傅里叶级数与傅里叶变换的关系（重点中的重点）：

傅里叶级数	傅里叶变换
$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$
频谱（离散）	频谱密度（连续）
$F_n=\lvert F_n\rvert e^{j\varphi_n}$	$F(\omega)=\lvert F(\omega)\rvert e^{j\varphi(\omega)}$
在一个周期内满足狄里赫利条件	在 (-∞ , +∞)内满足狄里赫利条件

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

量纲不同

3.8 卷积特性

(1）时域卷积定理——时域卷积，频域相乘

若 $F_1(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$,

则
$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$$

(2）频域卷积定理——时域相乘，频域卷积（注意要乘以1/2π）

若 $F_1(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$,

则
$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$$

其中：
$$F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\mathrm{j}u)F_2[\mathrm{j}(\omega-u)]du$$

3.9 周期信号的傅里叶变换

$$\begin{tikzcd}
\text{周期信号} \arrow[r] \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \arrow[dr, "?"] & \text{傅里叶级数} \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \\
\text{非周期信号} \arrow[r] & \text{傅里叶变换}
\end{tikzcd}$$

3.9.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = \mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

3.9.2 一般周期信号的傅里叶变换

令周期信号 $f(t)$ 的周期为 T_1，角频率为 $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi / T_1$。它的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad \textbf{(1)}$$

其中：$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$　　或：$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(j\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$

对式 **(1)** 两边取傅里叶变换

$$F(j\omega) = \mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \boxed{\mathscr{F}\left[e^{jn\omega_1 t}\right]} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

即：$$F(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成的，这些冲激位于信号的谐频（$0, \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \ldots\ldots$）处，每个冲激的强度等于 $f(t)$ 傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

周期信号傅里叶变换的两种求法（重点中的重点）

思路1：$f_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}\leftrightarrow F_{T_1}(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$

傅里叶级数和傅里叶变换的关系 $F_n=\frac{1}{T_1}F_0(j\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$

思路2：$f_{T_1}(t)=\delta_{T_1}(t)*f_0(t)\leftrightarrow F_{T_1}(j\omega)=\omega_1\delta_{\omega_1}(\omega)F_0(j\omega)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(jn\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1)$

时域卷积，频域相乘，冲激函数的筛选特性

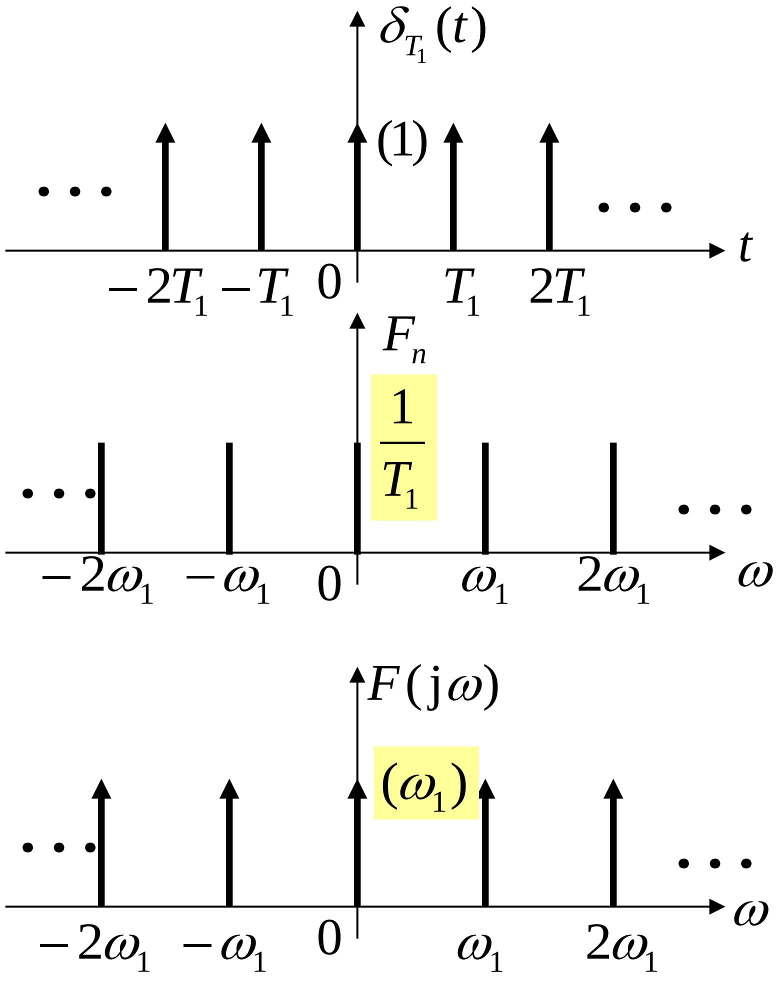
结论：

周期信号 $f_{T_1}(t)$ 的频谱由冲激函数组成：

位置—— $\omega=n\omega_1$（谐波频率点处）

强度—— $2\pi F_n$ 或 $\omega_1 F_0(jn\omega_1)$

例3-18：求周期单位冲激序列的傅里叶级数与傅里叶变换。



$$\delta_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta_{T_1}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}\Rightarrow\delta_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

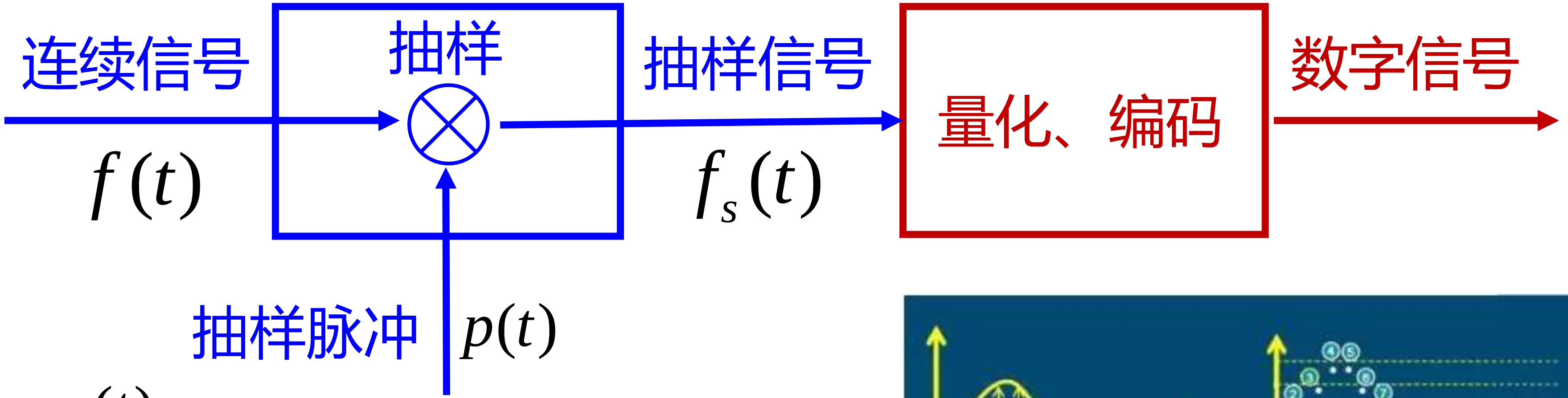
$$F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot\delta(\omega-n\omega_1)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

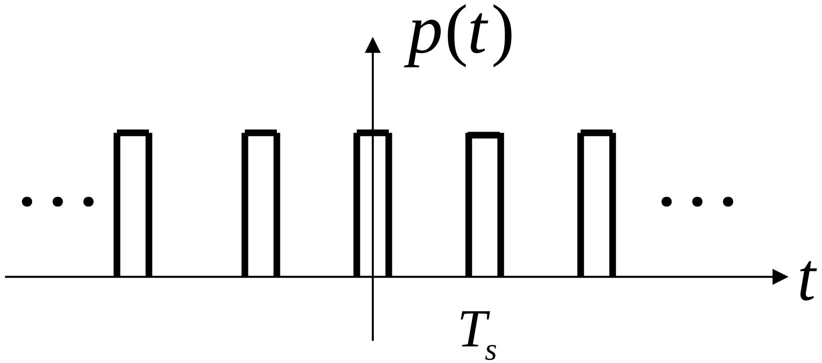
只有幅度发生变化 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$

