

近世代数

计算机科学与技术学院
唐琳琳

内容

- 第一章 基本概念
- 第二章 群
- 第三章 正规子群和有限群
- 第四章 环与域
- 第五章 因子分解
- 第六章 域的扩张

第二章 群

- 群的定义和初步性质
- 元素的阶
- 子群
- 循环群
- 变换群
- 置换群
- 陪集、指数和Lagrange定理
- 群在集合上的作用

群的定义和初步性质

- 群：

定义 1：非空集合 G , \circ 是它的一个代数运算，如果满足以下条件：

I : 结合律成立，即对 G 中任意元素 a, b, c 都有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

II : G 中有元素 e ，叫做 G 的左单位元，它对 G 中每个元素 a 都有

$$e \circ a = a$$

III : 对 G 中每个元素 a ，在 G 中都有元素 a^{-1} ，叫做 a 的左逆元，使

$$a^{-1} \circ a = e$$

则称 G 对代数运算 \circ 作成一个群。

群的定义和初步性质

• 交换群（Abel群）

定义：如果对群G中任二元素 a, b 均有

$$a \circ b = b \circ a$$

即G的代数运算满足交换律，则称G为交换群（可换群）或**Abel群**；否则称G为非交换群（非可换群）或**非Abel群**。

例如：整数集Z对于数的普通加法显然作成了一个交换群，0是它的左单位元，整数 $-a$ 是整数 a 的左逆元。这个群常称为整数加群。

需要注意的是，整数集Z对于数的普通乘法不能做成群。因为，尽管普通乘法是Z的代数运算，并满足结合律，也有左单位元1，但是，除去 ± 1 ，其他元素在Z中均没有左逆元。

非零有理数、正有理数关于普通乘法——非零有理数乘群、正有理数乘群

群的定义和初步性质

- 例 1：设 G 为整数集。问： G 对运算

$$a \circ b = a + b + 4$$

是否成群？

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a + b + 4) \circ c \\ &= (a + b + 4) + c + 4 = a + b + c + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \circ (b \circ c) &= a \circ (b + c + 4) \\ &= a + (b + c + 4) + 4 = a + b + c + 8\end{aligned}$$

故有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

即代数运算 满足结合律。

又对 $\forall a \in G$ ，总有 $(-4) \circ a = -4 + a + 4 = a$ ，于是知 -4 是 G 中左单位元；而 $(-8 - a) \circ a = -8 - a + a + 4 = -4$ ，知 $-8 - a$ 是 a 的左逆元

群的定义和初步性质

- 例 2：全体正整数作成的集合G对运算

$$a \circ b = a^b$$

是否作成群？

解：首先，运算是正整数集合上的代数运算

但是，

$$(a \circ b) \circ c = a^b \circ c = a^{bc}$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ b^c = a^{b^c}$$

一般不会相等。例如

$$a=2, b=1, c=2$$

因此，正整数集合对于这个代数运算不构成群。

群的定义和初步性质

- 一般来讲：对于一个集合，要考察它是否作成群，不仅要注意它的元素是什么，更应该注意它的代数运算是什么。同一个集合，**对这个代数运算可能作成群，对另一个代数运算却不一定作成群**；即使对两个不同的代数运算同时都作成群，那么一般来说，也被认为是两个不同的群。
- 符号非本质，常把群的代数运算叫做“乘法”，还把 $a \circ b$ 简记为 $a \cdot b$ 或 ab

群的定义和初步性质

- 群的阶

定义：一个群G中包含元素的个数为 n ，则称 n 为群G的阶，记为 $|G|=n$ 。
无限群的阶称为无限，被认为是大于任意的正数。例如， $|G|>1$ 意味着
G可能是阶大于1的有限群，也可能是无限群。

