

简谐振动的合成

1. 两个同方向、同频率简谐振动的合成

合振动仍然是简谐振动，而且角频率与分振动的角频率相同。合振动振幅和初相位可以由旋转矢量或三角函数计算。

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

2. 两个同方向、频率接近的简谐振动的合成

同方向频率接近的两个简谐振动所形成的合振动，不再是等幅振动，其振幅时而加强，时而减弱，这个现象叫做拍。其振幅变化的频率，叫做拍频。

$$\nu = |\nu_2 - \nu_1|$$

3. 两个相互垂直、同频率简谐振动的合成 合振动的轨迹方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

合振动是一个椭圆方程，它的形状由两个分振动的振幅及相位差决定。

$$0 < \Delta\varphi < \pi$$

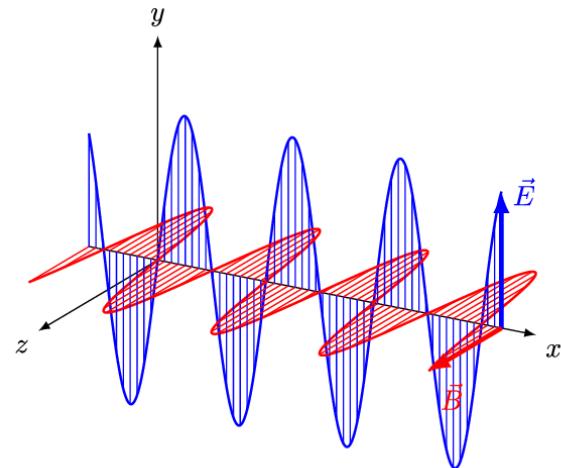
质点沿顺时针方向运动

$$\left. \begin{array}{l} -\pi < \Delta\varphi < 0 \\ \text{或 } \pi < \Delta\varphi < 2\pi \end{array} \right\}$$

质点沿逆时针方向运动

第十章 波动





- 振动在空间的传播过程叫波动。
- 振动是造成波动的原因。
- 波的传播不是物质的迁移，
而是振动状态（相位）和能量的传播。

波动的种类： 机械波、电磁波、量子波、引力波.....

机械波： ● 机械振动在弹性媒质中的传播过程。

机械波产生的条件 {

波源—激起波动的振动系统。
弹性媒质—能产生弹性形变的连续物质。

教学基本要求

- 一、理解描述简谐波的各物理量的意义及各量间的关系。
- 二、理解机械波产生的条件、振动与波动的关系。掌握由已知质点的简谐振动方程得出平面简谐波的波函数的方法。理解波函数的物理意义。
- 三、理解波的能量传播特征及能流、能流密度概念。

教学基本要求

四、了解惠更斯原理和波的叠加原理。理解波的相干条件，能应用相位差和波程差分析、确定相干波叠加后振幅加强和减弱的条件。

五、理解驻波及其形成，了解驻波和行波的区别。

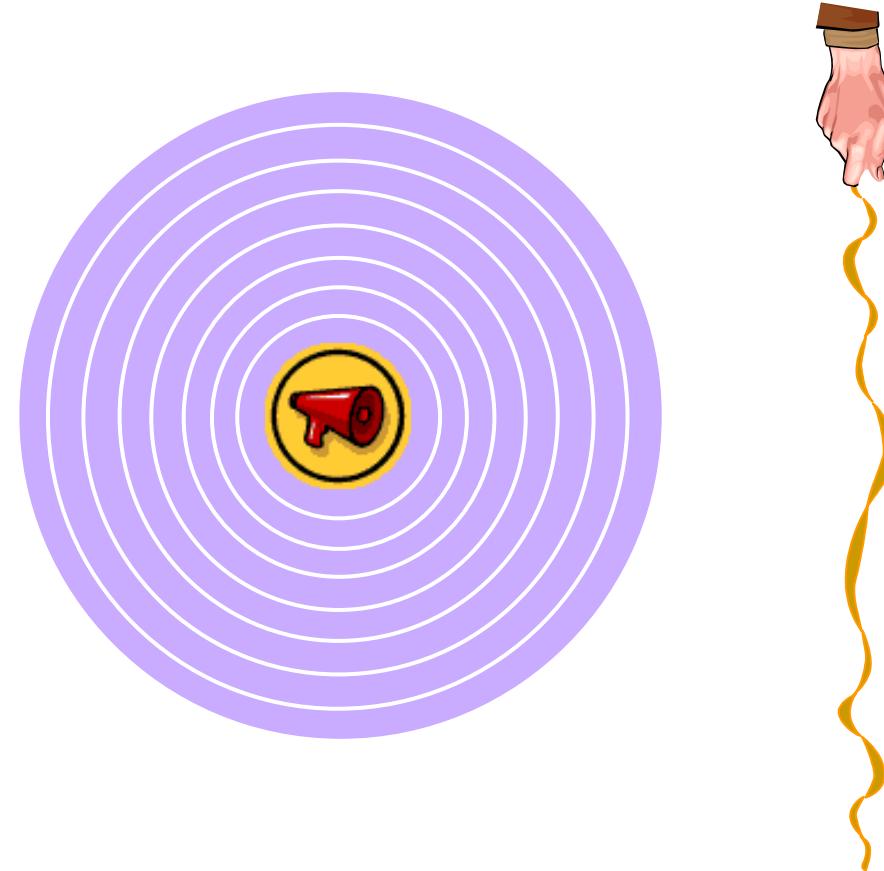
六、了解机械波的多普勒效应及其产生的原因。

七、了解声波、超声波和次声波、声强级。

10-1 机械波的几个概念

一 机械波的形成

- ◆介质中某处质点的振动状态，由于介质各部分之间的弹性相互作用而在整个介质中传播开来，形成了波动。



二 横波与纵波

横波—质点的振动方向与波的传播方向垂直的波。



纵波—质点的振动方向与波的传播方向平行的波。



- **机械**横波只能在具有切变弹性的介质中传播，即由切变弹性产生。（存在于固体、稠液体中。）
- 纵波由介质发生体变（也称容变）产生。（存在于固体、液体、气体中。）

