Lösungen zu Zettel 12

Jendrik Stelzner

18. Juli 2016

Bemerkung 1. In der Vorlesung wurde anscheinend nicht definiert, was das Symbol $\oplus$ in $V \oplus V^*$ bedeuten soll. Wir werden dies hier ebenfalls nicht tun. Stattdessen geben wir den Fakt an, dass für endlich viele K-Vektorräume $V_1, \dots, V_n$ die Gleichheit

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = V_1 \times \cdots \times V_n.$$

gilt. Wir werden daher im Folgenden jeweils mit $\times$ statt mit $\oplus$ arbeiten.

Aufgabe 3

Um zu zeigen, dass $q \colon V \times V^* \to K$ mit $q(v, \varphi) = \varphi(v)$ für alle $(v, \varphi) \in V \times V^*$ eine quadratische Form ist, müssen wir eine Bilinearform $\beta \colon (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$ angeben, so dass q die zu β gehörige quadratische Form ist, dass also $q(v, \varphi) = \beta((v, \varphi), (v, \varphi))$ für alle $(v, \varphi) \in V \times V^*$. Da $\operatorname{char} K \neq 2$ gibt höchstens eine solche Bilinearform, und wir können diese durch eine Polarisationsformal angeben:

Für alle $(v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2) \in V \times V^*$ definieren wir

$$\begin{aligned}
\beta((v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2)) &\coloneqq \frac{q((v_1, \varphi_1) + (v_2, \varphi_2)) - q(v_1, \varphi_1) - q(v_2, \varphi_2)}{2} \\
&= \frac{q(v_1 + v_2, \varphi_1 + \varphi_2) - q(v_1, \varphi_1) - q(v_2, \varphi_2)}{2} \\
&= \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)(v_1 + v_2) - \varphi_1(v_1) - \varphi_2(v_2)}{2} = \frac{\varphi_1(v_2) + \varphi_2(v_1)}{2}.
\end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\beta \colon (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$ eine Bilinearform ist. Für alle $(v, \varphi) \in V \times V^*$ ist

$$\beta((v, \varphi), (v, \varphi)) = \frac{\varphi(v) + \varphi(v)}{2} = \varphi(v) = q(v, \varphi),$$

also ist q die zu β gehörige quadratische Form.

Um zu zeigen, dass q nicht-entartet ist, müssen wir zeigen, dass β nicht-entartet. Hierfür fixieren wir $(v, \varphi) \in V \times V^*$ mit $(v, \varphi) \neq (0, 0)$ und geben ein $(w, \psi) \in V \times V^*$ an, so dass $\beta((v,\varphi),(w,\psi)) \neq 0$. Dabei unterscheiden wir zwischen den beiden Fällen $v \neq 0$ und $\varphi \neq 0$.

Ist $v \neq 0$, so können wir $v_1 := v$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ergänzen (hier nutzen wir, dass V endlichdimensional ist). Für die entsprechende duale Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ von V^* gilt $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Deshalb ist

$$\beta((v,\varphi),(0,v_1^*)) = \frac{v_1^*(v) + \varphi(0)}{2} = \frac{v_1^*(v_1)}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ist andererseits $\varphi \neq 0$, so gibt es ein $w \in V$ mit $\varphi(w) \neq 0$, weshalb

$$\beta((v,\varphi),(w,0)) = \frac{\varphi(w)}{2} \neq 0.$$

Insgesamt zeigt dies, dass β nicht-entartet ist.

Aufgabe 4

i) Vorbereitung und hilfreiche Aussagen

Wir wollen die gegebenen Probleme und Aussagen über quadratischen Formen auf Probleme und Aussagen über die assoziierte symmetrische Bilinearform zurückführen.

Zunächst beginnen wir aber mit dem allgemeinen Verhalten einer nicht-entartete symmetrischen Bilinearformen im Endlichdimensionalen.

