练习题：

1、已知随机变量X和Y的联合概率密度为

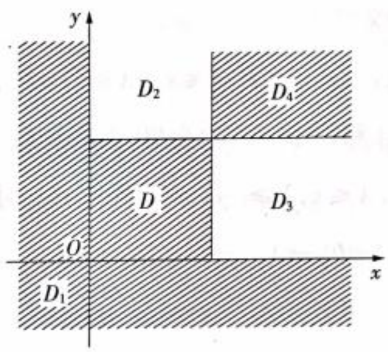
$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求X和Y的联合分布函数$F(x,y)$。

答案：

思路分析 按照分布函数的定义，直接计算 $P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$，相当于要用 X 和 Y 的联合概率密度在该区域上积分。由于 X 和 Y 的联合概率密度仅在区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上不为零，所以需要用这两个区域求交集，根据交集的不同情况，对平面区域进行划分。

解析 将整个平面分为五个区域 D,D_1,D_2,D_3,D_4，如图所示，



其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1\}$，$D_1=\{(x,y)\mid x<0$ 或 $y<0\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<1,y\geqslant 1\}$，$D_3=\{(x,y)\mid x\geqslant 1,0\leqslant y<1\}$，$D_4=\{(x,y)\mid x\geqslant 1,y\geqslant 1\}$。

当$(x,y)\in D_1$，即 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$；当$(x,y)\in D_4$，即 $x\geqslant 1$ 且 $y\geqslant 1$ 时，$F(x,y)=1$；当$(x,y)\in D$，即 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4st\,dt\,ds=\int_0^x 2sy^2\,ds=x^2y^2;$$

当$(x,y)\in D_2$，即 $0\leqslant x<1,y\geqslant 1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x ds\int_0^1 4st\,dt=\int_0^x 2s\,ds=x^2;$$

当$(x,y)\in D_3$，即 $x\geqslant 1,0\leqslant y<1$ 时，与 D_2 类似，有 $F(x,y)=y^2$。

综上所述，(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1,\\ y^2, & x\geqslant 1,0\leqslant y<1,\\ x^2, & 0\leqslant x<1,y\geqslant 1,\\ 1, & x\geqslant 1,y\geqslant 1。\end{cases}$$

7

2、设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求：(1) 常数c；(2) $P\{0<X\leq 1,0<Y\leq 2\}$。

思路分析 (1)运用概率密度的归一性计算参数；(2)直接用概率密度在所给区域上积分。

解析 (1)由概率密度的性质可知$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，而由$f(x,y)$的定义可知

$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}ce^{-(3x+4y)}\,\mathrm{d}x=\frac{c}{12}$，可知$c=12$。

(2)积分区域为$D=\{(x,y)\mid 0<x\leqslant 1,0<y\leqslant 2\}$，可知

$$P\{0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2\}=\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^1 12e^{-(3x+4y)}\,\mathrm{d}x=(1-e^{-8})(1-e^{-3})。$$

3、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & 0<x<1,0<y<2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

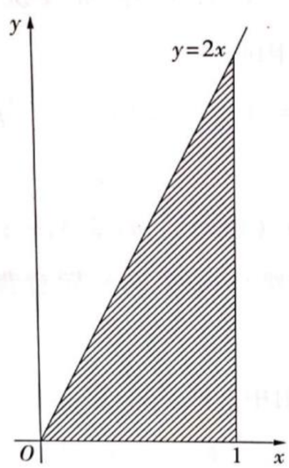
试求：

(1) 常数 c；

(2) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度。

答案：

11. 解析 (1)由概率密度在非零区域D上为常数c，可知(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<2x\}$上的均匀分布，且$c=\frac{1}{S(D)}$，其中$S(D)$表示区域$D$的面积。$D$对应的区域如图所示，



易知 $S(D)=1$，故 $c=1$。

(2)积分区域如上图所示，由边缘概率密度计算公式，可得：

当 $0<x<1$ 时，$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{2x} 1\,dy=2x;$$