相同点

- (1) 质元并未“随波逐流”，波的传播不是媒质质元的传播，而是振动状态的传播。
- (2) 机械波的传播必须同时有波源和弹性介质。
- (3) 各质点的周期、频率和起振方向都与波源相同。



波是振动状态的传播，介质的质点并不随波传播。

复杂波

例如：地震波

(纵波速度较快，上下振动，破坏性较弱；
横波速度较慢，左右振动，破坏性较强)

特点：复杂波可分解为横波和纵波的合成。

简谐波

若波源的振动是一个简谐振动，介质均匀无吸收，则由它产生的波就称为简谐波。

特点：波源及介质中各点均作简谐振动。

(本章重点研究对象)

三 波线 波面 波前

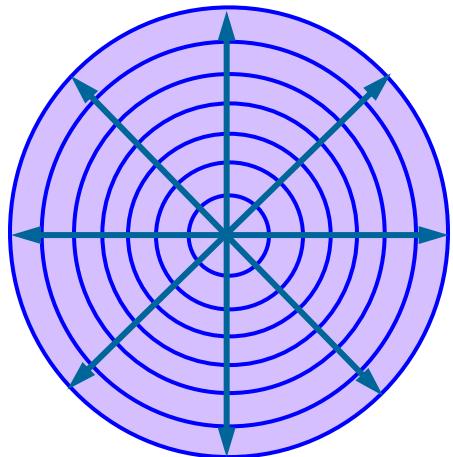
波线：沿波的传播方向画一些带有箭头的线。



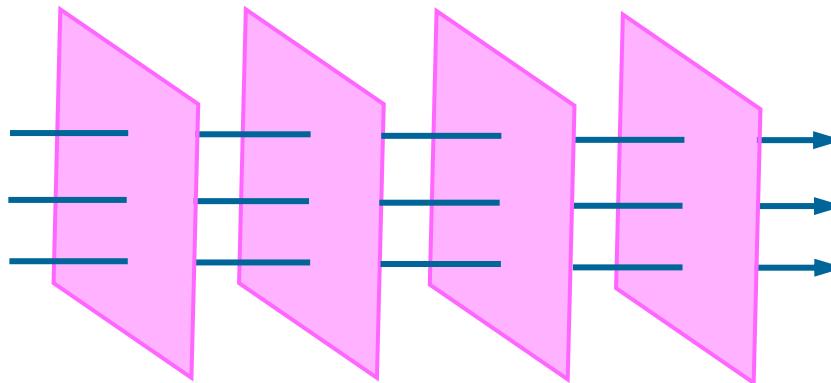
波面(同相面)：相位相同的点连成的曲面。

其中最前面波面称为波前（波阵面）。

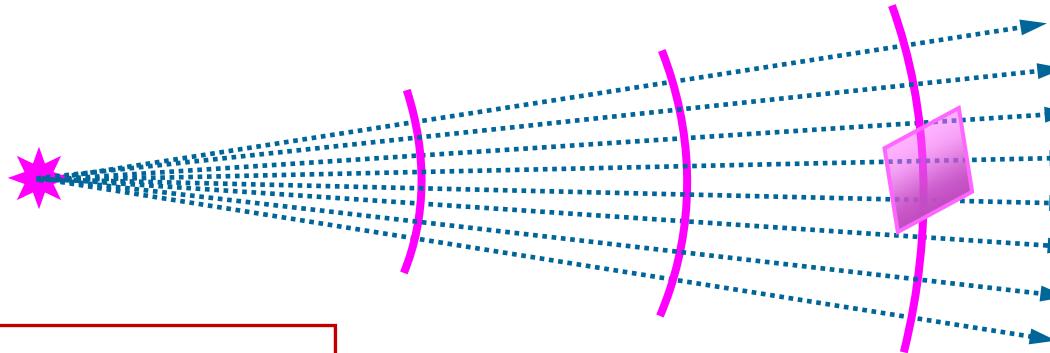
球面波



平面波



点波源产生的波在远处的一小部分可视为平面波。



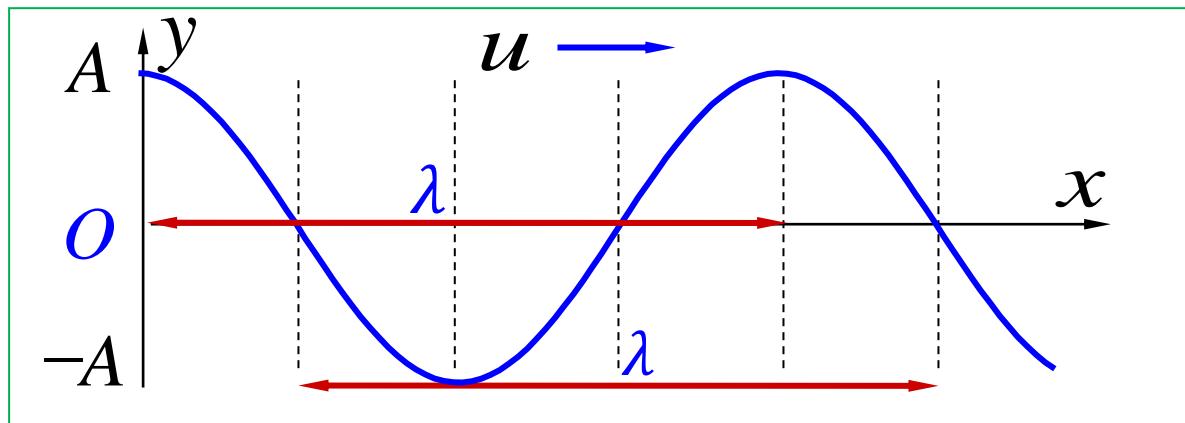
波线、波面的性质

- (1) 同一波面上各点振动状态相同。
- (2) 波阵面的推进即为波的传播。
- (3) 各向同性介质中，波线垂直于波面。

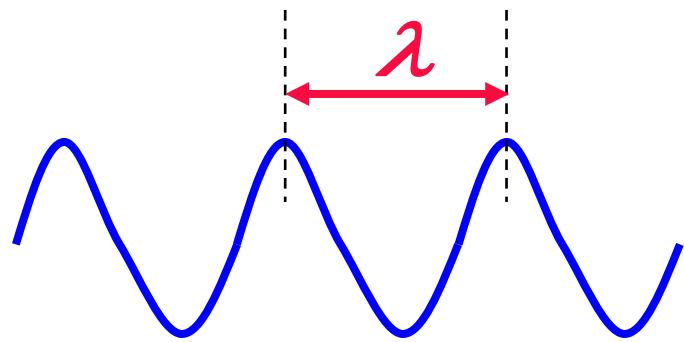
四 波长 波的周期和频率 波速

1 波长 λ

沿波传播方向两个相邻的、相位差为 2π （振动状态完全相同）的振动质元之间的距离，即一个完整波的长度。



横波：相邻 波峰——波峰 波谷——波谷



纵波：相邻 波疏——波疏 波密——波密

2 周期 T

波前进一个波长所需的时间，或一完整波通过波线上某点所需的时间。

3 频率 ν

单位时间内波动所传播的完整波的数目。（1 s内向前传播了几个波长）

由于波源作一次完全振动，波就前进一个波长的距离，所以波的周期（频率）等于波源的振动周期（频率）。

4 波速 u

振动状态在单位时间内所传播的距离。

波速代表振动状态（相位）的传播，故也称为相速。

- 理论和实验都证明，波速仅由介质的性质决定。

固体中的波速

$$\text{横波: } u = \sqrt{G / \rho}$$

$$\text{纵波: } u = \sqrt{E / \rho}$$

