Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

24. Juni 2016

Übung 1.
Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *lokal nilpotent*, falls es für jedes $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(v) = 0$ gibt.

1. Zeigen Sie, dass jeder nilpotente Endomorphismus auch lokal nilpotent ist.
2. Zeige Sie, dass 0 der einzige mögliche Eigenwert eines lokal nilpotenten Endomorphismus ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ an, so dass f zwar lokal nilpotent, nicht aber nilpotent ist.
4. Zeigen Sie, dass jeder lokal nilpotente Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums bereits nilpotent ist.

Übung 2.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Ist $f^2 = f$, so ist $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$, und es gilt $\operatorname{im} f = V_1(f)$ und $\ker f = V_0(f)$.
2. Ist $f^2 = \mathrm{id}_V$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten 1 und -1.
3. Sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ und $(f-\lambda)(f-\mu) = 0$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten λ und μ. Inwiefern sind die vorherigen beiden Aufgabenteile Sonderfälle hiervon?

Übung 3.
Zeigen Sie im folgenden jeweils, dass der Vektorraum V die direkte Summe der Untervektorräume U_1 und U_2 ist, indem sie einen idempotenten Endomorphisus $e\colon V \to V$ mit $U_1 = \operatorname{im} e$ und $U_2 = \ker e$ angeben.

1. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, $V \coloneqq \mathrm{M}_n(K)$ der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über K,

$$U_1 \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$U_2 \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

2. Es sei $V \coloneqq \{f \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der reellwertigen Folgen auf $\mathbb{R}$, sowie

$$U_1 \coloneqq \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der geraden Funktionen und

$$U_2 \coloneqq \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der ungeraden Funktionen.

3. Die Ebene $V = \mathbb{R}^2$ und als Untervektorräume die beiden Geraden

$$U_1 \coloneqq \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2 \coloneqq \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Übung 4.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume, und $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung, die ein Rechtsinverses $g \colon W \to V$ besitzt. Zeigen Sie, dass

$$V = \ker f \oplus \operatorname{im} g$$

auf die folgenden beiden Weisen:

1. Durch explizites Nachrechnen, dass $V = \ker f + \operatorname{im} g$ und $\ker f \cap \operatorname{im} g = 0$.
2. Mithilfe des Endomorphismus gf von V.

Übung 5.
Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen allgemein gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

1. Ist $V = V_1 \oplus V_2$ für Untervektorräume $V_1, V_2 \subseteq V$, so gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Zerlegung
$$U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2).$$
2. Ist $V = U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$ mit $W_1 \supseteq W_2$, so ist
$$W_1 = (U_2 \cap W_1) \oplus W_2.$$
3. Ist $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarinter Untervektorraum, so gibt es einen f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

4. Für alle Untervektorräume $W, U_1, U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt

$$(U_1 + W) \cap U_2 = U_1 + (W \cap U_2).$$

5. Ist $\mathcal{E} \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist die Einschränkung $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cap U$ ein Erzeugendensystem von U.

6. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Famlie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$ mit $V = \sum_{i \in I} U_i$ und $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$, so ist $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

Übung 6.
Ein Endomorphismus $f \colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *algebraisch (über K)*, falls es ein Polynom $P \in K[T]$ mit $P \neq 0$ gibt, so dass $P(f) = 0$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums algebraisch ist.

2. Geben Sie ein Beispiel für einen K-Vektorraum V und einen Endomorphismus $f \colon V \to V$ an, der nicht algebraisch ist.

Übung 7.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein K-Untervektorraum. Konstruieren Sie für den Annihilator

$$U^\circ = \{\varphi \in V^* \mid \varphi|_U = 0\}$$

einen Isomorphismus $F \colon U^\circ \to (V/U)^*$.

Übung 8.
Es sei V ein Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von f-invarianten Untervektorräumen, und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:

1. Auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist f-invariant.

2. Auch die Summe $\sum_{i \in i} U_i$ ist f-invariant.

3. f induziert eine lineare Abbildung

$$\bar{f} \colon V/U \to V/U, \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

Übung 9.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. f ist diagonalisierbar.

2. Für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt es einen f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

Übung 10.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $\pi\colon V \to V/U$, $v \mapsto [v]$ die kanonische Projektion.

1. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, und für eine Teilmenge $J \subseteq I$ sei $(b_j)_{j \in J}$ eine Basis von U. Zeigen Sie, dass $([b_i])_{i \in I \smallsetminus J}$ eine Basis von V/U ist.
2. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von U und $(c_j)_{j \in J}$ eine Basis von V/U, wobei $I \cap J = \emptyset$. Für $j \in J$ sei $b_j \in V$ mit $\pi(b_j) = c_j$. Zeigen Sie, dass $(b_l)_{l \in L}$ für $L := I \cap J$ ist eine Basis von V ist.

Übung 11.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $f|_U = 0$. Zeigen Sie, dass V eine lineare Abbildung
$$\bar{f}\colon V/U \to W, \quad [v] \mapsto f(u)$$
induziert.
2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} \bar{f} = \operatorname{im} f$. Folgern Sie, dass $\bar{f}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.
3. Zeigen Sie, dass $U \subseteq \ker f$, und dass $\ker \bar{f} = (\ker f)/U$. Folgern Sie, dass $\bar{f}$ genau dann injektiv ist, wenn bereits $U = \ker f$ gilt.
4. Folgern Sie, dass f einen Isomorphismus
$$V/(\ker f) \to \operatorname{im} f, \quad [v] \mapsto f(v)$$
induziert.

Übung 12.
Es sei V ein K-Vektorraum mit Erzeugendensystem $E \subseteq V$. Es sei W ein K-Vektorraum mit Basis $\{b_e\}_{e \in E} \subseteq W$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $V/U \to W$ für einen passenden Untervektorraum $U \subseteq W$.

Übung 13.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es seien $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, so dass U invariant unter f ist (d.h. es ist $f(U) \subseteq U$).

1. Zeigen Sie, dass f einen Endomorphismus
$$\bar{f}\colon V/U \to V/U, \quad [v] \mapsto [f(v)]$$
induziert.

Es sei nun $g\colon V \to V$ ein weiterer Endomorphismus, so dass U invariant unter g ist, und es sei $\bar{g}\colon V/U \to V/U$ der induzierte Endomorphismus.

2. Es seien $f|_U = g|_U$ und $\bar{f} = \bar{g}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass bereits $f = g$ gelten muss.

Übung 14.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie:

1. Für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gibt genau eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$, die das folgende Diagram kommutieren lässt:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "f"] & \\ V_{\mathbb{C}} \arrow[r, "f_{\mathbb{C}}"'] & W_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

2. Für je zwei $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen $g_1, g_2\colon V_{\mathbb{C}} \to W$ die Äquivalenz

$$g_1 = g_2 \iff g_1 \circ \iota = g_2 \circ \iota$$

gilt.

3. Für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum W' gilt für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ und jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $g\colon W \to W'$ die Gleichheit

$$(g \circ f)_{\mathbb{C}} = g \circ f_{\mathbb{C}}.$$

Übung 15.

1. Zeigen Sie, dass für jedes $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $\mathbb{C}$-Vektorraum W die Abbildung

$$\Phi_{V,W}\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W), \quad f \mapsto f_{\mathbb{C}}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist. Geben Sie auch $\Phi_{V,W}^{-1}$ an.

2. Es seien vier K-Vektorräume V, V', W, W' und zwei K-lineare Abbildungen $f\colon V \to V'$ und $g\colon W \to W'$ gegeben. Zeigen Sie, dass die beidseitige Komposition

$$g \circ - \circ f\colon \operatorname{Hom}_K(V, W) \to \operatorname{Hom}_K(V', W'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f$$

eine K-lineare Abbildung ist.

3. Zeigen Sie, dass die Isomorphismen $\Phi_{V,W}$ in dem folgenden Sinne *natürlich* sind: Es seien V und V' zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume und es sei $f\colon V \to V'$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Es seien

W und W' zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume und es sei $g\colon W \to W'$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann kommutiert das folgende Diagram von $\mathbb{R}$-Vektorräumen und $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \arrow[r, "\Phi_{V,W}"] \arrow[d, "g\circ - \circ f"'] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W) \arrow[d, "g\circ - \circ f_{\mathbb{C}}"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V', W') \arrow[r, "\Phi_{V',W'}"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V'_{\mathbb{C}}, W')
\end{tikzcd}$$

Übung 16.
Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-lineare Inklusion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x$ einen Isomorphismus $\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen induziert.

