

## 第四章 拉普拉斯变换

### 4.1 引言

### 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

### 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### 4.4 拉普拉斯逆变换

### 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

### 4.6 系统函数（网络函数）

### 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

### 4.8 由系统函数零、极点分布决定频域特性

### 4.9 线性系统稳定性

### 4.10 双边拉氏变换

### 4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

## 4.1 引言

→为什么要引入拉氏变换？

### ◆ 频域分析

以虚指数信号  $e^{j\omega t}$  作为基本信号，任意信号可分解为众多不同频率的虚指数分量之和，物理意义清楚。

### ◆ 频域分析的不足之处：

1. 要求  $f(t)$  满足狄里赫利条件：

① 有些重要信号虽然不满足该条件，但他们仍然存在傅里叶变换，如  $u(t)$ 、 $tu(t)$  等，但其变换中常带有  $\delta(\omega)$ ，不利于计算和分析；

② 有些信号根本不存在傅里叶变换，如  $e^{at}u(t)$ , ( $a > 0$ )；

2. 频域分析只能确定  $r_{zs}(t)$ ，无法求  $r_{zi}(t)$ ，即不包含系统 0- 初始条件；

3. 求傅里叶反变换也比较麻烦。 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

## 4.1 引言

拉普拉斯变换可以完全避免上述问题，是分析连续 LTI 系统更为有效的工具。

其主要优点体现在以下几个方面：

1. 求解系统响应的步骤更为简化：

① 同时求出特解和齐次解

② 初始条件自动包含在变换式中

2. 将时域的微分和积分运算转换为复频域的乘法和除法运算

→ 变微分方程为代数方程

3. 某些不满足狄里赫利条件的函数，不能进行傅里叶变换，但可以进行拉氏变换

4. 拉普拉斯变换满足卷积定理，在此基础上建立系统函数的概念，并且可利用系统函数的零点、极点分布来简明、直观地表达系统性能的许多规律

## 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

### 4.2.1 从傅氏变换到拉氏变换

$f(t)$  必然是发散的

有些函数不满足绝对可积条件，求解傅里叶变换困难。

为此，可用一衰减因子  $e^{-\sigma t}$  ( $\sigma$  为实常数) 乘以信号  $f(t)$ ，

适当选取  $\sigma$  的值，使乘积信号  $f(t)e^{-\sigma t}$  当  $t \rightarrow \infty$  时信号幅度趋近于 0，从而满足绝对可积条件，使  $f(t)e^{-\sigma t}$  的傅里叶变换存在。

思想：想办法构造满足绝对可积条件的时域函数

## 4.2.1 从傅氏变换到拉氏变换

为了 满足绝对可积条件，引入一个实指数函数  $e^{-\sigma t}$  去乘信号  $f(t)$ ，这样就可以解决函数  $f(t)e^{-\sigma t}$  的绝对可积问题，通常  $e^{-\sigma t}$  称为衰减因子。

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad \Rightarrow F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$\begin{array}{lll} u(t) & \longrightarrow & u(t)e^{-\sigma t} \quad (\sigma > 0) \\ e^{at} \quad (a > 0) & \longrightarrow & e^{at}e^{-\sigma t} \quad (\sigma > a) \\ \cos \omega_1 t & \longrightarrow & e^{-\sigma t} \cos \omega_1 t \quad (\sigma > 0) \end{array}$$

令：  $\sigma + j\omega = s$ ，具有频率的量纲，称为复频率。

拉普拉斯变换：

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s)$$

## 4.2.2 拉氏逆变换 ( $LT^{-1}$ )

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

$f(t) e^{-\sigma t}$  是  $F(\sigma + j\omega)$  的傅里叶逆变换  $f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

两边同乘以  $e^{\sigma t}$  
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

其中:  $s = \sigma + j\omega$ ; 若  $\sigma$  取常数, 则  $ds = j d\omega$

积分限: 对  $\omega: \int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow$  对  $s: \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty}$

拉普拉斯逆变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

## 4.2.3 拉氏变换对

$$\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \end{cases}$$

双边拉氏变换

正变换

逆变换

记作:  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ ,  $f(t)$  称为原函数,  $F(s)$  称为象函数。

考虑到实际信号都是因果信号:

单边拉氏变换

所以

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

采用  $0_-$  系统, 相应的单边拉氏变换为

$$\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \end{cases}$$

自动包含  $0_-$  条件

**FT:**

$$\begin{cases} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt & \text{正变换} \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega & \text{逆变换} \end{cases}$$

**LT:**

$$\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt & \text{正变换} \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

