

# Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

16. Juni 2016

## Übung 1.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Ist  $f^2 = f$ , so ist  $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$ , und es gilt  $\operatorname{im} f = V_1(f)$  und  $\ker f = V_0(f)$ .
2. Ist  $f^2 = \operatorname{id}_V$ , so ist  $f$  diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten 1 und  $-1$ .
3. Sind  $\lambda, \mu \in K$  mit  $\lambda \neq \mu$  und  $(f - \lambda)(f - \mu) = 0$ , so ist  $f$  diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten  $\lambda$  und  $\mu$ . Inwiefern sind die vorherigen beiden Aufgabenteile Sonderfälle hiervon?

## Übung 2.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen allgemein gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

1. Ist  $V = V_1 \oplus V_2$  für Untervektorräume  $V_1, V_2 \subseteq V$ , so gilt für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  die Zerlegung

$$U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2).$$

2. Ist  $V = U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$  mit  $W_1 \supseteq W_2$ , so ist

$$W_1 = (U_2 \cap W_1) \oplus W_2.$$

3. Ist  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus und  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invaranter Untervektorraum, so gibt es einen  $f$ -invarianten Untervektorraum  $W \subseteq V$  mit  $V = U \oplus W$ .

4. Für alle Untervektorräume  $W, U_1, U_2 \subseteq V$  mit  $U_1 \subseteq U_2$  gilt

$$(U_1 + W) \cap U_2 = U_1 + (W \cap U_2).$$

5. Ist  $\mathcal{E} \subseteq V$  ein Erzeugendensystem und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so ist die Einschränkung  $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cap U$  ein Erzeugendensystem von  $U$ .

6. Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von Untervektorräumen  $U_i \subseteq V$  mit  $V = \sum_{i \in I} U_i$  und  $U_i \cap U_j = 0$  für  $i \neq j$ , so ist  $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$ .

### Übung 3.

Es sei  $V$  ein Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Es sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $f$ -invarianten Untervektorräumen, und  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:

1. Auch der Schnitt  $\bigcap_{i \in I} U_i$  ist  $f$ -invariant.
2. Auch die Summe  $\sum_{i \in I} U_i$  ist  $f$ -invariant.
3.  $f$  induziert eine lineare Abbildung

$$\bar{f}: V/U \rightarrow V/U, \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

### Übung 4.

Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ . Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1.  $f$  ist diagonalisierbar.
2. Für jeden  $f$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  gibt es einen  $f$ -invarianten Untervektorraum  $W \subseteq V$  mit  $V = U \oplus W$ .

### Übung 5.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Es sei  $\pi: V \rightarrow V/U, v \mapsto [v]$  die kanonische Projektion.

1. Es sei  $(b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , und für eine Teilmenge  $J \subseteq I$  sei  $(b_j)_{j \in J}$  eine Basis von  $U$ . Zeigen Sie, dass  $([b_i])_{i \in I \setminus J}$  eine Basis von  $V/U$  ist.
2. Es sei  $(b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $U$  und  $(c_j)_{j \in J}$  eine Basis von  $V/U$ , wobei  $I \cap J = \emptyset$ . Für  $j \in J$  sei  $b_j \in V$  mit  $\pi(b_j) = c_j$ . Zeigen Sie, dass  $(b_l)_{l \in L}$  für  $L := I \cap J$  ist eine Basis von  $V$  ist.

### Übung 6.

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von Untervektorräumen  $U_i \subseteq V$ . Zeigen Sie, dass genau dann  $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$ , wenn  $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$ .

### Übung 7.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei reelle Vektorräume, und  $f: V \rightarrow W$  sei  $\mathbb{R}$ -linear.

