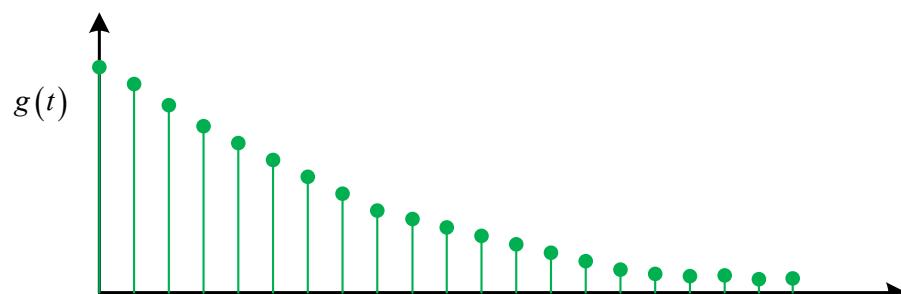
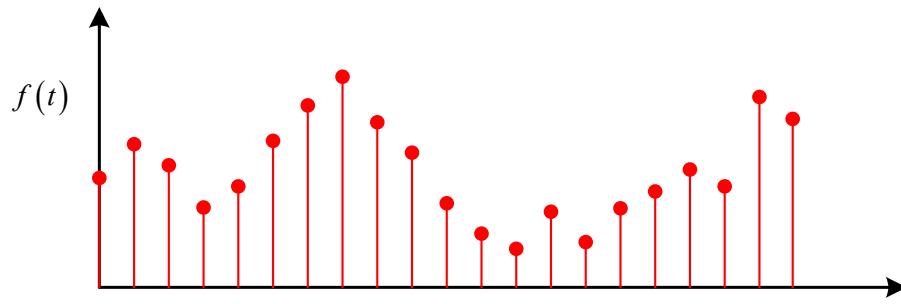


## 卷积的定义

设有两个函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ ，积分  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$   
称为  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的卷积积分，简称卷积，记为  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$

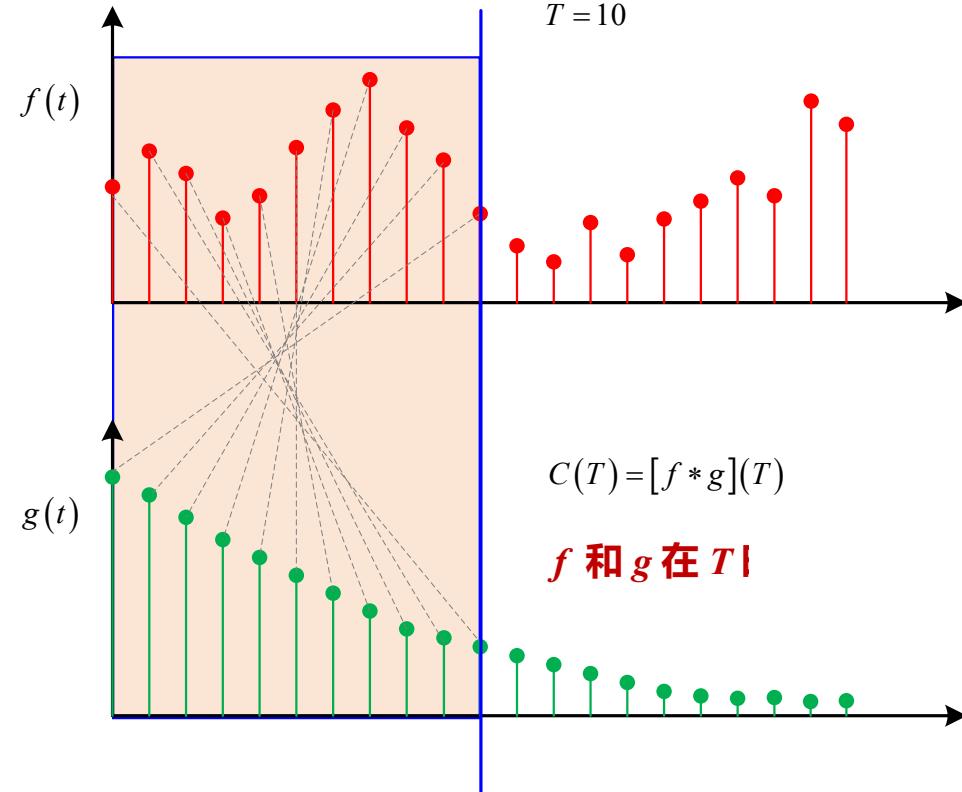
## 卷积的物理意义



$f(t)$ —输入信号。

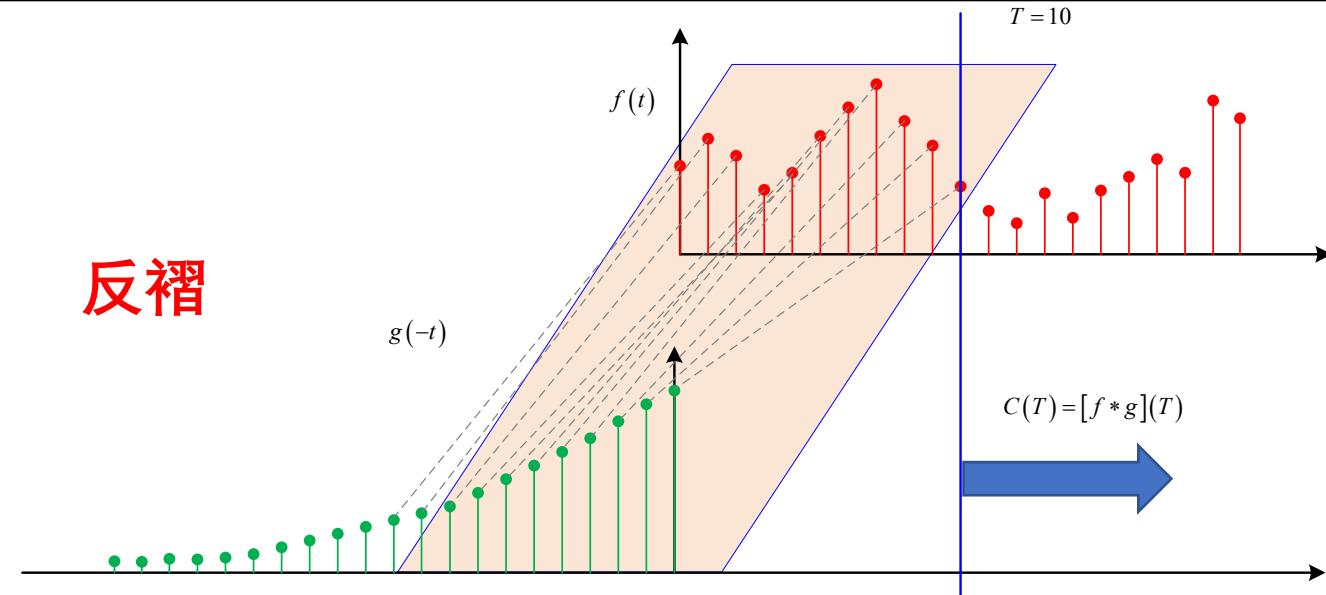
$g(t)$ —表示在某个时刻输入的信号值（考虑为一个冲激信号）的衰减趋势。

在  $t=T$  时刻， $t=0$  时刻的输入  $f(0)$  的值衰减为  $f(0)g(T)$ 。

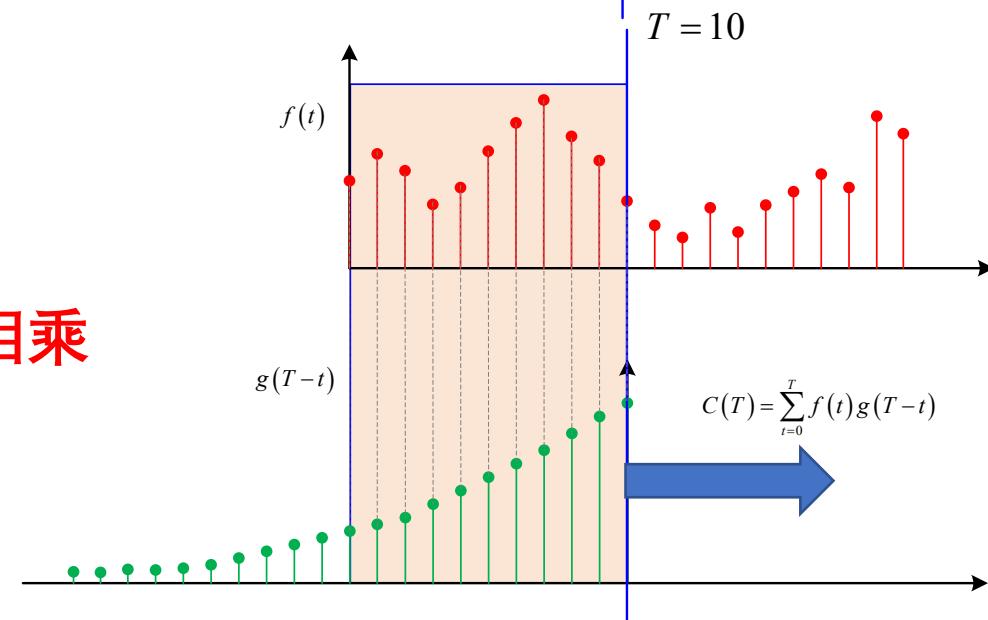


- 因信号是连续输入的，最终输出的是所有之前输入信号的**累积效应**。
- 如在  $T=10$  时刻，输出结果跟图中**阴影区域整体**有关。因为  $f(10)$  是刚输入的，所以其输出结果应为  $f(10)g(0)$ ；输入  $f(9)$  只经过了 1 个时间单位的衰减，产生的输出为  $f(9)g(1)$ 。以此类推，即图中虚线所描述的关系。
- 这些对应点**相乘然后累加**，就是  $T=10$  时刻的输出信号值，即为  $f(t)$  和  $g(t)$  两个函数在  $T=10$  时刻的**卷积值**。

反褶



平移→对位相乘  
→相加



卷积的含义：

“**卷**”--指函数的翻转，  
从  $g(t)$  变成  $g(-t)$  的过程；  
也包含滑动的意味 ( $T$   
变化使窗口平移)。

“**积**”—指积分/加权求和，  
是一种累积效果。

## 系统的卷积运算分析

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

由上述卷积积分的公式可总结出卷积积分计算步骤。首先将 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的自变量 $t$ 改成 $\tau$ ，即： $x(t) \rightarrow x(\tau)$ ,  $h(t) \rightarrow h(\tau)$

再进行如下运算（即卷积积分的**四步曲**）：

**反褶：**  $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$

**时移：**  $h(-\tau) \rightarrow h(t - \tau) = h[-(\tau - t)] \begin{cases} t < 0, & \text{左移 } t \\ t > 0, & \text{右移 } t \end{cases}$

**相乘：**  $x(\tau)h(t - \tau)$

**积分：**  $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$

计算卷积积分的关键是**定积分限**。

## 卷积的计算

**卷积的定义式计算**  $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$

积分上下限的确定 (分为三种情况)

- ① 如果  $f_1(t)$  是一个因果信号, 即  $f_1(t) = f_1(t)u(t)$ , 则积分下限取 0
- ② 如果  $f_2(t)$  是一个因果信号, 即  $f_2(t) = f_2(t)u(t)$ , 则积分上限取  $t$
- ③ 如果  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  均为因果信号, 则积分下限取 0, 上限取  $t$ , 但卷积结果要乘以  $u(t)$

因果信号通过因果系统:  $r_{zs}(t) = e(t) * h(t) = \int_0^t e(\tau)h(t - \tau) d\tau \cdot u(t)$

