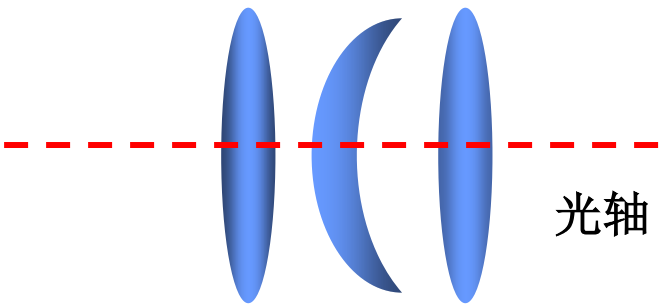
三、光在球面上的折射和反射

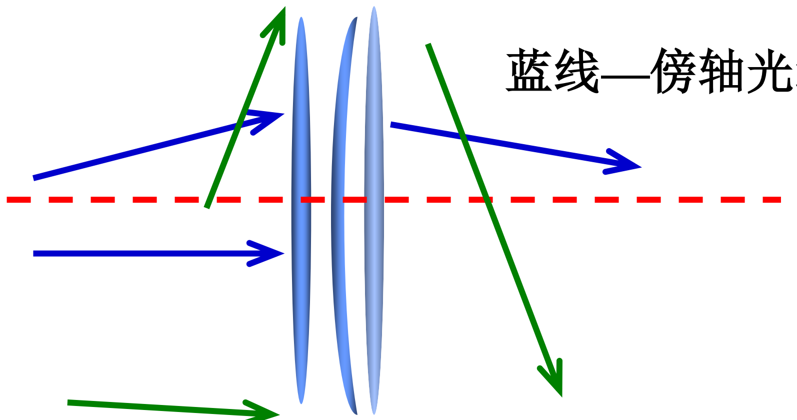
光轴 (optical axis)

——光学系统的对称轴

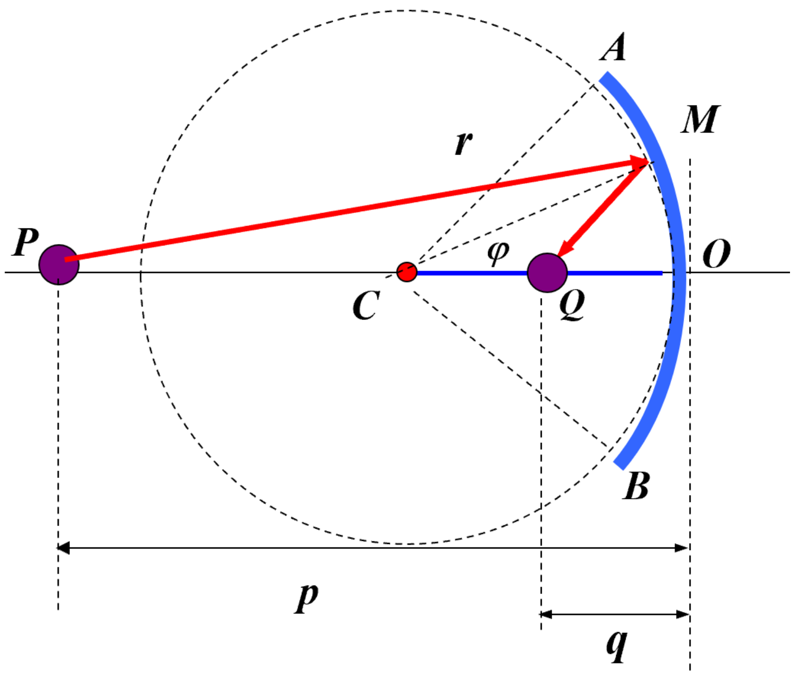


傍(近)轴光线 (paraxial ray)

——与光轴夹角较小，并靠近光轴的光线。



1. 单球面镜傍轴反射成像



1) 顶点：*O*

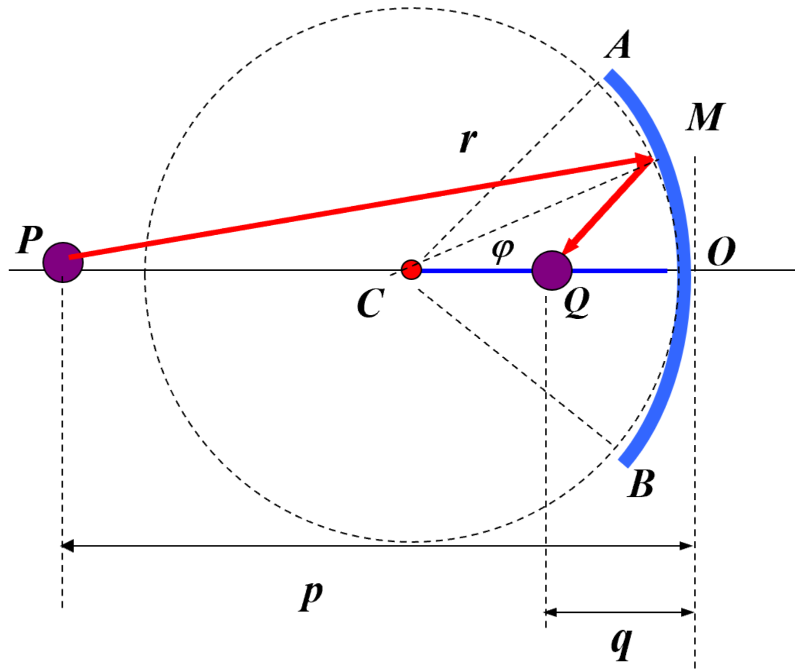
2) 曲率中心、曲率半径：*C*，*r*

3) 主光轴：*CO*

4) 物距 *p*、像距 *q*、Q点是像点。

符号规则（第一种）

- (1)沿着光线前进的方向：物点在镜前，物距 $p > 0$；物点在镜后，物距 $p < 0$；
- (2)像点在镜前，像距 $q > 0$；像点在镜后，像距 $q < 0$；
- (3)凹面镜的曲率半径 *r* 为正，凸面镜的曲率半径 *r* 为负。



$$L(PMQ) = \overline{PM} + \overline{MQ}$$

$$= \sqrt{r^2 + (p-r)^2 - 2r(p-r)\cos(\pi-\varphi)} + \sqrt{r^2 + (r-q)^2 - 2r(r-q)\cos\varphi}$$

