信号与系统

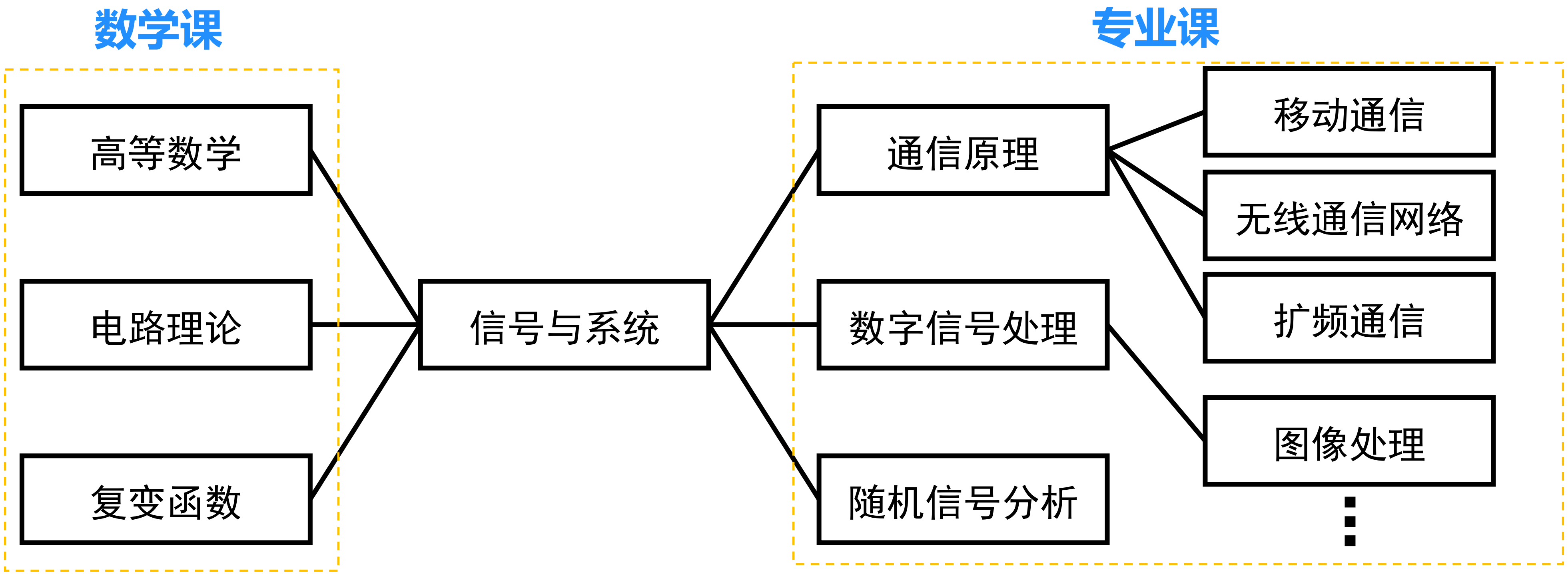
Signals and Systems

哈尔滨工业大学（深圳）
信息学部-信息科学与技术学院
曹杰
办公室：信息楼1208　Email：caojhitsz@ieee.org

课程学习目标：

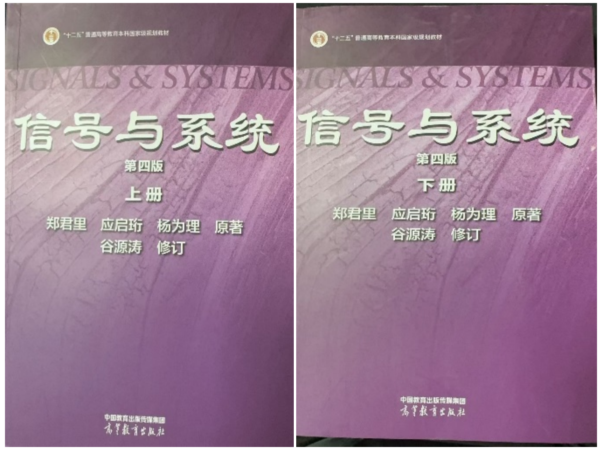
熟练掌握确定性信号和线性时不变系统的基本概念、基本理论和基本分析方法。

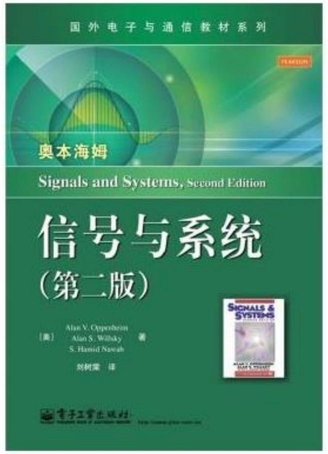
初步认识如何建立信号与系统的数学模型，经过适当的数学分析求解，对所得结果给以物理解释、赋予物理意义。

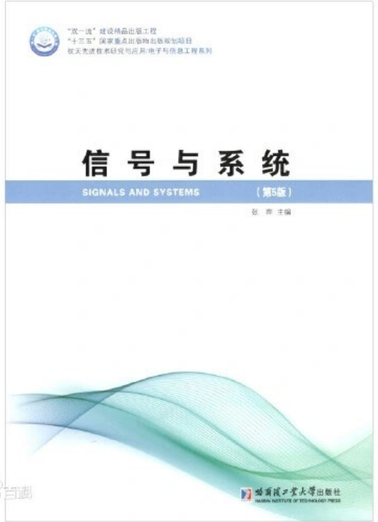


架设一座 由数学理论模型到物理和工程技术 的桥梁

选用教材：







主要教材：

- 郑君里，信号与系统（第四版）（上、下册），高等教育出版社，2024.

参考书：

- 奥本海姆（Alan V. Oppenheim）等，刘树棠译，信号与系统(第二版)，电子工业出版社，2012.
- 张晔，信号与系统（第5版），哈尔滨工业大学出版社，2020.

课程考核:

考核项目	占比	说明
期末考试	**50%**	闭卷考试。
过程性考核	**50%**	
1. 期中考试	15%	考核范围：1~4 章内容，学期中进行。 （1）客观题：**线上**，超星（学习通）平台上进行，限时 45 分钟，此项满分 5%； （2）主观题：**线下**，**闭卷**考试，限时 90 分钟，此项满分 10%。
2. 线上学习	10%	（1）按照课程进度，**按时**观看学习超星（学习通）平台的慕课视频，回答视频中嵌入的知识点问题，完成每个**视频任务点（观看 90%以上）**，此项满分 6%； （2）按照课程进度，每章学习结束后，**按时**完成超星（学习通）平台上每一章的章节测试，完成**章节测试任务点**，根据答题成绩计分，此项满分 4%。
3. 课堂参与	7%	根据课堂上参与雨课堂客观题答题次数占教师发起答题次数的百分比计算分数，不计对错。
4. 课后作业	8%	完成教师布置的课后习题（基础题必答，加强题建议巩固练习），通过雨课堂平台**按时**提交。1 章，2 章，3 章，4 章，5 章，7 章，8 章、11、12 章，每次作业平均占比。
5. 实验实践	10%	实验课老师负责，包括实验操作和实验报告。
过程性考核附加项	**2%**	**附加成绩可叠加在过程性考核成绩上，50%封顶。**
1. 课程参与	1%	课上积极参加雨课堂投稿，在超星（学习通）平台上**积极参与 AI 问答、发起讨论、回复讨论内容**等，获得教师、助教认可的，可获得 1%的附加分。
2. 平台反馈	1%	针对 AI 教学、授课、听课的学习感受、改进意见和建议，均可通过超星（学习通）平台提交，意见合理者，可获得 1%的附加分。

https://mooc1.gdhkmooc.com/course-ans/courseportal/250075231.html

第一章 信号与系统的基本概念

本次课内容

本次课内容

1. 理解信号的分类方法
2. 了解典型信号的特性和物理意义；
3. 熟练掌握信号的运算，能按步骤正确画出**时移、反褶、尺度变换**后的波形；
4. 熟悉奇异信号的特性、作用和相互关系，特别是**阶跃函数**和**冲激函数**。

第一章 信号与系统的基本概念

1.1 引言

什么是信号?

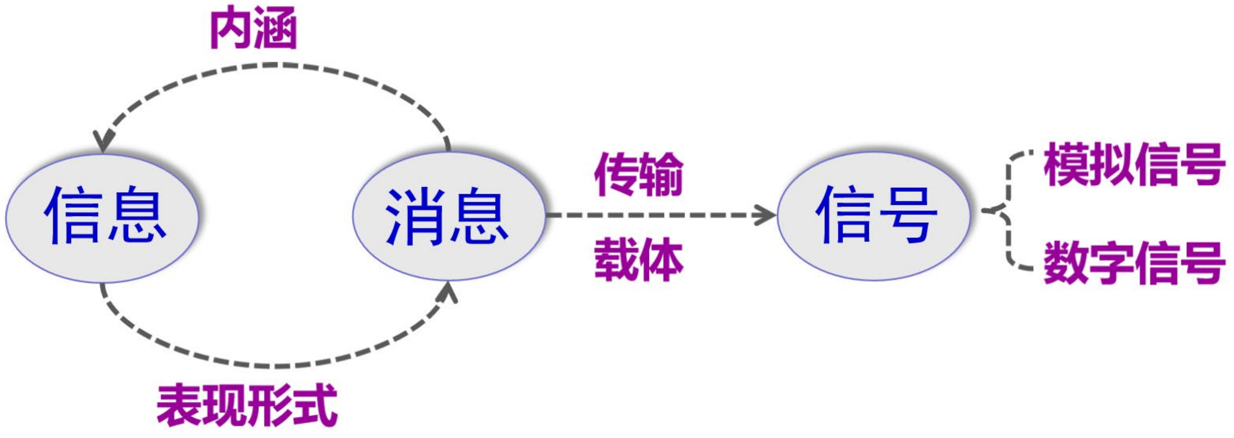
消息 (Message)：待传送的一种以收发双方事先约定方式组成的符号，如语言、文字、图像、数据等。

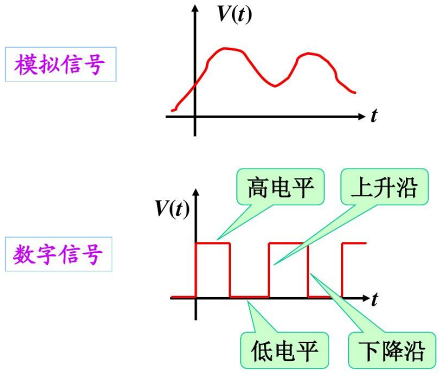
信息 (Information)：所接收到的消息中获取的未知内容，也即消息的内涵。

信号 (Signal)：一种变化的物理量（电、光、声），消息的表现形式，信息的载体。

电信号：随时间变化的电流或电压，或电容上的电荷、电感中的磁通量等。

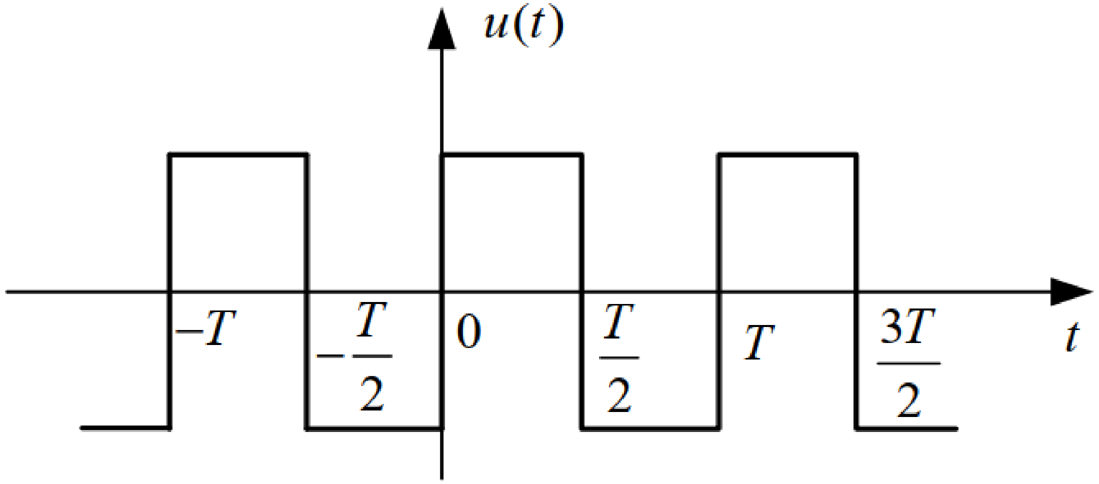
$$H(x)=\log\left(\frac{1}{p(x)}\right)$$