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=0。$$

所以 X 的边缘概率密度为 $$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

当 $0<y<2$ 时，$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{\frac{y}{2}}^{1} 1\,dx=1-\frac{y}{2};$$

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 2$ 时，$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=0。$$

所以 Y 的边缘概率密度为 $$f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

4、射手击中目标的概率为p（$0<p<1$)，射击到第二次击中目标为止，设以X表示第一次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数，试求：

（1）X和Y的联合分布律；

（2）在$X=m$的条件下$Y=n$的条件概率，以及在$Y=n$的条件下$X=m$的条件概率。

答案：

9. 解析 (1)求(X,Y)的分布律，首先确定 X 和 Y 可能的取值。结合题目给出的实际背景，“$X=m,Y=n$”中 n 可能的取值为 $2,3,\cdots$；m 可能的取值为 $1,2,\cdots,n-1$，且需满足 $m<n$。

根据题意，事件$\{X=m,Y=n\}$表示第 m 次射击时第一次击中目标，第 n 次射击时第二次击中目标。分析可知，射击次数共为 n，其中前 $m-1$ 次均未击中，第 m 次击中，第 $m+1$ 至第 $n-1$ 次均未击中，第 n 次击中。因此，

$$P\{X=m,Y=n\}=(1-p)^{m-1}p\,(1-p)^{n-m-1}p=p^2\,(1-p)^{n-2}。$$

所以(X,Y)的分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2\,(1-p)^{n-2},n=2,3,\cdots;m=1,2,\cdots,n-1。$$

(2)求条件分布律,需先求边缘分布律,分析题意背景可知,随机变量 $X\sim G(p)$,故 $P\{X=m\}=(1-p)^{m-1}p, m=1,2,\cdots$。

事件$\{Y=n\}$表示前 $n-1$ 次中射中一次,第 n 次射中,则其概率为

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}(1-p)^{n-2}p^2=(n-1)(1-p)^{n-2}p^2, n=2,3,\cdots。$$

则由条件概率公式可得,在 $X=m$ 的条件下 $Y=n$ 的概率为

$$P\{Y=n \mid X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(1-p)^{m-1}p}=p(1-p)^{n-m-1}, m=1,2,\cdots; n=m+1,m+2,\cdots;$$

在 $Y=n$ 的条件下 $X=m$ 的概率为

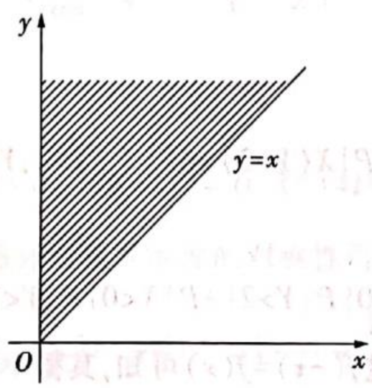
$$P\{X=m \mid Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)(1-p)^{n-2}p^2}=\frac{1}{n-1}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1。$$

5、设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>x>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

试求(X,Y)关于X,Y的边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$,并判断X与Y的独立性。

解析 首先画出积分区域,即联合概率密度不为零的区域如图所示,



当 $x>0$ 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_{x}^{+\infty}e^{-y}\,dy=e^{-x}$;

当 $x\leqslant 0$ 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=0$。

所以 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

当 $y>0$ 时，$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_0^y \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y};$$

当 $y\leqslant 0$ 时，$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=0。$$

所以 Y 的边缘概率密度 $$f_Y(y)=\begin{cases} y\mathrm{e}^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

经验证 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

6、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

试判断X与Y是否独立。

答案：

思路分析 计算两个边缘分布，再检验其乘积是否等于联合分布。

解析 先计算边缘分布，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}y=x+\dfrac{1}{2}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

