Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

3. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Jordannormalform, Hautpträume und Trigonalisierbarkeit

Übung 1.

1. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V. Drücken Sie $\operatorname{tr} f$ und $\det f$ durch die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von f aus.

2. Drücken Sie für den Fall $n = 2$ die Determinante $\det f$ durch $\operatorname{tr} f$ und $\operatorname{tr} f^2$ aus.

Übung 2.
Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{tr} A = 0$ und $\operatorname{tr} A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$.

Übung 3.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \notin \{2,3\}$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \frac{1}{6}(\operatorname{tr} A)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} A^3) \quad \text{für jedes } A \in \mathrm{M}_3(K).$$

(*Hinweis*: Wenn die Rechnungen zu kompliziert werden, dann macht man es falsch.)

Übung 4.
Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums f.

1. Definieren Sie den Eigenraum von f zum möglichen Eigenwert $\lambda \in K$.
2. Definieren sie den Hauptraum von f zum möglichen Eigenwert $\lambda \in K$.

Übung 5.
Bestimmen Sie alle möglichen Jordannormalformen einer nicht-diagonalierbaren Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{tr} = 0$.

Übung 6.
Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Matrizen jeweils eine Jordannormalform, inklusiver entsprechender Basiswechselmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Übung 7.
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Es sei $n\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $\mathrm{id}_V - n$ invertierbar ist.
   (*Hinweis*: Es ist $\mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V - n^{p+1}$ für $p \in \mathbb{N}$ groß genug.)
2. Zeigen, bzw. folgern Sie allgemeiner, dass $\lambda \mathrm{id}_V + n$ für alle $\lambda \in K^\times$ invertierbar ist.
3. Es sei $f\colon V \to V$ ein beliebiger Endomorphismus. Zeigen Sie für alle $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$, dass $V_\lambda^\sim(f)$ invariant unter $f - \mu \mathrm{id}_V$ ist, und dass die Einschränkung $(f - \mu \mathrm{id}_V)|_{V_\lambda^\sim(f)}$ invertierbar ist.
4. Folgern Sie: Ist $(f - \lambda_1)^{n_1} \cdots (f - \lambda_k)^{n_k} = 0$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ paarweise verschieden, so sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die möglichen Eigenwerte von f, und für alle $1 \leq i \leq k$ ist der Nilpotenzindex von $(f - \lambda_i)|_{V_\lambda^\sim(f)}$ durch $\leq n_k$ abschätzbar.
5. Folgern Sie: Ist K algebraisch abgeschlossen und $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$, so ist f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Übung 8.
Es sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus eines $\mathbb{C}$-Vektorraums V und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $(f - \lambda \mathrm{id}_V)|_{V_\lambda^\sim(f)}$ nicht notwendigerweise nilpotent ist.

Übung 9.
Bestimmen Sie in den Folgenden alle Möglichkeiten der Jordannormalform von $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Es ist $\chi_A(T) = (T-3)^4(T-5)^4$ und $(A-3I)^2(A-5I)^2 = 0$.
2. Es ist $A^3 = 0$ und alle nicht-trivalen Eigenräume von A sind eindimensional.
3. Es ist $\chi_A(T) = (T-2)(T+2)^3$ und $(A-2I)(A+2I) = 0$.
4. Es ist $\chi_A(T) = T^3 - T$.
5. Es ist $\chi_A(T) = (T^2 - 5T + 6)^2$ und alle Eigenräume von A sind entweder null- oder eindimensional.
6. Es ist $A^2 = A$ und alle nicht-trivialen Eigenräume von A sind zweidimensional.
7. Es ist $\chi_A(T) = T^5$ und alle Eigenräume von A sind entweder null- oder eindimensional.
8. Es ist $\chi_A(T) = (T+3)^3 T^2$ und A hat keine zweidimensionalen Eigenräume.
9. Es ist $\chi_A(T) = T^5 - 2T^4$.

Übung 10.
Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

1. Es sei $n: V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass der Endomorphismus $\mathrm{id}_V + n$ invertierbar ist.
   (*Hinweis*: Es ist $\mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V \pm n^{p+1}$ für $p \in \mathbb{N}$ groß genug.)

Ein Endomorphismus $u: V \to V$ heißt *unipotent*, falls $u - \mathrm{id}_V$ nilpotent it.

2. Folgern Sie, dass jeder unipotente Endomorphismus von V invertierbar ist.

Von nun an sei V endlichdimensional. Auf dem fünften Übungszettel wurde gezeigt, dass es für jeden Endomorphismus $f: V \to V$ eindeutige Endomorphismen $d, n: V \to V$ gibt, so dass

- $f = d + n$,
- d ist diagonalisierbar und n ist nilpotent, und
- d und n kommutieren.

Dies ist die *additive Jordanzerlegung* auf $\mathrm{End}(V)$.

3. Zeigen Sie, dass f genau dann invertierbar ist, wenn der diagonalisierbare Anteil d der additiven Jordanzerlegung von f invertierbar ist.

Folgern Sie damit aus der obigen additiven Jordanzerlegung von $\mathrm{End}(V)$ die folgende *multiplikative Jordanzerlegung* von $\mathrm{GL}(V)$:

4. Zeigen Sie, dass es für jedes $s \in \mathrm{GL}(V)$ eindeutige $d, u \in \mathrm{GL}(V)$ gibt, so dass
   - $s = d \cdot u$,

- d ist diagonalisierbar und u ist unipotent, und
- d und u kommutieren.

Übung 11.
Bestimmen Sie die Potenz A^{10} der Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Übung 12.
Bestimmen Sie die Lösungsräume der folgenden homogenen linearen Gleichungsssysteme. Dabei seien $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} f' &= -f & -6g, \\ g' &= 2f & +6g; \end{cases} \qquad \begin{cases} f' &= -f & -g, \\ g' &= 2f & +g; \end{cases} \qquad \begin{cases} f' &= 2f & +2g & +3h, \\ g' &= f & +3g & +3h, \\ h' &= -f & -2f & -2h. \end{cases}$$

Übung 13.
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, und es seien $K, E\colon V \to V$ zwei Endomorphismen mit

$$K \text{ ist invertierbar} \quad \text{und} \quad KE = 2EK.$$

1. Zeigen Sie, dass
$$(K - 2\lambda \operatorname{id}_V)^n E = 2^n E (K - \lambda \operatorname{id}_V)^n$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Folgern Sie, dass $E(V^\sim_\lambda(K)) \subseteq V^\sim_{2\lambda}(K)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. Folgern Sie, dass E nilpotent ist.

Übung 14.
Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sei

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Es sei

$$\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1} \,\middle|\, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda_1, \dots, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

die Menge der diagonalisierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen. Wir zeigen, dass $D_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dicht ist, d.h. dass es für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine diagonalisierbare Matrix $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Es sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist. Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$B(t) := A + tS\,\mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n)S^{-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ die Zahlen $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t) \in \mathbb{C}$ mit

   $$\mu_i(t) := \lambda_i + tz_i \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, n$$

   die Eigenwerte von $B(t)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.

3. Folgern Sie, dass $B(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

4. Folgern Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Wir wollen die Dichtheit von $\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ nutzen, um den Satz von Cayley-Hamilton für komplexe Matrizen zu zeigen:

5. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$F\colon\ \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \chi_A(A)$$

   stetig ist, wobei $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$ das charakteristische Polynom von A ist.

   (*Hinweis*: Die Matrixpotenzen $A \mapsto A^k$ sind stetig, und die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms χ_A sind Polynome in den Einträgen von A.)

6. Zeigen Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Zeigen Sie, dass $P(SAS^{-1}) = SP(A)S^{-1}$ für alle $P \in \mathbb{C}[T]$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Folgern Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Matrix $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$.

8. Folgern Sie, dass $F(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

2 Skalarprodukträume

Übung 15.
Definieren Sie die Begriffe eines reellen, bzw. komplexen Skalarprodukts, sowie eines reellen, bzw. komplexen Hilbertraums.

Übung 16.
Formulieren und Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Übung 17.
Es seien V und W zwei Skalarprodukträume über $\mathbb{K}$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Definieren Sie die zu f adjungierte Abbildung.

2. Zeigen Sie, dass die adjungierte Abbildung eindeutig ist.

Übung 18.
Es sei V ein Skalarproduktraum. Zeigen Sie für Endomorphismen $f, g_1, g_2 \colon V \to V$ Endomorphismen die folgende Kürzungsregel: Falls f^* existiert und $f^* f g_1 = f^* f g_2$, dann ist bereits $f g_1 = f g_2$.

Übung 19.
Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum eine Orthonormalbasis besitzt.

Übung 20.
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit abzählbarer Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Es sei $T \colon V \to V$ die eindeutige lineare Abbildung mit $T(e_i) = e_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass T kein Adjungiertes besitzt.

Übung 21.
Es sei V ein Skalarproduktraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien paarweise orthogonal zueinander. Zeigen Sie: Ist $v_1, \ldots, v_n \neq 0$, so ist die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig.

Übung 22.
Es sei V ein Skalarproduktraum und $f \colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die Eigenräume $V_\lambda(f)$ und $V_\mu(f)$ für alle $\lambda \neq \mu$ orthogonal sind.

Übung 23.
Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Skalarprodukträume und $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ eine Orthonormalbasis von W. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^*.$$

Übung 24.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f \colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$ für alle $v \in V$.
2. Zeigen Sie, dass $V_\lambda(f) = V_{\overline{\lambda}}(f^*)$ und $V_\lambda^\sim(f) = V_{\overline{\lambda}}^\sim(f^*)$.

Übung 25.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussage äquivalent sind:

1. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Orthonormalbasis von V.
2. Für alle $v \in V$ ist $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Übung 26.
Es sei V ein Skalarproduktraum und $f \colon V \to V$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $f = 0$.

Übung 27.
Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und $P_\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige lineare Abbildung mit

$$P_\pi(e_i) = e_{\pi(i)} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n,$$

wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.

1. Zeigen Sie, dass P_π orthogonal ist.

2. Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte von P_π.

3. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem alle möglichen Eigenwerte auftreten.

Übung 28.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_n)$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$P\colon V \to V, \quad v \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \, u_i$$

die orthogonale Projektion auf U ist.

Übung 29.
Es sei $V \neq 0$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ sei

$$\langle x, y \rangle_\lambda \coloneqq \lambda \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{K}$, für die $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ ein Skalarprodukt auf V ist.

Übung 30.
Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann unitär, wenn alle Eigenwerte von f Betrag 1 haben.

2. f ist genau dann selbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von f reell sind.

3. f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von f rein imaginär sind.

4. f ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von f sind.

Übung 31.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktsraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $\ker f^* \subseteq (\operatorname{im} f)^\perp$.