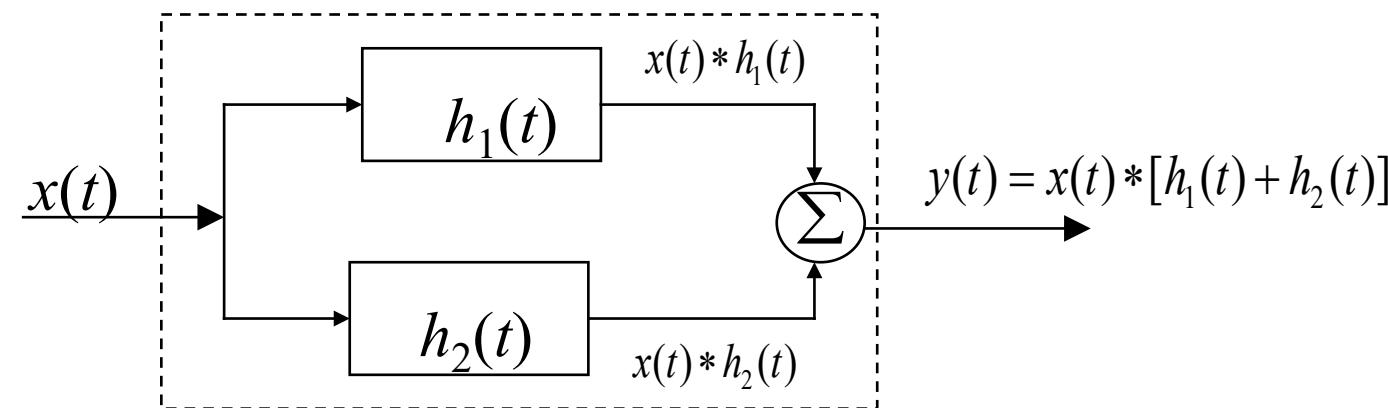
## 2.7 卷积的性质 ←便于复杂函数的卷积运算

### 2.7.1 卷积积分的代数性质

(1) 交换律  $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

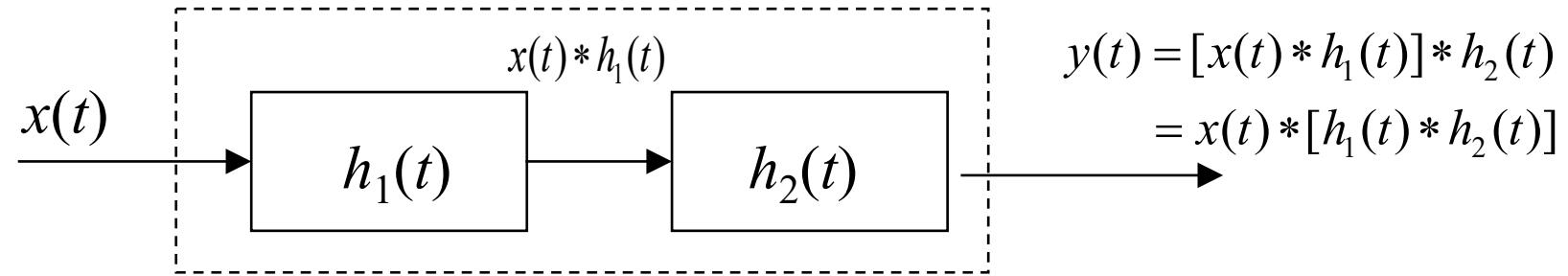
(2) 分配律  $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

分配律用于系统分析，相当于并联系统的冲激响应等于组成并联系统的各子系统冲激响应之和。



(3) 结合律  $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

结合律用于系统分析，相当于串联系统的冲激响应等于组成串联系统的各子系统冲激响应的卷积。



## 2.7.2 卷积积分的微积分性质

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda * f_2(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda$$

条件:  $f_1$  和  $f_2$  满足时间受限条件,  $t \rightarrow -\infty$  时函数值等于零。

## 2.7.3 $f(t)$ 与冲激函数或阶跃函数的卷积

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

推广:  $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

$$f(t) * \delta'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta'(\tau - t) d\tau = -[-f'(t)] = f'(t)$$

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \quad \Rightarrow u(t) * u(t) = tu(t)$$

## 2.7.4 卷积积分的时移性质

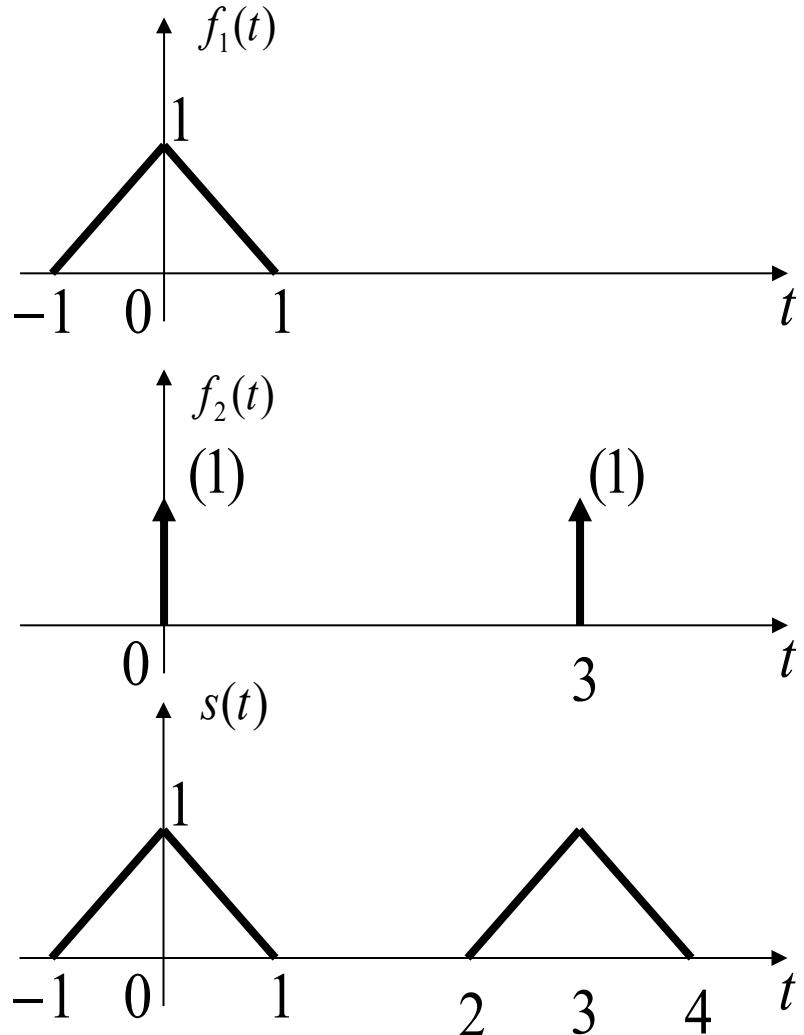
若  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 则

$$f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_2) * f_2(t - t_1) = f_1(t) * f_2(t - t_1 - t_2) = f(t - t_1 - t_2)$$

例2-20：已知  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$  如图所示，求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，并画出  $s(t)$  的波形。

解： $f_2(t) = [\delta(t) + \delta(t - 3)]$ , 则

$$\begin{aligned} s(t) &= f_1(t) * [\delta(t) + \delta(t - 3)] \\ &= f_1(t) * \delta(t) + f_1(t) * \delta(t - 3) \\ &= f_1(t) + f_1(t - 3) \end{aligned}$$



已知  $f(t) = u(t - 1) + u(t - 3)$ ,  $x(t) = \delta(t - 3)$ , 则

$$f(t) * x(t) = ?$$

- A  $\delta(t - 4) + \delta(t - 6)$
- B  $u(t - 1) + u(t - 3)$
- C  $u(t - 4) + u(t - 6)$
- D  $\delta(t - 1) + \delta(t - 3)$

 提交

**例2-21：**已知  $f_1(t) = u(t) - u(t-2)$ 、 $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ ，求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

## 卷积的性质

**解：** $f_1(t) * f_2(t) = u(t) * e^{-t}u(t) - u(t-2) * e^{-t}u(t)$

$$\begin{aligned} u(t) * e^{-t}u(t) &= \delta(t) * \int_0^t e^{-\tau} \cdot u(\tau) d\tau && \text{微积分性质} & f_1(t) * f_2(t) &= \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^t e^{-\tau} \cdot u(\tau) d\tau \\ &= (1 - e^{-t})u(t) \end{aligned}$$

$$u(t-2) * e^{-t}u(t) = (1 - e^{-(t-2)})u(t-2) \quad \text{时移性质} \quad f_1(t-t_1) * f_2(t) = f(t-t_1)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t-2)$$

**例2-23：**已知某LTI系统的阶跃响应  $g(t) = e^{-t} u(t)$ , 求当激励  $e(t) = 3e^{2t}$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) 时系统的零状态响应  $r_{zs}(t)$ 。

解：先求冲激响应  $h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \delta(t) - e^{-t} u(t)$

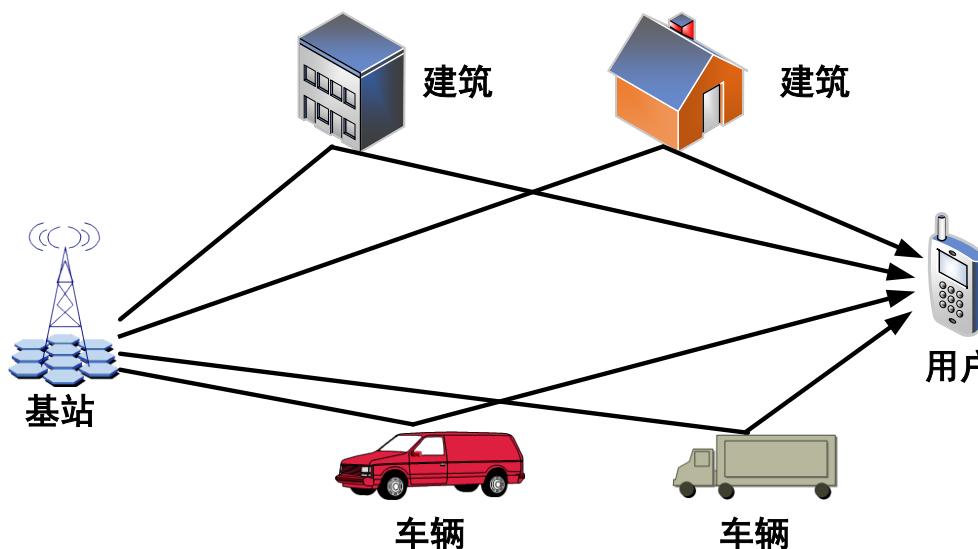
零状态响应  $r_{zs}(t) = e(t) * h(t) = 3e^{2t} * [\delta(t) - e^{-t} u(t)] = 3e^{2t} - 3e^{2t} * e^{-t} u(t)$

$$3e^{2t} * e^{-t} u(t) = 3 \int_{-\infty}^t e^{2\tau} e^{-(t-\tau)} d\tau = 3e^{-t} \int_{-\infty}^t e^{3\tau} d\tau = 3e^{-t} \cdot \frac{1}{3} e^{3t} = e^{2t}$$

$$r_{zs}(t) = 3e^{2t} - e^{2t} = 2e^{2t}, \quad -\infty < t < +\infty$$

## 案例：利用卷积分析通信系统多径失真的消除方法

**例2-26：**无线通信系统中，当接收机从正常途径收到发射信号时，可能还有其他寄生的传输路径，例如从发射机经某些建筑物反射到达接收端，产生所谓“**回波**”现象；又如，当我们需要完成室内录音时，除了直接进入麦克风的正常信号之外，经墙壁反射的信号也可能被采集录入，这也是一种“回波”现象。



无线通信中的多径效应

建立**数学模型**的简单方法就是定义一个接收信号  $r(t)$ ，它包括正常传输信号  $e(t)$  与回波分量  $ae(t-T)$  二者之和

$$r(t) = e(t) + ae(t-T)$$

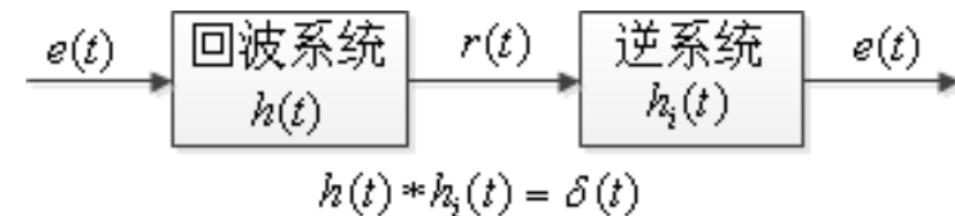
$T$  表示回波路径引入的传输延时，而系数  $a < 1$ ，表示回波路径对信号强度产生衰减。如果传输环境有更多的附加路径，那么这一数学模型可表示为

$$r(t) = \sum_{m=0}^N a_m e(t-T_m)$$

此时，这个回波系统的**冲激响应**：
$$h(t) = \sum_{m=0}^N a_m \delta(t - T_m)$$

则响应与激励的关系，可通过卷积计算：
$$r(t) = h(t) * e(t)$$

为了从含有干扰信号的回波系统中取出正常信号，需要设计一个“**逆系统**”进行补偿。



此时，问题就来到了如何设计“逆系统”的**冲激响应**  $h_i(t)$  上来了。

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) * h_i(t) = [e(t) * h(t)] * h_i(t) = e(t) * [h(t) * h_i(t)] \\ &\Rightarrow h(t) * h_i(t) = \delta(t) \end{aligned}$$

