第三章 傅里叶变换

3.2.3　周期信号的频谱及其特点

1.　周期信号的频谱

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \quad (1)$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n) \quad (2)$$

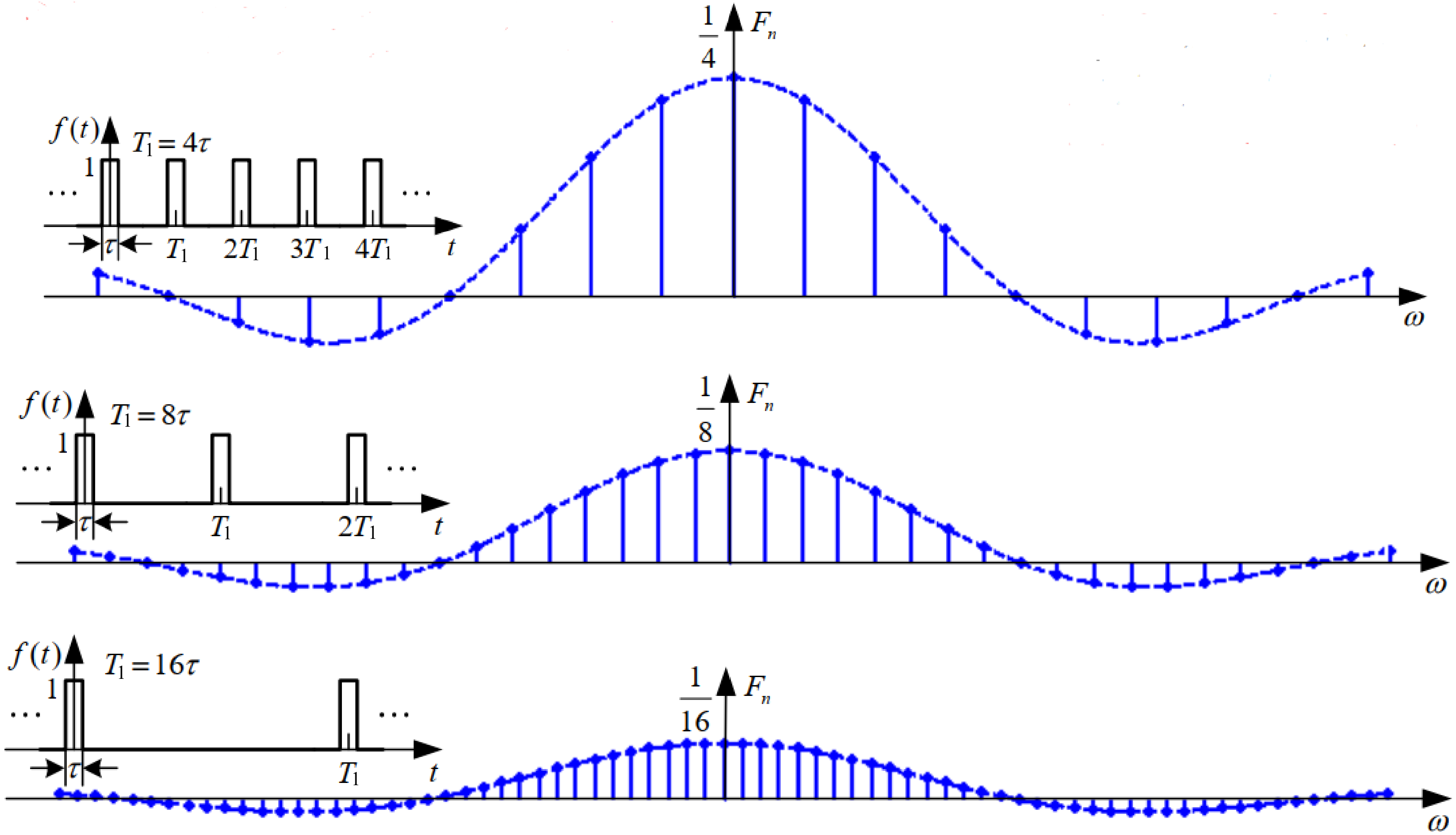
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3)$$

为了能既方便又明确的表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可画出**频谱图**来直观的表示。

如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，便可直观的看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。

回忆：谱线结构与波形参数的关系

取 E=1， $F_n = \dfrac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\dfrac{n\omega_1\tau}{2})$ ， 假设脉冲宽度 τ 不变



周期: T_1 增大

幅值: $\dfrac{\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\dfrac{n\omega_1\tau}{2})$ 减小

谱线间隔: $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$ 减小

3. 傅里叶变换对

傅里叶变换式“$-$”

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

傅里叶逆变换式“$+$”

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

简记为： $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[F(\mathrm{j}\omega)\right]$$

或 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$

傅里叶级数与傅里叶变换的关系（重点中的重点）：

傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

频谱（离散）

$$F_n=\left|F_n\right|e^{j\varphi_n}$$

在一个周期内满足狄里赫利条件

傅里叶变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

频谱密度（连续）

$$F(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

在 (-∞ , +∞)内满足狄里赫利条件

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

量纲不同

傅里叶变换表（几种常用函数及其频谱；*重要）

名称	时间函数	频谱函数
*单位冲激	$\delta(t)$	1
*单位阶跃	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/\mathrm{j}\omega$
符号函数	$\operatorname{sgn} t=u(t)-u(-t)$	$2/(\mathrm{j}\omega)$
*单位直流	1	$2\pi\delta(\omega)$
*单边指数函数	$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$1/(\alpha+\mathrm{j}\omega)$
双边指数函数	$\mathrm{e}^{-\alpha\|t\|}$	$2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$
*单位余弦	$\cos\omega_c t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
*单位正弦	$\sin\omega_c t$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$
*矩形脉冲(门函数)	$G_\tau(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$	$\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)=\tau\frac{\sin(\tau\omega/2)}{\tau\omega/2}$
*抽样函数	$\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega t}{2}\right)=\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2}$	$G_\Omega(\omega)=\frac{2\pi}{\Omega}\left[u\left(\omega+\frac{\Omega}{2}\right)-u\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)\right]$

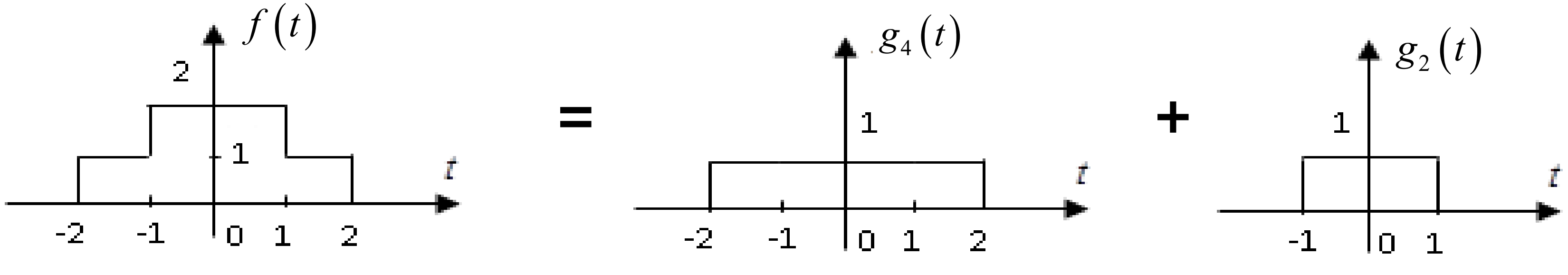
3.7 傅里叶变换的基本性质

3.7.1 线性 （齐次性+叠加性） → 实现复杂信号的分解

若 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\mathrm{j}\omega)$ ， $\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\mathrm{j}\omega)$

则 $\mathscr{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\mathrm{j}\omega) + a_2 F_2(\mathrm{j}\omega)$

例3-4 求如图所示信号 $f(t)$ 的频谱。



(a) (b) (c)

解： $f(t) = g_4(t) + g_2(t)$

$$\mathscr{F}[g_\tau(t)] = E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \qquad F(\omega) = 4\mathrm{Sa}(2\omega) + 2\mathrm{Sa}(\omega)$$

3.7.2 对称性

傅里叶变换和反变换之间的对称关系

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$

证明： $\because f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ 傅里叶逆变换

$\therefore f(-t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$

将变量 t 与 ω 互换，得到 $f(-\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$

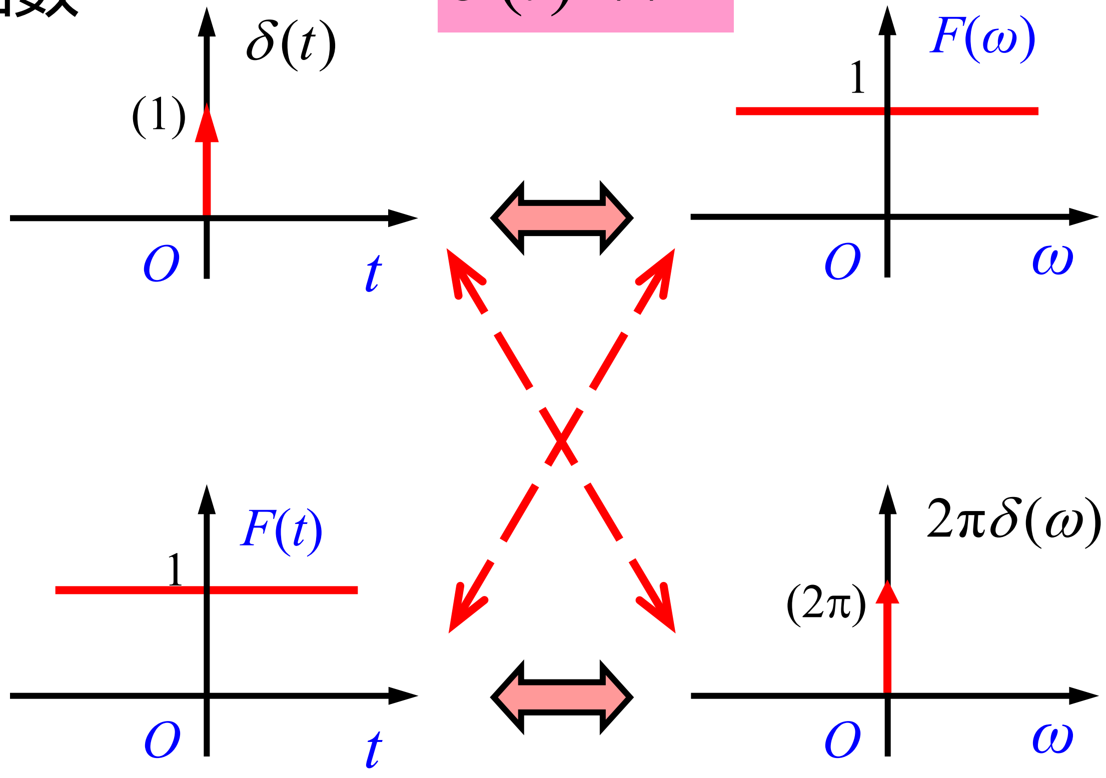
则 $2\pi\, f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$ 傅里叶变换

所以 $F(t) \leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$

进一步，若 $f(t)$ 为偶函数，则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

例如：冲激函数和直流函数

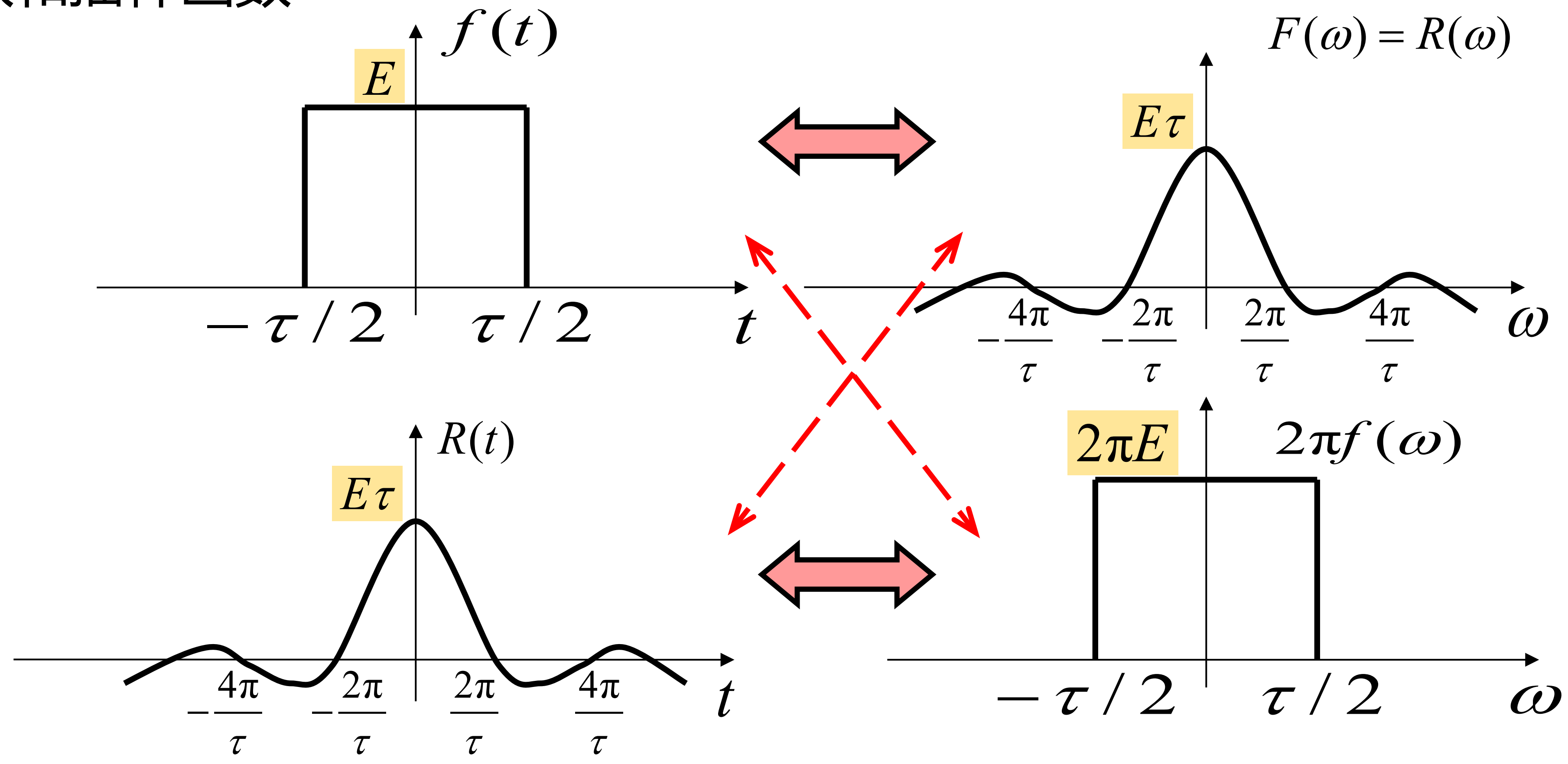
$\delta(t) \leftrightarrow 1$



$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$$f(t)=E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]\leftrightarrow R(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