Proposition 2. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, wobei K ein beliebiger Körper ist, und $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-entartete Bilinearform. Es sei $U \subseteq V$ ein beliebiger Untervektorraum.*

1. *Die Einschränkungsabbildung $\rho\colon V^* \to U^*$, $\varphi \mapsto \varphi|_U$ ist surjektiv.*
2. *Es gilt* $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.
3. *Es gilt $(U^\perp)^\perp = U$.*
4. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*
   a) *Es gilt $V = U \oplus U^\perp$.*
   b) *Es gilt $U \cap U^\perp = 0$.*
   c) *Die Einschränkung $\beta|_{U \times U}$ ist nicht-entartet.*
   d) *Die Einschränkung $\beta|_{U^\perp \times U^\perp}$ ist nicht-entartet.*

Beweis. 1. Es sei $(v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von U, und $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine ergänzte Basis von V. Ist $\psi \in U^*$, also $\psi\colon U \to K$ eine lineare Abbildung, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to K$, also genau ein $\varphi \in V^*$, so dass $\varphi(v_i) = \psi(v_i)$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $\varphi(v_j) = 0$ für alle $j = m+1, \dots, n$. Aufgrund der Linearität von ψ und φ ist bereits $\varphi(u) = \psi(u)$ für alle $u \in U$ und somit $\varphi|_U = \psi$.

2. Da β nicht-entartet ist, ist die Abbildung

$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \beta(v, -)$$

injektiv. Wegen der Endlichdimensionalität von V ist auch V^* endlichdimensional mit $\dim V^* = \dim V$. Deshalb ist Φ bereits ein Isomorphismus, also auch surjektiv. Da die Einschränkungsabbildung $\rho\colon V^* \to U^*$, $\varphi \mapsto \varphi|_U$ surjektiv ist, ist auch die Komposition

$$\Psi := \rho \circ \Phi\colon V \to U^*, \quad v \mapsto \beta(v, -)|_U$$

surjektiv. Es gilt $\ker \Psi = U^\perp$ und deshalb nach der Dimensionsformel

$$\dim V = \dim \operatorname{im} \Psi + \dim \ker \Psi = \dim U^* + \dim U^\perp = \dim U + \dim U^\perp,$$

wobei $\dim U^* = \dim U$, da U endlichdimensional ist.

3. Es gilt $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, und da $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim U$ gilt dabei bereits die Gleichheit $U = (U^\perp)^\perp$.

4. Es gilt genau dann $V = U \oplus U^\perp$, wenn $U + U^\perp = V$ und $U \cap U^\perp = 0$. Wegen der Gleichheit $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ ist dabei

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) = \dim V - \dim(U \cap U^\perp),$$

und deshalb genau dann $U + U^\perp = V$, wenn $U \cap U^\perp = 0$. Es gilt also genau dann $V = U \oplus U^\perp$, wenn $U \cap U^\perp = 0$.

Für eine weitere Äquivalenz sei

$$\operatorname{rad}(\beta|_{U\times U}) = \{u \in U \mid \beta(u, u') = 0 \text{ für alle } u' \in U\}$$

das Radikal von $\beta|_{U\times U}$. Die Einschränkung $\beta|_{U\times U}$ ist genau dann nicht-entartet, wenn $\operatorname{rad}(\beta|_{U\times U}) = 0$. Das Radikal lässt sich auch als $\operatorname{rad}(\beta|_{U\times U}) = U \cap U^\perp$ ausdrücken. Also ist $\beta|_{U\times U}$ genau dann nicht-entartet, wenn $U \cap U^\perp = 0$.