2. Folgern Sie daraus, dass $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$.

3. Folgern Sie aus den beiden Inklusionen $\ker f^* \subseteq (\operatorname{im} f)^\perp$ und $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$ mithilfe der Endlichdimensionalität von V, dass bereits Gleichheiten gelten, dass also

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

Von nun an sei f normal.

4. Zeigen Sie, dass $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ für alle $x \in V$.

5. Folgern Sie, dass $\ker f = \ker f^*$.

6. Folgern Sie damit aus den obigen Gleichheiten, dass $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$ gilt, und dass die Summe orthogonal ist.

   (*Hinweis*: Zeigen Sie zuerst, dass $\operatorname{im} f$ und $\ker f$ orthogonal sind, und nutzen Sie dann die Endlichdimensionalität von V.)

Übung 32.

1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

   eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(3)$, so dass $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.

2. Bestimmen Sie für die symmetrische Bilinearform $\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := x_1 y_2 + x_2 y_1 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass β bezüglich $\mathcal{B}$ durch eine Diagonalmatrix mit möglichen Diagonaleinträgen $0, 1, -1$ dargestellt wird.

Übung 33.

Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f\colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V : V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

   ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* $\mathbb{R}$-linear ist.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ $\mathbb{R}$-linear ist, und dass

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

4. Zeigen Sie: Eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die Basis $\Phi_V(\mathcal{B}) = (\Phi_V(v_1), \dots, \Phi_V(v_n))$ von V^* die duale Basis $\mathcal{B}^*$ ist.

5. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für denn Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn also V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

Übung 34.

Es sei V ein endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie für denn Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn es ein Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen f selbstadjungiert ist.

2. Zeigen oder widerlegen Sie die analoge Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Übung 35.
Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Spaltenvektor und

$$A := xx^T \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto Ay$$

die orthogonale Projektion auf die Gerade $\mathbb{R}x$ ist.

Übung 36.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ sei

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement von U, und

$$U^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

der Annihilator von U. Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es sei $f^*\colon W \to V$ die zu f adjungierte Abbildung, und

$$f^T\colon W^* \to V^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

die zu f duale Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$\Phi_V\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle$$

   ein Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Gleichheit $\Phi_V(U^\perp) = U^\circ$ gilt.

3. Zeigen Sie, dass $f^T \circ \Phi_W = \Phi_V \circ f^*$, dass also das folgende Diagramm kommutiert:

   $$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\Phi_V"'] & W \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "f^T"] \end{tikzcd}$$

   Folgern Sie, dass $f^* = \Phi_V^{-1} \circ f^T \circ \Phi_W$.

In Lineare Algebra I wurde gezeigt, dass

$$\ker f^T = (\operatorname{im} f)^\circ \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^T = (\ker f)^\circ,$$

und dass für je zwei Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ die Gleichheiten

$$(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ \quad \text{und} \quad (U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$$

gelten.

4. Folgern Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen und den Aussagen aus Lineare Algebra I für alle Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ die Gleichheiten

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp \quad \text{und} \quad (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

(*Hinweis*: Nutzen Sie, dass Φ_V ein Isomorphismus ist.)

5. Folgern Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen und den Aussagen aus Lineare Algebra I, dass

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

(*Hinweis*: Nutzen Sie, dass Φ_V und Φ_W Isomorphismen sind.)

Übung 37.
Es sei $V \coloneqq \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$, und es sei

$$U \coloneqq \{f \in V \mid f(0) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.
2. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

3. Zeigen Sie, dass $U^\perp = 0$. Folgern Sie, dass $V \neq U \oplus U^\perp$.
(*Hinweis*: Betrachten Sie für $g \in U^\perp$ die Funktion $h \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = t^2 g(t)$.)
4. Zeigen Sie ferner, dass V/U eindimensional ist.

Übung 38.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein selbstadjungierter, orthogonaler Endomorphismus mit nur positiven Eigenwerten. Zeigen Sie, dass bereits $f = \mathrm{id}_V$ gilt.

Übung 39.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi \colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie: Eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ist genau dann orthonormal, wenn

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) \langle -, v_i \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in V^*.$$

Es sei nun V der unendlichdimensionale Vektorraum der Polynomsfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n \subseteq V$ der endlichdimensionale Untervektorraum der Polynomsfunktionen vom Grad $\leq n$. Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$\varphi_a \colon V \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varphi_a(f) = f(a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

die Auswertung an a.

3. Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.

4. Zeigen Sie, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ und eine eindeutige Funktion $g_{n,a} \in V$ gibt, so dass
$$f(a) = \int_{-1}^{1} f(t)g_{n,a}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f \in V_n.$$

5. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V_2.

6. Bestimmen Sie $g_{2,a}$ in Abhängigkeit von a.

Übung 40.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen sich implizieren.

1. Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten.
2. Der Endomorphismus f ist orthogonal, und alle Eigenwerte von f sind positiv.
3. Der Endomorphismus f ist normal mit $\det f > 0$.
4. Es gibt einen selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$.
5. Der Endomorphismus f ist selbstadjungiert und orthogonal.

Übung 41.
Es sei V der reelle Vektorraum der Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n \subseteq V$ der Untervektorraum der Polynomfunktionen von Grad $\leq n$.

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.

2. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\psi\colon V \to V$ mit
$$\psi(f)(t) := (t^2 - 1)f''(t) + 2tf'(t) \quad \text{für alle } f \in V \text{ und } t \in \mathbb{R}$$
selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

Es sei $\mathcal{G} := (p_n)_{n \geq 0}$ die Orthonormalbasis von V, die durch Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Standardbasis $\mathcal{B} := (x^n)_{n \geq 0}$ von V ensteht.

3. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass V_n invariant unter ψ ist.

4. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass $\mathcal{G}_n := (p_0, \ldots, p_n)$ eine Basis von V_n ist.

5. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_n}(\psi|_{V_n})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Betrachten Sie hierfür die Filtration
$$0 \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots \subseteq V_n,$$
und nutzen Sie, dass $V_i = \mathcal{L}(\mathcal{G}_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ invariant unter ψ ist.

6. Folgen Sie mithilfe der Selbstadjungiertheit von ψ, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_n}(\psi|_{V_n})$ für alle $n \geq 0$ bereits eine Diagonalmatrix ist. Folgern Sie, dass $\mathcal{G}$ eine Basis aus Eigenvektoren von ψ ist.

7. Bestimmen Sie für alle $n \geq 0$ die Eigenwerte der Einschränkung $\psi|_{V_n}$, indem Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{B}_n = (1, x, \ldots, x^n)$ von V_n bestimmen.

8. Geben Sie den zu p_n gehörigen Eigenwert von ψ an.

9. Berechnen Sie $\mathcal{G}_4$.

Übung 42.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Es gilt $\exp(f)^* = \exp(f^*)$.

2. Ist f normal, so ist auch f^* normal.

3. Ist f selbstadjungiert, so ist auch $\exp(f)$ selbstadjungiert.

4. Ist f antiselbstadjungiert, so ist $\exp(f)$ orthogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Übung 43.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

1. Es gibt genau dann einen normalen Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f normal und invertierbar ist.

2. Es gibt genau dann einen antiselbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f unitär ist.

3. Es gibt genau dann einen selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten ist.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

4. Es gibt genau dann einen normalen Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f normal und invertierbar ist, und alle negativen reellen Eigenwerte von g gerade Vielfachheit haben.

5. Es gibt genau dann einen antiselbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f orthogonal ist und alle negativen reellen Eigenwerte von f gerade Vielfachheit haben.

6. Es gibt genau dann einen selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f selbstadjungiert mit positiven reellen Eigenwerten ist.

Übung 44.
Es sei
$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$
der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Wir betrachten die Teilmenge der quadratsummierbaren Folgen
$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

1. Zeigen Sie für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$, dass
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$
(*Hinweis*: Zeigen sie zunächst, dass $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.)
2. Folgern Sie, dass $\ell^2(\mathbb{Z})$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ ist.
3. Zeigen Sie, dass
$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$$
ein Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ definiert.
4. Es sei
$$R\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$
der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.
5. Zeigen Sie, dass R keine Eigenwerte besitzt.
6. Es sei
$$S\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n\in\mathbb{N}}.$$
Zeigen Sie, dass S ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob S selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.
7. Zeigen Sie, dass S diagonalisierbar ist.
8. Es sei
$$U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$
Bestimmen Sie $U^\perp$ und entscheiden Sie, ob $V = U \oplus U^\perp$.
9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Übung 45.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma(A,B) := \operatorname{tr}\left(A^T B\right) \quad \text{für alle } A,B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i,j,k,l \leq n$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezüglich σ bilden. (Der (i,j)-te Eintrag von E_{ij} ist also 1, und alle anderen Einträge sind 0.)

(*Hinweis*: Überlegen sie sich zunächst, dass $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ für alle $1 \leq i,j,k,l \leq n$.)

3. Es sei

$$S_+ := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$S_- := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 46.

Es sei V ein Skalarproduktraum und

$$\mathrm{O}(V) := \{f \in \operatorname{End}(V) \mid ff^* = \mathrm{id}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(V)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

Übung 47.

Zeigen sie, dass für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
2. $AA^* = I$.
3. $A^*A = I$.
4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.
5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.

Übung 48.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Zeigen Sie, dass es eindeutige hermitsche Matrizen $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B + iC$ gibt.
2. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn B und C kommutieren.
3. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige hermitsche Matrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und schiefhermitsche Matrix $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ gibt, so dass $A = D + E$.
4. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn D und E kommutieren.
5. Wie hängen die Zerlegungen $A = B + iC$ und $A = D + E$ zusammen?

Übung 49.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ sei eine endliche Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle x, y \rangle_G \coloneqq \frac{1}{|G|} \sum_{\phi \in G} \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.
2. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ in dem Sinne G-invariant ist, dass
$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V \text{ und } \phi \in G.$$
(*Hinweis*: Beachten Sie, dass die Multiplikation $G \to G$, $h \mapsto hg$ für alle $g \in G$ bijektiv ist.)
3. Zeigen Sie auch, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_G = \langle \cdot, \cdot \rangle$, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bereits G-invariant ist.
4. Folgern Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ für alle $\phi \in G$ eine orthogonale Matrix ist.
5. Folgern Sie damit, dass es für $n = \dim V$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi\colon G \to \mathrm{O}(n)$ gibt, G also isomorph zu der Untergruppe im Φ von $\mathrm{O}(n)$ ist.

Übung 50.
Es seien F und G zwei selbstadjungierte Endomorphismen eines Skalarproduktraums V. Zeigen Sie, dass $F \circ G$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn F und G kommutieren.

