

第四章 拉普拉斯变换

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频域特性

4.9 线性系统稳定性

4.10 双边拉氏变换

4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.6 系统函数

4.6.1 系统函数的定义

若有一时间信号作用于系统，其输出仍然是此时间信号，只是幅度与相位被改变，称此时间信号为系统的**特征信号**，表征改变幅度和相位的函数，称为系统的特征值或**系统函数**。

信号 $e^{j\omega t}$ 是系统的**特征信号**，函数 $H(j\omega)$ （系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换）是**系统函数**，也称为系统的**频率响应**。

$$\begin{array}{c} e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * e^{j\omega t} = |H(j\omega)| e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} \end{array}$$

事实上，指数信号 e^{st} 也是系统的特征信号，因为 $\begin{array}{c} e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * e^{st} = H(s)e^{st} \end{array}$

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{0_-}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{0_-}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s)e^{st}$$

$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$ 是因果系统单位冲激响应的拉氏变换，也称为系统函数。

连续时间信号 $x(t)$ ，作用于单位冲激响应为 $h(t)$ 线性时不变系统，其零状态响应 $y_{zs}(t)$ ，等于输入信号与单位冲激响应的卷积积分：

$$y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \quad \begin{array}{c} x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \end{array}$$

由时域卷积定理，零状态响应的拉氏变换等于输入信号与单位冲激响应拉氏变换的乘积：

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \quad \begin{array}{c} X(s) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \end{array}$$

系统函数等于零状态响应的拉氏变换与输入信号的拉氏变换的比值：

$$H(s) = Y_{zs}(s) / X(s)$$

4.6.2 策动点函数与转移函数

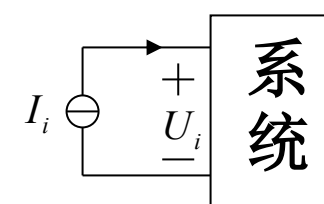
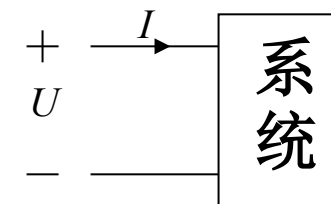
1 策动点函数

当系统的输入输出取自同一端口时，系统函数称为**策动点函数**。策动点函数根据其量纲，又可称为**阻抗函数**或**导纳函数**。

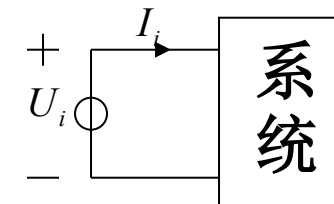
如放大器的输入或输出**阻抗**（电压与电流之比）、输入或输出**导纳**（电流与电压之比）等。

$$\text{阻抗: } Z_i(s) = \frac{U_i(s)}{I_i(s)} \quad Z_o(s) = \frac{U_o(s)}{I_o(s)}$$

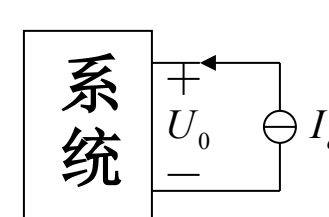
$$\text{导纳: } Y_i(s) = \frac{I_i(s)}{U_i(s)} \quad Y_o(s) = \frac{I_o(s)}{U_o(s)}$$



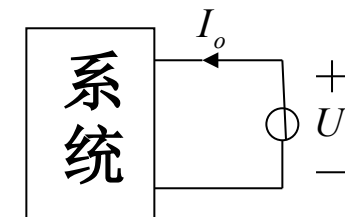
阻抗



导纳



阻抗



导纳

2 转移 (传输) 函数

当系统的输入输出取自不同的端口时, 系统函数称为**转移函数**或**传输函数**。

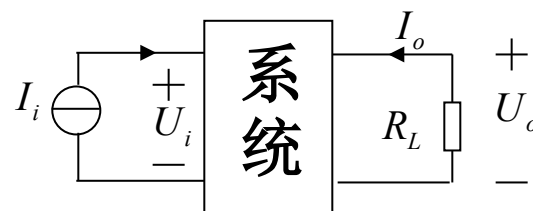
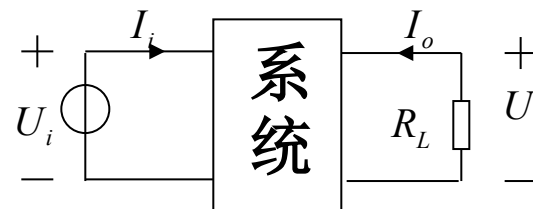
转移函数根据其量纲可称为**转移阻抗**、**转移导纳**、**电压传输比**或**电流传输比**等。
如放大器的电压或电流放大倍数等。

转移阻抗: $Z_{21}(s) = \frac{U_o(s)}{I_i(s)}$

转移导纳: $Y_{21}(s) = \frac{I_o(s)}{U_i(s)}$

电压传输比: $K_v(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$

电流传输比: $K_i(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$



4.6.3 系统函数的求取

由于系统函数是系统零状态响应拉氏变换与激励拉氏变换之比，它的求解与系统的起始条件无关。

例4-28：已知系统的微分方程： $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$ ，

试求系统的系统函数 $H(s)$ 与单位冲激响应 $h(t)$ 。

解：对以上方程求拉氏变换，在利用微分性质时，起始条件为零。

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)X(s)$$

于是系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

求系统函数的拉氏反变换，即是系统的单位冲激响应。

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

4.7 系统函数的零、极点分布与系统的时间特性

4.7.1 系统函数的零、极点分布与单位冲激响应的时域波形

系统的单位冲激响应是系统函数的拉氏逆变换： $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

一般的，系统函数是有理分式，于是

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_0 \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k}\right\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t)$$

上式中， z_k 与 p_k 分别是系统函数零点与极点，零点与极点在 s 平面上的位置不同，对单位冲激响应的时域波形影响不同。

s 平面是一个复平面, σ 轴是实轴, 虚轴用 $j\omega$ 来记。

平面上不同的点 s , 对应着不同的时间信号 e^{st} 。

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

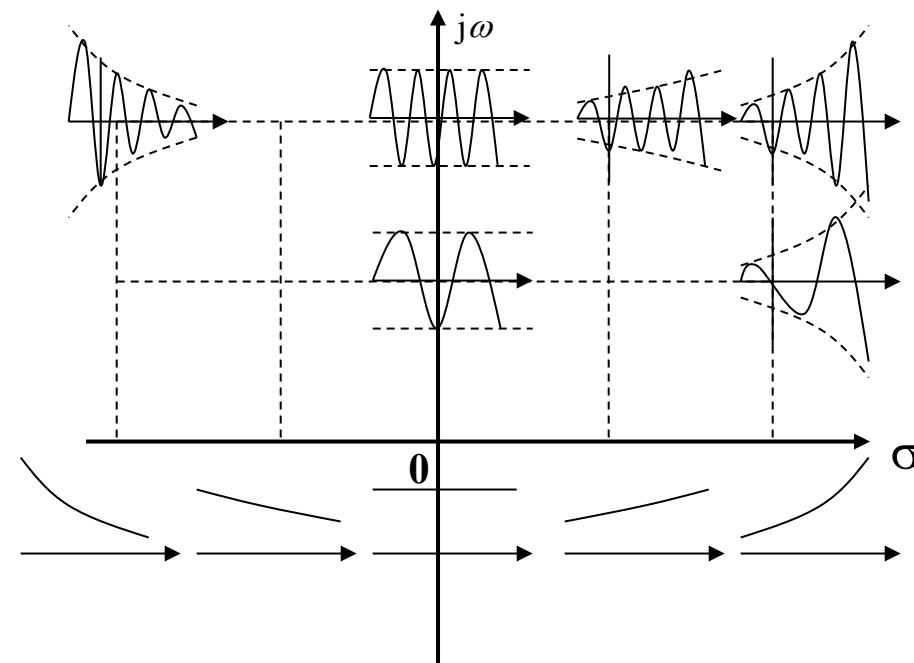
信号 e^{st} 表示的是幅度按指数变化的正余弦信号。

越远离实轴的点, 表示信号变化的频率越高;

越远离虚轴的点, 表示信号幅度增长或衰减的越快。

实轴上的点, 表示单调变化的指数信号;

虚轴上的点, 表示等幅振荡的正余弦信号。



一阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s}, \quad p_1 = 0 \text{ 在原点}, \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad p_1 = -\alpha$$

$\alpha > 0$, 在左实轴上, $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, 指数衰减

$\alpha < 0$, 在右实轴上, $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, 指数增加

