

第二次习题课

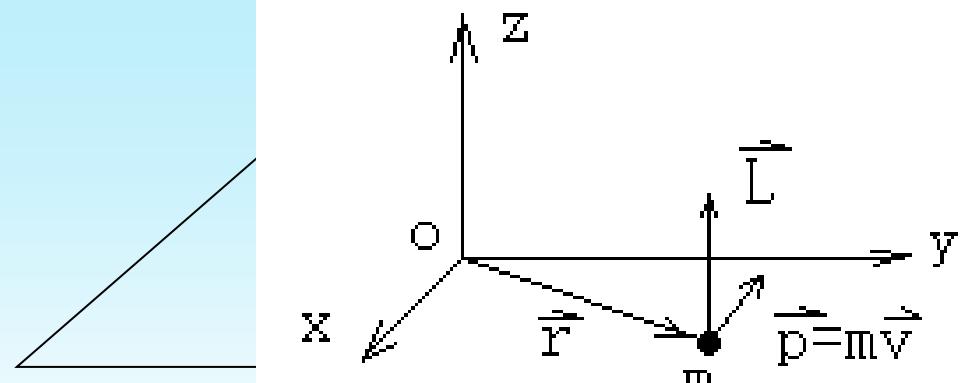
刚体转动

归纳总结

## 1、力矩、角动量

力矩定义:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

角动量:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$



## 2、三个定理:

动能定理:  $W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_{k2} - E_{k1} = \sum \frac{1}{2}mv_2^2 - \sum \frac{1}{2}mv_1^2$

动量定理:  $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt = \sum \vec{p}_2 - \sum \vec{p}_1 = \sum m\vec{v}_2 - \sum m\vec{v}_1$

角动量定理:  $\vec{M} \cdot dt = d\vec{L} = d(\vec{r} \times m\vec{v})$

### 3、三个守恒定律

机械能守恒定律： 条件： $W_e + W_{nc} = 0$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0 \quad \text{或} \quad E_k + E_p = \text{常量}$$

动量守恒定律： 条件： $\sum_i \vec{F}_{ie} = 0$

$$d\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = 0 \quad \text{或} \quad \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{常矢量}$$

角动量守恒定律： 条件： $\vec{M} = 0$

$$d\vec{L} = 0 \quad \text{或} \quad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{恒矢量}$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{恒矢量}$$

# 刚 体 转 动

## 一、基本概念

- 1、刚体
- 2、刚体的平动
- 3、刚体绕定轴转动
- 4、角速度矢量
- 5、刚体的转动动能
- 6、刚体的转动惯量
- 7、刚体的角动量

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_k r_k^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

$$J = \sum \Delta m_k r_k^2 \quad J = \int r^2 dm$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$L_z = J \cdot \omega$$

8、力矩的功  $dW = M d\theta$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

9、功率  $p = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$

10、平行轴定理

$$J_o = J_c + md^2$$

## 二、基本规律 basic law

### 1、转动定律 law of rotation

$$\bar{M} = J \bar{\alpha}$$

(相当于  $\bar{F} = m \bar{a}$  )

刚体绕定轴转动时，刚体的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

### 2、转动动能定理

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d\theta = \int d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

### 3、定轴转动刚体的角动量定理

$$\vec{M}dt = d\vec{L} = d(J\vec{\omega})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1$$

转动物体所受合外力矩的冲量矩等于在这段时间内转动物体角动量的增量——角动量定理。

### 4、定轴转动刚体的角动量守恒定律

若  $\vec{M} = 0$

则  $\vec{L} = J\vec{\omega}$  = 恒矢量

# 动力学部分解题指导

- 动力学部分习题一般分为四大类：
- 第一类是牛顿第二定律的应用，主要是求解质点系中任一个质点所受的力和加速度
- 第二类问题是冲量和动量关系式的应用，主要用来求解质点系中任一个质点的速度、位移、冲量、动量增量。
- 第三类是功能关系式的应用，主要用来求解质点系中任一质点的速率、外力对质点系所作的功、非保守内力对质点系的功、质点系势能表达式中的未知量等。
- 第四类是角动量分量守恒定律的应用。主要求质点系中任一质点的速度。

- 第一类是牛顿第二定律的应用其解题步骤为：
  - (1)隔离物体，使每个隔离物体可以视为质点。
  - (2)受力分析。
  - (3)选择坐标系。
  - (4)列运动方程，求解。
- 第二类问题是冲量和动量关系式的应用解题步骤是：
  - (1)选择所研究的质点系。
  - (2)确定所研究的过程以及过程的始末状态。
  - (3)根据过程中外力和所满足的条件确定所用的冲量和动量关系式。
  - (4)列方程，求解。

- 第三类是功能关系式的应用 具体的解题步骤为：
  - (1)选择所研究的质点系。
  - (2)确定所研究的过程以及过程的始末状态。
  - (3)根据过程中外力的功和非保守内力的功代数和所服从的条件确定所用的功能关系式。
  - (4)列方程，求解。
- 第四类是角动量分量守恒定律的应用 具体的求解方法是：
  - (1)、(2) 同上。
  - (3)判断过程中对某点（或某轴）合外力矩是否为零，或者角动量守恒条件是否成立。
  - (4)若守恒条件成立，确定正方向，列方程，求解
- 分解综合法：对于较为复杂问题，不是只用一个定理、定律就能解决，要将整个过程分解成几个子过程，对每一子过程应用上述方法。

