

教学讨论

## 机械波在界面的反射、透射和半波损失

丁桂军

(中国科学技术大学 物理学院,安徽 合肥 230026)

**摘要:**本文推导出了平面简谐波垂直入射时在界面上产生的反射波和透射波的表达式,并讨论波从波疏介质传播到波密介质产生的半波损失现象,有助于理工科学生理解机械波界面行为等相关物理概念和物理规律.

**关键词:**反射波;透射波;半波损失;机械波界面行为

中图分类号:O 347.4<sup>+</sup>4 文献标识码:A 文章编号:1000-0712(2018)04-0008-03

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.170048

大学物理中机械波在界面上的反射、透射以及半波损失是很重要的物理现象和物理概念<sup>[1-6]</sup>.在随后的光学<sup>[7-9]</sup>和电动力学<sup>[10-12]</sup>课程中,又会遇到光波和电磁波在界面上的反射、透射以及半波损失,理解和具体处理这一类现象的基本的方法和思想也是非常相似.

但在绝大多数力学教材中对这部分的讨论尚待详尽,这无疑影响了初学者对教材内容的理解和掌握.本文详尽地推导出机械波在界面上产生的反射波和透射波的表达式,并进一步讨论波从波疏介质传播到波密介质产生的半波损失现象,是对力学教材中相关内容的补充.

### 1 反射和透射波函数

不失一般性,如图1所示,考虑一列垂直入射的平面简谐纵波.对于垂直入射的横波,推理方法完全相同.

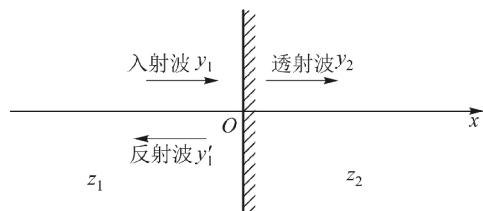


图1 一列垂直入射的平面简谐纵波

适当选择时间零点,则入射波的波函数为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x) \quad (1)$$

该列入射波传播到界面上时产生反射波和透射波,而且反射波和透射波的频率与入射波的频率相同.此外透射波的传播方向与入射波的传播方向相同,而反射波的传播方向与入射波的传播方向相反.所以反射波和透射波的波函数可写成:

$$\text{反射波: } y_1' = A_1' \cos(\omega t + k_1 x + \varphi_1) \quad (2)$$

$$\text{透射波: } y_2 = A_2 \cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2) \quad (3)$$

这里波的波幅  $A_1'$ 、 $A_2$  和位相  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  待求,求解的方法是连续性条件.首先界面两侧质元的位移相同,即有

$$[y_1 + y_1']|_{x=0} = y_2|_{x=0}$$

将式(1)—式(3)代入上式可得

$$[A_1 \cos(\omega t - k_1 x) + A_1' \cos(\omega t + k_1 x + \varphi_1)]|_{x=0} = A_2 \cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2)|_{x=0} \quad (4)$$

将该等式两边展开、化简可得

$$(A_1 + A_1' \cos \varphi_1) \cos \omega t - A_1' \sin \varphi_1 \sin \omega t = A_2 \cos \varphi_2 \cos \omega t - A_2 \sin \varphi_2 \sin \omega t \quad (5)$$

此式在任何时刻  $t$  均成立,所以等式两边  $\cos \omega t$  和  $\sin \omega t$  的系数分别相等.为讨论方便,定义反射系数

$$R \equiv \frac{A_1'}{A_1} \text{ 和透射系数 } T \equiv \frac{A_2}{A_1}, \text{ 于是方程(5)要求:}$$

$$\begin{cases} 1 + R \cos \varphi_1 = T \cos \varphi_2 \\ R \sin \varphi_1 = T \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (6)$$

此界面两侧所受的应力应该相同,即有

$$\left. \frac{F_1}{S} \right|_{x=0} = \left. \frac{F_2}{S} \right|_{x=0} \quad (7)$$

根据胡克定律,应力与相对伸长量成正比<sup>[1-5]</sup>,所以

收稿日期:2017-02-02;修回日期:2017-07-13

基金项目:国家自然科学基金委优秀青年基金项目(11522546)资助.

作者简介:丁桂军(1980—),男,安徽合肥人,中国科学技术大学近代物理系教授,博导,主要从事基本粒子物理理论研究工作.