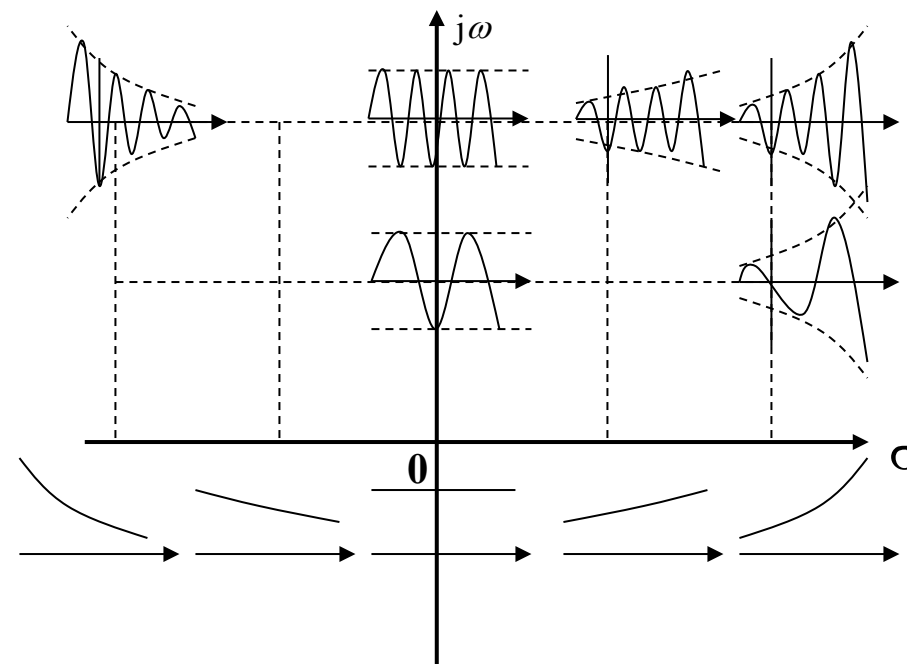
$$H(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad p_{1,2} = \pm j\omega, \text{ 在虚轴上}$$

$$h(t) = \sin \omega t u(t), \text{ 等幅振荡}$$

$$H(s) = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega \quad h(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t u(t)$$

当 $\alpha > 0$, 极点在左半平面, 衰减振荡

当 $\alpha < 0$, 极点在右半平面, 增幅振荡

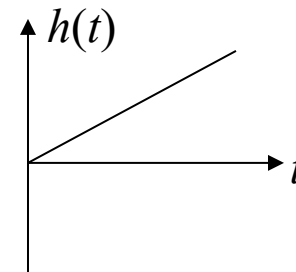
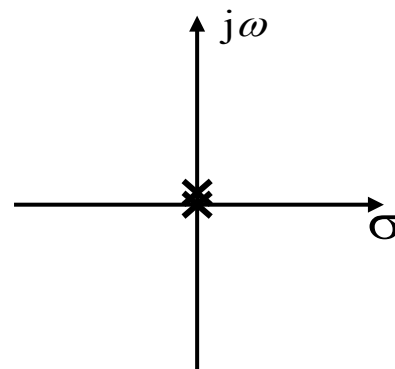


二阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s^2}, \text{极点在原点,}$$

$$h(t) = tu(t)$$

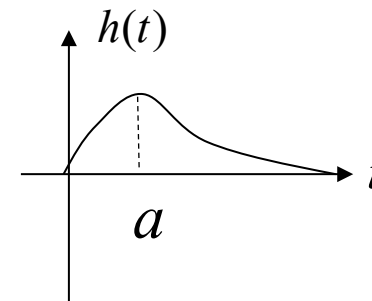
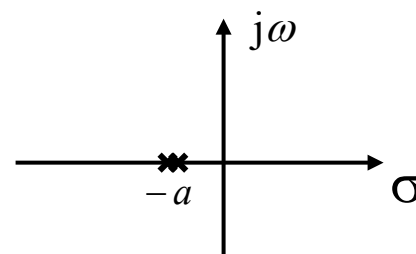
$$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow \infty$$



$$H(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}, \text{极点在实轴上,}$$

$$h(t) = t e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0$$

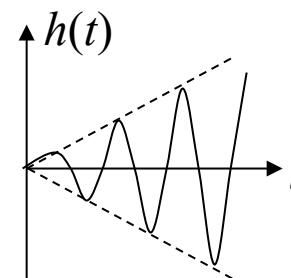
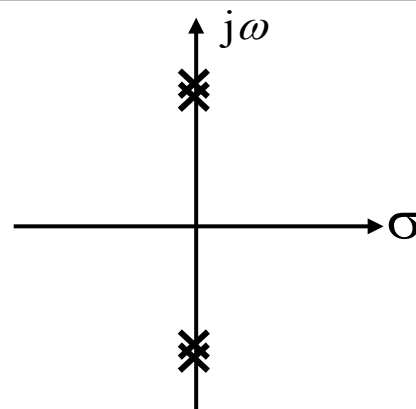
$$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$$



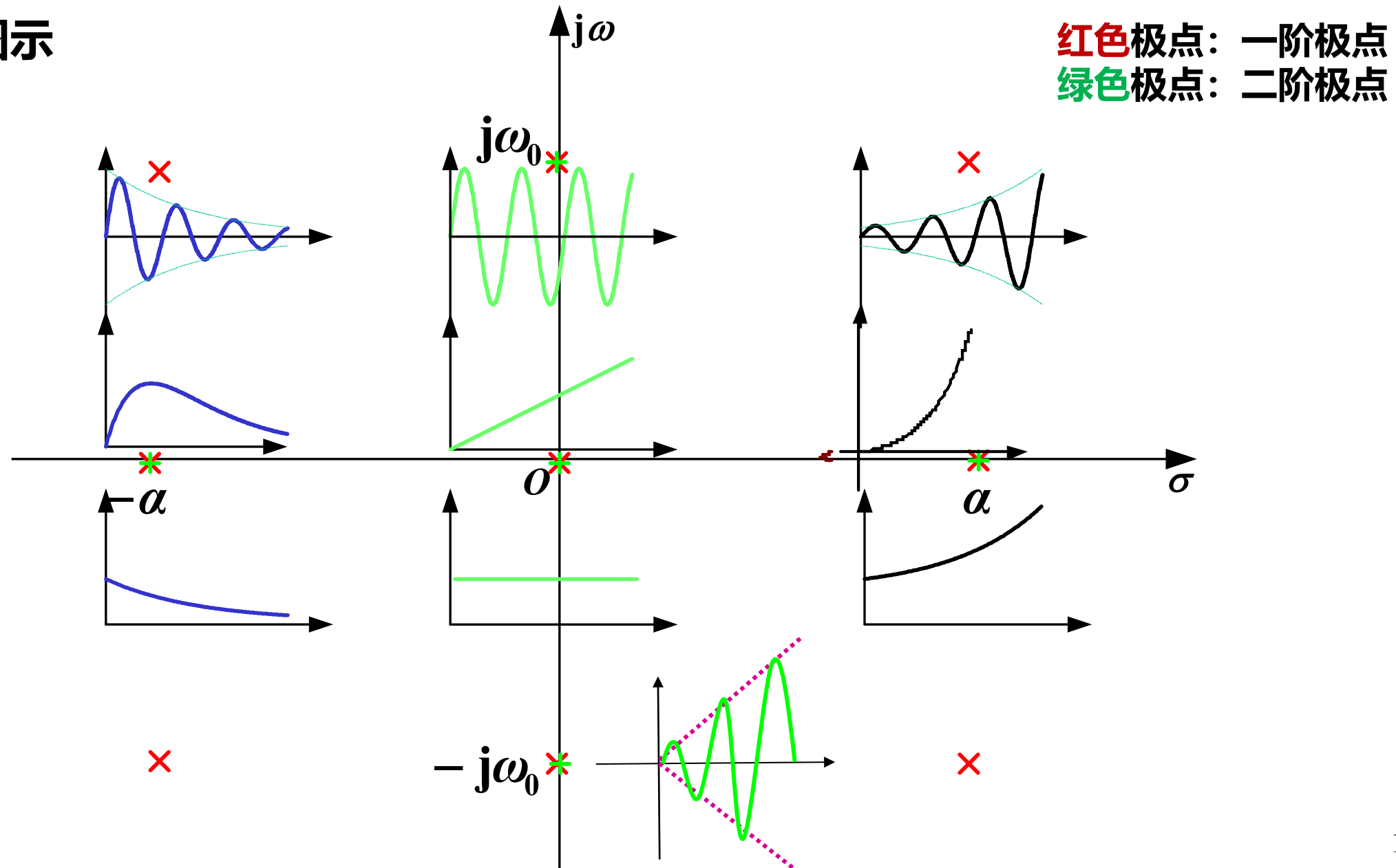
$$H(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}, \text{极点在虚轴上,}$$

$$h(t) = t \sin \omega t u(t)$$

$$t \rightarrow \infty, h(t) \text{ 增幅振荡}$$



几种典型情况图示



$H(s)$ 极点与 $h(t)$ 波形特征的对应关系:

极点于 S 平面左半平面

$h(t)$ 呈衰减形式

极点于 S 平面右半平面

$h(t)$ 呈增长形式

极点于 S 平面虚轴上 (不含原点)

$h(t)$ 等幅振荡 (一阶极点)
或增长振荡 (多重极点)

极点于 S 平面实轴上 (不含原点)

$h(t)$ 呈现与指数相关的变化
(一阶或多重极点)

极点于 S 平面原点

$h(t)$ 等值 $u(t)$ (一阶极点)
或增长 t^n (多重极点)

4.7.2 系统函数和激励的零、极点分布与响应的各分量

系统函数与激励的极点，共同决定了响应的时域波形。 $Y(s) = X(s)H(s)$

例4-33： 设系统函数 $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励 $x(t) = u(t)$ ，初始状态为零，求系统的响应，并指出自由响应与强迫响应。

解： 系统的响应的拉氏变换

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

所以，系统的响应是 $y(t) = \frac{1}{2}(3 - 4e^{-t} + e^{-2t})u(t)$

其中 $y_h(t) = (\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$ $y_p(t) = \frac{3}{2}u(t)$

