

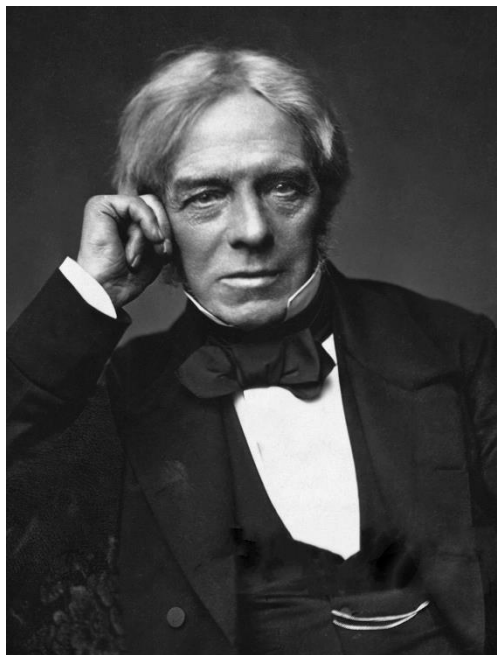
# 第八章

## 电磁感应 电磁场



# 教学基本要求

- 一 掌握并能熟练应用法拉第电磁感应定律和楞次定律来计算感应电动势，并判明其方向。
- 二 理解动生电动势和感生电动势的本质。了解有旋电场的概念。
- 三 了解自感和互感的现象，会计算几何形状简单的导体的自感和互感。
- 四 了解磁场具有能量和磁能密度的概念，会计算均匀磁场和对称磁场的能量。
- 五 了解位移电流和有旋电场的基本概念以及麦克斯韦方程组（积分形式）的物理意义。
- 六 了解电磁波产生及其基本性质。



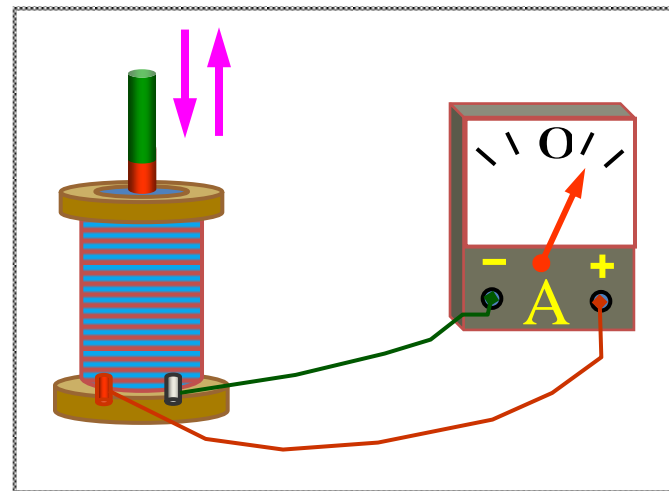
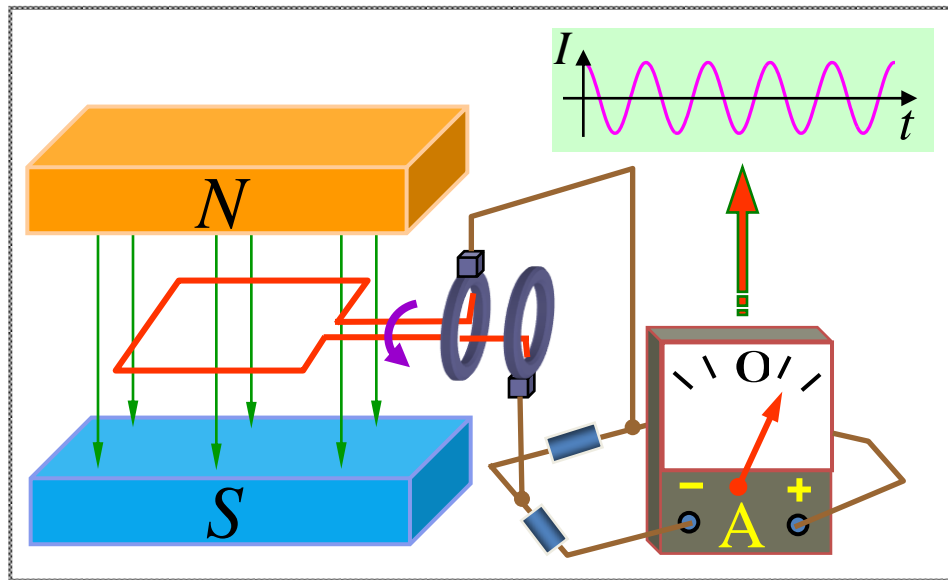
**法拉第**

**Michael Faraday**

**1791—1867**

伟大的英国物理学家和化学家。他创造性地提出场的思想，磁场这一名称是法拉第最早引入的。他是电磁理论的创始人之一，于1831年发现**电磁感应现象**，后又相继发现电解定律，物质的抗磁性和顺磁性，以及光的偏振面在磁场中的旋转。

# 8-1 电磁感应定律



# 一、电磁感应现象

当穿过一个闭合导体回路所围面积的磁通量发生变化时，不管这种变化是由于什么原因所引起的，回路中就有电流。这种现象叫做**电磁感应现象**。

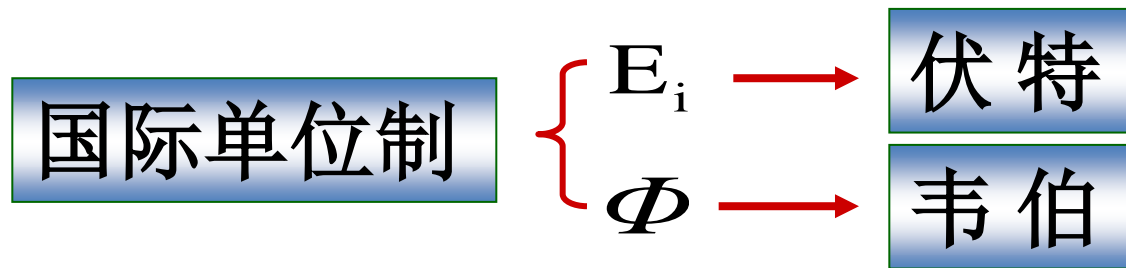
**感应电流**：回路中所出现的电流。

在回路中出现电流，表明回路中有电动势存在。  
这种在回路中由于磁通量的变化而引起的电动势，叫做**感应电动势**。

## 二、电磁感应定律

当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化时，不论这种变化是什么原因引起的，回路中都会建立起感应电动势，且此感应电动势正比于磁通量对时间变化率的负值。

$$E_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$



(1) 闭合回路由  $N$  匝密绕线圈组成

$$\mathbf{E}_i = -\frac{d\psi}{dt}$$

磁通匝数 (磁链)  $\psi = N\Phi$

(2) 若闭合回路的电阻为  $R$  , 感应电流为

$$I_i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2)$$



- 感应电动势的方向

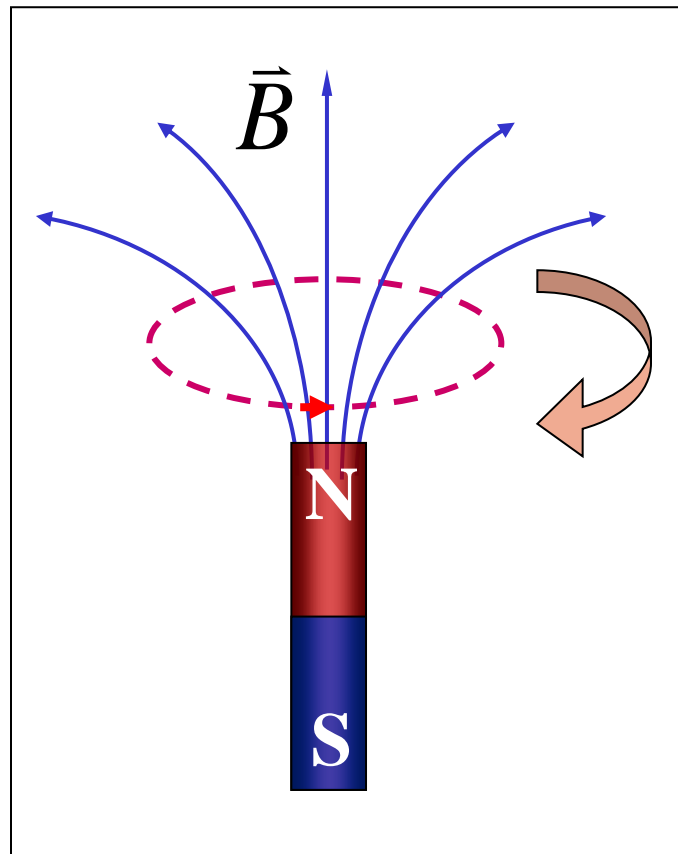
$$E_i = \boxed{-} \frac{d\Phi}{dt}$$

∴  $\vec{B}$  与回路成右螺旋

∴  $\Phi > 0$

$$\frac{d\Phi}{dt} > 0 \quad E_i < 0$$

$E_i$  与回路取向相反





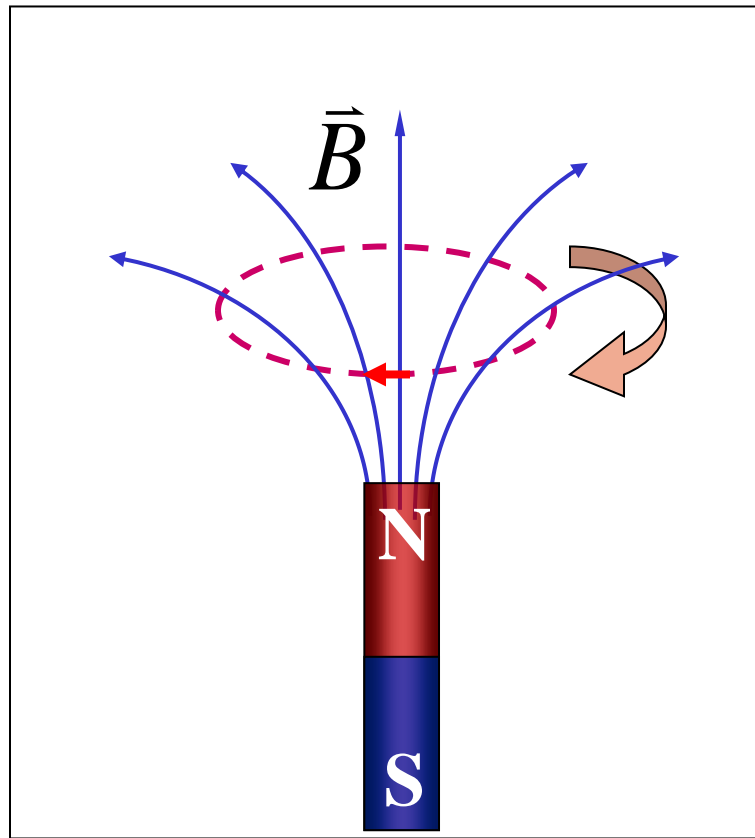
$$\mathbf{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$\vec{B}$  与回路成左螺旋

$$\Phi < 0$$

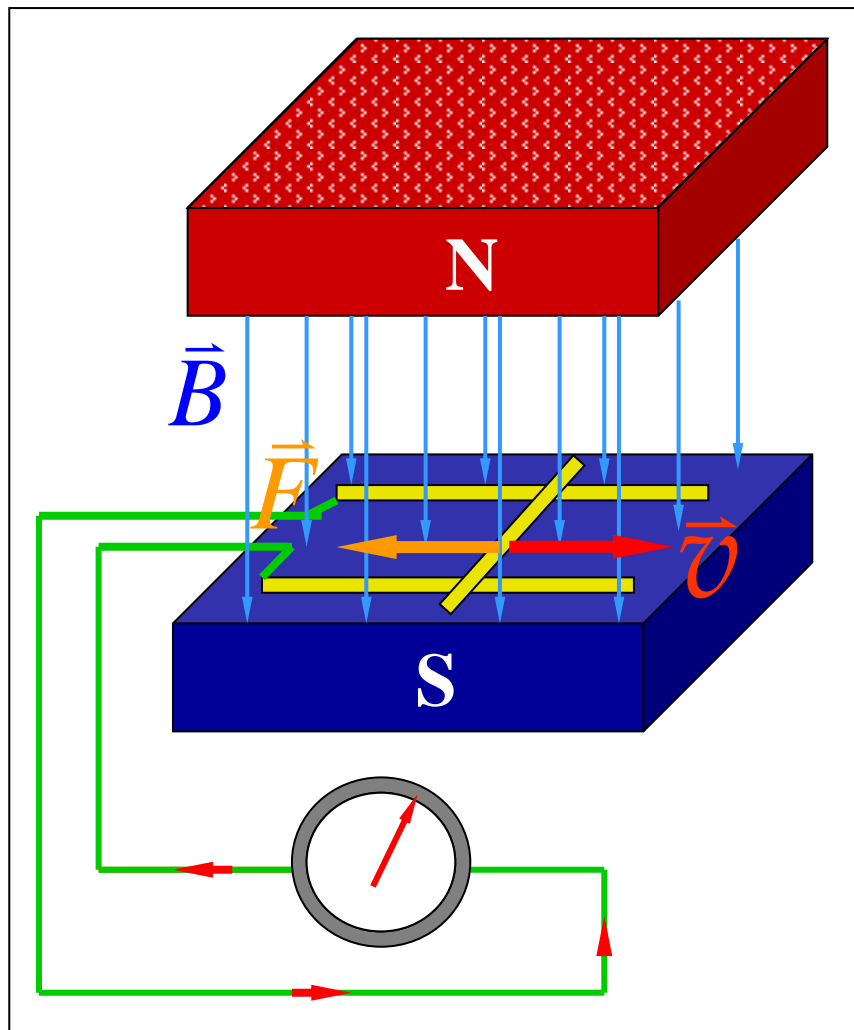
$$\frac{d\Phi}{dt} < 0 \quad \mathbf{E}_i > 0$$

