第一次习题课

质点运动学、牛顿定律、守恒定律

归纳总结

知 识 点 回 顾

第一章 质点运动学 —— 怎样动？

1、质点？

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

2、确定质点位置的方法？ 坐标法 位矢法

3、运动学方程？

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

4、位移、速度、加速度？

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

5、角量与线量的关系？

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$v = r\omega \qquad a_t = r\alpha \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = v\omega = r\omega^2$$

6、伽利略坐标变换、速度变换、加速度变换？

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \qquad \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{u} \qquad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$$

运动学部分解题指导

两大类型

1、已知运动方程，求速度，加速度，用微分法。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

2、已知加速度和初始条件，求速度、位移、路程和运动方程（或已知速度和初始条件，求位移、路程和运动方程），用积分法。

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt \qquad \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v} \cdot dt$$

注意运用“分离变量”和“恒等变换” $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

知识点回顾

第二章　质点动力学 —— 为什么动?

1、物体为什么动？　惯性？　　力？

2、牛顿三定律？

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

3、牛顿定律的瞬时性、矢量性？

4、牛顿定律适用范围？

5、力的叠加原理？

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m\vec{a}_i = m\vec{a}$$

6、常见力？　基本力？　惯性力？

$$F_x = \sum_i F_{ix} = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_t = \sum_i F_{it} = ma_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$F_n = \sum_i F_{in} = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

知 识 点 回 顾

动量守恒定律和能量守恒定律

1、功和能　联系与区别

作功是一个过程量　　能量是一个状态量

功是能量交换或转换的一种度量

2、变力作功　元功：$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fds\cos\theta$

$$W = \int_{a(L)}^{b} F\cos\theta\, ds = \int_{a(L)}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{a(L)}^{b} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

3、功率　$P = \dfrac{dW}{dt} = \dfrac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\theta$

4、保守力作功与势能概念： $dW = -dE_p$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_P(B) = -[E_p(B) - E_p(A)]$$

万有引力势能 $$E_p = \int_{r}^{\infty} -G\frac{mM}{r^2}dr = -G\frac{mM}{r}$$

重力势能 $$E_p = \int_z^0 (-mg)dz = mgz$$

弹性势能 $$E_p = \int_x^0 -kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

由势能求保守力

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \qquad \vec{F} = -\nabla E_p = -(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k})$$

5、一个原理：功能原理 $W^{ex}+W_{nc}^{in}=\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p$

6、两个定理：

动能定理： $W^{\mathrm{ex}}+W^{\mathrm{in}}=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k}0}$

动量定理： $\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}}$$

7、两个守恒定律

机械能守恒定律：　条件：　$W^{ex} + W_{nc}^{in} = 0$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0 \quad 或 \quad E_k + E_p = 常量$$

动量守恒定律：　条件：　$\sum_i \vec{F}_i^{ex} = 0$

$$d(\sum_i m_i \vec{v}_i) = 0 \quad 或 \quad \sum_i m_i \vec{v}_i = 常矢量$$

8、质心（质量中心）：在研究质点系统问题中，与质点系统质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布中心。

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = m' \vec{r}_C \qquad x_C = \sum m_i x_i / m'$$

$$\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i / m' \qquad \vec{r}_C = \int \vec{r} dm / m'$$

质心的速度：

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m'} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m'}$$

质心的加速度：

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{m'} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{m'}$$

9、质心运动定律

$$\boxed{\vec{F}^{\text{ex}} = m' \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = m' \vec{a}_C}$$

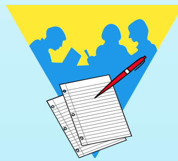
10、碰撞

$$\because \vec{F}^{\text{ex}} << \vec{F}^{\text{in}} \quad \therefore \sum_i \vec{p}_i = \vec{C}$$

动力学部分解题指导

- 动力学部分习题一般分为四大类：
- 第一类是牛顿第二定律的应用，主要是求解质点系中任一个质点所受的力和加速度
- 第二类问题是冲量和动量关系式的应用，主要用来求解质点系中任一个质点的速度、位移、冲量、动量增量。
- 第三类是功能关系式的应用，主要用来求解质点系中任一质点的速率、外力对质点系所作的功、非保守内力对质点系的功、质点系势能表达式中的未知量等。
- 第四类是角动量分量守恒定律的应用。主要求质点系中任一质点的速度。

