

第五章 傅里叶变换的应用—— 滤波、调制、抽样

5.1 引言

5.2 利用系统函数求响应

5.3 无失真传输

5.4 理想低通滤波器

5.5 系统的物理可实现性、佩利—维纳准则

5.6 利用希尔伯特变换研究系统函数的约束特性

5.7 调制与解调

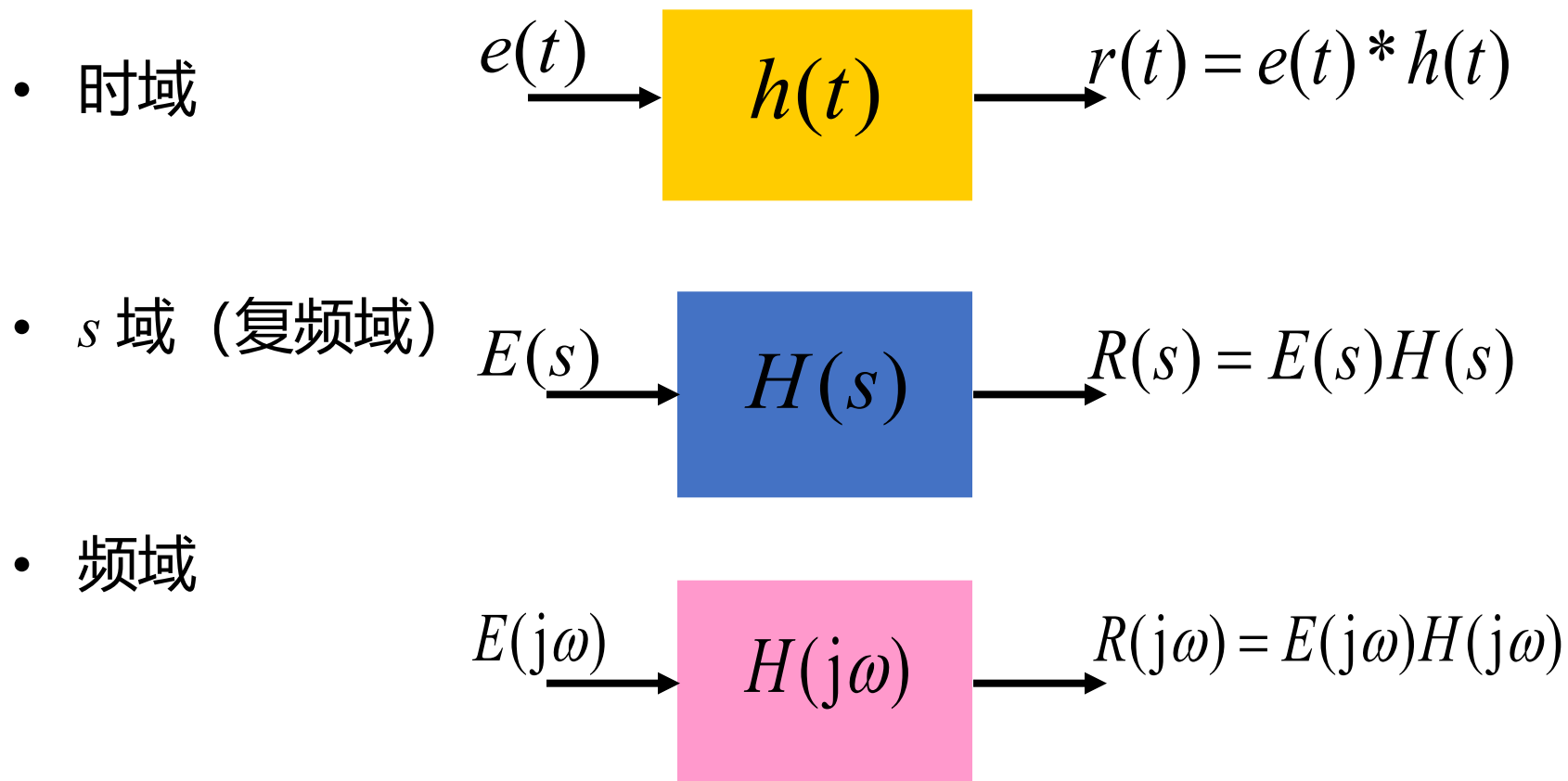
5.8 从抽样信号恢复连续时间信号

5.9 频分复用 (FDM) 与时分复用 (TDM)

5.1 引言

5.1.1 频域系统函数

激励与零状态响应的关系：



5.1.2 频域系统函数的定义和物理意义

定义: $H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$ 或 $H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$

零状态响应的傅里叶变换为: $R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}E(j\omega)$

频率响应（频域系统函数）的功能：**改变输入信号的频谱**

- 1、对信号各频率分量进行加权，某些频率分量增强，而另一些分量则相对削弱或不变；
- 2、每个频率分量在传输过程中都产生各自的相移。

- 系统函数决定了不同频率分量在传输过程中的改变规律，是一个加权函数，把频谱密度为 $E(j\omega)$ 的激励信号改变为 $R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$ 的响应信号；
- 实际上，任何激励信号的傅里叶分解可以看作无穷多项 $e^{j\omega t}$ 信号（正弦信号）的叠加，把这些分量的响应取和，即可得到完整的响应信号；
- 线性时不变系统的分析中，无论时域、频域、复频域都按照信号分解、求响应再叠加的原则来处理；
- 利用 $H(j\omega)$ 可以建立滤波器的概念；
- 从第三章中傅里叶变换的频移性质，引出调制的概念；
- 从第三章中抽样定理，引出从抽样信号恢复连续时间信号；了解数字通信系统的原理与特点。

5.2 利用系统函数 $H(j\omega)$ 求响应

(1) $H(j\omega)$ 描述正弦稳态响应的频响特性

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

(2) $H(j\omega)$ 为系统函数, 即是系统冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$$

两者相等的条件为 $H(s)$ 在虚轴上及右半平面无极点 (稳定系统)

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

系统响应频域分析小结

- **优点:**

可以直观的体现信号通过系统后信号频谱的改变，解释激励与响应时域波形的差异，物理概念清楚。

- **缺点:**

- (1) 只能求解系统的**零状态响应**，系统的零输入响应仍需按时域方法求解。
- (2) 频域分析法中，傅里叶反变换常较复杂。

- **解决方法:**

采用**拉普拉斯变换**

系统零状态响应频域分析方法与卷积积分法的关系：**时域卷积定理**是联系的桥梁。

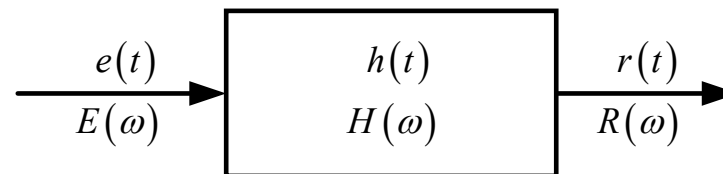
5.3 无失真传输

5.3.1 信号失真原因

问题：信号通过系统后，可能改变原来的形状，成为新的波形。

$$r(t) = h(t) * e(t)$$

$$R(\omega) = H(\omega)E(\omega)$$



线性系统引起的信号失真有两方面：

- (1) **幅度失真：**系统对信号中各频率分量幅度产生不同程度的衰减，使响应分量的相对幅度发生变化。
- (2) **相位失真：**系统对各频率分量产生的相移不与频率成正比，使响应的各频率分量在时间轴上的相对位置发生变化。

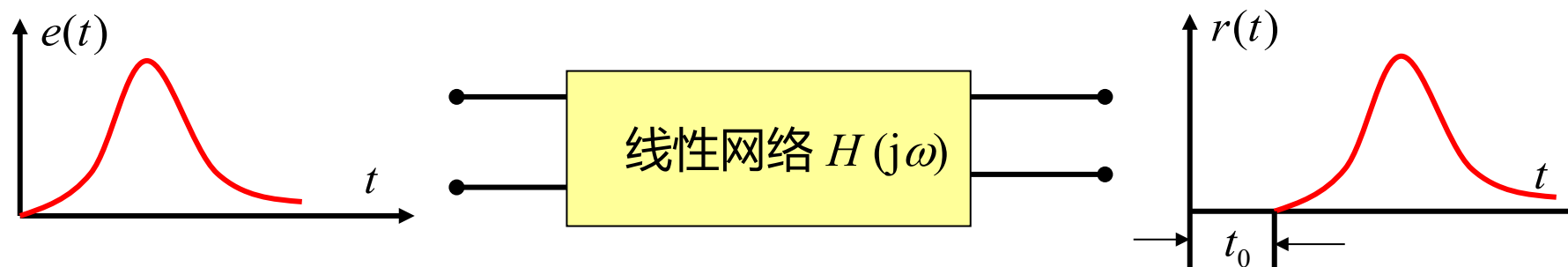
注意：二者都不产生新的频率分量，没有频率失真。

5.3.2 信号无失真传输的概念 (时域波形传输不变)

无失真：指响应信号与激励信号相比，只是大小与出现的时间不同，没有波形上的变化。

无失真传输的定义： $r(t) = Ke(t - t_0)$

K 是一常数， t_0 为滞后时间。满足无失真条件时， $r(t)$ 波形是 $e(t)$ 波形经 t_0 时间的滞后。



5.3.3 信号无失真传输条件 (对系统的要求)

1、从频域看系统无失真传输条件 → 关键是看频域系统函数

时域响应: $r(t) = Ke(t - t_0)$

两边取傅里叶变换: $R(j\omega) = KE(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

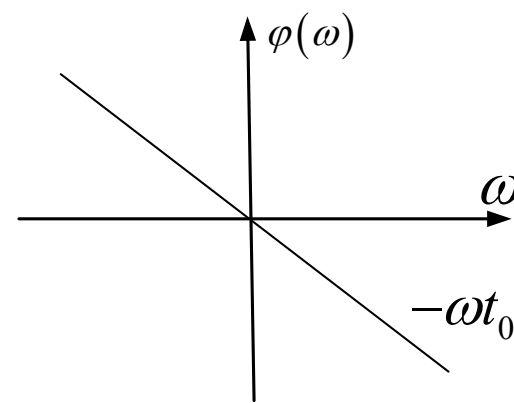
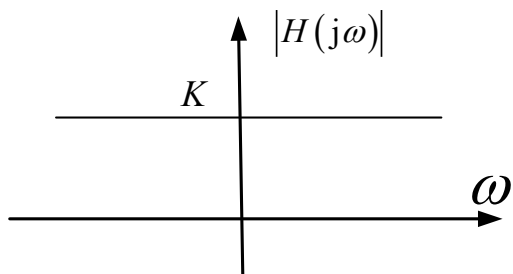
$$R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$$

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

其中: $|H(j\omega)| = K$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0$$

频域条件 → 即要求系统的幅频响应特性为常数 K ; 相频响应为一通过原点的直线斜率为 $-t_0$ 。



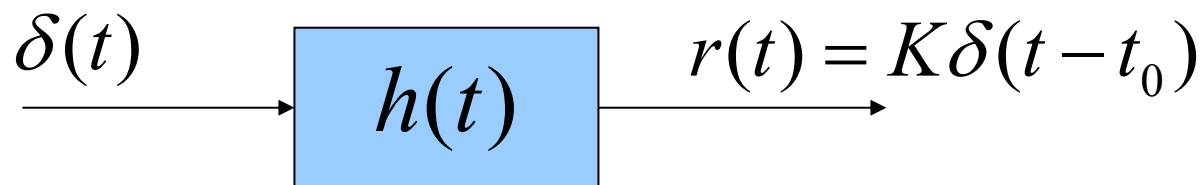
2、从时域看系统无失真传输条件 →关键是看冲激响应

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

取傅里叶逆变换：

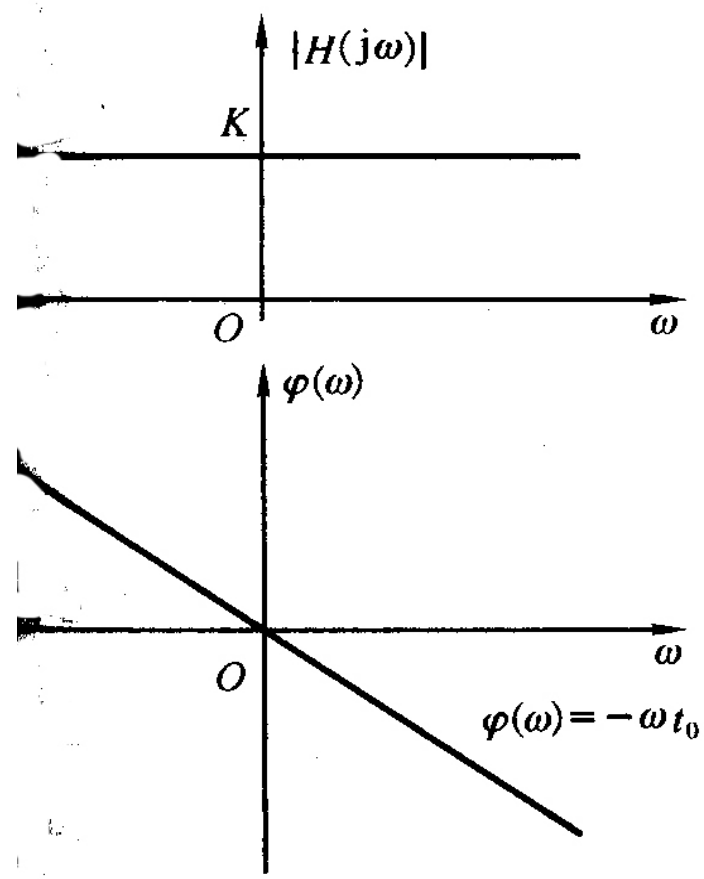
$$h(t) = K\delta(t - t_0) \quad \rightarrow \text{时域条件}$$

