第二章 连续时间系统的时域分析

时域经典法分析电路系统的流程

优点： 物理意义清楚；
缺点： 过程复杂。

1. 根据基尔霍夫定律列写电路的微分方程

2. 将联立的微分方程化为一元微分方程

3. 求齐次解（系数待定）

4. 查表求特解

5. 完全解 = 齐次解 + 特解, 将完全解代入微分方程求齐次解的系数

初始状态

6. 已定系数的完全解—系统的全响应

总结：经典法求解微分方程

基本原理——线性叠加：微分方程的完全解=齐次解+特解　$r(t)=r_\mathrm{h}(t)+r_\mathrm{p}(t)=A_1\mathrm{e}^{\alpha_1 t}+A_2\mathrm{e}^{\alpha_2 t}+\cdots+A_n\mathrm{e}^{\alpha_n t}+r_\mathrm{p}(t)$

一般步骤：

1）根据电路图列微分方程，建立输入 $e(t)$ 和输出 $r(t)$ 的数学关系；

2）求齐次解 $r_\mathrm{h}(t)$ 的形式：列特征方程，求特征根，获得齐次解的形式，系数待定；

3）求特解 $r_\mathrm{p}(t)$：与激励信号 $e(t)$ 的形式有关，查表，得到特解形式，代入原方程平衡系数，求得特解；

4）求完全解 $r(t)$：代入初始条件 $0+$，获得齐次解系数，得到最终的完全解。

结论：齐次解(自由响应)的函数特性仅依赖于系统本身特性，与激励信号的函数形式无关，但确定系数有关；而特解(强迫响应)的形式由激励函数决定。

1. 零输入响应的定义与待定系数确定

① 定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应，即 $r_{zi}(t)=H[\{x(0_-)\}]$

② 满足方程： $C_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zi}(t)+\ldots+C_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zi}(t)+C_n r_{zi}(t)=0$

故 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解形式，即 $r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}$ ← 注意：和自由响应的系数不同

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 为互不相等的 n 个系统特征根。

③ 初始条件： $r_{zi}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_-)$ ← 非时变系统

即齐次解 $r_{zi}(t)$ 的待定系数用 $r^{(k)}(0_-)$ 确定即可！

2．零状态响应的定义与待定系数确定

① 定义：起始状态为 0，只由激励产生的响应 $r_{zs}(t)=H[e(t)]$

② 满足方程： $C_0\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}r_{zs}(t)+\ldots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_{zs}(t)+C_n r_{zs}(t)=E_0\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}e(t)+\ldots+E_m e(t)$

故 $r_{zs}(t)$ 含特解 $r_p(t)$，即 $r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}\mathrm{e}^{\alpha_k t}+r_p(t)$

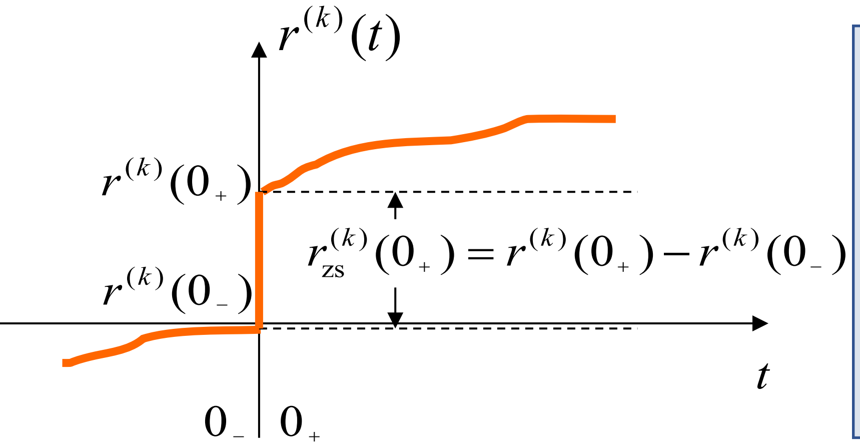
③ 初始条件： 由于 $r_{zs}(t)$ 在 0- 时刻的 k (k=0,…n-1) 阶导数均为 0，即 $r_{zs}^{(k)}(0_-)=0$

分析结论

$r^{(k)}(0_-)=r_{\text{zi}}^{(k)}(0_-)+r_{\text{zs}}^{(k)}(0_-)=r_{\text{zi}}^{(k)}(0_-)$ ← 激励不存在

$r^{(k)}(0_+)=r_{\text{zi}}^{(k)}(0_+)+r_{\text{zs}}^{(k)}(0_+)=r_{\text{zi}}^{(k)}(0_-)+r_{\text{zs}}^{(k)}(0_+)$ ← 非时变系统，参数固定

$r_{\text{zs}}^{(k)}(0_+)=r^{(k)}(0_+)-r^{(k)}(0_-)=\text{跳变值}$ ← 跳变值是由激励信号产生的　　故 $A_{\text{zs}k}$ 由跳变值确定。



$r^{(k)}(0_+)$：确定**全响应**的系数

$r^{(k)}(0_-)$：确定**零输入响应**的系数

$r_{\text{zs}}^{(k)}(0_+)$：确定**零状态响应**的系数

$$r(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{\text{zi}k}\mathrm{e}^{a_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{\text{zs}k}\mathrm{e}^{a_k t}+r_{\text{p}}(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(A_{\text{zi}k}+A_{\text{zs}k})\,\mathrm{e}^{a_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{r_{\text{p}}(t)}_{\text{强迫响应}}$$

简单总结

将联立的微分方程化为一元微分方程

1. 求零输入响应

a. 列特征方程、求特征根，获得齐次解形式

b. 根据零输入特性，初始条件不跳变，确定齐次解系数

初始状态

2. 求零状态响应

a. 根据自由项求特解

b. 齐次解形式与零输入响应一样，根据跳变值确定齐次解系数

5. 完全解 = 零输入 + 零状态

自由响应 — 形式由系统特征决定

强迫响应 — 形式由激励信号决定

零输入响应 — 系统内部储能引起

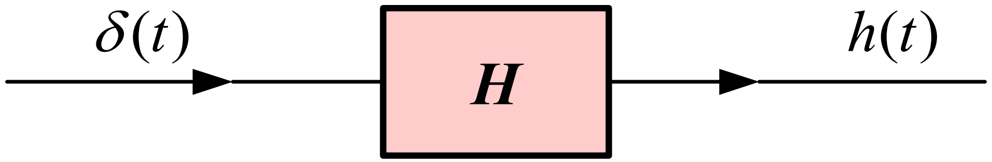
零状态响应 — 激励信号引起

2.5 冲激响应和阶跃响应

2.5.1 冲激响应

1. 定义

系统在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下产生的零状态响应，称为单位冲激响应，简称冲激响应，一般用 $h(t)$ 表示。



说明: 在时域，对于不同系统，零状态情况下加入同样的激励 $\delta(t)$，看响应 $h(t)$，$h(t)$ 不同，说明系统特性不同，冲激响应衡量系统自身的特性。

2. 冲激响应的数学模型

对于线性时不变系统，可以用一高阶微分方程表示

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

响应及其各阶导数（最高阶为 n 次）

激励及其各阶导数（最高阶为 m 次）

令 $e(t)=\delta(t)$

则 $r(t)=h(t)$

$$C_0h^{(n)}(t)+C_1h^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}h^{(1)}(t)+C_nh(t)=E_0\delta^{(m)}(t)+E_1\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}\delta^{(1)}(t)+E_m\delta(t)$$

3.冲激响应解的形式

$$C_0h^{(n)}(t)+C_1h^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}h^{(1)}(t)+C_nh(t)$$
$$=E_0\delta^{(m)}(t)+E_1\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}\delta^{(1)}(t)+E_m\delta(t)$$

