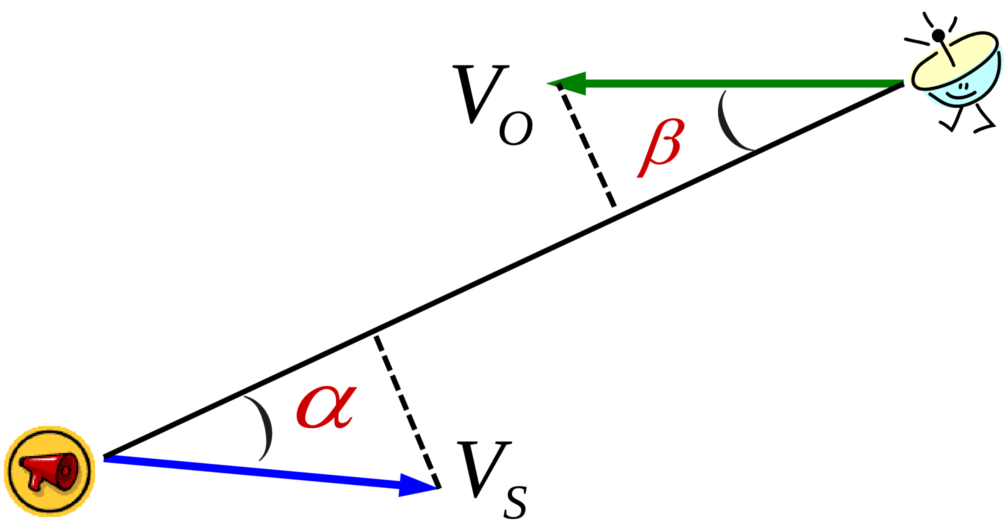
多普勒效应

$$\nu' = \frac{u \pm V_O \cos\beta}{u \mp V_S \cos\alpha}\nu$$

相对于介质靠近对方：V_O, V_S 前分别取正号和负号；

相对于介质背离对方：V_O, V_S 前分别取负号和正号。



内容回顾

可闻声波　20 ~ 20000 Hz

次声波　低于20 Hz

超声波　高于20000 Hz

声强级

$$L_I = \lg \frac{I}{I_0}$$ 贝尔（**B**）

$$L_I = 10\lg \frac{I}{I_0}$$ 分贝（ **dB** ）

$$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

补充章节

流体力学基础

教学基本要求

一、掌握流体静力学、理想流体的运动、伯努利方程及其应用。

二、理解粘滞流体的运动、流体中运动物体所受的阻力和升力。

物质的三态

固态

液态 } 流体 —具有一定体积、无固定形状、易于变形、

气态 } 具有一定的流动性。

液体和气体的不同点：

液体有一定体积，几乎不可压缩，粘性大；气体充满整个容器，体积就是容器的容积，易压缩，粘性小。

本章主要讨论液体，多数结论亦适用于气体。

连续介质模型：

流体的宏观物理量是空间和时间的连续函数。流体是由连续分布的无数流体元组成的。

宏观足够小的具有质量的体积元，又是微观上足够大的（包含足够多分子的分子集团）。

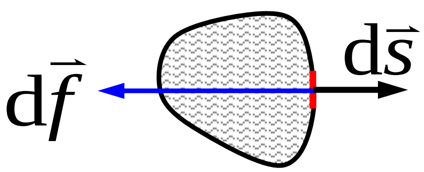
流体既可视为质点，又能通过统计平均方法给出宏观物理量。

§1 流体静力学

一、流体静力学压强（简称压强）

流体静止时，内部没有切向力。作用在流体内任何一个面元上的应力必然垂直于该面元！

在静止流体中任取一个小面元$\mathrm{d}\vec{S}$，作用在此面元上的力为$\mathrm{d}\vec{f}$



通常流体内部为压力

$$\mathrm{d}\vec{f} = -p\mathrm{d}\vec{s} \qquad 1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$$

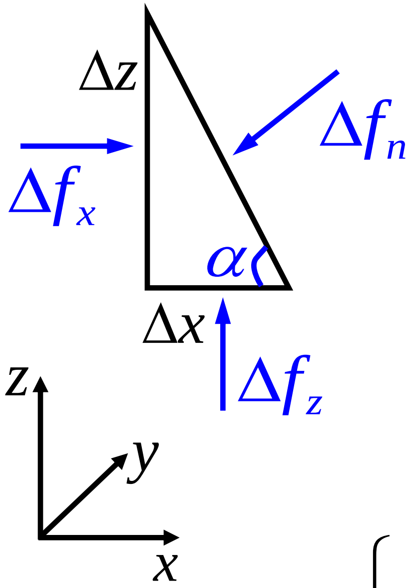
p 称为流体静力学压强

p 为标量，单位帕（**Pa**）

压强是位置和时间的函数，与面元的取向无关。

流体中静压强与面元取向无关

对任意斜面微元：流体中构造一直角三棱柱体



$$\Delta f_x = p_x \Delta y \cdot \Delta z \qquad \Delta f_z = p_z \Delta y \cdot \Delta x$$

$$\Delta f_n = p_n \Delta s = p_n \Delta y \cdot \frac{\Delta x}{\cos\alpha}$$

$$\begin{cases} \Delta f_x - \Delta f_n \cdot \sin\alpha = 0 \\ \Delta f_z - \Delta f_n \cdot \cos\alpha - \Delta m g = 0 \end{cases}$$

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta z / 2$$

$$\begin{cases} p_x \Delta y \cdot \Delta z - p_n \Delta y \dfrac{\Delta x}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = 0 \\ p_z \Delta y \cdot \Delta x - p_n \Delta y \dfrac{\Delta x}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha - g \cdot \rho \Delta x \Delta y \Delta z / 2 = 0 \end{cases}$$

$$p_x = p_n$$

$$p_z - p_n = \rho g \Delta z / 2 \qquad \Delta z \to 0$$

$$p_x = p_z = p_n$$

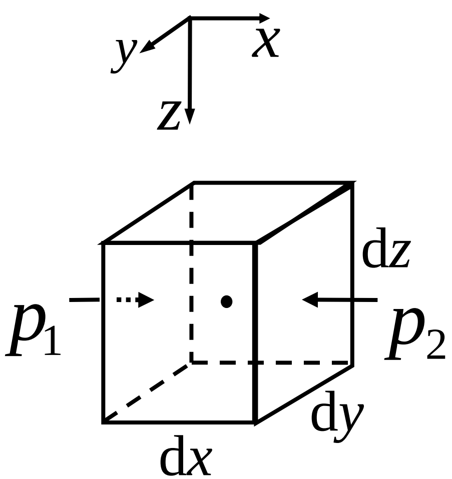
二、静止流体的平衡方程

作用在流体元上的力可以分为两类

面积力： 可用压强表述，作用在流体元外表面上。

体积力： 作用在每一质量微元上，亦称质量力。（如重力）

取正六面体形的流体元



$$p = p(x, y, z)$$

$$p_1 = p(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z) = p(x, y, z) - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$$

$$p_2 = p(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}$$

$$\mathrm{d}f_x = \left[(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}) - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2})\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}f_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}f_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}f_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}f_x\vec{i} + \mathrm{d}f_y\vec{j} + \mathrm{d}f_z\vec{k} = -(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{f} = -\nabla p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

单位质量流体上的体积力$\vec{F}$ $\qquad \mathrm{d}\vec{f} = \rho\vec{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

流体静止 $\qquad \rho\vec{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \nabla p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$

体积力与压强梯度方向平行

体积力与等压面垂直

$$\boxed{\begin{cases} \rho F_x = \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \rho F_y = \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \rho F_z = \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}}$$

静止流体的平衡方程

重力场中的静止流体

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

深度$z = z_A$处的压强$\boldsymbol{p_A}$，$z = z_B$处的压强$\boldsymbol{p_B}$； $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$

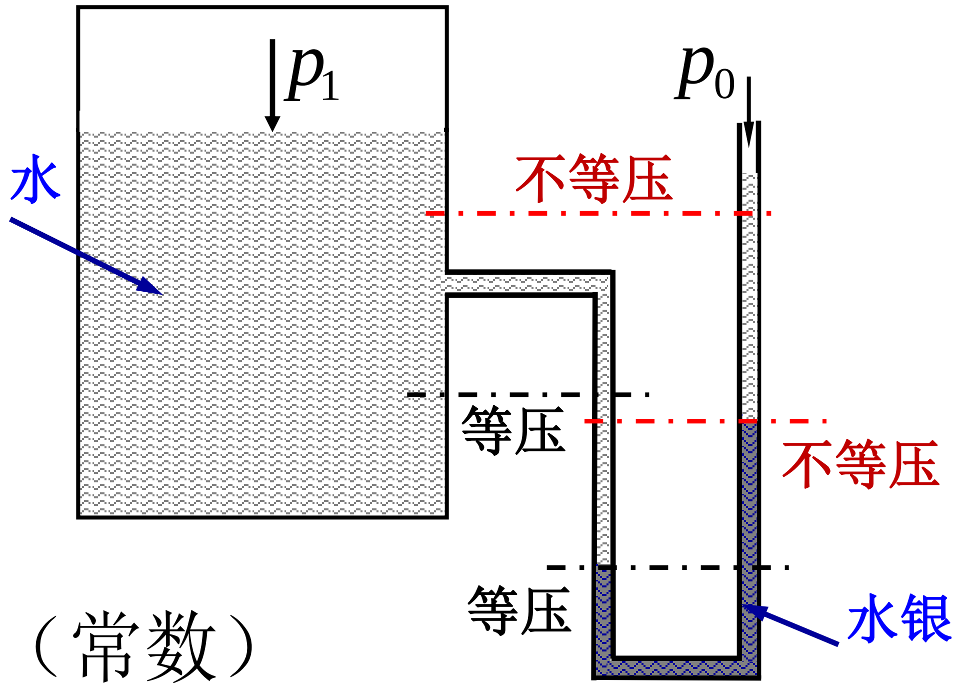
$$p_B = p_A - \int_{z_A}^{z_B} \rho g \mathrm{d}z$$