Übung 17.
Es seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}), \quad f \mapsto f_{\mathbb{C}}$$

einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$$

induziert. (*Hinweis*: Beachten Sie, dass V und W nicht notwendigerweise endlichdimensional sind.)

Übung 18.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $(V^*)_{\mathbb{C}} \to (V_{\mathbb{C}})^*$. (*Hinweis*: Beachten Sie, dass V ist nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.)

Übung 19.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right)_{\mathbb{C}} = \bigcap_{i\in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$$
2. Es gilt
$$\left(\sum_{i\in I} U_i\right)_{\mathbb{C}} = \sum_{i\in I} (U_i)_{\mathbb{C}}.$$
3. Folgern Sie, dass genau dann $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$, wenn $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i\in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$.

Übung 20.
Es seien V und W zwei reelle Vektorräume, und $f\colon V \to W$ sei $\mathbb{R}$-linear.

1. Zeigen Sie, dass $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$.
2. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass $(V_{\mathbb{C}})_\lambda(f_{\mathbb{C}}) = V_\lambda(f)_{\mathbb{C}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\operatorname{im} f)_{\mathbb{C}}$.
5. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übung 21.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

Übung 22.
Zeigen Sie, dass die kanonische Inklusion $\iota\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}[X]$, $x \mapsto x$ $\mathbb{R}$-linear ist, und einen Isomorphismus $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}[X]$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen induziert.

Übung 23.
Es sei V ein K-Vektorraum, wobei $V \neq 0$ und K algebraisch abgeschlossen ist. Es seien $f_1, \dots, f_n\colon V \to V$ paarweise kommutierende Endomorphismen. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen $f_1, \dots, f_n$ einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen, d.h. dass es ein $v \in V$ gibt, das für jedes f_i eine Eigenvektor ist.

Übung 24.
Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{tr} A = 0$ und $\operatorname{tr} A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$.

Übung 25.
Zeigen Sie, dass es für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ein Polynom $P \in K[T]$ mit $\deg P \leq n-1$ gibt, so dass $A^{-1} = P(A)$.

Übung 26.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \notin \{2,3\}$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \frac{1}{6}(\operatorname{tr} A)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} A^3) \quad \text{für jedes } A \in \mathrm{M}_3(K).$$

(*Hinweis*: Wenn die Rechnungen zu kompliziert werden, dann macht man es falsch.)

Übung 27.
Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sei

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Es sei

$$\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1} \,\middle|\, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda_1, \dots, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

die Menge der diagonalisierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen. Wir zeigen, dass $D_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dicht ist, d.h. dass es für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine diagonalisierbare Matrix $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Es sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, also

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$B(t) \coloneqq A + tS \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_n) S^{-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t) \in \mathbb{C}$ mit

   $$\mu_i(t) \coloneqq \lambda_i + tz_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

   die Eigenwerte von $B(t)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.

3. Folgern Sie, dass $B(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

4. Folgern Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle $D \in B_\delta(A) \setminus \{A\}$ diagonalisierbar sind.

5. Folgern Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

6. Folgern Sie außerdem, dass $\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine offene Teilmenge ist.

Wir wollen die Dichtheit von $\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ nutzen, um den Satz von Cayley-Hamilton zu zeigen:

7. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$F \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \chi_A(A)$$

   stetig ist, wobei $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$ das charakteristische Polynom von A ist.

8. Zeigen Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

9. Zeigen Sie, dass $P(SAS^{-1}) = SP(A)S^{-1}$ für alle $P \in \mathbb{C}[T]$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Folgern Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Matrix $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$.

10. Folgern Sie, dass $F(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Übung 28.
Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Skalarprodukträume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ eine Orthonormalbasis von W. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^*.$$

Übung 29.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f\colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$\Phi_V \colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

   ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* $\mathbb{R}$-linear ist.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g \coloneqq \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ $\mathbb{R}$-linear ist, und dass

   $$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

4. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für denn fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn also V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

Übung 30.
Es sei $V \coloneqq \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$, und es sei

$$U \coloneqq \{f \in V \mid f(0) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

2. Zeigen Sie, dass

   $$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$

   ein Skalarprodukt auf V definiert.

3. Zeigen Sie, dass $U^\perp = 0$. Folgern Sie, dass $V \neq U \oplus U^\perp$. (*Hinweis*: Betrachten Sie für $g \in U^\perp$ die Funktion $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = t^2 g(t)$.)

