归纳总结

归纳总结

一、基本概念

1、磁感应强度 $B=\dfrac{F_{\max}}{|q|v}$ $B=\dfrac{\mathrm{d}F_{\max}}{I\mathrm{d}l}$

2、载流线圈的磁矩 $\vec{m}=I\vec{S}$

3、磁通量 $d\Phi=\vec{B}\cdot d\vec{S}$ $\Phi=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

4、安培力：载流导线受的磁场力

5、洛仑兹力：运动电荷受的磁场力

6、霍耳效应：磁场中载流导体两侧出现电势差

7、磁力矩： $\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}$

二、基本规律

1、毕奥－萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

2、安培定律

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

3、磁场的高斯定理

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

4、安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i\text{内}}$$

5、运动电荷的磁场

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2}}$$

6、洛仑兹力公式

$$\boxed{\vec{f}_m = q\vec{v}\times\vec{B}}$$

7、磁力矩

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}}$$

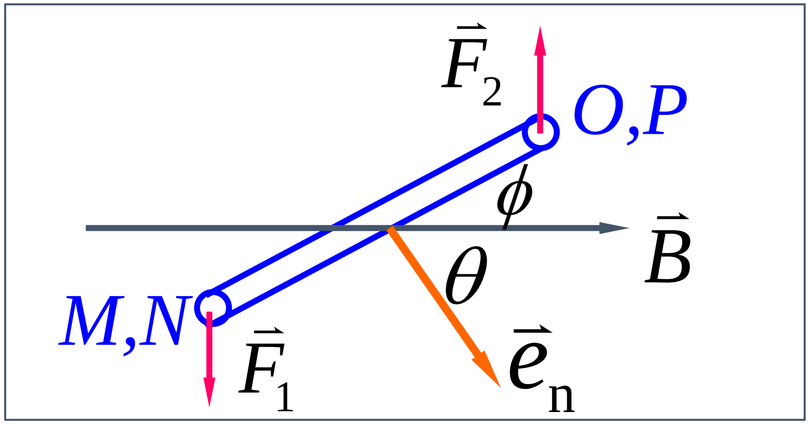
8、磁力矩的功

$$dW = -Md\theta = -BIS\sin\theta\, d\theta$$

$$= Id(BS\cos\theta) = Id\Phi$$

$$dW = Id\Phi$$

$$\boxed{W = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi}$$



9、法拉第电磁感应定律 ——感应电动势大小及方向

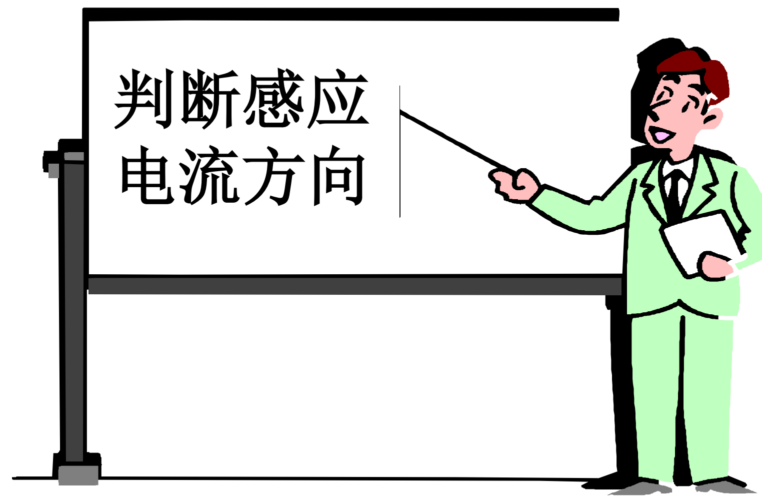
$$\mathrm{E}=\int_{-}^{+}\vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\mathrm{E}=\oint_{l}\vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\mathrm{E}_{i}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

10、楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使它自身所产生的磁通量阻止引起感应电流的磁通量的变化。



11、感应电动势

- 动生电动势
- 感生电动势

12、动生电动势

非静电力 ——洛仑兹力 $\mathrm{E}=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

13、感生电动势

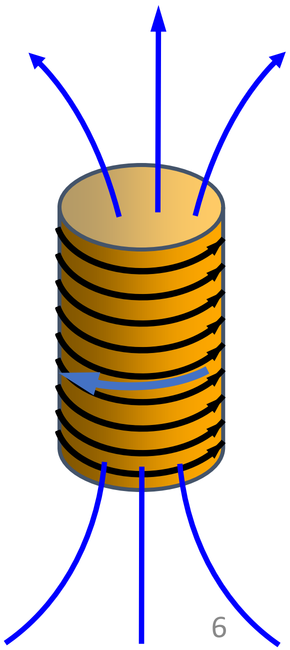
非静电力 ——感生电场力

$$\mathrm{E}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

14、自感现象 自感系数 自感电动势

$$\boxed{\Phi=L\cdot I}$$

$$\boxed{\mathrm{E}_{\mathrm{L}}=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

