第七章 离散时间系统的时域分析

7.4 常系数线性差分方程的求解

线性时不变离散系统由常系数线性差分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

方程式的阶数等于未知序列变量序号的最高与最低值之差。

求解方法：

- 迭代法
- 时域经典法：求齐次解和特解
- 离散卷积法：利用齐次解得零输入响应，再利用卷积和求零状态响应
- 变换域法（z 变换法）
- 状态变量分析法

7.4.2 时域经典法

差分方程的完全解即系统的完全响应, 由齐次解 $y_h(n)$ 和特解 $y_p(n)$ 组成：

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

齐次解 $y_h(n)$ 的形式由齐次方程的特征根确定

特解 $y_p(n)$ 的形式由方程右边激励信号代入化简的形式确定

1、求齐次解（系统固有的响应)

差分方程的齐次方程:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

齐次解的形式

(1) 特征根是不等实根（无重根）$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$

$$y_h(n) = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \cdots + C_N\alpha_N^n = \sum_{k=1}^{N} C_k\alpha_k^n$$

(2) 特征根是 k 阶重根 α_1

$$y_h(n) = C_1 n^{k-1}\alpha_1^n + C_2 n^{k-2}\alpha_1^n + \cdots + C_{k-1} n\ \alpha_1^n + C_k\alpha_1^n = \sum_{i=1}^{k} C_i n^{k-i}\alpha_1^n$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $\alpha \pm \mathrm{j}\beta = \rho \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega_0}$

$$y_h(n) = C_1(\alpha + \mathrm{j}\beta)^n + C_2(\alpha - \mathrm{j}\beta)^n = \rho^n[P\cos(n\omega_0) + Q\sin(n\omega_0)]$$

差分方程与微分方程 齐次解的比较

差分方程	微分方程
$y_h(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n$	$r_h(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i\mathrm{e}^{\alpha_i t}$
$y_h(n)=\sum_{i=1}^{k}C_i n^{k-i}\alpha_1^n$	$r_h(t)=\sum_{i=1}^{k}A_i t^{k-i}\mathrm{e}^{\alpha_1 t}$
$C_1(\alpha+\mathrm{j}\beta)^n+C_2(\alpha-\mathrm{j}\beta)^n$ $=\rho^n[P\cos(n\omega_0)+Q\sin(n\omega_0)]$	$A_1\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)t}+A_2\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{j}\beta)t}$ $=\mathrm{e}^{\alpha t}(A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t)$

2、求特解：由激励信号 $x(n)$ 的形式决定

自由项（方程右端）	特解形式
α^n	$D\alpha^n$ （α不是特征根） $Dn^r\alpha^n$ （α 是 r 重特征根）
n^k	$D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k$ （1不是特征根） $n^r[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]$ （1 是 r 重特征根）
$\alpha^n n^k$	$[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]\alpha^n$ （α 不是特征根） $n^r[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]\alpha^n$ （α 是 r 重特征根）
$\cos(n\omega)$ 或 $\sin(n\omega)$	$D_1\cos(n\omega)+D_2\sin(n\omega)$ （$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega}$不是特征根）
$\alpha^n\cos(n\omega)$ 或 $\alpha^n\sin(n\omega)$	$[D_1\cos(n\omega)+D_2\sin(n\omega)]\alpha^n$ （$\alpha\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega}$不是特征根）

- 通过观察自由项（方程右端）的函数形式，试选特解函数式 。
- 将特解代入方程，利用待定系数法来确定 D_k 。

2、求特解：由激励信号 $x(n)$ 的形式决定

一般情况下，

若激励函数代入方程右端出现 n^k 形式的函数，则特解选 $D_0 n^k + D_1 n^{k\text{-}1} + \cdots + D_{k\text{-}1} n + D_k$；

如果出现 α^n 形式的函数，且 α 不是此差分方程的特征根，则特解选 $D\alpha^n$。

前者与微分方程的 t^k 形式对应，后者与 e^{at} 形式对应。

3、由初始条件确定待定系数 C_k（齐次系数）

完全解的一般形式（无重根的情况下）：

$$y(n) = C_1\alpha_1{}^n + C_2\alpha_2{}^n + \cdots + C_N\alpha_N{}^n + D(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k\alpha_k^n + D(n)$$

C_k 须利用 N 个给定的边界条件来确定。例如，

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + \cdots + C_N + D(0) \\ y(1) = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \cdots + C_N\alpha_N + D(1) \\ \cdots\cdots \\ y(N-1) = C_1\alpha_1{}^{N-1} + C_2\alpha_2{}^{N-1} + \cdots + C_N\alpha_N{}^{N-1} + D(N-1) \end{cases}$$

对于因果系统（激励信号在 $n=0$ 接入系统），常给定 $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$,…, $y(-N)$ 为边界条件。迭代法求出 $n \geq 0$ 的初始条件。

经典法不足之处

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n+D(n)$$

- 若差分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

7.4.3 零输入响应和零状态响应

系统完全响应 = 零输入响应+零状态响应 $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$

1、系统的零输入响应

- 定义: 输入信号为零，仅由系统的起始状态单独作用而产生的输出响应，用 $y_{zi}(n)$ 表示
- 数学模型: $\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}(n-k) = 0$ 单根 → $y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} C_{zik}\alpha_k^n$
- 求解方法：根据差分方程的特征根确定零输入响应的形式，再由边界条件 $y_{zi}(k)$ 确定待定系数 C_{zik}

2、系统的零状态响应

- 定义：当系统的起始状态为零时，由系统的外部激励 $x(n)$ 产生的响应，用 $y_{zs}(n)$ 表示

- 数学模型：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- 求解方法：

  1) 经典法：直接求解起始状态为零的差分方程

  2) 卷积法：利用信号分解和线性时不变系统的特性求解

3、零状态响应的直接求解法

直接求解起始状态为零的差分方程，也可得零状态响应。

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)$$

对于因果系统（激励信号在 $n=0$ 时接入系统），常给出 $y(-1), y(-2), y(-3),\ldots,$ $y(-N)$ 作为边界条件。

零状态指 $y_{zs}(-1)$，$y_{zs}(-2)$，$y_{zs}(-3)$，…，$y_{zs}(-N)$ **都等于零**，

$y_{zs}(0)$，$y_{zs}(1)$，$y_{zs}(2)$，…，$y_{zs}(N-1)$ 可用迭代法求出。

完全响应=齐次解 + 特解

完全响应=自由响应+强迫响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(n)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{D(n)}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}\alpha_k^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)}_{\text{零状态响应}}$$

时域经典法确定零输入响应和零状态响应中的齐次解系数，初始条件的选取：

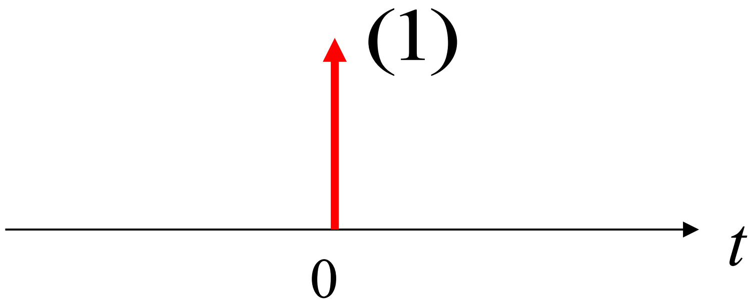
- 迭代：对于 N 阶差分方程，激励在 $n=0$ 时加入，确定零输入响应或零状态响应的齐次解的系数，需利用起始条件——N 个 $y(n)$ 值，其中 $n\geq 0$ 时的 $y(n)$ 可利用 $n<0$ 时的 $y(n)$ 迭代得到。
- 确定零输入响应的齐次解的系数：起始条件 $y(n)$ 中的 n 可正可负，且未必连续。给定的 $y(-1)$, $y(-2)$, ...$y(-N)$ 均可用；如果给定 $y(0)$, $y(1)$, ...等起始条件，要根据此时输入是否作用到了输出决定。或者，$n\geq 0$ 时的 $y(n)$ 可利用 $n<0$ 时的 $y(n)$ 迭代得到，但迭代时必须令差分方程右边等于零。
- 确定零状态响应的齐次解的系数：由于是零状态，令 $y(-1)=y(-2)=\ldots=y(-N+1)=0$，利用原方程（带有输入的）迭代求 $y(0)$, $y(1)$ ...。选取 N 个连续的起始条件，且至少需包含一个 $n\geq 0$ 的 $y(n)$，即可用。