Übung 51.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Für jedes $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$ sei
$$s_\alpha\colon V \to V, \quad \text{mit} \quad s_\alpha(x) \coloneqq x - 2\frac{\langle x, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha.$$
Ferner seien $L_\alpha \coloneqq \mathbb{R}\alpha$ und $H_\alpha \coloneqq L_\alpha^\perp$.

1. Zeigen Sie, dass $L_\alpha = V_{-1}(s_\alpha)$ und $H_\alpha = V_1(s_\alpha)$. Folgern Sie, dass s_α diagonalisierbar ist.
2. Interpretieren Sie V geometrisch anschaulich.

3. Zeigen Sie, dass $s_\alpha^2 = \mathrm{id}_V$, und dass $s_{\lambda\alpha} = s_\alpha$, $L_{\lambda\alpha} = L_\alpha$ und $H_{\lambda\alpha} = H_\alpha$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^\times$.

4. Es sei $s' \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $s'(\alpha) = -\alpha$ und $s'(x) = x$ für alle $x \in H_\alpha$. Zeigen Sie, dass bereits $s' = s_\alpha$ gilt.

5. Es sei $t \colon V \to V$ ein orthogonaler Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$.

Übung 52.
Es seien V und W euklidische Vektorräume, und $f \colon V \to W$ sei eine surjektive Funktion mit

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

1. Zeigen Sie, dass f linear ist.

2. Zeigen Sie, dass f bereits ein Isomorphismus ist.

Übung 53.
Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $S \colon V \to V$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Der Endomorphismus S ist normal.

2. Der Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von S.

3. Für jeden S-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch das orthogonale Komplement $U^\perp$ invariant unter S.

Übung 54.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$. Für den $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ sei

$$S \coloneqq \{ f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f^* = f \}$$

der Untervektorraum der selbstadjungierten Endomorphismen und

$$A \coloneqq \{ f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f^* = -f \}$$

der Untervektorraum der antiselbstadjungierten Endomorphismen.

1. Zeigen Sie, dass $\langle f, g \rangle \coloneqq \mathrm{tr}(f \circ g^*)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ definiert.

2. Folgern Sie, dass $|\mathrm{tr}(f \circ g^*)| \leq \sqrt{|\mathrm{tr}(f \circ f^*)\,\mathrm{tr}(g \circ g^*)|}$ für alle $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) = S \oplus A$, und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 55.
Es sei $\det \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ die Determinantenabbildung, wobei $\mathbb{C}^\times$ die multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{C}$ bezeichnet.

1. Zeigen Sie, dass det ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

2. Geben Sie den Kern von det an.

3. Bestimmen Sie das Bild der Einschränkung $\det|_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$, und geben Sie den Kern an.

4. Bestimmen Sie das Bild der Einschränkung $\det|_{\mathrm{U}(n)}$, und geben Sie den Kern an.
5. Bestimmen Sie das Bild der Einschränkung $\det|_{\mathrm{O}(n)}$, und geben Sie den Kern an.

Übung 56.
Es sei

$$\Phi\colon \mathrm{SU}(2) \to S^3, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

die Abbildung auf die erste Spalte, wobei

$$S^3 := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{C}^2 \mid \|x\| = 1 \right\}$$

1. Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert ist.
2. Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist.

Übung 57.
Zeigen Sie, dass die drei Gruppen $\mathrm{SO}(2)$, S^1 und $\mathrm{U}(1)$ isomorph sind. (Dabei ist $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$.)

Übung 58.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum, und die Abbildung $P\colon V \to V$ sei orthogonal und eine Orthogonalprojektion. Bestimmen Sie P.

Übung 59.
Es sei $A \in \mathrm{U}(n)$. Zeigen Sie, dass $|\operatorname{tr} A| \leq n$. Wann gilt Gleichheit?

Übung 60.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ seien zwei geordnete Basen von V.

1. Die Basis $\mathcal{C}$ entstehen aus $\mathcal{B}$ durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens. Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ (von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$) eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie die umgekehrte Aussage: Ist die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen, so ist $\mathcal{C}$ notwendigerweise die Orthonormalbasis von V, die durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens aus $\mathcal{B}$ entsteht.
3. Entsteht $\mathcal{C}$ durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens aus $\mathcal{B}$, so ist die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ unitär.
4. Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ orthonormal, so ist die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ unitär.

Übung 61.
1. Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden Punkte. Zeigen Sie, dass es für beliebige Werte $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ ein Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ mit $P(z_j) = w_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ gibt.
2. Es sei $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ mit $f^* = P(f)$ gibt.

   (*Hinweis*: Nutzen Sie, dass f diagonalisierbar ist.)

Übung 62.
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $n := \dim V$.

1. Zeigen Sie, dass es für jede Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V genau ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ auf V gibt, so dass $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ ist.
2. Untersuchen Sie die Abbildung

$$\{\mathcal{B} \subseteq V \mid \mathcal{B} \text{ ist eine Basis von } V\} \longrightarrow \{\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to V \mid \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist ein Skalarprodukt auf } V\},$$
$$\mathcal{B} \longmapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$$

auf Injektivität und Surjektivität.

3 Verschiedenes

3.1 Allgemeines Zeugs

Übung 63.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f, g \colon V \to V$ seien zwei Endomorphismen.

1. Es sei $f \circ g = \mathrm{id}_V$ und V sei endlichdimensional. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f = \mathrm{id}_V$.
2. Zeigen Sie, dass die Aussage nicht mehr notwendigerweise gilt, wenn V unendlichdimensional ist.

Übung 64.
Es sei K ein endlicher Körper.

1. Geben Sie ein Polynom $p \in K[X]$ an, so dass zwar $p \neq 0$ aber $p(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in K$.
2. Geben Sie ein Polynom $p \in K[X]$ an, so dass zwar $\deg p \geq 1$, aber $p(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in K$.
3. Folgern Sie, dass es keine algebraisch abgeschlossenen endlichen Körper gibt.

Übung 65.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume, so dass V endlichdimensional ist, und $f \colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Dimensionsformel

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f.$$

Übung 66.
Ein Endomorphismus $f \colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *lokal nilpotent,* falls es für jedes $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(v) = 0$ gibt.

1. Zeigen Sie, dass jeder nilpotente Endomorphismus auch lokal nilpotent ist.
2. Zeige Sie, dass 0 der einzige mögliche Eigenwert eines lokal nilpotenten Endomorphismus ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und einen Endomorphismus $f \colon V \to V$ an, so dass f zwar lokal nilpotent, nicht aber nilpotent ist.

4. Zeigen Sie, dass jeder lokal nilpotente Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums bereits nilpotent ist.

Übung 67.
Es sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ die Gleichheit $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ gilt.
2. Folgern Sie, dass die Spur invariant unter Konjugation ist, d.h. dass

$$\mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathrm{M}_n(K) \text{ und } S \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Übung 68.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$R_k := \mathrm{im}\, f^k \quad \text{und} \quad N_k := \ker f^k.$$

1. Zeigen Sie, dass $R_0 = V$, und dass $R_i \supseteq R_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine absteigende Kette

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq R_4 \supseteq \cdots$$

   von Untervektorräumen.
2. Zeigen Sie, dass für $i \in \mathbb{N}$ mit $R_i = R_{i+1}$ auch $R_{i+1} = R_{i+2}$ gilt.
3. Folgern Sie: Gilt in der obigen absteigenden Kette einmal Gleichheit, also $R_i = R_{i+1}$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so stabilisiert die Kette bereits, d.h. es gilt $R_j = R_i$ für alle $j \geq i$.
4. Zeigen Sie, dass $N_0 = 0$, und dass $N_i \subseteq N_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine aufsteigende Kette

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq N_4 \subseteq \cdots$$

   von Untervektorräumen.
5. Zeigen Sie, dass für $i \in \mathbb{N}$ mit $N_i = N_{i+1}$ auch $N_{i+1} = N_{i+2}$ gilt.
6. Folgern Sie: Gilt in der obigen aufsteigende Kette einmal Gleichheit, also $N_i = N_{i+1}$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so stabilisiert die Kette bereits, d.h. es gilt $N_j = N_i$ für alle $j \geq i$.
7. Folgern Sie: Ist V endlichdimensional, so stabilisieren beide Ketten.

Übung 69.

1. Formulieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton.
2. Zeigen Sie den Satz für (2×2)-Matrizen durch explizites Nachrechnen.
3. Zeigen Sie den Satz für Diagonalmatrizen.
4. Folgern Sie den Satz für diagonalisierbare Matrizen.

Übung 70.
Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $\chi_A(T)$ das charakteristische Polynom von A.

1. Zeigen Sie, dass der konstante Term von $\chi_A(T)$ nicht verschwindet.
2. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $P \in K[T]$ gibt, so dass $A^{-1} = P(A)$.

Übung 71.
Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *algebraisch (über K)*, falls es ein Polynom $P \in K[T]$ mit $P \neq 0$ gibt, so dass $P(f) = 0$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums algebraisch ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen K-Vektorraum V und einen Endomorphismus $f\colon V \to V$, der nicht algebraisch ist.
3. Entscheiden Sie, ob die lineare Abbildung $K[X] \to K[X]$, $p \mapsto X \cdot p$ algebraisch ist.
4. Zeigen Sie, dass ein diagonalisierbarer Endomorphismus genau dann algebraisch ist, wenn er nur endlich viele Eigenwerte hat.

Übung 72.
Es sei V ein Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von f-invarianten Untervektorräumen, und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:

1. Auch der Schnitt $\bigcap_{i\in I} U_i$ ist f-invariant.
2. Auch die Summe $\sum_{i\in i} U_i$ ist f-invariant.

Übung 73.
Es sei V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Automorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum.

1. Zeigen Sie: Ist U endlichdimensional, so ist U auch invariant unter f^{-1}.
2. Zeigen Sie, dass die Aussage nicht gelten muss, falls U unendlichdimensional ist.

Übung 74.
Das *Zentrum* eines Rings R ist

$$Z(R) \coloneqq \{r \in R \mid rs = sr \text{ für alle } s \in R\}.$$

Man bemerke, dass R genau dann kommutativ ist, wenn $Z(R) = R$. Im Folgenden wird das Zentrum des Matrizenrings $\mathrm{M}_n(K)$ bestimmt. Hierfür sei

$$\mathrm{D}_n(K) \coloneqq KI = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$$

der Untervektorraum der Skalarmatrizen.

1. Zeigen Sie, dass $D_n(K) \subseteq Z(\mathrm{M}_n(K))$.
2. Zeigen Sie für $A \in Z(\mathrm{M}_n(K))$, dass A eine Diagonalmatrix ist.
   (*Hinweis*: Betrachten Sie die Matrizen E_{ii} für $1 \leq i \leq n$.)