①与*n*, *m*相对大小有关

一般$n>m$, $h^{(n)}(t)$ 中包含$\delta^{(m)}(t)$项，以便与方程右端匹配，依次有$h^{(n-1)}(t)$ 中包含$\delta^{(m-1)}(t)$ 项，…。若$n=m+1$, $h'(t)$包含$\delta(t)$，而$h(t)$不包含$\delta(t)$。

$n>m$	$h(t)$ 不包含$\delta(t)$及其各阶导数	（最常见）
$n=m$	$h(t)$ 包含 $\delta(t)$ 不包含其各阶导数	
$n<m$	$h(t)$ 包含$\delta(t)$及其各阶导数（最高为*m-n*阶）	

3.冲激响应解的形式

②与特征根有关

若$n>m$且特征根为简单根（无重根）时， $h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}\right]u(t)$

当$n>m$时，由于δ(t)及其导数在$t>0_+$时为零，即激励不复存在，因而方程式右端的自由项恒等于零，系统的冲激响应形式与零输入响应相同（相当于只求齐次解）。此时，冲激响应是具有零输入响应形式的零状态响应。冲激信号引入的能量存储转换为（等效于）零输入响应的起始条件。

例2-12：已知微分方程为 $\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+3e(t)$ 求冲激响应 $h(t)$。

解：
$$\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+2h(t)=\delta'(t)+3\delta(t)$$

特征方程：$\alpha^2+3\alpha+2=0$ $\quad \alpha_1=-1,\ \alpha_2=-2$

齐次解：$h(t)=(A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

令 $\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2}=a\delta'(t)+b\delta(t)$ 则 $\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=a\delta(t)+b\Delta u(t)$ $\quad h(t)=a\Delta u(t)$

将 $h(t)$、$h'(t)$、$h''(t)$ 代入微分方程，利用冲激函数匹配法可求出：$a=1,\ b=0$

$h(0_+)=a=1$

$h'(0_+)=b=0$

注意：冲激响应是零状态响应，0+初始状态等于跳变值

代入求得 $A_1=2,\ A_2=-1$。所以 $h(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$。

还可以利用LTI系统的性质来做这道题：

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+3e(t)$$

首先设定方程右边只有 $\delta(t)$，建立一个冲激响应 $h_1(t)$ 与 $\delta(t)$ 的微分方程：$\frac{\mathrm{d}^2 h_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t}+2h_1(t)=\delta(t)$

齐次解形式： $h_1(t)=(A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

冲激匹配法： $h_1(0_+)=0$ ， $h_1{}'(0_+)=1$ 匹配非常简单

代入求得 $A_1=1,\ A_2=-1$ 即， $h_1(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+2h(t)=\delta'(t)+3\delta(t)$$

根据LTI系统的性质，如果激励为 $\delta'(t)+3\delta(t)$

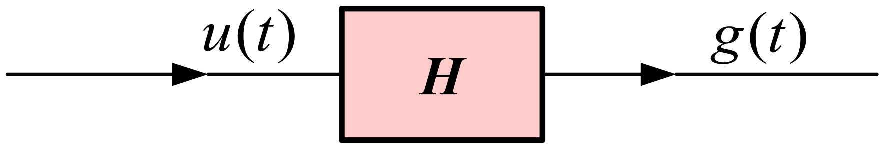
则冲激响应 $h(t)=h_1{}'(t)+3h_1(t)$ 又因 $h_1(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

则 $h(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$

2.5.2 阶跃响应

1．定义

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应，称为单位阶跃响应，简称阶跃响应。



系统方程的右端包含阶跃函数，所以阶跃响应除了包含齐次解外，还有特解项。

也可以根据**线性时不变**系统特性，利用**冲激响应与阶跃响应关系**，求阶跃响应。

2. 阶跃响应与冲激响应的关系

线性时不变系统满足微、积分特性

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{0_-}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ 阶跃响应是冲激响应的积分。

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$ 冲激响应是阶跃响应的微分。

因果系统的充分必要条件：冲激响应或阶跃响应在$t<0$时为0,即

$$h(t)=0\quad(t<0)\quad \text{或}\quad g(t)=0\quad(t<0)$$

单选题 1分 设置

(单选题)

已知系统的冲激响应为 $h(t)=2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，激励 $f(t)=u(t)$，则系统的零状态响应为

A $\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$

B $\left(-1+\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$

C $\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$

D $\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)u(t)$

提交

例2-13. 已知系统的冲激响应为 $h(t)=2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，激励 $f(t)=u(t)$，求系统的零状态响应。

解：

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应为单位阶跃响应，而阶跃响应是冲激响应的积分，对 $h(t)$ 积分可得 $(1-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$。

设置

已知一个LTI系统的微分方程如下，冲激响应$h(t)$和阶跃响应$g(t)$分别为（）。

$$\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=2e(t)$$

A $h(t)=e^{-2t}u(t), g(t)=(1+e^{-2t})u(t)$

B $h(t)=e^{-2t}u(t), g(t)=(-1+e^{-2t})u(t)$

C $h(t)=2e^{-2t}u(t), g(t)=(1-e^{-2t})u(t)$

D $h(t)=2e^{-2t}u(t), g(t)=(1-e^{-t})u(t)$

提交

已知一个LTI系统的微分方程如下，分别求冲激响应$h(t)$和阶跃响应$g(t)$ 。

$$\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=2e(t)$$

解： 将冲激函数作为激励代入方程右边，得到 $\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=2\delta(t)$

特征根 $\alpha_1=-2$

冲激函数匹配法一：从微分方程右边出发，根据右边的冲激函数及其导数项，推导响应的最高阶导数表达式，依次降阶得到响应及其各阶导数的表达式，代入方程左边，使两边的冲激函数平衡。

$$\frac{dh(t)}{dt}=2\delta(t) \qquad h(t)=2\Delta u(t)$$

$h(t)$在0_-到0_+的跳变值为2，$h(0_+)=2$。

冲激响应：$h(t)=\boxed{2e^{\alpha_1 t}}u(t)=2e^{-2t}u(t)$

$h(0_+)=2$是初始值，特征根决定信号衰减的速度。在只有一个特征根时可直接写成这种形式。

$$\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=2\delta(t)$$ 特征根 $\alpha_1=-2$

冲激函数匹配法二：从微分方程左边出发，把响应表达式代入方程左边，使左右两边的冲激函数匹配，求出齐次解的系数。

冲激响应： $h(t)=A_1e^{-2t}u(t)$

将冲激响应的表达式代入微分方程左边，

$$A_1e^{-2t}\delta(t)-2A_1e^{-2t}u(t)+2A_1e^{-2t}u(t)=2\delta(t)$$

化简得到 $A_1\delta(t)=2\delta(t)$ $\Longrightarrow$ $A_1=2$

冲激响应： $h(t)=2e^{-2t}u(t)$

阶跃响应是冲激响应从0到t的积分，

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{0_-}^{t}2e^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau=-e^{-2\tau}\Big|_0^t=1-e^{-2t}\quad(t>0)$$ $$g(t)=(1-e^{-2t})u(t)$$

例2-14. 已知微分方程 $\frac{d^2 r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=-\frac{de(t)}{dt}+2e(t)$，求其阶跃响应和冲激响应。

用LTI系统的性质来做这道题

解： 可以先设定一个阶跃响应 $g_1(t)$

使其满足方程：$\frac{d^2 g_1(t)}{dt^2}+3\frac{dg_1(t)}{dt}+2g_1(t)=u(t)$

可以直接获得初始条件：$g_1(0_+)=0,\ g_1'(0_+)=0$　　阶跃响应也是零状态响应，直接看跳变值

其特征根为 -1 和 -2，特解为 0.5，故设解为：　$g_1(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+0.5,\quad t\geq 0$

代入初始条件可得：　$g_1(t)=\left(-e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5\right)u(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=-\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+2e(t)$$

观察原方程右端的激励形式，根据 LTI 系统性质，则阶跃响应必然就是：

$$g(t)=-g_1'(t)+2g_1(t)=\left(-3\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}+1\right)u(t)$$

