第七章 离散时间系统的时域分析

7.1 引言

连续时间信号：

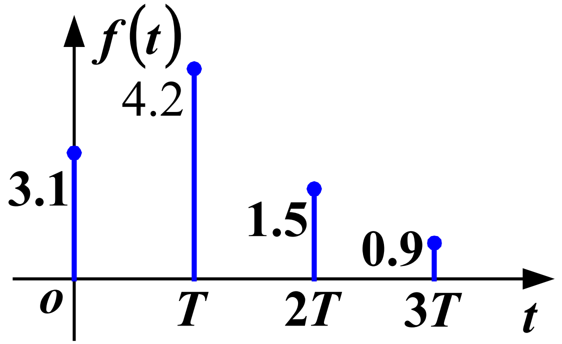
$f(t)$ 是连续变化的 t 的函数，除若干不连续点之外，对于任意时间值都可以给出确定的函数值 。函数的波形都是具有平滑曲线的形状，一般也称模拟信号 。

连续时间系统：

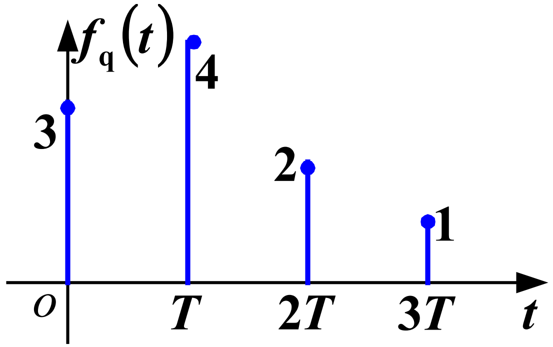
系统的输入、输出都是连续时间信号。如物理学、近代电路理论、模拟通信系统等 。

离散时间信号：时间变量是离散的，函数只在某些规定的时刻有确定的值，在其他时间没有定义。

离散信号可以由**模拟信号采样**而得，也可以由实际系统生成。



采样过程——得到离散时间信号。



幅值量化——幅值只能分级变化。

数字信号：离散信号在各离散点的幅值被量化的信号。

离散时间系统：系统的输入、输出都是离散的时间信号。如计算机、数值分析、统计学、经济学等。

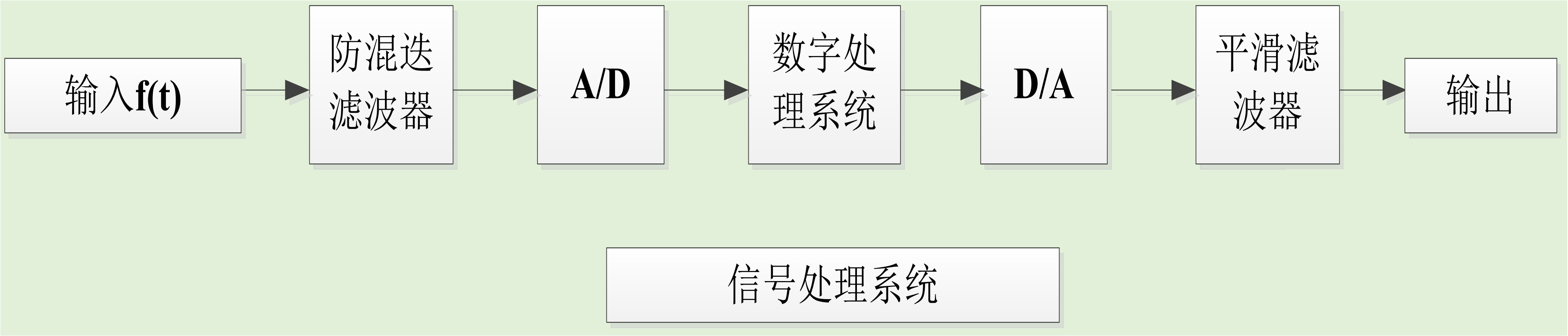
离散时间系统的优点：

1、便于实现大规模集成，体积小、重量轻、低功耗；
2、可靠性高、精度高（取决于二进制数的位数）；
3、利用存储器存储信息，功能灵活；
4、易消除噪声，易处理低频信号；
5、处理多维信号；
6、可编程技术提高灵活性和通用性 。

不能认为数字技术将取代一切连续时间系统的应用

- 人类在自然界中遇到的待处理信号大多的是连续时间信号，需经A/D（模/数）、D/A（数/模）转换 。
- 当频率较高时，直接采用数字集成器件尚有一些困难，有时，用连续时间系统处理或许比较简便 。

混合系统：连续时间系统与离散时间系统联合应用。如自控系统、数字通信系统。



最佳的协调模拟与数字部件已成为系统设计师的首要职责 。

离散系统与连续系统比较

连续系统

- 微分方程
- 卷积积分
- 拉氏变换
- 连续傅里叶变换
- 系统函数 $H(s)$
- 卷积定理

离散系统

- 差分方程
- 卷积和
- Z 变换
- DTFT、DFT
- 系统函数 $H(z)$
- 卷积定理

7.2 离散时间信号——序列

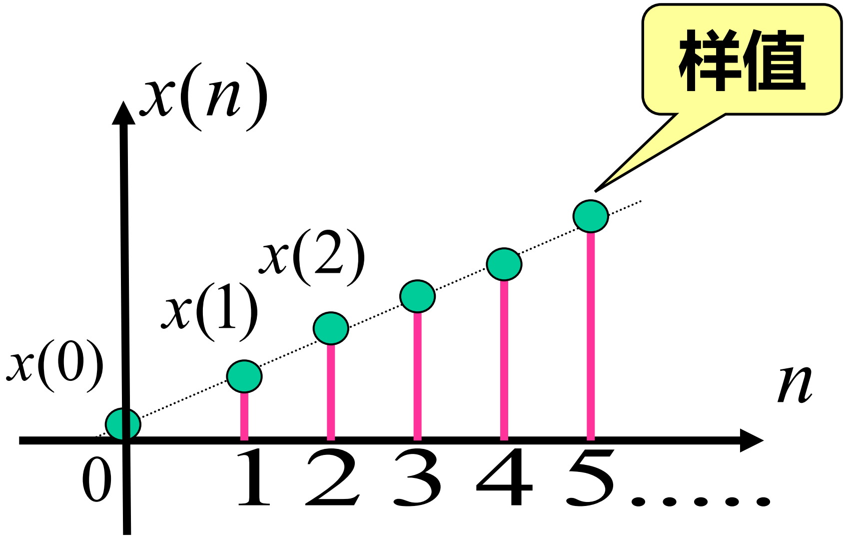
离散时间信号（序列）：在时间上是离散的，只在某些不连续的规定时刻给出函数值，在其他时间没有定义。

离散时刻的间隔是均匀的，设为 T

离散时间信号表示 $\{x(nT)\}$ 或 $\{x(n)\}$，$n \in Z, -\infty < n < \infty$

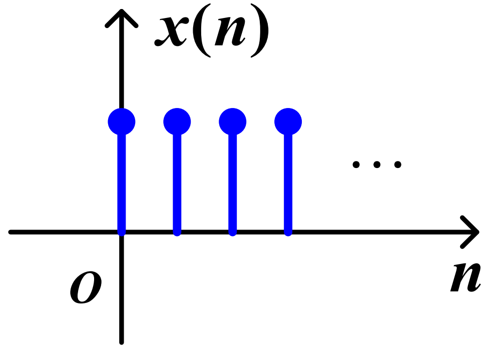
为了简便，以 $\boldsymbol{x(n)}$ 表示序列。

- 列出值，如 $x(n)=\{1,2,3,\ldots\}$
- 闭合解，如 $x(n)=a^n u(n)$
- 图解表示，如图

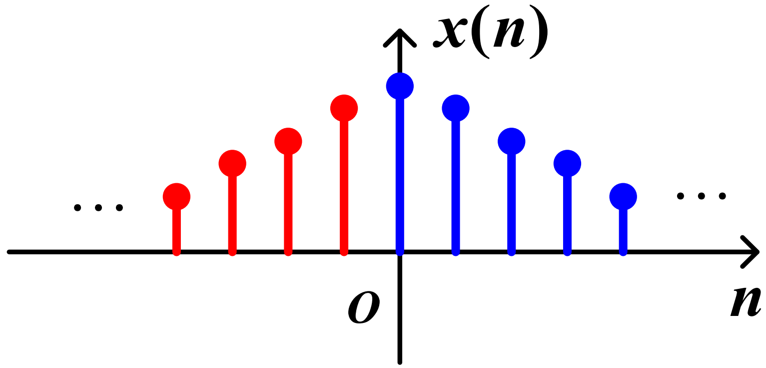


序列的三种形式：

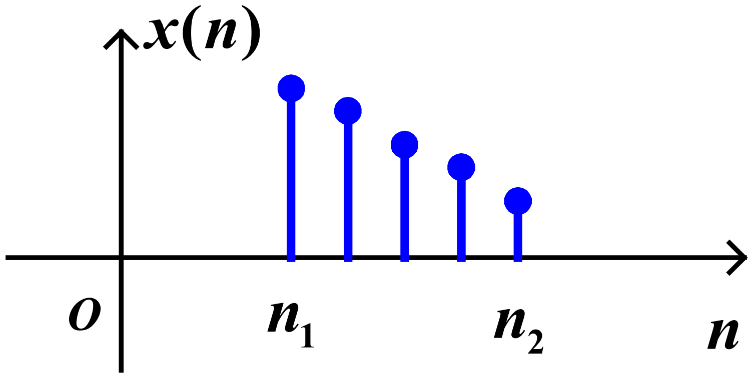
单边序列：$n \ge 0$;



双边序列:$-\infty \le n \le \infty$;



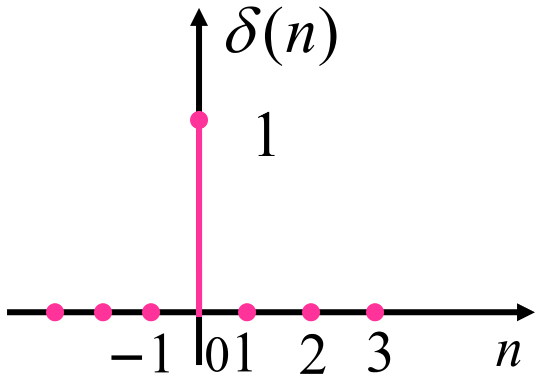
有限长序列：$n_1 \le n \le n_2$;



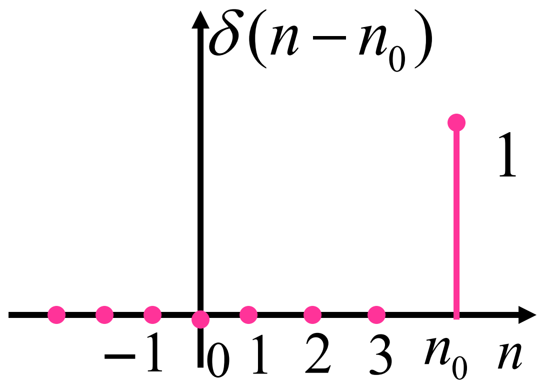
7.2.1 常用的典型序列

1、单位样值信号

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$$



$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & (n=n_0)\\ 0 & (n\neq n_0)\end{cases}$$



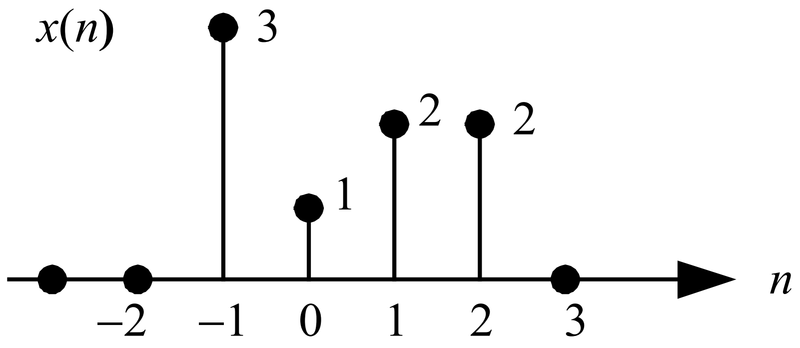
注意: $\delta(t)$ 用面积（强度）表示，（ t=0，幅度为 ∞ ）；
$\delta(n)$ 在 $n=0$ 取有限幅值为 1（不是面积）。

