第六章

静电场中的导体和电介质

教学基本要求

一 理解静电场中导体处于静电平衡时的条件，并能从静电平衡条件来分析带电导体在静电平衡时的电荷、电势、电场分布。

二 了解电介质的极化及其微观机理，了解电位移矢量 $\vec{D}$ 的概念，以及在各向同性介质中，$\vec{D}$ 和电场强度 $\vec{E}$ 的关系。了解电介质中的高斯定理，并会用它来计算对称电场的电场强度。

三 理解电容的定义，并能计算几何形状简单的电容器的电容。

四 了解静电场是电场能量的携带者，了解电场能量密度的概念，能用能量密度计算电场能量。

6-1 静电场中的导体

一、材料按导电性能分类

导体　　绝缘体（电介质）　　半导体

1) 导体(**Conductor**)

导电能力极强的物体(存在大量可自由移动的电荷)。

2) 绝缘体（电介质，**Dielectric**）

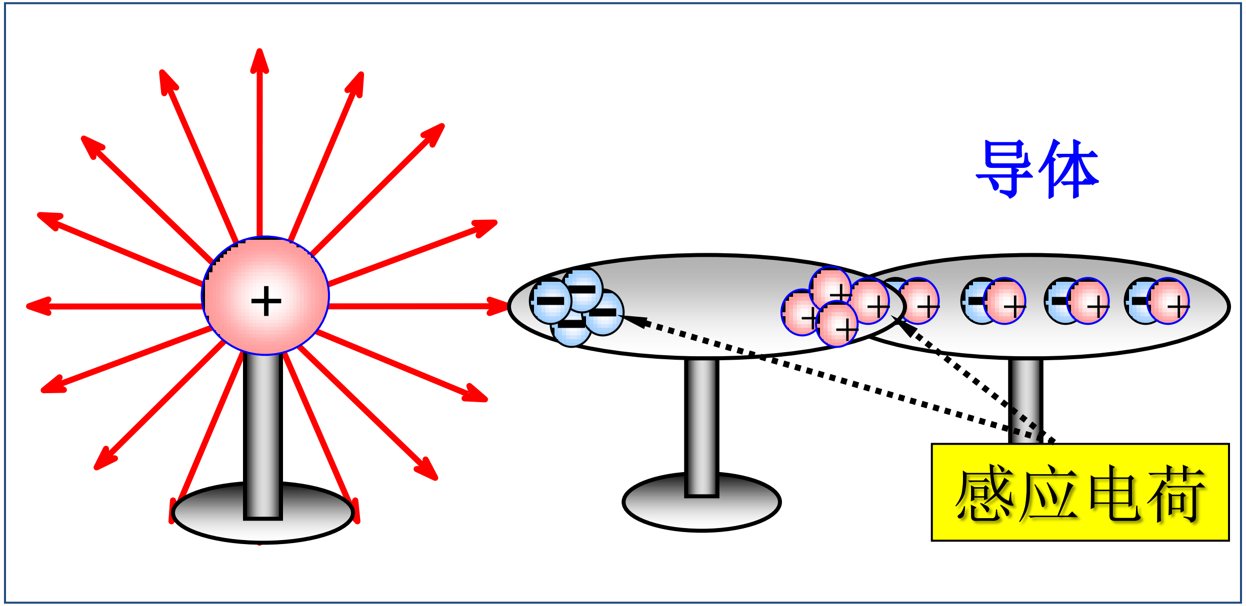
导电能力极弱或不能导电的物体。

3) 半导体(**Semiconductor**)

导电能力介于上述两者之间的物体。

静电感应

若把金属导体放在外电场中，导体中的自由电子在作无规热运动的同时，还将在电场力作用下作宏观定向运动，从而使导体中的电荷重新分布，这个现象叫做静电感应现象。

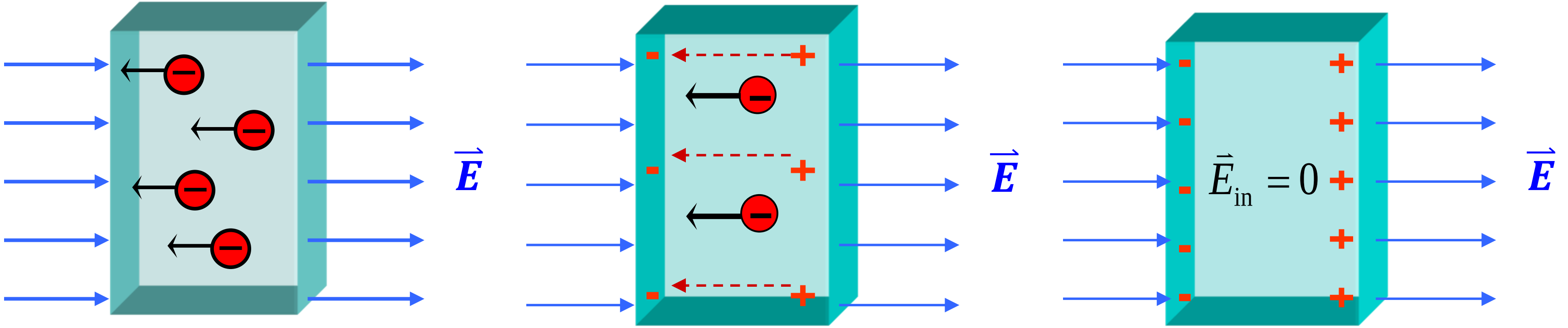


二、 导体的静电平衡

静电感应

$\vec{E}'$（感应电荷电场强度）

静电平衡



$\vec{E}_{\text{in}} = \vec{E} + \vec{E}'$

$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{in}} = -e\vec{E}_{\text{in}}$

导体的**静电平衡状态：**

导体的内部和表面都没有电荷作**任何宏观定向运动**的状态。

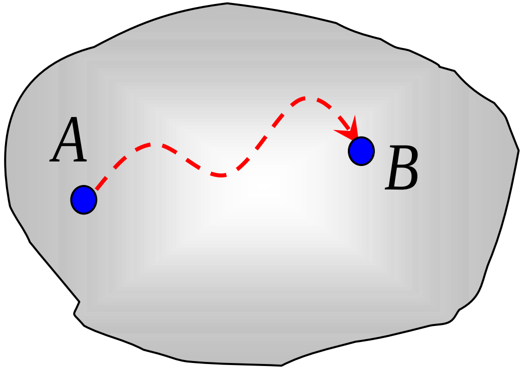
导体**静电平衡条件：**

(1) 导体内**任一点的电场强度都等于零；**

(2) 导体表面处**电场强度的方向，都与导体表面垂直。**

➢ 推论（达到静电平衡状态时）:

1、导体内任意两点间的电势是相等的。



证明：在导体上任取两点 ***A*** , ***B***

$$U_{AB}=V_A-V_B=\int_A^B \vec{E}_{\text{in}}\cdot d\vec{l}=0$$

导体静电平衡条件： $\vec{E}_{\text{in}}=0$

$$\boxed{V_A=V_B}$$

2、导体表面上任意两点的电势差亦为零。

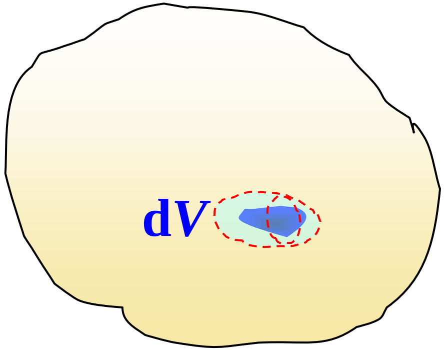
总之，当导体处于静电平衡时，导体上的电势处处相等，导体为一等势体。

三、静电平衡时导体上电荷的分布

1、当带电导体处于静电平衡状态时，

导体内部处处没有净电荷存在，

净电荷只能分布于导体的表面上。



证明：在导体内任取体积元 dV

由高斯定理：$\oint \vec{E}_{\mathrm{in}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i内}$

$\vec{E}_{\mathrm{in}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i q_{i内} = 0$

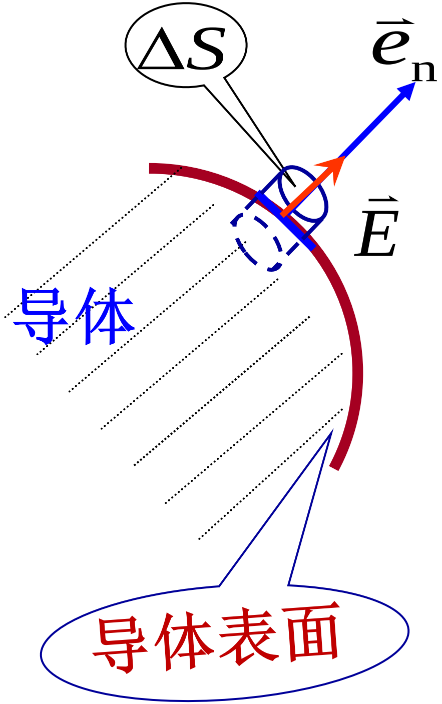
净电荷只能分布于导体的表面上！

2、导体表面附近的场强方向与表面垂直，场强的大小与该处电荷的面密度成正比。

$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad\qquad \vec{E} = E\vec{e}_\mathrm{n}$$

$$= \underbrace{\int_{\text{上底面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{E\Delta S} + \underbrace{\int_{\text{下底面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{0} + \underbrace{\int_{\text{导体内的侧面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{0} + \underbrace{\int_{\text{导体外的侧面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{0}$$

$$= E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i\text{内}} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$



$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_\mathrm{n}}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

（对比无限大均匀带电平面的场强）

3、孤立的带电导体，外表面各处的电荷面密度与该处曲率有关。

1）导体表面凸出而尖锐的地方（曲率较大）

电荷面密度较大

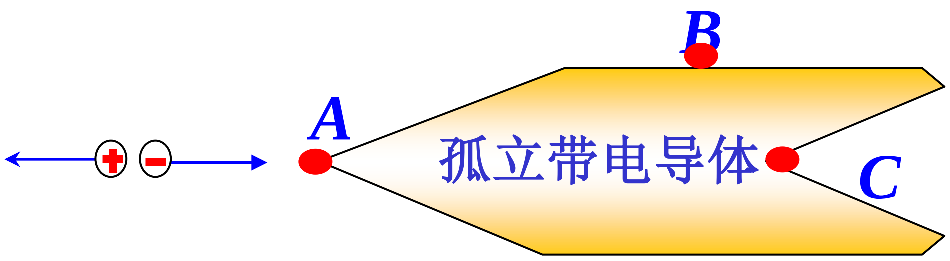
2）导体表面平坦的地方（曲率较小）

电荷面密度较小

3）导体表面凹进去的地方（曲率为负）

电荷面密度更小

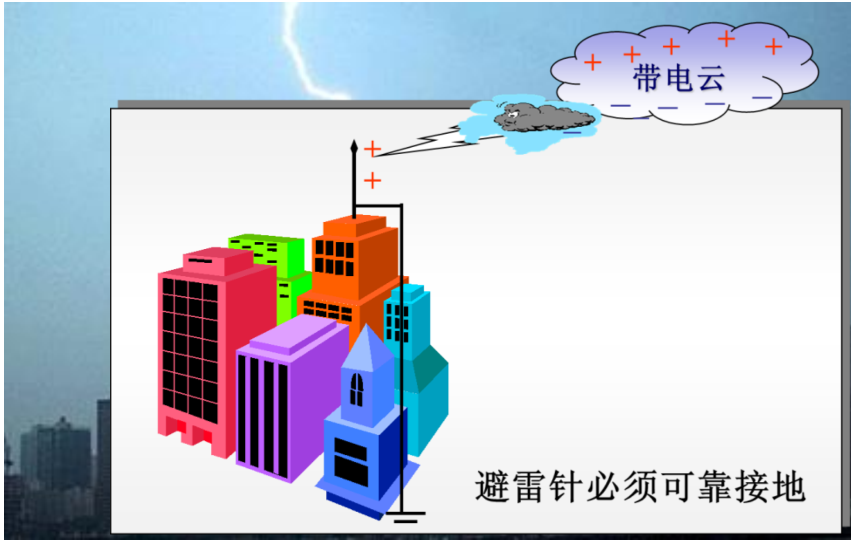
尖端放电

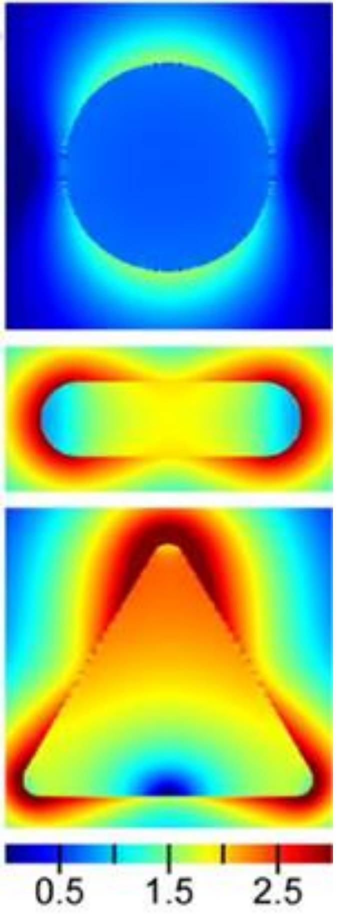


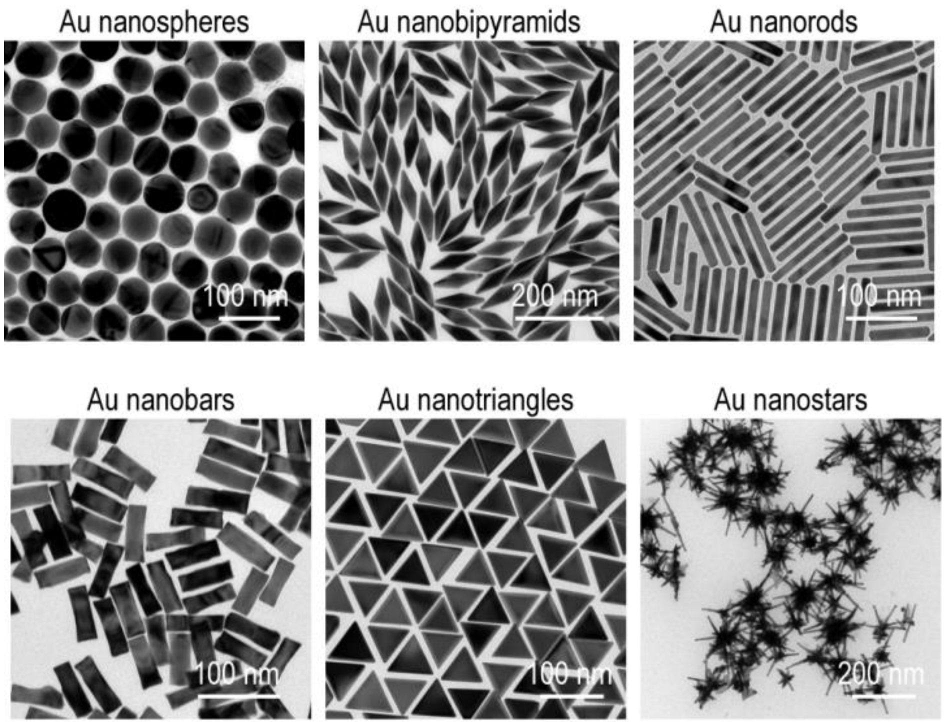
$$\sigma_A > \sigma_B > \sigma_C$$

球形电力设备

避雷针







各种形状的金纳米颗粒

尖端电场增强效应

by CUHK Jianfang Wang's group

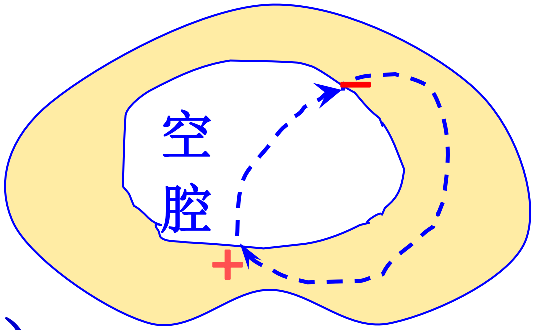
四、空腔导体

1、腔内无电荷时，导体的净电荷只能分布在外表面。

由高斯定理可知导体内表面电荷总量为0。

是否有可能在内表面不同区域分别带等量的正负电荷呢？

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{沿电场线} \vec{E}_{腔}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{导体内} \vec{E}_{\mathrm{in}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



$$\int_{沿电场线} \vec{E}_{腔}\mathrm{d}\vec{l} \neq 0, \qquad \int_{导体内} \vec{E}_{\mathrm{in}}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

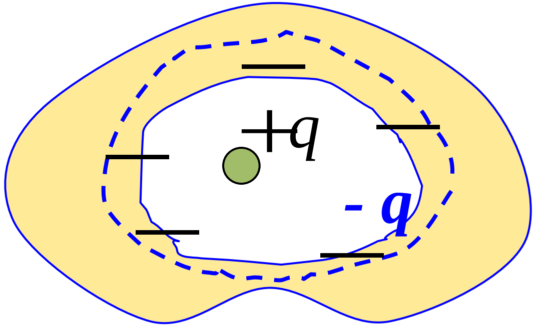
推出 $\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$ （违反环路定理）

