

Lösungen und Bemerkungen zu

Übungsblatt 12

Jendrik Stelzner

26. Juli 2017

Aufgabe 1

Wir berechnen im Folgenden die Polarzerlegung $A = SU$, wobei $S \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv semidefinit ist, und $U \in O(n)$ orthogonal. Man könnte stattdessen auch die Zerlegung $A = U'S'$ berechnen, wir halten uns hier aber an die Konvention von Satz XIV.4 aus der Vorlesung.

Die Matrix S ist eindeutig bestimmt durch $S = \sqrt{AA^T}$, d.h. S ist die eindeutige symmetrische, positiv semidefinite Wurzel aus der symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix AA^T . Da A invertierbar ist (denn $\det A = -6 \neq 0$) ist auch S invertierbar, und U somit eindeutig bestimmt als $U = S^{-1}A$.

Wir betrachten also zunächst die Matrix

$$B = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 2 \\ & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & 2 \\ & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Als reelle, symmetrische Matrix ist B diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom von B ist gegeben durch

$$p_B(t) = -(t-1)(t^2 - 13t + 36) = -(t-1)(t-4)(t-9).$$

Die Eigenwerte von B sind also 1, 4 und 9; entsprechende Eigenvektoren sind gegeben durch

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da es sich um Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten handelt, sind diese Vektoren linear unabhängig. Da B symmetrisch ist, sind sie sogar paarweise orthogonal zueinander. Um uns im Folgenden ein wenig Rechenarbeit zu ersparen, normieren wir die

obigen Vektoren noch; wir erhalten somit die folgende Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von B :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir nun die Basiswechselmatrix

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

für die

$$B = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 9 \end{pmatrix} C^{-1}$$

gilt. Somit erhalten wir, dass

$$S = \sqrt{AA^T} = \sqrt{B} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^{-1}$$

gilt. Da die Spalten von C eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 bilden, ist C orthogonal. Deshalb gilt $C^{-1} = C^T$, und somit auch

$$S = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 11 & 2 \\ & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Das Inverse S^{-1} ergibt sich nun wahlweise durch den üblichen Gauß-Algorithmus, oder als

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \left(C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} C^{-1} \right)^{-1} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^{-1} C^{-1} = C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \frac{1}{6} C \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} C^{-1} = \frac{1}{6} C \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} C^T \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ & 2 & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 14 & -2 \\ & -2 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nun, dass

$$U = S^{-1}A = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 14 & -2 \\ & -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 4 & 3 \\ & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 1. Anstelle der von uns genutzten Orthonormalbasis (v_1, v_2, v_3) hätte man auch eine beliebige nicht-orthonormale Basis von \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von B nutzen können, etwa $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$. Für die entsprechende Basiswechselmatrix \tilde{C} gilt dann allerdings die Gleichheit $\tilde{C}^{-1} = \tilde{C}^T$ nicht mehr, weshalb auch noch \tilde{C}^{-1} berechnet werden muss.

Aufgabe 2

Wir betrachten im Folgenden den Fall $K = \mathbb{C}$. Für den Fall $K = \mathbb{R}$ ersetze man jeweils \mathbb{C} durch \mathbb{R} , und $U(-)$ durch $O(-)$. Für $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ schreiben im Folgenden abkürzend A^* anstelle von \bar{A}^T .

Lemma 2. Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ und $r = \text{rg } A$. Dann gibt es $A' \in GL_r(\mathbb{C})$ sowie $U_1 \in U(m)$ und $U_2 \in U(n)$, so dass

$$A = U_1 \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2.$$

Beweis. Es sei $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, $x \mapsto Ax$ die zu A (bezüglich der Standardbasen) gehörige lineare Abbildung. Bezüglich der Standardbasen $\mathcal{S}_n = (e_1, \dots, e_n)$ von \mathbb{C}^n und $\mathcal{S}_m = (e_1, \dots, e_m)$ von \mathbb{C}^m gilt $A = M_{f, \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m}$.