$\mathbf{E}_i$  与回路取向相同

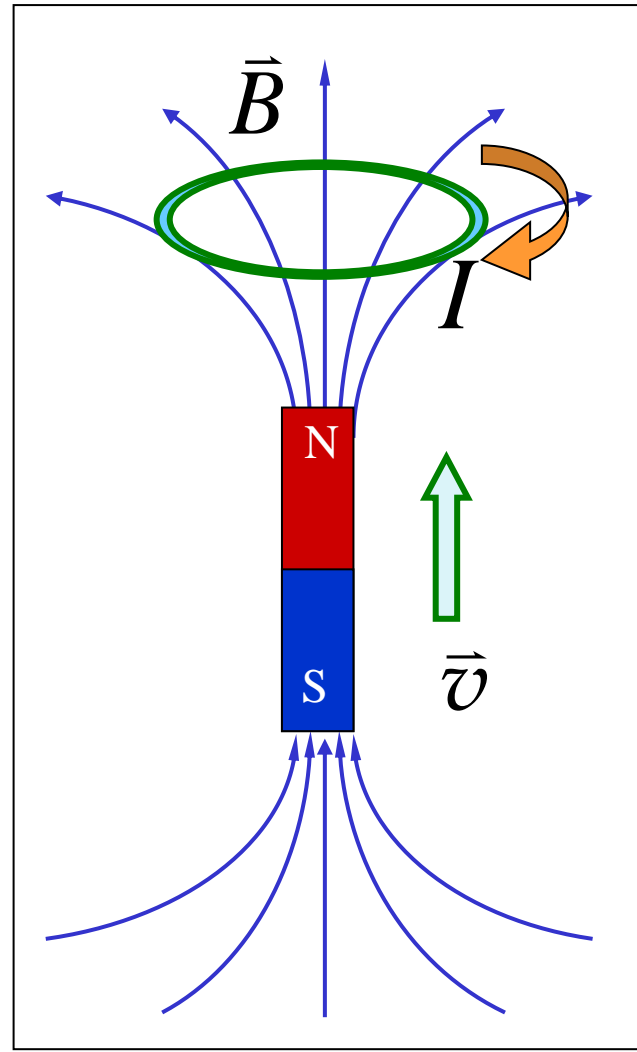
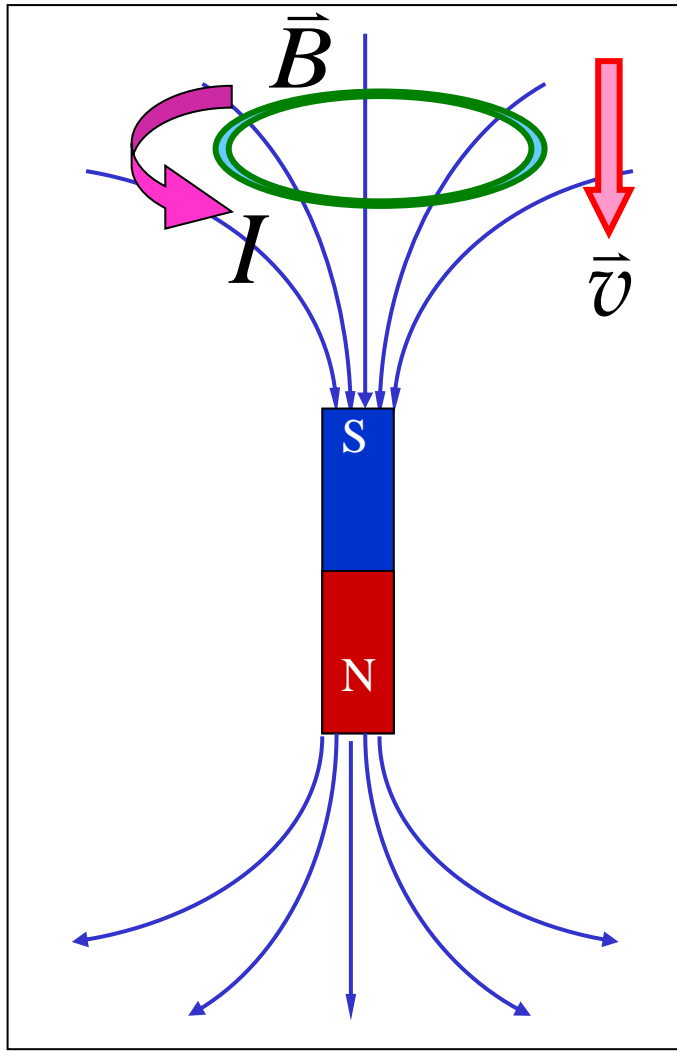


### 三、楞次定律

闭合的导线回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因（反抗相对运动、磁场变化或线圈变形等）。



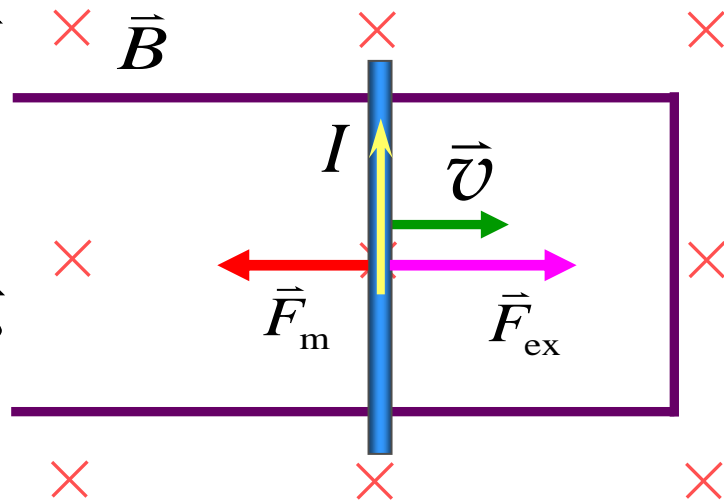
# 用楞次定律判断感应电流方向



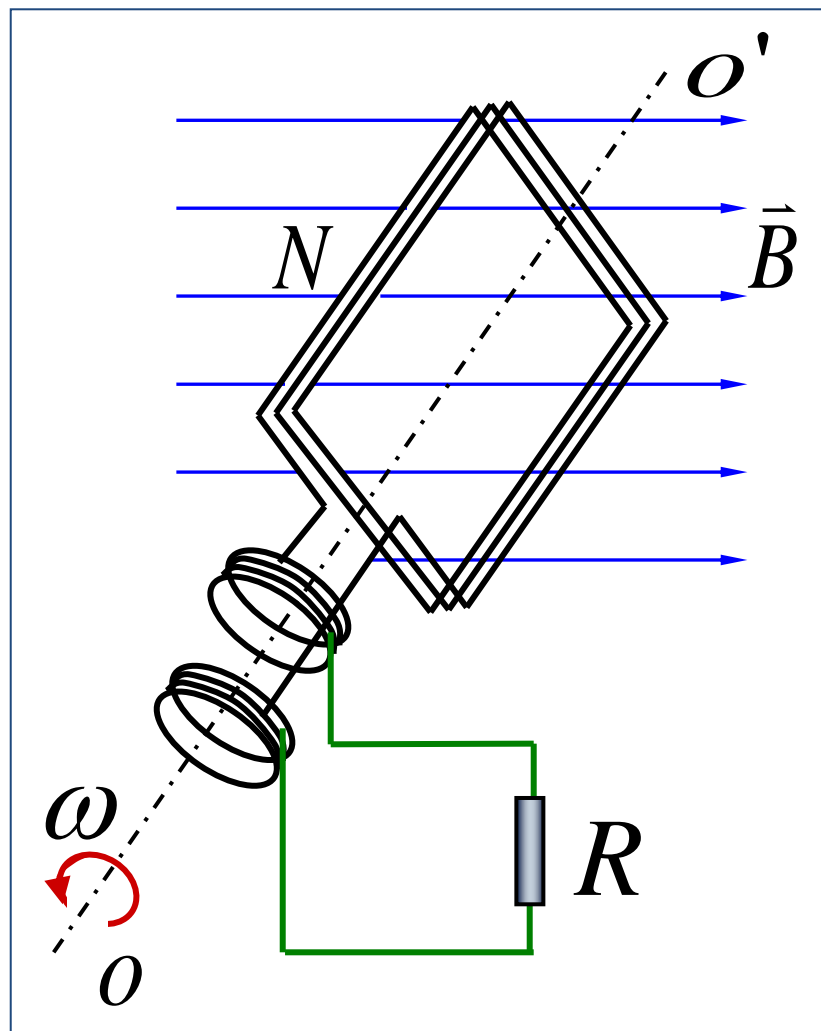
●楞次定律是能量守恒在电磁感应现象中的体现。

感应电流导致导体受磁场力（安培力），外力需反抗磁场力做功，并通过产生的感应电流转化为电路中的焦耳热，这符合能量守恒的规律。

否则，如果感应电流的方向与楞次定律规定的方向相违，则只需开始有一点力使导体移动，运动就会不断加速，电流会不断增大，产生无限大的电能。显然这违反了能量守恒定律！



**例** 在匀强磁场中，置有面积为  $S$  的可绕轴转动的  $N$  匝线圈。若线圈以角速度  $\omega$  作匀速转动。**求** 线圈中的感应电动势。



解： 设  $t = 0$  时，

$\vec{e}_n$  与  $\vec{B}$  同向， 则  $\theta = \omega t$

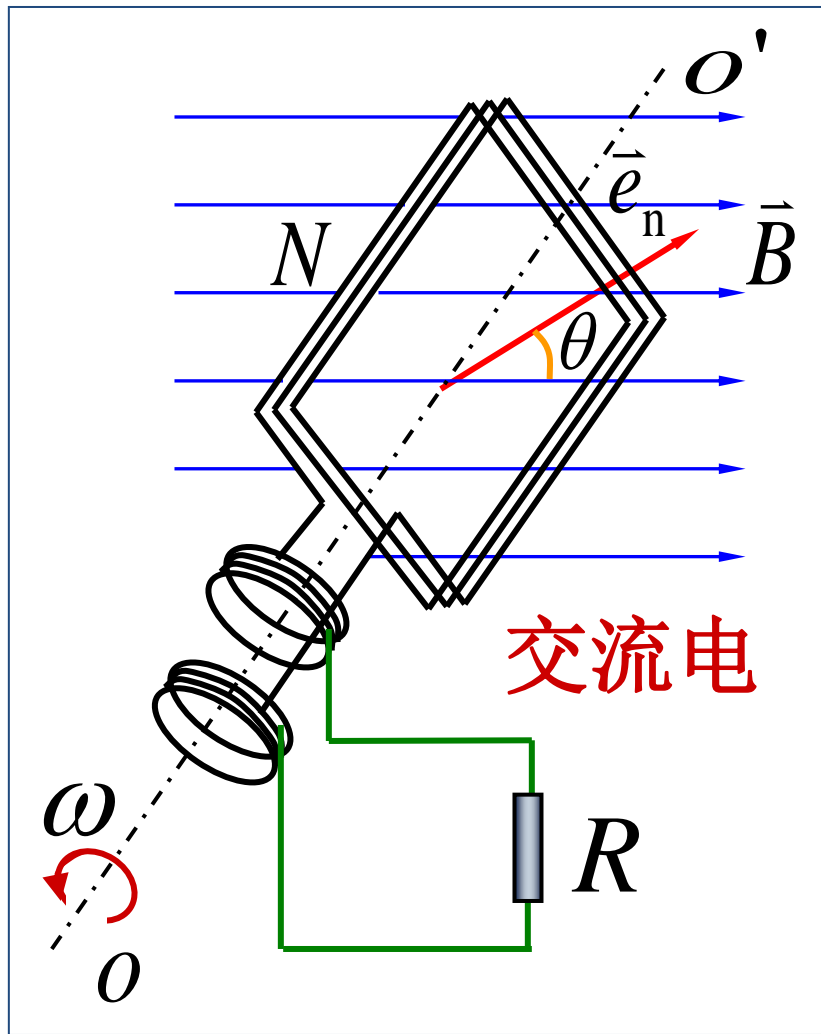
$$\psi = N\Phi = NBS \cos \omega t$$

$$E = -\frac{d\psi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t$$

令  $E_m = NBS\omega$

则  $E = E_m \sin \omega t$

$$i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

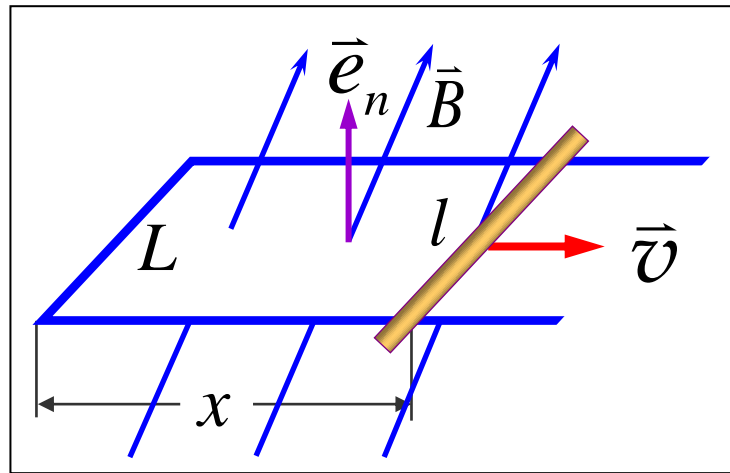


**例** 均匀磁场与导体回路法线成 $30^\circ$  夹角，磁场大小与时间成正比变化： $B = Kt$ . 回路可动边  $l$  以速率  $v$  向右滑动，求任一时刻回路中的感应电动势（初始时刻可动边位于最左侧）。

**解：** 时刻  $t$ ,  $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \theta$   
 $= B \cos \theta lx = \frac{\sqrt{3}}{2} Blx$

