Lösungen zu Zettel 12

Jendrik Stelzner

17. Juli 2016

Aufgabe 3

Bemerkung 1. In der Vorlesung wurde anscheinend nicht definiert, was das Symbol $\oplus$ in $V \oplus V^*$ bedeuten soll. Wir wollen dies hier ebenfalls nicht tun. Stattdessen geben wir den Fakt an, dass für endlich viele K-Vektorräume $V_1, \dots, V_n$ die Gleichheit

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = V_1 \times \cdots \times V_n.$$

gilt. Wir werden daher im Folgenden jeweils mit $\times$ als mit $\oplus$ arbeiten.

Um zu zeigen, dass $q \colon V \times V^* \to K$ mit $q(v, \varphi) = \varphi(v)$ für alle $(v, \varphi) \in V \times V^*$ eine quadratische Form ist, müssen wir eine Bilinearform $\beta \colon (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$ angeben, so dass q die quadratische Form von β ist, also $q(v, \varphi) = \beta((v, \varphi), (v, \varphi))$ für alle $(v, \varphi) \in V \times V^*$. Da $\operatorname{char} K \neq 2$ gibt höchstens eine solche Bilinearform, und wir können sie durch eine Polarisationsformal angeben:

Für alle $(v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2)$ definieren wir

$$\begin{aligned} \beta((v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2)) &:= \frac{q((v_1, \varphi_1) + (v_2, \varphi_2)) - q(v_1, \varphi_1) - q(v_2, \varphi_2)}{2} \\ &= \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)(v_1 + v_2) - \varphi_1(v_1) - \varphi_2(v_2)}{2} = \frac{\varphi_1(v_2) + \varphi_2(v_1)}{2}. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\beta \colon (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$ eine Bilinearform ist. Für alle $(v, \varphi) \in V \times V^*$ ist

$$\beta((v, \varphi), (v, \varphi)) = \frac{\varphi(v) + \varphi(v)}{2} = \varphi(v) = q(v, \varphi),$$

also ist q die zu β gehörige quadratische Form.

Um zu zeigen, dass q nicht-entartet ist, müssen wir zeigen, dass β nicht entartet. Wir nehmen uns hierfür ein $(v, \varphi) \in V \times V^*$ mit $(v, \varphi) \neq (0, 0)$ und geben ein $(w, \psi) \in V \times V^*$ an, so dass $\beta((v, \varphi), (w, \psi)) \neq 0$. Hierfür unterscheiden wir zwischen den beiden Fällen $v \neq 0$ und $\varphi \neq 0$.

Ist $v \neq 0$, so können wir $v_1 := v$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ergänzen (hier nutzen wir, dass V endlichdimensional ist). Für die entsprechende duale Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ von V^* gilt $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Deshalb ist

$$\beta((v, \varphi), (0, v_1^*)) = \frac{v_1^*(v) + \varphi(0)}{2} = \frac{v_1^*(v_i)}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ist $\varphi \neq 0$, so gibt es ein $w \in V$ mit $\varphi(w) \neq 0$, weshalb

$$\beta((v, \varphi), (w, 0)) = \frac{\varphi(w)}{2} \neq 0.$$

Insgesamt zeigt dies, dass β nicht entartet ist.

Aufgabe 4

i) Vorbereitung und hilfreiche Aussagen

Wir wollen die gegebenen Probleme und Aussagen über quadratischen Formen auf Probleme und Aussagen über die assoziierte Bilinearform zurückführen.

Zunächst beginnen wir aber mit der folgenden allgemeinen Aussage über nicht-entartete Bilinearformen im Endlichdimensionalen.l

Proposition 2. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, wobei K ein beliebiger Körper ist, und $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-entartete Bilinearform. Es sei $U \subseteq V$ ein beliebiger Untervektorraum.*

1. *Die Einschränkungsabbildung $\rho_U\colon V^* \to U^*$, $\varphi \mapsto \varphi|_U$ ist surjektiv.*
2. *Es gilt* $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.
3. *Es gilt $(U^\perp)^\perp = U$.*
4. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*
   a) *Es gilt $V = U \oplus U^\perp$.*
   b) *Es gilt $U \cap U^\perp = 0$.*
   c) *Die Einschränkung $\beta|_{U \times U}$ ist nicht-entartet.*
   d) *Die Einschränkung $\beta|_{U^\perp \times U^\perp}$ ist nicht-entartet.*

