Lösungen und zusätzliche Bemerkungen

zu Übungsblatt 2

Jendrik Stelzner

24. Mai 2017

Aufgabe 1

(a)

Lemma 1. Es sei R ein Ring.

1. Für alle $x \in R$ gilt $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$.

2. Für alle $x, y \in R$ gilt $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.

Beweis. 1. Es gilt $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, und durch Subtraktion von $0 \cdot x$ ergibt sich, dass $0 = 0 \cdot x$. Analog ergibt sich, dass auch $x \cdot 0 = 0$ gilt.

2. Es gilt $xy + (-x)y = (x + (-x))y = 0 \cdot y = 0$, weshalb $(-x)y = -(xy)$ gilt. Analog ergibt sich, dass auch $x(-y) = -(xy)$ gilt. $\square$

Es gilt $0 \in \mathrm{Z}(R)$ da $0 \cdot y = 0 = y \cdot 0$ für alle $y \in R$ gilt. Für $x_1, x_2 \in \mathrm{Z}(R)$ gilt

$$(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y = yx_1 + yx_2 = y(x_1 + x_2) \qquad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch $x_1 + x_2 \in \mathrm{Z}(R)$. Für jedes $x \in R$ gilt

$$(-x)y = -(xy) = -(yx) = y(-x) \qquad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch $-x \in \mathrm{Z}(R)$. Insgesamt zeigt dies, dass $\mathrm{Z}(R)$ eine Untergruppe der additiven Gruppe von R ist. Es gilt $1 \in \mathrm{Z}(R)$ da $1 \cdot y = y = y \cdot 1$ für alle $y \in R$ gilt. Für alle $x_1, x_2 \in \mathrm{Z}(R)$ gilt

$$(x_1 x_2)y = x_1 x_2 y = x_1 y x_2 = y x_1 x_2 = y(x_1 x_2) \qquad \text{für alle } y \in R,$$

und somit auch $x_1, x_2 \in \mathrm{Z}(R)$. Insgesamt zeigt dies, dass $\mathrm{Z}(R)$ ein Unterring von R ist.

Zusätzlich bemerken wir noch, dass für jedes $x \in \mathrm{Z}(R)$ mit $x \in R^\times$ auch $x^{-1} \in \mathrm{Z}(R)$ gilt, denn dann gilt

$$x^{-1}y = x^{-1}yxx^{-1} = x^{-1}xyx^{-1} = yx^{-1} \qquad \text{für alle } y \in R.$$

(b)

Es sei K ein Körper. Wir zeigen, dass

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K)) = K \cdot I = \{\lambda \cdot I \mid \lambda \in K\}$$

gilt, wobei $I \in \mathrm{M}_n(K)$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Dass $K \cdot I \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K))$ gilt, ergibt sich direkt daraus, dass

$$(\lambda I)A = \lambda A = A \cdot (\lambda I) \qquad \text{für alle } \lambda \in K,\, A \in \mathrm{M}_n(K)$$

gilt. Andererseits sei $C \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K))$. Für alle $i, j = 1, \dots, n$ sei $E_{ij} \in \mathrm{M}_n(K)$ die Matrix deren (i, j)-ter Eintrag 1 ist, und deren andere Einträge alle 0 sind, d.h. es gilt

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{(i,j),(k,l)} = \delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (k,l) = (i,j), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{für alle } k, l = 1, \dots, n.$$

Wir zeigen nun in zwei Schritten, dass bereits $C = \lambda \cdot I$ für ein passendes $\lambda \in K$ gilt: Im ersten Schritt zeigen wir, dass C eine Diagonalmatrix ist, und im zweiten Schritt zeigen wir dann, dass alle Diagonaleinträge von C bereits gleich sind.

Wir geben die Rechnungen zunächst in einer kompakte, formellastigen Form an. Anschließend geben wir die gleiche Argumentation noch einmal in anschaulicheren, dafür aber etwas längeren Form an.

Kompakte Version

- Wir zeigen, dass C eine Diagonalmatrix ist: Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt $CA = AC$. In Koeffizienten bedeutet dies, dass

$$\sum_{k=0}^{n} C_{ik}A_{kj} = (CA)_{ij} = (AC)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik}C_{kj} \quad \text{für alle } A \in \mathrm{M}_n(K) \text{ und } i, j = 1, \dots n \tag{1}$$

  gilt. Indem wir die Matrix $A = E_{ii}$ betrachten, erhalten wir dabei zum einen, dass

$$\sum_{k=0}^{n} C_{ik}(E_{ii})_{kj} = \sum_{k=0}^{n} C_{ik}\delta_{ik}\delta_{ij} = \delta_{ij}C_{ii} \qquad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n$$

  gilt, und zum anderen, dass

$$\sum_{k=0}^{n} (E_{ii})_{ik}C_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}C_{kj} = C_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 0, \dots, n$$

  gilt. Für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ erhalten wir somit aus (1), dass $0 = \delta_{ij}C_{ii} = C_{ij}$ gilt. (Für $i = j$ erhalten wir nur die triviale Aussage, dass $C_{ii} = \delta_{ij}C_{ii} = C_{ij} = C_{ii}$ gilt.) Das zeigt, dass C eine Diagonalmatrix ist.

- Es seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ die Diagonaleinträge von C, d.h. es gelte $C_{ii} = \lambda_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann gilt $C_{ik} = \delta_{ik}\lambda_i$ für alle $i, k = 1, \dots, n$, bzw. äquivalent $C_{kj} = \delta_{jk}\lambda_j$ für alle $j, k = 1, \dots, n$. Die beiden Seiten von Gleichung (1) vereinfacht sich somit zu

$$\sum_{k=0}^{n} C_{ik}A_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}\lambda_i A_{kj} = \lambda_i A_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} A_{ik}C_{kj} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik}\delta_{jk}\lambda_j = \lambda_j A_{ij},$$

  und Gleichung (1) selbst vereinfacht sich somit zu

$$\lambda_i A_{ij} = \lambda_j A_{ij} \qquad \text{für alle } A \in \mathrm{M}_n(K) \text{ und } i, j = 1, \dots, n.$$

  Indem wir die Matrix $A = E_{ij}$ mit $A_{ij} = 1$ betrachten, erhalten wir somit, dass $\lambda_i = \lambda_j$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt. Also gilt $\lambda_1 = \dots = \lambda_j =: \lambda$ und somit $C = \lambda I$.

Anschauliche Version

Wir wollen zunächst eine Anschauung dafür entwickeln, wie Multiplikation mit Diagonalmatrizen funktioniert:

Beobachtung 2. Sind $D_1 \in \mathrm{M}_m(K)$ und $D_2 \in \mathrm{M}_n(K)$ zwei Diagonalmatrizen

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix},$$

so lassen sich für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ die Produkte $D_1 A$ und AD_2 als

$$D_1 A = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{11} & \cdots & \lambda_1 A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m A_{m1} & \cdots & \lambda_m A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad AD_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 A_{11} & \cdots & \mu_n A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1 A_{m1} & \cdots & \mu_n A_{mn} \end{pmatrix}$$

berechnen. Durch Multiplikation mit D_1 von links wird also die i-te Zeile von A mit λ_i multipliziert, und durch Multiplikation mit D_2 von rechts wird die j-te Spalte von A mit μ_j multipliziert. Dies lässt sich schematisch als

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \hline \vdots \\ \hline z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \lambda_m z_m \end{pmatrix},$$

und

$$\left(\begin{array}{c|c|c} s_1 & \cdots & s_n \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mu_1 s_1 & \cdots & \mu_n s_n \end{array}\right)$$

darstellen.