求解  $h_i(t)$ ，采用反卷积计算的方法。（教材p81）

## ※ 2.8 用算子符号表示微分方程

### 2.8.1 用算子符号表示微分方程

#### ■ 算子符号表示规定

若把微分方程中的微分与积分用下示符号表示：

$$P = \frac{d}{dt} \quad \frac{1}{P} = \int_{-\infty}^t (\quad) d\tau$$

则有  $Px = \frac{dx}{dt}$        $P^n x = \frac{d^n x}{dt^n}$        $\frac{1}{P} x = \int_{-\infty}^t (x) d\tau$

#### ■ 用算子符号表示微分方程

运用上述算子符号表示规定，下述微分方程

$$C_0 \frac{d^n r(t)}{dt^n} + C_1 \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \dots + C_{n-1} \frac{d r(t)}{dt} + C_n r(t) = E_0 \frac{d^m e(t)}{dt^m} + E_1 \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + E_{m-1} \frac{d e(t)}{dt} + E_m e(t)$$

则可表示为：

$$\begin{aligned} & C_0 p^n r(t) + C_1 p^{n-1} r(t) + \cdots + C_{n-1} p r(t) + C_n r(t) \\ & = E_0 p^m e(t) + E_1 p^{m-1} e(t) + \cdots + E_{m-1} p e(t) + E_m e(t) \end{aligned}$$

或简化为：

$$\begin{aligned} & (C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + \cdots + C_{n-1} p + C_n) r(t) \\ & = (E_0 p^m + E_1 p^{m-1} + \cdots + E_{m-1} p + E_m) e(t) \end{aligned}$$

若进一步令：

$$\begin{cases} D(p) = C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + \cdots + C_{n-1} p + C_n \\ N(p) = E_0 p^m + E_1 p^{m-1} + \cdots + E_{m-1} p + E_m \end{cases}$$

则可进一步简化为：  $D(p)[r(t)] = N(p)[e(t)]$

**注意：**这种表示不是代数方程，而是微分方程。

## 2.8.2 算子符号的基本规则

算子符号表示的算子多项式仅仅是一种运算符号，代数方程中的运算规则有的适用于算子多项式，有的不适用。

1. 算子多项式可以进行类似于代数运算的因式分解或因式相乘展开。例如：

$$\begin{aligned}(p+3)(p+2)x &= \left(\frac{d}{dt} + 3\right)\left(\frac{d}{dt}x + 2x\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}x + 2x\right] + 3\left[\frac{d}{dt}x + 2x\right] \\ &= \frac{d^2}{dt^2}x + 5\frac{d}{dt}x + 6x = (p^2 + 5p + 6)x\end{aligned}$$

因此有：  $(p+3)(p+2) = p^2 + 5p + 6$

## 2. 算子多项式等式两端的公共因式不能随意相消。

例如:  $\frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}y$  的算子方程表示为  $px = py$ , 而对微分方程两边的积分后有  $x = y + C$ 。

## 3. 算子多项式中的算子乘除顺序不可随意颠倒。

即:

$$p \frac{1}{p} x \neq \frac{1}{p} px$$

理由是:

$$p \frac{1}{p} x = \frac{d}{dt} \cdot \int_{-\infty}^t x d\tau = x$$

而

$$\frac{1}{p} px = \int_{-\infty}^t \left( \frac{d}{dt} x \right) \cdot d\tau = x(t) - x(-\infty) \neq x$$

这表明“先乘后除”的算子运算(先微分后积分)不能相消, 而“先除后乘”(先积分后微分)可以相消。

### 2.8.3 用算子符号建立微分方程

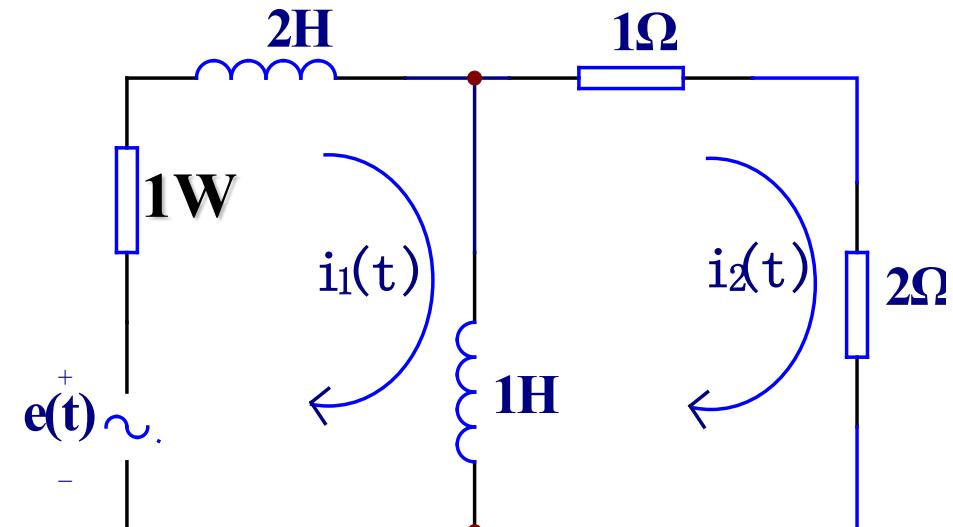
按照上述讨论规则，即可运用算子符号表示微分方程。这不仅使书写简便，而且在建立系统数学模型时便于由联立方程消元构成一元高阶微分方程。

**例2-27：**如图所示电路，激励电压为  $e(t)$ ，请用算子符号列写求电流  $i_2(t)$  的微分方程。

**解：**列出2个网孔的回路方程

$$\begin{cases} 3\frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) - \frac{di_2(t)}{dt} = e(t) \\ -\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} + 3i_2(t) = 0 \end{cases}$$

写成算子形式  $\begin{cases} (3p+1)i_1(t) - pi_2(t) = e(t) \\ -pi_1(t) + (p+3)i_2(t) = 0 \end{cases}$



$$\xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & p+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & p+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad} i_2(t) = \frac{p}{(2p^2 + 10p + 3)} e(t) \xrightarrow{\quad} (2p^2 + 10p + 3)i_2(t) = pe(t)$$

$$\text{即: } 2\frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + 10\frac{di_2(t)}{dt} + 3i_2(t) = \frac{d}{dt}e(t)$$

注意:

- 1)  $P$  多项式两端的  $P$  不能随意消去;
- 2) 求解时, 应先将微积分方程组化成微分方程组。

## 2.8.4 传输算子概念

对于线性时不变系统，一般讲，激励信号 $e(t)$ 与响应 $r(t)$ 之间的关系可用算子形式写成如下的微分方程：

$$D(p)r(t) = N(p)e(t) \quad \text{或} \quad r(t) = \frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

则  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  就定义为传输算子。

当求系统的零输入响应时，就是解齐次方程  $D(p)r(t) = 0$

当求系统的零状态响应时，则要解  $r(t) = H(p)e(t)$  的非齐次方程。

由上述可以看出：在时域分析中，算子符号形式提供了简单易行的辅助分析手段，但本质上与经典法分析系统相同，而形式上又与后述的**拉普拉斯变换**分析相似。

## ※2.9 以“分配函数”的概念认识冲激函数

- 理解“分配函数”的概念，冲激函数的数学定义（第一章）
- $\delta(t)$  的性质：

(1) 相加:  $a\delta(t) + b\delta(t) = (a+b)\delta(t)$

两个冲激函数  $\delta(t)$  相加之和仍是冲激函数，强度为二者之和。

(2) 相乘:  $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

(3) 反褶:  $\delta(t) = \delta(-t)$  偶函数

(4) 时间尺度变换:  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$  (习题1-24)

(5) 时间位移运算:  $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$  (抽选特性)

(6) 卷积运算: 任意两个冲激信号相乘没有定义，但卷积存在

$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_1)\delta(t-\tau-t_2)d\tau = \delta(t-t_1-t_2)$$

## (7) $\delta(t)$ 的复合函数 $\delta[f(t)]$ 的性质

$f(t)$  是普通函数, 若  $f(t)=0$  有  $n$  个互不相等的实根  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 则有  $\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i)$

此式说明复合函数形式的  $\delta[f(t)]$  可以化简为一系列冲激的叠加。

例2-28: 化简  $\delta(t^2 - 1)$ 。

解:  $f(t) = t^2 - 1$ , 有两个根,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -1$

$$|f'(t_1)| = |2t|_{t=1} = 2 \quad |f'(t_2)| = |2t|_{t=-1} = 2$$

$$\delta(t^2 - 1) = \frac{1}{2} [\delta(t-1) + \delta(t+1)]$$

(8) 冲激函数的积分是阶跃函数  $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

(9) 冲激函数的微分是冲激偶  $\frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t)$

## ■ 冲激偶的性质

(1)  $t$  的奇函数  $\delta'(-t) = -\delta'(t)$

(2) 相乘  $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

(3) 时间尺度变换  $\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a} \delta'(t)$   $\delta^{(k)}(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a^k} \delta^{(k)}(t)$

(4) 卷积运算  $f(t) * \delta'(t) = f'(t)$

## 第三章 傅里叶变换

3.1 引言

3.2 周期信号的傅里叶级数分析

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

3.4 傅里叶变换

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

3.7 傅里叶变换的基本性质

3.8 卷积特性

3.9 周期信号的傅里叶变换

3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

## 本次课内容

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数

## 本次课目标

1. 了解频域分析法提出的背景、过程和新应用；
2. 熟练掌握周期信号的**三角函数**和**指数**形式的**傅里叶级数**分析方法；
3. 熟练运用**波形的对称性**与**谐波特性**的关系获得傅里叶级数；
4. 熟悉**矩形波**等典型周期信号的傅里叶级数的特性。

## 3.1 引言

### 频域分析



**学习目标：**理解频域分析的基本概念——为什么要进行傅里叶变换？

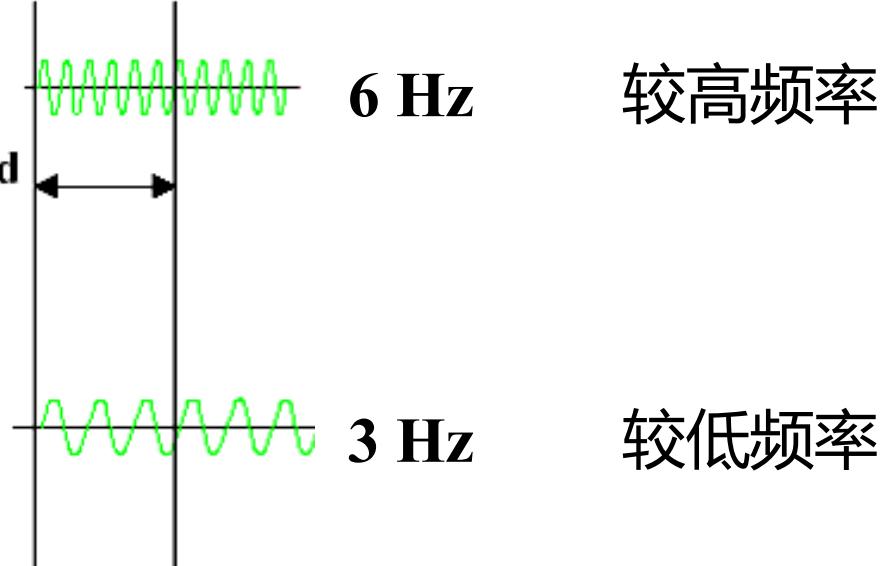
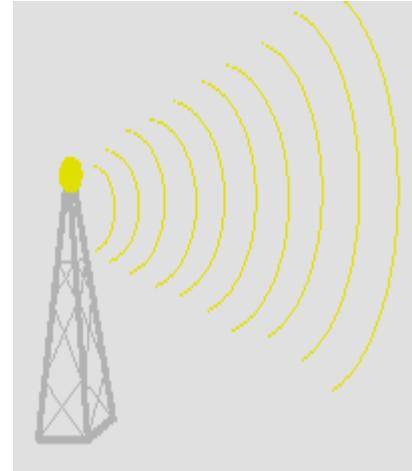
**时域分析：**信号或者系统模型的自变量为**时间**

✓ **频域分析：**自变量为**频率**

✓ **复频域分析：**自变量为复频率 (第四章内容)

