

第五章 傅里叶变换的应用—— 滤波、调制、抽样

- 5.1 引言
- 5.2 利用系统函数求响应
- 5.3 无失真传输
- 5.4 理想低通滤波器
- 5.5 系统的物理可实现性、佩利—维纳准则
- 5.6 利用希尔伯特变换研究系统函数的约束特性
- 5.7 调制与解调
- 5.8 从抽样信号恢复连续时间信号
- 5.9 频分复用 (FDM) 与时分复用 (TDM)

本次课内容

- 5.1 引言
- 5.2 利用频域系统函数求响应
- 5.3 无失真传输
- 5.4 理想低通滤波器
- 5.5 系统的物理可实现性

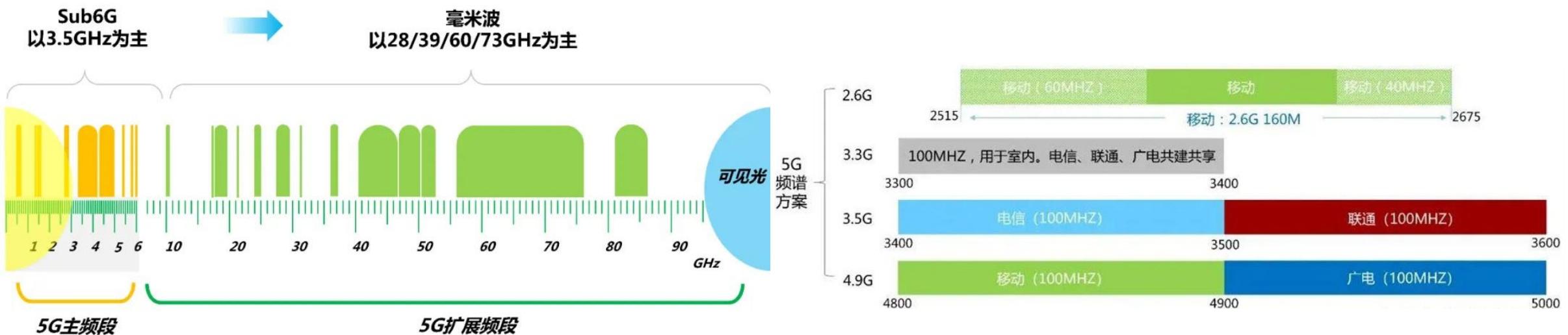
本次课目标

- 1.理解频域系统函数的**物理意义**；
- 2.熟悉**无失真传输的时域和频域条件**；
- 3.熟悉**理想低通滤波器等数学上理想滤波器的频域设计原理**；
- 4.掌握用**时域因果性和频域的佩利-维纳准则**判断系统的**物理可实现性**。

5.1 引言

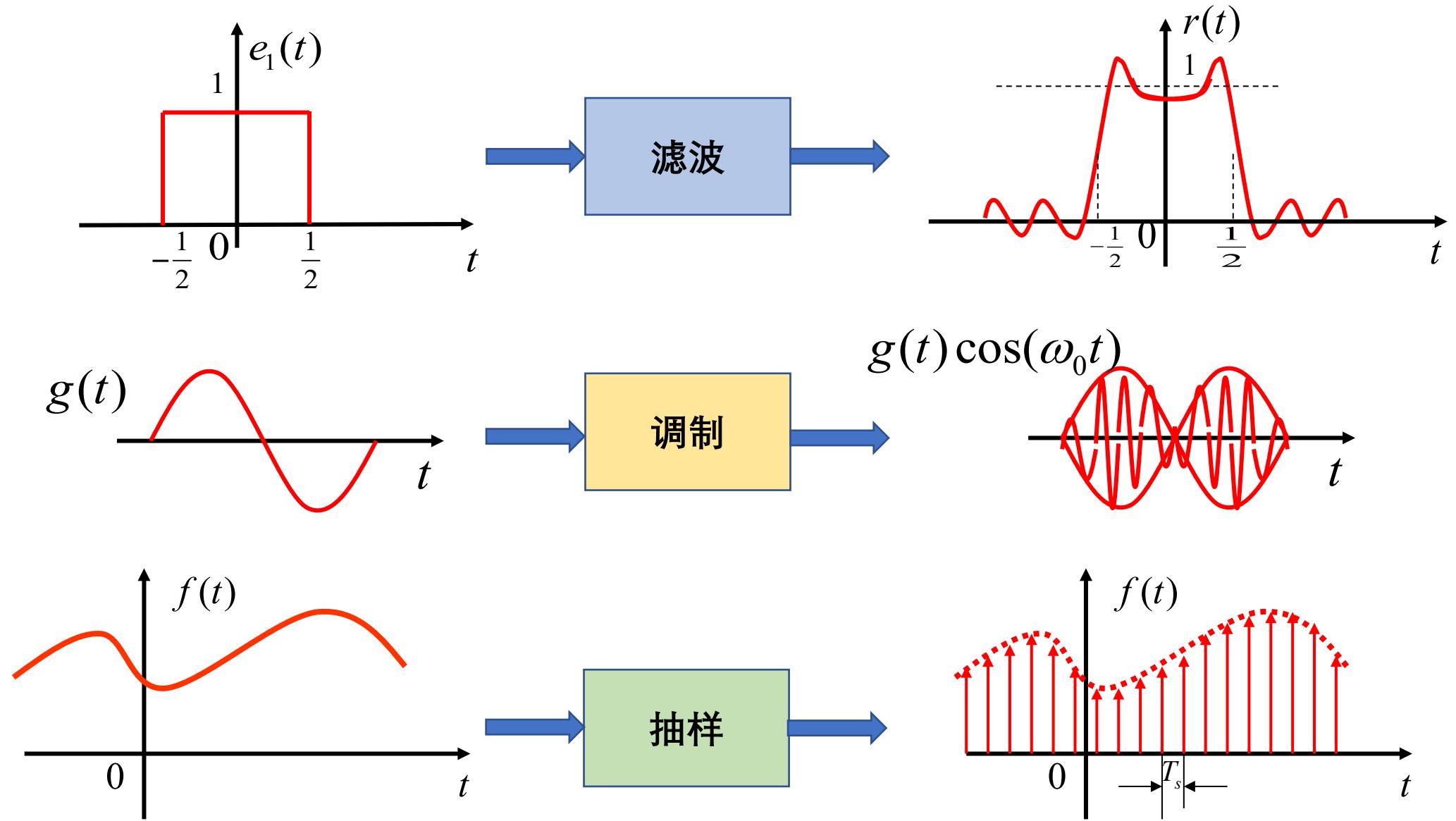
- 频域分析揭示了信号内在的频率特性以及信号时间特性与其频率特性之间的密切关系，从而导出了信号的频谱、带宽等重要概念。
- 频域分析是通过傅里叶变换（傅里叶分析）进行的。将信号进行正交分解，即分解为三角函数或复指数函数的组合。

