

## 第四章 拉普拉斯变换

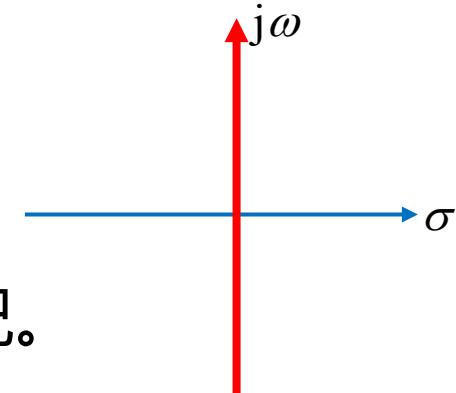
- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频域特性**
- 4.9 线性系统稳定性**
- 4.10 双边拉氏变换
- 4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

## 4.8 系统函数的零、极点分布与系统的频率响应

### 4.8.1 从 $H(s)$ 到 $H(j\omega)$ 频响特性

拉氏变换是傅氏变换由实频域  $\omega$  至复频域  $s$  的推广，傅氏变换是拉氏变换在  $s$  平面虚轴上的特例。当系统为**因果稳定**时，

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$



频响特性：指系统在**正弦信号激励**之下**稳态响应**随信号频率的变化情况。

系统函数以  $H(s)$  表示，正弦激励  $e(t) = E_m \sin(\omega_0 t)$

暂不考虑

$$\text{系统响应的拉氏变换 } R(s) = \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cdot H(s) = \frac{K_{-j\omega_0}}{s + j\omega_0} + \frac{K_{j\omega_0}}{s - j\omega_0} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

对于稳定系统，固有频率  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的实部都小于零，响应的各指数项均为衰减函数，当  $t \rightarrow \infty$  时，都趋于零，所以**稳态响应**为：

$$r_{ss}(t) = E_m H_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

可见，以频率为  $\omega_0$  的正弦激励信号作用下，系统的**稳态响应**仍为**同频率的正弦信号**，但幅度乘以系数  $H_0$ ，相位移动  $\varphi_0$ 。

$$H(s)|_{s=j\omega_0} = H(j\omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0}$$

正弦激励信号的频率  $\omega$  改变时，频率响应  $H(j\omega)$  也随之改变。

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|H(j\omega)|$  ——幅频特性

$\varphi(\omega)$  ——相频特性

## 4.8.2 $H(s)$ 的零极点分布与 $H(j\omega)$ ——s 平面几何分析法

由于  $H(s)$  一般是有理分式，即它可表示为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}$$

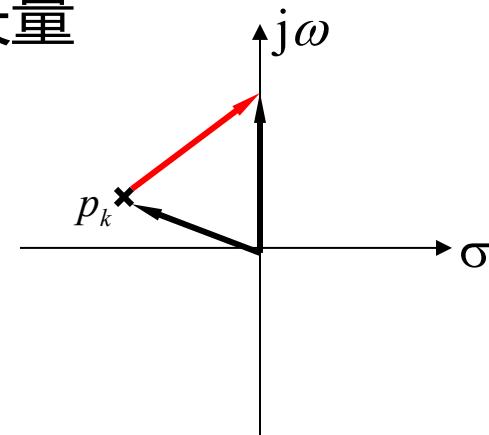
于是，系统的频率响应

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)}$$

上式中，分子和分母的每一个因式，均表示 s 平面上一个指向  $j\omega$  轴的矢量

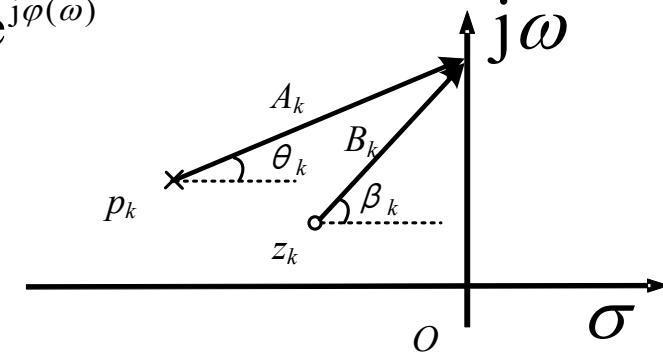
如图所示，因式  $(j\omega - p_k)$  表示的是，沿虚轴变化的矢量  $j\omega$  与由原点指向  $p_k$  的矢量的差矢量。

上式中分子上的因式对应的矢量，称为零点矢量；分母上的因式对应的矢量，称为极点矢量。



每个矢量均有它的模与相角，于是

$$H(j\omega) = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M B_k e^{j\beta_k}}{\prod_{k=1}^N A_k e^{j\theta_k}} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} e^{j(\sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$



$$|H(j\omega)| = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k$$

- ✓ **幅频响应** 等于零点矢量的模之积与极点矢量的模之积的比值 (但要注意乘以系数  $H_0$ , 即使没有零点也要有系数  $H_0$ , 极点前是有系数 1 的 )
- ✓ **相频响应** 等于零点矢量相角之和减去极点矢量相角之和

**重点：**利用系统函数  $H(s)$  的零、极点分布，粗略画出系统的幅频特性曲线  $|H(j\omega)|$  和相频特性曲线  $\varphi(\omega)$

当  $j\omega$  沿虚轴移动时，各复数因子（矢量）的模和相角都随之改变，于是就得出幅频特性曲线和相频特性曲线。这种方法就称为“s平面几何分析法”

在  $j\omega$  由 0 到  $+j\infty$  变化的过程中：

- ① 当  $j\omega$  与某个零点的距离最小时，会使那一点的幅度特性形成谷值  
若遇到虚轴上的零点时，那么谷值就为零
- ② 当  $j\omega$  与某个极点的距离最小时，会使那一点的幅度特性形成峰值，极点距离虚轴越近，峰值越大越尖锐  
若遇到虚轴上的一阶极点时，幅度会在此处形成一个冲激

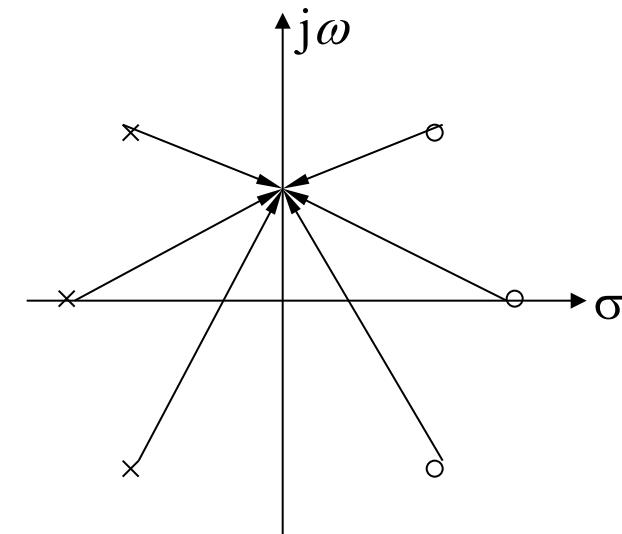
## 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

### (1) 全通系统的零极点分布

全通系统的幅频响应在所有频率上均为一常数。全通系统的相频响应没有受到限制。

全通系统函数的零点矢量的模之积与极点矢量的模之积，在所有频率上均相等。要做到这一点，零点与极点应该以虚轴为镜像对称分布。

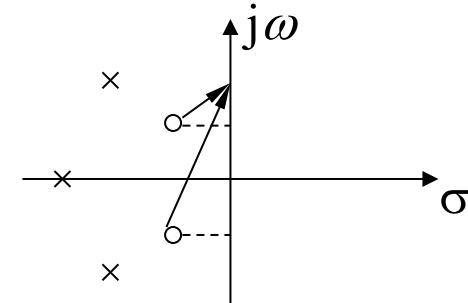
$$|H(j\omega)| = \frac{H_0 \prod_{k=1}^N B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} = H_0$$



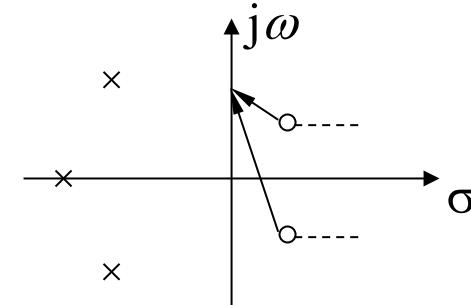
## (2) 最小相移系统的零极点分布

最小相移系统：系统函数的零点均分布在s平面的左半平面或虚轴上。

若有一个或多个零点分布在右半平面，就是非最小相移系统。



最小相移系统零极图



非最小相移系统零极图

比较以上两零极图，极点分布相同，零点的虚部相等，实部符号相反。显然，两图 **幅频响应相同**；对于所有的频率上，**左图中零点的相角均小于右图中零点的相角**，而两图中极点的相角相同，所以就**相移的绝对值**而言，左图的**相移更小**。