**FT:** 实频率  $\omega$  , 振荡频率

**LT:** 复频率  $s$  ,  $s = \sigma + j\omega$  ,  $\omega$  是振荡频率,  $\sigma$  控制衰减的速度

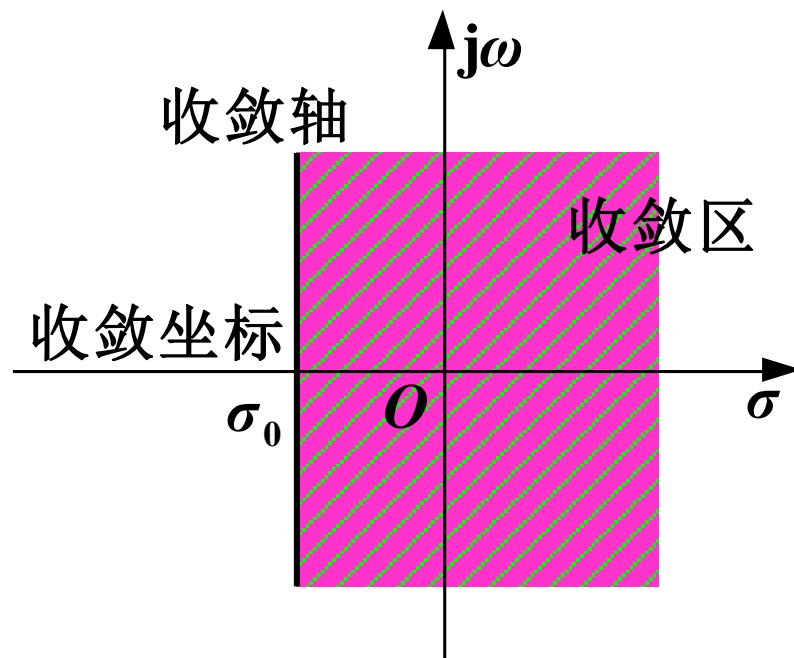


## 4.2.4 拉普拉斯变换的收敛域

拉普拉斯变换的存在伴随着条件，就是它的收敛域。使信号  $f(t) e^{-\sigma t}$  满足绝对可积的  $\sigma$  的值域，是  $F(s)$  的收敛域，记为 ROC (region of convergence)。

数学描述：
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)$$

图形表示：



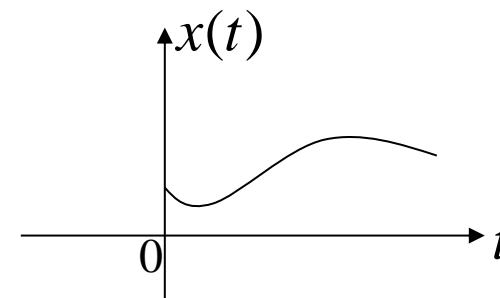
## 说 明:

1. 满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$  ( $\sigma > \sigma_0$ ) 的信号称为**指数阶信号**;
2. 时间有限的非周期信号的**拉氏变换一定存在**, **收敛域是全部 s 平面**;
3. 幂指数信号  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0$  ( $\sigma > 0$ ) 收敛坐标为原点, 收敛域为 s 右半平面;
4. **指数信号收敛域为  $\sigma > \alpha$** ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = 0$  ( $\sigma > \alpha$ ) ;
5.  $e^{t^2}$ ,  $te^{t^2}$  等信号比指数函数增长还快, 找不到收敛坐标, 为非指数阶信号, 无法进行拉氏变换;
6. 一般求函数的单边拉式变换, 可以不加注其收敛范围。

## 4.2.5 单边拉普拉斯变换

在系统分析时，我们常用的是单边拉普拉斯变换：

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$



因为，实际系统是因果的，信号总是在某个时刻才开始作用于系统，我们可以把这个时刻看作  $t = 0$ ；以上定义式中的积分的下限取  $0^-$ ，考虑变换对冲激信号也是有效的；单边拉氏变换的收敛域是收敛轴的右半平面： $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ ，以后一般不具体标示变换的收敛域。

## 常用信号的拉氏变换 (参考教材p192表格)

时域信号 ( $t > 0$ )	s 域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + a}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-st_0}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

**目的：**简化拉普拉斯变换或反变换的求解过程。

### 4.3.1 线性

如有： $f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F_i(s)$

$$\text{则 } f(t) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F(s) = \sum_{i=1}^N a_i F_i(s)$$

**例4-2：**利用线性性质求  $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$  的拉氏变换。

$$\text{解： } e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} \qquad e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+2}$$

$$\text{所以 } x(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

## 4.3.2 延时性 (时移性)

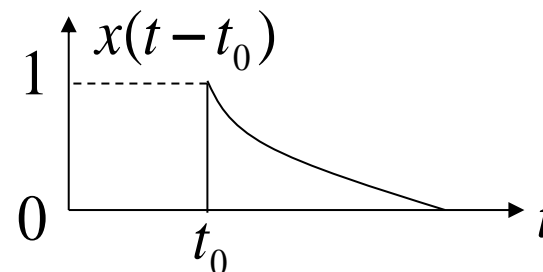
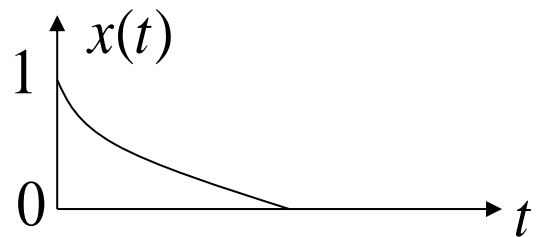
设  $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