Analog zur obigen Argumentation ergibt sich, dass $\beta|_{U^\perp, U^\perp}$ genau dann nicht-entartet ist, wenn $\operatorname{rad}(\beta|_{U^\perp\times U^\perp}) \neq 0$. Dabei ergibt sich nun, dass

$$\operatorname{rad}(\beta|_{U^\perp\times U^\perp}) = U^\perp \cap (U^\perp)^\perp = U^\perp \cap U = U \cap U^\perp = \operatorname{rad}(\beta|_{U\times U}).$$

Deshalb ist genau dann $\operatorname{rad}(\beta|_{U^\perp\times U^\perp}) = 0$, wenn $\operatorname{rad}(\beta|_{U\times U}) = 0$, wenn also $\beta|_{U\times U}$ nicht-entartet ist. □

Wir zeigen nun, dass es aufgrund der schönen Eigenschaften des Körpers ($\operatorname{char} K \neq 2$ und K ist quadratisch abgeschlossen) für eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum immer eine Orthonormalbasis gibt.

Bemerkung 3. Ein Körper K heißt *quadratisch abgeschlossen*, wenn es für jedes $a \in K$ ein $x \in K$ mit $a = x^2$ gibt. In anderen Worten: Jedes Element hat eine Quadratwurzel.

Der Körper $\mathbb{R}$ ist beispielweise nicht quadratisch abgeschlossen, da negative reelle Zahlen keine reelle Quadratwurzeln besitzen.

Der Körper $\mathbb{C}$ hingegen ist quadratisch abgeschlossen. Allgemeiner ist jeder algebraisch abgeschlossene Körper K auch quadratisch abgeschlossen, denn für jedes $a \in K$ besitzt das Polynom $X^2 - a \in K[X]$ eine Nullstelle.

Es ist allerdings nicht jeder quadratisch abgeschlossener Körper auch algebraisch abgeschlossen.

Theorem 4. *Es sei K ein Körper mit* $\operatorname{char} K \neq 2$, *$V$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform.*

1. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots n$, so dass*
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
2. *Ist K zusätzlich quadratisch abgeschlossen, so kann die Basis $\mathcal{B}$ so gewählt werden, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$.*

Beweis. 1. Wir zeigen die Aussage per Induktion über $\dim V$: Für $V = 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $\dim V > 0$ und die Aussage gelte für alle kleineren Dimensionen.

Behauptung. Es gibt ein $v \in V$ mit $\beta(v, v) \neq 0$.

Beweis. Es sei q die zu β gehörige quadratische Form. Da $V \neq 0$ gibt es ein $u \in V$ mit $u \neq 0$, und da β nicht-entartet ist, gibt es ein $w \in V$ mit $\beta(u, w) \neq 0$. Da $\operatorname{char} K \neq 2$ können wir eine Polarisationsformel nutzen um
$$0 \neq \beta(u, w) = \frac{q(u + w) - q(u) - q(w)}{2}$$
zu erhalten. Also ist $q(u + w) \neq 0$, $q(u) \neq 0$ oder $q(w) \neq 0$. □

Wir wählen nun $v_1 \in V$ mit $\beta(v_1, v_1) \neq 0$. Die Einschränkung $\beta|_{\mathcal{L}(v_1) \times \mathcal{L}(v_1)}$ ist nicht-entartet, denn ist $v \in \mathcal{L}(v_1)$ mit $v \neq 0$, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $\lambda \neq 0$ und $v = \lambda v_1$, weshalb
$$\beta(v, v_1) = \beta(\lambda v_1, v_1) = \lambda \beta(v_1, v_1) \neq 0.$$

Nach Proposition 2 ist deshalb $V = \mathcal{L}(v_1) \oplus U$ für $U \coloneqq \mathcal{L}(v_1)^{\perp}$, und die Einschränkung $\beta|_{U \times U}$ nicht-entartet. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Basis $\mathcal{C} = (v_2, \dots, v_n)$ von U und Skalare $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 2, \dots, n$, so dass
$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta|_{U \times U}) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n, \end{pmatrix}.$$

Da $V = \mathcal{L}(v_1) \oplus U$ ist $\mathcal{B} := (v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Basis von V, und da die Summe orthogonal ist, ergibt sich mit $\lambda_1 := \beta(v_1, v_1)$, dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n, \end{pmatrix}.$$

