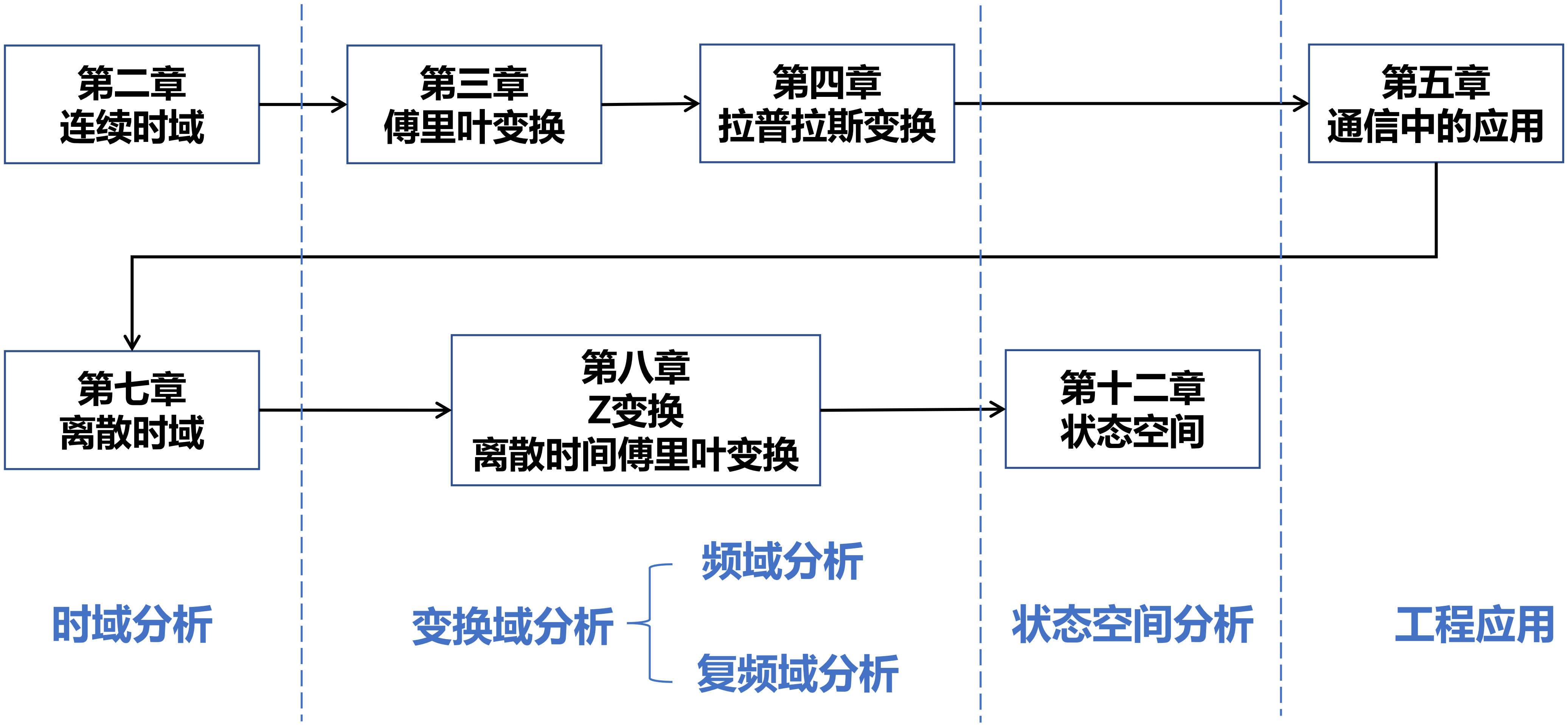
线性时不变系统的分析方法总结



线性时不变系统的分析方法总结

从系统的数学描述方法来分：

- 输入、输出分析法：一个 n 阶微（差）分方程，适合于单输入单输出系统（第二、三、四、七、八章）
- 状态变量分析法： n 个一阶微（差）分方程组，适合于多输入多输出系统（第十二章）

从系统数学模型求解方法来分：

- 时域分析法：不经过任何变换，在时域中直接求解响应（第二、七章）
- 变换域分析法：将信号和系统模型的时间函数变换成相应某变换域的函数，如傅里叶变换（第三、五章）、拉普拉斯变换（第四章）、Z变换（第八章）等。

第一章

1. 理解信号的分类方法
2. 了解典型信号的特性和物理意义；
3. **熟练**掌握信号的运算，能按步骤正确画出时移、反褶、尺度变换后的波形；
4. **熟悉**奇异信号的特性、作用和相互关系，特别是阶跃函数和冲激函数。
5. **掌握**任意信号分解为脉冲分量的方法；
6. 了解系统不同的分类方法；
7. 能**准确判断**系统的线性、时变性、因果性；
8. 初步了解系统的分析方法。

第二章

1. 熟悉建立系统微分方程的方法（如何消去中间变量）；
2. **熟练掌握**经典法求系统的自由响应和强迫响应；
3. **熟练利用**冲激函数匹配法确定起始点状态的跳变量。
4. **熟练掌握**卷积计算方法和性质；
5. **熟练运用**卷积求零状态响应；
6. 简单了解用算子法解微分方程的优点及局限性，为运用拉普拉斯变换解微分方程打下基础；
7. 进一步了解冲激函数的性质。

第三章

1. 了解频域分析法提出的背景、过程和新应用；
2. **熟练掌握**周期信号的三角函数和指数形式的傅里叶级数分析方法；
3. **熟练运用**波形的对称性与谐波特性的关系获得傅里叶级数；
4. **熟悉**矩形波等典型周期信号的傅里叶级数的特性。
5. 深入了解傅里叶变换和傅里叶级数的关联和区别；
6. **熟练掌握**典型非周期信号、冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换。
7. **熟练**运用傅里叶变换的各种性质求复杂信号的傅里叶变换（重要！）
8. **熟练**掌握时域卷积定理和频域卷积定理及其应用；
9. 熟悉周期信号的傅里叶变换与傅里叶级数的关系；
10. 熟练掌握抽样定理及其应用。

第四章

1. 理解拉普拉斯变换的定义及其与傅里叶变换的关系；
2. 熟悉拉普拉斯变换的基本性质。
3. **熟练掌握**部分分式法求拉普拉斯逆变换；
4. **熟练使用**拉普拉斯逆变换分析电路等系统。
5. **熟练掌握**系统函数、系统微分方程、系统模拟框图之间的相互关联（重要）；
6. 能用系统函数零、极点分布定性判断冲激响应的特性；
7. **熟练运用**系统函数分析零状态响应的时域特性；
8. **熟练运用**系统函数零、极点分布，粗略画出频响特性曲线（重要）。
9. 巩固运用系统函数零、极点分布分析频响特性的能力；
10. 了解全通函数与最小相移函数的零、极点分布特点；
11. 熟练运用系统函数判断系统的稳定性。
12. 熟悉双边拉氏变换的收敛域与原函数的对应关系；
13. 了解拉氏变换与傅里叶变换的对应关系。

第七章

1. 了解离散时间信号和系统的应用；
2. 了解常见序列的特性，会正确分析序列的周期性；
3. 熟悉序列的基本运算；
4. 了解离散时间系统差分方程的构建
5. **熟悉**差分方程的经典时域求解方法，正确使用边界条件；
6. **熟悉**单位样值响应的求解；
7. **熟练掌握**卷积和求零状态响应。

