

**Lösungen zu**

**Einführung in die**

**Geometrie und Topologie**

**Übungsblatt 8**

Jendrik Stelzner

3. Juli 2017

**Aufgabe 1**

**Lemma 1.** a) Für alle  $n \geq 2$  ist  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  wegzusammenhängend.

b) Für alle  $n \geq 1$  ist  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  wegzusammenhängend.

c) Der Raum  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

*Beweis.* a) Es seien  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

- Sind  $x$  und  $y$  linear unabhängig, so gilt  $(1-t)x + ty \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , weshalb

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad t \mapsto (1-t)x + ty$$

ein wohldefinierter stetiger Weg von  $x$  nach  $y$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist.

- Sind  $x$  und  $y$  linear abhängig, so gibt es  $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit  $z \notin \langle x \rangle = \langle y \rangle$ . Dann sind  $x$  und  $z$ , sowie  $y$  und  $z$  in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , und somit auch  $x$  und  $y$ .

b) Es gilt  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ , weshalb die Aussage aus dem ersten Teil des Lemmas folgt.

c) Die beiden Teilmengen  $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_- \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind offen(e Intervalle) mit  $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$ . Also ist  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  unzusammenhängend, und besteht somit aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Da die Intervalle  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$  wegzusammenhängend sind, hat  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  höchstens zwei Wegzusammenhangskomponenten. Da jede Zusammenhangskomponente in Wegzusammenhangskomponenten zerfällt, folgt, dass  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$  bereits die beiden (Weg)zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind.  $\square$

## 1) Die Sphäre $S^n$

Der Raum  $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} = \{1, -1\}$  ist zweipunktig und diskret. Die (Weg)zusammenhangskomponenten von  $S^0$  sind deshalb  $\{1\}$  und  $\{-1\}$ .

Für  $n \geq 1$  ist der Raum  $S^n$  wegzusammenhängend, und somit auch zusammenhängend: Für  $x, y \in S^n$  gibt es nach Lemma 1 einen stetigen Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  von  $x$  nach  $y$ . Somit ist auch  $\beta : [0, 1] \rightarrow S^n, t \mapsto \alpha(t)/\|\alpha(t)\|$  ein stetiger Weg von  $x$  nach  $y$ .

## 2) Der projektive Raum $kP^n$

Es sei  $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Der Raum  $kP^0$  ist einpunktig, und somit (weg)zusammenhängend.

Auch für  $n \geq 1$  ist  $kP^n$  wegzusammenhängend: Für  $\bar{x}, \bar{y} \in kP^n$  gilt  $x, y \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ , weshalb es nach Lemma 1 einen stetigen Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow k^{n+1} \setminus \{0\}$  von  $x$  nach  $y$  gibt. Wegen der Stetigkeit der kanonischen Projektion  $p : k^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow kP^n, z \mapsto \bar{z}$  ist somit  $\beta = p \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow kP^n$  ein stetiger Weg von  $\bar{x}$  nach  $\bar{y}$ .

## Aufgabe 2

### 1)

Für alle  $A, B \in M_n(k)$  ist die Abbildung  $[0, 1] \rightarrow M_n(k), t \mapsto (1-t)A + tB$  ein stetiger Weg von  $A$  nach  $B$ .

### 2)

**Proposition 2.** Es sei  $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $A \in GL_n(k)$ . Die Matrix  $B \in GL_n(k)$  entstehe aus  $A$  durch

- a) Addition des  $\lambda$ -fachen der  $i$ -ten Zeile auf die  $j$ -te Spalte für  $i \neq j$  und  $\lambda \in k$ ;
- b) Multiplikation der  $i$ -ten Zeile mit  $\lambda \in k \setminus \{0\}$ , wobei  $\lambda$  in der gleichen Wegzusammenhangskomponente liegt wie  $1 \in k \setminus \{0\}$  (also  $\lambda \neq 0$  für  $k = \mathbb{C}$  und  $\lambda > 0$  für  $k = \mathbb{R}$ );

oder

- c) im Fall  $k = \mathbb{C}$  durch Vertauschen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile für  $i \neq j$ ;
- d) im Fall  $k = \mathbb{R}$  durch Vertauschen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile für  $i < j$  und anschließendes Multiplizieren der  $i$ -ten Zeile (d.h. der früheren  $j$ -ten Zeile) mit  $-1$ .

Dann gibt es in  $GL_n(k)$  einen stetigen Weg von  $A$  nach  $B$ .

*Beweis.* a) Für alle  $\mu \in K$  sei  $E(\mu) \in M_n(k)$  die Matrix der Form

$$E(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei  $\mu$  im  $(j, i)$ -ten Eintrag steht. Für alle  $C \in M_n(k)$  entsteht die Matrix  $E(\mu)C$  aus  $C$  durch Addition des  $\mu$ -fachen der  $i$ -ten Zeile auf die  $j$ -te. Dann ist

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow GL_n(k), \quad t \mapsto E(t\lambda)A$$

ein stetiger Weg von  $A$  nach  $E(\lambda)A = B$ . Die Wohldefiniertheit von  $\alpha$  folgt daraus, dass  $\det \alpha(t) = \det A$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt. Die Stetigkeit von  $\alpha$  folgt daraus, dass die Einträge von  $\alpha(t)$  affin-lineare Funktionen in  $t$  sind.

