内容回顾

重力场中的静止流体

$$p_B = p_A - \int_{z_A}^{z_B} \rho g \mathrm{d}z$$

若密度为常量

$$= p_A - \rho g (z_B - z_A)$$

流体的连续性原理（质量守恒）

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V$$

对于稳定流动

$$\rho v \mathrm{d}S = 常量$$

伯努利方程（功能原理）

重力场中的稳定流动的理想流体

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = 常量$$

第十四章
相对论

引　言

●相对论产生的历史背景

经典物理：伽利略时期 —— 19世纪末，
经过300年发展，达到全盛的“黄金时代”。

形成三大理论体系

1. 机械运动：以牛顿运动定律和万有引力定律为基础的经典力学；
2. 电磁运动：以麦克斯韦方程组为基础的电动力学；
3. 热　运　动：以热力学三大定律为基础的宏观理论、以统计物理描述的微观理论。

19、20世纪交汇之际，物理学界普遍处在一种喜悦乐观的气氛之中。不少物理学家认为，重要的基础物理学定律都已经稳固地建立了。

“理论物理实际上已经完成了，所有的微分方程都已经解出，青年人不值得选择一种将来不会有任何发展的事去做。”——菲利普·冯·乔利 致 普朗克

但在1900年英国皇家学会一次学术会议上，著名物理学家，享有“开尔文勋爵”称号的威廉·汤姆孙却指出了一些担忧：“动力学理论断言热和光都是运动的方式，现在这种理论的优美性和清晰性被两朵乌云遮蔽得黯然失色了。”

两朵乌云？

后来，这两朵乌云酝酿出了一场物理学革命的风暴。在不断地探索和解决问题的过程中，孕育出近代物理学的两大成果：

狭义相对论　　量子力学

教学基本要求

一 理解伽利略变换及牛顿力学的绝对时空观。

二 理解狭义相对论的两条基本原理，掌握洛伦兹变换式。

三 理解同时的相对性，以及长度收缩和时间延缓的概念，理解狭义相对论的时空观。

四 掌握狭义相对论中质量、动量与速度的关系，以及质量与能量间的关系。

14-1 伽利略变换式 经典力学的绝对时空观

一、经典力学的绝对时空观

绝对的空间，就其本性而言，是与外界任何事物无关而永远是相同的和不动的。—— 牛顿

绝对的、真正的和数学的时间自身在流逝着，而且由于其本性而在均匀地、与任何其他外界事物无关地流逝着，也可以把它称为“延续性”。—— 牛顿

牛顿的绝对时空观：

空间先于运动而存在，是盛放物质的容器和物质运动的舞台。

- 时间、空间彼此独立，而且与物质、与运动无关。
- 时间间隔、空间距离的测量与参考系的选择无关。

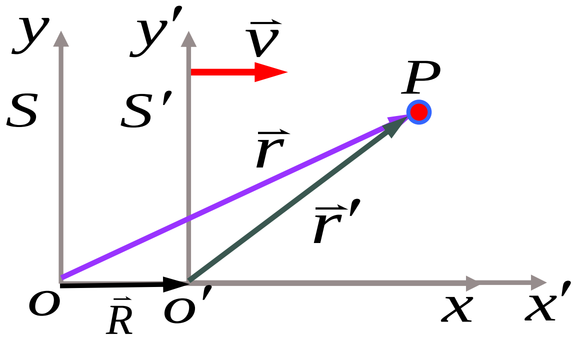
✸ 绝对时空观是经典力学的必然结果。

二、伽利略坐标变换与绝对时空观

两系中某点的时空坐标变换（伽利略坐标变换）：

正变换
$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

逆变换
$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$



$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\vec{r}_2' - \vec{r}_1' = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \rightarrow \Delta\vec{r}\,' = \Delta\vec{r}$$ 空间的绝对性

$$t_2' - t_1' = t_2 - t_1 \rightarrow \Delta t' = \Delta t$$ 时间的绝对性

$\left.\begin{array}{l}\text{空间的绝对性}\\ \text{时间的绝对性}\end{array}\right\}$ 绝对时空观

结论：时间和长度的测量与参考系无关。

三、伽利略变换与力学相对性原理

正变换

$$\vec{r}'(t)=\vec{r}(t)-\vec{R}$$

$$\vec{u}'=\vec{u}-\vec{v}$$

逆变换

$$\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)+\vec{R}$$

$$\vec{u}=\vec{u}'+\vec{v}$$

$$\rightarrow \vec{a}'=\vec{a} \qquad \Rightarrow \vec{F}'=m\vec{a}',\ \vec{F}=m\vec{a}$$

● 经过伽利略变换，牛顿运动定律的形式不变（协变、对称）。

◆ 而力学的其它各种规律，都可由牛顿定律导出。

力学相对性原理（伽利略相对性原理）：

❋ 宏观低速运动物体的力学规律在任何惯性系中形式都相同。

力学相对性原理的涵义

- 在一个惯性系中，无法通过力学实验来确定这个惯性系相对另一惯性系的运动。

- 从力学规律来讲，所有惯性系是等价的，不存在一个比其它惯性系更特殊的惯性系。

四、伽利略变换的困难

1. 伽利略变换与电磁规律之间的矛盾

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

设q对于S系静止，对S'以v运动，则由伽利略变换得

$$\vec{F} = \vec{F}_e, \quad \vec{F}' = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad \rightarrow \vec{F}' \neq \vec{F}$$

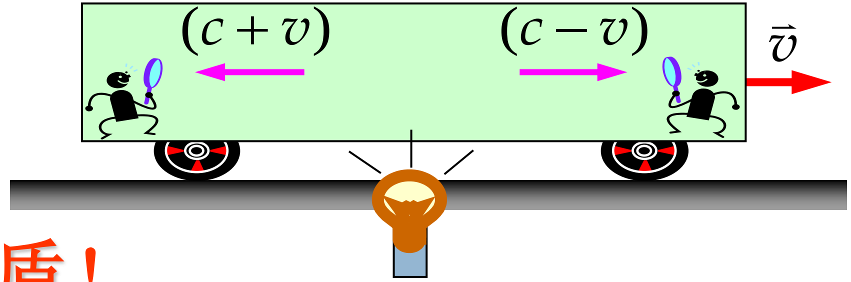
经典电磁规律不满足伽利略变换的协变性！

2. 光速不变与伽利略变换之间的矛盾

真空中的光速与参考系的选取无关： $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

由伽利略变换：

$$\vec{v}_{光对车} = \vec{v}_{光对地} - \vec{v}_{车对地}$$



光速与参考系选取有关

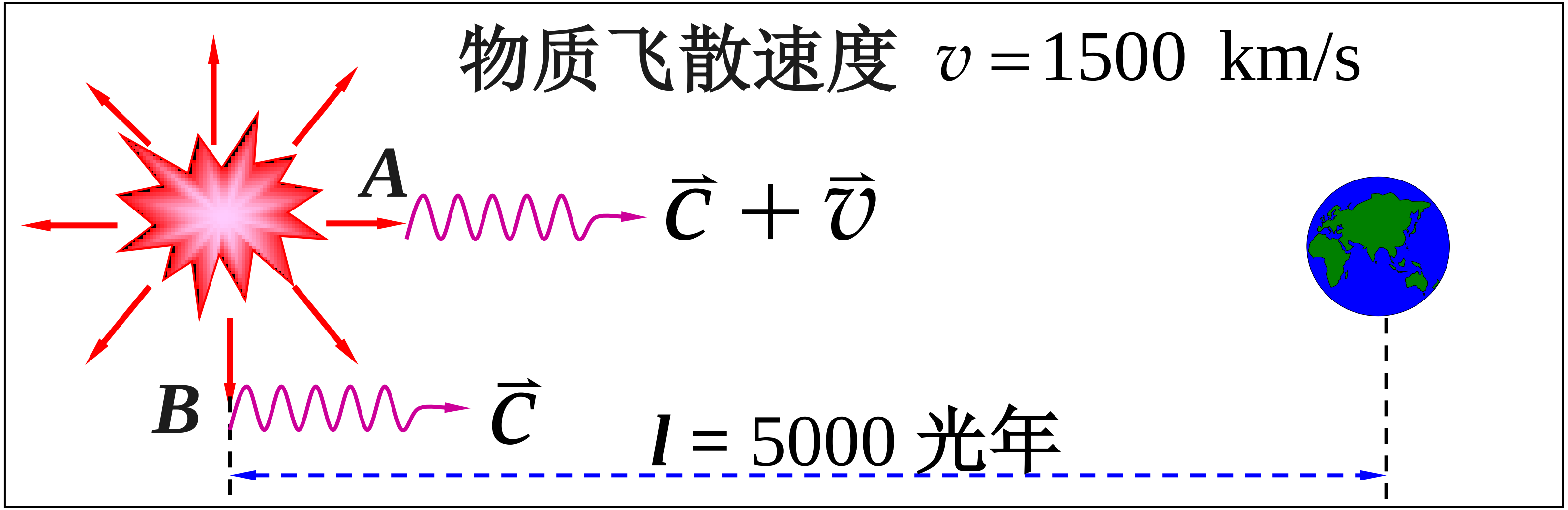
彼此矛盾！

史书《宋会要》记载：嘉祐元年三月，司天监言：客星没，客去之兆也。初，至和元年五月，晨出东方，守天关，昼见如太白，芒角四出，色赤白，凡见二十三日。

大致翻译：1056年农历元年三月，司天监说：客星消失了，是客人要离去的征兆，这个客星是在1504年农历元年五月出现的。早晨出现在东方，在天关附近，白天看上去像金星一样亮。光芒四射，颜色呈红白色。这种情况持续了23天。