结论：在静电平衡状态下，导体空腔内各点的场强等于零，空腔的内表面上处处没有净电荷分布。

2、腔内有电荷 q

由高斯定理：

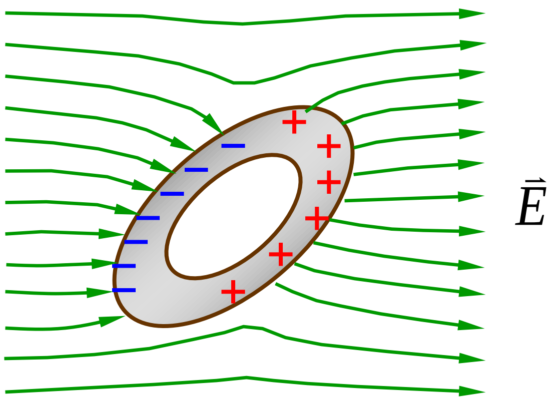
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$



导体的内表面必有电荷 $-q$

五、导体静电平衡的应用

1、屏蔽外电场

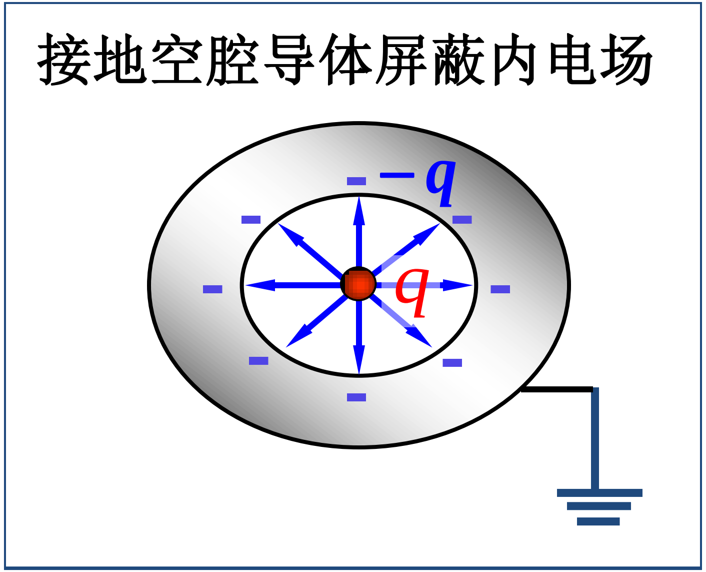


用空腔导体屏蔽外电场

空腔导体外面的带电体（电场）不会影响空腔内部的电场分布。

在静电场中，因导体的存在使某些特定的区域不受电场影响的现象，称为静电屏蔽。

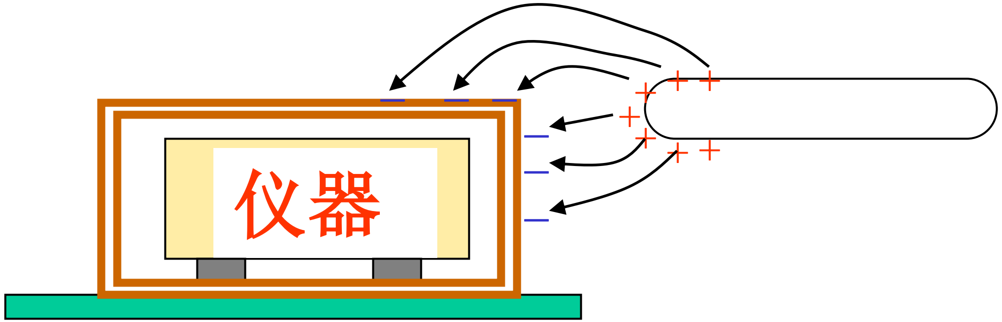
2、屏蔽内电场



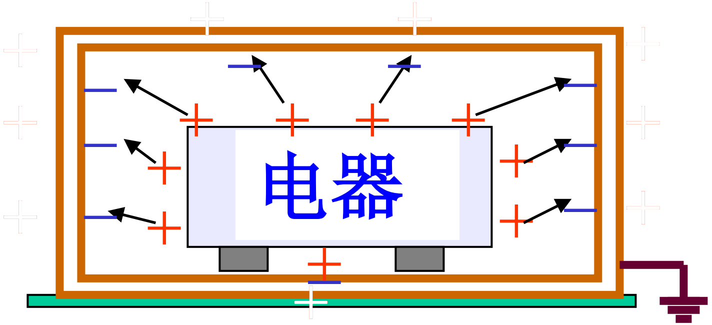
一个接地的空腔导体，空腔内的带电体（电场）对空腔外的物体不产生影响。

空腔导体（无论是否接地）将使空腔内空间不受外电场的影响，而接地空腔导体将使外部空间不受空腔内电场的影响。这就是空腔导体的静电屏蔽作用。

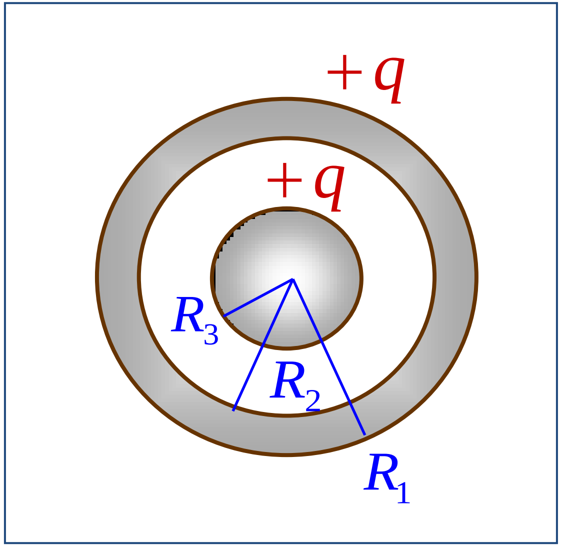
为了使仪器不受外电场的影响，可将它用导体壳罩起来。



为使电器设备不对外产生影响，可将导体壳“接地”，使空腔内外的电场互不影响。



例 有一外半径 R_1=10 cm，内半径 R_2=7 cm 的金属球壳，在球壳中放一半径R_3=5 cm的同心金属球，若使球壳和球均带有 q=10^{-8} C的正电荷。问球壳上的电荷如何分布？球心电势为多少？



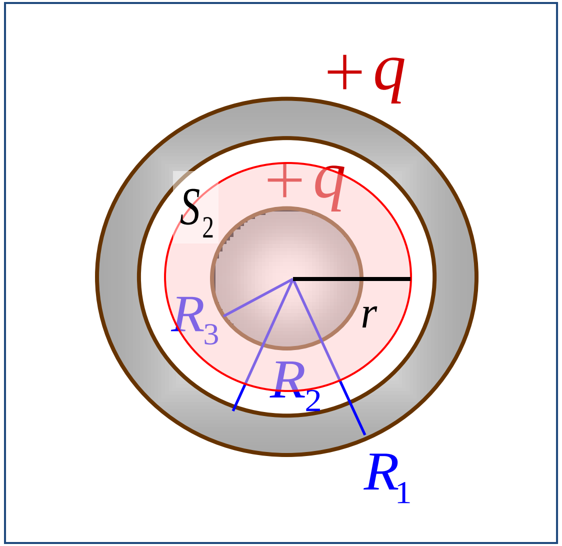
解：　　作球形高斯面S_1

$$E_1 = 0 \quad (r < R_3)$$

作球形高斯面S_2

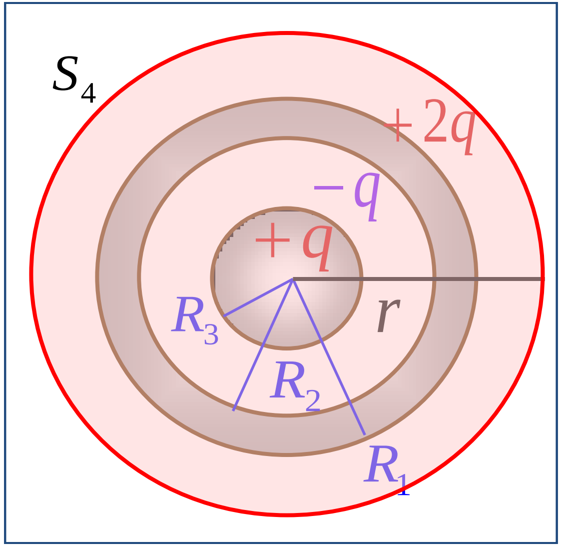
$$\oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (R_3 < r < R_2)$$



作球形高斯面 S_3 $\oint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = 0$ $E_3 = 0 \quad (R_1 < r < R_2)$

由于导体内场强为零，高斯面 S_3 内电荷的代数和也必为零。壳内导体球带电为 q，故导体球壳内表面带电 $-q$，导体球壳外表面带电 $+2q$ 。



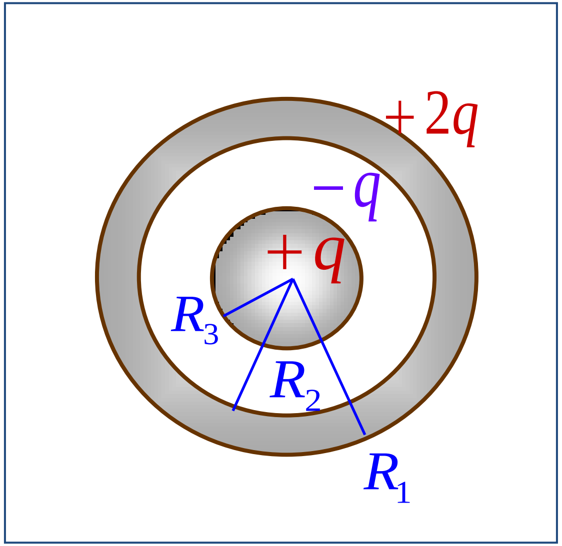
作球形高斯面 S_4

$$\oint_{S_4} \vec{E}_4 \cdot d\vec{S} = \frac{2q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_4 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R_1)$$

各区域的电场强度：

$$\begin{cases} E_1 = 0 & (r < R_3) \\ E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_3 < r < R_2) \\ E_3 = 0 & (R_1 < r < R_2) \\ E_4 = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R_1) \end{cases}$$



$$V_o = \int_0^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{R_3} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_{R_3}^{R_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_3\cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{\infty} \vec{E}_4\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1}\right) = 2.31\times10^3\,\mathrm{V}$$

R_1=10 cm，R_2=7 cm
R_3=5 cm，q=10^{-8} C

亦可利用电势叠加原理求解球心电势

金属球在圆心产生的电势

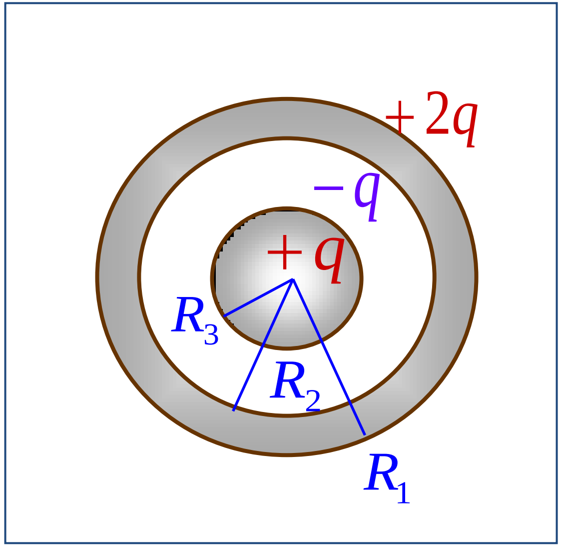
$$V_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

内球壳在圆心产生的电势

$$V_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

外球壳在圆心产生的电势

$$V_1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$



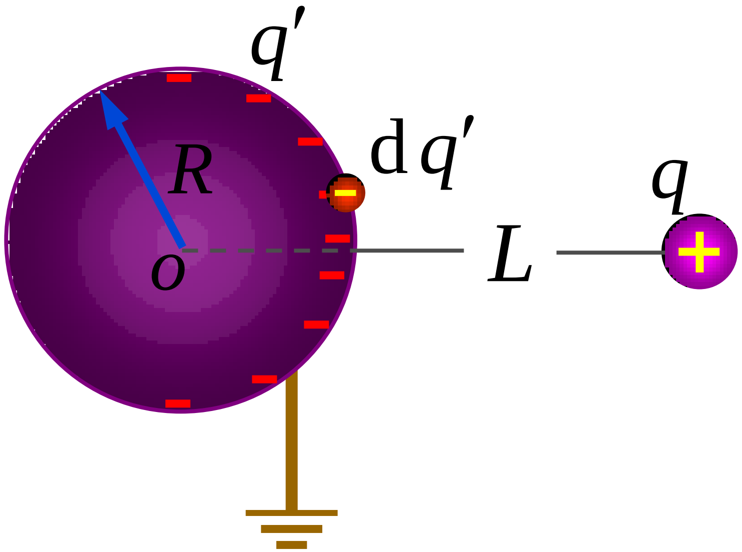
球心电势

$$V_o = V_1 + V_2 + V_3$$

例 半径为R的接地导体球附近，有一电量为q的点电荷，点电荷离球心的距离为L，求导体球上感应电荷的电量。

解：设导体上感应电荷为q'

$$V_{O,q'}=\int_{q'}\frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{q'}\mathrm{d}q'=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



球心处电势为零，即

$$V_O=V_{O,q}+V_{O,q'}=0$$

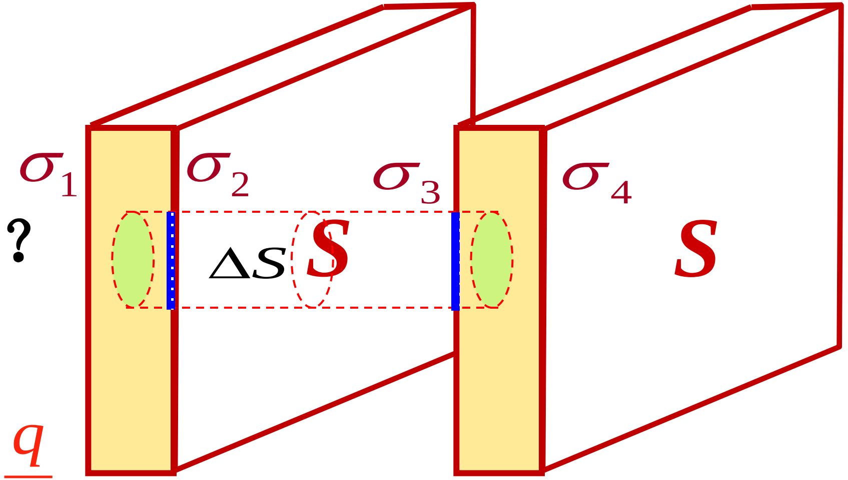
$$\rightarrow\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

$$q'=-\frac{R}{L}q$$

例 大平面金属板面积为S，带电量为 q，近旁平行放置第二块不带电大金属板。

求：1. 电荷分布和电场分布；

2. 把第二块金属板接地，情况如何？



解：1. 由电荷守恒定律

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = q, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{q}{S}$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = 0, \qquad \sigma_3 + \sigma_4 = 0$$

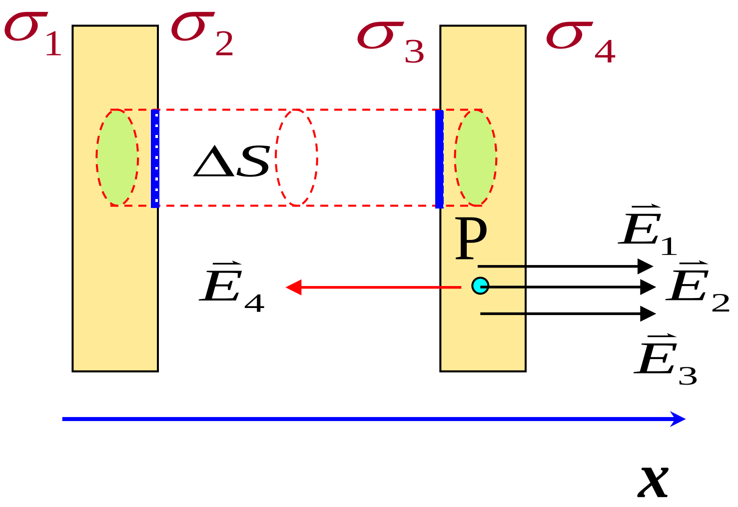
根据高斯定理有：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)\Delta S}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{q}{S}$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$



