第三章 傅里叶变换

傅里叶变换（频域分析）的目的：

采用数学变换的手段，解决某些信号在时域特征不明显、很难分析的问题。

傅立叶分析：从数学的角度，是对一个函数进行傅立叶变换，而从信号处理的角度，则是对信号 $f(t)$ 的**频谱** $\boldsymbol{F(\omega)}$ 进行分析，其优点包括：

(1) 傅立叶分析的基函数 $e^{j\omega t}$ 是一组正交基，且函数形式非常简单；

(2) $F(\omega)$ 有着明确和极其重要的物理意义，即信号 $f(t)$ 的频谱；

(3) 傅立叶变换把时域 $f(t)$ 的微、积分运算在频域 $F(\omega)$ 表现为乘、除运算；

(4) 傅立叶分析具有快速算法 - **FFT** （Fast Fourier Transform）。

频域分析

- 傅里叶级数：周期信号可表示为谐波关系的正弦信号的加权和
- 傅里叶变换：非周期信号可表示为0到无穷高所有频率分量上正弦信号的加权积分

傅里叶（J. Fourier, 1768-1830）

1795年，傅里叶任法国巴黎综合工科大学助教，后跟随拿破仑远征埃及。

1807年，傅里叶提出：任何一个周期信号都可以展开成具有谐波关系的正弦函数的叠加。

拉格朗日（Lagrange，1736-1813）认为此主张无意义，因为实际信号中存在间断点。

1811年，傅里叶的论文《热的传播》获得科学院大奖，但仍未正式发表。

1817年，傅里叶由于对传热理论的贡献，当选法国科学院院士。

1822年，傅里叶出版《热的解析理论》，阐明了傅里叶级数的观点，并成为科学院终身秘书。

1829年，狄里赫利（Dirichlet）证明：只有在满足一定条件时，周期信号才能被展开成傅里叶级数。

1830年，傅里叶在法国巴黎去世，时年六十二岁。

狄里赫利条件（傅里叶级数存在的充分不必要条件）：

（1）在一个周期内，信号连续或只有有限个第一类间断点（函数在该间断点存在有限值的左极限和右极限，如函数 $|\sin(t)| / \sin(t)$ 在点 $t = 0$ 处）。

（2）在一个周期内，信号的极大值和极小值的数目应为有限个。

（3）在一个周期内，信号绝对可积，即 $\int_0^T |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$。

- **工程中大部分信号都满足狄里赫利条件**

3.2 周期信号的傅里叶级数分析

周期信号的傅里叶级数：任何周期函数在满足一定条件下，可以展成正交函数线性组合的无穷级数。

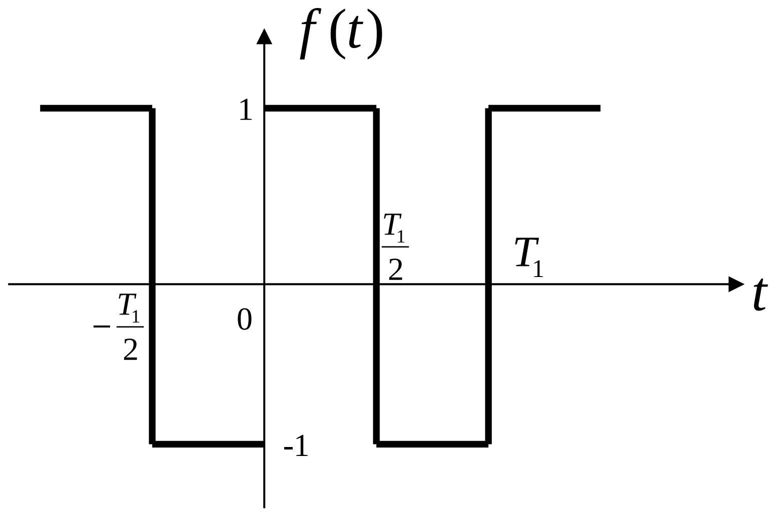
如果正交函数集是三角函数集或指数函数集，此时周期函数所展成的级数就是“傅里叶级数”。

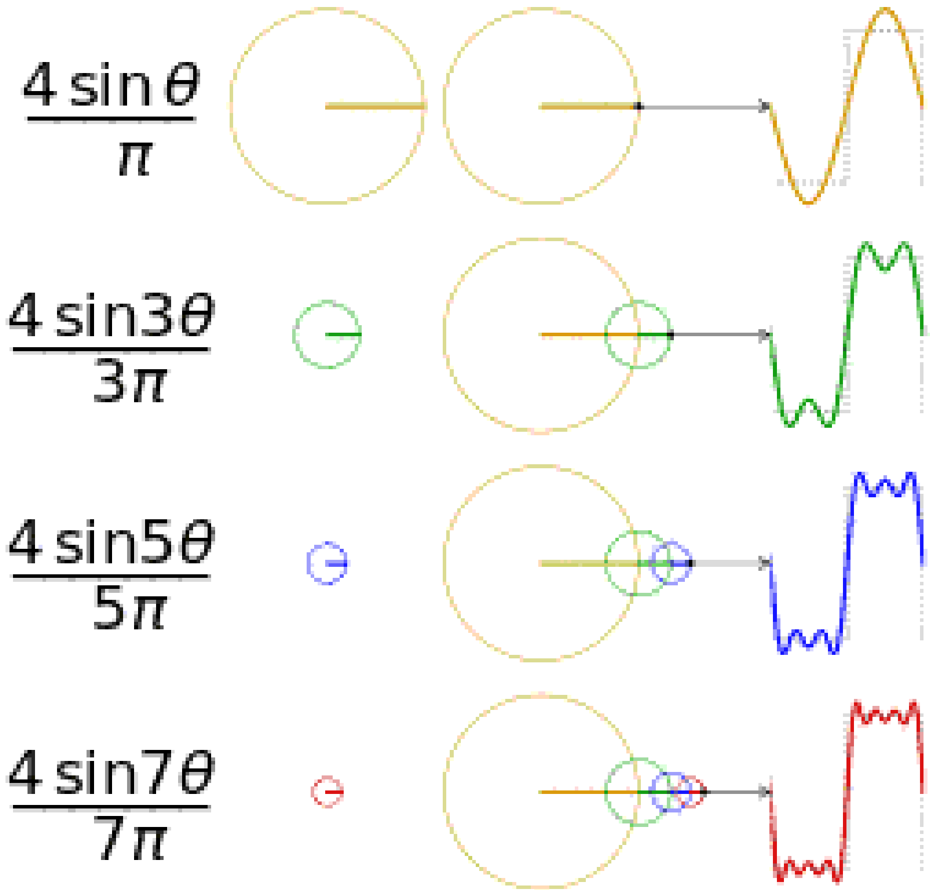
$$\{1,\ \cos(n\omega_1 t),\ \sin(n\omega_1 t)\} \qquad \{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\}$$

为什么选择三角函数（正弦波）作为傅里叶级数的基本信号？

- 正弦曲线有保真度：一个正弦信号通过LTI系统后，输出的仍是正弦信号，只有幅度和相位可能发生变化，但频率和波形不变。
- 三角（指数）函数的积分和求导仍为三角（指数）函数。

周期矩形信号的产生





多少个正弦波叠加可以构成矩形信号？

无数个。

3.2.3 周期信号的频谱及其特点

1. 周期信号的频谱

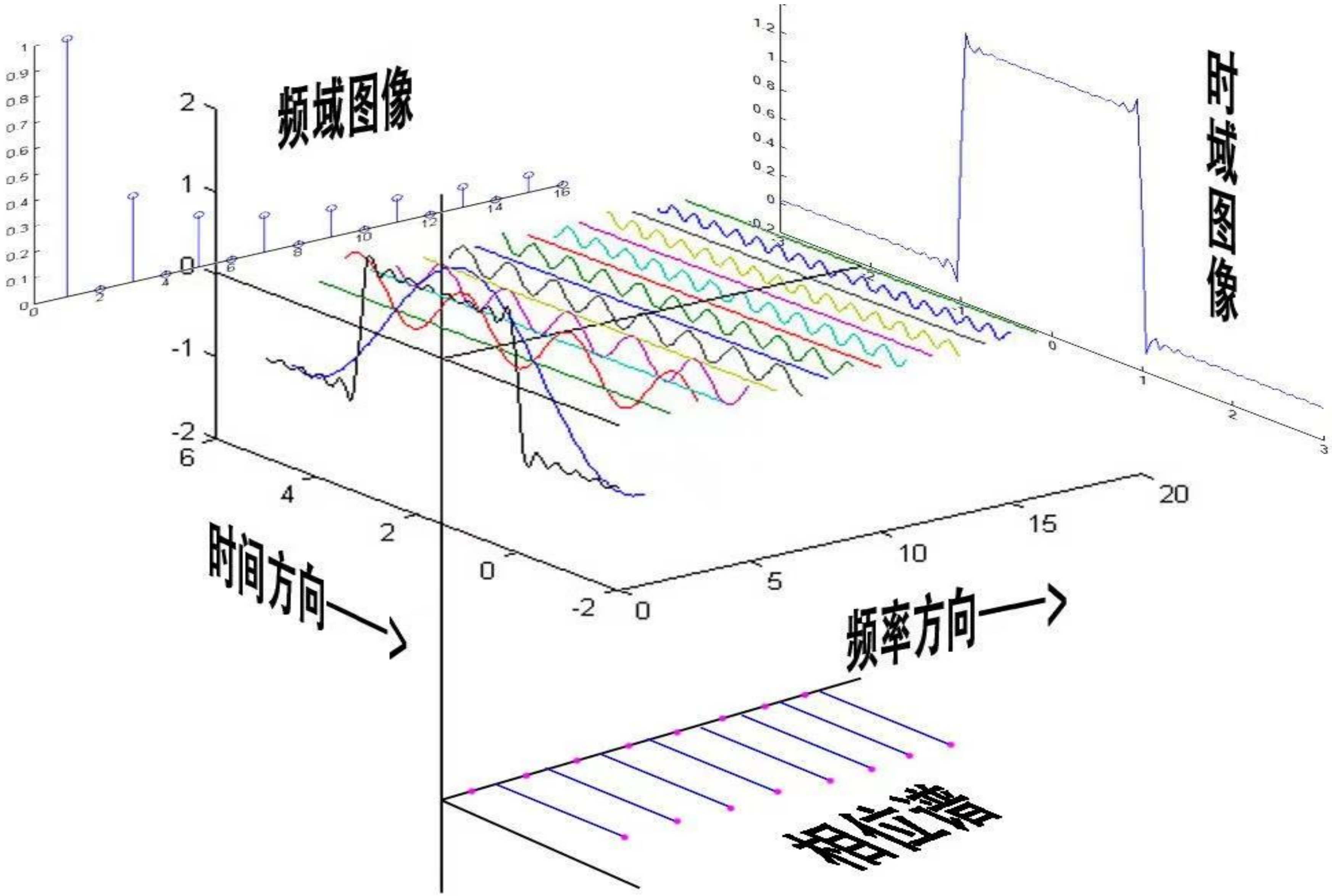
$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \qquad (1)$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n) \qquad (2)$$

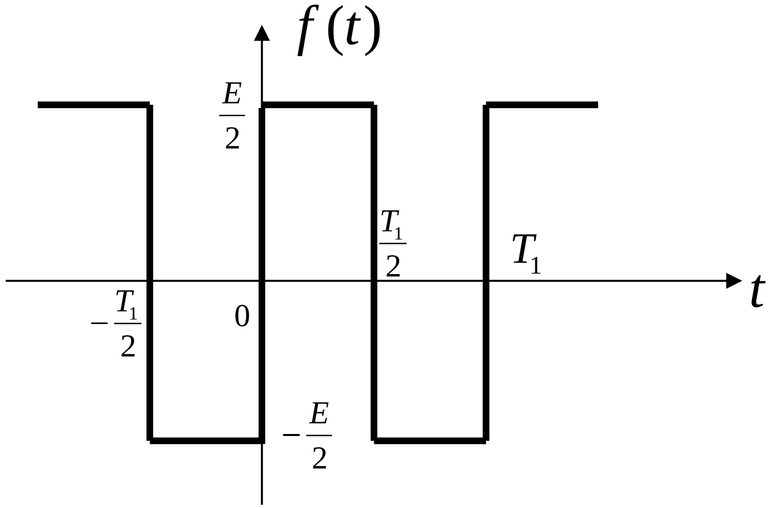
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad (3)$$

为了能既方便又明确的表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可画出**频谱图**来直观的表示。

如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，便可直观的看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。


频域图像
时域图像
时间方向—>
频率方向—>
相位谱

例3-1 求如图所示的周期矩形信号的三角形式与指数形式的傅里叶级数，并画出各自的频谱图。



解： 一个周期内 $f(t)$ 的表达式为：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{2} & 0\le t<\dfrac{T_1}{2}\\[2mm] -\dfrac{E}{2} & -\dfrac{T_1}{2}\le t<0\end{cases}$$

（奇函数）

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\mathrm{d}t=0 \qquad a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t=0$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\\[2mm] 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

三角形式：

$$c_n = b_n = \begin{cases} \dfrac{2E}{n\pi} & n = 1,3,5\cdots \\ 0 & n = 2,4,6\cdots \end{cases}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1,3,5\cdots)$$

因此 $$f(t) = \frac{2E}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t = \frac{2E}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \cdots\right)$$

或 $$f(t) = \frac{2E}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(n\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

指数形式：

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j}b_n) = -\mathrm{j}\frac{b_n}{2} = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{j}E}{n\pi} & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5\cdots \\ 0 & n = \pm 2, \pm 4, \pm 6\cdots \end{cases}$$

$$f(t) = \left(\frac{\mathrm{j}E}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t} - \frac{\mathrm{j}E}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\right) + \left(\frac{\mathrm{j}E}{3\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_1 t} - \frac{\mathrm{j}E}{3\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_1 t}\right) + \cdots$$

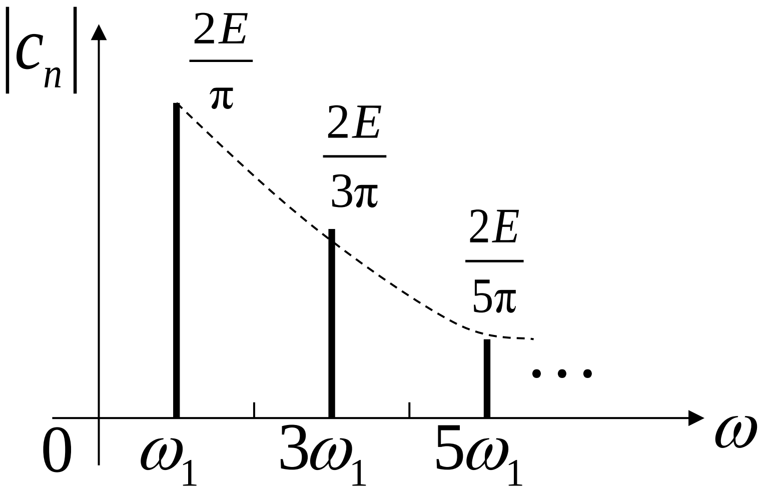
$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5\cdots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5\cdots) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5\cdots) \end{cases}$$