Beweis. 1. Es sei $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von U, und $(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ eine ergänzte Basis von V. Ist $\psi \in U^*$, also $\psi\colon U \to K$ eine lineare Abbildung, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to K$, also genau ein $\varphi \in V^*$, so dass $\varphi(v_i) = \psi(v_i)$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $\varphi(v_j) = 0$ für alle $j = m+1, \ldots, n$. Aufgrund der Linearität von ψ und φ ist bereits $\varphi(u) = \psi(u)$ für alle $u \in U$ und somit $\varphi|_U = \psi$.

2. Da β nicht-entartet ist, ist die Abbildung

$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \beta(v, -)$$

injektiv. Wegen der Endlichdimensionalität von V ist auch V^* endlichdimensional mit $\dim V^* = \dim V$. Deshalb ist Φ bereits ein Isomorphismus. Insbesondere ist Φ schon surjektiv. Also ist nach dem vorherigen Aufgabenteil auch die Komposition

$$\Psi := \rho_U \circ \Phi\colon V \to U^*, \quad v \mapsto \beta(v, -)|_U$$

surjektiv. Es gilt $\ker \Psi = U^\perp$ und deshalb nach der Dimensionsformel

$$\dim V = \dim \operatorname{im} \Psi + \dim \ker \Psi = \dim U^* + \dim U^\perp = \dim U + \dim U^\perp,$$

wobei wir für $\dim U^* = \dim U$ die Endlichdimensionalität von U genutzt haben.

3. Es gilt $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ und $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim U$, also bereits $U = (U^\perp)^\perp$.

4. Es gilt genau dann $V = U \oplus U^\perp$, wenn $U + U^\perp = V$ und $U \cap U^\perp = 0$. Nach einem der vorherigen Aufgabenteilen und einer Dimensionsformel gilt

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) = \dim V - \dim(U \cap U^\perp)$$

gilt genau dann $U + U^\perp = V$, wenn $U \cap U^\perp = 0$. Es gilt also genau dann $V = U \oplus U^\perp$, wenn $U \cap U^\perp = 0$.

Andererseits sei

$$\operatorname{rad} \beta_{U \times U} = \{u \in U \mid \beta(u, u') = 0 \text{ für alle } u' \in U\}$$

das Radikal von $\beta_{U \times U}$. Die Einschränkung $\beta_{U \times U}$ ist genau dann nicht-entartet, wenn $\operatorname{rad} \beta_{U \times U} = 0$. Das Radikal lässt sich auch als $\operatorname{rad} \beta_{U \times U} = U \cap U^\perp$ ausdrücken. Also ist $\beta|_{U \times U}$ genau dann nicht-entartet, wenn $U \cap U^\perp = 0$.

Dass $\beta_{U^\perp, U^\perp}$ nicht-entartet ist, ist äquivalent dazu, dass $\operatorname{rad} \beta_{U^\perp \times U^\perp} \neq 0$. Da mithilfe des vorherigen Aufgabenteils

$$\operatorname{rad} \beta_{U^\perp \times U^\perp} = U^\perp \cap (U^\perp)^\perp = U^\perp \cap U = U \cap U^\perp = \operatorname{rad} \beta_{U \times U}$$

ist genau dann $\operatorname{rad} \beta_{U^\perp \times U^\perp} = 0$, wenn $\operatorname{rad}_{U \times U} = 0$, wenn also $\beta_{U \times U}$ nicht-entartet ist. $\square$

Wir zeigen nun, dass es aufgrund der schönen Eigenschaften des Körpers ($\operatorname{char} K \neq 2$ und K ist quadratisch abgeschlossen) für eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum immer eine Orthonormalbasis gibt.

