1.7 线性时不变系统

1.7.1 线性特性

线性包含叠加性与均匀（齐次）性

1. 叠加性

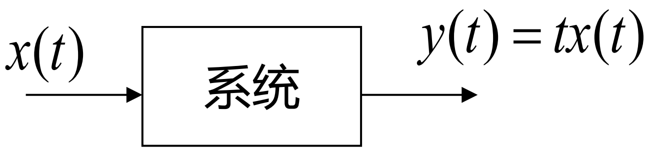
若 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ 称系统满足叠加性。

2. 齐次性

若 $x(t) = ax_i(t)$ $y(t) = ay_i(t)$ 称系统满足齐次性。

同时满足叠加性与齐次性的系统称为**线性（Linear）系统。**

例1-20：设某系统的输入输出之间的关系为：$y(t)=tx(t)$。判断该系统是否为线性系统。



解： $y_1(t)=tx_1(t)$ $y_2(t)=tx_2(t)$ $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

$$y(t)=t\left[x_1(t)+x_2(t)\right]=tx_1(t)+tx_2(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

$x(t)=ax_1(t)$ $y(t)=tx(t)=atx_1(t)=ay_1(t)$ 是线性系统

综合叠加性与齐次性，线性可表示为：

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k x_k(t) \qquad y(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k y_k(t)$$

单选题 1分

设置

设某系统的输入输出之间为：$y(t)=ax(t)+b$。判断该系统是否为线性系统。

A 是

B 否

提交

例1-21：设某系统的输入输出之间为：$y(t)=ax(t)+b$。判断该系统是否为线性系统。

解： $y_1(t)=ax_1(t)+b \qquad y_2(t)=ax_2(t)+b$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

$$y(t)=a[x_1(t)+x_2(t)]+b \neq y_1(t)+y_2(t)$$

系统不满足叠加性。

而且 $x(t)=cx_1(t) \qquad y(t)=ax(t)+b=acx_1(t)+b \neq cy_1(t)$

系统也不满足齐次性。

所以系统不是线性系统。

由线性，可以得到系统的一个结果是：

在全部时间上系统输入为零，必然输出为零，即零输入产生零输出。

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k x_k(t)=\sum_{k=1}^{N}0\cdot a_k=0 \qquad y(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k y_k(t)=\sum_{k=1}^{N}0\cdot a_k=0$$

而 $y(t)=ax(t)+b=a\cdot 0+b=b$

即在零输入时，系统输出不为零。这部分不为零的输出，称为系统的零输入响应。

1.7.2 时不变特性

系统本身参数不随时间改变。

激励延迟，则响应也同样延迟。

例1-22：判断满足下列输入输出之间的关系的系统是否为时变系统:

(1) $y(t)=tx(t)$ (2) $y(t)=ax(t)+b$ 。

解： (1) $y_1(t)=tx(t-t_0)\neq y(t-t_0)$

因为 $y(t-t_0)=(t-t_0)x(t-t_0)$ 所以系统是时变的。

(2) $y_1(t)=ax(t-t_0)+b=y(t-t_0)$ 所以系统是时不变的。

单选题 1分

设置

例1-23： 设系统的输入输出之间的关系为：$y(t)=x(2t)$ 。判断其是否为时不变系统 。

A 时不变系统

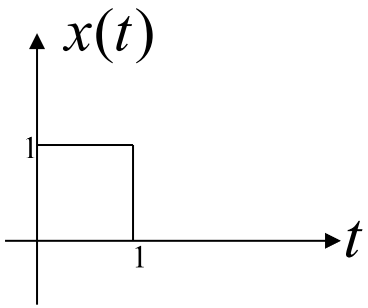
B 时变系统

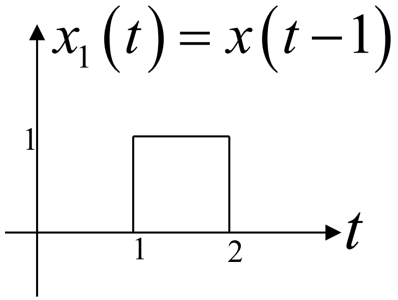
提交

判断一个系统是否满足某种特性，只要能找到一个例子不满足，就可证明其不满足此特性。

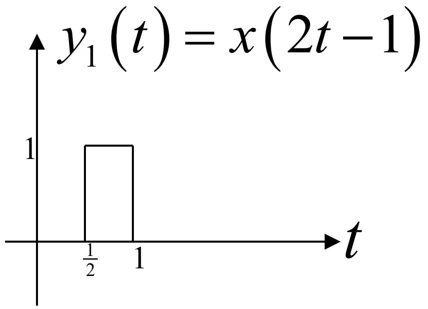
例1-23： 设系统的输入输出之间的关系为：$y(t)=x(2t)$。判断其是否为时不变系统。

解：假设输入与输出的波形如下图所示：





右移1个单位



右移0.5个单位

所以系统是时变系统。

例1-24：判断 $y(t)=x(-t)$ 是不是时不变系统。

解： 不是，是时变的

$$y(t)=x(-t)$$

$$x_1(t)=x(t-t_0)$$

$$y_1(t)=x(-t-t_0)$$ 系统只对它输入的激励信号做了一次反褶

$$y(t-t_0)=x(-t+t_0)\neq y_1(t)$$

所以是时变系统

时不变的直观判断方法：

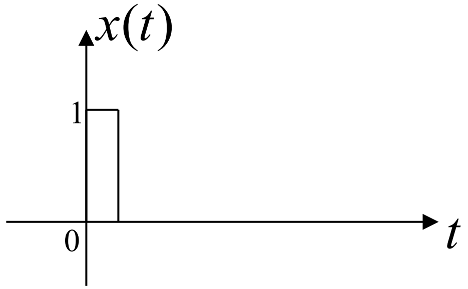
若 $x(\cdot)$ 前出现时变的系数— $tx(t)$、或有反褶— $x(-t)$、或有展缩变换— $x(2t)$， 则该系统均为时变系统。

