

概率论与数理统计第六章考研练习题（答案）

【例 2】、设总体 X 的概率密度为 $\frac{1}{2}e^{-|x|} (-\infty < x < \infty)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S_2 , 则 $E(S_2) =$ _____.

解析 $E(S^2) = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, 其中

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-|x|} dx = 0, E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2,$$

可知 $E(S^2) = 2$.

例 4、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 从该总体中抽取简单随机样本

$X_1, X_2, \dots, X_{2n} (n \geq 2)$, 其样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$. 求统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$

的数学期望 $E(Y)$.

思路分析 由统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ 的形式很容易想到样本方差, 需要对其进行变形, 再借助样本方差的期望公式进行求解. 由于样本方差的定义是 $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 对比可知, 可以将 $X_i + X_{n+i}$ 看成一个整体, 记为 Y_i , 再将后面的 $2\bar{X}$ 改写成 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的样本均值即可.

解析 令 $Y_i = X_i + X_{n+i}, i = 1, 2, \dots, n$, 易知 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 独立同分布且均服从正态分布 $N(2\mu, 2\sigma^2)$ (因为 $E(Y_i) = 2\mu, D(Y_i) = 2\sigma^2$). 由样本均值的定义有 $2\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, 可知 $2\bar{X}$ 也是简单随机样本 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的样本均值, 记为 \bar{Y} , 则

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2\right] \\ &= (n-1)E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2\right] = (n-1)D(Y_i) = 2(n-1)\sigma^2. \end{aligned}$$

例 5、设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本,

$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2 (a, b > 0)$. 则当 $a =$ _____, $b =$ _____ 时, 统计量 X

服从 χ^2 分布, 其自由度为 _____.

思路分析 χ^2 分布的定义是相互独立的标准正态分布的平方和, 本题 X 等于 $\sqrt{a}(X_1 - 2X_2)$ 和 $\sqrt{b}(3X_3 - 4X_4)$ 的平方和。由正态分布的性质可知, 它们都服从正态分布, 要服从标准正态分布只需要让其期望为 0 方差为 1 即可。

解析 由题知 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 均服从 $N(0, 2^2)$, 由数学期望和方差的性质得, $E(X_1 - 2X_2) = 0, D(X_1 - 2X_2) = 1 \times 2^2 + 2^2 \times 2^2 = 20$, 所以 $X_1 - 2X_2 \sim N(0, 20)$ 。同理 $3X_3 - 4X_4 \sim N(0, 100)$ 。又因为 $X_1 - 2X_2$ 与 $3X_3 - 4X_4$ 相互独立, 且 $\frac{1}{\sqrt{20}}(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{100}}(3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 1)$ 。由 χ^2 分布的定义知, 当 $a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{100}$ 时, $X = \frac{1}{20}(X_1 - 2X_2)^2 + \frac{1}{100}(3X_3 - 4X_4)^2 \sim \chi^2(2)$, 即当 $a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{100}$ 时, X 服从 χ^2 分布, 其自由度为 2。

例 7、设总体 X 服从正态分布 $N(0, 2^2)$, 而 X_1, X_2, \dots, X_{15} 是来自总体 X 的简单随机样本,

则随机变量 $Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)^2}$ 服从 _____ 分布, 参数为 _____。

思路分析 由统计量的形式能够“猜测”出 Y 服从 F 分布, 并且自由度为 $(10, 5)$, 只需按照 F 分布定义的标准形式对其变形即可。

解析 因为 $X_i \sim N(0, 2^2), i = 1, 2, \dots, 15$, 将其标准化有 $\frac{X_i - 0}{2} = \frac{X_i}{2} \sim N(0, 1)$, 从而根据 χ^2 分布的定义

$$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(10), \left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_{12}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(5),$$

由样本的独立性可知, $\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2$ 与 $\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_{12}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2$ 相互独立。

根据 F 分布的定义

$$Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)^2} = \frac{\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2}{\frac{10}{\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_{12}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2}} \sim F(10, 5),$$

例 8、设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从

的分布是 ()

A、 $F(1, 1)$

B、 $F(2, 1)$

C、 $t(1)$

D、 $t(2)$

思路分析 统计量 S 的分母上有一个绝对值, 它可以看作是完全平方开方之后所得, 将其重新写到根号下, 则可以发现该统计量的类型应该是 t 分布 (只有 t 分布的分母上才会有根号), 然后再按照 t 分布的定义进行检验即可。

解析 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2|X_3|}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sqrt{X_3^2}}$, 显然 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{X_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, 且 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\frac{X_3^2}{\sigma^2}$ 相互独立, 从而 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2|X_3|}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sqrt{X_3^2}} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{X_3^2}{\sigma^2}}} \sim t(1)$ 。故选 C。

例 10、设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 $a(0 < a < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = a$, 则 $P\{Y > c^2\} =$ _____

A、 a B、 $1-a$ C、 $2a$ D、 $1-2a$

解析 由于 $X \sim t(n)$, 可知 $X^2 \sim F(1, n)$, 从而

$$P\{Y > c^2\} = P\{X^2 > c^2\} = P\{X > c\} + P\{X < -c\},$$

又由于 $P\{X > c\} = a$, 而 t 分布的概率密度为偶函数, 则由对称性可知 $P\{X < -c\} = a$, 则 $P\{Y > c^2\} = P\{X > c\} + P\{X < -c\} = 2a$ 。故选 C。

