Minimalpolynom und Jordan-Normalform

Jendrik Stelzner

15. Juni 2017

Wir fixieren einen Körper K. Wir zeigen im Folgenden die folgende Aussage:

Satz 1. Es sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so dass A über K eine Jordan-Normalform besitzt. Dann ist das Minimalpolynom von A durch $m_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$ gegeben, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sind, und für alle $i = 1, \dots, n$ die Potenz m_i mit der Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ_i in der Jordannormalform von A übereinstimmt.

Wir beginnen mit der folgenden Beobachtung:

Lemma 2. Es seien $D, D' \in \mathrm{M}_n(K)$ Blockdiagonalmatrizen der Form

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D' = \begin{pmatrix} A'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A'_r \end{pmatrix}$$

mit $A_i, A'_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$ für alle $i = 1, \dots, r$, wobei $n = n_1 + \cdots + n_r$. Dann gilt

$$DD' = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_r & & \\ & \ddots & \\ & & A'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r A'_r \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Für alle $i = 1, \dots, r$ ist die Teilfamilie $\mathscr{B}_i := (v_{n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1}, \dots, v_{n_1 + \cdots + n_i})$ eine Basis des Untervektorraums $U_i := \langle \mathscr{B}_i \rangle$, und für diese Untervektorräume gilt $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$. Für alle $i = 1, \dots, r$ gibt es eindeutige Endomorphismen $f_i, f'_i \colon U_i \longrightarrow U_i$ mit $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_i, f_i} = A_i$ und $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_i, f'_i} = A'_i$.

Für alle Endomorphismen $g_1 \colon U_1 \longrightarrow U_1, \dots, g_r \colon U_r \longrightarrow U_r$ gibt es einen eindeutigen Endomorphismus $g_1 \oplus \cdots \oplus g_r \colon V \longrightarrow V$ mit

$$(g_1 \oplus \cdots \oplus g_r)(u_1 + \cdots + u_r) = g_1(u_1) + \cdots + g_r(u_r) \qquad \text{für alle } u_1 \in U_1, \dots, u_r \in U_r,$$

und für diesen gilt

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}, g_1 \oplus \cdots \oplus g_r} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1, g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_r, \mathscr{B}_r, g_r} \end{pmatrix}.$$

Für alle Endomorphismen $g_1, g_1' : U_1 \longrightarrow U_1, \dots, g_r, g_r' : U_r \longrightarrow U_r$ gilt

$$\begin{aligned}(g_1 \oplus \cdots \oplus g_r)\big((g_1' \oplus \cdots \oplus g_r')(u_1 + \cdots + u_r)\big) &= g_1(g_1'(u_1)) + \cdots + g_r(g_r'(u_r)) \\ &= (g_1 \circ g_1')(u_1) + \cdots + (g_r \circ g_r')(u_r)\end{aligned}$$

für alle $u_1 \in U_1, \dots, u_r \in U_r$, und deshalb gilt

$$(g_1 \oplus \cdots \oplus g_r) \circ (g_1' \oplus \cdots \oplus g_r') = (g_1 \circ g_1') \oplus \cdots \oplus (g_r \circ g_r').$$

Damit erhalten wir nun, dass

$$\begin{aligned}DD' &= \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r' & & \\ & \ddots & \\ & & A_r' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1, f_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_r, \mathscr{B}_r, f_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1, f_1'} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_r, \mathscr{B}_r, f_r'} \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{M}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}, f_1 \oplus \cdots \oplus f_r} \mathrm{M}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}, f_1' \oplus \cdots \oplus f_r'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}, (f_1 \oplus \cdots \oplus f_r) \circ (f_1' \oplus \cdots \oplus f_r')} \\ &= \mathrm{M}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}, (f_1 \circ f_1') \oplus \cdots \oplus (f_r \circ f_r')} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1, f_1 \circ f_1'} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_r, \mathscr{B}_r, f_r \circ f_r'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1, f_1} \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1, f_1'} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_r, \mathscr{B}_r, f_r} \mathrm{M}_{\mathscr{B}_r, \mathscr{B}_r, f_r'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_1' & & \\ & \ddots & \\ & & A_r A_r' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

gilt, was die Aussage zeigt. □

Wir zeigen Satz 1 nun schrittweise. Da das Minimalpolynom invariant unter Ähnlichkeit ist, können wir dabei o.B.d.A. davon ausgehen, dass A in Jordan-Normalform ist.

- Es sei zunächst A ein einzelner Jordanblock zum Eigenwert 0, d.h. es gelte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

  Dann gilt $A^n = 0$ aber $A^k \neq 0$ für alle $k < n$, weshalb $m_A(t) = t^n$.

- Es sei nun A ein einzelner Jordanblock zum Eigenwert $\lambda \in K$, d.h. es gelte

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Dann ist $A - \lambda I$ ein Jordanblock zum Eigenwert 0, weshalb $(A - \lambda I)^n = 0$ aber $(A - \lambda I)^k \neq 0$ für alle $k < n$ gilt. Deshalb gilt $m_A(t) = (t - \lambda)^n$.

- Es sei nun A in Jordan-Normalform

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(\mu_s) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K),$$

wobei für alle $n' \geq 1$ und $\mu \in K$ die Matrix $J_{n'}(\mu) \in \mathrm{M}_{n'}(K)$ den Jordanblock von Größe $n' \times n'$ zum Eigenwerte μ bezeichnet, d.h.

$$J_n(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & & \\ & \mu & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n'}(\mu).$$

Aus Lemma 2 ergibt sich, dass

$$A^k = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\mu_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(\mu_s)^k \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } k \geq 0$$

gilt. Damit ergibt sich allgemeiner, dass

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(J_{n_1}(\mu_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & p(J_{n_s}(\mu_s)) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } p(t) \in K[t]$$

gilt. Inbesondere gilt deshalb für jedes $p(t) \in K[t]$, dass

$$p(A) = 0 \iff p(J_{n_i}(\mu_i)) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, s \iff m_{J_{n_i}(\mu_i)}(t) \mid p(t) \text{ für alle } i = 1, \dots, s.$$

Wir haben bereits gezeigt, dass $m_{J_{n'}(\mu)} = (t - \mu)^{n'}$ für alle $n' \geq 1$ und $\mu \in K$ gilt. Deshalb gilt

$$p(A) = 0 \iff (t - \mu_i)^{n_i} \mid p(t) \text{ für alle } i = 1, \dots, s. \tag{1}$$

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A, d.h. es gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$ und $\{\mu_1, \dots, \mu_s\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, und für alle $i = 1, \dots, r$ sei

$$m_i \coloneqq \max\{n_j \mid 1 \leq j \leq s \text{ mit } \mu_j = \lambda_i\}.$$

Dann ist $\tilde{m}_A(t) \coloneqq (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$ das minimale normierte, vom Nullpolynom verschiedene Polynom mit $(t - \mu_i)^{n_i} \mid p(t)$ für alle $i = 1, \dots, s$. Nach (1) ist $\tilde{m}_A(t)$ somit das Minimalpolynom von A. Dabei ist m_i für alle $i = 1, \dots, r$ die maxmiale Größe eines Jordanblocks zum Eigenwert λ_i.