7.5 离散时间系统的单位样值响应

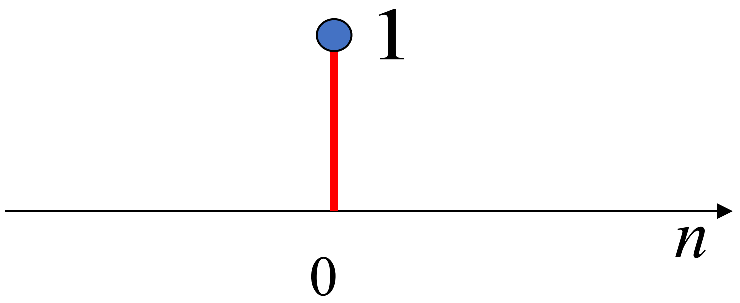
单位样值响应：是激励为 $\delta(n)$ 时产生的系统零状态响应，用 $h(n)$ 表示。

注意 $\delta(t)$ 和 $\delta(n)$ 的区别:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 & (t=0) \\ \delta(t) = 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



7.5.1 单位样值响应的求解

1、迭代法求系统单位样值响应

例7-16：已知离散时间系统的差分方程表达式 $y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$，求单位样值响应。

解：对于因果系统 $x(-1)=\delta(-1)=0, \quad y(-1)=h(-1)=0$

$$h(0)=\delta(0)+0.5y(-1)=1$$

$$h(1)=\delta(1)+0.5y(0)=0.5$$

$$h(2)=\delta(2)+0.5y(1)=(0.5)^2$$

……

$$\therefore \quad h(n)=(0.5)^n u(n)$$

2、将单位样值激励信号转化为起始条件

单位样值信号 $\delta(n)$，仅在 $n=0$ 时刻存在非零值。$n>0$ 之后激励为 0，此时系统相当于一个零输入系统，激励信号的作用已经转化为系统储能状态的变化。因此，单位样值响应的函数形式必然与零输入响应的函数形式相同。例如特征根为单根时，系统的单位样值响应为 $h(n)=\sum_{k=1}^{N} C_k \alpha_k^n \cdot u(n)$ 。

α_k 为特征根，C_k 为待定系数，由单位样值函数的作用转换为系统的初始条件来决定。

2、将单位样值激励信号转化为起始条件

将 $\delta(n)$ 转化为起始条件，于是齐次解即 $n>0$ 时的零输入解就是单位样值响应 $h(n)$ 。

以上一题为例 $y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$

$\alpha-0.5=0 \qquad \alpha=0.5$

零输入响应的形式为 $h(n)=C(0.5)^n$

$h(-1)=0 \qquad h(0)=0.5h(-1)+\delta(0)=1$

$h(0)=C(0.5)^0=1 \qquad C=1$

$\therefore h(n)=(0.5)^n u(n)$

3、利用线性时不变性求单位样值响应（推荐）

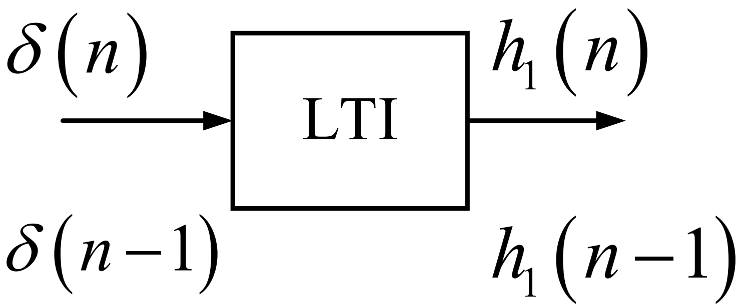
在 $n \neq 0$ 时，接入激励 $\delta(n-1)$，用线性时不变性来计算 $h(n)$。

求差分方程 $y(n)+2y(n-1)=x(n-1)$ 的单位样值响应

变前项为后项

$$h_1(n)+2h_1(n-1)=\delta(n)$$

$$h(n)+2h(n-1)=\delta(n-1)$$



$$h_1(n)=C(-2)^n u(n)$$

$$h_1(0)=1 \qquad C=1 \qquad h_1(n)=(-2)^n u(n)$$

$$h(n)=h_1(n-1)=(-2)^{n-1}u(n-1)$$

例7-19：已知系统的差分方程模型，求单位样值响应。

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

解：1）齐次解的形式为 $C_1 2^n + C_2 3^n$

2）只考虑激励 $x(n)=\delta(n)$ 作用时系统的单位样值响应 $h_1(n)$

$$h_1(0)=1,\quad h_1(-1)=0 \qquad C_1=-2,\quad C_2=3$$

$$h_1(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)$$

3）只考虑激励 $-3x(n-2)=-3\delta(n-2)$

$$h_2(n)=-3h_1(n-2)=-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$$

利用LTI性质

4）
$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$$
$$=(3^{n+1}-2^{n+1})\left[\delta(n)+\delta(n-1)+u(n-2)\right]-(3^n-3\times 2^{n-1})u(n-2)$$
$$=\delta(n)+5\delta(n-1)+(2\times 3^n-2^{n-1})u(n-2)$$

7.5.2 根据单位样值响应分析系统的因果性和稳定性

- 因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。即响应只取决于此时以及以前的激励。

- 离散线性时不变系统是因果系统的充分必要条件是

$$n<0 \quad h(n)=0 \quad \text{或} \quad h(n)=h(n)u(n)$$

- 稳定系统：输入有界则输出必定有界。

- 离散线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| \le M, M\text{为有界正值}$$

例7-21：已知系统的差分方程，求系统的单位样值响应 $h(n)$，并判断系统稳定性。

$$y(n)+\frac{1}{5}y(n-1)=x(n)+2x(n-1)+3x(n-2)$$

解：　先将方程右边只留下 $\delta(n)$，求出一个单位样值响应

$$h_1(n)+\frac{1}{5}h_1(n-1)=\delta(n)$$

根据特征根写出齐次解形式　$\alpha=-\frac{1}{5}$　　$\therefore h_1(n)=C(-\frac{1}{5})^n u(n)$

因为 $h_1(-1)=0$，所以得到 $h_1(0)=1$，则 $h_1(n)=(-\frac{1}{5})^n u(n)$

根据 LTI 系统的性质：$h(n)=h_1(n)+2h_1(n-1)+3h_1(n-2)$

$$h(n)=h_1(n)+2h_1(n-1)+3h_1(n-2)=(-\frac{1}{5})^n u(n)+2(-\frac{1}{5})^{n-1}u(n-1)+3(-\frac{1}{5})^{n-2}u(n-2)$$

$$=\left[(-\frac{1}{5})^n\delta(n)+(-\frac{1}{5})^n\delta(n-1)+(-\frac{1}{5})^n u(n-2)\right]+2\left[(-\frac{1}{5})^{n-1}\delta(n-1)+(-\frac{1}{5})^{n-1}u(n-2)\right]+3(-\frac{1}{5})^{n-2}u(n-2)$$

$$=\delta(n)+\left(-\frac{1}{5}+2\right)\delta(n-1)+\left[(-\frac{1}{5})^n+2(-\frac{1}{5})^{n-1}+3(-\frac{1}{5})^{n-2}\right]u(n-2)$$

$$=\delta(n)+\frac{9}{5}\delta(n-1)+\left[\left(\frac{1}{25}-\frac{2}{5}+3\right)(-\frac{1}{5})^{n-2}\right]u(n-2)$$

$$=\delta(n)+\frac{9}{5}\delta(n-1)+\frac{66}{25}(-\frac{1}{5})^{n-2}u(n-2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=1+\frac{9}{5}+\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{66}{25}(-0.2)^n\right|<\infty$$