P点的场强是四个带电面产生:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = 0,$$

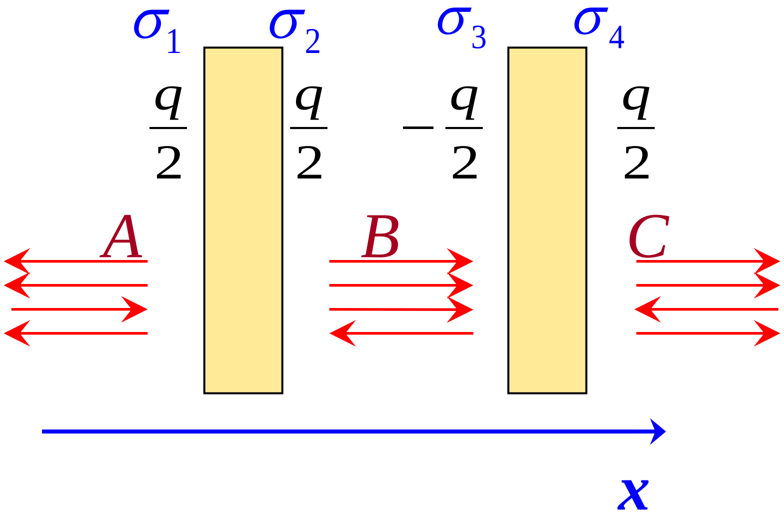
$$E_P = E_1 + E_2 + E_3 - E_4 = 0$$

$$E_P = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{q}{2S},\quad \sigma_2 = \frac{q}{2S},\quad \sigma_3 = -\frac{q}{2S},\quad \sigma_4 = \frac{q}{2S}$$

$$\vec{E}_A = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\vec{i} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

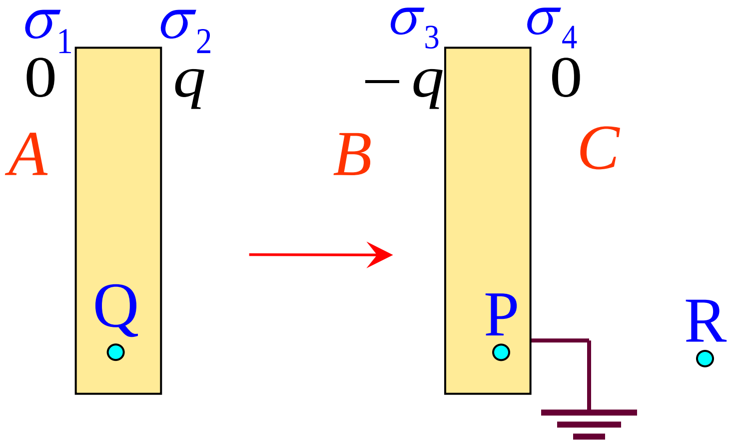


$$\vec{E}_A = -\frac{q}{2\varepsilon_0 S}\vec{i}$$

$$\vec{E}_B = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\vec{i}$$

$$\vec{E}_C = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\vec{i}$$

2. 右板接地



电荷守恒: $\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{q}{S}$,

P、Q、R点的合场强均为零:

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4=0$$

$$\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4=0$$

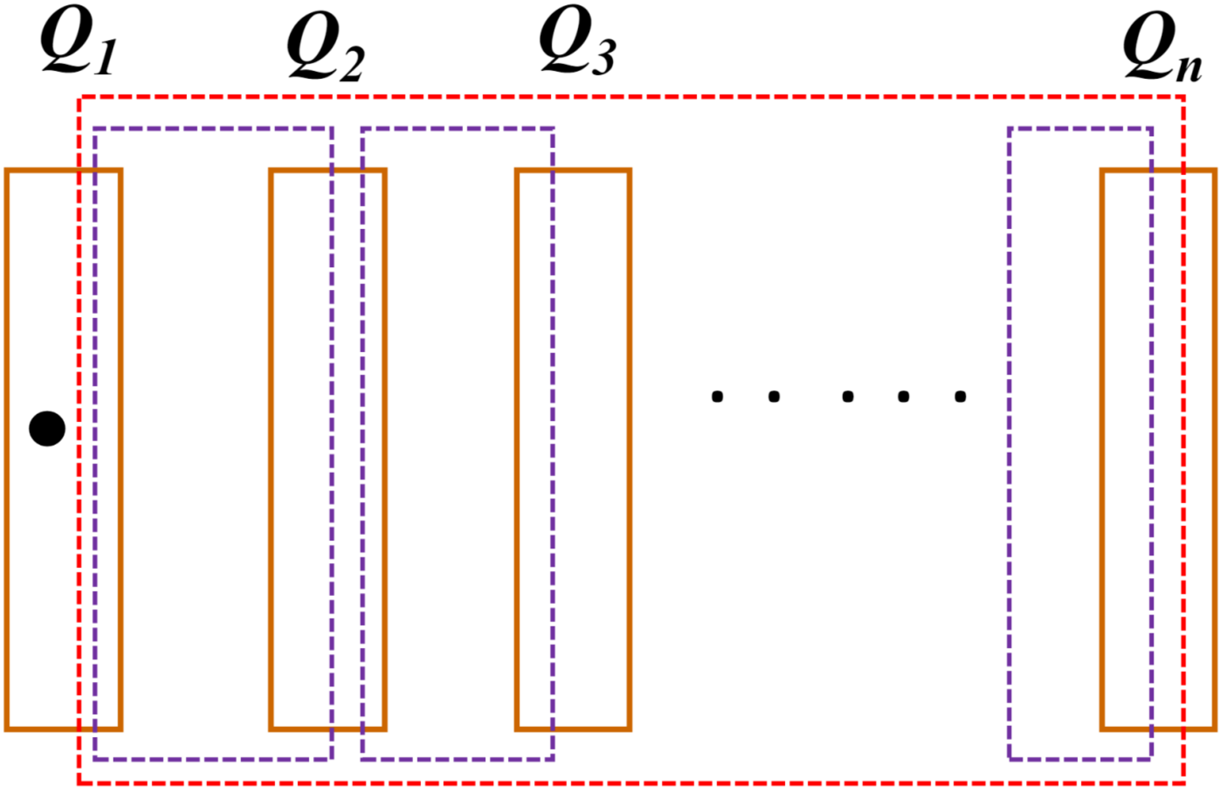
$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4=0$$

$$\sigma_1=0,\quad \sigma_2=\frac{q}{S},\quad \sigma_3=-\frac{q}{S},\quad \sigma_4=0$$

$$E_A=0,\quad E_B=\frac{q}{\varepsilon_0 S},\quad E_C=0$$

推广至

*n*块板的情形:

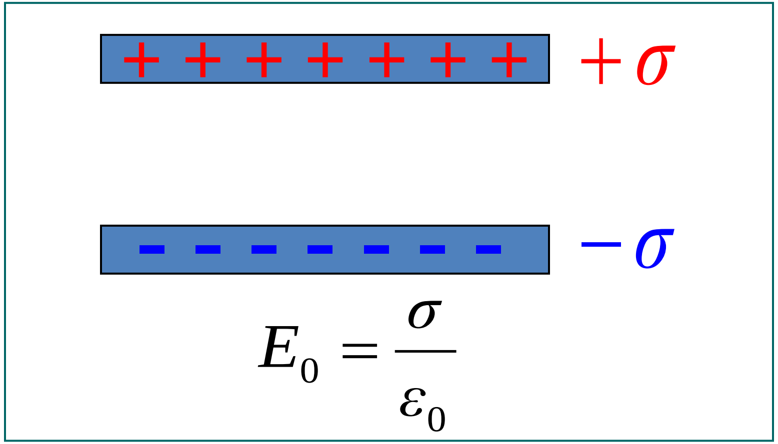


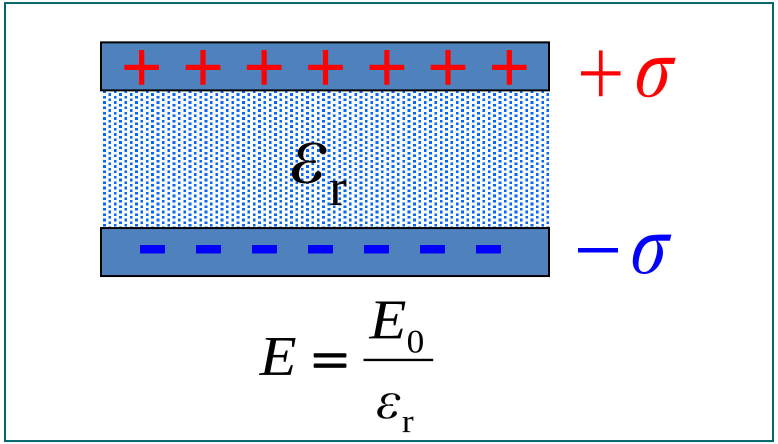
提示：两侧最外围平板均分所有电荷。

6-2 静电场中的电介质

一、 电介质对电场的影响 相对电容率

电介质的特点：分子中正负电荷束缚很紧，电荷代数和为零。介质内几乎没有自由电子，导电能力很差。





相对电容率 $\varepsilon_r > 1$　　　电容率 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

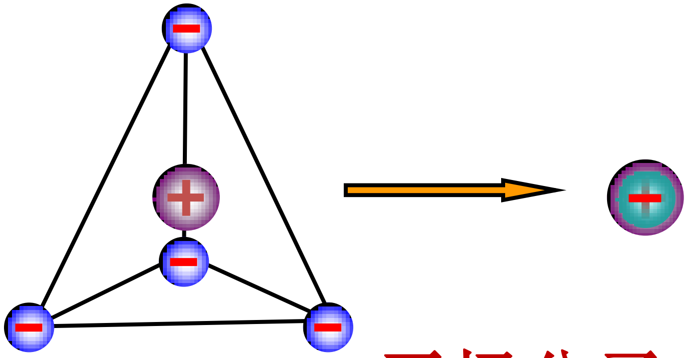
二、 电介质的极化

电介质分类

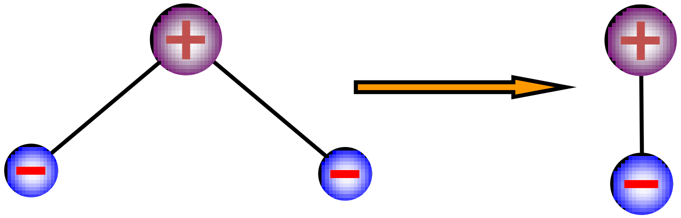
- 根据分子的正、负电荷等效中心的位置关系划分。

  无极分子—正、负电荷等效中心重合的分子。

  有极分子—正、负电荷等效中心不重合的分子。



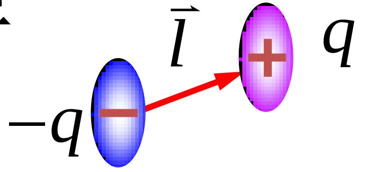
无极分子



有极分子

有极分子等效于一个电偶极子，其电偶极矩

$$\boxed{\vec{p}_e = q\vec{l}}$$



实际上，所有分子均可等效为一电偶极子模型。

区别在于：无外电场时单个无极分子的电偶极矩为零。

无极分子电介质　　有极分子电介质

$\vec{p}_e = 0, \sum_{\Delta V} \vec{p}_e = 0$ ---无外电场时--- $\vec{p}_e \neq 0, \sum_{\Delta V} \vec{p}_e = 0$

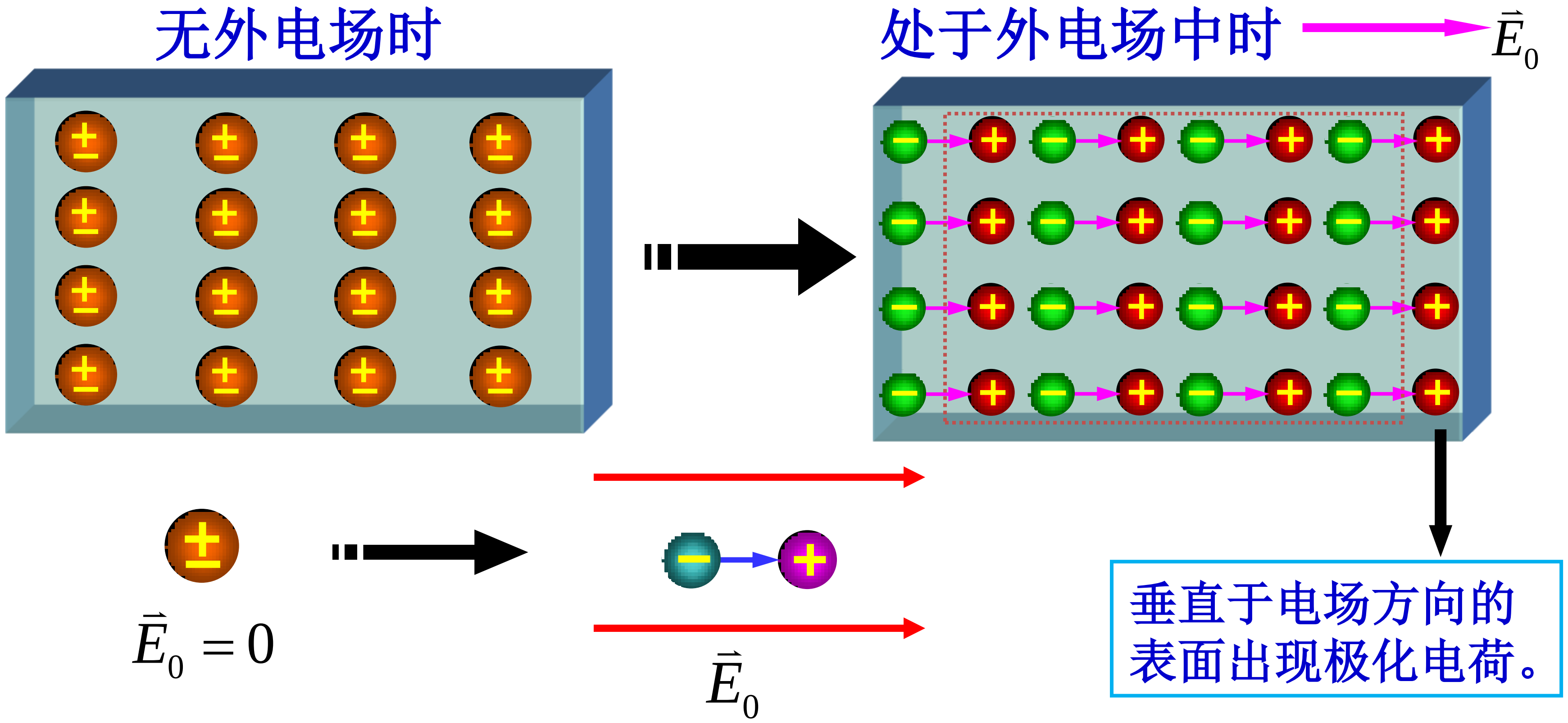
电介质的极化过程

电介质被放入电场中后，将产生极化现象，即：

在外电场的作用下，介质中或表面上将出现极化电荷。

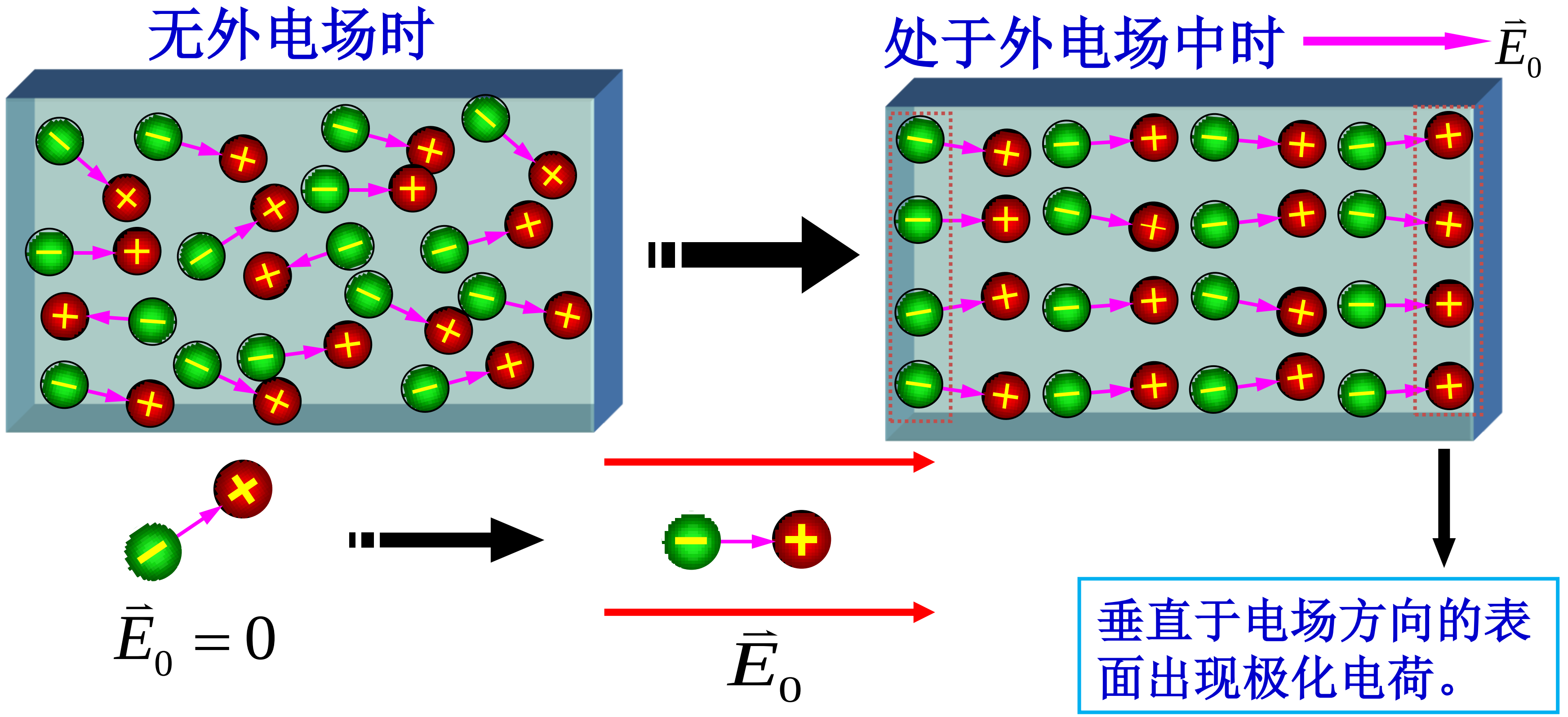
1、无极分子的位移极化

分子的等效正、负电荷中心在外电场作用下沿电场方向发生反向位移而产生极化电荷。



2、有极分子的取向极化

每个分子电矩在外场作用下沿外场取向而使整体出现极化电荷。（此时也有位移极化，但相较很小）。



极化电荷的特点

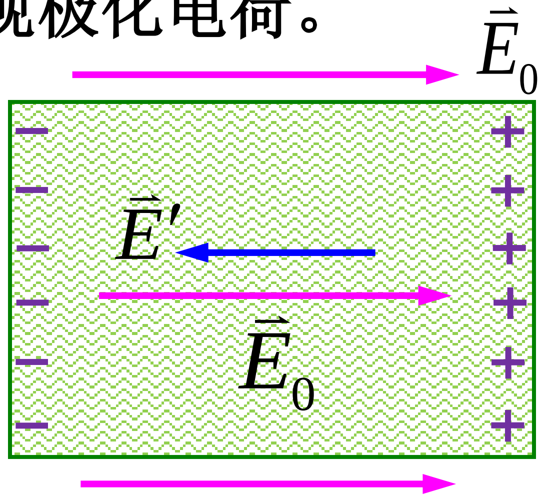
● 极化电荷受到附近原子的束缚，只能在原子尺度内作微小位移。所以这种极化电荷又称之为“束缚电荷”。

