第二章 信息的表示和处理 I：位、整数

本章重点

- **整数的表示**
  - 进制的相互转换
  - 有符号数和无符号数的表示以及能够表示的范围
  - 有符号数与无符号数之间相互转换
- **整数的扩展和截断**
- **整数的加法、乘、移位**
  - 注意运算过程可能发生溢出
- **经典例题**

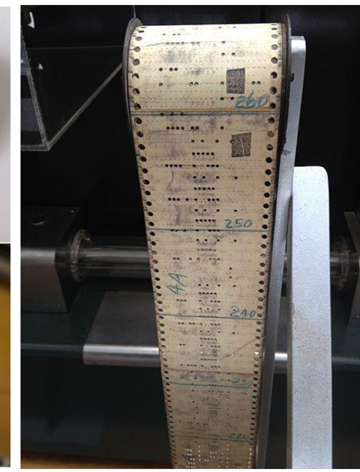
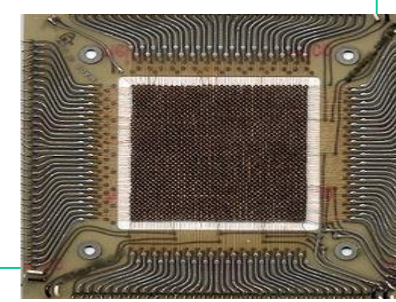
本章目录: 位、字节 和 整型数

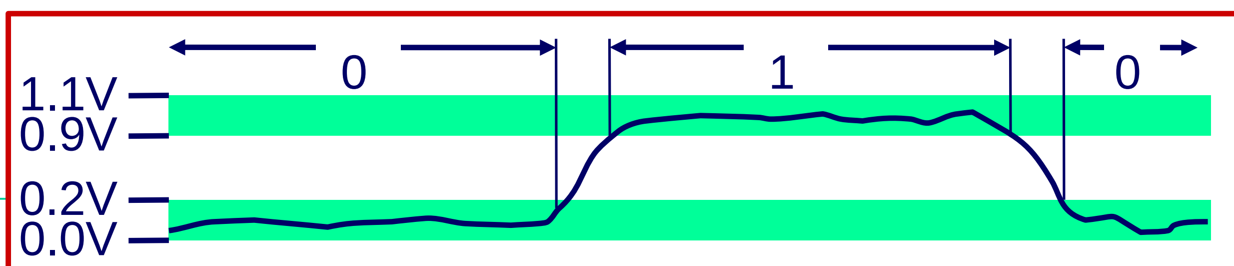
- 信息的位表示
- 位级运算
- 整型数
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

为什么用二进制？

- **十进制——适合人类使用**
  - 有10个手指的人类
  - 1000年前源自印度、12世纪发展于阿拉伯、13世纪到西方
- **二进制——更适合机器使用**
  - 容易表示、存储
    - 打孔纸带上是/否有空
    - 磁场的顺时针/逆时针
  - 容易传输
    - 导线上的电压高/低
    - 可以在有噪声、不精确的电路上可靠传输





位、字节、字

- **计算机存储、处理的信息：二值信号**
- **"位"或"比特"**
  - 最底层的二进制数字（数码）称为位（bit，比特），值为0或1
  - 数字革命的基础
- 位组合
  - 把位组合到一起，采用某种规则进行解读
  - 每个位组合都有含义
  - LSB（Least Significant Bit）、MSB（Most Significant Bit）

一般LSB指的是最低有效位，MSB是最高有效位

- 字节：**8-bit块**
  - 人物：Dr. Werner Buchholz，1956年7月
  - 事件：IBM Stretch computer的早期设计阶段

维纳・布赫霍尔兹

位、字节、字

字：CPU中ALU的数据位数=CPU中通用寄存器的位数

通常计算机是XX位的，是指这台计算机CPU字的长度

OS是XX位的，是指其CPU的工作模式，这与操作系统各DLL库函数、编译链接环境有关。

1bytes=8bits

8086、286: 1word=2bytes=16bits

80386、486、586: 1word=4bytes=32bits

itanium(merced): 1word=8bytes=64bits

X86汇编语言/机器语言编程中，一个字指的是16位。

数据存放时高字节在高地址、低字节在低地址。

位多用于数据通讯中传输率：1200bps,100Mb

字节用于数据存储和传输中，表示数据的规模：比如10GB

字用于表示计算机cpu中的寄存器。

进制

- **数的通用表示**

10进制：

$$3721 = 3\times10^3+7\times10^2+2\times10^1+1\times10^0$$

$$N= \pm\, a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m$$

k进制：

$$N= \pm\, a_n\times k^n + a_{n-1}\times k^{n-1} + \ldots + a_1\times k^1 + a_0\times k^0$$
$$+ b_1\times k^{-1} + b_2\times k^{-2} \quad + \ldots + b_m\times k^{-m}$$

其中a_i，b_j是0～k-1中的一个数码

二进制数

- 特点：逢二进一，由0和1两个数码组成，基数为2，各个位权以2^i表示
- 二进制数：

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m =$$
$$a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \ldots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$$
$$+ \ b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} \ + \ldots + b_m \times 2^{-m}$$

其中a_i，b_j非0即1

便于计算机存储、算术运算简单、支持逻辑运算

二进制数

- MSB：最高有效位（Most Significant Bit）
- LSB：最低有效位（Least Significant Bit）

MSB LSB

1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0

15 0

数字串长、书写和阅读不便

十六进制数

- 基数16，逢16进位，位权为16^i，16个数码：

  0, 1，2，3，4，5，6，7，8，9，A，B，C，D，E，F

- 十六进制数：

  $$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m =$$

  $$a_n \times 16^n + a_{n-1} \times 16^{n-1} + \ldots + a_1 \times 16^1 + a_0 \times 16^0$$

  $$+ b_1 \times 16^{-1} + b_2 \times 16^{-2} + \ldots + b_m \times 16^{-m}$$

  其中a_i，b_j是0～F中的一个数码

十六进制数的加减运算

- **十六进制数的加减运算类似十进制**
  - 逢16进位1，借1当16

23D9H＋94BEH＝B897H

A59FH－62B8H＝42E7H

- **二进制和十六进制数之间具有对应关系：**

每4个二进制位对应1个十六进制位

00111010B＝3AH，F2H＝11110010B

与二进制数相互转换简单、阅读书写方便

进制转换

- **十进制整数转换为k(2、8或16)进制数**

  整数转换：用除法—除基取余法

  - 十进制数整数部分不断除以基数k(2、8或16)，并记下余数，直到商为0为止
  - 由最后一个余数起，逆向取各个余数，则为转换成的二进制和十六进制数

    126＝01111110B **二进制数用后缀字母B**

    126＝7EH **十六进制数用后缀字母H**

进制转换

- **十进制小数转换为k(2、8或16)进制数…**

  小数转换：用乘法—乘基取整法

  乘以基数k，记录整数部分，直到小数部分为0为止

  0.8125＝0.1101B

  0.8125＝0.DH

  - 小数转换会发生总是无法乘到为0的情况
  - 可选取一定位数（精度）
  - 将产生无法避免的转换误差

【例 2.2】将十进制数 123.6875 转换成二进制数。

解：

整数部分：

除基	取余	
2 | 123	1	最低位
2 | 61	1	
2 | 30	0	
2 | 15	1	
2 | 7	1	
2 | 3	1	
2 | 1	1	最高位
0		

整数部分结束条件：商为0

因此整数部分 $123=(1111011)_2$。

乘基取整法（小数部分的转换）：小数部分乘基取整，最先取得的整数为数的最高位，最后取得的整数为数的最低位（即乘基取整，先整为高，后整为低），乘积为 1.0（或满足精度要求）时结束。

小数部分结束条件：乘积为1或者满足精度就结束

小数部分：

乘基	取整	
0.6875 × 2 = 1.3750	1	最高位
0.3750 × 2 = 0.7500	0	
× 2 = 1.5000	1	
0.5000 × 2 = 1.0000	1	最低位

最后从高位到低位，写出二进制浮点数的整数和小数部分

因此小数部分 $0.6875=(0.1011)_2$，所以 $123.6875=(1111011.1011)_2$。

注意：在计算机中，小数和整数不一样，整数可以连续表示，但小数是离散的，所以并不是每个十进制小数都可以准确地用二进制表示。例如 0.3，无论经过多少次乘二取整转换都无法得到精确的结果。但任意一个二进制小数都可以用十进制小数表示，希望读者引起重视。

注意：关于十进制数转换为任意进制数为何采用除基取余法和乘基取整法，以及所取之数放置位置的原理，请结合 r 进制数的数值表示公式思考，而不应死记硬背。

进制转换

- **k进制数转换为十进制数**

方法：按权展开

- 二进制数转换为十进制数

0011.1010B

$$=1\times 2^{1}+1\times 2^{0}+1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}=3.625$$

- 十六进制数转换为十进制数

$$1.2\text{H}=1\times 16^{0}+2\times 16^{-1}=1.125$$

- **2、8、16进制间的转换**

4个2进制位对应1个16进制位

3个2进制位对应1个8进制位

计算机内的数值表示——编码

- 需要考虑的问题

① 编码的长度

② 数的符号

③ 数的运算

字节值编码

- **Byte = 8 bits**
  - 2进制(Binary) 00000000_2 — 11111111_2
  - 10进制(Decimal): 0_{10} — 255_{10}
  - 16进制(Hexadecimal)： 00_{16} — FF_{16}

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

C数据类型的宽度（与编译器有关）

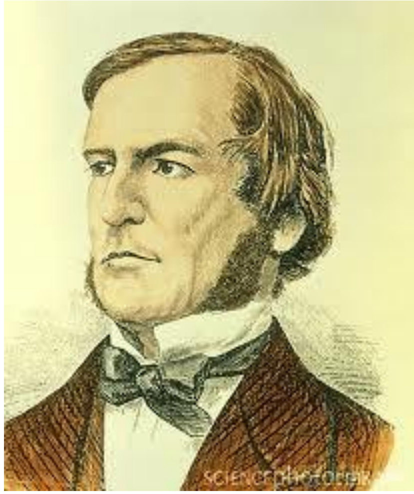
C 数据类型	32位	64位	x86-64
char	1	1	1
short	2	2	2
int	4	4	4
long	4	8	8
long long	8	8	8
float	4	4	4
double	8	8	8
long double	–	–	10/16
pointer	4	8	8

本章目录: 位、字节 和 整型数

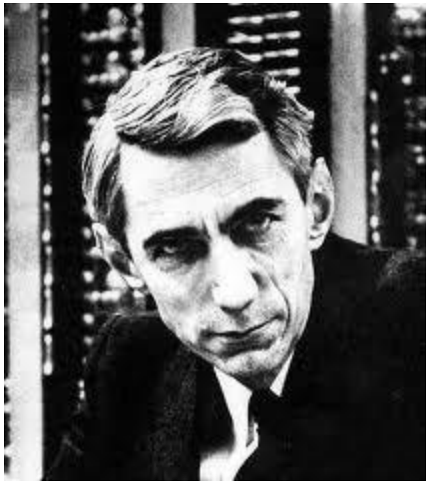
- 信息的位表示
- **位级运算**
- 整型数
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

布尔代数(Boolean Algebra)

- **George Boole(1815-1864)提出**
  逻辑的代数表示
  - 逻辑值 “True(真)” 编码为 1
  - 逻辑值 “False(假)” 编码为 0



- **Claude Shannon(1916–2001)创立信息论**
  - 将布尔代数与数字逻辑关联起来



- **是数字系统设计与分析的重要工具**

布尔代数(Boolean Algebra)

与(And)

- 当A=1 并且 B=1时， A&B = 1

&	0	1
0	0	0
1	0	1

或(Or)

- 当A=1 或 B=1时， A|B = 1

|	0	1
0	0	1
1	1	1

非(Not)

- 当A=0时， ~A = 1

~	
0	1
1	0

异或(Exclusive-Or,Xor)

