

Lösungen zu Zettel 12

Jendrik Stelzner

16. Juli 2016

Wir erinnern zunächst an das folgende Lemma, das im Tutorium bereits gezeigt wurde:

Lemma 1. *Es seien $u, v \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren, die jeweils lichtartig oder zeitartig sind (d.h. es ist $\beta(u, u) \leq 0$ und $\beta(v, v) \leq 0$). Dann enthält die Ebene $\mathcal{L}(u, v)$ einen raumartigen Vektor.*

Beweis. Es sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ eine Sylvesterbasis von V mit

$$M_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

und es seien $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ und $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ mit $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$. Da $u \neq 0$ gibt es ein $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $u_i \neq 0$; da

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = \beta(u, u) \leq 0$$

muss auch $u_3 \neq 0$. Es sei

$$w := v - \frac{v_3}{u_3} u \in \mathcal{L}(u, v).$$

Es ist $w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$ mit $w_i = u_i - v_3 u_i / u_3$ für alle $i = 1, 2, 3$; insbesondere ist $w_3 = 0$. Da u und v linear unabhängig sind, ist aber auch $w \neq 0$, und somit $w_1 \neq 0$ oder $w_2 \neq 0$. Damit haben wir

$$\beta(w, w) = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 = w_1^2 + w_2^2 > 0,$$

weshalb w raumartig ist. □

Aufgabe 3

i)

Wir bemerken zunächst, dass die Bedingung, dass $\beta|_{X \times X}$ nichtentartet ist, unnötig ist:

Lemma 2. Es sei $X \subseteq V$ ein zweidimensionaler Untervektorraum, so dass $\beta|_{X \times X}$ vom Typ $(1, 1)$ ist. Dann ist $\beta|_{X \times X}$ nichtentartet.

Beweis. Da $\beta|_{X \times X}$ vom Typ $(1, 1)$ ist, und $1 + 1 = 2 = \dim X$, gibt es eine Sylvesterbasis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ von X , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(\beta|_{X \times X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix keine Nullen auf der Diagonalen hat, ist $\beta|_{X \times X}$ nichtentartet. \square

Wir zeigen daher im Folgenden, dass für einen zweidimensionalen Untervektorraum $X \subseteq V$ genau dann $\mathfrak{H} \cap X \neq \emptyset$, wenn $\beta|_{X \times X}$ den Typ $(1, 1)$ hat.

Wenn $\beta|_{X \times X}$ den Typ $(1, 1)$ hat, dann gibt es eine Sylvesterbasis (b_1, b_2) von X mit $\beta(b_1, b_1) = 1$ und $\beta(b_2, b_2) = -1$ (sowie $\beta(b_1, b_2) = 0$). Insbesondere gilt $b_2 \in \mathfrak{H}_{\pm}$ und somit entweder $b_2 \in \mathfrak{H}$ oder $-b_2 \in \mathfrak{H}$, also $b_2 \in \mathfrak{H} \cap X$ oder $-b_2 \in \mathfrak{H} \cap X$. Es gilt aber auf jeden Fall $\mathfrak{H} \cap X \neq \emptyset$.

Angenommen, es ist $\mathfrak{H} \cap X \neq \emptyset$. Es sei $b \in \mathfrak{H} \cap X \neq 0$. Da $b \in \mathfrak{H}$ ist $\beta(b, b) = -1$. Für den Typen von $\beta|_{X \times X}$ gibt es wegen der Zweidimensionalität von X a priori sechs Möglichkeiten: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ oder $(0, 2)$.

Die Fälle $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(2, 0)$ können wir ausschließen, denn sonst wäre $\beta|_{X \times X}$ positiv semidefinit, was $\beta(b, b) = -1$ widerspricht.

In den Fällen $(0, 1)$ und $(0, 2)$ wäre $\beta|_{X \times X}$ negativ semidefinit; eine beliebige Basis \mathcal{B} von X würde dann aus licht- oder zeitartigen Vektoren bestehen, weshalb X nach Lemma 1 einen raumartigen Vektor enthalten müsste. Dies stünde dann aber im Widerspruch zur negativen Semidefinitheit von $\beta|_{X \times X}$.

Es bleibt also nur noch die Möglichkeit $(1, 1)$ übrig.

ii)

Die entscheidende Beobachtung ist, dass x und y linear unabhängig sind:

Lemma 3. Je zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{H}$ sind linear unabhängig.

Beweis. Nach Aufgabe 2 ist $\beta(x, y) < -1$, da sich x und y beide in der gleichen Zusammenhangskomponente von \mathfrak{H}_{\pm} befinden, nämlich in \mathfrak{H} . Deshalb ist

$$\beta(u, v)^2 > (-1)^2 = (-1)(-1) = \beta(u, u)\beta(v, v),$$

weshalb die lineare Unabhängigkeit aus Aufgabe 1 folgt, da u und v beide zeitartig sind. \square

Ist $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{H}$ eine Gerade, die x und y enthält, so gibt es einen zweidimensionalen Untervektorraum $X \subseteq V$ mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{H} \cap X$. Da die zweidimensionale Ebene X die beiden linear unabhängigen Vektoren u und v enthält, muss bereits $X = \mathcal{L}(u, v)$. Somit ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{H} \cap \mathcal{L}(x, y)$ die eindeutige Gerade, die x und y enthält.