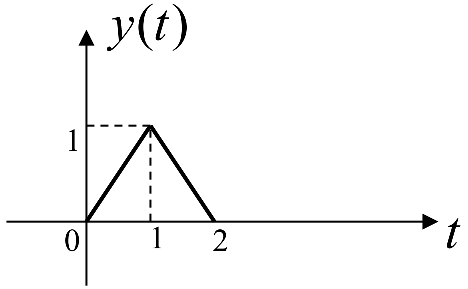
系统同时满足线性与时不变性，称为线性时不变系统，

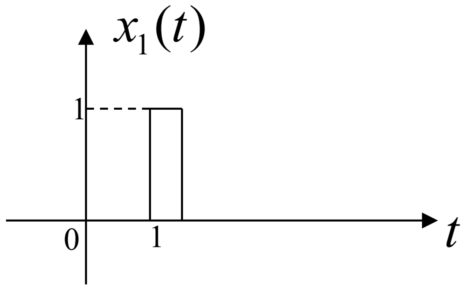
记为 LTI (linear-time-invariant) 系统，可表示为：

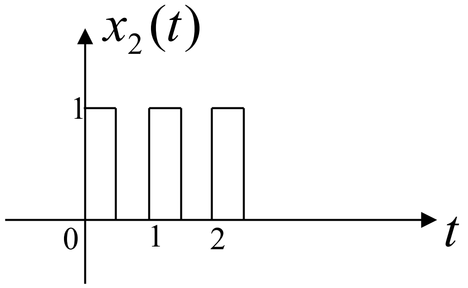
$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k x_k(t-t_k) \qquad y(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k y_k(t-t_k)$$

例1-25：设LTI系统的输入 $x(t)$与输出 $y(t)$之间的关系由下图描述，作出当输入分别为$x_1(t)$与 $x_2(t)$ 时，输出 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 的波形图。

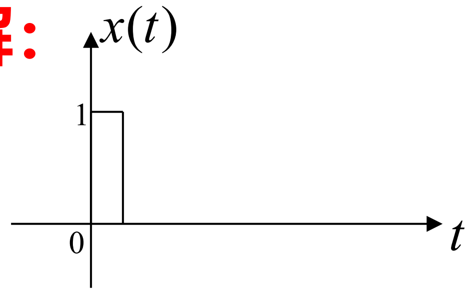


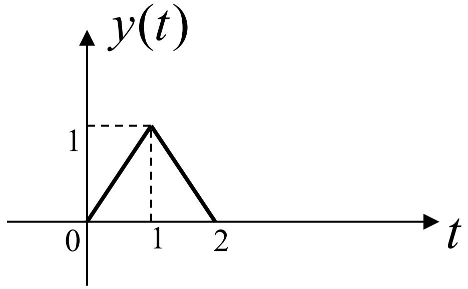


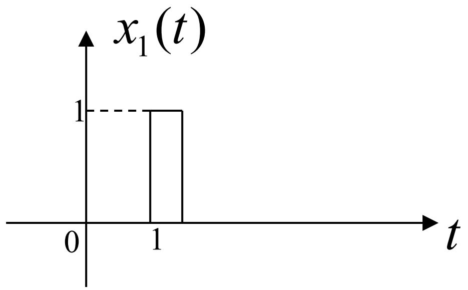




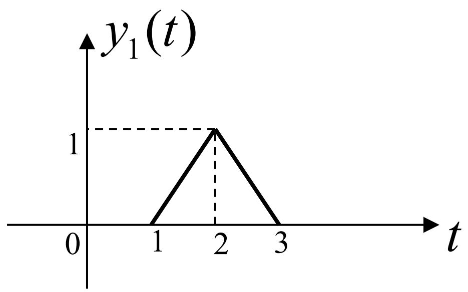
解：



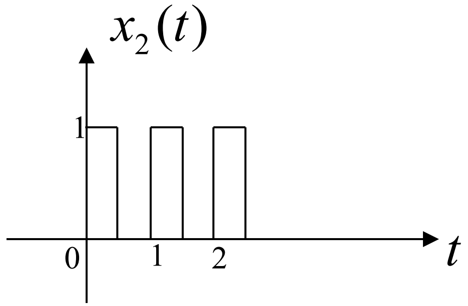


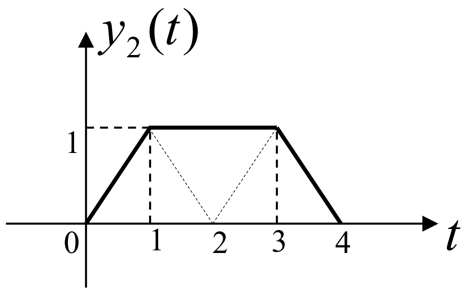


$$x_1(t) = x(t-1)$$



$$y_1(t) = y(t-1)$$





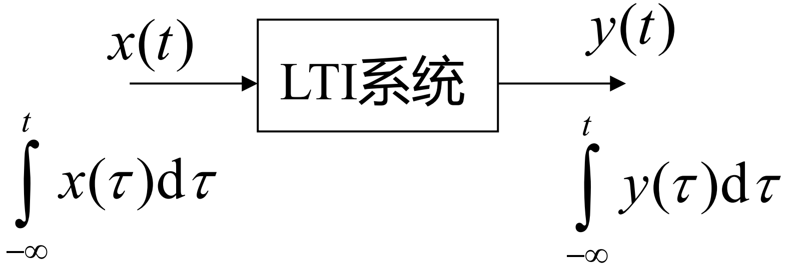
$$x_2(t) = x(t) + x(t-1) + x(t-2)$$

$$y_2(t) = y(t) + y(t-1) + y(t-2)$$

1.7.3 连续时间系统的微积分特性

1. 微分性

2. 积分性



1.7.4 因果性

因果系统是指系统在 $t=t_0$ 时刻的响应只与 $t=t_0$ 和 $t<t_0$ 时刻的输入有关。否则，为非因果系统。

例: 因果系统: $r(t)=e(t-1)$ (延时系统)

非因果系统: $r(t)=e(t+1)$ (超前系统)

（ $t=0$ 时刻响应 $r(0)=e(1)$ ，它由 $t=1$ 时刻的激励决定，故为非因果系统）。

非因果系统: $r(t)=e(2t)$ (时域压缩系统)

