

Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

28. Juni 2016

Übung 1.

Es sei V ein K -Vektorraum und $f, g: V \rightarrow V$ seien zwei Endomorphismen.

1. Es sei $f \circ g = \text{id}_V$ und V sei endlichdimensional. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f = \text{id}_V$.
2. Zeigen Sie, dass die Aussage nicht mehr notwendigerweise gilt, wenn V unendlichdimensional ist.

Übung 2.

1. Geben Sie einen Körper K und ein Polynom $p \in K[X]$ an, so dass $p \neq 0$ und $p(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in K$.
2. Folgern Sie, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich ist.

Übung 3.

Es seien V und W zwei K -Vektorräume, so dass V endlichdimensional ist, und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Dimensionsformel

$$\dim V = \dim \ker V + \dim \text{im } V.$$

Übung 4.

Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eines K -Vektorraums V heißt *lokal nilpotent*, falls es für jedes $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(v) = 0$ gibt.

1. Zeigen Sie, dass jeder nilpotente Endomorphismus auch lokal nilpotent ist.
2. Zeige Sie, dass 0 der einzige mögliche Eigenwert eines lokal nilpotenten Endomorphismus ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ an, so dass f zwar lokal nilpotent, nicht aber nilpotent ist.
4. Zeigen Sie, dass jeder lokal nilpotente Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums bereits nilpotent ist.

Übung 5.

Es sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie für alle $A, B \in M_n(K)$ die Gleichheit $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
2. Folgern Sie, dass die Spur invariant unter Konjugation ist, d.h. dass

$$\text{tr}(SAS^{-1}) = \text{tr}(A) \quad \text{für alle } S \in \text{GL}_n(K).$$

Übung 6.

Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eines K -Vektorraums V heißt *algebraisch (über K)*, falls es ein Polynom $P \in K[T]$ mit $P \neq 0$ gibt, so dass $P(f) = 0$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums algebraisch ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen K -Vektorraum V und einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ an, der nicht algebraisch ist.

Übung 7.

Es sei V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$R_k := \text{im } f^k \quad \text{und} \quad N_k := \ker f^k.$$

1. Zeigen Sie, dass $R_0 = V$, und dass $R_i \supseteq R_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine absteigende Kette

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq R_4 \supseteq \dots$$

von Untervektorräumen.

2. Zeigen Sie, dass für $i \in \mathbb{N}$ mit $R_i = R_{i+1}$ auch $R_{i+1} = R_{i+2}$ gilt.
3. Folgern Sie: Gilt in der obigen absteigenden Kette einmal Gleichheit, also $R_i = R_{i+1}$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so stabilisiert die Kette bereits, d.h. es gilt $R_j = R_i$ für alle $j \geq i$.
4. Zeigen Sie, dass $N_0 = 0$, und dass $N_i \subseteq N_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine aufsteigende Kette

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq N_4 \subseteq \dots$$

von Untervektorräumen.

5. Zeigen Sie, dass für $i \in \mathbb{N}$ mit $N_i = N_{i+1}$ auch $N_{i+1} = N_{i+2}$ gilt.
6. Folgern Sie: Gilt in der obigen aufsteigenden Kette einmal Gleichheit, also $N_i = N_{i+1}$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so stabilisiert die Kette bereits, d.h. es gilt $N_j = N_i$ für alle $j \geq i$.
7. Folgern Sie: Ist V endlichdimensional, so stabilisieren beiden Kette.

Übung 8.

Es sei V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Automorphismus und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, der invariant unter f ist.

1. Zeigen Sie: Ist U endlichdimensional, so ist U auch invariant unter f^{-1} .
2. Zeigen Sie, dass die Aussage nicht gelten muss, falls U unendlichdimensional ist.

Übung 9.

Es sei $f: V \rightarrow V$ Endomorphismus eines \mathbb{C} -Vektorraums und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $(f - \lambda \text{id}_V)|_{V_\lambda(f)}$ nicht notwendigerweise nilpotent ist.

Übung 10.

Es seien $f, g: V \rightarrow V$ zwei Endomorphismen eines K -Vektorraums V . Beweisen Sie entweder, dass die folgenden Aussagen im Allgemeinen gelten, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. Sind f und g diagonalisierbar, so ist auch $f \circ g$ diagonalisierbar.
2. Kommutieren f und g und ist $f \circ g$ diagonalisierbar, so sind f und g diagonalisierbar.
3. Sind f und g diagonalisierbar, so ist auch $f + g$ diagonalisierbar.
4. Falls f und g kommutieren und diagonalisierbar sind, so ist auch $f + g$ diagonalisierbar.
5. Falls f und g kommutieren und diagonalisierbar sind, so ist $f \circ g$ invertierbar.
6. Ist f diagonalisierbar, so ist für jedes $p \in K[X]$ auch $p(f)$ diagonalisierbar.

Übung 11.

1. Formulieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton.
2. Zeigen Sie den Satz für (2×2) -Matrizen durch explizites Nachrechnen.
3. Zeigen Sie den Satz für Diagonalmatrizen.
4. Folgern Sie den Satz für diagonalisierbare Matrizen.

Übung 12.

Es sei V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Ist $f^2 = f$, so ist $V = \text{im } f \oplus \ker f$, und es gilt $\text{im } f = V_1(f)$ und $\ker f = V_0(f)$.
2. Ist $f^2 = \text{id}_V$ und $\text{char } K \neq 2$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten 1 und -1 .
3. Sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ und $(f - \lambda)(f - \mu) = 0$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten λ und μ . Inwiefern sind die vorherigen beiden Aufgabenteile Sonderfälle hiervon?

Übung 13.

Zeigen Sie im folgenden jeweils, dass der Vektorraum V die direkte Summe der Untervektorräume U_1 und U_2 ist, indem Sie einen idempotenten Endomorphismus $e: V \rightarrow V$ mit $U_1 = \operatorname{im} e$ und $U_2 = \ker e$ angeben.

1. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, $V := M_n(K)$ der Vektorraum der $(n \times n)$ -Matrizen über K ,

$$U_1 := \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$U_2 := \{A \in M_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

2. Es sei $V := \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der reellwertigen Folgen auf \mathbb{R} , sowie

$$U_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der geraden Funktionen und

$$U_2 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der ungeraden Funktionen.

3. Die Ebene $V = \mathbb{R}^2$ und als Untervektorräume die beiden Geraden

$$U_1 := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Für $\operatorname{char} K \neq 2$ und einen Vektorraum W sei

$$V := \{b: W \times W \rightarrow K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Vektorraum der Bilinearformen auf W . Es sei

$$U_1 := \{s \in V \mid s \text{ ist symmetrisch}\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Bilinearformen, und

$$U_2 := \{a \in V \mid a \text{ ist antisymmetrisch}\}$$

der Untervektorraum der alternierenden Bilinearformen.

5. Der Vektorraum $V := \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$ mit den Untervektorräumen

$$U_1 := \{f \in V \mid f(0) = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{f \in V \mid f \text{ ist konstant}\}.$$

6. Es sei erneut $V := \mathbb{C}(I, \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$. Es sei nun

$$U_1 := \{f \in V \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

der Untervektorraum der Funktion mit Nullrandwerten, und

$$U_2 := \{h_{x,y} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der affin-linearen Funktionen, wobei

$$h_{x,y}: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto (1-t)x + ty = x + t(y-x)$$

die affin lineare Funktion mit den Randwerten x und y ist. (*Hinweis:* Es hilft, sich diese Zerlegung anschaulich vorzustellen.)

7. Für einen Körper mit $\text{char } K \nmid n$ die Zerlegung von $V := M_n(K)$ in die Untervektorräume

$$U_1 := \mathfrak{sl}(K) = \{A \in M_n(K) \mid \text{tr } A = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := KI = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$$

der spurlosen Matrizen und der Skalarmatrizen.

8. Es sei V ein beliebiger K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, so dass $(f - \lambda)(f - \mu) = 0$ für $\lambda, \mu \in K$ und $\lambda \neq \mu$. Es seien $U_1 = V_\lambda(f)$ und $U_2 = V_\mu(f)$. (*Hinweis:* Die Behauptung ist also, dass f diagonalisierbar mit Eigenwerten λ und μ ist.)

Übung 14.

Es seien V ein K -Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass sich durch jeden idempotenten Endomorphismus $e: V \rightarrow V$ (d.h. $e^2 = e$) eine Zerlegung

$$V = \text{im } e \oplus \ker e$$

ergibt, wobei

$$e(v + w) = v \quad \text{für alle } v \in \text{im } e \text{ und } w \in \ker e.$$

2. Es sei (U_1, U_2) ein Paar von Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Endomorphismus $p_{U_1, U_2}: V \rightarrow V$ gibt, so dass

$$p_{U_1, U_2}(u_1 + u_2) = u_1 \quad \text{für alle } u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2.$$

3. Zeigen Sie, dass die obigen Konstruktionen eine Bijektion

$$\left\{ (U_1, U_2) \mid \begin{array}{l} U_1, U_2 \subseteq V \text{ sind} \\ \text{Untervektorräume} \\ \text{mit } V = U_1 \oplus U_2 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{e \in \text{End}(V) \mid e \text{ ist idempotent}\},$$

$$(U_1, U_2) \longmapsto p_{U_1, U_2}$$

$$(\text{im } e, \ker e) \longleftarrow e$$

ergeben.