- b) Für alle  $\mu \in k \setminus \{0\}$  sei  $E(\mu) \in M_n(k)$  die Diagonalmatrix mit Einträgen  $E(\mu)_{ii} = \mu$  und  $E(\mu)_{jj} = 1$  für alle  $j \neq i$ . Für alle  $C \in M_n(k)$  entsteht die Matrix  $E(\mu)C$  aus  $C$  durch Multiplikation der  $i$ -ten Zeile mit  $\mu$ .

Nach Annahme gibt es einen stetigen Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow k \setminus \{0\}$  von 1 nach  $\lambda$ . Damit ist

$$\beta : [0, 1] \rightarrow GL_n(k), \quad t \mapsto E(\alpha(t))A$$

ein stetiger Weg von  $A$  nach  $E(\alpha(1))A = E(\lambda)A = B$ . Die Wohldefiniertheit von  $\beta$  folgt daraus, dass  $\det \beta(t) = \alpha(t) \det A \neq 0$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt. Die Stetigkeit von  $\beta$  folgt daraus, dass die Einträge von  $\beta(t)$  affin-lineare Funktionen in  $t$  sind.

Nach Lemma 1 ist  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  die Wegzusammenhangskomponente von 1 in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , und  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  die Wegzusammenhangskomponente von 1 in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- c) Wir können ausgehend von  $A$  die folgenden elementaren Zeilenoperationen durchführen, ohne die Wegzusammenhangskomponente von  $A$  zu verlassen:
1. Addition der  $i$ -ten Zeile auf die  $j$ -te Zeile.
  2. Subtraktion der  $j$ -ten Zeile von der  $i$ -ten Zeile.
  3. Addition der  $i$ -ten Zeile auf die  $j$ -te Zeile.
  4. Multiplikation der  $i$ -ten Zeile mit  $-1$ .

Hierdurch entsteht genau die Matrix  $B$ . Die Änderung der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile lässt sich dabei wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ccccc} z_i & \rightarrow & z_i & \rightarrow & -z_j \\ z_j & & z_i + z_j & \rightarrow & z_i + z_j \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} -z_j & \rightarrow & -z_j & \rightarrow & z_j \\ z_i & & z_i & \rightarrow & z_i \end{array}$$

- d) Es muss im obigen Verfahren nur der vierte Schritt weggelassen werden. □

## 2.1) Der komplexe Fall $GL_n(\mathbb{C})$

Es sei  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . Proposition 2 zeigt, dass man ausgehend von  $A$  alle elementaren Zeilenoperationen durchführen darf, ohne die Wegzusammenhangskomponente von  $A$  zu verlassen. Da  $A$  invertierbar ist, kann man  $A$  durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix umformen.

Es folgt, dass jede Wegzusammenhangskomponente von  $GL_n(\mathbb{C})$  die Einheitsmatrix enthält. Somit ist  $GL_n(\mathbb{C})$  wegzusammenhängend.

## 2.2) Der reelle Fall $GL_n(\mathbb{R})$

Wir zeigen, dass  $GL_n(\mathbb{R})$  in die beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$GL_n(\mathbb{R})_+ = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\} \quad \text{und} \quad GL_n(\mathbb{R})_- = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A < 0\}$$

zerfällt.

Wäre  $GL_n(\mathbb{R})$  zusammenhängend, so wäre auch das Bild  $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zusammenhängend. Nach Lemma 1 ist  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  aber unzusammenhängend. Folglich besteht  $GL_n(\mathbb{R})$  aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Es genügt daher zu zeigen, dass  $GL_n(\mathbb{R})_+$  und  $GL_n(\mathbb{R})_-$  jeweils wegzusammenhängend sind.

Wir zeigen zunächst, dass sich jede Matrix  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  durch Operationen, welche jeweils die Wegzusammenhangskomponente von  $A$  nicht verlassen, in eine der beiden Diagonalmatrizen

$$D_+ = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})_+ \quad \text{und} \quad D_- = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})_-$$

umformen lässt:

- Da  $A$  invertierbar ist, können wir  $A$  durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix umformen.

Schränkt man dabei das Skalieren von Zeilen auf positive Skalare ein, und Ersetzt das Vertauschen von Zeilen (eine Umformungen vom Typ c) in Proposition 2) durch die abgeänderte Operation d) aus Proposition 2, so kann  $A$  mit quasi unveränderten Vorgehen in eine Matrix der Form

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

umformt werden, ohne die Wegzusammenhangskomponente von  $A$  zu verlassen.

