第二章 连续时间系统的时域分析

2.1 引言

为什么要进行系统的时域分析？

信号与系统分析最直接的方法就是在时域内进行，其突出特点是直观、物理概念明确，但计算过程较复杂。

信号 → 分解 → 系统 → 叠加 → 响应

对于已知的信号　　确定的系统　　如何得到系统响应?

1. 系统的数学模型如何建立？　　微分方程
2. 系统的响应如何分解？　　自由响应+强迫响应，零输入响应+零状态响应
3. 不同的响应如何求解？　　经典解法，卷积解法（近代解法）
4. 信号与系统如何应用？　　时域模拟框图 → 计算机求解

2.2 微分方程的建立与求解

2.2.1 微分方程的建立

目的：将系统的物理特性进行数学模型描述。

连续系统的数学模型：常系数 n 阶线性微分方程

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 r(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 e(t)$$

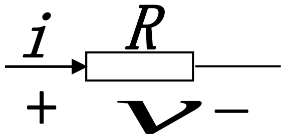
一旦系统数学模型建立，系统分析就转化为求解微分方程的问题 。

对于电路系统来说：有两方面约束特性，构成了其数学模型

元件约束特性 → 网络拓扑约束特性 → 微分方程

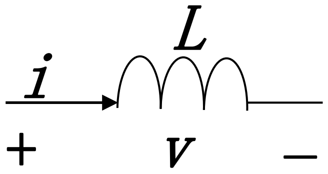
1) 元件约束特性

i) 电阻 R:



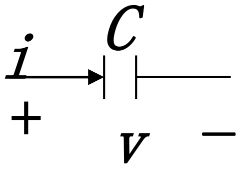
$$v = Ri$$

ii) 电感 L:



$$i = \frac{1}{L}\int v\mathrm{d}t \qquad v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

iii) 电容 C:



$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad v = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

2) 网络拓扑约束特性：各电路电流、电压的约束关系（即电路定律 KCL、KVL）

基尔霍夫电流定律（KCL）：在任一瞬时，流向某一结点的电流之和恒等于该结点流出电流之和，即：

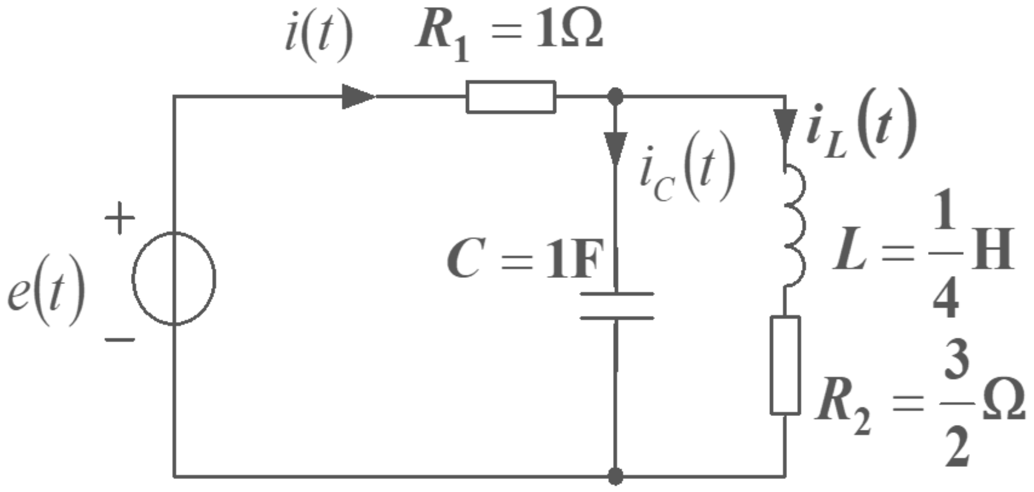
$$\sum I_{入} = \sum I_{出}$$

基尔霍夫电压定律（KVL）：在任一瞬间，沿电路中的任一回路绕行一周，在该回路上电动势之和恒等于各元件上的电压降之和，即：

$$\sum \mathrm{U}_{电压升} = \sum \mathrm{U}_{电压降}$$

2.2.1 微分方程的建立

给定如图所示电路，建立电流 $i(t)$ 的微分方程。



解： 根据电路形式，列回路电压方程

$$R_1 i(t) + v_C(t) = e(t) \qquad (1)$$

$$v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) + i_L(t) R_2 \qquad (2)$$

列结点电流方程

$$i(t) = C\frac{d}{dt} v_C(t) + i_L(t) \qquad (3)$$

难点：如何将三个联立的微分方程变换为一个表征输入为$e(t)$、输出为$i(t)$的微分方程？

2.2.2 经典法求解微分方程

对于复杂系统，激励信号$x(t)$与响应函数$y(t)$之间的关系，可用下列形式的**常系数一元 *n* 阶线性微分方程**来描述

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0 x(t)$$

此方程的完全解由齐次解（自由响应或固有响应）和特解（强迫响应）两部分组成。

齐次解应满足

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=0$$

2.2.2 经典法求解微分方程

齐次解特征方程为

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

特征根α_1... α_n是系统的“固有频率”。

1）特征根无重根，则微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}$$

2）特征根有重根，假设α_1是特征方程的K重根，那么，在齐次解中对应于α_1的部分将有K项

$$(A_1 t^{K-1} + A_2 t^{K-2} + \ldots + A_{K-1} t + A_K)e^{\alpha_1 t}$$

3）若α_1、α_2为共轭复根，即$\alpha_{1,2} = \alpha \pm j\beta$，那么，在齐次解中对应于$\alpha_1$、$\alpha_2$的部分为

$$e^{\alpha t}(A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t)$$

注意：这里只得到齐次解的形式，系数还未知！

2.2.2 经典法求解微分方程

特解的函数形式与激励的函数形式有关。**将激励信号代入微分方程的右端得到的函数式称为“自由项”。**通常观察自由项，**查表选特解函数式，将其代入方程后求得特解函数式中的待定系数**，即可求出特解。

