

Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

18. Juni 2016

Übung 1.

Es sei V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Ist $f^2 = f$, so ist $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$, und es gilt $\operatorname{im} f = V_1(f)$ und $\ker f = V_0(f)$.
2. Ist $f^2 = \operatorname{id}_V$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten 1 und -1 .
3. Sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ und $(f - \lambda)(f - \mu) = 0$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten λ und μ . Inwiefern sind die vorherigen beiden Aufgabenteile Sonderfälle hiervon?

Übung 2.

Es sei V ein K -Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen allgemein gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

1. Ist $V = V_1 \oplus V_2$ für Untervektorräume $V_1, V_2 \subseteq V$, so gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Zerlegung

$$U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2).$$

2. Ist $V = U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$ mit $W_1 \supseteq W_2$, so ist

$$W_1 = (U_2 \cap W_1) \oplus W_2.$$

3. Ist $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f -invaranter Untervektorraum, so gibt es einen f -invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

4. Für alle Untervektorräume $W, U_1, U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt

$$(U_1 + W) \cap U_2 = U_1 + (W \cap U_2).$$

5. Ist $\mathcal{E} \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist die Einschränkung $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cap U$ ein Erzeugendensystem von U .

6. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$ mit $V = \sum_{i \in I} U_i$ und $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$, so ist $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

Übung 3.

Es sei V ein Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von f -invarianten Untervektorräumen, und $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:

1. Auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist f -invariant.
2. Auch die Summe $\sum_{i \in I} U_i$ ist f -invariant.
3. f induziert eine lineare Abbildung

$$\bar{f}: V/U \rightarrow V/U, \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

Übung 4.

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V . Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. f ist diagonalisierbar.
2. Für jeden f -invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt es einen f -invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

Übung 5.

Es sei V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $\pi: V \rightarrow V/U, v \mapsto [v]$ die kanonische Projektion.

1. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , und für eine Teilmenge $J \subseteq I$ sei $(b_j)_{j \in J}$ eine Basis von U . Zeigen Sie, dass $([b_i])_{i \in I \setminus J}$ eine Basis von V/U ist.
2. Es sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von U und $(c_j)_{j \in J}$ eine Basis von V/U , wobei $I \cap J = \emptyset$. Für $j \in J$ sei $b_j \in V$ mit $\pi(b_j) = c_j$. Zeigen Sie, dass $(b_l)_{l \in L}$ für $L := I \cap J$ ist eine Basis von V ist.

Übung 6.

Es seien V und W zwei K -Vektorräume und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

1. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $f|_U = 0$. Zeigen Sie, dass V eine lineare Abbildung

$$\bar{f}: V/U \rightarrow W, \quad [v] \mapsto f(v)$$

induziert.

2. Zeigen Sie, dass $\text{im } \bar{f} = \text{im } f$. Folgern Sie, dass \bar{f} genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.
3. Zeigen Sie, dass $U \subseteq \ker f$, und dass $\ker \bar{f} = (\ker f)/U$. Folgern Sie, dass \bar{f} genau dann injektiv ist, wenn bereits $U = \ker f$ gilt.

4. Folgern Sie, dass f einen Isomorphismus

$$V/(\ker f) \rightarrow \operatorname{im} f, \quad [v] \mapsto f(v)$$

induziert.

Übung 7.

Es sei V ein K -Vektorraum mit Erzeugendensystem $E \subseteq V$. Es sei W ein K -Vektorraum mit Basis $\{b_e\}_{e \in E} \subseteq W$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $V/U \rightarrow W$ für einen passenden Untervektorraum $U \subseteq V$.

Übung 8.

Es sei V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es seien $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, so dass U invariant unter f ist (d.h. es ist $f(U) \subseteq U$).

1. Zeigen Sie, dass f einen Endomorphismus

$$\bar{f}: V/U \rightarrow V/U, \quad [v] \mapsto [f(v)]$$

induziert.