- Wendet man für  $i < j$  die Operation d) zweimal hintereinander an, so ändert man insgesamt das Vorzeichen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile:

$$\begin{array}{ccccc} z_i & \rightarrow & -z_j & \rightarrow & -z_i \\ z_j & & z_i & & -z_j \end{array}$$

Durch iteriertes Anwenden hiervon lässt sich  $D$  in eine der Formen  $D_+$  oder  $D_-$  bringen, ohne die Wegzusammenhangskomponente von  $A$  zu verlassen:

Falls  $|\{1 \leq i \leq n \mid \varepsilon_i = -1\}|$  gerade ist, so kann man die Minus-Einsen auf der Diagonale von  $D$  paarweise durch Einsen ersetzen, bis man schließlich  $D_+$  erhält. Falls  $|\{1 \leq i \leq n \mid \varepsilon_i = -1\}|$  ungerade ist, so ist man im Fall  $n = 1$  bereit fertig; ansonsten ändert man das Vorzeichen von  $\varepsilon_{n-1}$  und  $\varepsilon_n$ , und eliminiert anschließend die Minus-Einsen im Bereich  $1 \leq i \leq n - 1$  paarweise. Hierdurch erhält man schließlich  $D_-$ .

Man bemerke, dass die Umformungen vom Typ **a)** und **d)**, sowie das obige paarweise Eliminieren von Minus-Einsen die Determinante einer Matrix nicht verändert, und dass Umformungen vom Typ **b)** das Vorzeichen der Determinante nicht verändert. Insgesamt bleibt also das Vorzeichen der Determinante bei allen genutzten Umformungen unverändert.

Es folgt, dass sich alle  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})_+$  zu  $D_1$  umformen lassen, und alle  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})_-$  zu  $D_{-1}$ , jeweils ohne die entsprechende Wegzusammenhangskomponente zu verlassen. Insbesondere sind  $\text{GL}_n(\mathbb{R})_+$  und  $\text{GL}_n(\mathbb{R})_-$  wegzusammenhängend.

### Aufgabe 3

**Lemma 3** (Verkleben stetiger Abbildungen). Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume.

- Es sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von offenen Mengen  $U_i \subseteq X$  mit  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Für jedes  $i \in I$  sei  $f_i : U_i \rightarrow Y$  eine stetige Funktion, so dass  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j \in I$  gilt. Dann gibt es eine eindeutige Funktion  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f|_{U_i} = f_i$  für alle  $i \in I$ , und  $f$  ist stetig.
- Es seien  $C_1, \dots, C_n \subseteq X$  abgeschlossene Mengen mit  $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$ . Für jedes  $i = 1, \dots, n$  sei  $f_i : C_i \rightarrow Y$  eine stetige Funktion, so dass  $f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  gilt. Dann gibt es eine eindeutige Funktion  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f|_{C_i} = f_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , und  $f$  ist stetig.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit und Existenz von  $f$  ist jeweils eine rein mengentheoretische Aussage;  $f$  ist gegeben durch  $f(x) = f_i(x)$  für alle  $i \in I$  und  $x \in U_i$ , bzw. alle  $i = 1, \dots, n$  und  $x \in C_i$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  jeweils stetig ist.

- Es sei  $U \subseteq Y$  offen. Wegen der Stetigkeit der  $f_i$  ist  $f_i^{-1}(U) \subseteq U_i$  für alle  $i \in I$  offen. Wegen der Offenheit von  $U_i \subseteq X$  ist  $f_i^{-1}(U)$  für alle  $i \in I$  auch in  $X$  offen. Deshalb ist  $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U)$  als Vereinigung offener Mengen ebenfalls offen.
- Es sei  $C \subseteq Y$  abgeschlossen. Wegen der Stetigkeit der  $f_i$  ist  $f_i^{-1}(C) \subseteq C_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  abgeschlossen. Wegen der Abgeschlossenheit von  $C_i \subseteq X$  ist  $f_i^{-1}(C)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  auch in  $X$  abgeschlossen. Deshalb ist  $f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(C)$  als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen.  $\square$

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{j_A} & A \\ j_B \downarrow & & \downarrow i_A \\ B & \xrightarrow{i_B} & X \end{array}$$

kommutiert. Um zu zeigen, dass es sich um ein Pushout-Diagramm handelt, gilt es zu zeigen, dass es für jeden topologischen Raum  $Y$  und je zwei stetige Funktionen  $f_A : A \rightarrow Y$  und  $f_B : B \rightarrow Y$  mit  $f_A \circ j_A = f_B \circ j_B$ , eine eindeutige stetige Funktion  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f \circ i_A = f_A$  und  $f \circ i_B = f_B$  gibt.

Die Bedingung  $f_A \circ j_A = f_B \circ j_B$  ist äquivalent dazu, dass  $f_A|_{A \cap B} = f_B|_{A \cap B}$ , und die Bedingungen  $f \circ i_A = f_A$  und  $f \circ i_B = f_B$  sind jeweils äquivalent dazu, dass  $f|_A = f_A$  und  $f|_B = f_B$ . Die Aussage folgt deshalb unmittelbar aus Lemma 3.

## Aufgabe 4