

# Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

1. Juli 2016

## Übung 1.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f, g: V \rightarrow V$  seien zwei Endomorphismen.

1. Es sei  $f \circ g = \text{id}_V$  und  $V$  sei endlichdimensional. Zeigen Sie, dass auch  $g \circ f = \text{id}_V$ .
2. Zeigen Sie, dass die Aussage nicht mehr notwendigerweise gilt, wenn  $V$  unendlichdimensional ist.

## Übung 2.

Es sei  $K$  ein endlicher Körper.

1. Geben Sie ein Polynom  $p \in K[X]$  an, so dass  $p \neq 0$  aber  $p(\lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in K$ .
2. Geben Sie ein Polynom  $p \in K[X]$  an, so dass  $\deg p \geq 1$ , aber  $p(\lambda) = 1$  für alle  $\lambda \in K$ .
3. Folgern Sie, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich ist.

## Übung 3.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume, so dass  $V$  endlichdimensional ist, und  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Dimensionsformel

$$\dim V = \dim \ker V + \dim \text{im } V.$$

## Übung 4.

Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  heißt *lokal nilpotent*, falls es für jedes  $v \in V$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f^n(v) = 0$  gibt.

1. Zeigen Sie, dass jeder nilpotente Endomorphismus auch lokal nilpotent ist.
2. Zeige Sie, dass 0 der einzige mögliche Eigenwert eines lokal nilpotenten Endomorphismus ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum  $V$  und einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  an, so dass  $f$  zwar lokal nilpotent, nicht aber nilpotent ist.
4. Zeigen Sie, dass jeder lokal nilpotente Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums bereits nilpotent ist.

### Übung 5.

Es sei  $K$  ein Körper.

1. Zeigen Sie für alle  $A, B \in M_n(K)$  die Gleichheit  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
2. Folgern Sie, dass die Spur invariant unter Konjugation ist, d.h. dass

$$\text{tr}(SAS^{-1}) = \text{tr}(A) \quad \text{für alle } A \in M_n(K) \text{ und } S \in \text{GL}_n(K).$$

### Übung 6.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Für alle  $k \in \mathbb{N}$  sei

$$R_k := \text{im } f^k \quad \text{und} \quad N_k := \ker f^k.$$

1. Zeigen Sie, dass  $R_0 = V$ , und dass  $R_i \supseteq R_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Es gibt also eine absteigende Kette

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq R_4 \supseteq \dots$$

von Untervektorräumen.

2. Zeigen Sie, dass für  $i \in \mathbb{N}$  mit  $R_i = R_{i+1}$  auch  $R_{i+1} = R_{i+2}$  gilt.
3. Folgern Sie: Gilt in der obigen absteigenden Kette einmal Gleichheit, also  $R_i = R_{i+1}$  für ein  $i \in \mathbb{N}$ , so stabilisiert die Kette bereits, d.h. es gilt  $R_j = R_i$  für alle  $j \geq i$ .
4. Zeigen Sie, dass  $N_0 = 0$ , und dass  $N_i \subseteq N_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Es gibt also eine aufsteigende Kette

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq N_4 \subseteq \dots$$

von Untervektorräumen.

5. Zeigen Sie, dass für  $i \in \mathbb{N}$  mit  $N_i = N_{i+1}$  auch  $N_{i+1} = N_{i+2}$  gilt.
6. Folgern Sie: Gilt in der obigen aufsteigenden Kette einmal Gleichheit, also  $N_i = N_{i+1}$  für ein  $i \in \mathbb{N}$ , so stabilisiert die Kette bereits, d.h. es gilt  $N_j = N_i$  für alle  $j \geq i$ .
7. Folgern Sie: Ist  $V$  endlichdimensional, so stabilisieren beiden Ketten.

### Übung 7.

Es seien  $f, g: V \rightarrow V$  zwei Endomorphismen eines  $K$ -Vektorraums  $V$ . Beweisen Sie entweder, dass die folgenden Aussagen im Allgemeinen gelten, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. Sind  $f$  und  $g$  diagonalisierbar, so ist auch  $f \circ g$  diagonalisierbar.
2. Kommutieren  $f$  und  $g$  und ist  $f \circ g$  diagonalisierbar, so ist  $f$  oder  $g$  diagonalisierbar.
3. Sind  $f$  und  $g$  diagonalisierbar, so ist auch  $f + g$  diagonalisierbar.
4. Falls  $f$  und  $g$  kommutieren und diagonalisierbar sind, so ist auch  $f + g$  diagonalisierbar.
5. Falls  $f$  und  $g$  kommutieren und diagonalisierbar sind, so ist  $f \circ g$  invertierbar.
6. Ist  $f$  diagonalisierbar, so ist für jedes  $p \in K[X]$  auch  $p(f)$  diagonalisierbar.

### Übung 8.

1. Formulieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton.
2. Zeigen Sie den Satz für  $(2 \times 2)$ -Matrizen durch explizites Nachrechnen.
3. Zeigen Sie den Satz für Diagonalmatrizen.
4. Folgern Sie den Satz für diagonalisierbare Matrizen.

### Übung 9.

Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  heißt *algebraisch (über  $K$ )*, falls es ein Polynom  $P \in K[T]$  mit  $P \neq 0$  gibt, so dass  $P(f) = 0$  gilt.

1. Zeigen Sie, dass jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums algebraisch ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen  $K$ -Vektorraum  $V$  und einen Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  an, der nicht algebraisch ist.
3. Entscheiden Sie, ob die lineare Abbildung  $K[X] \rightarrow K[X], p \mapsto X \cdot p$  algebraisch ist.
4. Zeigen Sie, dass ein diagonalisierbarer Endomorphismus genau dann algebraisch ist, wenn er nur endlich viele Eigenwerte hat.

### Übung 10.

Es sei  $V$  ein Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Es sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $f$ -invarianten Untervektorräumen, und  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:

1. Auch der Schnitt  $\bigcap_{i \in I} U_i$  ist  $f$ -invariant.
2. Auch die Summe  $\sum_{i \in I} U_i$  ist  $f$ -invariant.

### Übung 11.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $f: V \rightarrow V$  ein Automorphismus und  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum.

1. Zeigen Sie: Ist  $U$  endlichdimensional, so ist  $U$  auch invariant unter  $f^{-1}$ .
2. Zeigen Sie, dass die Aussage nicht gelten muss, falls  $U$  unendlichdimensional ist.

## Direkte Summen

### Übung 12.

Es seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass sich durch jeden idempotenten Endomorphismus  $e: V \rightarrow V$  (d.h.  $e^2 = e$ ) eine Zerlegung

$$V = \operatorname{im} e \oplus \ker e$$

ergibt, und dass

$$e(v + w) = v \quad \text{für alle } v \in \operatorname{im} e \text{ und } w \in \ker e.$$

2. Zeigen Sie, dass für jeden idempotenten Endomorphismus  $e: V \rightarrow V$  auch  $\operatorname{id}_V - e$  idempotent ist, und dass  $\operatorname{im}(\operatorname{id}_V - e) = \ker e$  und  $\ker(\operatorname{id}_V - e) = \operatorname{im} e$ .
3. Es sei  $(U_1, U_2)$  ein Paar von Untervektorräumen  $U_1, U_2 \subseteq V$  mit  $V = U_1 \oplus U_2$ . Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Endomorphismus  $p_{U_1, U_2}: V \rightarrow V$  gibt, so dass

$$p_{U_1, U_2}(u_1 + u_2) = u_1 \quad \text{für alle } u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2.$$

4. Zeigen Sie, dass die obigen Konstruktionen eine Bijektion

$$\left\{ (U_1, U_2) \left| \begin{array}{l} U_1, U_2 \subseteq V \text{ sind} \\ \text{Untervektorräume} \\ \text{mit } V = U_1 \oplus U_2 \end{array} \right. \right\} \longleftrightarrow \{e \in \operatorname{End}(V) \mid e \text{ ist idempotent}\},$$

$$(U_1, U_2) \longmapsto p_{U_1, U_2}$$

$$(\operatorname{im} e, \ker e) \longleftarrow e$$

ergeben.

5. Auf der linken Seite der obigen Bijektion gibt es eine Involution  $(U_1, U_2) \mapsto (U_2, U_1)$ . Zeigen Sie, dass dies unter der gegebenen Bijektion der Involutions  $e \mapsto \operatorname{id}_V - e$  auf der rechten Seite entspricht.

### Übung 13.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus mit  $f^2 = 1$ .

1. Zeigen Sie für  $\operatorname{char} K \neq 2$ , dass  $f$  diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 1 und  $-1$  ist, dass also  $V = V_1(f) \oplus V_{-1}(f)$ .
2. Zeigen Sie, dass die Aussage für  $\operatorname{char} K = 2$  nicht mehr gelten muss.

### Übung 14.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume, und  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, die ein Rechtsinverses  $g: W \rightarrow V$  besitzt. Zeigen Sie auf die folgenden beiden Weisen, dass

$$V = \ker f \oplus \operatorname{im} g$$

1. Durch explizites Nachrechnen, dass  $V = \ker f + \operatorname{im} g$  und  $\ker f \cap \operatorname{im} g = 0$ .
2. Durch geschickte Betrachtung des Endomorphismus  $gf: V \rightarrow V$ .

### Übung 15.

Zeigen Sie im Folgenden jeweils, dass der Vektorraum  $V$  die direkte Summe der Untervektorräume  $U_1$  und  $U_2$  ist, indem Sie einen idempotenten Endomorphismus  $e: V \rightarrow V$  mit  $U_1 = \operatorname{im} e$  und  $U_2 = \ker e$  angeben.

1. Es sei  $\operatorname{char} K \neq 2$ ,  $V := M_n(K)$  der Vektorraum der  $(n \times n)$ -Matrizen über  $K$ ,

$$U_1 := \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$U_2 := \{A \in M_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

2. Es sei  $V := \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  der Vektorraum der reellwertigen Folgen auf  $\mathbb{R}$ , sowie

$$U_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der geraden Funktionen und

$$U_2 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der ungeraden Funktionen.

3. Die Ebene  $V = \mathbb{R}^2$  und als Untervektorräume die beiden Geraden

$$U_1 := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Der reelle Vektorraum  $V := \mathbb{C}(I, \mathbb{R})$  der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall  $I = [0, 1]$  mit den Untervektorräumen

$$U_1 := \{f \in V \mid f(0) = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{f \in V \mid f \text{ ist konstant}\}.$$

5. Für einen Körper mit  $\operatorname{char} K \nmid n$  der Vektorraum  $V := M_n(K)$  der  $(n \times n)$ -Matrizen über  $K$ , und die Untervektorräume

$$U_1 := \mathfrak{sl}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \operatorname{tr} A = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := KI = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$$

der spurlosen Matrizen und der Skalarmatrizen.

6. Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, so dass es  $\lambda, \mu \in K$  mit  $\lambda \neq \mu$  und  $(f - \lambda)(f - \mu) = 0$  gibt. Es seien  $U_1 = V_\lambda(f)$  und  $U_2 = V_\mu(f)$ .

(Hinweis: Die Behauptung ist also, dass  $f$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda$  und  $\mu$  ist.)

### Übung 16.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen allgemein gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

1. Ist  $V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2$  für Untervektorräume  $U, W_1, W_2 \subseteq V$ , so ist  $W_1 = W_2$ .

2. Ist  $V = V_1 \oplus V_2$  für Untervektorräume  $V_1, V_2 \subseteq V$ , so gilt für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  die Zerlegung

$$U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2).$$

3. Ist  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus und  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum, so gibt es einen  $f$ -invarianten Untervektorraum  $W \subseteq V$  mit  $V = U \oplus W$ .