**频率**，是单位时间内完成周期性变化的次数（单位为周期 / 秒 或 赫兹 Hz），  
描述信号变化的快慢

简单信号的频率可以从时域直接观察到



高频信号：能量集中，速率高，但穿透力较差

低频信号：能量分散，速率低，但绕射能力强

## 时域分析的局限性：



语音信号处理



图像信号处理

傅里叶变换在电力工程、通信、控制、力学、光学、量子物理等数学和工程领域中都得到广泛而普遍的应用

## 发展历史：

- 傅里叶 (J. Fourier, 1768-1830)，法国大革命时期数学家，1822年，在研究热传导理论时发表了《热的解析理论》一书，提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理，奠定了傅里叶级数的理论基础。
- 泊松 (Poisson) 、高斯 (Gauss) 等人把这一成果应用到电学中去，得到广泛应用。



知乎 @李狗毛

- 在当时，拿破仑时代，科学界流行一种哲学：世界是由“基元”组成的，任何一种物质只是基元的加权代数和。
- 运动是物质的一种存在形态，也应该具有相同的特性，即运动也应由基元组成。
- Fourier 通过研究“振动弦”的运动，得出一个规律：即振动弦的运动可分解为多个“正弦”信号的和。
- 又通过对很多现象的研究，Fourier 得出一个结论：任何一个信号可分解为多个“简谐周期函数”的加权和，而  $\sin(x)$ 、 $\cos(x)$  是最简单的“简谐周期函数”。

## 傅里叶 (J. Fourier, 1768-1830)

1795年，傅里叶任法国巴黎综合工科大学助教，后跟随拿破仑远征埃及。

1807年，傅里叶提出：任何一个周期信号都可以展开成具有谐波关系的正弦函数的叠加。

拉格朗日 (Lagrange, 1736-1813) 认为此主张无意义，因为实际信号中存在间断点。

1811年，傅里叶的论文《热的传播》获得科学院大奖，但仍未正式发表。

1817年，傅里叶由于对传热理论的贡献，当选法国科学院院士。

1822年，傅里叶出版《热的解析理论》，阐明了傅里叶级数的观点，并成为科学院终身秘书。

1829年，狄里赫利 (Dirichlet) 证明：只有在满足一定条件时，周期信号才能被展开成傅里叶级数。

1830年，傅里叶在法国巴黎去世，时年六十二岁。

### **狄里赫利条件 (傅里叶级数存在的充分必要条件) :**

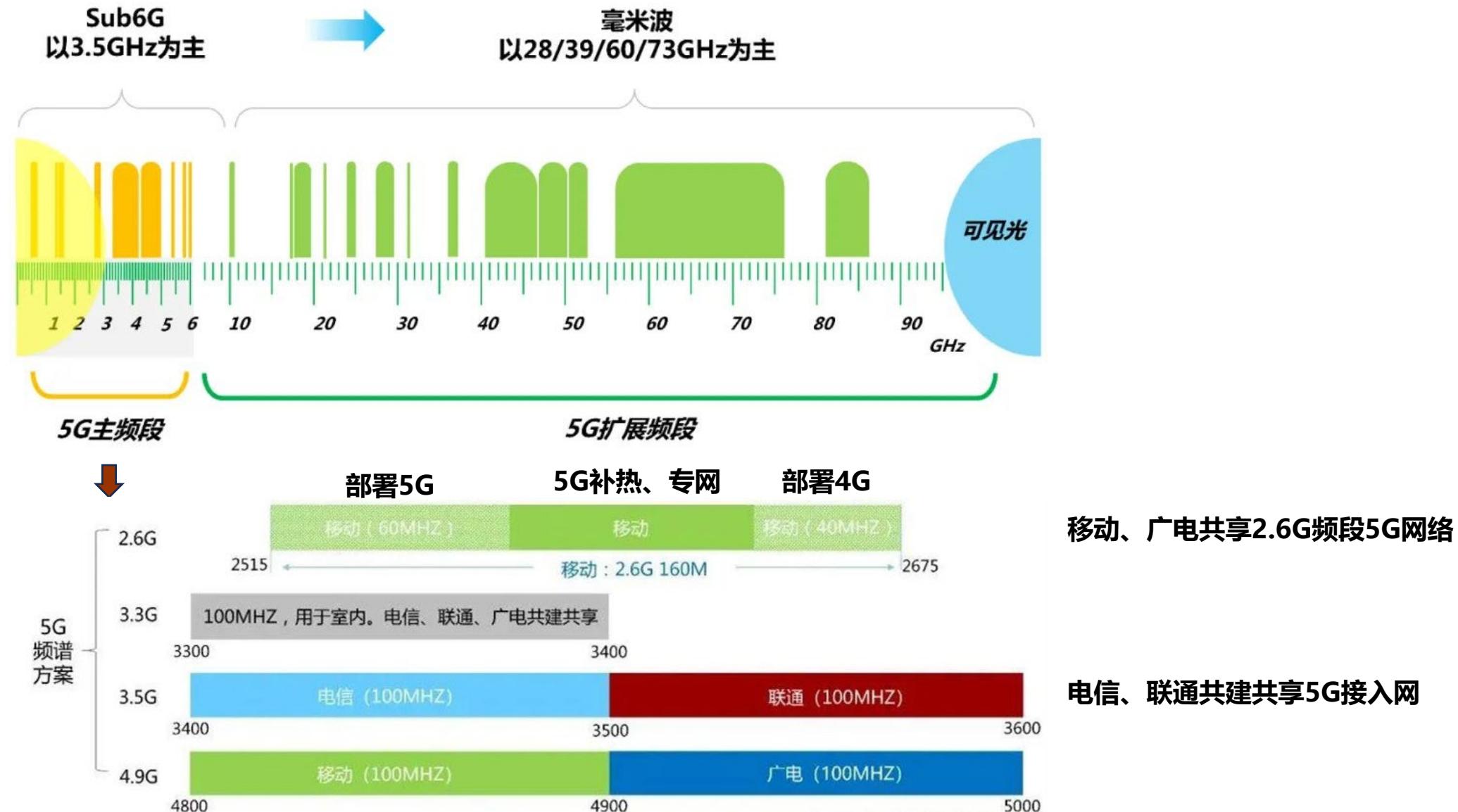
(1) 在一个周期内，信号连续或只有有限个第一类间断点 (函数在该间断点存在有限值的左极限和右极限，如函数  $|\sin(t)| / \sin(t)$  在点  $t = 0$  处)。

(2) 在一个周期内，信号的极大值和极小值的数目应为有限个。

(3) 在一个周期内，信号绝对可积，即  $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ 。

- 工程中大部分信号都满足狄里赫利条件

## 5G频谱分配



## 傅里叶变换（频域分析）的目的：

采用数学变换的手段，解决某些信号在时域特征不明显、很难分析的问题。

**傅立叶分析：**从数学的角度，是对一个函数进行傅立叶变换，而从信号处理的角度，则是对信号  $f(t)$  的频谱  $F(\omega)$  进行分析，其优点包括：

- (1) 傅立叶分析的基函数  $e^{j\omega t}$  是一组正交基，且函数形式非常简单；
- (2)  $F(\omega)$  有着明确和极其重要的物理意义，即信号  $f(t)$  的频谱；
- (3) 傅立叶变换把时域  $f(t)$  的微、积分运算在频域  $F(\omega)$  表现为乘、除运算；
- (4) 傅立叶分析具有快速算法 - FFT (Fast Fourier Transform) 。

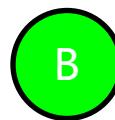
## 频域分析

- 傅里叶级数：周期信号可表示为谐波关系的正弦信号的加权和
- 傅里叶变换：非周期信号可表示为0到无穷高所有频率分量上正弦信号的加权积分

任何周期信号都可以分解成正弦函数的线性叠加。此说法 ( )



正确



错误

提交

## 第三章 傅里叶变换

3.1 引言

**3.2 周期信号的傅里叶级数分析**

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

3.4 傅里叶变换

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

3.7 傅里叶变换的基本性质

3.8 卷积特性

3.9 周期信号的傅里叶变换

3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

## 3.2 周期信号的傅里叶级数分析

周期信号的傅里叶级数：任何周期函数在满足一定条件下，可以展成正交函数线性组合的无穷级数。

如果正交函数集是三角函数集或指数函数集，此时周期函数所展成的级数就是“傅里叶级数”。

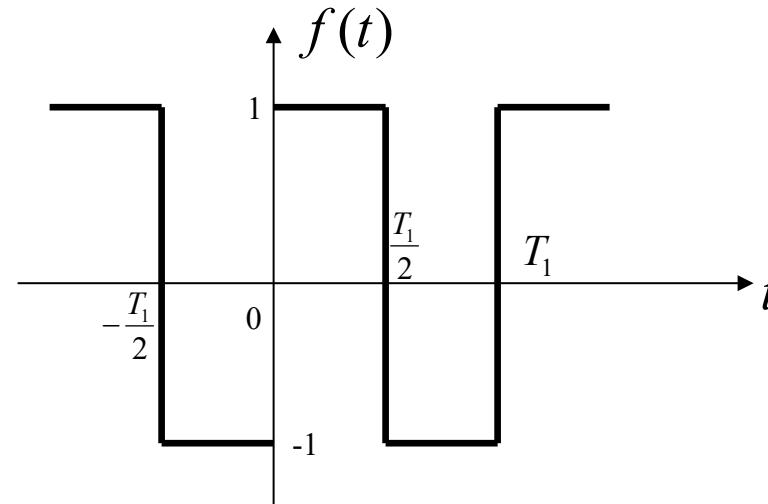
$$\{1, \cos(n\omega_1 t), \sin(n\omega_1 t)\} \quad \{e^{jn\omega_1 t}\}$$

为什么选择三角函数（正弦波）作为傅里叶级数的基本信号？

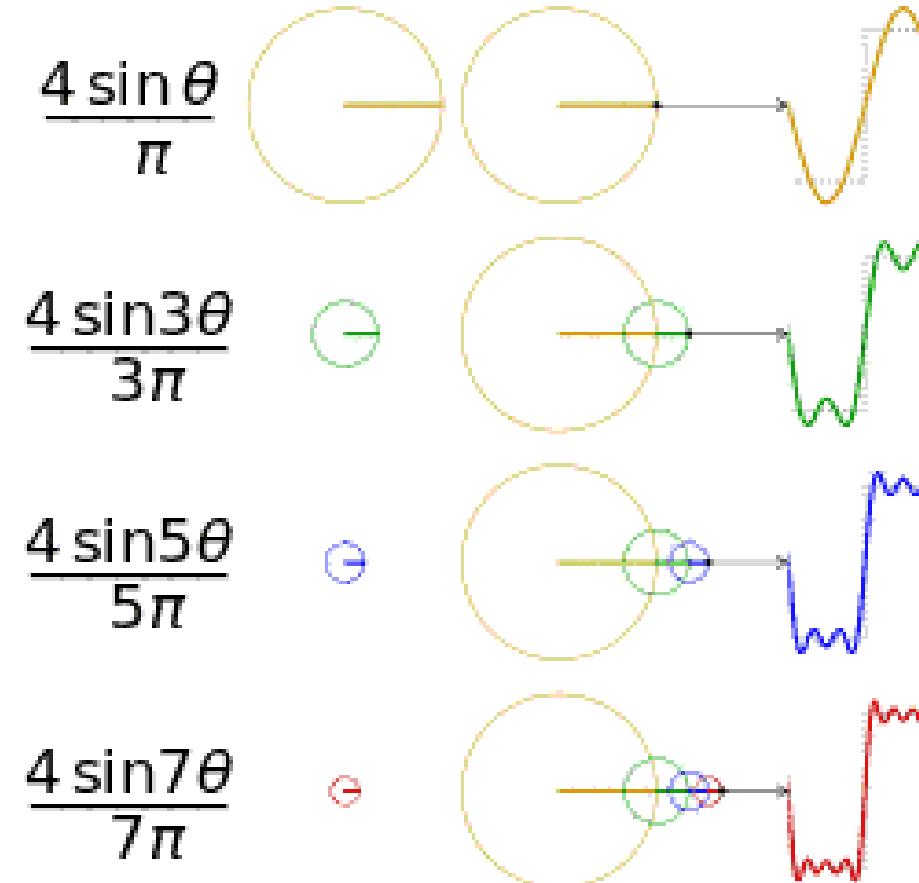
- 正弦曲线有保真度：一个正弦信号通过LTI系统后，输出的仍是正弦信号，只有幅度和相位可能发生变  
化，但频率和波形不变。
- 三角（指数）函数的积分和求导仍为三角（指数）函数。



## 周期矩形信号的产生



多少个正弦波叠加可以构成矩形信号?  
无数个。



### 3.2.1 三角形式的傅里叶级数

设周期信号为 $f(t)$ , 其周期是 $T_1$ , 基波角频率  $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1)$$