第八章

1. 了解z变换与拉氏变换的关联；
2. 熟悉常见序列的z变换及其收敛域；
3. 会分析各种类型序列的收敛域。
4. **熟练掌握**用部分分式法求逆z变换；
5. **熟练掌握**z变换的基本性质；
6. 会分析利用z变换的基本性质时对收敛域的影响。
7. **熟悉**s平面和z平面的映射关系；
8. **熟练掌握**利用z变换求零状态响应；
9. **熟练掌握**系统函数、差分方程、模拟框图的映射关系；
10. 了解系统函数极点分布和单位样值响应特征的关系；
11. **熟悉系统**稳定性和因果性的判定方法。
12. 理解模拟角频率和数字角频率的区别，理解序列的傅里叶变换的周期性；
13. **熟练运用**离散时间系统的频率响应求稳态响应；
14. **熟练运用**系统函数的零极点分布图粗略画出频响特性曲线。

第十一、十二章

1. 给定微分（差分）方程/系统函数，能**熟练画出**系统信号流图；
2. 能**熟练建立**连续时间系统的状态方程、输出方程；
3. 了解状态变量分析下特征矩阵、转移矩阵、系统函数等变量的定义；
4. 了解连续时间系统状态方程、输出方程的s域和时域求解方法。
5. 能**熟练建立**离散时间系统的状态方程、输出方程，画出信号流图；
6. 了解离散时间系统的特征矩阵、转移矩阵的定义，以及状态方程和输出方程的时域/z域求解方法；
7. 理解A矩阵对角化的意义和作用；
8. 会判断简单系统的可控制性、可观测性。

1. 已知LTI系统的微分方程、输入、完全响应。
（1）给出自由响应、强迫响应；
（2）根据冲激函数匹配法，求系统初始状态
（3）求系统零输入和零状态响应

基本原理——线性叠加：微分方程的完全解=齐次解+特解　$r(t)=r_h(t)+r_p(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}+\cdots+A_n e^{\alpha_n t}+r_p(t)$

一般步骤：

1）根据电路图列微分方程，建立输入 $e(t)$ 和输出 $r(t)$ 的数学关系；

2）求齐次解 $r_h(t)$ 的形式：列特征方程，求特征根，获得齐次解的形式，系数待定；

3）求特解 $r_p(t)$：与激励信号 $e(t)$ 的形式有关，查表，得到特解形式，代入原方程平衡系数，求得特解；

4）求完全解 $r(t)$：代入初始条件 0+，获得齐次解系数，得到最终的完全解。

结论：齐次解(自由响应)的函数特性仅依赖于系统本身特性，与激励信号的函数形式无关，但确定系数有关；而特解(强迫响应)的形式由激励函数决定。

冲激函数匹配法　→解决 0- 到 0+ 的跳变问题

匹配的原理：$t=0$ 时刻微分方程左右两端的 $\delta(t)$ 及各阶导数应该平衡

(其它项也应该平衡，我们讨论初始条件，可以不管其它项)

例2-5： $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$, 已知 $r(0_-)=1$，求 $r(0_+)$。

解：　方程右端含 $\delta'(t)$ 项，它一定属于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$

设 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)$　则　$r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$\Delta u(t)$：相对单位跳变函数
表示0_-到0_+幅度跳变一个单位

代入方程　$a\delta'(t)+b\delta(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)=3\delta'(t)$

得出 $\begin{cases} a=3 \\ b+3a=0 \end{cases}$　即 $\begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}$

所以得　$r(0_+)-r(0_-)=b=-9$

即　$r(0_+)=r(0_-)-9=1-9=-8$

1. 零输入响应的定义与待定系数确定

① 定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应，即 $r_{zi}(t)=H[\{x(0_-)\}]$

② 满足方程：

$$C_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zi}(t)+\ldots+C_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zi}(t)+C_n r_{zi}(t)=0$$

故 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解形式，即 $r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}$ ← 注意：和自由响应的系数不同

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 为互不相等的 n 个系统特征根。

③ 初始条件：$r_{zi}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_-)$ ← 非时变系统

即齐次解 $r_{zi}(t)$ 的待定系数用 $r^{(k)}(0_-)$ 确定即可！

2. 已知周期矩形脉冲信号波形（含有脉宽、幅度、周期等信息）。

（1）求傅里叶级数的展开系数表达式；

矩形脉冲信号的傅里叶变换，及其与傅里叶级数系数的关系。

（2）求傅里叶变换的表达式

周期信号的频谱及性质。

（3）画出信号的幅度谱，以及主要参数；如果信号周期增大1倍，幅度谱如何变换？

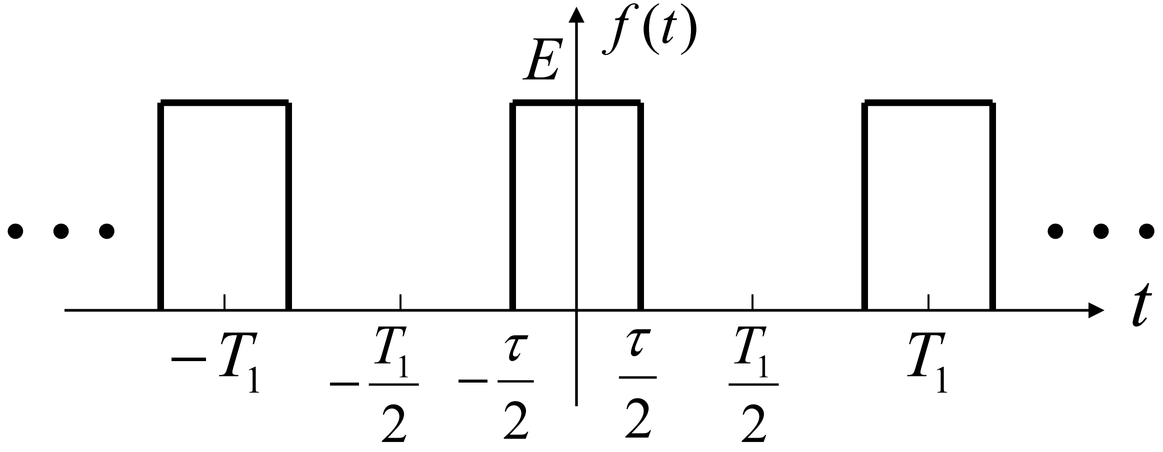
常用信号频谱，以及卷积后信号的频谱变化。

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

周期矩形脉冲信号

(1)周期矩形脉冲信号的傅里叶级数

三要素：脉宽 τ 、脉幅 E 、周期 T_1



$b_n = 0$　　(在偶函数的傅里叶级数中不会有正弦项)

$$a_0 = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\mathrm{d}t = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$a_n = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2}) = c_n$$

周期矩形脉冲信号的三角形式傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}+\frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})\cos n\omega_1 t$$

因为 $F_n=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n)=\frac{1}{2}a_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$