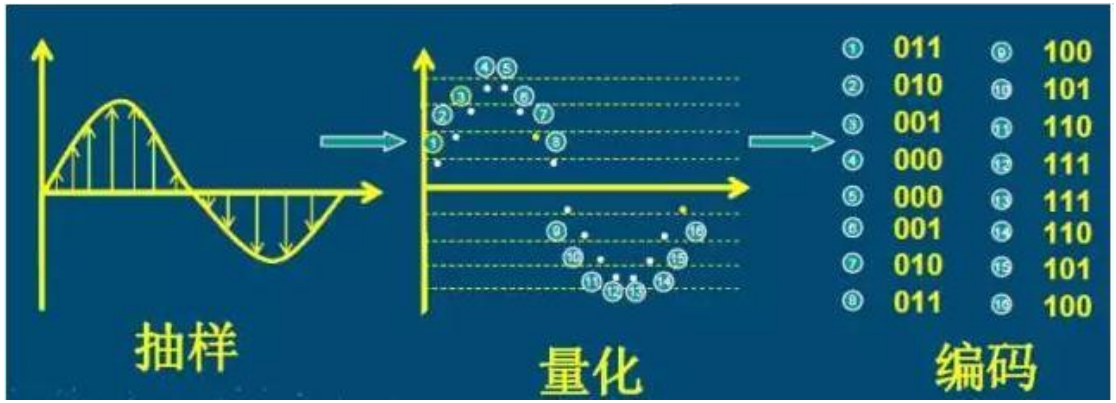
3.10.1 信号的抽样

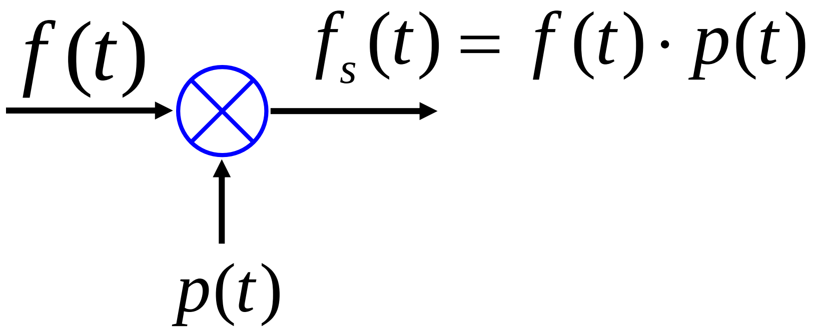
定义： “**抽样**”就是利用抽样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中“抽取”一系列离散样值的过程；将得到的离散信号称为“抽样信号” $f_s(t)$

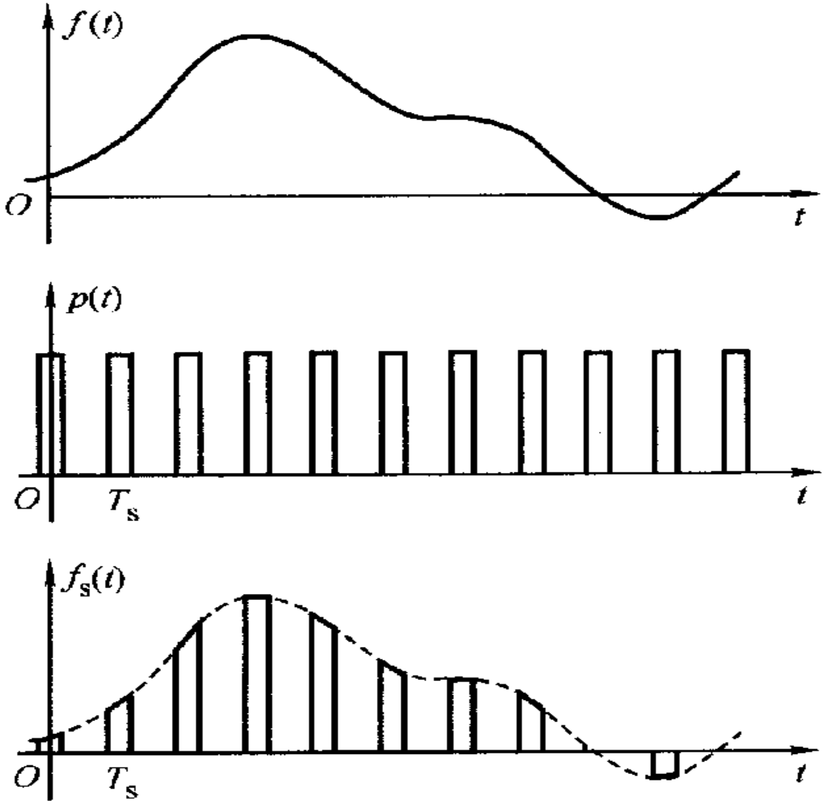
抽样过程方框图











问题①：抽样信号频谱和连续信号频谱的关系？

问题②：抽样间隔 T_s 该如何选取，才能恢复原始信号？

3.10.2 抽样信号的傅里叶变换

连续信号 $f(t) \leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$

抽样脉冲 $p(t) \leftrightarrow P(\mathrm{j}\omega)$

抽样信号 $f_s(t) \leftrightarrow F_s(\mathrm{j}\omega)$

时域：$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$

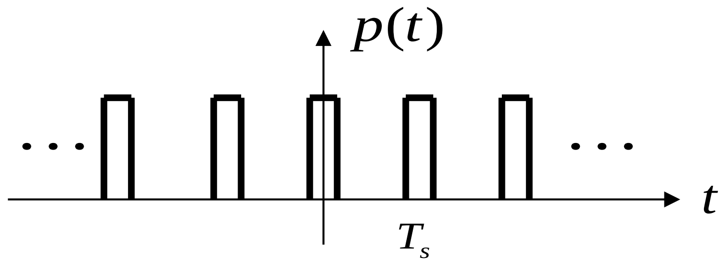
根据频域卷积定理，抽样信号的频谱：

$$F_s(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\mathrm{j}\omega) * P(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\mathrm{j}\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F[\mathrm{j}(\omega - n\omega_s)]$$

→抽样信号的频谱是周期延拓的

抽样脉冲的频谱



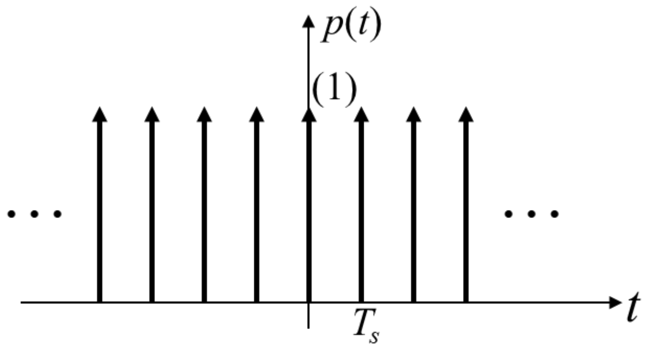
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$ ——抽样角频率

$$P(\mathrm{j}\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

其中：$P_n = \dfrac{1}{T_s} \displaystyle\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_s t} \mathrm{d}t$

❖ 冲激抽样（理想抽样）

若抽样脉冲 $p(t)$ 是冲激序列 $p(t)=\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$



$$P_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_s t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_s}$$