公元1054年，人们发现天上出现了一颗“客星”，其耀眼的光芒，用肉眼在白天也看得见。史书记载它在天空中停留了22个月，产生了著名的金牛座蟹状星云。

其实这是一颗恒星在发生超新星爆发，它的外围物质向四面八方飞散的同时发光。

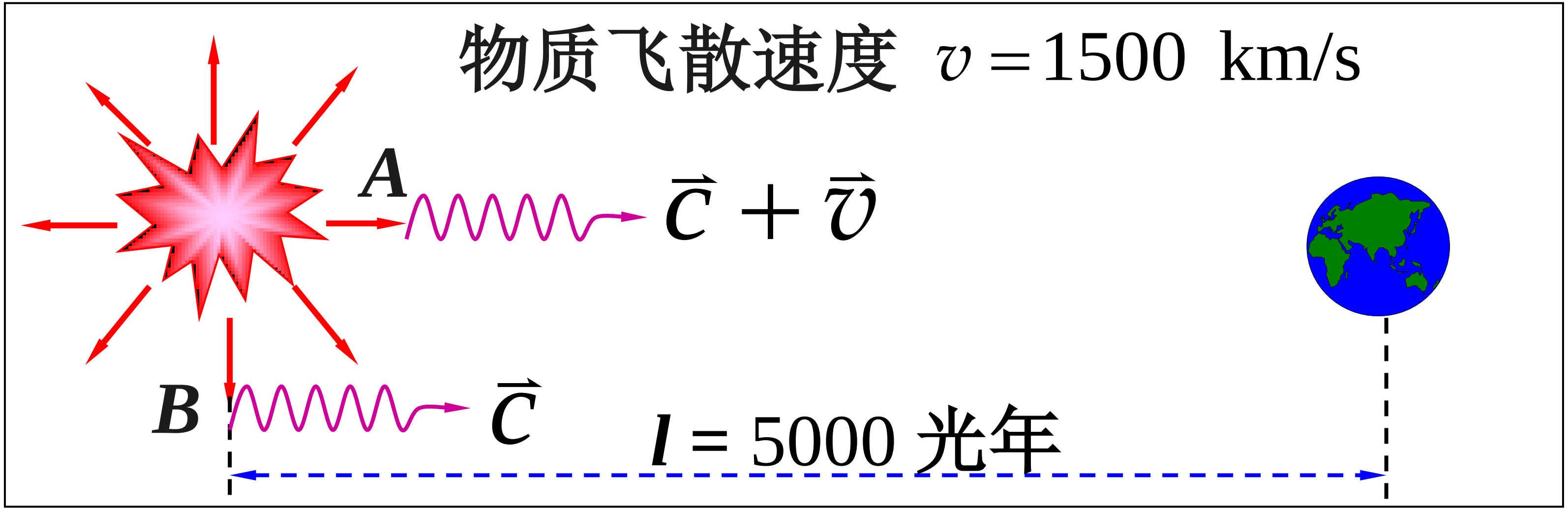


A 点光线到达地球所需时间：$t_A = \dfrac{l}{c+v}$

按伽利略变换计算强光的持续时间约 $\Delta t = t_B - t_A \approx 25$ 年 。

B 点光线到达地球所需时间：$t_B = \dfrac{l}{c}$

实际持续时间约为 22 个月，这怎么解释？



3. 寻找光以太（绝对参考系）的失败

◆ 光的传播与绝对参考系（光以太）

按照牛顿机械论观点将光波与机械波相比拟：

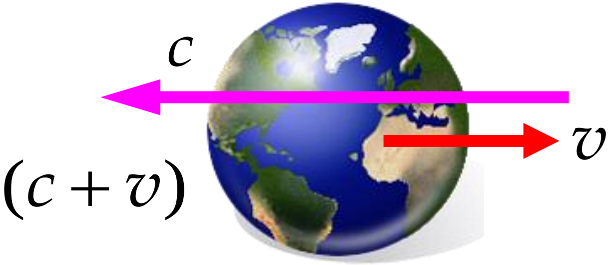
机械波	光（电磁波）
●依靠弹性介质传播。	●依靠弥漫于宇宙的“以太”传播。
●波速→ 波相对于静止介质参考系的速度（介质相对于该参考系静止）。	● c → 光相对“以太”参考系的速度（以太相对于该参考系静止）。

推论：整个宇宙间存在一个特殊的、绝对静止的参考系—以太参考系，*Maxwell*方程组只对绝对静止的“以太”参考系成立。

14-2 迈克尔孙-莫雷实验（否定了绝对参考系的存在）

实验目的： 寻找 “光以太”

思路： 光和地球相对以太的速度分别为c和v，将地球看作运动参照系，依伽利略变换，地球上测出的光速不是c，而与地球的运动速度和方向有关：



实验原理： 光的干涉。通过观测干涉条纹的移动来测量光速。

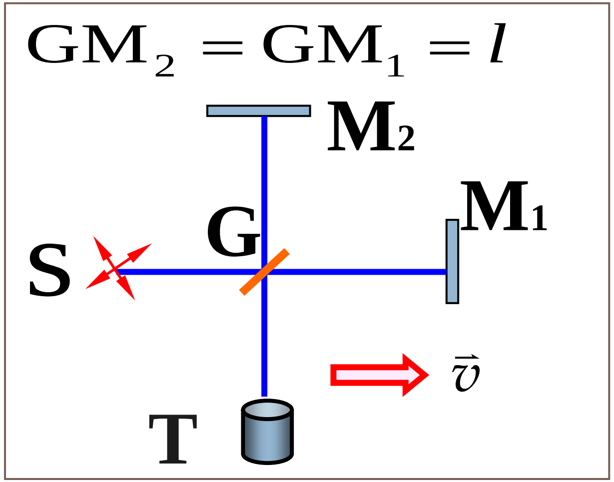
实验精度可达0. 01个条纹移动，按推测应该出现0. 4个条纹移动。

实验结果： 没有看到预期的条纹移动（零结果）。

迈克耳孙-莫雷实验

设“以太”参考系为 S系
实验室为S'系

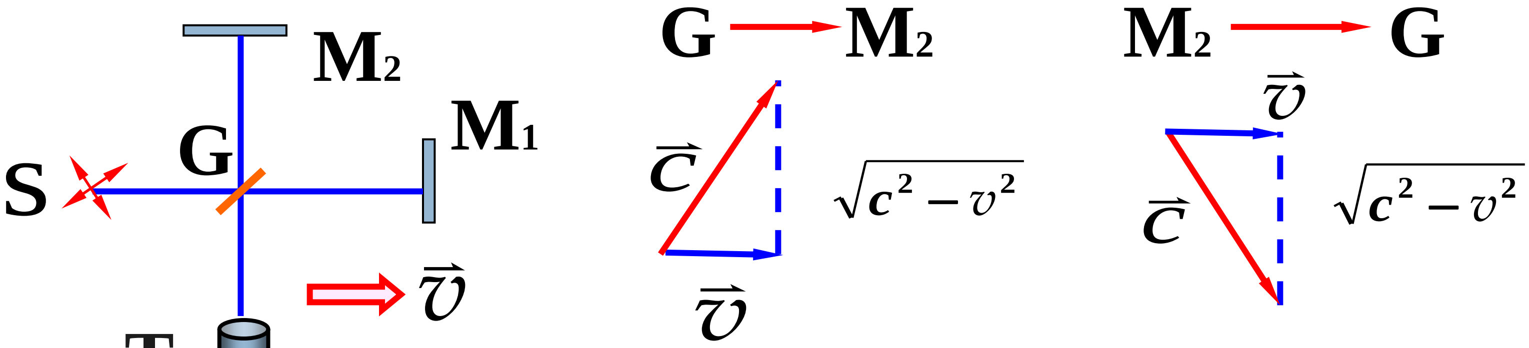
“以太”参考系是绝对静止系



$$\mathrm{G} \rightarrow \mathrm{M}_1 \rightarrow \mathrm{G}$$

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v}$$

$$= \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$



$$GM_2 = GM_1 = l$$

$$G \longrightarrow M_2 \longrightarrow G \qquad t_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c}\left\{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1} - \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}$$

