第三章 傅里叶变换

3.2.3 周期信号的频谱及其特点

1. 周期信号的频谱

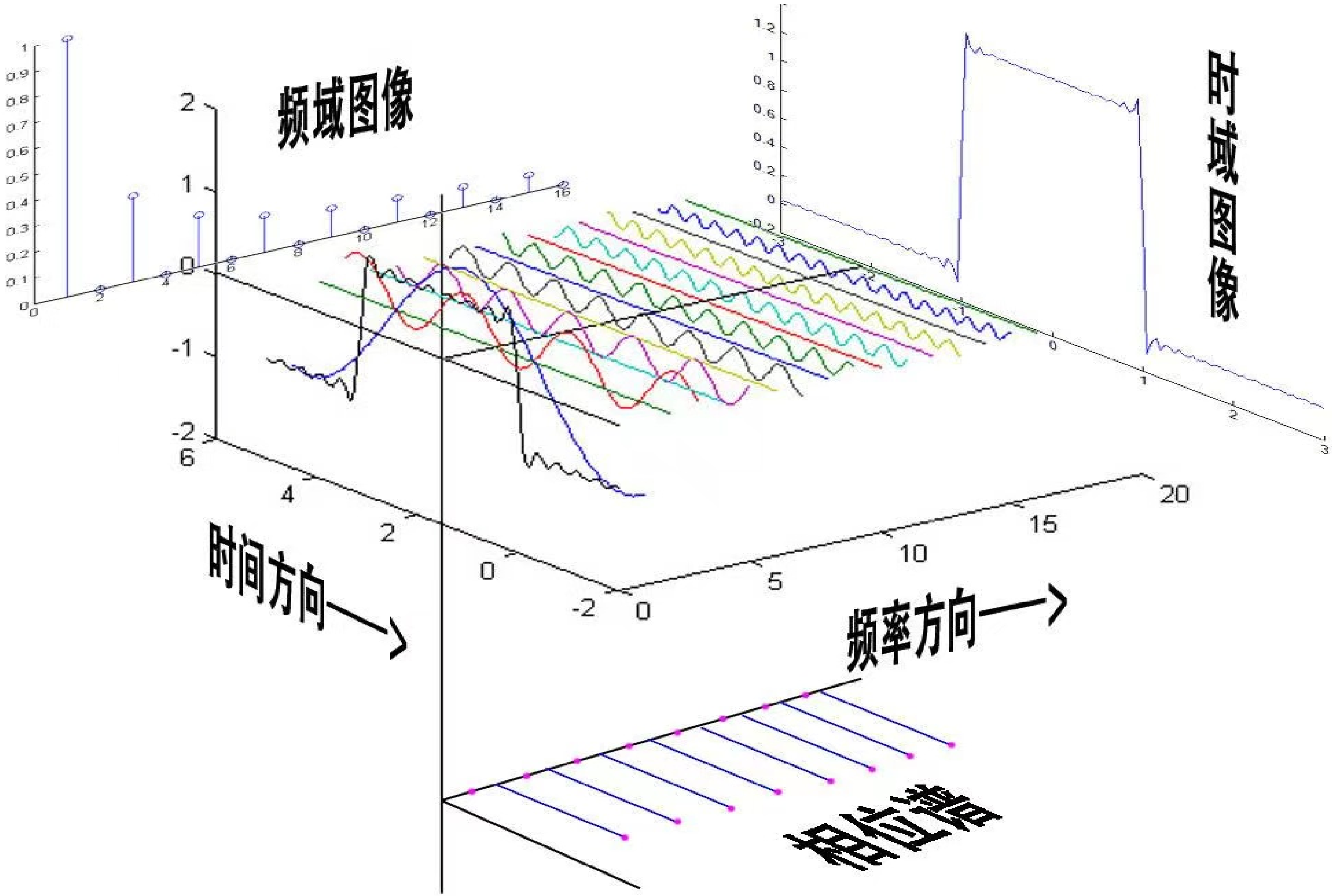
$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \tag{1}$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n) \tag{2}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \tag{3}$$

为了能既方便又明确的表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可画出**频谱图**来直观的表示。

如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，便可直观的看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。

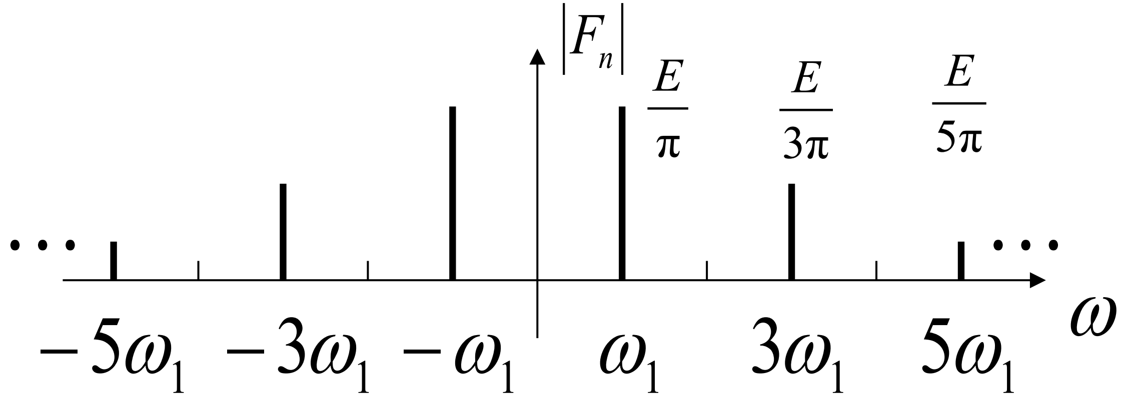

频域图像
时域图像
时间方向
频率方向
相位谱

2. 周期信号频谱的特点

（1）**离散性**---频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。

（2）**谐波性**---谱线出现在基波频率 ω_1 的整数倍上。

（3）**收敛性**---幅度谱的谱线幅度随着 $n \to \infty$ 而逐渐衰减到零。



波形对称性与谐波特性的总结

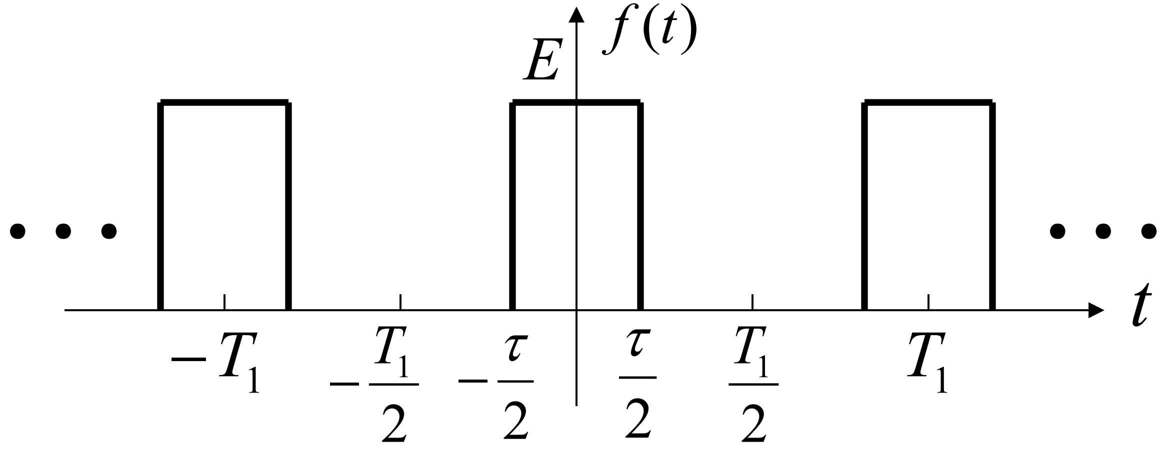
$f(t)$的对称条件	展开式中系数特点
$f(t)=f(-t)$，纵轴对称（偶函数 ）	$b_n=0$，$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t$
$f(t)=-f(-t)$，原点对称（奇函数）	$a_n=0$，$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t$
$f(t)=f(t+\frac{T}{2})$，半波偶对称（偶谐函数）	无奇次谐波，只有直流和偶次谐波
$f(t)=-f(t+\frac{T}{2})$，半波奇对称（奇谐函数 ）	无偶次谐波和直流，只有奇次 谐波分量

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

周期矩形脉冲信号

(1) 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数

三要素：脉宽 τ、脉幅 E、周期 T_1



$b_n = 0$ (在偶函数的傅里叶级数中不会有正弦项)

$$a_0 = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\mathrm{d}t = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$a_n = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = c_n$$

周期矩形脉冲信号的三角形式傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}+\frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})\cos n\omega_1 t$$

因为 $F_n=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n)=\frac{1}{2}a_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$

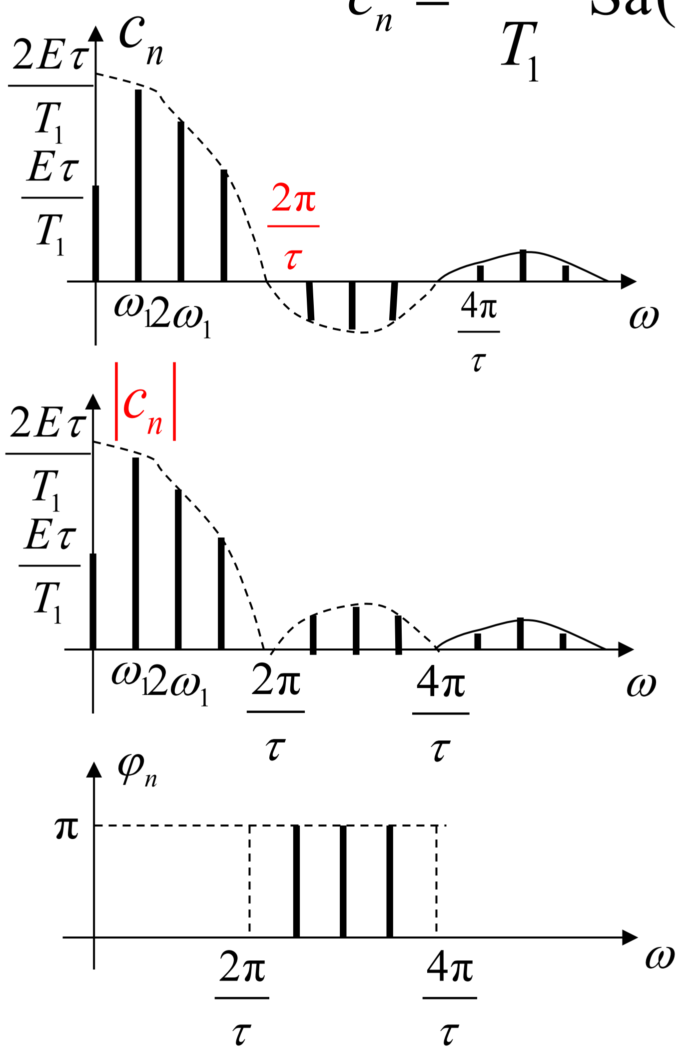
$f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数为

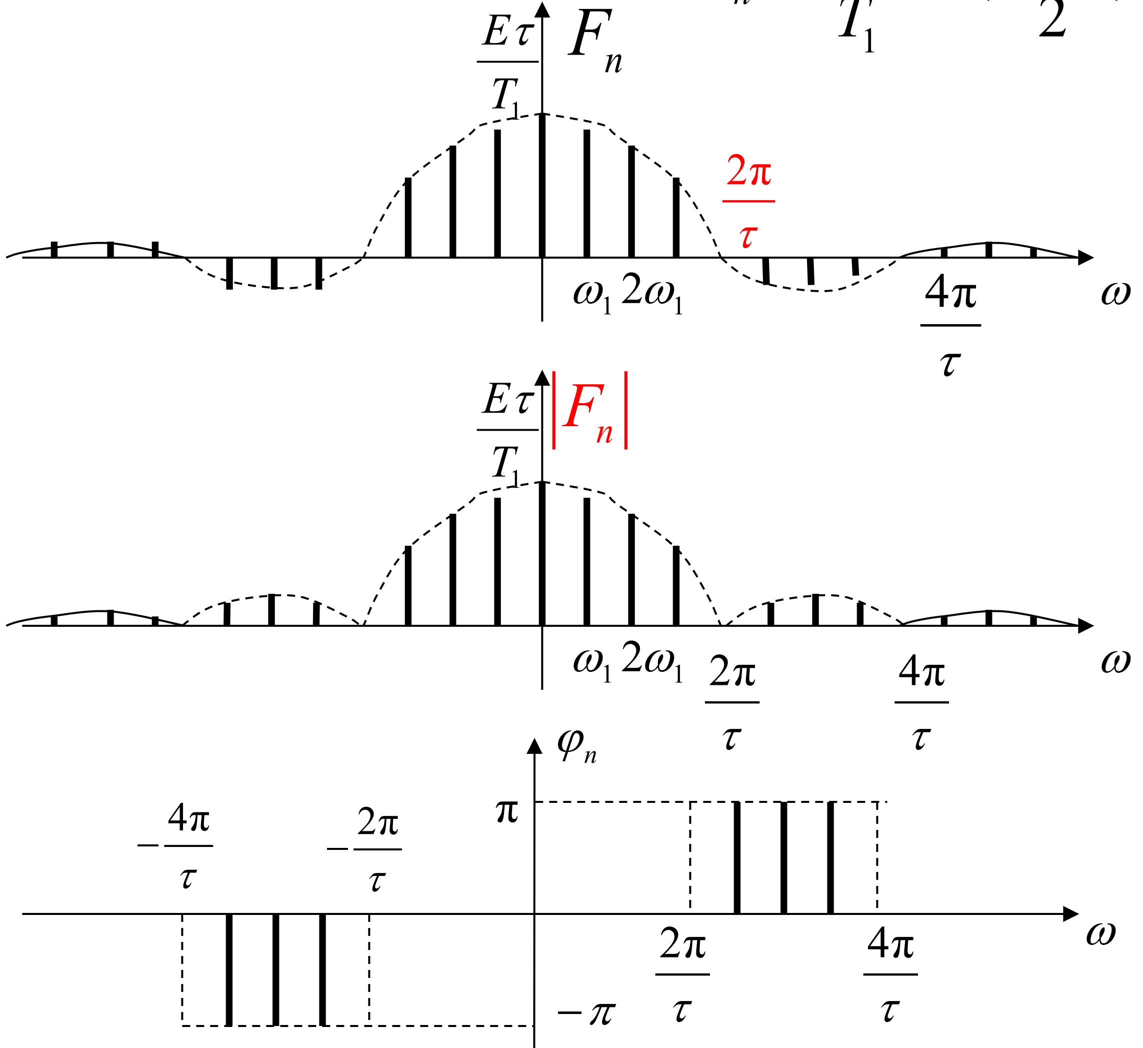
$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

