Übungen zu Lineare Algebra II

Jendrik Stelzner

24. Juni 2016

Übung 1.
Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *lokal nilpotent*, falls es für jedes $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(v) = 0$ gibt.

1. Zeigen Sie, dass jeder nilpotente Endomorphismus auch lokal nilpotent ist.
2. Zeige Sie, dass 0 der einzige mögliche Eigenwert eines lokal nilpotenten Endomorphismus ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ an, so dass f zwar lokal nilpotent, nicht aber nilpotent ist.
4. Zeigen Sie, dass jeder lokal nilpotente Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums bereits nilpotent ist.

Übung 2.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. Ist $f^2 = f$, so ist $V = \operatorname{im} f \oplus \ker f$, und es gilt $\operatorname{im} f = V_1(f)$ und $\ker f = V_0(f)$.
2. Ist $f^2 = \mathrm{id}_V$ und $\operatorname{char} K \neq 2$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten 1 und -1.
3. Sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$ und $(f-\lambda)(f-\mu) = 0$, so ist f diagonalisierbar mit (möglichen) Eigenwerten λ und μ. Inwiefern sind die vorherigen beiden Aufgabenteile Sonderfälle hiervon?

Übung 3.
Zeigen Sie im folgenden jeweils, dass der Vektorraum V die direkte Summe der Untervektorräume U_1 und U_2 ist, indem sie einen idempotenten Endomorphisus $e\colon V \to V$ mit $U_1 = \operatorname{im} e$ und $U_2 = \ker e$ angeben.

1. Es sei char $K \neq 2$, $V := \mathrm{M}_n(K)$ der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über K,

$$U_1 := \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = A\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und

$$U_2 := \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid A^T = -A\}$$

der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

2. Es sei $V := \{f \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der reellwertigen Folgen auf $\mathbb{R}$, sowie

$$U_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der geraden Funktionen und

$$U_2 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der ungeraden Funktionen.

3. Die Ebene $V = \mathbb{R}^2$ und als Untervektorräume die beiden Geraden

$$U_1 := \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Für char $K \neq 2$ und einen Vektorraum W sei

$$V := \{b \colon W \times W \to K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Vektorraum der Bilinearformen auf W. Es sei

$$U_1 := \{s \in V \mid s \text{ ist symmetrisch}\}$$

der Untervektorraum der symmetrischen Bilinearformen, und

$$U_2 := \{a \in V \mid a \text{ ist alternierend}\}$$

der Untervektorraum der alternierenden Bilinearformen.

5. Der Vektorraum $V := \mathbb{C}(I, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$ mit den Untervektorräumen

$$U_1 := \{f \in V \mid f(0) = 0\} U_2 := \{f \in V \mid f \text{ ist konstant}\}.$$

6. Es sei erneut $V := \mathbb{C}(I, \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$. Es sei nun

$$U_1 := \{f \in V \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

der Untervektorraum der Funktion mit Nullrandwerten, und

$$U_2 := \{h_{x,y} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

der Untervektorraum der affin-linearen Funktionen, wobei

$$h_{x,y} \colon I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto (1-t)x + ty = x + t(y-x)$$

die affin lineare Funktion mit den Randwerten x und y ist. (*Hinweis*: Es hilft, sich diese Zerlegung anschaulich vorzustellen.)

7. Für einen Körper mit char $K \nmid n$ die Zerlegung von $V := \mathrm{M}_n(K)$ in die Untervektorräume

$$U_1 := \mathfrak{sl}(K) = \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid \operatorname{tr} A = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := KI = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$$

der spurlosen Matrizen und der Skalarmatrizen.

8. Es sei V ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu \in K$ und $U_1 := V_\lambda(f)$ und $U_2 := V_\mu(f)$.

Übung 4.
Es seien V ein K-Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass sich durch jeden idempotenten Endomorphismus $e \colon V \to V$ (d.h. $e^2 = e$) eine Zerlegung
$$V = \operatorname{im} e \oplus \ker e$$
ergibt, wobei
$$e(v + w) = v \quad \text{für alle } v \in \operatorname{im} e \text{ und } w \in \ker e.$$

2. Es sei (U_1, U_2) ein Paar von Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Endomorphismus $p_{U_1,U_2} \colon V \to V$ gibt, so dass
$$p_{U_1,U_2}(u_1 + u_2) = u_1 \quad \text{für alle } u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2.$$

3. Zeigen Sie, dass die obigen Konstruktionen eine Bijektion
$$\left\{ (U_1, U_2)a \,\middle|\, \begin{array}{c} U_1, U_2 \subseteq V \text{ sind} \\ \text{Untervektorräume} \\ \text{mit } V = U_1 \oplus U_2 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{e \in \operatorname{End}(V) \mid e \text{ ist idempotent}\},$$
$$(U_1, U_2) \longmapsto p_{U_1,U_2}$$
$$(\operatorname{im} e, \ker e) \longleftarrow e$$
ergeben.

4. Auf der linken Seite der obigen Bijektion gibt es eine Involution $(U_1, U_2) \mapsto (U_2, U_1)$. Geben Sie an, wie die entsprechende Involution auf der rechten Seite aussieht.