利用单位样值序列表示**任意离散时间信号**——离散时间信号分解

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

其中 $x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n) & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$

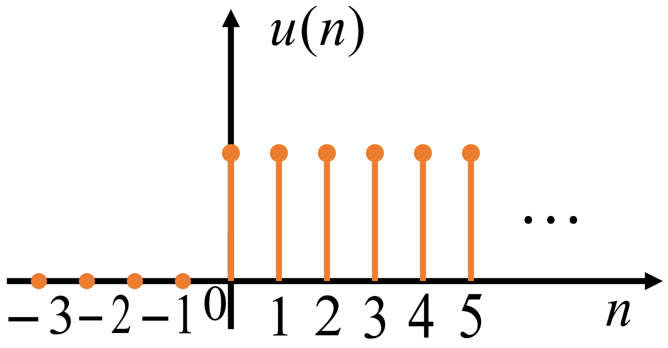
任意序列为加权、延迟的单位样值信号之和



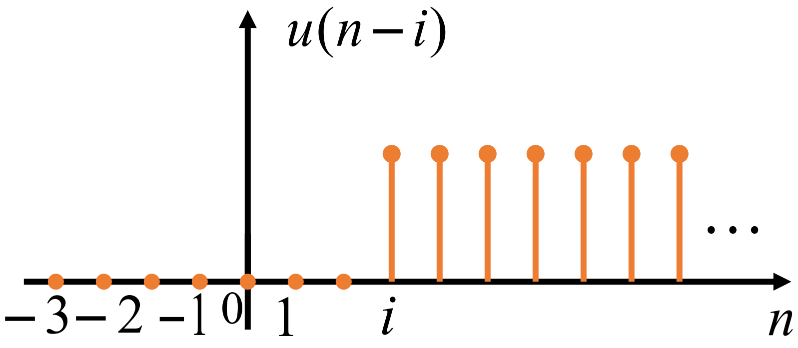
$$x(n)=3\delta(n+1)+\delta(n)+2\delta(n-1)+2\delta(n-2)$$

2、单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$



$$u(n-i)=\begin{cases}1 & (n\geq i)\\ 0 & (n<i)\end{cases}$$

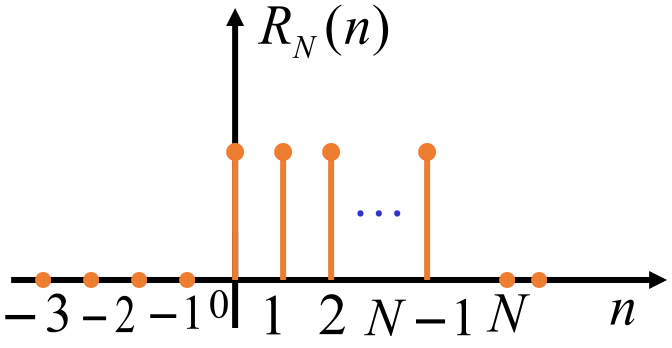


$$\begin{cases}u(n)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta(n-K)\\ \delta(n)=u(n)-u(n-1)\end{cases}$$

$\delta(n)$与$u(n)$是差和关系，不再是微积分关系

3、矩形序列

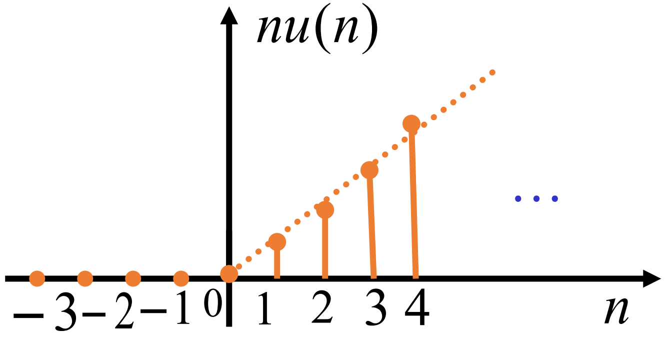
$$R_N(n)=\begin{cases}1 & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (n<0\,,n\ge N)\end{cases}$$



$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$$

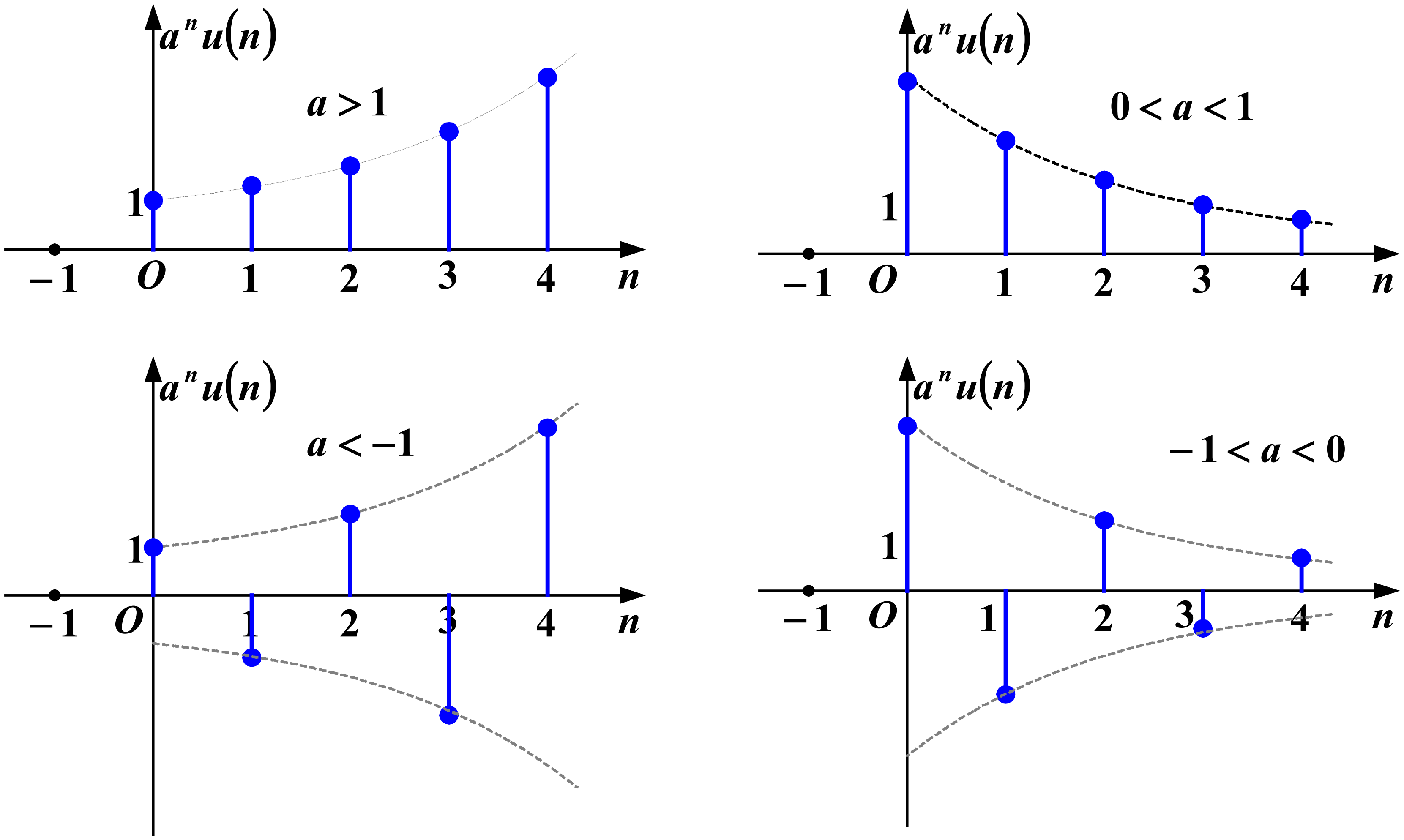
4、斜变序列

$$x(n)=nu(n)$$



5、实指数序列

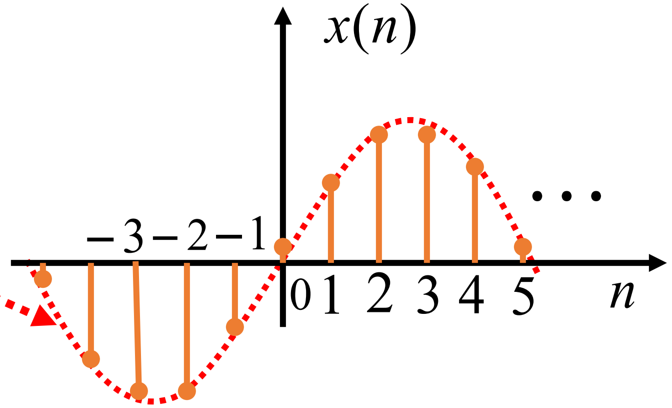
$$x(n)=a^{n}u(n)\begin{cases}\text{当}|a|>1\text{时序列是发散的；}\\\text{当}|a|<1\text{时序列是收敛的。}\end{cases}$$



6、正弦序列

$$f(t)=\sin\Omega_0 t$$

$$x(n)=f(nT)$$
$$=\sin(\Omega_0 nT)=\sin(n\omega_0)$$



其中ω_0是正弦序列的频率，反映序列值依次周期性重复的速率。

$\omega_0=2\pi/10,\quad 2\pi/100$

$$\omega_0=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f_s}$$

ω_0 是 Ω_0 对于 f_s 取归一化值

例如：$x(n)=\cos n\omega_0$

若$x(n)=x(n+N)$，N为周期

当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为整数时 $N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$；

当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数时 $N>\dfrac{2\pi}{\omega_0}$；

当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$不为有理数时 非周期性。

正弦序列周期性的判别：

① $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=N$，N 是正整数　　$\sin\left[\omega_0\left(n+N\right)\right]=\sin\left[\omega_0\left(n+\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin\left(\omega_0 n+2\pi\right)=\sin\left(\omega_0 n\right)$

正弦序列是周期的。

② $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{N}{m}$，$\dfrac{N}{m}$ 为有理数　　$\sin\left[\omega_0\left(n+N\right)\right]=\sin\left[\omega_0\left(n+m\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin\left(\omega_0 n+m\cdot 2\pi\right)=\sin\left(\omega_0 n\right)$

$\sin\left(\omega_0 n\right)$ 仍为周期的。　　周期：$N=m\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

③ $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数

找不到满足 $x\left(n+N\right)=x\left(n\right)$ 的 N 值，为非周期的序列。

7、复指数序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 n)$$

复序列可用极坐标表示： $x(n)=|x(n)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[x(n)]}$

$$|x(n)|=1 \qquad \arg[x(n)]=\omega_0 n$$

一般复指数序列 $x(n)=A\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)n}=A\mathrm{e}^{\sigma n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$

$$|x(n)|=A\mathrm{e}^{\sigma n} \qquad \arg[x(n)]=\omega_0 n$$

$$x(n)=A\mathrm{e}^{\sigma n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=A\mathrm{e}^{\sigma n}\cos(\omega_0 n)+\mathrm{j}A\mathrm{e}^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