## 4.9 线性系统的稳定性

### 系统的因果性和稳定性

系统的因果性指在初始状态为零时，输出不会发生在输入作用于系统之前，即当  $t < t_0$ ,  $x(t) = 0$ ，必定有  $t < t_0$ ,  $y(t) = 0$ 。

线性系统的因果性判据（充分必要条件）：

时域上：指其单位冲激响应为因果信号，满足： $h(t) = h(t)u(t)$

复频域上：系统函数  $H(s)$ （必要条件）

收敛域为  $\sigma > \sigma_0$ ，即收敛域为以  $\sigma_0$  为界的右半平面

或者

$H(s)$  的所有极点都位于收敛轴  $\sigma_0$  的左半平面

系统的**稳定性**指幅度有限的输入只能产生幅度有限的输出的系统，即当输入  $|x(\cdot)| < \infty$ ，  
输出  $|y(\cdot)| < \infty$ ，系统必定是稳定的。即**输出不能包含冲激函数及其导数。**

线性时不变系统的**稳定性判据**（充分必要条件）

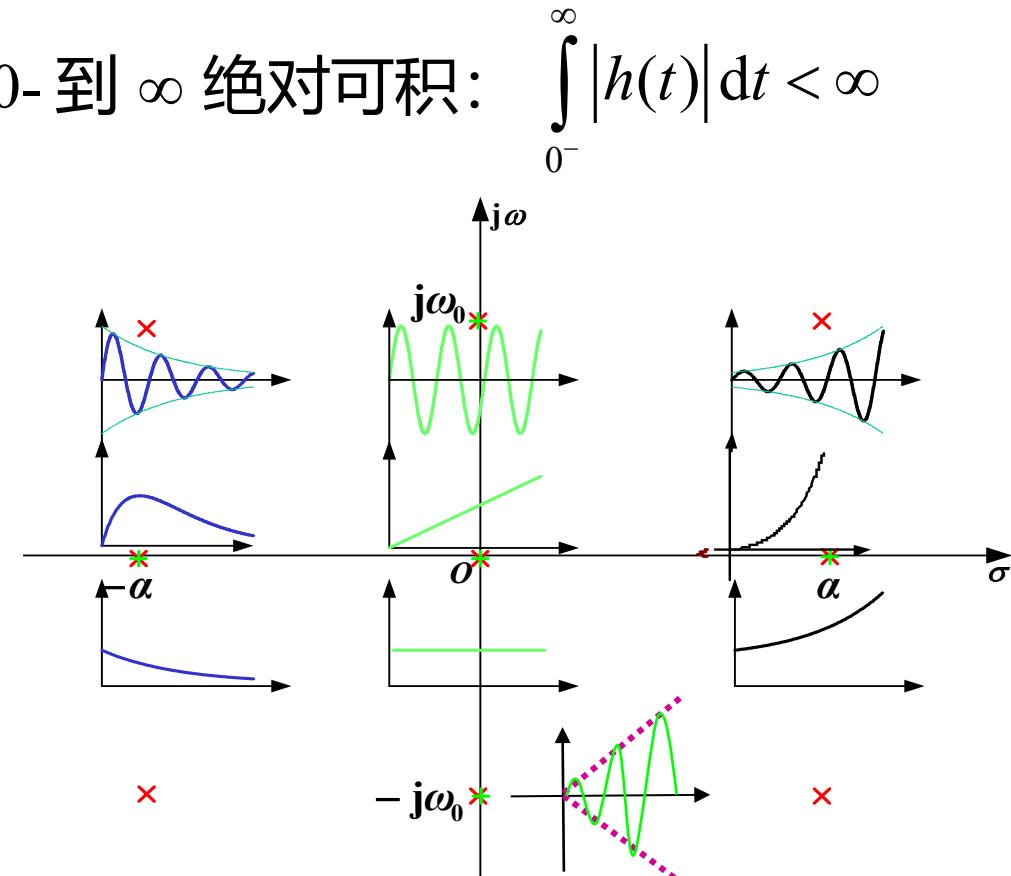
时域上：指单位冲激响应满足**绝对可积**，即  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

复频域上：要求**系统函数  $H(s)$** ：  $s$  右半平面和虚轴上不能有极点

当系统是因果稳定的，其单位冲激响应应该满足在 0- 到  $\infty$  绝对可积：  $\int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

根据系统函数  $H(s)$  的零极点特性判断稳定性：

极点在  $s$  平面右半平面的  $H(s)$  对应的  $h(t)$   
都不满足绝对可积。

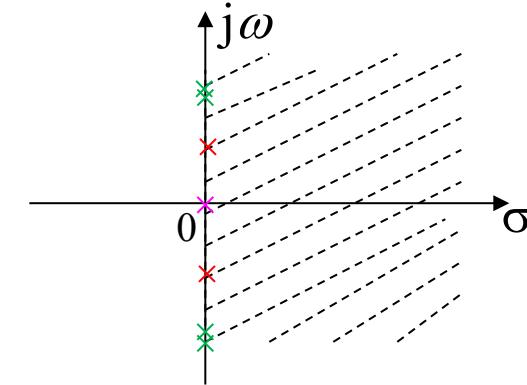


线性因果系统的稳定性判据：系统函数的极点只能分布在  $s$  平面的左半平面。

也即，系统函数的收敛域  $\sigma > \sigma_0$  包含虚轴  $\sigma = 0$ 。

如果系统函数的极点分布在  $s$  平面虚轴上呢？

例如原点上的一阶极点，对应的因式是  $\frac{1}{s}$ ，逆变换是单位阶跃信号  $u(t)$ ，不满足绝对可积。但其在  $t > 0$  时，稳定不变。



例如虚轴上的一对共轭极点，对应的因式是  $\frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$  或  $\frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$  的形式，对应的逆变换是等幅的正余弦信号，也不满足绝对可积。但是在  $t > 0$  时，其最大幅度稳定不变。

如果在虚轴上的极点是多重的，对应的时间信号将不满足绝对可积，且在  $t > 0$  时，其幅度是逐渐增加的。

显然，虚轴上的极点不管是单阶的还是多重的，都使系统不稳定。

也有称，虚轴上一阶极点的情况为临界稳定的。

一个稳定系统的系统函数，对其零点的个数也有要求。

设系统函数为：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = s + \frac{A(s)}{D(s)}$$

$A(s) / D(s)$  是有理真分式。当输入一有界的  $x(t) = u(t)$ ，输出中就会出现冲激信号  $\delta(t)$ ，幅度是无界的。可见以上系统是不稳定的。

注： $h(t)$  可包含冲激函数，但不能包含冲激函数的导数。

综上，从  $s$  域判断线性因果系统的稳定条件应该是：

- (1) 系统函数的极点均应分布在  $s$  平面虚轴的左半平面上；即系统函数分母多项式的根，如果是实数，则应该是负实数；如果是复数，则应具有负的实部。
- (2) 系统函数的分子多项式的阶次不应高于分母多项式的阶次（零点个数应不应多于极点个数）。

## 第四章 拉普拉斯变换

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频域特性
- 4.9 线性系统稳定性
- 4.10 双边拉氏变换**
- 4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系**

## 4.10 双边拉氏变换

双边拉氏变换（广义傅里叶变换）：

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

对于衰减因子 $\sigma$ ,  $t > 0$ 时的情况与  $t < 0$  时的情况正好相反，因此双边拉氏变换的积分结果不一定存在，这与单边拉氏变换不同。所以，要讨论双边拉氏变换的存在性问题。

双边拉氏变换的收敛域

信号拉氏变换的收敛域与信号本身的形态有关，根据拉氏变换的定义，一般信号双边拉氏变换的存在应满足条件：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0$$

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_B(s) e^{st} ds$$

## 说明：

若信号  $f(t)$  为双边信号，则  $f(t) e^{-\sigma t}$  也可能满足狄利赫里条件；

虽然  $f(t)$  乘以衰减因子  $e^{-\sigma t}$  后，在  $t < 0$  时  $e^{-\sigma t}$  并没有衰减（衰减因子没起作用）；

但若  $f(t)$  本身随着  $t \rightarrow -\infty$  是衰减的（例如  $e^t u(-t)$ ），则适当取  $\sigma$  的值，也可使  $f(t)$  的拉氏变换存在。