求得冲激响应为：

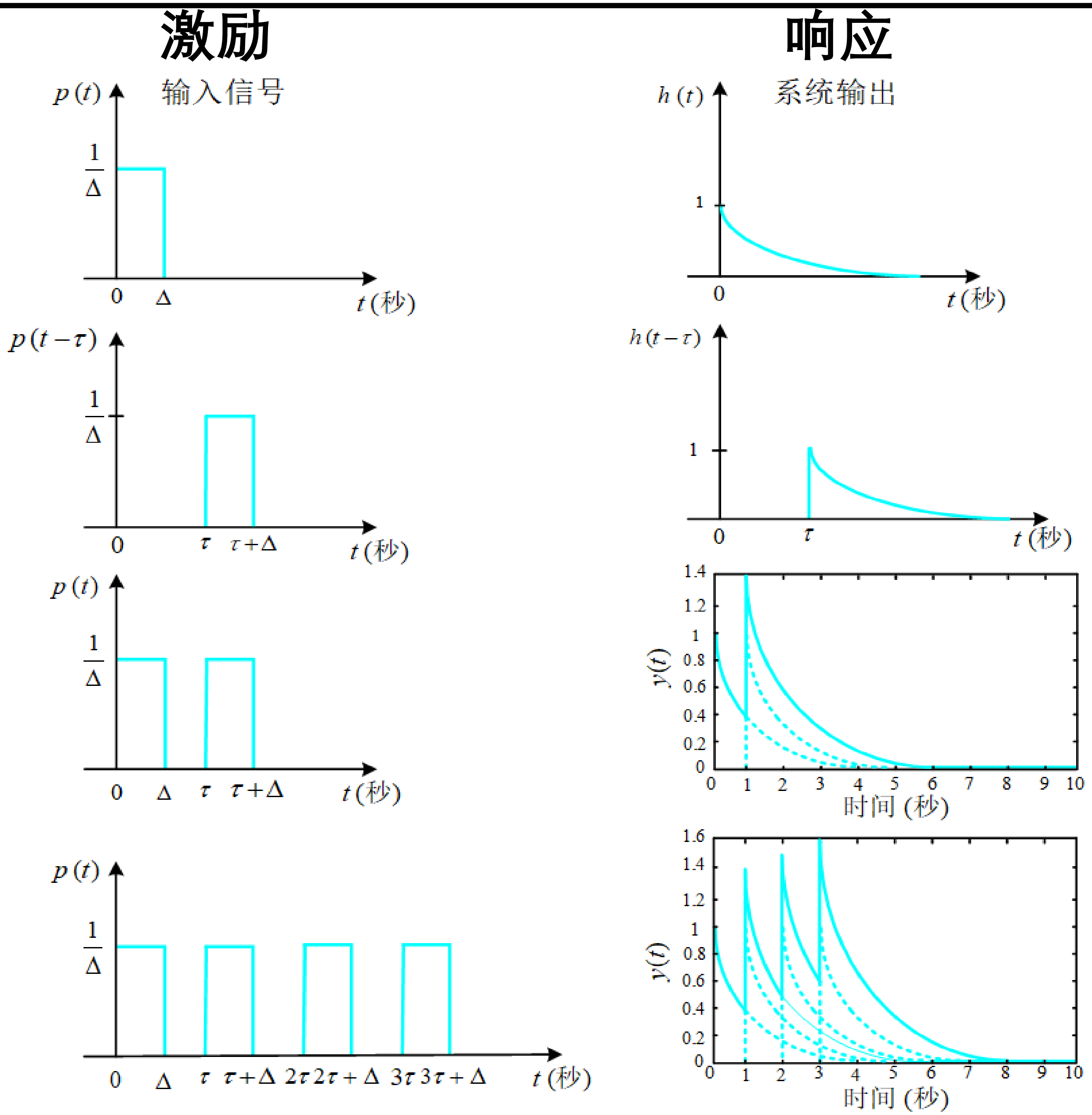
$$h(t)=\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}=\left(3\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$$

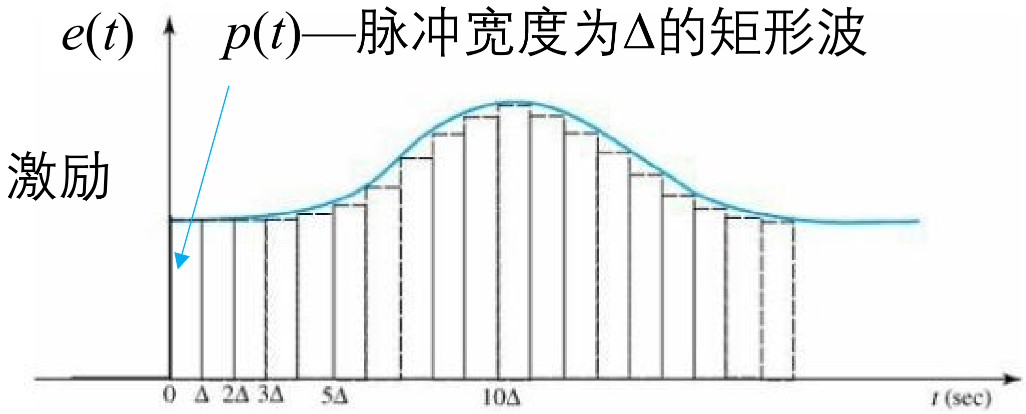
说明：可以灵活运用冲激响应和阶跃响应之间的关系；

注意中间变量 $g_1(t)$ 的表达式，以及 LTI 系统的性质。

第二章 连续时间系统的时域分析

- **卷积**是一种**数学工具**，是系统分析的核心技术。
- **卷积定理**连接着系统的时域分析和变换域分析，贯彻整门课程，非常重要。





$$e(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\,p(t-i\Delta)$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\boxed{\frac{u(t-i\Delta t)-u[t-(i+1)\Delta t]}{\Delta}}\Delta$$

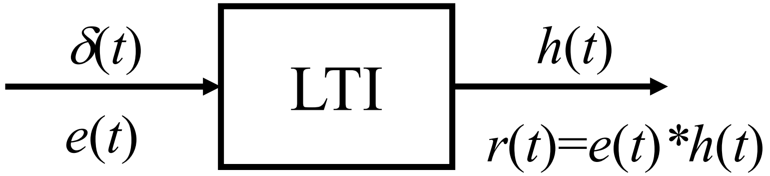
$$e(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\delta(t-i\Delta)\Delta=\int_0^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

利用叠加性、齐次性、时不变性

$$r(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)h(t-i\Delta)\Delta=\int_0^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=e(t)*h(t)$$

卷积



初始状态为零

系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积。

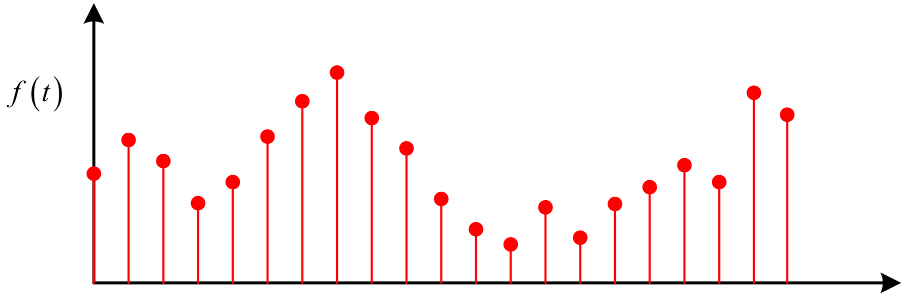
计算方法：将任意信号分解为冲激信号的加权和（积分），求其对应的冲激响应的加权和（积分）。