可见，系统函数的极点对应着自由响应分量；激励的极点对应着强迫响应分量。但是，如果系统函数与激励函数有零极点相互抵消，响应中将不出现对应的时域分量。

线性系统的 s 域模拟框图

基本模拟单元

	时 域	S 域
积分器	$f(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$F(s) \rightarrow \boxed{s^{-1}} \rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{s}$
加法器	$f_1(t) \rightarrow \begin{matrix} + \\ \Sigma \end{matrix} \rightarrow f_1(t) - f_2(t)$ $f_2(t) \rightarrow \begin{matrix} - \end{matrix}$	$F_1(s) \rightarrow \begin{matrix} + \\ \Sigma \end{matrix} \rightarrow F_1(s) - F_2(s)$ $F_2(s) \rightarrow \begin{matrix} - \end{matrix}$
数乘器	$f(t) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow af(t)$	$F(s) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow aF(s)$

利用 $H(s)$ 画模拟框图——直接形式

根据微分方程 $r''(t) + a_1 r'(t) + a_0 r(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$

两边拉氏变换 $s^2 R(s) + a_1 s R(s) + a_0 R(s) = b_2 s^2 E(s) + b_1 s E(s) + b_0 E(s)$

得到系统函数 $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}} E(s)$$

令: $Q(s) = \frac{E(s)}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$

则: $Q(s) = E(s) - a_1 s^{-1} Q(s) - a_0 s^{-2} Q(s)$

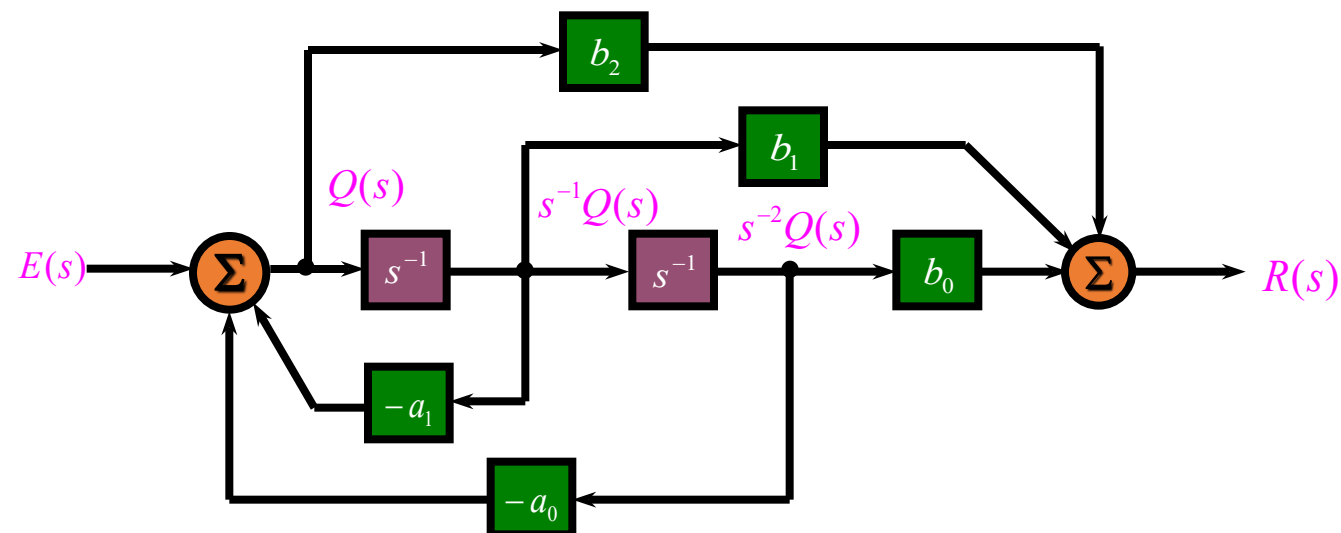
$$R(s) = (b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}) Q(s)$$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}E(s)$$

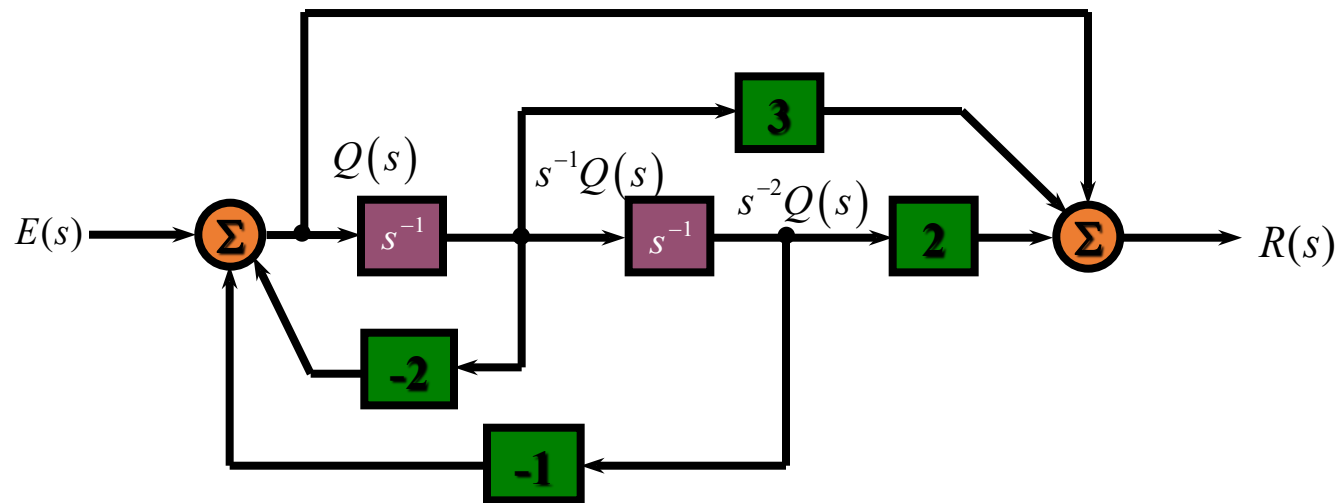
令: $Q(s) = \frac{E(s)}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}$

则: $Q(s) = E(s) - a_1s^{-1}Q(s) - a_0s^{-2}Q(s)$

$$R(s) = (b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2})Q(s)$$



利用模拟框图求 $H(s)$ ——直接形式



设：中间变量为 $Q(s)$

$$\begin{cases} Q(s) = E(s) - 2Q(s)s^{-1} - Q(s)s^{-2} \\ R(s) = Q(s) + 3Q(s)s^{-1} + 2Q(s)s^{-2} \end{cases} \quad \begin{cases} Q(s) = \frac{E(s)}{1 + 2s^{-1} + s^{-2}} \\ R(s) = (1 + 3s^{-1} + 2s^{-2})Q(s) \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}{1 + 2s^{-1} + s^{-2}} E(s) \quad \therefore H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

第四章 拉普拉斯变换

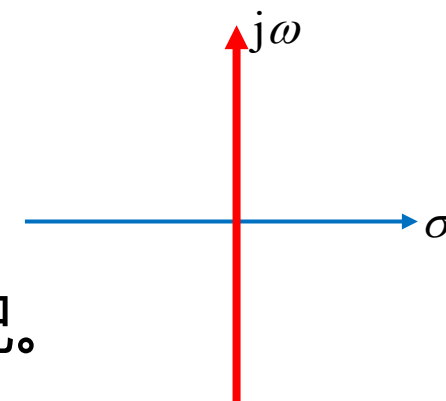
- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频域特性**
- 4.9 线性系统稳定性**
- 4.10 双边拉氏变换
- 4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.8 系统函数的零、极点分布与系统的频率响应

4.8.1 从 $H(s)$ 到 $H(j\omega)$ 频响特性

拉氏变换是傅氏变换由实频域 ω 至复频域 s 的推广，傅氏变换是拉氏变换在 s 平面虚轴上的特例。当系统为因果稳定时，

$$H(j\omega) = H(s) \big|_{s=j\omega}$$



频响特性：指系统在正弦信号激励之下稳态响应随信号频率的变化情况。

系统函数以 $H(s)$ 表示，正弦激励 $e(t) = E_m \sin(\omega_0 t)$

暂不考虑

系统响应的拉氏变换
$$R(s) = \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cdot H(s) = \frac{K_{-j\omega_0}}{s + j\omega_0} + \frac{K_{j\omega_0}}{s - j\omega_0} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

$$K_{-j\omega_0} = (s + j\omega_0) R(s) \Big|_{s=-j\omega_0} = \frac{E_m \omega_0 H(-j\omega_0)}{-2j\omega_0} = \frac{E_m H_0 e^{-j\varphi_0}}{-2j}$$

$$K_{j\omega_0} = (s - j\omega_0) R(s) \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{E_m \omega_0 H(j\omega_0)}{2j\omega_0} = \frac{E_m H_0 e^{j\varphi_0}}{2j}$$

$$H(j\omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0}$$

$$H(-j\omega_0) = H_0 e^{-j\varphi_0}$$

前两项的拉氏逆变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_{-j\omega_0}}{s + j\omega_0} + \frac{K_{j\omega_0}}{s - j\omega_0} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{E_m H_0}{2j} \left(\frac{-e^{-j\varphi_0}}{s + j\omega_0} + \frac{e^{j\varphi_0}}{s - j\omega_0} \right) \right] \\ &= \frac{E_m H_0}{2j} \left(-e^{-j\varphi_0} e^{-j\omega_0 t} + e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t} \right) = E_m H_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

系统的完全响应

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = E_m H_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}$$