则  $f(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$ , ( $t_0 > 0$ )

该性质表明：若信号的波形延迟  $t_0$ ，则它的拉普拉斯变换就乘以  $e^{-st_0}$ 。

注意：在前述单边拉氏变换的定义下，

$e^{-\alpha t}u(t)$  的延时是  $e^{-\alpha(t-t_0)}u(t-t_0)$



## 4.3.3 s 域平移性 (频移性)

设  $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

则  $f(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{LT} F(s - s_0)$

时移同号  
频移反号

结论：时间信号  $f(t)$  乘以因子  $e^{s_0 t}$ ，相当于变换域内右移  $s_0$

**例4-6：**利用  $s$  域平移性求  $e^{-\alpha t} u(t)$  和  $te^{-\alpha t} u(t)$  的拉氏变换。

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

$$tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2}$$

$$e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}$$

$$te^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

## 4.3.4 时域展缩性 (尺度变换)

$$\text{若} \quad f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

$$\text{则} \quad f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad (a > 0)$$

这里常数  $a$  应为正的, 否则信号发生反褶, 对于单边拉氏变换, 这个性质就没有意义。

**例4-8:** 用时域展缩性求  $e^{-\alpha t} u(t)$  的拉氏变换。

$$e^{-t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1}$$

$$\text{于是} \quad e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{s + \alpha}$$



## 4.3.5 时域微分性

设  $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

则  $f'(t) \xleftrightarrow{LT} sF(s) - f(0^-)$

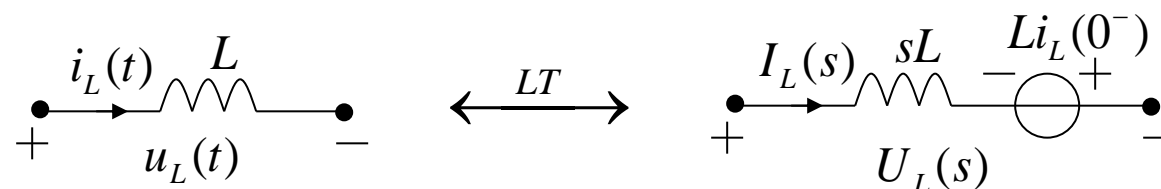
零状态条件下, 时域微分一次,  
复频域乘一个  $s$

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{LT} s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0^-)$$

$$\begin{aligned} \int_{0_-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt &= f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(e^{-st})' dt \\ &= f(\infty)e^{-s\infty} - f(0_-) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0_-) \end{aligned}$$

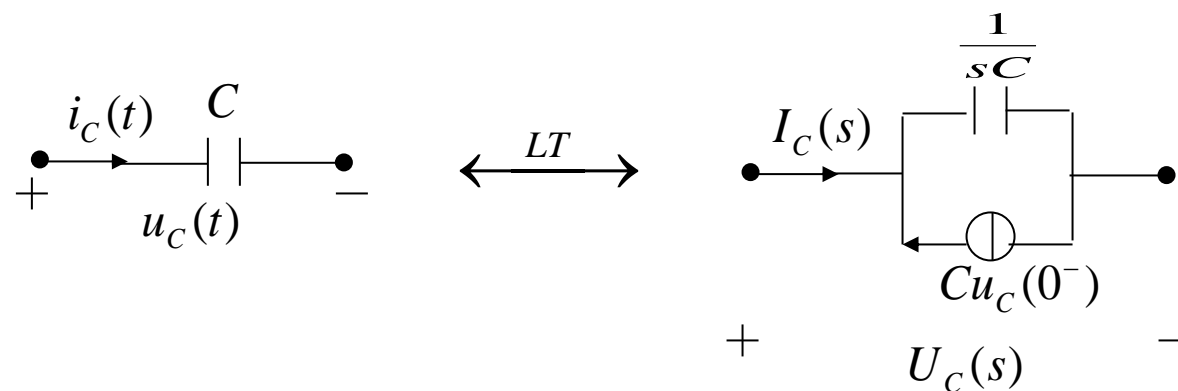
**例4-10:** 求电感两端电压  $u_L(t)$  的拉氏变换。

解:  $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$



同样，对于电容中的电流有

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0^-)$$



## 4.3.6 时域积分性

设  $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

则  $y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau = y(0^-) + \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau$