$$f(t) \xleftarrow{FT} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



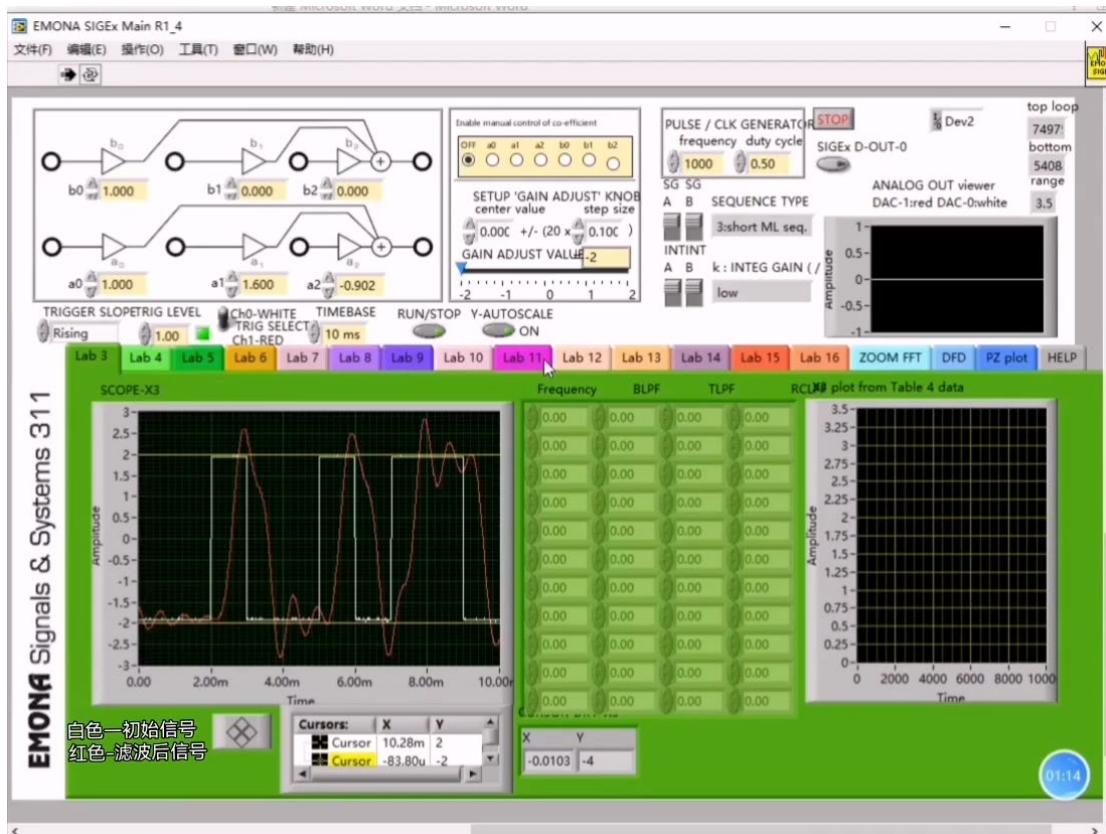
频域分析是5G频谱分配的基础

5.1 引言

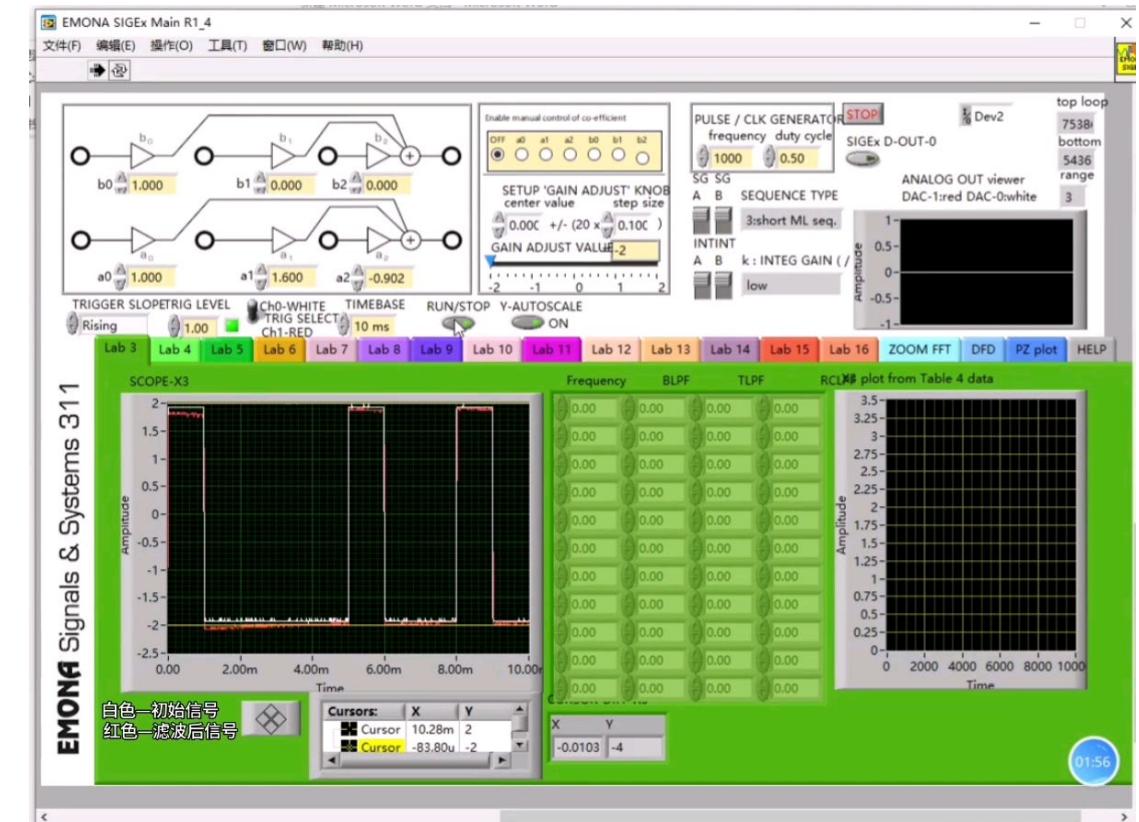


5.1 引言

- 矩形波通过不同带宽的RC低通滤波器



严重失真波形



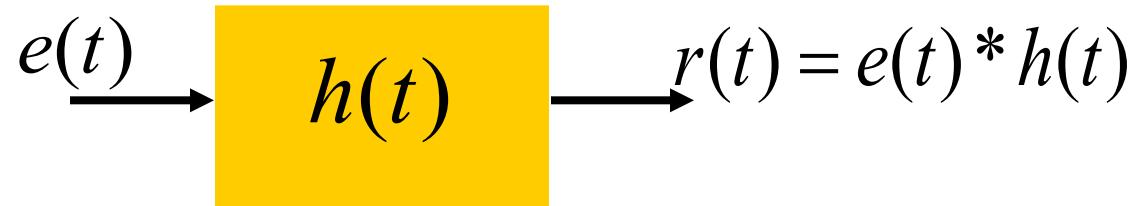
近似无失真波形

5.1 引言

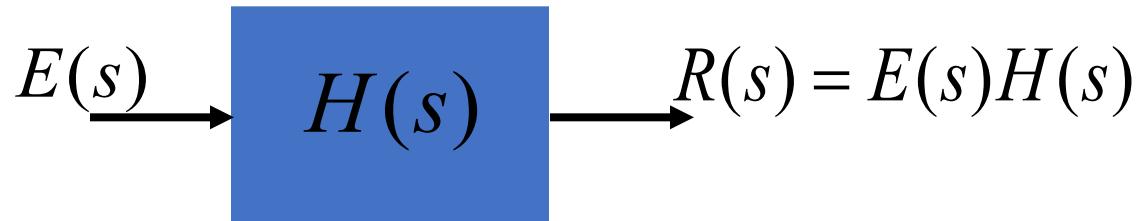
5.1.1 频域系统函数

激励与零状态响应的关系：

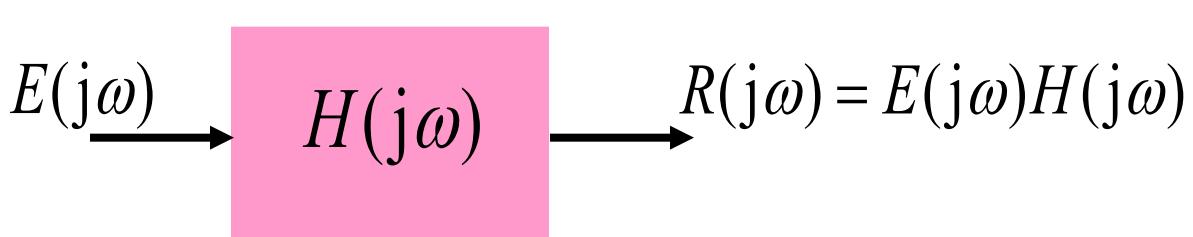
- 时域



- s 域 (复频域)



- 频域



5.1.2 频域系统函数的定义和物理意义

定义: $H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$ 或 $H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$

零状态响应的傅里叶变换为: $R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} E(j\omega)$

频率响应 (频域系统函数) 的功能: 改变输入信号的频谱

- 1、对信号各频率分量进行加权, 某些频率分量增强, 而另一些分量则相对削弱或不变;
- 2、每个频率分量在传输过程中都产生各自的相移。

- 系统函数决定了不同频率分量在传输过程中的改变规律，是一个加权函数，把频谱密度为 $E(j\omega)$ 的激励信号改变为 $R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$ 的响应信号；
- 实际上，任何激励信号的傅里叶分解可以看作无穷多项 $e^{j\omega t}$ 信号（正弦信号）的叠加，把这些分量的响应取和，即可得到完整的响应信号；
- 线性时不变系统的分析中，无论时域、频域、复频域都按照信号分解、求响应再叠加的原则来处理；
- 利用 $H(j\omega)$ 可以建立滤波器的概念；
- 从第三章中傅里叶变换的频移性质，引出调制的概念；
- 从第三章中抽样定理，引出从抽样信号恢复连续时间信号；了解数字通信系统的原理与特点。

5.2 利用系统函数 $H(j\omega)$ 求响应

(1) $H(j\omega)$ 描述正弦稳态响应的频响特性

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

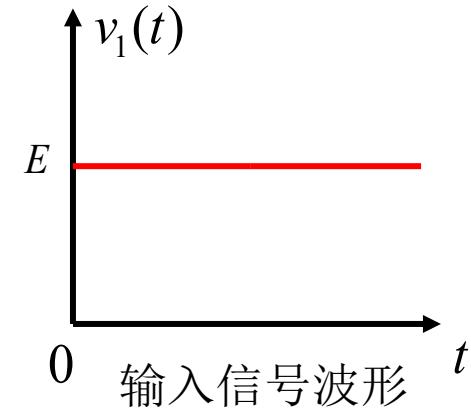
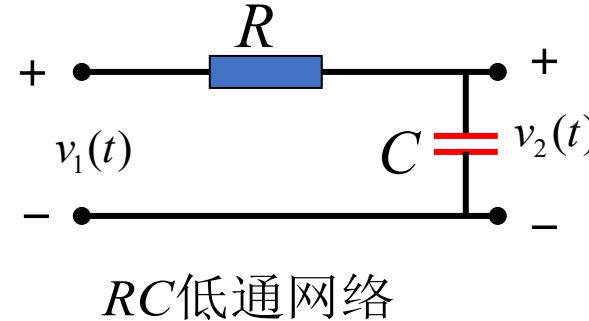
(2) $H(j\omega)$ 为系统函数，即是系统冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$$

两者相等的条件为 $H(s)$ 在虚轴上及右半平面无极点 (稳定系统)

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

例5-1：如图所示 RC 低通网络，输入 $v_1(t) = Eu(t)$ ，利用傅里叶分析法求 $v_2(t)$ 。



解： (1) 输入信号频谱 $V_1(j\omega) = E \left[\pi\delta(j\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$

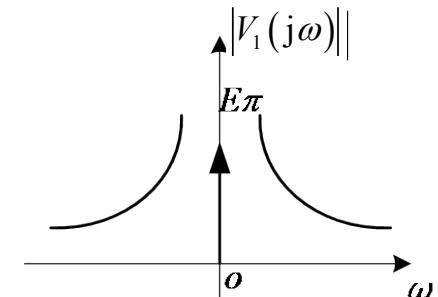
(2) 求频率响应 $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \quad \leftarrow \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

衰减系数

(3) 求输出响应的频谱:

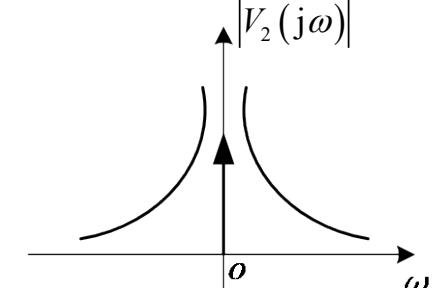
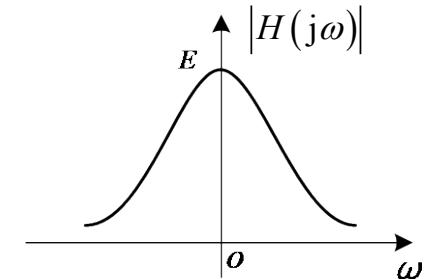
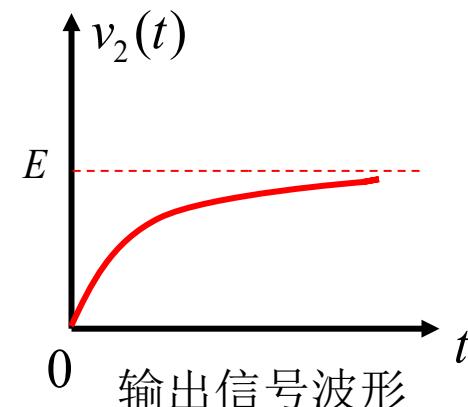
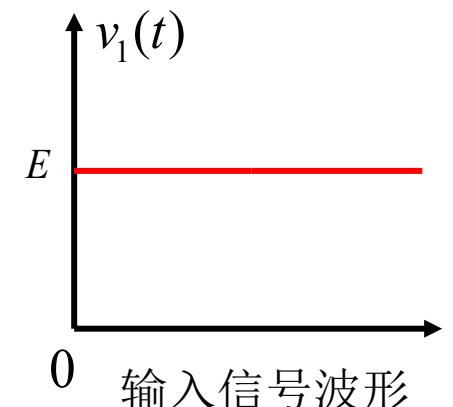
$$V_2(j\omega) = H(j\omega)V_1(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} E \left[\pi\delta(j\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \textcolor{magenta}{\pi E \delta(j\omega)} + \frac{E}{j\omega} - \frac{E}{j\omega + \alpha}$$



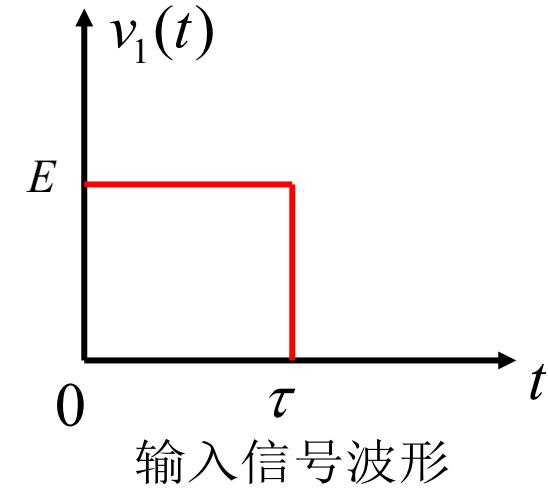
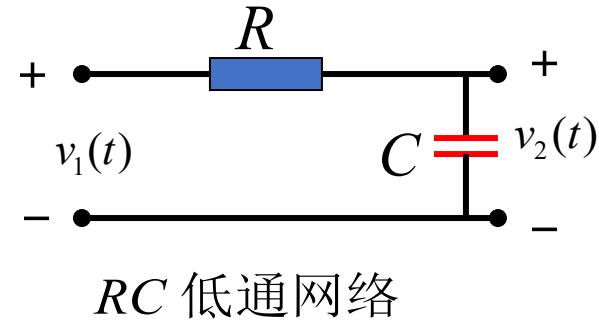
(4) 从频域返回到时域:

$$v_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[V_2(j\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\textcolor{magenta}{\pi E \delta(j\omega)} + \frac{E}{j\omega} - \frac{E}{j\omega + \alpha} \right] = E(1 - e^{-\alpha t})u(t)$$

高频分量衰减，上升沿平滑



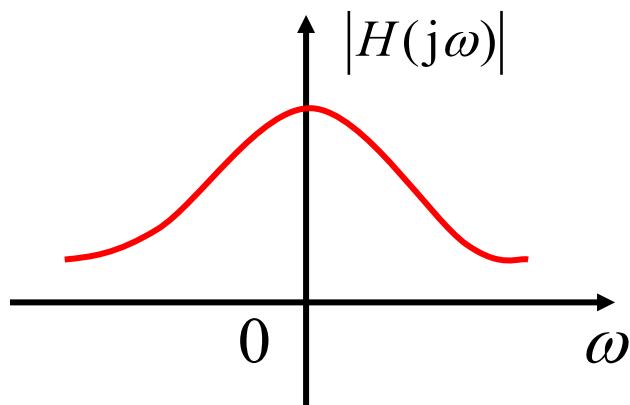
例5-2：如图所示 RC 低通网络，输入矩形脉冲 $v_1(t)$ 。利用傅里叶分析法求 $v_2(t)$ 。



解： $\because H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$

(稳定系统)

$$\therefore H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



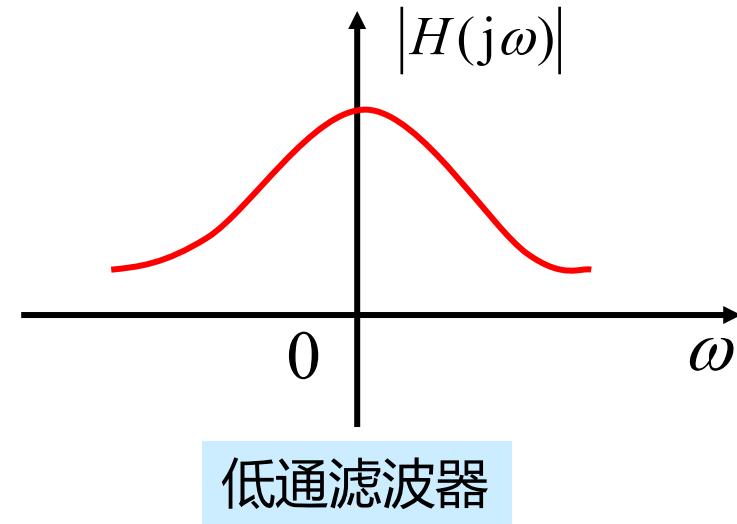
$$\text{令 } \alpha = \frac{1}{RC}, H(j\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

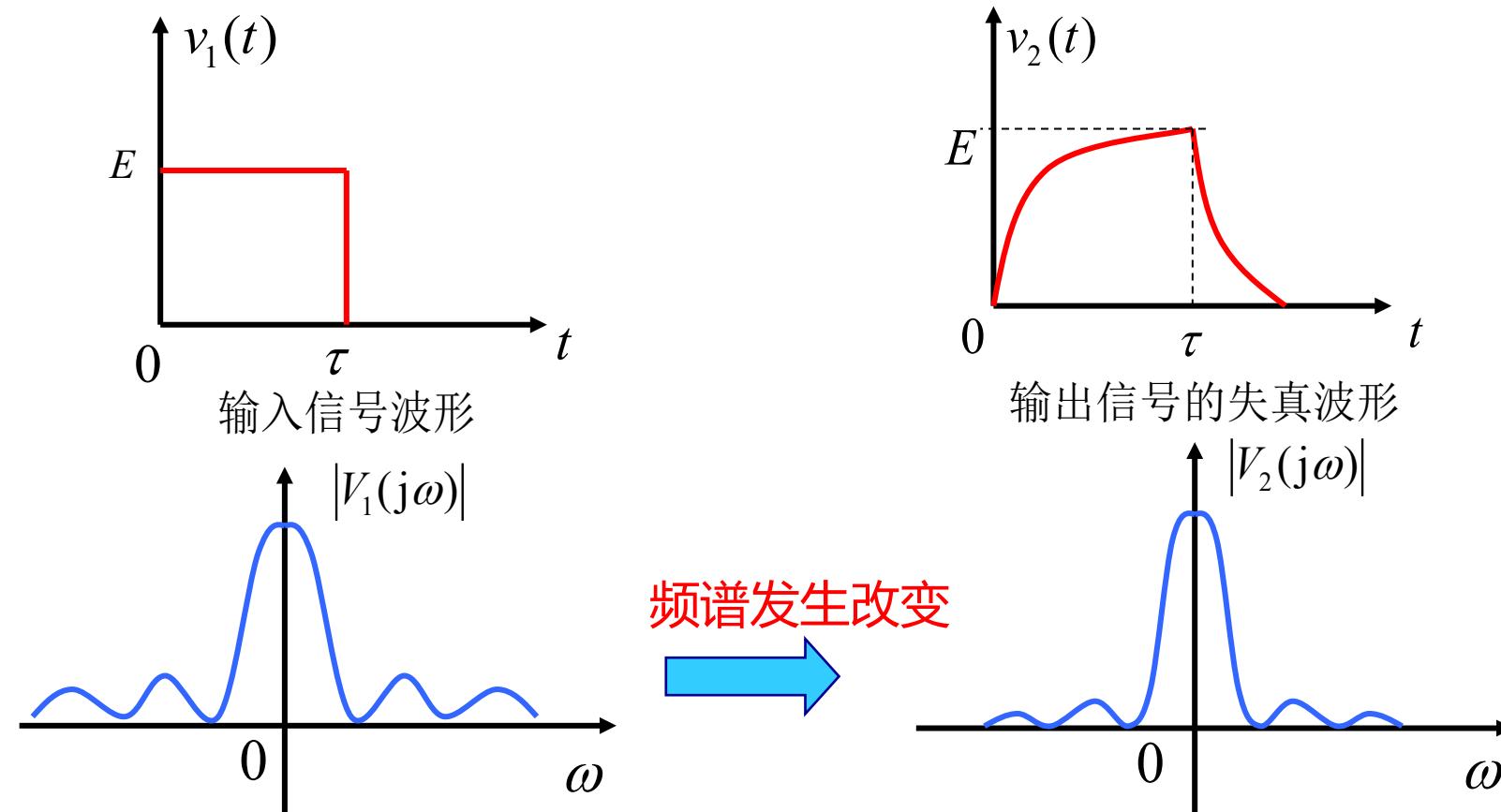
$$\therefore \text{由图 } v_1(t) = E[u(t) - u(t - \tau)]$$