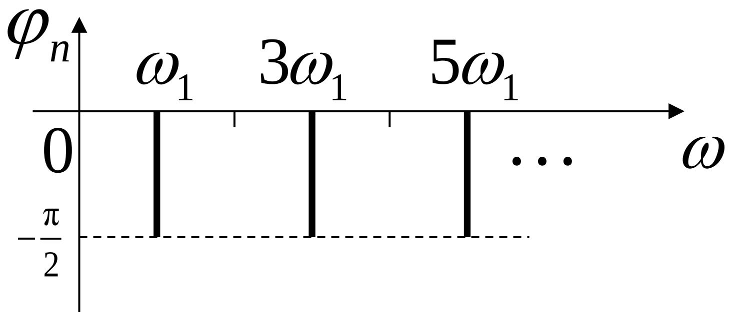
$$c_n=\begin{cases}\dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\\ 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}\qquad |F_n|=\frac{E}{|n|\pi}\quad (n=\pm1,\pm3,\pm5\cdots)$$

$$\varphi_n=-\frac{\pi}{2}\quad (n=1,3,5\cdots)\qquad \varphi_n=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & (n=1,3,5\cdots)\\ \dfrac{\pi}{2} & (n=-1,-3,-5\cdots)\end{cases}$$

幅度谱

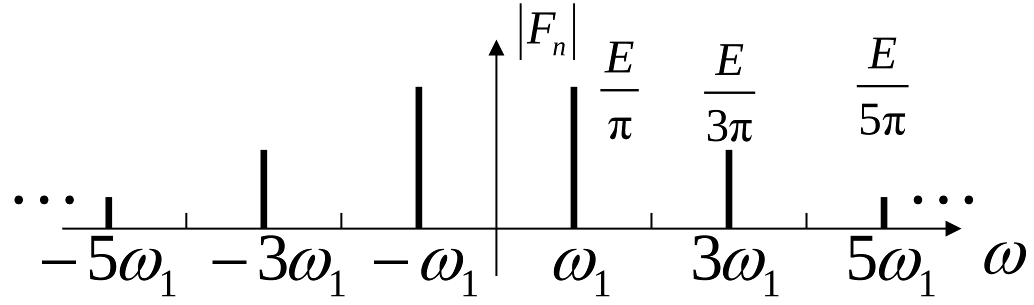


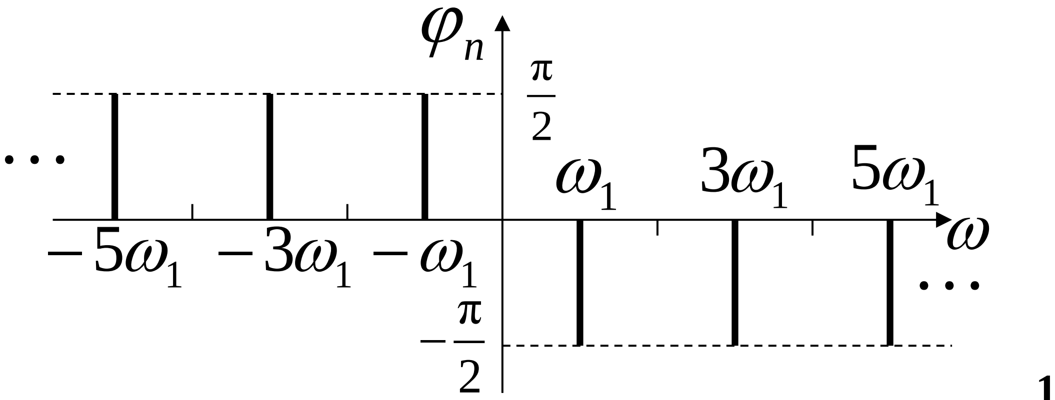
相位谱



负频率能量守恒

幅度减半



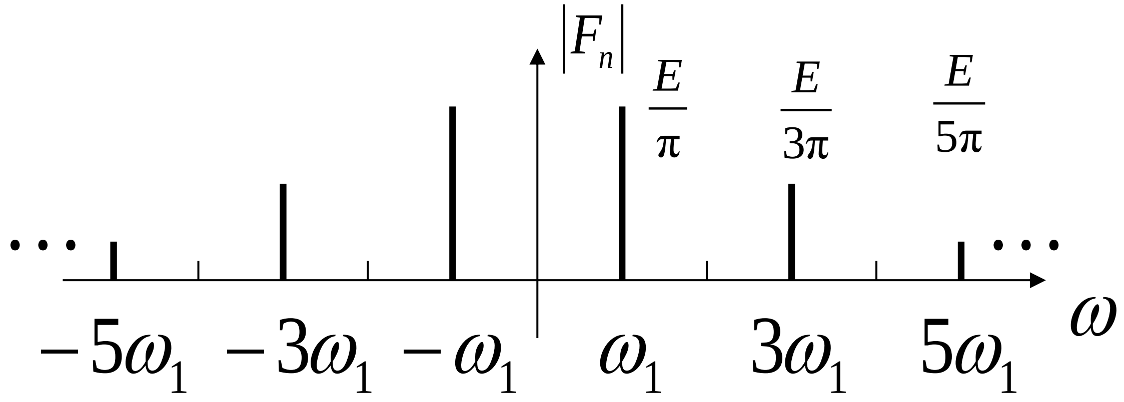


2. 周期信号频谱的特点

（1）**离散性**---频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。

（2）**谐波性**---谱线出现在基波频率 ω_1 的整数倍上。

（3）**收敛性**---幅度谱的谱线幅度随着 $n\to\infty$ 而逐渐衰减到零。



3.2.4 波形的对称性与谐波特性的关系

已知信号 $f(t)$ 展为傅里叶级数的时候，如果 $f(t)$ 是实函数且它的波形满足某种对称性，则在傅里叶级数中有些项将不会出现，留下的各项系数的表达式也将变得比较简单。

波形的对称性有两类，一类是根据坐标轴对称；另一类是根据半周期对称。

1. 偶函数

$$f(t)=f(-t)$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t=0 \qquad t\text{ 的奇函数}$$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{d}t \qquad t\text{ 的偶函数}$$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t=\frac{4}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t \qquad t\text{ 的偶函数}$$

所以，在偶函数的傅里叶级数中不会有正弦分量，只可能含有（直流）和余弦分量（教材99页）。

2. 奇函数 $f(t) = -f(-t)$

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 0$$ t 的奇函数

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = 0$$ t 的奇函数

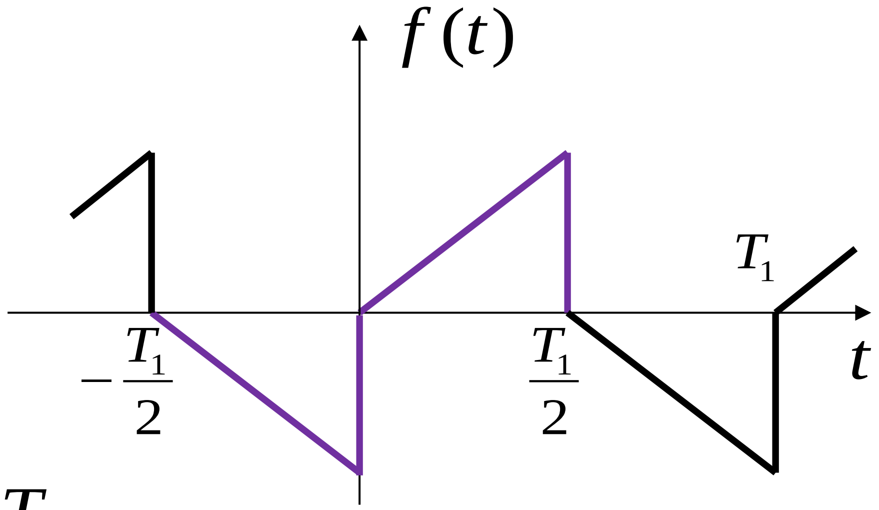
$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{4}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t$$ t 的偶函数

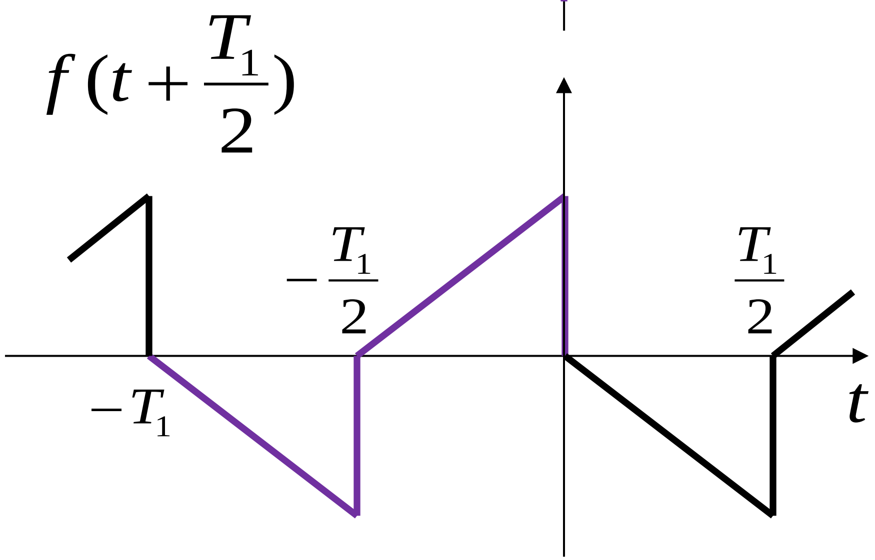
所以，在奇函数的傅里叶级数中不会含有直流与余弦分量，只可能包含正弦分量（教材100页）。

3. 奇谐函数（半波奇对称）

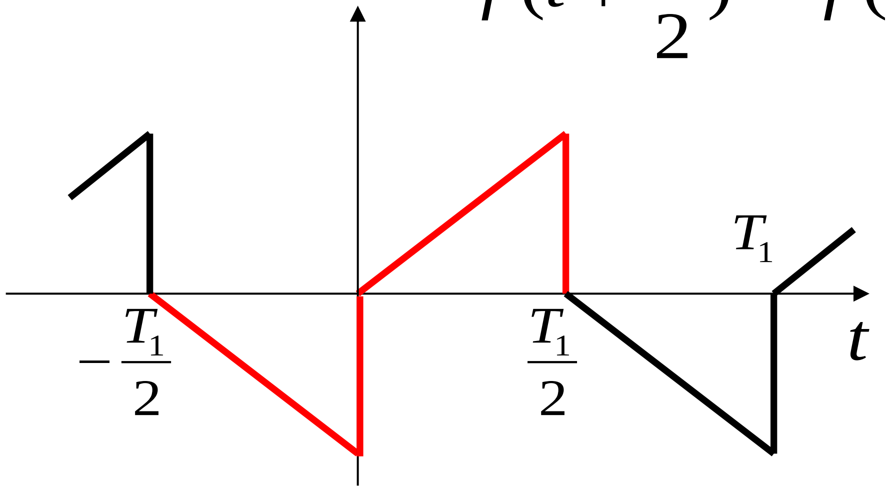
$$f(t \pm \frac{T_1}{2}) = -f(t) \quad 或 \quad -f(t \pm \frac{T_1}{2}) = f(t)$$

例3-2





$$-f(t+\frac{T_1}{2}) = f(t)$$



$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

积分区间是一个周期，一个周期内是 t 的奇函数

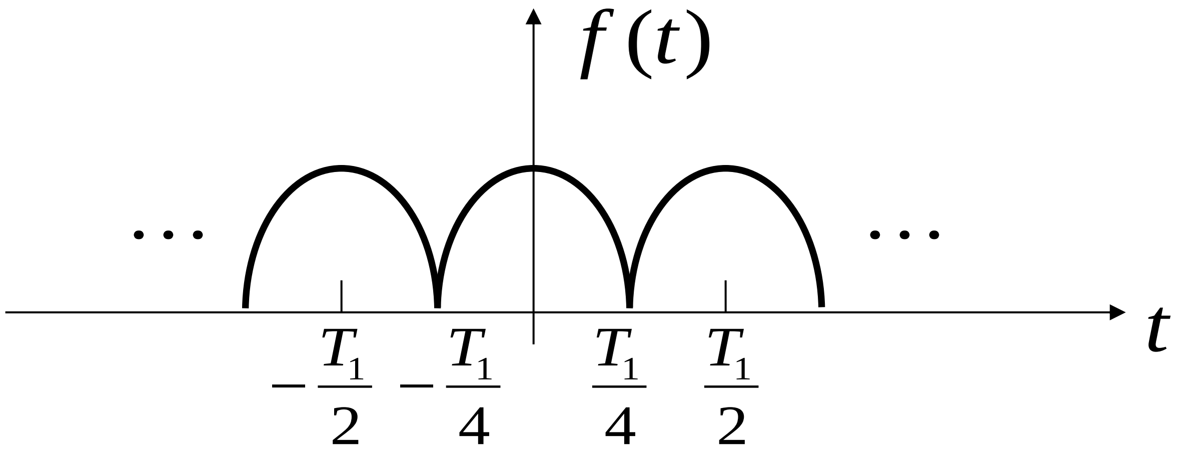
$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6\cdots) \\ \dfrac{4}{T_1}\displaystyle\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t & (n = 1, 3, 5\cdots) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6\cdots) \\ \dfrac{4}{T_1}\displaystyle\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t & (n = 1, 3, 5\cdots) \end{cases}$$