若密度为常量 $= p_A - \rho g(z_B - z_A)$

静止在重力场中的同种流体

液体中压强随距液面深度线性变化

等压面是水平面，与重力方向垂直



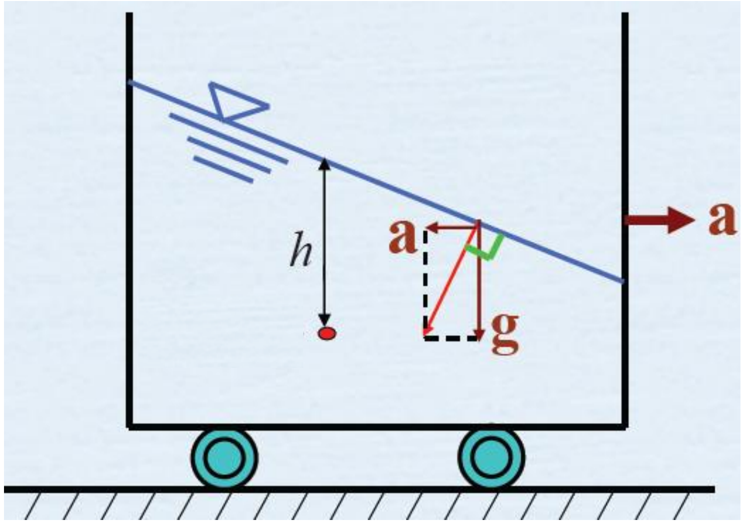
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

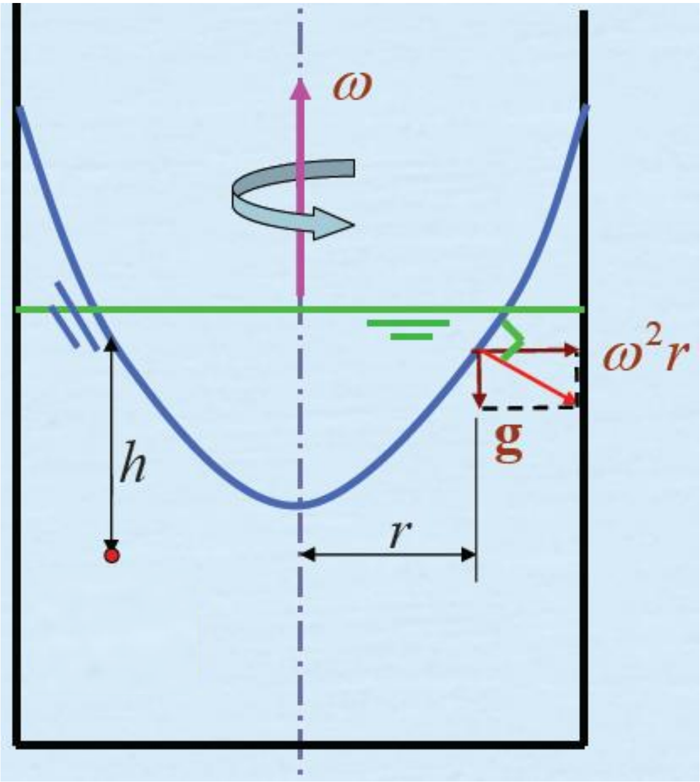
$$z + \frac{p}{\rho g} = c \text{（常数）}$$

$$\rho\vec{F} - \nabla p = 0$$

$$\begin{cases} \rho F_x = \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \rho F_y = \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \rho F_z = \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

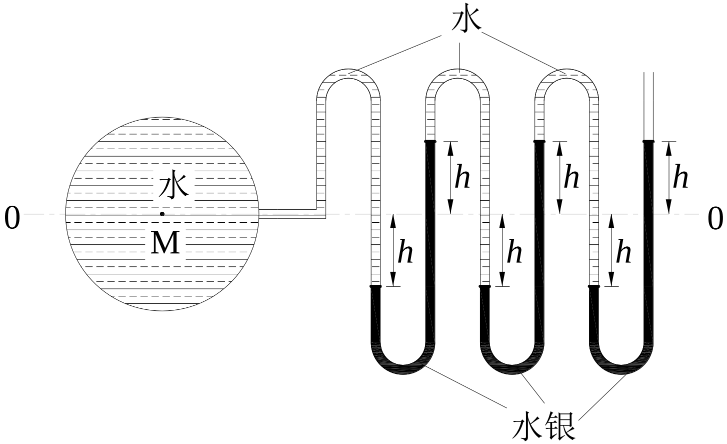
与加速运动的容器相对静止的流体：





$$p = p_0 + \rho g h$$

例　如图，利用三组串联的U型水银测压计测量高压水管中的压强，测压计顶端盛水。当M点压强等于大气压强p_0时，各水银面均位于0-0水平面上。当最末一组测压计右支水银面在0-0平面以上的读数为h时，求M点的压强？已知水和水银的密度分别是ρ 和ρ_H 。



解：

最末一组测压计右支水银面在0-0平面以上h时，各组U型测压计中水银柱高差均为2h

$$p_M = p_0 + \rho_H g \cdot 2h - \rho g \cdot 2h + \rho_H g \cdot 2h$$

$$- \rho g \cdot 2h + \rho_H g \cdot 2h - \rho g h$$

$$= p_0 + 6\rho_H gh - 5\rho gh$$

三、帕斯卡原理

作用在**密闭容器**中流体上的压强等值地传到流体各处和器壁上去。

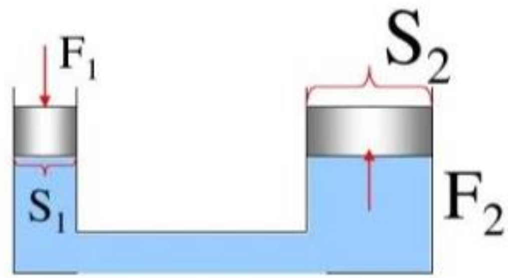
[【天才简史-帕斯卡】](https://www.bilibili.com/video/BV1wP411c7xo/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=f83b6ae110e6ca7bc5140d5c992e830e)

https://www.bilibili.com/video/BV1wP411c7xo/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=f83b6ae110e6ca7bc5140d5c992e830e

帕斯卡原理 液体压强的传递

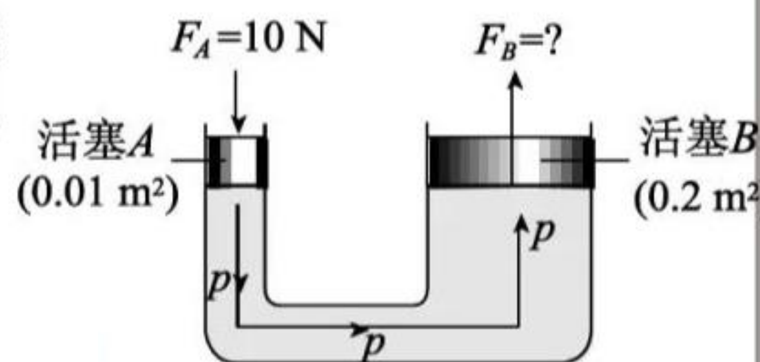
加在密闭液体上的压强，能够大小不变地向各个方向传递，这个规律被称为帕斯卡原理。

（ $p_1=p_2$ ）



$$\frac{F_1}{S_1}=\frac{F_2}{S_2}$$

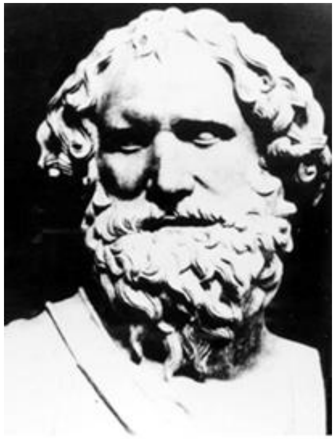
例 ：活塞*A*、*B*的面积如图所示，如果在活塞*A*上施加10 N的力，能在活塞*B*上产生多大的举力？