自由项	特解
E (常数)	B (常数)
t^p	$B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \ldots + B_1 t + B_0$
$e^{\alpha t}$	$\begin{cases} Be^{\alpha t} & (\alpha\text{不是特征根}) \\ Bte^{\alpha t} & (\alpha\text{是单特征根}) \\ Bt^2 e^{\alpha t} & (\alpha\text{是二重特征根}) \end{cases}$
$\begin{cases} \cos\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t \end{cases}$	$B_1\cos\omega_0 t + B_2 \sin\omega_0 t$

时域经典法分析电路系统的流程

优点： 物理意义清楚；
缺点： 过程复杂。

1. 根据基尔霍夫定律列写电路的微分方程

2. 将联立的微分方程化为一元微分方程

3. 求齐次解（系数待定）

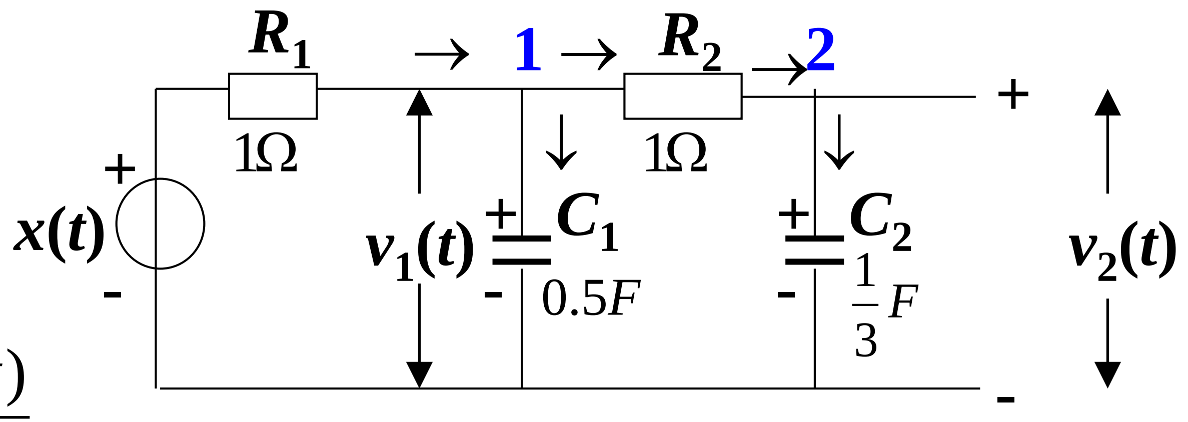
4. 查表求特解

5. 完全解 = 齐次解 + 特解, 将完全解代入微分方程求齐次解的系数

初始状态

6. 已定系数的完全解—系统的全响应

例2-2： 如下图所示电路，已知激励信号$x(t)=\cos(2t)u(t)$, 两个电容上的初始电压均为零，求响应信号$v_2(t)$的表达式。



解:

（a）列写微分方程式为

$$\begin{cases} \text{结点1:}\quad \dfrac{x(t)-v_1(t)}{R_1} = C_1\dfrac{dv_1(t)}{dt} + \dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2} & (1) \\ \text{结点2:}\quad \dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2} = C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt} & (2) \end{cases}$$

由（2）可得 $v_1(t)=R_2C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt}+v_2(t)$ (3)

将（3）代入（1）可得 $\dfrac{d^2v_2(t)}{dt^2}+7\dfrac{dv_2(t)}{dt}+6v_2(t)=6\cos 2t\,u(t)$

（b）为求**齐次解**，写出特征方程 $\alpha^2+7\alpha+6=0$

特征根 $\alpha_1=-1,\alpha_2=-6$

齐次解 $A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}$ （A_1、A_2待定）

（c）查表，得**特解**为 $B_1\sin 2t+B_2\cos 2t$

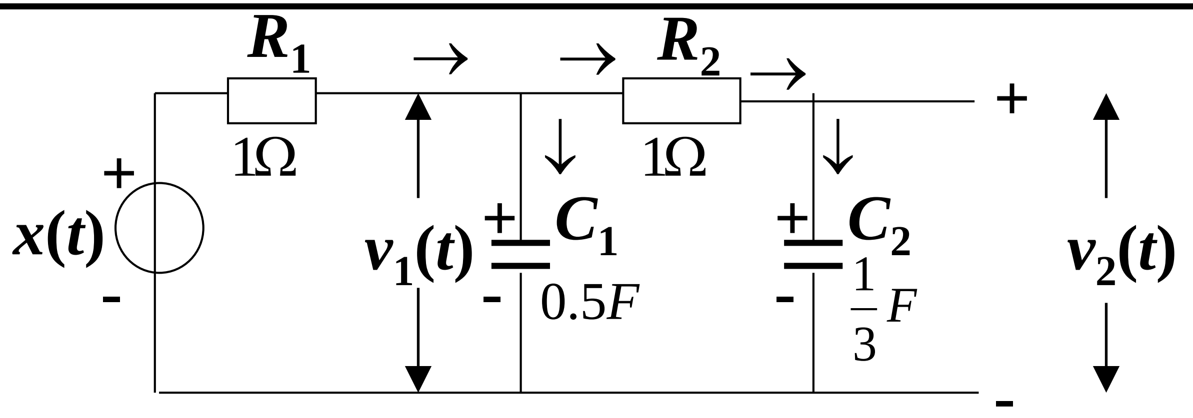
代入原方程左边得 $(2B_1-14B_2)\sin 2t+(14B_1+2B_2)\cos 2t=6\cos 2t$

比较上述方程两边系数，得 $\begin{cases}2B_1-14B_2=0\\14B_1+2B_2=6\end{cases}\longrightarrow B_1=\dfrac{21}{50},B_2=\dfrac{3}{50}$

（d）**完全解**为（A_1、A_2待定）

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t \qquad (4)$$

（e）由初始状态确定系数A: 由于C_2初始端电压为0，在t=0加入激励时C_2电压不突变，即$v_2(0)=0$; 又因为电容C_1初始端电压为0，在t=0加入激励时C_1电压不突变，R_2、C_2两端的电压也不突变，于是通过R_2、C_2的初始电流也为0，即 $\dfrac{dv_2(0)}{dt}=0$ 。