4. Zeigen Sie ferner, dass $V/(U \oplus U^\perp)$ eindimensional ist.

Übung 31.
Es sei
$$W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$
der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Wir betrachten den Untervektorraum
$$V := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in W \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$
der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von W ist.
2. Zeigen Sie für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$, dass
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$
(*Hinweis:* Zeigen sie zunächst, dass $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.)
3. Zeigen sie, dass
$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.
4. Es sei
$$R\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$
der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.
5. Zeigen Sie, dass R keine Eigenwerte besitzt.
6. Es sei
$$S\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n\in\mathbb{N}}.$$
Zeigen Sie, dass S ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.
7. Zeigen Sie, dass S diagonalisierbar ist.
8. Es sei
$$U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$
Bestimmen Sie $U^\perp$ und entscheiden Sie, ob $V = U \oplus U^\perp$.
9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Übung 32.

1. Zeigen Sie, dass durch

   $$\sigma(A,B) \coloneqq \operatorname{tr}\left(A^T B\right) \quad \text{für alle } A,B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

   ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit

   $$(E_{ij})_{kl} \coloneqq \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i,j,k,l \leq n$$

   eine Orthonormalbasis von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezüglich σ bilden.

3. Es sei

   $$S_+ \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

   der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

   $$S_- \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

   der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

   $$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

   und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 33.

Es sei V ein Skalarproduktraum und

$$O(V) \coloneqq \{f \in \operatorname{End}(V) \mid ff^* = \mathrm{id}\}.$$

Zeigen Sie, dass $O(V)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

Übung 34.

Zeigen sie, dass für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
2. $AA^* = I$.
3. $A^*A = I$.
4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.
5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.

Übung 35.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Zeigen Sie, dass es eindeutige hermitsche Matrizen $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B + iC$ gibt.
2. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn B und C kommutieren.

Übung 36.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, und es sei $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ eine endliche Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle x, y\rangle_G \coloneqq \frac{1}{|G|}\sum_{\phi\in G}\langle\phi(x),\phi(y)\rangle \quad \text{für alle } x, y \in V$$
ein Skalarprodukt auf G definiert.
2. Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ in dem Sinne G-invariant ist, dass
$$\langle\phi(x),\phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{für alle } x, y \in V \text{ und } \phi \in G.$$
3. Folgern Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ für alle $\phi \in G$ eine orthogonale Matrix ist.
4. Folgern Sie damit, dass es für $n = \dim V$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi\colon G \to O_n(\mathbb{R})$ gibt, G also isomorph zu der Untergruppe im Φ von $O_n(\mathbb{R})$ ist.

Übung 37.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Für jedes $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$ sei
$$s_\alpha\colon V \to V, \quad \text{mit} \quad s_\alpha(x) \coloneqq x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha.$$
Ferner seien
$$L_\alpha \coloneqq \mathbb{R}\alpha \quad \text{und} \quad H_\alpha \coloneqq L_\alpha^\perp = \alpha^\perp.$$

1. Zeigen Sie, dass $s_\alpha^2 = \mathrm{id}_V$, und dass $s_{\lambda\alpha} = s_\alpha$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^\times$.
2. Zeigen Sie, dass s_α diagonalisierbar ist, und dass
$$V_{-1}(s_\alpha) = L_\alpha \quad \text{und} \quad V_1(s_\alpha) = H_\alpha.$$
3. Interpretieren Sie V geometrisch anschaulich.
4. Es sei $s'\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $s'(\alpha) = -\alpha$ und $s'(x) = x$ für alle $x \in H_\alpha$. Zeigen Sie, dass bereits $s' = s_\alpha$ gilt.

5. Zeigen Sie, dass für jede orthogonale Isomorphismus $t\colon V \to V$ die Identität

$$ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$$

gilt.

Übung 38.
Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $S\colon V \to V$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. S ist normal.
2. V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von S.
3. Für jeden S-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch das orthogonale Komplement $U^\perp$ invariant unter S.

Übung 39.
Für je zwei K-Vektorräume V und W sei

$$\mathrm{Bil}(V, W) := \{b\colon V \times W \to K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen $V \times W \to K$.