（2）频谱图

$$c_n = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

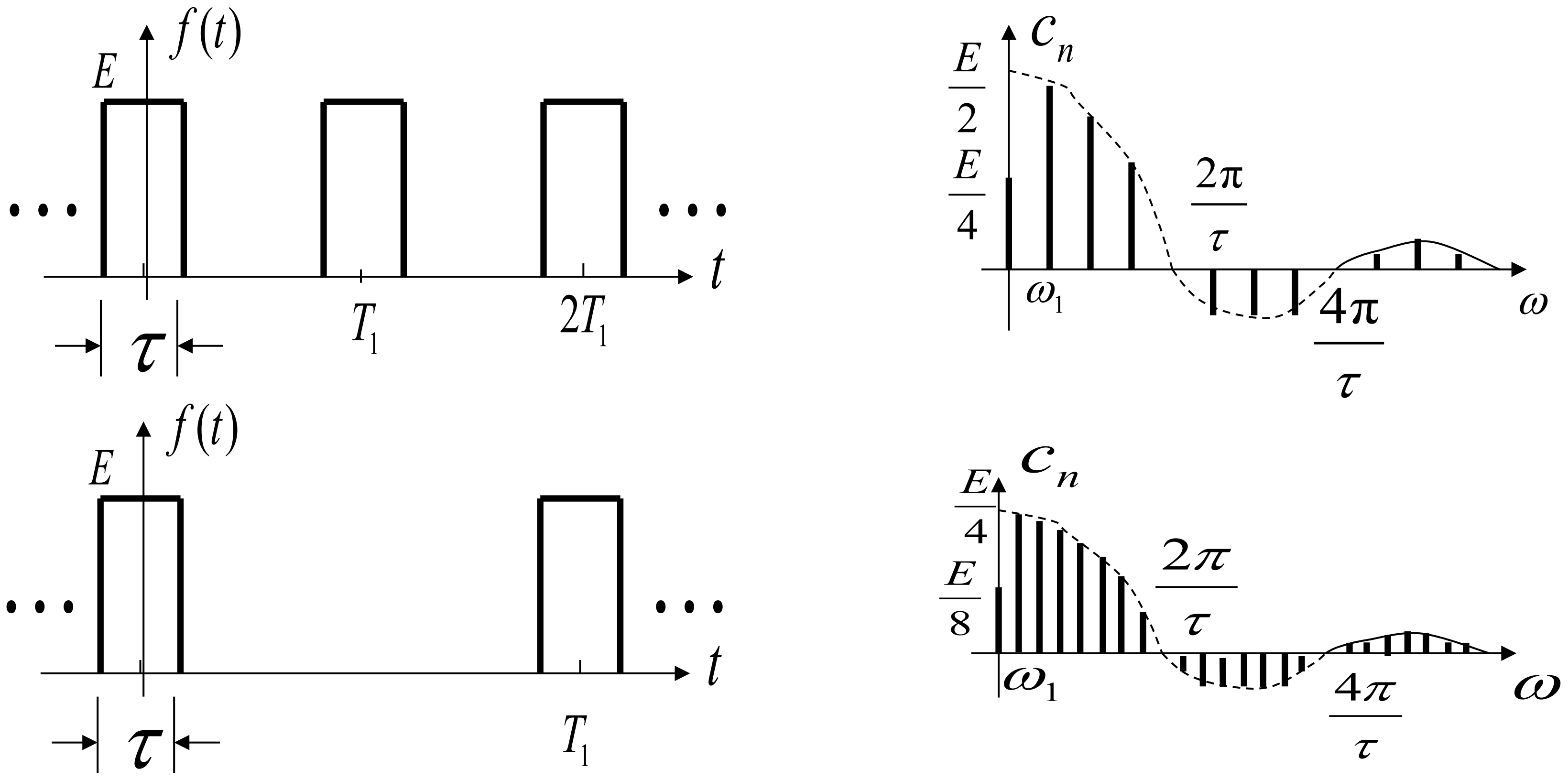
$$F_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$



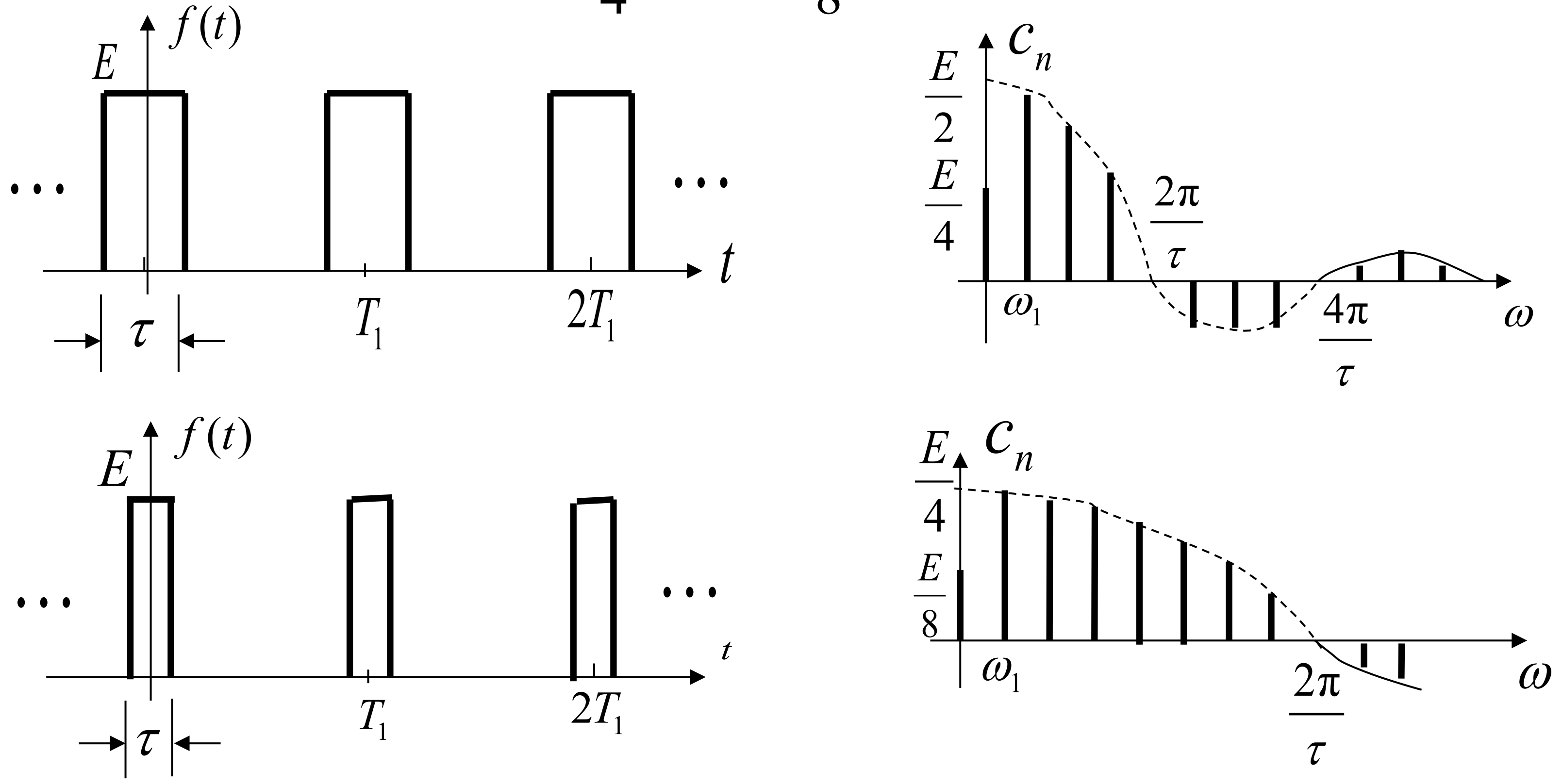


(3) 频谱结构与波形参数的关系 (T_1 , τ)

a）若 τ 不变，T_1 扩大一倍，即 $T_1 = 4\tau \rightarrow T_1 = 8\tau$



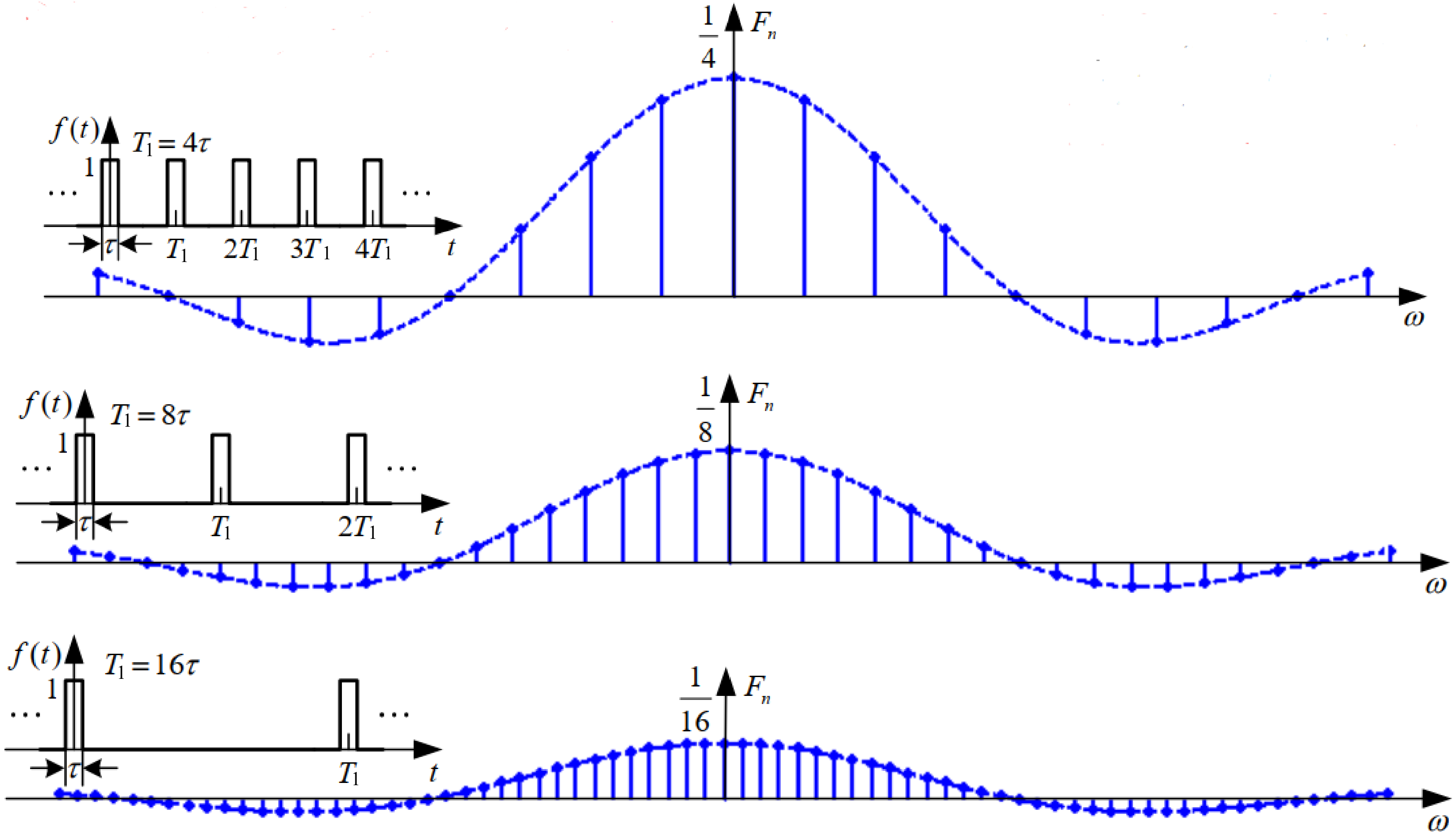
b) 若 T_1 不变, τ 减小一半，即 $\tau=\frac{T_1}{4}\rightarrow\tau=\frac{T_1}{8}$



谱线间隔 $\omega_1(=\frac{2\pi}{T_1})$ 只与周期 T_1 有关，且与 T_1 成反比；
零值点频率 $\frac{2\pi}{\tau}$ 只与 脉冲宽度 τ 有关，且与 τ 成反比；
谱线幅度 $\frac{2E\tau}{T_1}$ 与 T_1 和 τ 都有关系，且与 T_1 成反比，与 τ 成正比。

回忆：谱线结构与波形参数的关系

取 E=1， $F_n=\dfrac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\dfrac{n\omega_1\tau}{2})$ ， 假设脉冲宽度 τ 不变