$$\therefore V_1(j\omega) = E\pi\delta(\omega) + \frac{E}{j\omega} - E\pi\delta(\omega)e^{-j\omega\tau} - \frac{E}{j\omega}e^{-j\omega\tau} = \frac{E}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau})$$

$$\begin{aligned} V_2(j\omega) &= H(j\omega)V_1(j\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega} \cdot \frac{E}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau}) \\ &= E \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\alpha + j\omega} \right)(1 - e^{-j\omega\tau}) = \frac{E}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau}) - \frac{E}{\alpha + j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore v_2(t) &= E[u(t) - u(t - \tau)] - E[e^{-\alpha t}u(t) - e^{-\alpha(t-\tau)}u(t - \tau)] \\ &= E(1 - e^{-\alpha t})u(t) - E(1 - e^{-\alpha(t-\tau)})u(t - \tau) \end{aligned}$$





输入信号的频谱的高频分量比起低频分量受到较严重的衰减。

- 输出信号的波形发生了失真，主要表现在上升和下降特性上。
- 利用频域的系统函数 $H(j\omega)$ 物理概念比较清楚，但求解不如拉氏变换法简便，一般使用 s 域系统函数求响应。

系统响应频域分析小结

- **优点:**

可以直观的体现信号通过系统后信号频谱的改变，解释激励与响应时域波形的差异，物理概念清楚。

- **缺点:**

- (1) 只能求解系统的零状态响应，系统的零输入响应仍需按时域方法求解。
- (2) 频域分析法中，傅里叶反变换常较复杂。

- **解决方法:**

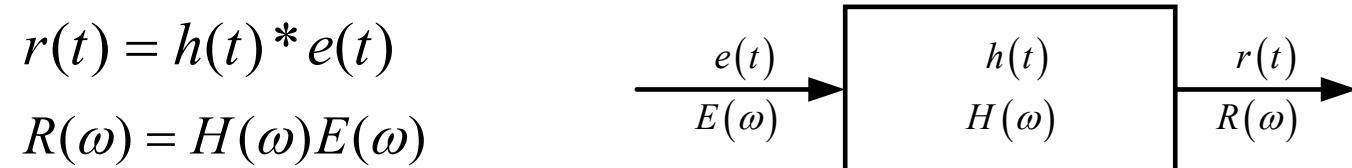
采用**拉普拉斯变换**

系统零状态响应频域分析方法与卷积积分法的关系：**时域卷积定理**是联系的桥梁。

5.3 无失真传输

5.3.1 信号失真原因

问题：信号通过系统后，可能改变原来的形状，成为新的波形。



线性系统引起的信号失真有两方面：

- (1) **幅度失真：**系统对信号中各频率分量幅度产生不同程度的衰减，使响应分量的相对幅度发生变化。
- (2) **相位失真：**系统对各频率分量产生的相移不与频率成正比，使响应的各频率分量在时间轴上的相对位置发生变化。

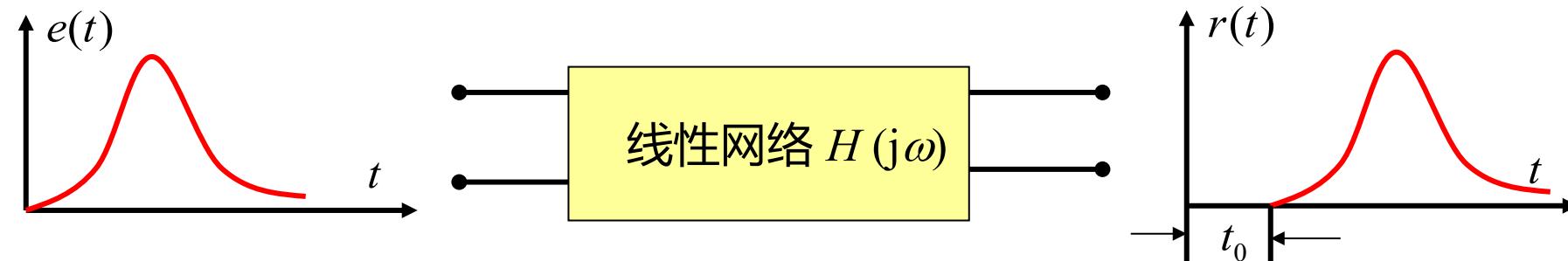
注意：二者都不产生新的频率分量，没有频率失真。

5.3.2 信号无失真传输的概念 (时域波形传输不变)

无失真：指响应信号与激励信号相比，只是**大小与出现的时间不同**，没有波形上的变化。

无失真传输的定义： $r(t) = K e(t - t_0)$

K 是一常数， t_0 为滞后时间。满足无失真条件时， $r(t)$ 波形是 $e(t)$ 波形经 t_0 时间的滞后。



5.3.3 信号无失真传输条件 (对系统的要求)

1、从频域看系统无失真传输条件 → 关键是看频域系统函数

时域响应: $r(t) = K e(t - t_0)$

两边取傅里叶变换: $R(j\omega) = KE(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

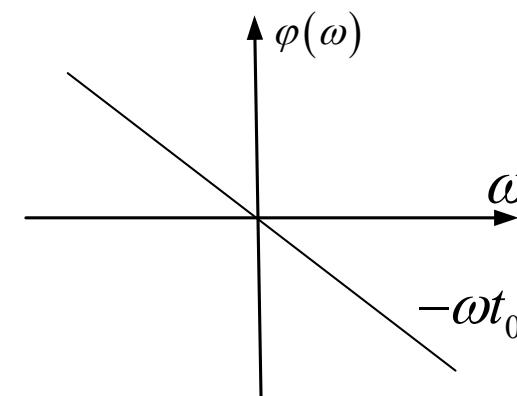
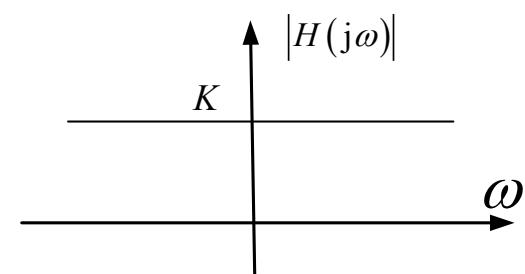
$$R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$$

$$H(j\omega) = K e^{-j\omega t_0}$$

其中: $|H(j\omega)| = K$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0$$

频域条件 → 即要求系统的幅频响应特性为常数 K ; 相频响应为一通过原点的直线斜率为 $-\omega t_0$ 。



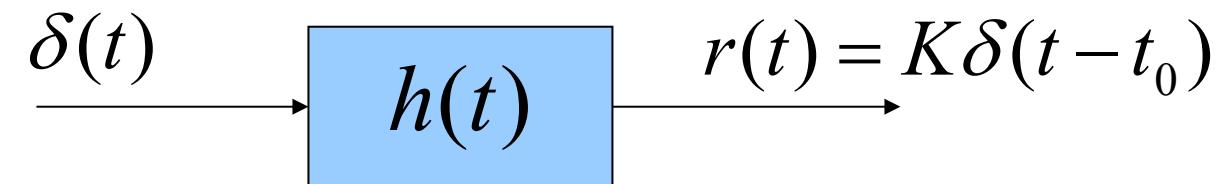
2. 从时域看系统无失真传输条件 → 关键是看冲激响应

$$H(j\omega) = K e^{-j\omega t_0}$$

取傅里叶逆变换：

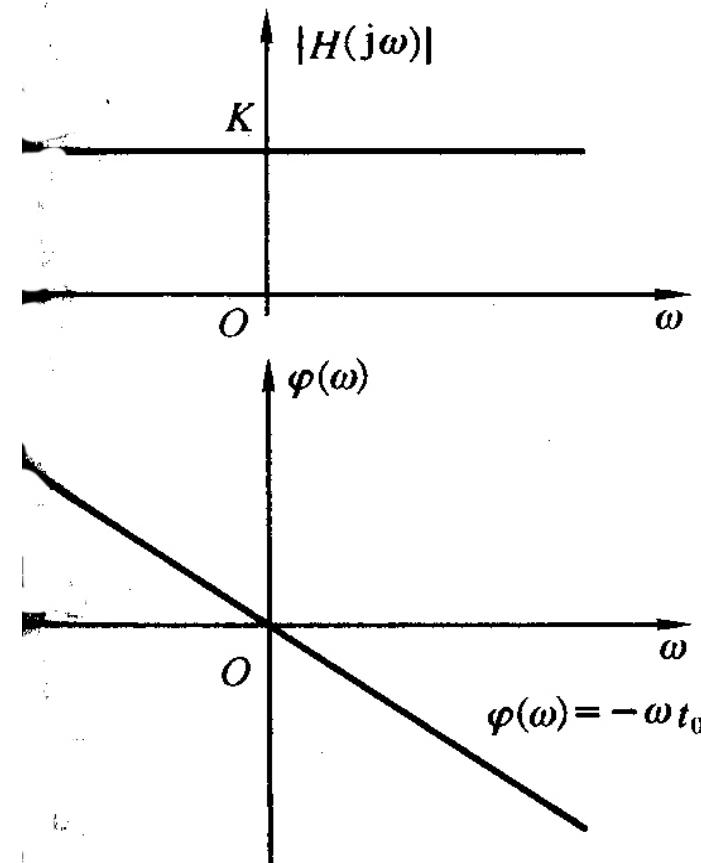
$$h(t) = K \delta(t - t_0) \quad \rightarrow \text{时域条件}$$