Theorem 3. *Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform.*

1. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots n$, so dass*
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
2. *Ist K zusätzlich quadratisch abgeschlossen, so kann die Basis $\mathcal{B}$ so gewählt werden, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$.*

Beweis. 1. Wir zeigen die Aussage per Induktion über $\dim V$: Für $V = 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $\dim V > 0$ und die Aussage gelte für alle kleineren Dimensionen.
Behauptung. Es gibt ein $v \in V$ mit $\beta(v, v) \neq 0$.

Beweis. Es sei q die zu β gehörige quadratische Form. Da $V \neq 0$ gibt es ein $u \in V$ mit $u \neq 0$, und da β nicht-entartet ist, gibt es ein $w \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$. Da $\operatorname{char} K \neq 2$ können wir eine Polarisationsformel nutzen um
$$0 \neq \beta(u, w) = \frac{q(u + w) - q(u) - q(w)}{2}$$
zu erhalten. Also ist $q(u + w) \neq 0$, $q(u) \neq 0$ oder $q(w) \neq 0$. □

Wir wählen nun $v_1 \in V$ mit $\beta(v_1, v_1) \neq 0$. Die Einschränkung $\beta_{U \times U}$ ist für $U := \mathcal{L}(v_1)$ nicht-entartet, denn ist $u \in U$ mit $u \neq 0$, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $\lambda \neq 0$ und $u = \lambda v_1$, weshalb
$$\beta(u, v_1) = \beta(\lambda v_1, v_1) = \lambda \beta(v_1, v_1) \neq 0.$$
Nach Proposition 2 ist deshalb $V = U \oplus U^\perp = \mathcal{L}(v_1) \oplus U^\perp$ und $\beta_{U^\perp \times U^\perp}$ nicht-entartet. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Basis $\mathcal{C} = (v_2, \dots, v_n)$ von $\mathcal{L}(v_1)^\perp$, so dass
$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta_{\mathcal{L}(v_1)^\perp \times \mathcal{L}(v_1)^\perp}) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n, \end{pmatrix}$$
wobei $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Da $V = \mathcal{L}(v_1) \oplus \mathcal{L}(v_1)^\perp$ ist $\mathcal{B} := (v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Basis von V, und da die Summe orthogonal ist, ergibt sich mit $\lambda_1 := \beta(v_1, v_1)$, dass
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta_{\mathcal{L}(v_1)^\perp \times \mathcal{L}(v_1)^\perp}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n, \end{pmatrix}.$$

2. Es sei $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so dass $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\beta)$ in Diagonalgestalt mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ist, wobei $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Da K quadratisch abgeschlossen ist, gibt es für jedes $i = 1, \dots, n$ einen Skalar $\mu_i \in K$ mit $\mu_i^2 = \lambda_i$; man beachte, dass $\mu_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Basis $\mathcal{B} := (\mu_1^{-1} v_1, \dots, \mu_n^{-1} v_n)$ leistet nun das Gewünschte. □

Definition 4. *Es sei V ein K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V heißt* orthonormal *bezüglich β, falls $\beta(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.*

Bemerkung 5. 1. Besitzt ein K-Vektorraum V bezüglich einer symmetrischen Bilinearform $\beta\colon V \times V \to K$ eine Orthonormalbasis $(v_i)_{i \in I}$, so ist β nicht-entartet. Ist nämlich $v \in V$ mit $\beta(v, v') = 0$ für alle $v' \in V$, so lässt sich v als Linearkombination $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ darstellen, und da

$$\lambda_j = \sum_{i \in I} \lambda_i \delta_{ij} = \sum_{i \in I} \lambda_i \beta(v_i, v_j) = \beta\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, v_j\right) = \beta(v, v_j) = 0 \quad \text{für alle } j \in I$$

ist bereits $v = 0$.

2. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich einer symmetrischen Bilinearform $\beta\colon V \times V \to K$, so gilt für die zugehörige quadratische Form q und $v \in V$ mit Linearkombination $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, dass

$$\begin{aligned} q(v) = \beta(v, v) = \beta\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, \sum_{j \in I} \lambda_j v_j\right) \\ = \sum_{i,j \in I} \lambda_i \lambda_j \beta(v_i, v_j) = \sum_{i,j \in I} \lambda_i \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i \in I} \lambda_i^2. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt die Bilinaerität von β genutzt.