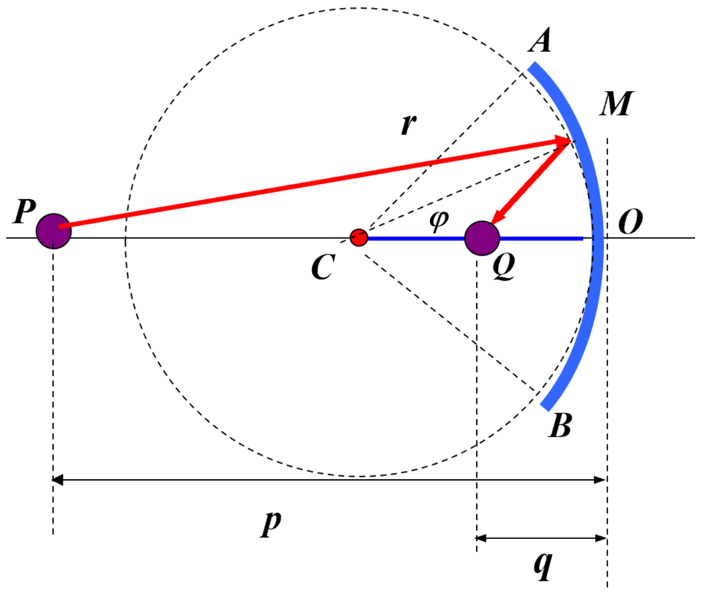
$$= \sqrt{p^2 + 4r(r-p)\sin^2\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{q^2 + 4r(r-q)\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

根据费马原理 $$\frac{\mathrm{d}L(PMQ)}{\mathrm{d}\varphi}=0$$

即：
$$\frac{r-p}{\sqrt{p^2+4r(r-p)\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{q-r}{\sqrt{q^2+4r(r-q)\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

傍轴近似条件： $\varphi\to 0$

上式变成：
$$\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r}}$$

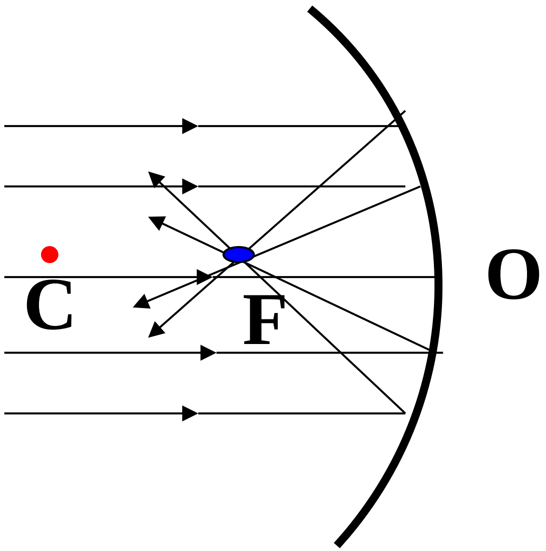


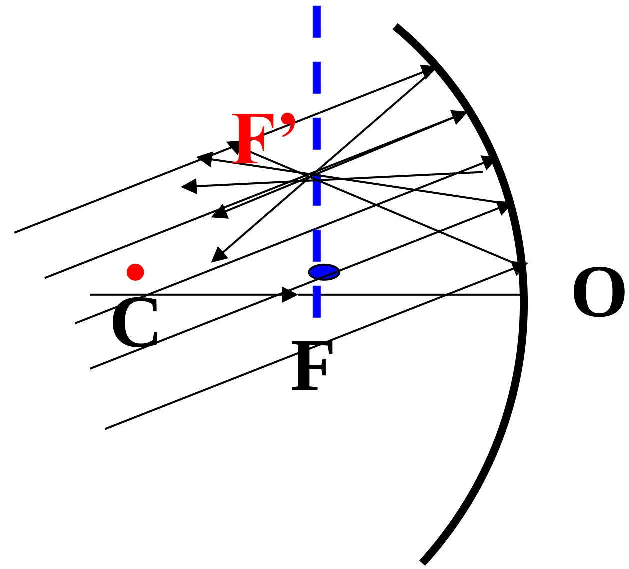
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p\to\infty,\ q=\frac{r}{2}}$$

相当于平行主光轴的光束 $(p\to\infty)$ 经球面反射后，将在光轴上会聚成一点，该像点称为反射球面的**焦点 F (focal point)**，此时顶点O到F的距离称为**焦距 *f* (focal length)**。