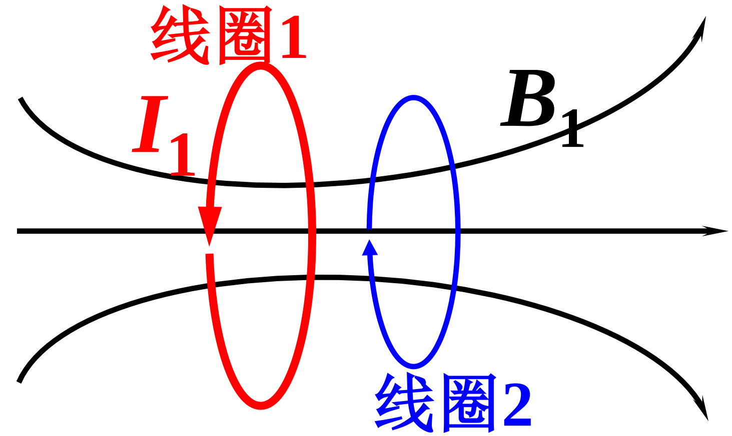


15、互感现象 互感系数 互感电动势

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 \qquad \Phi_{12} = M_{12} I_2$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$\mathcal{E}_{12} = -M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \qquad \mathcal{E}_{21} = -M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$



16、磁场能量

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} L I^2}$$

磁能密度：

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu}{2} H^2$$

磁场能量：

$$W_m = \int_V dW_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{\mu}{2} H^2 dV$$

17、位移电流

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$I_d = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

本质 ——变化的电场

可以产生磁场

$$\vec{j}_d = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

与运动电荷无关
不产生焦耳热

可存在于真空、导体、电介质等

18、全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_s = I_c + I_d = I_c + \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_c + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

19、麦克斯韦方程组的积分形式

(1)、电场的高斯定理 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V \rho \mathrm{d}V = \sum q$

(2)、磁场的高斯定理 $\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$

(3)、电场环路定理 $\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$

(4)、全电流安培环路定理 $\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{s}$

介质性质方程: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$　　$\vec{B} = \mu \vec{H}$

欧姆定律微分形式: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

广义洛伦兹力公式: $\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times \vec{B}}$

三、常用公式

1、直电流的磁场 $$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

2、长直电流的磁场 $$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

3、圆电流的磁场 $$B=\frac{\mu_0 I R^2 N}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad \boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

4、长直螺线管内的磁场 $$\boxed{B=\mu_0 n I}$$

5、载流线圈在磁场中受的力矩 $$M=NBIS\sin\varphi$$

6、带电粒子在磁场中运动的回旋半径 $$R=\frac{mv_\perp}{qB}$$

四、 电场与磁场类比

电场	磁场
极化电荷 q', σ'	磁化电流 I', I_S
极化强度 $\vec{P} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$	磁化强度 $\vec{M} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\sum_i \vec{m}}{\Delta V}$
$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	磁场强度 $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$ $(\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M})$

