Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

15. Juni 2016

Übung 1.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Ist $f^2 = f$, so ist $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$, und es gilt $\operatorname{im} f = V_1(f)$ und $\ker f = V_0(f)$.
2. Ist $f^2 = \mathrm{id}_V$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten 1 und -1.
3. Sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ und $(f-\lambda)(f-\mu) = 0$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten λ und μ. Inwiefern sind die vorherigen beiden Aufgabenteile Sonderfälle hiervon?

Übung 2.
Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen allgemein gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

1. Ist $V = V_1 \oplus V_2$ für Untervektorräume $V_1, V_2 \subseteq V$, so gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Zerlegung
$$U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2).$$
2. Ist $V = U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$ mit $W_1 \supseteq W_2$, so ist
$$W_1 = (U_2 \cap W_1) \oplus W_2.$$
3. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarinter Untervektorraum, so gibt es einen f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.
4. Für alle Untervektorräume $W, U_1, U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt
$$(U_1 + W) \cap U_2 = U_1 + (W \cap U_2).$$
5. Ist $\mathcal{E} \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist die Einschränkung $\mathcal{E}' \coloneqq \mathcal{E} \cap U$ ein Erzeugendensystem von U.
6. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Famlie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$ mit $V = \sum_{i \in I} U_i$ und $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$, so ist $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

Übung 3.
Es sei V ein Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von f-invarianten Untervektorräumen, und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:

1. Auch der Schnitt $\bigcap_{i\in I} U_i$ ist f-invariant.
2. Auch die Summe $\sum_{i\in i} U_i$ ist f-invariant.
3. f induziert eine lineare Abbildung
$$\bar{f}\colon V/U \to V/U, \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

Übung 4.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. f ist diagonalisierbar.
2. Für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt es einen f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

Übung 5.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $\pi\colon V \to V/U$, $v \mapsto [v]$ die kanonische Projektion.

1. Es sei $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, und für eine Teilmenge $J \subseteq I$ sei $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von U. Zeigen Sie, dass $([b_i])_{i\in I\smallsetminus J}$ eine Basis von V/U ist.
2. Es sei $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von U und $(c_j)_{j\in J}$ eine Basis von V/U, wobei $I \cap J = \emptyset$. Für $j \in J$ sei $b_j \in V$ mit $\pi(b_j) = c_j$. Zeigen Sie, dass $(b_l)_{l\in L}$ für $L := I \cap J$ ist eine Basis von V ist.

Übung 6.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie, dass genau dann $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$, wenn $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i\in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$.

Übung 7.
Es seien V und W zwei reelle Vektorräume, und $f\colon V \to W$ sei $\mathbb{R}$-linear.

1. Zeigen Sie, dass $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$.
2. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass $(V_{\mathbb{C}})_\lambda(f_{\mathbb{C}}) = V_\lambda(f)_{\mathbb{C}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\operatorname{im} f)_{\mathbb{C}}$.
5. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übung 8.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $f: V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

Übung 9.
Es sei

$$\iota: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}[X], \quad \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

die Teilmengeninklusion.

1. Zeigen Sie, dass ι $\mathbb{R}$-linear ist.
2. Zeigen Sie, dass ι einen Isomorphismus $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}[X]$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen induziert.

Übung 10.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f: V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V: V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*: W^* \to V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* $\mathbb{R}$-linear ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ $\mathbb{R}$-linear ist, und dass

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

4. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für denn fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn also V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

Übung 11.
Es sei $V := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Ferner sei $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.
2. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) g(t) \, \mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

3. Zeigen Sie, dass $U^\perp = 0$. Folgern Sie, dass $V \neq U \oplus U^\perp$. (*Hinweis*: Betrachten Sie für $g \in U^\perp$ die Funktion $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = t^2 g(t)$.)
4. Zeigen Sie ferner, dass $V/(U \oplus U^\perp)$ eindimensional ist.

Übung 12.

Es sei

$$W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Ferner sei

$$V := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in W \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

der Untervektorraum der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von W ist.
2. Zeigen Sie für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$, dass

   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$

   (*Hinweis:* Zeigen sie zunächst, dass $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.)
3. Zeigen sie, dass

   $$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$$

   ein Skalarprodukt auf V definiert.
4. Es sei

   $$R\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

   der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.
5. Zeigen Sie, dass R keine Eigenwerte besitzt.
6. Es sei

   $$S\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

   Zeigen Sie, dass S ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.
7. Zeigen Sie, dass S diagonalisierbar ist.
8. Es sei

   $$U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

   Bestimmen Sie $U^\perp$ und entscheiden Sie, ob $V = U \oplus U^\perp$.
9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Übung 13.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma(A,B) := \operatorname{tr}\left(A^T B\right) \quad \text{für alle } A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

   ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \le i,j,k,l \le n$$

   eine Orthonormalbasis von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezüglich σ bilden.

3. Es sei

$$S_+ := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

   der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$S_- := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

   der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

   und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 14.
Es sei V ein Skalarproduktraum und

$$O(V) := \{f \in \operatorname{End}(V) \mid ff^* = \mathrm{id}\}.$$

Zeigen Sie, dass $O(V)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

Übung 15.
Zeigen sie, dass für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
2. $AA^* = I$.
3. $A^*A = I$.
4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.
5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.

Übung 16.
Für je zwei K-Vektorräume V und W sei

$$\operatorname{Bil}(V,W) := \{b\colon V \times W \to K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen $V \times W \to K$.

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

$$F\colon \operatorname{Bil}(V,W) \to \operatorname{Bil}(W,V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w,v) = b(v,w)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

2. Es sei $b \in \operatorname{Bil}(V,W)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass b ein lineare Abbildung

$$\Phi_{V,W}(b)\colon V \to W^*, \quad v \mapsto b(v,-)$$

induziert. Dabei ist

$$b(v,-)\colon W \to K, \quad w \mapsto b(v,w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{V,W}\colon \operatorname{Bil}(V,W) \to \operatorname{Hom}(V,W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus $\operatorname{Hom}(V,W^*) \to \operatorname{Hom}(W,V^*)$ an.

Wir betrachten nun den Fall $W = V^*$.

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e\colon V \times V^* \to K, \quad (v,\varphi) \mapsto \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform e einer linearen Abbildung $V \to V^{**}$, sowie einer linearen Abbildung $V^* \to V^*$. Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

Übung 17.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an, und zeigen sie ihre Linearität.

2. Zeigen Sie für jeden K-Vektorraum U, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon U \times U^* \to K \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v) \quad \text{für alle } v \in V, \varphi \in V^*$$

eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

Übung 18.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma\colon\ \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) \coloneqq \mathrm{tr}(AB)$$

   eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Zeigen Sie, dass σ in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in \mathrm{M}_n(K).$$