- 第一类是牛顿第二定律的应用其解题步骤为：
- **(1)**隔离物体，使每个隔离物体可以视为质点。
- **(2)**受力分析。
- **(3)**选择坐标系。
- **(4)**列运动方程，求解。
- 第二类问题是冲量和动量关系式的应用解题步骤是：
- **(1)**选择所研究的质点系。
- **(2)**确定所研究的过程以及过程的始末状态。
- **(3)**根据过程中外力和所满足的条件确定所用的冲量和动量关系式。
- **(4)**列方程，求解。

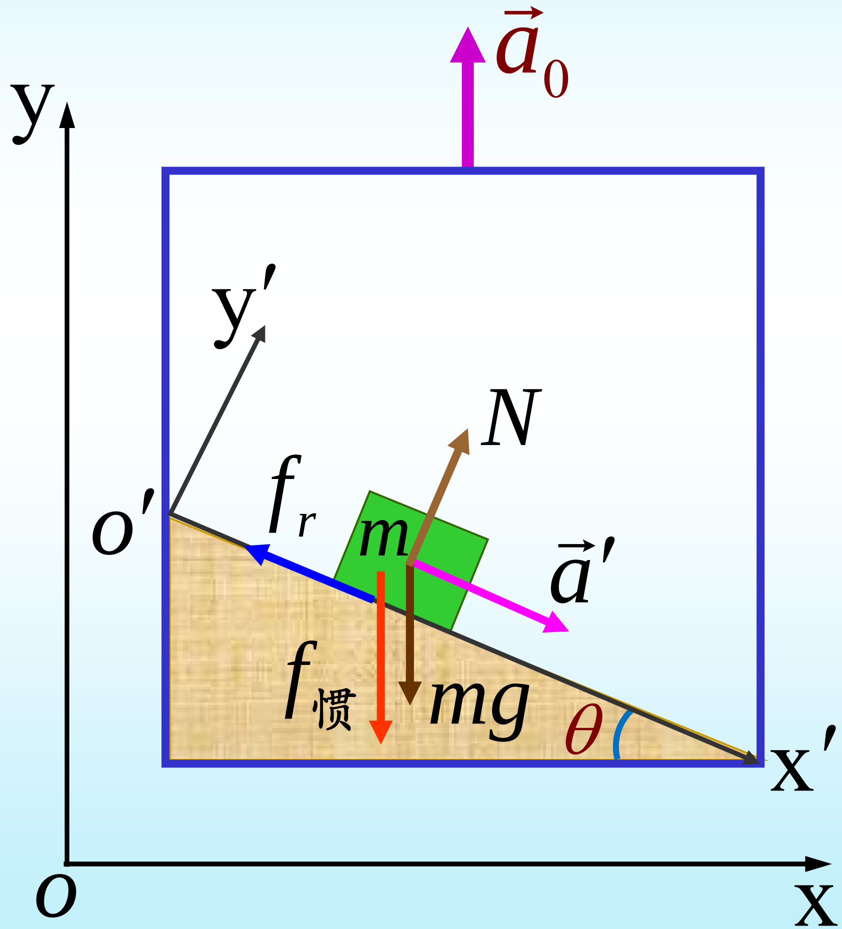


- 第三类是功能关系式的应用具体的解题步骤为：
- (1)选择所研究的质点系。
- (2)确定所研究的过程以及过程的始末状态。
- (3)根据过程中外力的功和非保守内力的功代数和所服从的条件确定所用的功能关系式。
- (4)列方程，求解。
- 第四类是角动量分量守恒定律的应用具体的求解方法是：(1)、（2）同上。
- (3)判断过程中对某点（或某轴）合外力矩是否为零，或者角动量守恒条件是否成立。
- (4)若守恒条件成立，确定正方向，列方程，求解
- 分解综合法：对于较为复杂问题，不是只用一个定理、定律就能解决，要将整个过程分解成几个子过程，对每一子过程应用上述方法。

典型题分析

1. 升降机以加速度a_0上升，质量为m的物体沿其中摩擦系数为μ的斜面下滑。求物体相对于升降机及地面的加速度。设 $\mu = 1/(3\sqrt{3}),\ a_0 = g/2,\ \theta = 30°.$

