerkung 14.** Aus der von uns gewählten Konstruktion von  $\wedge$  geht tatsächlich schon hervor, dass  $\wedge$  im ersten Argument linear ist: Dies bedeutet nämlich gerade, dass für fixiertes  $y \in \bigwedge^s V$  die Abbildung

$$(-) \wedge y : \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad x \mapsto x \wedge y$$

linear ist. Bei dieser Abbildung handelt es sich aber genau um die lineare Abbildung  $\rho_y$ .

Die Linearität im zweiten Argument erhalten wir leider nicht direkt aus unserer Konstruktion. Neben dem direkten Nachrechnen gibt es aber auch hier einen geschickten Ausweg:

Wir haben in unserer Konstruktion im ersten Schritt das erste Argument von  $m_1$  fixiert, und im zweiten Schritt das zweite Argument von  $m_2$ . Stattdessen hätte man auch umgekehrt vorgehen können:

Indem man in einem abgeänderten ersten Schritt das zweite Argument von  $m_1$  fixiert, erhält man mithilfe der universellen Eigenschaft der äußeren Potenz eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2 : \bigwedge^r V \times V^s &\rightarrow \bigwedge^{r+s} V \\ \left( \sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}, (w_1, \dots, w_s) \right) &\mapsto \sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s. \end{aligned}$$

Durch anschließendes Fixieren des ersten Arguments von  $\tilde{m}_2$  erhält man mithilfe der universellen Eigenschaft der äußeren Potenz dann ebenfalls die Funktion  $m_3$ .

Während wir bei der von uns gewählten Reihenfolge die Linearität im ersten Argument geschenkt bekommen, erhält man bei dieser umgekehrten Reihenfolge die Linearität im zweiten Argument. Aus beiden möglichen Reihenfolgen erhält man deshalb zusammen, dass  $\wedge$  in beiden Argumenten linear ist.

**Bemerkung 15.** Für  $r = 0$  ist  $\bigwedge^r V = \bigwedge^0 V = K$ . Das Element  $1 \in K$  entspricht dabei dem „leeren Dachprodukt“  $1 = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_0$  mit  $v_1, v_2, \dots, v_0 \in V$ . Für alle  $w_1, \dots, w_s \in V$  gilt deshalb, dass

$$1 \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = \underbrace{(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_0)}_{0 \text{ Faktoren}} \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = w_1 \wedge \cdots \wedge w_s.$$

Da die Abbildung  $1 \wedge (-) : \bigwedge^s V \rightarrow \bigwedge^s V$  linear ist, und die Elemente  $w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$  ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^s V$  bilden, ergibt sich daraus, dass allgemeiner  $1 \wedge y = y$  für alle  $y \in \bigwedge^s V$  gilt. Analog ergibt sich im Fall  $s = 0$ , dass  $x \wedge 1 = x$  für alle  $x \in \bigwedge^r V$  gilt.

Wegen der Bilinearität von  $\wedge$  ergibt sich im Fall  $r = 0$  allgemeiner, dass  $\lambda \wedge y = \lambda(1 \wedge y) = \lambda y$  für alle  $\lambda \in K$  und  $y \in \bigwedge^s V$  gilt. Analog ergibt sich im Fall  $s = 0$ , dass  $x \wedge \lambda = \lambda x$  für alle  $\lambda \in K$  und  $x \in \bigwedge^r V$  gilt.

Insbesondere ergibt sich im Fall  $r = s = 0$ , dass  $\lambda \wedge \mu = \lambda \mu$  für alle  $\lambda, \mu \in K$  gilt.