Übung 5.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie für $\operatorname{char} K \neq 2$, dass f diagonalisierbar mit möglichen Eigenwerten 1 und -1 ist.

2. Zeigen Sie, dass die Aussage für $\operatorname{char} K = 2$ nicht mehr gelten muss.

Übung 6.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume, und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, die ein Rechtsinverses $g\colon W \to V$ besitzt. Zeigen Sie, dass

$$V = \ker f \oplus \operatorname{im} g$$

auf die folgenden beiden Weisen:

1. Durch explizites Nachrechnen, dass $V = \ker f + \operatorname{im} g$ und $\ker f \cap \operatorname{im} g = 0$.

2. Mithilfe des Endomorphismus $gf\colon V \to V$.

Übung 7.
Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen allgemein gelten, oder geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

1. Ist $V = V_1 \oplus V_2$ für Untervektorräume $V_1, V_2 \subseteq V$, so gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Zerlegung
$$U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2).$$

2. Ist $V = U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$ mit $W_1 \supseteq W_2$, so ist
$$W_1 = (U_2 \cap W_1) \oplus W_2.$$

3. Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $U \subseteq V$ ein f-invarinter Untervektorraum, so gibt es einen f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

4. Für alle Untervektorräume $W, U_1, U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt
$$(U_1 + W) \cap U_2 = U_1 + (W \cap U_2).$$

5. Ist $\mathcal{E} \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist die Einschränkung $\mathcal{E}' \coloneqq \mathcal{E} \cap U$ ein Erzeugendensystem von U.

6. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Famlie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$ mit $V = \sum_{i \in I} U_i$ und $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$, so ist $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

Übung 8.
Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V heißt *algebraisch (über K)*, falls es ein Polynom $P \in K[T]$ mit $P \neq 0$ gibt, so dass $P(f) = 0$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums algebraisch ist.

2. Geben Sie ein Beispiel für einen K-Vektorraum V und einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ an, der nicht algebraisch ist.

Übung 9.
Es sei V ein Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von f-invarianten Untervektorräumen, und $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:

1. Auch der Schnitt $\bigcap_{i\in I} U_i$ ist f-invariant.

2. Auch die Summe $\sum_{i\in i} U_i$ ist f-invariant.

3. f induziert eine lineare Abbildung

$$\bar{f}\colon V/U \to V/U, \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

Übung 10.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein K-Untervektorraum. Konstruieren Sie für den Annihilator

$$U^\circ = \{\varphi \in V^* \mid \varphi|_U = 0\}$$

einen Isomorphismus $F\colon U^\circ \to (V/U)^*$.

Übung 11.
Es sei V ein K-Vektorraum mit zwei Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$. Zeigen Sie die folgenden beiden Isomorphiesätze:

1. Die Inklusion $U_1 \to U_1 + U_2$, $x \mapsto x$ induziert einen isomorphismus

$$U_1/(U_1 \cap U_2) \to (U_1 + U_2)/U_2, \quad [x] \mapsto [x] \quad \text{für alle } x \in V.$$

2. Ist $U_1 \subseteq U_2$, so ist U_2/U_1 ein Untervektorraum von V/U_1, und die Abbildung

$$(V/U_1)/(U_2/U_1) \to V/U_2, \quad [[x]] \mapsto [x] \quad \text{für alle } x \in V.$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus.

Übung 12.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. f ist diagonalisierbar.
2. Für jeden f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt es einen f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

Übung 13.
Es sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$R_k := \operatorname{im} f^k \quad \text{und} \quad N_k := \ker f^k.$$

1. Zeigen Sie, dass $R_0 = V$, und dass $R_i \supseteq R_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine absteigende Kette
$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq R_4 \supseteq \cdots$$
von Untervektorräumen.
2. Zeigen Sie für $i \in \mathbb{N}$ mit $R_i = R_{i+1}$, dass auch $R_{i+1} = R_{i+2}$.
3. Folgern Sie: Gilt in der obigen absteigenden Kette einmal Gleichheit, also $R_i = R_{i+1}$, so stabilisiert die Kette bereits, d.h. es gilt $R_j = R_i$ für alle $j \geq i$.
4. Zeigen Sie, dass $N_0 = 0$, und dass $N_i \subseteq N_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine aufsteigende Kette
$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq N_4 \subseteq \cdots$$
von Untervektorräumen.
5. Zeigen Sie, dass für $i \in \mathbb{N}$ mit $N_i = N_{i+1}$ auch $N_{i+1} = N_{i+2}$.
6. Folgern Sie: Gilt in der obigen aufsteigende Kette einmal Gleichheit, also $N_i = N_{i+1}$, so stabilisiert die Kette bereits, d.h. es gilt $N_j = N_i$ für alle $j \geq i$.

Übung 14.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $\pi\colon V \to V/U$, $v \mapsto [v]$ die kanonische Projektion.

1. Es sei $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, und für eine Teilmenge $J \subseteq I$ sei $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von U. Zeigen Sie, dass $([b_i])_{i\in I\smallsetminus J}$ eine Basis von V/U ist.
2. Es sei $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von U und $(c_j)_{j\in J}$ eine Basis von V/U, wobei $I \cap J = \emptyset$. Für $j \in J$ sei $b_j \in V$ mit $\pi(b_j) = c_j$. Zeigen Sie, dass $(b_l)_{l\in L}$ für $L := I \cap J$ ist eine Basis von V ist.