即要求系统的冲激响应也是冲激函数，而时间延后 t_0 。



常用冲激信号作为测试系统保真度的信号。

全通网络，信号幅度不失真



线性相位，波形不失真

5-4 无失真传输系统的幅度和相位特性

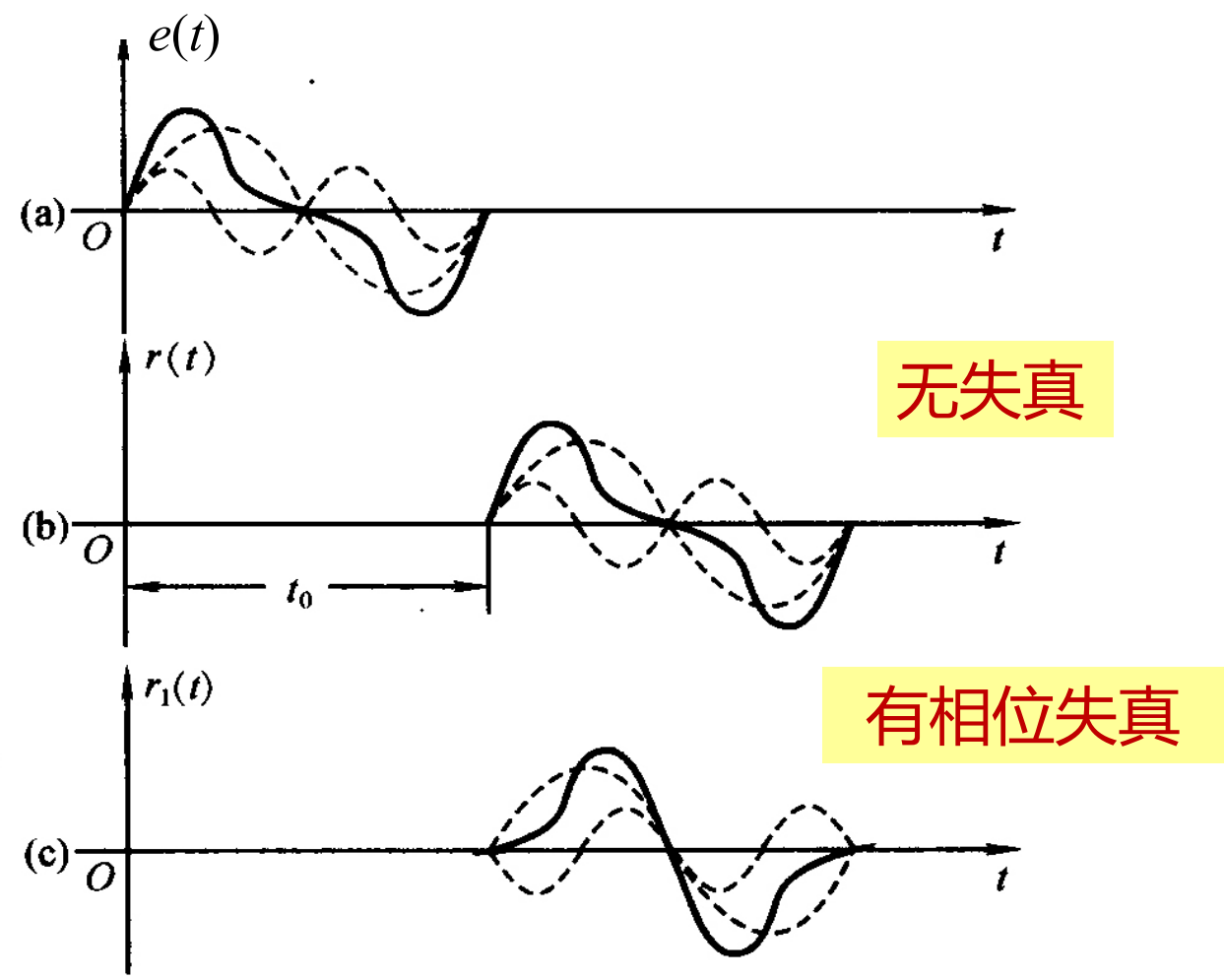


图 5-5 无失真传输与有相位失真传输波形比较

5.3.4 群时延概念

我们发现：信号通过系统的延迟时间 $-t_0$ 即为相位特性的斜率。

群时延（群延时）为系统相频特性对频率的负导数（对应一群频率）：

$$\tau = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

实际中， τ 为正值。

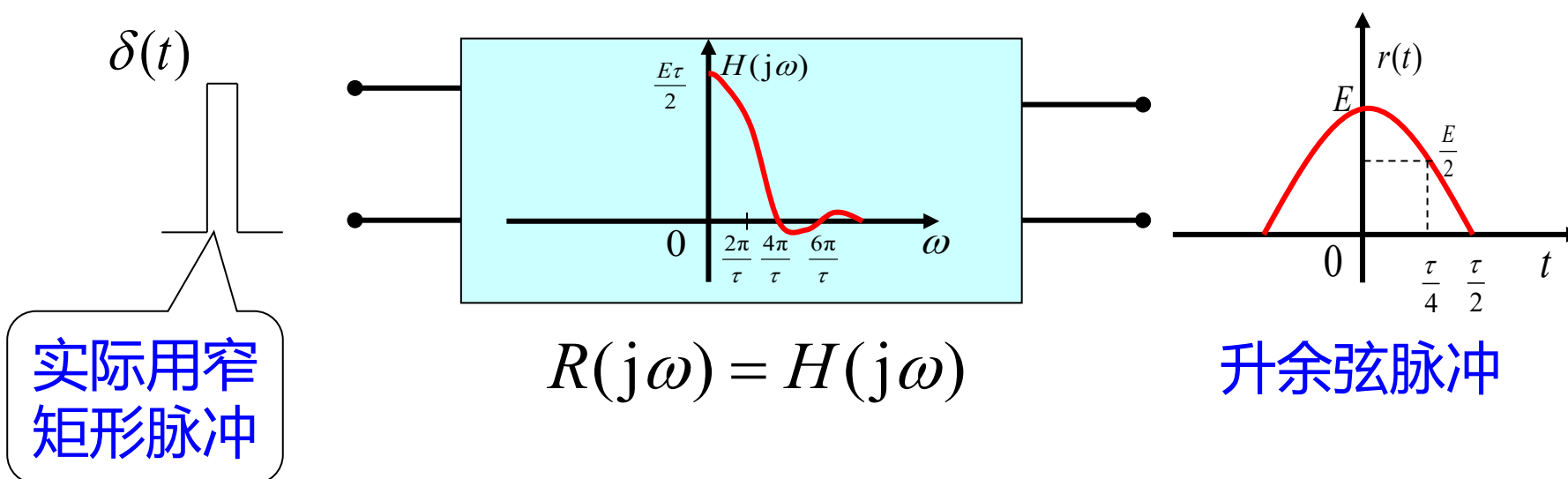
在满足信号传输不产生相位失真的条件下，其群时延特性为常数。

$$\tau = -\frac{d(-\omega t_0)}{d\omega} = t_0$$

5.3.5 产生特定波形

在实际中，可通过设计系统传输函数，**利用信号失真**形成特定波形。

利用冲激信号作用于系统产生特定波形 $r(t)$ ：

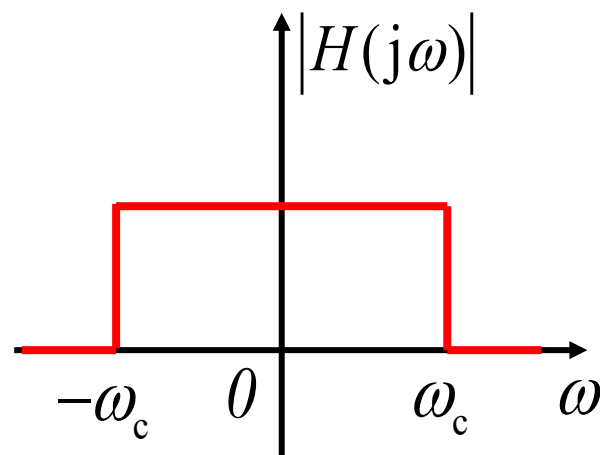


5.4 理想低通滤波器

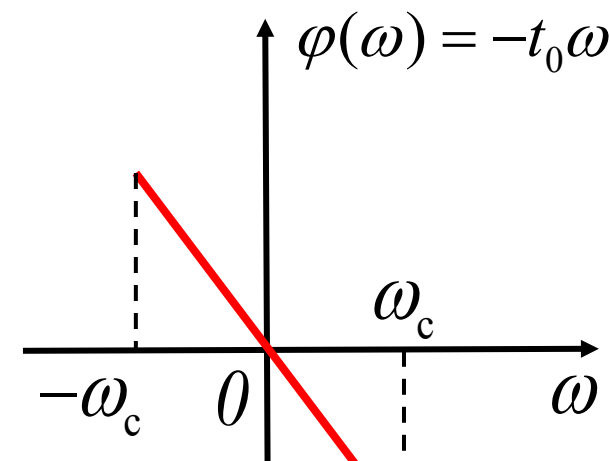
理想滤波器：一种理想化的滤波网络模型，具有矩形幅度特性和线性相移特性

理想低通滤波器的频率响应：
$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

ω_c 称为截止频率

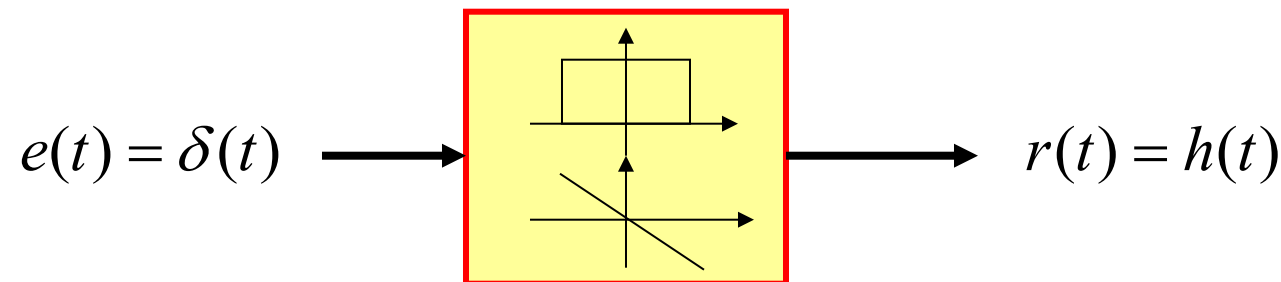


幅频响应



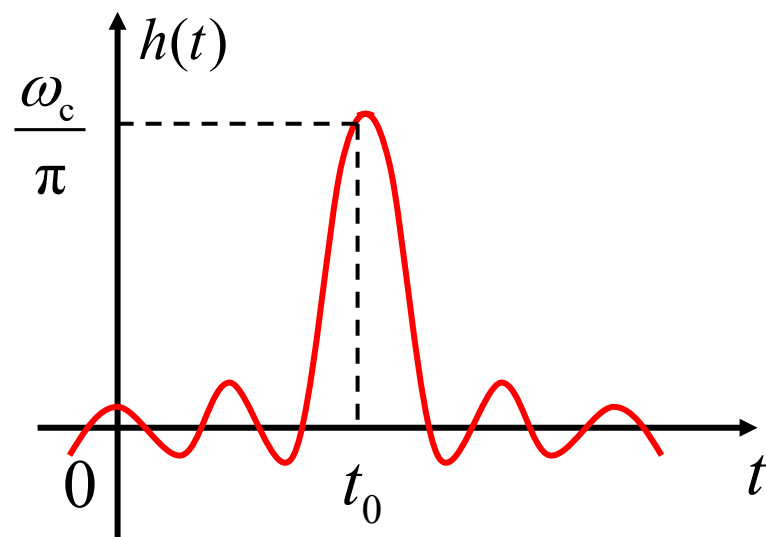
相频特性

理想低通滤波器的冲激响应



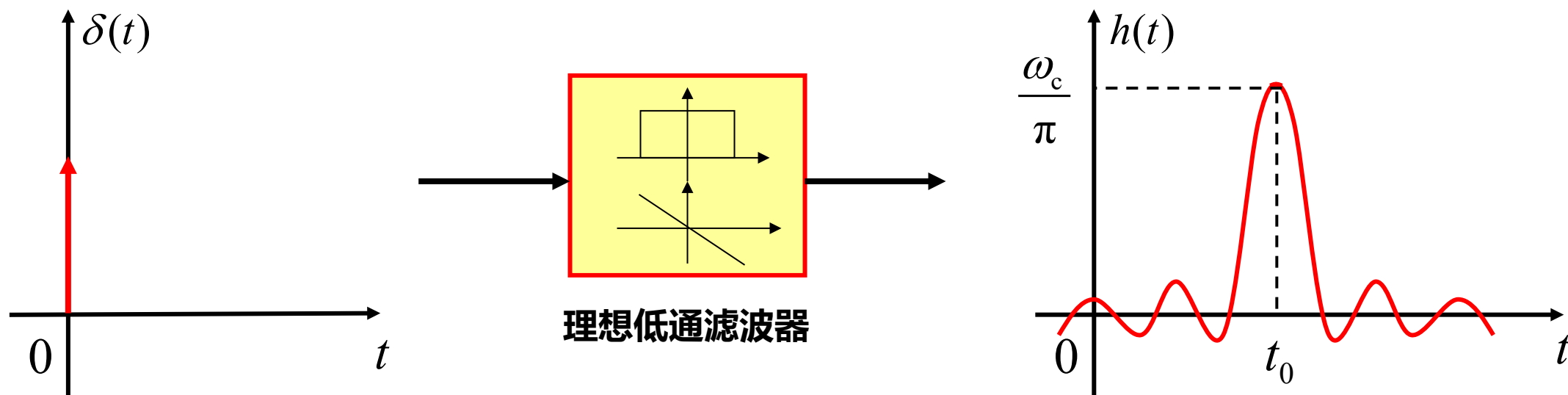
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)} \right|_{-\omega_c}^{\omega_c} \Rightarrow h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$



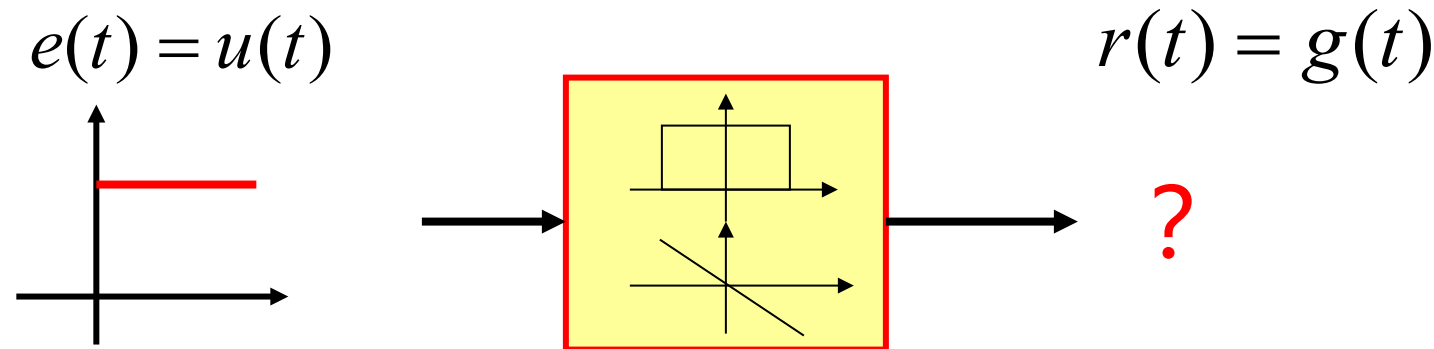
系统具有延时性, 相频 $\varphi(\omega)$ 作用的结果
系统具有滤波性, 幅频 $|H(\omega)|$ 作用的结果

例5-4 答案分析:



- (1) $h(t)$ 的波形是一个**抽样函数**，不同于输入信号 $\delta(t)$ 冲激函数的波形，**有失真**
- (2) $h(t)$ 在 $t < 0$ 时也存在输出，可见**理想低通滤波器**是一个**非因果系统**，是物理**不可实现系统**

理想低通滤波器的阶跃响应



频率响应: $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$

阶跃信号的FT: $E(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

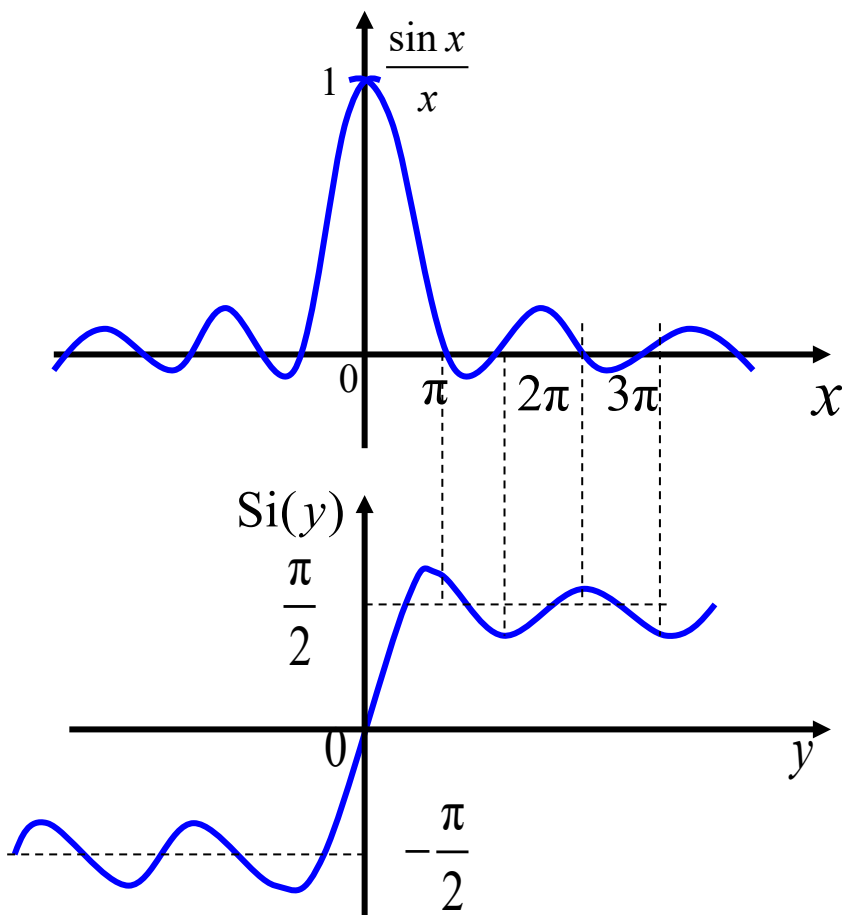
阶跃响应的FT: $R(j\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = H(j\omega)E(j\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0}, \quad -\omega_c < \omega < \omega_c$

阶跃响应: $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[R(j\omega)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega} d\omega$

推导过程见教材288页

令 $x = \omega(t - t_0)$

则
$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)]$$



函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的积分称为“正弦积分”，
以符号 $\text{Si}(y)$ 表示。 $\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$

$\text{Si}(y)$ 是 y 的奇函数

$$t \rightarrow \infty, \quad \text{Si}(y) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

