归纳总结

归纳总结

一、狭义相对论的两个基本原理

相对性原理　　　光速不变原理

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

二、洛伦兹坐标变换式

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(x - vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \gamma\left(x' + vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

三、洛仑兹速度变换式

$$\boxed{u'_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}}$$

四、时间间隔与空间间隔

$$\boxed{\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

$$\boxed{\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

五、“同时” 的相对性

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

六、“时间延缓效应”

$$\boxed{\tau = \Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

七、“长度收缩效应”

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\beta^2}}$$

八、质速关系式

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot m_0}$$

九、相对论质能关系

$$\boxed{E = mc^2 = \gamma \cdot m_0 c^2}$$

十、相对论动能

$$\boxed{E_K = mc^2 - m_0 c^2}$$

十一、静能

$$\boxed{E_0 = m_0 c^2}$$

十二、总能量

$$\boxed{E = E_K + m_0 c^2}$$

十三、质量亏损

$$\boxed{\Delta E_K = -\Delta(m_0 c^2)}$$

十四、相对论动量和能量关系式

$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 = p^2 c^2 + E_0^2}$$

动量

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(mc^2)^2 - (m_0 c^2)^2}$$

$$= c\sqrt{m^2 - m_0^2} = m_0 c\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

典型习题

例题1. 在S系中观察到两个事件同时发生在 *x* 轴上，其间距离是1m，在S′系中观察这两个事件之间的空间距离是2m，求在S′系中这两个事件的时间间隔。

解: 由洛仑兹变换 $x' = \gamma(x - vt)$, 考虑到 $t_1 = t_2$

$$x_2' - x_1' = \gamma\left[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\right] = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$\gamma = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = 2, \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

再由洛仑兹变换 $t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$, 得

$$t_2' - t_1' = \gamma \cdot \left[(t_2 - t_1) - \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)\right] = -\frac{\beta\gamma}{c}(x_2 - x_1)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^{-8} = -5.77 \times 10^{-9} s$$

例题2. 在S系中观察到的两事件发生在空间同一地点，第二事件发生在第一事件以后2s，在另一相对S系运动的S′系中观察到第二事件是在第一事件3s之后发生的，求在S′系中测量两事件之间的空间距离。

解: 由洛仑兹变换 $t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$，考虑到 $x_1 = x_2$

$$t_2' - t_1' = \gamma \cdot \left[(t_2 - t_1) - \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1) \right] = \gamma(t_2 - t_1)$$

$$\gamma = \frac{t_2' - t_1'}{t_2 - t_1} = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

再由洛仑兹变换 $x' = \gamma(x - vt)$

$$x_2' - x_1' = \gamma\left[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\right] = -\gamma v(t_2 - t_1)$$

$$= -\gamma \beta c(t_2 - t_1) = -\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times 3 \times 10^8 \times 2 = -6.71 \times 10^8 m$$

例题3. π^+介子是一种不稳定粒子，平均寿命是2.6×10^{-8} s (本征寿命)。

(1)如果此粒子相对于实验室以0.8c的速度运动，那么实验室坐标系中测量的π^+介子寿命为多长?

(2) π^+介子在衰变前运动了多长距离?

解: (1) 这是一个动钟变慢问题

$$\text{由}\,\Delta\tau_0=\Delta\tau\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\Delta\tau=\frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{2.6\times10^{-8}}{\sqrt{1-0.8^2}}=\frac{2.6}{0.6}\times10^{-8}=4.33\times10^{-8}s$$

$$(2)\ \Delta x=v\Delta\tau=0.8\times3\times10^{8}\times4.33\times10^{-8}=10.4m$$