借助分部积分法，详见  
教材195页

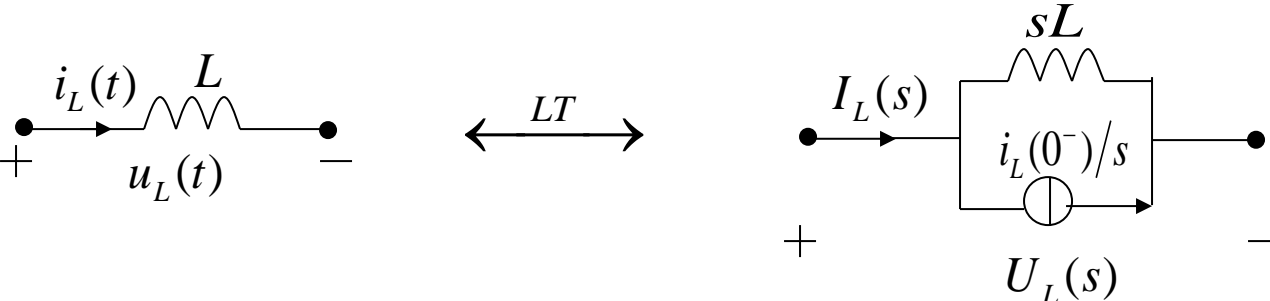
$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{y(0^-)}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

零状态条件下，时域积分一次，复频域除一个s

**例4-11:** 求电感中的电流  $i_L(t)$  的拉氏变换。

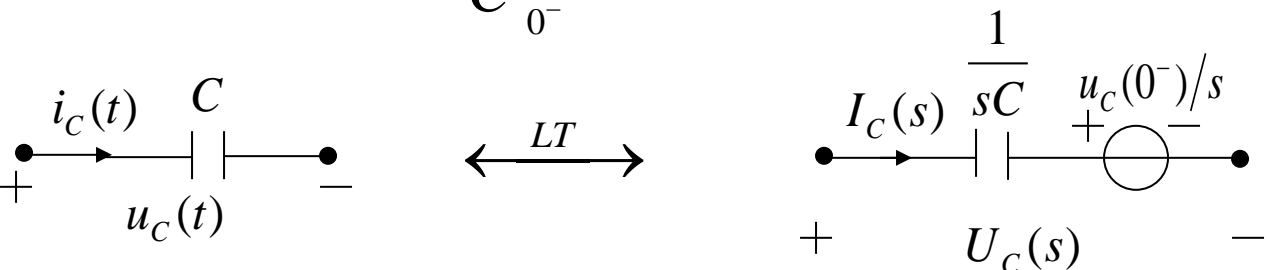
解: 
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^t u_L(\tau) d\tau$$

于是

$$i_L(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{i_L(0^-)}{s} + \frac{U_L(s)}{sL}$$


同样, 电容两端的电压 
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_C(\tau) d\tau$$

于是

$$u_C(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{u_C(0^-)}{s} + \frac{I_C(s)}{sC}$$


拉氏变换的时域微积分性, 在作电路的瞬态分析时, 应用较为便利。

## 4.3.7 s 域微分性

设  $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

则  $-tf(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{dF(s)}{ds} \quad tf(t) \xleftrightarrow{LT} -\frac{dF(s)}{ds}$

**例4-12:** 已知  $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+\alpha}$  , 利用 s 域微分性求  $te^{-\alpha t}u(t)$  的拉氏变换。

解:  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{s+\alpha} \right] = \frac{-1}{(s+\alpha)^2}$

于是

$$te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

## 4.3.8 s 域积分性

注意积分限与傅里叶变换不同

设  $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$  则  $\frac{f(t)}{t} \xleftrightarrow{LT} \int_s^{\infty} F(\lambda) d\lambda$

**例4-13:** 已知  $(1 - e^{-\alpha t})u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha}$ , 求  $\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t}u(t)$  的拉氏变换。

解:  $\int_s^{\infty} (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \alpha}) d\lambda = \ln \lambda \Big|_s^{\infty} - \ln(\lambda + \alpha) \Big|_s^{\infty} = -\ln s + \ln(s + \alpha) = -\ln \frac{s}{s + \alpha}$

于是  $\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t}u(t) \xleftrightarrow{LT} -\ln \frac{s}{s + \alpha}$

## 4.3.9 卷积定理 ( 时域、频域 )

设  $f_1(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s), \quad f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_2(s)$

则  $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s) \cdot F_2(s)$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

利用拉氏变换的定义式和延时性，即可证明此定理。

**例4-14:** 已知系统的单位冲激响应  $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$  和输入  $x(t) = u(t)$  求零状态响应  $y(t)$ 。

解：求拉氏变换  $h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}$  ,  $x(t) = u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$

于是  $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s(s + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} \right)$   $y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$

## 4.3.10 初值与终值定理

设信号  $f(t)$  是因果的，且其导数的拉氏变换存在，则

**1、初值定理：**  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

以上是针对  $F(s)$  必须是真分式的。如果  $f(t)$  包含冲激函数  $k\delta(t)$ ，则  $F(s)$  不是真分式， $F(s) = k + F_0(s)$  再取， $F_0(s)$  为真分式。此时

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} [sF(s) - ks] \quad \text{或} \rightarrow \quad f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF_0(s)$$

**2、终值定理：** 若  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在，于是有  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

