第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

Z 变换是借助于抽样信号的拉氏变换引出

连续因果信号 $x(t)$ 经均匀冲激抽样，抽样信号 $x_s(t)$ 的表示式

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

T 为抽样间隔

对 $x_s(t)$ 求单边拉氏变换

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\int_0^{\infty}\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathrm{e}^{-snT}$$

令 $z = \mathrm{e}^{sT}$，其中 z 为一个复变量，则抽样信号的拉氏变换与序列的 Z 变换的关系：

$$\boxed{X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT}} = X_s(s)}$$

$$z = \mathrm{e}^{sT},\ X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

通常令 $T = 1$，$z = \mathrm{e}^{s}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

单边 Z 变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

双边 Z 变换

序列的 Z 变换是复变量 z^{-1} 的幂级数，其系数是 $x(n)$。

因果序列的单边和双边Z变换等同。着重单边，兼顾双边！

多选题 1分

设置

下列说法正确的有

- A　z变换有助于求解差分方程
- B　因果序列的单边z变换和双边z变换等同
- C　s平面的虚轴可映射为z平面的虚轴
- D　z变换的收敛域一定不包含极点

提交

8.2 典型序列的z变换

序列	Z变换	Z变换类别
$\delta(n)$	$1 \quad (z$全平面收敛$)$	单边/双边z变换
$\delta(n-1)$	$z^{-1} \quad (\|z\|>0)$	单边/双边z变换
$\delta(n+1)$	0 $z \quad (\|z\|<\infty)$	单边z变换 双边z变换
$u(n)$	$\dfrac{z}{z-1} \quad (\|z\|>1)$	单边/双边z变换
$a^n u(n)$	$\dfrac{z}{z-a} \quad (\|z\|>\|a\|)$	单边/双边z变换
$nu(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2} \quad (\|z\|>1)$	单边/双边z变换

8.2 典型序列的z变换

序列	Z变换	Z变换类别
$e^{-j\omega_0 n}u(n)$	$\dfrac{z}{z-e^{-j\omega_0}} \quad (\lvert z\rvert>1)$	单边/双边z变换
$\beta e^{-j\omega_0 n}u(n)$	$\dfrac{z}{z-\beta e^{-j\omega_0}} \quad (\lvert z\rvert>\lvert\beta\rvert)$	单边/双边z变换
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \quad (\lvert z\rvert>1)$	单边/双边z变换
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \quad (\lvert z\rvert>1)$	单边/双边z变换
$\beta^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2} \quad (\lvert z\rvert>\lvert\beta\rvert)$	单边/双边z变换
$\beta^n\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z\beta\sin\omega_0}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2} \quad (\lvert z\rvert>\lvert\beta\rvert)$	单边/双边z变换

8.3 z 变换的收敛域

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

收敛域：当 $x(n)$ 为有界时，**令上述级数收敛的所有z值的集合**称为收敛域（region of convergence, ROC）。

级数收敛的**充要条件**是满足**绝对可和**条件。

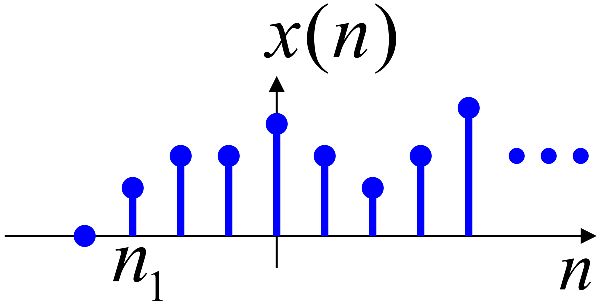
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$$

左边构成正项级数，可利用正项级数收敛的常用判定方法，

比值判定法: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

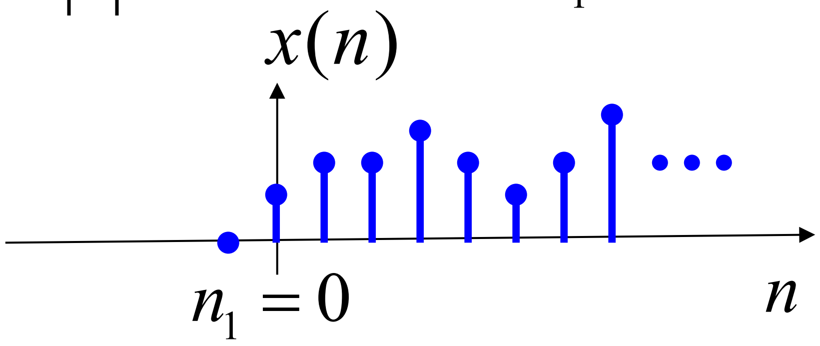
根值判定法: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}<1$

