1、 运用基本概念计算数字特征

1.1 （2003 年，数学一）已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求乙箱中次品件数X的数学期望。

【答案】

解析 X 的可能取值为 0,1,2,3，取出 k 件次品（$k=0,1,2,3$）的取法有 $C_3^kC_3^{3-k}$ 种。样本空间即从甲箱中取出 3 件产品的总的取法数 C_6^3。所以 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3},k=0,1,2,3$，即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此，由离散型随机变量数学期望的定义 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\cdot P\{X=x_k\}$，可得

$$E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}。$$

1.2（2015 年，数学一、数学三）设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2,\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases}$ 对 X 进行观测，当第二次出现大于 3 的观测值时停止，Y为观测数。

求：（1）Y的概率分布；（2）$E(Y)$。

【答案】

思路分析 (1)先考虑 Y 可能的取值，再逐一计算其概率；(2)运用定义，用 Y 的每一个取值乘以各自的概率，再求和，由于 Y 的取值有无穷多个，所以这里需要求级数的和。

解析 (1)已知要求观测到第二次出现大于 3 的观测值时停止，所以 Y 的取值至少为 2，所有可能的取值为 2,3,…。为了计算 $P\{Y=k\},k=2,3,\cdots$，要先求出 $P\{X>3\}$。由 X 的概率密度可知 $p=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$。

而$\{Y=k\}$代表前 $k-1$ 次观测中恰有一次出现 $X>3$，而且最后一次也满足 $X>3$，则有

$$P\{Y=k\}=C_{k-1}^1p\,(1-p)^{k-2}p=(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2},k=2,3,\cdots。$$

(2)由数字特征的定义可知

$$E(Y)=\sum_{k=2}^{\infty}kP\{Y=k\}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}。$$

为了求上述级数的和，需要先计算幂级数 $h(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2},-1<x<1$ 的和函数。

由幂级数的逐项积分定理可知

$$h(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\left(\sum_{k=2}^{\infty}kx^{k-1}\right)'=\left(\sum_{k=2}^{\infty}x^{k}\right)''=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{1-x}+\frac{2x(2-x)}{(1-x)^3},$$

故 $E(Y)=\frac{1}{8^2}h\left(\frac{7}{8}\right)=16$。

1.3（2010 年，数学三）箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1，2，3，现从箱中随机取出 2 个球，记X为取出的红球个数，Y为取出的白球个数。

（1）求随机变量(X,Y)的概率分布；

（2）求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

【答案】

解 析 （1）X 的所有可能取值为 0,1,Y 的所有可能取值为 0,1,2。

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5},P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15},P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15},P\{X=1,Y=2\}=\frac{0}{C_6^2}=0,$$

因此二维离散型随机变量 X,Y 的联合分布及边缘分布为

X \ Y	0	1	2	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$(2)E(XY)=1\cdot1\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{15},E(X)=0\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3},E(Y)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{3},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}。$$

1.4（2002 年，数学三）假设随机变量U在区间[-2，2]上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\le -1\\ 1, & U>-1\end{cases},\quad Y=\begin{cases}-1, & U\le 1\\ 1, & U>1\end{cases}$$

试求：(1)X和 Y的联合概率分布；（2）$D(X+Y)$。

【答案】

解析 (1)(X,Y)只有四个可能取值$(-1,-1),(-1,1),(1,-1)$和$(1,1)$。根据题意,有

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant -1,U\leqslant 1\}=P\{U\leqslant -1\}=\frac{-1-(-2)}{2-(-2)}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant -1,U>1\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\leqslant 1\}=P\{-1<U\leqslant 1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}=\frac{1}{4},$$

于是,(X,Y)的分布律为

X \ Y	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2)先求出$X+Y$的分布律,$X+Y$的可能取值有$-2,0,2$,分别计算其概率可得

$$P\{X+Y=-2\}=\frac{1}{4},P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2},P\{X+Y=2\}=\frac{1}{4},$$