- 当A=1 或 B=1且两者不同时为1， A^B = 1

^	0	1
0	0	1
1	1	0

异或原则：相同为0，不同为1

一般的布尔代数

- 位向量操作(Operate on Bit Vectors)
  - 按位运算

```
  01101001     01101001                   01101001
& 01010101   | 01010101   ~ 01010101   ^ 01010101
  01000001     01111101     10101010     00111100
```

- 布尔代数的全部性质均适用

示例:集合的表示与运算

- **表示**
  - 宽度 w 个比特的向量表示集合 {0, ..., w–1}的子集
  - 如j ∈ A，则a_j = 1
    - 01101001 { 0, 3, 5, 6 }
      76543210
    - 01010101 { 0, 2, 4, 6 }
      76543210
- **运算**
  - & 交集(Intersection) 01000001 { 0, 6 }
  - | 并集(Union) 01111101 { 0, 2, 3, 4, 5, 6 }
  - ^ 差集(Symmetric difference) 00111100 { 2, 3, 4, 5 }
  - ~ 补集(Complement) 10101010 { 1, 3, 5, 7 }

2.1.7 C语言中的位级运算

- **C语言中的位运算： &, |, ~, ^**
  - 适用于任何整型数据类型： long, int, short, char, unsigned
  - 将操作数视为位向量
  - 将参数按位运算
- **例子(char 类型)**
  - ~0x41 → 0xBE
    - $\sim 01000001_2 \rightarrow 10111110_2$
  - ~0x00 → 0xFF
    - $\sim 00000000_2 \rightarrow 11111111_2$
  - 0x69 & 0x55 →0x41
    - $01101001_2 \,\&\, 01010101_2 \rightarrow 01000001_2$
  - 0x69 | 0x55 →0x7D
    - $01101001_2 \mid 01010101_2 \rightarrow 01111101_2$

巧用异或

- 按位异或是一种加的形式
- A ^ A = 0

```
int  inplace_swap(int *x, int *y)
{
   *x = *x ^ *y;    /* #1 */
   *y = *x ^ *y;    /* #2 */
   *x = *x ^ *y;    /* #3 */
}
```

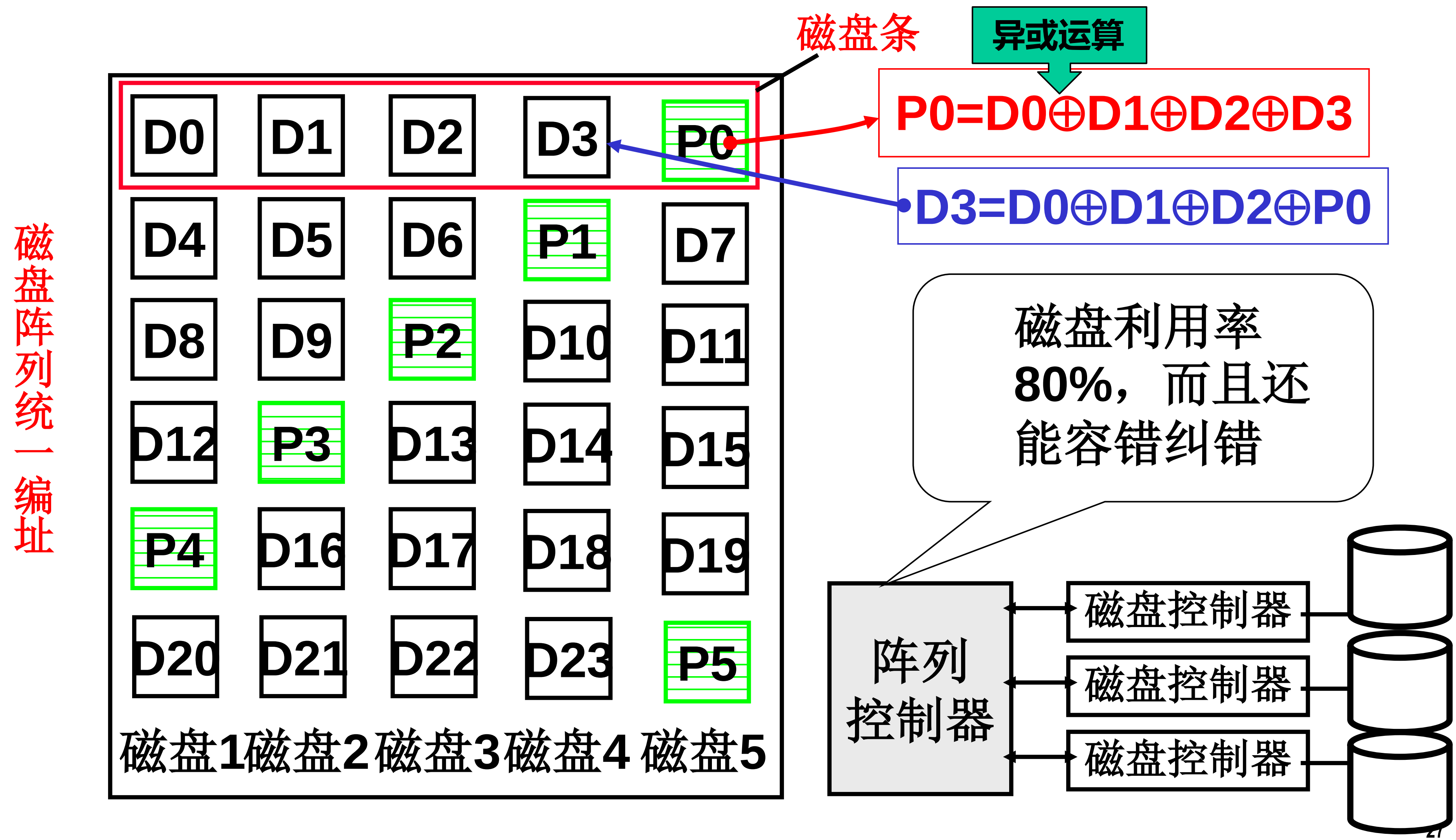
Step	`*x`	`*y`
Begin	A	B
1	A^B	B
2	A^B	(A^B)^B = A^(B^B) = A^0 = A
3	(A^B)^A = (B^A)^A = B^(A^A) = B^0 = B	A
End	B	A

巧用异或

```
//翻转数组
void reverse_array(int a[], int cnt) {
        int first, last;
        for (first = 0, last = cnt-1;first <= last; first++,last--)
                inplace_swap(&a[first], &a[last]);
}
```

巧用异或-RAID5

磁盘阵列场景：校验数据分布在多个盘上，磁盘互相恢复数据



2.1.8 对比: C语言的逻辑运算（非真即假）

- **C语言的逻辑运算符： &&, ||, !**
  - 将0 视作 逻辑“False(假)”
  - 所有非0值视作逻辑 “True(真)”
  - 计算结果总是0 或 1
  - 提前终止(Early termination)、短路求值(short cut)
- **例子(char 数据类型)**
  - !0x41 → 0x00
  - !0x00 → 0x01
  - !!0x41 → 0x01
  - 0x69 && 0x55 → 0x01
  - 0x69 || 0x55 → 0x01
  - p && *p (避免空指针访问)

2.1.9 C语言中的移位运算（无循环移位）

- 左移： `x << y`
  - **将位向量x向左移动y位**
    - 扔掉左边多出(移出)的位
    - 在右边补0
- 右移： `x >> y`
  - **将位向量x向右移动y位**
    - 扔掉右边多出(移出)的位
  - 逻辑(无符号数)右移：在左边补0
  - 算术右移：复制左边的最高位(y次)
- 未明确定义
  - 移位数量y< 0 或 y ≥ x的字长(位数)
- 移位不都是除以/乘以2，尤其是要区分算术还是逻辑移位

  还要注意可能存在的精度损失

Argument x	01100010
<< 3	00010***000***
Log. >> 2	***00***011000
Arith. >> 2	***00***011000

Argument x	10100010
<< 3	00010***000***
Log. >> 2	***00***101000
Arith. >> 2	***11***101000

本章目录: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - **表示：无符号数和有符号数**
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示
- 总结

2.2 整数编码(Encoding Integers)

无符号数(Unsigned) **有符号数——补码(Two's Complement)**

$$B2U(X) = \sum_{i=0}^{w-1} x_i \cdot 2^i \qquad B2T(X) = -x_{w-1} \cdot 2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i \cdot 2^i$$

符号位

```
short int x =  15213;
short int y = -15213;
```

- **C short：2 字节**

	10 进制	16 进制	2 进制
x	15213	3B 6D	00111011 01101101
y	-15213	C4 93	11000100 10010011

- **符号位**
  - 对于补码(2's complement), 最高位表示符号
    - 0 表示非负数（!= 正数），1 表示负数

例子：B2U(X)和B2T(X)　见教材P45~46

$$
\begin{aligned}
B2U_4([0001]) &= 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 0+0+0+1 = 1 \\
B2U_4([0101]) &= 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 0+4+0+1 = 5 \\
B2U_4([1011]) &= 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+0+2+1 = 11 \\
B2U_4([1111]) &= 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+4+2+1 = 15
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
B2T_4([0001]) &= -0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 0+0+0+1 = 1 \\
B2T_4([0101]) &= -0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 0+4+0+1 = 5 \\
B2T_4([1011]) &= -1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = -8+0+2+1 = -5 \\
B2T_4([1111]) &= -1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = -8+4+2+1 = -1
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

补码示例

```
x =      15213: 00111011 01101101
y =     -15213: 11000100 10010011
```

权重	15213		-15213	
1	1	1	1	1
2	0	0	1	2
4	1	4	0	0
8	1	8	0	0
16	0	0	1	16
32	1	32	0	0
64	1	64	0	0
128	0	0	1	128
256	1	256	0	0
512	1	512	0	0
1024	0	0	1	1024
2048	1	2048	0	0
4096	1	4096	0	0
8192	1	8192	0	0
16384	0	0	1	16384
-32768	0	0	1	-32768
总计		**15213**		**-15213**

数值范围（共w位）

- 无符号数值
  - *UMin* = 0
    000…0
  - *UMax* = $2^w - 1$
    111…1

- 补码数值
  - *TMin* = -2^{w-1}
    100…0
  - *TMax* = $2^{w-1} - 1$
    011…1
  - -1
    111…1

位数W = 16时的数值

	十进制	16 进制	二进制
UMax	65535	FF FF	11111111 11111111
TMax	32767	7F FF	01111111 11111111
TMin	-32768	80 00	10000000 00000000
-1	-1	FF FF	11111111 11111111
0	0	00 00	00000000 00000000

不同字长的数值

	W			
	8	**16**	**32**	**64**
UMax	255	65,535	4,294,967,295	18,446,744,073,709,551,615
TMax	127	32,767	2,147,483,647	9,223,372,036,854,775,807
TMin	-128	-32,768	-2,147,483,648	-9,223,372,036,854,775,808

- **观察**
  - $|TMin| = TMax + 1$
    - 非对称（数轴上）
  - $UMax = 2 * TMax + 1$
- **C 语言的常量声明**
  - #include <limits.h>
    - #define INT_MAX 2147483647
    - #define INT_MIN (-INT_MAX-1)
    - #define UINT_MAX 0xffffffff
  - **平台相关**
    - #define ULONG_MAX
    - #define LONG_MAX
    - #define LONG_MIN (-LONG_MAX-1)

无符号数与有符号数编码的值

X	B2U(*X*)	B2T(*X*)
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	–8
1001	9	–7
1010	10	–6
1011	11	–5
1100	12	–4
1101	13	–3
1110	14	–2
1111	15	–1