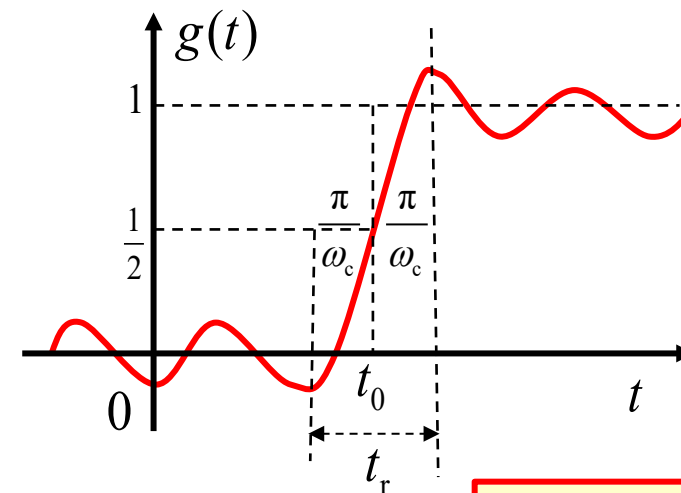
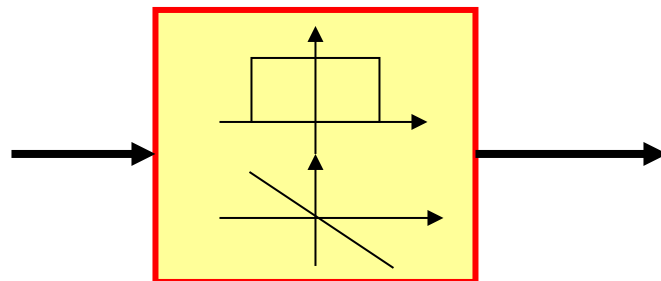
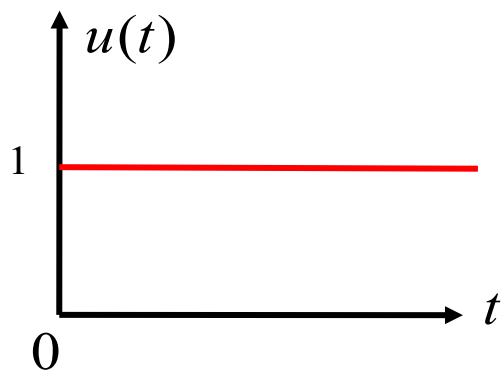
$$t \rightarrow -\infty, \quad \text{Si}(y) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

各极点值与 $\frac{\sin x}{x}$ 函数的零点对应。

理想低通滤波器的阶跃响应

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)]$$

$$\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$$



$$t_r = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{B}$$

分析:

- (1) $g(t)$ 比 $u(t)$ 出现的时刻延迟了时间 t_0
- (2) 上升时间: 输出 $g(t)$ 由最小值到最大值所需要的时间

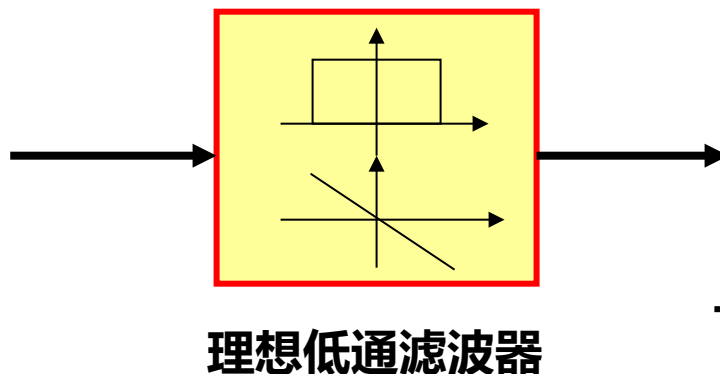
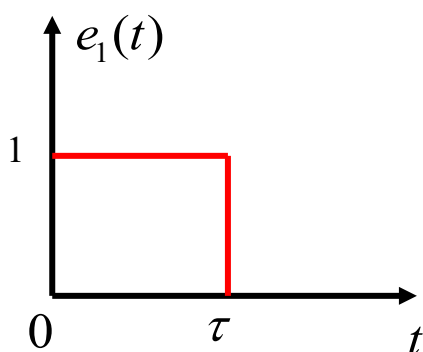
(3) 滤波器阶跃响应上升时间 t_r 和带宽 B 不能同时减小 —— “测不准原理” (教材6.10)

理想低通滤波器的矩形脉冲响应

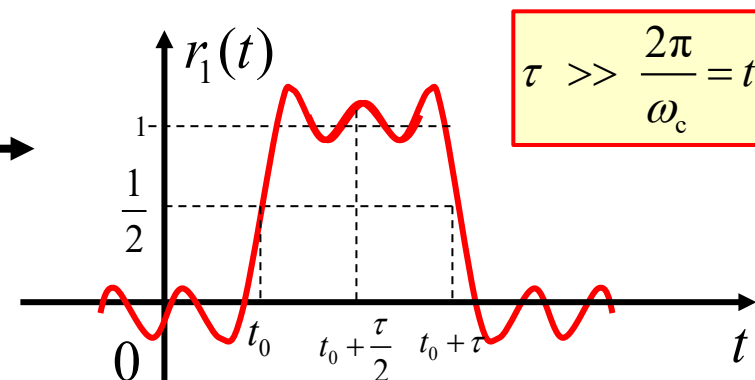
$$e_1(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

$$r_1(t) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)] \right\} - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - \tau - t_0)] \right\}$$

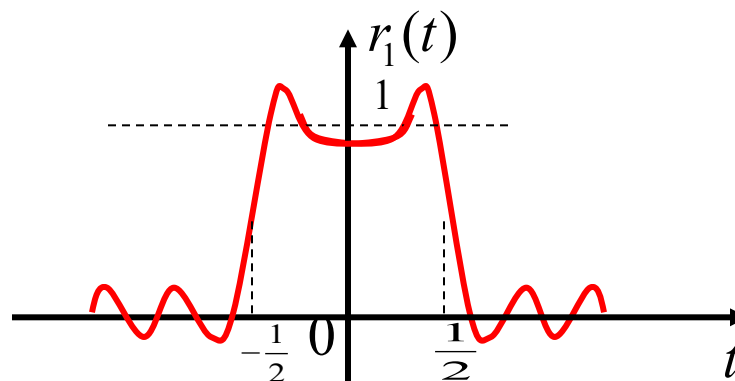
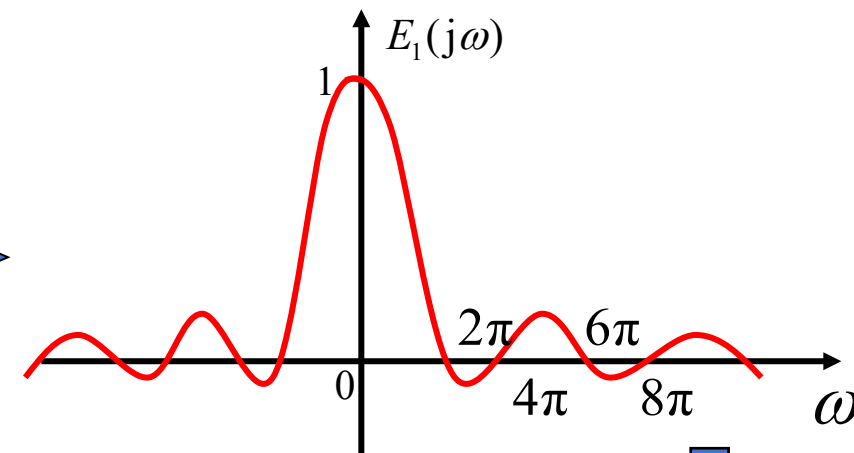
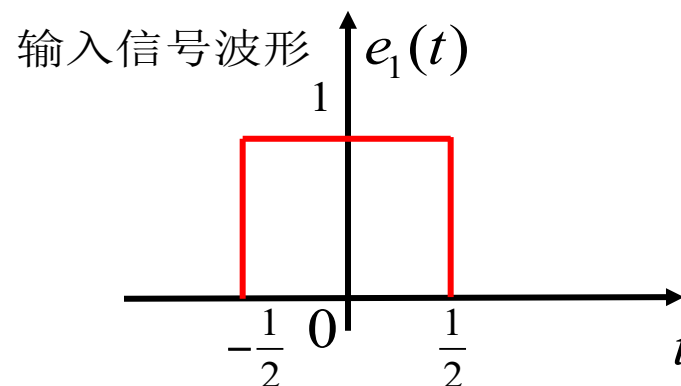
$$r_1(t) = \frac{1}{\pi} \{ \text{Si}[\omega_c(t - t_0)] - \text{Si}[\omega_c(t - t_0 - \tau)] \}$$



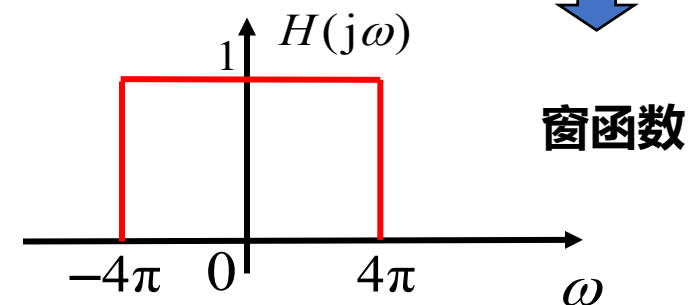
理想低通滤波器



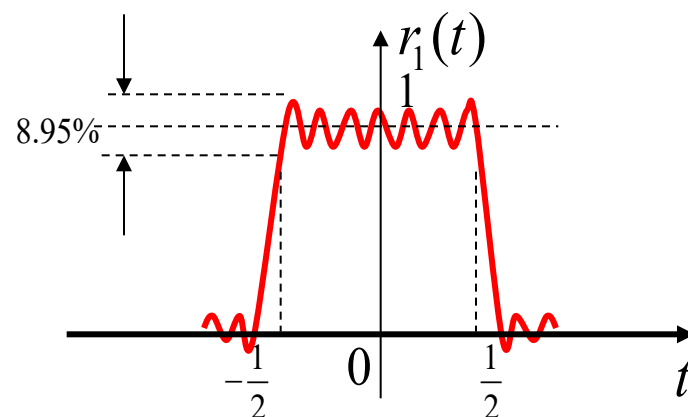
分析：当输入信号脉宽 τ 远大于上升时间 t_r 时，响应大体为矩形；否则，失真严重



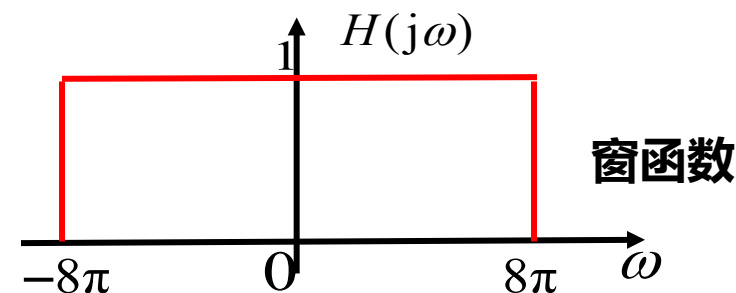
输出波形



存在吉布斯现象



输出波形



5.5 系统的物理可实现性、佩利—维纳准则

理想低通、带通、高通、带阻滤波器在物理上都是不可实现的。

究竟怎样的系统数学模型可以在物理上实现？

例5-6：一个简单的低通滤波器电路如图所示。设元件参数间满足 $R = \sqrt{L/C}$,

求冲激响应 $h(t)$ 。

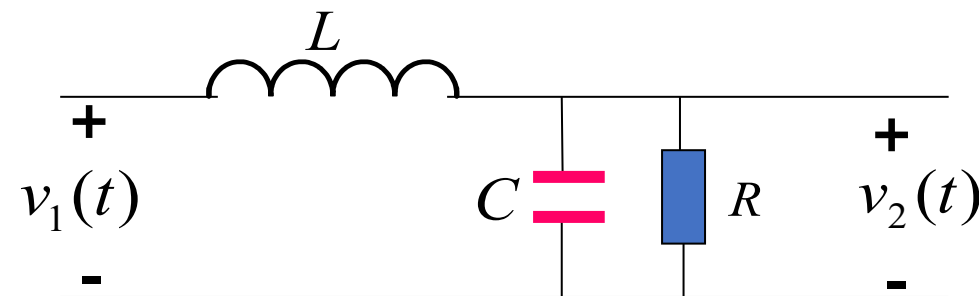
解：

$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}$$

$$\text{引入 } \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{2\omega_c}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c}{\left(\frac{\omega_c}{2} + j\omega\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c\right)^2}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{2\omega_c}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_c}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right) \quad (t \geq 0)$$



物理可实现性

(1) 时域——因果性，物理可实现的充分必要条件 $t < 0, h(t) = 0$

(2) 频域——若幅频响应的平方可积 $\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$

佩利-维纳 (Payley-Wiener) 准则——物理可实现 (因果性) 的必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

没有给出相位特性约束

说明:

- (1) 仅允许 $|H(j\omega)|$ 特性在某些不连续的频率点上为零，但不允许 $|H(j\omega)|$ 在一个有限的频带内为零，如果 $|H(j\omega)| = 0$, $|\ln |H(j\omega)|| \rightarrow \infty$;
- (2) 限制了幅度特性 $|H(j\omega)|$ 的衰减速度;
- (3) 按此原理，理想低通、理想高通、理想带通和理想带阻等理想滤波器都是物理不可实现的。

佩利-维纳准则是物理可实现（因果性）的必要条件，不是充分条件。

$h(t) \rightarrow H(j\omega)$ 因果

$h(t+t_0) \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t_0}, t_0 > 0$ 非因果

两者幅度特性相同，满足
佩利-维纳准则。
相位特性不同。

如果 $|H(j\omega)|$ 已被检验满足佩利-维纳准则，就可以找到适当的相位函数 $\varphi(\omega)$ 与 $|H(j\omega)|$ 一起构成物理可实现的系统函数。

第五章 傅里叶变换的应用—— 滤波、调制、抽样

- 5.1 引言
- 5.2 利用系统函数求响应
- 5.3 无失真传输
- 5.4 理想低通滤波器
- 5.5 系统的物理可实现性、佩利—维纳准则
- 5.6 利用希尔伯特变换研究系统函数的约束特性**
- 5.7 调制与解调**
- 5.8 从抽样信号恢复连续时间信号**
- 5.9 频分复用 (FDM) 与时分复用 (TDM)**

※ 5.6 利用希尔伯特变换研究系统函数的约束特性

系统可实现性的实质是系统具有因果性。由于系统的因果性，系统函数的实部与虚部之间一定具备某种相互制约的特性：满足希尔伯特 (Hilbert) 变换对的制约关系。

对于因果系统，其冲激响应为： $h(t) = h(t)u(t)$

根据频域卷积定理： $\mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{2\pi} \{ \mathcal{F}[h(t)] * \mathcal{F}[u(t)] \}$

$$\begin{aligned} \text{可得： } H(\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ [R(\omega) + jX(\omega)] * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ R(\omega) * \pi\delta(\omega) + X(\omega) * \frac{1}{\omega} \right\} + \frac{j}{2\pi} \left\{ X(\omega) * \pi\delta(\omega) - R(\omega) * \frac{1}{\omega} \right\} \\ &= \left\{ \frac{R(\omega)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \right\} + j \left\{ \frac{X(\omega)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \right\} \end{aligned}$$

希尔伯特变换对:

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \quad X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

说明: 对于**因果系统**, 其系统函数具有一个重要特性:

实部 $R(\omega)$ 被已知的**虚部** $X(\omega)$ 唯一的确定,

反之, **虚部** $X(\omega)$ 被已知的**实部** $R(\omega)$ 唯一的确定。

推广:

对于任意因果函数 (信号), 其傅里叶变换的实部与虚部也构成希尔伯特变换对的特性。

即: 若函数 $f(t)$ 满足 $f(t) = f(t)u(t)$, 且 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega),$$

则 $R(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 之间构成希尔伯特变换对。

例5-8：已知系统冲激响应 $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ ，求系统函数，并验证其实部与虚部之间满足希尔伯特变换关系。

解： $H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \mathcal{F}[e^{-\alpha t} u(t)]$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

可得： $R(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ ， $X(\omega) = \frac{-\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$

现欲验证实部与虚部之间满足希尔伯特变换关系，即通过 $X(\omega)$ 来求 $R(\omega)$ 。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\lambda}{(\alpha^2 + \lambda^2)(\omega - \lambda)} d\lambda \\
 &= \frac{1}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\omega\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \lambda^2} - \frac{\omega}{\omega - \lambda} \right) d\lambda \\
 &= \frac{1}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \left[-\frac{\omega}{2} \ln(\alpha^2 + \lambda^2) + \alpha \arctan\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \omega \ln(\omega - \lambda) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)} = R(\omega)
 \end{aligned}$$

同理可得：

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \lambda^2)(\omega - \lambda)} d\lambda = \frac{\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)} = X(\omega)$$

※ 用希尔伯特变换对证明佩利-维纳准则

系统的频率响应可表示为:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

其中, $A(\omega) = \ln |H(j\omega)|$ 为衰减因子, $\varphi(\omega)$ 为相位因子, 且有:

考虑希伯特变换对, 则:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \quad \varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

因为任何可行滤波器的相位均满足 $|\varphi(\omega)| < \infty$, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\lambda)||}{\omega - \lambda} d\lambda < \infty \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\lambda)||}{\omega^2 + \lambda^2} d\lambda < \infty$$

令 $\omega = 1$, 则有 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\lambda)||}{1 + \lambda^2} d\lambda < \infty$

关于调制正确的说法有（ ）

- ☒ A 调制频率越高，天线尺寸越小
- ☐ B 调制频率越高，信号在传输中衰减越小
- ☐ C 必须要本地载波才可以实现解调
- ☒ D 调制后的频谱可能不会再与原始频谱相似

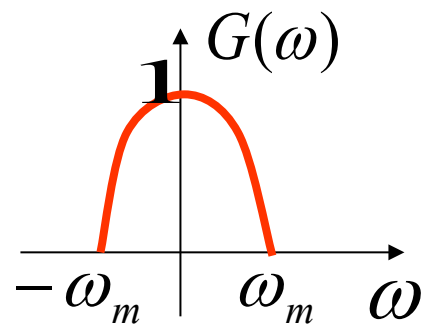
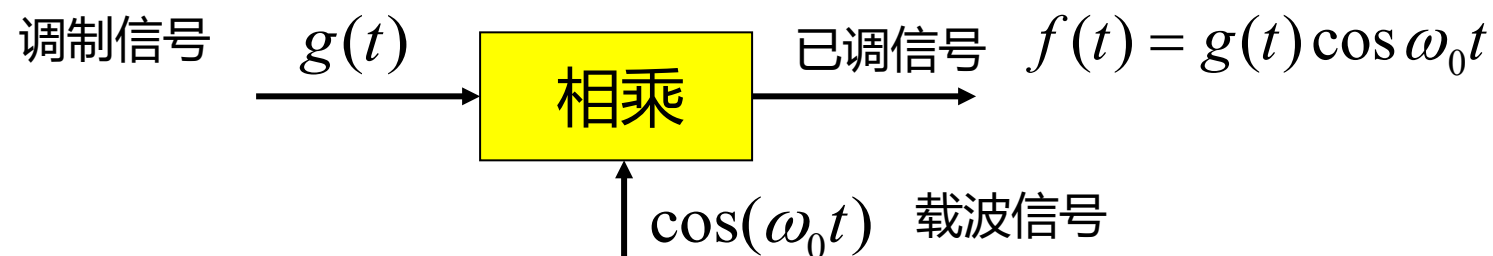
提交

5.7 调制与解调

5.7.1 调制的目的

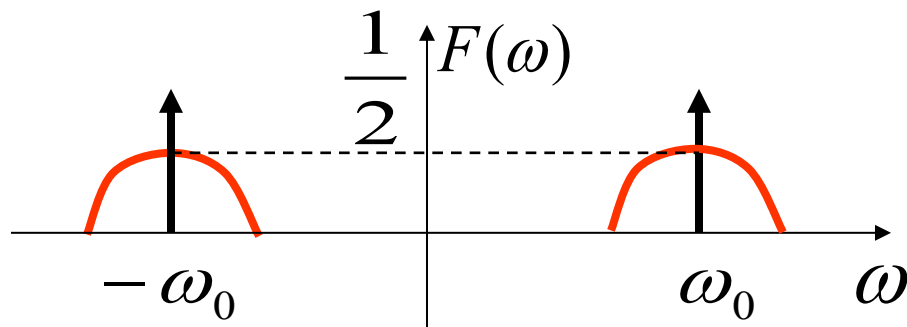
- **信号能有效的被辐射条件：**天线尺寸为被辐射信号波长的十分之一或更大些。如：对于语音信号，天线尺寸要在几十公里以上，不可能实际制作。
- **调制：**将信号频谱搬移到任何所需的较高频率范围，制作合理尺寸的天线，容易发射。
- **调制作用的实质：**把各种信号**频谱搬移**，使它们互不重叠地占据不同的频率范围，即信号依附于不同频率的载波上，接收机可以分离出所需频率的信号，不致互相干扰。
(频移定理)
- **改善电波传播的性能：**低频信号（如音频信号）能量分散。
- **实现多路复用：**用同一部电台将各路信号的频谱分别搬移到不同的频率区段，在同一信道内传送多路信号的多路通信。
频分复用：基于傅里叶变换的频移特性。

5.7.2 调制原理

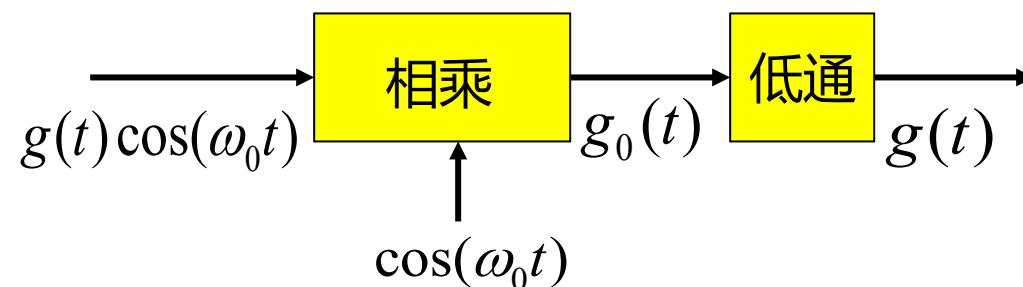


$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2} [G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)]$$



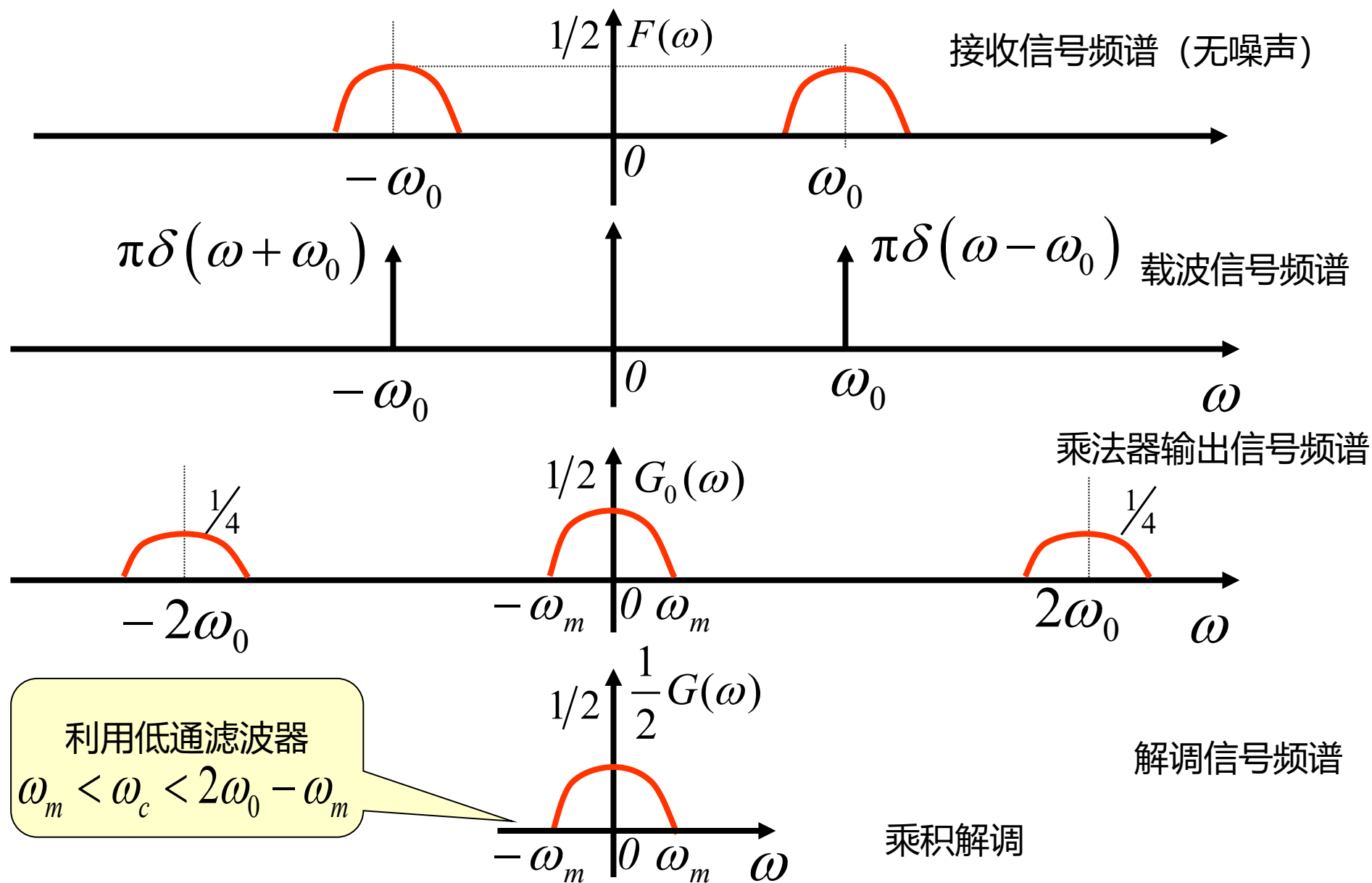
5.7.3 同步解调原理



同步解调：接收端与发射端具有同频同相的本地载波。

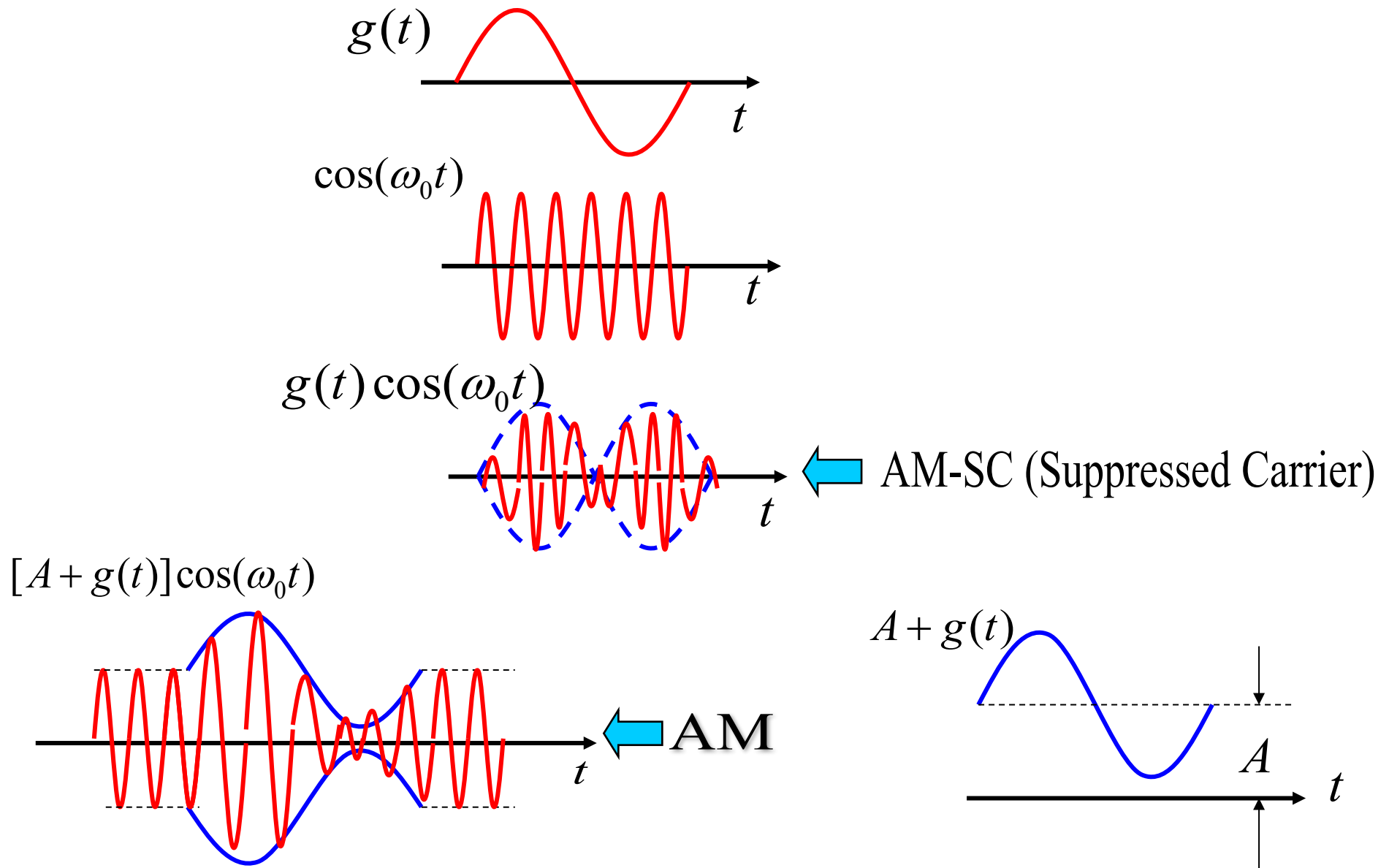
$$\begin{aligned}
 g_0(t) &= [g(t) \cos \omega_0 t] \cos \omega_0 t \\
 &= \frac{1}{2} g(t) (1 + \cos 2\omega_0 t) \\
 &= \frac{1}{2} g(t) + \frac{1}{2} g(t) \cos 2\omega_0 t
 \end{aligned}$$

$$G_0(\omega) = \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{4} [G(\omega + 2\omega_0) + G(\omega - 2\omega_0)]$$



5.7.4 无需本地载波信号的解调

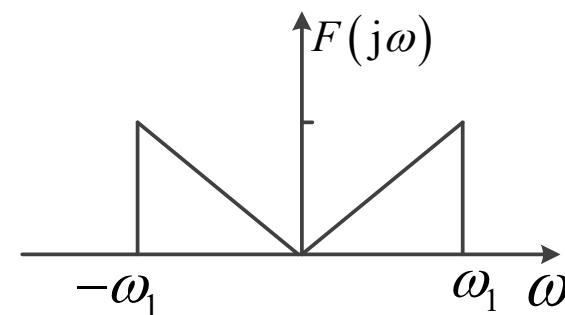
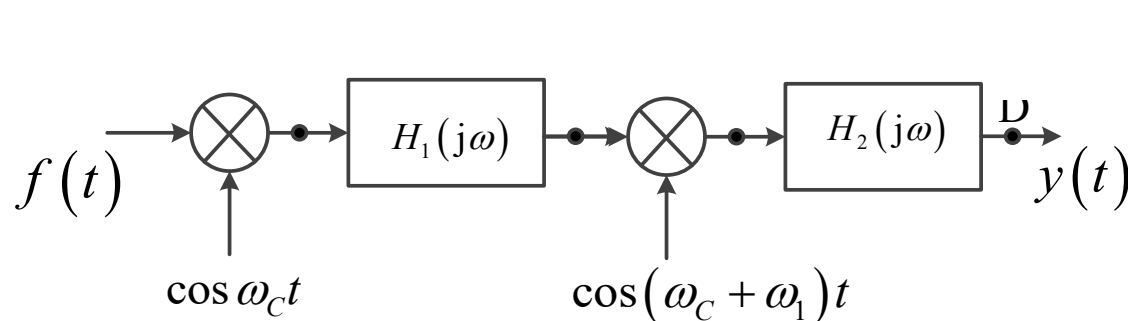
- 优点：简化接收机的结构，只需用包络检波器即可（二极管、电阻、电容组成）。
- 发送端的发射信号中加入一定强度的载波信号 $A \cos \omega_0 t$ ，即合成发射信号为 $[A + g(t)] \cos \omega_0 t$ 。如果 A 足够大，对于全部的 t ， $A + g(t) > 0$ ，已调制信号的包络就是 $A + g(t)$ ，可以恢复出 $g(t)$ 。
- 技术简单，价格低，常用于民用通信设备。



例5-9：通信工程中为了保密，常用倒频系统将语音信号在传输前进行倒频，在接收端收到倒频信号后，再设法恢复原信号。一倒频系统如下图（a）所示，激励带限信号 $f(t)$ 的频谱如下图（b）所示，已知两个滤波器的频率响应分别为

$$H_1(j\omega) = \begin{cases} K & |\omega| > \omega_c \\ 0 & |\omega| < \omega_c \end{cases}, \quad H_2(j\omega) = \begin{cases} K & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \quad \text{其中 } \omega_c \gg \omega_1。$$