可见，在奇谐函数的傅里叶级数中，只会含有基波和奇次谐波的正弦、余弦分量，而不会包含直流和偶次谐波分量。（教材101页）

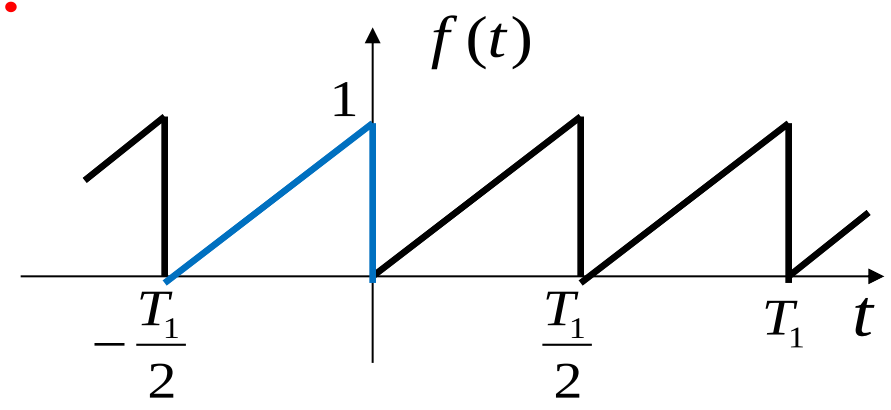
4. 偶谐函数（半波偶对称）

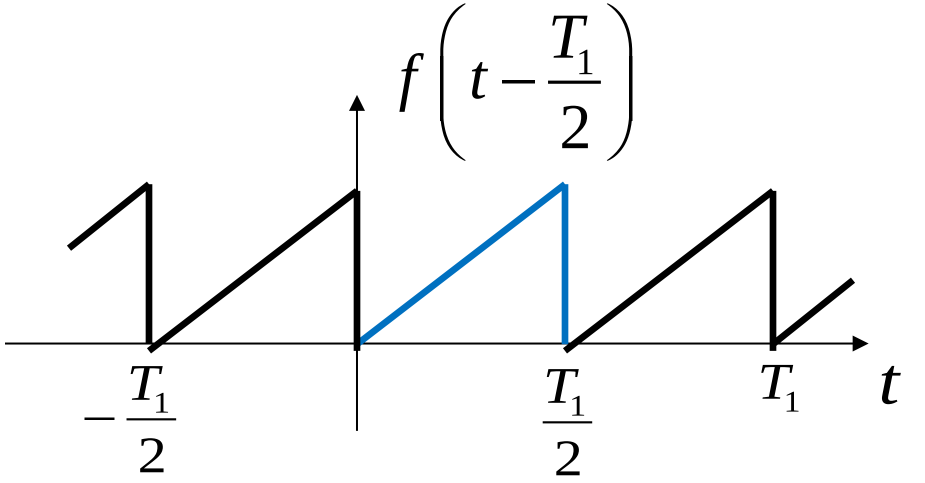
$$f(t \pm \frac{T_1}{2}) = f(t)$$



在偶谐函数的傅里叶级数中，只会含有（直流）与偶次谐波的正弦、余弦分量，而不会包含奇次谐波分量。

例3-3：





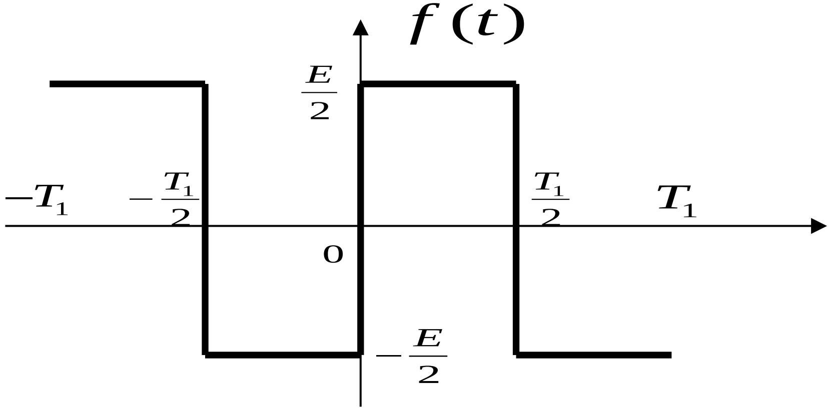
波形对称性与谐波特性的总结

$f(t)$的对称条件	展开式中系数特点
$f(t)=f(-t)$，纵轴对称（偶函数 ）	$b_n=0$，$a_n=\dfrac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t$
$f(t)=-f(-t)$，原点对称（奇函数）	$a_n=0$，$b_n=\dfrac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t$
$f(t)=f(t+\dfrac{T}{2})$，半波偶对称（偶谐函数）	无奇次谐波，只有直流和偶次谐波
$f(t)=-f(t+\dfrac{T}{2})$，半波奇对称（奇谐函数 ）	无偶次谐波和直流，只有奇次 谐波分量

3.2.5 吉布斯（Gibbs）现象

目的：用有限项近似无限项

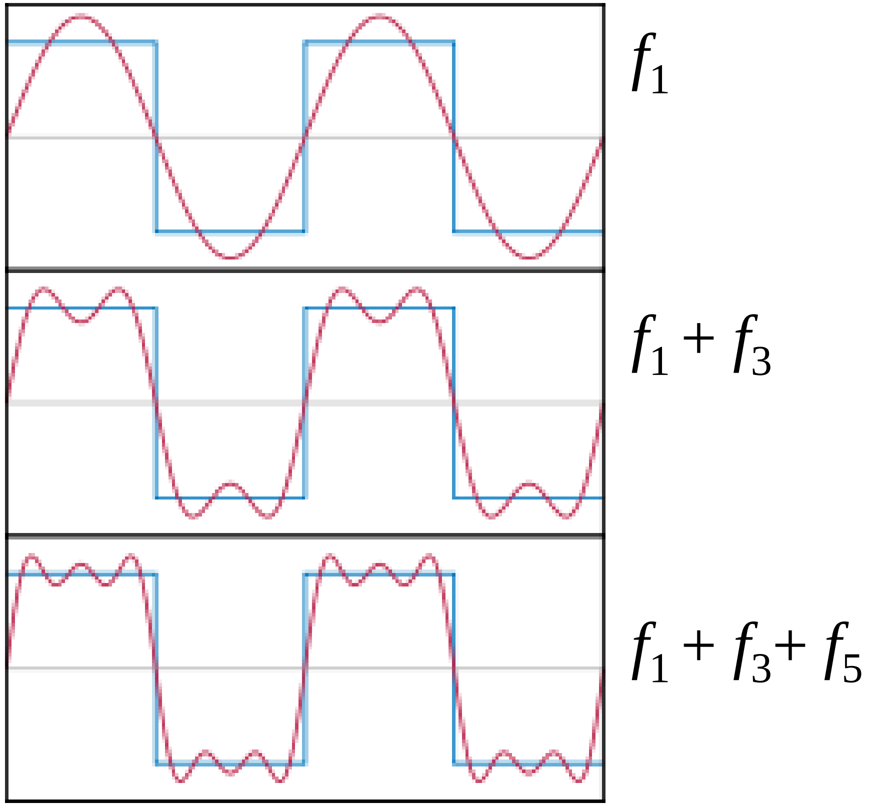
测度准则：最小均方误差准则

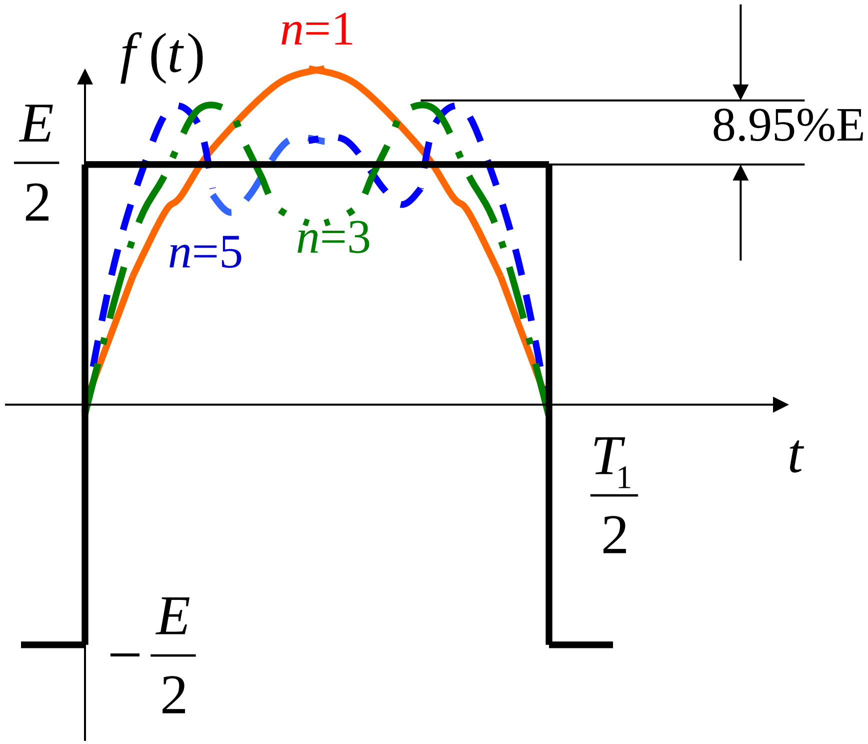


$n=1$: $f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \sin \omega_1 t$ 基波

$n=3$: $f(t) \approx \frac{2E}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t)$ 三次谐波

$n=5$: $f(t) \approx \frac{2E}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t)$ 五次谐波





吉布斯现象：当选取的项数 N 很大时，峰起值趋于一个常数，约等于总跳变值的 9%，并从不连续点开始以起伏震荡的形式逐渐衰减下去。
高频分量主要影响脉冲的跳变沿，低频分量主要影响脉冲的顶部。

$f(t)$ 波形变化越剧烈，所包含的高频分量越丰富；变化越缓慢，所包含的低频分量越丰富。

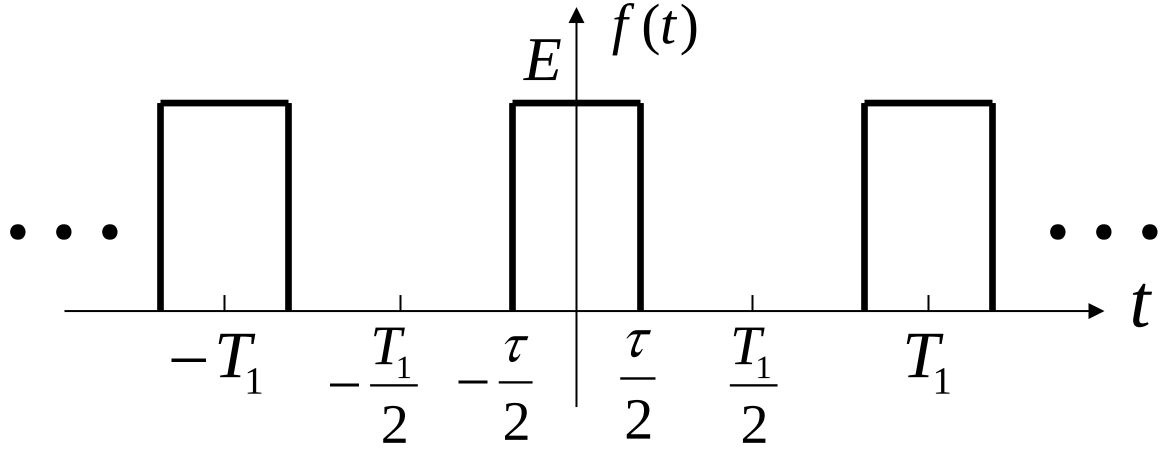
- 用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超调量。
- 超调量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占的能量减少。
- 当选取的项数很大时，该超调量趋于一个常数，大约等于总跳变值的 9%，并从间断点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

周期矩形脉冲信号

(1)周期矩形脉冲信号的傅里叶级数

三要素：脉宽 τ 、脉幅 E 、周期 T_1



$b_n = 0$ （在偶函数的傅里叶级数中不会有正弦项）

$$a_0 = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\mathrm{d}t = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$a_n = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2}) = c_n$$

周期矩形脉冲信号的三角形式傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}+\frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\cos n\omega_1 t$$

因为 $F_n=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n)=\frac{1}{2}a_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$

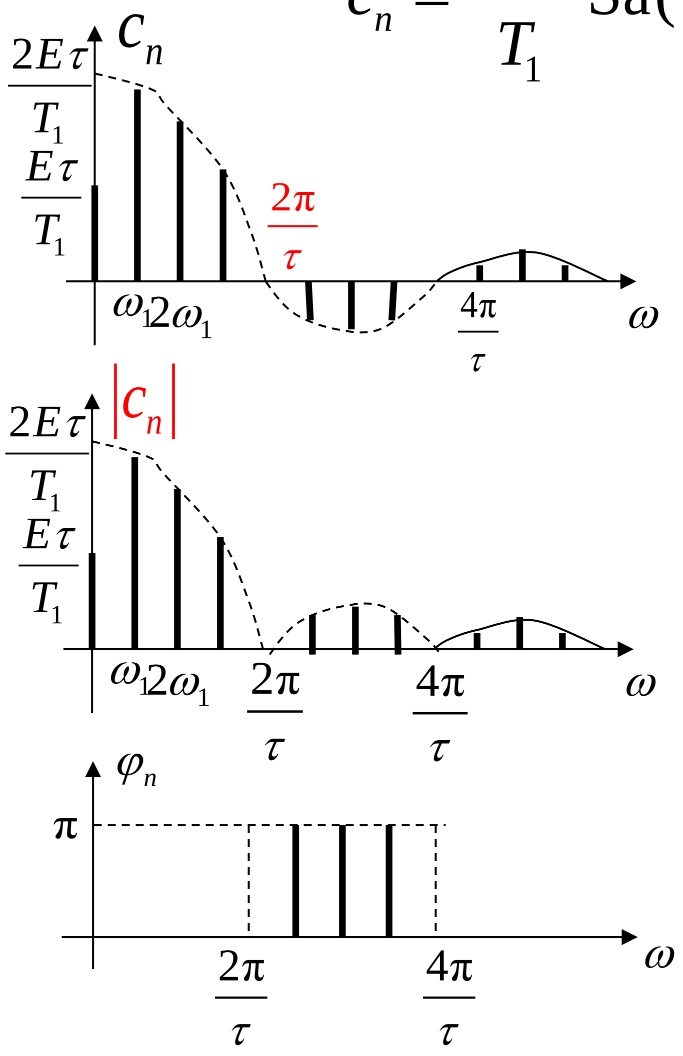
$f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数为

