

# Lösung zu Blatt 6, Aufgabe 2

Jendrik Stelzner

15. Juni 2016

## 1 Existenz des Eigenvektors

Wir bemerken zunächst, dass der Term  $\langle S(x), x \rangle / \|x\|^2$  reell ist, da  $\langle S(x), x \rangle$  wegen

$$\langle S(x), x \rangle = \langle x, S(x) \rangle = \overline{\langle S(x), x \rangle}$$

reell ist, wobei wir für die erste Gleichheit die Selbstadjungiertheit von  $S$  nutzen.

Es sei  $y \in V$  beliebig aber fest. Da  $x \neq 0$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\|x + ty\| \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit  $|t| < \varepsilon$ . (Denn nach der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt  $\|x + ty\| \geq \|x\| - t\|y\|$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .) Deshalb können wir die Funktion

$$h: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \text{mit} \quad h(t) := \frac{\langle S(x + ty), x + ty \rangle}{\|x + ty\|^2} \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

definieren. Die Abbildung  $h$  ist differenzierbar, denn

$$h(t) = \frac{\langle S(x + ty), x + ty \rangle}{\|x + ty\|^2} = \frac{\langle S(x), x \rangle + t(\langle S(y), x \rangle + \langle S(x), y \rangle) + t^2 \langle S(y), y \rangle}{\|x\|^2 + 2t \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + t^2 \|y\|^2}$$

ist eine rationale Funktion in  $t$ . Dabei muss  $h'(0) = 0$ , da  $h$  nach Wahl von  $x$  ein lokales (und sogar globales) Maximum an  $t = 0$  hat.

Zur Berechnung von  $h'$  setzen wir  $a = \langle S(x), x \rangle$ ,  $b = \langle S(y), x \rangle + \langle S(x), y \rangle$ ,  $c = \langle S(y), y \rangle$ ,  $d = \|x\|^2$ ,  $e = \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$  und  $f = \|y\|^2$ , also

$$h(t) = \frac{a + bt + ct^2}{d + 2et + ft^2} \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Dann ergibt sich, dass

$$h'(t) = \frac{(b + 2ct)(d + 2et + ft^2) - (a + bt + ct^2) \cdot (2e + 2ft)}{(d + 2et + ft^2)^2} \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

womit insbesondere

$$h'(0) = \frac{bd - 2ae}{d^2}.$$

Also ist  $h'(0) = 0$  äquivalent dazu, dass

$$(\langle S(y), x \rangle + \langle S(x), y \rangle) \|x\|^2 = 2 \langle S(x), x \rangle \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle).$$

Wegen der Selbstadjungiertheit von  $S$  ist dabei

$$\langle S(y), x \rangle + \langle S(x), y \rangle = \langle y, S(x) \rangle + \langle S(x), y \rangle = 2 \operatorname{Re}(\langle S(x), y \rangle).$$

Also ist

$$\operatorname{Re}(\langle S(x), y \rangle) \|x\|^2 = \langle S(x), x \rangle \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle).$$

Indem wir durch  $\|x\|^2$  teilen (was wegen  $x \neq 0$  möglich ist), erhalten wir, dass

$$\operatorname{Re}(\langle S(x), y \rangle) = \frac{\langle S(x), x \rangle}{\|x\|^2} \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) = \operatorname{Re} \left( \left\langle \frac{\langle S(x), x \rangle}{\|x\|^2} x, y \right\rangle \right),$$

und somit

$$\operatorname{Re} \left( \left\langle S(x) - \frac{\langle S(x), x \rangle}{\|x\|^2} x, y \right\rangle \right) = 0.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $y$  gilt dies insbesondere für  $S(x) - (\langle S(x), x \rangle / \|x\|^2) x$ . Damit erhalten wir, dass

$$\left\| S(x) - \frac{\langle S(x), x \rangle}{\|x\|^2} x \right\|^2 = 0,$$

weshalb bereits

$$S(x) = \frac{\langle S(x), x \rangle}{\|x\|^2} x$$

gilt.

## 2 Diagonalisierbarkeit

Die Folgerung, dass  $S$  diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist, ergibt sich nun per Induktion über  $\dim V$ :

Ist  $\dim V = 0$  oder  $\dim V = 1$ , so ist dies ohnehin klar.