Übung 15.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $f|_U = 0$. Zeigen Sie, dass V eine lineare Abbildung
$$\bar{f}\colon V/U \to W, \quad [v] \mapsto f(u)$$
induziert.

2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} \bar{f} = \operatorname{im} f$. Folgern Sie, dass $\bar{f}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

3. Zeigen Sie, dass $U \subseteq \ker f$, und dass $\ker \bar{f} = (\ker f)/U$. Folgern Sie, dass $\bar{f}$ genau dann injektiv ist, wenn bereits $U = \ker f$ gilt.

4. Folgern Sie, dass f einen Isomorphismus
$$V/(\ker f) \to \operatorname{im} f, \quad [v] \mapsto f(v)$$
induziert.

Übung 16.
Es sei V ein K-Vektorraum mit Erzeugendensystem $E \subseteq V$. Es sei W ein K-Vektorraum mit Basis $\{b_e\}_{e \in E} \subseteq W$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $V/U \to W$ für einen passenden Untervektorraum $U \subseteq W$.

Übung 17.
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es seien $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, so dass U invariant unter f ist (d.h. es ist $f(U) \subseteq U$).

1. Zeigen Sie, dass f einen Endomorphismus
$$\bar{f}\colon V/U \to V/U, \quad [v] \mapsto [f(v)]$$
induziert.

Es sei nun $g\colon V \to V$ ein weiterer Endomorphismus, so dass U invariant unter g ist, und es sei $\bar{g}\colon V/U \to V/U$ der induzierte Endomorphismus.

2. Es seien $f|_U = g|_U$ und $\bar{f} = \bar{g}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass bereits $f = g$ gelten muss.

Übung 18.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie:

1. Für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gibt genau eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$, die das folgende Diagram kommutieren lässt:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "f"] & \\ V_{\mathbb{C}} \arrow[r, "f_{\mathbb{C}}"'] & W_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

2. Für je zwei $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen $g_1, g_2\colon V_{\mathbb{C}} \to W$ die Äquivalenz

$$g_1 = g_2 \iff g_1 \circ \iota = g_2 \circ \iota$$

gilt.

3. Für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum W' gilt für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ und jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $g\colon W \to W'$ die Gleichheit

$$(g \circ f)_{\mathbb{C}} = g \circ f_{\mathbb{C}}.$$

Übung 19.

1. Zeigen Sie, dass für jedes $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $\mathbb{C}$-Vektorraum W die Abbildung

$$\Phi_{V,W}\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W), \quad f \mapsto f_{\mathbb{C}}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist. Geben Sie auch $\Phi_{V,W}^{-1}$ an.

2. Es seien vier K-Vektorräume V, V', W, W' und zwei K-lineare Abbildungen $f\colon V \to V'$ und $g\colon W \to W'$ gegeben. Zeigen Sie, dass die beidseitige Komposition

$$g \circ - \circ f\colon \operatorname{Hom}_K(V, W) \to \operatorname{Hom}_K(V', W'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f$$

eine K-lineare Abbildung ist.

3. Zeigen Sie, dass die Isomorphismen $\Phi_{V,W}$ in dem folgenden Sinne *natürlich* sind: Es seien V und V' zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume und es sei $f\colon V \to V'$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Es seien W und W' zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume und es sei $g\colon W \to W'$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann kommutiert das folgende Diagram von $\mathbb{R}$-Vektorräumen und $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \arrow[r, "\Phi_{V,W}"] \arrow[d, "g\circ-\circ f"'] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W) \arrow[d, "g\circ-\circ f_{\mathbb{C}}"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V', W') \arrow[r, "\Phi_{V',W'}"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V'_{\mathbb{C}}, W') \end{tikzcd}$$

Übung 20.
Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-lineare Inklusion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x$ einen Isomorphismus $\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen induziert.

Übung 21.
Es seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}), \quad f \mapsto f_{\mathbb{C}}$$

einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$$

induziert. (*Hinweis*: Beachten Sie, dass V und W nicht notwendigerweise endlichdimensional sind.)

Übung 22.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $(V^*)_{\mathbb{C}} \to (V_{\mathbb{C}})^*$. (*Hinweis*: Beachten Sie, dass V ist nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.)

Übung 23.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right)_{\mathbb{C}} = \bigcap_{i\in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$$
2. Es gilt
$$\left(\sum_{i\in I} U_i\right)_{\mathbb{C}} = \sum_{i\in I} (U_i)_{\mathbb{C}}.$$
3. Folgern Sie, dass genau dann $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$, wenn $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i\in I} (U_i)_{\mathbb{C}}$.

Übung 24.
Es seien V und W zwei reelle Vektorräume, und $f\colon V \to W$ sei $\mathbb{R}$-linear.