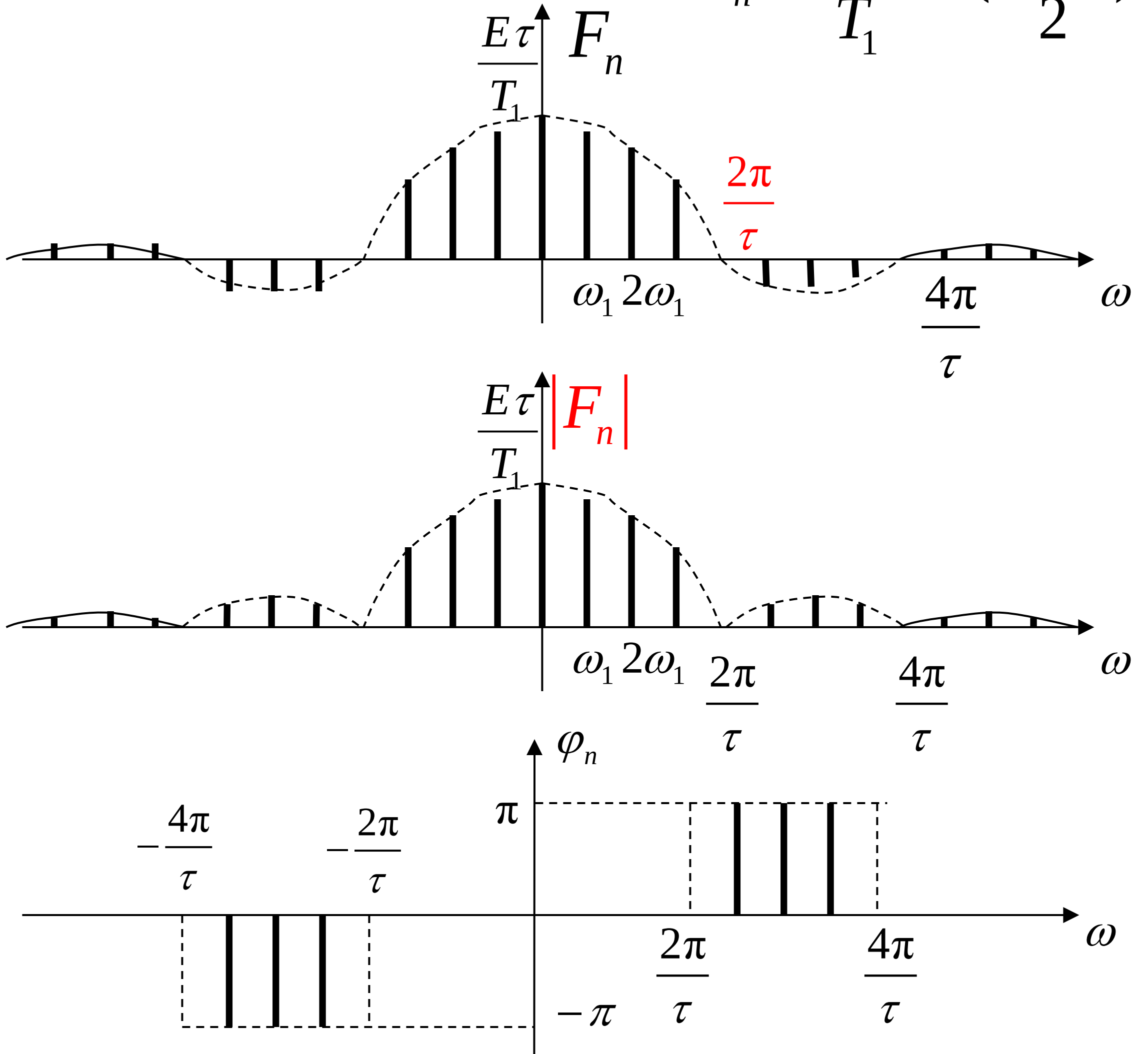
$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

（2）频谱图

$$c_n=\frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

$$F_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$





❖ 周期信号频谱的有效带宽

在允许一定失真的条件下，信号可以用某段频率范围的信号来表示，此频率范围称为**频带宽度**

$0 \sim 2\pi / \tau$ 这段频率范围称为周期矩形脉冲信号的有效频带宽度

$$B = \frac{2\pi}{\tau} \quad 或 \quad B_f = \frac{1}{\tau}$$

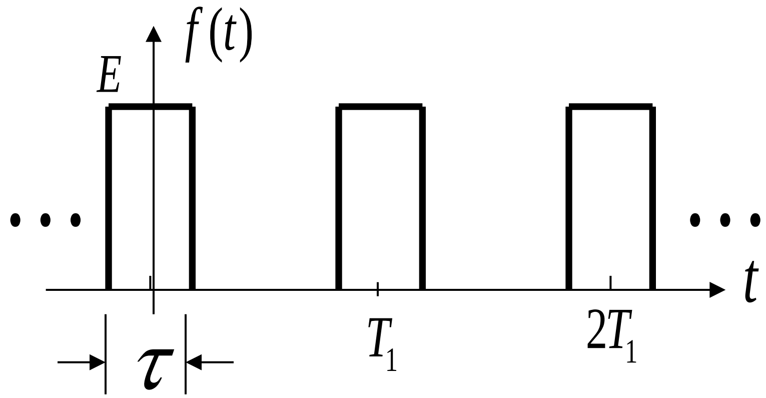
过第一零点

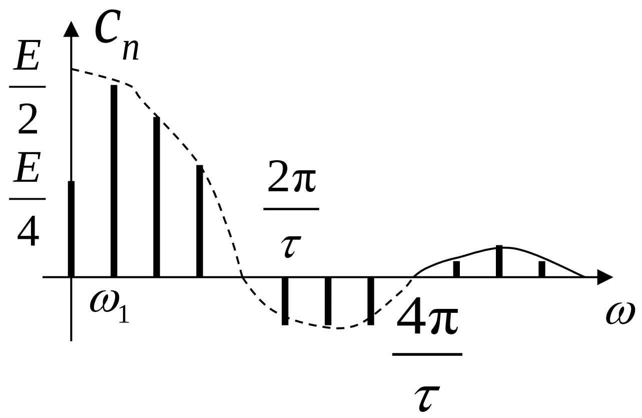
信号的有效带宽 B 与 信号时域的持续时间 τ 成反比，即 τ 越大，其 B 越小；反之，τ 越小，其 B 越大。

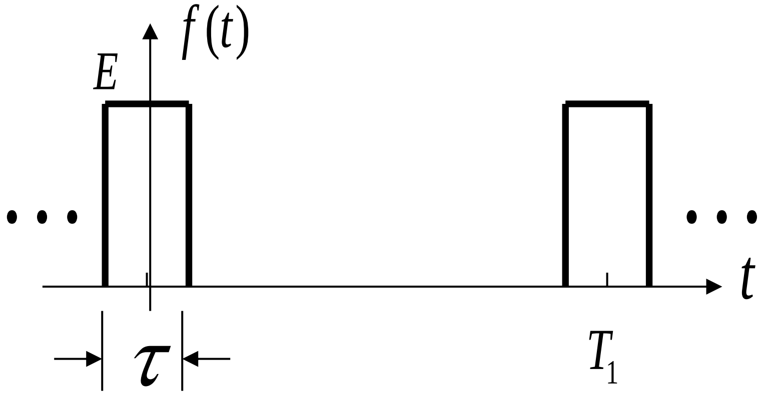
——在实际系统中频率越高（实际中 τ 和 T 有正比关系），
带宽越大，传输速率越快。

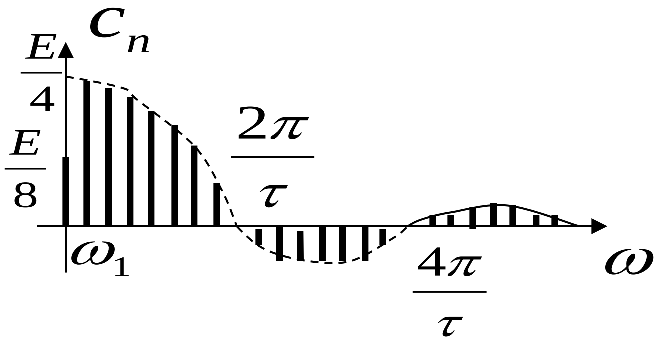
（3）频谱结构与波形参数的关系 (T_1, τ)

