第五章 傅里叶变换的应用——滤波、调制、抽样

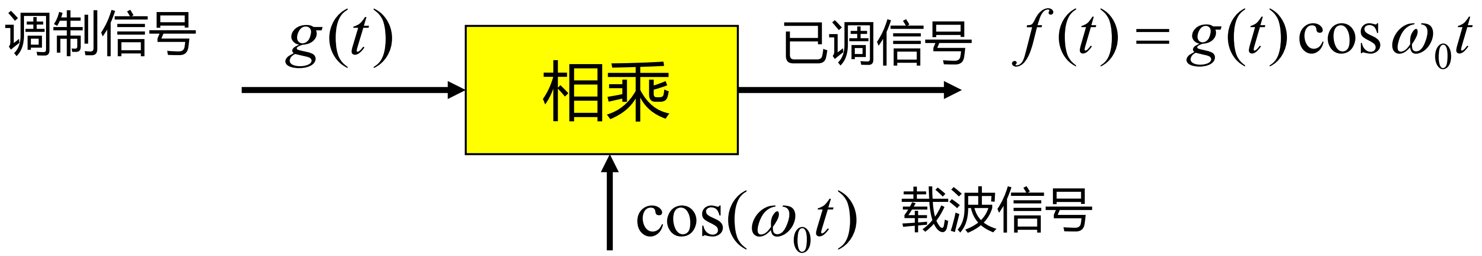
5.7 调制与解调

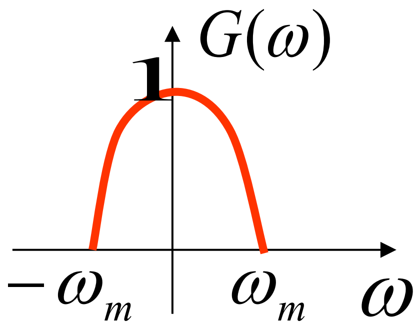
5.7.1 调制的目的

- **信号能有效的被辐射条件：** 天线尺寸为被辐射信号波长的十分之一或更大些。如：对于语音信号，天线尺寸要在几十公里以上，不可能实际制作。
- **调制：** 将信号频谱搬移到任何所需的较高频率范围，制作合理尺寸的天线，容易发射。
- **调制作用的实质：** 把各种信号频谱搬移，使它们互不重叠地占据不同的频率范围，即信号依附于不同频率的载波上，接收机可以分离出所需频率的信号，不致互相干扰。（频移定理）
- **改善电波传播的性能：** 低频信号（如音频信号）能量分散。
- **实现多路复用：** 用同一部电台将各路信号的频谱分别搬移到不同的频率区段，在同一信道内传送多路信号的多路通信。

  频分复用： 基于傅里叶变换的频移特性。

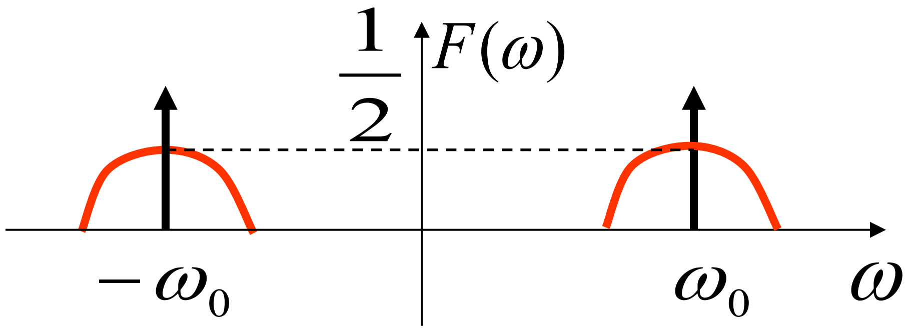
5.7.2 调制原理



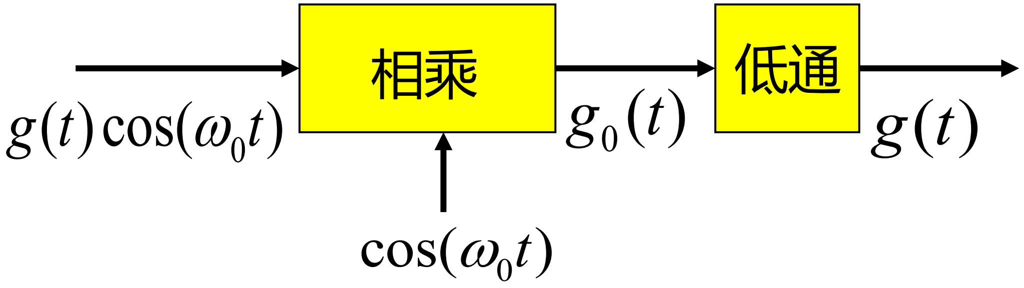


$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*\left[\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[G(\omega+\omega_0)+G(\omega-\omega_0)\right]$$



5.7.3 同步解调原理



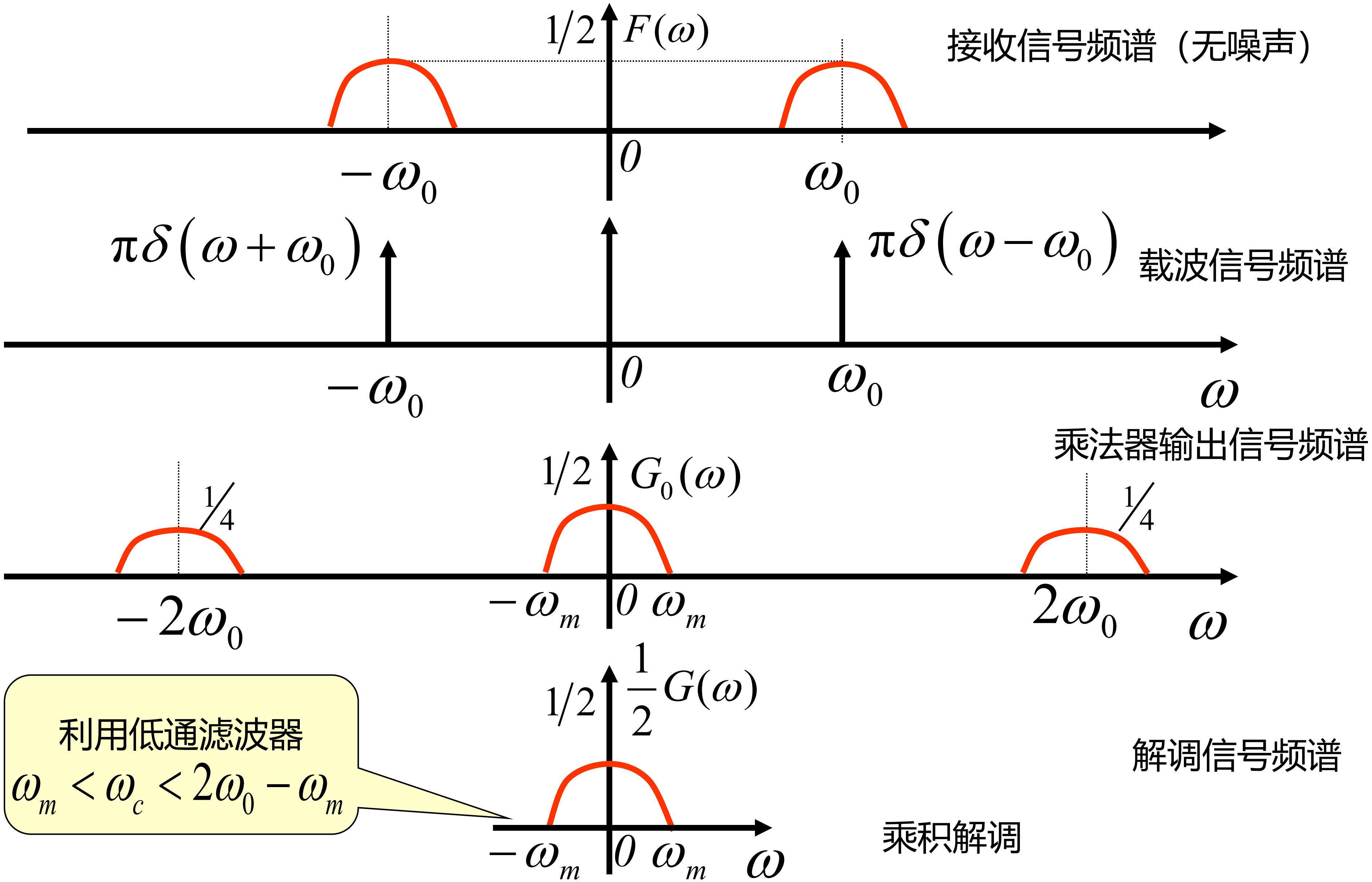
同步解调：接收端与发射端具有同频同相的本地载波。

$$g_0(t) = [g(t)\cos\omega_0 t]\cos\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2}g(t)(1+\cos 2\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2}g(t)\cos 2\omega_0 t$$

$$G_0(\omega) = \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{4}[G(\omega+2\omega_0) + G(\omega-2\omega_0)]$$



1/2
$F(\omega)$
接收信号频谱（无噪声）
$-\omega_0$
0
ω_0
$\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\pi\delta(\omega-\omega_0)$
载波信号频谱
$-\omega_0$
0
ω_0
ω
乘法器输出信号频谱
1/2
$G_0(\omega)$
1/4
1/4
$-2\omega_0$
$-\omega_m$
0
ω_m
$2\omega_0$
ω
利用低通滤波器
$\omega_m<\omega_c<2\omega_0-\omega_m$
1/2
$\frac{1}{2}G(\omega)$
解调信号频谱
$-\omega_m$
0
ω_m
ω
乘积解调

5.7.4 无需本地载波信号的解调

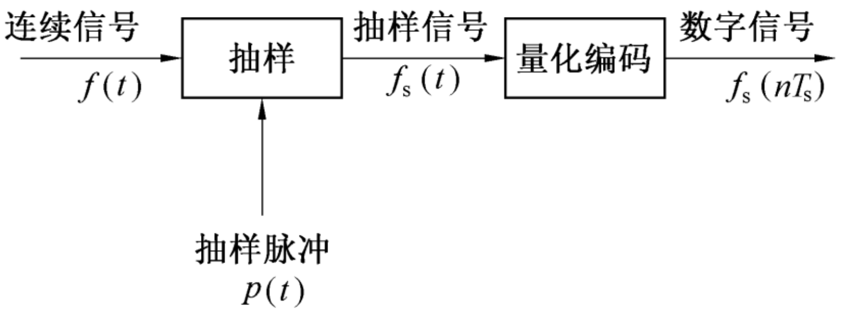
- 优点：简化接收机的结构，只需用包络检波器即可（二极管、电阻、电容组成）。

- 发送端的发射信号中加入一定强度的载波信号 $A\cos\omega_0 t$，即合成发射信号为 $[A+g(t)]\cos\omega_0 t$ 。如果 A 足够大，对于全部的 t，$A+g(t)>0$， 已调制信号的包络就是 $A+g(t)$，可以恢复出 $g(t)$。

- 技术简单，价格低，常用于民用通信设备。

5.8 从抽样信号恢复连续时间信号

5.8.1 抽样信号和抽样定理（复习）



1. 时域抽样

$$f_s(t) = f(t)\cdot p(t)$$

这里 $p(t)$ 为周期序列。

$$\begin{cases} P(\omega) = 2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s) \\ P_n = \dfrac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_s t}\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n F(\omega - n\omega_s)$$

$\omega_s = 2\pi f_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$ 抽样角频率。

T_s 抽样周期。

结论： 抽样信号频谱 $F_s(\omega)$，是原信号频谱 $F(\omega)$ 以 ω_s 的周期重复，幅度上是抽样脉冲傅里叶系数 P_n 加权。

注意： 时域离散性对应频域周期性

2. 抽样定理

目的：连续信号被抽样后，如何保留原信号 $f(t)$ 的全部信息?

时域抽样定理

一个频带受限的信号 $f(t)$，如果它的频谱只占据 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 的有限范围，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一地表示，此时最低抽样频率必须满足 $f_s \geq 2f_m$ ，或者抽样时间间隔必须满足 $T_s \leq \dfrac{1}{2f_m}$。

抽样定理要求：$\omega_s \geq 2\omega_m$ →

$$\omega_s = 2\pi f_s \geq 2\omega_m = 2\times 2\pi f_m$$

$$T_s = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_m}$$

抽样频率 $f_s = 2f_m$ 称为“奈奎斯特（Nyquist）频率 ”

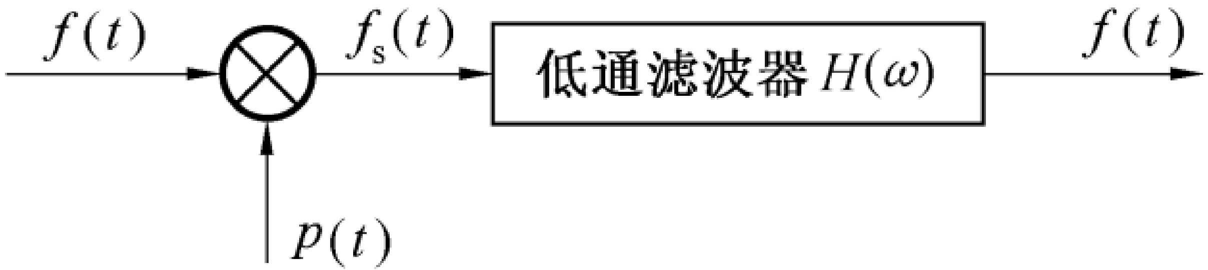
抽样间隔 $T_s = \dfrac{\pi}{\omega_m} = \dfrac{1}{2f_m}$ 称为“奈奎斯特（Nyquist）间隔”

5.8.3 从抽样信号恢复连续时间信号

目的：从抽样信号频谱 $F_s(\omega)$ 恢复原连续信号频谱 $F(\omega)$ 。

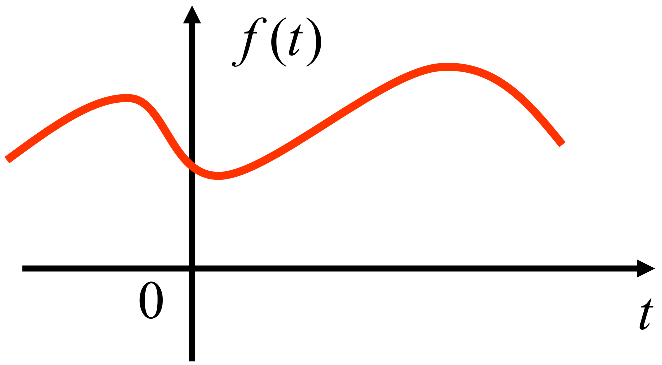
关键：信号最高频率 ω_m ，抽样频率 ω_s ，滤波器截止频率 ω_c 之间关系?

