

## 第四章 拉普拉斯变换

### 4.1 引言

### 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

### 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### 4.4 拉普拉斯逆变换

### 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

### 4.6 系统函数（网络函数）

### 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

### 4.8 由系统函数零、极点分布决定频域特性

### 4.9 线性系统稳定性

### 4.10 双边拉氏变换

### 4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

## 常用信号的拉氏变换 (参考教材p192表格)

时域信号 ( $t > 0$ )	s 域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + a}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-st_0}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

拉氏变换的基本性质总结 (1)

线性	$\sum_{i=1}^N a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^N a_i F_i(s)$
时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau}{s}$
频域微分	$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n F(s)}{ds^n}$
频域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\lambda) d\lambda$
时移	$f(t - t_0)u(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
频移	$f(t)e^{-at}$	$F(s + a)$

## 拉氏变换的基本性质总结 (2)

尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
初值定理	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	
终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	
卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$

## 4.4.2 求拉氏逆变换

用拉氏变换方法分析系统时，最后还要将象函数进行**拉氏逆变换**。

### 1、部分分式法（海维赛法）

#### (1) 极点为单实根的情况 $(p_1 \cdots p_n)$

$$m < n \text{ 时, } F(s) \stackrel{\text{分解}}{=} \frac{k_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} \quad (\text{真分式})$$

$$\text{其中 } k_i = (s - p_i)F(s) \Big|_{s=p_i} \quad (\text{证明见教材 202 页})$$

$$\text{由拉氏变换性质已知: } Ae^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{A}{s + \alpha}$$

$$F(s) \xrightarrow{LT^{-1}} f(t) = \left( k_1 e^{p_1 t} + \cdots + k_n e^{p_n t} \right) u(t) \quad \text{将 } f(t) \text{ 分解为典型函数之和}$$

即使  $F(s)$  不是真分式，即  $n < m$ ，它也可表示为一  $s$  的多项式与一真分式的和：

**例：**  $F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2}$

作长除法提出高次项



$$\begin{array}{r}
 s + 1 \\
 s^2 + 3s + 2 \overline{) s^3 + 4s^2 + 6s + 5} \\
 \underline{s^3 + 3s^2 + 2s} \phantom{+ 5} \\
 s^2 + 4s + 5 \\
 \underline{s^2 + 3s + 2} \\
 s + 3
 \end{array}$$

$$F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + 1 + \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

上式中  $s+1$  的拉氏逆变换等于： $\delta'(t) + \delta(t)$

$s$  的多项式的部分，可变换为  $\delta(t)$  和  $\delta(t)$  各阶导数的形式。

对于拉氏变换是有理真分式部分的逆变换，用部分分式法求解。

## (2) 极点包含共轭复根的情况 ( $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ )

$$F(s) = \frac{A(s)}{D(s) \left[ (s + \alpha)^2 + \beta^2 \right]} = \frac{A(s)}{D(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

其中 $D(s)$ 为分母除去共轭复根剩余部分

$$\text{设 } F_1(s) = \frac{A(s)}{D(s)}$$

$$\text{则 } F(s) = \frac{F_1(s)}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

$$\stackrel{\text{分解}}{=} \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} + \dots$$

暂不考虑

$$\text{其中 } K_1 = (s + \alpha - j\beta) F(s) \Big|_{s=-\alpha+j\beta} = \frac{F_1(-\alpha + j\beta)}{2j\beta}$$

$$K_2 = (s + \alpha + j\beta) F(s) \Big|_{s=-\alpha-j\beta} = \frac{F_1(-\alpha - j\beta)}{-2j\beta}$$

$K_1$ 、 $K_2$ 呈共轭关系： $K_{1,2} = A \pm jB$

得共轭复根有关部分逆变换为  $\xrightarrow{\text{LT}^{-1}}$

$$\begin{aligned} f_c(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} \right] = \left( K_1 e^{(-\alpha + j\beta)t} + K_2 e^{(-\alpha - j\beta)t} \right) u(t) \\ &= e^{-\alpha t} (K_1 e^{j\beta t} + K_1^* e^{-j\beta t}) u(t) \\ &= 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] u(t) \end{aligned}$$



## (3) 极点包含多重根的情况 ( $k$ 重根 $p_1$ )

$$F(s) = \frac{A(s)}{D(s)} = \frac{A(s)}{(s - p_1)^k D_1(s)}$$

$$= \frac{K_{11}}{(s - p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s - p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{K_{1k}}{(s - p_1)} + \sum_{i=k+1}^n \frac{K_i}{s - p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{K_{1i}}{(s - p_1)^{k-i+1}} + \sum_{i=k+1}^n \frac{K_i}{s - p_i}$$

暂不考虑

求  $K_i$  和  $K_{11}$ , 方法同第一种情况:  $K_{11} = (s - p_1)^k F(s) \Big|_{s=p_1}$

求其它系数, 令:  $F_1(s) = (s - p_1)^k \cdot F(s)$

$$\text{当 } i = 2, \quad K_{12} = \frac{d}{ds} F_1(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$\text{当 } i = 3, \quad K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} F_1(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad (i=1,2,3,\dots,k)$$



$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s-p_1)^k F(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (i=1,2,\dots,k)$$

得多重根部分的逆变换  $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$  :

$$f_c(t) = \left[ \frac{K_{11}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_1 t} + \dots + \frac{K_{1i}}{(k-i)!} t^{k-i} e^{p_1 t} + \dots + K_{1k} e^{p_1 t} \right] u(t)$$

## 特殊情况：含 $e^{-s}$ 的非有理式

$e^{-s}$  项不参加部分分式运算，求解时利用时移性质。

**例4-21：**求  $\frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2}$  的拉氏逆变换。

解： 
$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} = F_1(s)e^{-2s}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

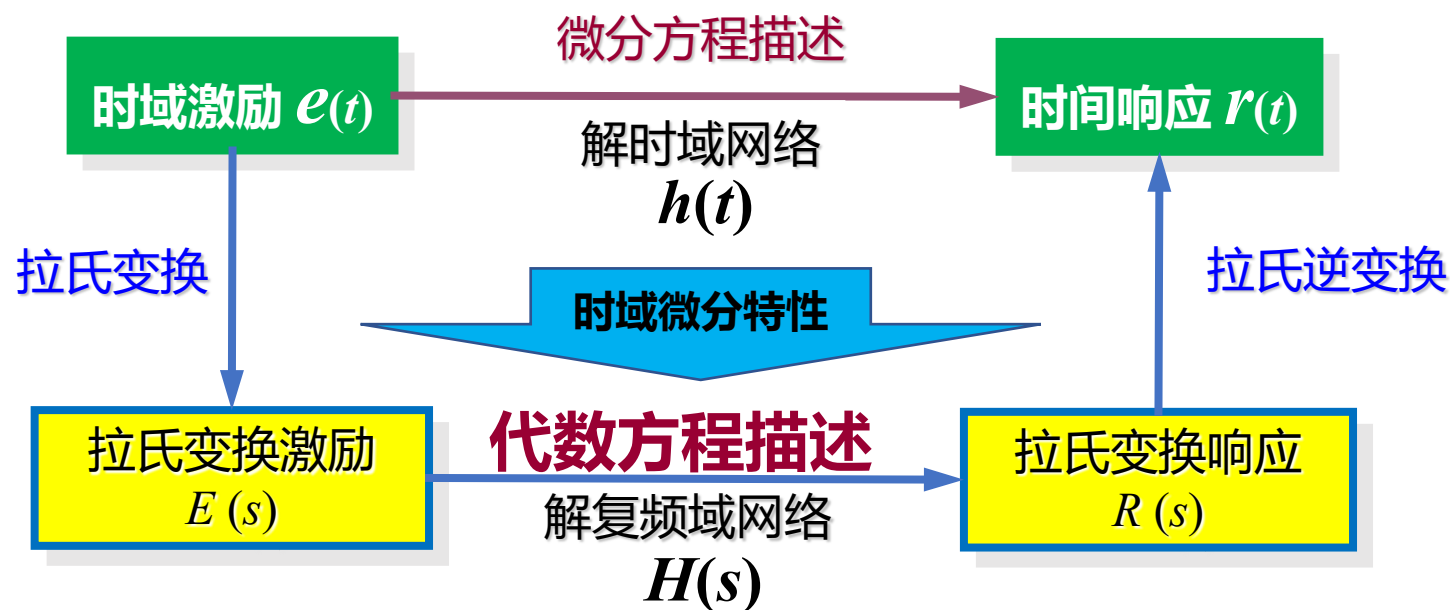
$$\text{所以 } f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\text{所以 } f(t) = f_1(t-2) = [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

## 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域元件模型

### 4.5.1 拉普拉斯变换解微分方程

拉普拉斯变换解微分方程的基本思路



**例4-23:** 已知  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$  ,  $y'(0_-) = y(0_-) = 1$  ,  $x(t) = e^{-3t}u(t)$  。

试求系统的响应  $y(t)$  。

**解法一:** (1) 对方程两边同求拉氏变换, 注意利用微分性质。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

$$s^2 Y(s) - [sy(0_-) + y'(0_-)] + 3[sY(s) - y(0_-)] + 2Y(s) = sX(s) + 4X(s)$$

(2) 整理以上方程, 求出响应的拉氏变换式。

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 4)X(s) + (s + 3)y(0_-) + y'(0_-)$$

所以 
$$Y(s) = \frac{(s + 4)X(s) + (s + 3)y(0_-) + y'(0_-)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{(s + 4)}{(s^2 + 3s + 2)} X(s) + \frac{(s + 3)y(0_-) + y'(0_-)}{(s^2 + 3s + 2)}$$

因为  $X(s) = \frac{1}{s+3}$

代入起始条件和以上  $X(s)$ , 得到  $Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)} + \frac{(s+3)+1}{(s^2+3s+2)}$

(3) 求拉氏逆变换。

$$Y(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3} + \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

所以  $y(t) = \underbrace{\left(\frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{(3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)}_{\text{零输入响应}}$

$$y(t) = \underbrace{\left(\frac{9}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{自由响应}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{强迫响应}}$$