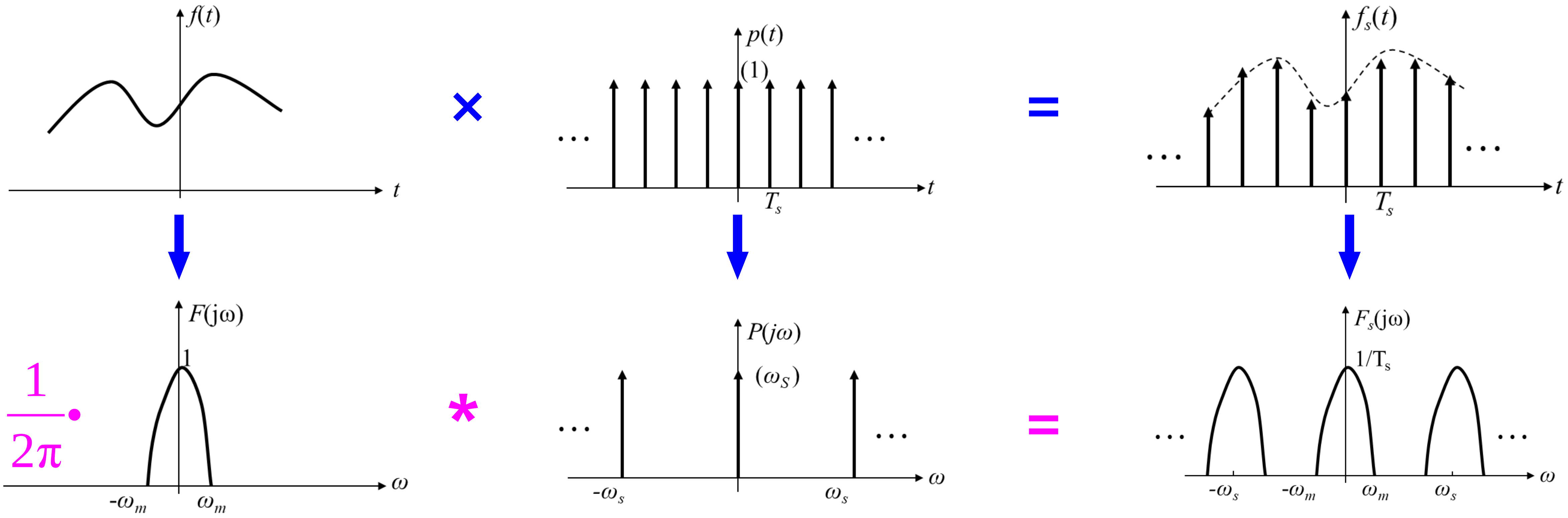
代入上一页的公式

$$\boxed{F_s(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\cdot F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]}$$

问题①的标准答案：

冲激序列抽样后的信号频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 是原始信号频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 以 ω_s 为周期的重复，且幅度上乘以抽样周期的倒数 $1/T_s$ 。

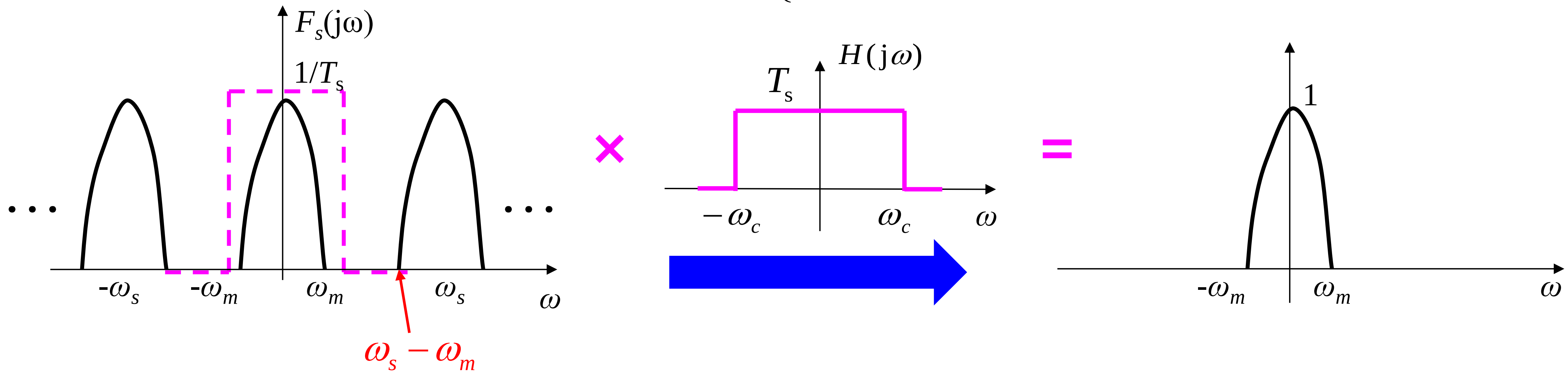
冲激抽样（理想抽样）


f(t)
t
×
p(t)
(1)
…
…
t
T_s
=
$f_s(t)$
…
…
t
T_s
F(jω)
1
$\frac{1}{2\pi}\cdot$
$-\omega_m$
ω_m
ω
*
P(jω)
(ω_S)
…
…
$-\omega_s$
ω_s
ω
=
F_s(jω)
$1/T_s$
…
…
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s
ω

抽样信号的频谱

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}T_s & (|\omega|\le\omega_c)\\ 0 & (|\omega|>\omega_c)\end{cases}$$

原连续信号的频谱



只有满足 $\omega_s\ge 2\omega_m$，$F_s(\mathrm{j}\omega)$ 才不会产生频谱混叠，即 $f_s(t)$ 保留了原连续信号的全部信息

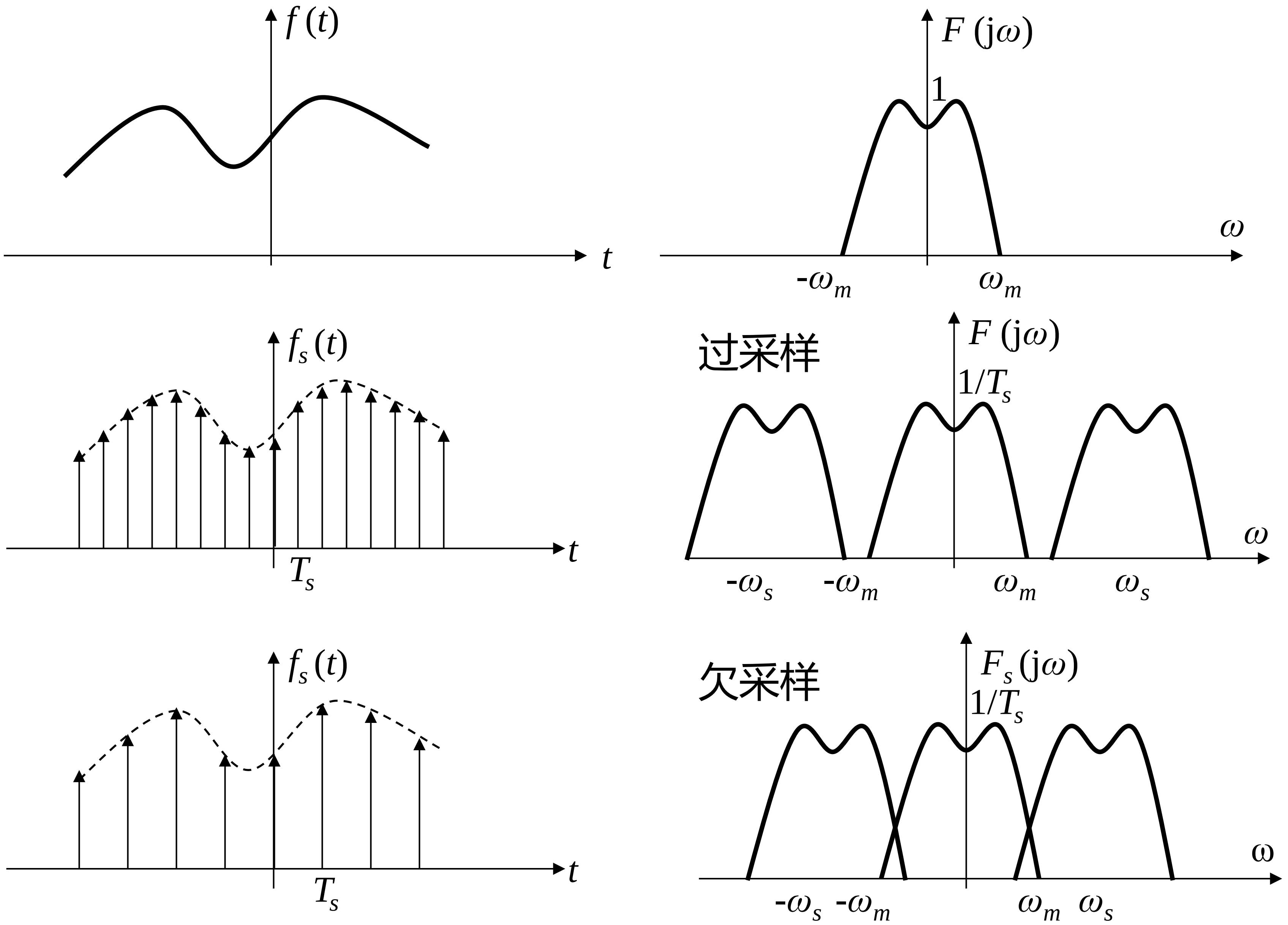
这时只要将 $f_s(t)$ 施加于“理想低通滤波器”，保证 $\omega_m\le\omega_c\le\omega_s-\omega_m$ 就可恢复原信号