3. Zeigen Sie ferner, dass alle Diagonaleinträge von A bereits gleich sind.

   (*Hinweis*: Betrachten Sie die Matrizen E_{ij} mit $1 \leq i, j \leq n$.)

4. Folgern Sie, dass $Z(\mathrm{M}_n(K)) = D_n(K)$.

3.2 Diagonalisierbarkeit und Eigenzeugs

Übung 75.

Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei Endomorphismen eines K-Vektorraums V. Entscheiden sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob diese allgemein gültig sind. Geben Sie, sofern möglich, auch ein Gegenbeispiel an.

1. Sind f und g diagonalisierbar, so ist auch $f \circ g$ diagonalisierbar.
2. Kommutieren f und g und ist $f \circ g$ diagonalisierbar, so ist f oder g diagonalisierbar.
3. Sind f und g diagonalisierbar, so ist auch $f + g$ diagonalisierbar.
4. Falls f und g kommutieren und diagonalisierbar sind, so ist $f \circ g$ invertierbar.
5. Falls f und g kommutieren und diagonalisierbar sind, so ist auch $f + g$ diagonalisierbar.
6. Ist f diagonalisierbar, so ist für jedes $p \in K[X]$ auch $p(f)$ diagonalisierbar.
7. Falls f und g kommutieren und diagonalisierbar sind, so folgt, wenn g invertierbar ist, dass $\circ g^{-1}$ diagonalisierbar ist.

Übung 76.

Es sei $V \neq 0$ ein K-Vektorraum, wobei K algebraisch abgeschlossen ist. Es seien $f_1, \ldots, f_n\colon V \to V$ paarweise kommutierende Endomorphismen.

1. Zeigen Sie, dass für alle $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und Skalare $\lambda_i \in K$ mit $i \in I$ der *gemeinsame Eigenraum*

   $$V((f_i, \lambda_i)_{i \in I}) \coloneqq \{v \in V \mid f_i(v) = \lambda_i v \text{ für alle } i \in I\}.$$

   invariant unter $f_1, \ldots, f_n$ ist.

2. Folgern Sie, dass die Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen, d.h. dass es einen Vektor $v \in V$ gibt, so dass v für jedes f_i eine Eigenvektor ist.

   (*Hinweis*: Konstruieren sie induktiv $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so dass $V((f_1, \lambda_1), \ldots, (f_i, \lambda_i)) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.)

Übung 77.

Es sei V ein K-Vektorraum. Für alle Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n\colon V \to V$ und Skalare (Eigenwerte) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ sei

$$V(f_1, \lambda_1; \ldots ; f_n, \lambda_n) \coloneqq \{v \in V \mid f_i(v) = \lambda_i v \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

der *gemeinsame Eigenraum* der Endomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Zeigen Sie, dass

$$V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, \lambda_i)$$

   für alle Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{End}(V)$ und Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

2. Es seien $f_1, \dots, f_n, g \in \mathrm{End}(V)$ Endomorphismen, so dass g mit jedem f_i kommutiert. Zeigen sie, dass der gemeinsame Eigenraum $V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n)$ für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ invariant unter g ist.

3. Zeigen Sie: Sind die Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \colon V \to V$ diagonalisierbar (d.h. für alle $i = 1, \dots, n$ ist $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V(f_i, \lambda)$) und paarweise kommutierend, so sind die Endomorphismen *simultan diagonalisierbar*, d.h. es ist

$$V = \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K} V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n).$$

4. Zeigen Sie, dass auch die Umkehrung gilt: Sind Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \colon V \to V$ simultan diagonalisierbar, so sind $f_1, \dots, f_n$ diagonalisierbar und kommutieren.

Von nun an sei V endlichdimensional.

5. Zeigen Sie, dass Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \colon V \to V$ genau dann simultan diagonalisierbar sind, wenn es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_i)$ für jedes $i = 1, \dots, n$ in Diagonalgestalt ist.

6. Es sei nun $H \subseteq \mathrm{End}(V)$ ein Untervektorraum aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Endomorphismen. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ für jedes $f \in H$ eine Diagonalmatrix ist.

   (*Hinweis*: Nutzen Sie, dass H endlichdimensional ist.)

7.

Übung 78.
Es sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums V und $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subseteq V$ eine Teilmenge aus Eigenvektoren von f, so dass jede n-elementige Teilmenge linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass f bereits ein skalares Vielfaches der Identität ist.

Übung 79.
Für jede Matrix $X \in \mathrm{M}_n(K)$ sei

$$\lambda_X \colon \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K), \quad A \mapsto XA$$

die Linksmultiplikation mit X,

$$\rho_X \colon \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K), \quad A \mapsto AX$$

die Rechtsmultiplikation mit X, und

$$\mathrm{ad}_X = [X, -] \colon \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K), \quad A \mapsto [X, A] = XA - AX$$

der Kommutator mit X.

1. Zeigen Sie: Ist X nilpotent, so sind auch λ_X und ρ_X nilpotent.

2. Folgern Sie: Ist X nilpotent, so ist auch ad_X nilpotent.
(*Hinweis*: Nutzen Sie, dass $\mathrm{ad}_X = \lambda_X - \rho_X$.)

3. Zeigen Sie: Ist X eine Diagonalmatrix, so sind λ_X und ρ_X diagonalisierbar.

4. Folgern Sie: Ist X diagonalisierbar, so sind auch λ_X und ρ_X diagonalisierbar.

5. Folgern Sie: Ist X diagonalisierbar, so ist auch ad_X diagonalisierbar.
(*Hinweis*: Nutzen Sie, dass $\mathrm{ad}_X = \lambda_X - \rho_X$.)

Übung 80.
Es seien E und H zwei Endomorphismen eines $\mathbb{C}$-Vektorraums V, so dass $[H, E] = 2E$.

1. Zeigen Sie, dass $E(V_\lambda(H)) \subseteq V_{\lambda+2}(H)$ für alle $\lambda \in K$.
2. Folgern Sie: Ist V endlichdimensional und H diagonalisierbar, so ist E nilpotent.

3.3 Multilinearität

Übung 81.
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $n \coloneqq \dim V$ und $\omega\colon V^n \to K$ eine alternierende Multilinearform. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Es ist $\omega \neq 0$.
2. Es gibt eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von V, so dass $\omega(b_1, \dots, b_n) \neq 0$.
3. Für jede Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von V gilt $\omega(b_1, \dots, b_n) \neq 0$.

Übung 82.
Es sei V ein K-Vektorraum und $[-,-]\colon V \times V \to V$ eine alternierend bilineare Abbildung. Für jedes $x \in V$ sei

$$\mathrm{ad}_x \coloneqq [x, -]\colon V \to V, \quad y \mapsto [x, y].$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. Die alternierende Bilinearform $[-,-]$ erfüllt die Jacobi-Identität, d.h. es ist
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$
2. Es gilt $\mathrm{ad}_x([y, z]) = [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)]$ für alle $x, y, z \in V$. (Man sagt, dass ad_x eine Derivation bezüglich $[-,-]$ ist.)

Übung 83.
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $n \coloneqq \dim V$. Es sei $\omega\colon V^m \to V$ eine alternierende Multilinearform. Zeigen Sie, dass $\omega = 0$.

Übung 84.
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $n \coloneqq \dim V$. Es sei $\omega\colon V^n \to K$ eine alternierende Multilinearform. Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und

$$\omega_f \coloneqq \omega \circ f^{\times n}\colon V^n \to K,$$

1. Zeigen Sie, dass ω_f ebenfalls alternierende Multilinearform ist.
2. Zeigen Sie, dass $\omega_f = \det(f)\omega$.

3.4 Wegzusammenhang und geometrisches

Übung 85.
Es sei $n \geq 1$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen gelten.

1. Die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind die beiden Untergruppen
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+ = \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S > 0\} \quad \text{und} \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_- = \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det S < 0\}.$$
2. Von den beiden Wegzusammenhangskomponente von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist $\mathrm{O}(n)$ diejenige, die die Einheitsmatrix enthält.
3. Die schiefsymmetrischen Matrizen $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ sind eine wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Die Gruppe $\mathrm{U}(n) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ besteht aus zwei Wegzusammenhangskomponenten.
5. Ist G eine wegzusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, so ist $G' := \{S \in G \mid \det S = 1\}$ ebenfalls eine wegzusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
6. Jede Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.
7. Es ist $G = \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid S^{-1} = -S\}$ eine zusammehängende, aber nicht wegzusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
8. Die Gruppe $\mathrm{SU}(n) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend.
9. Die Menge der Drehmatrizen
$$D := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \,\middle|\, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$
ist eine wegzusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Übung 86.
Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \ker f$ nicht wegzusammenhängend ist.

Übung 87.
Es sei V ein euklidischer n-dimensionaler Vektorraum und d eine normierte, alternierende n-Form auf d. Es sei $u \in V$ mit $\|u\| = 1$. Zeigen Sie für das orthogonale Komplement $U := u^\perp = \mathcal{L}(u)^\perp$, dass die Einschränkung $d(-,\dots,-,u)|_{U^{n-1}}$ eine normierte, alternierende $(n-1)$-Form ist.

Übung 88.
Es sei V ein eindimensionaler euklidischer Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass es genau zwei verschiedene Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gibt, so dass $\|v_1\| = 1$ und $\|v_2\| = 1$, und dass $v_2 = \pm v_1$.
2. Entscheiden Sie, ob die Aussage auch für einen eindimensionalen unitären Vektorraum gilt.

Übung 89.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum, und $A, B \in V$ seien zwei linear unabhängige Punkte. Zeigen Sie, dass es genau ein Element $\mathsf{t}_{AB} \in \mathcal{L}(A, B)$ gibt, so dass $\mathsf{t}_{AB} \perp A$, $\|\mathsf{t}_{AB}\| = 1$ und $\langle \mathsf{t}_{AB}, B \rangle > 0$.

Übung 90.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum und es seien $v, w \in V$ mit $v, w \neq 0$.

1. Zeigen Sie, dass es genau einen Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ gibt, so dass
$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}.$$
2. Zeigen Sie, dass genau dann $\sin\alpha \neq 0$, wenn v und w linear unabhängig sind.
3. Bestimmen Sie, wann $\sin\alpha = 1$.

Übung 91.
Es sei V ein dreidimensionaler orientierter euklidischer Vektorraum mit normierter alternierender Trilinearform d.