零状态响应和零输入响应的  
公共项—自由响应;  
非公共项—强迫响应

虽然拉氏变换解方程，可一次求出全解是其优点，但是利用微分性质时，带上其起始条件，使  $s$  域的方程运算时显得累赘，容易出错。分别求零状态和零输入响应会更简洁。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

**解法二：** (1) 求零状态响应。对方程两边同求拉氏变换，不带起始条件。

$$s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2Y(s) = sX(s) + 4X(s)$$

整理以上方程，求出零状态响应的拉氏变换式： $(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 4)X(s)$

所以  $Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)} X(s) = H(s)X(s)$

输入信号的拉氏变换  $X(s) = \frac{1}{s+3}$  得到零状态响应的拉氏变换

$$Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)} = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

部分分式展开

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

求拉氏逆变换，得到系统的零状态响应：

$$y_{zs}(t) = \left(\frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

## (2) 用时域分析法求零输入响应。

由以上方程的拉氏变换

$$(s^2+3s+2)Y(s) = (s+4)X(s)$$

微分方程对应的特征方程是：  $s^2+3s+2=0$       特征方程的根：  $s=-1$  ,  $s=-2$



所以设系统的零输入响应:  $y_{zi}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$

由起始条件确定待定常数

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ -A_1 - 2A_2 &= 1 \end{aligned} \quad \therefore A_1 = 3, \quad A_2 = -2$$

所以零输入响应:  $y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$

最后, 求得系统的全响应:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{zs}(t) + y_{zi}(t) \\ &= \left(\frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t) + (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) \\ &= \left(\frac{9}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t) \end{aligned}$$

试用第二章的时域分析法求解此题, 并比较结果。

**例4-24.**已知某 LTI 系统微分方程为  $r''(t) + 2r'(t) + r(t) = e'(t)$ , 设该系统在激励  $e(t) = u(t)$  时的零状态响应为  $y(t)$ , 则  $y(t)$  为 ( )

- ☐ A  $y(t) = te^{-2t}u(t)$
- ☐ B  $y(t) = 2e^{-t}u(t)$
- ☐ C  $y(t) = e^{-2t}u(t)$
- ☒ D  $y(t) = te^{-t}u(t)$

提交

**例4-24：**已知某LTI系统微分方程为  $r''(t) + 2r'(t) + r(t) = e'(t)$ ，求设该系统在激励  $e(t) = u(t)$  时的零状态响应为  $y(t)$ 。

**解：**求零状态响应。对微分方程两边同求拉氏变换，不考虑起始条件：

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = sE(s)$$

对输入信号进行拉氏变换： $E(s) = \frac{1}{s}$

因此，

$$Y(s) = \frac{sE(s)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s + 1)^2}$$

利用常用函数  $t$  的拉氏变换和频移性质求拉氏逆变换，可得零状态响应的时域表达式：

$$y(t) = te^{-t}u(t)$$

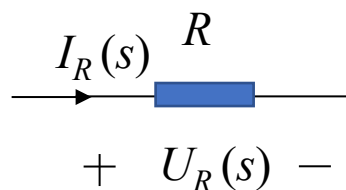
## 4.5.2 拉普拉斯变换解电路

### $s$ 域元件模型

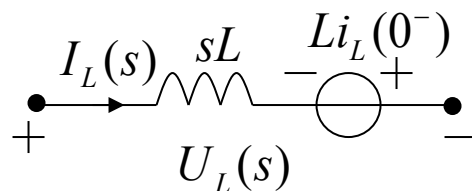
**出发点：** 把储能元件电容和电感的系统初始条件  $u_C(0^-)$ 、 $i_L(0^-)$  等转换为等效电源。

#### 1) 回路分析 (KVL)

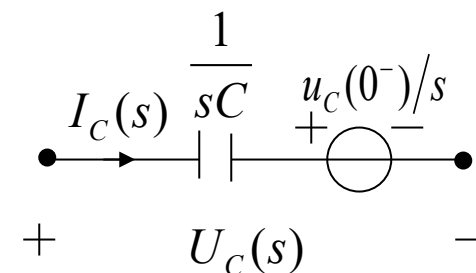
$$U_R(s) = RI_R(s)$$



$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

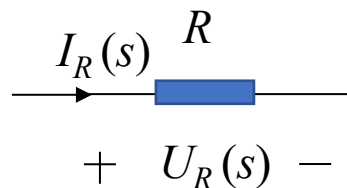


$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} u_C(0^-)$$

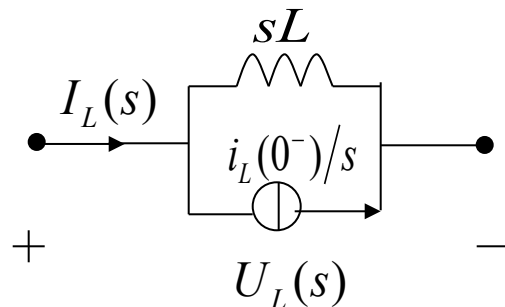


## 2) 结点分析 (KCL)

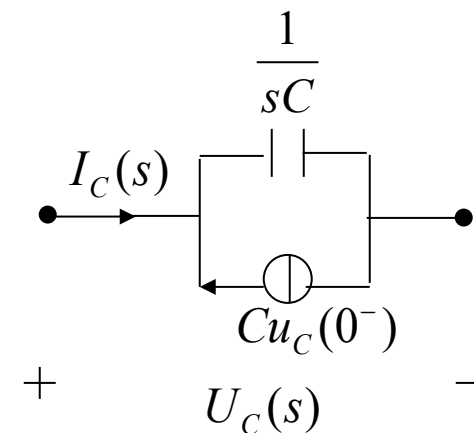
$$I_R(s) = \frac{1}{R} U_R(s)$$



$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0^-)$$



$$I_C(s) = sC U_C(s) - C u_C(0^-)$$



结论：电容初始电压 可以等效为 串联阶跃电压源 或 并联冲激电流源。  
电感初始电流 可以等效为 串联冲激电压源 或 并联阶跃电流源。

s 域等效电路——时域微积分特性

	时域	S域
电阻	$i_R(t) = \frac{1}{R}u_R(t)$	$I_R(s) = \frac{1}{R}U_R(s)$
	$u_R(t) = Ri_R(t)$	$U_R(s) = RI_R(s)$
电容	$i_C(t) = C \frac{d}{dt}u_C(t)$	$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0^-)$
	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau)d\tau$	$U_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{1}{s}u_C(0^-)$
电感	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau)d\tau$	$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{1}{s}i_L(0^-)$
	$u_L(t) = L \frac{d}{dt}i_L(t)$	$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$

## s 域电路分析方法

1. 将网络中每个元件用其s域模型代替；

将信号源写作变换式  $\left(\frac{E}{s} \text{ 或 } \frac{E}{sR}, U_s(s) \text{ 或 } I_s(s)\right)$  ；

2. 对此构成的s域模型图采用KVL和KCL分析得到所需的系统方程变换式。

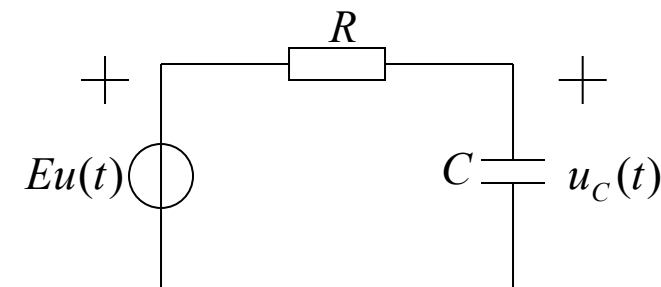
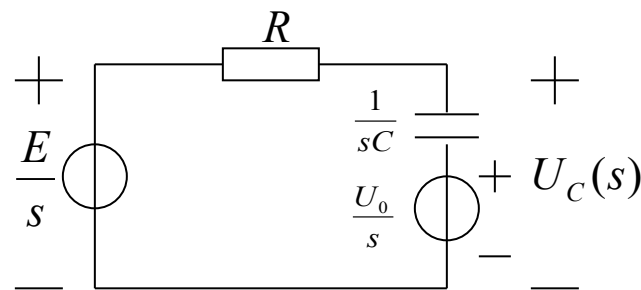
(所进行的数字运算是代数关系，类似电阻性网络；

戴维南定理与诺顿定理均适用；适合较多结点或回路 的网络分析。)

3. 求出响应的拉氏变换。
4. 求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

**例4-25:** RC 电路如图所示, 设已知电容上起始电压  $u_C(0^-) = U_0$ , 试求:  $t > 0$  时电容上的电压  $u_C(t)$ 。

**解:** (1) 将时域电路转换成 s 域的电路;



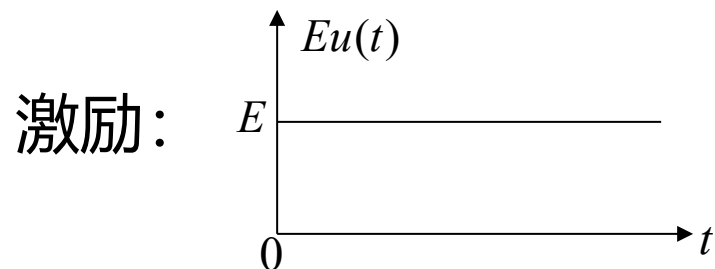
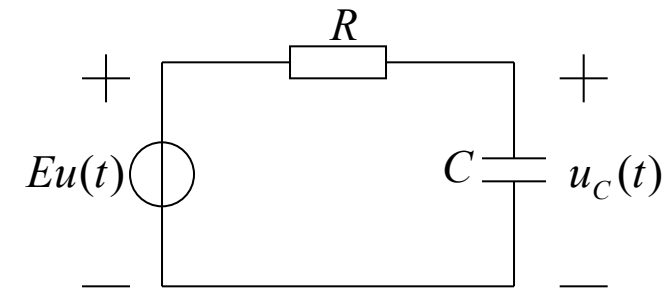
(2) 列 s 域的电路方程, 求输出的拉氏变换; 直接可写出电容电压的拉氏变换:

$$U_C(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \frac{E - U_0}{s} + \frac{U_0}{s} = \frac{1}{sRC + 1} \frac{E - U_0}{s} + \frac{U_0}{s}$$



