质点运动与刚体转动相应量对照

质量 $\longleftrightarrow m$	转动惯量 $\longleftrightarrow J$
位矢 $\longleftrightarrow \vec{r}$	角位置 $\longleftrightarrow \theta$
速度 $\longleftrightarrow \vec{v}$	角速度 $\longleftrightarrow \vec{\omega}$
加速度 $\longleftrightarrow \vec{a}$	角加速度 $\longleftrightarrow \vec{\alpha}$
质点受力 $\longleftrightarrow \vec{F}$	刚体受力矩 $\longleftrightarrow \vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$
力做功 $\longleftrightarrow W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$	力矩做功 $\longleftrightarrow W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta$
平动动能 $\longleftrightarrow E_k=\frac{1}{2}mv^2$	转动动能 $\longleftrightarrow E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$

动量 $\longleftrightarrow$ $\vec{p} = m\vec{v}$　　角动量 $\longleftrightarrow$ $\vec{L} = J\vec{\omega}$

冲量 $\longleftrightarrow$ $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$　　冲量矩 $\longleftrightarrow$ $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$

牛顿定律 $\longleftrightarrow$ $\vec{F} = m\vec{a}$　　转动定律 $\longleftrightarrow$ $\vec{M} = J\vec{\alpha}$

动能定理　　转动动能定理

$$W = \int F_t\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad W = \int M\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

动量定理　　角动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \qquad \int_{t_1}^{t_2} M\,\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1$$

第九章
振动

教学基本要求

一　　掌握描述简谐振动的各个物理量（特别是相位）的物理意义及各量间的关系。

二　　掌握描述简谐振动的旋转矢量法和图线表示法，并会用于简谐振动的规律讨论和分析。

三　　掌握简谐振动的基本特征，能建立一维简谐振动的微分方程，能根据给定的初始条件写出一维简谐振动的运动方程，并理解其物理意义。

四　　理解同方向、同频率简谐振动的合成规律，了解“拍”和相互垂直简谐振动合成的特点。

振动有各种不同的形式

机械振动　电磁振动　…

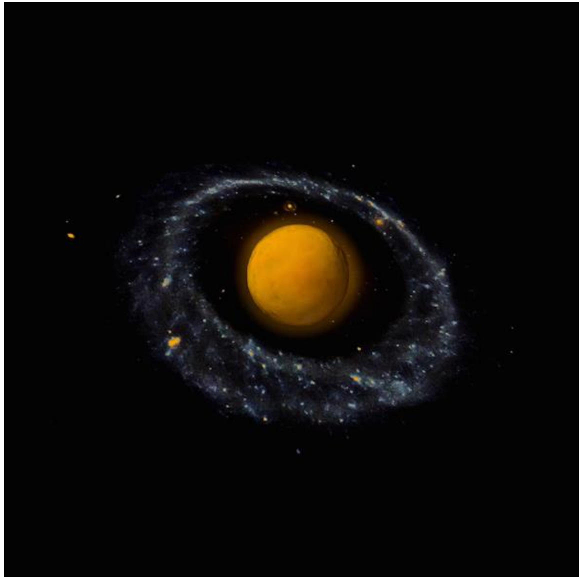
广义振动：任一物理量（如位移、电流、电压、密度、压强、场强等）随时间的周期性变化。

包括行星的运动、生态的循环、股指的振荡。

机械振动：

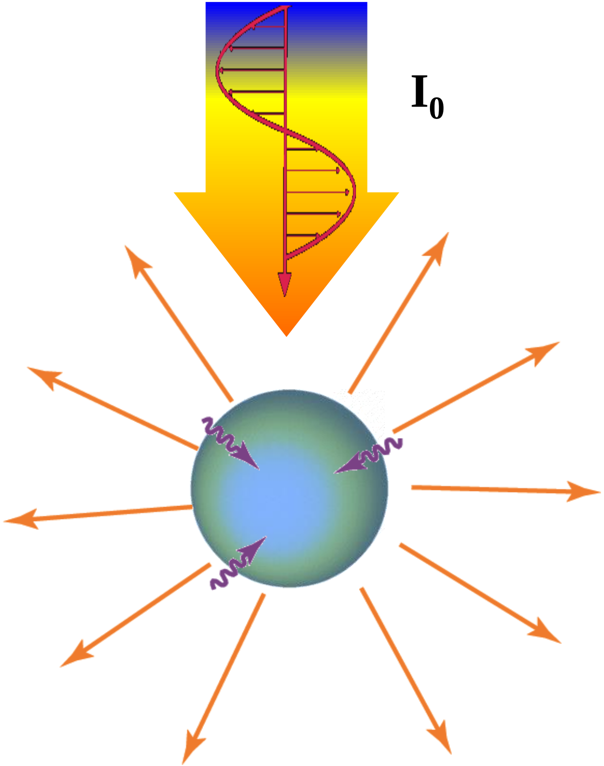
质点（物体）的位置在某点附近往复变化。

行星运动



桥梁摆动

等离激元共振



振动分类

简谐振动，是最简单、最基本的振动。

- 自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 无阻尼自由谐振动
      - 简谐振动
    - 无阻尼自由非谐振动
  - 阻尼自由振动
- 受迫振动

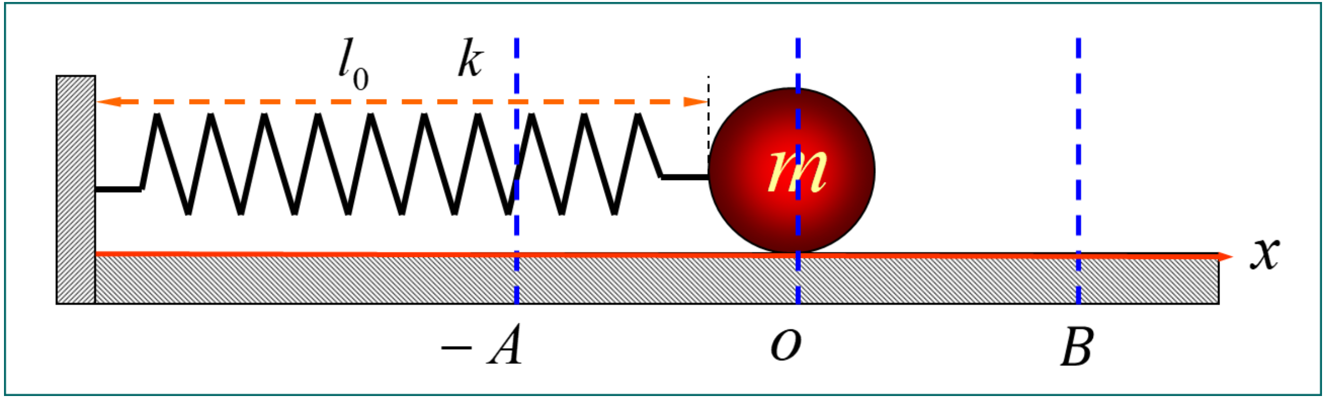
简谐振动 $\underset{\text{分解}}{\overset{\text{合成}}{\longleftrightarrow}}$ 复杂振动

9-1 简谐振动 振幅 周期和频率 相位

简谐振动：

振动可用时间的单一谐和函数，即一个余弦或正弦函数来描述

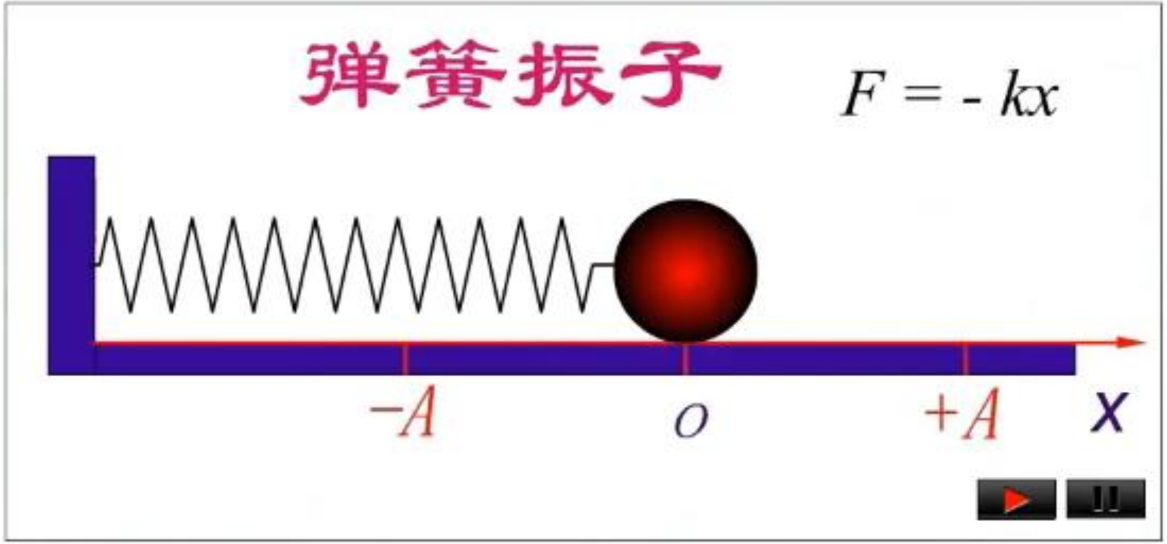
1、 弹簧振子的振动



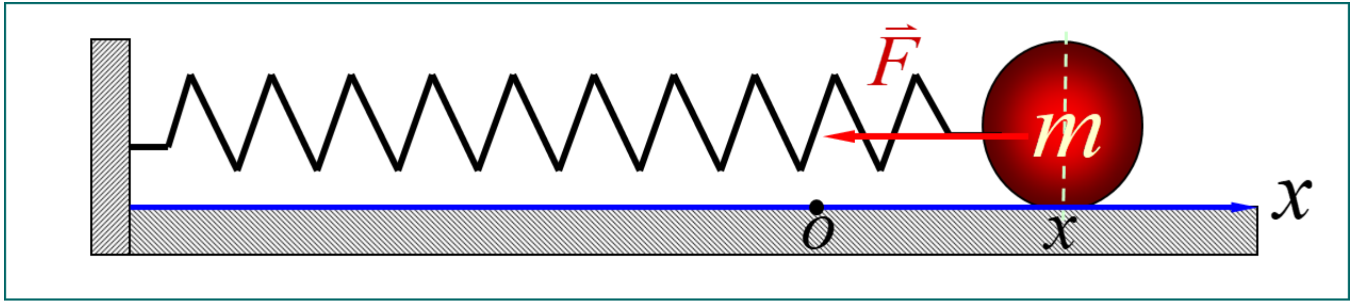
$x = 0 \quad F = 0$

平衡位置

理想模型


弹簧振子
$F = - kx$
$-A$
o
$+A$
x

2、 弹簧振子的运动方程



$$F = -kx = ma \qquad a = -\frac{k}{m}x$$

令 $$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

得 $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

即 $$a = -\omega^2 x$$

具有加速度 a 与位移的大小 x 成正比，而方向相反特征的振动称为**简谐振动**。

解方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

简谐振动的微分方程

解得 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

简谐振动的运动方程

积分常数，根据初始条件确定

一般初始条件为:

$t = 0$ 时， $x = x_0$ ， $v = v_0$

3、 简谐振动的速度和加速度

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$ ← 简谐振动方程

运动方程对时间求导

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

运动方程对时间求二阶导数

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

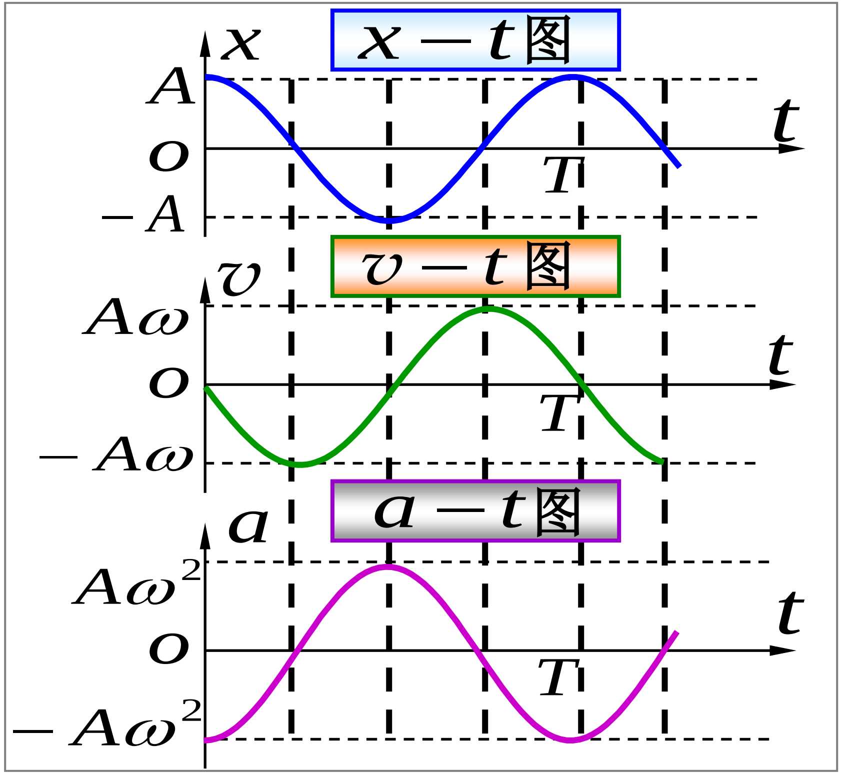
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

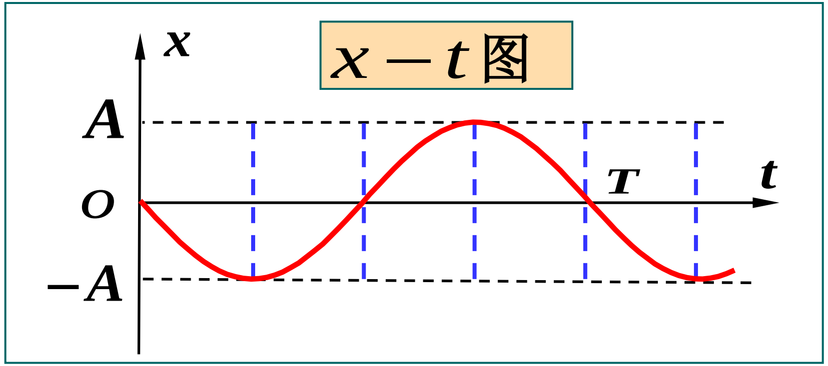
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



取 $\varphi = 0$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



4、 振幅

$$A = |x_{\max}|$$

振幅反映了振动的强弱

5、 周期、频率

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos[\omega(t + T) + \varphi]$$

- 周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

弹簧振子周期

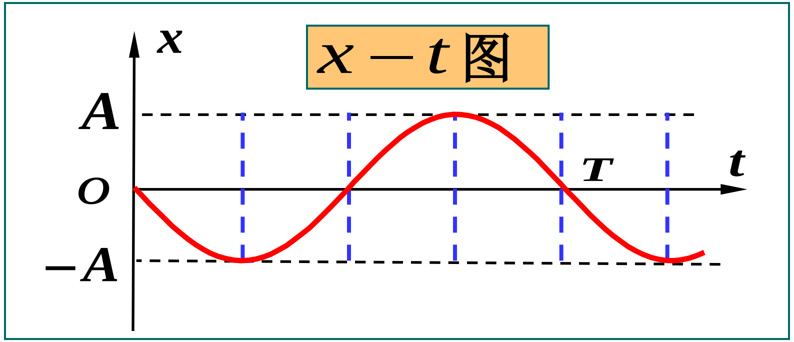
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos[\omega(t + T) + \varphi]$$

- **频率** $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

- **角（圆）频率**

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$



周期和频率反映振动的快慢，仅与振动系统**本身**的物理性质有关。

例如，心脏的跳动80次/分

$$T = \frac{1}{80}(\min) = \frac{60}{80}(s) = 0.75\ s$$

$$\nu = 1/T = 1.33\ Hz$$

动物的心跳频率(参考值，单位:Hz)

大象	0.4~0.5	马	0.7~0.8
猪	1~1.3	兔	1.7
松鼠	6.3	鲸	0.13

昆虫翅膀振动的频率（Hz）

雌性蚊子	355~415
雄性蚊子	455~600
苍　　蝇	330
黄　　蜂	220

6、 相位 $\boxed{\omega t+\varphi}$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

相位 (位相) $\Phi(t)=\omega t+\varphi$

初相位 φ $t=0$时， $\Phi(t)=\varphi$

相位的意义: 表征任意时刻（t）物体振动状态（相貌）。

7、 常数A和φ的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

初始条件 $t = 0 \quad x = x_0 \quad v = v_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

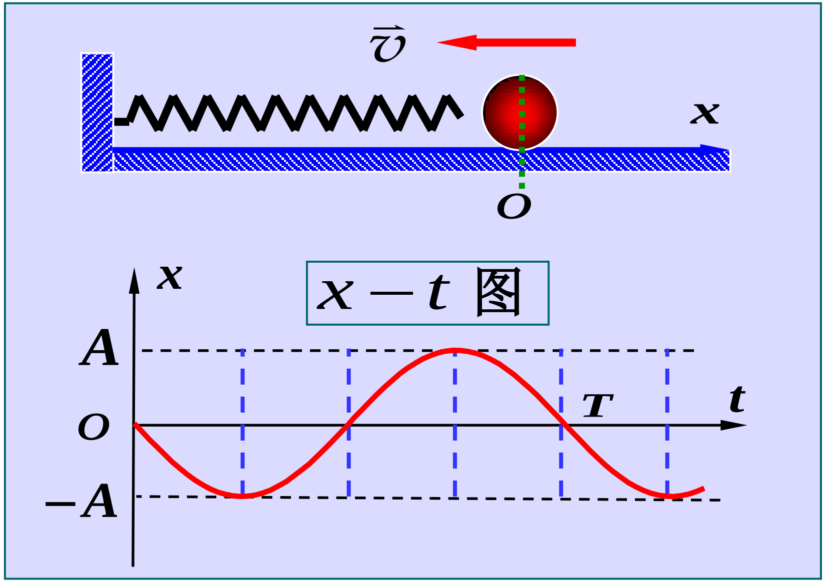
例 已知 $t = 0, x = 0, v_0 < 0$ 求 φ

$$0 = A\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

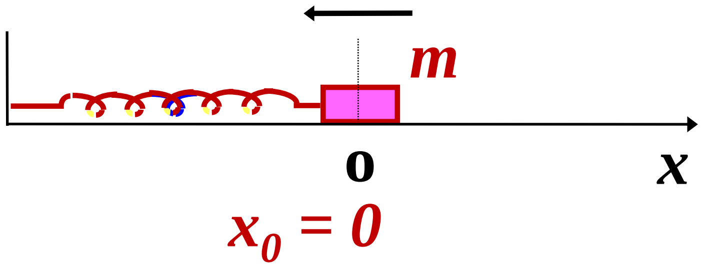
$$\therefore \sin\varphi > 0 \quad \text{故 } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



9-2 旋转矢量

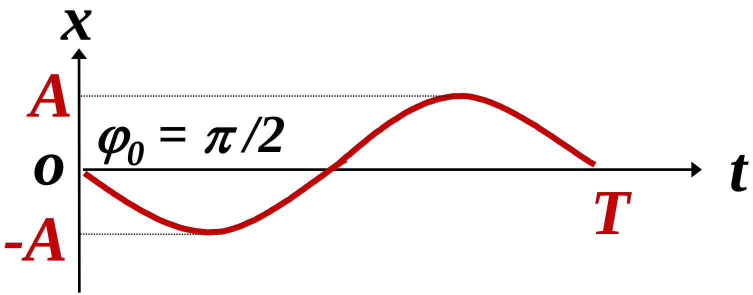
简谐振动的描述方法



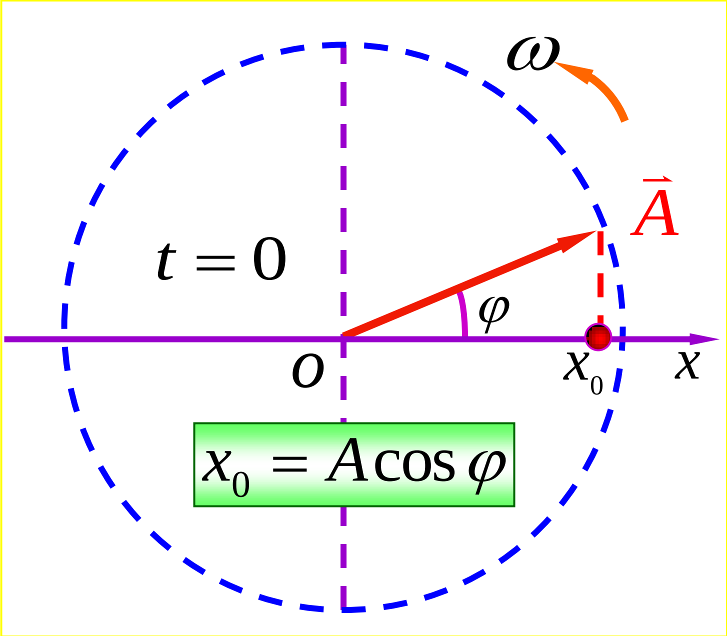
解析法

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

曲线法



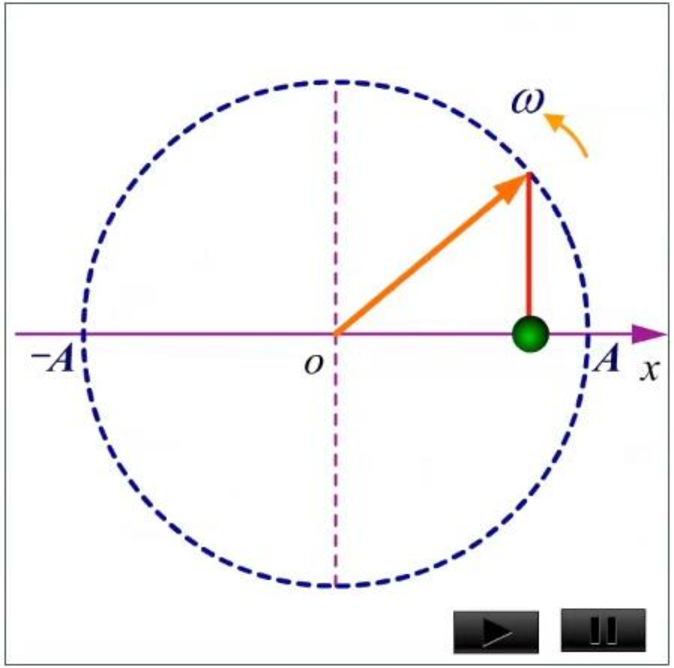
旋转矢量



自Ox轴的原点O作一矢量$\vec{A}$，使它的模等于振动的振幅A，并使矢量$\vec{A}$在Oxy平面内绕点O作逆时针方向的匀角速转动，其角速度 ω与振动的角频率相等，这个矢量就叫做旋转矢量。

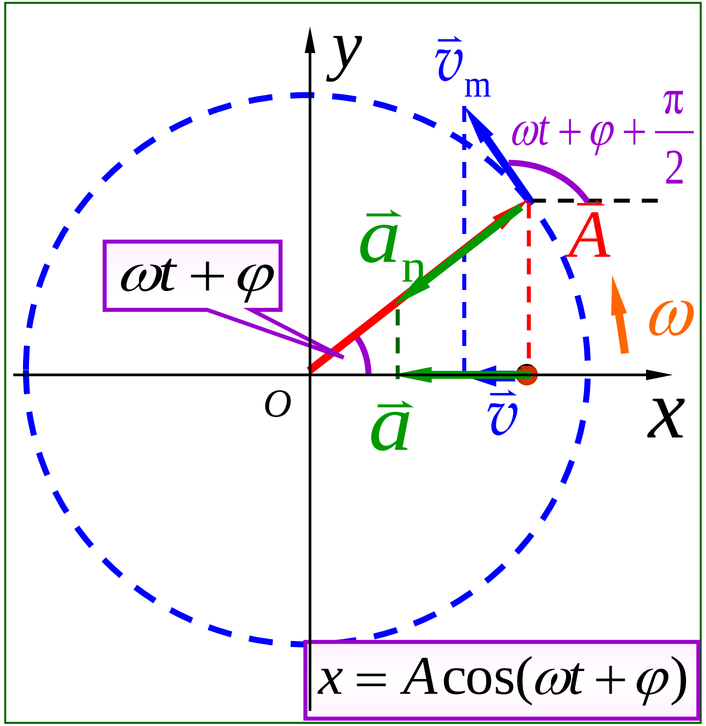
旋转矢量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