即要求系统的冲激响应也是冲激函数，而时间延后 t_0 。



常用冲激信号作为测试系统保真度的信号。

全通网络，信号幅度不失真



线性相位，波形不失真

5-4 无失真传输系统的
幅度和相位特性

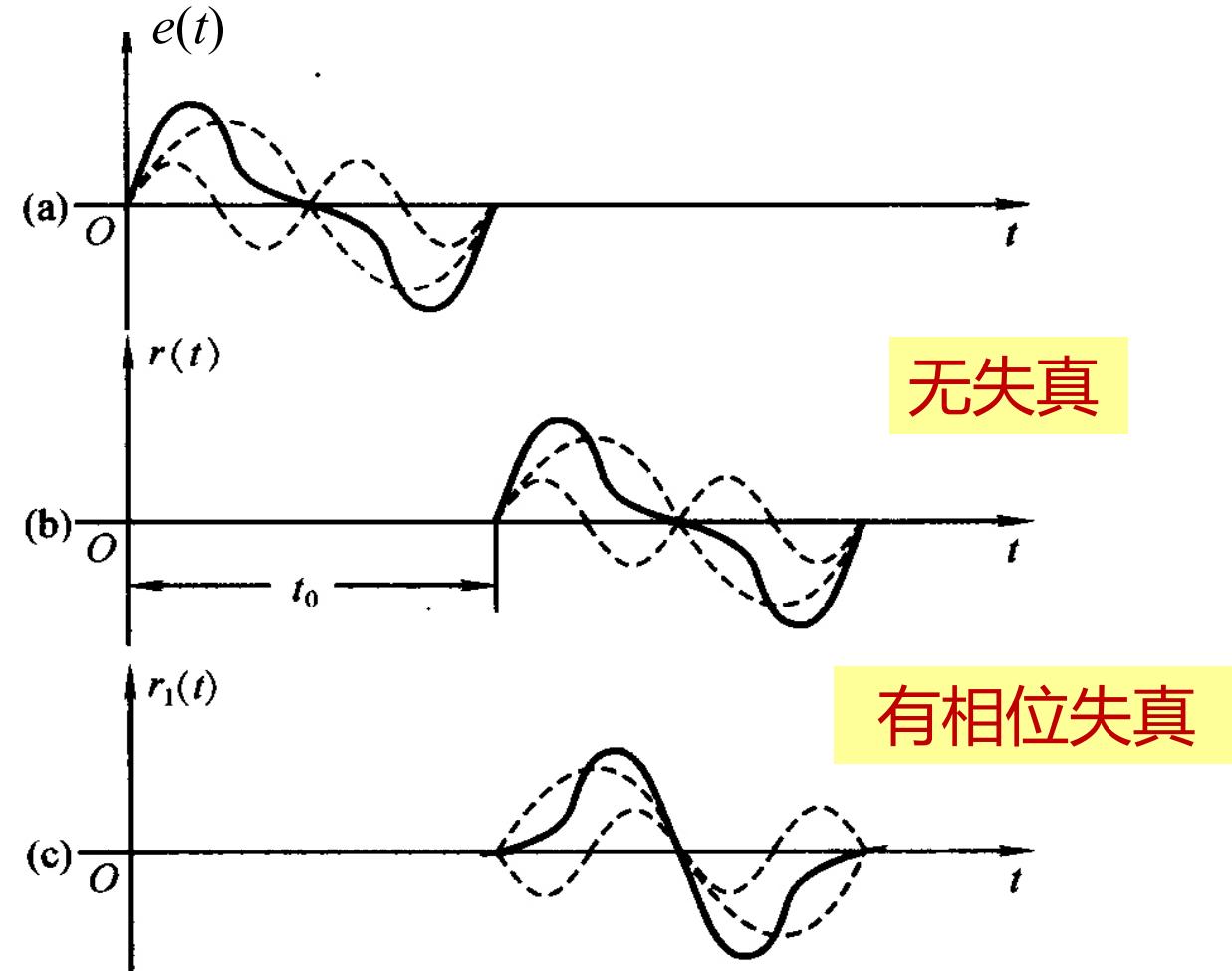
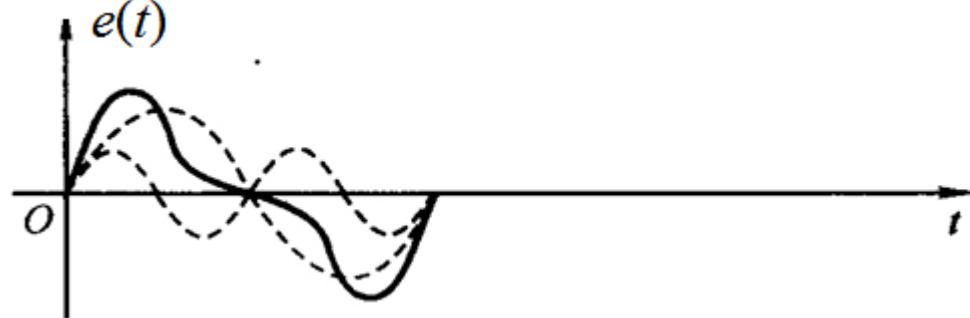


图 5-5 无失真传输与有相位失真传输波形比较

例5-3: 设一个无失真系统的激励信号 $e(t)$ 的波形如图所示, 求其响应 $r(t)$ 以及保证响应不产生相位失真的条件。



解: $e(t) = E_1 \sin \omega_1 t + E_2 \sin (2\omega_1 t)$

sin 函数稳态响应

$$r(t) = KE_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + KE_2 \sin(2\omega_1 t - \varphi_2) = KE_1 \sin\left[\omega_1\left(t - \frac{\varphi_1}{\omega_1}\right)\right] + KE_2 \sin\left[2\omega_1\left(t - \frac{\varphi_2}{2\omega_1}\right)\right]$$

两边求傅里叶变换

$$R(j\omega) = KE_1 j\pi [\delta(\omega + \omega_1) - \delta(\omega - \omega_1)] e^{-j\omega(\varphi_1/\omega_1)} + KE_2 j\pi [\delta(\omega + 2\omega_1) - \delta(\omega - 2\omega_1)] e^{-j\omega(\varphi_2/2\omega_1)}$$

使两个频率分量有相同的延迟时间: $\frac{\varphi_1}{\omega_1} = \frac{\varphi_2}{2\omega_1} = t_0 = \text{常数}$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\omega_1}{2\omega_1} = \frac{1}{2}$$

为不产生相位失真, 信号通过线性系统时谐波的相移必须与其频率成正比:

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 \quad \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -t_0$$

注意: 在信号频谱分析中, 不能忽略相位信息!

5.3.4 群时延概念

我们发现：信号通过系统的延迟时间 $-t_0$ 即为相位特性的斜率。

群时延（群延时）为系统相频特性对频率的负导数（对应一群频率）：

$$\tau = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

实际中， τ 为正值。

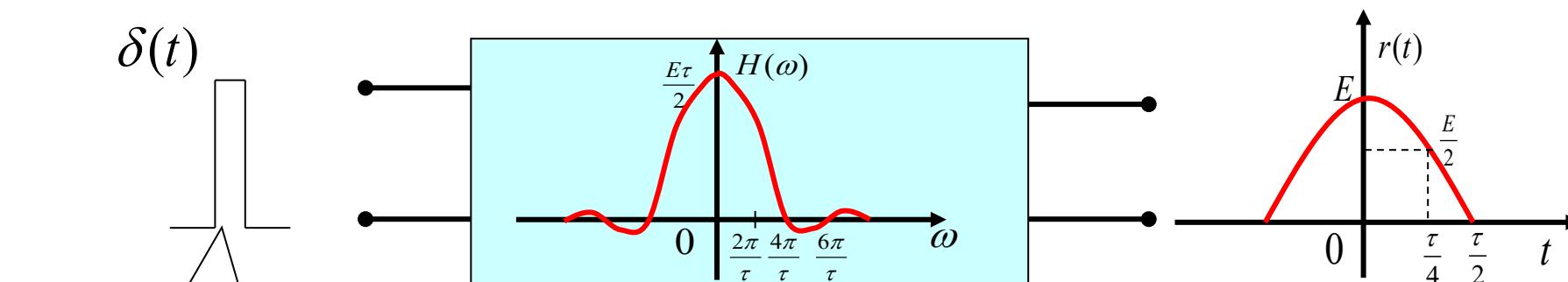
在满足信号传输不产生相位失真的条件下，其**群时延特性为常数**。

$$\tau = -\frac{d(-\omega t_0)}{d\omega} = t_0$$

5.3.5 产生特定波形

在实际中，可通过设计系统传输函数，利用信号失真形成特定波形。

利用冲激信号作用于系统产生特定波形 $r(t)$:



实际用窄
矩形脉冲

$$H(\omega) = R(\omega)$$

$$= \frac{E\tau}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2}$$

升余弦脉冲

$$r(t) = \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right]$$

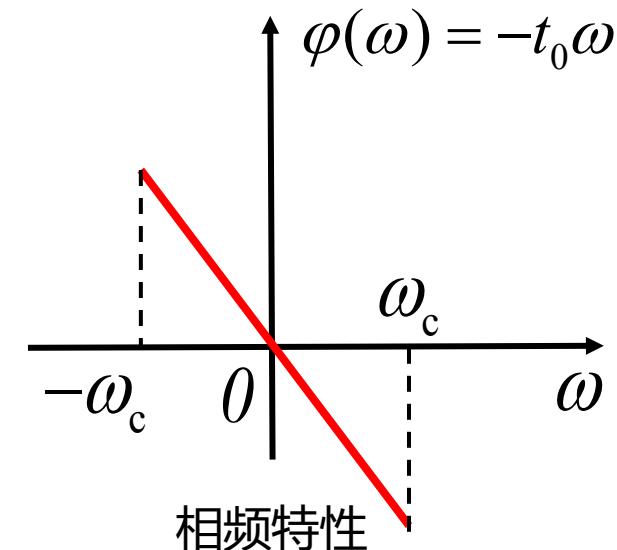
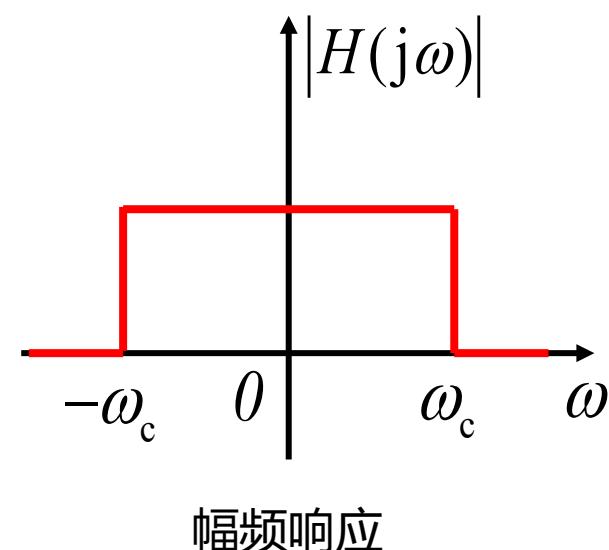
$$\left(-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \right)$$

5.4 理想低通滤波器

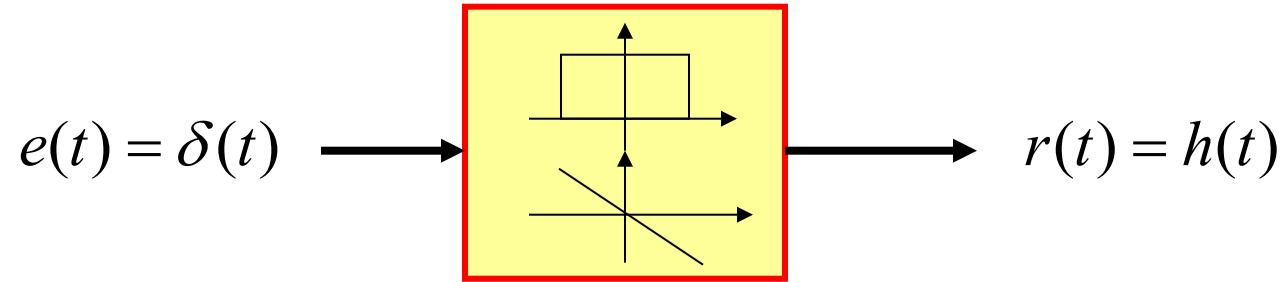
理想滤波器：一种**理想化**的滤波网络模型，具有**矩形幅度特性和线性相移特性**

理想低通滤波器的**频率响应**： $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

ω_c 称为**截止频率**

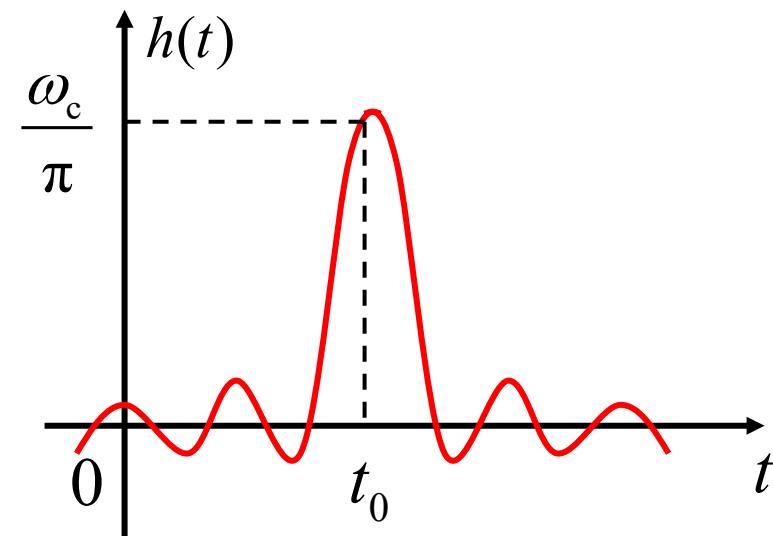


理想低通滤波器的冲激响应



$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)} \right|_{-\omega_c}^{\omega_c} \Rightarrow h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$



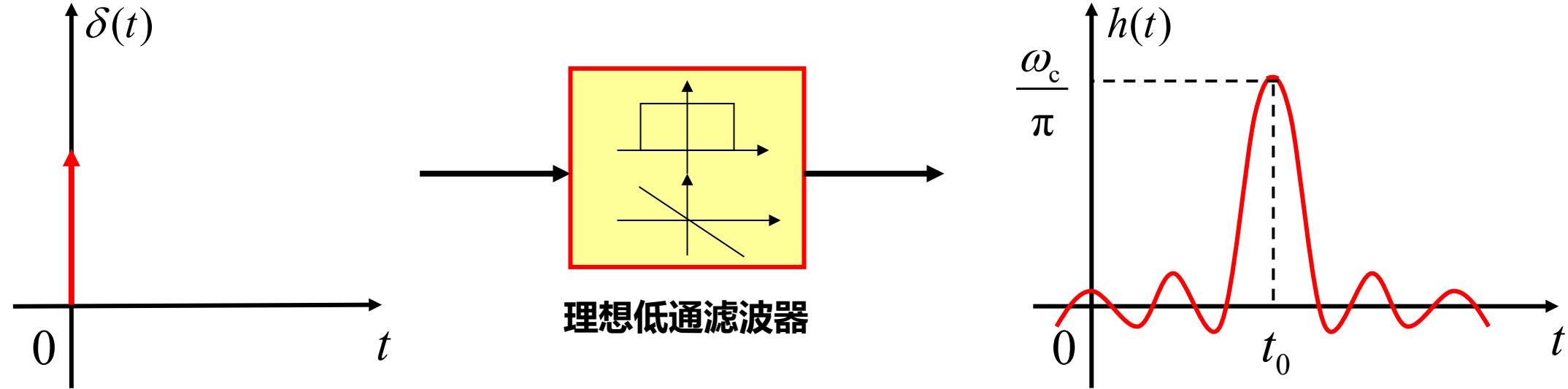
系统具有延时性，相频 $\varphi(\omega)$ 作用的结果
系统具有滤波性，幅频 $|H(\omega)|$ 作用的结果

例5-4 关于理想低通滤波器正确的说法有：

- A 冲激函数通过理想低通滤波器有失真
- B 冲激函数通过理想低通滤波器无失真
- C 理想低通滤波器物理可实现
- D 理想低通滤波器物理不可实现

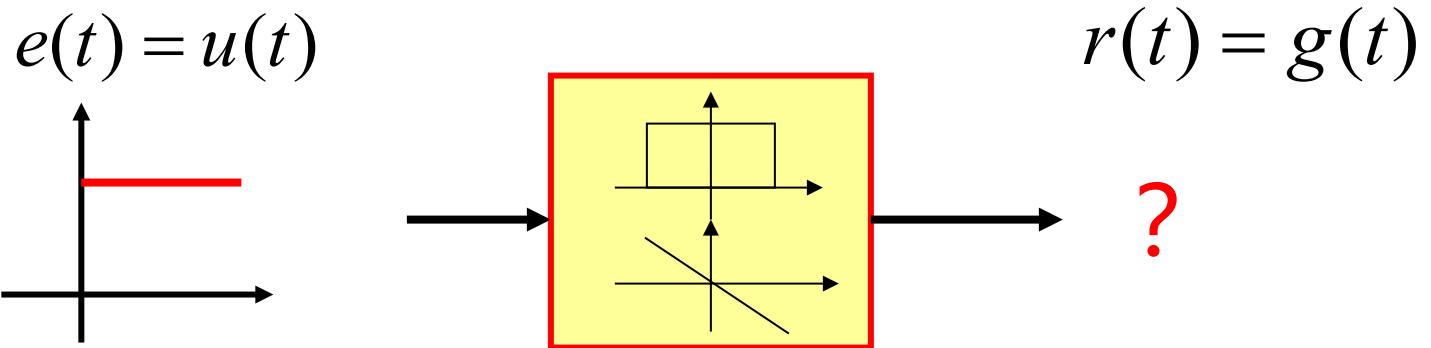
提交

例5-4 答案分析：



- (1) $h(t)$ 的波形是一个**抽样函数**, 不同于输入信号 $\delta(t)$ 冲激函数的波形, 有失真
- (2) $h(t)$ 在 $t < 0$ 时也存在输出, 可见**理想低通滤波器**是一个**非因果系统**, 是物理**不可实现系统**