例 3：全体n次单位根对于数的普通乘法作成一个群。这个群记为 U_n ，
并称作n次单位根群。

首先，满足结合律的代数运算；

再有，1在其中为左单位元；

最后，每个n次单位根的左逆元也在其中；

并且，可交换；

故， U_n 作成了一个n阶有限交换群。

群的定义和初步性质

- 例 4：令

$$G = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$

并规定G的乘法如下：

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

$$(-x)y = x(-y) = -xy$$

$$-(-x) = x$$

$$\text{其中 } x, y \in \{1, i, j, k\}$$

封闭----此定义乘法为G上代数运算；

1----左单位元

1和-1的左逆元均为自身，其余i与-i, j与-j, k与-k互为左逆元

重点验证“结合律”？

群的定义和初步性质

- i, j, k三元素对等，验证所有可能情况即可

$$\begin{aligned}(ii)i &= i(ii), \quad (ii)j = i(ij), \\ (ji)i &= j(ii), \quad (ij)i = i(ji), \\ (ij)k &= i(jk).\end{aligned}$$

都成立，故G对所规定的乘法作成一个群。它是一个8阶有限非交换群，通常称这个群为四元数群。

群的定义和初步性质

• 性质

• 定理 1：群G的左单位元也是右单位元，并且是唯一的。

证明：设 e 是G的左单位元，对 $\forall a \in G$ ，有 $a^{-1}a = e$ ，也有 $a'a^{-1} = e$

$$\begin{aligned} ae &= e(ae) = a'a^{-1}(ae) = a'(a^{-1}a)e \\ &= a'ee = a'(a^{-1}a) = (a'a^{-1})a \\ &= ea = a \end{aligned}$$

即，左单位元也是右单位元。

若存在另一左单位元 e' ，则

$$e' = e'e = e$$

即，单位元唯一。

群的定义和初步性质

- 定理 2：群G中任意元素a的左逆元 a^{-1} 也是右逆元，并且唯一。

证明： $\forall a \in G, a'a^{-1} = e$

$$\begin{aligned}aa^{-1} &= e(aa^{-1}) = a'a^{-1}(aa^{-1}) \\&= a'(a^{-1}a)a^{-1} \\&= a'a^{-1} \\&= e\end{aligned}$$

若有两个左逆元，设为 a^{-1} 和 b ，则

$$\begin{aligned}a^{-1} &= a^{-1}e = a^{-1}(ba) \\&= a^{-1}(ab) \\&= (a^{-1}a)b \\&= eb \\&= b\end{aligned}$$

群的定义和初步性质

- 推论 1：在群中消去律成立，即

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$ba = ca \Rightarrow b = c$$

证明：两遍分别左乘、右乘 a^{-1} 即可。

群的定义和初步性质

• 半群：

- 定义 2：设 S 是一个非空集合，如果它有一个代数运算满足结合律，则称 S 是一个半群。
- 如果半群 S 中有元素 e ，它对 S 中任意的元素 a 都有

$$ea = a$$

则称 e 为半群 S 的一个左单位元；如果在 S 中有元素 e' ，它对 S 中的任意元素 a 都有

$$ae' = a$$

则称 e' 为半群 S 的一个右单位元。

如果一个半群 S 有单位元（既是左单位元又是右单位元），则称 S 为有单位元的半群，或简称幺半群（monoid）。

群的定义和初步性质

- 性质
- 在一个半群中，可能既没有左单位元，也没有右单位元；可能只有左单位元，而没有右单位元；也可能只有右单位元，而没有左单位元。但是，如果既有左单位元又有右单位元，则二者必相等，它就是半群的唯一的单位元。
- 例 5：正整数集对普通乘法作成一个半群，而且是一个幺半群，1是单位元。
- 例 6：正整数集对普通加法作成一个半群，它既没有左单位元也没有右单位元。
- 例 7：设 S 是任一非空集合，对 S 中任意元素 a, b 规定

