

# Lösung zu Zettel 7, Aufgabe 4

Jendrik Stelzner

17. Juni 2016

## 1 Topologisches Vorgeplänkel

Wir nutzen im Folgenden einige Aussagen über normierte Vektorräume, ohne diese explizit zu beweisen:

**Lemma 1.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.*

1. *Es seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei Normen auf  $V$ . Dann sind  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  äquivalent, d.h. es gibt  $C > 0$  mit*

$$\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|_2 \quad \text{und} \quad \|\cdot\|_2 \leq C \|\cdot\|_1.$$

2. *Ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $V$ , so ist  $V$  vollständig (bezüglich der durch  $\|\cdot\|$  induzierten Metrik).*

**Lemma 2.** *Es sei  $V$  ein normierter Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

1.  *$V$  ist vollständig (bezüglich der durch  $\|\cdot\|$  induzierten Norm), also ein Banachraum.*
2. *Jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  in  $V$  (d.h. die reelle Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$  konvergiert) konvergiert.*

Dies erlaubt uns die Exponentialfunktion von Matrizen zu definieren: Wir wählen eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $M_n(\mathbb{K})$ . Wegen der Vollständigkeit von  $M_n(\mathbb{K})$  konvergiert jede absolut konvergente Reihe in  $M_n(\mathbb{K})$ . Für jede  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$  absolut konvergent, denn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k/k!$  konvergiert (gegen  $\exp(\|A\|)$ ). Also konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$  für alle  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Da alle Normen auf  $V$  äquivalent sind, ist der Grenzwert unabhängig von der gewählten Norm  $\|\cdot\|$ .

Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, so können wir in der obigen Argumentation  $M_n(\mathbb{K})$  durch  $\text{End}(V)$  ersetzen, und damit die Exponentialfunktion auf  $\text{End}(V)$  definieren.

**Lemma 3.** *Sind  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, so ist jede lineare Abbildung  $V \rightarrow W$  stetig.*

Damit ergibt sich insbesondere, dass sich die Exponentialfunktion von Endomorphismen mithilfe von Matrizen in Koordinaten berechnen lässt:

**Korollar 4.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensional  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\mathcal{B}$  eine geordnete Basis von  $V$ . Für jeden Endomorphismen ist*

$$M_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = \exp(M_{\mathcal{B}}(f)).$$

*Ist  $g: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus mit  $M_{\mathcal{B}}(g) = \exp(M_{\mathcal{B}}(f))$ , so ist deshalb  $g = \exp(f)$ .*

*Beweis.* Es sei  $A := M_{\mathcal{B}}(f)$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dann

$$M_{\mathcal{B}} \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}.$$

Da die Abbildung  $M_{\mathcal{B}}: \text{End}(V) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$  linear ist, ist sie nach Lemma 3 stetig. Ist  $f = \exp(g)$ , so ist deshalb

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(\exp(f)) &= M_{\mathcal{B}} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^k}{k!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{\mathcal{B}} \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^k}{k!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \exp(A) = \exp(M_{\mathcal{B}}(f)). \end{aligned}$$

Der letzte Teil der Aussage folgt nun aus

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \exp(M_{\mathcal{B}}(f)) = M_{\mathcal{B}}(\exp(f))$$

und der Bijektivität der Abbildung  $\text{End}(V) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), h \mapsto M_{\mathcal{B}}(h)$ .  $\square$

## 2 Aufgabe 4

i)

Für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{K})$  und invertierbare Matrix  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  ist

$$\begin{aligned} \exp(SAS^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(SAS^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( S \frac{A^k}{k!} S^{-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left( S \frac{A^k}{k!} S^{-1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( S \left( \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) S^{-1} \right) = S \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) \right) S^{-1} \\ &= S \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) S^{-1} = S \exp(A) S^{-1}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile die Stetigkeit der Abbildung

$$M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad B \mapsto SBS^{-1}$$

genutzt.

ii)

