Lösung zu Zettel 10, Aufgabe 1

Jendrik Stelzner

10. Juli 2016

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit $n \coloneqq \dim V$. Für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ sei

$$P(v_1, \dots, v_n) \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \,\middle|\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] \right\}$$

Wir zeigen, dass es genau eine Funktion $\mathrm{Vol}\colon V^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, die alle der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\sigma \in S_n$ ist $\mathrm{Vol}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n)$, d.h. Vol ist permutationsinvariant.
2. Für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\lambda \in [0, \infty)$ ist
$$\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n) = \lambda \, \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n).$$
3. Ist $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$ eine Orthonormalbasis, so ist $\mathrm{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$.
4. Es seien $v_1, \dots, v_n, v_n' \in V$ und $X \coloneqq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{n-1})$. Wenn es für jedes $y \in X^\perp$ mit $y \neq 0$ ein $x \in X$ mit
$$P(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) \cap (X + y) = [P(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n') \cap (X + y)] + x$$
gibt, so ist $\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n')$.

Bemerkung 1. Die letzte Bedingung wurde ich Vergleich zu der Version auf dem Aufgabenzettel dahingehend geändert, dass die angegebene Bedingung nur für $y \neq 0$ erfüllbar seien muss.

Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Hierfür sei Vol eine entsprechende Abbildung.

Proposition 2. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und es sei $X \coloneqq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{n-1})$. Es sei $v_n = x' + y'$ die eindeutige Zerlegung mit $x' \in X$ und $y' \in X^\perp$. Dann ist*

$$\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_{n-1}, y').$$

Beweis. Es sei $X \coloneqq \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Wir zeigen, dass es für alle $y \in X^\perp$ mit $y \neq 0$ ein $x \in X$ gibt, so dass

$$P(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) \cap (X + y) = [P(v_1, \ldots, v_{n-1}, y') \cap (X + y)] + x$$

Hierfür betrachten wir $E \coloneqq P(v_1, \ldots, v_{n-1}) \subseteq X$ und bemerken, dass

$$\begin{aligned} P(v_1, \ldots, v_{n-1}, y') &= \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + \lambda y' \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda \in [0,1] \right\} \\ &= \{e + \lambda y' \mid e \in E, \lambda \in [0,1]\} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (E + \lambda y'), \end{aligned}$$

und analog

$$P(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (E + \lambda v_n) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (E + \lambda x' + \lambda y')$$

Zudem nutzen wir im Folgenden die folgende Behauptung:

Behauptung. Es seien $y_1, y_2 \in X^\perp$. Dann ist genau dann $(X + y_1) \cap (X + y_2) \neq \emptyset$, wenn $y_1 = y_2$. Dann gilt bereits $X + y_1 = X + y_2$.

Beweis. Aus Lineare Algebra I ist bekannt, dass die beiden zu X affinen Unterräume $X + y_1$ und $X + y_2$ entweder disjunkt oder gleich sind, und das Gleichheit genau dann eintritt, wenn $y_1 - y_2 \in X$. Da $y_1 - y_2 \in X^\perp$ ist dies genau dann erfüllt, wenn $y_1 - y_2 = 0$, wenn also $y_1 = y_2$. □

Wir unterscheiden im Folgenden zwischen den beiden Fällen $y' = 0$ und $y' \neq 0$.

Angenommen, es ist $y' = 0$, und es sei $y \in X^\times$ mit $y \neq 0$. Da $y' = 0$ ist

$$P(v_1, \ldots, v_{n-1}, y') = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (E + \lambda y') = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} E = E \subseteq X.$$

Da $y \neq 0$ ist $y \notin X$ (denn sonst wäre $y \in X \cap X^\perp = 0$). Nach der Behauptung ist deshalb $X \cap (X + y) = (X + 0) \cap (X + y) = \emptyset$. Daher ist

$$P(v_1, \ldots, v_{n-1}, y') \cap (X + y) \subseteq X \cap (X + y) = \emptyset.$$

Also ist $P(v_1, \ldots, v_{n-1}, y') \cap (X + y) = \emptyset$. Analog ergibt sich wegen

$$P(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \underbrace{(E + \lambda x')}_{\subseteq X} \subseteq X,$$

dass auch $P(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) \cap (X + y) = \emptyset$. Im Falle von $y' = 0$ stimmen die beiden Schnitte also für alle $y \in X^\perp$ mit $y \neq 0$ überein. (Für $y = 0$ gilt diese Gleichheit im allgemeinen nicht.) In diesem Fall lässt sich also x beliebig wählen.