1）右边序列：只在$n \geq n_1$ 区间内，有非零的有限值的序列

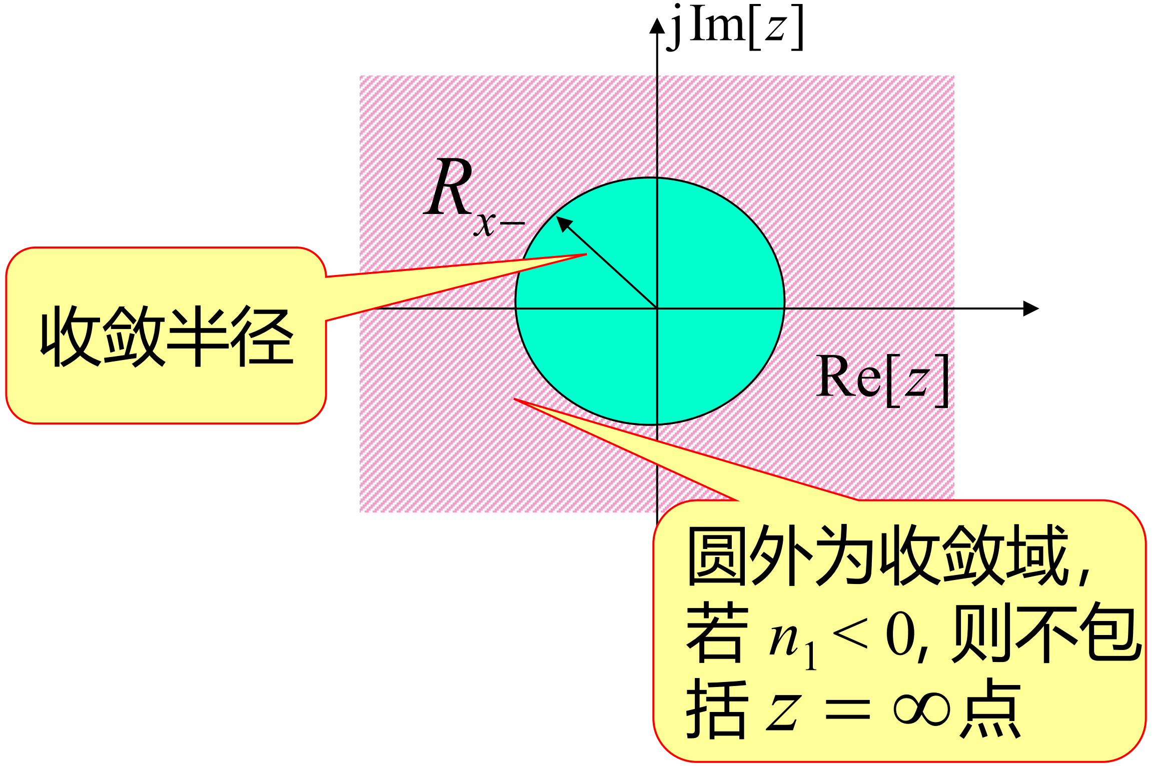


$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad n_1 \leq n \leq \infty$$

$n_1<0, \quad R_{x-}<|z|<\infty$（收敛域不含$|z|=\infty$，因$\infty$的$-n_1$次幂为无穷）

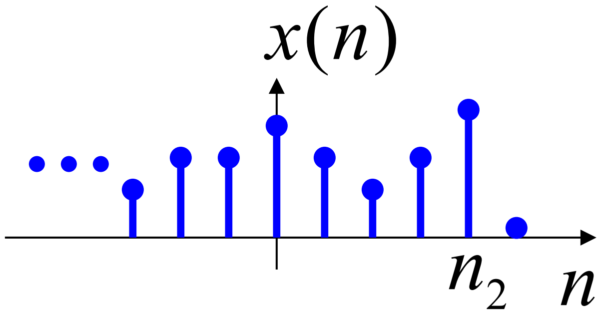


$n_1=0, \quad |z|>R_{x-}$



因果序列是右边序列的一种特殊情况，它的收敛域为$|z|>R_{x-}$

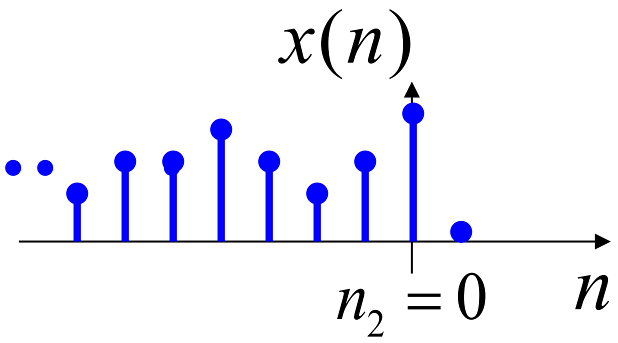
2）左边序列：只在 $n \le n_2$ 区间内，有非零的有限值的序列



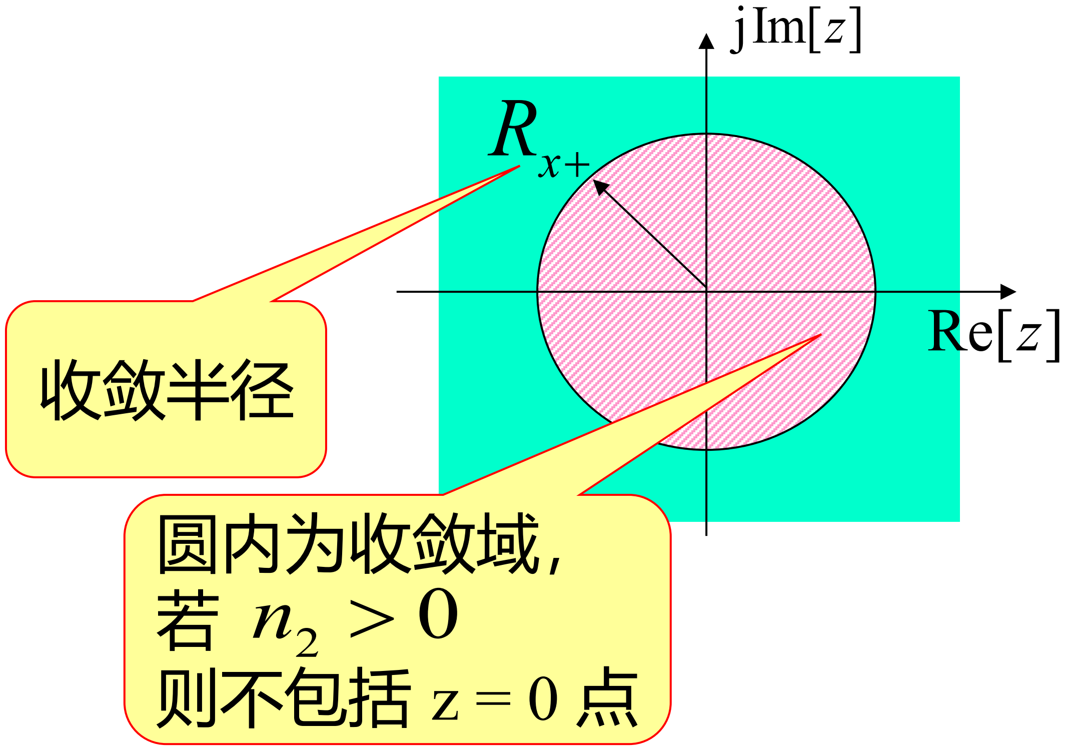
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

