# 概率论与数理统计第七章考研练习题（带答案）

## 一、矩估计与极大似然估计

（一）离散总体

1、（2002 年，数学一）设总体 $X$ 的概率分布为

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $\theta^2$ | $(1-2\theta)$ |

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 $X$ 的如下样本值

3，1，3，0，3，1，2，3

求 $\theta$ 的矩估计和最大似然估计值。

解析 **矩估计**：先求期望，

$$E(X)=0\cdot\theta^2+1\cdot 2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3\cdot(1-2\theta)=3-4\theta,$$

再反解 $\theta$ 可得 $\theta=\frac{3-E(X)}{4}$，则 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{4}$。

样本均值 $\overline{X}$ 的观测值为 $\frac{1}{8}\cdot(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$，代入可得 $\theta$ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$。

**最大似然估计**：由离散型随机变量似然函数的定义，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组观测值，则似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}$。

由于样本值中 0 出现一次、数值 1 出现二次、数值 2 出现一次、数值 3 出现四次，故对应的概率 $\theta^2$，$2\theta(1-\theta)$，$\theta^2$ 和 $(1-2\theta)$ 的指数分别为一次、二次、一次和四次。则对于给定的样本值，其似然函数为

$$L(\theta)=\theta^2\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$$

$L(\theta)>0$，等式两边取自然对数得

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}。$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得 $\hat{\theta}_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，因为 $\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$，与题目中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 矛盾，不合题意，

所以 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$。

（二）连续总体

2、（2015 年，数学一，数学三）设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1\\ 0, 其他\end{cases}$$

其中 $\theta<1$ 为未知参数 s，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本。

（1）求参数 $\theta$ 的矩估计量；

（2）求参数 $\theta$ 的最大似然估计。

**解析** (1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{1}x\cdot\dfrac{1}{1-\theta}\mathrm{d}x=\dfrac{1+\theta}{2}$，$\theta=2E(X)-1$，则 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$ 为 $\theta$ 的矩估计量。

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 为样本观测值，则似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n(\theta\leqslant x_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n)$。

显然 $L$ 是关于 $\theta$ 的单调递增函数，可知要使得 $L$ 最大，$\theta$ 应取其可能的最大值。又由于 $\theta\leqslant x_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n$，可知 $\theta$ 不可能超过 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任何一个，即 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，进而 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。

3、（2011 年，数学一）设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 $\mu_0$ 已知，$\sigma^2>0$ 未知。$\overline{X}$ 和 $S^2$ 分别表示样本均值和样本方差。求参数 $\sigma^2$ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$。

**解析** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 为样本观测值，则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}\right]=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}。$$

取对数 $$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2},$$

求导 $$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2(\sigma^2)^2}=\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-n\sigma^2\right]。$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=0$，解得 $\sigma^2$ 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$，进而 $\sigma^2$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$。

4、（改编 2018 年，数学一）设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty，$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本。

（1）求参数 $\sigma$ 的矩估计量；

（2）求参数 $\sigma$ 的最大似然估计。

**解析** (1) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\sigma)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x$,

令 $u=\frac{x}{\sigma}$ 可得 $E(X^2)=\sigma^2\int_0^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=2\sigma^2$，解得 $\sigma=\sqrt{\frac{E(X^2)}{2}}$，再用二阶原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 代替 $E(X^2)$，即得 $\sigma$ 的矩估计量 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$。

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，则似然函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}=\frac{1}{2^n\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}},$$

取对数可得 $\ln L=-n\ln2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，则 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$。令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=0$，解得 $\sigma$ 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，则 $\sigma$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$。

## 二、估计量的评选标准

5、（2007 年，数学一）设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta},0<x<\theta\\ \frac{1}{2(1-\theta)},\theta\le x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

其中参数 $\theta$ $(0<\theta<1)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值。

判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 $\theta^2$ 的无偏估计量，并说明理由。

解析 只需验证 $E(4\overline{X}^2)$ 是否为 $\theta^2$ 即可。由数学期望和方差的性质可得

$$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4\{D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2\}=4\left\{\frac{1}{n}D(X)+[E(X)]^2\right\},$$

其中
$$E(X)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta,E(X^2)=\frac{1}{6}(1+\theta+2\theta^2),$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{48}-\frac{\theta}{12}+\frac{1}{12}\theta^2,$$

于是
$$E(4\overline{X}^2)=\frac{5+3n}{12n}+\frac{3n-1}{3n}\theta+\frac{3n+1}{3n}\theta^2\neq\theta^2。$$

因此 $4\overline{X}^2$ 不是 $\theta^2$ 的无偏估计量。

## 三、区间估计

6、（2016 年，数学一）设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{X}=9.5$，参数 $\mu$ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的上限为 10.8，则 $\mu$ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为__________。

解析 不管 $\sigma$ 已知还是未知，$\mu$ 的置信区间的中心都是 $\overline{X}$，则由置信上限为 10.8 及 $\overline{X}=9.5$ 可知，置信下限为 8.2，故置信区间为 $(8.2,10.8)$。

7、（2003 年，数学一）已知一批零件的长度 $X$（单位 cm）服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40（cm），则 $\mu$ 的和置信度为 0.95 的置信区间是__________。（注：标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$）

解析 已知方差 $\sigma^2=1$，由正态分布的性质可知 $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)$，由于置信水平为 0.95，可知应该取分位点 $z_{0.025}$，则有 $P\{-z_{0.025}<\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)<z_{0.025}\}=0.95$，解得

$$P\left\{\overline{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}z_{0.025}<\mu<\overline{X}+\frac{1}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right\}=0.95,$$

其中 $n=16$，$\overline{X}=40$，由于 $\Phi(1.96)=0.975$，可知 $z_{0.025}=1.96$，代入可知 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(39.51,40.49)$。

## 四、假设检验

8、（2018 年，数学一）设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ， $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，据此样本检验假设：$H_0:\mu=\mu_{0,}H_1:\mu\neq\mu_{0,}$，则（）

A、如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 $H_0$ ，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 $H_0$

B、如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 $H_0$ ，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 $H_0$

C、如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 $H_0$，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 $H_0$

D、如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 $H_0$ ，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 $H_0$

解析 根据假设检验的基本思路，只有在符合显著性要求的小概率事件发生的情况下才拒绝原假设。可知在原假设和备择假设不变的前提下，显著性水平 $\alpha$ 越小，拒绝原假设越“困难”。反过来，显著性水平 $\alpha$ 越小，接受原假设越“容易”，可知如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 $H_0$，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 $H_0$。故选 D。