1. Zeigen Sie, dass es für alle $u, v \in V$ genau ein Element $u \times v \in V$ gibt, so dass $d(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle$ für alle $w \in V$.
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u \times v$ bilinear und alternierend ist.
3. Zeigen Sie für alle $u, v \in V$, dass $u \times v$ orthogonal zu u und v ist.
4. Zeigen Sie für alle $u, v \in V$, dass $u \times v = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.
   (*Hinweis*: Nutzen Sie, dass $d \neq 0$, und deshalb $d(b_1, b_2, b_3) \neq 0$ für jede Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von V.)
5. Zeigen Sie für alle $u, v \in V$, dass $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\alpha$, wobei α der unorientierte Winkel zwischen u und v ist.
6. Zeigen Sie: Ist (e_1, e_2, e_3) eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V, so gilt für $u = u_1 e1 + u_2 e_2 + u_2 e_3$ und $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$, dass
$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) e_3.$$

4 Bilinearformen

Übung 92.
Bestimmen Sie die Signatur (n_0, n_+, n_-) der folgenden quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^n$:

1. $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1 x_2$
2. $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 + a x_1 x_2$ mit $a \in \mathbb{R}$
3. $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 15x_2^2 + 6x_1 x_2$
4. $q(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$

5. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$
6. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 7x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Übung 93.
Es sei V ein K-Vektorraum, $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und $q\colon V \to K$, $v \mapsto \beta(v, v)$ die zugehörige quadratische Form.

1. Zeigen Sie für den Fall $\operatorname{char} K \neq 2$ mithilfe einer Polarisationsformel, dass β durch q bereits eindeutig bestimmt ist.
2. Folgern Sie: Ist $\operatorname{char} K \neq 2$, $V \neq 0$ und β nicht entartet, d.h. für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es ein $w \in V$ mit $\beta(v, w) \neq 0$, so gibt es ein $v \in V$ mit $\beta(v, v) \neq 0$.
3. Zeigen Sie für den Fall $\operatorname{char} K = 2$, dass es unterschiedliche symmetrische Bilinearformen mit gleicher quadratischer Form geben kann, indem Sie ein explizites Beispiel angeben.

Übung 94.
Es sei V eine reeller Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen allgemein gültig sind. Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel.

1. Ist $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.
2. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V mit $\langle b, b \rangle > 0$ für alle $b \in \mathcal{B}$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.
3. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V mit $\langle b_1, b_2 \rangle > 0$ für alle $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.
4. Die Teilmenge $\operatorname{rad} \beta := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in V\}$ ist ein Untervektorraum von V.
5. Die Teilmengen
$$U_+ := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle \geq 0\} \quad \text{und} \quad U_- := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle \leq 0\}$$
sind Untervektorräume von V.
6. Die Teilmenge $U_0 := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V.
7. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.
8. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $(U^\perp)^\perp = V$, so ist $U = V$.
9. Für alle Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ gilt $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
10. Für $\operatorname{rad} \beta = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in V\}$ und jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt
$$(U^\perp)^\perp = U + U_0.$$

Übung 95.
Ist $\beta\colon V \times W \to K$ eine Bilinearform, so heißen eine Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ von V und eine Basis $\mathcal{C} = (w_i)_{i\in I}$ von W *dual bezüglich* β, falls

$$\beta(v_i, w_j) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in I.$$

Es sei zunächst V ein K-Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass die *Evaluation* $e\colon V \times V^* \to K$ mit $e(v,\varphi) = \varphi(e)$ eine K-bilineare Abbildung ist.
2. Zeigen Sie: Ist V endlichdimensional, so gibt es zu jeder Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V genau eine Basis $\mathcal{C}$ von V^*, die bezüglich e dual zu $\mathcal{B}$ ist. Woher kennen Sie diese Basis?

Von nun an sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon V \to V^*$, $v \mapsto \langle -, v \rangle$ ein Isomorphismus ist.
4. Folgern Sie, dass es für jede Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V genau eine Basis $\mathcal{B}^\circ = (b_1^\circ, \dots, b_n^\circ)$ von V gibt, die bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dual zu $\mathcal{B}$ ist.

   (*Hinweis*: Formulieren Sie die Aussage, dass $\mathcal{B}^\circ$ dual zu $\mathcal{B}$ ist, mithilfe von Φ um.)
5. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$\{\text{geordnete Basen von } V\} \to \{\text{geordnete Basen von } V\}, \quad \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^\circ$$

   eine Involution ist.
6. Unter welchen Namen kennen Sie Basen von V, die bezüglich $(-)^\circ$ selbstdual sind, die also $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}$ erfüllen?

Übung 96.
Es sei V ein K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

1. Zeigen Sie, dass

   $$\operatorname{rad}(\beta) := \{v \in V \mid \beta(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$$

   ein Untervektorraum von V ist. (Man bezeichnet $\operatorname{rad}(\beta)$ als das *Radikal* von β.)
2. Zeigen Sie: β induziert eine symmetrische Bilinearform

   $$\bar{\beta}\colon (V/\operatorname{rad}(\beta)) \times (V/\operatorname{rad}(\beta)) \to K \quad \text{mit} \quad \bar{\beta}(\overline{v}, \overline{w}) := \beta(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

3. Zeigen Sie, dass $\bar{\beta}$ nicht entartet ist, d.h. dass für das Radikal

   $$\operatorname{rad}(\bar{\beta}) := \{x \in V/\operatorname{rad}(\beta) \mid \bar{\beta}(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V/\operatorname{rad}(\beta)\}$$

   bereits $\operatorname{rad}(\bar{\beta}) = 0$ gilt.
4. Inwiefern gelten die obigen Aussagen, wenn man $\operatorname{rad}(\beta)$ durch $W := \{v \in V \mid \beta(v, v) = 0\}$ ersetzt?

Übung 97.
Es sei V ein K-Vektorraum und $b\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.

1. Zeigen Sie für char $K \neq 2$, dass es eindeutige Bilinearformen $b_s, b_a\colon V \times V \to K$ gibt, so dass
   - $b = b_s + b_a$ und
   - b_s ist symmetrisch und b_a ist alternierend.
2. Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage für char $K = 2$ nicht notwendigerweise gilt.

Es sei nun V der reelle Vektorraum der Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ mit $b(p,q) := \int_{-1}^{1} p(t)q'(t)\,\mathrm{d}t$ eine Bilinearform ist.
4. Geben Sie den symmtrischen Anteil b_s in einer Form an, in der kein Integral vorkommt.

Übung 98.
Für je zwei K-Vektorräume V und W sei

$$\mathrm{Bil}(V,W) := \{b\colon V \times W \to K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der K-Vektorraum der Bilinearformen $V \times W \to K$.

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung $F_{V,W}\colon \mathrm{Bil}(V,W) \to \mathrm{Bil}(W,V)$ mit

   $$F_{V,W}(b)(w,v) = b(v,w) \quad \text{für alle } v \in V, w \in W$$

   ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.
2. Es sei $b \in \mathrm{Bil}(V,W)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass b ein lineare Abbildung

   $$\Phi_{V,W}(b)\colon V \to W^*, \quad v \mapsto b(v,-)$$

   induziert. Dabei ist $b(v,-)\colon W \to K$, $w \mapsto b(v,w)$.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$\Phi_{V,W}\colon \mathrm{Bil}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

   ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.
4. Konstruieren Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile einen Isomorphismus von K-Vektorräumen $T_{V,W}\colon \mathrm{Hom}(V,W^*) \to \mathrm{Hom}(W,V^*)$, so dass das folgende Diagram kommutiert:

   $$\begin{tikzcd} \mathrm{Bil}(V,W) \arrow[r, "F_{V,W}"] \arrow[d, "\Phi_{V,W}"'] & \mathrm{Bil}(W,V) \arrow[d, "\Phi_{W,V}"] \\ \mathrm{Hom}(V,W^*) \arrow[r, "T_{V,W}"] & \mathrm{Hom}(W,V^*) \end{tikzcd}$$

Wir betrachten nun den Fall $W = V^*$.

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation $e\colon V \times V^* \to K$, $(v,\varphi) \mapsto \varphi(v)$ eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform $e \in \mathrm{Bil}(V, V^*)$ einer linearen Abbildung $V \to V^{**}$, sowie einer linearen Abbildung $V^* \to V^*$. Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

Übung 99.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an, und zeigen Sie ihre Linearität.

2. Zeigen Sie für jeden K-Vektorraum U, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U^* \to K \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v) \quad \text{für alle } v \in V, \varphi \in V^*$$

eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass $\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle$ für alle $v \in V$ und $\psi \in W^*$.

Übung 100.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\sigma\colon \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to K$ mit $\sigma(A, B) := \mathrm{tr}(AB)$ eine symmetrische Bilinearform ist. Man bezeichnet diese als die *Traceform*.

2. Zeigen Sie, dass σ in dem Sinne assoziativ ist, dass $\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC)$ für alle $A, B, C \in \mathrm{M}_n(K)$.

3. Zeigen Sie, dass σ auch in dem Sinne assoziativ ist, dass $\sigma([A, B], C) = \sigma(A, [B, C])$ für alle $A, B, C \in \mathrm{M}_n(K)$.

4. Zeigen sie, dass σ nicht entartet ist, d.h. dass es für jedes $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A \neq 0$ ein $B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\sigma(A, B) \neq 0$ gibt.

   (*Hinweis*: Betrachten Sie die Matrizen $E_{ij} \in \mathrm{M}_n(K)$.)

Es sei nun

$$S_+ := \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen und

$$S_- := \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie:

5. Ist $\mathrm{char}\, K \neq 2$, so sind S_+ und S_- bezüglich σ orthogonal zueinander.

   (*Hinweis*: Überlegen Sie sich, dass $\sigma(A^T, B^T) = \sigma(A, B)$ für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$.)

6. Ist $K = \mathbb{R}$, so ist die Einschränkung von σ auf S_+ positiv definit, und die Einschränkung auf S_- negativ definit.

Übung 101.
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $b\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V, und $\mathcal{B}^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ die entsprechende duale Basis von V^*.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $B\colon V \to V^*$, $v \mapsto b(-, v)$ linear ist.
2. Zeigen Sie die Gleihheit $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(B)$. (Beachten Sie, dass auf der linken Seite die darstellende Matrix einer Bilinearform steht, und auf der rechten Seite die darstellende Matrix einer linearen Abbildung.)

Übung 102.
Es sei $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Es seien

$$\mathrm{O}(B) := \{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid S^T B S = B\}$$

und

$$\mathfrak{g}(B) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T B = -BA\}$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(B)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}(B)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ ist, dass also $[A_1, A_2] \in \mathfrak{g}(B)$ für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}(B)$.
3. Zeigen Sie, dass $\exp(A) \in \mathrm{O}(B)$ für alle $A \in \mathfrak{g}(B)$.

   (*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass $\exp(A)^T B = B \exp(-A)$.)
4. Geben Sie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ an, so dass $\mathrm{O}(B) = \mathrm{O}(n)$. Was sind dann die Elemente von $\mathfrak{g}(B)$?