Es sei also  $\dim V \geq 2$ , und die Aussage gelte für alle selbstadjungierten Endomorphismen von Skalarprodukträumen echt kleinerer Dimension. Da die Abbildung

$$h: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle S(x), x \rangle$$

stetig ist, ergibt sich aus der Kompaktheit der Einheitssphäre von  $V$ , dass es ein  $b_1 \in V$  mit  $\|b_1\| = 1$  gibt, so dass

$$h(b_1) = \max_{y \in V, \|y\|=1} h(y).$$

Für alle  $y \in V$  mit  $y \neq 0$  ist  $\|y/\|y\|\| = 1$ , und somit

$$\frac{S(y), y}{\|y\|^2} = \langle S(\frac{y}{\|y\|}), \frac{y}{\|y\|} \rangle = h \left( \frac{y}{\|y\|} \right) \leq h(b_1) = \langle S(b_1), b_1 \rangle = \frac{\langle S(b_1), b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}.$$

Folglich ist

$$\frac{\langle S(b_1), b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} = \max_{y \in V, y \neq 0} \frac{\langle S(y), y \rangle}{\|y\|^2}.$$

Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist daher  $b_1$  ein Eigenvektor von  $S$  zum reellen Eigwert  $\lambda_1 = \langle S(b_1), b_1 \rangle$ . Per Konstruktion ist  $b_1$  auch normiert.

Es sei nun  $L := \mathbb{K}b_1$  der eindimensionale Span von  $b_1$ . Da  $b_1$  ein Eigenvektor von  $S$  ist, ist  $L$  invariant unter  $S = S^*$ . Damit ist auch das orthogonale Komplement  $L^\perp$  invariant unter  $S^* = S$ . Da deshalb  $(S|_{L^\perp})^* = (S^*)|_{L^\perp} = S|_{L^\perp}$  ist auch die Einschränkung  $S|_{L^\perp}$  selbstadjungiert.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Orthonormalbasis  $(b_2, \dots, b_n)$  von  $L^\perp$ , bestehend aus Eigenvektoren von  $S|_{L^\perp}$  zu reellen Eigenwerten  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Wegen der Orthogonalität von  $L$  und  $L^\perp$  ist deshalb  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , wobei  $b_i$  ein Eigenvektor von  $S$  zum reellen Eigenwert  $\lambda_i$  ist.

### 3 Idee hinter dem Vorgehen

Die Idee hinter der gegebene Konstruktion ist relativ einfach:

Aus abstrakten Gründen ergibt sich, dass selbstadjungierte Endomorphismen im Endlichdimensionalen für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  über eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren verfügen (denn selbstadjungierte Endomorphismen sind normal). Eine mögliche Argumentation ist die folgende: Wegen der Selbstadjungiertheit von  $S$  muss aber für jeden Eigenwert  $\lambda$  mit zugehörigen Eigenvektor  $x \in V$  die Gleichheit

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle S(x), x \rangle = \langle x, S(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

gelten, und wegen  $x \neq 0$  somit  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Selbstadjungierte Endomorphismen haben also nur reelle Eigenwerte.

Für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ergibt sich durch Komplexifizierung, dass wegen  $(S_{\mathbb{C}})^* = (S^*)_{\mathbb{C}}$  auch  $S_{\mathbb{C}}$  selbstadjungiert ist. Also hat  $S_{\mathbb{C}}$  ist  $S$  diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Dann ist auch schon  $S$  diagonalisierbar (mit den gleichen reellen Eigenwerten). Da die Eigenräume von  $S$  orthogonal zueinander sind (da  $S$  normal ist), ist  $V$  die orthogonale Summe der Eigenräume von  $S$ . Damit erhalten wir auch für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Weiß man nun aus abstrakten Gründen, dass  $S$  diagonalisierbar (mit reellen Eigenwerten) sein muss, so lässt ein Verfahren zum Ermitteln eines Eigenvektors konstruieren: Ist nämlich  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $S$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , so ist gilt für  $x = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$  mit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , dass

$$\|x\|^2 = \|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2$$

und

$$\langle S(x), x \rangle = \langle a_1 \lambda_1 b_1 + \dots + a_n \lambda_n b_n, a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \rangle = \lambda_1 |a_1|^2 + \dots + \lambda_n |a_n|^2$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{\langle S(x), x \rangle}{\|x\|^2} &= \frac{\lambda_1 |a_1|^2 + \dots + \lambda_n |a_n|^2}{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2} \\ &\leq \frac{(\max_{i=1, \dots, n} \lambda_i) (|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)}{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2} = \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn  $a_i = 0$  für alle jene  $1 \leq i \leq n$ , für die  $\lambda_i$  nicht der maximale Eigenwert ist. In anderen Worten: Gleichheit gilt genau für die Eigenvektoren zum maximalen Eigenwert, und in diesem Fall ist  $\langle S(x), x \rangle / \|x\|^2$  dieser maximale Eigenwert.

Das in dieser Aufgabe angegebene Verfahren ermittelt also für einen selbstadjungierten Endomorphismen einen Eigenvektor zum maximalen auftretenden Eigenwert. Iteration dieses Verfahrens liefert deshalb eine Basis aus Eigenvektoren, so dass die Eigenvektoren nach der Größe des zugehörigen Eigenwertes geordnet sind.