2. Es sei $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so dass $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ in Diagonalgestalt mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ist, wobei $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Da K quadratisch abgeschlossen ist, gibt es für jedes $i = 1, \dots, n$ einen Skalar $\mu_i \in K$ mit $\mu_i^2 = \lambda_i$; man beachte, dass $\mu_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Basis $\mathcal{B} := (\mu_1^{-1} v_1, \dots, \mu_n^{-1} v_n)$ leistet nun das Gewünschte. □

Definition 5. *Es sei V ein K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V heißt* orthonormal *bezüglich β, falls $\beta(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.*

Bemerkung 6. 1. Besitzt ein K-Vektorraum V bezüglich einer symmetrischen Bilinearform $\beta\colon V \times V \to K$ eine Orthonormalbasis $(v_i)_{i \in I}$, so ist β nicht-entartet. Ist nämlich $v \in V$ mit $\beta(v, v') = 0$ für alle $v' \in V$, so lässt sich v als Linearkombination $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ darstellen, und da

$$\lambda_j = \sum_{i \in I} \lambda_i \delta_{ij} = \sum_{i \in I} \lambda_i \beta(v_i, v_j) = \beta\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, v_j\right) = \beta(v, v_j) = 0 \quad \text{für alle } j \in I$$

ist bereits $v = 0$.

2. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich einer symmetrischen Bilinearform $\beta\colon V \times V \to K$, so gilt für die zugehörige quadratische Form q und einen Vektor $v \in V$ mit Linearkombination $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, dass

$$\begin{aligned} q(v) = \beta(v, v) = \beta\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, \sum_{j \in I} \lambda_j v_j\right) \\ = \sum_{i,j \in I} \lambda_i \lambda_j \beta(v_i, v_j) = \sum_{i,j \in I} \lambda_i \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i \in I} \lambda_i^2. \end{aligned}$$

Dabei wird für die dritte Gleichheit die Bilinaerität von β genutzt.

Um quadratische Aussagen in bilineare zu übersetzen, nutzen wir das folgende Lemma:

Lemma 7. *Es sei K ein Körper mit* char $K \neq 2$. *Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es seien $\beta\colon V \times V \to K$ und $\gamma\colon W \times W \to K$ zwei Bilinearformen, und $q\colon V \to K$ und $r\colon W \to K$ seien die assoziierten quadratischen Formen. Für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:*

1. *Es ist $r(f(v)) = q(v)$ für alle $v \in V$.*

2. *Es ist* $\gamma(f(v_1), f(v_2)) = \beta(v_1, v_2)$ *für alle* $v_1, v_2 \in V$.

Beweis. Angenommen, es ist $r(f(v)) = q(v)$ für alle $v \in V$. Nach einer Polarisationsformel ist dann für alle $v_1, v_2 \in V$ auch

$$\begin{aligned}\gamma(f(v_1), f(v_2)) &= \frac{r(f(v_1) + f(v_2)) - r(f(v_1)) - r(f(v_2))}{2} \\ &= \frac{r(f(v_1 + v_2)) - r(f(v_1)) - r(f(v_2))}{2} \\ &= \frac{q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)}{2} = \beta(v_1, v_2).\end{aligned}$$

Gilt andererseits $\gamma(f(v_1), f(v_2)) = \beta(v_1, v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$, so ergibt sich für alle $v \in V$, dass $r(f(v)) = \gamma(f(v), f(v)) = \beta(v, v) = q(v)$. □

ii) Der geradedimensionale Fall

Zunächst sei X ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, wobei $\operatorname{char} K \neq 2$ und K quadratisch abgeschlossen ist, so dass $\dim X$ gerade ist, und $q\colon X \to K$ eine nicht-entartete quadratische Form. Es sei $\beta\colon X \times X \to K$ die zu q gehörige Bilinearform. Dass q nicht-entartet ist, bedeutet gerade, dass β nicht-entartet ist. Nach Theorem 4 gibt es eine Orthonormalbasis $(x_1, \dots, x_{2n})$ von X bezüglich β.