4. Auf der linken Seite der obigen Bijektion gibt es eine Involution $(U_1, U_2) \mapsto (U_2, U_1)$. Geben Sie an, wie die entsprechende Involution auf der rechten Seite aussieht.

Übung 15.

Es sei V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $f^2 = 1$.

1. Zeigen Sie für $\text{char } K \neq 2$, dass f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 1 und -1 ist.
2. Zeigen Sie, dass die Aussage für $\text{char } K = 2$ nicht mehr gelten muss.

Übung 16.

Es seien V und W zwei K -Vektorräume, und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, die ein Rechtsinverses $g: W \rightarrow V$ besitzt. Zeigen Sie, dass

$$V = \ker f \oplus \text{im } g$$

auf die folgenden beiden Weisen:

1. Durch explizites Nachrechnen, dass $V = \ker f + \text{im } g$ und $\ker f \cap \text{im } g = 0$.
2. Durch Betrachtung des Endomorphismus $gf: V \rightarrow V$.

Übung 17.

Es sei V ein K -Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen allgemein gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

1. Ist $V = V_1 \oplus V_2$ für Untervektorräume $V_1, V_2 \subseteq V$, so gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Zerlegung

$$U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2).$$

2. Ist $V = U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$ mit $W_1 \supseteq W_2$, so ist

$$W_1 = (U_2 \cap W_1) \oplus W_2.$$

3. Ist $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum, so gibt es einen f -invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.
4. Für alle Untervektorräume $W, U_1, U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt

$$(U_1 + W) \cap U_2 = U_1 + (W \cap U_2).$$

5. Ist $\mathcal{E} \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist die Einschränkung $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cap U$ ein Erzeugendensystem von U .
6. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$ mit $V = \sum_{i \in I} U_i$ und $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$, so ist $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

Übung 18.

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V . Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. f ist diagonalisierbar.
2. Für jeden f -invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt es einen f -invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

Übung 19.

Es sei V ein K -Vektorraum.

1. Es seien $e_1, \dots, e_n \in \text{End}(V)$ Endomorphismen mit den folgenden Eigenschaften:
 - Für alle $i = 1, \dots, n$ ist e_i idempotent, also $e_i^2 = e_i$.
 - Die idempotenten Endomorphismen e_1, \dots, e_n sind paarweise orthogonal, d.h. es ist $e_i e_j = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$.
 - Es gilt $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_n$.

Man sagt, dass e_1, \dots, e_n ein *complete set of orthogonal idempotents* ist. Zeigen Sie, dass dann $V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n$ gilt.

Es sei nun $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Wir nehmen zunächst an, dass f diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$.
3. Folgern Sie aus der Eigenraumzerlegung $V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(f)$, dass es für alle $i = 1, \dots, n$ eine eindeutige lineare Abbildung $e_i: V \rightarrow V$ gibt, so dass

$$e_i(v_1 + \dots + v_n) = v_i \quad \text{für alle } v_1 \in V_{\lambda_1}(f), \dots, v_n \in V_{\lambda_n}(f).$$

(Die Abbildungen e_1, \dots, e_n sind also die Projektionen auf die einzelnen Eigenräume bezüglich der Eigenraumzerlegung.)

4. Zeigen Sie, dass die Abbildungen e_1, \dots, e_n ein *complete set of orthogonal idempotents* bilden.
5. Zeigen Sie, dass $\text{im } e_i = V_{\lambda_i}(f)$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Zerlegung $V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n$ stimmt also mit der Eigenraumzerlegung von f überein.
6. Zeigen Sie, dass

$$e_i = \prod_{j \neq i} \frac{f - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

(Hinweis: Wenden Sie den rechten Ausdruck auf einen Eigenvektor an.)

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$ für paarweise verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Für alle $i = 1, \dots, n$ sei

$$e_i := \prod_{j \neq i} \frac{f - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

7. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen e_1, \dots, e_n idempotent sind, indem Sie zeigen, dass

$$e_i^2 - e_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

8. Zeigen Sie, dass die idempotenten Endomorphismen e_1, \dots, e_n orthogonal sind.

9. Zeigen Sie, dass $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_n$. Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

Für alle $i = 1, \dots, n$ sei

$$P_i(T) := \prod_{j \neq i} \frac{T - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\prod_{j \neq i} (T - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \in K[T].$$

Zeigen Sie, dass $e_i = P_i(f)$ für alle $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass P_i ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist, und dass $P_i(\lambda_i) = 1$ und $P_i(\lambda_j) = 0$ für alle $1 \leq j \neq i \leq n$.

Folgern Sie für das Polynom $P(T) := 1 - \sum_{i=1}^n P_i(T)$, dass $\deg P \leq n - 1$, und dass $P(\lambda_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Folgern Sie, dass $P = 0$ und deshalb

$$1 = \sum_{i=1}^n P_i(T)$$

Folgern Sie durch Einsetzen von f , dass $\text{id}_V = \sum_{i=1}^n e_i$.

10. Zeigen Sie, dass $\text{im } e_i \subseteq V_{\lambda_i}(f)$ für alle $i = 1, \dots, n$. (*Hinweis:* Überlegen sie sich, dass $(f - \lambda_i)e_i = 0$.)

11. Folgern Sie mithilfe der Zerlegung $V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n$, dass V diagonalisierbar ist, und dass $\text{im } e_i = V_{\lambda_i}$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Insgesamt zeigt dies, dass f genau dann diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen möglichen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, wenn $(f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_n) = 0$.

12. Es sei nun $K = \mathbb{C}$. Folgern Sie, dass f in den folgenden Fällen diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie jeweils die möglichen Eigenwerte:

- $f^2 = f$
- $f^3 = f$
- $f^3 = -f$.
- $f^n = \text{id}_V$ für ein $n \geq 1$

Übung 20.

Es sei V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $\pi: V \rightarrow V/U, v \mapsto [v]$ die kanonische Projektion.

1. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , und für eine Teilmenge $J \subseteq I$ sei $(b_j)_{j \in J}$ eine Basis von U . Zeigen Sie, dass $([b_i])_{i \in I \setminus J}$ eine Basis von V/U ist.
2. Folgern Sie die folgenden Dimensionsformeln für einen endlichdimensionalen K -Vektorraum V : Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Ist $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung in einen weiteren K -Vektorraum W , so ist

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f.$$

3. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von U und $(c_j)_{j \in J}$ eine Basis von V/U , wobei $I \cap J = \emptyset$. Für $j \in J$ sei $b_j \in V$ mit $\pi(b_j) = c_j$. Zeigen Sie, dass $(b_l)_{l \in L}$ für $L := I \cup J$ eine Basis von V ist.

Übung 21.

Es seien V und W zwei K -Vektorräume und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

1. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $f|_U = 0$. Zeigen Sie, dass \bar{f} eine lineare Abbildung

$$\bar{f}: V/U \rightarrow W, \quad [v] \mapsto f(v)$$

induziert.

2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} \bar{f} = \operatorname{im} f$. Folgern Sie, dass \bar{f} genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.
3. Zeigen Sie, dass $U \subseteq \ker f$, und dass $\ker \bar{f} = (\ker f)/U$. Folgern Sie, dass \bar{f} genau dann injektiv ist, wenn bereits $U = \ker f$ gilt.
4. Folgern Sie, dass f einen Isomorphismus

$$V/(\ker f) \rightarrow \operatorname{im} f, \quad [v] \mapsto f(v)$$

induziert.

Übung 22.

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines K -Vektorraums V genau dann ein Untervektorraum ist, wenn es einen K -Vektorraum W und eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ gibt, so dass $U = \ker f$.

Übung 23.

Es sei V ein K -Vektorraum mit Erzeugendensystem $E \subseteq V$. Es sei W ein K -Vektorraum mit Basis $\{b_e\}_{e \in E} \subseteq W$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $W/U \rightarrow V$ für einen passenden Untervektorraum $U \subseteq W$.

Übung 24.

Es sei V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein K -Untervektorraum. Konstruieren Sie für den Annihilator

$$U^\circ = \{\varphi \in V^* \mid \varphi|_U = 0\}$$

einen Isomorphismus $F: U^\circ \rightarrow (V/U)^*$.

Übung 25.