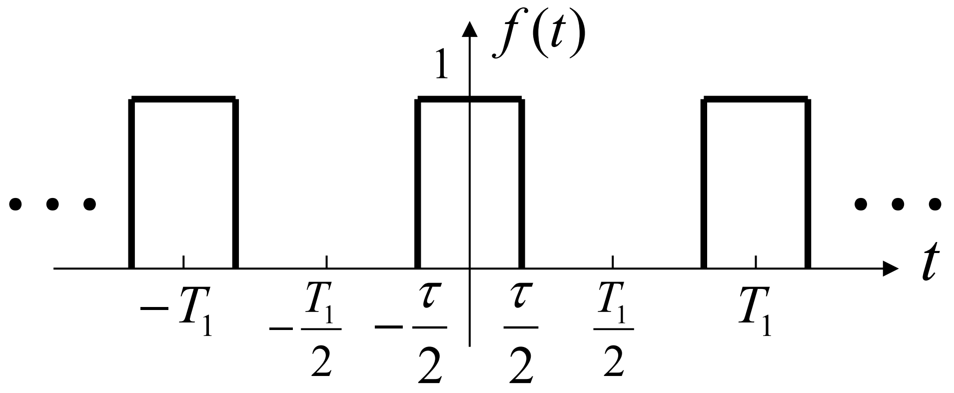
周期: T_1 增大

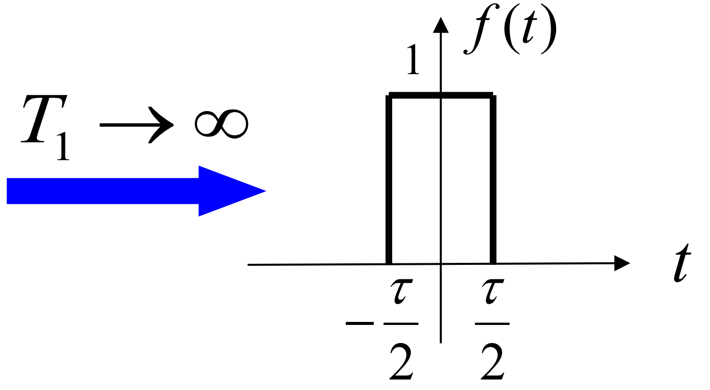
幅值: $\dfrac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\dfrac{n\omega_1\tau}{2})$ 减小

谱线间隔: $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$ 减小

3.4 傅里叶变换

1. 傅里叶变换的引出

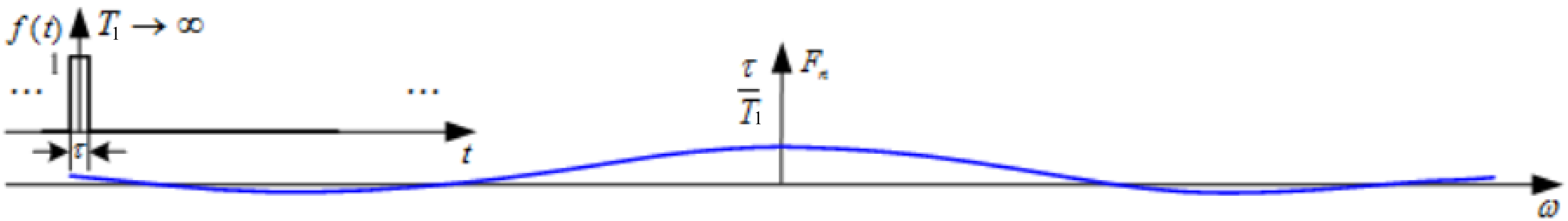




$T_1 \to \infty$ 时，$f(t)$: 周期信号 → 非周期信号

谱线间隔 $\omega_1 = 2\pi/T_1 \to 0$，谱线幅度 $\frac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2}) \to 0$，

周期信号的离散谱 → 非周期信号的连续谱



1. 傅里叶变换的引出

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$T_1 \to \infty$ 时 各频率分量都不存在，无法分析

$f(t)$: 周期信号 → 非周期信号

F_n: 谱线幅度 → $\boxed{\text{趋于0，无穷小}}$

ω_1: 谱线间隔 → 趋于0，无穷小

离散频谱 → 连续频谱

虽然各频率分量的幅度趋近于无穷小，但无穷小量之间仍有相对大小差别，故需要引入新的频谱分析方法

1. 傅里叶变换的引出

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

问题：$T_1 \to \infty$时，数学上，各分量都不存在，无法研究

但物理上，时域和频域能量守恒，所以一定存在频率分量

等式两边同时乘以 T_1 $\lim\limits_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \lim\limits_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t = \lim\limits_{\omega_1\to 0}\frac{2\pi F_n}{\omega_1}$

频谱密度函数：单位频率上的幅度 ⟶ 不趋于 0，有限值，能够分析

找到了非周期信号的频谱表达方法

1. 傅里叶变换的引出

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

当$T_1 \to \infty$时，离散频率$n\omega_1$ → 连续频率ω

则 $\lim\limits_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \lim\limits_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$　　这是一个关于 ω 的复函数

记为 $F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$　　**Fourier Transform，FT**

$F(\mathrm{j}\omega)$称为 $f(t)$ 的傅里叶变换，也称为其频谱函数

2. 傅里叶逆变换

指数傅里叶级数展开

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

其中 $F(n\omega_1)=\dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$　　代入后得：$f(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_1}\left[\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt\right]e^{jn\omega_1 t}$

当 $T_1\to\infty$ 时：$\omega_1\to d\omega$，$n\omega_1\to\omega$，$\dfrac{1}{T_1}=\dfrac{\omega_1}{2\pi}\to\dfrac{d\omega}{2\pi}$，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\to\int_{-\infty}^{\infty}$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

$f(t)$ 称为 $F(j\omega)$ 的傅里叶逆变换，也称为其原函数

3. 傅里叶变换对

傅里叶变换式“−”

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

傅里叶逆变换式“+”

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

简记为： $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[F(\mathrm{j}\omega)\right]$$

或 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\left|F(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$\left|F(\mathrm{j}\omega)\right|$ --幅度谱 频率 ω 的偶函数*　　$\varphi(\omega)$ --相位谱 频率 ω 的奇函数*

与傅里叶级数的关系（重点）

单个脉冲信号的傅里叶变换：

$$F_0(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

-- ω 的连续谱

周期信号的傅里叶级数展开：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

级数展开的系数：

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

-- ω 的离散谱

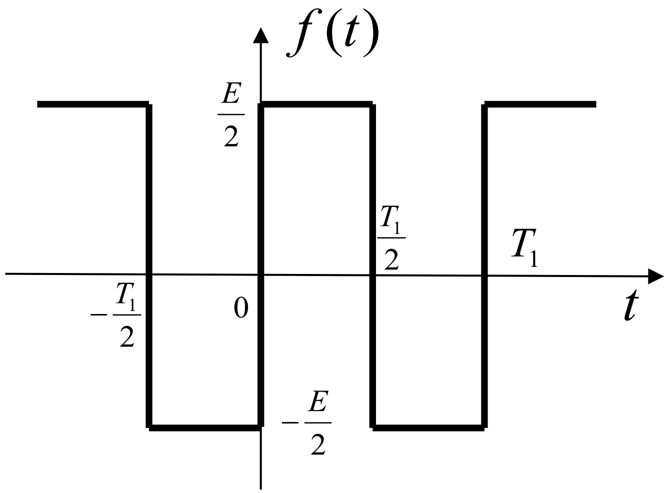
F_n 与 $F_0(\mathrm{j}\omega)$ 的关系：

$$\boxed{F_n=\left.\frac{F_0(\mathrm{j}\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1}}$$

→ 连续谱的离散化

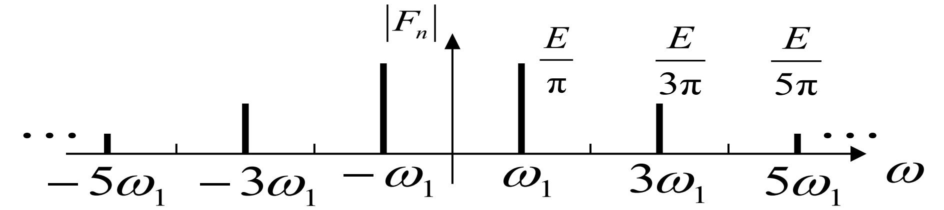
重要结论：周期脉冲序列的傅里叶级数的系数 F_n 等于单脉冲的傅里叶变换 $F_0(\mathrm{j}\omega)$ 在 $n\omega_1$ 频率点的值乘以周期的倒数 $1/T_1$。

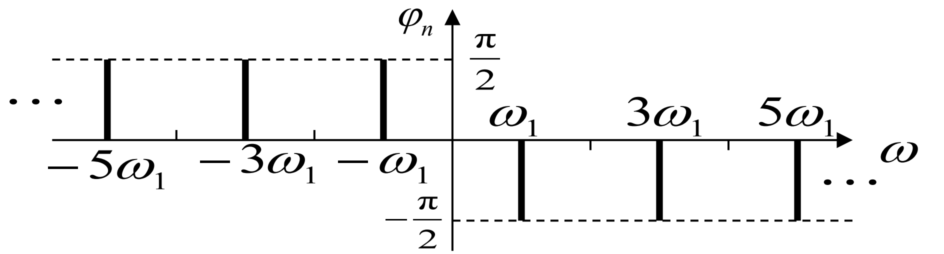
看一个之前的例子：指数形式的傅里叶级数 画出频谱图

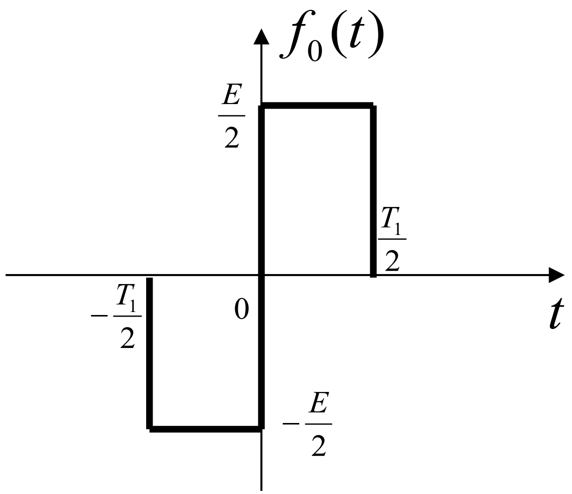


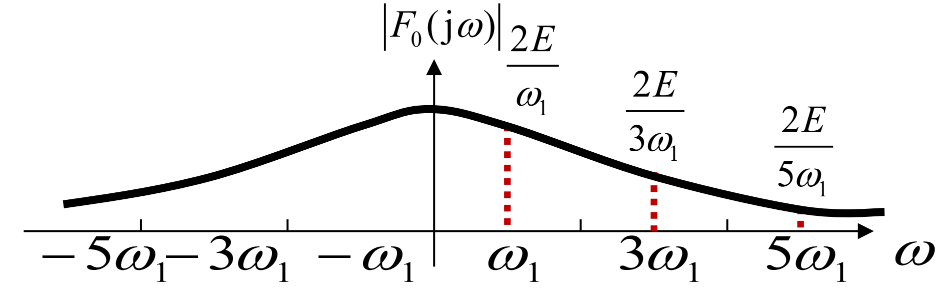
$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \qquad (n = \pm1, \pm3, \pm5\cdots)$$

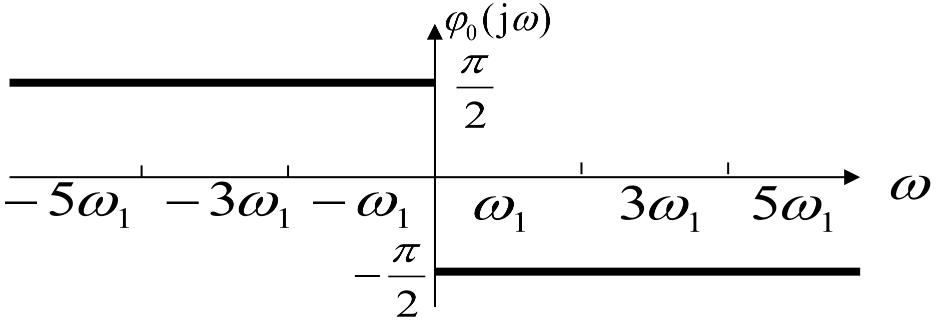
$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5\cdots) \\ \frac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5\cdots) \end{cases}$$











$$F_n = \left.\frac{F_0(j\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1} = \left.\frac{\omega_1 F_0(j\omega)}{2\pi}\right|_{\omega=n\omega_1}$$

$$= \left.\frac{\omega_1 \frac{2E}{j\omega}}{2\pi}\right|_{\omega=n\omega_1} = -\frac{jE}{n\pi}$$

