Lösungen zu Zettel 11

Jendrik Stelzner

13. Juli 2016

Wir erinnern zunächst an das folgende Lemma, das im Tutorium bereits gezeigt wurde:

Lemma 1. *Es seien $u, v \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren, die jeweils lichtartig oder zeitartig sind (d.h. es ist $\beta(u,u) \leq 0$ und $\beta(v,v) \leq 0$). Dann enthält die Ebene $\mathcal{L}(u,v)$ einen raumartigen Vektor.*

Beweis. Es sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ eine Sylvesterbasis von V mit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

und es seien $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ und $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ mit $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$. Da $u \neq 0$ gibt es ein $i \in \{1,2,3\}$ mit $u_i \neq 0$; da

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = \beta(u,u) \leq 0$$

muss auch $u_3 \neq 0$. Es sei

$$w := v - \frac{v_3}{u_3} u \in \mathcal{L}(u,v).$$

Es ist $w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$ mit $w_i = u_i - v_3 u_i / u_3$ für alle $i = 1,2,3$; insbesondere ist $w_3 = 0$. Da u und v linear unabhängig sind, ist aber auch $w \neq 0$, und somit $w_1 \neq 0$ oder $w_2 \neq 0$. Damit haben wir

$$\beta(w,w) = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 = w_1^2 + w_2^2 > 0,$$

weshalb w raumartig ist. □

Aufgabe 1

i)

Wir bemerken zunächst, dass die Bedingung, dass $\beta|_{X \times X}$ nichtentartet ist, unnötig ist:

Lemma 2. *Es sei $X \subseteq V$ ein zweidimensionaler Untervektorraum, so dass $\beta|_{X\times X}$ vom Typ $(1,1)$ ist. Dann ist $\beta|_{X\times X}$ nichtentartet.*

Beweis. Da $\beta|_{X\times X}$ vom Typ $(1,1)$ ist, und $1+1=2=\dim X$, gibt es eine Sylvesterbasis $\mathcal{B}=(b_1,b_2)$ von X, so dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta|_{X\times X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix keine Nullen auf der Diagonalen hat, ist $\beta|_{X\times X}$ nichtentartet. □

Wir zeigen daher im Folgenden, dass für einen zweidimensionalen Untervektorraum $X \subseteq V$ genau dann $\mathfrak{H} \cap X \neq \emptyset$, wenn $\beta|_{X\times X}$ den Typ $(1,1)$ hat.

Wenn $\beta|_{X\times X}$ den Typ $(1,1)$ hat, dann gibt es eine Sylvesterbasis (b_1,b_2) von X mit $\beta(b_1,b_1)=1$ und $\beta(b_2,b_2)=-1$ (sowie $\beta(b_1,b_2)=0$). Insbesondere gilt $b_2 \in \mathfrak{H}_\pm$ und somit entweder $b_2 \in \mathfrak{H}$ oder $-b_2 \in \mathfrak{H}$, also $b_2 \in \mathfrak{H} \cap X$ oder $-b_2 \in \mathfrak{H} \cap X$. Es gilt aber auf jeden Fall $\mathfrak{H} \cap X \neq \emptyset$.

Angenommen, es ist $\mathfrak{H} \cap X \neq \emptyset$. Es sei $b \in \mathfrak{H} \cap X \neq 0$. Da $b \in \mathfrak{H}$ ist $\beta(b,b)=-1$. Für den Typen von $\beta|_{X\times X}$ gibt es wegen der Zweidimensionalität von X a priori sechs Möglichkeiten: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$ oder $(0,2)$.

Die Fälle $(0,0)$, $(1,0)$ und $(2,0)$ können wir ausschließen, denn sonst wäre $\beta|_{X\times X}$ positiv semidefinit, was $\beta(b,b)=-1$ widerspricht.

In den Fällen $(0,1)$ und $(0,2)$ wäre $\beta|_{X\times X}$ negativ semidefinit; eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von X würde dann aus licht- oder zeitartigen Vektoren bestehen, weshalb X nach Lemma 1 einen raumartigen Vektor enthälten müsste. Dies stünde dann aber im Widerspruch zur negativen Semidefinitheit von $\beta|_{X\times X}$.

Es bleibt also nur noch die Möglichkeit $(1,1)$ übrig.

ii)

Die entscheidende Beobachtung ist, dass x und y linear unabhängig sind:

Lemma 3. *Je zwei Elemente $x,y \in \mathfrak{H}$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Nach Aufgabe 2 ist $\beta(x,y) < -1$, da sich x und y beide in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{H}_\pm$ befinden, nämlich in $\mathfrak{H}$. Deshalb ist

$$\beta(u,v)^2 > (-1)^2 = (-1)(-1) = \beta(u,u)\beta(v,v),$$

weshalb die lineare Unabhängigkeit aus Aufgabe 1 folgt, da u und v beide zeitartig sind. □

Ist $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{H}$ eine Gerade, die x und y enthält, so gibt es einen zweidimensionalen Untervektorraum $X \subseteq V$ mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{H} \cap X$. Da die zweidimensionale Ebene X die beiden linear unabhängigen Vektoren u und v enthält, muss bereits $X = \mathcal{L}(u,v)$. Somit ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{H} \cap \mathcal{L}(x,y)$ die eindeutige Gerade, die x und y enthält.