非因果系统常见于语音信号处理、气象学、股票市场分析、人口统计学等领域 。

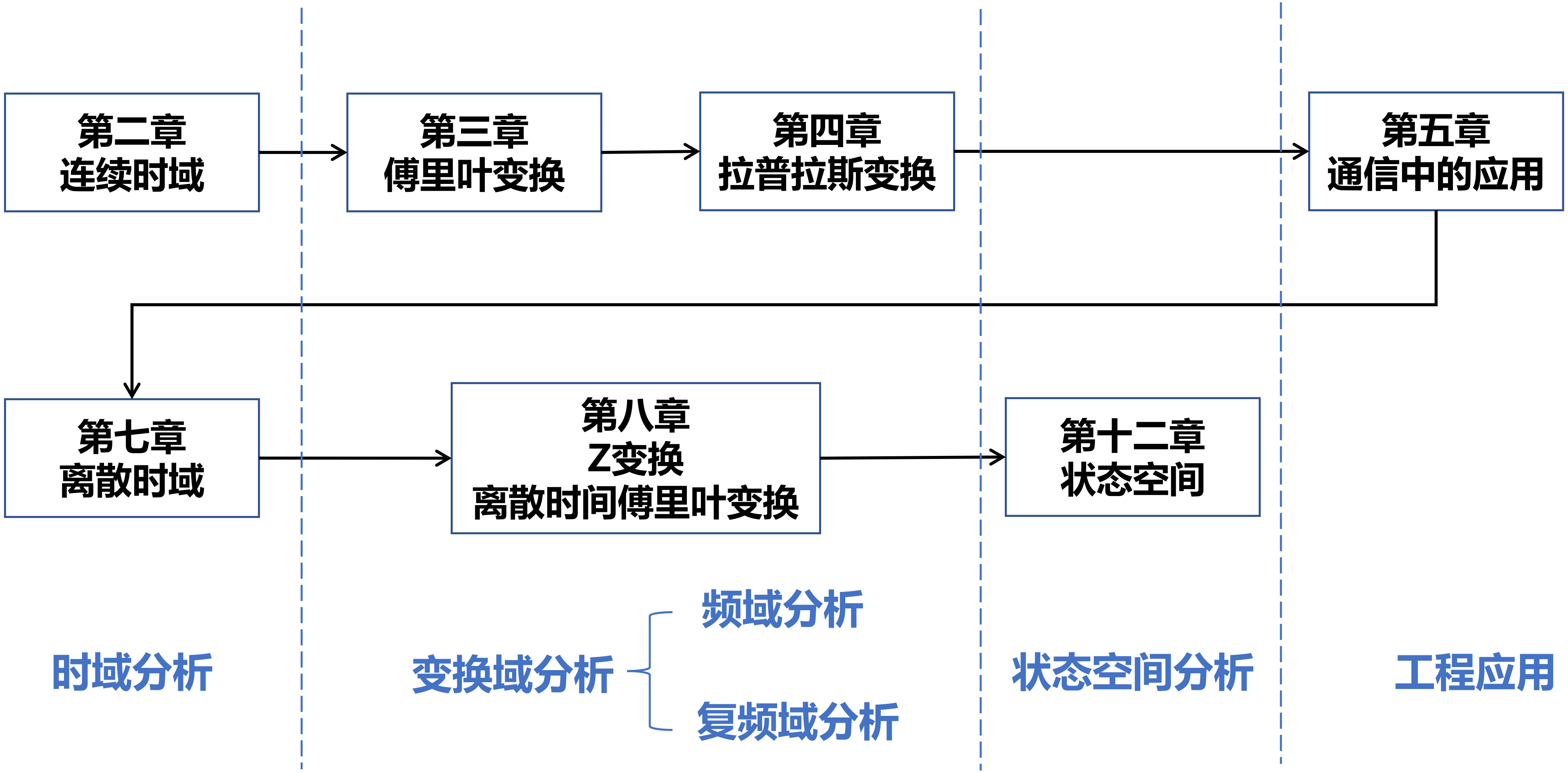
1.8 LTI 系统分析方法

系统分析可分两大类：时域法和变换域法。

卷积积分的基本出发点是：若系统的激励信号为 $e(t)$，系统函数为 $h(t)$，则系统的响应 $r(t)$ 为 $e(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积，即 $r(t)=h(t)*e(t)$

卷积定理：时域卷积、频域乘积　$R(\omega)=H(\omega)E(\omega)$

卷积定理是连接时域法和变换域法的纽带


第二章
连续时域
第三章
傅里叶变换
第四章
拉普拉斯变换
第五章
通信中的应用
第七章
离散时域
第八章
Z变换
离散时间傅里叶变换
第十二章
状态空间
时域分析
变换域分析
频域分析
复频域分析
状态空间分析
工程应用

第二章 连续时间系统的时域分析

本次课内容

2.1 引言

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

2.3 用时域经典法求解微分方程

2.4 起始点的跳变-从0-到0+状态的转换

本次课目标

1. 熟悉建立系统微分方程的方法（如何消去中间变量）；
2. 熟练掌握经典法求系统的自由响应和强迫响应；
3. 熟练利用冲激函数匹配法确定起始点状态的跳变量。

2.1 引言

为什么要进行系统的时域分析？

信号与系统分析最直接的方法就是在时域内进行，其突出特点是直观、物理概念明确，但计算过程较复杂。

信号 → 分解 → 系统 → 叠加 → 响应

对于已知的信号　　确定的系统　　如何得到系统响应?

1. 系统的数学模型如何建立？　微分方程
2. 系统的响应如何分解？　自由响应+强迫响应，零输入响应+零状态响应
3. 不同的响应如何求解？　经典解法，卷积解法（近代解法）
4. 信号与系统如何应用？　时域模拟框图 → 计算机求解

第二章 连续时间系统的时域分析

2.2 微分方程的建立与求解

2.2.1 微分方程的建立

目的：将系统的物理特性进行数学模型描述。

连续系统的数学模型：常系数 n 阶线性微分方程

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 r(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 e(t)$$

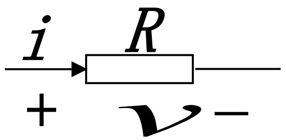
一旦系统数学模型建立，系统分析就转化为求解微分方程的问题 。

对于电路系统来说：有两方面约束特性，构成了其数学模型

元件约束特性 → 网络拓扑约束特性 → 微分方程

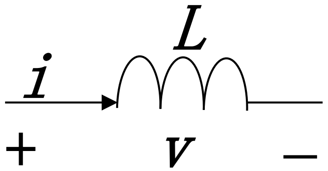
1) 元件约束特性

i) 电阻 R:



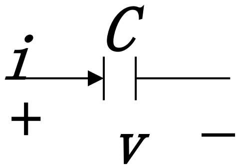
$$v = Ri$$

ii) 电感 L:



$$i = \frac{1}{L}\int v\mathrm{d}t \qquad v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

iii) 电容 C:



$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad v = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

2) 网络拓扑约束特性：各电路电流、电压的约束关系（即电路定律 KCL、KVL）

基尔霍夫电流定律（KCL）：在任一瞬时，流向某一结点的电流之和恒等于该结点流出电流之和，即：

$$\sum I_{入} = \sum I_{出}$$

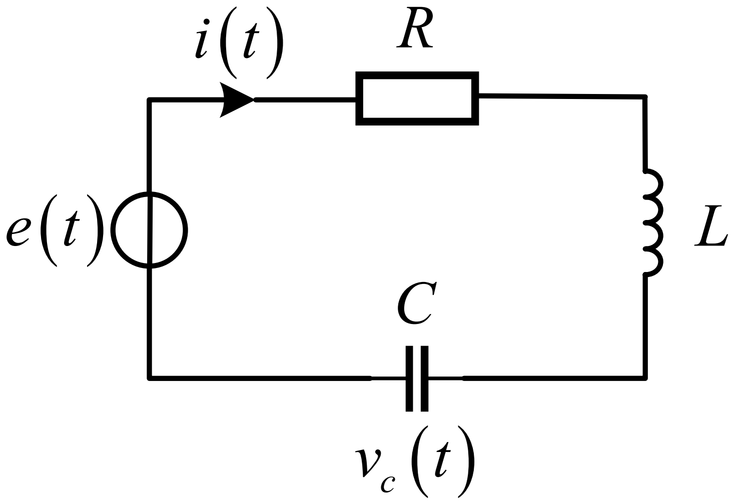
基尔霍夫电压定律（KVL）：在任一瞬间，沿电路中的任一回路绕行一周，在该回路上电动势之和恒等于各元件上的电压降之和，即：

$$\sum \mathrm{U}_{电压升} = \sum \mathrm{U}_{电压降}$$

单选题 1分

设置

如图所示的 LRC 电路，激励为 $e(t)$，响应为 $v_c(t)$，则建立的微分方程为：



A $RC\dfrac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}+Lv_c(t)=\dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$

B $\dfrac{LR}{C}\dfrac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}+v_c(t)=e(t)$

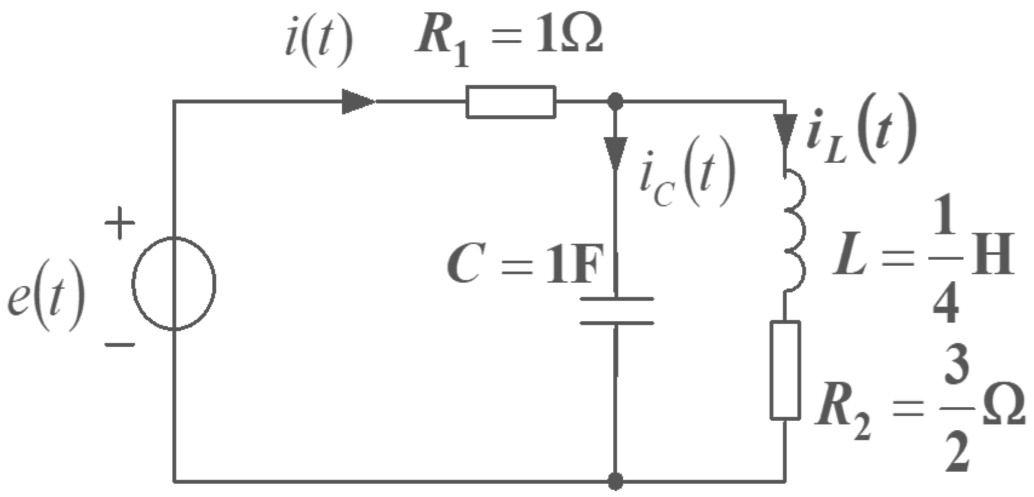
C $\dfrac{L}{C}\dfrac{\mathrm{d}^2v_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{R}{C}\dfrac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}+v_c(t)=e(t)$

D $LC\dfrac{\mathrm{d}^2v_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}+v_c(t)=e(t)$

提交

2.2.1 微分方程的建立

给定如图所示电路，建立电流 $i(t)$ 的微分方程。



解： 根据电路形式，列回路电压方程

$$R_1 i(t) + v_C(t) = e(t) \qquad (1)$$

$$v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) + i_L(t) R_2 \qquad (2)$$

列结点电流方程

$$i(t) = C\frac{d}{dt} v_C(t) + i_L(t) \qquad (3)$$

难点：如何将三个联立的微分方程变换为一个表征输入为$e(t)$、输出为$i(t)$的微分方程？

2.2.1 微分方程的建立

如何消去中间变量 $v_C(t)$ 和 $i_L(t)$?

$$R_1 i(t) + v_C(t) = e(t) \quad (1)$$

最简单，包含$v_C(t)$，不包含 $v_C(t)$ 的导数。

$$v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) + i_L(t)R_2 \quad (2)$$

包含$i_L(t)$ 的导数，与 $v_C(t)$ 的二阶导数有关，最复杂

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) + i_L(t) \quad (3)$$

不包含 $i_L(t)$ 的导数，包含 $v_C(t)$ 的一阶导数。

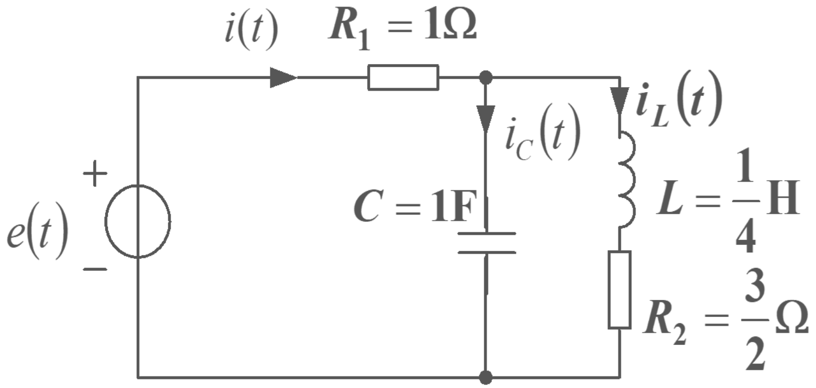
由（1）可得 $$v_C(t) = e(t) - R_1 i(t) \quad (4)$$

