Lösungen zu

Einführung in die Geometrie und Topologie Übungsblatt 8

Jendrik Stelzner

5. Juli 2017

Aufgabe 1

Lemma 1. a) Für alle $n \geq 2$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend.

b) Für alle $n \geq 1$ ist $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend.

c) Der Raum $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ besteht aus den beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$\mathbb{R}_+ \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_- \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Beweis. a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- Sind x und y linear unabhängig, so gilt $(1-t)x + ty \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, weshalb

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad t \longmapsto (1-t)x + ty$$

  ein wohldefinierter stetiger Weg von x nach y in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist.
- Sind x und y linear unabhängig, so gibt es $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $z \notin \langle x \rangle = \langle y \rangle$. Dann sind x und z, sowie y und z in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, und somit auch x und y.

b) Es gilt $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$, weshalb die Aussage aus dem ersten Teil des Lemmas folgt.

c) Die beiden Teilmengen $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_- \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind offen(e Intervalle) mit $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^- = 0$. Also ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unzusammenhängend, und besteht somit aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Da die Intervalle $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}_-$ wegzusammenhängend sind, hat $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ höchstens zwei Wegzusammenhangskomponenten. Da jede Zusammenhangskomponente in Wegzusammenhangskomponenten zerfällt, folgt, dass $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}_-$ bereits die beiden (Weg)zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind. $\square$

1) Die Sphäre $\mathbb{S}^n$

Der Raum $\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} = \{1, -1\}$ ist zweipunktig und diskret. Die (Weg)zusammenhangs-kom-po-nen-ten von $\mathbb{S}^0$ sind deshalb $\{1\}$ und $\{-1\}$.

Für $n \geq 1$ ist der Raum $\mathbb{S}^n$ wegzusammenhängend, und somit auch zusammenhängend: Für $x, y \in \mathbb{S}^n$ gibt es nach Lemma 1 einen stetigen Weg $\alpha \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ von x nach y. Somit ist auch $\beta \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$, $t \longmapsto \alpha(t)/\|\alpha(t)\|$ ein stetiger Weg von x nach y.

2) Der projektive Raum kP^n

Es sei $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Der Raum kP^0 ist einpunktig, und somit (weg)zusammenhängend

Auch für $n \geq 1$ ist kP^n wegzusammenhängend: Für $\overline{x}, \overline{y} \in kP^n$ gilt $x, y \in k^{n+1} \setminus \{0\}$, weshalb es nach Lemma 1 einen stetigen Weg $\alpha \colon [0,1] \longrightarrow k^{n+1} \setminus \{0\}$ von x nach y gibt. Wegen der Stetigkeit der kanonische Projektion $p \colon k^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow kP^n$, $z \longmapsto \overline{z}$ ist somit $\beta \coloneqq p \circ \alpha \colon [0,1] \longrightarrow kP^n$ ein stetiger Weg von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$.

Aufgabe 2

1)

Für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ ist die Abbildung $[0,1] \longrightarrow \mathrm{M}_n(k)$, $t \longmapsto (1-t)A + tB$ ein stetiger Weg von A nach B.

2)

Proposition 2. Es sei $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(k)$. Die Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(k)$ entstehe aus A durch

a) Addition des λ-fachen der i-ten Zeile auf die j-te Spalte für $i \neq j$ und $\lambda \in k$;

b) Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in k \setminus \{0\}$, wobei λ in der gleichen Wegzusammenhangskomponente liegt wie $1 \in k \setminus \{0\}$ (also $\lambda \neq 0$ für $k = \mathbb{C}$ und $\lambda > 0$ für $k = \mathbb{R}$);

oder

c) im Fall $k = \mathbb{C}$ durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile für $i \neq j$;

d) im Fall $k = \mathbb{R}$ durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile für $i < j$ und anschließendes Multiplizieren der i-ten Zeile (d.h. der früheren j-ten Zeile) mit -1.

Dann gibt es in $\mathrm{GL}_n(k)$ einen stetigen Weg von A nach B.

Beweis. a) Für alle $\mu \in K$ sei $E(\mu) \in \mathrm{M}_n(k)$ die Matrix der Form

$$E(\mu) \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \mu & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei μ im (j,i)-ten Eintrag steht. Für alle $C \in \mathrm{M}_n(k)$ entsteht die Matrix $E(\mu)C$ aus C durch Addition des μ-fachen der i-ten Zeile auf die j-te. Dann ist

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k), \quad t \longmapsto E(t\lambda)A$$

ein stetiger Weg von A nach $E(\lambda)A = B$. Die Wohldefiniertheit von α folgt daraus, dass $\det \alpha(t) = \det A$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Die Stetigkeit von α folgt daraus, dass die Einträge von $\alpha(t)$ affin-lineare Funktionen in t sind.

b) Für alle $\mu \in k \setminus \{0\}$ sei $E(\mu) \in \mathrm{M}_n(k)$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $E(\mu)_{ii} = \mu$ und $E(\mu)_{jj} = 1$ für alle $j \neq i$. Für alle $C \in \mathrm{M}_n(k)$ entsteht die Matrix $E(\mu)C$ aus C durch Multiplikation der i-ten Zeile mit μ.