Wir zeigen nun noch einmal in zwei Schritten, dass $C = \lambda \cdot I$ für ein passendes $\lambda \in K$ gilt:

- Wir zeigen zunächst, dass C eine Diagonalmatrix ist: Hierfür sei $1 \leq i \leq n$. Dann ist E_{ii} eine Diagonalmatrix, deren i-tere Diagonaleintrag 1 ist, und deren Diagonaleinträge sonst alle verschwinden. Da $C \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(K))$ gilt, erhalten wir, dass $CE_{ii} = E_{ii}C$. Nach Beobachtung 2 entsteht dabei die Matrix CE_{ii} aus C, indem die i-te Spalte unverändert bleibt, aber alle anderen Spalten durch die Nullspalte ersetzt werden. Analog entsteht $E_{ii}C$ aus C, indem die i-te Zeilen unverändert bleibt, aber alle anderen Zeilen durch die Nullzeile ersetzt werden. Anschaulich gesehen gilt also, dass

$$CE_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_{ii}C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ C_{i1} & \cdots & C_{ii} & \cdots & C_{in} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

  Da nach Annahme $CE_{ii} = E_{ii}C$ gilt, erhalte wir, dass in der i-ten Zeile und i-ten Spalte von C bis auf den gemeinsamen Eintrag C_{ii} alle anderen Einträge verschwinden müssen, d.h. für alle $j = 0, \dots, \hat{i}, \dots, n$ gilt $C_{ij} = 0$ und $C_{ji} = 0$. Da dies für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, erhalten wir, dass in jeder Spalte (und in jeder Zeile) von C alle nicht-Diagonaleinträge verschwinden. Also ist C eine Diagonalmatrix.

- Für alle $i = 1, \dots, n$ sei $\lambda_i \in K$ der i-te Diagonaleintrag von C, d.h. es gelte

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Wir zeigen, dass alle Diagonaleinträge von C bereits gleich sind: Es seien $1 \leq i \neq j \leq n$. Der einzige nicht-verschwindende Eintrag von E_{ij} befindet sich in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von E_{ij}. Aus Beobachtung 2 folgt nun, dass $CE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$ und $E_{ij}C = \lambda_j E_{ij}$. Anschaulich lässt sich die Anwendung von Beobachtung 2 als

$$CE_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_i & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & \lambda_i & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

  und

$$E_{ij}C = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_j & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & \lambda_j & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

notieren. Durch Vergleich der Einträge $(CE_{ij}) = \lambda_i$ und $(E_{ij}C) = \lambda_j$ ergibt sich hieraus, dass $\lambda_i = \lambda_j$ gilt. Das dies für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ gilt, muss bereits $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n =: \lambda$, und somit $C = \lambda I$.

Bemerkung: Verallgemeinerung auf beliebige Ringe

Bemerkung 3. Wir haben in unseren Beweis nur genutzt, dass K ein kommutativer Ring ist. Mit unveränderten Beweis ergibt sich deshalb, dass

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R)) = R \cdot I \qquad \text{für jeden kommutativen Ring } R \tag{2}$$

gilt. Möchte man auch nicht-kommutative Ringe betrachten, so lässt sich (2) zu

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R)) = \mathrm{Z}(R) \cdot I \qquad \text{für jeden Ring } R \tag{3}$$

erweitern; ist dabei R kommutativ, so gilt $\mathrm{Z}(R) = R$ (dies ist nur eine Umformulierung der Kommutativität von R), und (3) vereinfacht sich wieder zu (2).

Ein Beweis für (3) ergibt sich durch leichte Abänderung, bzw. Erweiterung unseres Beweises für (2): Es ergibt sich wie zuvor, dass $\mathrm{Z}(R) \cdot I \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R))$ gilt.

Zum Beweis der Inklusion $\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R)) \subseteq \mathrm{Z}(R) \cdot I$ zeigt man für $C \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(R))$ ebenfalls zunächst, dass

$$C = r \cdot I \qquad \text{für ein } r \in R \tag{4}$$

gilt. Im Fall $R = K$ haben wir für unseren Beweis von (4) die Kommutativität von K nicht genutzt; für den allgemeinen Fall können wir deshalb unseren zweischritten Beweis unverändert übernehmen.

In einem dritten Schritt muss nun noch gezeigt werden, dass bereits $r \in \mathrm{Z}(R)$ gilt. Dies ergibt sich daraus, dass für alle $s \in R$ die Gleichheitskette

$$(rs) \cdot I = (r \cdot I)(s \cdot I) = C(s \cdot I) = (s \cdot I)C = (s \cdot I)(r \cdot I) = (sr) \cdot I$$

gilt, und somit durch Vergleich der Diagonaleinträge bereits $rs = sr$ für alle $s \in R$.

(c)

Wir zeigen, dass

$$\mathrm{Z}(R[t]) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \in R[t] \,\middle|\, a_i \in \mathrm{Z}(R) \text{ für alle } i \right\} = \mathrm{Z}(R)[t]$$

gilt. Die zweite Gleichheit gilt, da es sich hierbei um die Definition von $\mathrm{Z}(R)[t]$ handelt.

Ist $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in \mathrm{Z}(R)[t]$, so gilt $a_i b = b a_i$ für alle $b \in R$ und $i \geq 0$. Für jedes $q = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \in R[t]$ gilt deshalb

$$pq = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j t^{i+j} = \sum_{j,i=0}^{\infty} b_j a_i t^{j+i} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right) = qp.$$

Also gilt $p \in \mathrm{Z}(R[t])$.

Andererseits sei $p \in \mathrm{Z}(R[t])$. Dann gilt $pq = qp$ für jedes $q \in R[t]$. Für alle $b \in R$ gilt dann

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_i b)t^i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right)(bt^0) = (bt^0)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}(ba_i)t^i.$$

Für jedes $i \geq 0$ gilt also $ba_i = a_i b$ für alle $b \in R$ (denn zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten gleich sind). Dies bedeutet gerade, dass $a_i \in \mathrm{Z}(R)$ für alle $i \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2

Es sei $d \in \mathbb{N}$. Wir geben mehrere mögliche Beweise für die zu zeigenden Aussagen an:

Zunächst geben wir einen Beweis unter der zusätzlichen Annahme, dass V und W endlichdimensional sind. Diese Annahme wurde in der Aufgabenstellung vergessen; die zu zeigenden Aussagen werden dadurch zwar nicht falsch, aber schwieriger zu zeigen.

Schließlich geben wir auch den Beweis aus dem Tutorium noch einmal an, der ohne Rücksicht auf die Dimensionen von V und W funktioniert.

(a) Beweis im Endlichdimensionalen

Die Vektorräume V und W seien zunächst endlichdimensional.