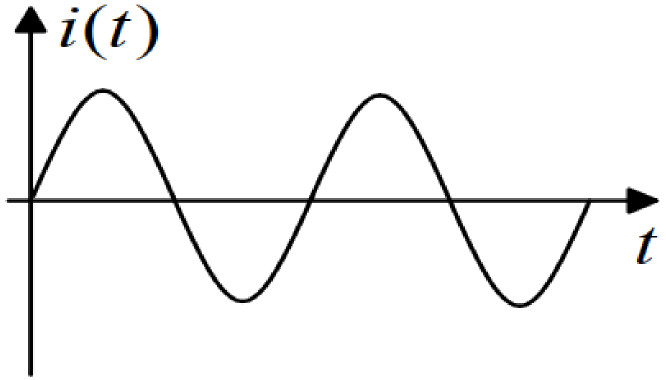


1.1 引言

电压



电流



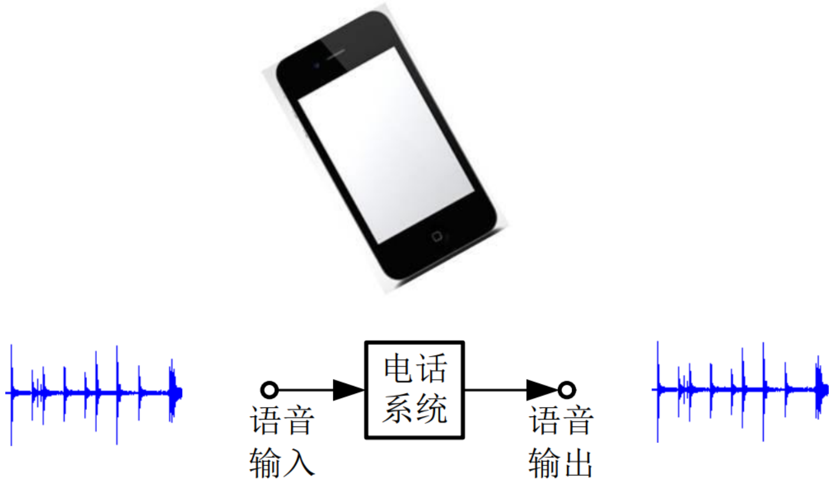
在本门课中，我们把信号描述为“随时间变化的电压或电流”

1.1 引言

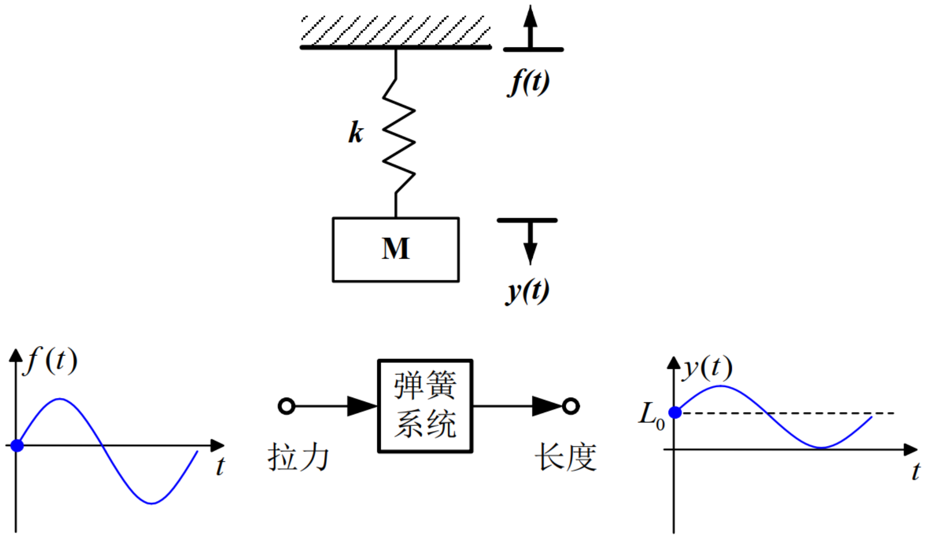
什么是系统?

电子信息技术的发展和应用，其实质是通过构成某种功能模块，来解决信号探测、传输和处理的问题，进而服务于人类社会。

系统（System）：是由一些相互作用、相互依赖的事物组合的具有特定功能的有机整体。



电话系统

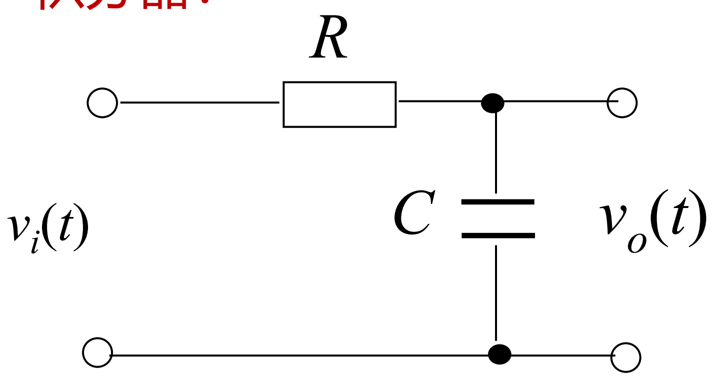


弹簧系统

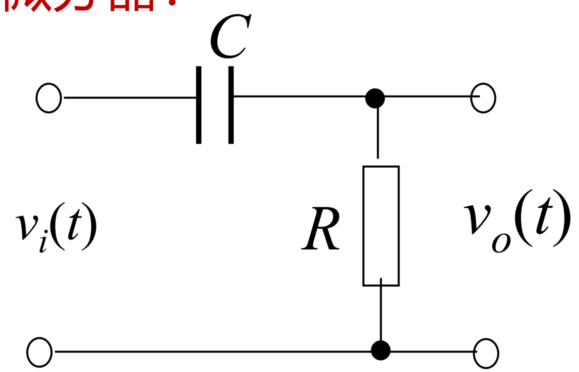
1.1 引言

电路系统：

积分器：



微分器：



通信系统：

广义上：系统的概念还应包括各种物理系统和非物理系统、人工系统和自然系统等。

1.1 引言

信号与系统是什么关系?

相对于系统而言，输入信号常称为激励，输出信号常称为响应。

可见，激励是外界对系统的作用，响应是激励和系统共同作用的结果。

这样:

(1) 激励经过系统，产生什么样的响应?

(2) 给定的激励和所要求的响应，设计什么样的系统?

(3) 便于系统分析和所要求的响应，需要什么样的激励?

等一系列问题的研究，形成了信号与系统这门专业基础课程。

激励 + 系统→响应

激励→系统←响应

激励←系统 + 响应

注意: 信号与系统之间密切相关，相辅相成。离开了信号，系统就失去了存在的意义。

第一章 信号与系统的基本概念

1.2 信号的分类和典型信号

1.2.1 信号的分类

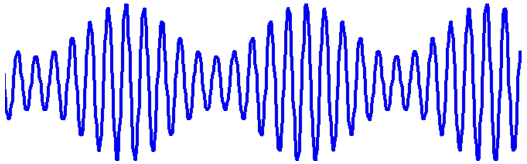
1. 确定性信号与随机性信号

确定性信号--对于确定的时刻，信号有确定的数值与之对应。能用确定时间函数表示的信号。

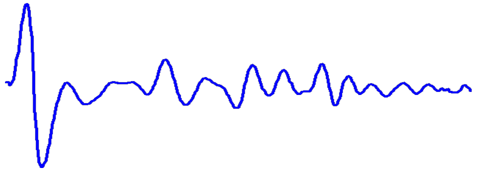
随机性信号--不可预知的信号，如噪声，雷电干扰信号。信号不能用确切的函数描述，只可能知道它的统计特性。

$$S(t) = (2 + \cos(\omega t))\cos(10\,\omega t)$$

确定性信号



随机性信号



2. 周期信号与非周期信号

周期信号：依一定时间间隔周而复始，而且是无始无终的信号。

$$f(t) = f(t + nT) \qquad n=0, \pm1, \pm2, \cdots \text{（任意整数）}$$

非周期信号：时间上不满足周而复始特性的信号。

单选题 1分

设置

例1-1：判断下列信号哪一个是周期信号?

A $\log(|t|)$

B $\cos(5t)$

C $\sin t^2$

提交

例1-2 下列信号是否为周期信号， 若是， 求其周期。

$$(1)\ f_1(t) = \sin 2t + \cos 3t \quad (2)\ f_2(t) = \cos 2t + \sin \pi t$$

解： 两个周期信号的周期分别为 T_1 和 T_2， 若 T_1/T_2 为有理数， 则周期信号之和仍然是周期信号， 其周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数。

(1) $\sin 2t$: $T_1 = 2\pi/\ \omega_1 = \pi$ s

$\cos 3t$: $T_2 = 2\pi/\ \omega_2 = (2\pi/3)$ s

判断: $T_1/T_2 = 3/2$为有理数

故$f_1(t)$存在周期，为2π。

(2) $\cos 2t$: $T_1 = \pi$ s， $\sin \pi t$: $T_2 = 2$ s

判断T_1/T_2为无理数

故$f_2(t)$为非周期信号。

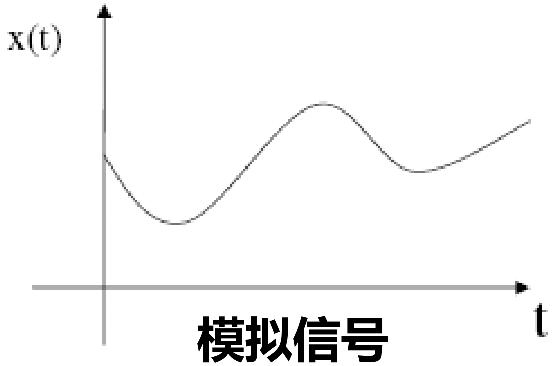
3. 连续时间信号与离散时间信号

连续时间信号：如果在所讨论的时间间隔内，对于任意时间值（除若干不连续点外），都可给出确定的函数值。

离散时间信号：在时间的离散点上信号才有值与之对应，其它时间无定义。

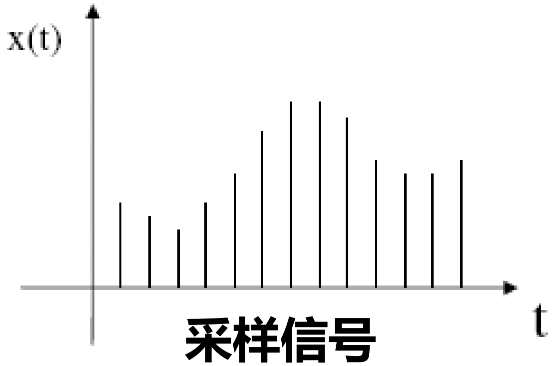
离散信号
- 采样信号：时间不连续、幅度连续
- 数字信号：时间不连续、幅度也不连续