1. Zeigen Sie, dass  $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$ .
2. Folgern Sie, dass  $f_{\mathbb{C}}$  genau dann injektiv ist, wenn  $f$  injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass  $(V_{\mathbb{C}})_{\lambda}(f_{\mathbb{C}}) = V_{\lambda}(f)_{\mathbb{C}}$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

4. Zeigen Sie, dass  $\text{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\text{im } f)_{\mathbb{C}}$ .
5. Folgern Sie, dass  $f_{\mathbb{C}}$  genau dann surjektiv ist, wenn  $f$  surjektiv ist.

#### Übung 8.

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann diagonalisierbar ist, wenn  $f_{\mathbb{C}}$  diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

#### Übung 9.

Es sei

$$\iota: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X], \quad \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

die Teilmengeninklusion.

1. Zeigen Sie, dass  $\iota$   $\mathbb{R}$ -linear ist.
2. Zeigen Sie, dass  $\iota$  einen Isomorphismus  $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}[X]$  von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen induziert.

#### Übung 10.

Es sei  $A \in M_2(\mathbb{R})$  mit  $\text{tr } A = 0$  und  $\text{tr } A^2 = -2$ . Bestimmen Sie  $\det A$ .

#### Übung 11.

Zeigen Sie, dass es für  $A \in \text{GL}_n(K)$  ein Polynom  $P \in K[T]$  mit  $\deg P \leq n-1$  gibt, so dass  $A^{-1} = P(A)$ .

#### Übung 12.

Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char } K \notin \{2, 3\}$ . Zeigen Sie, dass

$$\det A = \frac{1}{6}(\text{tr } A)^3 - \frac{1}{2}(\text{tr } A^2)(\text{tr } A) + \frac{1}{3}(\text{tr } A^3) \quad \text{für jedes } A \in M_3(K).$$

(Hinweis: Wenn die Rechnungen zu kompliziert werden, dann macht man es falsch.)

#### Übung 13.

Für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  sei

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Es sei

$$D_n(\mathbb{C}) := \{S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1} \mid S \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\} \subseteq M_n(\mathbb{C})$$

die Menge der diagonalisierbaren komplexen  $n \times n$ -Matrizen. Wir zeigen, dass  $D_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$  dicht ist, d.h. dass es für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  und jedes  $\varepsilon > 0$  eine diagonalisierbare Matrix  $D \in D_n(\mathbb{C})$  mit  $\|A - D\| < \varepsilon$  gibt.

Es sei  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , so dass  $SAS^{-1}$  eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ist, also

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es seien  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden und

$$B(t) := A + tS \text{diag}(z_1, \dots, z_n)S^{-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t) \in \mathbb{C}$  mit

$$\mu_i(t) := \lambda_i + tz_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

die Eigenwerte von  $B(t)$  ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen  $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden sind.
3. Folgern Sie, dass  $B(t)$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$  diagonalisierbar ist.
4. Folgern Sie, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass alle  $D \in B_\delta(A) \setminus \{A\}$  diagonalisierbar sind.
5. Folgern Sie, dass es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $D \in D_n(\mathbb{C})$  mit  $\|A - D\| < \varepsilon$  gibt.

Wir wollen die Dichtheit von  $D_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$  nutzen, um den Satz von Cayley-Hamilton zu zeigen:

6. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \chi_A(A)$$

stetig ist, wobei  $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$  das charakteristische Polynom von  $A$  ist.

7. Zeigen Sie, dass  $F(D) = 0$  für jede Diagonalmatrix  $D \in M_n(\mathbb{C})$ .
8. Zeigen Sie, dass  $P(SAS^{-1}) = SP(A)S^{-1}$  für alle  $P \in \mathbb{C}[T]$ ,  $A \in M_n(\mathbb{C})$  und  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Folgern Sie, dass  $F(D) = 0$  für jede Matrix  $D \in D_n(\mathbb{C})$ .
9. Folgern Sie, dass  $F(A) = 0$  für alle  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

#### Übung 14.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei  $f: V \rightarrow W$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  an. Zeigen Sie, dass  $f^*$   $\mathbb{R}$ -linear ist.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$   $\mathbb{R}$ -linear ist, und dass

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

4. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , wenn also  $V$  und  $W$  endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

### Übung 15.

Es sei  $V := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  der Raum der stetigen Funktionen  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ferner sei  $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ .

1. Zeigen Sie, dass  $U$  ein Untervektorraum von  $V$  ist.

2. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t) dt \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

3. Zeigen Sie, dass  $U^\perp = 0$ . Folgern Sie, dass  $V \neq U \oplus U^\perp$ . (Hinweis: Betrachten Sie für  $g \in U^\perp$  die Funktion  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(t) = t^2 g(t)$ .)

4. Zeigen Sie ferner, dass  $V/(U \oplus U^\perp)$  eindimensional ist.

### Übung 16.

Es sei

$$W = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Ferner sei

$$V := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in W \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

der Untervektorraum der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass  $V$  ein Untervektorraum von  $W$  ist.

2. Zeigen Sie für alle  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$ , dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$

(Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass  $ab \leq (a^2 + b^2)/2$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .)

3. Zeigen sie, dass

$$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

4. Es sei

$$R: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass  $R$  ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob  $R$  selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.

5. Zeigen Sie, dass  $R$  keine Eigenwerte besitzt.

6. Es sei

$$S: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, dass  $S$  ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob  $R$  selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.

7. Zeigen Sie, dass  $S$  diagonalisierbar ist.

8. Es sei

$$U := \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Bestimmen Sie  $U^\perp$  und entscheiden Sie, ob  $V = U \oplus U^\perp$ .

9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $U$ .

### Übung 17.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma(A, B) := \text{tr}(A^T B) \quad \text{für alle } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

ein Skalarprodukt auf  $M_n(\mathbb{R})$  definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis  $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  von  $M_n(\mathbb{R})$  mit

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k, l \leq n$$

eine Orthonormalbasis von  $M_n(\mathbb{R})$  bezüglich  $\sigma$  bilden.

3. Es sei

$$S_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$S_- := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$M_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

und dass die Summe orthogonal ist.

**Übung 18.**

Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und

$$O(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid ff^* = \text{id}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $O(V)$  eine Untergruppe von  $\text{GL}(V)$  bildet.

**Übung 19.**

Zeigen Sie, dass für eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1.  $A$  ist invertierbar mit  $A^{-1} = A^*$ .
2.  $AA^* = I$ .
3.  $A^*A = I$ .
4. Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{K}^n$ .
5. Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{K}^n$ .

**Übung 20.**

Für je zwei  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  sei

$$\text{Bil}(V, W) := \{b: V \times W \rightarrow K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen  $V \times W \rightarrow K$ .

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

$$F: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Bil}(W, V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w, v) = b(v, w)$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.

2. Es sei  $b \in \text{Bil}(V, W)$  eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass  $b$  eine lineare Abbildung

$$\Phi_{V,W}(b): V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto b(v, -)$$

induziert. Dabei ist

$$b(v, -): W \rightarrow K, \quad w \mapsto b(v, w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{V,W}: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus

$$\text{Hom}(V, W^*) \rightarrow \text{Hom}(W, V^*)$$

an.

Wir betrachten nun den Fall  $W = V^*$ .

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e: V \times V^* \rightarrow K, \quad (v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform  $e$  einer linearen Abbildung  $V \rightarrow V^{**}$ , sowie einer linearen Abbildung  $V^* \rightarrow V^*$ . Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

### Übung 21.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  an, und zeigen sie ihre Linearität.

2. Zeigen Sie für jeden  $K$ -Vektorraum  $U$ , dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: U \times U^* \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v) \quad \text{für alle } v \in U, \varphi \in U^*$$

eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

### Übung 22.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma: M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) := \text{tr}(AB)$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Zeigen Sie, dass  $\sigma$  in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in M_n(K).$$