稳定系统

第七章 离散时间系统的时域分析

7.6 卷积和

7.6.1 卷积和的定义

设任意离散时间序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ ，

则 $x(n)=x_1(n)*x_2(n)\xrightarrow{def}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)$

卷积和的例子

两枚骰子点数加起来是 4 的概率是多少？

两枚骰子加起来点数是几的概率最大？ **7**

$$x(n)=x_1(n)*x_2(n)$$

$$x(4)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_1(m)\cdot x_2(4-m)=\sum_{m=1}^{3}x_1(m)\cdot x_2(4-m)$$

$$x(4)=x_1(1)x_2(3)+x_1(2)x_2(2)+x_1(3)x_2(1)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

7.6.2 用卷积求零状态响应

将激励信号分解为单位样值序列的线性组合，利用线性时不变系统的特性，求每个样值序列单独作用在系统上的响应，把这些响应叠加，即为系统在任意激励信号下的零状态响应 。

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

$\delta(n)\Rightarrow h(n)$ 由时不变特性: $\delta(n-m)\Rightarrow h(n-m)$

由线性: $\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\Rightarrow y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)=x(n)*h(n)$$

系统的零状态响应等于激励信号与单位样值响应的卷积 。

7.6.3 卷积和运算的图解方法

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

卷积和图解法分为五个步骤：

1、变量替换 2、反褶 3、平移 4、相乘 5、相加

1）将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 中的自变量由 n 改为 m，m 变成函数的自变量；

2）把其中一个信号反褶；

$$h(m) \xrightarrow{\text{翻转}} h(-m)$$

3）把反褶后的信号平移；

$$h(-m) \xrightarrow{\text{平移}n} h(-(m-n)) = h(n-m)$$

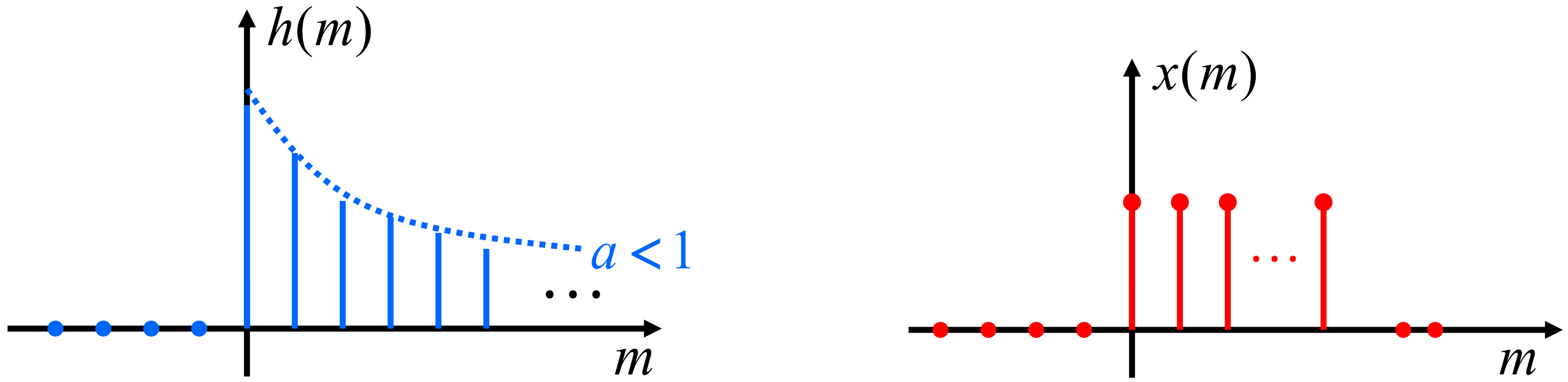
4）将 $x(m)$ 与 $h(n-m)$ 相乘；

5）对乘积后的图形求和。

关键还是确定求和区间，和连续卷积一致

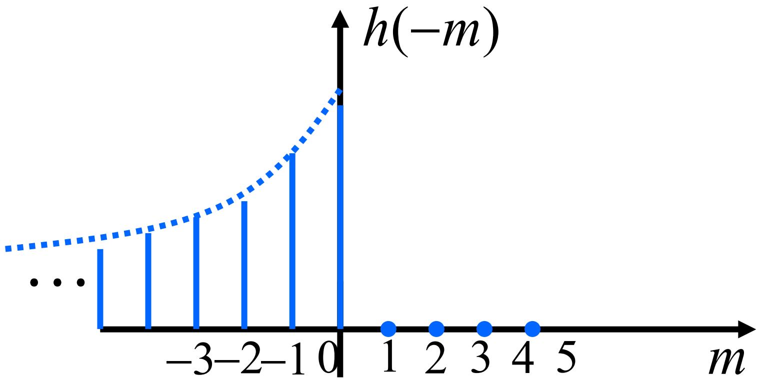
例7-22：已知某系统的单位样值响应为 $h(n)=a^n u(n)$，其中 $0<a<1$ ，若激励信号为 $x(n)=R_N(n)=u(n)-u(n-N)$。求零状态响应 $y_{zs}(n)=?$

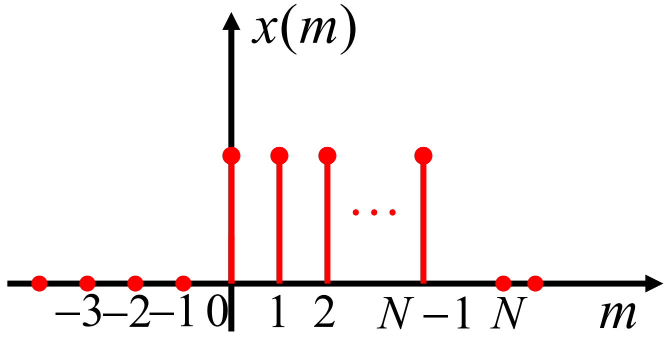
解：



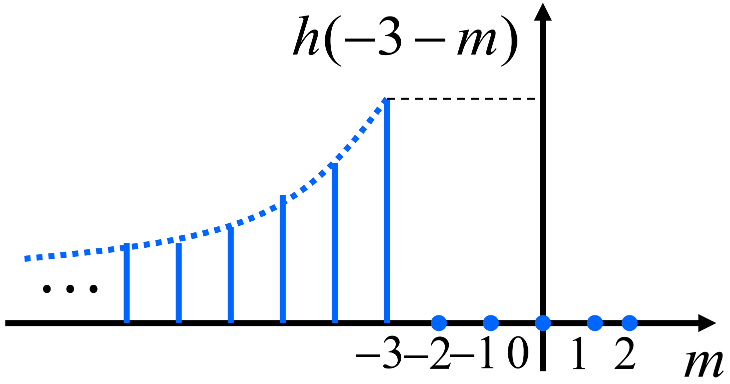
两个因果信号卷积

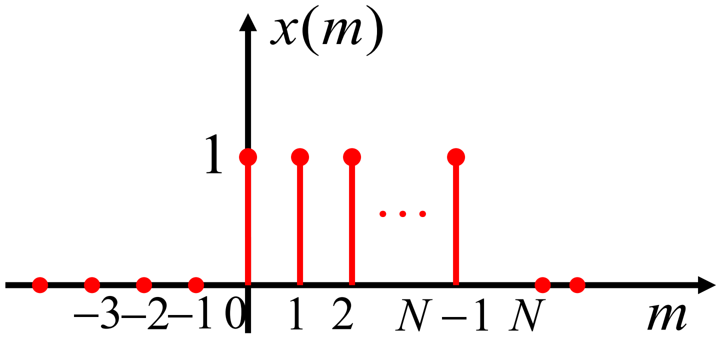
$$y_{zs}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)=\sum_{m=0}^{n} 1\cdot a^{n-m}\cdot u(n)$$