$$= \frac{2l}{c}\left[\left(1+\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right)-\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\cdots\right)\right]$$

$$\varDelta = c\Delta t \approx l\frac{v^2}{c^2}$$

$$\Delta N = \frac{2\varDelta}{\lambda} \approx 2l\frac{v^2}{\lambda c^2}$$

$$l = 10\text{m}, \lambda = 500\text{nm}, v = 3\times 10^4\,\text{m/s}$$

$\Delta N \approx 0.4$　　仪器可测量精度：**0.01**个条纹移动

实验结果 $\Delta N < 0.01$

未观察到地球相对于“以太”的运动。

- 以后又有许多人在不同季节、时刻、方向上反复重做迈克耳孙-莫雷实验。近年来，利用激光使这个实验的精度大为提高，但结果却没有任何变化。

结论：作为绝对参考系的以太不存在。

推测可能影响光速的其它假设因素：“光速与光源运动有关”、“地球对光以太的曳引作用”等。

★但又被诸如光行差实验、双星实验等天文上的观测结果所否定。

各种实验事实说明：

光速c与参考系无关，与光源和观察者的运动无关。

●反思：牛顿理论的绝对时空观在新的实验事实面前出现了危机。

●出路：冲破传统思想和经典理论的束缚，在大量的实验事实面前创建新理论。

档案

姓名：阿尔伯特·爱因斯坦

性别：男

年龄：26岁（1905年）

职业：专利局三级技术员

单位：瑞士伯尔尼专利局

学历：物理学本科毕业

学校：苏黎世联邦理工学院

爱好：拉小提琴

特长：思维实验

相对论时空观的创立

爱因斯坦（1879--1955 ）

1905年，年仅26岁的爱因斯坦提出了两条基本假设，并在此基础上建立了狭义相对论（1915年又发表了广义相对论）。

狭义相对论（**Special relativity**）

—关于惯性系时空观的理论

广义相对论（**General relativity**）

—关于一般参考系及引力的理论

14-3 狭义相对论的基本原理 洛伦兹变换式

一、 狭义相对论的基本原理

1 爱因斯坦相对性原理

物理定律在所有的惯性系中都具有相同的表达形式，即所有的惯性参考系对运动的描述都是等效的。

2 光速不变原理

真空中的光速是常量，沿各个方向都等于c，与光源或观测者的运动状态无关，即不依赖于惯性系的选择。

这两条基本原理是狭义相对论的基础。

- 关键概念：相对性和不变性 。
- 伽利略变换与狭义相对论的基本原理不符。
- 狭义相对论的基本原理与实验事实相符合。

爱因斯坦相对性原理是伽利略力学相对性原理的发展。

讨论

爱因斯坦理论 —— 一切物理规律

牛顿理论 —— 部分力学规律

★不论是力学实验还是其它任何物理实验都不能判定一个惯性系比另一个更特殊。从而否定了绝对参考系的存在。

●光速不变与伽利略的速度相加原理针锋相对。

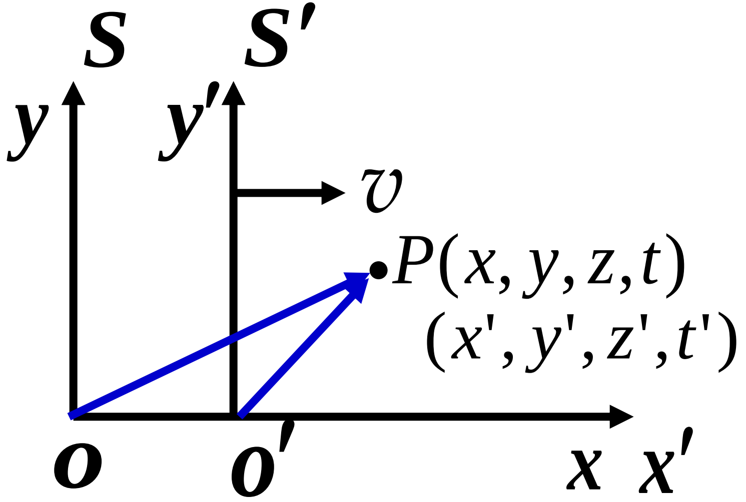
●观念上的变革：

- 牛顿理论：时、空及质量的测量与参考系无关。
- 狭义相对论理论：时、空及质量测量的相对性。

二、洛伦兹变换式

伽利略变换与狭义相对论的基本原理不相容。洛伦兹变换式原来是洛伦兹在1904年研究电磁场理论时提出的，当时他未给予正确解释。1905年爱因斯坦从狭义相对论基本原理出发，独立地导出了这个变换式。

设 $t=t'=0$ 时，o, o' 重合；此时发出一闪光，经一段时间光传到 P 点。



由光速不变原理：

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (2)$$

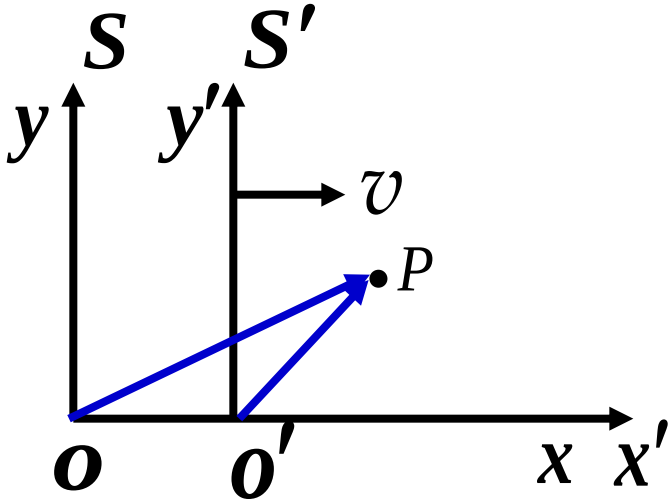
由于时空是均匀的（线性的）

$$x' = a x + b t \quad (3)$$

$$t' = \xi x + \eta t \quad (4)$$

根据上述四式，利用比较

系数法确定系数：$a\ b\ \xi\ \eta$



1　洛伦兹坐标变换式

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x - vt) \\
y' = y \\
z' = z \\
t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)
\end{cases}
$$

$$\beta = v/c$$

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

正变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \dfrac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \dfrac{v}{c^2}x') \end{cases}$$

显 然

$v << c$ 时，$\beta = v/c << 1$

$\gamma = 1\big/\sqrt{1-\beta^2} \approx 1$

转换为伽利略变换式。

2 洛伦兹速度变换式

利用洛伦兹坐标变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S系 $u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

S'系 $u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}, \quad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}, \quad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x\right) \end{aligned}\right\} \quad u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

同样根据 $\begin{cases} \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\mathrm{d}t - \dfrac{v}{c^2}\mathrm{d}x\right) \end{cases}$

可得
$$\begin{cases} u'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{u_y}{1-\dfrac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\beta^2} \\ u'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{u_z}{1-\dfrac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\beta^2} \end{cases}$$

洛伦兹速度变换式

正变换

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2} u_x\right)} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2} u_x\right)} \end{cases}$$

洛伦兹速度变换式

逆变换

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y = \dfrac{u'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x\right)} \\ u_z = \dfrac{u'_z}{\gamma\left(1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x\right)} \end{cases}$$

讨论 $u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x}$

如在S系中沿x方向发射一光信号,

在S'系中观察:

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \dfrac{vc}{c^2}} = c$$

光速不变

光速在任何惯性系中均为同一常量，利用它可将时间测量与距离测量联系起来。

例：设想一飞船以0.80c 的速度在地球上空飞行，如果这时从飞船上沿速度方向发射一物体，物体相对飞船速度为0.90c 。

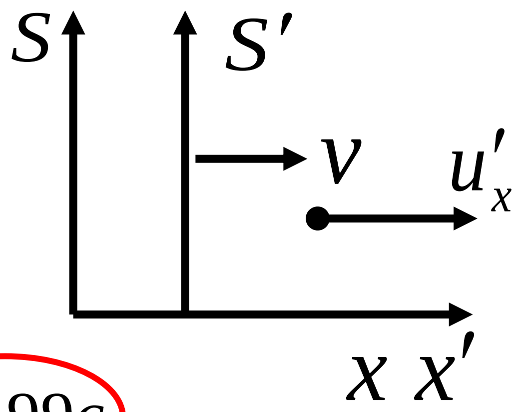
问：从地面上看，物体速度多大？

若不考虑相对论效应物体的速度为多大？

1.7c ?