Aufgabe 2

i)

Wegen der Bilinearität von β ist $\beta(x,-)\colon V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \beta(x,v)$ eine lineare Abbildung. Es gilt $\beta(x,-) \neq 0$, da $\beta(x,-)(x) = \beta(x,x) = -1$. Folglich ist $\operatorname{im}\beta(x,-)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}$, der nicht der Nullvektorraum ist; es muss $\operatorname{im}\beta(x,-) = \mathbb{R}$ gelten. Damit ergibt sich, dass $T_x = \ker\beta(x,-)$ ein Untervektorraum von V ist, und nach der Dimensionsformel ist

$$\dim T_x = \dim\ker\beta(x,-) = \dim V - \dim\operatorname{im}\beta(x,-) = 3 - 1 = 2.$$

Um zu zeigen, dass $\beta|_{T_x \times T_x}$ ein Skalarprodukt ist, zeigen wir für $v \in T_x$ mit $v \neq 0$, dass $\beta(v,v) > 0$. Hierfür nehmen wir an, dass $\beta(v,v) \leq 0$, dass also v licht- oder zeitartig ist.

Wir bemerken, dass x und v linear unabhängig sind; ansonsten wäre nämlich $v = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$, weshalb $\beta(v,x) = \beta(\lambda x, x) = \lambda\beta(x,x) = -\lambda \neq 0$ wäre. (Für diese Beobachtung haben wir genutzt, dass $v \neq 0$.)

Nach Aufgabe 1 ist nun

$$0 = \beta(x,v)^2 > \beta(x,x)\beta(v,v) = -\beta(v,v).$$

Dabei haben wir in der ersten Gleichung genutzt, dass $v \in T_x$ und somit $\beta(x,v) = 0$, und für die Striktheit der Ungleichung nutzen wir, dass x und v linear unabhängig sind. Nach der obigen Gleichskette ist nun $\beta(v,v) > 0$, im Widerspruch zur Annahme $\beta(v,v) \leq 0$. Also musst bereits $\beta(v,v) > 0$ gelten.

Aufgabe 3

Wir zeigen als erstes, dass das angegebene Element

$$\mathfrak{t} := \frac{B - \cosh(c)A}{\sinh(c)}$$

die gewünschten Eigenschaften hat. Das zeigt inbesondere die Existenz von $\mathfrak{t}_{AB}$. Anschließend zeigen wir die Eindeutigkeit von $\mathfrak{t}_{AB}$; dann folgt insbesondere, dass $\mathfrak{t}_{AB} = \mathfrak{t}$.

Es ist klar, dass $\mathfrak{t} \in \mathcal{L}(A,B)$, und dass $1\sinh(c) > 0$. Man bemerke, dass $\cosh(c) = \cosh(\operatorname{arccosh}(-\beta(A,B))) = -\beta(A,B)$ Deshalb ist

$$\beta(\mathfrak{t}, A) = \beta(\frac{B - \cosh(c)A}{\sinh(c)}, A) = \frac{\beta(B,A) - \cosh(c)\beta(A,A)}{\sinh(c)} = \frac{\beta(A,B) - \beta(A,B)}{\sinh(c)} = 0,$$

also $\mathfrak{t} \in T_A$. Da $\sinh(c)^2 = \cosh(c)^2 - 1$ und deshalb

$$\begin{aligned}
\beta(\mathfrak{t},\mathfrak{t}) &= \beta\left(\frac{B - \cosh(c)A}{\sinh(c)}, \frac{B - \cosh(c)A}{\sinh(c)}\right) \\
&= \frac{\beta(B,B) - 2\cosh(c)\beta(A,B) + \cosh(c)^2\beta(A,A)}{\cosh(c)^2 - 1} \\
&= \frac{-1 - 2(-\beta(A,B))\beta(A,B) + \beta(A,B)^2(-1)}{\beta(A,B)^2 - 1} = \frac{\beta(A,B)^2 - 1}{\beta(A,B)^2 - 1} = 1.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{t}$ normiert. Somit erfüllt $\mathfrak{t}$ alle geforderten Eigenschaften.

Es sei nun $\mathfrak{t}_{AB}$ ein weiterer Vektor, der alle angegebenen Eigenschaften erfüllt. Der Untervektorraum $\mathcal{L}(A, B) \subseteq V$ ist zweidimensional nach Lemma 3 zweidimensional. Der Untervektorraum $U := \{t \in \mathcal{L}(A, B) \mid \beta(t, A) = 0\} = \mathcal{L}(A, B) \cap T_A$ ist eindimensional: Da $\mathfrak{t} \in U$ ist $U \neq 0$ und somit $\dim U \geq 1$, da aber $A \notin U$ ist $U \subsetneq \mathcal{L}(A, B)$ und somit $\dim U < \dim \mathcal{L}(A, B) = 2$. Da $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_{AB}$ zwei bezüglich $\beta|_{U \times U}$ normierte Vektoren des eindimensionalen Vektorraums U sind, muss $\mathfrak{t}_{AB} = \pm\mathfrak{t}$. Wäre $\mathfrak{t}_{AB} = -\mathfrak{t}$, so wäre $\mathfrak{t}_{AB} = (-B + \cosh(c)A)/\sinh(c)$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von A und B wäre diese Linearkombination von A und B eindeutig; der Koeffizient $-1/\sinh(c)$ von B ist aber negativ, im Widerspruch zur Definition von B. Also muss bereits $\mathfrak{t}_{AB} = \mathfrak{t}$ gelten, was die Eindeutigkeit zeigt.