Komplexifizierung euklidischer Vektorräume

Jendrik Stelzner

13. Juni 2016

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir zeigen zunächst, dass sich dieses Skalarprodukt eindeutig auf $V_{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt:

1 Vorbereitung

Bevor wir uns dem eigentlichen Thema zuwenden, zeigen wir noch einige nützliche Aussagen über die Komplexifizierung reeller Vektorräume.

Lemma 1. *Es seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume, und $f, g \colon V \to w$ $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen. Dann ist genau dann $f = g$, wenn $f_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Ist $f = g$, so ist auch $f_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}}$. Ist andererseits $f_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}}$, so ist

$$f(v) + i \cdot 0 = f_{\mathbb{C}}(v + i \cdot 0) = g_{\mathbb{C}}(v + i \cdot 0) = g(v) + i \cdot 0 \quad \text{für alle } v \in V,$$

und somit $f(v) = g(v)$ für alle $v \in V$. □

Korollar 2. *Sind $f, g \colon V \to V$ Endomorphismen eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V, so kommutieren f und g genau dann, wenn $f_{\mathbb{C}}$ und $g_{\mathbb{C}}$ kommutieren.*

Beweis. Da $(f \circ g)_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$ und $(g \circ f)_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$ ist nach Lemma 1 genau dann $f \circ g = g \circ f$, wenn $f_{\mathbb{C}} \circ g_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$. □

Lemma 3. *Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist U genau dann f-invariant, wenn $U_{\mathbb{C}}$ invariant unter $f_{\mathbb{C}}$ ist.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
&U_{\mathbb{C}} \text{ ist } f_{\mathbb{C}}\text{-invariant} \\
\iff & f_{\mathbb{C}}(U_{\mathbb{C}}) \subseteq U_{\mathbb{C}} \\
\iff & f_{\mathbb{C}}(u_1 + i u_2) \in U_{\mathbb{C}} \text{ für alle } u_1, u_2 \in U \\
\iff & f(u_1) + i f(u_2) \in U_{\mathbb{C}} \text{ für alle } u_1, u_2 \in U \\
\iff & f(u_1), f(u_2) \in U \text{ für alle } u_1, u_2 \in U \\
\iff & f(u) \in U \text{ für alle } u \in U \\
\iff & f(U) \subseteq U \\
\iff & U \text{ ist } f\text{-invariant.}
\end{aligned}$$

□

2 Hauptteil

Proposition 4. *Es gibt ein eindeutiges (komplexes) Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ auf $V_{\mathbb{C}}$, so dass*

$$\langle v_1 + i\cdot 0, v_2 + i\cdot 0\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1, v_2\rangle \quad \textit{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

d.h. es gilt

$$\langle \iota(v_1), \iota(v_2)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1, v_2\rangle \quad \textit{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

wobei $\iota\colon V \to V_{\mathbb{C}}$, $v \mapsto v + i\cdot 0$ die kanonische Inklusion bezeichnet.

Beweis. Wenn sich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zu einem solchen komplexen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt, so ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ insbesondere sesquilinear (also linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument). Für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ ist dann

$$\langle v_1 + iv_2, w_1 + iw_2\rangle = (\langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle) + i(\langle v_2, w_1\rangle - \langle v_1, w_2\rangle).$$

Somit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ eindeutig.

Zum Beweis der Existenz definieren wir

$$\langle v_1 + iv_2, w_1 + iw_2\rangle \coloneqq (\langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle) + i(\langle v_2, w_1\rangle - \langle v_1, w_2\rangle)$$

für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, und zeigen, dass dies ein komplexes Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{C}}$ ist.

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ is hermitsch, denn für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ ist

$$\begin{aligned}
\overline{\langle w_1 + iw_2, v_1 + iv_2\rangle_{\mathbb{C}}} &= \overline{(\langle w_1, v_1\rangle + \langle w_2, v_2\rangle) + i(\langle w_2, v_1\rangle - \langle w_1, v_2\rangle)} \\
&= (\langle w_1, v_1\rangle + \langle w_2, v_2\rangle) - i(\langle w_2, v_1\rangle - \langle w_1, v_2\rangle) \\
&= (\langle w_1, v_1\rangle + \langle w_2, v_2\rangle) + i(\langle w_1, v_2\rangle - \langle w_2, v_1\rangle) \\
&= (\langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle) + i(\langle v_2, w_1\rangle - \langle v_1, w_2\rangle) \\
&= \langle v_1 + iv_2, w_1 + iw_2\rangle_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\mathbb{R}$-bilinear ist, ergibt sich, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ im ersten Argument $\mathbb{R}$-linear ist (und auch im zweiten). Im ersten Argument gilt außerdem

$$\begin{aligned}
\langle i\cdot(v_1 + iv_2), w_1 + iw_2\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle -v_2 + iv_1, w_1 + iw_2\rangle_{\mathbb{C}} \\
&= (\langle -v_2, w_1\rangle + \langle v_1, w_2\rangle) + i(\langle v_1, w_1\rangle - \langle -v_2, w_2\rangle) \\
&= (\langle v_1, w_2\rangle - \langle v_2, w_1\rangle) + i(\langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle) \\
&= i\cdot((\langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle) + i(\langle v_2, w_1\rangle - \langle v_1, w_2\rangle)) \\
&= i\cdot\langle v_1 + iv_2, w_1 + iw_2\rangle_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der $\mathbb{R}$-Linearität im ersten Argument ergibt sich damit, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ im ersten Argument $\mathbb{C}$-linear ist. Da $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ hermitsch und im ersten Argument $\mathbb{C}$-linear ist, ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ im zweiten Argument $\mathbb{C}$-antilinear.

Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\langle v_1 + iv_2, v_1 + iv_2\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle = \|v_1\| + \|v_2\|,$$

und somit

$$\langle v_1 + iv_2, v_1 + iv_2\rangle = 0 \iff v_1 = v_2 = 0 \iff v_1 + iv_2 = 0. \qquad \square$$

Lemma 5. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum, und $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ die Norm die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert wird. Dann gilt*

$$\|v_1 + iv_2\| = \sqrt{\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2} \quad \textit{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Beweis. Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\begin{aligned}\|v_1 + iv_2\|_{\mathbb{C}}^2 &= \langle v_1 + iv_2, v_1 + iv_2\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= (\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle) + i(\langle v_2, v_1\rangle - \langle v_1, v_2\rangle) \\ &= \langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2.\end{aligned}$$ □

Proposition 6. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist*

$$(U^{\perp})_{\mathbb{C}} = (U_{\mathbb{C}})^{\perp}.$$

Beweis. Sind $v_1, v_2 \in U$ und $w_1, w_2 \in U^{\perp}$, so ist

$$\langle v_1 + iv_2, w_1 + iw_2\rangle_{\mathbb{C}} = (\langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle) + i(\langle v_2, w_1\rangle - \langle v_1, w_2\rangle) = 0,$$

da $\langle v_i, w_j\rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$. Damit ist $(U^{\perp})_{\mathbb{C}} \subseteq (U_{\mathbb{C}})^{\perp}$.

Andererseits seien $w_1, w_2 \in V$ mit $w_1 + iw_2 \in (U_{\mathbb{C}})^{\perp}$. Für alle $v \in U$ ist dann $v + i \cdot 0 \in U_{\mathbb{C}}$ und somit

$$0 = \langle v + i \cdot 0, w_1 + iw_2\rangle = \langle v, w_1\rangle - i\langle v, w_2\rangle.$$

Also ist $\langle v, w_1\rangle = \langle v, w_2\rangle = 0$ für alle $v \in U$ und somit $w_1, w_2 \in U^{\perp}$. Damit ist auch $(U_{\mathbb{C}})^{\perp} \subseteq (U^{\perp})_{\mathbb{C}}$. □

Proposition 7. *Es seien V und W euklidische Vektorräume und es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist*

$$(f^*)_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*.$$

Beweis. Dies lässt sich etwa in Koordinaten durchrechnen: Für alle v_1, v_2, w_1, w_2 ist

$$\begin{aligned}&\langle f_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2), w_1 + iw_2\rangle_{\mathbb{C}} = \langle f(v_1) + if(v_2), w_1 + iw_2\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= (\langle f(v_1), w_1\rangle + \langle f(v_2), w_2\rangle) + i(\langle f(v_2), w_1\rangle - \langle f(v_1), w_2\rangle) \\ &= (\langle v_1, f^*(w_1)\rangle + \langle v_2, f^*(w_2)\rangle) + i(\langle v_2, f^*(w_1)\rangle - \langle v_1, f^*(w_2)\rangle) \\ &= \langle v_1 + iv_2, f^*(w_1) + if^*(w_2)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1 + iv_2, (f^*)_{\mathbb{C}}(w_1 + iw_2)\rangle_{\mathbb{C}},\end{aligned}$$

also hat $(f^*)_{\mathbb{C}}$ die definierende Eigenschaft von $(f_{\mathbb{C}})^*$. □

Korollar 8. *Ist V ein euklidischer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus, so ist $f_{\mathbb{C}}$ ein normaler Endomorphismus von $V_{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Es ist

$$f_{\mathbb{C}}(f_{\mathbb{C}})^* = f_{\mathbb{C}}(f^*)_{\mathbb{C}} = (ff^*)_{\mathbb{C}} = (f^*f)_{\mathbb{C}} = (f^*)_{\mathbb{C}}f_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*f_{\mathbb{C}}.$$ □

Theorem 9. *Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Dann ist auch $U^{\perp}$ f-invariant.*

Beweis. Dies wurde auf dem sechsten Übungszettel gezeigt. □

Korollar 10. *Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Dann ist $U^\perp$ ebenfalls f-invariant.*

Beweis. Wegen der Normalität von f ist nach Korollar 8 auch $f_\mathbb{C}\colon V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$ normal, und wegen der Endlichdimensionalität von V ist auch $V_\mathbb{C}$ endlichdimensional. Wegen der f-Invarianz von U ist nach Lemma 3 der induzierte Unterraum $U_\mathbb{C}$ invariant unter $f_\mathbb{C}$. Nach Theorem 9 ist $(U_\mathbb{C})^\perp = (U^\perp)_\mathbb{C}$ invariant unter $f_\mathbb{C}$. Nach Lemma 3 ist somit $U^\perp$ invariant unter f. □