Um quadratische Aussagen in bilineare zu übersetzen, nutzen wir das folgende Lemma:

Lemma 6. *Es sei K ein Körper mit* char $K \neq 2$. *Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es seien $\beta\colon V \times V \to K$ und $\gamma\colon W \times W \to K$ zwei Bilinearformen, und $q\colon V \to K$ und $r\colon W \to K$ seien die assoziierten quadratischen Formen. Für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:*

1. *Es ist $r(f(v)) = q(v)$ für alle $v \in V$.*
2. *Es ist $\gamma(f(v_1), f(v_2)) = \beta(v_1, v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.*

Beweis. Angenommen, es ist $r(f(v)) = q(v)$ für alle $v \in V$. Nach einer Polarisationsformel ist dann für alle $v_1, v_2 \in V$ auch

$$\begin{aligned} \gamma(f(v_1), f(v_2)) &= \frac{r(f(v_1) + f(v_2)) - r(f(v_1)) - r(f(v_2))}{2} \\ &= \frac{r(f(v_1 + v_2)) - r(f(v_1)) - r(f(v_2))}{2} \\ &= \frac{q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)}{2} = \beta(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Gilt andererseits $\gamma(f(v_1), f(v_2)) = \beta(v_1, v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$, so ergibt sich für alle $v \in V$, dass $r(f(v)) = \gamma(f(v), f(v)) = \beta(v, v) = q(v)$. □

ii) Der geradedimensionale Fall

Zunächst sei X ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, wobei char $K \neq 2$ und K quadratisch abgeschlossen ist, so dass $\dim X$ gerade ist, und $q\colon X \to K$ eine nicht-entartete quadratische Form. Es sei $\beta\colon X \times X \to K$ die zu q gehörige Bilinearform; dass q nicht-entartet ist, bedeutet gerade, dass β nicht-entartet ist. Nach Theorem 3 gibt es eine Orthonormalbasis $(x_1, \ldots, x_{2n})$ von X bezüglich β.

Es sei V ein beliebiger n-dimensionaler K-Vektorraum. Wie in Aufgabe 3 gesehen ist $r\colon V \times V^* \to K$, $(v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$ die quadratische Form einer nicht-entarteten symmetrischen Bilinearform $\gamma\colon (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$. Nach Theorem 3 gibt es eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_{2n})$ von $V \times V^*$ bezüglich γ.

Es gibt nun einen eindeutigen Isomorphismus $\Phi\colon X \to V \times V^*$ mit $\Phi(x_i) = v_i$ für alle $i = 1, \ldots, 2n$. Es gilt

$$\gamma(\Phi(x_i), (x_j)) = \gamma(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \beta(x_i, x_j) \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Wegen der Linearität von Φ und Bilinearität von β und γ ergibt sich daraus, dass bereits $\gamma(\Phi(y_1), \Phi(y_2)) = \beta(y_1, y_2)$ für alle $y_1, y_2 \in X$. Nach Lemma 6 ist deshalb $r(\Phi(y)) = q(y)$ für alle $y \in X$. Also ist Φ ein Isomorphismus von quadratischen Räumen bezüglich q und r.

iii) Der ungeradedimensionale Fall

Es sei nun also X ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, so dass $\dim X$ ungerade ist, und q eine nicht-entartete quadratische Form auf X, sowie β die zu q assoziierte symmetrische Bilinearform auf X. Nach Theorem 3 gibt es eine Orthonormalbasis $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$ von X.

Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $r'\colon V \times V^* \to K$, $(v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$, so gibt es nach Aufgabe 2 und Theorem 3 eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = ((v_1, \varphi_1), \ldots, (v_{2n}, \varphi_{2n}))$ von $V \times V^*$ bezüglich der zu r' gehörigen symmetrischen Bilinearform γ'.