对于稳定系统，固有频率 p_1, p_2, \dots, p_n 的实部都小于零，响应的各指数项均为衰减函数，当 $t \rightarrow \infty$ 时，都趋于零，所以稳态响应为：

$$r_{ss}(t) = E_m H_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

可见，以频率为 ω_0 的正弦激励信号作用下，系统的稳态响应仍为同频率的正弦信号，但幅度乘以系数 H_0 ，相位移动 φ_0 。

$$H(s) \Big|_{s=j\omega_0} = H(j\omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0}$$

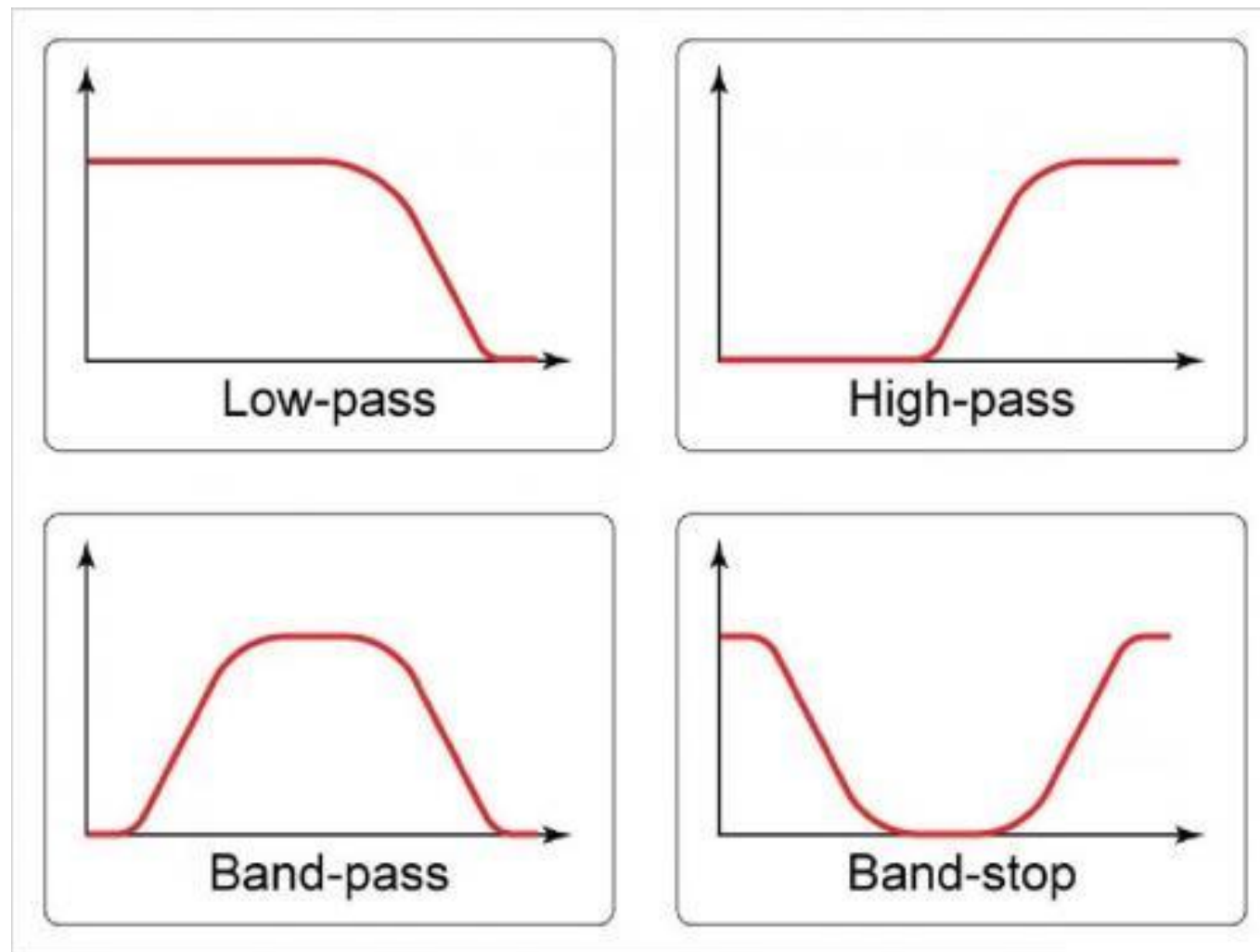
正弦激励信号的频率 ω 改变时，频率响应 $H(j\omega)$ 也随之改变。

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|H(j\omega)|$ ——幅频特性

$\varphi(\omega)$ ——相频特性

滤波网络的频响特性：低通、高通、带通、带阻



4.8.2 $H(s)$ 的零极点分布与 $H(j\omega)$ ——s 平面几何分析法

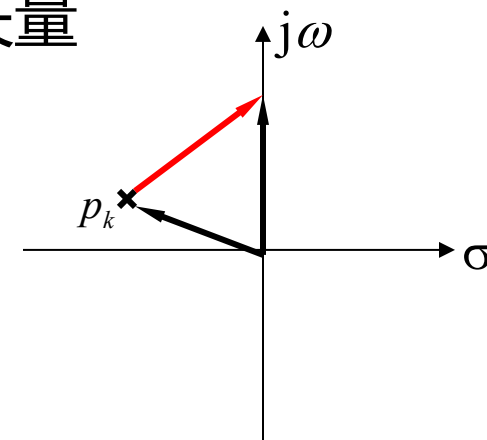
由于 $H(s)$ 一般是有理分式，即它可表示为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}$$

于是，系统的频率响应 $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \bigg|_{s=j\omega} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)}$

上式中，分子和分母的每一个因式，均表示 s 平面上一个指向 $j\omega$ 轴的矢量

如图所示，因式 $(j\omega - p_k)$ 表示的是，沿虚轴变化的矢量 $j\omega$ 与由原点指向 p_k 的矢量的差矢量。



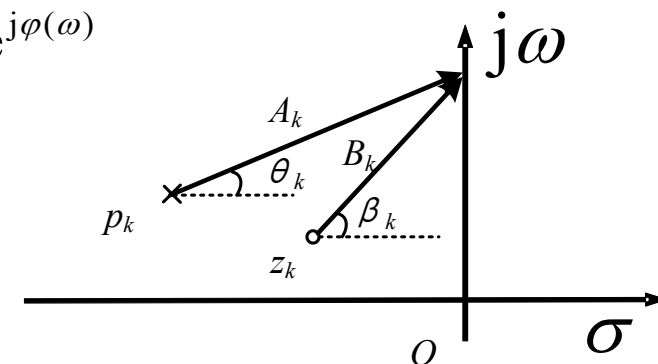
上式中分子上的因式对应的矢量，称为**零点矢量**；分母上的因式对应的矢量，称为**极点矢量**。

每个矢量均有它的模与相角，于是

$$H(j\omega) = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M B_k e^{j\beta_k}}{\prod_{k=1}^N A_k e^{j\theta_k}} = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} e^{j(\sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0 \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k$$



- ✓ **幅频响应** 等于零点矢量的模之积与极点矢量的模之积的比值（但要注意乘以系数 H_0 ，即使没有零点也要有系数 H_0 ，极点前是有系数 1 的）
- ✓ **相频响应** 等于零点矢量相角之和减去极点矢量相角之和

重点：利用系统函数 $H(s)$ 的零、极点分布，粗略画出系统的幅频特性曲线 $|H(j\omega)|$ 和相频特性曲线 $\varphi(\omega)$

当 $j\omega$ 沿虚轴移动时，各复数因子（矢量）的模和相角都随之改变，于是就得出幅频特性曲线和相频特性曲线。这种方法就称为 “s平面几何分析法”

在 $j\omega$ 由 0 到 $+j\infty$ 变化的过程中：

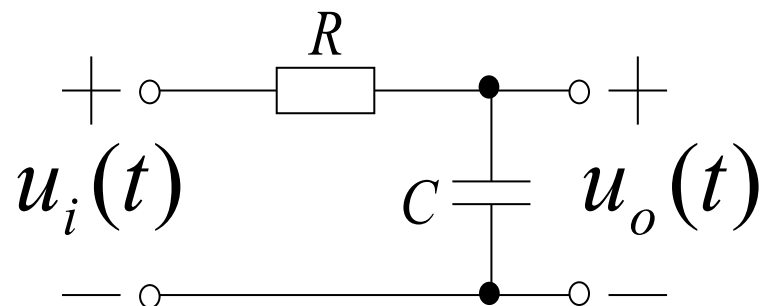
① 当 $j\omega$ 与某个零点的距离最小时，会使那一点的幅度特性形成谷值

若遇到虚轴上的零点时，那么谷值就为零

② 当 $j\omega$ 与某个极点的距离最小时，会使那一点的幅度特性形成峰值，极点距离虚轴越近，峰值越大越尖锐

若遇到虚轴上的一阶极点时，幅度会在此处形成一个冲激

例4-38: 如图所示 RC 电路，试求其系统函数，作出其零极图，求其频率响应，并粗略的画出其频响曲线。

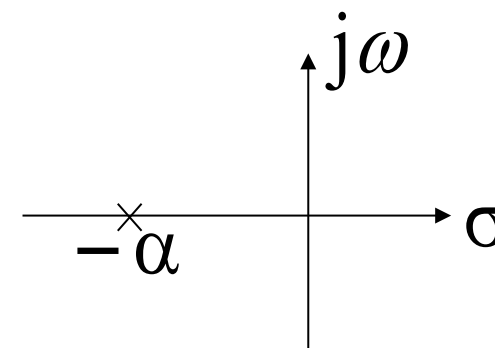


解: 电路的系统函数

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

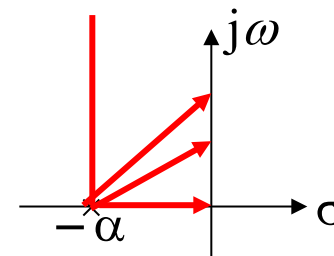
设 $\left(\alpha = \frac{1}{RC} \right)$

$$= \frac{\alpha}{s + \alpha}$$

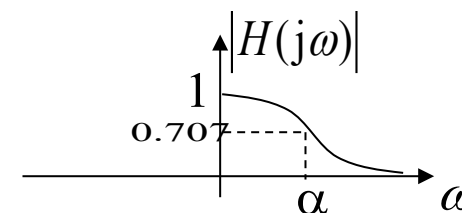


由系统函数 $H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$ 粗略画出频率响应:

(1) 当 $\omega = 0$, 极点矢量指向原点, 其模长为 α , 相角等于 0;
于是 $|H(j\omega)| = \alpha/\alpha = 1$, $\varphi(\omega) = 0 - 0 = 0$ 。



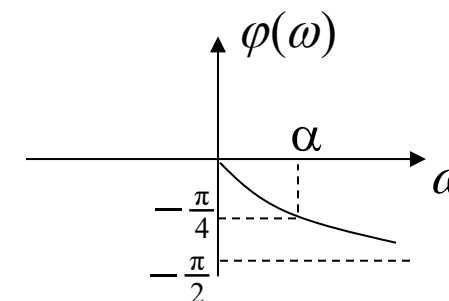
(2) 当 $\omega \uparrow$, 极点矢量模 \uparrow , 相角 \uparrow ; $|H(j\omega)| \downarrow$, $\varphi(\omega) \downarrow$ 。



(3) 当 $\omega = \alpha$, $|H(j\omega)| \approx 0.707$, $\varphi(\omega) = -(\pi/4)$ 。

(4) 当 $\omega \rightarrow \infty$, $|H(j\omega)| \rightarrow 0$, $\varphi(\omega) \rightarrow -(\pi/2)$ 。

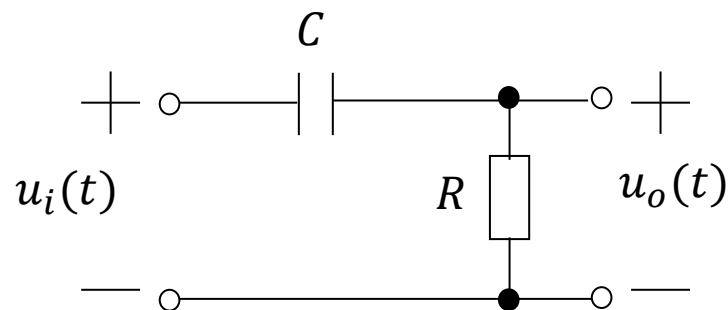
由其幅频响应曲线可见, 是一低通滤波器。



$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} e^{-j \arctg(\frac{\omega}{\alpha})}$$

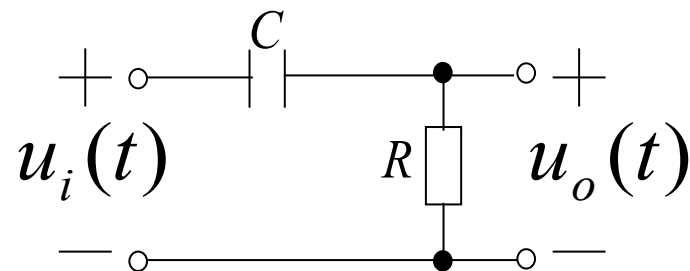
例4-39：某一 RC 电路如图所示，这表示一个（ ）

- ☐ A 低通滤波器
- ☒ B 高通滤波器
- ☐ C 带通滤波器
- ☐ D 全通滤波器



提交

例4-39: 如图所示 RC 电路, 试求其系统函数, 作出其零极图, 求其频率响应, 并粗略的画出其频响曲线。



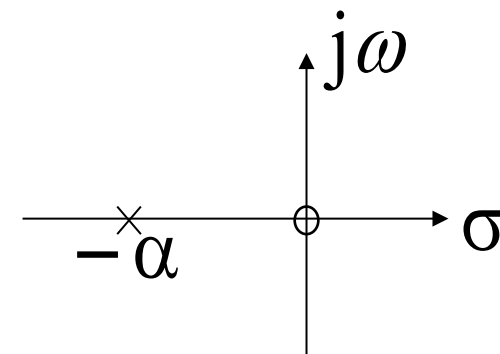
解: 电路的系统函数

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{s}{s + \alpha}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \alpha}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) & \omega < 0 \end{cases}$$



由系统函数 $H(s) = \frac{s}{s + \alpha}$ 粗略画出频率响应：

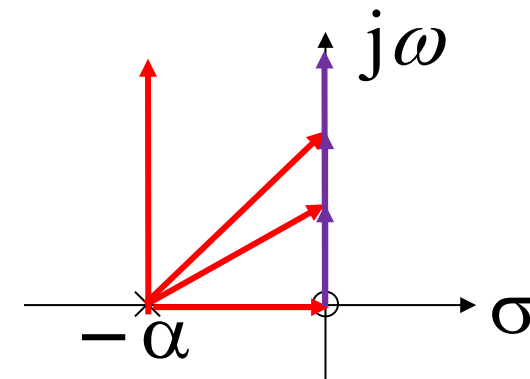
(1) 当 $\omega = 0$ ，**极点矢量**指向原点，其模长为 α ，相角为 0；**零点矢量**长度为 0，相角等于 $\pi/2$ ；于是 $|H(j\omega)| = 0$ ， $\varphi(\omega) = (\pi/2)$ 。

(2) 当 $\omega \uparrow$ ，**极点矢量**模 \uparrow ，相角 \uparrow ；**零点矢量**的模 \uparrow ，且增加的速率比极点的快，相角不变； $|H(j\omega)| \uparrow$ ， $\varphi(\omega) \downarrow = (\pi/2) - \arctg(\omega/\alpha)$ 。

例如，相角为 $\pi/6$ 时，**零点矢量**的模为 $\sqrt{3}\alpha/3$ ，**极点矢量**的模为 $2\sqrt{3}\alpha/3$ ， $|H(j\omega)| = 1/2$ ；

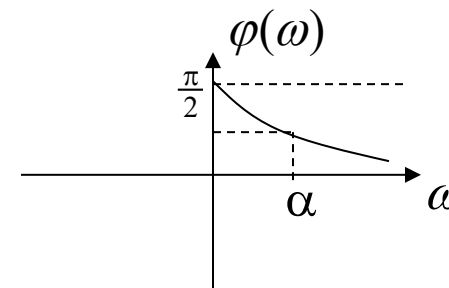
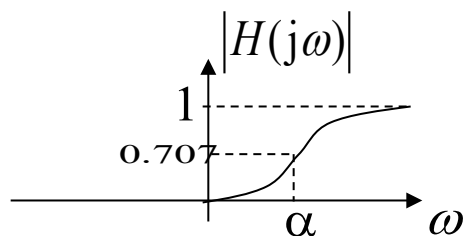
(3) 当 $\omega = \alpha$ ，相角趋近 $\pi/4$ 时，**零点矢量**的模趋近 α ，**极点矢量**的模趋近 $\sqrt{2}\alpha$ ， $|H(j\omega)| = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ ， $\varphi(\omega) = (\pi/4)$ 。

(4) 当 $\omega \rightarrow \infty$ ，**零点矢量**与**极点矢量**均垂直于实轴指向无穷远， $|H(j\omega)| \rightarrow 1$ ， $\varphi(\omega) \rightarrow 0$ 。



$$|H(j\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) & \omega < 0 \end{cases}$$



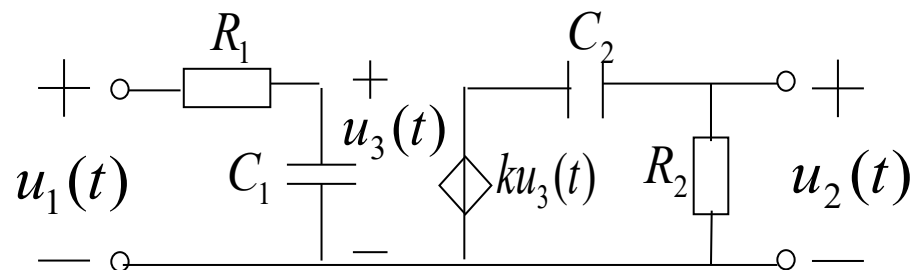
由其幅频响应曲线可见，是一**高通滤波器**。

可以发现，HPF和LPF的频率响应具有下述关系：

$$H_{HPF}(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \alpha}, H_{LPF}(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}$$

$$H_{HPF}(j\omega) = 1 - H_{LPF}(j\omega)$$

例4-40: 如图所示二阶 RC 电路，试求其系统函数，设 $R_2C_2 \gg R_1C_1$ ，作出其零极图，并粗略的画出其频响曲线。



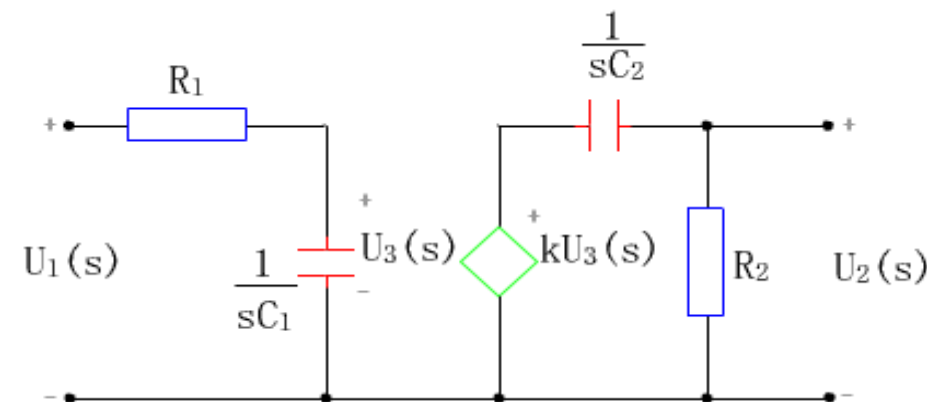
低通

高通

$$U_3(s) = U_1(s) \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}}$$

$$U_2(s) = kU_3(s) \cdot \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = k \cdot U_1(s) \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