(3) 通过拉氏逆变换求出响应的时间表达式。

$$U_C(s) = \frac{1}{RC} \frac{(E - U_0)}{s(s + \frac{1}{RC})} + \frac{U_0}{s} = \frac{E - U_0}{s} - \frac{(E - U_0)}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{U_0}{s} = \frac{E}{s} - \frac{(E - U_0)}{s + \frac{1}{RC}}$$



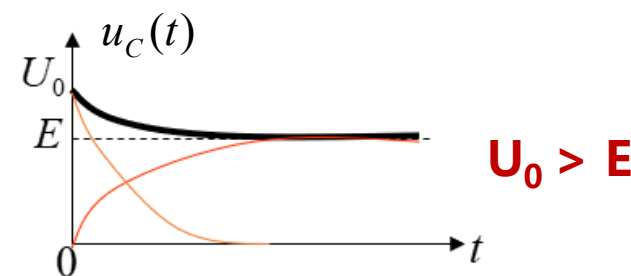
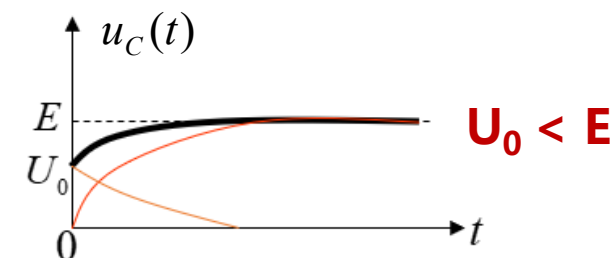
求得电容上电压

$$u_C(t) = [E - (E - U_0)e^{-\frac{t}{RC}}]u(t)$$

$$u_{Czs}(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$

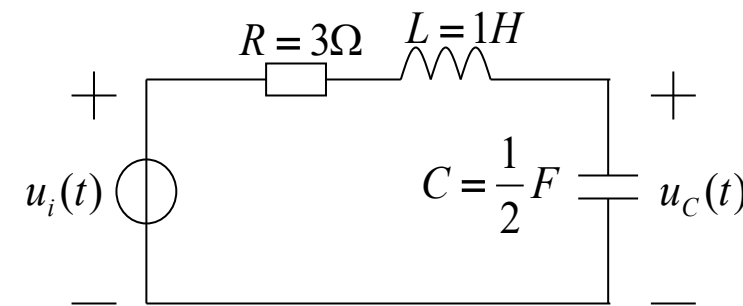
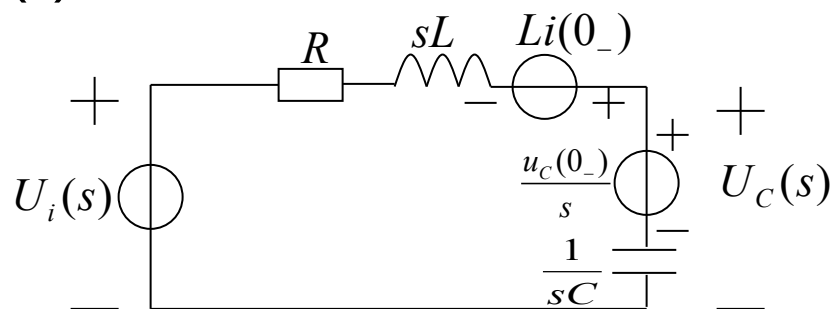
$$u_{Czi}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

分情况讨论



**例4-26:** RLC串联电路如图所示, 设电容上起始电压  $u_C(0_-) = 1\text{ V}$ , 回路中的起始电流  $i(0_-) = 1\text{ A}$ , 输入电压  $u_i(t) = e^{-3t}u(t)$ 。试求  $t > 0$  时的电容电压  $u_C(t)$ 。

**解:** (1) 将时域电路转换成  $s$  域的电路;



(2) 列  $s$  域的电路方程, 求出响应的拉氏变换;

$$\begin{aligned}
 U_C(s) &= \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} \left[ U_i(s) - \frac{u_C(0_-)}{s} + Li(0_-) \right] + \frac{u_C(0_-)}{s} \\
 &= \frac{2}{3 + s + \frac{2}{s}} \left[ U_i(s) - \frac{1}{s} + 1 \right] + \frac{1}{s} \\
 &= \frac{2U_i(s)}{s^2 + 3s + 2} - \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \left( \frac{1-s}{s} \right) + \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

$$U_{Czs}(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} U_i(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$U_{Czi}(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \left( \frac{s-1}{s} \right) + \frac{1}{s} = \frac{2(s-1)}{s(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s} = \frac{-1}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s} = \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

(3) 通过拉氏逆变换求出响应的时间表达式。

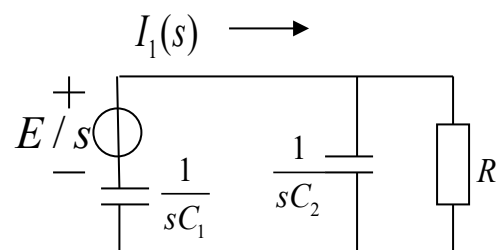
$$u_{Czs}(t) = (e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

$$u_{Czi}(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$$

$$u_C(t) = u_{Czs}(t) + u_{Czi}(t) = (5e^{-t} - 5e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

**例4-27:** 电路如图所示, 设电容上起始电压  $v_{c1}(0^-) = E$ ,  $t = 0$  开关合上, 求电流  $i_1(t)$ , 并讨论  $t = 0$  时刻前后, 电容两端电荷发生的变化。

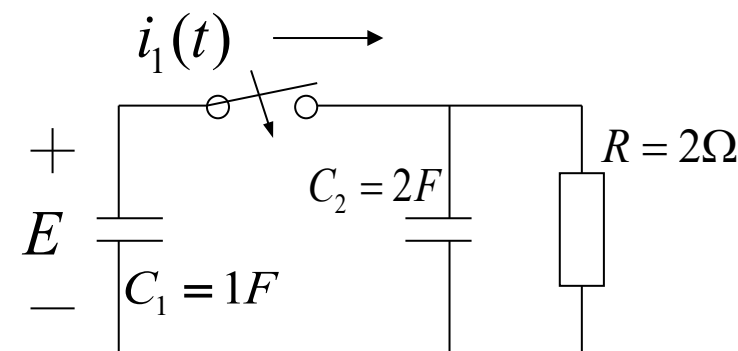
**解:** 作 s 域电路, 并列方程。



$$\frac{E}{s} = I_1(s) \frac{1}{sC_1} + I_1(s) \frac{R / sC_2}{R + 1 / sC_2}$$

$$I_1(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{\frac{R / sC_2}{R + 1 / sC_2} + \frac{1}{sC_1}} = \frac{E}{s} \frac{1}{\frac{R}{RC_2s + 1} + \frac{1}{sC_1}}$$

$$I_1(s) = \frac{E}{s} \frac{s(RC_1C_2s + C_1)}{RC_1s + RC_2s + 1} = \frac{ERC_1C_2}{R(C_1 + C_2)} \frac{s + \frac{1}{RC_2}}{s + \frac{1}{R(C_1 + C_2)}} = \frac{2E}{3} \frac{s + \frac{1}{4}}{s + \frac{1}{6}}$$



$$I_1(s) = \frac{2E}{3} \left( 1 + \frac{\frac{1}{12}}{s + \frac{1}{6}} \right) \quad \therefore \quad i_1(t) = \frac{2E}{3} \left[ \delta(t) + \frac{1}{12} e^{-\frac{t}{6}} u(t) \right]$$

当  $t = 0$  时刻, 电容上的电荷发生移动, 但是总量不变。

$$C_1 v_{C1}(0_-) = (C_1 + C_2) v_{C1}(0_+) \quad \therefore \quad E = 3 v_{C1}(0_+)$$
$$\therefore \quad v_{C1}(0_+) = \frac{E}{3}$$

所以  $t = 0^+$  时刻, 电容上的电荷各有:

$$q_{C1} = C_1 v_{C1}(0_+) = \frac{E}{3} \quad q_{C2} = C_2 v_{C1}(0_+) = \frac{2E}{3}$$

## 作 业

**教材习题:**

**基础题:** 4-4, 4-5, 4-8, 4-11

**加强题:** 无

## 第四章 拉普拉斯变换

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

**4.6 系统函数（网络函数）**

**4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性**

4.8 由系统函数零、极点分布决定频域特性

4.9 线性系统稳定性

4.10 双边拉氏变换

4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

## 4.6 系统函数

### 4.6.1 系统函数的定义

若有一时间信号作用于系统，其输出仍然是此时间信号，只是幅度与相位被改变，称此时间信号为系统的**特征信号**，表征改变幅度和相位的函数，称为系统的特征值或**系统函数**。

信号  $e^{j\omega t}$  是系统的**特征信号**，函数  $H(j\omega)$ （系统单位冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换）是**系统函数**，也称为系统的**频率响应**。

$$\begin{array}{c} e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * e^{j\omega t} = |H(j\omega)| e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} \end{array}$$

事实上，指数信号  $e^{st}$  也是系统的特征信号，因为  $\begin{array}{c} e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * e^{st} = H(s)e^{st} \end{array}$

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{0_-}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{0_-}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s)e^{st}$$



$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$  是因果系统单位冲激响应的拉氏变换，也称为系统函数。

连续时间信号  $x(t)$ ，作用于单位冲激响应为  $h(t)$  线性时不变系统，其零状态响应  $y_{zs}(t)$ ，等于输入信号与单位冲激响应的卷积积分：

$$y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \quad \begin{array}{c} x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \end{array}$$

由时域卷积定理，零状态响应的拉氏变换等于输入信号与单位冲激响应拉氏变换的乘积：

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \quad \begin{array}{c} X(s) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \end{array}$$

系统函数等于零状态响应的拉氏变换与输入信号的拉氏变换的比值：

$$H(s) = Y_{zs}(s) / X(s)$$

## 4.6.2 策动点函数与转移函数

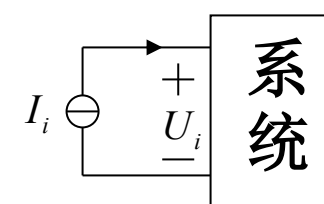
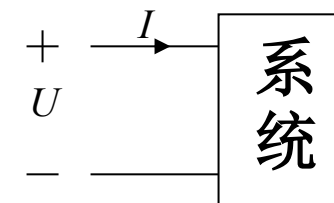
### 1 策动点函数