# 刚体转动解题指导

## 1、运动学问题

刚体绕定轴转动的运动学问题，只涉及圆周运动的角量描述及角量和线量的关系。角坐标  $\theta = \theta(t)$

若已知运动方程，求角速度或角加速度等，可用微分法

$$\text{角速度 } \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \bar{\omega} \text{ 方向: 右手螺旋}$$

$$\text{角加速度 } \bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

若已知角速度或角加速度及初始条件，求运动方程可用积分法

## 2、刚体的静力学问题

Problem of statics of a rigid body

刚体静力学问题应注意刚体平衡时应满足两个条件

刚体受合外力等于零  $\sum \vec{F}_i = 0$

整个刚体受合外力矩等于零  $\sum \vec{M}_i = 0$

例题1 一长为  $l$ ，重为  $w$  的均匀梯子，靠墙放置，如图。墙光滑，地面粗糙，当梯子与地面成  $\theta$  角时，处于平衡状态，求梯子与地面的摩擦力。

- 解：刚体平衡同时要满足两个条件：

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \sum \vec{M}_i = 0$$

列出分量方程：

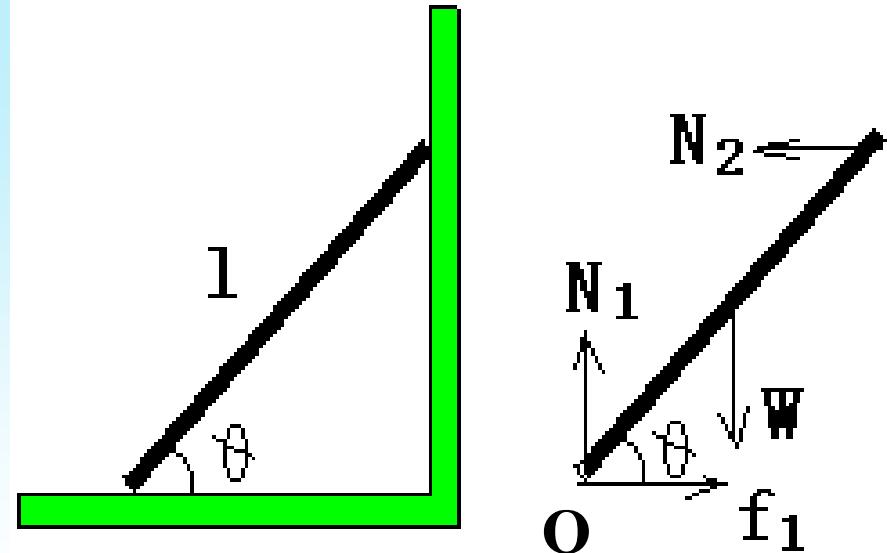
水平方向： $f_1 - N_2 = 0$

竖直方向： $W - N_1 = 0$

以支点O为转动中心，梯子受的合外力矩： $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$w \frac{l}{2} \cos \theta - N_2 l \sin \theta = 0$$

解以上三式，得  $f_1 = N_2 = \frac{w}{2} c \tan \theta$



### 3、定轴转动的动力学问题

**Problem of dynamics of a rotational rigid body around a fix axis**

刚体定轴转动的动力学问题，大致有三种类型题。其解题基本步骤归纳为：首先分析各物体所受力和力矩情况，然后根据已知条件和所求物理量判断应选用的规律，最后列方程求解。

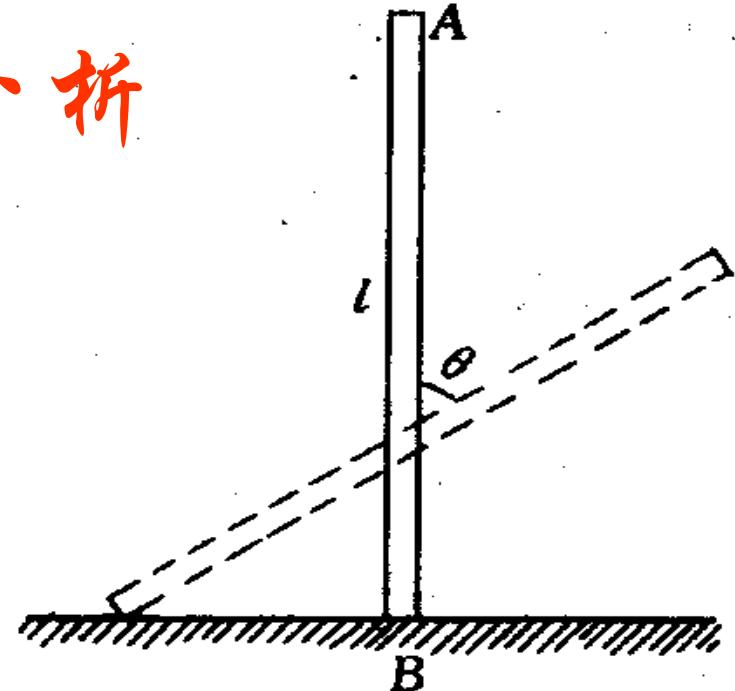
- 第一类：求刚体转动某瞬间的角加速度，一般应用转动定律求解。如质点和刚体组成的系统，对质点列牛顿运动方程，对刚体列转动定律方程，再列角量和线量的关联方程，并联立求解。