例题4. 已知一相对论粒子的动量$p = m_o c$ (m_o是静止质量)。 求这粒子的速度及动能。

解:由动量定义 , $p = m v$

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad v = \beta c = \frac{\sqrt{2}}{2} c$$

$$E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right]$$

$$= (\sqrt{2} - 1) m_0 c^2 = 0.414 m_0 c^2$$

例题5. 已知一粒子的动能等于其静止能量的 *n* 倍，求：　(1)粒子的速率；　(2)粒子的动量。

解: (1) $E - E_0 = nE_0 \quad \Rightarrow \quad E = (n+1)E_0$

$$\because \quad E = \gamma E_0 \Rightarrow \gamma = n+1, \quad \beta = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}$$

$$v = \beta c = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}c$$

(2) 由动量能量关系: $E^2 = E_0^2 + p^2c^2$

$$p^2c^2 = E^2 - E_0^2 = \left[(n+1)^2 - 1\right]m_0^2c^4 = n(n+2)m_0^2c^4$$

$$p = \sqrt{n(n+2)}m_0c$$

例题6. *A* 粒子的静止质量为m_0，入射动能为$2m_0c^2$，与处于静止的靶 *B* 粒子相碰撞并结合在一起，*B* 粒子静止质量为$2m_0$ 。求碰后复合粒子*D* 的静止质量M_0 。

解: 由动能定义

$$E_k = E - E_0 \quad \Rightarrow \quad E = E_0 + E_k = 3m_0c^2$$

由碰撞过程中能量守恒, 设复合粒子质量为M，

$$3m_0c^2 + 2m_0c^2 = Mc^2 \Rightarrow M = 5m_0$$

入射粒子的动量可由动量能量关系式求得:

$$p^2c^2 = E^2 - E_0^2 = 9m_0^2c^4 - m_0^2c^4 = 8m_0^2c^4$$

$$p = 2\sqrt{2}m_0c$$

由碰撞过程中动量守恒

$$2\sqrt{2}m_0 c = Mv = 5m_0 v$$

$$v = \frac{2\sqrt{2}}{5}c \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{\sqrt{17}}$$

$$M = \gamma M_0$$

$$M_0 = \frac{M}{\gamma} = \frac{\sqrt{17}}{5}\times 5m_0 = \sqrt{17}m_0$$

例题7 一短跑选手，在地球上以10 s的时间跑完100 m.在飞行速度为0.98c 的飞船中的观测者来看，这选手跑了多长时间和多长距离？

解 首先要明确，起跑是一个事件，到终点是另一个事件，这是在不同地点发生的两个事件．所以不能套用时间膨胀公式，应用洛伦兹坐标变换式来计算时间间隔．

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{(10-0) - 0.98c(100-0)/c^2}{\sqrt{1-0.98^2}} = 50.25 \quad \text{s}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = 50.25 \quad \text{s}$$

从这里可以看出，运用时间膨胀公式得到相同的结果，其原因是在本题中:

$$v(x_2 - x_1) = 0.98c(100 - 0) << c^2$$

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

这一条件不是任何时候都能满足的！但在地球这一有限空间内，是可以满足的，虽然这两事件并不同地，但可近似地套用时间膨胀公式.

本题求距离，所以可以套用长度缩短公式：

$$l = l'\sqrt{1-\beta^2} = 100\sqrt{1-0.98^2} = 19.9 \text{ m}$$

但如果本题要计算起跑和到达终点两个事件的空间间隔

则

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{(100-0) - 0.98c(10-0)}{\sqrt{1-0.98^2}}$$

$$= -1.48 \times 10^{10}\ \mathrm{m}$$

空间间隔是负的.

例8 两个静止质量均为m_0的粒子A、B以等大反向的速度v相向运动并发生完全非弹性碰撞。相撞后合在一起成为一个静止质量为M_0的新粒子。求M_0

解：设合成粒子质量为M，速率为u。$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

$$m_{A0}=m_{B0}\quad |v_A|=|v_B|\quad \rightarrow m_A=m_B$$

由动量守恒得 $m_A\vec{v}_A+m_B\vec{v}_B=M\vec{u}$

$$\vec{v}_A=-\vec{v}_B\ \rightarrow \vec{u}=0 \Rightarrow M=M_0$$

由能量守恒得：$Mc^2=m_Ac^2+m_Bc^2=M_0c^2$

解得：$M_0=m_A+m_B=\dfrac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\quad M_0>2m_0$