当系统的输入输出取自同一端口时，系统函数称为**策动点函数**。策动点函数根据其量纲，又可称为**阻抗函数**或**导纳函数**。

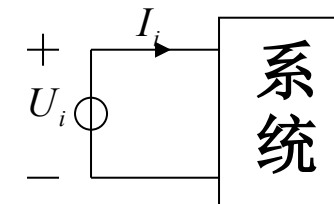
如放大器的输入或输出**阻抗**（电压与电流之比）、输入或输出**导纳**（电流与电压之比）等。

$$\text{阻抗: } Z_i(s) = \frac{U_i(s)}{I_i(s)} \quad Z_o(s) = \frac{U_o(s)}{I_o(s)}$$

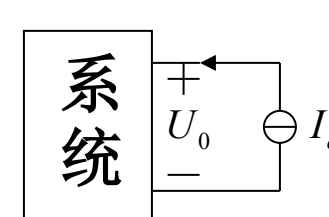
$$\text{导纳: } Y_i(s) = \frac{I_i(s)}{U_i(s)} \quad Y_o(s) = \frac{I_o(s)}{U_o(s)}$$



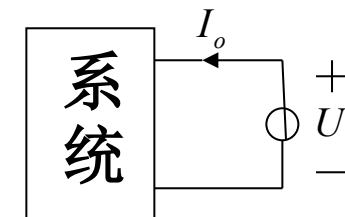
阻抗



导纳



阻抗



导纳

## 2 转移 (传输) 函数

当系统的输入输出取自不同的端口时, 系统函数称为**转移函数**或**传输函数**。

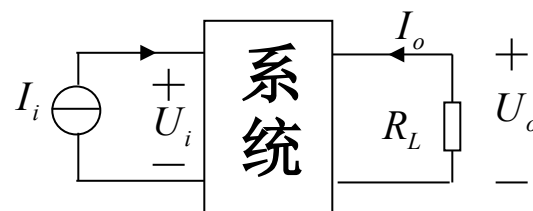
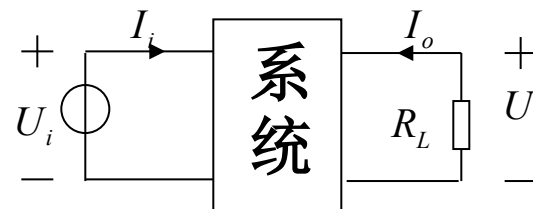
转移函数根据其量纲可称为**转移阻抗**、**转移导纳**、**电压传输比**或**电流传输比**等。  
如放大器的电压或电流放大倍数等。

转移阻抗:  $Z_{21}(s) = \frac{U_o(s)}{I_i(s)}$

转移导纳:  $Y_{21}(s) = \frac{I_o(s)}{U_i(s)}$

电压传输比:  $K_v(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$

电流传输比:  $K_i(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$



## 4.6.3 系统函数的求取

由于系统函数是系统零状态响应拉氏变换与激励拉氏变换之比，它的求解与系统的起始条件无关。

**例4-28：**已知系统的微分方程： $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$ ，

试求系统的系统函数  $H(s)$  与单位冲激响应  $h(t)$ 。

**解：**对以上方程求拉氏变换，在利用微分性质时，起始条件为零。

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)X(s)$$

于是系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

求系统函数的拉氏反变换，即是系统的单位冲激响应。

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

**例4-29:** 已知某LTI系统的激励  $e(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ , 零状态响应为  $r(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t)$ , 求 (1) 系统的单位冲激响应  $h(t)$ ; (2) 系统的微分方程; (3) 画出系统零、极点图。

**解:** (1) 先求激励和响应的拉氏变换

$$E(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$
$$R(s) = \frac{6}{(s+1)(s+4)}$$

系统函数

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)} = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{(s+4)} \right]$$

拉氏逆变换求  $h(t)$

$$h(t) = \frac{3}{2} (e^{-2t} + e^{-4t})u(t)$$

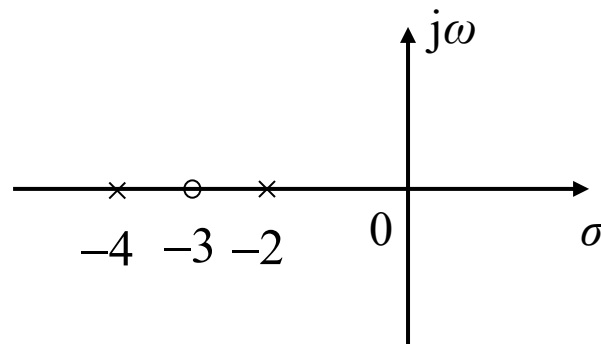
(2) 又因为  $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{3s + 9}{s^2 + 6s + 8}$

$$(s^2 + 6s + 8)R(s) = (3s + 9)E(s)$$

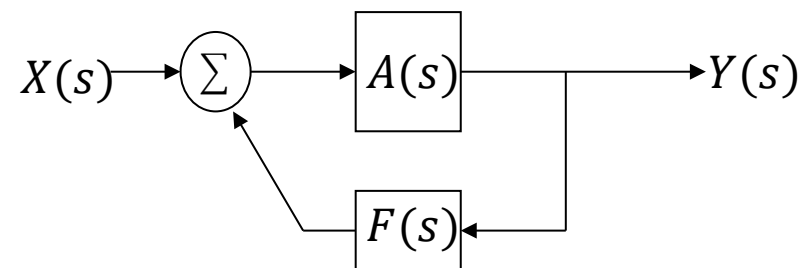
再求拉氏逆变换

$$r''(t) + 6r'(t) + 8r(t) = 3e'(t) + 9e(t)$$

(3) 两个极点  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -4$ , 一个零点  $z_1 = -3$ 。



例4-30. 下图所示反馈系统的系统函数为 ( )



A  $H(s) = \frac{1 - A(s)F(s)}{A(s)}$

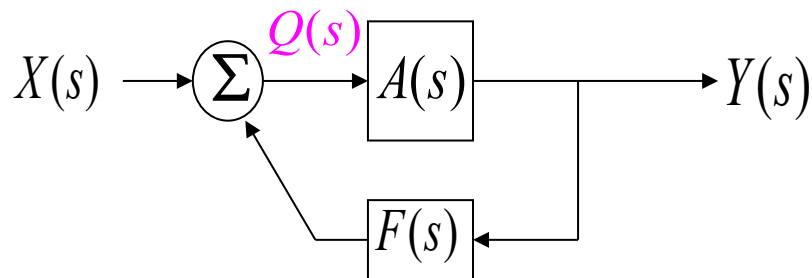
B  $H(s) = \frac{A(s)}{1 - F(s)}$

**C**  $H(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)}$

D  $H(s) = A(s)F(s)$

提交

**例4-30：**已知一反馈系统由如下框图所示，试求系统函数  $H(s)$ 。



**解：**设加法器的输出为  $Q(s)$ 。于是

$$Q(s) = X(s) + A(s)F(s)Q(s)$$

$$Q(s) = \frac{1}{1 - A(s)F(s)} X(s)$$

另外，由于  $Y(s) = A(s)Q(s)$

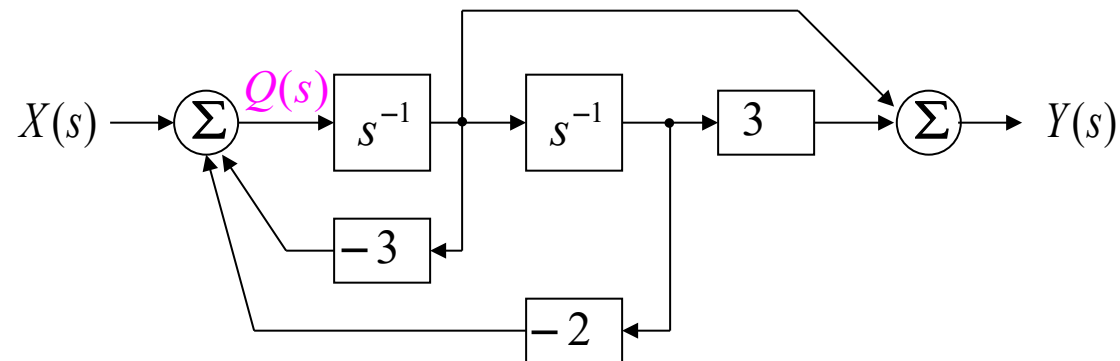
所以  $Y(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)} X(s)$

于是  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)}$

反馈系统：通常称  $A(s)$  为**前向通路增益**， $F(s)$  成为**反馈通路增益**， $A(s)F(s)$  称为**闭环增益**。



**例4-31:** 已知系统的一个模拟框图如下，试求系统函数 $H(s)$ 。



**解:** 设前一个加法器的输出为  $Q(s)$ 。于是有

$$Q(s) = X(s) - 3s^{-1}Q(s) - 2s^{-2}Q(s)$$

$$X(s) = (1 + 3s^{-1} + 2s^{-2})Q(s)$$

$$Y(s) = s^{-1}Q(s) + 3s^{-2}Q(s) = (s^{-1} + 3s^{-2})Q(s)$$

于是

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^{-1} + 3s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

如果在此基础上, 求解冲激响应  $h(t)$ , 并已知激励  $x(t) = u(t)$ , 求零状态响应  $y_{zs}(t)$ , 就回到了例4-28。

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\text{由于 } X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s}$$

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{3}{2}}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$y_{zs}(t) = \left( \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right) u(t)$$

如果继续给出条件，当该系统的初始状态  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 2$ , 求系统的零输入响应  $y_{zi}(t)$ 。

根据系统函数的分母多项式，可以判断零输入响应满足齐次微分方程：

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$\frac{d^2 y_{zi}(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy_{zi}(t)}{dt} + 2y_{zi}(t) = 0$$

时域法或者变换域法

$$y_{zi}(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left( \frac{3}{2} + 2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} \right) u(t)$$