● 均匀介质极化时只在介质表面出现极化电荷，而非均匀介质极化时，介质的表面及内部均可出现极化电荷。

● 外电场越强，极化越厉害。

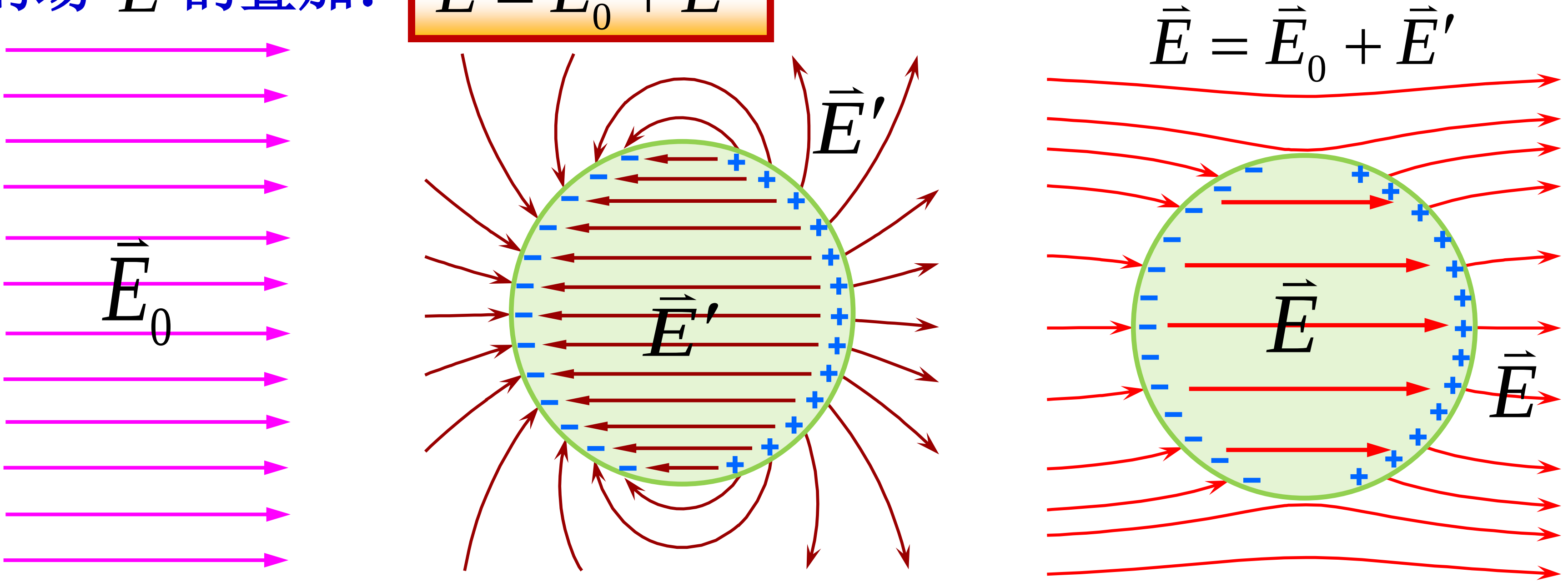
● 极化电荷所产生的极化电场不足以将介质中的外场完全抵消。

（导体中感应电荷的电场将完全抵消导体中的外电场。）



极化电荷的场

存在介质时，空间一点的实际电场为外电场 $\vec{E}_0$ 和极化电荷产生的场 $\vec{E}'$ 的叠加：$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'}$



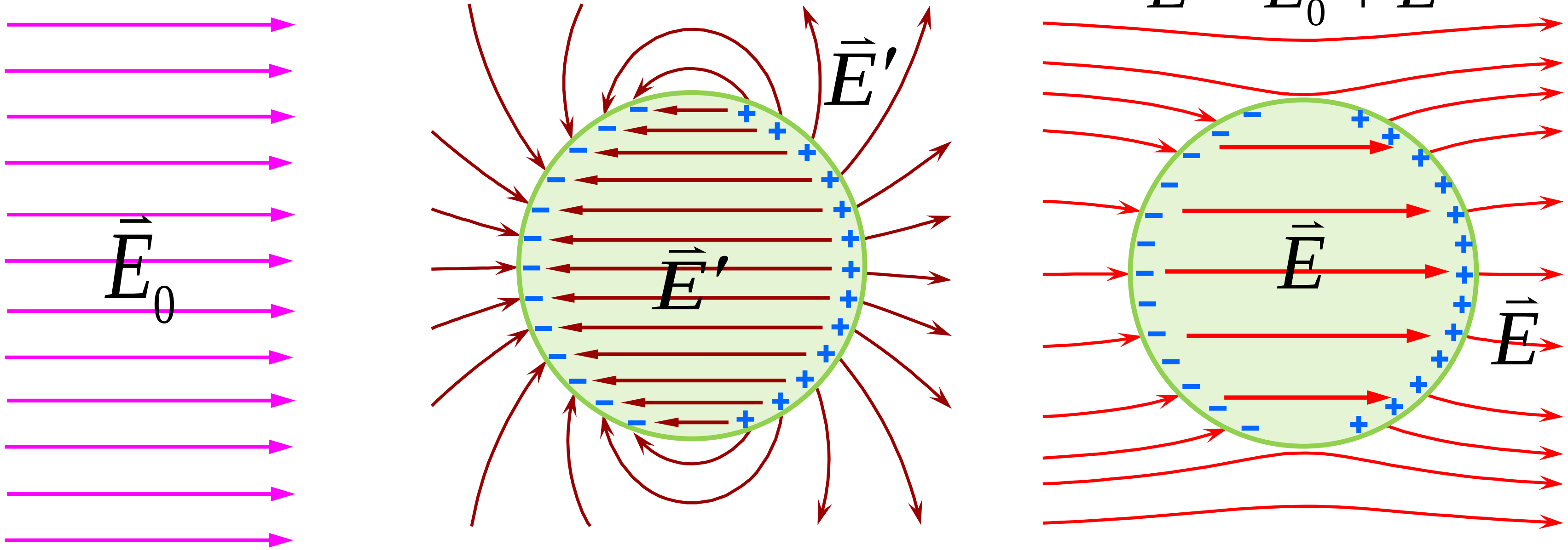
外场　　极化电荷场　　总场

● 极化电荷的场又称退极化场。理由是：

决定介质极化的不是外电场 $\vec{E}_0$，而是介质内的实际电场 $\vec{E}$ 。

$\vec{E}'$总是会削弱总场 $\vec{E}$，所以也总是起到减弱极化的作用，故称为退极化场。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

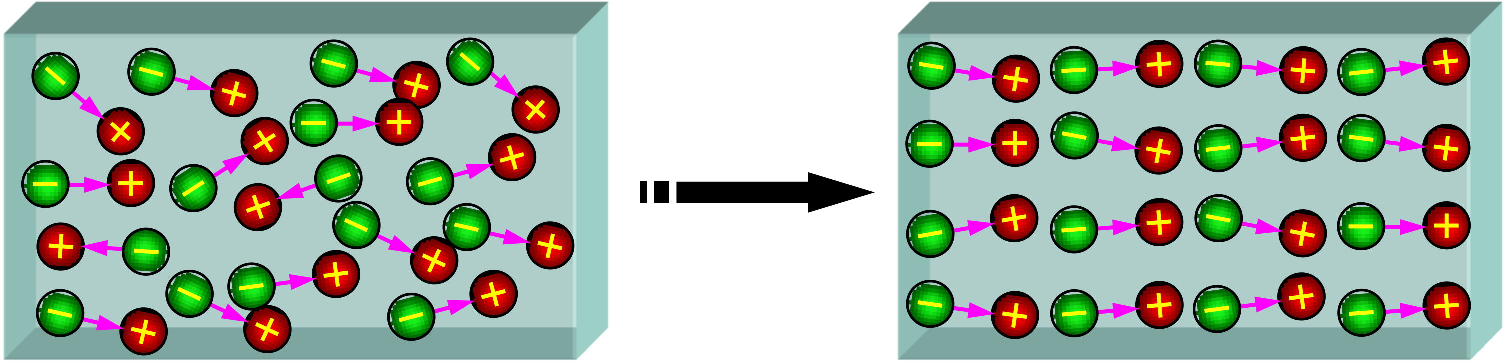


三、 电极化强度

定义：介质中某一点的电极化强度矢量等于该点附近单位体积中的分子电矩的矢量和：

$$\vec{P}=\frac{\sum\vec{p}}{\Delta V}$$

- 描述介质在电场中各点的极化程度和极化方向。



$\vec{E}_0=0,\ \sum\limits_{V}\vec{p}=0$ $\qquad$ $\vec{E}_0\neq 0,\ \sum\limits_{V}\vec{p}\neq 0$

$$\vec{P}=\frac{\sum\vec{p}}{\Delta V}$$

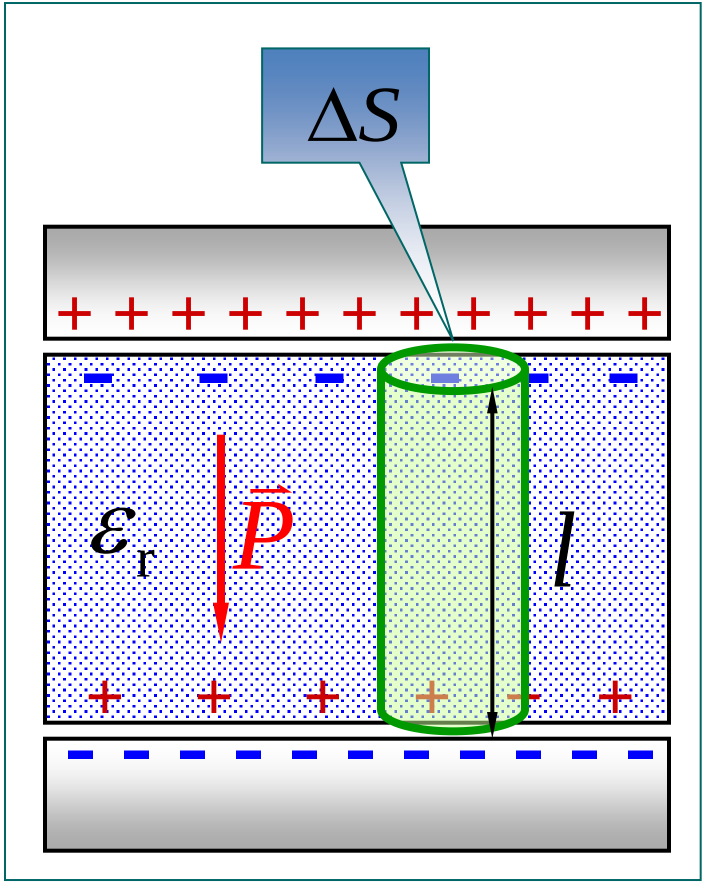
$\vec{p}$:分子的电偶极矩

$\vec{P}$:电极化强度

单位为 $\mathrm{C\cdot m^{-2}}$

$$P=\frac{\sum p}{\Delta V}=\frac{\sigma'\Delta Sl}{\Delta Sl}=\sigma'$$

表面极化电荷面密度



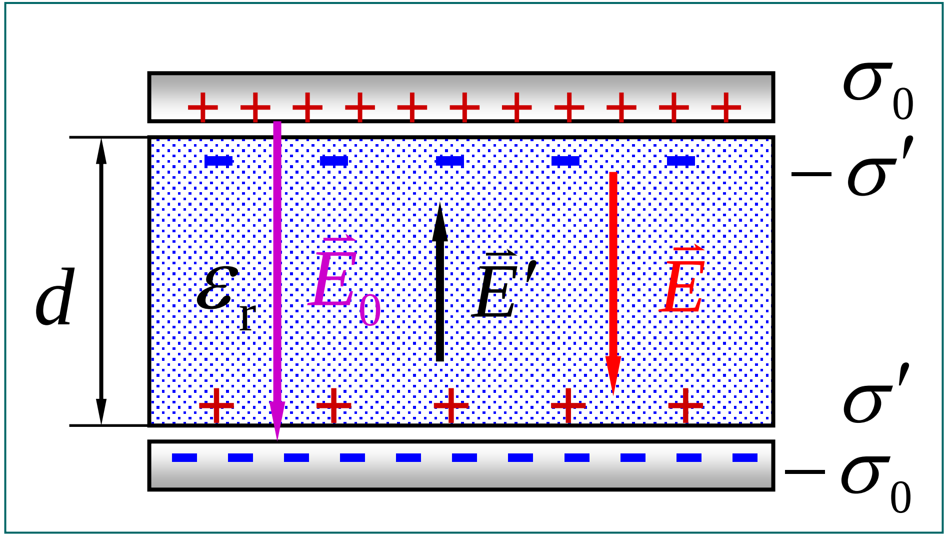
四、极化电荷与自由电荷的关系

$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$E' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} E_0$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0$$

$$Q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q_0$$



$$E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0$$

$$E' = \sigma' / \varepsilon_0$$

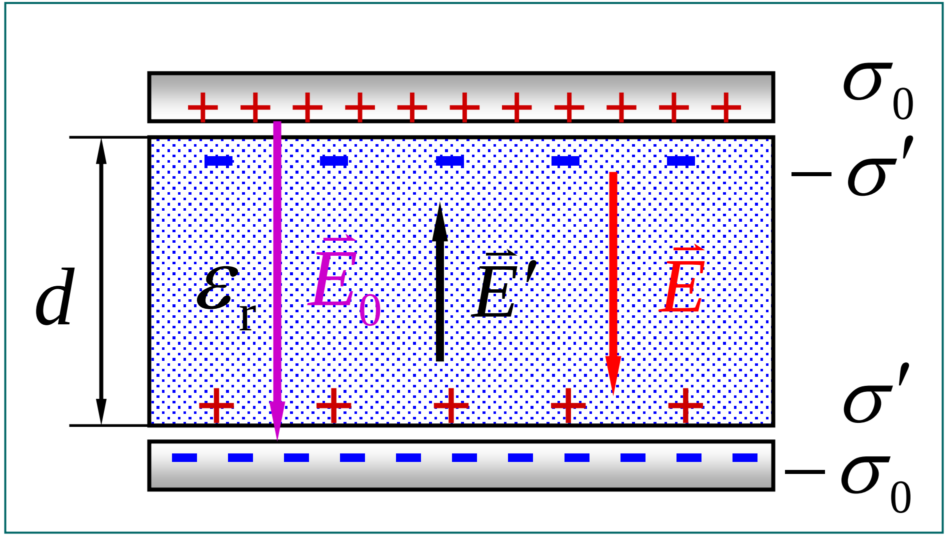
$$\sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_0$$

$$E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0$$

$$E = E_0 / \varepsilon_r$$

$$P = \sigma'$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$$



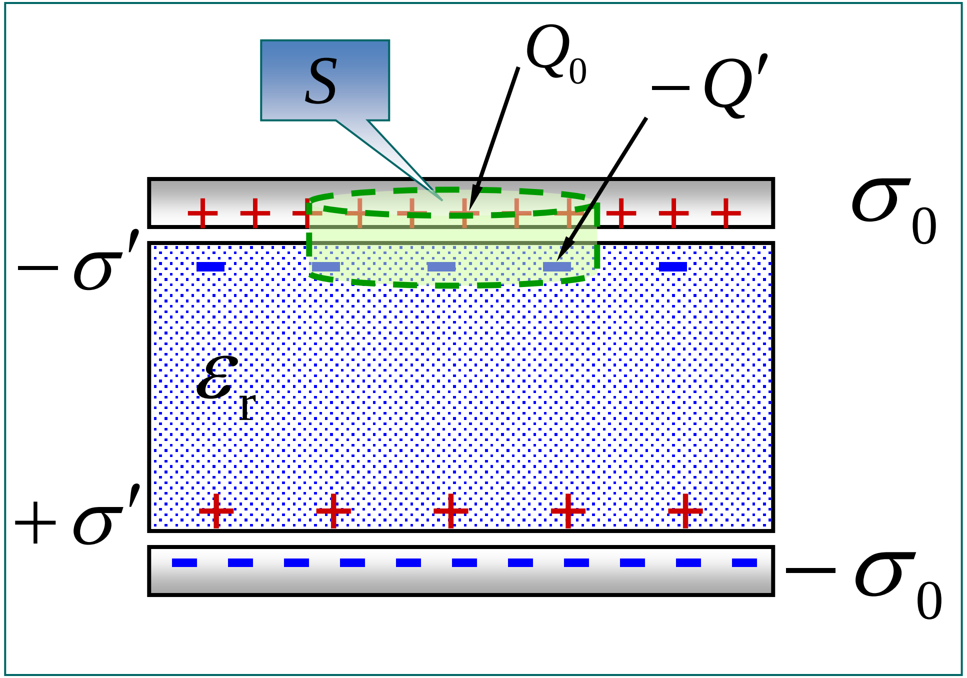
$\chi_e = \varepsilon_r - 1$ 电极化率 $\quad \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

