概率论与数理统计第三章考研练习题（带答案）

一、分布的计算

1、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x<2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

（1）求 a 的值；（2）求 X 的分布函数；（3）求 $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$ 。

【解析】：(P61 T3)

3. 解析 (1)由概率密度的归一性可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 ax\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+1),$$

解得 $a=1$。

(2)由连续型随机变量的定义 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u$ 可知：

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}u=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}u+\int_0^x u\mathrm{d}u=\frac{x^2}{2}$；

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}u+\int_0^1 u\mathrm{d}u+\int_1^x(2-u)\mathrm{d}u=2x-\frac{x^2}{2}-1$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}u+\int_0^1 u\mathrm{d}u+\int_1^2(2-u)\mathrm{d}u+\int_2^x 0\mathrm{d}u=1$。

综上所述，X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1, \\ 2x-\frac{x^2}{2}-1, & 1\leqslant x<2, \\ 1, & x\geqslant 2\text{。} \end{cases}$

(3)利用(2)中求出的分布函数可直接求解该概率，即

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=1-P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}\text{。}$$

二、分布的性质

2、设随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases} ax^2e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

求 a.

【解析】(P49 T6)：

解析 由概率密度的性质可知$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}ax^2e^{-x}dx=1$。由分部积分法可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}ax^2e^{-x}dx&=\int_0^{+\infty}ax^2d(-e^{-x})=-ae^{-x}x^2\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2axe^{-x}dx\\&=\int_0^{+\infty}2axd(-e^{-x})=-2axe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2ae^{-x}dx\\&=-2ae^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2a=1,\end{aligned}$$

故 $a=\frac{1}{2}$。

3、设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=a\cdot e^{-\frac{x^2}{2}+x}$ ，求 a 的值。

【解析】(P50 T7)：

解析 由概率密度的性质可知$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}ae^{-\frac{x^2}{2}+x}dx=1$。其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty}ae^{-\frac{x^2}{2}+x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}ae^{-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}}dx=a\sqrt{e}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx,$$

再作变量代换 $u=\frac{x-1}{\sqrt{2}}$，可得 $a\sqrt{e}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx=a\sqrt{2e}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=a\sqrt{2e\pi}$，可知 $a=\frac{1}{\sqrt{2e\pi}}$。

4、设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从指数分布 E(1)，Y 的分布律为 $P\{Y=0\}=0.5$，$P\{Y=1\}=0.5$。

（1）求 $P\{X+Y\le 1\}$；（2）求 $P\{XY\le 1\}$。

【解析】（P53　T13）：

思路分析 由于离散型随机变量 Y 的取值有两种可能，所以计算概率 $P\{X+Y\leqslant 1\}$ 和 $P\{XY\leqslant 1\}$ 时也应该分两种情况讨论，需要运用全概率公式。

解析 (1)由全概率公式可知

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=P\{Y=0\}P\{X+Y\leqslant 1\mid Y=0\}+P\{Y=1\}P\{X+Y\leqslant 1\mid Y=1\}。$$

由于 X,Y 独立，可知

$$P\{X+Y\leqslant 1\mid Y=0\}=P\{X\leqslant 1\},P\{X+Y\leqslant 1\mid Y=1\}=P\{X\leqslant 0\}。$$

从而 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}P\{X\leqslant 1\}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant 0\}$。又由于 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 故 $P\{X\leqslant 1\}=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$，$P\{X\leqslant 0\}=0$，从而 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$。

(2)由全概率公式可知

$$\begin{aligned}P\{XY\leqslant 1\}&=P\{Y=0\}P\{XY\leqslant 1\mid Y=0\}+P\{Y=1\}P\{XY\leqslant 1\mid Y=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{0\leqslant 1\}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant 1\},\end{aligned}$$

其中 $P\{0\leqslant 1\}=1$，$P\{X\leqslant 1\}=1-e^{-1}$，可知 $P\{XY\leqslant 1\}=1-\frac{1}{2}e^{-1}$。

小结 ①遇到离散型随机变量与连续型随机变量结合的问题，一般需要运用全概率公式进行计算。

②本题用到了一个新的概念，即随机变量的独立性。我们虽然还没有讲解这个概念，但结合随机事件的独立性不难理解，两个随机变量独立的意义就是这两个随机变量互不影响，故有 $P\{X+Y\leqslant 1\mid Y=0\}=P\{X\leqslant 1\mid Y=0\}=P\{X\leqslant 1\}$。

5、设 X 为连续型随机变量，则 X 的分布函数（）

（A）是非阶梯型间断函数 （B）为可导函数 （C）连续但不一定可导的函数 （D）阶梯形函数

【解析】（**P54 T14**）：

解析 连续型随机变量的分布函数一定是连续的，但不一定可导。因为对于函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 来说，如果要保证 $F(x)$ 可导需要已知 $f(x)$ 连续，而这一条件不一定成立。例如，均匀分布和指数分布的概率密度就有不连续点。所以 X 的分布函数一定连续但不一定可导。