又如：门函数和抽样函数



$$R(t)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{t\tau}{2})\quad\leftrightarrow\quad\mathscr{F}[R(t)]=2\pi E[u(\omega+\frac{\tau}{2})-u(\omega-\frac{\tau}{2})]$$

3.7.3 奇偶虚实性

设 $F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$

其中 $|F(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$, $\varphi(\omega)=\arctan\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)}$

因为 $F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

所以 $F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$

则 $\begin{cases} R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\ X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \end{cases}$

如果 $f(t)$ 是实函数，则

$R(\omega)$ 是偶函数，$X(\omega)$ 是奇函数

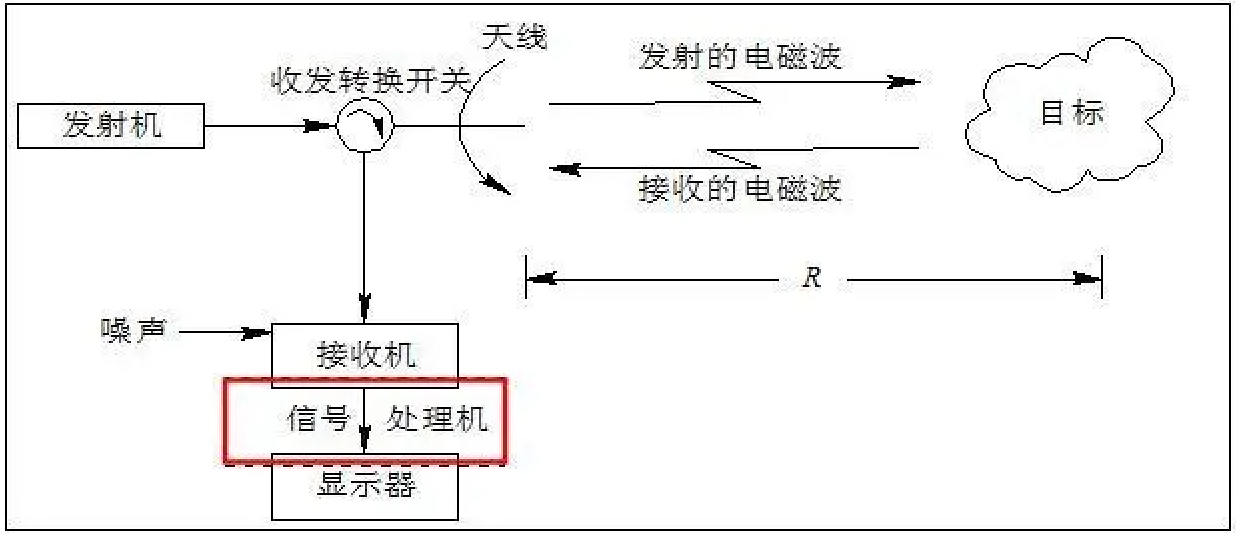
$f(t)$ 和 $F(\omega)$ 的奇偶虚实性总结：

$f(t)$		$F(\omega)$
实	一般	实部偶、虚部奇、幅频偶、相频奇
	偶	实偶
	奇	虚奇
虚	一般	实部奇、虚部偶、幅频偶、相频奇
	奇	实奇
	偶	虚偶

- 当 $f(t)$ 为奇函数时，$F(\omega)$ 也为奇函数
- 当 $f(t)$ 为偶函数时，$F(\omega)$ 也为偶函数

3.7.4 位移特性

（1）时移特性



若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

同理 $\mathscr{F}[f(t+t_0)]=F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}$

时域平移，频域相位旋转

应用：雷达探测、激光测距

（2）频移特性（调制定理）

时移同号
频移反号

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}[f(t)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_0 t}]=F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]$ $\mathscr{F}[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}]=F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]$

$\because \cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]$ $\sin\omega_0 t=\frac{\mathrm{j}}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]$

$$\therefore \mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]+F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\}$$

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{\mathrm{j}}{2}\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]-F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\}$$

结论：时间信号 $f(t)$ 乘以因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$，等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 沿频率轴右移 ω_0，即**频谱搬移技术**。

3.7.5 尺度变换特性

若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$ 则 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F(\dfrac{\omega}{a})$

证明 $\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

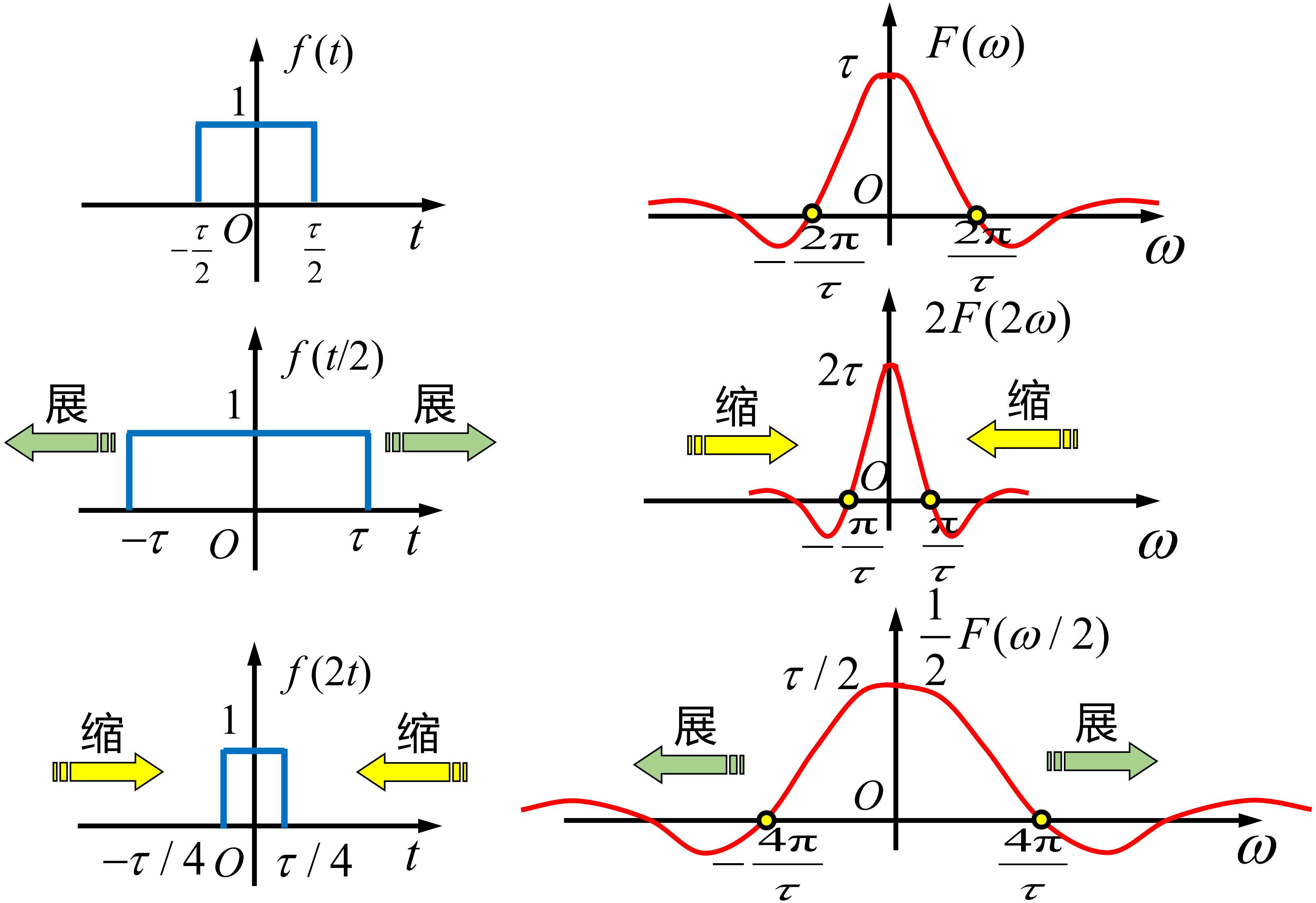
令 $x=at$，则 $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}t$，代入上式可得

若 **a > 0** $\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{\omega}{a})$

若 **a < 0** $\mathscr{F}[f(at)]=\int_{+\infty}^{-\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{a}\right)=-\dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}F(\dfrac{\omega}{a})$

$$\therefore f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

结论：时域压缩则频域扩展；时域扩展则频域压缩。



时域中的扩展（压缩），等于频域中的压缩（扩展）

极限情况:

1. 脉宽趋近于0，频谱趋于无穷大，变为冲激和常数;
2. 脉宽趋近于无穷大，频谱趋于0，变为常数和冲激。

特例: $\mathscr{F}[f(-t)]=F(-\omega)$　(反褶)

信号在时域中沿纵轴翻转等效于在频域中频谱也沿纵轴翻转。

综合时移特性和尺度变换特性，可以证明以下两式:

$$\mathscr{F}[f(at-t_0)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

$$\mathscr{F}[f(t_0-at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{-a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

3.7.6 微分与积分特性

（1）时域微分特性

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}]=\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)$, $\quad \mathscr{F}[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}]=(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$

例如: $\mathscr{F}[\delta(t)]=1$ $\quad \mathscr{F}[\delta'(t)]=\mathrm{j}\omega$ $\quad \mathscr{F}[\delta^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^n$

时域中 $f(t)$ 对 t 的 n 阶导数，等效于在频域中 $F(\omega)$ 乘以因 子 $(\mathrm{j}\omega)^n$ 。

(2) 频域微分特性

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}[(-\mathrm{j}t)f(t)]=\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$， $\mathscr{F}[(-\mathrm{j}t)^n f(t)]=\dfrac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$

$$\mathscr{F}[t^n f(t)]=\mathrm{j}^n\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$$

例: $\because \mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$ $\therefore \mathscr{F}[t]=\mathrm{j}2\pi\delta'(\omega)$ $\mathscr{F}[t^n]=2\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\omega)$

频域中 $F(\omega)$ 对 ω 的 n 阶导数，等效于在时域中 $f(t)$ 乘以因子 $(-\mathrm{j}t)^n$ 。

（3）时域积分特性

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\dfrac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$ ，其中 $F(0)=F(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=0}$

若 $F(0)=0$ 上式可化简为 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\dfrac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$

时域中 $f(t)$ 对 t 的积分，等效于在频域中 $F(\omega)$ 除以因子$(-\mathrm{j}\omega)^n$ 。

（4）频域积分特性

若 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}u)\mathrm{d}u]=\dfrac{f(t)}{-\mathrm{j}t}+\pi f(0)\delta(t)$

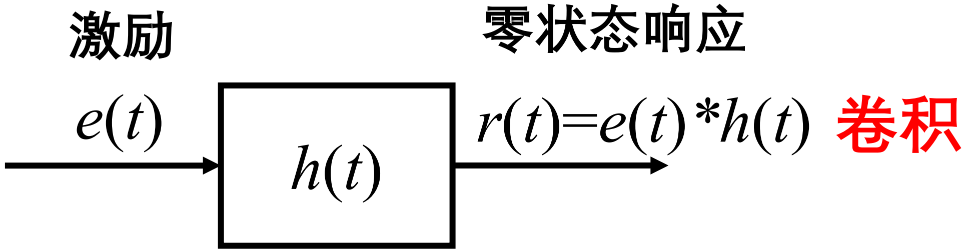
若 $f(0)=0$ 上式可化简为

则 $\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}u)\mathrm{d}u]=\dfrac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$

频域中 $F(\omega)$ 对 ω 的积分，等效于在时域中 $f(t)$ 除以因子 $(-\mathrm{j}t)^n$ 。

第三章 傅里叶变换

- 卷积是系统分析的核心技术。系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积。



- 卷积运算的四步曲：

1. 反褶： $h(\tau) \to h(-\tau)$

2. 时移： $h(-\tau) \to h(t-\tau)$ $\begin{cases} t<0, & 左移\ t \\ t>0, & 右移\ t \end{cases}$

3. 相乘： $e(\tau)h(t-\tau)$

4. 积分： $e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$

运算复杂!