理想低通滤波器的阶跃响应



频率响应: $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$

阶跃信号的FT: $E(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

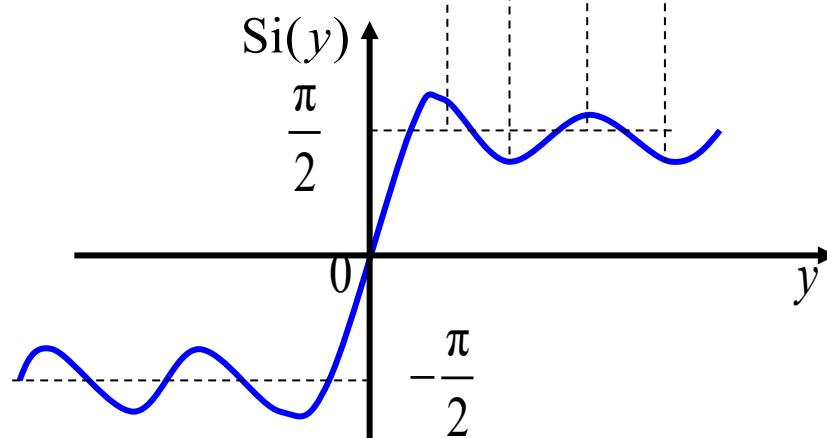
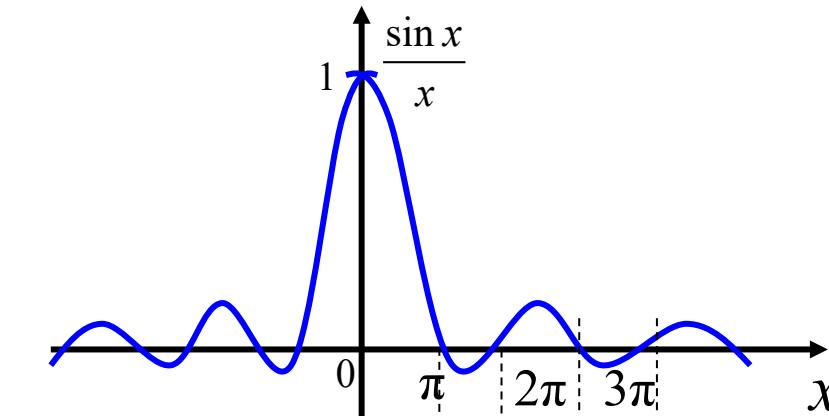
阶跃响应的FT: $R(j\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = H(j\omega)E(j\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0}, \quad -\omega_c < \omega < \omega_c$

阶跃响应: $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[R(j\omega)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega$ 推导过程见教材288页

令
则

$$x = \omega(t - t_0)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_0)]$$



函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的积分称为“正弦积分”，
以符号 $\text{Si}(y)$ 表示。 $\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$
 $\text{Si}(y)$ 是 y 的奇函数

$$t \rightarrow \infty, \quad \text{Si}(y) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

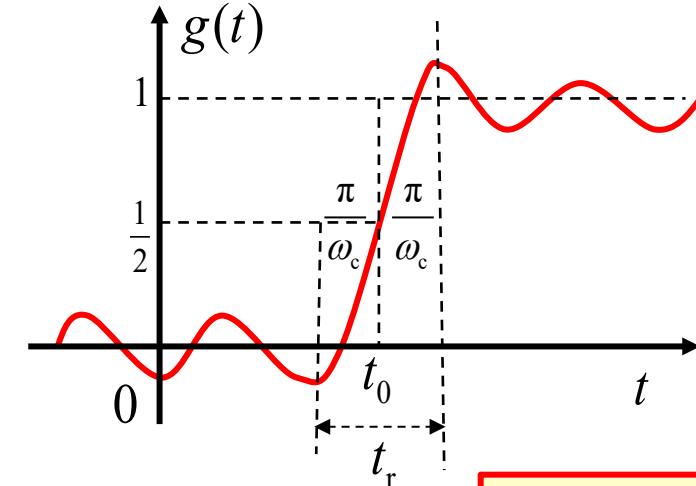
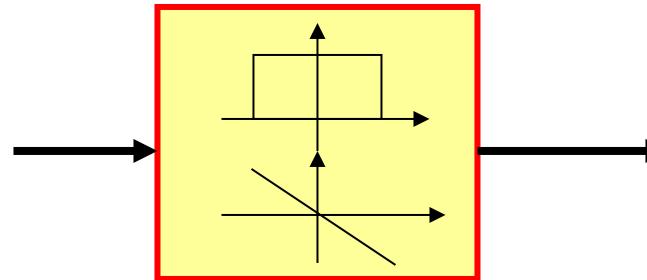
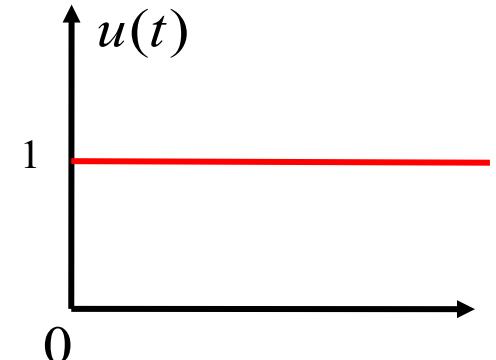
$$t \rightarrow -\infty, \quad \text{Si}(y) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

各极点值与 $\frac{\sin x}{x}$ 函数的零点对应。

理想低通滤波器的阶跃响应

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}[\omega_c(t - t_0)]$$

$$\operatorname{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$$



分析:

- (1) $g(t)$ 比 $u(t)$ 出现的时刻延迟了时间 t_0
- (2) 上升时间: 输出 $g(t)$ 由最小值到最大值所需要的时间
- (3) 滤波器阶跃响应上升时间 t_r 和带宽 B 不能同时减小 —— “测不准原理” (教材6.10)

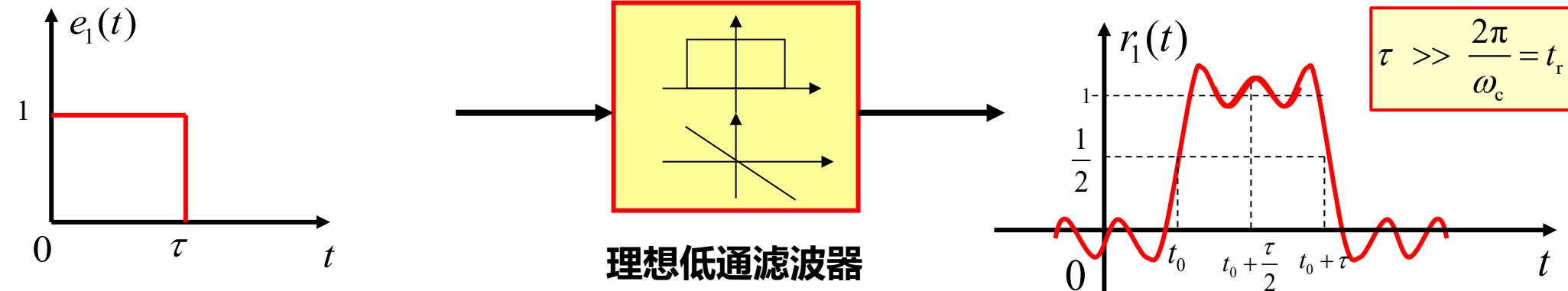
$$t_r = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{B}$$

理想低通滤波器的矩形脉冲响应

$$e_1(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

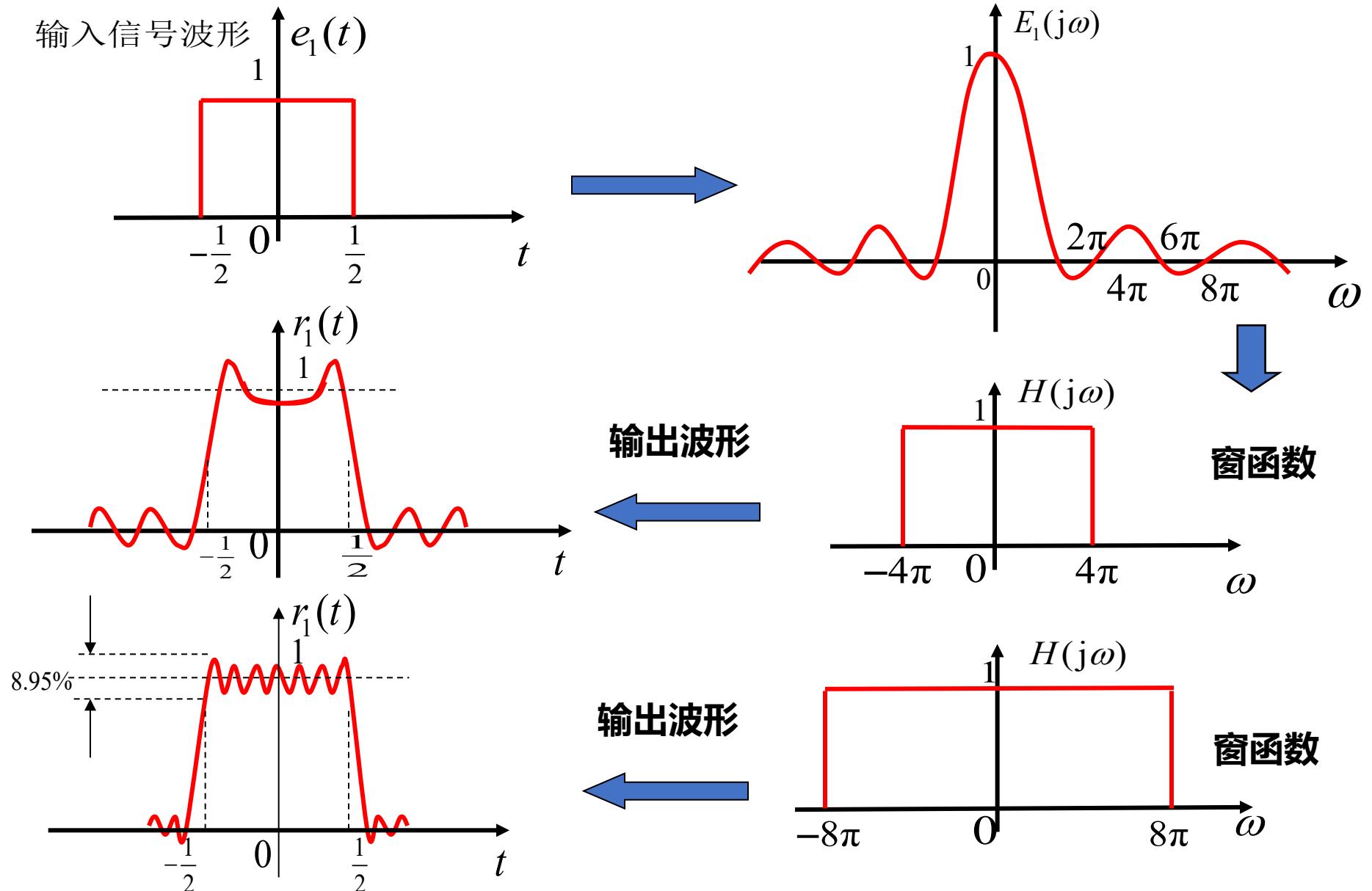
$$r_1(t) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)] \right\} - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - \tau - t_0)] \right\}$$