$$\text{液体和气体中纵波 } u = \sqrt{K / \rho}$$

ρ : 介质的质量体密度

G : 固体切变弹性模量

E : 固体杨氏弹性模量

K : 体积弹性模量

一些介质中的声速 (m/s)

空气 (15°C)	340	海水 (25°C)	1531
空气 (25°C)	346	铜 (棒)	3750
软木 (25°C)	500	大理石	3810
煤油 (25°C)	1324	铝 (棒)	5000
蒸馏水 (25°C)	1497	铁 (棒)	5200

★注意区分波速与振动速度

波速 (相速) — 振动的形式或者说振动状态在介质中的传播速度，完全由介质的性质决定。

振动速度 — 振动质点位移的时间变化率，由质点的振动规律决定。

四个物理量的联系

$$\nu = 1/T$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = Tu$$



周期或频率只取决于波源的振动。
波速只取决于介质的性质。

以上关系具有普遍的意义，对各类波都适用！

例 在室温下，已知空气中的声速 u_1 为 340 m s^{-1} ，水中的声速 u_2 为 1450 m s^{-1} ，求频率为 200 Hz 和 2000 Hz 的声波在空气中和水中的波长各为多少？

解：由 $\lambda = u / \nu$ ，频率为 200 Hz 和 2000 Hz 的声波在空气中的波长

$$\lambda_1 = \frac{u_1}{\nu_1} = \frac{340}{200} \text{ m} = 1.7 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = \frac{u_1}{\nu_2} = 0.17 \text{ m}$$

在水中的波长

$$\lambda'_1 = \frac{u_2}{v_1} = \frac{1450}{200} \text{ m} = 7.25 \text{ m}$$

$$\lambda'_2 = \frac{u_2}{v_2} = 0.725 \text{ m}$$

10-2 平面简谐波的波函数

一、平面简谐波的波函数

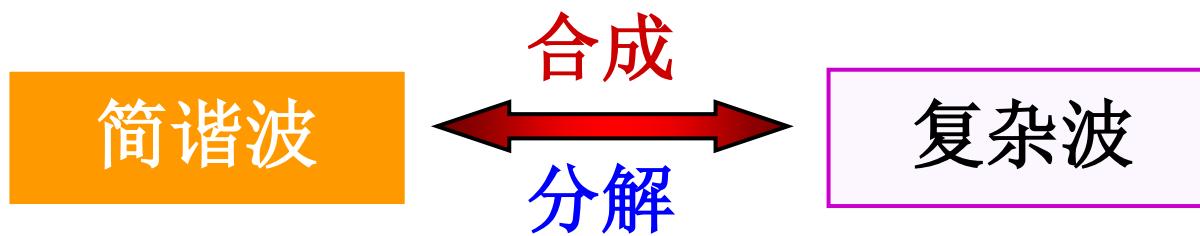
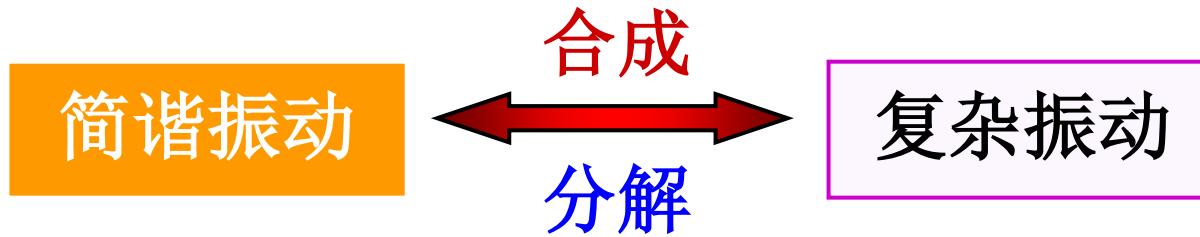
描述波传播的函数 $y(x, t)$ 叫做波动函数，简称波函数。