- 卷积定理—将复杂的时域计算转换为简单的频域计算，反之亦然。
- 抽样定理—卷积定理的应用。

3.8 卷积特性

（1）时域卷积定理——时域卷积，频域相乘

若 $F_1(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$， $F_2(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，

则 $$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$$

（2）频域卷积定理——时域相乘，频域卷积（注意要乘以1/2π）

若 $F_1(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$， $F_2(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，

则 $$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$$

其中： $$F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\mathrm{j}u)F_2[\mathrm{j}(\omega-u)]du$$

例3-8：利用卷积定理证明傅里叶变换的时域积分特性。

解：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = f(t)*u(t)$

已知 $F(j\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，

利用时域卷积定理，

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = F(j\omega)\mathcal{F}[u(t)]$$

$$= F(j\omega)\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

$$= \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

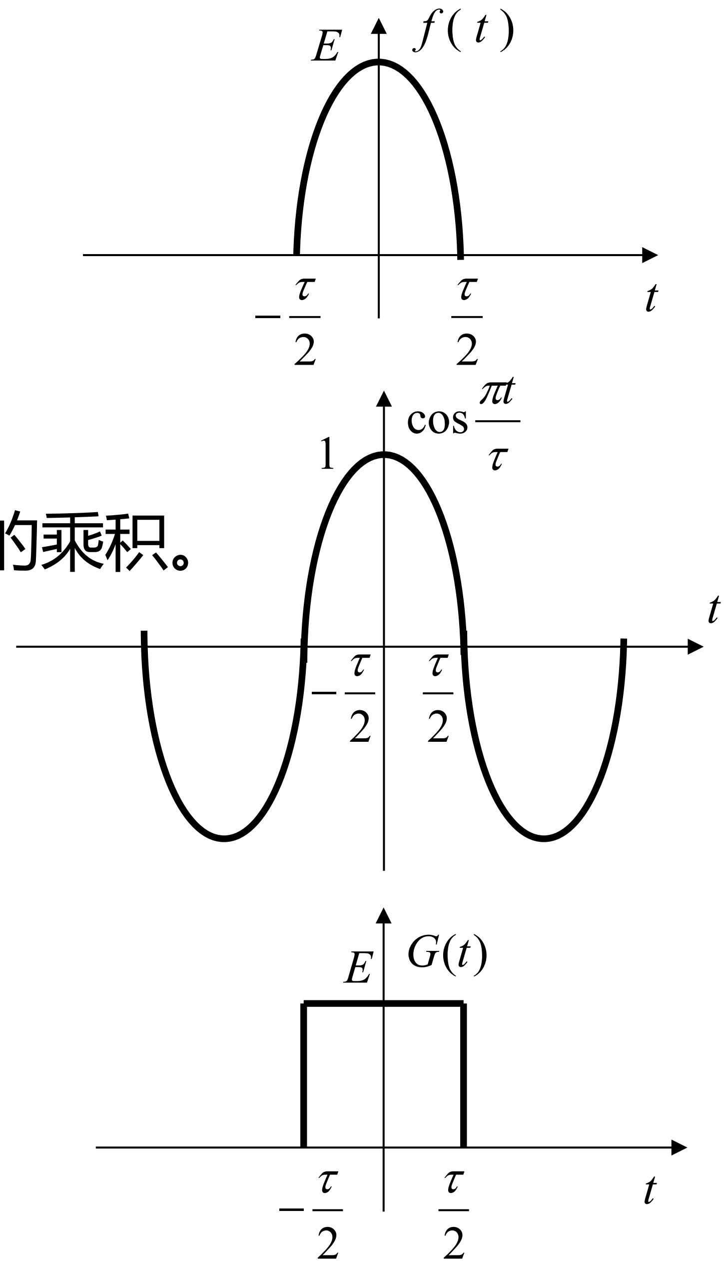
时域积分特性

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

直流分量

例3-14： 利用频域卷积定理求余弦脉冲的频谱。

$$f(t)=\begin{cases} E\cos\dfrac{\pi t}{\tau} & |t|\le\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$



解： 我们把 $f(t)$ 看作是矩形脉冲 $G(t)$ 与无穷长余弦函数的乘积。

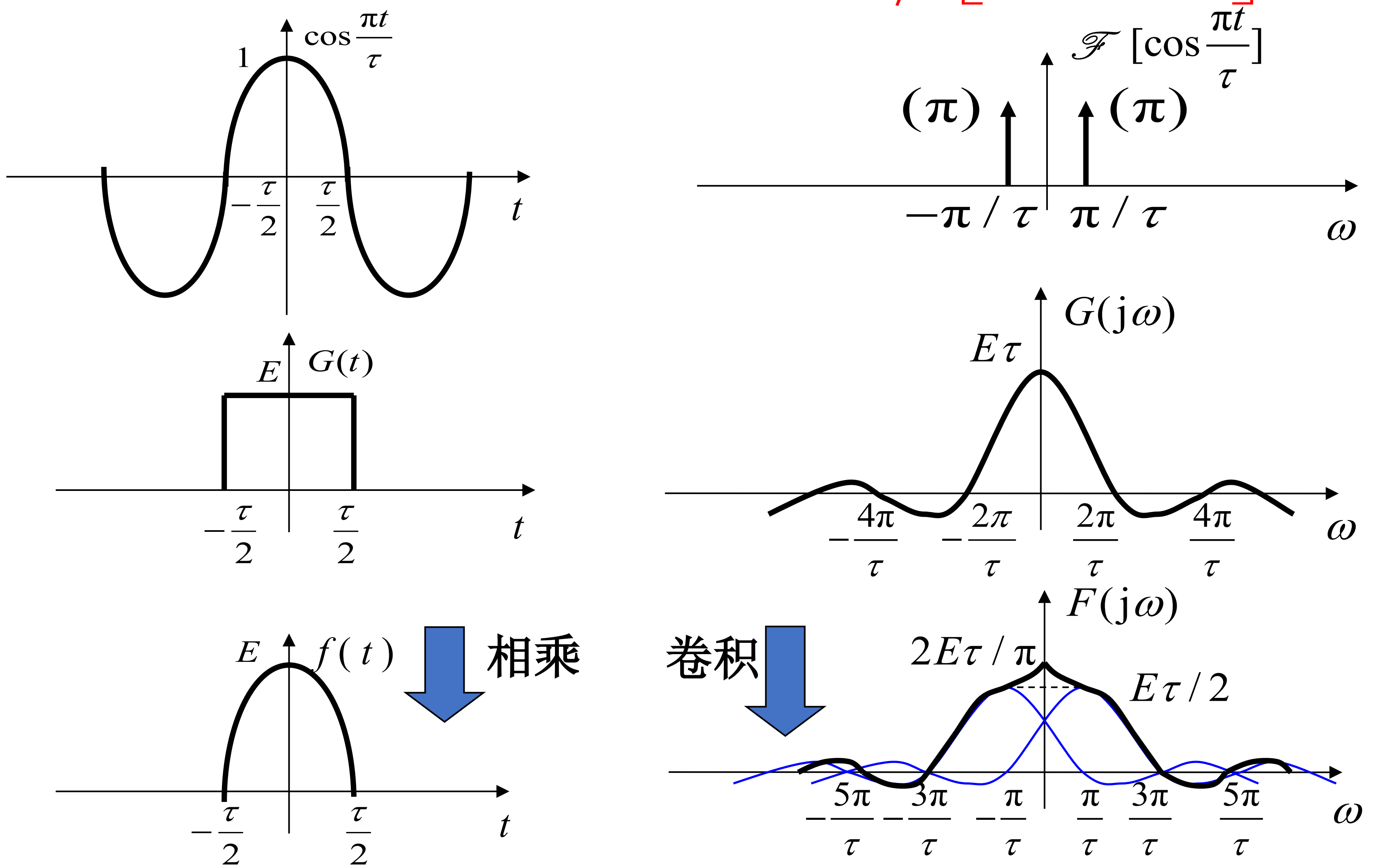
$$G(\mathrm{j}\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$\mathscr{F}\left[\cos\frac{\pi t}{\tau}\right]=\pi\delta(\omega+\frac{\pi}{\tau})+\pi\delta(\omega-\frac{\pi}{\tau})$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}G(\mathrm{j}\omega)*\pi[\delta(\omega+\frac{\pi}{\tau})+\delta(\omega-\frac{\pi}{\tau})]$$

$$=\frac{E\tau}{2}\{\mathrm{Sa}[(\omega+\frac{\pi}{\tau})\frac{\tau}{2}]+\mathrm{Sa}[(\omega-\frac{\pi}{\tau})\frac{\tau}{2}]\}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{E\tau}{2}\left\{\mathrm{Sa}\left[\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right]+\mathrm{Sa}\left[\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right]\right\}=\frac{2E\tau}{\pi}\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\Bigg/\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]$$

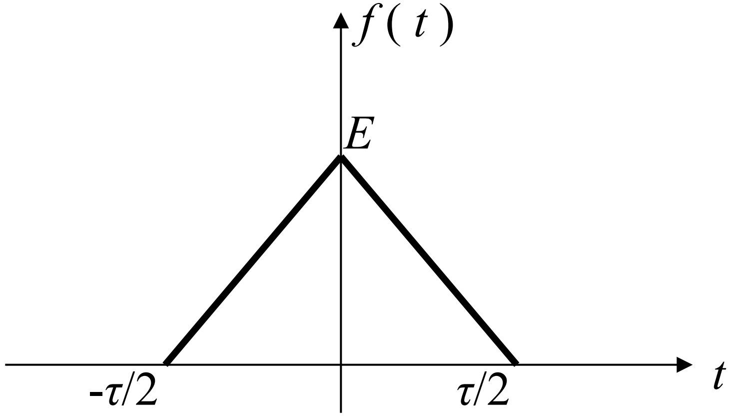


单选题 1分

设置

例3-15：利用时域卷积定理求三角脉冲的频谱

$$f(t)=\begin{cases} E\left(1-\dfrac{2|t|}{\tau}\right) & |t|\le\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$



A $F(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$

B $F(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$

C $F(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$

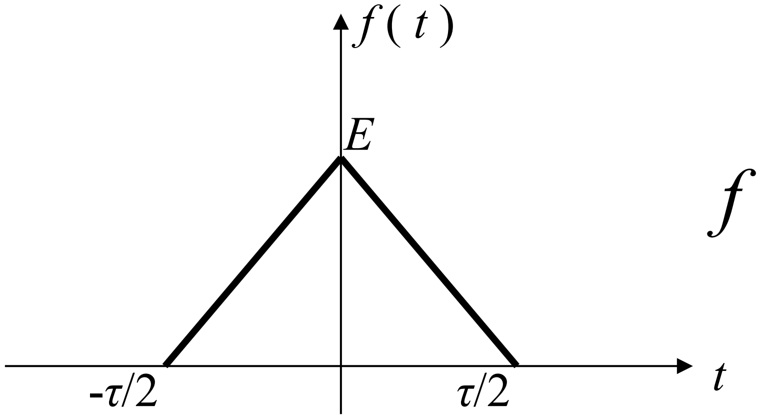
D $F(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$

提交

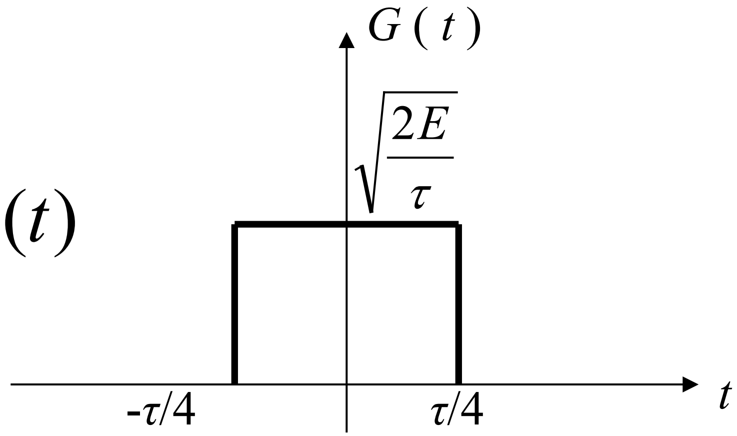
例3-15：利用时域卷积定理求三角脉冲的频谱

$$f(t)=\begin{cases} E(1-\frac{2|t|}{\tau}) & |t|\le\frac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

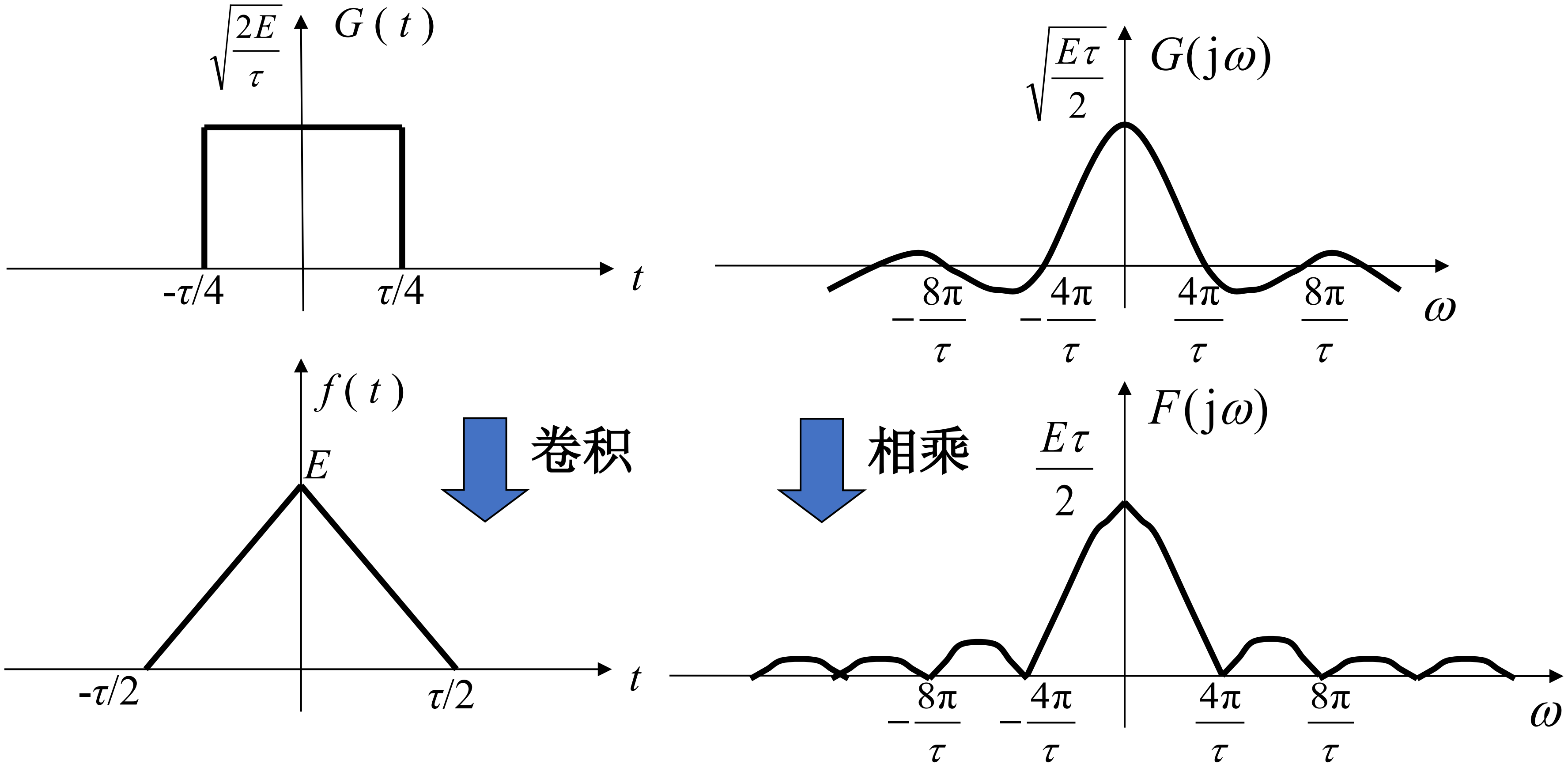
解：我们可以把三角脉冲看作是两个同样的矩形脉冲的卷积。而矩形脉冲的幅度、宽度可以由卷积的定义直接看出，分别为$\sqrt{2E/\tau}$ 及 $\tau/2$ 。



$$f(t)=G(t)*G(t)$$



$$G(\mathrm{j}\omega)=\sqrt{\frac{2E}{\tau}}\cdot\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{4})=\sqrt{\frac{E\tau}{2}}\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{4})$$



$$F(\mathrm{j}\omega)=G^2(\mathrm{j}\omega)=\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