- **相同**
  - 非负数值的编码相同
- **单值性**
  - 每个位模式对应一个唯一的整数值
  - 每个可描述整数有一个唯一编码

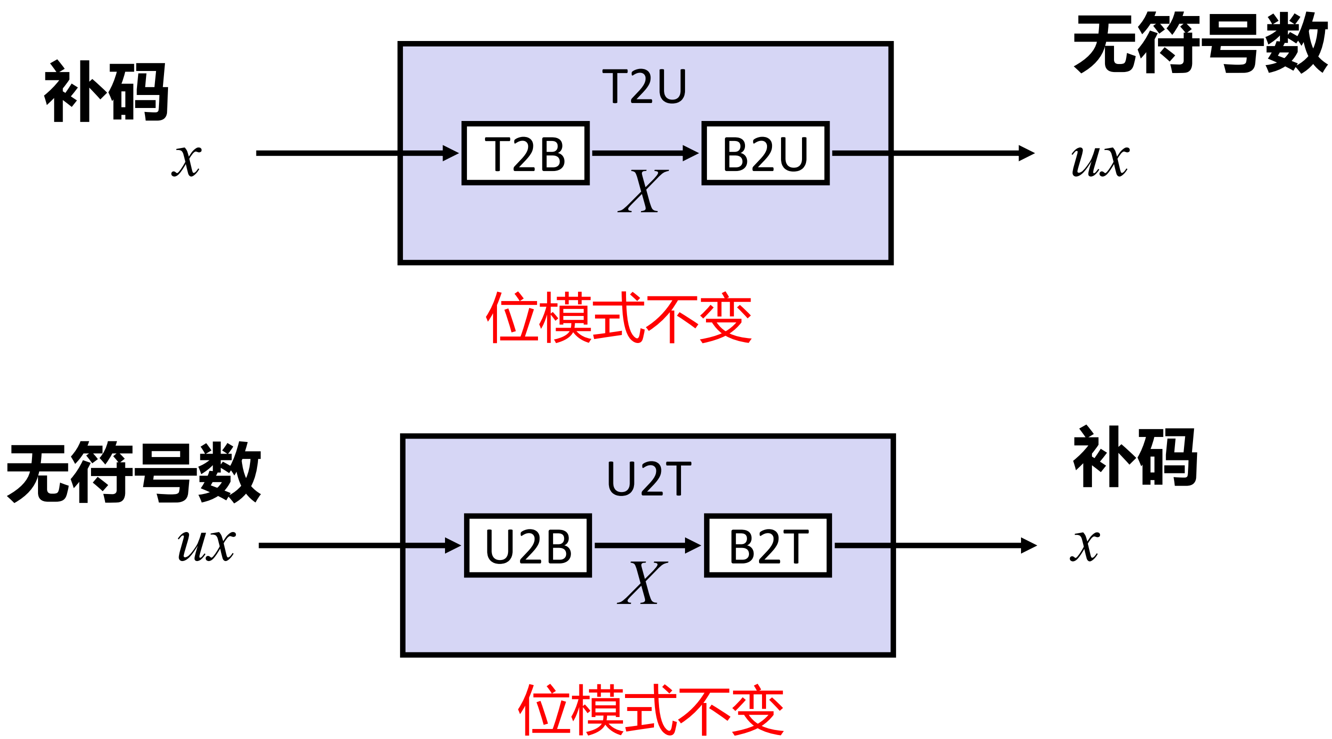
$\Rightarrow$ **可逆映射（一一对应）**

  - U2B(x) = B2U^{-1}(x)
    - 无符号整数的位模式
  - T2B(x) = B2T^{-1}(x)
    - 补码的位模式

本章目录: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - 表示：无符号数和有符号数
  - **无符号数和有符号数的转换**
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

有符号/无符号数之间的转换



- **有符号数和无符号数转换规则:**
  位模式不变、数值可能改变(按不同编码规则重新解读)

有符号↔ 无符号数的转换

Bits	Signed	Unsigned
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	-8	8
1001	-7	9
1010	-6	10
1011	-5	11
1100	-4	12
1101	-3	13
1110	-2	14
1111	-1	15

$\xrightarrow{\text{T2U}}$

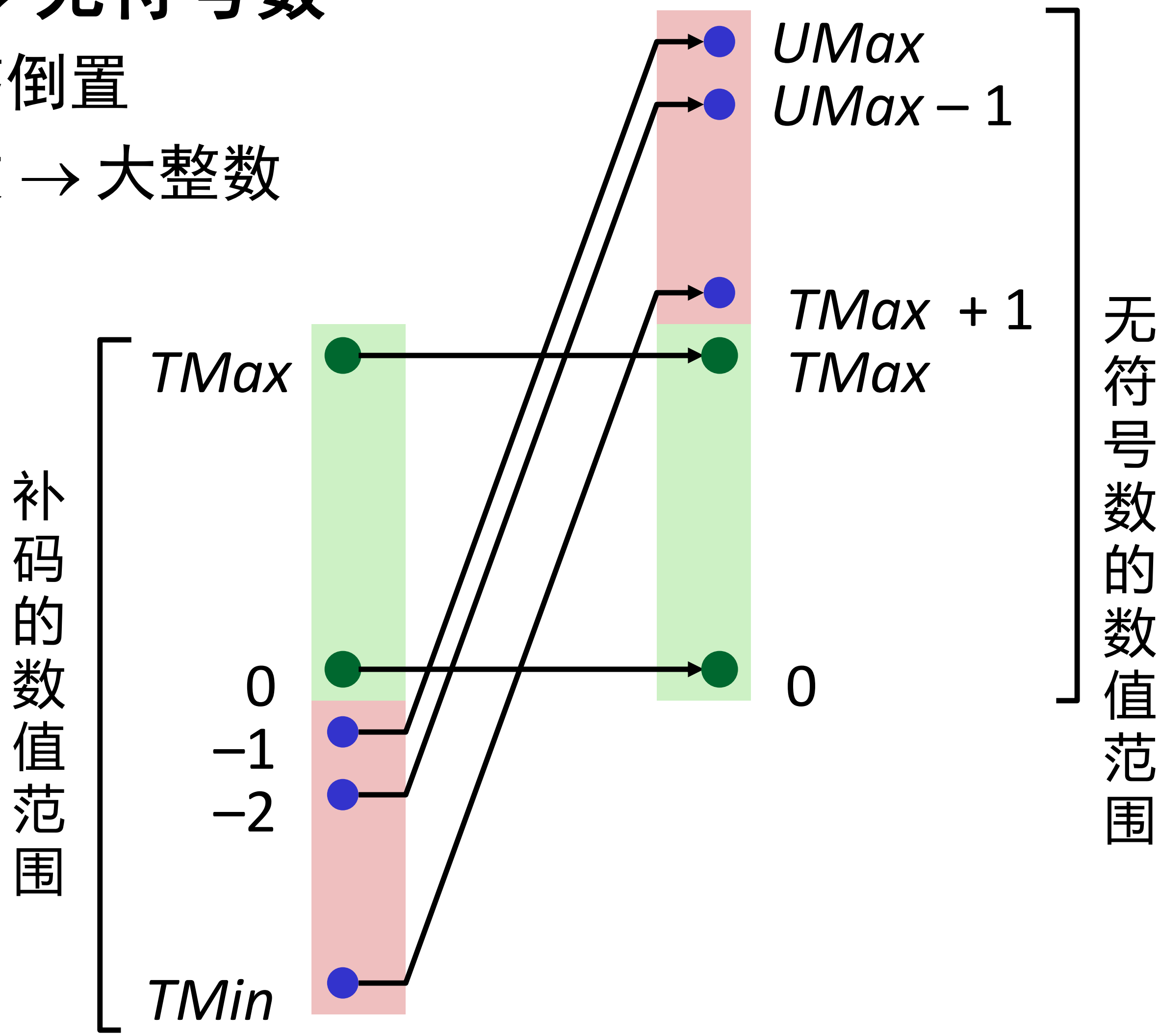
$\xleftarrow{\text{U2T}}$

有符号↔ 无符号数的转换

Bits	Signed		Unsigned
0000	0		0
0001	1		1
0010	2		2
0011	3	=	3
0100	4		4
0101	5		5
0110	6		6
0111	7		7
1000	-8		8
1001	-7		9
1010	-6		10
1011	-5	+/- 16	11
1100	-4		12
1101	-3		13
1110	-2		14
1111	-1		15

转换的可视化

- 补码→ 无符号数
  - 顺序倒置
  - 负数 → 大整数



2.2.5 C语言中的有符号数和无符号数

- **常量**
  - 数字默认是有符号数
  - 无符号数用后缀 “U”

```
0U, 4294967259U
```

- **类型转换**
  - 显示的强制类型转换

```
int tx, ty;
unsigned ux, uy;
tx = (int) ux;
uy = (unsigned) ty;
```

  - 隐式的类型转换（赋值、函数调用等情况下发生）

```
tx = ux;
uy = ty;
```

类型转换的惊喜！

- **表达式计算**
  - 表达式中有符号和无符号数混用时：

有符号数隐式转换为无符号数

  - 包括比较运算符 **<, >, ==, <=, >=**
  - 例如*W* = 32:

TMIN = – 2,147,483,648

TMAX = 2,147,483,647

类型转换的惊喜！

Constant1	Constant2	Relation	Evaluation
0	0U	==	unsigned
-1	0	<	signed
-1	0U	>	unsigned
2147483647	-2147483648	>	signed
2147483647U	-2147483648	<	unsigned
-1	-2	>	signed
(unsigned)-1	-2	>	unsigned
2147483647	2147483648U	<	unsigned
2147483647	(int) 2147483648U	>	signed

有符号数和无符号数转换的基本原则

- **位模式不变**
- **重新解读**（按目标编码类型的规则解读）
- 会有意外副作用: 数值被 +或- 2^w

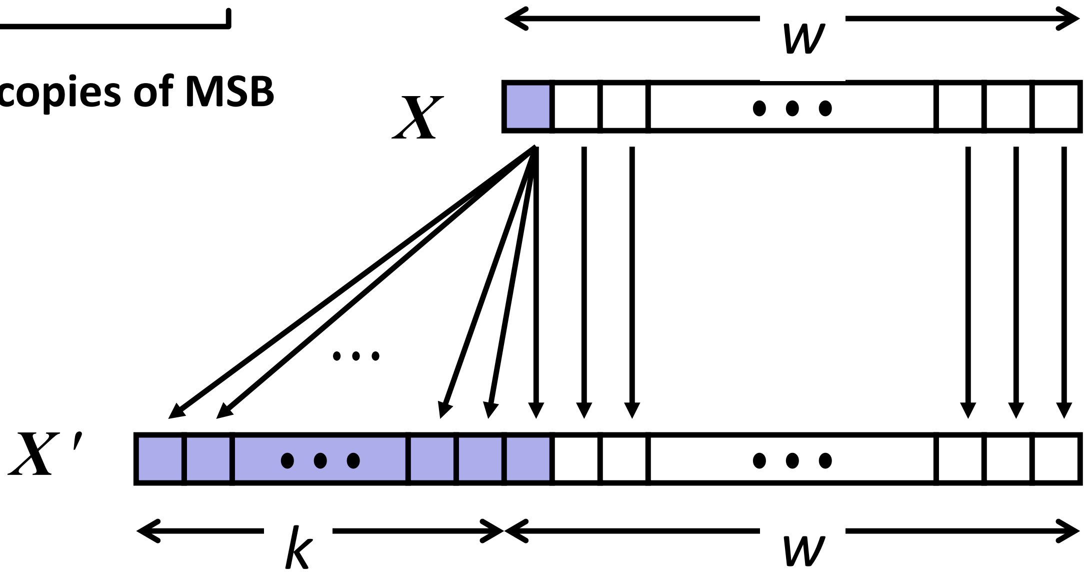
- 表达式含无符号数和有符号数时
  - 有符号数被转换成无符号数（如int 转成unsigned int）
  - 当心副作用！！！**(即按照无符号数进行运算)**

本章目录: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - **扩展、截断**
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

符号扩展（w位→$w+k$位）

- **任务:**
  - 给定w位的有符号整型数x
  - 将其转换为$w+k$位的相同数值的整型数
- **规则:**
  - 将最高有效位(符号位)x_{w-1}复制 k份:
  - $X' = \underbrace{x_{w-1},\ldots,x_{w-1}}_{k \text{ copies of MSB}}, x_{w-1}, x_{w-2},\ldots,x_0$