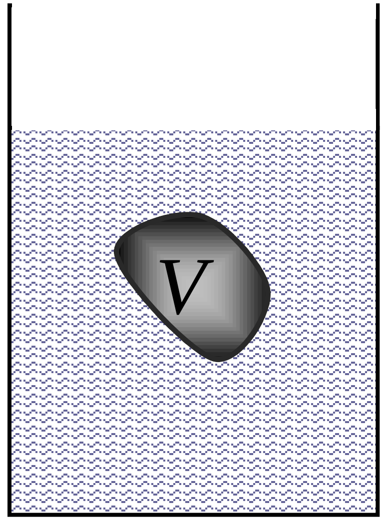
[液压机大挑战！](https://www.bilibili.com/video/BV1P54y1w7Nm/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=f83b6ae110e6ca7bc5140d5c992e830e)

https://www.bilibili.com/video/BV1P54y1w7Nm/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=f83b6ae110e6ca7bc5140d5c992e830e

四、阿基米德原理



阿基米德



$$\vec{F}_{浮} = \int_V (-\nabla p)\mathrm{d}V$$

同种均匀液体

$$F_{浮} = m_{液} g$$

此时液体的重心—浮心

换成其他物体，浮力大小不变，浮心位置不变。

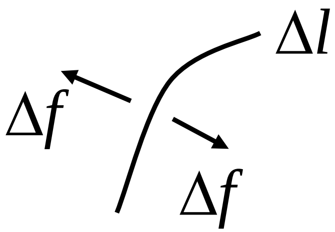
阿基米德原理： 在重力场中，全部或部分浸没在静止流体中的物体所受的浮力大小等于物体排开的流体的重量，浮力的方向竖直向上，且通过排开流体的重心。

$$F_{浮} = m_{液} g$$

五、表面张力

液体表面或两种不相容液体的交界面或液体与气体的交界面上，存在表现为张力的相互作用，称为表面张力。

实验表明



$$\Delta f = \sigma \Delta l$$

σ称为表面张力系数 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

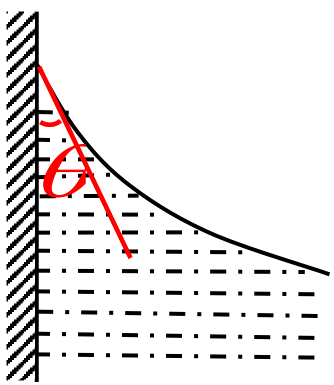
表面张力系数的大小与液体自身的性质有关，通常密度小、易蒸发的液体的表面张力系数小。表面张力还与液体的温度有关，温度升高，表面张力系数减小。

六、毛细现象

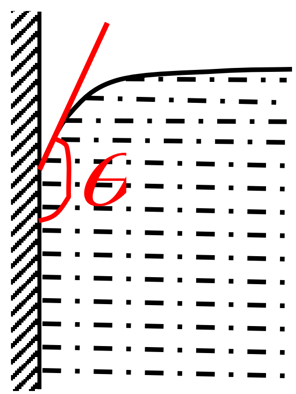
液体与气体接触形成自由表面，而与固体接触时会有一个附着层，出现附着力和内聚力。

液体与固体接触时紧贴固体表面的液体分子同时受到固体表面分子对它的吸引力（附着力）和其它液体分子对它的吸引力（内聚力）。

附着力 >内聚力



附着力<内聚力



接触角 θ

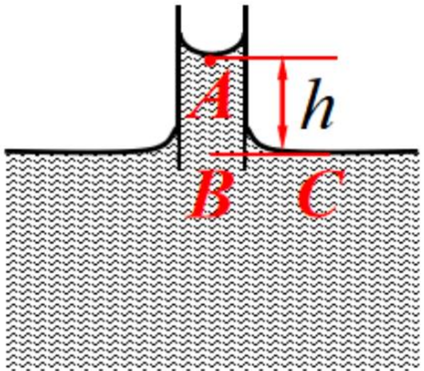
$\theta < \dfrac{\pi}{2}$ 液体润湿固体

$\theta > \dfrac{\pi}{2}$ 液体不润湿固体

$\theta = 0$ 完全润湿

$\theta = \pi$ 完全不润湿

六、毛细现象



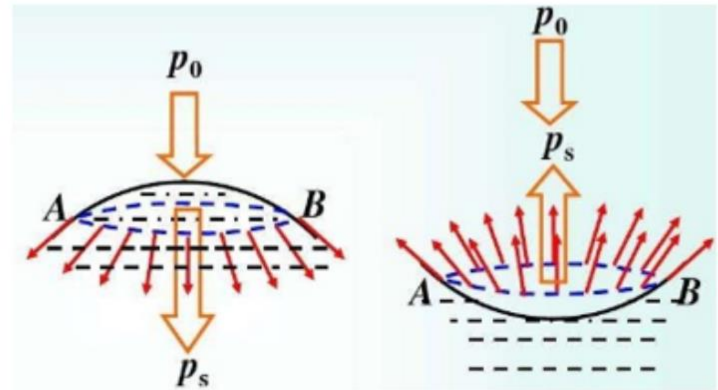
（a）

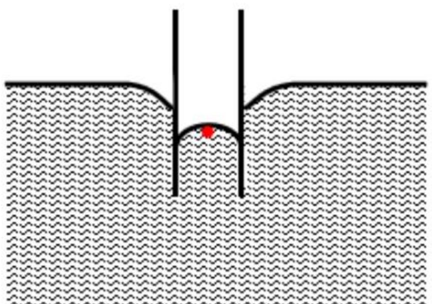
设水的密度 ρ

大气压强 p_0

表面张力系数 σ

毛细管半径 r





（b）

液面内外的压强差 $\Delta p = p_A - p_0$

$$= -\frac{2\sigma}{r}\cos\theta \begin{cases} <0 & \text{圆心在液体外(a)} \\ >0 & \text{圆心在液体内(b)} \end{cases}$$

液面**BC**位置处的压强 $p_B = p_C = p_0$

$$p_B - p_A = \rho g h$$

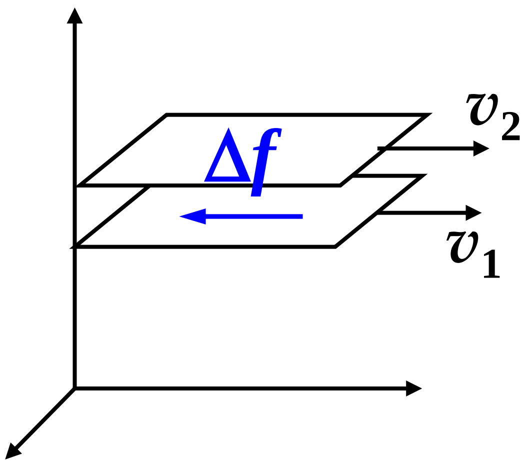
$$\Delta p = -\rho g h$$

$$h = -\frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{2\sigma}{\rho g r}\cos\theta \begin{cases} >0 \text{ (a)} \\ <0 \text{ (b)} \end{cases}$$

§ 2 理想流体的运动

流体的粘性：

流体流动时，各流层间存在着阻碍相对运动的内摩擦力，这就是流体的粘性。



流体的压缩性： $k = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$　**k** 压缩系数

$$K = \frac{1}{k}$$　体积弹性模量

理想流体：不可压缩、无粘性的流体称为理想流体。

一、流体运动的描述方法

1.拉格朗日法

以研究个别流体元的运动为基础，通过对每个流体元运动规律的研究来获得整个流体的运动规律。

2. 欧拉法

考察通过空间固定的位置点的不同液体质点的运动状态，形成一个矢量场来了解流体在整个运动空间内的流动情况。

拉格朗日法 着眼于流体质点，跟踪每个流体元来了解整个流体的运动规律。

欧拉法 着眼于空间点，研究流经空间各固定点的流体元的运动，获取流体的运动规律。

任一时刻流体空间的每一点上都有一个流速 $\vec{v}$ 与之对应，形成一个矢量场—流速场。如果流速只是空间坐标的函数而不依赖于时间，则称为稳定流动，简称稳流。

迹线:

某一流体质点在运动过程中，不同时刻所流经的空间点连成的曲线。

迹线就是流体质点运动时所走过的轨迹线。

迹线是与拉格朗日法对应的概念。

流线:

某瞬间在流场中绘出的曲线，曲线上各流体元的速度矢量和该线相切。

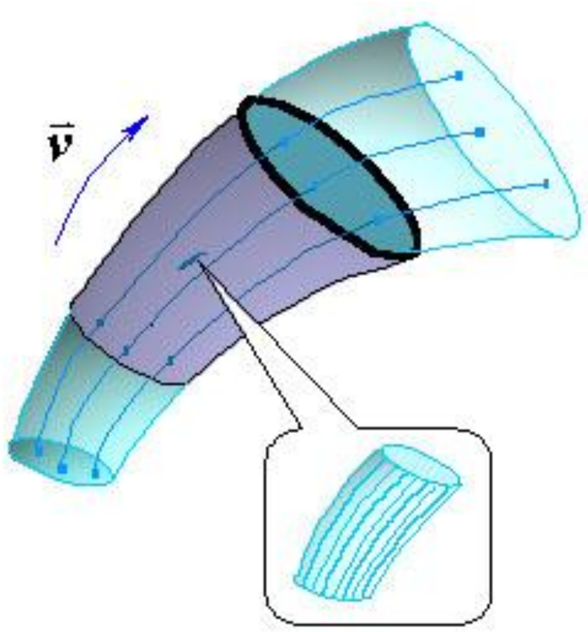
流线表示瞬时流动方向，流线不能相交。

流线密处流速大，流线稀处流速小。

稳定流动中，流线与迹线重合。

流管:

某时刻在速度场中做一条非流线的曲线，经过曲线上的每一点做流线，这些流线在空间形成一个曲面，称为流面。



如果在流体中所做的非流线的曲线是闭合的，则所得到的流面称为流管。

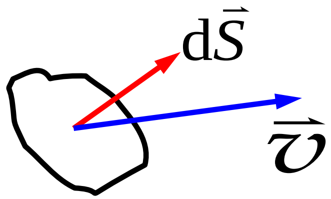
流管内外的流体都没有穿过流面的速度分量，管内流体不能流到管外，管外流体也不能流入管内。

对稳定流动，流线和流管都不随时间变化，流管和真的管道相似。

二、流体的连续性原理

体积流量

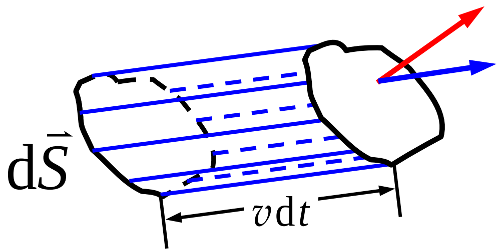
流体中单位时间内流过某一横截面的流体体积



对于面元 $\Delta\vec{S}$

$$\Delta\vec{S} \to 0 \qquad \Delta\vec{S} \to \mathrm{d}\vec{S}$$

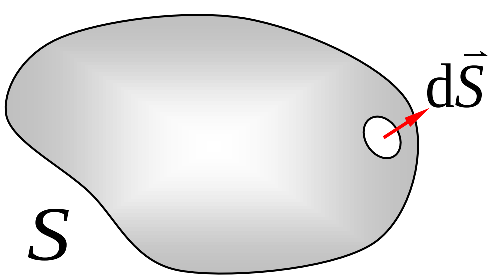
可认为面元上各点流速 $\vec{v}$ 相等



单位时间内流过面元的流体体积

$$\mathrm{d}Q_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S \cdot v\mathrm{d}t \cdot \cos\theta}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

体积流量



对一封闭曲面 S

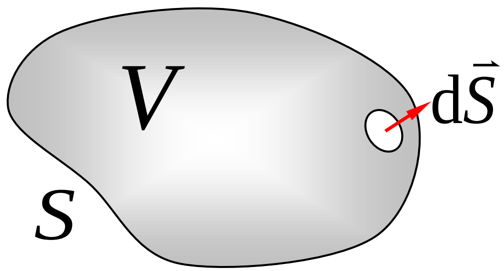
$$Q_V = \int \mathrm{d}Q_V = \oint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

质量流量

流体中单位时间内流过某一横截面的流体质量

$$\mathrm{d}Q_m = \rho\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad Q_m = \int \mathrm{d}Q_m = \oint_S \rho\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

二、流体的连续性原理



d*t* 时间内流过闭合曲面的流体质量

$$\mathrm{d}m = Q_m \mathrm{d}t = \oint_S \rho\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\cdot \mathrm{d}t$$

d*t* 时间内闭合曲面内流体质量的增量

$$\mathrm{d}m' = \int_V \rho(\vec{r}, t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}V - \int_V \rho(\vec{r}, t)\mathrm{d}V$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

质量守恒 $\mathrm{d}m = -\mathrm{d}m'$

$$\boxed{\oint_S \rho\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V \qquad \text{流体的连续性原理}}$$

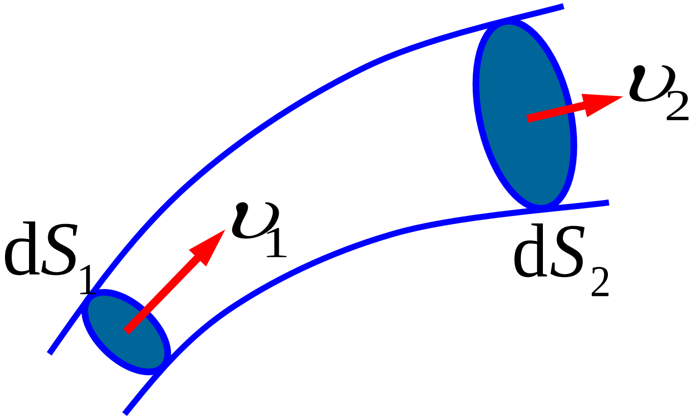
对密度是常量的不可压缩流体，有：

$$\boxed{\oint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

二、流体的连续性原理

稳定流动

流管不随时间变化，类似真实管道，
取一细流管及任意两垂直截面：



$$\mathrm{d}m' = 0$$

$$\mathrm{d}m = \oint_S \rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\cdot\mathrm{d}t = 0$$

$$\rho_1 v_1 \mathrm{d}S_1 = \rho_2 v_2 \mathrm{d}S_2$$

稳定流动的连续性原理

对任意流管 $\rho v \mathrm{d}S =$ 常量

对密度是常量的不可压缩流体 $v\mathrm{d}S =$ 常量

截面大处流速小、流线疏；截面小处流速大、流线密。

内容回顾

重力场中的静止流体 $p_B = p_A - \int_{\mathrm{z}_\mathrm{A}}^{z_B} \rho g \mathrm{dz}$

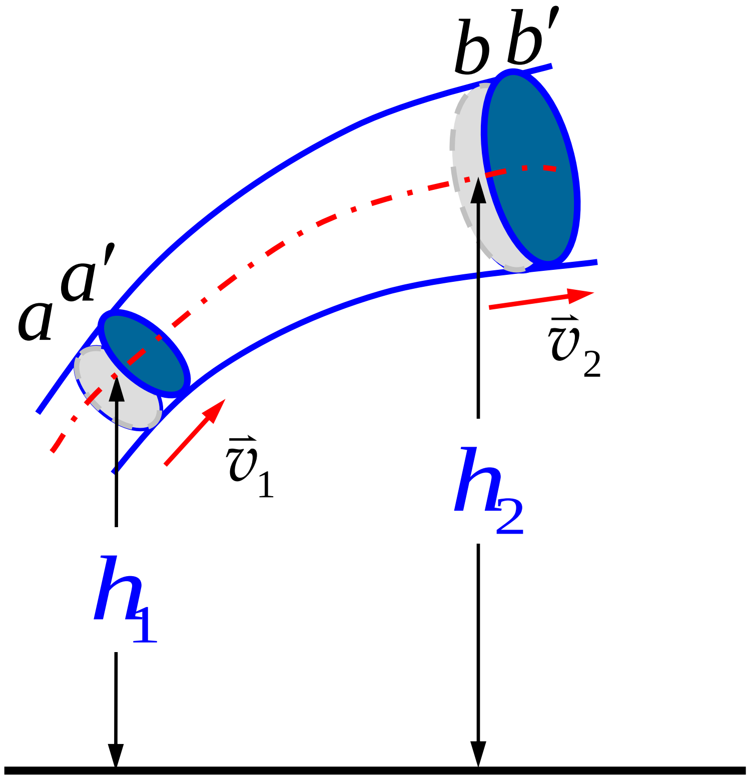
若密度为常量 $= p_A - \rho g (z_B - z_A)$

流体的连续性原理（质量守恒） $\oint_S \rho \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V$

对于稳定流动 $\rho v \mathrm{d}S =$ 常量

§ 3 理想流体的伯努利方程及其应用

重力场中的稳定流动，在流体中取一细流管。



取ab段流体为研究对象，

经Δt时间流动到$a'b'$位置

$$\Delta V_1 = \Delta S_1 \Delta l_1 = \Delta S_1 v_1 \Delta t$$

$$\Delta V_2 = \Delta S_2 \Delta l_2 = \Delta S_2 v_2 \Delta t$$

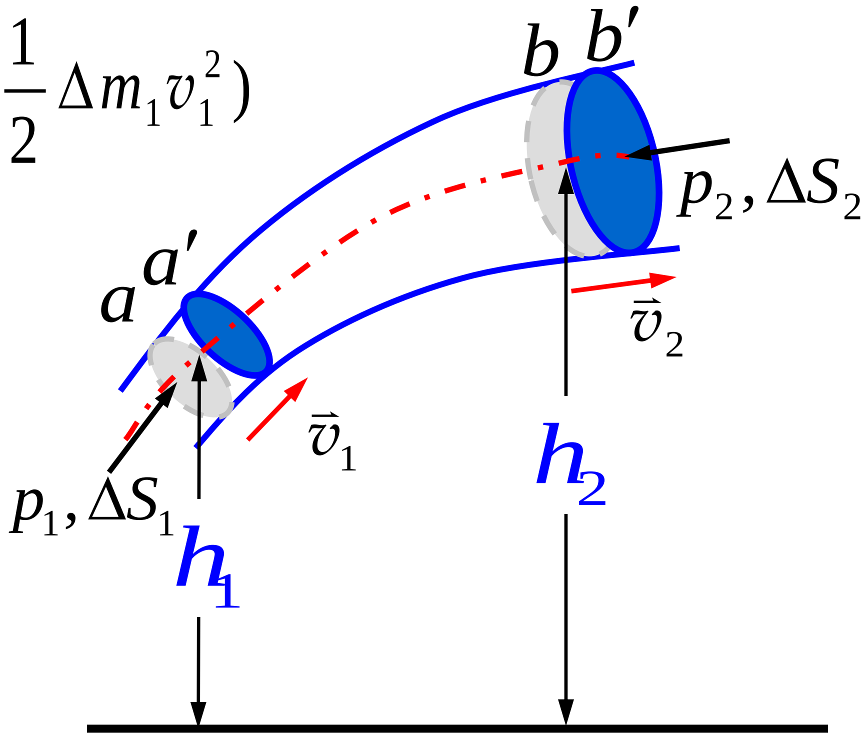
不可压缩　$\Delta V_1 = \Delta V_2$

$$\Delta E = E(a'b') - E(ab) = E(bb') - E(aa')$$

$$\Delta E = \Delta m_2 g h_2 + \frac{1}{2}\Delta m_2 v_2^2 - (\Delta m_1 g h_1 + \frac{1}{2}\Delta m_1 v_1^2)$$