连续时间，连续幅度



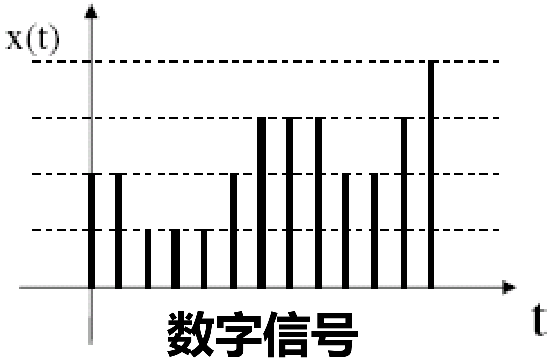
模拟信号

离散时间，连续幅度



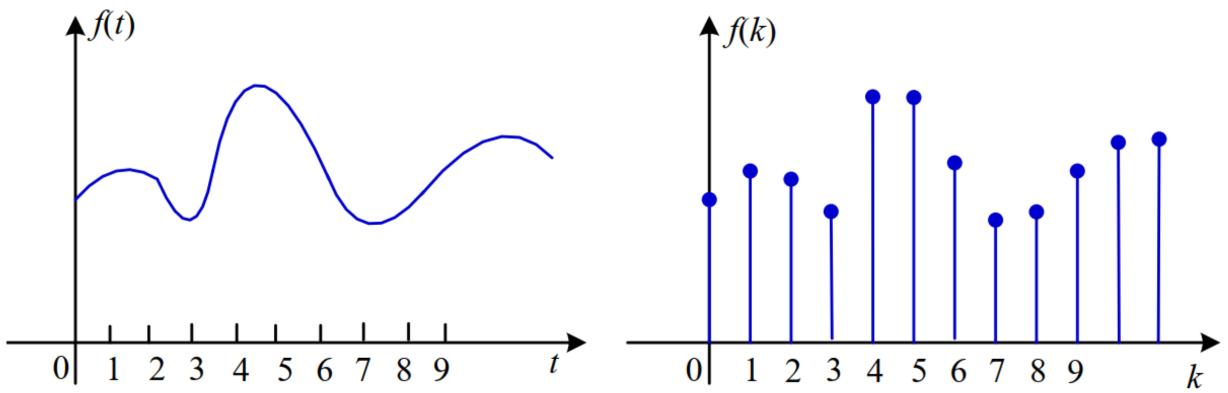
采样信号

离散时间，离散幅度



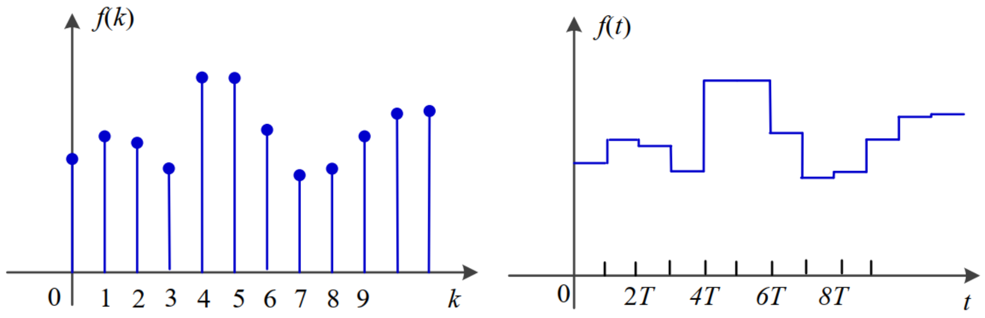
数字信号

连续信号怎样才能变成离散信号？　　采样（Sampling）



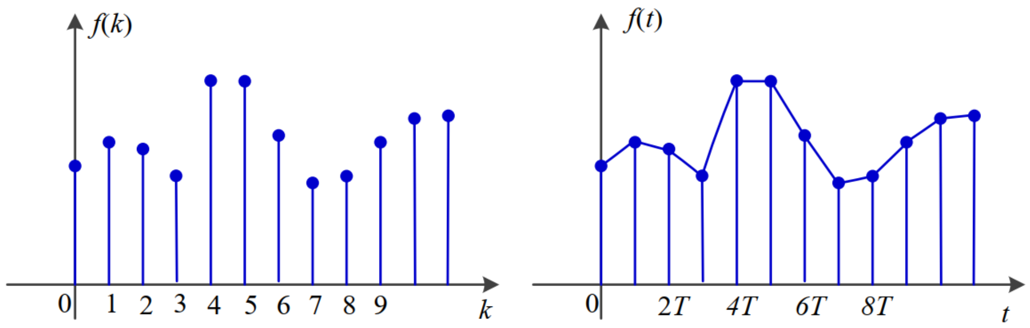
离散信号怎样才能变成连续信号？

零阶保持



T 为取样间隔

分段线性



T 为采样周期

单选题 1分

设置

$\cos(n\pi)$和$\sin(0.4n)$分别为

A 抽样信号，抽样信号

B 抽样信号，数字信号

C 数字信号，抽样信号

D 数字信号，数字信号

提交

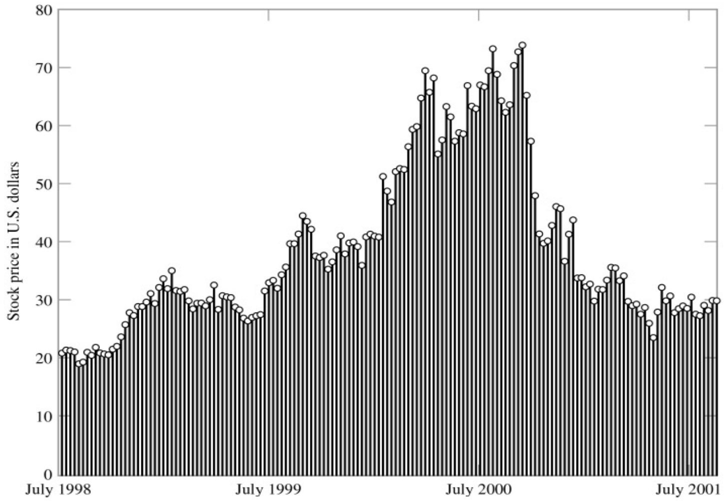
4. 因果信号和反因果信号

因果信号：$t<0$，$f(t)=0$ 的信号 （即 $t=0$ 时接入系统的信号），比如阶跃信号。

反因果信号：$t\geq 0$，$f(t)=0$ 的信号 （0 信号除外）。

5.一维信号与多维信号

信号可以表示为一个或多个变量的函数。本课程主要研究变量为时间的一维信号。



美国股市波动图：一维信号

图像信号：二维信号

1.2 信号的分类和典型信号

1.2.2 典型信号　　为什么要分析典型信号?

理论基础：线性叠加原理。

对于信号分析：把复杂信号分解成简单典型信号和的形式。

对于系统分析：如果系统满足线性非时变特性，只要知道典型信号的响应，就可以计算复杂信号的总响应。

信号 $e(t)$ → 分解 $e_i(t)$ → 系统 $h(t)$ → 叠加 $r_i(t)$ → 响应 $r(t)$

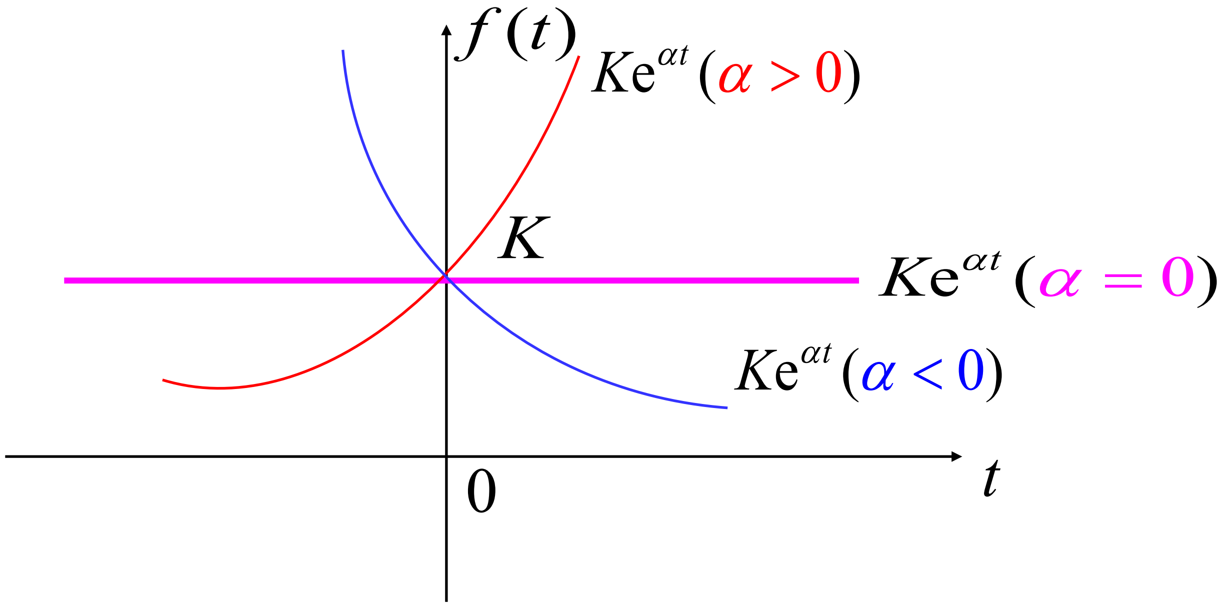
(1) 任意信号 $e(t)$ 分解成典型分量信号 $e_i(t)$ 和的形式。

(2) 分量信号 $e_i(t)$ 分别经过系统 $h(t)$，产生分量响应 $r_i(t)$。

(3) 分量响应 $r_i(t)$ 线性叠加就得系统总响应 $r(t)$。

1. 指数信号 (Exponential Signal)

表达式为 $f(t) = Ke^{\alpha t}$

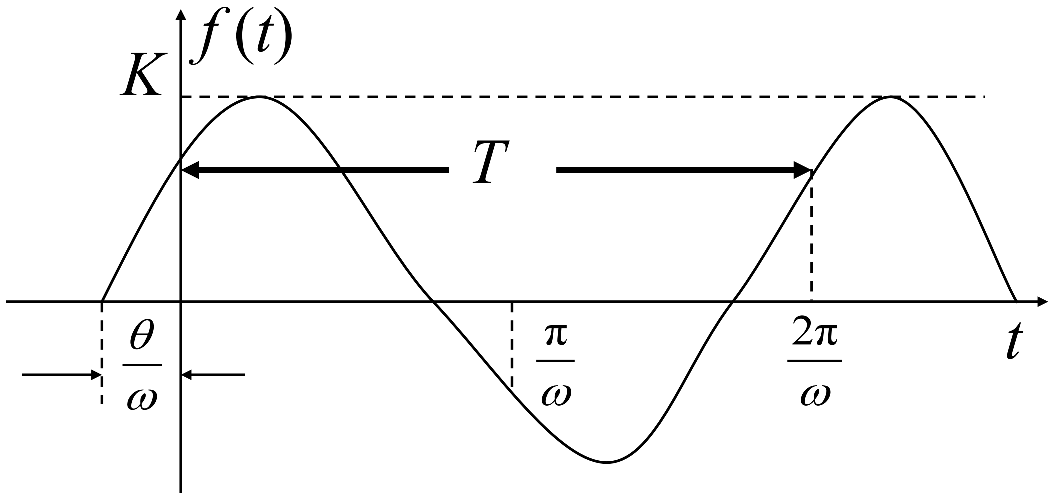


指数函数对时间的微分和积分仍然是指数形式

2. 正弦信号 (Sinusoidal Signal)

正弦信号和余弦信号二者仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$，统称为正弦信号，

表达式为 $f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$　　三要素：振幅、角频率、相位



欧拉公式（重点）

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \qquad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \qquad \cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

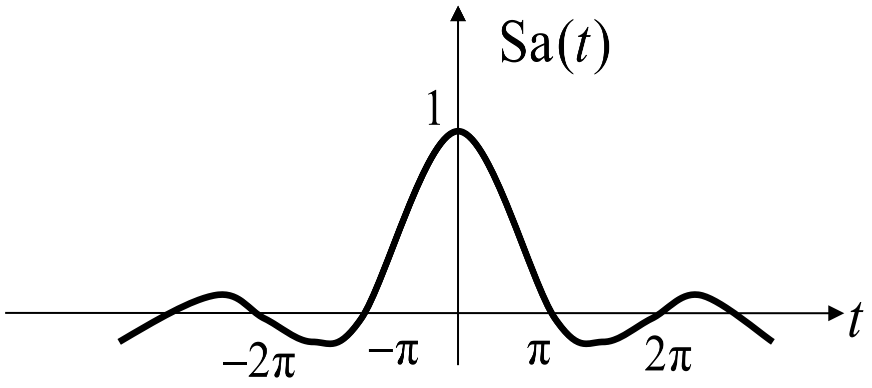
3. 复指数信号

如果指数信号的指数因子为一复数，则称为复指数信号，表示为

$$f(t) = Ke^{st} = Ke^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t} = Ke^{\sigma t}\left(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t\right)$$

4. Sa (*t*) 信号（抽样函数 Sample)

所谓抽样函数是指 **sin *t*** 与 ***t*** 之比构成的函数，表示为 $\mathrm{Sa}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$



性质：

（1） 偶函数

（2） 零点位置 $t = \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \ldots\ldots$