Surjektivität

Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine surjektive lineare Abbildung. Es seien $w_1, \ldots, w_d \in W$. Wegen der Surjektivität von f gibt es $v_1, \ldots, v_d \in V$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, d$. Dann gilt auch

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_d = f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_d) = \left(\bigwedge^d f\right)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) \in \operatorname{im} \bigwedge^d f.$$

Da $\bigwedge^d f$ von den Elementen $w_1 \wedge \cdots \wedge w_d$ mit $w_1, \ldots, w_d$ erzeugt wird, gilt für den Untervektorraum $\operatorname{im} \bigwedge^d f \subseteq W$ deshalb bereits $\bigwedge^d f = W$.

Bemerkung 4. Die obige Argumentation funktioniert unverändert bereits für beliebig-dimensionale Vektorräume.

Injektivität

Wir erinnern an die folgende Aussage aus der Linearen Algebra I:

Lemma 5. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, so dass die Familie $(f(v_i))_{i \in I}$ ebenfalls linear unabhängig ist, so ist f injektiv.

Beweis. Ist $v \in \ker f$ mit $v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$, so folgt durch Anwenden von f, dass

$$0 = f(v) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(v_i)$$

gilt. Aus der linearen Unabhängigkeit der Familie $(f(v_i))_{i\in I}$ folgt damit, dass $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$, und somit bereits $v = 0$. Das zeigt, dass $\ker f = 0$ gilt. $\square$

Die Abbildung f sei injektiv. Es sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Wegen der Injektivität von f ist dann auch die Familie $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ linear unanabhängig, und lässt sich deshalb zu einer Basis $(w_1, \dots, w_m)$ von W mit $w_i = f(v_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ ergänzen.

Die Familie

$$\mathscr{B} = (v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n)$$

ist dann eine Basis von $\bigwedge^d V$, und die Familie

$$\mathscr{C} = (w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_d} \,|\, 1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq m)$$

ist eine Basis von $\bigwedge^d W$. Für die lineare Abbildung $\bigwedge^d f : \bigwedge^d V \longrightarrow \bigwedge^d W$ gilt dann

$$\left(\bigwedge^d f\right)(v_{i_1} \wedge v_{i_d}) = f(v_{i_1}) \wedge f(v_{i_d}) = w_{i_1} \wedge w_{i_d} \qquad \text{für alle } 1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n.$$

Die lineare Abbildung $\bigwedge^d f$ bildet also die Basis $\mathscr{B}$ injektiv auf eine Teilfamilie von $\mathscr{C}$ ab, und somit insbesondere auf eine linear unabhängige Familie. Nach Lemma 5 ist $\bigwedge^d f$ somit injektiv.

Bemerkung 6. Für unendlichdimensionale V und W lässt sich die Aussage auch dem endlichdimensionalen Fall herleiten.

(b) Beweis durch Links- und Rechtsinverse

Vollständigkeitshalber geben wir auch die im Tutorium genutzte Argumentation noch einmal.

Erinnerung 7. Es seien A und B zwei Mengen. Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ ist genau dann injektiv, wenn sie ein Linksinverses besitzt, d.h. wenn es eine Funktion $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gibt. Analog ist f genau dann surjektiv, wenn f ein Rechtsinverses besitzt, d.h. wenn es eine Funktion $g : B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt.

Bemerkung 8. Dass jede Surjekton $f : A \longrightarrow B$ ein Rechtsinverses besitzt, ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Für lineare Injektionen, bzw. Surjektionen lässen sich ein entsprechendes Links- bzw. Rechtsinverses ebenfalls linear wählen.

Lemma 9. Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ linear.

1. f ist genau dann injektiv, wenn f ein lineares Linksinverses besitzt, d.h. wenn es eine lineare Abbildung $g\colon W \longrightarrow V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ gibt.
2. f ist genau dann surjektiv, wenn f ein lineares Rechtsinverses besitzt, d.h. wenn es eine lineare Abbildung $g\colon W \longrightarrow V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ gibt.

Warnung 10. Ist $f\colon V \longrightarrow W$ linear und injektiv (bzw. surjektiv) und ist $g\colon W \longrightarrow V$ ein Linksinverses (bzw. Rechtsinverses) zu f, so muss g im Allgemeinen nicht linear sein. Lemma 9 sagt, dass es ein lineares Linksinverses (bzw. Rechtsinverses) gibt, nicht aber, dass bereits jedes Linksinverse (bzw. Rechtsinverse) schon linear ist.

Proposition 11. Es seien U, V und W drei K-Vektorräume, und es sei $d \in \mathbb{N}$.

1. Für alle linearen Abbildungen $f\colon U \longrightarrow V$ und $g\colon V \longrightarrow W$ gilt
$$\bigwedge^d (f \circ g) = \bigwedge^d f \circ \bigwedge^d g.$$
2. Es gilt $\bigwedge^d \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{\bigwedge^d V}$.

Wir haben im Tutorium bereits einen Beweis hierfür gegeben; wir geben den gleichen Beweis hier noch einmal an, allerdings in einer diagrammatischen Form.

Beweis. 1. Die beiden Abbildungen $\bigwedge^d f$ und $\bigwedge^d g$ sind die eindeutigen lineare Abbildung $\bigwedge^d U \to \bigwedge^d V$, bzw. $\bigwedge^d V \to \bigwedge^d W$, so dass die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} U^d \arrow[r, "f^{\times d}"] \arrow[d, "\wedge"'] & V^d \arrow[d, "\wedge"] \\ \bigwedge^d U \arrow[r, dashed, "\bigwedge^d f"'] & \bigwedge^d V \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V^d \arrow[r, "g^{\times d}"] \arrow[d, "\wedge"'] & W^d \arrow[d, "\wedge"] \\ \bigwedge^d V \arrow[r, dashed, "\bigwedge^d g"'] & \bigwedge^d W \end{tikzcd}$$

kommutieren, wobei $\wedge$ die jeweils kanonischen Abbildungen bezeichnet. Durch Zusammenfügen dieser beiden kommutativen Diagramme ergibt sich das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} U^d \arrow[r, "f^{\times d}"] \arrow[d, "\wedge"'] & V^d \arrow[r, "g^{\times d}"] \arrow[d, "\wedge"] & W^d \arrow[d, "\wedge"] \\ \bigwedge^d U \arrow[r, dashed, "\bigwedge^d f"'] & \bigwedge^d V \arrow[r, dashed, "\bigwedge^d g"'] & \bigwedge^d W \end{tikzcd}$$

Durch Entfernen des mittleren vertikalen Pfeils und die Gleichheit $g^{\times d} \circ f^{\times d} = (g \circ f)^{\times d}$ erhalten wir hieraus das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} U^d \arrow[r, "(g\circ f)^{\times d}"] \arrow[d, "\wedge"'] & W^d \arrow[d, "\wedge"] \\ \bigwedge^d U \arrow[r, dashed, "\bigwedge^d g \circ \bigwedge^d f"'] & \bigwedge^d W \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\bigwedge^d g \circ \bigwedge^d f$ als Komposition zweier linearer Abbildungen ebenfalls linear. Nun ist aber $\bigwedge^d (g \circ f)$ die eindeutige lineare Abbildung $\bigwedge^d U \longrightarrow \bigwedge^d W$ die dieses Diagramm zum kommutieren bringt. Folglich müssen beide Abbildungen übereinstimmen, d.h. es gilt $\bigwedge^d g \circ \bigwedge^d f = \bigwedge^d (g \circ f)$.

