

# Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

13. Juni 2016

## Übung 1.

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von Untervektorräumen  $U_i \subseteq V$ . Zeigen Sie, dass genau dann  $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$ , wenn  $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$ .

## Übung 2.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei reelle Vektorräume, und  $f: V \rightarrow W$  sei  $\mathbb{R}$ -linear.

1. Zeigen Sie, dass  $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$ .
2. Folgern Sie, dass  $f_{\mathbb{C}}$  genau dann injektiv ist, wenn  $f$  injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass  $(V_{\mathbb{C}})_{\lambda}(f_{\mathbb{C}}) = V_{\lambda}(f)_{\mathbb{C}}$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
4. Zeigen Sie, dass  $\operatorname{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\operatorname{im} f)_{\mathbb{C}}$ .
5. Folgern Sie, dass  $f_{\mathbb{C}}$  genau dann surjektiv ist, wenn  $f$  surjektiv ist.

## Übung 3.

Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann diagonalisierbar ist, wenn  $f_{\mathbb{C}}$  diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

## Übung 4.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei  $f: V \rightarrow W$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  an. Zeigen Sie, dass  $f^*$   $\mathbb{R}$ -linear ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$   $\mathbb{R}$ -linear ist, und dass

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

4. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate, wenn  $V$  und  $W$  unitäre Vektorräume sind?

### Übung 5.

Es sei  $V := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  der Raum der stetigen Funktionen  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ferner sei  $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ .

1. Zeigen Sie, dass  $U$  ein Untervektorraum von  $V$  ist.
2. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t) dt \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

3. Zeigen Sie, dass  $U^\perp = 0$ . Folgern Sie, dass  $V \neq U \oplus U^\perp$ . (Hinweis: Betrachten Sie für  $g \in U^\perp$  die Funktion  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(t) = t^2 g(t)$ .)
4. Zeigen Sie ferner, dass  $V/(U \oplus U^\perp)$  eindimensional ist.

### Übung 6.

Es sei

$$W = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Ferner sei

$$V := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in W \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

der Untervektorraum der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass  $V$  ein Untervektorraum von  $W$  ist.
2. Zeigen Sie für alle  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$ , dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$

(Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass  $ab \leq (a^2 + b^2)/2$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .)

3. Zeigen sie, dass

$$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

4. Es sei

$$R: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass  $R$  ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob  $R$  selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.

5. Zeigen Sie, dass  $R$  keine Eigenwerte besitzt.
6. Es sei

$$S: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, dass  $S$  ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob  $R$  selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.

7. Zeigen Sie, dass  $S$  diagonalisierbar ist.

8. Es sei

$$U := \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Bestimmen Sie  $U^\perp$  und entscheiden Sie, ob  $V = U \oplus U^\perp$ .

9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $U$ .

### Übung 7.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma(A, B) := \operatorname{tr}(A^T B) \quad \text{für alle } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

ein Skalarprodukt auf  $M_n(\mathbb{R})$  definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis  $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  von  $M_n(\mathbb{R})$  mit

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k, l \leq n$$

eine Orthonormalbasis von  $M_n(\mathbb{R})$  bezüglich  $\sigma$  bilden.

3. Es sei

$$S_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$S_- := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$M_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

und dass die Summe orthogonal ist.

### Übung 8.

Für je zwei  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  sei

$$\operatorname{Bil}(V, W) := \{b: V \times W \rightarrow K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen  $V \times W \rightarrow K$ .

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

$$F: \operatorname{Bil}(V, W) \rightarrow \operatorname{Bil}(W, V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w, v) = b(v, w)$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.

2. Es sei  $b \in \operatorname{Bil}(V, W)$  eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass  $b$  eine lineare Abbildung

$$\Phi_{V,W}(b): V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto b(v, -)$$

induziert. Dabei ist

$$b(v, -): W \rightarrow K, \quad w \mapsto b(v, w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{V,W}: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus  $\text{Hom}(V, W^*) \rightarrow \text{Hom}(W, V^*)$  an.

Wir betrachten nun den Fall  $W = V^*$ .

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e: V \times V^* \rightarrow K, \quad (v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform  $e$  einer linearen Abbildung  $V \rightarrow V^{**}$ , sowie einer linearen Abbildung  $V^* \rightarrow V^*$ . Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

### Übung 9.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  an, und zeigen sie ihre Linearität.
2. Zeigen Sie für jeden  $K$ -Vektorraum  $U$ , dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: U \times U^* \rightarrow K, \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

### Übung 10.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma: M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) := \text{tr}(AB)$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Zeigen Sie, dass  $\sigma$  in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in M_n(K).$$