4. Für alle Untervektorräume  $W, U_1, U_2 \subseteq V$  mit  $U_1 \subseteq U_2$  gilt

$$(U_1 + W) \cap U_2 = U_1 + (W \cap U_2).$$

5. Sind  $U_1, U_2, W \subseteq V$  Untervektorräume mit  $U_1 \subseteq U_2$  und  $V = U_1 \oplus W$ , so ist

$$U_2 = U_1 \oplus (W \cap U_2).$$

6. Ist  $\mathcal{E} \subseteq V$  ein Erzeugendensystem von  $V$  und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so ist der Schnitt  $\mathcal{E} \cap U$  ein Erzeugendensystem von  $U$ .

7. Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von Untervektorräumen  $U_i \subseteq V$  mit  $V = \sum_{i \in I} U_i$  und  $U_i \cap U_j = 0$  für  $i \neq j$ , so ist  $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$ .

### Übung 17.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein diagonalisierbarer Endomorphismus von  $V$  (d.h. es gilt  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$ ). Dann ist für jeden  $f$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  die Einschränkung  $f|_U: U \rightarrow U$  diagonalisierbar, und es gilt  $U_\lambda(f|_U) = U \cap V_\lambda(f)$  für alle  $\lambda \in K$ .

### Übung 18.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Kollektion  $e_1, \dots, e_n \in \text{End}(V)$  von Endomorphismen heißt *complete set of orthogonal idempotents*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle  $i = 1, \dots, n$  ist  $e_i$  idempotent, also  $e_i^2 = e_i$  (*idempotents*).
- Für alle  $1 \leq i \neq j \leq n$  ist  $e_i e_j = 0$  (*orthogonal*).
- Es gilt  $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_n$  (*complete*).

1. Es sei  $e_1, \dots, e_n: V \rightarrow V$  ein *complete set of orthogonal idempotents*. Zeigen Sie, dass

$$V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n.$$

2. Es seien  $U_1, \dots, U_n \subseteq V$  Untervektorräume mit  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ . Zeigen Sie, dass es für alle  $i = 1, \dots, n$  einen eindeutigen Endomorphismus  $p_{U_1, \dots, U_n}^{(i)}: V \rightarrow V$  mit

$$p_{U_1, \dots, U_n}^{(i)}(u_1 + \dots + u_n) = u_i \quad \text{für alle } u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n,$$

gibt. Zeigen Sie ferner, dass  $p_{U_1, \dots, U_n}^{(1)}, \dots, p_{U_1, \dots, U_n}^{(n)}$  ein *complete set of orthogonal idempotents* ist.

3. Zeigen Sie, dass die obigen Konstruktionen wie folgt eine Bijektion ergeben:

$$\left\{ (U_1, \dots, U_n) \left| \begin{array}{l} U_1, \dots, U_n \subseteq V \\ \text{sind Untervek-} \\ \text{torräume mit} \\ U = U_1 \oplus \dots \oplus U_n \end{array} \right. \right\} \longleftrightarrow \left\{ (e_1, \dots, e_n) \left| \begin{array}{l} e_1, \dots, e_n \in \text{End}(V) \\ \text{ist ein complete set} \\ \text{of orthogonal} \\ \text{idempotents} \end{array} \right. \right\}$$

$$(U_1, \dots, U_n) \longmapsto (p_{U_1, \dots, U_n}^{(1)}, \dots, p_{U_1, \dots, U_n}^{(n)})$$

$$(\text{im } e_1, \dots, \text{im } e_n) \longleftarrow (e_1, \dots, e_n)$$

4. Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Es sei  $e_1, \dots, e_n \in K$  das *complete set of orthogonal idempotents*, dass der Zerlegung

$$V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(f)$$

entspricht, d.h. für alle  $i = 1, \dots, n$  sei  $e_i = p_{V_{\lambda_1}(f), \dots, V_{\lambda_n}(f)}^{(i)}$ . Geben Sie eine Formel an, durch die sich  $e_i$  aus  $f$  ergibt.

### Übung 19.

Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ . Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1.  $f$  ist diagonalisierbar.
2. Für jeden  $f$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  gibt es einen  $f$ -invarianten Untervektorraum  $W \subseteq V$  mit  $V = U \oplus W$ .

### Übung 20.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $e_1, \dots, e_n \in \text{End}(V)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle  $i = 1, \dots, n$  ist  $e_i$  idempotent, also  $e_i^2 = e_i$ .
- Die idempotenten Endomorphismen  $e_1, \dots, e_n$  sind paarweise orthogonal, d.h. es ist  $e_i e_j = 0$  für alle  $1 \leq i \neq j \leq n$ .
- Es gilt  $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_n$ .

Man sagt, dass  $e_1, \dots, e_n$  ein *complete set of orthogonal idempotents* ist.

1. Zeigen Sie, dass  $V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n$  gilt.
2. Zeigen Sie für alle  $i = 1, \dots, n$ , dass  $\text{im } e_i = V_1(e_i)$  und  $\bigoplus_{j \neq i} \text{im } e_j = \ker e_i$  gelten.
3. Folgern Sie, dass es für jeden idempotenten Endomorphismus  $e: V \rightarrow V$  eine Zerlegung

$$V = \text{im } e \oplus \ker e$$

mit  $\text{im } e = V_1(e)$  gibt.

(Hinweis: Erweitern Sie  $e$  zu einem complete set of idempotents, dass die Zerlegung liefert.)

4. Für alle  $i = 1, \dots, n$  sei  $E_{ii} \in M_n(K)$  die Matrix mit 1 als  $i$ -ten Diagonaleintrag, und alle anderen Einträge sind 0. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen  $e_1, \dots, e_n$  mit

$$e_i: M_n(K) \rightarrow M_n(K), \quad A \mapsto AE_{ii}$$

ein *complete set of orthogonal idempotents* bildet, und bestimmen Sie die Zerlegung

$$M_n(K) = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n.$$

### Übung 21.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

1. Es seien  $e_1, \dots, e_n \in \text{End}(V)$  Endomorphismen mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle  $i = 1, \dots, n$  ist  $e_i$  idempotent, also  $e_i^2 = e_i$ .
- Die idempotenten Endomorphismen  $e_1, \dots, e_n$  sind paarweise orthogonal, d.h. es ist  $e_i e_j = 0$  für alle  $1 \leq i \neq j \leq n$ .
- Es gilt  $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_n$ .

Man nennt  $e_1, \dots, e_n$  ein *complete set of orthogonal idempotents*. Zeigen Sie, dass

$$V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n.$$

Es sei nun  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Wir nehmen zunächst an, dass  $f$  diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  ist.

2. Zeigen Sie, dass  $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$ .

3. Folgern Sie aus der Eigenraumzerlegung  $V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(f)$ , dass es für alle  $i = 1, \dots, n$  eine eindeutige lineare Abbildung  $e_i: V \rightarrow V$  gibt, so dass

$$e_i(v_1 + \dots + v_n) = v_i \quad \text{für alle } v_1 \in V_{\lambda_1}(f), \dots, v_n \in V_{\lambda_n}(f).$$

(Die Abbildungen  $e_1, \dots, e_n$  sind also die Projektionen auf die einzelnen Eigenräume bezüglich der Eigenraumzerlegung.)

4. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen  $e_1, \dots, e_n$  ein *complete set of orthogonal idempotents* bilden.

5. Zeigen Sie, dass  $\text{im } e_i = V_{\lambda_i}(f)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Die Zerlegung  $V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n$  stimmt also mit der Eigenraumzerlegung bezüglich  $f$  überein.

6. Zeigen Sie, dass

$$e_i = \prod_{j \neq i} \frac{f - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

(Hinweis: Wenden Sie den rechten Ausdruck auf die Eigenräume von  $f$  an.)

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass  $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$  für paarweise verschiedene Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Für alle  $i = 1, \dots, n$  sei

$$e_i := \prod_{j \neq i} \frac{f - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

7. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen  $e_1, \dots, e_n$  idempotent sind, indem Sie zeigen, dass

$$e_i^2 - e_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

8. Zeigen Sie, dass die idempotenten Endomorphismen  $e_1, \dots, e_n$  orthogonal sind.



9. Zeigen Sie, dass  $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_n$ . Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

Für alle  $i = 1, \dots, n$  sei

$$P_i(T) := \prod_{j \neq i} \frac{T - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i} (T - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \in K[T].$$

Zeigen Sie für alle  $i = 1, \dots, n$ , dass  $P_i$  ein Polynom vom Grad  $n - 1$  ist, so dass  $e_i = P_i(f)$ , und dass  $P_i(\lambda_i) = 1$  und  $P_i(\lambda_j) = 0$  für alle  $j \neq i$ .

Folgern Sie für das Polynom  $P(T) := 1 - \sum_{i=1}^n P_i(T)$ , dass  $\deg P \leq n - 1$ , und dass  $P(\lambda_i) = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Folgern Sie, dass  $P = 0$ , also  $1 = \sum_{i=1}^n P_i(T)$ .

Folgern Sie durch Einsetzen von  $f$ , dass  $\text{id}_V = \sum_{i=1}^n e_i$ .

Also ist  $e_1, \dots, e_n$  ein *complete set of orthogonal idempotents*, und somit  $V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n$ .

10. Zeigen Sie, dass  $\text{im } e_i \subseteq V_{\lambda_i}(f)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

(Hinweis: Überlegen sie sich, dass  $(f - \lambda_i)e_i = 0$ .)

11. Folgern Sie mithilfe der Zerlegung  $V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n$ , dass  $V$  diagonalisierbar ist, und dass  $\text{im } e_i = V_{\lambda_i}(f)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Insgesamt zeigt dies, dass  $f$  genau dann diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen möglichen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ist, wenn  $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$ .

12. Es sei nun  $K = \mathbb{C}$ . Folgern Sie, dass  $f$  in den folgenden Fällen diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie jeweils die möglichen Eigenwerte:

- $f^2 = f$
- $f^3 = f$
- $f^3 = -f$ .
- $f^n = \text{id}_V$  für ein  $n \geq 1$

# 1 Quotientenvektorräume

## Übung 22.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  sei eine lineare Abbildung.

1. Es sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit  $f|_U = 0$ . Zeigen Sie, dass  $f$  eine lineare Abbildung

$$\bar{f}: V/U \rightarrow W, \quad [v] \mapsto f(v)$$

induziert.

2. Zeigen Sie, dass  $\text{im } \bar{f} = \text{im } f$ . Folgern Sie, dass  $\bar{f}$  genau dann surjektiv ist, wenn  $f$  surjektiv ist.
3. Zeigen Sie, dass  $U \subseteq \ker f$ , und dass  $\ker \bar{f} = (\ker f)/U$ . Folgern Sie, dass  $\bar{f}$  genau dann injektiv ist, wenn bereits die Gleichheit  $U = \ker f$  gilt.
4. Folgern Sie, dass  $f$  einen Isomorphismus  $V/(\ker f) \rightarrow \text{im } f, [v] \mapsto f(v)$  induziert.

## Übung 23.

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge  $U \subseteq V$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  genau dann ein Untervektorraum ist, wenn es einen  $K$ -Vektorraum  $W$  und eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  gibt, so dass  $U = \ker f$ .

## Übung 24.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit Erzeugendensystem  $E \subseteq V$ . Es sei  $W$  ein  $K$ -Vektorraum mit Basis  $(b_e)_{e \in E}$ . Konstruieren Sie einen Isomorphismus  $W/U \rightarrow V$  für einen passenden Untervektorraum  $U \subseteq W$ .

