Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

1. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Skalarprodukträume

Übung 1.
Definieren Sie die Begriffe eines reellen, bzw. komplexen Skalarprodukts, sowie eines reellen, bzw. komplexen Hilbertraums.

Übung 2.
Formulieren und Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Übung 3.
Es seien V und W zwei Skalarprodukträume über $\mathbb{K}$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Definieren Sie die zu f adjungierte Abbildung.
2. Zeigen Sie, dass die adjungierte Abbildung eindeutig ist.

Übung 4.
Es sei V ein Skalarproduktraum. Zeigen Sie für Endomorphismen $f, g_1, g_2\colon V \to V$ Endomorphismen die folgende Kürzungsregel: Falls f^* existiert und $f^* f g_1 = f^* f g_2$, dann ist bereits $f g_1 = f g_2$.

Übung 5.
Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale Skalarproduktraum eine Orthonormalbasis besitzt.

Übung 6.
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit abzählbarer Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Es sei $T\colon V \to V$ die eindeutige lineare Abbildung mit $T(e_i) = e_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass T kein Adjungiertes besitzt.

Übung 7.
Es sei V ein Skalarproduktraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien paarweise orthogonal zueinander. Zeigen Sie: Ist $v_1, \ldots, v_n \neq 0$, so ist die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig.

Übung 8.
Es sei V ein Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die Eigenräume $V_\lambda(f)$ und $V_\mu(f)$ für alle $\lambda \neq \mu$ orthogonal sind.

Übung 9.
Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Skalarprodukträume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ eine Orthonormalbasis von W. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^*.$$

Übung 10.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$ für alle $v \in V$.
2. Zeigen Sie, dass $V_\lambda(f) = V_{\overline{\lambda}}(f^*)$ und $V_\lambda^\sim(f) = V_{\overline{\lambda}}^\sim(f^*)$.

Übung 11.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ seien Einheitsvektoren. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussage äquivalent sind:

1. $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Orthonormalbasis von V.
2. Für alle $v \in V$ ist $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Übung 12.
Es sei V ein Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $f = 0$.

Übung 13.
Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und $P_\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige lineare Abbildung mit

$$P_\pi(e_i) = e_{\pi(i)} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

wobei $(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.

1. Zeigen Sie, dass P_π orthogonal ist.
2. Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte von P_π.
3. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem alle möglichen Eigenwerte auftreten.

Übung 14.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_n)$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$P\colon V \to V, \quad v \mapsto \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$$

die orthogonale Projektion auf U ist.

Übung 15.
Es sei $V \neq 0$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ sei

$$\langle x, y \rangle_\lambda \coloneqq \lambda \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{K}$, für die $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ ein Skalarprodukt auf V ist.

Übung 16.
Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann unitär, wenn alle Eigenwerte von f Betrag 1 haben.
2. f ist genau dann selbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von f reell sind.
3. f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von f rein imaginär sind.
4. f ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von f sind.

Übung 17.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktsraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $\ker f^* \subseteq (\operatorname{im} f)^\perp$.
2. Folgern Sie daraus, dass $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$.
3. Folgern Sie aus den beiden Inklusionen $\ker f^* \subseteq (\operatorname{im} f)^\perp$ und $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$ mithilfe der Endlichdimensionalität von V, dass bereits Gleichheiten gelten, dass also

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

Von nun an sei f normal.

4. Zeigen Sie, dass $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ für alle $x \in V$.
5. Folgern Sie, dass $\ker f = \ker f^*$.
6. Folgern Sie damit aus den obigen Gleichheiten, dass $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$ gilt, und dass die Summe orthogonal ist.

   (*Hinweis*: Zeigen Sie zuerst, dass $\operatorname{im} f$ und $\ker f$ orthogonal sind, und nutzen Sie dann die Endlichdimensionalität von V.)

Übung 18.
1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

   eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(3)$, so dass $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.

2. Bestimmen Sie für die symmetrische Bilinearform $\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := x_1 y_2 + x_2 y_1 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass β bezüglich $\mathcal{B}$ durch eine Diagonalmatrix mit möglichen Diagonaleinträgen $0, 1, -1$ dargestellt wird.