能够分析自由响应、强迫响应、暂态响应、稳态响应！

## 4.7 系统函数的零、极点分布与系统的时间特性

### 4.7.1 系统函数的零、极点分布与单位冲激响应的时域波形

系统的单位冲激响应是系统函数的拉氏逆变换： $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

一般的，系统函数是有理分式，于是

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_0 \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k}\right\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t)$$

上式中， $z_k$  与  $p_k$  分别是系统函数零点与极点，零点与极点在  $s$  平面上的位置不同，对单位冲激响应的的影响不同。

$s$  平面是一个复平面,  $\sigma$  轴是实轴, 虚轴用  $j\omega$  来记。

平面上不同的点  $s$ , 对应着不同的时间信号  $e^{st}$ 。

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

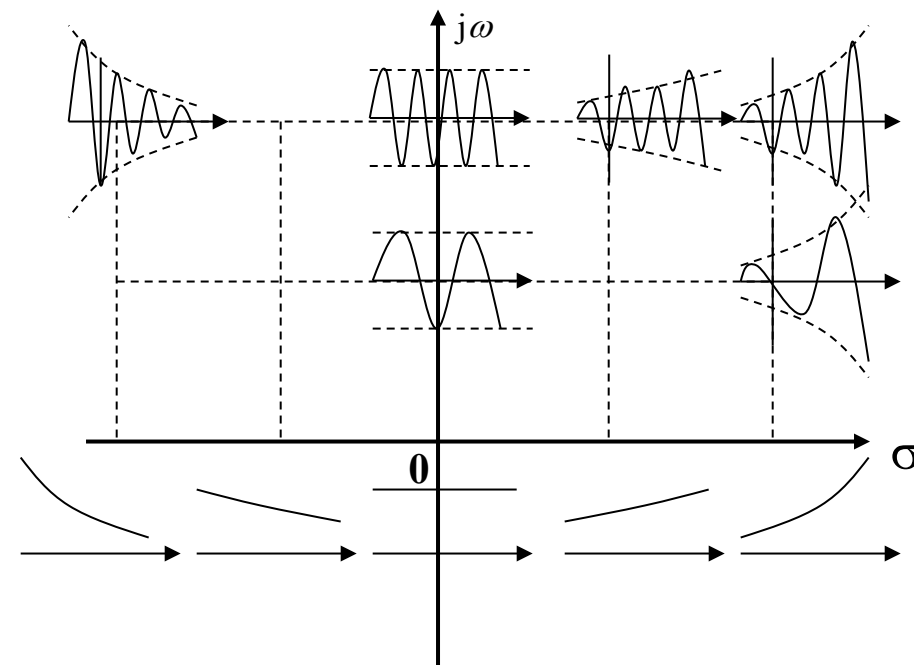
信号  $e^{st}$  表示的是幅度按指数变化的正余弦信号。

越远离实轴的点, 表示信号变化的频率越高;

越远离虚轴的点, 表示信号幅度增长或衰减的越快。

实轴上的点, 表示单调变化的指数信号;

虚轴上的点, 表示等幅振荡的正余弦信号。



## 一阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s}, \quad p_1 = 0 \text{ 在原点}, \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad p_1 = -\alpha$$

$\alpha > 0$ , 在左实轴上,  $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ , 指数衰减

$\alpha < 0$ , 在右实轴上,  $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ , 指数增加

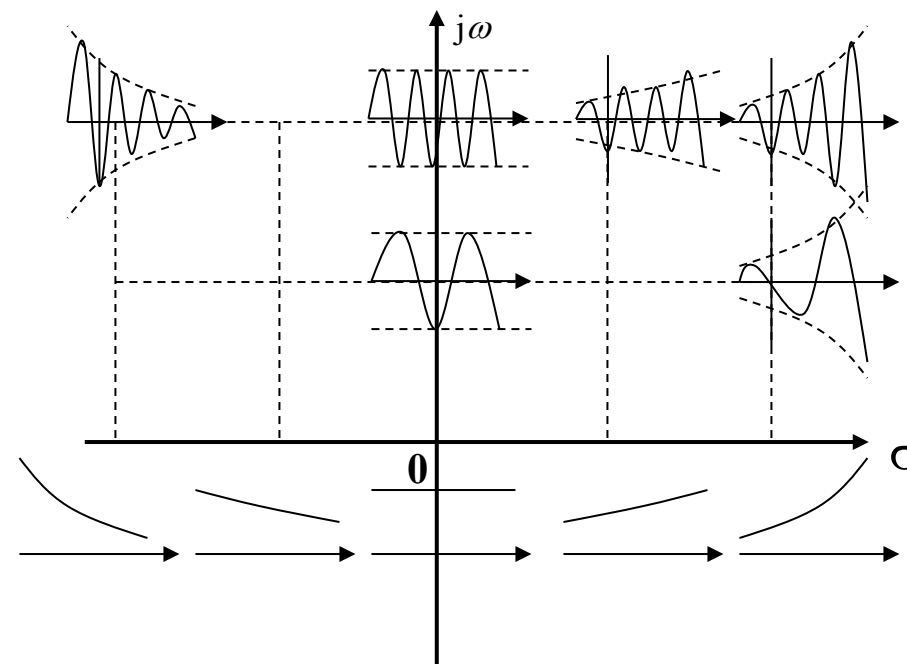
$$H(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad p_{1,2} = \pm j\omega, \text{ 在虚轴上}$$

$$h(t) = \sin \omega t u(t), \text{ 等幅振荡}$$

$$H(s) = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega \quad h(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t u(t)$$

当  $\alpha > 0$ , 极点在左半平面, 衰减振荡

当  $\alpha < 0$ , 极点在右半平面, 增幅振荡

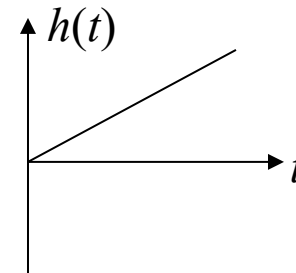
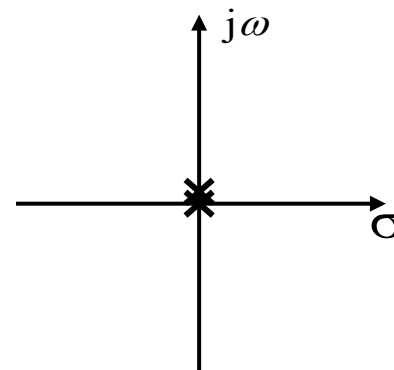


## 二阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s^2}, \text{极点在原点,}$$

$$h(t) = tu(t)$$

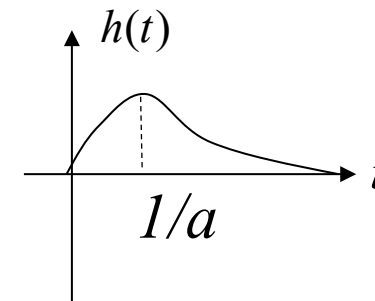
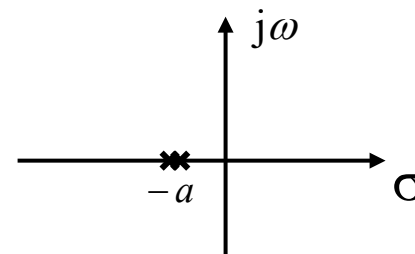
$$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow \infty$$



$$H(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}, \text{极点在实轴上,}$$

$$h(t) = t e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0$$

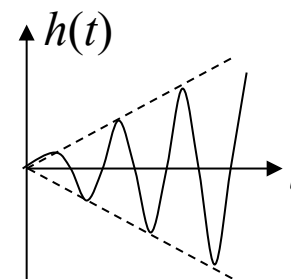
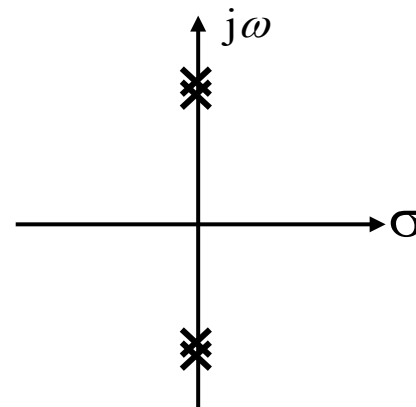
$$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$$