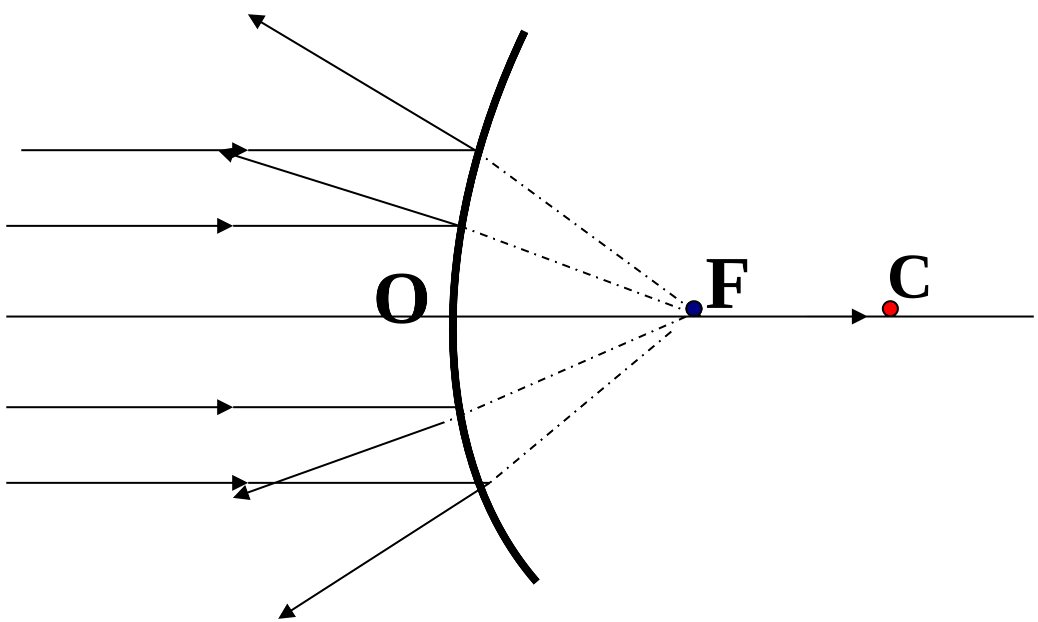
由此可知： $\boxed{f=\frac{r}{2}}$

即： $\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}}$ 　傍轴光线条件下球面反射的物像公式。





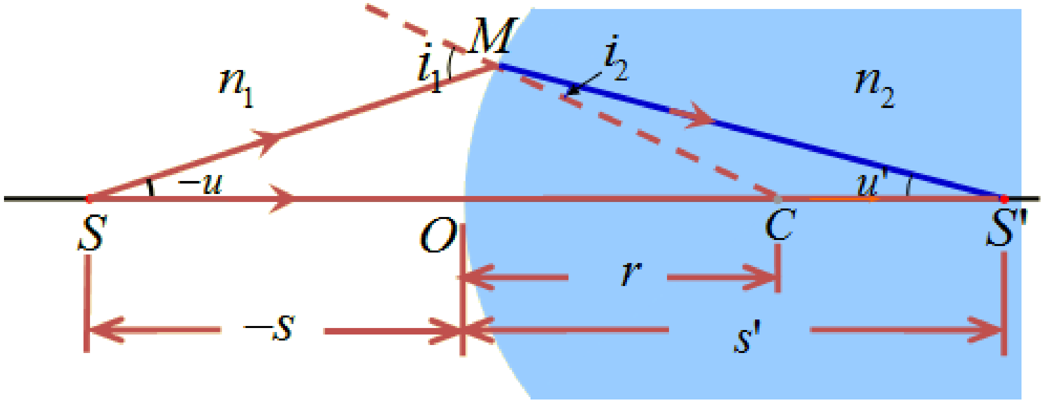
过焦点且垂直于主光轴的平面：焦平面



2. 单球面折射的物像公式

➢ 符号规则（第二种）

入射光从左到右



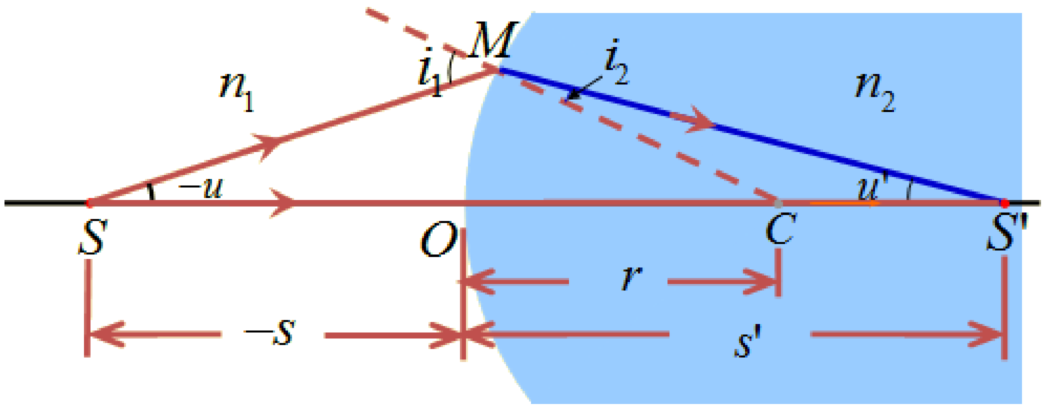
(1) 间距变量的正负约定

物点*S*，像点*S'*及球心*C*等，在顶点*O*左侧为负(在量前标以负号); 右侧为正。

(2) 锐角度量的正负约定

由光轴转向光线或光线转向法线所形成的锐角，约定顺时针为正, 逆时针为负(在量前标以负号)。

➤ 傍轴光线条件下单球面折射的物象关系



$$\Delta SMC: \quad \frac{-s+r}{\sin(\pi-i_1)}=\frac{-s+r}{\sin i_1}=\frac{r}{\sin(-u)}$$

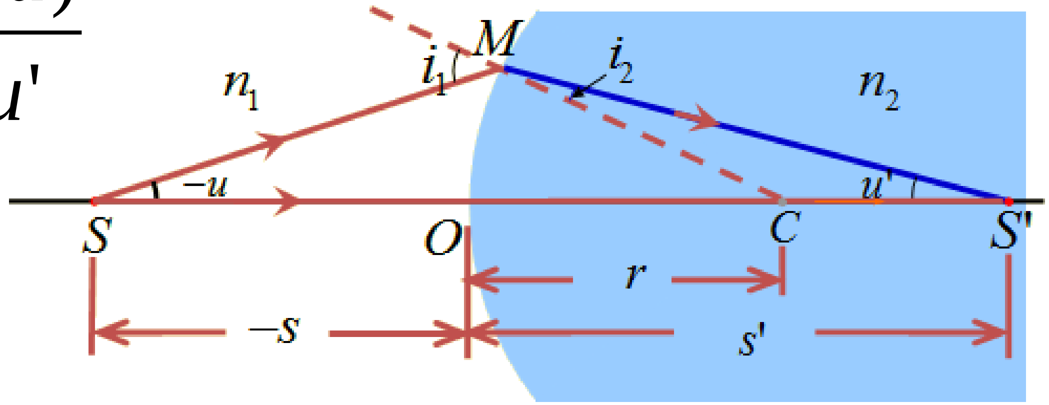
在任意一个平面三角形中，各边和它所对角的正弦值的比相等且等于外接圆的直径

$$\Delta S'MC: \quad \frac{s'-r}{\sin i_2}=\frac{r}{\sin u'}$$

折射定律: $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

$$\Rightarrow \quad s'=r+\frac{n_1}{n_2}(-s+r)\frac{\sin(-u)}{\sin u'}$$

$$s' = r + \frac{n_1}{n_2}(-s+r)\frac{\sin(-u)}{\sin u'}$$



傍轴光线条件下:

$$\sin(-u) \approx \tan(-u) \approx -u$$

$$\sin(-u) \approx \frac{\overline{\mathrm{MO}}}{-s}, \quad \sin u' \approx \frac{\overline{\mathrm{MO}}}{s'} \qquad \frac{n_2(s'-r)}{s'} = \frac{n_1(s-r)}{s}$$

傍轴区域(paraxial region) 的物象关系:

$$\boxed{\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$$

研究傍轴区域物象关系的光学又称高斯光学

➢ 光焦度和焦距

光焦度(focal power): 表征球面屈折光线本领的常数.

$$\Phi = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

单位：m^{-1}

$\Phi > 0$ **会聚，** $\Phi < 0$ **发散**

屈光度(diopter)*D*: 光焦度的非法定计量单位. **1D=1m^{-1}**

***S*: 物点(object point); *s*: 物距**

***S'*: 像点(image point); *s'*: 像距**

物点***S***和像点***S'***的对应关系称为**共轭点(conjugate point)**

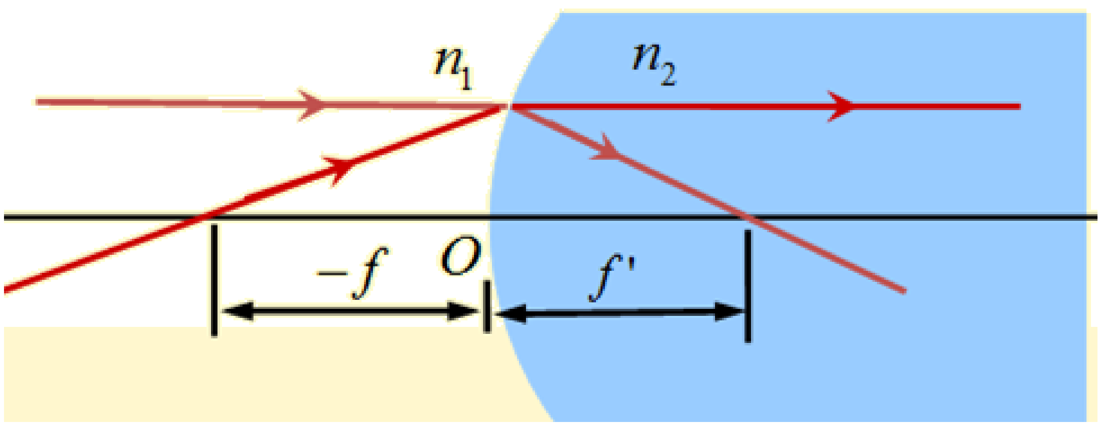
$s=\infty$时(平行光入射), 其共轭点称像方焦点。此时s'称为像方焦距，记为f'：

$$f'=s'=\frac{n_2}{n_2-n_1}r$$

$s'=\infty$时(折射光线全部为平行光), 其共轭点称物方焦点。此时 s 称为物方焦距，记为f：

$$f=s=\frac{-n_1}{n_2-n_1}r$$

$$\boxed{\frac{f}{f'}=-\frac{n_1}{n_2}}$$

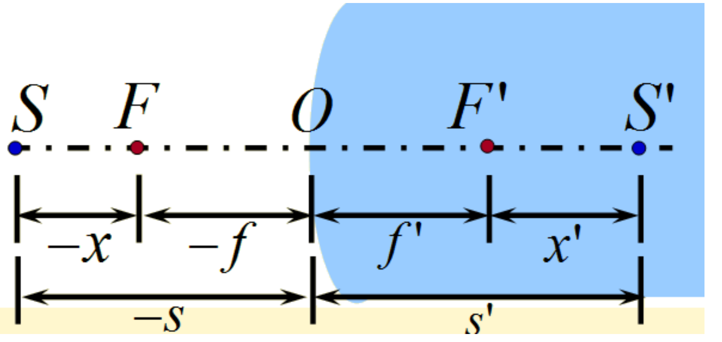


➢ 高斯公式和牛顿公式

$$\frac{n_2}{s'}-\frac{n_1}{s}=\frac{n_2-n_1}{r} \Rightarrow \frac{n_2}{s'}\frac{r}{(n_2-n_1)}-\frac{n_1}{s}\frac{r}{(n_2-n_1)}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1}$$ 高斯物像公式

$$-s=-x-f\text{，}\ s'=x'+f'$$



$$\Rightarrow \boxed{xx'=ff'}$$ 牛顿公式

高斯物像公式是光学系统傍轴成像的普遍公式。无论成像系统如何不同，其物距、像距和物像方焦距之间的关系，均可以表示成高斯物像公式的形式。只是在不同系统中，物距、像距和物像方焦距的取值方法和符号规则有可能不同。

➢ 光在球面上的反射推导2

$$\frac{n_2}{s'}-\frac{n_1}{s}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