将（4）代入（3），可得 $$i_L(t) = i(t) + CR_1\frac{d}{dt}i(t) - C\frac{d}{dt}e(t) \quad (5)$$

将（4）和（5）代入（2），可得（6）（见下页）。

2.2.1 微分方程的建立

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+(\frac{1}{R_1C}+\frac{R_2}{L})\frac{d}{dt}i(t)+(\frac{1}{LC}+\frac{R_2}{R_1LC})i(t)$$
$$=\frac{1}{R_1}\frac{d^2}{dt^2}e(t)+\frac{R_2}{R_1L}\frac{d}{dt}e(t)+\frac{1}{R_1LC}e(t) \quad (6)$$



再把电路参数代入（6），得

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

2.2.2 经典法求解微分方程

对于复杂系统，激励信号$x(t)$与响应函数$y(t)$之间的关系，可用下列形式的**常系数一元 *n* 阶线性微分方程**来描述

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\dots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

此方程的完全解由齐次解（自由响应或固有响应）和特解（强迫响应）两部分组成。

齐次解应满足

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=0$$

2.2.2 经典法求解微分方程

齐次解特征方程为

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

特征根$\alpha_1 \ldots \alpha_n$是系统的“固有频率”。

1）特征根无重根，则微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}$$

2）特征根有重根，假设α_1是特征方程的K重根，那么，在齐次解中对应于α_1的部分将有K项

$$(A_1 t^{K-1} + A_2 t^{K-2} + \ldots + A_{K-1}t + A_K)e^{\alpha_1 t}$$

3）若α_1、α_2为共轭复根，即$\alpha_{1,2} = \alpha \pm j\beta$，那么，在齐次解中对应于$\alpha_1$、$\alpha_2$的部分为

$$e^{\alpha t}(A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t)$$

注意：这里只得到齐次解的形式，系数还未知！

2.2.2 经典法求解微分方程

特解的函数形式与激励的函数形式有关。**将激励信号代入微分方程的右端得到的函数式称为“自由项”**。通常观察自由项，**查表选特解函数式，将其代入方程后求得特解函数式中的待定系数**，即可求出特解。

自由项	特解
E (常数)	B (常数)
t^p	$B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \ldots + B_1 t + B_0$
$e^{\alpha t}$	$\begin{cases} Be^{\alpha t} & (\alpha\text{不是特征根}) \\ Bte^{\alpha t} & (\alpha\text{是单特征根}) \\ Bt^2 e^{\alpha t} & (\alpha\text{是二重特征根}) \end{cases}$
$\begin{cases} \cos\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t \end{cases}$	$B_1\cos\omega_0 t + B_2\sin\omega_0 t$

时域经典法分析电路系统的流程

优点： 物理意义清楚；
缺点： 过程复杂。

1. 根据基尔霍夫定律列写电路的微分方程

2. 将联立的微分方程化为一元微分方程

3. 求齐次解（系数待定）

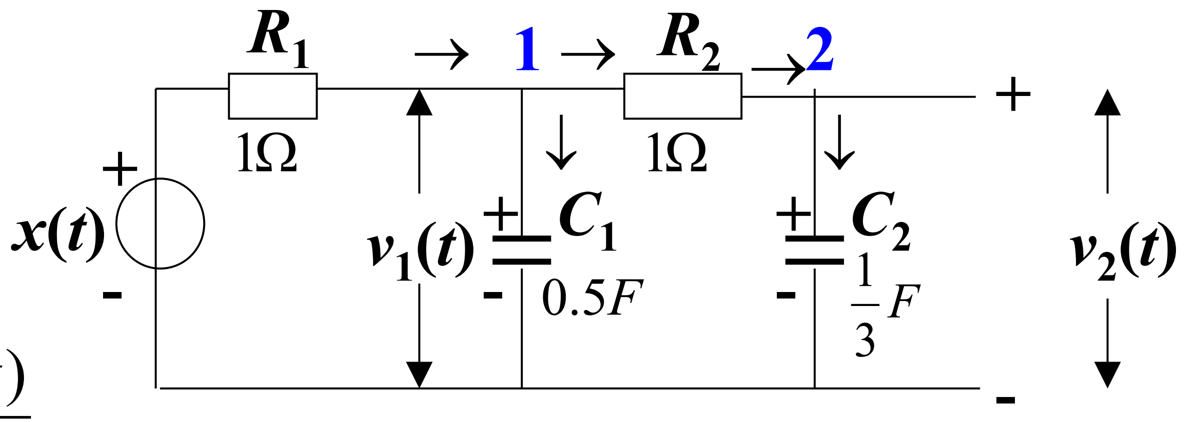
4. 查表求特解

5. 完全解 = 齐次解 + 特解, 将完全解代入微分方程求齐次解的系数

初始状态

6. 已定系数的完全解—系统的全响应

例2-2： 如下图所示电路，已知激励信号$x(t)=\cos(2t)u(t)$, 两个电容上的初始电压均为零，求响应信号$v_2(t)$的表达式。



解:

（a）列写微分方程式为

$$\begin{cases} \text{结点1:} & \dfrac{x(t)-v_1(t)}{R_1} = C_1\dfrac{dv_1(t)}{dt} + \dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2} & (1) \\ \text{结点2:} & \dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2} = C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt} & (2) \end{cases}$$

由（2）可得 $v_1(t)=R_2C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt}+v_2(t)$ (3)

将（3）代入（1）可得 $\dfrac{d^2v_2(t)}{dt^2}+7\dfrac{dv_2(t)}{dt}+6v_2(t)=6\cos 2t\, u(t)$