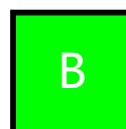
$$a \circ b = b$$

则 S 作成一个半群，而且 S 中每一个元素都是左单位元。但当 $|S| > 1$ 时， S 没有右单位元。

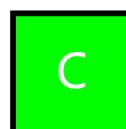
以下关于半群的单位元说法正确的是（）



A 所有半群都有单位元。



B 半群中可能没有左单位元或没有右单位元。



C 半群的左单位元与右单位元一旦都存在，必然相等，且唯一。



D 半群若无单位元则必然是无左单位元且无右单位元。

提交

群的定义和初步性质

- 定理 3：设G是一个半群。则G作成群的充要条件是，对G中任意元素a, b, 方程

$$ax = b, \quad ya = b$$

在G中都有解。

证明：必要性：若G作成群则任意元素均有逆元存在，故

$$x = a^{-1}b, \quad y = b a^{-1}$$

自然是上两个方程的解。

充分性：首先对任意的固定元素 $b \in G$ ，由于上两方程总有解，则存在e使得

$$eb = b$$

而对于 $\forall a \in G$ ，有 $bx = a$ 总有解c，于是 $bc = a$

$$ea = e(bc) = (eb)c = bc = a$$

即，e是G的左单位元。

而 $ya = e$ 对于 $\forall a \in G$ 均有解，则解即为a的左逆元。即任意G中元素有左逆元。

群的定义和初步性质

• **推论 2：**有限半群G作成群的充分必要条件是，在G中两个消去律成立。

证明：必要性：消去律为

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$ba = ca \Rightarrow b = c$$

若G作成群则上下式左、右两遍分别左乘和右乘一个 a^{-1} 即可自然得到结论成立。

充分性：设 $|G| = n$ ，且 $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，在G中任取两个元素a, b，若半群满足消去律则必有

$$b \in G = \{aa_1, aa_2, \dots, aa_n\}$$

即方程 $ax = b$ 在G中总是有解的，同理可证方程 $ya = b$ 在G中也是有解的。由定理3可知有限半群G作成群。

注：充分利用“有限”和“消去律”

要求群G是有限的是必要的，如正整数集对乘法作成半群，满足消去律，但是它是无限集，不能作成群。

群的定义和初步性质

- 注：
- 如果一个交换群的代数运算用加号“+”表示，常称其为一个加群。单位元用**0**表示，并称为G的零元；元素a的逆元用 $-a$ 表示，并称为a的负元。
- 例如：整数加群、有理数加群...
- 以后的讨论中不管群是否可交换，都常用乘号或者省略这个乘号，并仍称为乘法。

群的定义和初步性质---作业

- P37. 5
- 5. 设 $G = \{(a,b) | a, b \text{为实数且 } a \neq 0\}$ ，并规定

$$(a,b) \circ (c,d) = (ac, ad + b)$$

证明： \circ 对此运算做成一个群。又问：此群是否为交换群？

群中元素的阶

- 规定：

任取 $a \in G$, n 是一个正整数

$$a^0 = e, \quad a^n = \overbrace{aa \cdots a}^n$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \overbrace{a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1}}^n$$

由此，不难推出常见的运算规则在群中也成立，其中 m, n 为任意整数：

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

阶

定义 1：设 a 为群 G 中的一个元素，使 $a^n = e$

的最小正整数 n ，叫做元素 a 的阶。

如果这样的阶不存在，称 a 的阶为无限。元素 a 的阶常用 $|a|$ 来表示。

群中元素的阶

- 例 1: $G = \{1, -1, i, -i\}$ (i 是虚数单位) 关于数的普通乘法作成一个群, 即4次单位根群, 其中1的阶是1, -1 的阶是2, i 与 $-i$ 的阶都是4。
- 例 2: 正有理数乘群 Q^+ 中, 除了单位元的阶是1外, 其余元素的阶均为无限。
- 例 3: 在非零有理数乘群 Q^* 中, 1的阶是1, -1 的阶是2, 其余元素的阶均为无限。
- **定理 1: 有限群中每个元素的阶均有限。**

证明: 设 G 为 n 阶有限群, 任取 $a \in G$, 则 $a, a^2, \dots, a^n, a^{n+1}$ 中必有相等的。设 $a^s = a^t$ ($1 \leq t < s \leq n+1$), 则 $a^{s-t} = e$, 从而 a 的阶有限。