2. Die Abbildung $\bigwedge^d \mathrm{id}_V$ ist die eindeutige lineare Abbildung $\bigwedge^d V \longrightarrow \bigwedge^d V$ die das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd} V^d \arrow[r, "\mathrm{id}_V^{\times d}"] \arrow[d, "\wedge"'] & V^d \arrow[d, "\wedge"] \\ \bigwedge^d V \arrow[r, dashed, "\bigwedge^d \mathrm{id}_V"'] & \bigwedge^d V \end{tikzcd}$$

Dabei gilt $\mathrm{id}_V^{\times d} = \mathrm{id}_{V^d}$, weshalb auch die lineare Abbildung $\mathrm{id}_{\bigwedge^d V}$ das Diagramm zum kommutieren bringt. Es folgt, dass beide Abbildungen bereits übereinstimmen, dass also $\bigwedge^d \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{\bigwedge^d V}$ gilt. □

Ist nun $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Ist f injektiv, so gibt es nach Lemma 9 eine lineare Abbildung $g : W \longrightarrow V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$; dann gilt nach Proposition 11 auch $\bigwedge^d g \circ \bigwedge^d f = \mathrm{id}_{\bigwedge^d V}$ und somit nach Proposition 11, dass $\bigwedge^d f$ injektiv ist. Ist f surjektiv, so ergibt sich durch analoge Argumentation mithilfe eines Rechtsinversen von f, dass auch $\bigwedge^d f$ surjektiv ist.

Aufgabe 3

Es sei $d \in \mathbb{N}$. Für jeden Vektorraum V sei $\wedge_V : V^d \longrightarrow \bigwedge^d V, (v_1, \dots, v_d) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ die kanonische Projektion. Für alle K-Vektorräume V und W haben wir einen Isomorphismus von K-Vektorräumen

$$\Phi_{V,W} : \ \mathrm{Alt}(V^d, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^d V, W\right), \quad f \longrightarrow \bar{f},$$

wobei $\bar{f} : \bigwedge^d V \longrightarrow W$ die eindeutige lineare Abbildung ist, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd} V^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wedge_V"'] & W \\ \bigwedge^d V \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Das Inverse $\Phi^{-1}_{V,W}$ ist durch

$$\Phi^{-1}_{V,W}\colon \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^d V, W\right) \longrightarrow \operatorname{Alt}(V^d, W), \quad g \longrightarrow g \circ \wedge_V,$$

gegeben.

Bemerkung 12. Ist $g\colon V \longrightarrow \tilde{V}$ eine lineare Abbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung

$$g^{\times d}\colon V^d \longrightarrow \tilde{V}^d, \quad (v_1, \dots, v_d) \mapsto (g(v_1), \dots, g(v_d)),$$

und somit eine induzierte lineare Abbildung

$$\left(g^{\times d}\right)^*\colon \operatorname{Alt}(\tilde{V}^d, W) \longrightarrow \operatorname{Alt}(V^d, W), \quad f \mapsto f \circ g^{\times d}.$$

Außerdem erhalen wir auch die induzierte lineare Abbildung

$$\bigwedge^d g\colon \bigwedge^d V \longrightarrow \bigwedge^d \tilde{V}, \quad v_1 \wedge \dots \wedge v_d \mapsto g(v_1) \wedge \dots \wedge g(v_d) \qquad \text{für alle } v_1, \dots, v_d \in V,$$

und somit eine induzierte lineare Abbildung

$$\left(\bigwedge^d g\right)^*\colon \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^d V, W\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^d \tilde{V}, W\right), \quad f \mapsto f \circ \bigwedge^d g.$$

Für jede lineare Abbildung $h\colon W \longrightarrow \tilde{W}$ erhalten wir ebenfalls induzierte lineare Abbildungen

$$h_*^{\mathrm{Alt}}\colon \operatorname{Alt}(V^d, W) \longrightarrow \operatorname{Alt}(V^d, \tilde{W}), \quad f \mapsto h \circ f$$

und

$$h_*^{\mathrm{Hom}}\colon \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^d V, W\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^d V, \tilde{W}\right), \quad f \mapsto h \circ f.$$

Die Familie von Isomorphismen $(\Phi_{V,W})_{V,W}$ ist insofern mit diesen induzierten Abbildungen verträglich, als dass für alle K-Vektorräume V, W, $\tilde{V}$ und $\tilde{W}$ und linearen Abbildungen $g\colon V \longrightarrow \tilde{V}$ und $h\colon W \longrightarrow \tilde{W}$ die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Alt}(V^d, W) \arrow[r, "\Phi_{V,W}"] & \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^d V, W\right) \\ \operatorname{Alt}(\tilde{V}^d, W) \arrow[u, "\left(g^{\times d}\right)^*"] \arrow[r, "\Phi_{\tilde{V},W}"] & \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^d \tilde{V}, W\right) \arrow[u, "\left(\bigwedge^d g\right)^*"'] \end{tikzcd} \tag{5}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alt}(V^d, W) \arrow[r, "\Phi_{V,W}"] \arrow[d, "h_*^{\mathrm{Alt}}"'] & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^d V, W\right) \arrow[d, "h_*^{\mathrm{Hom}}"] \\
\mathrm{Alt}(V^d, \tilde{W}) \arrow[r, "\Phi_{V,\tilde{W}}"] & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^d V, \tilde{W}\right)
\end{tikzcd} \tag{6}$$

kommutieren:

Behauptung 13. Für alle K-Vektorräume V, W, $\tilde{V}$, $\tilde{W}$ und linearen Abbildungen $g: V \longrightarrow \tilde{V}$ und $h: W \longrightarrow \tilde{W}$ kommutieren die beiden Diagramme (5) und (6).

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Gleichheiten

$$\left(\bigwedge^d g\right)^* \circ \Phi_{\tilde{V},W} = \Phi_{V,W} \circ \left(g^{\times d}\right)^* \qquad \text{und} \qquad h_*^{\mathrm{Hom}} \circ \Phi_{V,W} = \Phi_{V,\tilde{W}} \circ h_*^{\mathrm{Alt}}$$

gelten. Indem wir die erste Gleichung von links mit $\Phi_{V,W}^{-1}$ komponieren und von rechts mit $\Phi_{\tilde{V},W}$, sowie die zweite Gleichung von rechts mit $\Phi_{V,W}^{-1}$ und von links mit $\Phi_{V,\tilde{W}}^{-1}$, erhalten wir die jeweils äquivalenten Gleichungen

$$\Phi_{V,W}^{-1} \circ \left(\bigwedge^d g\right)^* = \left(g^{\times d}\right)^* \circ \Phi_{\tilde{V},W}^{-1} \qquad \text{und} \qquad \Phi_{V,\tilde{W}}^{-1} \circ h_*^{\mathrm{Hom}} = h_*^{\mathrm{Alt}} \circ \Phi_{V,W}^{-1}.$$

Die Kommutativität der Diagramme (5) und (6) ist deshalb äquivalent dazu, dass die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alt}(V^d, W) & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^d V, W\right) \arrow[l, "\Phi_{V,W}^{-1}"'] \\
\mathrm{Alt}(\tilde{V}^d, W) \arrow[u, "\left(g^{\times d}\right)^*"] & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^d \tilde{V}, W\right) \arrow[l, "\Phi_{\tilde{V},W}^{-1}"'] \arrow[u, "\left(\bigwedge^d g\right)^*"']
\end{tikzcd} \tag{7}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alt}(V^d, W) \arrow[d, "h_*^{\mathrm{Alt}}"'] & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^d V, W\right) \arrow[l, "\Phi_{V,W}^{-1}"'] \arrow[d, "h_*^{\mathrm{Hom}}"] \\
\mathrm{Alt}(V^d, \tilde{W}) & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^d V, \tilde{W}\right) \arrow[l, "\Phi_{V,\tilde{W}}^{-1}"]
\end{tikzcd} \tag{8}$$

kommutieren. (Die Kommutativität dieser abgeänderten Diagramme (7) und (8) ist leichter zu überprüfen als die Kommutativität der ursprünlichen Diagramme (5) und (6), da etwa das Inverse $\Phi_{V,W}^{-1}$ eine einfachere Form hat als $\Phi_{V,W}$ selbst.)

