Lösungen und Bemerkungen zum

Übungsblatt 3

Jendrik Stelzner

26. Mai 2017

Aufgabe 1

a)

Die Aussage ist *falsch*: Für die Matrizen

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \in \mathrm{M}_2(K) \quad \text{und} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$$

gilt $p_A(t) = t^2 = p_B(t)$, aber die Matrizen sind nicht ähnlich, denn es gilt

$$SAS^{-1} = 0 \neq B \quad \text{für alle } S \in \mathrm{GL}_n(K).$$

(Die Matrizen A und B sind genau die beiden möglichen Jordannormalformen einer nilpotenten (2×2)-Matrix.)

b)

Die Aussage ist *falsch*: Das Problem besteht darin, dass die Eigenwerte einer Matrix nur die Linearfaktoren des charakteristischen Polynoms bestimmen, nicht aber deren algebraische Vielfachheit. Für die beiden Diagonalmatrizen

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

gilt etwa $p_A(t) = -t^2(t-1) \neq -t^2(t-1) = p_B(t)$, aber A und B haben die gleichen Eigenwerte, da $p_A(t)$ und $p_B(t)$ die gleichen Nullstellen haben.

c)

Die Aussage ist *wahr*: Es sei $x \in K^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in K$; insbesondere gilt $x \neq 0$.

Behauptung 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^n x = \lambda^n x$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage per Induktion über n: Für $n = 0$ gilt

$$A^0 x = Ix = x = 1 \cdot x = \lambda^0 \cdot x.$$

Gilt die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$A^{n+1}x = AA^n x = A \cdot \lambda^n x = \lambda^n Ax = \lambda^n \lambda x = \lambda^{n+1} x. \qquad \square$$

Da A nilpotent ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Dann gilt nach Behauptung 1, dass $0 = A^k x = \lambda^k x$. Da $x \neq 0$ gilt, muss bereits $\lambda^k = 0$ gelten, und somit $\lambda = 0$ (hier nutzen wir die Nullteilerfreiheit von K).

Wir bemerken noch, dass sich Behauptung 1 wie folgt verallgemeinern lässt:

Lemma 2. Für jedes Polynom $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in K[t]$ gilt $p(A)x = p(\lambda)x$.

Beweis. Nach Behauptung 1 gilt $p(A)x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda^i x = p(\lambda)x$. $\square$

d)

Die Aussage ist *wahr*: Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine diagonalisierbare Matrix, so gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$A = S \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=D} S^{-1}.$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ genau die Eigenwerte von A. Ist A nun nilpotent, so ist 0 der einzige Eigenwert von A (siehe Aufgabenteil c)), weshalb $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ gilt. Dann gilt $D = 0$ und somit $A = SDS^{-1} = 0$.

e)

Die Ausage ist *falsch*: Als ein notwendiges Kriterium für die simultane Diagonalisierbarkeit zeigen wir, dass simultan diagonalisierbare Matrizen miteinander kommutieren:

Lemma 3. Sind $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

Beweis. Es gibt $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $A = SD_AS^{-1}$ und $B = SD_BS^{-1}$ für zwei Diagonalmatrizen $D_A, D_B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit

$$D_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$D_A D_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D_B D_A$$

und somit auch

$$AB = SD_AS^{-1}SD_BS^{-1} = SD_AD_BS^{-1} = SD_BD_AS^{-1} = SD_BS^{-1}SD_AS^{-1} = BA.$$

□

Als Gegenbeispiel kann man nun die beiden beiden Matrizen

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

betrachten. Die Diagonalisierbarkeit von A ergibt sich aus $p_A(t) = t(t-1)$ und der folgenden grundlegenden Aussage:

Lemma 4. Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt, d.h. so dass $p_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$ für paarweise verschieden $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so ist A bereits diagonalisierbar.