注：① 单边 LT 和双边 LT 的区别：积分区间不同

单边 LT:  $0^- \sim +\infty$  双边 LT:  $-\infty \sim +\infty$

② 对于单边信号，其单边 LT 和双边 LT 的结果相同

### 4.10.1 右边信号的双边拉氏变换

当信号是一右边信号，即 $t < t_0$ 时， $x(t) = 0$ （因果信号是右边信号），

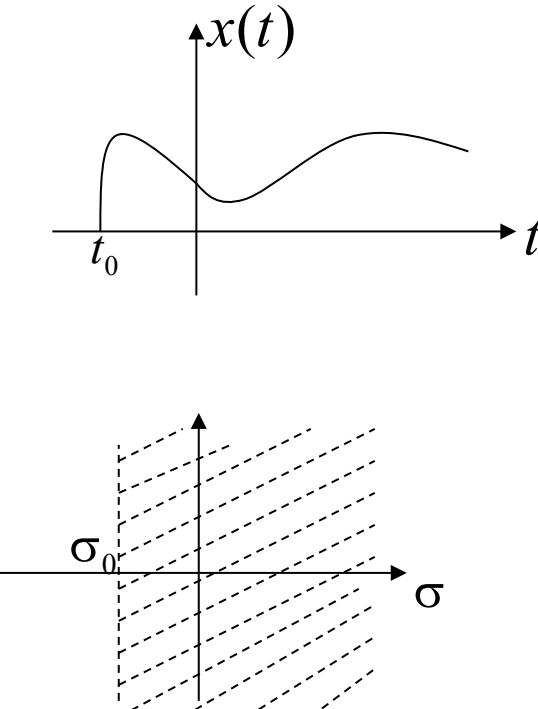
其拉氏变换： $X(s) = \int_{t_0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$

如果 $\sigma_0$ 使上式满足绝对可积，即  $\int_{t_0}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-j\omega t}| dt = \int_{t_0}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$

令 $\sigma = \sigma_0 + \Delta$ ，已知 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma_0 t} = 0$ 。若使 $x(t)e^{-\sigma t}$ 绝对可积，

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-\Delta t} = 0$ ，需满足 $\Delta > 0$ ，即 $\sigma > \sigma_0$ 。

所以收敛域为  $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0$



**例4-47：**已知信号  $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ , 其双边拉氏变换及收敛域为 ( )

A  $X_B(s) = \frac{-1}{(s-1)(s-2)}, \quad \sigma > -2$

B  $X_B(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \sigma > -1$

C  $X_B(s) = \frac{-1}{(s-1)(s-2)}, \quad \sigma > -1$

D  $X_B(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \sigma > -2$

提交

**例4-47:** 求因果信号  $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$  的双边拉氏变换，并指出其收敛域。

$$\text{解: } X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t} - e^{-2t})u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st} dt - \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st} dt$$

前一项当  $\text{Re}\{1+s\}=1+\sigma > 0$ , 积分可积  $\frac{1}{s+1}$  收敛域为  $\text{Re}\{s\} = \sigma > -1$

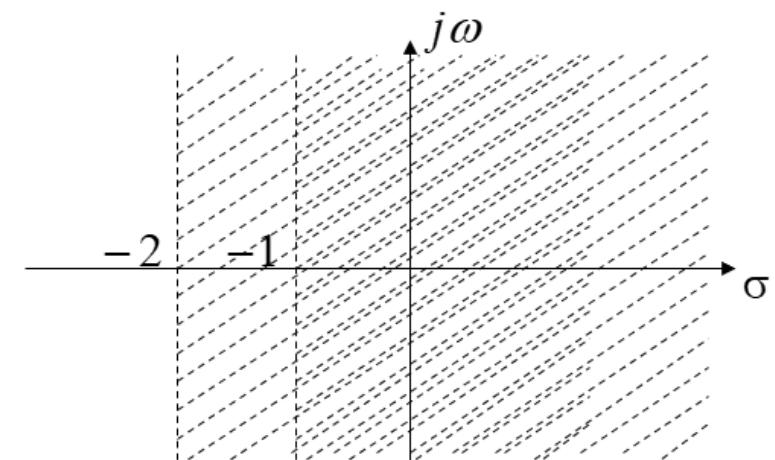
后一项当  $\text{Re}\{2+s\}=2+\sigma > 0$ , 积分可积  $\frac{1}{s+2}$  收敛域为  $\text{Re}\{s\} = \sigma > -2$

于是，整个函数的拉氏变换为：

$$X_B(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

收敛域为  $\text{Re}\{s\} = \sigma > -1$

即信号拉氏变换的收敛域为两部分收敛域的公共区域。



### 4.10.2 左边信号 (反因果信号) 的双边拉氏变换

当信号是一左边信号, 即 $t > t_0$ 时,  $x(t) = 0$  ( $t_0 = 0$ 时为反因果信号) ,

其拉氏变换为:  $X(s) = \int_{-\infty}^{t_0} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{t_0} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$

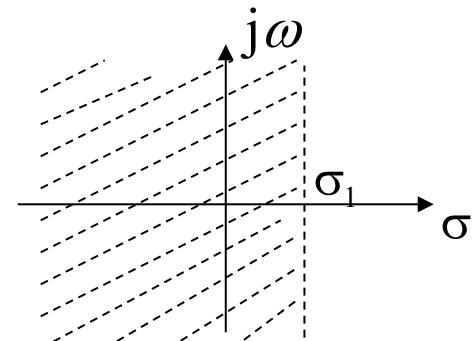
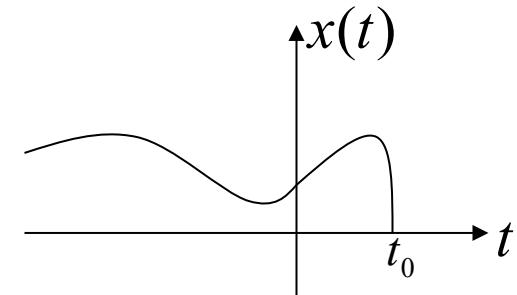
如果 $\sigma_1$ 使上式满足绝对可积, 即

$$X(s) = X(\sigma_1 + j\omega) = \int_{-\infty}^{t_0} x(t)e^{-\sigma_1 t} e^{-j\omega t} dt$$

存在, 则收敛域为  $\text{Re}\{s\} = \sigma < \sigma_1$

证明: 令 $\sigma = \sigma_1 + \Delta$ , 已知  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma_1 t} = 0$ 。若使  $x(t)e^{-\sigma t}$  绝对可积,

即  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma_1 t} e^{-\Delta t} = 0$ , 需满足  $\Delta < 0$ , 即  $\sigma < \sigma_1$ 。



**例4-48:** 已知反因果信号  $x(t) = -e^{-\alpha t} u(-t)$ , 求其双边拉氏变换  $X(s)$ 。

解: 由定义 
$$X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha t} e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(\alpha+s)t} dt$$

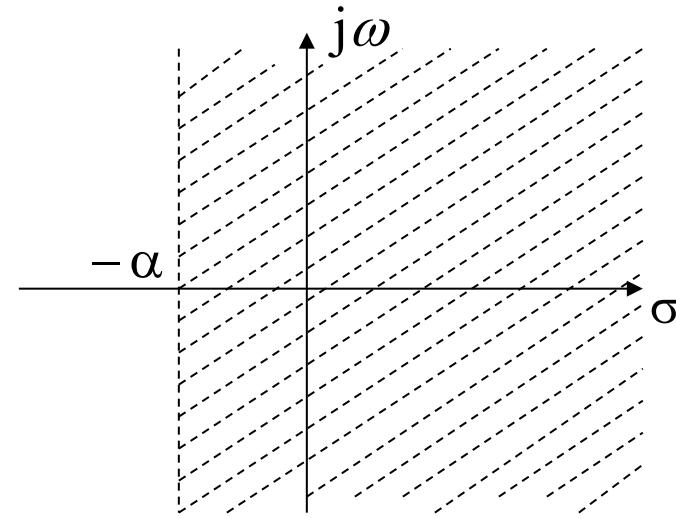
当  $\text{Re}\{\alpha+s\} = \alpha+\sigma < 0$ ,  $\sigma < -\alpha$ , 以上积分才可积。

$$X_B(s) = \frac{1}{(\alpha+s)} e^{-(\alpha+s)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{(\alpha+s)}, \quad \sigma < -\alpha$$

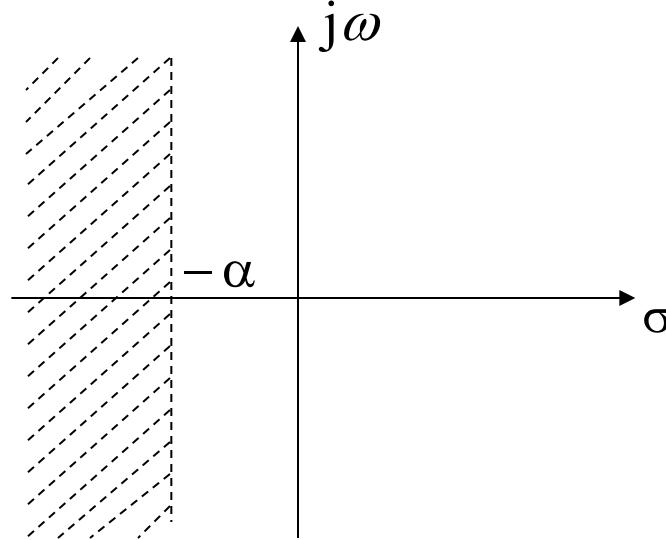
所以  $-e^{-\alpha t} u(-t) \xleftrightarrow{LT} 1/(s+\alpha), \quad \text{Re}\{s\} < -\alpha$