Übung 19.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f\colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\Phi_V : V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$
ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.
2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* $\mathbb{R}$-linear ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ $\mathbb{R}$-linear ist, und dass
$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$
4. Zeigen Sie: Eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die Basis $\Phi_V(\mathcal{B}) = (\Phi_V(v_1), \ldots, \Phi_V(v_n))$ von V^* die duale Basis $\mathcal{B}^*$ ist.
5. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für denn Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn also V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

Übung 20.
Es sei V ein endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie für denn Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn es ein Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen f selbstadjungiert ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie die analoge Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Übung 21.
Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Spaltenvektor und
$$A := xx^T \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}).$$
Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto Ay$$
die orthogonale Projektion auf die Gerade $\mathbb{R}x$ ist.

Übung 22.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ sei

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement von U, und

$$U^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

der Annihilator von U. Es sei $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es sei $f^* \colon W \to V$ die zu f adjungierte Abbildung, und

$$f^T \colon W^* \to V^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

die zu f duale Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V \colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle$$

   ein Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Gleichheit $\Phi_V(U^\perp) = U^\circ$ gilt.

3. Zeigen Sie, dass $f^T \circ \Phi_W = \Phi_V \circ f^*$, dass also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\Phi_V"'] & W \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "f^T"] \end{tikzcd}$$

   Folgern Sie, dass $f^* = \Phi_V^{-1} \circ f^T \circ \Phi_W$.

In Lineare Algebra I wurde gezeigt, dass

$$\ker f^T = (\operatorname{im} f)^\circ \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^T = (\ker f)^\circ,$$

und dass für je zwei Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ die Gleichheiten

$$(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ \quad \text{und} \quad (U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$$

gelten.

4. Folgern Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen und den Aussagen aus Lineare Algebra I für alle Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ die Gleichheiten

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp \quad \text{und} \quad (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

   (*Hinweis*: Nutzen Sie, dass Φ_V ein Isomorphismus ist.)

5. Folgern Sie aus den vorherigen Aufgabenteilen und den Aussagen aus Lineare Algebra I, dass

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

   (*Hinweis*: Nutzen Sie, dass Φ_V und Φ_W Isomorphismen sind.)

Übung 23.
Es sei $V := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$, und es sei

$$U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.
2. Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.
3. Zeigen Sie, dass $U^\perp = 0$. Folgern Sie, dass $V \neq U \oplus U^\perp$.
(*Hinweis*: Betrachten Sie für $g \in U^\perp$ die Funktion $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = t^2 g(t)$.)
4. Zeigen Sie ferner, dass V/U eindimensional ist.

Übung 24.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein selbstadjungierter, orthogonaler Endomorphismus mit nur positiven Eigenwerten. Zeigen Sie, dass bereits $f = \mathrm{id}_V$ gilt.

Übung 25.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle$$
ein Isomorphismus ist.
2. Zeigen Sie: Eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn
$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i)\langle -, v_i\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in V^*.$$

Es sei nun V der Vektorraum der Polynomsfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $\varphi_a \in V^*$ durch $\varphi_a(f) = f(a)$ definiert.

3. Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.
4. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.
5. Zeigen Sie, dass es für alle $a \in \mathbb{R}$ ein eindeutiges $g_a \in V$ gibt, so dass
$$f(a) = \int_{-1}^1 f(t)g_a(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f \in V.$$
6. Bestimmen Sie g_a für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

Übung 26.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen sich implizieren.

1. f ist selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten.
2. f ist orthogonal, und alle Eigenwerte von f sind positiv.
3. f ist normal mit $\det f > 0$.
4. Es gibt einen selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$.
5. f ist selbstadjungiert und orthogonal.

Übung 27.
Es sei V der reelle Vektorraum der Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n \subseteq V$ der Untervektorraum der Polynomfunktionen von Grad $\leq n$.

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.
2. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\psi\colon V \to V$ mit
$$\psi(f)(t) := (t^2 - 1)f''(t) + 2tf'(t) \quad \text{für alle } f \in V \text{ und } t \in \mathbb{R}$$
selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

Es sei $\mathcal{G} := (p_n)_{n \geq 0}$ die Orthonormalbasis von V, die durch Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Standardbasis $\mathcal{B} := (x^n)_{n \geq 0}$ ensteht.

3. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass V_n invariant unter ψ ist.
4. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass $\mathcal{G}_n := (p_0, \dots, p_n)$ eine Basis von V_n ist.
5. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_n}(\psi|_{V_n})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Betrachten Sie hierfür die Filtration
$$0 \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots \subseteq V_n,$$
und nutzen Sie, dass $V_i = \mathcal{L}(\mathcal{G}_i)$ invariant unter ψ ist.
6. Folgen Sie mithilfe der Selbstadjungiertheit von ψ, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_n}(\psi|_{V_n})$ für alle $n \geq 0$ bereits eine Diagonalmatrix ist. Folgern Sie, dass $\mathcal{G}$ eine Basis aus Eigenvektoren von ψ ist.
7. Bestimmen Sie für alle $n \geq 0$ die Eigenwerte der Einschränkung $\psi|_{V_n}$, indem Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{B}_n = (1, x, \dots, x^n)$ von V_n bestimmen.
8. Geben Sie den zu p_n gehörigen Eigenwert von ψ an.
9. Berechnen Sie $\mathcal{G}_4$.

Übung 28.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Es gilt $\exp(f)^* = \exp(f^*)$.
2. Ist f normal, so ist auch f^* normal.
3. Ist f selbstadjungiert, so ist auch $\exp(f)$ selbstadjungiert.
4. Ist f antiselbstadjungiert, so ist $\exp(f)$ orthogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bzw. unitär ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Übung 29.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

1. Es gibt genau dann einen normalen Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f normal und invertierbar ist.
2. Es gibt genau dann einen antiselbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f unitär ist.
3. Es gibt genau dann einen selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f selbstadjungiert mit positiven Eigenwerten ist.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

4. Es gibt genau dann einen normalen Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f normal und invertierbar ist, und alle (reellen) Eigenwerte von g gerade Vielfachheit haben.
5. Es gibt genau dann einen antiselbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f orthogonal ist und alle negativen (reellen) Eigenwerte von f gerade Vielfachheit haben.
6. Es gibt genau dann einen selbstadjungierten Endomorphismus $g\colon V \to V$ mit $f = \exp(g)$, wenn f selbstadjungiert mit positiven (reellen) Eigenwerten ist.

Übung 30.
Es sei

$$W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Wir betrachten den Untervektorraum

$$V := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in W \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von W ist.
2. Zeigen Sie für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$

(*Hinweis*: Zeigen sie zunächst, dass $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.)

3. Zeigen sie, dass

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$$

   ein Skalarprodukt auf V definiert.

4. Es sei

$$R\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

   der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.

5. Zeigen Sie, dass R keine Eigenwerte besitzt.

6. Es sei

$$S\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

   Zeigen Sie, dass S ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.

7. Zeigen Sie, dass S diagonalisierbar ist.

8. Es sei

$$U \coloneqq \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

   Bestimmen Sie $U^\perp$ und entscheiden Sie, ob $V = U \oplus U^\perp$.

9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Übung 31.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma(A, B) \coloneqq \operatorname{tr}\left(A^T B\right) \quad \text{für alle } A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

   ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit

$$(E_{ij})_{kl} \coloneqq \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k, l \leq n$$

   eine Orthonormalbasis von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezüglich σ bilden.

3. Es sei

$$S_+ \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

   der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$S_- \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

   der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

   und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 32.
Es sei V ein Skalarproduktraum und

$$\mathrm{O}(V) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid ff^* = \mathrm{id}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(V)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

Übung 33.
Zeigen sie, dass für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
2. $AA^* = I$.
3. $A^*A = I$.
4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.
5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.

Übung 34.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Zeigen Sie, dass es eindeutige hermitsche Matrizen $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B + iC$ gibt.
2. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn B und C kommutieren.

Übung 35.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und es sei $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ eine endliche Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle x, y \rangle_G \coloneqq \frac{1}{|G|} \sum_{\phi \in G} \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V$$
ein Skalarprodukt auf G definiert.
2. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ in dem Sinne G-invariant ist, dass
$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V \text{ und } \phi \in G.$$
3. Folgern Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ für alle $\phi \in G$ eine orthogonale Matrix ist.
4. Folgern Sie damit, dass es für $n = \dim V$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi \colon G \to \mathrm{O}(n)$ gibt, G also isomorph zu der Untergruppe im Φ von $\mathrm{O}(n)$ ist.

Übung 36.
Es seien F und G zwei selbstadjungierte Endomorphismen eines Skalarproduktraums V. Zeigen Sie, dass $F \circ G$ genau dann selbstadjungierti ist, wenn F und G kommutieren.