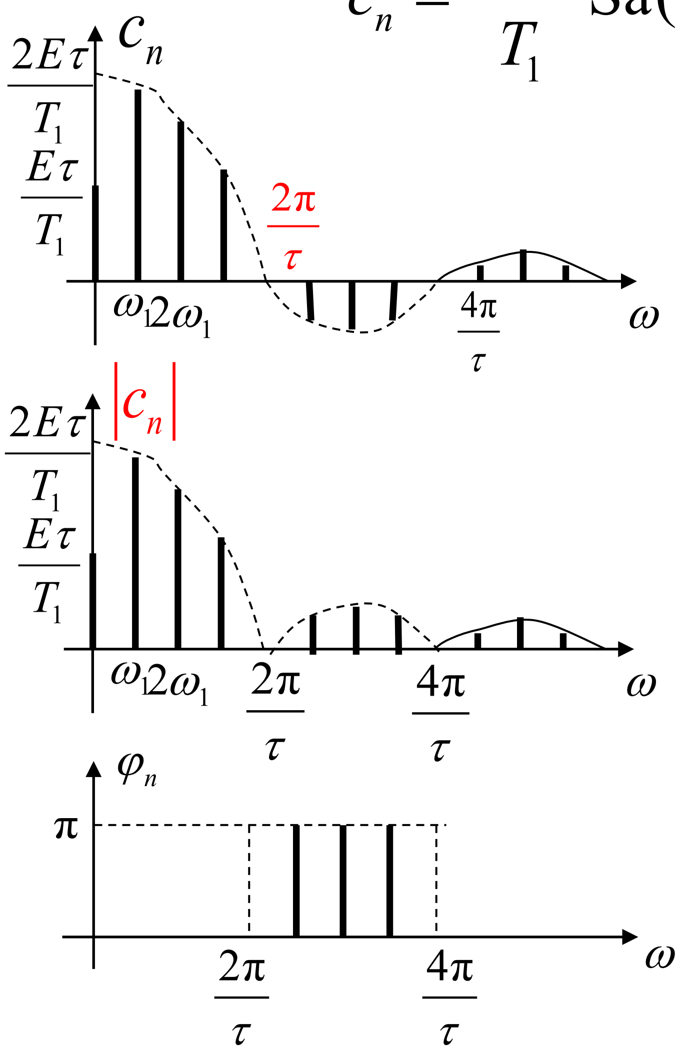
$f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数为

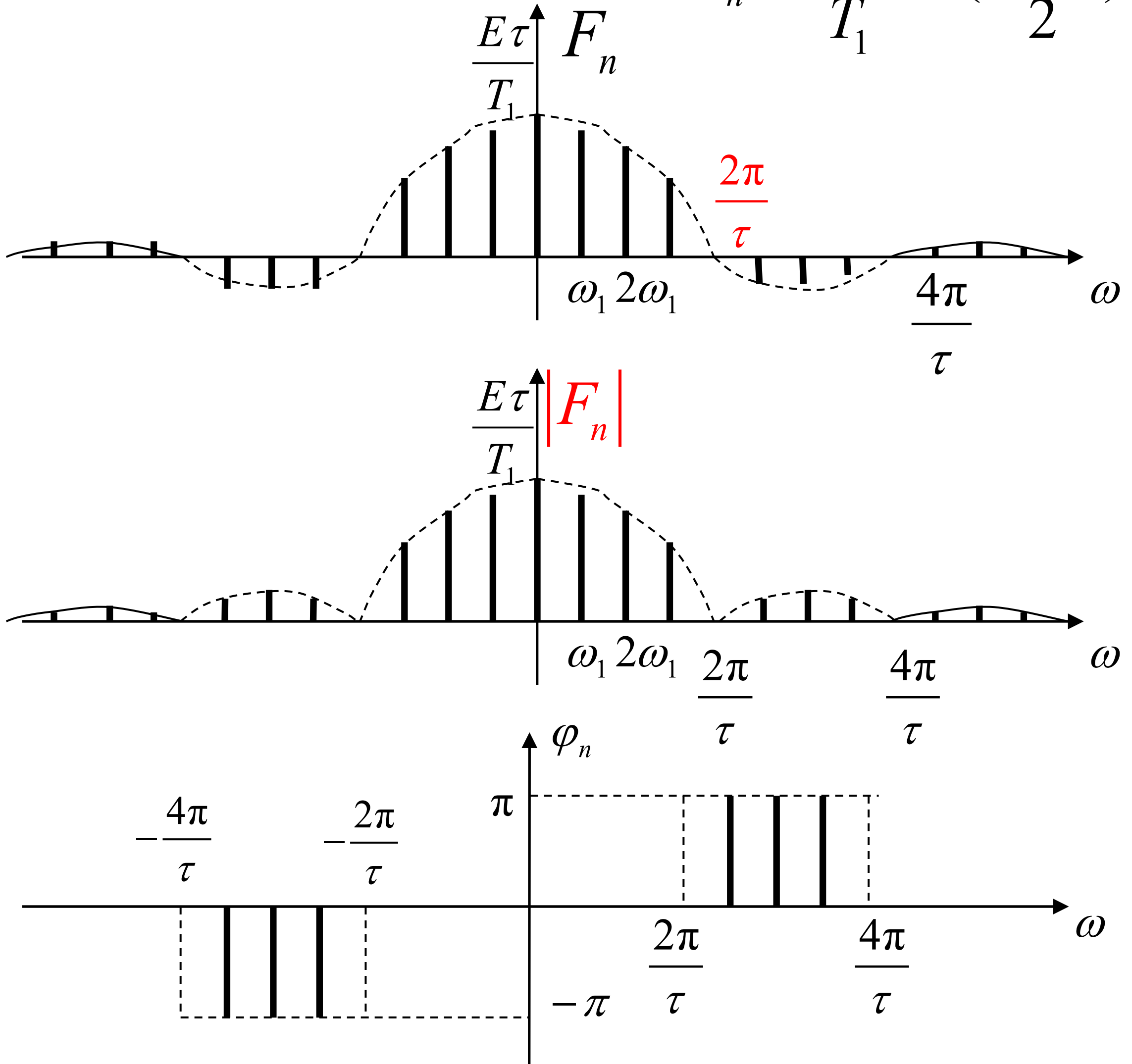
$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

（2）频谱图

$$c_n = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

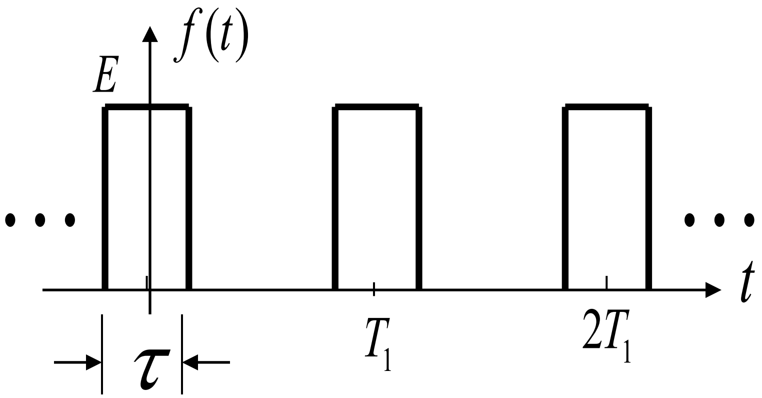
$$F_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