可知$X+Y$的分布律为

$X+Y$	-2	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

所以 $$E(X+Y)=-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=0,E[(X+Y)^2]=(-2)^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=2。$$

可知 $$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=2。$$

1.5 (2016年，数学一）随机试验E有三种两两不相容的结果A_1，A_2，A_3，且三种结果发生的概率均为$\frac{1}{3}$，将试验E独立重复做两次，X表示两次试验中结果A_1发生的次数，Y表示两次试验中结果A_2发生的次数，则X，Y的相关系数为（）。

(A)$-\frac{1}{2}$　　(B)$-\frac{1}{3}$

(C)$\frac{1}{3}$　　(D)$\frac{1}{2}$

【答案】

思路分析 先计算出联合分布律，再按照相关系数的计算公式进行计算。

解析 二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

由联合分布不难求得

$$E(X)=E(Y)=1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}, E(XY)=1\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9},$$

可知

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{2}{9}。$$

又由于 $E(X^2)=E(Y^2)=1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，则 $D(X)=D(Y)=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$。从而 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{1}{2}$。故选 A。

2、 运用常用公式计算数值特征

2.1（2010 年，数学一）设随机变量X的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{C}{k!}, k=0,1,2,\ldots,$$

则$E(X^2)$=______________。

【答案】

思路分析 由分布的特征很容易联想到泊松分布，先求出常数 C，再结合泊松分布的基本公式进行计算。

解析 根据离散型随机变量概率分布的性质可知

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=Ce,$$

整理得 $C=e^{-1}$，即

$$P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}=\frac{1^k}{k!}e^{-1}。$$

故 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(X)=1, D(X)=1$，根据方差的计算公式有

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1+1^2=2。$$

2.2 （2004 年，数学一）设随机变量X服从参数为λ的指数分布，则$P\{X>\sqrt{D(X)}\}$=________。

【答案】

思路分析 指数分布的方差为$\frac{1}{\lambda^2}$，所以本题相当于求 $P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}$，对 X 的概率密度在相应区间上积分即可。

解析 指数分布的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$其方差 $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$。则

$$P\{X>\sqrt{D(X)}\}=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}=\frac{1}{e}。$$

2.3 （2011 年，数学一）设二维随机变量（X,Y）服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$, 则$E(XY^2)$=_______.

【答案】

解析 根据题意，二维随机变量(X,Y)服从$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，故$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$。因为$\rho_{XY}=0$，所以由二维正态分布的性质知随机变量$X,Y$独立。从而有

$$E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=\mu\{D(Y)+[E(Y)]^2\}=\mu(\mu^2+\sigma^2)。$$

2.4 （2009 年，数学一）设随机变量 X 的分布函数为$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，则$E(X)$ = ____________。

【答案】

(A)0 (B)0.3

(C)0.7 (D)1

思路分析 先求出 X 的概率密度，用它乘以 x 之后再从负无穷到正无穷积分，注意对正态分布数字特征公式的运用。

解析 因为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，所以

$$F'(x)=0.3\varphi(x)+0.7\cdot\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

因此 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[0.3\varphi(x)+0.7\cdot\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]dx$$

$$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)dx。$$

由于 $\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，所以$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=0$，而$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}2}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}}$，这是正态分布 $N(1,2^2)$的概率密度，所以$\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)dx=1$，代入可知 $E(X)=0.7$。故选 C。

2.5 （2015 年，数学一）设随机变量X,Y不相关，且$E(X)=2,E(Y)=1,D(X)=3$，则$E[X(X+Y-2)]=$ ________。

【答案】

解析 $E[X(X+Y-2)]=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)$

$=D(X)+[E(X)]^2+E(X)E(Y)-2E(X)=3+2^2+2\times1-2\times2=5$。

故选 D。

2.6 （2016 年，数学三）设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,4)$，则$D(XY)$=________。

