Simultane Diagonalisierbarkeit

Jendrik Stelzner

10. Juni 2016

1 Endlich viele Endomorphismen

Zunächst wollen wir Notation einführen.

Definition 1. *Es sei V ein K-Vektorraum.*

1. *Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ und Skalar $\lambda \in K$ sei*
$$V(f, \lambda) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = v\}$$
der Eigenraum *von f zum Eigenwert λ. Ein Element $v \in V(f, \lambda)$ mit $v \neq 0$ heißt* Eigenvektor *von f zum Eigenwert λ.*

2. *Für Endomorphismen $f_1, \dots, f_n\colon V \to V$ und paarweise verschiedene Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ sei*
$$V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n) \coloneqq \{v \in V \mid f_i(v) = \lambda_i v \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$
der gemeinsame Eigenraum *der Endomorphismen $f_1, \dots, f_n$ zu den (paarweise verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ein Element $v \in V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n)$ mit $v \neq 0$ heißt* gemeinsamer Eigenvektor *der Endomorphismen $f_1, \dots, f_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Proposition 2. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f_1, \dots, f_n\colon V \to V$ Endomorphismen. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass jeder Endomorphismus f_i bezüglich $\mathcal{B}$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V aus gemeinsamen Eigenvektoren der Endomorphismen $f_1, \dots, f_n$.*

3. *Es ist*
$$V = \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K} V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n).$$

Bemerkung 3. Die Endlichdimensionalität in Proposition 2 wird zur Existenz von Basen benötigt. Nutzt man, dass nach dem Auswahlaxiom jeder Vektorraum eine Basis besitzt, so gilt die Aussage auch für unendlichdimensionale Vektorräume.

Lemma 4. *Es sei V ein K-Vektorraum.*

1. *Ist $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Endomorphismen $f_i\colon V \to V$ und $g\colon V \to V$ ein Endomorphismus, der mit jedem der f_i kommutiert (also $f_i g = g f_i$ für alle $i \in I$ erfüllt), so ist für jede Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ von Skalaren $\lambda_i \in K$ der gemeinsame Eigenraum $V((f_i)_{i\in I}, (\lambda_i)_{i\in I})$ invariant unter g.*

Definition 5. *Es sei V ein K-Vektorraum.*

1. *Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt* diagonalisierbar *falls $V = \bigoplus_{\lambda\in K} V(f,\lambda)$.*

2. *Mehrere Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n\colon V \to V$ heißen* simultan diagonalisierbar, *falls $V = \bigoplus_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} V(f_1,\lambda_1; \ldots; f_n,\lambda_n)$.*

Theorem 6. *Es sei V ein K-Vektorraum und es seien $f_1, \ldots, f_n\colon V \to V$ Endomorphismen. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ sind simultan diagonalisierbar.*

2. *Jeder Endomorphismus f_i ist (einzeln) diagonalisierbar, und die Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ kommutieren paarweise miteinander (d.h. es ist $f_i f_j = f_j f_i$ für alle $1 \leq i, j \leq n$).*

Korollar 7. *Für einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V und Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n\colon V \to V$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass jeder Endomorphismus f_i bezüglich $\mathcal{B}$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.*

2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ aus gemeinsamen Eigenvektoren von $f_1, \ldots, f_n$.*

3. *Es ist $V = \bigoplus_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in K} V(f_1,\lambda_1; \ldots; f_n,\lambda_n)$.*

4. *Jeder der Endomorphismen f_i ist (einzeln) diagonalisierbar, und die Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ kommutieren paarweise miteinander.*

2 Unendlich viele Endomorphismen

Definition 8. *Es sei V ein K-Vektorraum und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Endomorphismen $f_i\colon V \to V$. Für eine Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ von Skalaren $\lambda_i \in K$ ist*

$$V((f_i)_{i\in I}, (\lambda_i)_{i\in I}) = \{v \in V \mid f_i(v) = \lambda_i v \text{ für alle } i \in I\}$$

der gemeinsame Eigenraum *der Endomorphismen $(f_i)_{i\in I}$ zu den Eigenwerten $(\lambda_i)_{i\in I}$. Ein Element $v \in V((f_i)_{i\in I}, (\lambda_i)_{i\in I})$ mit $v \neq 0$ heißt* gemeinsamer Eigenvektor *der Endomorphismen $(f_i)_{i\in I}$ zu den Eigenwerten $(\lambda_i)_{i\in I}$.*

Bemerkung 9. Für endlich viele Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n\colon V \to V$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ ist

$$V((f_1, \ldots, f_n), (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = V(f_1,\lambda_1; \ldots; f_n,\lambda_n).$$

Definition 10. *Es sei V ein K-Vektorraum und $H \subseteq \operatorname{End}_K(V)$ ein Untervektorraum. Für jedes $\lambda \in H^*$ sei*

$$V_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda(f)v \text{ für alle } f \in H\}$$

der weight space *von V bezüglich λ.*