问题②的标准答案：

时域抽样定理：一个频谱在区间 $(-\omega_m, \omega_m)$ 以外为 0 的带限信号 $f(t)$，可唯一的用等间隔 T_s（ $T_s \le 2\pi/2\omega_m$ ）上的抽样值确定。

通常，把最低允许的抽样频率称为奈奎斯特抽样频率——— $\boxed{f_{s\min} = 2f_m = \dfrac{\omega_m}{\pi}}$

把最大允许的抽样间隔称为奈奎斯特抽样间隔——— $\boxed{T_{s\max} = \dfrac{1}{f_{s\min}} = \dfrac{1}{2f_m} = \dfrac{\pi}{\omega_m}}$


f (t)
t
F (jω)
1
ω
-ωm
ωm
fs (t)
t
Ts
过采样
F (jω)
1/Ts
ω
-ωs
-ωm
ωm
ωs
fs (t)
t
Ts
欠采样
Fs (jω)
1/Ts
ω
-ωs
-ωm
ωm
ωs

❖总结抽样定理

时域抽样定理：一个频谱受限的信号 $f(t)$，如果频谱只占据 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 的范围，则信号 $f(t)$可以用等间隔的抽样值 $f_s(t)$ 唯一表示。抽样间隔必须不大于 $\frac{1}{2f_m}$，或者说最低抽样频率为 $2f_m$。

思考：实际应用中如何制造频域有限的信号？

频域抽样定理：若信号 $f(t)$是时间受限信号，它集中在 $-t_m \sim +t_m$ 的时间范围内，若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $f(t)$的频谱 $F(\omega)$进行抽样，则抽样后的频谱 $F_s(\omega)$可以唯一的表示原信号。

单选题 1分

设置

例3-21. 若 $f(t)$ 的最高角频率为 ω_m，则对 $f(t/4)$ 取样的最大间隔为

A $\dfrac{\pi}{\omega_m}$

B $\dfrac{2\pi}{\omega_m}$

C $\dfrac{4\pi}{\omega_m}$

D $\dfrac{8\pi}{\omega_m}$

提交

例3-21. 若 $f(t)$ 的最高角频率为 ω_{m}，则对 $f(t/4)$ 抽样的奈奎斯特间隔为?

解：根据傅里叶变换的尺度变换特性可得信号 $\boldsymbol{f(t/4)}$ 的最高角频率为 $\boldsymbol{\omega_{\mathrm{m}}/4}$，再根据时域抽样定理，可得

$$\omega_{\mathrm{s}} \geq 2 \cdot \frac{\omega_{\mathrm{m}}}{4} = \frac{\omega_{\mathrm{m}}}{2}$$

频谱不混叠的奈奎斯特间隔 $$T_{\mathrm{s}} \leq \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{s}}} = \frac{4\pi}{\omega_{\mathrm{m}}}$$

例3-22：已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$ ，用 $\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行抽样，

（1）确定奈奎斯特抽样频率；

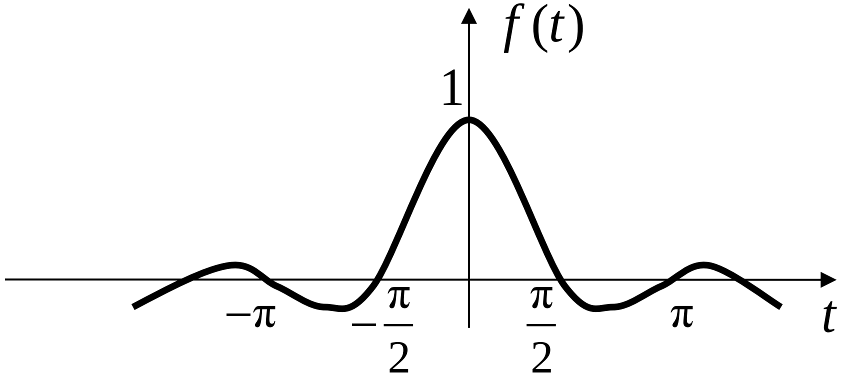
（2）若取 $\omega_s=6\omega_m$，求抽样信号 $f_s(t)=f(t)\delta_{T_s}(t)$，并画出波形图；

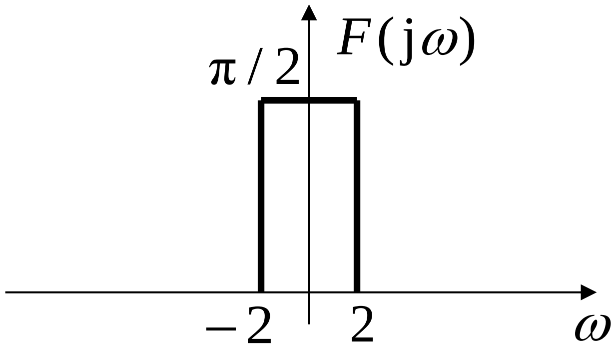
（3）求 $F_s(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_s(t)]$，并画出频谱图；

（4）确定低通滤波器的截止频率 ω_c 。

解：（1） $\because f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$

$$\therefore F(\mathrm{j}\omega)=\frac{\pi}{2}[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$$

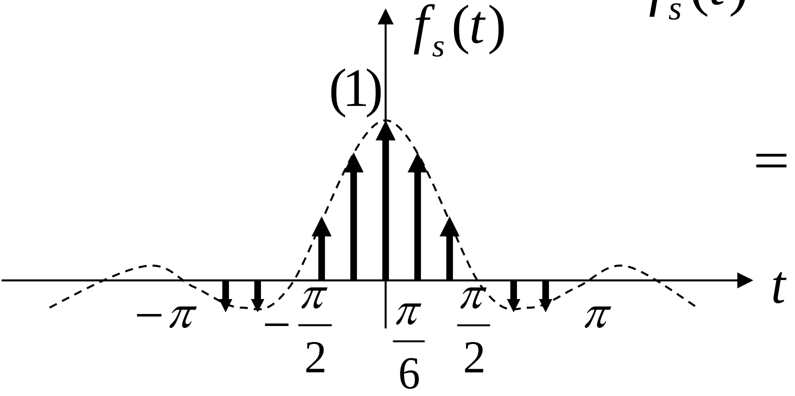




奈奎斯特抽样频率为： $f_{s\ \min}=2f_m=2\times\frac{2}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Hz}$

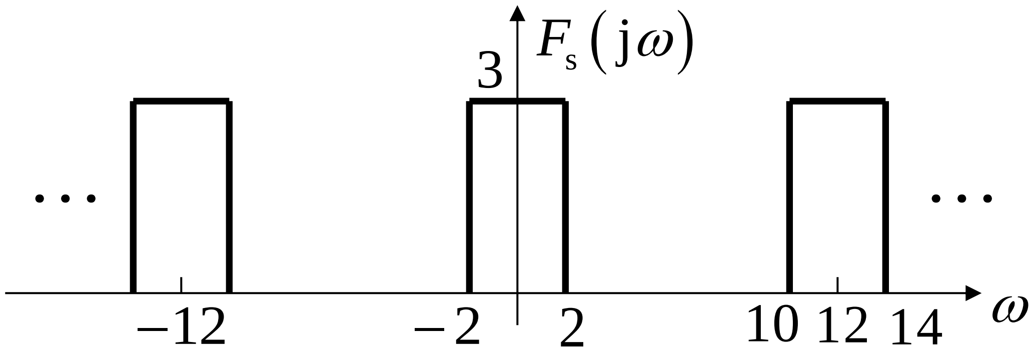
（2）$\because \omega_s = 6\omega_m = 12\ \mathrm{rad/s} \qquad \therefore T_s = \dfrac{2\pi}{\omega_s} = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}\ \mathrm{s}$

