Lösung zu Zettel 7, Aufgabe 4

Jendrik Stelzner

17. Juni 2016

1. Topologisches Vorgeplänkel

Wir nutzen im Folgenden einige Aussagen über normierte Vektorräume, ohne diese explizit zu beweisen.

Lemma 1. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

1. *Es seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf V. Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit*
$$\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2 \quad \text{und} \quad \|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1.$$
2. *Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so ist V vollständig (bezüglich der durch $\|\cdot\|$ induzierten Metrik).*

Lemma 2. *Es sei V ein normierter Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

1. *V ist vollständig (bezüglich der durch $\|\cdot\|$ induzierten Norm), also ein Banachraum.*
2. *Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ in V ist konvergent. (Dabei heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$* absolut konvergent *falls die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ konvergiert).*

Dies erlaubt uns die Exponentialfunktion von Matrizen zu definieren: Wir wählen zunächst eine submultiplikative Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (die Submultiplikativität bedeutet, dass $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$; das es eine solche Norm gibt, wollen wir hier voraussetzen). Wegen der Vollständigkeit von $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ konvergiert jede absolut konvergente Reihe in $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ bezüglich $\|\cdot\|$ absolut konvergent, denn die reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k/k!$ konvergiert (gegen $\exp(\|A\|)$). Also konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ bezüglich $\|\cdot\|$. Da alle Normen auf V äquivalent sind (da $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ endlichdimensional über $\mathbb{K}$ ist), ist der Grenzwert unabhängig von der gewählten Norm $\|\cdot\|$.

Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, so können wir in der obigen Argumentation $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ durch $\mathrm{End}(V)$ ersetzen, und damit die Exponentialfunktion auf $\mathrm{End}(V)$ definеren.

Lemma 3. *Sind V und W zwei endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, so ist jede lineare Abbildung $V \to W$ stetig.*

Damit ergibt sich insbesondere, dass sich die Exponentialfunktion eines Endomorphismus mithilfe von Matrizen in Koordinaten berechnen lässt:

Korollar 4. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Für jeden Endomorphismus f von V ist dann*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = \exp(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)).$$

Ist $g \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \exp(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$, so ist deshalb $g = \exp(f)$.

Beweis. Es sei $A \coloneqq \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}.$$

Da die Abbildung $\mathrm{M}_{\mathcal{B}} \colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ linear ist, folgt aus Lemma 3 ihre Stetigkeit. Deshalb ist

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k}{k!}\right) &= \mathrm{M}_{\mathcal{B}}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \exp(A) = \exp(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)).\end{aligned}$$

Der letzte Teil der Aussage folgt nun aus

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \exp(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\exp(f))$$

und der Bijektivität der Abbildung $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $h \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(h)$. □

2. Aufgabe 4

i)

Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ und invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist

$$\begin{aligned}\exp(SAS^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(SAS^{-1})^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(S \frac{A^k}{k!} S^{-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(S \frac{A^k}{k!} S^{-1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(S \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right) S^{-1}\right) = S \left(\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)\right) S^{-1} \\ &= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) S^{-1} = S \exp(A) S^{-1}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile die Stetigkeit der Abbildung

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad B \mapsto SBS^{-1}$$

genutzt.

ii)

Da A und B kommutieren gilt

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A^\ell B^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{A^\ell B^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^n B^m}{n!m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^n}{n!} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^\ell}{\ell!} \right) = \exp(A)\exp(B).\end{aligned}$$

Die genutzen Umordnungen der Reihen lassen sich etwa wie folgt begründen:

Da die Addition, Skalarmultiplikation und Grenzwertbildung eintragsweise geschehen, genügt es, die Umordnungen jeweils eintragsweise durchführen zu können. Dies geht etwa, wenn die Reihen eintragsweise bereits absolut konvergieren.

Dass dies gilt, ergibt sich daraus, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt (die nur von der auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ gewählten Norm abhängt), so dass $|d_{ij}| \leq C\|D\|$ für jede Matrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Dies wiederum ergibt sich daraus, dass die Aussage für die $\|\cdot\|_1$-Norm (mit $\|D\|_1 = \sum_{i,j} |D_{ij}|$) mit der Konstante $C = 1$ gilt, und alle Normen auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ äquivalent sind.

Außerdem haben wir in den letzten beiden Zeilen genutzt, dass für alle $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ die Abbildungen

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad D \mapsto DE$$

und

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad D \mapsto ED$$

linear und somit stetig sind.

iii)

Lemma 5. *Es sei K ein Körper.*

1. *Für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ ist*

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

2. *Für alle $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist*

$$\mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

Beweis. 1. Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ji} A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA).\end{aligned}$$

2. Nach dem ersten Teil des Lemmas ist

$$\operatorname{tr}(SAS^{-1}) = \operatorname{tr}(S \cdot AS^{-1}) = \operatorname{tr}(AS^{-1} \cdot S) = \operatorname{tr}(A). \qquad \square$$

Da $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisierbar über $\mathbb{C}$ ist, gibt es ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $SAS^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ in oberer Dreiecksform ist. Es ist also