Da  $A$  und  $B$  kommutieren gilt

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} A^{\ell} B^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{A^{\ell} B^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^n B^m}{n!m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A^n}{n!} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) \right) \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^{\ell}}{\ell!} \right) = \exp(A) \exp(B). \end{aligned}$$

Die genutzten Umordnungen der Reihen lassen sich etwa wie folgt begründen:

Da die Addition, Skalarmultiplikation und Grenzwertbildung eintragsweise geschehen, genügt es, die Umordnungen jeweils eintragsweise durchführen zu können. Dies geht etwa, wenn die Reihen eintragsweise bereits absolut konvergieren.

Dass dies gilt, ergibt sich daraus, dass es eine Konstante  $C > 0$  gibt (die nur von der auf  $M_n(\mathbb{K})$  gewählten Norm abhängt), so dass  $|d_{ij}| \leq C\|D\|$  für jede Matrix  $D \in M_n(\mathbb{K})$ . Dies wiederum ergibt sich daraus, dass die Aussage für die  $\|\cdot\|_1$ -Norm (mit  $\|D\|_1 = \sum_{i,j} |d_{ij}|$ ) mit der Konstante  $C = 1$  gilt, und alle Normen auf  $M_n(\mathbb{K})$  äquivalent sind.

Außerdem haben wir in den letzten beiden Zeilen genutzt, dass für alle  $E \in M_n(\mathbb{K})$  die Abbildungen

$$M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad D \mapsto DE$$

und

$$M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad D \mapsto ED$$

linear, und somit stetig sind.

iii)

**Lemma 5.** *Es sei  $K$  ein Körper.*

1. *Für alle  $A, B \in M_n(K)$  ist*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

2. *Für alle  $A \in M_n(K)$  und  $S \in \operatorname{GL}_n(K)$  ist*

$$\operatorname{tr}(SAS^{-1}) = \operatorname{tr}(A).$$

*Beweis.* 1. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ji} A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA). \end{aligned}$$

2. Nach dem ersten Teil des Lemmas ist

$$\operatorname{tr}(SAS^{-1}) = \operatorname{tr}(S \cdot AS^{-1}) = \operatorname{tr}(AS^{-1} \cdot S) = \operatorname{tr}(A). \quad \square$$

Da  $A \in M_n(\mathbb{K})$  trigonalisierbar über  $\mathbb{C}$  ist, gibt es  $S \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ , so dass  $SAS^{-1}$  in oberer Dreiecksform ist. Es ist also

$$B := SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte von  $A$  sind. Deshalb ist

$$\exp(\operatorname{tr}(A)) = \exp(\operatorname{tr}(SAS^{-1})) = \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \exp(\lambda_1) \cdots \exp(\lambda_n).$$

Andererseits ist

$$\det(\exp(A)) = \det(S \exp(A) S^{-1}) = \det(\exp(SAS^{-1})) = \det(\exp(B)).$$

Da beim Multiplizieren zweier oberer Dreiecksmatrizen die Diagonaleinträge multipliziert werden, ergibt sich, dass  $B^k$  für alle  $k \geq 0$  von der Form

$$B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

ist. Deshalb ist  $\exp(B)$  von der Form

$$\exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\det(\exp(B)) = \exp(\lambda_1) \cdots \exp(\lambda_n).$$

**iv)**

Da  $(AB)^* = B^* A^*$  ergibt sich für alle  $k \geq 0$ , dass  $(A^k)^* = (A^*)^k$ . Deshalb ist

$$\exp(A^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^*)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{A^k}{k!} \right)^* = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right)^* = \exp(A)^*.$$

Dabei wurde für die letzte Gleichheit benutzt, dass die Abbildung

$$M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad B \mapsto B^*$$

$\mathbb{R}$ -linear und somit stetig ist. (Denn jede  $\mathbb{K}$ -Norm ist insbesondere eine  $\mathbb{R}$ -Norm.)