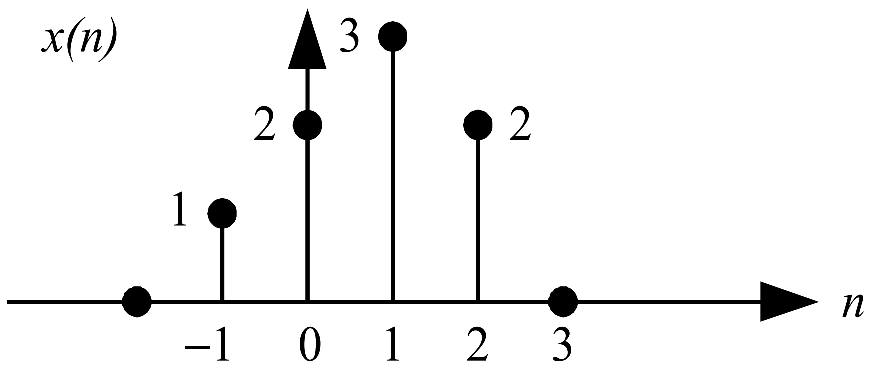
7.2.2 离散时间信号的运算

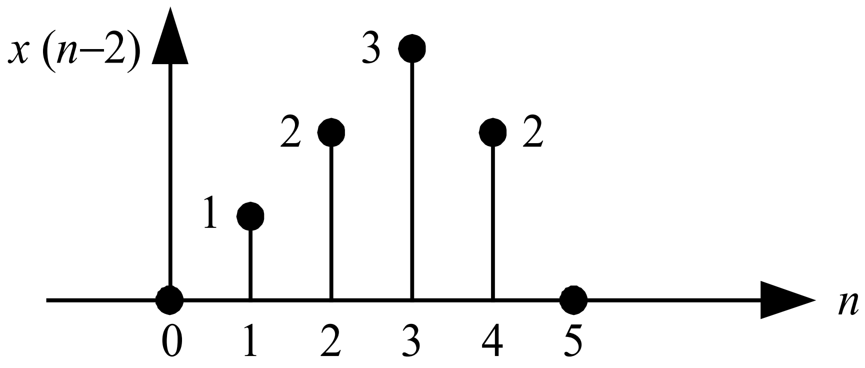
1、序列的平移

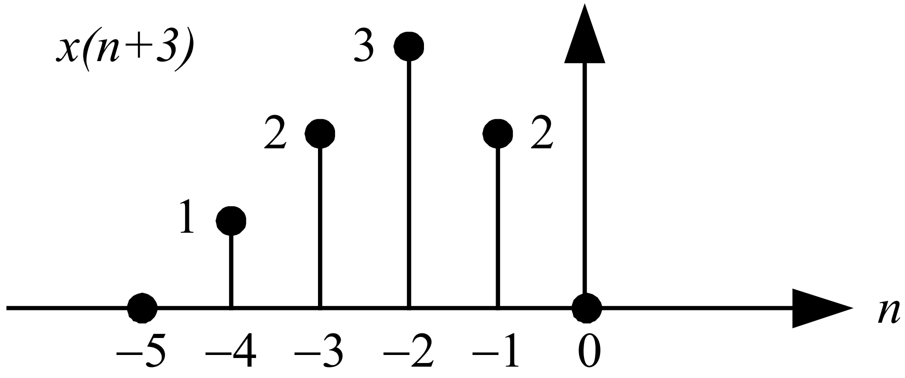
$x(n-m)$ 表示将 $x(n)$ 右移 m 个单位。

$x(n+m)$ 表示将 $x(n)$ 左移 m 个单位。

$m > 0$

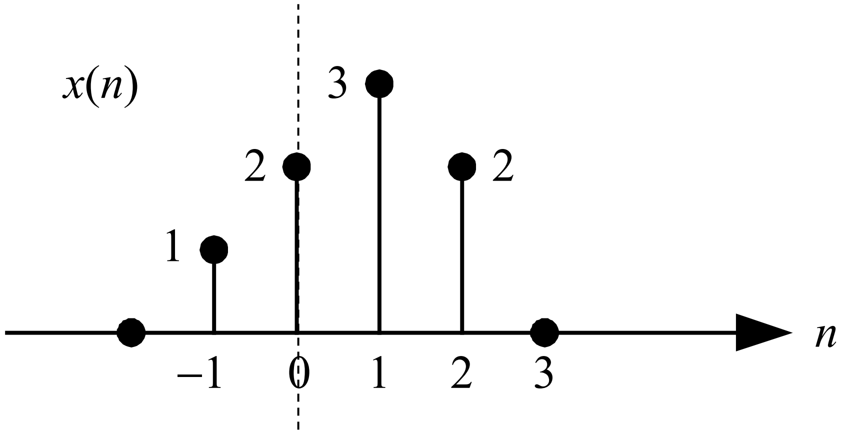


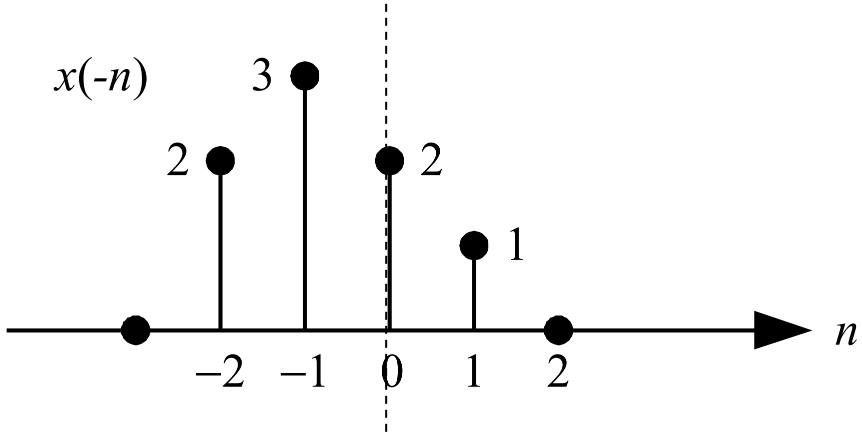




2、序列的反褶

$$x(n) \to x(-n)$$





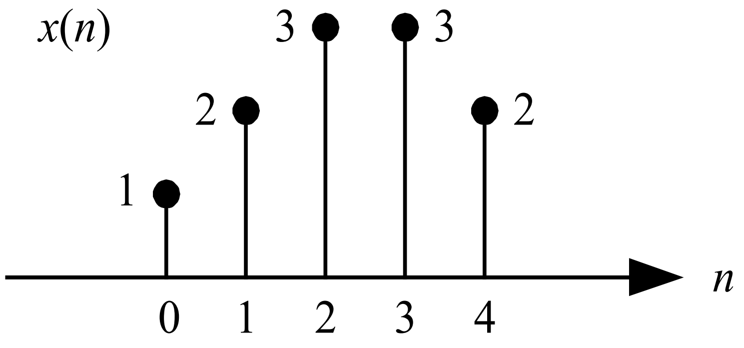
3、序列的尺度变换

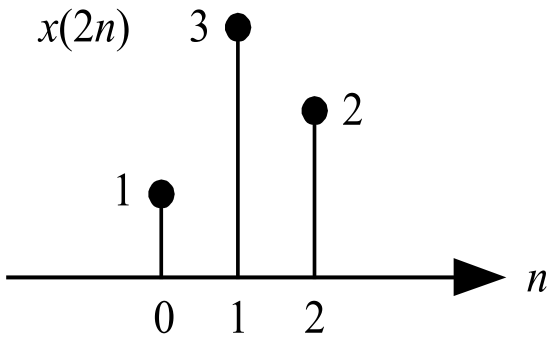
a 为正整数

$$x(n) \to x(an)$$ 压缩：原点左右每隔 a-1 点抽取一点

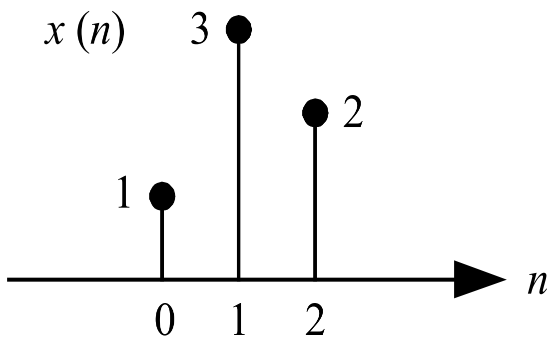
$$x(n) \to x\left(\frac{n}{a}\right)$$ 扩展：相邻两点之间插入 a-1 个零值点

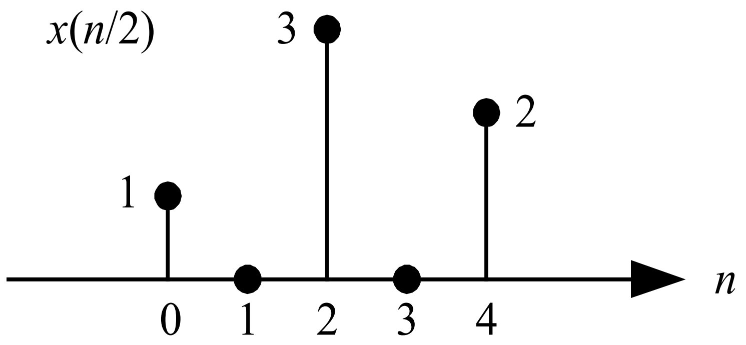
压缩：





扩展：

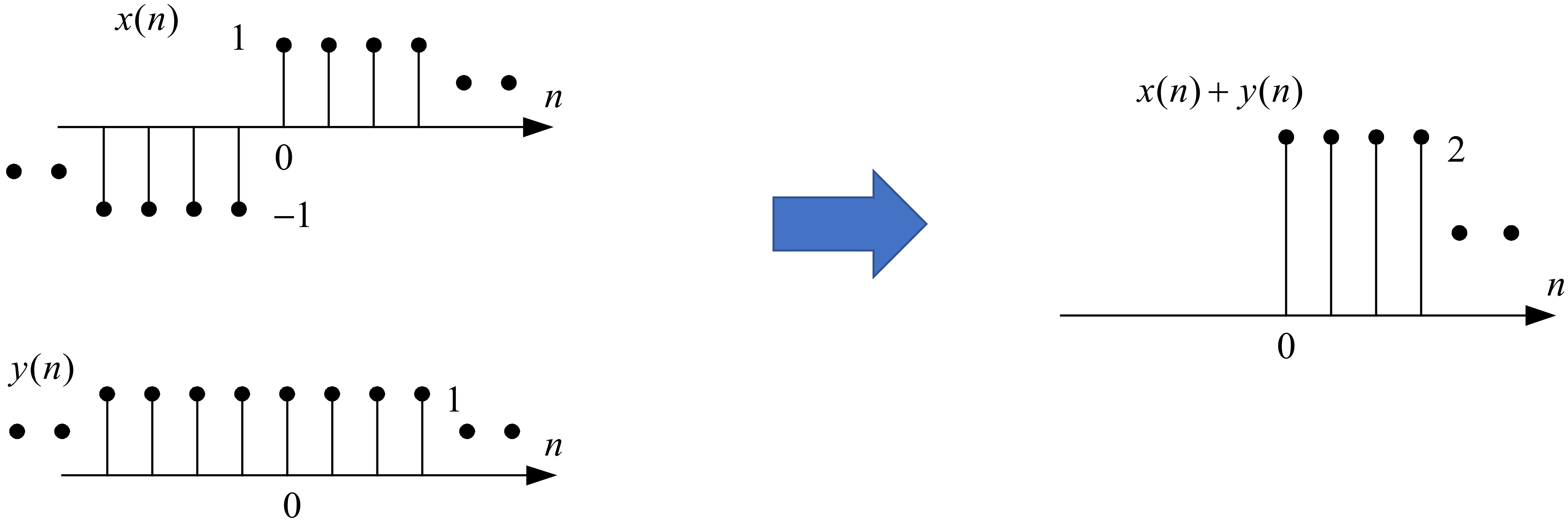




4、序列的相加

$$z(n)=x(n)+y(n)$$

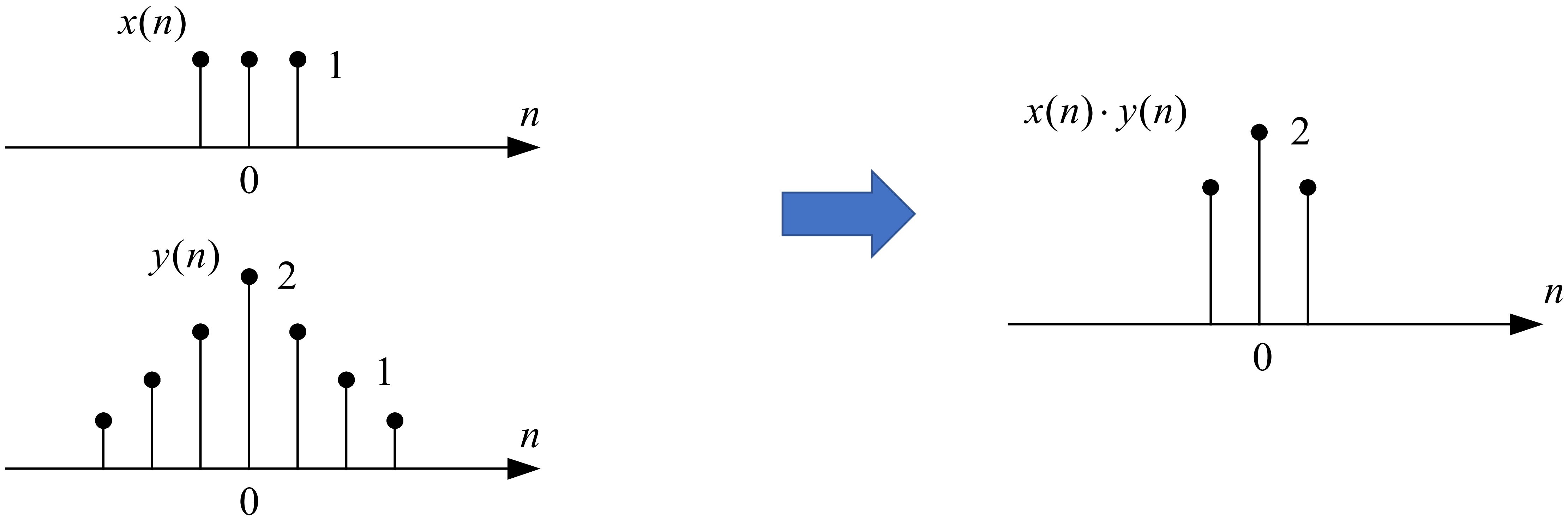
逐项对应相加



5、序列的相乘

$$z(n)=x(n)\cdot y(n)$$

逐项对应相乘



6、序列的差分

一阶后向差分 $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

二阶后向差分
$$\begin{aligned}\nabla^2 x(n) &= \nabla\{\nabla x(n)\} = \nabla\{x(n) - x(n-1)\} \\ &= [x(n) - x(n-1)] - [x(n-1) - x(n-2)] \\ &= x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)\end{aligned}$$