a）若 τ 不变，T_1 扩大一倍，即 $T_1 = 4\tau \to T_1 = 8\tau$

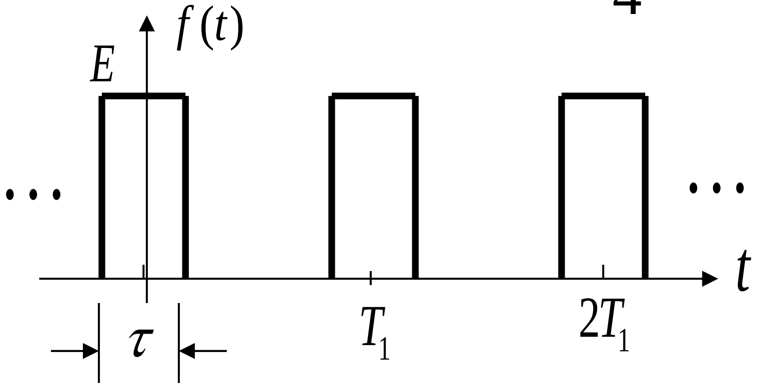


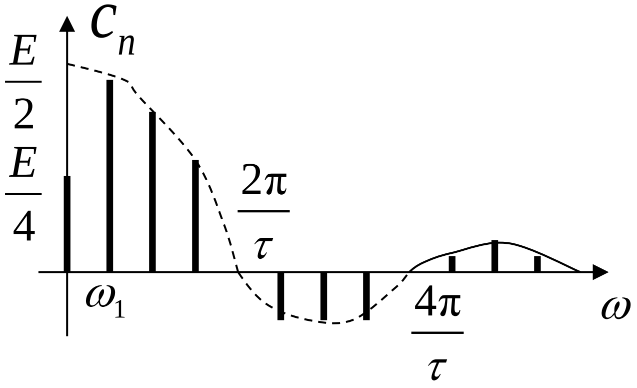


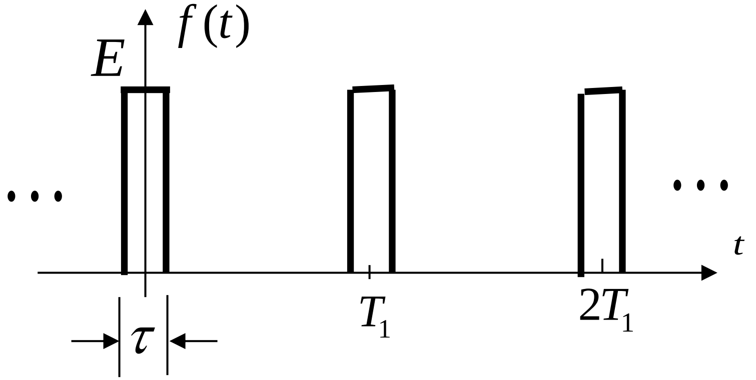


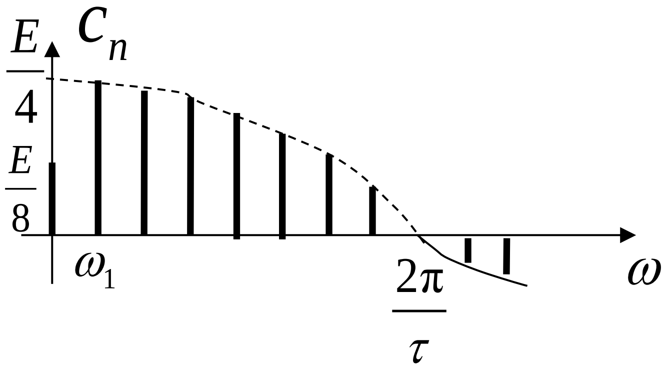


b) 若 T_1 不变, τ 减小一半，即 $\tau=\frac{T_1}{4}\rightarrow\tau=\frac{T_1}{8}$









谱线间隔 $\omega_1(=\frac{2\pi}{T_1})$ 只与周期 T_1 有关，且与 T_1 成反比；

零值点频率 $\frac{2\pi}{\tau}$ 只与 脉冲宽度 τ 有关，且与 τ 成反比；

谱线幅度 $\frac{2E\tau}{T_1}$ 与 T_1 和 τ 都有关系，且与 T_1 成反比，与 τ 成正比。

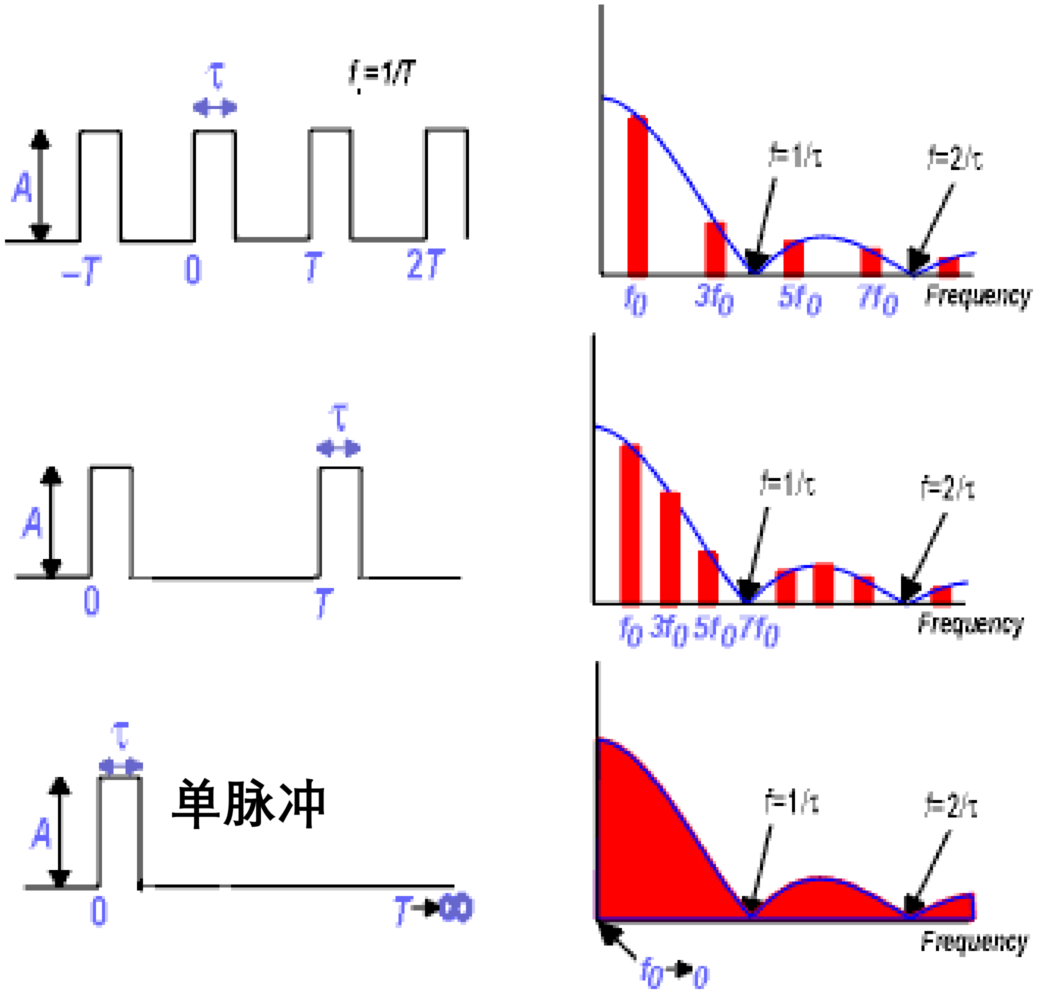
数据脉冲的频谱

当 T 增大时，谐波间距减小。

当 $T\to\infty$，即单脉冲时，频谱成为连续，被 $\mathrm{Sa}(\pi t)$ 函数包络。

一个随机的数据序列由多个单脉冲组成，因此其频谱可由单脉冲的瞬时频谱层叠得到。频谱的包络也是 $\mathrm{Sa}(\pi t)$ 函数。

重点强调：其它常用周期信号（锯齿脉冲、三角脉冲、半波余弦、全波余弦等）的傅里叶级数见教材p392附录二。



作 业

教材习题

基础题：3-2，3-3，3-4，3-5，3-7（a）（c）（e），3-10（1）（3）（5）

加强题：3-7（b）（d）（f），3-10（2）（4）（6），3-11（a），3-12

傅里叶变换的视频链接：

https://www.bilibili.com/video/av48286796

第三章 傅里叶变换

本次课内容

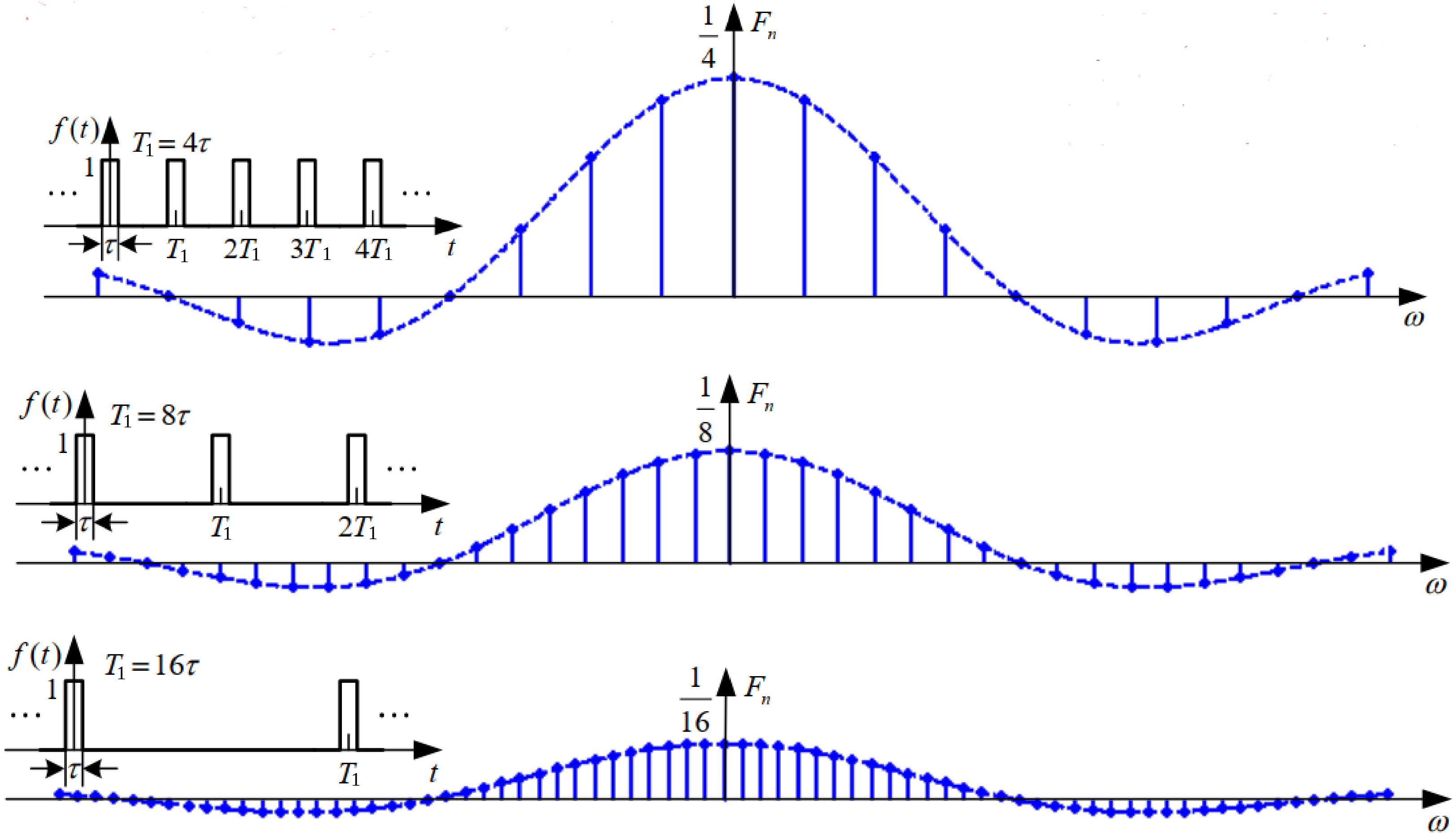
3.4 傅里叶变换
3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

本次课目标

1. 深入了解傅里叶变换和傅里叶级数的关联和区别；
2. 熟练掌握典型非周期信号、冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换。

回忆：谱线结构与波形参数的关系

取 E=1， $F_n = \frac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$ ， 假设脉冲宽度 τ 不变



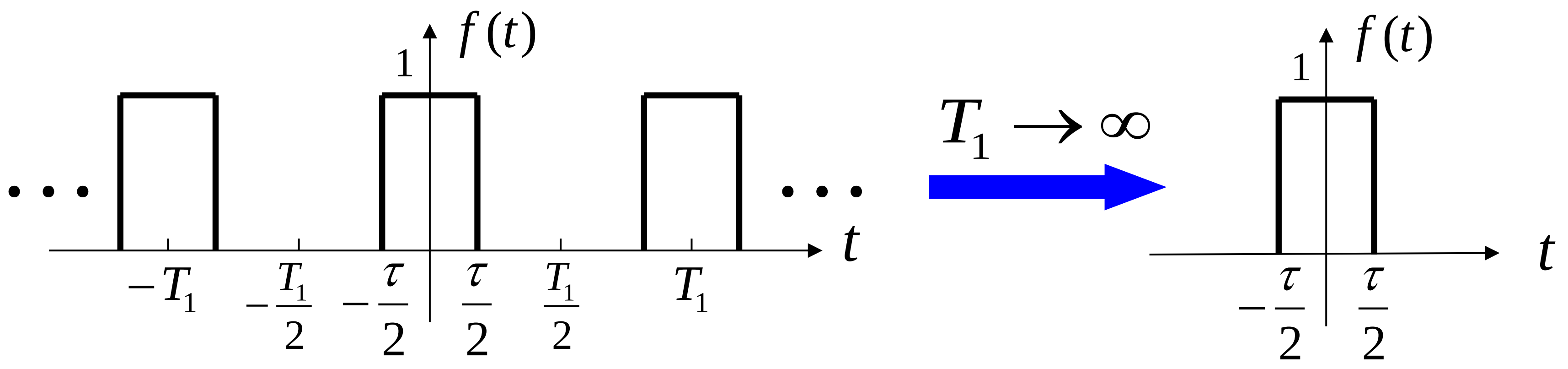
周期: T_1 增大

幅值: $\frac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$ 减小

谱线间隔: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ 减小

3.4 傅里叶变换

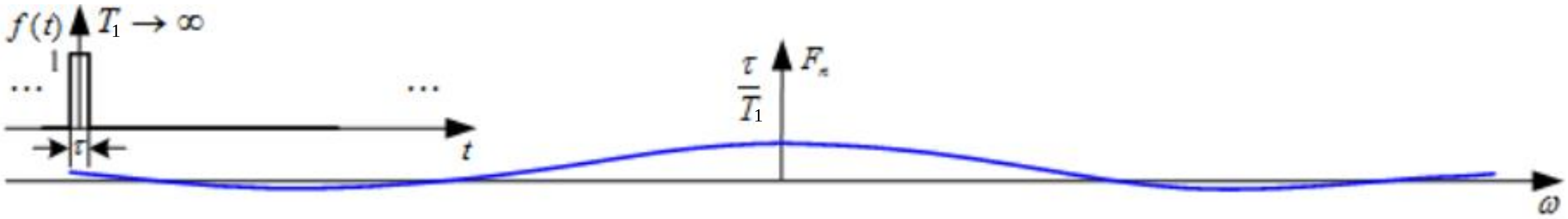
1. 傅里叶变换的引出



$T_1 \to \infty$ 时， $f(t)$: 周期信号 $\to$ 非周期信号

谱线间隔 $\omega_1 = 2\pi/T_1 \to 0$，谱线幅度 $\frac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2}) \to 0$，

周期信号的离散谱 $\to$ 非周期信号的连续谱



1. 傅里叶变换的引出

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$T_1 \to \infty$ 时　　　　各频率分量都不存在，无法分析

$f(t)$: 周期信号 ⟶ 非周期信号

F_n: 谱线幅度 ⟶ 趋于0，无穷小

ω_1: 谱线间隔 ⟶ 趋于0，无穷小

离散频谱 ⟶ 连续频谱

虽然各频率分量的幅度趋近于无穷小，但无穷小量之间仍有相对大小差别，故需要引入新的频谱分析方法

1. 傅里叶变换的引出

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

问题：$T_1 \to \infty$时，数学上，各分量都不存在，无法研究

但物理上，时域和频域能量守恒，所以一定存在频率分量

等式两边同时乘以 T_1 $\lim\limits_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \lim\limits_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t = \lim\limits_{\omega_1\to 0}\frac{2\pi F_n}{\omega_1}$

频谱密度函数：单位频率上的幅度 $\Longrightarrow$ 不趋于 0，有限值，能够分析

找到了非周期信号的频谱表达方法

1. 傅里叶变换的引出

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

当$T_1 \to \infty$时，离散频率$n\omega_1$ → 连续频率ω

则 $\lim_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \lim_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$　　这是一个关于 ω 的复函数

记为 $F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$　　**Fourier Transform，FT**

$F(\mathrm{j}\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶变换，也称为其频谱函数

2. 傅里叶逆变换

指数傅里叶级数展开

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

其中 $F(n\omega_1)=\dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$　　代入后得：$f(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{T_1}\left[\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$

当 $T_1\to\infty$ 时：$\omega_1\to\mathrm{d}\omega,\quad n\omega_1\to\omega,\quad \dfrac{1}{T_1}=\dfrac{\omega_1}{2\pi}\to\dfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi},\quad \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\to\int_{-\infty}^{\infty}$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega}$$

$f(t)$ 称为 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的傅里叶逆变换，也称为其原函数

2. 傅里叶逆变换——物理意义

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$F(\omega)=|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

实函数

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

欧拉公式

偶函数

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega$$

奇函数积分为 0

$$\boxed{+\mathrm{j}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\sin[\omega t+\varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|F(\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{|F(\omega)|}{\pi}\mathrm{d}\omega\cos[\omega t+\varphi(\omega)]$$

和只有余弦项形式的傅里叶级数对比

2. 傅里叶逆变换——物理意义

$$f(t)=\int_0^{\infty}\underbrace{\frac{|F(\omega)|}{\pi}\mathrm{d}\omega}_{\text{振幅}}\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]$$

$$=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{|F(n\Delta\omega)|}{\pi}\Delta\omega}_{\text{振幅}}\cos\left[n\Delta\omega t+\varphi(n\Delta\omega)\right]$$

结论：$f(t)$为无穷多个振幅为$\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|\mathrm{d}\omega\right)$无穷小的连续余弦信号之和，频谱范围$0\sim\infty$。

非周期信号也可表示为正弦信号的加权和，只是包含了零到无限高的所有频率分量。

加权和写为加权积分，权值表示频谱密度。

3. 傅里叶变换对

傅里叶变换式 “−”

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

傅里叶逆变换式 “+”

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

简记为： $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)]$$

或 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$

$$F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$|F(\mathrm{j}\omega)|$ --幅度谱 频率 ω 的偶函数*　　$\varphi(\omega)$ --相位谱 频率 ω 的奇函数*

与傅里叶级数的关系（重点）

单个脉冲信号的傅里叶变换：$F_0(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ -- ω 的连续谱

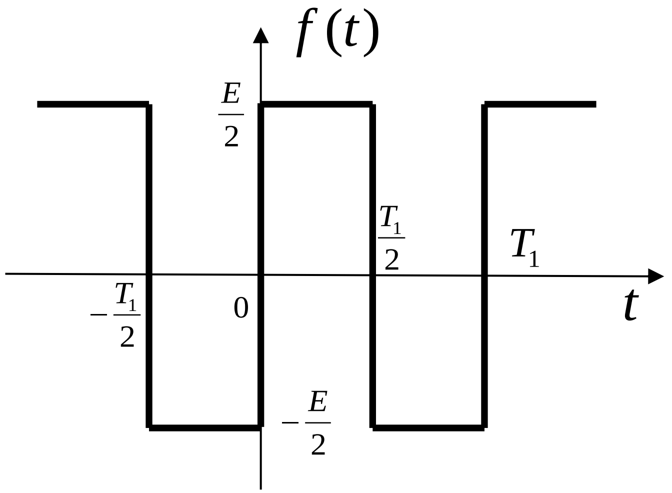
周期信号的傅里叶级数展开：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$

级数展开的系数：$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$ -- ω 的离散谱

F_n 与 $F_0(\mathrm{j}\omega)$ 的关系：$\boxed{F_n=\left.\frac{F_0(\mathrm{j}\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1}}$ → 连续谱的离散化

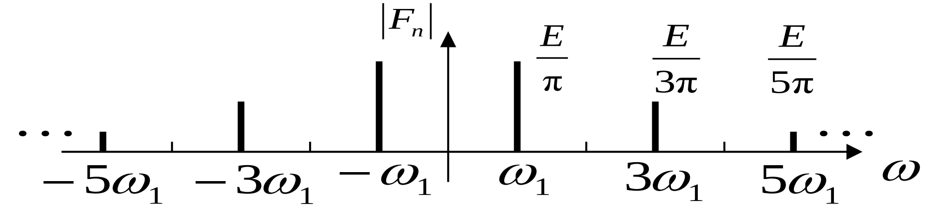
重要结论：周期脉冲序列的傅里叶级数的系数 F_n 等于单脉冲的傅里叶变换 $F_0(\mathrm{j}\omega)$ 在 $n\omega_1$ 频率点的值乘以周期的倒数 $1/T_1$。