波函数应满足 $y(x + \Delta x, t + \Delta t) = y(x, t)$

其中 $\Delta x = u\Delta t$, u 为波速。

反映了波动是振动形式的传播这一特性。

在均匀、无吸收的介质中，当波源做简谐振动时，在介质中所形成的波，叫做平面简谐波。



沿正x方向传播的平面简谐波

已知O点的振动方程 $y_o = A \cos(\omega t + \varphi)$

O点的振动状态传到P点所需时间 $\Delta t = x / u$ 。

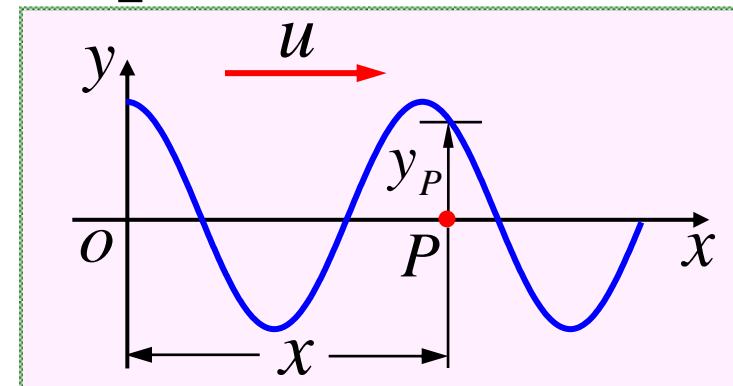
- ◆ t 时刻P处质点重复 $t - \Delta t$ 时刻O点的振动状态。
- ★ 故 t 时刻P点振动可由 $t - x / u$ 时刻O点的振动来表示：

$$y_P(t) = y_O\left(t - \frac{x}{u}\right) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

P为任意点

平面简谐波的波函数（波动方程）

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$



利用 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 和 $\lambda = uT$

可得波动方程的几种不同形式：

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$= A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right] \quad t/T \text{与 } x/\lambda \text{ 地位相当, } \lambda \text{ 亦可称为空间周期}$$

$$= A \cos \left[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi \right] \quad \text{定义 } k = 2\pi/\lambda, \text{ 称为角波数}$$

波函数

$$y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

质点的振动速度， 加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

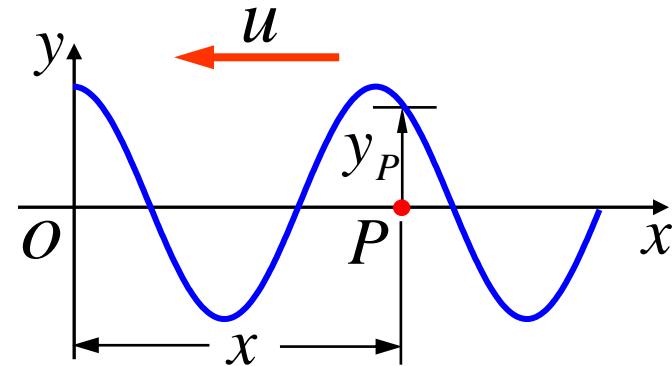
$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

如果波沿 Ox 轴负方向传播，则点 P 的振动比点 O 的早一段时间 $\frac{x}{u}$ ，则 P 点任意时刻的位移为：

$$y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$= A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right]$$

$$= A \cos \left[\underline{\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi} \right]$$



已知 O 点的振动规律：
 $y_o = A \cos(\omega t + \varphi)$

推广：若波沿 Ox 轴正方向传播，已知横坐标为 x_0 的点 Q 的振动方程为 $y = A \cos(\omega t + \varphi)$

则相应的波函数为： $y = A \cos[\omega(t - \frac{x - x_0}{u}) + \varphi]$

二 波函数的物理含义

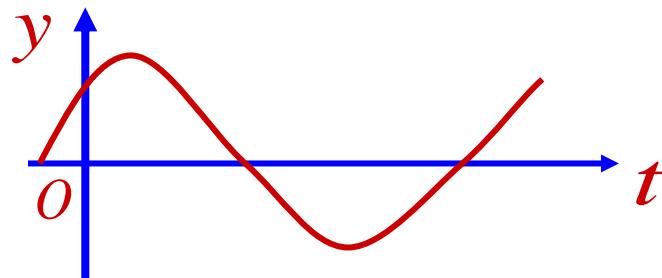
- 反映 y 、 x 、 t 三者之间的关系，它描述了振动在介质中传播的物理过程。

1 x 一定, t 变化

令 $\varphi' = -\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi$

则 $y = A \cos(\omega t + \varphi')$

$$y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$



表示 x 点处质点的振动方程 ($y - t$ 的关系)

$$y(x, t) = y(x, t + T) \text{ (波具有时间的周期性)}$$

- x 为定值时，波动方程代表该处质点的振动方程。

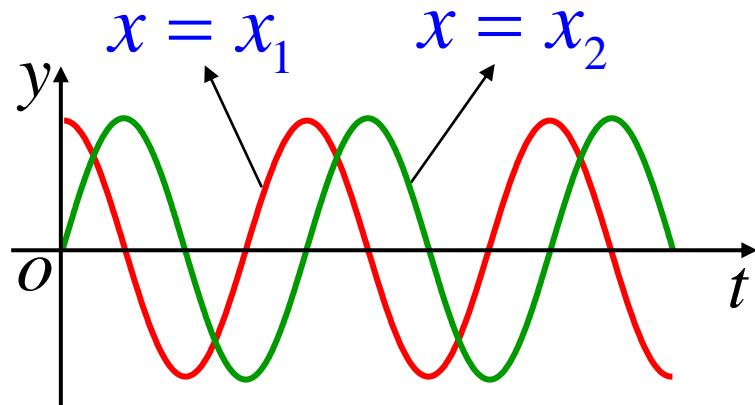
x 处质点振动的初相位为 $\phi' = -\frac{2\pi}{\lambda}x + \phi$