以 O 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动。

旋转矢量图中的速度和加速度



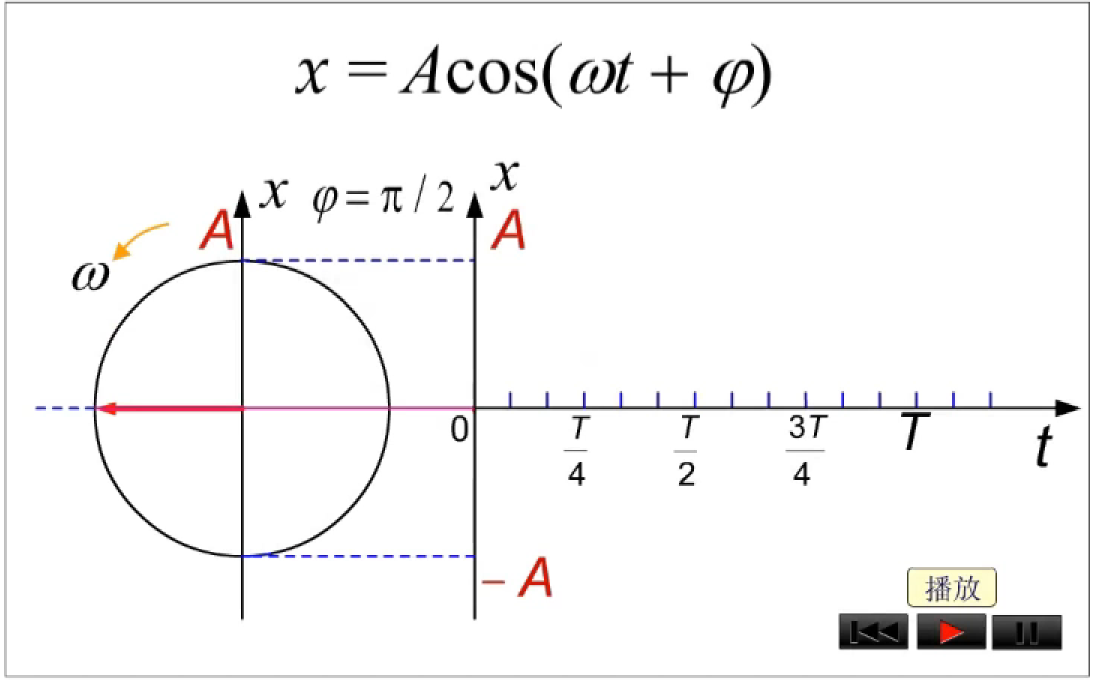
$$v_\mathrm{m} = A\omega$$

$$\boxed{v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)}$$

$$a_\mathrm{n} = A\omega^2$$

$$\boxed{a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)}$$

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图



练习：分别画出初相位为 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{4}$ 的*x-t*图

● 相位差

表示两个相位之差

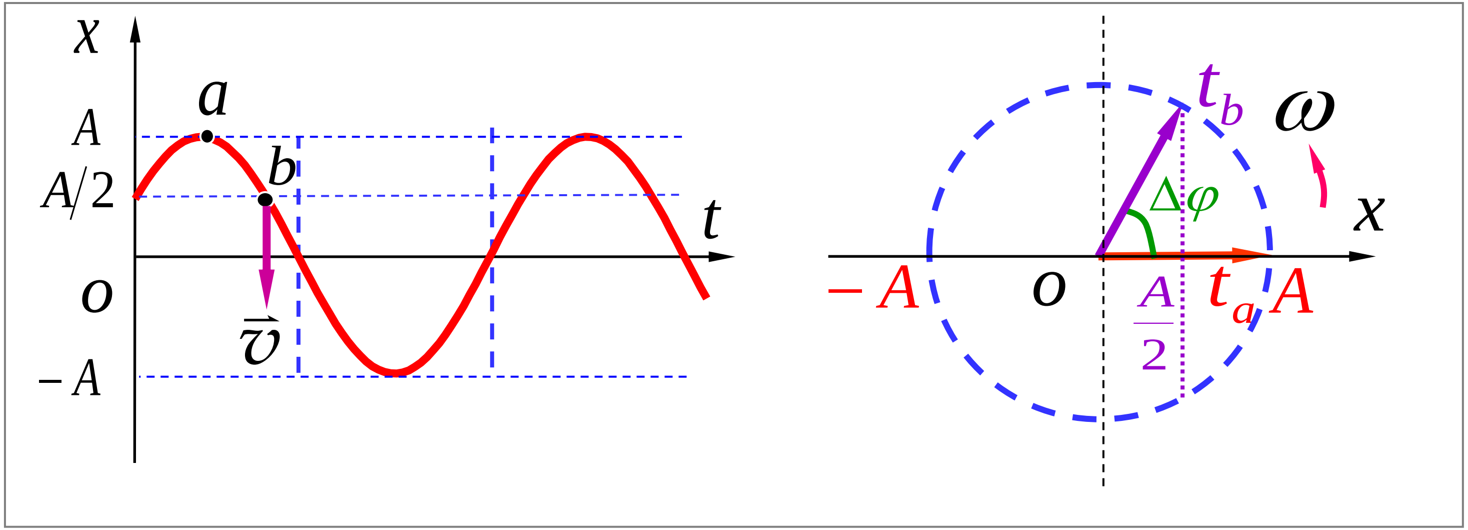
（1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间。

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi) \qquad x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

例　求 a, b 两点的时间差。已知周期为T。



$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi} T = \frac{1}{6} T$$

（2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异。

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$$

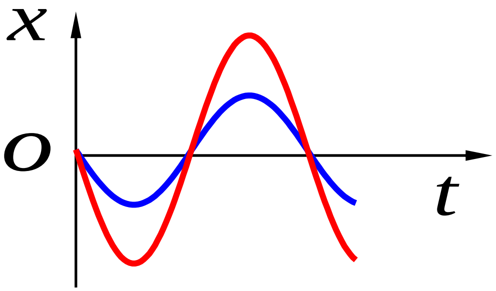
$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$ 初相位差

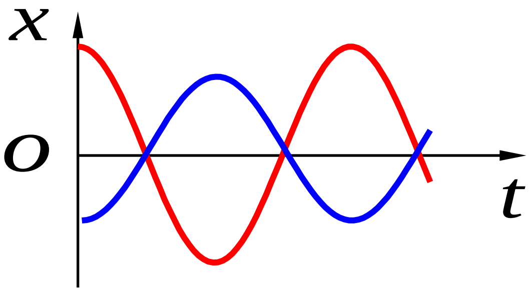
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

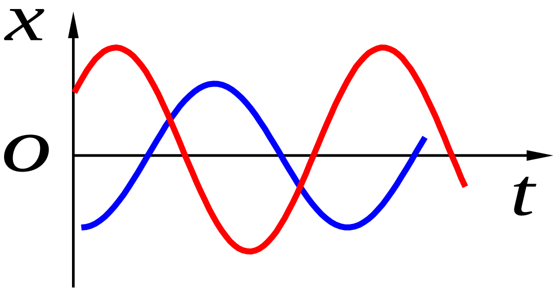
$\Delta\varphi = 0$ 同相

$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相

$\Delta\varphi$为其它 $\begin{cases} \text{超前} \\ \text{落后} \end{cases}$







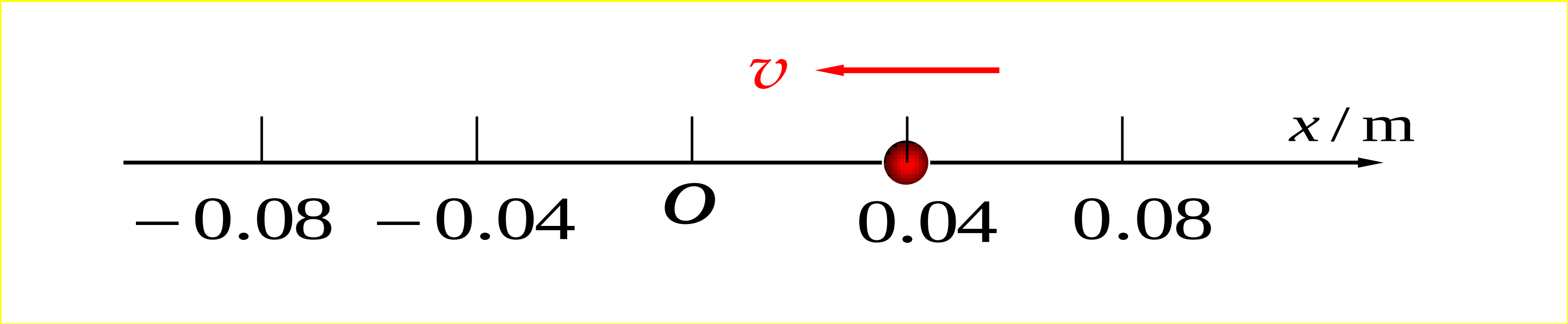
若$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，$x_2$比$x_1$超前（或$x_1$比$x_2$落后）。

超前、落后以 $|\Delta\varphi| \leq \pi$ 的相位角来判断。

例　一质量为0.01 kg的弹簧振子作简谐振动，其振幅为0.08 m，周期为4 s，起始时刻物体在x = 0.04 m处，向ox轴负方向运动（如图）。**试求：**

（1） t = 1.0 s 时，物体所处的位置和所受的力；

（2） 由起始位置运动到x = -0.04 m处所需要的最短时间。



已知 $m=0.01\,\mathrm{kg}$, $A=0.08\,\mathrm{m}$, $T=4\,\mathrm{s}$

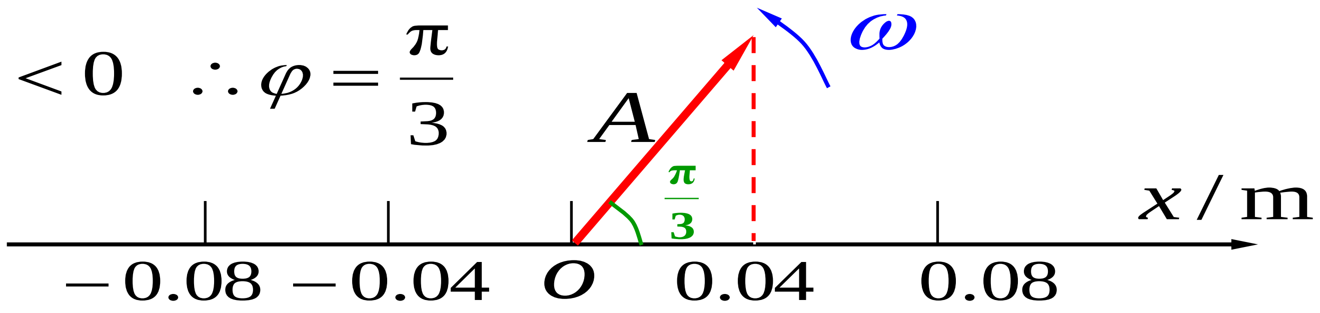
$t=0$ 时 $x=0.04\,\mathrm{m}$, $v_0<0$

解： $A=0.08\,\mathrm{m}$ $\quad \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}$

$$t=0,\quad x=0.04\,\mathrm{m}$$

代入 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ $\longrightarrow$ $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$\because v_0<0 \quad \therefore \varphi=\dfrac{\pi}{3}$

