Definitionen der direkten Summe

Jendrik Stelzner

13. Mai 2016

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1 Die Definition der direkten Summe

Proposition 1. *Es sei V ein K-Vektorraum und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $V_i \subseteq V$, so dass $V = \sum_{i \in I} V_i$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Für jedes $v \in V$ ist die Darstellung $v = \sum_{i \in I} v_i$ mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in I$ eindeutig.*
2. *Ist $0 = \sum_{i \in I} v_i$ mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in I$, so ist bereits $v_i = 0$ für jedes $i \in I$.*
3. *Für jedes $j \in I$ ist $V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = 0$.*
4. *Ist W ein beliebiger K-Vektorraum und $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von linearen Abbildungen $f_i \colon V_i \to W$, so gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $f \colon V \to K$ mit $f|_{V_i} = f_i$ für jedes $i \in I$.*

Bemerkung 2. 1. Ist die Indexmenge I endlich, etwa $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, so schreibt man auch

$$V = V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_n}$$

statt $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$. Die gewählte Reihenfolge der Indizes $i_1, \dots, i_n$ spielt dabei keine Rolle.

2. Für zwei Untervektorräume $V_1, V_2 \subseteq V$ gilt insbesondere

$$V = V_1 \oplus V_2 \iff V = V_1 + V_2 \text{ und } V_1 \cap V_2 = 0.$$

Beweis. ($3 \implies 2$) Es sei $0 = \sum_{i \in I} v_i$ mit $v_i \in V_i$ für jedes $i \in I$. Für jedes $j \in I$ ist dann

$$V_j \ni v_j = \sum_{i \neq j} (-v_i) \in \sum_{i \neq j} V_i,$$

also $v_j \in V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = 0$. Somit ist $v_j = 0$ für jedes $j \in I$.

($2 \implies 1$) Es seien $\sum_{i \in I} v_i = \sum_{i \in I} v'_i$ zwei entsprechende Darstellungen. Dann ist $\sum_{i \in I}(v_i - v'_i)$ eine entsprechende Darstellung von 0. Nach Annahme ist $v_i - v'_i = 0$ für jedes $i \in I$, also $v_i = v'_i$ für jedes $i \in I$.

($1 \implies 4$) Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit: Hierfür sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit $f|_{V_i} = f_i$ für jedes $i \in I$. Ist $v \in V$, so gibt es eine Darstellung $v = \sum_{i \in I} v_i$ mit $v_i \in V_i$ für jedes $i \in I$. Es ist dann

$$f(v) = f\left(\sum_{i \in I} v_i\right) = \sum_{i \in I} f(v_i) = \sum_{i \in I} f|_{V_i}(v_i) = \sum_{i \in I} f_i(v_i).$$

Also ist f durch die Familie $(f_i)_{i \in I}$ schon eindeutig bestimmt.

Nun zeigen wir die Existenz: Ist $v \in V$, so ist $v = \sum_{i \in I} v_i$ mit $v_i \in V_i$ für jedes $i \in I$. Wir setzen

$$f(v) \coloneqq \sum_{i \in I} f_i(v_i).$$

Da $v_i = 0$ für fast alle $i \in I$ ist auch $f_i(v_i) = 0$ für fast alle $i \in I$, also die rechte Seite der obigen Gleichung wohldefiniert. Da die genutzte Darstellung $v = \sum_{i \in I} v_i$ nach Annahme eindeutig ist, erhalten wir eine wohldefinierte Funktion $f\colon V \to W$.

Die Abbildung f ist linear: Sind $v, v' \in V$ mit eindeutigen Darstellungen $v = \sum_{i \in I} v_i$ und $v' = \sum_{i \in I} v'_i$, so ist $v + v' = \sum_{i \in I}(v_i + v'_i)$ die eindeutige Darstellung von $v + v'$, und somit

$$\begin{aligned} f(v + v') &= \sum_{i \in I} f_i(v_i + v'_i) = \sum_{i \in I} (f_i(v_i) + f_i(v'_i)) \\ &= \left(\sum_{i \in I} f_i(v_i)\right) + \left(\sum_{i \in I} f_i(v'_i)\right) = f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Also ist f additiv. Die Homogenität ergibt sich ähnlich: Ist $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung $v = \sum_{i \in I} v_i$ und $\lambda \in K$, so ist $\lambda v = \sum_{i \in I}(\lambda v_i)$ die eindeutige Darstellung von λv, und deshalb

$$f(\lambda v) = \sum_{i \in I} f_i(\lambda v_i) = \sum_{i \in I} (\lambda f_i(v_i)) = \lambda \sum_{i \in I} f_i(v_i) = \lambda f(v).$$

Also ist f homogen.