注: 无限群中元素的阶可能无限, 也可能有限, 甚至每个元素的阶都有限。

群中元素的阶

- 例 4：设 U_i (i 是正整数) 是全体*i*次单位根对普通乘法作成的群，即*i*次单位根群。现在令

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

则由于一个m次单位根与一个n次单位根的乘积必是mn次单位根，故 U 对普通乘法作成群，而且是一个无限可交换群。

这个群中的每个元素的阶都有限。

- 定义 2：若群G中每个元素的阶都有限，则称G为周期群；若G中除单位元e外，其余元素的阶均无限，则称G为无扭群；既不是周期群又不是无扭群的群称为混合群。

- 定理 2：设群G中元素a的阶是n，则

$$a^m = e \Leftrightarrow n|m$$

证明：设 $a^m = e$ ，并令 $m = nq + r$, $0 \leq r < n$ 。由上式可得

$$e = a^m = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = a^r$$

群中元素的阶

• 续

但由于 $|a| = n$ ，故不会存在更小的正整数使得 $a^r = e$ ，于是 $r=0$ ，也即得 $n|m$ 。
反之，若 $n|m$ ，令 $m = nq$ ，因 a 的阶为 n ，则有

$$a^m = a^{nq} = (a^n)^q = e$$

总结：群 G 中元素 a ，有

$$|a| = n \Leftrightarrow a^n = e \text{ 且若 } a^m = e \Leftrightarrow n|m$$

• 定理 3：若群中元素 a 的阶是 n ，则

$$|a^k| = \frac{n}{(k, n)}$$

其中 k 为任意整数， (k, n) 为 k 与 n 的正的最大公因数。

证明：设 $(k, n) = d$ ，且 $n = dn_1$ ， $k = dk_1$ ， $(n_1, k_1) = 1$ 。则由于 $|a| = n$ ，故有

$$(a^k)^{n_1} = a^{kn_1} = a^{k_1 n} = (a^n)^{k_1} = e$$

群中元素的阶

其次，设 $(a^k)^m = e$ ，则 $a^{km} = e$ ，于是由定理2可知

$$n \mid km, \quad n_1 \mid k_1 m$$

但是 $(n_1, k_1) = 1$ ，故 $n_1 \mid m$ ，因此， a^k 的阶是 n_1 ，故由上可知

$$|a^k| = n_1 = \frac{n}{(k, n)}$$

•推论 1：在群中若 $|a| = st$ ，则 $|a^s| = t$ 。其中 s, t 是正整数。

证明：由于 $|a| = st$ ，由定理3可知

$$|a^s| = \frac{st}{(s, st)} = \frac{st}{s} = t$$

即得 $|a^s| = t$

•推论 2：在群中若 $|a| = n$ ，则 $|a^k| = n \Leftrightarrow (k, n) = 1$ 。

证明：根据定理3，显然成立。

群中元素的阶

• 定理 4：群中a的阶为m， b的阶为n， 当 $ab=ba$ ， 且 $(m, n) = 1$ 时， 有

$$|ab| = mn, \text{ 即}$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

证明：由已知条件，

$$(ab)^{mn} = a^{mn}b^{nm} = e$$

其次，若有正整数s使得 $(ab)^s = e$ ， 则便有

$$e = (ab)^{sm} = (a^m)^s b^{sm} = b^{sm}$$

但是 $|b| = n$ ， 故 $n|sm$ ， 又因为 $(m, n) = 1$ ， 故 $n|s$ 。同理可得 $m|s$ 。再根据 $(m, n) = 1$ ， 可得 $mn|s$ 。

从而 $|ab| = mn$ ， 即 $|ab| = |a| \cdot |b|$ 。

群中元素的阶

- 注: $ab=ba$ 很重要
- 反例: 有理数域上的二阶线性群 $GL_2(\mathbb{Q})$, 易知

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

的阶都有限, 分别是4, 3, 但其乘积

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的阶无限, 即 $|ab| \neq |a| \cdot |b|$ 。这个例子也说明, 一般来说一个群G的全体有限阶元素对G的乘法并不封闭。