$x(t)=\cos(2t)u(t)$

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-6A_2e^{-6t}+\frac{21}{25}\cos 2t-\frac{3}{25}\sin 2t$$

由$v_2(0)=0$得到 $A_1+A_2=-\dfrac{3}{50}$

由$\dfrac{dv_2(0)}{dt}=0$得到 $A_1+6A_2=\dfrac{21}{25}$

解得 $A_1=-\dfrac{6}{25},A_2=\dfrac{9}{50}$

$$v_2(t)=-\frac{6}{25}e^{-t}+\frac{9}{50}e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin(2t)+\frac{3}{50}\cos(2t)\quad \underline{(t\ge 0)}$$

完全响应的分解：
$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}\mathrm{e}^{-t} + \frac{9}{50}\mathrm{e}^{-6t}}_{\text{自由响应（齐次解）}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{强迫响应（特解）}}$$

- 当输入信号为阶跃信号或有始周期信号时，稳定系统的全响应可分为暂态响应和稳态响应。暂态响应是指激励接入后，全响应中暂时出现的响应，随时间增长逐渐消失，稳态响应通常由阶跃函数和周期函数组成。

$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}\mathrm{e}^{-t} + \frac{9}{50}\mathrm{e}^{-6t}}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{稳态响应}}$$

总结：经典法求解微分方程

基本原理——线性叠加：微分方程的完全解=齐次解+特解　$r(t)=r_h(t)+r_p(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}+\cdots+A_ne^{\alpha_n t}+r_p(t)$

一般步骤：

1）根据电路图列微分方程，建立输入 $e(t)$ 和输出 $r(t)$ 的数学关系；

2）求齐次解 $r_h(t)$ 的形式：列特征方程，求特征根，获得齐次解的形式，系数待定；

3）求特解 $r_p(t)$：与激励信号 $e(t)$ 的形式有关，查表，得到特解形式，代入原方程平衡系数，求得特解；

4）求完全解 $r(t)$：代入初始条件 $0+$，获得齐次解系数，得到最终的完全解。

结论：齐次解(自由响应)的函数特性仅依赖于系统本身特性，与激励信号的函数形式无关，但确定系数有关；而特解(强迫响应)的形式由激励函数决定。

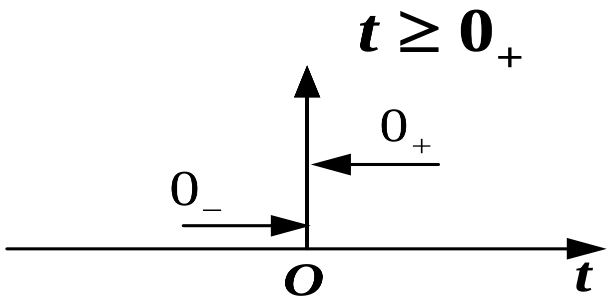
2.3 起始点的跳变——从 0- 到 0+状态的转换

在系统分析问题中，初始条件要根据激励接入瞬时**系统的状态**决定。

系统在t_0时的状态是一组必须知道的**最少数据量**，根据这组数据、系统的数学模型以及t_0时接入的激励信号，就能够完全确定在t_0以后任意时刻的响应。***n*阶微分方程的状态是响应的0—(*n*-1)阶导数。** （详见第十二章）

0_-状态，**起始状态**（激励接入之前的瞬间）

$$r^{(k)}(0_-)=\left[r(0_-),\frac{\mathrm{d}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$



0_+状态，**初始条件**，导出的起始状态（激励接入之后的瞬间）

$$r^{(k)}(0_+)=\left[r(0_+),\frac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$