解： 以升降机为非惯性系，建立坐标$x'o'y'$如图。



则物体m受四力，其中：

$$\vec{f}_{惯} = -m\vec{a}_0,\ f_r = \mu N$$

分别列x'和y'方向方程：

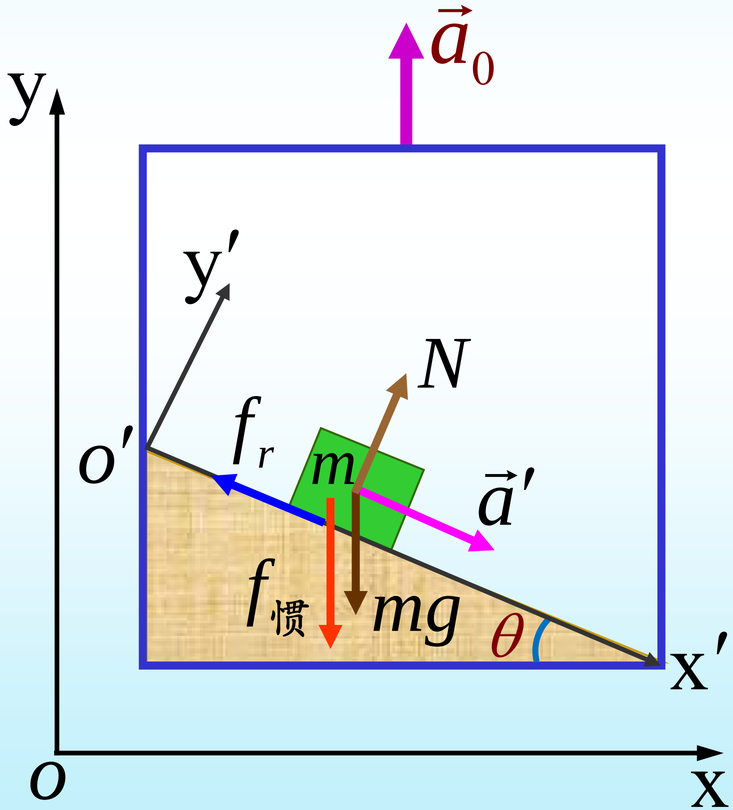
$$\begin{cases} (mg + f_{惯})\sin\theta - f_r = ma' \\ N - (mg + f_{惯})\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (mg + f_{惯})\sin\theta - f_r = ma' \\ N - (mg + f_{惯})\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\vec{f}_{惯} = -m\vec{a}_0,\ f_r = \mu N$$

联立解得**m**相对于斜面的加速度:

$$a' = (g + a_0)(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$



代入数据得

$$a' = \frac{3}{2}g\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}g$$

m 相对地(惯性系)的加速度:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0 \;=a'\cos\theta\vec{i}+(a_0-a'\sin\theta)\vec{j}$$

$$=\frac{1}{2}g\times\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+(\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}g\times\frac{1}{2})\vec{j}$$

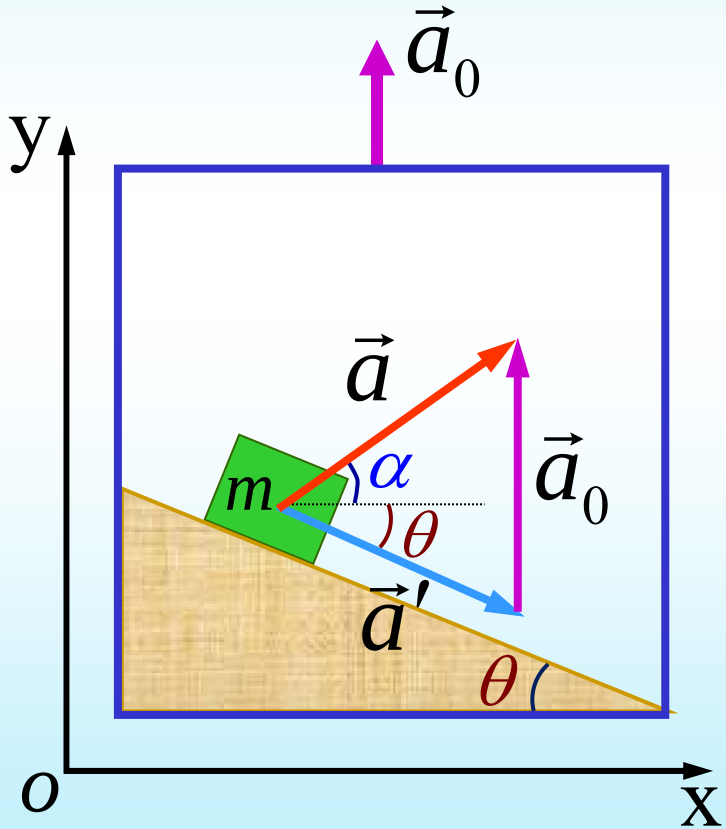
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}g\vec{i}+\frac{1}{4}g\vec{j}$$