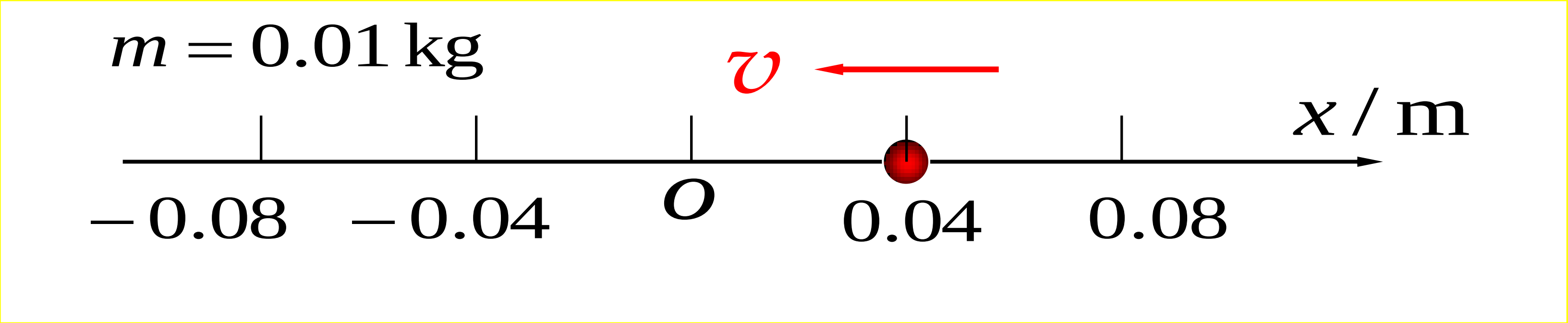


$\because \varphi = \frac{\pi}{3}$ $\therefore x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})m$

可求（1） $t = 1.0\,\mathrm{s}$ 时的x, F

$t = 1.0\,\mathrm{s}$ 代入上式得 $x = -0.069\,\mathrm{m}$

$F = -kx = -m\omega^2 x = 1.70\times10^{-3}\ \mathrm{N}$ 力沿***ox***轴正方向



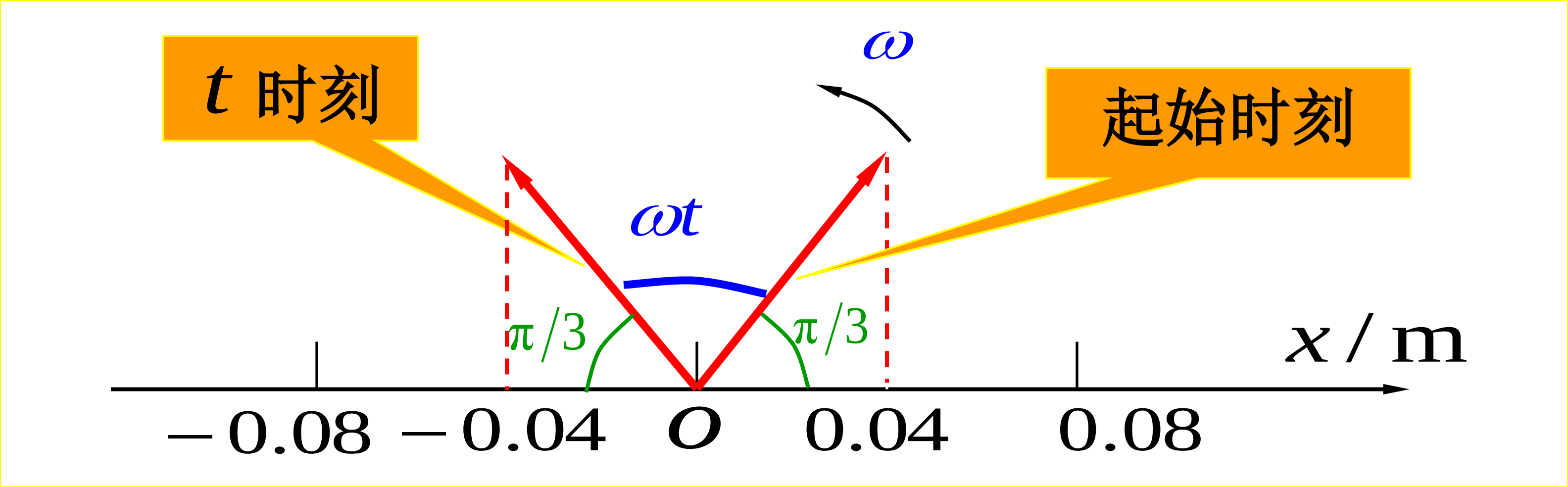
（2）由起始位置运动到x = -0.04 m处所需要的最短时间。

解法一　设由起始位置运动到x = -0.04 m 处所需要的最短时间为t

$$x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) \Longrightarrow -0.04 = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

$$t = \frac{\arccos(-\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{3}}{\pi/2} = \frac{2}{3} = 0.667\ \text{s}$$

解法二



$$\omega t = \frac{\pi}{3} \qquad \omega = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad t = \frac{2}{3} = 0.667\ \mathrm{s}$$

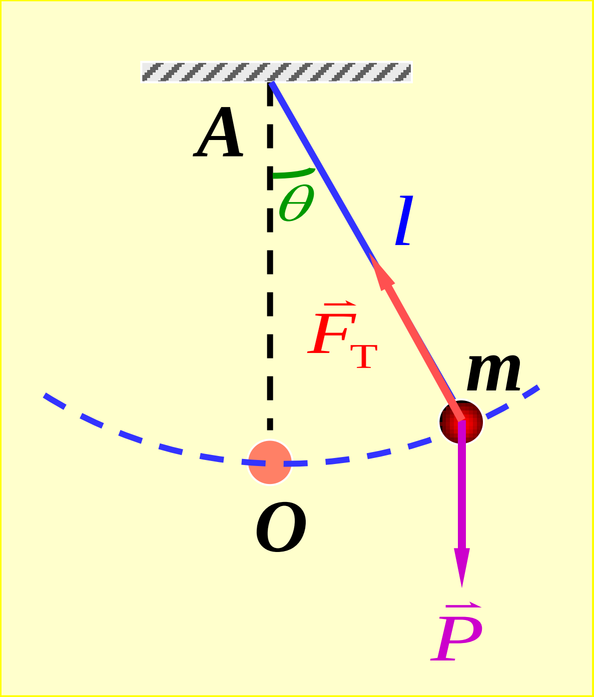
9-3 单摆和复摆

1、单摆：

由一根不可伸长、质量不计的细线，上端固定，下端系一质点的装置叫做单摆。

单摆在摆角小于5° 的条件下振动时，可近似认为是简谐振动。

通常把重物（质点）叫做摆锤，细线叫做摆线。



单摆动力学分析：

规定摆锤在平衡位置的右方时，**θ**为正。

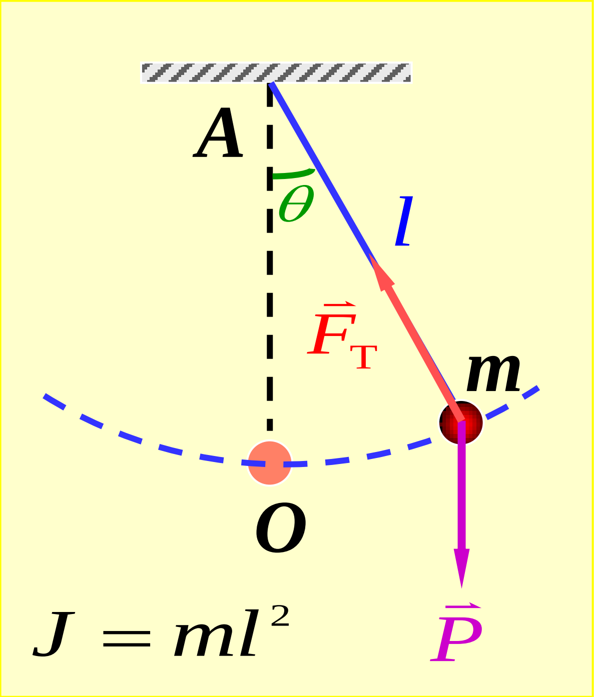
$\theta < 5^\circ$ 时，$\sin\theta \approx \theta$

重力对A点的力矩：

$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

$$-mgl\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$ （转动定律）

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$



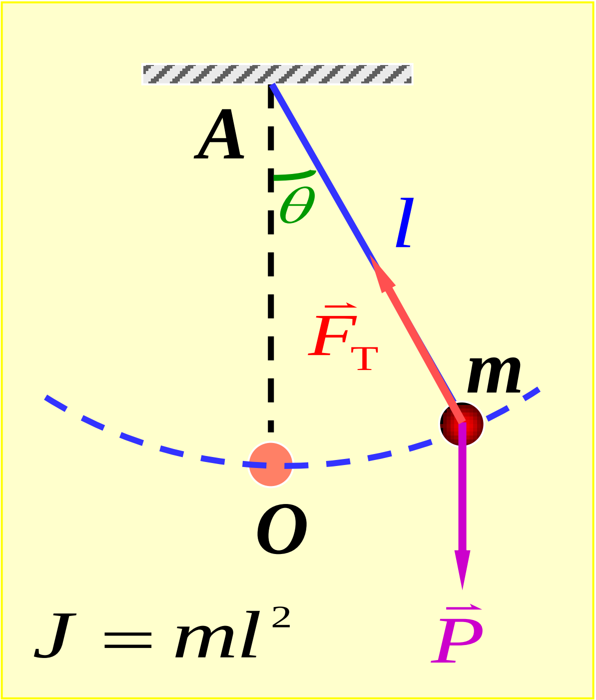
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

令 $$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



2、 复摆

刚体绕固定的水平轴在重力的作用下进行微小摆动的运动体系，又称物理摆。

$(\theta < 5^\circ)$

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}$$

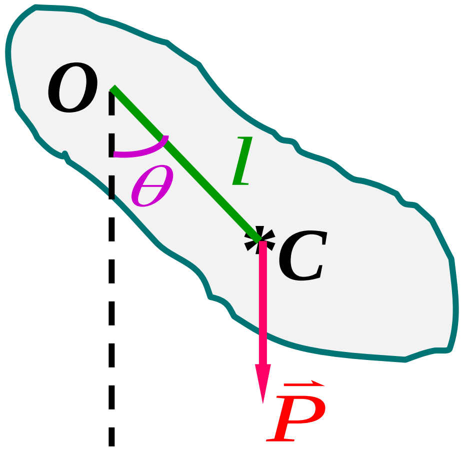
$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

$$= J\alpha = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-mgl\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

令 $\omega^2 = \dfrac{mgl}{J}$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$$



（C点为质心）

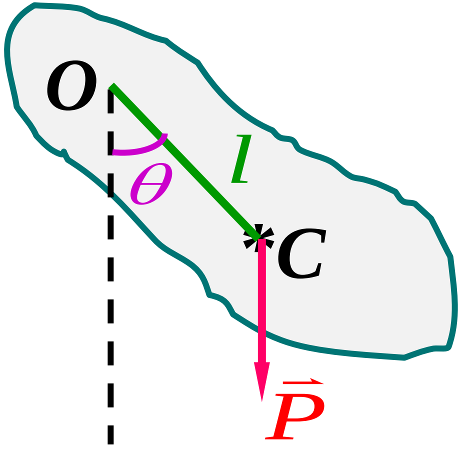
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0 \qquad \omega^2=\frac{mgl}{J}$$

$$\theta=\theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$$

简谐振动

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

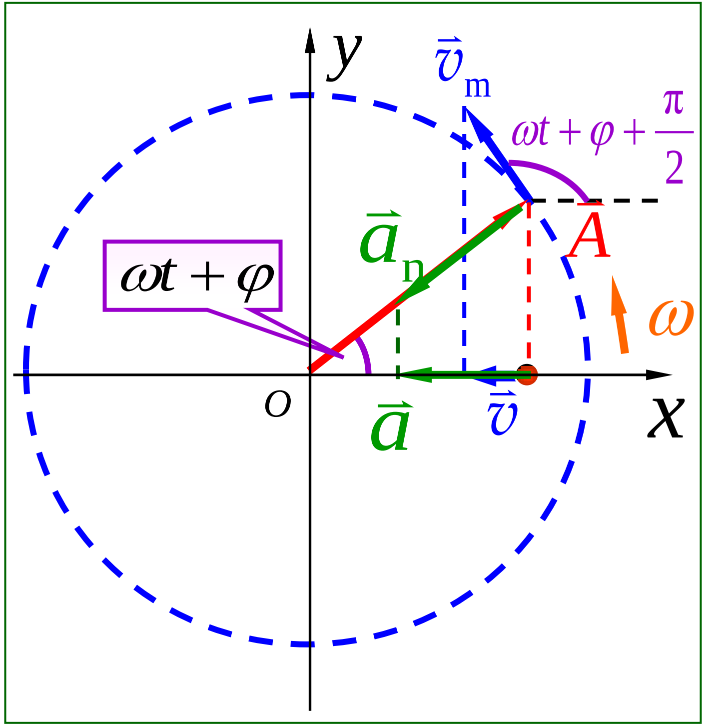
$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$