符号扩展示例

```
short int x =  15213;
int      ix = (int) x;
short int y = -15213;
int      iy = (int) y;
```

	十进制	16进制	二进制
x	15213	3B 6D	00111011 01101101
ix	15213	00 00 3B 6D	00000000 00000000 00111011 01101101
y	-15213	C4 93	11000100 10010011
iy	-15213	FF FF C4 93	11111111 11111111 11000100 10010011

- 从短整数类型向长整数类型转换时，C自动进行符号扩展

截断（w位→k位，并且$k<w$）

- **无符号数的截断（w位—k位）**
  - 将无符号数对2^k取模
  - X'=B2U([x_{w-1},…, x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2},…, x_0])mod 2^k
- **有符号数的截断（w位—k位）**
  - 与无符号数截断类似，但要将余数按照补码进行解读
  - X'=U2T(B2U([x_{w-1},…, x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2},…, x_0])mod 2^k)

总结:扩展、截断的基本规则

- **扩展 (例如从short int 到int的转换)**
  - 无符号数: 填充0
  - 有符号数:符号扩展
  - 结果都是明确的预期值
- **截断 (例如从unsigned 到unsigned short的转换)**
  - 无论有/无符号数:多出的位（高位）均被截断
  - 结果重新解读
  - 无符号数: 相当于求模运算
  - 有符号数: 与求模运算相似
  - 对于小整数，结果是明确（正确）的预期值

本章目录: 位、字节 和 整型数

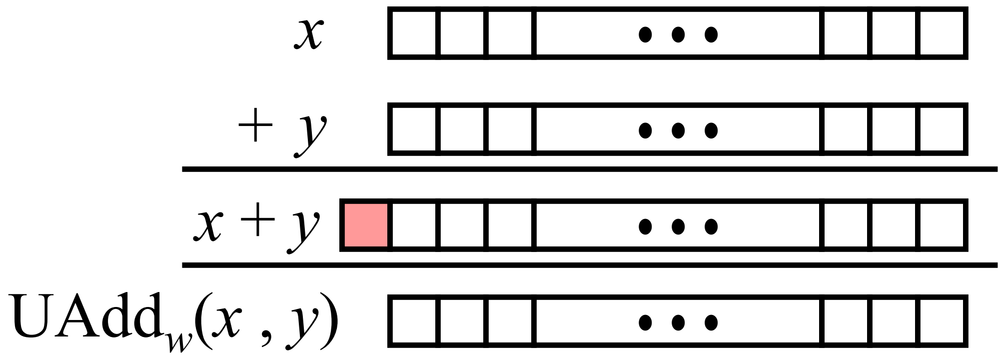
- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - **整数运算：加、非、乘、移位**
- 内存、指针、字符串表示
- 总结

无符号数加法

操作数: w 位

真实和: w+1 位

丢弃进位: w 位



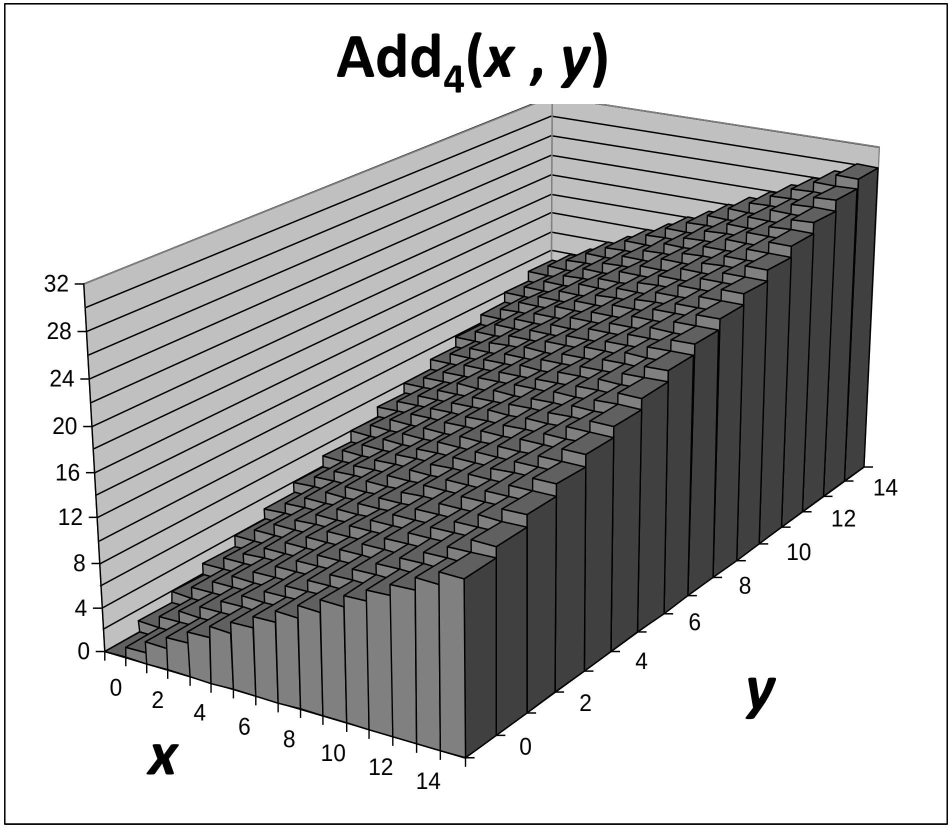
- **标准加法功能**
  - 忽略进位输出
- **模数加法：相当于增加一个模运算**

$$s \;=\; UAdd_w(x, y) \;=\; (x + y) \bmod 2^w$$

$$UAdd_w(x, y) = \begin{cases} x + y & x + y < 2^w \\ x + y - 2^w & x + y \geq 2^w \end{cases}$$

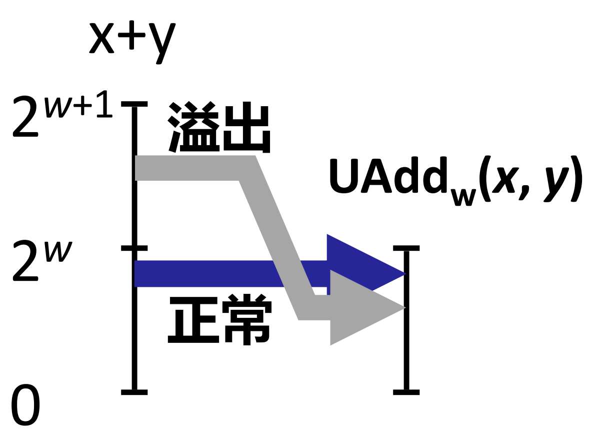
整数加法可视化示意图（正常的整数加法）

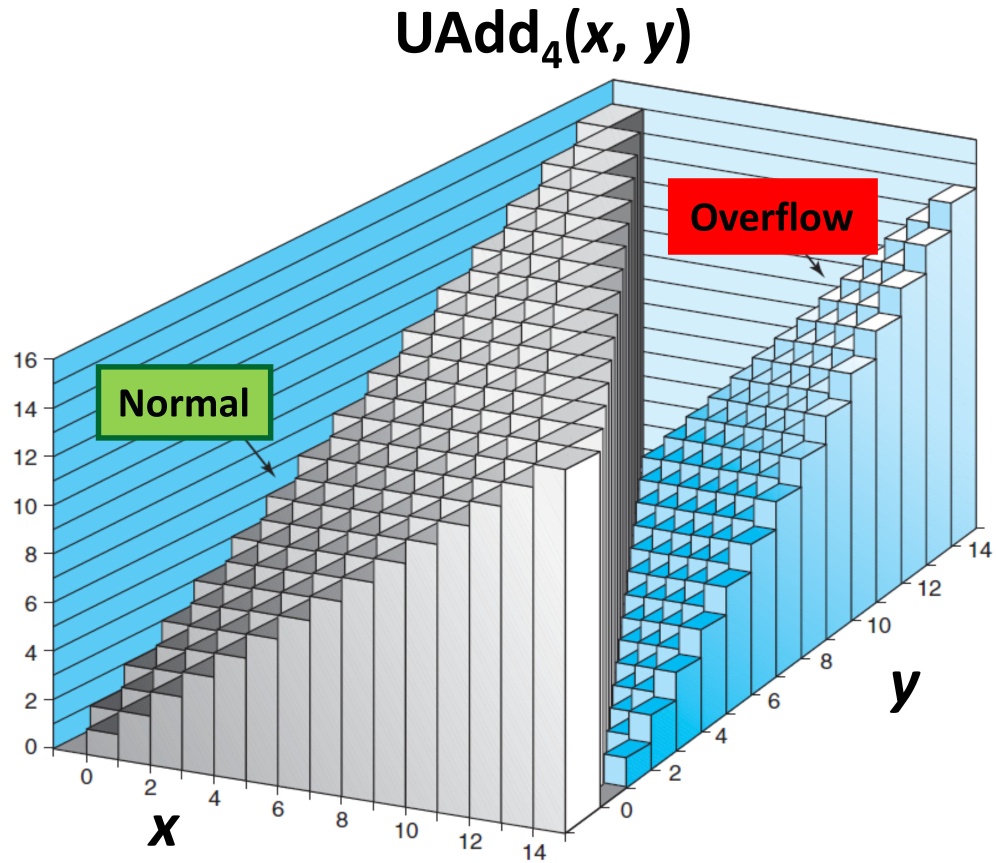
- **整数加法**
  - 4-bit 整型数 *x*, *y*
  - 计算真实值$Add_4(x, y)$
  - 和随x和 *y线性增加*
  - 表面为斜面形
  - 正常加法可以有五位



无符号数加法可视化示意图

- 数值面有弯折（非饱和运算—不单调）
  - 当真实和≥ 2^w时溢出
  - 最多溢出一次



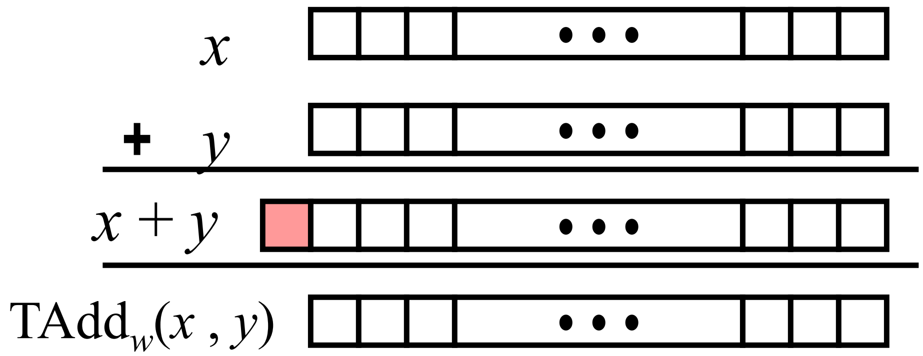


补码加法（其实CPU不知道数是有/无符号）

操作数: w 位

真实和: w+1 位

丢弃进位: w 位



- **TAdd 和 UAdd 具有完全相同的位级表现**
  - C语言中有符号数(补码)与无符号数加法:

    int s, t, x, y;

    s = (int) ((unsigned) x + (unsigned) y);