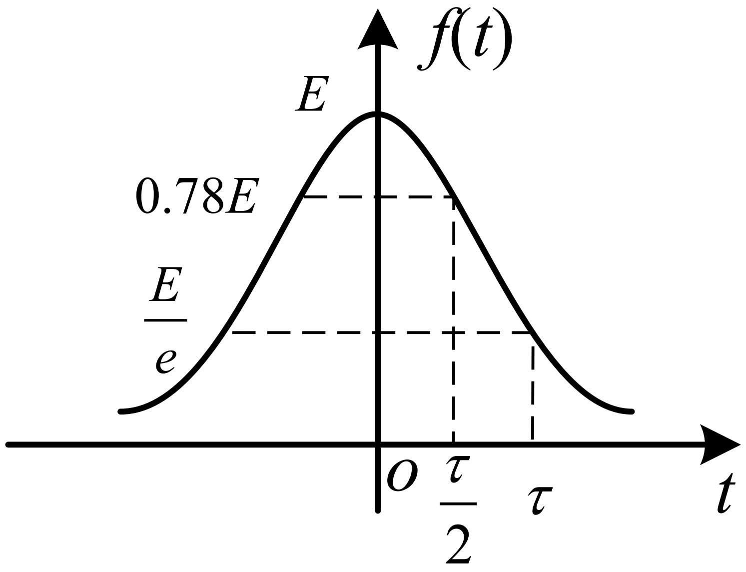
（3） 积分 $\int_0^\infty \mathrm{Sa}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$ $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{Sa}(t)\,\mathrm{d}t = \pi$

（4） $\mathrm{Sa}(0) = 1$

5. 钟形信号（高斯函数）

定义式： $f(t)=Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$

$$f(\frac{\tau}{2})=Ee^{-\frac{1}{4}}\approx 0.78E$$



性质：

（1） 偶函数

（2）涉及均值和方差

（3）在随机信号分析中有重要应用

（4）高斯函数的傅里叶变换仍然是高斯函数

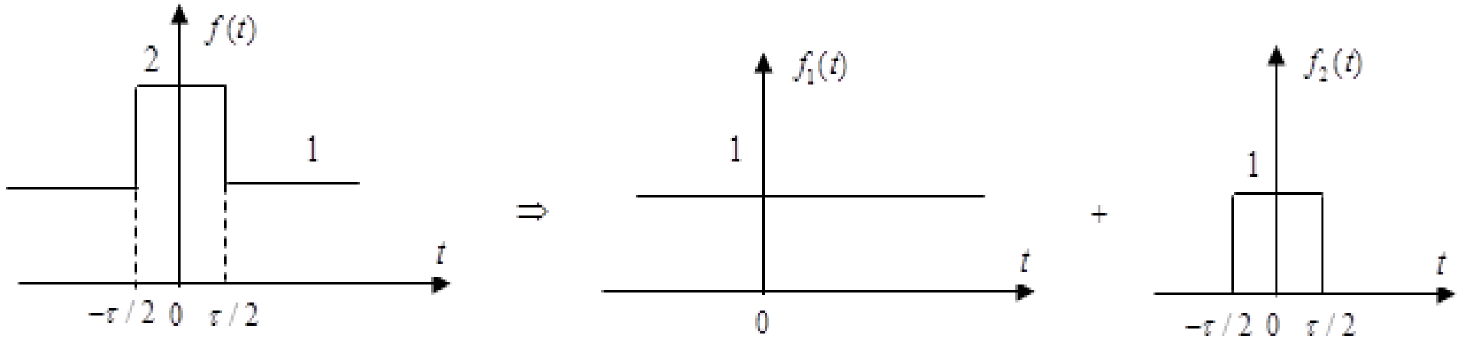
第一章 信号与系统的基本概念

1.3 信号的运算

1.3.1 信号的加法运算　→信号的分解

两个信号的和（或差）仍然是一个信号，它在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之和（或差）

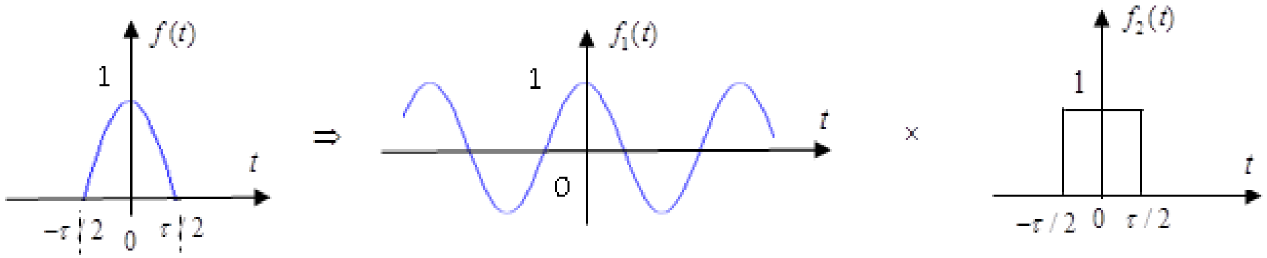
$$f(t)=f_1(t)\pm f_2(t)$$



1.3.2 信号的乘法和数乘运算　→信号的调制和缩放

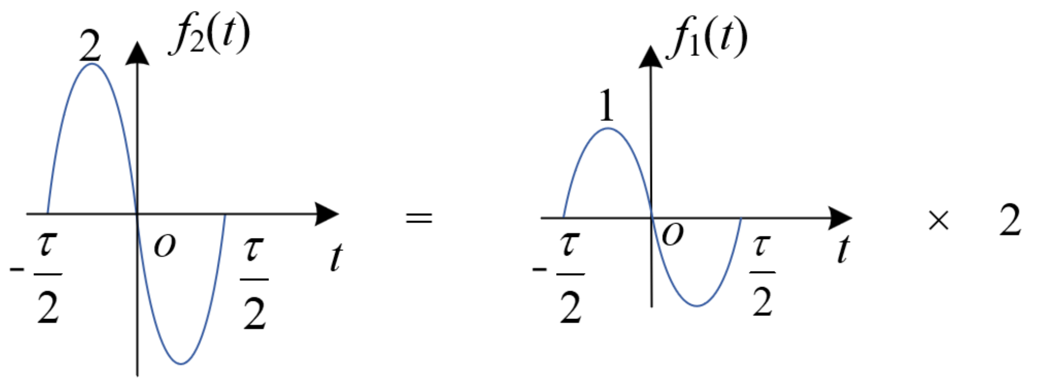
两个信号的积仍然是一个信号，它在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之积