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$



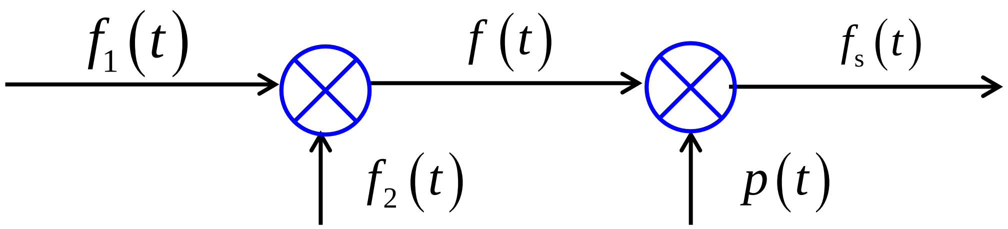
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(2t)\Big|_{t=nT_s} \delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{3})\delta(t-\frac{\pi}{6}n)$$

（3）$F_s(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{T_s}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)] = \dfrac{6}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\mathrm{j}(\omega-12n)] = 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}[u(\omega+2-12n)-u(\omega-2-12n)]$



例3-23：如图所示，$f_1(t)=\mathrm{Sa}(1000\pi t)$，$f_2(t)=\mathrm{Sa}(2000\pi t)$， $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$。

$f(t)=f_1(t)\,f_2(t)$，$f_s(t)=f(t)\,p(t)$。



（1）为从 $f_s(t)$ 无失真恢复 $f(t)$，求最大抽样间隔 $T_{\max}$ 。

（2）当 $T=T_{\max}$ 时，画出 $f_s(t)$ 的幅度谱 $|F_s(\omega)|$ 。

解： （1）由于

$$f_1(t)=\mathrm{Sa}(1000\pi t)\leftrightarrow 10^{-3}\left[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)\right]=F_1(\omega)$$

$$f_2(t)=\mathrm{Sa}(2000\pi t)\leftrightarrow \frac{1}{2}10^{-3}\left[u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi)\right]=F_2(\omega)$$

则 $F(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_1(\omega)$

$$F(\omega)=\frac{10^{-6}}{4\pi}[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)]*[u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi)]$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{u(\omega)*[\delta(\omega+1000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)]*u(\omega)*[\delta(\omega+2000\pi)-\delta(\omega-2000\pi)]\}$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}[u(\omega)*u(\omega)]*[\delta(\omega+1000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)]*[\delta(\omega+2000\pi)-\delta(\omega-2000\pi)]$$

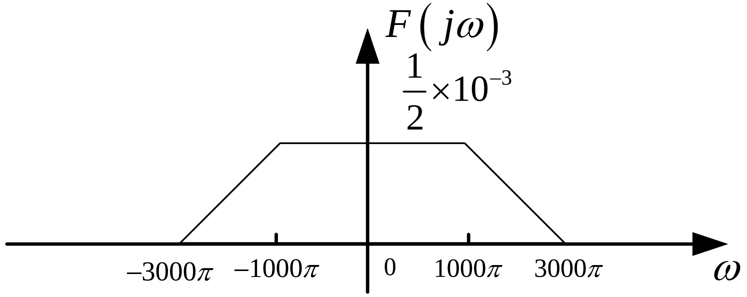
$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{\omega u(\omega)*[\delta(\omega+3000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)-\delta(\omega+1000\pi)+\delta(\omega-3000\pi)]\}$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}[(\omega+3000\pi)u(\omega+3000\pi)-(\omega-1000\pi)u(\omega-1000\pi)-(\omega+1000\pi)u(\omega+1000\pi)+(\omega-3000\pi)u(\omega-3000\pi)]$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{(\omega+3000\pi)[u(\omega+3000\pi)-u(\omega+1000\pi)]+2000\pi[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)]-(\omega-3000\pi)[u(\omega-1000\pi)-u(\omega-3000\pi)]\}$$

从图可见 $\omega_m=3000\pi$

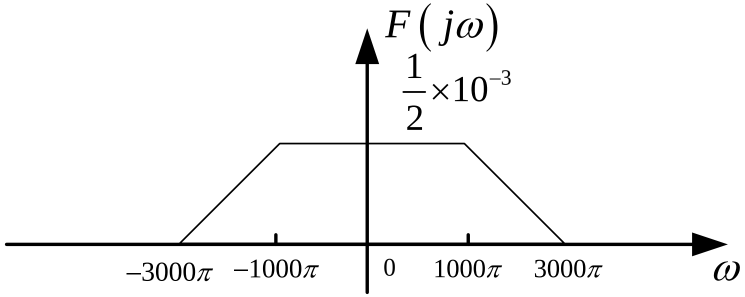
$$T_{\max}=\frac{2\pi}{\omega_{\min}}=\frac{2\pi}{2\omega_m}=\frac{1}{3000}\ \mathrm{s}$$

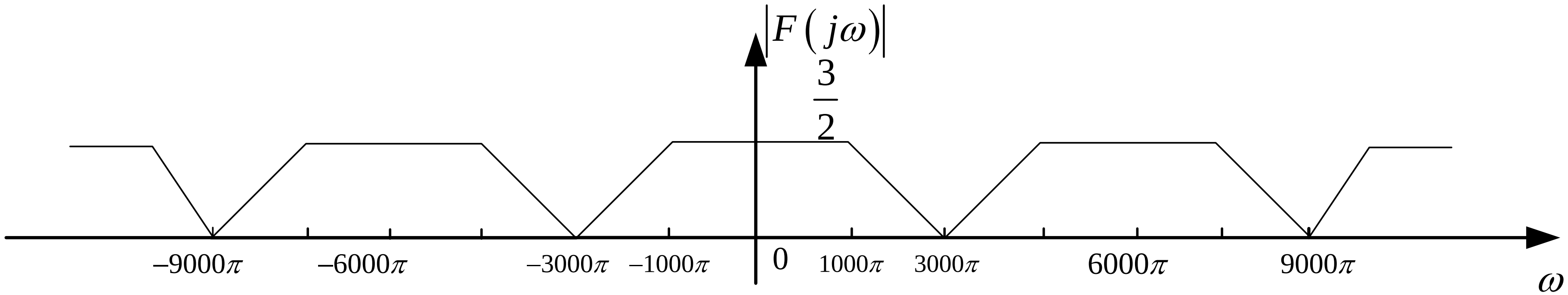


(2)对于冲激抽样，抽样信号的频谱

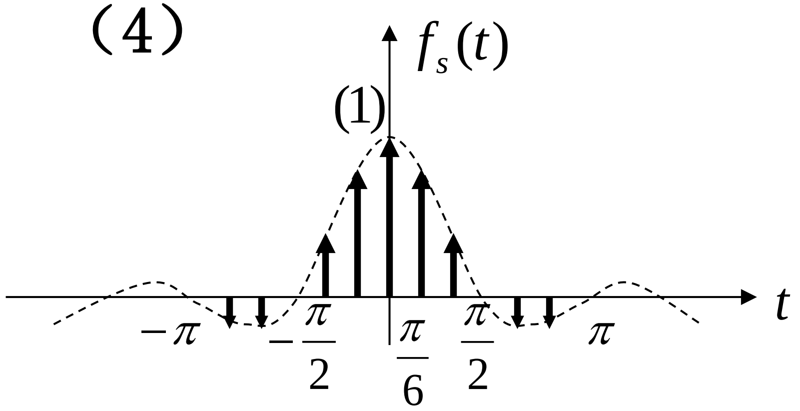
$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

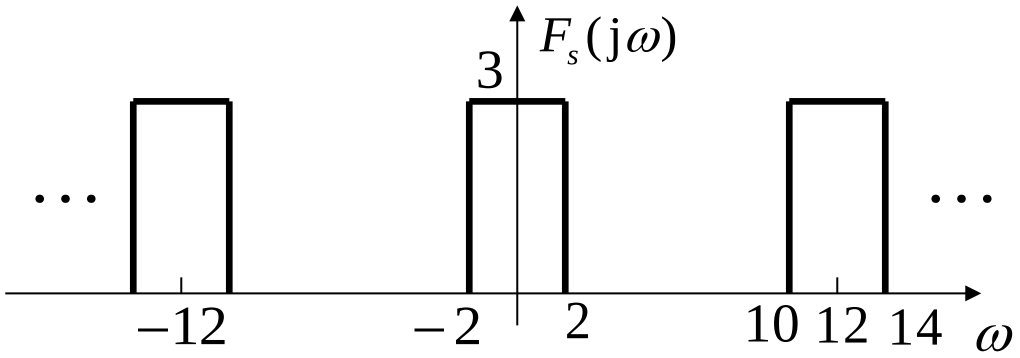
- 当 $T_s=T_{\max}$ 时 $\omega_s=\frac{2\pi}{T_{\max}}=2\omega_m=6000\pi$