（1）当$n<0$时， $x(m)$与$h(n-m)$无交叠， 即 $y_{zs}(n)=0$

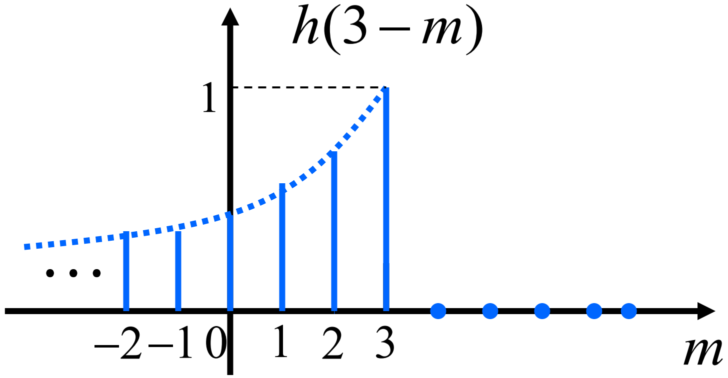


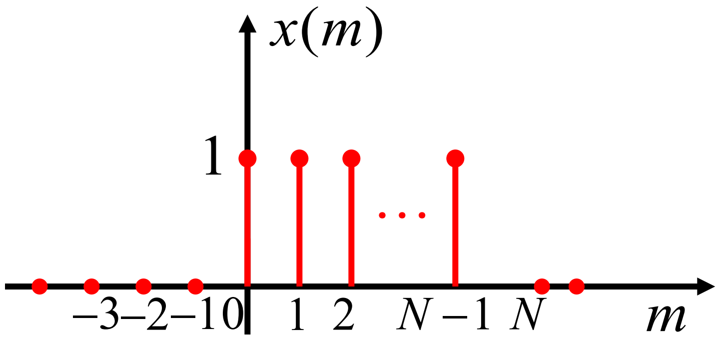


（2）当 $0 \le n \le N-1$ 时， $x(m)$与$h(n-m)$ 在 0~n 交叠非零

$$0 \le n \le N-1 \quad y_{zs}(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)x(m)$$

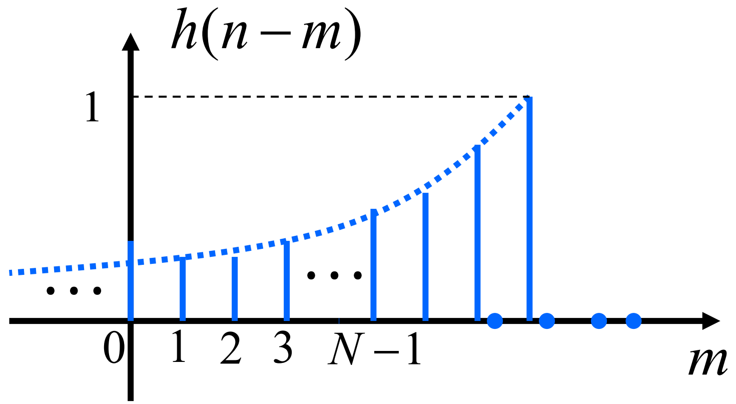
$$= \sum_{m=0}^{n} a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^{n} a^{-m} = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} \quad (0 \le n \le N-1)$$

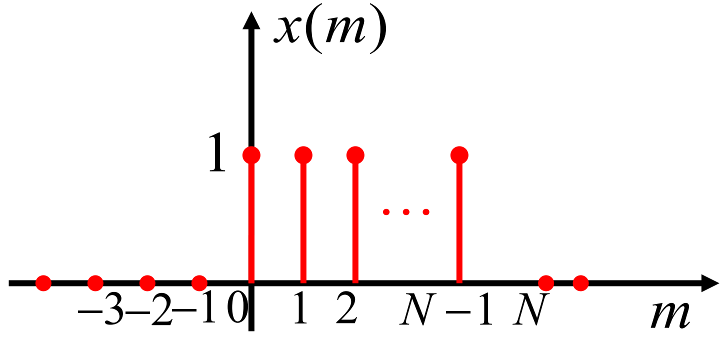




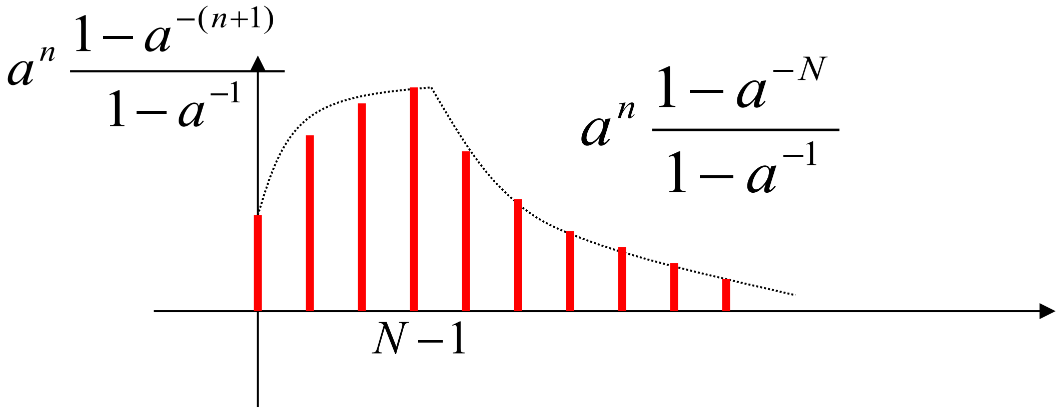
（3）当$n \ge N-1$时， $x(m)$与$h(n-m)$有交叠非零，区间为$0 \sim N-1$

$$y_{zs}(n)=\sum_{m=0}^{N\text{-}1} a^{n-m} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} \qquad \left(n \ge N-1\right)$$





卷积和结果

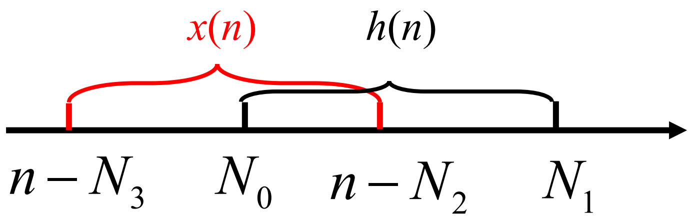


例7-23：已知一线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)$，除在 $N_0 \le n \le N_1$ 区间外都为零。而输入 $x(n)$ 除在 $N_2 \le n \le N_3$ 区间之外均为零。这样，零状态响应 $y(n)$ 除在 $N_4 \le n \le N_5$ 之外均被限制为零。试用 N_0, N_1, N_2, N_3 来表示 N_4与N_5。

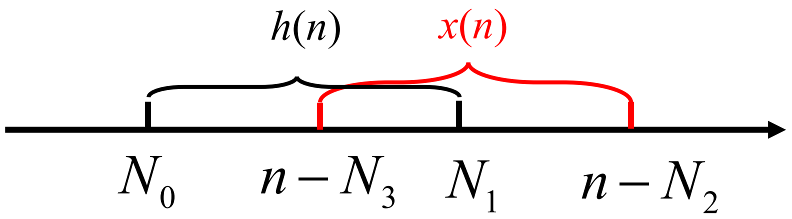
解法一：令 $$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

若保持 $h(m)$ 不动，而移动 $x(-m)$，则当 $n - N_2 \ge N_0$ 时，$y(n)$ 有非零值，如图 (a) 所示 。

且当 $n - N_3 \le N_1$ 时，$y(n)$ 也有非零值，如图 (b) 所示 。



图(a)



图(b)

综上：$$\boxed{N_4 = N_0 + N_2 \quad N_5 = N_1 + N_3}$$

解法二： $y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$

$$N_0 \le m \le N_1$$

$$N_2 \le n-m \le N_3 \quad \Rightarrow \quad N_2+m \le n \le N_3+m$$

$$\Rightarrow \quad N_0+N_2 \le n \le N_1+N_3$$

$$\boxed{N_4=N_0+N_2 \qquad N_5=N_1+N_3}$$

例7-24. 已知一线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)$ 的序列长度为 L_1，输入 $x(n)$ 的序列长度为 L_2。零状态响应 $y(n)$ 的序列长度为 L_3 与 L_1 和 L_2 之间满足（　　）的关系。

A $L_3 = L_1 + L_2 - 1$

B $L_3 = L_1 + L_2$

C $L_3 = L_1 + L_2 + 1$

D $L_3 = L_1 + L_2 + 2$

提交

解：

假设单位样值响应 $h(n)$ 除在 $N_0 \le n \le N_1$ 区间外都为零，序列长度为 $L_1 = N_1 - N_0 + 1$。

输入 $x(n)$ 除在 $N_2 \le n \le N_3$ 区间之外均为零，序列长度为 $L_2 = N_3 - N_2 + 1$。

零状态响应 $y(n)$ 除在 $N_0 + N_2 \le n \le N_1 + N_3$ 之外均被限制为零，序列长度为

$$
\begin{aligned}
L_3 &= (N_1 + N_3) - (N_0 + N_2) + 1 \\
&= (N_1 - N_0) + (N_3 - N_2) + 1 \\
&= (N_1 - N_0 + 1) + (N_3 - N_2 + 1) - 1 = L_1 + L_2 - 1
\end{aligned}
$$

若为离散时间信号的卷积，序列长度为 $L_3 = L_1 + L_2 - 1$

若为连续时间信号的卷积，信号时宽长度为 $L_3 = L_1 + L_2$

例7-25：已知 $x_1(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)+4\delta(n-2)+\delta(n-3)$ 求卷积 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$

$x_2(n)=3\delta(n)+\delta(n-1)+5\delta(n-2)$

解：

$$\{x_1(n)\}=\{\underset{\uparrow}{2}\quad 1\quad 4\quad 1\}\qquad \{x_2(n)\}=\{\underset{\uparrow}{3}\quad 1\quad 5\}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & x_1(n): & 2 & 1 & 4 & 1 & \\
 & x_2(n): & & 3 & 1 & 5 & \\
\hline
 & & 10 & 5 & 20 & 5 & \\
 & 2 & 1 & 4 & 1 & & \\
6 & 3 & 12 & 3 & & & \\
\hline
y(n):6 & 5 & 23 & 12 & 21 & 5 &
\end{array}$$

对位相乘求和

相乘求和不进位

$$\{y(n)\}=\{\underset{\uparrow}{6}\quad 5\quad 23\quad 12\quad 21\quad 5\}$$

单选题 1分

设置

计算 $x(n)=\{1,\ 2,\ \overset{\downarrow}{0},\ 3,\ 2\}$ 与 $h(n)=\{1,\ \overset{\downarrow}{4},\ 2,\ 3\}$ 的卷积和 。

A $y(n)=\{1,6,\overset{\downarrow}{10},10,20,14,13,6\}$

B $y(n)=\{1,8,\overset{\downarrow}{10},10,21,14,13,6\}$

C $y(n)=\{1,6,10,\overset{\downarrow}{10},20,14,13,6\}$

D $y(n)=\{1,8,10,\overset{\downarrow}{10},21,14,13,6\}$

提交

例7-26: 计算 $x(n)=\{1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$ 与 $h(n)=\{1, \overset{\downarrow}{4}, 2, 3\}$ 的卷积和。

解：

		$x(-2)$	$x(-1)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$
		1	2	0	3	2
$h(-1)$	1	1	2	0	3	2
$h(0)$	4	4	8	0	12	8
$h(1)$	2	2	4	0	6	4
$h(2)$	3	3	6	0	9	6

每条斜线上的数相加

$$y(n)=\{1, 6, 10, \overset{\downarrow}{10}, 20, 14, 13, 6\}$$

7.6.4 卷积和的性质

交换律 $$x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$$

分配律 $$x_1(n)*\left[x_2(n)+x_3(n)\right]=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

结合律 $$x_1(n)*\left[x_2(n)*x_3(n)\right]=\left[x_1(n)*x_2(n)\right]*x_3(n)$$

与单位样值序列的卷积 $$x(n)*\delta(n)=x(n) \qquad x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$$

与阶跃序列的卷积 $$x(n)*u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$$

7.6.5 利用卷积和求系统的零状态响应

例7-27：若描述某离散系统的差分方程为 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$

已知激励 $x(n)=3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，求系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

解： $h(n)+3h(n-1)+2h(n-2)=\delta(n)$

特征根为-1，-2， $\therefore h(n)=\left[C_1(-1)^n+C_2(-2)^n\right]u(n)$

$h(-1)=0,\ h(-2)=0,$ 迭代求得$h(0)=1$。

用$h(0)$，$h(-1)$求得$C_1=-1$，$C_2=2$。

$\therefore h(n)=\left[-(-1)^n+2(-2)^n\right]u(n)$

7.6.5 利用卷积和求系统的零状态响应

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^m u(m)\cdot\left[-(-1)^{n-m}+2(-2)^{n-m}\right]u(n-m) \\
&= \begin{cases} -3(-1)^n\sum\limits_{m=0}^{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m+6(-2)^n\sum\limits_{m=0}^{n}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^m, & n\ge 0 \\ 0 & n<0 \end{cases} \\
&= \left[-2(-1)^n+\frac{24}{5}(-2)^n+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)
\end{aligned}
$$

作 业

教材习题

基础题：7-32

加强题：7-35

第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

离散信号的复频域分析
- 8.1 z变换的定义
- 8.2 典型序列的z变换
- 8.3 z变换的收敛域
- 8.4 逆z变换
- 8.5 z变换的基本性质

8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

离散系统的复频域分析
- 8.7 利用z变换解差分方程
- 8.8 离散时间系统的系统函数

离散信号的频域分析
- 8.9 序列的傅里叶变换

离散系统的频域分析
- 8.10 离散时间系统的频率响应特性

第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.1 z 变换的定义

为什么引入 Z 变换？

- Z 变换是求解差分方程的有力工具（把差分方程转换成代数方程），类似于连续时间系统中的拉普拉斯变换
- Z 变换还用于数字滤波器的分析与设计，以及各种类型的数字信号处理问题

Z 变换的产生：

- 18 世纪有初步认识
- 20 世纪 50—60 年代进一步发展和应用

Z 变换是借助于抽样信号的拉氏变换引出

连续因果信号 $x(t)$ 经均匀冲激抽样，抽样信号 $x_s(t)$ 的表示式

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

T 为抽样间隔

对 $x_s(t)$ 求单边拉氏变换

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\int_0^{\infty}\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathrm{e}^{-snT}$$

令 $z = \mathrm{e}^{sT}$，其中 z 为一个复变量，则抽样信号的拉氏变换与序列的 Z 变换的关系：

$$\boxed{X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT}} = X_s(s)}$$

$$z = \mathrm{e}^{sT},\ X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

通常令 $T=1$，$z=\mathrm{e}^{s}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

单边 Z 变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

双边 Z 变换

序列的 Z 变换是复变量 z^{-1} 的幂级数，其系数是 $x(n)$。

因果序列的单边和双边Z变换等同。着重单边，兼顾双边！

8.2 典型序列的 z 变换

1) 单位样值序列的 z 变换

$$ZT[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \quad (0 \le |z| \le \infty)$$

单边（双边）Z 变换

$$ZT[\delta(n-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-1) z^{-n} = z^{-1} \quad (|z| > 0)$$

单边（双边）Z 变换

$$ZT[\delta(n+1)] = \sum_{n=-\infty}^{-1} \delta(n+1) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n+1) z^{-n}$$

$$= z^{1} + 0 = z \quad (|z| < \infty)$$

双边 Z 变换

2) 单位阶跃序列的 z 变换

$$ZT[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad (|z^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > 1)$$

单选题 1分

设置

序列 $a^n u(n)$ $(|a| \neq 1)$的 z 变换为

A $\frac{z}{a-z}$ $(|z| < a)$

B $\frac{z}{a-z}$ $(|z| > a)$

C $\frac{z}{z-a}$ $(|z| < a)$

D $\frac{z}{z-a}$ $(|z| > a)$

提交

3) 单边指数序列的 z 变换

$$ZT[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad (\left|az^{-1}\right| < 1 \rightarrow |z| > |a|)$$

4) 斜变序列的 z 变换

$$ZT[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

由 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (|z| > 1)$

上式两边对 z^{-1} 求导， $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$

两边乘以 z^{-1}， $\displaystyle ZT[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad (|z| > 1)$

5）单边复指数序列的 z 变换

$$ZT[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}} \qquad |z|>\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}\right|=1$$

$$ZT[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}} \qquad |z|>\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}\right|=1$$

$$ZT[\beta^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}} \qquad |z|>\left|\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}\right|=|\beta|$$

$$ZT[\beta^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}} \qquad |z|>\left|\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}\right|=|\beta|$$

6）单边正（余）弦序列的 z 变换

$$ZT[\cos(\omega_0 n)u(n)] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})/2 \cdot u(n)] = (\frac{z}{z-e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}})/2$$

$$= \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \quad (|z|>1)$$

$$ZT[\sin(\omega_0 n)u(n)] = ZT[(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n})/2j \cdot u(n)] = (\frac{z}{z-e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}})/2j$$

$$= \frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \quad (|z|>1)$$

7) 单边指数正（余）弦序列的 z 变换

$$ZT[\beta^n\cos(\omega_0 n)u(n)] = ZT[\beta^n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n})/2] = \left(\frac{z}{z-\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}}+\frac{z}{z-\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}}\right)/2$$

$$=\frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2}\qquad(|z|>|\beta|)$$

$$ZT[\beta^n\sin(\omega_0 n)u(n)] = ZT[\beta^n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n})/2\mathrm{j}] = \left(\frac{z}{z-\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}}-\frac{z}{z-\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}}\right)/2\mathrm{j}$$

$$=\frac{z\beta\sin\omega_0}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2}\qquad(|z|>|\beta|)$$

其他典型序列的单边 z 变换，见教材 381 页附录五 。

8.3 z 变换的收敛域

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

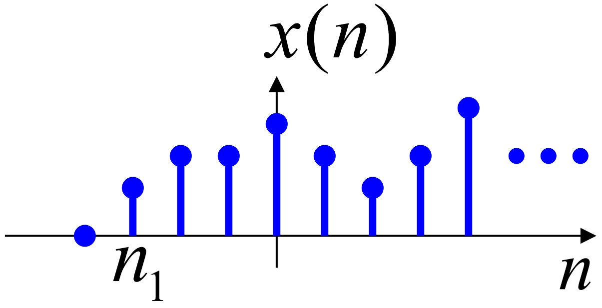
收敛域：当 $x(n)$ 为有界时，令上述级数收敛的所有 z 值的集合称为收敛域（region of convergence, 缩写为 ROC）。

级数收敛的充要条件是满足绝对可和条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$$

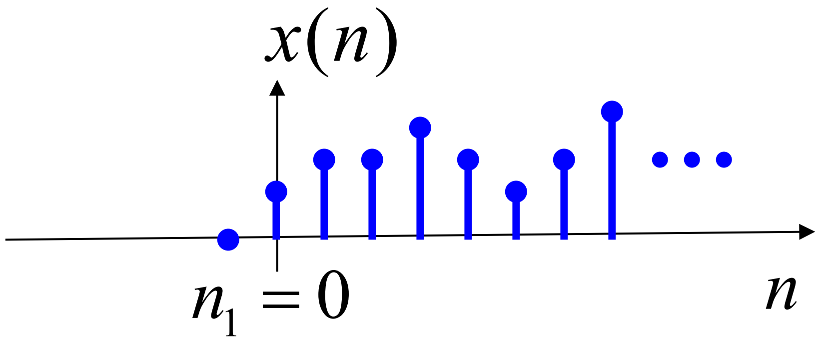
左边构成正项级数，可利用正项级数收敛的判定方法，常用比值判定法和根值判定法（教材51页）。

1）右边序列： 只在$n \ge n_1$ 区间内，有非零的有限值的序列

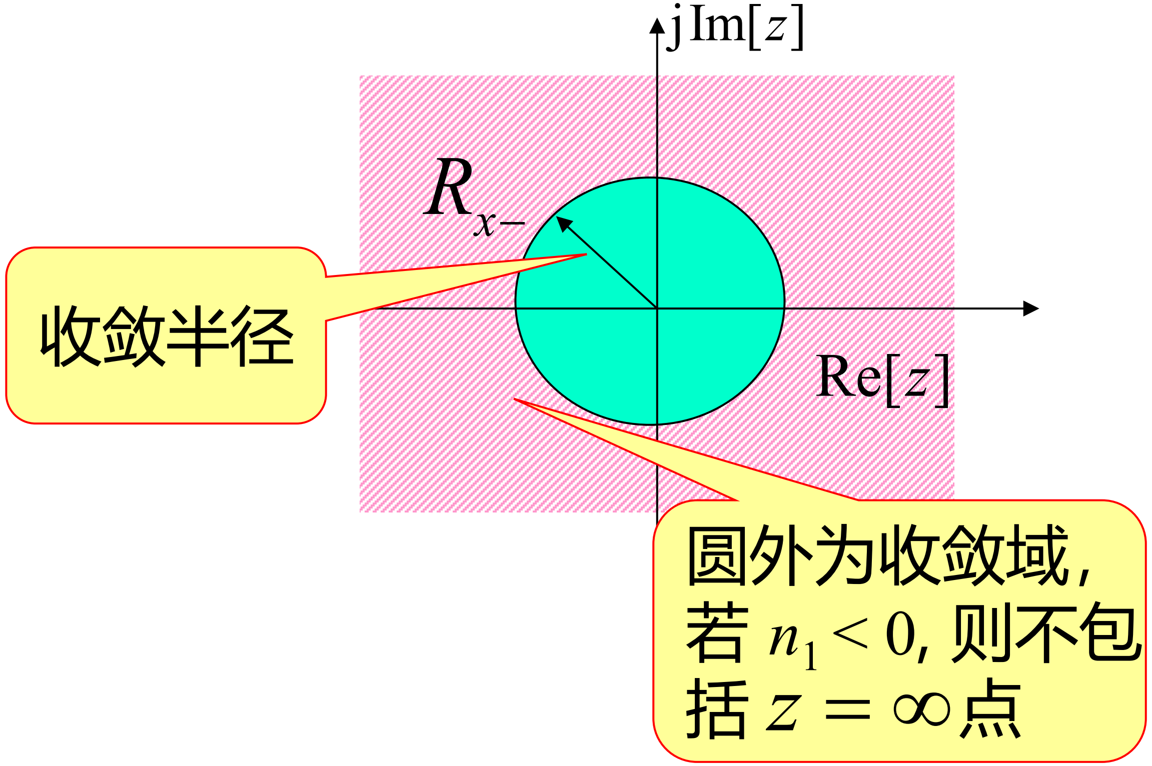


$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \le n \le \infty$$

$$n_1 < 0, \quad R_{x-} < |z| < \infty$$

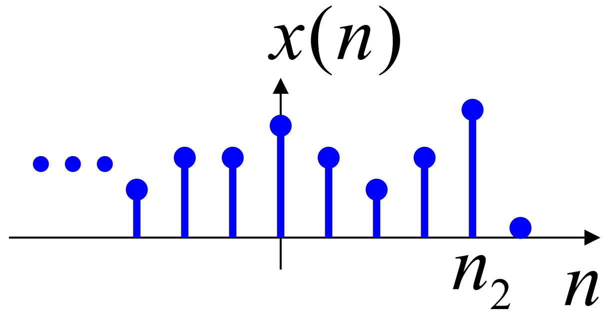


$$n_1 = 0, \quad |z| > R_{x-}$$



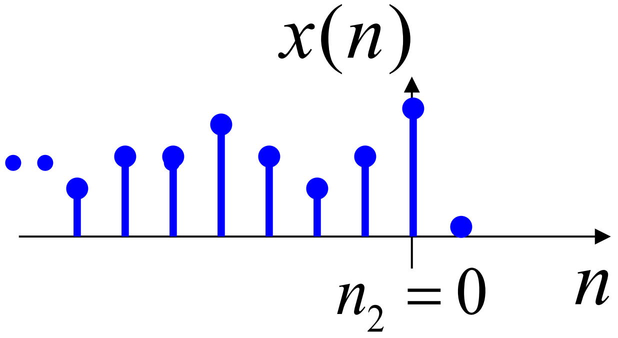
因果序列是右边序列的一种特殊情况，它的收敛域为 $|z| > R_{x-}$

2）左边序列：只在 $n \le n_2$ 区间内，有非零的有限值的序列

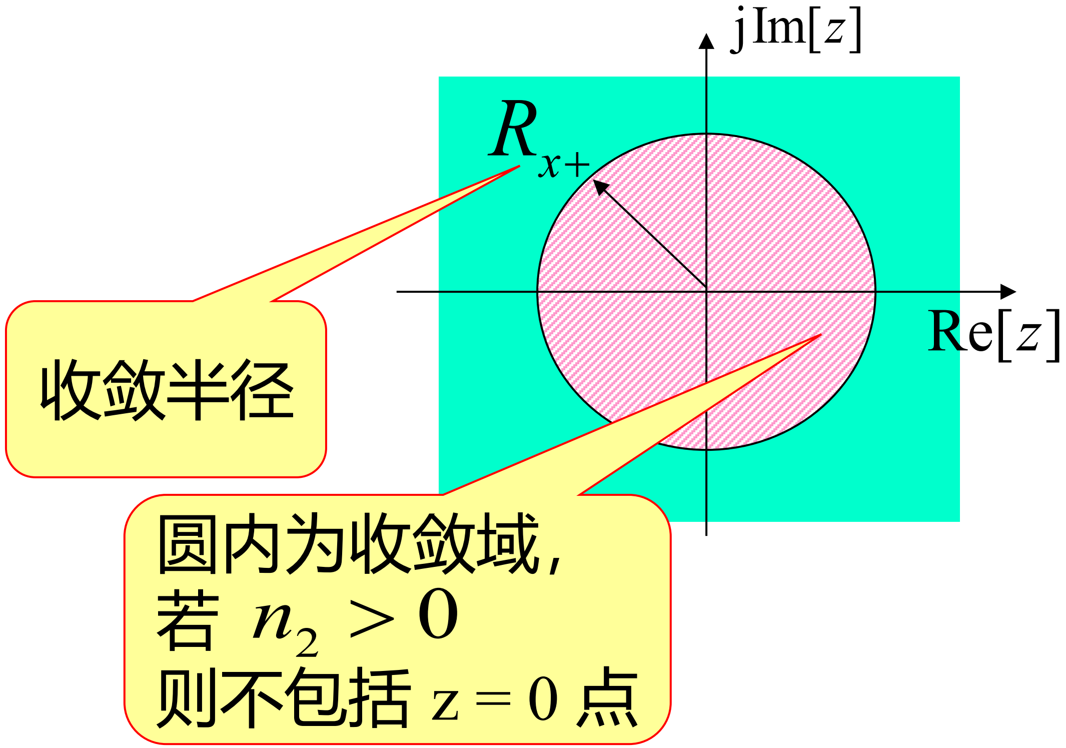


$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

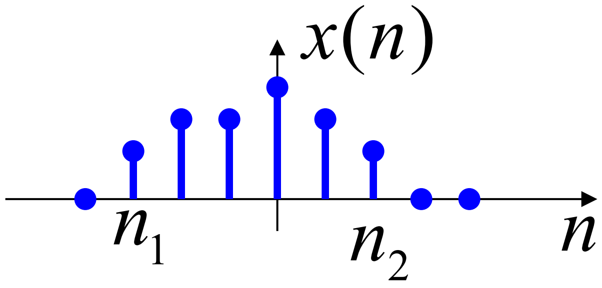
$n_2 > 0, \quad 0<|z|<R_{x+}$



$n_2 = 0, \quad |z|<R_{x+}$



3）有限长序列： 在有限区间 $n_1 \le n \le n_2$ 内，有非零的有限值的序列



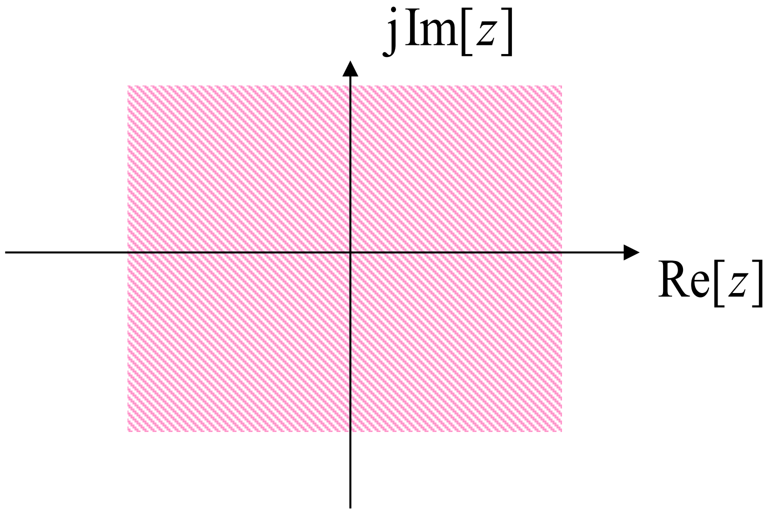
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \le n \le n_2$$

分为三种情况:

$n_1 < 0, n_2 > 0 \quad 0 < |z| < \infty$

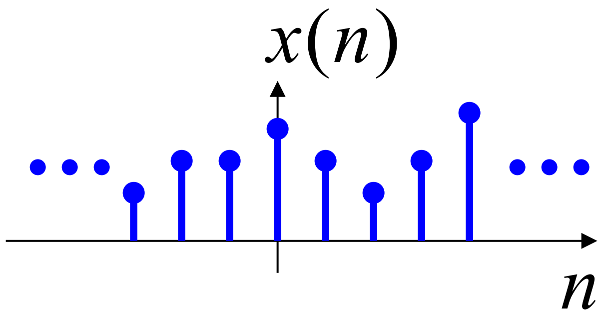
$n_1 \ge 0, n_2 > 0 \quad 0 < |z| \le \infty$

$n_1 < 0, n_2 \le 0 \quad 0 \le |z| < \infty$



收敛域至少为除了 0 和 ∞ 外的整个 z 平面。

4）双边序列：只在 $-\infty \le n \le \infty$ 区间内，有非零的有限值的序列



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

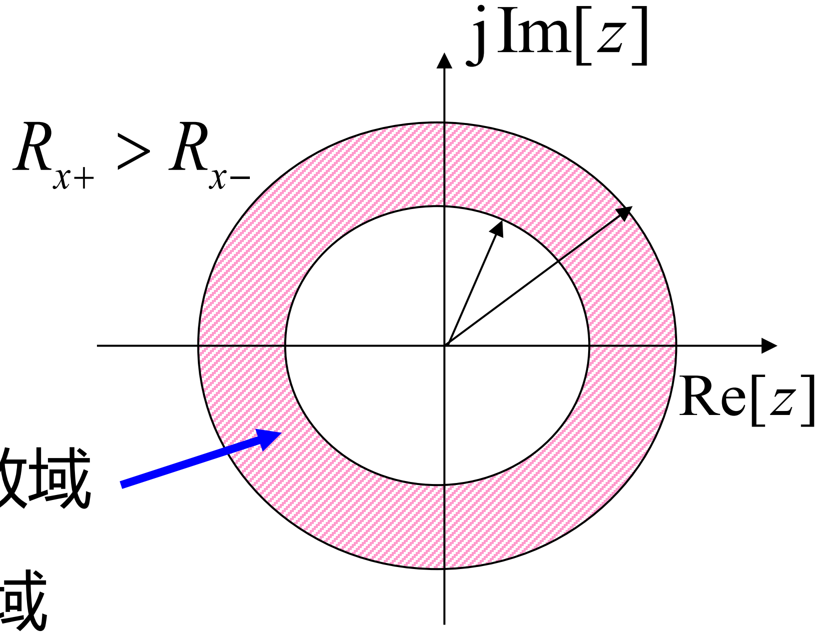
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

圆内收敛
$|z|<R_{x+}$

圆外收敛
$|z|>R_{x-}$

$R_{x+}>R_{x-}$ 有环状收敛域

$R_{x+}<R_{x-}$ 没有收敛域



对于单边变换，序列与变换式唯一对应，同时有唯一的收敛域。

对于双边变换，不同的序列在不同的收敛域可能映射同一个变换式。

例如： $x_1(n) = a^n u(n)$ $\qquad X_1(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$

$x_2(n) = -a^n u(-n-1)$ $\qquad X_2(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$

$$= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a|$$

对于一个给定序列的 z 变换既要给出表达式，又要标出它的收敛域。

例8-1：求序列 $x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$ 的单边和双边 z 变换，并确定其收敛域(其中 $b>a$，$b>0$，$a>0$)。

解：这是一个双边序列，求单边 z 变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}[a^n u(n)-b^n u(-n-1)]z^{-n}$$

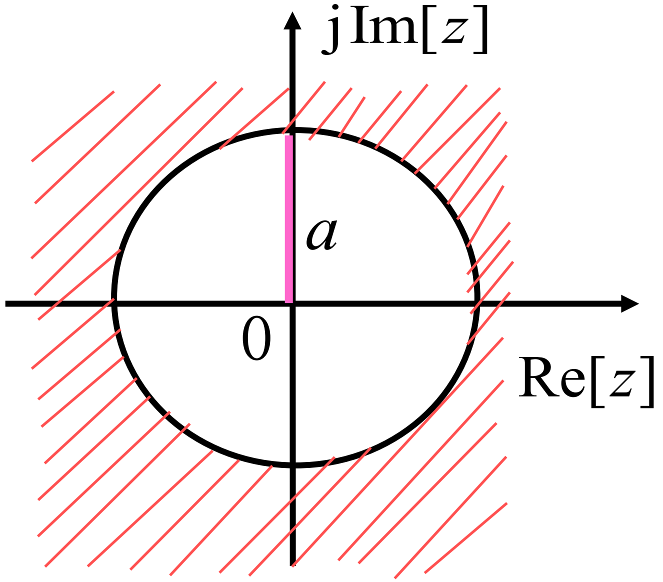
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

如果 $|z|>a$ $\quad X(z)=\dfrac{z}{z-a}$

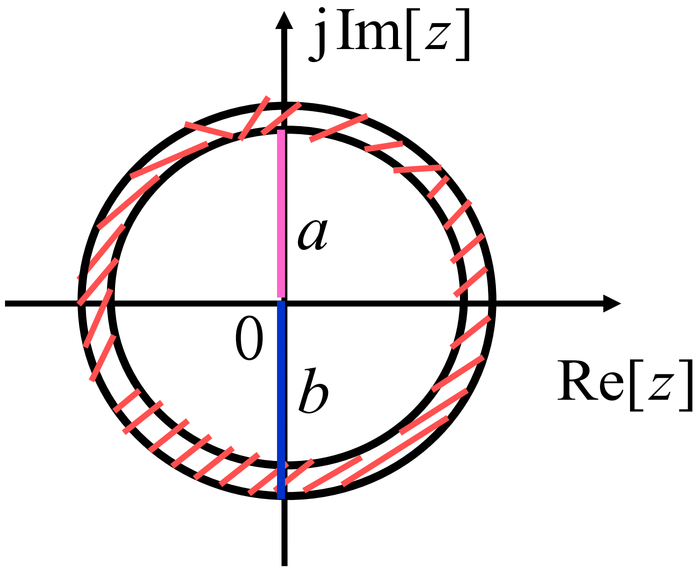
求双边 z 变换 $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a^n u(n)-b^n u(-n-1)]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}+1-\sum_{n=0}^{\infty}b^{-n}z^{n}$$

如果 $a<|z|<b$ $$X(z)=\frac{z}{z-a}+1+\frac{b}{z-b}=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}$$



序列单边 z 变换的收敛域



序列双边 z 变换的收敛域

当 $|z|>a$ 时，$X(z)=\dfrac{z}{z-a}$

当 $a<|z|<b$ 时，$X(z)=\dfrac{z}{z-a}+\dfrac{z}{z-b}$

收敛域内不包含任何极点，收敛域通常以极点为边界

右边序列的收敛域从 $X(z)$ 最外面（最大值）的极点向外延伸至 $z\to\infty$（可能包括 ∞）

左边序列的收敛域从 $X(z)$ 最里面（最小值）的极点向内延伸至 $z\to 0$ （可能包括 0）

单选题 1分

设置

已知序列 $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n[u(n)-u(n-8)]$，其收敛域为（ ）

A $0<|z|<\frac{1}{3}$

B $|z|>\frac{1}{3}$

C $|z|>0$

D $0<|z|<8$

提交

例8-2： $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n[u(n)-u(n-8)]$ 有限长序列

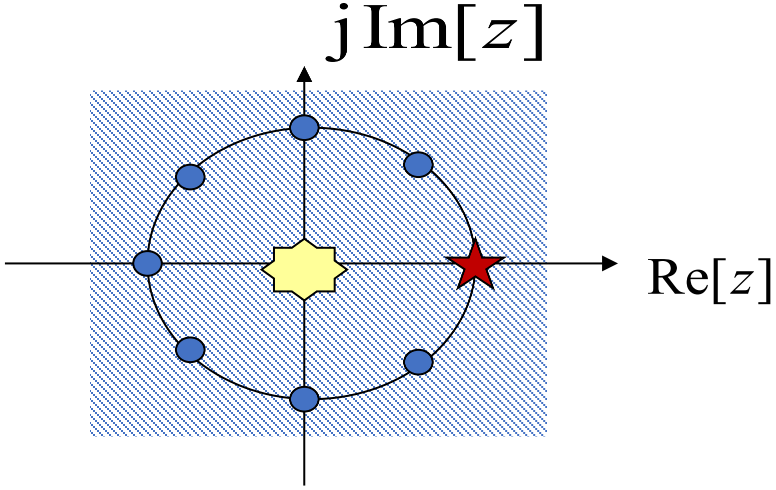
$$X(z)=\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1-(\frac{1}{3}z^{-1})^8}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z^8-(\frac{1}{3})^8}{z^7(z-\frac{1}{3})}$$

$z^8=(\frac{1}{3})^8$ $\quad z=\frac{1}{3}e^{j\frac{2k\pi}{8}}\ (k=0,\dots,7)$ ⟶ 八个零点

$z=0$ ⟶ 七阶极点

$z=1/3$ ⟶ 一阶极点

$\therefore |z|>0$



注意：零极点相消的情况，收敛域扩大 。

作 业

教材习题
基础题：8-1，8-3，8-7
加强题：无