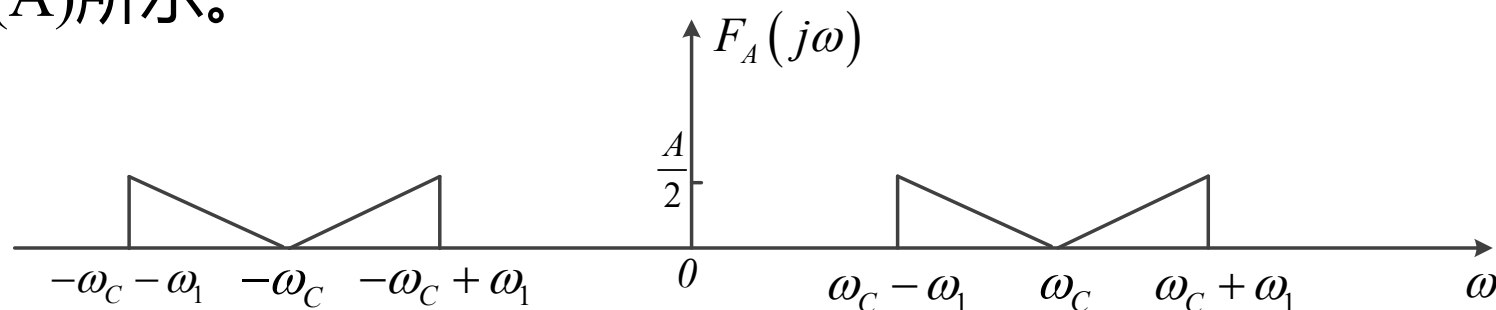
给出两个滤波器的名称。试绘出当 $f(t)$ 通过该系统时，系统中A、B、C、D点的频谱，并给出解释。



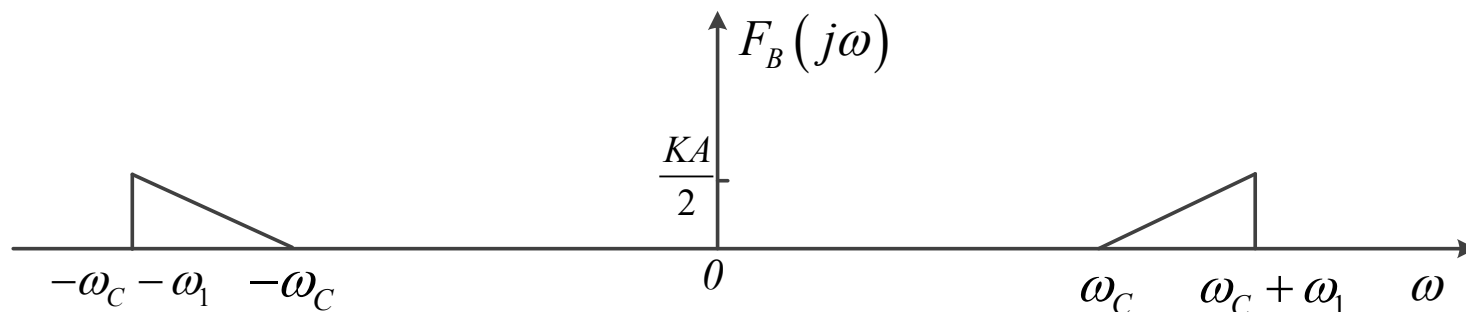
解：第一个为高通滤波器，第二个为低通滤波器。

$$f_A(t) = f(t) \cos \omega_c t \leftrightarrow F_A(j\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)]$$

$F_A(j\omega)$ 的频谱如图(A)所示。

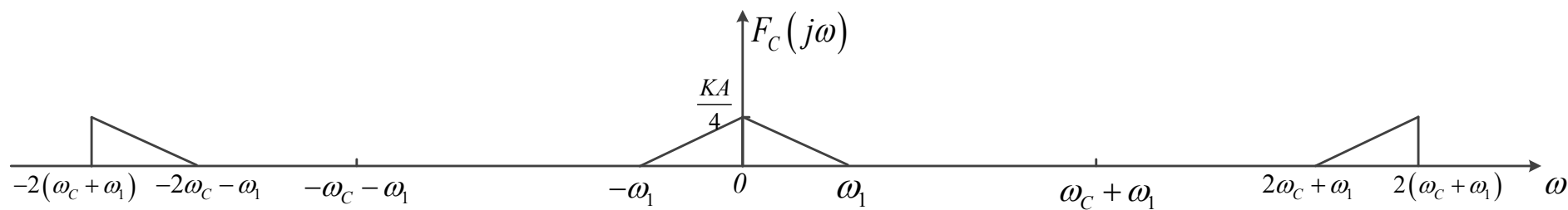


通过理想高通滤波器后，频率低于 ω_c 的部分不通过。 $F_B(j\omega)$ 的频谱如图(B)所示。



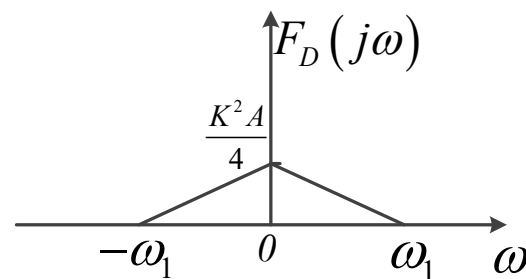
因为 $f_C(t) = f_B(t) \cos(\omega_C + \omega_1)t \leftrightarrow F_C(j\omega) = \frac{1}{2} [F_B(\omega + (\omega_C + \omega_1)) + F_B(\omega - (\omega_C + \omega_1))]$

所以 $F_C(j\omega)$ 的频谱如图(C)所示。



通过理想低通滤波器后，频率高于截止频率 ω_c 的部分不通过。

所以 $F_D(j\omega)$ 的频谱如图(D)所示。

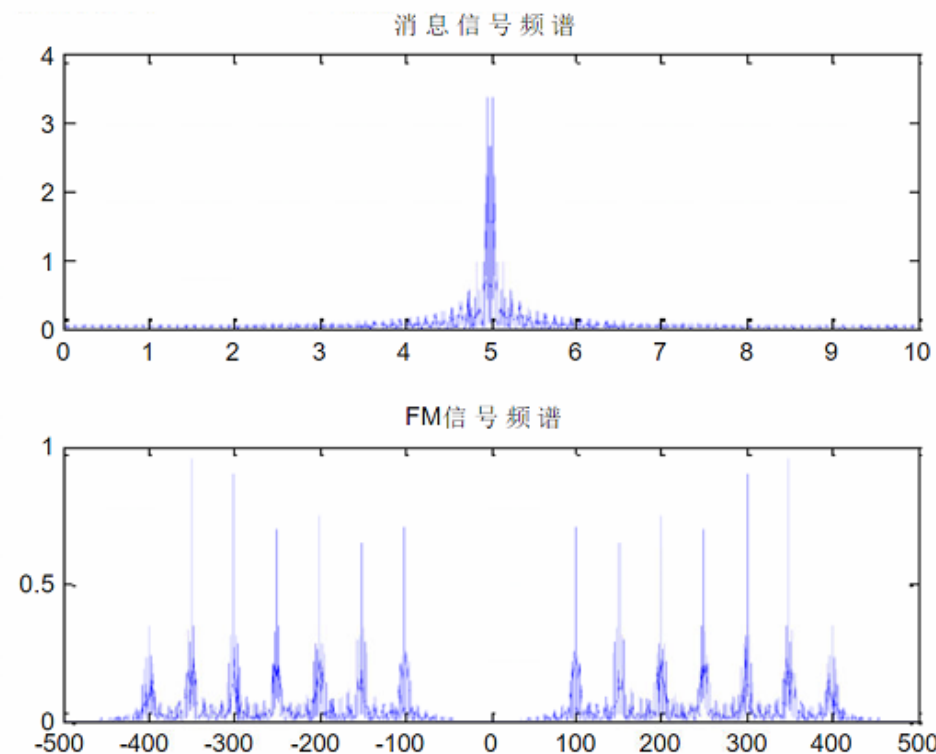


(D)

5.7.5 非线性调制的原理

使高频载波的**频率或相位**按调制信号的规律变化而振幅保持恒定的调制方式，称为频率调制（**FM**）和相位调制（**PM**），分别简称为**调频**和**调相**。频率或相位的变化都可以看成是载波角度的变化，故调频和调相又统称为**角度调制**。

右图为一调频信号示意图，可见调制后的频谱与原始频谱不再相似。



例5-10： 关于调制正确的说法有()

- ☒ A 调制频率越高，天线尺寸越小
- ☐ B 调制频率越高，信号在传输中衰减越小
- ☐ C 必须要本地载波才可以实现解调
- ☒ D 调制后的频谱可能不会再与原始频谱相似

提交

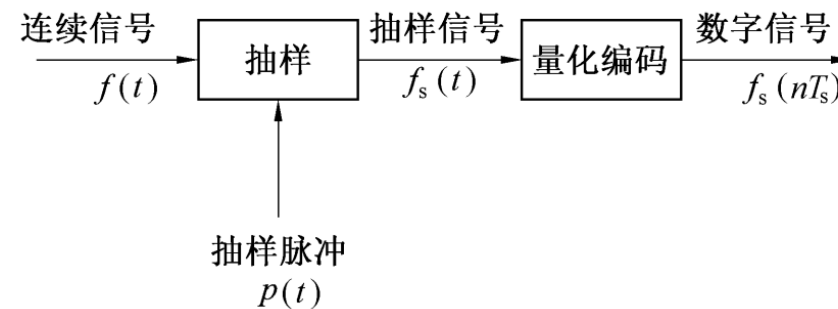
5.8 从抽样信号恢复连续时间信号

5.8.1 抽样信号和抽样定理 (复习)

1. 时域抽样 $f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$

这里 $p(t)$ 为周期序列。

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$



$$\begin{cases} P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s) \\ P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt \end{cases}$$

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad \text{抽样角频率。}$$

$$T_s \quad \text{抽样周期。}$$

结论： 抽样信号频谱 $F_s(\omega)$, 是原信号频谱 $F(\omega)$ 以 ω_s 的周期重复, 幅度上是抽样脉冲傅里叶系数 P_n 加权。

注意： 时域离散性对应频域周期性

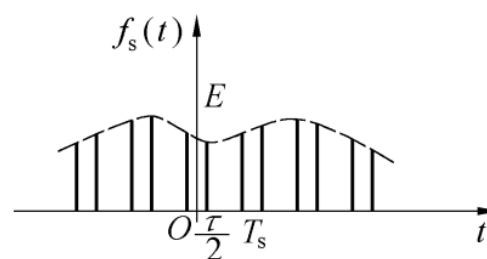
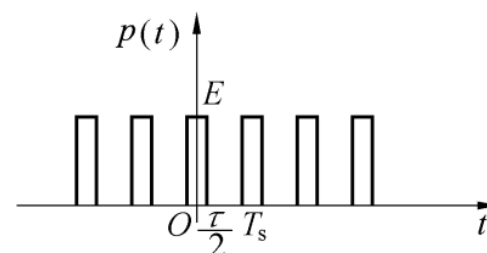
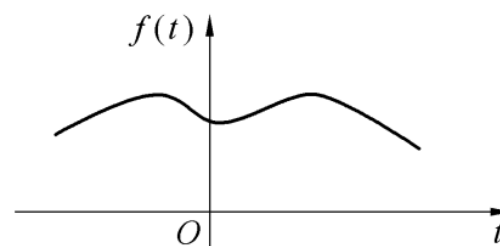
(1) 矩形脉冲抽样 → 自然抽样

此时，矩形脉冲的傅里叶系数：

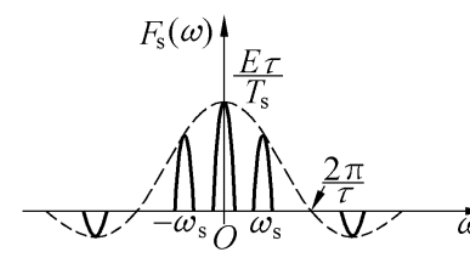
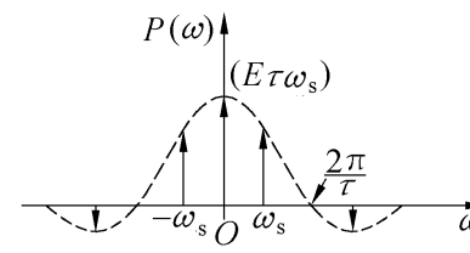
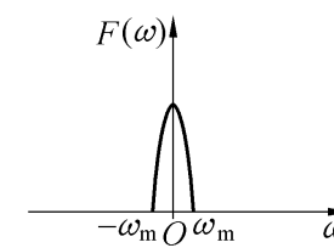
$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{E\tau}{T_s} \text{Sa} \left[\frac{n\omega_s \tau}{2} \right]$$

则有 $F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa} \left[\frac{n\omega_s \tau}{2} \right] F(\omega - n\omega_s)$



(a) 矩形脉冲抽样



(b) 抽样信号频谱

结论： 频谱 $F_s(\omega)$ ，以抽样频率 ω_s 重复 $F(\omega)$ ，幅度以抽样脉冲频谱 $\text{Sa} \left[\frac{n\omega_s \tau}{2} \right]$ 变化。

(2) 冲激抽样 → 理想抽样

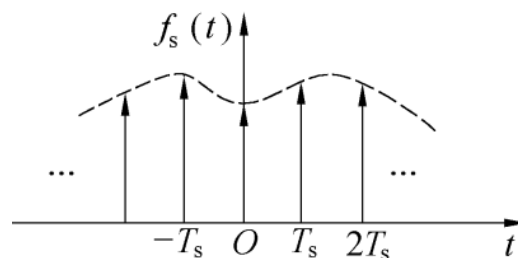
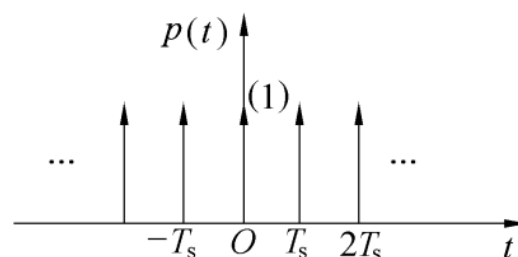
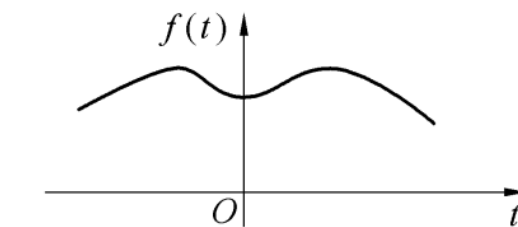
抽样脉冲 $p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$

抽样信号 $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$

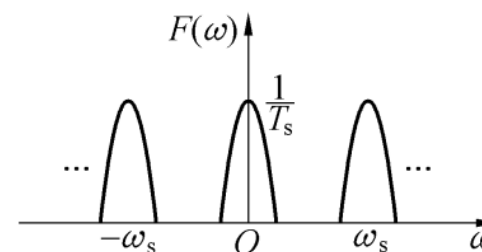
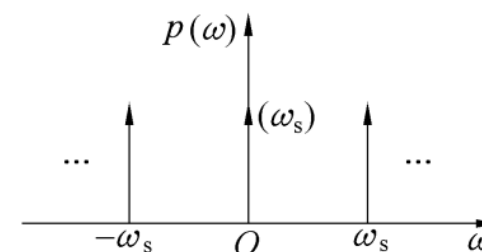
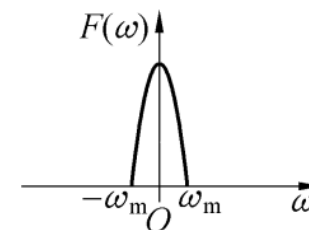
此时 $\delta_T(t)$ 的傅里叶系数:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \end{aligned}$$

则有 $F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)$



(a) 冲激抽样



(b) 抽样信号频谱

结论: 频谱 $F_s(\omega)$, 以抽样频率 ω_s 重复 $F(\omega)$, 幅度幅度上乘以 $1/T_s$ 。

例5-11 (教材例3-12) 周期脉冲信号 $f_1(t) \rightarrow$ 冲激抽样 $\delta_{T_s}(t) \rightarrow f_s(t)$ 的频谱