（4）

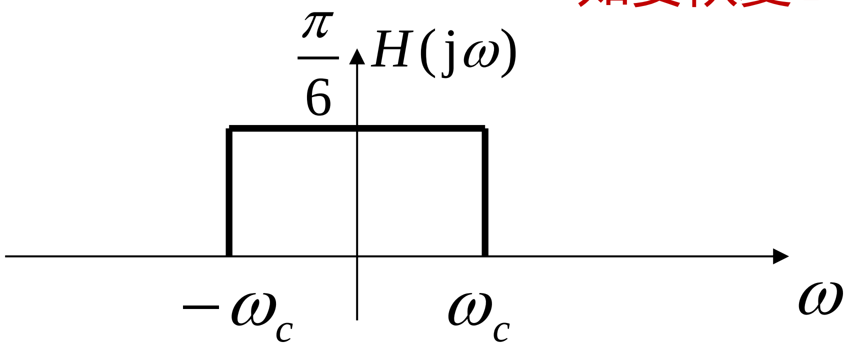




低通滤波器的截止频率 ω_c 应满足：$\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$

即 $2 \le \omega_c \le 10$

如要恢复 $F(j\omega)$, 低通滤波器幅值 T_s



第四章 拉普拉斯变换

4.1 引言

19 世纪末，英国工程师赫维赛德（O. Heaviside, 1850-1925）发明算子法解决电气工程计算中的一些基本问题，但数学上不够严谨。

后人在法国数学家、天文学家拉普拉斯（P. S. Laplace, 1749-1825）著作中找到可靠数学依据，重新给予严密的数学定义，为之取名为拉普拉斯变换，简称拉氏变换（**Laplace Transform, LT**）。

拉普拉斯变换在以下领域是强有力的工具：

- 电路理论研究
- 连续 LTI 系统分析
- 求解 LTI 常系数线性微分方程求解

4.1 引言

→为什么要引入拉氏变换？

◆ **频域分析**

以虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 作为基本信号，任意信号可分解为众多不同频率的虚指数分量之和，物理意义清楚。

◆ **频域分析的不足之处：**

1. 要求 $f(t)$ 满足狄里赫利条件：

① 有些重要信号虽然不满足该条件，但他们仍然存在傅里叶变换，如 $u(t)$、 $tu(t)$ 等，但其变换中常带有 $\delta(\omega)$，不利于计算和分析；

② 有些信号根本不存在傅里叶变换，如 $e^{at}u(t), (a>0)$；

2. 频域分析只能确定 $r_{zs}(t)$，无法求 $r_{zi}(t)$，即不包含系统 0- 初始条件；

3. 求傅里叶反变换也比较麻烦。$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

4.1 引言

拉普拉斯变换可以完全避免上述问题，是分析连续 LTI 系统更为有效的工具。

其主要优点体现在以下几个方面：

1. 求解系统响应的步骤更为简化：

① 同时求出特解和齐次解

② 初始条件自动包含在变换式中

2. 将时域的微分和积分运算转换为复频域的乘法和除法运算

→ 变微分方程为代数方程

3. 某些不满足狄里赫利条件的函数，不能进行傅里叶变换，但可以进行拉氏变换

4. 拉普拉斯变换满足卷积定理，在此基础上建立系统函数的概念，并且可利用系统函数的零点、极点分布来简明、直观地表达系统性能的许多规律

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.2.1 从傅氏变换到拉氏变换

$f(t)$ 必然是发散的

有些函数不满足绝对可积条件，求解傅里叶变换困难。

为此，可用一衰减因子 $e^{-\sigma t}$ （σ 为实常数）乘以信号 $f(t)$，

适当选取 σ 的值，使乘积**信号** $f(t)\,e^{-\sigma t}$ 当 $t \to \infty$ 时信号幅度趋近于 0，从而满足绝对可积条件，使 $f(t)\,e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换存在。

思想：想办法构造满足绝对可积条件的时域函数

4.2.1 从傅氏变换到拉氏变换

为了 满足绝对可积条件，引入一个实指数函数 $e^{-\sigma t}$ 去乘信号 $f(t)$，这样就可以解决函数 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的绝对可积问题，通常 $e^{-\sigma t}$ 称为衰减因子 。

$$\mathscr{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \qquad \Rightarrow F(\sigma+j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$u(t) \longrightarrow u(t)e^{-\sigma t} \quad (\sigma > 0)$$

$$e^{at} \quad (a > 0) \longrightarrow e^{at}e^{-\sigma t} \quad (\sigma > a)$$

$$\cos\omega_1 t \longrightarrow e^{-\sigma t}\cos\omega_1 t \quad (\sigma > 0)$$

令：$\boldsymbol{\sigma + j\,\omega = s}$，具有频率的量纲，称为复频率 。

拉普拉斯变换： $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ $\qquad f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

4.2.2 拉氏逆变换（LT^{-1}）

$$F(\sigma+\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 是 $F(\sigma+\mathrm{j}\omega)$ 的傅里叶逆变换 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$

两边同乘以 $\mathrm{e}^{\sigma t}$ $\quad f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\omega$

其中: $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$; 若σ取常数, 则$\mathrm{d}s=\mathrm{j}\mathrm{d}\omega$

积分限：对ω: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow$ 对s: $\displaystyle\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}$

拉普拉斯逆变换: $$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

4.2.3 拉氏变换对

双边拉氏变换

$$\begin{cases} F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t & \text{正变换} \\ f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s & \text{逆变换} \end{cases}$$

记作: $f(t) \leftrightarrow F(s)$, $f(t)$称为原函数, $F(s)$称为象函数。

考虑到实际信号都是因果信号:

单边拉氏变换

所以 $$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

采用 0_- 系统, 相应的单边拉氏变换为

自动包含 0_- 条件

$$\begin{cases} F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \end{cases}$$

单选题 1分

设置

例4-1 已知信号$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$，其拉普拉斯变换为（ ）

A $-\dfrac{1}{s+\alpha}$

B $\dfrac{\alpha}{s}$

C $\mathrm{e}^{-\alpha s}$

D $\dfrac{1}{s+\alpha}$

提交

例4-1: 已知信号 $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$，求其拉普拉斯变换 $X(s)$。

解:由定义

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+\sigma)t}e^{-j\omega t}dt$$

当Re{α+s}=α+σ>0，即σ > -α，以上积分可积

$$X(s) = \frac{1}{-(\alpha+s)}e^{-(\alpha+s)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(\alpha+s)}, \quad \sigma > -\alpha$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$$

从信号分解的角度：

物理上，傅里叶变换是把信号 $f(t)$ 分解为无限多个频率为 ω 、复振幅为 $\dfrac{F(\omega)}{2\pi}\mathrm{d}\omega$ 的复指数分量 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的加权和。

拉普拉斯变换则是把信号 $f(t)$ 分解为无限多个复频率为 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 、复振幅为 $\dfrac{F(s)}{2\pi\mathrm{j}}\mathrm{d}s$ 的复指数分量 e^{st} 的加权和。