例 11、设随机变量 X, Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(0, 2^2)$ 和 $N(0, 3^2)$, 求 $D(X^2 + Y^2)$ 。

思路分析 分别计算 $D(X^2)$ 和 $D(Y^2)$, 将 X 和 Y 标准化, 则可以将 X^2 和 Y^2 凑成 χ^2 分布, 再运用 χ^2 分布的方差公式进行计算。

解析 由于 X, Y 独立, 可知 $D(X^2 + Y^2) = D(X^2) + D(Y^2)$ 。分别将 X 和 Y 标准化可得 $\frac{X}{2} \sim N(0, 1)$, $\frac{Y}{3} \sim N(0, 1)$, 则有 $\frac{X^2}{4} \sim \chi^2(1)$, $\frac{Y^2}{9} \sim \chi^2(1)$, 从而

$$D(X^2 + Y^2) = D\left(4 \cdot \frac{X^2}{4}\right) + D\left(9 \cdot \frac{Y^2}{9}\right) = 16D\left(\frac{X^2}{4}\right) + 81D\left(\frac{Y^2}{9}\right) = 194.$$

小结 要计算正态分布平方的方差, 基本思路就是将其凑成 χ^2 分布。

例 13、设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本。记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时, 求 $D(T)$ 。

思路分析 (1) 相当于要计算 $E(T)$, 利用样本均值和样本方差的数字特征的基本公式求解即可。(2) 由于总体服从正态分布, 可知 \bar{X} 和 S^2 独立, 从而 $D(T) = D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2} D(S^2)$, 再借助正态总体下统计量的性质将 \bar{X}^2 和 S^2 都凑成 χ^2 分布即可。

解析 (1) $E(T) = E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n} E(S^2)$

$$= D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 - \frac{1}{n} E(S^2) = \frac{1}{n} \sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 = \mu^2,$$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量。

(2) 由于总体服从正态分布, 可知 \bar{X} 和 S^2 独立, 从而

$$D(T) = D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2} D(S^2),$$

由于 $\mu=0, \sigma=1$, 可知 $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$, 标准化得 $\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0, 1)$, 进而 $(\sqrt{n}\bar{X})^2 \sim \chi^2(1)$, 因此

$$D(\bar{X}^2) = D\left[\frac{1}{n}(\sqrt{n}\bar{X})^2\right] = \frac{1}{n^2} D[(\sqrt{n}\bar{X})^2] = \frac{2}{n^2}.$$
 又因为

$$D(S^2) = D\left[\frac{1}{n-1}(n-1)S^2\right] = \frac{1}{(n-1)^2} D[(n-1)S^2] = \frac{2}{n-1},$$

所以 $D(T) = \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{2}{n(n-1)}.$

例 14、设 X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 2$) 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

则下列结论中不正确的是 ()

A、 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布 B、 $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C、 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布 D、 $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

思路分析 结合 χ^2 分布的定义及正态总体下统计量的性质进行求解。

解析 A 选项中 $X_i - \mu \sim N(0, 1)$, 故 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ 。

B 选项中由 $X_n - X_1 \sim N(0, 2)$ 可知, $\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$, 进而有 $\left(\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$, 即 $\frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$, 可知 $2(X_n - X_1)^2$ 不服从 χ^2 分布。

C 选项中由于 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 可知 $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ 。

D 选项中 $\bar{X} - \mu \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$, 则 $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim N(0, 1)$, 所以 $n(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1)$ 。

故选 B。

例 15、设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 X 的简单随机样本,

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \dots + X_6), Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9), S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2, Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}.$$

证明统计量 Z 服从自由度是 2 的 t 分布。

思路分析 将统计量 Z 凑成自由度为 2 的 t 分布的定义形式, 注意结合正态总体下统计量的性质进行证明。

解析 由于 X_1, X_2, \dots, X_9 是来自总体 X 的简单随机样本, 故 X_1, X_2, \dots, X_9 相互独立。设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $X_1, X_2, \dots, X_9 \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。由正态总体下统计量的性质可知

$$Y_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right), Y_2 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{3}\right).$$

又由于 Y_1, Y_2 独立, 且都服从正态分布, 故 $Y_1 - Y_2$ 也服从正态分布, 其期望方差分别为

$$E(Y_1 - Y_2) = E(Y_1) - E(Y_2) = \mu - \mu = 0, D(Y_1 - Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2) = \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3} = \frac{\sigma^2}{2},$$

得 $Y_1 - Y_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$, 将 $Y_1 - Y_2$ 标准化得 $\frac{Y_1 - Y_2 - 0}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \sim N(0, 1)$, 由正态总体样本方差的性质

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 得 $\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$ 。因为 S^2 与 Y_2 独立 (样本方差与样本均值独立), 而

Y_1 与 S^2 显然独立, 故 $\frac{Y_1 - Y_2 - 0}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$ 与 $\frac{2S^2}{\sigma^2}$ 也独立。因此由 t 分布的定义有

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\frac{Y_1 - Y_2 - 0}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}/2}} \sim t(2).$$