Es sei V ein beliebiger n-dimensionaler K-Vektorraum. Wie in Aufgabe 3 gesehen ist $r\colon V \times V^* \to K$, $(v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$ die quadratische Form einer nicht-entarteten symmetrischen Bilinearform $\gamma\colon (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$. Nach Theorem 4 gibt es eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_{2n})$ von $V \times V^*$ bezüglich γ.

Es gibt nun einen eindeutigen Isomorphismus $\Phi\colon X \to V \times V^*$ mit $\Phi(x_i) = v_i$ für alle $i = 1, \dots, 2n$. Es gilt

$$\gamma(\Phi(x_i), \Phi(x_j)) = \gamma(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \beta(x_i, x_j) \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Wegen der Linearität von Φ und Bilinearität von β und γ ergibt sich daraus, dass bereits $\gamma(\Phi(y_1), \Phi(y_2)) = \beta(y_1, y_2)$ für alle $y_1, y_2 \in X$. Nach Lemma 7 ist deshalb $r(\Phi(y)) = q(y)$ für alle $y \in X$. Also ist Φ ein Isomorphismus von quadratischen Räumen bezüglich q und r.

iii) Der ungeradedimensionale Fall

Es sei nun X ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, so dass $\dim X$ ungerade ist, und q eine nicht-entartete quadratische Form auf X, sowie β die zu q assoziierte symmetrische Bilinearform auf X. Nach Theorem 4 gibt es eine Orthonormalbasis $(x_1, \dots, x_{2n+1})$ von X.

Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $r\colon V \times V^* \to K$, $(v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$, so gibt es nach Aufgabe 2 und Theorem 4 eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = ((v_1, \varphi_1), \dots, (v_{2n}, \varphi_{2n}))$ von $V \times V^*$ bezüglich der zu r gehörigen symmetrischen Bilinearform γ.

Dabei haben wir in Aufgabe 2 durch Interpolation gesehen, dass

$$\gamma((w_1, \psi_1), (w_2, \psi_2)) = \frac{\psi_1(w_2) + \psi_2(w_1)}{2} \quad \text{für alle } (w_1, \psi_1), (w_2, \psi_2) \in V \times V^*.$$

Durch Interpolation ergibt sich analog zu Aufgabe 2, dass die zu $\hat{r}\colon V \times V^* \times K \to K$, $(v, \varphi, \lambda) \mapsto \varphi(v) + \lambda^2 = r(v, \varphi) + \lambda^2$ gehörige symmetrische Bilinearform $\hat{\gamma}$ durch

$$\hat{\gamma}(w_1, \psi_1, \mu_1), (w_2, \psi_2, \mu_2)) = \frac{\psi_1(w_2) + \psi_2(w_1)}{2} + \mu_1\mu_2 = \gamma((w_1, \psi_1), (w_2, \psi_2)) + \mu_1\mu_2$$

gegeben ist.

Durch den Isomorphismus $((V \times V^*) \times K) \to V \times V^* \times K$, $((v, \varphi), \lambda) \mapsto (v, \varphi, \lambda)$ ergibt sich aus der Basis $\mathcal{B}$ von $V \times V^*$ die Basis $\mathcal{C} := ((v_1, \varphi_1, 0), \dots, (v_{2n}, \varphi_{2n}, 0), (0, 0, 1))$ von $V \times V^* \times K$.