Nach Annahme gibt es einen stetigen Weg $\alpha : [0,1] \longrightarrow k \setminus \{0\}$ von 1 nach λ. Damit ist

$$\beta : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k), \quad t \longmapsto E(\alpha(t))A$$

ein stetiger Weg von A nach $E(\alpha(1))A = E(\lambda)A = B$. Die Wohldefiniertheit von β folgt daraus, dass $\det \beta(t) = \alpha(t) \det A \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Die Stetigkeit von β folgt daraus, dass die Einträge von $\beta(t)$ affin-linerae Funktionen in t sind.

Nach Lemma 1 ist $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ die Wegzusammenhangskomponente von 1 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Wegzusammenhangskomponente von 1 in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) Wir können ausgehend von A die folgenden elementaren Zeilenoperationen durchführen, ohne die Wegzusammenhangskomponente von A zu verlassen:

1. Addition der i-ten Zeile auf die j-te Zeile.
2. Subtraktion der j-ten Zeile von der i-ten Zeile.
3. Addition der i-ten Zeile auf die j-te Zeile.
4. Multiplikation der i-ten Zeile mit -1.

Hierdurch entsteht genau die Matrix B. Die Änderung der i-ten und j-ten Zeile lässt sich dabei wie folgt darstellen:

$$\begin{matrix} z_i \\ z_j \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} z_i \\ z_i + z_j \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -z_j \\ z_i + z_j \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -z_j \\ z_i \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} z_j \\ z_i \end{matrix}$$

d) Es muss im obigen Verfahren nur der vierte Schritt weggelassen werden. □

2.1) Der komplexe Fall $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Proposition 2 zeigt, dass man ausgehend von A alle elementaren Zeilenoperationen durchführen darf, ohne die Wegzusammenhangskomponente von A zu verlassen. Da A invertierbar ist, kann man A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix umformen.

Es folgt, dass jede Wegzusammenhangskomponente von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Einheitsmatrix enthält. Somit ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend.

2.2) Der reelle Fall $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Wir zeigen, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ in die beiden (Weg)zusammenhangskomponenten

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+ \coloneqq \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\} \quad \text{und} \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_- \coloneqq \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det A < 0\}$$

zerfällt.

Wäre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ zusammenhängend, so wäre auch das Bild $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zusammenhängend. Nach Lemma 1 ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber unzusammenhängend. Folglich besteht $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Es genügt daher zu zeigen, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$ jeweils wegzusammenhängend sind.

Wir zeigen zunächst, dass sich jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ durch Operationen, welche jeweils die Wegzusammenhangskomponente von A nicht verlassen, in eine der beiden Diagonalmatrizen

$$D_+ \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+ \quad \text{und} \quad D_- \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$$

umformen lässt:

- Da A invertierbar ist, können wir A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix umformen.

  Schränkt man dabei das Skalieren von Zeilen auf positive Skalare ein, und Ersetzt das Vertauschen von Zeilen (eine Umformungen vom Typ c) in Propositon 2) durch die ábgeänderte Operation d) aus Propositon 2, so kann A mit quasi unveränderten Vorgehen in ein Matrix der Form

  $$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

  umformt werden, ohne die Wegzusammenhangskomponente von A zu verlassen.

- Wendet man für $i < j$ die Operation d) zweimal hintereinander an, so ändert man ingesamt das Vorzeichen der i-ten und j-ten Zeile:

  $$\begin{matrix} z_i \\ z_j \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -z_j \\ z_i \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -z_i \\ -z_j \end{matrix}$$

  Durch iteriertes Anwenden hiervon lässt sich D in eine der Formen D_+ oder D_- bringen, ohne die Wegzusammenhangskomponente von A zu verlassen:

  Falls $|\{1 \leq i \leq n \mid \varepsilon_i = -1\}|$ gerade ist, so kann man die Minus-Einsen auf der Diagonale von D paarweise durch Einsen ersetzen, bis man schließlich D_+ erhält. Falls $|\{1 \leq i \leq n \mid \varepsilon_i = -1\}|$ ungerade ist, so ist man im Fall $n = 1$ bereit fertig; ansonsten ändert man das Vorzeichen von ε_{n-1} und ε_n, und elemeniert anschließend die Minus-Einsen im Bereich $1 \leq i \leq n-1$ paarweise. Hierdurch erhält man schließlich D_-.