Die Kommutativität der Diagramme (7) und (8) lässt sich nun direkt nachrechnen: Für alle $f \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^d \tilde{V}, W)$ und $v_1, \dots, v_d \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left(g^{\times d}\right)^* \left(\Phi^{-1}_{\tilde{V},W}(f)\right)(v_1, \dots, v_d) \\
&= \Phi^{-1}_{\tilde{V},W}(f)\left(g^{\times d}(v_1, \dots, v_d)\right) \\
&= \Phi^{-1}_{\tilde{V},W}(f)(g(v_1), \dots, g(v_d)) \\
&= (f \circ \wedge_{\tilde{V}})(g(v_1), \dots, g(v_d)) \\
&= f(g(v_1) \wedge \dots \wedge g(v_d))
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\Phi^{-1}_{V,W}\left(\left(\bigwedge^d g\right)^* (f)\right)(v_1, \dots, v_d) \\
&= \left(\left(\bigwedge^d g\right)^* (f) \circ \wedge_V\right)(v_1, \dots, v_d) \\
&= \left(\bigwedge^d g\right)^* (f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) \\
&= \left(f \circ \bigwedge^d g\right)(v_1, \dots, v_d) \\
&= f(g(v_1) \wedge \dots \wedge g(v_d)),
\end{aligned}$$

was die Kommutativität des ersten Diagramms zeigt. Für alle $f \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^d V, W)$ gilt

$$h_*^{\mathrm{Alt}}\left(\Phi^{-1}_{V,W}(f)\right) = h \circ \Phi^{-1}_{V,W}(f) = h \circ f \circ \wedge_V$$

und

$$\Phi^{-1}_{V,\tilde{W}}(h_*^{\mathrm{Hom}}(f)) = h_*^{\mathrm{Hom}}(f) \circ \wedge_V = h \circ f \circ \wedge_V,$$

was die Kommutativität des zweiten Diagramms zeigt. □

Wegen dieser Verträglichkeit mit den induzierten Abbildungen bezeichnet man die Familie von Isomorphismen $(\Phi_{V,W})_{V,W}$ auch als *natürlich*. Abkürzend sagt man auch, dass für alle K-Vektorräume V und W der Isomorphismus $\Phi_{V,W}$ natürlich ist; dabei sollte man aber im Hinterkopf behalten, dass diese Natürlichkeiten eine Aussage über alle Isomorphismen gleichzeit ist, und nicht nur über einen einzelnen.

Einer der Vorteile dieses Begriffes eines „natürlichen Isomorphismus“ ist, dass man ihn anstelle des etwas schwammigen „kanonischen Isomorphismus“ verwenden kann.

Aufgabe 4

(a)

Der Vollständigkeit halber geben wir die Konstruktion hier noch einmal an, wobei wir im Folgenden $r, s \in \mathbb{N}$ fixieren.

Eindeutigkeit

Lemma 14. Es seien $V_1, \dots, V_n, W$ Vektorräume, und für jedes $i = 1, \dots, n$ sei $E_i \subseteq V_i$ ein Erzeugendensystem von V. Sind $f, g \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ zwei multilineare Abbildungen mit

$$f(e_1, \dots, e_n) = g(e_1, \dots, e_n) \qquad \text{für alle } e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n,$$

so gilt bereits $f = g$.

Beweis. Es seien $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$. Für jedes $i = 1, \dots, n$ lässt sich v_i als $v_i = \sum_{e_i \in E_i} \lambda^{(i)}_{e_i} e_i$ darstellen. Wegen der Multilinearität von f und g folgt damit, dass

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= f\left(\sum_{e_1 \in E_1} \lambda^{(1)}_{e_1} e_1, \dots, \sum_{e_n \in E_n} \lambda^{(n)}_{e_n} e_n \right) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ e_i \in E_i}} \lambda^{(1)}_{e_1} \cdots \lambda^{(n)}_{e_n} f(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ e_i \in E_i}} \lambda^{(1)}_{e_1} \cdots \lambda^{(n)}_{e_n} g(e_1, \dots, e_n) = \cdots = g(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

gilt. Somit gilt bereits $f = g$. □

Aus Lemma 14 ergibt sich direkt die Eindeutigkeit von $\wedge$, denn $\bigwedge^r V$ wird von den Elementen $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ mit $v_i \in V$ erzeugt, und $\bigwedge^s V$ von den Elementen $w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$ mit $w_j \in V$.

Existenz

Wir Konstruieren die gewünschte Abbildung schrittweise.

1. Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$m_1 \colon V^r \times V^s \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad ((v_1, \dots, v_r), (w_1, \dots, w_s)) \longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s.$$

2. Für jedes $x = (v_1, \dots, v_r) \in V^r$ sei

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_x \coloneqq m_1(x, -) \colon V^s &\longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \\ (w_1, \dots, w_s) &\longmapsto m_1(x, (w_1, \dots, w_s)) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s. \end{aligned}$$

   (Der Buchstabe λ steht hier für „Linksmultiplikation“.) Der Ausdruck $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$ ist in jeder seiner Komponenten multilinear, sowie insgesamt alternierend; die Abbildung

$\tilde{\lambda}_x$ ist deshalb multilinear und alternierend. Für jedes $x \in V^r$ erhalten wir nach der universellen Eigenschaft der äußeren Potent, dass $\tilde{\lambda}_x$ eine (eindeutige) lineare Abbildung $\lambda_x \colon \bigwedge^s V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V$ induziert, so dass

$$\lambda_x(w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = \tilde{\lambda}_x(w_1, \dots, w_s) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s \quad \text{für alle } w_1, \dots, w_s \in V$$

gilt. Ein allgemeines Element $y \in \bigwedge^s V$ ist von der Form $y = \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$, und wegen der Linearität von λ_x gilt dann

$$\lambda_x(y) = \lambda_x\left(\sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) = \sum_j b_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}.$$

Durch Zusammenfügen der Funktionen λ_x, $x \in V^r$ erhalten wir eine wohldefinierte Funktion

$$m_2 \colon V^r \times \bigwedge^s V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad (x, y) \longmapsto \lambda_x(y).$$

Für $x = (v_1, \dots, v_r)$ und $y = \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$ gilt dabei

$$m_2\left((v_1, \dots, v_r), \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) = \sum_j b_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}.$$

3. Für jedes $y \in \bigwedge^s V$ betrachten wir nun die Abbildung

$$\tilde{\rho}_y \coloneqq m_2(-, y) \colon V^r \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad x \longmapsto m_2(x, y).$$