x_1 处质点振动的初相位比波源处落后 $2\pi x_1 / \lambda$ 。

x_2 处质点振动的初相位比波源处落后 $2\pi x_2 / \lambda$ 。

- 波线上各点都做同频率的简谐振动，但相位依次落后。

$$\phi'_2 - \phi'_1 = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$



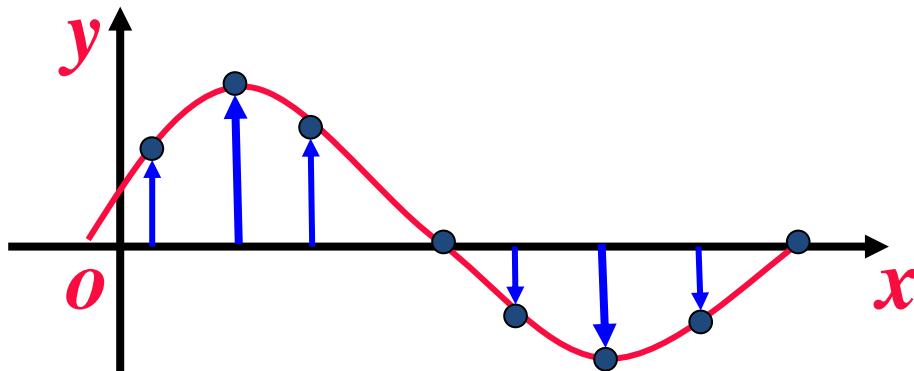
2 t 一定, x 变化

$$y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$

令 $\varphi'' = \omega t + \varphi = C$ (定值)

则 $y = A \cos\left[-\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi''\right]$

该方程表示 t 时刻波传播方向上各质点的位移,
即 t 时刻的波形
(y - x 的关系)



波函数

$$y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$

同一时刻，距离波源 O 分别为 x_1 和 x_2 的两质元的相位分别为

$$\varphi_1 = \omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \varphi \quad \varphi_2 = \omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda} + \varphi$$

其相位差为 $\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$

式中 $x_2 - x_1 = \Delta x_{21}$ 叫做波程差 $\Delta\varphi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x_{21}$

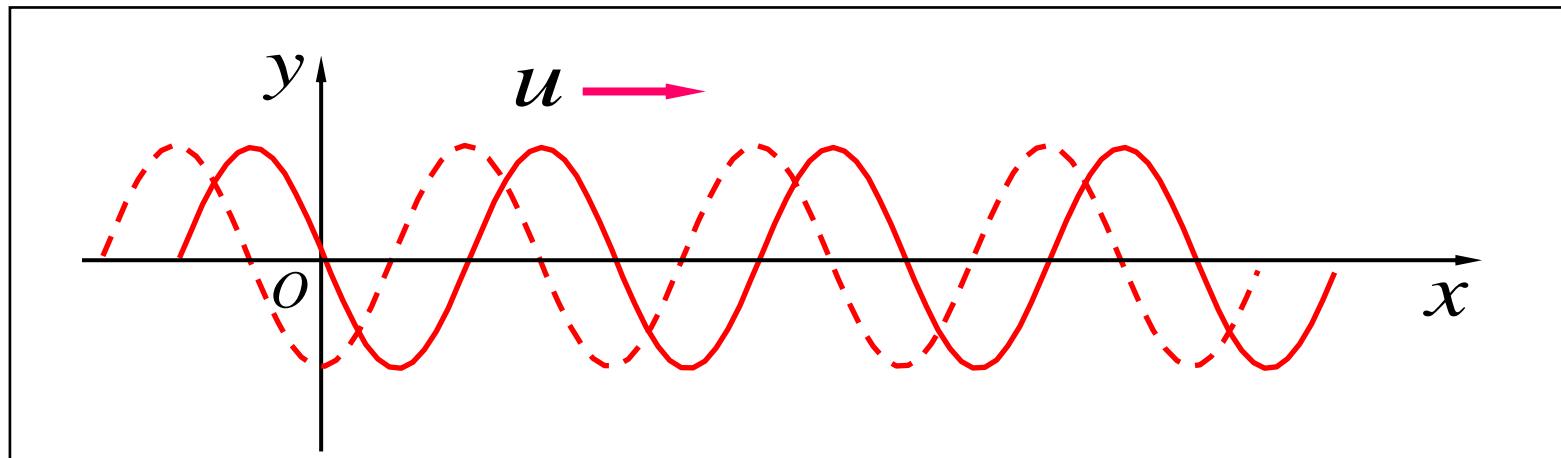
若 $x_2 > x_1$, $\Delta\varphi_{12} > 0$

即 $\varphi_1 > \varphi_2$, 也就是 x_2 的相位落后于 x_1 处的相位

3 x 、 t 都变

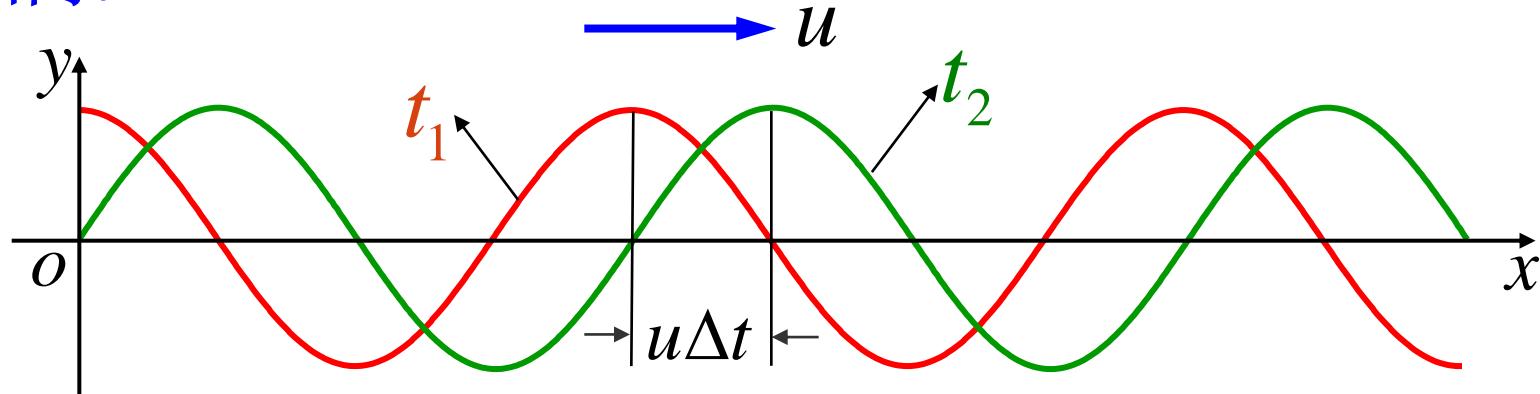
$$y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$