(A)6 (B)8

(C)14 (D)15

【答案】

解析 由方差的基本计算公式可得 $D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2$，由于 X,Y 独立，可知 $E(XY)=E(X)E(Y)=1$，$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=3\times5=15$，则 $D(XY)=14$。故选 C。

2.7 (2005 年，数学三)设$X_1,X_2,\ldots,X_n(n>2)$为两两独立且均服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，记$Y_i=X_i-\bar{X},i=1,2,\ldots,n$。求：

(1) Y_i 的方差 $D(Y_i)$，$i=1,2,\cdots,n$；

(2) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；

(3)若 $E[c(Y_1+Y_n)^2]=\sigma^2$，求常数 c。

【答案】

解析 由题设可知 $E(X_i)=0,D(X_i)=\sigma^2(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{n}=\frac{n\times0}{n}=0,$$

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}。$$

(1) $D(Y_i)=D(X_i-\bar{X})=D(X_i)+D(\bar{X})-2\mathrm{Cov}(X_i,\bar{X})$，其中 $D(X_i)=\sigma^2,D(\bar{X})=\frac{1}{n}\sigma^2$，

$$\mathrm{Cov}(X_i,\bar{X})=\mathrm{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}\left(X_i,\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)。$$

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两独立，可知当$j\neq i$ 时 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0$，从而

$$\mathrm{Cov}(X_i,\bar{X})=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_i)=\frac{D(X_i)}{n}=\frac{\sigma^2}{n},D(X_i-\bar{X})=\frac{n-1}{n}\sigma^2。$$

(2)由协方差的性质可知

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})=\mathrm{Cov}(X_1,X_n)-\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(\overline{X},X_n)+\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{X}),$$

其中

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_n)=0,\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})=\mathrm{Cov}(\overline{X},X_n)=\frac{\sigma^2}{n},\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{X})=D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},$$

代入可知 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=-\frac{\sigma^2}{n}$。

(3) $E[c(Y_1+Y_n)^2]=cE[(Y_1+Y_n)^2]=c\{D(Y_1+Y_n)+[E(Y_1+Y_n)]^2\}$,又

$$E(Y_1+Y_n)=E(Y_1)+E(Y_n)=E(X_1)-E(\overline{X})+E(X_n)-E(\overline{X})=0,$$

$$D(Y_1+Y_n)=D(Y_1)+D(Y_n)+2\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\frac{n-1}{n}\sigma^2+\frac{n-1}{n}\sigma^2+2\left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)=\frac{2n-4}{n}\sigma^2。$$

因此

$$E[c(Y_1+Y_n)^2]=c\frac{2n-4}{n}\sigma^2=\frac{2(n-2)}{n}c\sigma^2,$$

由 $E[c(Y_1+Y_n)^2]=\sigma^2$ 得 $\frac{2(n-2)}{n}c\sigma^2=\sigma^2$,解得 $c=\frac{n}{2(n-2)}$。

3、 相关系数的特殊性质

3.1 (2012,数学一)将长度为1m的木棒随机截成两段,则两段长度的相关系数为(　　)。

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) -1

【答案】

思路分析 注意到 $X+Y=1$,则可以利用相关系数的特殊性质直接计算。

解 析 设两段长度分别为 X,Y,显然 $X+Y=1$,即 $Y=-X+1$,故两者是线性关系,且是负相关,所以相关系数为-1。故选D。

3.2 (2003年,数学三)设随机变量X和 Y的相关系数为0.9,若$Z=X-0.4$,则 Y与 Z的相关系数为______________.