    t = x + y
  - 将一定会有`s == t`

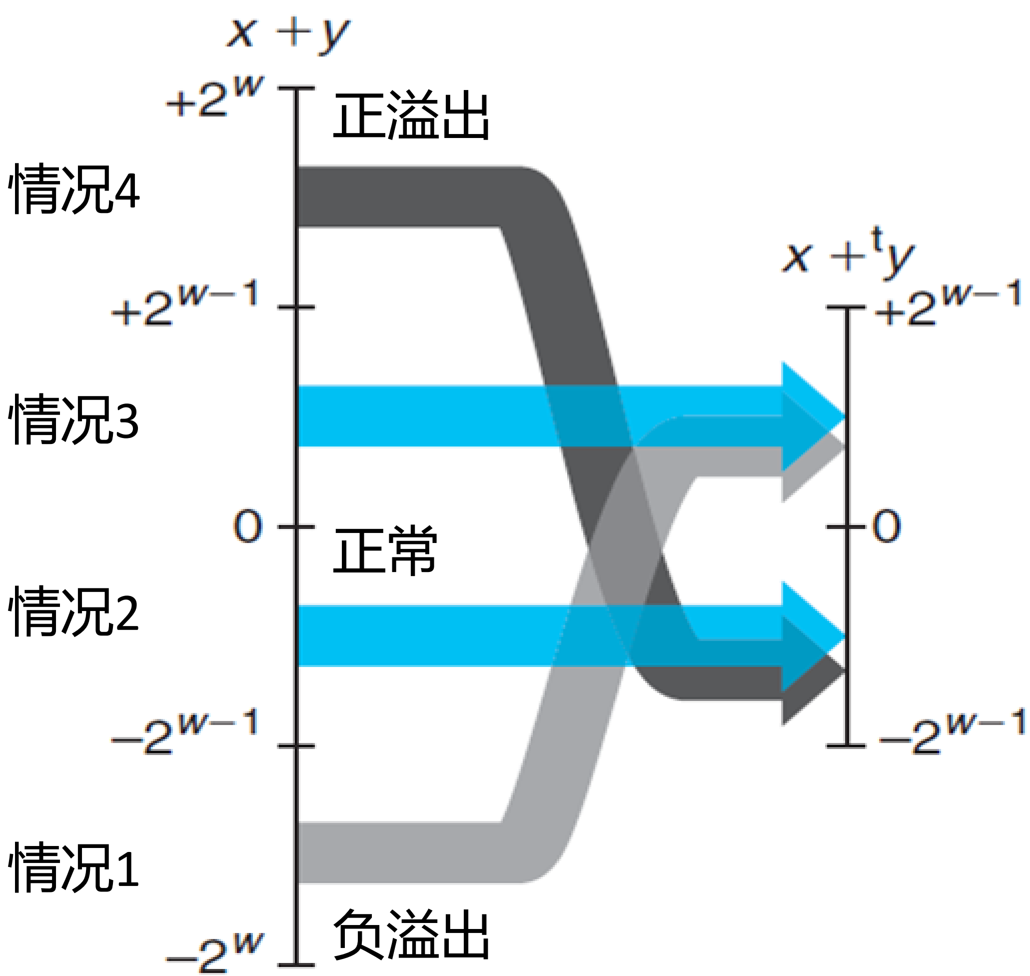
补码加法(Tadd)

- 功能
  - 真实和需要w+1位
  - 丢弃最高有效位（MSB）
  - 将剩余的位视作补码（整数）

$$TAdd(x, y) = \begin{cases} x + y - 2^w, & TMax_w < x + y \quad \text{正溢出} \\ x + y, & TMin_w \le x + y \le TMax_w \quad \text{正常} \\ x + y + 2^w, & x + y < TMin_w \quad \text{负溢出} \end{cases}$$

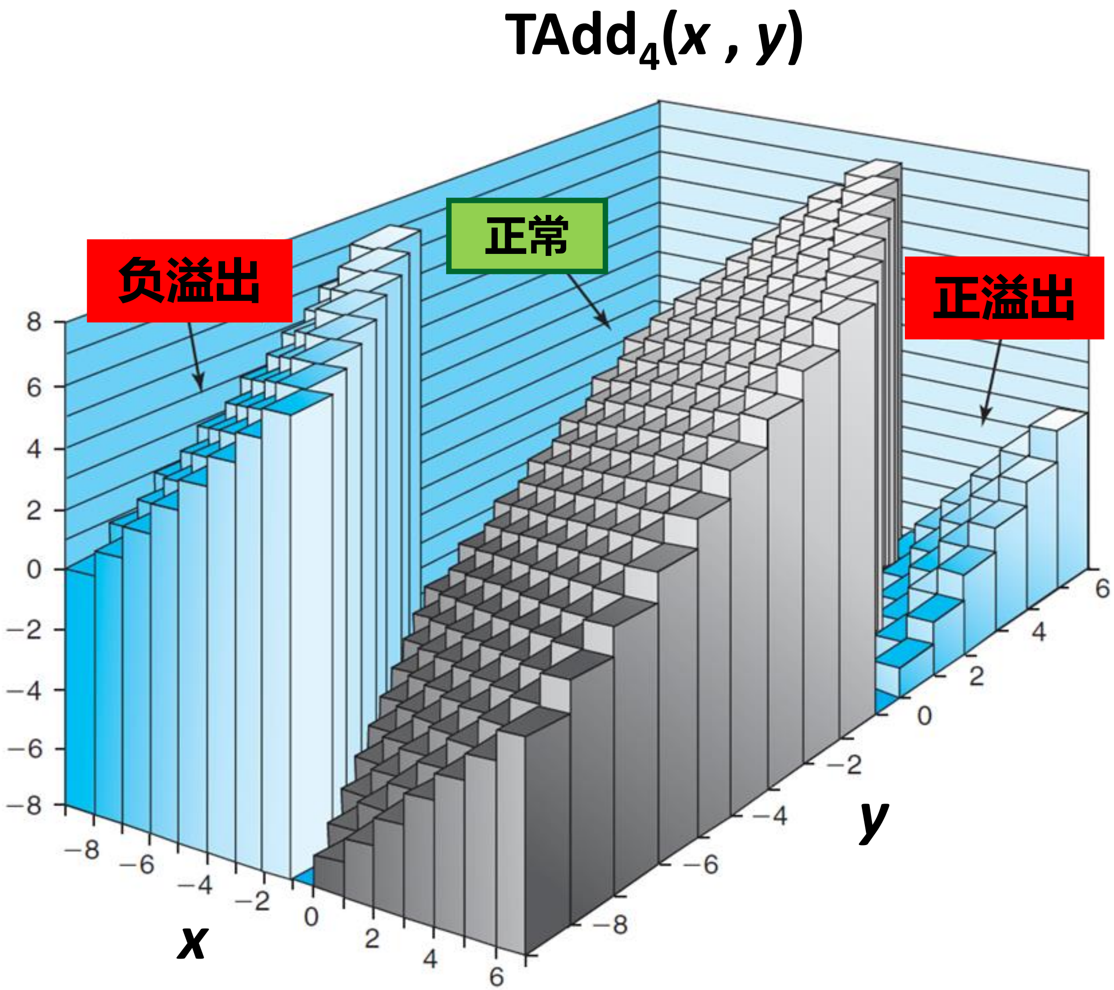
- 判断补码是否超范围（Xh表示x的符号位）：
  - Xh!=Yh 或者 Xh==Yh==Zh 则正常（Z=X+Y）
  - Xh==Yh!=Zh 则溢出

补码加法(Tadd)的溢出问题



补码加法可视化示意图

- 数值
  - 4位补码
  - 数值范围-8 ～ +7
- 弯折——溢出
  - $x+y \geq 2^{w-1}$ 时
    - 变成负数
  - $x+y < -2^{w-1}$
    - 变成正数



乘法

- **目标: 计算w位的两个数x和 y的乘积**
  - 有符号数或者无符号数
- **乘积的精确结果最多可能超过 w 位**
  - 乘积的无符号数最多可达 2w 位
    - 结果范围: $0 \le x * y \le (2^w - 1)^2 = 2^{2w} - 2^{w+1} + 1$
  - 补码的最小值 (负数)最多需要2w-1 位
    - 结果范围: $x * y \ge (-2^{w-1})*(2^{w-1}-1) = -2^{2w-2} + 2^{w-1}$
  - 补码最大值(正数)最多需要2w 位——值为 $(TMin_w)^2$
    - 结果范围: $x * y \le (-2^{w-1})^2 = 2^{2w-2}$
- **为获得精确结果可扩展乘积的字长**
  - 在需要时用软件方法完成，例如： 算术程序包“arbitrary precision”

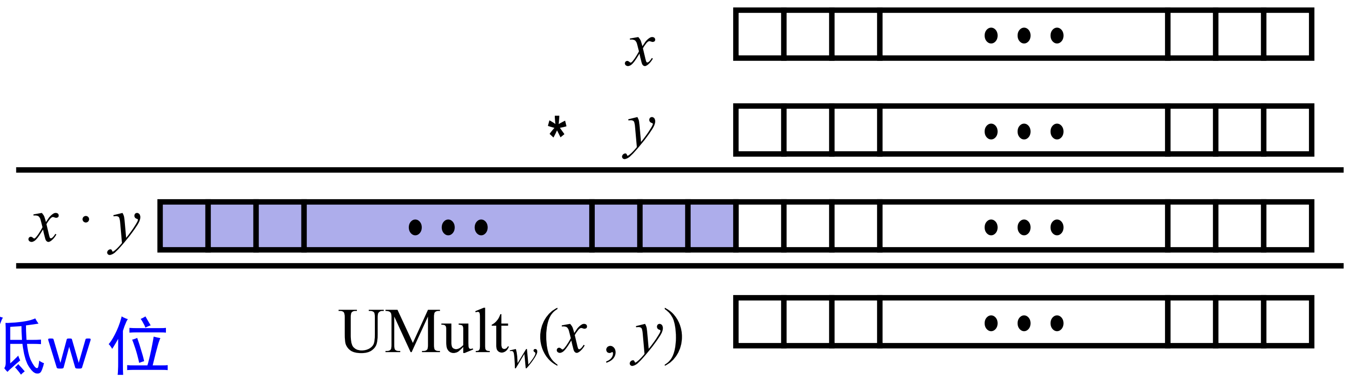
备注：1）2^(2w)需要2w+1，由于后面有减法，所以不超过2w，另一方面：2^2w-2^(w+1)+1-2^（w-1）>0，所以至少有2w位。
2）-2^(2w-2）需要2w-1位，这是补码的极端最小负数情况。
3） 负数相乘是正数，2^（2w-2）是1个1后面2w-2个0，同时由于正数，所以第一位必须是0。

C语言的无符号数乘法

操作数: w 位

真实乘积: $2*w$位

丢弃w 位: 只保留低w 位



- **标准乘法功能**
  - 忽略高w 位
- **相当于对乘积执行了模运算**

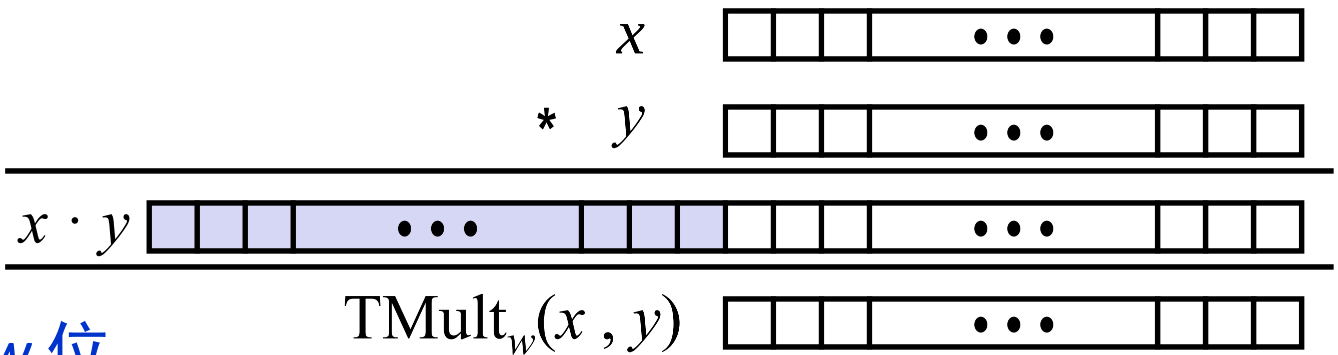
$$\text{UMult}_w(x, y) = (x \cdot y) \bmod 2^w$$

C语言的有符号数乘法

操作数: *w* 位

真实乘积: 2**w*位

丢弃 *w* 位: 保留低*w* 位



- **标准乘法功能**
  - 忽略高*w* 位
  - 有符号数乘、无符号数乘有不同之处
    - 乘积的符号扩展

用移位实现“乘以2的幂”

