Alternative Lösungen
Zettel 3

Jendrik Stelzner

13. Mai 2016

Zusammenfassung

Wir geben alternative Lösungen für Zettel 3, Aufgaben 3, Teile (v) und (vi), in Form kommutativer Diagramme.

1 Hilfsaussagen

Wir nennen hier explizit einige Aussagen die wir im Folgenden nutzen werden.

Lemma 1. *Es seien V und W zwei K-Vektorräume, und es sei $B = (b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Sind $f, g\colon V \to W$ linear mit $f(b_i) = g(b_i)$ für alle $i \in I$, so ist bereits $f = g$.*

Lemma 2. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}}\colon V \to K^n$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, wobei $(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis des K^n bezeichnet. Außerdem ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus.*

Lemma 3. *Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ eine Basis von W. Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt:*

1. *Es gibt eine eindeutige Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$, so dass das folgende Diagram kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "A\cdot"] & K^m \end{tikzcd}$$

   (Hier bezeichnet $A\cdot$ die Multiplikation mit A von links.)

2. *Es gilt $A = \mathrm{M}_{\mathcal{C} \longleftarrow \mathcal{B}}(f)$, d.h. A ist die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.*

2 Setup

Wir erinnern an Notationen, die wir im Folgenden nutzen werden:

Es seien V und W zwei endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Es seien

$$\iota_V : V \to V_{\mathbb{C}}, \quad v \mapsto v = v + i \cdot 0$$

und $\iota_W : W \to W_{\mathbb{C}}$ die kanonischen Inklusionen. (Hier nutzen wir bereits die Identifikation von V mit dem reellen Untervektorraum $\iota_V(V) \subseteq V_{\mathbb{C}}$.) Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von W. Dann ist $\mathcal{B}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$ und $\mathcal{C}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $W_{\mathbb{C}}$. (Hier nutzen wir die Identifikation von V mit dem reellen Untervektorraum $\iota(V) \subseteq V_{\mathbb{C}}$. Ohne diese Identifikation müssten wir hier sagen, dass

$$\iota_V(\mathcal{B}) = (\iota_V(b_1), \ldots, \iota_V(b_n)) = ((b_1, 0), \ldots, (b_n, 0))$$

eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$ ist, und dass

$$\iota_W(\mathcal{C}) = (\iota_W(c_1), \ldots, \iota_W(c_m)) = ((c_1, 0), \ldots, (c_m, 0))$$

eine $\mathbb{C}$-Basis von $W_{\mathbb{C}}$ ist.)

3 Alternative Lösung zu (v)

Es sei $f\colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, und $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ die induzierte $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Die Abbildung $f_{\mathbb{C}}$ bringt also das folgende Diagram von $\mathbb{C}$-Vektorräumen zum kommutieren, und ist eindeutig mit dieser Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_V"'] & W \arrow[d, "\iota_W"] \\ V_{\mathbb{C}} \arrow[r, "f_{\mathbb{C}}"] & W_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

Es sei $A := M_{\mathcal{C} \longleftarrow \mathcal{B}}(f) \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$ die darstellende Matrix von f bezüglich der $\mathbb{R}$-Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W. Es bringt also A das folgende Diagram zum kommutieren, und ist die eindeutige $(m \times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{R}}_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{R}}_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnen $\Phi^{\mathbb{R}}_{\mathcal{B}}\colon V \to \mathbb{R}^n$ und $\Phi^{\mathbb{R}}_{\mathcal{C}}\colon W \to \mathbb{R}^m$ die eindeutigen $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismen mit

$$\Phi^{\mathbb{R}}_{\mathcal{B}}(b_j) = e_j \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \quad \text{und} \quad \Phi^{\mathbb{R}}_{\mathcal{C}}(c_i) = e_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq m.$$

Es gilt zu zeigen, dass $A = \mathrm{M}_{\mathcal{C} \longleftarrow \mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$. Dies bedeutet gerade, dass das folgende Diagram kommutieren soll:

$$\begin{tikzcd} V_{\mathbb{C}} \arrow[r, "f_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{B}}"'] & W_{\mathbb{C}} \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnen $\Phi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{B}}\colon V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^n$ und $\Phi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{C}}\colon W \to \mathbb{C}^m$ die eindeutigen $\mathbb{C}$-linearen Isomorphismen mit

$$\Phi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{B}}(b_j) = e_j \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \quad \text{und} \quad \Phi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{C}}(c_i) = e_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq m.$$