方程表示在不同时刻波线上所有质点的位移，即不同时刻的波形，体现了波的传播。因此这种波也称为行波。



$$\begin{aligned}
 y &= A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] \\
 &= A \cos\left\{\omega\left[(t + \Delta t) - \frac{(x + u\Delta t)}{u}\right] + \varphi\right\}
 \end{aligned}$$

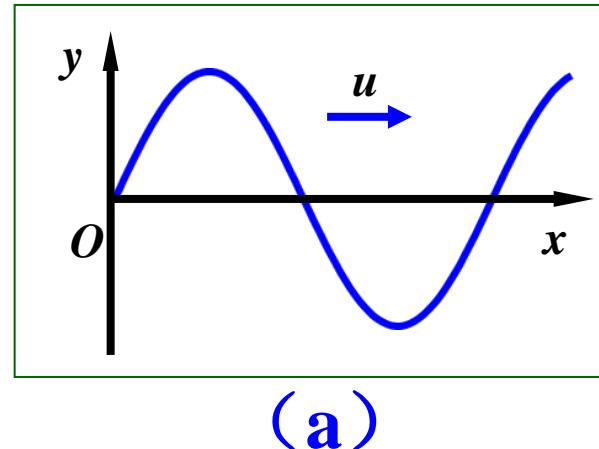
- $t + \Delta t$ 时刻, $x + u\Delta t$ 处的振动位移与 t 时刻, x 处的振动位移相同。



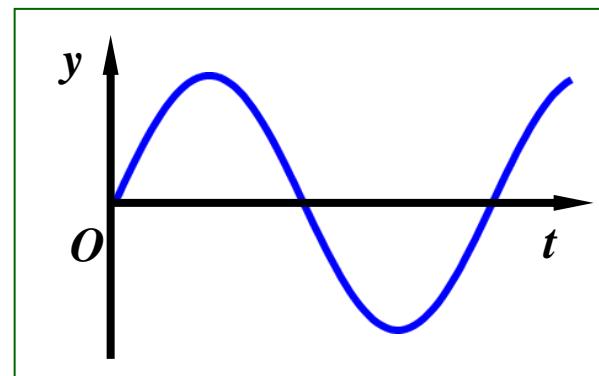
☆ 经过 Δt , 波向前传播了 $u\Delta t$ 的距离。

例：图（a）表示 $t = 0$ 时的简谐波的波形图，图（b）为一质点的振动曲线。则图（a）所表示的 $x = 0$ 处质元振动初相位与图（b）所表示的振动的初相位分别为（ ）

- (A) 均为零 (B) 均为 $\frac{\pi}{2}$ (C) 均为 $-\frac{\pi}{2}$
 (D) $\frac{\pi}{2}$ 与 $-\frac{\pi}{2}$ (E) $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$



(a)



(b)

例：一平面简谐波沿 x 轴负方向传播，角频率为 ω ，波速为 u 。

设 $t = \frac{T}{4}$ 时刻的波形如图所示，则该波的表达式为（ ）

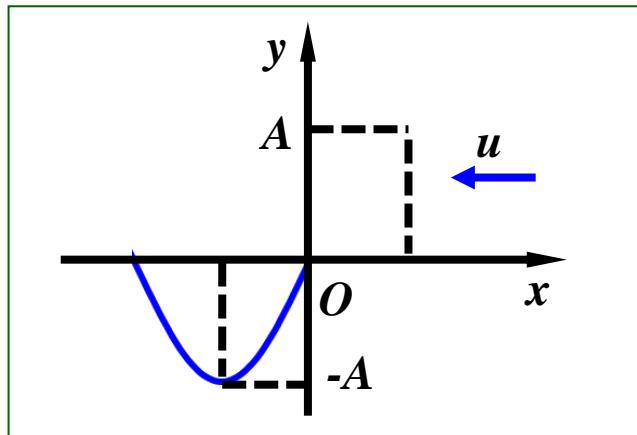
(A) $y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \pi \right]$

(B) $y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$

(C) $y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$



(D) $y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \pi \right]$



例 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A = 1.0 \text{ m}$, $T = 2.0 \text{ s}$, $\lambda = 2.0 \text{ m}$ 。在 $t = 0$ 时坐标原点处的质点在平衡位置沿 Oy 轴正向运动。求：

- (1) 波动方程；
- (2) $t = 1.0 \text{ s}$ 时的波形图；
- (3) $x = 0.5 \text{ m}$ 处质点的振动规律并作图。