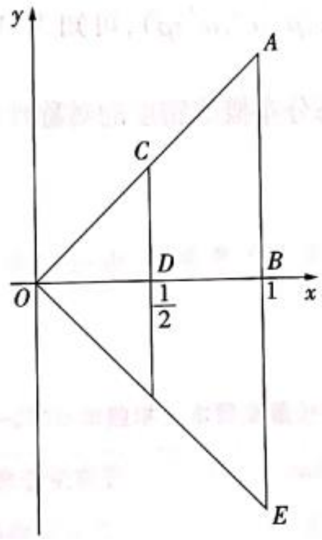
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}x=y+\dfrac{1}{2}, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

经检验，显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，可知 X,Y 不独立。

7、设二维随机变量（X,Y）在区域D上服从均匀分布，其中$D=\{(x,y)\mid |y|<x,0<x<1\}$。求$P\{X>\frac{1}{2}\mid Y>0\}$。

答案：

首先画出积分区域，如图所示，



根据条件概率公式有：

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\mid Y>0\right\}=\frac{P\left\{X>\frac{1}{2}\,,\,Y>0\right\}}{P\{Y>0\}}$$

其概率的比值等于四边形 ABDC 和三角形 AOB 的面积比，由于三角形 COD 和三角形 AOB 相似，面积比等于相似比的平方，故$\frac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta AOB}}=\frac{1}{4}$，则$\frac{S_{\Delta ABDC}}{S_{\Delta AOB}}=\frac{3}{4}$，即$P\left\{X>\frac{1}{2}\mid Y>0\right\}=\frac{3}{4}$

8、设二维随机变量(X,Y)在区域 G={(x，y)|0<x<2,0<y<1}上服从均匀分布

$$U=\begin{cases}1, & X>Y,\\ 0, & X\leqslant Y,\end{cases}\quad V=\begin{cases}1, & X>2Y,\\ 0, & X\leqslant 2Y。\end{cases}$$

求 U 和 V 的联合分布律。

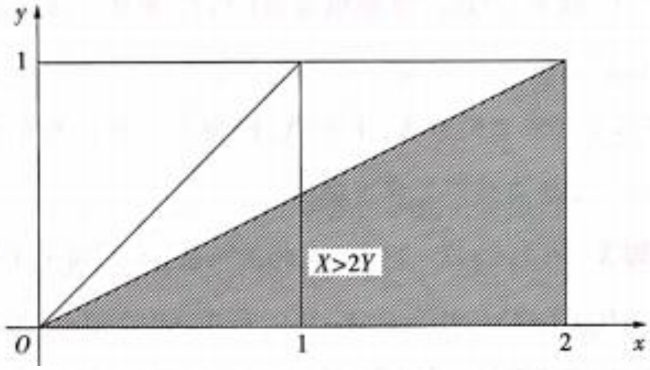
答案：

思路分析 U 和 V 都已经确定了，直接计算每对取值组合的概率即可。计算概率的时候，由于(X,Y)服从二维均匀分布，所以只需画出随机事件所对应的区域，再计算面积。

解析 先计算 $P\{U=1,V=1\}$，由定义可知

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=P\{X>2Y\}。$$

$\{X>2Y\}$的区域如图所示，

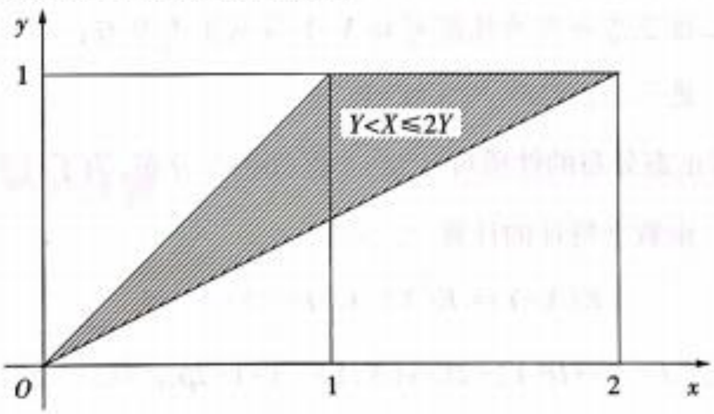


其面积为 1，由于 G 的总面积为 2，可知 $P\{U=1,V=1\}=\dfrac{1}{2}$。

类似地，有

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\leqslant 2Y\}=P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4},$$

