第一章 信号与系统的基本概念

1.1 引言

信号与系统是什么关系?

相对于系统而言，输入信号常称为激励，输出信号常称为响应。

可见，激励是外界对系统的作用，响应是激励和系统共同作用的结果。

这样:

(1) 激励经过系统，产生什么样的响应?

(2) 给定的激励和所要求的响应，设计什么样的系统?

(3) 便于系统分析和所要求的响应，需要什么样的激励?

等一系列问题的研究，形成了信号与系统这门专业基础课程。

激励 + 系统→响应

激励→系统←响应

激励←系统 + 响应

注意: 信号与系统之间密切相关，相辅相成。离开了信号，系统就失去了存在的意义。

1.2 信号的分类和典型信号

1.2.1 信号的分类

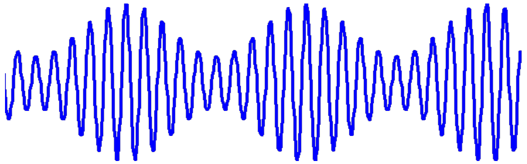
1. 确定性信号与随机性信号

确定性信号--对于确定的时刻，信号有确定的数值与之对应。能用确定时间函数表示的信号。

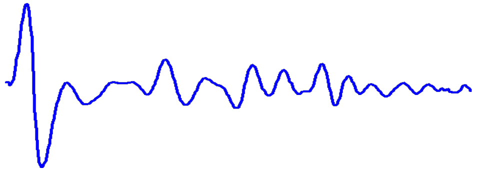
随机性信号--不可预知的信号，如噪声，雷电干扰信号。信号不能用确切的函数描述，只可能知道它的统计特性。

$$S(t) = (2 + \cos(\omega t))\cos(10\,\omega t)$$

确定性信号



随机性信号



2. 周期信号与非周期信号

周期信号：依一定时间间隔周而复始，而且是无始无终的信号。

$$f(t) = f(t + nT) \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \text{（任意整数）}$$

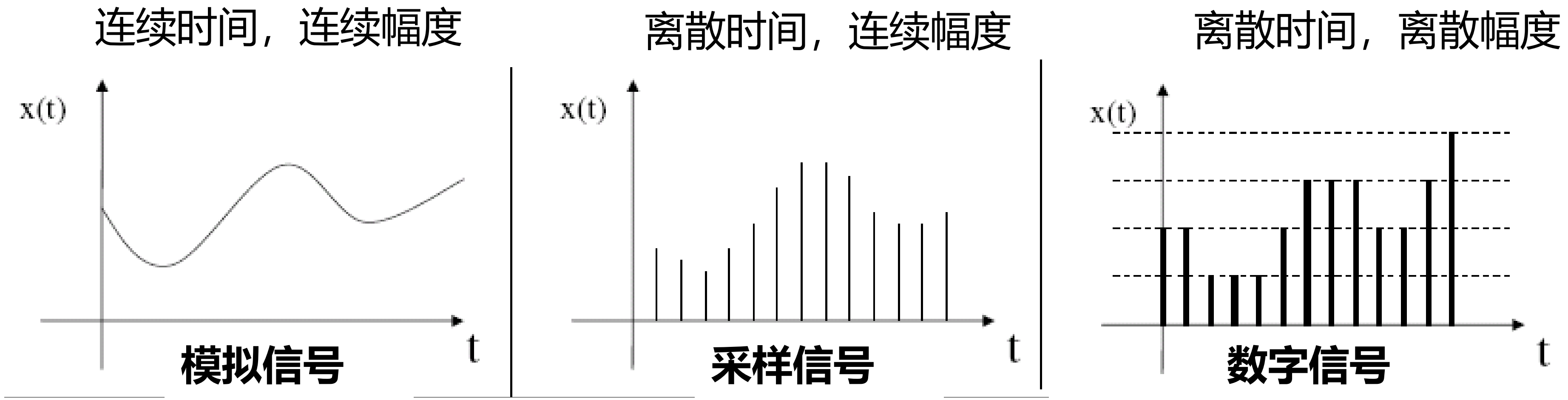
非周期信号：时间上不满足周而复始特性的信号。

3. 连续时间信号与离散时间信号

连续时间信号：如果在所讨论的时间间隔内，对于任意时间值（除若干不连续点外），都可给出确定的函数值。

离散时间信号：在时间的离散点上信号才有值与之对应，其它时间无定义。

离散信号 $\begin{cases} \text{采样信号：时间不连续、幅度连续} \\ \text{数字信号：时间不连续、幅度也不连续} \end{cases}$



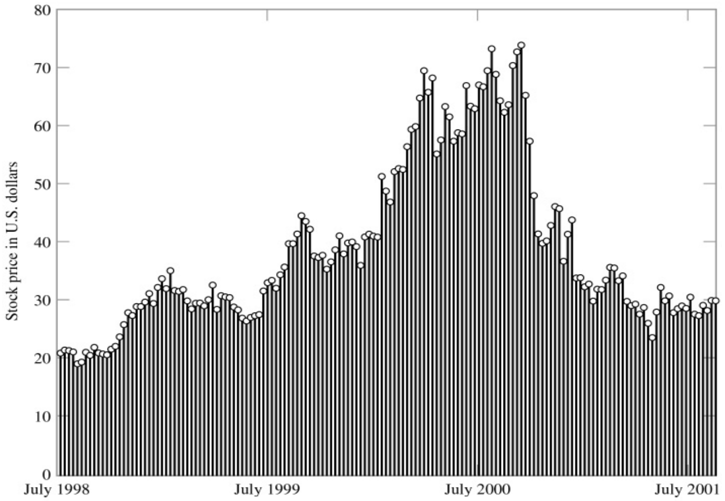
4. 因果信号和反因果信号

因果信号：$t<0$，$f(t)=0$ 的信号 （即 $t=0$ 时接入系统的信号），比如阶跃信号。

反因果信号：$t\geq 0$，$f(t)=0$ 的信号 （0 信号除外）。

5.一维信号与多维信号

信号可以表示为一个或多个变量的函数。本课程主要研究变量为时间的一维信号。



美国股市波动图：一维信号

图像信号：二维信号

1.2 信号的分类和典型信号

1.2.2 典型信号　　为什么要分析典型信号?

理论基础：线性叠加原理。

对于信号分析：把复杂信号分解成简单典型信号和的形式。

对于系统分析：如果系统满足线性非时变特性，只要知道典型信号的响应，就可以计算复杂信号的总响应。

信号 $e(t)$ → 分解 $e_i(t)$ → 系统 $h(t)$ → 叠加 $r_i(t)$ → 响应 $r(t)$

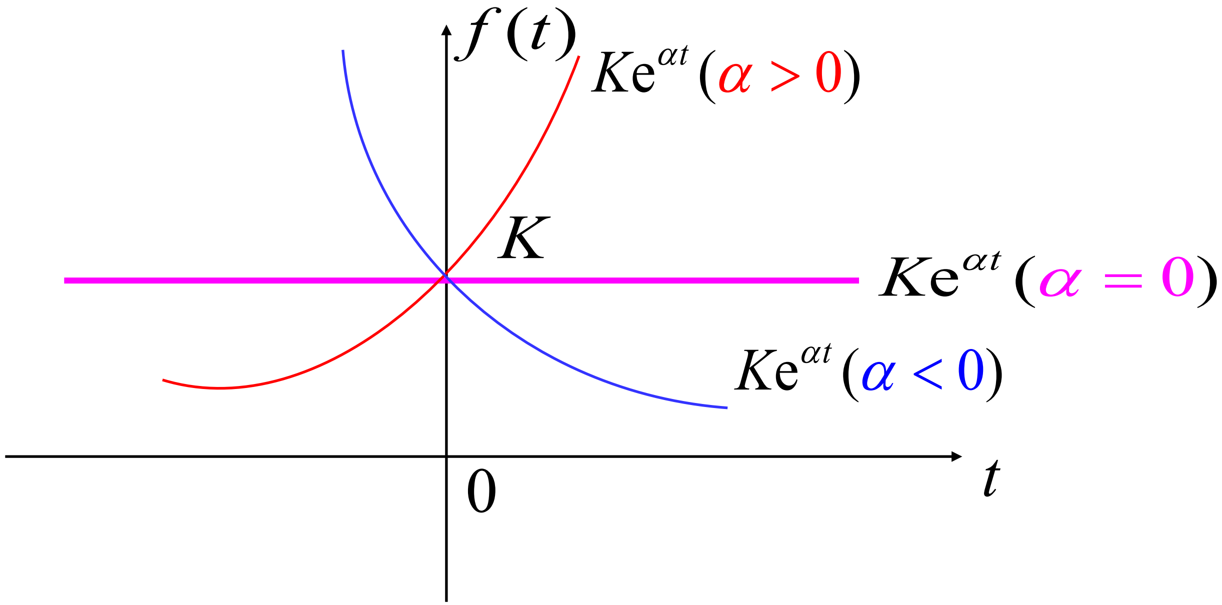
(1) 任意信号 $e(t)$ 分解成典型分量信号 $e_i(t)$ 和的形式。

(2) 分量信号 $e_i(t)$ 分别经过系统 $h(t)$，产生分量响应 $r_i(t)$。

(3) 分量响应 $r_i(t)$ 线性叠加就得系统总响应 $r(t)$。

1. 指数信号 (Exponential Signal)