（C点为质心）

应用：测量转动惯量J

内容回顾：简谐振动



$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$$ 微分方程

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$ 运动方程

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

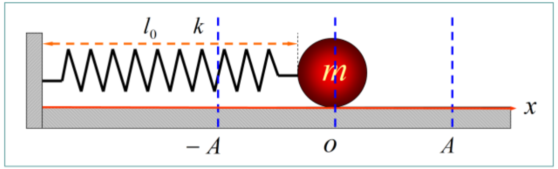
$$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

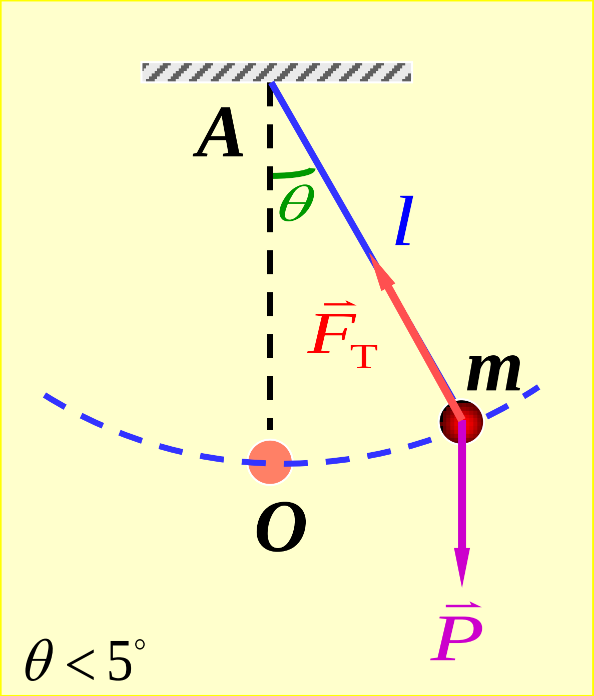
$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \theta$$

弹簧振子

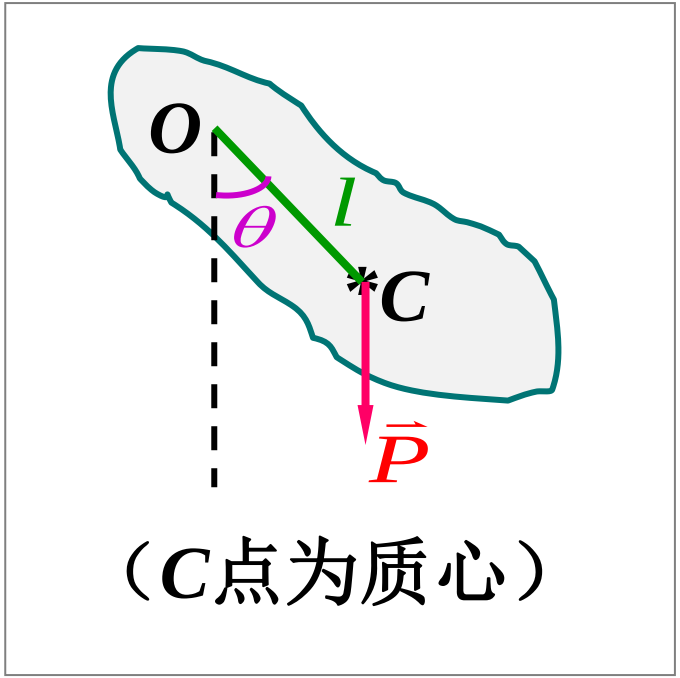
$$\omega = \sqrt{k/m}$$



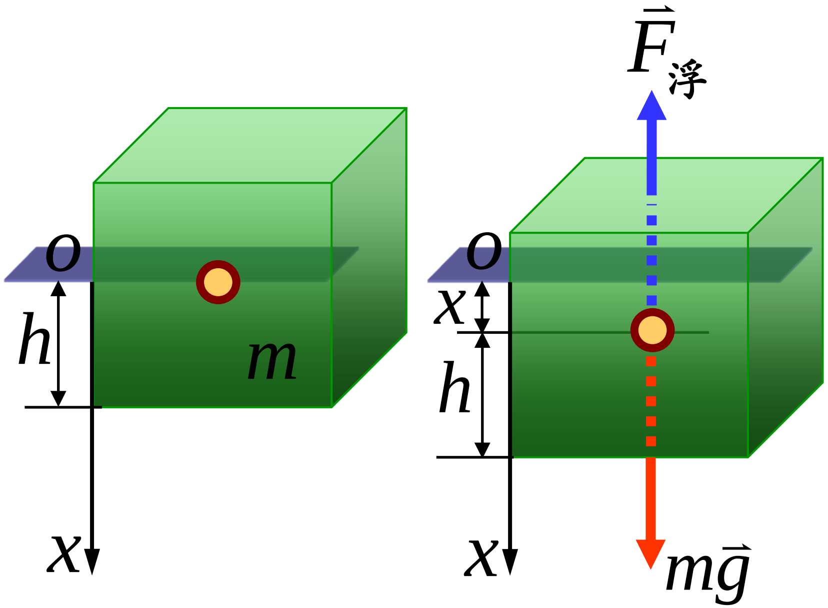
单摆 $\omega = \sqrt{g/l}$



复摆 $\omega = \sqrt{mgl/J}$



例：边长为l的方木块浮于水中静止时，没入水中部分的高度为h。若将木块下压后放手让其运动，试证明当忽略水的阻力时，木块作简谐振动。



解： 以水面为原点建立坐标Ox。

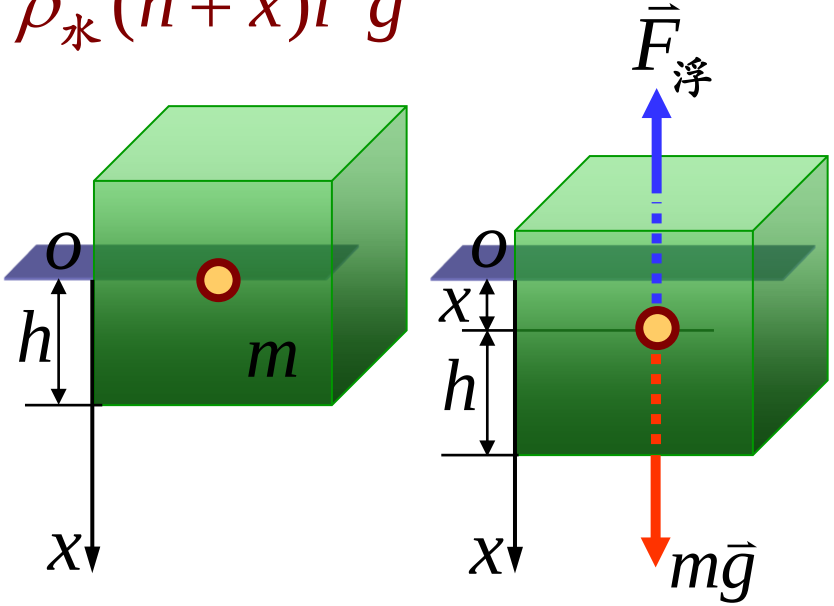
平衡条件 $mg - \rho_水 hl^2 g = 0 \quad \rightarrow mg = \rho_水 hl^2 g$

任意时刻 $mg - F_浮 = ma \qquad F_浮 = \rho_水 (h+x) l^2 g$

$\rightarrow \rho_水 hl^2 g - \rho_水 l^2 (h+x) g = ma$

$$-\rho_水 l^2 g x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$\rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$ 简谐振动



9-4 简谐振动的能量

能量是伴随运动而存在的，简谐振动同样具有动能和势能。

1、简谐振动的能量（以水平弹簧振子为例）

运动产生动能　　$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$

弹簧形变产生势能　　$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

动能 $$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$(\because \omega^2=\frac{k}{m}) \qquad =\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_{\mathrm{k,max}}=\frac{1}{2}kA^2,\ E_{\mathrm{k,min}}=0 \qquad \overline{E_{\mathrm{k}}}=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}E_{\mathrm{k}}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

势能

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$E_{\mathrm{p,max}}$，$E_{\mathrm{p,min}}$，$\overline{E_{\mathrm{p}}}$ 大小同动能

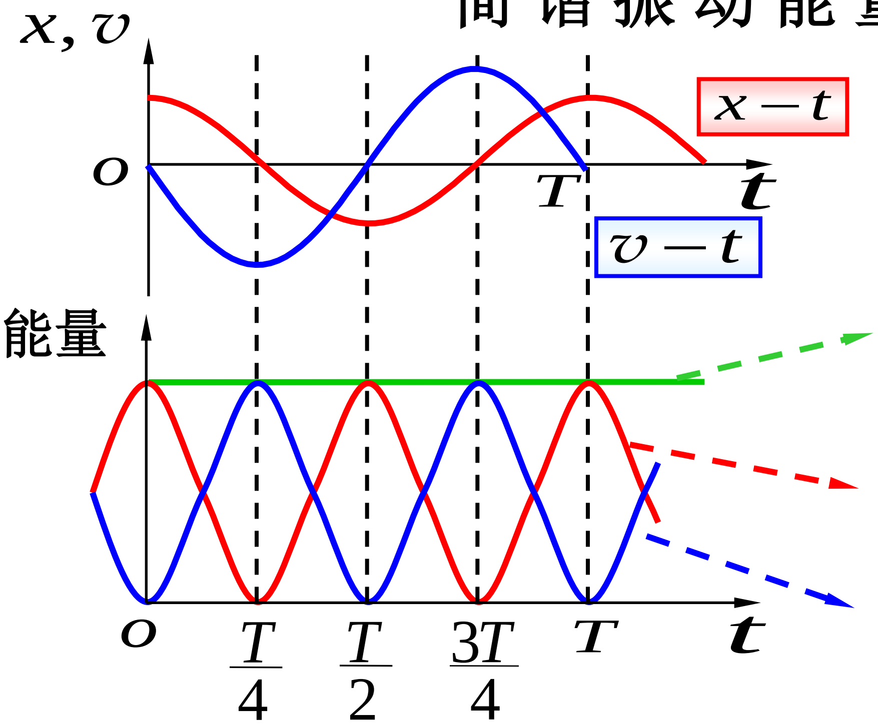
机械能 $$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \underline{\frac{1}{2}kA^2}$$