6-3 电位移　有介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_0 - Q')$$

$$\because Q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q_0$$

$$\therefore \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$



电容率　$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$　　$\therefore \oint_S \varepsilon \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_0$

$$\oint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_0$$

电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_{\mathrm{r}} \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$ **单位：** $\mathrm{C \cdot m^{-2}}$

电位移通量 $\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

有介质时的高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} Q_{0i}}$$

通过任意**闭合曲面**的**电位移通量**等于这个闭合曲面所包围的**自由电荷**的代数和。

大量事实证明，**此定理在变化的电磁场中仍成立**。它是电磁学的基本规律之一。

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} Q_{0i}$$

讨论：$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$ $\quad \vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$

则 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

★$\vec{D}$是一个辅助矢量，电场的基本量是场强 $\vec{E}$。电位移矢量是在考虑电介质极化这个因素的情形下，被用来简化对电场规律的表述的。

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S (q_0 + q')$$

由自由电荷与极化电荷共同决定。

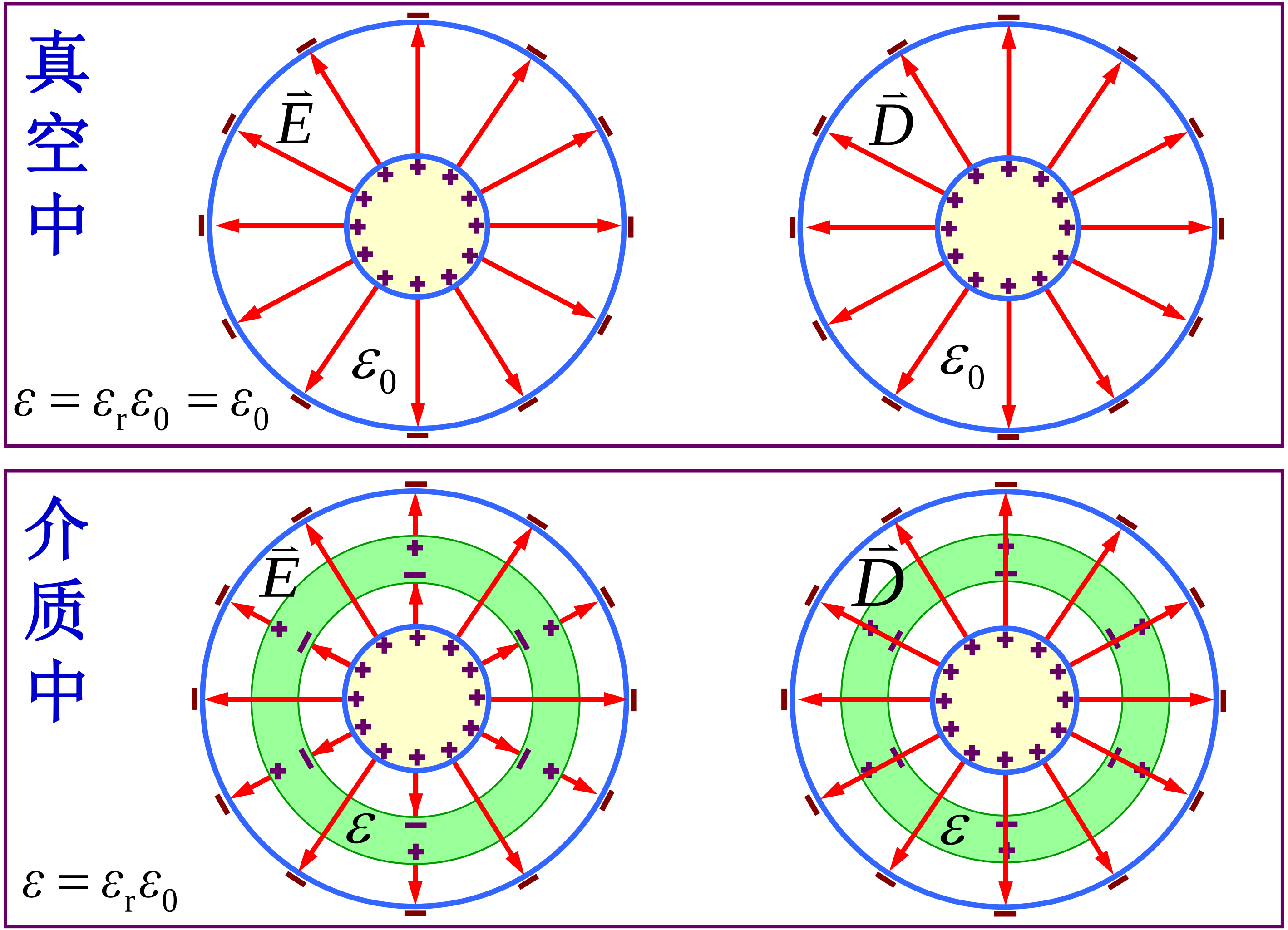
$$\Phi_D = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$$

仅由自由电荷决定，而与极化电荷无关。

- 尽管曲面上一点的电位移矢量是由空间中所有自由电荷和极化电荷共同决定的，但电位移矢量在闭合曲面上的通量却仅取决于曲面内部的自由电荷。
- 利用有电介质时的高斯定理可简化电场强度的计算：在有一定对称性的情况下，无需知道极化电荷分布，可以利用高斯定理，先求出电位移矢量，再利用电位移矢量和电场强度的关系求出电场强度。
- 静电场中电场线始于正电荷，止于负电荷，这与电荷是自由电荷还是束缚电荷无关。在有电介质存在的情况下，类比电场线定义电位移线，则电位移线是始于正自由电荷，止于负自由电荷。(或无穷远处)

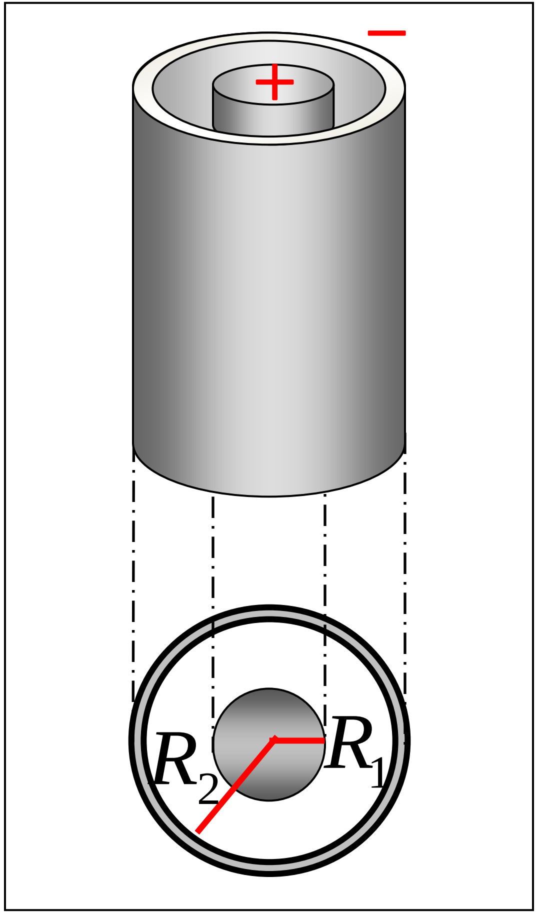
$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

真空中和介质中电位移线与电场线的比较：



例　图中是由半径为$\boldsymbol{R_1}$的长直圆柱导体和同轴的半径为$\boldsymbol{R_2}$的薄导体圆筒组成，其间充以相对电容率为ε_r的电介质。设直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为$+\lambda$和$-\lambda$。求

(1) 电介质中的电场强度、电位移和电极化强度的大小；(2) 电介质内外表面的极化电荷面密度。

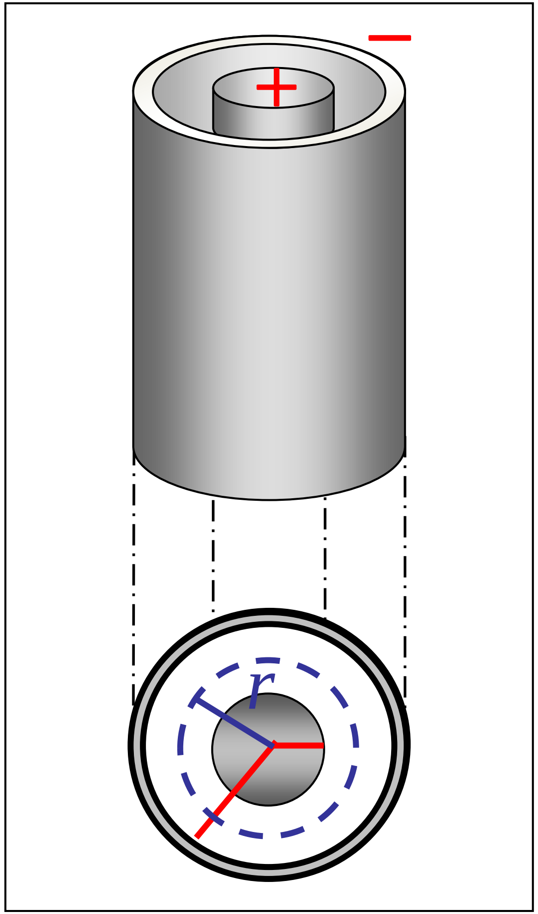


解:(1) $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \lambda l$

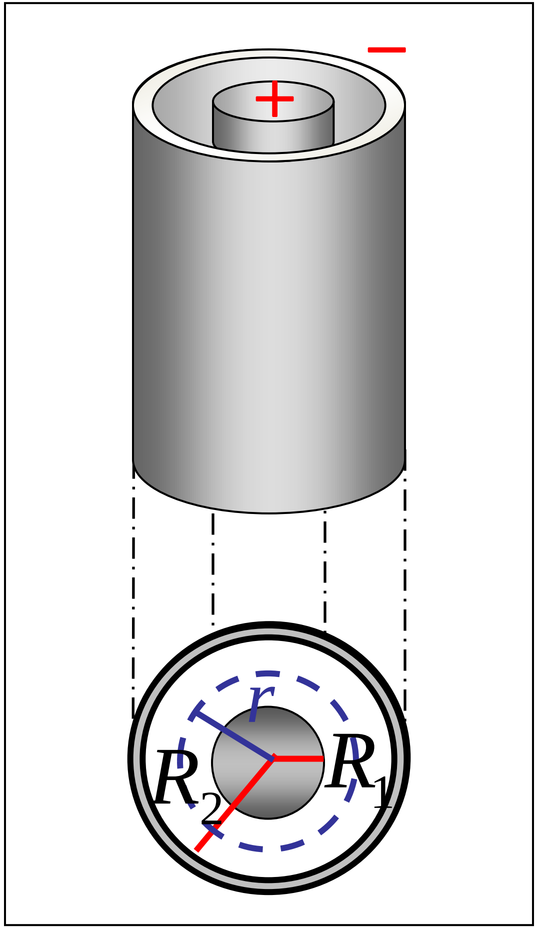
$$D\cdot 2\pi r l = \lambda l \qquad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

$$P = (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{2\pi\varepsilon_\mathrm{r} r}\lambda$$



(2) $$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$



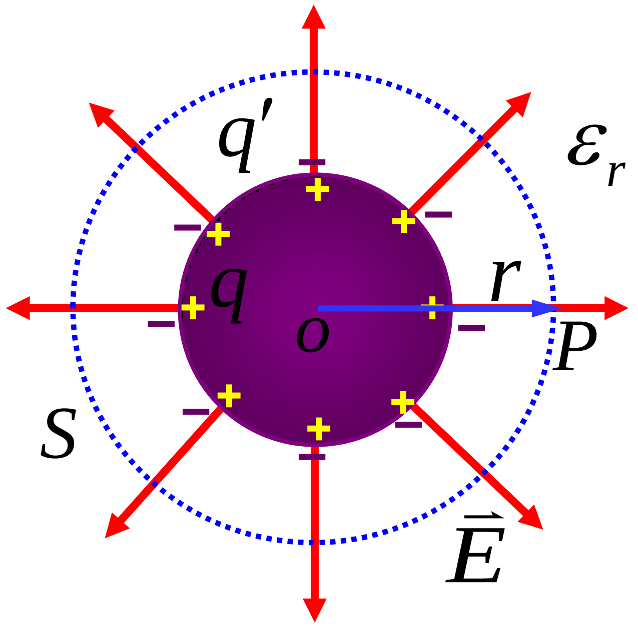
电介质表面处：

$$\begin{cases} E_1=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1} & (r=R_1) \\ E_2=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2} & (r=R_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1'=-(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_1=-\dfrac{(\varepsilon_r-1)\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_1} \\ \sigma_2'=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_2=\dfrac{(\varepsilon_r-1)\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_2} \end{cases}$$

例 一带电量为q的导体球壳，处于相对电容率为ε_r的无限大均匀介质中。求球外一点P的场强和电势。

解：根据对称性分析，有



$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot 4\pi r^2 = q$$

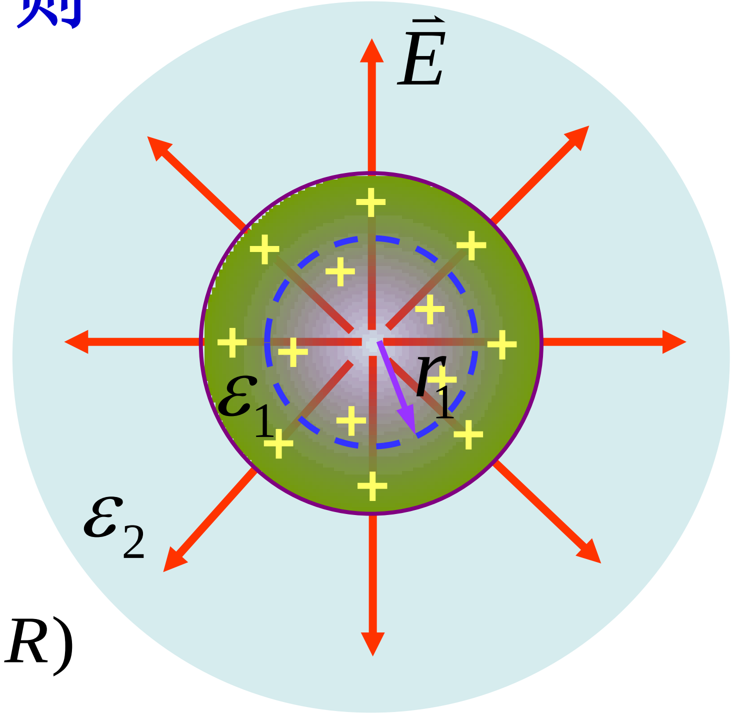
$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$$

$$V_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

例 电容率为ε_1的均匀带电球体其半径为R，电量为Q，球外介质的电容率为ε_2。求电场强度分布。

解：球内作半径为r_1的高斯面S_1，则



$$\oint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S_1} D_1 \mathrm{d}S = D_1 \oint_{S_1} \mathrm{d}S = \int_{V_1} \mathrm{d}q$$

$$\rightarrow D_1 \cdot 4\pi r^2 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\therefore D_1 = \frac{Q}{4\pi R^3} r \ (r < R)$$