- 第二类：求刚体与质点的碰撞、打击问题。把它们选作一个系统时，系统所受合外力矩常常等于零，所以系统角动量守恒。列方程时，注意系统始末状态的总角动量中各项的正负。对在有心力场作用下绕力心转动的质点问题，可直接用角动量守恒定律。
  - 第三类：在刚体所受的合外力矩不等于零时，比如木杆摆动，受重力矩作用，求最大摆角等一般应用刚体的转动动能定理求解。对于仅受保守力矩作用的刚体转动问题，也可用机械能守恒定律求解。
- ✿ 另外：实际问题中常常有多个复杂过程，要分成几个阶段进行分析，分别列出方程，进行求解。

## 例题2

# 典型习题分析

- 长为  $l$ ，质量为  $m$  的均匀杆，在光滑桌面上由竖直位置自然倒下，当夹角为  $\theta$  时（见图），求：
  - (1) 质心的速度
  - (2) 杆的角速度



解：(1) 水平方向不受力，故质心在水平方向不产生加速度，质心原来静止，故质心水平方向的速度为零。只有竖直方向的速度。设任一时刻，质心的位置为：

$$y_c = \frac{l}{2} \cos \theta$$

则： $v_c = \frac{dy_c}{dt} = -\frac{l}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{l \sin \theta}{2} \omega$

(2) 在杆下滑过程中, 只有重力作功, 故**机械能守恒**, 对任一夹角  $\theta$ , 有:

$$mg \frac{l}{2} = mg \frac{l}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

由于:  $v_c = -\frac{l \sin \theta}{2} \omega$        $J = \frac{ml^2}{12}$

代入后:  $gl(1 - \cos \theta) = \frac{l^2}{4} \sin^2 \theta \cdot \omega^2 + \frac{l^2}{12} \omega^2$

经整理, 得:

$$\omega = \sqrt{\frac{12g(1 - \cos \theta)}{l(1 + 3 \sin^2 \theta)}}$$

$$v_c = -\frac{l \sin \theta}{2} \sqrt{\frac{12g(1 - \cos \theta)}{l(1 + 3 \sin^2 \theta)}}$$

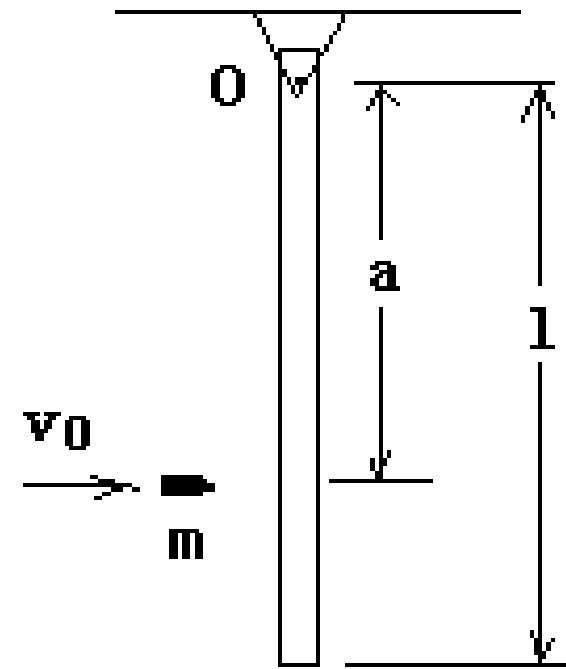
### 例题3

- 如图，一长为  $l$ ，质量为  $M$  的杆可绕支点  $O$  转动，一质量为  $m$ ，速率  $v_0$  的子弹，射入距支点为  $a$  的杆内，并留在其中，若杆的最大偏转角  $\theta = 30^\circ$ ，求子弹的初速率  $v_0$ 。

解：此题分两个阶段，第一阶段，子弹射入杆中，摆获得角速度  $\omega$ ，尚未摆动，子弹和摆组成的系统所受外力对  $O$  点的力矩为零，系统角动量守恒：

$$a(mv_0) + 0 = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2\right)\omega \quad (1)$$

第二阶段，子弹在杆中，与摆一起摆动，以子弹、杆和地球组成的系统除保守内力外，其余力不作功，于是系统机械能守恒：



$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} Ml^2 + ma^2 \right) \omega^2 = Mgh_1 + mgh_2 \quad (2)$$

其中:  $h_1 = \frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$       (3)