**Bemerkung.**

**(b)**

Wir wissen bereits, dass  $\bigwedge V = \bigoplus_{d=0}^n \bigwedge^d V$  ein  $K$ -Vektorraum bezüglich der komponentenweisen Addition

$$(x_0, \dots, x_n) + (y_0, \dots, y_n) = (x_0 + y_0, \dots, x_n + y_n) \quad \text{für alle } (x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n) \in \bigwedge V$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \quad \text{für alle } \lambda \in K, (x_0, \dots, x_n) \in \bigwedge V$$

einen  $K$ -Vektorraum bildet. Für alle  $(x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n) \in \bigwedge V$  definieren wir nun

$$(x_0, \dots, x_n) \wedge (y_0, \dots, y_n) = (z_0, \dots, z_n) \quad \text{mit} \quad z_r = \sum_{s=0}^r (x_s \wedge y_{r-s}) = \sum_{s+t=r} (x_s \wedge y_t).$$

Diese Verknüpfung ist wohldefiniert, denn für  $x_s \in \bigwedge^s V$  und  $y_t \in \bigwedge^t V$  gilt  $x_s \wedge y_t \in \bigwedge^{s+t} V$ .

**Bemerkung 16.** Stellt man sich die Elemente  $(x_0, \dots, x_n)$  und  $(y_0, \dots, y_n)$  als formale Summen  $\sum_{s=0}^n x_s$  und  $\sum_{t=0}^n y_t$  vor, so ist die Verknüpfung  $\wedge$  gerade als

$$\left( \sum_{s=0}^n x_s \right) \wedge \left( \sum_{t=0}^n y_t \right) = \sum_{s,t=0}^n (x_s \wedge y_t)$$

definiert. Gilt dabei  $s+t > n$ , so ist  $x_s \wedge y_t \in \bigwedge^{s+t} V = 0$ . Deshalb treten tatsächlich nur die Summanden auf, für die  $s+t \leq n$  gilt, weshalb die Summe  $\sum_{s,t=0}^n (x_s \wedge y_t)$  in  $\bigoplus_{d=0}^n \bigwedge^d V = \bigwedge V$  lebt.

Wir zeigen, dass der Vektorraum  $\bigwedge V$  zusammen mit  $\wedge$  zu einer  $K$ -Algebra wird:

- Wir spalten den Nachweis der Assoziativität in drei Schritte auf:

1. Für alle  $r, s, t \in \mathbb{N}$  und  $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t \in V$  gilt

$$\begin{aligned} & ((u_1 \wedge \dots \wedge u_r) \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_s)) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_t) \\ &= (u_1 \wedge \dots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_s) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_t) \\ &= u_1 \wedge \dots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_s \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_t \\ &= \dots = (u_1 \wedge \dots \wedge u_r) \wedge ((v_1 \wedge \dots \wedge v_s) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_t)). \end{aligned}$$

2. Für alle  $r, s, t \in \mathbb{N}$  und  $x \in \bigwedge^r V, y \in \bigwedge^s V$  und  $z \in \bigwedge^t V$  folgt, dass  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  gilt: Es seien  $x = \sum_i a_i u^{(i)}$ ,  $y = \sum_j b_j v^{(j)}$  und  $z = \sum_k c_k w^{(k)}$ , wobei wir die abkürzende Notation  $u^{(i)} = u_1^{(i)} \wedge \dots \wedge u_r^{(i)}$ ,  $v^{(j)} = v_1^{(j)} \wedge \dots \wedge v_s^{(j)}$  und  $w^{(k)} = w_1^{(k)} \wedge \dots \wedge w_t^{(k)}$  verwenden. Wir haben bereits gezeigt, dass  $u^{(i)} \wedge (v^{(j)} \wedge w^{(k)}) = (u^{(i)} \wedge v^{(j)}) \wedge w^{(k)}$  für alle  $i, j, k$ ; es muss also nicht zwischen den Klammerungen unterschieden werden. Daraus folgt dann mit der Bilinearität von  $\wedge$ , dass

$$\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) &= \left( \sum_i a_i u^{(i)} \right) \wedge \left( \left( \sum_j b_j v^{(j)} \right) \wedge \left( \sum_k c_k w^{(k)} \right) \right) \\ &= \left( \sum_i a_i u^{(i)} \right) \wedge \left( \sum_{j,k} b_j c_k v^{(j)} w^{(k)} \right) = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k u^{(i)} \wedge v^{(j)} \wedge w^{(k)} \\ &= \dots = (x \wedge y) \wedge z. \end{aligned}$$

**Bemerkung 17.** Man kann auch argumentieren, dass die beiden Abbildungen

$$\alpha_1, \alpha_2 : \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \times \bigwedge^t V \rightarrow \bigwedge^{r+s+t} V$$

mit  $\alpha_1 : (x, y, z) \mapsto x \wedge (y \wedge z)$  und  $\alpha_2 : (x, y, z) \mapsto (x \wedge y) \wedge z$  wegen der Bilinearität von  $\wedge$  beide trilinear sind, und dann direkt die Gleichheit der beiden Abbildungen mithilfe Lemma 13 aus dem ersten Schritt folgern. (Die obige Rechnung ist natürlich nur ein Spezialfall des Beweises von Lemma 13.)

3. Für beliebige Elemente  $x, y, z \in \bigwedge V$  mit Einträgen  $x = (x_0, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_0, \dots, y_n)$  und  $z = (z_0, \dots, z_n)$  ergibt sich nun mit der Bilinearität von  $\wedge$ , dass

$$\begin{aligned} (x \wedge (y \wedge z))_p &= \sum_{r+q=p} x_r \wedge (y \wedge z)_q = \sum_{r+q=p} x_r \wedge \left( \sum_{s+t=q} y_s \wedge z_t \right) = \sum_{\substack{r+q=p \\ s+t=q}} x_r \wedge y_s \wedge z_t \\ &= \sum_{r+s+t=p} x_s \wedge y_s \wedge z_t = \dots = ((x \wedge y) \wedge z)_p. \end{aligned}$$

für alle  $p = 0, \dots, n$  gilt, und somit  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ .

Das zeigt die Assoziativität.

- Für alle  $\lambda \in K$  und  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \bigwedge V$  gilt

$$(\lambda, 0, \dots, 0) \wedge x = (\lambda, 0, \dots, 0) \wedge (x_0, \dots, x_n) = (\lambda \wedge x_0, \dots, \lambda \wedge x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda x \quad (5)$$

sowie analog auch  $x \wedge (\lambda, 0, \dots, 0) = \lambda x$ . (Hier nutzen wir Bemerkung 15.) Insbesondere ist  $(1, 0, \dots, 0)$  deshalb ein Einselement bezüglich der Multiplikation.

- Für alle  $x, y, z \in \bigwedge V$  mit  $x = (x_0, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_0, \dots, y_n)$  und  $z = (z_0, \dots, z_n)$  ergibt sich aus der Bilinearität von  $\wedge$ , dass

$$\begin{aligned} ((x + y) \wedge z)_p &= \sum_{r+s=p} (x + y)_r \wedge z_s = \sum_{r+s=p} (x_r + y_r) \wedge z_s = \sum_{r+s=p} ((x_r \wedge z_s) + (y_r \wedge z_s)) \\ &= \left( \sum_{r+s=p} x_r \wedge z_s \right) + \left( \sum_{r+s=p} y_r \wedge z_s \right) = (x \wedge z)_p + (y \wedge z)_p = ((x \wedge z) + (y \wedge z))_p \end{aligned}$$

für alle  $p = 1, \dots, n$  gilt. Somit gilt bereits  $(x + y) \wedge z = (x \wedge z) + (y \wedge z)$ , was die Distributivität im ersten Argument zeigt. Die Distributivität im zweiten Argument ergibt sich analog.

Das zeigt, dass  $\bigwedge V$  Ring ist, und es bleibt zu zeigen, dass  $\bigwedge V$  durch  $\varphi : K \rightarrow \bigwedge V$ ,  $\lambda \mapsto (\lambda, 0, \dots, 0)$  zu einer  $K$ -Algebra wird.