$$H(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}, \text{极点在虚轴上,}$$

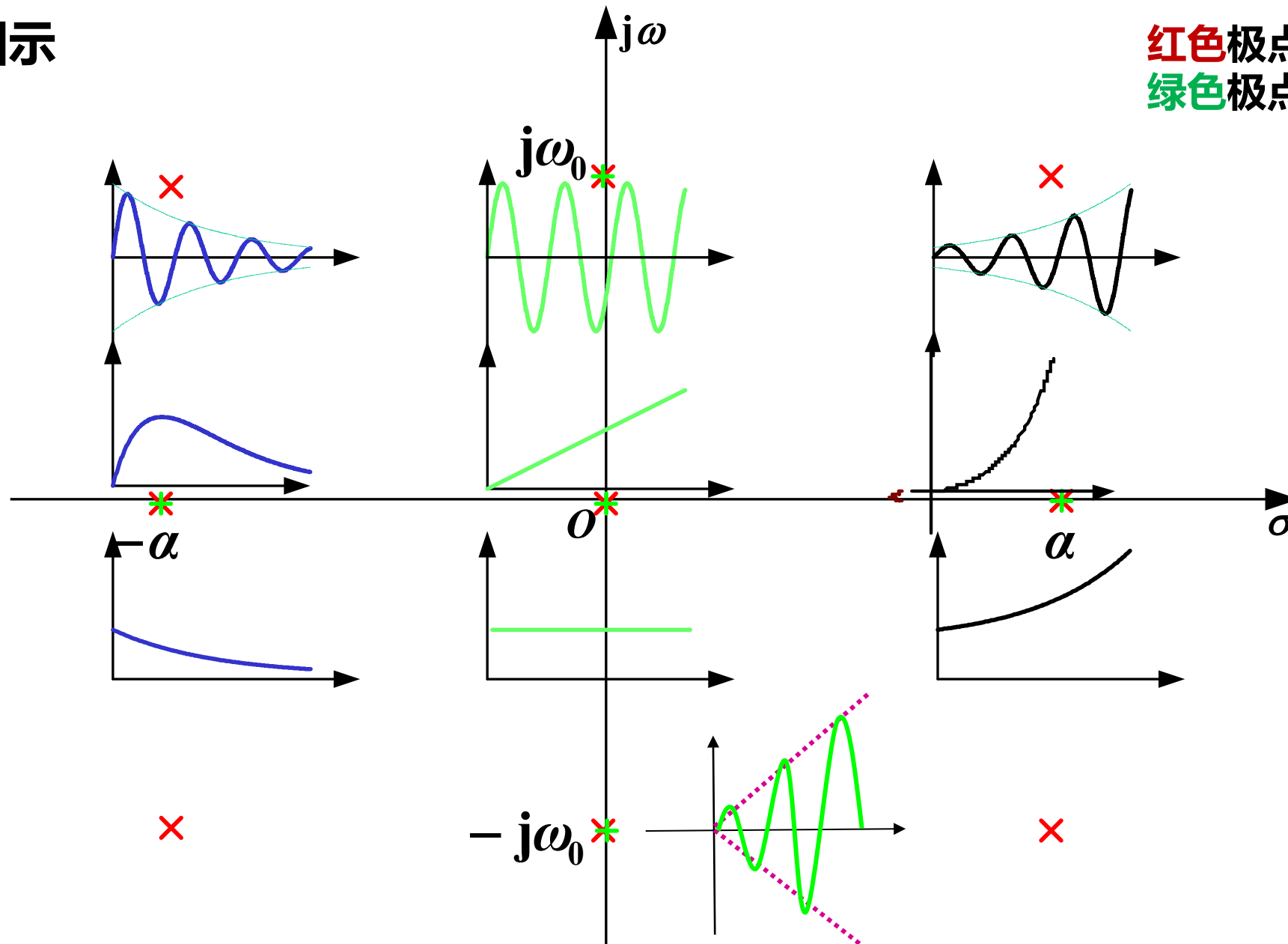
$$h(t) = t \sin \omega t u(t)$$

$$t \rightarrow \infty, h(t) \text{ 增幅振荡}$$



## 几种典型情况图示

红色极点：一阶极点  
绿色极点：二阶极点





## $H(s)$ 极点与 $h(t)$ 波形特征的对应关系:

极点于  $S$  平面左半平面

$h(t)$  呈衰减形式

极点于  $S$  平面右半平面

$h(t)$  呈增长形式

极点于  $S$  平面虚轴上 (不含原点)

$h(t)$  等幅振荡 (一阶极点)  
或增长振荡 (多重极点)

极点于  $S$  平面实轴上 (不含原点)

$h(t)$  呈现与指数相关的变化  
(一阶或多重极点)

极点于  $S$  平面原点

$h(t)$  等值  $u(t)$  (一阶极点)  
或增长  $t^n$  (多重极点)

**例4-32:** 已知系统函数如下，试作出它的零极图，求出其单位冲激响应并画出其波形图。

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

$$H_2(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

$$H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

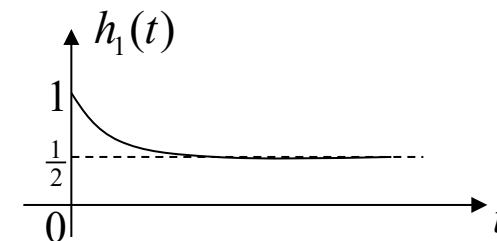
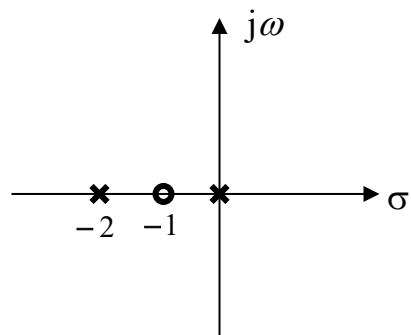
**解:**  $H_1(s)$  的零极图如下:

因为

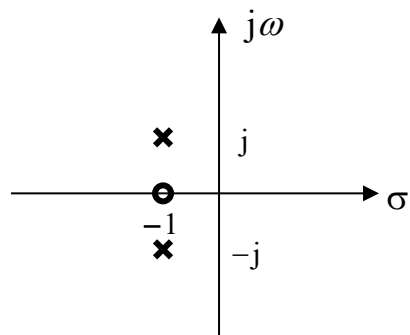
$$H_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)}$$

所以

$$h_1(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})u(t)$$

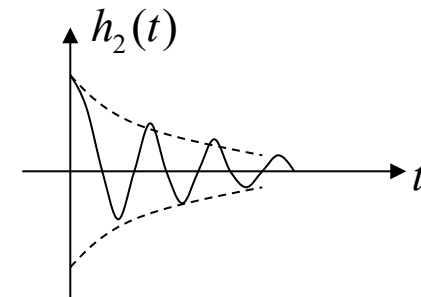


$H_2(s)$  的零极图如下:

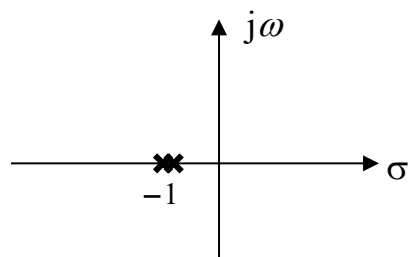


$$H_2(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$h_2(t) = e^{-t} \cos t u(t)$$

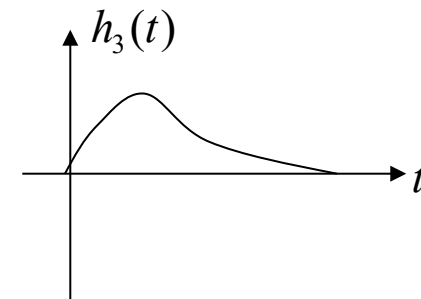


$H_3(s)$  的零极图如下:



$$H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$h_3(t) = te^{-t} u(t)$$



由上例可见，若极点是多重复极点，其对应的时间波形与单极点是不一样的。

## 4.7.2 系统函数和激励的零、极点分布与响应的各分量

系统函数与激励的极点，共同决定了响应的时域波形。  $Y(s) = X(s)H(s)$

**例4-33：** 设系统函数  $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励  $x(t) = u(t)$ ，初始状态为零，求系统的响应，并指出自由响应与强迫响应。

**解：** 系统的响应的拉氏变换

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

所以，系统的响应是  $y(t) = \frac{1}{2}(3 - 4e^{-t} + e^{-2t})u(t)$

其中  $y_h(t) = (\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$        $y_p(t) = \frac{3}{2}u(t)$

可见，系统函数的极点对应着自由响应分量；激励的极点对应着强迫响应分量。但是，如果系统函数与激励函数有零极点相互抵消，响应中将不出现对应的时域分量。

**例4-34.** 设系统函数  $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ , 系统的激励  $x(t) = e^{-3t}u(t)$ , 初始状态为零, 则系统响应为 ( )

- ☐ A  $y(t) = (e^t - e^{2t})u(t)$
- ☒ B  $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$
- ☐ C  $y(t) = (e^{-t} + e^{-2t})u(t)$
- ☐ D  $y(t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(t)$

提交

**例4-34：** 设系统函数  $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励  $x(t) = e^{-3t}u(t)$

初始状态为零，求系统的响应，并指出自由响应与强迫响应。

**解：** 系统的响应的拉氏变换

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

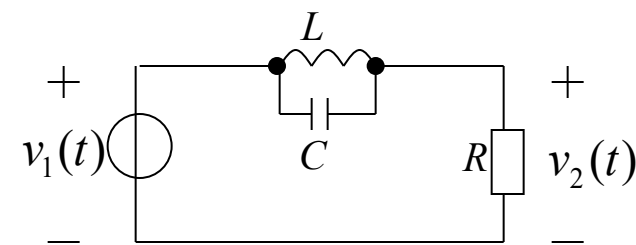
所以，系统的响应是  $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

响应中，只有自由响应分量，强迫响应等于零，因为系统函数与激励函数有零、极点相互抵消。

**例4-35:** 电路如图所示, 求系统函数  $H(s) = V_2(s) / V_1(s)$ , 如果输入信号  $v_1(t) = \cos 2t$ , 为使输出中不存在正弦稳态分量, 若  $L = 1 \text{ H}$ , 求  $C$  的值; 若  $R = 1 \Omega$ , 求此时的输出信号  $v_2(t)$ 。

**解:** 求系统函数

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{sL}{LCs^2 + 1}} = \frac{R(LCs^2 + 1)}{R(LCs^2 + 1) + sL} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$



输入的拉氏变换  $V_1(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$

所以, 输出的拉氏变换  $V_2(s) = H(s)V_1(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$

为了输出中不存在正弦稳态分量，上式分母中不应出现  $s^2+4$ （等幅振荡）的因子。

$$\therefore \frac{1}{LC} = 4 \quad C = \frac{1}{4L} = \frac{1}{4} \text{ F}$$

此时的输出

$$V_2(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{s}{s^2 + 4s + 4} = \frac{s}{(s+2)^2} = \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{11}}{(s+2)}$$

$$A_{12} = (s+2)^2 V_2(s) \big|_{s=-2} = -2 \quad A_{11} = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 V_2(s)] \big|_{s=-2} = 1$$

$$\therefore V_2(s) = \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)} \quad v_2(t) = (1-2t)e^{-2t}u(t)$$



**例4-36:** 已知线性时不变系统, 当输入  $x(t) = E u(t)$  时, 零状态响应与零输入响应分别为:

$$y_{zs}(t) = E\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right)u(t)$$

$$y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

试求系统函数  $H(s)$ , 并写出微分方程, 画出系统  $s$  域模拟框图。

**解:** 由系统函数的定义

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}$$

求拉氏逆变换

$$\begin{aligned} Y_{zs}(s) &= \frac{E}{6s} - \frac{1}{2} \frac{E}{s+2} + \frac{1}{3} \frac{E}{s+3} = \frac{E\left[\frac{1}{6}(s+2)(s+3) - \frac{1}{2}s(s+3) + \frac{1}{3}s(s+2)\right]}{s(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{E}{s(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

$$X(s) = \frac{E}{s}$$

所以系统函数

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

由零输入响应  $y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}$  可见，系统有三个特征根，系统函数应有三个极点。特征根  $\alpha = -1$ （在  $s = -1$  处的极点）在系统函数的分母中未出现，是由于系统函数的零、极点相消导致的。