Es sei nun $g: V \rightarrow V$ ein weiterer Endomorphismus, so dass U invariant unter g ist, und es sei $\bar{g}: V/U \rightarrow V/U$ der induzierte Endomorphismus.

2. Es seien $f|_U = g|_U$ und $\bar{f} = \bar{g}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass bereits $f = g$ gelten muss.

Übung 9.

Zeigen Sie, dass die Inklusion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ einen Isomorphismus $\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ von \mathbb{C} -Vektorräumen induziert.

Übung 10.

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $(V^*)_{\mathbb{C}} \rightarrow (V_{\mathbb{C}})^*$. (Hinweis: Beachten Sie, dass V ist nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.)

Übung 11.

Es seien V und W zwei \mathbb{R} -Vektorräume. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}}$$

von \mathbb{C} -Vektorräumen.

Übung 12.

Es sei V ein reeller Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie:

1. Es gilt

$$\left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)_{\mathbb{C}} = \bigcap_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$$

2. Es gilt

$$\left(\sum_{i \in I} U_i \right)_{\mathbb{C}} = \sum_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}.$$

3. Folgern Sie, dass genau dann $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, wenn $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$.

Übung 13.

Es seien V und W zwei reelle Vektorräume, und $f: V \rightarrow W$ sei \mathbb{R} -linear.

1. Zeigen Sie, dass $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$.
2. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass $(V_{\mathbb{C}})_{\lambda}(f_{\mathbb{C}}) = V_{\lambda}(f)_{\mathbb{C}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\operatorname{im} f)_{\mathbb{C}}$.
5. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übung 14.

Es sei V ein reeller Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

Übung 15.

Es sei

$$\iota: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X], \quad \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

die Teilmengeninklusion.

1. Zeigen Sie, dass ι \mathbb{R} -linear ist.
2. Zeigen Sie, dass ι einen Isomorphismus $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}[X]$ von \mathbb{C} -Vektorräumen induziert.

Übung 16.

Es sei $A \in M_2(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{tr} A = 0$ und $\operatorname{tr} A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$.

Übung 17.

Zeigen Sie, dass es für $A \in \operatorname{GL}_n(K)$ ein Polynom $P \in K[T]$ mit $\deg P \leq n-1$ gibt, so dass $A^{-1} = P(A)$.

Übung 18.

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char } K \notin \{2, 3\}$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \frac{1}{6}(\text{tr } A)^3 - \frac{1}{2}(\text{tr } A^2)(\text{tr } A) + \frac{1}{3}(\text{tr } A^3) \quad \text{für jedes } A \in M_3(K).$$

(Hinweis: Wenn die Rechnungen zu kompliziert werden, dann macht man es falsch.)

Übung 19.

Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sei

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Es sei

$$D_n(\mathbb{C}) := \{S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)S^{-1} \mid S \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\} \subseteq M_n(\mathbb{C})$$

die Menge der diagonalisierbaren komplexen $n \times n$ -Matrizen. Wir zeigen, dass $D_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ dicht ist, d.h. dass es für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine diagonalisierbare Matrix $D \in D_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Es sei $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, also

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$B(t) := A + tS \text{diag}(z_1, \dots, z_n)S^{-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t) \in \mathbb{C}$ mit

$$\mu_i(t) := \lambda_i + tz_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

die Eigenwerte von $B(t)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.
3. Folgern Sie, dass $B(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.
4. Folgern Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle $D \in B_\delta(A) \setminus \{A\}$ diagonalisierbar sind.
5. Folgern Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $D \in D_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Wir wollen die Dichtheit von $D_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ nutzen, um den Satz von Cayley-Hamilton zu zeigen:

6. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \chi_A(A)$$

stetig ist, wobei $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$ das charakteristische Polynom von A ist.