$$\Delta E = \Delta m_2 g h_2 + \frac{1}{2}\Delta m_2 v_2^2 - (\Delta m_1 g h_1 + \frac{1}{2}\Delta m_1 v_1^2)$$

$$\Delta m_2 = \rho \Delta V_2 \qquad \Delta m_1 = \rho \Delta V_1$$



外力做功

$$A = p_1 \Delta S_1 \Delta l_1 - p_2 \Delta S_2 \Delta l_2$$
$$= p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$$

由功能原理，得 $A = \Delta E$

$$p_1 \Delta V_1 + \Delta m_1 g h_1 + \frac{1}{2}\Delta m_1 v_1^2 = p_2 \Delta V_2 + \Delta m_2 g h_2 + \frac{1}{2}\Delta m_2 v_2^2$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = 常量}$$ **伯努利方程**

讨论：

$$\boxed{p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}}$$

（1）理想流体稳定流动的基本动力学方程，是功能原理在理想流体中的应用。

（2）重力场中的稳定流动, 未计及其它能量损失。

（3）针对不可压缩流体。

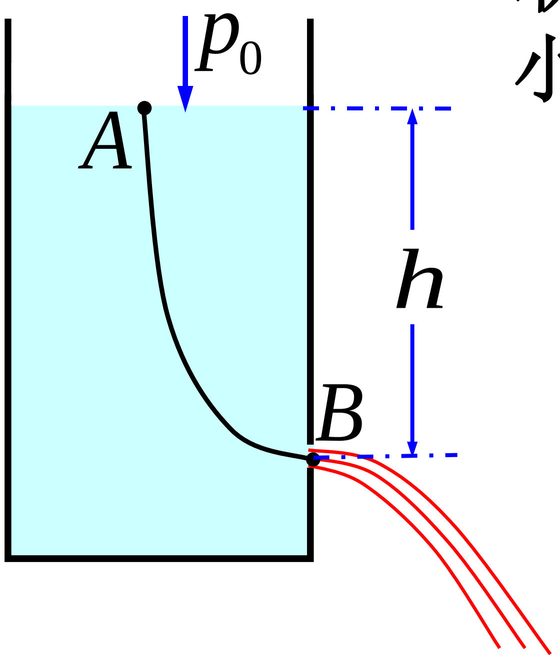
（4）细流管。对大流管，要求流速在截面上不变。

（5） $v=0$　　$p+\rho gh=\text{常数}$　　$p_A=p_o-\rho g(h_A-h_o)$

重力场中，静止流体静压强公式。流体静力学是流体动力学的特殊情况。

（6）h_1、h_2是相对同一参考平面的，两个参考点的位置应该在同一流线上。

◆ 小孔流速



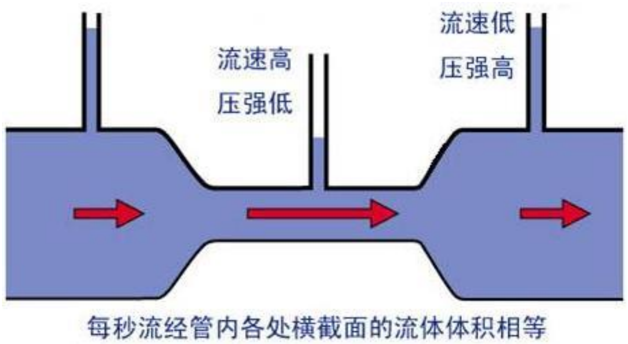
取一流线，在该流线上在液面处取点A、小孔处取点B

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B$$

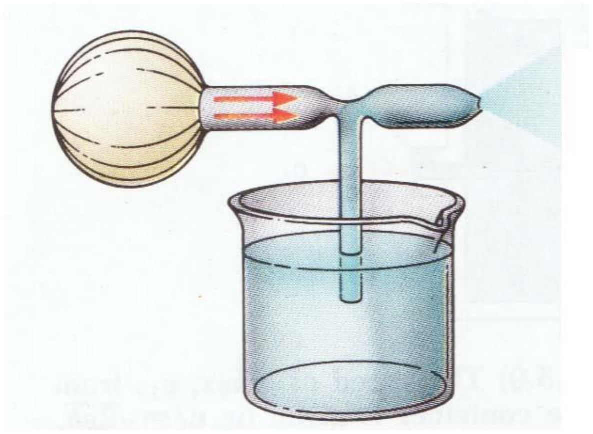
$$p_A = p_B = p_0 \qquad h_A - h_B = h \qquad v_A \approx 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\rho v_B^2 = \rho g h \qquad v_B = \sqrt{2gh}$$

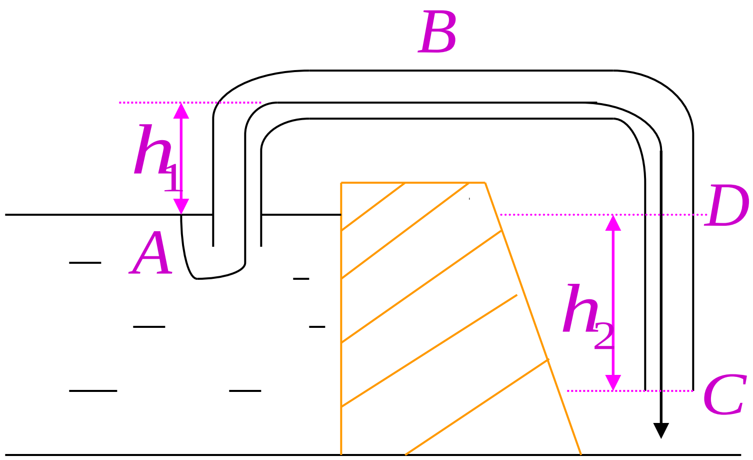
◆ 文丘里流速计



◆ 喷雾器



例　如图所示，利用一管径均匀的虹吸管从水库中引水，其最高点B比水库水面高3.0 m，管口C比水库水面低5.0 m，求虹吸管内水的流速和B点处的压强。



解：对A、C两点

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g h_C$$

$$p_A = p_C = p_0 \qquad v_A = 0$$

$$v_C = \sqrt{2g(h_A - h_C)} = \sqrt{2gh_2} = 9.9\ \mathrm{m/s}$$

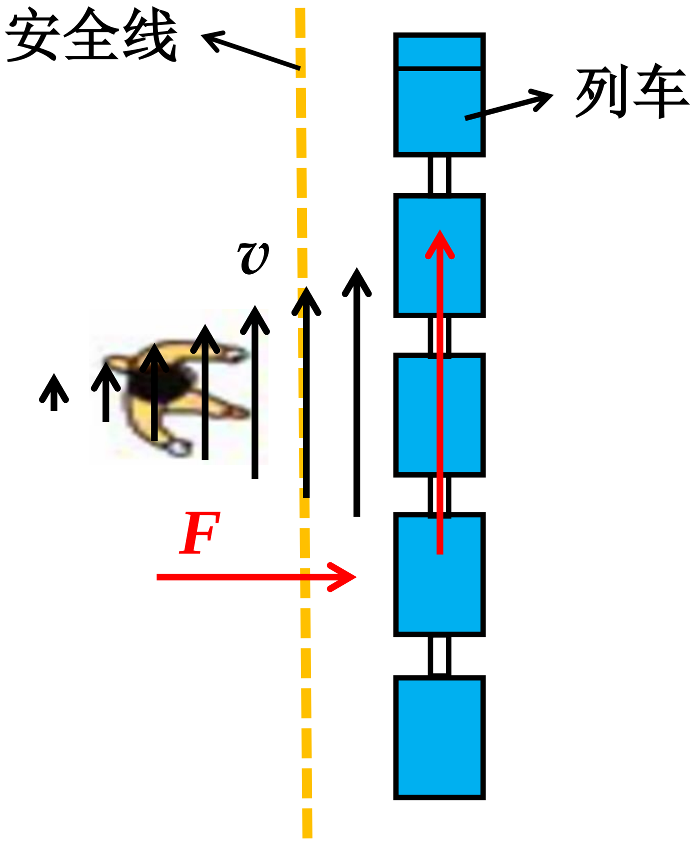
对B、C两点　$v_B = v_C$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g h_C$$

$$p_B = p_0 - \rho g(h_B - h_C)$$

$$= p_0 - \rho g(h_1 + h_2) = 2.3\times 10^4\ \mathrm{Pa}$$

◆ 站台上不能靠近边缘的原因



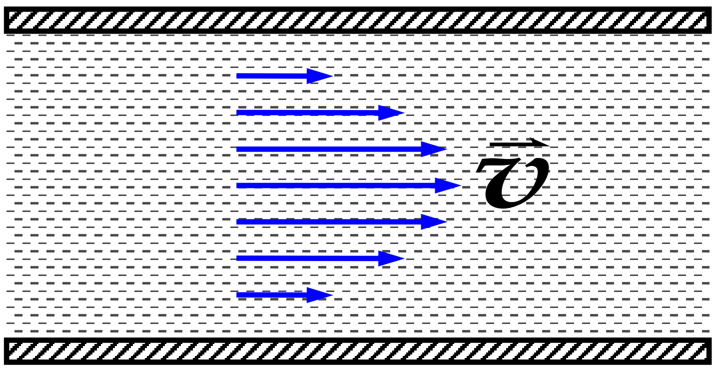
$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=常数$$