直流分量:  $a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt$

余弦分量的幅度:  $a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt$

正弦分量的幅度:  $b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_1 t dt$

以上各式中的积分限一般取:  $0 \sim T_1$  或  $-\frac{T_1}{2} \sim \frac{T_1}{2}$

三角形式的傅里叶级数也可表示成：

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (2)$$

其中  $c_0 = a_0$        $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$        $\varphi_n = \arctan(-\frac{b_n}{a_n})$

证明：  $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \frac{a_n}{c_n} \cos(n\omega_1 t) + \frac{b_n}{c_n} \sin(n\omega_1 t) \right]$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\cos(n\omega_1 t) \cos(-\varphi_n) + \sin(n\omega_1 t) \sin(-\varphi_n)]$$
$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

## 3.2.2 指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

根据欧拉公式：

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}), \quad \sin(n\omega_1 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})$$

代入上式得：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right)$$

令  $F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$       则  $F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} F(-n\omega_1) e^{-jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

指数形式:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3)$$

其中  $F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$  ----- 复振幅

$$F_0 = a_0 = c_0$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n \quad \varphi_n = \arctan \left( -\frac{b_n}{a_n} \right)$$

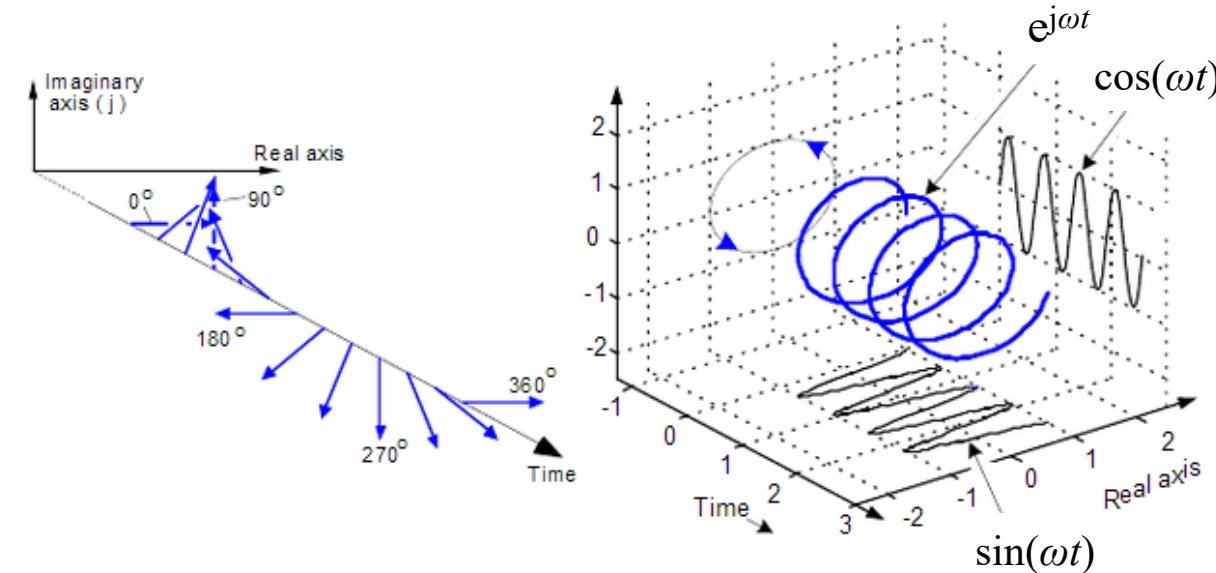
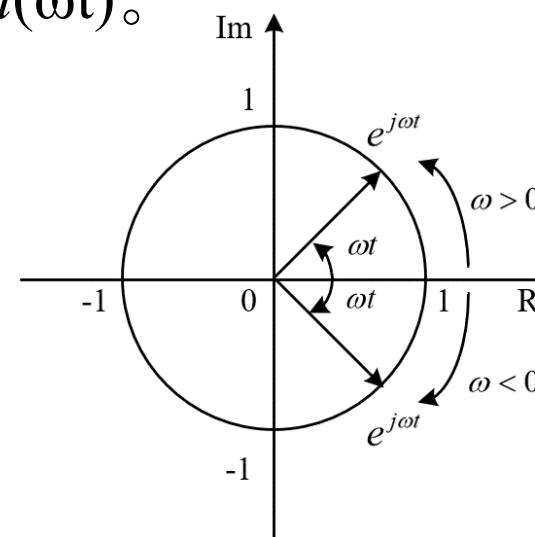


## 负频率的物理意义

负频率与我们观察所在的空间相关。我们直觉认为现实世界不存在负频率，是在二维空间即 $x-t$ 平面观察的结果，频率定义为单位时间内信号重复出现的次数，不会出现负值，这相当于仅从实平面或虚平面看信号。

在三维空间，根据欧拉公式， $e^{j\theta}$ 表示复平面单位圆上的一点， $\theta$ 表示相角。令 $\theta=\omega t$ ，随时间变化， $e^{j\omega t}$ 即表示该复数沿着单位圆旋转。定义正频率即 $\omega>0$ 为逆时针旋转，负频率即 $\omega<0$ 为顺时针旋转。

$e^{j\omega t}$ 随时间变化的曲线为螺旋线，且其在实平面的投影为 $\cos(\omega t)$ ，在虚平面的投影为 $\sin(\omega t)$ 。



## 3.2.3 周期信号的频谱及其特点

### 1. 周期信号的频谱

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1)$$

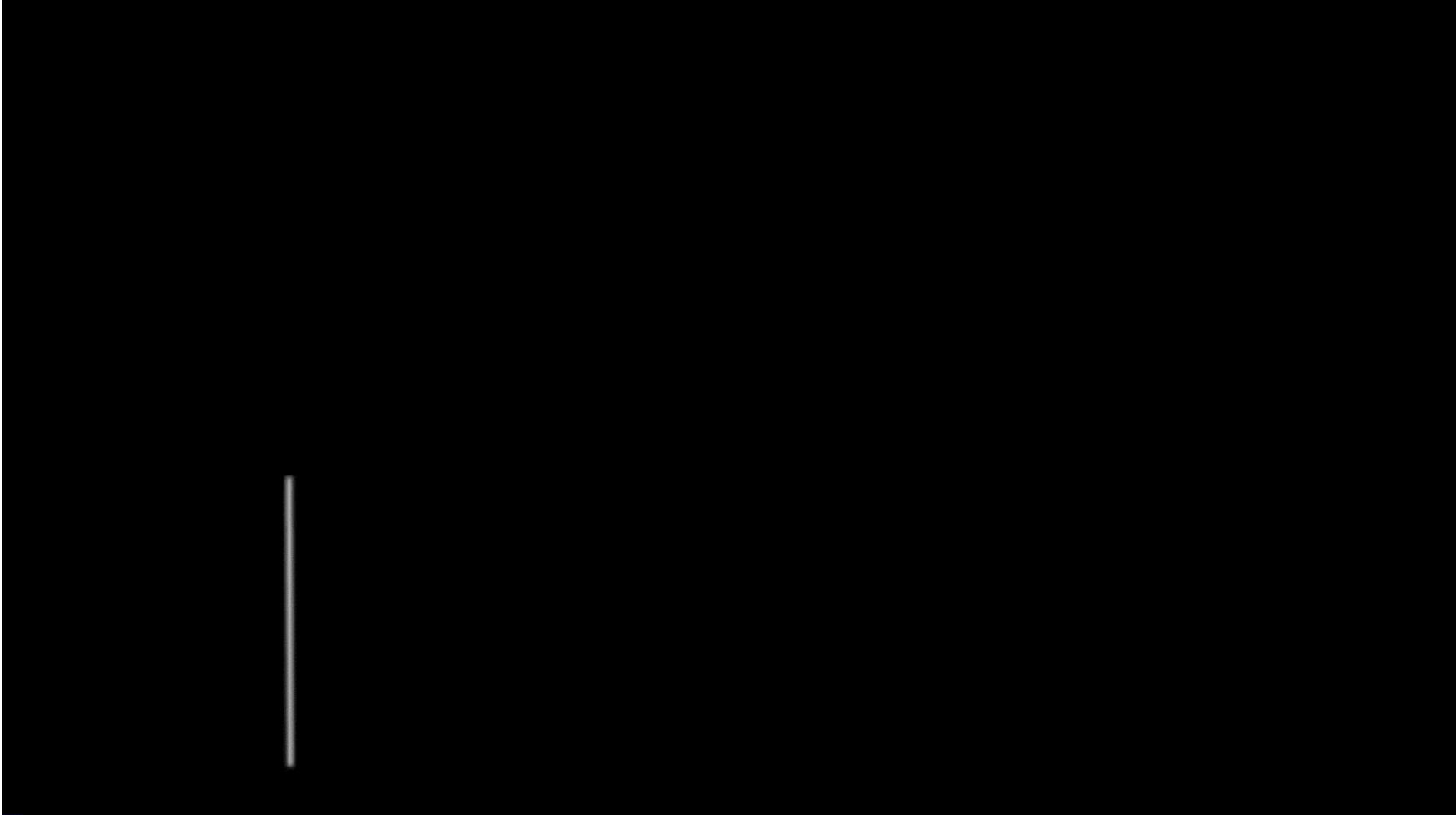
$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (2)$$

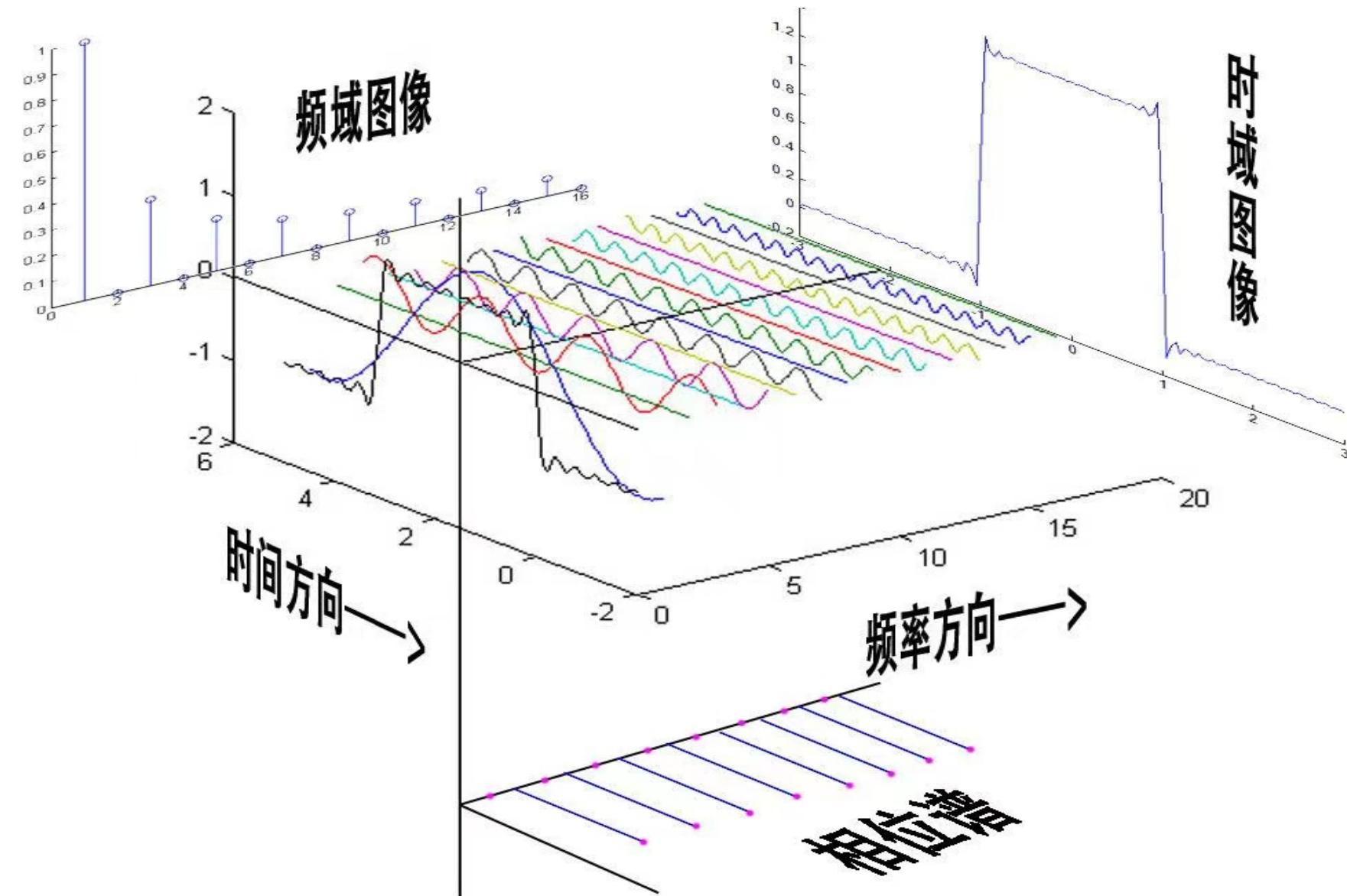
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3)$$