大学物理

<http://dxwl.bnu.edu.cn>

可得

$$\frac{F_1}{S} \Big|_{x=0} = Y_1 \frac{\partial(y_1 + y'_1)}{\partial x}, \quad \frac{F_2}{S} \Big|_{x=0} = Y_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (8)$$

这里  $Y_1$  和  $Y_2$  分别是介质 1 和介质 2 的杨氏模量. 将式(8)代入式(7)并且利用式(1)、式(2)和式(3)给出的入射波、反射波和透射波的表达式, 可得

$$Y_1 [A_1 k_1 \sin(\omega t - k_1 x) - A'_1 k_1 \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_1)] \Big|_{x=0} = \\ Y_2 [A_2 k_2 \sin(\omega t - k_2 x + \varphi_2)] \Big|_{x=0} \quad (9)$$

将该式两边展开、整理可得

$$\begin{cases} A'_1 \sin \varphi_1 = -\frac{Y_2 k_2}{Y_1 k_1} A_2 \sin \varphi_2 \\ A_1 - A'_1 \cos \varphi_1 = \frac{Y_2 k_2}{Y_1 k_1} A_2 \cos \varphi_2 \end{cases} \quad (10)$$

进一步, 由杨氏模量和波速的关系  $Y = \rho u^2$  以及  $k = \omega/u$ , 方程(10)化简为

$$\begin{cases} R \sin \varphi_1 = -\frac{z_2}{z_1} T \sin \varphi_2 \\ 1 - R \cos \varphi_1 = \frac{z_2}{z_1} T \cos \varphi_2 \end{cases} \quad (11)$$

这里  $z_1 = \rho_1 u_1$ ,  $z_2 = \rho_2 u_2$  称为介质 1 和介质 2 的特性阻抗. 综上可知 4 个待求的未知  $R$ 、 $T$ 、 $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  满足以下 4 个方程:

$$\begin{cases} R \sin \varphi_1 = T \sin \varphi_2 \\ R \sin \varphi_1 = -\frac{z_2}{z_1} T \sin \varphi_2 \\ 1 + R \cos \varphi_1 = T \cos \varphi_2 \\ 1 - R \cos \varphi_1 = \frac{z_2}{z_1} T \cos \varphi_2 \end{cases} \quad (12)$$

首先考虑一种特例, 波只在一种介质中传播, 未遇到界面, 即有  $z_1 = z_2$ , 此时可解得

$$\begin{cases} R = 0 \\ T = 1, \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} R = 0 \\ T = -1, \varphi_2 = \pi \end{cases} \quad (13)$$

可知没有反射波, 只有透射波而且透射波的波函数与入射波的波函数相同, 即没有发生波的反射现象. 这是显然的, 因为此时波没有遇到界面. 当波从一种介质 1 到达另外一种介质 2, 此时  $z_1 \neq z_2$ , 由式(12)可得:

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = 0, \quad R \cos \varphi_1 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad T \cos \varphi_2 = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \quad (14)$$

下面分 4 种情况讨论.

$$1) \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

此时可得反射系数  $R$  和透射系数  $T$ :

$$R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad T = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \quad (15)$$

所以反射波和透射波的表达式为:

$$\begin{cases} y'_1 = A_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \cos(\omega t + k_1 x) \\ y_2 = A_1 \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t - k_2 x) \end{cases} \quad (16)$$

$$2) \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$$

此种情况下反射系数  $R$  和透射系数  $T$  的解为:

$$R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad T = -\frac{2z_1}{z_1 + z_2} \quad (17)$$

反射波和透射波的表达式为:

$$\begin{cases} y'_1 = A_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \cos(\omega t + k_1 x) \\ y_2 = -A_1 \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t - k_2 x + \pi) = A_1 \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t - k_2 x) \end{cases} \quad (18)$$

$$3) \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0$$

可得反射系数  $R$  和透射系数  $T$  为:

$$R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}, \quad T = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \quad (19)$$

反射波和透射波的表达式为:

$$\begin{cases} y'_1 = A_1 \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t + k_1 x + \pi) = A_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \cos(\omega t + k_1 x) \\ y_2 = A_1 \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t - k_2 x) \end{cases} \quad (20)$$

$$4) \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = \pi$$

此种情形可解得反射系数  $R$  和透射系数  $T$ :

$$R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}, \quad T = -\frac{2z_1}{z_1 + z_2} \quad (21)$$