Beweis. Die Eigenwerte von A sind genau $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Für jedes $i = 1, \dots, n$ gibt es daher einen Eigenvektor $v_i \in K^n$ von A zum Eigenwert λ_i. Dann ist die Familie $\mathcal{B} \coloneqq (v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig (siehe Lineare Algebra I) und somit bereits eine Basis von K^n, da $n = \dim K^n$. Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis as Eigenvektoren von A, und A somit diagonalisierbar. □

Die Matrizen A und B sind also beide einzeln diagonalisierbar. Es gilt aber

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA,$$

weshalb A und B nach Lemma 3 nicht simultan diagonalisierbar sind.

Bemerkung 5. Tatsächlich sind zwei diagonalisierbare Matrizen genau dann bereits simultan diagonalisierbar, wenn sie miteinander kommutieren. Allgemeiner ist eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von diagonalisierbaren Matrizen $A_i \in \mathrm{M}_n(K)$ genau dann bereits simultan diagonalisierbar, wenn $A_iA_j = A_jA_i$ für alle $i, j \in I$ gilt.

f)

Die Aussage ist *falsch*: Betrachtet man etwa erneut die diagonalisierbaren Matrizen

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

so ist die Matrix

$$C \coloneqq AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht diagonalsierbar. Dies lässt sich etwa durch Aufgabenteil d) einsehen, da $C \neq 0$ und $C^2 = 0$ gilt.

Bemerkung 6. Sind $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ zwei diagonalisierbare Matrizen, die bereits simultan diagonalisierbar sind, so ist auch AB diagonalisierbar. Dann gibt es nämlich $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und Diagonalmatrizen $D_A, D_B, \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A = SD_AS^{-1}$ und $B = SD_BS^{-1}$. Dann gilt

$$AB = SD_AS^{-1}SD_BS^{-1} = SD_AD_BS^{-1}$$

weshalb AB ähnlich zu der Diagonalmatrix D_AD_B ist (und somit diagonalisierbar).

Um ein Gegenbeispiel zu finden benötigt man also zwei diagonalisierbare Matrizen, die nicht simultan diagonalisierbar sind. Deshalb ist es naheliegend, es mit den gleichen Matrizen wie in Aufgabenteil e) zu versuchen.

Man bemerke allerdings noch, dass für zwei diagonalisierbare Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ die Matrix AB diagonalisierbar seien kann, selbst wenn A und B nicht simultan diagonalisierbar sind. (Insbesondere ist a priori nicht klar, dass die Matrizen aus Aufgabenteil e) auch in diesem Aufgabenteil ein Gegenbeispiel liefern werden.) So sind etwa die beiden Matrizen

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

diagonalisierbar (die Diagonalisierbarkeit von A ergibt sich wegen $p_A(t) = t(t-1)$ erneut aus Lemma 4), aber nach Lemma 3 nicht simultan diagonalisierbar, da

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA,$$

gilt. Dennoch ist $AB = A$ diagonalisierbar.

g)

Die Aussage ist *wahr*: Es gilt $p_A(5) = c - 15 = p_A(3)$, und somit

$$5 \text{ ist Eigenwert von } A \iff p_A(5) = 0 \iff p_A(3) = 0 \iff 3 \text{ ist Eigenwert von } A.$$

h)

Die Aussage ist *falsch*: Für die Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

gilt $p_A(t) = (t-2)^2$, weshalb 2 ein Eigenwert von A ist. Somit gilt $A \in M$. Die Matrix A ist aber nicht diagonalisierbar, denn

$$(\mathbb{C}^2)_2(A) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle e_1 \rangle$$

ist nur eindimensional. Folglich ist A zu keiner Diagonalmatrix ähnlich. Die Matrizen A_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$ sind aber alle diagonal. Somit gilt $A \nsim A_\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, weshalb $(A_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C})$ kein Repräsentantensystem für $\sim$ ist.

Bemerkung 7. Ersetzt man M durch

$$\begin{aligned} M' &\coloneqq \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid A \text{ ist diagonalisierbar und 2 ein Eigenwert von } A\} \\ &= \{A \in M \mid A \text{ ist diagonalisierbar}\} \end{aligned}$$

so stimmt die Aussage, d.h. durch $A \sim B :\Longleftrightarrow A$ und B sind ähnlich wird eine Äquivalenzrelation auf M' definiert, und $(A_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C})$ ist ein Repräsentantensystem von M'.