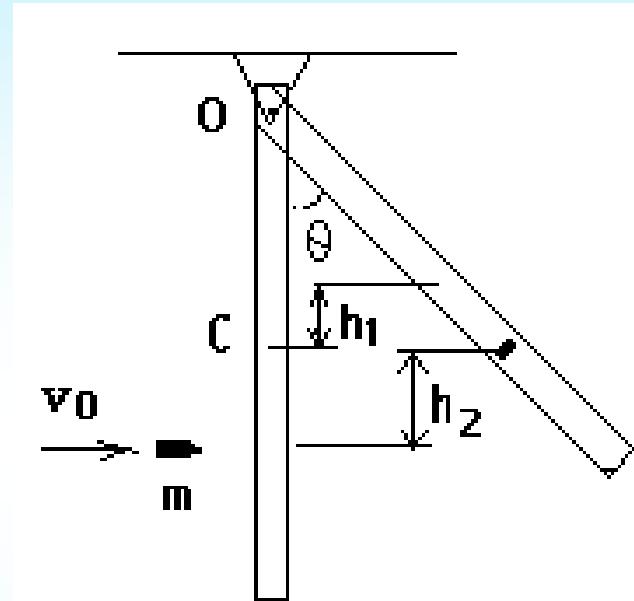
$$h_2 = a(1 - \cos\theta) \quad (4)$$

由 (2) (3) (4) 式求得:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{2Mgl(1 - \cos\theta)/2 + 2mga(1 - \cos\theta)}{Ml^2/3 + ma^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(Ml + 2ma)g(1 - \cos\theta)}{Ml^2/3 + ma^2}} \end{aligned}$$

代入 (1) 式, 得:

$$v_0 = \frac{1}{ma} \sqrt{(Ml^2/3 + ma^2)(Ml + 2ma)(1 - \cos\theta)g}$$



**例题4** 已知质量为 $M$ , 长为 $l$  均匀直棒可绕 $O$ 轴转动, 现有质量 $m$  的弹性小球与棒垂直碰撞, 试求小球打在什么位置时,  $O$ 点在水平方向受力为零? 小球打在什么范围,  $O$ 点在水平方向受力向左? 小球打在什么范围,  $O$ 点在水平方向受力向右?

解: 设小球打在距 $O$ 点为 $a$  处,  $O$ 点受力 $f$  向右。由**角动量守恒**:

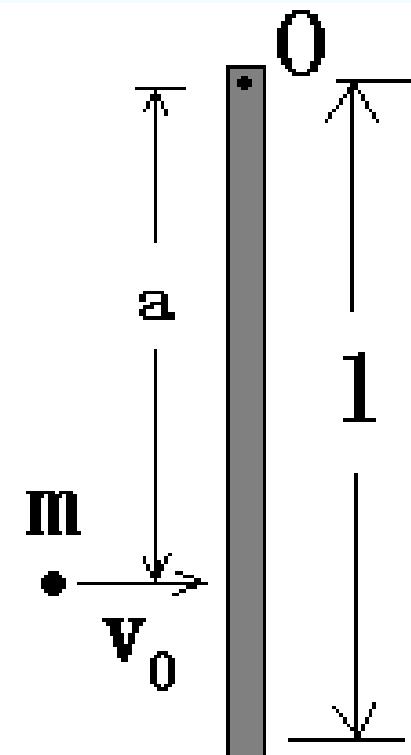
$$mv_0a = mva + \left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\omega \cdots \cdots (1)$$

$$\text{由动量定理: } (MV_c + mv) - mv_0 = f \cdot \Delta t \cdots \cdots (2)$$

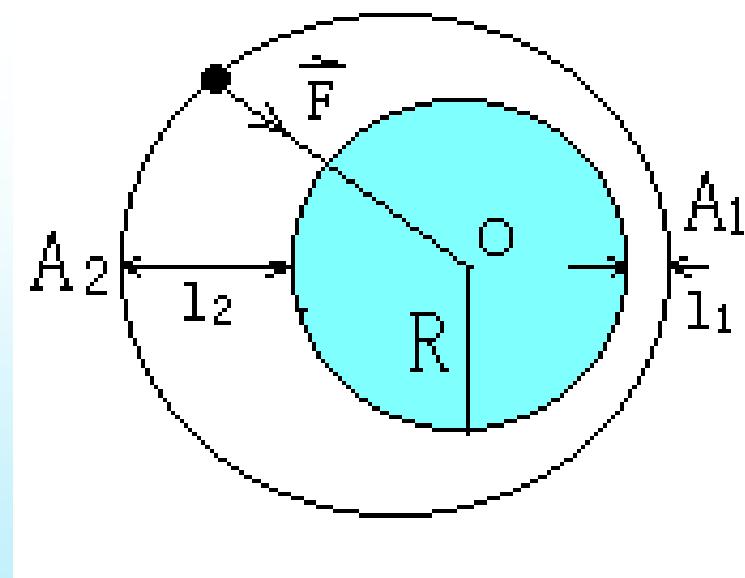
$$\text{即: } \left(M \frac{l}{2}\omega + mv\right) - mv_0 = f \cdot \Delta t \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$\text{由式(1)和(3): } \frac{3a - 2l}{6a} Ml\omega = f \cdot \Delta t \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$\text{可见: 当} \begin{cases} a > 2l/3 & f > 0, \text{ 向右} \\ a = 2l/3 & f = 0 \\ a < 2l/3 & f < 0, \text{ 向左} \end{cases}$$

