

## Lösungen und Bemerkungen zu

# Übungsblatt 12

Jendrik Stelzner

25. Juli 2017

### Aufgabe 1

Wir berechnen im Folgenden die Polarzerlegung  $A = SU$ , wobei  $S \in M_n(\mathbb{R})$  symmetrisch und positiv semidefinit ist, und  $U \in O(n)$  orthogonal. Man könnte stattdessen auch die Zerlegung  $A = U'S'$  berechnen, wir halten uns hier aber an die Konvention aus der Vorlesung (siehe Satz XIV.4).

Die Matrix  $S$  ist eindeutig bestimmt durch  $S = \sqrt{AA^T}$ , d.h.  $S$  ist die eindeutige symmetrische, positiv semidefinite Wurzel aus der symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix  $AA^T$ . Da  $A$  invertierbar ist (denn  $\det A = -6 \neq 0$ ) ist auch  $S$  invertierbar, und  $U$  somit eindeutig bestimmt als  $U = S^{-1}A$ .

Wir betrachten also zunächst die Matrix

$$B = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 2 \\ & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & 2 \\ & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Als reelle, symmetrische Matrix ist  $B$  diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom von  $B$  ist gegeben durch

$$p_B(t) = -(t-1)(t^2 - 13t + 36) = -(t-1)(t-4)(t-9).$$

Die Eigenwerte von  $B$  sind also 1, 4 und 9; entsprechende Eigenvektoren sind gegeben durch

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da es sich um Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten handelt, sind diese Vektoren linear unabhängig. Da  $B$  symmetrisch ist, sind sie sogar paarweise orthogonal zueinander. Um uns im Folgenden ein wenig Rechenarbeit zu ersparen, normieren wir die

obigen Vektoren noch; wir erhalten somit die folgende Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $B$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir nun die Basiswechselmatrix

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

für die

$$B = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 9 \end{pmatrix} C^{-1}$$

gilt. Somit erhalten wir, dass

$$S = \sqrt{AA^T} = \sqrt{B} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Da die Spalten von  $C$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  bilden, ist  $C$  orthogonal; folglich gilt  $C^{-1} = C^T$ , und somit

$$S = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 11 & 2 \\ & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Das Inverse  $S^{-1}$  ergibt sich nun wahlweise durch den üblichen Gauß-Algorithmus, oder als

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \left( C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^{-1} \right)^{-1} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^{-1} C^{-1} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \frac{1}{6} C \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} C^{-1} = \frac{1}{6} C \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} C^T \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 14 & -2 \\ & -2 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nun, dass

$$U = S^{-1}A = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 14 & -2 \\ & -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 4 & 3 \\ & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 1.** Anstelle der von uns genutzten Orthonormalbasis  $(v_1, v_2, v_3)$  hätte man auch eine beliebige nicht-orthonormale Basis von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $B$  nutzen können, etwa  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ . Für die entsprechende Basiswechselmatrix  $\tilde{C}$  gilt dann allerdings die Gleichheit  $\tilde{C}^{-1} = \tilde{C}^T$  nicht mehr, weshalb auch noch  $\tilde{C}^{-1}$  berechnet werden muss.

## Aufgabe 2

Wir betrachten im Folgenden den Fall  $K = \mathbb{C}$ . Für den Fall  $K = \mathbb{R}$  ersetze man jeweils  $\mathbb{C}$  durch  $\mathbb{R}$ , und  $U(-)$  durch  $O(-)$ . Für  $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$  schreiben im Folgenden abkürzend  $A^*$  anstelle von  $A^*$ .

**Lemma 2.** Es sei  $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$  und  $r = \text{rg } A$ . Dann gibt  $A' \in GL_r(\mathbb{C})$  sowie  $U_1 \in U(m)$  und  $U_2 \in U(n)$ , so dass

$$A = U \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V.$$

*Beweis.* Es sei  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $x \mapsto Ax$  die zu  $A$  (bezüglich der Standardbasen) gehörige lineare Abbildung. Bezüglich der Standardbasen  $\mathcal{S}_n = (e_1, \dots, e_n)$  von  $\mathbb{C}^n$  und  $\mathcal{S}_m = (e_1, \dots, e_m)$  von  $\mathbb{C}^m$  gilt  $A = M_{f, \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m}$ .