与例3-1结论相同

傅里叶级数与傅里叶变换的关系（重点中的重点）：

傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

频谱（离散）

$$F_n=\left|F_n\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$$

在一个周期内满足狄里赫利条件

傅里叶变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

量纲不同

频谱密度（连续）

$$F(\omega)=\left|F(\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

在 (-∞ , +∞)内满足狄里赫利条件

傅里叶变换存在的条件

$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t=$ 有限值（充分条件）

注意：与周期信号的傅里叶级数的条件对比

即 $f(t)$ 绝对可积

所有能量信号均满足此条件。

哪些信号不符合？

当引入 $\delta(\omega)$ 函数的概念后，允许做傅立叶变换的函数类型大大扩展了。

傅里叶变换表（几种常用函数及其频谱；*重要）

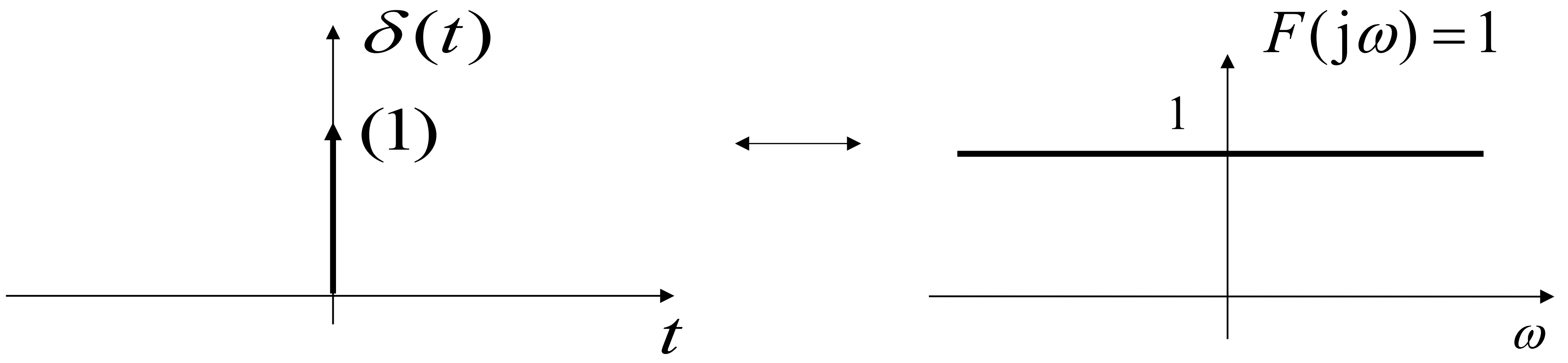
名称	时间函数	频谱函数
*单位冲激	$\delta(t)$	1
*单位阶跃	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/\mathrm{j}\omega$
符号函数	$\operatorname{sgn} t=u(t)-u(-t)$	$2/(\mathrm{j}\omega)$
*单位直流	1	$2\pi\delta(\omega)$
*单边指数函数	$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$1/(\alpha+\mathrm{j}\omega)$
双边指数函数	$\mathrm{e}^{-\alpha\|t\|}$	$2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$
*单位余弦	$\cos\omega_c t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
*单位正弦	$\sin\omega_c t$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$
*矩形脉冲 (门函数)	$G_\tau(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$	$\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)=\tau\frac{\sin(\tau\omega/2)}{\tau\omega/2}$
*抽样函数	$\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega t}{2}\right)=\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2}$	$G_\Omega(\omega)=\frac{2\pi}{\Omega}\left[u\left(\omega+\frac{\Omega}{2}\right)-u\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)\right]$

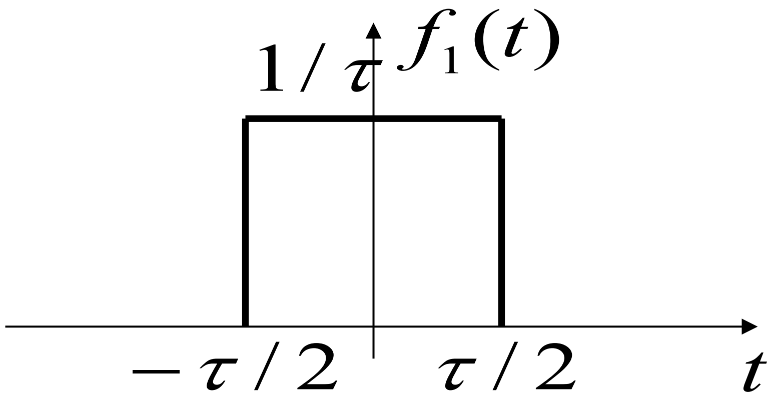
3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

（1）冲激函数的傅里叶变换

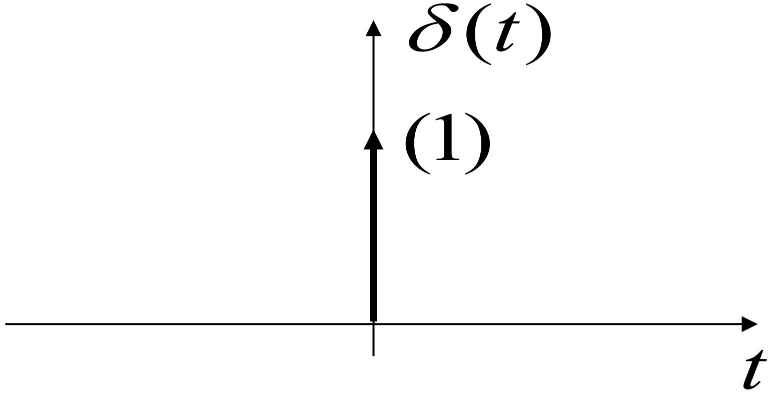
$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=1$$

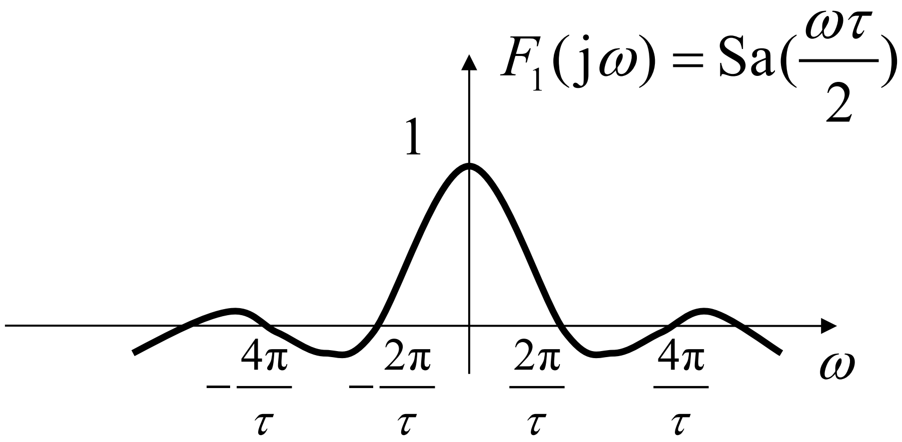
单位冲激函数的频谱等于常数，即在整个频率范围内频谱是均匀的。这种频谱常被叫做“均匀谱”或“白色频谱”。



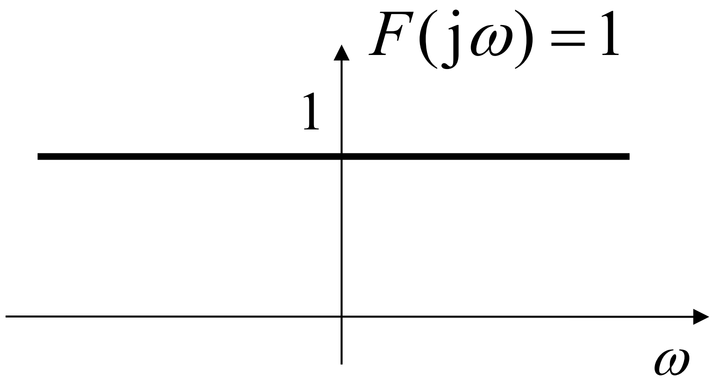


$\tau \to 0$





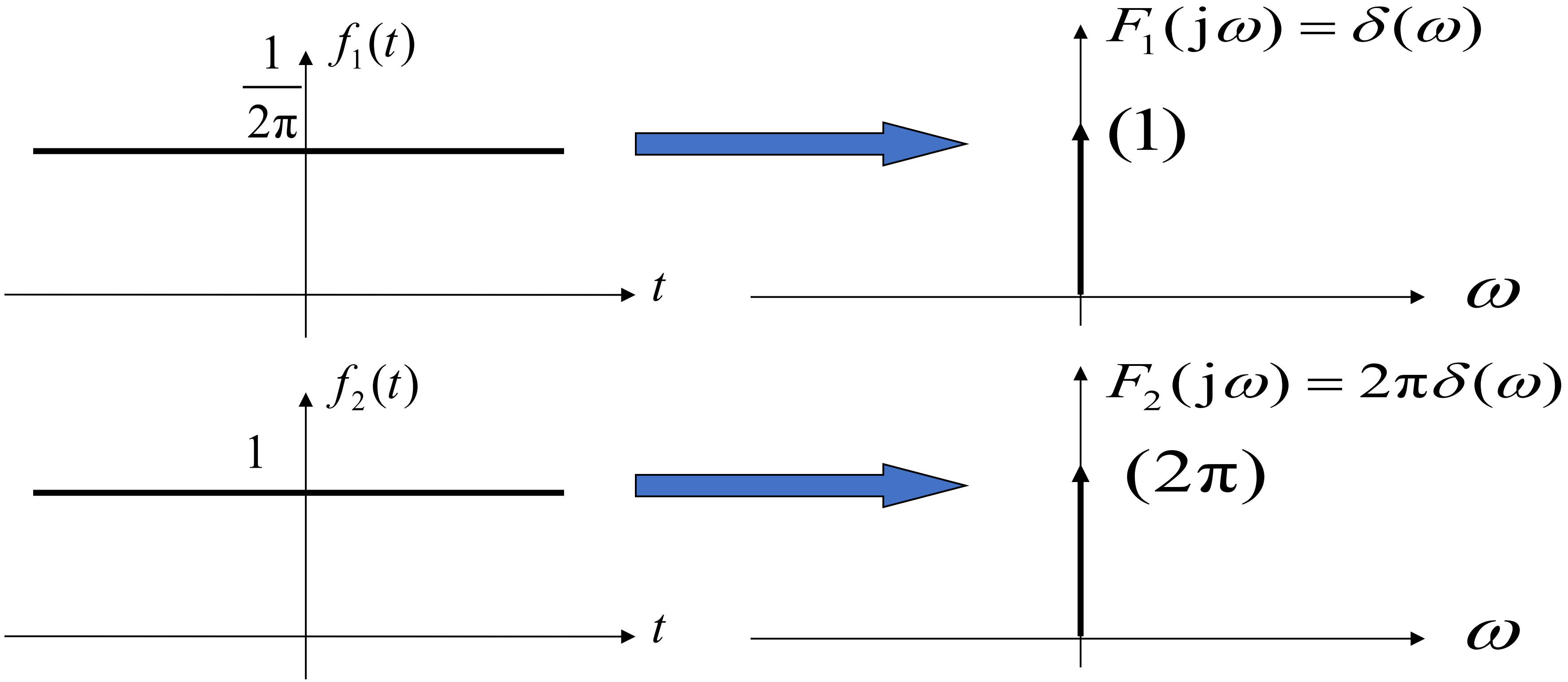
$\tau \to 0$

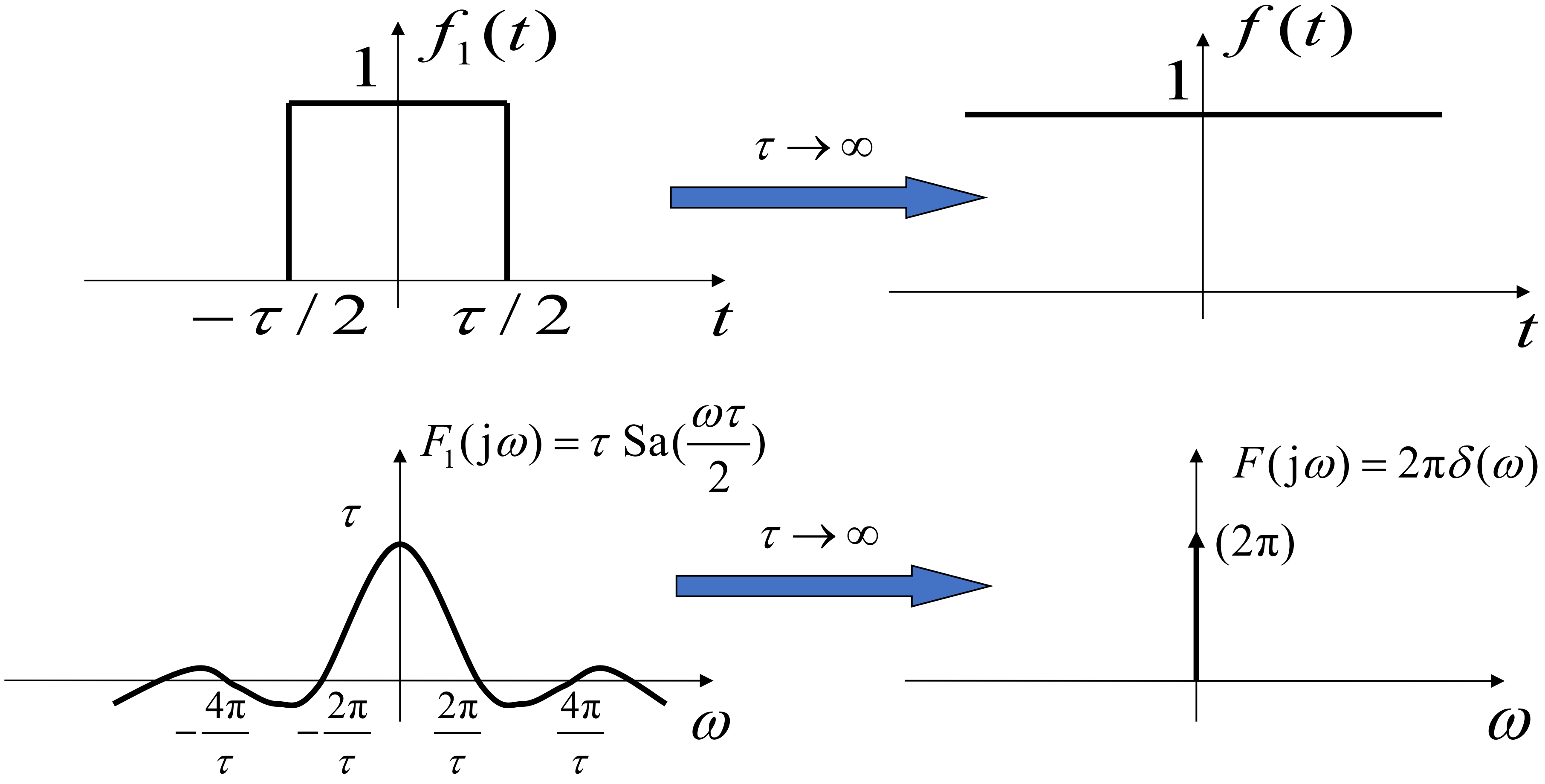


(2) 冲激函数的傅里叶逆变换

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}$$

或 $\mathscr{F}[\frac{1}{2\pi}]=\delta(\omega)$, $\quad \mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$