$n_2>0, \quad 0<|z|<R_{x+}$ （收敛域不含

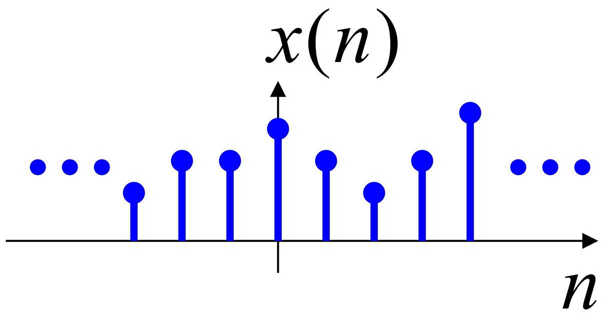
$z=0$，因0的负指数幂无意义）



$n_2=0, \quad |z|<R_{x+}$



3）双边序列：只在 $-\infty \le n \le \infty$ 区间内，有非零的有限值的序列

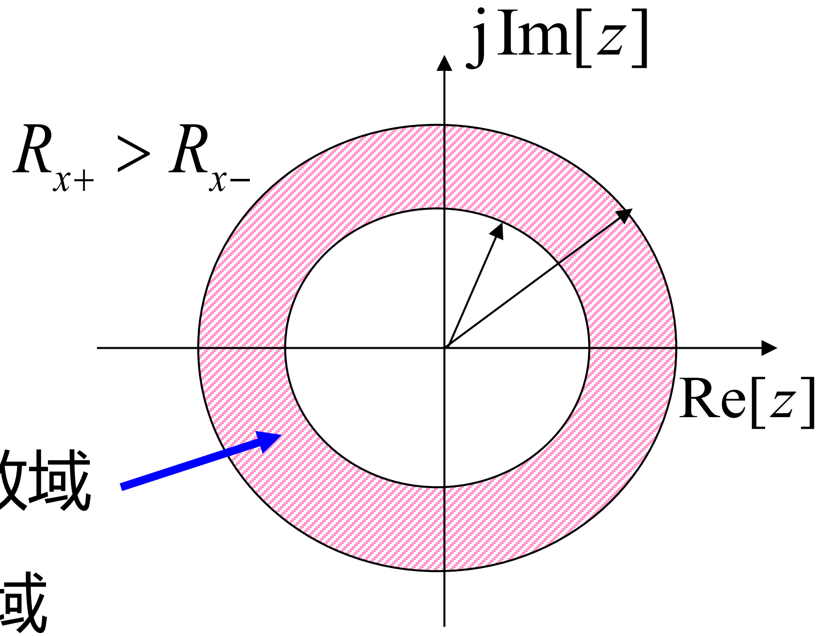


$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

圆内收敛
$|z|<R_{x+}$

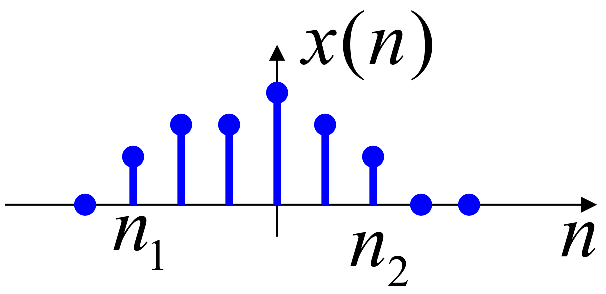
圆外收敛
$|z|>R_{x-}$



$R_{x+}>R_{x-}$ 有环状收敛域

$R_{x+}<R_{x-}$ 没有收敛域

4）有限长序列：在有限区间 $n_1 \le n \le n_2$ 内，有非零的有限值的序列



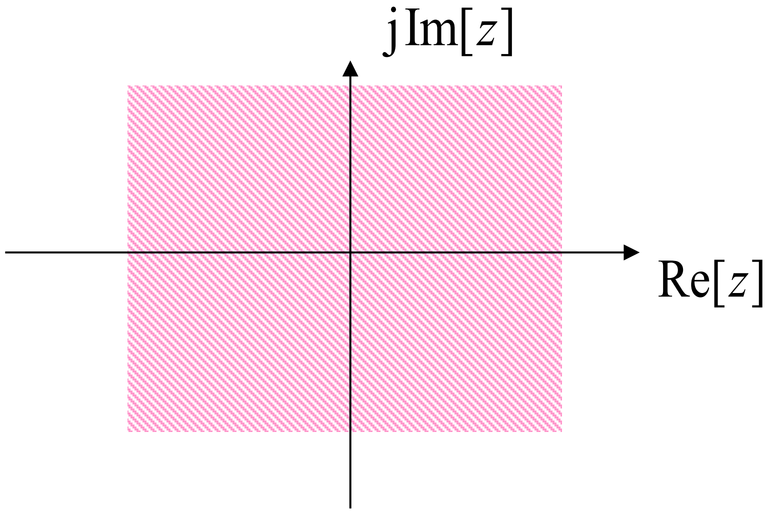
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad n_1 \le n \le n_2$$