针对弹簧振子

***E*不随时间变化，简谐振动系统机械能守恒。**

2、简谐振动系统的能量特点

简 谐 振 动 能 量 图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

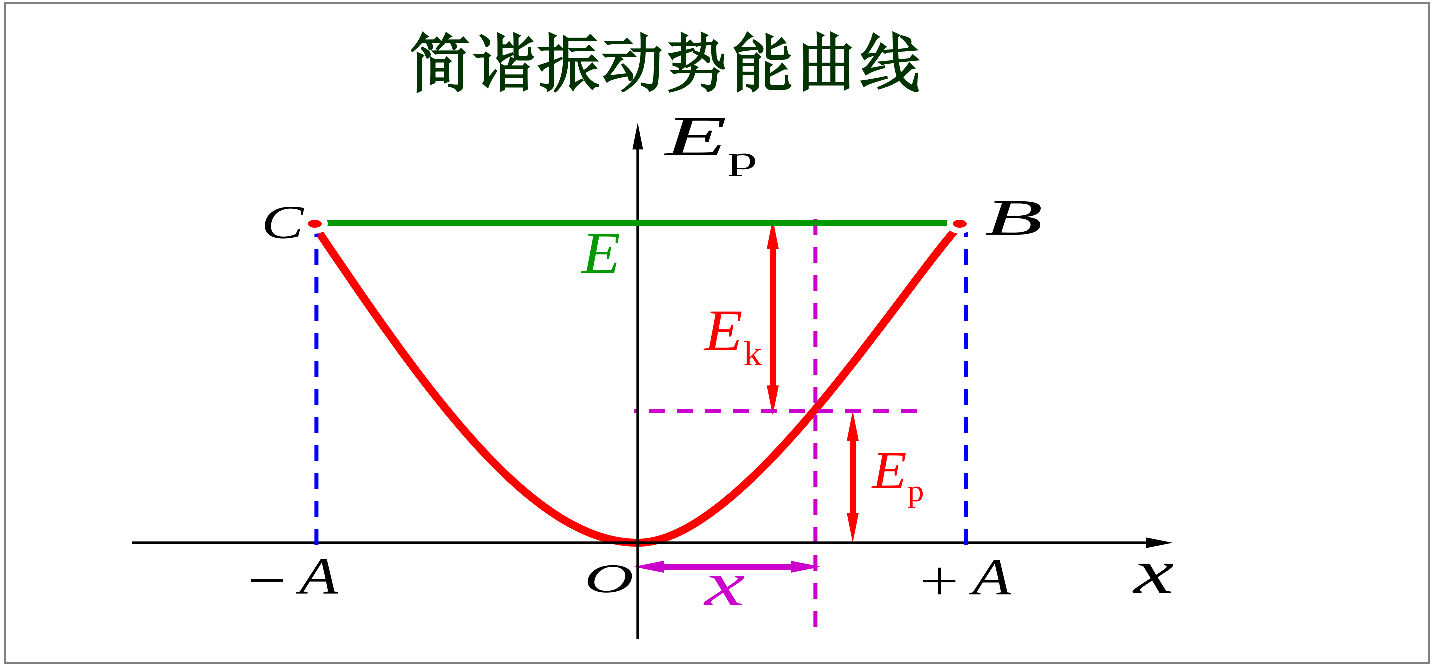
$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

简谐振动能量守恒，振幅不变

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$



能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐振动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

$\Rightarrow$ 简谐振动

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

例 质量为 0.10kg 的弹簧振子，以振幅 $1.0\times10^{-2}\text{ m}$ 作简谐振动，其最大加速度为 $4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，求：

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

已知：$m=0.10\text{kg}$， $A=1.0\times10^{-2}\text{m}$， $a_{\text{max}}=4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

求：（1） T ； （2） $E_{\text{k,max}}$

解：(1)

$$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

$$a_{\text{max}}=A\omega^2 \qquad \omega=\sqrt{\frac{a_{\text{max}}}{A}}=20\,\text{s}^{-1}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\,\text{s}$$

(2) $$E_{\text{k,max}}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=2.0\times10^{-3}\ \text{J}$$

求:(3) E_{sum};

(4) 何处动势能相等?

(3) $E_{\mathrm{sum}} = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$

(4) $E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时 $E_{\mathrm{p}} = 1.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$

由 $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$$x^2 = \frac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^2} = 0.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$$

$$x = \pm 0.707\ \mathrm{cm}$$

例　一弹簧振子作简谐振动，当其偏离平衡位置的位移的大小为振幅的1/4时，其动能为振动总能量的（　　）

（A）7/16　　（B）9/16　　（C）11/16

（D）13/16　　　15/16

解： $x=\dfrac{1}{4}A \qquad E_{\mathrm{p}}=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{16}kA^2$

$$E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{sum}}-E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}kA^2=\frac{15}{16}E_{\mathrm{sum}}$$

9-5 简谐振动的合成

一、两个同方向同频率的简谐振动的合成

1.分振动：

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

2.合振动： $x = x_1+ x_2$

合振动是否还是简谐振动？其表达式是？

解析法:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= A_1[\cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1] + A_2[\cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2]$$

$$= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$$

$$\begin{cases} A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = A\cos\varphi \\ A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 = A\sin\varphi \end{cases} \xleftarrow{\text{构造}} \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

$$x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量法:

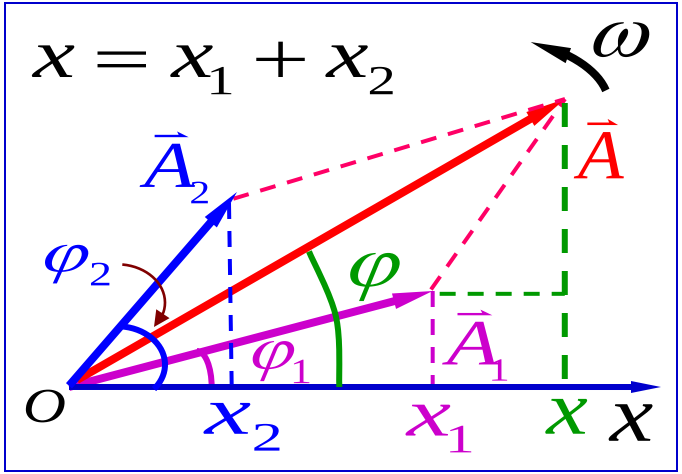
$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2$$

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}}$$

$$\boxed{\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}}$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$



两个同方向同频率简谐振动合成后仍为同频率的简谐振动。

3.两种特殊情况

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(1)若两分振动同相

$$\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

则$A=A_1+A_2$，两分振动相互加强

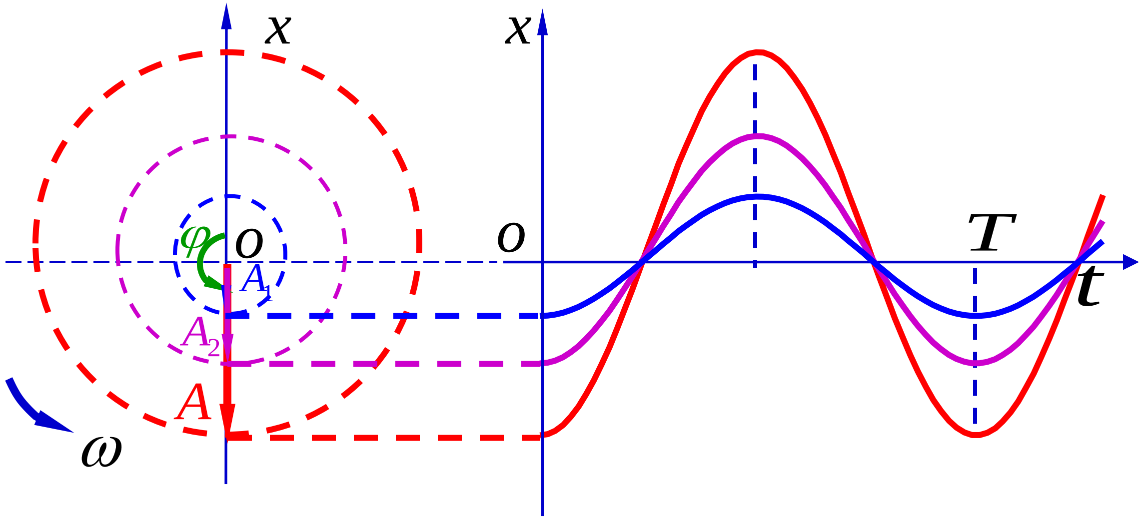
(2)若两分振动反相

$$\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

则$A=|A_1-A_2|$，两分振动相互减弱

如 $A_1=A_2$，则 $A=0$

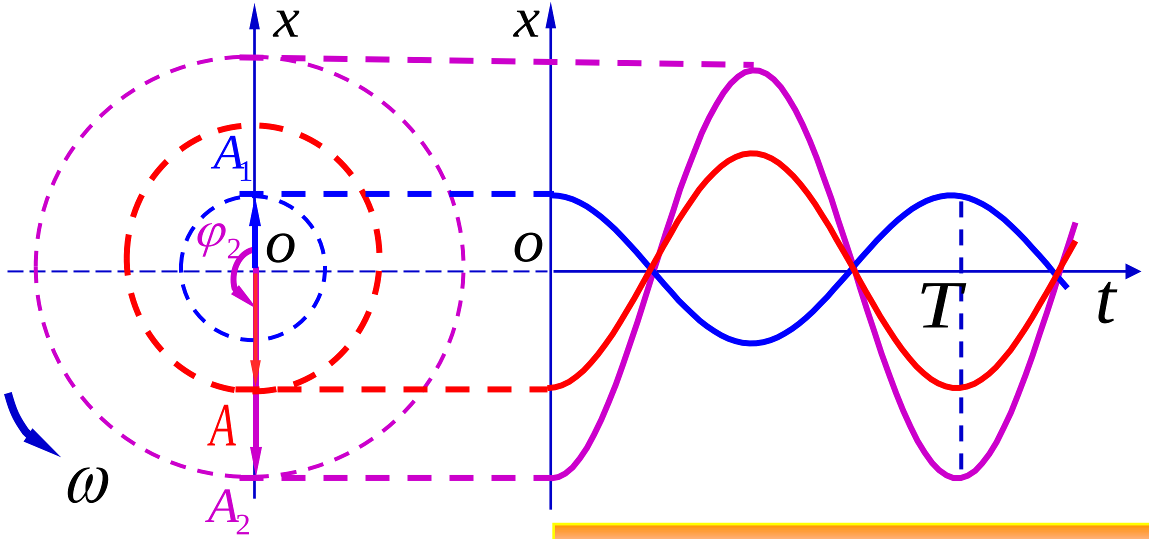
（1）同相　$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$



$$x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

（2）反相 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$



$$\begin{cases} A=\left|A_1-A_2\right| \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+(2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\varphi)}$$

例　　两个同方向简谐振动，周期相同，振幅为A_1 = 0.05 m, A_2 = 0.07 m，组成一个振幅为A = 0.1044 m的简谐振动，求两个分振动的相位差。

解：由同方向同频率两振动合成的振幅公式：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\cos\Delta\varphi=\frac{A^2-A_1^2-A_2^2}{2A_1A_2}=\frac{0.1044^2-0.05^2-0.07^2}{2\times0.05\times0.07}=0.50$$

$$\therefore\ \Delta\varphi=\cos^{-1}0.5=\frac{\pi}{3}=60^\circ$$

例 有两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 0.2 m，相位与第一振动的相位差为 **π/6**，若第一振动的振幅为 $\sqrt{3}\times10^{-1}$ m，求第二振动的振幅及第一、第二两振动相位差。

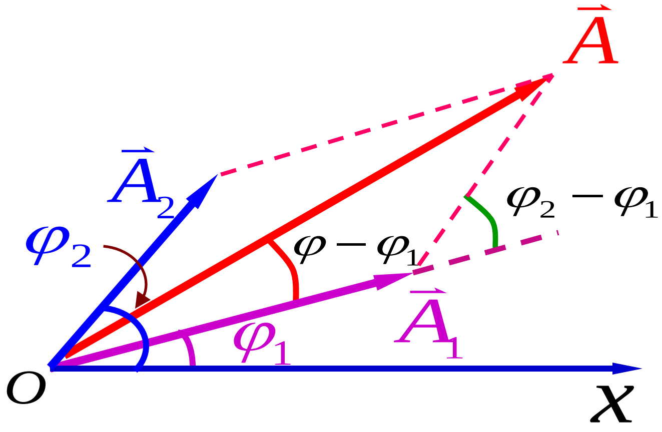
解： $A_2 = ?$

$$A_2 = \sqrt{A_1^2 + A^2 - 2A_1 A\cos(\varphi - \varphi_1)}$$

$$= 0.1 \text{ m}$$

因为 $A^2 = A_1^2 + A_2^2$

所以 $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$



二、两个相互垂直的同频率简谐振动的合成

1. 分振动

$$x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

合振动轨迹方程

推导过程：

$$\frac{x}{A_1}=\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$\frac{y}{A_2}=\cos(\omega t+\varphi_1+\varphi_2-\varphi_1)=\frac{x}{A_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\sin(\omega t+\varphi_1)\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{y}{A_2}-\frac{x}{A_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-\sin(\omega t+\varphi_1)\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

方程两边取平方

$$\frac{x^2}{A_1^2}\cos^2(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{y^2}{A_2^2}=\sin^2(\omega t+\varphi_1)\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{x}{A_1}=\cos(\omega t+\varphi_1)\;\Rightarrow\;\frac{x^2}{A_1^2}=\cos^2(\omega t+\varphi_1)=1-\sin^2(\omega t+\varphi_1)$$