拉普拉斯变换与傅里叶变换的最大区别：

(1) 拉普拉斯变换在所谓的复频域 s，而傅里叶变换在频域 ω 。

(2) 当 $\sigma=0$ 时， $s=\mathrm{j}\omega$ 。傅里叶变换是拉普拉斯变换的一个特例，或称为虚轴上的拉普拉斯变换。

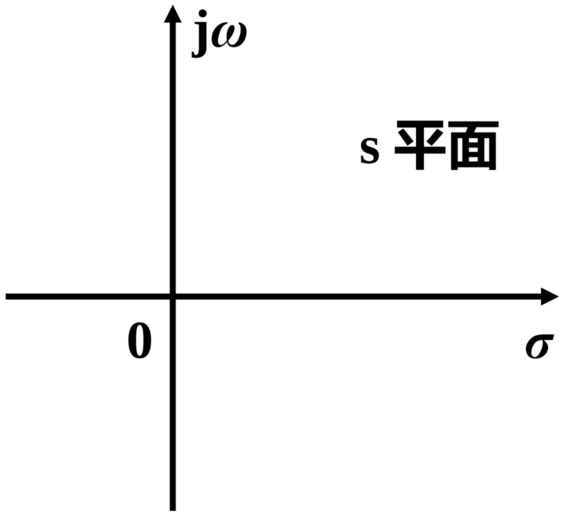
复频域的概念

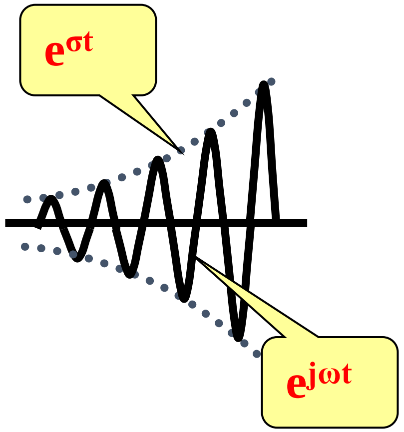
由于$s = \sigma + j\omega$ 为复数，所以 $F(s)$ 是定义在复平面上的复函数

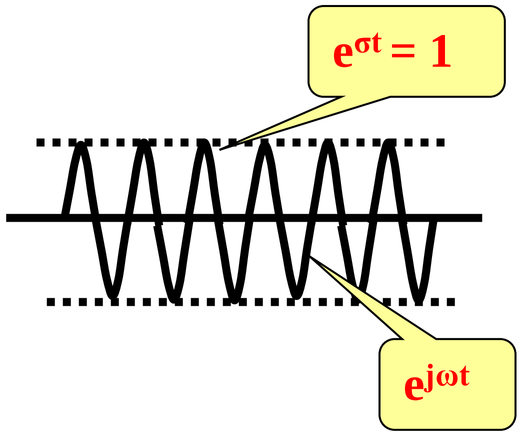
复频域是用直角坐标 $s = \sigma + j\omega$ 表示的复数平面，简称 s 平面或连续时间复频域（s 域）。

s 的实部 σ 反映了指数函数 $e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ 的幅度 $e^{\sigma t}$ 变化率

s 的虚部 ω 反映了 $e^{j\omega t}$ 做周期变化的频率







FT:

$$\begin{cases} F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t & \text{正变换} \\ f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega & \text{逆变换} \end{cases}$$

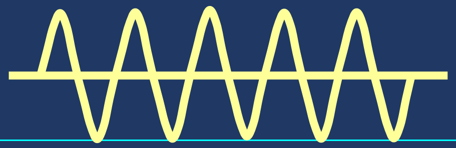
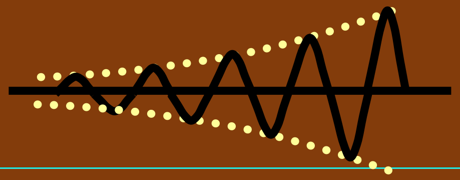
LT:

$$\begin{cases} F(s)=\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t & \text{正变换} \\ f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s & \text{逆变换} \end{cases}$$

FT: 实频率 ω ，振荡频率

LT: 复频率 s， $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ ， ω 是振荡频率， σ 控制衰减的速度

拉氏变换与傅氏变换表示信号的差别

傅里叶变换	拉普拉斯变换
信号表示成指数 $e^{j\omega t}$ 分量的连续和	信号表示成指数 e^{st} 分量的连续和
基本信号为：等幅的正弦信号 	基本信号为：指数增长的正弦信号 
振幅为 $\frac{\lvert F(\omega)\rvert d\omega}{2\pi}$ 无穷小	振幅为 $\frac{\lvert F(s)\rvert ds}{2\pi j}$ 无穷小
频率分布于整个 ω 区间	频率分布于整个 s 区间
信号的傅里叶变换反映了不同频率分量的振幅大小与起始相位的值，即信号的频谱。	信号的拉氏变换没有明确的物理意义。
主要应用于信号与系统的频率分析，如调制、滤波、抽样等的频谱分析。	主要应用于微分方程的求解、系统函数及其零极点分析等。

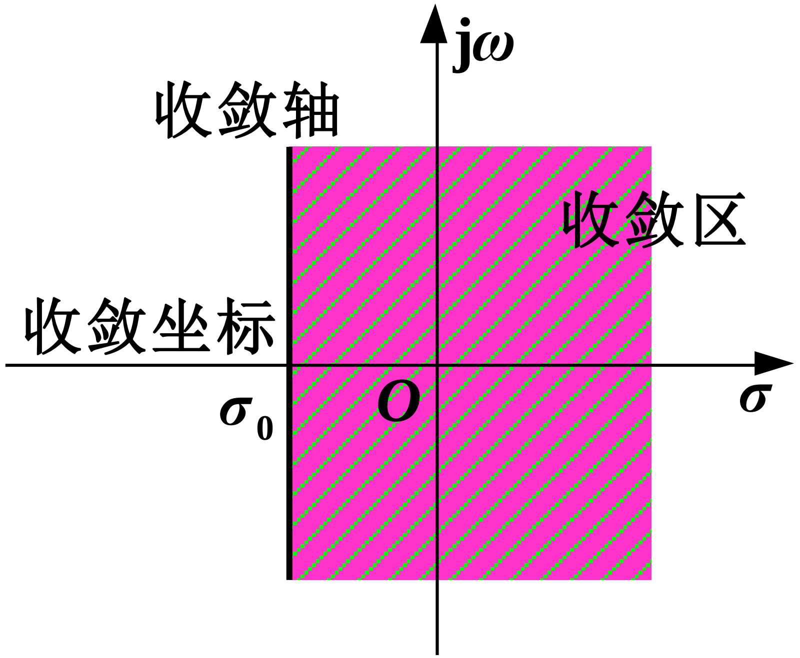
4.2.4 拉普拉斯变换的收敛域

拉普拉斯变换的存在伴随着条件，就是它的收敛域。使信号 $f(t)\,e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积的 σ 的值域，是 $F(s)$ 的收敛域，记为 ROC (region of convergence)。

数学描述：

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} = 0 \qquad \left(\sigma > \sigma_0\right)$$

图形表示：



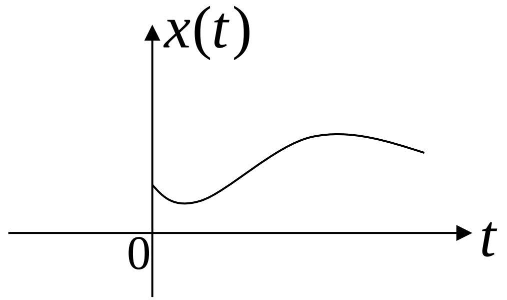
说 明:

1. 满足 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=0 \quad (\sigma>\sigma_0)$ 的信号称为指数阶信号;
2. 有界的非周期信号的拉氏变换一定存在，收敛域是全部 s 平面;
3. 幂指数信号 $\lim\limits_{t\to\infty} t^n\mathrm{e}^{-\sigma t}=0 \quad (\sigma>0)$ 收敛坐标为原点，收敛域为 s 右半平面;
4. 指数信号收敛域为 $\sigma>\alpha$ ， $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-\sigma t}=0 \quad (\sigma>\alpha)$ ；
5. e^{t^2}，$t\mathrm{e}^{t^2}$ 等信号比指数函数增长还快，找不到收敛坐标，为非指数阶信号，无法进行拉氏变换;
6. 一般求函数的单边拉式变换，可以不加注其收敛范围 。

4.2.5 单边拉普拉斯变换

在系统分析时，我们常用的是单边拉普拉斯变换：

$$X(s)=\int_{0^-}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$



因为，实际系统是因果的，信号总是在某个时刻才开始作用于系统，我们可以把这个时刻看作 $t=0$；以上定义式中的积分的下限取 0-，考虑变换对冲激信号也是有效的；单边拉氏变换的收敛域是收敛轴的右半平面：**Re{s}>σ_0**，以后一般不具体标示变换的收敛域。