分为三种情况：

$n_1<0, n_2>0 \quad 0<|z|<\infty$

$n_1\ge 0, n_2>0 \quad 0<|z|\le\infty$

$n_1<0, n_2\le 0 \quad 0\le|z|<\infty$



收敛域至少为除了 0 和 ∞ 外的整个 z 平面。

对于单边变换，序列与变换式唯一对应，同时有唯一的收敛域。

对于双边变换，不同的序列在不同的收敛域可能映射同一个变换式。

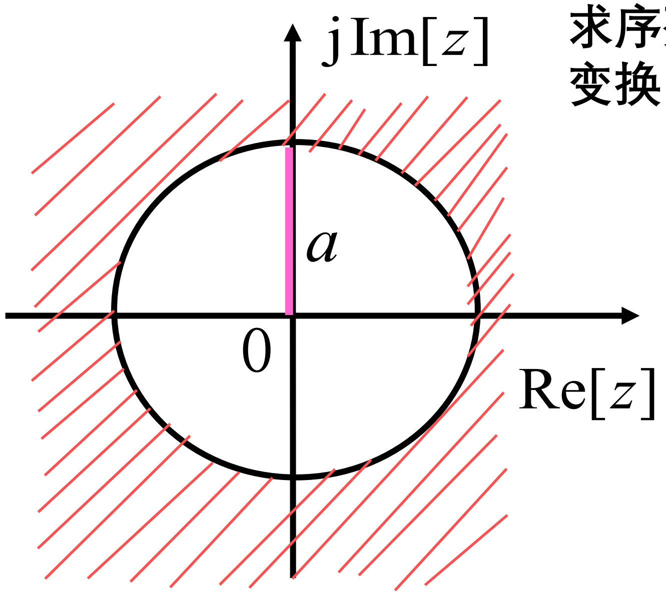
例如： $x_1(n)=a^n u(n)$ $\qquad X_1(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$

$x_2(n)=-a^n u(-n-1)$ $\qquad X_2(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}z)^n$

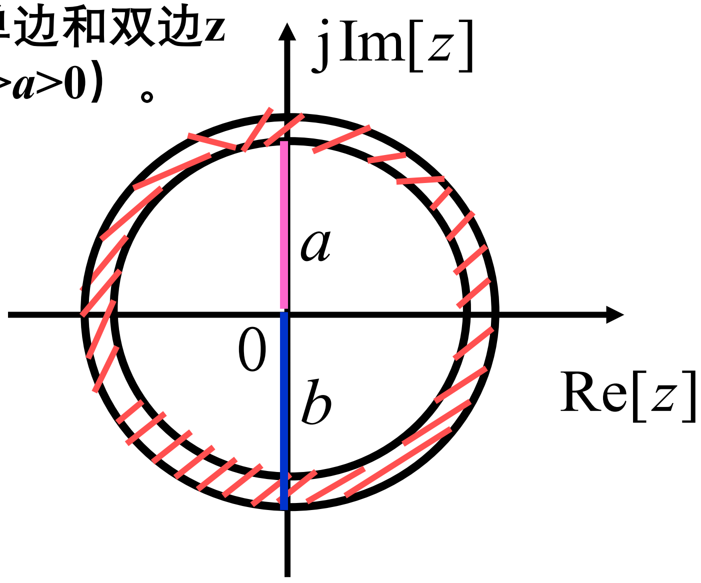
$$=1-\frac{1}{1-a^{-1}z}=\frac{z}{z-a} \qquad |z|<|a|$$

对于一个给定序列的 z 变换既要给出表达式，又要标出它的收敛域。

求序列$x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$的单边和双边z变换，并确定其收敛域（其中$b>a>0$）。



序列单边 z 变换的收敛域



序列双边 z 变换的收敛域

当 $|z|>a$ 时，$X(z)=\dfrac{z}{z-a}$

当 $a<|z|<b$ 时，$X(z)=\dfrac{z}{z-a}+\dfrac{z}{z-b}$

收敛域内不包含任何极点，收敛域通常以极点为边界

右边序列的收敛域从 $X(z)$ 最外面（最大值）的极点向外延伸至 $z\to\infty$（可能包括 ∞）

左边序列的收敛域从 $X(z)$ 最里面（最小值）的极点向内延伸至 $z\to 0$ （可能包括 0）

已知序列 $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n[u(n)-u(n-8)]$，其收敛域为（　）

A $0<|z|<\frac{1}{3}$

B $|z|>\frac{1}{3}$

C $|z|>0$

D $0<|z|<8$

提交

例8-2： $x(n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}[u(n)-u(n-8)]$ ——有限长序列

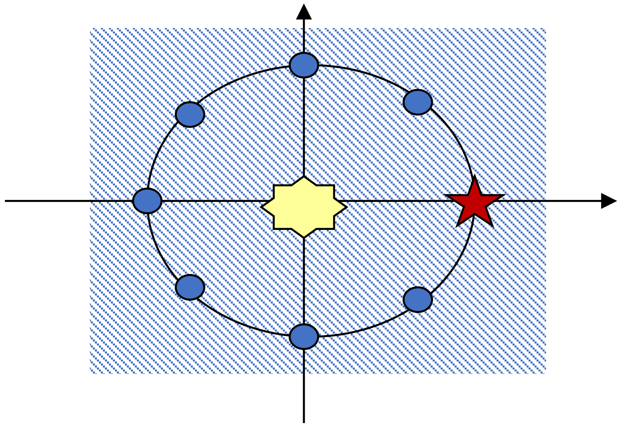
$$X(z)=\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}=\frac{1-(\frac{1}{3}z^{-1})^{8}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z^{8}-(\frac{1}{3})^{8}}{z^{7}(z-\frac{1}{3})}$$