## Übung 25.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit zwei Untervektorräumen  $U_1, U_2 \subseteq V$ . Zeigen Sie die folgenden beiden Isomorphiesätze:

1. Die Inklusion  $U_1 \rightarrow U_1 + U_2, x \mapsto x$  induziert einen Isomorphismus

$$U_1/(U_1 \cap U_2) \rightarrow (U_1 + U_2)/U_2, \quad [x] \mapsto [x] \quad \text{für alle } x \in U_1.$$

2. Ist  $U_1 \subseteq U_2$ , so ist  $U_2/U_1$  ein Untervektorraum von  $V/U_1$ , und die Abbildung

$$(V/U_1)/(U_2/U_1) \rightarrow V/U_2, \quad [[x]] \mapsto [x] \quad \text{für alle } x \in V.$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus.

## Übung 26.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Konstruieren Sie für den Annihilator

$$U^\circ = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

einen Isomorphismus  $F: U^\circ \rightarrow (V/U)^*$ .

### Übung 27.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $V$ , so dass auf  $V/\sim$  die Addition

$$\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w} \quad \text{für alle } v, w \in V$$

und die Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \bar{v} = \overline{\lambda \cdot v} \quad \text{für alle } \lambda \in K, v \in V$$

wohldefiniert sind.

1. Zeigen Sie, dass  $V/\sim$  mit den obigen Operationen ein  $K$ -Vektorraum ist, und dass die Äquivalenzklasse  $\bar{0}$  das Nullelement von  $V/\sim$  ist.
2. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung  $\rho: V \rightarrow V/\sim$  mit  $v \mapsto \bar{v}$  ein Epimorphismus ist.
3. Zeigen Sie für  $U := \ker \rho$ , dass

$$v \sim w \iff v - w \in U \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

4. Folgern Sie, dass  $V/\sim = V/U$ , und dass  $\rho$  die kanonische Projektion des Quotientenvektorraums ist.

### Übung 28.

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $[\cdot]: V \rightarrow V$  heißt *Seminorm*, falls

- $[\lambda x] = |\lambda| [x]$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $x \in V$  (Homogenität), und
- $[x + y] \leq [x] + [y]$  für alle  $x, y \in V$  (Dreiecksungleichung).

Zeigen Sie:

1. Die Teilmenge  $N := \{x \in V \mid [x] = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
2. Die Seminorm  $[\cdot]$  induziert auf  $V/U$  eine Norm  $\|\cdot\|$  durch

$$\|\bar{x}\| := [x] \quad \text{für alle } x \in V.$$

### Übung 29.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Es sei

$$i: \ker f \rightarrow V, \quad v \mapsto v$$

die kanonische Inklusion und

$$p: W \rightarrow \operatorname{coker} f, \quad w \mapsto [w]$$

die kanonische Projektion.

1. Zeigen Sie, dass  $f \circ i = 0$  und  $p \circ f = 0$ .
2. Zeigen Sie, dass es für jeden  $K$ -Vektorraum  $U$  und jede lineare Abbildung  $h: U \rightarrow V$  mit  $f \circ h = 0$  eine eindeutige lineare Abbildung  $\bar{h}: U \rightarrow \ker f$  gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{f} & W \\ \uparrow \bar{h} & \nearrow h & & & \\ U & & & & \end{array}$$

3. Zeigen Sie, dass es für jeden  $K$ -Vektorraum  $U$  und jede lineare Abbildung  $g: W \rightarrow U$  mit  $g \circ f = 0$  eine eindeutige lineare Abbildung  $\bar{g}: \text{coker } f \rightarrow U$  gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & U \\ & & & \nearrow g & \uparrow \bar{g} \\ V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{p} & \text{coker } f \end{array}$$

**Übung 30.**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f, g: V \rightarrow V$  seien Endomorphismen. Außerdem sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, der invariant unter  $f$  und  $g$  ist.

1. Zeigen Sie: Der Endomorphismus  $f$  induziert einen Endomorphismus

$$\bar{f}: V/U \rightarrow V/U, \quad [v] \mapsto [f(v)].$$

Analog induziert dann auch  $g$  einen Endomorphismus  $\bar{g}: V/U \rightarrow V/U, [v] \mapsto [g(v)]$ .

2. Es seien  $f|_U = g|_U$  und  $\bar{f} = \bar{g}$ . Beweisen oder widerlegen Sie, dass bereits  $f = g$  gelten muss.

## 2 Komplexifizierung

### Übung 31.

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $W$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Es sei  $\iota: V \rightarrow V_{\mathbb{C}}, v \mapsto v + i \cdot 0$  die kanonische Inklusion. Zeigen Sie:

1. Für jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  gibt genau eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $f^{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W$ , die das folgende Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} V & & \\ \downarrow \iota & \searrow f & \\ V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f^{\mathbb{C}}} & W \end{array}$$

2. Für je zwei  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen  $g_1, g_2: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W$  gilt die Äquivalenz

$$g_1 = g_2 \iff g_1 \circ \iota = g_2 \circ \iota.$$

3. Für jeden  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $W'$  gilt für jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  und jede  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $g: W \rightarrow W'$  die Gleichheit

$$(g \circ f)^{\mathbb{C}} = g \circ f^{\mathbb{C}}.$$

### Übung 32.

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

1. Definieren Sie, wann ein  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum  $W \subseteq V_{\mathbb{C}}$  induziert ist.
2. Zeigen Sie, dass für einen induzierten  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum  $W \subseteq V_{\mathbb{C}}$  die Menge

$$U := \{v \in V \mid v + i \cdot 0 \in W\}$$

ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $V$  ist, durch den  $W$  induziert wird.

3. Ist  $U$  eindeutig mit dieser Eigenschaft?
4. Folgern Sie, dass eine  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $W \subseteq V_{\mathbb{C}}$  genau dann induziert ist, wenn  $\overline{W} = W$ .
5. Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\{U \subseteq V \mid U \text{ ist ein } \mathbb{R}\text{-UVR}\} \rightarrow \{W \subseteq V_{\mathbb{C}} \mid W \text{ ist ein } \mathbb{C}\text{-UVR}\}, \quad U \mapsto U_{\mathbb{C}}$$

injektiv ist, und geben Sie ein Linksinverses an.

### Übung 33.

Für jeden  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  sei  $\iota_V: V \rightarrow V_{\mathbb{C}}, v \mapsto v + i \cdot 0$  die kanonische Inklusion und für jeden  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $W$  und jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  sei  $f^{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W$  die eindeutige  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung mit  $f^{\mathbb{C}} \circ \iota_V = f$ .

1. Zeigen Sie, dass für jedes  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $W$  die Abbildung

$$\Phi_{V,W}: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W), \quad f \mapsto f^{\mathbb{C}}$$

ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen ist. Geben Sie auch  $\Phi_{V,W}^{-1}$  an.

2. Es seien  $V, V', W, W'$  vier  $K$ -Vektorräume und  $g_1: V' \rightarrow V$  und  $g_2: W \rightarrow W'$  zwei  $K$ -lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die beidseitige Komposition

$$g_2 \circ - \circ g_1: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(V', W'), \quad h \mapsto g_2 \circ h \circ g_1$$

eine  $K$ -lineare Abbildung ist.

3. Zeigen Sie, dass die Isomorphismen  $\Phi_{V,W}$  in dem folgenden Sinne *natürlich* sind: Es seien  $V$  und  $V'$  zwei  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und es sei  $h: V' \rightarrow V$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Es seien  $W$  und  $W'$  zwei  $\mathbb{C}$ -Vektorräume und es sei  $g: W \rightarrow W'$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Dann kommutiert das folgende Diagramm von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen und  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \xrightarrow{\Phi_{V,W}} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W) \\ g \circ - \circ h \downarrow & & \downarrow g \circ - \circ h^{\mathbb{C}} \\ \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V', W') & \xrightarrow{\Phi_{V',W'}} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V'_{\mathbb{C}}, W') \end{array}$$

#### Übung 34.

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit  $\mathbb{R}$ -Basis  $\mathcal{B} = (v_j)_{j \in J}$ . Zeigen Sie, dass dann  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = (v_j + i \cdot 0)_{j \in J}$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $V_{\mathbb{C}}$  ist.

#### Übung 35.

Zeigen Sie, dass die  $\mathbb{R}$ -lineare Inklusion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x$  einen Isomorphismus  $\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen induziert.

#### Übung 36.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Zeigen Sie, dass die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}), \quad f \mapsto f_{\mathbb{C}}$$

einen Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen

$$\Phi: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$$

induziert.

(Hinweis: Beachten Sie, dass  $V$  und  $W$  nicht notwendigerweise endlichdimensional sind.)

#### Übung 37.

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Konstruieren Sie einen Isomorphismus  $(V^*)_{\mathbb{C}} \rightarrow (V_{\mathbb{C}})^*$ .

(Hinweis: Beachten Sie, dass  $V$  ist nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.)

#### Übung 38.

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von Untervektorräumen  $U_i \subseteq V$ . Zeigen Sie:

1. Es gilt

$$\left( \bigcap_{i \in I} U_i \right)_{\mathbb{C}} = \bigcap_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$$

2. Es gilt

$$\left( \sum_{i \in I} U_i \right)_{\mathbb{C}} = \sum_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}.$$

3. Folgern Sie, dass genau dann  $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$ , wenn  $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$ .

### Übung 39.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei reelle Vektorräume, und  $f: V \rightarrow W$  sei eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass  $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$ .
2. Folgern Sie, dass  $f_{\mathbb{C}}$  genau dann injektiv ist, wenn  $f$  injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass  $(V_{\mathbb{C}})_{\lambda}(f_{\mathbb{C}}) = V_{\lambda}(f)_{\mathbb{C}}$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
4. Zeigen Sie, dass  $\operatorname{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\operatorname{im} f)_{\mathbb{C}}$ .
5. Folgern Sie, dass  $f_{\mathbb{C}}$  genau dann surjektiv ist, wenn  $f$  surjektiv ist.

### Übung 40.

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann diagonalisierbar ist, wenn  $f_{\mathbb{C}}$  diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

(Hinweis: Man betrachte etwa Übung 38. Beachten Sie aber auf jeden Fall, dass  $V$  nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.)

### Übung 41.

Zeigen Sie, dass die kanonische Inklusion  $\iota: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ ,  $x \mapsto x$   $\mathbb{R}$ -linear ist, und einen Isomorphismus  $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}[X]$  von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen induziert.

### Übung 42.

Es sei  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis eines  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$  und  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$  eine Basis eines  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $W$ . Es seien

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} := (b_1 + i \cdot 0, \dots, b_n + i \cdot 0) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_{\mathbb{C}} := (c_1 + i \cdot 0, \dots, c_m + i \cdot 0)$$

die entsprechenden  $\mathbb{C}$ -Basen der Komplexifizierungen  $V_{\mathbb{C}}$  und  $W_{\mathbb{C}}$ . Es seien

$$\Phi^{\mathbb{R}}: \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R}), \quad f \mapsto M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$$

und

$$\Phi^{\mathbb{C}}: \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \rightarrow M(m \times n, \mathbb{C}), \quad g \mapsto M_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}, \mathcal{C}_{\mathbb{C}}}(g).$$

Es seien

$$\begin{aligned} \iota_1: \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}}, & f &\mapsto f + i \cdot 0, \\ \iota_2: \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}), & f &\mapsto f_{\mathbb{C}} \\ \iota_3: M(m \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}, & A &\mapsto A + i \cdot 0, \\ \iota_4: M(m \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow M(m \times n, \mathbb{C}), & A &\mapsto A, \end{aligned}$$

die jeweiligen kanonischen Inklusionen.

1. Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \xrightarrow{\iota_2} & \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \\ \Phi^{\mathbb{R}} \downarrow & & \downarrow \Phi^{\mathbb{C}} \\ M(m \times n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\iota_4} & M(m \times n, \mathbb{C}) \end{array}$$

Folgern Sie, dass  $\iota_4$  tatsächlich injektiv ist, wie der oben verwendete Begriff *Inklusion* vermuten lässt.

2. Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \xrightarrow{\iota_1} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \\ \Phi^{\mathbb{R}} \downarrow & & \downarrow (\Phi^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \\ M(m \times n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\iota_3} & M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \end{array}$$

3. Zeigen Sie, dass die Inklusion  $\iota_2$  eine eindeutige  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$\Psi_1: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$$

induziert, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \\ \swarrow \iota_1 & & \searrow \iota_2 \\ \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Psi_1} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \end{array}$$

4. Zeigen Sie auf analoge Weise, dass die Inklusion  $\iota_4$  eine eindeutige  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$\Psi_2: M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \rightarrow M(m \times n, \mathbb{C})$$

induziert, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} & M(m \times n, \mathbb{R}) & \\ \swarrow \iota_3 & & \searrow \iota_4 \\ M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Psi_2} & M(m \times n, \mathbb{C}) \end{array}$$

5. Wir haben nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & & \\ & \swarrow \iota_1 & \downarrow & \searrow \iota_2 & \\ \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Psi_1} & & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \\ \downarrow (\Phi^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} & & \downarrow \Phi^{\mathbb{R}} & & \downarrow \Phi^{\mathbb{C}} \\ & & M(m \times n, \mathbb{R}) & & \\ & \swarrow \iota_3 & & \searrow \iota_4 & \\ M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Psi_2} & & \xrightarrow{\quad} & M(m \times n, \mathbb{C}) \end{array}$$

Von diesem Diagramm wissen wir bereits, dass Deckel, Boden und beide Rückseiten kommutieren. Folgern Sie daraus, dass auch die Vorderseite kommutiert.

(Hinweis: Nutzen Sie, dass zwei  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $f, g: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \rightarrow M(m \times n, \mathbb{C})$  genau dann übereinstimmen, wenn die Kompositionen  $f \circ \iota_1$  und  $g \circ \iota_1$  übereinstimmen.)



6. Zeigen Sie, dass  $\Psi_2$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen ist.
7. Folgen Sie, dass auch  $\Psi_1$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen ist.

#### Übung 43.

Es sei  $V \neq 0$  ein  $K$ -Vektorraum, wobei  $K$  algebraisch abgeschlossen ist. Es seien  $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$  paarweise kommutierende Endomorphismen.

1. Zeigen Sie, dass für alle  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  und Skalare  $\lambda_i \in K$  mit  $i \in I$  der gemeinsame Eigenraum

$$V((f_i, \lambda_i)_{i \in I}) := \{v \in V \mid f_i(v) = \lambda_i v \text{ für alle } i \in I\}.$$

invariant unter  $f_1, \dots, f_n$  ist.

2. Folgern Sie, dass die Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n$  einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen, d.h. dass es einen Vektor  $v \in V$  gibt, so dass  $v$  für jedes  $f_i$  ein Eigenvektor ist.

#### Übung 44.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Für alle Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$  und Skalare (Eigenwerte)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  sei

$$V(f_1, \lambda_1; \dots; f_n, \lambda_n) := \{v \in V \mid f_i(v) = \lambda_i v \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

der *gemeinsame Eigenraum* der Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

1. Zeigen Sie, dass

$$V(f_1, \lambda_1; \dots; f_n, \lambda_n) = \bigcap_{i=1}^n V(f_i, \lambda_i)$$

für alle Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n \in \text{End}(V)$  und Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ .

2. Es seien  $f_1, \dots, f_n, g \in \text{End}(V)$  Endomorphismen, so dass  $g$  mit jedem  $f_i$  kommutiert. Zeigen Sie, dass der gemeinsame Eigenraum  $V(f_1, \lambda_1; \dots; f_n, \lambda_n)$  für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  invariant unter  $g$  ist.
3. Zeigen Sie: Sind die Endomorphismen  $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$  diagonalisierbar (d.h. für alle  $i = 1, \dots, n$  ist  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V(f_i, \lambda)$ ) und paarweise kommutierend, so sind die Endomorphismen *simultan diagonalisierbar*, d.h. es ist

$$V = \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K} V(f_1, \lambda_1; \dots; f_n, \lambda_n).$$

ö ö

4. Es sei nun  $V$  endlichdimensional und  $H \subseteq \text{End}(V)$  ein Untervektorraum aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Endomorphismen. Zeigen Sie, dass es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, so dass  $M_{\mathcal{B}}(f)$  für jedes  $f \in H$  eine Diagonalmatrix ist.

(Hinweis: Nutzen Sie, dass  $\text{End}(V)$  endlichdimensional ist.)

#### Übung 45.

Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $V$ . Drücken Sie  $\text{tr } f$  und  $\det f$  durch die mit (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  von  $f$  aus.

**Übung 46.**

Es sei  $A \in M_2(\mathbb{R})$  mit  $\operatorname{tr} A = 0$  und  $\operatorname{tr} A^2 = -2$ . Bestimmen Sie  $\det A$ .

**Übung 47.**

Es sei  $A \in \operatorname{GL}_n(K)$  und  $\chi_A(T)$  das charakteristische Polynom von  $A$ .

1. Zeigen Sie, dass der konstante Term von  $\chi_A(T)$  nicht verschwindet.
2. Zeigen Sie, dass es ein Polynom  $P \in K[T]$  gibt, so dass  $A^{-1} = P(A)$ .

**Übung 48.**

Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\operatorname{char} K \notin \{2, 3\}$ . Zeigen Sie, dass

$$\det A = \frac{1}{6}(\operatorname{tr} A)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} A^3) \quad \text{für jedes } A \in M_3(K).$$

(Hinweis: Wenn die Rechnungen zu kompliziert werden, dann macht man es falsch.)

**Übung 49.**

Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $n$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$  und  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subseteq V$  eine Teilmenge aus Eigenvektoren von  $f$ , so dass jede  $n$ -elementige Teilmenge linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass  $f$  bereits ein skalares Vielfaches der Identität ist.

**Übung 50.**

Bestimmen Sie alle nicht-diagonalisierbaren  $A \in M_2(\mathbb{C})$  mit  $\operatorname{tr} A = 0$ .

**Übung 51.**

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Matrizen jeweils eine Jordannormalform, inklusiver entsprechender Basiswechselmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

**Übung 52.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

1. Es sei  $n: V \rightarrow V$  ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass  $\operatorname{id}_V + n$  invertierbar ist.
2. Zeigen, bzw. folgern Sie allgemeiner, dass  $\lambda \operatorname{id}_V + n$  für alle  $\lambda \in K^\times$  invertierbar ist.
3. Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein beliebiger Endomorphismus. Zeigen Sie für alle  $\lambda, \mu \in K$  mit  $\lambda \neq \mu$ , dass  $V_{\lambda}^{\sim}(f)$  invariant unter  $f - \mu \operatorname{id}_V$  ist, und dass die Einschränkung  $(f - \mu \operatorname{id}_V)|_{V_{\lambda}^{\sim}(f)}$  invertierbar ist.
4. Folgern Sie: Ist  $(f - \lambda_1)^{n_1} \cdots (f - \lambda_k)^{n_k} = 0$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$  paarweise verschieden, so sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die möglichen Eigenwerte von  $f$ , und für alle  $1 \leq i \leq k$  ist  $\dim V_{\lambda_i}^{\sim}(f) \leq n_i$ .

5. Folgern Sie: Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen und  $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$ , so ist  $f$  diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ .

### Übung 53.

Es sei  $f: V \rightarrow V$  Endomorphismus eines  $\mathbb{C}$ -Vektorraums und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass die Einschränkung  $(f - \lambda \text{id}_V)|_{V_\lambda \sim(f)}$  nicht notwendigerweise nilpotent ist.

### Übung 54.

Bestimmen Sie in den Folgenden alle Möglichkeiten der Jordannormalform von  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. Es ist  $\chi_A(T) = (T - 3)^4(T - 5)^4$  und  $(A - 3I)^2(A - 5I)^2 = 0$ .
2. Es ist  $A^3 = 0$  und alle Eigenräume von  $A$  sind eindimensional.
3. Es ist  $\chi_A(T) = (T - 2)(T + 2)^3$  und  $(A - 2I)(A + 2I) = 0$ .
4. Es ist  $\chi_A(T) = T(T - 1)(T + 1)$ .
5. Es ist  $\chi_A(T) = (T - 2)^2(T - 3)^2$  und alle Eigenräume von  $A$  sind entweder null- oder eindimensional.
6. Es ist  $A^2 = A$  und alle Eigenräume von  $A$  sind zweidimensional.
7. Es ist  $\chi_A(T) = T^5$  und alle Eigenräume von  $A$  sind entweder null- oder eindimensional.
8. Es ist  $\chi_A(T) = (T + 3)^3T^2$  und  $A$  hat keine zweidimensionalen Eigenräume.

### Übung 55.

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

1. Es sei  $n: V \rightarrow V$  ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass der Endomorphismus  $\text{id}_V + n$  invertierbar ist.

Ein Endomorphismus  $u: V \rightarrow V$  heißt *unipotent*, falls  $u - \text{id}_V$  nilpotent ist.

2. Folgern Sie, dass jeder unipotente Endomorphismus von  $V$  invertierbar ist.

Auf dem fünften Übungszettel wurde gezeigt, dass es für jeden Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eindeutige Endomorphismen  $d, n: V \rightarrow V$  gibt, so dass

- $f = d + n$ ,
- $d$  ist diagonalisierbar und  $n$  ist nilpotent, und
- $d$  und  $n$  kommutieren.

Folgern Sie aus dieser *additiven Jordanzerlegung* von  $\text{End}(V)$  die folgende *multiplikative Jordanzerlegung* von  $\text{GL}(V)$ .

3. Zeigen Sie, dass es für jedes  $s \in \text{GL}(V)$  eindeutige  $d, u \in \text{GL}(V)$  gibt, so dass
  - $s = d \cdot u$ ,
  - $d$  ist diagonalisierbar und  $u$  ist unipotent, und
  - $d$  und  $u$  kommutieren.

**Übung 56.**

Bestimmen Sie die Potenz  $A^{10}$  der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

**Übung 57.**

Bestimmen Sie die Lösungsräume der folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme mit  $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$ :

$$\begin{cases} f' = -f - 6g, \\ g' = 2f + 6g, \end{cases} \quad \begin{cases} f' = -f - g, \\ g' = 2f + g, \end{cases} \quad \begin{cases} f' = 2f + 2g + 3h, \\ g' = f + 3g + 3h, \\ h' = -f - 2g - 2h. \end{cases}$$

**Übung 58.**

Es sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $M_n(\mathbb{C})$ . Für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  sei

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Es sei

$$D_n(\mathbb{C}) := \{S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)S^{-1} \mid S \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\} \subseteq M_n(\mathbb{C})$$

die Menge der diagonalisierbaren komplexen  $n \times n$ -Matrizen. Wir zeigen, dass  $D_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$  dicht ist, d.h. dass es für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  und jedes  $\varepsilon > 0$  eine diagonalisierbare Matrix  $D \in D_n(\mathbb{C})$  mit  $\|A - D\| < \varepsilon$  gibt.