解：选飞船参考系为 S'系

地面参考系为 S系



$$v = 0.80c \qquad u'_x = 0.90c$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{0.90c + 0.80c}{1 + 0.80 \times 0.90} \approx 0.99c$$

14-4 狭义相对论的时空观

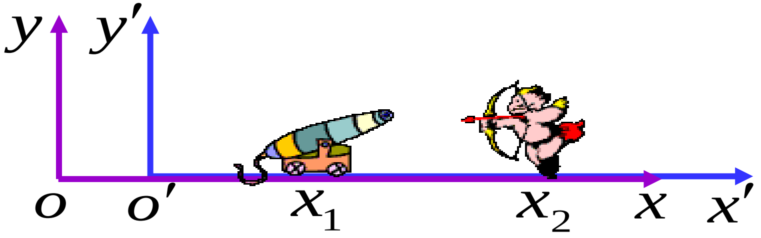
一、同时的相对性

在伽利略变换下，同时具有绝对性，与参考系无关。

✵在相对论意义下，设在S系中发生两事件：

t_1时刻x_1处发生一事件；t_2时刻x_2处发生另一事件。

两事件在S'中的时间变换：



$$t_1' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)$$

$$t_2' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$$

若 $t_1 = t_2,\quad x_1 \neq x_2$

则 $t_1' \neq t_2'$ “同时的相对性”

讨论

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$$

- $\begin{cases} \Delta t = 0 \\ \Delta x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \Delta t' \neq 0$
- $\begin{cases} \Delta t = 0 \\ \Delta x = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta t' = 0$

“同时”的相对性

➢在一个惯性系中不同地点同时发生的两件事，在相对于它运动的任一惯性系看来，并不是同时发生的。

➢在一个惯性系中同一地点同时发生的两件事，在相对于它运动的任一惯性系中也是同时发生的。

● 虽然同时性具有相对意义，但事件发生的因果关系（时间顺序）却并不会由于参考系的不同而颠倒。

例：子弹发射和击中目标两事件

子弹发射(t_1)：事件1；　　击中目标(t_2)：事件2。

显然，事件1与事件2具有因果关系。

在S系中：$t_2 > t_1$，$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$

在S'系中：$t_2' - t_1' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) = \gamma\Delta t(1 - \frac{vu}{c^2})$

其中，$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}$ 子弹飞行速度

广义上，u 称为信号传递速度。

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma \Delta t (1 - \frac{vu}{c^2})$$

光速为极限速度，故 $u < c$， $v < c$

$$\rightarrow (1 - \frac{vu}{c^2}) > 0$$

说明 $\Delta t'$与Δt 同号，故 $\Delta t' > 0.$

当$\Delta t < 0$时，类似地可得出$\Delta t' < 0.$

结论

相互关联的事件之间的因果关系（时间顺序）不会由于参考系的改变而颠倒。

● 对于不存在因果关系的两事件，公式

$$\Delta t' = \gamma \Delta t\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

中，$\Delta x / \Delta t$ 不代表信号传递速度，所以不存在

$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} < c$ 的限制。故可以有：

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

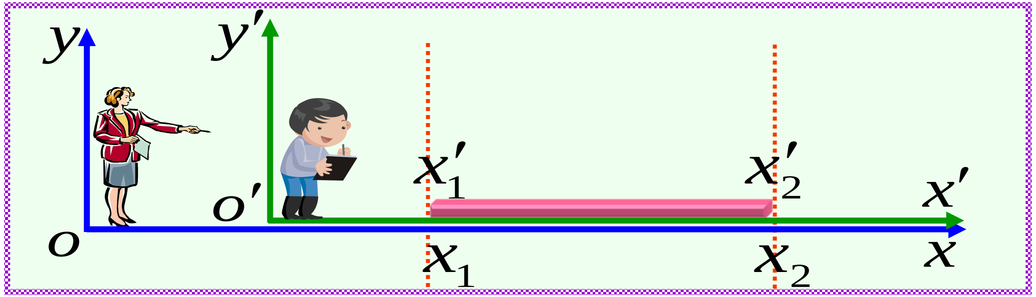
此时，两参考系中事件发生的时序可以颠倒。

二、长度的收缩(动尺变短)

长度的测量和同时性概念密切相关。

设杆静止于S'系，平行于x'轴放置。

S'系测得其长度（固有长度）：



$$l_0 = x_2' - x_1'$$

S系测得长度为:

$$l = x_2 - x_1$$

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

★因杆相对于S系运动，所以S系测杆长时，对其两端的坐标值的测量必须同时进行，即 $t_1 = t_2$

$$l_0=\frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{l=l_0\sqrt{1-\beta^2}} \qquad l<l_0$$

运动长度 l 小于固有长度（本征长度） l_0 。

●在与杆相对静止的参考系中测得的杆长 l_0为最长；而在与杆有相对运动的其它参考系中测得的杆长将缩短为l_0的 $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍（注意：只沿运动方向收缩）。

◆运动的杆缩短了。

长度收缩效应或洛伦兹收缩

讨论

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

- **长度收缩效应也是相对的。**

若杆静止于**S**系，则固有长度 $l_0 = x_2 - x_1$

$$l_0 = x_2 - x_1 = \frac{(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (t'_2 = t'_1)$$

$$l = x'_2 - x'_1 = l_0\sqrt{1-\beta^2} < l_0$$

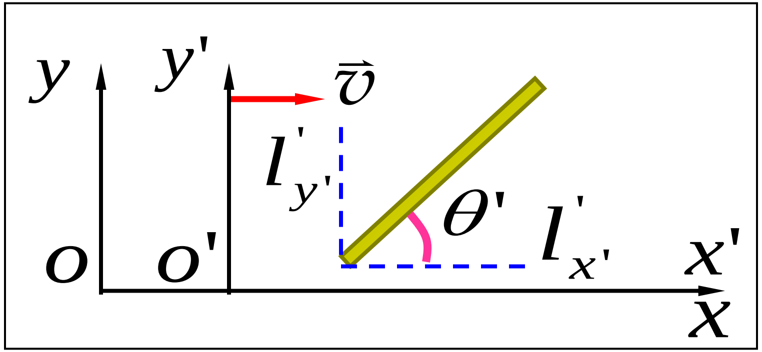
S′系中测得的杆长缩短了！

- 每个参考系的观察者，对于固定于自己参考系中的尺子，所测得的都是固有长度，其它运动参考系测得该尺子的长度都比自己的短。

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

- 只有沿着相对运动的方向，物体的长度才发生收缩。
- 长度收缩效应说明空间间隔是相对的。
- 当 $v << c$, $l \approx l_0$, 过渡到经典结果。

例 长为 1 m 的棒静止地放在 $O'x'y'$ 平面内，在 s'系的观察者测得此棒与 $O'x'$轴成 45° 角，试问从 s系的观察者来看，此棒的长度以及棒与 Ox 轴的夹角是多少？设 s'系相对 s系的运动速度 $v=\sqrt{3}c/2$。



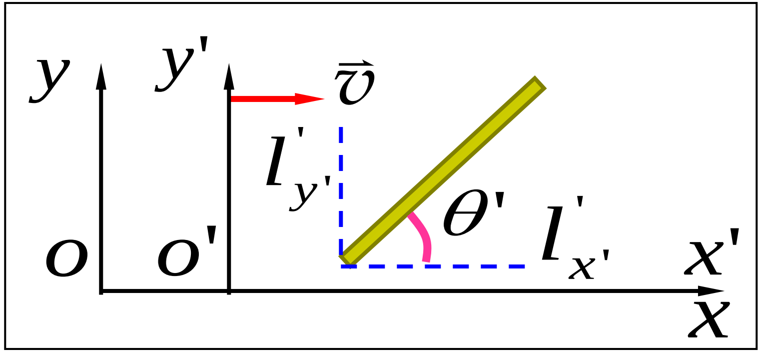
解： 在 S' 系 $\theta' = 45^\circ,\ l' = 1\text{m}$

$$l'_{x'} = l'_{y'} = (\sqrt{2}/2)\ \text{m}$$

$$v = \sqrt{3}c/2$$

在 S 系 $l_y = l'_{y'} = (\sqrt{2}/2)\ \text{m}$

$$l_x = l'_{x'}\sqrt{1 - v^2/c^2} = (\sqrt{2}/4)\ \text{m}$$



$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = 0.79\text{m}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{l_y}{l_x}\right) \approx 63.43^\circ$$

三、时间的延缓(动钟变慢)

设在相对于事件发生地静止的参考系**S**中同一地点先后发生的两事件的时间间隔为 $\tau_0 = \Delta t = t_2 - t_1$

τ_0：固有时（本征时）

在相对于事件发生地运动的参考系**S'**中，该两事件的时间间隔

$$\tau = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (x_1 = x_2)$$

即

$$\boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau_0}$$

$\tau = t_2' - t_1'$：运动时

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau_0 \rightarrow \tau > \tau_0$$

➢在相对于物体运动的参考系中，观测物体所经历某种过程的时间延缓（膨胀）了。

时间膨胀效应（钟慢效应）

●在相对于事件发生地静止的参考系中测得的时间间隔最短。

讨论

- 时间膨胀效应是相对的。

若事件发生地相对于S'系静止，则在S'系中测得的时间间隔$\Delta t'$为固有时τ_0，则 $\tau = \Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \tau_0$