而**例4-1**求得  $e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} 1/(s+\alpha), \quad \text{Re}\{s\} > -\alpha$

相同的拉普拉斯变换式, 因为收敛域不同, 表示不同的时间信号。因此, 在由双边拉普拉斯变换表示其原信号时, 必须给定它的收敛域, 否则不能确定原信号。



$e^{-\alpha t} u(t)$  拉氏变换收敛域



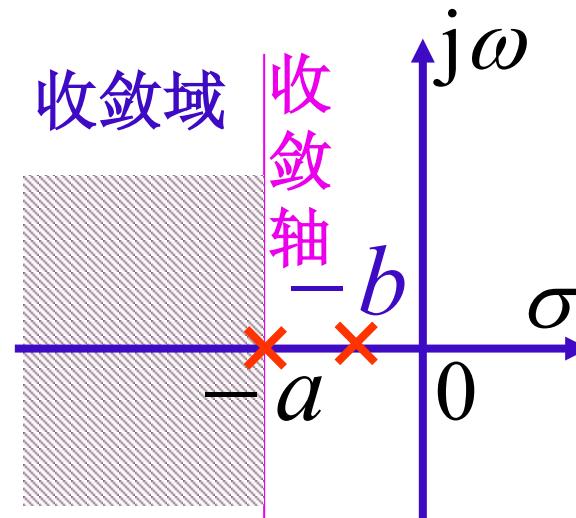
$-e^{-\alpha t} u(-t)$  拉氏变换收敛域

以上两信号的 LT 收敛域，均是在  $s$  平面上的半个开平面。 $-\alpha$  称为它们的收敛坐标， $\operatorname{Re}\{s\} = -\alpha$  称为它们的收敛轴或收敛域边界， $\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$  与  $\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$  分别是它们的收敛域。

例 4-49: 若信号为:  $f(t) = (e^{-at} + e^{-bt})u(-t)$  ( $a > b > 0$ )

象函数为:  $F_B(s) = \frac{-1}{s+a} + \frac{-1}{s+b}$  ( $\sigma < -a$ )

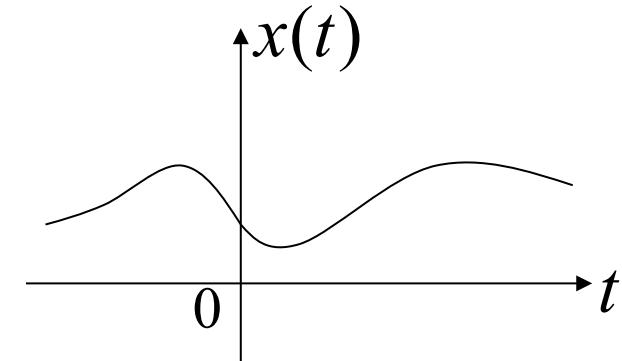
象函数的极点全部位于收敛域右侧。



### 4.10.3 双边信号的双边拉氏变换

当信号是一双边信号，其拉氏变换：

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

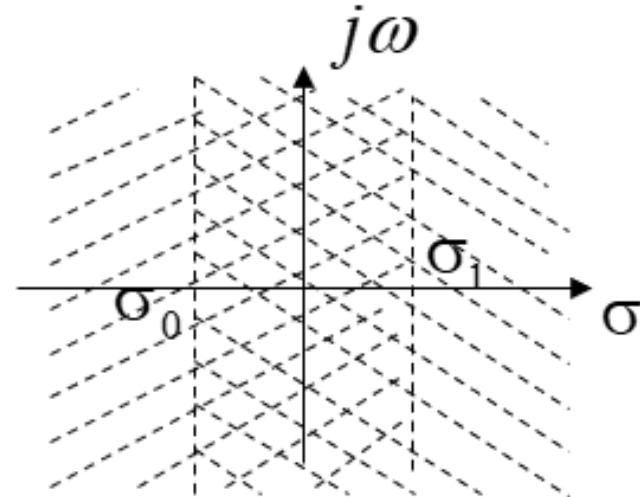
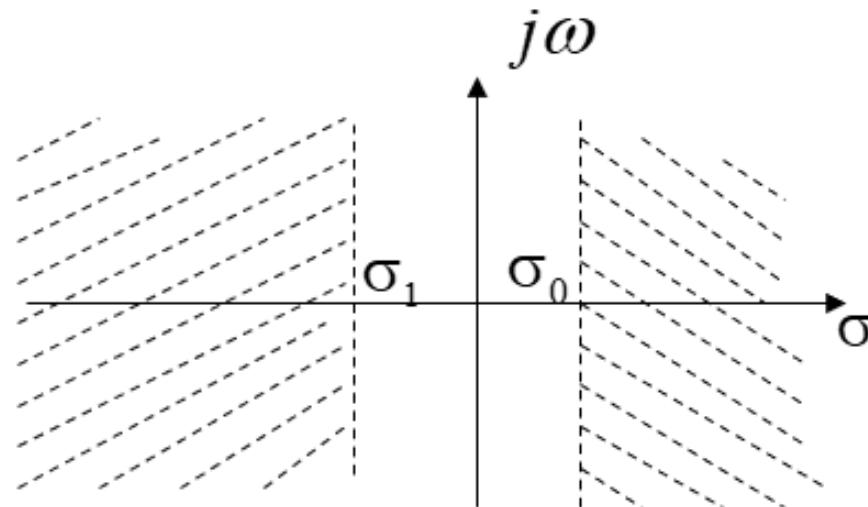


如果  $\sigma_0$  使上式第二项满足绝对可积， $\sigma_1$  使上式第一项满足绝对可积，即

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-\sigma_1 t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

若  $\sigma_0 > \sigma_1$ , 以上  $X(s)$  不存在;

若  $\sigma_0 < \sigma_1$ , 以上  $X(s)$  存在, 且收敛域为:  $\sigma_0 < \operatorname{Re}\{s\} < \sigma_1$ ;



例4-50：已知  $f(t) = u(t) + e^t u(-t)$ , 其双边拉氏变换为 ( )

A

$$F_B(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}, \quad \sigma > 0$$

B

$$F_B(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

C

$$F_B(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}, \quad 0 < \sigma < 1$$

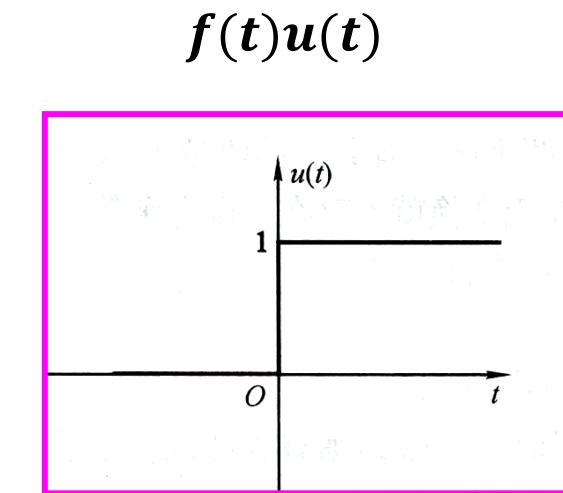
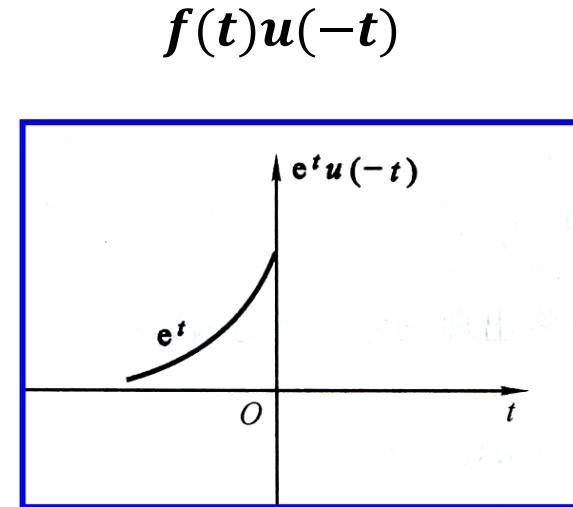
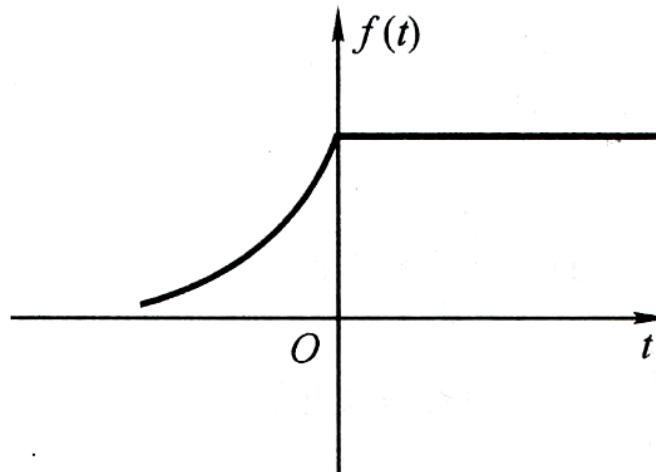
D

