# Minimalpolynom und Jordan-Normalform

Jendrik Stelzner

26. Juli 2017

Wir fixieren einen Körper $K$. Wir zeigen im Folgenden die folgende Aussage:

**Satz 1.** Es sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass $A$ über $K$ eine Jordan-Normalform besitzt, d.h. das charakteristische Polynom von $A$ zerfalle über $K$ in Linearfaktoren:

$$p_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t\lambda_r)^{n_r}$$

Dann ist das Minimalpolynom von $A$ durch

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

gegeben, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $A$ sind, und für alle $i = 1, \dots, n$ die Potenz $m_i$ mit der Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert $\lambda_i$ in der Jordannormalform von $A$ übereinstimmt.

Insbesondere gelten $m_i \geq 1$ und $m_i \leq n_i$ für alle $i = 1, \dots, r$.

*Beweis.* Da das Minimalpolynom invariant unter Ähnlichkeit ist, können wir dabei o.B.d.A. davon ausgehen, dass $A$ in Jordan-Normalform ist. Wir gehen nun schrittweise vor.

- Es sei zunächst $A$ ein einzelner Jordanblock zum Eigenwert $0$, d.h. es gelte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

  Dann gilt $A^n = 0$ aber $A^k \neq 0$ für alle $k < n$, weshalb $m_A(t) = t^n$ gilt.

- Es sei nun $A$ ein einzelner Jordanblock zum Eigenwert $\lambda \in K$, d.h. es gelte

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Dann ist $A - \lambda I$ ein Jordanblock zum Eigenwert 0, weshalb $(A-\lambda I)^n = 0$ aber $(A-\lambda I)^k \neq 0$ für alle $k < n$ gilt. Deshalb gilt $m_A(t) = (t-\lambda)^n$.

- Es sei nun $A$ in Jordan-Normalform

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(\mu_s) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K),$$

wobei für alle $n' \geq 1$ und $\mu \in K$ die Matrix $J_{n'}(\mu) \in \mathrm{M}_{n'}(K)$ den Jordanblock von Größe $n' \times n'$ zum Eigenwerte $\mu$ bezeichnet, d.h.

$$J_{n'}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & & \\ & \mu & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n'}(\mu).$$

Aus

$$A^k = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\mu_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(\mu_s)^k \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } k \geq 0$$

erhalten wir allgemeiner, dass

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(J_{n_1}(\mu_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & p(J_{n_s}(\mu_s)) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } p(t) \in K[t]$$

gilt. Inbesondere gilt deshalb für jedes $p(t) \in K[t]$, dass

$$\begin{aligned} p(A) = 0 &\iff p(J_{n_i}(\mu_i)) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, s \\ &\iff m_{J_{n_i}(\mu_i)}(t) \mid p(t) \text{ für alle } i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Wir haben bereits gezeigt, dass $m_{J_{n'}(\mu)} = (t-\mu)^{n'}$ für alle $n' \geq 1$ und $\mu \in K$ gilt. Deshalb gilt

$$p(A) = 0 \iff (t-\mu_i)^{n_i} \mid p(t) \text{ für alle } i = 1, \dots, s. \tag{1}$$

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $A$, d.h. es gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$ und $\{\mu_1, \dots, \mu_s\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, und für alle $i = 1, \dots, r$ sei

$$m_i \coloneqq \max\{n_j \,|\, 1 \leq j \leq s \text{ mit } \mu_j = \lambda_i\},$$

d.h. $m_i$ ist die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert $\lambda_i$.

Dann ist $\tilde{m}_A(t) \coloneqq (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_r)^{m_r}$ das minimale normierte, vom Nullpolynom verschiedene Polynom mit $(t-\mu_i)^{n_i} \mid p(t)$ für alle $i = 1, \dots, s$. Nach (1) ist $\tilde{m}_A(t)$ somit das Minimalpolynom von $A$. $\square$