1. Zeigen Sie, dass $\ker(f_{\mathbb{C}}) = (\ker f)_{\mathbb{C}}$.
2. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.
3. Folgern Sie ferner, dass $(V_{\mathbb{C}})_\lambda(f_{\mathbb{C}}) = V_\lambda(f)_{\mathbb{C}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(f_{\mathbb{C}}) = (\operatorname{im} f)_{\mathbb{C}}$.
5. Folgern Sie, dass $f_{\mathbb{C}}$ genau dann surjektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Übung 25.
Es sei V ein reeller Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

Übung 26.
Zeigen Sie, dass die kanonische Inklusion $\iota\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}[X]$, $x \mapsto x$ $\mathbb{R}$-linear ist, und einen Isomorphismus $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}[X]$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen induziert.

Übung 27.
Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ eine Basis eines $\mathbb{R}$-Vektorraums W. Es seien

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} \coloneqq (b_1 + i \cdot 0, \dots, b_n + i \cdot 0) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \coloneqq (c_1 + i \cdot 0, \dots, c_m + i \cdot 0)$$

die entsprechenden $\mathbb{C}$-Basen der Komplexifizierungen $V_{\mathbb{C}}$ und $W_{\mathbb{C}}$. Es seiena

$$\Phi^{\mathbb{R}}\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \to \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}), \quad f \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

und

$$\Phi^{\mathbb{C}}\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C}), \quad g \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g).$$

Es seien

$$\begin{aligned} \iota_1\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) &\to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}}, & f &\mapsto f + i \cdot 0, \\ \iota_2\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) &\to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}), & f &\mapsto f_{\mathbb{C}} \\ \iota_3\colon \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}) &\to \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}, & A &\mapsto A + i \cdot 0, \\ \iota_4\colon \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}) &\to \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C}), & A &\mapsto A, \end{aligned}$$

die jeweiligen kanonischen Inklusionen.

1. Zeigen Sie, dass das folgende Diagram kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{R}}"'] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{C}}"] \\ \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}) \arrow[r, "\iota_4"] & \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

   Folgern Sie, dass ι_4 tatsächlich injektiv ist, wie der oben verwendete Begriff *Inklusion* vermuten lässt.

2. Zeigen Sie, dass das folgende Diagram kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\Phi^{\mathbb{R}}"'] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)_{\mathbb{C}} \arrow[d, "(\Phi^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}"] \\ \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}) \arrow[r, "\iota_3"] & \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

3. Zeigen Sie, dass die Inklusion ι_1 eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Abbildung
$$\Psi_1\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})$$
induziert, die das folgende Diagram zum kommutieren bringt:
$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \arrow[dl, "\iota_2"'] \arrow[dr, "\iota_1"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\Phi_1"] & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}}).
\end{tikzcd}$$

4. Zeigen Sie auf analoge Weise, dass die Inklusion ι_2 eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Abbildung
$$\Psi_2\colon\ \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \to \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C})$$
induziert, die das folgende Diagram zum kommutieren bringt:
$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R}) \arrow[dl, "\iota_4"'] \arrow[dr, "\iota_3"] & \\
\mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\Phi_2"] & & \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

5. Wir haben nun das folgende Diagram:
$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \arrow[dl, "\iota_2"'] \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[dd, "\Phi^{\mathbb{R}}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\Psi_1"] \arrow[dd, "(\Phi^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}}) \arrow[dd, "\Phi^{\mathbb{C}}"] \\
 & \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R}) \arrow[dl, "\iota_4"'] \arrow[dr, "\iota_3"] & \\
\mathrm{M}(m\times n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\Psi_2"] & & \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$
Von diesem Diagram wissen wir bereits, dass Deckel, Boden und beide Rückseiten kommutieren. Zeigen Sie damit, dass auch die Vorderseite kommutiert. (*Hinweis*: Nutzen Sie, dass zwei $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f,g\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)_{\mathbb{C}} \to \mathrm{M}(m\times n,\mathbb{C})$ genau dann übereinstimmen, wenn die Kompositionen $f\circ\iota_2$ und $g\circ\iota_2$ übereinstimmen.)

6. Zeigen Sie, dass Ψ_2 ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

7. Folgen Sie, dass auch Ψ_1 ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

Übung 28.
Es sei V ein K-Vektorraum, wobei $V \neq 0$ und K algebraisch abgeschlossen ist. Es seien $f_1, \dots, f_n \colon V \to V$ paarweise kommutierende Endomorphismen. Zeigen Sie, dass die Endomorphismen $f_1, \dots, f_n$ einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen, d.h. dass es ein $v \in V$ gibt, das für jedes f_i eine Eigenvektor ist.

Übung 29.
Es sei V ein K-Vektorraum. Für alle Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{End}(V)$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ sei

$$V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n) \coloneqq \{v \in V \mid f_i(v) = \lambda_i v \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

der *gemeinsame Eigenraum* der Endomorphismen $f_1, \dots, f_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Zeigen Sie, dass
$$V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, \lambda_i)$$
für alle Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{End}(V)$ und Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

2. Es seien $f_1, \dots, f_n, g \in \mathrm{End}(V)$ Endomorphismen, so dass g mit jedem f_i kommutiert. Zeigen sie, dass der gemeinsame Eigenraum $V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n)$ für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ invariant unter g ist.