Es sei  $p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / \ker f$ ,  $x \mapsto \bar{x}$  die kanonische Projektion und  $i: \text{im } f \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $y \mapsto y$  die kanonische Inklusion. Nach dem Homomorphiesatz induziert  $f$  einen wohldefinierten Isomorphismus

$$\bar{f}: \mathbb{C}^n / \ker f \rightarrow \text{im } f, \quad \bar{x} \mapsto f(x).$$

Dabei ist  $\bar{f}$  die eindeutige Abbildung, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^m \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ \mathbb{C}^n / \ker f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{im } f \end{array}$$

Es sei  $\mathcal{B}'' = (v_1, \dots, v_{n-r})$  eine Basis von  $\ker f = \ker A$ . Wir ergänzen  $\mathcal{B}''$  zu einer Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathbb{C}^n$ . Dann ist  $\mathcal{B}' = (\bar{v}_{n-r+1}, \dots, \bar{v}_n)$  eine Basis von  $\mathbb{C}^n / \ker f$ . Ferner sei  $\mathcal{C}' = (w_1, \dots, w_r)$  eine Basis von  $\text{im } f = \text{im } A$ , und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  eine ergänzte Basis von  $\mathbb{C}^m$ .

Es gilt nun, dass

$$M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}} = M_{i, \mathcal{C}', \mathcal{C}} M_{\bar{f}, \mathcal{B}', \mathcal{C}'} M_{p, \mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

Dabei ist die darstellende Matrix  $A = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}} \in M_r(\mathbb{C})$  invertierbar, da  $\bar{f}$  ein Isomorphismus ist. Außerdem gelten

$$M_{p, \mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} \in M(r \times n, \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad M_{i, \mathcal{C}', \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \in M(m \times r, \mathbb{C}).$$

Somit gilt insgesamt, dass

$$M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit den beiden Basiswechselmatrizen  $U_1 = M_{\text{id}_{\mathbb{C}^m}, \mathcal{C}, \mathcal{S}_m}$  und  $U_2 = M_{\text{id}_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{S}_n, \mathcal{B}}$  erhalten wir nun, dass

$$A = M_{f, \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m} = M_{\text{id}_{\mathbb{C}^m}, \mathcal{C}, \mathcal{S}_m} M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}} M_{\text{id}_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{S}_n, \mathcal{B}} = U_1 \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2.$$

Man bemerke, dass die Spalten von  $U_2$  genau die Basis  $\mathcal{B}$  sind, und die Spalten von  $U_1^{-1}$  genau die Basis  $\mathcal{C}$ . Die Matrizen  $U_1$  und  $U_2$  sind also genau dann unitär, falls die beiden Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  jeweils orthonormal sind. Da Basisergänzung auch für Orthonormalbasen funktioniert, lassen sich dabei  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  zusätzlich zu den bisherigen Bedingungen als orthonormal wählen.  $\square$

Es seien nun  $A'$ ,  $\tilde{U}_1$  und  $\tilde{U}_2$  wie in Lemma 2. Es sei  $A' = SV$  die Polarzerlegung von  $A$ , wobei  $S \in M_n(\mathbb{C})$  hermitesch und positiv semidefinit ist, und  $V \in U(n)$  unitär. Da  $S$  hermitesch ist, gibt es eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^r$  besteht aus Eigenvektoren von  $S$ , wobei alle Eigenwerte von  $S$  reell sind. Es gibt also  $W \in U(n)$  und  $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$  mit

$$S = WDW^{-1} \quad \text{wobei} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{pmatrix}.$$

Da  $S$  positiv semidefinit ist, gilt dabei  $d_1, \dots, d_r \geq 0$ . Da  $A'$  invertierbar ist, gilt dies auch für  $S$ , weshalb sogar bereits  $d_1, \dots, d_r > 0$  gilt. Durch passende Nummerierung der Eigenwerte können wir ferner davon ausgehen, dass  $d_1 \geq \dots \geq d_r > 0$  gilt. Wir erhalten nun insgesamt, dass

$$\begin{aligned} A &= \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} SV & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} WDW^{-1}V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 \\ &= \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \tilde{U}_2 \end{aligned}$$

Die Matrix  $W^{-1}V$  ist unitär, da  $W$  und  $V$  unitär sind. Da  $W$  und  $W^{-1}V$  unitär sind, gilt dies auch für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Somit sind auch

$$U_1 = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2' = \tilde{U}_2 \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

unitär. Mit  $U_2 = (U_2')^{-1} = (U_2')^* \in U(n)$  erhalten wir nun die gewünschte Zerlegung

$$A = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2' = U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^*$$

Damit ergibt sich nun auch, dass

$$A^* = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^* = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^{-1}.$$

Somit gilt

$$A^*A = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^{-1} U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^* = U_2 \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^* = U_2 \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1}.$$

Die Matrix  $A^*A$  ist also ähnlich zu der Diagonalmatrix  $\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ . Dabei gilt

$$D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r^2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von  $A^*A$  sind folglich  $d_1^2, \dots, d_r^2$ , sowie im Fall  $n > r$  auch noch 0.