大小：$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\frac{1}{2}g$

方向(与x轴夹角)：

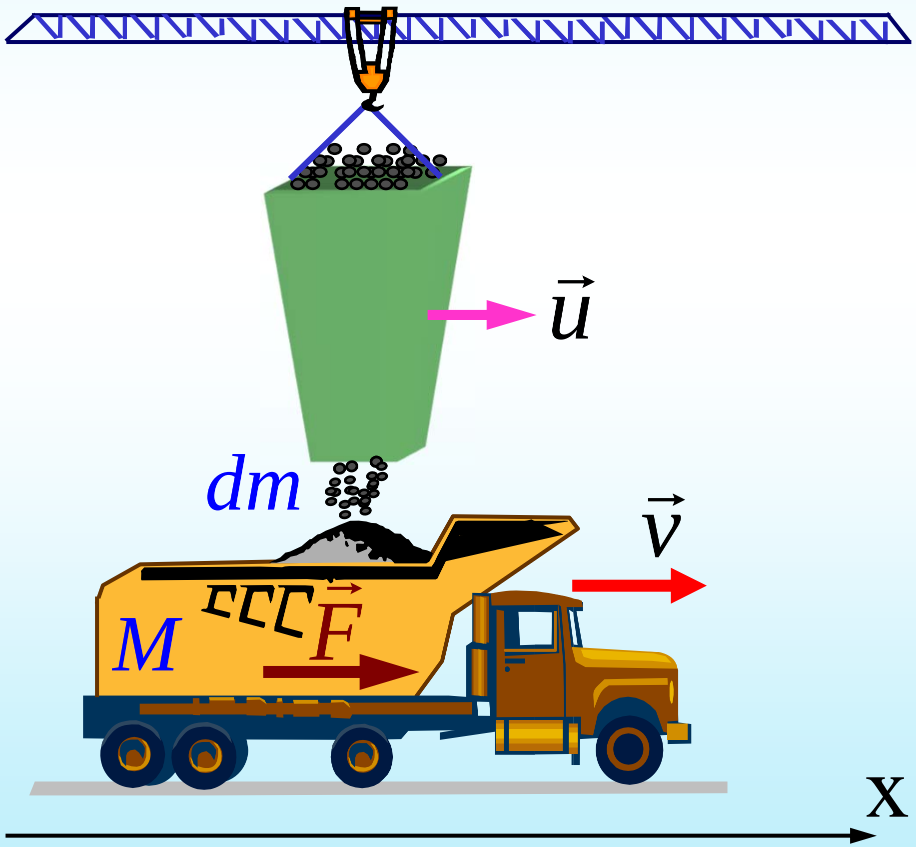
$$\alpha=60^\circ-\theta=30^\circ$$

$$(a=a_0=a')$$



2. 运动的吊斗中的煤以速率 ***dm/dt*** 落入总质量为***M***的运煤车中。若运煤车和吊斗同向运动的速率分别为***v***和***u***，问为使车保持匀速前进，应如何给车提供动力（设摩擦阻力为零）？

解： ***dt***时间内，有质量***dm***的煤落入车中。以***M***和***dm***组成系统，则汽车牵引力的冲量等于***dm***落入前、后系统水平方向动量的增量：



$$\vec{F}dt = d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\vec{p}_1 = M\vec{v} + \vec{u}dm$$

$$\vec{p}_2 = (M + dm)\vec{v}$$

$$d\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=(M+dm)\vec{v}-(M\vec{v}+\vec{u}dm)=(\vec{v}-\vec{u})dm$$

$$\rightarrow \vec{F}dt=d\vec{p}=(\vec{v}-\vec{u})dm \qquad \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=(\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt}$$

讨论:

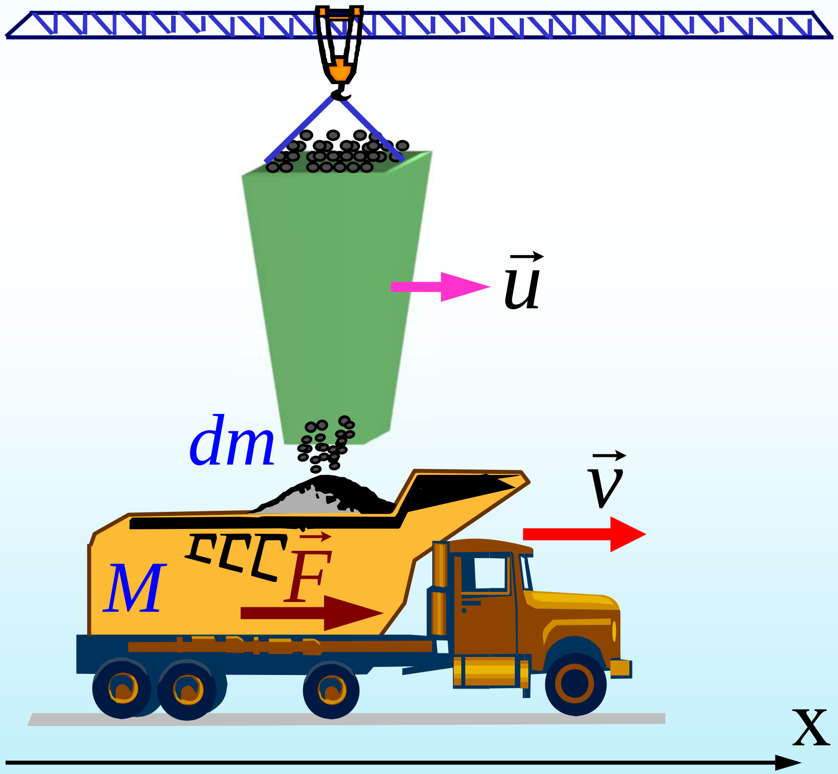
$$F=(v-u)\frac{dm}{dt}$$

(1) $v>u\rightarrow F>0$ 牵引力

(2) $v<u\rightarrow F<0$ 制动力

(3) $v=u\rightarrow F=0$ 动量不变

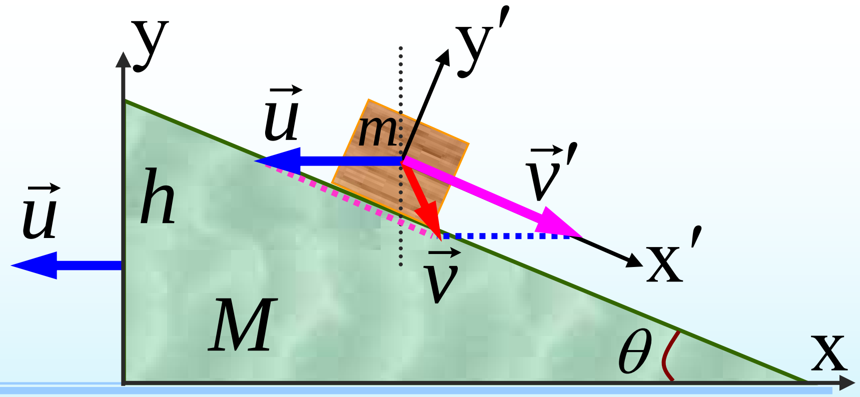
(4) $u=0\rightarrow F=v\dfrac{dm}{dt}$



3. 质量为M、倾角为θ 的斜面体静止于平面上，斜面上又有一质量为m的滑块。求当滑块m从斜面顶端h高处由静止滑至底端时：(1)斜面体的速度；(2) m相对于M的速度；(3) M和m的水平位移。忽略摩擦。

解： 以M、m和地球组成的系统水平方向动量守恒。

设任意时刻m相对M的速率为v'，M对地的速率为u，则m对地的速度为



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$v_x = v' \cos\theta - u$$

$$v_y = -v' \sin\theta$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v'\cos\theta - u)^2 + (-v'\sin\theta)^2}$$