（b）为求**齐次解**，写出特征方程 $\alpha^2+7\alpha+6=0$

特征根 $\alpha_1=-1, \alpha_2=-6$

齐次解 $A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}$ （A_1、A_2待定）

（c）查表，得**特解**为 $B_1\sin 2t+B_2\cos 2t$

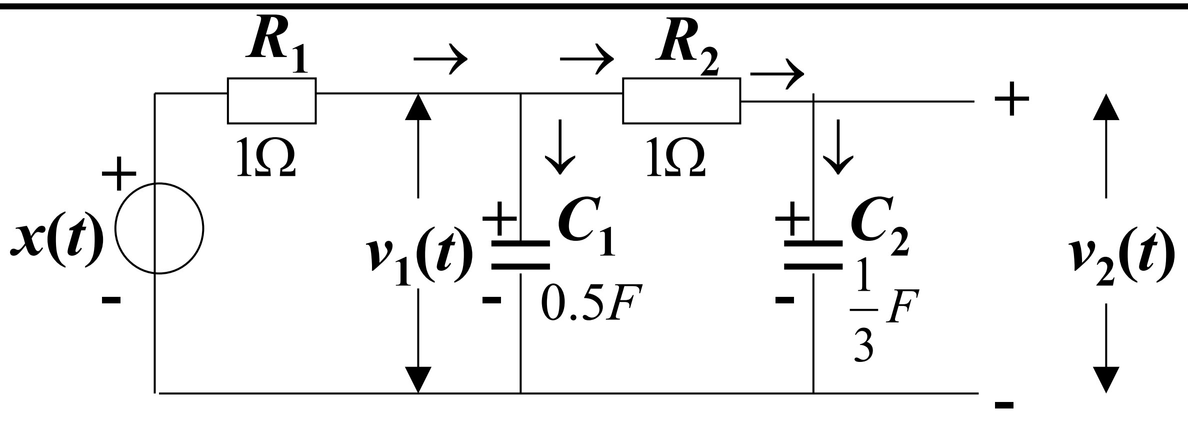
代入原方程左边得 $(2B_1-14B_2)\sin 2t+(14B_1+2B_2)\cos 2t=6\cos 2t$

比较上述方程两边系数，得 $\begin{cases} 2B_1-14B_2=0 \\ 14B_1+2B_2=6 \end{cases} \longrightarrow B_1=\dfrac{21}{50}, B_2=\dfrac{3}{50}$

（d）**完全解**为（A_1、A_2待定）

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t \qquad (4)$$

(e) 由初始状态确定系数A: 由于C_2初始端电压为0，在t=0加入激励时C_2电压不突变，即$v_2(0)$=0; 又因为电容C_1初始端电压为0，在t=0加入激励时C_1电压不突变，R_2、C_2两端的电压也不突变，于是通过R_2、C_2的初始电流也为0，即 $\frac{dv_2(0)}{dt}=0$ 。



$x(t)=\cos(2t)u(t)$

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-6A_2e^{-6t}+\frac{21}{25}\cos 2t-\frac{3}{25}\sin 2t$$

由$v_2(0)$=0得到 $A_1+A_2=-\frac{3}{50}$

由 $\frac{dv_2(0)}{dt}=0$ 得到 $A_1+6A_2=\frac{21}{25}$

解得 $A_1=-\frac{6}{25},A_2=\frac{9}{50}$

$$v_2(t)=-\frac{6}{25}e^{-t}+\frac{9}{50}e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin(2t)+\frac{3}{50}\cos(2t)\quad (t\ge 0)$$

完全响应的分解：

$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}\mathrm{e}^{-t} + \frac{9}{50}\mathrm{e}^{-6t}}_{\text{自由响应（齐次解）}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{强迫响应（特解）}}$$

- 当输入信号为阶跃信号或有始周期信号时，稳定系统的全响应可分为暂态响应和稳态响应。暂态响应是指激励接入后，全响应中暂时出现的响应，随时间增长逐渐消失，稳态响应通常由阶跃函数和周期函数组成。

$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}\mathrm{e}^{-t} + \frac{9}{50}\mathrm{e}^{-6t}}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{稳态响应}}$$

例2-3：某系统的微分方程为 $r''(t)+5r'(t)+6r(t)=e(t)$ ，求：

（1）当 $e(t)=2\mathrm{e}^{-t}u(t)$时， $r(0_+)=2$ ， $r'(0_+)=-1$ 时的全响应；

（2）当 $e(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$时， $r(0_+)=1$ ， $r'(0_+)=0$ 时的全响应。

解：（1）求特征方程 $\alpha^2+5\alpha+6=0$ 得： $\alpha_1=-2$， $\alpha_2=-3$

设定齐次解： $r_\mathrm{h}(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}$

设定特解： $r_\mathrm{p}(t)=B\mathrm{e}^{-t}$ 代入方程左边 $B\mathrm{e}^{-t}+5\left(-B\mathrm{e}^{-t}\right)+6B\mathrm{e}^{-t}=2\mathrm{e}^{-t}$ 得到 $B=1$

全响应： $r(t)=r_\mathrm{h}(t)+r_\mathrm{p}(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-t}$

代入初始条件： $r(0)=A_1+A_2+1=2$ $r'(0)=-2A_1-3A_2-1=-1$

解得： $A_1=3$， $A_2=-2$ 所以 $r(t)=\left(3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-t}\right)u(t)$

例2-3：某系统的微分方程为 $r''(t)+5r'(t)+6r(t)=e(t)$ ，求：

（1）当 $e(t)=2\mathrm{e}^{-t}u(t)$时， $r(0_+)=2$， $r'(0_+)=-1$ 时的全响应；

（2）当 $e(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$时， $r(0_+)=1$， $r'(0_+)=0$ 时的全响应。

（2）齐次解同上 $r_\mathrm{h}(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}$

设定特解：$r_\mathrm{p}(t)=Bt\mathrm{e}^{-2t}$ 代入方程左边 $\left(Bt\mathrm{e}^{-2t}\right)''+5\left(Bt\mathrm{e}^{-2t}\right)'+6Bt\mathrm{e}^{-2t}=\mathrm{e}^{-2t}$ 解得：$B=1$

全响应：$r(t)=r_\mathrm{h}(t)+r_\mathrm{p}(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}+t\mathrm{e}^{-2t}$

代入初始条件：$r(0)=A_1+A_2=1$ $r'(0)=-2A_1-3A_2+1=0$

解得：$A_1=2$, $A_2=-1$ 所以 $r(t)=\left(2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t}+t\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$

总结：经典法求解微分方程

基本原理——线性叠加：微分方程的完全解=齐次解+特解 $r(t)=r_{\mathrm{h}}(t)+r_{\mathrm{p}}(t)=A_1\mathrm{e}^{\alpha_1 t}+A_2\mathrm{e}^{\alpha_2 t}+\cdots+A_n\mathrm{e}^{\alpha_n t}+r_{\mathrm{p}}(t)$