Übung 103.
Dies ist eine koordinatenfreie Version von Übung 102. Für einen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V und eine Bilinearform $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ sei

$$\mathrm{O}(\beta) := \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(\phi(x), \phi(y)) = \beta(x, y) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die Isometriegruppe von β, und

$$\mathfrak{g}(\beta) := \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \beta(f(x), y) = -\beta(x, f(y)) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die assoziierte Lie-Algebra.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(\beta)$ eine Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}(\beta)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist, d.h. dass $[f, g] \in \mathfrak{g}(\beta)$ für alle $f, g \in \mathfrak{g}(\beta)$.
3. Zeigen Sie, dass $\exp(f) \in \mathrm{O}(\beta)$ für alle $f \in \mathfrak{g}(\beta)$.

   (*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass $\beta(\exp(f)(x), y) = \beta(x, \exp(-f)(y))$ für alle $x, y \in V$. Nutzen Sie hierfür, dass die Bilinearform β in beiden Argumenten stetig ist.)
4. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Unter welchen Begriffen sind die Elemente aus $G(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $\mathfrak{g}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ bekannt?

5 Quotientenvektorräume

Übung 104.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung.

1. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $f|_U = 0$. Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung
$$\bar{f}\colon V/U \to W, \quad \overline{v} \mapsto f(v)$$
induziert.
2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} \bar{f} = \operatorname{im} f$. Folgern Sie, dass $\bar{f}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.
3. Zeigen Sie, dass $U \subseteq \ker f$, und dass $\ker \bar{f} = (\ker f)/U$. Folgern Sie, dass $\bar{f}$ genau dann injektiv ist, wenn bereits die Gleichheit $U = \ker f$ gilt.
4. Folgern Sie, dass f einen Isomorphismus $V/(\ker f) \to \operatorname{im} f, \overline{v} \mapsto f(v)$ induziert.

Übung 105.
Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines K-Vektorraums V genau dann ein Untervektorraum ist, wenn es einen K-Vektorraum W und eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gibt, so dass $U = \ker f$.

Übung 106.
Es sei V ein K-Vektorraum mit Erzeugendensystem $E \subseteq V$. Es sei W ein K-Vektorraum mit Basis $(b_e)_{e \in E}$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $W/U \to V$ für einen passenden Untervektorraum $U \subseteq W$.

Übung 107.
Es sei V ein K-Vektorraum mit zwei Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$. Zeigen Sie die folgenden beiden Isomorphiesätze:

1. Die Inklusion $U_1 \to U_1 + U_2, x \mapsto x$ induziert einen Isomorphismus
$$U_1/(U_1 \cap U_2) \to (U_1 + U_2)/U_2, \quad \overline{x} \mapsto \overline{x} \quad \text{für alle } x \in V.$$
2. Ist $U_1 \subseteq U_2$, so ist U_2/U_1 ein Untervektorraum von V/U_1, und die Abbildung
$$(V/U_1)/(U_2/U_1) \to V/U_2, \quad \overline{\overline{x}} \mapsto \overline{x} \quad \text{für alle } x \in V$$
ist ein wohldefinierter Isomorphismus.

Übung 108.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Konstruieren Sie für den Annihilator
$$U^\circ = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$
einen Isomorphismus $F\colon U^\circ \to (V/U)^*$.

Übung 109.
Es sei V ein K-Vektorraum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V, so dass auf $V/\sim$ die Addition

$$\overline{v} + \overline{w} = \overline{v + w} \quad \text{für alle } v, w \in V$$

und die Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \overline{v} = \overline{\lambda \cdot v} \quad \text{für alle } \lambda \in K, v \in V$$

wohldefiniert sind.

1. Zeigen Sie, dass $V/\sim$ mit den obigen Operationen ein K-Vektorraum ist, und dass die Äquivalenzklasse $\overline{0}$ das Nullelement von $V/\sim$ ist.
2. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $\rho \colon V \to V/\sim$ mit $v \mapsto \overline{v}$ ein Epimorphismus ist.
3. Zeigen Sie für $U \coloneqq \ker \rho$, dass

$$v \sim w \iff v - w \in U \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

4. Folgern Sie, dass $V/\sim = V/U$, und dass ρ die kanonische Projektion des Quotientenvektorraums ist.

Übung 110.
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $[\,\cdot\,] \colon V \to V$ heißt *Seminorm*, falls

- $[\lambda x] = |\lambda| [x]$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ (Homogenität), und
- $[x + y] \leq [x] + [y]$ für alle $x, y \in V$ (Dreiecksungleichung).

Zeigen Sie:

1. Die Teilmenge $N \coloneqq \{x \in V \mid [x] = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V.
2. Die Seminorm $[\,\cdot\,]$ induziert auf V/U eine Norm $\|\cdot\|$ durch

$$\|\overline{x}\| \coloneqq [x] \quad \text{für alle } x \in V.$$

3. Es sei $V \coloneqq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf der reellen Geraden. Es sei

$$[f] \coloneqq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{für alle } f \in V.$$

   Zeigen Sie, dass $[\cdot]$ eine Seminorm auf V definiert, die aber keine Norm ist. Durch die obige Konstruktion erhalten wir einen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V/N, \|\cdot\|)$, wobei $N \coloneqq \{f \in V \mid [f] = 0\}$ und $\|\overline{f}\| = [f]$ für alle $f \in V$.

   Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\varphi \colon V/N \to \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, der eine Isometrie bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ von V/N und der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ von $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ist, d.h. für alle $f \in V/U$ ist $\|\varphi(f)\|_\infty = \|f\|$. (Wer können den Quotienten V/U, dessen Elemente Äquivalenzklassen von Funktionen sind, also als die stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall betrachten, und diese Identifikation ist mit den jeweiligen Normen verträglich.)

Übung 111.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $\pi \colon V \to V/U$, $v \mapsto [v]$ die kanonische Projektion.

1. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, so dass es eine Teilmenge $J \subseteq I$ gibt, so dass $(b_j)_{j \in J}$ eine Basis von U ist. Zeigen Sie, dass $(\overline{b_i})_{i \in I \smallsetminus J}$ eine Basis von V/U ist.

2. Folgern Sie die folgenden Dimensionsformeln für einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V: Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist
$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$
Ist $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung in einen weiteren K-Vektorraum W, so ist
$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f.$$

3. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von U und $(c_j)_{j \in J}$ eine Basis von V/U, wobei $I \cap J = \emptyset$. Für jedes $j \in J$ sei $b_j \in V$ eine Element mit $\pi(b_j) = c_j$. Zeigen Sie, dass $(b_\ell)_{\ell \in L}$ für $L \coloneqq I \cup J$ ist eine Basis von V ist.

Übung 112.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es sei
$$i \colon \ker f \to V, \quad v \mapsto v$$
die kanonische Inklusion und
$$p \colon W \to \operatorname{coker} f, \quad w \mapsto \overline{w}$$
die kanonische Projektion.

1. Zeigen Sie, dass $f \circ i = 0$ und $p \circ f = 0$.

2. Zeigen Sie, dass es für jeden K-Vektorraum U und jede lineare Abbildung $h \colon U \to V$ mit $f \circ h = 0$ eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{h} \colon U \to \ker f$ gibt, so dass das folgende Diagrammmmmm kommutiert:
$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "i"] & V \arrow[r, "f"] & W \\ U \arrow[u, dashed, "\bar{h}"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

3. Zeigen Sie, dass es für jeden K-Vektorraum U und jede lineare Abbildung $g \colon W \to U$ mit $g \circ f = 0$ eine eindeutige lineare Abbildnug $\bar{g} \colon \operatorname{coker} f \to U$ gibt, so dass das folgende Diagrammmmmm kommutiert:
$$\begin{tikzcd} & & U \\ V \arrow[r, "f"] & W \arrow[r, "p"] \arrow[ur, "g"] & \operatorname{coker} f \arrow[u, dashed, "\bar{g}"'] \end{tikzcd}$$

Übung 113.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f, g\colon V \to V$ seien Endomorphismus. Außdem sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, der invariant unter f und g ist.

1. Zeigen Sie: Der Endomorphismus f induziert einen Endomorphismus
$$\bar{f}\colon V/U \to V/U, \quad [v] \mapsto [f(v)].$$
Analog induziert dann auch g einen Endomorphismus $\bar{g}\colon V \to V$, $[v] \mapsto [g(v)]$.
2. Es seien $f|_U = g|_U$ und $\bar{f} = \bar{g}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass bereits $f = g$ gelten muss.

6 Komplexifizierung

Übung 114.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Es sei $\iota\colon V \to V$, $v \mapsto v + i \cdot 0$ die kanonische Inklusion. Zeigen Sie:

1. Für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gibt genau eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f^{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to W$, die das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "f"] & \\ V_{\mathbb{C}} \arrow[r, "f^{\mathbb{C}}"'] & W \end{tikzcd}$$
2. Für je zwei $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen $g_1, g_2\colon V_{\mathbb{C}} \to W$ gilt genau dann $g_1 = g_2$, wenn $g_1 \circ \iota = g_2 \circ \iota$.
3. Für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum W' gilt für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ und jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $g\colon W \to W'$ gilt $(g \circ f)^{\mathbb{C}} = g \circ f^{\mathbb{C}}$.

Übung 115.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung wohldefiniert ist:
$$\Phi\colon \ \{U \subseteq V \mid U \text{ ist ein } \mathbb{R}\text{-UVR}\} \to \{W \subseteq V_{\mathbb{C}} \mid W \text{ ist ein } \mathbb{C}\text{-UVR}\}, \quad U \mapsto U_{\mathbb{C}}$$
2. Zeigen Sie, dass Φ injektiv ist, und geben Sie ein Linksinverses von Φ an.
3. Zeigen Sie, dass Φ genau dann surjektiv ist, wenn $V = 0$ oder V eindimensional ist.
4. Zeigen Sie, dass für einen $\mathbb{C}$-Untervektorraum $W \subseteq V_{\mathbb{C}}$ die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:
   a) Es ist $W \in \operatorname{im} \Phi$.
   b) Der Unterraum W ist induziert.
   c) Für alle $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 + iv_2 \in W$ sind auch $v_1 + i \cdot 0, v_2 + i \cdot 0 \in W$.
   d) Es gilt $W = \overline{W}$.

5. Zeigen Sie für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$, dass der Eigenraum $(V_{\mathbb{C}})_\lambda(f_{\mathbb{C}})$ genau dann induziert ist, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung den Untervektorraum von V, durch denn $(V_{\mathbb{C}})_\lambda(f)$ induziert wird.

Übung 116.
Für jeden $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei $\iota_V\colon V \to V$, $v \mapsto v + i \cdot 0$ die kanonische Inklusion und für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum W und jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ sei $f^{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to W$ die eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $f^{\mathbb{C}} \circ \iota_V = f$.