可见，此时S系中测得的时间间隔$\tau > \tau_0$。

- 时间膨胀（延缓）意味着运动的钟变慢。

一个时钟，由一个与它有相对运动的观察者观察时，就比由与它相对静止的观察者观察时走得慢些。说明运动的钟变慢。

时间延缓效应的实验验证

1966年欧洲原子核研究中心对一种基本粒子μ子的研究发现，在静系中寿命为$\tau_0 = 2.2\times10^{-6}$s的$\mu$子，当其速度为$v = 0.9966c$时，它可以漂移八千米。

✵按牛顿定律，μ子寿命不因运动而变，故漂移距离

$$l = v\tau_0 = 3\times10^8\times2.2\times10^{-6}\approx660\text{m}$$

用相对论解释：当$v = 0.9966c$时，地面参考系看寿命为

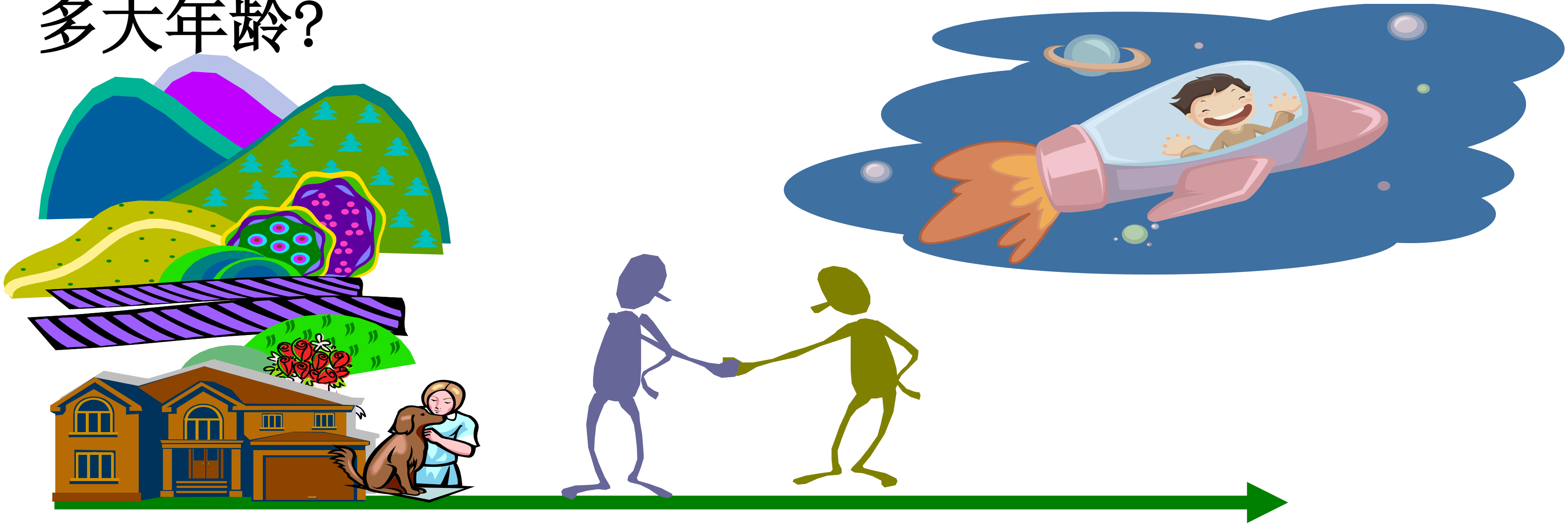
$$\tau = \tau_0/\sqrt{1-\beta^2} = 26.7\times10^{-6}\text{s}\approx12\tau_0$$

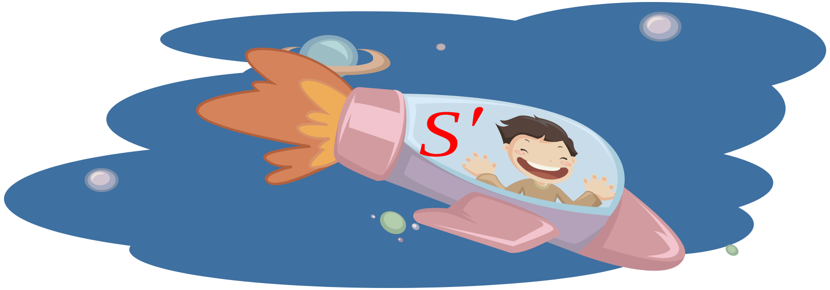
故漂移距离$l = v\tau\approx8\times10^3\text{m}$与实验结果相当吻合！

说明：时间延缓是时空自身的一种特性，与具体过程（生物的、化学的或是机械的）无关！包括人的生命。

双生子佯谬(Twin paradox)

一对双生兄弟，在他们20岁生日时，哥哥坐宇宙飞船去作一次星际旅游，设飞船作匀速直线运动时的速率为$0.9998c$。经过一年飞行之后回到地球时，弟弟已多大年龄?





取飞船为S'系，地球为S系；

飞船飞出为事件“1”，

飞船飞回为事件“2”。

从S系来看，哥哥在运动。

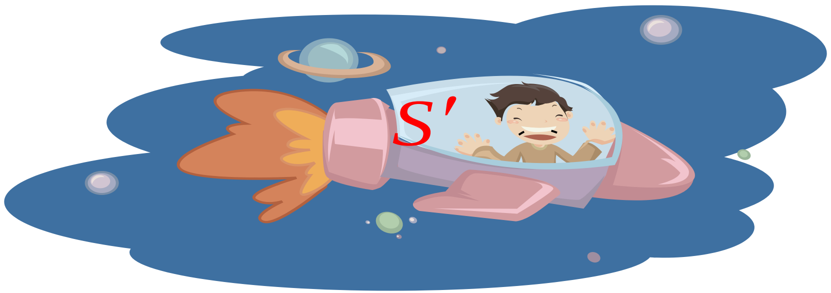
对S'系：

$$\Delta t_0' = t_2' - t_1' = 1\text{年}$$

S系上经过的时间：

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0.9998^2}} = 50\text{年}$$



从S'系来看，地球上的弟弟在运动。

此时S系上的时间为固有时，而S'上的为运动时。

对S系：

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1 = 1\text{年}$$

S'系上测得时间：

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0.9998^2}} = 50\text{年}$$

双生子佯谬：哥哥和弟弟到底是谁年轻？

人们迷惑不解，有人以此来否定相对论。

解释： 不是相对论有问题。是人们不恰当地应用了狭义相对论。

狭义相对论只适用于惯性系，飞船来去要加速和减速，不是惯性系。因此飞船上不能用狭义相对论的变换公式来计算上述所经历的全部时间。

广义相对论证明地球上的弟弟年老的结论是正确的。

注意

1. 时间延缓是一种相对效应。

2. 时间的流逝不是绝对的，运动将改变时间的进程。（例如新陈代谢、放射性的衰变、寿命等）

3. $v << c$ 时， $\Delta t \approx \Delta t'$ 。

例 设想一光子火箭以 $v = 0.95c$ 速率相对地球作直线运动，火箭上宇航员的计时器记录他观测星云用去10 min，则地球上的观察者测此事用去多少时间？

解： 设火箭为 S'系、地球为 s 系

$$\Delta t' = 10\text{min}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{10}{\sqrt{1-0.95^2}}\text{min} = 32.01\text{min}$$

运动的钟似乎走慢了。

狭义相对论的时空观

（1）两个事件在不同的惯性系看来，它们的空间关系是相对的，时间关系也是相对的，只有将空间和时间联系在一起才有意义。

（2）时-空不互相独立，而是不可分割的整体。

（3）光速 c 是建立不同惯性系间时空变换的纽带。

内容回顾

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$$

- $\begin{cases} \Delta t = 0 \\ \Delta x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \Delta t' \neq 0$
- $\begin{cases} \Delta t = 0 \\ \Delta x = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta t' = 0$