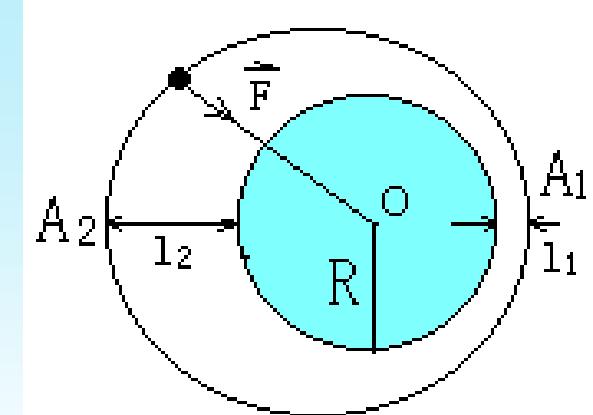


**例题5** 人造卫星绕地球沿椭圆轨道运动，地球中心为椭圆的一个焦点，已知地球平均半径  $R = 6378$  km，近地距离  $l_1 = 439$  km， $A_1$  点速度  $v_1 = 8.10$  km/s，远地距离  $l_2 = 2384$  km，求 $A_2$  点的速度  $v_2 = ?$



- 解：卫星在运行时只受地球对它的引力，方向始终指向地心  $O$ ，力的大小只依赖于两点距离（这种力称为**有心力**），对于  $O$  点，力矩为零， $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

故**角动量守恒**



$$\therefore \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

卫星在近地点  $A_1$  的角动量： $L_1 = mv_1(R + l_1)$

卫星在远地点  $A_2$  的角动量： $L_2 = mv_2(R + l_2)$

因角动量守恒，所以： $mv_1(R + l_1) = mv_2(R + l_2)$

于是： $v_2 = v_1 \frac{R + l_1}{R + l_2} = 8.10 \times \frac{6378 + 439}{6378 + 2384} = 6.30 \text{ (km / s)}$

**例：**质量为 $m$ 的人站在一质量 $M$ 、半径 $R$ 的转台边缘，初始时两者均静止。问当人沿转台边缘奔跑一周时，人和转台各对地转过了多少角度？

**解：**以人和转台为系统，则

$$\sum M_{\text{外}} = 0$$

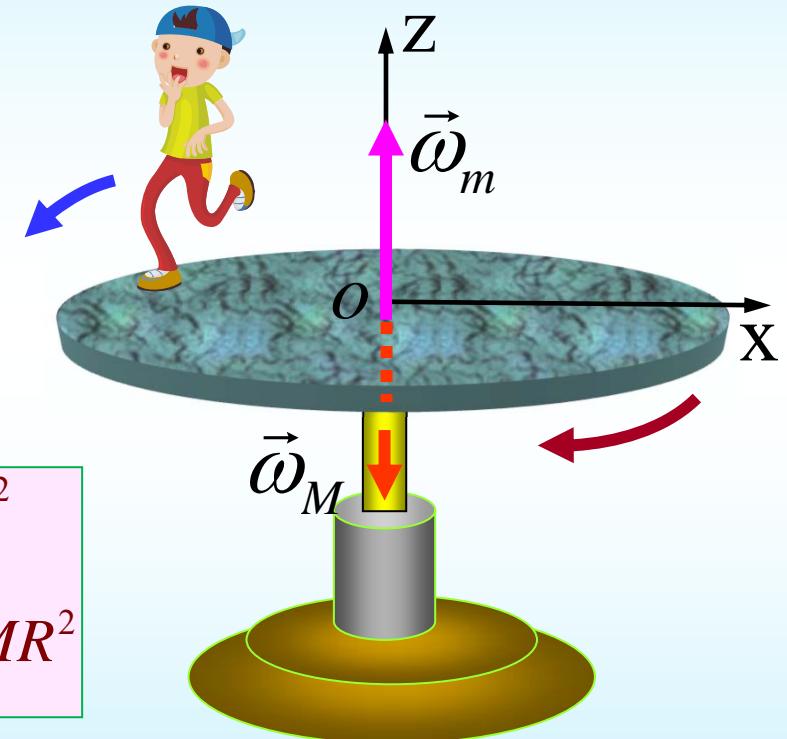
故系统角动量守恒。任一时刻：

$$J_m \vec{\omega}_m + J_M \vec{\omega}_M = 0$$

$$J_m = mR^2$$

$$J_M = \frac{1}{2}MR^2$$

同时  $\vec{\omega}_m = \vec{\omega}'_m + \vec{\omega}_M$



由此得出两式： $\omega'_m = -(1 + \frac{M}{2m})\omega_M$      $\omega_m = -\frac{M}{2m}\omega_M$

$$\omega'_m = -(1 + \frac{M}{2m})\omega_M \quad \omega_m = -\frac{M}{2m}\omega_M$$