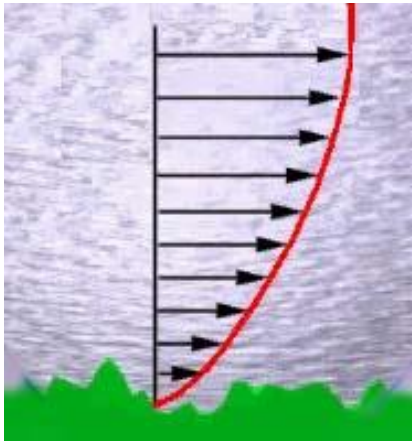
鄂洛多克惨案：造成34人死亡、4人终身残疾。

§ 4 粘滞流体的运动

一、层流

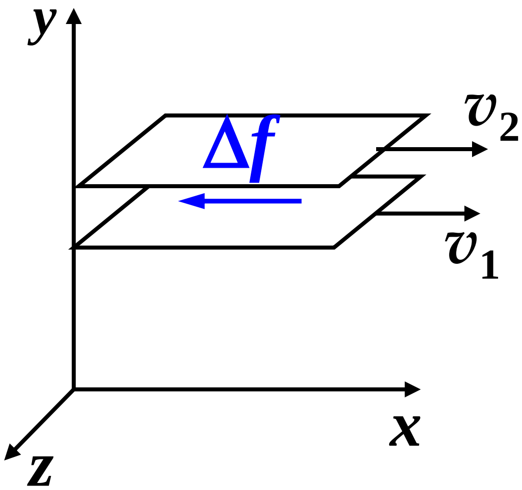
实际流体流速不大时，流速是分层有规律变化的，流层之间仅有相对滑动，而不混合，称为层流。



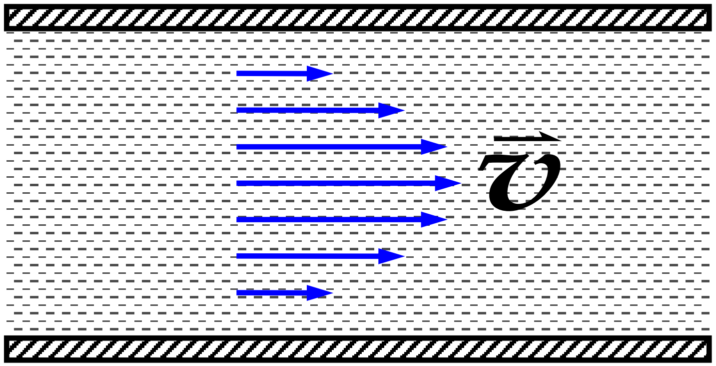


层流特点：只有切向速度，没有径向速度。

二、牛顿粘性定律



速度梯度 $\dfrac{\Delta v_x}{\Delta y}$



$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$$

作用在面元ΔS上的粘滞力Δf

$$\Delta f \propto \Delta S \qquad \Delta f \propto \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$$

$$\Delta f = \eta \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} \Delta S$$

η：粘滞系数或粘度

η 的单位为帕秒 $1\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

η 与流体的属性、温度有关，与流体运动形式无关。

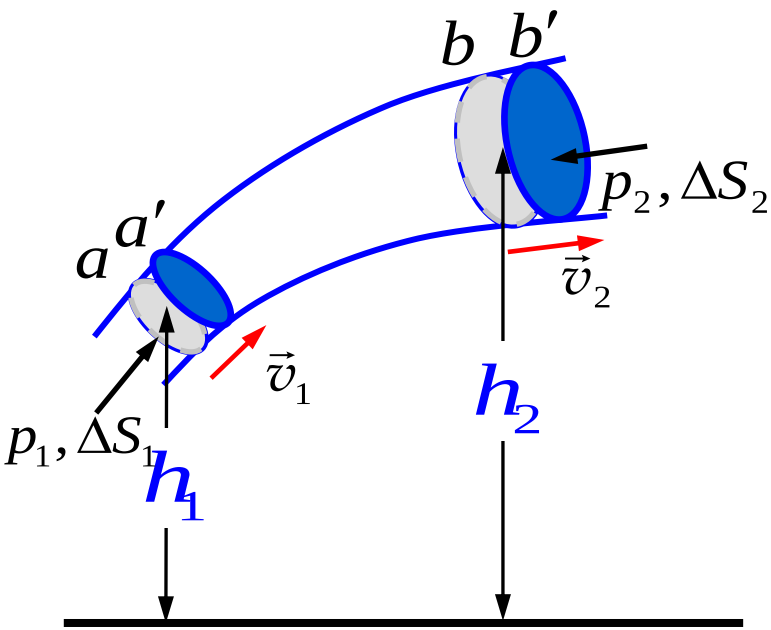
一般液体的η 随温度的升高而减小，气体的η 随温度的升高而增大。

流体的粘性影响流动的快慢，静止流体中无粘力。

$$\Delta f = \eta \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} \Delta S \qquad \tau = \frac{\Delta f}{\Delta S} = \eta \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$$

牛顿粘性定律（适用于牛顿流体）

三、粘滞流体的伯努利方程



单位体积的流体从a流动到b克服粘滞力做功w，则：

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$= p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + w$$

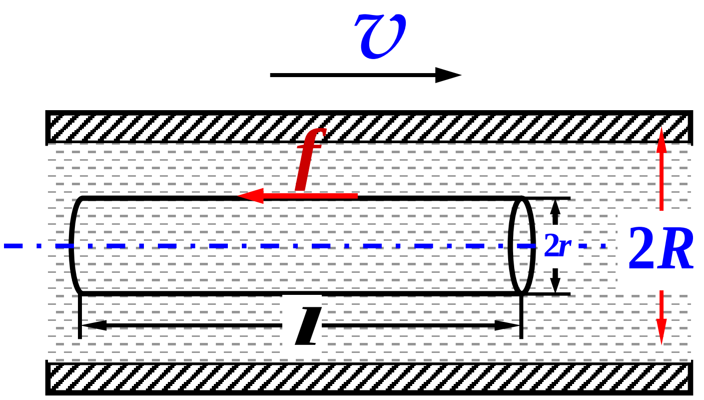
对于垂直截面不变的水平圆管：

$h_1 = h_2, v_1 = v_2$ 有 $w = p_1 - p_2$

这种管道中维持粘滞流体稳定流动需保持一定的压强差。

四、泊肃叶公式

计算粘滞流体在水平圆管中稳定分层流动时的流量：



两底面压力：$F=(p_1-p_2)\pi r^2$

侧面粘滞阻力：

$$f=\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi rl \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}<0$$

$$(p_1-p_2)\pi r^2+\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi rl=0$$

$$v(r)=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}(R^2-r^2)$$（假定管壁处流速为0）

$$\boxed{Q_V=\int_0^R v(r)2\pi r\mathrm{d}r=\frac{p_1-p_2}{8\eta l}\pi R^4 \quad \text{泊肃叶公式}}$$