为了能既方便又明确的表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可画出**频谱图**来直观的表示。

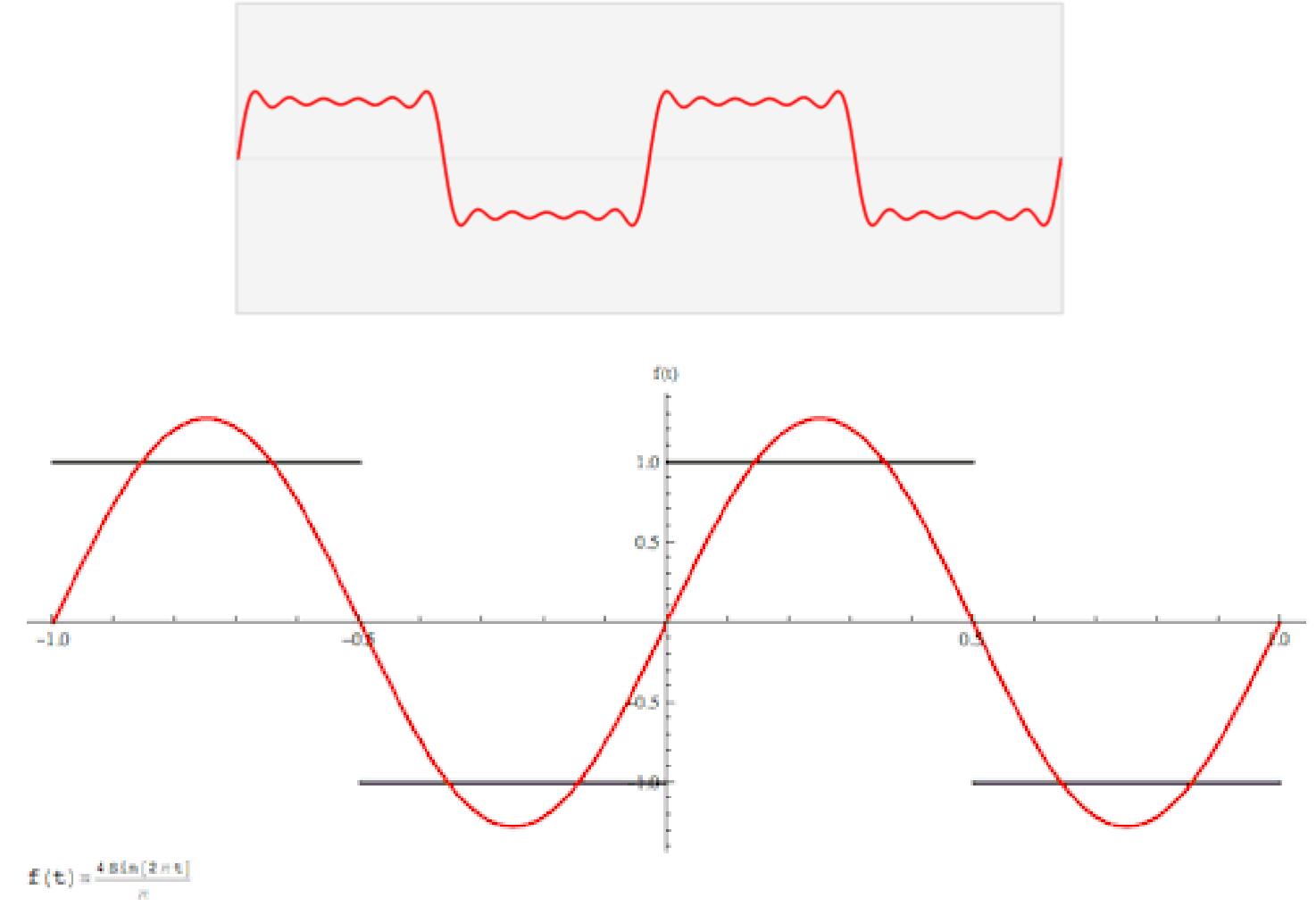
如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，便可直观的看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。

[周期矩形信号的频谱图 \(点击播放视频\)](#)





## ❖ 傅里叶级数展开



**例3-1** 选择对于题图所示的周期矩形信号的三角形式傅里叶级数的正确参数。 (多选)

 A

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

 B

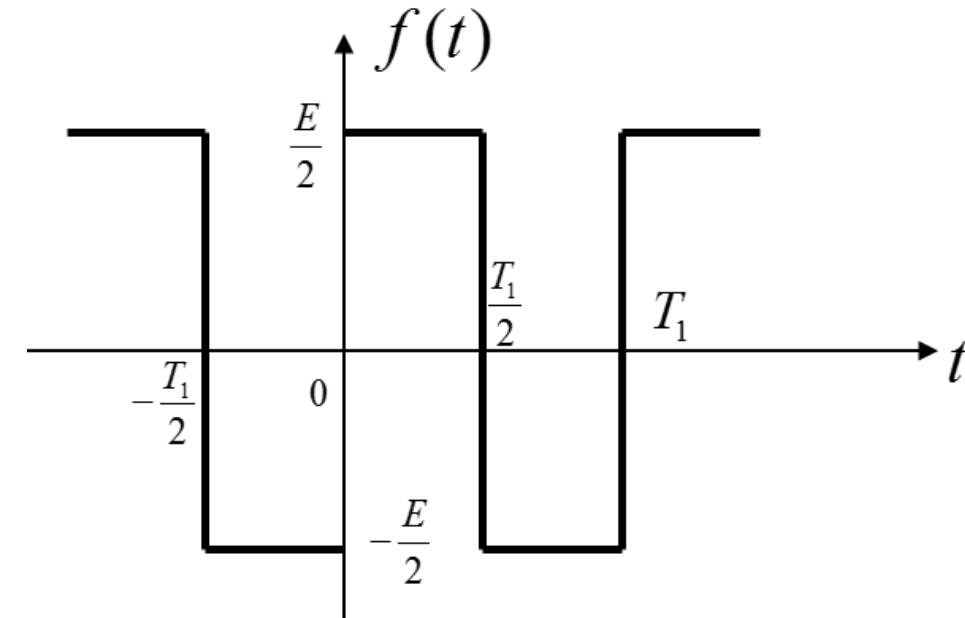
$$b_n = 0$$

 C

$$b_n = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

 D

$$a_0 = \frac{E}{2}, a_n = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

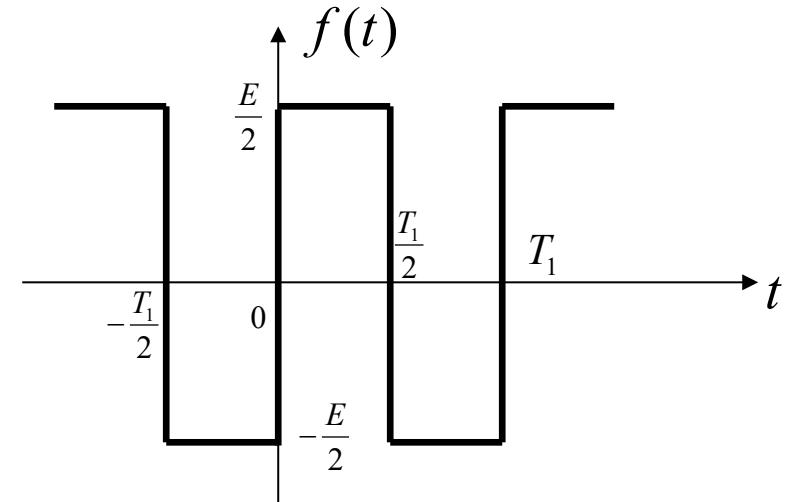


提交

**例3-1** 求如图所示的周期矩形信号的三角形式与指数形式的傅里叶级数，并画出各自的频谱图。

**解：**一个周期内  $f(t)$  的表达式为：

$$f(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} & 0 \leq t < \frac{T_1}{2} \\ -\frac{E}{2} & -\frac{T_1}{2} \leq t < 0 \end{cases} \quad (\text{奇函数})$$



$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt = 0 \quad a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

**三角形式:**

$$c_n = b_n = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$

因此  $f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t = \frac{2E}{\pi} \left( \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right)$

或  $f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(n\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)$

**指数形式:**

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = -j\frac{b_n}{2} = \begin{cases} -\frac{jE}{n\pi} & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots \\ 0 & n = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \dots \end{cases}$$

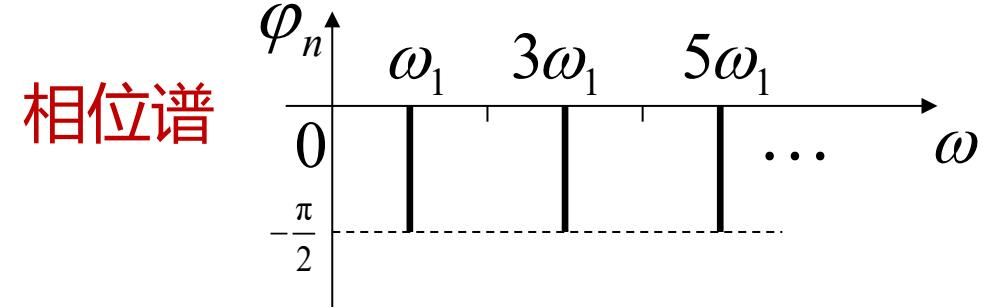
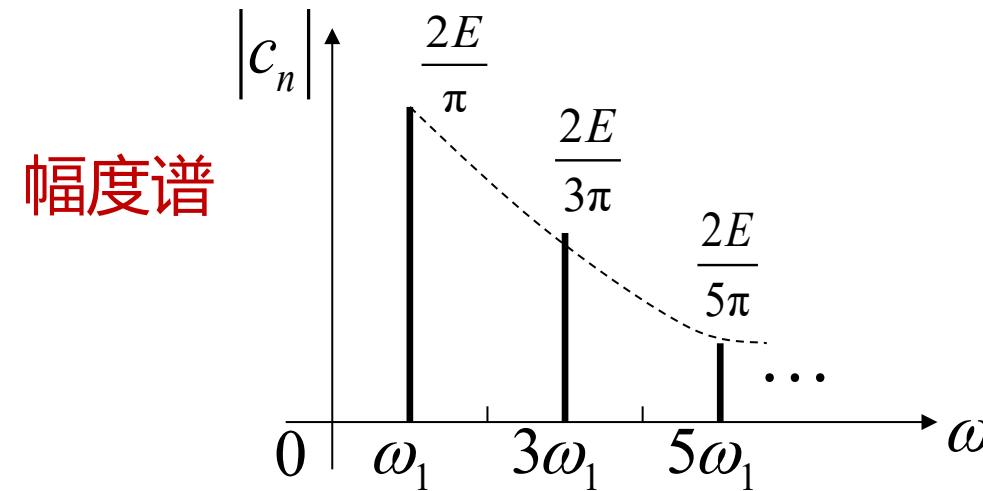
$$f(t) = \left( \frac{jE}{\pi} e^{-j\omega_1 t} - \frac{jE}{\pi} e^{j\omega_1 t} \right) + \left( \frac{jE}{3\pi} e^{-j3\omega_1 t} - \frac{jE}{3\pi} e^{j3\omega_1 t} \right) + \dots$$

$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \frac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5 \dots) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