Es sei  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , so dass  $SAS^{-1}$  eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ist, also

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es seien  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden und

$$B(t) := A + tS \text{diag}(z_1, \dots, z_n)S^{-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t) \in \mathbb{C}$  mit

$$\mu_i(t) := \lambda_i + tz_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

die Eigenwerte von  $B(t)$  ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen  $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden sind.
3. Folgern Sie, dass  $B(t)$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$  diagonalisierbar ist.
4. Folgern Sie, dass es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $D \in D_n(\mathbb{C})$  mit  $\|A - D\| < \varepsilon$  gibt.

Wir wollen die Dichtheit von  $D_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$  nutzen, um den Satz von Cayley-Hamilton zu zeigen:

5. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \chi_A(A)$$

stetig ist, wobei  $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$  das charakteristische Polynom von  $A$  ist.

6. Zeigen Sie, dass  $F(D) = 0$  für jede Diagonalmatrix  $D \in M_n(\mathbb{C})$ .

7. Zeigen Sie, dass  $P(SAS^{-1}) = SP(A)S^{-1}$  für alle  $P \in \mathbb{C}[T]$ ,  $A \in M_n(\mathbb{C})$  und  $S \in GL_n(\mathbb{C})$ .  
Folgern Sie, dass  $F(D) = 0$  für jede Matrix  $D \in D_n(\mathbb{C})$ .

8. Folgern Sie, dass  $F(A) = 0$  für alle  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

#### Übung 59.

Definieren Sie die Begriffe eines reellen, bzw. komplexen Skalarprodukts, sowie eines reellen, bzw. komplexen Hilbertraums.

#### Übung 60.

Formulieren und Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

#### Übung 61.

Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum. Zeigen Sie für Endomorphismen  $f, g_1, g_2: V \rightarrow V$  Endomorphismen die folgende Kürzungsregel: Falls  $f^*$  existiert und  $f^*fg_1 = f^*fg_2$ , dann ist bereits  $fg_1 = fg_2$ .

#### Übung 62.

Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum eine Orthonormalbasis besitzt.

#### Übung 63.

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit abzählbarer Orthonormalbasis  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Es sei  $T: V \rightarrow V$  die eindeutige lineare Abbildung mit  $T(e_i) = e_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $T$  kein Adjungiertes besitzt.

#### Übung 64.

Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$  seien paarweise orthogonal zueinander. Zeigen Sie: Ist  $v_1, \dots, v_n \neq 0$ , so ist die Familie  $(v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig.

#### Übung 65.

Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und  $f: V \rightarrow V$  ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die Eigenräume  $V_\lambda(f)$  und  $V_\mu(f)$  für alle  $\lambda \neq \mu$  orthogonal sind.

#### Übung 66.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Skalarprodukträume und  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Es sei  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$  eine Orthonormalbasis von  $W$ . Zeigen Sie die Gleichheit

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f^*) = M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)^*.$$

**Übung 67.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und  $f: V \rightarrow V$  ein normaler Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass  $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$  für alle  $v \in V$ .
2. Zeigen Sie, dass  $V_\lambda(f) = V_{\bar{\lambda}}(f^*)$  und  $V_\lambda^\sim(f) = V_{\bar{\lambda}}^\sim(f^*)$ .

**Übung 68.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$  seien Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1.  $(v_1, \dots, v_n)$  ist eine Orthonormalbasis von  $V$ .
2. Für alle  $v \in V$  ist  $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2$ .

**Übung 69.**

Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und  $f: V \rightarrow V$  ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass  $f = 0$ .

**Übung 70.**

Es sei  $\pi \in S_n$  eine Permutation und  $P_\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die eindeutige lineare Abbildung mit

$$P_\pi(e_i) = e_{\pi(i)} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

wobei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$  ist.

1. Zeigen Sie, dass  $P_\pi$  orthogonal ist.
2. Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte von  $P_\pi$ .
3. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem alle möglichen Eigenwerte auftreten.

**Übung 71.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit Orthonormalbasis  $(u_1, \dots, u_n)$ . Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$P: V \rightarrow V, \quad v \mapsto \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$$

die orthogonale Projektion auf  $U$  ist.

**Übung 72.**

Bestimmen Sie die Signatur  $(n_0, n_+, n_-)$  der folgenden quadratischen Formen auf  $\mathbb{R}^n$ :

1.  $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2$
2.  $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2$  mit  $a \in \mathbb{R}$
3.  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 15x_2^2 + 6x_1x_2$
4.  $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$
5.  $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$

6.  $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 7x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 6x_2x_4 + 2x_3x_4$ .

**Übung 73.**

Es sei  $V \neq 0$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  sei

$$\langle x, y \rangle_\lambda := \lambda \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Bestimmen Sie alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ , für die  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$  ein Skalarprodukt auf  $V$  ist.

**Übung 74.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie:

1.  $f$  ist genau dann unitär, wenn alle Eigenwerte von  $f$  Betrag 1 haben.
2.  $f$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von  $f$  reell sind.
3.  $f$  ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von  $f$  rein imaginär sind.
4.  $f$  ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von  $f$  sind.

**Übung 75.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktsraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass  $\ker f^* \subseteq (\operatorname{im} f)^\perp$ .
2. Folgern Sie daraus, dass  $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$ .
3. Folgern Sie aus den beiden Inklusionen  $\ker f^* \subseteq (\operatorname{im} f)^\perp$  und  $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$  mithilfe der Endlichdimensionalität von  $V$ , dass bereits Gleichheiten gelten, dass also

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

Von nun an sei  $f$  normal.

4. Zeigen Sie, dass  $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$  für alle  $x \in V$ .
5. Folgern Sie, dass  $\ker f = \ker f^*$ .
6. Folgern Sie damit aus den obigen Gleichheiten, dass  $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$  gilt, und dass die Summe orthogonal ist.

(Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass  $\operatorname{im} f$  und  $\ker f$  orthogonal sind, und nutzen Sie dann die Endlichdimensionalität von  $V$ .)

**Übung 76.**

1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix  $S \in O(3)$ , so dass  $S^T A S$  eine Diagonalmatrix ist.



2. Bestimmen Sie für die symmetrische Bilinearform  $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := x_1 y_2 + x_2 y_1 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{R}^2$ , so dass  $\beta$  bezüglich  $\mathcal{B}$  durch eine Diagonalmatrix mit möglichen Diagonaleinträgen  $0, 1, -1$  dargestellt wird.

### Übung 77.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei  $f: V \rightarrow W$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  an. Zeigen Sie, dass  $f^*$   $\mathbb{R}$ -linear ist.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$   $\mathbb{R}$ -linear ist, und dass

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

4. Zeigen Sie: Eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die Basis  $\Phi_V(\mathcal{B}) = (\Phi_V(v_1), \dots, \Phi_V(v_n))$  von  $V^*$  die duale Basis  $\mathcal{B}^*$  ist.

5. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , wenn also  $V$  und  $W$  endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

### Übung 78.

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , dass  $f$  genau dann diagonalisierbar ist, wenn es ein Skalarprodukt auf  $V$  gibt, bezüglich dessen  $f$  selbstadjungiert ist.

2. Zeigen oder widerlegen Sie die analoge Aussage für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### Übung 79.

Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$  ein normierter Spaltenvektor und

$$A := x x^T \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto Ay$$

die orthogonale Projektion auf die Gerade  $\mathbb{R}x$  ist.

### Übung 80.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  sei

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement von  $U$ , und

$$U^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

der Annihilator von  $U$ . Für jeden Endomorphismus  $f: V \rightarrow W$  sei  $f^*: W \rightarrow V$  die Adjungierte von  $f$ , und

$$f^T: W^* \rightarrow V^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

die zu  $f$  duale Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  die Gleichheit  $\Phi_V(U^\perp) = U^\circ$  gilt.
3. Zeigen Sie, dass  $f^T \circ \Phi_W = \Phi_V \circ f^*$ , dass also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{f^*} & W \\ \Phi_V \downarrow & & \downarrow \Phi_W \\ V^* & \xleftarrow{f^T} & W^* \end{array}$$

Folgern Sie, dass  $f^* = \Phi_V^{-1} \circ f^T \circ \Phi_W$ .

In Linear Algebra I wurde gezeigt, dass

$$\ker f^T = (\operatorname{im} f)^\circ \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^T = (\ker f)^\circ,$$

und dass für je zwei Untervektorräume  $U_1, U_2 \subseteq V$  die Gleichheiten

$$(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ \quad \text{und} \quad (U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$$

gelten.

4. Folgen Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen und den Aussagen aus Linear Algebra I, dass für alle Untervektorräume  $U_1, U_2 \subseteq V$  die Gleichheiten

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp \quad \text{und} \quad (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

gelten.

(Hinweis: Nutzen Sie, dass  $\Phi_V$  ein Isomorphismus ist.)

5. Folgen Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen und den Aussagen aus Linear Algebra I, dass

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

(Hinweis: Nutzen Sie, dass  $\Phi_V$  und  $\Phi_W$  Isomorphismen sind.)

**Übung 81.**

Es sei  $V := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  der Raum der stetigen Funktionen  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , und es sei

$$U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $U$  ein Untervektorraum von  $V$  ist.
2. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t) dt \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

3. Zeigen Sie, dass  $U^\perp = 0$ . Folgern Sie, dass  $V \neq U \oplus U^\perp$ .  
(Hinweis: Betrachten Sie für  $g \in U^\perp$  die Funktion  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(t) = t^2 g(t)$ .)
4. Zeigen Sie ferner, dass  $V/U$  eindimensional ist.

**Übung 82.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein selbstadjungierter, orthogonaler Endomorphismus mit nur positiven Eigenwerten. Zeigen Sie, dass bereits  $f = \text{id}_V$  gilt.

**Übung 83.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie: Eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) \langle -, v_i \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in V^*.$$

Es sei nun  $V$  der Vektorraum der Polynomfunktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $\leq 2$ . Für  $a \in \mathbb{R}$  sei  $\varphi_a \in V^*$  durch  $\varphi_a(f) = f(a)$  definiert.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

4. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $V$ .
5. Zeigen Sie, dass es für alle  $a \in \mathbb{R}$  ein eindeutiges  $g_a \in V$  gibt, so dass

$$f(a) = \int_{-1}^1 f(t)g_a(t) dt \quad \text{für alle } f \in V.$$

6. Bestimmen Sie  $g_a$  für beliebiges  $a \in \mathbb{R}$ .

#### Übung 84.

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen sich implizieren.

1.  $f$  ist selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten.
2.  $f$  ist orthogonal, und alle Eigenwerte von  $f$  sind positiv.
3.  $f$  ist normal mit  $\det f > 0$ .
4. Es gibt einen selbstadjungierten Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = \exp(g)$ .
5.  $f$  ist selbstadjungiert und orthogonal.

#### Übung 85.

Es sei  $V$  der reelle Vektorraum der Polynomfunktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $V_n \subseteq V$  der Untervektorraum der Polynomfunktionen von Grad  $\leq n$ .

1. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

2. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung  $\psi: V \rightarrow V$  mit

$$\psi(f)(t) := (t^2 - 1)f''(t) + 2tf'(t) \quad \text{für alle } f \in V \text{ und } t \in \mathbb{R}$$

selbstadjungiert bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist.