$$f(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$$



信号的数乘运算是指某信号乘以一实常数 K，它是将原信号每一时刻的值都乘以 K

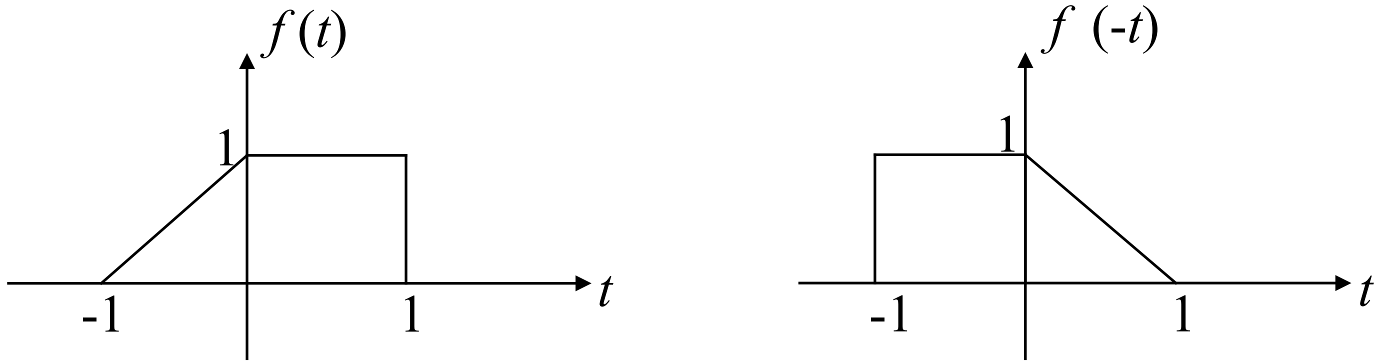
$$f_2(t) = K \cdot f_1(t)$$



1.3.3 信号的反褶、时移、尺度变换运算

1. 反褶运算

$f(t) \to f(-t)$ 以 $t=0$ 为轴反褶

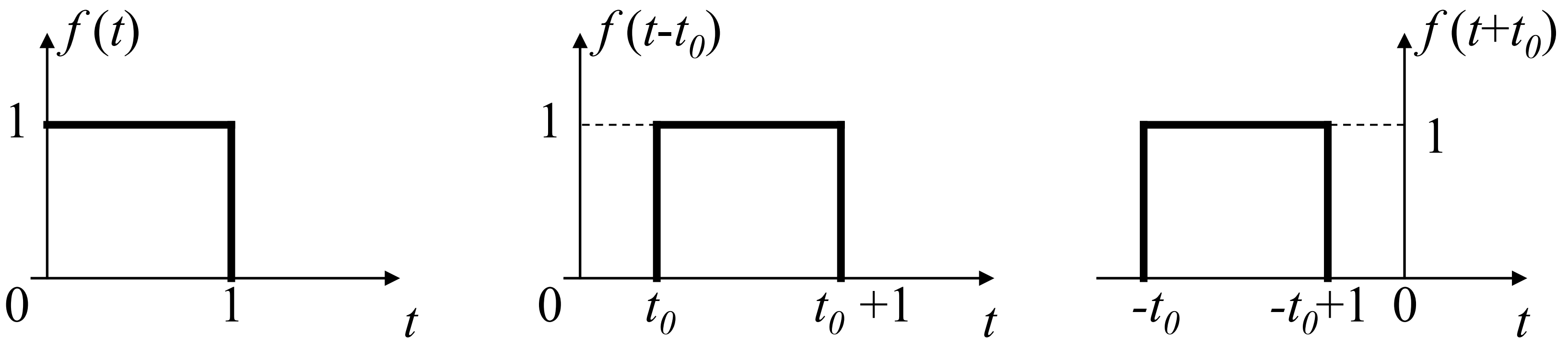


2. 时移运算

$$f(t) \to f(t-t_0)$$

$t_0 > 0$ 时，$f(t)$ 在 t 轴上整体右移

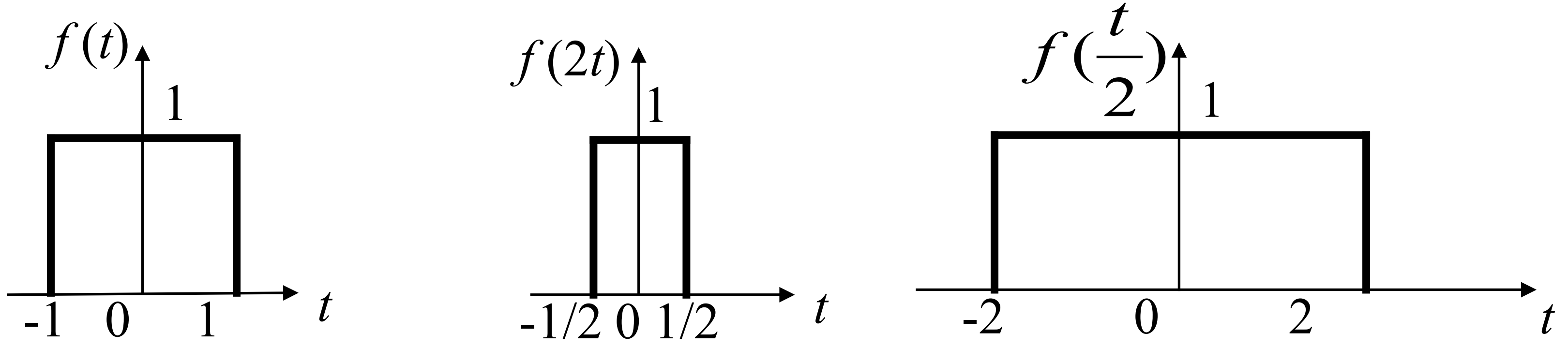
$t_0 < 0$ 时，$f(t)$ 在 t 轴上整体左移



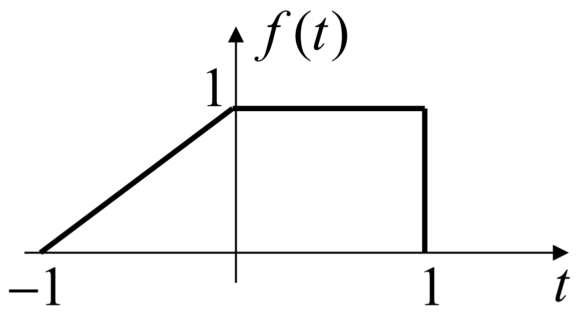
3. 尺度变换运算

$$f(t) \to f(2t)$$ 压缩

$$f(t) \to f(\frac{t}{2})$$ 扩展



例1-3：信号 $f(t)$ 如下图所示，选择可获得 $f(-2t+2)$ 的 $f(t)$ 的运算。



A 反褶--尺度扩展 2 倍--右移 1

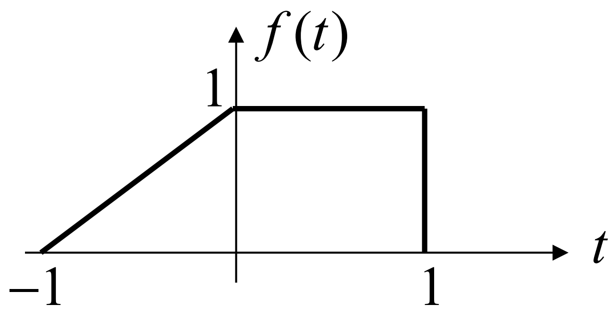
B 左移 1--反褶--尺度压缩 2 倍

C 反褶--尺度压缩 2 倍--右移 1

D 反褶--尺度压缩 2 倍--左移 2

提交

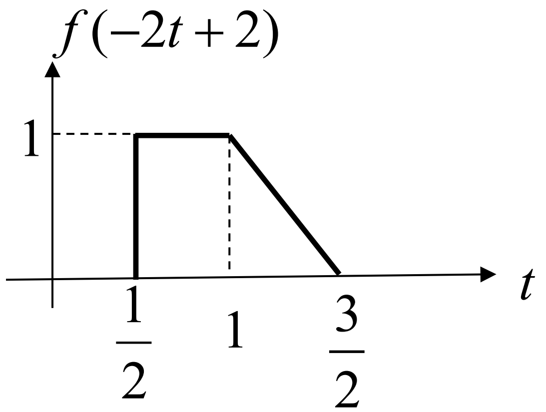
例1-3：信号如下图所示，求$f(-2t+2)$，并画出波形。



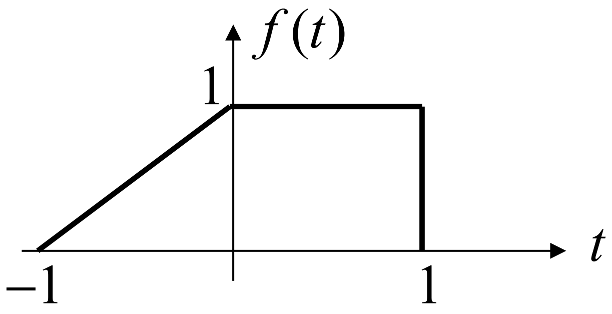
解法一：先求表达式再画波形。

$$f(t)=\begin{cases} t+1 & -1\le t\le 0 \\ 1 & 0<t<1 \\ 0 & t<-1\text{及}t>1 \end{cases}$$

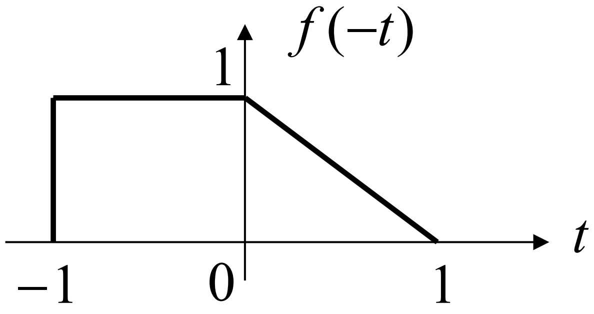
$$f(-2t+2)=\begin{cases} -2t+3 & -1\le -2t+2\le 0 \\ 1 & 0<-2t+2<1 \\ 0 & -2t+2<-1\text{及}-2t+2>1 \end{cases}=\begin{cases} -2t+3 & 1\le t\le \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}<t<1 \\ 0 & t<\frac{1}{2}\text{及}t>\frac{3}{2} \end{cases}$$

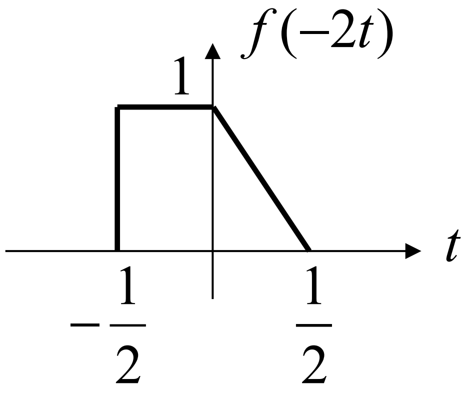


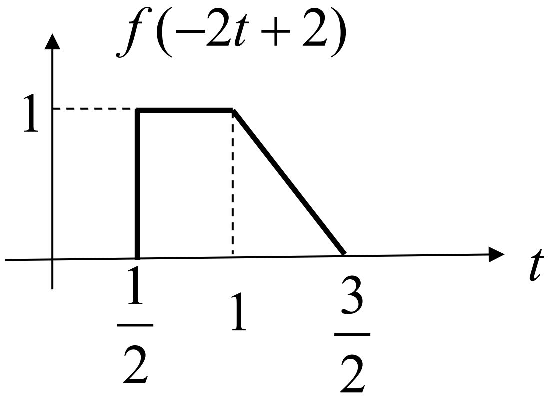
解法二：先画波形再写表达式。



$$f(t)\xrightarrow{\text{反褶}} f(-t)\xrightarrow{\text{尺度}} f(-2t)\xrightarrow{\text{时移}} f(-2t+2)=f[-2(t-1)]$$

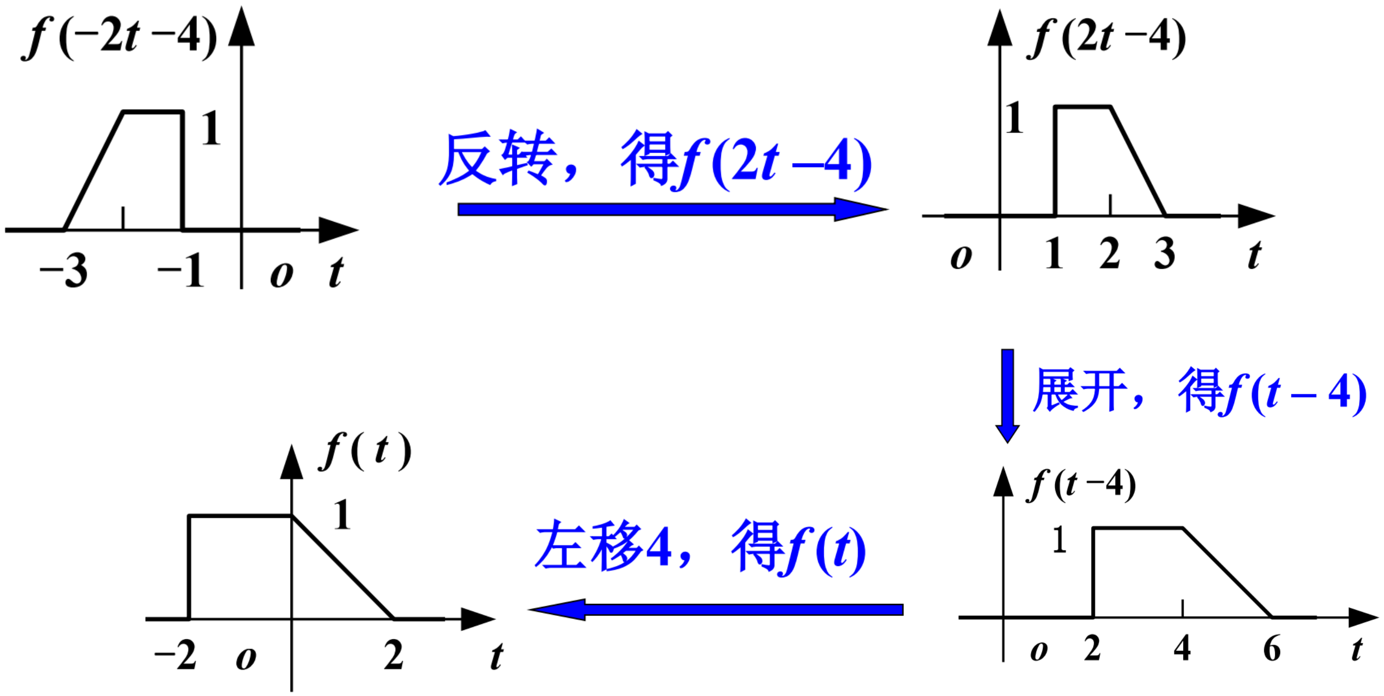






例1-4：信号 $f(-4-2t)$ 如下图所示，画出 $f(t)$ 。

推荐次序：当从复杂向简单变化时，反褶-尺度-平移



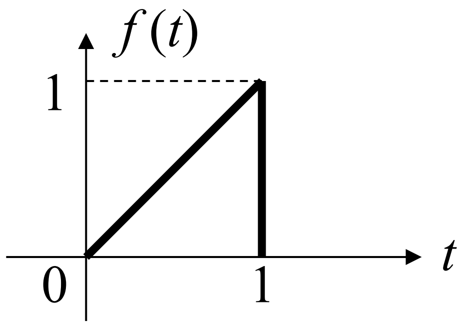
1.3.4 信号的微分与积分运算

1. 微分运算

信号 $f(t)$ 的微分 $f'(t)$ 仍然是一个信号，它表示信号随时间变化的变化率。

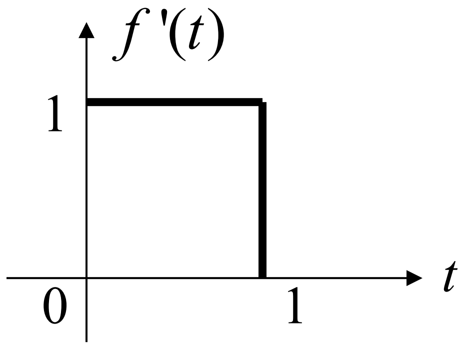
微分运算突出信号的变化部分。

例1-5：求下图所示信号 $f(t)$ 的微分 $f'(t)$，并画出其波形。



解： $f(t) = t \quad (0<t\le 1)$

$f'(t) = 1 \quad (0<t\le 1)$

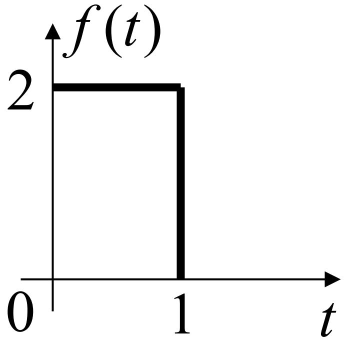


2. 积分运算

信号 $f(t)$ 的积分 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$，也可写作 $f^{(-1)}(t)$，仍然是一个信号，它在任意时刻的值等于从 $-\infty$ 到 t 区间内 $f(t)$ 与时间轴所包围的面积。

积分运算使信号的突变部分变得平滑，可削弱毛刺（噪声）的影响。

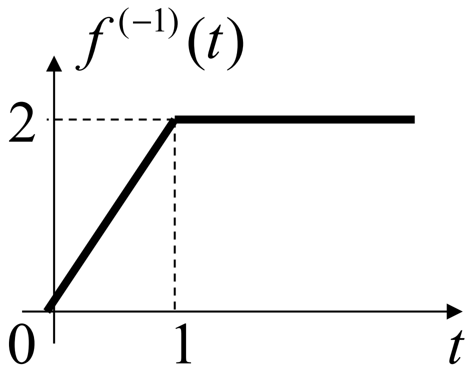
例1-6: 选择如图所示信号 $f(t)$ 的积分 $f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的波形。