此时相当于  $F(s)$  的极点都位于  $s$  平面左半平面，而  $F(s)$  在原点仅有单极点。

**例4-15:** 已知  $u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$  , 利用拉氏变换性质分别求  $u(t)$  和  $\cos(\omega_0 t)u(t)$  的初值和终值。

解:  $u(t)|_{t=0^+} = u(t)|_{t=\infty} = s \cdot \frac{1}{s} = 1$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \cos(\omega_0 t)|_{t=0^+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} = 1$$

$\cos(\omega_0 t)u(t)$  为等幅震荡函数, 其终值不存在。



**例4-16:** 利用拉氏变换的性质, 求以下信号的拉氏变换。

$$(1) te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) \quad (2) \frac{\sin t}{t} u(t)$$

解: (1) 应用s域频移性和s域微分性  $e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$

$$-te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right] = \frac{\omega_0^2 - (s + \alpha)^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2}$$

$$te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{(s + \alpha)^2 - \omega_0^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2}$$

(2) 应用 s 域积分性  $\because \sin tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2 + 1}$

$$\frac{\sin t}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \int_s^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 + 1} = \arctan \lambda \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

$$\therefore \frac{\sin t}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

拉氏变换的基本性质总结 (1)

线性	$\sum_{i=1}^N a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^N a_i F_i(s)$
时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau}{s}$
频域微分	$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n F(s)}{ds^n}$
频域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\lambda) d\lambda$
时移	$f(t - t_0)u(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
频移	$f(t)e^{-at}$	$F(s + a)$

拉氏变换的基本性质总结 (2)

尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
初值定理	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	
终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	
卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$

## 作 业

### 教材习题

基础题: 4-1, 4-2, 4-3 (1) (2) (3)

加强题: 4-3 (4) (5)

### 拉普拉斯变换视频:

<https://www.bilibili.com/video/BV1Hs411p7XY?from=search&seid=8178191561661716251>

<https://www.bilibili.com/video/BV1HE411B77w?from=search&seid=8178191561661716251>

## 第四章 拉普拉斯变换

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

**4.4 拉普拉斯逆变换**

**4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型**

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频域特性

4.9 线性系统稳定性

4.10 双边拉氏变换

4.11 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

## 4.4 拉普拉斯逆变换

### 4.4.1 拉普拉斯变换的零、极点

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

根据拉普拉斯逆变换的公式，可以应用围线积分求解。但是在应用中，拉氏变换绝大多数是有理分式的形式：

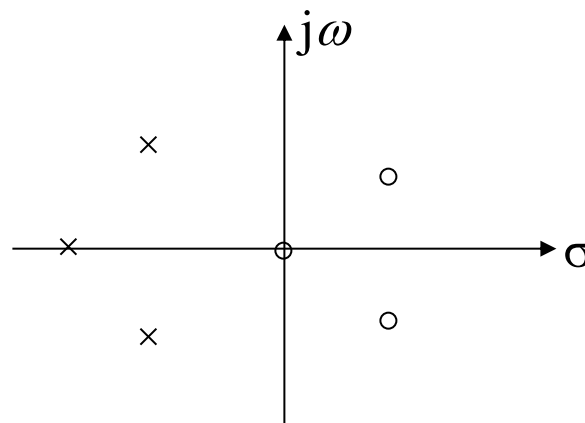
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

分子、分母均是  $s$  的有理多项式。

以上分子多项式  $N(s)=0$  的根, 称作  $F(s)$  的**零点**; 分母多项式  $D(s)=0$  的根, 称作  $F(s)$  的**极点**。上式可表示为:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

式中的  $z_i$  与  $p_i$ , 分别是  $F(s)$  的**零点与极点**。可将零、极点表示在  $s$  平面上, 如图。



## 4.4.2 求拉氏逆变换

用拉氏变换方法分析系统时，最后还要将象函数进行**拉氏逆变换**。

### 1、部分分式法（海维赛法）

#### (1) 极点为单实根的情况 $(p_1 \cdots p_n)$

$$m < n \text{ 时, } F(s) \stackrel{\text{分解}}{=} \frac{k_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} \quad (\text{真分式})$$

$$\text{其中 } k_i = (s - p_i)F(s) \Big|_{s=p_i} \quad (\text{证明见教材 202 页})$$

$$\text{由拉氏变换性质已知: } Ae^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{A}{s + \alpha}$$

$$F(s) \xrightarrow{LT^{-1}} f(t) = \left( k_1 e^{p_1 t} + \cdots + k_n e^{p_n t} \right) u(t) \quad \text{将 } f(t) \text{ 分解为典型函数之和}$$



即使  $F(s)$  不是真分式，即  $n < m$ ，它也可表示为一  $s$  的多项式与一真分式的和：

**例：**  $F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2}$

作长除法提出高次项



$$\begin{array}{r}
 s + 1 \\
 s^2 + 3s + 2 \overline{) s^3 + 4s^2 + 6s + 5} \\
 \underline{s^3 + 3s^2 + 2s} \phantom{+ 5} \\
 s^2 + 4s + 5 \\
 \underline{s^2 + 3s + 2} \\
 s + 3
 \end{array}$$

$$F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + 1 + \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