例3-16：利用频域卷积定理求 $f(t)=\mathrm{Sa}^2(100t)$的频谱。

解：首先将信号分解为 $\mathrm{Sa}^2(100t)=\mathrm{Sa}(100t)\cdot\mathrm{Sa}(100t)$

时域上是两个函数相乘，频域为两个函数卷积

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{Sa}^2(100t)\right]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left[\mathrm{Sa}(100t)\right]*\mathscr{F}\left[\mathrm{Sa}(100t)\right]$$

先求 $\mathscr{F}\left[\mathrm{Sa}(100t)\right]$

利用对称性，已知 $\mathscr{F}\left[u(t+100)-u(t-100)\right]=200\mathrm{Sa}(100\omega)$

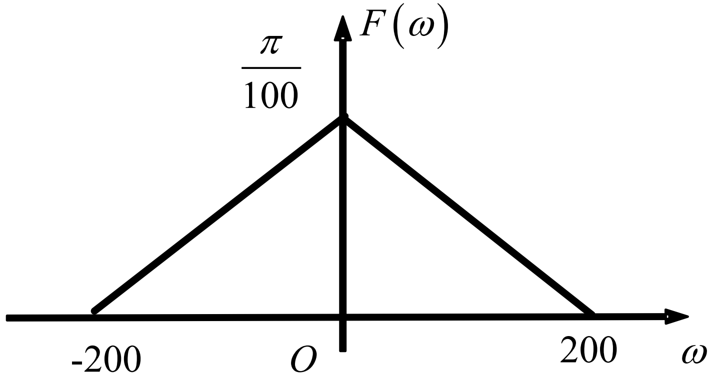
则
$$\frac{1}{200}\mathscr{F}\left[u(t+100)-u(t-100)\right]=\mathrm{Sa}(100\omega)$$

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{Sa}(100t)\right]=2\pi\cdot\frac{1}{200}\cdot\left[u(\omega+100)-u(\omega-100)\right]=\frac{\pi}{100}\cdot\left[u(\omega+100)-u(\omega-100)\right]$$ 偶函数

因而 $\mathscr{F}\left[\mathrm{Sa}^2(100t)\right]$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\left\{\frac{\pi}{100}\cdot\left[u(\omega+100)-u(\omega-100)\right]\right\}*\left\{\frac{\pi}{100}\cdot\left[u(\omega+100)-u(\omega-100)\right]\right\}$$

$$=\frac{\pi}{20000}\cdot\left[(\omega+200)u(\omega+200)-2\omega u(\omega)+(\omega-200)u(\omega-200)\right]$$



当一复指数时间信号作为激励作用于线性时不变系统时，其稳态响应是同频率的复指数时间信号，只是幅度与相位被改变。

$$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=e^{j\omega_0 t}*h(t)$$

$$y(t)=h(t)*e^{j\omega_0 t}=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}d\tau=e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau$$

$$=H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}=\left|H(j\omega_0)\right|e^{j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}$$

$$e^{-j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=e^{-j\omega_0 t}*h(t)$$

$$y(t)=h(t)*e^{-j\omega_0 t}=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega_0(t-\tau)}d\tau=e^{-j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega_0\tau}d\tau$$

$$=H^*(j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}=\left|H(j\omega_0)\right|e^{-j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}$$

当一个三角函数作为激励作用于线性时不变系统时，其稳态响应是同频率的三角函数，只是幅度与相位被改变。

$$\cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=\cos(\omega_0 t)*h(t)$$

$$y(t)=h(t)*\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}h(t)*(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})$$

$$=\frac{1}{2}\left|H(j\omega_0)\right|\left(e^{j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}+e^{-j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}\right)=\left|H(j\omega_0)\right|\cos[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=\sin(\omega_0 t)*h(t)$$

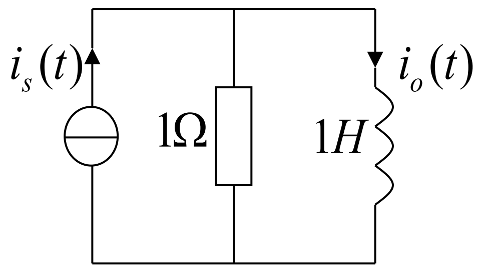
$$y(t)=h(t)*\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2j}h(t)*(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})$$

$$=\frac{1}{2j}\left|H(j\omega_0)\right|\left(e^{j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}-e^{-j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}\right)=\left|H(j\omega_0)\right|\sin[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]$$

如一时间信号作用于系统，其输出仍是此时间信号，只是幅度与相位被改变，称此时间信号为系统的特征信号，表征被改变的幅度和相位的函数，称为系统的特征值或系统函数。

所以信号 $e^{j\omega_0 t}$，$\cos(\omega_0 t)$和 $\sin(\omega_0 t)$是系统的特征信号，函数 $H(j\omega)$（系统单位冲激响应$h(t)$的傅里叶变换）是系统的特征值或系统函数，也称为系统的频率响应。

例3-17：一RL电路如图，输入为电流源 $i_s(t)$，输出是电感中的电流 $i_o(t)$，试列出电路的输入输出方程，求出其频率响应，若输入 $i_s(t)=\cos t$，求输出的正弦稳态响应的时间函数。



解：系统方程为 $i_R(t)+i_o(t)=i_s(t)$

$$\therefore \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_o(t)}{\mathrm{d}t}+i_o(t)=i_s(t) \qquad \frac{\mathrm{d}i_o(t)}{\mathrm{d}t}+i_o(t)=i_s(t)$$

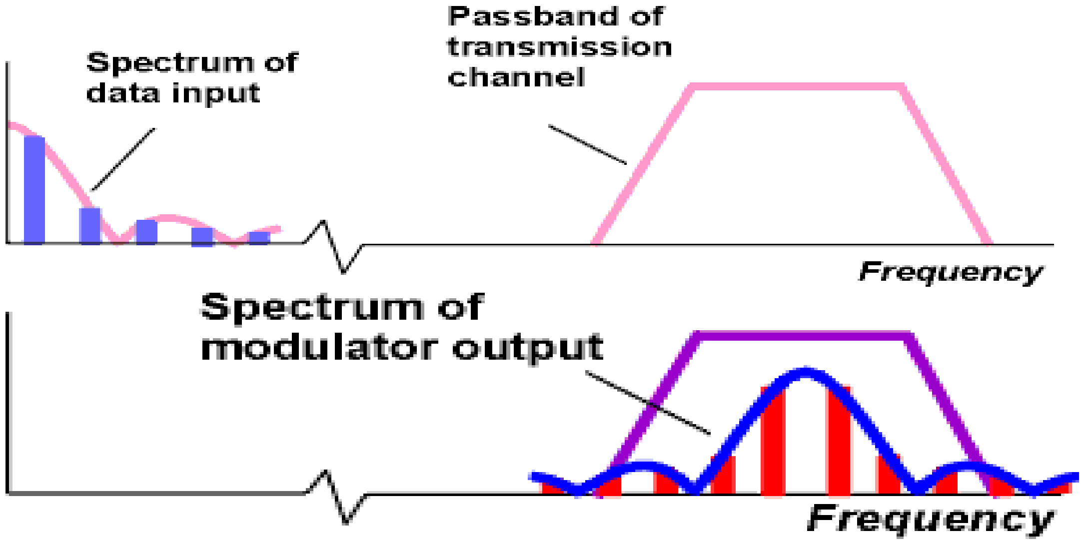
两边同求傅里叶变换 $(\mathrm{j}\omega+1)I_o(\mathrm{j}\omega)=I_s(\mathrm{j}\omega)$

所以 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{I_o(\mathrm{j}\omega)}{I_s(\mathrm{j}\omega)}=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+1} \xrightarrow{\omega=1} H(\mathrm{j})=\dfrac{1}{\mathrm{j}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} \longrightarrow i_o(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t-\dfrac{\pi}{4})$

注意：系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的作用，和正弦函数幅度和相位的对应关系

带宽效应

- 信道带宽是有限的。
- 如果信号的某些频率分量落在信道带宽之外，则信道输出信号失真。



$$x(t) * h(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)H(j\omega)$$

时域　　　　频域

带宽效应

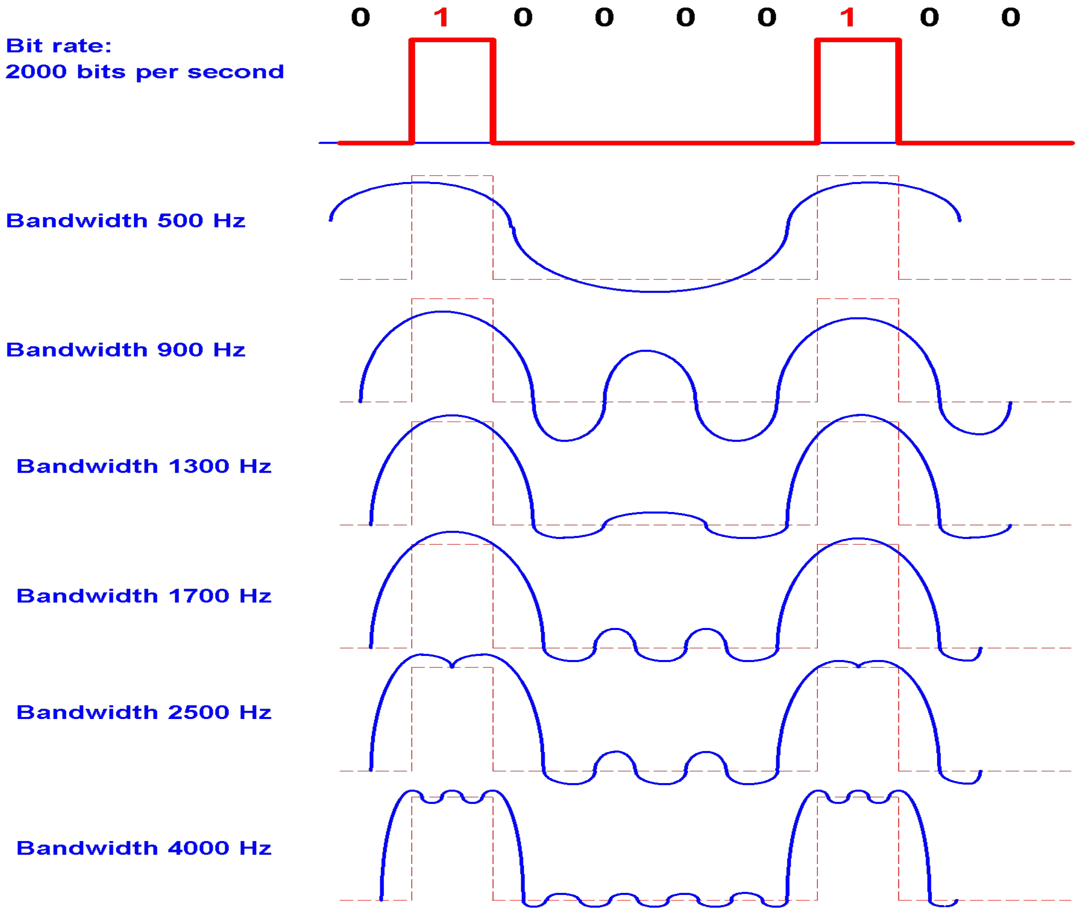
比特周期等于脉冲宽度

信号带宽: 2000 Hz

$$B=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{T}=R$$

比特率

在不同信道带宽情况下的输出信号



3.9 周期信号的傅里叶变换

$$
\begin{tikzcd}
\text{周期信号} \arrow[r] \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \arrow[dr, "?"] & \text{傅里叶级数} \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \\
\text{非周期信号} \arrow[r] & \text{傅里叶变换}
\end{tikzcd}
$$

3.9.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\mathscr{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\sin \omega_0 t] = \mathrm{j}\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

3.9.2 一般周期信号的傅里叶变换

令周期信号 $f(t)$ 的周期为 T_1，角频率为 $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi / T_1$。它的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t} \qquad \textbf{(1)}$$

其中：$F_n = \dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$　　或：$F_n = \dfrac{1}{T_1}F_0(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$

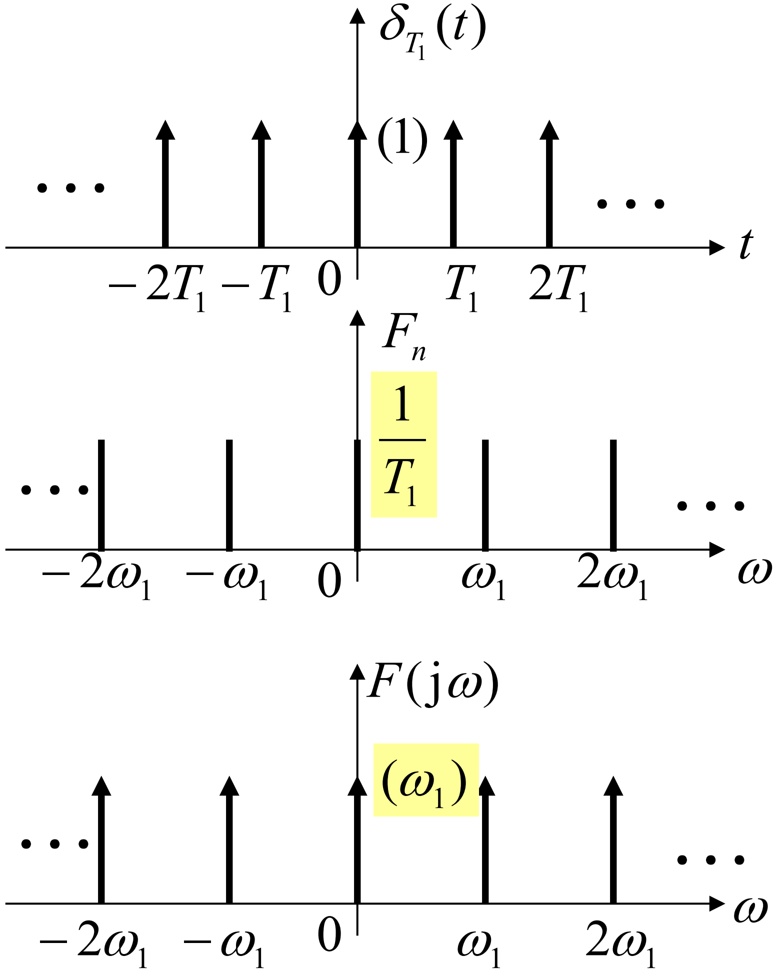
对式 **(1)** 两边取傅里叶变换

$$F(\mathrm{j}\omega) = \mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \boxed{\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\right]} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