Man bemerke, dass die Umformungen vom Typ a) und d), sowie das obige paarweise Eliminieren von Minus-Einsen die Determinante einer Matrix nicht verändert, und dass Umformungen vom Typ b) das Vorzeichen der Determinante nicht verändert. Ingesamt bleibt also das Vorzeichen der Determinante bei allen genutzen Umformungen unverändert.

Es folgt, dass sich alle $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ zu D_1 umformen lassen, und alle $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$ zu D_{-1}, jeweils ohne die entsprechende Wegzusammenhangskomponente zu verlassen. Inbesondere sind $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$ wegzusammenhängend.

Aufgabe 3

Lemma 3 (Verkleben stetiger Abbildungen). Es seien X und Y topologische Räume.

a) Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von offenen Mengen $U_i \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Für jedes $i \in I$ sei $f_i : U_i \longrightarrow Y$ eine stetige Funktion, so dass $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in I$ gilt. Dann gibt es eine eindeutige Funktion $f : X \longrightarrow Y$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$, und f ist stetig.

b) Es seien $C_1, \dots, C_n \subseteq X$ abgeschlossene Mengen mit $X = C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Für jedes $i = 1, \dots, n$ sei $f_i : C_i \longrightarrow Y$ eine stetige Funktion, so dass $f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt. Dann gibt es eine eindeutige Funktion $f : X \longrightarrow Y$ mit $f|_{C_i} = f_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, und f ist stetig.

Beweis. Die Eindeutigkeit und Existenz von f ist jeweils eine rein mengentheoretische Aussage; f ist gegeben durch $f(x) = f_i(x)$ für alle $i \in I$ und $x \in U_i$, bzw. alle $i = 1, \dots, n$ und $x \in C_i$. Es bleibt zu zeigen, dass f jeweils stetig ist.

1. Es sei $U \subseteq Y$ offen. Wegen der Stetigkeit der f_i ist $f_i^{-1}(U) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$ offen. Wegen der Offenheit von $U_i \subseteq X$ ist $f_i^{-1}(U)$ für alle $i \in I$ auch in X offen. Deshalb ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U)$ als Vereinigung offener Mengen ebenfalls offen.

2. Es sei $C \subseteq Y$ abgeschlossen. Wegen der Stetigkeit der f_i ist $f_i^{-1}(C) \subseteq C_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ abgeschlossen. Wegen der Abgeschlossenheit von $C_i \subseteq X$ ist $f_i^{-1}(C)$ für alle $i = 1, \dots, n$ auch in X abgeschlossen. Deshalb ist $f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(C)$ als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen. □

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "j_A"] \arrow[d, "j_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & X \end{tikzcd}$$

kommutiert. Um zu zeigen, dass es sich um ein Pushout-Diagramm handelt, gilt es zu zeigen, dass es für jeden topologischen Raum Y und je zwei stetige Funktionen $f_A : A \longrightarrow Y$ und $f_B : B \longrightarrow Y$ mit $f_A \circ j_A = f_B \circ j_B$, eine eindeutige stetige Funktion $f : X \longrightarrow Y$ mit $f \circ i_A = f_A$ und $f \circ i_B = f_B$ gibt.

Die Bedingung $f_A \circ j_A = f_B \circ j_B$ ist äquivalent dazu, dass $f_A|_{A \cap B} = f_B|_{A \cap B}$, und die Bedingungen $f \circ i_A = f_A$ und $f \circ i_B = f_B$ sind jeweils äquivalent dazu, dass $f|_A = f_A$ und $f|_B = f_B$. Die Aussage folgt deshalb unmittelbar aus Lemma 3.

Aufgabe 4

Es seien $W, W_1, W_2 \coloneqq [0,1]^n$. (Der Buchstabe „$W$“ steht hier für Würfel.) Es seien

$$\varphi_1 : W_1 \longrightarrow W, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(x_1, \dots, x_{k-1}, \frac{x_k}{2}, \dots, x_k, \dots, x_n\right)$$

und

$$\varphi_2 : W_2 \longrightarrow W, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(x_1, \dots, x_{k-1}, \frac{1}{2} + \frac{x_k}{2}, \dots, x_k, \dots, x_n\right).$$

Beide Abbildungen sind stetig, da sie in jeder Komponente stetig sind. Nach der universellen Eigenschaft des Koprodukts gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\varphi : W_1 \amalg W_2 \longrightarrow W$ mit $\varphi(x,1) = \varphi_1(x)$ und $\varphi(y,2) = \varphi_2(y)$ für alle $x \in W_1$ und $y \in W_2$. (Wir notieren hier die Elemente von $W_1 \amalg W_2$ als Paare $(x,1)$ mit $x \in W_1$, bzw. $(y,2)$ mit $y \in W_2$.) Man bemerke, dass φ surjektiv ist.