Es sei V ein K -Vektorraum mit zwei Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$. Zeigen Sie die folgenden beiden Isomorphiesätze:

1. Die Inklusion $U_1 \rightarrow U_1 + U_2, x \mapsto x$ induziert einen Isomorphismus

$$U_1/(U_1 \cap U_2) \rightarrow (U_1 + U_2)/U_2, \quad [x] \mapsto [x] \quad \text{für alle } x \in U_1.$$

2. Ist $U_1 \subseteq U_2$, so ist U_2/U_1 ein Untervektorraum von V/U_1 , und die Abbildung

$$(V/U_1)/(U_2/U_1) \rightarrow V/U_2, \quad [[x]] \mapsto [x] \quad \text{für alle } x \in V.$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus.

Übung 26.

Es sei V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es seien $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, so dass U invariant unter f ist (d.h. es ist $f(U) \subseteq U$).

1. Zeigen Sie, dass f einen Endomorphismus

$$\bar{f}: V/U \rightarrow V/U, \quad [v] \mapsto [f(v)]$$

induziert.

Es sei nun $g: V \rightarrow V$ ein weiterer Endomorphismus, so dass U invariant unter g ist, und es sei $\bar{g}: V/U \rightarrow V/U$ der induzierte Endomorphismus.

2. Es seien $f|_U = g|_U$ und $\bar{f} = \bar{g}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass bereits $f = g$ gelten muss.

Übung 27.

Es sei V ein Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von f -invarianten Untervektorräumen, und $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:

1. Auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist f -invariant.
2. Auch die Summe $\sum_{i \in I} U_i$ ist f -invariant.

Übung 28.

Es sei V ein K -Vektorraum und $e_1, \dots, e_n \in \text{End}(V)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle $i = 1, \dots, n$ ist e_i idempotent, also $e_i^2 = e_i$.
- Die idempotenten Endomorphismen e_1, \dots, e_n sind paarweise orthogonal, d.h. es ist $e_i e_j = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$.
- Es gilt $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_n$.

Man sagt, dass e_1, \dots, e_n ein *complete set of orthogonal idempotents* ist.

1. Zeigen Sie, dass $V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n$ gilt.
2. Zeigen Sie für alle $i = 1, \dots, n$, dass $\text{im } e_i = V_1(e_i)$ und $\bigoplus_{j \neq i} \text{im } e_j = \ker e_i$ gelten.
3. Folgern Sie, dass es für jeden idempotenten Endomorphismus $e: V \rightarrow V$ eine Zerlegung

$$V = \text{im } e \oplus \ker e$$

mit $\text{im } e = V_1(e)$ gibt.

4. Für alle $i = 1, \dots, n$ sei $E_{ii} \in M_n(K)$ die Matrix mit 1 als i -ten Diagonaleintrag, und alle anderen Einträge sind 0. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen e_1, \dots, e_n mit

$$e_i: M_n(K) \rightarrow M_n(K), \quad A \mapsto AE_{ii}$$

ein *complete set of orthogonal idempotents* bildet, und bestimmen Sie die Zerlegung

$$M_n(K) = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n.$$

Übung 29.

Es sei V ein K -Vektorraum. Eine Kollektion $e_1, \dots, e_n \in \text{End}(V)$ von Endomorphismen heißt *complete set of orthogonal idempotents*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle $i = 1, \dots, n$ ist e_i idempotent, also $e_i^2 = e_i$.
- Für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ ist $e_i e_j = 0$.
- Es gilt $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_n$.

1. Es sei $e_1, \dots, e_n: V \rightarrow V$ ein *complete set of orthogonal idempotents*. Zeigen Sie, dass

$$V = \text{im } e_1 \oplus \dots \oplus \text{im } e_n.$$

2. Es seien $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. Zeigen Sie, dass es für alle $i = 1, \dots, n$ einen eindeutigen Endomorphismus $p_{U_1, \dots, U_n}^{(i)}: V \rightarrow V$ mit

$$p_{U_1, \dots, U_n}^{(i)}(u_1 + \dots + u_n) = u_i \quad \text{für alle } u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n,$$

und $p_{U_1, \dots, U_n}^{(1)}, \dots, p_{U_1, \dots, U_n}^{(n)}$ ist ein *complete set of orthogonal idempotents*.

3. Zeigen Sie, dass sich wie folgt eine Bijektion ergibt:

$$\left\{ (U_1, \dots, U_n) \left| \begin{array}{l} U_1, \dots, U_n \subseteq V \\ \text{sind UVR mit} \\ U = U_1 \oplus \dots \oplus U_n \end{array} \right. \right\} \longleftrightarrow \left\{ (e_1, \dots, e_n) \left| \begin{array}{l} e_1, \dots, e_n \in \text{End}(V) \\ \text{ist ein complete set} \\ \text{of orthogonal} \\ \text{idempotents} \end{array} \right. \right\}$$

$$(U_1, \dots, U_n) \longmapsto (p_{U_1, \dots, U_n}^{(1)}, \dots, p_{U_1, \dots, U_n}^{(n)})$$

$$(\text{im } e_1, \dots, \text{im } e_n) \longleftarrow (e_1, \dots, e_n)$$

4. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Es sei $e_1, \dots, e_n \in K$ das *complete set of orthogonal idempotents*, dass der Zerlegung

$$V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(f)$$

entspricht, d.h. für alle $i = 1, \dots, n$ sei $e_i = p_{V_{\lambda_1}(f), \dots, V_{\lambda_n}(f)}^{(i)}$. Geben Sie eine Formel an, durch die sich e_i aus f ergibt.

Übung 30.

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $[\cdot]: V \rightarrow V$ heißt *Seminorm*, falls

- $[\lambda x] = |\lambda| [x]$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ (Homogenität), und
- $[x + y] \leq [x] + [y]$ für alle $x, y \in V$ (Dreiecksungleichung).

Zeigen Sie:

1. Die Teilmenge $N := \{x \in V \mid [x] = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V .
2. Die Seminorm $[\cdot]$ induziert durch

$$\|\bar{x}\| := [x] \quad \text{für alle } x \in V.$$

eine Norm auf V/N (wobei $\bar{x} = x + N$ die Äquivalenzklasse von x bezeichnet).

Übung 31.

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und W ein \mathbb{C} -Vektorraum. Zeigen Sie:

1. Für jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ gibt genau eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$, die das folgende Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} V & & \\ \downarrow \iota & \searrow f & \\ V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f_{\mathbb{C}}} & W_{\mathbb{C}} \end{array}$$

2. Für je zwei \mathbb{C} -lineare Abbildungen $g_1, g_2: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W$ die Äquivalenz

$$g_1 = g_2 \iff g_1 \circ \iota = g_2 \circ \iota$$

gilt.

3. Für jeden \mathbb{C} -Vektorraum W' gilt für jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ und jede \mathbb{C} -lineare Abbildung $g: W \rightarrow W'$ die Gleichheit

$$(g \circ f)_{\mathbb{C}} = g \circ f_{\mathbb{C}}.$$

Übung 32.

1. Zeigen Sie, dass für jedes \mathbb{R} -Vektorraum V und \mathbb{C} -Vektorraum W die Abbildung

$$\Phi_{V,W}: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W), \quad f \mapsto f_{\mathbb{C}}$$

ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen ist. Geben Sie auch $\Phi_{V,W}^{-1}$ an.

2. Es seien vier K -Vektorräume V, V', W, W' und zwei K -lineare Abbildungen $f: V \rightarrow V'$ und $g: W \rightarrow W'$ gegeben. Zeigen Sie, dass die beidseitige Komposition

$$g \circ - \circ f: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(V', W'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f$$

eine K -lineare Abbildung ist.

3. Zeigen Sie, dass die Isomorphismen $\Phi_{V,W}$ in dem folgenden Sinne *natürlich* sind: Es seien V und V' zwei \mathbb{R} -Vektorräume und es sei $f: V \rightarrow V'$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Es seien W und W' zwei \mathbb{C} -Vektorräume und es sei $g: W \rightarrow W'$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Dann kommutiert das folgende Diagramm von \mathbb{R} -Vektorräumen und \mathbb{R} -linearen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \xrightarrow{\Phi_{V,W}} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W) \\ \downarrow g \circ - \circ f & & \downarrow g \circ - \circ f_{\mathbb{C}} \\ \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V', W') & \xrightarrow{\Phi_{V',W'}} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V'_{\mathbb{C}}, W') \end{array}$$

Übung 33.

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit \mathbb{R} -Basis $\mathcal{B} = (v_j)_{j \in J}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = (v_j + i \cdot 0)_{j \in J}$ eine \mathbb{C} -Basis von $V_{\mathbb{C}}$ ist.

Übung 34.

Zeigen Sie, dass die \mathbb{R} -lineare Inklusion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x$ einen Isomorphismus $\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ von \mathbb{C} -Vektorräumen induziert.

Übung 35.

Es seien V und W zwei \mathbb{R} -Vektorräume. Zeigen Sie, dass die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$\varphi: \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}), \quad f \mapsto f_{\mathbb{C}}$$

einen Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen

$$\Phi: \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$$

induziert. (*Hinweis:* Beachten Sie, dass V und W nicht notwendigerweise endlichdimensional sind.)