结论： 冲激函数与常数(直流)在时域和频域是对偶函数。

(3）冲激偶的傅里叶变换

$$\because \mathscr{F}[\delta(t)]=1, \quad \text{即：} \delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

上式两边对 t 求导得：

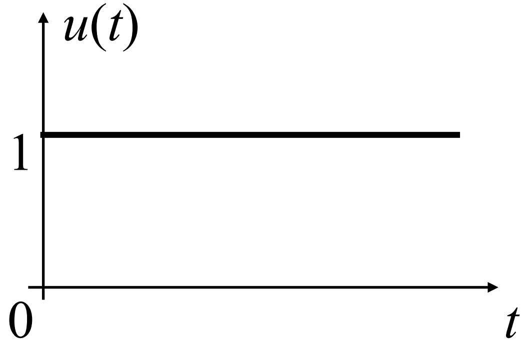
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\therefore \mathscr{F}[\delta'(t)]=\mathrm{j}\omega$$

同理：$\mathscr{F}[\delta^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^n$

(4) 阶跃信号

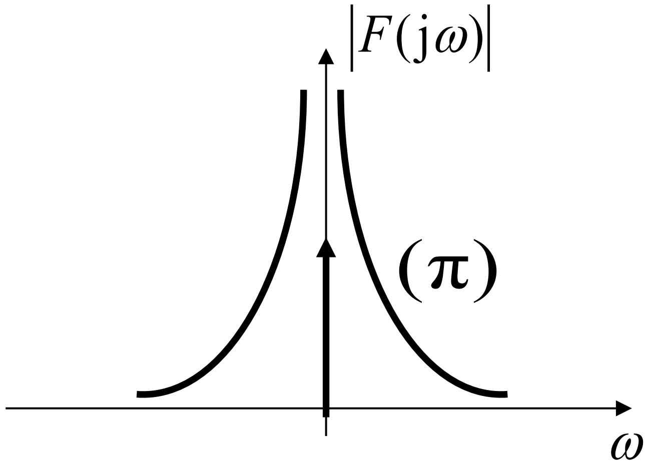
$$\because u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

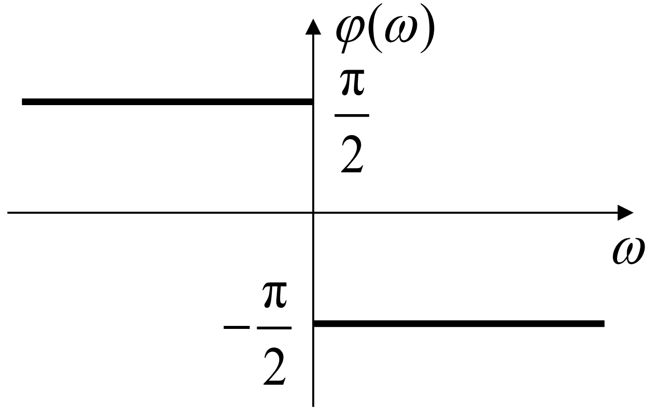


$$\therefore F(\mathrm{j}\omega) = \mathscr{F}[u(t)] = \mathscr{F}[\frac{1}{2}] + \mathscr{F}[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)]$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

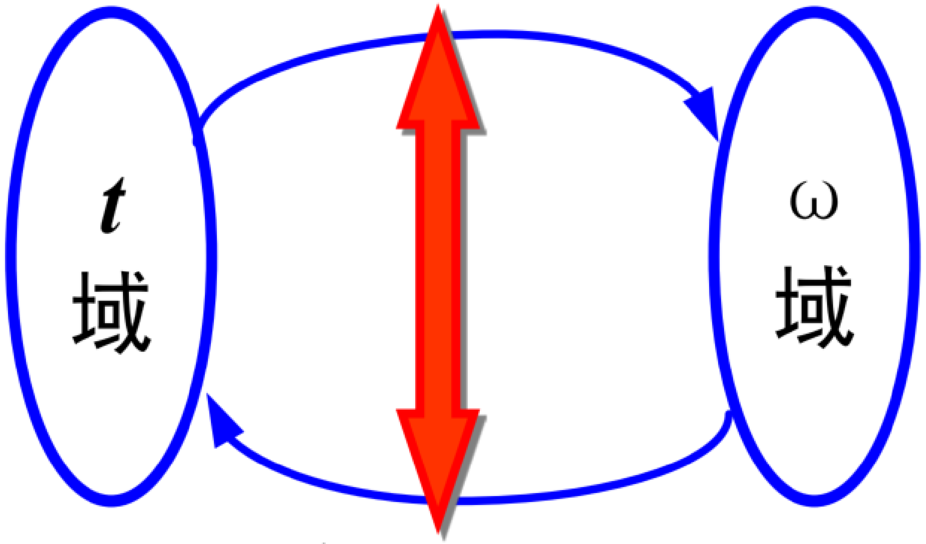
对应直流分量　　0时刻跳变引起的其他频率分量





归纳记忆:

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

典型非周期信号（指数、矩形窗、直流、冲激、阶跃）的傅里叶变换要熟记！

幅度谱、相位谱要看频谱函数的实部和虚部，归纳总结规律。

第三章 傅里叶变换

本次课内容

3.7 傅里叶变换的基本性质

本次课目标

熟练运用傅里叶变换的各种性质求复杂信号的傅里叶变换（重要！）

- 一个时间函数与它的频谱函数（若存在）具有唯一对应的关系。
- 傅里叶变换的基本性质使我们可以通过典型信号的傅里叶变换得到一些时域较为复杂的信号的傅里叶变换。
- 反之，也可以从频域的运算推测时域的变化。
- 注意：
  - ➢ 傅里叶变换存在的必要条件缺失。狄里赫利条件是充分不必要条件。
  - ➢ 任意给定一个信号$f(t)$，无论它是否满足绝对可积条件，傅里叶分析理论都没有限制人们采用任何方法求得一个表面形式上的变换式$F(\omega)$。但某些变换未必有物理意义。
  - ➢ 工程实践表明：绝大多数能量信号的傅里叶变换存在；绝大多数功率有限信号（阶跃信号、符号信号等）的广义傅里叶变换存在；非功率非能量信号的广义傅里叶变换可能不存在。

能量信号：$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t<\infty$　　功率信号：$\lim\limits_{T_1\to\infty}\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t<\infty$

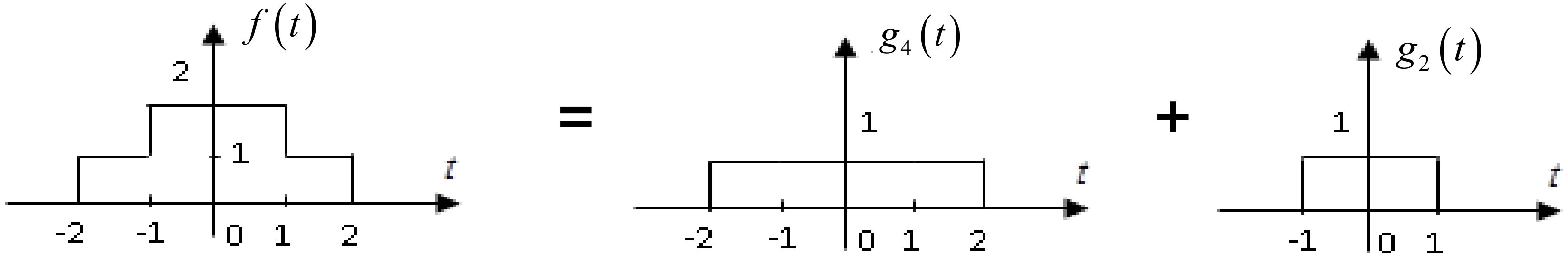
3.7 傅里叶变换的基本性质

3.7.1 线性 （齐次性+叠加性） → 实现复杂信号的分解

若 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\mathrm{j}\omega)$， $\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\mathrm{j}\omega)$

则 $\mathscr{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\mathrm{j}\omega) + a_2 F_2(\mathrm{j}\omega)$

例3-4 求如图所示信号 $f(t)$ 的频谱。



(a) (b) (c)

解： $f(t) = g_4(t) + g_2(t)$

$$\mathscr{F}[g_\tau(t)] = E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F(\omega) = 4\mathrm{Sa}(2\omega) + 2\mathrm{Sa}(\omega)$$

3.7.2 对称性

傅里叶变换和反变换之间的对称关系

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$

证明： $\because f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$ 傅里叶逆变换

$$\therefore f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

将变量 t 与 ω 互换，得到 $f(-\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

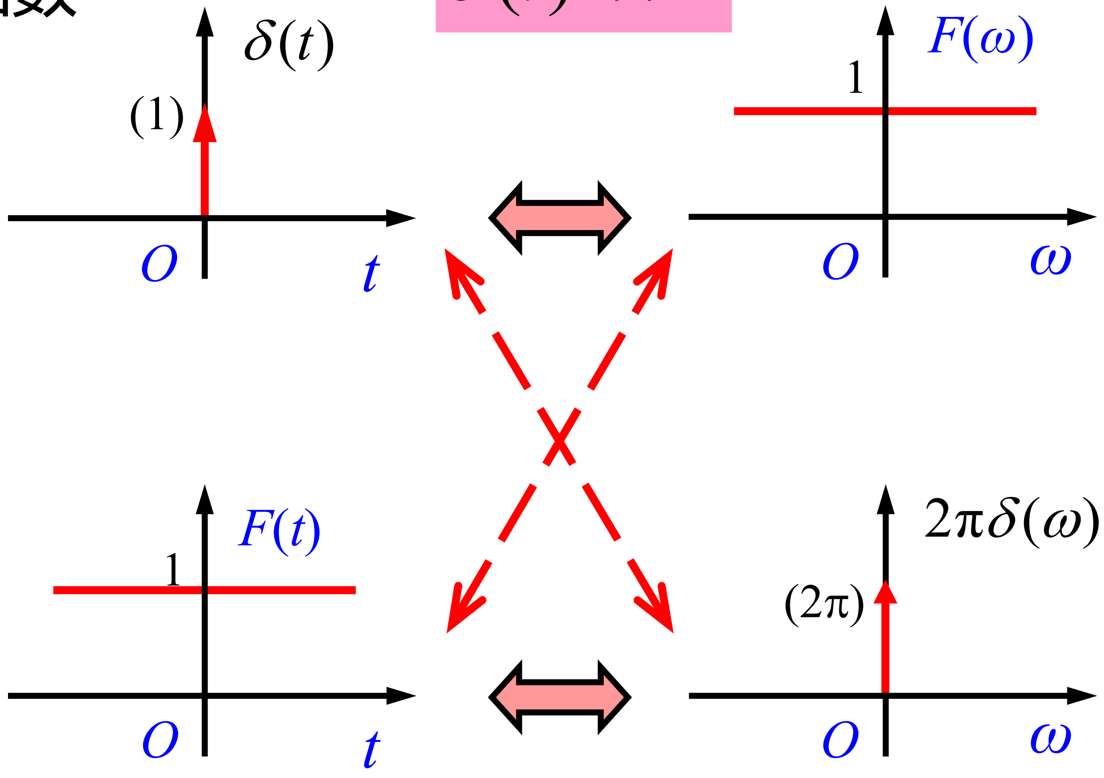
则 $2\pi\, f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ 傅里叶变换

所以 $F(t) \leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$

进一步，若 $f(t)$ 为偶函数，则 $F(t)\leftrightarrow 2\pi\, f(\omega)$

例如：冲激函数和直流函数

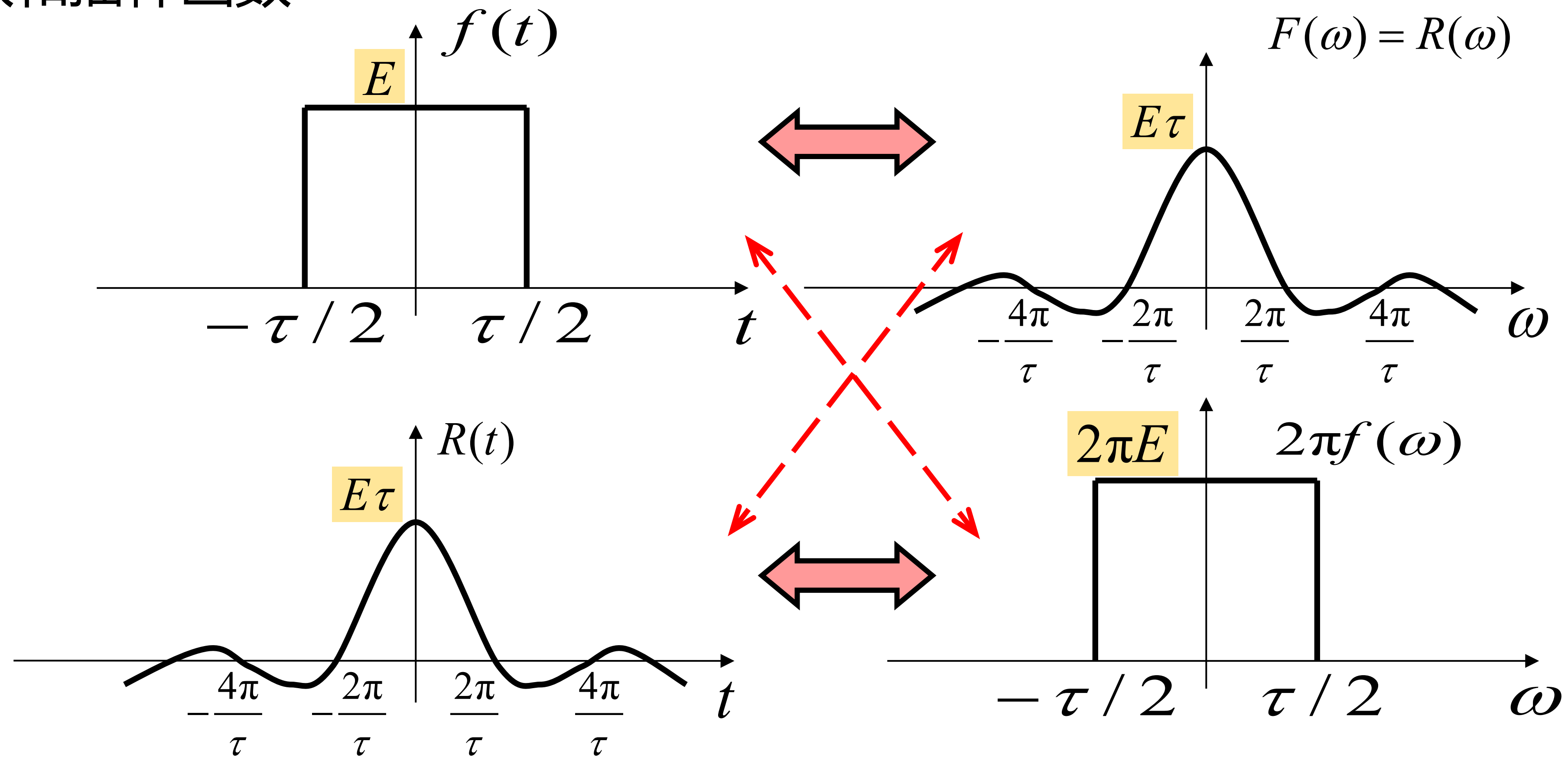
$\delta(t)\leftrightarrow 1$



$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$$f(t)=E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]\leftrightarrow R(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