$$r_1(t) = \frac{1}{\pi} \{ \text{Si}[\omega_c(t - t_0)] - \text{Si}[\omega_c(t - t_0 - \tau)] \}$$



分析：当输入信号脉宽 τ 远大于上升时间 t_r 时，响应大体为矩形；否则，失真严重

存在吉布斯现象



例5-5 (多选) 理想低通滤波器具有以下的特性 ()

- A 传输函数的模在通频带内为一常数
- B 传输函数的模在通频带外则为零
- C 传输函数在通频带内具有线性相移特性
- D 是一个物理不可实现的非因果系统

提交

5.5 系统的物理可实现性、佩利—维纳准则

理想低通、带通、高通、带阻滤波器在物理上都是不可实现的。

究竟怎样的系统数学模型可以在物理上实现？

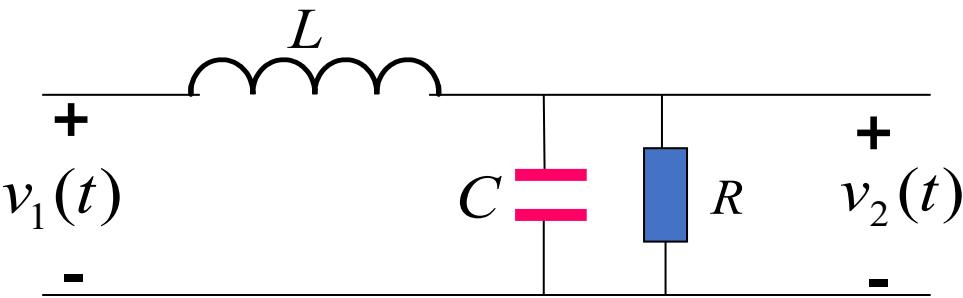
例5-6：一个简单的低通滤波器电路如图所示。设元件参数间满足 $R = \sqrt{L/C}$ ，求冲激响应 $h(t)$ 。

解：

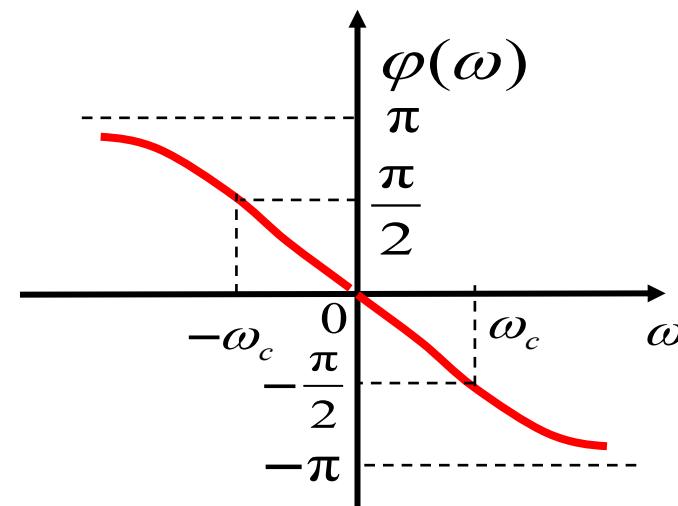
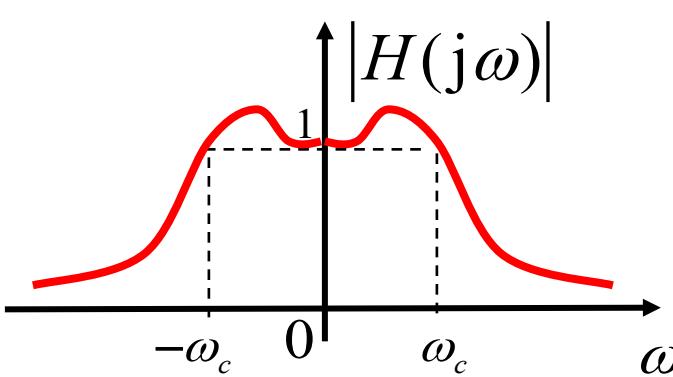
$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{R} + j\omega C}{j\omega L + \frac{1}{R + j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R + j\omega C}}$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{2\omega_c}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c}{\left(\frac{\omega_c}{2} + j\omega\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c\right)^2}$$

引入 $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

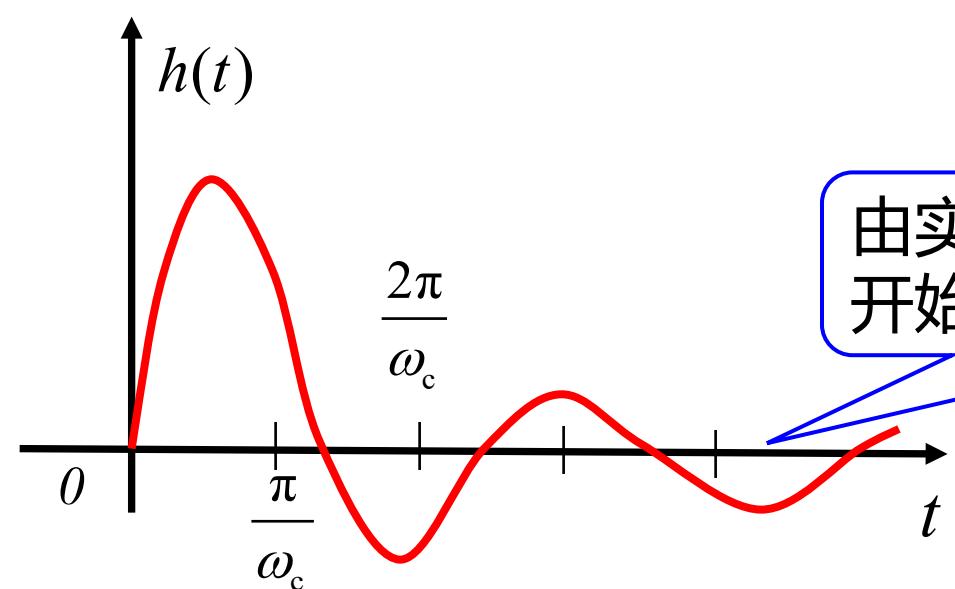


$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{2\omega_c}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_c}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right) \quad (t \geq 0)$$



幅频特性 $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

相频特性 $\varphi(\omega) = -\arctan\left[\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right]$



由实际电路组成，从 $t \geq 0$ 开始，物理可实现

$$h(t) = \frac{2\omega_c}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_c}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right) \quad (t \geq 0)$$

物理可实现性

(1) 时域——因果性, 物理可实现的充分必要条件 $t < 0, \quad h(t) = 0$

(2) 频域——若幅频响应的平方可积 $\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$

佩利-维纳 (Payley-Wiener) 准则 —— 物理可实现 (因果性) 的必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

没有给出相位特性约束

说明:

- (1) 仅允许 $|H(j\omega)|$ 特性在某些不连续的频率点上为零, 但不允许 $|H(j\omega)|$ 在一个有限的频带内为零, 如果 $|H(j\omega)| = 0, |\ln|H(j\omega)|| \rightarrow \infty$;
- (2) 限制了幅度特性 $|H(j\omega)|$ 的衰减速度;
- (3) 按此原理, 理想低通、理想高通、理想带通和理想带阻等理想滤波器都是物理不可实现的。

例5-7：关于佩利-维纳准则下列说法**错误**的是()

- A 佩利-维纳准则要求可实现的幅度特性总的衰减不能过于迅速。
- B 佩利-维纳准则既不允许网络特性在一频带内为零，也限制了幅度特性的衰减速度。
- C 佩利-维纳准则只从幅度特性提出要求，而在相位特性方面却没有给出约束。
- D 佩利和维纳证明了对于系统物理可实现性的充分必要条件。

 提交

佩利-维纳准则是物理可实现（因果性）的必要条件，不是充分条件。

$h(t) \rightarrow H(j\omega)$ 因果

$h(t + t_0) \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t_0}, \quad t_0 > 0$ 非因果

两者幅度特性相同，满足
佩利-维纳准则。
相位特性不同。

如果 $|H(j\omega)|$ 已被检验满足佩利-维纳准则，就可以找到适当的相位函数 $\varphi(\omega)$ 与 $|H(\omega)|$ 一起构成物理可实现的系统函数。

作 业

教材习题:

基础题: 5-2, 5-4, 5-8, 5-10

加强题: 5-13