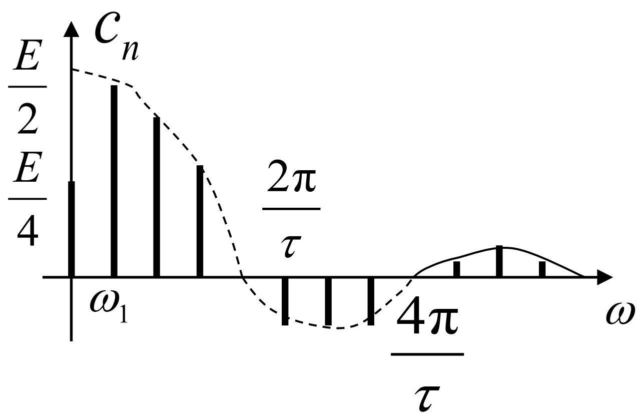


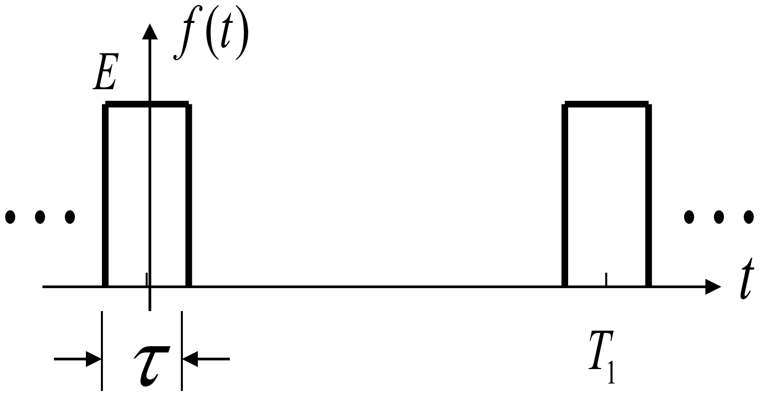


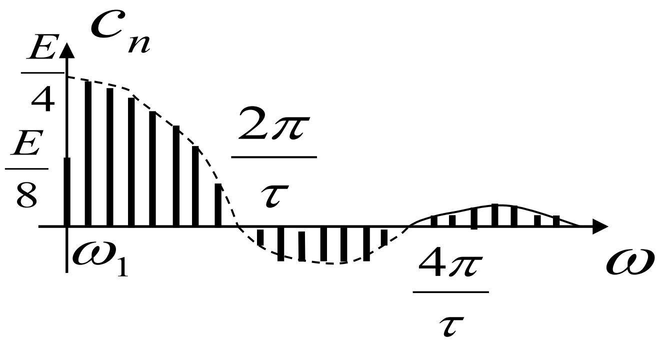
（3）频谱结构与波形参数的关系 (T_1, τ)

a）若 τ 不变，T_1 扩大一倍，即 $T_1 = 4\tau \rightarrow T_1 = 8\tau$

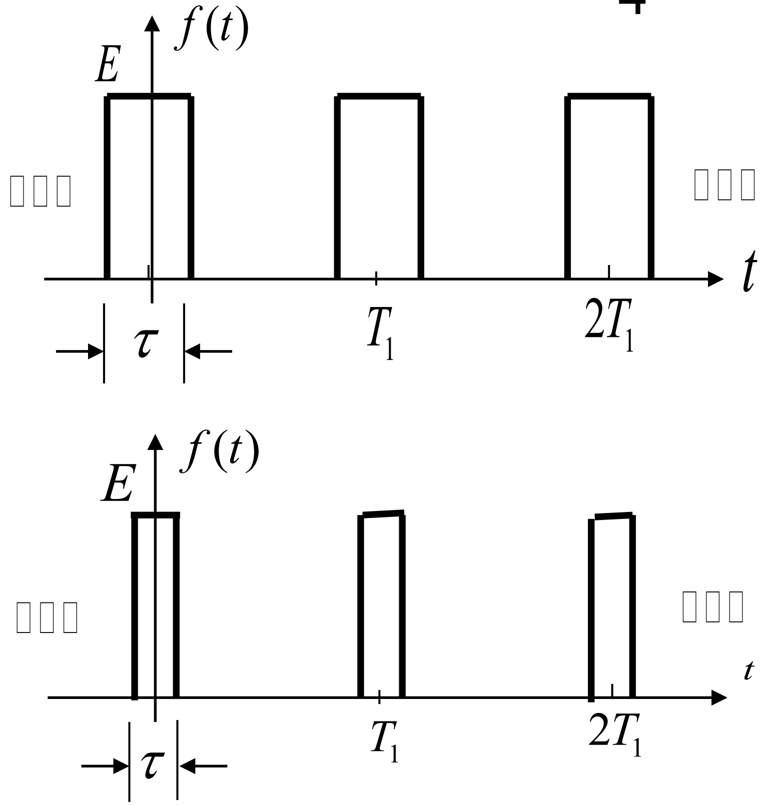


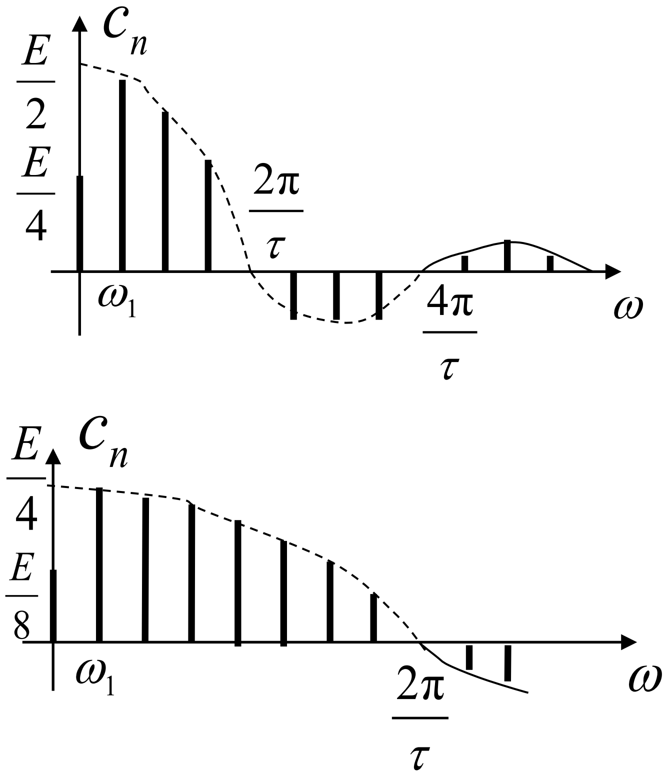






b) 若 T_1 不变, τ 减小一半，即 $\tau=\dfrac{T_1}{4}\rightarrow\tau=\dfrac{T_1}{8}$





谱线间隔 $\omega_1(=\dfrac{2\pi}{T_1})$ 只与周期 T_1 有关，且与 T_1 成反比；

零值点频率 $\dfrac{2\pi}{\tau}$ 只与 脉冲宽度 τ 有关，且与 τ 成反比；

谱线幅度 $\dfrac{2E\tau}{T_1}$ 与 T_1 和 τ 都有关系，且与 T_1 成反比，与 τ 成正比。

$$F(\mathrm{j}\omega)=\left|F(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$\left|F(\mathrm{j}\omega)\right|$ --幅度谱 频率 ω 的偶函数*　　$\varphi(\omega)$ --相位谱 频率 ω 的奇函数*

与傅里叶级数的关系（重点）

单个脉冲信号的傅里叶变换：$F_0(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ -- ω 的连续谱

周期信号的傅里叶级数展开：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$

级数展开的系数：$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$ -- ω 的离散谱

F_n 与 $F_0(\mathrm{j}\omega)$ 的关系：$\boxed{F_n=\left.\frac{F_0(\mathrm{j}\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1}}$ → 连续谱的离散化

重要结论：周期脉冲序列的傅里叶级数的系数 F_n 等于单脉冲的傅里叶变换 $F_0(\mathrm{j}\omega)$ 在 $n\omega_1$ 频率点的值乘以周期的倒数 $1/T_1$。