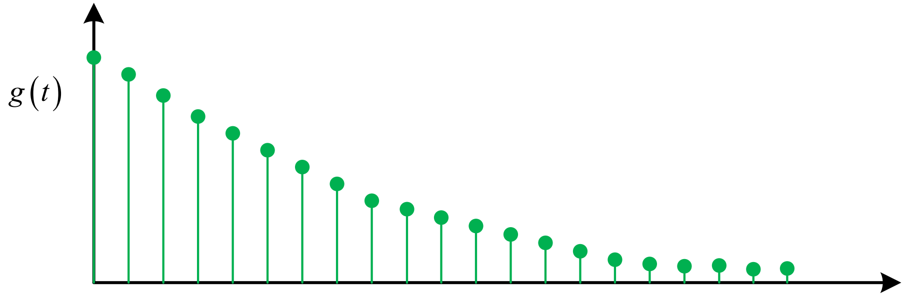
卷积的定义

设有两个函数 $f_1(t)$ 和$f_2(t)$，积分 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

称为 $f_1(t)$ 和$f_2(t)$ 的卷积积分，简称卷积，记为 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

卷积的物理意义

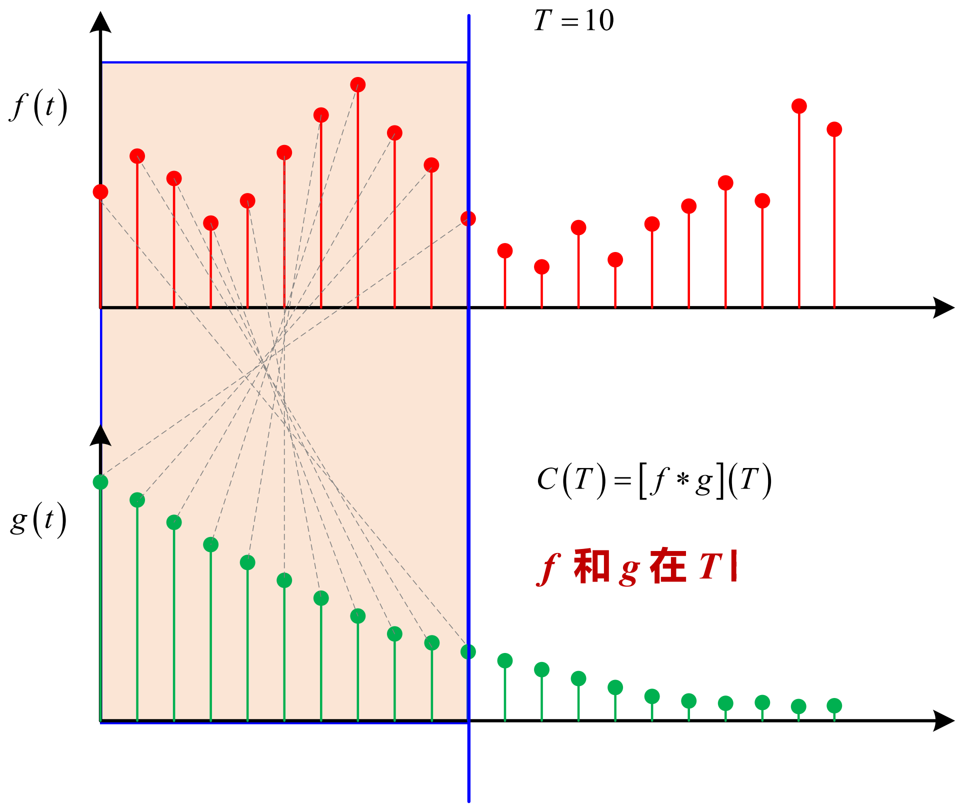




$f(t)$—输入信号。

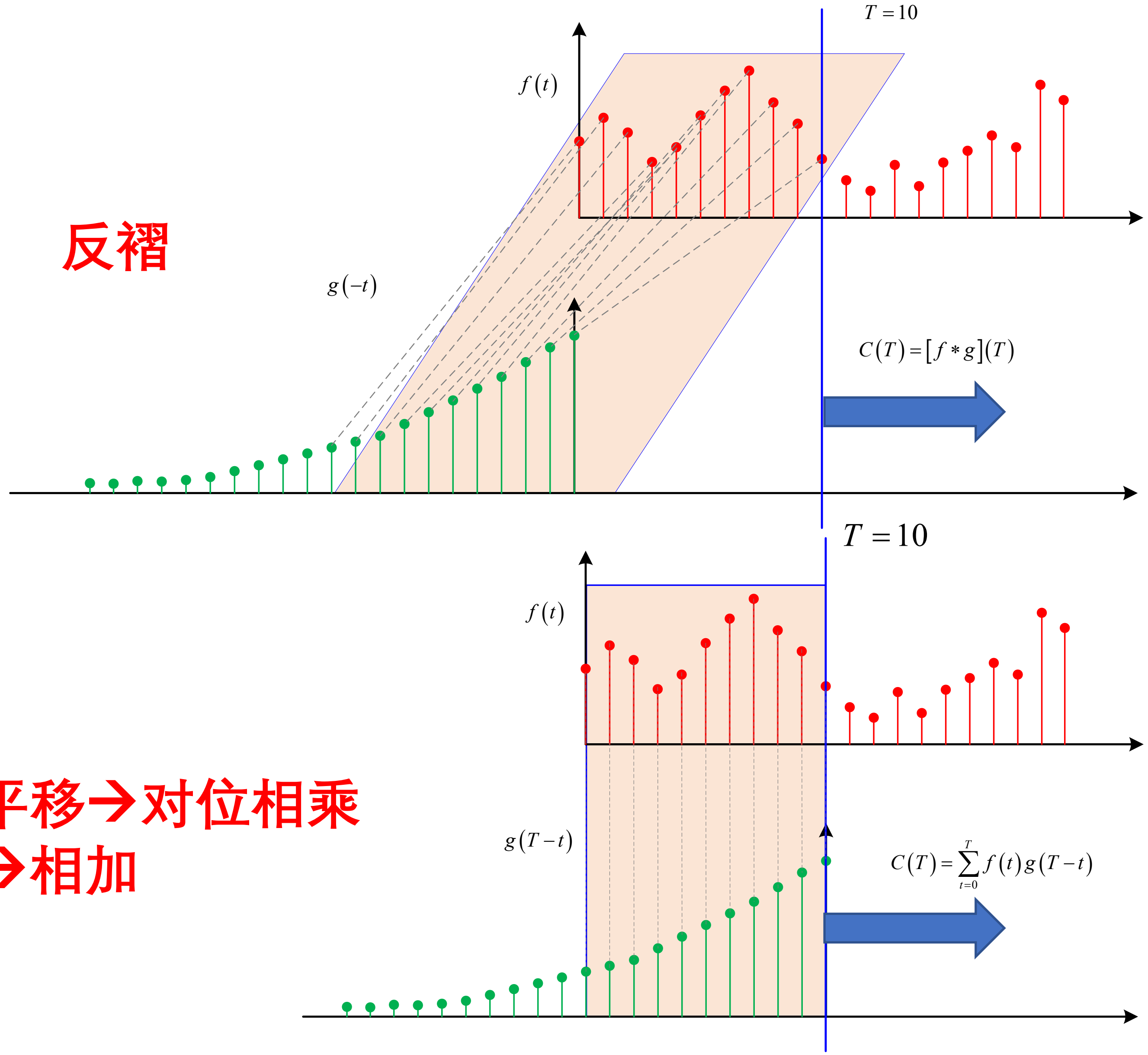
$g(t)$—表示在某个时刻输入的信号值（考虑为一个冲激信号）的**衰减趋势**。

在$t=T$时刻，$t=0$ 时刻的输入$f(0)$的值衰减为$f(0)g(T)$。



- 因信号是连续输入的，最终输出的是所有之前输入信号的累积效应。
- 如在T=10时刻，输出结果跟图中阴影区域整体有关。因为$f(10)$ 是刚输入的，所以其输出结果应为$f(10)g(0)$；输入$f(9)$只经过了1个时间单位的衰减，产生的输出为 $f(9)g(1)$。以此类推，即图中虚线所描述的关系。
- 这些对应点相乘然后累加，就是T=10时刻的输出信号值，即为$f(t)$和$g(t)$两个函数在T=10时刻的卷积值。