用时域经典法求得的微分方程的解在$t\geq 0_+$的时间范围内，因而不能以0_-状态作为初始条件，而应以0_+状态作为初始条件。

对于具体的电网络，系统的 $0\_$ 状态就是系统中储能元件的储能情况。

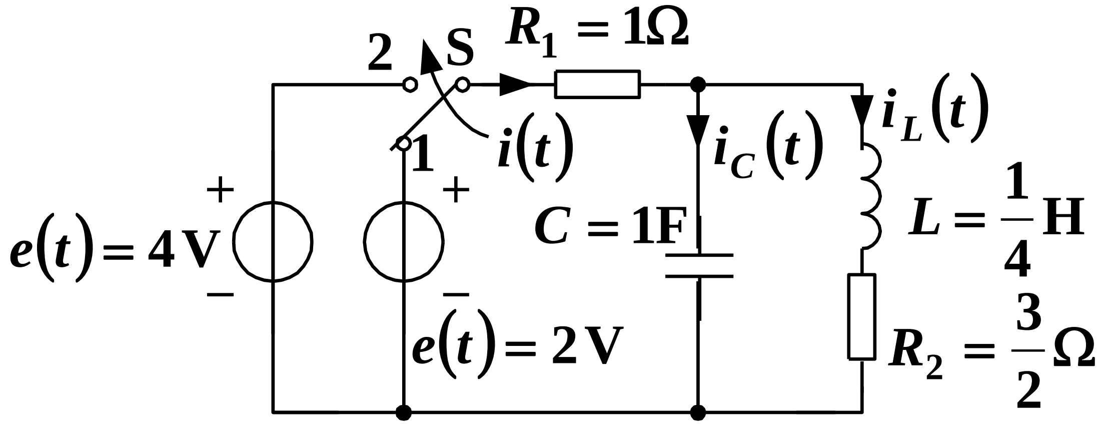
一般情况下，换路期间，电容两端的电压 和 流过电感中的电流 不会发生突变。

这就是在电路分析中的换路定则：$v_C(0_-)=v_C(0_+)$，$i_L(0_-)=i_L(0_+)$

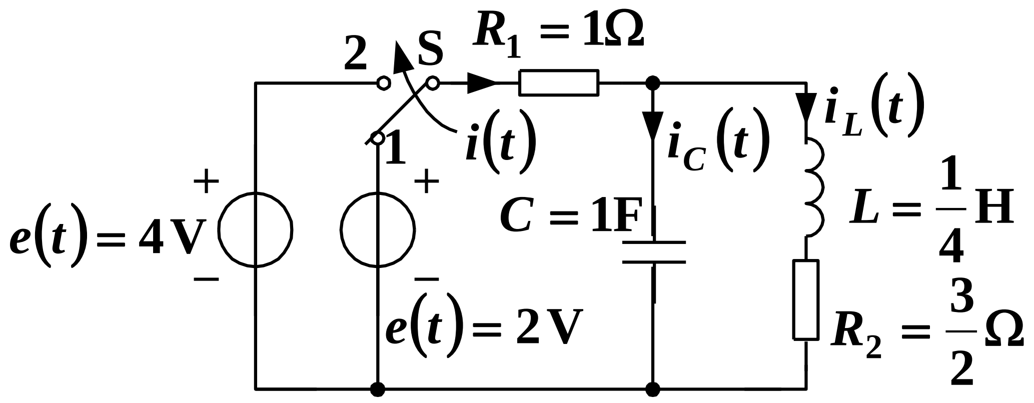
仅当有冲激电流强迫作用于电容 或 有冲激电压强迫作用于电感，$0\_$ 到 0_+ 状态才会发生跳变。

重点和难点：如何确定从 0_- 到 0_+ 状态的跳变量？

例2-4： 给定如图所示电路，$t<0$ 开关 S 处于 1 的位置而且已经达到稳态。当 $t=0$ 时由 1 转向 2。建立电流 $i(t)$ 的微分方程并分析 $i(t)$ 在 $t\geq 0$ 时的变化，求 $i(t)$ 的全响应 。



解： （1）列写电路的微分方程



根据电路形式，列回路方程 $R_1 i(t) + v_C(t) = e(t)$

列回路电压方程 $v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) + i_L(t) R_2$

列结点电流方程 $i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_C(t) + i_L(t)$

消去变量 $v_C(t)$、$i_L(t)$，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} i(t) + 7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) + 10 i(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} e(t) + 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t) + 4e(t) \qquad (1)$$

(2) 求系统的完全响应 系统的特征方程 $\alpha^2 + 7\alpha + 10 = 0$ 即 $(\alpha + 2)(\alpha + 5) = 0$

特征根 $\alpha_1 = -2,\quad \alpha_2 = -5$ 齐次解 $i_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t}$

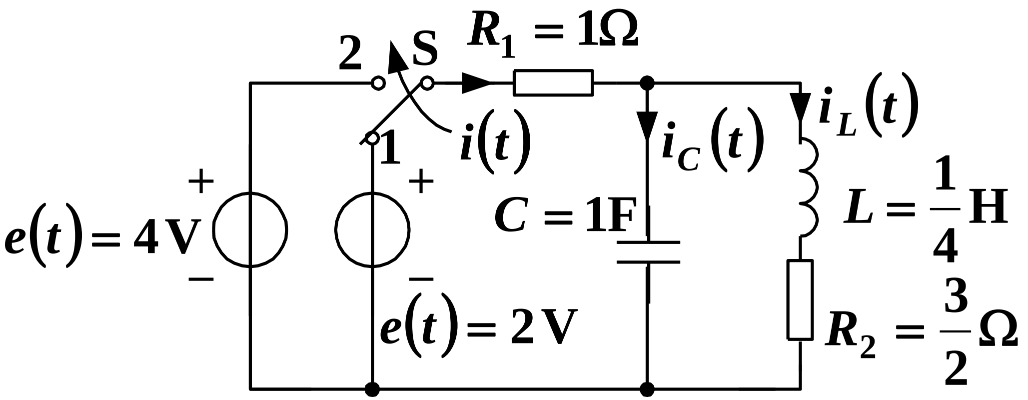
特解 由于 $t \geq 0_+$ 时 $e(t) = 4\text{V}$

方程右端自由项为 4×4，因此，令特解 $i_p(t) = B$，代入式（1）

$$10B = 4 \times 4 \qquad B = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

则系统的完全响应为

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \qquad (t \geq 0_+)$$



（3）确定换路后的 $i(0_+)$和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_+)$

找到0+初始条件

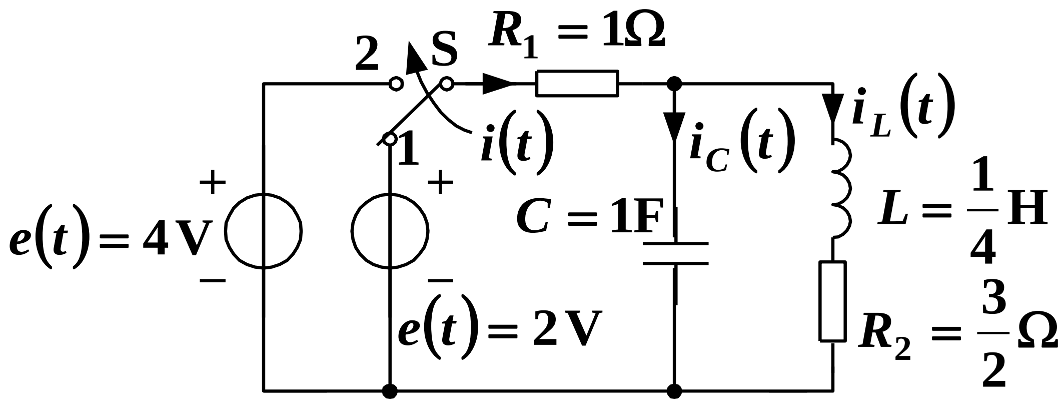
先看换路前，电路达到稳态，电容断路，电感短路：

$$i(0_-) = i_L(0_-) = \frac{2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{5}\text{A}$$

电流稳定 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_-) = 0$

$$v_C(0_-) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}\text{V}$$

再看换路后的 $i(0_+)$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)$



$$\boxed{\begin{aligned} v_C(0_+) &= v_C(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \end{aligned}}$$

由于电容两端电压和电感中的电流不会发生突变，因而有 $i(0_+) = \dfrac{1}{R_1}\left[e(0_+) - v_C(0_+)\right] = \dfrac{1}{1}\left(4 - \dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{14}{5}\text{A}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+) = \frac{1}{R_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(0_+) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(0_+)\right] = \frac{1}{R_1}\left[0 - \frac{i_C(0_+)}{C}\right] = \frac{i_L(0_+) - i(0_+)}{R_1 C} = i_L(0_-) - i(0_+) = \frac{4}{5} - \frac{14}{5} = -2\text{A/s}$$

求 $i(t)$ 在 $t \geq 0_+$ 时的完全响应，

代入 $i(t)$ 完全解表达式：

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2 + \dfrac{8}{5} = \dfrac{14}{5} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+) = -2A_1 - 5A_2 = -2 \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{4}{3} \\ A_2 = -\dfrac{2}{15} \end{cases}$$

完全响应为

$$i(t) = \left(\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{2}{15}\mathrm{e}^{-5t} + \frac{8}{5}\right)\text{A} \qquad (t \geq 0_+)$$

过程太复杂!