所以反射波和透射波的表达式为:

$$\begin{cases} y'_1 = A_1 \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t + k_1 x + \pi) = A_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \cos(\omega t + k_1 x) \\ y_2 = -A_1 \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t - k_2 x + \pi) = A_1 \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t - k_2 x) \end{cases} \quad (22)$$

综上所述, 由式(19)、式(22)、式(25)和式(28)可知: 一垂直于界面入射的平面简谐波, 在界面处发生反射和透射现象, 其反射和透射波函数为:

$$\text{入射波: } y_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x)$$

$$\text{反射波: } y'_1 = A_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \cos(\omega t + k_1 x)$$

$$\text{透射波: } y_2 = A_1 \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \cos(\omega t - k_2 x) \quad (23)$$



显然以上公式也适用于  $z_1=z_2$  的情形，此时不存在反射波。

## 2 全波反射和半波损失

若波从波密媒质到波疏媒质 ( $z_1>z_2$ )，从波疏媒质反射回来，由式(23)可知，在界面  $x=0$  处，反射波的振动相位与入射波的相位相同。此时称为全波反射。如图2(a)所示。若波从波疏媒质到波密媒质 ( $z_1<z_2$ )，从波密媒质反射回来，在界面  $x=0$  处发生了  $\pi$  的相位突变，相当于出现了半个波长的波程差，称为半波损失。如图2(b)所示。

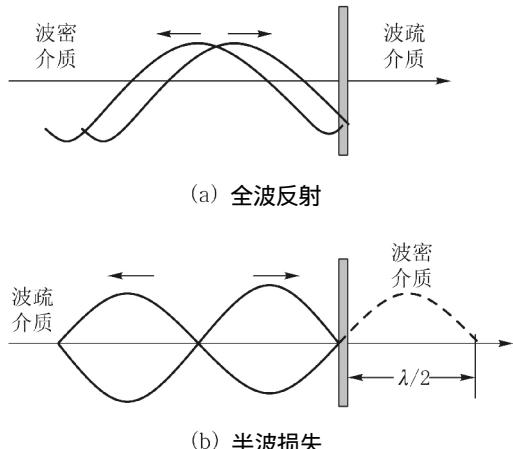


图2 一列垂直入射的平面简谐纵波的入射与反射

下面考虑两种特殊情况：

1) 界面为固定端，即  $z_2 \rightarrow \infty$

由式(23)可知此时入射波、反射波和透射波的表达式为：

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos(\omega t - k_1 x) \\ y'_1 &= -A_1 \cos(\omega t + k_1 x) = A_1 \cos(\omega t + k_1 x + \pi) \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

显然此时没有透射波。在介质1中，入射波和反射波频率相同，振幅相同，传播方向相反，形成驻波。根据波的叠加原理可得驻波方程为

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y'_1 = \\ &A_1 \cos(\omega t - k_1 x) + A_1 \cos(\omega t + k_1 x + \pi) = \\ &2A_1 \sin(k_1 x) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (25)$$

在界面  $x=0$  处，驻波的振幅为零，因此此时界面处为波节。

2) 界面为自由端(又称柔软端)，即  $z_2 \rightarrow 0$ ，由(23)式可知此时入射波、反射波和透射波的表达式为：

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos(\omega t - k_1 x) \\ y'_1 &= A_1 \cos(\omega t + k_1 x) \\ y_2 &= 2A_1 \cos(\omega t - k_2 x) \end{aligned} \quad (26)$$

同理，在介质1中，入射波和反射波形成驻波，其表达式为：

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y'_1 = \\ &A_1 \cos(\omega t - k_1 x) + A_1 \cos(\omega t + k_1 x) = \\ &2A_1 \cos(k_1 x) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (27)$$

可知在界面  $x=0$  处，驻波的振幅最大为  $2A_1$ ，因此此时界面处为波腹。

若界面处既非固定端又非柔软端，即  $z_2 \neq \infty, z_2 \neq 0$ ，则此时入射波和反射波频率相同，传播方向相反，但是振幅不相同。因此介质1中看到的是不是严格的驻波，界面处也既非波腹也非波节。因此，波从波疏介质到波密介质，一定会发生半波损失，但是只有界面是自由端或者固定端时才会产生严格的驻波，界面处为波节或波腹。

## 3 结束语

本文推导出了平面简谐波垂直入射时在界面上产生的反射波和透射波的表达式，并且说明了只有在界面是固定端或自由端时才能产生严格的驻波。该方法同样可用于讨论光和电磁波在界面上的反射和透射。通过对理论推导细节的展示扩充了力学教材中相关内容。对于理工科本科生理解波的反射、透射以及半波损失等相关物理概念和物理现象会有一定帮助。