$$v^2 = \left(v'\cos\theta - u\right)^2 + \left(-v'\sin\theta\right)^2$$

依水平方向动量守恒得

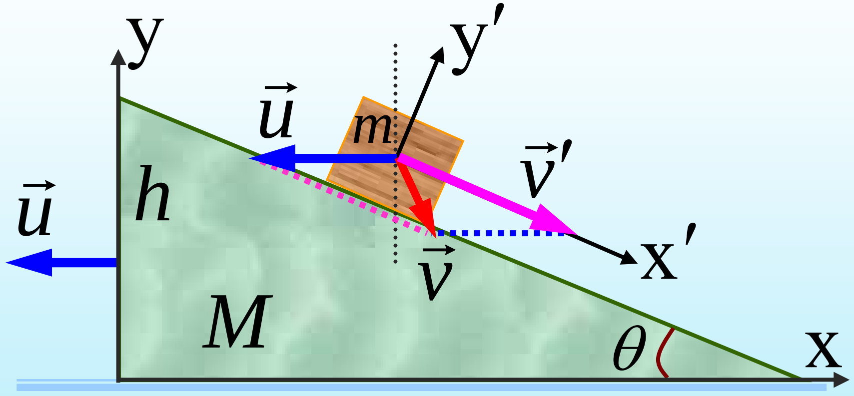
$$mv_x - Mu = 0 \quad \rightarrow m\left(v'\cos\theta - u\right) - Mu = 0$$

同时系统机械能守恒，故由顶端**h**到达底端时有

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2$$

联立三方程解得

$$u = \frac{\sqrt{2gh}\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{M}{m}+1\right)\left(\frac{M}{m}+\sin^2\theta\right)}}$$



$$v' = \frac{M+m}{m\cos\theta}u = \frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{M}{m}+1\right)\left(\frac{M}{m}+\sin^2\theta\right)}}$$

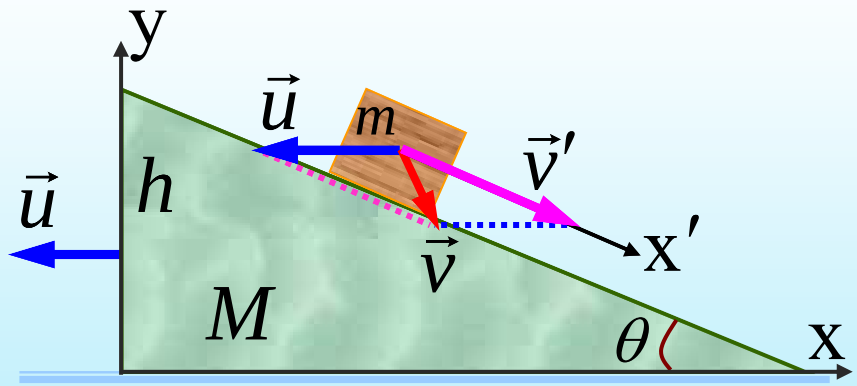
设斜面长度为L，则

$$L = \int_0^t v'dt = \frac{M+m}{m\cos\theta}\int_0^t udt = \frac{M+m}{m\cos\theta}x_M$$