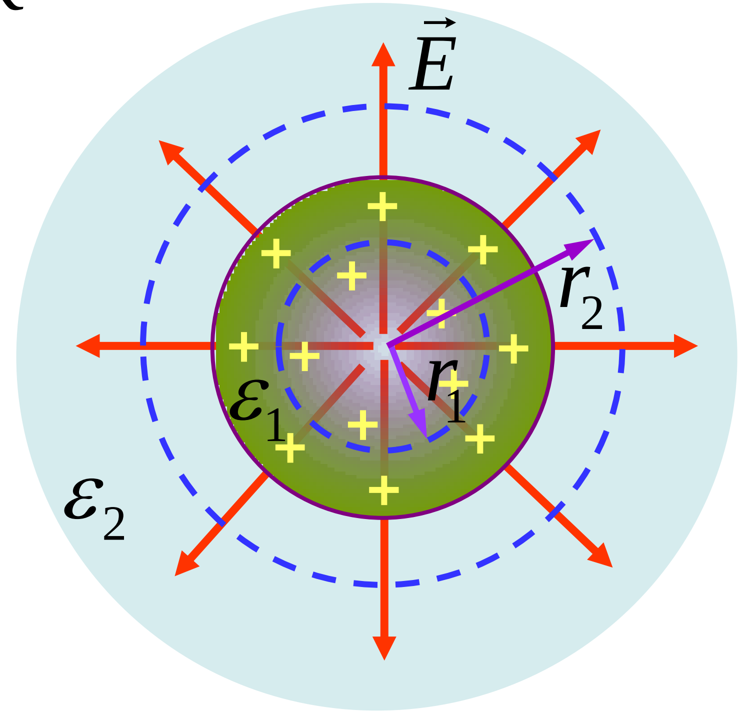
$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_1 R^3} r \ (r < R)$$

球外：作半径为r_2的高斯面S_2，则

$$\oint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S_2} D_2 \mathrm{d}S = D_2 \cdot 4\pi r^2 = Q$$

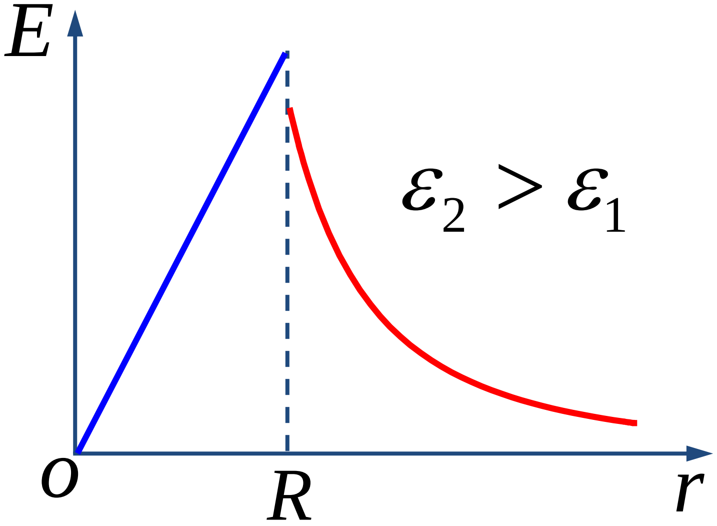
$$\therefore D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (r \geq R)$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \quad (r > R)$$

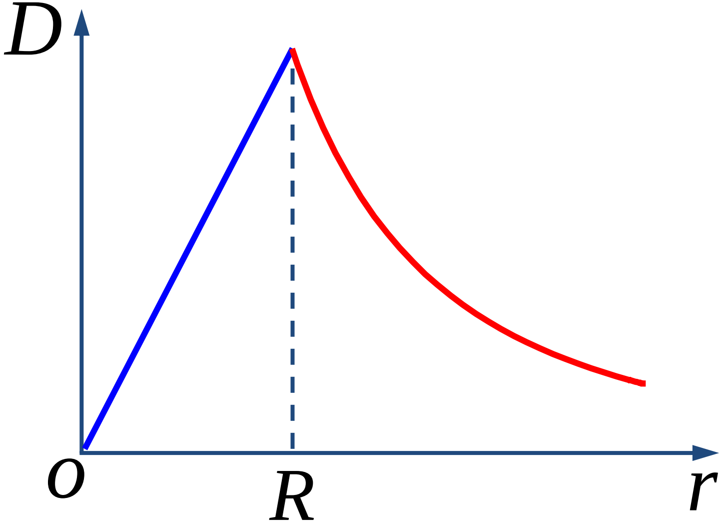


$$E=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 R^3}r & (r<R)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} & (r>R)\end{cases}$$

$$D=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi R^3}r & (r<R)\\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & (r\geq R)\end{cases}$$

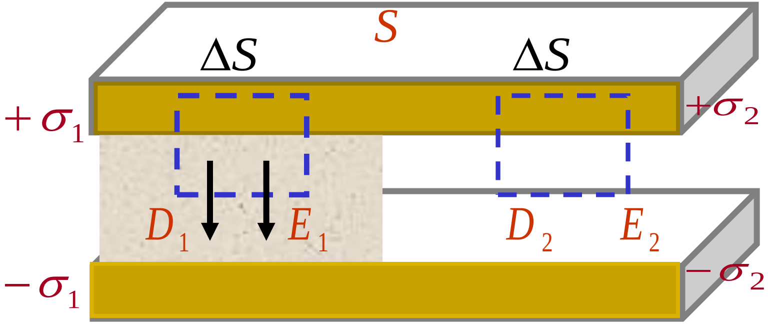


场强与*r* 的关系



电位移与*r* 的关系

例 两金属板间为真空，电荷面密度为 $\pm\sigma_0$，电压 $U_0=300V$。现保持电量不变，左半空间放入 $\varepsilon_r=5$ 的电介质，板间电压变为多少？



解：设金属板面积为S 间距为d

$$U=Ed,\qquad U_0=E_0d=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}d$$

$$\left.\begin{array}{l}U_1=E_1d,\\ \quad\| \\ U_2=E_2d\end{array}\right\}\Rightarrow E_1=E_2$$

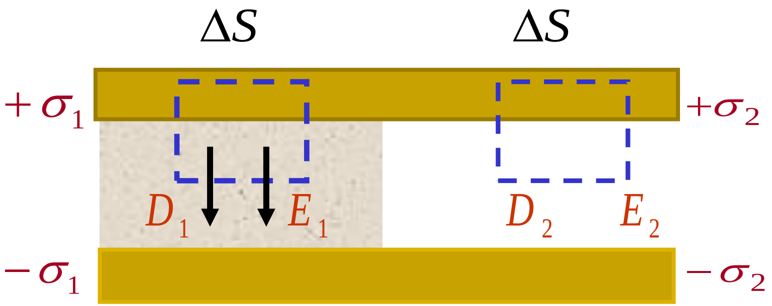
$$\oint_s\vec{D}_1\cdot d\vec{S}=D_1\Delta S=\sigma_1\Delta S,\qquad D_1=\sigma_1,\qquad E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

同理可得：

$$D_2=\sigma_2,\qquad E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\quad \sigma_2=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_r}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_r}$$



由电荷守恒定律：

$$\sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} = \sigma_0 S \qquad \therefore \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0$$

$$\sigma_1 = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\sigma_0 = \frac{5}{3}\sigma_0$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{1+\varepsilon_r}\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_0$$

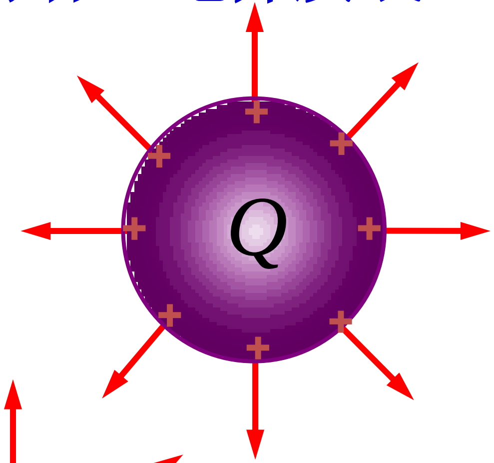
$$E = E_1 = E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{3}E_0$$

$$U = Ed = \frac{1}{3}E_0 d = 100V$$

6-4 电容 电容器

一、孤立导体的电容

孤立导体（理想模型）—其周围不存在其它导体、电介质或任意带电体。

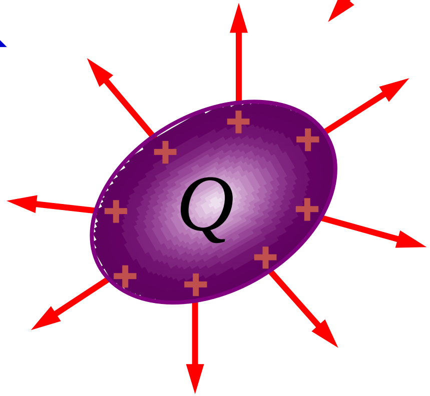


例：孤立导体球的电势 $V=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\propto Q$

但比值：$\dfrac{Q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$ 与Q无关。

实验证明，对任意形状孤立导体均有

$$\frac{Q}{V}=C$$



C是与Q，V无关的常量。

定义：孤立导体的电容

$$\boxed{C=\frac{Q}{V}}$$

物理意义：使导体升高单位电势所需的电量。

●电容反映的是导体容纳电荷的能力，仅由导体的几何形状、大小决定，而与导体带电的多少以及是否带电无关。

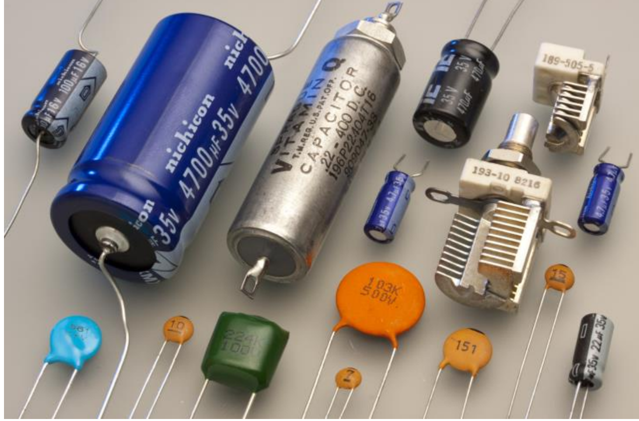
单位： $1\,\mathrm{F}=1\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{V}^{-1}$

$$1\,\mathrm{F}=10^{6}\,\mu\mathrm{F}=10^{12}\,\mathrm{pF}$$

球形孤立导体的电容 $C=\dfrac{Q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$

欲得到1F电容，半径 $R\approx 9\times10^{9}\ \mathrm{m}$

二、电容器



定义：能够带等量异号电荷的彼此绝缘的两个导体所组成的系统。

1 电容器的分类

按形状：柱型、球型、平行板电容器。

按型式：固定、可变、半可变电容器。

按介质：空气、塑料、云母、陶瓷等。

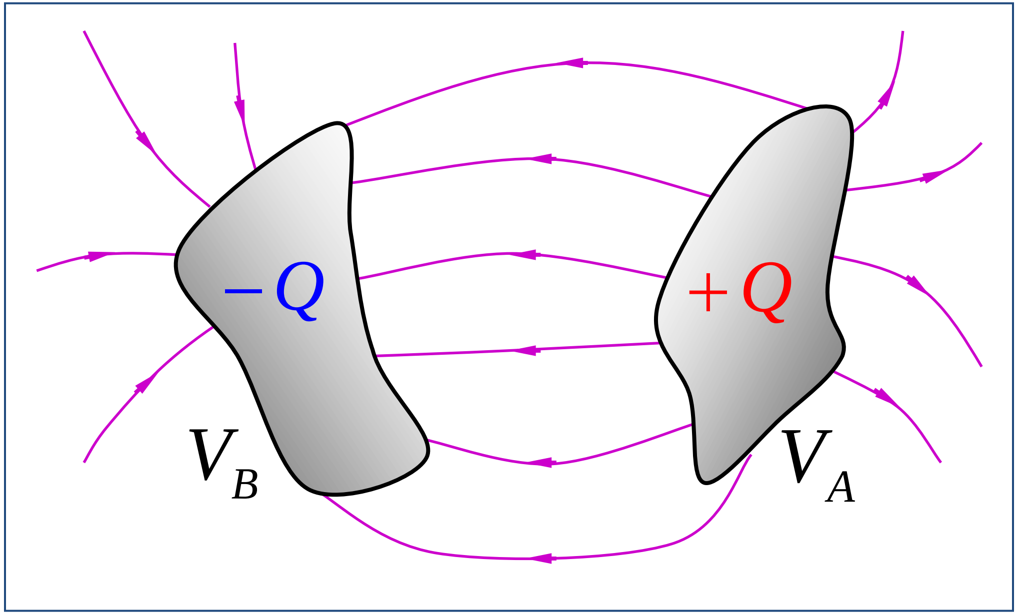
特点：非孤立导体，由两极板组成。

2 电容器的电容

电容器的电容为电容器一块极板所带电荷Q与两极板电势差 $V_A - V_B$ 的比值。

$$C=\frac{Q}{V_A-V_B}=\frac{Q}{U}$$

$$U=\int_{AB}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



注意

电容器的电容仅与导体的形状、相对位置、其间的电介质有关，与所带电荷量无关。

电容器的击穿

当电容器中电场强度增大到一定值时，电介质中的分子发生电离，使电介质失去绝缘性，电容器被击穿。

击穿电压 U_b 击穿场强 E_b

平行板电容器： $U_b = E_b d$

3 电容器电容的计算

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{U}$$

步骤：

（1）设两极板分别带电 $\pm Q$

（2）求两极板间的电场强度 $\vec{E}$

（3）求两极板间的电势差 U

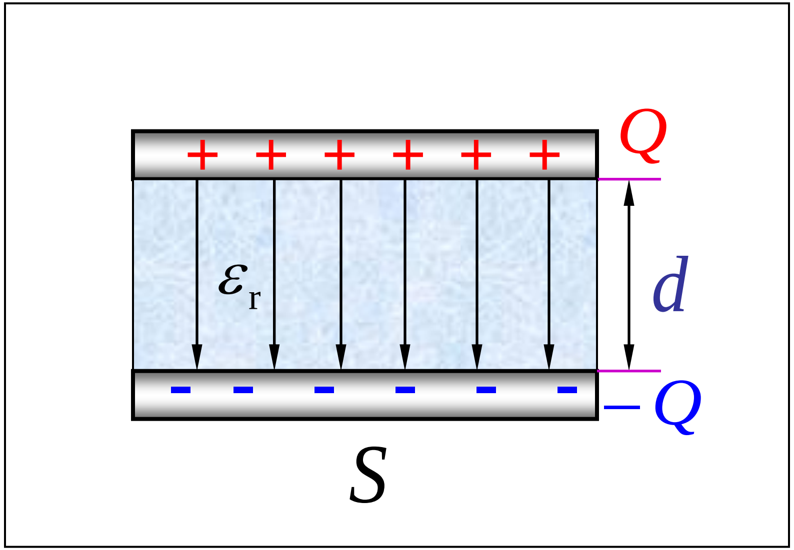
（4）由$C = Q/U$ 求 C

平行平板电容器：

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$U=Ed=\frac{Qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}}$$



圆柱形电容器:

设两圆柱面单位长度上分别带电±λ

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (R_A < r < R_B)$$

$$U = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda \mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{R_B}{R_A}$$

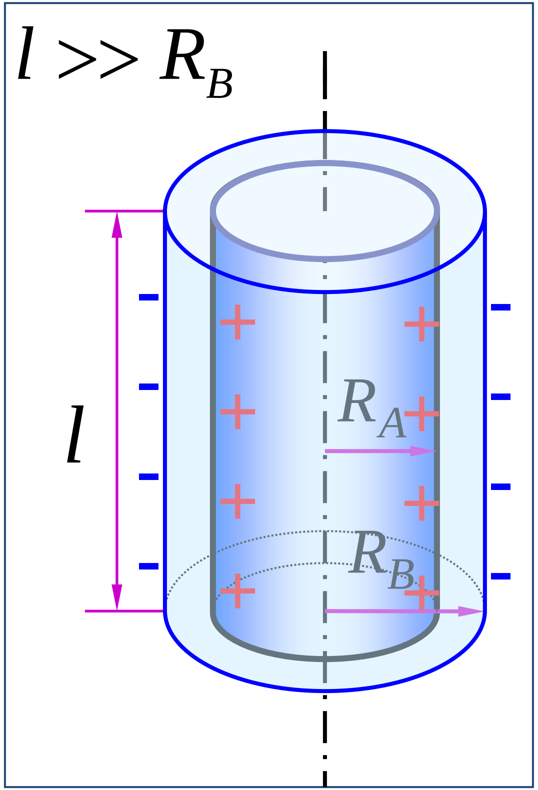
$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{R_B}{R_A}}}$$

$d = R_B - R_A << R_A$ 时

$$\ln\frac{R_B}{R_A} = \ln(1 + \frac{d}{R_A}) \approx \frac{d}{R_A}$$

等效于平行板电容器

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 l R_A}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



