

Lösungen und Bemerkungen zum

Übungsblatt 4

Jendrik Stelzner

26. Mai 2017

Aufgabe 3

Wir haben im Tutorium und auf dem Übungszettel die folgenden Aussagen gesehen:

Lemma 1. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Ist $(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von V , so dass (u_1, \dots, u_n) eine Basis von U ist, so ist $(\overline{w_1}, \dots, \overline{w_m})$ eine Basis von V/U .

Lemma 2. Es sei V ein K -Vektorraum, $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum. Dann gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{f} : V/U \rightarrow V/U$, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/U & \xrightarrow{\tilde{f}} & V/U \end{array}$$

Dabei bezeichnet $\pi : V \rightarrow V/U$, $v \mapsto \overline{v}$ die kanonische Projektion. Die Abbildung \tilde{f} ist gegeben durch $\tilde{f}(\overline{v}) = \overline{f(v)}$ für alle $v \in V$.

Lemma 3. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum. Es sei $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von V , so dass $\mathcal{B}_U = (u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von U ist. Dann gilt mit der Basis $\overline{\mathcal{B}} = (\overline{w_1}, \dots, \overline{w_m})$ von V/U , dass

$$M_{f, \mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wobei $A = M_{f|_U, \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_U} \in M_n(K)$, $C = M_{\tilde{f}, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{B}}} \in M_m(K)$ und $B \in M(n \times m, K)$.

Wir möchten hier noch anmerken, dass sich die Blockform aus Lemma 3 zu der folgenden nützlichen Beobachtung verallgemeinern lässt:

Proposition 4. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Es sei

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \dots \subseteq U_{t-1} \subseteq U_t = V$$

eine aufsteigende Kette von f -invarianten Untervektorräumen U_i . Es sei

$$\mathcal{B} = \left(v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}, \dots, v_1^{(t)}, \dots, v_{n_t}^{(t)} \right)$$

eine Basis von V , so dass für jedes $i = 1, \dots, t$ die Teilfamilie

$$\mathcal{B}_i = \left(v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}, \dots, v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)} \right)$$

eine Basis von U_i ist. (Eine solche Basis \mathcal{B} entsteht beispielsweise durch wiederholte Basisergänzung.)

1. Die darstellende Matrix $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ ist von der Form

$$M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit $A_i \in M_{n_i}(K)$ für alle $i = 1, \dots, t$.

2. Für alle $i = 1, \dots, t$ induziert f einen Endomorphismus

$$\tilde{f}_i : U_i/U_{i-1} \rightarrow U_i/U_{i-1}, \quad \bar{v} \mapsto \overline{f(v)}$$

und bezüglich der Basis $\overline{\mathcal{B}}_i = \left(\overline{v_1^{(i)}}, \dots, \overline{v_{n_i}^{(i)}} \right)$ von U_i/U_{i-1} gilt $A_i = M_{\tilde{f}_i, \overline{\mathcal{B}}_i, \overline{\mathcal{B}}_i}$. (Man bemerke, dass $U_0 = 0$ gilt, und somit $U_1/U_0 = U_1$ sowie $\tilde{f}_i = f|_{U_i}$.)

Beispiel 5. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

1. Lemma 3 ist ein Sonderfall von Proposition 4: Ist $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum, so erhalten wir die Kette von f -invarianten Untervektorräumen

$$0 \subseteq U \subseteq V.$$

Wendet man Proposition 4 auf hierauf an, so ergibt sich gerade Lemma 3.

2. Es sei

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n = V$$

eine aufsteigende Folge von f -invarianten Untervektorräumen mit $\dim U_k = k$ für alle $k = 0, \dots, n$, d.h. es handle sich um eine f -stabile Fahne. Dann liefert Proposition 4 gerade die Trigonalisierbarkeit von f (in (1) sind die Matrizen A_1, \dots, A_n dann alle von Größe 1×1 , weshalb die Matrix selbst eine obere Dreiecksmatrix ist).