冲激函数匹配法　　→解决 0- 到 0+ 的跳变问题

匹配的原理：$t=0$ 时刻微分方程左右两端的 $\delta(t)$ 及各阶导数应该平衡

(其它项也应该平衡，我们讨论初始条件，可以不管其它项)

例2-5： $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$, 已知 $r(0_-)=1$，求 $r(0_+)$ 。

解：　方程右端含 $\delta'(t)$ 项，它一定属于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$

设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)$　则　$r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

代入方程　$a\delta'(t)+b\delta(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)=3\delta'(t)$

$\Delta u(t)$：相对单位跳变函数
表示0_-到0_+幅度跳变一个单位

得出 $\begin{cases} a=3 \\ b+3a=0 \end{cases}$　即 $\begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}$

所以得　$r(0_+)-r(0_-)=b=-9$

即　$r(0_+)=r(0_-)-9=1-9=-8$

单选题 1分

设置

系统微分方程为 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2\delta(t)$，已知 $r(0_-)$ 和 $r'(0_-)$，求 $r(0_+)$ 和 $r'(0_+)$。

A $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-),\quad r'(0_+)=r'(0_-)}$

B $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-),\quad r'(0_+)=r'(0_-)+2}$

C $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-)+2,\quad r'(0_+)=r'(0_-)}$

D $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-)+3,\quad r'(0_+)=r'(0_-)+2}$

提交

例2-6 系统微分方程为 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2\delta(t)$，已知 $r(0_-)$ 和 $r'(0_-)$，求 $r(0_+)$ 和 $r'(0_+)$。

解：方程右端含 $2\delta(t)$ 项，它一定属于 $r''(t)$，说明 $r'(t)$ 在 0 时刻发生了两个单位的跳变，即 $r'(0_+)=r'(0_-)+2$ 而 $r(t)$ 在 0 时刻没有变化，即 $r(0_+)=r(0_-)$。

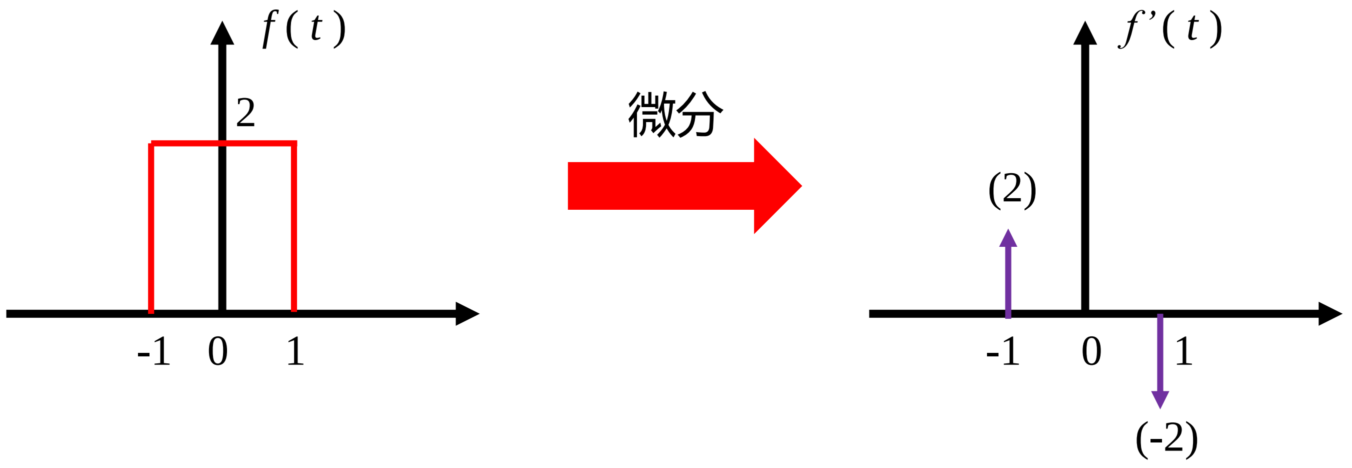
也可用数学描述，设 $r''(t)=a\delta(t)$，则 $r'(t)=a\Delta u(t)$

代入方程 $a\delta(t)+3a\Delta u(t)\leftrightarrow 2\delta(t)$ 得→ $a=2$

得到同样结果。

对于 $r(t)$，如果对 $r'(t)$求积分，$r(t)\leftrightarrow\int_{-\infty}^{t}a\Delta u(\tau)\mathrm{d}\tau=at\Delta u(t)$