3. Zeigen Sie: Sind die Endomorphismen $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar (d.h. es ist $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V(f_i, \lambda)$ für alle $i = 1, \dots, n$) und paarweise kommutierend, so sind die Endomorphismen *simultan diagonalisierbar*, d.h. es ist
$$V = \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K} V(f_1, \lambda_1; \dots ; f_n, \lambda_n).$$

4. Es sei nun V endlichdimensional und $H \subseteq \mathrm{End}(V)$ ein Untervektorraum aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Endomorphismen. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ für jedes $f \in H$ eine Diagonalmatrix ist.

Übung 30.
Es sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{tr} A = 0$ und $\operatorname{tr} A^2 = -2$. Bestimmen Sie $\det A$.

Übung 31.
Zeigen Sie, dass es für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ein Polynom $P \in K[T]$ mit $\deg P \leq n - 1$ gibt, so dass $A^{-1} = P(A)$.

Übung 32.
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \notin \{2,3\}$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \frac{1}{6}(\operatorname{tr} A)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} A^3) \quad \text{für jedes } A \in \mathrm{M}_3(K).$$

(*Hinweis*: Wenn die Rechnungen zu kompliziert werden, dann macht man es falsch.)

Übung 33.
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

1. Es sei $n\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass der Endomorphismus $\mathrm{id}_V + n$ invertierbar ist.

Ein Endomorphismus $u\colon V \to V$ heißt *unipotent*, falls $u - \mathrm{id}_V$ nilpotent it.

2. Folgern Sie, dass jeder unipotente Endomorphismus von V invertierbar ist.

Auf dem fünften Übungszettel wurde gezeigt, dass es für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ eindeutige Endomorphismen $d, n\colon V \to V$ gibt, so dass

- $f = d + n$,
- d ist diagonalisierbar und n ist nilpotent, und
- d und n kommutieren.

Folgern Sie aus dieser *additiven Jordanzerlegung* von $\mathrm{End}(V)$ die folgende *multiplikative Jordanzerlegung* von $\mathrm{GL}(V)$.

3. Zeigen Sie, dass es für jedes $s \in \mathrm{GL}(V)$ eindeutige $d, u \in \mathrm{GL}(V)$ gibt, so dass
   - $s = d \cdot u$,
   - d ist diagonalisierbar und u ist unipotent, und
   - d und u kommutieren.

Übung 34.
Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sei

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Es sei

$$\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1} \,\middle|\, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda_1, \dots, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

die Menge der diagonalisierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen. Wir zeigen, dass $D_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dicht ist, d.h. dass es für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine diagonalisierbare Matrix $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Es sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, also

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$B(t) := A + tS \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_n) S^{-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t) \in \mathbb{C}$ mit

   $$\mu_i(t) := \lambda_i + tz_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

   die Eigenwerte von $B(t)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zahlen $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.

3. Folgern Sie, dass $B(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

4. Folgern Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ mit $\|A - D\| < \varepsilon$ gibt.

Wir wollen die Dichtheit von $\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ nutzen, um den Satz von Cayley-Hamilton zu zeigen:

5. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$F\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto \chi_A(A)$$

   stetig ist, wobei $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$ das charakteristische Polynom von A ist.

6. Zeigen Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Zeigen Sie, dass $P(SAS^{-1}) = SP(A)S^{-1}$ für alle $P \in \mathbb{C}[T]$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Folgern Sie, dass $F(D) = 0$ für jede Matrix $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$.

8. Folgern Sie, dass $F(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Übung 35.
Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Skalarprodukträume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ eine Orthonormalbasis von W. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^*) = \mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^*.$$

Übung 36.
Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann unitär, wenn alle Eigenwerte von f Betrag 1 haben.
2. f ist genau dann selbstadjungiert, wenn alle Eigenwerte von f reell sind.
3. f ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn alle Eigenweret von f rein imaginär sind.
4. f ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von f sind.

Übung 37.
Es seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume. Ferner sei $f\colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\Phi_V\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v\rangle$$
ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.
2. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an. Zeigen Sie, dass f^* $\mathbb{R}$-linear ist.
3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g \coloneqq \Phi_V^{-1} \circ f^* \circ \Phi_W$ $\mathbb{R}$-linear ist, und dass
$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$
4. Inwiefern ändern sich die obigen Resultate für denn Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn also V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume sind?

Übung 38.
Es sei V ein endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

1. Zeigen Sie für denn Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn es ein Skalarprodukt auf V gibt, bezüglich dessen f selbstadjungiert ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie die analoge Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Übung 39.
Es sei $V \coloneqq \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$, und es sei
$$U \coloneqq \{f \in V \mid f(0) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

2. Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } f, g \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.

3. Zeigen Sie, dass $U^\perp = 0$. Folgern Sie, dass $V \neq U \oplus U^\perp$. (*Hinweis*: Betrachten Sie für $g \in U^\perp$ die Funktion $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = t^2 g(t)$.)

4. Zeigen Sie ferner, dass V/U eindimensional ist.

Übung 40.
Es sei
$$W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$
der Vektorraum der beidseitigen reellwertigen Folgen. Wir betrachten den Untervektorraum
$$V := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in W \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$
der quadratsummierbaren Folgen.

1. Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von W ist.

2. Zeigen Sie für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$, dass
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n < \infty.$$
(*Hinweis:* Zeigen sie zunächst, dass $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.)