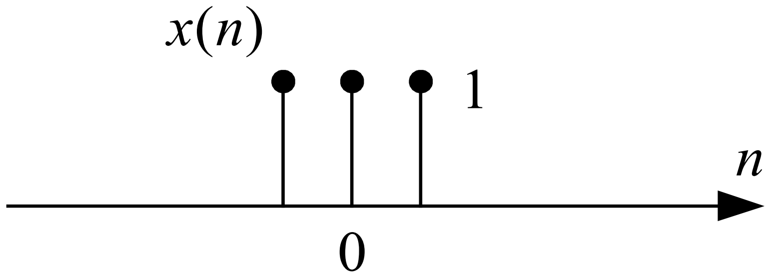
一阶前向差分 $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

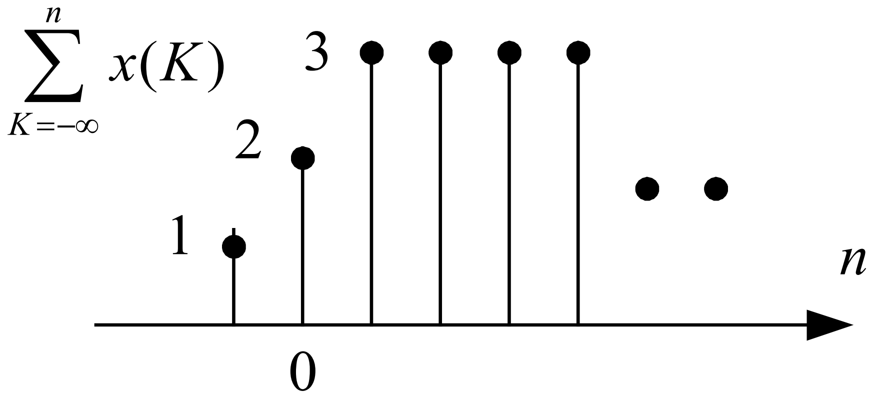
二阶前向差分 $\Delta^2 x(n) = \Delta\{\Delta x(n)\} = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$

单位脉冲序列可用单位阶跃序列的差分表示 $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

7、序列的累加

$$z(n)=\sum_{K=-\infty}^{n}x(K)$$





单位阶跃序列可用单位脉冲序列的求和表示

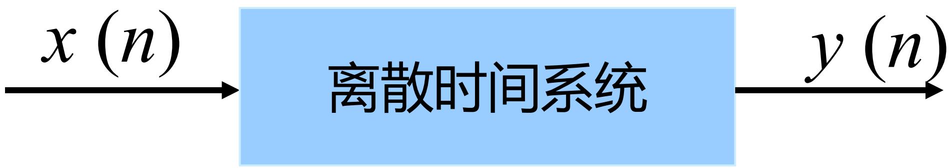
$$u(n)=\sum_{K=-\infty}^{n}\delta(K)$$

8、序列的能量

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^{2}$$

7.3 离散时间系统的数学模型

7.3.1 离散线性时不变系统

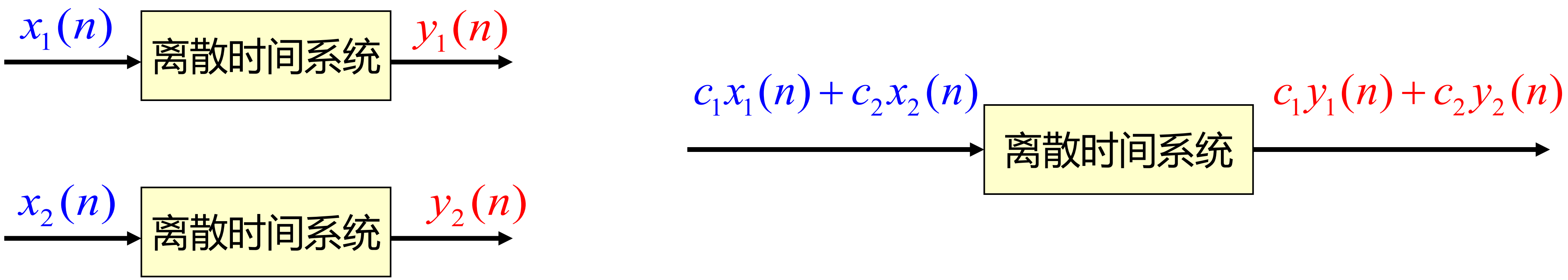


1、均匀性和叠加性

线性：设两对激励与响应

$$x_1(n) \to y_1(n),\ x_2(n) \to y_2(n)$$

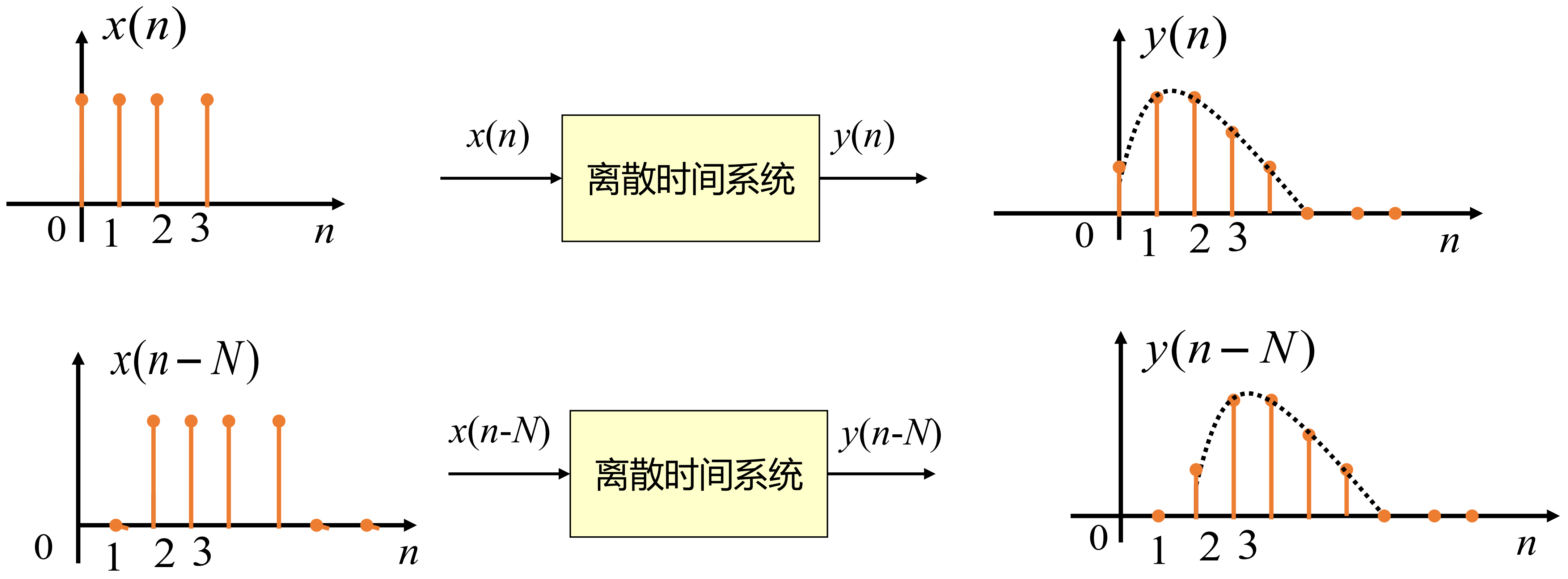
则$c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) \to c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n)$



2、时不变性

时不变性：设激励与响应$x(n) \to y(n)$

则$x(n-N) \to y(n-N)$



7.3.2 离散时间系统的数学模型

连续系统的数学模型——微分方程

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\ldots E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

基本运算：微分，乘系数，相加

离散系统的数学模型——差分方程

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

输入是离散序列 $x(n)$ 及其时移函数 $x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots.$

输出是离散序列 $y(n)$ 及其时移函数 $y(n), y(n-1), y(n-2), \ldots.$

7.3.3 离散系统的基本运算单元

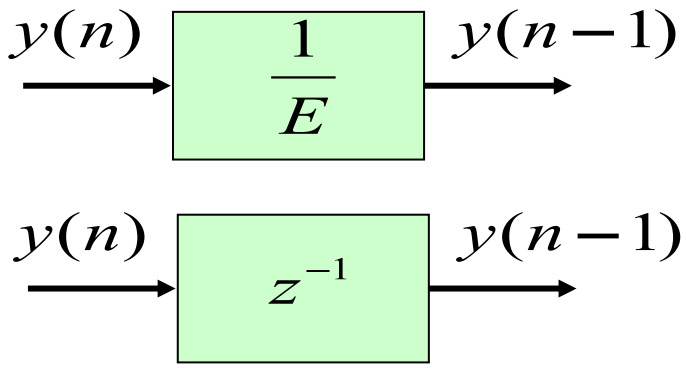
延时元件（单位延时）

对于线性时不变系统，可以借助算子符号、传输算子等概念来表示或求解系统的数学模型。对于离散时间系统，用算子符号“E”表示将序列超前一个单位时间的运算。E 也称为时移算子，利用移序算子可写出：

$$y(n+1)=Ey(n) \qquad y(n-1)=\frac{1}{E}y(n)$$

以上分析看出，算子 $\frac{1}{E}$ 表示延迟单位时间的作用，即 $y(n)$ 经 $\frac{1}{E}$ 运算给出 $y(n-1)$ 。

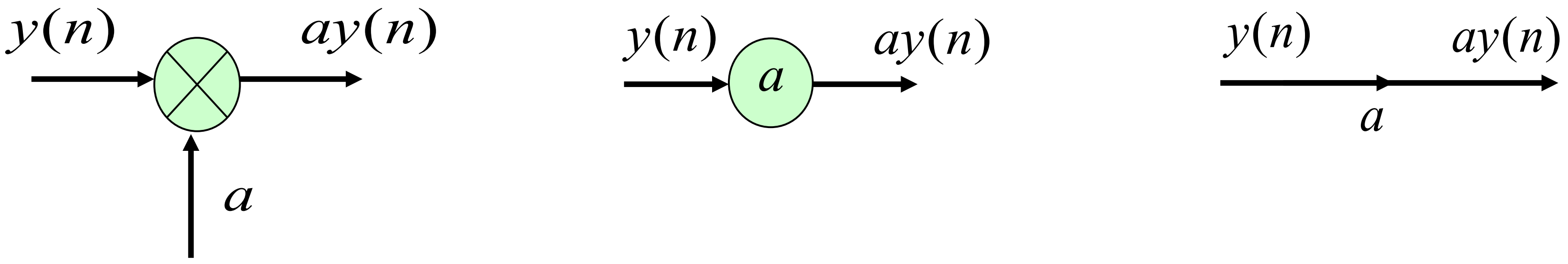
规定以 $\frac{1}{E}$ 作为延时元件符号。



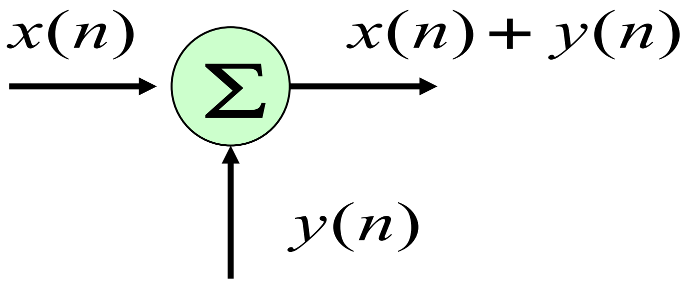
单位延时实际是一个移位寄存器，

把前一个离散值顶出来，递补。

乘法器



相加器



7.3.4 由微分方程导出差分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=ay(t)+x(t)$$