【答案】

思路分析 直接将 $Z=X-0.4$ 代入相关系数的定义式，找出 ρ_{YZ} 和 ρ_{XY} 的关系。

解析 $\text{Cov}(Y,Z)=\text{Cov}(Y,X-0.4)=\text{Cov}(Y,X)+\text{Cov}(Y,-0.4)=\text{Cov}(X,Y)$，

且 $D(Z)=D(X)$，则

$$\rho_{YZ}=\frac{\text{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho_{XY}=0.9。$$

4、 大数定律

4.1 设$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$为独立同分布的随机变量，$E(\xi_i)=\mu$，$D(\xi_i)=\sigma^2(i=1,2,\dots,n)$，若令$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，则由切比雪夫不等式可知$P\{|\bar{\xi}-\mu|\geq 2\sigma\}\leq$ ______________。

【答案】

解析 由题意知 $E(\bar{\xi})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i)=\mu, D(\bar{\xi})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)=\frac{\sigma^2}{n}$，根据切比雪夫不等式可知 $P\{|\bar{\xi}-\mu|\geqslant 2\sigma\}\leqslant\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{4\sigma^2}=\frac{1}{4n}$。

4.2 （2003 年，数学三）设$X_1,X_2,\dots,X_n$独立同分布且均服从参数为 2 的指数分布，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于________________。

【答案】

解析 本题中 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 满足大数定律的条件，且

$$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

因此根据大数定律有 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X_i^2)=\frac{1}{2}$。

4.3 假设随机变量序列$X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$独立同分布且$E(X_n)$=0，则$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\sum_{i=1}^{n}X_i<n\}$=(　　)。

(A) 0　　(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

3.【答案】D

解析 已知随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布且 $E(X_n)=0$，由辛钦大数定律可知，$\overline{X}$ 依概率收敛于 0，即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0$。由依概率收敛的定义可知，对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1$。本题可取 $\varepsilon = 1$，则 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < n\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 1\right\} = 1$，进而 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < 1\right\} = 1$。

5、 中心极限定理

5.1 (2001 年，数学三）生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977。($\Phi(2) = 0.977$，其中$\Phi(x)$是标准正态分布函数）

【答案】

解析 设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是装运的第 i 箱的重量(单位:千克)，n 是所求箱数。由题设，可以将 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 视为独立同分布的随机变量，n 箱的总重量 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 是独立同分布随机变量之和。由题设，有 $E(X_i) = 50$，$\sqrt{D(X_i)} = 5$（单位:千克），所以

$$E(S_n) = E(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) = 50n,$$
$$D(S_n) = D(X_1+X_2+\cdots+X_n) = D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n) = 25n。$$

根据中心极限定理，S_n 近似服从正态分布 $N(50n, 25n)$，箱数 n 满足

$$P\{S_n \leqslant 5\,000\} = P\left\{\frac{S_n - 50n}{5\sqrt{n}} \leqslant \frac{5\,000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \text{(将 } S_n \text{ 标准化)}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{1\,000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2),$$

由此得 $\frac{1\,000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$，故 $n < 98.019\,9$，即最多可以装 98 箱。

5.2 检查员逐个检查某种产品，每次花 10 秒检查一个，但有的产品需要重复检查一次用 10 秒，假设每个产品需要重复检查的概率为$\frac{1}{2}$，试求在 8 小时内检查的产品数大于1 900的概率。($\Phi(1.38)=0.916$)

【答案】

6. 解析 令 $X_k(k=1,2,\cdots,1\,900)$表示检查第 k 个产品所用的时间(单位:秒)，则 X_k 的分布律如下表，且 $X=\sum_{k=1}^{1\,900}X_k$。

X_k	10	20
p	0.5	0.5

由题意可知 $X_1,X_2,\cdots,X_{1\,900}$独立同分布，且 $E(X_k)=10\times0.5+20\times0.5=15$，

$$D(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=10^2\times0.5+20^2\times0.5-15^2=25。$$

由中心极限定理可知，$X=\sum_{k=1}^{1\,900}X_k$ 近似服从正态分布 $N(28\,500,47\,500)$，则所求概率为

$$P\{X<3\,600\times8\}=P\left\{\sum_{k=1}^{1\,900}X_k<28\,800\right\}=P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{1\,900}X_k-28\,500}{\sqrt{47\,500}}<\frac{28\,800-28\,500}{\sqrt{47\,500}}\right\}$$

$$\approx\Phi(1.38)=0.916。$$