Übung 36.

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $(V^*)_{\mathbb{C}} \rightarrow (V_{\mathbb{C}})^*$. (*Hinweis:* Beachten Sie, dass V ist nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.)

Übung 37.

Es sei V ein reeller Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie:

1. Es gilt

$$\left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)_{\mathbb{C}} = \bigcap_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$$

2. Es gilt

$$\left(\sum_{i \in I} U_i \right)_{\mathbb{C}} = \sum_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}.$$

3. Folgern Sie, dass genau dann $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, wenn $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$.

Übung 38.

Es seien V und W zwei reelle Vektorräume, und $f: V \rightarrow W$ sei \mathbb{R} -linear.

1. Zeigen Sie, dass $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$.
2. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass $(V_{\mathbb{C}})_{\lambda}(f_{\mathbb{C}}) = V_{\lambda}(f)_{\mathbb{C}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Zeigen Sie, dass $\text{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\text{im } f)_{\mathbb{C}}$.

5. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übung 39.

Es sei V ein reeller Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

Übung 40.

Zeigen Sie, dass die kanonische Inklusion $\iota: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$, $x \mapsto x$ \mathbb{R} -linear ist, und einen Isomorphismus $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}[X]$ von \mathbb{C} -Vektorräumen induziert.

Übung 41.

Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis eines \mathbb{R} -Vektorraums V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ eine Basis eines \mathbb{R} -Vektorraums W . Es seien

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} := (b_1 + i \cdot 0, \dots, b_n + i \cdot 0) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_{\mathbb{C}} := (c_1 + i \cdot 0, \dots, c_m + i \cdot 0)$$

die entsprechenden \mathbb{C} -Basen der Komplexifizierungen $V_{\mathbb{C}}$ und $W_{\mathbb{C}}$. Es seien

$$\Phi^{\mathbb{R}}: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R}), \quad f \mapsto M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$$

und

$$\Phi^{\mathbb{C}}: \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \rightarrow M(m \times n, \mathbb{C}), \quad g \mapsto M_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}, \mathcal{C}_{\mathbb{C}}}(g).$$

Es seien

$$\begin{aligned} \iota_1: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}}, & f &\mapsto f + i \cdot 0, \\ \iota_2: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}), & f &\mapsto f_{\mathbb{C}} \\ \iota_3: M(m \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}, & A &\mapsto A + i \cdot 0, \\ \iota_4: M(m \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow M(m \times n, \mathbb{C}), & A &\mapsto A, \end{aligned}$$

die jeweiligen kanonischen Inklusionen.

1. Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \xrightarrow{\iota_2} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \\ \Phi^{\mathbb{R}} \downarrow & & \downarrow \Phi^{\mathbb{C}} \\ M(m \times n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\iota_4} & M(m \times n, \mathbb{C}) \end{array}$$

Folgern Sie, dass ι_4 tatsächlich injektiv ist, wie der oben verwendete Begriff *Inklusion* vermuten lässt.

2. Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \xrightarrow{\iota_1} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \\ \downarrow \Phi^{\mathbb{R}} & & \downarrow (\Phi^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \\ M(m \times n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\iota_3} & M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \end{array}$$

3. Zeigen Sie, dass die Inklusion ι_1 eine eindeutige \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\Psi_1: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$$

induziert, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \\ \swarrow \iota_2 & & \searrow \iota_1 \\ \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Phi_1} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \end{array}$$

4. Zeigen Sie auf analoge Weise, dass die Inklusion ι_2 eine eindeutige \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\Psi_2: M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \rightarrow M(m \times n, \mathbb{C})$$

induziert, die das folgende Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} & M(m \times n, \mathbb{R}) & \\ \swarrow \iota_4 & & \searrow \iota_3 \\ M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Phi_2} & M(m \times n, \mathbb{C}) \end{array}$$

5. Wir haben nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & & \\ & \swarrow \iota_2 & \downarrow & \searrow \iota_1 & \\ \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Psi_1} & & \xrightarrow{\Psi_1} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \\ \downarrow (\Phi^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} & & \downarrow \Phi^{\mathbb{R}} & & \downarrow \Phi^{\mathbb{C}} \\ & & M(m \times n, \mathbb{R}) & & \\ & \swarrow \iota_4 & & \searrow \iota_3 & \\ M(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Psi_2} & & \xrightarrow{\Psi_2} & M(m \times n, \mathbb{C}) \end{array}$$

Von diesem Diagramm wissen wir bereits, dass Deckel, Boden und beide Rückseiten kommutieren. Zeigen Sie damit, dass auch die Vorderseite kommutiert. (*Hinweis:* Nutzen Sie, dass zwei \mathbb{C} -lineare Abbildung $f, g: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \rightarrow M(m \times n, \mathbb{C})$ genau dann übereinstimmen, wenn die Kompositionen $f \circ \iota_2$ und $g \circ \iota_2$ übereinstimmen.)

6. Zeigen Sie, dass Ψ_2 ein Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen ist.
7. Folgen Sie, dass auch Ψ_1 ein Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen ist.

Übung 42.

Es sei V ein K -Vektorraum, wobei $V \neq 0$ und K algebraisch abgeschlossen ist. Es seien $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow V$ paarweise kommutierende Endomorphismen. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen f_1, \dots, f_n einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen, d.h. dass es ein $v \in V$ gibt, das für jedes f_i eine Eigenvektor ist.

Übung 43.

Es sei V ein K -Vektorraum. Für alle Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \in \text{End}(V)$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ sei

$$V(f_1, \lambda_1; \dots; f_n, \lambda_n) := \{v \in V \mid f_i(v) = \lambda_i v \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

der *gemeinsame Eigenraum* der Endomorphismen f_1, \dots, f_n zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Zeigen Sie, dass

$$V(f_1, \lambda_1; \dots; f_n, \lambda_n) = \bigcap_{i=1}^n V(f_i, \lambda_i)$$

für alle Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \in \text{End}(V)$ und Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

2. Es seien $f_1, \dots, f_n, g \in \text{End}(V)$ Endomorphismen, so dass g mit jedem f_i kommutiert. Zeigen sie, dass der gemeinsame Eigenraum $V(f_1, \lambda_1; \dots; f_n, \lambda_n)$ für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ invariant unter g ist.
3. Zeigen Sie: Sind die Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \in \text{End}(V)$ diagonalisierbar (d.h. es ist $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V(f_i, \lambda)$ für alle $i = 1, \dots, n$) und paarweise kommutierend, so sind die Endomorphismen *simultan diagonalisierbar*, d.h. es ist

$$V = \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K} V(f_1, \lambda_1; \dots; f_n, \lambda_n).$$

4. Es sei nun V endlichdimensional und $H \subseteq \text{End}(V)$ ein Untervektorraum aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Endomorphismen. Zeigen Sie, dass es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}(f)$ für jedes $f \in H$ eine Diagonalmatrix ist. (*Hinweis:* Nutzen Sie, dass $\text{End}(V)$ endlichdimensional ist.)

Übung 44.

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen \mathbb{C} -Vektorraums V . Drücken Sie $\operatorname{tr} f$ und $\det f$ durch die mit (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von f aus.

Übung 45.

Es sei $A \in M_2(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{tr} A = 0$ und $\operatorname{tr} A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$.

Übung 46.

Es sei $A \in \operatorname{GL}_n(K)$ und $\chi_A(T)$ das charakteristische Polynom von A .

1. Zeigen Sie, dass der konstante Term von $\chi_A(T)$ nicht verschwindet.
2. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $P \in K[T]$ gibt, so dass $A^{-1} = P(A)$.

Übung 47.

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \notin \{2, 3\}$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \frac{1}{6}(\operatorname{tr} A)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} A^3) \quad \text{für jedes } A \in M_3(K).$$

(Hinweis: Wenn die Rechnungen zu kompliziert werden, dann macht man es falsch.)

Übung 48.

Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines n -dimensionalen K -Vektorraums V und $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subseteq V$ eine Teilmenge aus Eigenvektoren von f , so dass jede n -elementige Teilmenge linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass f bereits ein skalares Vielfaches der Identität ist.

Übung 49.

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Matrizen jeweils eine Jordannormalform, inklusiver entsprechender Basiswechselmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Übung 50.

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

1. Es sei $n: V \rightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $\text{id}_V + n$ invertierbar ist.
2. Zeigen, bzw. folgern Sie allgemeiner, dass $\lambda \text{id}_V + n$ für alle $\lambda \in K^\times$ invertierbar ist.
3. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein beliebiger Endomorphismus. Zeigen Sie für alle $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$, dass $V_\lambda^\sim(f)$ invariant unter $f - \mu \text{id}_V$ ist, und dass die Einschränkung $(f - \mu \text{id}_V)|_{V_\lambda^\sim(f)}$ invertierbar ist.
4. Folgern Sie: Ist $(f - \lambda_1)^{n_1} \cdots (f - \lambda_k)^{n_k} = 0$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ paarweise verschieden, so sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die möglichen Eigenwerte von f , und für alle $1 \leq i \leq k$ ist $\dim V_{\lambda_i}^\sim(f) \leq n_i$.