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: B$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A sind. Deshalb ist

$$\exp(\operatorname{tr}(A)) = \exp(\operatorname{tr}(SAS^{-1})) = \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \exp(\lambda_1) \cdots \exp(\lambda_n).$$

Andererseits ist

$$\det(\exp(A)) = \det(S \exp(A) S^{-1}) = \det(\exp(SAS^{-1})) = \det(\exp(B)).$$

Da beim Multiplizieren zweier oberer Dreiecksmatrizen die Diagonaleinträge multipliziert werden, ergibt sich, dass B^k für alle $k \geq 0$ von der Form

$$B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

ist. Deshalb ist $\exp(B)$ von der Form

$$\exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(B)) = \exp(\lambda_1) \cdots \exp(\lambda_n) = \exp(\operatorname{tr}(A)).$$

iv)

Da $(AB)^* = B^* A^*$ für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, ergibt sich für alle $k \geq 0$, dass $(A^k)^* = (A^*)^k$. Deshalb ist

$$\exp(A^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^*)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A^k}{k!}\right)^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)^* = \exp(A)^*.$$

Dabei haben wir genutzt, dass die Abbildung

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad B \mapsto B^*$$

$\mathbb{R}$-linear und somit stetig ist. (Denn jede $\mathbb{K}$-Norm ist inbesondere eine $\mathbb{R}$-Norm.)

v)

Es ist $0^0 = I$ und $0^k = 0$ für alle $k \geq 1$, und deshalb

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{I}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{0^k}{k!}}_{=0} = I.$$

vi)

Ist A selbstadjungiert, also $A = A^*$, so ist

$$\exp(A)^* = \exp(A^*) = \exp(A),$$

also auch $\exp(A)$ selbstadjungiert. Ist A normal, so kommutieren A und A^*. Deshalb ist dann

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(A)^* &= \exp(A)\exp(A^*) = \exp(A + A^*) = \exp(A^* + A) \\ &= \exp(A^*)\exp(A) = \exp(A)^*\exp(A),\end{aligned}$$

also auch $\exp(A)$ normal. Dabei haben wir den zweiten Aufgabenteil genutzt.

vii)

Ist A antiselbstadjungiert, so ist $A^* = -A$. Da A und $-A$ kommutieren, ist dann

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(A)^* &= \exp(A)\exp(A^*) = \exp(A)\exp(-A) \\ &= \exp(A - A) = \exp(0) = I,\end{aligned}$$

und analog auch $\exp(A)^*\exp(A) = I$. Also ist $\exp(A)$ unitär. Dabei haben wir auch hier den zweiten Aufgabenteil genutzt.

viii)

Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

selbstadjungierte Endomorphismen

Es sei $f \colon V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismen mit positiven Eigenwerten. Da f normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V aus Eigenvektoren von f. Es ist also

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ die Eigenwerte von f sind. Wegen der Positivität der Eigenwerte gibt es für jedes $i = 1, \dots, n$ ein $\mu_i \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_i = \exp(\mu_i)$. Für den Endomorphismus $g \colon V \to V$ mit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

ist also

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \exp(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)),$$

a und somit nach Korollar 4 bereits $g = \exp(f)$. Da $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ eine Diagonalmatrix mit reellen Eintragen ist, und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V, gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)^* = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g),$$

und somit $g^* = g$. Also ist g selbstadjungiert.

normale Endomorphismen

Es sei $f \colon V \to V$ ein normaler, invertierbarer Endomorphismus. Da f normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V aus Eigenvektoren von f. Es ist also

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von f sind. Wegen der Invertierbarkeit von f ist 0 kein Eigenwert von f, also $\lambda_j \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$. Wegen der Surjektivität der Exponentialabbildung $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ gibt es $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_j = \exp(\mu_j)$ für alle $j = 1, \dots, n$. Es sei $g \colon V \to V$ der Endomorphismus mit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \exp(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)).$$

und nach Korollar 4 somit $f = \exp(g)$. Die Matrix $\mathrm{M}_{\lfloor}(g)$ ist eine Diagonalmatrix, und somit normal. Da $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist, ist deshalb g ein normaler Endomorphismus.

unitäre Endomorphismen

Es sei $f \colon V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Da f normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V aus Eigenvektoren von f. Es ist also

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von f sind. Da f unitär ist, sind diese Eigenwerte normiert, d.h. es ist $|\lambda_j| = 1$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Die Eigenwerte von f liegen also alle auf dem Einheitskreis. Es gibt daher $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_j = \exp(i\varphi_j)$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Es sei $g\colon V \to V$ der Endomorphismus mit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\varphi_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \exp(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)),$$

also $g = \exp(f)$ nach Korollar 4. Da

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)^* = \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\varphi_n \end{pmatrix}^* &= \begin{pmatrix} -i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -i\varphi_n \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} i\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\varphi_n \end{pmatrix} = -\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(-g)\end{aligned}$$

und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V ist, folgt $g^* = -g$. Also ist g antiselbstadjungiert.