($4 \implies 3$) Für fixiertes $j \in I$ betrachten wir die Familie $(f_i)_{i \in I}$ von linearen Abbildungen $f_i\colon V_i \to V$ mit

- $f_i = 0$ für alle $i \neq j$, und
- $f_j \colon V_j \to V$, $v \mapsto v$ ist die kanonische Inklusion.

Nach Annahme gibt es eine lineare Abbildung $f \colon V \to V$ mit $f|_{V_i} = f_i$ für jedes $i \in I$. Da $f_i = 0$ für alle $i \neq j$ ist $f|_{V_i} = 0$ für alle $i \neq j$, und somit auch $f|_{\sum_{j \neq i} V_i} = 0$. Für alle $v \in V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i$ ist deshalb

$$v = f_j(v) = f|_{V_j}(v) = f(v) = f|_{\sum_{i \neq j} V_i}(v) = 0.$$

Also ist $V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = 0$. □

Definition 3. *Es sei V ein K-Vektorraum und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $V_i \subseteq V$. Ist $V = \sum_{i \in I} V_i$ und eine (und damit alle) der Bedingungen von Proposition 1 erfüllt, so heißt V die* (innere) direkte Summe *der Untervektorräume V_i. Dies wird mit $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ notiert.*

Bemerkung 4. Für eine Familie von K-Vektorräumen $(V_i)_{i \in I}$ (wobei die V_i nicht notwendigerweise Untervektorräume eines gemeinsamen Vektorraums V sind) gibt es auch den Begriff der *äußeren direkten Summe* $\bigoplus_{i \in I} V_i$. Mit diesem Begriff werden wir uns hier aber nicht beschäftigen.

Lemma 5. *Es sei V ein K-Vektorraum und $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen $E_i \subseteq V$. Dann ist*

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{i \in I} \mathcal{L}(E_i).$$

Beweis. Für alle $j \in I$ ist

$$E_j \subseteq \mathcal{L}(E_j) \subseteq \sum_{i \in i} \mathcal{L}(E_i).$$

Deshalb ist auch $\bigcup_{j \in I} E_j \subseteq \sum_{i \in I} \mathcal{L}(E_i)$. Da $\sum_{i \in I} \mathcal{L}(E_i)$ ein Untervektorraum von V ist, ergibt sich daraus, dass

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{j \in I} E_j\right) \subseteq \sum_{i \in I} \mathcal{L}(E_i).$$

Andererseits ist $E_i \subseteq \bigcup_{j \in I} E_j$ für jedes $i \in I$, und somit auch $\mathcal{L}(E_i) \subseteq \mathcal{L}(\bigcup_{j \in I} E_j)$ für jedes $i \in I$. Da $\mathcal{L}(\bigcup_{j \in I} E_j)$ ein Untervektorraum von V ist, ergibt sich daraus, dass

$$\sum_{i \in I} \mathcal{L}(E_i) \subseteq \mathcal{L}\left(\bigcup_{j \in i} E_j\right).$$

□

Lemma 6. *Es sei V ein K-Vektorraum und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $V_i \subseteq V$. Für jedes $i \in I$ sei B_i eine Basis von V_i. Dann sind äquivalent:*

1. $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$

2. *Die Basen B_i sind disjunkt (d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$), und $\bigcup_{i \in I} B_i$ ist eine Basis von V.*

Beweis. Im Folgenden sei abkürzend $B := \bigcup_{i \in I} B_i$.