解：(1) 写出波动方程的标准式

$$y = A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

利用初始条件，

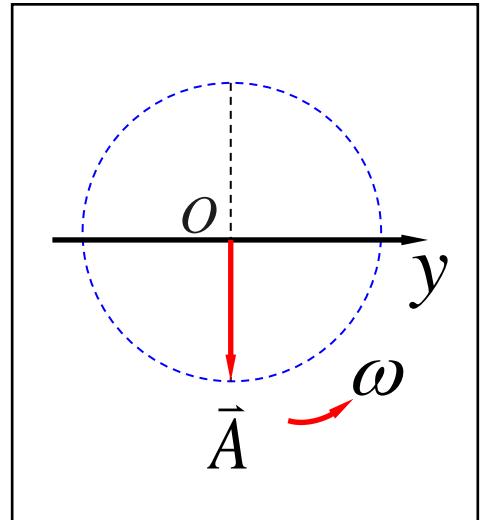
$t = 0, x = 0$ 时，有

$$y = 0, v = \frac{\partial y}{\partial t} > 0$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

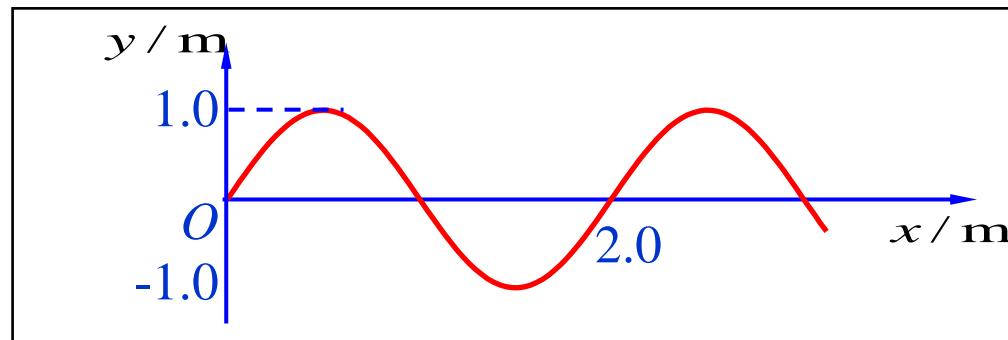
(x, y, t 的单位分别是m, m, s)



(2) 求 $t = 1.0\text{s}$ 时的波形图

将时间 t 代入 $y = \cos[2\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}]$, 得

$$\begin{aligned}y &= \cos[\frac{\pi}{2} - \pi x] \\&= \sin \pi x\end{aligned}$$



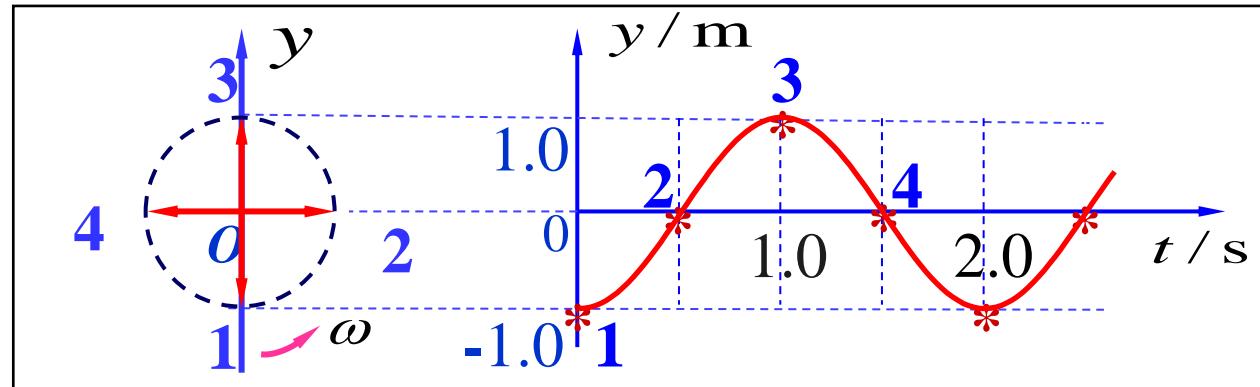
$t = 1.0\text{s}$ 时刻波形图

(3) $x = 0.5\text{m}$ 处质点的振动规律并作图

由 $y = \cos[2\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}]$

得 $x = 0.5\text{m}$ 处质点的振动方程

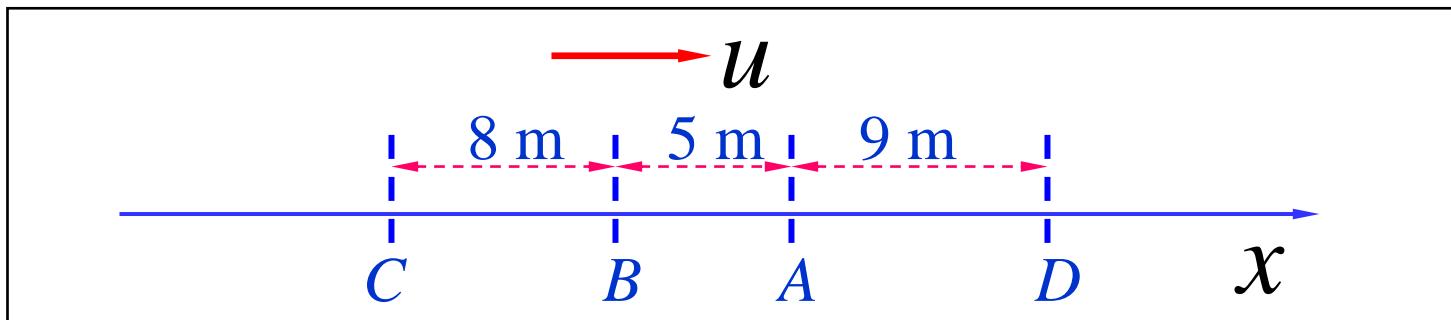
$$y = \cos(\pi t - \pi)$$



$x = 0.5\text{ m}$ 处质点的振动曲线

例 一平面简谐波以速度 $u = 20 \text{ m s}^{-1}$ 沿直线传播，
波线上点 A 的简谐运动方程是 $y = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t)$,
(y, t的单位分别是m, s) 。