电场

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_i q_i$$

相对电容率

$$\varepsilon_r=1+\chi_e$$

$$\boxed{\varepsilon_r=\frac{E_0}{E}}$$

$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$$

环路定理

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

磁场

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

安培环路定理

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_i I_i$$

相对磁导率

$$\mu_r=1+\chi_m$$

$$\boxed{\mu_r=\frac{B}{B_0}}$$

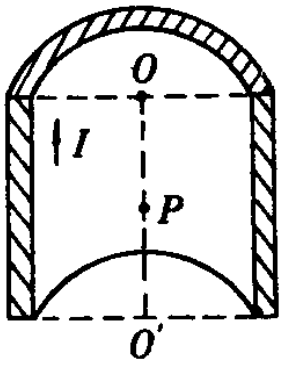
$$\mu=\mu_r\mu_0$$

高斯定理

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

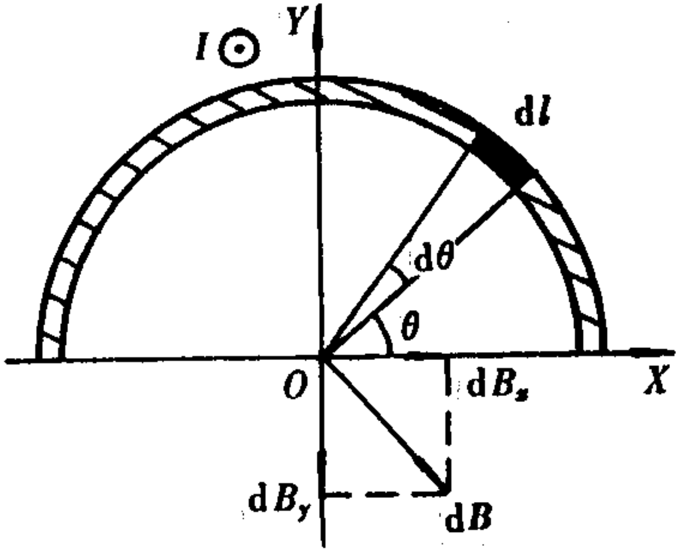
典型习题

习题1: 半径为R=0.01m的无限长半圆柱形金属薄片,自下而上地通有电流I=5A, 求轴线上任一点P处的磁感应强度。



解：可看成由许多与轴平行的无限长直导线所组成。

宽为*dl*的无限长直导线电流为:



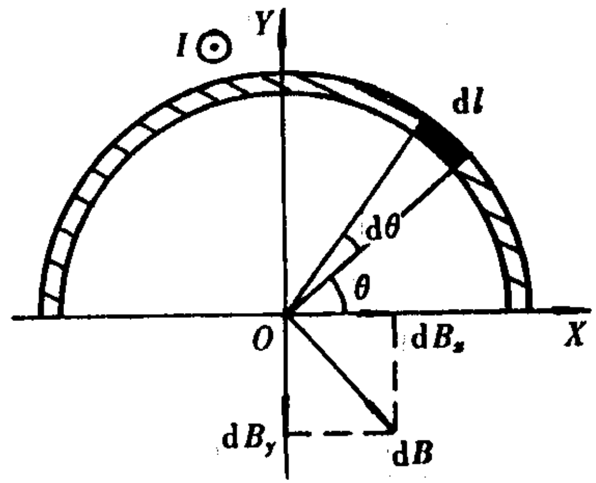
$$dI = \frac{I}{\pi R} \cdot Rd\theta = \frac{Id\theta}{\pi}$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 Id\theta}{2\pi^2 R}$$

$$dB_x = dB\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = dB\sin\theta = \frac{\mu_0 I\sin\theta}{2\pi^2 R}d\theta$$

$$dB_y = -dB\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = -dB\cos\theta = -\frac{\mu_0 I\cos\theta}{2\pi^2 R}d\theta$$

$$B_x = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I\sin\theta}{2\pi^2 R}d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$



$$B_y = \int_0^{\pi} -\frac{\mu_0 I\cos\theta}{2\pi^2 R}d\theta = 0$$

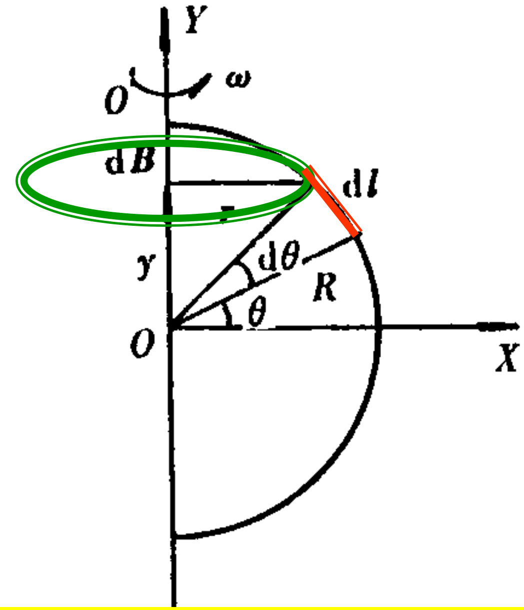
$$\vec{B}_p = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} = B_x\vec{i} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\vec{i}$$

$$= \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 5}{\pi^2\times 0.01}\vec{i} = 6.37\times 10^{-5}\vec{i}\,(T)$$

习题2 如图所示，有一带正电且线电荷密度为 λ 的半圆，半径为 R，以角速度 ω 绕 OO' 轴匀速转动。求:

(1) 圆心 O 点的 B;

(2) 半圆线圈产生的磁矩 p_m。



解 (1) 在半圆上取一线元 dl

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \lambda \cdot dl = \frac{\omega}{2\pi} \lambda \cdot R d\theta$$