7. Zeigen Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Diagonalmatrix $D \in M_n(\mathbb{C})$.
 8. Zeigen Sie, dass $P(SAS^{-1}) = SP(A)S^{-1}$ für alle $P \in \mathbb{C}[T]$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $S \in GL_n(\mathbb{C})$. Folgern Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Matrix $D \in D_n(\mathbb{C})$.
 9. Folgern Sie, dass $F(A) = 0$ für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Übung 20.

Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f: V \rightarrow W$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_V: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$

ein \mathbb{R} -linearer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* \mathbb{R} -linear ist.
 3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g := \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ \mathbb{R} -linear ist, und dass

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

4. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn also V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

Übung 21.

Es sei $V := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Ferner sei $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.
 2. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t) dt \quad \text{für alle } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

3. Zeigen Sie, dass $U^\perp = 0$. Folgern Sie, dass $V \neq U \oplus U^\perp$. (Hinweis: Betrachten Sie für $g \in U^\perp$ die Funktion $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = t^2 g(t)$.)
4. Zeigen Sie ferner, dass $V/(U \oplus U^\perp)$ eindimensional ist.

Übung 22.

Es sei

$$W = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Ferner sei

$$V := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in W \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

der Untervektorraum der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von W ist.
2. Zeigen Sie für alle $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$

(Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.)

3. Zeigen sie, dass

$$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

4. Es sei

$$R: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.

5. Zeigen Sie, dass R keine Eigenwerte besitzt.

6. Es sei

$$S: V \rightarrow V, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, dass S ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, unitär, bzw. normal ist.

7. Zeigen Sie, dass S diagonalisierbar ist.

8. Es sei

$$U := \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Bestimmen Sie U^\perp und entscheiden Sie, ob $V = U \oplus U^\perp$.

9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .

Übung 23.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma(A, B) := \operatorname{tr}(A^T B) \quad \text{für alle } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

ein Skalarprodukt auf $M_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ von $M_n(\mathbb{R})$ mit

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k, l \leq n$$

eine Orthonormalbasis von $M_n(\mathbb{R})$ bezüglich σ bilden.

3. Es sei

$$S_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$S_- := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$M_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$

und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 24.

Es sei V ein Skalarproduktraum und

$$O(V) := \{f \in \operatorname{End}(V) \mid ff^* = \operatorname{id}\}.$$

Zeigen Sie, dass $O(V)$ eine Untergruppe von $\operatorname{GL}(V)$ bildet.

Übung 25.

Zeigen sie, dass für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
2. $AA^* = I$.
3. $A^*A = I$.
4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{K}^n .
5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{K}^n .

Übung 26.

Für je zwei K -Vektorräume V und W sei

$$\text{Bil}(V, W) := \{b: V \times W \rightarrow K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen $V \times W \rightarrow K$.

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

$$F: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Bil}(W, V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w, v) = b(v, w)$$

ein Isomorphismus von K -Vektorräumen ist.

2. Es sei $b \in \text{Bil}(V, W)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass b eine lineare Abbildung

$$\Phi_{V,W}(b): V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto b(v, -)$$

induziert. Dabei ist

$$b(v, -): W \rightarrow K, \quad w \mapsto b(v, w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{V,W}: \text{Bil}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

ein Isomorphismus von K -Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus

$$\text{Hom}(V, W^*) \rightarrow \text{Hom}(W, V^*)$$

an.

Wir betrachten nun den Fall $W = V^*$.

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e: V \times V^* \rightarrow K, \quad (v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform e einer linearen Abbildung $V \rightarrow V^{**}$, sowie einer linearen Abbildung $V^* \rightarrow V^*$. Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

Übung 27.

Es seien V und W zwei K -Vektorräume und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$ an, und zeigen sie ihre Linearität.
2. Zeigen Sie für jeden K -Vektorraum U , dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: U \times U^* \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v) \quad \text{für alle } v \in U, \varphi \in U^*$$

eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v), \psi \rangle = \langle v, f^*(\psi) \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

Übung 28.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma: M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \sigma(A, B) := \text{tr}(AB)$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Zeigen Sie, dass σ in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in M_n(K).$$