Übung 51.

Bestimmen Sie in den Folgenden alle Möglichkeiten der Jordannormalform von $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Es ist $\chi_A(T) = (T - 3)^4(T - 5)^4$ und $(A - 3I)^2(A - 5I)^2 = 0$.
2. Es ist $A^3 = 0$ und alle Eigenräume von A sind eindimensional.
3. Es ist $\chi_A(T) = (T - 2)(T + 2)^3$ und $(A - 2I)(A + 2I) = 0$.
4. Es ist $\chi_A(T) = T(T - 1)(T + 1)$.
5. Es ist $\chi_A(T) = (T - 2)^2(T - 3)^2$ und alle Eigenräume von A sind entweder null- oder eindimensional.
6. Es ist $A^2 = A$ und alle Eigenräume von A sind zweidimensional.
7. Es ist $\chi_A(T) = T^5$ und alle Eigenräume von A sind entweder null- oder eindimensional.
8. Es ist $\chi_A(T) = (T + 3)^3T^2$ und A hat keine zweidimensionalen Eigenräume.

Übung 52.

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum.

1. Es sei $n: V \rightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass der Endomorphismus $\text{id}_V + n$ invertierbar ist.

Ein Endomorphismus $u: V \rightarrow V$ heißt *unipotent*, falls $u - \text{id}_V$ nilpotent ist.

2. Folgern Sie, dass jeder unipotente Endomorphismus von V invertierbar ist.

Auf dem fünften Übungszettel wurde gezeigt, dass es für jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eindeutige Endomorphismen $d, n: V \rightarrow V$ gibt, so dass

- $f = d + n$,

- d ist diagonalisierbar und n ist nilpotent, und
- d und n kommutieren.

Folgern Sie aus dieser *additiven Jordanzerlegung* von $\text{End}(V)$ die folgende *multiplikative Jordanzerlegung* von $\text{GL}(V)$.

3. Zeigen Sie, dass es für jedes $s \in \text{GL}(V)$ eindeutige $d, u \in \text{GL}(V)$ gibt, so dass
- $s = d \cdot u$,
 - d ist diagonalisierbar und u ist unipotent, und
 - d und u kommutieren.

Übung 53.

Bestimmen Sie die Potenz A^{10} der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Übung 54.

Bestimmen Sie die Lösungsräume der folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme mit $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} f' = -f - 6g, \\ g' = 2f + 6g, \end{cases} \quad \begin{cases} f' = -f - g, \\ g' = 2f + g, \end{cases} \quad \begin{cases} f' = 2f + 2g + 3h, \\ g' = f + 3g + 3h, \\ h' = -f - 2f - 2h. \end{cases}$$

Übung 55.

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $M_n(\mathbb{C})$. Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sei

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Es sei

$$D_n(\mathbb{C}) := \{S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)S^{-1} \mid S \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\} \subseteq M_n(\mathbb{C})$$

die Menge der diagonalisierbaren komplexen $n \times n$ -Matrizen. Wir zeigen, dass $D_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ dicht ist, d.h. dass es für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine diagonalisierbare Matrix $D \in D_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Es sei $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, also

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$B(t) := A + tS \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_n) S^{-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t) \in \mathbb{C}$ mit

$$\mu_i(t) := \lambda_i + tz_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

die Eigenwerte von $B(t)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.
3. Folgern Sie, dass $B(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.
4. Folgern Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $D \in D_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Wir wollen die Dichtheit von $D_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ nutzen, um den Satz von Cayley-Hamilton zu zeigen:

5. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \chi_A(A)$$

stetig ist, wobei $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$ das charakteristische Polynom von A ist.

6. Zeigen Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Diagonalmatrix $D \in M_n(\mathbb{C})$.
7. Zeigen Sie, dass $P(SAS^{-1}) = SP(A)S^{-1}$ für alle $P \in \mathbb{C}[T]$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $S \in GL_n(\mathbb{C})$. Folgern Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Matrix $D \in D_n(\mathbb{C})$.
8. Folgern Sie, dass $F(A) = 0$ für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Übung 56.

Definieren Sie die Begriffe eines reellen, bzw. komplexen Skalarprodukts, sowie eines reellen, bzw. komplexen Hilbertraums.

Übung 57.

Formulieren und Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Übung 58.

Es sei V ein Skalarproduktraum. Zeigen Sie für Endomorphismen $f, g_1, g_2: V \rightarrow V$ Endomorphismen die folgende Kürzungsregel: Falls f^* existiert und $f^*fg_1 = f^*fg_2$, dann ist bereits $fg_1 = fg_2$.

Übung 59.

Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum eine Orthonormalbasis besitzt.

Übung 60.

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit abzählbarer Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Es sei $T: V \rightarrow V$ die eindeutige lineare Abbildung mit $T(e_i) = e_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass T kein Adjungiertes besitzt.

Übung 61.

Es sei V ein Skalarproduktraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ seien paarweise orthogonal zueinander. Zeigen Sie: Ist $v_1, \dots, v_n \neq 0$, so ist die Familie (v_1, \dots, v_n) linear unabhängig.

Übung 62.

Es sei V ein Skalarproduktraum und $f: V \rightarrow V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die Eigenräume $V_\lambda(f)$ und $V_\mu(f)$ für alle $\lambda \neq \mu$ orthogonal sind.

Übung 63.

Es seien V und W zwei \mathbb{K} -Skalarprodukträume und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ eine Orthonormalbasis von W . Zeigen Sie die Gleichheit

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f^*) = M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)^*.$$

Übung 64.

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f: V \rightarrow V$ ein normaler Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$ für alle $v \in V$.
2. Zeigen Sie, dass $V_\lambda(f) = V_{\bar{\lambda}}(f^*)$ und $V_{\lambda}^\perp(f) = V_{\bar{\lambda}}^\perp(f^*)$.

Übung 65.

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ seien Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussage äquivalent sind:

1. (v_1, \dots, v_n) ist eine Orthonormalbasis von V .
2. Für alle $v \in V$ ist $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Übung 66.

Es sei V ein Skalarproduktraum und $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $f = 0$.

Übung 67.

Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und $P_\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die eindeutige lineare Abbildung mit

$$P_\pi(e_i) = e_{\pi(i)} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

wobei (e_1, \dots, e_n) die Standardbasis von \mathbb{R}^n ist.

1. Zeigen Sie, dass P_π orthogonal ist.
2. Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte von P_π .
3. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem alle möglichen Eigenwerte auftreten.

Übung 68.

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit Orthonormalbasis (u_1, \dots, u_n) . Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$P: V \rightarrow V, \quad v \mapsto \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$$

die orthogonale Projektion auf U ist.

Übung 69.

Bestimmen Sie die Signatur (n_0, n_+, n_-) der folgenden quadratischen Formen auf \mathbb{R}^n :

1. $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2$
2. $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2$ mit $a \in \mathbb{R}$
3. $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 15x_2^2 + 6x_1x_2$
4. $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$
5. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$
6. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 7x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Übung 70.

Es sei $V \neq 0$ ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ sei

$$\langle x, y \rangle_\lambda := \lambda \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{K}$, für die $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ ein Skalarprodukt auf V ist.

Übung 71.

Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann unitär, wenn alle Eigenwerte von f Betrag 1 haben.
2. f ist genau dann selbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von f reell sind.
3. f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von f rein imaginär sind.
4. f ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von f sind.

Übung 72.

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktsraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $\ker f^* \subseteq (\operatorname{im} f)^\perp$.
2. Folgern Sie daraus, dass $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$.
3. Folgern Sie aus den beiden Inklusionen $\ker f^* \subseteq (\operatorname{im} f)^\perp$ und $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$ mithilfe der Endlichdimensionalität von V , dass bereits Gleichheiten gelten, dass also

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

Von nun an sei f normal.

4. Zeigen Sie, dass $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ für alle $x \in V$.
5. Folgern Sie, dass $\ker f = \ker f^*$.
6. Folgern Sie damit aus den obigen Gleichheiten, dass $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$ gilt, und dass die Summe orthogonal ist. (*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass $\operatorname{im} f$ und $\ker f$ orthogonal sind, und nutzen Sie dann die Endlichdimensionalität von V .)

Übung 73.

1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix $S \in O(3)$, so dass $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.

2. Bestimmen Sie für die symmetrische Bilinearform $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\beta \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) := x_1 y_2 + x_2 y_1 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine Basis \mathcal{B} von \mathbb{R}^2 , so dass β bezüglich \mathcal{B} durch eine Diagonalmatrix mit möglichen Diagonaleinträgen 0, 1, -1 dargestellt wird.

Übung 74.

Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f: V \rightarrow W$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein \mathbb{R} -linearer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* \mathbb{R} -linear ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ \mathbb{R} -linear ist, und dass

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

4. Zeigen Sie: Eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die Basis $\Phi_V(\mathcal{B}) = (\Phi_V(v_1), \dots, \Phi_V(v_n))$ von V^* die duale Basis \mathcal{B}^* ist.
5. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn also V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

Übung 75.

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn es ein Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen f selbstadjungiert ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie die analoge Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Übung 76.

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Spaltenvektor und

$$A := xx^T \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto Ay$$

die orthogonale Projektion auf die Gerade $\mathbb{R}x$ ist.

Übung 77.

Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ sei

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement von U , und

$$U^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

der Annihilator von U . Für jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow W$ sei $f^*: W \rightarrow V$ die Adjungierte von f , und

$$f^T: W^* \rightarrow V^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

die zu f duale Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Gleichheit $\Phi_V(U^\perp) = U^\circ$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass $f^T \circ \Phi_W = \Phi_V \circ f^*$, dass also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{f^*} & W \\ \Phi_V \downarrow & & \downarrow \Phi_W \\ V^* & \xleftarrow{f^T} & W^* \end{array}$$

Folgern Sie, dass $f^* = \Phi_V^{-1} \circ f^T \circ \Phi_W$.

In Linear Algebra I wurde gezeigt, dass

$$\ker f^T = (\operatorname{im} f)^\circ \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^T = (\ker f)^\circ,$$

und dass für je zwei Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ die Gleichheiten

$$(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ \quad \text{und} \quad (U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$$

gelten.

4. Folgen Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen und den Aussagen aus Linear Algebra I, dass für alle Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ die Gleichheiten

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp \quad \text{und} \quad (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

gelten.

(Hinweis: Nutzen Sie, dass Φ_V ein Isomorphismus ist.)

5. Folgen Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen und den Aussagen aus Lineare Algebra I, dass

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

(Hinweis: Nutzen Sie, dass Φ_V und Φ_W Isomorphismen sind.)

Übung 78.

Es sei $V := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, und es sei

$$U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.
2. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t) \, dt \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

3. Zeigen Sie, dass $U^\perp = 0$. Folgern Sie, dass $V \neq U \oplus U^\perp$. (Hinweis: Betrachten Sie für $g \in U^\perp$ die Funktion $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = t^2 g(t)$.)
4. Zeigen Sie ferner, dass V/U eindimensional ist.

Übung 79.

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter, orthogonaler Endomorphismus mit nur positiven Eigenwerten. Zeigen Sie, dass bereits $f = \operatorname{id}_V$ gilt.

Übung 80.

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen sich implizieren.

1. f ist selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten.
2. f ist orthogonal, und alle Eigenwerte von f sind positiv.
3. f ist normal mit $\det f > 0$.
4. Es gibt einen selbstadjungierten Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = \exp(g)$.
5. f ist selbstadjungiert und orthogonal.

Übung 81.

Es sei V der reelle Vektorraum der Polynomfunktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n \subseteq V$ der Untervektorraum der Polynomfunktionen von Grad $\leq n$.

1. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

2. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\psi: V \rightarrow V$ mit

$$\psi(f)(t) := (t^2 - 1)f''(t) + 2tf'(t) \quad \text{für alle } f \in V \text{ und } t \in \mathbb{R}$$

selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

Es sei $\mathcal{G} := (p_n)_{n \geq 0}$ die Orthonormalbasis von V , die durch Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Standardbasis $\mathcal{B} := (x^n)_{n \geq 0}$ entsteht.

3. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass V_n invariant unter ψ ist.
4. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass $\mathcal{G}_n := (p_0, \dots, p_n)$ eine Basis von V_n ist.
5. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass $M_{\mathcal{G}_n}(\psi|_{V_n})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Betrachten Sie hierfür die Filtration

$$0 \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots \subseteq V_n,$$

und nutzen Sie, dass $V_i = \mathcal{L}(\mathcal{G}_i)$ invariant unter ψ ist.

6. Folgen Sie mithilfe der Selbstadjungiertheit von ψ , dass $M_{\mathcal{G}_n}(\psi|_{V_n})$ für alle $n \geq 0$ bereits eine Diagonalmatrix ist. Folgern Sie, dass \mathcal{G} eine Basis aus Eigenvektoren von ψ ist.
7. Bestimmen Sie für alle $n \geq 0$ die Eigenwerte der Einschränkung $\psi|_{V_n}$, indem Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{B}_n = (1, x, \dots, x^n)$ von V_n bestimmen.
8. Geben Sie den zu p_n gehörigen Eigenwert von ψ an.
9. Berechnen Sie \mathcal{G}_4 .

Übung 82.

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Es gilt $\exp(f)^* = \exp(f^*)$.
2. Ist f normal, so ist auch f^* normal.
3. Ist f selbstadjungiert, so ist auch $\exp(f)$ selbstadjungiert.
4. Ist f antiselbstadjungiert, so ist $\exp(f)$ orthogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Übung 83.

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

1. Es gibt genau dann einen normalen Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f normal und invertierbar ist.
2. Es gibt genau dann einen antiselbstadjungierten Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f unitär ist.
3. Es gibt genau dann einen selbstadjungierten Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten ist.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

4. Es gibt genau dann einen normalen Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f normal und invertierbar ist, und alle (reellen) Eigenwerte von g gerade Vielfachheit haben.
5. Es gibt genau dann einen antiselbstadjungierten Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f orthogonal ist und alle negativen (reellen) Eigenwerte von f gerade Vielfachheit haben.
6. Es gibt genau dann einen selbstadjungierten Endomorphismus $g: V \rightarrow V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f selbstadjungiert mit positiven (reellen) Eigenwerten ist.

Übung 84.

Es sei

$$W = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Wir betrachten den Untervektorraum

$$V := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in W \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von W ist.
2. Zeigen Sie für alle $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$

(Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.)

3. Zeigen sie, dass

$$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

4. Es sei

$$R: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.

5. Zeigen Sie, dass R keine Eigenwerte besitzt.

6. Es sei

$$S: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, dass S ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.

7. Zeigen Sie, dass S diagonalisierbar ist.

8. Es sei

$$U := \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Bestimmen Sie U^\perp und entscheiden Sie, ob $V = U \oplus U^\perp$.

9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .

Übung 85.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma(A, B) := \operatorname{tr}(A^T B) \quad \text{für alle } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

ein Skalarprodukt auf $M_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ von $M_n(\mathbb{R})$ mit

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k, l \leq n$$

eine Orthonormalbasis von $M_n(\mathbb{R})$ bezüglich σ bilden.

3. Es sei

$$S_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$S_- := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$M_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 86.

Es sei V ein Skalarproduktraum und

$$O(V) := \{f \in \text{End}(V) \mid ff^* = \text{id}\}.$$

Zeigen Sie, dass $O(V)$ eine Untergruppe von $GL(V)$ bildet.

Übung 87.

Zeigen Sie, dass für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
2. $AA^* = I$.
3. $A^*A = I$.
4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{K}^n .
5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{K}^n .

Übung 88.

Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Zeigen Sie, dass es eindeutige hermitesche Matrizen $B, C \in M_n(\mathbb{C})$ mit $A = B + iC$ gibt.
2. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn B und C kommutieren.

Übung 89.

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und es sei $G \subseteq GL(V)$ eine endliche Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass

$$\langle x, y \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{\phi \in G} \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V$$

ein Skalarprodukt auf G definiert.

2. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ in dem Sinne G -invariant ist, dass

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V \text{ und } \phi \in G.$$

3. Folgern Sie, dass es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ für alle $\phi \in G$ eine orthogonale Matrix ist.
4. Folgern Sie damit, dass es für $n = \dim V$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi: G \rightarrow O(n)$ gibt, G also isomorph zu der Untergruppe im Φ von $O(n)$ ist.

Übung 90.

Es seien F und G zwei selbstadjungierte Endomorphismen eines Skalarproduktraums V . Zeigen Sie, dass $F \circ G$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn F und G kommutieren.

Übung 91.

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Für jedes $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$ sei

$$s_\alpha: V \rightarrow V, \quad \text{mit} \quad s_\alpha(x) := x - 2 \frac{\langle x, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha.$$

Ferner seien

$$L_\alpha := \mathbb{R}\alpha \quad \text{und} \quad H_\alpha := L_\alpha^\perp = \alpha^\perp = \{v \in V \mid \langle v, \alpha \rangle = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $s_\alpha^2 = \text{id}_V$, und dass $s_{\lambda\alpha} = s_\alpha$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^\times$.

2. Zeigen Sie, dass s_α diagonalisierbar ist, und dass

$$V_{-1}(s_\alpha) = L_\alpha \quad \text{und} \quad V_1(s_\alpha) = H_\alpha.$$

3. Interpretieren Sie V geometrisch anschaulich.

4. Es sei $s': V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $s'(\alpha) = -\alpha$ und $s'(x) = x$ für alle $x \in H_\alpha$. Zeigen Sie, dass bereits $s' = s_\alpha$ gilt.