在 O 点产生的 dB 大小为

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + y^2)^{3/2}}$$ 沿Y正方向

参见

圆电流产生的磁场

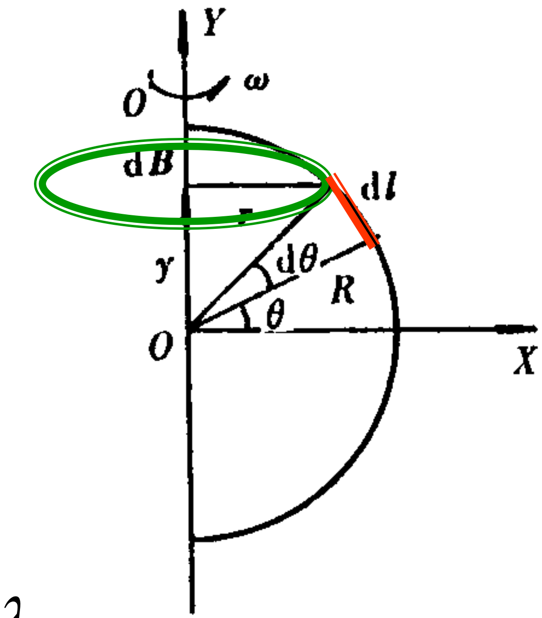
$$dp_m = S dI = \pi r^2 dI$$ 沿Y正方向

$$\because r = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 R^2\cos^2\theta}{2R^3} \cdot \frac{\omega}{2\pi}\lambda \cdot Rd\theta$$

$$= \frac{\mu_0\omega\lambda\cos^2\theta}{4\pi}d\theta$$

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0\omega\lambda\cos^2\theta}{4\pi}d\theta \quad = \frac{1}{8}\mu_0\omega\lambda$$



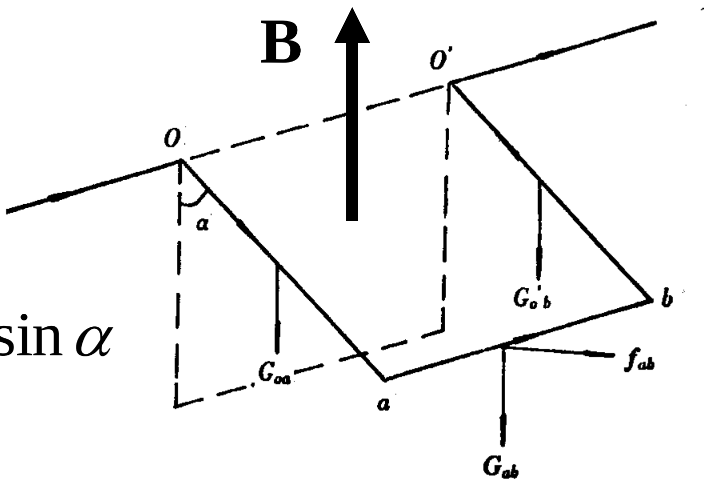
（方向沿**Y**正方向）

(2)

$$p_m = \int dp_m = \int SdI = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\pi R^2\cos^2\theta \cdot \frac{\omega}{2\pi}\lambda Rd\theta \quad = \frac{1}{4}\pi R^3\omega\lambda$$

（方向沿**Y**正方向）

习题3 截面积为S，密度为ρ的铜导线被弯成正方形的三边，可以绕与所缺的正方形的一边重合的水平轴转动，如图所示。导线放在方向竖直向上的均匀磁场中，当导线中的电流为I时，导线离开原来竖直位置偏转一角度α而平衡。求磁感应强度大小。



解： 设正方形边长为l，每边质量为m，平衡时，重力对OO'轴力矩

$$M_1 = 2mg \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha + mgl\sin\alpha = 2mgl\sin\alpha$$

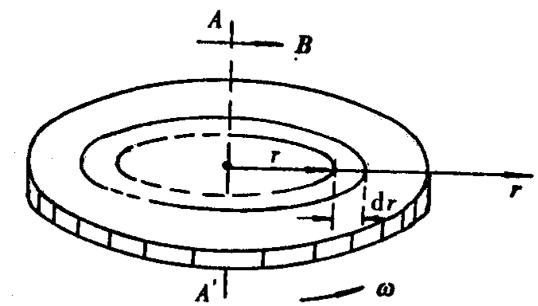
线圈受到磁力矩等于导线ab段所受到的磁力对轴的力矩

$$m = \rho \cdot Sl$$

$$\therefore M_m = BIl \cdot l\cos\alpha = BIl^2\cos\alpha \quad \text{方向与}M_1\text{相反}$$

$$M_1 = M_m \quad \rightarrow \quad BIl^2\cos\alpha = 2mgl\sin\alpha \qquad \therefore B = \frac{2\rho Sg}{I}\tan\alpha$$

习题4：一平面塑料圆盘，半径为R，电荷面密度为σ，以ω转动，磁场B垂直于转轴AA’，证明磁场作用于圆盘的力矩的大小为：$M=\frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4 B$