(Der Buchstabe ρ steht hier für „Rechtsmultiplikation“.) Gilt $y = \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$, so gilt

$$\tilde{\rho}_y(v_1, \dots, v_r) = \sum_j b_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \qquad \text{für alle } v_1, \dots, v_r \in V.$$

Für jedes j ist dabei der Ausdruck $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$ multilinear und alternierend in den Einträgen $v_1, \dots, v_r$; dementsprechend ist auch $\tilde{\rho}_y$ multilinear und alternierend. Nach der universellen Eigenschaft der äußeren Potenz erhalten wir für jedes $y \in \bigwedge^s V$ eine (eindeutige) induzierte lineare Abbildung $\rho_y \colon \bigwedge^r V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V$ mit

$$\rho_y(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_j b_j v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \qquad \text{für alle } v_1, \dots, v_r \in V.$$

Für eine beliebiges Element $x \in \bigwedge^r V$ von der Form $x = \sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}$ gilt dabei wegen der Linearität von ρ_y, dass

$$\begin{aligned}\rho_y(x) = \rho_y\left(\sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}\right) &= \sum_i a_i \left(\sum_j b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}.\end{aligned}$$

Durch Zusammenfügen der Funktionen ρ_y, $y \in \bigwedge^s V$ erhalten wir eine wohldefinierte Funktion

$$m_3 : \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad (x, y) \mapsto \rho_y(x).$$

Mit $x = \sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}$ und $y = \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$ ist $m_3(x, y)$ durch

$$m_3\left(\sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}, \sum_j b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) = \sum_{i,j} a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$$

gegeben.

Es sei nun $\wedge \coloneqq m_3$. Für alle $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$ gilt nun, dass

$$\wedge(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\wedge$ bilinear ist. Wir zeigen die Linearität im ersten Argument, die Linearität im zweiten Argument ergibt sich dann analog:

Es seien $x, y \in \bigwedge^r V$, $z \in \bigwedge^s V$ und $\lambda \in K$. Mit den Darstellungen $x = \sum_{i=1}^n a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}$, $y = \sum_{i=n+1}^m a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}$ und $z = \sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}$ erhalten wir zum einen, dass

$$\begin{aligned}
&(x + y) \wedge z \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} + \sum_{i=n+1}^m a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^m a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^l b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} + \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=1}^l a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \\
&= \cdots = (x \wedge z) + (y \wedge z),
\end{aligned}$$

und zum anderen, dass

$$
\begin{aligned}
(\lambda x) \wedge z &= \left(\lambda \sum_{i=1}^{m} a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{l} b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{l} b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \lambda a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_i b_j v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)} \\
&= \lambda \left(\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{l} b_j w_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge w_s^{(j)}\right) \right) = \lambda(x \wedge y).
\end{aligned}
$$

Das zeigt die Bilinearität von $\wedge$ im ersten Argument.

Bemerkung 15. Aus der von uns gewählten Konstruktion von $\wedge$ geht tatsächlich schon hervor, dass $\wedge$ im ersten Argument linear ist: Dies bedeutet nämlich gerade, dass für fixiertes $y \in \bigwedge^s V$ die Abbildung

$$
(-) \wedge y : \bigwedge^{r} V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \quad x \longmapsto x \wedge y
$$

linear ist. Bei dieser Abbildung handelt es sich aber genau um die lineare Abbildung ρ_y.

Die Linearität im zweiten Argument erhalten wir leider nicht direkt aus unserer Konstruktion. Neben dem direkten Nachrechnen gibt es aber auch hier einen geschickten Ausweg:

Wir haben in unserer Konstruktion im ersten Schritt das erste Argument von m_1 fixiert, und im zweiten Schritt das zweite Argument von m_2. Stattdessen hätte man auch umgekehrt vorgehen können:

Indem man in einem abgeänderten ersten Schritt das zweite Argument von m_1 fixiert, erhalt man mithilfe der universelle Eigenschaft der äußeren Potenz eine Abbildung

$$
\begin{gathered}
\tilde{m}_2 : \bigwedge^{r} V \times V^s \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V \\
\left(\sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)}, (w_1, \ldots, w_s)\right) \longmapsto \sum_i a_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_r^{(i)} \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s.
\end{gathered}
$$

Durch anschließendes Fixieren des ersten Arguments von $\tilde{m}_2$ erhält man mithilfe der universelle Eigeschaft der äußeren Potenz dann ebenfalls die Funktion m_3.

Während wir bei der von uns gewählten Reihenfolge die Linearität im ersten Argument geschenkt bekommen, erhält man bei dieser umgekehrten Reihenfolge die Linearität im zweiten Argument. Aus beiden möglichen Reihenfolgen erhält man deshalb zusammen, dass $\wedge$ in beiden Argumenten linear ist.

Bemerkung 16. Für $r = 0$ ist $\bigwedge^r V = \bigwedge^0 V = K$. Das Element $1 \in K$ entspricht dabei dem „leeren Dachprodukt“ $1 = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_0$ mit $v_1, v_2, \dots, v_0 \in V$. Für alle $w_1, \dots, w_s \in V$ gilt deshalb, dass

$$1 \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = \underbrace{(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_0)}_{\text{0 Faktoren}} \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = w_1 \wedge \cdots \wedge w_s.$$

Da die Abbildung $1 \wedge (-) \colon \bigwedge^s V \longrightarrow \bigwedge^s V$ linear ist, und die Elemente $w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$ ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^s V$ bilden, ergibt sich daraus, dass allgemeiner $1 \wedge y = y$ für alle $y \in \bigwedge^s V$ gilt. Analog ergibt sich im Fall $s = 0$, dass $x \wedge 1 = x$ für alle $x \in \bigwedge^r V$ gilt

Wegen der Bilinearität von $\wedge$ ergibt sich im Fall $r = 0$ allgemeiner, dass $\lambda \wedge y = \lambda(1 \wedge y) = \lambda y$ für alle $\lambda \in K$ und $y \in \bigwedge^s V$ gilt. Analog ergibt sich im Fall $s = 0$, dass $x \wedge \lambda = \lambda x$ für alle $\lambda \in K$ und $x \in \bigwedge^r V$ gilt.

Insbesondere ergibt sich im Fall $r = s = 0$, dass $\lambda \wedge \mu = \lambda\mu$ für alle $\lambda, \mu \in K$ gilt.

Bemerkung.

(b)

Wir wissen bereits, dass $\bigwedge V = \bigoplus_{d=0}^n \bigwedge^d V$ ein K-Vektorraum bezüglich der komponentenweise Addition

$$(x_0, \dots, x_n) + (y_0, \dots, y_n) = (x_0 + y_0, \dots, x_n + y_n) \qquad \text{für alle } (x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n) \in \bigwedge V$$

und der komponentenweise Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \qquad \text{für alle } \lambda \in K, (x_0, \dots, x_n) \in \bigwedge V$$

einen K-Vektorraum bildet. Für alle $(x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n) \in \bigwedge V$ definieren wir nun

$$(x_0, \dots, x_n) \wedge (y_0, \dots, y_n) \coloneqq (z_0, \dots, z_n) \quad \text{mit} \quad z_r = \sum_{s=0}^r (x_s \wedge y_{r-s}) = \sum_{s+t=r} (x_s \wedge y_t).$$

Diese Verknüpfung ist wohldefiniert, denn für $x_s \in \bigwedge^s V$ und $y_t \in \bigwedge^t V$ gilt $x_s \wedge y_t \in \bigwedge^{s+t} V$.