表达式为 $f(t) = K\mathrm{e}^{\alpha t}$

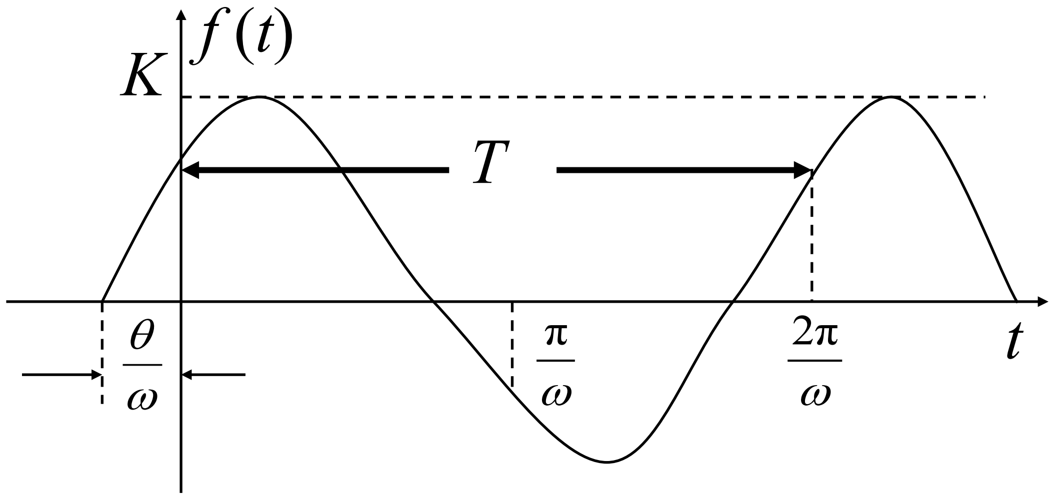


指数函数对时间的微分和积分仍然是指数形式

2. 正弦信号 (Sinusoidal Signal)

正弦信号和余弦信号二者仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$，统称为正弦信号，

表达式为 $f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$　　三要素：振幅、角频率、相位



欧拉公式（重点）　$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$　　$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \qquad \cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

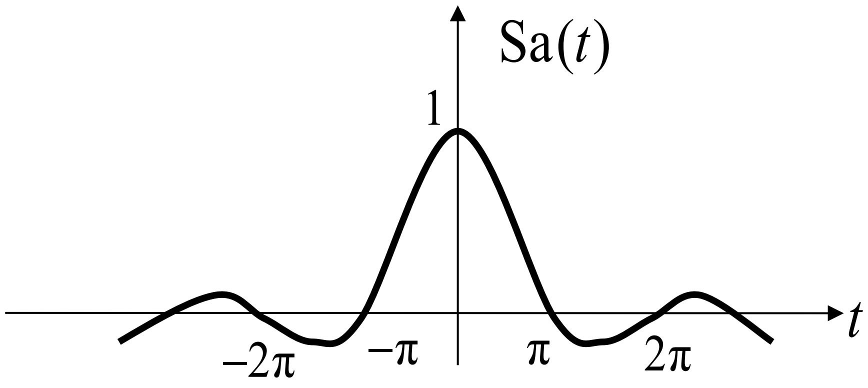
3. 复指数信号

如果指数信号的指数因子为一复数，则称为复指数信号，表示为

$$f(t) = K\mathrm{e}^{st} = K\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t} = K\mathrm{e}^{\sigma t}\left(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t\right)$$

4. Sa (t) 信号（抽样函数 Sample)

所谓抽样函数是指 **sin *t*** 与 ***t*** 之比构成的函数，表示为 $\mathrm{Sa}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$



性质:

（1） 偶函数

（2） 零点位置　$t = \pm\pi，\pm 2\pi，\ldots\ldots$

（3） 积分　$\int_0^{\infty}\mathrm{Sa}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$　$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(t)\,\mathrm{d}t = \pi$

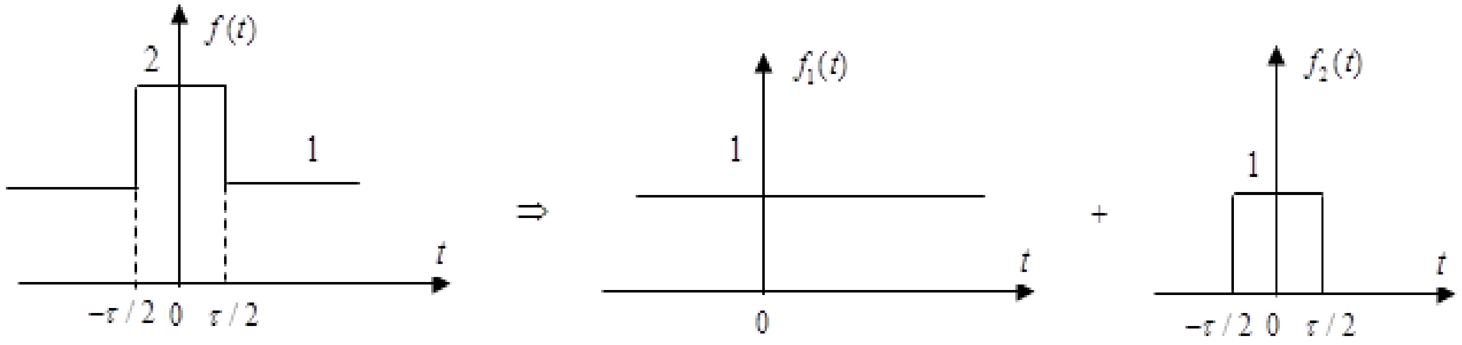
（4） $\mathrm{Sa}(0) = 1$

1.3 信号的运算

1.3.1 信号的加法运算 →信号的分解

两个信号的和（或差）仍然是一个信号，它在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之和（或差）

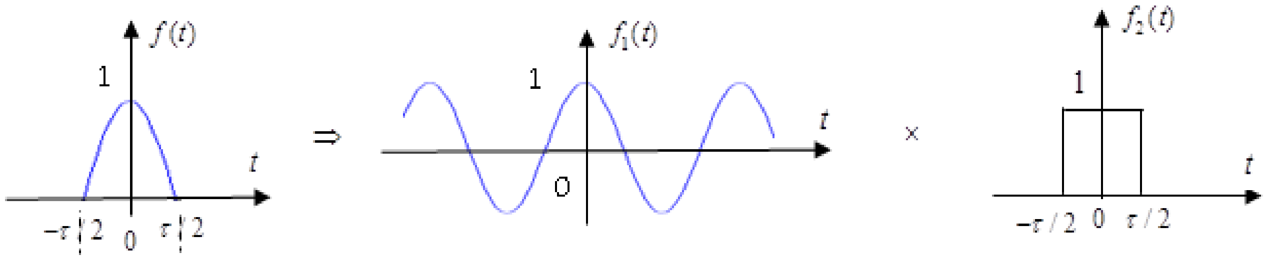
$$f(t)=f_1(t)\pm f_2(t)$$



1.3.2 信号的乘法和数乘运算 →信号的调制和缩放

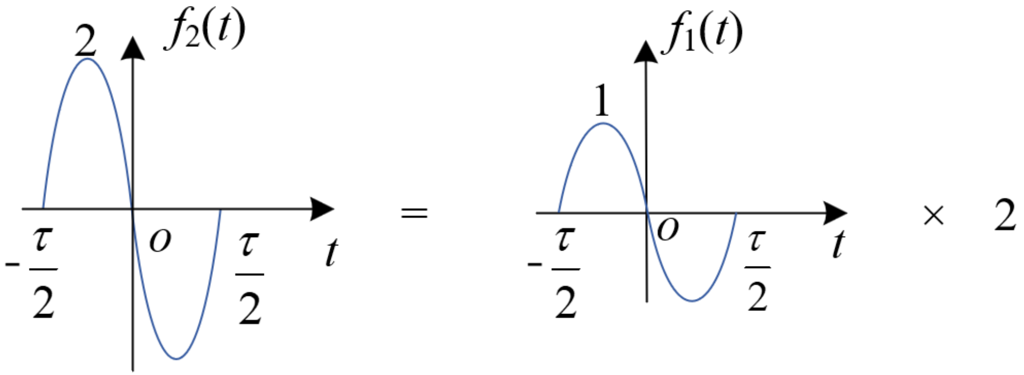
两个信号的积仍然是一个信号，它在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之积