即：
$$F(\mathrm{j}\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成的，这些冲激位于信号的谐频（$0, \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \ldots\ldots$）处，每个冲激的强度等于 $f(t)$ 傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

例3-18：求周期单位冲激序列的傅里叶级数与傅里叶变换。



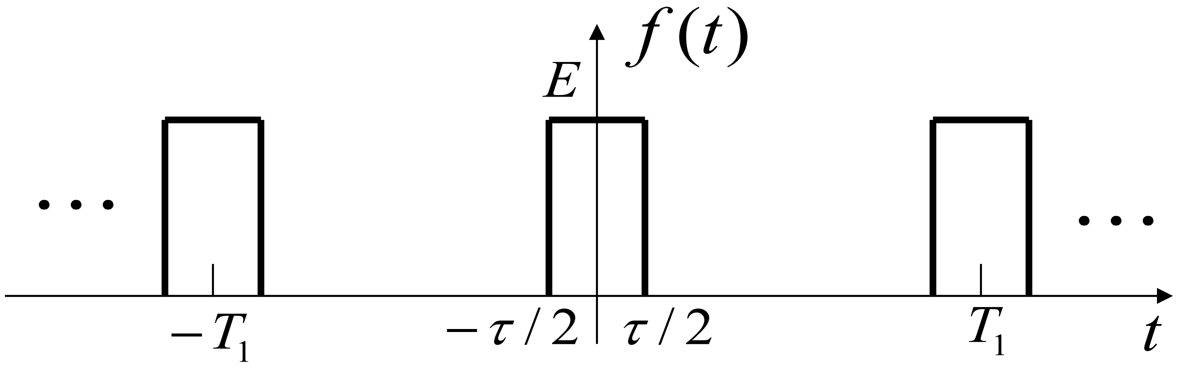
$$\delta_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta_{T_1}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}\Rightarrow\delta_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot\delta(\omega-n\omega_1)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

只有幅度发生变化 $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$

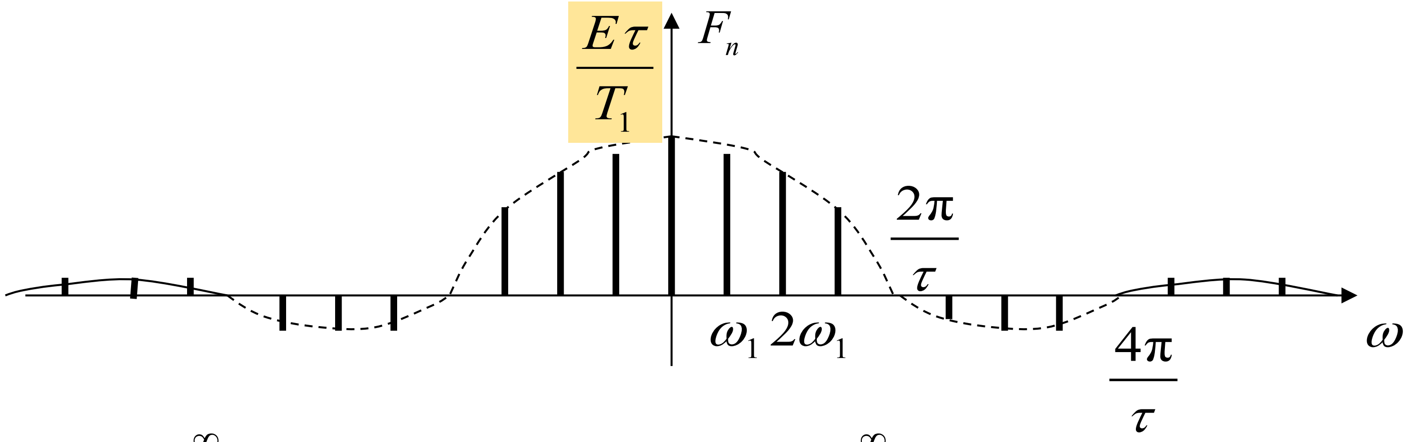
例3-19：求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。已知周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的幅度为 E，脉宽为 τ，周期为 T_1，角频率为 $\omega_1=2\pi f_1$ 。



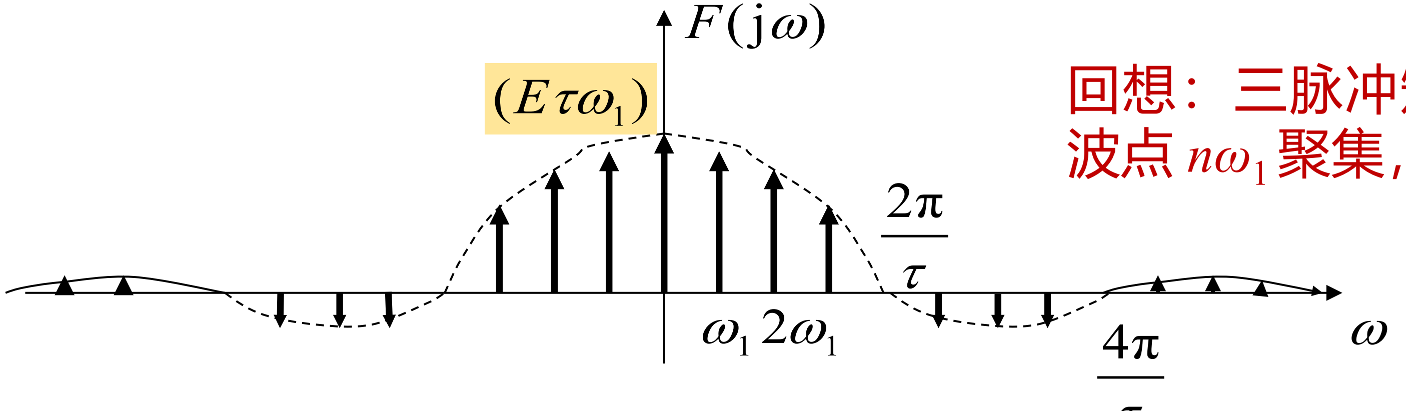
解：已知矩形脉冲 $f_0(t)$ 的傅里叶变换 $F_0(j\omega)$ 为 $\quad F_0(j\omega)=E\tau\cdot\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$

则傅里叶级数展开系数 $\quad F_n=\frac{1}{T_1}F_0(j\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)e^{jn\omega_1 t}$$



$$F(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot\delta(\omega-n\omega_1)=E\tau\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$$



回想：三脉冲矩形的频谱，频谱向谐波点 $n\omega_1$ 聚集，聚集为冲激函数

周期信号傅里叶变换的两种求法（重点中的重点）

思路1：$f_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\leftrightarrow F_{T_1}(\mathrm{j}\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$

傅里叶级数和傅里叶变换的关系 $F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=n\omega_1}$

思路2：$f_{T_1}(t)=\delta_{T_1}(t)*f_0(t)\leftrightarrow F_{T_1}(\mathrm{j}\omega)=\omega_1\delta_{\omega_1}(\omega)F_0(\mathrm{j}\omega)\ =\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(\mathrm{j}n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1)$

时域卷积，频域相乘，冲激函数的筛选特性

结论：

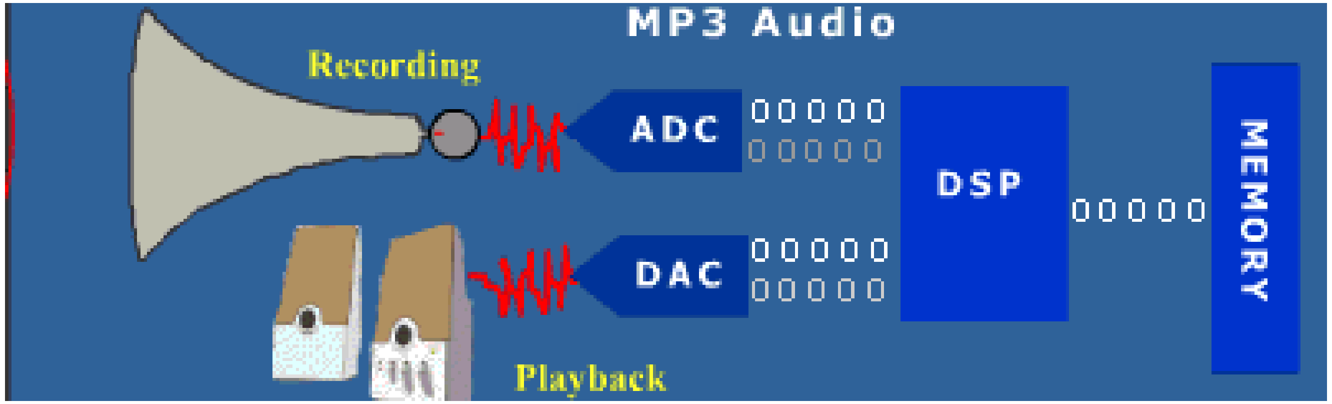
周期信号 $f_{T_1}(t)$ 的频谱由冲激函数组成：

位置—— $\omega=n\omega_1$ （谐波频率点处）

强度—— $2\pi F_n$ 或 $\omega_1 F_0(\mathrm{j}n\omega_1)$

3.10 信号的抽样与抽样定理

模拟信号 → 数字信号



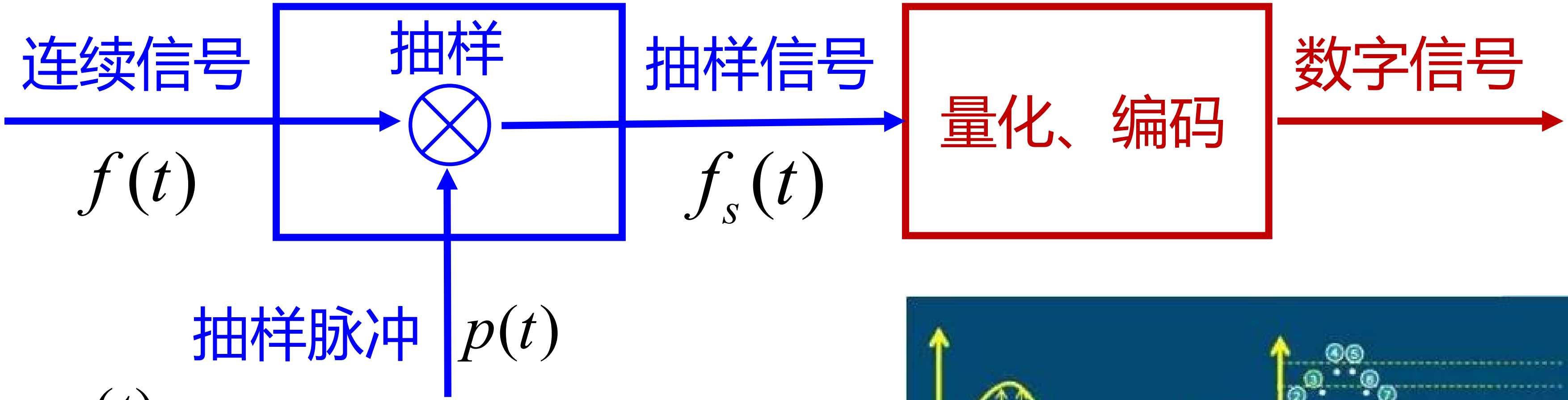
模拟信号 ← 数字信号

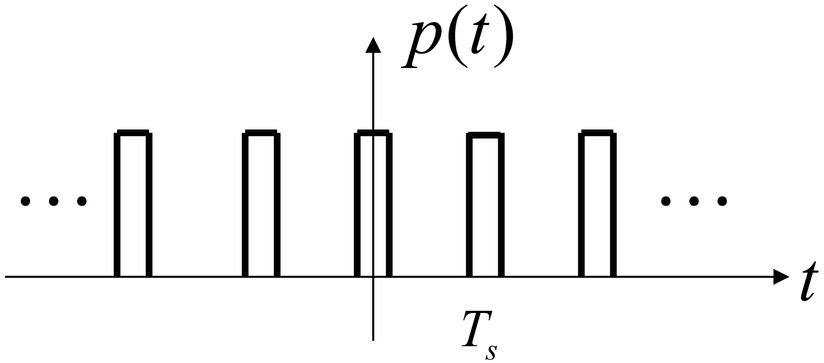
是什么连接了模拟信号到数字信号的转化?