故斜面的水平位移为

$$x_M = \frac{m}{m+M}L\cos\theta$$

$$= \frac{m}{M+m}h\cdot\cot\theta$$



滑块**m**的水平位移为

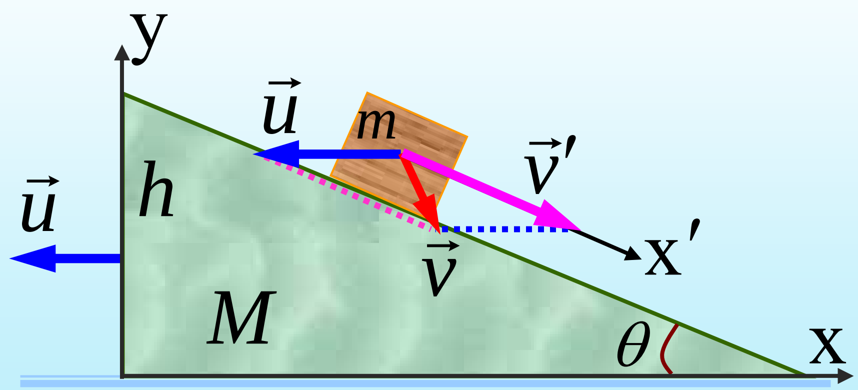
$$v_x = v'\cos\theta - u$$

$$x_m = \int_0^t v_x dt = \int_0^t (v'\cos\theta - u)dt = L\cos\theta - x_M$$

$$= L\cos\theta - \frac{m}{M+m} h\cdot\cot\theta$$

$$= h\cot\theta - \frac{m}{M+m} h\cdot\cot\theta$$

$$= \frac{Mh}{M+m}\cot\theta$$



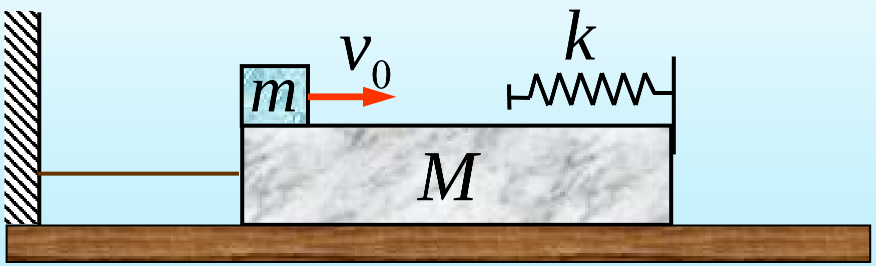
4. 质量为M的滑块静止于光滑水平桌面上，一端用不可伸长的细绳连接在墙上，劲度系数为k的轻弹簧固定在滑块右端。质量为m，初速为v_0的小物在滑块上滑动(无摩擦)，最后与弹簧相碰。设细绳能承受的最大拉力为T_m，求：(1)使细绳断裂的最小v_0值；(2)细绳断裂后滑块M获得的最大加速度；(3)小物离开弹簧时相对于桌面的速度为零的条件。

解：(1)设细绳断裂时弹簧的压缩量是l_0，则：$T_m = kl_0$

同时应有：$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq \frac{1}{2}kl_0^2$　　解得：$v_0^2 \geq T_m / \sqrt{mk}$

(2)设细绳被拉断时小物的速度为v_1，则从v_0开始到细绳被拉断，系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kl_0^2$$



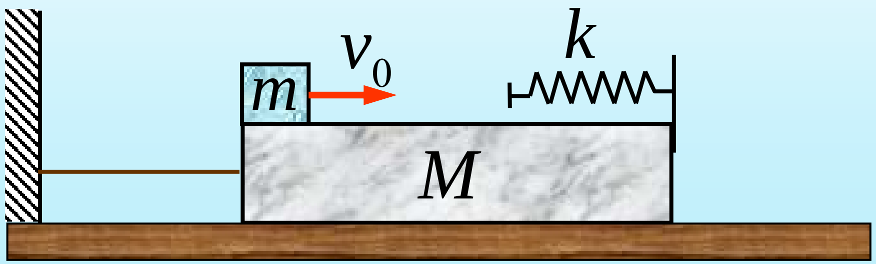
$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}kl_0^2,\quad T_m=kl_0\ \rightarrow v_1=\sqrt{v_0^2-\frac{T_m^2}{mk}}$$

当弹簧继续被压缩，达最大压缩量l时弹力最大，滑块获得最大加速度，而且此时小物与滑块具有相同速度，设其为v_2。过程动量守恒，所以

$$mv_1=(m+M)v_2$$

又因从$v_0\rightarrow v_2$，系统机械能守恒，所以

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(M+m)v_2^2+\frac{1}{2}kl^2$$



由以上联立解得：

$$k^2l^2=mkv_0^2-(M+m)kv_2^2=\frac{m}{(M+m)}(Mkv_0^2+T_m^2)$$

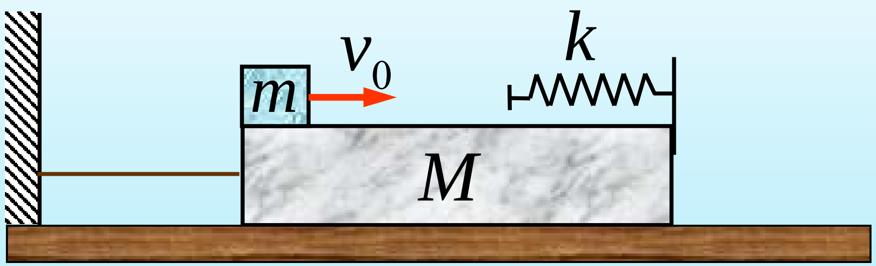
滑块**M**的最大加速度：

$$a_{\max}=\frac{f_{\max}}{M}=\frac{kl}{M}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{m}{(M+m)}(Mkv_0^2+T_m^2)}$$

(3) 当弹簧恢复到原长时，小物体脱离。设此时滑块的速度为 $\boldsymbol{v}_M$，依题意，此时小物**m**相对桌面的速度为零。则根据能量和动量守恒有