$$f(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$$



信号的数乘运算是指某信号乘以一实常数 K，它是将原信号每一时刻的值都乘以 K

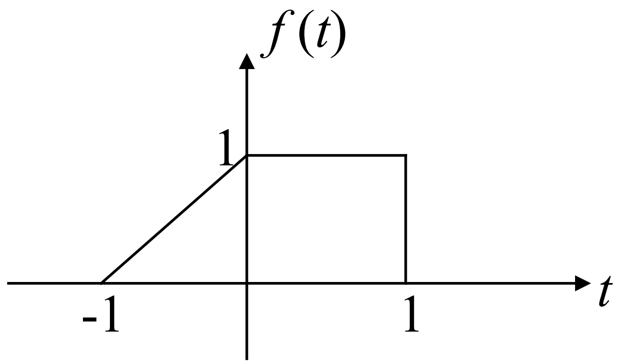
$$f_2(t) = K \cdot f_1(t)$$

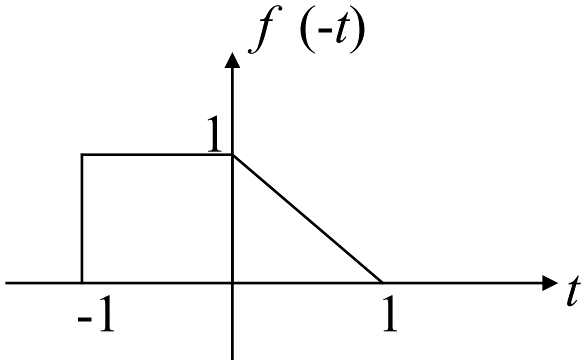


1.3.3 信号的反褶、时移、尺度变换运算

1. 反褶运算

$f(t) \to f(-t)$　　以 $t=0$ 为轴反褶



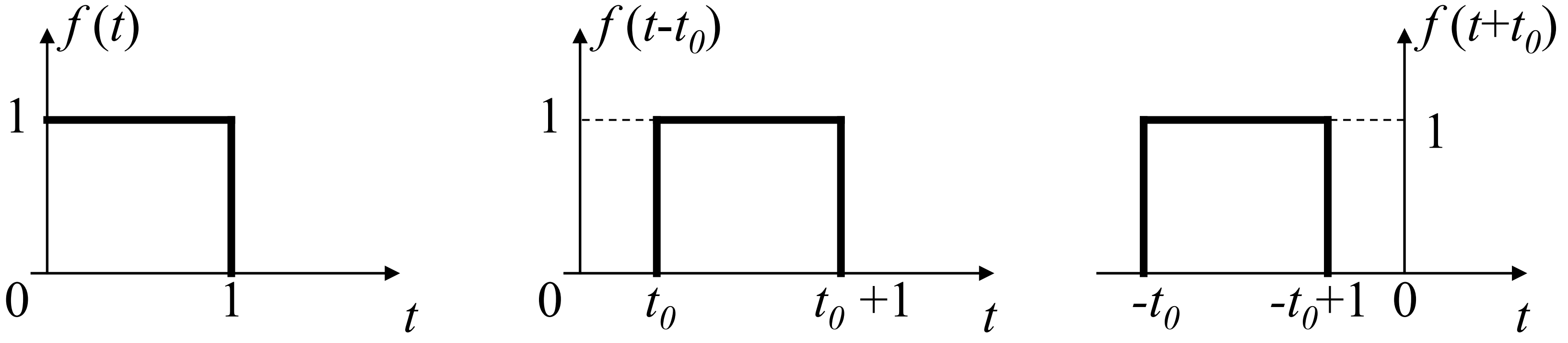


2. 时移运算

$$f(t) \rightarrow f(t-t_0)$$

$t_0 > 0$ 时，$f(t)$ 在 t 轴上整体右移

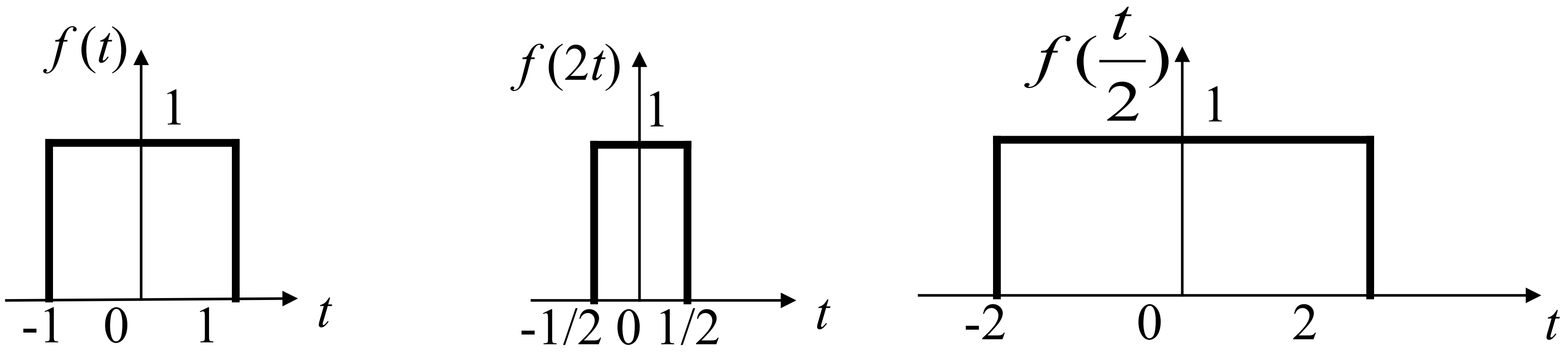
$t_0 < 0$ 时，$f(t)$ 在 t 轴上整体左移



3. 尺度变换运算

$$f(t) \rightarrow f(2t)$$ 压缩

$$f(t) \rightarrow f(\frac{t}{2})$$ 扩展



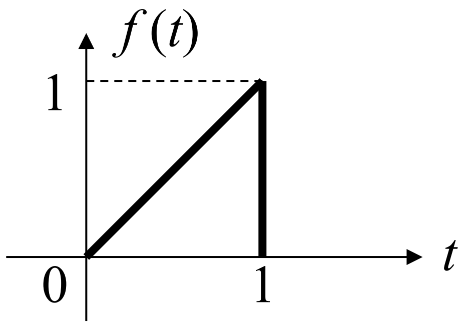
1.3.4 信号的微分与积分运算

1. 微分运算

信号 $f(t)$ 的微分 $f'(t)$ 仍然是一个信号，它表示信号随时间变化的变化率。

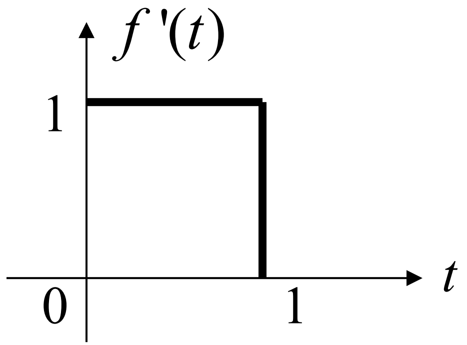
微分运算突出信号的变化部分。

例1-5: 求下图所示信号 $f(t)$ 的微分 $f'(t)$，并画出其波形。



解: $f(t) = t \quad (0<t\leq 1)$

$f'(t) = 1 \quad (0<t\leq 1)$

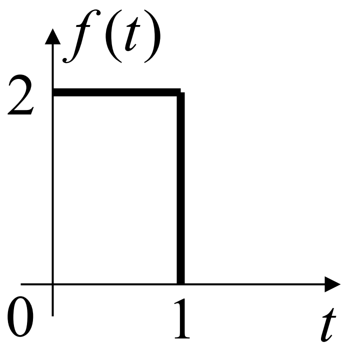


2. 积分运算

信号 $f(t)$ 的积分 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$，也可写作 $f^{(-1)}(t)$，仍然是一个信号，它在任意时刻的值等于从 - ∞ 到 t 区间内 $f(t)$ 与时间轴所包围的面积。

积分运算使信号的突变部分变得平滑，可削弱毛刺（噪声）的影响。

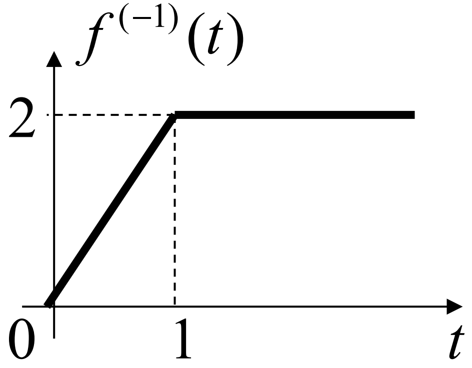
例1-6: 选择如图所示信号 $f(t)$ 的积分 $f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的波形。