Dies ist eine Orthonormalbasis von $V \times V^* \times K$ bezüglich $\hat{\gamma}$: Da

$$\hat{\gamma}((v_i, \varphi_i, 0), (v_j, \varphi_j, 0)) = \underbrace{\gamma((v_i, \varphi_i, (v_j, \varphi_j))}_{=\delta_{ij}} + 0^2 = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, 2n$$

ist die Familie $((v_1, \varphi_1, 0), \dots, (v_{2n}, \varphi_{2n}, 0))$ orthonormal bezüglich $\hat{\gamma}$. Dass $(0, 0, 1)$ bezüglich $\hat{\gamma}$ orthogonal zu den üblichen $2n$ Basiselementen ist, ergibt sich daraus, dass

$$\hat{\gamma}((v, \varphi, 0), (0, 0, 1)) = \gamma((v, \varphi), (0, 0)) + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0 \quad \text{für alle } (v, \varphi) \in V \times V^*,$$

und die Normiertheit von $(0, 0, 1)$ bezüglich $\hat{\gamma}$ ergibt sich durch direktes Nachrechnen:

$$\hat{\gamma}((0, 0, 1), (0, 0, 1)) = \gamma((0, 0), (0, 0)) + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1.$$

Für den eindeutige Isomorphismus $\Phi\colon X \to V \times V^* \times K$ mit $\Phi(x_i) = (v_i, \varphi_i, 0)$ für alle $i = 1, \dots, 2n$ und $\Phi(x_{2n+1}) = (0, 0, 1)$ ergibt sich nun analog zum geradedimensionalen Fall zunächst, dass $\gamma(\Phi(y_1), \Phi(y_2)) = \beta(y_1, y_2)$ für alle $y_1, y_2 \in X$, und daraus dann mithilfe von Lemma 7, dass Φ ein Isomorphismus von quadratischen Räumen ist.

Aufgabe 5

Die nicht-entartete symmmetrische Bilinearform β korrespondiert wegen der Endlichdimensionalität von V zu einem Isomorphismus

$$B\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \beta(-, v).$$

Dass ein Endomorphismus $g\colon V \to V$ bezüglich β adjungiert zu einem Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist, dass also

$$\beta(f(v_1), v_2) = \beta(v_1, g(v_2)) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

ist äquivalent dazu, dass

$$B(v_2)(f(v_1)) = B(g(v_2))(v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Mithilfe der zu f dualen Abbildung $f^T\colon V^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ lässt sich diese Bedingung zu

$$f^T(B(v_2))(v_1) = B(g(v_2))(v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V$$

umschreiben, also zu

$$f^T(B(v_2)) = B(g(v_2)) \quad \text{für alle } v_2 \in V,$$

und somit zu $f^T \circ B = B \circ g$. Also muss $g = B^{-1} f^T B$, was Existenz und Eindeutigkeit zeigt.

Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\beta(f^*(v_1), v_2) = \beta(v_2, f^*(v_1)) = \beta(f(v_2), v_1) = \beta(v_1, f(v_2)),$$

also erfüllt f die definierende Eigenschaft von f^{**}, weshalb $f^{**} = f$.

Aufgabe 6

Es sei

$$I\colon V \to V^{**}, \quad v \mapsto e_v \quad \text{mit} \quad e_v(\varphi) = \varphi(v) \quad \text{für alle } \varphi \in V^*$$

der natürliche Isomorphismus von V nach V^{**}. Es sei $\beta\colon (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$ die symmetrische Bilinearform aus Aufgabe 3, d.h. es ist

$$\beta((v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2)) = \frac{\varphi_1(v_2) + \varphi_2(v_1)}{2} \quad \text{für alle } (v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2) \in V \times V^*.$$

Für den Endomorphismus $f\colon V \times V^* \to V \times V^*$ mit

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a\colon V \to V$, $b\colon V^* \to V$, $c\colon V \to V^*$, $d\colon V^* \to V^*$ gilt es zu zeigen, dass der Endomorphismus $g\colon V \times V^* \to V \times V^*$ mit

$$g = \begin{pmatrix} I^{-1} d^* I & I^{-1} b^* \\ c^* I & a^*. \end{pmatrix},$$

bezüglich β adjungiert zu f ist.