其中 $\{Y<X\leqslant 2Y\}$ 所对应的区域如图所示，



$P\{U=0,V=1\}=P\{X\leqslant Y,X>2Y\}=0,P\{U=0,V=0\}=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$。

因此 U 和 V 的联合分布律如表所示，

V \ U	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$

考研真题：

1、（2009年，数学一、数学三）袋中有1个红球，2个黑球与3个白球。现有放回地从袋中取两次，每次取一个球，以X，Y分别表示两次取球所取得的红球、黑球的个数。求二维随机变量（X，Y)的概率分布。

答案：

思路分析 先写出X,Y所有可能的取值，再逐一计算每一种取值组合的概率，计算时需要用到古典概型的相关公式和方法。

解 析 由题意知X与Y的所有可能取值均为0,1,2。

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{4},P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{36},P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_2^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_2^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{9},P\{X=2,Y=1\}=0,$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=0,P\{X=2,Y=2\}=0,$$

故(X,Y)的概率分布为

Y \\ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

小 结 和一维离散型随机变量的分布律类似，要计算二维随机变量的分布律，基本思路是先写出两个随机变量各自的取值，然后再逐一计算两个随机变量每一种取值组合的概率。

2、(2004年，数学一、数学三）设A，B为随机事件，且$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}。\end{cases}$$

求二维随机变量（X，Y)的概率分布。

答案:

思路分析 先确定(X,Y)的可能取值，再求每一个可能取值的概率，而这概率可利用随机事件的运算性质得到。

解析 由于$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12}$，所以$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{1}{6}$，利用条件概率公式和事件的运算关系，有

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}。$$

故(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

3、(2005 年，数学一）设二维随机变量（X，Y）的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则（　　）。

（A）a=0.2，b=0.3　　（B）a=0.4，b=0.1

（C）a=0.3，b=0.2　　（D）a=0.1，b=0.4

答案：

思路分析 借助随机事件独立性的定义以及分布律的归一性列出方程，求出参数值。

解析 由二维离散型随机变量联合概率分布的性质 $\sum_i \sum_j p_{ij}=1$，有 $0.4+a+b+0.1=1$，可知 $a+b=0.5$，又因为事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，于是由独立的定义有

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

而

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a,$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b=0.5,$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.4+a,$$

代入独立满足的等式，得 $a=(0.4+a)\times0.5$，解得 $a=0.4,b=0.1$。故本题选 B。

4、（2011 年，数学一、数学三）设随机变量X与Y的概率分布分别为

X	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且$P\{X^2=Y^2\}=1$。求二维随机变量（X，Y）的概率分布。

答案：

思路分析 本题已知随机变量的边缘分布求联合分布，可以先根据边缘分布写出随机变量的取值，同时运用边缘分布和联合分布的关系，结合题目已知条件进行计算。

解析 由边缘分布可得两随机变量各自的取值，还可以确定联合分布中各行各列的和，如下表所示，

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0				$\frac{1}{3}$
1				$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

因为 $P\{X^2=Y^2\}=1$，所以 $P\{X^2\neq Y^2\}=1-P\{X^2=Y^2\}=0$。即 $P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$，则有

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0		0	$\frac{1}{3}$
1		0		$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

利用边缘概率和联合概率的关系可得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=-1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3},$$

即 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

小结 已知边缘分布律计算联合分布律也是考试中常出现的一种考查边缘分布计算公式的方式，通过边缘分布律可以确定两随机变量各自的取值，同时还能确定联合分布中各行各列的和，再结合题目中的其他条件，就可以求出联合分布律。