Dabei haben wir in Aufgabe 2 durch Interpolation gesehen, dass

$$\gamma'((w_1, \psi_1), (w_2, \psi_2)) = \frac{\psi_1(w_2) + \psi_2(w_1)}{2} \quad \text{für alle } (w_1, \psi_1), (w_2, \psi_2) \in V \times V^*.$$

Durch Interpolation ergibt sich analog zu Aufgabe 2, dass die zu $r\colon V \times V^* \times K \to K$, $(v, \varphi, \lambda) \mapsto \varphi(v) + \lambda^2 = r'(v, \varphi) + \lambda^2$ gehörige symmetrische Bilinearform γ durch

$$\gamma(w_1, \psi_1, \mu_1), (w_2, \psi_2, \mu_2)) = \frac{\psi_1(w_2) + \psi_2(w_1)}{2} + \mu_1\mu_2 = \gamma'((w_1, \psi_1), (w_2, \psi_2)) + \mu_1\mu_2$$

gegeben ist.

Indem wir den Isomorphismus $((V \times V^*) \times K) \to V \times V^* \times K$, $((v, \varphi), \lambda) \mapsto (v, \varphi, \lambda)$ nutzen, sehen wir, dass sich aus $\mathcal{B}$ eine Basis $\mathcal{C} := ((v_1, \varphi_1, 0), \ldots, (v_{2n}, \varphi_{2n}, 0), (0, 0, 1))$ von $V \times V^* \times K$ ergibt. Man bemerke, dass $\mathcal{C}$ eine Orthonormalbasis von $V \times V^* \times K$ bezüglich γ ist: Dass $((v_1, \varphi_1, 0), \ldots, (v_{2n}, \varphi_{2n}, 0))$ orthonormal ist, folgt daraus, dass

$$\gamma((v_i, \varphi_i, 0), (v_j, \varphi_j, 0)) = \underbrace{\gamma'((v_i, \varphi_i, (v_j, \varphi_j))}_{=\delta_{ij}} + 0^2 = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, 2n.$$

Dass $(0,0,1)$ bezülich γ orthogonal zu den üblichen $2n$ Basiselementen ist, ergibt sich daraus, dass

$$\gamma((v,\varphi,0),(0,0,1)) = \gamma'((v,\varphi),(0,0)) + 0\cdot 1 = 0 + 0 = 0 \quad \text{für alle } (v,\varphi) \in V \times V^*,$$

und die Normiertheit von $(0,0,1)$ bezüglich γ ergibt sich durch direktes Nachrechnen:

$$\gamma((0,0,1),(0,0,1)) = \gamma'((0,0),(0,0)) + 1\cdot 1 = 0 + 1 = 1.$$

Für den eindeutige Isomorphismus $\Phi\colon X \to V \times V^* \times K$ mit $\Phi(x_i) = (v_i, \varphi_i, 0)$ für alle $i = 1,\dots,2n$ und $\Phi(x_{2n+1}) = (0,0,1)$ ergibt sich nun analog zum geradedimensionalen Fall zunächst, dass $\gamma(\Phi(y_1),\Phi(y_2)) = \beta(y_1,y_2)$ für alle $y_1, y_2 \in X$, und daraus dann mit Lemma 6, dass Φ ein Isomorphismus von quadratischen Räumen ist.

Aufgabe 5

Die nicht-entartete symmmetrische Bilinearform β korrespondiert zu einem Isomorphismus

$$B\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \beta(-,v).$$

Dass eine Endomorphismus $g\colon V \to V$ bezüglich β adjungiert zu einem Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist, dass also

$$\beta(f(v_1),v_2) = \beta(v_1, g(v_2)) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

ist äquivalent dazu, dass

$$B(v_2)(f(v_1)) = B(g(v_2))(v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Mithilfe der zu f dualen Abbildung $f^T\colon V^* \to V^*, \varphi \mapsto \varphi \circ f$ lässt sich diese Bedingung zu

$$f^T(B(v_2))(v_1) = B(g(v_2))(v_1) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V$$

umschreiben, also zu

$$f^T(B(v_2)) = B(g(v_2)) \quad \text{für alle } v_2 \in V,$$

und somit $f^T \circ B = B \circ g$. Also muss $g = B^{-1} f^T B$, was Existenz und Eindeutigkeit zeigt.

Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\beta(f^*(v_1),v_2) = \beta(v_2, f^*(v_1)) = \beta(f(v_2),v_1) = \beta(v_1, f^(v_2)),$$

also erfüllt f die definierende Eigenschaft von f^{**}.

