

# Alternative Lösungen

## Zettel 3

Jendrik Stelzner

17. Juni 2016

Wir geben alternative Lösungen für Aufgaben 3, Teile (v) und (vi) von Zettel 3. Dabei ersetzen wir explizite Rechnungen durch kommutative Diagramme.

### 1. Hilfsaussagen

Wir nennen hier explizit einige Aussagen die wir im Folgenden nutzen werden. Beweise werden bewusst nicht angegeben

**Lemma 1.** *Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f, g: V \rightarrow W$  linear. Ist  $E \subseteq V$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , so ist genau dann  $f = g$  wenn  $f(e) = g(e)$  für alle  $e \in E$ .*

**Korollar 2.** *Es sei*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

*ein Diagramm von  $K$ -Vektorräumen, d.h.  $X_1, X_2, Y_1$  und  $Y_2$  sind  $K$ -Vektorräume und  $f, g, s$  und  $t$  sind  $K$ -lineare Abbildungen. Ist  $E \subseteq X_1$  ein Erzeugendensystem von  $X_1$ , so kommutiert das obige Diagramm genau dann, wenn*

$$t(f(e)) = g(s(e)) \quad \text{für alle } e \in E.$$

*(Die Kommutativität von Diagrammen lässt sich also auf Erzeugendensystemen, insbesondere also auf Basen, nachrechnen.)*

**Definition 3.** *Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{C}$ -Vektorräume.*

1. *Eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  ( $\mathbb{C}$ -)antilinear, falls*

- a)  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$  für alle  $v_1, v_2 \in V$ , und
- b)  $f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $v \in V$ .

2. Sind  $f, g: V \rightarrow W$  jeweils  $\mathbb{C}$ -linear oder  $\mathbb{C}$ -antilinear, so sagen wir, dass  $f$  und  $g$  die gleiche Parität haben, wenn sie beide  $\mathbb{C}$ -linear oder beide  $\mathbb{C}$ -antilinear sind.

**Lemma 4.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{C}$ -Vektorräume und  $f, g: V \rightarrow W$  seien  $\mathbb{C}$ -antilinear. Ist  $E \subseteq V$  ein Erzeugendensystem, so ist genau dann  $f = g$ , wenn  $f(e) = g(e)$  für alle  $e \in E$ .

**Bemerkung 5.** Wenn  $f$  und  $g$  unterschiedliche Parität haben, so gilt die analoge Aussage nur für den trivialen Fall  $f = g = 0$ .

**Korollar 6.** Es sei

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

ein Diagramm, so dass  $X_1, X_2, Y_1$  und  $Y_2$  jeweils  $\mathbb{C}$ -Vektorräume sind, und  $f, g, s$  und  $t$  jeweils  $\mathbb{C}$ -linear oder  $\mathbb{C}$ -antilinear. Ist  $E \subseteq X_1$  ein Erzeugendensystem, so kommutiert das obige Diagramm genau dann, wenn

$$t(f(e)) = g(s(e)) \text{ für alle } e \in E, \text{ und } f \text{ und } g \text{ haben die gleiche Parität.}$$

**Lemma 7.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$ . Dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $\Phi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow K^n$  mit  $\Phi_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ , wobei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis des  $K^n$  bezeichnet. Außerdem ist  $\Phi_{\mathcal{B}}$  ein Isomorphismus.

**Lemma 8.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume. Es sei zum einen  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$  und zum anderen  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$  eine Basis von  $W$ . Ist  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so gilt:

1. Es gibt eine eindeutige Matrix  $A \in M(m \times n, K)$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}} \\ K^n & \xrightarrow{A \cdot} & K^m \end{array}$$

(Hier bezeichnet  $A \cdot$  die Multiplikation mit  $A$  von links.)

2. Es gilt  $A = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$ , d.h.  $A$  ist die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ .

## 2. Setup

Wir erinnern an Notationen und Ergebnisse auf vorherigen Aufgabenteilen, die wir im Folgenden nutzen werden.

Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und

$$\iota_V: V \rightarrow V_{\mathbb{C}}, \quad v \mapsto v + i \cdot 0$$

und

$$\iota_W: W \rightarrow W_{\mathbb{C}}, \quad w \mapsto w + i \cdot 0$$

die kanonischen Inklusionen. Es sind komplexe Konjugationen

$$V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}, \quad v_1 + iv_2 \mapsto v_1 - iv_2 \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

und

$$W_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}, \quad w_1 + iw_2 \mapsto w_1 - iw_2 \quad \text{für alle } w_1, w_2 \in W$$

gegeben. Diese Konjugationen sind  $\mathbb{C}$ -antilinear. Insbesondere sind sie  $\mathbb{R}$ -linear, für  $V \neq 0$ , bzw.  $W \neq 0$  aber nicht  $\mathbb{C}$ -linear.

Es sei  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $V$  und  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $W$ . Dann ist  $\iota_V(\mathcal{B})$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $V_{\mathbb{C}}$  und  $\iota_W(\mathcal{C})$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $W_{\mathbb{C}}$ . Die Basen  $\iota_V(\mathcal{B})$  und  $\iota_W(\mathcal{C})$  sind punktweise invariant unter der der Konjugation auf den jeweiligen Komplexifizierungen.

### 3. Alternative Lösung zu (v)

Es sei  $f: V \rightarrow W$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, und  $f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$  die induzierte  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Die Abbildung  $f_{\mathbb{C}}$  bringt also das folgende Diagramm von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen zum kommutieren, und ist eindeutig mit dieser Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \iota_V \downarrow & & \downarrow \iota_W \\ V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f_{\mathbb{C}}} & W_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Es sei  $A := M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f) \in M(m \times n, \mathbb{R})$  die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der  $\mathbb{R}$ -Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $\mathcal{C}$  von  $W$ . Es bringt also  $A$  das folgende Diagramm zum kommutieren, und ist die eindeutige  $(m \times n)$ -Matrix über  $\mathbb{R}$  mit dieser Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{R}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A \cdot} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Dabei bezeichnen  $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{R}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{R}}: W \rightarrow \mathbb{R}^m$  die eindeutigen  $\mathbb{R}$ -linearen Isomorphismen mit

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{R}}(b_j) = e_j \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n \quad \text{und} \quad \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{R}}(c_i) = e_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m.$$

Es gilt zu zeigen, dass  $A = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$ . Dies bedeutet gerade, dass das folgende Diagramm kommutieren soll:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f_{\mathbb{C}}} & W_{\mathbb{C}} \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A \cdot} & \mathbb{C}^m \end{array}$$

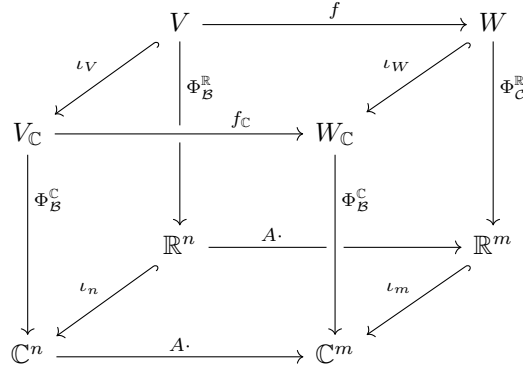
Dabei bezeichnen  $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^n$  und  $\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}: W \rightarrow \mathbb{C}^m$  die eindeutigen  $\mathbb{C}$ -linearen Isomorphismen mit

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}}(b_j + i \cdot 0) = e_j \text{ für alle } 1 \leq j \leq n$$

und

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}}(e_j + i \cdot 0) = e_j \text{ für alle } 1 \leq j \leq m.$$

Wir betrachten den folgenden Würfel:



Dabei bezeichnen  $\iota_k: \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^k, x \mapsto x$  für  $k \in \{n, m\}$  die kanonischen Inklusionen.