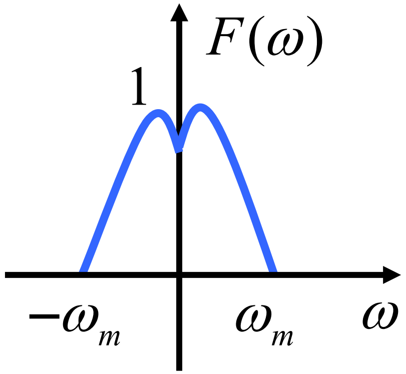
信号 $f(t)$ 恢复原理:

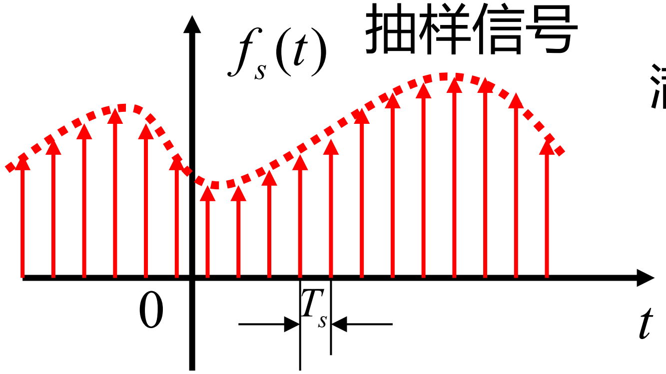


低通滤波器 $$H(\omega)=\begin{cases} T_s, & -\omega_c<\omega<\omega_c \\ 0, & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

恢复信号 $$F(\omega)=F_s(\omega)H(\omega)$$

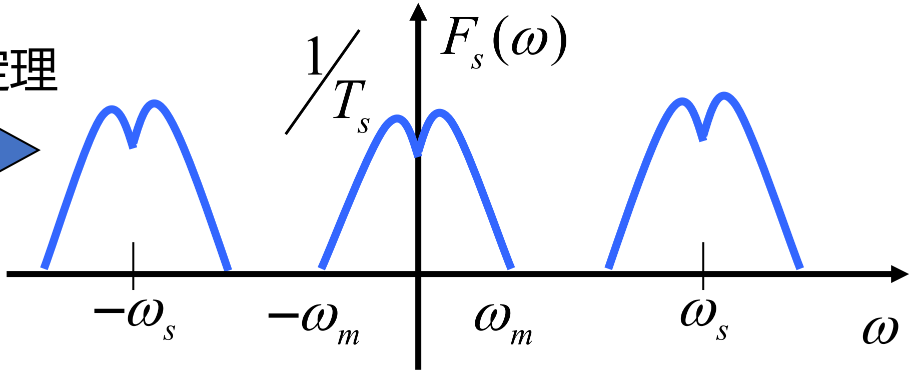


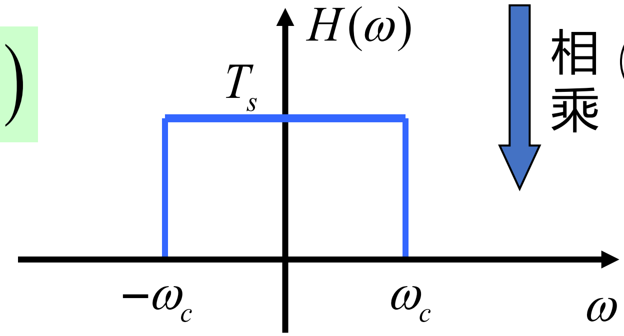




抽样信号

满足抽样定理

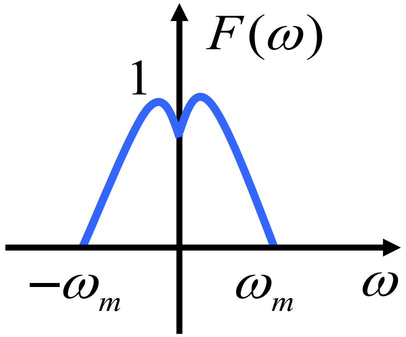


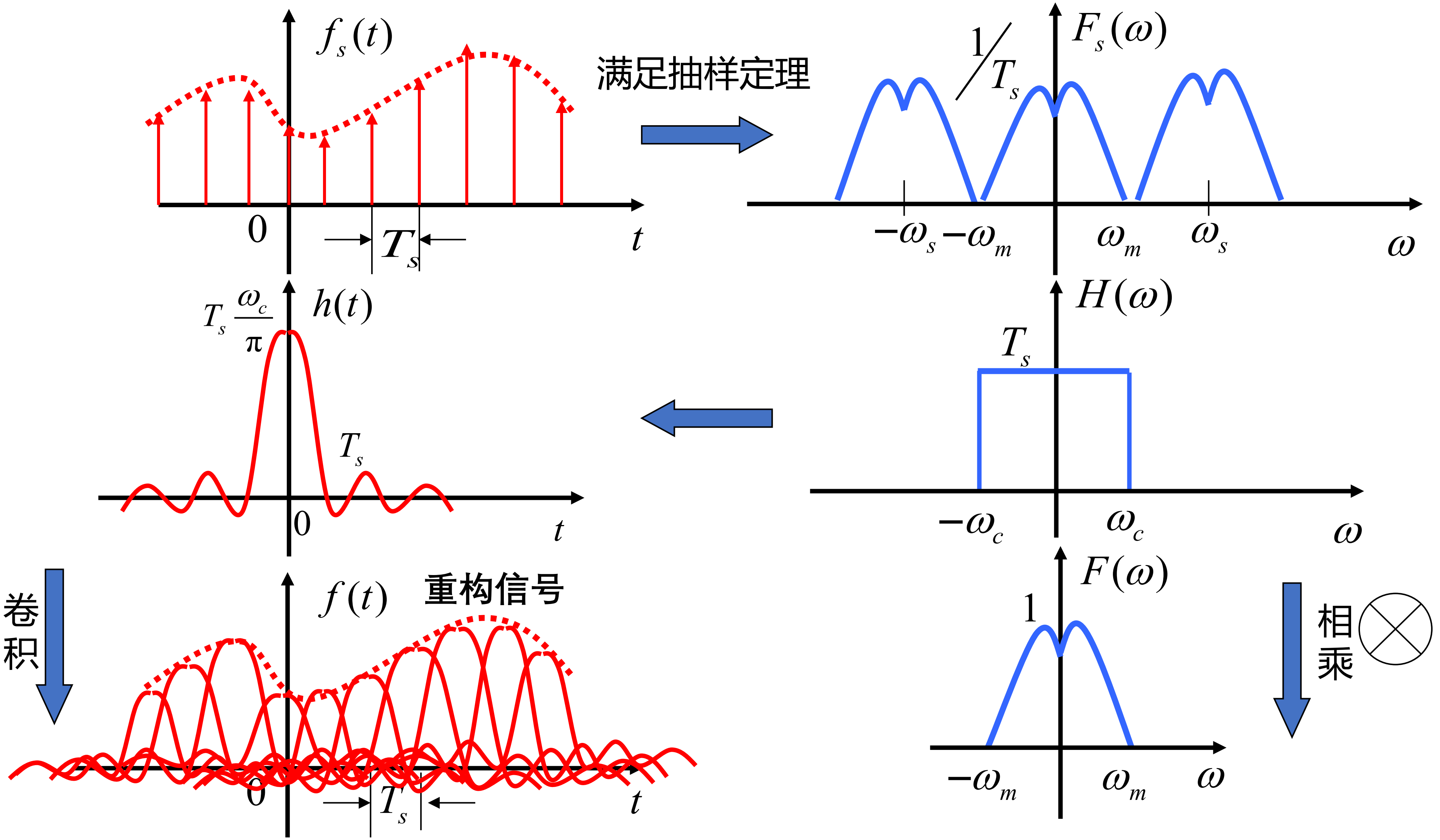


相乘 ⊗

$$F(\omega)=F_s(\omega)\cdot H(\omega)$$

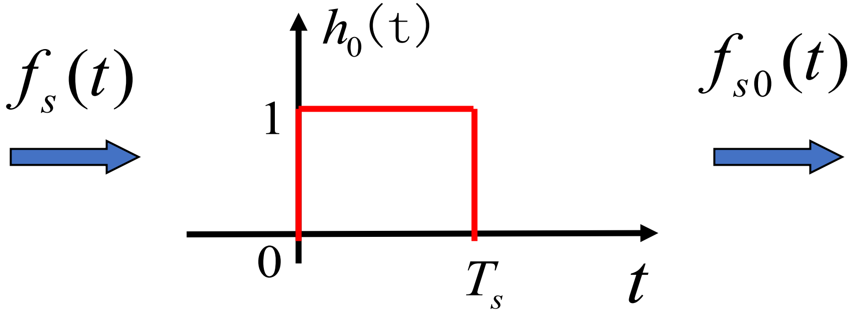
信号还原（重构）




$f_s(t)$
0
T_s
t
满足抽样定理
$F_s(\omega)$
$1/T_s$
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s
ω
$h(t)$
$T_s\frac{\omega_c}{\pi}$
T_s
0
t
$H(\omega)$
T_s
$-\omega_c$
ω_c
ω
卷积
$f(t)$
重构信号
0
T_s
t
$F(\omega)$
1
$-\omega_m$
ω_m
ω
相乘

抽样保持：构建一个线性系统使其达到保持电平作用

此线性系统必须具有如下单位冲激响应：



$$\therefore f_{s0}(t) = f_s(t) * h_0(t) \qquad H_0(\mathrm{j}\omega) = T_s \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T_s}{2}}$$

$$\therefore F_{s0}(\omega) = F_s(\omega) H_0(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T_s}{2}}$$

$F_{s0}(\omega)$ 的频谱基本特征仍是 $F(\omega)$,其频谱以 ω_s 周期重复，

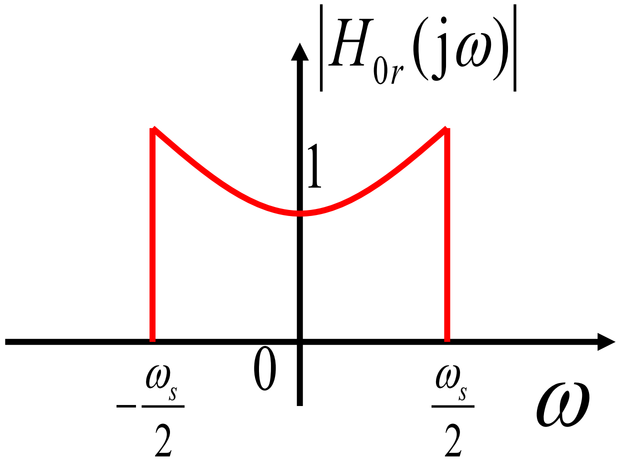
但要乘上 $\mathrm{Sa}(\frac{\omega T_s}{2})$ 函数，并附加了延时因子项 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T_s}{2}}$。

$$\xrightarrow{\text{恢复}} F(\omega) = F_{s0}(\omega)\cdot H_{0r}(\mathrm{j}\omega) \xrightarrow{\mathrm{FT}^{-1}} f(t)$$

为复原信号 $f(t)$，使用有补偿性质的低通滤波器。

其频响特性为：

$$H_{0r}(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T_s}{2}}}{\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega T_s}{2}\right)} & |\omega|\le\dfrac{\omega_s}{2}\\[2ex] 0 & |\omega|\ge\dfrac{\omega_s}{2}\end{cases}$$



一般仅要求：$|H_{0r}(\mathrm{j}\omega)|$ 曲线大致接近补偿；$\varphi(\omega)$ 线性相移特性。

应用：多用于数字通信系统中产生和传输信号

5.9 频分复用（FDM）与时分复用（TDM）

5.9.1 多路复用

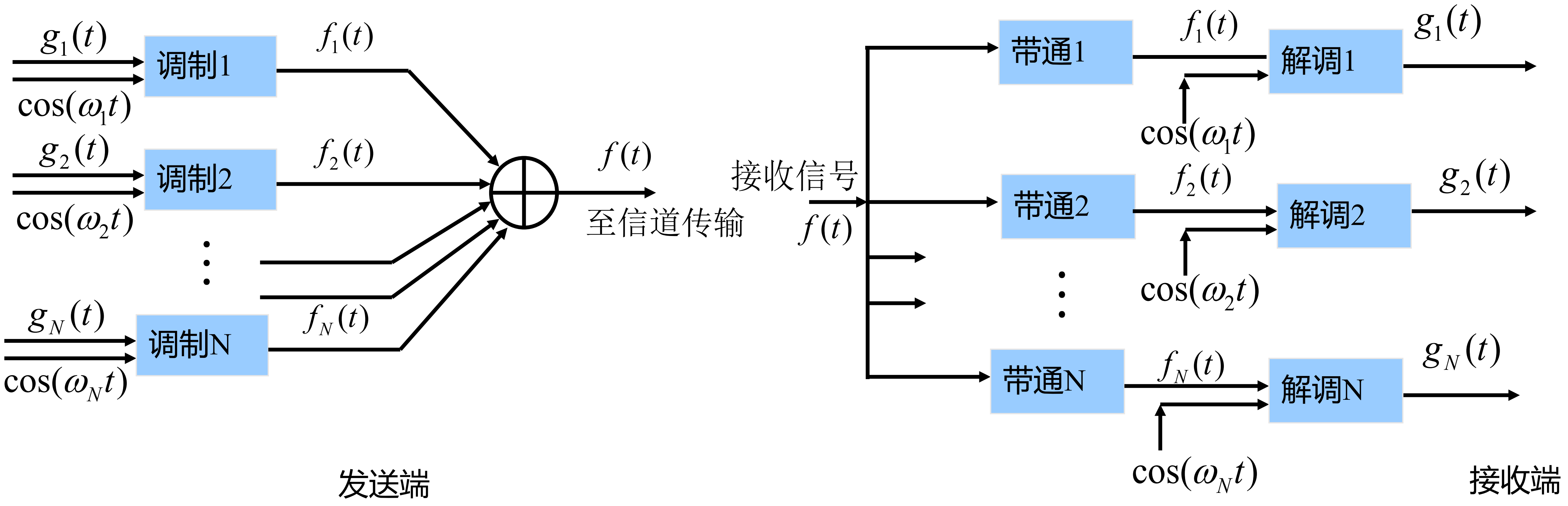
将若干路信号以某种方式汇合，统一在同一信道中传输称为多路复用。

5.9.2 频分复用（FDM）原理

（1）在发送端将各路信号频谱搬移到各不相同的频率范围，使它们在频谱上互不重叠，这样就可复用同一信道传输。

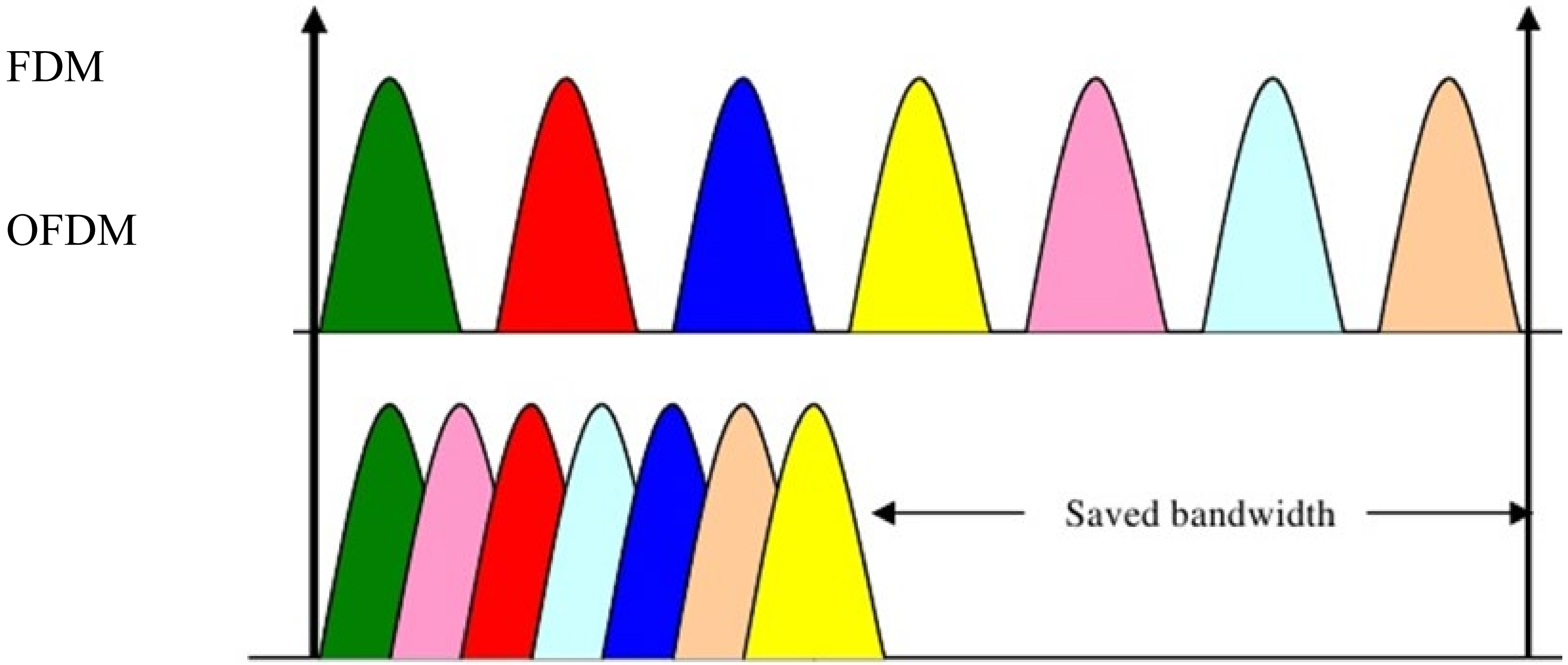
（2）在接收端利用若干滤波器将各路信号分离，再经解调即可还原为各路原始信号。

频分复用（FDM）通信系统框图:



5.9.3 正交频分复用（OFDM）

- 正交频分复用使用部分相互重叠的正交子载波。
- 正交频分复用比频分复用频谱效率更高, 用于5G， WiFi 等系统。



5.9.4 时分复用(TDM)的原理

时分复用的理论依据：抽样定理。

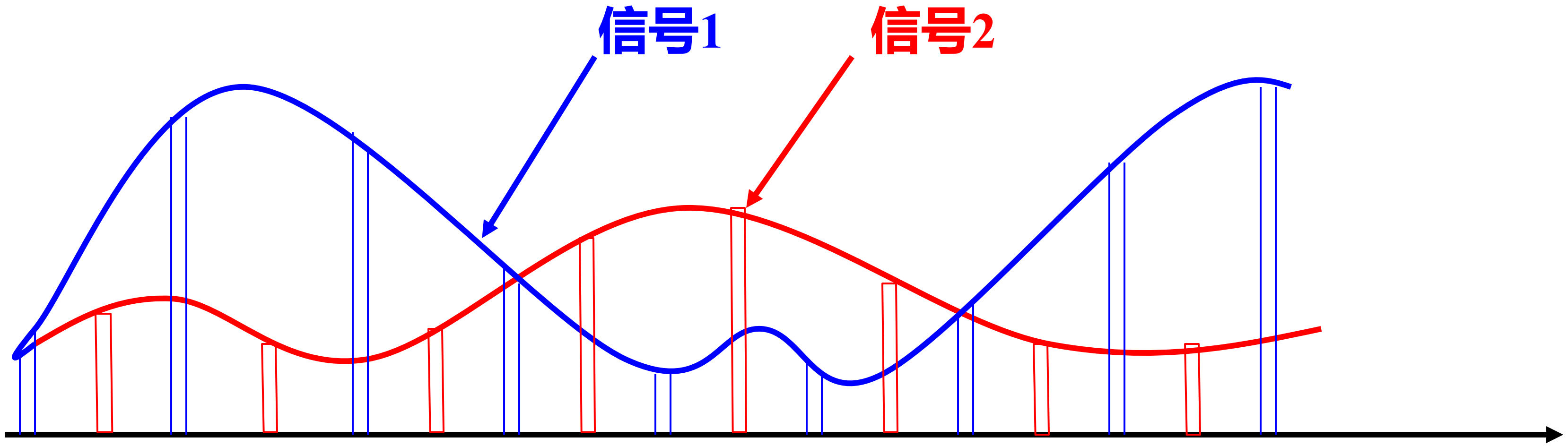
$-f_m \sim +f_m$ 的信号，可由间隔为 $1/(2f_m)$ 的抽样值唯一确定。从这些瞬时抽样值可以正确恢复原始的连续信号。

信道仅在抽样瞬间被占用，其余的空闲时间可供传送第二路、第三路……等各路抽样信号使用。

将各路信号的抽样值有序的排列就可实现时分复用。

在接收端，这些抽样值由适当的同步检测器分离。

两路信号的时分复用：



例5-13： 已知具有零相移的理想低通滤波器为 $H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\dfrac{\omega_c}{2}\\ 0 & |\omega|>\dfrac{\omega_c}{2}\end{cases}$，滤波器的输入信号 $e(t)=\dfrac{\sin(\omega_c t/2)}{\pi t}$。试分别求 $H_1(\omega)=H(\omega/2)$，$H_2(\omega)=H(\omega)$，$H_3(\omega)=H(2\omega)$ 的冲激响应 $h_1(t)$、$h_2(t)$、$h_3(t)$，以及 $e(t)$ 通过 $H_1(\omega)$、 $H_2(\omega)$、 $H_3(\omega)$ 的输出信号 $r_1(t)$、$r_2(t)$、$r_3(t)$。

解： (1) 由于 $H(\omega)$ 和 $h(t)$ 是一对傅里叶变换，根据方波与抽样函数对偶性，有

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c/2}^{+\omega_c/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{\omega_c}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$$

根据尺度特性， $H_1(\omega)=H\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$ 对应 $\rightarrow$ $h_1(t)=2h(2t)=\dfrac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)$

$H_2(\omega)=H(\omega)$ 对应 $\rightarrow$ $h_2(t)=h(t)=\dfrac{\omega_c}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega_c t}{2}\right)$

$H_3(\omega)=H(2\omega)$ 对应 $\rightarrow$ $h_3(t)=\dfrac{1}{2}h\left(\dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{\omega_c}{4\pi}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega_c t}{4}\right)$

(2) 由于 $R(\omega)=H(\omega)E(\omega)$

根据对偶性：$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 对应 → $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

$$E(\omega)=\mathscr{F}[e(t)]=\mathscr{F}\left[\frac{\sin\left(\omega_c t/2\right)}{\pi t}\right]=\mathscr{F}\left[\frac{\omega_c}{2\pi}\frac{\sin\left(\omega_c t/2\right)}{\frac{\omega_c t}{2}}\right]=\mathscr{F}\left[\frac{\omega_c}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)\right]=\begin{cases}1 & |\omega|\le\frac{\omega_c}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{\omega_c}{2}\end{cases}$$

重点：还是比较两个矩形的宽度

$R_1(\omega)=H_1(\omega)E(\omega)=E(\omega)$ 对应 → $r_1(t)=e(t)=\dfrac{\sin\left(\omega_c t/2\right)}{\pi t}$

$R_2(\omega)=H_2(\omega)E(\omega)=H_2(\omega)=H(\omega)$ 对应 → $r_2(t)=h_2(t)=\dfrac{\omega_c}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega_c t}{2}\right)$

$R_3(\omega)=H_3(\omega)E(\omega)=H_3(\omega)$ 对应 → $r_3(t)=h_3(t)=\dfrac{\omega_c}{4\pi}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega_c t}{4}\right)$

例5-14： 已知周期信号 $e(t)$ 如图所示，如果该信号经过理想低通滤波器 $H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\pi\\ 0 & |\omega|>\pi\end{cases}$，求滤波后的响应 $r(t)$。

解： 根据 $R(\omega)=H(\omega)E(\omega)$

激励周期信号 $e(t)$ 的频谱：$E(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$ $\leftarrow$ $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

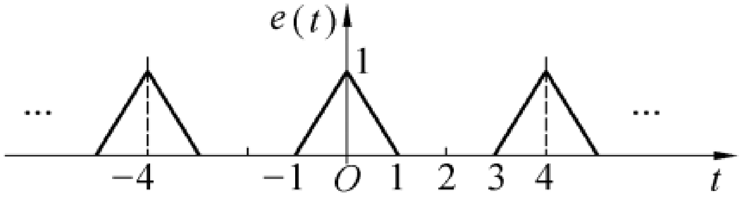
傅里叶级数系数 $F_n=\dfrac{1}{4}\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$ ←两个方波卷积

则 $E(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{4}\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)\delta\left(\omega-n\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)\delta\left(\omega-\dfrac{\pi n}{2}\right)$

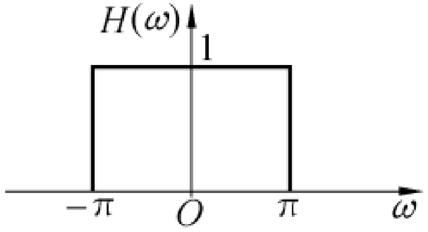
重点：那些谐波在滤波器内？

$$R(\omega)=\frac{2}{\pi}\delta(\omega+\pi)+\frac{4}{\pi}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\delta(\omega)+\frac{4}{\pi}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{\pi}\delta(\omega-\pi)$$

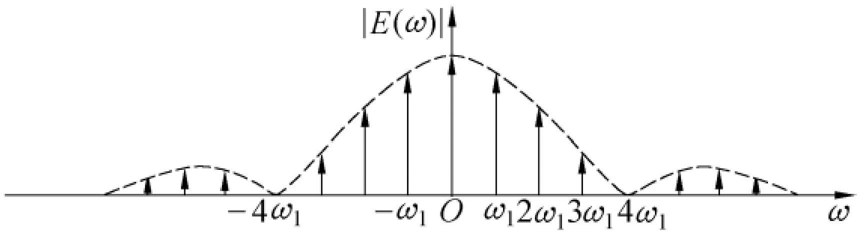
对应时域信号 → $r(t)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{\pi^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)+\dfrac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)$



(a) 周期信号

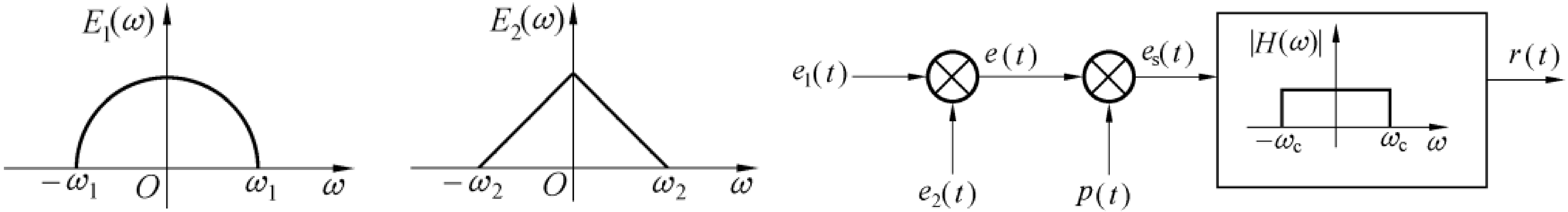


(b) 理想低通滤波器



(c) 周期信号的频谱

例5-15：已知 $e_1(t)$、$e_2(t)$ 的频谱，求最大抽样间隔 $T_{\max}$ 、$H(\omega)$ 截止频率 ω_c 。



解： (1)时域乘积 $e(t)=e_1(t)\cdot e_2(t)$

频域卷积 $E(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}E_1(\omega)*E_2(\omega)$ 频谱范围 → $-(\omega_1+\omega_2)<\omega<+(\omega_1+\omega_2)$

(2) 抽样信号频谱不混叠 ← 最大抽样时间间隔 $T_{\max}$

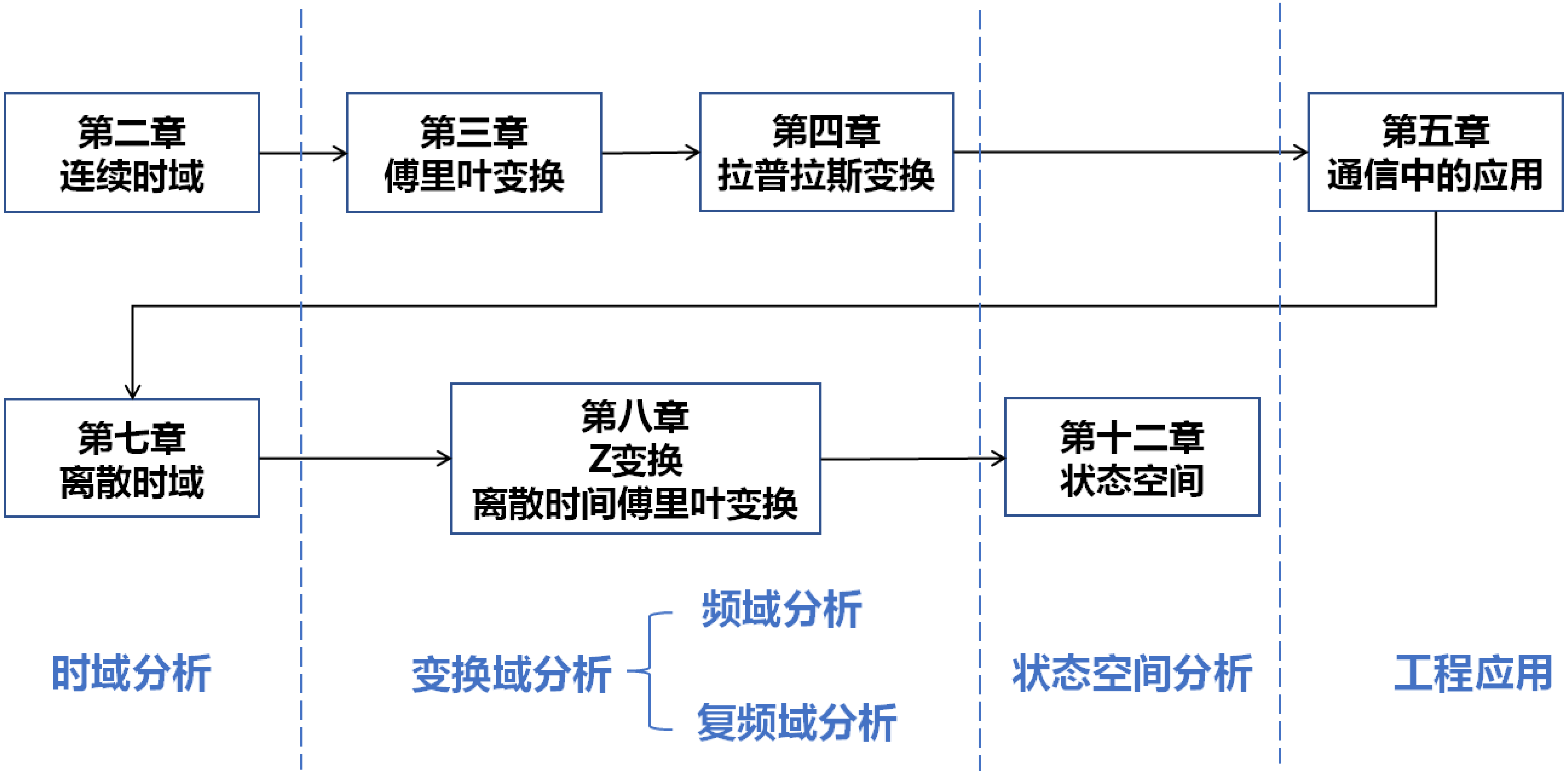
采样定理 $f_s\geq 2f_m$ →时间间隔 $T_s=\dfrac{1}{f_s}=\dfrac{2\pi}{\omega_s}$ → 取等号 $T_{\max}=\dfrac{2\pi}{2\omega_m}=\dfrac{\pi}{\omega_m}=\dfrac{\pi}{\omega_1+\omega_2}$

(3) 抽样信号频谱周期重复 ← 滤波器截止频率 ω_c $(\omega_1+\omega_2)<\omega_c<\omega_s-(\omega_1+\omega_2)$

两个带限信号运算后的频谱范围，决定了最高角频率，决定了抽样频率

信号表达式	频谱	最高角频率 ω_m	奈奎斯特角频率 $\omega_s=2\omega_m$
$f_1(\alpha t);\alpha\neq 0$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}F_1(j\frac{\omega}{\alpha})$	$\lvert\alpha\rvert\omega_{m1}$	$2\lvert\alpha\rvert\omega_{m1}$
$f_1(t)+f_2(t)$	$F_1(j\omega)+F_2(j\omega)$	$\max\{\omega_{m1},\omega_{m2}\}$	$2\max\{\omega_{m1},\omega_{m2}\}$
$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$	$\min\{\omega_{m1},\omega_{m2}\}$	$2\min\{\omega_{m1},\omega_{m2}\}$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$	$\omega_{m1}+\omega_{m2}$	$2(\omega_{m1}+\omega_{m2})$
$f_1^2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_1(j\omega)$	$2\omega_{m1}$	$4\omega_{m1}$

