Basen und darstellende Matrizen für Quotientenvektorräume

Jendrik Stelzner

May 4, 2016

Sofern nichts anderes angegeben ist, bezeichnet K im folgenden einen beliebigen Körper.

1 Basen runterdrücken

Lemma 1. *Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, so dass es eine Teilmenge $J \subseteq I$ gibt, so dass $(b_i)_{j \in J}$ eine Basis von U ist. Dann ist $([b_i])_{i \in I \smallsetminus J}$ eine Basis von V/U.*

Korollar 2. *Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist V/U endlichdimensional mit*

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Proposition 3. *Es seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so dass $\mathcal{C} := (v_1, \dots, v_s)$ eine Basis von U ist. Es sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus von V mit $f(U) \subseteq U$. Es sei $m := n - m$. Dann gilt:*

1. *Der Quotientenvektorraum V/U hat $\mathcal{D} := ([v_{s+1}], \dots, [v_n])$ als Basis.*
2. *Der Endomorphismus f induziert einen Endomorphismus*

   $$f|_U \colon U \to U, \quad u \mapsto f(u)$$

   und einen Endomorphismus

   $$\bar{f} \colon V/U \to V/U, \quad [v] \mapsto [f(v)].$$

3. *Ist $A = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f|_U) \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ und $C = \mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\bar{f}) \in \mathrm{M}(m \times m, K)$, so ist*

   $$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ & C \end{pmatrix}$$

   mit $B \in \mathrm{M}(n \times m, K)$.

Korollar 4. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Ist $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $f(U) \subseteq U$, so gilt für die induzierten Endomorphismen $f|_U \colon U \to U$ und $\bar{f} \colon V/U \to V/U$, dass*

$$\det f = \det f|_U \cdot \det \bar{f}.$$

2 Basen hochziehen

Lemma 5. *Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $(b_j)_{j \in J_1}$ eine Basis von V/U, und für jedes $j \in J_1$ sei $v_j \in V$ mit $b_j = [v_j]$. Ferner sei $(v_j)_{j \in J_2}$ eine Basis von U, wobei die Indexmengen J_1 und J_2 disjunkt seien. Dann ist $(v_i)_{i \in I}$ mit $I := J_1 \cup J_2$ eine Basis von V.*

Bemerkung 6. Das obige Lemma besagt, grob gesagt, wie man Basen von V/U zu Basen von V zurückziehen kann: Beginnt man mit einer Basis $(b_j)_{j \in J_1}$ von V/U, so wählt man für jedes Basiselement b_j ein Urbild $v_j \in V$. Die Familie $(v_j)_{j \in J_1}$ ist dann im Allgemeinen noch keine Basis von V, aber mit kann sie durch Hinzufügen einer Basis $(v_j)_{j \in J_2}$ des rausgeteilten Untervektorraums U zu einer solchen ergänzen.

Korollar 7. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein K-Untervektorraum. Es sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $f(U) \subseteq U$, und es seien $f|_U \colon U \to U$ und $\bar{f} \colon V/U \to V/U$ die induzierten Endomorphismen. Es sei $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_s)$ eine Basis von U, $\mathcal{C} = (b_1, \dots b_r)$ eine Basis von U, und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{r+s})$ mit $[v_{s+i}] = b_i$ eine Basis von V. Für die darstellenden Matrizen $A = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f|_U) \in \mathrm{M}(s \times s, K)$ und $C = \mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\bar{f}) \in \mathrm{M}(r \times r, K)$ gilt dann*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ & C \end{pmatrix}$$

mit $B \in \mathrm{M}(s \times r, K)$.

Korollar 8. *Ist K algebraisch abgeschlossen, V ein K-Vektorraum mit $V \neq 0$ und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus, so gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, so dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h. $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ ist von der Form*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$