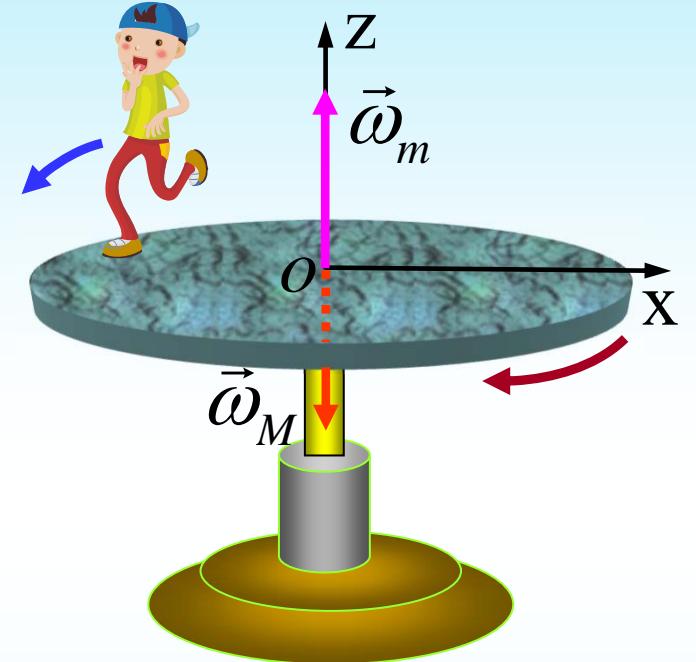
两式分别积分：

$$\int_0^t \omega'_m dt = -(1 + \frac{M}{2m}) \int_0^t \omega_M dt$$

$$\rightarrow 2\pi = -(1 + \frac{M}{2m})\theta_M$$

$$\int_0^t \omega_m dt = -\frac{M}{2m} \int_0^t \omega_M dt \quad \rightarrow \theta_m = -\frac{M}{2m}\theta_M$$

$$\text{联立得得: } \theta_m = \frac{2\pi M}{M + 2m} \quad \theta_M = -\frac{4\pi m}{M + 2m}$$



负号表示  
圆台沿反  
方向转过  
角度  $\theta_M$ .

**例题6** 已知质量为 $M$ , 长为  $l$  均匀直棒可绕 $O$ 轴转动, 静止在平衡位置上, 现有质量 $m$  的弹性小球飞来正好与棒下端垂直碰撞, 碰撞后使棒摆动最大角度为 $30^\circ$ 。求 (1) 设为弹性碰撞, 计算小球初速度 $v_0$  ; (2)碰撞时小球受到的冲量。

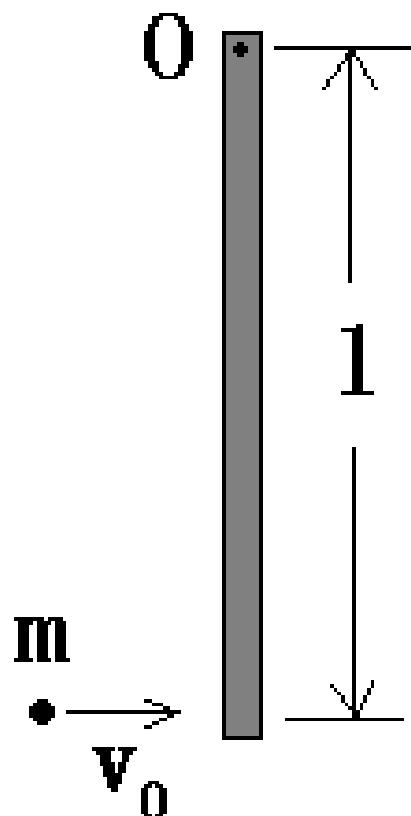
解: (1)取小球、棒和地球为系统, 由于系统所受外力对 $O$ 点的力矩为零, 所以碰撞前后角动量守恒:

$$mv_0 l = -mv l + J\omega \cdots \cdots (1)$$

$$J = \frac{1}{3}Ml^2$$

由于是弹性碰撞, 碰撞没有能量损失, 其他外力不作功, 所以碰撞前后总动能不变。

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \cdots \cdots (2)$$



直棒以 $\omega$ 角速度开始摆动，到 $\theta=30^\circ$ ，系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = Mg \frac{l}{2}(1 - \cos\theta) \dots\dots\dots(3)$$

由式 (1)  $v = \frac{1}{3} \frac{M}{m} l \omega - v_0 \dots\dots\dots(4)$

代入式 (2)，解得：  $v_0 = \frac{1}{2} l \omega \left(\frac{M}{3m} + 1\right) \dots\dots\dots(5)$

由式 (3) 得：  $l \omega = \sqrt{3gl(1 - \cos\theta)} \dots\dots\dots(6)$

代入式 (5)：  $v_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{3m} + 1\right) \sqrt{3gl(1 - \cos\theta)} \dots\dots\dots(7)$

当 $\theta=30^\circ$ 时，

$$v_0 = \frac{M + 3m}{6m} \sqrt{3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)gl} = \frac{M + 3m}{12m} \sqrt{6(2 - \sqrt{3})gl}$$