1.8 线性时不变系统的分析方法



第七章 离散时间系统的时域分析

7.1 引言

连续时间信号：

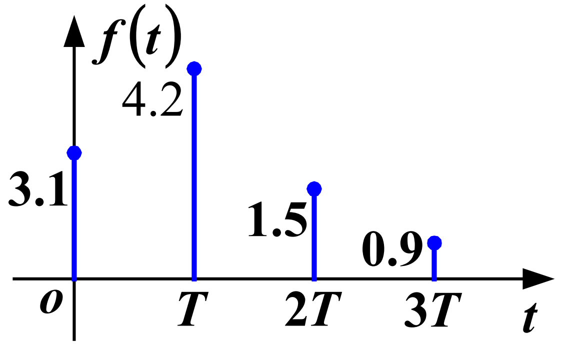
$f(t)$ 是连续变化的 t 的函数，除若干不连续点之外，对于任意时间值都可以给出确定的函数值 。函数的波形都是具有平滑曲线的形状，一般也称模拟信号 。

连续时间系统：

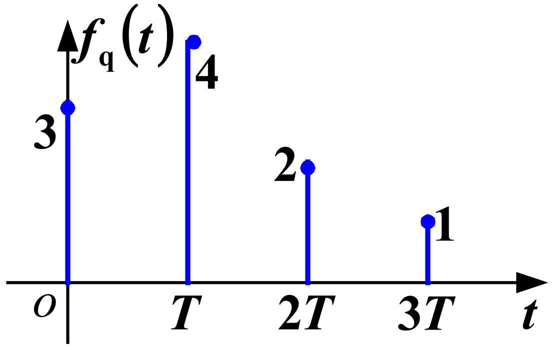
系统的输入、输出都是连续时间信号。如物理学、近代电路理论、模拟通信系统等 。

离散时间信号：时间变量是离散的，函数只在某些规定的时刻有确定的值，在其他时间没有定义。

离散信号可以由**模拟信号采样**而得，也可以由实际系统生成。



采样过程——得到离散时间信号。



幅值量化——幅值只能分级变化。

数字信号：离散信号在各离散点的幅值被量化的信号。

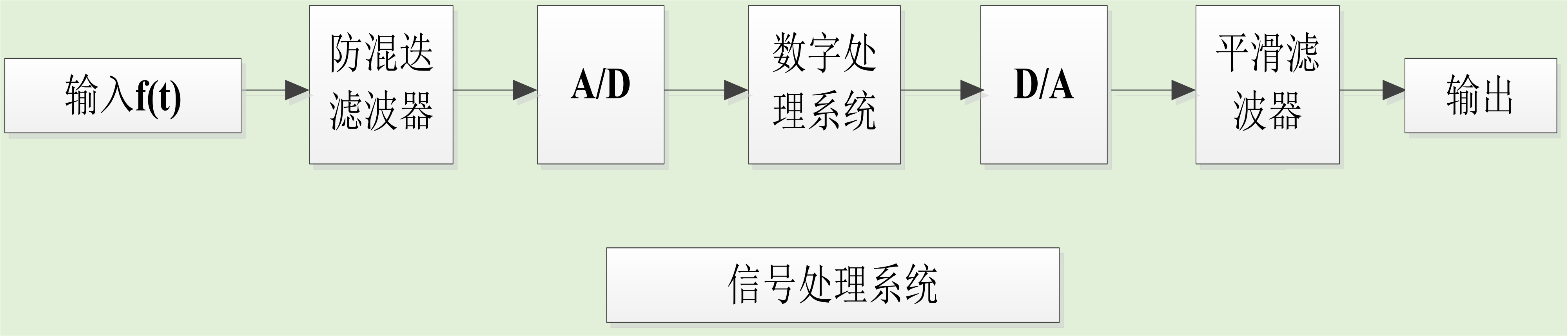
离散时间系统：系统的输入、输出都是离散的时间信号。如计算机、数值分析、统计学、经济学等。

离散时间系统的优点：
1、便于实现大规模集成，体积小、重量轻、低功耗；
2、可靠性高、精度高（取决于二进制数的位数）；
3、利用存储器存储信息，功能灵活；
4、易消除噪声，易处理低频信号；
5、处理多维信号；
6、可编程技术提高灵活性和通用性 。

不能认为数字技术将取代一切连续时间系统的应用

- 人类在自然界中遇到的待处理信号大多的是连续时间信号，需经A/D（模/数）、D/A（数/模）转换 。
- 当频率较高时，直接采用数字集成器件尚有一些困难，有时，用连续时间系统处理或许比较简便 。

混合系统：连续时间系统与离散时间系统联合应用。如自控系统、数字通信系统。



最佳的协调模拟与数字部件已成为系统设计师的首要职责 。

离散系统与连续系统比较

连续系统

- 微分方程
- 卷积积分
- 拉氏变换
- 连续傅里叶变换
- 系统函数 $H(s)$
- 卷积定理

离散系统

- 差分方程
- 卷积和
- Z 变换
- DTFT、DFT
- 系统函数 $H(z)$
- 卷积定理

7.2 离散时间信号——序列

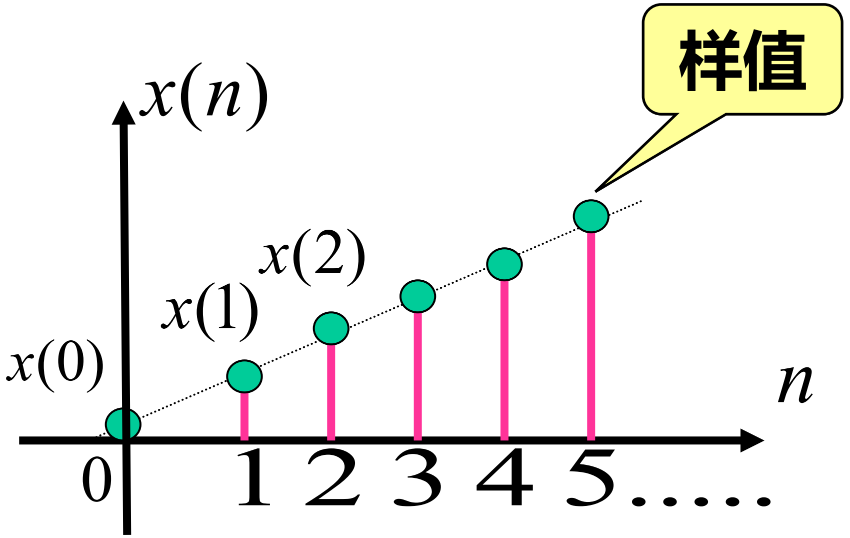
离散时间信号（序列）：在时间上是离散的，只在某些不连续的规定时刻给出函数值，在其他时间没有定义。

离散时刻的间隔是均匀的，设为 T

离散时间信号表示 $\{x(nT)\}$ 或 $\{x(n)\}$，$n \in Z, -\infty < n < \infty$

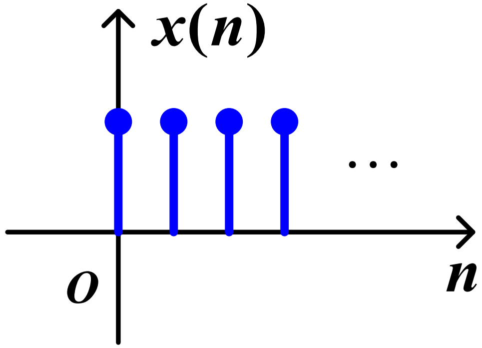
为了简便，以 $\boldsymbol{x(n)}$ 表示序列。

- 列出值，如 $x(n)=\{1,2,3,\ldots\}$
- 闭合解，如 $x(n) = a^n u(n)$
- 图解表示，如图

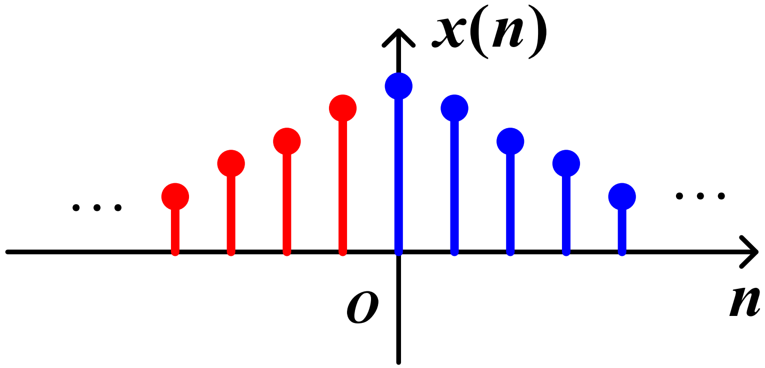


序列的三种形式：

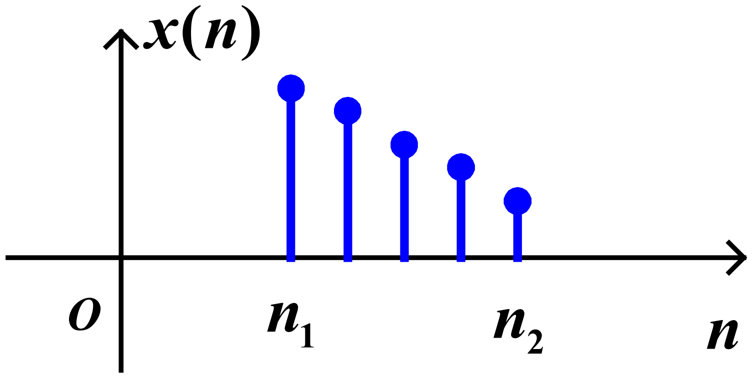
单边序列：$n \geq 0$;



双边序列：$-\infty \leq n \leq \infty$;



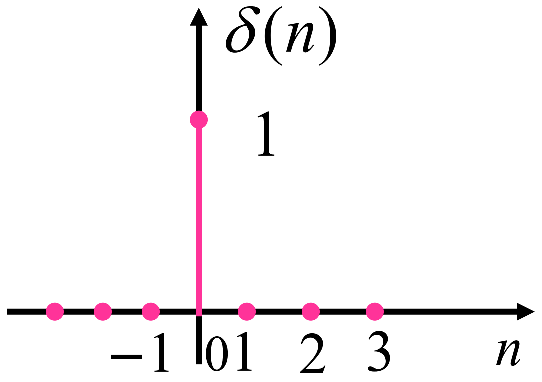
有限长序列：$n_1 \leq n \leq n_2$;



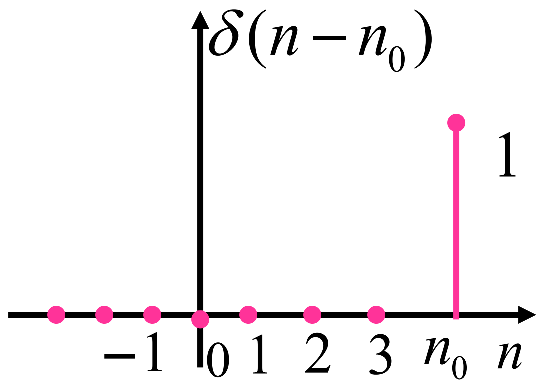
7.2.1 常用的典型序列

1、单位样值信号

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$$



$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & (n=n_0)\\ 0 & (n\neq n_0)\end{cases}$$



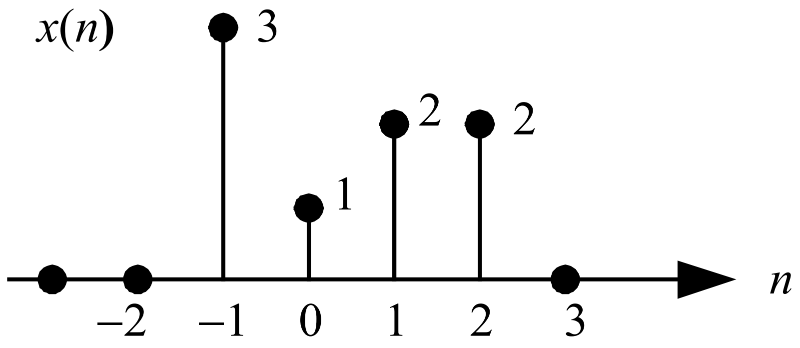
注意: $\delta(t)$ 用面积（强度）表示，（ t=0，幅度为 ∞ ）；
$\delta(n)$ 在 $n=0$ 取有限幅值为 1 （不是面积）。

利用单位样值序列表示**任意离散时间信号**——离散时间信号分解

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

其中 $x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n) & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$

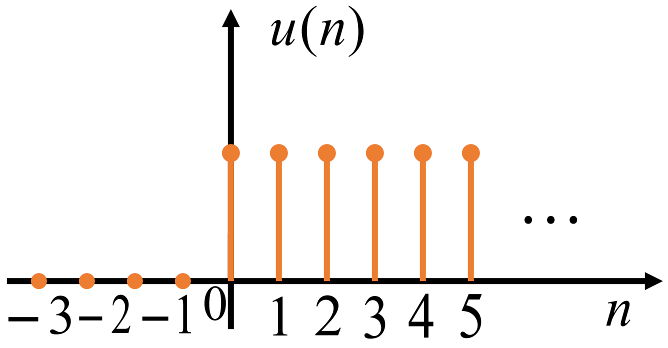
任意序列为加权、延迟的单位样值信号之和



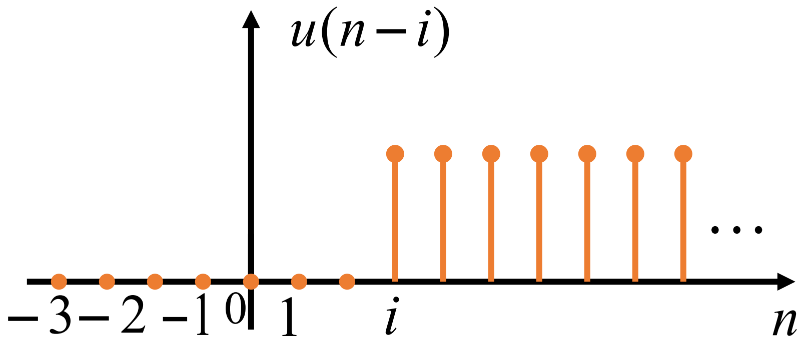
$$x(n)=3\delta(n+1)+\delta(n)+2\delta(n-1)+2\delta(n-2)$$

2、单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$



$$u(n-i)=\begin{cases}1 & (n\geq i)\\ 0 & (n<i)\end{cases}$$

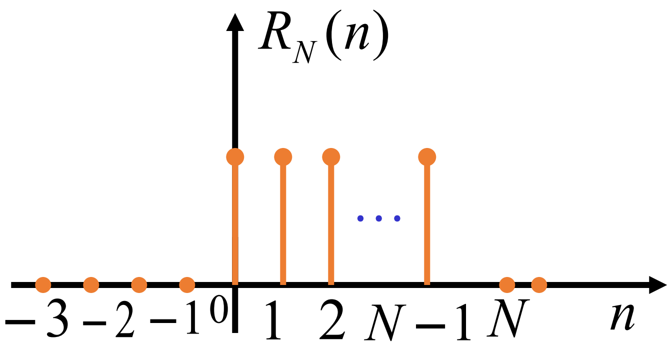


$$\begin{cases}u(n)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta(n-K)\\ \delta(n)=u(n)-u(n-1)\end{cases}$$

$\delta(n)$与$u(n)$是差和关系，不再是微积分关系

3、矩形序列

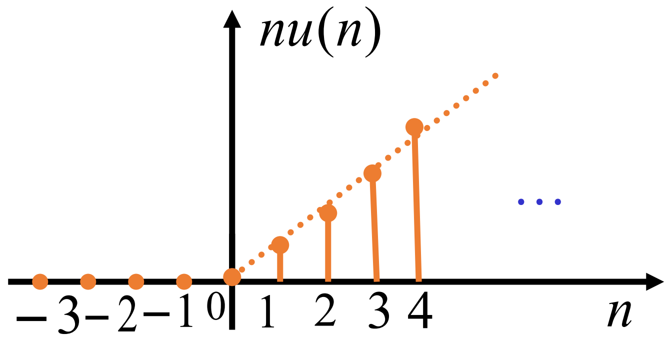
$$R_N(n)=\begin{cases}1 & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (n<0\,,n\ge N)\end{cases}$$