5、(2011 年，数学三）设二维随机变量(X,Y)服从区域G上的均匀分布，其中G是由$x-y=0$，$x+y=2$与$y=0$所围成的区域。

（1）求边缘概率密度$f_X(x)$；

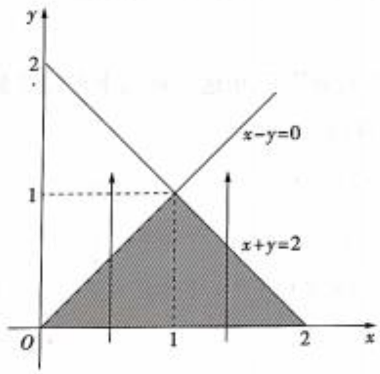
（2）求条件密度函数$f_{X|Y}(x|y)$。

答案：

思路分析 先写出联合概率密度，再按照公式分别计算边缘概率密度和条件概率密度。

解析 二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<1, y<x<2-y,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

(1)如图所示，



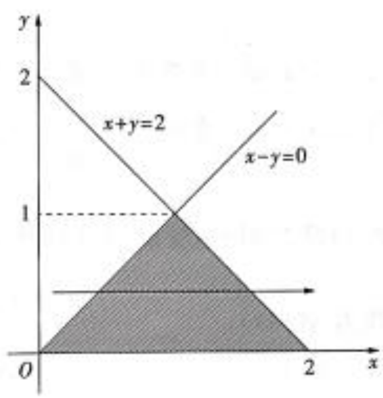
当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_0^x 1\,dy=x$；

当$1\leqslant x<2$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_0^{2-x}1\,dy=2-x$；

当$x\leqslant 0$或$x\geqslant 2$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=0$。

则关于X的边缘概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

(2)如图所示，

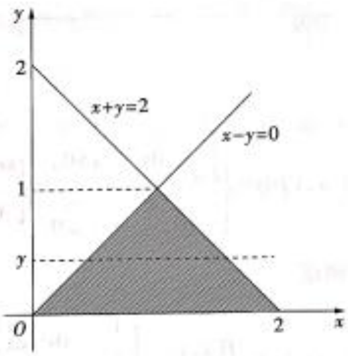


当$0<y<1$时，Y的边缘概率密度为$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_y^{2-y}1\,dx=2-2y$；

当$y\leqslant 0$或$y\geqslant 1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=0$；

当$0<y<1$时$f_{X|Y}(x|y)$有意义，条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{2-2y}$。

当固定 $Y=y$ 时，如图所示，



当 $y<x<2-y$ 时，$f(x,y)=1$，其他情况下 $f(x,y)=0$，所以有

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & \cancel{y<x<2-y,}\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

6、（2010 年，数学一、数学三）设二维随机变量（X, Y）的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数A及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$。

答案：

思路分析 首先，可以通过概率密度的归一性确定联合分布中的参数，再根据条件概率公式 $f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 计算条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$。

解 析 由边缘概率密度计算公式可得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy。$$

这里的难点是如何计算该积分，对 y 积分时，x 可以看作常数，此时被积函数的指数是一个关于 y 的二次函数，可以先对其进行配方，则有

$$f_X(x)=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2-x^2}dy=Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy。$$

再对其作变量代换 $u=y-x$ 可得

$$f_X(x)=Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=A\sqrt{\pi}e^{-x^2},$$

根据概率密度的性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=A\pi,$$

即 $A=\pi^{-1}$，故 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$，$-\infty<x<+\infty$。当 $-\infty<x<+\infty$ 时，有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<y<+\infty。$$

7、（2013 年，数学三）设$(X，Y)$是二维随机变量，X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

在给定$X=x(0<x<1)$的条件下，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求：

（1）(X,Y)的概率密度$f(x,y)$;

（2）Y的边缘概率密度$f_Y(y)$。

答案：

思路分析 已知边缘分布 $f_X(x)$ 和条件分布 $f_{Y|X}(y|x)$，可以通过条件分布的定义得到计算公式 $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$，从而求出 $f(x,y)$。