解： 1）当 $t<0$时， $f^{-1}(t)=0$

2）当 $0\le t\le 1$ 时， $f^{(-1)}(t)=\int_{0}^{t} 2\mathrm{d}\tau=2t$

3）当 $t>1$ 时， $f^{-1}(t)=\int_{0}^{1} 2\mathrm{d}\tau=2$



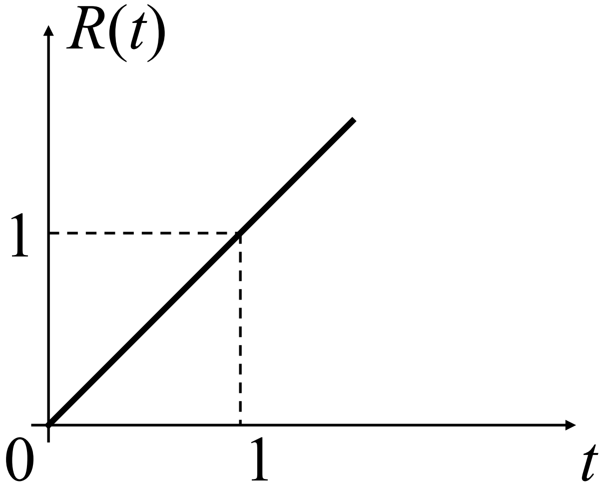
1.4 奇异信号

在信号与系统分析中，经常要遇到函数本身有不连续点（跳变点），或其导数与积分有不连续点的情况，这类函数统称为奇异函数或奇异信号。

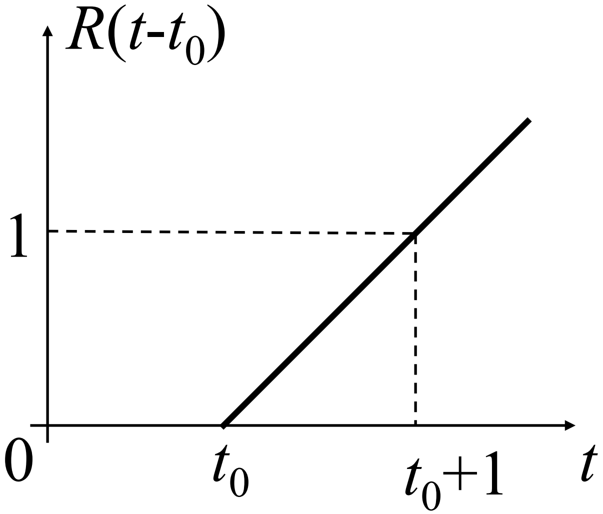
1.4.1 单位斜变信号

斜变信号指的是从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。其表示式为

$$R(t) = t, (t \geq 0) \qquad R(t - t_0) = t - t_0, (t \geq t_0)$$



单位斜变信号



延迟的斜变信号

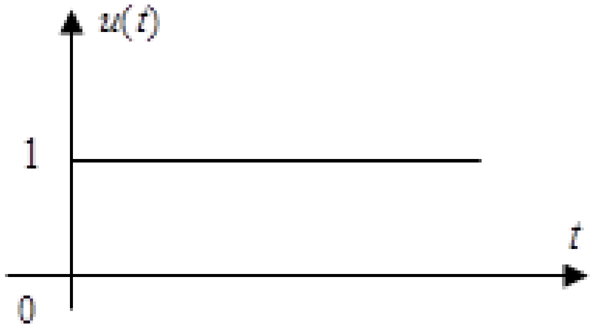
1.4.2 单位阶跃信号

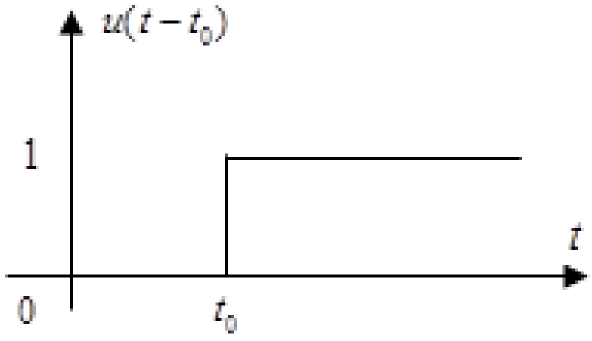
描述某些对象从一个状态到另一个状态的瞬时完成过程，例如电源开关的断开/接通状态的切换情况。

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

延时→

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$





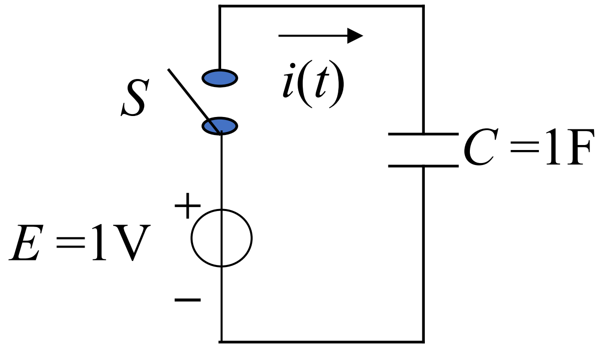
注意：阶跃函数在跳变点 $t=0$ 处通常没有定义，但有时规定为 $u(0)=1/2$ 。

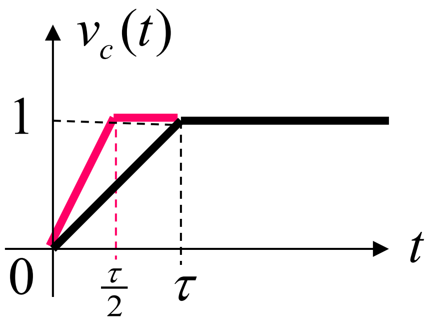
1.4.3 单位冲激信号

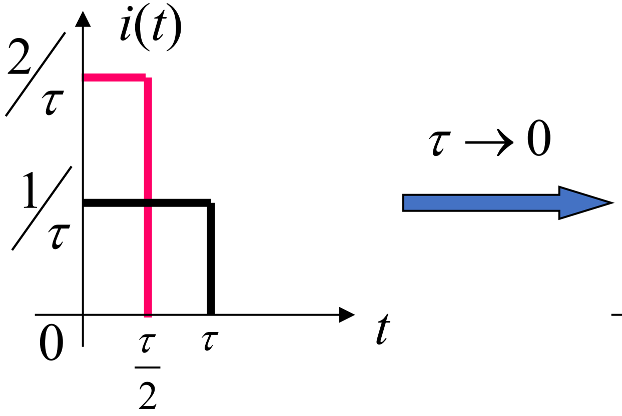
源于对作用时间极短而强度极大的物理过程的理想描述。

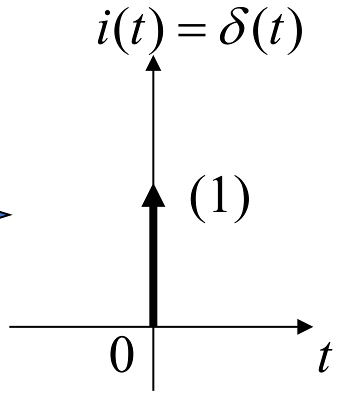
例1-12：图中假设 S、E、C 都是理想元件（内阻为0），当 $t=0$时 S 闭合，求回路电流 $i(t)$。

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$









1.4.3 单位冲激信号

2. $\delta(t)$ 函数的性质

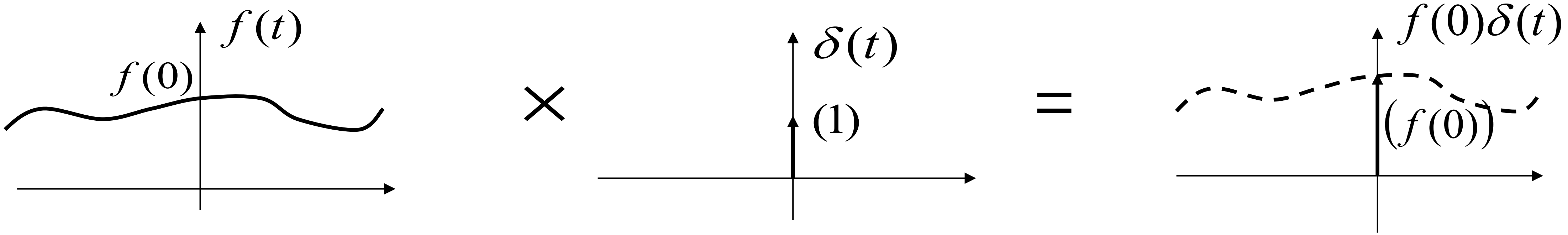
1）抽样特性（筛选特性）

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t \quad =f(0)$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0)$$



2）$\delta(t)$ 是偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$ **推论→** $\int_{-\infty}^{0}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$

3）冲激函数 $\delta(t)$ 与阶跃函数 $u(t)$ 的关系：微积分关系

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t)\qquad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=u(t-t_0)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

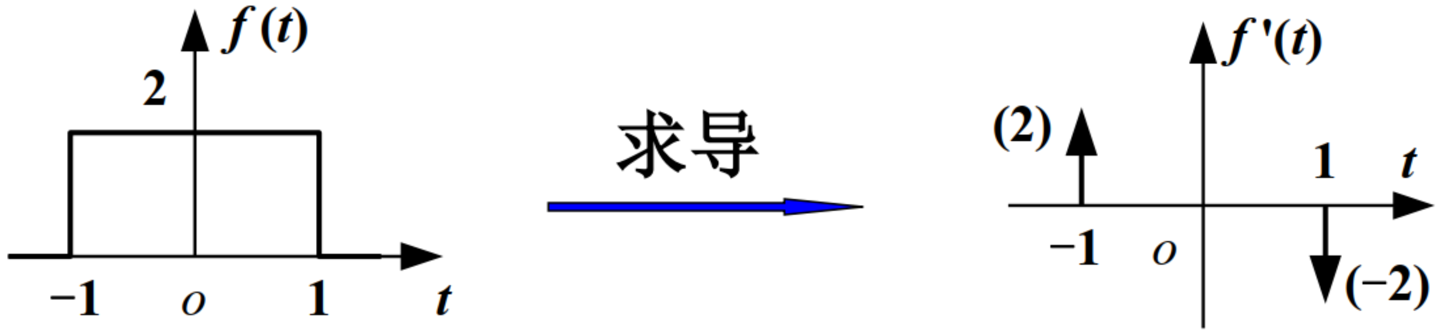
例1-13 利用冲激函数的筛选特性，化简下面函数的表达式或求值。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}u(t)\right]=\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)=\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

$$\int_{-1}^{9}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{9}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-4}^{-1}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\mathrm{d}t=0$$

例1-14 冲激函数描述间断点的导数。



$$f(t)=2u(t+1)-2u(t-1) \qquad f'(t)=2\delta(t+1)-2\delta(t-1)$$

4）冲激函数 $\delta(t)$ 的尺度特性 $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

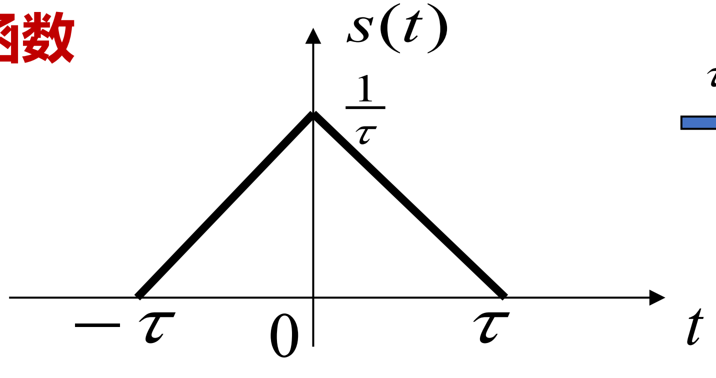
5）冲激函数 $\delta(t)$ 与任何函数 $f(t)$ 的乘积 $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ **推论→** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\delta(t)]=f(0)\delta'(t)$