解：1）当 $t<0$ 时， $f^{-1}(t)=0$

2）当 $0\le t\le 1$ 时， $f^{(-1)}(t)=\int_{0}^{t} 2\mathrm{d}\tau=2t$

3）当 $t>1$ 时， $f^{-1}(t)=\int_{0}^{1} 2\mathrm{d}\tau=2$



第一章 信号与系统的基本概念

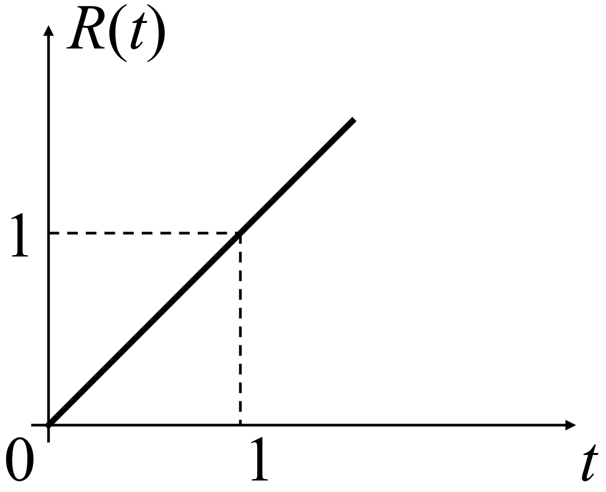
1.4 奇异信号

在信号与系统分析中，经常要遇到函数本身有不连续点（跳变点），或其导数与积分有不连续点的情况，这类函数统称为奇异函数或奇异信号。

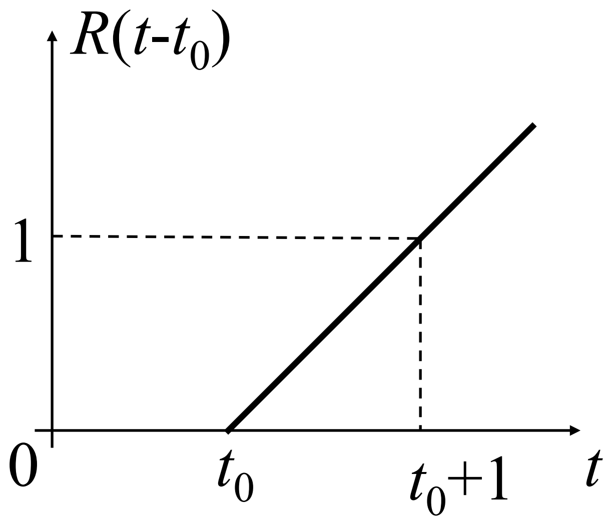
1.4.1 单位斜变信号

斜变信号指的是从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。其表示式为

$$R(t) = t, (t \geq 0) \qquad R(t - t_0) = t - t_0, (t \geq t_0)$$



单位斜变信号

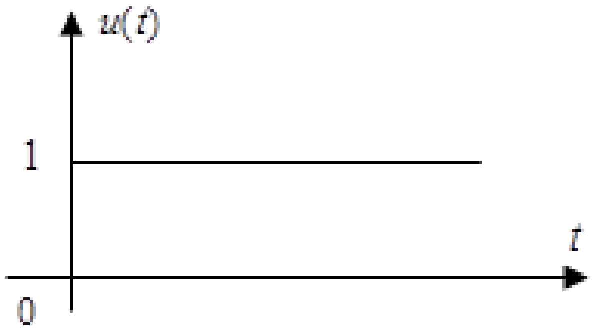


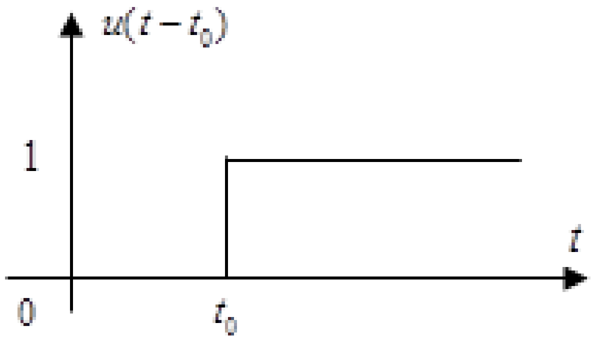
延迟的斜变信号

1.4.2 单位阶跃信号

描述某些对象从一个状态到另一个状态的瞬时完成过程，例如电源开关的断开/接通状态的切换情况。

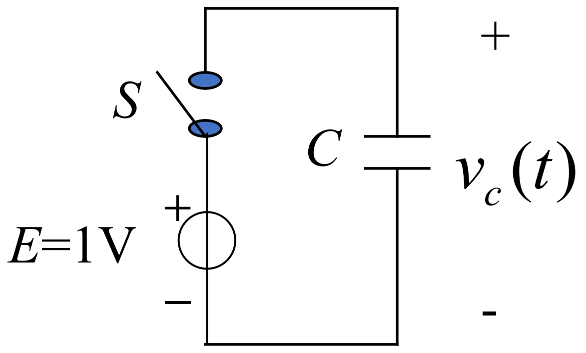
$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \quad \textbf{延时}\rightarrow \quad u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$





注意： 阶跃函数在跳变点 $t=0$ 处通常没有定义，但有时规定为 $u(0)=1/2$ 。

1.4.2 单位阶跃信号

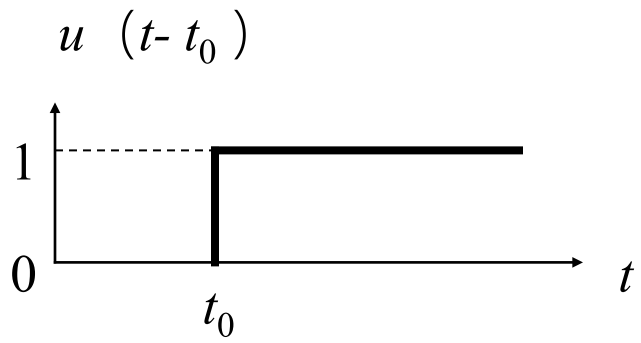


例1-7：图中假设 S、E、C 都是理想元件（内阻为0），当 $t=0$ 时 S 闭合，求电容 C 上的电压。

解：由于S、E、C 都是理想元件，所以，回路无内阻，当 S 闭合后，C 上的电压会产生跳变，从而形成阶跃电压。即：

$$v_c(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}=u(t)$$

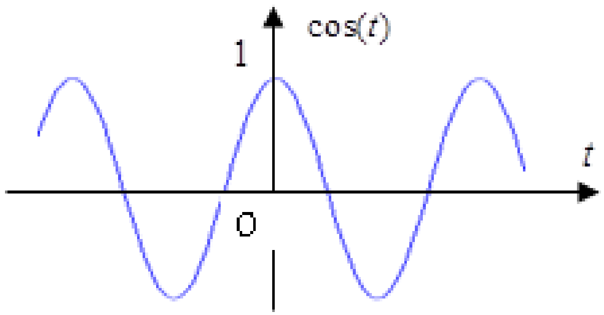
如果开关 S 在 $t=t_0$ 时闭合，则电容上的电压为 $u\,(t-t_0)$ 。波形如下图所示：

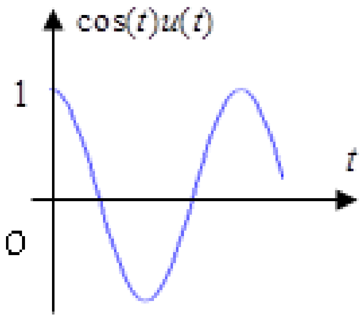


1.4.2 单位阶跃信号

$u(t)$ 的性质：单边特性，即：

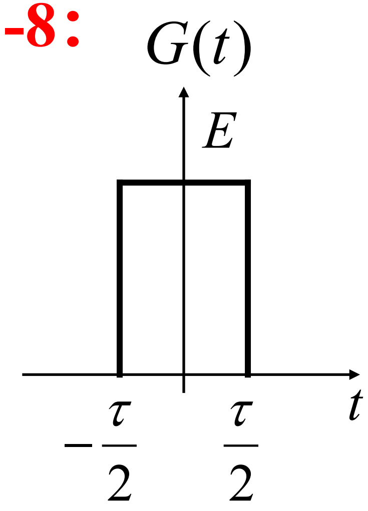
$$f(t)u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ f(t) & t>0\end{cases}$$



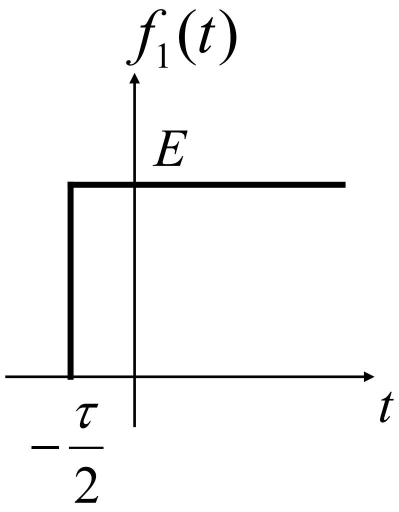


任何信号通过与单位阶跃函数相乘可以表示为单边函数，矩形脉冲可表示为两个阶跃函数差的形式。

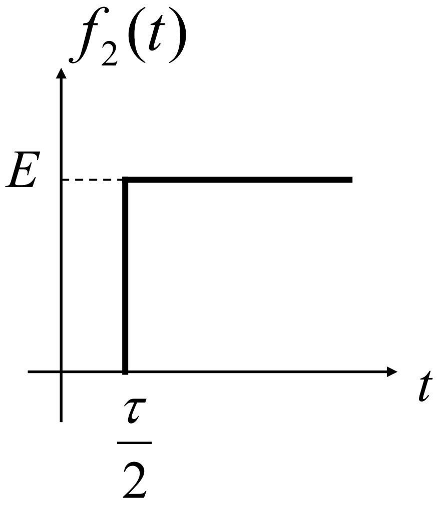
例1-8：



$=$

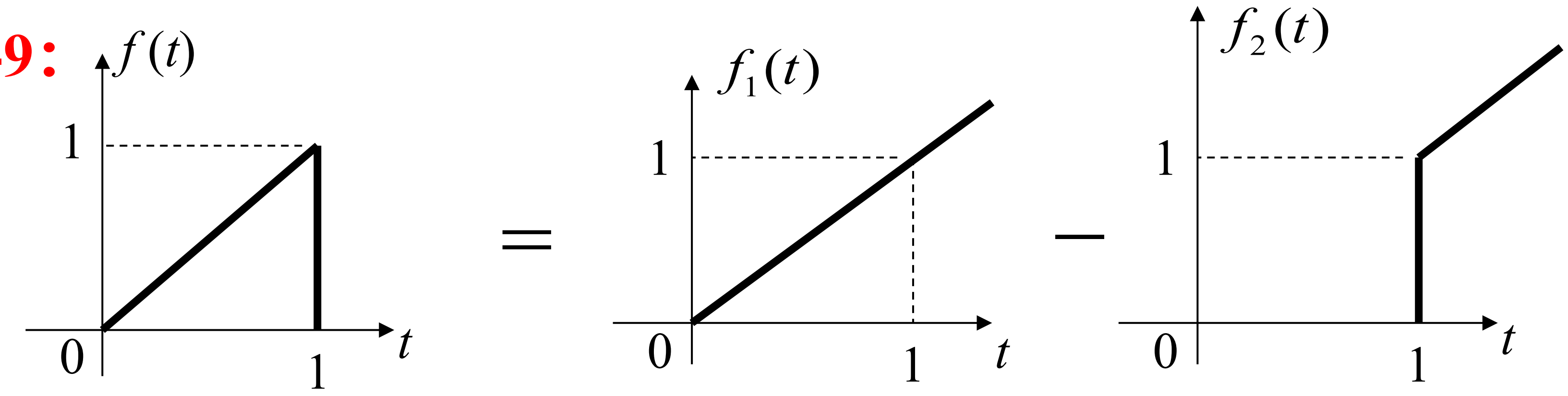


$-$



$$G(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

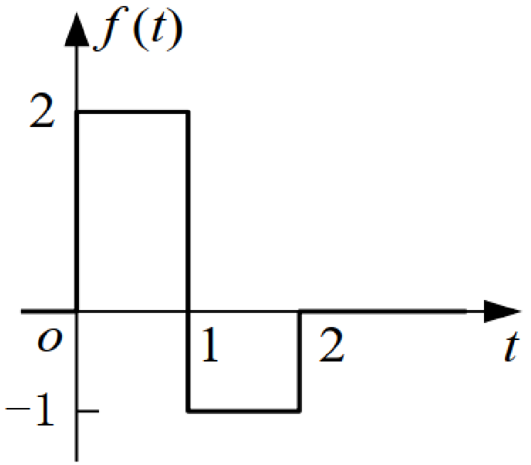
例1-9：



$$f(t)=t[u(t)-u(t-1)]$$

注意： 单位阶跃函数与单位斜变函数是微积分的关系 $R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau=tu(t)$ $u(t)=\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$