Übung 37.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Für jedes $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$ sei

$$s_\alpha \colon V \to V, \quad \text{mit} \quad s_\alpha(x) := x - 2\frac{\langle x, \alpha\rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha.$$

Ferner seien

$$L_\alpha := \mathbb{R}\alpha \quad \text{und} \quad H_\alpha := L_\alpha^\perp = \alpha^\perp = \{v \in V \mid \langle v, \alpha\rangle = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $s_\alpha^2 = \mathrm{id}_V$, und dass $s_{\lambda\alpha} = s_\alpha$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^\times$.
2. Zeigen Sie, dass s_α diagonalisierbar ist, und dass

$$V_{-1}(s_\alpha) = L_\alpha \quad \text{und} \quad V_1(s_\alpha) = H_\alpha.$$

3. Interpretieren Sie V geometrisch anschaulich.
4. Es sei $s' \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $s'(\alpha) = -\alpha$ und $s'(x) = x$ für alle $x \in H_\alpha$. Zeigen Sie, dass bereits $s' = s_\alpha$ gilt.
5. Es sei $t \colon V \to V$ ein orthogonaler Isomorphismus. Zeigen Sie die Gleichheit

$$t s_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}.$$

Übung 38.
Es seien V und W euklidische Vektorräume, und $f \colon V \to V$ eine surjektive Funktion (!) mit

$$\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

Übung 39.
Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $S \colon V \to V$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. S ist normal.
2. V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von S.
3. Für jeden S-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch das orthogonale Komplement $U^\perp$ invariant unter S.

Übung 40.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$. Es sei

$$S := \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f^* = f\}$$

der Untervektorraum der selbstadjungierten Endomorphismen und

$$A := \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f^* = -f\}$$

der Untervektorraum der antiselbstadjungierten Endomorphismen.

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g\rangle := \operatorname{tr}(f \circ g^*)$$
ein Skalarprodukt auf $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ definiert.

2. Folgern Sie, dass
$$|\operatorname{tr}(fg^*)|^2 \leq \operatorname{tr}(ff^*)\operatorname{tr}(gg^*) \quad \text{für alle } f, g \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V).$$

3. Zeigen Sie, dass $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) = S \oplus A$, und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 41.
Es sei $\det\colon \ \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ die Determinantenabbildung, wobei $\mathbb{C}^\times$ die multiplikative Gruppe des Körpers bezeichnet.

1. Zeigen Sie, dass det ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.
2. Bestimmen Sie den Kern von det.
3. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$.
4. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{\mathrm{U}_n}$.
5. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{\mathrm{O}_n}$.

Übung 42.
Es sei
$$\Phi\colon \ \mathrm{SU}(2) \to S^3, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$
die Abbildung auf die erste Spalte, wobei
$$S^3 := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert ist.
2. Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist.

Übung 43.
Zeigen Sie, dass die drei Gruppen $\mathrm{SO}(2)$, S^1 und $\mathrm{U}(1)$ isomorph sind.

Übung 44.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum, und die Abbildung $P\colon V \to V$ sei orthogonal und eine Orthogonalprojektion. Bestimmen Sie P.

Übung 45.
Es sei $A \in \mathrm{U}(n)$. Zeigen Sie, dass $|\operatorname{tr} A| \leq n$. Wann gilt Gleichheit?

Übung 46.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ seien zwei geordnete Basen von V.

1. Die Basis $\mathcal{C}$ sei genau die Orthonormalbasis von V, die aus $\mathcal{B}$ durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens entstehen. Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ (von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$) eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen ist.

2. Zeigen oder widerlegen Sie die umgekehrte Aussage: Ist die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen, so ist $\mathcal{C}$ notwendigerweise die Orthonormalbasis von V, die durch das Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathcal{B}$ entsteht.

Übung 47.

1. Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden Punkte. Zeigen Sie, dass es für beliebige Werte $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ ein Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ mit $P(z_j) = w_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ gibt.

2. Es sei $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ mit $f^* = P(f)$ gibt.

   (*Hinweis*: f ist diagonalisierbar.)

Übung 48.
Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit $n := \dim V$.

1. Zeigen Sie, dass es für jede Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V genau ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}}$ auf V gibt, so dass $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}}$ ist.

2. Untersuchen Sie die Abbildung

   $$\{\text{Basen von } V\} \to \{\text{Skalarprodukte auf } V\}, \quad \mathcal{B} \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}}$$

   auf Injektivität und Surjektivität.