$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$$

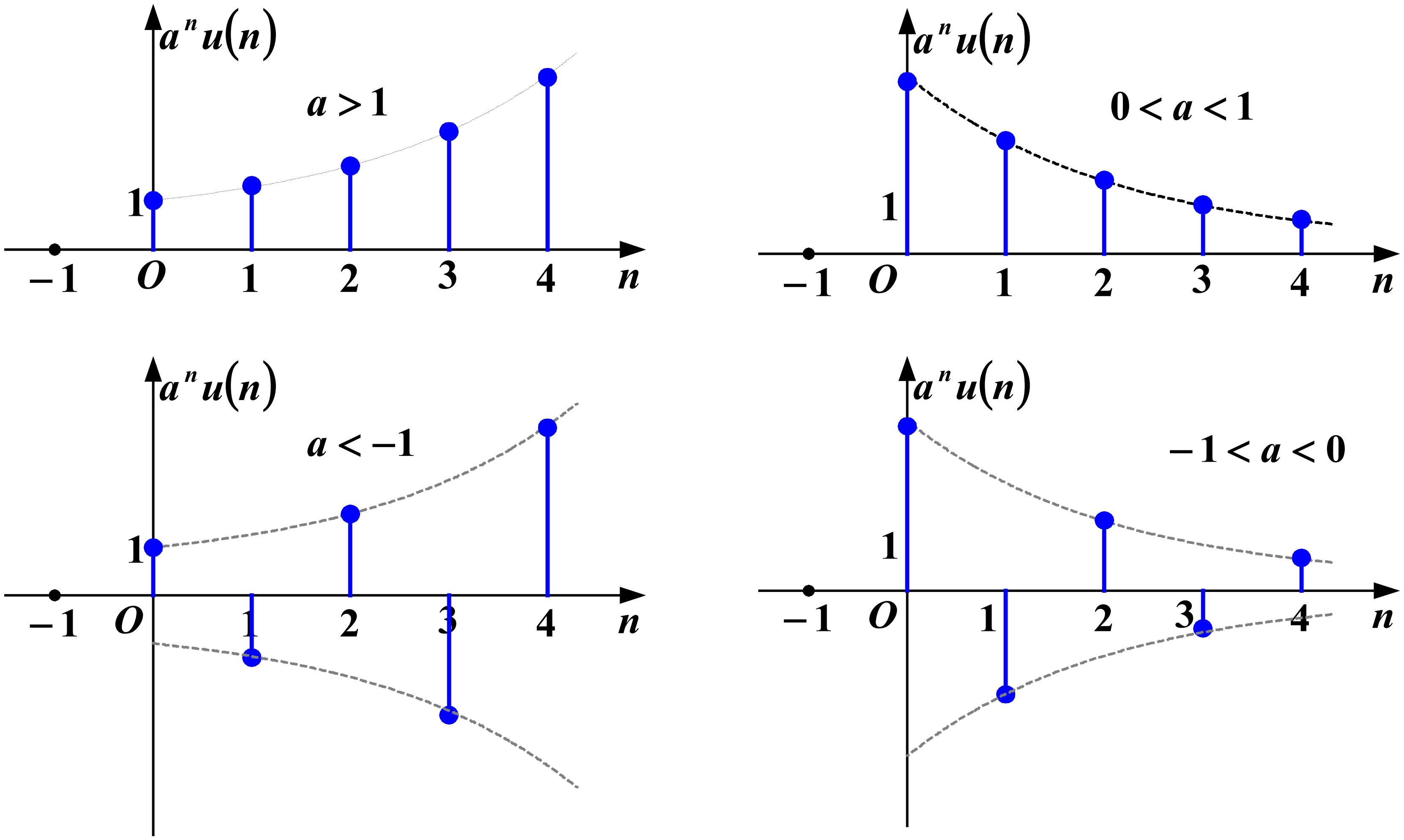
4、斜变序列

$$x(n)=nu(n)$$



5、实指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \begin{cases} \text{当} |a| > 1 \text{时序列是发散的；} \\ \text{当} |a| < 1 \text{时序列是收敛的。} \end{cases}$$

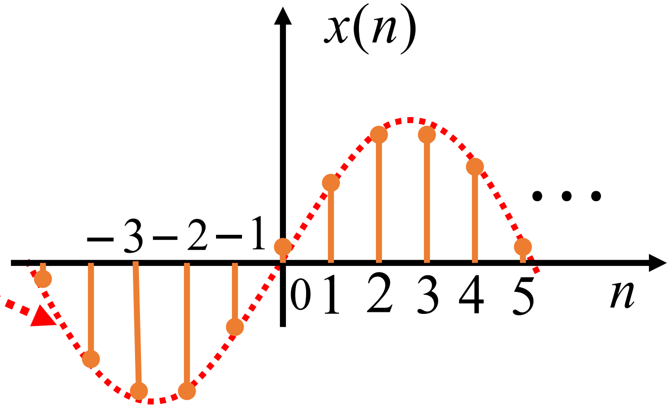


6、正弦序列

$$f(t)=\sin\Omega_0 t$$

$$x(n)=f(nT)$$

$$=\sin(\Omega_0 nT)=\sin(n\omega_0)$$



其中ω_0是正弦序列的频率，反映序列值依次周期性重复的速率。

$\omega_0=2\pi/10,\quad 2\pi/100$

$$\omega_0=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f_s}$$

ω_0 是 Ω_0 对于 f_s 取归一化值

例如：$x(n)=\cos n\omega_0$

若$x(n)=x(n+N)$，N为周期

当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为整数时 $N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$；

当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数时 $N>\dfrac{2\pi}{\omega_0}$；

当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$不为有理数时 非周期性。

正弦序列周期性的判别：

① $\frac{2\pi}{\omega_0}=N$，N 是正整数　　$\sin\left[\omega_0\left(n+N\right)\right]=\sin\left[\omega_0\left(n+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin\left(\omega_0 n+2\pi\right)=\sin\left(\omega_0 n\right)$

正弦序列是周期的。

② $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{m}, \frac{N}{m}$ 为有理数　　$\sin\left[\omega_0\left(n+N\right)\right]=\sin\left[\omega_0\left(n+m\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin\left(\omega_0 n+m\cdot 2\pi\right)=\sin\left(\omega_0 n\right)$

$\sin\left(\omega_0 n\right)$ 仍为周期的。　　周期：$N=m\frac{2\pi}{\omega_0}$

③ $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数

找不到满足 $x\left(n+N\right)=x\left(n\right)$ 的 N 值，为非周期的序列。

单选题 1分

设置

例7-1. 序列 $\sin\frac{4\pi}{11}n$ 是否为周期信号？若是，其周期为（ ）。

A 是，11/4

B 是，11/2

C 是，11

D 否

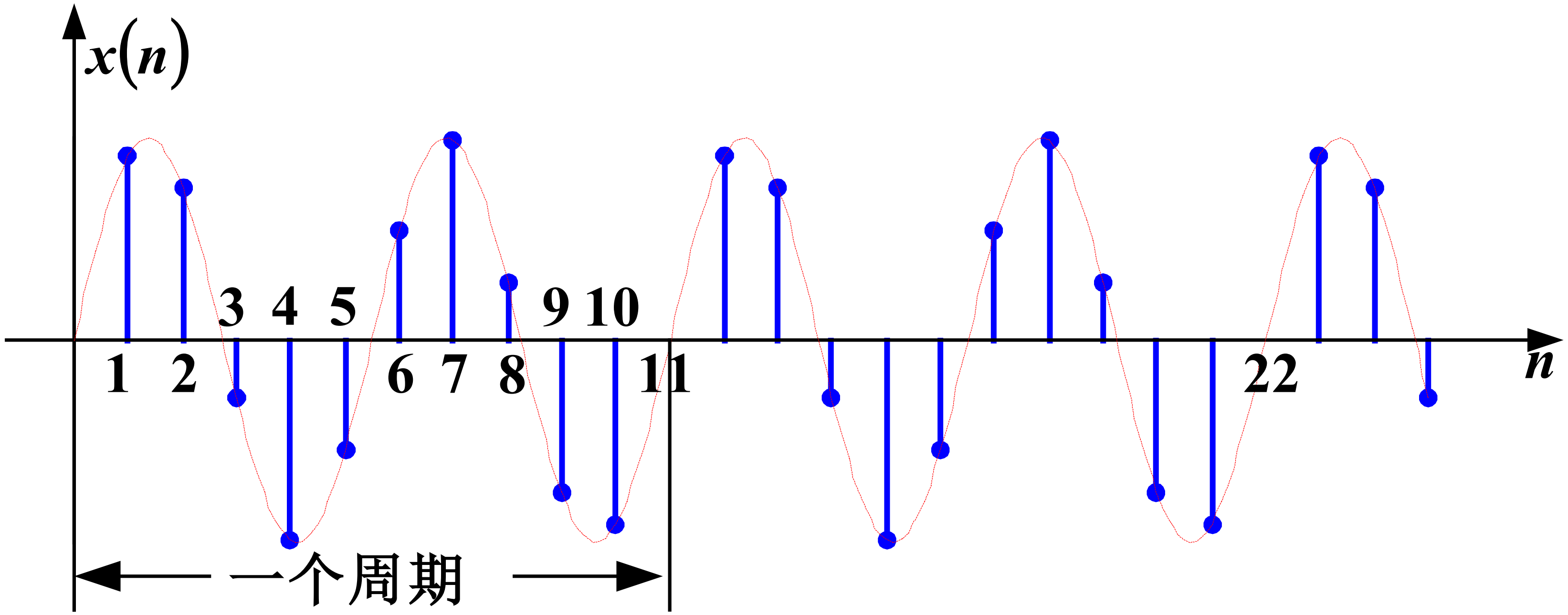
提交

例7-1：已知 $\sin\frac{4\pi}{11}n$，求其周期。

解：

$$\omega_0=\frac{4\pi}{11}\text{，则有：}\quad \frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\frac{11}{4\pi}=\frac{11}{2}=\frac{N}{m}$$

所以 $N=11$，即周期为11。（2π 中有 5.5 个ω_0）



单选题 1分

设置

例7-2. 信号 $x(n)=\sin(0.4n)$ 是否为周期信号？若是，其周期为（ ）。

A 是，

B 是，0.4

C 否

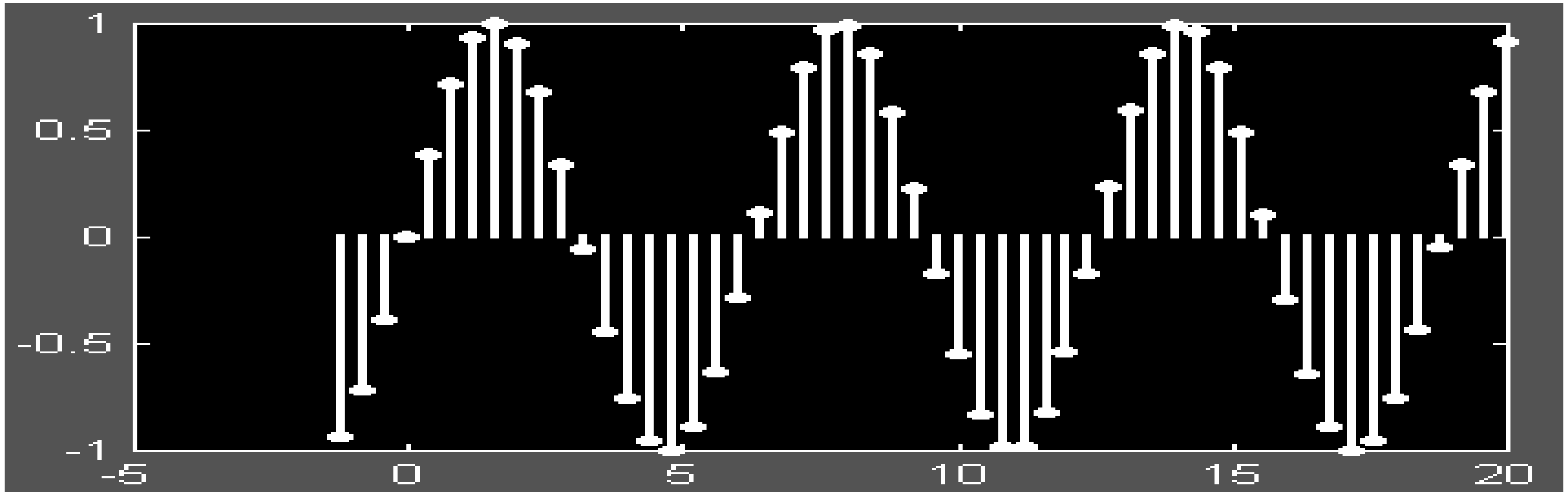
D 是，5

提交

例7-2：信号 $x(n)=\sin(0.4n)$ 是否为周期信号？

解：

$\omega_0 = 0.4$，$\dfrac{2\pi}{\omega_0} = 5\pi$ 是无理数，所以为非周期的序列。



7、复指数序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 n)$$

复序列可用极坐标表示： $x(n)=\left|x(n)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[x(n)]}$

$\left|x(n)\right|=1$ $\quad\arg[x(n)]=\omega_0 n$

一般复指数序列 $x(n)=A\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)n}=A\mathrm{e}^{\sigma n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$

$\left|x(n)\right|=A\mathrm{e}^{\sigma n}$ $\quad\arg\left[x(n)\right]=\omega_0 n$

$$x(n)=A\mathrm{e}^{\sigma n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=A\mathrm{e}^{\sigma n}\cos(\omega_0 n)+\mathrm{j}A\mathrm{e}^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