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{2} lx \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\sqrt{3}}{2} lB \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} lxK - \frac{\sqrt{3}}{2} Blv = -\frac{\sqrt{3}}{2} l(vt)K - \frac{\sqrt{3}}{2} (Kt)lv = -\sqrt{3} Klvt$$




负号说明感应电动势与回路的绕行方向  $L$  相反。



## 8-2 动生电动势和感生电动势

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

引起磁通量变化的原因：

(1) 稳恒磁场中的导体运动，或者回路面积变化、取向变化等  动生电动势

(2) 导体不动，磁场变化

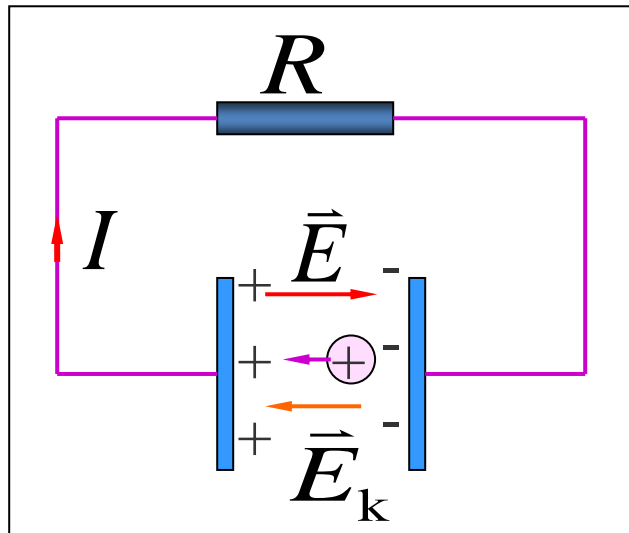
 感生电动势

## 回顾：电源电动势

$$E = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_{in} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

● 非静电电场强度： $\vec{E}_k$

作用在单位正电荷上的非静电力。



◆ 电动势  $E = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

◆ 闭合电路的总电动势  $E = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

# 一、动生电动势

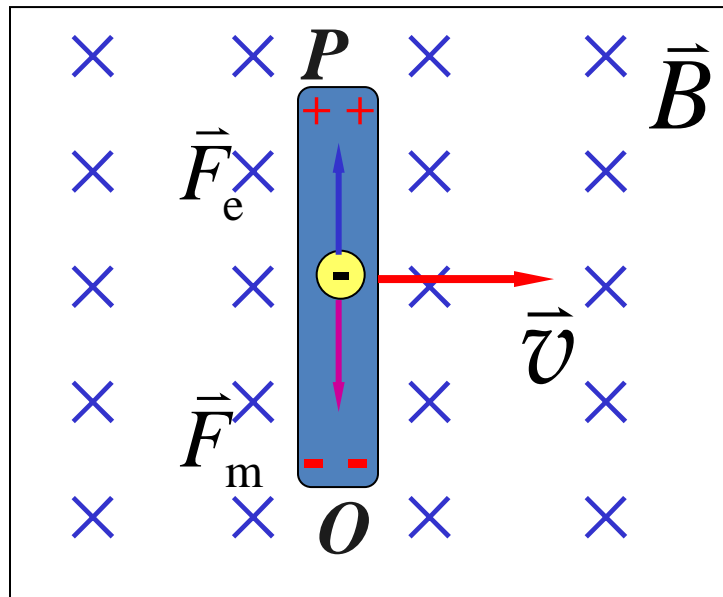
动生电动势的**非**静电力场来源  $\Rightarrow$  洛伦兹力

$$\vec{F}_m = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

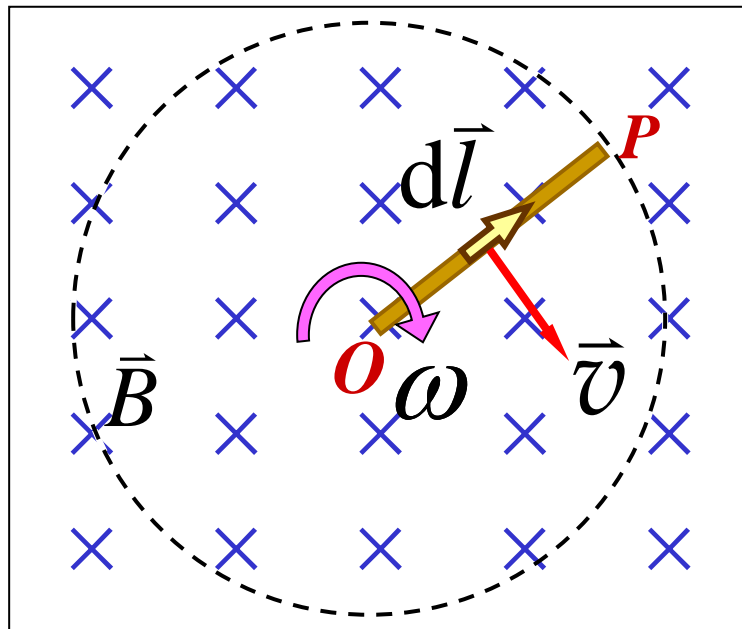
平衡时  $\vec{F}_m = -\vec{F}_e$

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned} E_i &= \int_{OP} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{OP} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$



**例** 一长为  $L$  的铜棒在磁感强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中，以角速度  $\omega$  在与磁场方向垂直的平面上绕棒的一端转动，**求**铜棒两端的感应电动势。



**解:**

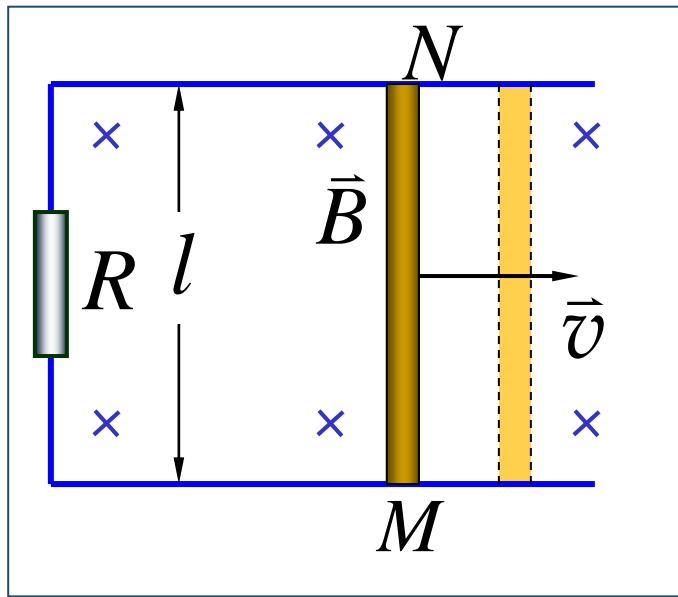
$$dE_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBdl$$

$$E_i = \int_0^L vBdl = \int_0^L \omega l B dl$$

$$E_i = \frac{1}{2} B \omega L^2$$

**感应电动势的方向:  $O \rightarrow P$**

**例** 一导线矩形框的平面与磁感强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场相垂直。在此矩形框上，有一质量为  $m$  长为  $l$  的可移动的细导体棒  $MN$ ；矩形框还接有一个电阻  $R$ ，其值较之导线的电阻值要大得很多。开始时，细导体棒以速度  $\vec{v}_0$  沿如图所示的矩形框运动，试求棒的速率随时间变化的函数关系。



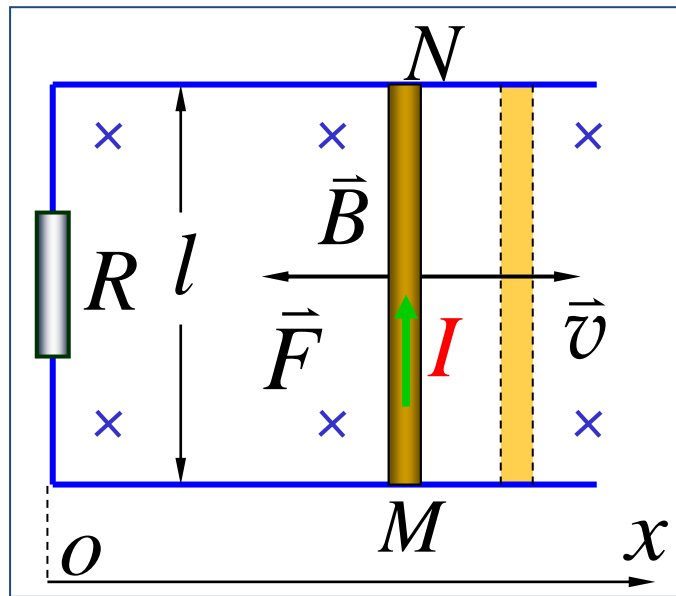
解：如图建立坐标，棒中  $\mathbf{E}_i = B l \mathbf{v}$  且由  $M \rightarrow N$

$$I = \frac{\mathbf{E}_i}{R}, \quad F = I B l = \frac{B^2 l^2 v}{R} \quad \text{方向沿 } Ox \text{ 轴负方向}$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

则  $\int_{v_0}^v \frac{d\mathbf{v}}{v} = - \int_0^t \frac{B^2 l^2}{m R} dt$

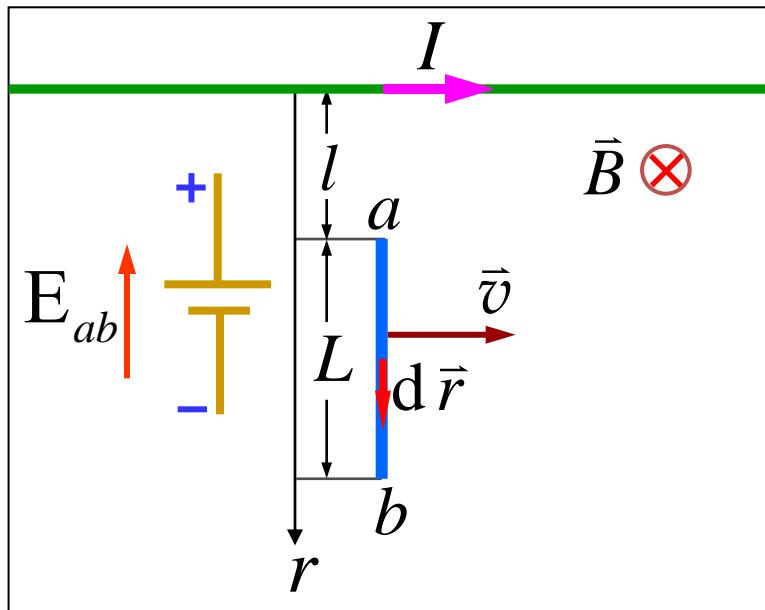
$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}^{-(B^2 l^2 / m R) t}$$



**例** 无限长直线电流 $I$ 旁有长为 $L$ 的导体 $ab$ 沿平行于 $I$ 的方向以速率 $v$ 运动，求 $ab$ 两端的电动势。

解：磁场方向如图，

大小沿 $ab$ 变化： $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



$$\begin{aligned}
 E &= \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = - \int_a^b v B dr \\
 &= - \frac{v \mu_0 I}{2\pi} \int_l^{l+L} \frac{1}{r} dr = - \frac{v \mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l+L}{l}
 \end{aligned}$$