又如：门函数和抽样函数



$$R(t)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{t\tau}{2})\quad\leftrightarrow\quad\mathscr{F}[R(t)]=2\pi E[u(\omega+\frac{\tau}{2})-u(\omega-\frac{\tau}{2})]$$

例 3-5： $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=?$

解：寻找一个类似于 $f(t)$ 形式的频谱函数 $\quad \mathrm{e}^{-\alpha|t|}\leftrightarrow\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

当 $\alpha=1$ 时， $\quad \mathrm{e}^{-|t|}\leftrightarrow\dfrac{2}{1+\omega^2}$

根据对称性 $\quad \dfrac{2}{1+t^2}\leftrightarrow 2\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}$ $\qquad$ 所以 $\quad \dfrac{1}{1+t^2}\leftrightarrow \pi\mathrm{e}^{-|\omega|}$

另外，利用傅里叶变换的对称性，可将求傅里叶逆变换的问题转化为求傅里叶变换来进行。

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$

则 $\mathscr{F}[F(t)]=2\pi\, f(-\omega)$

即 $f(-\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\mathscr{F}[F(t)]$

$\therefore \quad f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\mathscr{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}$

例3-6： 求 $\mathscr{F}^{-1}\left[\mathrm{j}\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)\right]$ 。

A $\dfrac{1}{t}$

B $\dfrac{2\pi}{t}$

C $-\dfrac{2\pi}{t}$

D $-\dfrac{1}{t}$

提交

例3-6： 求 $\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{j}\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]$ 。

解: $\because F(t)=\mathrm{j}\pi\,\mathrm{sgn}(t)$

$$\mathscr{F}[F(t)]=\mathrm{j}\pi\frac{2}{\mathrm{j}\omega}=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore\ \mathscr{F}^{-1}[\mathrm{j}\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}=\frac{1}{2\pi}[\frac{2\pi}{\omega}]\Big|_{\omega=-t}=-\frac{1}{t}$$

也可以 $\mathrm{j}\pi\,\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow\dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\frac{2\pi}{t}\leftrightarrow 2\pi\cdot\mathrm{j}\pi\,\mathrm{sgn}(-\omega)$$

$$-\frac{1}{t}\leftrightarrow\mathrm{j}\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

例3-7： 设 $y(t)=x(t)\cos t$，且已知 $Y(\mathrm{j}\omega)=u(\omega+2)-u(\omega-2)$，求 $x(t)$。

解：利用时域和频域的对称性，

$$u(t+2)-u(t-2)\xleftrightarrow{FT}4\mathrm{Sa}(2\omega)$$

$$4\mathrm{Sa}(2t)\xleftrightarrow{FT}2\pi[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$$ 偶函数

$$\frac{1}{2\pi}4\mathrm{Sa}(2t)\xleftrightarrow{FT}[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$$

$$y(t)\xleftrightarrow{FT}Y(\mathrm{j}\omega)$$

$$\therefore y(t)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Sa}(2t)=\frac{\sin(2t)}{\pi t}=\frac{2\sin(t)\cos(t)}{\pi t}=x(t)\cos(t)$$

$$\therefore x(t)=\frac{2\sin(t)}{\pi t}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Sa}(t)$$

3.7.3 奇偶虚实性

设 $F(\mathrm{j}\omega)=\left|F(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$

其中 $\left|F(\mathrm{j}\omega)\right|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)},\ \varphi(\omega)=\arctan\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)}$

因为 $F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

所以 $F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$

则 $$\begin{cases} R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\ X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

如果 $f(t)$ 是实函数，则

$R(\omega)$ 是偶函数，$X(\omega)$ 是奇函数

两种特定关系：

1. 若 $f(t)$ 是实函数，或虚函数 $[f(t)=\mathrm{j}g(t)]$，则 $|F(\mathrm{j}\omega)|$ 是偶函数，$\varphi(\omega)$ 是奇函数。

2. 若 $f(t)$ 是 t 的实偶函数，则 $F(\mathrm{j}\omega)$ 必为 ω 的实偶函数：

$$[F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)]$$

若 $f(t)$ 是 t 的实奇函数，则 $F(\mathrm{j}\omega)$ 必为 ω 的虚奇函数：

$$[F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}X(\omega)]$$

例如：

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|} \quad \text{(实偶)} \qquad F(\mathrm{j}\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \quad \text{(实偶)}$$

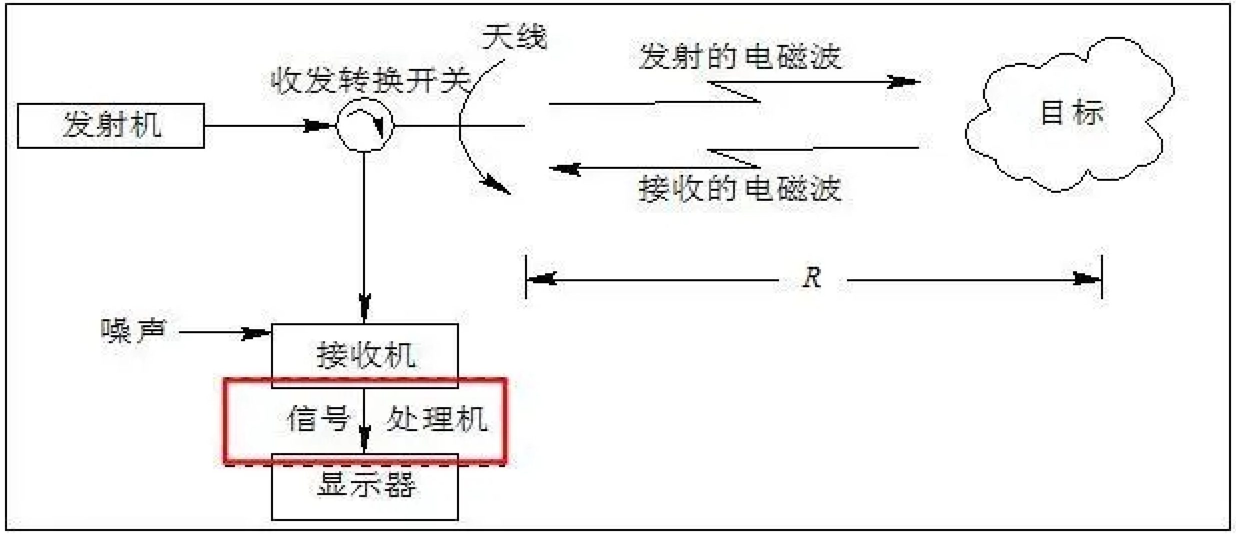
$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\alpha t} & t>0\\ -\mathrm{e}^{\alpha t} & t<0\end{cases} \quad \text{(实奇)} \qquad F(\mathrm{j}\omega)=\frac{-2\mathrm{j}\omega}{\alpha^2+\omega^2} \quad \text{(虚奇)}$$

$f(t)$ 和 $F(\omega)$ 的奇偶虚实性总结：

$f(t)$		$F(\omega)$
实	一般	实部偶、虚部奇、幅频偶、相频奇
	偶	实偶
	奇	虚奇
虚	一般	实部奇、虚部偶、幅频偶、相频奇
	奇	实奇
	偶	虚偶

- 当 $f(t)$ 为奇函数时， $F(\omega)$ 也为奇函数
- 当 $f(t)$ 为偶函数时， $F(\omega)$ 也为偶函数

3.7.4 位移特性



（1）时移特性

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

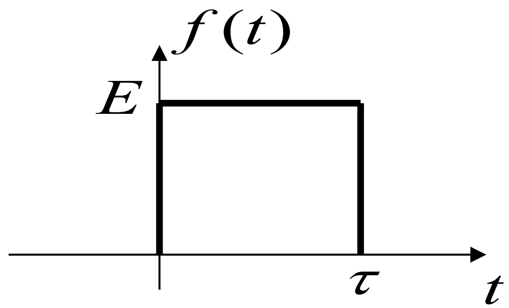
则 $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

同理 $\mathscr{F}[f(t+t_0)]=F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}$

时域平移，频域相位旋转

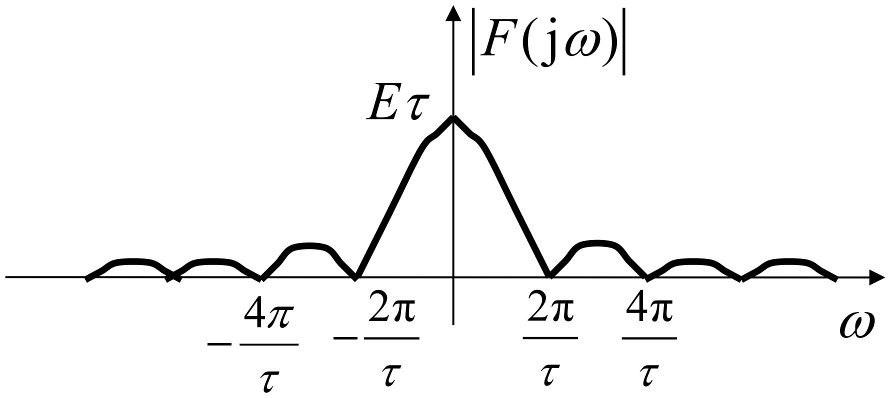
应用：雷达探测、激光测距

例3-8：求下图所示的单边矩形脉冲信号的频谱函数。



解： 因为对称矩形脉冲信号 $EG_\tau(t)$ 的傅里叶变换为

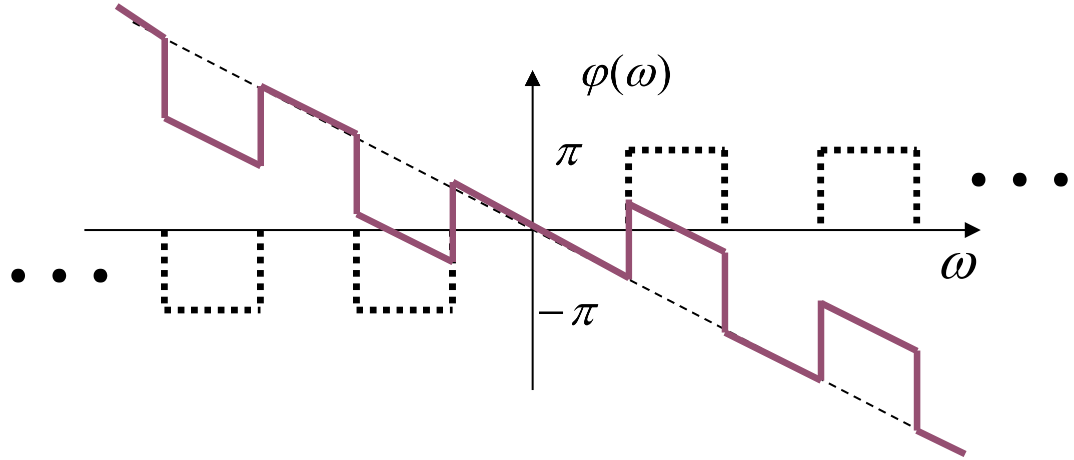
$$\mathscr{F}\left[E\,G_\tau(t)\right] = E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



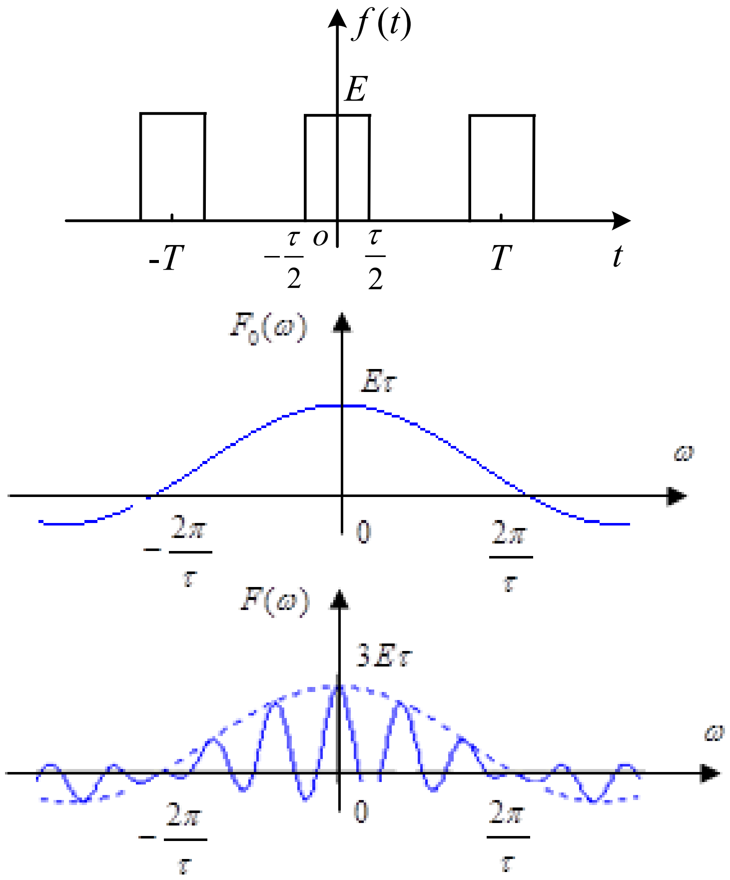
根据时移特性 $\mathscr{F}\left[f(t)\right] = E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}$