解: 先画出等效电路



$$U_2(s) = kU_1(s) \cdot \frac{1}{R_1C_1 \left(s + \frac{1}{R_1C_1} \right)} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{R_2C_2}}$$

电路的系统函数

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{k}{R_1 C_1} \cdot \frac{s}{(s + \frac{1}{R_1 C_1})(s + \frac{1}{R_2 C_2})}$$

也可以直接根据受控源电路的原理：
$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_2(s)}{kU_3(s)} \cdot \frac{kU_3(s)}{U_1(s)}$$

由前两例题可知：
$$\frac{U_3(s)}{U_1(s)} = \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1} \quad \frac{U_2(s)}{kU_3(s)} = \frac{s}{s + \alpha_2} \quad (\alpha_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \gg \frac{1}{R_2 C_2} = \alpha_2)$$

所以

$$H(s) = \frac{ks\alpha_1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$$

$$H(j\omega) = \frac{kj\omega\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)}$$

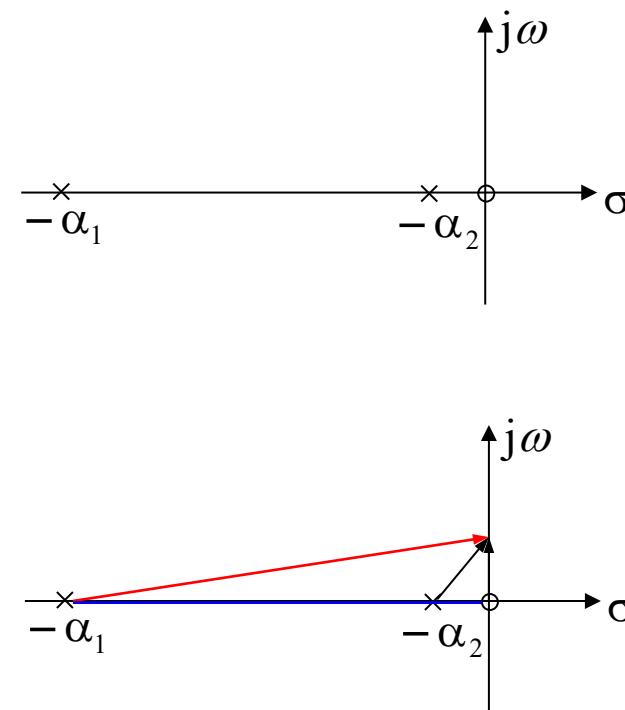
(1) 当 $\omega = 0$, 零点矢量的模等于0, 相角等于 $\pi/2$, 幅频响应 $|H(j\omega)| = 0$; 极点矢量的相角均等于零, $\varphi(\omega) = (\pi/2)$ 。

(2) 当 ω 较小, 主要的变化是零点矢量与极点 $-\alpha_2$ 对应的矢量, $|j\omega + \alpha_1| \approx \alpha_1$, 此时

$$H(j\omega) = \frac{kj\omega\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} \approx \frac{kj\omega}{j\omega + \alpha_2}$$

相当于截止频率等于 α_2 的高通滤波器。

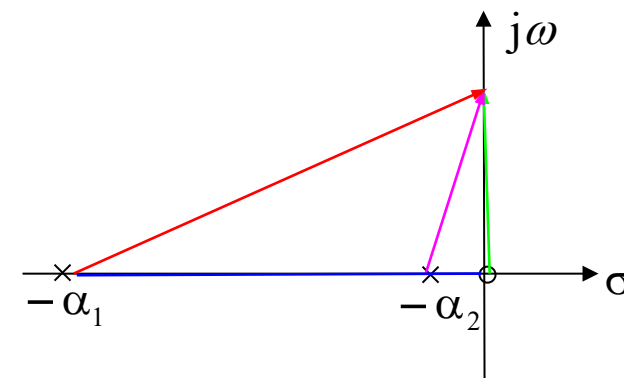
说明在低频段, 主要是右侧电路的高通特性在起作用。



(3) 当 $\alpha_2 < \omega < \alpha_1$ 时, $|j\omega + \alpha_1| \approx \alpha_1$, $j\omega + \alpha_2 \approx j\omega$, 此时 $H(j\omega) \approx k$

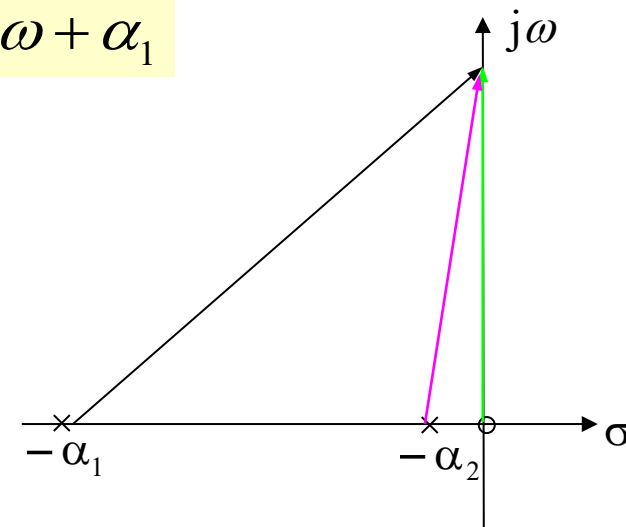
相当于截止频率为 α_1 和 α_2 的带通滤波器。

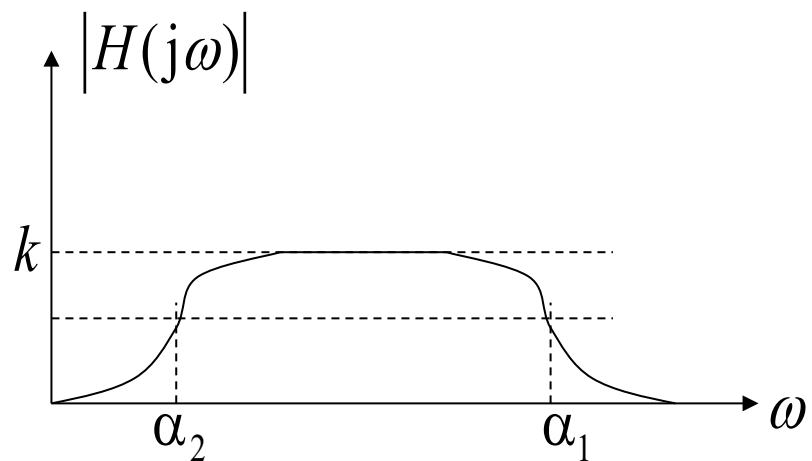
说明在中频段, C_1 近似于开路, C_2 近似于短路, 等效于信号 u_1 经受控源的 k 倍放大送往输出端。 $u_2(t) \approx ku_1(t)$ 。



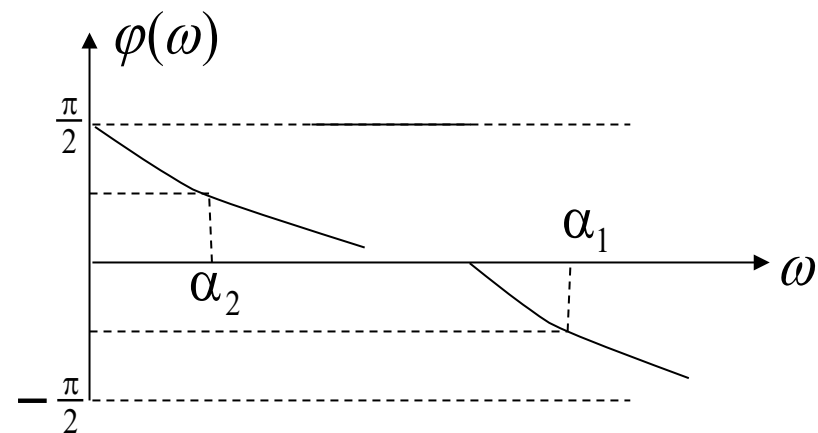
(4) 当 ω 较大时, $j\omega + \alpha_2 \approx j\omega$, 此时 $H(j\omega) = \frac{kj\omega\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} \approx \frac{k\alpha_1}{j\omega + \alpha_1}$