物空间与像空间重叠, 反射光线与入射光线反向, 有

$$n_2=-n_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r}$$

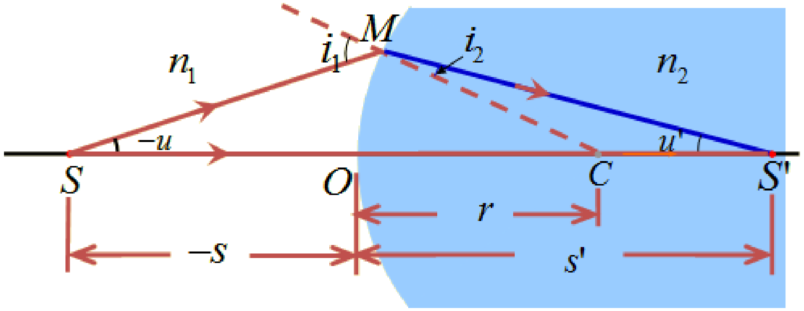
球面反射成像与介质无关, 与曲率半径有关

由焦距公式, 得 $f=f'=\dfrac{r}{2}$

不同教材采用的符号规则可能不同，但结论相同。这也说明了公式描述的普适性。

例3： 若折射凸球面的曲率半径为 3cm，物点 Q 在折射球面顶点左侧 9cm 处，左方（物方）折射率为 1.0，右方（像方）折射率为 1.5，试计算像的位置.

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$



$$n_1 = 1.0,\ n_2 = 1.5,\ r = 3\ \text{cm},\ s = -9\ \text{cm}$$

代入公式得：**s' = 27 cm, 即像在O点右方 27 cm 处。**

➢ 光在平面上的折射

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

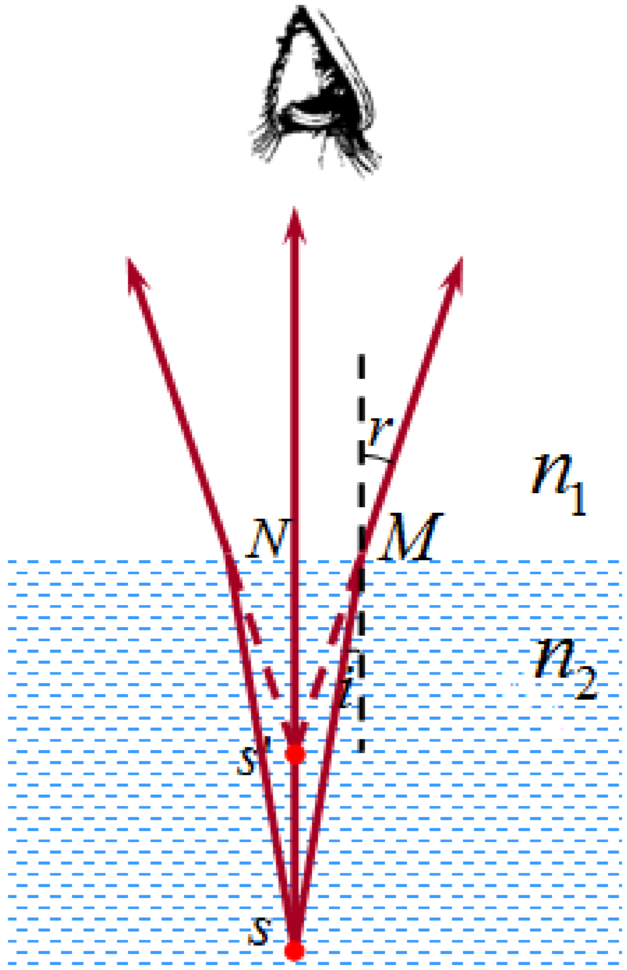
球面半径 $r = \infty$ 时, 即为平面, 此时有

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad s' = \frac{n_2}{n_1} s$$

***s*’与*s*符号相同, 表示物和像同侧.**

$$n_2 > n_1 , \quad |s'| > |s|$$

$$n_2 < n_1 , \quad |s'| < |s|$$

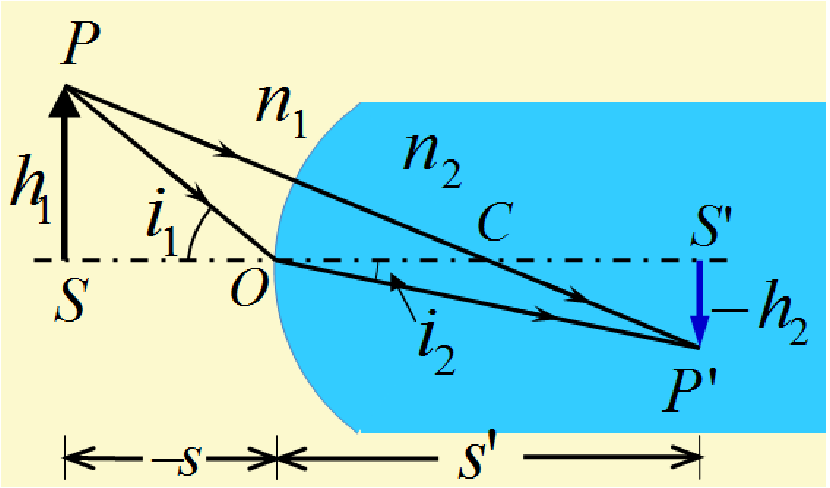


***s*’称为的*s*视深.**

➢ 傍轴物点成像的放大率

像高物高之比称为**横向放大率(垂轴放大率)**。

$$\tan i_1 = \frac{h_1}{-s} \qquad \tan i_2 = \frac{-h_2}{s'}$$



傍轴条件下:

$$\tan i \approx \sin i \qquad \tan i_2 \approx \sin i_2$$

由折射定律 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

单球面成像的横向放大率:

$$\beta = \frac{h_2}{h_1} = \frac{s' \cdot n_1}{s \cdot n_2}$$

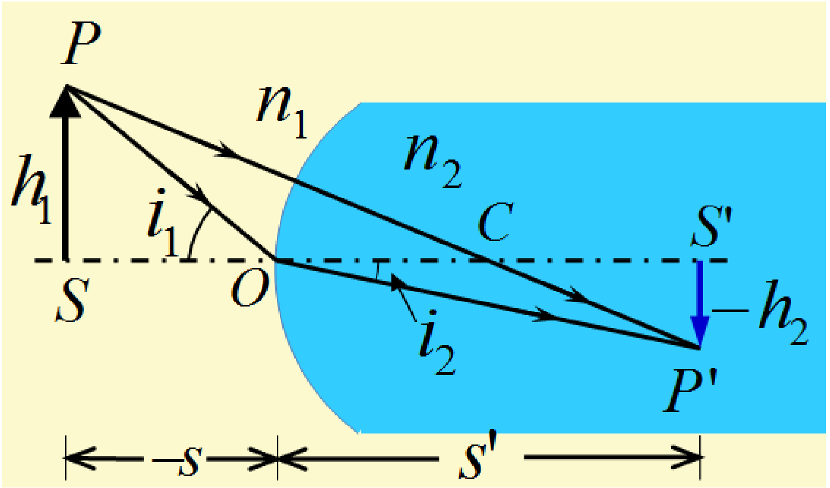
单球面成像的横向放大率: $\beta = \dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{s' \cdot n_1}{s \cdot n_2}$

$\beta > 0$ 像与物同侧, 像正立

$\beta < 0$ 像与物不同侧, 像倒立

$|\beta| > 1$ 像放大

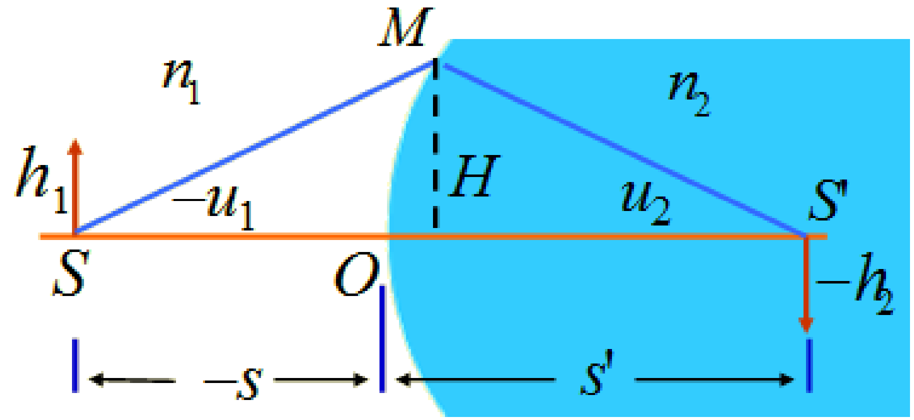
$|\beta| < 1$ 像缩小



说明: 在球面系统一定的情况下, 横向放大率仅决定于像距与物距的比值, 即决定于物平面和像平面这对共轭面的位置, 在同一共轭面上, 放大率为常数。

傍轴条件下:

$$-u_1 \approx \frac{H}{-s} \qquad u_2 \approx \frac{H}{s'}$$



角放大率:

$$\boxed{\gamma = \frac{u_2}{u_1} = \frac{s}{s'}} \qquad \because \qquad \beta = \frac{h_2}{h_1} = \frac{s' \cdot n_1}{s \cdot n_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_1 n_1 u_1 = h_2 n_2 u_2}$$

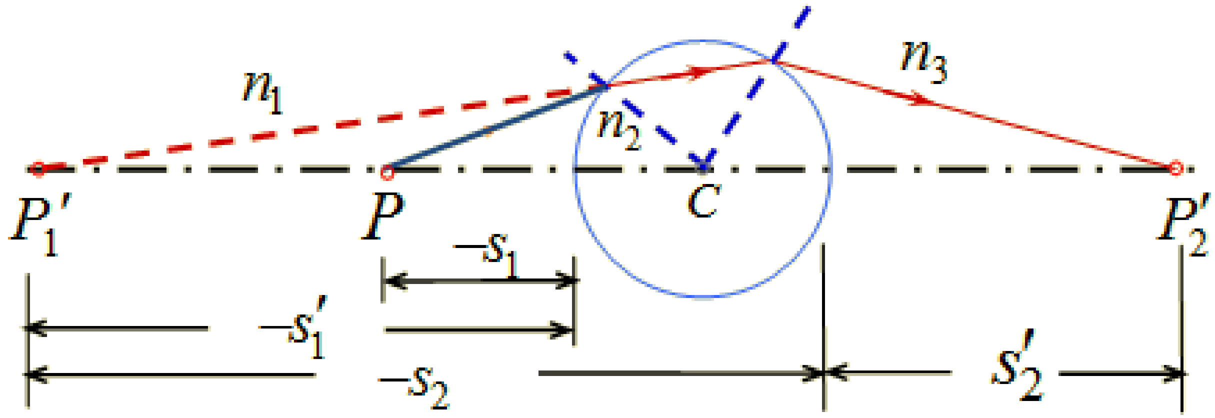
拉格朗日-亥姆霍兹定理

(J.L.Lagrange-H.von Helmholtz)

表示傍轴区域球面折射成像时，物空间和像空间各共轭量之间的制约关系。

例4： 点光源*P*在玻璃球心点左侧25cm处．已知玻璃球半径是10cm, 折射率为1.5, 空气折射率近似为1, 求像点的位置

分析: 第一折射面



$s_1 = -15\ \text{cm}$

$r = 10\ \text{cm}$

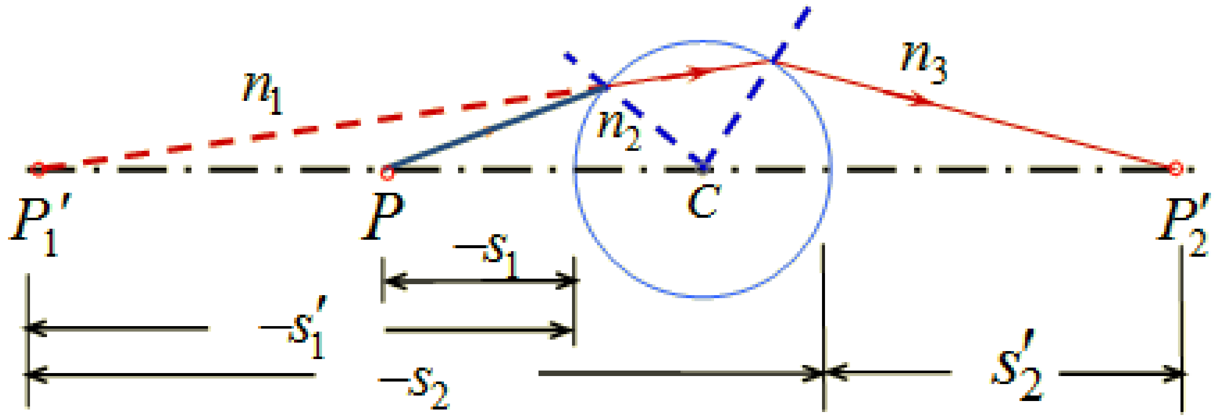
$n_1 = 1 \quad n_2 = 1.5$

求 s_1'