1.4.4 冲激偶函数

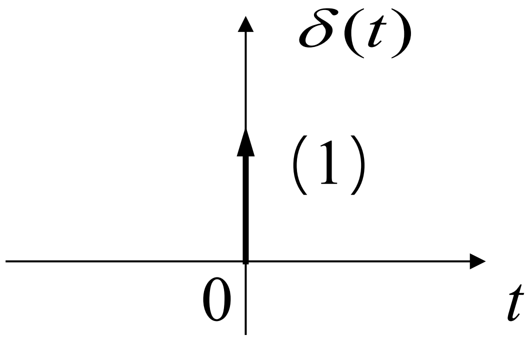
定义：单位冲激函数的导数（阶跃函数的二阶导数），表示式为

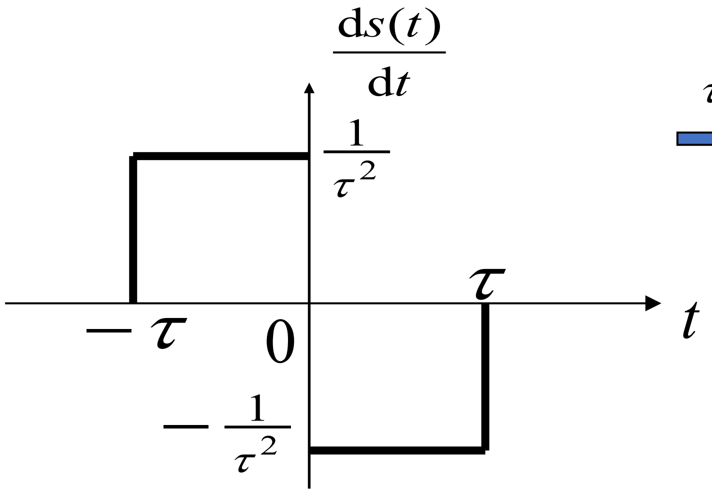
$$\delta'(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

正负极性的一对冲激函数

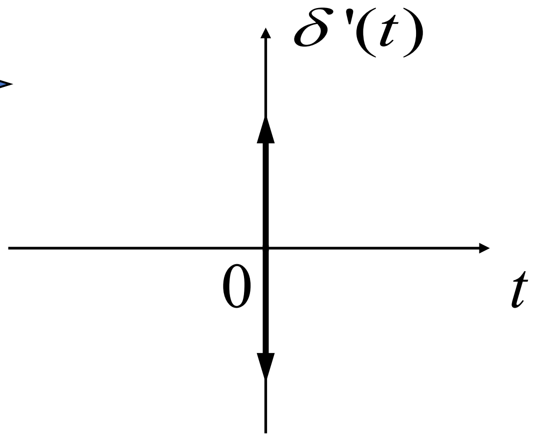


$\tau\to 0$

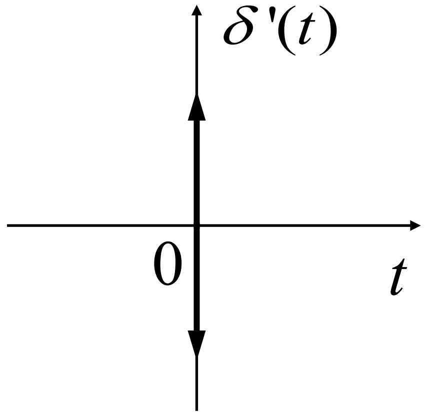




$\tau\to 0$



1.4.4 冲激偶函数



冲激偶函数 $\delta'(t)$ 的性质

1）冲激偶是奇函数，即 $\delta'(-t) = -\delta'(t)$

2） $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) \mathrm{d}t = -f'(0)$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0) f(t) \mathrm{d}t = -f'(t_0)$

证明：

$[f(t)\delta(t)]' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t)$

$f(t)\delta'(t) = [f(t)\delta(t)]' - f'(t)\delta(t)$

$= f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

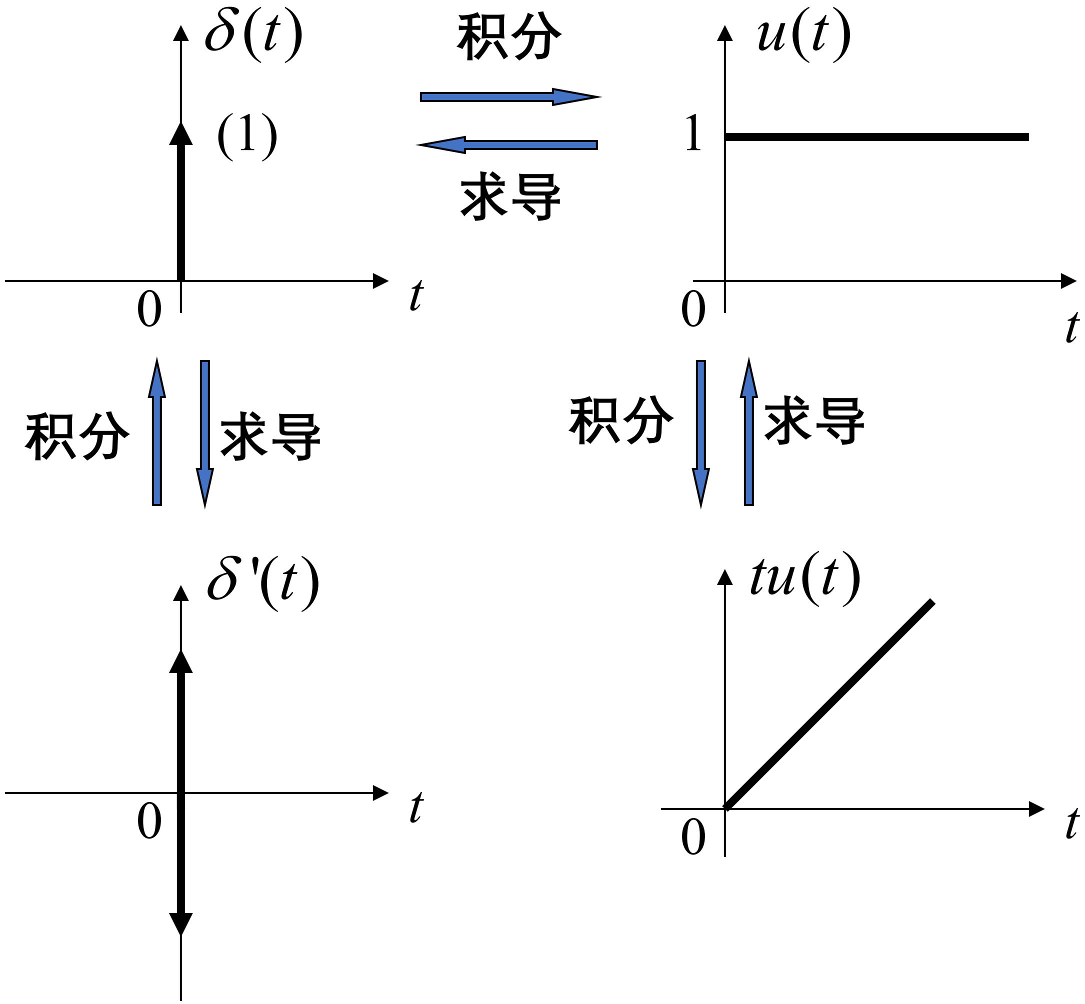
$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

3） $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \mathrm{d}t = 0$

例1-15 利用 $\delta'(t)$ 的性质计算 $\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta'(-t) \mathrm{d}t$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta'(-t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} -(t-2)^2 \delta'(t) \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-(t-2)^2\right]\Big|_{t=0} = 2(t-2)\big|_{t=0} = -4$$

$tu(t)$、$u(t)$、$\delta(t)$ 和 $\delta'(t)$之间的关系：



补充一些 $\delta(t)$ 和 $\delta'(t)$ 的计算题

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^3-3t^2+5t-1)\delta'(t-1)dt$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^3+5)\delta(\frac{t}{2})dt$

(4) $\int_{-\infty}^{t} (2-x)\delta'(x)dx$

单选题 1分

设置

例1-16：求解 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt$

A 1

B 2

C 0

D -1

提交

本次课的内容

1.5 信号的分解
1.6 系统模型及其分类
1.7 线性时不变系统
1.8 系统分析方法

课程目标

- 掌握任意信号分解为脉冲分量的方法
- 了解系统不同的分类方法
- 准确判断系统的线性、时不变、因果性
- 了解系统分析方法

1.5 信号的分解

目的：将任意信号表示为典型函数之和的形式。

$$f(t)=\sum_{n} c_n \varphi_n(t)$$

这样，为了表示一个具体的信号 $f(t)$，

就变成如何选择最佳的函数 $\varphi_n(t)$ 和确定相应的系数 c_n 的问题了。

这里对 $\varphi_n(t)$ 有两种选择方法：

一种从**时域**出发：选择“单元信号”，如冲激信号和阶跃信号。

一种从**变换域（频域）**出发：选择“基函数集”如正弦函数、指数函数。

1.5.1 任意信号分解为偶分量与奇分量之和

偶分量定义为 $f_e(t) = f_e(-t)$

奇分量定义为 $f_o(t) = -f_o(-t)$

任意信号 $f(t)$ 必然可以分解为偶分量和奇分量

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \qquad (1)$$

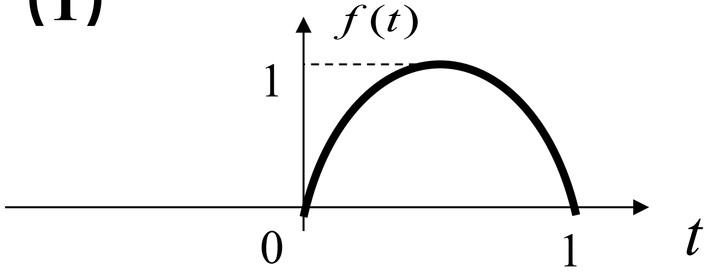
$$f(-t) = f_e(t) - f_o(t) \qquad (2)$$

$$(1)+(2): \quad f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$

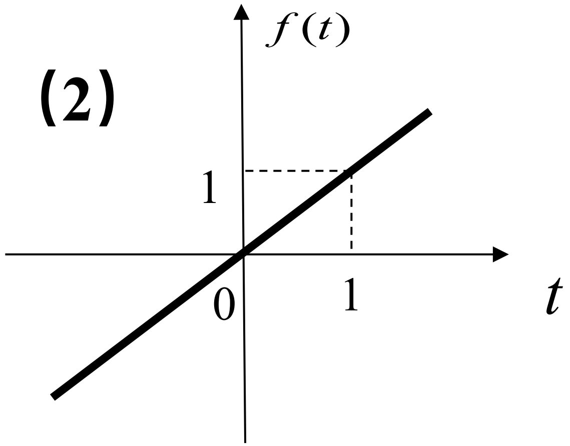
$$(1)-(2): \quad f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