长度收缩效应或洛伦兹收缩：$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$

运动长度 l 小于固有长度（本征长度）l_0 。

时间膨胀效应或钟慢效应：$\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau_0$

运动时τ大于固有时τ_0 。

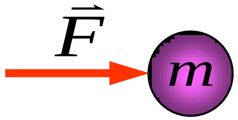
14-5 相对论性动量和能量

一、动量与速度的关系

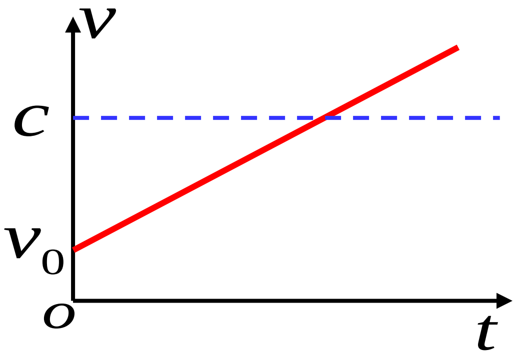
经典力学的问题

牛顿力学：质量与速度无关

设F为恒力，则



$$a = F/m,\ \ v = v_0 + at$$



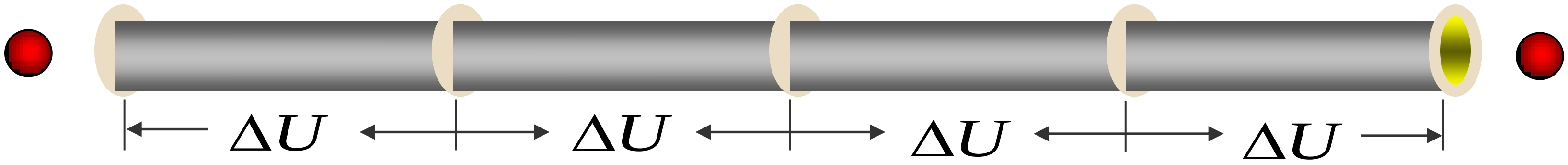
当 $t \to \infty:\ \ v \to \infty$

牛顿力学将导致速度无极限。

而这一结果已被直接的实验事实所否定。

美国斯坦福大学直线加速器，全长3.2千米

在美国斯坦福直线加速器中加速电子，加速器全长3.2千米，每米加以七百万伏电（$\Delta U = 7\times10^{6}\,\mathrm{V/m}$）。



按经典理论将计算出电子速度应达到

$$v = 8.6\times10^{10}\,\mathrm{m/s} >> c$$

但实际测量出的值为

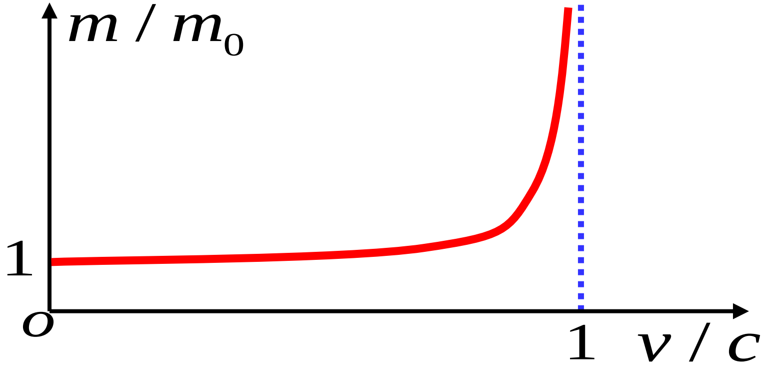
$$v = 0.999{,}999{,}9997c < c$$

◆事实说明在高速问题中牛顿理论须作修改。

★物理定律在不同的惯性系中应具有相同的表达形式。

为使力学定律（例如动量守恒定律）的形式在洛伦兹变换下保持不变，要求质量必须随速度变化：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



m_0：静止质量

m：相对论质量（总质量）

$v \to c,\ m >> m_0$

$v << c,\ m \approx m_0$ （经典质量概念）

● 牛顿力学是相对论力学在低速情况下的近似。

一般宏观物体运动速度远远小于光速，

试取v为10 km/s，则

$$\frac{m-m_0}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\approx\frac{1}{2}\beta^2\approx5.6\times10^{-10}$$

$$m\approx m_0$$

微观粒子速率通常接近光速，

例如 $v=0.98c$ 的中子，有 $m=5.03m_0$

相对论性动量表达式

（保持动量的经典力学形式）

$$\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma m_0\vec{v}$$

仍然用动量的变化率来定义质点所受的力，我们可得到相对论动力学的基本方程。

二、狭义相对论力学的基本方程

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}\,t}=m\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t}$$

$$m=m(v)$$

◆合外力 $\vec{F}$ 与加速度 $\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$ 不在同一方向上，相互也不成正比。

●力的作用—改变物体的速度和质量。

当：$v<<c$， $m=m_0 \rightarrow \vec{F}=m_0\vec{a}$ 经典力学形式

现分析物体在恒力作用下作加速直线运动的问题：

$$F=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\rightarrow F=\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{F}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

可见： $v\rightarrow c$， $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\rightarrow 0$

在相对论概念下不会出现速度无极限情况，且速度极限就是光速c。

三、质量与能量的关系

质点从静止开始沿x轴运动，利用动能定理有

$$E_k = \int F_x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \int v\,\mathrm{d}p$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ 而 $$\mathrm{d}(pv) = p\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}p$$

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathrm{d}v$$

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2} - m_0 c^2$$

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+m_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2}-m_0 c^2$$

$$=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0 c^2$$

相对论动能

$$E_{\mathrm{k}}=mc^2-m_0 c^2=m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$$

当 $v \ll c$ 时， $E_{\mathrm{k}} \to \frac{1}{2} m_0 v^2$

静能量 $E_0=m_0 c^2$ 物体静止时所具有的能量。

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

总能量 $E = E_k + m_0c^2 = mc^2$

相对论质能关系 $\boxed{E = mc^2}$

质能关系指出：

物质的质量和能量之间有密切的联系。

讨论 相对论的总能量由静能与动能组成。

- 静能包含了物体所有的总内能，即

  分子的内能、势能、原子的电磁能、质子中子的结合能等。静止能数量相当可观。

例：**1 kg**物质相应的静止能量：

$$E_0 = m_0 c^2 = 1\times(3\times10^8)^2 = 9\times10^{16}\,\mathrm{J}$$

相当于200万吨汽油完全燃烧产生的热量。

所起作用举例：设每套房每天用电10小时，用电功率10 kW。现共有200栋大楼，每栋楼有100套房，用电情况全同，则年耗电总量为2.63×10^{15} J。 **1 kg**物质相应的静止能量相当于这些大楼用电约34年。

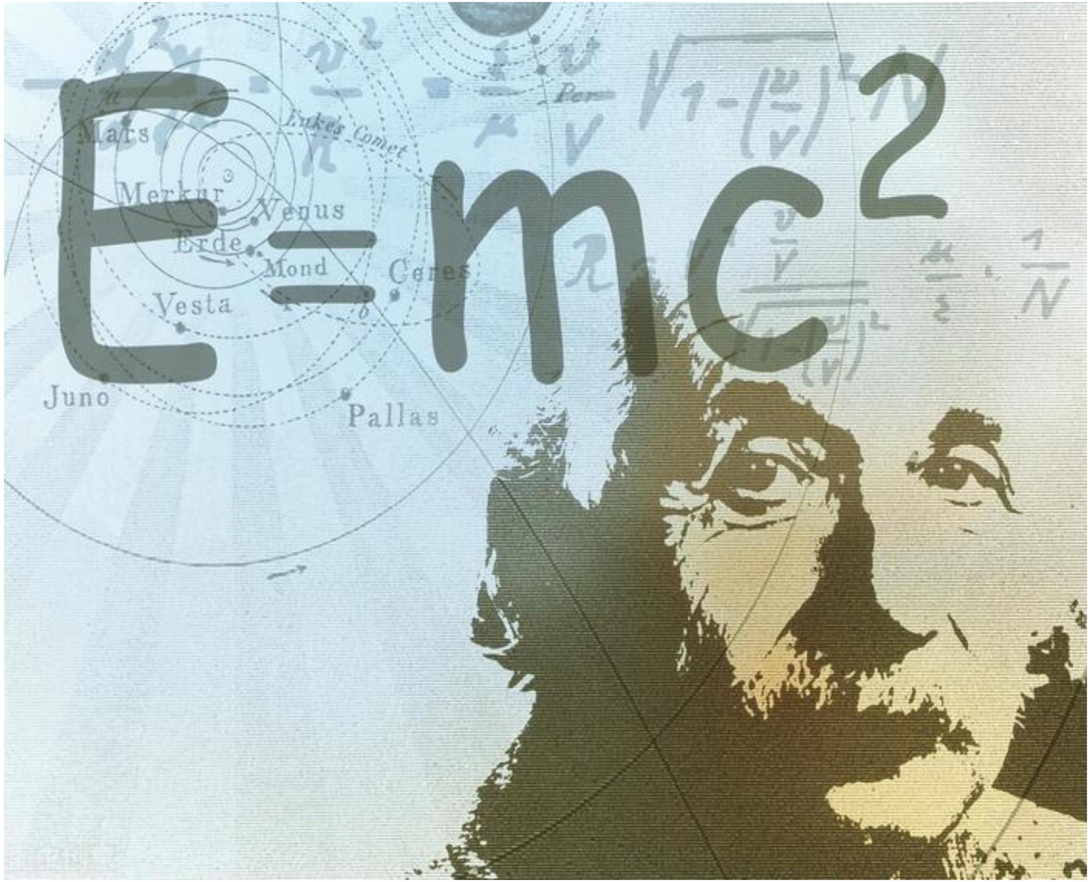
●在相对论意义下，粒子间相互作用时满足能量守恒关系

$$\sum_i E_i = \sum_i (m_i c^2) = const$$

$$\rightarrow \sum_i m_i = const$$

★物质间相互作用时质量守恒。

相对论能量和质量守恒是一个统一的物理规律。



相对论的质能关系为开创原子能时代提供了理论基础，这是一个具有划时代意义的理论公式。

四、质能公式在原子核裂变和聚变中的应用

1. 核裂变 $^{235}_{92}\mathrm{U}+^{1}_{0}\mathrm{n}\longrightarrow ^{139}_{54}\mathrm{Xe}+^{95}_{38}\mathrm{Sr}+2^{1}_{0}\mathrm{n}$