1. Zeigen Sie, dass für jeden $\mathbb{R}$-Vektorraum V und jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum W die Abbildung
$$\Phi_{V,W}\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W), \quad f \mapsto f^{\mathbb{C}}$$
ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist. Geben Sie auch $\Phi_{V,W}^{-1}$ an.

2. Es seien V, V', W, W' vier K-Vektorräume und $g_1\colon V' \to V$ und $g_2\colon W \to W'$ zwei K-lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die beidseitige Komposition
$$g_2 \circ - \circ g_1\colon \operatorname{Hom}_K(V,W) \to \operatorname{Hom}_K(V',W'), \quad h \mapsto g_2 \circ f \circ g_1$$
eine K-lineare Abbildung ist.

3. Zeigen Sie, dass die Isomorphismen $\Phi_{V,W}$ in dem folgenden Sinne *natürlich* sind: Es seien V und V' zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume und es sei $h\colon V' \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Es seien W und W' zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume und es sei $g\colon W \to W'$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann kommutiert das folgende Diagramm von $\mathbb{R}$-Vektorräumen und $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen:
$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \arrow[r, "\Phi_{V,W}"] \arrow[d, "g\circ-\circ h"'] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W) \arrow[d, "g\circ-\circ h^{\mathbb{C}}"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V',W') \arrow[r, "\Phi_{V',W'}"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V'_{\mathbb{C}},W')
\end{tikzcd}$$

Übung 117.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{B} = (v_j)_{j\in J}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = (v_j + i \cdot 0)_{j\in J}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$ ist.

Übung 118.
Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-lineare Inklusion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x$ einen Isomorphismus $\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen induziert.

Übung 119.
Es seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung
$$\varphi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}}), \quad f \mapsto f_{\mathbb{C}}$$
einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen
$$\Phi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})$$
induziert.
(*Hinweis*: Beachten Sie, dass V und W nicht notwendigerweise endlichdimensional sind.)

Übung 120.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $(V^*)_\mathbb{C} \to (V_\mathbb{C})^*$.
(*Hinweis*: Beachten Sie, dass V ist nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.)

Übung 121.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right)_\mathbb{C} = \bigcap_{i\in I} (U_i)_\mathbb{C}$$
2. Es gilt
$$\left(\sum_{i\in I} U_i\right)_\mathbb{C} = \sum_{i\in I} (U_i)_\mathbb{C}.$$
3. Folgern Sie, dass genau dann $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$, wenn $V_\mathbb{C} = \bigoplus_{i\in I} (U_i)_\mathbb{C}$.

Übung 122.
Es seien V und W zwei reelle Vektorräume, und $f\colon V \to W$ sei eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass $\ker(f_\mathbb{C}) = (\ker f)_\mathbb{C}$.
2. Folgern Sie, dass $f_\mathbb{C}$ genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass $(V_\mathbb{C})_\lambda(f_\mathbb{C}) = V_\lambda(f)_\mathbb{C}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(f_\mathbb{C}) = (\operatorname{im} f)_\mathbb{C}$.
5. Folgern Sie, dass $f_\mathbb{C}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übung 123.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f_\mathbb{C}$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.
(*Hinweis*: Man kann etwa Übung 121 nutzen. Beachten Sie aber auf jeden Fall, dass V nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.)

Übung 124.
Zeigen Sie, dass die kanonische Inklusion $\iota\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}[X]$, $x \mapsto x$ $\mathbb{R}$-linear ist, und einen Isomorphismus $\mathbb{R}[X]_\mathbb{C} \to \mathbb{C}[X]$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen induziert.

Übung 125.
Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ eine Basis eines $\mathbb{R}$-Vektorraums W. Es seien

$$\mathcal{B}_\mathbb{C} \coloneqq (b_1 + i \cdot 0, \dots, b_n + i \cdot 0) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_\mathbb{C} \coloneqq (c_1 + i \cdot 0, \dots, c_m + i \cdot 0)$$

die entsprechenden $\mathbb{C}$-Basen der Komplexifizierungen $V_\mathbb{C}$ und $W_\mathbb{C}$. Es seien

$$\Phi^\mathbb{R}\colon \operatorname{Hom}_\mathbb{R}(V, W) \to \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}), \quad f \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

und

$$\Phi^{\mathbb{C}}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})\to \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C}),\quad g\mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}},\mathcal{C}_{\mathbb{C}}}(g).$$

Es seien

$$\begin{aligned}
\iota_1&\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}}, && f\mapsto f+i\cdot 0,\\
\iota_2&\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}}), && f\mapsto f_{\mathbb{C}}\\
\iota_3&\colon\ \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})\to \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}, && A\mapsto A+i\cdot 0,\\
\iota_4&\colon\ \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})\to \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C}), && A\mapsto A,
\end{aligned}$$

die jeweiligen kanonischen Inklusionen.

1. Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{R}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}}) \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{C}}"] \\
\mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R}) \arrow[r, "\iota_4"] & \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

   Folgern Sie, dass ι_4 tatsächlich injektiv ist, wie der oben verwendete Begriff *Inklusion* vermuten lässt.

2. Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{R}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \arrow[d, "(\Phi^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}"] \\
\mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R}) \arrow[r, "\iota_3"] & \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

3. Zeigen Sie, dass die Inklusion ι_2 eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\Psi_1\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}}\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})$$

   induziert, die das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \arrow[dl, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\iota_2"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\Psi_1"] & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}}).
\end{tikzcd}$$

4. Zeigen Sie auf analoge Weise, dass die Inklusion ι_4 eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\Psi_2\colon\ \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}\to \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C})$$

   induziert, die das folgende Diagramm zum K5ommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R}) \arrow[dl, "\iota_3"'] \arrow[dr, "\iota_4"] & \\
\mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\Psi_2"] & & \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

5. Wir haben nun das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \arrow[dl, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\iota_2"] \arrow[dd, "\Phi^{\mathbb{R}}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \arrow[rr, crossing over, "\Psi_1"] \arrow[dd, "(\Phi^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}}) \arrow[dd, "\Phi^{\mathbb{C}}"] \\
& \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}) \arrow[dl, "\iota_3"'] \arrow[dr, "\iota_4"] & \\
\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\Psi_2"] & & \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Von diesem Diagramm wissen wir bereits, dass Deckel, Boden und beide Rückseiten kommutieren. Folgern Sie daraus, dass auch die Vorderseite kommutiert.

(*Hinweis*: Nutzen Sie, dass zwei $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f, g\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \to \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C})$ genau dann übereinstimmen, wenn die Kompositionen $f \circ \iota_1$ und $g \circ \iota_1$ übereinstimmen.)

6. Zeigen Sie, dass Ψ_2 ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

7. Folgen Sie, dass auch Ψ_1 ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

7 Direkte Summen

Übung 126.
Es seien V ein K-Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass sich durch jeden idempotenten Endomorphismus $e\colon V \to V$ (d.h. $e^2 = e$) eine Zerlegung

$$V = \operatorname{im} e \oplus \ker e$$

ergibt, und dass

$$e(v + w) = v \quad \text{für alle } v \in \operatorname{im} e \text{ und } w \in \ker e.$$

2. Zeigen, Sie, dass für jeden idempotenten Endomorphismus $e\colon V \to V$ auch $\mathrm{id}_V - e$ idempotent ist, und dass $\operatorname{im}(\mathrm{id}_V - e) = \ker e$ und $\ker(\mathrm{id}_V - e) = \operatorname{im} e$.

3. Es sei (U_1, U_2) ein Paar von Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Endomorphismus $p_{U_1,U_2}\colon V \to V$ gibt, so dass

$$p_{U_1,U_2}(u_1 + u_2) = u_1 \quad \text{für alle } u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2.$$

4. Zeigen Sie, dass die obigen Konstruktionen wie folgt eine Bijektion ergeben.

$$\left\{ (U_1, U_2) \,\middle|\, \begin{array}{c} U_1, U_2 \subseteq V \text{ sind} \\ \text{Untervektorräume} \\ \text{mit } V = U_1 \oplus U_2 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{ e \in \mathrm{End}(V) \mid e \text{ ist idempotent} \},$$

$$(U_1, U_2) \longmapsto p_{U_1,U_2},$$

$$(\operatorname{im} e, \ker e) \longleftarrow\!\shortmid\, e.$$

5. Auf der linken Seite der obigen Bijektion gibt es eine Involution $(U_1, U_2) \mapsto (U_2, U_1)$. Zeigen Sie, dass dies unter der gegebenen Bijektion der Involutions $e \mapsto \mathrm{id}_V - e$ auf der rechten Seite entspricht.

Übung 127.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $f^2 = 1$.

1. Zeigen Sie für $\operatorname{char} K \neq 2$, dass $V = V_1(f) \oplus V_{-1}(f)$, dass also f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 1 und -1 ist.

2. Zeigen Sie, dass die Aussage für $\operatorname{char} K = 2$ nicht mehr gelten muss.

Übung 128.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume, und $f\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung, die ein lineares Rechtsinverses $g\colon W \to V$ besitzt. Zeigen Sie auf die folgenden beiden Weisen, dass

$$V = \ker f \oplus \operatorname{im} g.$$

1. Durch explizites Nachrechnen, dass $V = \ker f + \operatorname{im} g$ und $\ker f \cap \operatorname{im} g = 0$.

2. Durch geschickte Betrachtung des Endomorphismus $gf\colon V \to V$.

Übung 129.
Zeigen Sie im Folgenden jeweils, dass der Vektorraum V die direkte Summe der Untervektorräume U_1 und U_2 ist, indem Sie einen idempotenten Endomorphisus $e\colon V \to V$ mit $U_1 = \operatorname{im} e$ und $U_2 = \ker e$ angeben.

1. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, $V := \mathrm{M}_n(K)$ der K-Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über K,

   $$U_1 := \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = A\}$$

   der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

   $$U_2 := \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = -A\}$$

   der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

2. Es sei $V := \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, sowie

   $$U_1 := \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

   der Untervektorraum der geraden Funktionen und

   $$U_2 := \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

   der Untervektorraum der ungeraden Funktionen.

3. Als $\mathbb{R}$-Vektorraum die Ebene $V = \mathbb{R}^2$ und als Untervektorräume die beiden Geraden

   $$U_1 := \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

4. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall $I = [0,1]$ mit den Untervektorräumen

   $$U_1 := \{f \in V \mid f(0) = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{f \in V \mid f \text{ ist konstant}\}.$$

5. Für einen Körper K mit $\operatorname{char} K \nmid n$ der K-Vektorraum $V \coloneqq \mathrm{M}_n(K)$ der $(n \times n)$-Matrizen über K, und die Untervektorräume der spurlosen Matrizen und der Skalarmatrizen, d.h.

$$U_1 \coloneqq \mathfrak{sl}_n(K) = \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid \operatorname{tr} A = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 \coloneqq KI = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$$

6. Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, so dass es $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ und $(f - \lambda)(f - \mu) = 0$ gibt. Es seien $U_1 = V_\lambda(f)$ und $U_2 = V_\mu(f)$.