例1-17: 求解下图信号的偶分量与奇分量。

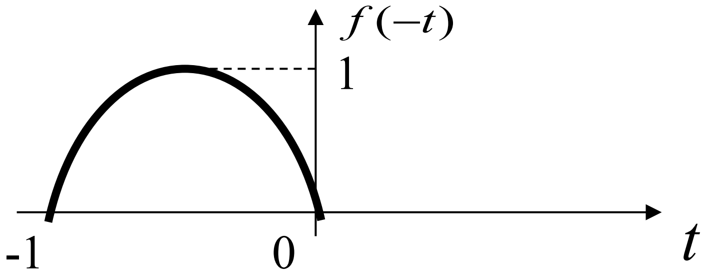
(1)

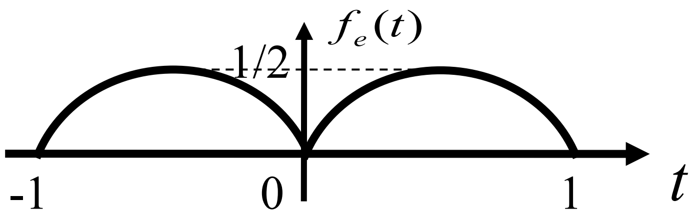


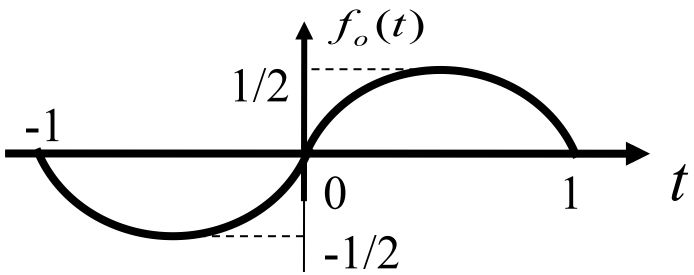
(2)



解：(1)







(2) 该信号为奇信号。所以

$$f_o(t) = f(t)$$

$$f_e(t) = 0$$

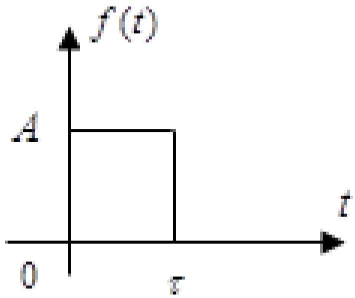
1.5.2 任意信号分解为脉冲分量之和

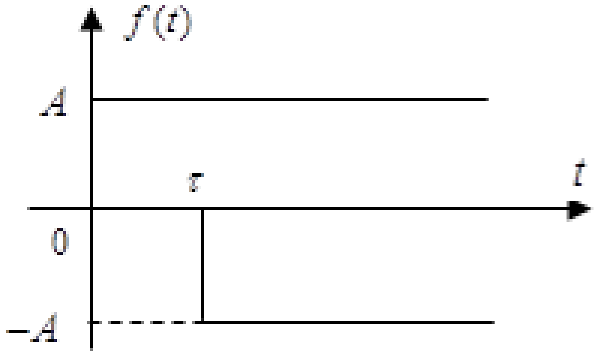
下面是重点：时域的分解，怎么用 $u(t)$ 和 $\delta(t)$ 来表示任意一个函数

任意信号的阶跃函数分解

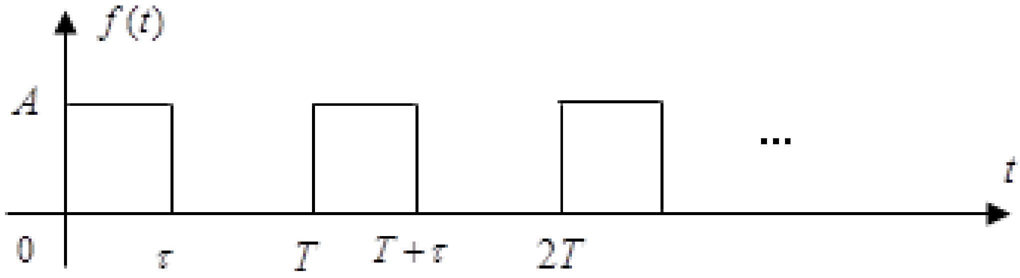
先看矩形脉冲信号分解

$$f(t) = Au(t) - Au(t-\tau)$$





再看有始周期矩形脉冲序列分解



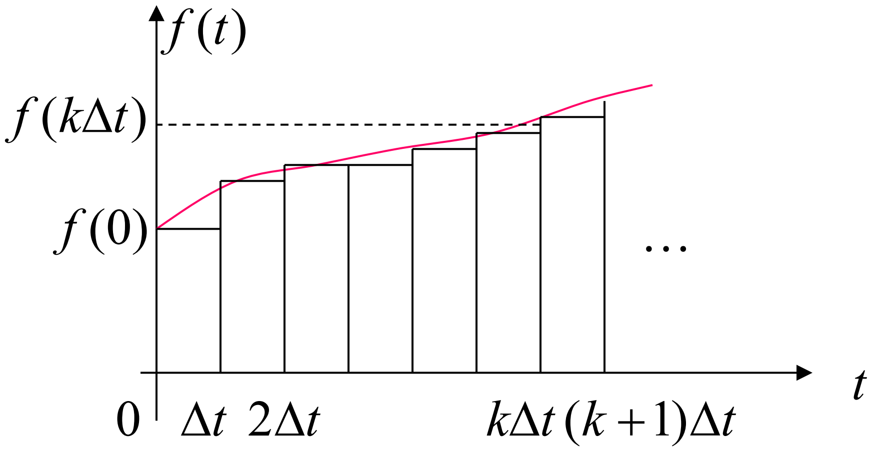
$$f(t) = Au(t) - Au(t-\tau) + Au(t-T) - Au(t-T-\tau) + Au(t-2T) - Au(t-2T-\tau) + \cdots$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\left[u(t-nT) - u(t-nT-\tau)\right]$$

1.5.2 任意信号分解为脉冲分量之和

一个信号可近似分解为许多脉冲分量之和。这里又分为两种情况，一是分解为矩形窄脉冲分量，窄脉冲组合的极限就是冲激信号的迭加；另一种情况是分解为阶跃信号分量的迭加。

任意信号分解为冲激信号的迭加

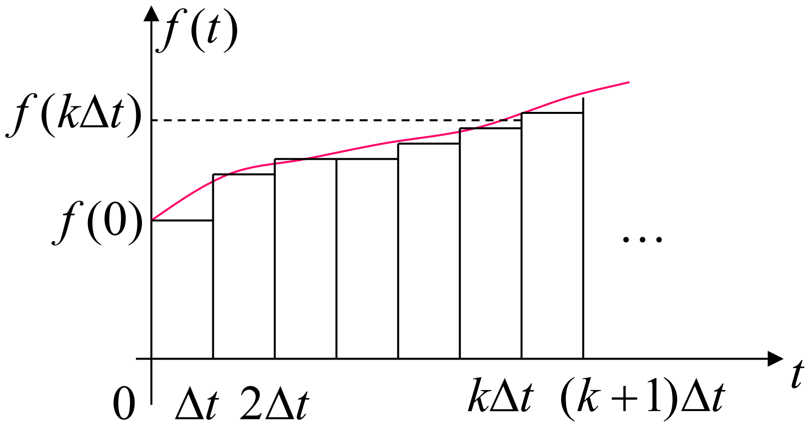


当 $t=0$ 时，第一个矩形脉冲为

$$f(0)[u(t)-u(t-\Delta t)]$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(0)[u(t)-u(t-\Delta t)]}{\Delta t}\Delta t=\lim_{\Delta t\to 0} f(0)\delta(t)\Delta t$$

1.5.2 任意信号分解为脉冲分量之和

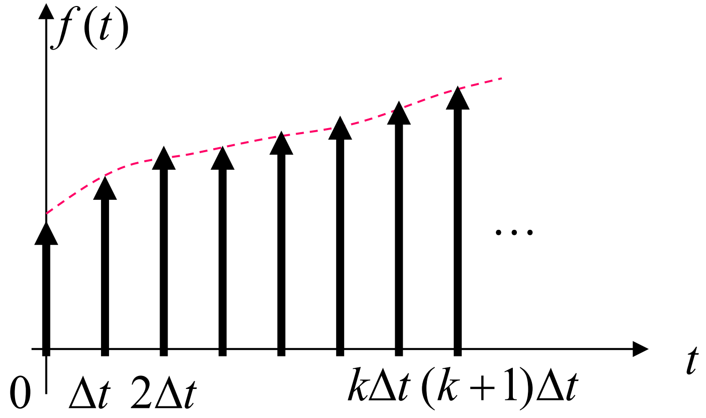


当 $t=k\Delta t$时，第 k+1个矩形脉冲为

$$f(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} f(k\Delta t)\frac{\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}}{\Delta t}\Delta t$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0} f(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$$