Aufgabe 6

Es sei

$$I\colon V \to V^{**}, \quad v \mapsto e_v \quad \text{mit} \quad e_v(\varphi) = \varphi(v) \quad \text{für alle } \varphi \in V^*$$

der natürliche Isomorphismus von V nach V^{**}. Für $f\colon V \times V^* \to V \times V^*$ mit

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und $a\colon V \to V$, $b\colon V^* \to V$, $c\colon V \to V^*$, $d\colon V^* \to V^*$ gilt es zu zeigen, dass

$$g = \begin{pmatrix} I^{-1}d^*I & I^{-1}b^* \\ c^*I & a^*. \end{pmatrix},$$

der zu f bezüglich $\beta\colon (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$ mit

$$\beta((v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2)) = \frac{\varphi_1(v_2) + \varphi_2(v_1)}{2} \quad \text{für alle } (v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2) \in V \times V^*$$

adjungierte Endomorphismus ist; dass dieser existiert und eindeutig ist folgt aus Aufgabe 2 und Aufgabe 4. (Auf dem Zettel wurden die entsprechenden Identifikationen nicht explizit ausgeschrieben, wir tun dies hier aber.)

Für alle $(v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2) \in V$ ist auf der einen Seite

$$\begin{aligned} 2\beta(f(v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2)) &= 2\beta((a(v_1) + b(\varphi_1), c(v_1) + d(\varphi_1)), (v_2, \varphi_2)) \\ &= (c(v_1) + d(\varphi_1))(v_2) + \varphi_2((a(v_1) + b(\varphi_1))) \\ &= c(v_1)(v_2) + d(\varphi_1)(v_2) + \varphi_2(a(v_1)) + \varphi_2(b(\varphi_1)) \end{aligned}$$

und auf der anderen Seite

$$\begin{aligned} &2\beta((v_1, \varphi_1), g(v_2, \varphi_2)) \\ &= 2\beta((v_1, \varphi_1), ((I^{-1}d^*I)(v_2) + (I^{-1}b^*)(\varphi_2), (c^*I)(v_2) + a^*(\varphi_2))) \\ &= \varphi_1((I^{-1}d^*I)(v_2) + (I^{-1}b^*)(\varphi_2)) + ((c^*I)(v_2) + a^*(\varphi_2))(v_1) \\ &= \varphi_1((I^{-1}d^*I)(v_2)) + \varphi_1((I^{-1}b^*)(\varphi_2)) + (c^*I)(v_2)(v_1) + a^*(\varphi_2)(v_1). \end{aligned}$$

Der einzige Unterschied zwischen den beiden Summen besteht darin, dass der Isomorphismus I und das Dualisieren $(-)^*$ einer Abbildung genutzt wurden, um die einzelnen Summanden umzuschreiben. Dabei haben wir für alle $v \in V$ und $\varphi \in V^*$, dass

$$\begin{aligned} \varphi((I^{-1}d^*I)(v)) &= \varphi(I^{-1}(d^*(I(v)))) = \varphi(I^{-1}(d^*(e_v)) = \varphi(I^{-1}(e_v d)) \\ &= I(I^{-1}(e_v d))(\varphi) = (e_v d)(\varphi) = e_v(d(\varphi)) = d(\varphi)(e), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang in die zweite Zeile nutzen, dass $\varphi(w) = e_w(\varphi) = I(w)(\varphi)$ für alle $w \in W$ und φ. Ähnlich erhalten wir für alle $\varphi, \psi \in V^*$, dass

$$\begin{aligned} \varphi((I^{-1}b^*)(\psi)) &= \varphi(I^{-1}(b^*(\psi))) = \varphi(I^{-1}(\psi b)) \\ &= I(I^{-1}(\psi b))(\varphi) = (\psi b)(\varphi) = \psi(b(\varphi)). \end{aligned}$$

Außerdem haben wir für alle $v, w \in V$, dass

$$(c^*I)(w)(v) = (c^*(I(w)))(v) = c^*(e_w)(v) = (e_w c)(v) = e_w(c(v)) = c(v)(w),$$

und für alle $v \in V$ und $\varphi \in V^*$, dass

$$a^*(\varphi)(v) = (\varphi a)(v) = \varphi(a(v)).$$

Damit sind insgesamt beide Summen gleich.