$z^{8}=(\frac{1}{3})^{8}$　　$z=\frac{1}{3}e^{j\frac{2k\pi}{8}}\ (k=0,\ldots,7)$ ⟶ 八个零点

$z=0$ ⟶ 七阶极点

$z={}^{1}\!/_{3}$ ⟶ 一阶极点

$\therefore |z|>0$



注意：零极点相消的情况，收敛域扩大 。

第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.4 逆 z 变换

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

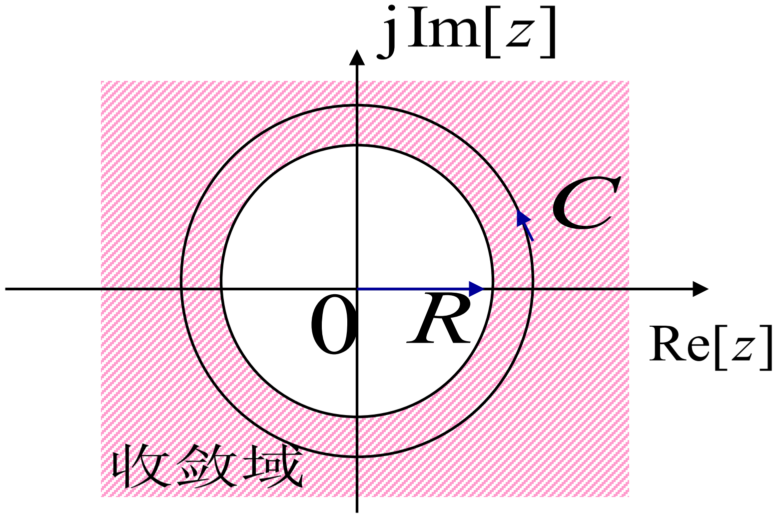
$$x(n)=ZT^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z$$

C 是包围 $X(z)z^{n-1}$ 所有极点的逆时针闭合积分路线，一般取 z 平面收敛域内以原点为中心的圆 。

（1）留数法 ※

（2）幂级数展开法（长除法） ※

（3）部分分式法



$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$

1) $X(z)$ 只有一阶极点 z_m

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=0}^{K}\frac{A_m}{z-z_m}=\frac{A_0}{z-z_0}+\frac{A_1}{z-z_1}+\cdots+\frac{A_K}{z-z_K}$$

其中z_m为$\frac{X(z)}{z}$的一阶极点，$A_m=\left[(z-z_m)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_m}$

$$X(z)=\sum_{m=0}^{K}\frac{zA_m}{z-z_m}$$

逆变换：

$$x(n)=A_0\delta(n)+\sum_{m=1}^{M}A_mz_m^n=A_0\delta(n)+A_1z_1^n+\cdots+A_Mz_M^n$$

或 $$X(z)=\sum_{m=0}^{K}\frac{A_m}{1-z_mz^{-1}}=\frac{A_0}{1-z_0z^{-1}}+\frac{A_1}{1-z_1z^{-1}}+\cdots+\frac{A_K}{1-z_Kz^{-1}}$$

$$A_m=\left[\left(1-z_mz^{-1}\right)X(z)\right]_{z=z_m}$$

2) $X(z)$ 除含有 M 个一阶极点外，在 $z=z_i$ 处还含有一个 s 阶极点

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=0}^{M}\frac{A_m}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j}{(z-z_i)^j}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=0}^{M}\frac{A_m}{z-z_m}+\frac{B_1}{z-z_i}+\frac{B_2}{(z-z_i)^2}+\cdots+\frac{B_s}{(z-z_i)^s}$$

$$B_s=\left[(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i}$$

$$B_j=\frac{1}{(s-j)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{s-j}}{\mathrm{d}z^{s-j}}(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i}$$

一般只需要记住 $z=z_i$ 处 2 阶和 3 阶极点的系数计算:

2 阶极点
$$\begin{cases} B_2=\left[(z-z_i)^2\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \\ B_1=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-z_i)^2\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \end{cases}$$

逆变换:

$$x(n)=A_0\delta(n)+(A_1z_1^n+\cdots+A_Mz_M^n+B_1z_i^n+B_2nz_i^{n-1})u(n)$$

3 阶极点
$$\begin{cases} B_3=\left[(z-z_i)^3\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \\ B_2=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-z_i)^3\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \\ B_1=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z-z_i)^3\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i} \end{cases}$$

逆变换:

$$x(n)=A_0\delta(n)+\left[A_1z_1^n+\cdots+A_Mz_M^n+B_1z_i^n+B_2nz_i^{n-1}+\frac{B_3n(n-1)}{2}z_i^{n-2}\right]u(n)$$

$$或X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{1-z_m z^{-1}}+\sum_{j=1}^{s}\frac{C_j}{(1-z_i z^{-1})^j}$$

$$=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{1-z_m z^{-1}}+\frac{C_1}{1-z_i z^{-1}}+\frac{C_2}{(1-z_i z^{-1})^2}+\cdots+\frac{C_s}{(1-z_i z^{-1})^s}$$

$$A_0=\left[X(z)\right]_{z=0}=\frac{b_0}{a_0}$$

$$C_s=\left[\left(1-z_i z^{-1}\right)^s X(z)\right]_{z=z_i}$$

C_j 由待定系数法求出

单选题 1分

设置

$X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ ($|z|>1$) 的逆变换 $x(n)$ 为（ ）