反褶



平移→对位相乘→相加

卷积的含义：

“卷”--指函数的翻转，从 $g(t)$ 变成 $g(-t)$ 的过程；也包含滑动的意味（T 变化使窗口平移）。

“积”—指积分/加权求和，是一种累积效果。

系统的卷积运算分析

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由上述卷积积分的公式可总结出卷积积分计算步骤。首先将***x*(*t*)**和***h*(*t*)**的自变量***t*** 改成 τ，即：$x(t)\to x(\tau),\quad h(t)\to h(\tau)$

再进行如下运算（即卷积积分的四步曲）：

反褶： $h(\tau)\to h(-\tau)$

时移： $h(-\tau)\to h(t-\tau)=h[-(\tau-t)]\begin{cases}t<0, & \text{左移 } t\\ t>0, & \text{右移 } t\end{cases}$

相乘： $x(\tau)h(t-\tau)$

积分： $x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

计算卷积积分的关键是定积分限。

卷积的计算

卷积的定义式计算 $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

积分上下限的确定（分为三种情况）

① 如果 $f_1(t)$ 是一个因果信号，即 $f_1(t)=f_1(t)u(t)$，则积分下限取 0

② 如果 $f_2(t)$ 是一个因果信号，即 $f_2(t)=f_2(t)u(t)$，则积分上限取 t

③ 如果 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 均为因果信号，则积分下限取 0，上限取 t，但卷积结果要乘以 $u(t)$

因果信号通过因果系统：$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\cdot u(t)$

例2-17：已知 $f_1(t) = u(t)$， $f_2(t) = e^{-t}u(t)$，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。

$$s(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

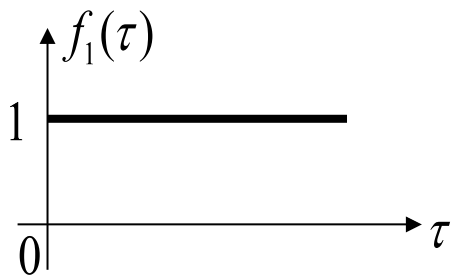
$$=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\cdot u(t)$$

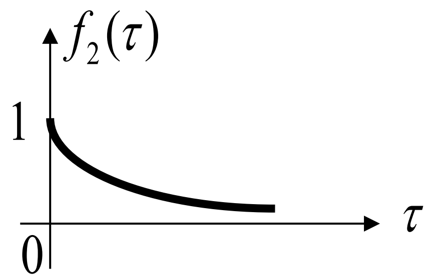
$$=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\cdot u(t)=e^{-t}\left[e^{\tau}\big|_0^t\right]\cdot u(t)$$

$$=e^{-t}\left[e^{t}-1\right]u(t)=\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

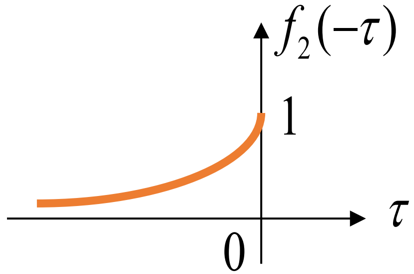
卷积的图解计算—— “五部曲”

变量替换： $f_1(t) \to f_1(\tau), \quad f_2(t) \to f_2(\tau)$

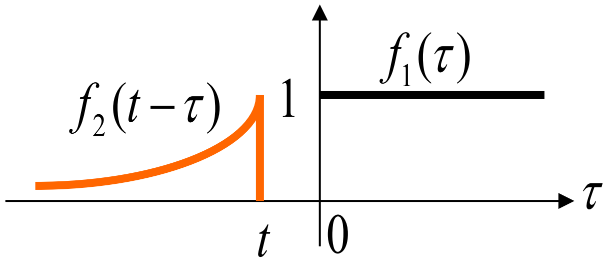




反褶： $f_2(\tau) \to f_2(-\tau)$

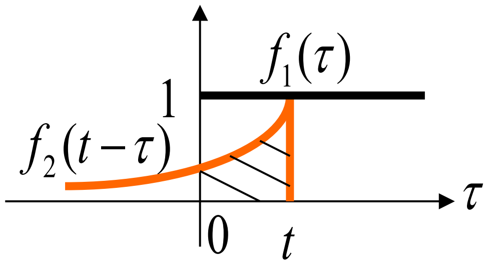


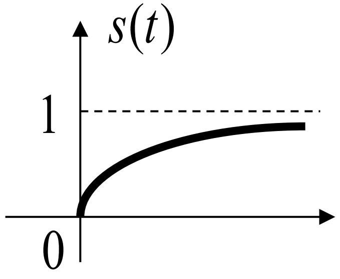
时移： $f_2(-\tau) \to f_2(t-\tau) = f_2[-(\tau - t)]$ $\begin{cases} t<0, & 左移\ t \\ t>0, & 右移\ t \end{cases}$



对位相乘： $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$

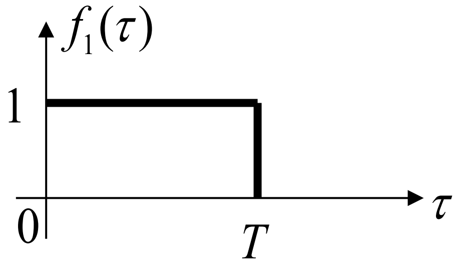
积分： $s(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

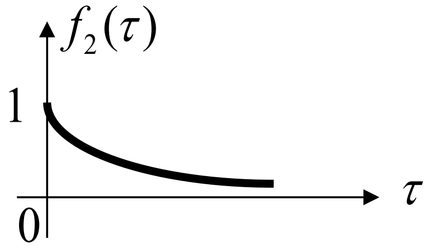


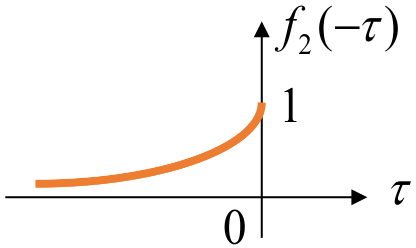


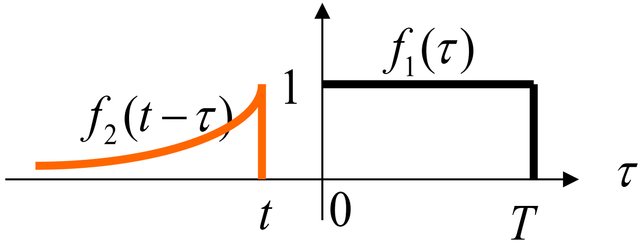
例2-18： 已知 $f_1(t)=u(t)-u(t-T)$, $f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$ ，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$

解：

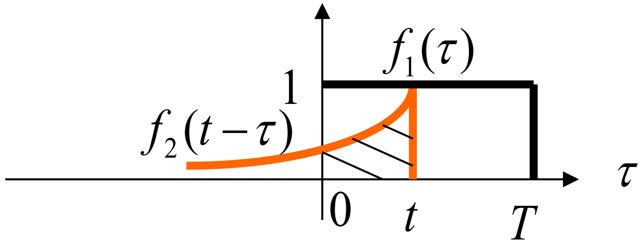




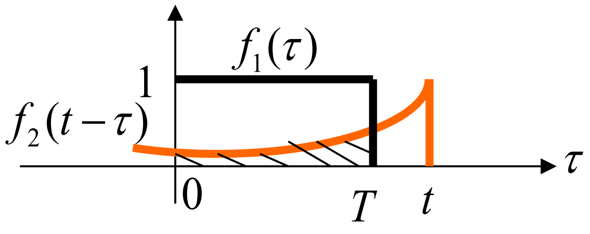




1）当 $t<0$ 时， $s(t)=0$



2）当 $0<t<T$ 时， $s(t)=\int_0^t 1\cdot\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=(1-\mathrm{e}^{-t})$