Bemerkung 8. Auf dem Übungszettel wird die Identifikation I nicht *explizit* ausgeschrieben und genutzt, wir wollen dies hier aber tun.

Für alle $(v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2) \in V$ ist auf der einen Seite

$$\begin{aligned} 2\beta(f(v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2)) &= 2\beta\Big(\big(\underbrace{a(v_1) + b(\varphi_1)}_{v'}, \underbrace{c(v_1) + d(\varphi_1)}_{\varphi'}\big), (v_2, \varphi_2)\Big) \\ &= \underbrace{(c(v_1) + d(\varphi_1))}_{\varphi'}(v_2) + \varphi_2\Big(\underbrace{a(v_1) + b(\varphi_1)}_{v'}\Big) \\ &= c(v_1)(v_2) + d(\varphi_1)(v_2) + \varphi_2(a(v_1)) + \varphi_2(b(\varphi_1)) \end{aligned}$$

und auf der anderen Seite

$$\begin{aligned}
&2\beta((v_1,\varphi_1),g(v_2,\varphi_2)) \\
&= 2\beta\Big((v_1,\varphi_1),\Big(\underbrace{(I^{-1}d^*I)(v_2)+(I^{-1}b^*)(\varphi_2)}_{v'},\underbrace{(c^*I)(v_2)+a^*(\varphi_2)}_{\varphi'}\Big)\Big) \\
&= \varphi_1\Big(\underbrace{(I^{-1}d^*I)(v_2)+(I^{-1}b^*)(\varphi_2)}_{v'}\Big)+\underbrace{((c^*I)(v_2)+a^*(\varphi_2))}_{\varphi'}(v_1) \\
&= \varphi_1((I^{-1}d^*I)(v_2))+\varphi_1((I^{-1}b^*)(\varphi_2))+(c^*I)(v_2)(v_1)+a^*(\varphi_2)(v_1).
\end{aligned}$$

Der einzige Unterschied zwischen den beiden Summen besteht darin, dass der Isomorphismus I und das Dualisieren $(-)^*$ linearer Abbildungen genutzt wird, um die einzelnen Summanden umzuschreiben. Dabei haben wir für alle $v \in V$ und $\varphi \in V^*$, dass

$$\begin{aligned}
\varphi((I^{-1}d^*I)(v)) = \varphi(I^{-1}(d^*(I(v)))) &= \varphi(I^{-1}(d^*(e_v)) = \varphi(I^{-1}(e_v d)) \\
&= I(I^{-1}(e_v d))(\varphi) = (e_v d)(\varphi) = e_v(d(\varphi)) = d(\varphi)(v),
\end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang in die zweite Zeile nutzen, dass $\varphi(w) = e_w(\varphi) = I(w)(\varphi)$ mit $w = I^{-1}(e_v d)$. Ähnlich erhalten wir für alle $\varphi, \psi \in V^*$, dass

$$\begin{aligned}
\varphi((I^{-1}b^*)(\psi)) = \varphi(I^{-1}(b^*(\psi))) &= \varphi(I^{-1}(\psi b)) \\
&= I(I^{-1}(\psi b))(\varphi) = (\psi b)(\varphi) = \psi(b(\varphi)).
\end{aligned}$$

Außerdem haben wir für alle $v, w \in V$, dass

$$(c^*I)(w)(v) = c^*(I(w))(v) = c^*(e_w)(v) = (e_w c)(v) = e_w(c(v)) = c(v)(w),$$

und für alle $v \in V$ und $\varphi \in V^*$, dass

$$a^*(\varphi)(v) = (\varphi a)(v) = \varphi(a(v)).$$

Damit sind insgesamt beide Summen gleich.