3. Zeigen sie, dass
$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n \quad \text{für alle } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$$
ein Skalarprodukt auf V definiert.

4. Es sei
$$R\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$
der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.

5. Zeigen Sie, dass R keine Eigenwerte besitzt.

6. Es sei
$$S\colon V \to V, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{-n})_{n\in\mathbb{N}}.$$
Zeigen Sie, dass S ein Adjungiertes besitzt, und entscheiden Sie, ob R selbstadjungiert, orthogonal, bzw. normal ist.

7. Zeigen Sie, dass S diagonalisierbar ist.
8. Es sei
$$U \coloneqq \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$
Bestimmen Sie $U^\perp$ und entscheiden Sie, ob $V = U \oplus U^\perp$.
9. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Übung 41.

1. Zeigen Sie, dass durch
$$\sigma(A, B) \coloneqq \operatorname{tr}\left(A^T B\right) \quad \text{für alle } A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$
ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert wird.
2. Zeigen Sie, dass die Standardbasis $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit
$$(E_{ij})_{kl} \coloneqq \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{für alle } 1 \le i, j, k, l \le n$$
eine Orthonormalbasis von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezüglich σ bilden.
3. Es sei
$$S_+ \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$
der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und
$$S_- \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$
der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = S_+ \oplus S_-,$$
und dass die Summe orthogonal ist.

Übung 42.
Es sei V ein Skalarproduktraum und
$$O(V) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid ff^* = \mathrm{id}\}.$$
Zeigen Sie, dass $O(V)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

Übung 43.
Zeigen sie, dass für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
2. $AA^* = I$.
3. $A^*A = I$.

4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.

5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$.

Übung 44.
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Zeigen Sie, dass es eindeutige hermitsche Matrizen $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B + iC$ gibt.

2. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn B und C kommutieren.

Übung 45.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und es sei $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ eine endliche Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass

$$\langle x, y \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{\phi \in G} \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V$$

   ein Skalarprodukt auf G definiert.

2. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ in dem Sinne G-invariant ist, dass

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V \text{ und } \phi \in G.$$

3. Folgern Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ für alle $\phi \in G$ eine orthogonale Matrix ist.

4. Folgern Sie damit, dass es für $n = \dim V$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi\colon G \to O_n(\mathbb{R})$ gibt, G also isomorph zu der Untergruppe im Φ von $O_n(\mathbb{R})$ ist.

Übung 46.
Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Für jedes $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$ sei

$$s_\alpha\colon V \to V, \quad \text{mit} \quad s_\alpha(x) := x - 2\frac{\langle x, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha.$$

Ferner seien

$$L_\alpha := \mathbb{R}\alpha \quad \text{und} \quad H_\alpha := L_\alpha^\perp = \alpha^\perp = \{v \in V \mid \langle v, \alpha \rangle = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $s_\alpha^2 = \mathrm{id}_V$, und dass $s_{\lambda\alpha} = s_\alpha$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^\times$.

2. Zeigen Sie, dass s_α diagonalisierbar ist, und dass

$$V_{-1}(s_\alpha) = L_\alpha \quad \text{und} \quad V_1(s_\alpha) = H_\alpha.$$

3. Interpretieren Sie V geometrisch anschaulich.
4. Es sei $s' \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $s'(\alpha) = -\alpha$ und $s'(x) = x$ für alle $x \in H_\alpha$. Zeigen Sie, dass bereits $s' = s_\alpha$ gilt.
5. Zeigen Sie, dass für jeden orthogonalen Isomorphismus $t \colon V \to V$ die Identität

$$ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$$

gilt.

Übung 47.
Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $S \colon V \to V$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. S ist normal.
2. V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von S.
3. Für jeden S-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch das orthogonale Komplement $U^\perp$ invariant unter S.

Übung 48.
Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \operatorname{tr}(f \circ g^*)$$

ein Skalarprodukt auf $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ definiert.

Übung 49.
Es sei $\det \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ die Determinantenabbildung, wobei $\mathbb{C}^\times$ die multiplikative Gruppe des Körpers bezeichnet.

1. Zeigen Sie, dass det ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.
2. Bestimmen Sie den Kern von det.
3. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$.
4. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{U_n}$.
5. Bestimmen Sie Bild und Kern der Einschränkung $\det|_{O_n}$.

Übung 50.
Es sei
$$\Phi\colon SU_2 \to S^3, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
die Abbildung auf die erste Spalte, wobei
$$S^3 := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert ist.
2. Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist.

Übung 51.
Zeigen Sie, dass die drei Gruppen SO_2, S^1 und U_1 isomorph sind.

Übung 52.
Ist $\beta\colon V \times W \to K$ eine Bilinearform, so heißen eine Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V und eine Basis $\mathcal{C} = (w_i)_{i \in I}$ von W *dual bezüglich* β, falls
$$\beta(v_i, w_j) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in I.$$
Es sei zunächst V ein K-Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass die *Evaluation*
$$e\colon V \times V^* \to K \quad \text{mit} \quad e(v, \varphi) = \varphi(e)$$
eine K-bilineare Abbildung ist.
2. Zeigen Sie im Falle der Endlichdimensionalität von V, dass es zu jeder Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V genau eine Basis $\mathcal{C}$ von V^* gibt, die bezüglich e dual zu $\mathcal{B}$ ist. Woher kennen Sie diese Basis?