3.9 周期信号的傅里叶变换

$$\begin{tikzcd} \text{周期信号} \arrow[r] \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \arrow[dr, "?"] & \text{傅里叶级数} \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \\ \text{非周期信号} \arrow[r] & \text{傅里叶变换} \end{tikzcd}$$

3.9.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = \mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

3.9.2 一般周期信号的傅里叶变换

令周期信号 $f(t)$ 的周期为 T_1，角频率为 $\omega_1=2\pi f_1=2\pi/T_1$。它的傅里叶级数为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad \textbf{(1)}$$

其中：$F_n=\dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$　　或：$F_n=\dfrac{1}{T_1}F_0(j\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$

对式 **(1)** 两边取傅里叶变换

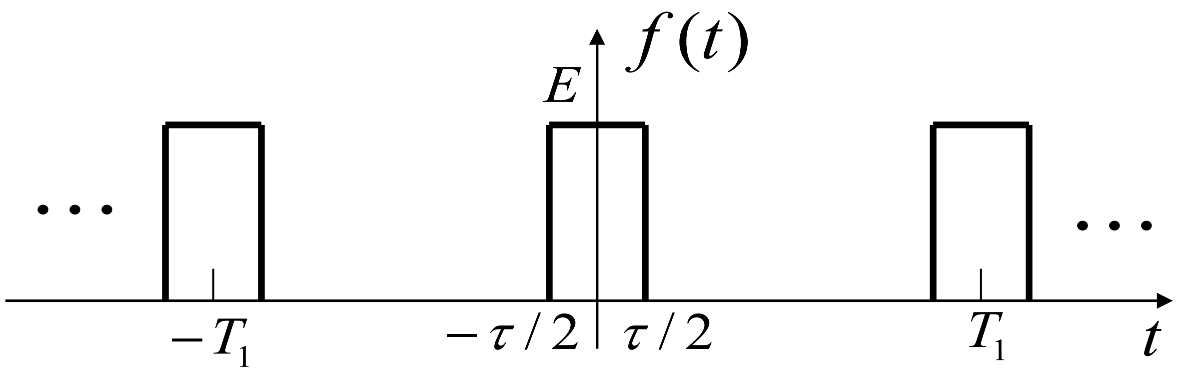
$$F(j\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\boxed{\mathscr{F}\left[e^{jn\omega_1 t}\right]}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

即：

$$F(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成的，这些冲激位于信号的谐频（0, $\pm\omega_1$, $\pm2\omega_1$, ……）处，每个冲激的强度等于 $f(t)$ 傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

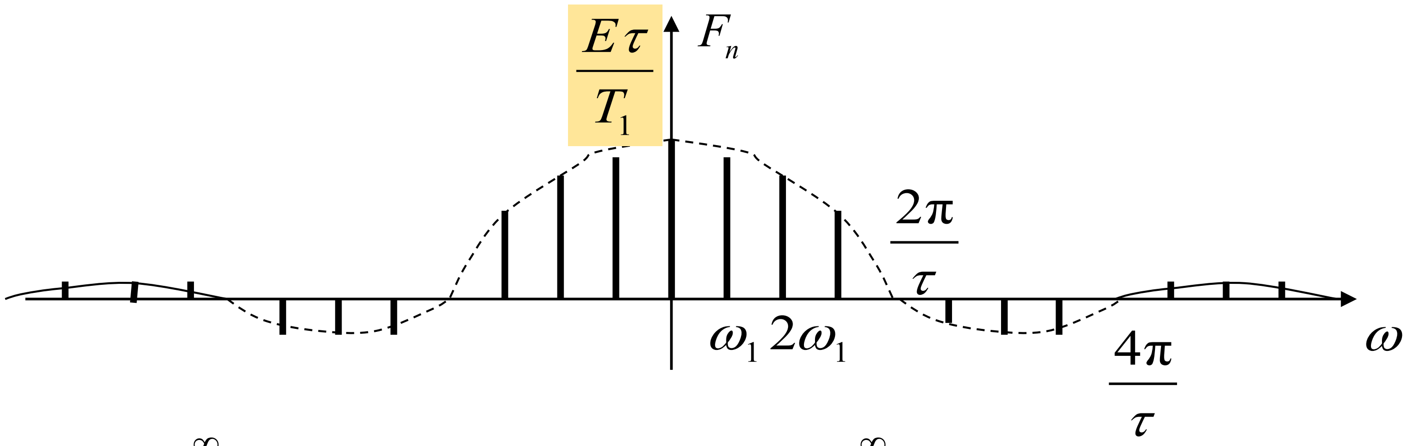
例3-19：求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。已知周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的幅度为 E，脉宽为 τ，周期为 T_1，角频率为 $\omega_1 = 2\pi f_1$ 。



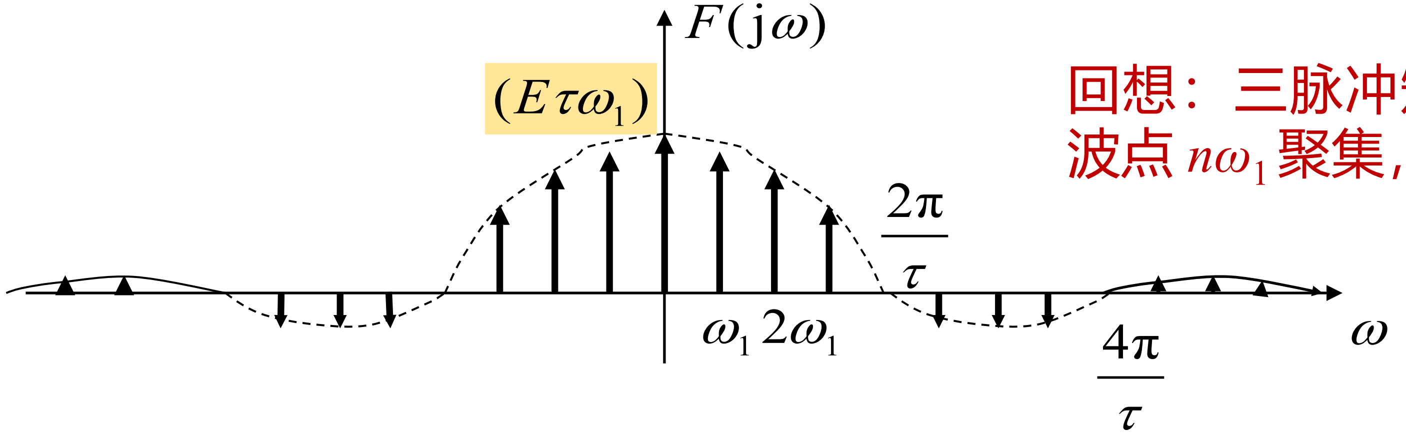
解：已知矩形脉冲 $f_0(t)$ 的傅里叶变换 $F_0(j\omega)$ 为 $F_0(j\omega) = E\tau \cdot \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$

则傅里叶级数展开系数 $F_n = \frac{1}{T_1} F_0(j\omega)\Big|_{\omega = n\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$



$$F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot\delta(\omega-n\omega_1)=E\tau\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$$



回想：三脉冲矩形的频谱，频谱向谐波点 $n\omega_1$ 聚集，聚集为冲激函数

3. 已知初始状态为0的LTI系统流程图，画出两个系统卷积之后的幅度谱、以及被采样后的幅度谱，分析奈奎斯特采样频率。

例3：已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$ ，用 $\delta_{T_s}(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行抽样，