- Die Abbildung ist ein Ringhomomorphismus, denn für alle  $\lambda, \mu \in K$  gilt

$$\varphi(\lambda) + \varphi(\mu) = (\lambda, 0, \dots, 0) + (\mu, 0, \dots, 0) = (\lambda + \mu, 0, \dots, 0) = \varphi(\lambda + \mu)$$

und

$$\varphi(\lambda) \wedge \varphi(\mu) = (\lambda, 0, \dots, 0) \wedge (\mu, 0, \dots, 0) = (\lambda \wedge \mu, 0, \dots, 0) = (\lambda \mu, 0, \dots, 0) = \varphi(\lambda \mu),$$

sowie  $\varphi(1_K) = (1, 0, \dots, 0) = 1_{\bigwedge V}$ .



- Aus (5) erhalten wir, dass

$$\varphi(\lambda) \wedge x = (\lambda, 0, \dots, 0) \wedge (x_0, \dots, x_n) = \lambda x = (x_0, \dots, x_n) \wedge (\lambda, 0, \dots, 0) = x \wedge \varphi(\lambda)$$

für alle  $\lambda \in K$  und  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \bigwedge V$  gilt.

Das zeigt, dass  $\bigwedge V$  durch  $\varphi$  zu einer  $K$ -Algebra wird.

## Anhang A Gegenbeispiele

Es sei  $d \in \mathbb{N}$  und  $V$  und  $W$  seien  $K$ -Vektorräume.

### (a) Zerlegbarkeit von Elementen

Nicht jedes Element  $x \in \bigwedge^d V$  ist notwendigerweise von der Form  $x = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$  für passende  $v_1, \dots, v_d \in V$ . Man betrachte etwa das Element  $\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ . Für  $\alpha \wedge \alpha \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^4$  gilt

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \alpha &= (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \wedge (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \\ &= \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 \wedge e_2}_{=0} + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \underbrace{e_3 \wedge e_4 \wedge e_1 \wedge e_2}_{=e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4} + \underbrace{e_3 \wedge e_4 \wedge e_3 \wedge e_4}_{=0} \\ &= 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0, \end{aligned}$$

da  $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$  eine Basis von  $\bigwedge^4 \mathbb{R}^4$  ist, und somit insbesondere  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$  gilt. Wäre aber  $\alpha = v_1 \wedge v_2$  für passende  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ , so würde

$$\alpha \wedge \alpha = v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 \wedge v_2 = 0$$

gelten.

### (b) Kerne auf einfachen Elementen nachrechnen

Ist  $f: \bigwedge^d V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so dass

$$f(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = 0 \implies v_1 \wedge \dots \wedge v_d = 0 \quad \text{für alle } v_1, \dots, v_d \in V \quad (6)$$

gilt, so muss  $f$  nicht notwendigerweise injektiv sein. Man betrachte etwa für das Element  $\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  die kanonische Projektion

$$f: \bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \rightarrow \left( \bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \right) / \langle \alpha \rangle, \quad x \mapsto \bar{x}.$$

Es seien  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$  mit  $v_1 \wedge v_2 \in \ker f = \langle \alpha \rangle$ . Im Fall  $v_1 \wedge v_2 \neq 0$  wäre  $\{v_1 \wedge v_2\}$  bereits eine Basis des eindimensionalen Untervektorraums  $\langle \alpha \rangle \subseteq \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ . Dann gebe es  $\lambda \in K$  mit  $\alpha = \lambda v_1 \wedge v_2 = (\lambda v_1) \wedge v_2$ . Wir wissen aber bereits, dass sich  $\alpha$  nicht so darstellen lässt. Also muss  $v_1 \wedge v_2 = 0$  gelten, und somit  $f$  die Bedingung (6) erfüllen. Da aber  $0 \neq \alpha \in \ker f$  gilt, ist  $f$  nicht injektiv.

### (c) Injektivität auf einfachen Elementen nachrechnen

Ist  $f: \bigwedge^d V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so dass

$$f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = f(w_1 \wedge w_d) \implies v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = w_1 \wedge w_d \quad (7)$$

für alle  $v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_d \in V$  gilt, so muss  $f$  nicht notwendigerweise injektiv sein.