方程两边乘以 $\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$，并和上式相加

2. 合振动

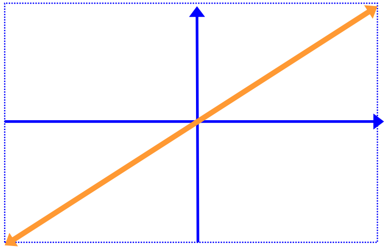
轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{y^2}{A_2^2}=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

(1) 合振动是在 $2A_1$（ x向）、$2A_2$（ y向 ）范围内的一个椭圆

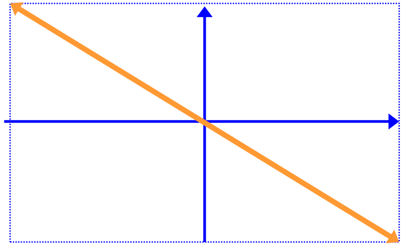
(2) 椭圆的性质（方位、长短轴、左右旋）在 A_1、A_2确定之后,主要取决于$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

$\Delta\varphi = 0$



$$y = \frac{A_2}{A_1}x$$

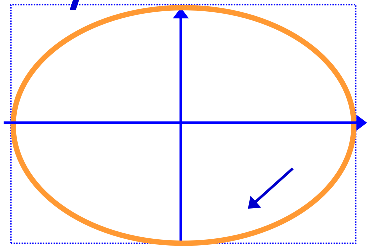
$\Delta\varphi = \pi$



$$y = -\frac{A_2}{A_1}x$$

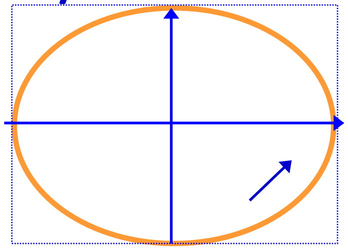
$\Delta\varphi$ 为 π 的整数倍，合振动轨迹为直线

$\Delta\varphi = \pi/2$



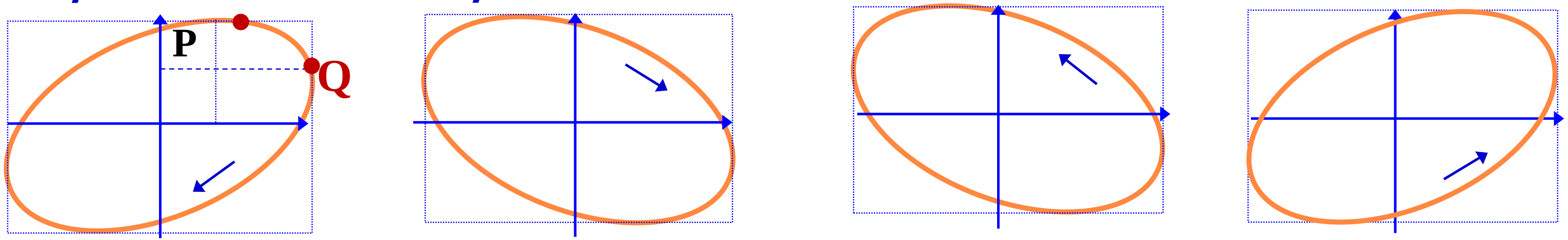
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

$\Delta\varphi = 3\pi/2$



$\Delta\varphi$ 为 $\pi/2$ 的奇数倍，合振动轨迹为正椭圆

$\Delta\varphi = \pi/4$ $\Delta\varphi = 3\pi/4$ $\Delta\varphi = 5\pi/4$ $\Delta\varphi = 7\pi/4$



$\Delta\varphi$为其它值，合振动轨迹为斜椭圆

$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$
$$\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1$$

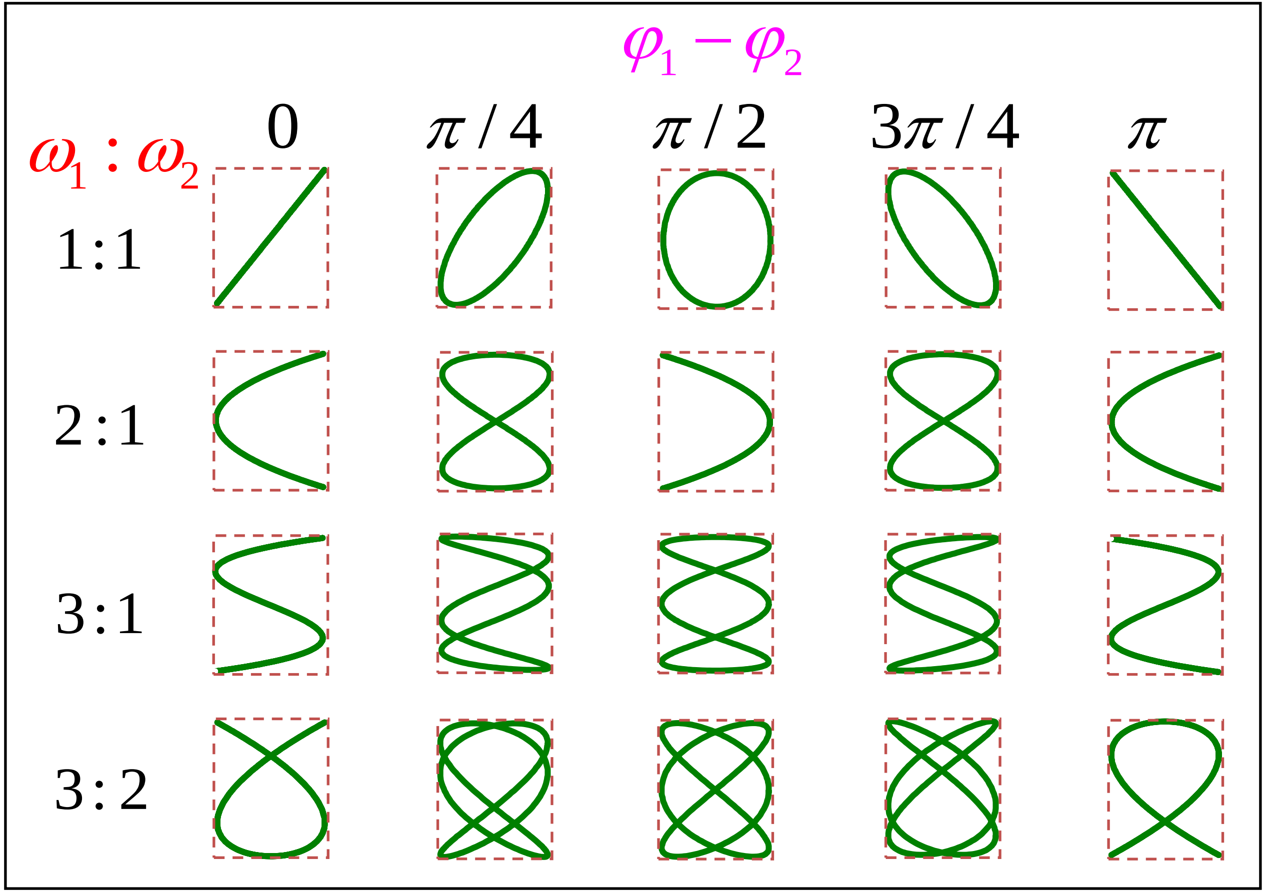
$0 < \Delta\varphi < \pi$ 沿顺时针方向运动

$$\left.\begin{array}{l} -\pi < \Delta\varphi < 0 \\ \pi < \Delta\varphi < 2\pi \end{array}\right\}$$ 沿逆时针方向运动

三、两个相互垂直不同频率的简谐振动的合成

两频率比为整数比的简单情况：

李萨如图形

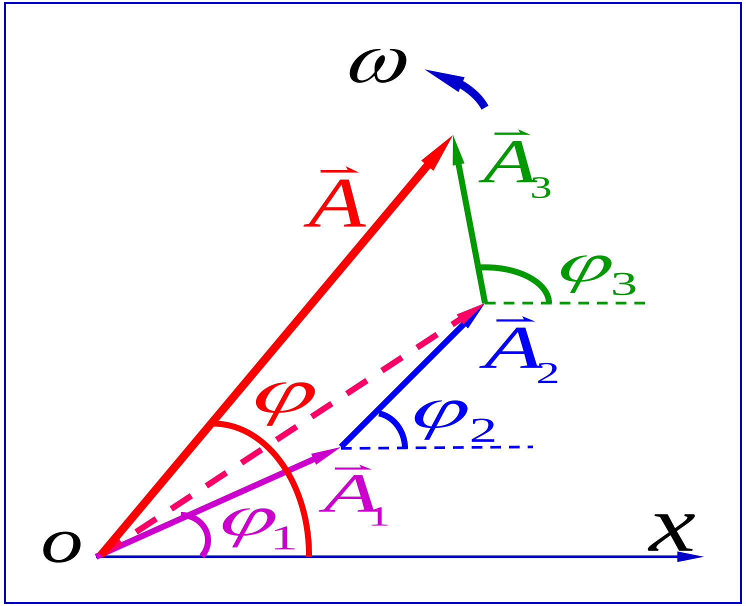


*四、多个同方向同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t + \varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

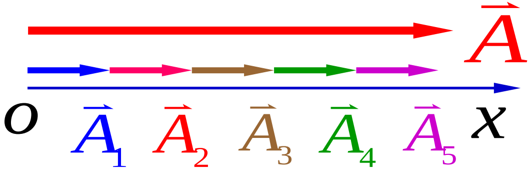
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐振动

简单情况

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cos \omega t \\ x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$



$$\boxed{A = \sum_i A_i = NA_0}$$

讨论

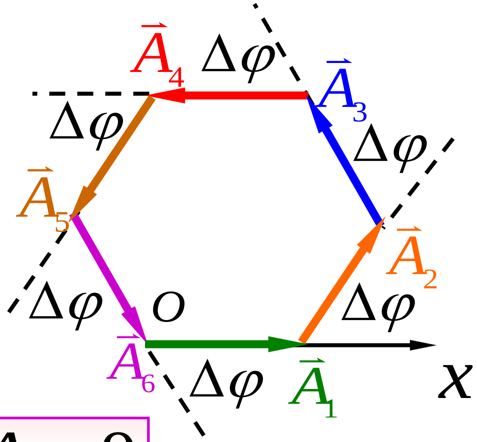
(1) $\Delta\varphi = 2k\pi$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2) $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

$(k' = \pm 1, \pm 2, \cdots$

且不取N的整数倍)



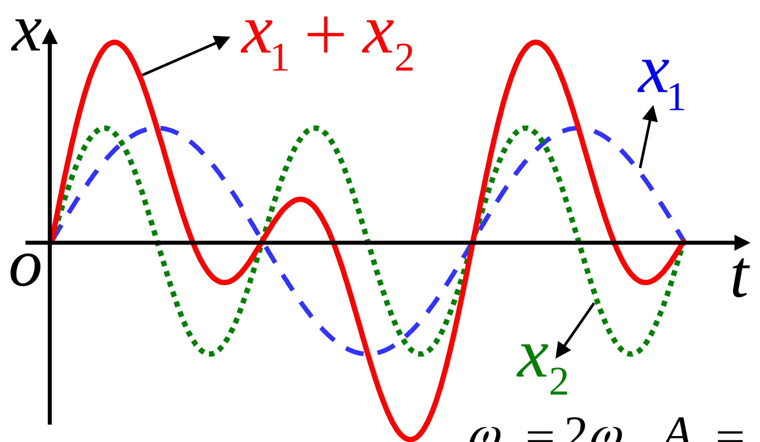
$$\boxed{A = 0}$$

五、两个同方向不同频率简谐运动的合成　拍

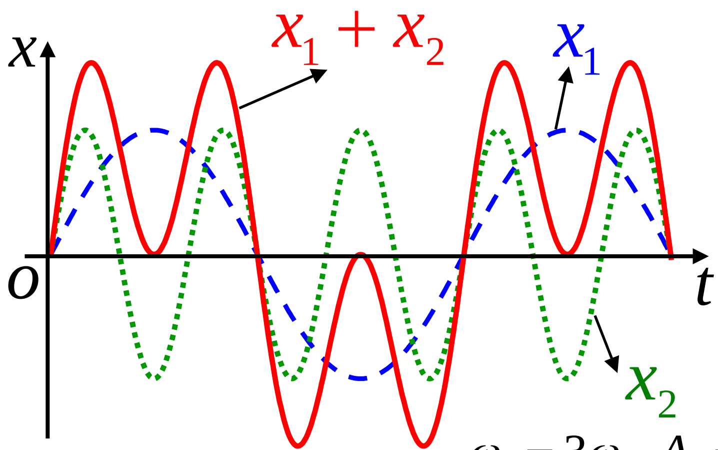
设　$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$　　$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$　　$\omega_1 \neq \omega_2$