相当于截止频率为 α_1 的低通滤波器。





幅频特性曲线



相频特性曲线

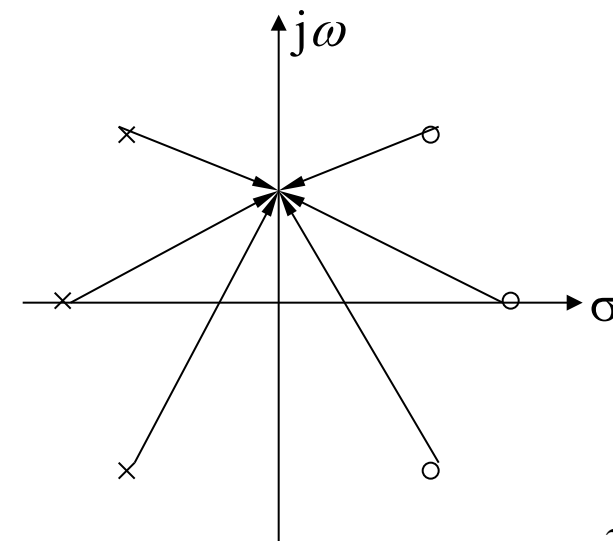
全通函数与最小相移函数的零、极点分布

(1) 全通系统的零极点分布

全通系统的幅频响应在所有频率上均为一常数。全通系统的相频响应没有受到限制。

全通系统函数的零点矢量的模之积与极点矢量的模之积，在所有频率上均相等。要做到这一点，零点与极点应该以虚轴为镜像对称分布。

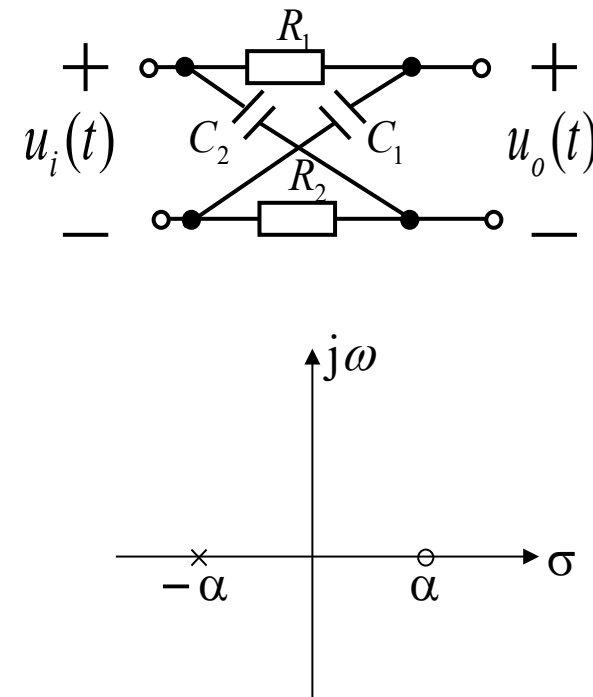
$$|H(j\omega)| = \frac{H_0 \prod_{k=1}^N B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} = H_0$$



例4-41: 如图所示RC电桥, 试求其传输函数 $H(s)$, 并说明当 $R_1C_1 = R_2C_2$ 时电路是全通网络。

解: 系统的传输函数 (传输电压比)

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} &= \frac{\frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} - \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{\frac{1}{sC_1}}{s + \frac{1}{R_1C_1}} - \frac{s}{s + \frac{1}{R_2C_2}} \\ &= \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1} - \frac{s}{s + \alpha_2} \end{aligned}$$



当 $R_1C_1 = R_2C_2 = RC = 1/\alpha$ 时, 零极点以虚轴镜像对称。

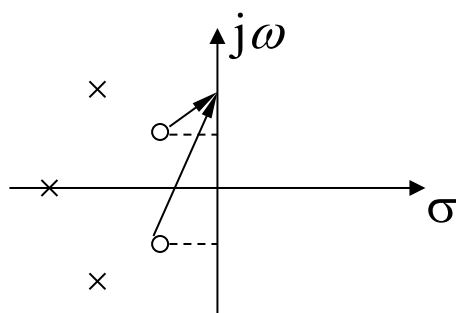
$$H(s) = -\frac{s - \alpha}{s + \alpha}$$

$$\therefore H(s) = -\frac{(s^2 - \alpha_1\alpha_2)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$$

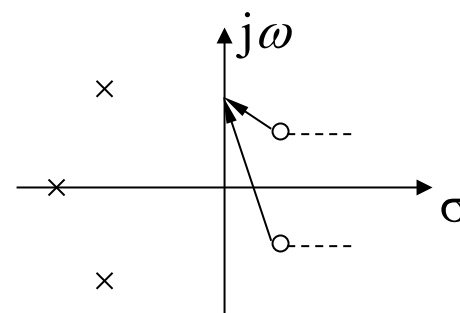
(2) 最小相移系统的零极点分布

最小相移系统：系统函数的零点均分布在 s 平面的左半平面或虚轴上。

若有一个或多个零点分布在右半平面，就是非最小相移系统。



最小相移系统零极图



非最小相移系统零极图

比较以上两零极图，极点分布相同，零点的虚部相等，实部符号相反。显然，两图 **幅频响应相同**；对于所有的频率上，**左图中零点的相角均小于右图中零点的相角**，而两图中极点的相角相同，所以就**相移的绝对值**而言，左图的**相移更小**。

例4-42: 下列系统函数中，属于最小相移系统的是 ()

A

$$H(s) = \frac{(s-2)^2+6}{(s+1)(s+5)^2}$$

B

$$H(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s+1)^2}$$

C

$$H(s) = \frac{(s+2)^2+6}{(s+1)(s+5)^2}$$

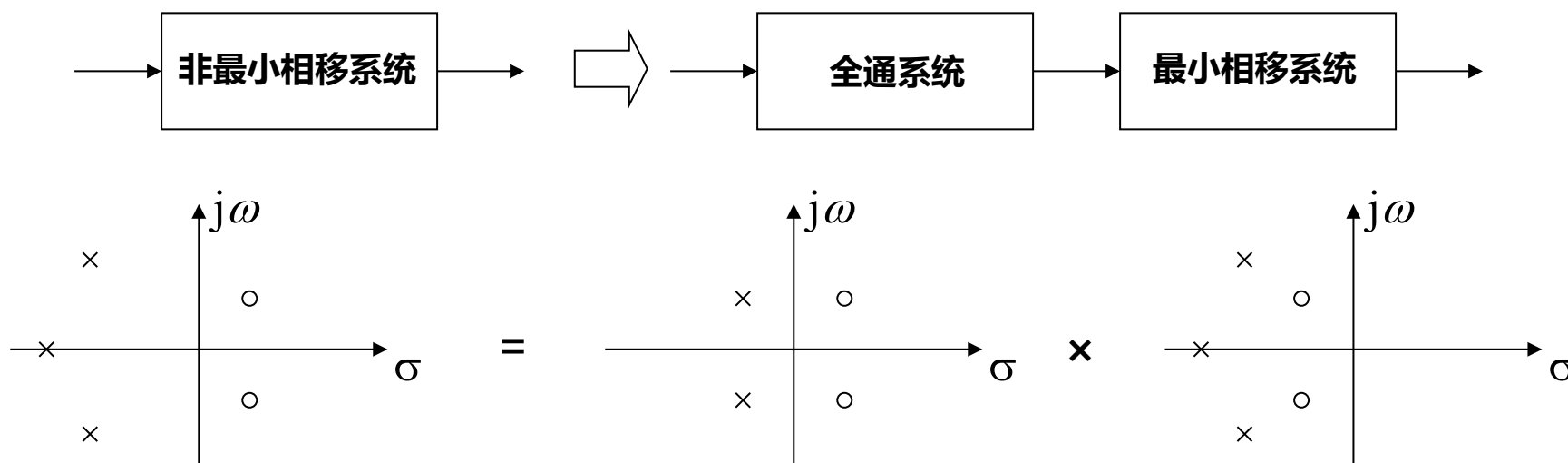
D

$$H(s) = \frac{(s-3)^2}{s^3+5s+7}$$

提交

任何一非最小相移系统，均可表示为一全通系统与一最小相移系统的级联。

$$H(s) = H_{AP}(s) \cdot H_{\min}(s)$$



例如：
$$H(s) = \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]} = \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2} \cdot \frac{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]}$$

$$H_{AP}(s) = \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}$$

$$H_{\min}(s) = \frac{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]}$$

4.9 线性系统的稳定性

系统的因果性和稳定性

系统的因果性指在初始状态为零时，输出不会发生在输入作用于系统之前，即当 $t < t_0$ ， $x(t) = 0$ ，必定有 $t < t_0$ ， $y(t) = 0$ 。

线性系统的因果性判据（充分必要条件）：

时域上：指其单位冲激响应为因果信号，满足： $h(t) = h(t)u(t)$

复频域上：系统函数 $H(s)$ （必要条件）

收敛域为 $\sigma > \sigma_0$ ，即收敛域为以 σ_0 为界的右半平面

或者

$H(s)$ 的所有极点都位于收敛轴 σ_0 的左半平面

系统的**稳定性**指**幅度有限的输入只能产生幅度有限的输出**的系统，即当输入 $|x(\cdot)| < \infty$ ，输出 $|y(\cdot)| < \infty$ ，系统必定是稳定的。即**输出不能包含冲激函数及其导数**。