解： 取圆环 $r\rightarrow r+dr$ $dq=\sigma\cdot 2\pi r\cdot dr$ $dI=\frac{\omega}{2\pi}dq$

$$dp_m=dI\cdot S=\frac{\omega}{2\pi}dq\cdot\pi r^2=\pi\omega\sigma r^3 dr$$

$$\boxed{\vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B}}$$

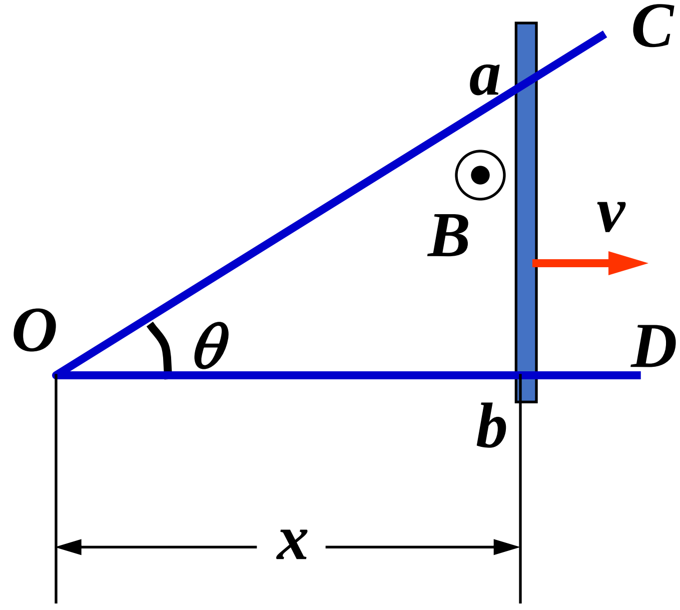
$$dM=B\cdot\sin 90°\cdot dp_m=\pi\omega\sigma r^3 Bdr$$

$$M=\int dM=\int_0^R \pi\omega\sigma r^3 Bdr=\frac{1}{4}\pi\omega\sigma BR^4$$

电磁感应 典型题分析

本章应重点掌握法拉第电磁感应定律及其应用，包括动生电动势、感生电动势、自感电动势、互感电动势的计算；理解磁场能量及磁能密度的概念。

例5 **有一弯成θ角的金属框架COD，一导线ab(ab垂直于OD)以恒定速度v在金属框架上滑动，设v垂直于ab向右。已知磁场B的方向垂直纸面向外，分别求下列情况框架内的感应电动势 ε_i 的变化规律。设t=0时，x=0。**



1) 磁场均匀分布，且B不随时间改变；

2) 非均匀的变化的磁场$B=kx\cos\omega t$。

解：1) 导线*ab*在均匀磁场中运动，产生的动生电动势即为所求感应电动势

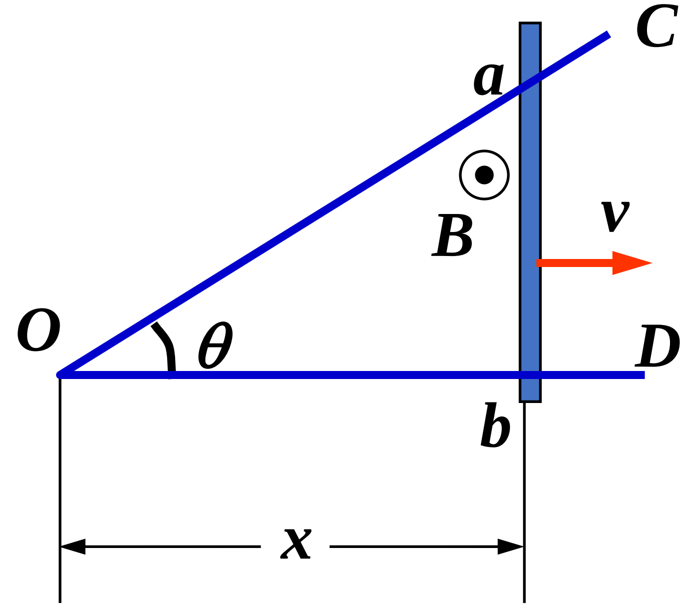
$$\varepsilon_i = \int_{(a)}^{(b)} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