球形电容器的电容：

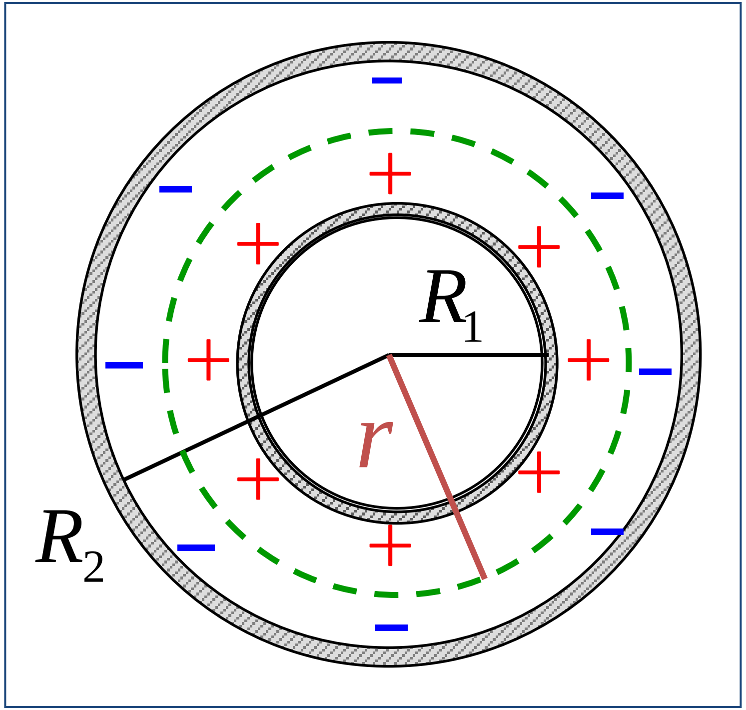
设内外球带分别带电±*Q*

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad(R_1<r<R_2)$$

$$U=\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

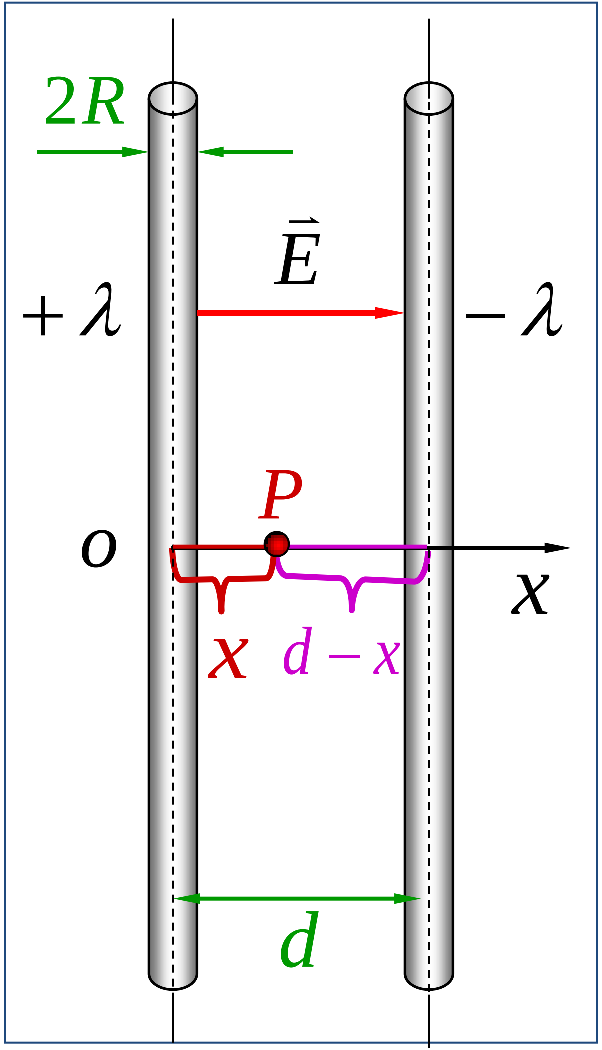
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$



$R_2\to\infty\qquad C=4\pi\varepsilon_0 R_1$ 孤立导体球电容

例 两半径为R的平行长直导线，中心间距为d，且$d>>R$，求单位长度的电容。



解：设两金属线的电荷线密度为$\pm\lambda$

$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}$$

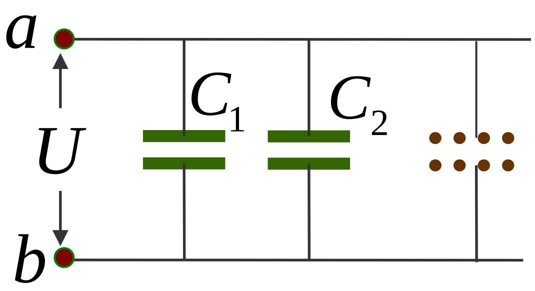
$$U = \int_R^{d-R} E\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_R^{d-R}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-R}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{R}$$

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{R}}$$

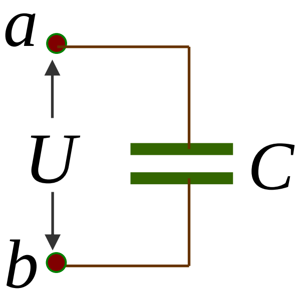
三、电容器的并联和串联

1 电容器的并联



$$U = U_1 = U_2 = \cdots$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$$

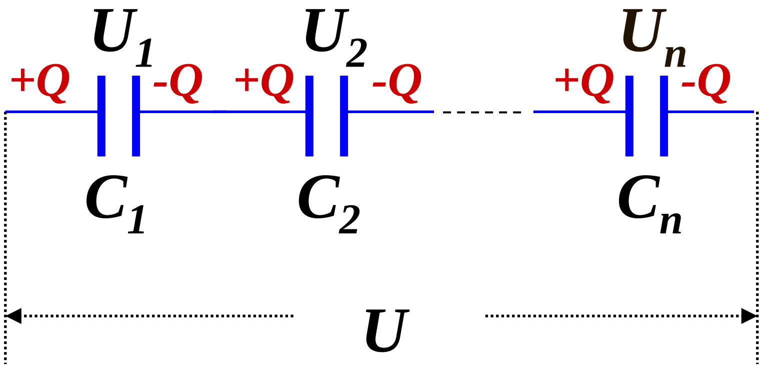


$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \cdots}{U} = C_1 + C_2 + \cdots$$

当几个电容器并联时，其等效电容等于这几个电容器电容之和。

$\boxed{\text{电容器并联时各电容器上的电压相等。}}$

2 电容器的串联



$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q$$

$$U = U_1 + U_2 + \cdots$$

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{U_1 + U_2 + \cdots}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots$$

串联电容器组等效电容的倒数等于电容器组中个电容倒数之和。

电容器串联时各电容器上所带的电荷是相等。

例 面积为S，极板间距为d的平板电容器，两极之间的电势差为ΔU。若两极间放一相同面积而厚度为t的均匀介质板（相对电容率为ε_r），求其电容C的大小。

解：极板A中电场为零，

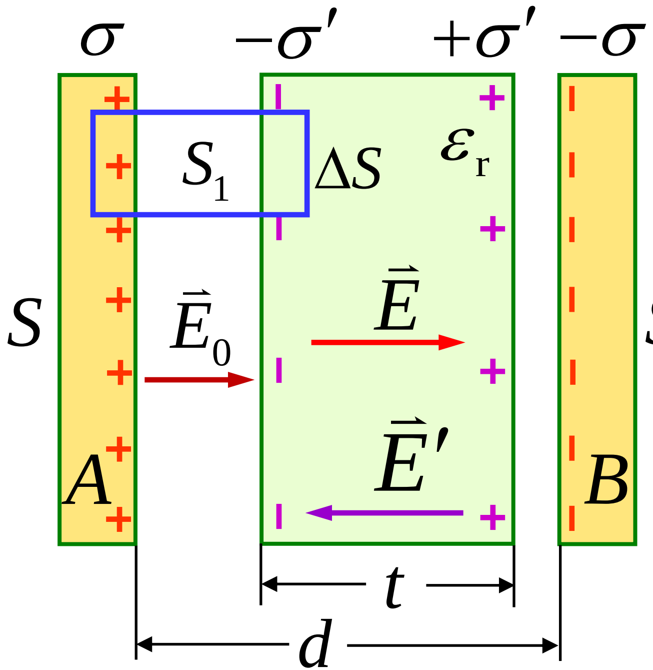
故对高斯面S_1有：

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\Delta S = \int dq = \sigma\Delta S$$

故在介质中 $D = \sigma = \dfrac{q}{S}$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon S}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

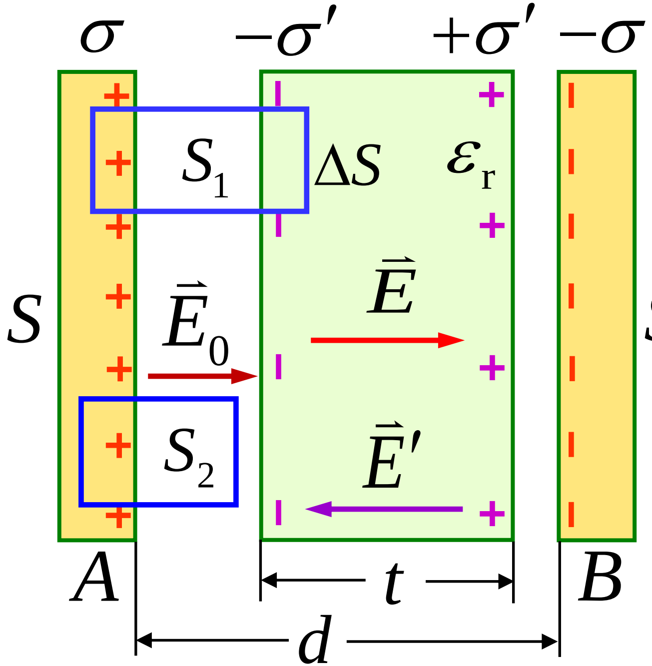


同理取S_2，得空气中

$$D_0 = \sigma = \frac{q}{S}$$

$$E_0 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{S\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon S}$$



两极板间的电势差

$$\Delta U = E_0(d-t) + Et$$

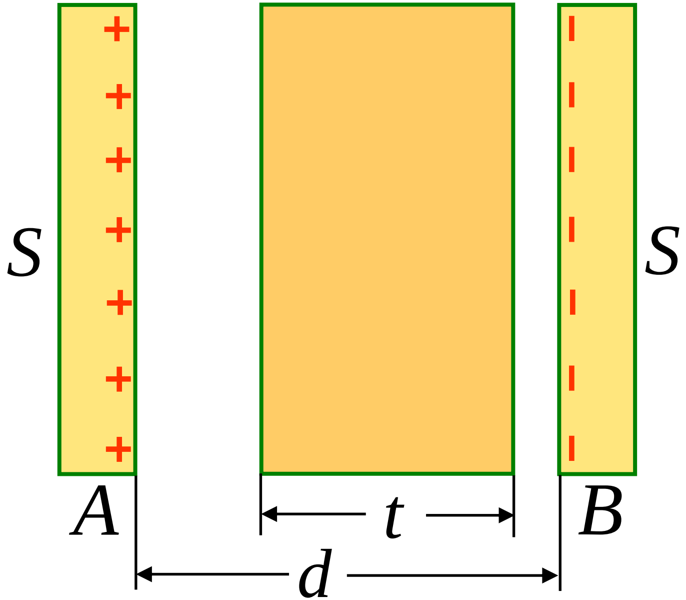
$$= \frac{q}{\varepsilon_0 S}(d-t) + \frac{q}{\varepsilon S}t = \frac{\varepsilon_r(d-t)+t}{\varepsilon}\frac{q}{S}$$

电容器的电容 $C = \dfrac{q}{\Delta U} = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r(d-t)+t}$

无玻璃板时：$C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

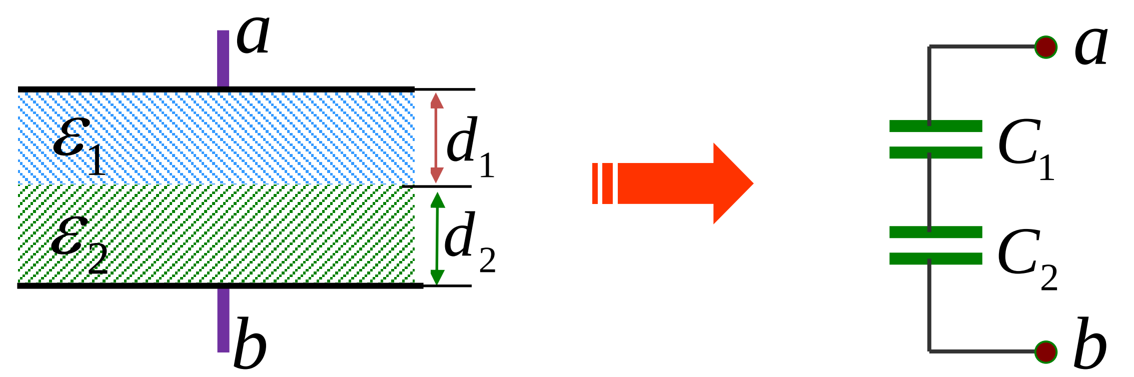
若两极间放一相同面积而厚度为*t*的均匀金属板，此时电容器的电容？

$$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - t}$$

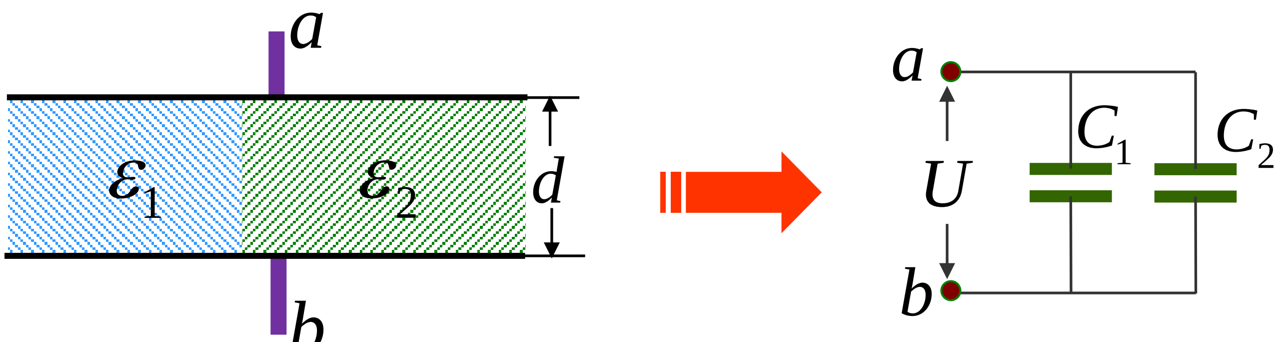


相当于两个电容器的串联

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



a
ε1
ε2
d1
d2
b
a
C1
C2
b



a
ε1
ε2
d
b
a
U
C1
C2
b

6-5 静电场的能量 能量密度

一、带电体系的能量

将电荷dq由a点移至无穷远点时电场力做功为

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}q(u_a - u_\infty) = u_a \mathrm{d}q \ (\text{设} u_\infty = 0)$$

而将dq由无穷远移至a点时需外力反抗电场力做功：

$$\mathrm{d}W = u_a \mathrm{d}q$$

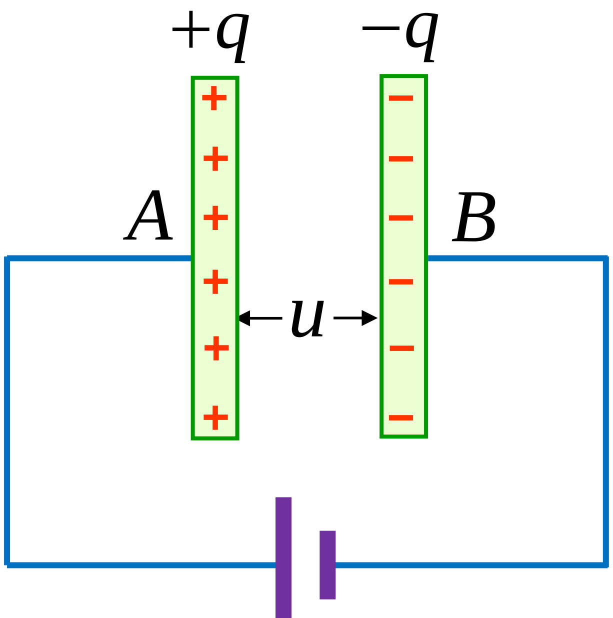
若不断地从无穷远处搬运dq到该带电体上，最终形成电量为Q的带电体时，外力所做总功为

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^Q u \mathrm{d}q$$

根据广义的功能原理，外力克服静电场力所做的功将全部转化为带电体的静电能，即 $W_e = W = \int \mathrm{d}W = \int_0^Q u\,\mathrm{d}q$

