Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

14. Juni 2016

Übung 1.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie, dass genau dann $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, wenn $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$.

Übung 2.
Es seien V und W zwei reelle Vektorräume, und $f \colon V \to W$ sei $\mathbb{R}$-linear.

1. Zeigen Sie, dass $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$.
2. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass $(V_{\mathbb{C}})_\lambda(f_{\mathbb{C}}) = V_\lambda(f)_{\mathbb{C}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\operatorname{im} f)_{\mathbb{C}}$.
5. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übung 3.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

Übung 4.
Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{tr} A = 0$ und $\operatorname{tr} A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$.

Übung 5.
Zeigen Sie, dass es für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ein Polynom $P \in K[T]$ mit $\deg P \leq n-1$ gibt, so dass $A^{-1} = P(A)$.

Übung 6.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \notin \{2,3\}$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \frac{1}{6}(\operatorname{tr} A)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} A^3) \quad \text{für jedes } A \in \mathrm{M}_3(K).$$

(*Hinweis*: Wenn die Rechnungen zu kompliziert werden, dann macht man es falsch.)

Übung 7.
Für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sei

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Es sei

$$\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ S \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) S^{-1} \,\middle|\, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda_1, \ldots, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

die Menge der diagonalisierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen. Wir zeigen, dass $D_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dicht ist, d.h. dass es für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine diagonalisierbare Matrix $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Es sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist, also

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es seien $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$B(t) \coloneqq A + tS \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n) S^{-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t) \in \mathbb{C}$ mit

   $$\mu_i(t) \coloneqq \lambda_i + t z_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

   die Eigenwerte von $B(t)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen $\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.

3. Folgern Sie, dass $B(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

4. Folgern Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle $D \in B_\delta(A) \setminus \{A\}$ diagonalisierbar sind.

5. Folgern Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Wir wollen die Dichtheit von $\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ nutzen, um den Satz von Cayley-Hamilton zu zeigen:

6. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$F \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \chi_A(A)$$

   stetig ist, wobei $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$ das charakteristische Polynom von A ist.

7. Zeigen Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
8. Zeigen Sie, dass $P(SAS^{-1}) = SP(A)S^{-1}$ für alle $P \in \mathbb{C}[T]$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Folgern Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Matrix $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$.
9. Folgern Sie, dass $F(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Übung 8.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f\colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\Phi_V : V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle$$
ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.
2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* $\mathbb{R}$-linear ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ $\mathbb{R}$-linear ist, und dass
$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$
4. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate, wenn V und W unitäre Vektorräume sind?

Übung 9.
Es sei $V := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Ferner sei $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.
2. Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.
3. Zeigen Sie, dass $U^\perp = 0$. Folgern Sie, dass $V \neq U \oplus U^\perp$. (*Hinweis*: Betrachten Sie für $g \in U^\perp$ die Funktion $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = t^2 g(t)$.)
4. Zeigen Sie ferner, dass $V/(U \oplus U^\perp)$ eindimensional ist.

Übung 10.
Es sei

$$W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Ferner sie

$$V := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in W \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

der Untervektorraum der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von W ist.

2. Zeigen Sie für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$

   (*Hinweis:* Zeigen sie zunächst, dass $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.)

3. Zeigen sie, dass

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n$$

   ein Skalarprodukt auf V definiert.

4. Es sei

$$R\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

   der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.

5. Zeigen Sie, dass R keine Eigenwerte besitzt.

6. Es sei

$$S\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

   Zeigen Sie, dass S ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.

7. Zeigen Sie, dass S diagonalisierbar ist.

8. Es sei

$$U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

   Bestimmen Sie $U^\perp$ und entscheiden Sie, ob $V = U \oplus U^\perp$.

9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Übung 11.

1. Zeigen Sie, dass durch
$$\sigma(A,B) \coloneqq \operatorname{tr}\left(A^T B\right) \quad \text{für alle } A,B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$
ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit
$$(E_{ij})_{kl} \coloneqq \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i,j,k,l \leq n$$
eine Orthonormalbasis von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezüglich σ bilden.

3. Es sei
$$S_+ \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$
der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und
$$S_- \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$
der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$
und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 12.

Für je zwei K-Vektorräume V und W sei
$$\mathrm{Bil}(V,W) \coloneqq \{b\colon V \times W \to K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$
der Raum der Bilinearformen $V \times W \to K$.

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung
$$F\colon \mathrm{Bil}(V,W) \to \mathrm{Bil}(W,V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w,v) = b(v,w)$$
ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

2. Es sei $b \in \mathrm{Bil}(V,W)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass b ein lineare Abbildung
$$\Phi_{V,W}(b)\colon V \to W^*, \quad v \mapsto b(v,-)$$
induziert. Dabei ist
$$b(v,-)\colon W \to K, \quad w \mapsto b(v,w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\Phi_{V,W}\colon \mathrm{Bil}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$
ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(V, W^*) \to \mathrm{Hom}(W, V^*)$$

an.

Wir betrachten nun den Fall $W = V^*$.

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e\colon V \times V^* \to K, \quad (v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform e einer linearen Abbildung $V \to V^{**}$, sowie einer linearen Abbildung $V^* \to V^*$. Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

Übung 13.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an, und zeigen sie ihre Linearität.

2. Zeigen Sie für jeden K-Vektorraum U, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon U \times U^* \to K, \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

Übung 14.
1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma\colon \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) := \mathrm{tr}(AB)$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Zeigen Sie, dass σ in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in \mathrm{M}_n(K).$$