Aufgabe 7

Um zu Umgehen, dass Körper-Shenanigans wie die Charakteristik oder unendliche Dimension an den Gegenbeispielen Schuld sind, möchten wir die Gegenbeispiele für endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen konstruieren; dabei beschränken wir uns o.B.d.A. auf $\mathbb{C}^n$.

Nach Theorem 4 wissen wir, dass jede nicht-entartete symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{C}^n$ eine Orthonormalbasis besitzt. Es genügt daher, die Standardbilinearform

$$\beta\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad \beta(x,y) = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}^n$$

zu betrachten. Die Bilinearität ergibt sich durch einfaches Nachrechnen, und dass β nicht entartet ist, ergibt sich daraus, dass die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis bezüglich β ist.

Bemerkung 9. Die Standardbilinearform ist *nicht* mit dem Standardskalarprodukt zu verwechseln! Die Standardbilinearform ist $\mathbb{C}$-bilinear, während das Standardskalarprodukt $\mathbb{C}$-sesquilinear ist.

Ist $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ein Endomorphismus, so bezeichne im Folgenden $f^{\mathrm{ad}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ den β-adjungierten Endomorphismus zu f. Ist $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ die eindeutige Matrix mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, so gilt für die eindeutige Matrix $A^{\mathrm{ad}} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $f^{\mathrm{ad}}(x) = A^{\mathrm{ad}}x$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, dass

$$A^{\mathrm{ad}}_{ij} = \beta(e_i, A^{\mathrm{ad}}e_j) = \beta(e_i, f^{\mathrm{ad}}(e_j)) = \beta(f(e_i), e_j) = \beta(Ae_i, e_j) = A_{ji}$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$. Es ist also $A^{\mathrm{ad}} = A^T$. Die symmetrischen Matrizen entsprechen also genau den β-selbstadjungierten Endomorphismen, und die schiefsymmetrischen Matrizen entsprechen genau den β-schiefsymmetrischen Matrizen.

i)

Es genügt eine Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $A \neq 0$ zu finden, die symmetrisch und nilpotent ist. Man beachte, dass A nicht reell seien darf, denn sonst wäre A als reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar, kann also wegen $A \neq 0$ nicht nilpotent sein. Dass $A \neq 0$ nilpotent ist, ist äquivalent dazu, dass die Jordannormal von A durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, d.h. es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit

$$A = S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Wir wollen also S so wählen, dass die Matrix auf der rechten Seite symmetrisch ist. Ist

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so ist

$$S^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

und somit

$$A = S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}.$$

Damit die rechte Seite symmetrisch ist, wählen wir $c = i$ und $a = 1$. Wir wählen außerdem $d = 1/2$ und $b = i/2$, damit $\det S = ad - bc = 1$. Wir erhalten damit die symmetrische, nilpotente Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Damit ist $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto Ax$ ein nilpotenter, β-selbstadjungierter Endomorphismus mit $f \neq 0$.

ii)

Hierfür habe ich noch kein Beispiel gefunden.

iii)

Wir betrachten den Endomorphismus $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, x \mapsto Ax$ mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

Also ist f der Endomorphismus, der e_2 auf e_1 schiebt, und e_1 auf 0. Das Adjungierte f^{ad} ist durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A^{\mathrm{ad}} = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Also ist f^{ad} der Endomorphismus, der e_1 auf e_2 schiebt, und e_2 auf 0.

(Man kann auch direkt sehen, dass f^{ad} so aussehen muss: f wirkt auf $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, indem es die Koordinaten nach rechts schiebt, d.h. es ist der Rechtshiftoperator. Da β durch eintragsweises Multiplizieren funktioniert, hat ein Rechtsshift in einem Argument von β den gleichen Effekt wie ein Linksshift im anderen Argument.)

Betrachten man nun $U := \mathcal{L}(e_1)$, so ist $U = \ker f$ invariant unter f. Da $f^{\mathrm{ad}}(e_1) = e_2 \notin U$ ist U aber nicht invariant unter f^{ad}.