## 参考文献：

- [1] 郑永令, 贾起民, 方小敏. 力学 [M]. 2 版. 高等教育出版社 2002.
- [2] 漆安慎, 杜婵英. 力学 [M]. 2 版. 高等教育出版社 2005.
- [3] 赵凯华, 罗蔚因. 力学 [M]. 2 版. 高等教育出版社 2004.
- [4] 张汉壮, 王文全. 力学 [M]. 2 版. 高等教育出版社 2012.
- [5] 刘斌. 力学 [M]. 中国科学技术大学出版社 2013.
- [6] 卢强民, 许丽敏. 力学 [M]. 2 版. 高等教育出版社 2002.
- [7] Max Born, Emil Wolf. Principles of Optics [M]. 7th Edition. Cambridge University Press, 1999.
- [8] 钟锡华. 现代光学基础 [M]. 北京大学出版社 2003.
- [9] 赵凯华, 钟锡华. 光学(上、下册) [M]. 北京大学出版社 2008.
- [10] John David Jackson. Classical Electrodynamics [M]. 3rd Edition. Wiley, 1998.
- [11] David J Griffiths. Introduction to Electrodynamics [M]. 4th Edition. Pearson Education, 2015.
- [12] 郭硕鸿. 电动力学 [M]. 3 版. 高等教育出版社 2008.

(下转 15 页)

**参考文献:**

- [1] 汤华, 谭志中.  $n$  阶网络任意节点的等效电阻的研究 [J]. 大学物理, 2012, 31(11): 18-22.
- [2] 周蒨, 谭志中.  $n$  阶网络任意 2 节点间的等效电阻公式 [J]. 大学物理, 2017, 36(03): 20-24.
- [3] P. P. Ong, 陈敏华. 用短路法求网络的电阻 [J]. 大学物理, 1985, (10): 41-43.
- [4] 刘绍清. 断路法求网络电阻 [J]. 大学物理, 1987, (11): 49-50.
- [5] 张克东. 电路分析中对受控源处理方法的探讨 [J]. 黑龙江科技信息, 2008, (35): 55.
- [6] 于春晓, 李艳英. 电路教学中含受控源电路的分析方  
法探讨 [J]. 中国科技信息, 2009, (19): 276-277.
- [7] 何迪. 特勒根似功率定理在求解含有纯电阻电路网络中的应用 [J]. 教育教学论坛, 2012, (26): 104-105.
- [8] 张建林. 纯电阻电路等效电阻值求解研究 [J]. 武汉科技大学学报, 2000, (03): 37-41.
- [9] 霍龙, 荆澜涛, 于佳, 等. 含有受控源的改进结点电压方程 [J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2016, (04): 459-463.
- [10] 贺小光, 梁立凯. 含受控源电路的等效电阻替代法 [J]. 长春师范学院学报, 2005, (02): 34-35.
- [11] 高朝, 崔乃忠. 含受控源电路的处理方法 [J]. 唐山师范学院学报, 2014, (05): 37-39.

**Study of the input resistance in the circuit without independent source**WANG Wei-gang<sup>1</sup>, TU Zhen-zhen<sup>2</sup>

(1. College of Electronic and Optical Engineer, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210023, China;  
2. College of Material Engineer, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210023, China)

**Abstract:** The one port network which only contains resistors or controlled sources, not including independent source, can be divided into pure resistors circuit and controlled sources circuits. As to pure resistors circuit, we propose a method of “searching roads by marking points”. As to the circuit with controlled sources, it can be resolved by the external excitation method and internal excitation method. External excitation method includes the traditional method of “calculating current by inputting voltage” and “calculating voltage by inputting current”. As to internal excitation method, we also propose a new method named “open-short”.

**Key words:** searching roads by marking points; external excitation method; internal excitation method

(上接 10 页)

**Derivation of reflection wave, transmission wave and half wave loss of mechanical waves**

DING Gui-jun

(School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China)

**Abstract:** We have derived the expressions of reflection wave and transmission wave when a mechanical wave reaches perpendicularly an interface of two media. It is shown that half wave loss appears when a mechanical wave propagates from sparse medium to dense medium. Our analyses are helpful to understand the key concepts and physical laws of the interfacial behavior of mechanical waves.

**Key words:** reflection wave; transmission wave; half wave loss; mechanical wave interface behavior