Aufgabe 7

Um zu Umgehen, dass Körper-Shenanigans wie die Charakteristik oder unendliche Dimension an den Gegenbeispielen Schuld sind, werden wir alle Gegenbeispiele über endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen konstruieren; dabei beschränken wir uns o.B.d.A. auf $\mathbb{C}^n$. Tatsächlich werden wir jeweils Gegenbeispiele für $\mathbb{C}^2$ angeben, die Herleitung funktioniert aber jeweils für allgemeines n.

Nach Theorem 3 wissen wir, dass jede nicht-entartete symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{C}^n$ eine Orthonormalbasis besitzt. Es genügt daher, die Standardbilinearform

$$\beta\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad \beta(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}^n$$

zu betrachten. Die Bilinearität ergibt sich durch einfaches Nachrechnen, dass β nicht entartet ist2 ergibt sich daraus, dass die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis bezüglich β ist.

Bemerkung 7. Die Standardbilinearform ist *nicht* mit dem Standardskalarprodukt zu verwechseln!

Für eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ bezeichne im Folgenden f^{ad} die β-adjungierte Abbildung zu f. Um die Aufgabenteile methodisch lösen zu können (statt wild herumzuraten) wollen wir zunächst das β-Adjungierte in Matrizenform beschreiben. Ist $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine lineare Abbildung und $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ die eindeutige Matrix mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, so gilt für die eindeutige Matrix $A^{\text{ad}} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $f^{\text{ad}}(x) = A^{\text{ad}}x$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, dass

$$A^{\text{ad}}_{ij} = \beta(e_i, A^{\text{ad}} e_j) = \beta(e_i, f^{\text{ad}}(e_j)) = \beta(f(e_i), e_j) = \beta(Ae_i, e_j) = A_{ji}$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Es ist also $A^{\text{ad}} = A^T$. Die symmetrischen Matrizen entsprechen also genau den β-selbstadjungierten Endomorphismen, und die schiefsymmetrischen Matrizen entsprechen genau den β-schiefsymmetrischen Matrizen.

i)

Es genügt eine Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $A \neq 0$ zu finden, die symmetrisch und nilpotent ist. Man beachte, dass A nicht reell seien darf, denn sonst wäre A als reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar, kann also wegen $A \neq 0$ nicht nilpotent sein. Dass $A \neq 0$ nilpotent ist, ist äquivalent dazu, dass die Jordannormal von A durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, d.h. es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit

$$A = S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Wir wollen also S so wählen, dass die Matrix auf der rechten Seite symmetrisch ist. Ist

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so ist

$$S^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

und somit

$$A = S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}.$$

Damit die rechte Seite symmetrisch ist, wählen wir $c = i$ und $a = 1$. Wir wählen außerdem $d = 1/2$ und $b = i/2$, damit $\det S = ad - bc = 1$. Wir erhalten damit die symmetrische, nilpotente Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Damit ist $f \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto Ax$ ein nilpotenter, β-selbstadjungierter Endomorphismus mit $f \neq 0$.

ii)

Hierfür habe ich noch kein Beispiel gefunden.

iii)

Wir betrachten den Endomorphismus $f \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto Ax$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist also f der Endomorphismus, der e_2 auf e_1 schiebt, und e_1 auf 0. Das Adjungierte f^{ad} ist durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A^{\mathrm{ad}} = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Also ist f^{ad} der Endomorphismus, der e_1 auf e_2 schiebt, und e_2 auf 0. (Man kann auch direkt sehen, dass f^{ad} so aussehen muss: f wirkt auf $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, indem es die Koordinaten nach rechts schiebt. Da β durch eintragsweisen Multiplizieren funktioniert, ist ein Rechtsshift in einem Argument von β äquivalent zum Linksshift im anderen Argument.)

Betrachten man nun $U \coloneqq \mathcal{L}(e_1)$, so ist $U = \ker f$ invariant unter f. Da aber $f^{\mathrm{ad}}(e_1) = e_2 \notin U$ ist U nicht invariant unter f^{ad}.