一般步骤：

1）根据电路图列微分方程，建立输入 $e(t)$ 和输出 $r(t)$ 的数学关系；

2）求齐次解 $r_{\mathrm{h}}(t)$ 的形式：列特征方程，求特征根，获得齐次解的形式，系数待定；

3）求特解 $r_{\mathrm{p}}(t)$：与激励信号 $e(t)$ 的形式有关，查表，得到特解形式，代入原方程平衡系数，求得特解；

4）求完全解 $r(t)$：代入初始条件 0+，获得齐次解系数，得到最终的完全解。

结论：齐次解(自由响应)的函数特性仅依赖于系统本身特性，与激励信号的函数形式无关，但确定系数有关；而特解(强迫响应)的形式由激励函数决定。

第二章 连续时间系统的时域分析

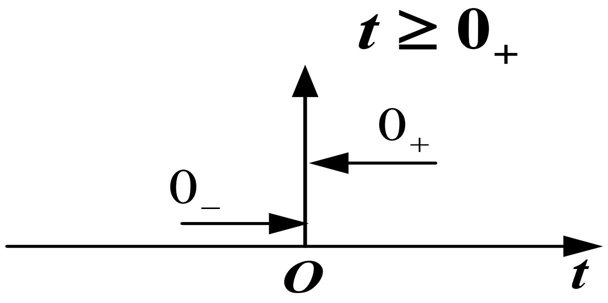
2.3 起始点的跳变——从 0- 到 0+状态的转换

在系统分析问题中，初始条件要根据激励接入瞬时**系统的状态**决定。

系统在t_0时的状态是一组必须知道的**最少数据量**，根据这组数据、系统的数学模型以及t_0时接入的激励信号，就能够完全确定在t_0以后任意时刻的响应。***n*阶微分方程的状态是响应的0—(*n*-1)阶导数。** （详见第十二章）

0_-状态，**起始状态**（激励接入之前的瞬间）

$$r^{(k)}(0_-)=\left[r(0_-),\frac{\mathrm{d}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$



0_+状态，**初始条件**，导出的起始状态（激励接入之后的瞬间）

$$r^{(k)}(0_+)=\left[r(0_+),\frac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$

用时域经典法求得的微分方程的解在$t\geq 0_+$的时间范围内，因而不能以0_-状态作为初始条件，而应以0_+状态作为初始条件。

对于具体的电网络，系统的 $0\_$ 状态就是系统中储能元件的储能情况。

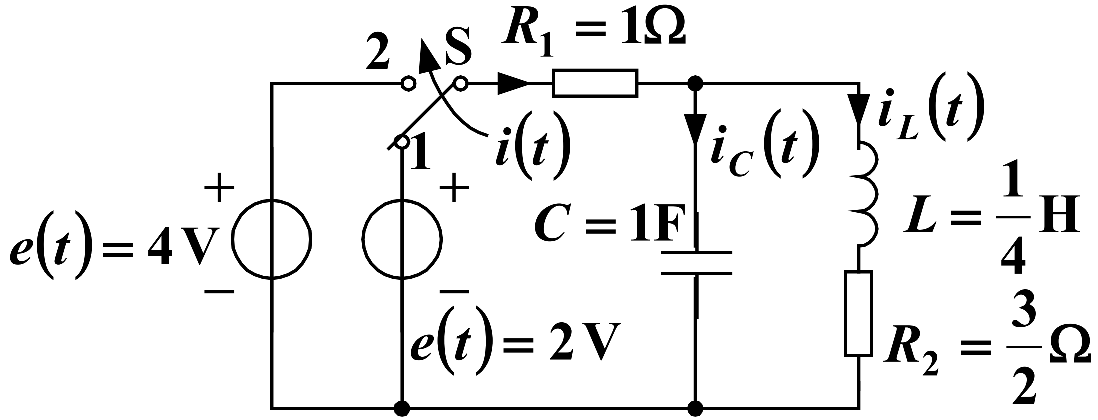
一般情况下，换路期间，电容两端的电压 和 流过电感中的电流 不会发生突变。

这就是在电路分析中的换路定则： $v_C(0_-) = v_C(0_+)$， $i_L(0_-) = i_L(0_+)$

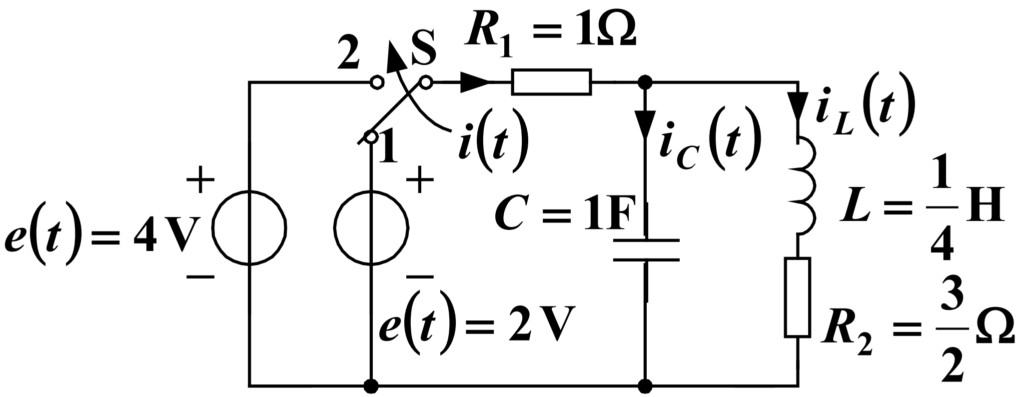
仅当有冲激电流强迫作用于电容 或 有冲激电压强迫作用于电感，$0\_$ 到 0_+ 状态才会发生跳变。

重点和难点：如何确定从 $0\_$ 到 0_+ 状态的跳变量？

例2-4： 给定如图所示电路， $t < 0$ 开关 S 处于 1 的位置而且已经达到稳态。当 $t = 0$ 时由 1 转向 2。建立电流 $i(t)$ 的微分方程并分析 $i(t)$ 在 $t \geq 0$ 时的变化，求 $i(t)$ 的全响应 。



解：（1）列写电路的微分方程



根据电路形式，列回路方程 $R_1 i(t) + v_C(t) = e(t)$

列回路电压方程 $v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) + i_L(t)R_2$

列结点电流方程 $i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t) + i_L(t)$

消去变量 $v_C(t)$、$i_L(t)$，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t) + 7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + 10i(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t) + 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t) + 4e(t) \qquad (1)$$