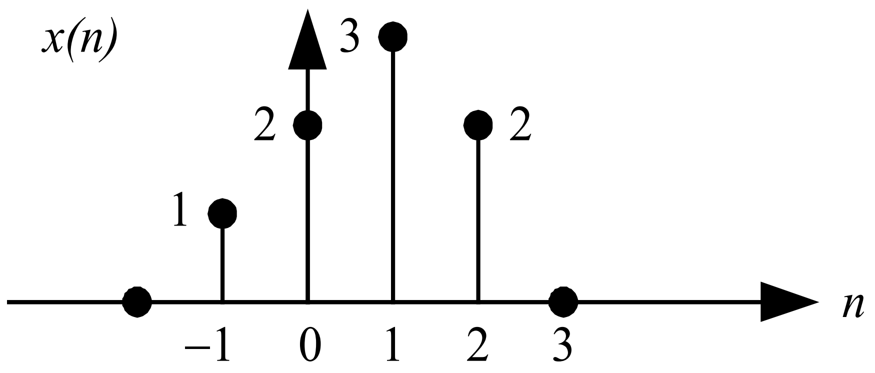
7.2.2 离散时间信号的运算

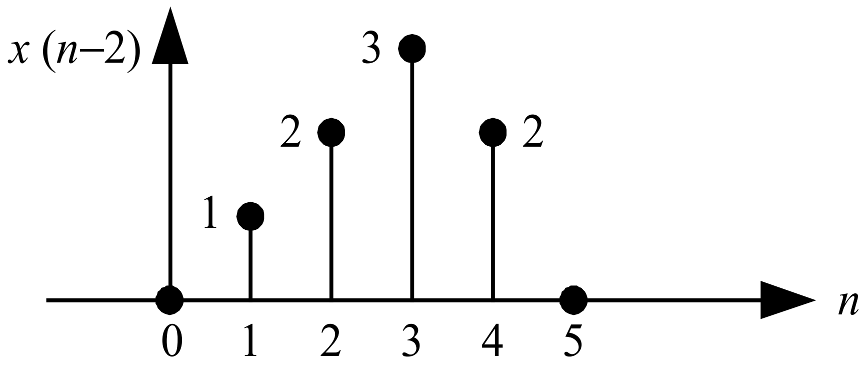
1、序列的平移

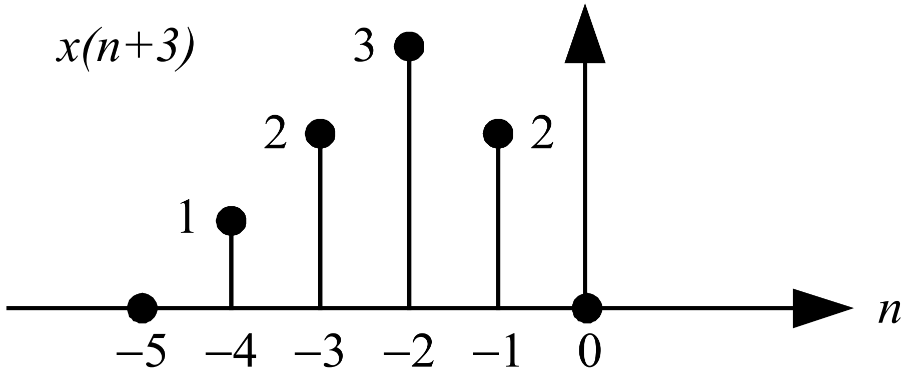
$x(n-m)$ 表示将 $x(n)$ 右移 m 个单位。

$x(n+m)$ 表示将 $x(n)$ 左移 m 个单位。

$m > 0$

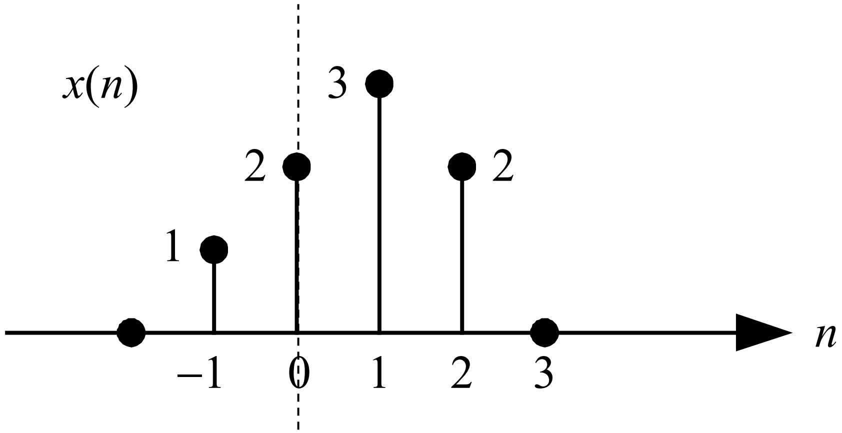


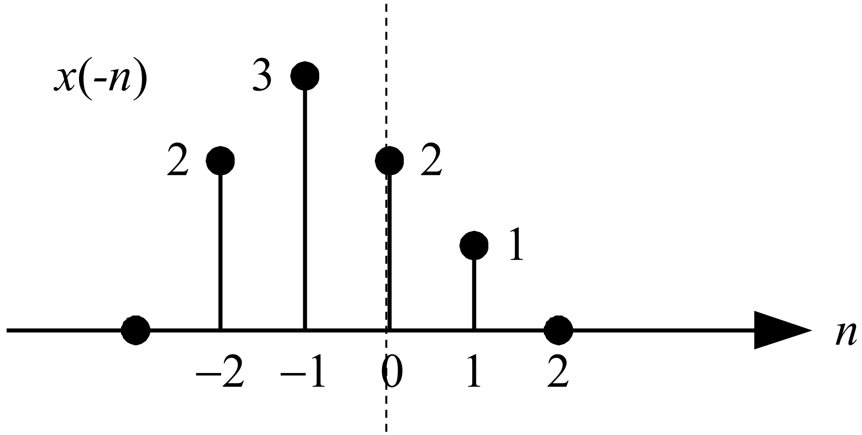




2、序列的反褶

$$x(n) \to x(-n)$$





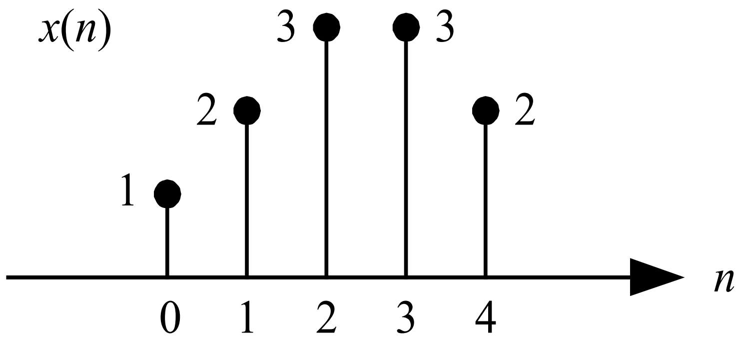
3、序列的尺度变换

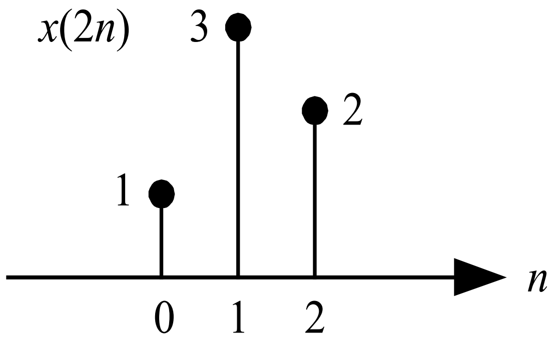
a 为正整数

$$x(n) \rightarrow x(an)$$ 压缩：原点左右每隔 a-1 点抽取一点

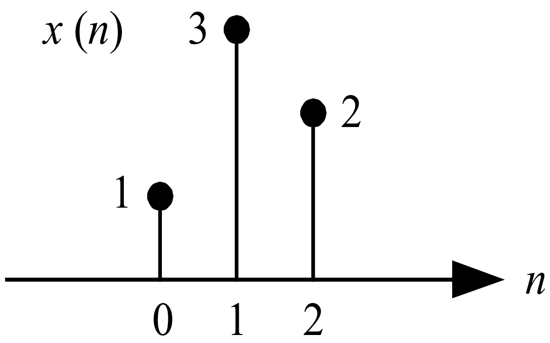
$$x(n) \rightarrow x\left(\frac{n}{a}\right)$$ 扩展：相邻两点之间插入 a-1 个零值点

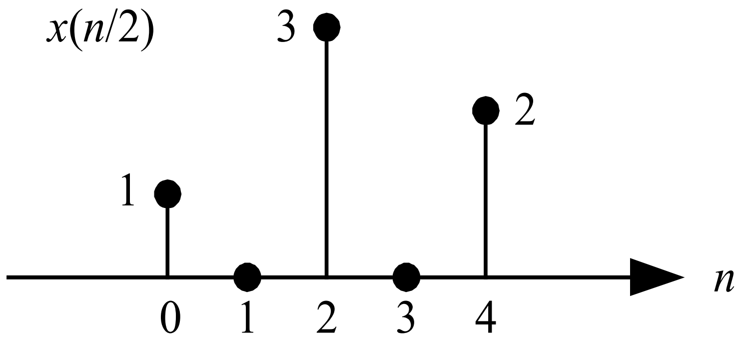
压缩：



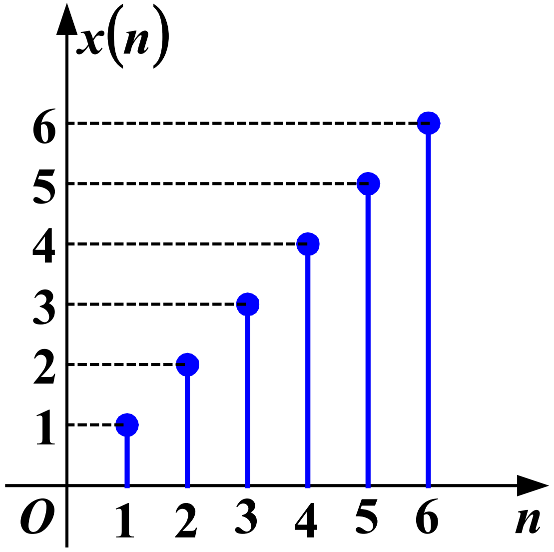


扩展：

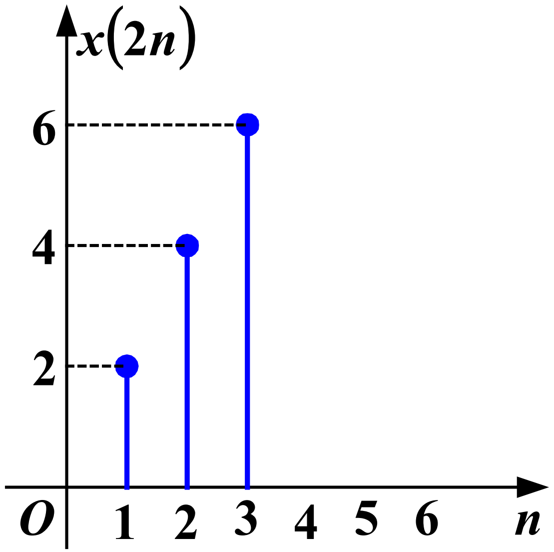


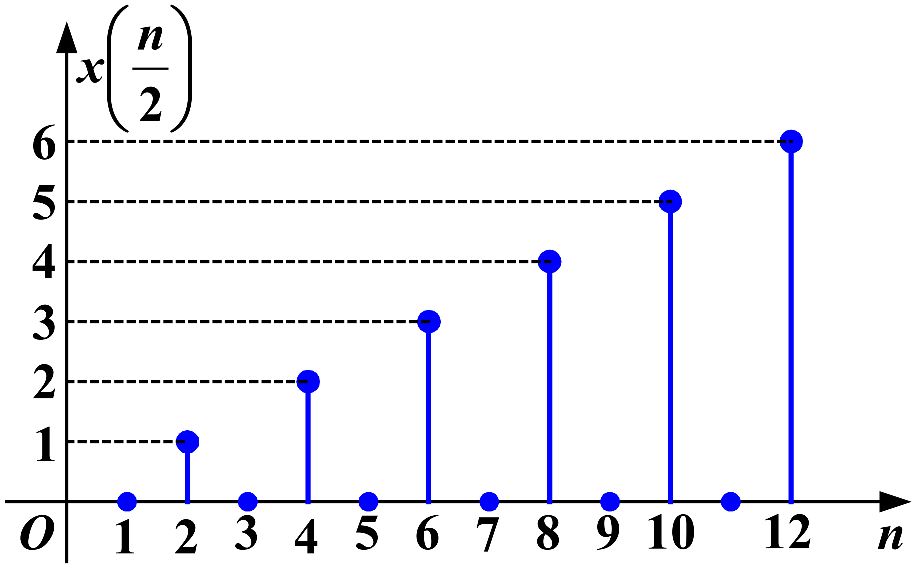


例7-3： 已知 $x(n)$ 波形，请画出 $x(2n)$ 和 $x(n/2)$ 波形。



解：

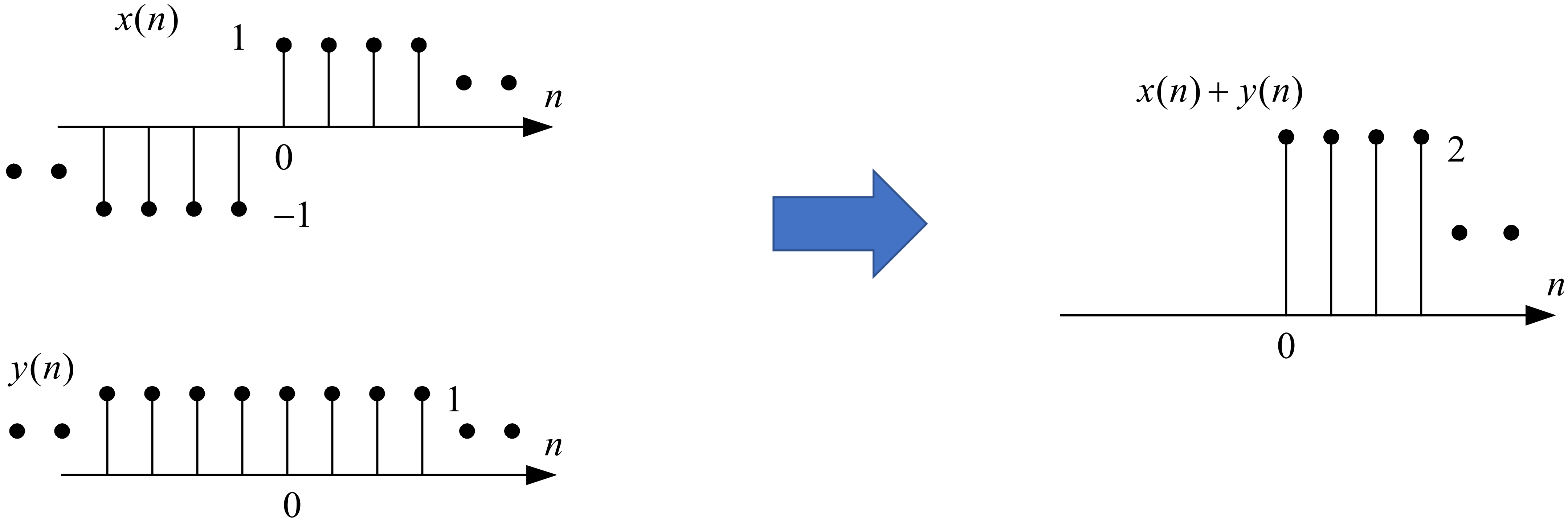




4、序列的相加

$$z(n)=x(n)+y(n)$$

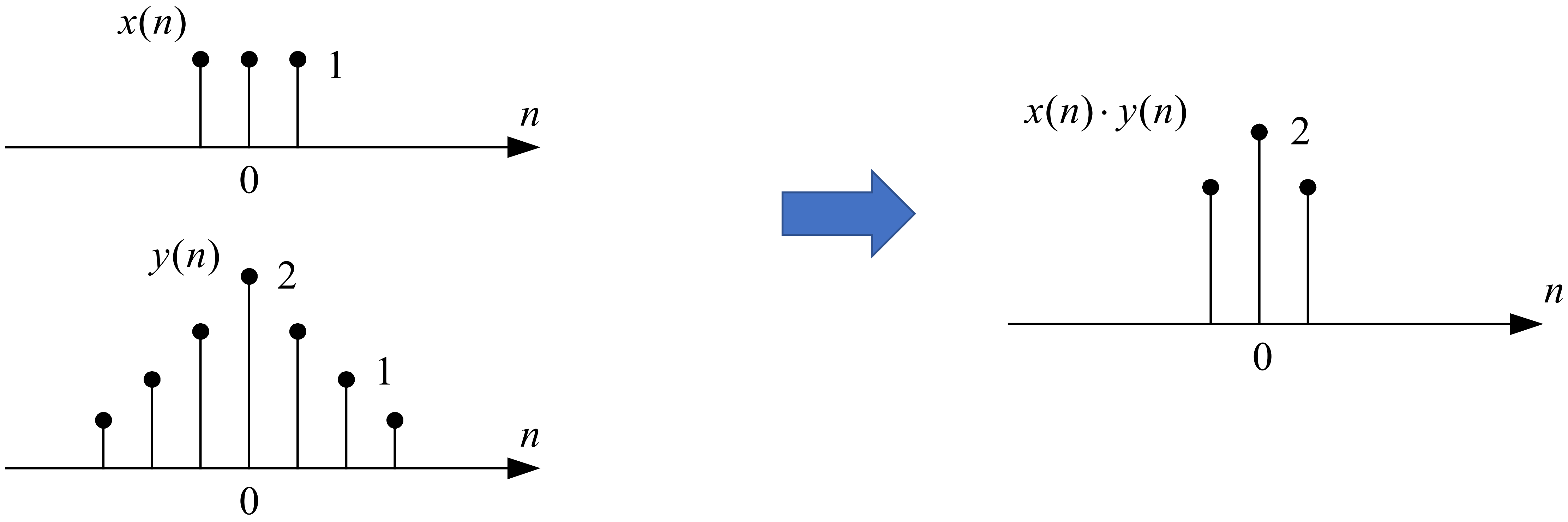
逐项对应相加



5、序列的相乘

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$

逐项对应相乘



6、序列的差分

一阶后向差分 $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

二阶后向差分
$$\begin{aligned}\nabla^2 x(n) &= \nabla\{\nabla x(n)\} = \nabla\{x(n) - x(n-1)\}\\ &= [x(n) - x(n-1)] - [x(n-1) - x(n-2)]\\ &= x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)\end{aligned}$$