线性时不变系统的**稳定性判据**（充分必要条件）

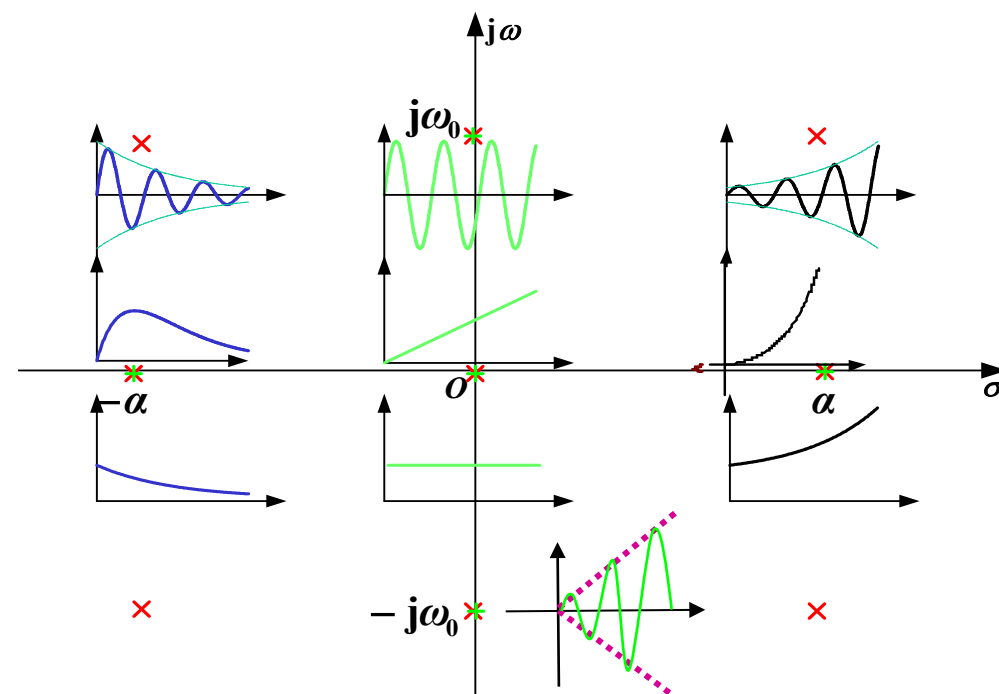
时域上：指**单位冲激响应满足绝对可积**，即
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

复频域上：要求系统函数 $H(s)$ ： s 右半平面和虚轴上不能有极点

当系统是因果稳定的，其单位冲激响应应该满足在 0- 到 ∞ 绝对可积：
$$\int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

根据系统函数 $H(s)$ 的零极点特性判断稳定性：

极点在 s 平面右半平面的 $H(s)$ 对应的 $h(t)$ 都不满足绝对可积。

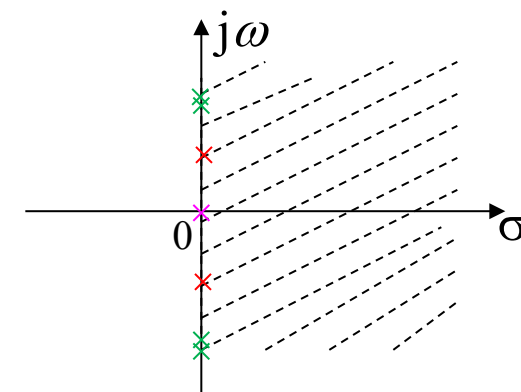


线性因果系统的稳定性判据：系统函数的极点只能分布在 s 平面的左半平面。

也即，系统函数的收敛域 $\sigma > \sigma_0$ 包含虚轴 $\sigma = 0$ 。

如果系统函数的极点分布在 s 平面虚轴上呢？

例如原点上的一阶极点，对应的因式是 $\frac{1}{s}$ ，逆变换是单位阶跃信号 $u(t)$ ，不满足绝对可积。但其在 $t > 0$ 时，稳定不变。



例如虚轴上的一对共轭极点，对应的因式是 $\frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$ 或 $\frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$ 的形式，对应的逆变换是等幅的正余弦信号，也不满足绝对可积。但是在 $t > 0$ 时，其最大幅度稳定不变。

如果在虚轴上的极点是多重的，对应的时间信号将不满足绝对可积，且在 $t > 0$ 时，其幅度是逐渐增加的。

显然，虚轴上的极点不管是单阶的还是多重的，都使系统不稳定。

也有称，虚轴上一阶极点的情况为临界稳定的。

一个稳定系统的系统函数，对其零点的个数也有要求。

设系统函数为：
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = s + \frac{A(s)}{D(s)}$$

$A(s)/D(s)$ 是有理真分式。当输入一有界的 $x(t) = u(t)$ ，输出中就会出现冲激信号 $\delta(t)$ ，幅度是无界的。可见以上系统是不稳定的。

注： $h(t)$ 可包含冲激函数，但不能包含冲激函数的导数。

综上，从 s 域判断线性因果系统的稳定条件应该是：

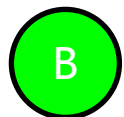
- (1) 系统函数的极点均应分布在 s 平面虚轴的左半平面上；即系统函数分母多项式的根，如果是实数，则应该是负实数；如果是复数，则应具有负的实部。
- (2) 系统函数的分子多项式的阶次不应高于分母多项式的阶次（零点个数不应多于极点个数）。

例4-43：已知一个系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s}{s^2 - s - 6}$ ，该系统：



A

稳定



B

不稳定

提交

例 4-44： 已知两因果系统的系统函数 $H_1(s) = \frac{1}{s}$, $H_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$, 激励信号分别为 $e_1(t) = u(t)$, $e_2(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$, 求两种情况的响应 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$, 并讨论系统稳定性。

解： 求激励信号的拉氏变换分别为 $E_1(s) = \frac{1}{s}$ 和 $E_2(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

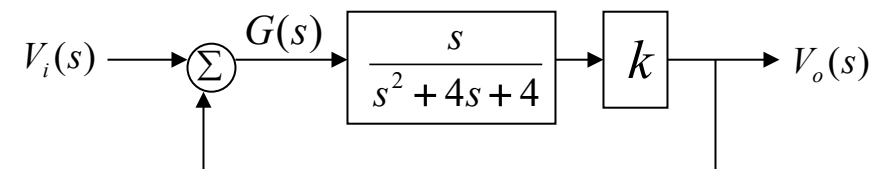
响应的拉氏变换 $R_1(s) = E_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ $R_2(s) = E_2(s)H_2(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$

对应的时域表达式 $r_1(t) = tu(t)$ $r_2(t) = \frac{1}{2}t \sin(\omega_0 t)u(t)$

有界的输入产生无界的输出，两个系统都不稳定。

$H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 具有虚轴上的一阶极点，属于临界稳定。

例4-45: 下图示一反馈系统, 1) 求系统函数。2) k 满足什么条件时系统稳定 ?
3) 在临界稳定时, 求系统的单位冲激响应。



解: 1) $G(s) = V_i(s) + V_o(s)$

$$V_o(s) = \frac{ksG(s)}{s^2 + 4s + 4}$$

$$\therefore H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{ks}{s^2 + (4-k)s + 4}$$

$$2) \text{ 系统函数的极点: } p_{1,2} = \frac{-(4-k) \pm \sqrt{(4-k)^2 - 16}}{2}$$

当 $k > 4$, 系统函数有正实部的极点, 系统不稳定。因此, 应该满足 $k < 4$ 时系统稳定。

$$3) \text{ 当 } k = 4 \text{ 时, 系统函数为 } H(s) = \frac{4s}{s^2 + 4} \quad \therefore h(t) = 4 \cos(2t)u(t)$$

如何判断一个多项式的根是否都是负实部的？

当系统函数的分母多项式是低阶次的，可按以下条件判断其不存在正实部的根：

- (1) 分母多项式中各次系数都不为 0，即不缺项；
- (2) 分母多项式中各次系数的符号相同。当最高阶系数为 1 时，其他系数应均为正。

按以上条件，可立即得出上例的稳定条件：

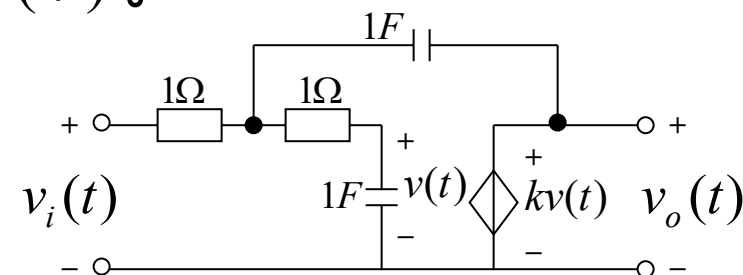
$$H(s) = \frac{ks}{s^2 + (4-k)s + 4} \quad 4-k > 0 \quad \therefore k < 4$$

系统函数，当分母多项式的阶次较高，其极点的求解就比较困难，此时按以上条件判断还不充分。有关的条件，如：[罗斯-霍尔维兹判据](#)，可参考其他书籍。

例4-46：带反馈的受控源电路如图，求系统函数 $H(s) = V_o(s) / V_i(s)$ ；求系统稳定时的 k 的取值范围；求当系统处于临界稳定时的单位冲激响应 $h(t)$ 。

解：系统函数（课后题4-46）

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{k}{s^2 + (3-k)s + 1}$$



当系统稳定时，系统函数分母多项式的系数均应大于零，即

$$3 - k > 0 \quad \therefore k < 3$$

系统临界稳定时 $k = 3$ ，此时系统函数

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 1} \quad \therefore h(t) = 3 \sin t u(t)$$

作 业

教材习题：

基础题： 4-38, 4-39 (a) (b) (c) (e) (g) , 4-42, 4-47,

加强题： 4-39 (d) (f) (h) , 4-41, 4-48