5. Es sei $t: V \rightarrow V$ ein orthogonaler Isomorphismus. Zeigen Sie die Gleichheit

$$ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}.$$

Übung 92.

Es seien V und W euklidische Vektorräume, und $f: V \rightarrow V$ eine surjektive Funktion (!) mit

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

Übung 93.

Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $S: V \rightarrow V$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. S ist normal.
2. V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von S .
3. Für jeden S -invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch das orthogonale Komplement U^\perp invariant unter S .

Übung 94.

Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum über \mathbb{K} . Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \operatorname{tr}(f \circ g^*)$$

ein Skalarprodukt auf $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ definiert.

Übung 95.

Es sei $\det: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ die Determinantenabbildung, wobei \mathbb{C}^\times die multiplikative Gruppe des Körpers bezeichnet.

1. Zeigen Sie, dass \det ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.
2. Bestimmen Sie den Kern von \det .
3. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})}$.
4. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{\operatorname{U}_n}$.
5. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{\operatorname{O}_n}$.

Übung 96.

Es sei

$$\Phi: \operatorname{SU}(2) \rightarrow S^3, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

die Abbildung auf die erste Spalte, wobei

$$S^3 := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert ist.
2. Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist.

Übung 97.

Zeigen Sie, dass die drei Gruppen $\operatorname{SO}(2)$, S^1 und $\operatorname{U}(1)$ isomorph sind.

Übung 98.

Es sei V ein euklidischer Vektorraum, und die Abbildung $P: V \rightarrow V$ sei orthogonal und eine Orthogonalprojektion. Bestimmen Sie P .

Übung 99.

Es sei $A \in \operatorname{U}(n)$. Zeigen Sie, dass $|\operatorname{tr} A| \leq n$. Wann gilt Gleichheit?

Übung 100.

1. Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden Punkte. Zeigen Sie, dass es für beliebige Werte $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ ein Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ mit $P(z_j) = w_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ gibt.
2. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein normaler Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V . Zeigen Sie, dass es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ mit $f^* = P(f)$ gibt.
(Hinweis: f ist diagonalisierbar.)

Übung 101.

Es sei V ein K -Vektorraum, $\beta: V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform und $q: V \rightarrow K$ die zugehörige quadratische Form.

1. Zeigen Sie für den Fall $\text{char } K \neq 2$ mithilfe einer Polarisationsformel, dass β durch q bereits eindeutig bestimmt ist.
2. Folgern Sie: Ist $\text{char } K \neq 2$, $V \neq 0$ und β nicht entartet, d.h. für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es ein $w \in V$ mit $\beta(v, w) \neq 0$, so gibt es ein $v \in V$ mit $\beta(v, v) \neq 0$.
3. Zeigen Sie für den Fall $\text{char } K = 2$, dass es verschiedene symmetrische Bilinearformen mit gleicher quadratische Form geben kann. Geben Sie auch ein explizites Beispiel hierfür an.

Übung 102.

Es sei V ein reeller Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen im Allgemeinen gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an:

1. Ist $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.
2. Ist \mathcal{B} eine Basis von V mit $\langle b, b \rangle > 0$ für alle $b \in \mathcal{B}$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.
3. Ist \mathcal{B} eine Basis von V mit $\langle b_1, b_2 \rangle > 0$ für alle $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.

4. Die Teilmenge

$$U := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in V\}$$

ist ein Untervektorraum von V .

5. Die Teilmengen

$$U_+ := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle \geq 0\} \quad \text{und} \quad U_- := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle \leq 0\}$$

sind Untervektorräume von V .

6. Die Teilmenge

$$U_0 := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0\}$$

ist ein Untervektorraum von V .

7. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ ist

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp.$$

8. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $(U^\perp)^\perp = V$, so ist $U = V$.

9. Für alle Untervektorräume $U_1 \subseteq U_2$ gilt

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp.$$

10. Für

$$U_0 := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in V\}$$

und jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt

$$(U^\perp)^\perp = U + U_0.$$

Übung 103.

Ist $\beta: V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform, so heißen eine Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V und eine Basis $\mathcal{C} = (w_i)_{i \in I}$ von W *dual bezüglich* β , falls

$$\beta(v_i, w_j) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in I.$$

Es sei zunächst V ein K -Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass die *Evaluation*

$$e: V \times V^* \rightarrow K \quad \text{mit} \quad e(v, \varphi) = \varphi(v)$$

eine K -bilineare Abbildung ist.

2. Zeigen Sie im Falle der Endlichdimensionalität von V , dass es zu jeder Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V genau eine Basis \mathcal{C} von V^* gibt, die bezüglich e dual zu \mathcal{B} ist. Woher kennen Sie diese Basis?

Von nun an sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein Isomorphismus ist.

4. Folgern Sie, dass es für jede Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V genau eine Basis $\mathcal{B}^\circ = (b_1^\circ, \dots, b_n^\circ)$ von V gibt, die bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dual zu \mathcal{B} ist. (*Hinweis:* Formulieren Sie die Aussage, dass \mathcal{C} dual zu \mathcal{B} ist, mithilfe von Φ um.)

5. Zeigen Sie, dass für jede Basis \mathcal{B} von V die Gleichheit $(\mathcal{B}^\circ)^\circ = \mathcal{B}$ gilt. Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\{\text{geordnete Basen von } V\} \rightarrow \{\text{geordnete Basen von } V\}, \quad \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^\circ$$

bijektiv ist.

6. Unter welchen Namen kennen Sie Basen von V , die bezüglich $(-)^\circ$ selbstdual sind, die also $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}$ erfüllen?

Übung 104.

Es sei V ein K -Vektorraum und $\beta: V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform.

1. Zeigen Sie, dass

$$\text{rad}(\beta) := \{v \in V \mid \beta(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$$

ein Untervektorraum von V ist. (Man bezeichnet $\text{rad}(\beta)$ als das *Radikal* von β .)

2. Zeigen Sie, dass β eine symmetrische Bilinearform $\bar{\beta}: (V/\text{rad}(\beta)) \times (V/\text{rad}(\beta)) \rightarrow K$ mit

$$\bar{\beta}([v], [w]) := \beta(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

induziert.

3. Zeigen Sie, dass $\bar{\beta}$ nicht entartet ist, d.h. dass für das Radikal

$$\text{rad}(\bar{\beta}) := \{x \in V/U \mid \bar{\beta}(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V/U\}$$

bereits $\text{rad}(\bar{\beta}) = 0$ gilt.

4. Inwiefern gelten die obigen Aussagen noch, wenn man U durch

$$W := \{v \in V \mid \beta(v, v) = 0\}$$

ersetzt?

Übung 105.

Es sei V ein K -Vektorraum und $b: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform.

- Zeigen Sie für $\text{char } K \neq 2$, dass es eindeutige Bilinearformen $b_s, b_a: V \times V \rightarrow K$ gibt, so dass
 - $b = b_s + b_a$
 - b_s ist symmetrisch und b_a ist antisymmetrisch
- Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage für $\text{char } K = 2$ nicht mehr gilt.

Es sei nun V der Vektorraum der Polynomfunktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, und für alle $n \geq 0$ sei $V_n \subseteq V$ der Untervektorraum der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$b(p, q) := \int_{-1}^1 p(t)q'(t) dt$$

eine Bilinearform ist.

4. Geben Sie den symmetrischen Anteil b_s in einer Form an, in der kein Integral vorkommt.

Übung 106.

Für je zwei K -Vektorräume V und W sei

$$\text{Bil}(V, W) := \{b: V \times W \rightarrow K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen $V \times W \rightarrow K$.

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

$$F: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Bil}(W, V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w, v) = b(v, w)$$

ein Isomorphismus von K -Vektorräumen ist.

2. Es sei $b \in \text{Bil}(V, W)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass b eine lineare Abbildung

$$\Phi_{V,W}(b): V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto b(v, -)$$

induziert. Dabei ist

$$b(v, -): W \rightarrow K, \quad w \mapsto b(v, w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{V,W}: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

ein Isomorphismus von K -Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus

$$\text{Hom}(V, W^*) \rightarrow \text{Hom}(W, V^*)$$

an.

Wir betrachten nun den Fall $W = V^*$.

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e: V \times V^* \rightarrow K, \quad (v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform e einer linearen Abbildung $V \rightarrow V^{**}$, sowie einer linearen Abbildung $V^* \rightarrow V^*$. Bestimmen Sie diese Abbildungen.
7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

Übung 107.

Es seien V und W zwei K -Vektorräume und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$ an, und zeigen Sie ihre Linearität.
2. Zeigen Sie für jeden K -Vektorraum U , dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: U \times U^* \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v) \quad \text{für alle } v \in U, \varphi \in U^*$$

eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

Übung 108.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma: M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) := \text{tr}(AB)$$

eine symmetrische Bilinearform ist. Man bezeichnet diese als die *Traceform*.