A $(1-0.5^n)u(n)$

B $(2-0.5^n)u(n)$

C $2(1-0.5^n)u(n)$

D $2(1+0.5^n)u(n)$

提交

例8-3： 求 $X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 的逆变换 $x(n)$ （$|z|>1$）。

右边序列

解法一： $X(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$ $\qquad \dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{A_1}{z-0.5}+\dfrac{A_2}{z-1}$

其中：

$$A_1=\left[\frac{X(z)}{z}(z-0.5)\right]_{z=0.5}=-1 \qquad A_2=\left[\frac{X(z)}{z}(z-1)\right]_{z=1}=2$$

则 $X(z)=\dfrac{2z}{z-1}-\dfrac{z}{z-0.5}$ $\qquad \therefore \boldsymbol{x(n)=(2-0.5^n)u(n)}$

解法二：$X(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}=\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$

$$X(z)=\frac{A_1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

其中：

$$A_1=\left[X(z)(1-0.5z^{-1})\right]_{z=0.5}=-1$$

$$A_2=\left[X(z)(1-z^{-1})\right]_{z=1}=2$$

则$X(z)=\dfrac{2}{1-z^{-1}}-\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$

$$\therefore x(n)=(2-0.5^n)u(n)$$

一般情况下，$X(z)$ 的表达式为 $X(z)=\dfrac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$

利用部分分式展开法求逆变换时，要掌握基本形式的逆变换。

注意：逆变换与收敛域有关。

$$\frac{z}{z-z_m}\quad (|z|>a)\Leftrightarrow z_m^n\,u(n) \qquad\qquad \frac{z}{z-z_m}\quad (|z|<a)\Leftrightarrow -z_m^n\,u(-n-1)$$

讨论：1）只有真分式才可进行部分分式展开，但展开的形式乘以 z 才具备上述逆 z 变换的基本形式。

2）对 $\dfrac{X(z)}{z}$ 进行部分分式展开，要求 $\dfrac{X(z)}{z}$ 是真分式，即需要 $k\geq r$ 保证 $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处收敛。对因果序列，它的 z 变换收敛域为 $|z|>R_x$， $k\geq r$ 是满足收敛的充分必要条件。

例8-4： $X(z)=\dfrac{-5z}{3z^2-7z+2}\quad (\frac{1}{3}<|z|<2),\quad x(n)=?$

双边序列

解： $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{-5/3}{z^2-7/3\,z+2/3}=\dfrac{-5/3}{(z-1/3)(z-2)}=\dfrac{1}{z-1/3}-\dfrac{1}{z-2}$

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}$$

右边序列

左边序列

$$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)+2^n u(-n-1)$$

分析：同一个 z 变换的表达式如果收敛域不同，序列也不同

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}$$

若$|z|<\frac{1}{3}$ $\quad x(n)=-\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)+2^n u(-n-1)$

若$|z|>2$ $\quad x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-2^n u(n)$

注意：逆z变换表格：教材61、62页表格

8.5 z 变换的基本性质

8.5.1 线性

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$

$ZT[y(n)] = Y(z) \quad (R_{y1} < |z| < R_{y2})$

则 $ZT\left[ax(n) + by(n)\right] = aX(z) + bY(z)$

$\max(R_{x1}, R_{y1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{y2})$ 收敛域为重叠部分

注：如果线性组合中某些零点与极点相抵消，则收敛域可能扩大 。

8.5.2 位移性

1) 双边序列移位后的双边 z 变换

$$ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)] = z^{m} X(z)$$

m 为任意正整数。

注意：序列位移可能会使 z 变换在 $z=0$ 或 $z=+\infty$ 处的零极点发生变化。但如果 $x(n)$ 是一个双边序列，$X(z)$ 的收敛域是一个环形区域，那么序列位移就不会产生收敛域的变化。

2) 双边序列左移的单边 z 变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)u(n)z^{-n}$$

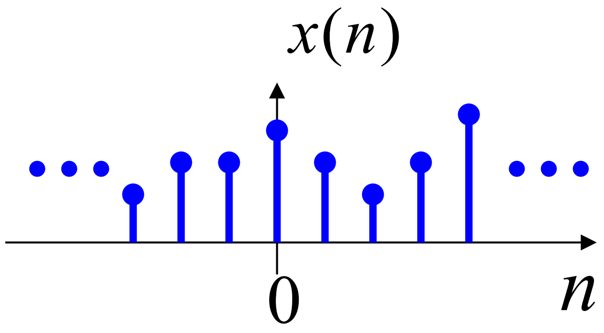
$$ZT[x(n+m)u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-n}$$

$$=z^{m}\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-(n+m)}=z^{m}\sum_{k=m}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=z^{m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

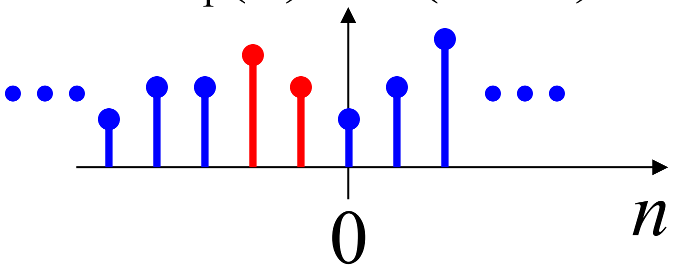
$$=z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