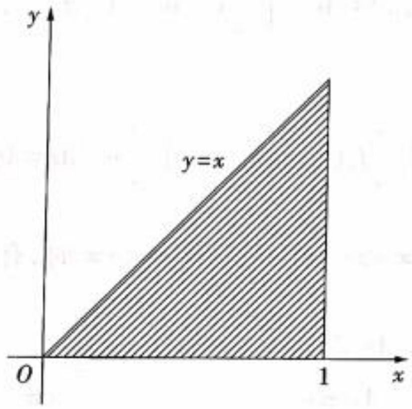
解 析 (1) 当 $0<x<1$ 时，

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

当 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant1$ 时，由于 $f_X(x)=0$，可知 $f(x,y)=0$。从而有

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

(2)如图所示,Y的边缘概率密度为



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

8、(2016 年，数学一、数学三) 设二维随机变量 (X,Y) 在区域$D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

(1) 写出 (X,Y) 的概率密度;

(2) 问U与X是否相互独立，并说明理由。

答案:

思路分析 (1)求出区域 D 的面积,即可求出概率密度。(2)由于随机变量 U 与 X 一个是离散型随机变量一个是连续型随机变量,直接用定义检验独立性比较复杂,所以可通过独立性的性质:如果 U 与 X 独立,那么 U 与 X 相互之间没有影响。相反,如果能说明 U 与 X 有影响,就可以得到 U 与 X 不独立。

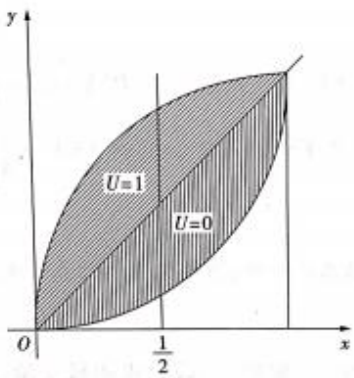
解析 (1)D 的面积 $S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{1}{3}$,则$(X,Y)$的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

(2)分别计算 $P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|U=0\right\}$和$P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|U=1\right\}$,如果 U 与 X 独立,那么这两个概率应该一样。由条件概率的定义可知

$$P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|U=0\right\}=\frac{P\left\{X<\frac{1}{2},U=0\right\}}{P\{U=0\}}=\frac{P\left\{X<\frac{1}{2},X>Y\right\}}{P\{X>Y\}}。$$

由于(X,Y)服从二维均匀分布，所以$\dfrac{P\left\{X<\frac{1}{2},X>Y\right\}}{P\{X>Y\}}$等于事件$\left\{X<\frac{1}{2},X>Y\right\}$和$\{X>Y\}$各自对应区域的面积比，如图所示，



可知
$$P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|U=0\right\}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}。$$

类似地
$$P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|U=1\right\}=\frac{P\left\{X<\frac{1}{2},U=1\right\}}{P\{U=1\}}=\frac{P\left\{X<\frac{1}{2},X\leqslant Y\right\}}{P\{X\leqslant Y\}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\sqrt{2}-\frac{3}{4}。$$

由于$P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|U=0\right\}\neq P\left\{X<\frac{1}{2}\middle|U=1\right\}$，可知$U$与$X$不独立。

小结 独立的随机变量相互之间互不影响，如果直接用定义检验随机变量的独立性不容易进行，就反其道而行之，如果能说明两个随机变量相互之间有影响，那么它们就一定不独立。

9、（2015 年，数学一）设二维随机变量（X，Y）服从二维正态分布$N(1,0;\ 1,1;\ 0)$，则$P\{XY-Y<0\}$ = ____________

答案：

思路分析 先写出X,Y各自的分布，注意(X,Y)服从二维正态分布且相关系数$\rho=0$，可得X,Y相互独立，运用上述条件即可求出概率。

解析 由题设知$X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$，相关系数$\rho=0$，则X,Y相互独立，故

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$
$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$