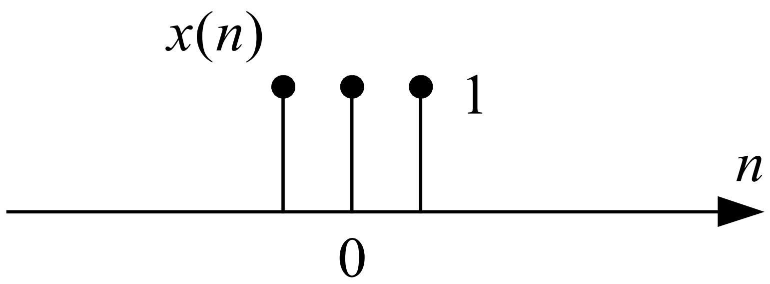
一阶前向差分 $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

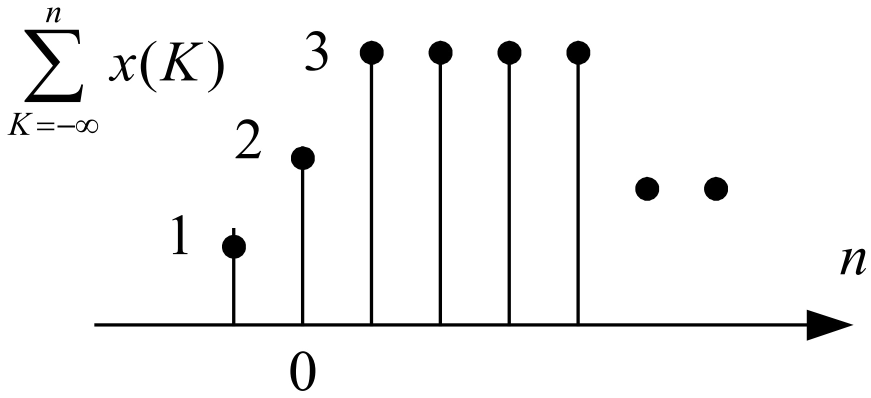
二阶前向差分 $\Delta^2 x(n) = \Delta\{\Delta x(n)\} = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$

单位脉冲序列可用单位阶跃序列的差分表示 $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

7、序列的累加

$$z(n)=\sum_{K=-\infty}^{n}x(K)$$





单位阶跃序列可用单位脉冲序列的求和表示

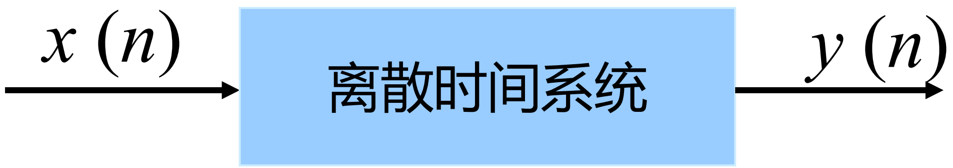
$$u(n)=\sum_{K=-\infty}^{n}\delta(K)$$

8、序列的能量

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^{2}$$

7.3 离散时间系统的数学模型

7.3.1 离散线性时不变系统

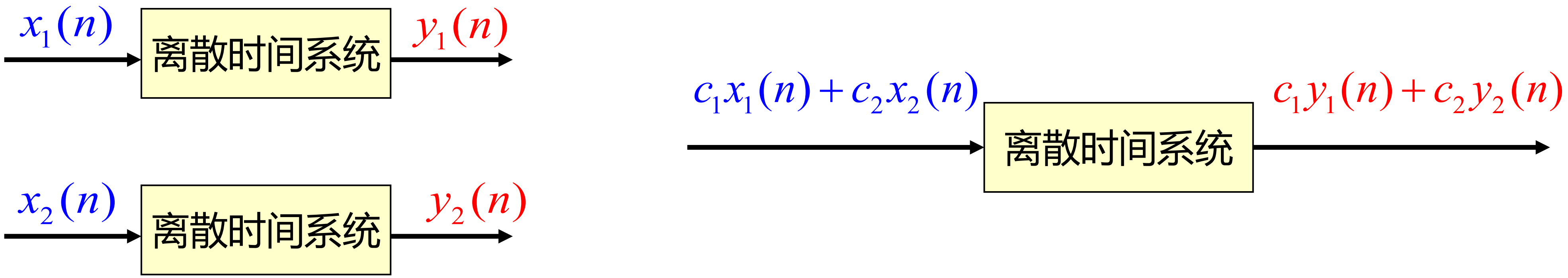


1、均匀性和叠加性

线性： 设两对激励与响应

$$x_1(n) \to y_1(n),\ x_2(n) \to y_2(n)$$

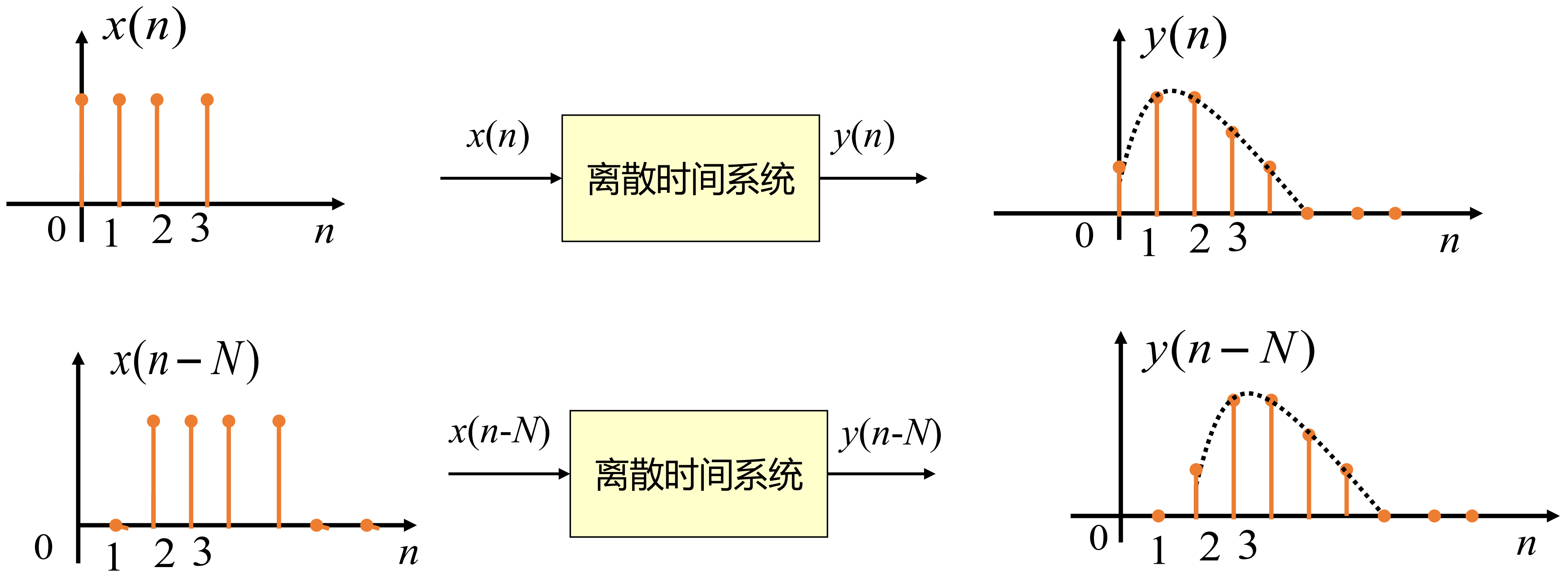
则 $c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) \to c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n)$



2、时不变性

时不变性： 设激励与响应$x(n) \to y(n)$

则$x(n-N) \to y(n-N)$



7.3.2 离散时间系统的数学模型

连续系统的数学模型——微分方程

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1}e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\ldots E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

基本运算：微分，乘系数，相加

离散系统的数学模型——差分方程

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

输入是离散序列 $x(n)$ 及其时移函数　　$x(n), x(n-1), x(n-2),\ldots.$

输出是离散序列 $y(n)$ 及其时移函数　　$y(n), y(n-1), y(n-2),\ldots.$

由实际问题直接得到差分方程

例7-4： $y(n)$表示一个国家在第 n 年的人口数，

a(常数)：出生率，

b(常数)：死亡率，

设 $x(n)$ 是国外移民的净增数，

则该国在第 $n+1$ 年的人口总数为：

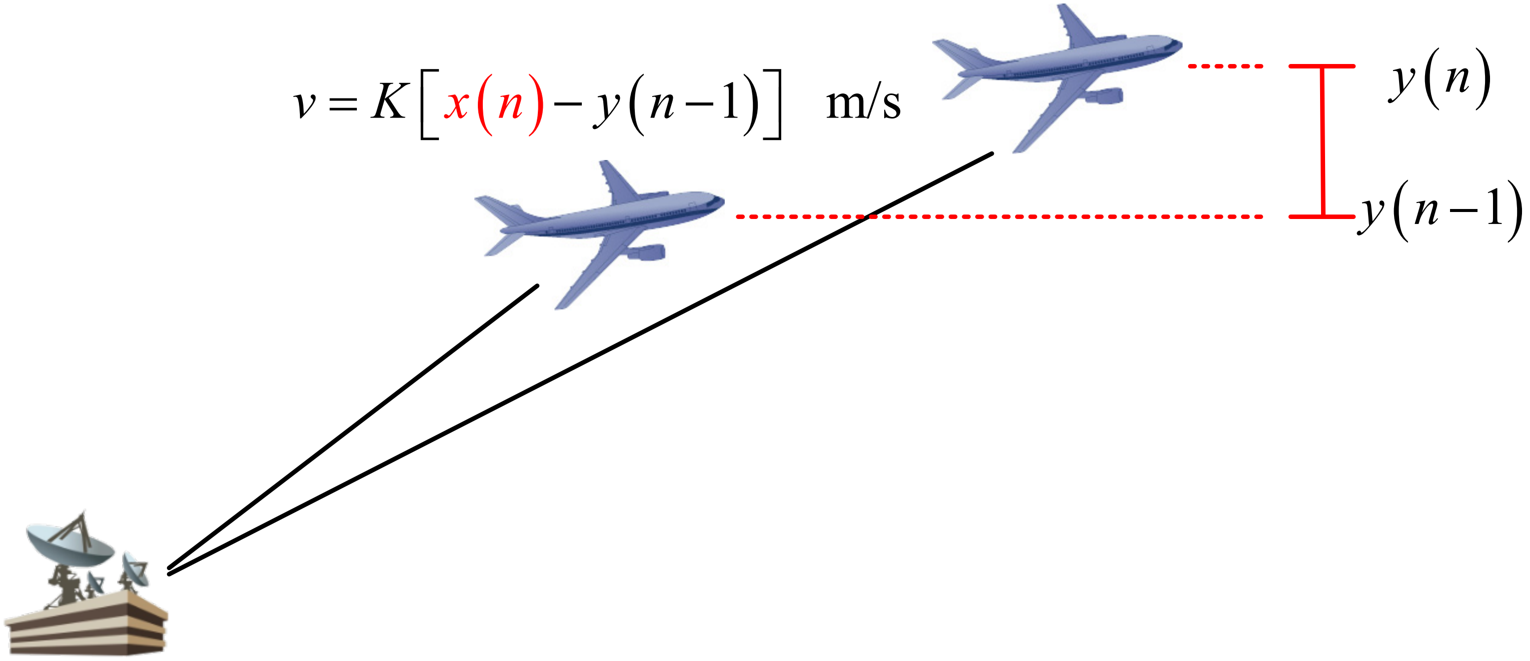
$$y(n+1)=y(n)+ay(n)-by(n)+x(n)=(a-b+1)y(n)+x(n)$$

$$y(n)=(a-b+1)y(n-1)+x(n-1)$$

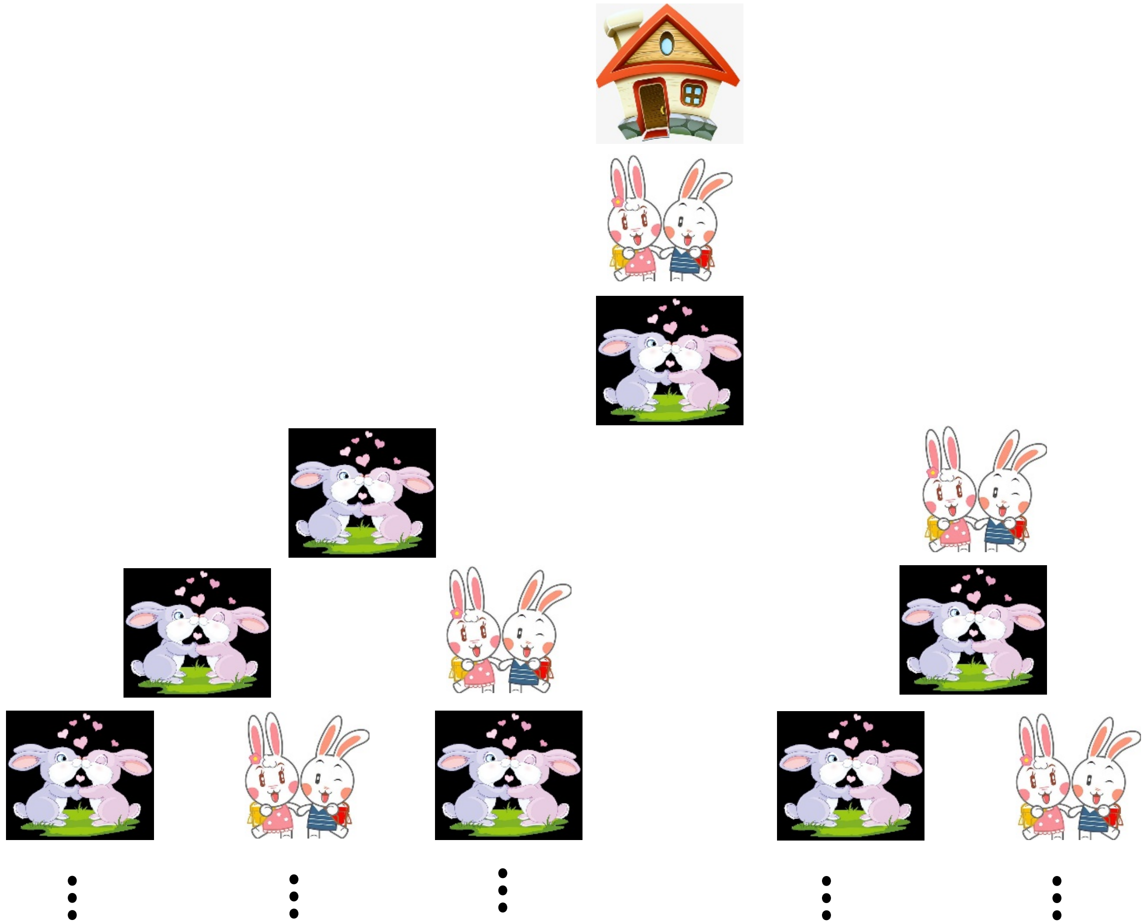
例7-5： 一个空运控制系统，用一台计算机每隔一秒钟计算一次某飞机的飞行应有的高度 $x(n)$，同时还用一部雷达对该飞机实测一次高度 $y(n)$，把应有高度 $x(n)$ 与一秒钟之前的实测高度 $y(n-1)$ 相比较得一差值，飞机的高度将根据此差值的大小及其为正或为负来控制。设飞机高度的垂直速度正比于此差值，即 $v=K\left[x(n)-y(n-1)\right]$ m/s，所以从第 $n-1$ 秒到第 n 秒之内飞机升高为

$K\left[x(n)-y(n-1)\right]=y(n)-y(n-1)$，经整理得 $y(n)+(K-1)y(n-1)=Kx(n)$

$v=K\left[x(n)-y(n-1)\right]$ m/s



例7-6：兔子生育问题——费班纳西数列。 (教材15页 例7-5)