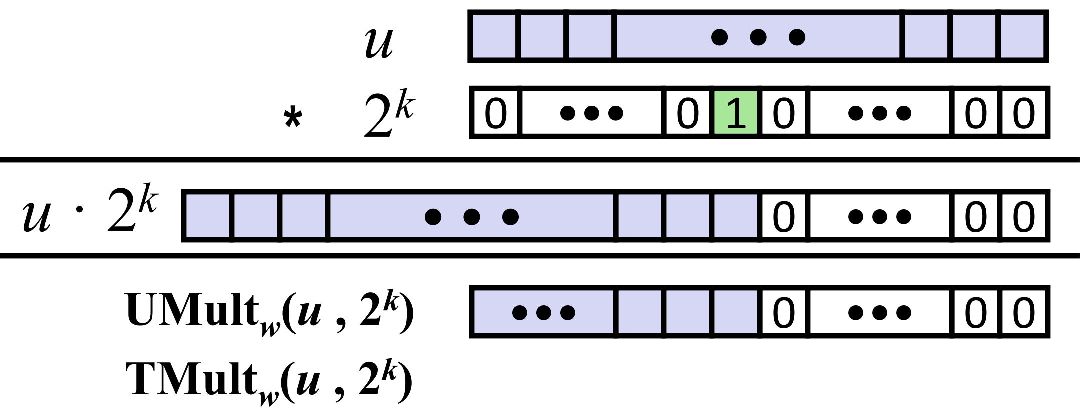
- **无论有符号数还是无符号数：**

  `u << k` 可得到 `u*`2^k

操作数: w 位

真实乘积: $w+k$ 位

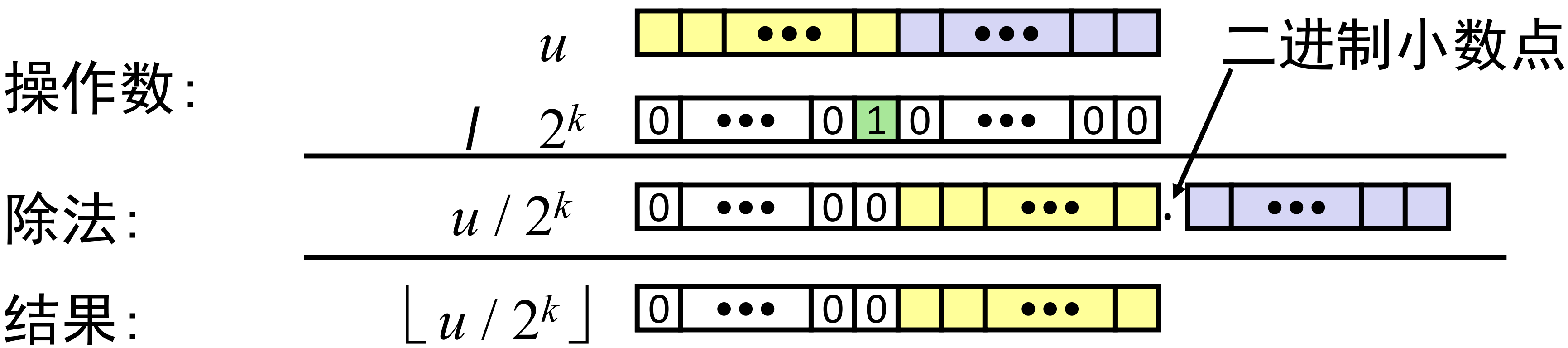
丢弃高 k 位: 保留低w 位



- **示例**
  - `u << 3` `==` `u * 8`
  - `(u << 5) - (u << 3)` `==` `u * 24`
  - 绝大多数机器，移位比乘法快
  - 编译器自动生成基于移位的乘法代码

用移位实现无/有符号数“除以2的幂”

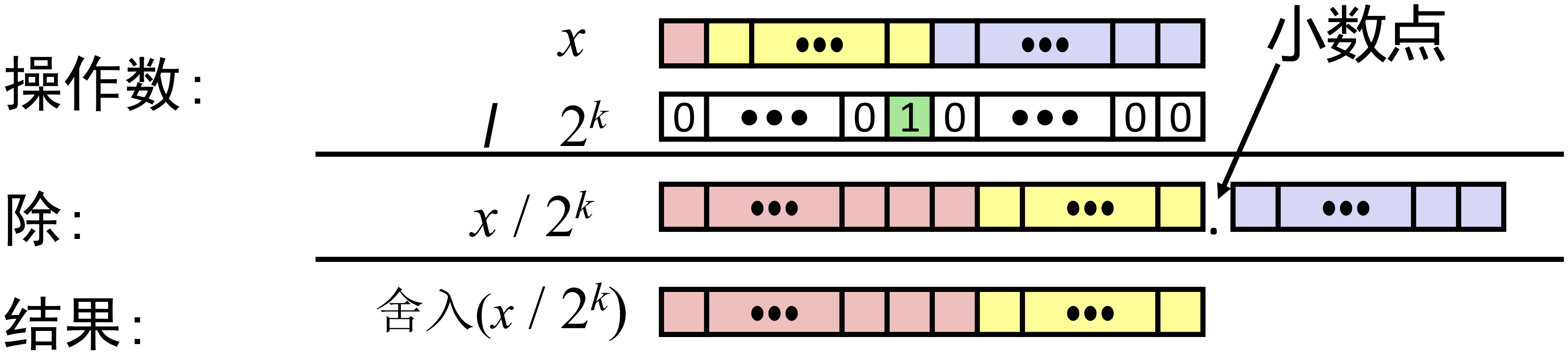
- 无符号数“除以2的幂”的商
  - `u >> k` 得到 $\lfloor \texttt{u} / 2^k \rfloor$
  - 使用逻辑右移 **没有四舍五入**



	Division	Computed	Hex	Binary
`x`	15213	15213	`3B 6D`	`00111011 01101101`
`x >> 1`	7606.5	7606	`1D B6`	`00011101 10110110`
`x >> 4`	950.8125	950	`03 B6`	`00000011 10110110`
`x >> 8`	59.4257813	59	`00 3B`	`00000000 00111011`

用移位实现有符号数“除以2的幂”

- 有符号数“除以2的幂”的商
  - `x >> k` 得到$\lfloor$ `x / ` $2^k \rfloor$
  - 当`x < 0`时，舍入方向出错，**应该统一向零舍入**
  - 注意使用算术右移，可以保留符号

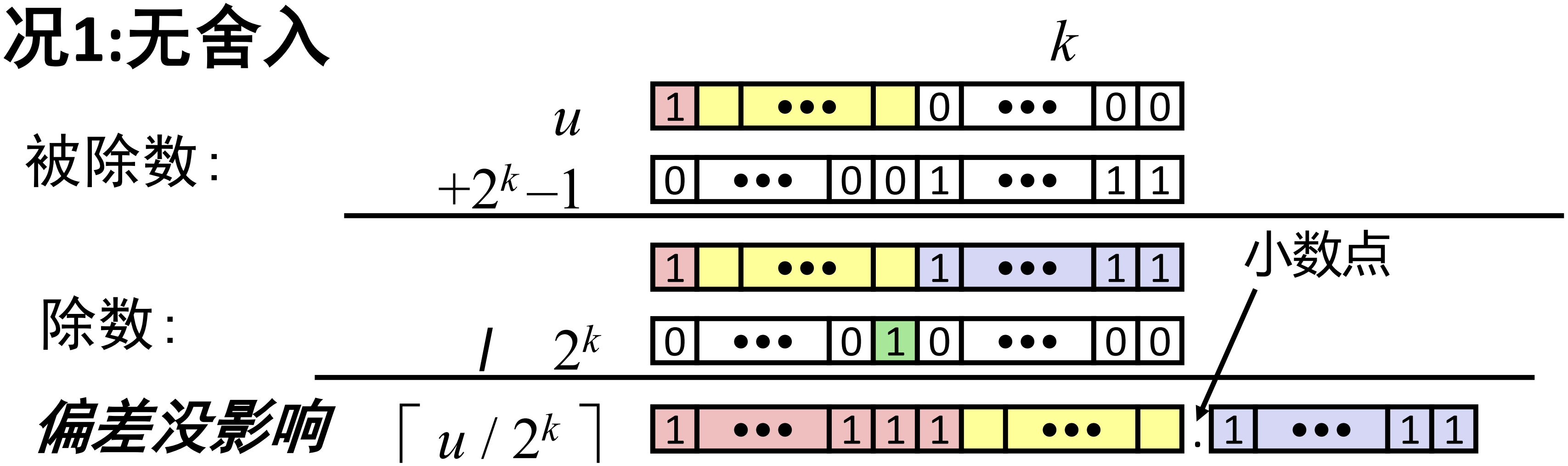


	Division	Computed	Hex	Binary
`y`	-15213	-15213	`C4 93`	`11000100 10010011`
`y >> 1`	-7606.5	-7607	`E2 49`	`11100010 01001001`
`y >> 4`	-950.8125	-951	`FC 49`	`11111100 01001001`
`y >> 8`	-59.4257813	-60	`FF C4`	`11111111 11000100`

修正 2的整数幂 除法

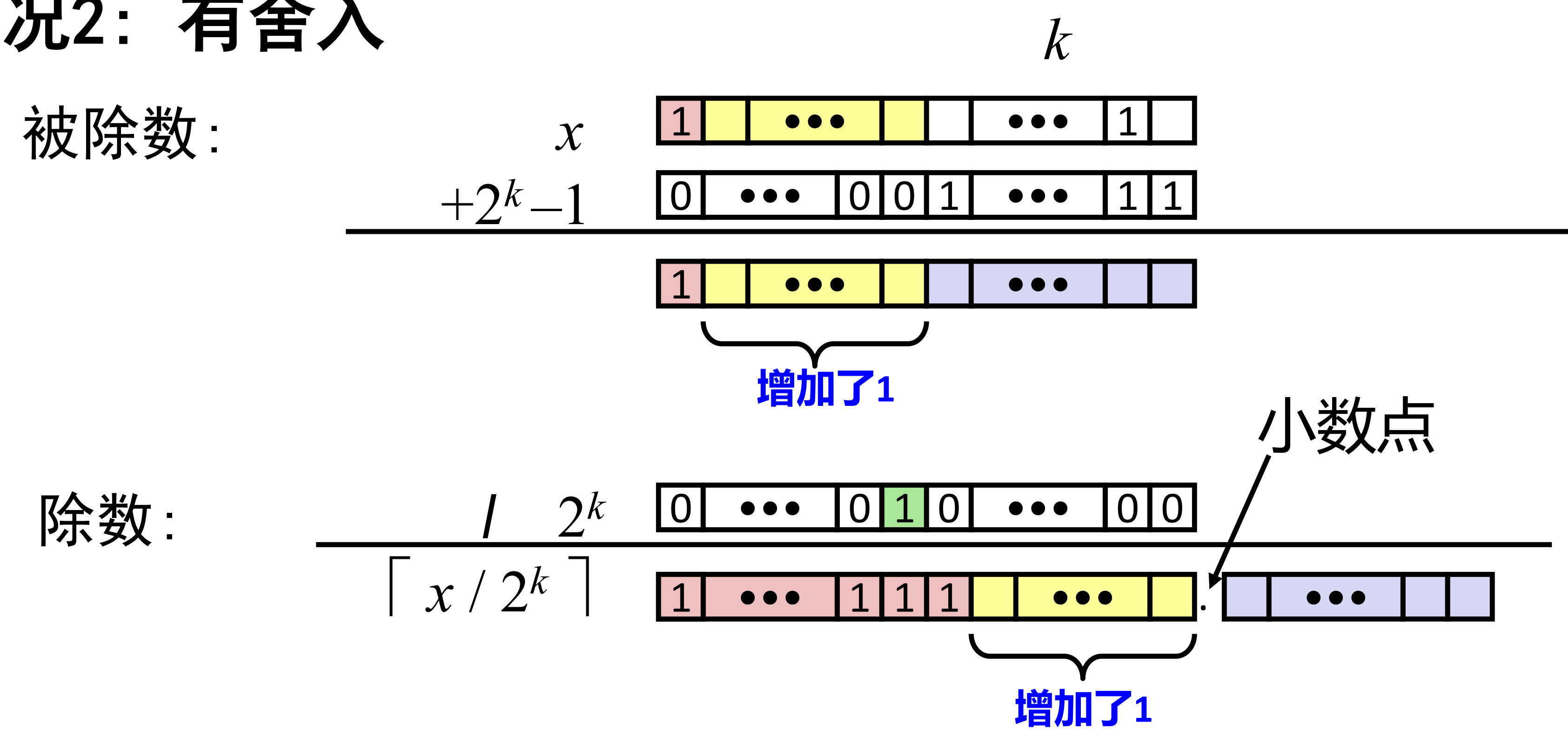
- 负数除以2的整数幂的商
  - 欲计算 $\lceil \mathtt{x} \ / \ 2^k \rceil$ (向0舍入)
  - 按 $\lfloor (\mathtt{x}+2^k-1) \ / \ 2^k \rfloor$ 计算
    - C表达式: `( x + (1<<k)-1 ) >> k`
    - 被除数偏差趋向0