又反例: $GL_2(\mathbb{Q})$ 中,

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

的阶无限, 但乘积 $cd = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的阶有限为2。

群中元素的阶

- **定理 5：**设G为交换群，且G中所有元素有最大阶m，则G中每个元素的阶都是m的因数，从而群G中每个元素均满足方程 $x^m = e$ 。

证明：设群G中元素a的阶为m，b为G中任意一个元素，阶为n。如果 $n \nmid m$ ，则必存在素数p满足下等式：

$$m = p^k m_1, \quad p \nmid m_1$$

$$n = p^t n_1, \quad t > k$$

由于 $|a| = m$, $|b| = n$ ，故由上面推论1知

$$\left|a^{p^k}\right| = m_1, \quad \left|b^{n_1}\right| = p^t$$

但由于 $(m_1, p^t) = 1$ 且G是交换群，故由定理4知

$$\left|a^{p^k} b^{n_1}\right| = p^t m_1 > p^k m_1 = m$$

这与m是G中所有元素的最大阶矛盾，因此 $n \mid m$ 。从而由定理2知，群G中每个元素都满足方程 $x^m = e$ 。

以下关于群中元素的阶数叙述错误的是 ()

- A 群中元素乘积的阶数等于阶数的乘积。
- B 群中任一元素的阶数都是其中最大阶数的因子。
- C 有限群中元素的阶数都有限。
- D 无限群中元素的阶数都无限。

提交

群中元素的阶---作业

P42. 1. 1)

证明：群中以下每组中的元素有相同的阶：

1) a , a^{-1} , cac^{-1}

P43. 4. 设群 G 中元素 a 的阶为 n 。证明：

$$a^s = a^t \Leftrightarrow n|(s-t)$$

• 子群

- 定义 1：设 G 是一个群， H 是 G 的一个非空子集。如果 H 本身对 G 的乘法也作成一个群，则称 H 为群 G 的一个子群。
- 如果 $|G| > 1$ ，则群 G 至少有两个子群，一个是只由单位元 e 作成的子群 $\{e\}$ （以后常简记为 e ），另一个是 G 本身。这两个子群称为群 G 的平凡子群。别的子群，如果存在的话，叫做 G 的非平凡子群或真子群。

$$H \leq G, \quad H < G$$

- 例 1：正有理数乘群是非零有理数乘群的一个子群，正实数乘群是非零实数乘群的子群。
- 例 2：全体偶数或全体 3 的整倍数，更一般的，全体 n 的整倍数（ n 是一个固定的整数）作成的集合

$$\{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$$

都是整数加群的子群。

子群

- 例 3：数域F上全体n阶满秩对角阵的集合 G_1 是F上一般线性群 $GL_n(F)$ 的一个子群；又F上一切纯量矩阵 aE ($0 \neq a \in F$, E 为n阶单位方阵) 的集合 G_2 是 G_1 的一个子群，当然也是 $GL_n(F)$ 的子群。
- 定理 1：设G是群， $H \leq G$ 。则子群H的单位元就是群G的单位元，H中元素a在H中的逆元就是a在群G中的逆元。

证明：设 e' 是H中单位元， e 是G中单位元，则

$$e'e' = e' = e'e$$

于是由消去律知， $e'=e$ 。

同样，若 a' 是 a 在H中的逆元， a^{-1} 是 a 在G中的逆元，则

$$a'a = e = a^{-1}a$$

再有群中满足消去律可得 $a'=a^{-1}$ 。

• 定理 2：群G的一个非空子集H作成子群的充要条件是：

$$1) a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

$$2) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

证明：必要性，显然。依据H作成群和定理1。

充分性，验证定义，由1) 知G中代数运算也是H中的代数运算，由于H中元素都是G中元素，故结合律自然满足；其次，由2) 知任意H中元素a的逆元也在H中，则再由1) 可得

$$aa^{-1}=e \in H$$

即，单位元e在H中，故H作成群。有 $H \leq G$ 。

• 定理 3：群G的一个非空子集H作成子群的充要条件是：

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

证明：必要性：显然，由定理2.

子群

• 充分性：设当 $a, b \in H$ 时， $ab^{-1} \in H$ ，则若 $a \in H$ ，便有

$$aa^{-1} = e \in H, \quad a^{-1} = ea^{-1} \in H$$

于是当 $a, b \in H$ 时有 $a, b^{-1} \in H$ ，从而

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$$

故由定理2知， $H \leq G$ 。

•注：这个定理中的条件

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

显然也可以改写成

$$a, b \in H \Rightarrow a^{-1}b \in H$$

•注：群G的有限子集H作成子群的充要条件是，H对G的乘法封闭，即：

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

利用了有限半群成群的充要条件（第一节推论2）

- 例 4：令 H 为数域 F 上行列式等于 1 的全体 n 阶方阵作成的集合。由于

$$|A| = |B| = 1 \Rightarrow |AB^{-1}| = 1$$

即有 $A, B \in H$ 可得 $AB^{-1} \in H$ ，由定理 2 可知 H 作成数域 F 上一般线性群 $GL_n(F)$ 的一个子群。这个子群常记为 $SL_n(F)$ ，并称为 F 上的 **特殊线性群**。