所以，为了列写系统的微分方程，系统函数的分子和分母都加上  $s + 1$ ，系统函数为

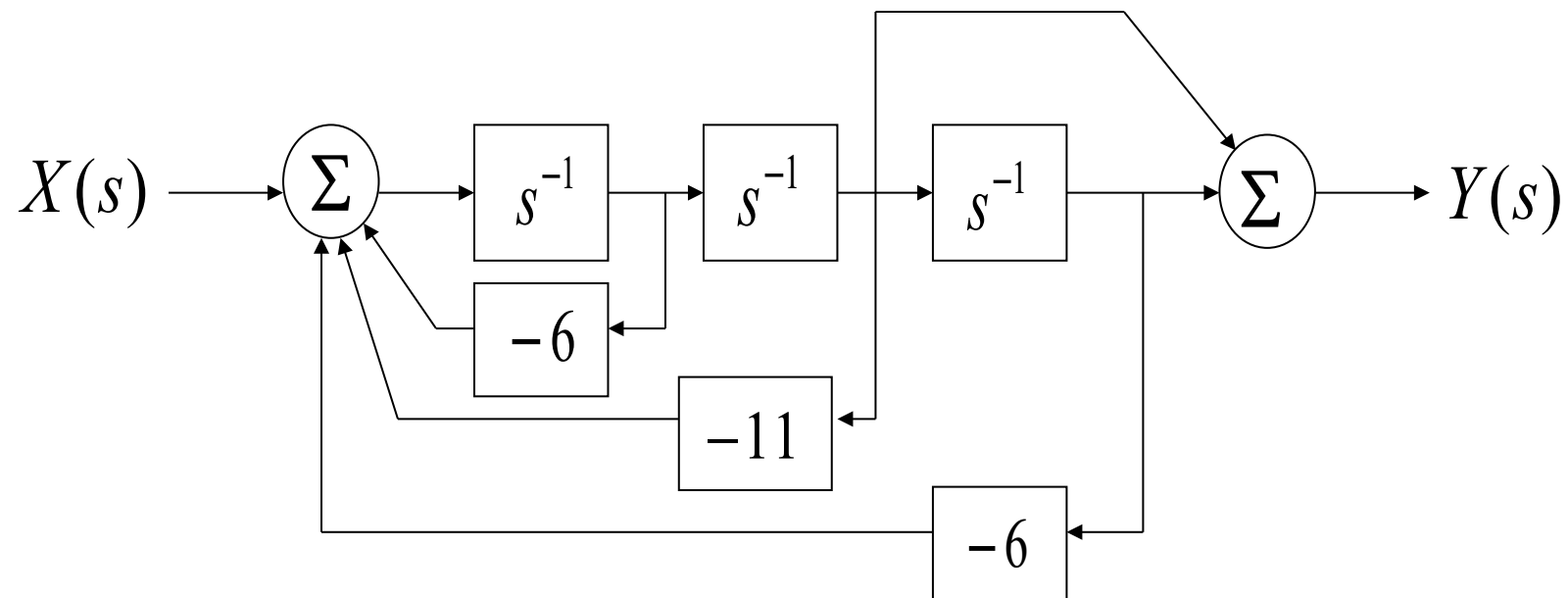
$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

所以，系统方程为（三阶微分方程）：

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^{-2} + s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}}$$

系统的模拟框图：



线性系统的 s 域模拟框图

基本模拟单元

	时 域	S 域
积分器	$f(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$F(s) \rightarrow \boxed{s^{-1}} \rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{s}$
加法器	$f_1(t) \rightarrow \begin{matrix} + \\ \Sigma \end{matrix} \rightarrow f_1(t) - f_2(t)$ $f_2(t) \rightarrow \begin{matrix} - \end{matrix}$	$F_1(s) \rightarrow \begin{matrix} + \\ \Sigma \end{matrix} \rightarrow F_1(s) - F_2(s)$ $F_2(s) \rightarrow \begin{matrix} - \end{matrix}$
数乘器	$f(t) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow af(t)$	$F(s) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow aF(s)$

## 利用 $H(s)$ 画模拟框图——直接形式

根据微分方程  $r''(t) + a_1 r'(t) + a_0 r(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$

两边拉氏变换  $s^2 R(s) + a_1 s R(s) + a_0 R(s) = b_2 s^2 E(s) + b_1 s E(s) + b_0 E(s)$

得到系统函数  $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}} E(s)$$

令:  $Q(s) = \frac{E(s)}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$

则:  $Q(s) = E(s) - a_1 s^{-1} Q(s) - a_0 s^{-2} Q(s)$

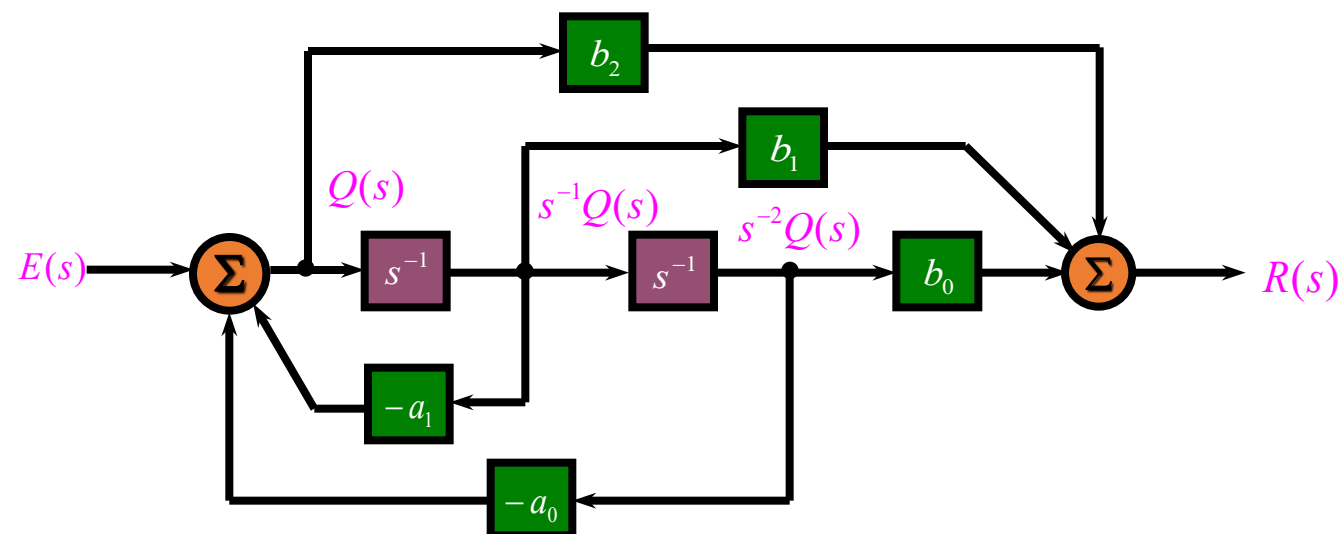
$$R(s) = (b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}) Q(s)$$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}E(s)$$

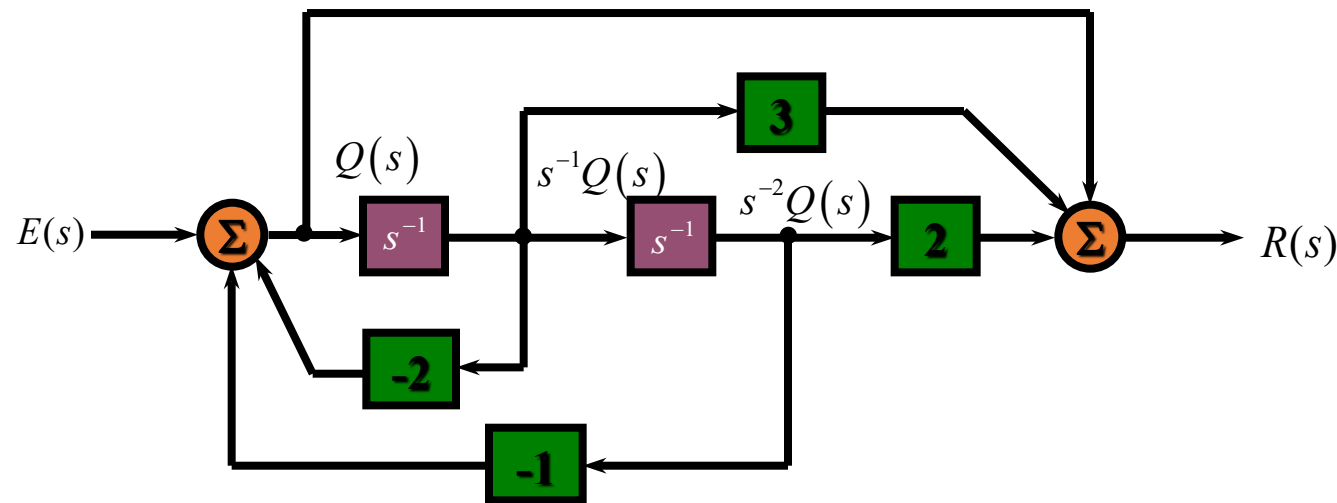
令:  $Q(s) = \frac{E(s)}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}$