可以看出 $r(t)$ 在 $t=0$ 时刻无跳变。



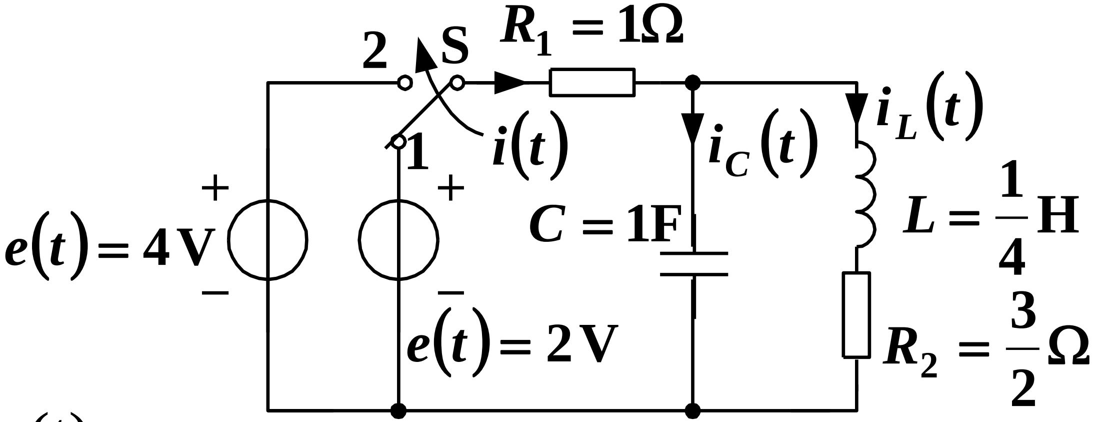
$$f(t)=2u(t+1)-2u(t-1)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=2\delta(t+1)-2\delta(t-1)$$

强调：理解跳变的概念，也就是导数是冲激函数的概念

用冲激函数匹配法求解例2-4中 0- 到 0+ 时的状态变化。

给定如图所示电路，$t<0$ 开关S处于1的位置而且已经达到稳态。当 $t=0$ 时由1转向2。建立电流 $i(t)$ 的微分方程并确定换路后的 $i(0_+)$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)$ 的跳变值。



解：列写电路的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t)$$

0_+ 时刻激励的表达式为： $e(t)=e(0\_)+2\Delta u(t)=2+2\Delta u(t)$

由 2V 到 4V，跳变 2 个单位

代入方程右边得： $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)+8$

令 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)=2\delta'(t)+a\delta(t)+b\Delta u(t)$ ，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)=2\delta(t)+\boxed{a\Delta u(t),}$$

$$i(t)=\boxed{2\Delta u(t)}$$

将上述表达式代入方程左边，可得：

$$2\delta'(t)+(a+14)\delta(t)+(7a+b+20)\Delta u(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)+8$$

$$a+14=12\Rightarrow a=-2$$

$$7a+b+20=8\Rightarrow b=2$$

实际我们不关心 b 的取值，只关心 a 的取值，因为我们只匹配冲激函数。

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_-)-2,\ \ i(0_+)=i(0_-)+2$ 得到了 0+ 时刻的初始条件，就可以求解齐次解系数了

例2-7 系统微分方程为 $r''(t)+4r'(t)+3r(t)=e'(t)+4e(t)$，已知$r(0_-)=1$和$r'(0_-)=2$，求 $r(0_+)$ 和 $r'(0_+)$。

(1) $e(t)=tu(t)$　　(2) $e(t)=u(t)$

(3) $e(t)=\delta(t)$　　(4) $e(t)=2e^{-4t}u(t)$

解： **(1)** 将$e(t)=tu(t)$代入方程的右边： $r''(t)+4r'(t)+3r(t)=u(t)+4tu(t)$

显然，方程右边没有冲激函数及其导数，无跳变。

所以， $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-)=1}$和$\boldsymbol{r'(0_+)=r'(0_-)=2}$

(2) 将$e(t)=u(t)$代入方程的右边： $r''(t)+4r'(t)+3r(t)=\delta(t)+4u(t)$

$\boldsymbol{r'(t)}$在 0 处跳变了1个单位， $\boldsymbol{r(t)}$ 没有跳变。

所以， $\boldsymbol{r(0_+)=r(0_-)=1}$和 $\boldsymbol{r'(0_+)=r'(0_-)+1=3}$

例2-7 系统微分方程为 $r''(t)+4r'(t)+3r(t)=e'(t)+4e(t)$，已知$r(0_-)=1$和$r'(0_-)=2$，求 $r(0_+)$ 和 $r'(0_+)$。

(1) $e(t)=t\,u(t)$　　　　**(2)** $e(t)=u(t)$

(3) $e(t)=\delta(t)$　　　　**(4)** $e(t)=2e^{-4t}u(t)$

(3) 将$e(t)=\delta(t)$代入方程的右边：　$r''(t)+4r'(t)+3r(t)=\delta'(t)+4\delta(t)$

设$r''(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)$，$r'(t)=a\,\delta(t)$

代入原方程，使得两边系数平衡：　$a\delta'(t)+b\delta(t)+4a\delta(t)=\delta'(t)+4\delta(t)$

得到：　$a=1$，$b=0$　　　所以 $r(0_+)=r(0_-)+1=2$ 和 $r'(0_+)=r'(0_-)=2$

冲激函数匹配法　　　　练习2个题

(1) $2\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+4r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$

已知 $e(t)=u(t)$, $r(0_-)=1$, $r'(0_-)=1$ 求 $r(0_+)$, $r'(0_+)$

答案：$r(0_+)=1$, $r'(0_+)=\frac{3}{2}$

(2) $\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+6r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}-2e(t)$

已知 $e(t)=u(t)$, $r(0_-)=1$, $r'(0_-)=2$ 求 $r(0_+)$, $r'(0_+)$

答案：$r(0_+)=1$, $r'(0_+)=3$

作 业

教材习题
基础题：2-1（a）（b），2-5
加强题：2-1（c）（d）

第二章 连续时间系统的时域分析

本次课内容

2.4 零输入响应和零状态响应

2.5 冲激响应与阶跃响应

本次课目标

1. 掌握经典法求系统的零输入响应（齐次解）；
2. 熟练掌握用经典法和冲激函数匹配法求零状态响应；
3. 熟练运用冲激函数匹配法求冲激响应；
4. 熟悉冲激响应与阶跃响应的关系。

2.4 零输入响应和零状态响应

经典法求解系统的完全响应，可分为：

完全响应=自由响应+强迫响应

$$r(t)=r_{\mathrm{h}}(t)+r_{\mathrm{p}}(t)$$

系统的完全响应也可分为：

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$r(t)=r_{\mathrm{zi}}(t)+r_{\mathrm{zs}}(t)$$

目的：避免经典求解方法中需要计算 **$r(0+)$** 来确定齐次解系数。

1. 零输入响应的定义与待定系数确定

① 定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应，即 $r_{zi}(t) = H[\{x(0\_)\}]$