情况1:无舍入



修正 2的整数幂 除法

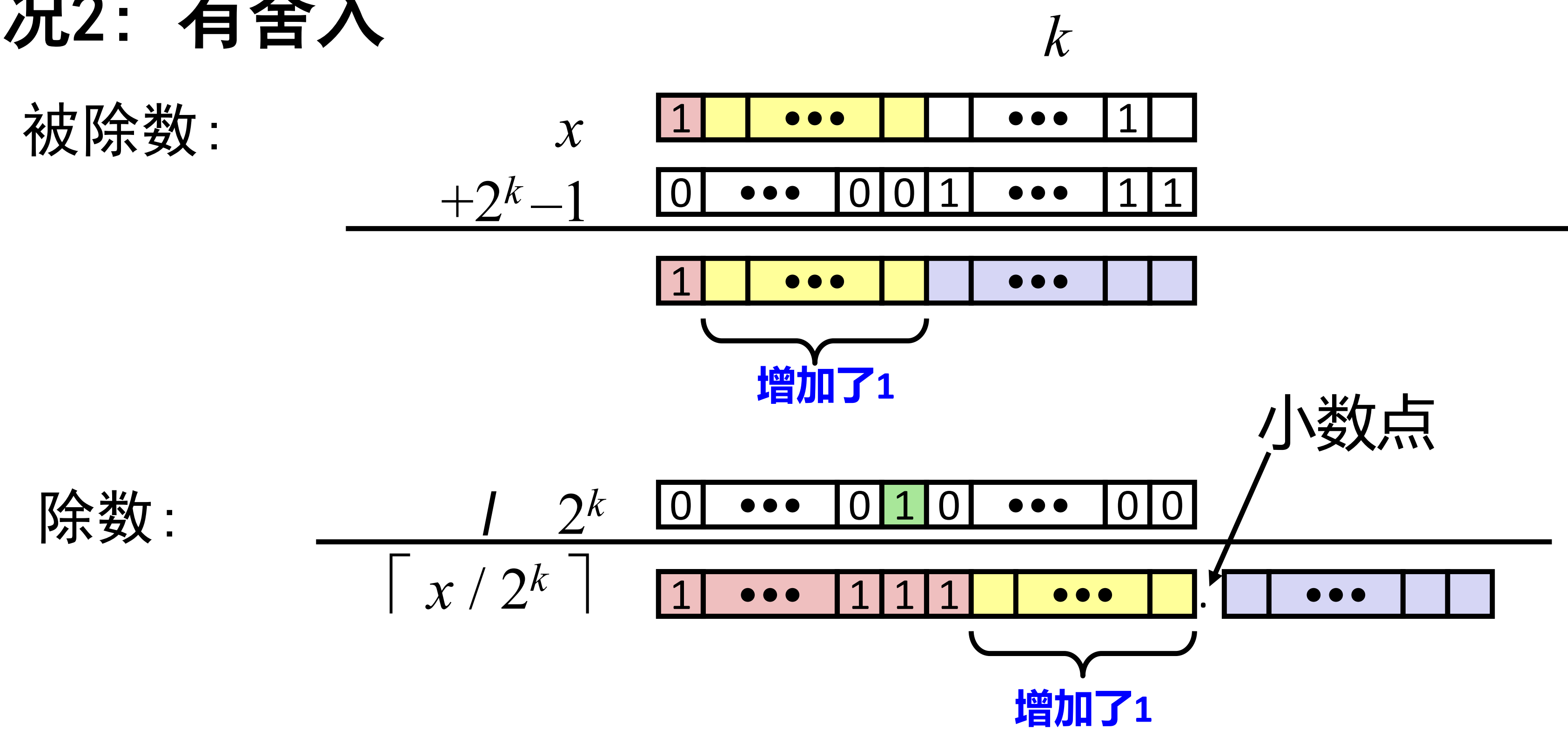
情况2：有舍入



偏差导致最终结果增加了 1

修正 2的整数幂 除法

情况2：有舍入



最终效果：

	Division	Computed	Binary
y	-15213	-15213	11000100 10010011
y >> 1	-7606.5	-7606	11100010 01001010
y >> 4	-950.8125	-950	11111100 01001010
y >> 8	-59.4257813	-59	11111111 11000101

编译生成的有符号数除代码

分两种情况：① 如果x是负数，先用test汇编指令进行判断，如果是负数，js指令会决定跳转到L4。对于负数除以2^k的计算，在**向零舍入**时需先进行$x+(2^k-1)$，再进行移k位操作，本例题中k=3；② 如果x是正数，直接移位并返回，即执行L3。

C 函数

```
long idiv8(long x)
{
  return x/8;
}
```

编译生成的结果

```
  testq %rax, %rax
  js   L4
L3:
  sarq $3, %rax #sarq: 算术移位右移
  ret
L4:
  addq $7, %rax
  jmp  L3
```

注意：汇编代码需要阅读教材P136~P139

解释

```
  if x < 0
     x += 7;
  # Arithmetic shift
  return x >> 3;
```

- 算术右移3位等价于除以8
- 无论x是正还是负，都实现了向零舍入

本章目录: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - **总结**
- 内存、指针、字符串表示

算术运算: 基本规则

备注：位级的运算就是指按位运算

- **加法:**
  - 无/有符号数的加法: 正常加法后再截断,位级的运算相同
  - 无符号数:加后对2^w求模
    - 数学加法 + 可能减去 2^w
  - 有符号数: 加后对 2^w 求模，使结果在合适范围
    - 数学加法 + 可能减去或加上 2^w
- **乘法:**
  - 无/有符号数的乘法:正常乘法后加截断操作,位级运算相同
  - 无符号数:乘后对2^w求模
  - 有符号数: 修改的乘后对 2^w 求模，使结果在合适范围内

为何用无符号数?

- ***一定要知道隐含的转换规则，否则不要用***
  - 常见错误

```
unsigned i;
for (i = cnt-2; i >= 0; i--)
  a[i] += a[i+1];
```

  - 不易察觉的问题

```
#define DELTA sizeof(int)
int i;
for (i = CNT;  i - DELTA >= 0; i -= DELTA)
  . . .
```

注意：无符号数和有符号数运算，都是按照无符号进行运算

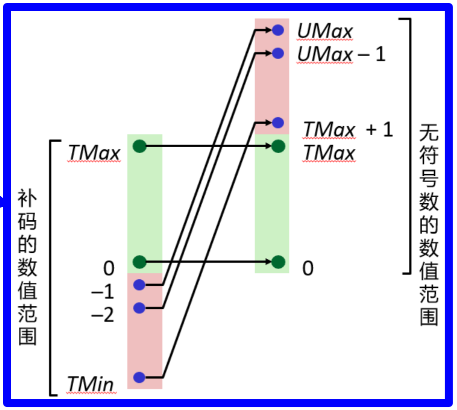
巧用无符号数：向下计数

- 使用无符号类型循环变量的适当方法

```
unsigned i;
for (i = cnt-2; i < cnt; i--)//循环执行cnt-1次
  a[i] += a[i+1];//将数组从后往前累加
```

- 参考Robert Seacord著《*Secure Coding in C and C++*》
  - C 语言标准确保无符号数加法的行为与模运算类似
    - 0 – 1 → *UMax*

对照理解



- 好方法

```
size_t i;
for (i = cnt-2; i < cnt; i--)
  a[i] += a[i+1];
```

  - size_t 定义为32位或64位的无符号数，一般和机器字长相关
  - 即便cnt = *Umax*也能很好工作
  - 若cnt是有符号数，且值小于0，会如何？

为何用无符号数？

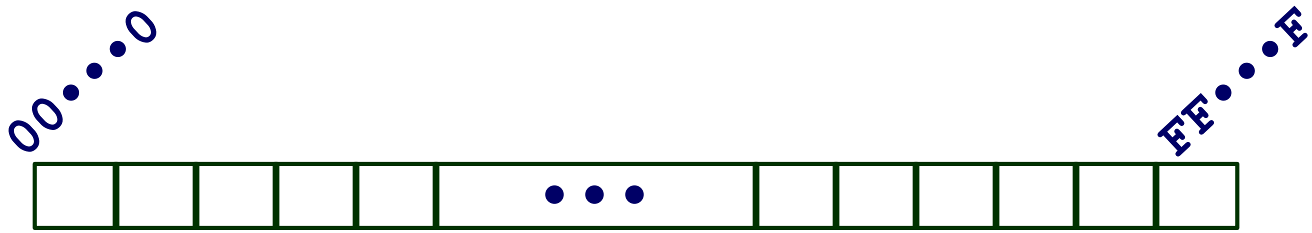
- **需要进行模运算的时候，就用无符号数**
  - 多精度的算术运算

- **用二进制位表示集合时，就用无符号数**
  - 逻辑右移、无符号扩展

主要内容: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- 整型数
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

面向字节的内存组织管理



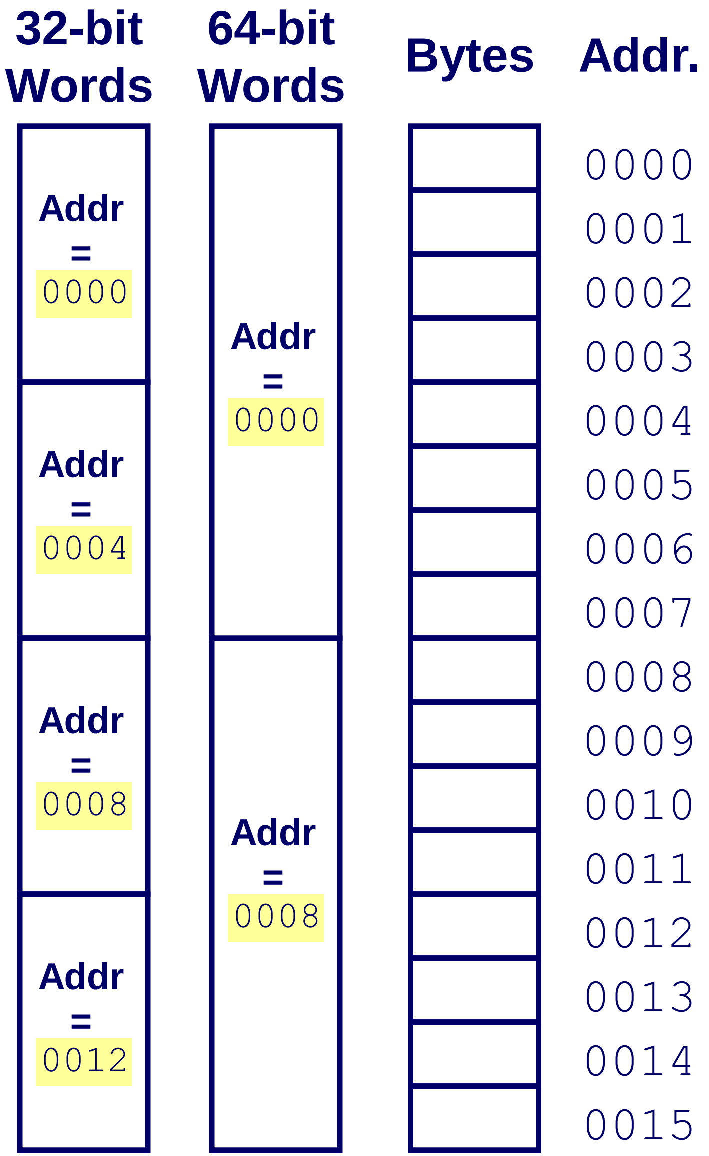
- **程序用地址来引用内存中的数据**
  - 内存可看做巨大的“数组”
    - 实际上不是这样，但不妨这样联想
  - 地址就像这个“数组”的索引
    - 指针变量可保存地址数值
- **注意:**
  - 操作系统为每个进程提供私有的地址空间
  - 每个进程可访问自己地址空间中的内存数据，彼此不干扰。

