Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

13. Juni 2016

Übung 1.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie, dass genau dann $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, wenn $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$.

Übung 2.
Es seien V und W zwei reelle Vektorräume, und $f \colon V \to W$ sei $\mathbb{R}$-linear.

1. Zeigen Sie, dass $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$.
2. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass $(V_{\mathbb{C}})_\lambda(f_{\mathbb{C}}) = V_\lambda(f)_{\mathbb{C}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\operatorname{im} f)_{\mathbb{C}}$.
5. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übung 3.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

Übung 4.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f \colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\Phi_V \colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$
ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.
2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^* \colon W^* \to V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* $\mathbb{R}$-linear ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ $\mathbb{R}$-linear ist, und dass
$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$
4. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate, wenn V und W unitäre Vektorräume sind?

Übung 5.
Für je zwei K-Vektorräume V und W sei

$$\mathrm{Bil}(V,W) := \{b\colon V \times W \to K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen $V \times W \to K$.

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

   $$F\colon \mathrm{Bil}(V,W) \to \mathrm{Bil}(W,V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w,v) = b(v,w)$$

   ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

2. Es sei $b \in \mathrm{Bil}(V,W)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass b ein lineare Abbildung

   $$\Phi_{V,W}(b)\colon V \to W^*, \quad v \mapsto b(v,-)$$

   induziert. Dabei ist

   $$b(v,-)\colon W \to K, \quad w \mapsto b(v,w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$\Phi_{V,W}\colon \mathrm{Bil}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

   ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}(V,W^*) \to \mathrm{Hom}(W,V^*)$ an.

Wir betrachten nun den Fall $W = V^*$.

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

   $$e\colon V \times V^* \to K, \quad (v,\varphi) \mapsto \varphi(v)$$

   eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform e einer linearen Abbildung $V \to V^{**}$, sowie einer linearen Abbildung $V^* \to V^*$. Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

Übung 6.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an, und zeigen sie ihre Linearität.

2. Zeigen Sie für jeden K-Vektorraum U, dass die Abbildung

   $$\langle \cdot,\cdot \rangle\colon U \times U^* \to K, \quad \text{mit} \quad \langle v,\varphi \rangle = \varphi(v)$$

   eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

Übung 7.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma\colon \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) \coloneqq \mathrm{tr}(AB)$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Zeigen Sie, dass σ in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in \mathrm{M}_n(K).$$