负号表示电动势方向与  $d\vec{r}$  反向，即由  $b \rightarrow a$ 。



**例** 半圆形导线平行于无限长直线电流 $I$ 运动，求其中的动生电动势。

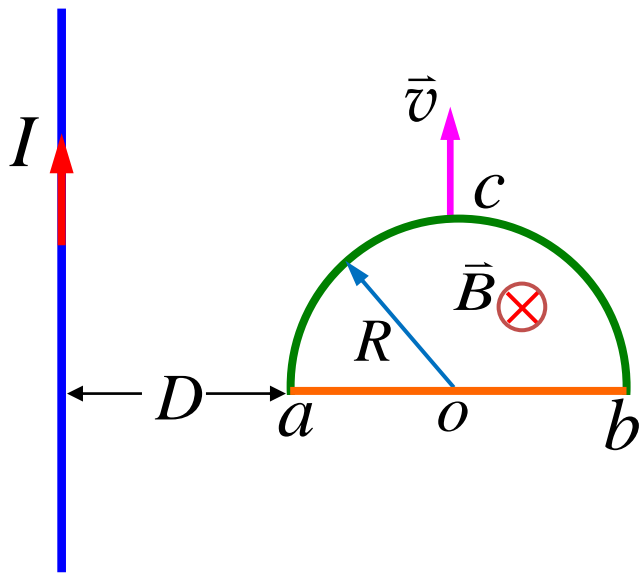
**解：**用直线 $boa$ 与半圆弧 $acb$ 构成一半圆形闭合回路，磁通量不变，则回路总感应电动势

$$E = E_{aob} + E_{bca} = 0$$

$$E_{bca} = -E_{aob} = E_{boa}$$

$$= \frac{v\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{D+2R}{D} \quad (\text{见上例})$$

电动势方向： $b \rightarrow a$ 。

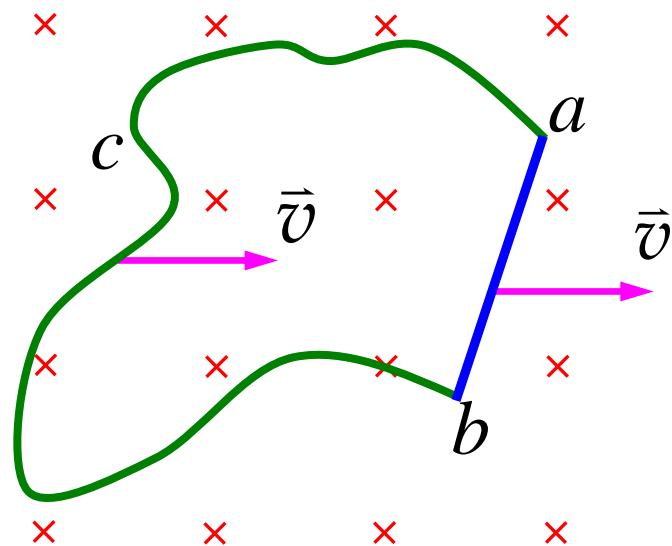


# 任意形状导线段在均匀磁场中运动所产生的电动势

任意形状的一段导线以某一速度作切割磁力线运动时所产生的动生电动势，与连结该导线两端的直导线以同一速度沿同一方向切割磁力线时所产生的动生电动势相同。

例如下图中：

$$E_{acb} = E_{ab}$$



## 二、感生电动势

导体运动→动生电动势—洛伦兹力作用的结果。

磁场本身随时间变化→感生电动势—无洛伦兹力作用。

●感生电动势由何产生？

**Maxwell 假设：**即使不存在导体回路，变化的磁场也会在其周围空间激发一种电场，称为**感生电场**。正是这种感生电场充当着产生感生电动势的非静电电场，

即

$$E_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$$

变化的磁场→感生电场→感生电动势。

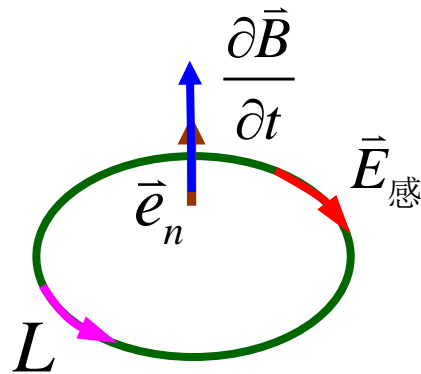
结合法拉第电磁感应定律，对于闭合回路有

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{(回路 } L \text{ 所围面积 } S \text{ 不变)}$$

$\vec{E}_{\text{感}}$  与  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  在方向上形成左手螺旋关系。

由于：  $\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = E \neq 0$

●说明感生电场的电场线类似于磁感线，是无头无尾的闭合曲线，所以又称之为有旋电场。

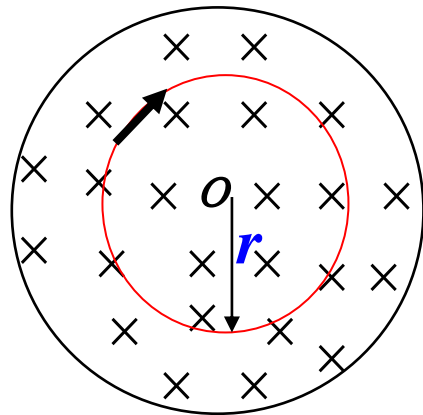


## 感生电场与静电场比较

- 相同点：对电荷有作用力；若有导体回路存在，都能形成电流。
- 不同点：
  - ◎ 静电场由电荷激发，电场线不闭合；  
感生电场由变化的磁场激发，电场线闭合。
  - ◎ 静电场是有源场；感生电场是无源场（涡旋场）。
  - ◎ 静电场是保守场  $\oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0$   
感生电场是非保守场  $\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} \neq 0$

# 感生电场的计算

- 1) 过考察点作一回路, 规定其绕行方向。
- 2) 用右手螺旋法则定出回路所围面的正法线方向。



- 3) 计算磁通量及随时间的变化。

4) 计算环路积分, 利用: 
$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

算出感生电场。

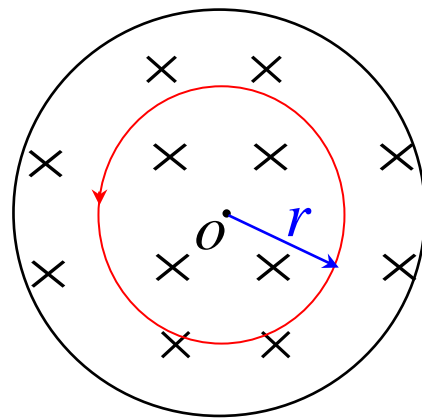
$E_{\text{感}} > 0$  感生电场的方向与回路的绕行方向一致。

$E_{\text{感}} < 0$  感生电场的方向与回路的绕行方向相反。

**例** 一半径为  $R$  的长直螺线管中的电流随时间变化，若管内磁感应强度随时间增大，即  $\frac{dB}{dt} = \text{恒量} > 0$ ，求螺线管内外的感生电场分布。

**解：** 选择一回路  $L$ ，同心圆，逆时针绕行，

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}, \quad E_{\text{感}} \cdot 2\pi r = \int_S \frac{dB}{dt} dS$$



**管内：**  $E_{\text{感}} \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt} \pi r^2, \quad E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$  方向为逆时针方向

**管外：**  $E_{\text{感}} \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt} \pi R^2, \quad E_{\text{感}} = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \quad (r \geq R)$  方向为逆时针方向



# 感生电动势的计算

1) 定义求解:  $E_i = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$

若导体不闭合, 则:  $E_i = \int_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$

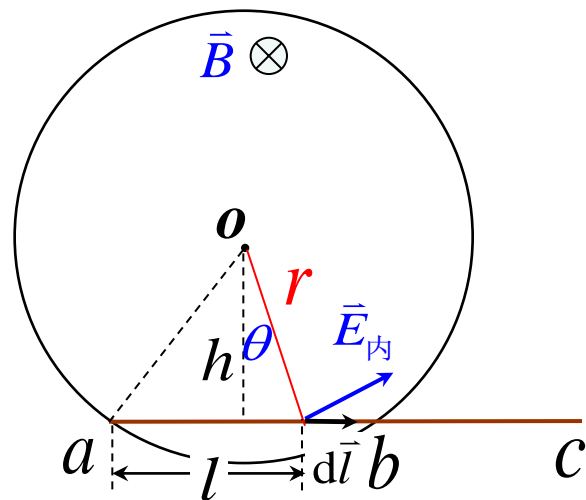
该方法只能用于感生电场已知或可求解的情况。

2) 利用法拉第电磁感应定律求解:

$$E_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

若导体不闭合, 需作辅助线。

**例** 在上题长直螺线管（半径 $R$ ）一截面内放置长为 $2R$ 的金属棒，如图所示， $ab=bc=R$ ，求棒中的感生电动势。



$$r^2 = h^2 + \left(l - \frac{R}{2}\right)^2, \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} R,$$

$$\cos \theta = \frac{h}{r}$$

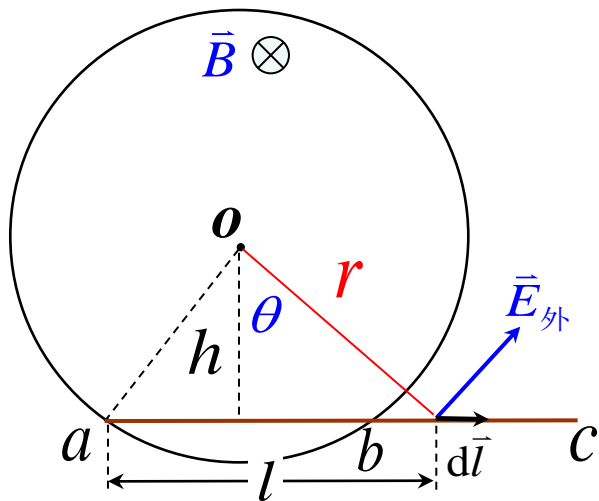
解法一：定义法。

感生电场：

$$\begin{cases} E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}, & r < R \\ E_{\text{感}} = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}, & r \geq R \end{cases}$$

选  $a \rightarrow c$  方向为积分路线。

$$\begin{aligned} E_{ab} &= \int_a^b \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{l} = \int_0^R \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cos \theta \, dl \\ &= \int_0^R \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \, dl = \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \int_0^R dl = \frac{h}{2} R \frac{dB}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$



$$r^2 = h^2 + \left(l - \frac{R}{2}\right)^2, \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} R,$$

$$\cos \theta = \frac{h}{r}$$

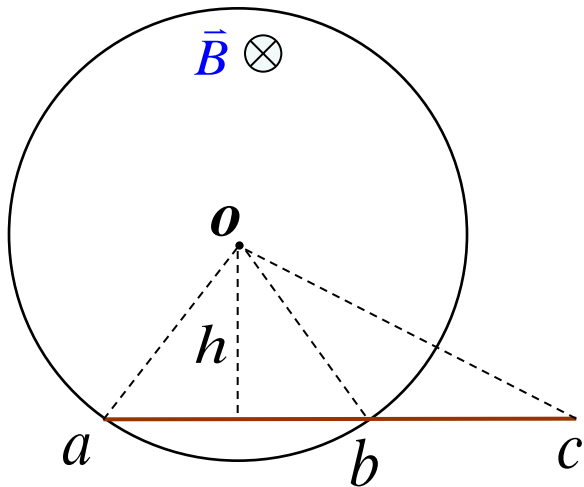
$$\begin{aligned} E_{bc} &= \int_b^c \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{l} = \int_R^{2R} \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \cos \theta \, dl \\ &= \int_R^{2R} \frac{R^2 h}{2} \frac{1}{h^2 + \left(l - \frac{R}{2}\right)^2} \frac{dB}{dt} dl \\ &= \frac{\pi R^2}{12} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{ac} &= E_{ab} + E_{bc} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{dB}{dt} + \frac{\pi R^2}{12} \frac{dB}{dt} \\ &= \frac{3\sqrt{3} + \pi}{12} R^2 \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