(1) 已知 $f_1(t)$

想象：信号周期 \rightarrow 频谱离散

时域抽样 \rightarrow 频谱周期， \rightarrow 最后频谱？

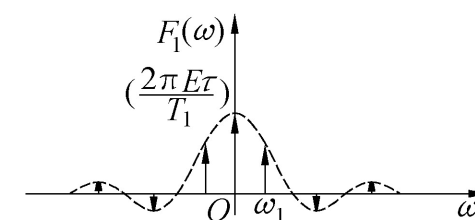
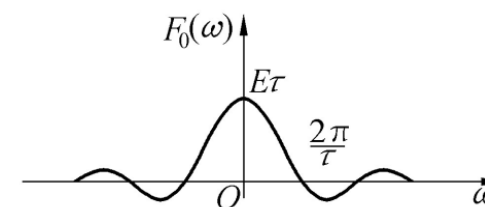
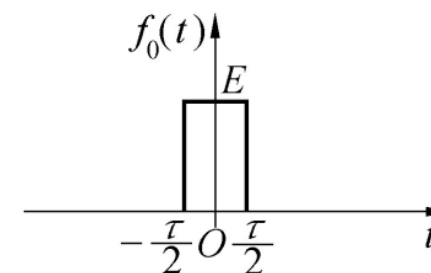
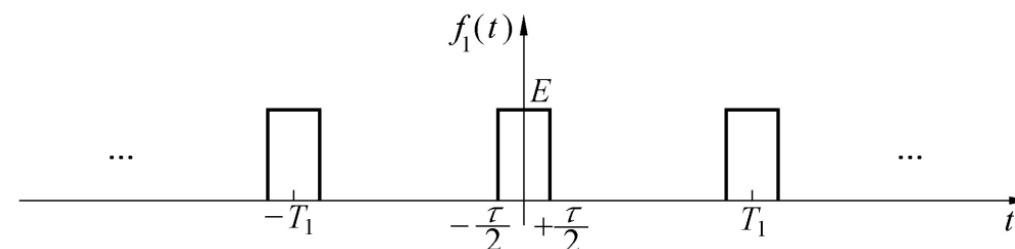
(2) 单个矩形脉冲 $f_0(t) \rightarrow f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(t - nT_1)$

$$F_0(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

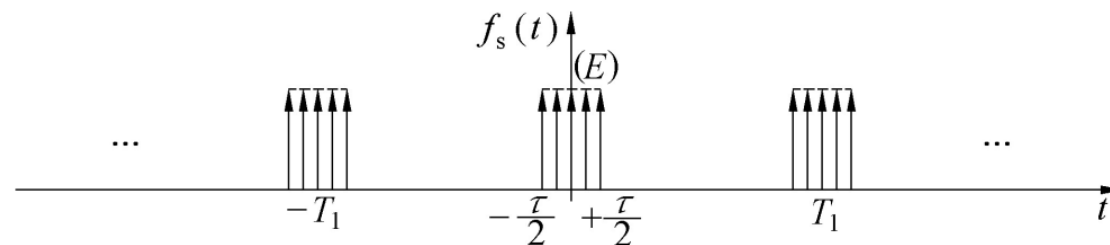
$F_1(\omega) = \omega_1 F_0(\omega) \cdot \delta_{\omega_1}(\omega) \rightarrow$ 周期函数的傅里叶变换 (第二个思路)

$$= \omega_1 E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= \omega_1 E\tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

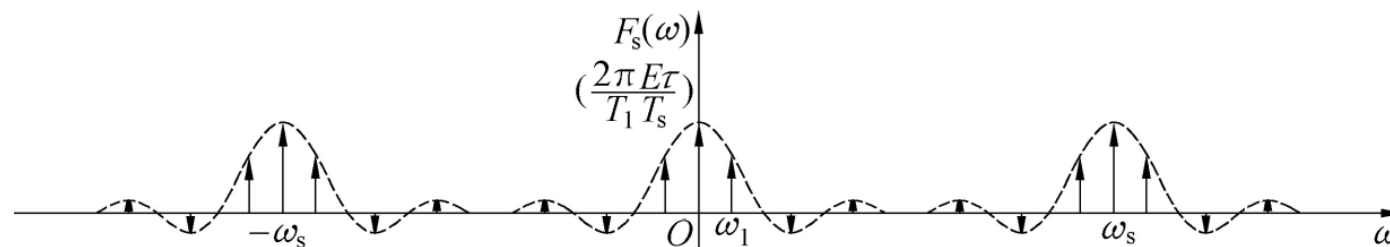


(3) $f_1(t)$ 被间隔 T_s 的冲激序列抽样 $\rightarrow f_s(t) = f_1(t) \cdot \delta_T(t)$



(4) $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\omega) \rightarrow F_1(\omega)$ 以 $\omega_s = \left(\frac{2\pi}{T_s}\right)$ 为间隔周期重复

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_1(\omega - m\omega_s) = \frac{\omega_1 E \tau}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) \delta(\omega - m\omega_s - n\omega_1) \right]$$



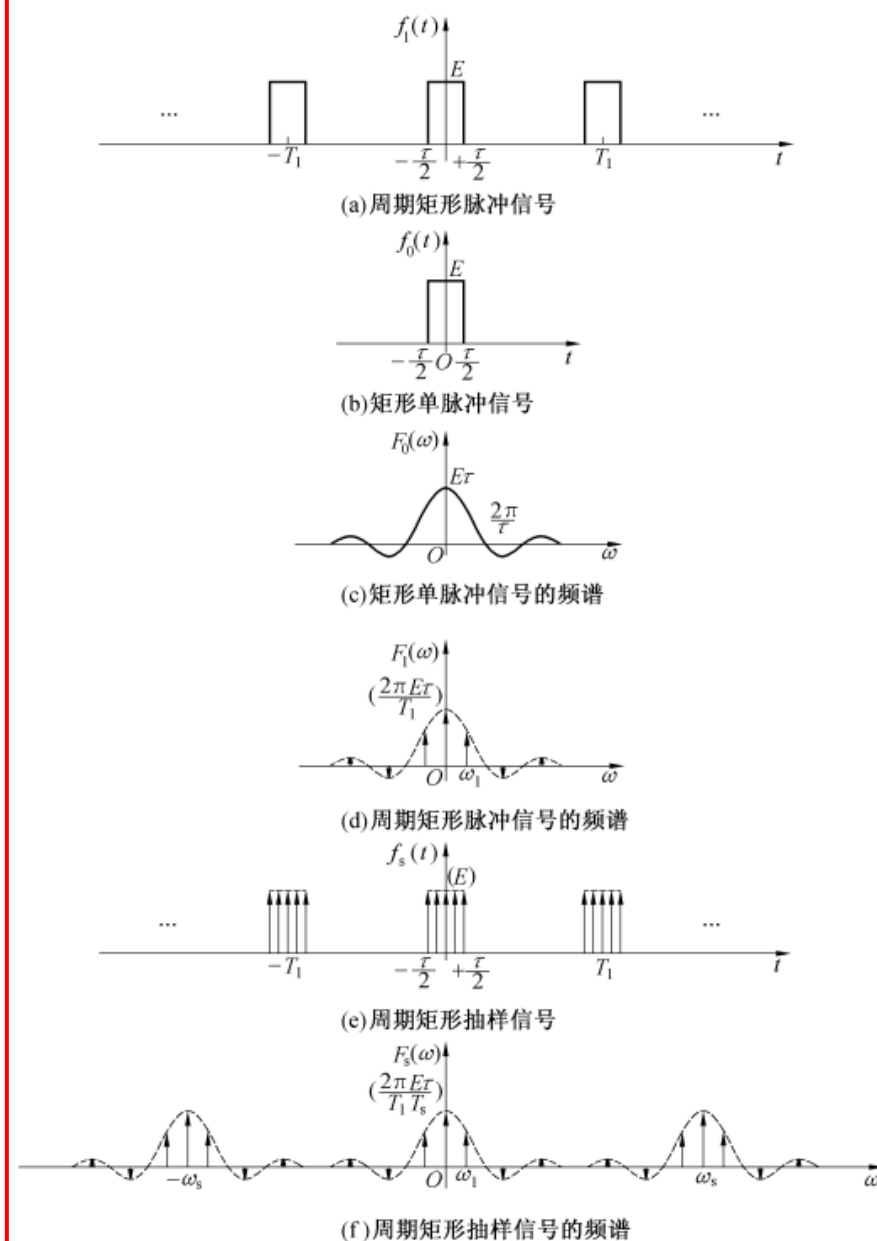
再来看一下这个过程:

“周期信号的傅里叶变换”

“抽样信号的频谱”

注意:

- (1) 单脉冲信号及其频谱
- (2) 单脉冲与周期信号的关系
- (3) 周期信号的频谱
- (4) 单脉冲、周期信号、周期抽样信号的关系
- (5) 卷积定理的灵活应用
- (6) 周期抽样信号的频谱
- (7) 离散性与周期性的对应



2. 抽样定理

目的：连续信号被抽样后，如何保留原信号 $f(t)$ 的全部信息？

时域抽样定理

一个频带受限的信号 $f(t)$ ，如果它的频谱只占据 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 的有限范围，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一地表示，此时最低抽样频率必须满足 $f_s \geq 2f_m$ ，或者抽样时间间隔必须满足 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ 。

抽样定理要求： $\omega_s \geq 2\omega_m \rightarrow$

$$\omega_s = 2\pi f_s \geq 2\omega_m = 2 \times 2\pi f_m$$
$$T_s = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_m}$$

抽样频率 $f_s = 2f_m$ 称为“奈奎斯特 (Nyquist) 频率”

抽样间隔 $T_s = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$ 称为“奈奎斯特 (Nyquist) 间隔”

5.8.2 任意信号的理想低通滤波器响应 (重点)

例5-12: 已知某理想低通滤波器的频率响应, 如图所示
设输入信号 $e(t)$, 并对应的频谱 $E(\omega)$, 求输出响应
信号 $r(t)$ 。

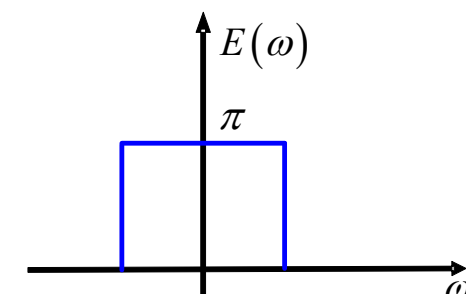
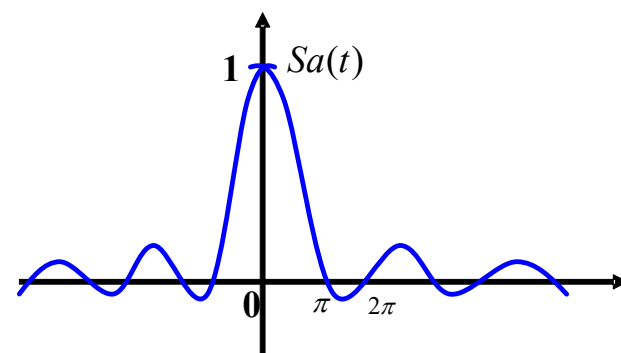
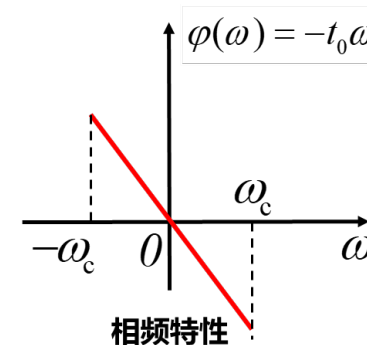
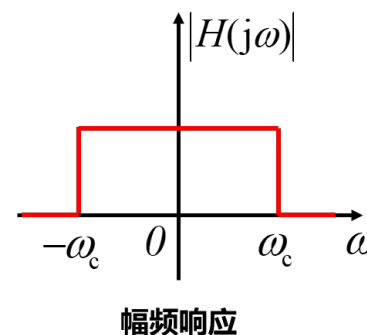
$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$e(t) = \text{Sa}(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

解: 对偶性 $\rightarrow E(\omega) = \pi G_2(\omega)$

即宽度为 2、幅度为 π 的矩形脉冲。由于当 $\omega > 1$ 时, $|E(\omega)| = 0$

所以输入信号 $e(t)$ 的带宽 $B = 1$ 。此时输入信号的频谱 $E(\omega)$ 表示为 $E(\omega) = \pi G_{2B}(\omega)$



理想低通滤波器的系统函数：

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad \text{表示为} \rightarrow H(\omega) = G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

经过理想低通滤波器的响应的频谱： $R(\omega) = H(\omega)E(\omega)$ $R(\omega) = G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} \cdot \pi G_2(\omega) = G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} \cdot \pi G_{2B}(\omega)$

重点：比较两个矩形的宽度

(1) 如果 $\omega_c > B = 1$ ，滤波器带宽比信号频带宽，信号全部通过，但相位要改变。

$$R(\omega) = \pi G_{2B}(\omega) e^{-j\omega t_0} = E(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad \rightarrow \quad r(t) = \text{Sa}(t - t_0) = e(t - t_0), \quad -\infty < t < +\infty$$

(2) 如果 $\omega_c \leq B = 1$ ，滤波器带宽比信号频带窄，滤波器带宽外信号滤除，但幅度上要乘以 π 。

$$R(\omega) = \pi G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} = \pi H(\omega) \quad \rightarrow \quad r(t) = \pi h(t) = \omega_c \text{Sa}(\omega_c(t - t_0)), \quad -\infty < t < +\infty$$

结论：(1) 以上介绍对所有带宽受限的信号都具有普遍意义。

(2) 对于实际信号，带宽无限，必然产生失真或者混叠。

例5-13: 已知具有零相移的理想低通滤波器为 $H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\omega_c}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_c}{2} \end{cases}$, 滤波器的输入

信号 $e(t) = \frac{\sin(\omega_c t/2)}{\pi t}$ 。试分别求 $H_1(\omega) = H(\omega/2)$, $H_2(\omega) = H(\omega)$, $H_3(\omega) = H(2\omega)$ 的冲激响应 $h_1(t)$ 、 $h_2(t)$ 、 $h_3(t)$, 以及 $e(t)$ 通过 $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$ 、 $H_3(\omega)$ 的输出信号 $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ 、 $r_3(t)$ 。

解: (1) 由于 $H(\omega)$ 和 $h(t)$ 是一对傅里叶变换, 根据方波与抽样函数**对偶性**, 有

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c/2}^{+\omega_c/2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\omega_c}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$$

根据**尺度特性**, $H_1(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)$ **对应** \rightarrow $h_1(t) = 2h(2t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$

$H_2(\omega) = H(\omega)$ **对应** \rightarrow $h_2(t) = h(t) = \frac{\omega_c}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$

$H_3(\omega) = H(2\omega)$ **对应** \rightarrow $h_3(t) = \frac{1}{2} h\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\omega_c}{4\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{4}\right)$

(2) 由于 $R(\omega) = H(\omega)E(\omega)$

根据对偶性: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 对应 $\rightarrow F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

$$E(\omega) = \mathcal{F}[e(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)}{\pi t}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\omega_c}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)}{\frac{\omega_c t}{2}}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\omega_c}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)\right] = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\omega_c}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_c}{2} \end{cases}$$

重点: 还是比较两个矩形的宽度

$$R_1(\omega) = H_1(\omega)E(\omega) = E(\omega) \quad \text{对应} \rightarrow r_1(t) = e(t) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)}{\pi t}$$

$$R_2(\omega) = H_2(\omega)E(\omega) = H_2(\omega) = H(\omega) \quad \text{对应} \rightarrow r_2(t) = h_2(t) = \frac{\omega_c}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$$

$$R_3(\omega) = H_3(\omega)E(\omega) = H_3(\omega) \quad \text{对应} \rightarrow r_3(t) = h_3(t) = \frac{\omega_c}{4\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{4}\right)$$

例5-14: 已知周期信号 $e(t)$ 如图所示, 如果该信号经过理想低通滤波器 $H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi \\ 0 & |\omega| > \pi \end{cases}$, 求滤波后的响应 $r(t)$ 。

解: 根据 $R(\omega) = H(\omega)E(\omega)$

激励周期信号 $e(t)$ 的频谱: $E(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) \leftarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

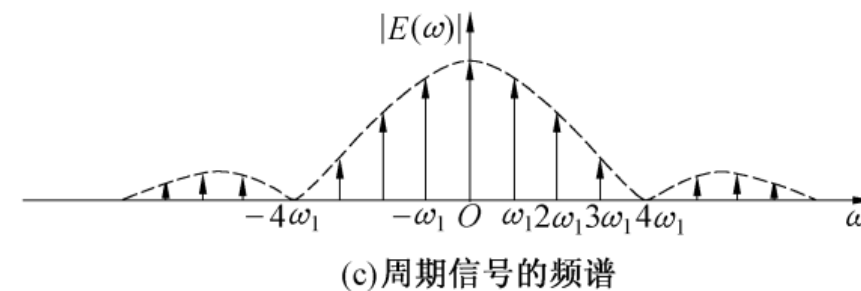
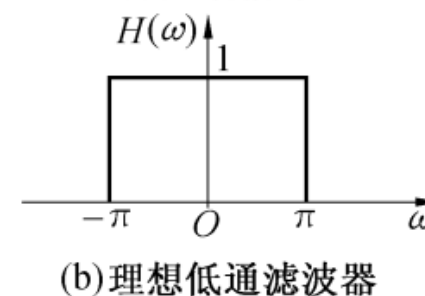
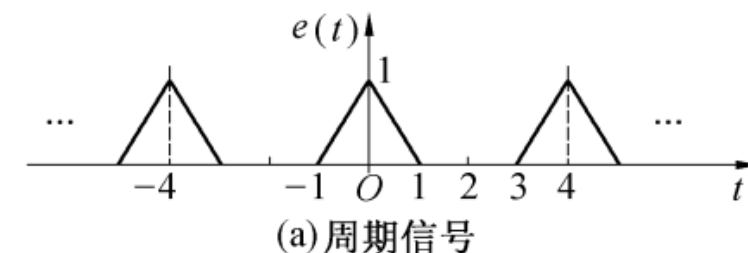
傅里叶级数系数 $F_n = \frac{1}{4} \text{Sa}^2\left(\frac{\pi n}{4}\right) \leftarrow \text{两个方波卷积}$

$$\text{则 } E(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \text{Sa}^2\left(\frac{\pi n}{4}\right) \delta\left(\omega - n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{\pi n}{4}\right) \delta\left(\omega - \frac{\pi n}{2}\right)$$

重点: 那些谐波在滤波器内?