$y(t)$：输出

$x(t)$：输入

时间间隔：T

后向差分 $$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\approx\frac{y(t)-y(t-T)}{T}$$

或前向差分 $$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\approx\frac{y(t+T)-y(t)}{T}$$

列差分方程

若用后向差分形式

$$\frac{y(t)-y(t-T)}{T}=ay(t)+x(t)$$

若在 $t=nT$ 各点取得样值

$$y(t)=y(nT)\rightarrow y(n)$$

n 代表序号

$$x(t)=x(nT)\rightarrow x(n)$$

$$\frac{y(n)-y(n-1)}{T}=ay(n)+x(n)$$

$$y(n)=\frac{1}{1-aT}y(n-1)+\frac{T}{1-aT}x(n)$$

当前输出　　前一个输出　　输入

7.3.5 差分方程的特点

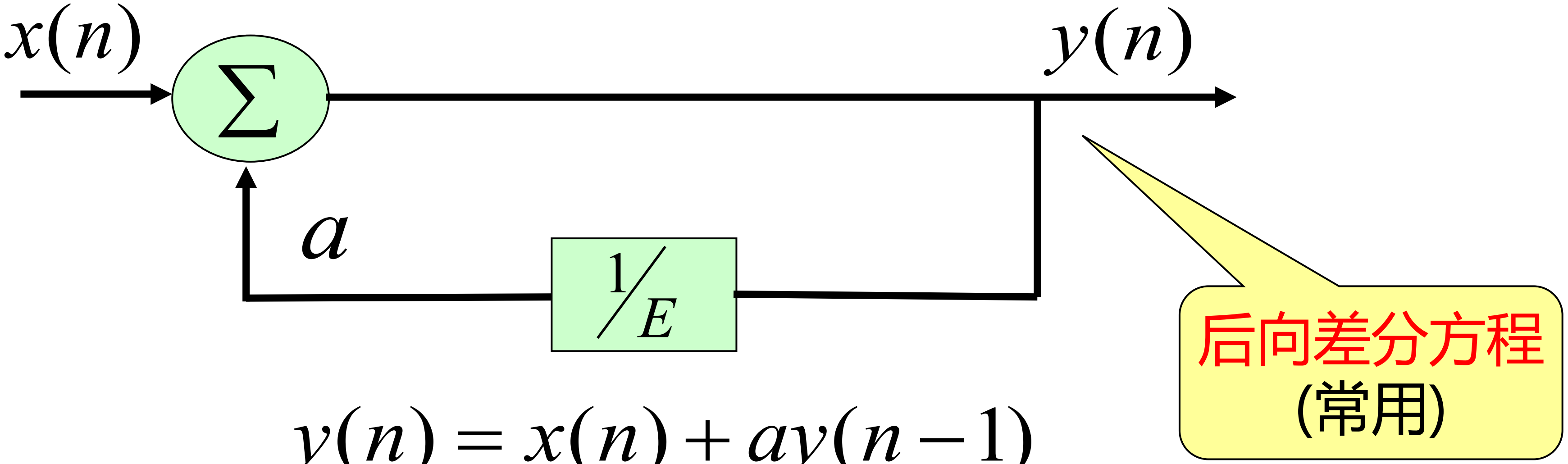
1、输出序列的第 n 个值不仅决定于同一瞬间的输入样值，而且还与前面输出值有关，每个输出值必须依次保留。

2、差分方程的阶数：差分方程中变量的最高和最低序号差数为阶数。如果一个系统的第 n 个输出决定于刚过去的几个输出值及输入值，那么描述它的差分方程就是几阶的。

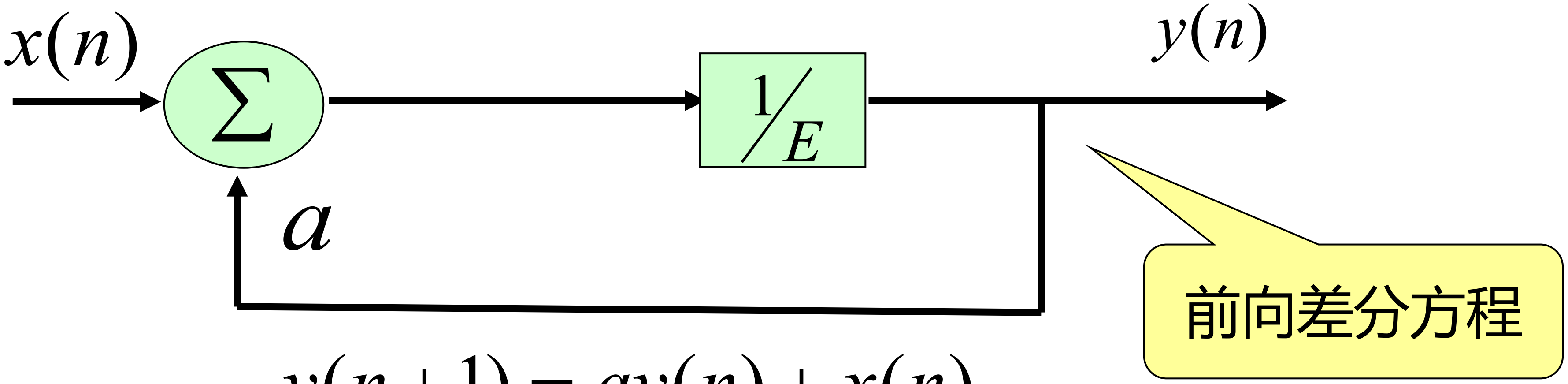
$$\text{通式:}\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

3、微分方程可以用差分方程来逼近，微分方程解是精确解，差分方程解是近似解，两者有许多类似之处。

4、差分方程描述离散时间系统，输入序列与输出序列间的运算关系与系统模拟框图有对应关系，应该会写会画。



$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$



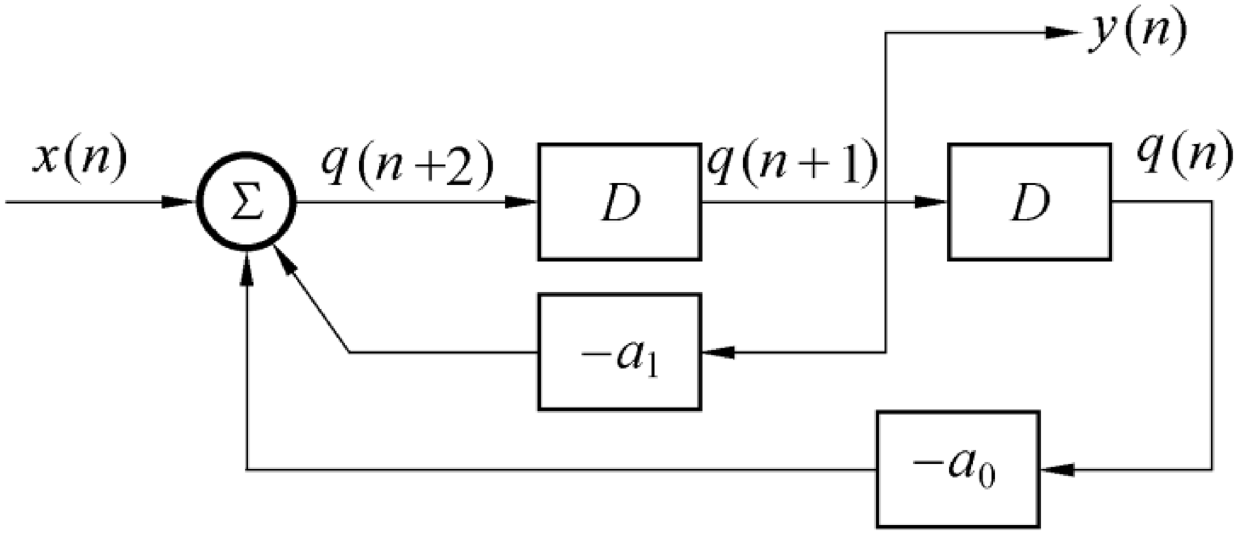
$$y(n+1) = ay(n) + x(n)$$

例7-7：已知差分方程 $y(n+2)+a_1y(n+1)+a_0y(n)=x(n+1)$，画该系统的模拟框图。

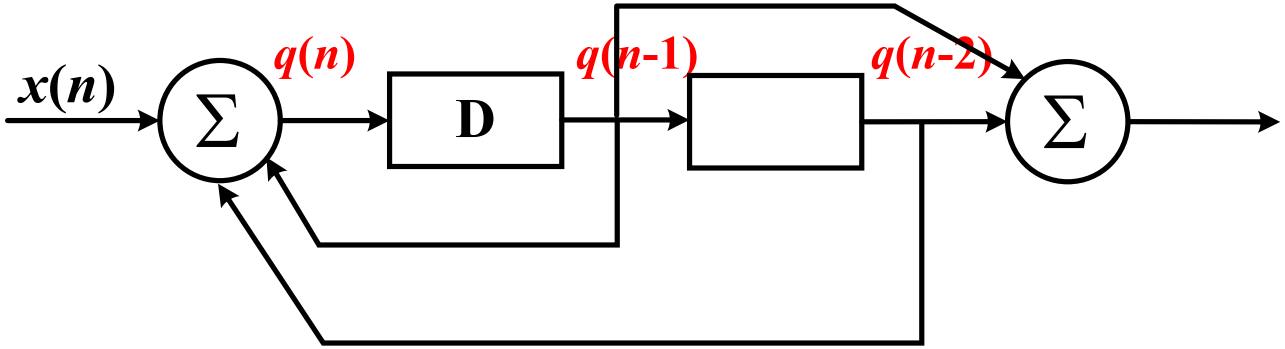
解：引入辅助函数 $q(n)$

$$q(n+2)+a_1q(n+1)+a_0q(n)=x(n)$$ 利用 LTI 系统的性质

$$y(n)=q(n+1)$$



例7-8：已知框图，写出系统的差分方程。



解：引入辅助函数 $q(n)$

$$q(n)=x(n)-2q(n-1)-3q(n-2)\Rightarrow q(n)+2q(n-1)+3q(n-2)=x(n)$$

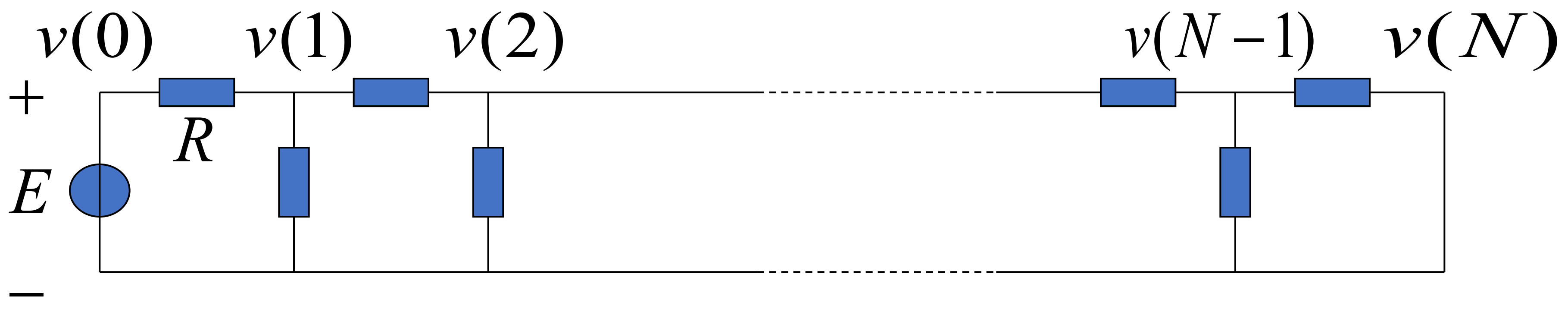
$$y(n)=4q(n-1)+5q(n-2)$$

利用 LTI 系统的性质消去 $q(n)$

得到差分方程：

$$y(n)+2y(n-1)+3y(n-2)=4x(n-1)+5x(n-2)$$

例7-9：电阻梯形网络，其各支路电阻都为 R，每个结点对地的电压为 $v(n)$，$n=0$，1，2，…，N。已知两边界结点电压为 $v(0)=E$，$v(N)=0$。求 $v(n)$ 的差分方程式。