（1）确定奈奎斯特抽样频率；

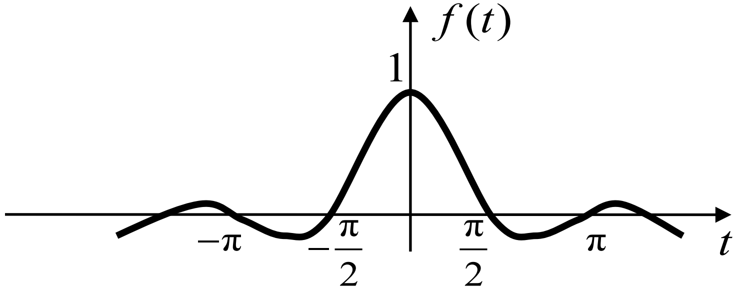
（2）若取 $\omega_s=6\omega_m$，求抽样信号 $f_s(t)=f(t)\delta_{T_s}(t)$，并画出波形图；

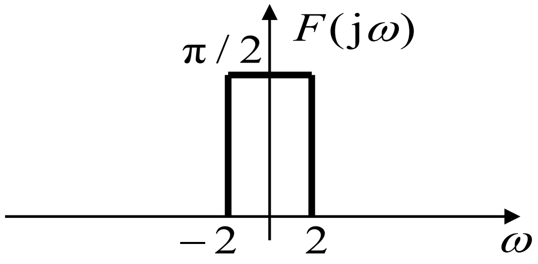
（3）求 $F_s(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_s(t)]$，并画出频谱图；

（4）确定低通滤波器的截止频率 ω_c 。

解:（1） $\because f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$

$$\therefore F(\mathrm{j}\omega)=\frac{\pi}{2}[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$$



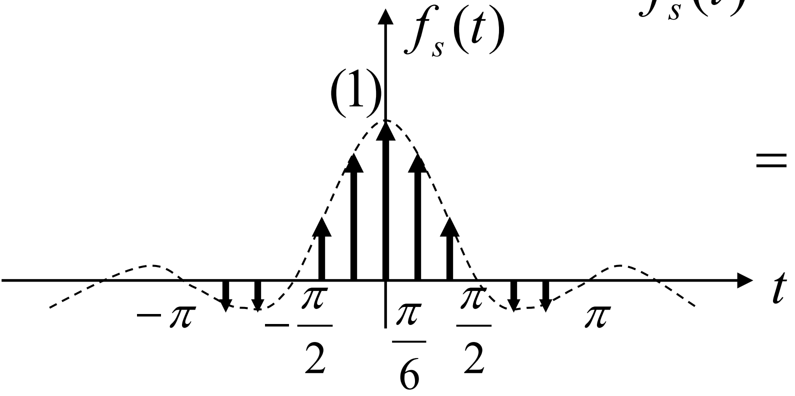


奈奎斯特抽样频率为： $f_{s\min}=2f_m=2\times\frac{2}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Hz}$

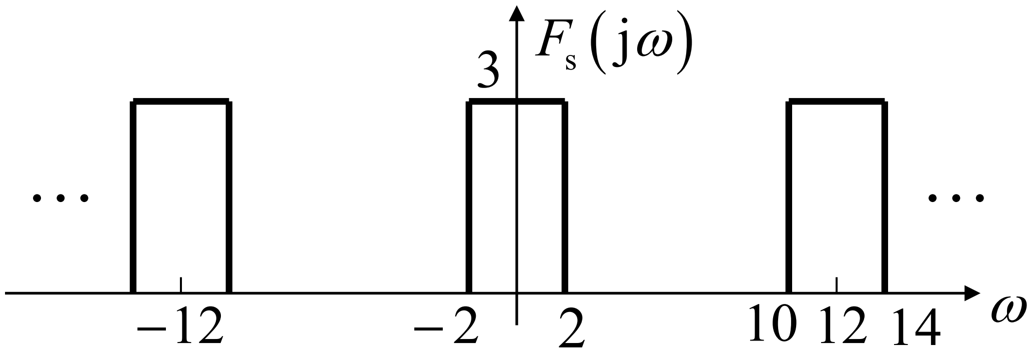
（2）$\because \omega_s = 6\omega_m = 12\ \mathrm{rad/s} \qquad \therefore T_s = \dfrac{2\pi}{\omega_s} = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}\ \mathrm{s}$

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

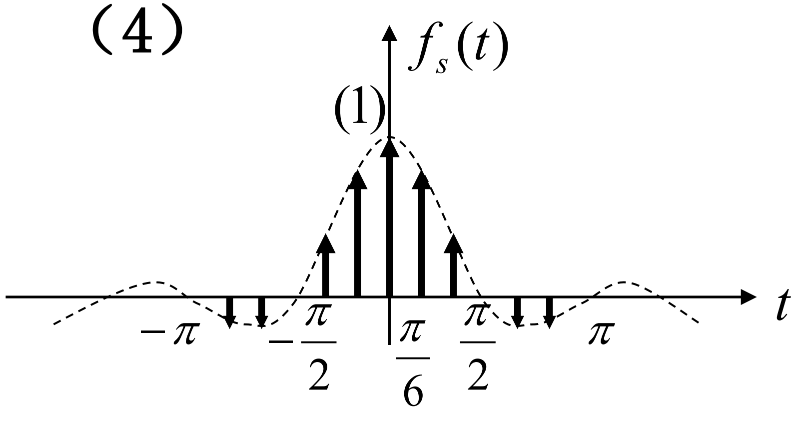
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(2t)\Big|_{t=nT_s} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\delta\left(t - \frac{\pi}{6}n\right)$$

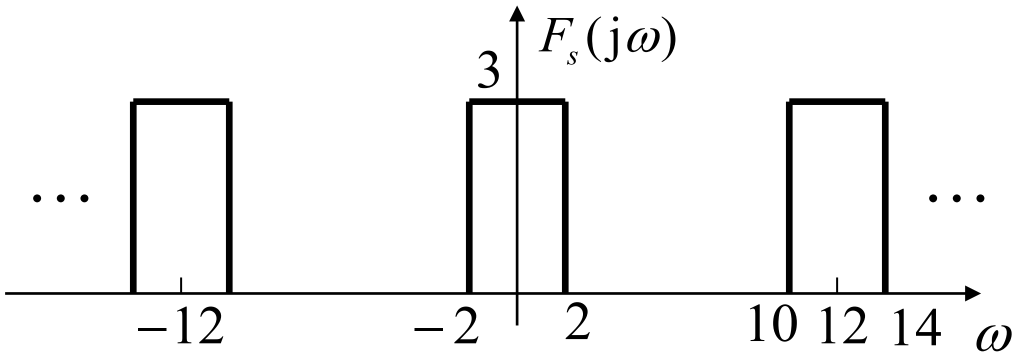


（3）　$F_s(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{T_s}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\mathrm{j}(\omega - n\omega_s)] = \dfrac{6}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\mathrm{j}(\omega - 12n)] = 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}[u(\omega + 2 - 12n) - u(\omega - 2 - 12n)]$