$y(0)=0$

$y(1)=1$

$y(2)=1$

$y(3)=2$

$y(4)=3$

$y(5)=5$

$\vdots$

$$y(n)=2y(n-2)+\left[y(n-1)-y(n-2)\right] \Rightarrow y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$$

第 n 个样值 $y(n)$ 等于前两个样值 $y(n-1)$ 和 $y(n-2)$ 之和。

7.3.3 离散系统的基本运算单元

延时元件（单位延时）

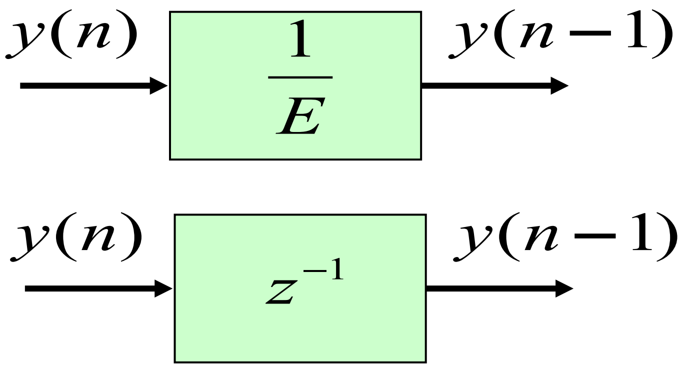
对于线性时不变系统，可以借助算子符号、传输算子等概念来表示或求解系统的数学模型。对于离散时间系统，用算子符号“E”表示将序列超前一个单位时间的运算。E 也称为时移算子，利用移序算子可写出：

$$y(n+1)=Ey(n) \qquad\qquad y(n-1)=\frac{1}{E}y(n)$$

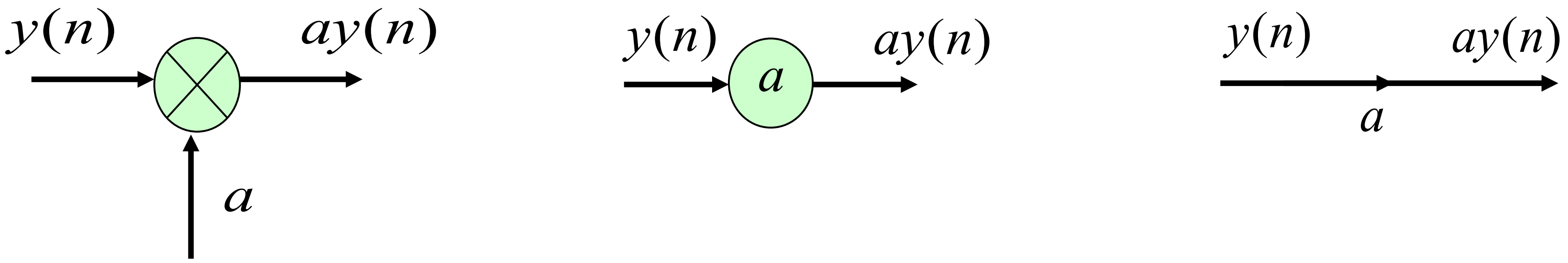
以上分析看出，算子 $\frac{1}{E}$ 表示延迟单位时间的作用，即 $y(n)$ 经 $\frac{1}{E}$ 运算给出 $y(n-1)$ 。规定以 $\frac{1}{E}$ 作为延时元件符号。

单位延时实际是一个移位寄存器，

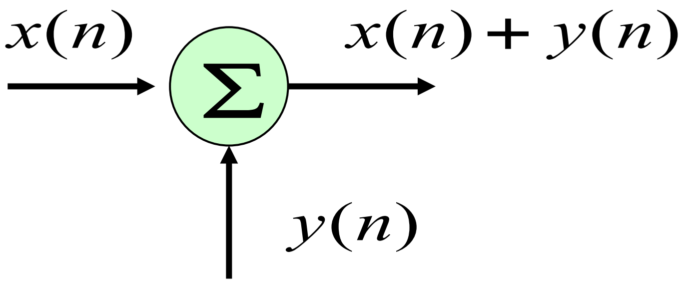
把前一个离散值顶出来，递补。



乘法器



相加器



7.3.4 由微分方程导出差分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=ay(t)+x(t)$$

$y(t)$：输出

$x(t)$：输入

时间间隔：T

后向差分 $$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\approx\frac{y(t)-y(t-T)}{T}$$

或前向差分 $$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\approx\frac{y(t+T)-y(t)}{T}$$

列差分方程

若用后向差分形式

$$\frac{y(t)-y(t-T)}{T}=ay(t)+x(t)$$

若在 $t=nT$ 各点取得样值

$$y(t)=y(nT)\to y(n)$$

n 代表序号

$$x(t)=x(nT)\to x(n)$$

$$\frac{y(n)-y(n-1)}{T}=ay(n)+x(n)$$

$$y(n)=\frac{1}{1-aT}y(n-1)+\frac{T}{1-aT}x(n)$$

当前输出　　前一个输出　　输入

7.3.5 差分方程的特点

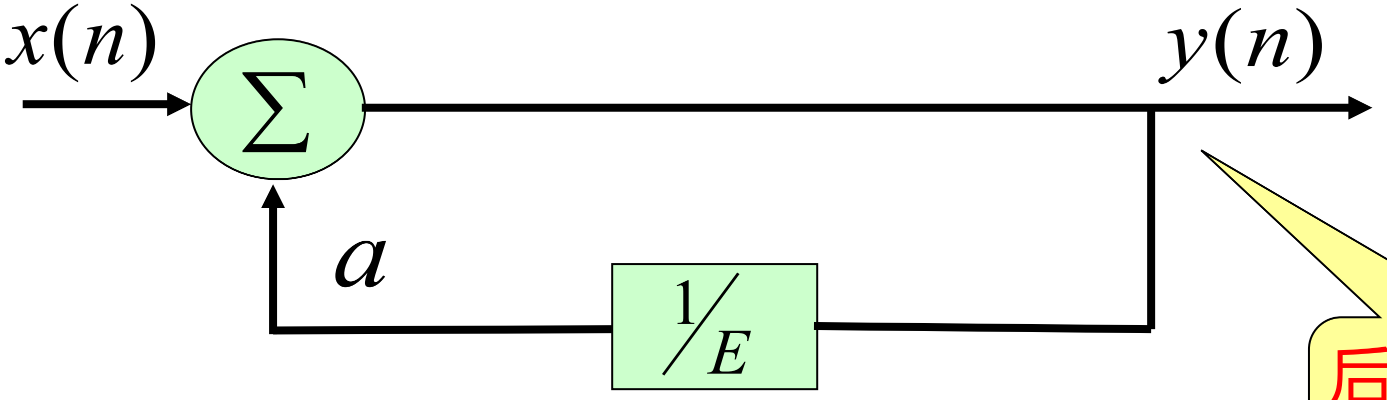
1、输出序列的第 n 个值不仅决定于同一瞬间的输入样值，而且还与前面输出值有关，每个输出值必须依次保留。

2、差分方程的阶数：差分方程中变量的最高和最低序号差数为阶数。如果一个系统的第 n 个输出决定于刚过去的几个输出值及输入值，那么描述它的差分方程就是几阶的。

通式：$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

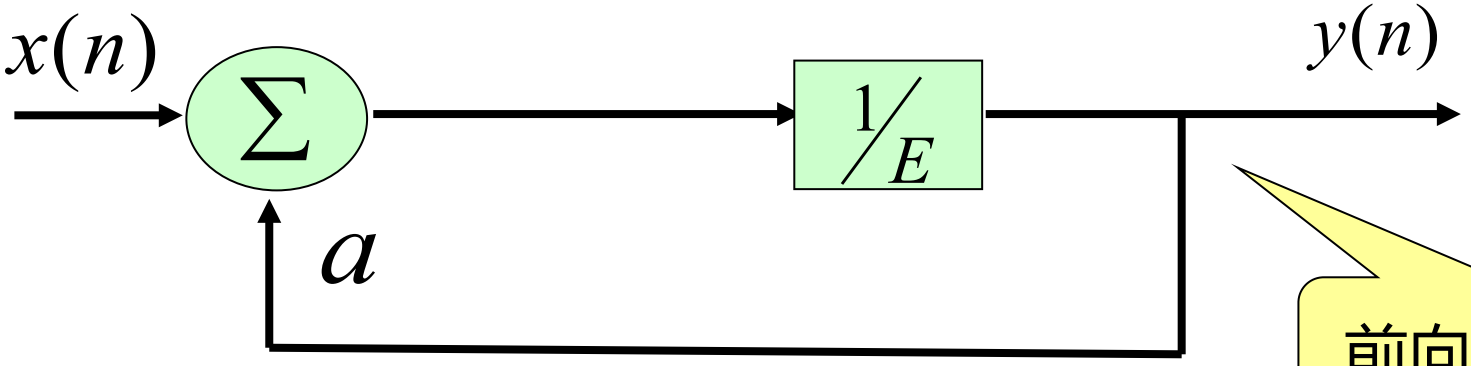
3、微分方程可以用差分方程来逼近，微分方程解是精确解，差分方程解是近似解，两者有许多类似之处。

4、差分方程描述离散时间系统，输入序列与输出序列间的运算关系与系统模拟框图有对应关系，应该会写会画。



$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$

后向差分方程
(常用)



$$y(n+1) = ay(n) + x(n)$$

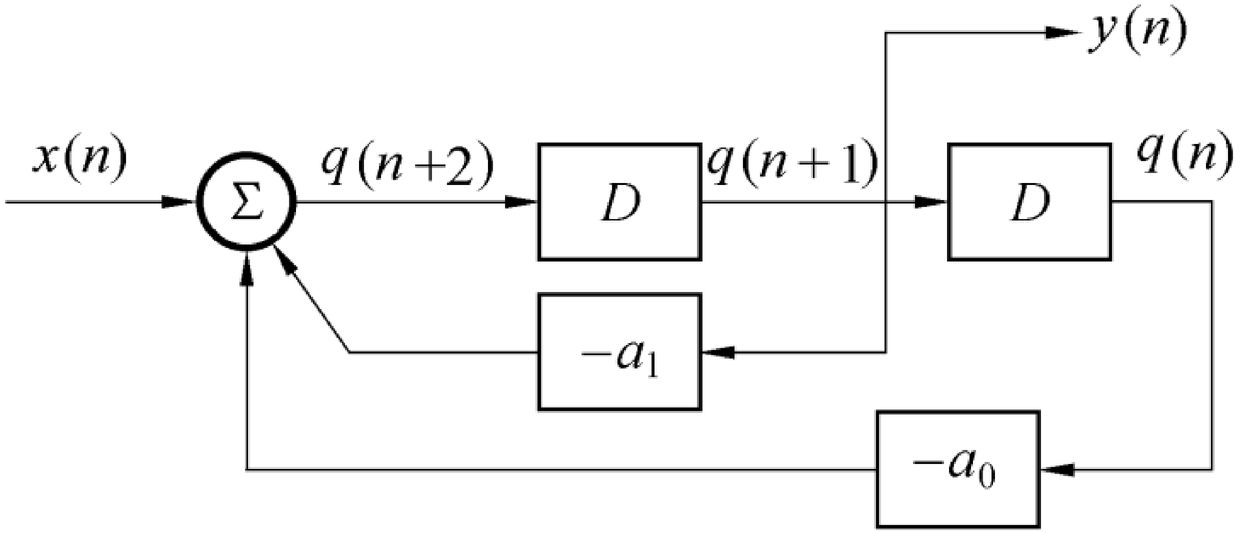
前向差分方程

例7-7：已知差分方程 $y(n+2)+a_1y(n+1)+a_0y(n)=x(n+1)$，画该系统的模拟框图。

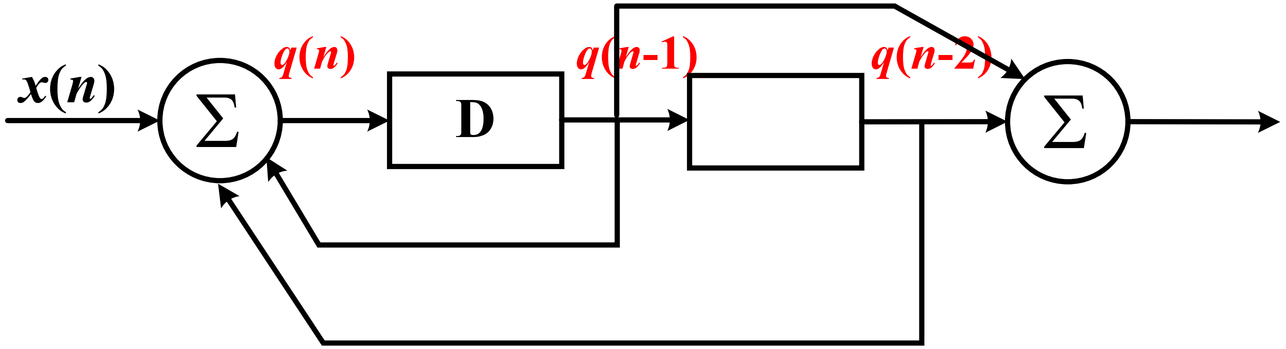
解：引入辅助函数 $q(n)$

$$q(n+2)+a_1q(n+1)+a_0q(n)=x(n)$$ 利用 LTI 系统的性质

$$y(n)=q(n+1)$$



例7-8：已知框图，写出系统的差分方程。



解：引入辅助函数 $q(n)$

$$q(n)=x(n)-2q(n-1)-3q(n-2)\Rightarrow q(n)+2q(n-1)+3q(n-2)=x(n)$$

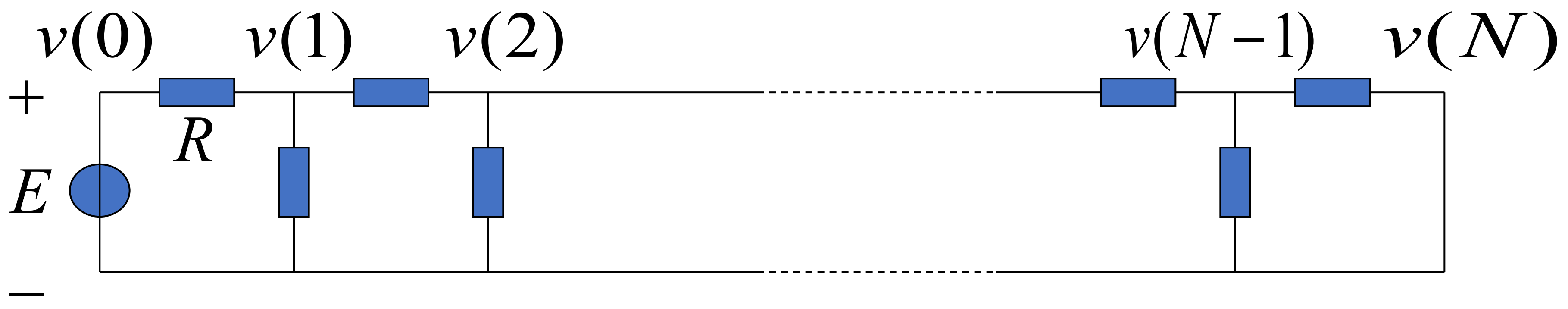
$$y(n)=4q(n-1)+5q(n-2)$$

利用 LTI 系统的性质消去 $q(n)$

得到差分方程：

$$y(n)+2y(n-1)+3y(n-2)=4x(n-1)+5x(n-2)$$

例7-9：电阻梯形网络，其各支路电阻都为 R，每个结点对地的电压为 $v(n)$，$n=0$，1，2，…，N。已知两边界结点电压为 $v(0)=E$，$v(N)=0$。求 $v(n)$ 的差分方程式。



解： 节点电流 KCL $$\frac{v(n)-v(n-1)}{R}=\frac{v(n-1)-v(n-2)}{R}+\frac{v(n-1)}{R}$$

$$v(n)-3v(n-1)+v(n-2)=0$$

作 业

教材习题：

基础题：7-1，7-4，7-9

加强题：7-10