(2)由动量定理，碰撞时，小球受到的冲量：

$$\int \vec{F} \cdot dt = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

由式 (4) 得：

$$\int F \cdot dt = m(v + v_0) = \frac{1}{3} Ml\omega$$

$$= \frac{M}{3} \sqrt{3gl(1 - \cos\theta)}$$

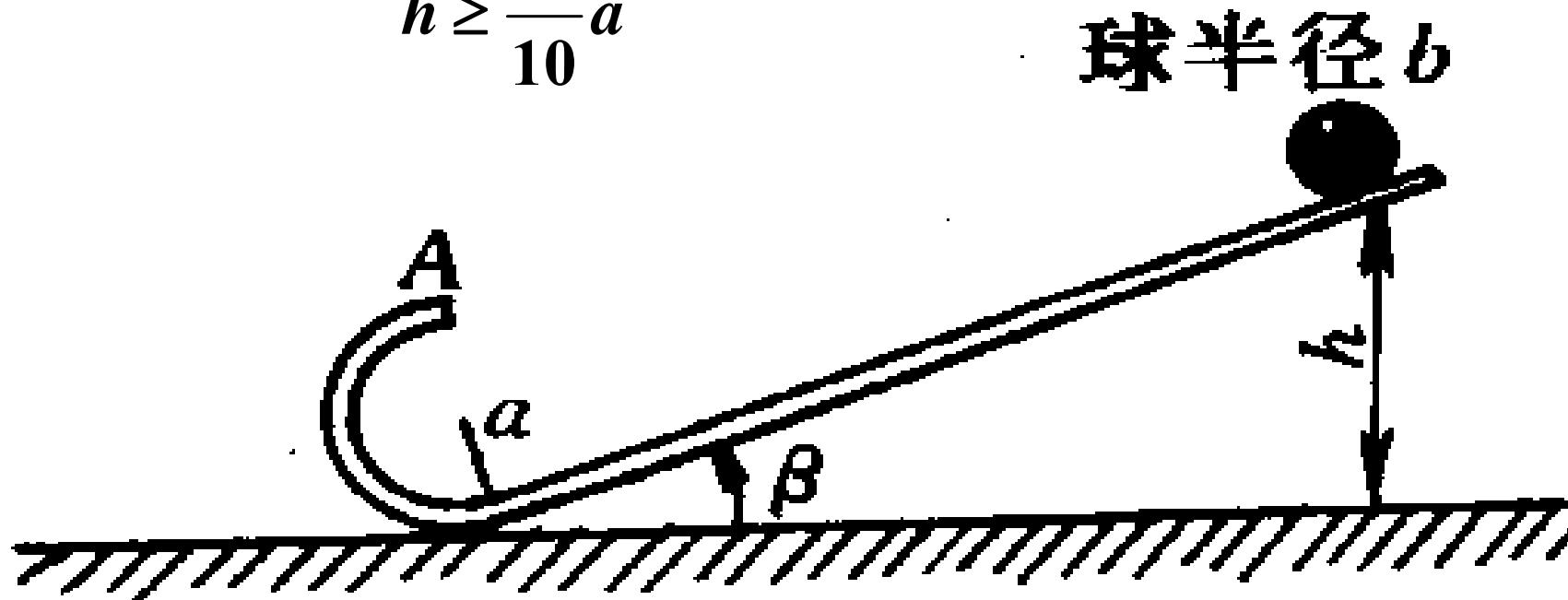
$$= \frac{M}{3} \sqrt{3gl\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

方向与  $v_0$  相反。

**例题7** 质量为 $m$ , 半径为 $b$  的小球, 由静止从 $h$ 高无滑动地滚下, 并进入半径为 $a$  的圆形轨道。

- 求 (1) 小球到达底部时的角速度  $\omega$  和质心的速度  $v_c$ .  
(2) 证明如果  $b \ll a$ , 要使小球不脱离轨道而到达A点, 则  $h$ 应满足:

$$h \geq \frac{27}{10}a$$



解 (1) 因无滑动, 故摩擦力 $f$  不作功 (无相对位移), 支持力 $N$ 与运动方向垂直, 也不作功, 只有重力 (保守内力) 作功, 所以**机械能守恒**:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \dots\dots\dots(1)$$

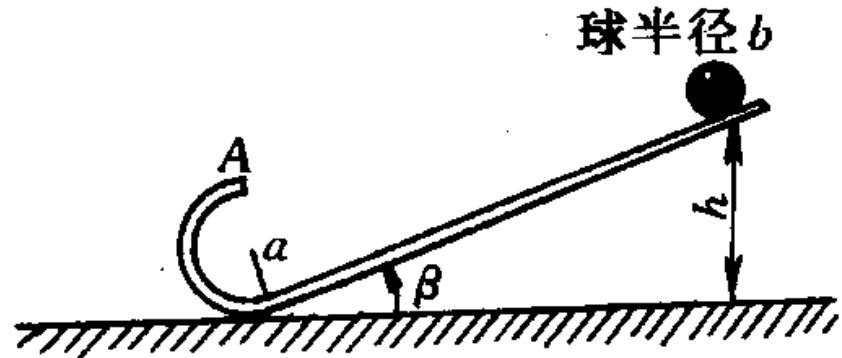
又由于:

$$v_c = b\omega , \quad J = \frac{2}{5}mb^2 \dots\dots\dots(2)$$

有:

$$mgh = \frac{1}{2}mb^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{2mb^2}{5}\omega^2 \dots\dots\dots(3)$$

整理, 得:  $\omega = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{10}{7}gh}$  ,  $v_c = b\omega = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$



(2) 小球到达A点不脱离轨道，要求小球在A点的速度 $v_A$ 和角速度 $\omega_A$ 满足：

$$m \frac{v_A^2}{a} \geq mg \Rightarrow v_A^2 \geq ag, \quad \omega_A^2 = \frac{v_A^2}{b^2} \geq \frac{ag}{b^2} \dots \dots (4)$$