**v)**

Es ist  $0^0 = I$  und  $0^k = 0$  für alle  $k \geq 1$ , und deshalb

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{I}{0!} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!}}_{=0} = I.$$

**vi)**

Ist  $A$  selbstadjungiert, also  $A = A^*$ , so ist

$$\exp(A)^* = \exp(A^*) = \exp(A),$$

also auch  $\exp(A)$  selbstadjungiert. Ist  $A$  normal, so kommutieren  $A$  und  $A^*$ . Deshalb ist dann

$$\begin{aligned} \exp(A) \exp(A)^* &= \exp(A) \exp(A^*) = \exp(A + A^*) = \exp(A^* + A) \\ &= \exp(A^*) \exp(A) = \exp(A)^* \exp(A), \end{aligned}$$

also auch  $\exp(A)$  normal. Dabei haben wir den zweiten Aufgabenteil genutzt.

**vii)**

Ist  $A$  antiselbstadjungiert, so ist  $A^* = -A$ . Da  $A$  und  $-A$  kommutieren, ist dann

$$\begin{aligned}\exp(A) \exp(A)^* &= \exp(A) \exp(A^*) = \exp(A) \exp(-A) \\ &= \exp(A - A) = \exp(0) = I,\end{aligned}$$

und analog auch  $\exp(A)^* \exp(A) = I$ . Also ist  $\exp(A)$  unitär. Dabei haben wir auch hier den zweiten Aufgabenteil genutzt.

**viii)**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

#### selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein selbstadjungierter Endomorphismen mit positiven Eigenwerten. Da  $f$  normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ . Es ist also

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  die Eigenwerte von  $f$  sind. Wegen der Positivität der Eigenwerte gibt es für jedes  $i = 1, \dots, n$  ein  $\mu_i \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_i = \exp(\mu_i)$ . Für den Endomorphismus  $g: V \rightarrow V$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

ist also

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \exp(M_{\mathcal{B}}(f)),$$

und somit nach Korollar 4 bereits  $g = \exp(f)$ . Da  $M_{\mathcal{B}}(g)$  eine Diagonalmatrix ist, und  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , ist  $g$  selbstadjungiert.

#### normale Endomorphismes

Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein normaler, invertierbarer Endomorphismus. Da  $f$  normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ . Es ist also

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte von  $f$  sind. Wegen der Invertierbarkeit von  $f$  ist 0 kein Eigenwert von  $f$ , also  $\lambda_j \neq 0$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Wegen der Surjektivität der Exponentialabbildung  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gibt es  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$  mit  $\lambda_j = \exp(\mu_j)$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Es sei  $g: V \rightarrow V$  der Endomorphismus mit

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \exp(M_{\mathcal{B}}(f)).$$

und nach Korollar 4 somit  $f = \exp(g)$ . Die Matrix  $M_{\mathcal{L}}(g)$  ist eine Diagonalmatrix, und somit normal. Da  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis ist, ist deshalb  $g$  ein normaler Endomorphismus.

### unitäre Endomorphismen

Es sei  $f: V \rightarrow V$  ein unitärer Endomorphismus. Da  $f$  normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ . Es ist also

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte von  $f$  sind. Da  $f$  unitär ist, gilt  $|\lambda_j| = 1$  für alle  $j = 1, \dots, n$ , d.h. alle Eigenwerte von  $f$  liegen auf dem Einheitskreis. Es gibt daher  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_j = \exp(i\varphi_j)$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Es sei  $g: V \rightarrow V$  der Endomorphismus mit

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\varphi_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \exp(M_{\mathcal{B}}(f)),$$

also  $g = \exp(f)$  nach Korollar 4. Da

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(g^*) &= M_{\mathcal{B}}(g)^* = \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\varphi_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -i\varphi_n \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\varphi_n \end{pmatrix} = -M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(-g) \end{aligned}$$

und  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis von  $V$  ist, folgt  $g^* = -g$ . Also ist  $g$  antiselbstadjungiert.