质量亏损 $\Delta m = 0.22\mathrm{u}$

原子质量单位 $1\mathrm{u} = 1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$

放出能量 $Q = \Delta E = \Delta m\cdot c^2 \approx 3.29\times10^{-11}\mathrm{J} \approx 200\mathrm{MeV}$

$1\ \mathrm{MeV} \approx 1.60\times10^{-13}\mathrm{J}$

1g 铀-235 的原子裂变释放的能量 $Q = 8.4\times10^{10}\mathrm{J}$

人民日报 号外

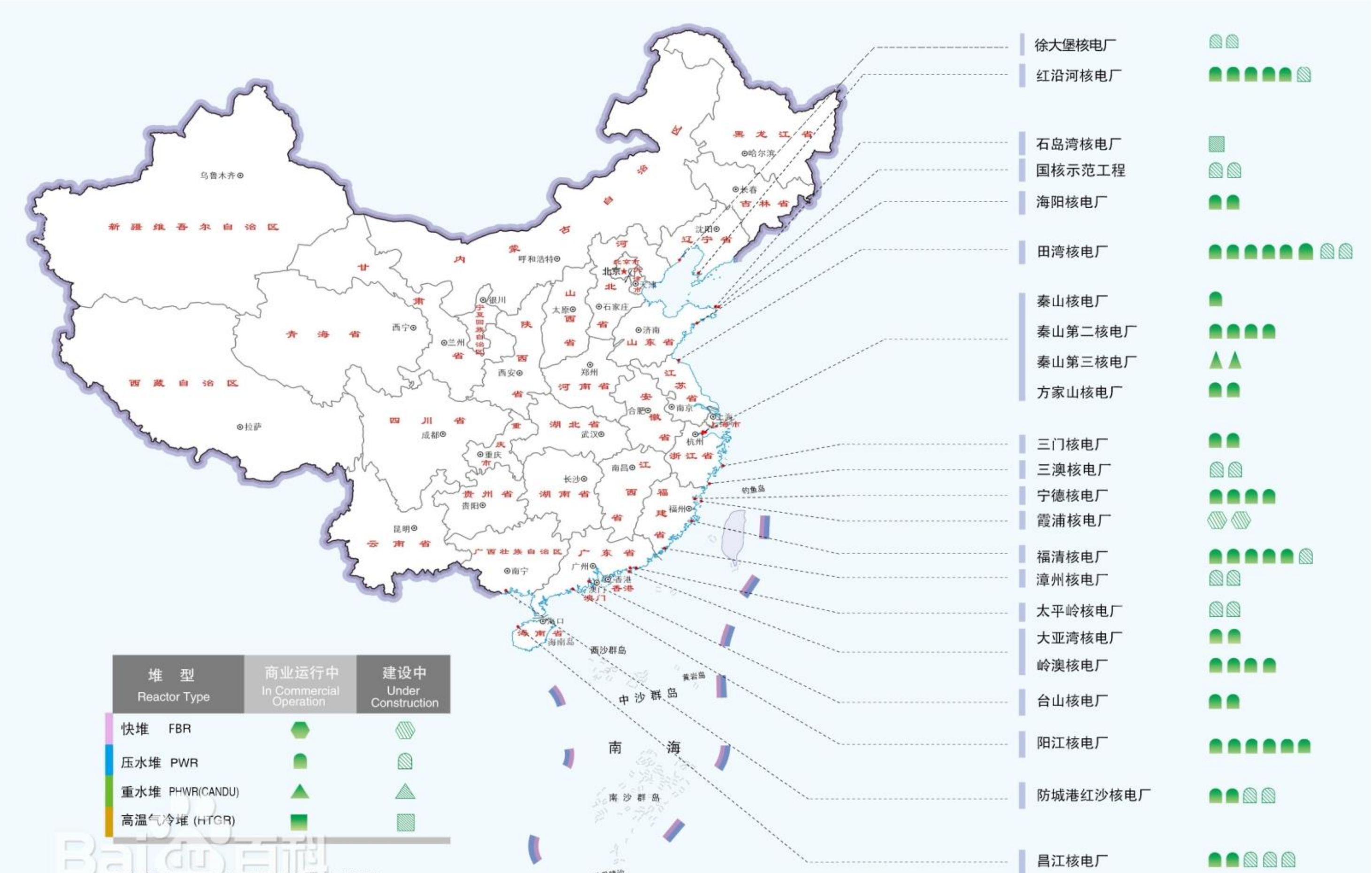
加强国防建设的重大成就，对保卫世界和平的重大贡献

我国第一颗原子弹爆炸成功

我国政府发表声明，郑重建议召开世界各国首脑会议，讨论全面禁止和彻底销毁核武器问题

原子弹爆炸（核裂变）

1964年10月16日在新疆罗布泊中国第一颗原子弹爆炸成功！



中国核电厂分布示意图（不包括台湾地区核电情况）
Distribution Map of Nuclear Power Plants in China Mainland

2. 轻核聚变

$$ {}_{1}^{2}\mathrm{H} + {}_{1}^{2}\mathrm{H} \longrightarrow {}_{2}^{3}\mathrm{He} + {}_{0}^{1}\mathrm{n} $$

质量亏损 $\Delta m = 0.026\mathrm{u} = 4.3\times10^{-29}\,\mathrm{kg}$

释放能量 $Q = \Delta E = (\Delta m)c^2 = 3.87\times10^{-12}\,\mathrm{J}$

轻核聚变条件：温度达到$10^8\,\mathrm{K}$时，使 ${}_{1}^{2}\mathrm{H}$ 具有10keV的动能，足以克服两 ${}_{1}^{2}\mathrm{H}$ 之间的库仑排斥力。

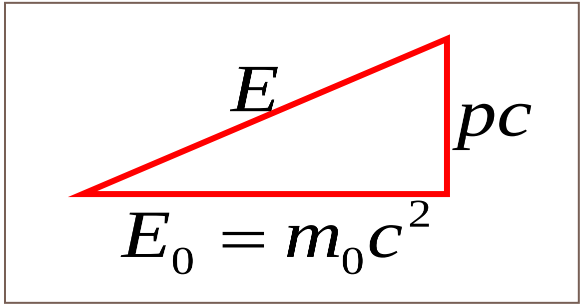
1967年6月17日，中国第一颗氢弹爆炸成功！

五、动量与能量的关系

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



$$\boxed{\boldsymbol{E^2 = E_0^2 + p^2 c^2}}$$

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2$$

极端相对论近似 $E >> E_0$， $E \approx pc$

$$\boxed{E^2 = E_0^2 + p^2c^2}$$

光子 $m_0 = 0 \qquad v = c$

$$p = E/c = mc$$

光的波粒二象性 $\begin{cases} E = h\nu \\ p = h/\lambda \end{cases}$

小结

1. 质速关系 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

2. 质能关系 $E = mc^2 = m_0c^2 + E_{\mathrm{k}}$

3. 动量能量关系 $E^2 = E_0{}^2 + (pc)^2$

4. 动量 $\vec{p} = m\vec{v} = \dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

5. 动力学方程 $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$

例: 设一质子以速度$v=0.80c$ 运动。其静能为938 MeV。求其总能量、动能和动量大小。

解： 静能 $E_0=m_0c^2=938\ \text{MeV}$

总能量 $E=mc^2=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\approx 1563\text{MeV}$

动能 $E_k=E-E_0=625\text{MeV}$

动量 $p=mv=\dfrac{Ev}{c^2}=6.67\times10^{-19}\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

动量 p 也可用右式计算: $pc=\sqrt{E^2-(m_0c^2)^2}$

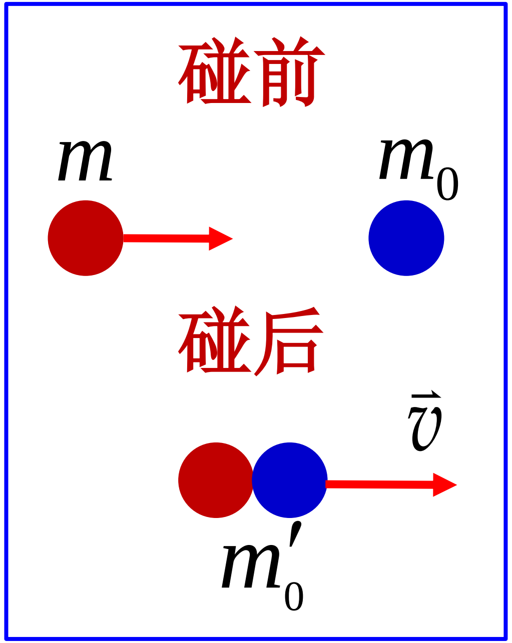
例：如图所示，一个静止质量为m_0，动能为$5m_0c^2$的粒子与另一个静止质量也为m_0的静止粒子发生完全非弹性碰撞，碰撞后复合成一个粒子，其静止质量为m_0'，并以速度$\vec{v}$运动。求：