平均流速 $\bar{v}=\frac{\int_S v\mathrm{d}S}{\int_S \mathrm{d}S}=\frac{Q_V}{S}$

$$p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g h_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+w$$

$$\boxed{Q_V=\frac{p_1-p_2}{8\eta l}\pi R^4}$$

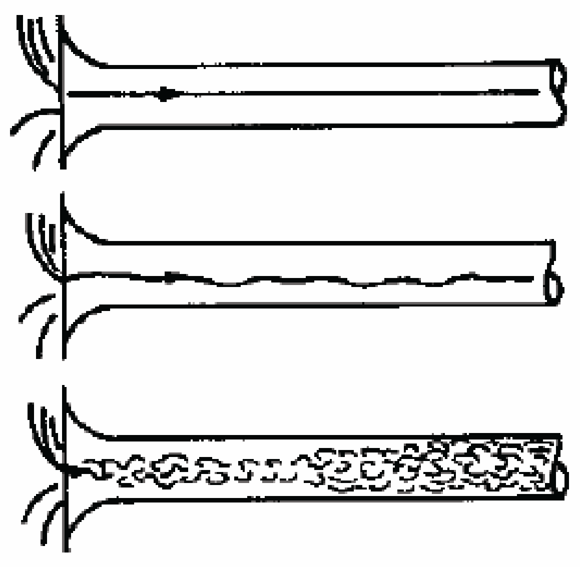
对于垂直截面不变的水平圆管 $h_1=h_2, v_1=v_2$

$$w=p_1-p_2 \qquad Q_V=\bar{v}\cdot\pi R^2 \qquad w=\frac{8\eta l}{R^2}\bar{v}$$

五、湍流

管径较粗或流体的流速较大时，产生垂直于轴线的流速分量，破坏层流状态，运动混乱不规则。

流线混杂、紊乱，有垂直管轴方向的分速度，出现漩涡。



粘滞流体，流速较大时，不同流层间会发生混掺，形成紊流或称湍流。

湍流发生时，内摩擦力增大，流量减小。

层流和紊流的区别在于层流各流层间互不混掺，只存在粘性引起的摩擦阻力。

紊流有大小不等的涡流动荡于各流层之间，除了粘性阻力，还存在着由于质点混掺、互相碰撞所造成的惯性阻力。

层流变湍流与流速v，流体密度ρ，管道内半径r，流体粘度η有关，可由一无量纲纯数$\boldsymbol{R_e}$确定。

雷诺数 $$R_e = \frac{\rho v r}{\eta}$$

从层流到湍流的转变存在一个过渡区域，这个过渡区域的雷诺数称为临界雷诺数。

内壁光滑圆形管道的临界雷诺数$R_c \approx 1000 \sim 2500$。

紊流阻力比层流阻力大得多。

§5 运动物体在流体中所受的力

物体在流体中受到的作用力，其水平方向的分力称为阻力，竖直方向的分力称为升力。

粘性阻力：物体在粘性流体中移动时，附着在物体表面的流体将与物体一起运动，与邻近流体间形成速度梯度，产生内摩檫力，阻碍物体运动。

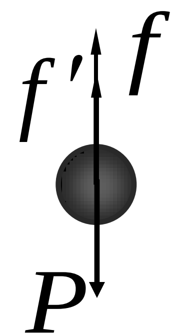
一、斯托克斯公式

牛顿流体中作低速运动的小球所受阻力的大小

$$\boxed{f = 6\pi\eta r v}$$

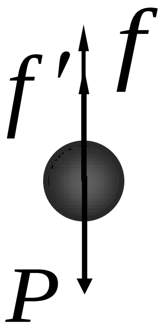
重力场中，流体中小球的沉降问题：

小球在静止液体中自由下落



$$f' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g \qquad f = 6\pi\eta r v$$

$$P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$



小球做匀速运动时

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi \eta r v + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$$

收尾速度

$$v_T = \frac{2}{9}\frac{\rho - \rho'}{\eta} g r^2$$

粘滞系数

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{\rho - \rho'}{v_T} g r^2$$

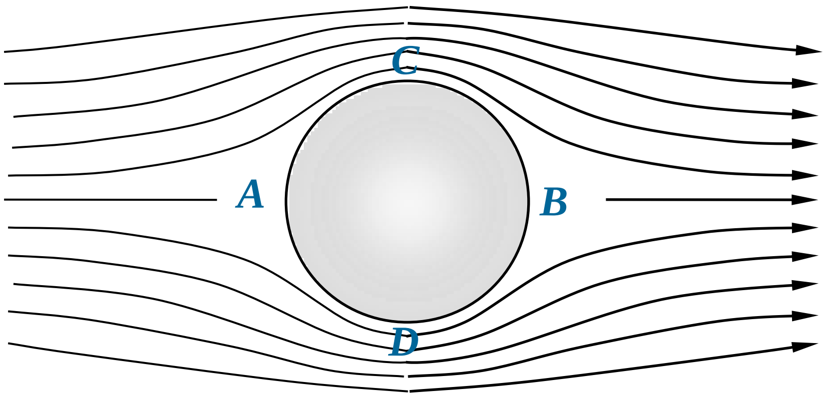
小球半径

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_T}{2(\rho - \rho')g}}$$

➢ 密立根油滴实验

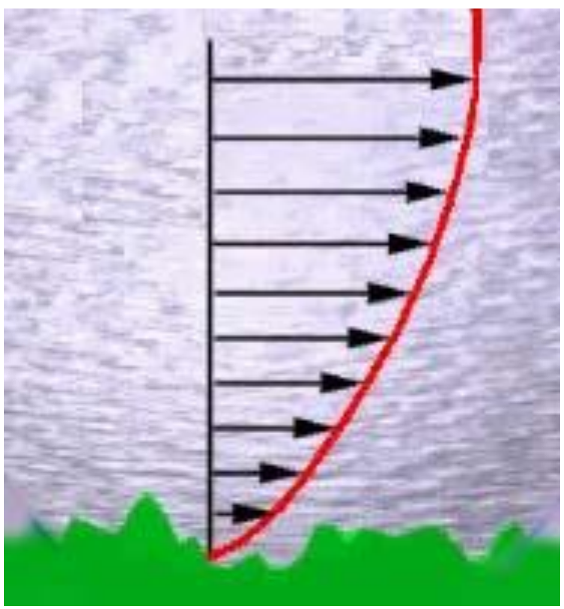
二、压差阻力

理想流体

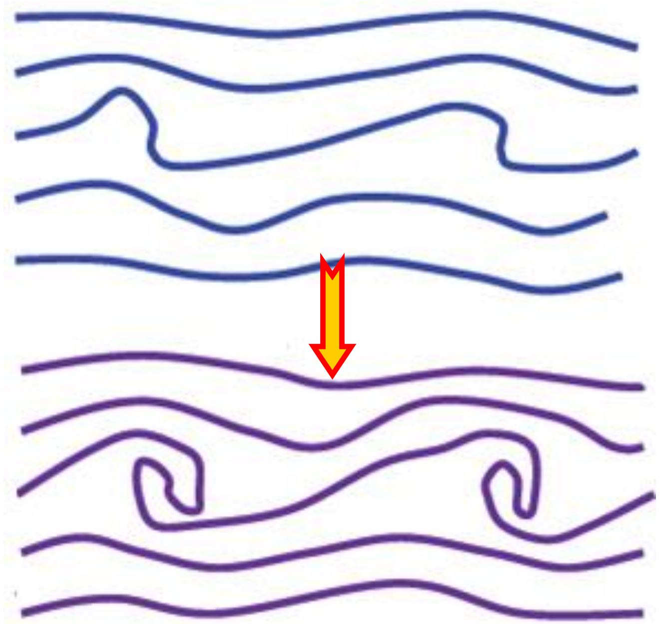


不考虑浮力时，理想流体对小球的作用力之和为零。

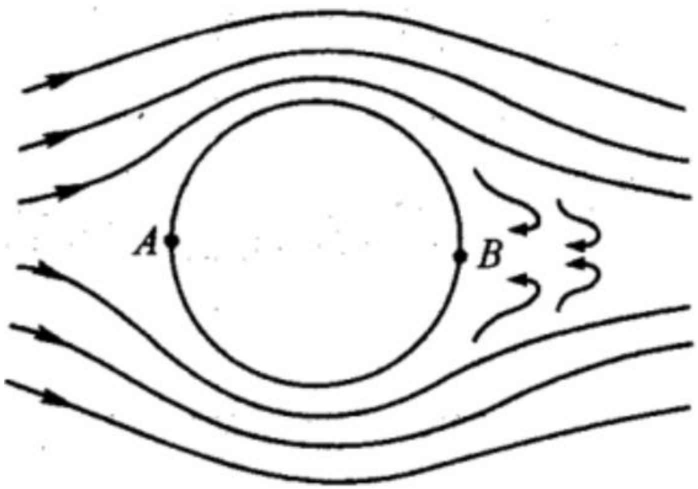
非理想流体



粘滞流体中，粘滞力的作用有在流体中形成旋涡的倾向。



二、压差阻力



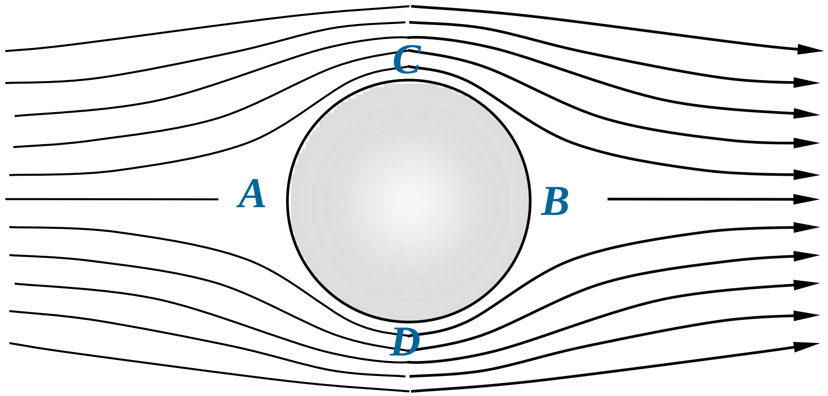
由于物体运动与流体相对运动，流体流速在物体前后的不同所形成的阻力称为压差阻力f'。