Bemerkung 17. Stellt man sich die Elemente $(x_0, \dots, x_n)$ und $(y_0, \dots, y_n)$ als formale Summen $\sum_{s=0}^n x_s$ und $\sum_{t=0}^n y_t$ vor, so ist die Verknüpfung $\wedge$ gerade als

$$\left(\sum_{s=0}^n x_s \right) \wedge \left(\sum_{t=0}^n y_t \right) = \sum_{s,t=0}^n (x_s \wedge y_t)$$

definiert. Gilt dabei $s + t > n$, so ist $x_s \wedge y_t \in \bigwedge^{s+t} V = 0$. Deshalb tretten tatsächlich nur die Summanden auf, für die $s + t \leq n$ gilt, weshalb die Summe $\sum_{s,t=0}^n (x_s \wedge y_t)$ in $\bigoplus_{d=0}^n \bigwedge^d V = \bigwedge V$ lebt.

Wir zeigen, dass der Vektorraum $\bigwedge V$ zusammen mit $\wedge$ zu einer K-Algebra wird:

- Wir spalten den Nachweis der Assoziativität in drei Schritte auf:

  1. Für alle $r, s, t \in \mathbb{N}$ und $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_t \in V$ gilt

$$
\begin{aligned}
&((u_1 \wedge \dots \wedge u_r) \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_s)) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_t) \\
&= (u_1 \wedge \dots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_s) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_t) \\
&= u_1 \wedge \dots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_s \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_t \\
&= \dots = (u_1 \wedge \dots \wedge u_r) \wedge ((v_1 \wedge \dots \wedge v_s) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_t)).
\end{aligned}
$$

  2. Für alle $r, s, t \in \mathbb{N}$ und $x \in \bigwedge^r V$, $y \in \bigwedge^s V$ und $z \in \bigwedge^t V$ folgt, dass $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ gilt: Es seien $x = \sum_i a_i u^{(i)}$, $y = \sum_j b_j v^{(j)}$ und $z = \sum_k c_k w^{(k)}$, wobei wir die abkürzende Notation $u^{(i)} = u_1^{(i)} \wedge \dots \wedge u_r^{(i)}$, $v^{(j)} = v_1^{(j)} \wedge \dots \wedge v_s^{(j)}$ und $w^{(k)} = w_1^{(k)} \wedge \dots \wedge w_t^{(k)}$ verwenden. Wir haber bereits gezeigt, dass $u^{(i)} \wedge (v^{(j)} \wedge w^{(k)}) = (u^{(i)} \wedge v^{(j)}) \wedge w^{(k)}$ für alle i, j, k; es muss also nicht zwischen den Klammerungen unterschieden werden. Daraus folgt dann mit der Bilinearität von $\wedge$, dass

$$
\begin{aligned}
x \wedge (y \wedge z) &= \left(\sum_i a_i u^{(i)} \right) \wedge \left(\left(\sum_j b_j v^{(j)} \right) \wedge \left(\sum_k c_k w^{(k)} \right) \right) \\
&= \left(\sum_i a_i u^{(i)} \right) \wedge \left(\sum_{j,k} b_j c_k v^{(j)} w^{(k)} \right) = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k u^{(i)} \wedge v^{(j)} \wedge w^{(k)} \\
&= \dots = (x \wedge y) \wedge z.
\end{aligned}
$$

  Bemerkung 18. Man kann auch argumentieren, dass die beiden Abbildungen

$$
\alpha_1, \alpha_2 : \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \times \bigwedge^t V \longrightarrow \bigwedge^{r+s+t} V
$$

  mit $\alpha_1 : (x, y, z) \mapsto x \wedge (y \wedge z)$ und $\alpha_2 : (x, y, z) \mapsto (x \wedge y) \wedge z$ wegen der Bilinearität von $\wedge$ beide trilinear sind, und dann direkt die Gleihheit der beiden Abbildungen mithilfe Lemma 14 aus dem ersten Schritt folgern. (Die obige Rechnung ist natürlich nur ein Spezialfall des Beweises von Lemma 14.)

  3. Für beliebige Elemente $x, y, z \in \bigwedge V$ mit Einträgen $x = (x_0, \dots, x_n)$, $y = (y_0, \dots, y_n)$ und $z = (z_0, \dots, z_n)$ ergibt sich nun mit der Bilinearität von $\wedge$, dass

$$
\begin{aligned}
(x \wedge (y \wedge z))_p &= \sum_{r+q=p} x_r \wedge (y \wedge z)_q = \sum_{r+q=p} x_r \wedge \left(\sum_{s+t=q} y_s \wedge z_t \right) = \sum_{\substack{r+q=p \\ s+t=q}} x_r \wedge y_s \wedge z_t \\
&= \sum_{r+s+t=p} x_s \wedge y_s \wedge z_t = \dots = ((x \wedge y) \wedge z)_p.
\end{aligned}
$$

  für alle $p = 0, \dots n$ gilt, und somit $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

Das zeigt die Assoziativität.

- Für alle $\lambda \in K$ und $x = (x_0, \dots, x_n) \in \bigwedge V$ gilt

$$(\lambda, 0, \dots, 0) \wedge x = (\lambda, 0, \dots, 0) \wedge (x_0, \dots, x_n) = (\lambda \wedge x_0, \dots, \lambda \wedge x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda x \tag{9}$$

  sowie analog auch $x \wedge (\lambda, 0, \dots, 0) = \lambda x$. (Hier nutzen wir Bemerkung 16.) Insbesondere ist $(1, 0, \dots, 0)$ deshalb ein Einselement bezüglich der Multiplikation.

- Für alle $x, y, z \in \bigwedge V$ mit $x = (x_0, \dots, x_n)$, $y = (y_0, \dots, y_n)$ und $z = (z_0, \dots, z_n)$ ergibt sich aus der Bilinearität von $\wedge$, dass

$$\begin{aligned} ((x + y) \wedge z)_p &= \sum_{r+s=p} (x + y)_r \wedge z_s = \sum_{r+s=p} (x_r + y_r) \wedge z_s = \sum_{r+s=p} \big((x_r \wedge z_s) + (y_r \wedge z_s)\big) \\ &= \left(\sum_{r+s=p} x_r \wedge z_s \right) + \left(\sum_{r+s=p} y_r \wedge z_s \right) = (x \wedge z)_p + (y \wedge z)_p = ((x \wedge z) + (y \wedge z))_p \end{aligned}$$

  für alle $p = 1, \dots, n$ gilt. Somit gilt bereits $(x + y) \wedge z = (x \wedge z) + (y \wedge z)$, was die Distributivität im ersten Argument zeigt. Die Distributivität im zweiten Argument ergibt sich analog.

Das zeigt, dass $\bigwedge V$ Ring ist, und es bleibt zu zeigen, dass $\bigwedge V$ durch $\varphi\colon K \longrightarrow \bigwedge V$, $\lambda \longmapsto (\lambda, 0, \dots, 0)$ zu einer K-Algebra wird.