   (*Hinweis*: Die Behauptung ist also, dass f diagonalisierbar mit Eigenwerten λ und μ ist.)

Übung 130.
Es sei V ein K-Vektorraum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen allgemein gültig sind. Geben Sie gegebenfalls ein Gegenbeispiel an.

1. Ist $V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2$ für Untervektorräume $U, W_1, W_2 \subseteq V$, so ist $W_1 = W_2$.
2. Ist $V = V_1 \oplus V_2$ für Untervektorräume $V_1, V_2 \subseteq V$, so gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Zerlegung
$$U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2).$$
3. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum, so gibt es einen f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.
4. Für alle Untervektorräume $W, U_1, U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt
$$(U_1 + W) \cap U_2 = U_1 + (W \cap U_2).$$
5. Sind $U_1, U_2, W \subseteq V$ Untervektorräume mit $U_1 \subseteq U_2$ und $V = U_1 \oplus W$, so ist
$$U_2 = U_1 \oplus (W \cap U_2).$$
6. Ist $\mathcal{E} \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist der Schnitt $\mathcal{E} \cap U$ ein Erzeugendensystem von U.
7. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Famlie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$ mit $V = \sum_{i \in I} U_i$ und $U_i \cap U_j = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$, so ist $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

Übung 131.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus von V (d.h. es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda(f)$). Zeigen Sie, dass für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ die Einschränkung $f|_U\colon U \to U$ diagonalisierbar ist, und dass $U_\lambda(f|_U) = U \cap V_\lambda(f)$ für alle $\lambda \in K$.

Übung 132.
Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Kollektion $e_1, \dots, e_n \in \operatorname{End}(V)$ von Endomorphismen heißt *complete set of orthogonal idempotents*ö falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle $i = 1, \dots, n$ ist e_i idempotent, also $e_i^2 = e_i$ (*idempotents*).
- Für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ ist $e_i e_j = 0$ (*orthogonal*).
- Es gilt $\mathrm{id}_V = e_1 + \dots + e_n$ (*complete*).

1. Es sei $e_1, \dots, e_n \colon V \to V$ ein *complete set of orthogonal idempotents*. Zeigen Sie, dass

$$V = \operatorname{im} e_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} e_n.$$

2. Es seien $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. Zeigen Sie, dass es für alle $i = 1, \dots, n$ einen eindeutigen Endomorphismus $p^{(i)}_{U_1,\dots,U_n} \colon V \to V$ mit

$$p^{(i)}_{U_1,\dots,U_n}(u_1 + \cdots + u_n) = u_i \quad \text{für alle } u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n,$$

gibt. Zeigen Sie ferner, dass $p^{(1)}_{U_1,\dots,U_n}, \dots, p^{(n)}_{U_1,\dots,U_n}$ ein *complete set of orthogonal idempotents* ist.

3. Zeigen Sie, dass die obigen Konstruktionen wie folgt eine Bijektion ergeben:

$$\left\{ (U_1, \dots, U_n) \;\middle|\; \begin{array}{c} U_1, \dots, U_n \subseteq V \\ \text{sind Untervek-} \\ \text{torräume mit} \\ U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ (e_1, \dots, e_n) \;\middle|\; \begin{array}{c} e_1, \dots, e_n \in \operatorname{End}(V) \\ \text{ist ein } \textit{complete set} \\ \textit{of orthogonal} \\ \textit{idempotents} \end{array} \right\}$$
$$(U_1, \dots, U_n) \longmapsto \left(p^{(1)}_{U_1,\dots,U_n}, \dots, p^{(n)}_{U_1,\dots,U_n}\right)$$
$$(\operatorname{im} e_1, \dots, \operatorname{im} e_n) \longleftarrow\!\shortmid (e_1, \dots, e_n)$$

4. Es sei $f \colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Es sei $e_1, \dots, e_n \in K$ das *complete set of orthogonal idempotents*, dass der Zerlegung

$$V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n}(f)$$

entspricht, d.h. für alle $i = 1, \dots, n$ sei $e_i = p^{(i)}_{V_{\lambda_1}(f),\dots,V_{\lambda_n}(f)}$. Geben Sie eine Formel an, durch die sich e_i aus f ergibt.

Übung 133.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. f ist diagonalisierbar.
2. Für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt es einen f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

Übung 134.
Es sei V ein K-Vektorraum und $e_1, \dots, e_n \in \operatorname{End}(V)$ sei eine Kollektion von Endomorphismen mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle $i = 1, \dots, n$ ist e_i idempotent, also $e_i^2 = e_i$.
- Die idempotenten Endomorphismen $e_1, \dots, e_n$ sind paarweise orthogonal, d.h. es ist $e_i e_j = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$.
- Es gilt $\operatorname{id}_V = e_1 + \cdots + e_n$.

Man sagt, dass $e_1, \dots, e_n$ ein *complete set of orthogonal idempotents* ist.

1. Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{im} e_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} e_n$ gilt.

2. Zeigen Sie für alle $i = 1, \dots, n$, dass $\operatorname{im} e_i = V_1(e_i)$ und $\bigoplus_{j \neq i} \operatorname{im} e_j = \ker e_i$ gelten.

3. Folgern Sie, dass es für jeden idempotenten Endomorphismus $e \colon V \to V$ eine Zerlegung

$$V = \operatorname{im} e \oplus \ker e$$

   mit $\operatorname{im} e = V_1(e)$ gibt.

   (*Hinweis*: Erweitern Sie e zu einem complete set of idempotents, dass die Zerlegung liefert.)

4. Für alle $i = 1, \dots, n$ sei $E_{ii} \in \mathrm{M}_n(K)$ die Matrix mit 1 als i-ten Diagonaleintrag, und alle anderen Einträge sind 0. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen $e_1, \dots, e_n$ mit

$$e_i \colon \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K), \quad A \mapsto AE_{ii}$$

   ein *complete set of orthogonal idempotents* bildet, und bestimmen Sie die Zerlegung

$$\mathrm{M}_n(K) = \operatorname{im} e_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} e_n.$$

Übung 135.
Es sei V ein K-Vektorraum.

1. Es seien $e_1, \dots, e_n \in \operatorname{End}(V)$ Endomorphismen mit den folgenden Eigenschaften:
   - Für alle $i = 1, \dots, n$ ist e_i idempotent, also $e_i^2 = e_i$.
   - Die idempotenten Endomorphismen $e_1, \dots, e_n$ sind paarweise orthogonal, d.h. es ist $e_i e_j = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$.
   - Es gilt $\mathrm{id}_V = e_1 + \cdots + e_n$.

   Man nennt $e_1, \dots, e_n$ ein *complete set of orthogonal idempotents*. Zeigen Sie, dass

$$V = \operatorname{im} e_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} e_n.$$

Es sei nun $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Wir nehmen zunächst an, dass f diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$.

3. Folgern Sie aus der Eigenraumzerlegung $V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n}(f)$, dass es für alle $i = 1, \dots, n$ eine eindeutige lineare Abbildung $e_i \colon V \to V$ gibt, so dass

$$e_i(v_1 + \cdots + v_n) = v_i \quad \text{für alle } v_1 \in V_{\lambda_1}(f), \dots, v_n \in V_{\lambda_n}(f).$$

   (Die Abbildungen $e_1, \dots, e_n$ sind also die Projektionen auf die einzelnen Eigenräume bezüglich der Eigenraumzerlegung.)

4. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen $e_1, \dots, e_n$ ein *complete set of orthogonal idempotents* bilden.

5. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} e_i = V_{\lambda_i}(f)$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Zerlegung $V = \operatorname{im} e_1 \oplus \cdots \oplus e_n$ stimmt also mit der Eigenraumzerlegung von V bezüglich f überein.

6. Zeigen Sie, dass

$$e_i = \prod_{j \neq i} \frac{f - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i}(f - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \quad \text{für alle } i = 1 \dots, n.$$

(*Hinweis*: Wenden Sie den rechten Ausdruck auf die Eigenräume von f an.)

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$ für paarweise verschiedene Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Für alle $i = 1, \dots, n$ sei

$$e_i \coloneqq \prod_{j \neq i} \frac{f - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i}(f - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)}.$$

7. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen $e_1, \dots, e_n$ idempotent sind, indem Sie zeigen, dass

$$e_i^2 - e_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

8. Zeigen Sie, dass die idempotenten Endomorphismen $e_1, \dots, e_n$ orthogonal sind.

9. Zeigen Sie, dass $\mathrm{id}_V = e_1 + \cdots + e_n$. Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

   Für alle $i = 1, \dots, n$ sei

$$P_i(T) \coloneqq \prod_{j \neq i} \frac{T - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i}(T - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \in K[T].$$

   Zeigen Sie für alle $i = 1, \dots, n$, dass P_i ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist, so dass $e_i = P_i(f)$. Zeigen Sie auch, dass $P_i(\lambda_i) = 1$ und $P_i(\lambda_j) = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$.

   Folgern Sie für das Polynom $P(T) \coloneqq 1 - \sum_{i=1}^n P_i(T)$, dass $\deg P \leq n - 1$, und dass $P(\lambda_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Folgern Sie, dass $P = 0$, und somit $1 = \sum_{i=1}^n P_i(T)$.

   Folgern Sie durch Einsetzen von f, dass $\mathrm{id}_V = \sum_{i=1}^n e_i$.

Also ist $e_1, \dots, e_n$ ein *complete set of orthogonal idempotents*, und somit $V = \operatorname{im} e_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} e_n$.

10. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} e_i \subseteq V_{\lambda_i}(f)$ für alle $i = 1, \dots, n$.

    (*Hinweis*: Überlegen sie sich, dass $(f - \lambda_i)e_i = 0$.)

11. Folgern Sie mithilfe der Zerlegung $V = \operatorname{im} e_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} e_n$, dass V diagonalisierbar ist, und dass $\operatorname{im} e_i = V_{\lambda_i}(f)$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Ingesamt zeigt dies, dass genau dann $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$ für paarweise verschieden $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, wenn f diagonalisierbar ist und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ die einzigen möglichen Eigenwerte von f sind.

12. Es sei nun $K = \mathbb{C}$. Folgern Sie, dass f in den folgenden Fällen diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie jeweils die möglichen Eigenwerte:
    - Es gilt $f^2 = f$,
    - es gilt $f^3 = f$,
    - es gilt $f^3 = -f$,
    - es gilt $f^n = \mathrm{id}_V$ für ein $n \geq 1$.