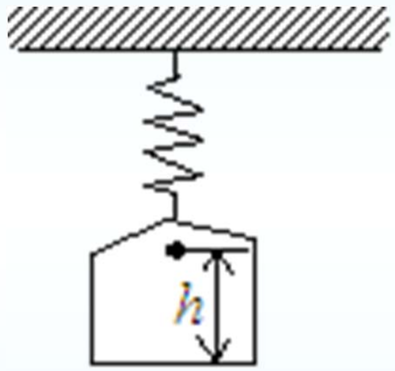
$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}Mv_M^2 \qquad mv_1=Mv_M$$

解得：$v_0=\dfrac{T_m}{\sqrt{(m-M)k}}$



上式只有当$m>M$时有解。

例：如图所示，质量 $\boldsymbol{M} = \mathbf{2.0\ kg}$ 的笼子，用轻弹簧悬挂起来，静止在平衡位置，弹簧伸长 $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0.10\ m}$，今有 $\boldsymbol{m} = \mathbf{2.0\ kg}$ 的油灰由距离笼底高 $\boldsymbol{h} = \mathbf{0.30\ m}$ 处自由落到笼底上，求笼子向下移动的最大距离.



解：

$$k = Mg / x_0$$

油灰与笼底碰前的速度 $\upsilon = \sqrt{2gh}$

碰撞后油灰与笼共同运动的速度为 V，应用动量守恒定律

$$m\upsilon = (m + M)V \quad ①$$

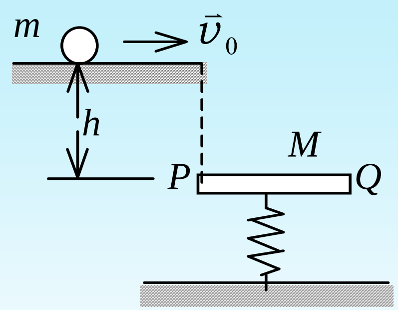
油灰与笼一起向下运动，机械能守恒，下移最大距离 x，则

$$\frac{1}{2}k(x_0 + \Delta x)^2 = \frac{1}{2}(M + m)V^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + (M + m)g\Delta x \quad ②$$

联立解得：

$$\Delta x = \frac{m}{M}x_0 + \sqrt{\frac{m^2 x_0^2}{M^2} + \frac{2m^2 h x_0}{M(M + m)}} = 0.3\ \mathrm{m}$$

例：如图所示，将一块质量为 M 的光滑水平板 PQ 固结在劲度系数为 k 的轻弹簧上； 质量为 m 的小球放在水平光滑桌面上，桌面与平板 PQ 的高度差为 h. 现给小球一个水平初速 $\vec{v}_0$，使小球落到平板上与平板发生弹性碰撞. 求弹簧的最大压缩量是多少？



解：小球刚要与 PQ 碰撞时的速度为：

竖直方向： $$v_y = \sqrt{2gh}$$

水平方向： $$v_x = v_0$$

以小球和平板为一系统，对这一碰撞， 可应用动量守恒与动能守恒定律. 即：

$$mv_y = Mv + mv'$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_x^2+\frac{1}{2}m\upsilon_y^2=\frac{1}{2}M\upsilon^2+\frac{1}{2}m\upsilon'^2+\frac{1}{2}m\upsilon_x^2 \qquad ②$$

上两式中，v和 v' 分别为平板和小球刚碰撞后的竖直方向速度分量.由于 PQ光滑，碰撞后小球的水平方向速度分量仍为 v_x ．解①、②两式可得：

$$\upsilon=2m\sqrt{2gh}/(M+m)$$

碰撞结束后，弹簧继续压缩, 以木板、弹簧、地球为一系统，机械能守恒．设

木板初始位置为重力势能零点，弹簧处于自由状态时为弹性势能零点．则从弹簧开始继续压缩到压缩量增加 y而停止时，有：

锟 $$\frac{1}{2}M\upsilon^2+\frac{1}{2}k(\Delta y_0)^2=\frac{1}{2}k(\Delta y_0+\Delta y)^2-Mg\Delta y$$

且 $\Delta y_0=Mg/k$ ．由此可解得

弹簧最大压缩量为： $$\Delta y_{\max}=\Delta y_0+\Delta y=\frac{Mg}{k}+\frac{2m}{M+m}\sqrt{\frac{2ghM}{k}}$$