Unser vorheriges Gegenbeispiel lässt sich nicht direkt anwenden, da in diesem die beiden Elemente  $e_1 \wedge e_2$  und  $-e_3 \wedge e_4 = e_4 \wedge e_3$  miteinander identifiziert werden. Wir werden aber ein Gegenbeispiel nach dem gleichen Prinzip konstruieren, d.h. wir finden einen passenden Vektorraum  $V$  und ein Element  $\alpha \in \bigwedge^2 V$  mit  $\alpha \neq 0$ , so dass die kanonische Projektion

$$f: \bigwedge^2 V \rightarrow \left( \bigwedge^2 V \right) / \langle \alpha \rangle, \quad x \mapsto \bar{x}$$

die Bedingung (7) erfüllt.

Hierfür bemerke man, dass für alle  $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$  die Bedingung  $f(v_1 \wedge v_2) = f(w_1 \wedge w_2)$  äquivalent dazu ist, dass  $v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2 \in \ker f = \langle \alpha \rangle$  gilt. Wäre dies für  $v_1 \wedge v_2 \neq w_1 \wedge w_2$  eintreten, so wäre  $\{v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2\}$  eine Basis des eindimensionalen Untervektorraums  $\langle \alpha \rangle \subseteq \bigwedge^2 V$ . Dann gebe es  $\lambda \in K$  mit  $\alpha = \lambda(v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2) = (\lambda v_1) \wedge v_2 + (-\lambda w_1) \wedge w_2$ .

Es genügt deshalb, ein Element  $\alpha \in \bigwedge^2 V$  für einen passenden Vektorraum  $V$  zu finden, so dass  $\alpha \neq v_1 \wedge v_2 + w_1 \wedge w_2$  für alle  $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$  gilt; wenn man also  $\alpha$  als  $\alpha = \sum_i v_1^{(i)} \wedge v_2^{(i)}$  darstellt, werden mindestens 3 Summanden benötigt.

Um ein solches Element zu finden, bemerke man, dass für jeden Vektorraum  $V$  und alle  $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$  für das Element  $\beta = v_1 \wedge v_2 + w_1 \wedge w_2 \in \bigwedge^2 V$  gilt, dass

$$\beta \wedge \beta = (v_1 \wedge v_2 + w_1 \wedge w_2) \wedge (v_1 \wedge v_2 + w_1 \wedge w_2) = \cdots = 2v_1 \wedge v_2 \wedge w_1 \wedge w_2,$$

und somit

$$(\beta \wedge \beta) \wedge (\beta \wedge \beta) = 4v_1 \wedge v_2 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge w_1 \wedge w_2 = 0.$$

Es genügt also, für einen passenden Vektorraum  $V$  ein Element  $\alpha \in \bigwedge^2 V$  zu finden, so dass  $(\alpha \wedge \alpha) \wedge (\alpha \wedge \alpha) \neq 0$  gilt. Ein solches Element ist durch  $\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6 + e_7 \wedge e_8 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^8$  gegeben: Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \alpha = \cdots = & 2(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_7 \wedge e_8 \\ & + e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 + e_3 \wedge e_4 \wedge e_7 \wedge e_8 + e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8), \end{aligned}$$

und somit

$$(\alpha \wedge \alpha) \wedge (\alpha \wedge \alpha) = \cdots = 48e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8 \neq 0.$$

### (d) Gleichheit von einfachen Elementen

Sind  $v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_d \in V$  mit  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = w_1 \wedge \cdots \wedge w_d$ , so folgt noch nicht notwendigerweise, dass die bereits die beiden Tupel  $(v_1, \dots, v_d)$  und  $(w_1, \dots, w_d)$  bis auf Permutation gleich sind; d.h. es muss nicht notwendigerweise eine Permutation  $\sigma \in S_d$  geben, so dass  $w_i = v_{\sigma(i)}$  für alle  $i = 1, \dots, d$  gilt. So gilt etwa für  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ , dass  $e_1 \wedge e_1 = 0 = e_2 \wedge e_2$ .