Es sei $p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / \ker f$, $x \mapsto \bar{x}$ die kanonische Projektion und $i: \text{im } f \rightarrow \mathbb{C}^m$, $y \mapsto y$ die kanonische Inklusion. Nach dem Homomorphiesatz induziert f einen wohldefinierten Isomorphismus

$$\bar{f}: \mathbb{C}^n / \ker f \rightarrow \text{im } f, \quad \bar{x} \mapsto f(x).$$

Dabei ist \bar{f} die eindeutige Abbildung, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^m \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ \mathbb{C}^n / \ker f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{im } f \end{array}$$

Es sei $\mathcal{B}'' = (v_1, \dots, v_{n-r})$ eine Basis von $\ker f = \ker A$. Wir ergänzen \mathcal{B}'' zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von \mathbb{C}^n . Dann ist $\mathcal{B}' = (\bar{v}_{n-r+1}, \dots, \bar{v}_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n / \ker f$. Ferner sei $\mathcal{C}' = (w_1, \dots, w_r)$ eine Basis von $\text{im } f = \text{im } A$, und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine ergänzte Basis von \mathbb{C}^m .

Es gilt nun, dass

$$M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}} = M_{i, \mathcal{C}', \mathcal{C}} M_{\bar{f}, \mathcal{B}', \mathcal{C}'} M_{p, \mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

Dabei ist die darstellende Matrix $A = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}} \in M_r(\mathbb{C})$ invertierbar, da \bar{f} ein Isomorphismus ist. Außerdem gelten

$$M_{p, \mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} \in M(r \times n, \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad M_{i, \mathcal{C}', \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \in M(m \times r, \mathbb{C}).$$

Somit gilt insgesamt, dass

$$M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit den beiden Basiswechselmatrizen $U_1 = M_{\text{id}_{\mathbb{C}^m}, \mathcal{E}, \mathcal{S}_m}$ und $U_2 = M_{\text{id}_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{S}_n, \mathcal{B}}$ erhalten wir nun, dass

$$A = M_{f, \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m} = M_{\text{id}_{\mathbb{C}^m}, \mathcal{E}, \mathcal{S}_m} M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{E}} M_{\text{id}_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{S}_n, \mathcal{B}} = U_1 \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2.$$

Die Spalten von U_2 sind genau die Basis \mathcal{B} , und die Spalten von U_1^{-1} sind genau die Basis \mathcal{E} . Die Matrizen U_1 und U_2 sind also genau dann unitär, falls die beiden Basen \mathcal{B} und \mathcal{E} jeweils orthonormal sind. Da Basisergänzung auch für Orthonormalbasen funktioniert, lassen sich \mathcal{B} und \mathcal{E} zusätzlich zu den bisherigen Bedingungen als orthonormal wählen. \square

Es seien nun A' , \tilde{U}_1 und \tilde{U}_2 wie in Lemma 2. Es sei $A' = SV$ die Polarzerlegung von A , wobei $S \in M_r(\mathbb{C})$ hermitesch und positiv semidefinit ist, und $V \in U(r)$ unitär. Da S hermitesch ist, gibt es eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^r besteht aus Eigenvektoren von S , wobei alle Eigenwerte von S reell sind. Es gibt also $W \in U(r)$ und $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$ mit

$$S = WDW^{-1} \quad \text{wobei} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{pmatrix}.$$

Da S positiv semidefinit ist, gilt dabei $d_1, \dots, d_r \geq 0$. Da A' invertierbar ist, gilt dies auch für S , weshalb sogar bereits $d_1, \dots, d_r > 0$ gilt. Durch passende Nummerierung der Eigenwerte können wir ferner davon ausgehen, dass $d_1 \geq \dots \geq d_r > 0$ gilt. Wir erhalten nun insgesamt, dass

$$\begin{aligned} A &= \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} SV & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} WDW^{-1}V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{U}_2 \\ &= \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \tilde{U}_2. \end{aligned}$$

Die Matrix $W^{-1}V$ ist unitär, da W und V unitär sind. Da W und $W^{-1}V$ unitär sind, gilt dies auch für die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Somit sind auch

$$U_1 = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2' = \tilde{U}_2 \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

unitär. Mit $U_2 = (U_2')^{-1} = (U_2')^* \in U(n)$ erhalten wir nun die gewünschte Zerlegung

$$A = \tilde{U}_1 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1}V & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \tilde{U}_2 = U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2' = U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^*$$

Damit ergibt sich nun auch, dass

$$A^* = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^* = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^{-1}.$$

Somit gilt

$$A^*A = U_2 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^{-1} U_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} = U_2 \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1}.$$

Die Matrix A^*A ist also ähnlich zu der Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$, wobei

$$D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r^2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A^*A sind folglich d_1^2, \dots, d_r^2 , sowie im Fall $n > r$ auch noch 0.