$E_{ac} > 0$ , 电动势方向:  $a \rightarrow c$

解法二： 利用电磁感应定律求解。

连接 $oa$ 、 $oc$  形成闭合回路 $oaco$ ，  
设回路绕行方向为逆时针方向。



$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B(S_{oab} + S_{\text{扇}}) = -B\left(\frac{3\sqrt{3} + \pi}{12} R^2\right)$$

$$E_{oaco} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{dB}{dt} \left(\frac{3\sqrt{3} + \pi}{12} R^2\right)$$

$$E_{oaco} = E_{oa} + E_{ac} + E_{co} = 0 + E_{ac} + 0$$

$$E_{ac} = \frac{3\sqrt{3} + \pi}{12} R^2 \frac{dB}{dt} > 0$$

电动势方向： $a \rightarrow c$

## 两类感应电动势小结

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- 只有导体运动—动生电动势

$$E_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- 只有磁场变化—感生电动势

$$E_i = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- 两种情况同时存在

$$E_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

## 8-3 自感和互感

### 一、自感电动势 自感

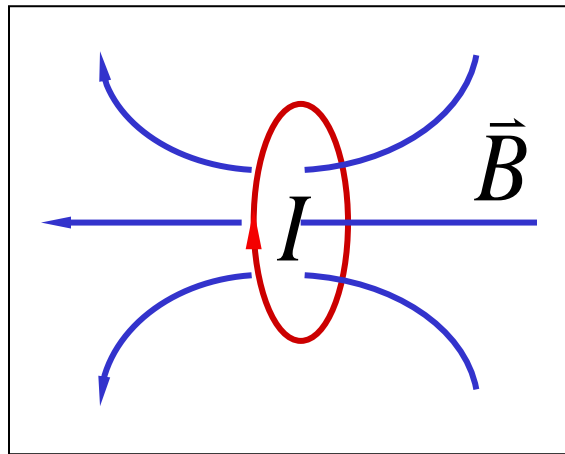
当线圈中电流变化时，它所激发的磁场使穿过线圈自身的磁通量发生变化，从而在自身线圈中产生感应电动势的现象称为**自感应**，对应的电动势称**自感电动势**。

$$\Phi \propto B, B \propto I \rightarrow \Phi \propto I$$

$$\Phi = LI$$

●  $L$ : 比例系数，叫做**自感**。

单位是**亨利**，符号是**H**。

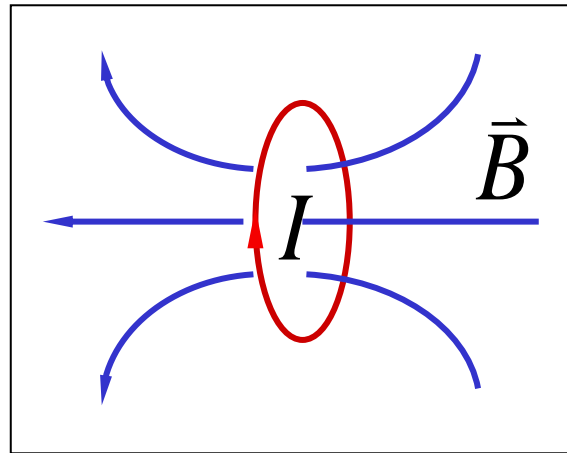


●  $L$ 由回路形状、大小以及周围介质的磁导率决定。

# 自感电动势

$$E_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt})$$

当  $\frac{dL}{dt} = 0$  时,  $E_L = -L\frac{dI}{dt}$



● 负号表明自感应的作用也是反抗回路电流的变化。

当  $I \uparrow$  , 电动势与原电流  $I$  反向;

当  $I \downarrow$  , 电动势与原电流  $I$  同向。

● 自感应有维持原电路状态的能力,  $L$  的大小就是这种能力的量度, 它表征回路**电磁惯性**的大小。

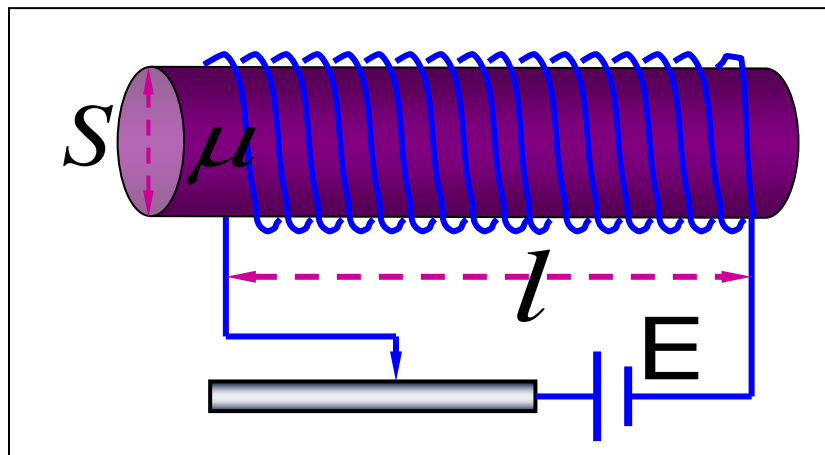


# 自感的计算方法

**例** 如图的长直密绕螺线管，已知  $l$ ,  $S$ ,  $N$ ,  $\mu$ ,  
**求** 其自感  $L$  (忽略边缘效应)。

**解：** 先设电流  $I \rightarrow$  求  $H$

$\rightarrow B \rightarrow \Phi \rightarrow L$



$$n = N/l \quad B = \mu H = \mu n I$$

$$\psi = N\Phi = NBS = N\mu \frac{N}{l} IS$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S$$

$$V = lS \quad \therefore L = \mu n^2 V$$

## 二、互感电动势 互感

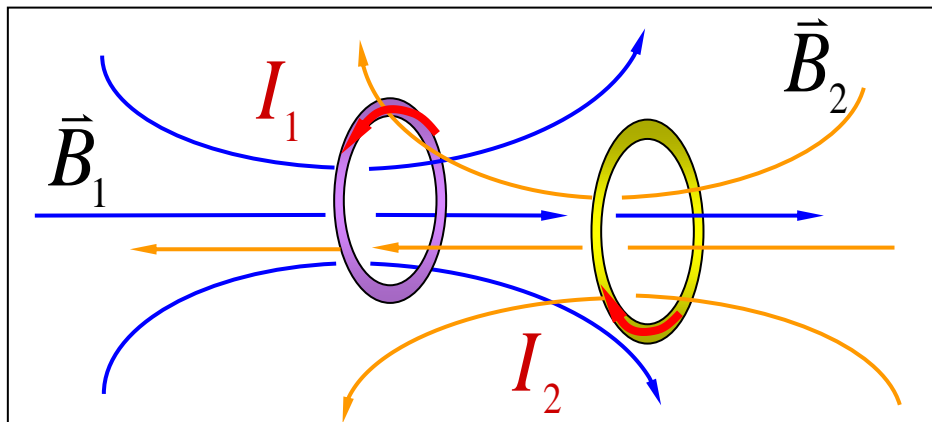
由于一个载流回路中的电流发生变化而引起邻近另一回路中产生感应电动势的现象称为“**互感现象**”，所产生的电动势称为“**互感电动势**”。

$\Phi_{21} \rightarrow$  线圈1产生的、穿过线圈2的磁通量。

$\Phi_{12} \rightarrow$  线圈2产生的、穿过线圈1的磁通量。

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2$$



理论和实验都证明：

两线圈的形状、大小、匝数、相对位置以及周围磁介质的磁导率都保持不变时  $M_{12} = M_{21} = M$

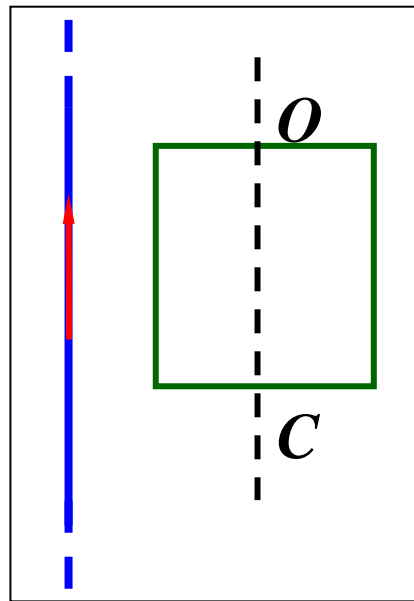
比例系数 $M$  叫做**互感**。 单位：亨利（H）

**互感电动势**  $E_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$        $E_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$

**互感**  $M = -\frac{E_{21}}{dI_1/dt} = -\frac{E_{12}}{dI_2/dt}$  表明两耦合回路互感强弱。

**负号的意义：** 在一个回路中引起的互感电动势总是反抗另一个回路中的电流变化。

互感 $M$  是表明两耦合回路互感强弱的物理量。



问：下列几种情况互感是否变化？

- (A) 线框平行直导线移动； 否
- (B) 线框垂直于直导线移动； 是
- (C) 线框绕  $OC$  轴转动； 是
- (D) 直导线中电流变化。 否

# 内容回顾:

- 1、自感电动势： 回路电流变化  $\longrightarrow$  穿过自身磁通量变化  
 $\longrightarrow$  在回路中产生的感应电动势

$$E_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$L$  自感系数

- 2、互感电动势： 回路1的电流变化  $\longrightarrow$  引起回路2的磁通量变化  
 $\longrightarrow$  回路2中产生感应电动势

$$E_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

$$E_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$M_{12} = M_{21} = M$  互感系数

## 内容回顾:

### 电动势与电势的异同

相同点: 单位相同: 伏特 V

不同点:

- 电势是保守场的线积分, 与路径无关
- 电动势是非保守场的线积分, 与路径有关

对电势: 某点的电势或两点间的电势差

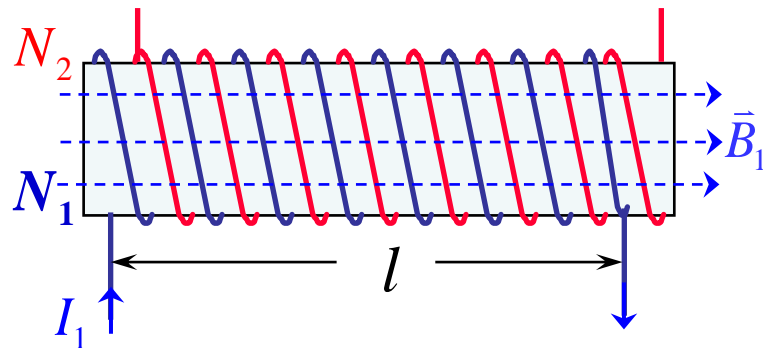
对电动势: 只能说某段路径上的电动势



**例** 设有两个长度均为 $l$ 、横截面积均为 $S$ ，匝线分别为 $N_1$ 和 $N_2$ 的同轴长直密绕螺线管，管内充满磁导率为 $\mu$ 的磁介质，求(1) 它们的互感系数；(2)互感与自感的关系。

解：设在螺线管1上通有电流为 $I_1$ ，  
则 $I_1$ 在管内产生的磁感应强度为

$$B_1 = \mu \frac{N_1}{l} I_1$$



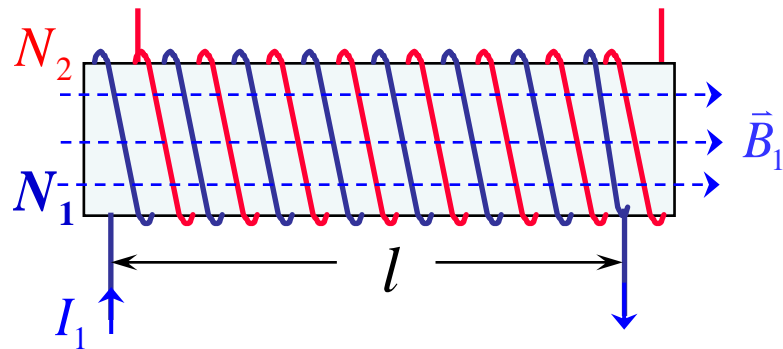
通过螺线管2的全磁通为  $\Psi_{21} = N_2 B_1 S = \mu \frac{N_1 N_2 I_1 S}{l}$