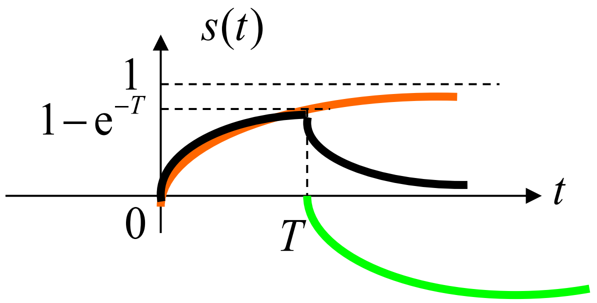


3）当 $t \geq T$ 时， $s(t)=\int_0^T 1\cdot \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-(t-T)}-\mathrm{e}^{-t}$

利用阶跃函数 $u(t)$ 的单边特性，简化卷积结果的表达：

$$s(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})[u(t)-u(t-T)]+[\mathrm{e}^{-(t-T)}-\mathrm{e}^{-t}]u(t-T)$$

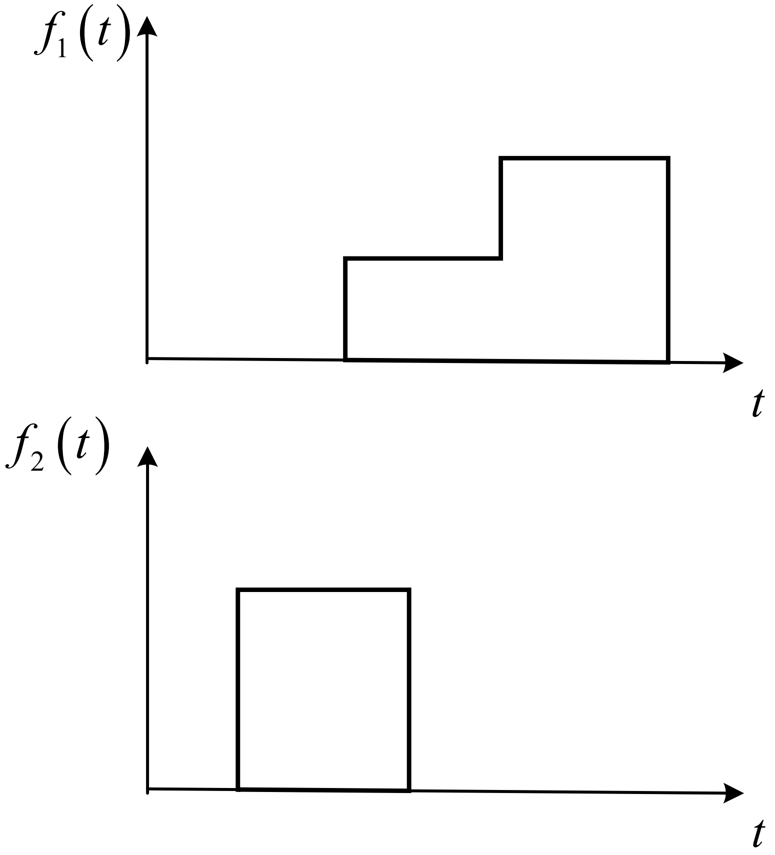
$$=(1-\mathrm{e}^{-t})u(t)-[1-\mathrm{e}^{-(t-T)}]u(t-T)$$



单选题 1分

设置

例2-19： 已知 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的函数波形如图所示，若 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$，求 $s(6)$。



A　$s(6)=2$

B　$s(6)=3$

C　$s(6)=4$

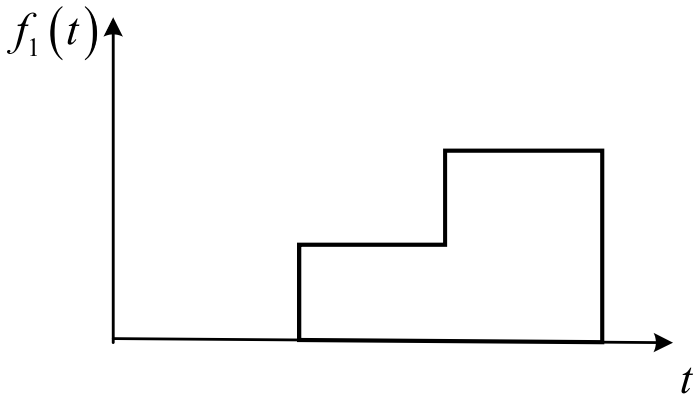
D　$s(6)=6$

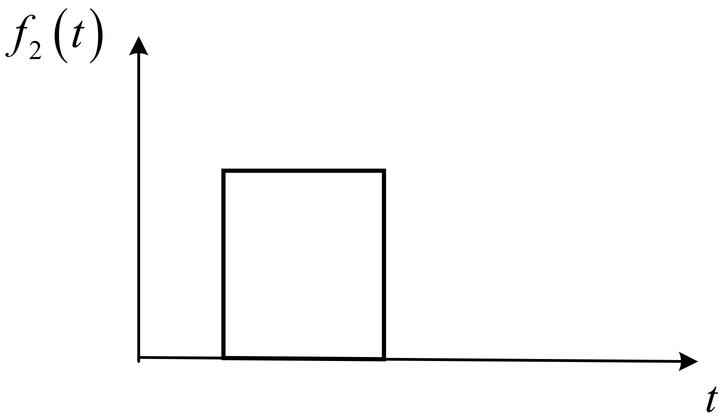
提交

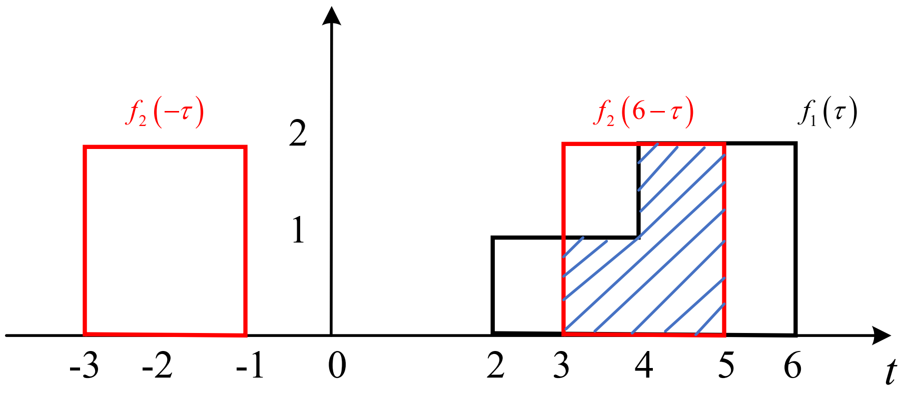
图解法适用于有限波形，而且求某一时刻的卷积值更为方便

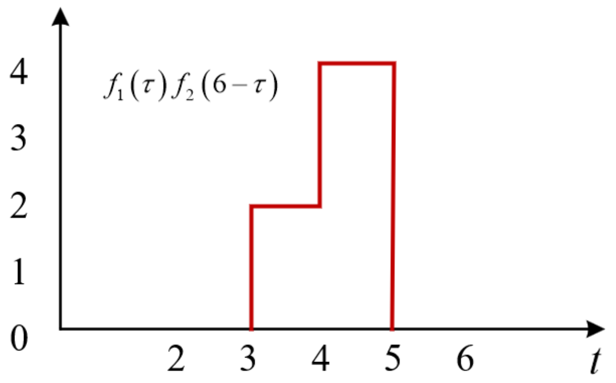
例2-19： 已知$f_1(t)$和$f_2(t)$的函数波形如图所示，若 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ ，求$s(6)$。

$$s(6)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(6-\tau)\mathrm{d}\tau$$