Aufgabe 4

i)

Wegen der Bilinearität von β ist $\beta(x, -): V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \beta(x, v)$ eine lineare Abbildung. Es gilt $\beta(x, -) \neq 0$, da $\beta(x, -)(x) = \beta(x, x) = -1$. Folglich ist $\text{im } \beta(x, -)$ ein Untervektorraum von \mathbb{R} , der nicht der Nullvektorraum ist; es muss $\text{im } \beta(x, -) = \mathbb{R}$ gelten. Damit ergibt sich, dass $T_x = \ker \beta(x, -)$ ein Untervektorraum von V ist, und nach der Dimensionsformel ist

$$\dim T_x = \dim \ker \beta(x, -) = \dim V - \dim \text{im } \beta(x, -) = 3 - 1 = 2.$$

Um zu zeigen, dass $\beta|_{T_x \times T_x}$ ein Skalarprodukt ist, zeigen wir für $v \in T_x$ mit $v \neq 0$, dass $\beta(v, v) > 0$. Hierfür nehmen wir an, dass $\beta(v, v) \leq 0$, dass also v licht- oder zeitartig ist.

Wir bemerken, dass x und v linear unabhängig sind; ansonsten wäre nämlich $v = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$, weshalb $\beta(v, x) = \beta(\lambda x, x) = \lambda \beta(x, x) = -\lambda \neq 0$ wäre. (Für diese Beobachtung haben wir genutzt, dass $v \neq 0$.)

Nach Aufgabe 1 ist nun

$$0 = \beta(x, v)^2 > \beta(x, x)\beta(v, v) = -\beta(v, v).$$

Dabei haben wir in der ersten Gleichung genutzt, dass $v \in T_x$ und somit $\beta(x, v) = 0$, und für die Striktheit der Ungleichung nutzen wir, dass x und v linear unabhängig sind. Nach der obigen Gleichkette ist nun $\beta(v, v) > 0$, im Widerspruch zur Annahme $\beta(v, v) \leq 0$. Also muss bereits $\beta(v, v) > 0$ gelten.

Aufgabe 5

Wir zeigen als erstes, dass das angegebene Element

$$\mathfrak{t} := \frac{B - \cosh(c)A}{\sinh(c)}$$

die gewünschten Eigenschaften hat. Das zeigt insbesondere die Existenz von \mathfrak{t}_{AB} . Anschließend zeigen wir die Eindeutigkeit von \mathfrak{t}_{AB} ; dann folgt insbesondere, dass $\mathfrak{t}_{AB} = \mathfrak{t}$.

Es ist klar, dass $\mathfrak{t} \in \mathcal{L}(A, B)$, und dass $1 \sinh(c) > 0$. Man bemerke, dass $\cosh(c) = \cosh(\text{arccosh}(-\beta(A, B))) = -\beta(A, B)$. Deshalb ist

$$\beta(\mathfrak{t}, A) = \beta\left(\frac{B - \cosh(c)A}{\sinh(c)}, A\right) = \frac{\beta(B, A) - \cosh(c)\beta(A, A)}{\sinh(c)} = \frac{\beta(A, B) - \beta(A, B)}{\sinh(c)} = 0,$$

also $\mathfrak{t} \in T_A$. Da $\sinh(c)^2 = \cosh(c)^2 - 1$ und deshalb

$$\begin{aligned} \beta(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) &= \beta\left(\frac{B - \cosh(c)A}{\sinh(c)}, \frac{B - \cosh(c)A}{\sinh(c)}\right) \\ &= \frac{\beta(B, B) - 2\cosh(c)\beta(A, B) + \cosh(c)^2\beta(A, A)}{\cosh(c)^2 - 1} \\ &= \frac{-1 - 2(-\beta(A, B))\beta(A, B) + \beta(A, B)^2(-1)}{\beta(A, B)^2 - 1} = \frac{\beta(A, B)^2 - 1}{\beta(A, B)^2 - 1} = 1. \end{aligned}$$

Also ist \mathfrak{t} normiert. Somit erfüllt \mathfrak{t} alle geforderten Eigenschaften.

Es sei nun \mathfrak{t}_{AB} ein weiterer Vektor, der alle angegebenen Eigenschaften erfüllt. Der Untervektorraum $\mathcal{L}(A, B) \subseteq V$ ist zweidimensional nach Lemma 3 zweidimensional. Der Untervektorraum $U := \{t \in \mathcal{L}(A, B) \mid \beta(t, A) = 0\} = \mathcal{L}(A, B) \cap T_A$ ist eindimensional: Da $\mathfrak{t} \in U$ ist $U \neq 0$ und somit $\dim U \geq 1$, da aber $A \notin U$ ist $U \subsetneq \mathcal{L}(A, B)$ und somit $\dim U < \dim \mathcal{L}(A, B) = 2$. Da \mathfrak{t} und \mathfrak{t}_{AB} zwei bezüglich $\beta|_{U \times U}$ normierte Vektoren des eindimensionalen Vektorraums U sind, muss $\mathfrak{t}_{AB} = \pm \mathfrak{t}$. Wäre $\mathfrak{t}_{AB} = -\mathfrak{t}$, so wäre $\mathfrak{t}_{AB} = (-B + \cosh(c)A)/\sinh(c)$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von A und B wäre diese Linearkombination von A und B eindeutig; der Koeffizient $-1/\sinh(c)$ von B ist aber negativ, im Widerspruch zur Definition von B . Also muss bereits $\mathfrak{t}_{AB} = \mathfrak{t}$ gelten, was die Eindeutigkeit zeigt.