Lösung zu Zettel 5, Aufgabe 2

Jendrik Stelzner

17. Juni 2016

Dass $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Lösungen der angegebenen Differenzialgleichung sind, ist äquivalent dazu, dass

$$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f' \\ g' \\ h' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 14 & -18 \\ 2 & 6 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen der Gleichung $y' = Ay$ mit $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ sind durch

$$y(t) = \exp(At)C \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gegeben, wobei $C \in \mathbb{R}^3$ nicht von t abhängt. Der Lösungsraum wird also von den Spalten der Matrix $\exp(At)$ aufgespannt. (Da $\exp(At)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist, sind diese Spalten zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ linear unabhängig, weshalb auch die entsprechenden Funktionen linear unabhängig sind. Also sind die Spalten von $\exp(At)$ bereits eine Basis des Lösungsraums, und für eine fest vorgegebene Lösung y der entsprechende Konstantenvektor $C \in \mathbb{R}^3$ eindeutig.) Zum Lösen der Differentialgleichung müssen wir also $\exp(At)$ berechen.

Hierfür und bestimmen wir die Jordan-Normalform von A, inklusive entsprechender Basiswechselmatrizen: Für das charakteristische Polynom ergibt sich

$$\chi_A(t) = t^3 - 11t + 39t - 45 = (t-3)^2(t-5).$$

Da alle Eigenwerte reell sind hat A bereits über $\mathbb{R}$ eine Jordan-Normalform. Für den Eigenraum $E(\lambda)$ von A zum Eigenwert λ ergibt sich, dass

$$E(3) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E(5) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inbesondere ist A nicht diagonalisierbar, da der Eigenraum zum Eigenwert 3 nicht zweidimensional ist. Für den entsprechenden Hauptraum $H(3)$ erhalten wir

$$H(3) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Basisvektoren bereits so gewählt sind, dass

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Es handelt es sich also bereits um eine Jordanbasis des Hauptraums. Für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\3 & 0 & 2\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ergibt sich damit, dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} =: J,$$

wobei

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\1 & 1 & -2\\0 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist deshalb

$$At = S(Jt)S^{-1}.$$

Da nun

$$\exp(At) = \exp(SJtS^{-1}) = S\exp(Jt)S^{-1}$$

genügt es, $\exp(Jt)$ zu berechnen. Hierfür nutzen wir, dass für für J die Jordanzerlegung

$$J = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{=:N}$$

in eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N haben, wobei D und N kommutieren. Für alle $t \in \mathbb{R}$ haben wir damit eine Zerlegung

$$Jt = (D+N)t = Dt + Nt,$$

in eine Diagonalmatrix Dt und nilpotente Matrix Nt, die miteinander kommutieren. Deshalb ist

$$\exp(Jt) = \exp(Dt + Nt) = \exp(Dt)\exp(Nt),$$

wobei wir beide Faktoren leicht bestimmen können. Zum einen ist

$$\exp(Dt) = \exp\begin{pmatrix}3t & 0 & 0\\0 & 3t & 0\\0 & 0 & 5t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{3t} & 0 & 0\\0 & e^{3t} & 0\\0 & 0 & e^{5t}\end{pmatrix}.$$

Zum anderen haben wir wegen $N^2 = 0$ auch $(Nt)^2 = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und somit

$$\exp(Nt) = I + Nt = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \exp(Jt) = \exp(Dt)\exp(Nt) &= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{3t}t & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\exp(At) = S\exp(Jt)S^{-1} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t & t & -2t \\ 3t & 4e^{2t} + 3t - 3 & e^{2t} + t - 1 \\ 2t & e^{2t} + t - 1 & -3e^{2t} - 4t + 4 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum der gegebenen Differentialgleichung hat also eine Basis (b_1, b_2, b_3) mit den drei Funktionen $b_1, b_2, b_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, die durch

$$\begin{gathered} b_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad b_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ 4e^{2t} + 3t - 3 \\ e^{2t} + t - 1 \end{pmatrix}, \\ b_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -2t \\ e^{2t} + t - 1 \\ -3e^{2t} - 4t + 4 \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

gegeben sind.