Von nun an sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\Phi\colon V \to V^*, \quad v \mapsto \langle -, v \rangle$$
ein Isomorphismus ist.
4. Folgern Sie, dass es für jede Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V genau eine Basis $\mathcal{B}^\circ = (b_1^\circ, \ldots, b_n^\circ)$ von V gibt, die bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dual zu $\mathcal{B}$ ist. (*Hinweis*: Formulieren Sie die Aussage, dass $\mathcal{C}$ dual zu $\mathcal{B}$ ist, mithilfe von Φ um.)
5. Zeigen Sie, dass für jede Basis $\mathcal{B}$ von V die Gleichheit $(\mathcal{B}^\circ)^\circ = \mathcal{B}$ gilt. Folgern Sie, dass die Abbildung
$$\{\text{geordnete Basen von } V\} \to \{\text{geordenet Basen von } V\}, \quad \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^\circ$$
bijektiv ist.

6. Unter welchen Namen kennen Sie Basen von V, die bezüglich $(-)^\circ$ selbstdual sind, die also $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}$ erfüllen?

Übung 53.
Es sei V ein K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

1. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{rad}(\beta) := \{v \in V \mid \beta(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$$

ein Untervektorraum von V ist. (Man bezeichnet $\mathrm{rad}(\beta)$ als das *Radikal* von β.)

2. Zeigen Sie, dass β eine symmetrische Bilinearform $\bar{\beta}\colon (V/U) \times (V/U) \to K$ mit

$$\bar{\beta}([v],[w]) := \beta(v,w) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

induziert.

3. Zeigen Sie, dass $\bar{\beta}$ nicht entartet ist, d.h. dass für das Radikal

$$\mathrm{rad}(\bar{\beta}) := \{x \in V/U \mid \bar{\beta}(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in V/U\}$$

bereits $\mathrm{rad}(\bar{\beta}) = 0$ gilt.

4. Inwiefern gelten die obigen Aussagen noch, wenn man U durch

$$W := \{v \in V \mid \beta(v,v) = 0\}$$

ersetzt?

Übung 54.
Für je zwei K-Vektorräume V und W sei

$$\mathrm{Bil}(V,W) := \{b\colon V \times W \to K \mid b \text{ ist bilinear}\}$$

der Raum der Bilinearformen $V \times W \to K$.

1. Zeigen Sie, dass die Flipabbildung

$$F\colon \mathrm{Bil}(V,W) \to \mathrm{Bil}(W,V), \quad b \mapsto F(b) \quad \text{mit} \quad F(b)(w,v) = b(v,w)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

2. Es sei $b \in \mathrm{Bil}(V,W)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass b ein lineare Abbildung

$$\Phi_{V,W}(b)\colon V \to W^*, \quad v \mapsto b(v,-)$$

induziert. Dabei ist

$$b(v,-)\colon W \to K, \quad w \mapsto b(v,w).$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{V,W}\colon \operatorname{Bil}(V,W) \to \operatorname{Hom}(V,W^*), \quad b \mapsto \Phi_{V,W}(b)$$

   ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

4. Geben Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile explizit einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}(V,W^*) \to \operatorname{Hom}(W,V^*)$$

   an.

Wir betrachten nun den Fall $W = V^*$.

5. Zeigen Sie, dass die Evaluation

$$e\colon V \times V^* \to K, \quad (v,\varphi) \mapsto \varphi(v)$$

   eine Bilinearform ist.

6. Nach den vorherigen Aufgabenteilen entspricht die Bilinearform e einer linearen Abbildung $V \to V^{**}$, sowie einer linearen Abbildung $V^* \to V^*$. Bestimmen Sie diese Abbildungen.

7. Woher kennen Sie diese Abbildung?

Übung 55.
Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Geben Sie die Definition der dualen Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ an, und zeigen Sie ihre Linearität.

2. Zeigen Sie für jeden K-Vektorraum U, dass die Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon U \times U^* \to K \quad \text{mit} \quad \langle v,\varphi\rangle = \varphi(v) \quad \text{für alle } v \in V, \varphi \in V^*$$

   eine Bilinearform ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\langle f(v),\psi\rangle = \langle v, f^*(\psi)\rangle \quad \text{für alle } v \in V, \psi \in W^*.$$

Übung 56.
1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma\colon \operatorname{M}_n(K) \times \operatorname{M}_n(K) \to K \quad \text{mit} \quad \sigma(A,B) \coloneqq \operatorname{tr}(AB)$$

   eine symmetrische Bilinearform ist. Man bezeichnet diese als die *Traceform*.

2. Zeigen Sie, dass σ in dem Sinne assoziativ ist, dass

$$\sigma(AB, C) = \sigma(A, BC) \quad \text{für alle } A, B, C \in \mathrm{M}_n(K).$$

3. Zeigen sie, dass σ nicht entartet ist, d.h. dass es für jedes $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A \neq 0$ ein $B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\sigma(A, B) \neq 0$ gibt.

Übung 57.
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $b\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, und $\mathcal{B}^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ die entsprechende duale Basis von V^*.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$B\colon V \to V^*, \quad v \mapsto b(-, v)$$

K-linear ist.