Aufgabe 3

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 1$: Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, dass $\beta(x, y) = 0$. Also gilt in diesem Fall $\beta = 0$, und somit $\text{rg } \beta = 0$ und $\text{sgnt } \beta = 0$.

Wir fixieren nun ein $n \geq 2$. Für die Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, \dots, e_n)$ von \mathbb{R}^n gilt $\beta(e_i, e_j) = 1$ für alle $i \neq j$, sowie $\beta(e_i, e_i) = 0$ für alle i . Die darstellende Matrix $A = M(\beta, \mathcal{S}) \in M_n(\mathbb{R})$ ist deshalb von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist reell und symmetrisch, und somit diagonalisierbar; es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Eigenwerte von A . Ferner sei n_+ die Anzahl der positiven Eigenwerte, n_- die Anzahl der negativen Eigenwerte und n_0 die Vielfachheit¹ des Eigenwerts 0. Dann gilt $n = n_+ + n_- + n_0$, $\text{rg } \beta = \text{rg } A = n - n_0 = n_+ + n_-$ und $\text{sgnt } A = n_+ - n_-$.

Zur Bestimmung der Eigenwerte von A bemerke man, dass in der Matrix $A + I$ alle Einträge gleich 1 sind. Es folgt, dass $\dim \ker(A + I) = n - 1$ gilt (eine Basis von $\ker(A + I)$ ist gegeben durch $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$), und somit $\mu_1 = -1$ ein Eigenwert von A zur Vielfachheit $n - 1$ ist. Ferner ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu_2 = n - 1$ (denn alle Zeilensummen von A sind $n - 1$). Da der Eigenraum zum Eigenwert μ_1 bereits Dimension $n - 1$ hat, kann der Eigenraum zum Eigenwert μ_2 höchstens Dimension 1 haben; folglich ist er eindimensional.

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \mu_1 = -1$ und $\lambda_n = \mu_2 = n - 1$. Somit gilt zum einen $n_0 = 0$, also $\text{rg } A = n - 0 = n$, und zum anderen gelten $n_+ = 1$ und $n_- = n - 1$, also $\text{sgnt } A = n_+ - n_- = 2 - n$.

¹Da A diagonalisierbar ist, muss hier nicht zwischen algebraischer und geometrischer Vielfachheit unterschieden werden.

Aufgabe 4

a)

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt

$$\beta(x, x) = \langle x, x \rangle + \langle Ax, Ax \rangle + \dots + \langle A^{k-1}x, A^{k-1}x \rangle = \|x\|^2 + \underbrace{\|Ax\|^2 + \dots + \|A^{k-1}x\|^2}_{\geq 0} \geq \|x\|^2 > 0,$$

da das Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist. Also ist β eine positiv definitive, symmetrische Bilinearform, d.h. ein Skalarprodukt.

Ferner gilt $\langle A^k x, A^k y \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ da A^k orthogonal ist, und somit auch

$$\begin{aligned} \beta(Ax, Ay) &= \langle Ax, Ay \rangle + \langle A^2x, A^2x \rangle + \dots + \langle A^{k-1}x, A^{k-1}y \rangle + \langle A^k x, A^k y \rangle \\ &= \langle Ax, Ay \rangle + \langle A^2x, A^2x \rangle + \dots + \langle A^{k-1}x, A^{k-1}y \rangle + \langle x, y \rangle = \beta(x, y). \end{aligned}$$

b)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ die zu A (bezüglich der Standardbasis) gehörige lineare Abbildung. Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S} = (e_1, \dots, e_n)$ gilt $A = M_{f, \mathcal{S}, \mathcal{S}}$.

Im vorherigen Aufgabenteil haben wir gezeigt, dass β ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist, und dass $f \in O(\mathbb{R}^n, \beta)$ gilt. Ist \mathcal{B} eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich β , so ist deshalb die Matrix $U = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ orthogonal. Für die Basiswechselmatrix $C = M_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{S}, \mathcal{B}} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt somit

$$U = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}} = M_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{S}, \mathcal{B}} M_{f, \mathcal{S}, \mathcal{S}} M_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}, \mathcal{S}} = M_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{S}, \mathcal{B}} M_{f, \mathcal{S}, \mathcal{S}} M_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{S}, \mathcal{B}}^{-1} = CAC^{-1}.$$