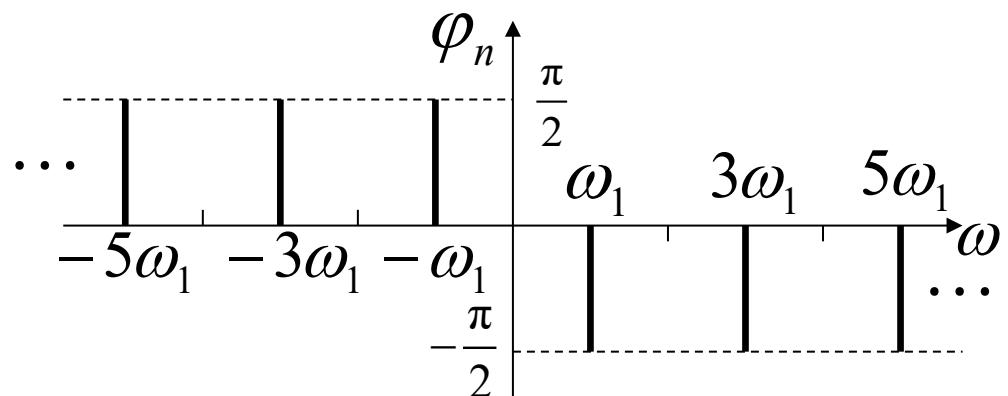
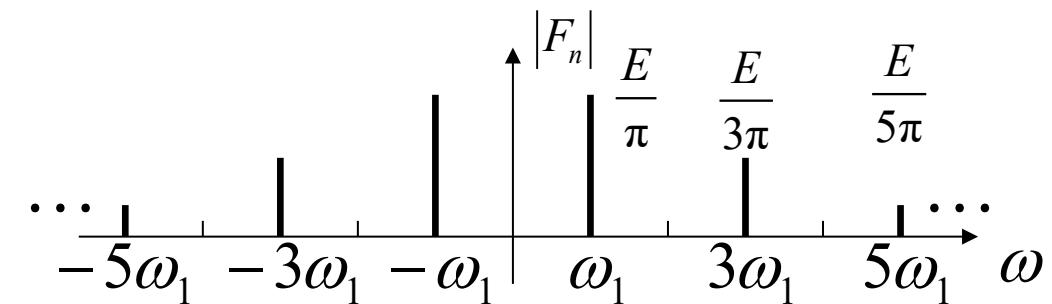
$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$



$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots)$$

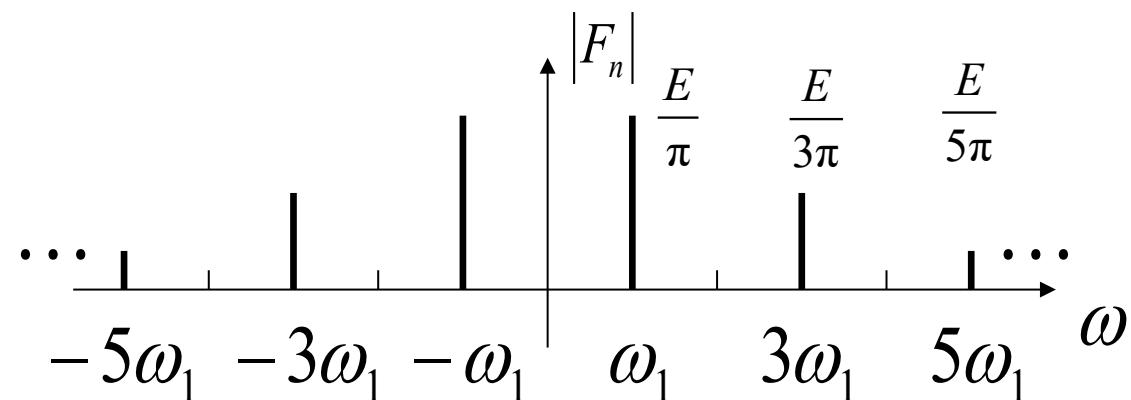
$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \frac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5 \dots) \end{cases}$$

负频率能量守恒  
幅度减半



## 2. 周期信号频谱的特点

- (1) **离散性**---频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。
- (2) **谐波性**---谱线出现在基波频率  $\omega_1$  的整数倍上。
- (3) **收敛性**---幅度谱的谱线幅度随着  $n \rightarrow \infty$  而逐渐衰减到零。



### 3.2.4 波形的对称性与谐波特性关系

已知信号  $f(t)$  展为傅里叶级数的时候，如果  $f(t)$  是实函数且它的波形满足某种对称性，则在傅里叶级数中有些项将不会出现，留下的各项系数的表达式也将变得比较简单。

波形的对称性有两类，一类是根据坐标轴对称；另一类是根据半周期对称。

#### 1. 偶函数

$$f(t) = f(-t)$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = 0 \quad t \text{ 的奇函数}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt \quad t \text{ 的偶函数}$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt \quad t \text{ 的偶函数}$$

所以，在偶函数的傅里叶级数中不会有正弦分量，只可能含有（直流）和余弦分量  
(教材99页)。

## 2. 奇函数

$$f(t) = -f(-t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = 0 \quad t \text{ 的奇函数}$$

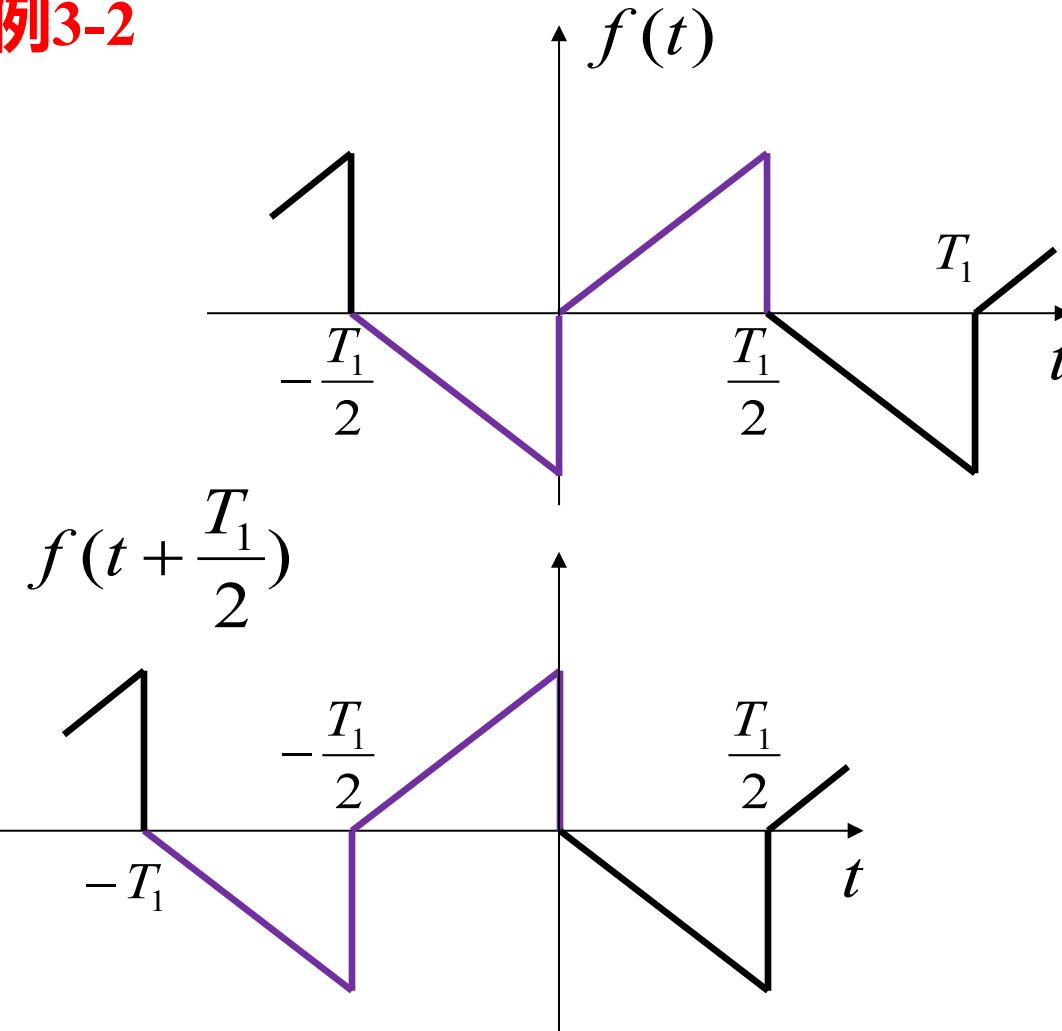
$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0 \quad t \text{ 的奇函数}$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \quad t \text{ 的偶函数}$$

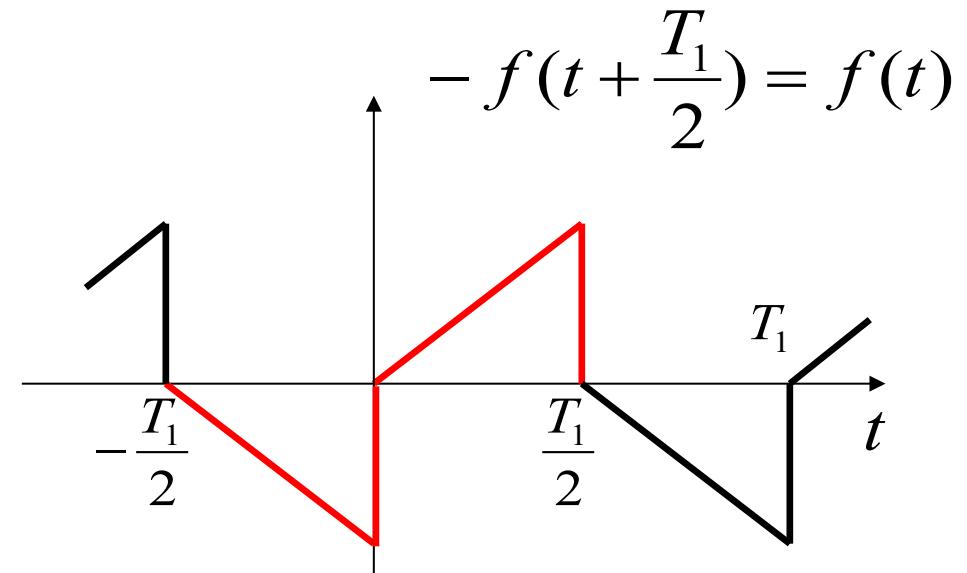
所以，在奇函数的傅里叶级数中不会含有直流与余弦分量，只可能包含正弦分量  
(教材100页)。

## 3. 奇谐函数 (半波奇对称)

例3-2



$$f(t \pm \frac{T_1}{2}) = -f(t) \quad \text{或} \quad -f(t \pm \frac{T_1}{2}) = f(t)$$



$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = 0 \quad \text{积分区间是一个周期, 一个周期内是 } t \text{ 的奇函数}$$

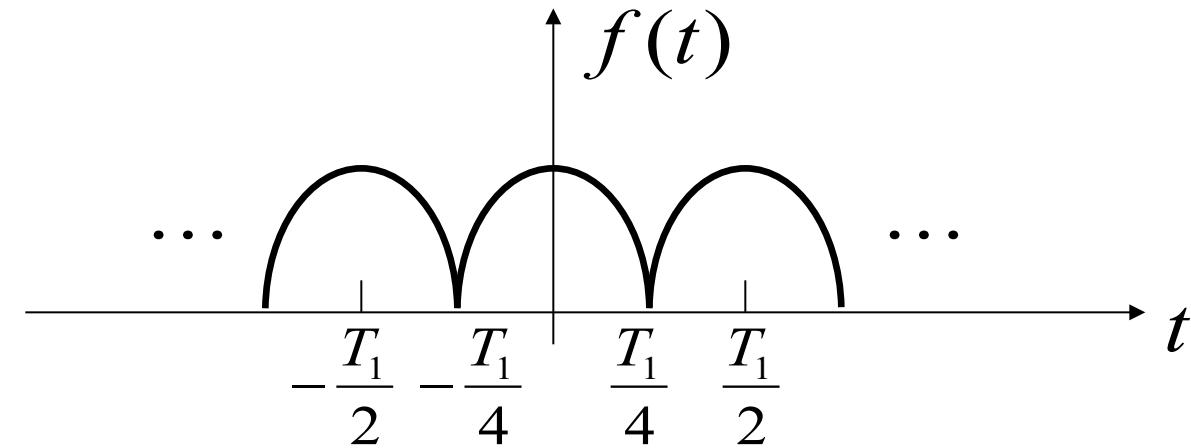
$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5 \dots) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5 \dots) \end{cases}$$