合振动　$x = x_1 + x_2$

◆ 合成运动一般不是简谐振动，形式复杂。

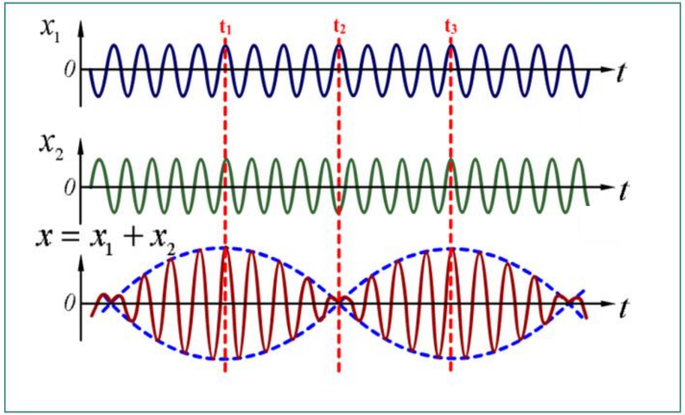


$\omega_2 = 2\omega_1,\ A_2 = A_1$



$\omega_2 = 3\omega_1,\ A_2 = A_1$

拍： 频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐振动合成时，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象。



设两简谐振动振幅相同，初相都为零

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega_1 t = A_1 \cos 2\pi\nu_1 t \\ x_2 = A_2 \cos \omega_2 t = A_2 \cos 2\pi\nu_2 t \\ A_1 = A_2 \qquad |\nu_2 - \nu_1| << \nu_1 + \nu_2 \end{cases}$$

求 $\boxed{x = x_1 + x_2}$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi \nu_1 t + A_1 \cos 2\pi \nu_2 t$$

$$x = \boxed{\left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right)} \cos\left(2\pi \boxed{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}} t \right)$$

振幅部分

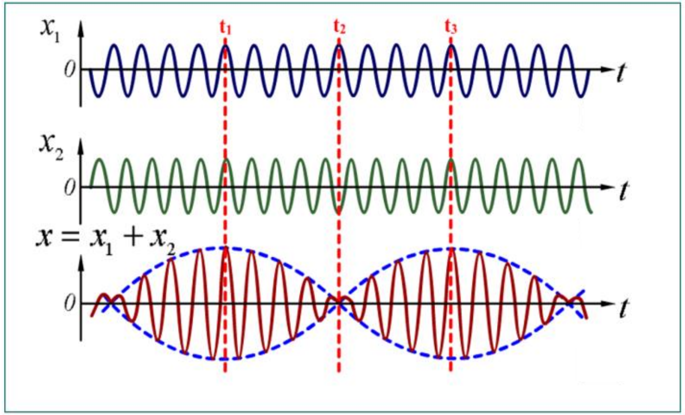
合振动频率

振动频率 $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$

振幅 $A = \left| 2A_1 \cos\left(2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right) \right|$

$$\begin{cases} A_{max} = 2A_1 \\ A_{min} = 0 \end{cases}$$

$$x=\left(2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right)\cos 2\pi\frac{\nu_2+\nu_1}{2}t$$



合振幅 $A=\left|2A_1\cos\left(2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right)\right|$

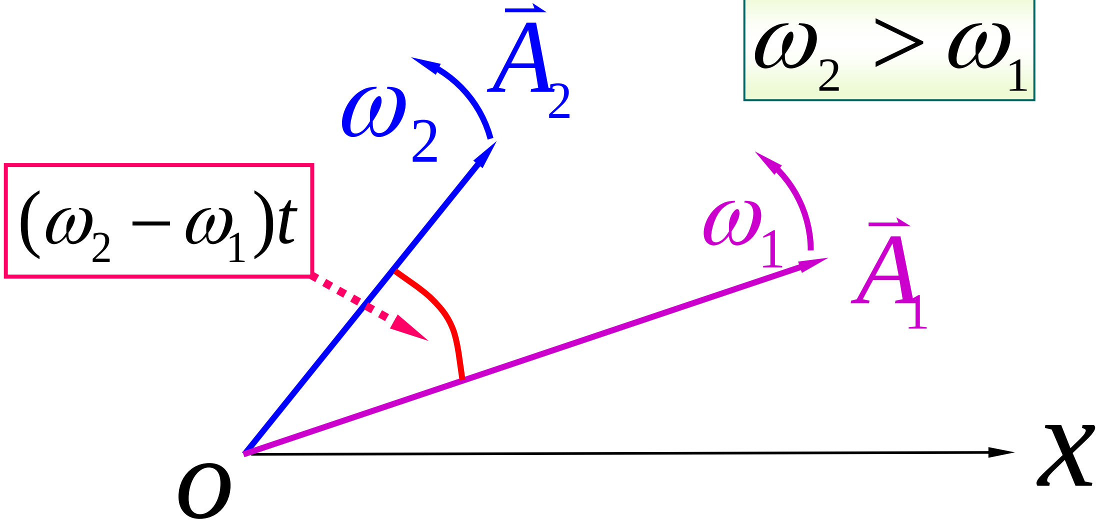
余弦函数绝对值的周期为π

$$2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}T=\pi \Rightarrow T=\frac{1}{\nu_2-\nu_1}$$

$$\boxed{\nu=\nu_2-\nu_1}$$ ⇐ **拍频**（振幅变化的频率）

- 合振幅变化的周期远大于合振动的周期。
- 在振幅的一次强弱变化中，已完成了若干次振动。

旋转矢量法求拍频



$\omega_2 > \omega_1$

拍频

$\nu = \nu_2 - \nu_1$

两矢量方向一致时合振幅最大

前后相邻两次方向一致的时间间隔： $T = \dfrac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \dfrac{1}{\nu_2 - \nu_1}$

*9-6 阻尼振动 受迫振动 共振

一　阻尼振动

现象： 振幅随时间减小的振动

原因： 阻尼

阻力系数

动力学分析： 阻尼力 $F_{\mathrm{r}} = -Cv$

$$-kx - Cv = ma$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 x=0$$

$$\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \delta=C/2m\end{cases}$$

固有角频率

阻尼系数

当阻尼系数较小时

$\boldsymbol{\delta^2<\omega_0^2}$

$$x=Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

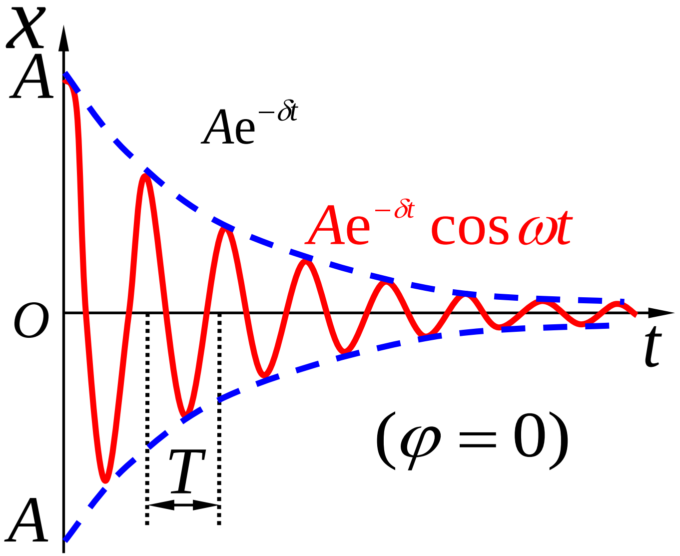
振幅

角频率

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi/\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

阻尼振动 *x*-*t* 曲线

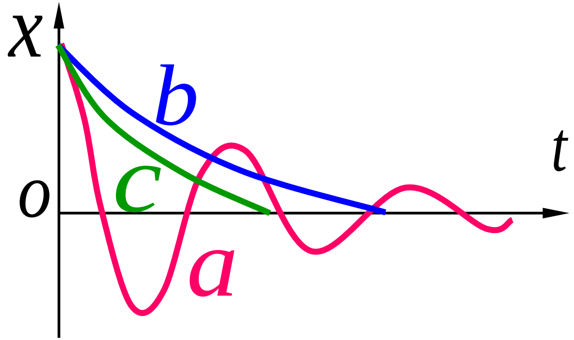


三种阻尼的比较

(a) 欠阻尼 $\omega_0^2 > \delta^2$

(b) 过阻尼 $\omega_0^2 < \delta^2$

(c) 临界阻尼 $\omega_0^2 = \delta^2$



临界阻尼：比过阻尼更快回到平衡位置

二　受迫振动

定义：系统在周期性外力作用下所进行的振动。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=F\cos\omega_{\mathrm{p}}t$$

驱动力

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad 2\delta=C/m\qquad f=F/m$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f\cos\omega_{\mathrm{p}}t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega_p t$$

驱动力的角频率

$$x=\cancel{A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)}+A\cos(\omega_p t+\psi)$$

阻尼振动衰减到可忽略不计后：

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)^2+4\delta^2\omega_p^2}}$$

$$\tan\psi=\frac{-2\delta\omega_p}{\omega_0^2-\omega_p^2}$$

三　共振

驱动力的角频率为某一值时，受迫振动的振幅达到极大的现象。

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 x = f\cos\omega_{\mathrm{p}} t$$

$$x = A\cos(\omega_{\mathrm{p}} t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{\mathrm{p}}^2)^2+4\delta^2\omega_{\mathrm{p}}^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{p}}}=\frac{2\omega_{\mathrm{p}} f}{\left[(\omega_0^2-\omega_{\mathrm{p}}^2)^2+4\delta^2\omega_{\mathrm{p}}^2\right]^{3/2}}\left(\omega_0^2-2\delta^2-\omega_{\mathrm{p}}^2\right)=0$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)^2+4\delta^2\omega_p^2}}$$

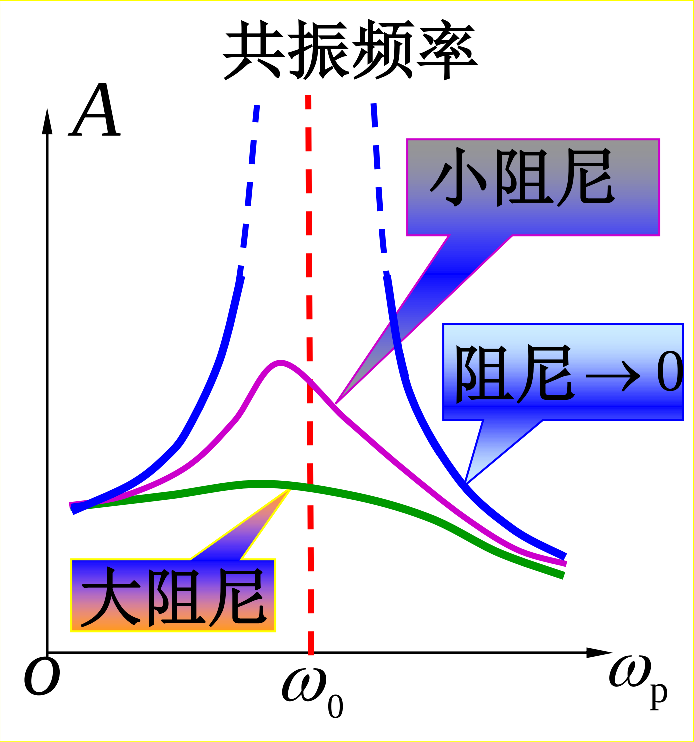
$$\frac{dA}{d\omega_p}=\frac{2\omega_p f}{\left[(\omega_0^2-\omega_p^2)^2+4\delta^2\omega_p^2\right]^{3/2}}\left(\omega_0^2-2\delta^2-\omega_p^2\right)=0$$

共振频率

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

共振振幅

$$A_r=\frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$



第九章（书后）作业题：

9-1～9-8， 9-13～9-17， 9-19， 9-20，
9-28， 9-30， 共17道题