根据互感系数的定义可得  $M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}$

螺线管1的自感系数:  $L_1 = \mu \frac{N_1^2}{l} S$

螺线管2的自感系数:  $L_2 = \mu \frac{N_2^2}{l} S$

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$



$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}$$

以上是无漏磁情况的结果，即彼此磁场完全穿过。

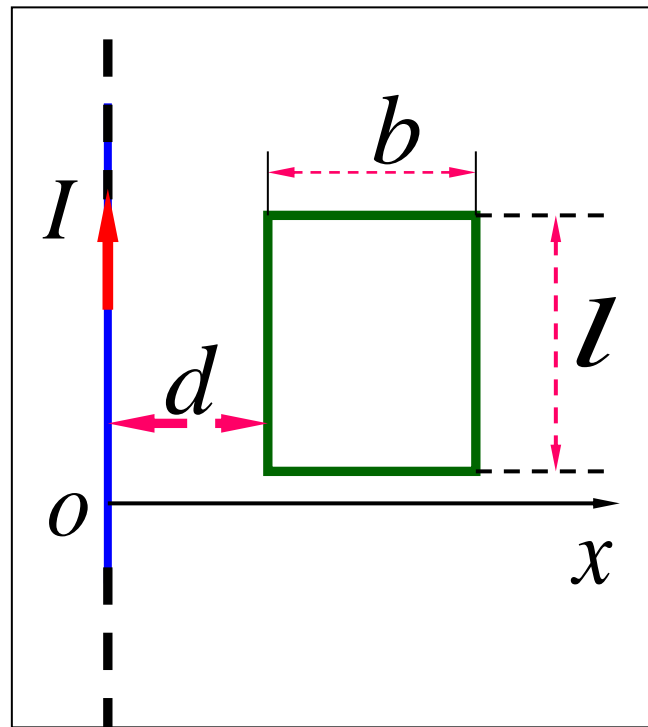
当有漏磁时:  $M = k \sqrt{L_1 L_2}$

$k$ 叫做耦合系数， $0 \leq k \leq 1$ ，  
其值由介质情况和两线圈的相对位置决定。

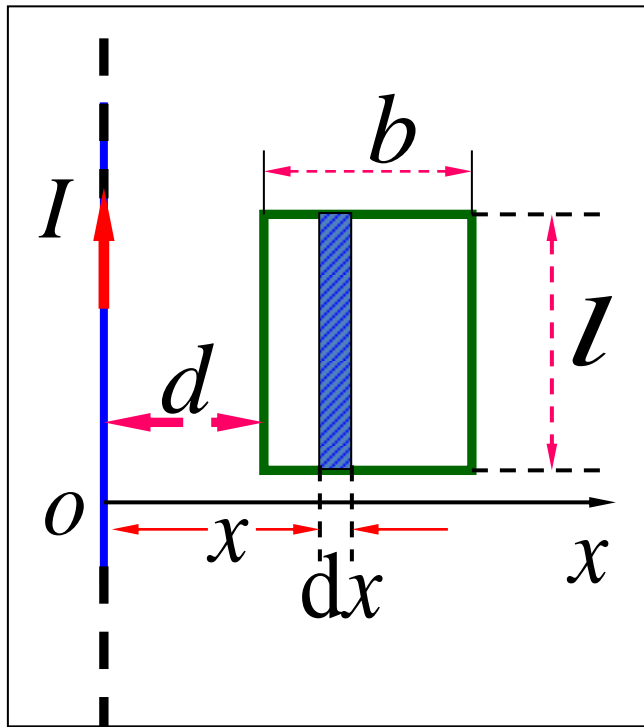


**例** 在磁导率为  $\mu$  的均匀无限大的磁介质中，一无限长直导线与一宽、长分别为  $b$  和  $l$  的矩形线圈共面，直导线与矩形线圈的一侧平行，且相距为  $d$ 。

**求** 二者的互感系数。



解：设长直导线通电流  $I$ ，则  $B = \frac{\mu I}{2\pi x}$



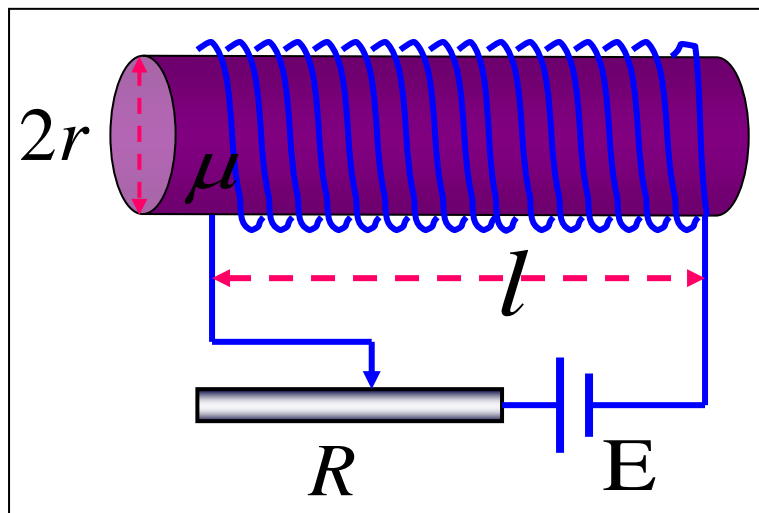
$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu I}{2\pi x} l dx$$

$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l dx$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

## 8-4 磁场的能量 磁场能量密度



自感线圈磁能

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$$E - L \frac{dI}{dt} = RI$$

$$EIdt - LI dI = RI^2 dt$$

$$\int_0^t E Idt = \frac{1}{2} LI^2 + \int_0^t RI^2 dt$$

电源  
做功

电源反  
抗自感  
电动势  
作的功

回路电  
阻所放  
出的焦  
耳热

- 自感线圈磁能

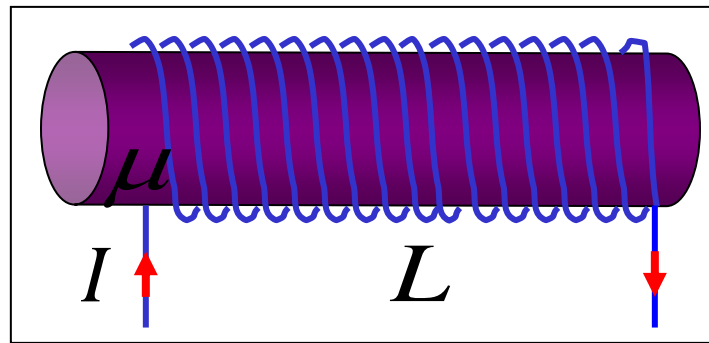
$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$$L = \mu n^2 V, \quad B = \mu n I$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left( \frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = w_m V$$

- 磁场能量密度

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$$



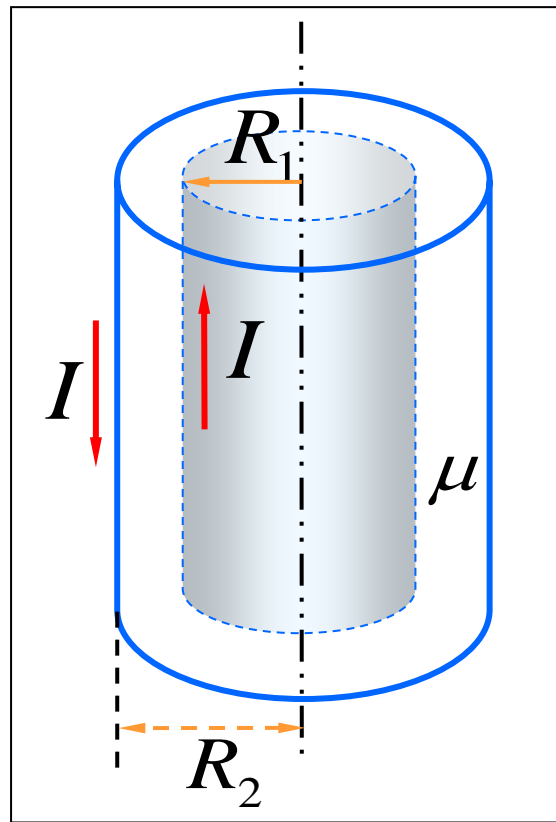
- 磁场能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

**例** 如图同轴电缆，中间充以磁介质，芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反。

已知  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $I$ ,  $\mu$ 。

**求** 单位长度同轴电缆的磁能和自感。设金属芯线内的磁场可略。

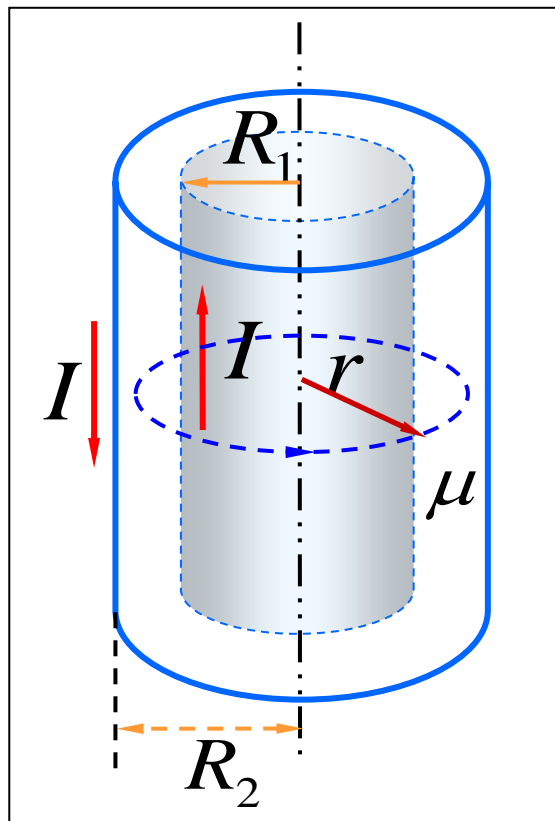


解：由安培环路定理可求  $H$

$$\left\{ \begin{array}{ll} r < R_1, & H = 0 \\ R_1 < r < R_2, & H = \frac{I}{2\pi r} \\ r > R_2, & H = 0 \end{array} \right.$$

则  $R_1 < r < R_2$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$



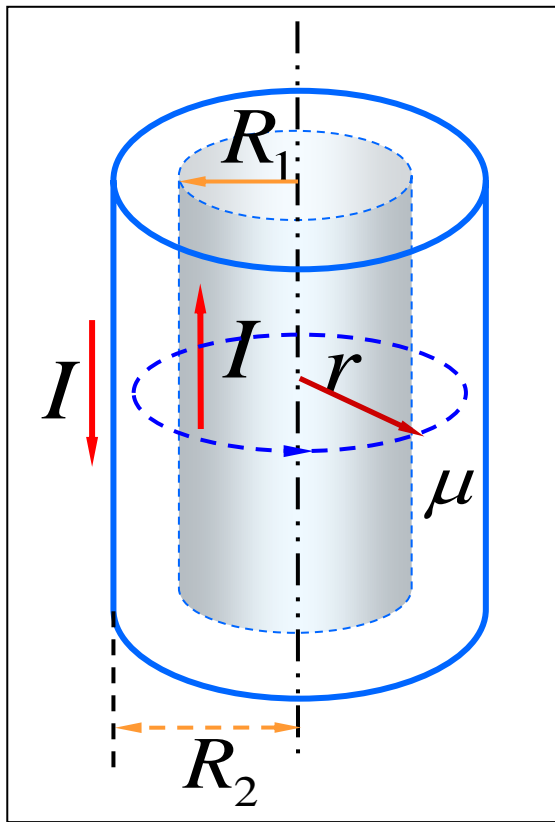
## 单位长度壳层体积

$$dV = 2\pi r dr \cdot 1$$

$$\begin{aligned} W_m &= \int_V w_m dV = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} dV \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



## 8-5 位移电流 电磁场基本方程的积分形式

电磁场基本规律：

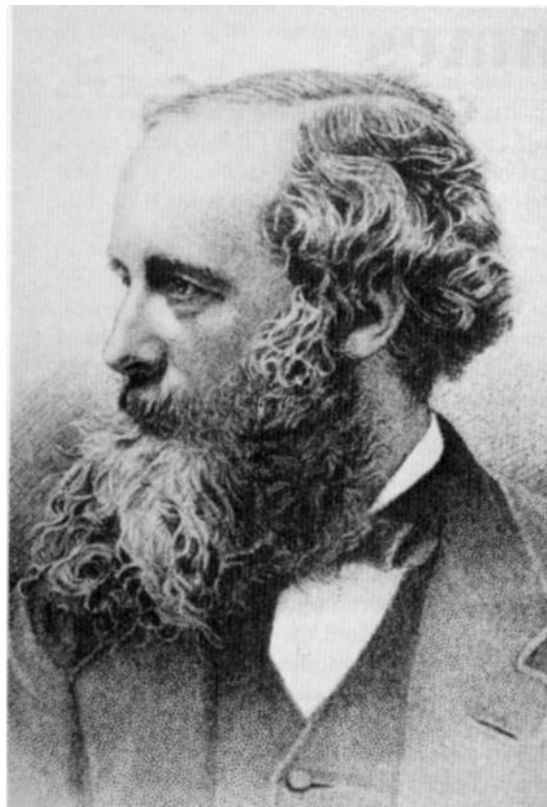
- 静止电荷  $\rightarrow$  静电场；
- 传导（恒定）电流  $\rightarrow$  恒定磁场；
- 变化的磁场  $\longrightarrow$  电场（感生电场或有旋电场）

启示： 变化的电场  $\xrightarrow{?}$  磁场

麦克斯韦对此引入位移电流的概念，提出假说：

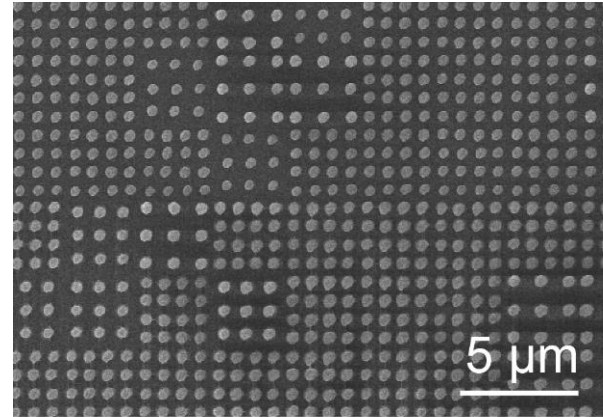
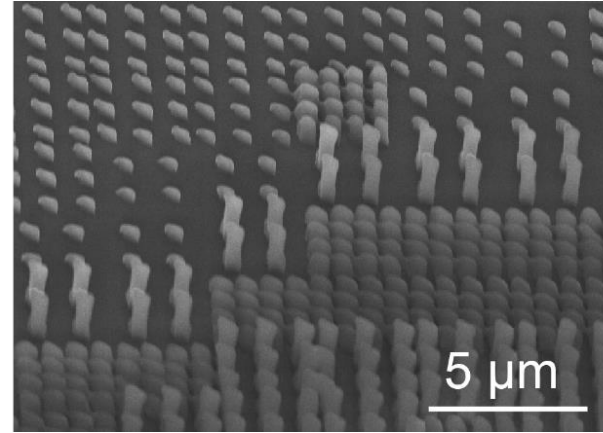
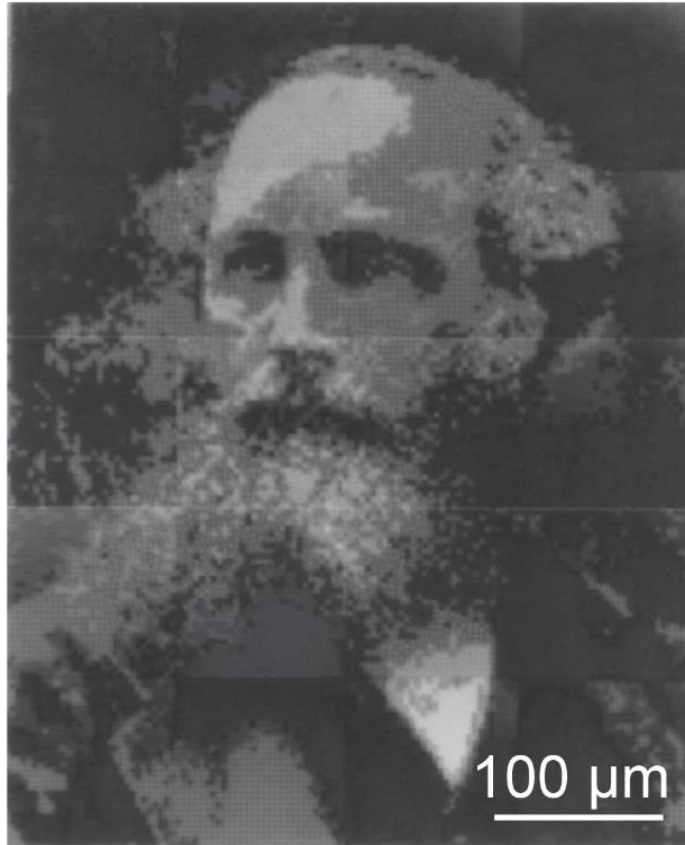
变化的电场  $\longrightarrow$  位移电流  $\longrightarrow$  磁场