Wir wissen bereits, dass die Rückseite des Würfels kommutiert, und wollen zeigen, dass auch die Vorderseite kommutiert. Hierfür zeigen wir zunächst, dass die übrigen vier Seiten des Würfels kommutieren:

Der Deckel des Würfels kommutiert nach Definition von  $f_{\mathbb{C}}$ . Dass der Boden des Würfels kommutiert ist klar. Die linke Seite des Würfels ist das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & V_{\mathbb{C}} \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{R}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\iota_n} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Da alle Abbildungen in diesem Diagramm  $\mathbb{R}$ -linear sind, genügt es die Kommutativität des Diagramms auf einer  $\mathbb{R}$ -Basis von  $V$  nachzurechnen. Für die  $\mathbb{R}$ -Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ergibt sich, dass

$$\Phi^{\mathbb{C}}(\iota_V(b_j)) = \Phi^{\mathbb{C}}(b_j + i \cdot 0) = e_j = \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{R}}(b_j) = \iota_n(\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{R}}(b_j)) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n,$$

bzw. das folgende „kommutative Diagram von Elementen“:

$$\begin{array}{ccc} b_j & \xrightarrow{\iota_V} & b_j + i \cdot 0 \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{R}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \\ e_j & \xrightarrow{\iota_n} & e_j \end{array}$$

Also kommutiert die linke Seite des Würfels. Analog ergibt sich, dass auch die rechte Seite kommutiert.

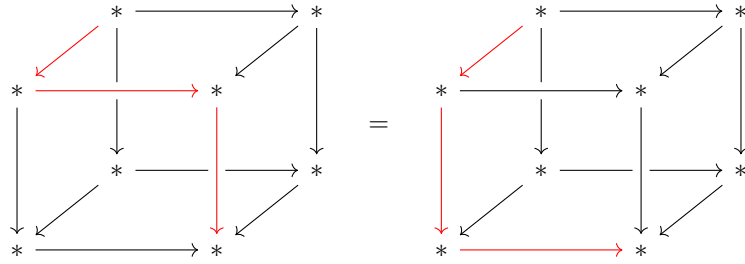
Wir können nun die Kommutativität der Vorderseite des Würfels aus der Kommutativität der anderen Seiten folgern: Hierfür bemerken wir zunächst, dass die beiden  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen

$$(A \cdot) \circ \Phi_B^{\mathbb{C}}, \Phi_C^{\mathbb{C}} \circ f_C: V_C \rightarrow \mathbb{C}^m$$

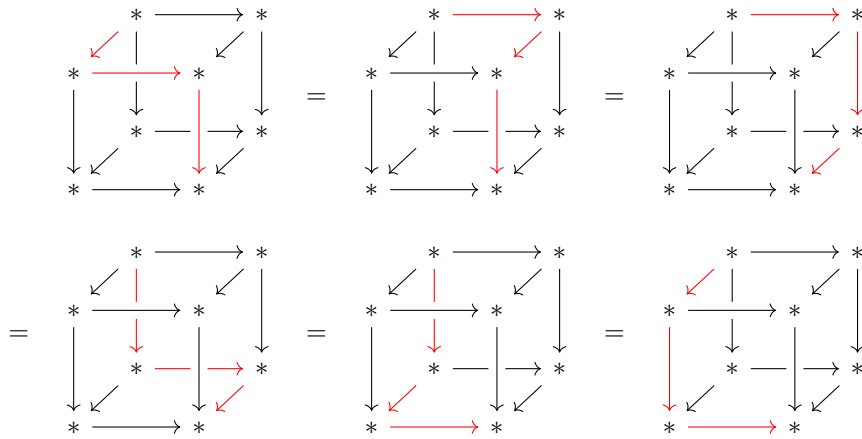
nach Aufgabenteil (iv) genau dann gleich sind, wenn die beiden  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen

$$(A \cdot) \circ \Phi_B^{\mathbb{C}} \circ \iota_V, \Phi_C^{\mathbb{C}} \circ f_C \circ \iota_V: V \rightarrow \mathbb{C}^m$$

übereinstimmen. Diese zu zeigende Gleichheit lässt sich mithilfe des Würfels sehr einfach ausdrücken:



(Wir lassen hier zur Übersichtlichkeit die Benennung der einzelnen Ecken und Kanten des Würfels weg.) Mithilfe dieser graphischen Notation und der Kommutativität der nicht-Vorderseiten lässt sich die obige Gleichheit zeigen, indem wir um den Würfel herumwackeln:



In Formeln besagt die obigen Gleichungskette, dass

$$\begin{aligned} \Phi_C^{\mathbb{C}} \circ f_C \circ \iota_V &= \Phi_C^{\mathbb{C}} \circ \iota_W \circ f &= \iota_m \circ \Phi_C^{\mathbb{R}} \circ f \\ &= \iota_m \circ (A \cdot) \circ \Phi_B^{\mathbb{R}} &= (A \cdot) \circ \iota_n \circ \Phi_B^{\mathbb{R}} &= (A \cdot) \circ \Phi_B^{\mathbb{C}} \circ \iota_V. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir also, dass auch Vorderseite des Würfels kommutiert. Insgesamt haben wir also einen kommutierenden Würfel.

## 4. Alternative Lösung für (vi)

Es sei  $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$  und  $f: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$  die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, die bezüglich der  $\mathbb{C}$ -Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  von  $V_{\mathbb{C}}$  und  $W_{\mathbb{C}}$  durch  $A$  beschrieben wird. Also bringt  $f_{\mathbb{C}}$  das folgende Diagramm zum kommutieren, und ist die eindeutige  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung mit dieser Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & W_{\mathbb{C}} \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A \cdot} & \mathbb{C}^m \end{array}$$

Es gilt zu zeigen, dass die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$g: V_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}, \quad x \mapsto \overline{f(\bar{x})}$$

bezüglich der  $\mathbb{C}$ -Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  von  $V_{\mathbb{C}}$  und  $W_{\mathbb{C}}$  durch die Matrix  $\bar{A}$  beschrieben wird. Es gilt also zu zeigen, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{g} & W_{\mathbb{C}} \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\bar{A} \cdot} & \mathbb{C}^m \end{array}$$

Wir betrachten hierfür den folgenden Würfel:

$$\begin{array}{ccccc} & & V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & W_{\mathbb{C}} \\ & \nearrow \bar{\phantom{x}} & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} \\ V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{g} & W_{\mathbb{C}} & & \\ \downarrow \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} & & \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A \cdot} & \mathbb{C}^m & & \\ & \nwarrow \bar{\phantom{x}} & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathbb{C}} & & \\ & & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\bar{A} \cdot} & \mathbb{C}^m \end{array}$$

Dabei bezeichnet  $\bar{\phantom{x}}$  die jeweilige Konjugationsabbildung. Wir wissen bereits, dass die Rückseite kommutiert, und möchten zeigen, dass auch die Vorderseite kommutiert. Wir zeigen zunächst, dass alle anderen Seiten kommutieren:

Der Deckel kommutiert nach Definition von  $g$ . Der Boden kommutiert, da

$$\overline{A \cdot \bar{x}} = \bar{A} \cdot \bar{\bar{x}} = \bar{A} \cdot x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C}^n.$$

Die linke Seite des Würfels ist das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\bar{\phantom{x}}} & V_{\mathbb{C}} \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\bar{\phantom{x}}} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Da alle auftretenden Abbildungen  $\mathbb{C}$ -linear oder -antilinear sind, lässt sich die Kommutativität des Diagramms auf einer  $\mathbb{C}$ -Basis von  $V_{\mathbb{C}}$  nachrechnen. Für die Basis  $\iota_V(\mathcal{B})$  von  $V_{\mathbb{C}}$  erhalten wir das folgende „kommutative Diagram von Elementen“:

$$\begin{array}{ccc} b_j + i \cdot 0 & \xrightarrow{\quad \overline{\quad} \quad} & b_j + i \cdot 0 \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}} \\ e_j & \xrightarrow{\quad \overline{\quad} \quad} & e_j \end{array}$$

In Formeln bedeutet dies, dass

$$\overline{\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}}(b_j + i \cdot 0)} = \overline{e_j} = e_j = \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}}(b_j + i \cdot 0) = \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{C}}(\overline{b_j + i \cdot 0}).$$

Damit wissen wir von allen Seiten des Würfels, bis auf die Vorderseite, dass sie kommutieren. Durch Herumwackeln um den Würfel folgt daraus, dass auch die Vorderseite kommutiert:

