第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.4 逆 z 变换

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

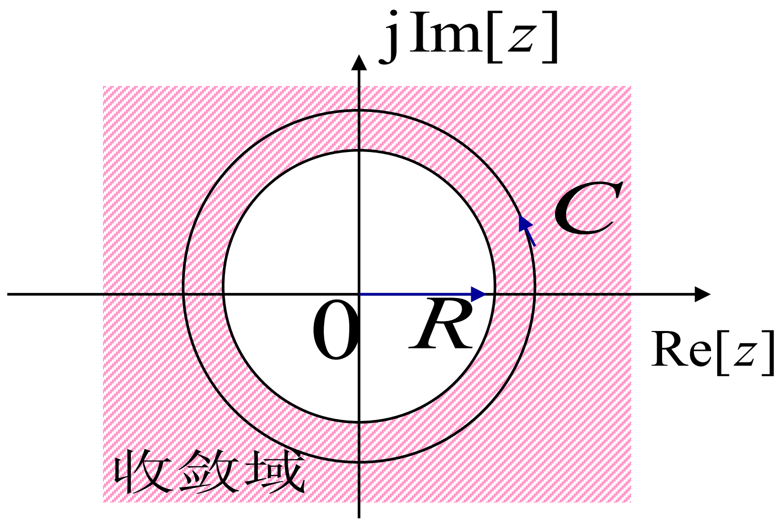
$$x(n)=ZT^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C}X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z$$

C 是包围 $X(z)z^{n-1}$ 所有极点的逆时针闭合积分路线，一般取 z 平面收敛域内以原点为中心的圆 。

（1）留数法 ※

（2）幂级数展开法（长除法） ※

（3）部分分式法



$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$

1) $X(z)$ 只有一阶极点 z_m

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=0}^{K}\frac{A_m}{z-z_m}=\frac{A_0}{z-z_0}+\frac{A_1}{z-z_1}+\cdots+\frac{A_K}{z-z_K}$$

其中z_m为$\dfrac{X(z)}{z}$的一阶极点，$A_m=\left[(z-z_m)\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_m}$

$$X(z)=\sum_{m=0}^{K}\frac{zA_m}{z-z_m}$$

或 $X(z)=\sum_{m=0}^{K}\dfrac{A_m}{1-z_mz^{-1}}=\dfrac{A_0}{1-z_0z^{-1}}+\dfrac{A_1}{1-z_1z^{-1}}+\cdots+\dfrac{A_K}{1-z_Kz^{-1}}$

$$A_m=\left[\left(1-z_mz^{-1}\right)X(z)\right]_{z=z_m}$$

2) $X(z)$ 除含有 M 个一阶极点外，在 $z=z_i$ 处还含有一个 s 阶极点

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=0}^{M}\frac{A_m}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j}{(z-z_i)^j}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=0}^{M}\frac{A_m}{z-z_m}+\frac{B_1}{z-z_i}+\frac{B_2}{(z-z_i)^2}+\cdots+\frac{B_s}{(z-z_i)^s}$$

$$B_s=\left[(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i}$$

$$B_j=\frac{1}{(s-j)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{s-j}}{\mathrm{d}z^{s-j}}(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i}$$

一般只需要记住 $z=z_i$ 处 2 阶和 3 阶极点的系数计算：

2 阶极点

$$\begin{cases} B_2=\left[(z-z_i)^2\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \\ B_1=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-z_i)^2\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \end{cases}$$

逆变换：

$$x(n)=A_0\delta(n)+(A_1z_1^n+\cdots+A_Mz_M^n+B_1z_i^n+B_2nz_i^{n-1})u(n)$$

3 阶极点

$$\begin{cases} B_3=\left[(z-z_i)^3\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \\ B_2=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-z_i)^3\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \\ B_1=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z-z_i)^3\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \end{cases}$$

逆变换：

$$x(n)=A_0\delta(n)+\left[A_1z_1^n+\cdots+A_Mz_M^n+B_1z_i^n+B_2nz_i^{n-1}+\frac{B_3n(n-1)}{2}z_i^{n-2}\right]u(n)$$

或$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{1-z_m z^{-1}}+\sum_{j=1}^{s}\frac{C_j}{(1-z_i z^{-1})^j}$

$$=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{1-z_m z^{-1}}+\frac{C_1}{1-z_i z^{-1}}+\frac{C_2}{(1-z_i z^{-1})^2}+\cdots+\frac{C_s}{(1-z_i z^{-1})^s}$$

$$A_0=\left[X(z)\right]_{z=0}=\frac{b_0}{a_0}$$

$$C_s=\left[\left(1-z_i z^{-1}\right)^s X(z)\right]_{z=z_i}$$

C_j 由待定系数法求出

一般情况下，$X(z)$ 的表达式为 $X(z)=\dfrac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$

利用部分分式展开法求逆变换时，要掌握基本形式的逆变换。

注意：逆变换与收敛域有关。

$$\frac{z}{z-z_m}\quad(|z|>a)\Leftrightarrow z_m^n\,u(n)\qquad\qquad \frac{z}{z-z_m}\quad(|z|<a)\Leftrightarrow -z_m^n\,u(-n-1)$$

讨论：1）只有真分式才可进行部分分式展开，但展开的形式乘以 z 才具备上述逆 z 变换的基本形式。

2）对 $\dfrac{X(z)}{z}$ 进行部分分式展开，要求 $\dfrac{X(z)}{z}$ 是真分式，即需要 $k\geq r$ 保证 $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处收敛。对因果序列，它的 z 变换收敛域为 $|z|>R_x$，$k\geq r$ 是满足收敛的充分必要条件。

8.5 z 变换的基本性质

8.5.1 线性

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$

$ZT[y(n)] = Y(z) \quad (R_{y1} < |z| < R_{y2})$

则 $ZT\left[ax(n) + by(n)\right] = aX(z) + bY(z)$

$\max(R_{x1}, R_{y1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{y2})$ 收敛域为重叠部分

注：如果线性组合中某些零点与极点相抵消，则收敛域可能扩大 。

8.5.2 位移性

1) 双边序列移位后的双边 z 变换

$$ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)] = z^{m} X(z)$$

m 为任意正整数。

注意：序列位移可能会使 z 变换在 $z=0$ 或 $z=+\infty$ 处的零极点发生变化。但如果 $x(n)$ 是一个双边序列，$X(z)$ 的收敛域是一个环形区域，那么序列位移就不会产生收敛域的变化。

2) 双边序列左移的单边 z 变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)u(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n+m)u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-n}$$

$$=z^{m}\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-(n+m)}=z^{m}\sum_{k=m}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=z^{m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

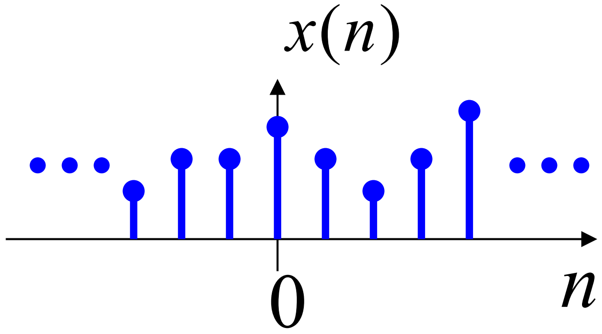
$$=z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

3) 双边序列右移的单边 z 变换

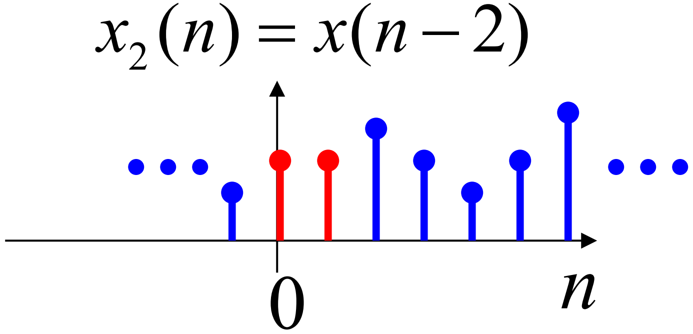
$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)u(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)u(n)]=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

举例:



$$X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$



$$X_2(z)=x(-2)+x(-1)z^{-1}+x(0)z^{-2}+\cdots$$

$$=z^{-2}X(z)+x(-2)+x(-1)z^{-1}$$

$$=z^{-2}\left[X(z)+x(-2)z^{2}+x(-1)z\right]$$

4) 特别是，因果序列位移的单边 z 变换

$$\because \quad \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} = 0$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m}X(z)$$

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right]$$

实际中多为因果序列，此二式最为常用 。

总结一下单边 z 变换的位移性质：

$$ZT[x(n+1)u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)z^{-(n-1)}$$

$$=z\sum_{n=1}^{\infty}x(n)z^{-n}=z[X(z)-x(0)]=zX(z)-zx(0)$$

$$ZT[x(n+2)u(n)]=z^{2}X(z)-z^{2}x(0)-zx(1)$$

$$ZT[x(n-1)u(n)]=z^{-1}X(z)+x(-1)$$

$$ZT[x(n-2)u(n)]=z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)$$

利用 z 变换的线性和位移性可解差分方程。

8.5.3 z 域微分（时域线性加权）

若 $ZT[x(n)] = X(z)$

则 $ZT[nx(n)] = -z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$

时域序列乘 n 等效于 z 域中求导且乘以 (- z) 。

$$ZT[n^2x(n)] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}\right]$$

$$ZT[n^m x(n)] = \left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m X(z)$$

利用z域微分特性求得的常见序列z变换

Z变换	因果序列	Z变换	因果序列
$\dfrac{z}{z-1}\quad (\lvert z\rvert>1)$	$u(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}\quad (\lvert z\rvert>1)$	$nu(n)$
$\dfrac{z}{z-a}\quad (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$a^n u(n)$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}\quad (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$na^n u(n)$
$\dfrac{z^2}{(z-a)^2}\quad (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$(n+1)a^n u(n)$	$\dfrac{a^2 z}{(z-a)^3}\quad (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$\dfrac{n(n-1)}{2!}a^n u(n)$
$\dfrac{z^3}{(z-a)^3}\quad (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$		

序列右移1
乘以系数a

序列右移2
乘以系数a^2

注:$(n+1)a^n u(n)$右移1，乘以a, 变为

$$na^n u(n-1)=0\cdot a^0\delta(n)+1\cdot a\delta(n-1)+2a^2\delta(n-2)+\cdots=na^n u(n)$$

若z变换的收敛域为$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$ ，逆变换为反因果序列，上述表格中的序列前面添加负号，$u(n)$替换为$u(-n-1)$。

8.5.4 z 域尺度变换（时域指数加权）

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$

则 $ZT[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a}) \quad (R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2}) \quad |a| > 1$

$$ZT[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad (R_{x1} < |az| < R_{x2}) \quad |a| > 1$$

$$ZT[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[(-1)^n u(n)] = z/(z+1) \quad (|z| > 1)$$

8.5.5 初值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 已知 $ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$, 则 $x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$

8.5.6 终值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 已知 $ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$, 则 $\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} [(z-1) X(z)]$

要求当 $n \to \infty$ 时 $x(n)$ 收敛，即 $X(z)$ 极点必须在单位圆内（在单位圆上只能位于 $z=1$ 处且为一阶极点）。

注意和系统稳定性条件区别，系统稳定性条件只有极点位于单位圆内。

终值定理条件：等价于收敛域内包括单位圆 或 在 $z=1$ 处有一阶极点 。

$x(n)$	终值 $n\to\infty$	$X(z)$	ROC
$(2)^n$	无	$\dfrac{z}{z-2}$	$\lvert z\rvert>2$
$(1)^n$	有，1	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$(-1)^n$	无	$\dfrac{z}{z+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$(0.5)^n$	有，0	$\dfrac{z}{z-0.5}$	$\lvert z\rvert>0.5$

例8-10：已知某因果序列的 z 变换 $X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, |z|>|a|$，式中 a 为实数，利用初值定理和终值定理求序列的初值 $x(0)$ 和终值 $x(\infty)$，并推导 $x(1)$。

解： 由初值定理和终值定理，

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1-az^{-1}}=1$$

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{1-az^{-1}}$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)}{z-a}=\begin{cases}1, & a=1\\ 0, & |a|<1\end{cases}$$

$|a|>1$ 或 $a=-1$
终值不存在

初值定理与位移性质结合：

因为 $x(1)=x(n+1)\big|_{n=0}$ 且 $x(n+1)\leftrightarrow z\left[X(z)-x(0)\right]$

所以 $x(1)=\lim\limits_{z\to\infty} z\left[X(z)-x(0)\right]$

$$=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{1-az^{-1}}-z\right)$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{az}{z-a}\right)=a$$

8.5.7 时域卷积定理

已知两序列 $x(n)$, $h(n)$ ，其 z 变换为

$$ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[h(n)] = H(z) \quad (R_{h1} < |z| < R_{h2})$$

则两序列在时域中的卷积的 z 变换等效于在 z 域中两序列 z 变换的乘积。

$$ZT[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$$

$$\max(R_{x1}, R_{h1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{h2})$$

收敛域为重叠部分

注：如果某些零点与极点相抵消，则收敛域可能扩大。

证明：$ZT[x(n)*h(n)] = ZT[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)]$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) ZT[h(n-m)]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} H(z)$$

$$= X(z)H(z)$$

例：$ZT[\sum_{k=0}^{n} x(k)] = ZT\{[x(n)u(n)]*u(n)\}$

$$= \frac{z}{z-1} X(z)$$

单选题 1分

设置

已知 $x(n)=u(n)$, $h(n)=a^{n}u(n)-a^{n-1}u(n-1)$ $|a|<1$，令 $y(n)=x(n)*h(n)$，则 $y(n)$ 的 z 变换的收敛域为（ ）

A $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{z}|<\mathbf{1}$

B $|\boldsymbol{z}|<|\boldsymbol{a}|$

C $|\boldsymbol{z}|>|\boldsymbol{a}|$

D $|\boldsymbol{z}|>\mathbf{1}$

提交

例8-11 已知 $x(n)=u(n)$, $h(n)=a^n u(n)-a^{(n-1)}u(n-1)$ ，求此两序列的卷积 。

解： $X(z)=\dfrac{z}{z-1},\quad |z|>1$

$$H(z)=\frac{z}{z-a}-z^{-1}\frac{z}{z-a}=\frac{z-1}{z-a},\quad |z|>|a|$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z-1}{z-a}=\frac{z}{z-a},\quad |z|>|a|$$

其逆变换为 $y(n)=a^n u(n)$

$X(z)$的极点被$H(z)$的零点抵消；若$|a|<1$，$X(z)H(z)$的收敛域扩大

第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.6 z 平面与 s 平面的映射关系

8.6.1 z 平面与 s 平面的映射关系

$z = \mathrm{e}^{sT}$ T 为序列的时间间隔

将 s 表示成直角坐标形式，将 z 表示成极坐标形式

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$z = \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)T} = \mathrm{e}^{\sigma T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$\begin{cases} r = \mathrm{e}^{\sigma T} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \\ \theta = \omega T = 2\pi\dfrac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

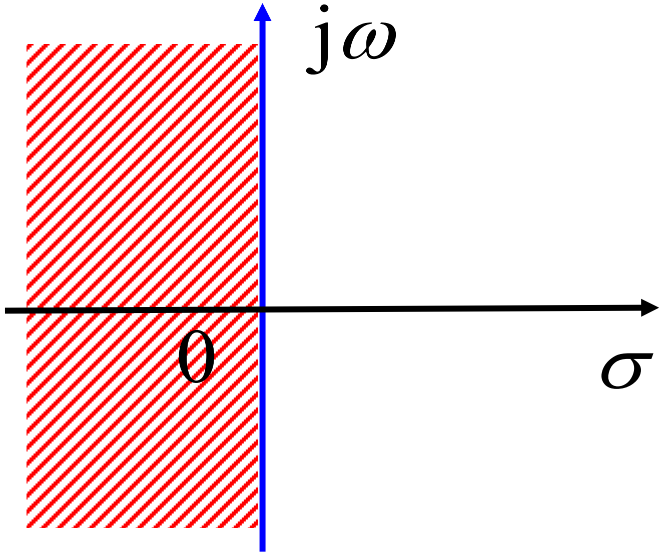
$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ 为重复频率

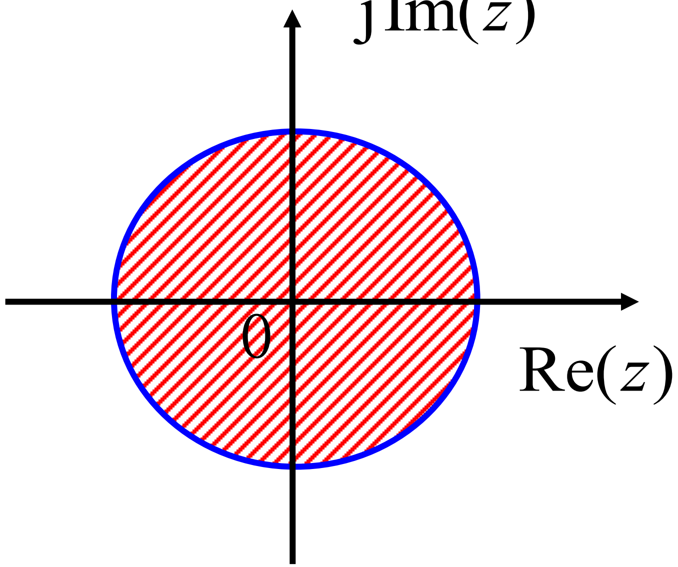
1) s平面上的虚轴$\xlongequal{\text{映射}}$ z平面上的单位圆$(r=1)$

$$\sigma=0 \quad s=\mathrm{j}\omega \quad r=|z|=\mathrm{e}^{\sigma T}=1$$

2) s平面上的左半平面$\xlongequal{\text{映射}}$ z平面上的单位圆内$(r<1)$

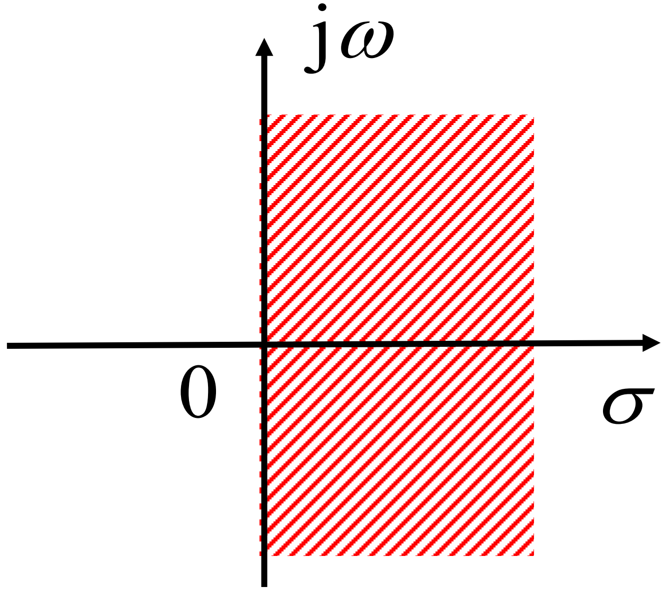
$$\sigma<0 \quad s=\sigma+\mathrm{j}\omega \quad r=|z|=\mathrm{e}^{\sigma T}<1$$

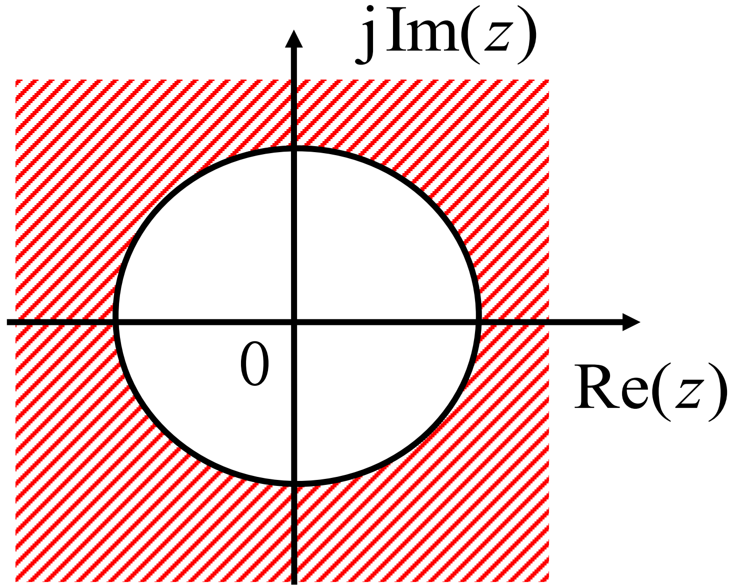




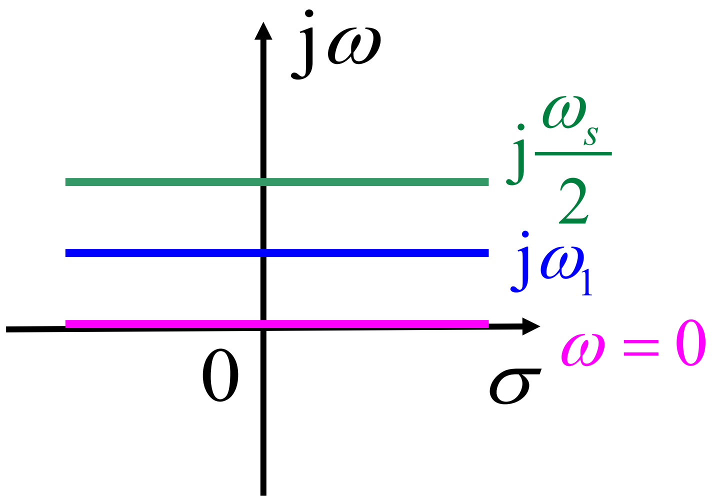
3) s平面上的右半平面$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上的单位圆外$(r>1)$

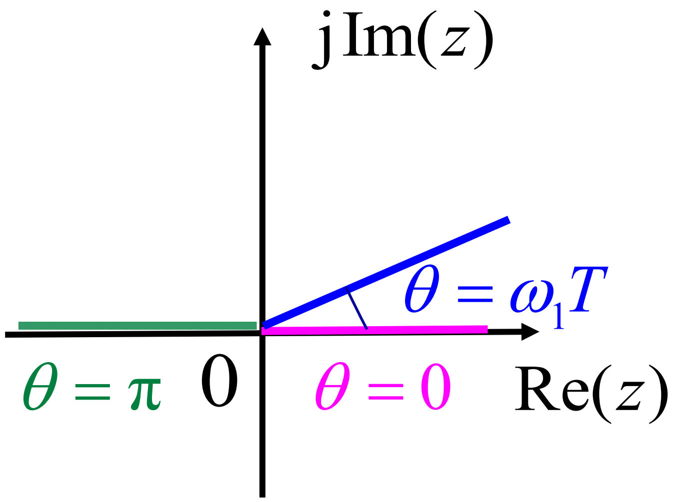
$$\sigma > 0 \quad s = \sigma + \mathrm{j}\omega \quad r = |z| = \mathrm{e}^{\sigma T} > 1$$





4) s平面上的实轴$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上的正实轴($\theta$=0)



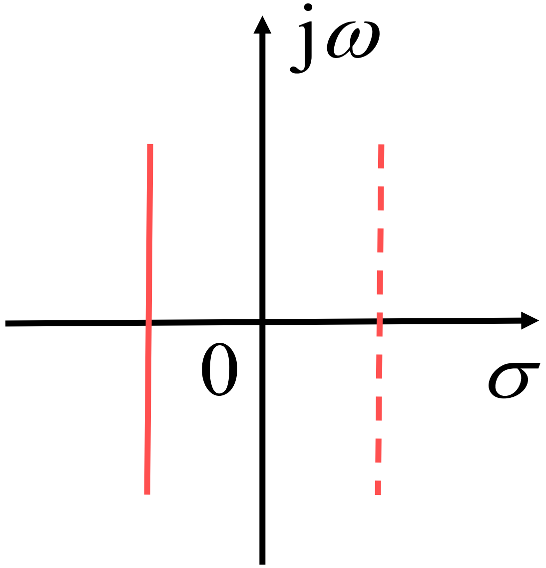


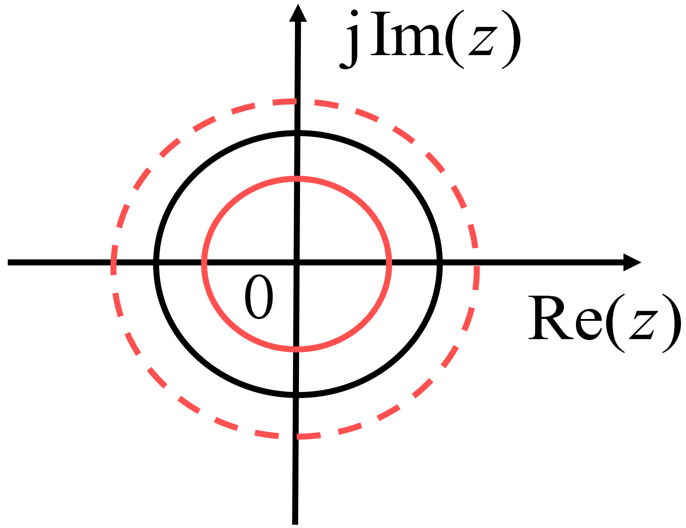
平行于实轴的直线($\omega=$常数)$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上始于原点的射线

通过$\pm\mathrm{j}\dfrac{k\omega_s}{2}$($k=\pm1,\pm3,\ldots$)平行于实轴的直线$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上负实轴$\begin{pmatrix}\theta=\pi \\ r\text{任意}\end{pmatrix}$

$$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s}=k\pi \qquad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

5) 平行于虚轴的直线 $\overset{\text{映射}}{=\!=\!=}$ z平面上的圆$\begin{pmatrix} \sigma > 0, & r > 1 \\ \sigma < 0, & r < 1 \end{pmatrix}$





6) s平面上沿虚轴移动$\xlongequal{映射}$$z$平面上沿单位圆周期性旋转，

每平移ω_s，则沿单位圆转一圈。

即$s\sim z$平面的映射并不是单值的。

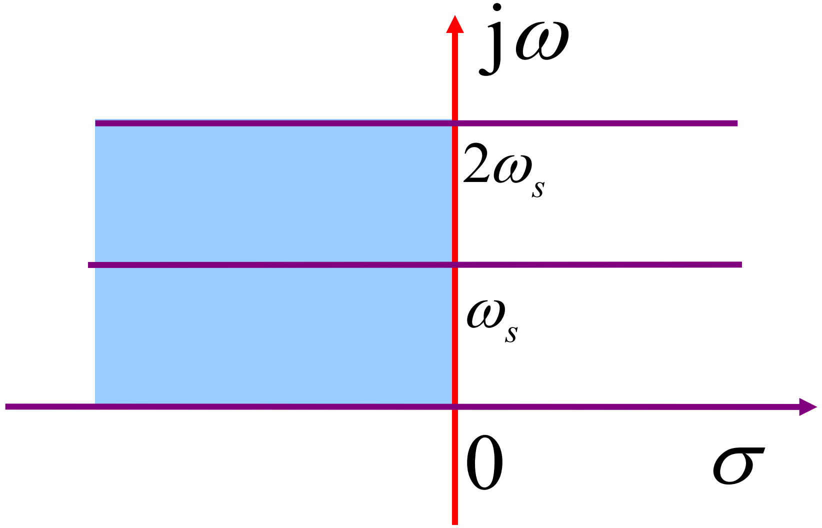
$$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s} \qquad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

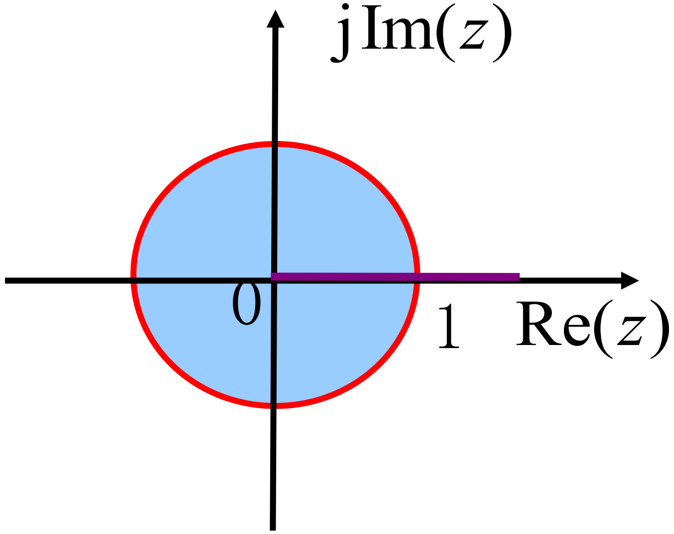
$\omega=0\sim\omega_s$ $\qquad$ $\theta=0\sim 2\pi$

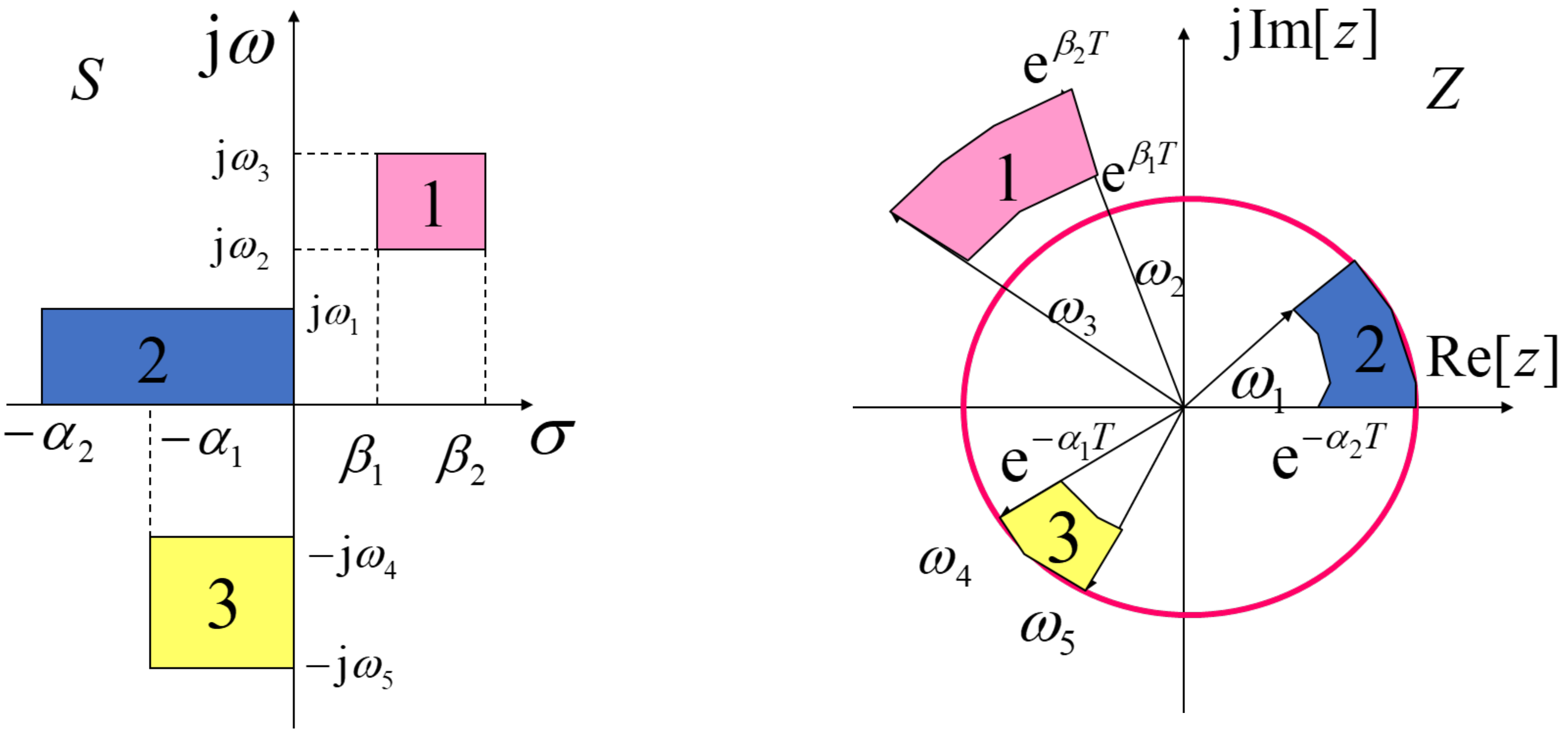
$\omega=\omega_s\sim 2\omega_s$ $\qquad$ $\theta=2\pi\sim 4\pi$

$\omega=0\sim k\omega_s$ $\qquad$ $\theta=0\sim 2k\pi$

k **圈**







给定 $\frac{\pi}{2T} < \omega_2 < \omega_3 < \frac{\pi}{T}$ → $\frac{\pi}{2} < \omega_2 T < \omega_3 T < \pi$

$0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2T}$ → $0 < \omega_1 T < \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{T} < \omega_4 < \omega_5 < \frac{3\pi}{2T}$ → $\pi < \omega_4 T < \omega_5 T < \frac{3\pi}{2}$

8.6.2 z 变换与拉氏变换的表达式的对应

若连续时间信号 $\hat{x}(t)$ 由 N 项指数信号相加组合而成

$$\hat{x}(t)=\hat{x}_1(t)+\hat{x}_2(t)+\ldots+\hat{x}_N(t)=\sum_{i=1}^{N}\hat{x}_i(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i\mathrm{e}^{p_i t}u(t)$$

$$LT\left[\hat{x}(t)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-p_i}$$

若序列 $x(nT)$ 由 N 项指数序列相加组合而成

$$x(nT)=x_1(nT)+x_2(nT)+\ldots+x_N(nT)=\sum_{i=1}^{N}x_i(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i\mathrm{e}^{p_i nT}u(nT)$$

$$ZT\left[x(nT)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-\mathrm{e}^{p_i T}z^{-1}}$$

借助模拟滤波器设计数字滤波器

例8-12：已知指数函数 $\mathrm{e}^{-at}u(t)$ 的拉氏变换为 $\dfrac{1}{s+a}$，求抽样序列 $\mathrm{e}^{-anT}u(nT)$ 的 z 变换。

解： $x(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t) \quad X(s)=\dfrac{1}{s+a}$

$X(s)$ 只有一个一阶极点 $s=-a$，可以直接求出 $\mathrm{e}^{-anT}u(nT)$ 的 z 变换为：

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{-aT}}$$

常用信号拉氏变换与 Z 变换的对应关系，参考教材 80页 表 8-7

8.7 利用 z 变换解差分方程

原理：利用单边 z 变换的线性和位移性

1、单边 z 变换的位移性

$$ZT[x(n)u(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m}\left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}\right]$$

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right]$$

2、用单边 z 变换解差分方程的步骤和思路

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$y(n-k)$，$x(n-r)$ 均为右移序列

两边取单边 z 变换

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\Big[Y(z)+\underbrace{\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}}_{\text{起始状态}}\Big]=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\Big[X(z)+\underbrace{\sum_{m=-r}^{-1} x(m)z^{-m}}_{\text{若为因果信号此项为零}}\Big]$$

1）零输入响应

若激励 $x(n)=0$，系统处于零输入状态：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}]=0$$

求得的是零输入响应：

$$Y_{zi}(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\cdot\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统的起始状态 $y(l)$ $(-N\le l\le -1)$。

$$y_{zi}(n)=ZT^{-1}[Y_{zi}(z)]$$

2）零状态响应

若系统的起始状态 $y(l)=0 \quad (-N\le l\le -1)$，系统处于零状态，且激励 $x(n)$ 为因果序列，则

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

求得的零状态响应：

$$Y_{zs}(z) = X(z)\cdot \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统函数:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$Y_{zs}(z) = X(z)H(z)$$

$$y_{zs}(n) = ZT^{-1}[X(z)H(z)]$$

例8-13：利用单边 z 变换求解下面的系统差分方程

$$y(n)+0.1y(n-1)-0.02y(n-2)=10u(n)$$

$$y(-1)=4,\ y(-2)=6$$

解法一：

$$Y(z)+0.1z^{-1}[Y(z)+zy(-1)]-0.02z^{-2}[Y(z)+z^{2}y(-2)+zy(-1)]=\frac{10z}{z-1}$$

$$(1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2})Y(z)=\frac{10z}{z-1}+0.08z^{-1}-0.28$$

$$Y(z)=\frac{9.72+0.36z^{-1}-0.08z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0.1z^{-1})(1+0.2z^{-1})}$$

$$Y(z)=\frac{A_1}{1-z^{-1}}+\frac{A_2}{1+0.2z^{-1}}+\frac{A_3}{1-0.1z^{-1}}$$

$$A_1=(1-z^{-1})Y(Z)\Big|_{z=1}=\left.\frac{9.72+0.36z^{-1}-0.08z^{-2}}{(1-0.1z^{-1})(1+0.2z^{-1})}\right|_{z=1}=9.26$$

$$A_2=(1+0.2z^{-1})Y(Z)\Big|_{z=\text{-}0.2}=\left.\frac{9.72+0.36z^{-1}-0.08z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0.1z^{-1})}\right|_{z=-0.2}=0.66$$

$$A_3=(1-0.1z^{-1})Y(Z)\Big|_{z=0.1}=\left.\frac{9.72+0.36z^{-1}-0.08z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+0.2z^{-1})}\right|_{z=0.1}=-0.2$$

$$Y(z)=\frac{9.26}{1-z^{-1}}+\frac{0.66}{1+0.2z^{-1}}-\frac{0.2}{1-0.1z^{-1}}$$

$$y(n)=[9.26+0.66(-0.2)^n-0.2(0.1)^n]u(n)$$

解法二：

a) 利用 z 变换求零状态响应

$$Y(z)+0.1z^{-1}Y(z)-0.02z^{-2}Y(z)=\frac{10z}{z-1}$$

$$(1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2})Y(z)=\frac{10}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{10}{(1-z^{-1})(1-0.1z^{-1})(1+0.2z^{-1})}$$

$$Y(z)=\frac{A_1}{1-z^{-1}}+\frac{A_2}{1+0.2z^{-1}}+\frac{A_3}{1-0.1z^{-1}}$$

$$A_1=(1-z^{-1})Y(Z)\Big|_{z=1}=\frac{10}{(1-0.1z^{-1})(1+0.2z^{-1})}\Bigg|_{z=1}=9.26$$

$$A_2=(1+0.2z^{-1})Y(Z)\Big|_{z=\text{-}0.2}=\frac{10}{(1-z^{-1})(1-0.1z^{-1})}\Bigg|_{z=-0.2}=1.11$$

$$A_3=(1-0.1z^{-1})Y(Z)\Big|_{z=0.1}=\frac{10}{(1-z^{-1})(1+0.2z^{-1})}\Bigg|_{z=0.1}=-0.37$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{9.26}{1-z^{-1}}+\frac{1.11}{1+0.2z^{-1}}-\frac{0.37}{1-0.1z^{-1}}$$

$$y_{zs}(n)=[9.26+1.11(-0.2)^n-0.37(0.1)^n]u(n)$$

b) 求零输入响应（也可以用时域法）

$$Y_{zi}(z)=\frac{-0.1y(-1)+0.02y(-2)+0.02y(-1)z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2}}$$

$$=\frac{-0.28+0.08z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2}}$$

$$=\frac{-0.45}{1+0.2z^{-1}}+\frac{0.17}{1-0.1z^{-1}}$$

$$y_{zi}(n)=-0.45(-0.2)^n+0.17(0.1)^n \quad n\geq 0$$

c) 全响应 $y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)=[9.26+0.66(-0.2)^n-0.2(0.1)^n]u(n)$

8.8 离散系统的系统函数

8.8.1 系统函数的定义

1、系统零状态响应的 z 变换与激励的 z 变换之比

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

零状态

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

因果

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

2、单位样值响应 $h(n)$ 的 z 变换

激励与单位样值响应的卷积为系统的零状态响应

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

由卷积定理 $$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

单选题 1分

设置

差分方程 $y(n) - ay(n-1) = bx(n)$ 所描述的离散时间系统的单位样值响应为（　　）

A　$h(n) = ab^n u(n)$

B　$h(n) = \left(\frac{a}{b}\right)^n u(n)$

C　$h(n) = ba^n u(n)$

D　$h(n) = \left(\frac{b}{a}\right)^n u(n)$

提交

例8-14：求下列差分方程所描述的离散时间系统的系统函数和单位样值响应，并画出系统框图。

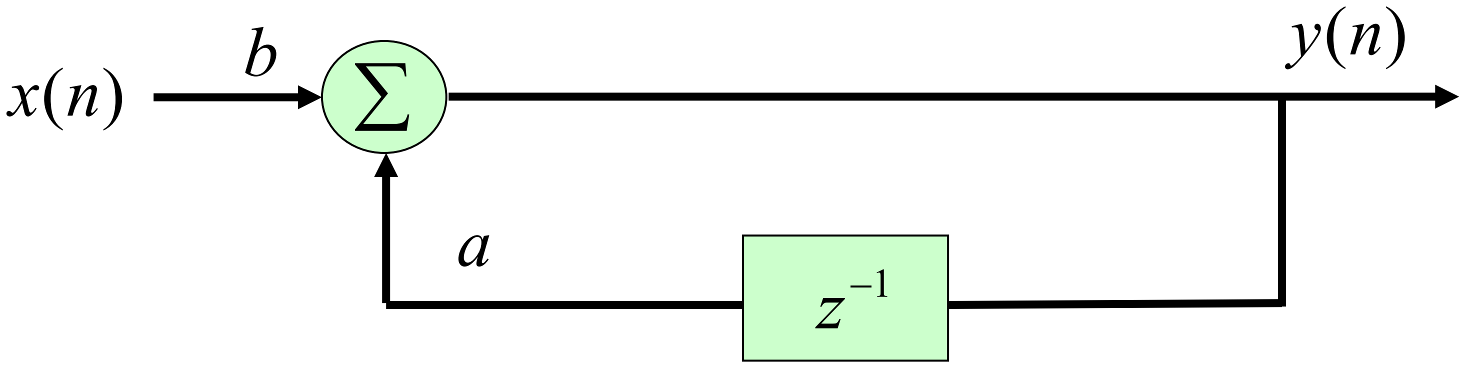
$$y(n)-ay(n-1)=bx(n)$$

解： 如果系统处于零状态，则 $y(-1)=0$，方程两边 z 变换可得

$$Y(z)(1-az^{-1})=bX(z)$$

$$H(z)=\frac{b}{1-az^{-1}}=\frac{bz}{z-a}$$

$$h(n)=ba^{n}u(n)$$



例8-15：假设一个二阶离散线性时不变系统的系统函数是 $H(z)=\dfrac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})}$

求满足该系统的差分方程，并画出系统模拟框图。

解：

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

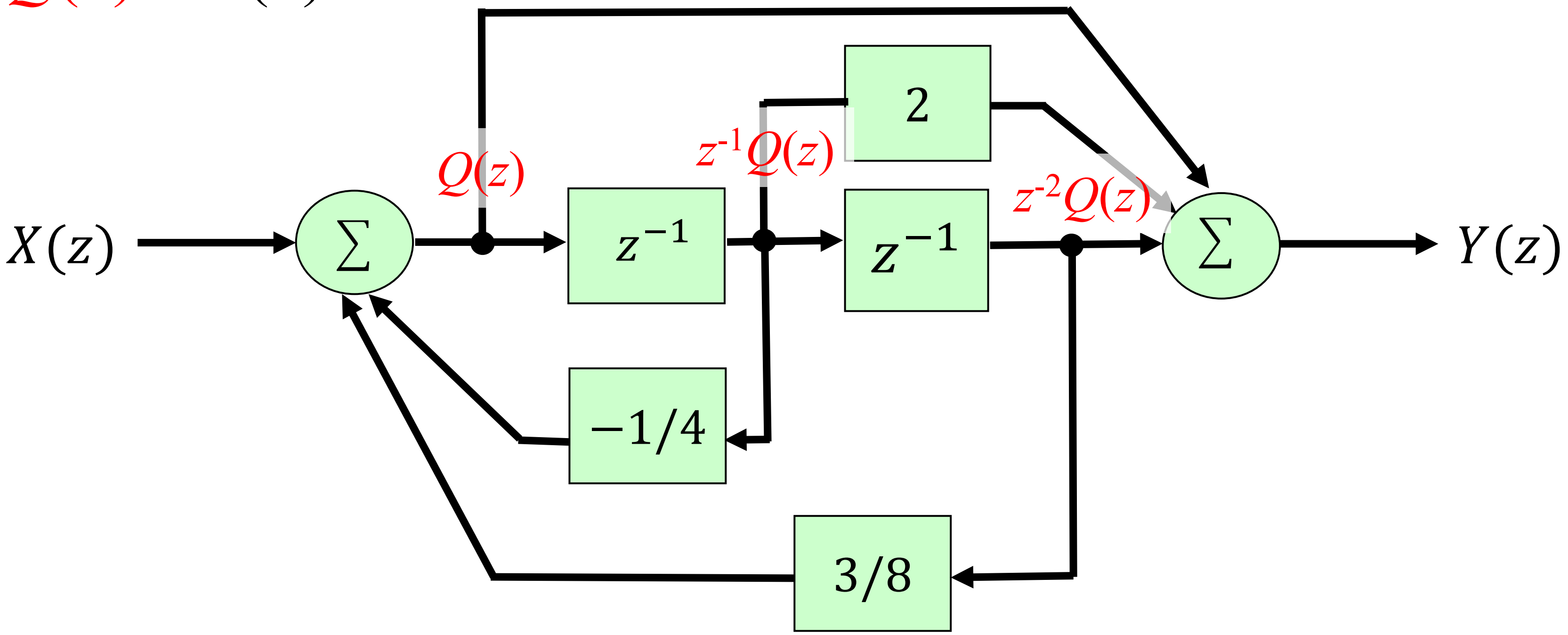
$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}\right)Y(z)=\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)X(z)$$

系统差分方程为 $y(n)+\dfrac{1}{4}y(n-1)-\dfrac{3}{8}y(n-2)=x(n)+2x(n-1)+x(n-2)$

系统模拟框图如下图所示： $H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$

$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}\right)Q(z)=X(z)$$

$$\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)Q(z)=Y(z)$$



8.8.2 由系统函数的零极点分布分析单位样值响应

$$H(z)=\left[G\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}\right]=\sum_{k=0}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}=A_0+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}$$

其中z_r、p_k分别为$H(z)$的零点、极点；$p_0=0$

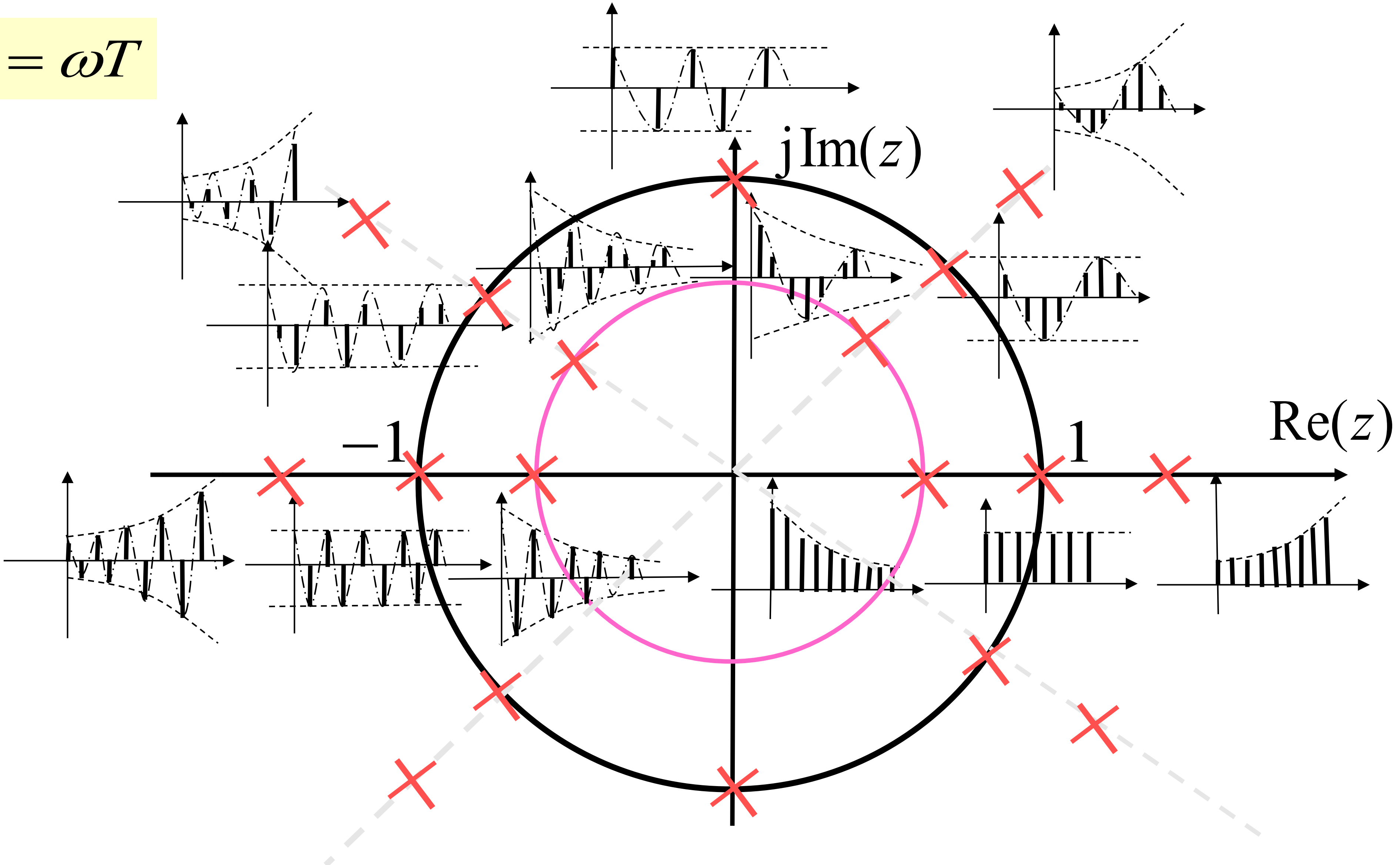
$$h(n)=ZT^{-1}[H(z)]=A_0\delta(n)+\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^n u(n)$$

$\therefore h(n)$特性 $\overset{\text{取决于}}{=\!=\!=}$ $H(z)$的极点p_k

$h(n)$幅值A_k $\overset{\text{取决于}}{=\!=\!=}$ $H(z)$的零点z_r

极点分布对 $h(n)$ 的影响（教材 86 页）

$$r = \mathrm{e}^{\sigma T}, \theta = \omega T$$



8.8.3 离散时间系统的稳定性和因果性

1、时域中系统因果稳定的条件

离散时间系统稳定的充要条件是：单位样值响应是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

因果稳定系统的充要条件为：$h(n)$ 是单边的而且是绝对可和的。即

$$\begin{cases} h(n)=h(n)u(n) & \text{因果} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty & \text{稳定} \end{cases}$$

2、在 z 域中因果稳定的条件

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}, \text{收敛域要求} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|<\infty$$

当$z=1$时， $H(z)$的收敛域变为$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$

恰好满足系统稳定的条件。

因此对于稳定系统，$H(z)$收敛域应包含单位圆 。

对于因果稳定系统，收敛域为：

$$\begin{cases} a<\left|z\right|\leq\infty \\ a<1 \end{cases}$$

即全部极点位于单位圆内 。