麦克斯韦  
(1831—1879)

英国物理学家，经典电磁理论的奠基人，气体动理论创始人之一。提出了有旋电场和位移电流的概念，建立了经典电磁理论，预言了以光速传播的电磁波的存在。在气体动理论方面，提出了气体分子按速率分布的统计规律。



**3D printed grayscale image of James Clerk Maxwell**

1864年底**麦克斯韦**在总结前人工作的基础上，提出完整的电磁场理论，他的主要贡献是提出了“**有旋电场**”和“**位移电流**”两个假设，从而预言了电磁波的存在，并计算出电磁波的速度（即**光速**）。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

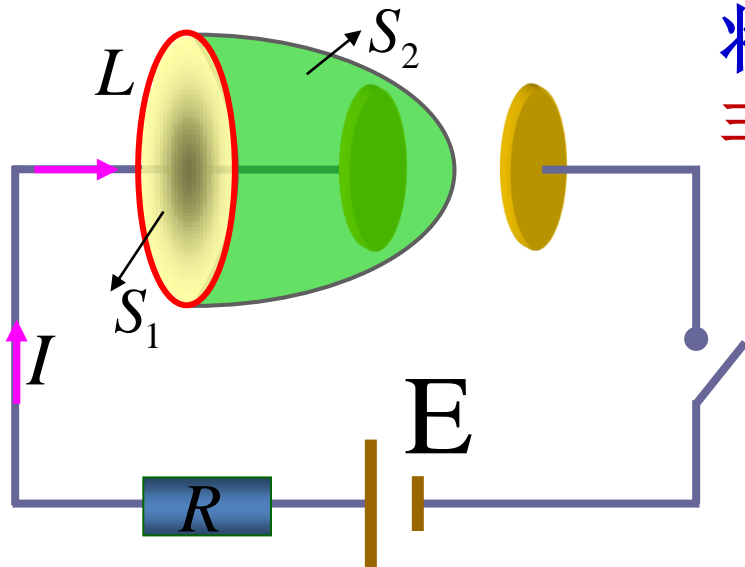
（**真空中**）

1888年**赫兹**的实验证实了他的预言，麦克斯韦理论奠定了经典电动力学的基础，为无线电技术和现代电子通讯技术发展开辟了广阔前景。

# 一、位移电流 全电流安培环路定理

## 恒定磁场中，安培环路定理

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



将稳恒电路的安培环路定理用于  
非稳恒电路时，出现了矛盾：

（以  $L$  为边做任意曲面  $S$ ）

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

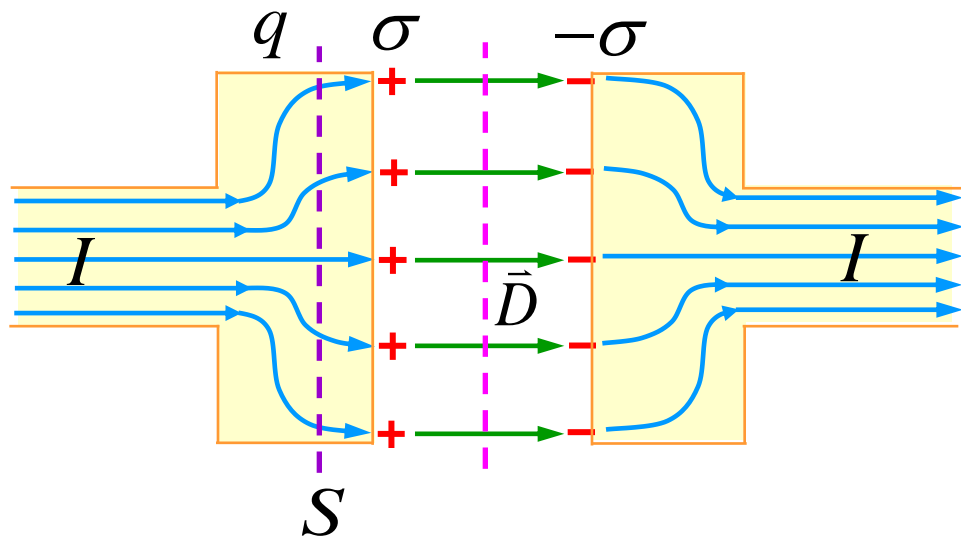
充电时，穿过S面的电流累积为极板上的电荷。

根据电荷守恒定律有：

$$I = \frac{dq}{dt} \quad j = \frac{d\sigma}{dt}$$

而两极板间的电位移  
 $D$ 和电位移通量 $\Phi_D$ 为

$$D = \sigma, \quad \Phi_D = DS = \sigma S = q$$



$$\rightarrow I = \frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt}, \quad j = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD}{dt}$$

充电时,

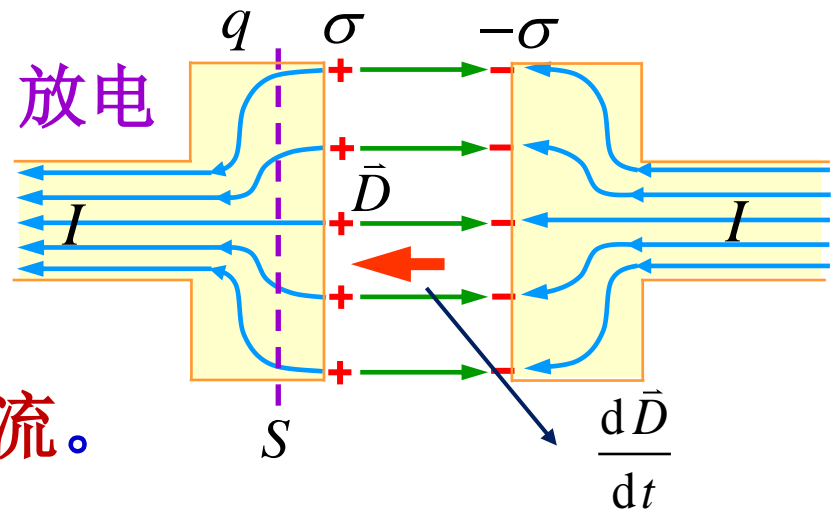
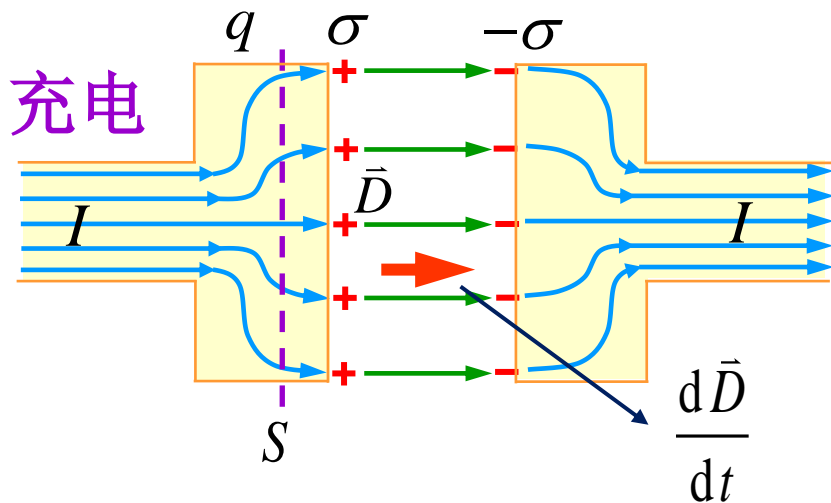
$D \uparrow, \frac{d\bar{D}}{dt}$  与  $\bar{D}$  同方向。

放电时,

$D \downarrow, \frac{d\bar{D}}{dt}$  与  $\bar{D}$  反方向,

但仍与  $I$  方向一致。

启示: 在非稳恒电路中,  
电场的变化等效于某种电流。

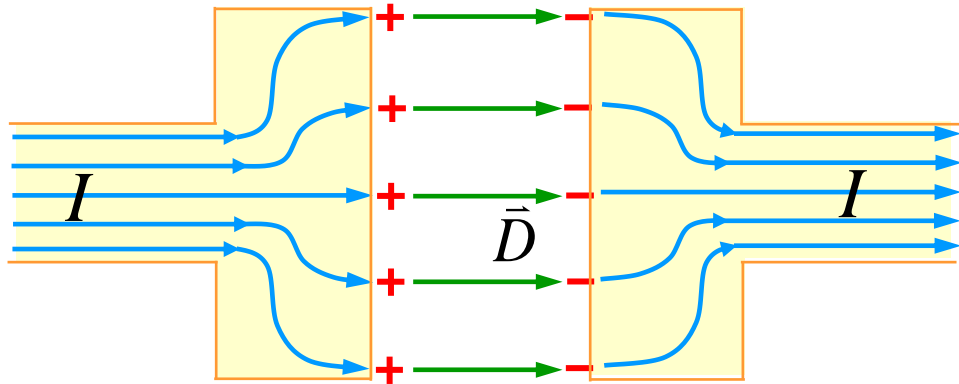


麦克斯韦定义位移电流：

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

位移电流密度：

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

这样，在极板上中断的传导电流 $I$ ，被位移电流 $I_d$ 所接替，两者保持了电流的连续性。

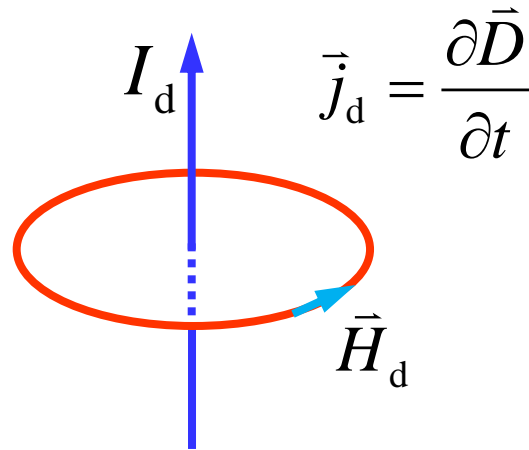
麦克斯韦指出：

◎在产生磁效应方面位移电流与传导电流完全相同，两者在激发磁场时也遵守同样的规律。

对于传导电流： $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{ci}$

类比得位移电流： $\oint_L \vec{H}_d \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{di}$

$\vec{H}_d$  与回路中的  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  成右手螺旋关系。



位移电流  $I_d$   
产生的磁场



全电流  $I_s = I_c + I_d$

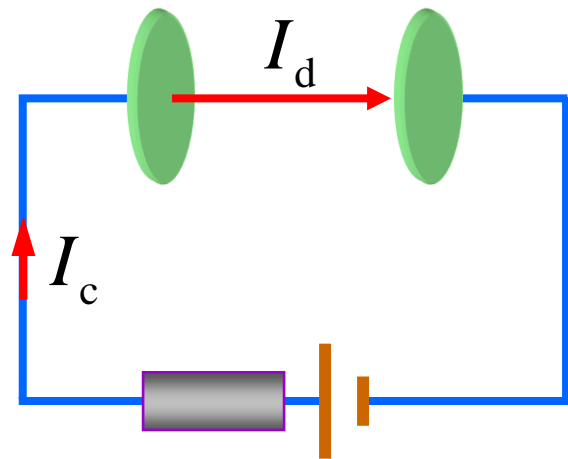
全电流密度  $\vec{j}_s = \vec{j}_c + \vec{j}_d$

● 全电流对于任何回路都是连续的。

全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_s = I_c + I_d = I_c + \frac{d\Phi_D}{dt}$$

或: 
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_c + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$