② 满足方程：
$$C_0 \frac{d^n}{dt^n} r_{zi}(t) + \ldots + C_{n-1} \frac{d}{dt} r_{zi}(t) + C_n r_{zi}(t) = 0$$

故 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解形式，即 $r_{zi}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_{zik} e^{\alpha_k t}$ ← 注意：和自由响应的系数不同

其中，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为互不相等的 n 个系统特征根。

③ 初始条件：$r_{zi}^{(k)}(0_+) = r_{zi}^{(k)}(0\_) = r^{(k)}(0\_)$ ← 非时变系统

即齐次解 $r_{zi}(t)$ 的待定系数用 $r^{(k)}(0\_)$ 确定即可！

2．零状态响应的定义与待定系数确定

① 定义：起始状态为 0，只由激励产生的响应 $r_{zs}(t)=H[e(t)]$

② 满足方程：$C_0\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}r_{zs}(t)+\ldots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_{zs}(t)+C_n r_{zs}(t)=E_0\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}e(t)+\ldots+E_m e(t)$

故 $r_{zs}(t)$ 含特解 $r_p(t)$，即 $r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}\mathrm{e}^{\alpha_k t}+r_p(t)$

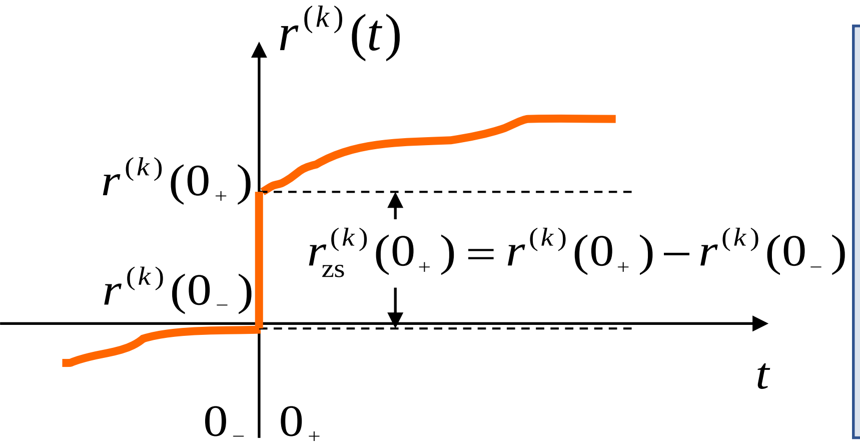
③ 初始条件： 由于 $r_{zs}(t)$ 在 0- 时刻的 k (k=0,…n-1) 阶导数均为 0，即 $r_{zs}^{(k)}(0_-)=0$

分析结论

$$r^{(k)}(0_-)=r_{zi}^{(k)}(0_-)+r_{zs}^{(k)}(0_-)=r_{zi}^{(k)}(0_-)$$ ← 激励不存在

$$r^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_+)+r_{zs}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_-)+r_{zs}^{(k)}(0_+)$$ ← 非时变系统，参数固定

$$r_{zs}^{(k)}(0_+)=r^{(k)}(0_+)-r^{(k)}(0_-)=\text{跳变值}$$ ← 跳变值是由激励信号产生的　　故 A_{zsk} 由跳变值确定。



$r^{(k)}(0_+)$：确定**全响应**的系数

$r^{(k)}(0_-)$：确定**零输入响应**的系数

$r_{zs}^{(k)}(0_+)$：确定**零状态响应**的系数

$$r(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+r_p(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(A_{zik}+A_{zsk})\,e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{r_p(t)}_{\text{强迫响应}}$$

单选题 1分

设置

下列说法错误的是

A 系统的零状态响应包括部分自由响应和强迫响应

B 若系统初始状态为零，系统的响应就是系统的强迫响应

C 零状态响应与系统起始状态无关，是由激励信号产生的

D 零输入响应与系统激励无关，是由系统起始状态产生的

提交

简单总结

自由响应 — 形式由系统特征决定

强迫响应 — 形式由激励信号决定

零输入响应 — 系统内部储能引起

零状态响应 — 激励信号引起

零输入响应、零状态响应均为线性：按零输入响应和零状态响应分解，有助于理解线性系统的叠加性和齐次性。

零状态响应在 LTI 系统研究领域有重要意义：

　　大量的通信和电子系统实际问题只需求零状态响应。

　　求零状态响应，可不用繁琐的经典法，而利用卷积方法。

例2-8：已知系统的微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2e'(t)+6e(t)$ ，起始状态 $r(0_-)=2$，$r'(0_-)=0$，$e(t)=u(t)$，求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）先求零输入响应 $r_{zi}(t)$ $\quad r_{zi}''(t)+3r_{zi}'(t)+2r_{zi}(t)=0$

求初始值： $r_{zi}(0_+)=r_{zi}(0_-)=r(0_-)=2$ $\quad r_{zi}'(0_+)=r_{zi}'(0_-)=r'(0_-)=0$

由特征根为 -1，-2，设定 $r_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

代入初始值，求得系数 $A_1=4$，$A_2=-2$ $\quad r_{zi}(t)=4e^{-t}-2e^{-2t}$

（2）再求零状态响应 $r_{zs}(t)$ $\quad r_{zs}''(t)+3r_{zs}'(t)+2r_{zs}(t)=2\delta(t)+6u(t)$

$r_{zs}(0_+)=0$ $\quad r_{zs}'(0_+)=2$ $\quad$ 观察发现 $r'(0)$ 跳变 2 个单位，$r(0)$ 不跳变

当 $t>0$ 时，$r_{zs}''(t)+3r_{zs}'(t)+2r_{zs}(t)=6$ $\quad$ 设定齐次解：$C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

设定特解：常数 B，代入方程，求得 $B=3$ $\quad r_{zs}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3$