解： 节点电流 KCL
$$\frac{v(n)-v(n-1)}{R}=\frac{v(n-1)-v(n-2)}{R}+\frac{v(n-1)}{R}$$

$$v(n)-3v(n-1)+v(n-2)=0$$

第七章 离散时间系统的时域分析

7.4 常系数线性差分方程的求解

线性时不变离散系统由常系数线性差分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

方程式的阶数等于未知序列变量序号的最高与最低值之差。

求解方法：

- 迭代法
- 时域经典法：求齐次解和特解
- 离散卷积法：利用齐次解得零输入响应，再利用卷积和求零状态响应
- 变换域法（z 变换法）
- 状态变量分析法

7.4.1 迭代法

当差分方程阶次较低时，常用此法

例7-10： 已知差分方程 $y(n)=ay(n-1)+x(n)$，$y(-1)=0$，且激励 $x(n)=\delta(n)$，求$y(n)$。

解： $n=0 \quad y(0)=ay(-1)+x(0)=0+\delta(0)=1$

$n=1 \quad y(1)=ay(0)+x(1)=a+0=a$

$n=2 \quad y(2)=ay(1)+x(2)=a\cdot a+0=a^2$

……

$n=n \quad y(n)=ay(n-1)+x(n)=a^n$

$\therefore \quad y(n)=a^n u(n)$

缺点：很难得到闭合形式的解 。

7.4.2 时域经典法

差分方程的完全解即系统的完全响应, 由齐次解 $y_h(n)$ 和特解 $y_p(n)$ 组成：

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

齐次解 $y_h(n)$ 的形式由齐次方程的特征根确定

特解 $y_p(n)$ 的形式由方程右边激励信号代入化简的形式确定

1、求齐次解（系统固有的响应)

差分方程的齐次方程: $$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

例7-11： 若一阶齐次差分方程的表达式为 $y(n)-\alpha y(n-1)=0$，但起始状态 $y(-1)$, $y(-2)$，…，$y(-N)$ 不能全为零，求对应的齐次解。

解：

$$y(-1)\neq 0,\ \frac{y(0)}{y(-1)}=\frac{y(1)}{y(0)}=\dots=\frac{y(n)}{y(n-1)}=\alpha$$

说明 $y(n)$ 是一个公比为 α 的几何级数，所以 $y(n)=C\alpha^n$

指数形式

或由特征方程 $r-\alpha=0$ 可得 $r=\alpha$ $y(n)=Cr^n=C\alpha^n$

一般情况下，差分方程的齐次解形式为 $C\alpha^n$ 的线性组合。

$$a_0\alpha^N+a_1\alpha^{N-1}+\cdots+a_k\alpha^{N-k}+\cdots+a_N=0$$ → 特征方程

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\dots$ → 特征根

α_i 称为系统的固有频率或自由频率、自然频率

齐次解的形式

(1) 特征根是不等实根（无重根）$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$

$$y_h(n)=C_1\alpha_1^n+C_2\alpha_2^n+\cdots+C_N\alpha_N^n=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n$$

(2) 特征根是 k 阶重根 α_1

$$y_h(n)=C_1n^{k-1}\alpha_1^n+C_2n^{k-2}\alpha_1^n+\cdots+C_{k-1}n\ \alpha_1^n+C_k\alpha_1^n=\sum_{i=1}^{k}C_in^{k-i}\alpha_1^n$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $\alpha\pm\mathrm{j}\beta=\rho\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0}$

$$y_h(n)=C_1(\alpha+\mathrm{j}\beta)^n+C_2(\alpha-\mathrm{j}\beta)^n=\rho^n[P\cos(n\omega_0)+Q\sin(n\omega_0)]$$

差分方程与微分方程 齐次解的比较

差分方程	微分方程
$y_h(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n$	$r_h(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i\mathrm{e}^{\alpha_i t}$
$y_h(n)=\sum_{i=1}^{k}C_i n^{k-i}\alpha_1^n$	$r_h(t)=\sum_{i=1}^{k}A_i t^{k-i}\mathrm{e}^{\alpha_1 t}$
$C_1(\alpha+\mathrm{j}\beta)^n+C_2(\alpha-\mathrm{j}\beta)^n$ $=\rho^n[P\cos(n\omega_0)+Q\sin(n\omega_0)]$	$A_1\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)t}+A_2\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{j}\beta)t}$ $=\mathrm{e}^{\alpha t}(A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t)$

2、求特解：由激励信号 $x(n)$ 的形式决定

自由项（方程右端）	特解形式
α^n	$D\alpha^n$（α不是特征根） $Dn^r\alpha^n$（α 是 r 重特征根）
n^k	$D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k$（1不是特征根） $n^r[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]$（1 是 r 重特征根）
$\alpha^n n^k$	$[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]\alpha^n$（$\alpha$ 不是特征根） $n^r[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]\alpha^n$（$\alpha$ 是 r 重特征根）
$\cos(n\omega)$ 或 $\sin(n\omega)$	$D_1\cos(n\omega)+D_2\sin(n\omega)$（$e^{\pm j\omega}$不是特征根）
$\alpha^n\cos(n\omega)$ 或 $\alpha^n\sin(n\omega)$	$[D_1\cos(n\omega)+D_2\sin(n\omega)]\alpha^n$（$\alpha e^{\pm j\omega}$不是特征根）

- 通过观察自由项（方程右端）的函数形式，试选特解函数式 。
- 将特解代入方程，利用待定系数法来确定 D_k 。

※定理1：k阶常系数非齐次线性差分方程

$$y(n)+a_1y(n-1)+\cdots+a_ky(n-k)=P_I(n)\alpha^n$$

有形如 $y^*(n)=n^sQ_I(n)\alpha^n$ 的特解，当 α 不是方程的特征根时 $s=0$，当 α 是方程的 r 重特征根时 $s=r$。 $P_I(n)$为 n 的 I 次多项式，$Q_I(n)$为 n 的 I 次待定系数多项式。

※ 定理2：k阶常系数非齐次线性差分方程

$$y(n)+a_1y(n-1)+\cdots+a_ky(n-k)=[P_h(n)\cos(n\omega)+P_I(n)\sin(n\omega)]\alpha^n$$

有形如 $y^*(n)=n^s[Q_t^1(n)\cos(n\omega)+Q_t^2(n)\sin(n\omega)]\alpha^n$ 的特解，当 $\alpha e^{\pm j\omega}$ 不是方程的特征根时 $s=0$，当 $\alpha e^{\pm j\omega}$ 是方程的 r 重特征根时 $s=r$。 $Q_t^1(n)$、 $Q_t^2(n)$是 $t=\max\{h,I\}$ 次待定系数多项式。

2、求特解：由激励信号 $x(n)$ 的形式决定

一般情况下，

若激励函数代入方程右端出现 n^k 形式的函数，则特解选 $D_0 n^k + D_1 n^{k-1} + \cdots + D_{k-1} n + D_k$；

如果出现 α^n 形式的函数，且 α 不是此差分方程的特征根，则特解选 $D\alpha^n$。

前者与微分方程的 t^k 形式对应，后者与 e^{at} 形式对应。

3、由初始条件确定待定系数 C_k（齐次系数）

完全解的一般形式（无重根的情况下）：

$$y(n)=C_1\alpha_1{}^n+C_2\alpha_2{}^n+\cdots+C_N\alpha_N{}^n+D(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n+D(n)$$

C_k 须利用 N 个给定的边界条件来确定。例如，

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+\cdots+C_N+D(0) \\ y(1)=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_N\alpha_N+D(1) \\ \cdots\cdots \\ y(N-1)=C_1\alpha_1{}^{N-1}+C_2\alpha_2{}^{N-1}+\cdots+C_N\alpha_N{}^{N-1}+D(N-1) \end{cases}$$

对于因果系统（激励信号在 $n=0$ 接入系统），常给定 $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$, ..., $y(-N)$ 为边界条件。迭代法求出 $n\geq 0$ 的初始条件。

例7-12： 求差分方程 $y(n)+2y(n-1)=x(n)-x(n-1)$ 的完全解。

其中激励函数 $x(n)=n^2$，且已知 $y(-1)=-1$ 。

解：

$$\alpha=-2 \qquad \therefore \quad y_h(n)=C_1(-2)^n$$

齐次解

$$右端=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

$$y_p(n)=D_0 n+D_1$$

特解的形式

$$D_0 n+D_1+2D_0(n-1)+2D_1=2n-1$$

$$3D_0 n+3D_1-2D_0=2n-1$$

代入差分方程

$$D_0=\frac{2}{3} \qquad D_1=\frac{1}{9}$$

$$y_p(n)=\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

特解

完全解 = 齐次解 + 特解

$$y(n) = C_1(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

代入边界条件求出待定系数 C_1

$$y(-1) = C_1(-2)^{-1} + \frac{2}{3}(-1) + \frac{1}{9} = -1$$

$$C_1 = \frac{8}{9}$$

得到完全解的闭式

$$y(n) = \frac{8}{9}(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

例7-13：解差分方程 $y(n)+2y(n-1)+2y(n-2)=\sin\frac{n\pi}{2}$，已知 $y(0)=1$，$y(-1)=0$。

解：（1）求齐次解

特征方程为 $\alpha^2+2\alpha+2=0$　　特征根为 $\alpha_{1,2}=-1\pm \mathrm{j}=-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$,

齐次解为 $y_h(n)=\left(-\sqrt{2}\right)^n(P\cos\frac{n\pi}{4}+Q\sin\frac{n\pi}{4})$

（2）求特解 $y_p(n)=D_1\sin\frac{n\pi}{2}+D_2\cos\frac{n\pi}{2}$

$$\left(2D_2-D_1\right)\sin\frac{n\pi}{2}-\left(2D_2+D_1\right)\cos\frac{n\pi}{2}=\sin\frac{n\pi}{2} \qquad D_1=-\frac{1}{5} \quad D_2=\frac{2}{5}$$

$$y_p(n)=-\frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{5}\cos\frac{n\pi}{2}$$

（3）求完全解

$$y(n)=\left(-\sqrt{2}\right)^n\left(P\cos\frac{n\pi}{4}+Q\sin\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{5}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(-1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} P+\dfrac{2}{5}=1 \\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(P\dfrac{\sqrt{2}}{2}-Q\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{1}{5}=0 \end{cases}$$

$$\therefore P=\frac{3}{5} \quad Q=\frac{1}{5}$$

$$y(n)=\left(-\sqrt{2}\right)^n\left(\frac{3}{5}\cos\frac{n\pi}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{5}\cos\frac{n\pi}{2}$$

经典法不足之处

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n+D(n)$$

- 若差分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

7.4.3 零输入响应和零状态响应

系统完全响应 = 零输入响应+零状态响应 $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$

1、系统的零输入响应

- **定义**：输入信号为零，仅由系统的起始状态单独作用而产生的输出响应，用 $y_{zi}(n)$ 表示
- **数学模型**：$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}(n-k)=0$ 单根 → $y_{zi}(n)=\sum_{k=1}^{N} C_{zik}\alpha_k^n$
- **求解方法**：根据差分方程的特征根确定零输入响应的形式，再由边界条件 $y_{zi}(k)$ 确定待定系数 C_{zik}