2. Zeigen Sie die Gleihheit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(B).$$

(Beachten Sie, dass auf der linken Seite die darstellende Matrix einer Bilinearform steht, und auf der rechten Seite die darstellende Matrix einer linearen Abbildung.)

Übung 58.
Das *Zentrum* eines Rings R ist definiert als

$$Z(R) := \{r \in R \mid rs = sr \text{ für alle } s \in R.$$

Man bemerke, dass R genau dann kommutativ ist, wenn $Z(R) = R$. Wir werden $Z(\mathrm{M}_n(K))$ bestimmen. Hierfür sei

$$D_n(K) := KI = \{\lambda I \mid \lambda \in K\}$$

der Untervektorraum der Skalarmatrizen.

1. Zeigen Sie, dass $D_n(K) \subseteq Z(\mathrm{M}_n(K))$.

2. Zeigen Sie für $A \in Z(\mathrm{M}_n(K))$, dass A eine Diagonalmatrix ist. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Matrizen E_{ii} für $1 \leq i \leq n$.)

3. Zeigen Sie ferner, dass alle Diagonaleinträge von A bereits gleich sind. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Matrizen E_{ij} mit $1 \leq i, j \leq n$.)

4. Folgern Sie, dass $Z(\mathrm{M}_n(K)) = D_n(K)$.

Übung 59.
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, und es seien $K, E\colon V \to V$ zwei Endomorphismen mit

$$K \text{ ist invertierbar} \quad \text{und} \quad KE = 2EK.$$

1. Zeigen Sie, dass
$$(K - 2\lambda \operatorname{id}_V)^n E = 2^n E(K - \lambda \operatorname{id}_V)^n$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Folgern Sie, dass $E(V^{\sim}_{\lambda}(K)) \subseteq V^{\sim}_{2\lambda}(K)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Folgern Sie, dass E nilpotent ist.

Übung 60.
Es sei V ein K-Vektorraum und $m\colon V \times V \to V$ eine bilineare Abbildung. Eine lineare Abbildung $D\colon V \to V$ heißt *m-Derivation*, falls

$$D(m(x,y)) = m(D(x), y) + m(x, D(y)) \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Es sei

$$\operatorname{Der}(m) := \{D\colon V \to V \mid D \text{ ist eine } m\text{-Derivation}\}.$$

1. Zeigen Sie für den Fall $V = K[X]$ und die Multiplikation
$$m(p,q) := p \cdot q \quad \text{für alle } p, q \in K[X],$$
dass die Ableitung
$$D\colon K[X] \to K[X], \quad \sum_{d=0}^{n} a_d X^d \mapsto \sum_{d=1}^{n} a_d d X^{d-1}$$
eine m-Derivation ist. Unter welchem Namen ist dieser Umstand für gewöhnlich bekannt?

2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Der}(m)$ ein Untervektorraum von $\operatorname{End}(V)$ ist.

3. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Der}(m)$ eine Lie-Unteralgebra von $\operatorname{End}(V)$ ist, d.h. dass für alle $D_1, D_2 \in \operatorname{Der}(m)$ auch $[D_1, D_2] \in \operatorname{Der}(m)$.

Übung 61.
Es sei V ein K-Vektorraum und $[-,-]\colon V \times V \to V$ eine alternierend bilineare Abbildung. Für jedes $x \in V$ sei

$$\operatorname{ad}_x := [x, -]\colon V \to V, \quad y \mapsto [x,y].$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. $[-,-]$ erfüllt die Jacobi-Identität, d.h. es ist
$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,y],x] = 0 \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$

2. Es gilt

$$\mathrm{ad}_x([y,z]) = [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)] \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$

(Für jedes $x \in V$ ist also ad_x eine Derivation bezüglich $[-,-]$.)

Übung 62.
Es seien E und H zwei Endomorphismen eines $\mathbb{C}$-Vektorraums V, so dass $[H, E] = 2E$.

1. Zeigen Sie, dass $E(V_\lambda(H)) \subseteq V_{\lambda+2}(H)$ für alle $\lambda \in K$.
2. Folgern Sie: Ist V endlichdimensional und H diagonalisierbar, so ist E nilpotent.

Übung 63.
Für einen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V und eine Bilinearform $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ sei

$$O(\beta) := \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(\phi(x), \phi(y)) = \beta(x, y) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die Isometriegruppe von β, und

$$\mathfrak{g}(\beta) := \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \beta(f(x), y) = -\beta(x, f(y)) \text{ für alle } x, y \in V\}$$

die assoziierte Lie-Algebra.

1. Zeigen Sie, dass $O(\beta)$ eine Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}(\beta)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist, d.h. dass für alle $f, g \in \mathfrak{g}(\beta)$ auch $[f, g] \in \mathfrak{g}(\beta)$.
3. Zeigen Sie, dass $\exp(f) \in O(\beta)$ für alle $f \in \mathfrak{g}(\beta)$. (*Hinweis*: Die bilineare Abbildung β ist in beiden Argumenten stetig.)
4. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Unter welchen Begriffen sind die Elemente aus $G(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $\mathfrak{g}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ bekannt?