第二折射面 $s_2 = -(s_1' + 2r) \quad r = -10\ \text{cm}$

$n_2 = 1.5 \quad n_3 = n_1 = 1$

求 s_2'

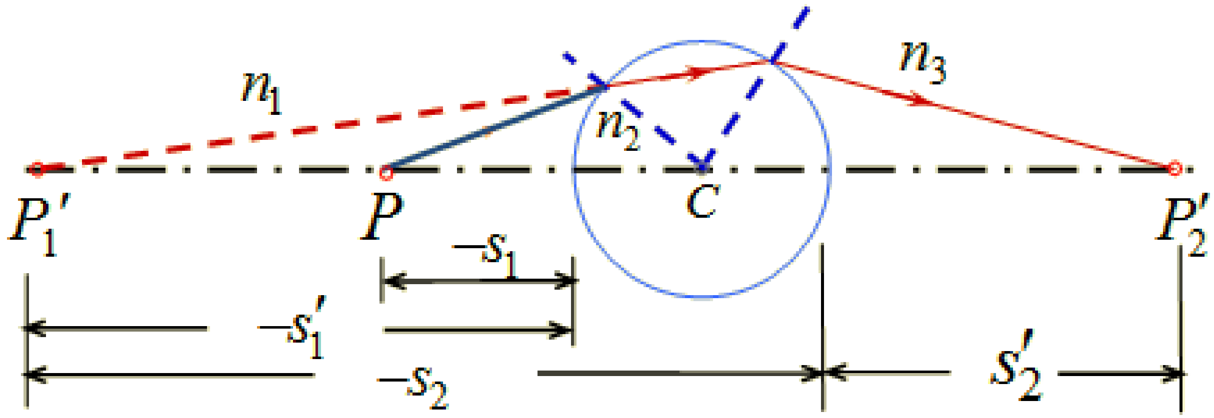


解: 第一折射面 $s_1 = -15\text{ cm}$ $r = 10\text{ cm}$ $n_1 = 1$ $n_2 = 1.5$

$$\frac{n_2}{s_1'} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

$$\frac{1}{s_1'} = \frac{1}{1.5}\left(\frac{1.5 - 1.0}{10} - \frac{1.0}{15}\right) = -\frac{1}{90\text{ cm}}$$

$s_1' = -90\text{ cm}$ $s_2 = -90 - 20 = -110\text{ cm}$



第二折射面　$s_2=-110\ \text{cm}$　$r=-10\ \text{cm}$　$n_2=1.5$　$n_3=1$

$$\frac{n_3}{s_2'}-\frac{n_2}{s_2}=\frac{n_3-n_2}{r}$$

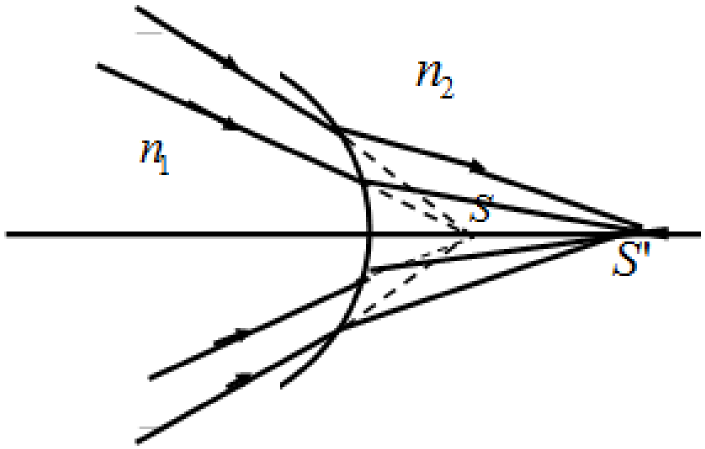
$$\frac{1}{s_2'}-\frac{1.5}{-110}=\frac{1-1.5}{-10}$$