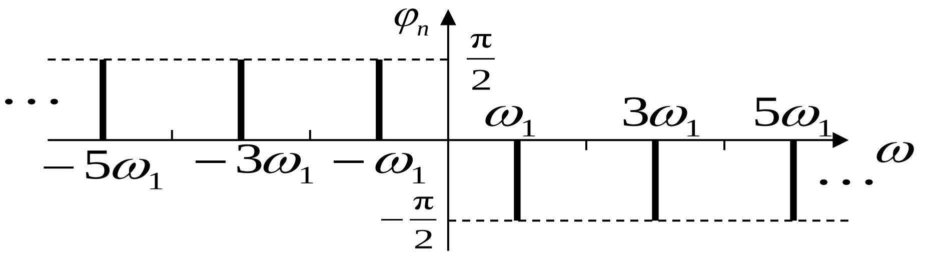
看一个之前的例子：指数形式的傅里叶级数 画出频谱图

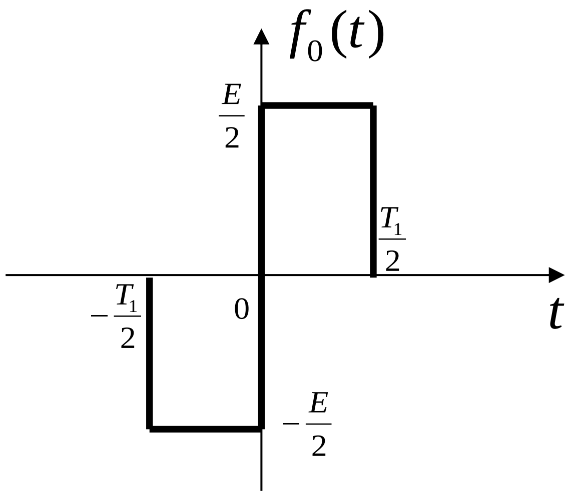


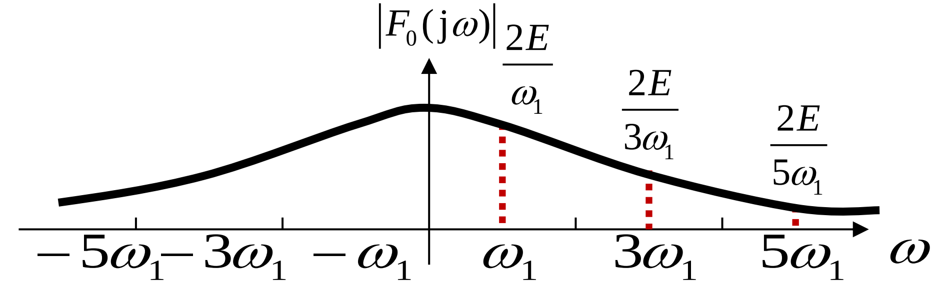
$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \qquad (n = \pm1, \pm3, \pm5\cdots)$$

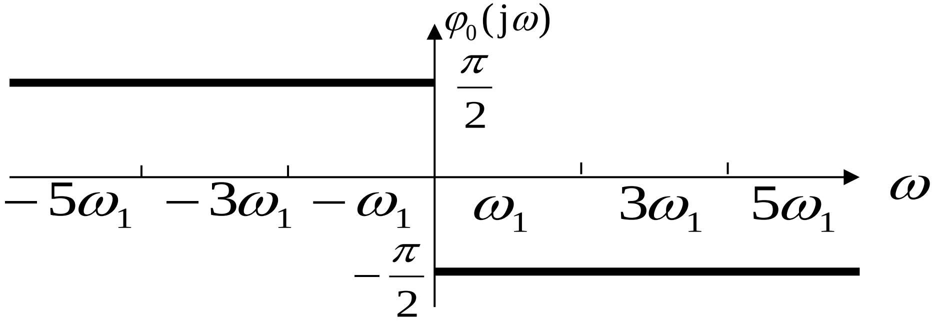
$$\varphi_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5\cdots) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5\cdots) \end{cases}$$











$$F_n = \left.\frac{F_0(\mathrm{j}\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1} = \left.\frac{\omega_1 F_0(\mathrm{j}\omega)}{2\pi}\right|_{\omega=n\omega_1}$$

$$= \left.\frac{\omega_1 \dfrac{2E}{\mathrm{j}\omega}}{2\pi}\right|_{\omega=n\omega_1} = -\frac{\mathrm{j}E}{n\pi}$$

与例3-1结论相同

傅里叶级数与傅里叶变换的关系（重点中的重点）：

傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

傅里叶变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

频谱（离散） ← 量纲不同 → 频谱密度（连续）

$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}$$

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

在一个周期内满足狄里赫利条件

在 (-∞ , +∞)内满足狄里赫利条件

傅里叶变换存在的条件

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t =$ 有限值（充分条件）

注意：与周期信号的傅里叶级数的条件对比

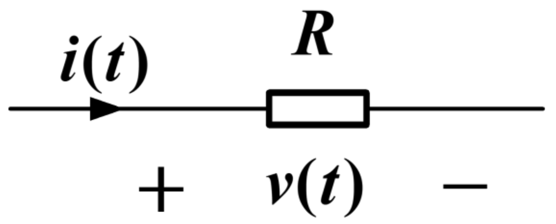
即 $f(t)$ 绝对可积

所有能量信号均满足此条件。

哪些信号不符合？

当引入 $\delta(\omega)$ 函数的概念后，允许做傅立叶变换的函数类型大大扩展了。

能量信号与功率信号（教材 6.6）



设 $i(t)$ 为流过电阻 R 的电流，$v(t)$ 为 R 上的电压

瞬时功率为 $p(t)=i^2(t)R$

在一个周期 T_0 内，R 消耗的能量

$$E=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(t)\,\mathrm{d}t=R\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} i^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{或} \quad E=\frac{1}{R}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v^2(t)\,\mathrm{d}t$$

平均功率可表示为

$$P=\frac{1}{T_0}R\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} i^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{或} \quad P=\frac{1}{T_0}\frac{1}{R}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v^2(t)\,\mathrm{d}t$$

能量信号与功率信号

将信号 $f(t)$ 施加于1Ω电阻上，它所消耗的瞬时功率为$|f(t)|^2$，在区间$(-\infty, \infty)$的能量和平均功率定义为

$$E \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

$$P \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

能量有限信号: 信号的能量 $E < \infty$， 简称能量信号，此时平均功率 $P = 0$ 。

功率有限信号: 信号的功率 $P < \infty$， 简称功率信号，此时信号能量 $E = \infty$ 。

能量信号与功率信号

一般规律

① 周期信号为功率信号，一定不是能量信号。

② 时间有限信号，为能量信号，平均功率为 0 。

③ 非周期信号可能是能量信号，也可能是功率信号。

④ 有的信号既不是能量信号，也不是功率信号，如 e^t 。

如 $u(t)$ 是功率信号;

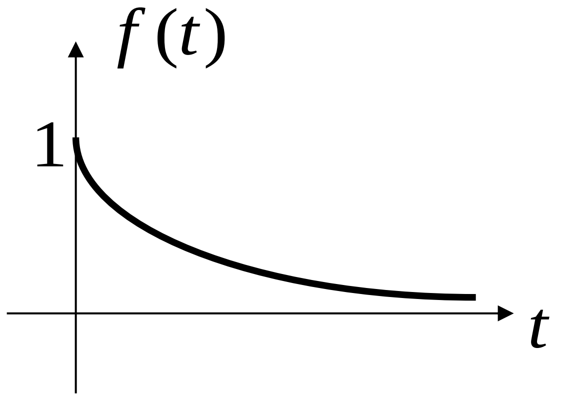
而 $tu(t)$ 为非功率非能量信号;

$\delta(t)$ 是无定义的非功率非能量信号。

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

1. 单边指数信号

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = e^{-\alpha t}u(t)$$

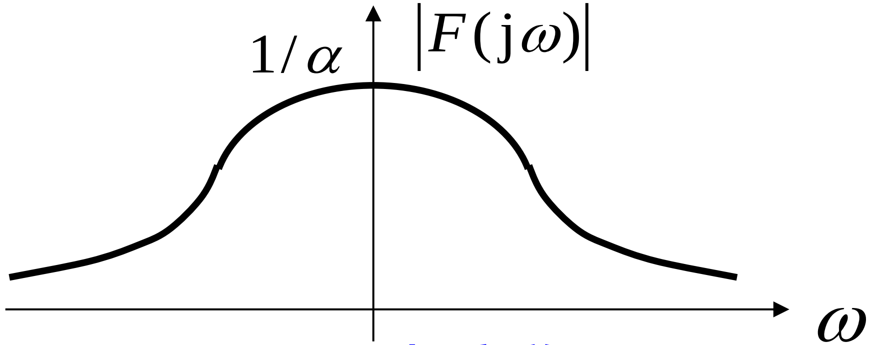


$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

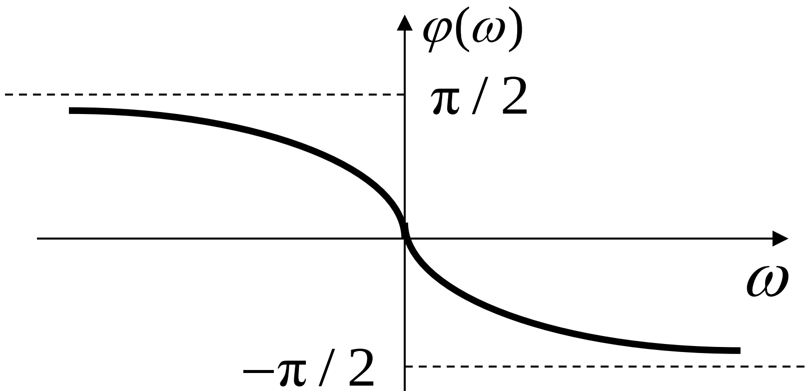
$$e^{-\alpha t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$|F(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan(\frac{\omega}{\alpha})$$



幅度谱



相位谱

单选题 1分

设置

频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$ 的傅里叶逆变换为:

A $\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

B $t\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

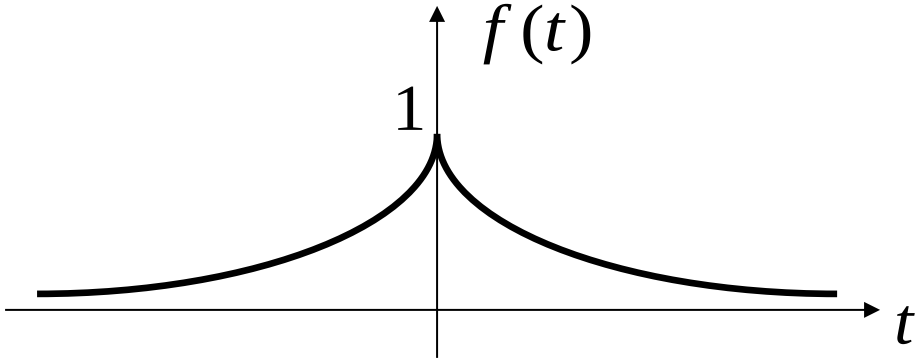
C $\mathrm{e}^{-0.5t}u(t)$

D $t\mathrm{e}^{2t}u(t)$

提交

2. 双边指数信号

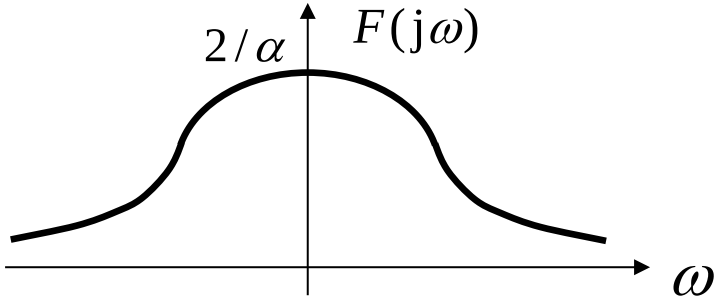
$$f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$



$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\alpha - \mathrm{j}\omega} + \frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

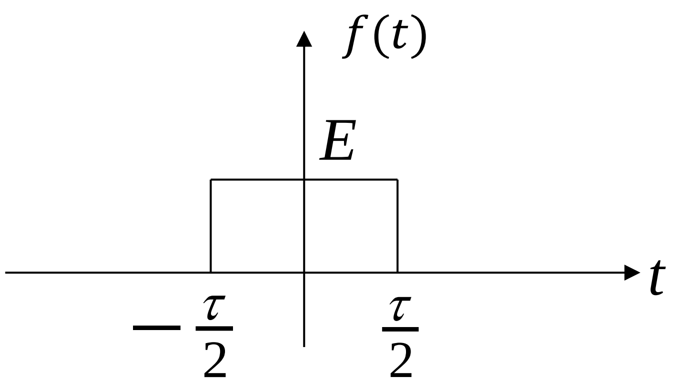


幅度谱 $|F(\mathrm{j}\omega)| = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

相位谱 $\varphi(\omega) = 0$

3. 矩形脉冲信号

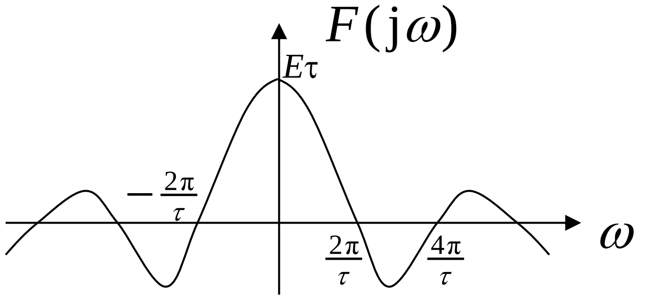
$$f(t)=E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$$



矩形脉冲信号满足绝对可积，可直接通过积分变换公式求其傅里叶变换。

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=E\frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

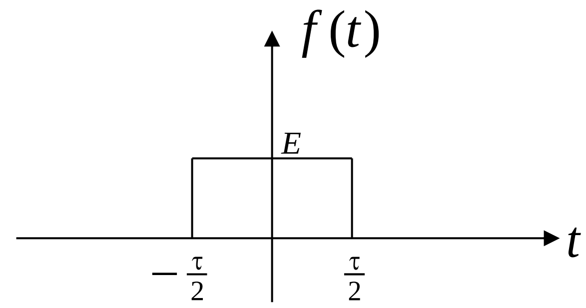
$$=E\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{-\mathrm{j}\omega}=2E\frac{\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega}=E\tau\mathrm{Sa}(\omega\frac{\tau}{2})$$