（1）碰撞前系统的总动量是多少？

（2）碰撞前系统的总能量是多少？

（3）复合粒子的速度$\vec{v}$的大小？

（4）给出静止质量m_0'与m_0的关系。



解：能量与动量关系： $E^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2$

或写成： $p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-(m_0c^2)^2}$

总能量： $E=m_0c^2+E_{\mathrm{k}}$

（1）碰前运动粒子总能量： $E_1=5m_0c^2+m_0c^2=6m_0c^2$

碰前运动粒子的动量： $p_1=\frac{1}{c}\sqrt{E_1^2-(m_0c^2)^2}=\sqrt{35}m_0c^2$

碰前系统的总动量： $p_{1+2}=p_1+p_2=p_1=\sqrt{35}m_0c^2$

（2）碰前系统的总能量： $E_{1+2}=E_1+E_2=6m_0c^2+m_0c^2=7m_0c^2$

（3）碰撞后复合粒子的动量，总能量，质量，速度大小分别为：

$$p,\quad E,\quad m,\quad v$$

由动量守恒： $p = mv = p_{1+2}$

由总能量守恒： $E = mc^2 = E_{1+2}$

两式相除，得： $v = \frac{p}{E}c^2 = \frac{\sqrt{35}m_0c}{7m_0c^2}c^2 = \frac{\sqrt{35}}{7}c$

（4）复合粒子的静止质量为 m_0'，有：

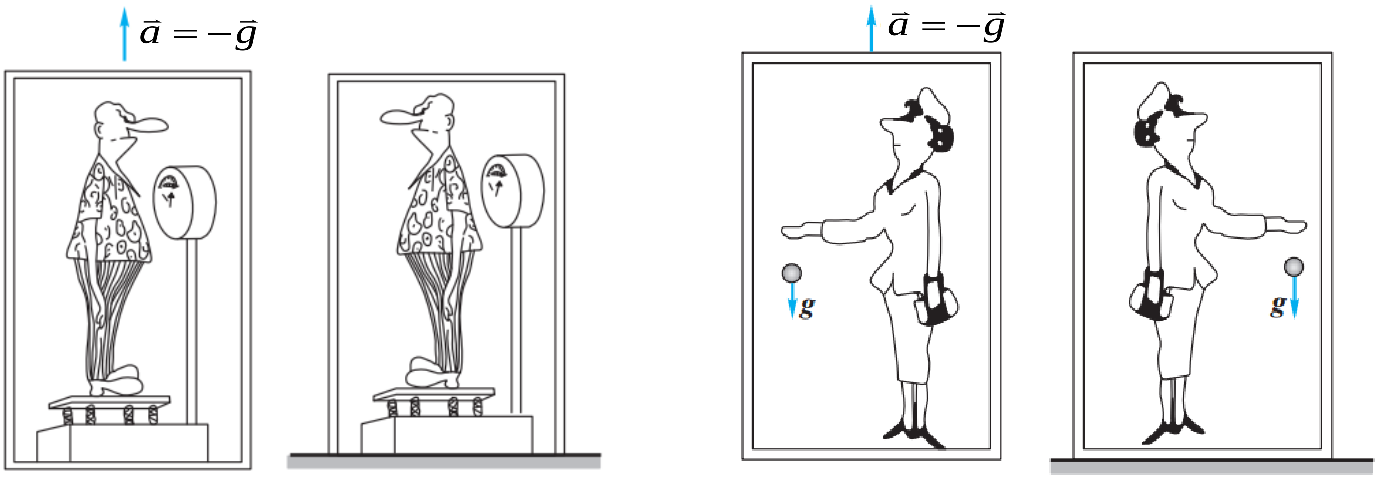
$$m_0'c^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2} = \sqrt{14}m_0c^2$$

则复合粒子的静止质量： $m_0' = \sqrt{14}m_0$ $\quad m_0' > 2m_0$

14-6* 广义相对论简介

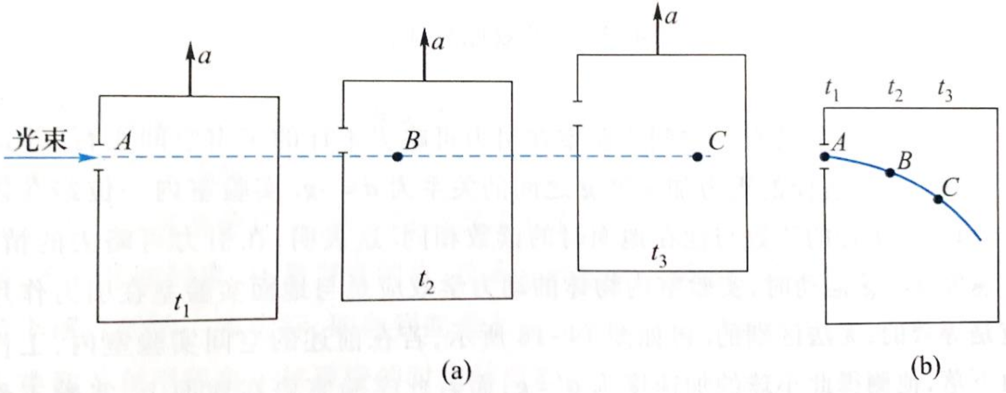
爱因斯坦于1915年提出了包括非惯性系在内的相对论，即广义相对论。

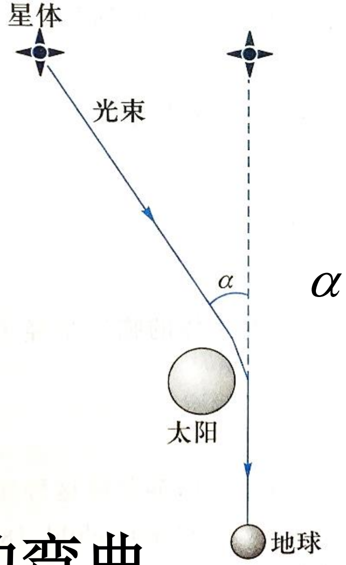
广义相对论的等效原理： 一个物体在均匀引力场中的动力学效应与此物体在加速参考系中的动力学效应是不可区分的、等效的。



太空　地面　太空　地面

1. 引力场中光线的弯曲





$$\alpha = \frac{4Gm}{c^2 R}$$

光线在重力场中的弯曲

2. 引力红移

3. 黑洞

4. 引力波

爱因斯坦以等效原理为基础，把非惯性系、引力场和弯曲时空三者统一起来，揭示了物质、时间、空间是紧密相连的：

物质决定了时空的曲率，

时空又决定着物质的运动。

牛顿的世界观

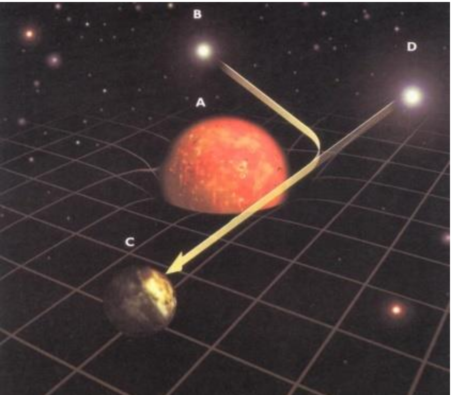
| space | time | energy | mass |

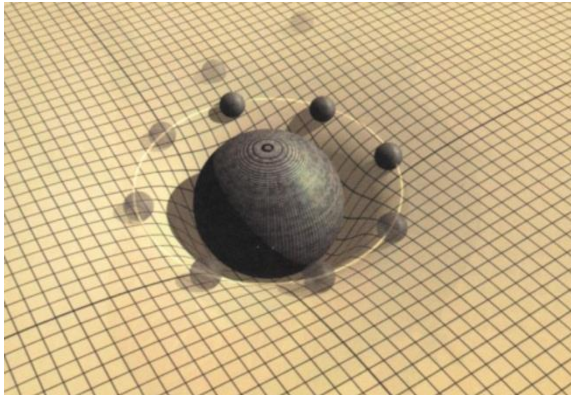
爱因斯坦世界观

$\boxed{\text{space + time+ energy+mass}}$

Mass tells spacetime how to curve.

Curved spacetime tells mass how to behave.





作业

教材后习题：

14-1～14-7，14-9，14-10，14-12，14-13，14-15，14-18，14-23，14-24，14-28，14-29

共17道题