$$F_B(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

提交

**例4-50:** 已知  $f(t) = u(t) + e^t u(-t)$ , 试求其双边拉氏变换。

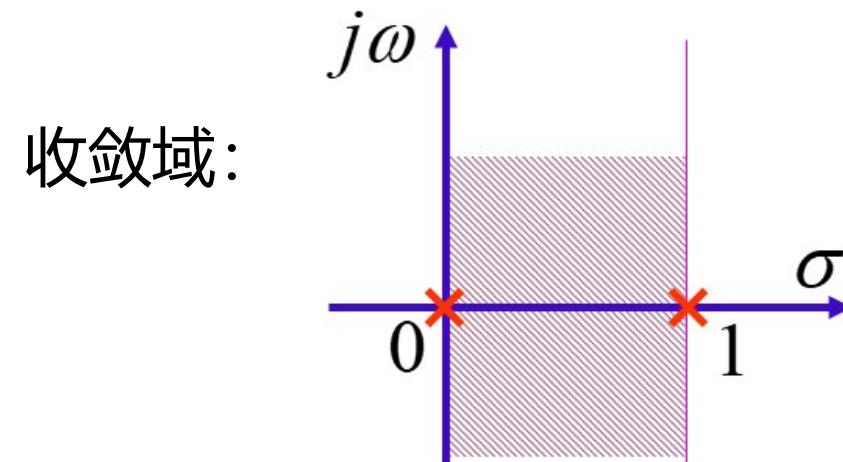
**解:**



$$\begin{aligned}
 F_B(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^t e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} dt
 \end{aligned}$$

为使上式两项满足绝对可积，应有  $1 - \sigma > 0, -\sigma < 0$ ，故可得  $0 < \sigma < 1$ 。

$$F_B(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \quad 0 < \sigma < 1$$

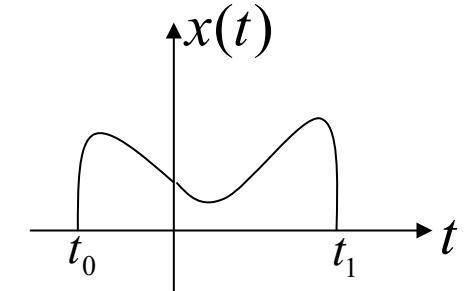


双边拉氏变换必须注明收敛域，否则收敛域不同逆变换的时域信号就不同。

#### 4.10.4 时限信号的双边拉氏变换

当信号是一**时限信号**，即  $t < t_0$  和  $t > t_1$ ,  $x(t) = 0$ , 其拉氏变换：

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$



此时，若  $x(t)$  是绝对可积的， $x(t) e^{-\sigma t}$  总是满足绝对可积，所以其拉氏变换在整个 s 平面上均存在，即**收敛域是 s 全平面**。

## 归纳收敛域 (ROC) 的性质:

1. ROC是 S 平面上平行于  $j\omega$  轴的带状区域
2. 在 ROC 内无任何极点
3. 时限信号的 ROC 是整个 S 平面
4. 当  $F(s)$  是有理函数时, 其 ROC 总是由  $F(s)$  的极点分割。

反之亦然

## 双边拉氏变换 ROC 的规律:

- 1) 右边信号  $f(t)$  的 ROC 一定位于  $F(s)$  最右边极点的右边
- 2) 左边信号  $f(t)$  的 ROC 一定位于  $F(s)$  最左边极点的左边
- 3) 双边信号  $f(t)$  的 ROC 可以是任意两相邻极点之间的带状区域。

同样的象函数，收敛域不同，对应时域信号也不同

$F_B(s)$	收敛域	$f(t)$
$1/s$	$\sigma > 0$	$u(t)$
$1/s$	$\sigma < 0$	$-u(-t)$
$1/(s+\alpha)$	$\sigma > -\alpha$	$e^{-\alpha t} u(t)$
$1/(s+\alpha)$	$\sigma < -\alpha$	$-e^{-\alpha t} u(-t)$

象函数

$$F_B(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s + \alpha}$$

时域函数

$$-\alpha < \sigma < 0 \quad f(t) = -u(-t) + e^{-\alpha t} u(t)$$

$$\sigma > 0 \quad f(t) = u(t) + e^{-\alpha t} u(t)$$

$$\sigma < -\alpha \quad f(t) = -u(-t) - e^{-\alpha t} u(-t)$$

## 4.10.5 双边拉氏逆变换

可以根据收敛域和极点的情况来求解：

- (1) 对象函数进行部分分式展开；
- (2) 根据极点的情况对象函数取逆变换；
- (3) 收敛域左边的极点对应右边信号，收敛域右边极点对应左边信号。

例4-51：已知拉氏变换  $F_B(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}$ ，根据象函数极点的情况，它的收敛域有四种可能的情况，请给出不同的收敛域取逆变换所得的时域信号  $f(t)$ 。

解：对 $F(s)$ 进行分解可得： $F_B(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+3}$

$F(s)$  的极点为  $p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -3$ ，因此可以得到四个不同的收敛域：  
 $\sigma < -3, -3 < \sigma < -2, -2 < \sigma < 0, \sigma > 0$ 。

在各收敛域内进行逆变换：

(1)  $\sigma > 0$ :

$$f(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

(2)  $-2 < \sigma < 0$ :

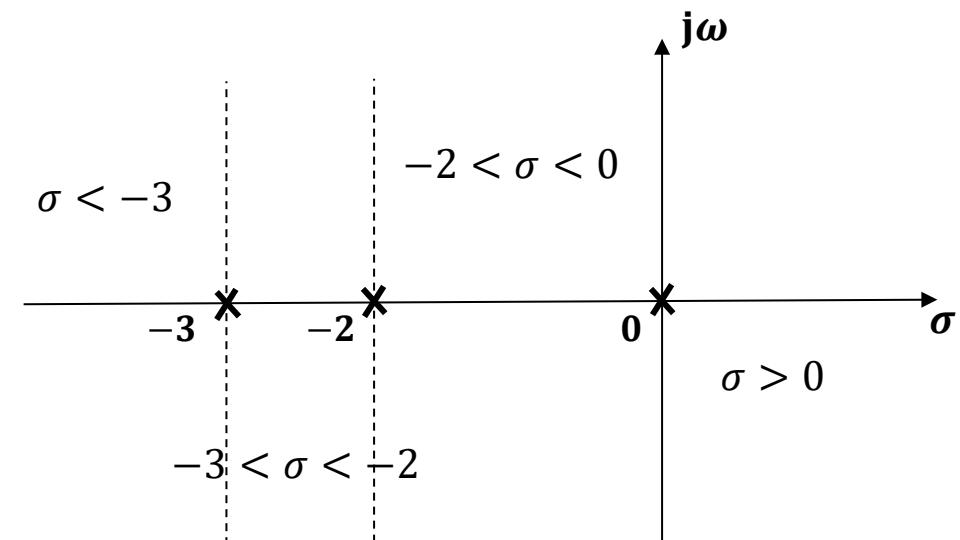
$$f(t) = -\frac{1}{2}u(-t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

(3)  $-3 < \sigma < -2$ :

$$f(t) = -\frac{1}{2}u(-t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(-t) - e^{-3t}u(t)$$

(4)  $\sigma < -3$ :

$$f(t) = -\frac{1}{2}u(-t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(-t) + e^{-3t}u(-t)$$



## 4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

拉普拉斯变换是傅里叶变换由实频率  $\omega$  至复频率  $s = \sigma + j\omega$  上的推广，傅里叶变换是拉普拉斯变换在  $s$  平面虚轴上的特例。

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\} = X(\sigma + j\omega)$$

许多信号，将其傅里叶变换式中的  $j\omega$  换成  $s$  就是它的拉普拉斯变换，反之亦然。

例如，单边指数衰减信号：

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \therefore e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}$$