- 定义 2：令 G 是一个群， G 中元素 a 如果同 G 中每个元素都可换，则称 a 是群 G 的一个 **中心元素**。
- 群 G 的单位元 e 总是群 G 的中心元素，除 e 外可能还有别的中心元素。若群 G 的中心元素只有 e ，则称 G 为 **无中心群**。
- 交换群的每个元素都是中心元素。
- $GL_n(F)$ 除去单位元外还有别的中心元素（例如纯量矩阵），但当 $n > 1$ 时，显然群中还有非中心元素。

- 定理 4：群G的中心元素作成的集合 $C(G)$ 是G的一个子群，称为群G的中心。

证明：因为 $e \in C(G)$ ，故 $C(G)$ 非空，对于 $\forall a, b \in C(G)$ ，对于群G中任意的元素x都有

$$ax = xa, \quad bx = xb$$

由此可得

$$(ab)x = x(ab), \quad a^{-1}x = xa^{-1}$$

故 $ab, a^{-1} \in C(G)$ ，从而 $C(G) \leq G$ 。

- 注：群G的中心显然是G的一个交换子群，又显然G是交换群当且仅当

$$C(G) = G$$

- 群G的中心在不发生混淆时也常简记为C

- 定义3：设A, B是群G的任二非空子集，规定

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\},$$

$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\},$$

并分别称 AB 为A与B的乘积, A^{-1} 为A的逆。

由此易知，对群的任意三个非空子集A,B,C均有

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B \cup C) = AB \cup AC,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

- 由定理2和定理3可直接得到以下两个推论。

- **推论1：**设H是群G的一个非空子集，则

$$H \leq G \Leftrightarrow HH = H \quad \& \quad H^{-1} = H$$

证明：必要性：设 $H \leq G$ ，则 $HH = H$ 显然。又若 $a \in H$ ，则必有 $a^{-1} \in H$ ，从而 $a = (a^{-1})^{-1} \in H^{-1}$ 故 $H \subseteq H^{-1}$ 。类似有 $H^{-1} \subseteq H$ ，故 $H^{-1} = H$ 。

子群

充分性：由 $HH = H$ 可知 H 对 G 的乘法封闭。另外，若 $a \in H$ ，则 $a^{-1} \in H^{-1}$ 。于是有 $b \in H$ 使

$$a = b^{-1}, \quad a^{-1} = b \in H$$

于是由定理2知， $H \leq G$ 。

类似的

• 推论 2：设 H 是群 G 的一个非空子集，则

$$H \leq G \Leftrightarrow HH^{-1} = H$$

特别地，若 H 是群 G 的一个非空有限子集，则

$$H \leq G \Leftrightarrow HH = H$$

• 注：一个群的两个子群的乘积一般不再是子群。但在一定条件下可以是子群。

- **定理 5：**设 H, K 是群 G 的两个子群，则

$$HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH$$

证明：必要性：由于 $HK \leq G$ ，则由推论1可知

$$(HK)^{-1} = HK$$

因为 H 和 K 都是子群，则有 $H^{-1} = H$, $K^{-1} = K$ 。于是又有

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$$

因此， $HK = KH$ 。

充分性：设 $HK = KH$ ，则有

$$\begin{aligned}(HK)(HK)^{-1} &= HK \cdot K^{-1}H^{-1} = HKKH \\ &= HKH = HHK = HK\end{aligned}$$

由推论2知， $HK \leq G$ 。

子群---作业

- P47. 1、4
- 1. 证明：群 G 的任意个子群的交仍是 G 的一个子群。
- 4. 证明：一般线性群 $GL_n(F)$ 的中心是一切纯量矩阵 aE ($0 \neq a \in F$) 作成的子群。