(2) 求系统的完全响应　系统的特征方程 $\alpha^2 + 7\alpha + 10 = 0$ 即 $(\alpha+2)(\alpha+5) = 0$

特征根 $\alpha_1 = -2,\quad \alpha_2 = -5$　　齐次解 $i_h(t) = A_1\mathrm{e}^{-2t} + A_2\mathrm{e}^{-5t}$

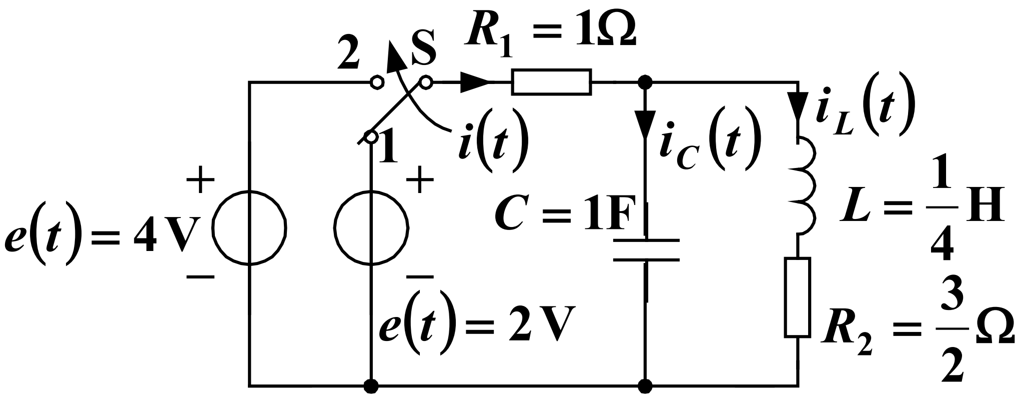
特解　由于 $t \geq 0_+$ 时 $e(t) = 4\mathrm{V}$

方程右端自由项为 4×4，因此，令特解 $i_p(t) = B$，代入式（1）

$$10B = 4\times 4 \qquad B = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

则系统的完全响应为

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \qquad (t \geq 0_+)$$



（3）确定换路后的 $i(0_+)$和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_+)$

找到0+初始条件

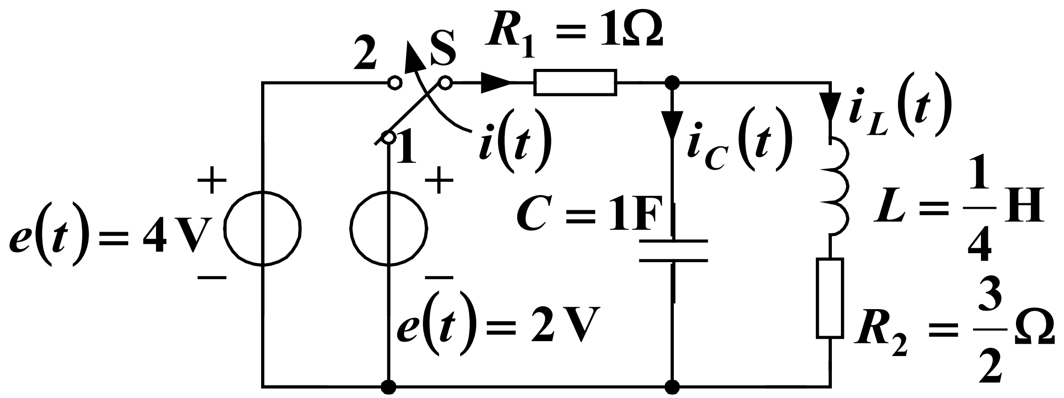
先看换路前，电路达到稳态，电容断路，电感短路：

$$i(0_-) = i_L(0_-) = \frac{2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{5}\mathrm{A}$$

电流稳定 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_-) = 0$

$$v_C(0_-) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}\mathrm{V}$$

再看换路后的 $i(0_+)$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)$



$$\boxed{\begin{aligned} v_C(0_+) &= v_C(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \end{aligned}}$$

由于电容两端电压和电感中的电流不会发生突变，因而有 $i(0_+) = \dfrac{1}{R_1}\left[e(0_+) - v_C(0_+)\right] = \dfrac{1}{1}\left(4 - \dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{14}{5}\mathrm{A}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+) = \frac{1}{R_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(0_+) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(0_+)\right] = \frac{1}{R_1}\left[0 - \frac{i_C(0_+)}{C}\right] = \frac{i_L(0_+) - i(0_+)}{R_1 C} = i_L(0_-) - i(0_+) = \frac{4}{5} - \frac{14}{5} = -2\mathrm{A/s}$$

求 $i(t)$ 在 $t \geq 0_+$ 时的完全响应，

代入 $i(t)$ 完全解表达式：

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2 + \dfrac{8}{5} = \dfrac{14}{5} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+) = -2A_1 - 5A_2 = -2 \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{4}{3} \\ A_2 = -\dfrac{2}{15} \end{cases}$$

完全响应为

$$i(t) = \left(\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{2}{15}\mathrm{e}^{-5t} + \frac{8}{5}\right)\mathrm{A} \qquad (t \geq 0_+)$$

过程太复杂!

冲激函数匹配法　　→解决 0- 到 0+ 的跳变问题

匹配的原理：$t=0$ 时刻微分方程左右两端的 $\delta(t)$ 及各阶导数应该平衡

(其它项也应该平衡，我们讨论初始条件，可以不管其它项)

例2-5： $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$, 已知 $r(0_-)=1$，求 $r(0_+)$ 。

解：　方程右端含 $\delta'(t)$ 项，它一定属于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$

设 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)$　则　$r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$\Delta u(t)$：相对单位跳变函数

表示0_-到0_+幅度跳变一个单位

代入方程　$a\delta'(t)+b\delta(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)=3\delta'(t)$

得出 $\begin{cases} a=3 \\ b+3a=0 \end{cases}$　即 $\begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}$

所以得　$r(0_+)-r(0_-)=b=-9$

即　$r(0_+)=r(0_-)-9=1-9=-8$

单选题 1分

设置

系统微分方程为 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2\delta(t)$，已知 $r(0_-)$ 和 $r'(0_-)$，求 $r(0_+)$和 $r'(0_+)$。

A $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-),\quad r'(0_+)=r'(0_-)}$

B $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-),\quad r'(0_+)=r'(0_-)+2}$

C $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-)+2,\quad r'(0_+)=r'(0_-)}$

D $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-)+3,\quad r'(0_+)=r'(0_-)+2}$

提交