例1-10 用阶跃信号表示图中的信号，$f(t)=?$

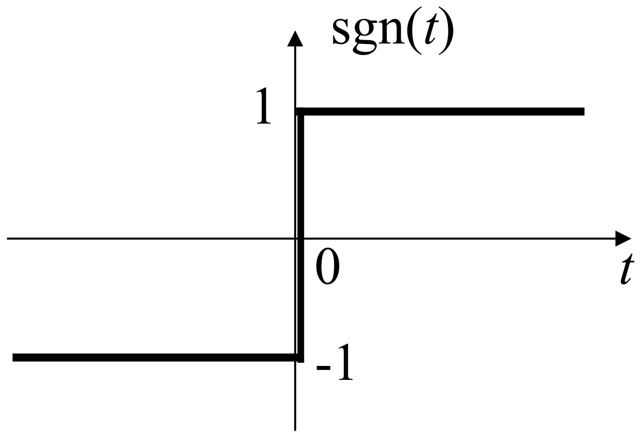


$$f(t)=2u(t)-3u(t-1)+u(t-2)$$

单选题 1分

设置

例1-11：利用阶跃信号来表示“符号函数”（signum）的正确表达式为：



$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

A $1-2u(t)$

B $2u(t)-1$

C $2u(t)-2$

D $2-2u(t)$

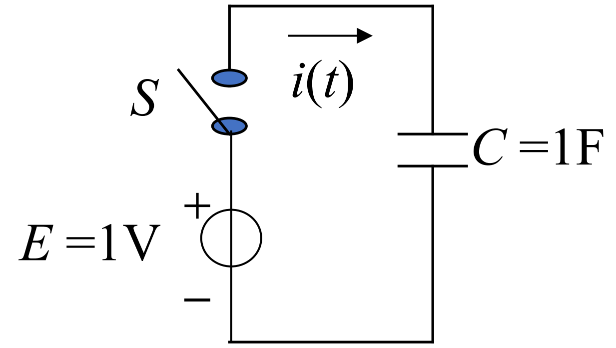
提交

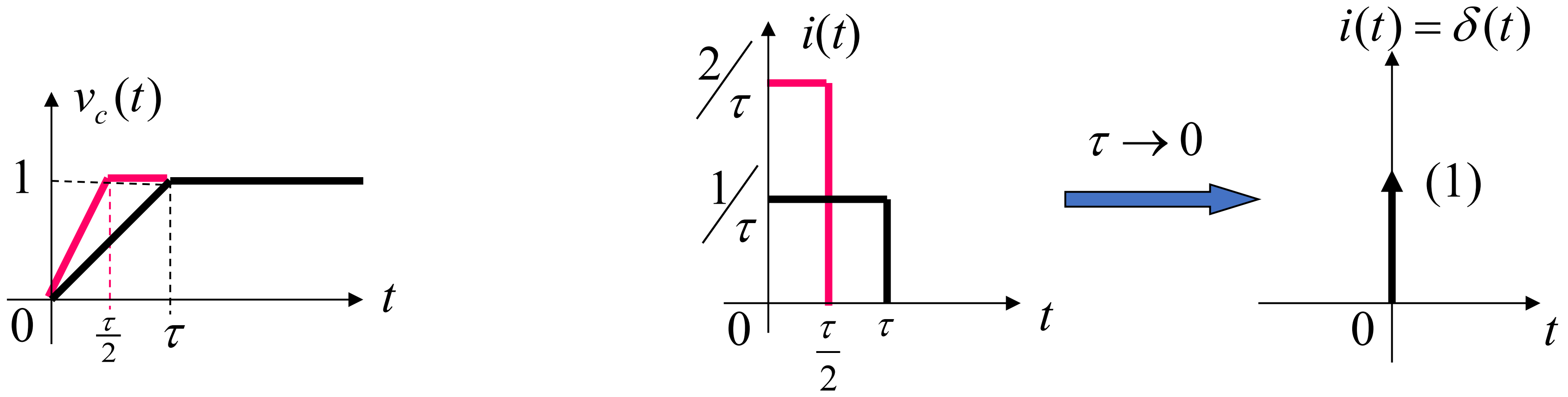
1.4.3 单位冲激信号

源于对作用时间极短而强度极大的物理过程的理想描述。

例1-12：图中假设 S、E、C 都是理想元件（内阻为0），当 $t=0$时 S 闭合，求回路电流 $i(t)$。

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$



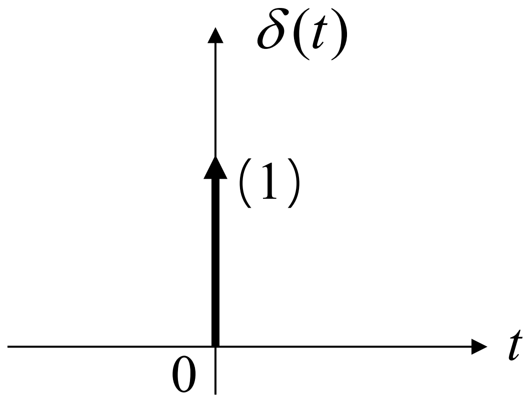


1.4.3 单位冲激信号

1. $\delta(t)$ 函数的定义方法

1）用表达式定义

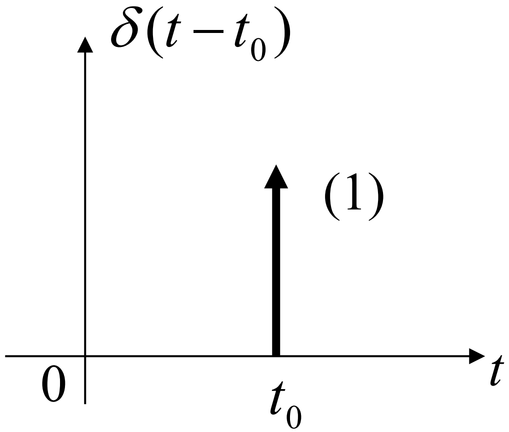
$$\begin{cases} \delta(t)=0 \quad (t\neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$



这种定义方式是狄拉克提出来的，因此，$\delta(t)$ 又称为狄拉克（Dirac）函数。

同理可以定义 $\delta(t-t_0)$ **，即**

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t\neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$

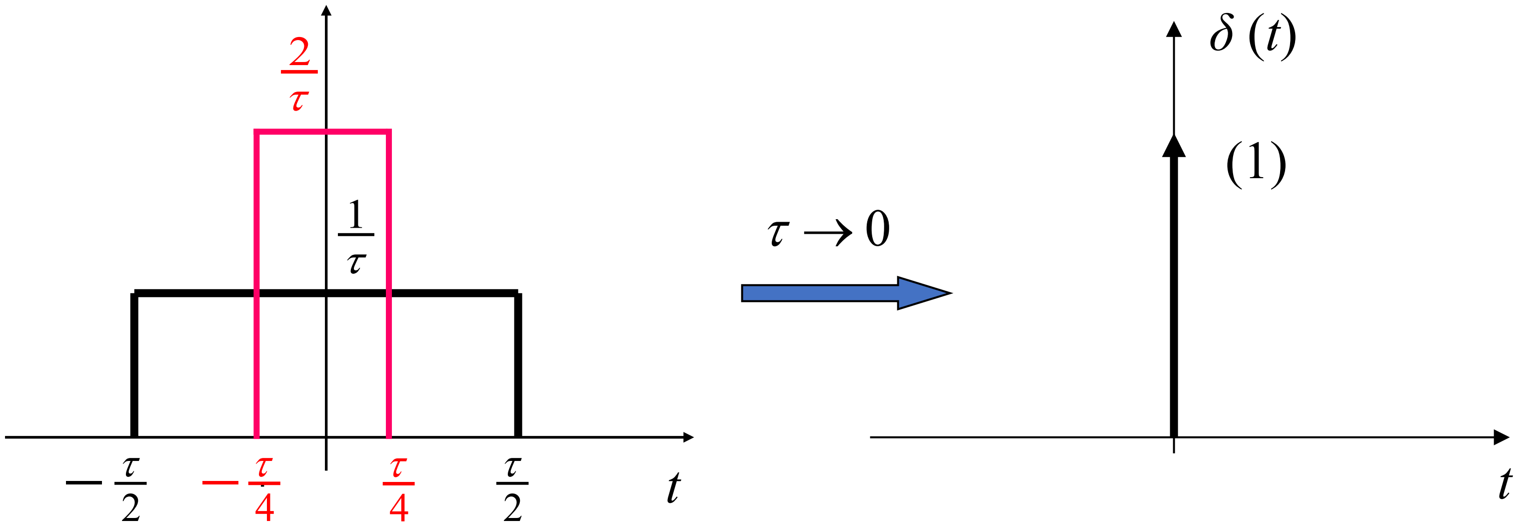


2）用极限定义

可以用各种规则函数系列求极限的方法来定义 $\delta(t)$ 。

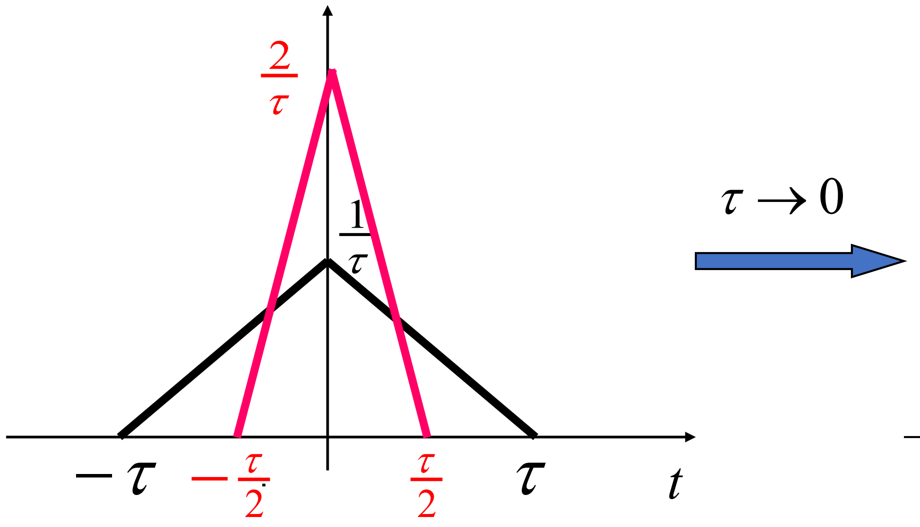
(a) 用矩形脉冲取极限定义

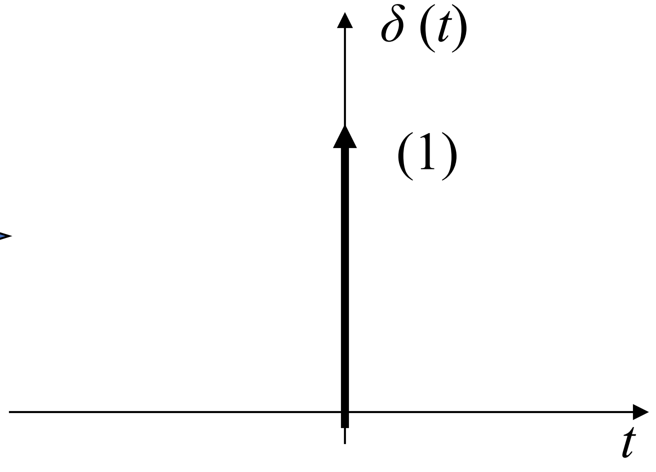
对于矩形脉冲信号，若脉冲宽度为τ、幅度为$1/\tau$，则其面积为 $\tau\cdot\frac{1}{\tau}=1$ 。



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$$

(b) 用三角脉冲取极限定义





$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) [u(t+\tau) - u(t-\tau)] \right\}$$

1.4.3 单位冲激信号

2. $\delta(t)$ 函数的性质

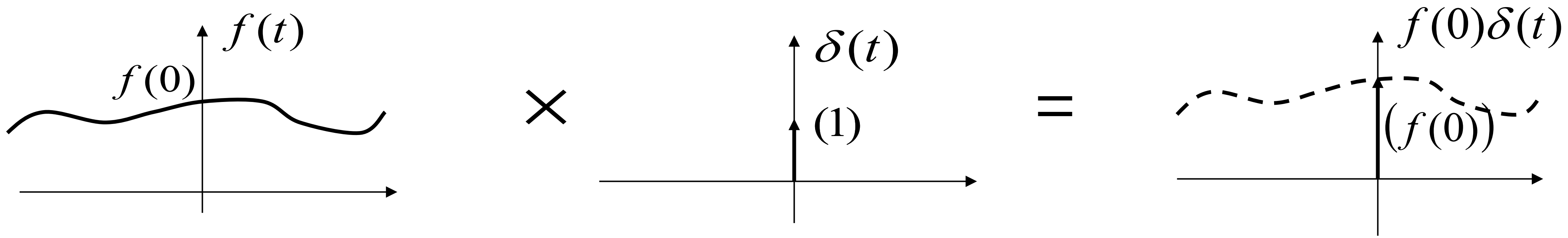
1）抽样特性（筛选特性）

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t \quad =f(0)$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0)$$