- 求: (1) 以A为坐标原点, 写出波动方程;
(2) 以B为坐标原点, 写出波动方程;
(3) 求传播方向上点C、D的简谐运动方程;
(4) 分别求出BC, CD两点间的相位差。



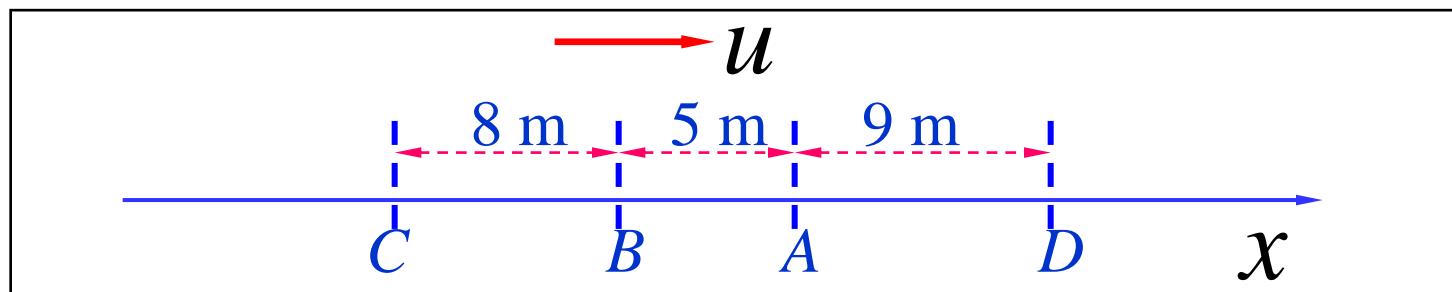
(1) 以 A 为坐标原点, 写出波动方程

$$A = 3 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad T = 0.5 \text{ s}, \quad \varphi = 0,$$

$$\lambda = uT = 10 \text{ m}$$

代入 $y = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$

得 $y = 3 \times 10^{-2} \cos[2\pi(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10})]$



(2) 以 B 为坐标原点, 写出波动方程

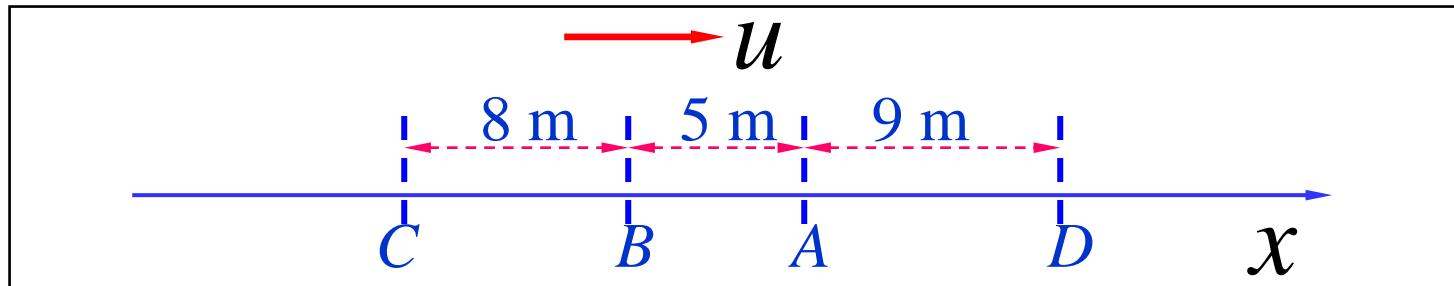
B 点的振动比 A 点超前,

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi \frac{x_A - x_B}{\lambda} = \pi$$

所以, $\varphi_B = \pi$ 。 B 点的振动方程为

$$y_B = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi)$$

波动方程为 $y = 3 \times 10^{-2} \cos[2\pi(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10}) + \pi]$



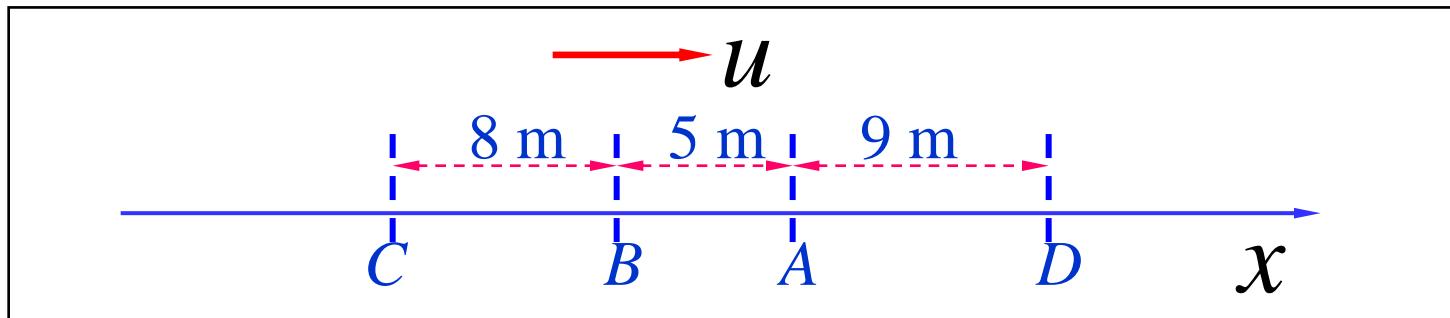
(3) 写出传播方向上点C、D的运动方程

C点的相位比点A 超前

$$\begin{aligned}y_C &= 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + 2\pi \frac{AC}{\lambda}) \\&= 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \frac{13}{5}\pi)\end{aligned}$$

D点的相位落后于点A

$$y_D = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - \frac{9\pi}{5})$$



(4) 分别求出 BC , CD 两点间的相位差

由于 $\lambda = 10 \text{ m}$, 所以

$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi \frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi \frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi \frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi \frac{-22}{10} = 4.4\pi$$