举例：



$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

$x_1(n) = x(n+2)$



$$X_1(z) = x(2) + x(3)z^{-1} + x(4)z^{-2} + \cdots$$

$$= z^2 X(z) - x(0)z^2 - x(1)z$$

$$= z^2 \left[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1} \right]$$

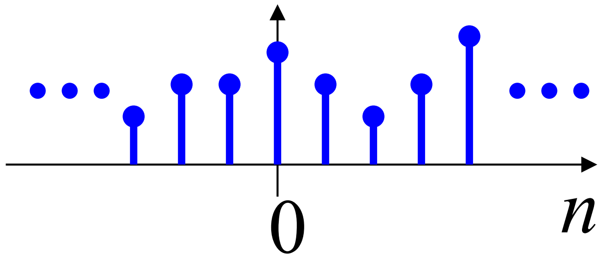
3) 双边序列右移的单边 z 变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)u(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)u(n)]=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

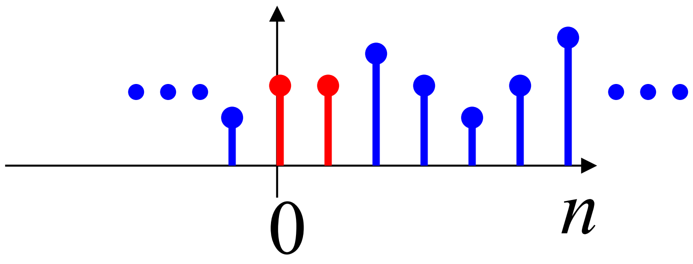
举例:

$x(n)$



$$X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

$x_2(n)=x(n-2)$



$$\begin{aligned}X_2(z)&=x(-2)+x(-1)z^{-1}+x(0)z^{-2}+\cdots\\&=z^{-2}X(z)+x(-2)+x(-1)z^{-1}\\&=z^{-2}\left[X(z)+x(-2)z^{2}+x(-1)z\right]\end{aligned}$$

4) 特别是，因果序列位移的单边 z 变换

$$\because \quad \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-k} = 0$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right]$$

实际中多为因果序列，此二式最为常用 。

例8-5： 求 $x(n)=n[u(n)-u(n-8)]$ 的 z 变换。

解：

$$x(n)=nu(n)-[(n-8)+8]u(n-8)$$

$$=nu(n)-(n-8)u(n-8)-8u(n-8)$$

$$nu(n)\xrightarrow{z}\frac{z}{(z-1)^2} \qquad \because u(n)\xrightarrow{z}\frac{z}{z-1}$$

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z\cdot z^{-8}}{(z-1)^2}-\frac{8z\cdot z^{-8}}{z-1}$$

$$=\frac{z-8z^{-6}+7z^{-7}}{(z-1)^2},\quad |z|>0$$

由于是有限长序列，且 $n>0$

总结一下单边 z 变换的位移性质：

$$ZT[x(n+1)u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)z^{-(n-1)}$$

$$=z\sum_{n=1}^{\infty}x(n)z^{-n}=z[X(z)-x(0)]=zX(z)-zx(0)$$

$$ZT[x(n+2)u(n)]=z^{2}X(z)-z^{2}x(0)-zx(1)$$

$$ZT[x(n-1)u(n)]=z^{-1}X(z)+x(-1)$$

$$ZT[x(n-2)u(n)]=z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)$$

利用 z 变换的线性和位移性可解差分方程。

单选题 1分

设置

已知差分方程表示式 $y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$，边界条件 $y(-1)=0$，则系统响应 $y(n)$ 的 z 变换为（　　）

A　$Y(z)=\frac{0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1}\ (|z|>1)$

B　$Y(z)=-\frac{0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1}\ (|z|>1)$

C　$Y(z)=\frac{0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1}\ (|z|>0.9)$

D　$Y(z)=-\frac{0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1}\ (|z|>0.9)$

提交

例8-6：已知差分方程表示式 $y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$，边界条件 $y(-1)=0$，用逆 z 变换法求系统响应 $y(n)$。

解： 对方程式两端分别取 z 变换

$$Y(z)-0.9z^{-1}Y(z)=\frac{0.05z}{z-1}$$

线性和平移性

$$Y(z)=\frac{0.05z^2}{(z-0.9)(z-1)} \qquad \frac{Y(z)}{z}=\frac{A_1}{z-0.9}+\frac{A_2}{z-1}$$

$$A_1=\left.\frac{0.05z}{z-1}\right|_{z=0.9}=-0.45 \quad A_2=\left.\frac{0.05z}{z-0.9}\right|_{z=1}=0.5$$

$$Y(z)=-\frac{0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1} \quad (|z|>1)$$

$$y(n)=[-0.45(0.9)^n+0.5]u(n)$$

8.5.3 z 域微分（时域线性加权）

若 $ZT[x(n)] = X(z)$

则 $ZT[nx(n)] = -z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$

时域序列乘 n 等效于 z 域中求导且乘以 (- z) 。

$$ZT[n^2x(n)] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}\right]$$

$$ZT[n^mx(n)] = \left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m X(z)$$

利用z域微分特性求得的常见序列z变换

Z变换	因果序列	Z变换	因果序列
$\frac{z}{z-1}\ (\lvert z\rvert>1)$	$u(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}\ (\lvert z\rvert>1)$	$nu(n)$
$\frac{z}{z-a}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$a^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$na^n u(n)$
$\frac{z^2}{(z-a)^2}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$(n+1)a^n u(n)$	$\frac{a^2 z}{(z-a)^3}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$\frac{n(n-1)}{2!}a^n u(n)$
$\frac{z^3}{(z-a)^3}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$		

序列右移1
乘以系数a

序列右移2
乘以系数a^2

注:$(n+1)a^n u(n)$右移1，乘以a, 变为

$$na^n u(n-1)=0\cdot a^0\delta(n)+1\cdot a\delta(n-1)+2a^2\delta(n-2)+\cdots=na^n u(n)$$