解得　$s_2'=27.5\text{cm}$

例5 设有一半径为3cm的凹球面，球面两侧的折射率分别为n_1=1、n_2=1.5，一会聚光束入射到界面上，光束的顶点在球面右侧3cm处，求像的位置。

解: $n_2=1.5$，$n_1=1$, $s=3\ \text{cm}$， $r=-3\ \text{cm}$

$$\frac{n_2}{s'}-\frac{n_1}{s}=\frac{n_2-n_1}{r}$$



$$\frac{1.5}{s'}-\frac{1}{3}=\frac{1.5-1}{-3}$$

$$\therefore\quad s'=9\ \text{cm}$$

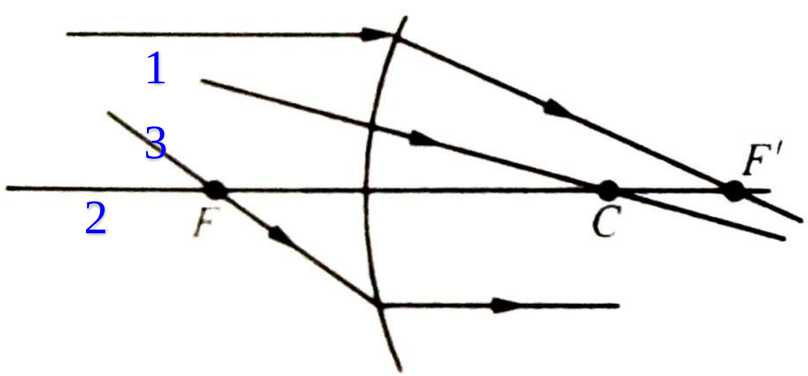
四、单球面折射成像作图方法

三条特殊光线：

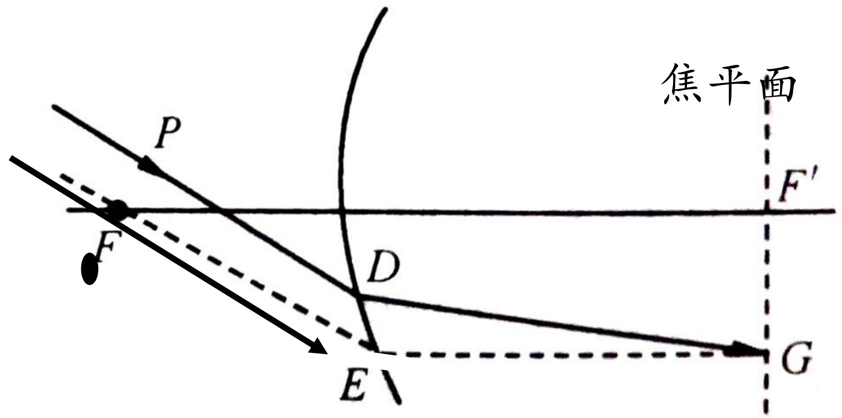
1. 平行于主光轴的入射光线经球面折射后过像方焦点F’。

2. 过物方焦点F的入射光线经球面折射后，平行于主光轴。

3. 过球面曲率中心C 的光线方向不变。



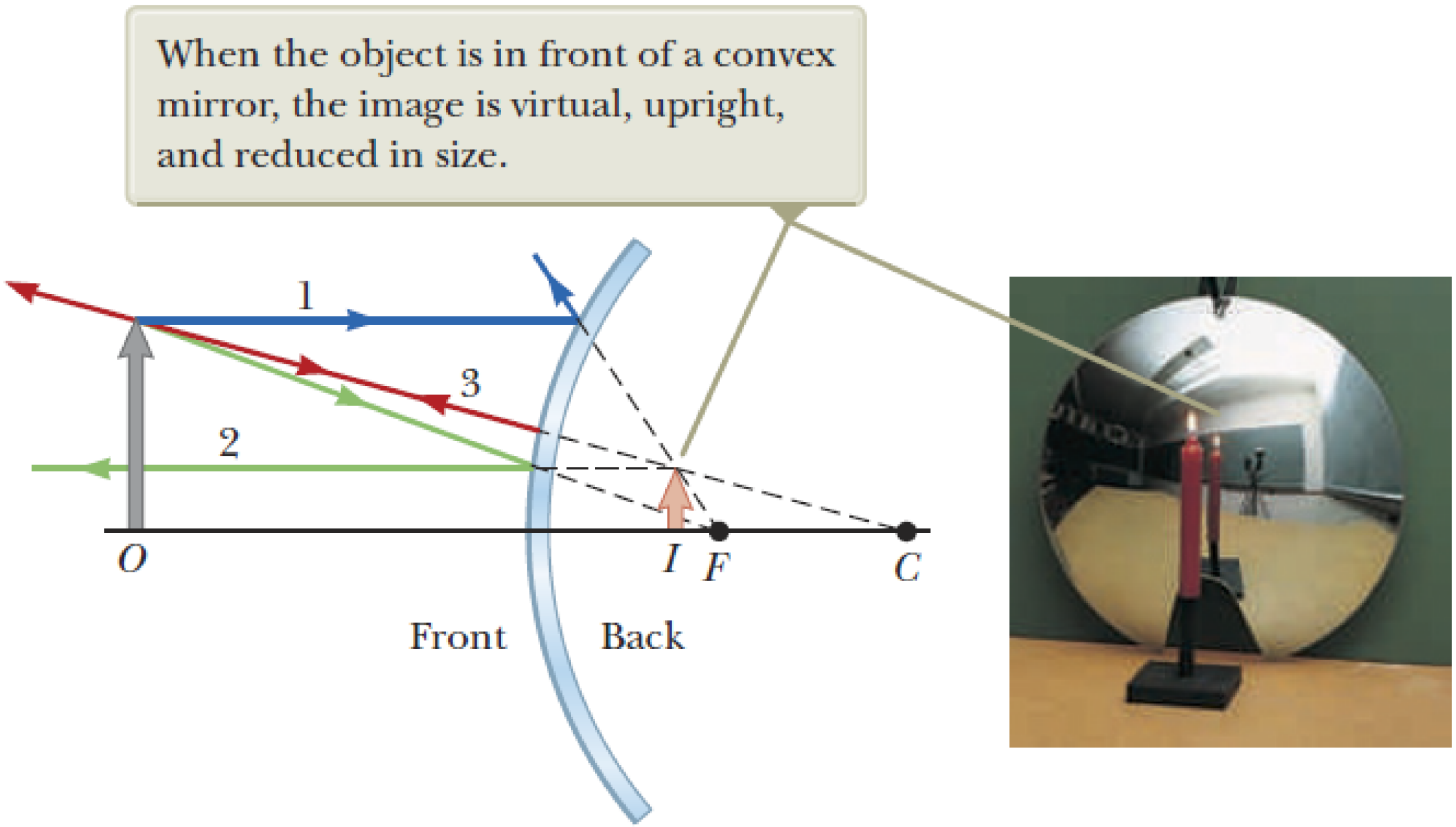
(a)



(b)

4. 平行的入射光线经球面折射后会聚在焦平面的一点。

单球面反射作图成像


When the object is in front of a convex mirror, the image is virtual, upright, and reduced in size.
1
3
2
O
I
F
C
Front
Back