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi} \delta(\omega + \pi) + \frac{4}{\pi} \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \delta(\omega) + \frac{4}{\pi} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \delta(\omega - \pi)$$

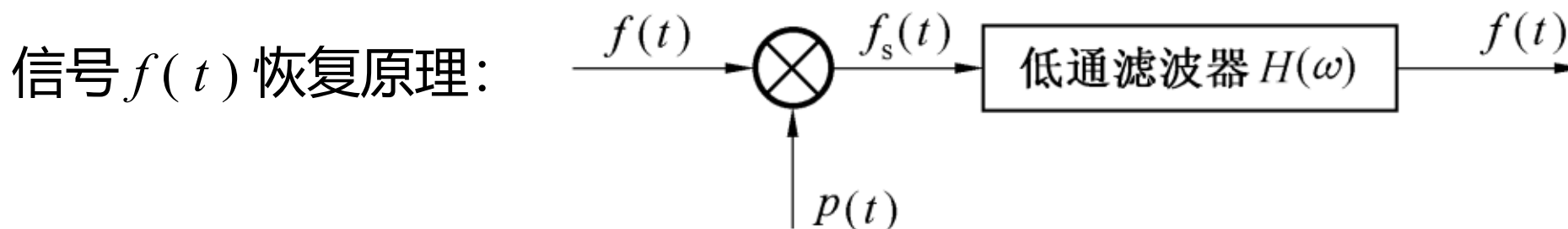
对应时域信号 $\rightarrow r(t) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi t)$



5.8.3 从抽样信号恢复连续时间信号

目的：从抽样信号频谱 $F_s(\omega)$ 恢复原连续信号频谱 $F(\omega)$ 。

关键：信号最高频率 ω_m ，抽样频率 ω_s ，滤波器截止频率 ω_c 之间关系？

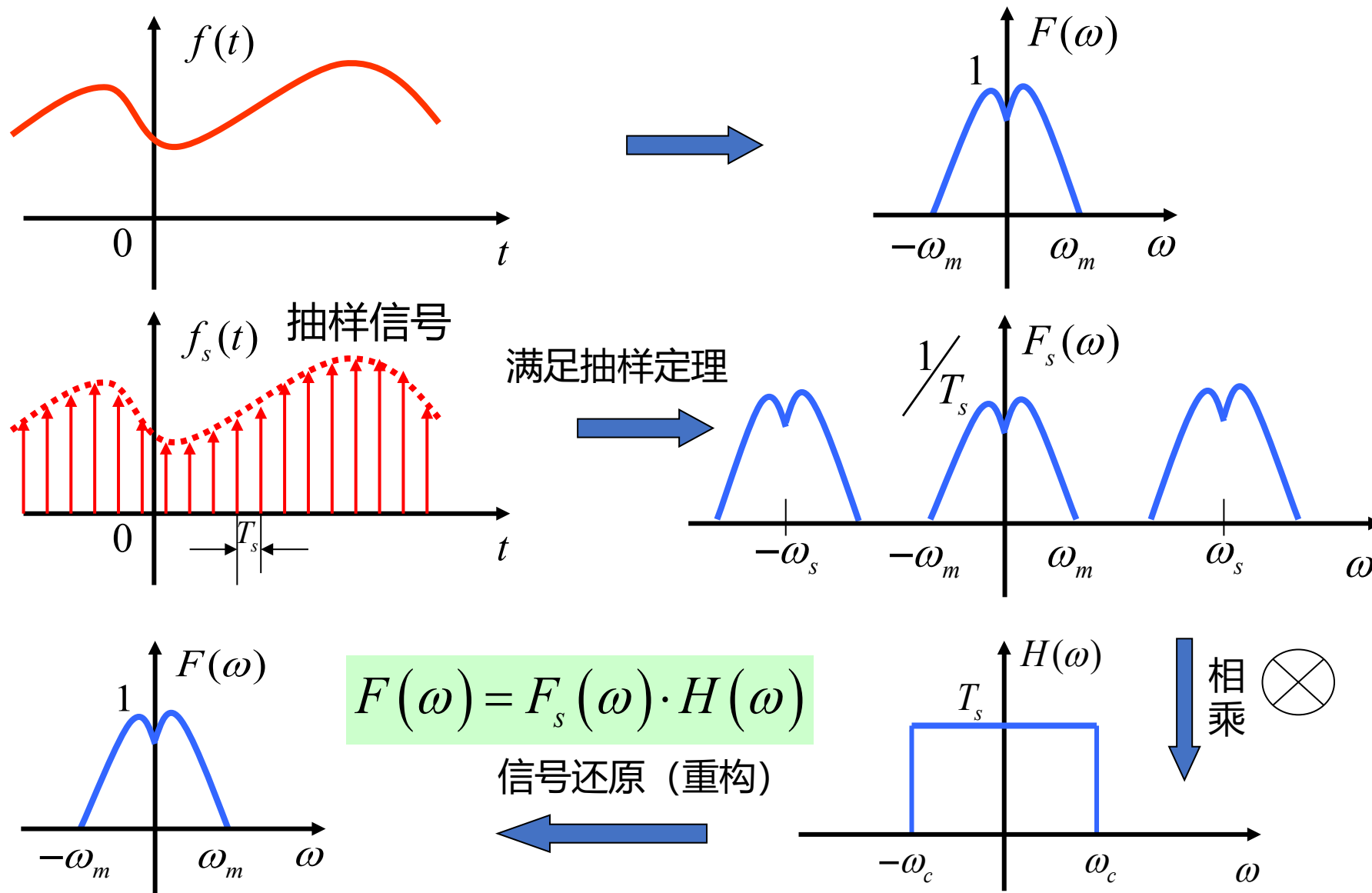


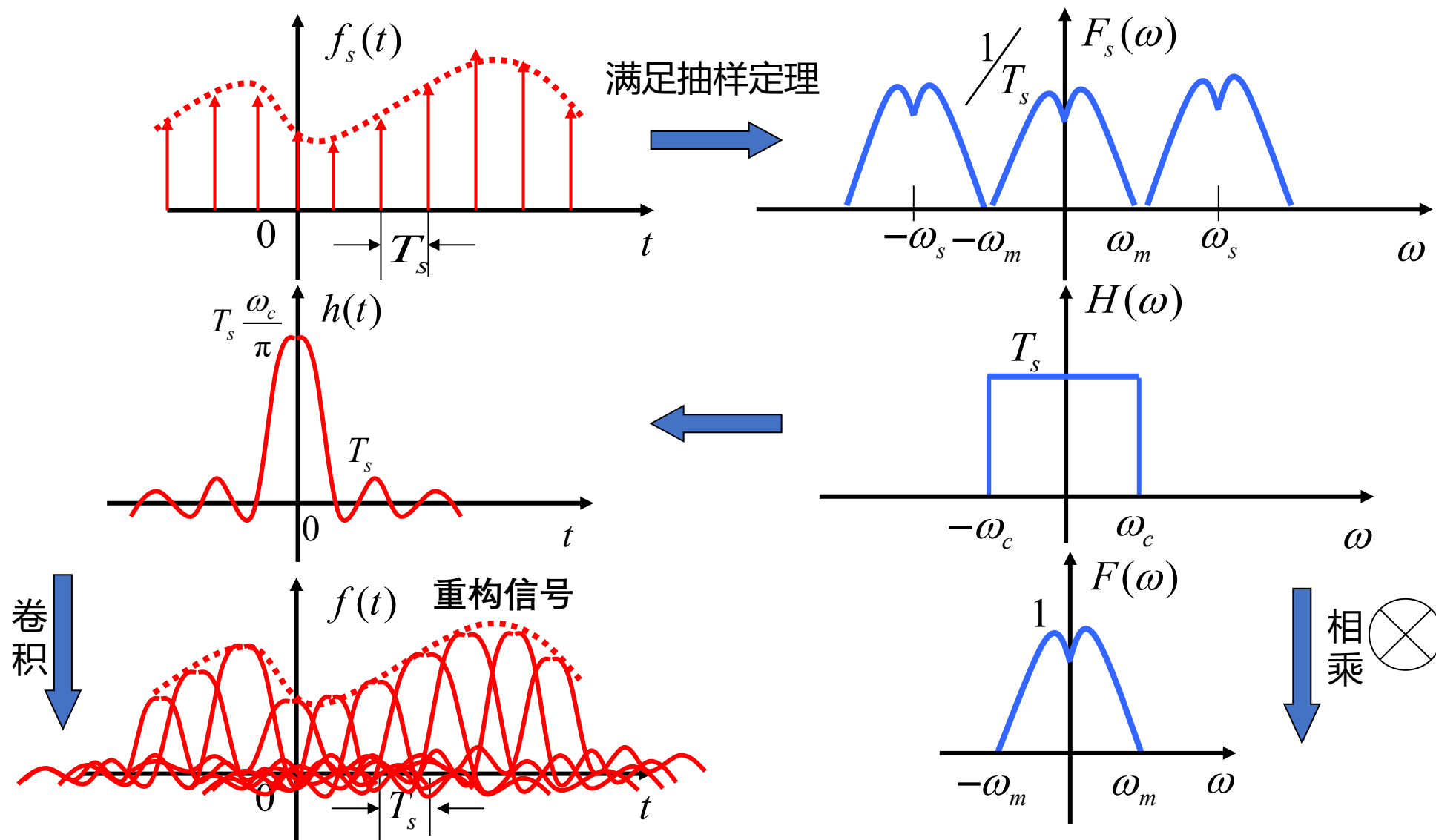
低通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s, & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

恢复信号

$$F(\omega) = F_s(\omega)H(\omega)$$





时域分析

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\therefore f(t) = h(t) * f_s(t) = T_s \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

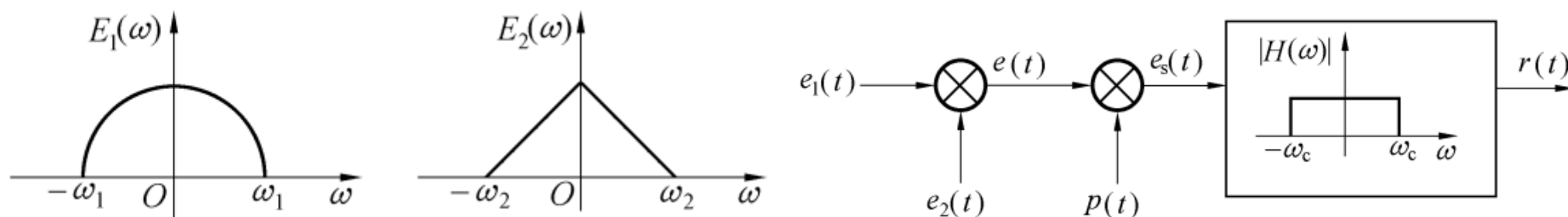
$$= T_s \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \quad \text{内插公式}$$

连续信号 $f(t)$ 展成了抽样函数的无穷级数，级数的系数等于 $f(nT_s)$ 。 (线性叠加)

临界抽样时, $\omega_s = 2\omega_m$, $T_s = \pi / \omega_m$, $\omega_c = \omega_m$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)]$$

例5-15: 已知 $e_1(t)$ 、 $e_2(t)$ 的频谱, 求最大抽样间隔 T_{\max} 、 $H(\omega)$ 截止频率 ω_c 。



解: (1) 时域乘积 $e(t) = e_1(t) \cdot e_2(t)$

频域卷积 $E(\omega) = \frac{1}{2\pi} E_1(\omega) * E_2(\omega)$ 频谱范围 $\rightarrow -(\omega_1 + \omega_2) < \omega < +(\omega_1 + \omega_2)$

(2) 抽样信号 **频谱不混叠** \leftarrow 最大抽样时间间隔 T_{\max}

采样定理 $f_s \geq 2f_m \rightarrow$ 时间间隔 $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{\omega_s} \rightarrow$ 取等号 $T_{\max} = \frac{2\pi}{2\omega_m} = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$

(3) 抽样信号 **频谱周期重复** \leftarrow 滤波器截止频率 ω_c $(\omega_1 + \omega_2) < \omega_c < \omega_s - (\omega_1 + \omega_2)$

两个带限信号运算后的频谱范围，决定了最高角频率，决定了抽样频率

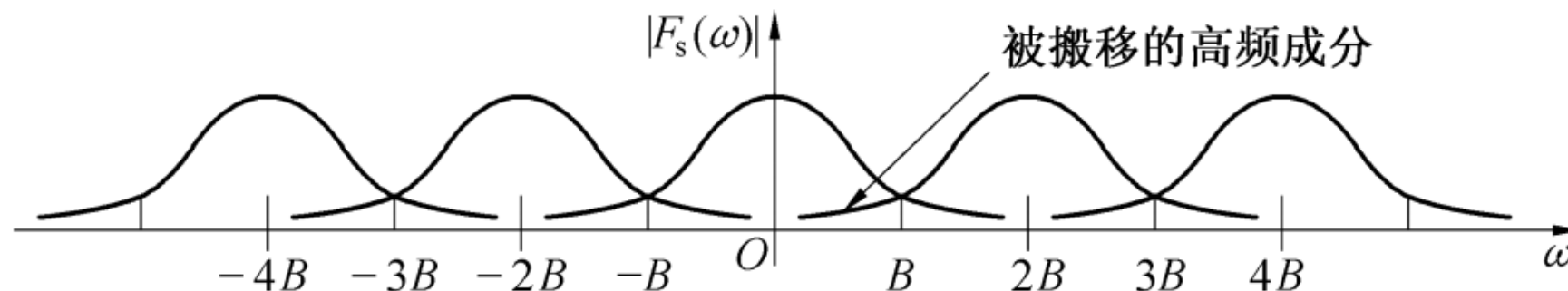
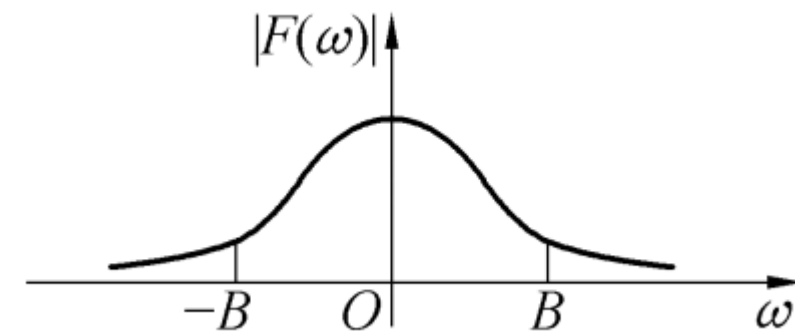
信号表达式	频谱	最高角频率 ω_m	奈奎斯特角频率 $\omega_s = 2\omega_m$
$f_1(\alpha t); \alpha \neq 0$	$\frac{1}{ \alpha } F_1(j\frac{\omega}{\alpha})$	$ \alpha \omega_{m1}$	$2 \alpha \omega_{m1}$
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(j\omega) + F_2(j\omega)$	$\max\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$	$2\max\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$	$\min\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$	$2\min\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$	$\omega_{m1} + \omega_{m2}$	$2(\omega_{m1} + \omega_{m2})$
$f_1^2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_1(j\omega)$	$2\omega_{m1}$	$4\omega_{m1}$