例7-14：已知某线性时不变系统的差分方程为：$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$，激励在 0 时刻开始输入，系统的起始状态为 $y(-1)=0$， $y(-2)=1/2$，系统的零输入响应为（　）。

A $y_{zi}(n)=(-1)^n-2(-2)^n \quad n\geq 0$

B $y_{zi}(n)=2(-2)^n \quad n\geq 0$

C $y_{zi}(n)=-2(-2)^n \quad n\geq 0$

D $y_{zi}(n)=(-1)^n \quad n\geq 0$

提交

例7-14：已知某线性时不变系统的差分方程为：$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$，激励在 0 时刻开始输入，系统的起始状态为 $y(-1)=0$，$y(-2)=1/2$，求系统的零输入响应。

解: 系统的特征方程为 $\alpha^2+3\alpha+2=0$

系统的特征根为 $\alpha_1=-1, \alpha_2=-2$

设系统的零输入响应为 $y_{zi}(n)=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$

$$y(-1)=-C_1-\frac{1}{2}C_2=0$$

$$y(-2)=C_1+\frac{1}{4}C_2=\frac{1}{2}$$

解得 $C_1=1$，$C_2=-2$

$$y_{zi}(n)=(-1)^n-2(-2)^n \quad n\ge 0$$

2、系统的零状态响应

➢ 定义：当系统的起始状态为零时，由系统的外部激励 $x(n)$ 产生的响应，用 $y_{zs}(n)$ 表示

➢ 数学模型：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

➢ 求解方法：

1) 经典法：直接求解起始状态为零的差分方程

2) 卷积法：利用信号分解和线性时不变系统的特性求解

3、零状态响应的直接求解法

直接求解起始状态为零的差分方程，也可得零状态响应。

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)$$

对于因果系统（激励信号在 $n=0$ 时接入系统），常给出 $y(-1), y(-2), y(-3),\dots,$ $y(-N)$ 作为边界条件。

零状态指 $y_{zs}(-1)$，$y_{zs}(-2)$，$y_{zs}(-3)$，…，$y_{zs}(-N)$ **都等于零**，

$y_{zs}(0)$，$y_{zs}(1)$，$y_{zs}(2)$，…，$y_{zs}(N-1)$ 可用迭代法求出。

完全响应=齐次解 + 特解

完全响应=自由响应+强迫响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(n)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{D(n)}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}\alpha_k^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)}_{\text{零状态响应}}$$

时域经典法确定零输入响应和零状态响应中的齐次解系数，初始条件的选取：

- 迭代：对于 N 阶差分方程，激励在 $n=0$ 时加入，确定零输入响应或零状态响应的齐次解的系数，需利用起始条件——N 个 $y(n)$ 值，其中 $n\geq 0$ 时的 $y(n)$ 可利用 $n<0$ 时的 $y(n)$ 迭代得到。

- 确定零输入响应的齐次解的系数：起始条件 $y(n)$ 中的 n 可正可负，且未必连续。给定的 $y(-1), y(-2), \ldots y(-N)$ 均可用；如果给定 $y(0), y(1), \ldots$等起始条件，要根据此时输入是否作用到了输出决定。或者，$n\geq 0$ 时的 $y(n)$ 可利用 $n<0$ 时的 $y(n)$ 迭代得到，但迭代时必须令差分方程右边等于零。

- 确定零状态响应的齐次解的系数：由于是零状态，令 $y(-1)=y(-2)=\ldots=y(-N+1)=0$，利用原方程（带有输入的）迭代求 $y(0), y(1)\ldots$。选取 N 个连续的起始条件，且至少需包含一个 $n\geq 0$ 的 $y(n)$，即可用。

例7-15：已知某线性时不变因果系统的差分方程式为: $y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$

(1) 若边界条件 $y(-1)=0$，求系统的完全响应。

零状态响应

(2) 若边界条件 $y(-1)=1$，求系统的完全响应。

解: (1) 方程的齐次解为 $C(0.9)^n$

由方程右端激励形式，选择特解为 D

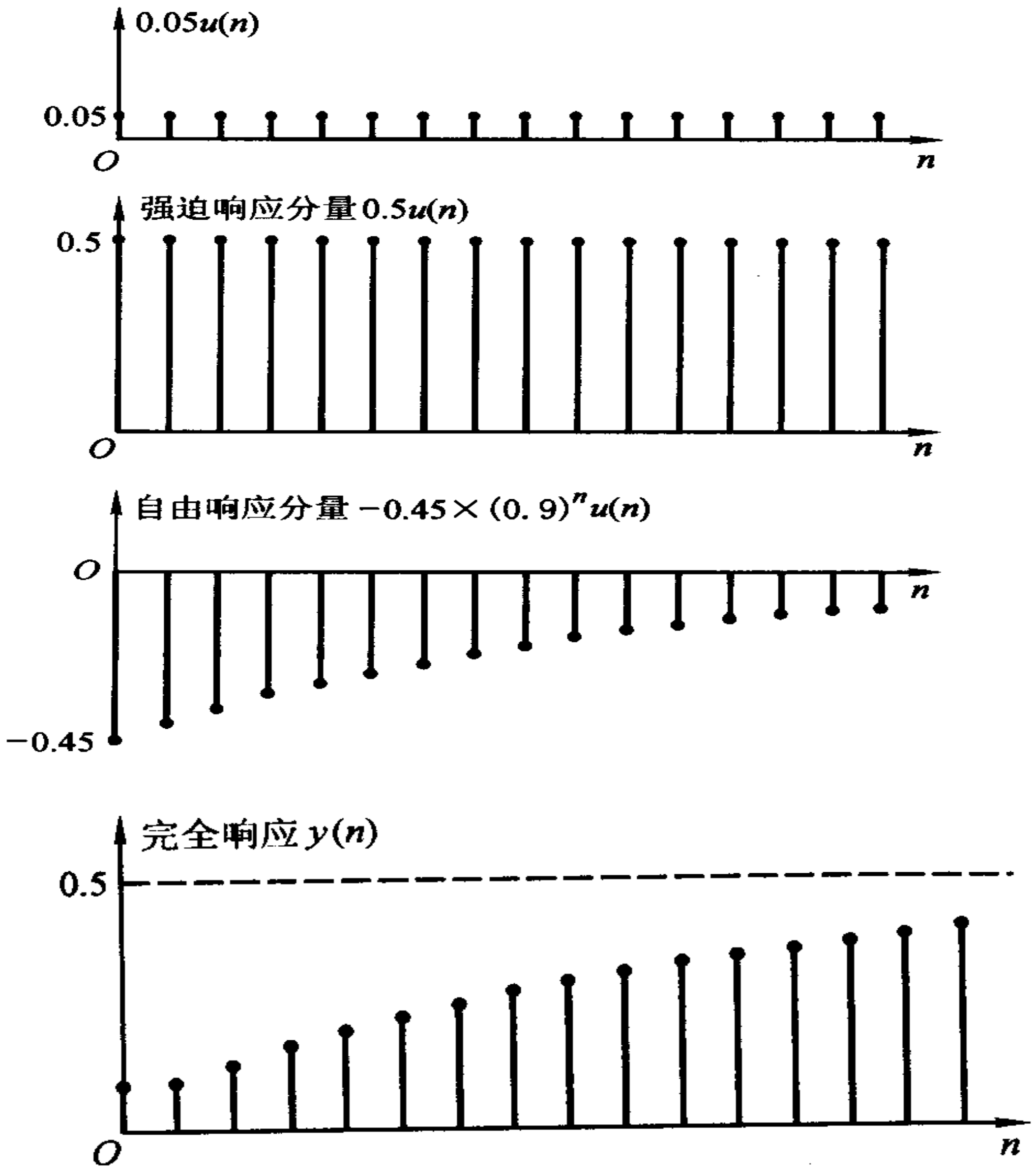
将特解代入差分方程： $D-0.9D=0.05$， $D=0.5$

完全解形式为： $y(n)=C(0.9)^n+0.5$

由 $y(-1)=0$，利用迭代法得到 $y(0)=0.9y(-1)+0.05=0.05$

$y(0)$ 代入完全解 $y(n)$：$0.05=C+0.5 \quad \Rightarrow C=-0.45$

$$\therefore y(n)=\left[-0.45\times(0.9)^n+0.5\right]u(n)$$


0.05u(n)
0.05
O
n
强迫响应分量0.5u(n)
0.5
O
n
自由响应分量 −0.45×(0.9)^n u(n)
O
n
−0.45
完全响应y(n)
0.5
O
n

(2) 在 (1) 中已求得系统的零状态响应 $=\left[-0.45\times(0.9)^n+0.5\right]u(n)$

求零输入响应：

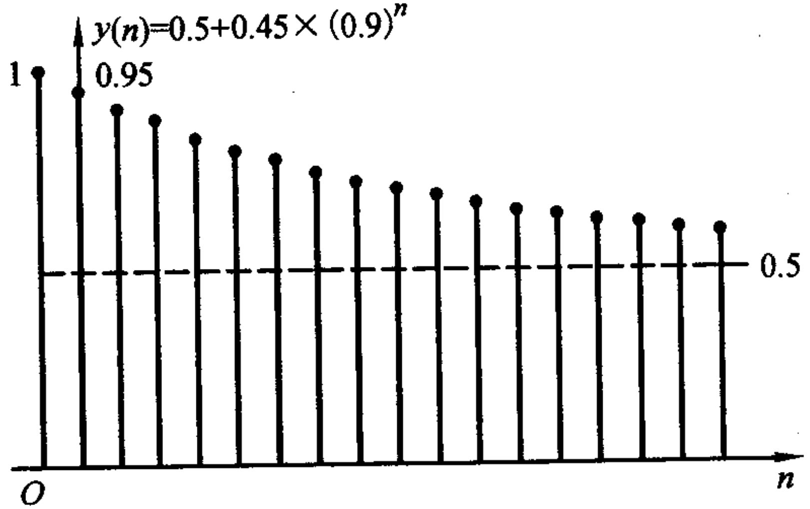
令激励为零，得差分方程：$y(n)-0.9y(n-1)=0$

零输入响应 $=C_{zi}\times(0.9)^n$

$y(-1)=1$ 代入： $1=C_{zi}\times(0.9)^{-1} \quad \Rightarrow C_{zi}=0.9$

完全响应： $y(n)=\underbrace{\left[-0.45\times(0.9)^n+0.5\right]}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{0.9\times(0.9)^n}_{\text{零输入响应}}$

$=\underbrace{0.45\times(0.9)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{0.5}_{\text{强迫响应}} \quad n\geq 0$



第 (2) 问，利用经典法求完全响应

方程的齐次解为 $C(0.9)^n$

由方程右端激励形式，选择特解为 D

将特解代入差分方程：$D-0.9D=0.05$， $D=0.5$

完全解形式为： $y(n)=C(0.9)^n+0.5$

$y(-1)=1$ 代入完全解 $y(n)$： $1=\dfrac{C}{0.9}+0.5 \quad \Rightarrow C=0.45$

物理意义更清楚

或由 $y(-1)=1$ 迭代得到 $y(0)=0.95$，代入完全解 $y(n)$:

$$0.95=C+0.5 \quad \Rightarrow C=0.45$$

$$\therefore y(n)=\left[0.45\times(0.9)^n+0.5\right]u(n)$$

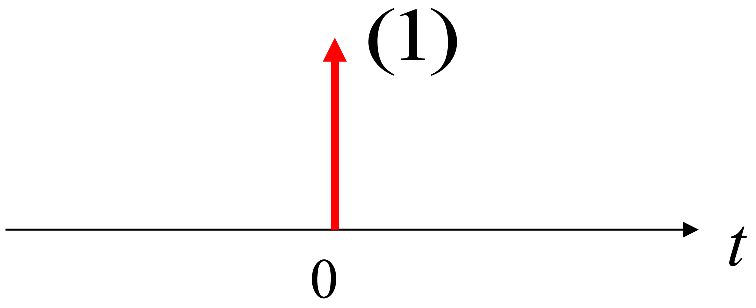
结果同前面一样！

7.5 离散时间系统的单位样值响应

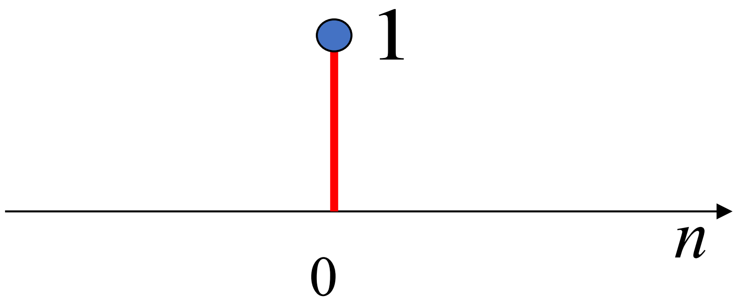
单位样值响应：是激励为 $\delta(n)$ 时产生的系统零状态响应，用 $h(n)$ 表示。