压差阻力与粘滞力之比

$$\frac{f'}{f} \approx \frac{\rho v r}{\eta} = Re$$ 雷诺数

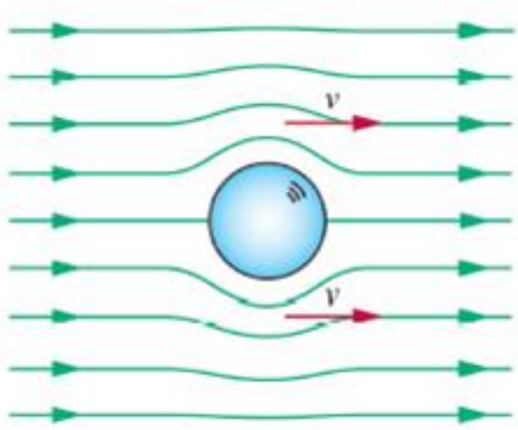
压差阻力也是由流体的粘滞性引起的，但与粘滞阻力有着不同的产生机制。物体运动时，两种阻力是同时存在的，当雷诺数很小（小于1）时，粘滞阻力占主导地位，一旦流体中出现旋涡，粘滞阻力就不再占重要地位了。

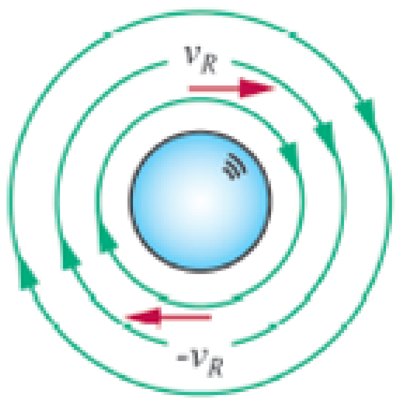
三、流体的升力

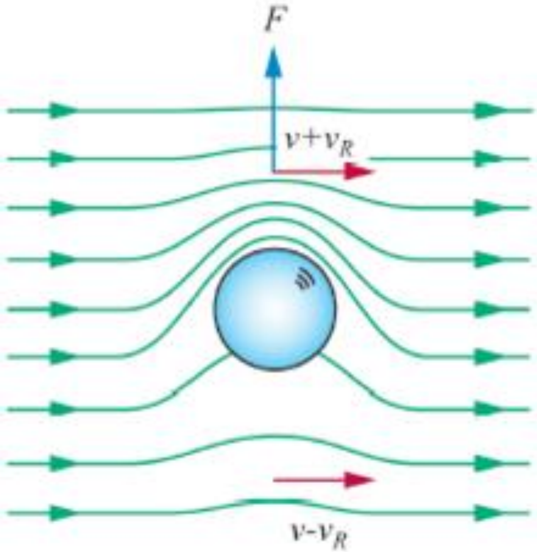


对理想流体，即使小球旋转，流体也不会对小球产生浮力以外的作用力。

非理想流体







平动，球上下方压强相等，无横向力。

球旋转起来，带动空气一起旋转。

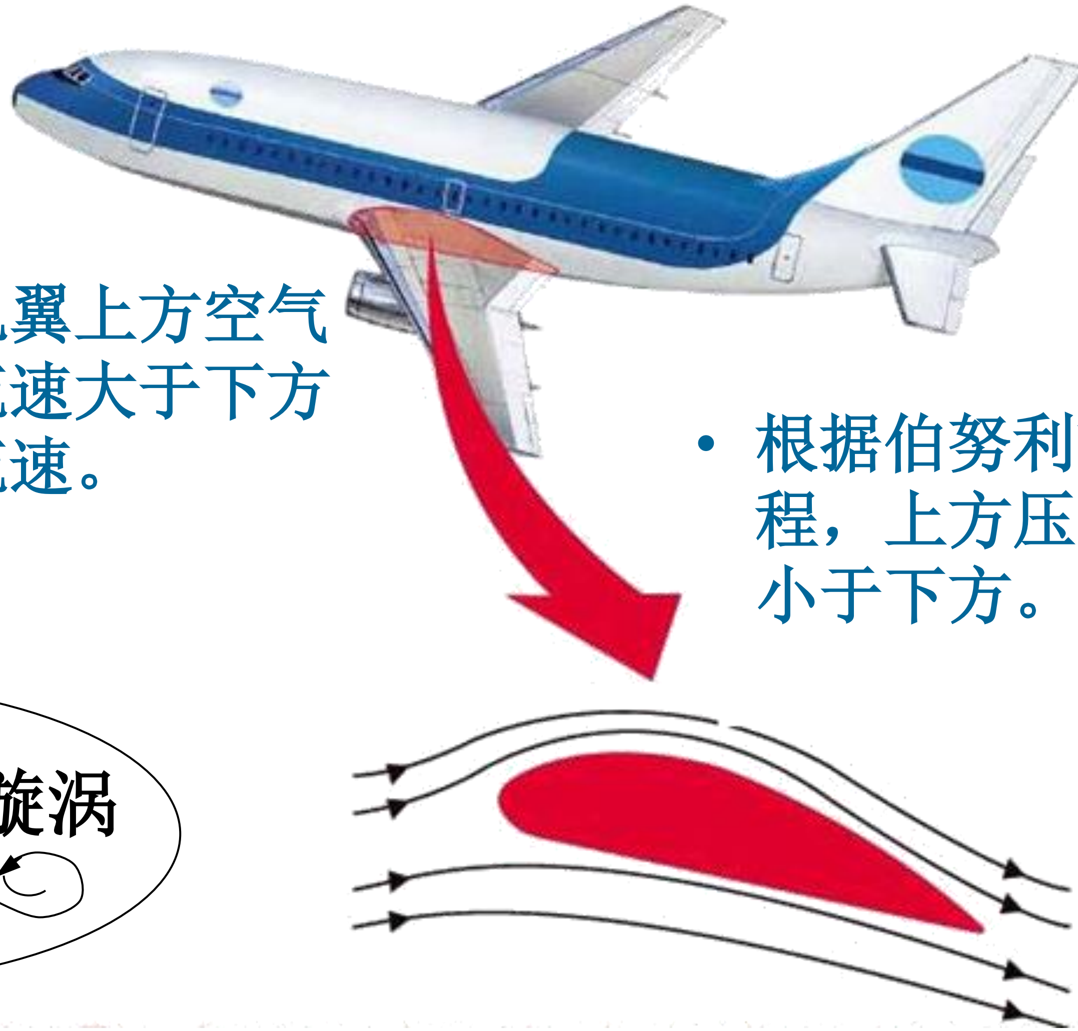
平动 + 转动，可能产生向上的升力。

平动 + 转动，可能使高速旋转的球在空中改变方向，走出弧线—马格努斯效应。

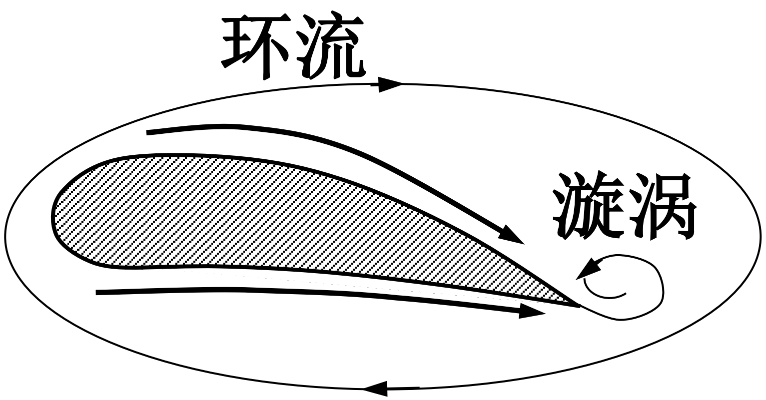
[神奇的“香蕉球”](https://www.bilibili.com/video/BV1PG4y1g7ab/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=f83b6ae110e6ca7bc5140d5c992e830e)

https://www.bilibili.com/video/BV1PG4y1g7ab/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=f83b6ae110e6ca7bc5140d5c992e830e

非对称物体在粘性流体中做平动，也可能产生向上的升力。



- 机翼上方空气流速大于下方流速。
- 根据伯努利方程，上方压强小于下方。



四、流体的相似性原理

两种不同的流体流动系统，如果二者的边界条件相似、雷诺数相同，则两种流动系统具有相同的动力学特征。

- 不断发展的学科

三元流动理论	多相流
环境流体力学	高温气体动力学
电磁流体力学	生物流体力学
化学流体力学	地球流体力学
爆炸力学	计算流体力学
流变学	非牛顿流体力学

[猫的流变学](https://www.bilibili.com/video/BV1gL411s75G/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=f83b6ae110e6ca7bc5140d5c992e830e)

https://www.bilibili.com/video/BV1gL411s75G/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=f83b6ae110e6ca7bc5140d5c992e830e

作业

马文蔚教材 4-43，4-44

赵远参考教材 6-3，6-6，6-7，6-10，6-12，6-14 共8道题