2）$\delta(t)$ **是偶函数，即** $\delta(t)=\delta(-t)$ **推论→** $\int_{-\infty}^{0}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$

3）**冲激函数** $\delta(t)$ **与阶跃函数** $u(t)$ **的关系：微积分关系**

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=u(t-t_0) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

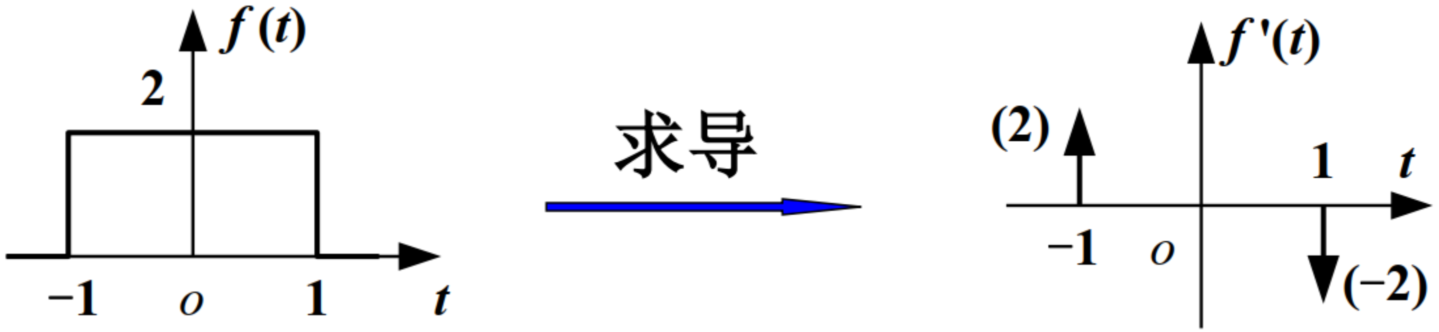
例1-13 利用冲激函数的筛选特性，化简下面函数的表达式或求值。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}u(t)\right]=\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)=\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

$$\int_{-1}^{9}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{9}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-4}^{-1}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\mathrm{d}t=0$$

例1-14 冲激函数描述间断点的导数。



$$f(t)=2u(t+1)-2u(t-1) \qquad f'(t)=2\delta(t+1)-2\delta(t-1)$$

4）冲激函数$\delta(t)$的尺度特性 $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

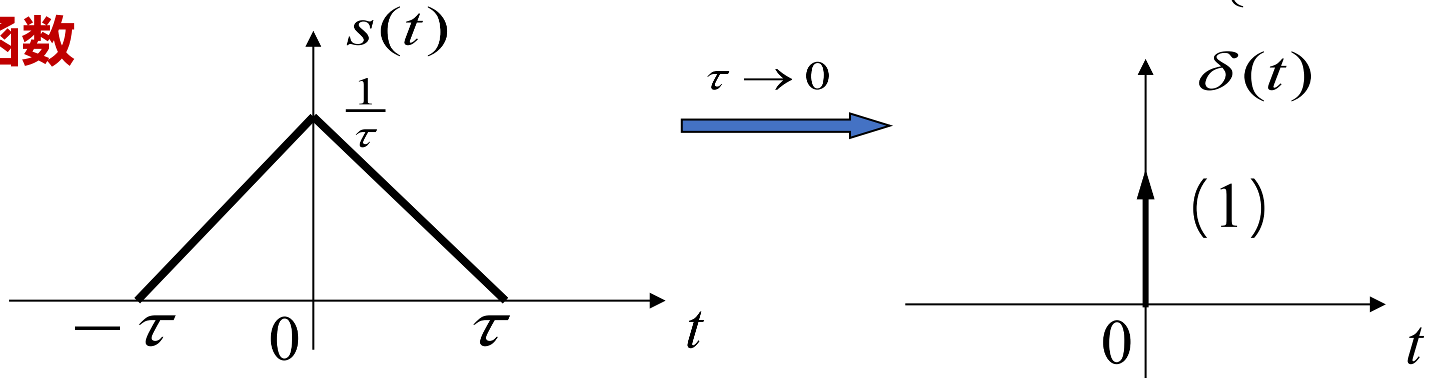
5）冲激函数$\delta(t)$与任何函数$f(t)$的乘积 $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ **推论→** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\delta(t)]=f(0)\delta'(t)$

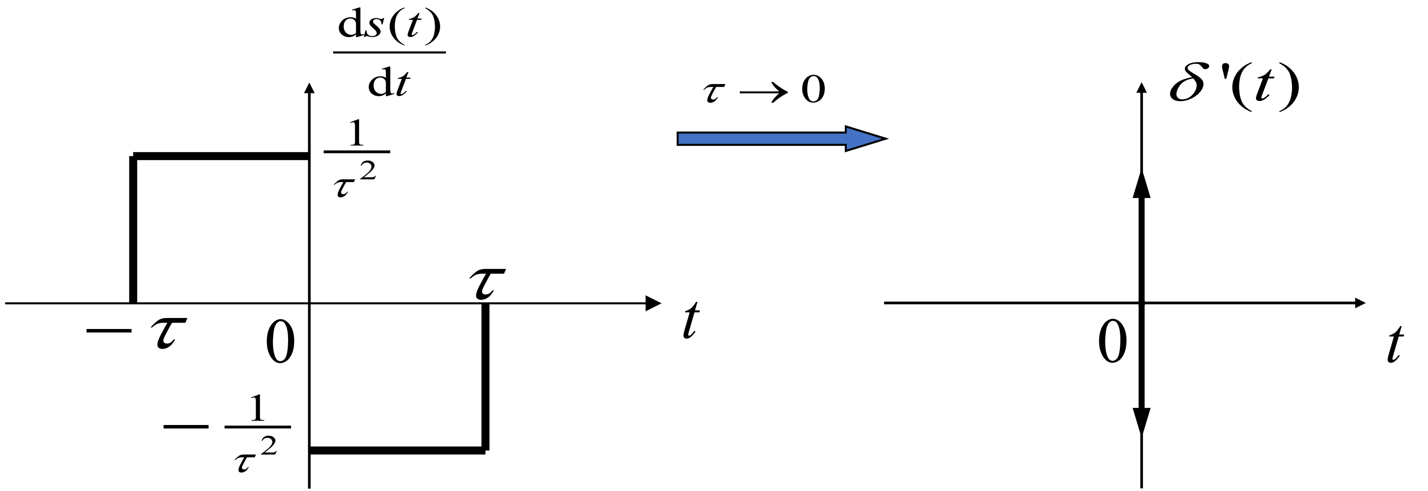
1.4.4 冲激偶函数

定义：单位冲激函数的导数（阶跃函数的二阶导数），表示式为

$$\delta'(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

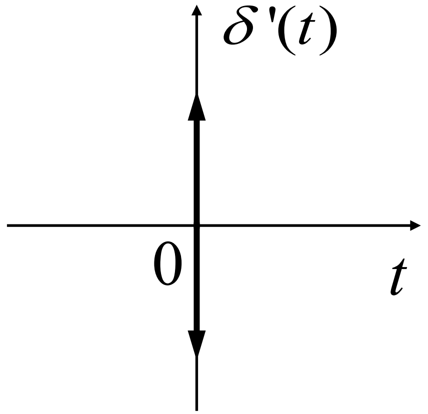
正负极性的一对冲激函数





1.4.4 冲激偶函数

冲激偶函数 $\delta'(t)$ 的性质



1）冲激偶是奇函数，即 $\delta'(-t) = -\delta'(t)$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) \mathrm{d}t = -f'(0)$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0) f(t) \mathrm{d}t = -f'(t_0)$

证明：

$[f(t)\delta(t)]' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t)$

$f(t)\delta'(t) = [f(t)\delta(t)]' - f'(t)\delta(t)$

$= f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

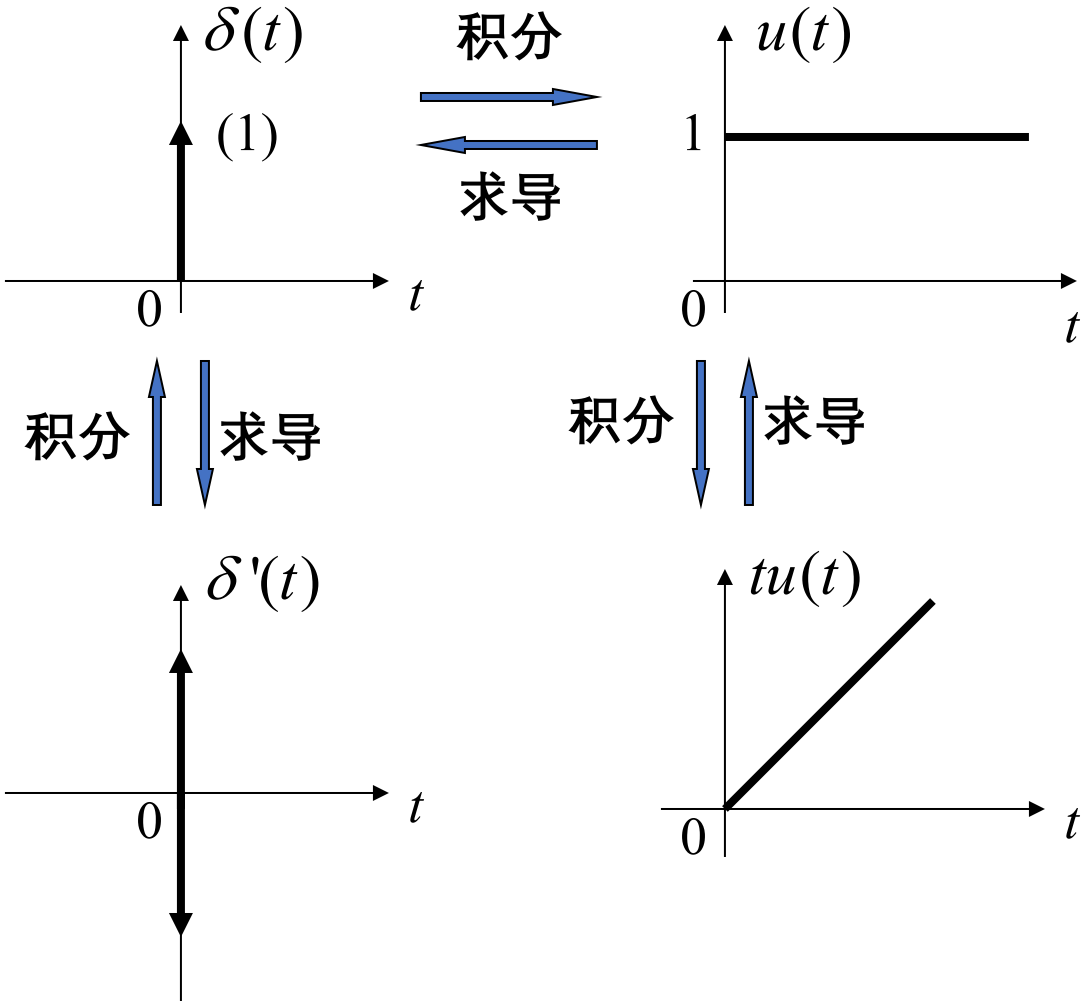
$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \mathrm{d}t = 0$

例1-15 利用 $\delta'(t)$ 的性质计算 $\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta'(-t) \mathrm{d}t$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta'(-t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} -(t-2)^2 \delta'(t) \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-(t-2)^2\right]\Big|_{t=0} = 2(t-2)\Big|_{t=0} = -4$$

$tu(t)$、$u(t)$、$\delta(t)$ 和 $\delta'(t)$之间的关系：



补充一些 $\delta(t)$ 和 $\delta'(t)$ 的计算题

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(t^3-3t^2+5t-1)\delta'(t-1)dt$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+5)\delta(\frac{t}{2})dt$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}(2-x)\delta'(x)dx$

答案：（1）2，（2）-2，（3）10，（4）$2\delta(t)+u(t)$

单选题 1分

设置

例1-16: 求解 $f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-t}\delta(t)\right]$

A $\delta(t)$

B $\delta'(t)$

C $\mathrm{e}^{-t}\delta'(t)$

D $\mathrm{e}^{-t}\delta(t)$

提交

作 业

教材习题

基础题：1-2，1-3，1-4，1-9 (1) (2) (4)，1-10，1-14

加强题：1-5，1-9 (c)

更正：1-3 （4）后面括号内应为“n是非负整数”