然而，也有特例。例如单位阶跃信号：

$$u(t) \xleftrightarrow{FT} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

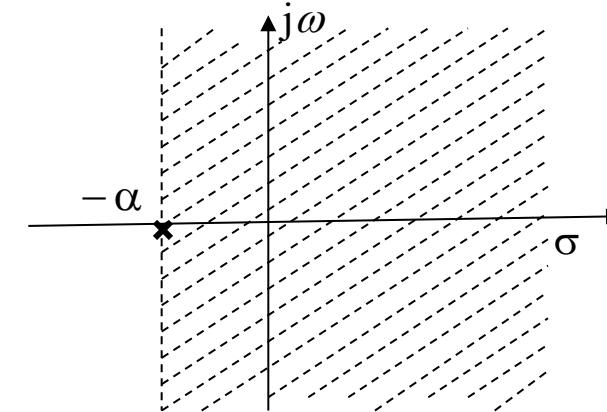
## 4.11.1 拉普拉斯变换收敛域包含虚轴

如果信号的拉氏变换的收敛域包含了  $j\omega$  轴，可将拉氏变换中的  $s$  代以  $j\omega$  求得其傅里叶变换。

例如，单边指数衰减信号的极点位于负实轴上。

$$e^{-\alpha t} u(t) \xleftarrow{FT} \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

$$e^{-\alpha t} u(t) \xleftarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}$$



$e^{-\alpha t} u(t)$  拉氏变换收敛域

负实轴上的重极点的例子：

$$t e^{-\alpha t} u(t) \xleftarrow{FT} \frac{1}{(j\omega + \alpha)^2}$$

$$t e^{-\alpha t} u(t) \xleftarrow{LT} \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

负实部的共轭复数极点的例子：

$$e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t) u(t) \xleftarrow{FT} \frac{j\omega + \alpha}{(j\omega + \alpha)^2 + \Omega_0^2}$$

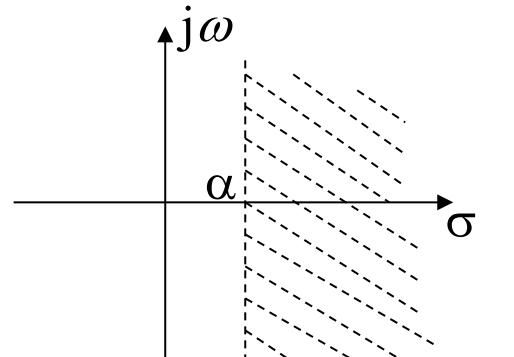
$$e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t) u(t) \xleftarrow{LT} \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2}$$

## 4.11.2 拉普拉斯变换收敛域不包含虚轴

当拉氏变换收敛域不包含虚轴时，即信号的拉氏变换的极点在  $s$  平面虚轴的右半平面，其傅里叶变换不存在。

例如，单边指数增长的信号，其极点位于正实轴上。

$$e^{\alpha t} u(t) \xleftarrow{LT} \frac{1}{s - \alpha}$$



$e^{\alpha t} u(t)$  拉氏变换收敛域

由于信号呈指数增长，不满足绝对可积的条件，其傅里叶变换不存在。

### 4.11.3 拉普拉斯变换的极点位于虚轴上

当信号的拉氏变换的极点是位于  $s$  平面虚轴上的极点，不能简单的将  $j\omega$  代替  $s$  以得到其傅里叶变换。例如，单位阶跃信号  $u(t)$ ：

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} \quad u(t) \xleftrightarrow{FT} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

设信号  $x(t)$  的拉普拉斯变换为  $X(s)$ ，它有虚轴上的单极点  $j\Omega_i$  (多个单极点)

$$\begin{aligned} X(s) &= X_1(s) + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - j\Omega_i} & x(t) &= x_1(t) + \sum_{i=1}^N A_i e^{j\Omega_i t} u(t) \\ X(j\omega) &= X_1(j\omega) + \sum_{i=1}^N A_i \delta(\omega - \Omega_i) * [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] & \xleftarrow{\text{频域卷积定理, } 2\pi \text{ 约掉了}} & \\ &= X_1(j\omega) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j(\omega - \Omega_i)}}_{X(s)|_{s=j\omega}} + \pi \sum_{i=1}^N A_i \delta(\omega - \Omega_i) & \xleftarrow{\text{对应虚轴上单极点的冲激信号}} & \end{aligned}$$

设信号  $x(t)$  的拉氏变换  $X(s)$  有虚轴上的  $k$  重极点:  $j\Omega_0$

$$X(s) = X_1(s) + \frac{A_0}{(s - j\Omega_0)^k}$$

极点位于虚轴的左侧

可以证明, 其对应的傅里叶变换为:

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega} + \frac{\pi A_0 j^{(k-1)}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(\omega - \Omega_0)$$

例如, 单位斜变信号

$$tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2}$$

$$tu(t) \xleftrightarrow{FT} -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

## 本章小结

### 单边拉氏变换的应用

单边拉氏变换在系统分析时，我们均设定系统是**因果的**。单边拉氏变换在系统的**瞬态分析**，**系统函数**及其 s 域分析应用十分普遍。

系统函数可求解电路以及由系统函数的零、极点分布决定系统的**时域**、**频域特性和稳定性**等问题。

### 系统函数分析法的局限性

**系统函数反映的是系统零状态响应的外部特性，不反映系统内部特性。**

在很多情况之下，难以建立确切的系统函数模型，此分析方法也就失效。

如高阶线性系统，求系统函数太烦琐，非线性，时变系统以及模糊现象不能采用系统函数的分析方法。

## ❖ 复频域分析步骤 (如何用复频域分析方法求解系统的输出响应)

分 2 种情况：

### ◆ 给定微分方程

1. 对微分方程两端做 LT
2. 代入初始条件和激励信号，得到  $R(s)$  表达
3. 将  $R(s)$  反变换回时域，得到全响应  $r(t)$

### ◆ 给定电路图

1. 将时域电路等效为 S 域电路
2. 去掉系统的激励，将系统的初始条件等效为激励源，即可得到零输入响应
3. 去掉系统的初始条件只保存系统的激励源，即可得到零状态响应
4. 零输入响应和零状态响应之和即为全响应

## ❖ 系统函数 $H(s)$ 的求解方法

1.  $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$
2.  $H(s) = R_{zs}(s) / E(s)$
3. 由微分方程两边做 LT 求解
4. 由 s 域等效电路图求解
5. 由 s 域模拟框图求解
6. 由零、极点图 + 其他条件

## ❖ 用系统函数 $H(s)$ 分析 LTI 系统

1.  $h(t)$  的时域波形
2.  $H(j\omega)$  的频率响应 (幅频特性、相频特性)
3. 系统的稳定性判别

## 作 业

**教材习题：**

**基础题：** 4-50

**加强题：** 4-51

## 第一章

1. 信号的分类、运算 (时移-反褶-尺度变换)
2. 奇异信号 (阶跃函数、冲激函数) 的性质 (抽样、偶函数、微积分、尺度)

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{-2t} u(t) \right] = e^{-2t} \delta(t) - 2e^{-2t} u(t) = \delta(t) - 2e^{-2t} u(t)$$

$$\int_{-1}^9 \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \delta(t) dt = \int_{-1}^9 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \delta(t) dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

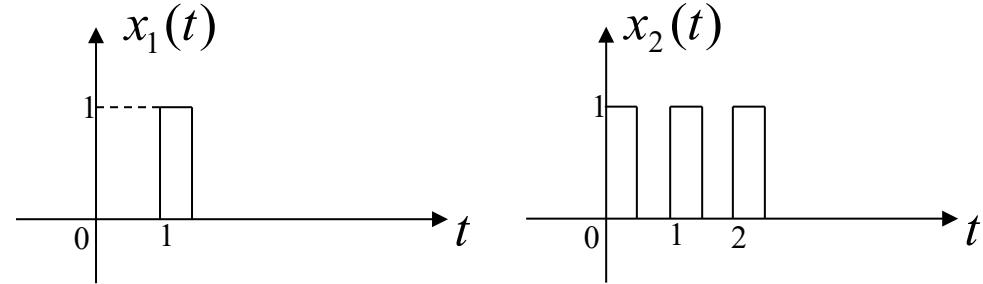
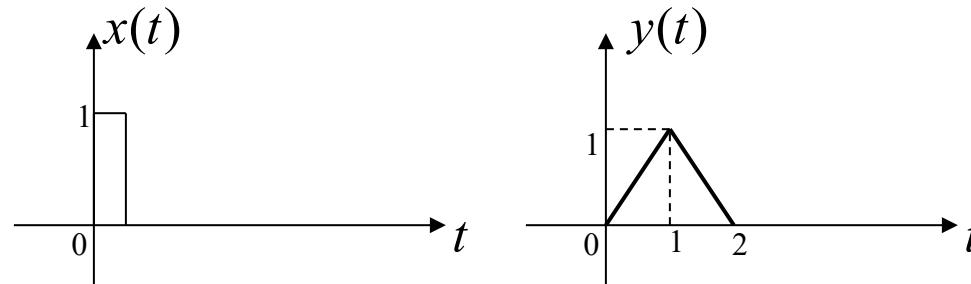
$$\int_{-4}^{-1} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \delta(t) dt = 0$$