可见，在奇谐函数的傅里叶级数中，只会含有基波和奇次谐波的正弦、余弦分量，而不会包含直流和偶次谐波分量。（教材101页）

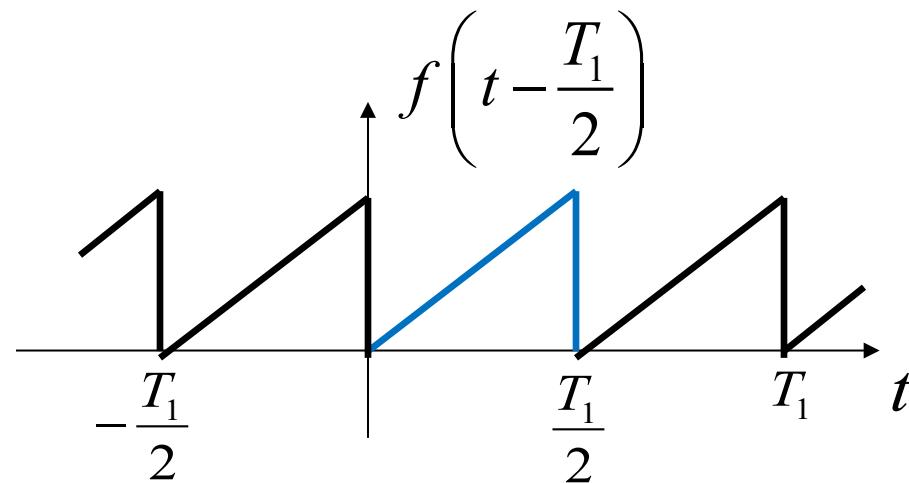
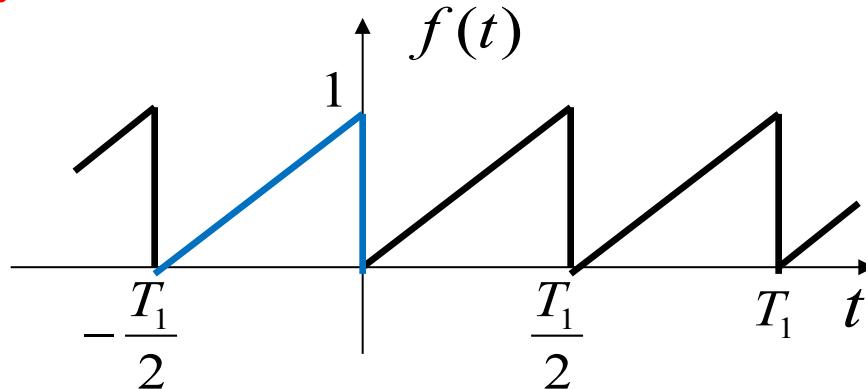
## 4. 偶谐函数 (半波偶对称)

$$f(t \pm \frac{T_1}{2}) = f(t)$$



在偶谐函数的傅里叶级数中，只会含有（直流）与偶次谐波的正弦、余弦分量，而不会包含奇次谐波分量。

例3-3：



## 波形对称性与谐波特性的总结

$f(t)$ 的对称条件	展开式中系数特点
$f(t) = f(-t)$ , 纵轴对称 (偶函数)	$b_n = 0, a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt$
$f(t) = -f(-t)$ , 原点对称 (奇函数)	$a_n = 0, b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt$
$f(t) = f(t + \frac{T}{2})$ , 半波偶对称 (偶谐函数)	无奇次谐波, 只有直流和偶次谐波
$f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$ , 半波奇对称 (奇谐函数)	无偶次谐波和直流, 只有奇次 谐波分量

下列说法正确的是\_\_\_\_\_。

- A 奇谐函数一定是奇函数
- B 偶谐函数一定是偶函数
- C 奇谐函数一定不是偶函数
- D 偶谐函数一定不是奇函数
- E 以上说法都不正确

提交

## 3.2.5 吉布斯 (Gibbs) 现象

目的：用有限项近似无限项

测度准则：最小均方误差准则

$$n=1: f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \sin \omega_1 t$$

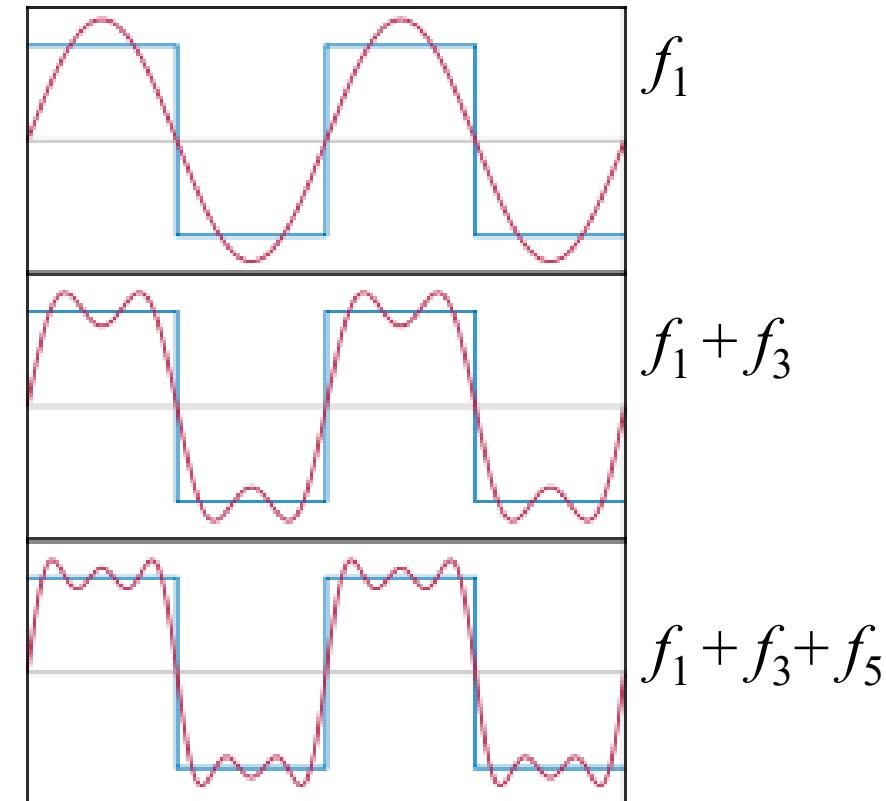
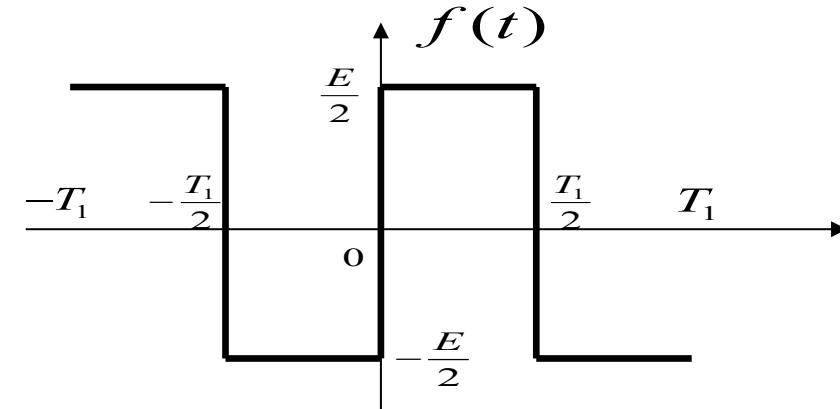
基波

$$n=3: f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \left( \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t \right)$$

三次谐波

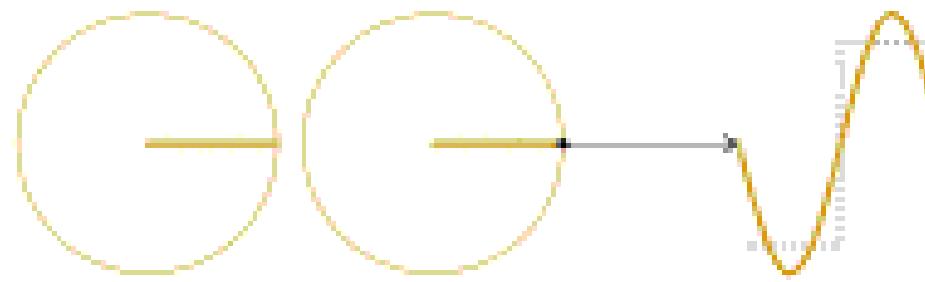
$$n=5: f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \left( \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t \right)$$

五次谐波

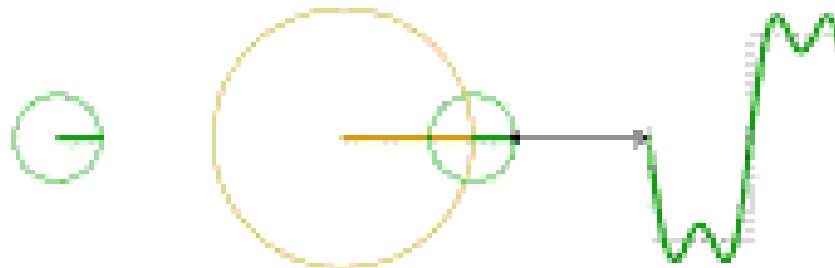


$E=2$

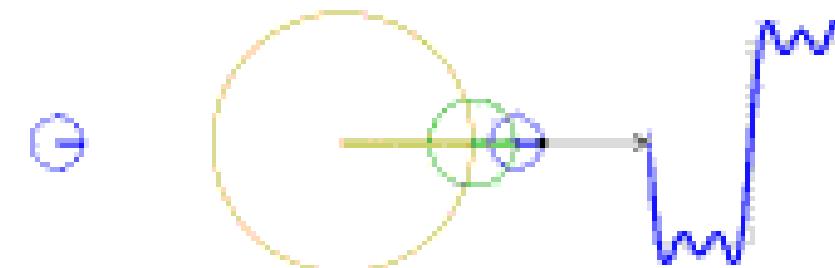
$$\frac{4 \sin \theta}{\pi}$$



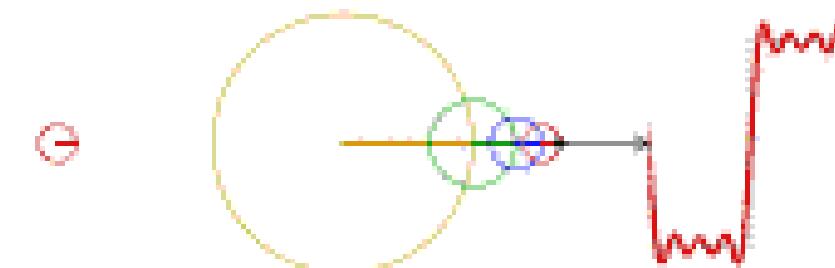
$$\frac{4 \sin 3\theta}{3\pi}$$

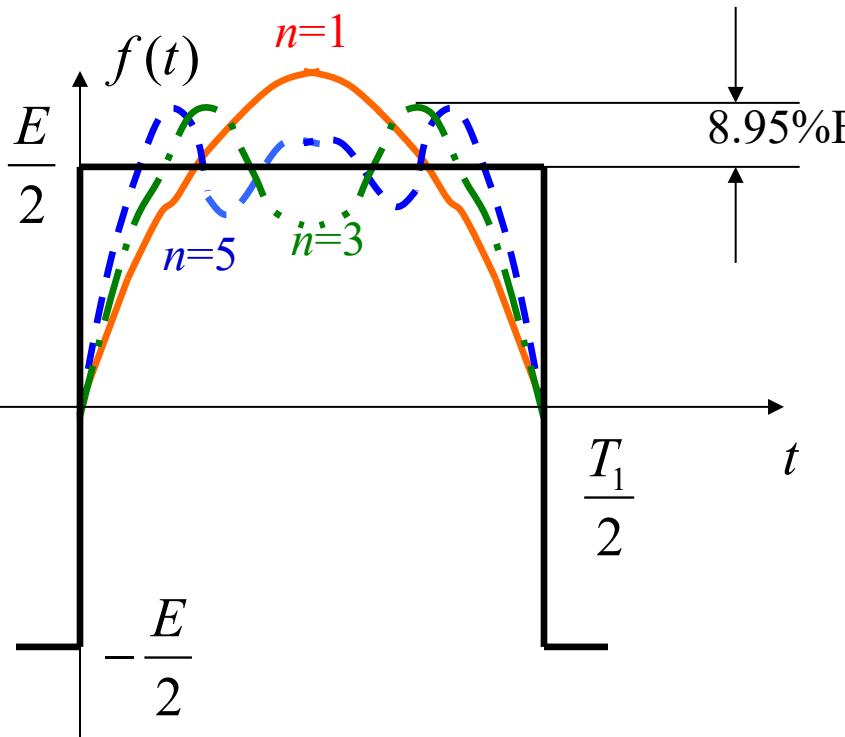


$$\frac{4 \sin 5\theta}{5\pi}$$



$$\frac{4 \sin 7\theta}{7\pi}$$





**吉布斯现象：**当选取的项数  $N$  很大时，峰起值趋于一个常数，约等于总跳变值的 9%，并从不连续点开始以起伏震荡的形式逐渐衰减下去。  
高频分量主要影响脉冲的跳变沿，低频分量主要影响脉冲的顶部。

$f(t)$  波形变化越剧烈，所包含的高频分量越丰富；  
变化越缓慢，所包含的低频分量越丰富。

- 用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超调量。
- 超调量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占的能量减少。
- 当选取的项数很大时，该超调量趋于一个常数，大约等于总跳变值的 9%，并从间断点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。