上式中  $s+1$  的拉氏逆变换等于： $\delta'(t) + \delta(t)$

$s$  的多项式的部分，可变换为  $\delta(t)$  和  $\delta(t)$  各阶导数的形式。

对于拉氏变换是有理真分式部分的逆变换，用部分分式法求解。

**例4-17.** 已知  $F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ , 则其拉氏逆变换  $f(t)$  为 ( )

- ☐ A  $f(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$
- ☐ B  $f(t) = (2e^t - e^{2t})u(t)$
- ☒ C  $f(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$
- ☐ D  $f(t) = (2e^{-2t} + e^{-t})u(t)$

提交

**例4-17:**  $F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$  , 试求其拉氏逆变换  $f(t)$  。

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)}$$

$$k_1 = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1$$

所以:  $F(s) = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$

$$f(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

## (2) 极点包含共轭复根的情况 ( $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ )

$$F(s) = \frac{A(s)}{D(s) \left[ (s + \alpha)^2 + \beta^2 \right]} = \frac{A(s)}{D(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

其中 $D(s)$ 为分母除去共轭复根剩余部分

$$\text{设 } F_1(s) = \frac{A(s)}{D(s)}$$

$$\text{则 } F(s) = \frac{F_1(s)}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

$$\stackrel{\text{分解}}{=} \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} + \dots$$

暂不考虑

$$\text{其中 } K_1 = (s + \alpha - j\beta) F(s) \Big|_{s=-\alpha+j\beta} = \frac{F_1(-\alpha + j\beta)}{2j\beta}$$

$$K_2 = (s + \alpha + j\beta) F(s) \Big|_{s=-\alpha-j\beta} = \frac{F_1(-\alpha - j\beta)}{-2j\beta}$$

$K_1$ 、 $K_2$ 呈共轭关系： $K_{1,2} = A \pm jB$

得共轭复根有关部分逆变换为  $\xrightarrow{\text{LT}^{-1}}$

$$\begin{aligned} f_c(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} \right] = \left( K_1 e^{(-\alpha + j\beta)t} + K_2 e^{(-\alpha - j\beta)t} \right) u(t) \\ &= e^{-\alpha t} (K_1 e^{j\beta t} + K_1^* e^{-j\beta t}) u(t) \\ &= 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] u(t) \end{aligned}$$

**例4-18:**  $F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$ , 试求其拉氏逆变换  $f(t)$ 。

**解:** 令  $F(s) = \frac{K_0}{s + 2} + \frac{K_1}{s + 1 - j2} + \frac{K_2}{s + 1 + j2}$   $\alpha = 1,$   
 $\beta = 2,$  取  $\beta > 0$

$$K_0 = (s + 2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 3}{s^2 + 2s + 5} \Big|_{s=-2} = \frac{7}{5}$$

$$K_1 = \frac{s^2 + 3}{(s + 2)(s + 1 + j2)} \Big|_{s=-1+j2} = \frac{-1 + j2}{5} \quad A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{2}{5}$$

$$f(t) = \left[ \frac{7}{5} e^{-2t} - 2e^{-t} \left( \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{2}{5} \sin 2t \right) \right] u(t)$$

特别的,  $F(s)$  只具有共轭极点, 不必用部分分式展开法

**例4-19:**  $F(s) = \frac{s + \gamma}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$ , 试求其拉氏逆变换  $f(t)$ 。

解: 此函数式只有共轭复根, 所以无需用部分分式法。

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s + \alpha + \gamma - \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \\ &= \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{(\gamma - \alpha)}{\beta} \cdot \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

利用  $\mathcal{L} [e^{-\alpha t} \sin(\beta t)] = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$

$\mathcal{L} [e^{-\alpha t} \cos(\beta t)] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \left[ \cos(\beta t) + \frac{\gamma - \alpha}{\beta} \sin(\beta t) \right] u(t)$$

## (3) 极点包含多重根的情况 ( $k$ 重根 $p_1$ )

$$F(s) = \frac{A(s)}{D(s)} = \frac{A(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)}$$

$$= \frac{K_{11}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{K_{1k}}{(s-p_1)} + \sum_{i=k+1}^n \frac{K_i}{s-p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{K_{1i}}{(s-p_1)^{k-i+1}} + \sum_{i=k+1}^n \frac{K_i}{s-p_i}$$

暂不考虑

求  $K_i$  和  $K_{11}$ , 方法同第一种情况:  $K_{11} = (s-p_1)^k F(s) \Big|_{s=p_1}$

求其它系数, 令:  $F_1(s) = (s-p_1)^k \cdot F(s)$

$$\text{当 } i=2, \quad K_{12} = \frac{d}{ds} F_1(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$\text{当 } i=3, \quad K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} F_1(s) \Big|_{s=p_1}$$



$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad (i=1,2,3,\dots,k)$$



$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s-p_1)^k F(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (i=1,2,\dots,k)$$