Es sei  $\mathcal{G} := (p_n)_{n \geq 0}$  die Orthonormalbasis von  $V$ , die durch Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Standardbasis  $\mathcal{B} := (x^n)_{n \geq 0}$  entsteht.

3. Zeigen Sie für alle  $n \geq 0$ , dass  $V_n$  invariant unter  $\psi$  ist.
4. Zeigen Sie für alle  $n \geq 0$ , dass  $\mathcal{G}_n := (p_0, \dots, p_n)$  eine Basis von  $V_n$  ist.
5. Zeigen Sie für alle  $n \geq 0$ , dass  $M_{\mathcal{G}_n}(\psi|_{V_n})$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Betrachten Sie hierfür die Filtration

$$0 \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots \subseteq V_n,$$

und nutzen Sie, dass  $V_i = \mathcal{L}(\mathcal{G}_i)$  invariant unter  $\psi$  ist.

6. Folgen Sie mithilfe der Selbstadjungiertheit von  $\psi$ , dass  $M_{\mathcal{G}_n}(\psi|_{V_n})$  für alle  $n \geq 0$  bereits eine Diagonalmatrix ist. Folgern Sie, dass  $\mathcal{G}$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $\psi$  ist.
7. Bestimmen Sie für alle  $n \geq 0$  die Eigenwerte der Einschränkung  $\psi|_{V_n}$ , indem Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basis  $\mathcal{B}_n = (1, x, \dots, x^n)$  von  $V_n$  bestimmen.
8. Geben Sie den zu  $p_n$  gehörigen Eigenwert von  $\psi$  an.
9. Berechnen Sie  $\mathcal{G}_4$ .

**Übung 86.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Es gilt  $\exp(f)^* = \exp(f^*)$ .
2. Ist  $f$  normal, so ist auch  $f^*$  normal.
3. Ist  $f$  selbstadjungiert, so ist auch  $\exp(f)$  selbstadjungiert.
4. Ist  $f$  antiselbstadjungiert, so ist  $\exp(f)$  orthogonal ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), bzw. unitär ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

**Übung 87.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

1. Es gibt genau dann einen normalen Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = \exp(g)$ , wenn  $f$  normal und invertierbar ist.
2. Es gibt genau dann einen antiselbstadjungierten Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = \exp(g)$ , wenn  $f$  unitär ist.
3. Es gibt genau dann einen selbstadjungierten Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = \exp(g)$ , wenn  $f$  selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten ist.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

4. Es gibt genau dann einen normalen Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = \exp(g)$ , wenn  $f$  normal und invertierbar ist, und alle (reellen) Eigenwerte von  $g$  gerade Vielfachheit haben.
5. Es gibt genau dann einen antiselbstadjungierten Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = \exp(g)$ , wenn  $f$  orthogonal ist und alle negativen (reellen) Eigenwerte von  $f$  gerade Vielfachheit haben.
6. Es gibt genau dann einen selbstadjungierten Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit  $f = \exp(g)$ , wenn  $f$  selbstadjungiert mit positiven (reellen) Eigenwerten ist.

**Übung 88.**

Es sei

$$W = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Wir betrachten den Untervektorraum

$$V := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in W \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass  $V$  ein Untervektorraum von  $W$  ist.
2. Zeigen Sie für alle  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$ , dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$

(Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass  $ab \leq (a^2 + b^2)/2$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .)

3. Zeigen sie, dass

$$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

4. Es sei

$$R: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass  $R$  ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob  $R$  selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.

5. Zeigen Sie, dass  $R$  keine Eigenwerte besitzt.

6. Es sei

$$S: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, dass  $S$  ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob  $R$  selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.

7. Zeigen Sie, dass  $S$  diagonalisierbar ist.

8. Es sei

$$U := \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Bestimmen Sie  $U^\perp$  und entscheiden Sie, ob  $V = U \oplus U^\perp$ .

9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $U$ .

### Übung 89.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma(A, B) := \operatorname{tr}(A^T B) \quad \text{für alle } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

ein Skalarprodukt auf  $M_n(\mathbb{R})$  definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis  $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  von  $M_n(\mathbb{R})$  mit

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k, l \leq n$$

eine Orthonormalbasis von  $M_n(\mathbb{R})$  bezüglich  $\sigma$  bilden.

3. Es sei

$$S_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$S_- := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$M_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

und dass die Summe orthogonal ist.

**Übung 90.**

Es sei  $V$  ein Skalarproduktraum und

$$O(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid ff^* = \text{id}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $O(V)$  eine Untergruppe von  $GL(V)$  bildet.

**Übung 91.**

Zeigen Sie, dass für eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1.  $A$  ist invertierbar mit  $A^{-1} = A^*$ .
2.  $AA^* = I$ .
3.  $A^*A = I$ .
4. Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{K}^n$ .
5. Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{K}^n$ .

**Übung 92.**

Es sei  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. Zeigen Sie, dass es eindeutige hermitesche Matrizen  $B, C \in M_n(\mathbb{C})$  mit  $A = B + iC$  gibt.
2. Zeigen Sie, dass  $A$  genau dann normal ist, wenn  $B$  und  $C$  kommutieren.

**Übung 93.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , und es sei  $G \subseteq GL(V)$  eine endliche Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass

$$\langle x, y \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{\phi \in G} \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V$$

ein Skalarprodukt auf  $G$  definiert.

2. Zeigen Sie, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  in dem Sinne  $G$ -invariant ist, dass

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V \text{ und } \phi \in G.$$

3. Folgern Sie, dass es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, so dass  $M_{\mathcal{B}}(\phi)$  für alle  $\phi \in G$  eine orthogonale Matrix ist.
4. Folgern Sie damit, dass es für  $n = \dim V$  einen injektiven Gruppenhomomorphismus  $\Phi: G \rightarrow O(n)$  gibt,  $G$  also isomorph zu der Untergruppe im  $\Phi$  von  $O(n)$  ist.

**Übung 94.**

Es seien  $F$  und  $G$  zwei selbstadjungierte Endomorphismen eines Skalarproduktraums  $V$ . Zeigen Sie, dass  $F \circ G$  genau dann selbstadjungiert ist, wenn  $F$  und  $G$  kommutieren.

**Übung 95.**

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Für jedes  $\alpha \in V$  mit  $\alpha \neq 0$  sei

$$s_\alpha: V \rightarrow V, \quad \text{mit} \quad s_\alpha(x) := x - 2 \frac{\langle x, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha.$$

Ferner seien

$$L_\alpha := \mathbb{R}\alpha \quad \text{und} \quad H_\alpha := L_\alpha^\perp = \alpha^\perp = \{v \in V \mid \langle v, \alpha \rangle = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $s_\alpha^2 = \text{id}_V$ , und dass  $s_{\lambda\alpha} = s_\alpha$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ .
2. Zeigen Sie, dass  $s_\alpha$  diagonalisierbar ist, und dass

$$V_{-1}(s_\alpha) = L_\alpha \quad \text{und} \quad V_1(s_\alpha) = H_\alpha.$$

3. Interpretieren Sie  $V$  geometrisch anschaulich.
4. Es sei  $s': V \rightarrow V$  ein Endomorphismus mit  $s'(\alpha) = -\alpha$  und  $s'(x) = x$  für alle  $x \in H_\alpha$ . Zeigen Sie, dass bereits  $s' = s_\alpha$  gilt.
5. Es sei  $t: V \rightarrow V$  ein orthogonaler Isomorphismus. Zeigen Sie die Gleichheit

$$ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}.$$

**Übung 96.**

Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume, und  $f: V \rightarrow V$  eine surjektive Funktion (!) mit

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Zeigen Sie, dass  $f$  ein Isomorphismus ist.

**Übung 97.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung  $S: V \rightarrow V$  die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1.  $S$  ist normal.
2.  $V$  hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $S$ .
3. Für jeden  $S$ -invarianten Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist auch das orthogonale Komplement  $U^\perp$  invariant unter  $S$ .

**Übung 98.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum über  $\mathbb{K}$ . Es sei

$$S := \{f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f^* = f\}$$

der Untervektorraum der selbstadjungierten Endomorphismen und

$$A := \{f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f^* = -f\}$$

der Untervektorraum der antiselbstadjungierten Endomorphismen.



1. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \operatorname{tr}(f \circ g^*)$$

ein Skalarprodukt auf  $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$  definiert.

2. Folgern Sie, dass

$$|\operatorname{tr}(fg^*)|^2 \leq \operatorname{tr}(ff^*) \operatorname{tr}(gg^*) \quad \text{für alle } f, g \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V).$$

3. Zeigen Sie, dass  $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) = S \oplus A$ , und dass die Summe orthogonal ist.

### Übung 99.

Es sei  $\det: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  die Determinantenabbildung, wobei  $\mathbb{C}^\times$  die multiplikative Gruppe des Körpers bezeichnet.

1. Zeigen Sie, dass  $\det$  ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.
2. Bestimmen Sie den Kern von  $\det$ .
3. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung  $\det|_{\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})}$ .
4. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung  $\det|_{U_n}$ .
5. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung  $\det|_{O_n}$ .

### Übung 100.

Es sei

$$\Phi: \operatorname{SU}(2) \rightarrow S^3, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

die Abbildung auf die erste Spalte, wobei

$$S^3 := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $\Phi$  wohldefiniert ist.
2. Zeigen Sie, dass  $\Phi$  bijektiv ist.

### Übung 101.

Zeigen Sie, dass die drei Gruppen  $\operatorname{SO}(2)$ ,  $S^1$  und  $U(1)$  isomorph sind.

### Übung 102.

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum, und die Abbildung  $P: V \rightarrow V$  sei orthogonal und eine Orthogonalprojektion. Bestimmen Sie  $P$ .

### Übung 103.

Es sei  $A \in U(n)$ . Zeigen Sie, dass  $|\operatorname{tr} A| \leq n$ . Wann gilt Gleichheit?

#### Übung 104.

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  und  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$  seien zwei geordnete Basen von  $V$ .

1. Die Basis  $\mathcal{C}$  sei genau die Orthonormalbasis von  $V$ , die aus  $\mathcal{B}$  durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens entstehen. Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrix  $T_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$  (von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{B}$ ) eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie die umgekehrte Aussage: Ist die Basiswechselmatrix  $T_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$  eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen, so ist  $\mathcal{C}$  notwendigerweise die Orthonormalbasis von  $V$ , die durch das Gram-Schmidt-Verfahren aus  $\mathcal{B}$  entsteht.

#### Übung 105.

1. Es seien  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden Punkte. Zeigen Sie, dass es für beliebige Werte  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$  ein Polynom  $P \in \mathbb{C}[T]$  mit  $P(z_j) = w_j$  für alle  $j = 1, \dots, n$  gibt.
2. Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein normaler Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums  $V$ . Zeigen Sie, dass es ein Polynom  $P \in \mathbb{C}[T]$  mit  $f^* = P(f)$  gibt.  
(Hinweis:  $f$  ist diagonalisierbar.)

#### Übung 106.

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit  $n := \dim V$ .

1. Zeigen Sie, dass es für jede Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$  genau ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$  auf  $V$  gibt, so dass  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis von  $V$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$  ist.
2. Untersuchen Sie die Abbildung

$$\{\text{Basen von } V\} \rightarrow \{\text{Skalarprodukte auf } V\}, \quad \mathcal{B} \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$$

auf Injektivität und Surjektivität.

#### Übung 107.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform und  $q: V \rightarrow K$  die zugehörige quadratische Form.