（4）

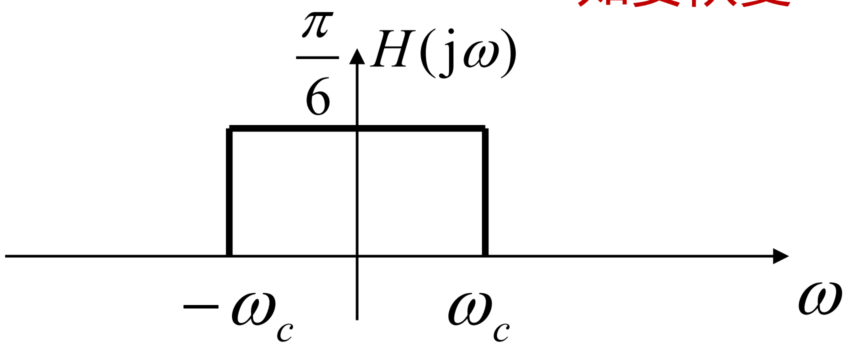




低通滤波器的截止频率 ω_c 应满足：$\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$

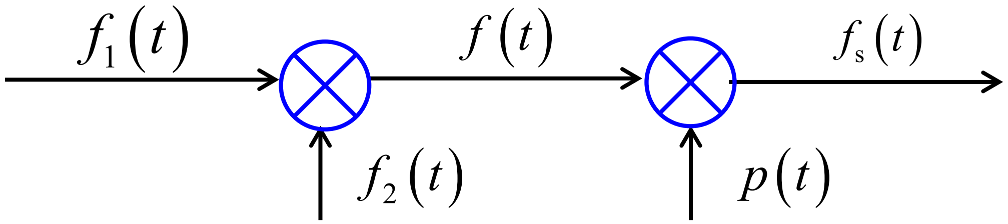
即 $2 \le \omega_c \le 10$

如要恢复 $F(\mathrm{j}\omega)$, 低通滤波器幅值 T_s



例3-23：如图所示，$f_1(t)=\mathrm{Sa}(1000\pi t), f_2(t)=\mathrm{Sa}(2000\pi t)$， $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$。

$f(t)=f_1(t)f_2(t)$，$f_s(t)=f(t)p(t)$。



（1）为从 $f_s(t)$ 无失真恢复$f(t)$，求最大抽样间隔 $T_{\max}$ 。
（2）当 $T=T_{\max}$ 时，画出 $f_s(t)$的幅度谱$|F_s(\omega)|$ 。

解： （1）由于

$$f_1(t)=\mathrm{Sa}(1000\pi t)\leftrightarrow 10^{-3}\left[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)\right]=F_1(\omega)$$

$$f_2(t)=\mathrm{Sa}(2000\pi t)\leftrightarrow \frac{1}{2}10^{-3}\left[u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi)\right]=F_2(\omega)$$

则 $F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_1(\omega)$

$$F(\omega)=\frac{10^{-6}}{4\pi}[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)]*[u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi)]$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{u(\omega)*[\delta(\omega+1000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)]*u(\omega)*[\delta(\omega+2000\pi)-\delta(\omega-2000\pi)]\}$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}[u(\omega)*u(\omega)]*[\delta(\omega+1000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)]*[\delta(\omega+2000\pi)-\delta(\omega-2000\pi)]$$

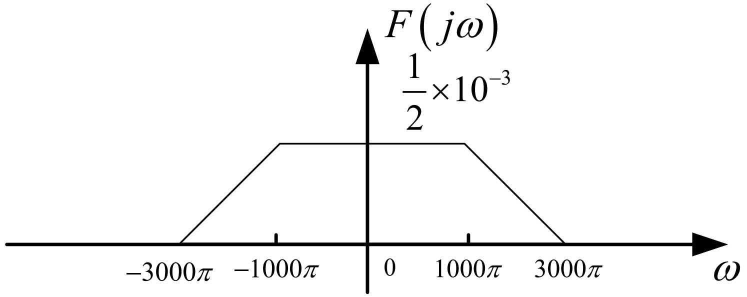
$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{\omega u(\omega)*[\delta(\omega+3000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)-\delta(\omega+1000\pi)+\delta(\omega-3000\pi)]\}$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}[(\omega+3000\pi)u(\omega+3000\pi)-(\omega-1000\pi)u(\omega-1000\pi)-(\omega+1000\pi)u(\omega+1000\pi)+(\omega-3000\pi)u(\omega-3000\pi)]$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{(\omega+3000\pi)[u(\omega+3000\pi)-u(\omega+1000\pi)]+2000\pi[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)]-(\omega-3000\pi)[u(\omega-1000\pi)-u(\omega-3000\pi)]\}$$

从图可见 $\omega_m=3000\pi$

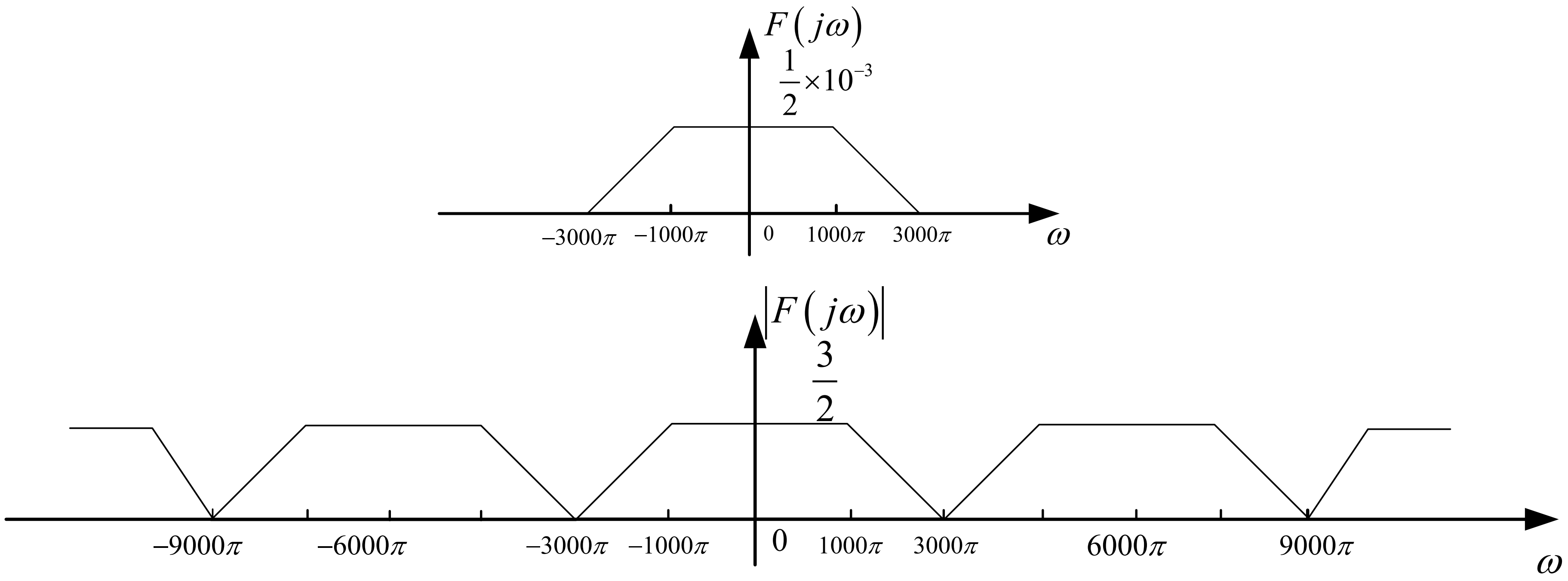
$$T_{\max}=\frac{2\pi}{\omega_{\min}}=\frac{2\pi}{2\omega_m}=\frac{1}{3000}\ \text{s}$$