求平板电容器的静电能

◆电源搬运电荷做功，电容器静电能增加。充电完毕，两极间电势差为U，极板上电量为Q。



中间过程：设某时刻极板上的电量为q，两极间的电势差为u，此时再将dq从B板移至A板，电源做功：

$$\mathrm{d}W = u\,\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

充电完毕电源所做总功：

$$W=\int \mathrm{d}W=\int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

电源做功等于电容器贮存的电能：

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}UQ$$

可以证明：对任何结构的电容器，均有

$$\boxed{W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}UQ}$$

例 求带电Q，半径为R的导体球的静电能。

解： 当球带电q时，$u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$W_e=W=\int_0^Q u\mathrm{d}q$$

$$W_e=\int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}q$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q^2}{2C}$$

二、静电场的能量

问题：带电系统的能量究竟贮存在何处？

分析：一带电系统形成的过程，就是其相应电场建立的过程。所以从场的观点来看，带电体系的能量就是电场的能量。

- 静电系统的能量贮存在静电场中。

以平行板电容器为例：$W_e=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2V$

★这一结果对任何形状电容器均成立。 $V=Sd$

- 电容器的能量贮存在静电场中，即为静电场能。

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$$

电场的能量密度（单位体积电场内所具有的电场能量）

$$\boxed{w_e = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

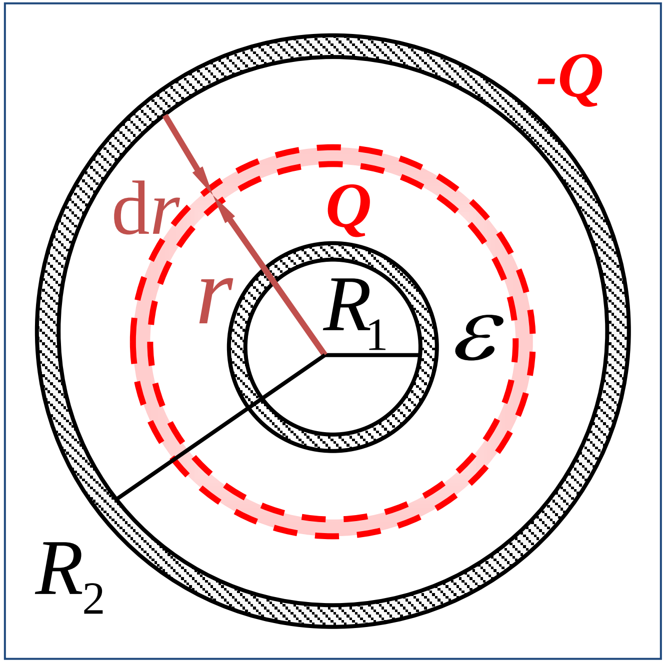
dV体积中的能量

$$\mathrm{d}W_e = w_e\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\varepsilon E^2\,\mathrm{d}V$$

整个空间V 中的电场能量

$$\boxed{W_e = \int_V w_e\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2\,\mathrm{d}V}$$

例 如图所示，球形电容器的内、外半径分别为R_1和R_2，所带电荷为$\pm Q$。若在两球壳间充以电容率为ε的电介质，问此电容器贮存的电场能量为多少？



解：球壳之间 $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q}{r^2}$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

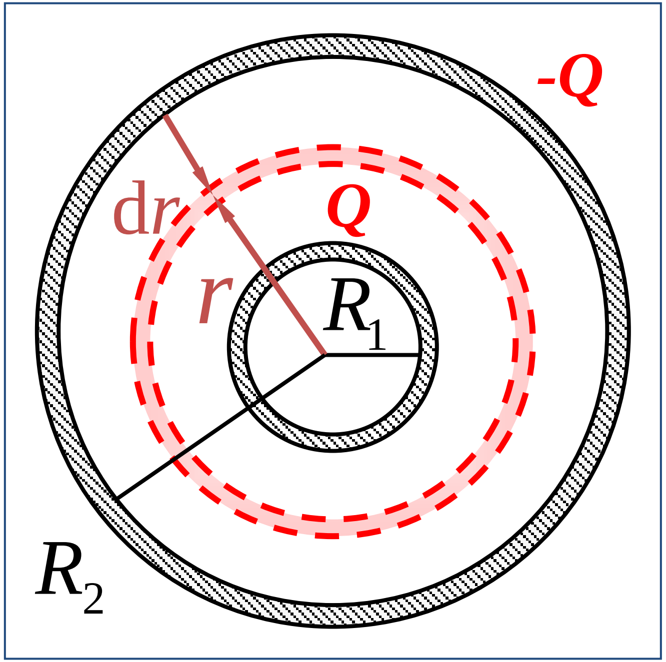
$$\mathrm{d}W_e = w_e \mathrm{d}V = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r$$

$$W_e = \int \mathrm{d}W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

讨论

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$



（1） $W_e = \dfrac{Q^2}{2\ C}$

$$C = 4\pi\varepsilon\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}$$

（球形电容器）

（2） $R_2 \to \infty$ $\quad W_e = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_1}$

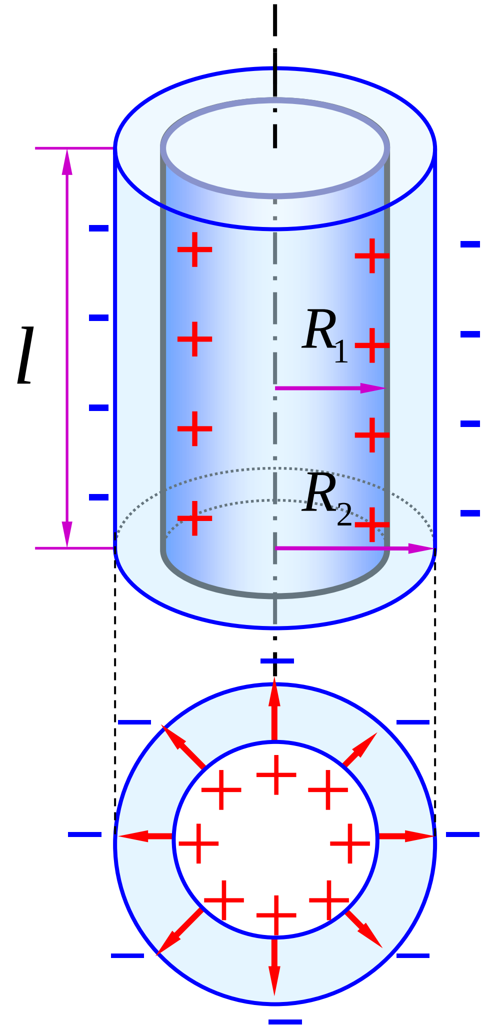
（孤立导体球）

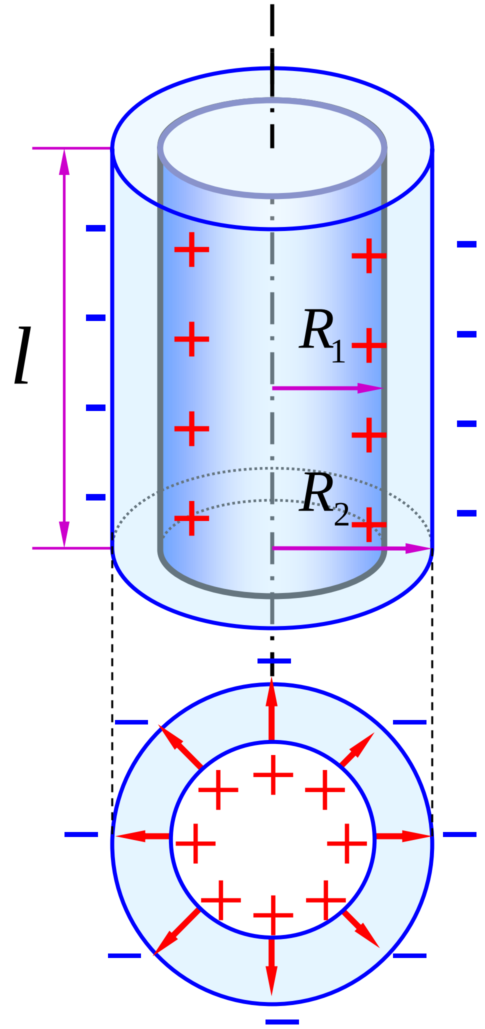
静电场能与电势能

- 如果某一空间具有静电场，那么该空间就具有静电场能；而电势能是属于电荷-电场系统的，电荷和电场缺一不可。因此静电场能与电势能是有区别的。

- 对于多个带电体组成的系统来说，其具有的总静电场能等于每个带电体单独存在时所具有的静电场能之和再加上各个带电体之间相互作用的电势能（可正可负）之和。

例 圆柱形空气电容器中，空气的击穿场强是$E_b=3\times10^6$ V m^{-1}，设导体圆筒的外半径$R_2=10^{-2}$ m 。在空气不被击穿的情况下，长圆柱导体的半径R_1取多大值可使电容器存储能量最多？





解： $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (R_1 < r < R_2)$

$$E_b = \frac{\lambda_{max}}{2\pi\varepsilon_0 R_1}$$

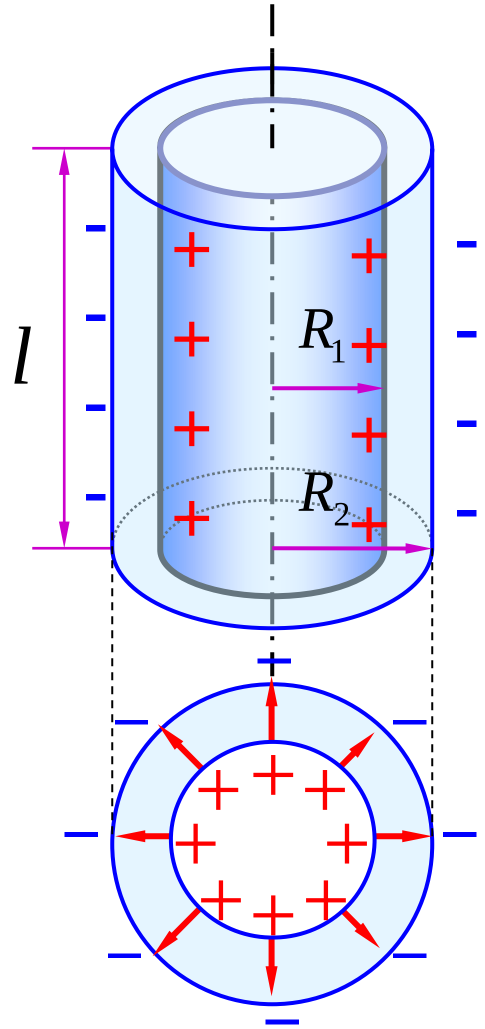
$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的电场能量：

$$W_e = \frac{1}{2}\lambda U = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\lambda = \lambda_{max} = 2\pi\varepsilon_0 E_b R_1$$

$$W_e = \pi\varepsilon_0 E_b^2 R_1^2 \ln\frac{R_2}{R_1}$$



$$W_e = \pi \varepsilon_0 E_b^2 R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}R_1} = \pi \varepsilon_0 E_b^2 R_1 (2\ln \frac{R_2}{R_1} - 1) = 0$$ 时W_e取极值

$$R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 6.07 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$U_{\max} = E_b R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{E_b R_2}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$$

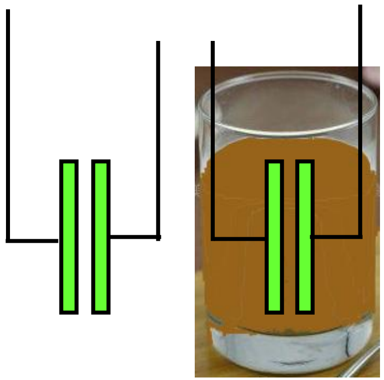
$$= 9.10 \times 10^3 \text{ V}$$

$E_b = 3\times10^6$ V·m^{-1}，
$R_2 = 10^{-2}$ m

例 两个相同的空气电容器，其电容都是0.90×10^{-9} F，都充电到电压各为900 V后断开电源。把其中之一浸入煤油（ε_r=2）中，然后把两个电容器并联。求：（1）浸入煤油过程中损失的静电场能；（2）并联过程中损失的静电场能。

解：（1）原先每个电容器的能量相等

$$W_1 = W_2 = \frac{1}{2}CU^2 = 3.645\times10^{-4}\ \mathrm{J}$$



将C_2浸入煤油中

$$C_2' = \varepsilon_r C_2 = 2C$$

$$W_2' = \frac{Q^2}{2C_2'} = \frac{Q^2}{4C} = \frac{1}{2}W_2$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}UQ}$$

浸入煤油过程中

损失的静电能：$\Delta W_2 = W_2 - W_2' = \frac{1}{2}W_2 = 1.8225\times10^{-4}$ J

$$W_1 = W_2 = \frac{1}{2}CU^2 = 3.645\times10^{-4}\,\text{J}$$

（2）并联后总电容 $C' = C_2' + C_1 = 3C$

电荷守恒，总电量为2Q，并联后的能量：

$$W' = \frac{(2Q)^2}{2C'} = \frac{4Q^2}{6C} = \frac{4}{3}W_1$$

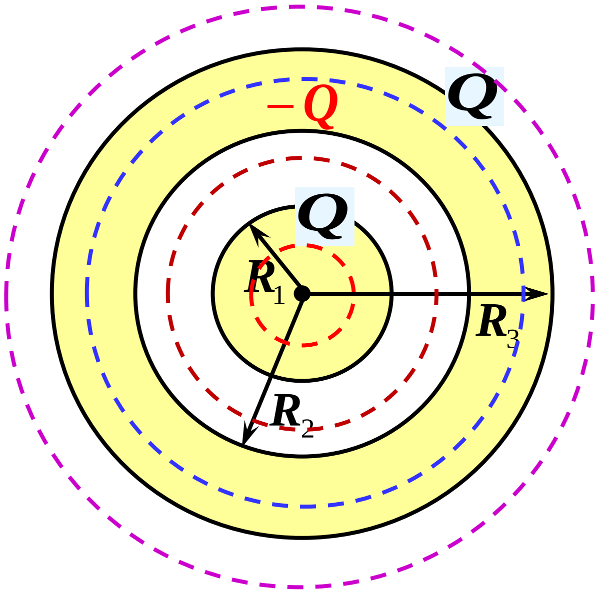
并联过程中损失的静电场能：

$$\Delta W' = W_1 + W_2' - W' = W_1 + \frac{1}{2}W_1 - \frac{4}{3}W_1 = \frac{1}{6}W_1 = 6.075\times10^{-5}\ \text{J}$$

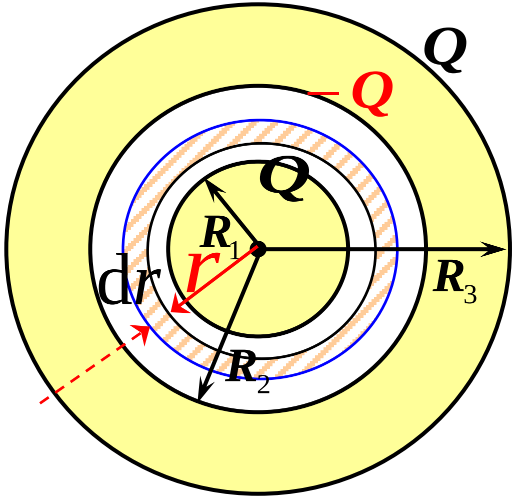
例　半径为2.0 cm的导体球，外套同心的导体球壳，壳的内、外半径分别为4.0 cm和5.0 cm，当内球的电荷量为3×10^{-8} C时，

（1）计算这个系统储存的静电能？

（2）如果用导线把内球与导体球壳连在一起，结果将如何？



解：（1）由高斯定理得



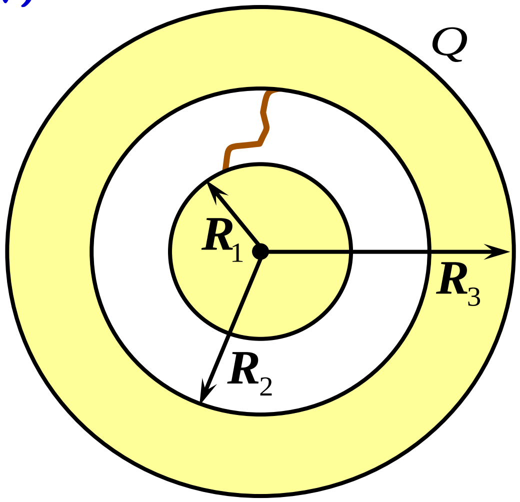
$$\begin{cases} E=0 & r<R_1 \\ E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_2>r>R_1 \\ E=0 & R_3>r>R_2 \\ E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3 \end{cases}$$

$$W=\int w\mathrm{d}V_{体}=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\mathrm{d}V_{体}=\int_0^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_{R_3}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\approx 1.8\times 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

（2）内外球相连后，电荷的分布如图所示，由高斯定理得



$$\begin{cases} E = 0 & r < R_3 \\ E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases}$$

$$W = \int_{体} w\mathrm{d}V = \int_{体} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

$$= \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2}\frac{1}{R_3} \approx 8.5\times 10^{-5}\ \mathrm{J}$$

作业题

教材后习题

6-1～6-5，6-7，6-8，6-10，6-11，6-12，6-15，6-16，6-18，6-19，6-22，6-23，6-24，6-27，6-28，6-29，6-30，6-34，6-35，6-37

共24道题