将上述0 — n个矩形脉冲迭加，就得到$f(t)$的表达式，即

$$f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$$

当 $\Delta t\to 0$ 时， $\Delta t\to d\tau, k\Delta t\to\tau, \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=0}^{n}\to\int_{0^-}^{t}$

$$\boxed{f(t)=\int_{0^-}^{t} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

1.5.3 任意信号分解为正交函数之和（第六章）

如果用正交函数集表示一个信号，那么组成信号的各分量就是相互正交的。

例如，各次谐波的正余弦信号构成的三角函数集就是正交函数集。任何周期信号 $f(t)$ 只要满足狄里赫利条件，就可以由这些三角函数的线性组合来表示，称为 $f(t)$ 的三角形式的傅里叶级数。

同理，$f(t)$ 还可以展开成指数形式的傅里叶级数。

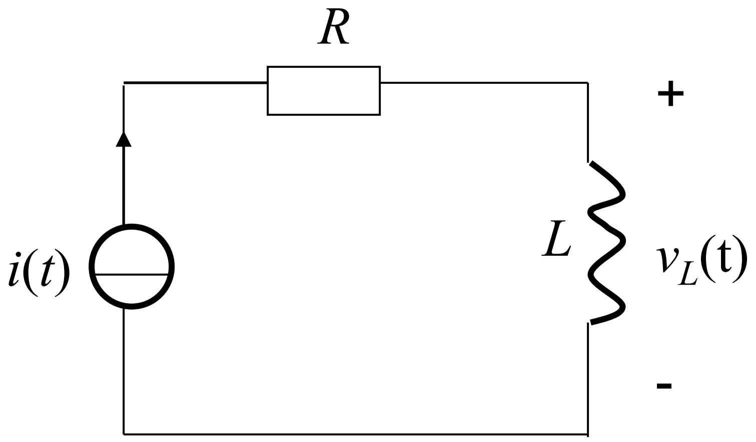
1.6 系统模型及其分类

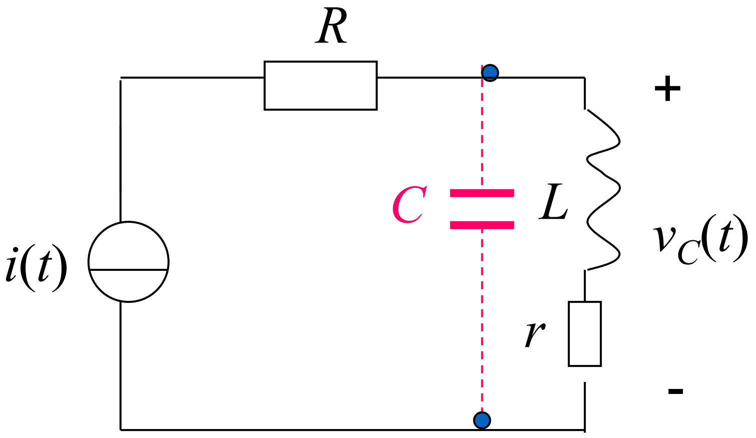
系统的定义

- 由若干个相互关联又相互作用的事物组合而成，具有某种或某些特定功能的整体。如通信系统、雷达系统等。系统的概念不仅适用于自然科学的各个领域，而且还适用于社会科学。如政治结构、经济组织等。
- 众多领域各不相同的系统都有一个共同点，即所有的系统总是对施加于它的信号（即系统的**输入信号**，也可称**激励**）作出响应，产生出另外的信号（即系统的**输出信号**，也可称**响应**）。系统的功能就体现在什么样的输入信号产生怎样的输出信号。

1.6 系统模型及其分类

1.6.1 系统的数学模型

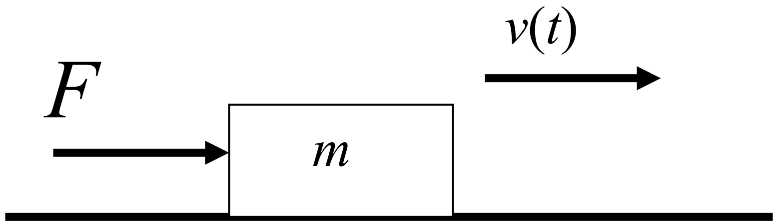




$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t)$$

对于同一物理系统，在不同条件之下，可得到不同形式的数学模型。



$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$m \Longleftrightarrow L \qquad F \Longleftrightarrow v_L(t) \qquad v(t) \Longleftrightarrow i(t)$$

对于不同的物理系统，可能有相同形式的数学模型。

1.6.2 系统的分类

1) 连续时间系统与离散时间系统

连续时间系统的数学模型是微分方程。

离散时间系统的数学模型是差分方程。

2) 即时系统（无记忆系统）与动态系统（记忆系统）

即时系统数学模型是代数方程，如电阻电路。

动态系统数学模型是微分方程或差分方程，如 RC、RL电路。

3) 集总参数系统与分布参数系统

集总参数系统的数学模型是常微分方程。

分布参数系统的数学模型是偏微分方程。

4) 线性系统与非线性系统

具有叠加性与均匀性(也称齐次性)的系统称为线性系统。

不满足叠加性或均匀性的系统称为非线性系统。

5) 时变系统与时不变系统

时变系统：系统的参数随时间变化。

时不变系统：系统的参数不随时间而变化。

6) 可逆系统与不可逆系统

可逆系统：不同的激励产生不同的响应。

不可逆系统：不同的激励产生相同的响应。

对于每个可逆系统都存在一个“逆系统”，当原系统与此逆系统级联组合后，输出信号与输入信号相同。

例:

一个可逆系统：$r(t)=3e(t)$

其逆系统为：$r(t)=e(t)/3$

不可逆系统：$r(t)=e^2(t)$

当激励 $e(t)=1$ 和 $e(t)=-1$ 时，响应 $r(t)$ 均为 1，即不同激励产生相同响应，故为不可逆系统。

7) 单输入单输出系统与多输入多输出系统

单输入单输出系统：只接收一个激励信号，产生一个响应信号。

多输入多输出系统：系统激励信号与响应信号多于一个。

1.7 线性时不变系统

1.7.1 线性特性

线性包含叠加性与均匀（齐次）性

1. 叠加性

若 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$ 称系统满足叠加性。

2. 齐次性

若 $x(t)=ax_i(t)$ $y(t)=ay_i(t)$ 称系统满足齐次性。

同时满足叠加性与齐次性的系统称为**线性（Linear）系统。**

例1-20：设某系统的输入输出之间的关系为：$y(t)=tx(t)$。判断该系统是否为线性系统。

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(t)=tx(t)$$

解：$y_1(t)=tx_1(t)$　　$y_2(t)=tx_2(t)$　　$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

$$y(t)=t\left[x_1(t)+x_2(t)\right]=tx_1(t)+tx_2(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

$x(t)=ax_1(t)$　　$y(t)=tx(t)=atx_1(t)=ay_1(t)$　　是线性系统

综合叠加性与齐次性，线性可表示为：

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k x_k(t) \qquad y(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k y_k(t)$$

单选题 1分

设置

设某系统的输入输出之间为：$y(t)=ax(t)+b$。判断该系统是否为线性系统。

A 是

B 否

提交

例1-21：设某系统的输入输出之间为：$y(t)=ax(t)+b$。判断该系统是否为线性系统。

解： $y_1(t)=ax_1(t)+b \qquad y_2(t)=ax_2(t)+b$

$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

$y(t)=a[x_1(t)+x_2(t)]+b \neq y_1(t)+y_2(t)$

系统不满足叠加性。

而且 $x(t)=cx_1(t) \qquad y(t)=ax(t)+b=acx_1(t)+b \neq cy_1(t)$

系统也不满足齐次性。

所以系统不是线性系统。

由线性，可以得到系统的一个结果是：

在全部时间上系统输入为零，必然输出为零，即零输入产生零输出。

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k x_k(t)=\sum_{k=1}^{N}0\cdot a_k=0 \qquad y(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k y_k(t)=\sum_{k=1}^{N}0\cdot a_k=0$$

而 $y(t)=ax(t)+b=a\cdot 0+b=b$

即在零输入时，系统输出不为零。这部分不为零的输出，称为系统的零输入响应。

1.7.2 时不变特性

系统本身参数不随时间改变。

激励延迟，则响应也同样延迟。

例1-22：判断满足下列输入输出之间的关系的系统是否为时变系统:

(1) $y(t)=tx(t)$ (2) $y(t)=ax(t)+b$ 。

解： (1) $y_1(t)=tx(t-t_0)\neq y(t-t_0)$

因为 $y(t-t_0)=(t-t_0)x(t-t_0)$ 所以系统是时变的。

(2) $y_1(t)=ax(t-t_0)+b=y(t-t_0)$ 所以系统是时不变的。

设置

例1-23： 设系统的输入输出之间的关系为：$y(t)=x(2t)$ 。判断其是否为时不变系统。

A 时不变系统

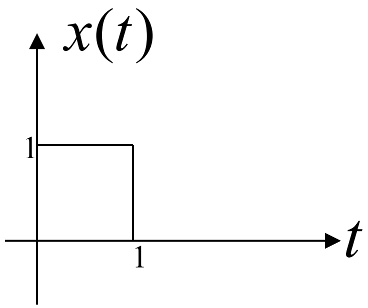
B 时变系统

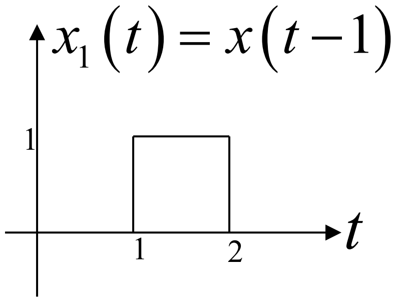
提交

判断一个系统是否满足某种特性，只要能找到一个例子不满足，就可证明其不满足此特性。

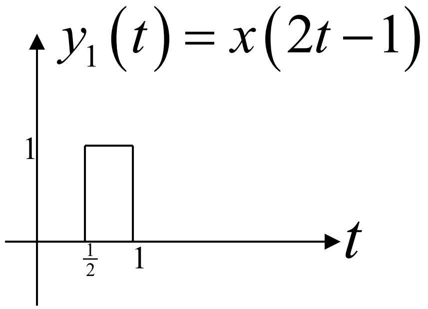
例1-23： 设系统的输入输出之间的关系为：$y(t)=x(2t)$。判断其是否为时不变系统。