(2)对于冲激抽样，抽样信号的频谱

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

- 当 $T_s=T_{\max}$ 时 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T_{\max}}=2\omega_m=6000\pi$

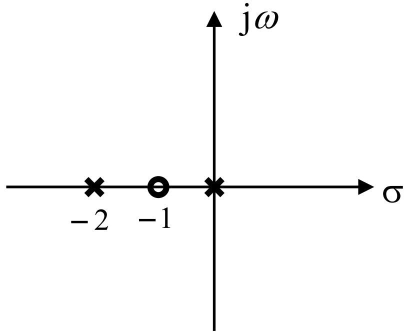


4.、会看零极点图、写出系统函数，初值/终值定理，H（s）-h（t）相互转换;
利用拉式变换，求零状态响应;
根据系统函数画框图
根据零极点判断稳定性、分析频率响应。

例： 已知系统函数如下，试作出它的零极图，求出其单位冲激响应并画出其波形图。

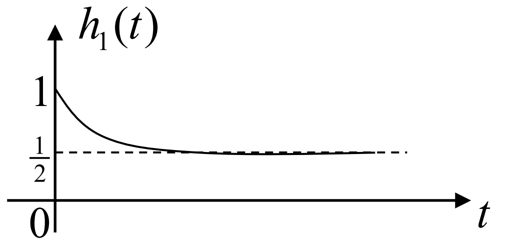
$$H_1(s)=\frac{s+1}{s(s+2)}\qquad H_2(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+2}\qquad H_3(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$$

解： $H_1(s)$ 的零极图如下：



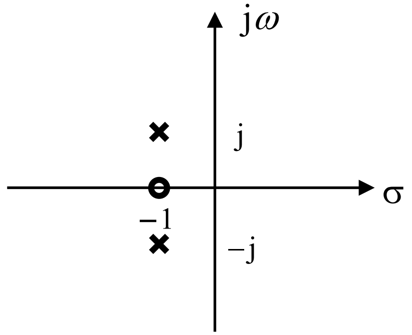
因为 $$H_1(s)=\frac{s+1}{s(s+2)}=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s+2)}$$

所以 $$h_1(t)=\frac{1}{2}(1+e^{-2t})u(t)$$

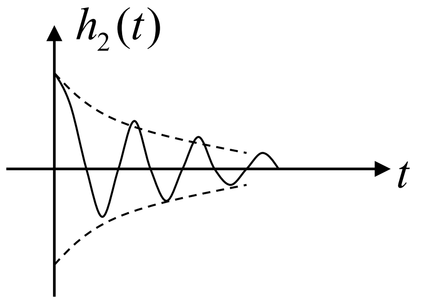


$H_2(s)$ 的零极图如下：

$$H_2(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

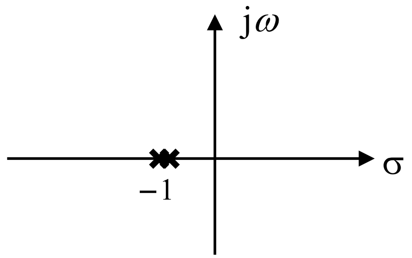


$$h_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t u(t)$$

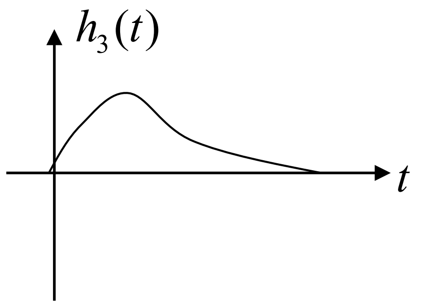


$H_3(s)$ 的零极图如下：

$$H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$



$$h_3(t) = t\mathrm{e}^{-t}u(t)$$



由上例可见，若极点是多重极点，其对应的时间波形与单极点是不一样的。

例4-29： 已知某LTI系统的激励$e(t)=\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$，零状态响应为$r(t)=\left(2\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-4t}\right)u(t)$，求（1）系统的单位冲激响应$h(t)$；（2）系统的微分方程；（3）画出系统零、极点图。

解： （1）先求激励和响应的拉氏变换

$$E(s)=\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$$R(s)=\frac{6}{(s+1)(s+4)}$$

系统函数 $$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(s+2)}+\frac{1}{(s+4)}\right]$$

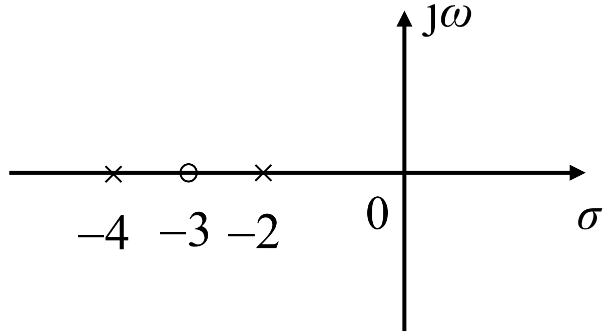
拉氏逆变换求$h(t)$ $$h(t)=\frac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-4t}\right)u(t)$$

（2）又因为 $H(s)=\dfrac{R(s)}{E(s)}=\dfrac{3s+9}{s^2+6s+8}$

$$\left(s^2+6s+8\right)R(s)=\left(3s+9\right)E(s)$$

再求拉氏逆变换 $r''(t)+6r'(t)+8r(t)=3e'(t)+9e(t)$

（3）两个极点 $p_1=-2$，$p_2=-4$，一个零点 $z_1=-3$ 。



例4-29：已知某LTI系统的激励$e(t)=\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$，零状态响应为$r(t)=\left(2\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-4t}\right)u(t)$，求（1）系统的单位冲激响应$h(t)$；（2）系统的微分方程；（3）画出系统零、极点图。

解：（1）先求激励和响应的拉氏变换

$$E(s)=\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$$R(s)=\frac{6}{(s+1)(s+4)}$$

系统函数 $$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(s+2)}+\frac{1}{(s+4)}\right]$$

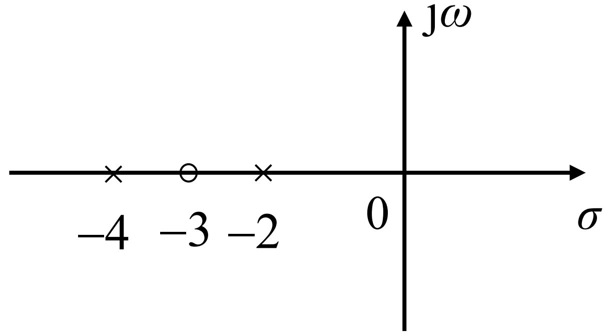
拉氏逆变换求$h(t)$ $$h(t)=\frac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-4t}\right)u(t)$$

（2）又因为 $H(s)=\dfrac{R(s)}{E(s)}=\dfrac{3s+9}{s^2+6s+8}$

$$\left(s^2+6s+8\right)R(s)=(3s+9)E(s)$$

再求拉氏逆变换 $r''(t)+6r'(t)+8r(t)=3e'(t)+9e(t)$

（3）两个极点 $p_1=-2$，$p_2=-4$，一个零点 $z_1=-3$ 。



谢谢大家！

祝同学们期末考试取得好成绩！

哈尔滨工业大学（深圳）
信息科学与技术学院
曹杰
办公室：信息楼1208　Email：caojhitsz@ieee.org