- Die Abbildung ist ein Ringhomomorphismus, denn für alle $\lambda, \mu \in K$ gilt

$$\varphi(\lambda) + \varphi(\mu) = (\lambda, 0, \dots, 0) + (\mu, 0, \dots, 0) = (\lambda + \mu, 0, \dots, 0) = \varphi(\lambda + \mu)$$

  und

$$\varphi(\lambda) \wedge \varphi(\mu) = (\lambda, 0, \dots, 0) \wedge (\mu, 0, \dots, 0) = (\lambda \wedge \mu, 0, \dots, 0) = (\lambda\mu, 0, \dots, 0) = \varphi(\lambda\mu),$$

  sowie $\varphi(1_K) = (1, 0, \dots, 0) = 1_{\bigwedge V}$.

- Aus (9) erhalten wir, dass

$$\varphi(\lambda) \wedge x = (\lambda, 0, \dots, 0) \wedge (x_0, \dots, x_n) = \lambda x = (x_0, \dots, x_n) \wedge (\lambda, 0, \dots, 0) = x \wedge \varphi(\lambda)$$

  für alle $\lambda \in K$ und $x = (x_0, \dots, x_n) \in \bigwedge V$ gilt.

Das zeigt, dass $\bigwedge V$ durch φ zu einer K-Algebra wird.

Anhang A Gegenbeispiele

Es sei $d \in \mathbb{N}$ und V und W seien K-Vektorräume.

(a) Zerlegbarkeit von Elementen

Nicht jedes Element $x \in \bigwedge^d V$ ist notwendigerweise von der Form $x = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ für passende $v_1, \dots, v_d \in V$. Man betrachte etwa das Element $\alpha \coloneqq e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$. Für $\alpha \wedge \alpha \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^4$ gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \alpha &= (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \wedge (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \\
&= \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 \wedge e_2}_{=0} + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \underbrace{e_3 \wedge e_4 \wedge e_1 \wedge e_2}_{=e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4} + \underbrace{e_3 \wedge e_4 \wedge e_3 \wedge e_4}_{=0} \\
&= 2 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0,
\end{aligned}$$

da $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$ eine Basis von $\bigwedge^4 \mathbb{R}^4$ ist, und somit insbesondere $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ gilt. Wäre aber $\alpha = v_1 \wedge v_2$ für passende $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, so würde

$$\alpha \wedge \alpha = v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 \wedge v_2 = 0$$

gelten.

(b) Kerne auf einfachen Elementen nachrechnen

Ist $f : \bigwedge^d V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, so dass

$$f(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = 0 \implies v_1 \wedge \dots \wedge v_d = 0 \qquad \text{für alle } v_1, \dots, v_d \in V \tag{10}$$

gilt, so muss f nicht notwendigerweise injektiv sein. Man betrachte etwa für das Element $\alpha \coloneqq e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ die kanonische Projektion

$$f : \bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \longrightarrow \left(\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \right) / \langle \alpha \rangle, \quad x \longmapsto \overline{x}.$$

Es seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ mit $v_1 \wedge v_2 \in \ker f = \langle \alpha \rangle$. Im Fall $v_1 \wedge v_2 \neq 0$ wäre $\{v_1 \wedge v_2\}$ bereits eine Basis des eindimensionalen Untervektorraums $\langle \alpha \rangle \subseteq \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$. Dann gebe es $\lambda \in K$ mit $\alpha = \lambda v_1 \wedge v_2 = (\lambda v_1) \wedge v_2$. Wir wissen aber bereits, dass sich α nicht so darstellen lässt. Also muss $v_1 \wedge v_2 = 0$ gelten, und somit f die Bedingung (10) erfüllen. Da aber $0 \neq \alpha \in \ker f$ gilt, ist f nicht injektiv.

(c) Injektivität auf einfachen Elementen nachrechnen

Ist $f : \bigwedge^d V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, so dass

$$f(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = f(w_1 \wedge w_d) \implies v_1 \wedge \dots \wedge v_d = w_1 \wedge w_d \tag{11}$$

für alle $v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_d \in V$ gilt, so muss f nicht notwendigerweise injektiv sein.

Unser vorheriges Gegenbeispiel lässt sich nicht direkt anwenden, da in diesem die beiden Elemente $e_1 \wedge e_2$ und $-e_3 \wedge e_4 = e_4 \wedge e_3$ miteinander identifiziert werden. Wir werden aber ein Gegenbeispiel nach dem gleichen Prinzip kontstruieren, d.h. wir finden einen passenden Vektorraum V und ein Element $\alpha \in \bigwedge^2 V$ mit $\alpha \neq 0$, so dass die kanonische Projektion

$$f : \bigwedge^2 V \longrightarrow \left(\bigwedge^2 V\right) / \langle \alpha \rangle , \quad x \longmapsto \overline{x}$$

die Bedingung (11) erfüllt.

Hierfür bemerke man, dass für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ die Bedingung $f(v_1 \wedge v_2) = f(w_1 \wedge w_2)$ äquivalent dazu ist, dass $v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2 \in \ker f = \langle \alpha \rangle$ gilt. Wäre dies für $v_1 \wedge v_2 \neq w_1 \wedge w_2$ eintreten, so wäre $\{v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2\}$ eine Basis des eindimensionalen Untervektorraums $\langle \alpha \rangle \subseteq \bigwedge^2 V$. Dann gebe es $\lambda \in K$ mit $\alpha = \lambda(v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2) = (\lambda v_1) \wedge v_2 + (-\lambda w_1) \wedge w_2$.

Es genügt deshalb, ein Element $\alpha \in \bigwedge^2 V$ für einen passenden Vektorraum V zu finden, so dass $\alpha \neq v_1 \wedge v_2 + w_1 \wedge w_2$ für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ gilt; wenn man also α als $\alpha = \sum_i v_1^{(i)} \wedge v_2^{(i)}$ darstellt, werden mindestens 3 Summanden benötigt.

Um ein solches Element zu finden, bemerke man, dass für jeden Vektorraum V und alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ für das Element $\beta = v_1 \wedge v_2 + w_1 \wedge w_2 \in \bigwedge^2 V$ gilt, dass

$$\beta \wedge \beta = (v_1 \wedge v_2 + w_1 \wedge w_2) \wedge (v_1 \wedge v_2 + w_1 \wedge w_2) = \cdots = 2 v_1 \wedge v_2 \wedge w_1 \wedge w_2,$$

und somit

$$(\beta \wedge \beta) \wedge (\beta \wedge \beta) = 4 v_1 \wedge v_2 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge w_1 \wedge w_2 = 0.$$

Es genügt also, für einen passenden Vektorraum V ein Element $\alpha \in \bigwedge^2 V$ zu finden, so dass $(\alpha \wedge \alpha) \wedge (\alpha \wedge \alpha) \neq 0$ gilt. Ein solches Element ist durch $\alpha \coloneqq e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6 + e_7 \wedge e_8 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^8$ gegeben: Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \alpha = \cdots = 2(&e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_7 \wedge e_8 \\ &+ e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 + e_3 \wedge e_4 \wedge e_7 \wedge e_8 + e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8), \end{aligned}$$

und somit

$$(\alpha \wedge \alpha) \wedge (\alpha \wedge \alpha) = \cdots = 48 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8 \neq 0.$$