(1 $\implies$ 2) Für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ ist $B_i \subseteq V_i$ und $B_j \subseteq V_j \subseteq \sum_{k \neq i} V_k$ und somit

$$B_i \cap B_j \subseteq V_i \cap \sum_{k \neq i} V_k = \{0\}.$$

Die Basen B_i und B_j könnten also nur dann nicht-disjunkt sein, wenn $B_i \cap B_j = \{0\}$, wenn also $0 \in B_i$ und $0 \in B_j$. Da B_i und B_j linear unabhängig sind, enthalten sie den Nullvektor aber nicht. Somit ist $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Da $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ ist insbesondere $V = \sum_{i \in I} V_i$. Deshalb ist

$$\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \sum_{i \in I} \mathcal{L}(B_i) = \sum_{i \in I} V_i = V,$$

wobei wir für die zweite Gleichheit nutzen, dass B_i ein Erzeugendensystem von V_i ist. Das zeigt, dass B ein Erzeugendensystem von V ist.

Es sei nun $\sum_{b \in B} \lambda_b b = 0$ für Koeffizienten $\lambda_b \in K$. Da die Vereinigung $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ disjunkt ist, ergibt sich daraus

$$0 = \sum_{b \in B} \lambda_b b = \sum_{b \in \bigcup_{i \in I} B_i} \lambda_b b = \sum_{i \in I} \sum_{b \in B_i} \lambda_b b.$$

Dabei nutzen wir, dass die Summanden $\lambda_b b$ für fast alle $b \in B$ verschwinden, und somit das Aufteilen der Summe möglich ist. Setzen wir nun $v_i := \sum_{b \in B_i} \lambda_b b$ für alle $i \in I$, so erhalten wir

$$0 = \sum_{i \in I} v_i \quad \text{mit } v_i \in V_i \text{ für alle } i \in I.$$

Da $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ folgt aus der obigen Gleichung, dass $v_i = 0$ für alle $i \in I$. Es ist also $\sum_{b \in B_i} \lambda_b b = 0$ für alle $i \in I$. Da B_i jeweils eine Basis von B ist, folgt daraus, dass $\lambda_b = 0$ für alle $i \in I$ und $b \in B_i$. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass $\lambda_b = 0$ für alle $b \in \bigcup_{i \in I} B_i = B$. Das zeigt, dass B linear unabhängig ist. □

Korollar 7. *Ist V ein endlichdimenisonaler K-Vektorraum und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen mit $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, so ist $V_i = 0$ für fast alle $i \in I$ und*

$$\dim V = \sum_{i \in I} \dim V_i.$$

Beweis. Für jedes $i \in I$ sei $B_i \subseteq V_i$ eine Basis von V_i. Dann ist $B := \bigcup_{i \in I} B_i$ eine Basis von V, und die Vereinigung ist disjunkt. Da V endlichdimensional ist, ist B endlich. Wegen der

Disjunktheit der Vereinigung $B = \bigcup_{i \in I}$ muss deshalb $B_i = \emptyset$ für fast alle $i \in I$. Außerdem ist deswegen

$$\dim V = |B| = \sum_{i \in I} |B_i| = \sum_{i \in I} \dim V_i.$$

Dabei ergibt die Summe über I Sinn, da jeweils fast alle Summanden verschwinden. □

2 Konstruktionen von direkten Summen

Proposition 8. *Es sei V ein K-Vektorraum und $e\colon V \to V$ ein idempotenter Endomorphismus, d.h. es gilt $e^2 = e$. Dann gilt*

$$V = \ker e \oplus \operatorname{im} e.$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, dass $V = \ker e + \operatorname{im} e$ und $\ker e \cap \operatorname{im} e = 0$.

Es sei $v \in \ker e \cap \operatorname{im} e$. Da $v \in \operatorname{im} e$ gibt es $w \in V$ mit $v = e(w)$. Deshalb ist

$$v = e(w) = e^2(w) = e(e(w)) = e(v) = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt nutzen, dass $v \in \ker e$. Dies zeigt, dass $\ker e \cap \operatorname{im} e = 0$.

Für $v \in V$ sei $v_2 \coloneqq e(v)$ und $v_1 \coloneqq v - v_2$. Dann ist $v_2 \in \operatorname{im} e$, und da

$$e(v_1) = e(v - v_2) = e(v) - e(v_2) = e(v) - e(e(v)) = e(v) - e^2(v) = e(v) - e(v) = 0$$

ist $v_1 \in \ker e$. Da $v = v_1 + v_2$ ist $v \in \ker e + \operatorname{im} e$. Dies zeigt, dass $V = \ker e + \operatorname{im} e$. □