幅度谱保持不变，

相位谱产生附加相移 $-\omega\tau/2$



例3-9：求如图所示三矩形脉冲信号的频谱。



解：单脉冲 $f_0(t)$ 的频谱 $F_0(\omega)=E\tau\cdot \mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$

$$f(t)=f_0(t)+f_0(t+T)+f_0(t-T)$$

$$F(\omega)=F_0(\omega)\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}\right)=E\tau\cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\left[1+2\cos(\omega T)\right]$$

结论：

(1) 信号的幅度频谱是由信号波形形状决定的，与信号在时间轴上出现的位置无关；

(2) 信号的相位频谱则是由信号波形形状和在时间轴上出现的位置共同决定的。

单选题 1分

设置

信号 $x(t)=e^{-t+2}u(t-2)$ 的傅里叶变换为

A $e^{-j2\omega}\dfrac{1}{1+j2\omega}$

B $e^{-j2\omega}\dfrac{1}{1+j\omega}$

C $e^{-j\omega}\dfrac{1}{1+j2\omega}$

D $2e^{-j\omega}\dfrac{1}{1+j\omega}$

提交

(2）频移特性（调制定理)

时移同号
频移反号

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}[f(t)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_0 t}]=F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]$ $\quad$ $\mathscr{F}[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}]=F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]$

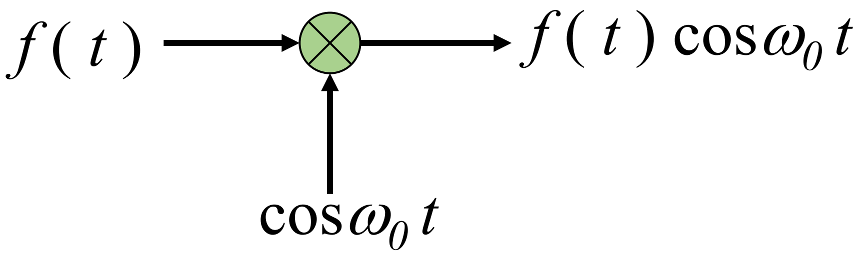
$\because \cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]$ $\quad$ $\sin\omega_0 t=\frac{\mathrm{j}}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]$

$$\therefore \mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]+F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\}$$

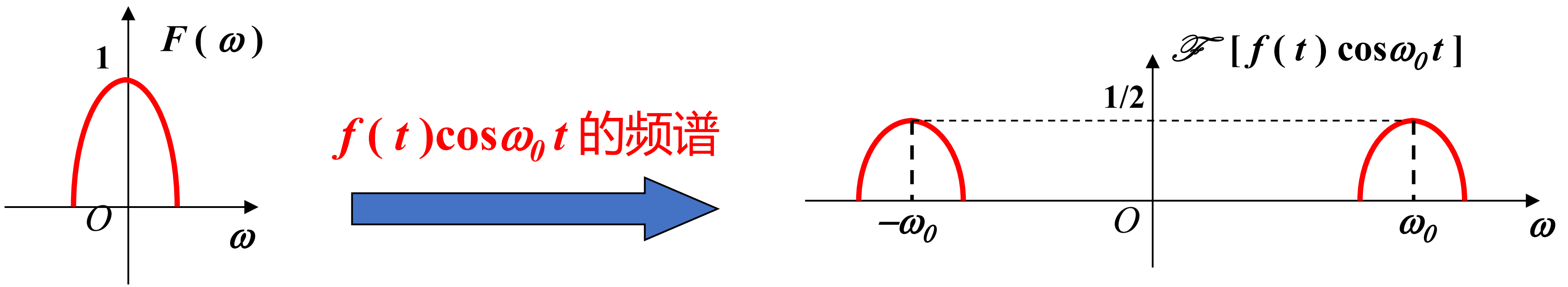
$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{\mathrm{j}}{2}\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]-F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\}$$

结论：时间信号 $f(t)$ 乘以因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$，等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 沿频率轴右移 ω_0，即**频谱搬移技术**。

应用举例：调制



频谱搬移

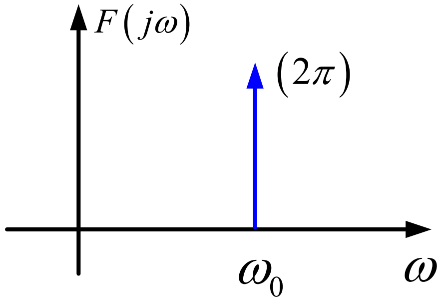


幅度谱减半，向左、向右各平移 ω_0

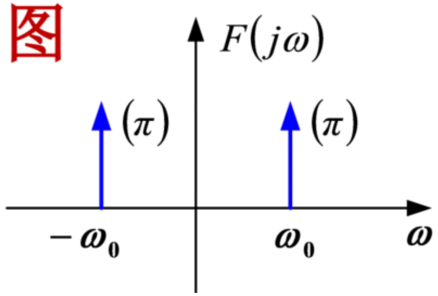
例3-10：求 $e^{j\omega_0 t}$，$\cos\omega_0 t$，$\sin\omega_0 t$ 的频谱。 单频信号的频谱，非常重要

解：
$$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$
$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$
$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

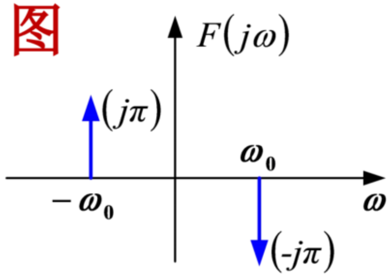
$e^{j\omega_0 t}$ 频谱图



cos(ω $_0$t)频谱图



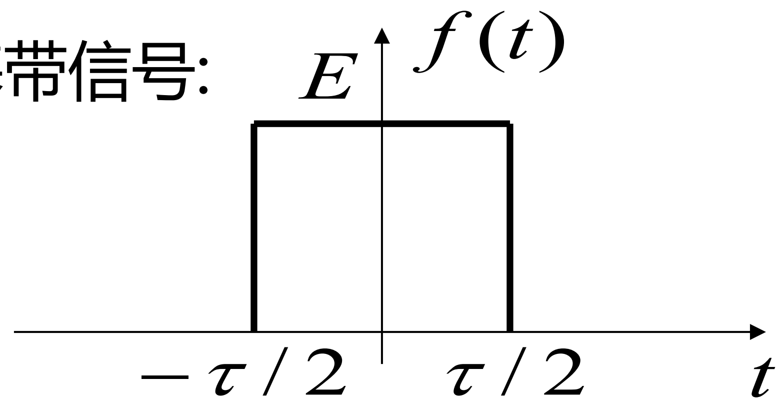
sin(ω $_0$t)频谱图

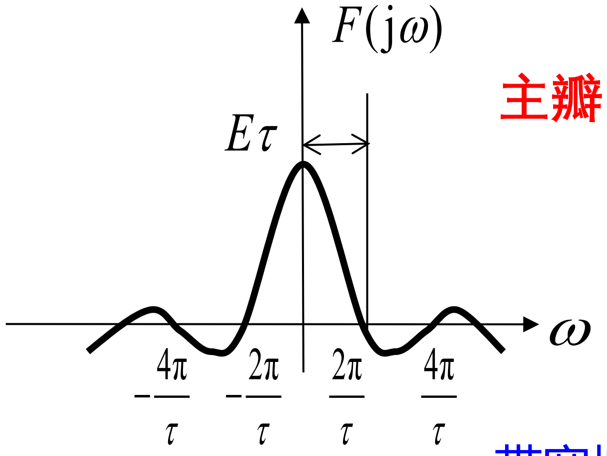


思路：直流信号的频谱是位于原点的冲激函数，再频移余、正弦周期信号的频谱集中于 $\pm\omega_0$ 点的冲激函数

例3-11：求矩形脉冲幅度键控（ASK）调制信号的频谱函数。已知矩形脉冲脉幅为E，脉宽为τ，载波信号的频率为ω_0。

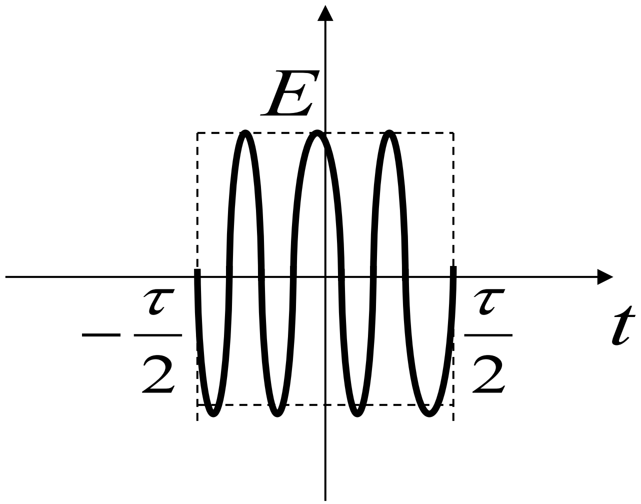
基带信号:





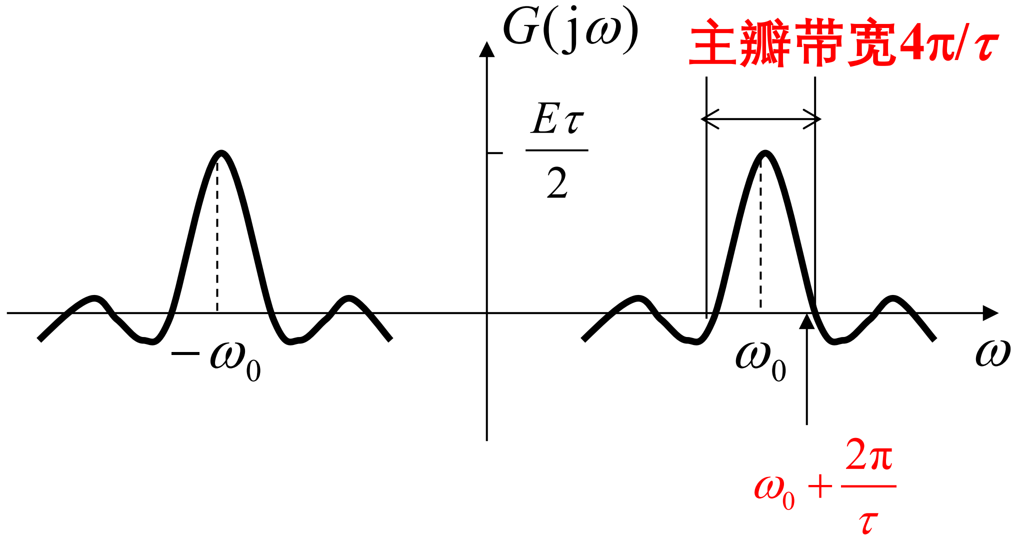
主瓣带宽$2\pi/\tau$

ASK信号: $g(t) = f(t)\cos(\omega_0 t)$



带宽增加了一倍

主瓣带宽$4\pi/\tau$



分析：

$$F(\mathrm{j}\omega) = E\tau \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)] + F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\} = \frac{E\tau}{2}\left\{\mathrm{Sa}\left[\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right] + \mathrm{Sa}\left[\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right]\right\}$$

在调制过程中带宽增加一倍，能量（只看正频率）减小一半（cos 函数能量为1/2）。

3.7.5 尺度变换特性

若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$ 则 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F(\dfrac{\omega}{a})$