1. Zeigen Sie für den Fall  $\text{char } K \neq 2$  mithilfe einer Polarisationsformel, dass  $\beta$  durch  $q$  bereits eindeutig bestimmt ist.
2. Folgern Sie: Ist  $\text{char } K \neq 2$ ,  $V \neq 0$  und  $\beta$  nicht entartet, d.h. für jedes  $v \in V$  mit  $v \neq 0$  gibt es ein  $w \in V$  mit  $\beta(v, w) \neq 0$ , so gibt es ein  $v \in V$  mit  $\beta(v, v) \neq 0$ .
3. Zeigen Sie für den Fall  $\text{char } K = 2$ , dass es verschieden symmetrische Bilinearformen mit gleicher quadratische Form geben kann. Geben Sie auch ein explizites Beispiel hierfür an.

### Übung 108.

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen im Allgemeinen gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an:

1. Ist  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$ , so ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt.
2. Ist  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  mit  $\langle b, b \rangle > 0$  für alle  $b \in \mathcal{B}$ , so ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt.
3. Ist  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  mit  $\langle b_1, b_2 \rangle > 0$  für alle  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ , so ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt.
4. Die Teilmenge  $U := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in V\}$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
5. Die Teilmengen

$$U_+ := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle \geq 0\} \quad \text{und} \quad U_- := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle \leq 0\}$$

sind Untervektorräume von  $V$ .

6. Die Teilmenge  $U_0 := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
7. Für jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  ist  $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ .
8. Ist  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit  $(U^\perp)^\perp = V$ , so ist  $U = V$ .
9. Für alle Untervektorräume  $U_1 \subseteq U_2$  gilt  $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ .
10. Für  $U_0 := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in V\}$  und jeden Untervektorraum  $U \subseteq V$  gilt

$$(U^\perp)^\perp = U + U_0.$$

### Übung 109.

Ist  $\beta: V \times W \rightarrow K$  eine Bilinearform, so heißen eine Basis  $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$  von  $V$  und eine Basis  $\mathcal{C} = (w_i)_{i \in I}$  von  $W$  *dual bezüglich*  $\beta$ , falls

$$\beta(v_i, w_j) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in I.$$

Es sei zunächst  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass die *Evaluation*

$$e: V \times V^* \rightarrow K \quad \text{mit} \quad e(v, \varphi) = \varphi(v)$$

eine  $K$ -bilineare Abbildung ist.

2. Zeigen Sie im Falle der Endlichdimensionalität von  $V$ , dass es zu jeder Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  genau eine Basis  $\mathcal{C}$  von  $V^*$  gibt, die bezüglich  $e$  dual zu  $\mathcal{B}$  ist. Woher kennen Sie diese Basis?

Von nun an sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein Isomorphismus ist.

4. Folgern Sie, dass es für jede Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  genau eine Basis  $\mathcal{B}^\circ = (b_1^\circ, \dots, b_n^\circ)$  von  $V$  gibt, die bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dual zu  $\mathcal{B}$  ist.

(Hinweis: Formulieren Sie die Aussage, dass  $\mathcal{C}$  dual zu  $\mathcal{B}$  ist, mithilfe von  $\Phi$  um.)

5. Zeigen Sie, dass für jede Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  die Gleichheit  $(\mathcal{B}^\circ)^\circ = \mathcal{B}$  gilt. Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\{\text{geordnete Basen von } V\} \rightarrow \{\text{geordnete Basen von } V\}, \quad \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^\circ$$

bijektiv ist.

6. Unter welchen Namen kennen Sie Basen von  $V$ , die bezüglich  $(-)^\circ$  selbstdual sind, die also  $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}$  erfüllen?

### Übung 110.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform.

1. Zeigen Sie, dass

$$\text{rad}(\beta) := \{v \in V \mid \beta(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$$

ein Untervektorraum von  $V$  ist. (Man bezeichnet  $\text{rad}(\beta)$  als das *Radikal* von  $\beta$ .)

2. Zeigen Sie, dass  $\beta$  eine symmetrische Bilinearform  $\bar{\beta}: (V/\text{rad}(\beta)) \times (V/\text{rad}(\beta)) \rightarrow K$  mit

$$\bar{\beta}([v], [w]) := \beta(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

induziert.

3. Zeigen Sie, dass  $\bar{\beta}$  nicht entartet ist, d.h. dass für das Radikal

$$\text{rad}(\bar{\beta}) := \{x \in V/U \mid \bar{\beta}(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V/U\}$$

bereits  $\text{rad}(\bar{\beta}) = 0$  gilt.

4. Inwiefern gelten die obigen Aussagen noch, wenn man  $U$  durch

$$W := \{v \in V \mid \beta(v, v) = 0\}$$

ersetzt?

### Übung 111.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $b: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform.

1. Zeigen Sie für  $\text{char } K \neq 2$ , dass es eindeutige Bilinearformen  $b_s, b_a: V \times V \rightarrow K$  gibt, so dass

- $b = b_s + b_a$
- $b_s$  ist symmetrisch und  $b_a$  ist antisymmetrisch

2. Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage für  $\text{char } K = 2$  nicht gilt.

Es sei nun  $V$  der Vektorraum der Polynomfunktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$b(p, q) := \int_{-1}^1 p(t)q'(t) dt$$

eine Bilinearform ist.

4. Geben Sie den symmetrischen Anteil  $b_s$  in einer Form an, in der kein Integral vorkommt.

### Übung 112.

Für je zwei  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  sei

$$\text{Bil}(V, W) := \{b: V \times W \rightarrow K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen  $V \times W \rightarrow K$ .

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

$$F: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Bil}(W, V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w, v) = b(v, w)$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.

2. Es sei  $b \in \text{Bil}(V, W)$  eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass  $b$  eine lineare Abbildung

$$\Phi_{V,W}(b): V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto b(v, -)$$

induziert. Dabei ist

$$b(v, -): W \rightarrow K, \quad w \mapsto b(v, w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{V,W}: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus

$$\text{Hom}(V, W^*) \rightarrow \text{Hom}(W, V^*)$$

an.

Wir betrachten nun den Fall  $W = V^*$ .

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e: V \times V^* \rightarrow K, \quad (v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform  $e$  einer linearen Abbildung  $V \rightarrow V^{**}$ , sowie einer linearen Abbildung  $V^* \rightarrow V^*$ . Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

**Übung 113.**

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  an, und zeigen Sie ihre Linearität.
2. Zeigen Sie für jeden  $K$ -Vektorraum  $U$ , dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: U \times U^* \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v) \quad \text{für alle } v \in V, \varphi \in V^*$$

eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

**Übung 114.**

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma: M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) := \text{tr}(AB)$$

eine symmetrische Bilinearform ist. Man bezeichnet diese als die *Traceform*.

2. Zeigen Sie, dass  $\sigma$  in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in M_n(K).$$

3. Zeigen Sie, dass  $\sigma$  nicht entartet ist, d.h. dass es für jedes  $A \in M_n(K)$  mit  $A \neq 0$  ein  $B \in M_n(K)$  mit  $\sigma(A, B) \neq 0$  gibt.

Es sei nun

$$S_+ := \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen und

$$S_- := \{A \in M_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie:

4. Ist  $\text{char } K \neq 2$ , so sind  $S_+$  und  $S_-$  bezüglich  $\sigma$  orthogonal zueinander.
5. Ist  $K = \mathbb{R}$ , so ist die Einschränkung von  $\sigma$  auf  $S_+$  positiv definit, und die Einschränkung auf  $S_-$  negativ definit.

**Übung 115.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $b: V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform,  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$ , und  $\mathcal{B}^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$  die entsprechende duale Basis von  $V^*$ .

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$B: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto b(-, v)$$

$K$ -linear ist.

2. Zeigen Sie die Gleichheit

$$M_{\mathcal{B}}(b) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*}(B).$$

(Beachten Sie, dass auf der linken Seite die darstellende Matrix einer Bilinearform steht, und auf der rechten Seite die darstellende Matrix einer linearen Abbildung.)

**Übung 116.**

Für jede Matrix  $X \in M_n(K)$  sei

$$\lambda_X: M_n(K) \rightarrow M_n(K), \quad A \mapsto XA$$

die Linksmultiplikation mit  $X$ ,

$$\rho_X: M_n(K) \rightarrow M_n(K), \quad A \mapsto AX$$

die Rechtsmultiplikation mit  $X$ , und

$$\text{ad}_X = [X, -]: M_n(K) \rightarrow M_n(K), \quad A \mapsto [X, A] = XA - AX$$

der Kommutator mit  $X$ .

1. Zeigen Sie: Ist  $X$  nilpotent, so sind auch  $\lambda_X$  und  $\rho_X$  nilpotent.

2. Folgern Sie: Ist  $X$  nilpotent, so ist auch  $\text{ad}_X$  nilpotent.

(Hinweis: Nutzen Sie, dass  $\text{ad}_X = \lambda_X - \rho_X$ .)

3. Zeigen Sie: Ist  $X$  diagonalisierbar, so sind auch  $\lambda_X$  und  $\rho_X$  diagonalisierbar.

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass  $X$  eine Diagonalmatrix ist.)

4. Folgern Sie: Ist  $X$  diagonalisierbar, so ist auch  $\text{ad}_X$  diagonalisierbar.

(Hinweis: Nutzen Sie, dass  $\text{ad}_X = \lambda_X - \rho_X$ .)

**Übung 117.**

Es sei  $K$  ein Körper und

$$\mathfrak{sl}_n(K) := \{A \in M_n(K) \mid \text{tr } A = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{sl}_n(K)$  ein Untervektorraum von  $M_n(K)$  mit  $\dim \mathfrak{sl}_n(K) = n^2 - 1$  ist.

2. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{E_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{E_{11} - E_{ii} \mid 2 \leq i \leq n\}$$

eine Basis von  $\mathfrak{sl}_n(K)$  ist, wobei  $E_{ij} \in M_n(K)$  die Matrix ist, deren  $(i, j)$ -ter Eintrag 1 ist, und für die alle anderen Einträge 0 sind.

Es sei nun  $C := \mathcal{L}([A, B] \mid A, B \in M_n(K))$ .

3. Zeigen Sie, dass  $\text{tr}([A, B]) = 0$  für alle  $A, B \in M_n(K)$ . Folgern Sie, dass  $C \subseteq \mathfrak{sl}_n(K)$ .

4. Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{sl}_n(K) \subseteq C$ , indem Sie jedes der Basiselemente aus  $\mathcal{B}$  also Kommutator schreiben.

(Hinweis: Überlegen Sie zunächst, dass  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$  für alle  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ .)

Es ist also  $\mathfrak{sl}_n(K) = \mathcal{L}([A, B] \mid A, B \in M_n(K))$  ein  $(n^2 - 1)$ -dimensionaler Untervektorraum. Es sei nun  $f: M_n(K) \rightarrow K$  eine lineare Abbildung mit  $f(AB) = f(BA)$  für alle  $A, B \in M_n(K)$ .

5. Zeigen Sie, dass  $f$  eine eindeutige lineare Abbildung

$$\bar{f}: M_n(K)/\mathfrak{sl}_n(K) \rightarrow K, \quad [A] \mapsto f(A)$$

induziert. Zeigen Sie, dass  $\bar{\text{tr}} \neq 0$ .

6. Zeigen Sie, dass  $M_n(K)/\mathfrak{sl}(K)$  eindimensional ist. Folgern Sie, dass es ein eindeutiges  $\lambda \in K$  mit  $\bar{f} = \lambda \bar{\text{tr}}$  gibt.
7. Folgern Sie, dass bereits  $f = \lambda \text{tr}$  gilt. (Die Spur ist also durch die Eigenschaft, dass  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  für alle  $A, B \in M_n(K)$ , bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmt.)