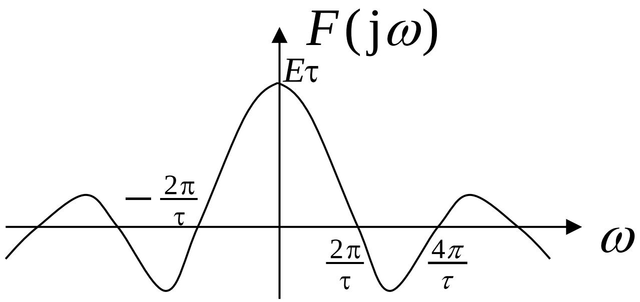


由频谱图可见，信号的能量主要集中在主瓣所包含的频率范围之内：$0\sim 2\pi/\tau$ 所以习惯上称此频段范围是矩形波的频带宽度 B_ω。

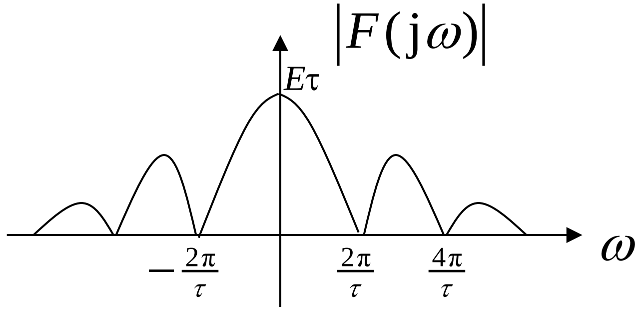
$$B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$$

$$E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\xleftrightarrow{FT}E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



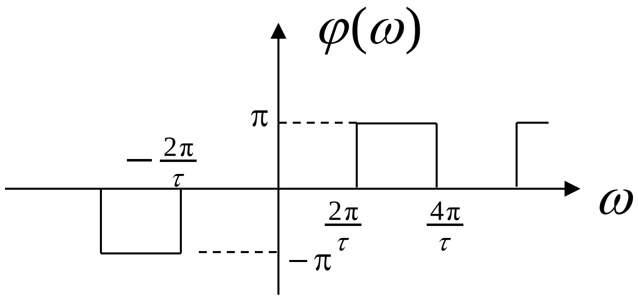


幅度谱



偶函数

相位谱



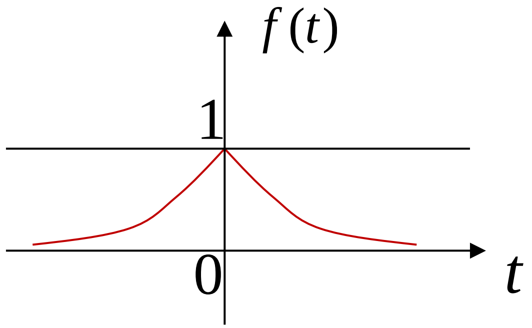
奇函数

时域有限，频域无限
频域有限，时域无限

4. 直流信号

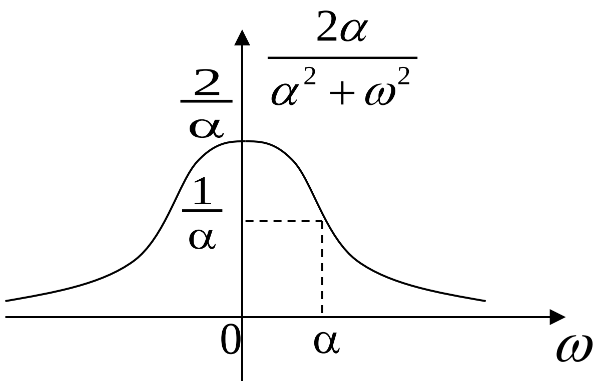
表示直流信号的函数是一常量，这里设常量为 1。显然，它不满足绝对可积的条件，不能由积分直接求得其傅里叶变换。

$$f(t)=1=\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$



由偶对称双边指数信号的傅里叶变换

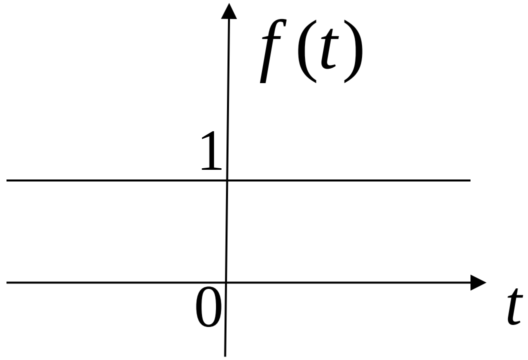
$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

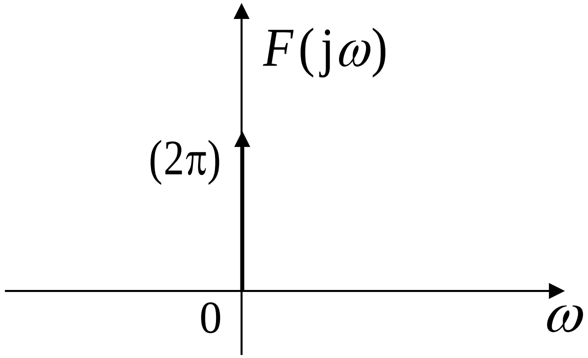


此频谱函数的波形当$\alpha \to 0$，其宽度趋于无穷小，幅度趋于无穷大，是一个冲激信号$A\delta(\omega)$。幅度A等于$F(\mathrm{j}\omega)$所占的面积。

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=4\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=4[\arctan(\infty)-\arctan(0)]=2\pi$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=2\pi\delta(\omega)$$





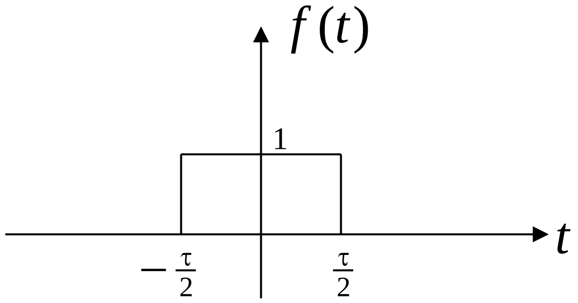
再次强调：

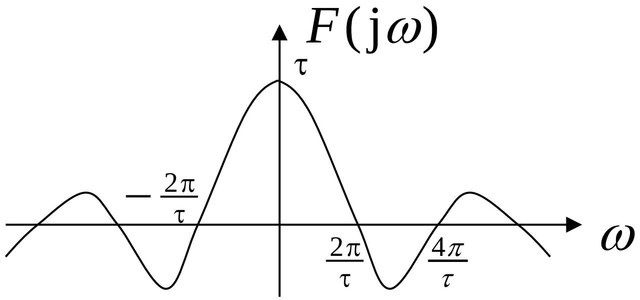
时域有限、频域无限　　频域有限、时域无限

此结果也可通过幅度为1，宽度为 τ 的矩形脉冲的傅里叶变换，取 $\tau\to\infty$ 得到。

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\tau\to\infty}\tau\mathrm{Sa}(\omega\frac{\tau}{2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(x)\mathrm{d}x=\pi$$



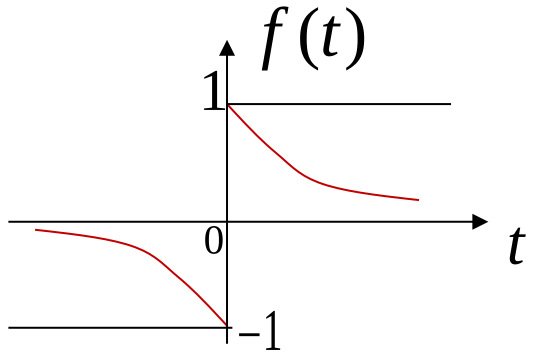


所以 $$\int_{-\infty}^{\infty}\tau\mathrm{Sa}(\omega\frac{\tau}{2})\mathrm{d}\omega=2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\omega\frac{\tau}{2})\mathrm{d}(\omega\frac{\tau}{2})=2\pi$$

于是 $1\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega)$ 若用公式表示即是 $$\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$$

5. 符号函数信号

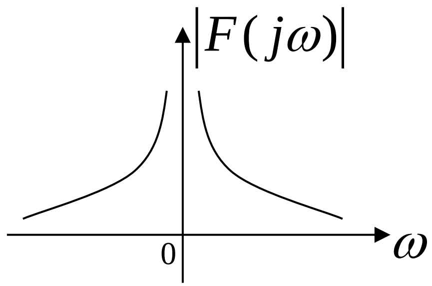
$$f(t)=\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

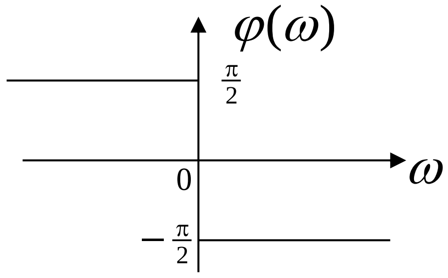


符号函数信号也不满足绝对可积的条件，不能由积分直接求得其傅里叶变换。但可以由奇对称双边指数信号的傅里叶变换，取 $\alpha\to 0$ 求得。

$$f(t)=\operatorname{sgn}(t)=\lim_{\alpha\to 0}[-\mathrm{e}^{\alpha t}u(-t)+\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)]$$

于是 $F(\mathrm{j}\omega)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{-2\mathrm{j}\omega}{\alpha^2+\omega^2}=-\mathrm{j}\dfrac{2}{\omega}=\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$





幅度谱 $|F(\mathrm{j}\omega)|=\dfrac{2}{|\omega|}$

相位谱 $\varphi(\omega)=\begin{cases}-\pi/2 & (\omega>0)\\ \pi/2 & (\omega<0)\end{cases}$

傅里叶变换表（几种常用函数及其频谱；*重要）

名称	时间函数	频谱函数
*单位冲激	$\delta(t)$	1
*单位阶跃	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/\mathrm{j}\omega$
符号函数	$\operatorname{sgn} t=u(t)-u(-t)$	$2/(\mathrm{j}\omega)$
*单位直流	1	$2\pi\delta(\omega)$
*单边指数函数	$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$1/(\alpha+\mathrm{j}\omega)$
双边指数函数	$\mathrm{e}^{-\alpha\|t\|}$	$2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$
*单位余弦	$\cos\omega_c t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
*单位正弦	$\sin\omega_c t$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$
*矩形脉冲 (门函数)	$G_\tau(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$	$\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)=\tau\frac{\sin(\tau\omega/2)}{\tau\omega/2}$
*抽样函数	$\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega t}{2}\right)=\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2}$	$G_\Omega(\omega)=\frac{2\pi}{\Omega}\left[u\left(\omega+\frac{\Omega}{2}\right)-u\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)\right]$

单选题 1分

设置

试求信号 $f(t) = 1 + 2\cos t$ 的傅里叶变换。

A $F(\omega) = \delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$

B $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)$

C $F(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)$

D $F(\omega) = 2\pi[\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$

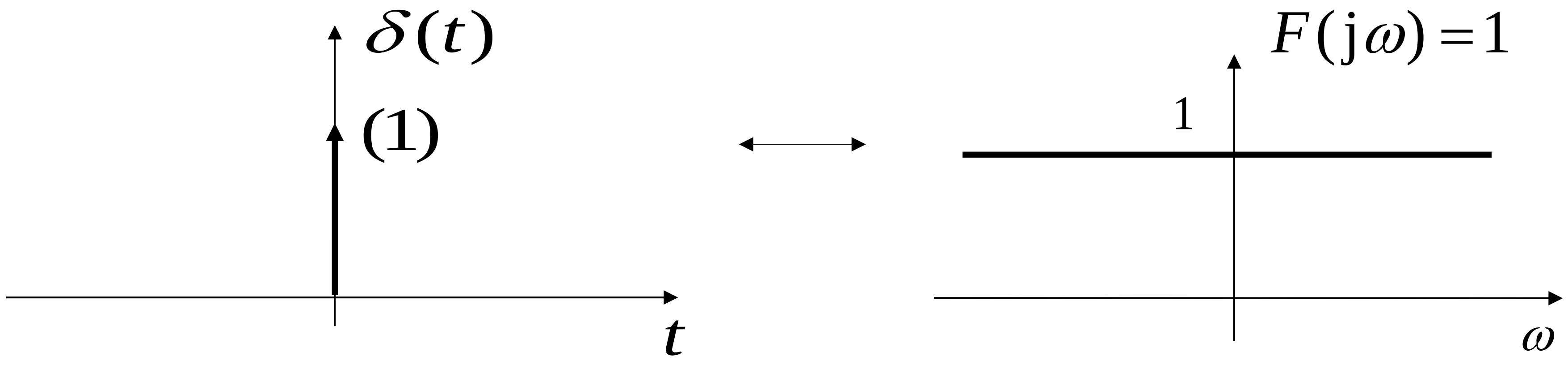
提交

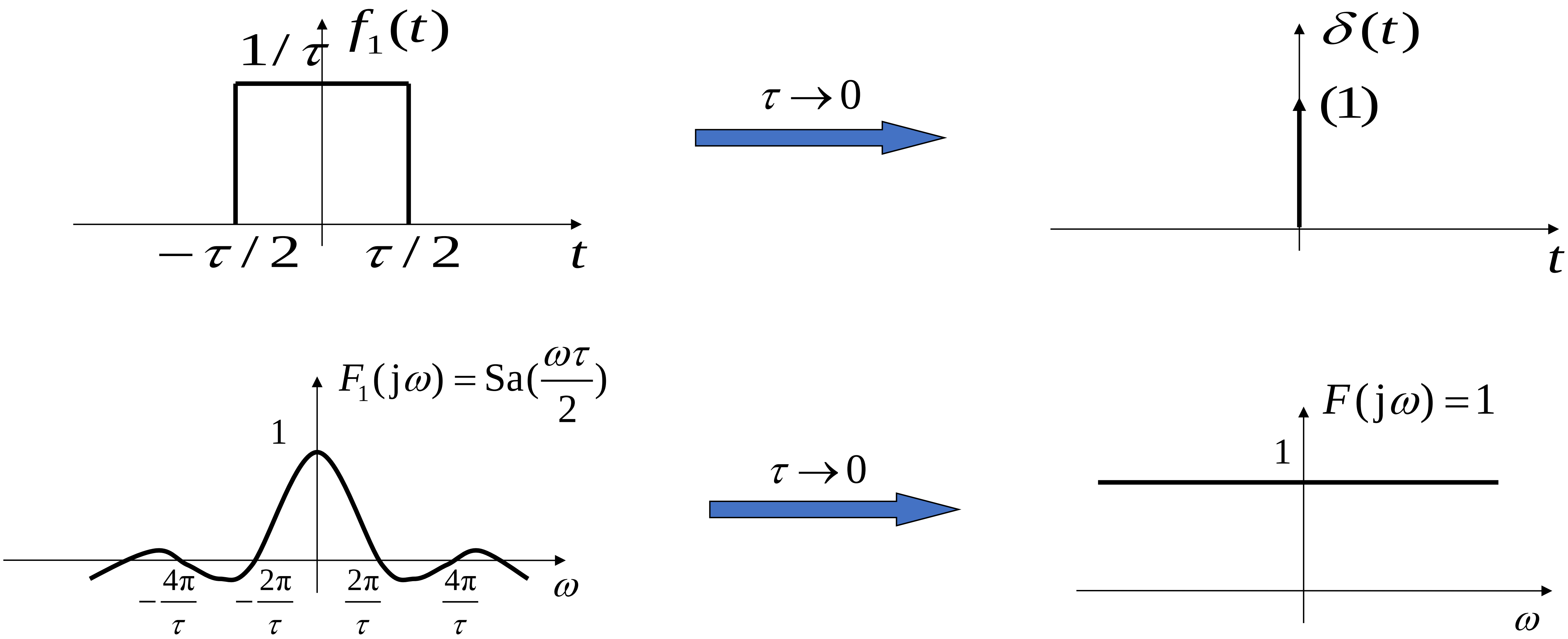
3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