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

$$F\colon \mathrm{Bil}(V, W) \to \mathrm{Bil}(W, V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w, v) = b(v, w)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

2. Es sei $b \in \mathrm{Bil}(V, W)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass b ein lineare Abbildung

$$\Phi_{V,W}(b)\colon V \to W^*, \quad v \mapsto b(v, -)$$

induziert. Dabei ist

$$b(v, -)\colon W \to K, \quad w \mapsto b(v, w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{V,W}\colon \mathrm{Bil}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(V, W^*) \to \mathrm{Hom}(W, V^*)$$

an.

Wir betrachten nun den Fall $W = V^*$.

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e\colon V \times V^* \to K, \quad (v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

   eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform e einer linearen Abbildung $V \to V^{**}$, sowie einer linearen Abbildung $V^* \to V^*$. Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

Übung 40.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an, und zeigen sie ihre Linearität.

2. Zeigen Sie für jeden K-Vektorraum U, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon U \times U^* \to K \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v) \quad \text{für alle } v \in V, \varphi \in V^*$$

   eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

Übung 41.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma\colon \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) := \mathrm{tr}(AB)$$

   eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Zeigen Sie, dass σ in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in \mathrm{M}_n(K).$$

Übung 42.
Es sei V ein K-Vektorraum und $m\colon V \times V \to V$ eine bilineare Abbildung. Eine lineare Abbildung $D\colon V \to V$ heißt m-*Derivation*, falls

$$D(m(x,y)) = m(D(x),y) + m(x,D(y)) \quad \text{für alle } x,y \in V.$$

Es sei

$$\mathrm{Der}(m) \coloneqq \{D\colon V \to V \mid D \text{ ist eine } m\text{-Derivation}\}.$$

1. Zeigen Sie für den Fall $V = K[X]$ und die Multiplikation

   $$m(p,q) \coloneqq p \cdot q \quad \text{für alle } p,q \in K[X],$$

   dass die Ableitung

   $$D\colon K[X] \to K[X], \quad \sum_{d=0}^{n} a_d X^d \mapsto \sum_{d=1}^{n} a_d d X^{d-1}$$

   eine m-Derivation ist. Unter welchem Namen ist dieser Umstand für gewöhnlich bekannt?

2. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Der}(m)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{End}(V)$ ist.

3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Der}(m)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)$ ist, d.h. dass für alle $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(m)$ auch $[D_1, D_2] \in \mathrm{Der}(m)$.

Übung 43.
Es sei V ein K-Vektorraum und $[-,-]\colon V \times V \to V$ eine alternierend bilineare Abbildung. Für jedes $x \in V$ sei

$$\mathrm{ad}_x \coloneqq [x,-]\colon V \to V, \quad y \mapsto [x,y].$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. $[-,-]$ erfüllt die Jacobi-Identität, d.h. es ist

   $$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,y],x] = 0 \quad \text{für alle } x,y,z \in V.$$

2. Es gilt

   $$\mathrm{ad}_x([y,z]) = [\mathrm{ad}_x(y), z] + [x, \mathrm{ad}_y(z)] \quad \text{für alle } x,y,z \in V.$$

   (Für jedes $x \in V$ ist also ad_x eine Derivation bezüglich $[-,-]$.)

Übung 44.
Es seien E und H zwei Endomorphismen eines $\mathbb{C}$-Vektorraums V, so dass $[H,E] = 2E$.

1. Zeigen Sie, dass $E(V_\lambda(H)) \subseteq V_{\lambda+2}(H)$ für alle $\lambda \in K$.

2. Folgern Sie: Ist V endlichdimensional und H diagonalisierbar, so ist E nilpotent.

Übung 45.
Für einen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V und eine Bilinearform $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ sei

$$O(\beta) \coloneqq \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(\phi(x), \phi(y)) = \beta(x, y) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die Isometriegruppe von β, und

$$\mathfrak{g}(\beta) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \beta(f(x), y) + \beta(x, f(y)) = 0 \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die assoziierte Lie-Algebra.

1. Zeigen Sie, dass $O(\beta)$ eine Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}(\beta)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist, d.h. dass $[f, g] \in \mathfrak{g}(\beta)$ für alle $f, g \in \mathfrak{g}(\beta)$.
3. Zeigen Sie, dass $\exp(f) \in O(\beta)$ für alle $f \in \mathfrak{g}(\beta)$.
4. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Unter welchen Begriffen sind die Elemente aus $G(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $\mathfrak{g}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ bekannt?