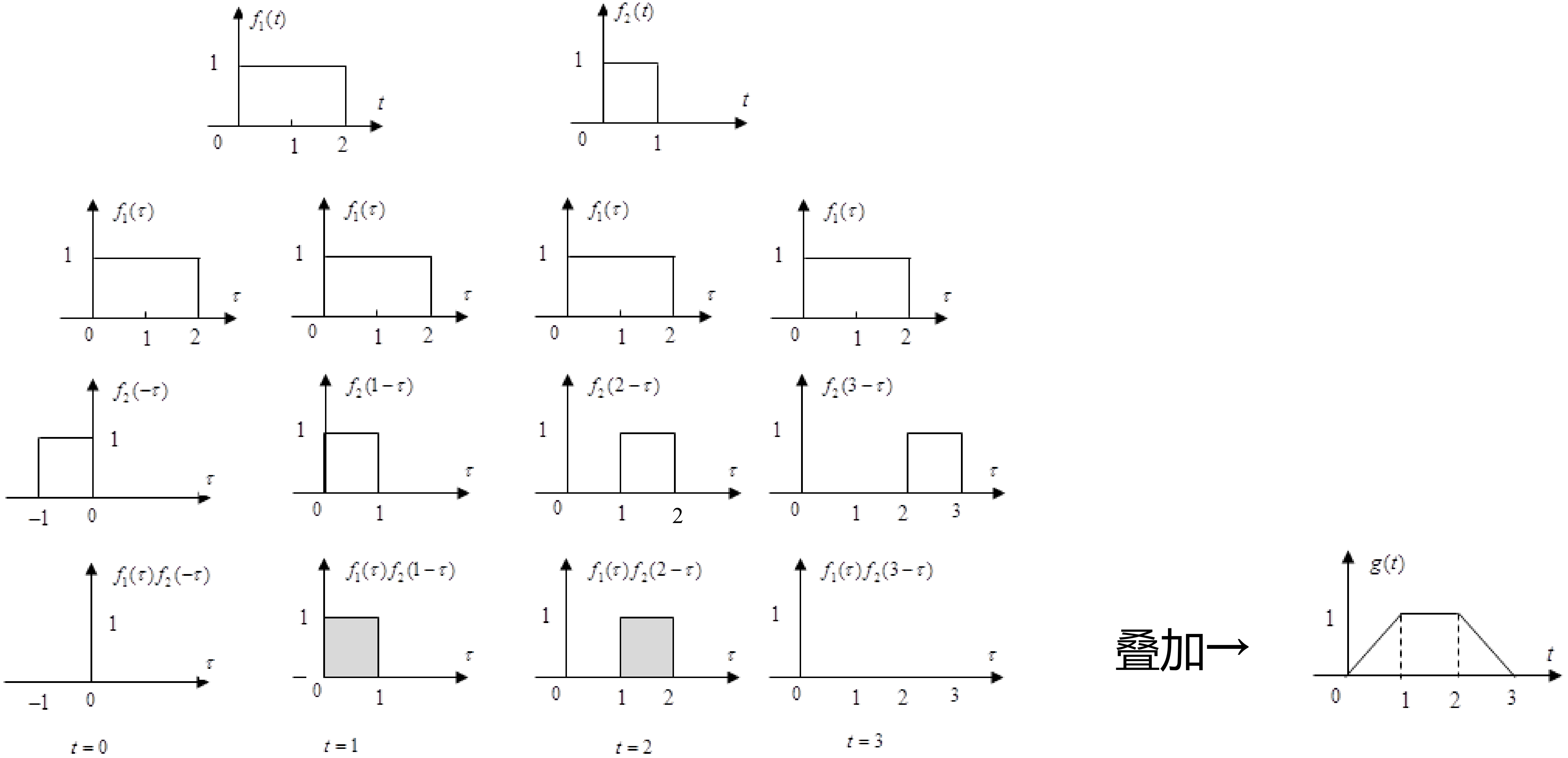






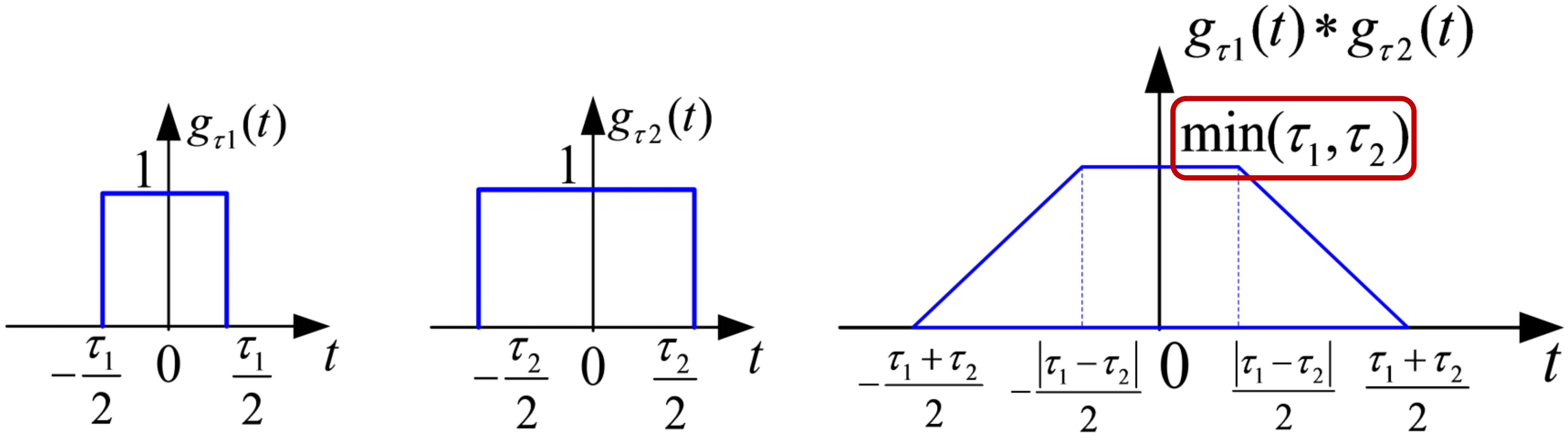
$$s(6)=2\times1\times1+2\times2\times1=6$$

再看一个例子，卷积的图解法



矩形脉冲卷积产生梯形脉冲

两个门函数$g_{\tau 1}(t)$和$g_{\tau 2}(t)$，其幅度为1，宽度分别为 τ_1 和 τ_2，求卷积积分 $g_{\tau 1}(t) * g_{\tau 2}(t)$。



结论：两个幅度为1的不同宽的门函数卷积时，其结果为梯形函数，梯形函数的高度为较窄矩形门宽，其上底为两个门函数宽度之差绝对值，下底为两个门函数宽度之和。

推广：当任意两个矩形卷积时，梯形函数的高度为两个矩形高度和较窄矩形门宽三者的乘积。（课后思考题，证明该结论）

（多选题）某LTI系统，当激励为$f(t)$时，系统的冲激响应为$h(t)$，零状态响应为$y_{zs}(t)$，零输入响应为$y_{zi}(t)$。若初始状态不变，输入激励变为$2f(t)$，系统的全响应为：

A $\boldsymbol{y_{zi}(t) + 2y_{zs}(t)}$

B $\boldsymbol{y_{zi}(t) + 2f(t) * h(t)}$

C $\boldsymbol{y_{zs}(t) + 2y_{zi}(t)}$

D $\boldsymbol{y_{zs}(t) + 2f(t) * h(t)}$

提交

例2-16. 某LTI系统，当激励为$f(t)$时，系统的冲激响应为$h(t)$，零状态响应为$y_{zs}(t)$，零输入响应为$y_{zi}(t)$。若初始状态不变，输入激励变为$2f(t)$，求系统的全响应。