（1）冲激函数的傅里叶变换

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=1$$

单位冲激函数的频谱等于常数，即在整个频率范围内频谱是均匀的。这种频谱常被叫做“均匀谱”或“白色频谱”。

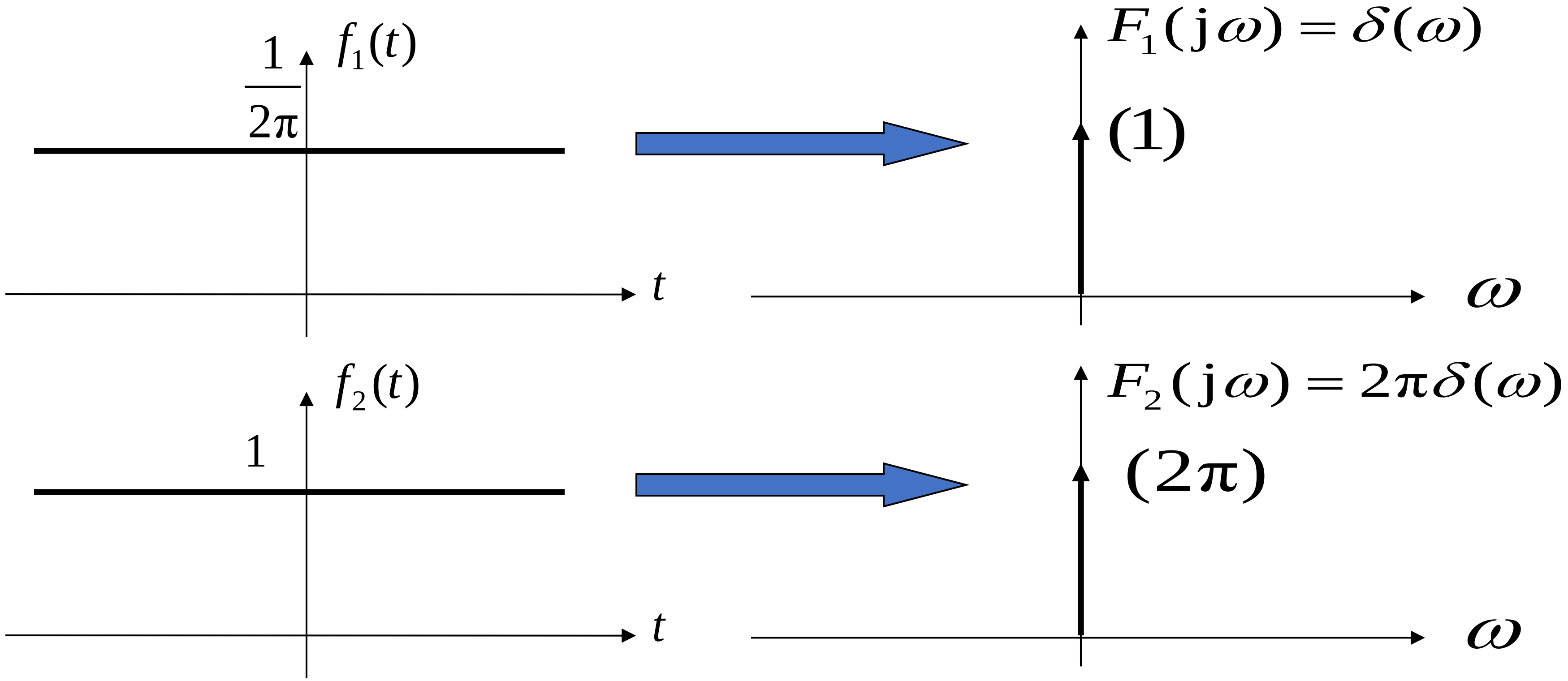


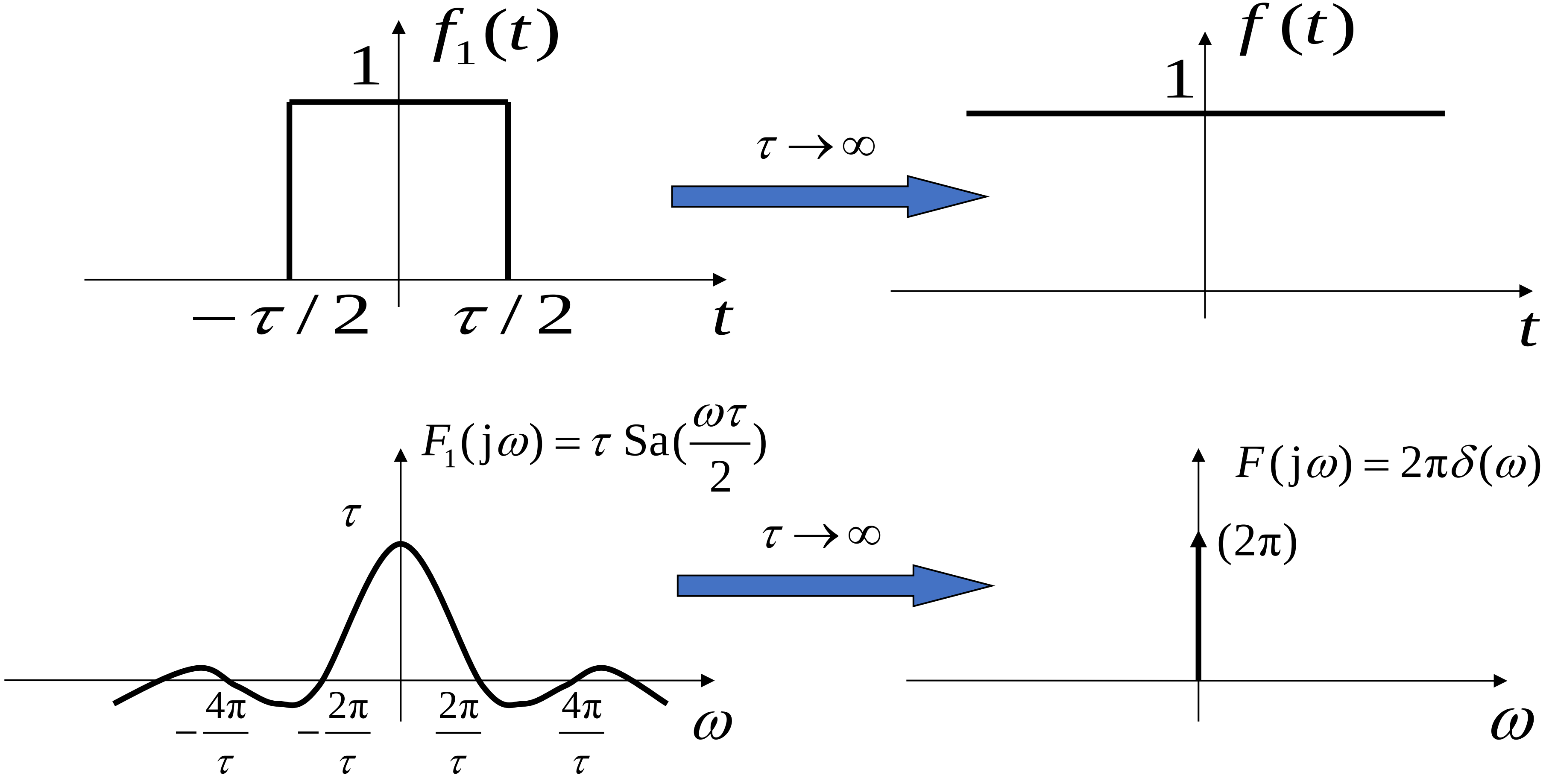

$f_1(t)$
$1/\tau$
$-\tau/2$
$\tau/2$
t
$\tau \to 0$
$\delta(t)$
(1)
t
$F_1(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$
1
$-\frac{4\pi}{\tau}$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
ω
$\tau \to 0$
$F(\mathrm{j}\omega)=1$
1
ω

(2) 冲激函数的傅里叶逆变换

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}$$

或 $\mathscr{F}[\frac{1}{2\pi}]=\delta(\omega),\qquad \mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$





结论： 冲激函数与常数(直流)在时域和频域是对偶函数。

(3) 冲激偶的傅里叶变换

$$\because \mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \quad \text{即：} \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

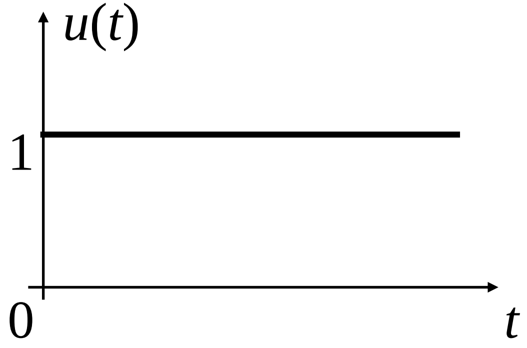
上式两边对 t 求导得：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\therefore \mathscr{F}[\delta'(t)] = \mathrm{j}\omega$$

同理：$\mathscr{F}[\delta^{(n)}(t)] = (\mathrm{j}\omega)^n$

（4）阶跃信号

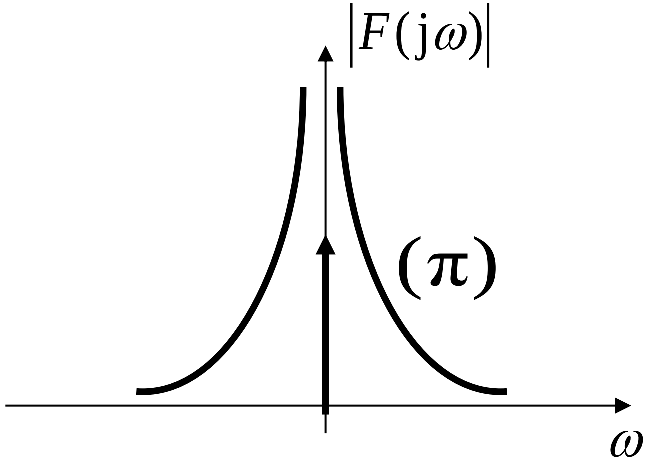
$$\because u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

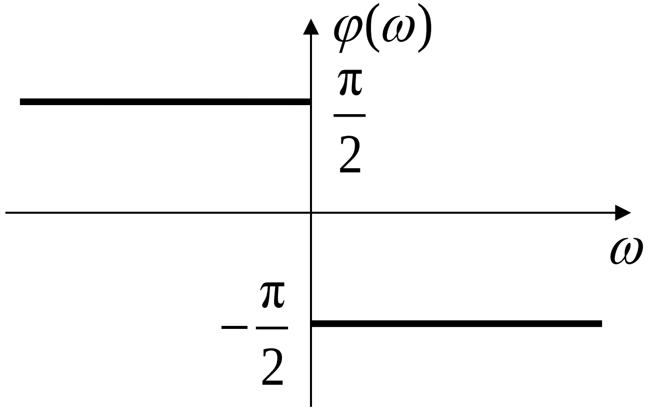


$$\therefore F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[u(t)]=\mathscr{F}[\frac{1}{2}]+\mathscr{F}[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)]$$

$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

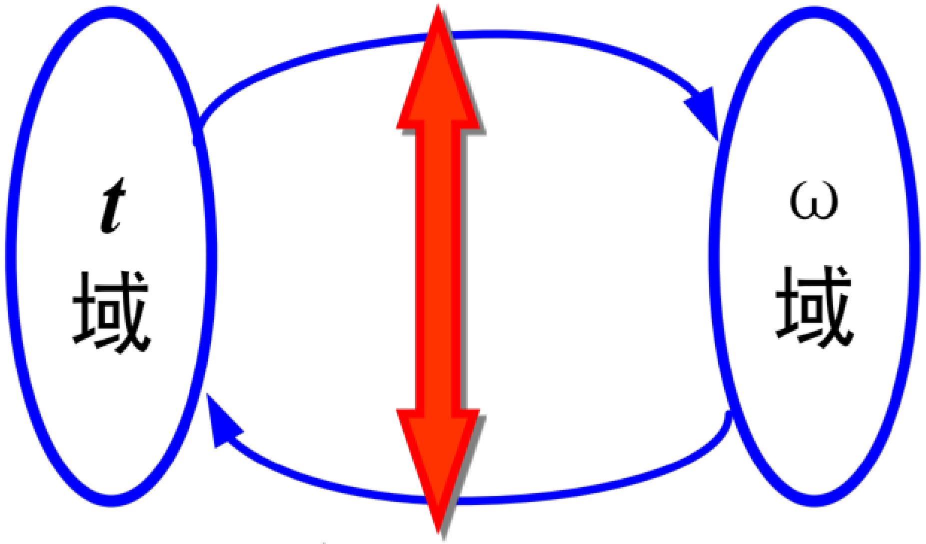
对应直流分量　　0时刻跳变引起的其他频率分量





归纳记忆：

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

典型非周期信号（指数、矩形窗、直流、冲激、阶跃）的傅里叶变换要熟记！

幅度谱、相位谱要看频谱函数的实部和虚部，归纳总结规律。

作 业

教材习题
基础题：3-15，3-16
加强题：3-14