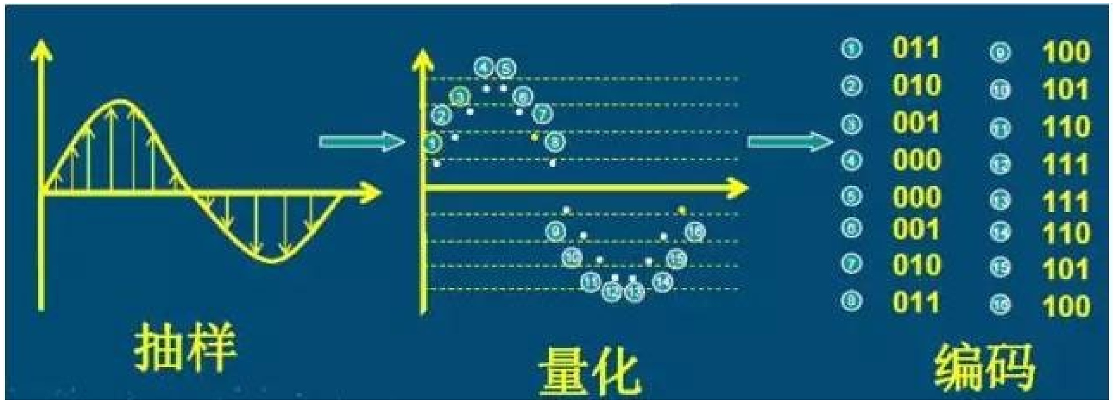
3.10.1 信号的抽样

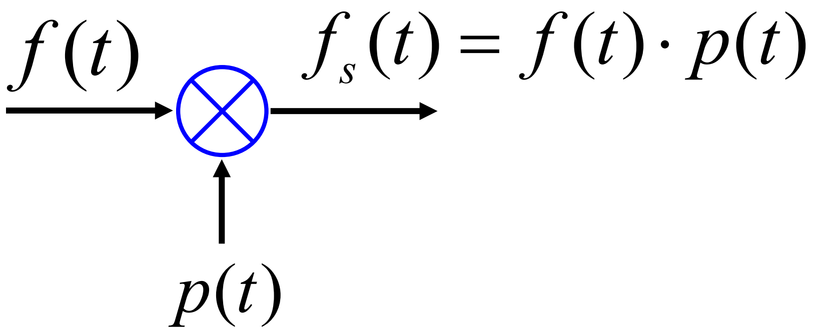
定义： “**抽样**”就是利用抽样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中“抽取”一系列离散样值的过程；将得到的离散信号称为“抽样信号” $f_s(t)$

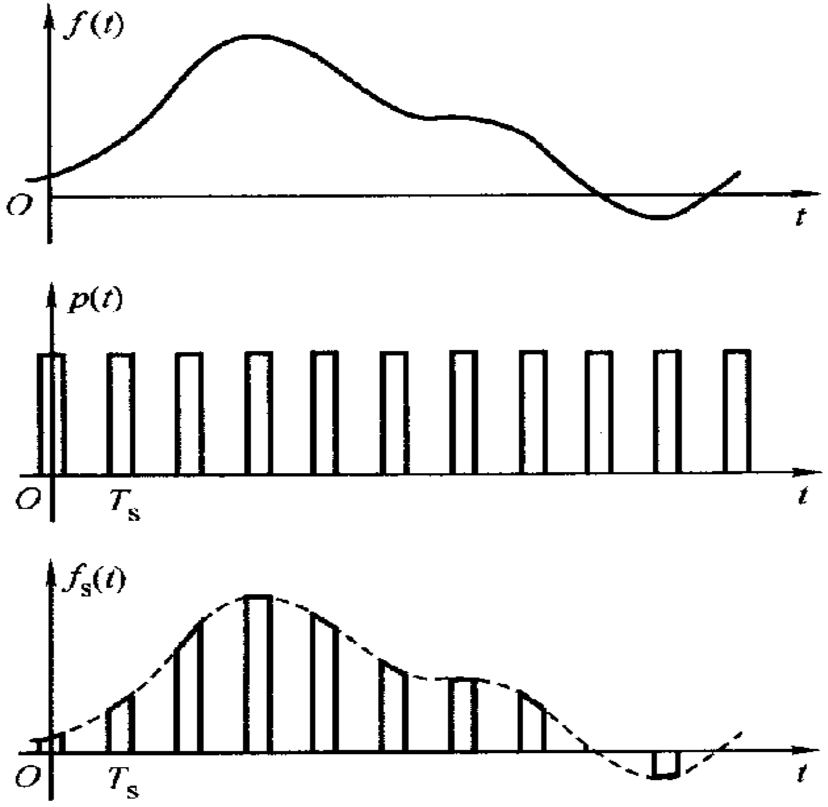
抽样过程方框图











问题①：抽样信号频谱和连续信号频谱的关系?

问题②：抽样间隔 T_s 该如何选取，才能恢复原始信号?

3.10.2 抽样信号的傅里叶变换

连续信号 $f(t) \leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$

抽样脉冲 $p(t) \leftrightarrow P(\mathrm{j}\omega)$

抽样信号 $f_s(t) \leftrightarrow F_s(\mathrm{j}\omega)$

时域：$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$

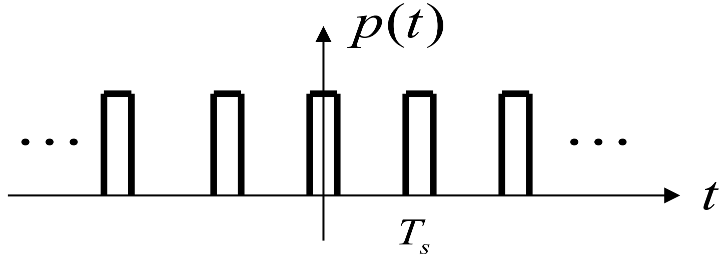
根据频域卷积定理，抽样信号的频谱：

$$F_s(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\mathrm{j}\omega) * P(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\mathrm{j}\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F[\mathrm{j}(\omega - n\omega_s)]$$

→抽样信号的频谱是周期延拓的

抽样脉冲的频谱



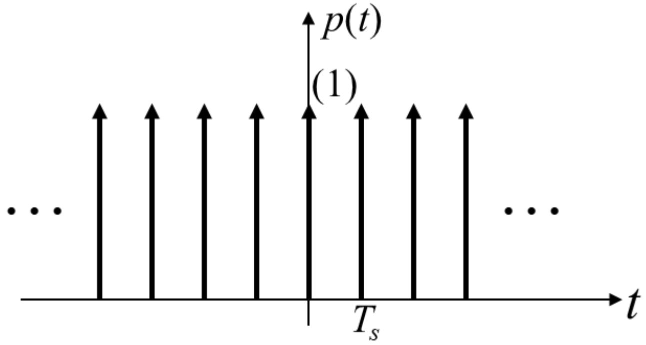
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$ ——抽样角频率

$$P(\mathrm{j}\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

其中：$P_n = \dfrac{1}{T_s} \displaystyle\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_s t} \mathrm{d}t$

❖ 冲激抽样（理想抽样）

若抽样脉冲 $p(t)$ 是冲激序列 $p(t)=\delta_{T_s}(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$



$$P_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_s t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_s}$$

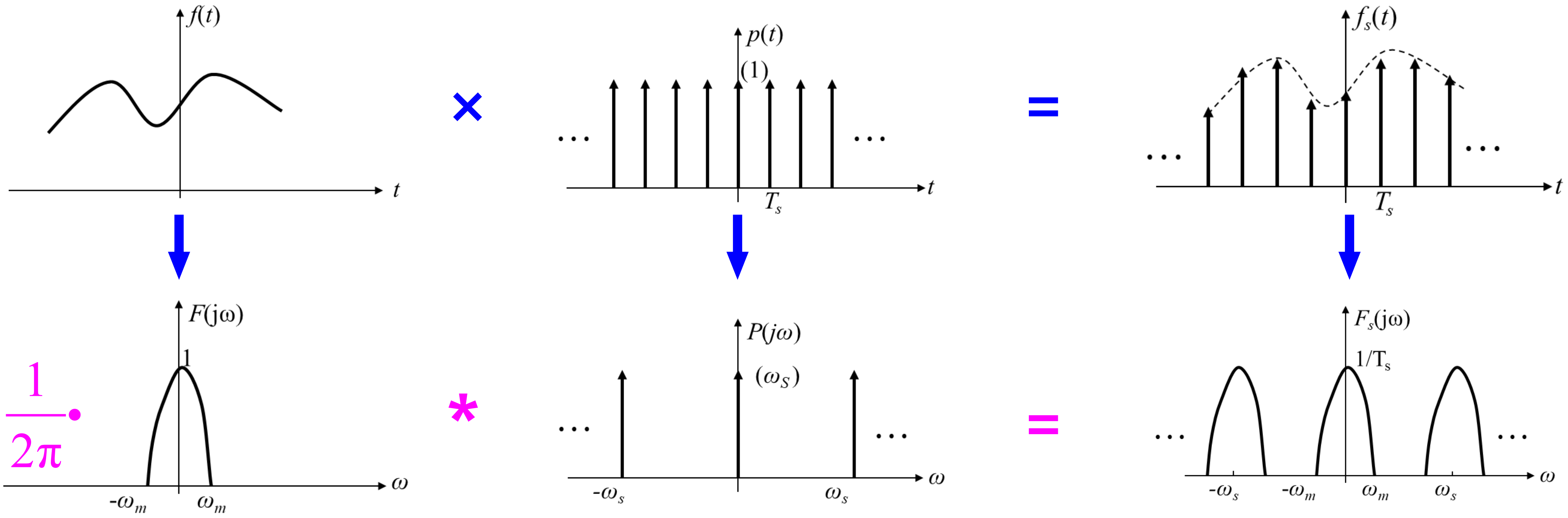
代入上一页的公式

$$\boxed{F_s(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\cdot F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]}$$

问题①的标准答案：

冲激序列抽样后的信号频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 是原始信号频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 以 ω_s 为周期的重复，且幅度上乘以抽样周期的倒数 $1/T_s$ 。

冲激抽样（理想抽样）


f(t)
t
×
p(t)
(1)
…
…
Ts
t
=
fs(t)
…
…
Ts
t
F(jω)
1
1/2π·
-ωm
ωm
ω
*
P(jω)
(ωs)
…
…
-ωs
ωs
ω
=
Fs(jω)
1/Ts
…
…
-ωs
-ωm
ωm
ωs
ω

❖ **频域抽样**　　连续频谱函数 $F(\omega)$ 被间隔为 ω_s 的冲激序列 $\delta_{\omega_s}(\omega)$ 进行抽样。

已知 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

频域抽样 $F_s(\omega)=F(\omega)\delta_{\omega_s}(\omega)$ 其中 $\delta_{\omega_s}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$，　$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$

时域冲激脉冲的傅里叶变换 $\mathscr{F}\left[\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)}_{\delta_{T_s}(t)}\right]=\omega_s\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)}_{\delta_{\omega_s}(\omega)}$

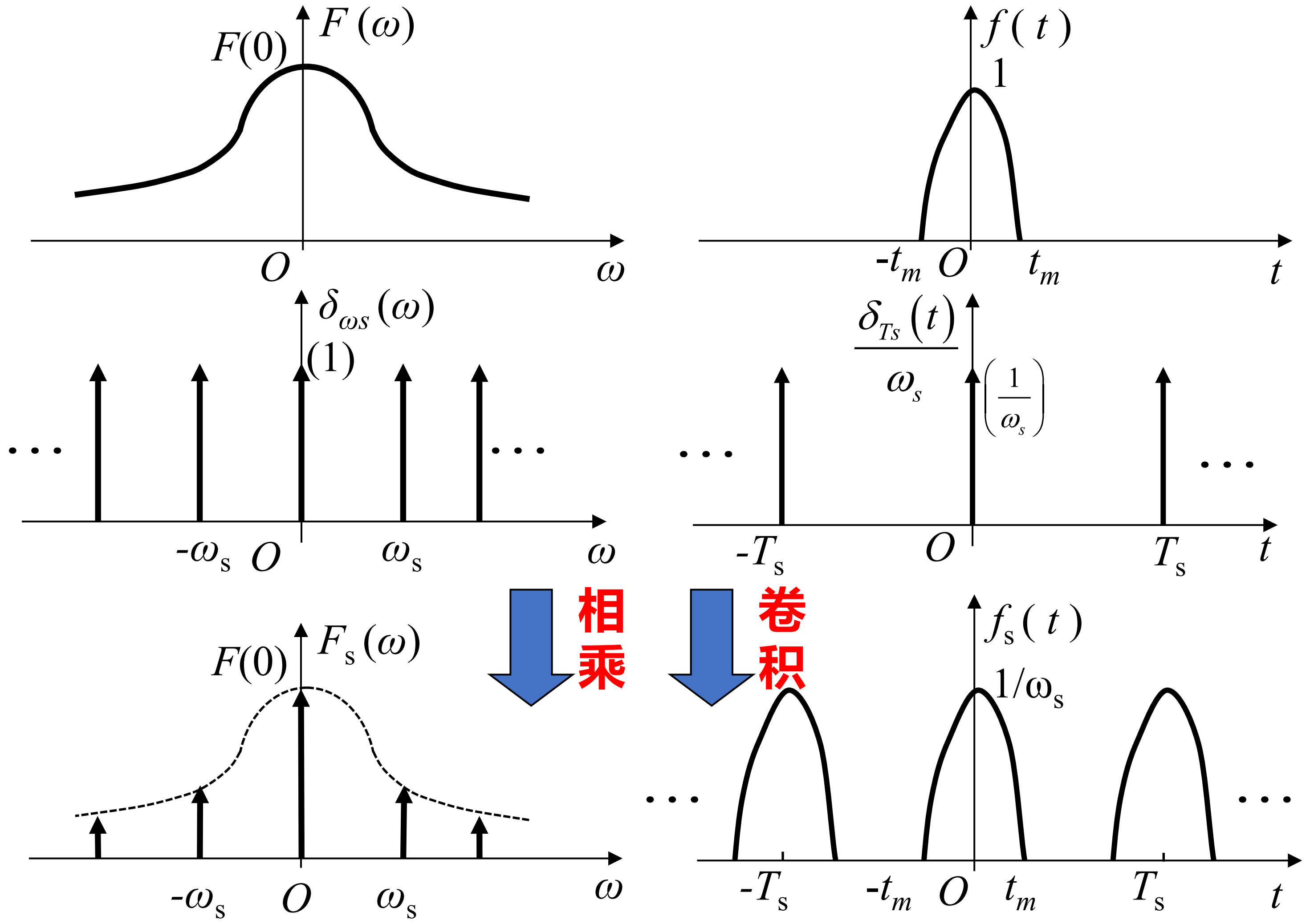
频域冲激脉冲的傅里叶反变换

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\delta_{\omega_s}(\omega)\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\right]=\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\frac{1}{\omega_s}\delta_{T_s}(t)$$

时域卷积定理　$\mathscr{F}^{-1}\left[F_s(\omega)\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]*\mathscr{F}^{-1}\left[\delta_{\omega_s}(\omega)\right]$

$$f_s(t)=f(t)*\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_s)$$

若 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 被间隔为 ω_s 的冲激序列 $\delta_{\omega_s}(\omega)$ 在频域抽样，等效于 $f(t)$ 在时域以 $T_s=2\pi/\omega_s$ 为周期重复，且幅度上乘以抽样角频率的倒数 $1/\omega_s$。



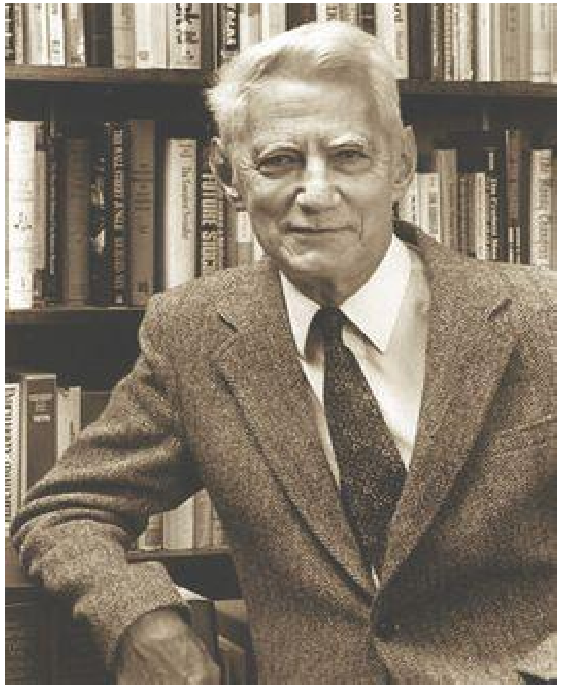
3.11 抽样定理

抽样后的信号如何恢复成连续信号？对抽样间隔有什么要求？

哈利·奈奎斯特
Harry Nyquist
(1889-1976)

1928年，贝尔实验室的科学家 Harry Nyquist在他的论文《电报传输理论的一定论题》中提到：“如果对某一带宽有限的时间连续信号进行抽样，且抽样率达到一定数值时，根据这些抽样值可以在接收端准确地恢复原信号。”

1949年，美国数学家 Claude Shannon证明了这个观点。



克劳德·埃尔伍德·香农
Claude Elwood Shannon
(1916-2001)

单选题 1分

设置

例3-20. 现实生活中的音乐在时间上连续，要将其转换为CD中的数字音乐，需对模拟信号进行抽样（时间离散化），你认为下列哪个抽样频率（单位Hz代表每秒钟的抽样次数）获得的音乐质量最高?