小结 对分布函数的连续性和可导性可以总结如下：

①任何随机变量的分布函数都是右连续的；

②如果该随机变量为连续型随机变量，则其分布函数是连续的；

③如果该随机变量为连续型随机变量且概率密度也是连续的，则其分布函数是可导的。

三、常见分布

6、（1）假设 $X \sim B(2,P), Y \sim B(3,P), P\{X \geq 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y \geq 1\}=$ ＿＿＿＿＿＿。

（2）假设 $X \sim P(\lambda), 4P\{X=2\}=P\{X \leq 1\}$，则 $P\{X=3\}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解析】（**P56 T16**）：

解析 (1)由于 $X\sim B(2,p)$，可知 $P\{X=k\}=C_2^k p^k(1-p)^{2-k}, k=0,1,2$。从而 $P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-p)^2=\frac{5}{9}$，可得 $p=\frac{1}{3}$。又由于 $Y\sim B(3,p)$，可知 $P\{Y=k\}=C_3^k p^k(1-p)^{3-k}, k=0,1,2,3$，从而

$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-p)^3=\frac{19}{27}。$$

(2)由于 $X\sim P(\lambda)$，可知 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$，从而 $P\{X=2\}=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$，$P\{X\leqslant 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}$，代入 $4P\{X=2\}=P\{X\leqslant 1\}$ 可得 $2\lambda^2=\lambda+1$。解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-\frac{1}{2}$（舍去），可知 $X\sim P(1)$，从而 $P\{X=3\}=\frac{1}{6e}$。

7、假设 $X \sim E(\lambda)(\lambda > 0)$,求$P\left\{X > \dfrac{1}{\lambda}\right\}$。

【解析】（P56 T17）：

解析 由 $X \sim E(\lambda)$，可知 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$从而

$$P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}=e^{-1}。$$

8、设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y服从正态从正$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有（ ）

（A）$\sigma_1<\sigma_2$ （B）$\sigma_1>\sigma_2$ （C）$\mu_1<\mu_2$ （D）$\mu_1>\mu_2$

【解析】（P58 T22）：

解析 将随机变量标准化，有$\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$，且其概率密度是偶函数。所以

$$P\{|X-\mu_1|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right\}$$

$$=P\left\{-\frac{1}{\sigma_1}<\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}=\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1。$$

同理有 $P\{|Y-\mu_2|<1\}=2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)-1$。由于 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，可知 $2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)-1>2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)-1$，即 $\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)$，又由于 $\Phi(x)$ 是单调递增函数，可知$\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$，进而 $\sigma_1<\sigma_2$。故选 A。

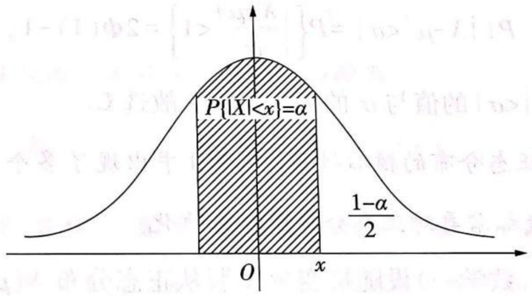
9、设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 α（$0<\alpha<1$），定义 u_α 满足

$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于（　　）。

（A）$u_{\frac{\alpha}{2}}$　　（B）$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　（C）$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　（D）$u_{1-\alpha}$

【解析】（P59　T25）：

解析　直接利用图形求解，如图所示，中间阴影部分面积为 α，由对称性可知，两端各剩余面积为 $\frac{1-\alpha}{2}$，所以 $P\{X>x\}=\frac{1-\alpha}{2}$，则 $x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$。故选 C。



10、设随机变量 X 服从 $(-1,1)$ 上的均匀分布，事件 $A=\{0<X<1\}, B=\left\{|X|<\frac{1}{4}\right\}$，则（　　）

（A）$P(AB)=0$　　（B）$P(AB)=P(A)$　　（C）$P(A)+P(B)=1$　　（D）$P(AB)=P(A)P(B)$

【解析】（P63　T18）：

解析　由题意得，$P(A)=P\{0<X<1\}=\frac{1}{2}$，$P(B)=P\left\{-\frac{1}{4}<X<\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P\left\{0<X<1,-\frac{1}{4}<X<\frac{1}{4}\right\}=P\left\{0<X<\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{8}$，故 $P(AB)=P(A)P(B)$。

11、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

现对 X 的取值独立地进行三次观察，求其中至少有两次大于 $\frac{\pi}{6}$ 的概率。

【解析】（P63　T19）：

19. 解析 由题意知，$P\left\{X>\frac{\pi}{6}\right\}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，令 Y 表示三次观测值中大于$\frac{\pi}{6}$的次数，则 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，故

$$P\{Y\geqslant 2\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}。$$