4.2.6 一些常用函数的拉氏变换

目的：复杂函数的分解，表示成典型信号的组合

(1) 单位阶跃函数

$$\mathscr{L}\left[u(t)\right]=\int_0^{\infty}1\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t=\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}\quad\left(\sigma>0\right)$$

(2) 指数函数

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t=\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+s}\quad\left(\sigma>-\alpha\right)$$

(3) 单位冲激信号

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right]=\int_0^{\infty}\delta(t)\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t=1$$ 全 s 域平面收敛

$$\mathscr{L}\left[\delta(t-t_0)\right]=\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t=\mathrm{e}^{-st_0}$$ 全 s 域平面收敛

(4) 幂函数 t^n （ n 是正整数 ）

$$\mathscr{L}\left[t^n\right]=\int_0^{\infty} t^n \cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{t^n}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty}+\frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

所以 $\mathscr{L}\left[t^n\right]=\dfrac{n}{s}\mathscr{L}\left[t^{n-1}\right]$

例如：斜变函数 $t\,\mathrm{u}(t)$

$$n=1\quad \mathscr{L}[t]=\int_0^{\infty} t\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{-s}\left[t\cdot \mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]=-\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty}\right]=\frac{1}{s^2}$$

$$n=2\quad \mathscr{L}\left[t^2\right]=\frac{2}{s}\mathscr{L}[t]=\frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{2}{s^3}$$

$$n=3\quad \mathscr{L}\left[t^3\right]=\frac{3}{s}\mathscr{L}\left[t^2\right]=\frac{3}{s}\cdot\frac{2}{s^3}=\frac{6}{s^4}\quad \cdots\cdots$$

所以 $\mathscr{L}\left[t^n\right]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\qquad (\sigma>0)$

常用信号的拉氏变换（参考教材p192表格）

时域信号 $(t>0)$	s 域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+a}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
t^n	$\frac{n\,!}{s^{n+1}}$

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

主要内容:

线性性质

时域微分

时域积分

延时（时域移位）

*s*域平移（频域移位）

尺度变换

初值定理

终值定理

卷积定理

*s*域微分

*s*域积分

注意：此处所指均为单边拉氏变换的性质，只适用于因果信号，即满足$f(t)=f(t)u(t)$的信号$f(t)$。

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

目的：简化拉普拉斯变换或反变换的求解过程。

4.3.1 线性

如有：$f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F_i(s)$

则 $$f(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F(s) = \sum_{i=1}^{N} a_i F_i(s)$$

例4-2：利用线性性质求 $x(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t) - \mathrm{e}^{-2t}u(t)$ 的拉氏变换。

解：$\mathrm{e}^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s+1}$ $\qquad$ $\mathrm{e}^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s+2}$

所以 $$x(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

例4-3：利用拉氏变换的性质，求 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的拉氏变换。

解:

$$\cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)u(t)$$

$$e^{j\omega_0 t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s - j\omega_0}$$

$$e^{-j\omega_0 t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + j\omega_0}$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}}$$

相同方法可得 $$\boxed{\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}}$$

4.3.2 延时性（时移性）

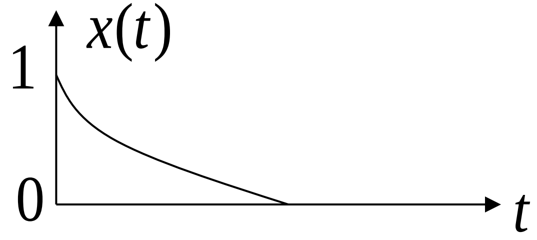
设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

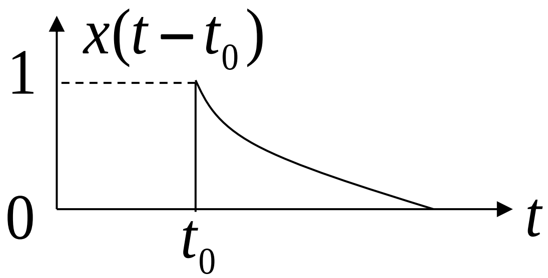
则 $f(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)\mathrm{e}^{-st_0}$，$(t_0>0)$

该性质表明：若信号的波形延迟 t_0，则它的拉普拉斯变换就乘以 e^{-st_0}。

注意：在前述单边拉氏变换的定义下，

$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$ 的延时是 $\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}u(t-t_0)$





单选题 1分

设置

例4-4. 信号$f(t)=u(t)-u(t-1)$的拉氏变换$F(s)$为（　　）

A $F(s)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-s}}{s}$

B $F(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}$

C $F(s)=\dfrac{1-s}{s}$

D $F(s)=\dfrac{1-s}{\mathrm{e}^{-s}}$

提交

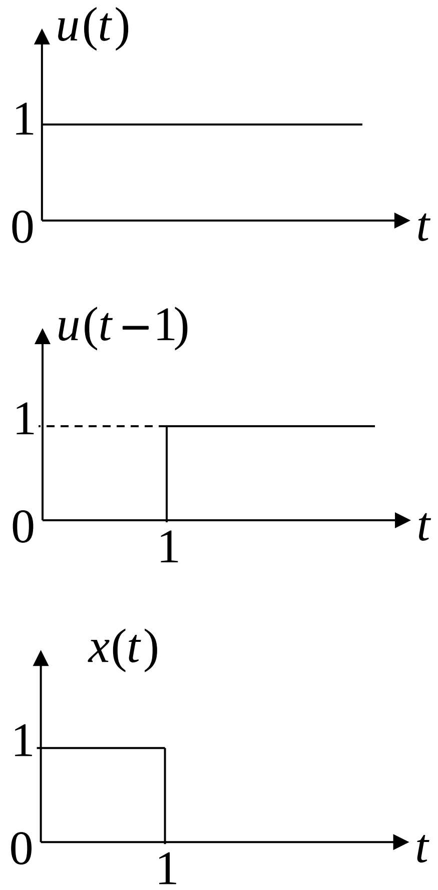
例4-4：求 $x(t)=u(t)-u(t-1)$ 的拉氏变换。

解：

$$u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s}$$

$$u(t-1)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s}e^{-s}$$

所以 $x(t)=u(t)-u(t-1)\xleftrightarrow{LT}\dfrac{1-e^{-s}}{s}$



4.3.3 s 域平移性（频移性）

设 $$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

则 $$f(t)\mathrm{e}^{s_0 t} \xleftrightarrow{LT} F(s-s_0)$$

时移同号
频移反号

结论：时间信号 $f(t)$ 乘以因子 $\mathrm{e}^{s_0 t}$，相当于变换域内右移 s_0

例4-6：利用 s 域平移性求 $\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$ 和 $t\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

$$tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+\alpha}$$

$$t\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

例4-7：利用 s 域平移性求 $e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$ 的拉氏变换。

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

所以

$$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

同理

$$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

4.3.4 时域展缩性（尺度变换）

若 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

则 $f(at) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right), \quad (a > 0)$

这里常数 a 应为正的，否则信号发生反褶，对于单边拉氏变换，这个性质就没有意义。

例4-8： 用时域展缩性求 $e^{-\alpha t} u(t)$ 的拉氏变换。

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1}$$

于是 $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{1}{\frac{s}{\alpha}+1} = \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{\alpha}{s+\alpha} = \dfrac{1}{s+\alpha}$

如果有 $f(t)u(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

既有延时又有时域展缩时， $f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} ? \quad (a>0, b>0)$

先延时，再做时域展缩， $f(t-b)u(t-b) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-bs}$

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{bs}{a}}$$

也可先做时域展缩再延时。

单选题 1分

设置

例4-9. 利用拉氏变换的性质，可求得 $\delta(3t-2)$ 的拉氏变换为

(　　)

A $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}s}$

B $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2s}$

C $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}s}$

D $\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}s}$

提交

例4-9： 利用拉氏变换的性质，求解 $\delta(3t-2)$ 的拉氏变换。

解:

由拉氏变换的时域展缩性 $f(at)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ 及 $\delta(t)\xleftrightarrow{LT}1$可知

$$：\ \delta(3t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{3}$$

依据拉氏变换的时移性$f(t-t_0)u(t-t_0)\xleftrightarrow{LT}F(s)\mathrm{e}^{-st_0}$ 有:

$$\delta(3t-2)=\delta[3(t-\frac{2}{3})]\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}s}$$