由 $\vec{v} \perp \vec{B} \perp d\vec{l}$

$$\boxed{\varepsilon_i = Bvl = Bvx\tan\theta}$$

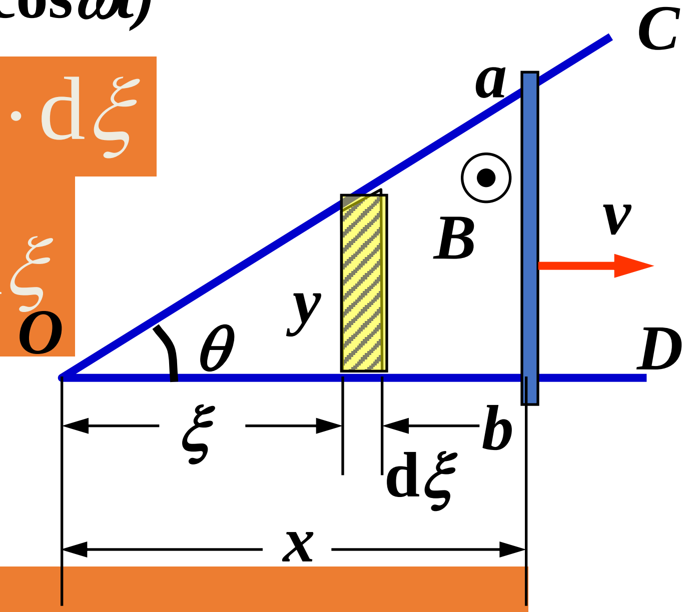
将 $x = vt$ 代入

$$\boxed{\varepsilon_i = B\tan\theta \cdot v^2 t}$$



方向由*a*指向*b*，框架中的电动势应为顺时针方向。

2) 当磁场作非均匀变化时，框架中既有动生电动势，又有感生电动势，可应用法拉第电磁感应定律计算总的感应电动势。选取回路*obao*，为正方向。　　(***B=kx*cos*ωt***)



$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = k\xi\cos\omega t\cdot\xi\tan\theta\cdot\mathrm{d}\xi$$

$$\Phi = \int\mathrm{d}\Phi = \int_0^x k\xi^2\cos\omega t\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{3}kx^3\cos\omega t\cdot\tan\theta$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}k\omega x^3\sin\omega t\cdot\tan\theta - kx^2 v\cos\omega t\cdot\tan\theta$$

$$= kv^3\tan\theta\left(\frac{1}{3}\omega t^3\sin\omega t - t^2\cos\omega t\right) \quad (\because x = vt)$$

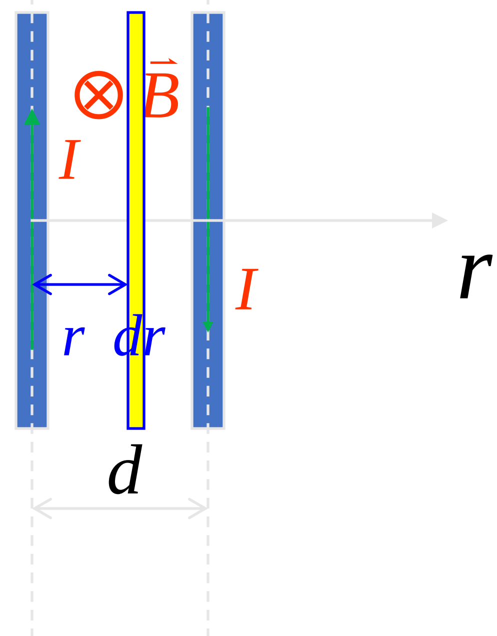
若ε_i>0，则ε_i的方向与所设正绕方向（obao)一致；反之，相反。

例6 两根足够长的平行直导线轴线间的距离为20cm，在导线中保持一强度为20A而方向相反的恒定电流。若导线的半径为 a＝0.1cm，且导线内部磁场忽略不计。

(1)求两导线间每单位长度的自感系数;

(2)若将两导线分开到相距40cm，求磁场对单位长度导线所做的功;

(3)位移时，单位长度的磁能改变了多少?是增加，还是减少?说明能量的来源。



解 (1) 两导线间任一点磁感应强度为:

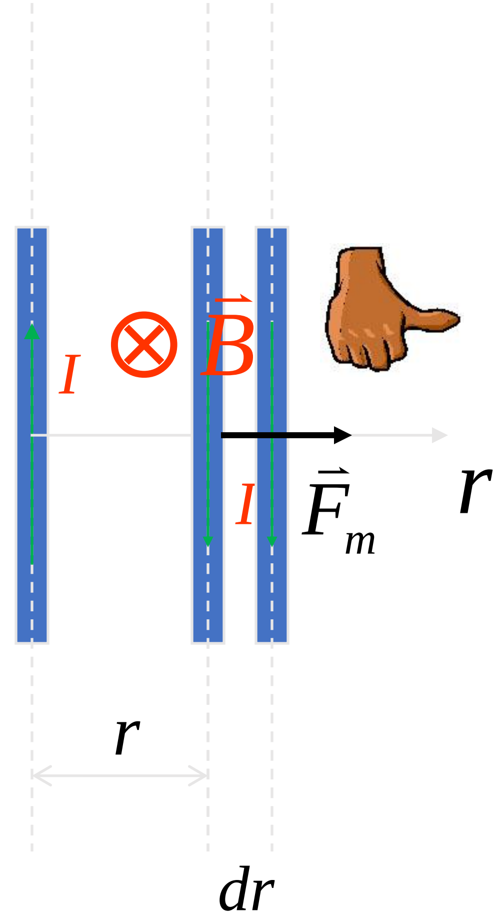
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