证明 $\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

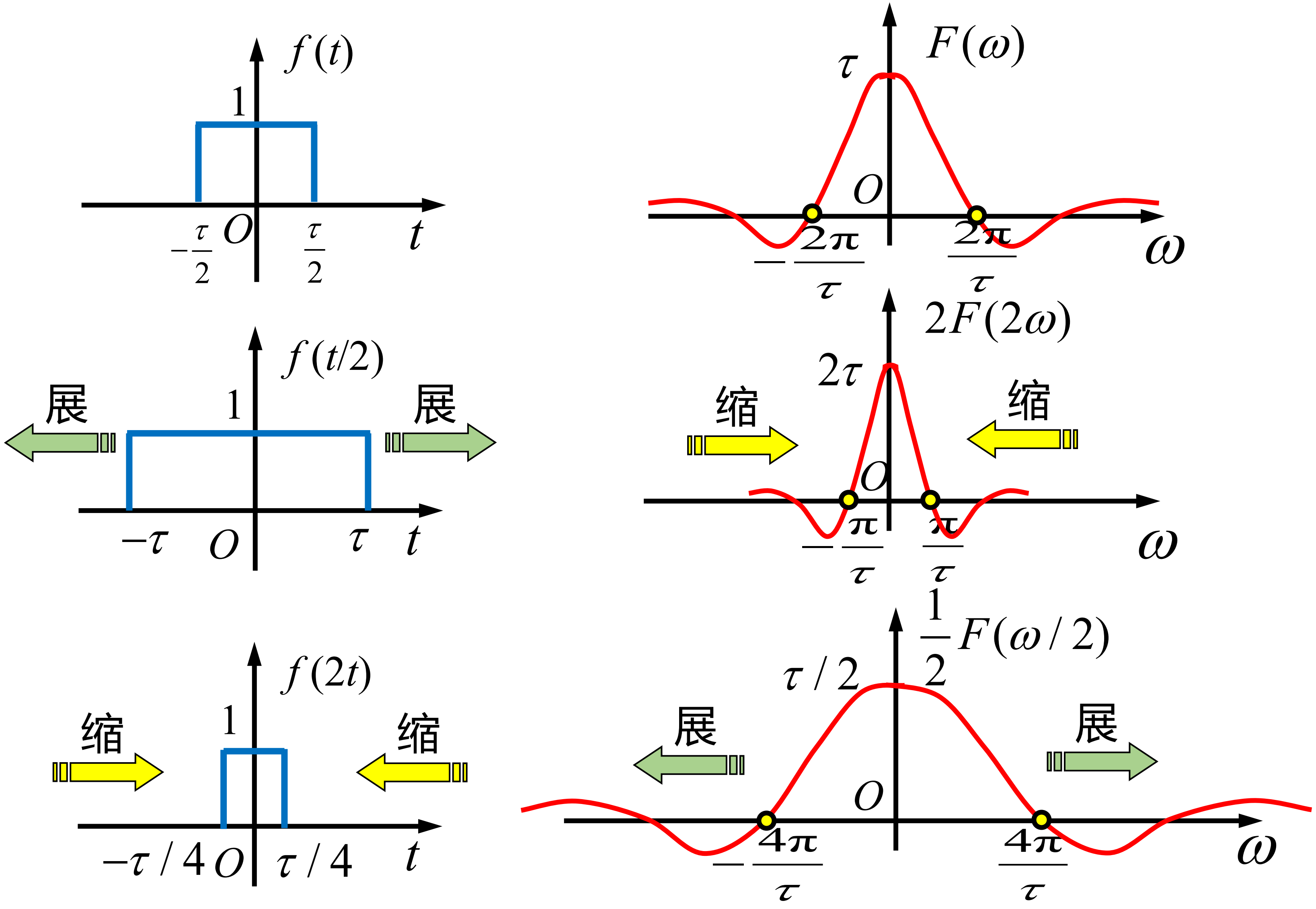
令 $x=at$，则 $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}t$，代入上式可得

若 **a > 0** $\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{\omega}{a})$

若 **a < 0** $\mathscr{F}[f(at)]=\int_{+\infty}^{-\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{a}\right)=-\dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}F(\dfrac{\omega}{a})$

$$\therefore f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

结论：时域压缩则频域扩展；时域扩展则频域压缩。



时域中的扩展（压缩），等于频域中的压缩（扩展）

极限情况:

1. 脉宽趋近于0，频谱趋于无穷大，变为冲激和常数;
2. 脉宽趋近于无穷大，频谱趋于0，变为常数和冲激。

特例: $\mathscr{F}[f(-t)]=F(-\omega)$　　(反褶)

信号在时域中沿纵轴翻转等效于在频域中频谱也沿纵轴翻转。

综合时移特性和尺度变换特性，可以证明以下两式:

$$\mathscr{F}[f(at-t_0)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega t_0}{a}}$$

$$\mathscr{F}[f(t_0-at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{-a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega t_0}{a}}$$

3.7.6 微分与积分特性

(1) 时域微分特性

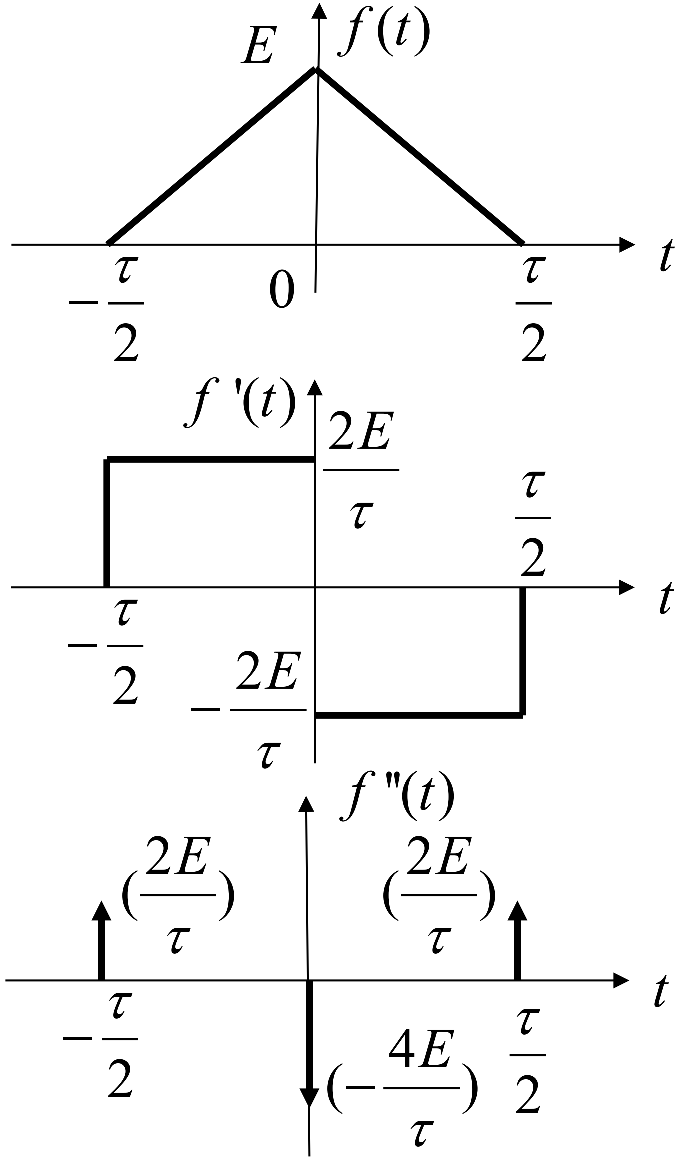
若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}\left[\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)$, $\quad \mathscr{F}\left[\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$

例如: $\mathscr{F}[\delta(t)]=1 \quad \mathscr{F}[\delta'(t)]=\mathrm{j}\omega \quad \mathscr{F}[\delta^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^n$

时域中 $f(t)$ 对 t 的 n 阶导数，等效于在频域中 $F(\omega)$ 乘以因 子 $(\mathrm{j}\omega)^n$ 。

例3-12： 求下图所示三角脉冲信号的傅里叶变换。



解：

$$f'(t)=\begin{cases}\frac{2E}{\tau} & -\frac{\tau}{2}<t<0\\ -\frac{2E}{\tau} & 0<t<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

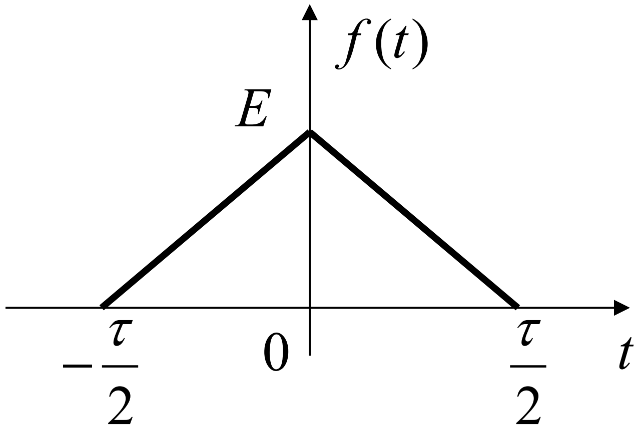
$$f''(t)=\frac{2E}{\tau}[\delta(t+\frac{\tau}{2})+\delta(t-\frac{\tau}{2})-2\delta(t)]$$

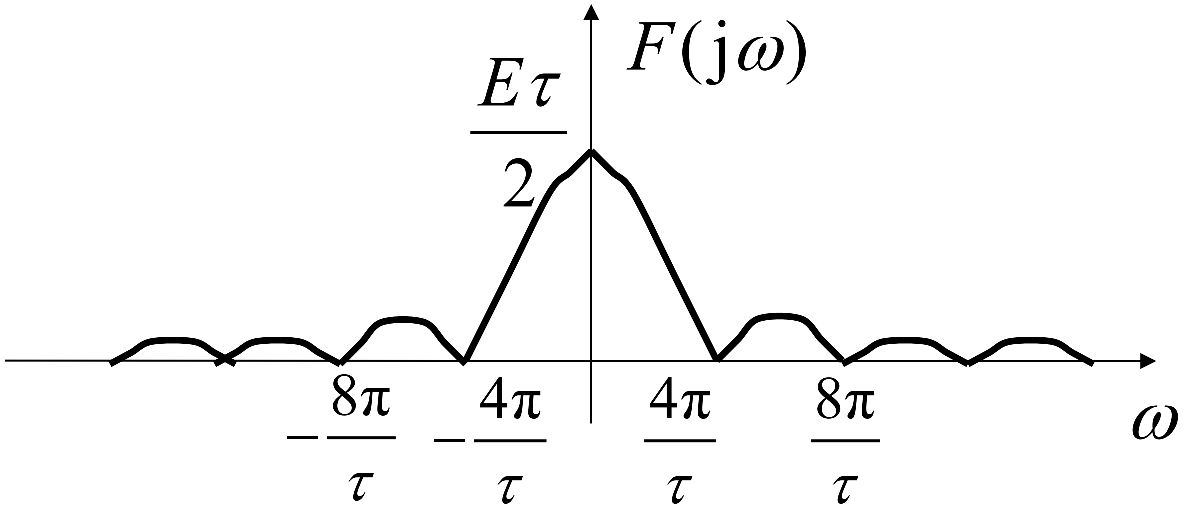
对上式两边取傅里叶变换：

$$(\mathrm{j}\omega)^2F(\mathrm{j}\omega)=\frac{2E}{\tau}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-2)=-\frac{\omega^2E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$(\mathrm{j}\omega)^2 F(\mathrm{j}\omega) = -\frac{\omega^2 E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$\therefore \quad F(\mathrm{j}\omega) = \frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$





（2）频域微分特性

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}[(-\mathrm{j}t)f(t)]=\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$， $\mathscr{F}[(-\mathrm{j}t)^n f(t)]=\dfrac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$

$$\mathscr{F}[t^n f(t)]=\mathrm{j}^n\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$$

例: $\because \mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$ $\quad\therefore \mathscr{F}[t]=\mathrm{j}2\pi\delta'(\omega)$ $\quad\mathscr{F}[t^n]=2\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\omega)$

频域中 $F(\omega)$ 对 ω 的 n 阶导数，等效于在时域中 $f(t)$ 乘以因子 $(-\mathrm{j}t)^n$ 。

（3）时域积分特性

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

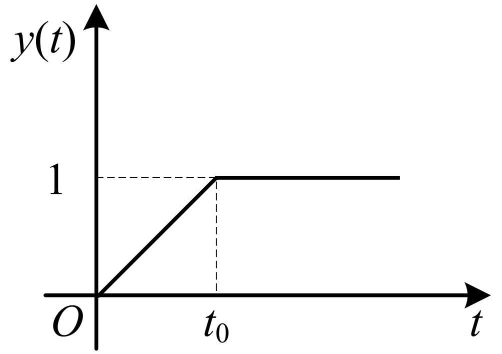
则 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\dfrac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$ ，其中 $F(0)=F(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=0}$

若 $F(0)=0$ 上式可化简为 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\dfrac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$

时域中 $f(t)$ 对 t 的积分，等效于在频域中 $F(\omega)$ 除以因子$(-\mathrm{j}\omega)^n$ 。

例3-13：求如图所示截平斜坡信号的频谱。

$$y(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \dfrac{t}{t_0} & (0\le t\le t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

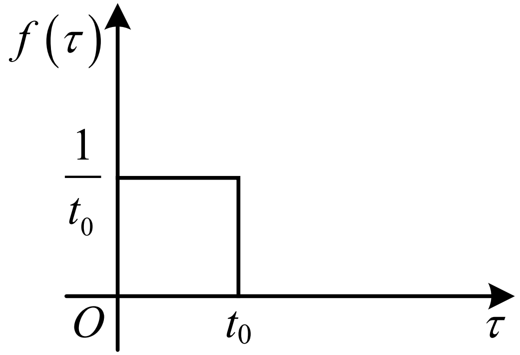


解：利用积分性质求 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$

将 $y(t)$ 求导得

$$f(\tau)=\begin{cases}0 & (\tau<0)\\ \dfrac{1}{t_0} & (0\le \tau\le t_0)\\ 0 & (\tau>t_0)\end{cases}$$

即 $y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$



根据矩形脉冲的频谱和时移特性，可得 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ $F(\omega)=\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega t_0}{2}}$

由于 $F(0)=1\neq 0$

$$Y(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega t_0}{2}}+\pi\delta(\omega)$$

思考：为什么不能用时域微分定理求解？

$$y(t)\leftrightarrow Y(\mathrm{j}\omega)$$

$$f(t)=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=(\mathrm{j}\omega)Y(\mathrm{j}\omega)$$

$$Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\mathrm{j}\omega)$$

(4) 频域积分特性

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}u)\mathrm{d}u]=\dfrac{f(t)}{-\mathrm{j}t}+\pi\ f(0)\delta(t)$

若 $f(0)=0$ 上式可化简为

则 $\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}u)\mathrm{d}u]=\dfrac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$

频域中 $F(\omega)$ 对 ω 的积分，等效于在时域中 $f(t)$ 除以因子 $(-\mathrm{j}t)^n$ 。

作 业

教材习题
基础题：3-17（a）（d）（f），3-21，3-22，3-25（1）（2），3-29（3）（4）（6）（7）
加强题：3-17（b）（c）（e），3-20，3-25（3）（4），3-26，3-28，3-33