得多重根部分的逆变换  $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$  :

$$f_c(t) = \left[ \frac{K_{11}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_1 t} + \dots + \frac{K_{1i}}{(k-i)!} t^{k-i} e^{p_1 t} + \dots + K_{1k} e^{p_1 t} \right] u(t)$$

**例4-20:**  $F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$  , 试求其拉氏逆变换  $f(t)$  。

**解:** 令  $F(s) = \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)} + \frac{K_2}{s}$

先可求出  $K_2$   $K_2 = sF(s)|_{s=0} = \frac{s-2}{(s+1)^3} \Big|_{s=0} = -2$

利用以上公式, 求取  $K_{1i}$   $K_{11} = (s+1)^3 F(s)|_{s=-1} = \frac{s-2}{s} \Big|_{s=-1} = 3$

$$K_{12} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} [(s+1)^3 F(s)]_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{s-2}{s} \right] \Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_{13} = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 F(s)]_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{s-2}{s} \right] \Big|_{s=-1} = 2$$

于是:  $F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{s}$

$$f(t) = \left[ \left( \frac{3}{2} t^2 + 2t + 2 \right) e^{-t} - 2 \right] u(t)$$

## ※ 2、留数法 (不做要求)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t \geq 0$$

设一闭合围线的积分路径为无限大圆弧, 即  $f(t) = \sum_{\text{极点}} [F(s)e^{st} \text{的留数}]$

则上式中积分等于围线中被积函数的所有极点的留数之和。

若极点  $s = p_i$  处留数为  $r_i$ , 围线中有  $n$  个极点  $p_i$  ( $k$  阶)

$$\text{则 } f(t) = \sum_{i=1}^n r_i,$$

$$r_i = \frac{1}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s - p_i)^k F(s)e^{st} \right] \Big|_{s=p_i}$$

## 特殊情况：含 $e^{-s}$ 的非有理式

$e^{-s}$  项不参加部分分式运算，求解时利用时移性质。

**例4-21：**求  $\frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2}$  的拉氏逆变换。

解： 
$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} = F_1(s)e^{-2s}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

$$\text{所以 } f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\text{所以 } f(t) = f_1(t-2) = [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

**例4-22:** 已知  $F(s) = \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right)^2$  , 求拉氏反变换  $f(t)$  。

- ☒ A  $f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ B  $f(t) = (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ C  $f(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ D  $f(t) = tu(t) - (t-2)u(t-2)$

提交

**例4-22:** 已知  $F(s) = \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right)^2$ , 求拉氏反变换  $f(t)$ 。

解: 
$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

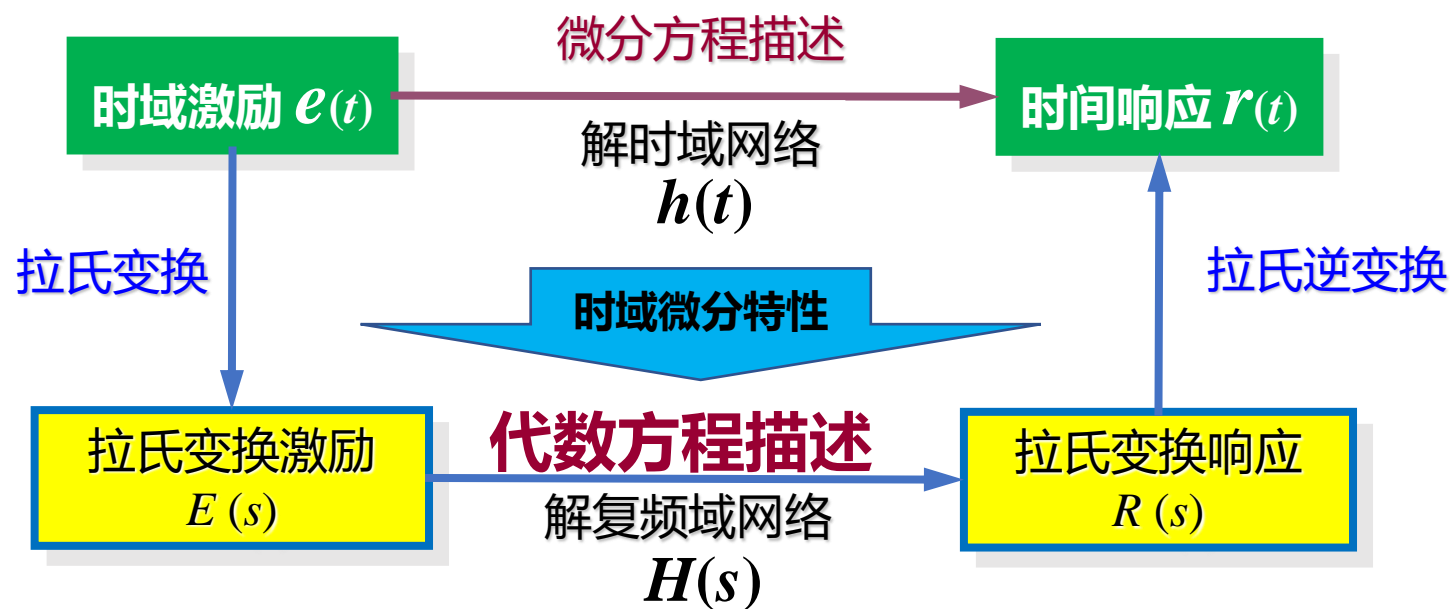
应用时移性质:

$$\therefore f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

## 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域元件模型

### 4.5.1 拉普拉斯变换解微分方程

拉普拉斯变换解微分方程的基本思路



**例4-23:** 已知  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$  ,  $y'(0_-) = y(0_-) = 1$  ,  $x(t) = e^{-3t}u(t)$  。

试求系统的响应  $y(t)$  。

**解法一:** (1) 对方程两边同求拉氏变换, 注意利用微分性质。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

$$s^2 Y(s) - [sy(0_-) + y'(0_-)] + 3[sY(s) - y(0_-)] + 2Y(s) = sX(s) + 4X(s)$$

(2) 整理以上方程, 求出响应的拉氏变换式。

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 4)X(s) + (s + 3)y(0_-) + y'(0_-)$$

所以 
$$Y(s) = \frac{(s + 4)X(s) + (s + 3)y(0_-) + y'(0_-)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{(s + 4)}{(s^2 + 3s + 2)} X(s) + \frac{(s + 3)y(0_-) + y'(0_-)}{(s^2 + 3s + 2)}$$



因为  $X(s) = \frac{1}{s+3}$

代入起始条件和以上  $X(s)$ , 得到  $Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)} + \frac{(s+3)+1}{(s^2+3s+2)}$

(3) 求拉氏逆变换。

$$Y(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3} + \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

所以  $y(t) = \underbrace{\left(\frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{(3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)}_{\text{零输入响应}}$

$$y(t) = \underbrace{\left(\frac{9}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{自由响应}} \quad \text{强迫响应}$$

零状态响应和零输入响应的  
公共项—自由响应;  
非公共项—强迫响应

虽然拉氏变换解方程，可一次求出全解是其优点，但是利用微分性质时，带上其起始条件，使  $s$  域的方程运算时显得累赘，容易出错。分别求零状态和零输入响应会更简洁。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

**解法二：** (1) 求零状态响应。对方程两边同求拉氏变换，不带起始条件。

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 4X(s)$$

整理以上方程，求出零状态响应的拉氏变换式：  $(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 4)X(s)$

$$\text{所以 } Y(s) = \frac{(s + 4)}{(s^2 + 3s + 2)} X(s) = H(s) X(s)$$

输入信号的拉氏变换  $X(s) = \frac{1}{s + 3}$       得到零状态响应的拉氏变换

$$Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)} = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

部分分式展开

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

求拉氏逆变换，得到系统的零状态响应：

$$y_{zs}(t) = \left( \frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right) u(t)$$

## (2) 用时域分析法求零输入响应。

由以上方程的拉氏变换

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 4)X(s)$$

微分方程对应的特征方程是：  $s^2 + 3s + 2 = 0$       特征方程的根：  $s = -1$  ,  $s = -2$

所以设系统的零输入响应:  $y_{zi}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$

由起始条件确定待定常数

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ -A_1 - 2A_2 &= 1 \end{aligned} \quad \therefore A_1 = 3, \quad A_2 = -2$$

所以零输入响应:  $y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$

最后, 求得系统的全响应:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{zs}(t) + y_{zi}(t) \\ &= \left(\frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t) + (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) \\ &= \left(\frac{9}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t) \end{aligned}$$

试用第二章的时域分析法求解此题, 并比较结果。

**例4-24.**已知某 LTI 系统微分方程为  $r''(t) + 2r'(t) + r(t) = e'(t)$ , 设该系统在激励  $e(t) = u(t)$  时的零状态响应为  $y(t)$ , 则  $y(t)$  为 ( )

- ☐ A  $y(t) = te^{-2t}u(t)$
- ☐ B  $y(t) = 2e^{-t}u(t)$
- ☐ C  $y(t) = e^{-2t}u(t)$
- ☒ D  $y(t) = te^{-t}u(t)$

提交

**例4-24：**已知某LTI系统微分方程为  $r''(t) + 2r'(t) + r(t) = e'(t)$ ，求设该系统在激励  $e(t) = u(t)$  时的零状态响应为  $y(t)$ 。

**解：**求零状态响应。对微分方程两边同求拉氏变换，不考虑起始条件：

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = sE(s)$$

对输入信号进行拉氏变换： $E(s) = \frac{1}{s}$

因此，

$$Y(s) = \frac{sE(s)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s + 1)^2}$$

利用常用函数  $t$  的拉氏变换和频移性质求拉氏逆变换，可得零状态响应的时域表达式：

$$y(t) = te^{-t}u(t)$$