Nun betrachten wir den Fall $y' \neq 0$. Es sei $y \in X^\times$. Es ist

$$P(v_1, \ldots, v_n, y') \cap (X + y) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (E + \lambda y') \cap (X + y)$$

Da $E + \lambda y' \subseteq X + \lambda y'$ folgt aus der Behauptung, dass $(E + \lambda y') \cap (X + y) = \emptyset$, falls $\lambda y' \neq y$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Andernfalls gibt es wegen $y' \neq 0$ genau ein $\lambda \in [0, 1]$ mit $y' = \lambda y$, weshalb in diesem Fall $(E + \lambda y') \cap (X + y) = E + y'$. Also ist

$$P(v_1, \ldots, v_n, y') \cap (X + y) = \begin{cases} E + y' & \text{falls } y = \lambda y' \text{ für ein } \lambda \in [0, 1], \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog ergibt sich, dass

$$P(v_1, \ldots, v_n, y') \cap (X + y) = \begin{cases} E + y' + \lambda x' & \text{falls } y = \lambda y' \text{ für ein } \lambda \in [0, 1], \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir können im ersten Fall $x = \lambda x'$ wählen, und im zweiten Fall lässt sich x beliebig wählen. □

Korollar 3. *Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und es sei $1 \leq i \leq n$. Es sei $X \coloneqq \mathcal{L}(v_j \mid j \neq i)$ und $v_i = x' + y'$ mit $x' \in X$ und $y' \in X^\perp$. Dann ist*

$$\mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_{i-1}, y', v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition 2 mithilfe der Permutationsinvarianz von Vol. □

Mithilfe des Korollars ergibt sich die Eindeutigkeit nun wie folgt: Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Induktiv definieren wir $y_1, \ldots, y_n \in V$, so dass

- die Menge $\{y_1, \ldots, y_n\}$ orthogonal ist, und
- für alle $i = 1, \ldots, n$ ist $\mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$.

Dabei beginnen wir mit $X_1 \coloneqq \mathcal{L}(v_2, \ldots, v_n)$ und zerlegen $v_1 = x_1 + y_1$ mit $x_1 \in X_1$ und $y_1 \in X_1^\perp$. Nach Korollar 3 ist dann $\mathrm{Vol}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \mathrm{Vol}(y_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Sind $y_1, \ldots, y_i \in V$ für $1 \leq i < n$ mit den obigen Eigenschaften bereits definiert, so setzen wir $X_{i+1} \coloneqq \mathcal{L}(y_1, \ldots, y_i, v_{i+2}, \ldots, v_n)$ und zerlegen $v_{i+1} = x_{i+1} + y_{i+1}$ mit $x_{i+1} \in X_{i+1}$ und $y_{i+1} \in X_{i+1}^\perp$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_n) &= \mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n) \\ &= \mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_i, y_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun, dass $\mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_n)$, wobei $y_1, \ldots, y_n$ orthogonal und unabhängig von Vol sind. Um zu zeigen, dass $\mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_n)$ durch die obigen

Bedingungen von Vol eindeutig bestimmt sind, genügt es deshalb, dies für $\mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_n)$ zu zeigen. Ist $y_i = 0$ für ein $i = 1, \ldots, n$, so ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \ldots, y_n) &= \mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0 \cdot 0, y_{i+1}, \ldots, y_n) \\ &= 0 \cdot \mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \ldots, y_n) = 0. \end{aligned}$$

Ansonsten ist $\{y_1/\|y_1\|, \ldots, y_n/\|y_n\|\} \subseteq V$ orthonormal, und somit

$$\mathrm{Vol}(y_1, \ldots, y_n) = \|y_1\| \cdots \|y_n\| \,\mathrm{Vol}\left(\frac{y_1}{\|y_1\|}, \ldots, \frac{y_n}{\|y_n\|}\right) = \|y_1\| \cdots \|y_n\|.$$