解：

零输入响应只与系统的初始状态有关，系统初始状态不变，则第二次的零输入响应还是$y_{zi}(t)$。

系统零状态响应可由输入信号与冲激响应卷积得到，即$2f(t)*h(t)$，同时由线性系统的性质也可将其表示为 $2y_{zs}(t)$。

故对应第二次输入的全响应可表示为：

$$y_{zi}(t)+2y_{zs}(t) \text{ 或 } y_{zi}(t)+2f(t)*h(t)$$

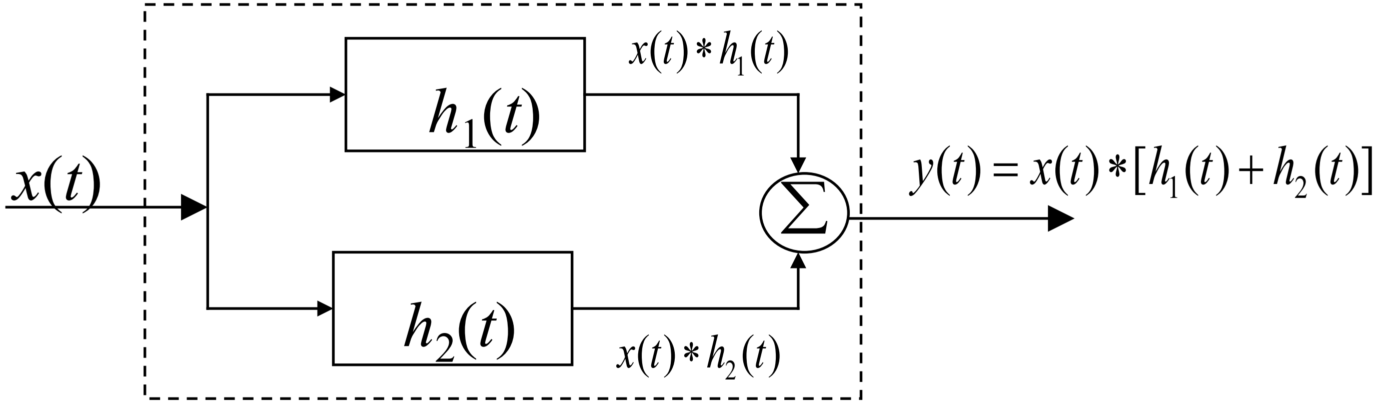
2.7 卷积的性质 ←便于复杂函数的卷积运算

2.7.1 卷积积分的代数性质

（1）交换律 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

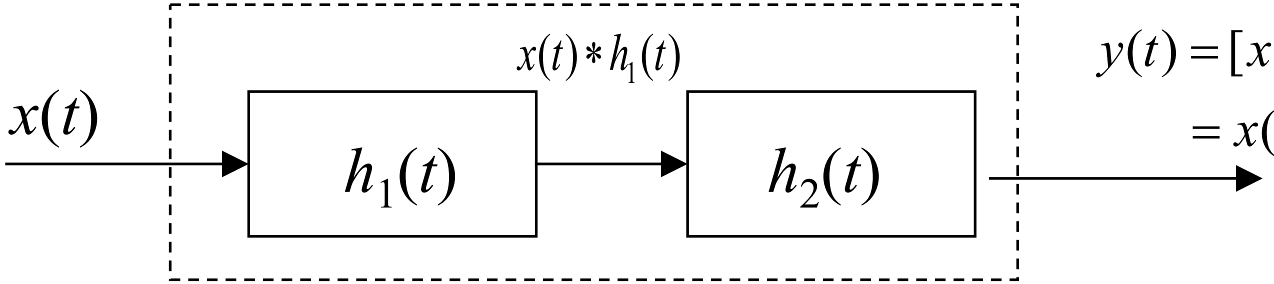
（2）分配律 $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

分配律用于系统分析，相当于并联系统的冲激响应等于组成并联系统的各子系统冲激响应之和。



（3）结合律 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

结合律用于系统分析，相当于串联系统的冲激响应等于组成串联系统的各子系统冲激响应的卷积。



$$y(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$
$$=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

2.7.2　卷积积分的微积分性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*f_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda*f_2(t)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

条件：f_1 和 f_2 满足时间受限条件，$t\rightarrow-\infty$ 时函数值等于零。

2.7.3 $f(t)$ 与冲激函数或阶跃函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

推广： $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

$$f(t)*\delta'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta'(t-\tau)\mathrm{d}\tau=-\left[-f'(t)\right]=f'(t)$$

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \quad \Rightarrow u(t)*u(t)=tu(t)$$

2.7.4 卷积积分的时移性质

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$, 则

$$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_2)*f_2(t-t_1)=f_1(t)*f_2(t-t_1-t_2)=f(t-t_1-t_2)$$

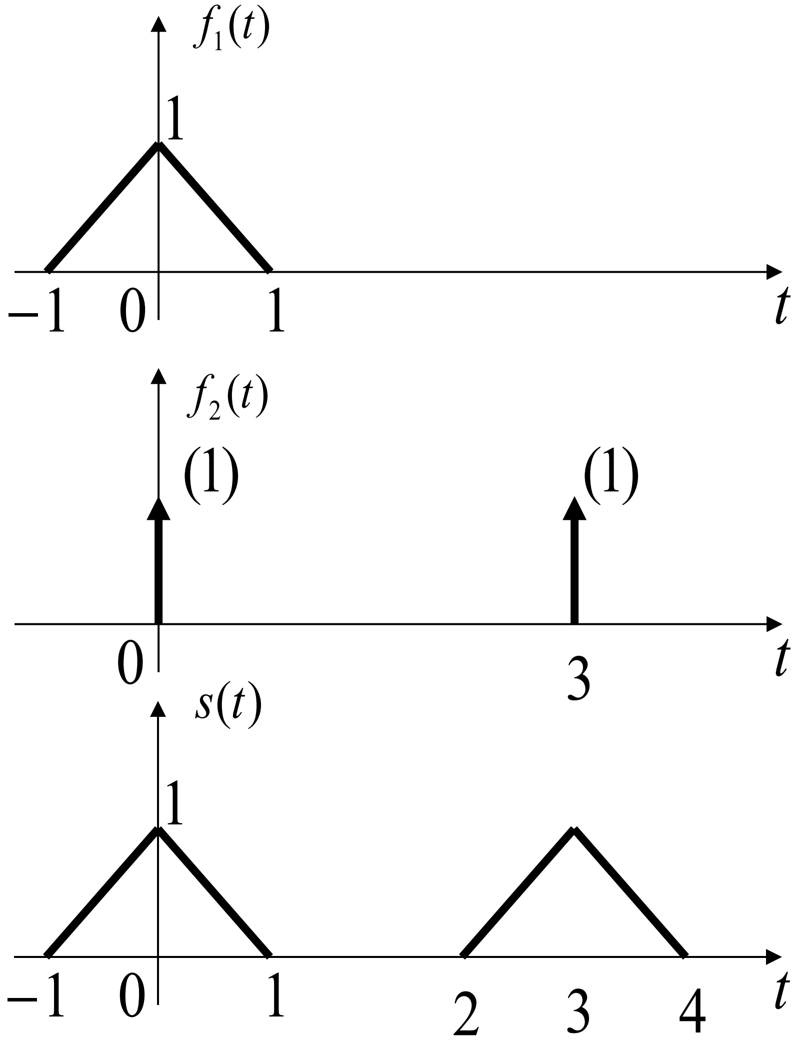
例2-20：已知 $f_1(t)$、$f_2(t)$如图所示，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$，并画出 $s(t)$的波形。

解：$f_2(t)=[\delta(t)+\delta(t-3)]$，则

$$s(t)=f_1(t)*[\delta(t)+\delta(t-3)]$$

$$=f_1(t)*\delta(t)+f_1(t)*\delta(t-3)$$

$$=f_1(t)+f_1(t-3)$$



单选题 1分

设置

已知 $f(t)=u(t-1)+u(t-3)$，$x(t)=\delta(t-3)$，则 $f(t)*x(t)=?$

A $\boldsymbol{\delta(t-4)+\delta(t-6)}$

B $\boldsymbol{u(t-1)+u(t-3)}$

C $\boldsymbol{u(t-4)+u(t-6)}$

D $\boldsymbol{\delta(t-1)+\delta(t-3)}$

提交