3. 线性时不变系统 (叠加性-齐次性-时不变系统)

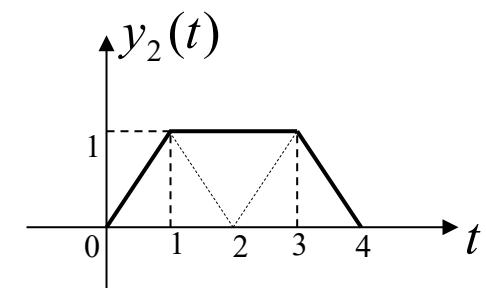
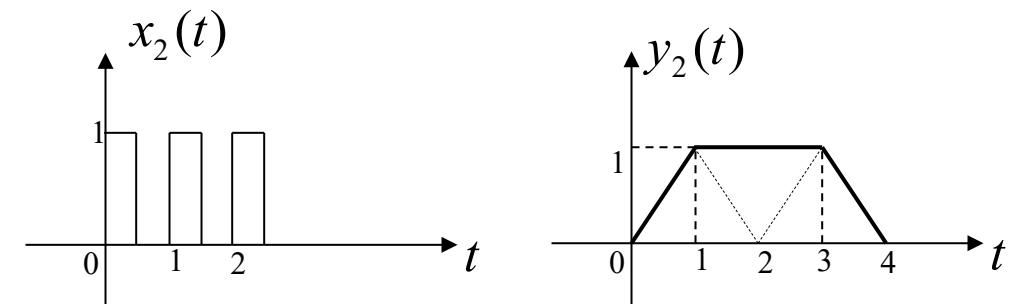
$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k x_k(t - t_k) \quad y(t) = \sum_{k=1}^N a_k y_k(t - t_k)$$

## 第一章

**例**：设LTI系统的输入  $x(t)$  与输出  $y(t)$  之间的关系由下图描述，  
作出当输入分别为  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  时，输出  $y_1(t)$  与  $y_2(t)$  的波形图。



已知  $y_2(t)$  的波形图，画出  $y_2(-2t+1)$



## 第二章

### 1. 微分方程时域经典法求解

**基本原理——线性叠加：**微分方程的完全解=齐次解+特解       $r(t) = r_h(t) + r_p(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_n e^{\alpha_n t} + r_p(t)$

一般步骤：

- 1) 根据电路图列微分方程，建立输入  $e(t)$  和输出  $r(t)$  的数学关系；
- 2) 求齐次解  $r_h(t)$  的形式：列特征方程，求特征根，获得齐次解的形式，系数待定；
- 3) 求特解  $r_p(t)$ ：与激励信号  $e(t)$  的形式有关，查表，得到特解形式，代入原方程平衡系数，求得特解；
- 4) 求完全解  $r(t)$ ：代入初始条件  $0+$ ，获得齐次解系数，得到最终的完全解。

**结论：**齐次解(**自由响应**)的函数特性仅依赖于系统本身特性，与激励信号的函数形式无关，但确定系数有关；而特解(**强迫响应**)的形式由激励函数决定。

## 第二章

### 2. 起始点跳变

对于具体的电网络，系统的  $0_-$  状态就是系统中储能元件的储能情况。

一般情况下，换路期间，电容两端的电压 和 流过电感中的电流 不会发生突变。

这就是在电路分析中的换路定则：  $v_C(0_-) = v_C(0_+)$ ,  $i_L(0_-) = i_L(0_+)$

仅当有冲激电流强迫作用于电容 或 有冲激电压强迫作用于电感， $0_-$  到  $0_+$  状态才会发生跳变。

先看换路前，电路达到稳态xxx

再看换路后的  $i(0_+)$  和  $\frac{d}{dt}i(0_+)$

## 第二章

**冲激函数匹配法** →解决 0- 到 0+ 的跳变问题

**匹配的原理:**  $t = 0$  时刻微分方程左右两端的  $\delta(t)$  及各阶导数应该平衡

(其它项也应该平衡, 我们讨论初始条件, 可以不管其它项)

**例2-5:**  $\frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = 3\delta'(t)$ , 已知  $r(0_-) = 1$ , 求  $r(0_+)$ 。

**解:** 方程右端含  $\delta'(t)$  项, 它一定属于  $\frac{d}{dt}r(t)$

$$\text{设 } \frac{d}{dt}r(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) \quad \text{则} \quad r(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t)$$

$$\text{代入方程} \quad a\delta'(t) + b\delta(t) + 3a\delta(t) + 3b\Delta u(t) = 3\delta'(t)$$

**$\Delta u(t)$ :** 相对单位跳变函数

表示 0- 到 0+ 幅度跳变一个单位

$$\begin{aligned} \text{得出} \quad & \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b + 3a = 0 \end{array} \right. \quad \text{即} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -9 \end{array} \right. & \text{所以得} \quad r(0_+) - r(0_-) = b = -9 \\ & & \text{即} \quad r(0_+) = r(0_-) - 9 = 1 - 9 = -8 \end{aligned}$$

## 第二章

### 3. 零输入/零状态响应

经典法求解系统的完全响应，可分为：

$$\text{完全响应} = \text{自由响应} + \text{强迫响应}$$

$$r(t) = r_h(t) + r_p(t)$$

系统的完全响应也可分为：

$$\text{完全响应} = \text{零输入响应} + \text{零状态响应}$$

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$$

自由响应 — 形式由系统特征决定

强迫响应 — 形式由激励信号决定

零输入响应 — 系统内部储能引起

零状态响应 — 激励信号引起

零输入响应、零状态响应均为线性：按零输入响应和零状态响应分解，有助于理解线性系统的叠加性和齐次性。

**目的：**避免经典求解方法中需要计算  $r(0^+)$  来确定齐次解系数。

## 第二章

### 3. 零输入/零状态响应

#### 1. 零输入响应的定义与待定系数确定

① 定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应，即  $r_{zi}(t) = H[\{x(0_-)\}]$

② 满足方程： $C_0 \frac{d^n}{dt^n} r_{zi}(t) + \dots + C_{n-1} \frac{d}{dt} r_{zi}(t) + C_n r_{zi}(t) = 0$

故  $r_{zi}(t)$  是一种齐次解形式，即  $r_{zi}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t}$  ← 注意：和自由响应的系数不同

其中， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为互不相等的  $n$  个系统特征根。

③ 初始条件： $r_{zi}^{(k)}(0_+) = r_{zi}^{(k)}(0_-) = r^{(k)}(0_-)$  ← 非时变系统

即齐次解  $r_{zi}(t)$  的待定系数用  $r^{(k)}(0_-)$  确定即可！

## 第二章

### 3. 零输入/零状态响应

#### 2. 零状态响应的定义与待定系数确定

① 定义：起始状态为 0，只由激励产生的响应  $r_{zs}(t) = H[e(t)]$

② 满足方程： $C_0 \frac{d^n}{dt^n} r_{zs}(t) + \dots + C_{n-1} \frac{d}{dt} r_{zs}(t) + C_n r_{zs}(t) = E_0 \frac{d^m}{dt^m} e(t) + \dots + E_m e(t)$

故  $r_{zs}(t)$  含特解  $r_p(t)$ ，即  $r_{zs}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{\alpha_k t} + r_p(t)$

③ 初始条件：由于  $r_{zs}(t)$  在 0- 时刻的  $k (k=0, \dots, n-1)$  阶导数均为 0，即  $r_{zs}^{(k)}(0_-) = 0$

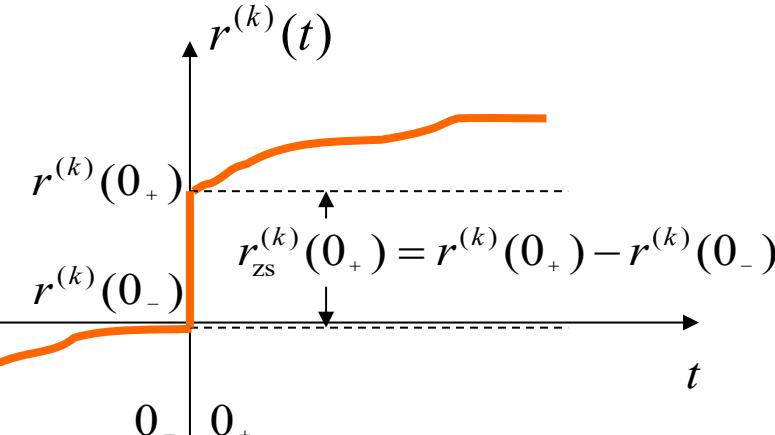
## 第二章

### 3. 零输入/零状态响应

$$r^{(k)}(0_-) = r_{zi}^{(k)}(0_-) + r_{zs}^{(k)}(0_-) = r_{zi}^{(k)}(0_-) \leftarrow \text{激励不存在}$$

$$r^{(k)}(0_+) = r_{zi}^{(k)}(0_+) + r_{zs}^{(k)}(0_+) = r_{zi}^{(k)}(0_-) + r_{zs}^{(k)}(0_+) \leftarrow \text{非时变系统, 参数固定}$$

$$r_{zs}^{(k)}(0_+) = r^{(k)}(0_+) - r^{(k)}(0_-) = \text{跳变值} \quad \leftarrow \text{跳变值是由激励信号产生的} \quad \text{故 } A_{zsk} \text{ 由跳变值确定。}$$