机器字

- **任何机器都有一个 “字长”**
  - 整型值数据的名义长度
    - 地址的名义长度
  - 1985年intel 386 CPU开始,大多数机器使用32位 (4字节) 字长
    - 地址空间最大4GB (2^{32} bytes)
  - 目前, 64位字长的机器是主流
    - 潜在地，可以有18 EB (Exabytes) 的可寻址内存
    - 约18.4 X 10^{18}字节
  - 机器依然支持多种数据格式
    - 字长的一部分或几倍长度
    - 始终是整数个字节

面向字的内存组织管理

- 地址：指定字节的位置
  - 字中第一个字节的地址
  - 相邻字的地址相差 4 (32-bit) 或 8 (64-bit)



C数据类型的典型大小(字节数)

C 数据类型	32位	64位	x86-64
`char`	1	1	1
`short`	2	2	2
`int`	4	4	4
`long`	4	8	8
`float`	4	4	4
`double`	8	8	8
`long double`	–	–	10/16
pointer	4	8	8

字节序

- **有多个字节的“字”(word)，其各个字节在内存中的排列**
- **惯例**
  - 大端序、大尾序（Big Endian）: Sun, PPC Mac, Internet
    - 最低有效位字节的地址最高
  - 小端序、小尾序（Little Endian）: x86、运行Android 的ARM处理器、 iOS和Windows
    - 最低有效位字节的地址最低
- 双端序**(Bi-Endian)**
  - 机器可以配置成大端序或小端序
  - 很多新近的处理器均支持双端序

字节序示例

- 示例
  - 变量x 有4字节数值0x01234567
  - 假定x的地址为 0x100

大端序

		0x100	0x101	0x102	0x103		
		01	23	45	67		

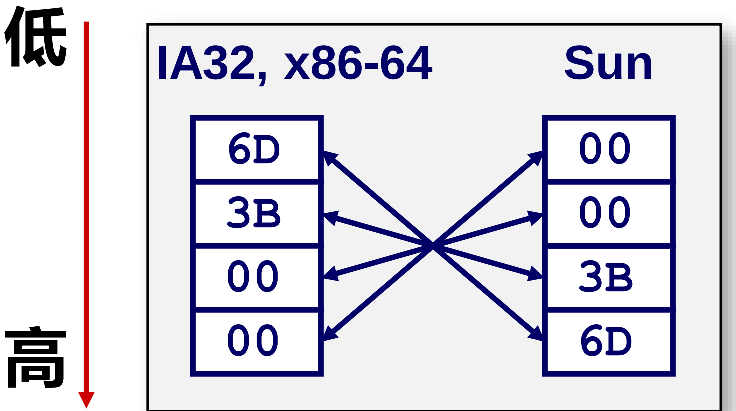
小端序

		0x100	0x101	0x102	0x103		
		67	45	23	01		

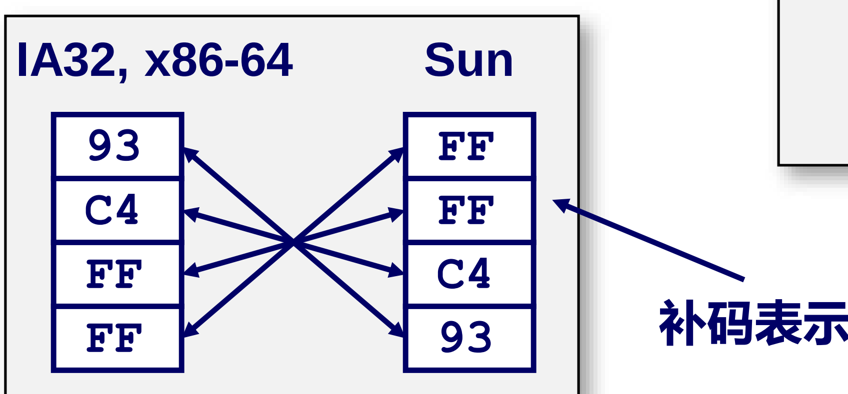
整型数的表示

十进制:	15213
二进制:	0011 1011 0110 1101
16进制:	3 B 6 D

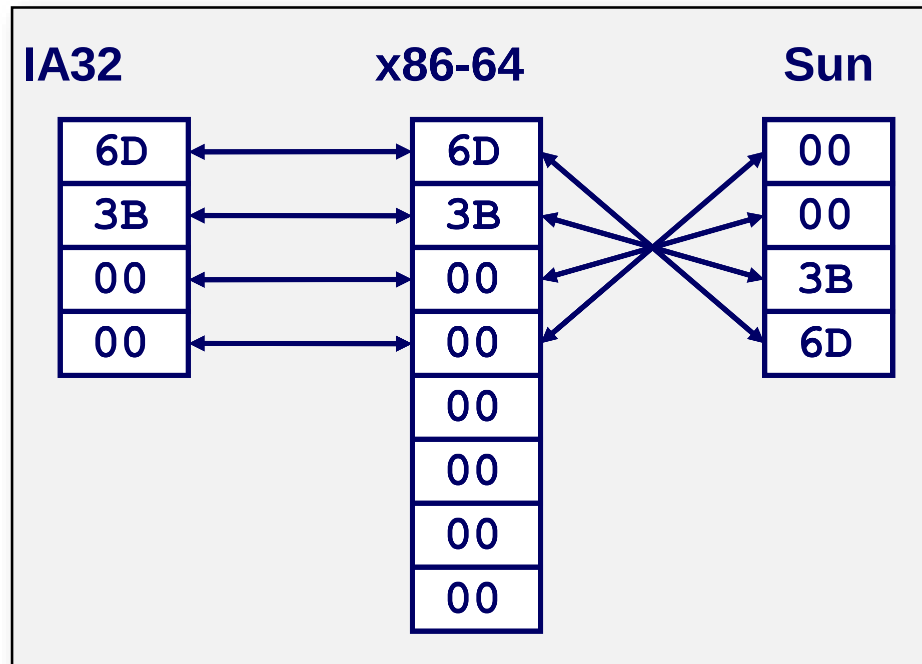
`int A = 15213;`



`int B = -15213;`



`long int C = 15213;`



验证数的表示

- 打印数据字节表示的程序代码
  - 将指针转换成unsigned char * 类型，从而按字节数组处理

```
typedef unsigned char *pointer;

void show_bytes(pointer start, size_t len){
  size_t i;
  for(i = 0; i < len; i++)
    printf(”%p\t0x%.2x\n",start+i, start[i]);
  printf("\n");
}
```

printf 指令:
%p: 打印指针
%x: 16进制格式打印

show_bytes 的执行实例

```
int a = 15213;
printf("int a = 15213;\n");
show_bytes((pointer) &a, sizeof(int));
```

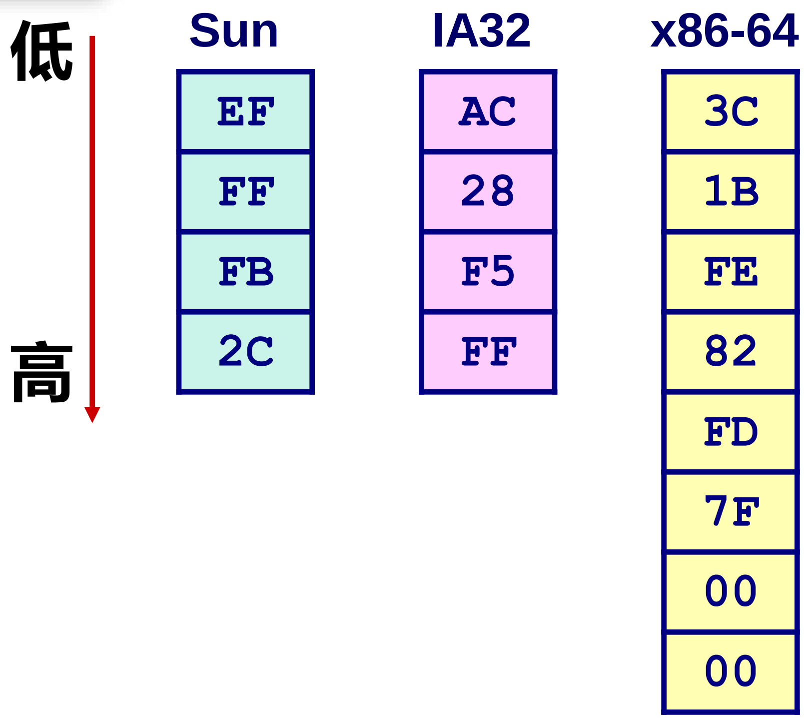
Result (Linux x86-64):

```
int a = 15213;
0x7fffb7f71dbc     6d
0x7fffb7f71dbd     3b
0x7fffb7f71dbe     00
0x7fffb7f71dbf     00
```

十进制:	15213			
二进制:	0011	1011	0110	1101
16进制:	3	B	6	D

指针的表示（打印p，即打印B的地址）

```
int B = -15213;
int *P = &B;
```

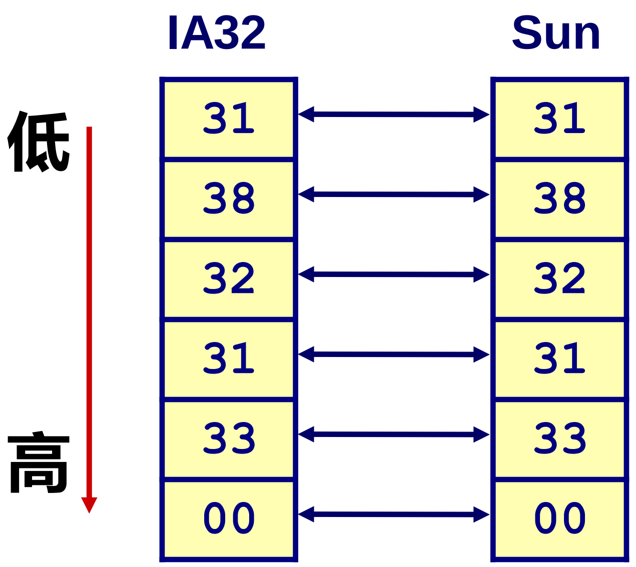


不同的编译器、机器会有不同的运行结果。
甚至程序的每次运行结果都不同

字符串的表示

```
char S[6] = "18213";
```

- **C字符串**
  - 用字符数组表示
  - 每个字符都是ASCII格式编码
    - 字符集合的标准7位编码
    - 字符’0’的编码是 0x30
      – 数码 *i* 的编码是 0x30+*i*
  - 字符串以\0结尾
    - 最后的字符 = 0
  - 兼容性
    - 字节序不是个事！
    - 任何系统上都得到相同结果，与字节顺序和字大小规则无关



Enjoy!