磁场强度沿任意闭合回路的环流等于穿过此闭合回路所围曲面的全电流的代数和。

# 位移电流与传导电流的异同

传导电流  $I_c$

位移电流  $I_d$

起源

电荷的运动

电场的变化

出现区域

导体

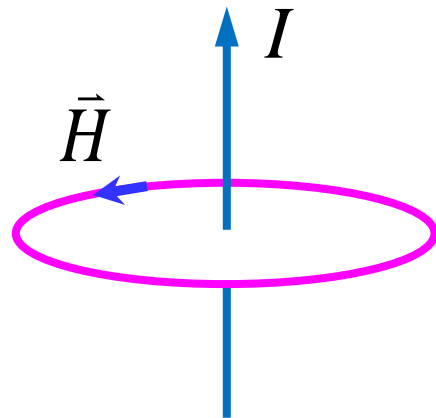
真空、导体、电介质

焦耳热效应

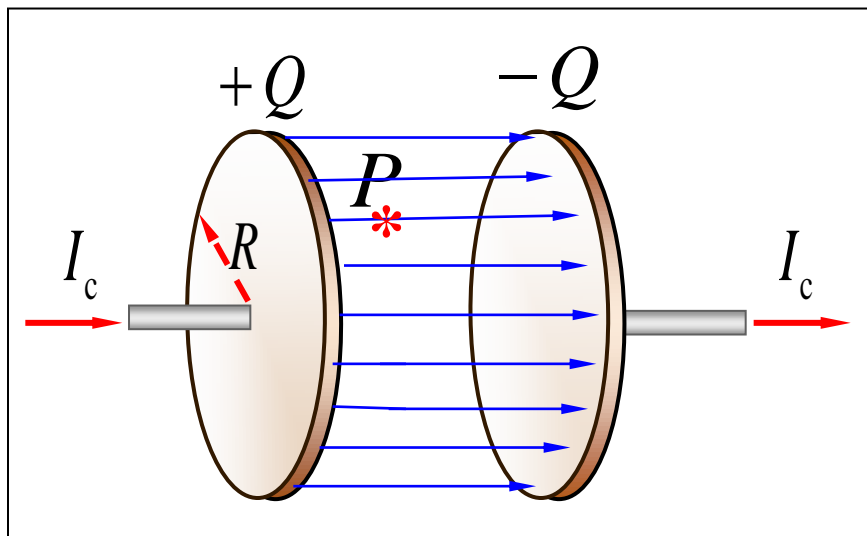
有

无

两者均产生有旋磁场，  
而且电流与磁场的方向  
均满足右手螺旋关系。



**例** 有一圆形平行平板电容器,  $R = 3.0 \text{ cm}$ , 现对其充电, 使电路上的传导电流  $I_c = dQ/dt = 2.5 \text{ A}$ , 若略去边缘效应, **求: (1) 两极板间的位移电流; (2) 两极板间离开轴线的距离为  $r = 2.0 \text{ cm}$  的点  $P$  处的磁感强度。**



解：（1）回路全电流连续，故极板间位移电流为2.5A。

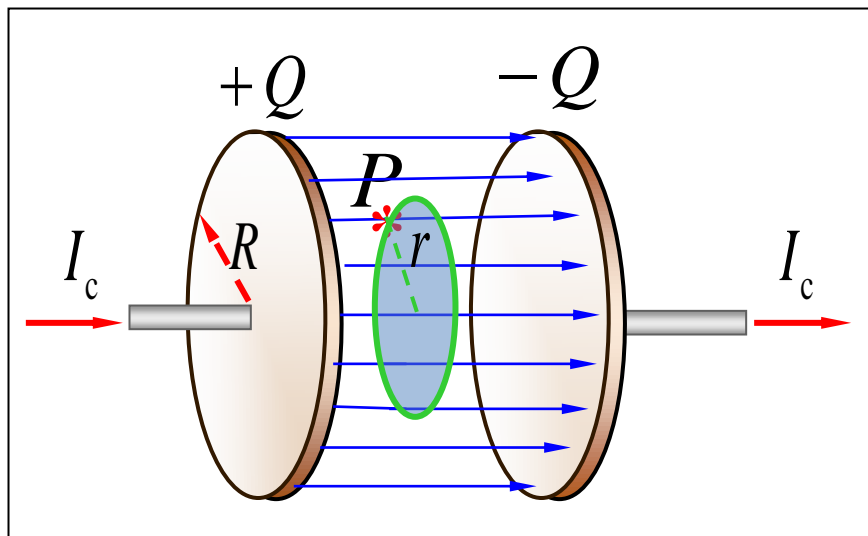
$$(2) \because \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d = I_d \quad \therefore H(2\pi r) = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$H = \frac{r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

代入数据得

$$B \approx 1.11 \times 10^{-5} \text{ T}$$



## 二、电磁场 麦克斯韦电磁场方程的积分形式

● 一般情况，总电磁场包括静电场、稳恒磁场和动态场

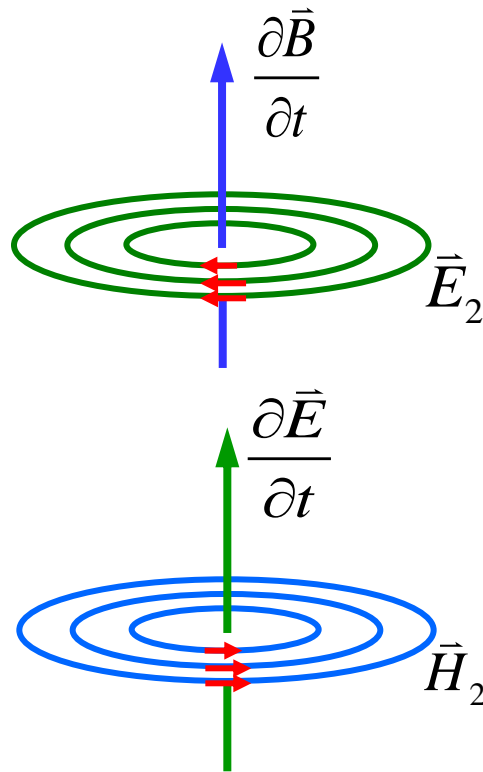
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$\vec{E}_1$  : 静电荷产生的静电场

$\vec{E}_2$  : 变化的磁场产生的有旋电场

$\vec{H}_1$  : 传导电流产生的恒定磁场

$\vec{H}_2$  : 变化的电场产生的有旋磁场



# Maxwell电磁场理论基本思想


● 变化的电场和变化的磁场相互激发、相互依存，实为一个整体，组成统一的电磁场。

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = 0 + \left(-\frac{d\Phi_m}{dt}\right) = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = \sum I_c + \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \left(\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_i \qquad \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

# Maxwell方程组的积分形式


$$\begin{aligned}\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \sum q_i \\ \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

介质性质方程和欧姆定律的微分形式

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

利用\*斯托克斯公式  $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$

和\*高斯公式  $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$

➡ \*Maxwell方程组的微分形式

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{D} = \rho & \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{j} = \gamma \vec{E} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

● 当讨论局部性问题时，常用到微分形式的方程组。



# Maxwell方程组的科学价值

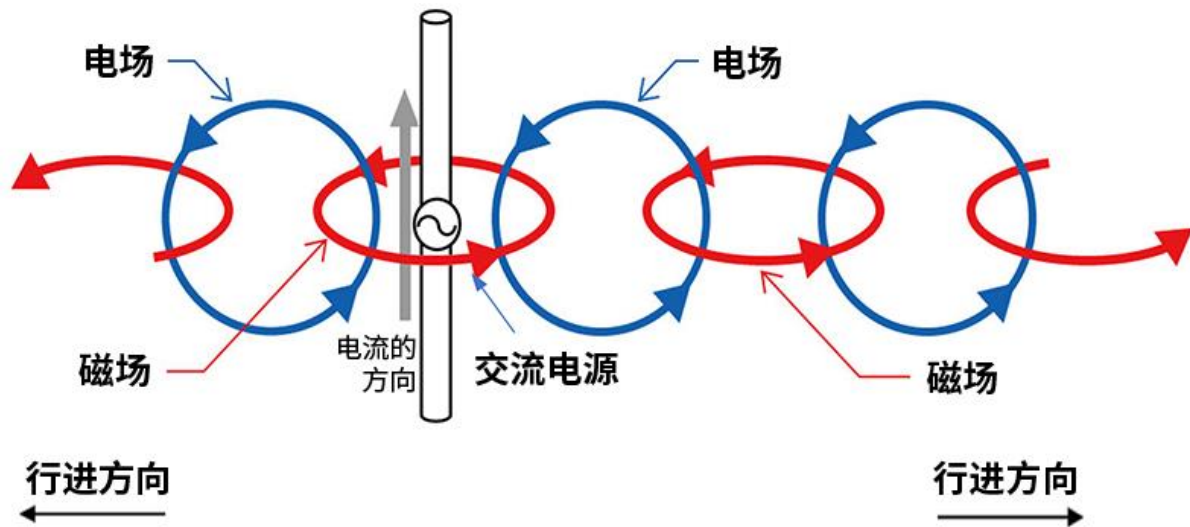
- 完整地概括了电磁场的运动规律，能推断和解释一切宏观的电磁现象。
- 预言了光的电磁本性，将光学和电磁学统一起来。
- 方程蕴含着完美的对称结构——时空对称、电磁对称。不仅说明电磁场是最简单的规范场，也为相对论的产生提供了雏形。
- 它在技术上的应用促进了电子技术和生产力的高度发展。可以说近代一切无线电技术、雷达、电视、电子计算机等等……都是麦克斯韦方程组的应用。

## \*三、电磁波的产生及其基本性质

### 1 电磁波

●变化的电磁场在空间的传播叫电磁波。

**电磁波的形成：**变化着的电场和磁场相互激发、交替产生，并以有限速度在空间中传播，即为电磁波。



## 平面简谐电磁波方程（波源作简谐振荡）

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

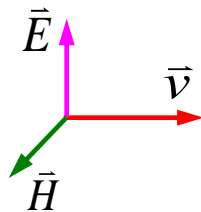
解：

$$\left\{ \begin{array}{l} E = E_0 \cos \omega(t - \frac{x}{v}) \\ H = H_0 \cos \omega(t - \frac{x}{v}) \end{array} \right.$$

振幅关系  $\sqrt{\varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu} H_0$

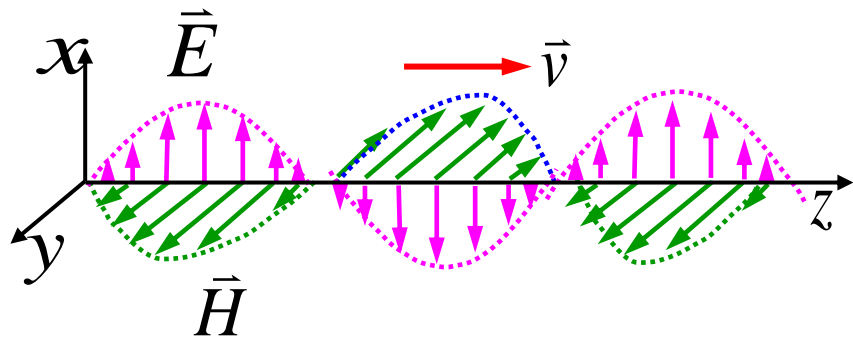
# 平面简谐电磁波的基本性质

- 电磁波是横波。 $\vec{E}, \vec{H}$  均垂直于其传播方向。
- 电磁波具有偏振性。 $\vec{E} \perp \vec{H}$ , 分别有各自的振动面。
- 电磁场的量值均作周期性变化, 且变化的相位相同。



☆ 其瞬时关系:  $\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$

● 波速  $v = 1 / \sqrt{\epsilon \mu}$



真空中:  $v = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c$

介质中:  $v = 1 / \sqrt{\epsilon \mu} = c / \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

光是一种电磁波!

## 2 电磁波的能量

电磁波的传播过程就是电磁场能量的传播过程。

● 电磁波所携带的能量叫做**辐射能**。

**波印廷矢量**（**能流密度矢量**）

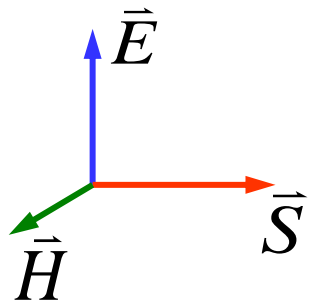
单位时间通过垂直于波传播方向单位面积的辐射能。

$$\begin{aligned}\text{大小: } S &= wv = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)v \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}(\sqrt{\varepsilon}E \cdot \sqrt{\mu}H + \sqrt{\mu}H \cdot \sqrt{\varepsilon}E) = EH \\ &\quad \sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H\end{aligned}$$

电磁场能量密度  
 $w = w_e + w_m$

矢量形式:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

方向与电磁波的传播速度方向一致。



### 3 电磁场的物质性与统一性

#### (1) 电磁场的物质形态

电磁场的能量密度： $w = (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) / 2$

1920年列别捷夫的光压实验证明电磁场与实物间有动量传递，并满足守恒定律。

#### (2) 电磁场是统一的整体

- 电场与磁场相互激发，交替作用。
- 电场与磁场相互联系，相互依存，不可分割。

总之：电磁场具有统一性，相对性；具有物质的一切重要属性。电磁场是物质的一种形态。

# 作业题

## 教材后习题

8-1~8-5, 8-7, 8-10, 8-11, 8-12,  
8-13, 8-15, 8-18, 8-19, 8-20, 8-  
25, 8-27, 8-30, 8-31, 8-32, 8-33  
共20道题