若z变换的收敛域为$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$，逆变换为反因果序列，上述表格中的序列前面添加负号，$u(n)$替换为$u(-n-1)$。

例8-7：求斜变序列 $n\,u(n)$ 和序列 $n^2 u(n)$ 的 z 变换。

解：

$$\because u(n) \xrightarrow{z} \frac{z}{z-1}$$

$$nu(n) \xrightarrow{z} -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \left(|z|>1\right)$$

$$n^2u(n) \xrightarrow{z} \left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]$$

$$= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad \left(|z|>1\right)$$

例 8-8：求斜变序列 $(n+1)a^n u(n)$ 的 z 变换。

解：

$$\because a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a|$$

$$na^n u(n) \xrightarrow{z} -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z|>|a|$$

$$(n+1)a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{az}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a}$$

$$= \frac{z^2}{(z-a)^2}, \quad |z|>|a|$$

8.5.4 z 域尺度变换（时域指数加权）

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$

则 $ZT[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a}) \quad (R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2}) \quad |a| > 1$

$$ZT[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad (R_{x1} < |az| < R_{x2}) \quad |a| > 1$$

$$ZT[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[(-1)^n u(n)] = z/(z+1) \quad (|z| > 1)$$

例8-9：求序列 $\beta^n\cos(n\omega_0)u(n)$ 的 z 变换。

解： $\because \cos(n\omega_0)u(n) \xrightarrow{z} \dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$

可得 $$\beta^n\cos(\omega_0 n)u(n) \xrightarrow{z} \frac{\frac{z}{\beta}(\frac{z}{\beta}-\cos\omega_0)}{(\frac{z}{\beta})^2-2\frac{z}{\beta}\cos\omega_0+1}$$

$$\rightarrow \frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2}$$

$\left|\dfrac{z}{\beta}\right|>1$ 即 $|z|>|\beta|$ 如果 β 小于 1，则收敛域扩大

8.5.5 初值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 已知 $ZT[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$, 则 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$

8.5.6 终值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 已知 $ZT[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$, 则 $\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

要求当 $n\to\infty$ 时 $x(n)$ 收敛，即 $X(z)$ 极点必须在单位圆内（在单位圆上只能位于 $z=1$ 处且为一阶极点）。

注意和系统稳定性条件区别，系统稳定性条件只有极点位于单位圆内。

终值定理条件：等价于收敛域内包括单位圆 或 在 $z=1$ 处有一阶极点 。

$x(n)$	终值$n\to\infty$	$X(z)$	ROC
$(2)^n$	无	$\frac{z}{z-2}$	$\lvert z\rvert>2$
$(1)^n$	有，1	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$(-1)^n$	无	$\frac{z}{z+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$(0.5)^n$	有，0	$\frac{z}{z-0.5}$	$\lvert z\rvert>0.5$

例8-10：已知某因果序列的 z 变换 $X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, |z|>|a|$，式中 a 为实数，利用初值定理和终值定理求序列的初值 $x(0)$ 和终值 $x(\infty)$，并推导 $x(1)$。

解： 由初值定理和终值定理，

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1-az^{-1}}=1$$

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{1-az^{-1}}$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)}{z-a}=\begin{cases}1, & a=1\\ 0, & |a|<1\end{cases}$$

$|a|>1$ 或 $a=-1$

终值不存在

初值定理与位移性质结合：

因为 $x(1)=x(n+1)\big|_{n=0}$ 且 $x(n+1)\leftrightarrow z\left[X(z)-x(0)\right]$

所以 $x(1)=\lim\limits_{z\to\infty} z\left[X(z)-x(0)\right]$

$$=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{1-az^{-1}}-z\right)$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{az}{z-a}\right)=a$$

8.5.7 时域卷积定理

已知两序列 $x(n)$, $h(n)$ ，其 z 变换为

$$ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[h(n)] = H(z) \quad (R_{h1} < |z| < R_{h2})$$

则两序列在时域中的卷积的 z 变换等效于在 z 域中两序列 z 变换的乘积。

$$ZT[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$$

$$\max(R_{x1}, R_{h1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{h2})$$

收敛域为重叠部分

注：如果某些零点与极点相抵消，则收敛域可能扩大。

证明：$ZT[x(n)*h(n)] = ZT[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)]$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) ZT[h(n-m)]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} H(z)$$

$$= X(z)H(z)$$

例：$ZT[\sum_{k=0}^{n} x(k)] = ZT\{[x(n)u(n)]*u(n)\}$

$$= \frac{z}{z-1} X(z)$$

单选题 1分

设置

已知 $x(n)=u(n)$，$h(n)=a^n u(n)-a^{n-1}u(n-1)$ $|a|<1$，令 $y(n)=x(n)*h(n)$，则 $y(n)$ 的 z 变换的收敛域为（　　）

A $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{z}|<\mathbf{1}$

B $|\boldsymbol{z}|<|\boldsymbol{a}|$

C $|\boldsymbol{z}|>|\boldsymbol{a}|$

D $|\boldsymbol{z}|>\mathbf{1}$

提交

例8-11 已知 $x(n) = u(n)$, $h(n) = a^n u(n) - a^{(n-1)} u(n-1)$ ，求此两序列的卷积 。

解： $X(z) = \dfrac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$

$$H(z) = \frac{z}{z-a} - z^{-1}\frac{z}{z-a} = \frac{z-1}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-1}{z-a} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

其逆变换为 $y(n) = a^n u(n)$

$X(z)$的极点被$H(z)$的零点抵消；若$|a| < 1$，$X(z)H(z)$的收敛域扩大

作 业

教材习题：

基础题：8-5，8-10，8-11，8-12，8-13，8-17

加强题：8-16，8-18