$r^{(k)}(0_+)$ : 确定全响应的系数

$r^{(k)}(0_-)$ : 确定零输入响应的系数

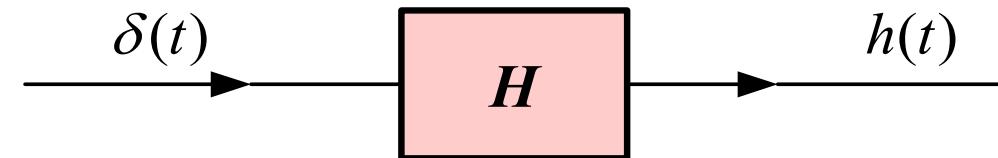
$r_{zs}^{(k)}(0_+)$ : 确定零状态响应的系数

$$\begin{aligned} r(t) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zik} e^{a_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{a_k t}}_{\text{零状态响应}} + r_p(t) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (A_{zik} + A_{zsk}) e^{a_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{r_p(t)}_{\text{强迫响应}} \end{aligned}$$

## 第二章

### 4. 冲激/阶跃响应

系统在单位冲激信号  $\delta(t)$  作用下产生的零状态响应，称为单位冲激响应，简称冲激响应，一般用  $h(t)$  表示。



说明：在时域，对于不同系统，零状态下加入同样的激励  $\delta(t)$ ，看响应  $h(t)$ ， $h(t)$  不同，说明系统特性不同，冲激响应衡量系统自身的特性。

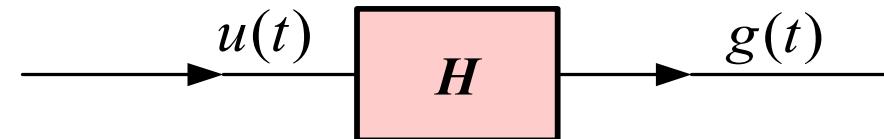
由于  $\delta(t)$  及其导数在  $t > 0+$  时都为零，因而方程式右端的自由项恒等于零，这样原系统的冲激响应  $h(t)$  形式与齐次解的形式相同。

- ① 与特征根有关
- ② 与响应和激励的阶次， $n$  和  $m$  的相对大小有关

## 第二章

### 4. 冲激/阶跃响应

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应，称为**单位阶跃响应**，简称**阶跃响应**。



系统方程的右端包含阶跃函数，所以阶跃响应除了包含齐次解外，还有特解项。也可以根据**线性时不变**系统特性，利用**冲激响应与阶跃响应关系**，求阶跃响应。

线性时不变系统满足**微、积分**特性

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

## 第二章

### 4. 卷积

例    : 已知  $f_1(t) = u(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

### 图解法、数值方法

### 卷积积分的代数性质

$$(1) \text{ 交换律 } f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2) \text{ 分配律 } f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

$$(3) \text{ 结合律 } [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

### 卷积积分的微积分性质

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda * f_2(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda$$

## 第二章

### 4. 卷积

#### 2.7.3 $f(t)$ 与冲激函数或阶跃函数的卷积

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

推广:  $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

$$f(t) * \delta'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta'(t - \tau) d\tau = -[-f'(t)] = f'(t)$$

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \quad \Rightarrow u(t) * u(t) = tu(t)$$

利用冲激响应和卷积求  
解零状态响应和全响应?

#### 2.7.4 卷积积分的时移性质

若  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 则

$$f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_2) * f_2(t - t_1) = f_1(t) * f_2(t - t_1 - t_2) = f(t - t_1 - t_2)$$

## 第三章

### 1. 周期信号的傅里叶级数分析

#### 周期信号的频谱

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1)$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (2)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3)$$

#### 典型周期信号的频谱

## 第三章

### 2. 非周期信号的傅里叶变换

傅里叶变换式 “-”

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶逆变换式 “+”

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

## 第三章

## 2. 非周期信号的傅里叶变换

## 傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

频谱 (离散)

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

在一个周期内满足狄里赫利条件

## 傅里叶变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

← 量纲不同 → 频谱密度 (连续)

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

在  $(-\infty, +\infty)$  内满足狄里赫利条件

## 第三章

性质	时域x(t)	频域X(ω)
定义	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &=  X(\omega)  e^{j\phi(\omega)} \\ &= \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) \end{aligned}$
线性	$\begin{aligned} x_1(t) &\xleftarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \\ x_2(t) &\xleftarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega) \\ a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) & \end{aligned}$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
奇偶性	$\begin{aligned} x^*(t) \\ \text{若 } x(t) \text{ 为实函数, 即 } x(t) = x^*(t) \end{aligned}$	$\begin{aligned} X^*(-\omega) \\ X(\omega) = X^*(-\omega) \text{ 或 } X^*(\omega) = X(-\omega) \end{aligned}$
对偶性	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
尺度变换	$x(at) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
翻转	$x(-t)$	$X(-\omega)$
时移	$\begin{aligned} x(t \pm t_0) \\ x(at - b) \quad a \neq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} e^{\pm j\omega t_0} X(\omega) \\ \frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{b}{a}\omega} \end{aligned}$
频移	$x(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$X(\omega \mp \omega_0)$
时域微分	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
帕斯瓦尔公式	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(\omega) ^2 d\omega$
时域卷积	$x_1(t)^* x_2(t)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
频域卷积	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega)^* X_2(\omega)$
频域微分	$-jtx(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$

## 第三章

信号x(t)	傅里叶变换X(ω)
δ(t)	1
δ(t - t₀)	e⁻¹⁰t₀
1	2πδ(ω)
u(t)	πδ(ω) + ¹/(jω)
sgn(t)	²/(jω)
e⁻¹⁰t u(t) a > 0, a ∈ R	¹/(jω+a)
g(t) = {1  t  < ²/₂ 0  t  > ²/₂	τSa(⁹⁰t/₂)
Sa(ωc t)	{1  ω  < ωc 0  ω  > ωc
e⁻¹⁰ t  a > 0	²a/ω²+a²
e⁻¹⁰(at)²	√π/a e⁻¹⁰(ω/₂a)²
e¹⁰⁰ t	2πδ(ω - ω₀)
cos ω₀ t	π[δ(ω + ω₀) + δ(ω - ω₀)]
sin ω₀ t	jπ[δ(ω + ω₀) - δ(ω - ω₀)]
te⁻¹⁰t u(t) a > 0, a ∈ R	¹/(jω+a)²
t⁽⁻¹⁾⁽⁻¹⁾ e⁻¹⁰t u(t) a > 0, a ∈ R	¹/(jω+a)³
e⁻¹⁰t cos ω₀ t · u(t) a > 0	¹/(jω+a)²+ω₀²
e⁻¹⁰t sin ω₀ t · u(t) a > 0	ω₀/(jω+a)²+ω₀²
δᵣ(t) = ∑ₙ₌⁻∞⁽⁺∞ δ(t - nT₀)	ω₀ ∑ₙ₌⁻∞⁽⁺∞ δ(ω - nω₀) ω = ²π/T₀
x(t) = ∑ₙ₌⁻∞⁽⁺∞ X(nω₀)e¹⁰⁰ nω₀ t	2π ∑ₙ₌⁻∞⁽⁺∞ X(nω₀)δ(ω - nω₀)

1. 已知周期信号波形，如何求三角函数/指数函数的傅里叶级数？傅里叶变换？幅度谱/相位谱？
2. 已知信号形式，求奈奎斯特采样率，最大采样间隔。画出采样前后的频谱图。
3. 根据电路列微分方程，然后用时域法求零输入，零状态，得到全响应。区分自由响应和强迫响应。
4. 根据电路列s域方程，求系统函数，基于系统函数画出零极点分布图，判断稳定性。基于系统函数求零状态响应，分析幅频特性。
5. 傅里叶变换与逆变换，拉氏变换与逆变换。
6. 分别线性时不变系统，画出信号反褶、时移、尺度后的波形