代入初始值，求系数 $C_1=-4$，$C_2=1$ $\quad r_{zs}(t)=-4e^{-t}+e^{-2t}+3,\quad t\geq 0$

例2-9：已知一线性时不变系统，在相同初始条件下，当激励为 $e(t)$ 时，其全响应为 $r_1(t)=\left[2\mathrm{e}^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t)$；当激励为 $2e(t)$ 时，其全响应为 $r_2(t)=\left[\mathrm{e}^{-3t}+2\sin(2t)\right]u(t)$。求:

（1）初始条件不变，当激励为 $e(t-t_0)$ 时的全响应 $r_3(t)$，t_0 为大于零的实常数。

（2）初始条件增大1倍，当激励为 $0.5e(t)$ 时的全响应 $r_4(t)$。

解：设零输入响应为 $r_{zi}(t)$，零状态响应为 $r_{zs}(t)$，则有

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\left[2\mathrm{e}^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t) \qquad r_2(t)=r_{zi}(t)+2r_{zs}(t)=\left[\mathrm{e}^{-3t}+2\sin(2t)\right]u(t)$$

解得 $r_{zi}(t)=3\mathrm{e}^{-3t}u(t)$ $\qquad r_{zs}(t)=\left[-\mathrm{e}^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t)$

(1) 初始条件不变，当激励为 $e\left(t-t_0\right)$ 时的全响应

$$\therefore r_3(t)=r_{\mathrm{zi}}(t)+r_{\mathrm{zs}}(t-t_0)\ =3\mathrm{e}^{-3t}u(t)+\left[-\mathrm{e}^{-3(t-t_0)}+\sin(2t-2t_0)\right]u(t-t_0)$$

（2）初始条件增大1倍，当激励为 $0.5e\left(t\right)$ 时的全响应

$$\therefore r_4(t)=2r_{\mathrm{zi}}(t)+0.5r_{\mathrm{zs}}(t)\ =2\left[3\mathrm{e}^{-3t}u(t)\right]+0.5\left[-\mathrm{e}^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t)$$

$$=\left[5.5\mathrm{e}^{-3t}+0.5\sin(2t)\right]u(t)$$

单选题 1分

设置

已知系统微分方程为 $r'(t)+r(t)=e(t)$，在激励信号与初始储能的共同作用下，系统的完全响应为 $r(t)=\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$，则系统的强迫响应分量为（ ）

A $\mathrm{e}^{-t}u(t)$

B $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}u(t)$

C $(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t})u(t)$

D $(1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t})u(t)$

提交

例2-10. 已知系统微分方程为$r'(t)+r(t)=e(t)$，在激励信号与初始储能的共同作用下，系统的完全响应为

$r(t)=\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$，求系统的强迫响应分量。

解：

自由响应只与齐次解有关。

系统的特征方程为 $\alpha+1=0$，特征根为 $\alpha=-1$。因此系统的自由响应为 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}u(t)$。

故强迫响应分量为全响应减去自由响应：$(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t})u(t)$。

例2-11：假设某线性时不变系统的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+3e(t)$$

其中 $e(t)$为激励，$r(t)$ 为响应。已知 $e(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$ ，系统的完全响应为 $r(t)=[(2t+3)\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}]u(t)$ 。

（1）直接区分系统的自由响应分量和强迫响应分量，并说明理由。
（2）根据冲激函数平衡求系统的初始状态 $r(0_-)$和 $r'(0_-)$ 。
（3）求系统的零输入响应和零状态响应。

解： （1）$\alpha^2+3\alpha+2=0$，求解得到特征根为 $\alpha_1=-1,\alpha_1=-2$ 。

因此系统的自由响应为 $(3\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$ 。

全响应减去自由响应得到强迫响应为 $2t\mathrm{e}^{-t}u(t)$。

(2) 当 $e(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\mathrm{e}^{-t}\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}u(t)+3\mathrm{e}^{-t}u(t)$$ ← $e(t)$ 代入方程右边

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\mathrm{e}^{-t}\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}u(t)$$ ← $\delta(t)$ 函数性质

由冲激函数匹配法可知，在 0 时刻 $r'(t)$ 发生了增量为 1 个单位的跳变，$r(t)$ 不跳变。

$$r(0_+)=r(0_-),\quad r'(0_+)=r'(0_-)+1$$

$$r(t)=[(2t+3)\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}]u(t),\quad r(0_+)=1$$

$$r'(t)=[2\mathrm{e}^{-t}-(2t+3)\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t}]u(t)=[-(2t+1)\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t}]u(t),\quad r'(0_+)=3$$

$$r(0_-)=r(0_+)=1,\quad r'(0_-)=r'(0_+)-1=3-1=2$$

(3) 先求系统的零输入响应。

因系统的特征根为 $\alpha_1=-1, \alpha_1=-2$，所以系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t} \quad (t>0)$

代入 0- 时刻的初始条件，有

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ -A_1-2A_2=2 \end{cases}$$

，求得 $A_1=4, A_2=-3$ 所以零输入响应为 $r_{zi}(t)=4e^{-t}-3e^{-2t} \quad (t>0)$

零状态响应为全响应减去零输入响应：$r_{zs}(t)=[(2t-1)e^{-t}+e^{-2t}]u(t)$

也可先求系统的零状态响应： $r_{zs}(t)=\underbrace{(A_{zs1}\mathrm{e}^{-t}+A_{zs2}\mathrm{e}^{-2t})u(t)}_{\text{齐次解}}+\underbrace{Bt\mathrm{e}^{-t}u(t)}_{\text{特解}}$

特解即强迫响应，由（1）可知 $B=2$。也可将特解和激励分别代入微分方程左侧和右侧求得 $B=2$。

由（2）可知，在 0 时刻 $r(t)$ 不跳变，$r'(t)$ 跳变，增量为 1。

$$\text{故} r_{zs}(0_+)=r(0_+)-r(0_-)=0\text{，}\ r_{zs}'(0_+)=r'(0_+)-r'(0_-)=1$$

$$r_{zs}(0+)=A_{zs1}+A_{zs2}=0$$

$$r_{zs}'(0+)=-A_{zs1}-2A_{zs2}+2=1$$

求得 $A_{zs1}=-1$，$A_{zs2}=1$。

$$r_{zs}(t)=(2t\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

零输入响应为全响应减去零状态响应 $r_{zi}(t)=\left(4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$。