2. Zeigen Sie, dass σ in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in M_n(K).$$

3. Zeigen Sie, dass σ nicht entartet ist, d.h. dass es für jedes $A \in M_n(K)$ mit $A \neq 0$ ein $B \in M_n(K)$ mit $\sigma(A, B) \neq 0$ gibt.

Es sei nun

$$S_+ := \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen und

$$S_- := \{A \in M_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie:

4. Ist $\text{char } K \neq 2$, so sind S_+ und S_- bezüglich σ orthogonal zueinander.
5. Ist $K = \mathbb{R}$, so ist die Einschränkung von σ auf S_+ positiv definit, und die Einschränkung auf S_- negativ definit.

Übung 109.

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $b: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V , und $\mathcal{B}^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ die entsprechende duale Basis von V^* .

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$B: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto b(-, v)$$

K -linear ist.

2. Zeigen Sie die Gleichheit

$$M_{\mathcal{B}}(b) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*}(B).$$

(Beachten Sie, dass auf der linken Seite die darstellende Matrix einer Bilinearform steht, und auf der rechten Seite die darstellende Matrix einer linearen Abbildung.)

Übung 110.

Für jede Matrix $X \in M_n(K)$ sei

$$\lambda_X: M_n(K) \rightarrow M_n(K), \quad A \mapsto XA$$

die Linksmultiplikation mit X ,

$$\rho_X: M_n(K) \rightarrow M_n(K), \quad A \mapsto AX$$

die Rechtsmultiplikation mit X , und

$$\text{ad}_X = [X, -]: M_n(K) \rightarrow M_n(K), \quad A \mapsto [X, A] = XA - AX$$

der Kommutator mit X .

1. Zeigen Sie: Ist X nilpotent, so sind auch λ_X und ρ_X nilpotent.
2. Folgern Sie: Ist X nilpotent, so ist auch ad_X nilpotent. (*Hinweis:* Nutzen Sie, dass $\text{ad}_X = \lambda_X - \rho_X$.)
3. Zeigen Sie: Ist X diagonalisierbar, so sind auch λ_X und ρ_X diagonalisierbar. (*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass X eine Diagonalmatrix ist.)
4. Folgern Sie: Ist X diagonalisierbar, so ist auch ad_X diagonalisierbar. (*Hinweis:* Nutzen Sie, dass $\text{ad}_X = \lambda_X - \rho_X$.)

Übung 111.

Es sei K ein Körper und

$$\mathfrak{sl}_n(K) := \{A \in M_n(K) \mid \text{tr } A = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{sl}_n(K)$ ein Untervektorraum von $M_n(K)$ mit $\dim \mathfrak{sl}_n(K) = n^2 - 1$ ist.

2. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{E_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{E_{11} - E_{ii} \mid 2 \leq i \leq n\}$$

eine Basis von $\mathfrak{sl}_n(K)$ ist, wobei $E_{ij} \in M_n(K)$ die Matrix ist, deren (i, j) -ter Eintrag 1 ist, und für die alle anderen Einträge 0 sind.

Es sei nun $C := \mathcal{L}([A, B] \mid A, B \in M_n(K))$.

3. Zeigen Sie, dass $\text{tr}([A, B]) = 0$ für alle $A, B \in M_n(K)$. Folgern Sie, dass $C \subseteq \mathfrak{sl}_n(K)$.

4. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{sl}_n(K) \subseteq C$, indem Sie jedes der Basiselemente aus \mathcal{B} also Kommutator schreiben. (*Hinweis:* Überlegen Sie zunächst, dass $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ für alle $1 \leq i, j, k, l \leq n$.)

Es ist also $\mathfrak{sl}_n(K) = \mathcal{L}([A, B] \mid A, B \in M_n(K))$ ein $(n^2 - 1)$ -dimensionaler Untervektorraum. Es sei nun $f: M_n(K) \rightarrow K$ eine lineare Abbildung mit $f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in M_n(K)$.

5. Zeigen Sie, dass f eine eindeutige lineare Abbildung

$$\bar{f}: M_n(K)/\mathfrak{sl}_n(K) \rightarrow K, \quad [A] \mapsto f(A)$$

induziert. Zeigen Sie, dass $\bar{f} \neq 0$.

6. Zeigen Sie, dass $M_n(K)/\mathfrak{sl}_n(K)$ eindimensional ist. Folgern Sie, dass es ein eindeutiges $\lambda \in K$ mit $\bar{f} = \lambda \bar{\text{tr}}$ gibt.

7. Folgern Sie, dass bereits $f = \lambda \text{tr}$ gilt. (Die Spur ist also durch die Eigenschaft, dass $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ für alle $A, B \in M_n(K)$, bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmt.)

Übung 112.

Das Zentrum eines Rings R ist definiert als

$$Z(R) := \{r \in R \mid rs = sr \text{ für alle } s \in R\}.$$

Man bemerke, dass R genau dann kommutativ ist, wenn $Z(R) = R$. Wir werden $Z(M_n(K))$ bestimmen. Hierfür sei

$$D_n(K) := KI = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$$

der Untervektorraum der Skalarmatrizen.

1. Zeigen Sie, dass $D_n(K) \subseteq Z(M_n(K))$.
2. Zeigen Sie für $A \in Z(M_n(K))$, dass A eine Diagonalmatrix ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Matrizen E_{ii} für $1 \leq i \leq n$.)
3. Zeigen Sie ferner, dass alle Diagonaleinträge von A bereits gleich sind. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Matrizen E_{ij} mit $1 \leq i, j \leq n$.)

4. Folgern Sie, dass $Z(M_n(K)) = D_n(K)$.

Übung 113.

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum, und es seien $K, E: V \rightarrow V$ zwei Endomorphismen mit

$$K \text{ ist invertierbar und } KE = 2EK.$$

1. Zeigen Sie, dass

$$(K - 2\lambda \operatorname{id}_V)^n E = 2^n E (K - \lambda \operatorname{id}_V)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Folgern Sie, dass $E(V_\lambda^\sim(K)) \subseteq V_{2\lambda}^\sim(K)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Folgern Sie, dass E nilpotent ist.

Übung 114.

Es sei V ein K -Vektorraum und $[-, -]: V \times V \rightarrow V$ eine alternierend bilineare Abbildung. Für jedes $x \in V$ sei

$$\operatorname{ad}_x := [x, -]: V \rightarrow V, \quad y \mapsto [x, y].$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. $[-, -]$ erfüllt die Jacobi-Identität, d.h. es ist

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$

2. Es gilt

$$\operatorname{ad}_x([y, z]) = [\operatorname{ad}_x(y), z] + [y, \operatorname{ad}_x(z)] \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$

(Man sagt, dass ad_x eine Derivation bezüglich $[-, -]$ ist.)

Übung 115.

Es seien E und H zwei Endomorphismen eines \mathbb{C} -Vektorraums V , so dass $[H, E] = 2E$.

1. Zeigen Sie, dass $E(V_\lambda(H)) \subseteq V_{\lambda+2}(H)$ für alle $\lambda \in K$.

2. Folgern Sie: Ist V endlichdimensional und H diagonalisierbar, so ist E nilpotent.

Übung 116.

Es sei $B \in M_n(\mathbb{K})$. Es seien

$$\operatorname{O}(B) := \{S \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}) \mid S^T B S = B\}$$

und

$$\mathfrak{g}(B) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A^T B = -BA\}$$

1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{O}(B)$ eine Untergruppe von $\operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}(B)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ ist, dass also $[A_1, A_2] \in \mathfrak{g}(B)$ für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}(B)$.
3. Zeigen Sie, dass $\exp(A) \in O(B)$ für alle $A \in \mathfrak{g}(B)$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\exp(A)^T B = B \exp(-A)$.)
4. Geben Sie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ an, so dass $O(B) = O(n)$. Was sind dann die Elemente von $\mathfrak{g}(B)$?

Übung 117.

Für einen endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum V und eine Bilinearform $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ sei

$$O(\beta) := \{\phi \in \text{GL}(V) \mid \beta(\phi(x), \phi(y)) = \beta(x, y) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die Isometriegruppe von β , und

$$\mathfrak{g}(\beta) := \{f \in \text{End}(V) \mid \beta(f(x), y) = -\beta(x, f(y)) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die assoziierte Lie-Algebra.

1. Zeigen Sie, dass $O(\beta)$ eine Untergruppen von $\text{GL}(V)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}(\beta)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist, d.h. dass für alle $f, g \in \mathfrak{g}(\beta)$ auch $[f, g] \in \mathfrak{g}(\beta)$.
3. Zeigen Sie, dass $\exp(f) \in O(\beta)$ für alle $f \in \mathfrak{g}(\beta)$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\beta(\exp(f)(x), y) = \beta(x, \exp(-f)(y))$ für alle $x, y \in V$. Nutzen Sie hierfür, dass die bilineare Abbildung β in beiden Argumenten stetig ist.)
4. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V . Unter welchen Begriffen sind die Elemente aus $G(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $\mathfrak{g}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ bekannt?