Für die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $W_1 \amalg W_2$ mit

$$x \sim y \iff \varphi(x) = \varphi(y) \quad \text{für alle } x, y \in W_1 \amalg W_2$$

induziert die stetige Surjektion φ nach der universellen Eigenschaft des Quotienten eine wohldefinierte stetige Bijektion

$$\overline{\varphi} : (W_1 \amalg W_2)/\sim \longrightarrow W, \quad \overline{x} \mapsto \varphi(x).$$

Da W_1 und W_2 kompakt sind, ist es auch $W_1 \amalg W_2$, und somit auch $(W_1 \amalg W_2)/\sim$. Außerdem ist W Hausdorff. Somit ist die stetige Bijektion φ nach dem üblichen Kompakt-Hausdorff-Argument bereits ein Homöomorphismus.

Man bemerke, dass die Äquivalenzrelation $\sim$ von

$$((x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_k, \dots, x_{n-1}), 1) \sim ((x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-1}), 2)$$

für alle $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}$ erzeugt wird, d.h. von

$$\left(i_0^k(x), 1\right) \sim \left(i_1^k(x), 2\right) \quad \text{für alle } x \in [0,1]^{n-1}.$$

Wir erhalten nun eine Bijektion

$$\begin{aligned}
P^n X &\coloneqq \left\{f : W \longrightarrow X \text{ stetig}\right\} \\
&\cong \left\{f : (W_1 \amalg W_2)/\sim \longrightarrow X \text{ stetig}\right\} \\
&\cong \left\{f : W_1 \amalg W_2 \longrightarrow X \text{ stetig und } \sim\text{-equivariant}\right\} \\
&= \left\{f : W_1 \amalg W_2 \longrightarrow X \text{ stetig mit } f\left(\left(i_1^k(x), 1\right)\right) = f\left(\left(i_0^k(x), 0\right)\right) \text{ für alle } x \in [0,1]^{n-1}\right\} \\
&\cong \left\{(f,g) \;\middle|\; \begin{array}{c} f : W_1 \longrightarrow X,\, g : W_2 \longrightarrow X \text{ stetig mit} \\ f\left(i_1^k(x)\right) = g\left(i_0^k(x)\right) \text{ für alle } x \in [0,1]^{n-1} \end{array}\right\} \\
&= \left\{(f,g) \in P^n X \times P^n X \;\middle|\; f \circ i_1^k = g \circ i_0^k\right\} \\
&= \left\{(f,g) \in P^n X \times P^n X \;\middle|\; \left(i_1^k\right)^* (f) = \left(i_0^k\right)^* (g)\right\} = P.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen diesen Isomorphismus mit Φ. Dieser Isomorphismus liefert eine partiell definierte binäre Verknüpfung

$$P^n X \times P^n X \supseteq P \xrightarrow{\Phi} P_n X$$

mit

$$\Phi(f,g)\colon\ [0,1]^n \longrightarrow X, \quad (x_1,\dots,x_n) \mapsto \begin{cases} f(x_1,\dots,x_{k-1},2x_k,x_{k+1},\dots,x_n) & \text{falls } x_k \leq \frac{1}{2}, \\ g(x_1,\dots,x_{k-1},2x_k-1,x_{k+1},\dots,x_n) & \text{falls } x_k \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Im Fall $n = 1$ ist $P^1 X$ die Menge der stetigen Pfade in X. Es ist $[0,1]^0 = \{*\}$ der einpunktige Raum, und für $f, g \in P^1 X$ gilt

$$(i_1^1)^*(f)(*) = f(i_1^1(*)) = f(1) \quad \text{und} \quad (i_0^1)^*(g)(*) = g(i_0^1(*)) = g(0).$$

Deshalb gilt

$$P = \{(f,g) \in P^n X \times P^n X \,|\, (i_1^1)^*(f) = (i_0^1)^*(g)\} = \{(f,g) \in P^n X \times P^n X \,|\, f(1) = g(0)\}.$$

Also besteht P genau aus der Menge der konkatinierbaren Wege. Für $(f,g) \in P$ gilt außerdem

$$\Phi(f,g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dies ist genau die Konkatination von Pfaden.