由机械能守恒：

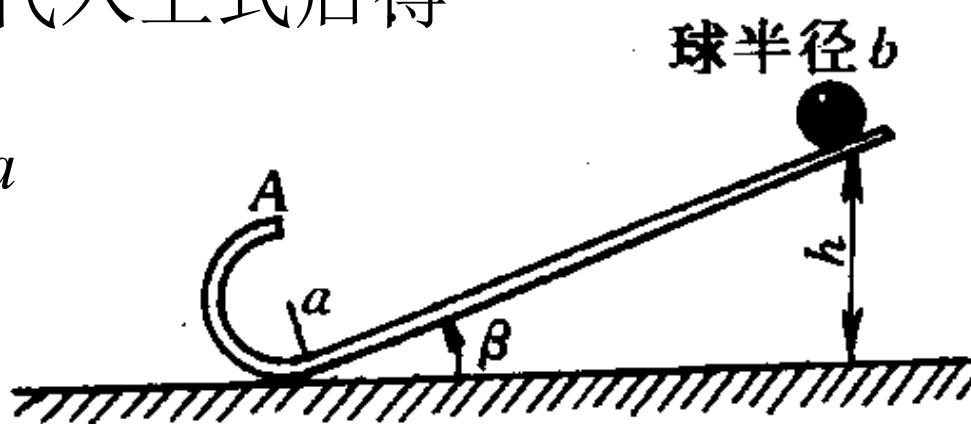
$$mg(2a) + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J\omega_A^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \dots \dots (5)$$

$$\text{即: } 2amg = \frac{1}{2}m(v_c^2 - v_A^2) + \frac{1}{2}J(\omega^2 - \omega_A^2)$$

将  $v_c$ ,  $v_A$ ,  $\omega$ ,  $\omega_A$  和  $J$  代入上式后得

$$70h \geq 189a, \quad h \geq \frac{189}{70}a$$

$$\therefore h \geq \frac{27}{10}a \quad (\text{证毕})$$



例：质量 $M$ 、长 $l$ 的均质细棒置于粗糙的水平桌面上，可绕过端点 $O$ 的垂直光滑轴转动。现有质量 $m$ 、速度 $v_1$ 的小球在桌面上沿与棒长垂直的方向与棒的另一端碰撞后，反弹速度为 $v_2$ 。求：1. 碰后棒的角速度； 2. 棒从碰后到静止所需的时间。（设摩擦系数为 $\mu$ ）

解：1. 碰撞过程系统角动量守恒

$$mv_1 l = -mv_2 l + J\omega$$

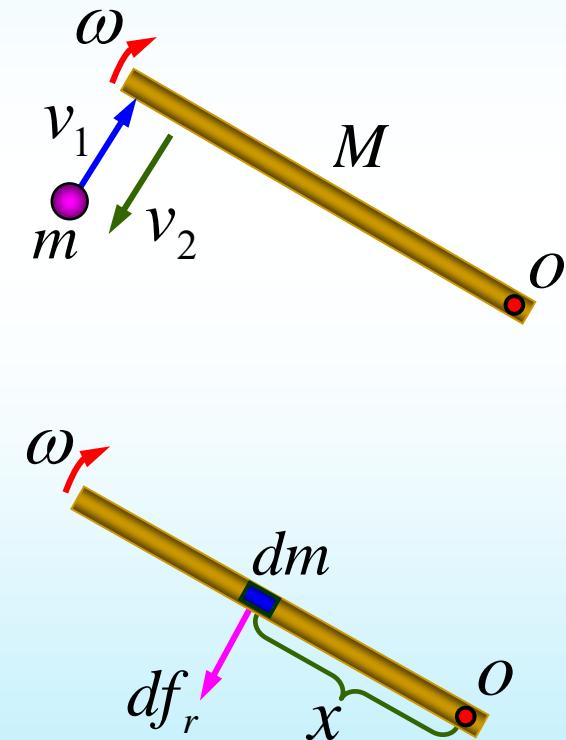
$$\omega = \frac{3m(v_1 + v_2)}{Ml}$$

$$J = \frac{1}{3}Ml^2$$

2. 棒转动过程中，受摩擦阻力矩作用

$$M_r = \int dM_r = \int_L x \cdot df_r$$

$$df_r = -\mu dm g = -\mu g(M/l)dx$$



$$M_r = - \int_l x \cdot df_r = - \int_0^l \mu \frac{M}{l} g x dx = - \frac{1}{2} \mu M g l$$

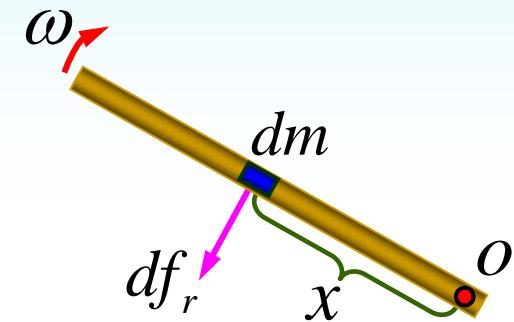
由角动量定理

$$Md\theta = dL = Jd\omega$$

$$\int M_r d\theta = \int J d\omega$$

$$\rightarrow \int_0^t - \frac{1}{2} \mu M g l dt = J \int_0^\omega d\omega$$

$$t = \frac{2l}{3\mu g} \omega = \frac{2m(v_1 + v_2)}{\mu Mg}$$



$$\boxed{\omega = \frac{3m(v_1 + v_2)}{Ml}}$$