$$\Phi = \int BdS = \int_a^{d-a} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right) \cdot l dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln\frac{d-a}{a}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} = \frac{4\pi\times10^{-7}}{\pi}\ln\frac{20-0.1}{0.1} = 2.1\times10^{-6}\,H/m$$

(2) 两导线中,一条导线上的电流在另一条导线处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



故任一条导线单位长度上所受磁力为:

$$\boxed{d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}} \qquad F_m = IB \cdot 1 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$$ 方向:相斥

磁力的功:

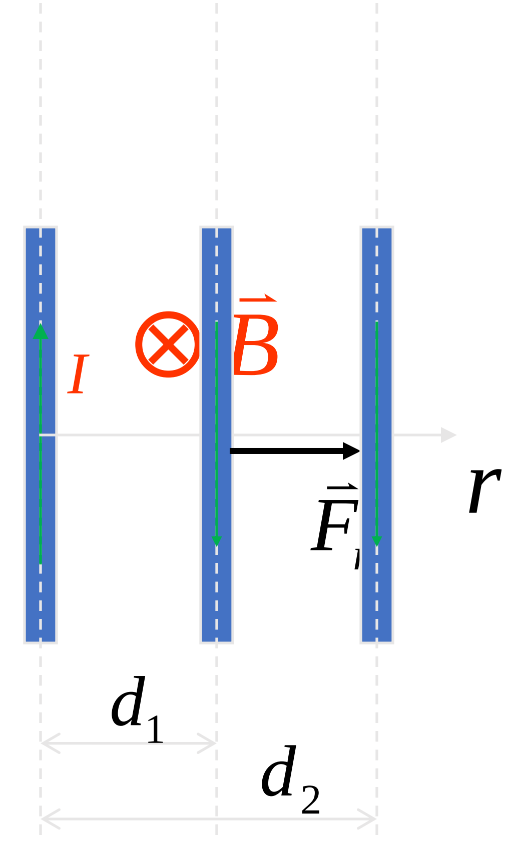
$$A_m = \int_{d_1}^{d_2} F_m \cdot dr = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20^2}{2\pi} \ln \frac{40}{20} = 5.5 \times 10^{-5} J$$ 磁力作正功.

(3) 由(1)的解

当两导线相距为 d_1 时 $$L_1 = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d_1 - a}{a}$$

当两导线相距为 d_2 时 $$L_2 = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d_2 - a}{a}$$



单位长度的磁能改变:

$$\Delta W_m = W_{m2} - W_{m1} = \frac{1}{2}L_2 I^2 - \frac{1}{2}L_1 I^2 = \frac{1}{2}I^2(L_2 - L_1)$$

$$= \frac{1}{2}I^2\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d_2 - a}{d_1 - a}$$

$$\because d >> a \quad \therefore \Delta W_m = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1} = 5.5\times 10^{-5}\,J$$

讨论:

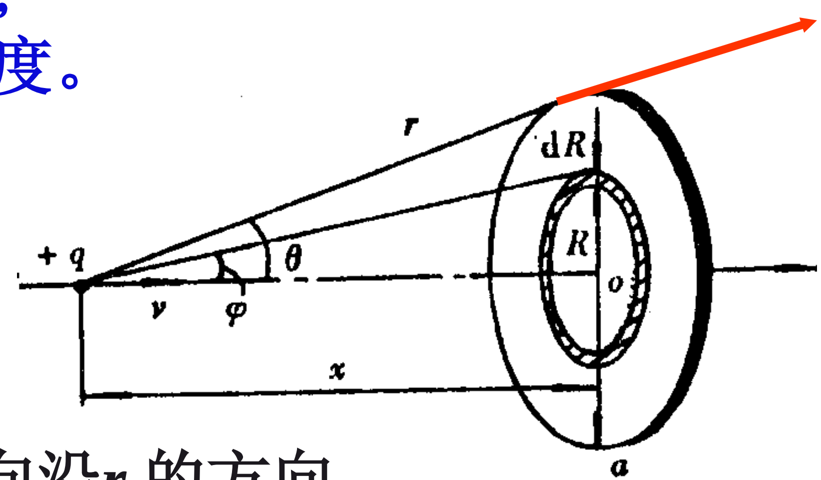
导线移动过程中磁能增加, 磁场既对外作功, 磁能又增加, 可能否？是否违反能量守恒定律？

其能量来源于电源： 导线拉开→磁通量增加→感应电动势使电流减少→为维持电流恒定→电源克服感应电动势作功→对外作功+磁能增加.