Aufgabe 4

Nach Annahme kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ W & \xrightarrow{g} & W \end{array} \quad (2)$$

Wir zeigen die zu zeigenden Aussagen auf zwei Weisen: Zum einen zeigen wir die Aussage mithilfe von Aufgabe 3, und zum anderen von Hand und durch leichtes Abändern des Diagramms.

Mithilfe von Aufgabe 3

Wir betrachten zunächst den Fall, dass h bijektiv, also ein Isomorphismus ist. Dann sind V und W in gewisser Weise „gleich“, und die Kommutativität des Diagramms (2) sorgt dafür, dass f und g in gewisser Weise „die gleiche“ Abbildung sind.

h ist bijektiv

Ist h bijektiv, also ein Isomorphismus, so gilt $p_f(t) = p_g(t)$:

Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Dann ist $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i = h(v_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ eine Basis von W , da h ein Isomorphismus ist. Es sei $A = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} \in M_n(K)$ die darstellende Matrix des Endomorphismus f bezüglich der Basis \mathcal{B} .

Behauptung 6. Es gilt auch $A = M_{g, \mathcal{C}, \mathcal{C}}$.

Beweis. Wir geben zwei mögliche Beweise an.

1. Es sei $B = M_{g, \mathcal{C}, \mathcal{C}} \in M_n(K)$. Die Einträge von A und B sind eindeutig dadurch festgelegt, dass

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} v_i \quad \text{und} \quad g(w_j) = \sum_{i=1}^n B_{ij} w_i \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$

gilt. Wegen der Kommutativität des Diagramms (2) erhalten wir dabei aus den Gleichungen $f(v_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} v_i$ für $j = 1, \dots, n$, dass

$$g(w_j) = g(h(v_j)) = h(f(v_j)) = h\left(\sum_{i=1}^n A_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^n A_{ij} h(v_i) = \sum_{i=1}^n A_{ij} w_i$$

für alle $j = 1, \dots, n$ gilt. Also gilt bereits $A_{ij} = B_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ und somit $A = B$.

2. Wegen der Kommutativität von (2) gilt $h \circ f = g \circ h$, woraus sich durch Komposition mit h^{-1} von rechts ergibt, dass auch $h \circ f \circ h^{-1}$ gilt; es kommutiert also auch das folgende

Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ h^{-1} \uparrow & & \downarrow h \\ W & \xrightarrow{g} & W \end{array} \quad (3)$$

Dass $h(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, ist äquivalent dazu, dass $M_{h, \mathcal{B}, \mathcal{C}} = I$ gilt, wobei $I \in M_n(K)$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Daraus ergibt außerdem, dass auch $M_{h^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = (M_{h, \mathcal{B}, \mathcal{C}})^{-1} = I^{-1} = I$ gilt. Insgesamt erhalten wir somit, dass

$$M_{g, \mathcal{C}, \mathcal{C}} = M_{h \circ f \circ h^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{C}} = M_{h, \mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} \cdot M_{h^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}} = I \cdot A \cdot I = A$$

gilt. □

Aus der Behauptung folgt nun insbesondere, dass $p_f(t) = p_A(t) = p_g(t)$ gilt.

h ist injektiv

Die lineare Abbildung h sei nun injektiv. Dann schränkt sich h zu einem Isomorphismus $h' : V \rightarrow \text{im } h, v \mapsto h(v)$ ein.

Wegen der Kommutativität des Diagramms (2) ist der Untervektorraum $\text{im } h \subseteq W$ bereits g -invariant, denn es gilt

$$g(\text{im } h) = g(h(V)) = h(f(V)) \subseteq \text{im } h.$$

Somit schränkt sich g zu einem Endomorphismus $g|_{\text{im } h} : \text{im } h \rightarrow \text{im } h, w \mapsto g(w)$ ein.