#### Übung 118.

Das Zentrum eines Rings  $R$  ist definiert als

$$Z(R) := \{r \in R \mid rs = sr \text{ für alle } s \in R\}.$$

Man bemerke, dass  $R$  genau dann kommutativ ist, wenn  $Z(R) = R$ . Wir werden  $Z(M_n(K))$  bestimmen. Hierfür sei

$$D_n(K) := KI = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$$

der Untervektorraum der Skalarmatrizen.

1. Zeigen Sie, dass  $D_n(K) \subseteq Z(M_n(K))$ .
2. Zeigen Sie für  $A \in Z(M_n(K))$ , dass  $A$  eine Diagonalmatrix ist.  
(Hinweis: Betrachten Sie die Matrizen  $E_{ii}$  für  $1 \leq i \leq n$ .)
3. Zeigen Sie ferner, dass alle Diagonaleinträge von  $A$  bereits gleich sind.  
(Hinweis: Betrachten Sie die Matrizen  $E_{ij}$  mit  $1 \leq i, j \leq n$ .)
4. Folgern Sie, dass  $Z(M_n(K)) = D_n(K)$ .

#### Übung 119.

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, und es seien  $K, E: V \rightarrow V$  zwei Endomorphismen mit

$$K \text{ ist invertierbar und } KE = 2EK.$$

1. Zeigen Sie, dass

$$(K - 2\lambda \text{id}_V)^n E = 2^n E (K - \lambda \text{id}_V)^n$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Folgern Sie, dass  $E(V_\lambda^\sim(K)) \subseteq V_{2\lambda}^\sim(K)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
3. Folgern Sie, dass  $E$  nilpotent ist.

#### Übung 120.

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $[-, -]: V \times V \rightarrow V$  eine alternierend bilineare Abbildung. Für jedes  $x \in V$  sei

$$\text{ad}_x := [x, -]: V \rightarrow V, \quad y \mapsto [x, y].$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1.  $[-, -]$  erfüllt die Jacobi-Identität, d.h. es ist

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$



2. Es gilt

$$\operatorname{ad}_x([y, z]) = [\operatorname{ad}_x(y), z] + [y, \operatorname{ad}_x(z)] \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$

(Man sagt, dass  $\operatorname{ad}_x$  eine Derivation bezüglich  $[-, -]$  ist.)

### Übung 121.

Es seien  $E$  und  $H$  zwei Endomorphismen eines  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $V$ , so dass  $[H, E] = 2E$ .

1. Zeigen Sie, dass  $E(V_\lambda(H)) \subseteq V_{\lambda+2}(H)$  für alle  $\lambda \in K$ .
2. Folgern Sie: Ist  $V$  endlichdimensional und  $H$  diagonalisierbar, so ist  $E$  nilpotent.

### Übung 122.

Es sei  $B \in M_n(\mathbb{K})$ . Es seien

$$\mathcal{O}(B) := \{S \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}) \mid S^T B S = B\}$$

und

$$\mathfrak{g}(B) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A^T B = -BA\}$$

1. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{O}(B)$  eine Untergruppe von  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$  ist.
2. Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{g}(B)$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$  ist, dass also  $[A_1, A_2] \in \mathfrak{g}(B)$  für alle  $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}(B)$ .
3. Zeigen Sie, dass  $\exp(A) \in \mathcal{O}(B)$  für alle  $A \in \mathfrak{g}(B)$ . (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass  $\exp(A)^T B = B \exp(-A)$ .)
4. Geben Sie für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  eine Matrix  $B \in M_n(\mathbb{R})$  an, so dass  $\mathcal{O}(B) = \mathcal{O}(n)$ . Was sind dann die Elemente von  $\mathfrak{g}(B)$ ?

### Übung 123.

Für einen endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  und eine Bilinearform  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  sei

$$\mathcal{O}(\beta) := \{\phi \in \operatorname{GL}(V) \mid \beta(\phi(x), \phi(y)) = \beta(x, y) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die Isometriegruppe von  $\beta$ , und

$$\mathfrak{g}(\beta) := \{f \in \operatorname{End}(V) \mid \beta(f(x), y) = -\beta(x, f(y)) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die assoziierte Lie-Algebra.

1. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{O}(\beta)$  eine Untergruppen von  $\operatorname{GL}(V)$  ist.
2. Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{g}(\beta)$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}(V)$  ist, d.h. dass  $[f, g] \in \mathfrak{g}(\beta)$  für alle  $f, g \in \mathfrak{g}(\beta)$ .
3. Zeigen Sie, dass  $\exp(f) \in \mathcal{O}(\beta)$  für alle  $f \in \mathfrak{g}(\beta)$ .  
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass  $\beta(\exp(f)(x), y) = \beta(x, \exp(-f)(y))$  für alle  $x, y \in V$ . Nutzen Sie hierfür, dass die bilineare Abbildung  $\beta$  in beiden Argumenten stetig ist.)
4. Es sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $V$ . Unter welchen Begriffen sind die Elemente aus  $G(\langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $\mathfrak{g}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$  bekannt?

**Übung 124.**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $m: V \times V \rightarrow V$  eine bilineare Abbildung. Eine lineare Abbildung  $D: V \rightarrow V$  heißt  $m$ -Derivation, falls

$$D(m(x, y)) = m(D(x), y) + m(x, D(y)) \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Es sei

$$\text{Der}(m) := \{D: V \rightarrow V \mid D \text{ ist eine } m\text{-Derivation}\}.$$

1. Zeigen Sie für den Fall  $V = K[X]$  und die Multiplikation

$$m(p, q) := p \cdot q \quad \text{für alle } p, q \in K[X],$$

dass die Ableitung

$$D: K[X] \rightarrow K[X], \quad \sum_{d=0}^n a_d X^d \mapsto \sum_{d=1}^n a_d d X^{d-1}$$

eine  $m$ -Derivation ist. Unter welchem Namen ist dieser Umstand für gewöhnlich bekannt?

2. Zeigen Sie, dass  $\text{Der}(m)$  ein Untervektorraum von  $\text{End}(V)$  ist.
3. Zeigen Sie, dass  $\text{Der}(m)$  eine Lie-Unteralgebra von  $\text{End}(V)$  ist, d.h. dass für alle  $D_1, D_2 \in \text{Der}(m)$  auch  $[D_1, D_2] \in \text{Der}(m)$ .

**Übung 125.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  und  $\omega: V^n \rightarrow K$  eine alternierende Multilinearform.

1. Zeigen Sie, dass genau dann  $\omega \neq 0$ , wenn  $\omega(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ .
2. Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus und

$$\omega_f := \omega \circ f^{\times n}: V^n \rightarrow K,$$

Zeigen Sie, dass  $\omega_f$  ebenfalls multilinear und alternierend ist.

3. Zeigen Sie, dass  $\omega_f = \det(f)\omega$ .

**Übung 126.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $n := \dim V$ . Es sei  $\omega: V^n \rightarrow K$  eine alternierende Multilinearform. Zeigen Sie, dass  $\omega = 0$ .

**Übung 127.**

Es sei  $n \geq 1$ . Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

1. Die Wegzusammenhangskomponenten von  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  sind die beiden Untergruppen

$$\text{GL}_n(\mathbb{R})_+ = \{S \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\} \quad \text{und} \quad \text{GL}_n(\mathbb{R})_- = \{S \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S < 0\}.$$

2. Die Gruppe  $\text{SO}(n)$  ist nicht wegzusammenhängend.
3. Die Gruppe  $\text{O}(n)$  ist eine Wegzusammenhangskomponente von  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

4. Die schiefsymmetrischen Matrizen

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

sind wegzusammenhängend.

5. Die Gruppe  $U(n) \cap GL_n(\mathbb{R})_+$  besteht aus zwei Wegzusammenhangskomponenten.

6. Ist  $G$  eine wegzusammenhängende Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{K})$ , so ist

$$G' := \{S \in G \mid \det g = 1\}$$

ebenfalls eine wegzusammenhängende Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{K})$ .

7. Jede Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{C})$  ist wegzusammenhängend.

8. Die Gruppe  $SU(n) \cap O(n)$  ist wegzusammenhängend.

9. Es ist  $G = \{A^* = -A\}$  eine wegzusammenhängende Untergruppe von  $A$ .

10. Die Gruppe der Drehmatrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

ist wegzusammenhängend.

**Übung 128.**

Es sei  $V$  ein euklidischer  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $d$  eine normierte, alternierende  $n$ -Form auf  $d$ . Es sei  $u \in V$  mit  $\|u\| = 1$ . Zeigen Sie für das orthogonale Komplement  $U := u^\perp = \mathcal{L}(u)^\perp$ , dass die Einschränkung  $d(-, \dots, -, u)|_{U^{n-1}}$  eine normierte, alternierende  $(n-1)$ -Form ist.

**Übung 129.**

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $\omega: V^3 \rightarrow K$  eine Trilinearform.

1. Zeigen Sie, dass es für alle  $u, v \in V$  ein eindeutiges Element  $\times_\omega \in V$  gibt, so dass

$$\omega(u, v, w) = \langle u \times_\omega v, w \rangle \quad \text{für alle } u, v, w \in V.$$

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\times_\omega: V \times V \rightarrow V$  bilinear ist.

3. Zeigen Sie: Ist  $\omega$  symmetrisch, bzw. alternierend, so ist auch  $\times_\omega$  symmetrisch, bzw. alternierend.

4. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\text{Tril}(V, V, V; K) \mapsto \text{Bil}(V, V; V), \omega \mapsto \times_\omega$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.

**Übung 130.**

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\beta: V \times V \rightarrow K$  eine nicht-entartete Bilinearform.

1. Zeigen Sie, dass es für jede Bilinearform  $\gamma: V \times V \rightarrow K$  eine eindeutige lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  gibt, so dass

$$\gamma(x, y) = \beta(f(x), y) \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

2. Zeigen oder widerlegen Sie, dass es für jede nicht-entartete Bilinearform  $\gamma: V \times V \rightarrow K$  einen eindeutigen Skalar  $c \in K$  mit  $\gamma = c\beta$  gibt.

**Übung 131.**

Zeigen oder widerlegen Sie, dass der Kommutator

$$[-, -]: M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow M_n(K)$$

in dem folgenden Sinne universell ist:

Für jeden  $K$ -Vektorraum  $V$  und jede bilineare Abbildung  $\beta: M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow V$  gibt es eine eindeutige  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi: M_n(K) \rightarrow V$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & M_n(K) \times M_n(K) & \\ \swarrow [-, -] & & \searrow \beta \\ M_n(K) & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array}$$

**Übung 132.**

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $\beta: V \times V \rightarrow W$  eine bilineare Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie, dass im  $\beta$  notwendigerweise ein Untervektorraum von  $W$  ist.

**Übung 133.**

Es sei  $m: K^n \times K^n \rightarrow M_n(K)$  mit

$$m(x, y) = xy^T \quad \text{für alle } x, y \in K^n.$$

1. Zeigen Sie, dass  $m$  bilinear ist.
2. Zeigen Sie, dass  $m$  im folgenden Sinne universell ist: Für jeden Vektorraum  $V$  und jede bilineare Abbildung  $b: K^n \times K^n \rightarrow V$  gibt es eine eindeutige lineare Abbildung  $\varphi: M_n(K) \rightarrow V$  mit  $b = \varphi \circ m$ , dass also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & K^n \times K^n & \\ \swarrow b & & \searrow m \\ M_n(K) & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array}$$