解：假设输入与输出的波形如下图所示：





右移1个单位



右移0.5个单位

所以系统是时变系统。

例1-24：判断 $y(t)=x(-t)$ 是不是时不变系统。

解： 不是，是时变的

$$y(t)=x(-t)$$

$$x_1(t)=x(t-t_0)$$

$$y_1(t)=x(-t-t_0)$$ 系统只对它输入的激励信号做了一次反褶

$$y(t-t_0)=x(-t+t_0)\neq y_1(t)$$

所以是时变系统

时不变的直观判断方法:

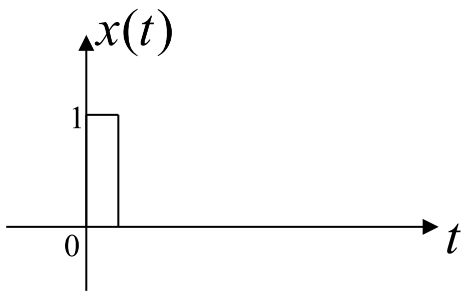
若 $x(\cdot)$ 前出现时变的系数— $tx(t)$、或有反褶— $x(-t)$、或有展缩变换— $x(2t)$， 则该系统均为时变系统。

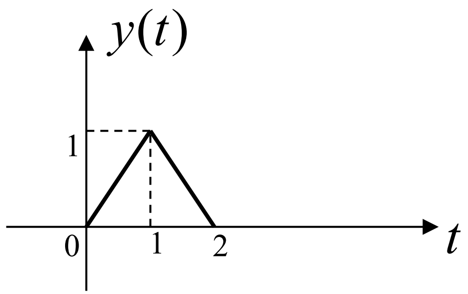
系统同时满足线性与时不变性，称为线性时不变系统，

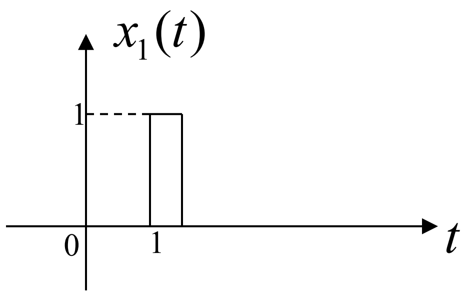
记为 LTI (linear-time-invariant) 系统，可表示为：

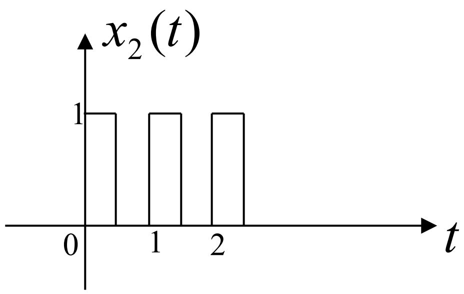
$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k x_k(t-t_k) \qquad y(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k y_k(t-t_k)$$

例1-25：设LTI系统的输入 $x(t)$与输出 $y(t)$之间的关系由下图描述，作出当输入分别为$x_1(t)$与 $x_2(t)$ 时，输出 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 的波形图。

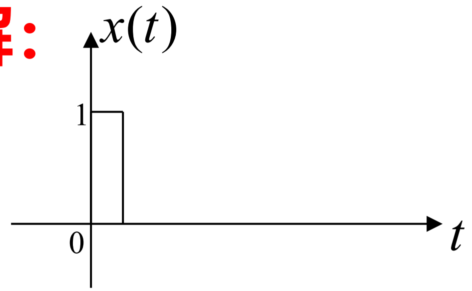


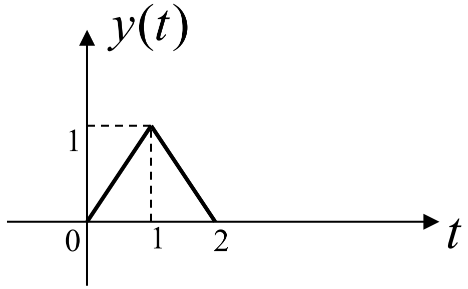


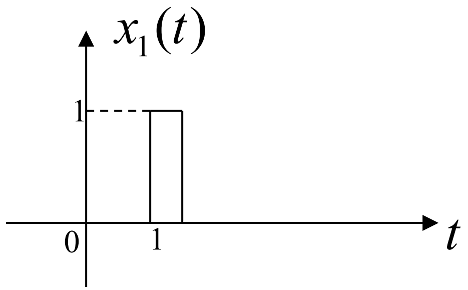




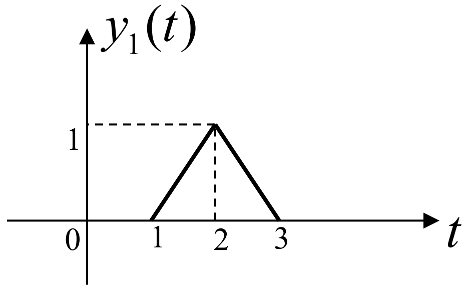
解：



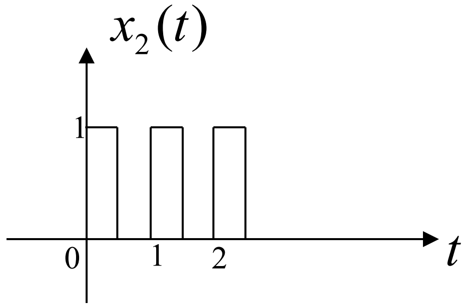




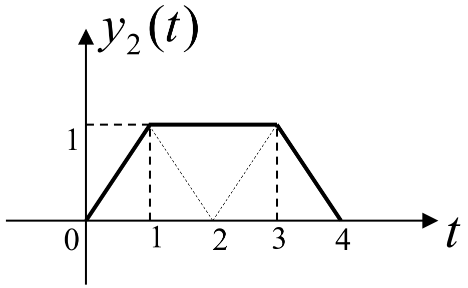
$$x_1(t) = x(t-1)$$



$$y_1(t) = y(t-1)$$



$$x_2(t) = x(t) + x(t-1) + x(t-2)$$

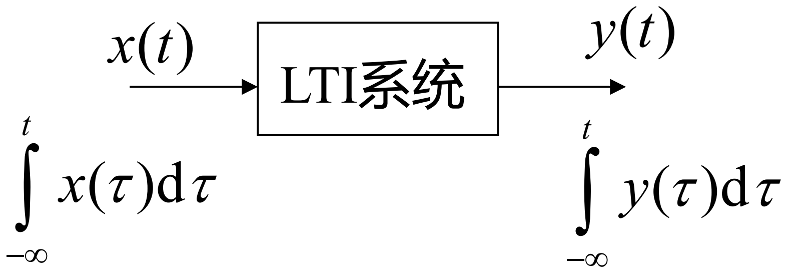


$$y_2(t) = y(t) + y(t-1) + y(t-2)$$

1.7.3 连续时间系统的微积分特性

1. 微分性

2. 积分性



1.7.4 因果性

因果系统是指系统在 $t=t_0$ 时刻的响应只与 $t=t_0$ 和 $t<t_0$ 时刻的输入有关。否则，为非因果系统。

例: 因果系统: $r(t)=e(t-1)$ (延时系统)

非因果系统: $r(t)=e(t+1)$ (超前系统)

（$t=0$ 时刻响应 $r(0)=e(1)$ ，它由 $t=1$ 时刻的激励决定，故为非因果系统）。

非因果系统: $r(t)=e(2t)$ (时域压缩系统)

非因果系统常见于语音信号处理、气象学、股票市场分析、人口统计学等领域。

1.8 LTI 系统分析方法

系统分析可分两大类：时域法和变换域法。

$$\xrightarrow[E(\omega)]{e(t)} \boxed{\begin{array}{c}\text{系统函数}\\ h(t)\ \text{或}\ H(\omega)\end{array}} \xrightarrow[R(\omega)]{r(t)}$$

卷积积分的基本出发点是：若系统的激励信号为 $e(t)$，系统函数为 $h(t)$，则系统的响应 $r(t)$ 为 $e(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积，即 $r(t) = h(t) * e(t)$

卷积定理：时域卷积、频域乘积　　$R(\omega) = H(\omega)E(\omega)$

卷积定理是连接时域法和变换域法的纽带

从系统的数学描述方法来分：

输入、输出分析法：一个 n 阶微（差）分方程，适合于单输入、单输出系统（第二、三、四、七、八章）

状态变量分析法： n 个一阶微（差）分方程组，适合于多输入、多输出系统（第十二章）

从系统数学模型求解方法来分：

时域分析法：不经过任何变换，在时域中直接求解响应（第二、七章）

变换域分析法：将信号和系统模型的时间函数，变换成相应某变换域的函数，如傅里叶变换（第三、五章）、拉普拉斯变换（第四章）、Z 变换（第八章）等

作 业

教材习题

基础题：1-18，1-20，1-23

加强题：1-21，1-24