则:  $Q(s) = E(s) - a_1s^{-1}Q(s) - a_0s^{-2}Q(s)$

$$R(s) = (b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2})Q(s)$$



## 利用模拟框图求 $H(s)$ ——直接形式



设：中间变量为  $Q(s)$

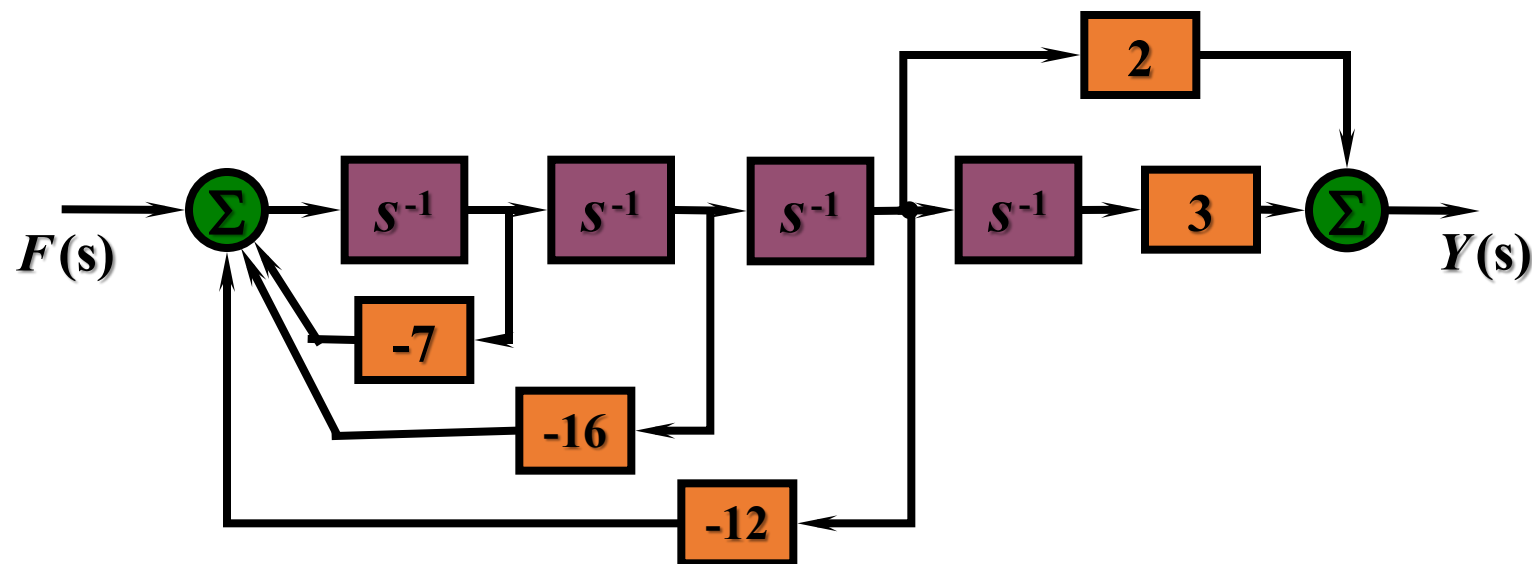
$$\begin{cases} Q(s) = E(s) - 2Q(s)s^{-1} - Q(s)s^{-2} \\ R(s) = Q(s) + 3Q(s)s^{-1} + 2Q(s)s^{-2} \end{cases} \quad \begin{cases} Q(s) = \frac{E(s)}{1 + 2s^{-1} + s^{-2}} \\ R(s) = (1 + 3s^{-1} + 2s^{-2})Q(s) \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}{1 + 2s^{-1} + s^{-2}} E(s) \quad \therefore H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

**例4-37:** 已知  $H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2}$  , 试画出 s 域模拟图。

解: 系统函数可变为

$$H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2} = \frac{2s+3}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s} = \frac{2s^{-3} + 3s^{-4}}{1 + 7s^{-1} + 16s^{-2} + 12s^{-3}}$$





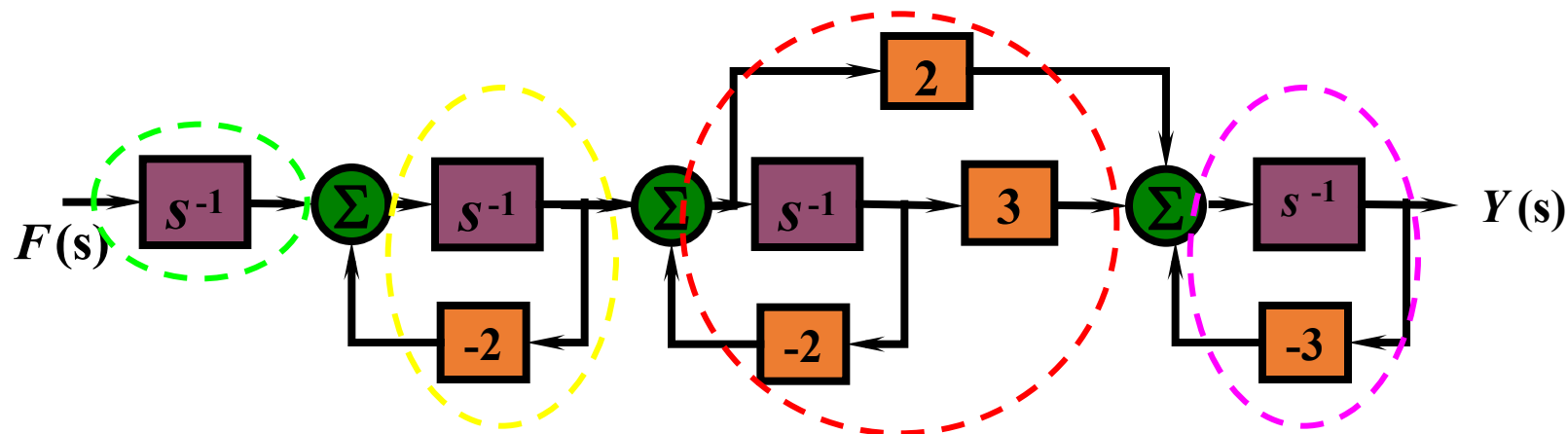
## ※利用 $H(s)$ 画模拟框图——级联形式



$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots H_n(s)$$

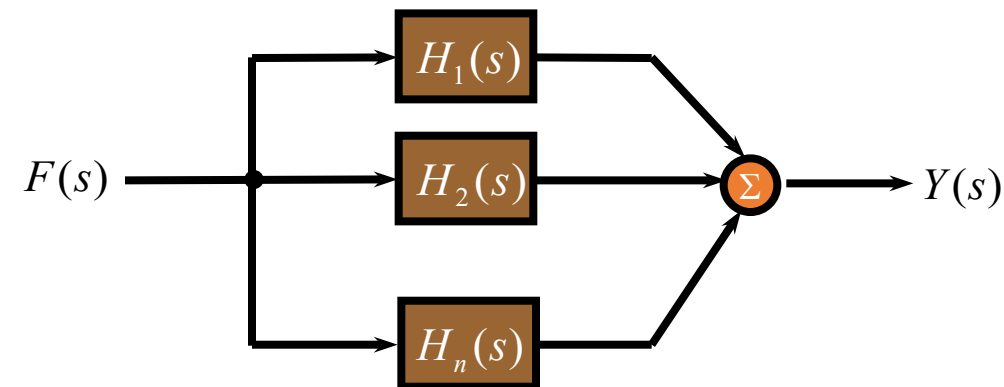
解：系统函数可变为

$$H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{2s+3}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3}$$

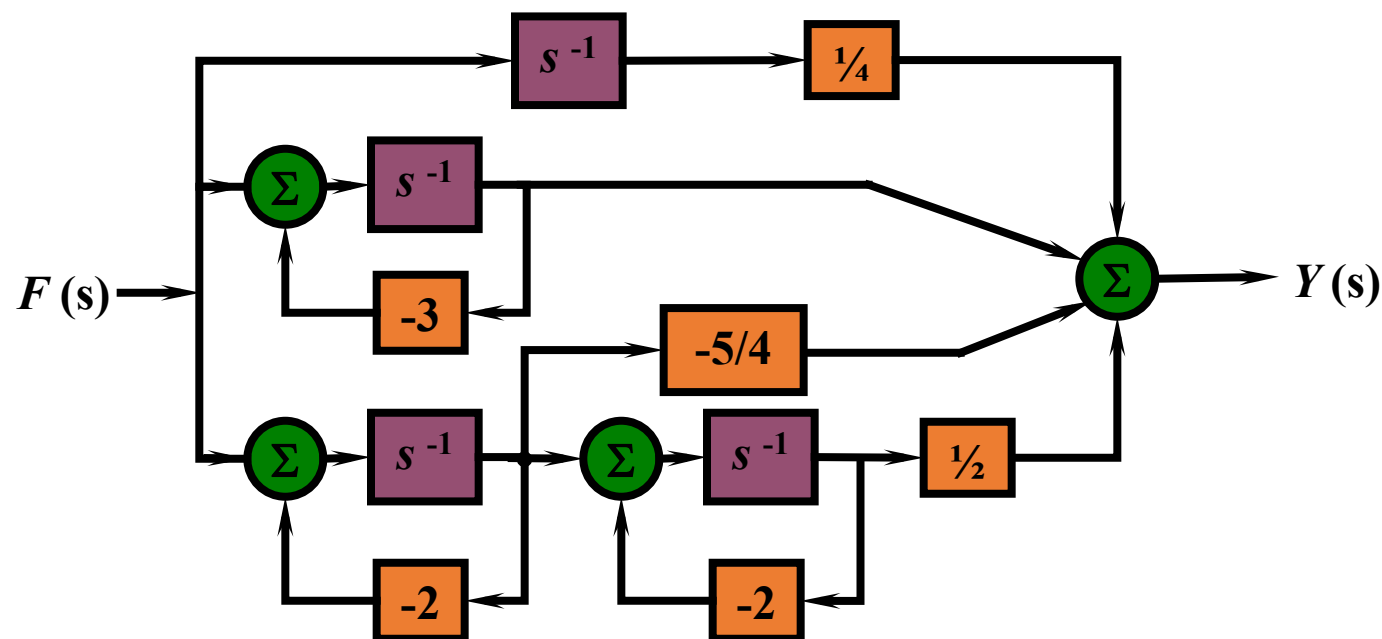


## ※利用 $H(s)$ 画模拟框图——并联形式

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_n(s)$$



解：系统函数为 
$$H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{1}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2} + \frac{-\frac{5}{4}}{s+2}$$



## 作 业

**教材习题：**

**基础题：** 4-13 (a) (b) , 4-16, 4-22, 4-24 (a) (b) (c) , 4-26 (a) (c) ,  
4-27, 4-33

**加强题：** 4-13 (c) , 4-26 (b) (d)

**习题错误订正：** 4-16 电路图中电容和受控源下端口是连起来的