信号恢复中的混叠效应

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n F(\omega - n\omega_s)$$

问题：实际应用中，时域信号必然是有限信号，因此信号的频谱 $F(\omega)$ 是无限的，与抽样定理发生矛盾。

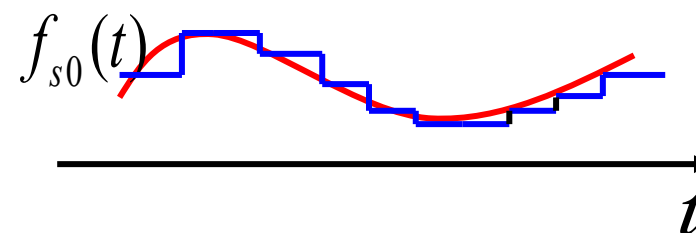
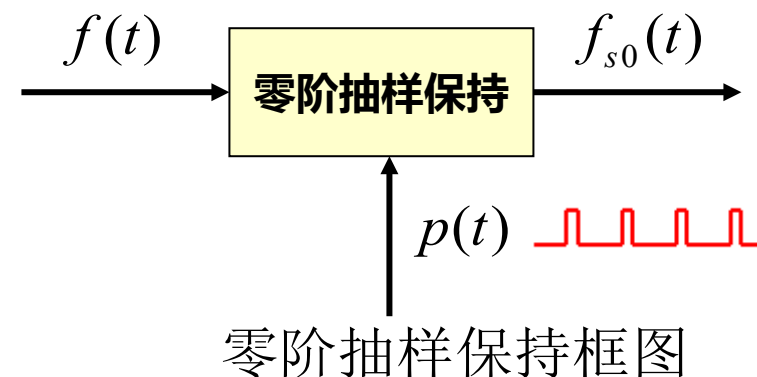
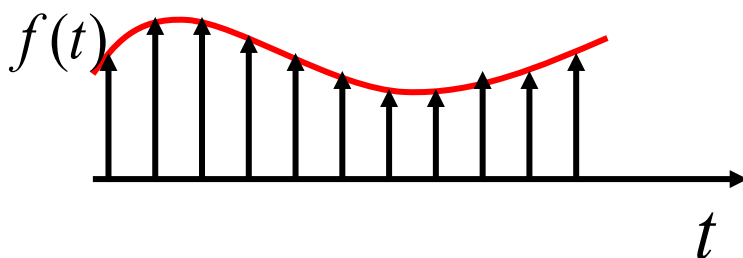
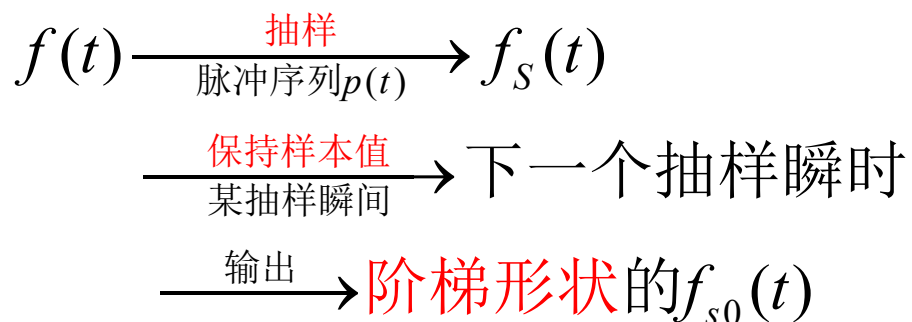
混叠效应：高频成分在频谱搬移后落入到低频段。



解决方法：在 $f(t)$ 抽样前通过低通滤波器来减小失真。

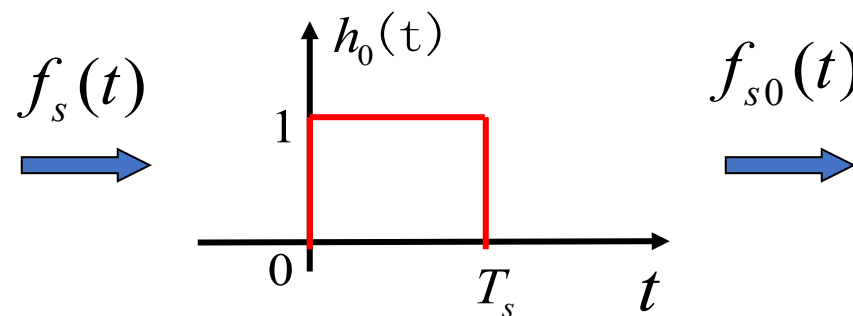
※ 抽样保持

由于理想的抽样脉冲在实际电路中产生及传输都很困难，在通信系统中采用其它抽样方式，最常用的是**零阶抽样保持**，简称**抽样保持**。



抽样保持：构建一个线性系统使其达到保持电平作用

此线性系统必须具有如下单位冲激响应：



$$\therefore f_{s0}(t) = f_s(t) * h_0(t) \quad H_0(j\omega) = T_s \text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$$

$$\therefore F_{s0}(\omega) = F_s(\omega) H_0(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$$

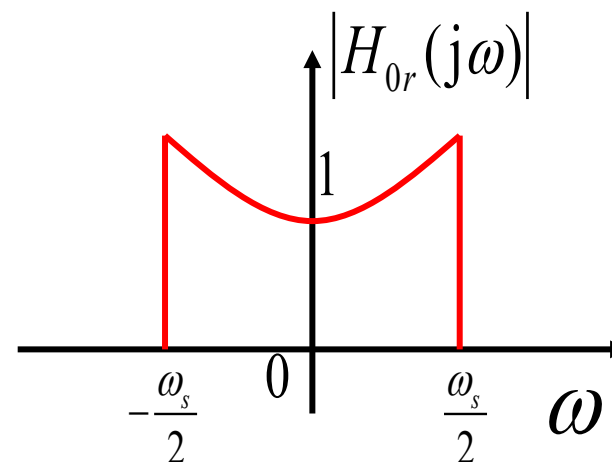
$F_{s0}(\omega)$ 的频谱基本特征仍是 $F(\omega)$,其频谱以 ω_s 周期重复,
但要乘上 $\text{Sa}(\frac{\omega T_s}{2})$ 函数, 并附加了延时因子项 $e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$ 。

$$\xrightarrow{\text{恢复}} F(\omega) = F_{s0}(\omega) \cdot H_{0r}(j\omega) \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} f(t)$$

为复原信号 $f(t)$ ，使用有补偿性质的低通滤波器。

其频响特性为：

$$H_{0r}(j\omega) = \begin{cases} \frac{e^{j\frac{\omega T_s}{2}}}{\text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| \geq \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$



一般仅要求： $|H_{0r}(j\omega)|$ 曲线大致接近补偿； $\varphi(\omega)$ 线性相移特性。

应用：多用于数字通信系统中产生和传输信号

5.9 频分复用 (FDM) 与时分复用 (TDM)

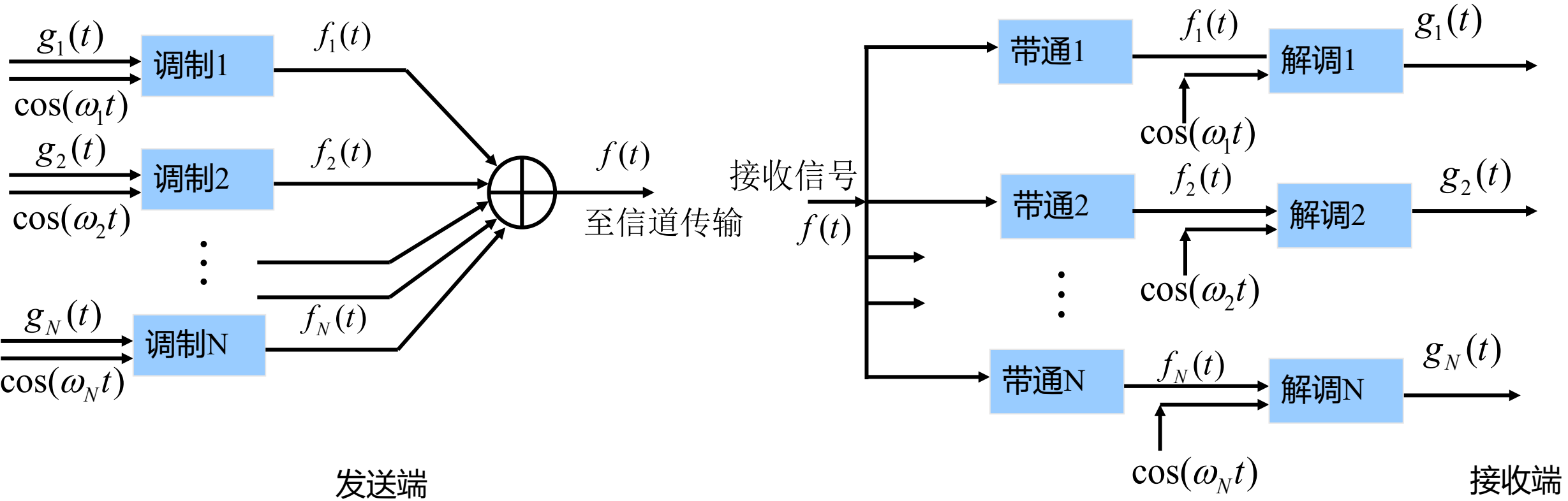
5.9.1 多路复用

将若干路信号以某种方式汇合，统一在同一信道中传输称为多路复用。

5.9.2 频分复用 (FDM) 原理

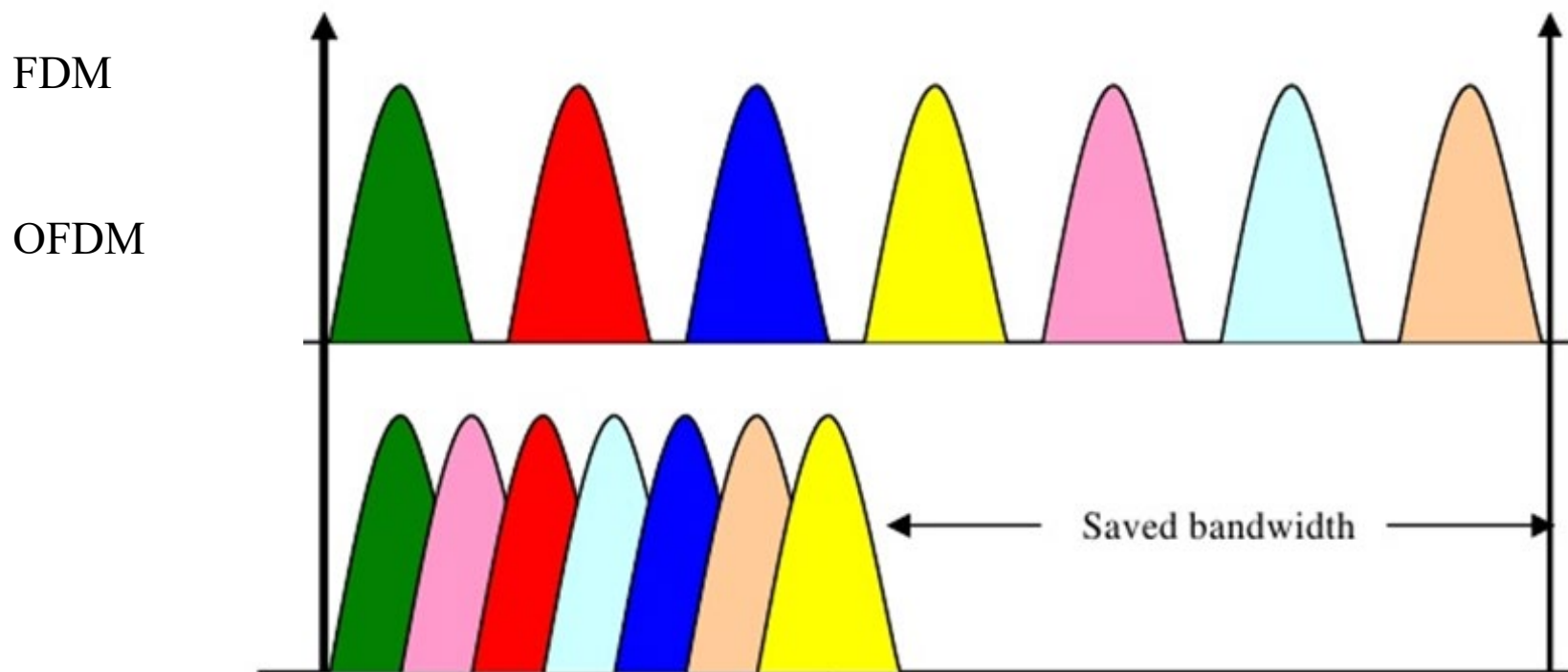
- (1) 在发送端将各路信号频谱搬移到各不相同的频率范围，使它们在频谱上互不重叠，这样就可复用同一信道传输。
- (2) 在接收端利用若干滤波器将各路信号分离，再经解调即可还原为各路原始信号。

频分复用 (FDM) 通信系统框图:



5.9.3 正交频分复用 (OFDM)

- 正交频分复用使用部分相互重叠的正交子载波。
- 正交频分复用比频分复用频谱效率更高, 用于5G, WiFi 等系统。



5.9.4 时分复用(TDM)的原理

时分复用的理论依据：**抽样定理**。

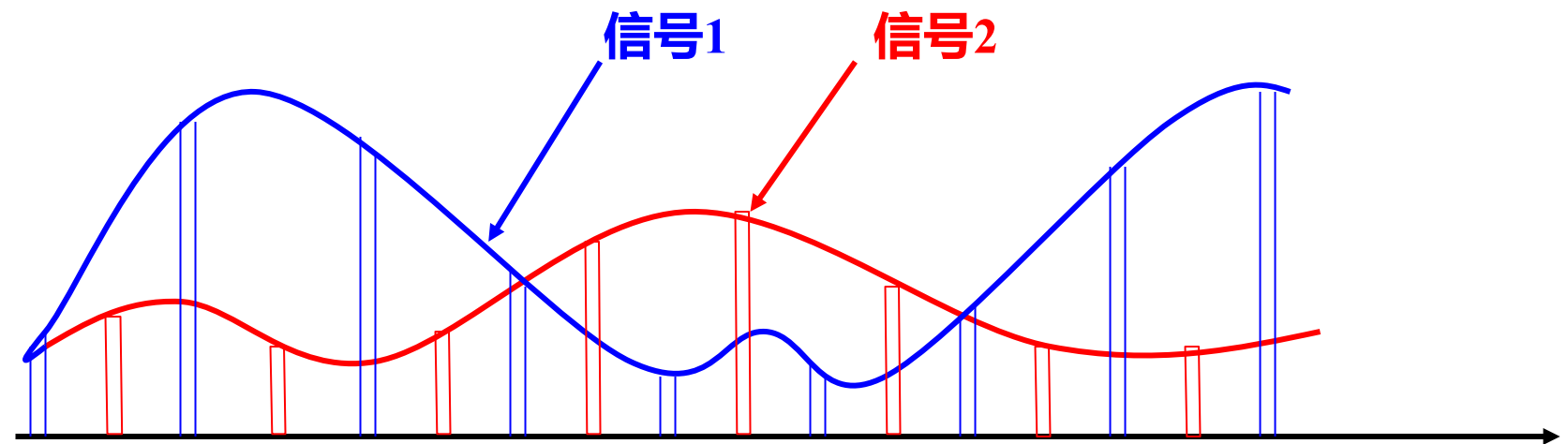
$-f_m \sim +f_m$ 的信号，可由间隔为 $1/(2f_m)$ 的抽样值唯一确定。从这些瞬时抽样值可以正确恢复原始的连续信号。

信道仅在抽样瞬间被占用，其余的空闲时间可供传送第二路、第三路……等各路抽样信号使用。

将各路信号的抽样值有序的排列就可实现时分复用。

在接收端，这些抽样值由适当的**同步检测器**分离。

两路信号的时分复用：



作业

教材习题：

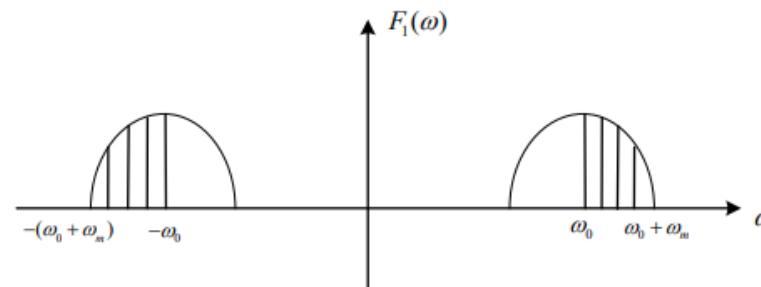
基础题：5-17, 5-19, 5-20, 5-24, 5-25

加强题：5-27

习题错误订正：

5-17：

【5-17】中的图更正为：



单边带调制：在双边带调制基础上滤除掉频谱当中重复的部分（上边带/下边带），分为抑制上边带调制与抑制下边带调制

如上图所示为**抑制下边带调制**，即只保留上边带（图示阴影部分）

（补充：**抑制上边带调制**的原理也是类似的，如下图所示）