Aus der Kommutativität des Diagramms (2) folgt dann die Kommutativität des eingeschränkten Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ h' \downarrow & & \downarrow h' \\ \text{im } h & \xrightarrow{g|_{\text{im } h}} & \text{im } h \end{array}$$

Wegen der Bijektivität von h' erhalten wir, dass $p_f(t) = p_{g|_{\text{im } h}}(t)$, und aus Aufgabe 3 erhalten wir, dass $p_{g|_{\text{im } h}}(t) \mid p_g(t)$. Somit gilt $p_f(t) \mid p_g(t)$. Insbesondere ist jede Nullstelle von $p_f(t)$ auch eine Nullstelle von $p_g(t)$, also jeder Eigenwert von f auch ein Eigenwert von g .

h ist surjektiv

Die lineare Abbildung h sei nun surjektiv. Dann induziert h einen Isomorphismus von K -Vektorräumen $\tilde{h} : V/\ker h \rightarrow W, \bar{v} \mapsto h(v)$.

Aus der Kommutativität des Diagramms (2) folgt nun, dass der Untervektorraum $\ker h \subseteq V$ bereits f -invariant ist, denn es gilt

$$h(f(\ker h)) = g(h(\ker h)) = g(\{0\}) = \{0\}.$$

Nach Aufgabe 3 induziert f einen Endomorphismus $\tilde{f} : V/\ker h \rightarrow V/\ker h, \bar{v} \mapsto \overline{f(v)}$.

Aus der Kommutativität des Diagramms (2) folgt die Kommutativität des induzierten Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V/\ker h & \xrightarrow{\bar{f}} & V/\ker h \\ \bar{h} \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ W & \xrightarrow{g} & W \end{array}$$

Wegen der Bijektivität von \bar{h} gilt $p_{\bar{f}}(t) = p_g(t)$. Nach Aufgabe 3 gilt außerdem $p_{\bar{f}} \mid p_f(t)$. Somit gilt $p_g(t) \mid p_f(t)$. Deshalb ist jede Nullstelle von $p_g(t)$ auch eine Nullstelle von $p_f(t)$, also jeder Eigenwert von g auch ein Eigenwert von f .

Beweis durch abgeändertes Diagramm

Aus der Kommutativität des Diagramms (2) folgt für alle $\lambda \in K$ die Kommutativität des folgenden abgeänderten Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f-\lambda \operatorname{id}_V} & V \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ W & \xrightarrow{g-\lambda \operatorname{id}_W} & W \end{array} \quad (4)$$

Die Kommutativität von (2) ist nämlich äquivalent zu der Gleichheit $h \circ f = g \circ h$. Daraus folgt für alle $\lambda \in K$, dass

$$h \circ (f - \lambda \operatorname{id}_V) = h \circ f - \lambda h = g \circ h - \lambda h = (g - \lambda \operatorname{id}_W) \circ h$$

gilt, was gerade die Kommutativität von (4) bedeutet.

h ist injektiv

Es sei h injektiv und $\lambda \in K$. Ist λ kein Eigenwert von g , so ist $g - \lambda \operatorname{id}_W$ injektiv. Wegen der Injektivität von h und Kommutativität von (4) ist damit auch $(g - \lambda \operatorname{id}_W) \circ h = h \circ (f - \lambda \operatorname{id}_V)$ injektiv. Somit ist auch $f - \lambda \operatorname{id}_V$ injektiv, also λ kein Eigenwert von f .

h ist surjektiv

Es sei h surjektiv und $\lambda \in K$. Ist λ kein Eigenwert von f , so ist $f - \lambda \operatorname{id}_V$ injektiv. Wegen der Endlichdimensionalität von V ist $f - \lambda \operatorname{id}_V$ somit auch surjektiv. Wegen der Surjektivität von h und der Kommutativität von (4) ist damit auch $h \circ (f - \lambda \operatorname{id}_V) = (g - \lambda \operatorname{id}_W) \circ h$ surjektiv. Somit ist auch $g - \lambda \operatorname{id}_W$ surjektiv. Wegen der Endlichdimensionalität ist $g - \lambda \operatorname{id}_W$ deshalb auch injektiv, also λ kein Eigenwert von g .