- A 44 kHz抽样频率
- B 22 kHz抽样频率
- C 11 kHz抽样频率
- D 5.5 kHz抽样频率

提交

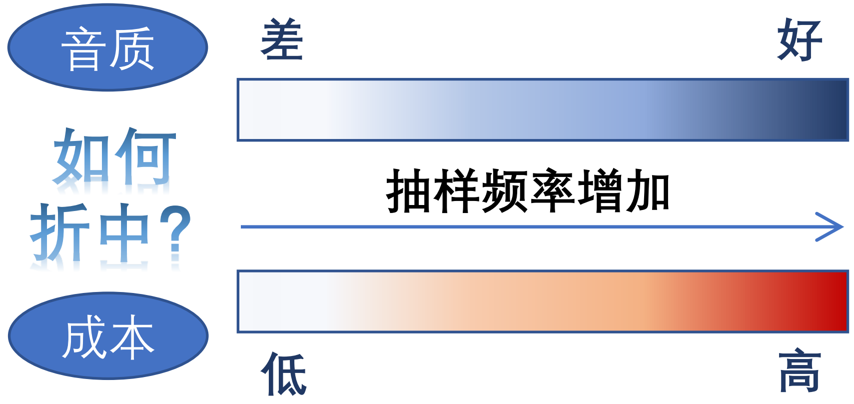
例3-20. 现实生活中的音乐在时间上连续，要将其转换为CD中的数字音乐，需对模拟信号进行抽样（时间离散化），你认为下列**哪个抽样频率**（单位Hz代表每秒钟的抽样次数）**获得的音乐质量最高**?

44 kHz抽样频率

22 kHz抽样频率

11 kHz抽样频率

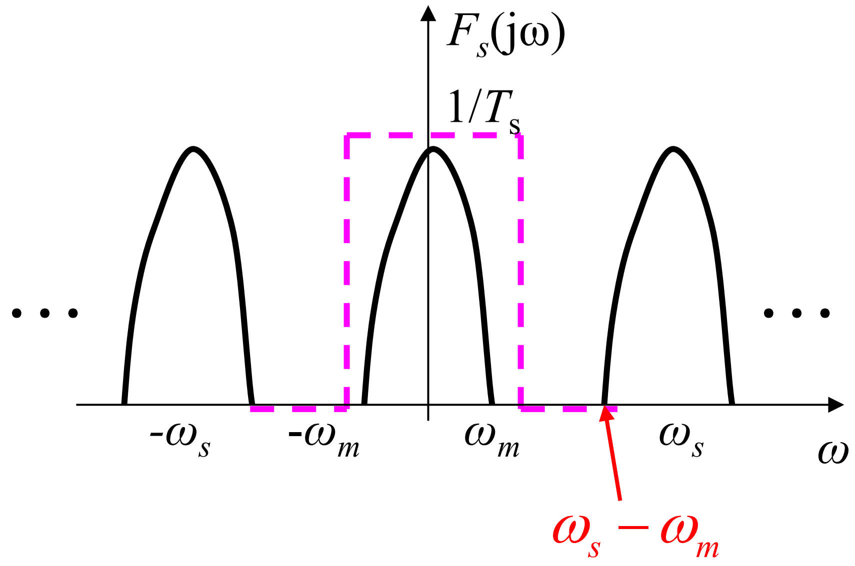
5.5 kHz抽样频率

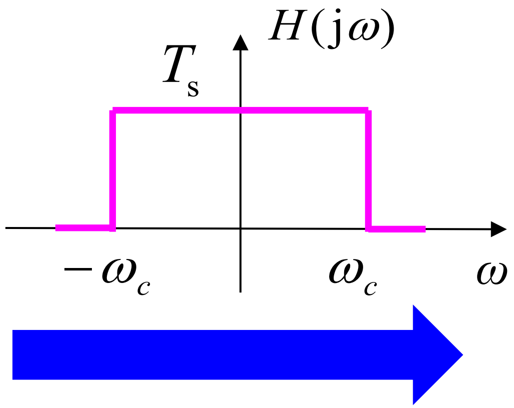


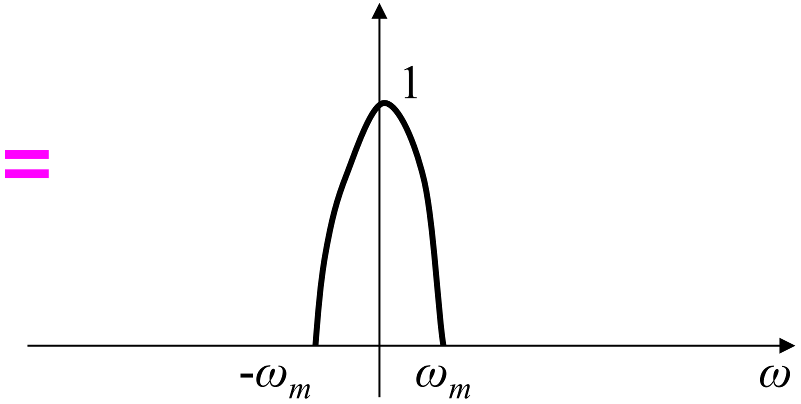
抽样信号的频谱

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}T_s & (|\omega|\le\omega_c)\\ 0 & (|\omega|>\omega_c)\end{cases}$$

原连续信号的频谱







只有满足 $\omega_s\ge 2\omega_m$，$F_s(\mathrm{j}\omega)$ 才不会产生频谱混叠，即 $f_s(t)$ 保留了原连续信号的全部信息

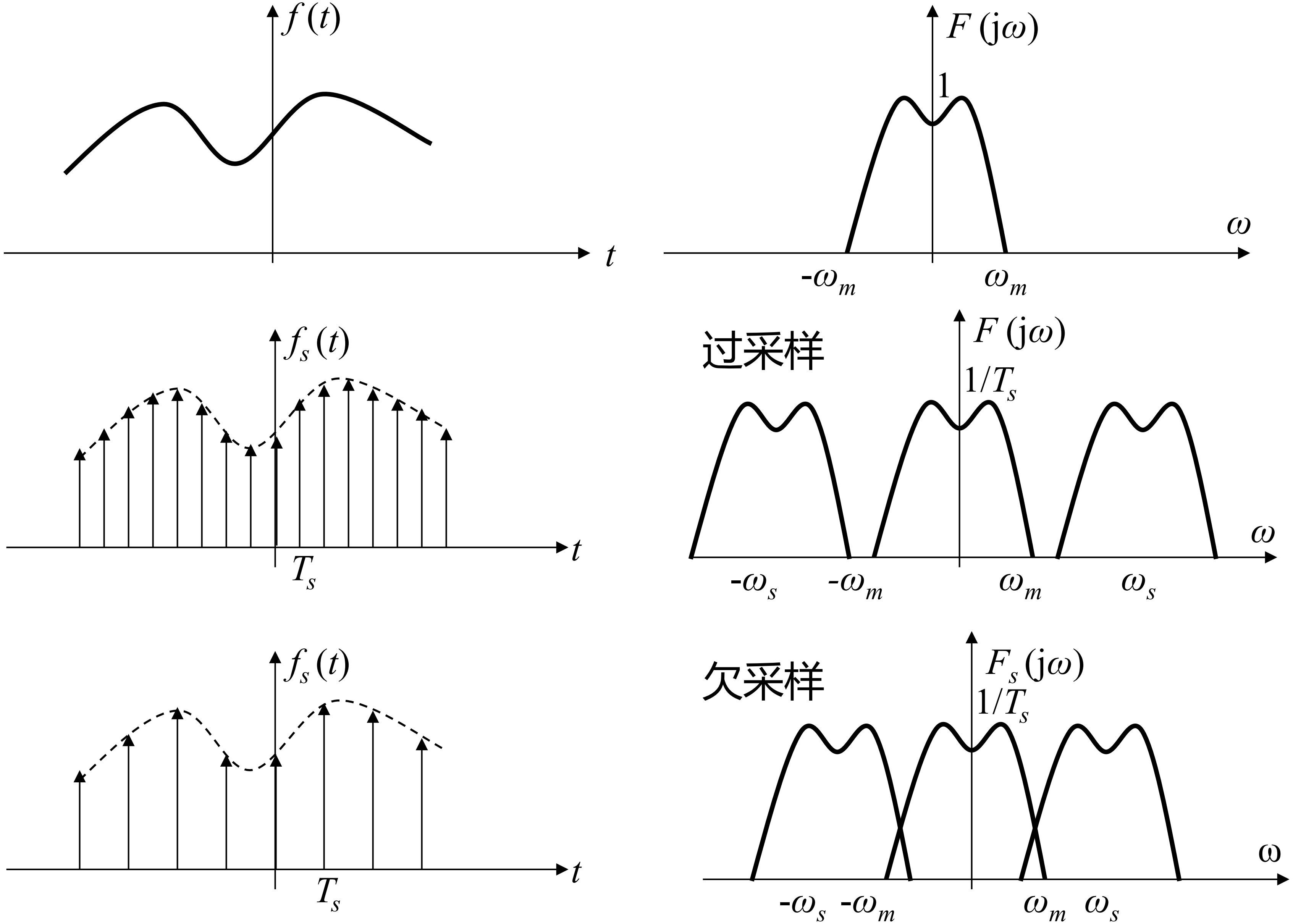
这时只要将 $f_s(t)$ 施加于“理想低通滤波器”，保证 $\omega_m\le\omega_c\le\omega_s-\omega_m$ 就可恢复原信号

问题②的标准答案：

时域抽样定理：一个频谱在区间 $(-\omega_m, \omega_m)$ 以外为 0 的带限信号 $f(t)$，可唯一的用等间隔 T_s （$T_s \le 2\pi/2\omega_m$）上的抽样值确定。

通常，把最低允许的抽样频率称为奈奎斯特抽样频率—— $\boxed{f_{s\min} = 2f_m = \dfrac{\omega_m}{\pi}}$

把最大允许的抽样间隔称为奈奎斯特抽样间隔—— $\boxed{T_{s\max} = \dfrac{1}{f_{s\min}} = \dfrac{1}{2f_m} = \dfrac{\pi}{\omega_m}}$


$f(t)$
t
$F(j\omega)$
1
ω
$-\omega_m$
ω_m
$f_s(t)$
T_s
t
过采样
$F(j\omega)$
$1/T_s$
ω
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s
$f_s(t)$
T_s
t
欠采样
$F_s(j\omega)$
$1/T_s$
ω
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s

例.3-20 的分析解答——CD的抽样频率通常采用 44 kHz，请解释原因。

- 多数人耳可以听到20 Hz--16 kHz的频率。
- 对应的奈奎斯特抽样频率为32 kHz。
- 可以用抗混（pre-alias）滤波器对16 kHz以上的频率分量进行滤除。
- 对高质量的音频信号，我们一般采用比奈奎斯特抽样频率更高的抽样频率，如44 kHz, 48 kHz, 96 kHz 或128 kHz。

❖总结抽样定理

时域抽样定理：一个频谱受限的信号 $f(t)$，如果频谱只占据 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 的范围，则信号 $f(t)$可以用等间隔的抽样值 $f_s(t)$ 唯一表示。抽样间隔必须不大于 $\frac{1}{2f_m}$，或者说最低抽样频率为 $2f_m$。

思考：实际应用中如何制造频域有限的信号?

频域抽样定理：若信号 $f(t)$ 是时间受限信号，它集中在 $-t_m \sim +t_m$ 的时间范围内，若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$进行抽样，则抽样后的频谱 $F_s(\omega)$ 可以唯一的表示原信号。

单选题 1分

设置

例3-21. 若 $f(t)$ 的最高角频率为 ω_m， 则对 $f(t/4)$ 取样的最大间隔为

A $\frac{\pi}{\omega_m}$

B $\frac{2\pi}{\omega_m}$

C $\frac{4\pi}{\omega_m}$

D $\frac{8\pi}{\omega_m}$

提交

例3-21. 若 $f(t)$ 的最高角频率为 ω_m，则对 $f(t/4)$ 抽样的奈奎斯特间隔为?