注意 $\delta(t)$ 和 $\delta(n)$ 的区别：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 & (t=0) \\ \delta(t) = 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



7.5.1 单位样值响应的求解

1、迭代法求系统单位样值响应

例7-16：已知离散时间系统的差分方程表达式 $y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$，求单位样值响应。

解：对于因果系统 $x(-1)=\delta(-1)=0,\quad y(-1)=h(-1)=0$

$$h(0)=\delta(0)+0.5y(-1)=1$$

$$h(1)=\delta(1)+0.5y(0)=0.5$$

$$h(2)=\delta(2)+0.5y(1)=(0.5)^2$$

……

$$\therefore\quad h(n)=(0.5)^n u(n)$$

2、将单位样值激励信号转化为起始条件

单位样值信号 $\delta(n)$，仅在 $n=0$ 时刻存在非零值。$n>0$ 之后激励为 0，此时系统相当于一个零输入系统，激励信号的作用已经转化为系统储能状态的变化。因此，单位样值响应的函数形式必然与零输入响应的函数形式相同。例如特征根为单根时，系统的单位样值响应为 $h(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n\cdot u(n)$ 。

α_k 为特征根，C_k 为待定系数，由单位样值函数的作用转换为系统的初始条件来决定。

2、将单位样值激励信号转化为起始条件

将 $\delta(n)$ 转化为起始条件，于是齐次解即 $n>0$ 时的零输入解就是单位样值响应 $h(n)$ 。

以上一题为例　$y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$

$\alpha-0.5=0$　　$\alpha=0.5$

零输入响应的形式为 $h(n)=C(0.5)^n$

$h(-1)=0$　　$h(0)=0.5h(-1)+\delta(0)=1$

$h(0)=C(0.5)^0=1$　　$C=1$

$\therefore h(n)=(0.5)^n u(n)$

例7-17: 已知系统差分方程，求单位样值响应。

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

解： $h(n)$ 满足方程 $h(n)-3h(n-1)+3h(n-2)-h(n-3)=\delta(n)$

1）零输入响应的形式 $\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=0, \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$

形式为 $h(n)=\left(C_1n^2+C_2n+C_3\right)u(n)$

2）起始条件

对于因果系统，有 $h(-1)=0, h(-2)=0, h(-3)=0$

代入差分方程，可推出 $h(0)=3h(-1)-3h(-2)+h(-3)+\delta(0)=1$

$$C_1 n^2 + C_2 n + C_3$$

以 $h(0)=1, h(-1)=0, h(-2)=0$ 作为起始条件

$$\begin{cases} 1 = C_3 \\ 0 = C_1 - C_2 + C_3 \\ 0 = 4C_1 - 2C_2 + C_3 \end{cases} \qquad C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{3}{2} \quad C_3 = 1$$

3）单位样值响应

$$h(n) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)u(n)$$

起始条件也可以是 $h(0), h(1), h(2)$

物理意义更清楚

<u>注意：选择起始条件的**基本原则**是**必须将 $\delta(n)$ 的作用体现在起始条件中**。</u>

例7-18：已知系统的差分方程为: $y(n+1)+2y(n)=x(n)$ 试求系统的单位样值响应 $h(n)$。

前向差分方程

解：

特征方程 $\alpha+2=0$ →特征根 $\alpha=-2$

单位样值响应的形式 $h(n)=C(-2)^n$

对于因果系统，当 $n<0$ 时，$h(n)=0$。这样当 $x(n)=\delta(n)$ 时，有 $h(n+1)+2h(n)=\delta(n)$

当 $n=-1$ 时 方程 → $h(0)=-2h(-1)+\delta(-1)=0$ 得 → $h(0)=0$

但无法确定系数 C，继续迭代！

0 时刻的响应不是由 0 时刻的激励决定的

当 $n=0$ 时 方程 → $h(1)=-2h(0)+\delta(0)=1$ 得 → $h(1)=1$

代入方程可得系数 → $C=-\frac{1}{2}$

单位样值响应 $h(n)=(-\frac{1}{2})\cdot(-2)^n=(-2)^{n-1}, n\geq 1$

注意：由于初始值 $h(0)=0$，所以 $h(n)$ 的表达式应该是 $n\geq 1$ 时成立。

3、利用线性时不变性求单位样值响应（推荐）

在 $n \neq 0$ 时，接入激励 $\delta(n-1)$，用线性时不变性来计算 $h(n)$。

变前项为后项

求差分方程 $y(n)+2y(n-1)=x(n-1)$ 的单位样值响应

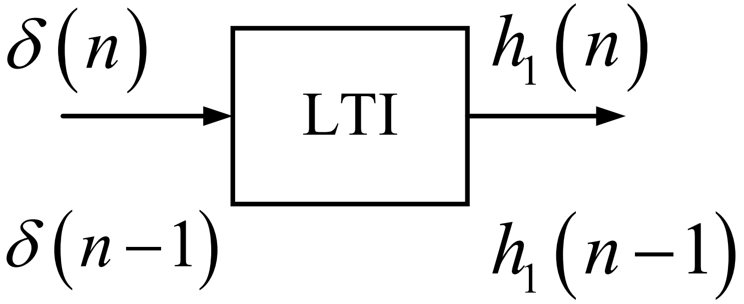
$$h_1(n)+2h_1(n-1)=\delta(n)$$

$$h(n)+2h(n-1)=\delta(n-1)$$

$$h_1(n)=C(-2)^n u(n)$$

$$h_1(0)=1 \qquad C=1 \qquad h_1(n)=(-2)^n u(n)$$

$$h(n)=h_1(n-1)=(-2)^{n-1}u(n-1)$$



例7-19：已知系统的差分方程模型，求单位样值响应。

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

解：1）齐次解的形式为 $C_1 2^n + C_2 3^n$

2）只考虑激励 $x(n)=\delta(n)$ 作用时系统的单位样值响应 $h_1(n)$

$$h_1(0)=1,\quad h_1(-1)=0 \qquad C_1=-2,\quad C_2=3$$

$$h_1(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)$$

3）只考虑激励 $-3x(n-2)=-3\delta(n-2)$

$$h_2(n)=-3h_1(n-2)=-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$$

利用LTI性质

4)
$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$$
$$=(3^{n+1}-2^{n+1})\left[\delta(n)+\delta(n-1)+u(n-2)\right]-(3^n-3\times 2^{n-1})u(n-2)$$
$$=\delta(n)+5\delta(n-1)+(2\times 3^n-2^{n-1})u(n-2)$$

7.5.2 根据单位样值响应分析系统的因果性和稳定性

- 因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。即响应只取决于此时以及以前的激励。
- 离散线性时不变系统是因果系统的充分必要条件是

$$n<0 \quad h(n)=0 \quad 或 \quad h(n)=h(n)u(n)$$

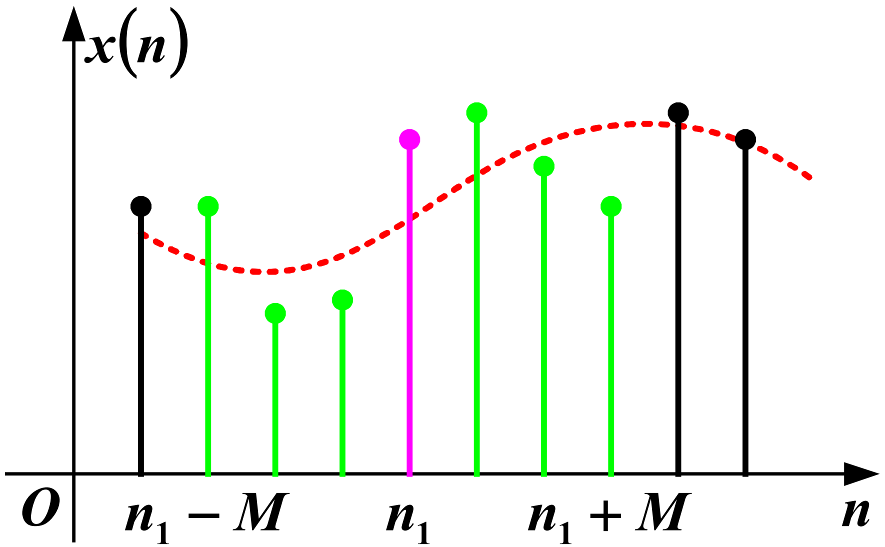
- 稳定系统：输入有界则输出必定有界。
- 离散线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| \le M, M为有界正值$$

❖ 非因果系统举例（教材30页）

滑动平均滤波器：为考察一段时间内的慢变化趋势，可以利用移动平滑系统滤除高频成分。

$$y(n)=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}x(n-k)$$



单选题 1分

设置

已知某系统的单位样值响应 $h(n)=a^n u(n)$ ，它是否因果系统？是否稳定系统？

A 因果，稳定

B 非因果，稳定

C 因果，$|a|<1$ 时稳定，$|a|>1$ 时不稳定

D 因果，$|a|<1$ 时不稳定，$|a|>1$ 时稳定

提交

例7-20：已知某系统的单位样值响应 $h(n)=a^n u(n)$，它是否因果系统？是否稳定系统？

解：$n<0, u(n)=0 \quad \therefore n<0, h(n)=a^n u(n)=0$

该系统是因果系统。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|a|^n=\begin{cases}|a|<1 & \dfrac{1}{1-|a|} & \text{有界稳定} \\ |a|>1 & \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} & \text{发散不稳定}\end{cases}$$

例7-21：已知系统的差分方程，求系统的单位样值响应 $h(n)$，并判断系统稳定性。

$$y(n)+\frac{1}{5}y(n-1)=x(n)+2x(n-1)+3x(n-2)$$

解：先将方程右边只留下 $\delta(n)$，求出一个单位样值响应

$$h_1(n)+\frac{1}{5}h_1(n-1)=\delta(n)$$

根据特征根写出齐次解形式 $\alpha=-\frac{1}{5}$ $\therefore h_1(n)=C(-\frac{1}{5})^n u(n)$

因为 $h_1(-1)=0$，所以得到 $h_1(0)=1$，则 $h_1(n)=(-\frac{1}{5})^n u(n)$

根据 LTI 系统的性质：$h(n)=h_1(n)+2h_1(n-1)+3h_1(n-2)$

$$h(n)=h_1(n)+2h_1(n-1)+3h_1(n-2)=(-\frac{1}{5})^n u(n)+2(-\frac{1}{5})^{n-1}u(n-1)+3(-\frac{1}{5})^{n-2}u(n-2)$$

$$=\left[(-\frac{1}{5})^n\delta(n)+(-\frac{1}{5})^n\delta(n-1)+(-\frac{1}{5})^n u(n-2)\right]+2\left[(-\frac{1}{5})^{n-1}\delta(n-1)+(-\frac{1}{5})^{n-1}u(n-2)\right]+3(-\frac{1}{5})^{n-2}u(n-2)$$

$$=\delta(n)+\left(-\frac{1}{5}+2\right)\delta(n-1)+\left[(-\frac{1}{5})^n+2(-\frac{1}{5})^{n-1}+3(-\frac{1}{5})^{n-2}\right]u(n-2)$$

$$=\delta(n)+\frac{9}{5}\delta(n-1)+\left[\left(\frac{1}{25}-\frac{2}{5}+3\right)(-\frac{1}{5})^{n-2}\right]u(n-2)$$

$$=\delta(n)+\frac{9}{5}\delta(n-1)+\frac{66}{25}(-\frac{1}{5})^{n-2}u(n-2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=1+\frac{9}{5}+\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{66}{25}(-0.2)^n\right|<\infty$$

稳定系统

作 业

教材习题

基础题：7-12(1)(2)，7-26，7-29，7-30

加强题：7-22，7-27