解： 根据傅里叶变换的尺度变换特性可得信号 $\boldsymbol{f(t/4)}$ 的最高角频率为 $\boldsymbol{\omega_m/4}$，再根据时域抽样定理，可得

$$\omega_s \geq 2 \cdot \frac{\omega_m}{4} = \frac{\omega_m}{2}$$

频谱不混叠的奈奎斯特间隔 $T_s \leq \dfrac{2\pi}{\omega_s} = \dfrac{4\pi}{\omega_m}$

例3-22：已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$ ，用 $\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行抽样，

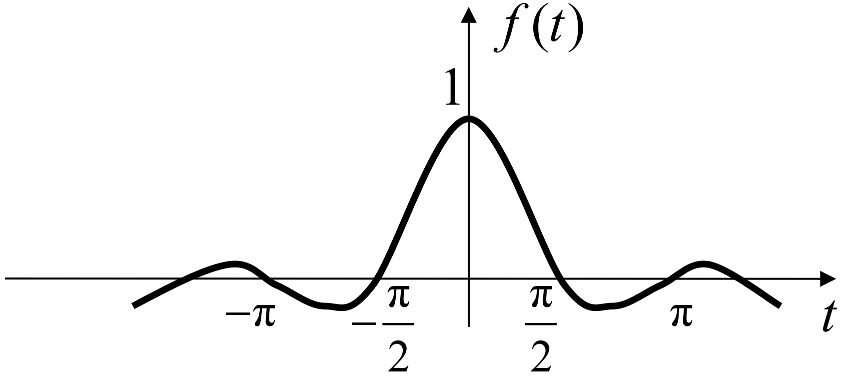
（1）确定奈奎斯特抽样频率；

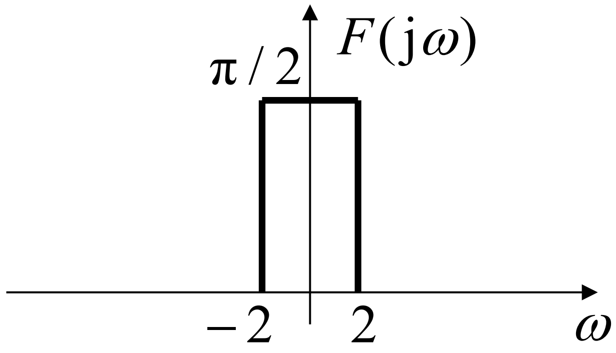
（2）若取 $\omega_s=6\omega_m$，求抽样信号 $f_s(t)=f(t)\delta_{T_s}(t)$，并画出波形图；

（3）求 $F_s(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f_s(t)]$，并画出频谱图；

（4）确定低通滤波器的截止频率 ω_c 。

解:（1） $\because f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$ $\quad\therefore F(\mathrm{j}\omega)=\frac{\pi}{2}[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$



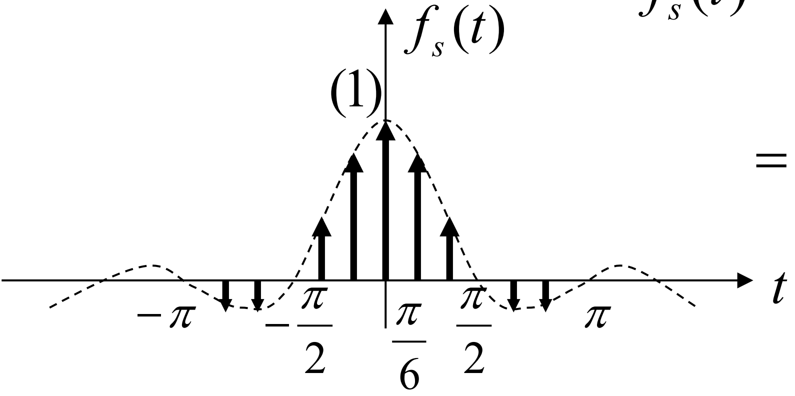


奈奎斯特抽样频率为： $f_{s\ \min}=2f_m=2\times\frac{2}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Hz}$

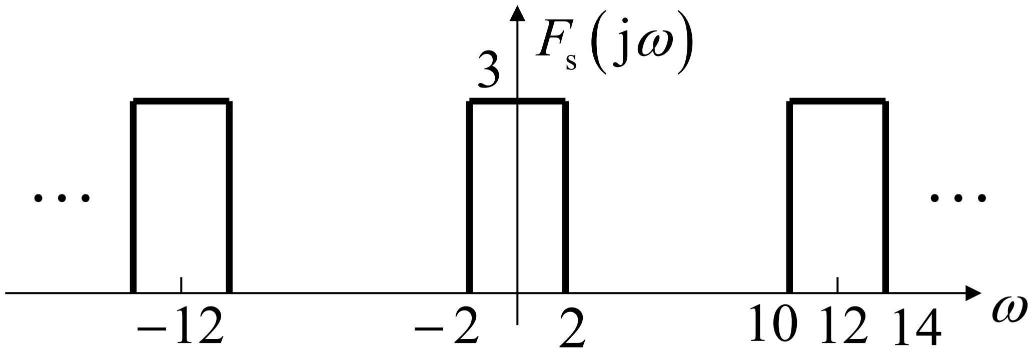
（2）$\because \omega_s = 6\omega_m = 12\ \mathrm{rad/s} \qquad \therefore T_s = \dfrac{2\pi}{\omega_s} = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}\ \mathrm{s}$

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

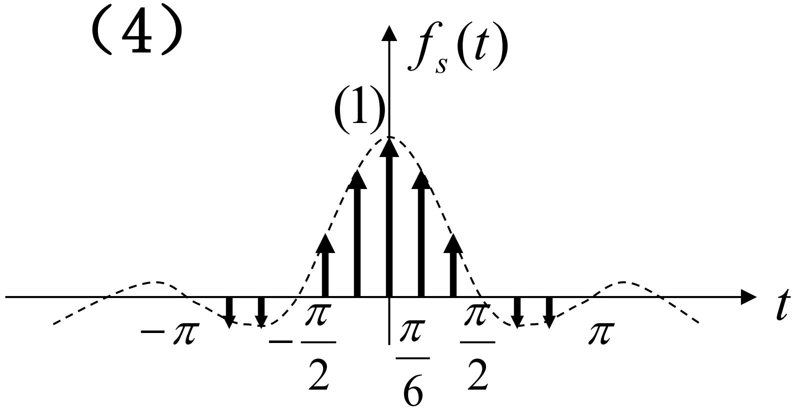
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(2t)\Big|_{t=nT_s} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\delta\left(t - \frac{\pi}{6}n\right)$$

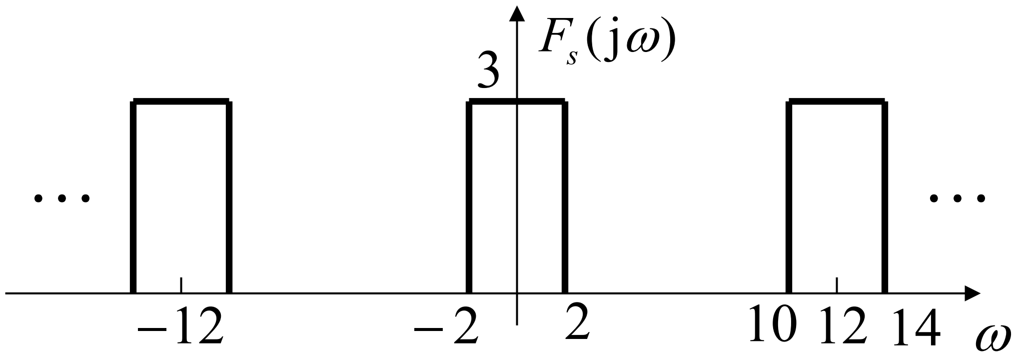


（3）$F_s(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\mathrm{j}(\omega - n\omega_s)] = \dfrac{6}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\mathrm{j}(\omega - 12n)] = 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}[u(\omega + 2 - 12n) - u(\omega - 2 - 12n)]$



（4）

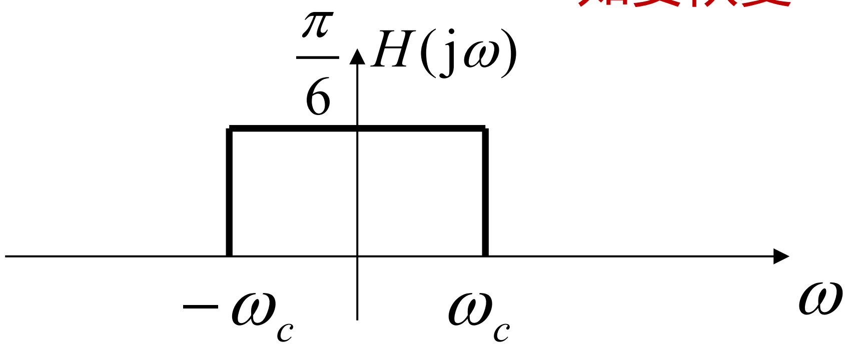




低通滤波器的截止频率 ω_c 应满足：$\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$

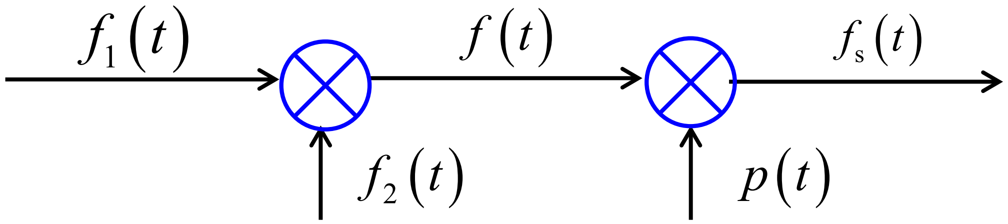
即 $2 \le \omega_c \le 10$

如要恢复 $F(\mathrm{j}\omega)$, 低通滤波器幅值 T_s



例3-23：如图所示，$f_1(t)=\mathrm{Sa}(1000\pi t),\ f_2(t)=\mathrm{Sa}(2000\pi t)$， $p(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$。

$f(t)=f_1(t)f_2(t)$，$f_s(t)=f(t)p(t)$。



（1）为从 $f_s(t)$ 无失真恢复$f(t)$，求最大抽样间隔 $T_{\max}$ 。

（2）当 $T=T_{\max}$ 时，画出 $f_s(t)$的幅度谱$|F_s(\omega)|$ 。

解： （1）由于

$$f_1(t)=\mathrm{Sa}(1000\pi t)\leftrightarrow 10^{-3}\left[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)\right]=F_1(\omega)$$

$$f_2(t)=\mathrm{Sa}(2000\pi t)\leftrightarrow \frac{1}{2}10^{-3}\left[u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi)\right]=F_2(\omega)$$

则 $F(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_1(\omega)$

$$F(\omega)=\frac{10^{-6}}{4\pi}[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)]*[u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi)]$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{u(\omega)*[\delta(\omega+1000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)]*u(\omega)*[\delta(\omega+2000\pi)-\delta(\omega-2000\pi)]\}$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}[u(\omega)*u(\omega)]*[\delta(\omega+1000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)]*[\delta(\omega+2000\pi)-\delta(\omega-2000\pi)]$$

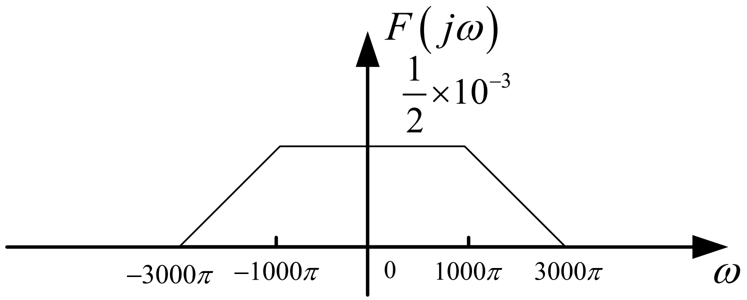
$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{\omega u(\omega)*[\delta(\omega+3000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)-\delta(\omega+1000\pi)+\delta(\omega-3000\pi)]\}$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}[(\omega+3000\pi)u(\omega+3000\pi)-(\omega-1000\pi)u(\omega-1000\pi)-(\omega+1000\pi)u(\omega+1000\pi)+(\omega-3000\pi)u(\omega-3000\pi)]$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{(\omega+3000\pi)[u(\omega+3000\pi)-u(\omega+1000\pi)]+2000\pi[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)]-(\omega-3000\pi)[u(\omega-1000\pi)-u(\omega-3000\pi)]\}$$

从图可见 $\omega_m=3000\pi$

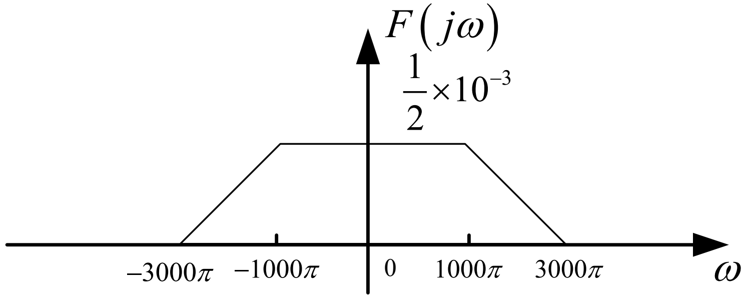
$$T_{\max}=\frac{2\pi}{\omega_{\min}}=\frac{2\pi}{2\omega_m}=\frac{1}{3000}\ \mathrm{s}$$

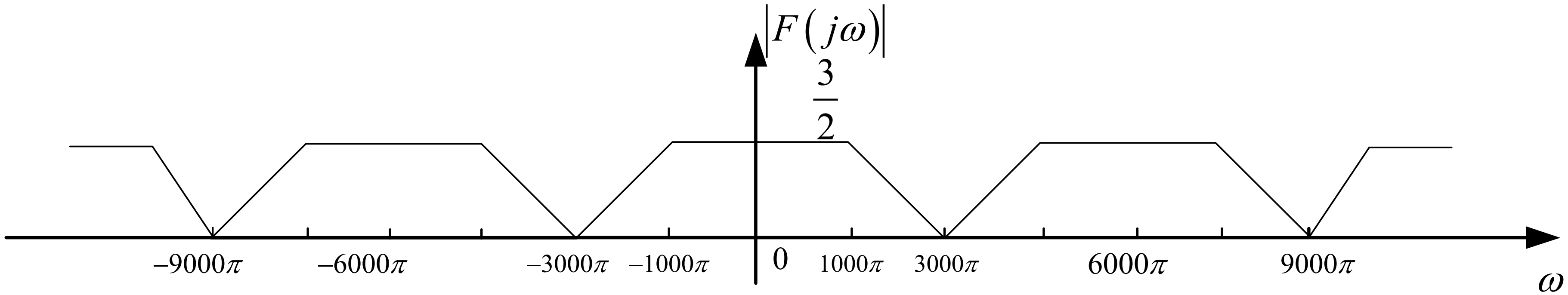


(2)对于冲激抽样，抽样信号的频谱

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

- 当 $T_s=T_{\max}$ 时 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T_{\max}}=2\omega_m=6000\pi$





作 业

教材习题
基础题：3-31，3-32，3-34，3-37（a）（b），3-39
加强题：3-37（d）

思考题：为什么车轮转的很快时候，看上去车轮是在倒转?

https://www.bilibili.com/video/BV1qB4y157Zq/?spm_id_from=333.337.searchcard.all.click&vd_source=8b0da1300db60772121edf2cc0b4f65a

指出在现实生活中遇到该问题，什么相当于信号的最高频率，什么相当于奈奎斯特抽样频率？什么情况下会看出是“倒转”？