例7 如图所示，点电荷+q以速度 v 向O点运动。以O为圆心，a 为半径做一圆，圆平面与 v 垂直。

(1) 计算通过该圆面的位移电流；

(2) 求圆周上任一点的磁感应强度。



解 (1) 在圆环上任一点的电位移

$$D = \varepsilon E = \frac{q}{4\pi(x^2 + R^2)}$$ 方向沿r 的方向

通过圆环的电位移通量为

$$\Phi_D = \int D dS \cos\varphi \qquad dS = 2\pi R dR \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$\therefore \Phi_D = \int_0^a \frac{q 2\pi R dR}{4\pi(x^2 + R^2)} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{q}{2}\left[1 - \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}\right]$$

$$\therefore I_d=\frac{d\Phi_D}{dt}=\frac{q}{2}\frac{d}{dt}\left[1-\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]=\frac{qa^2v}{2(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{qa^2v}{2r^3}$$

(式中 $v=\frac{-dx}{dt}$)

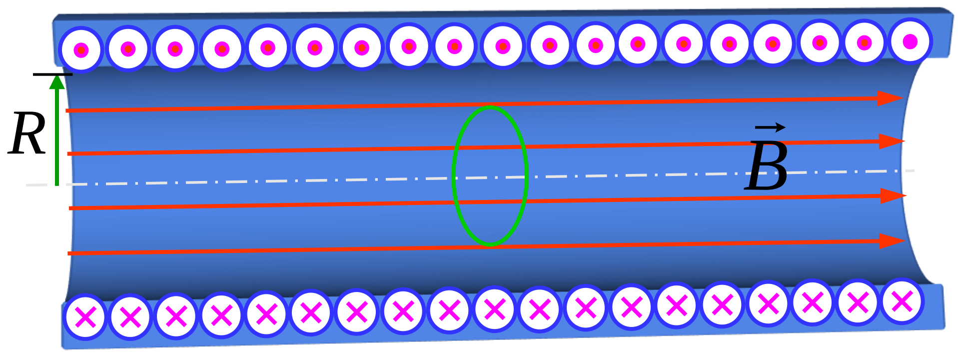
(2) 求圆上任一点的磁感应强度

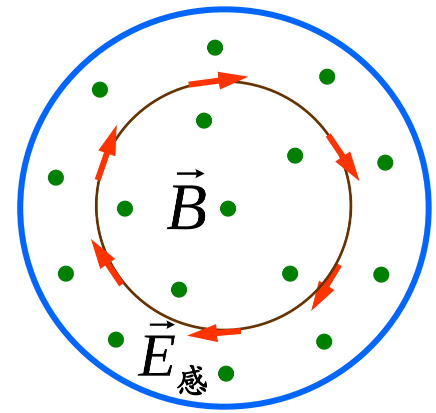
由运动电荷的磁场公式

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

也可全电流安培环路定理求解

例8： 半径为R的长直螺线管的线圈电流随时间匀速增加，求螺线管内、外感生电场的场强。





右视图

解: 任一时刻螺线管内磁场各处相等。

由磁场分布对称性可知，截面上感生电场线为一组同心圆，同一圆周上各点的感生电场大小相等，方向如图（与$d\vec{B}/dt$成左旋关系）。$(d\vec{B}/dt>0)$

视为无限长，故感生电场也不存在轴向分量。

感应电场沿某一电场线的环路积分:

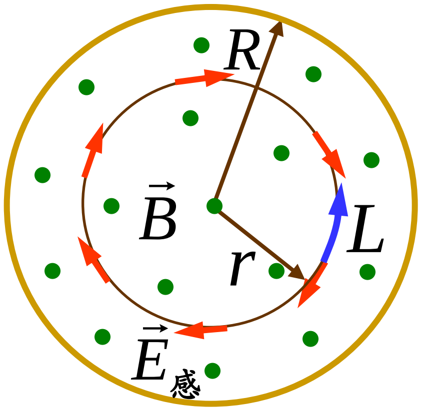
$$\oint_r \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_{感} = -\iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

$$\rightarrow E_{感} 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\iint_S dS \quad (\frac{dB}{dt} = const > 0)$$

(由回路绕行方向知面积正法线方向与$d\vec{B}/dt$同向.)

$$\rightarrow E_{感} 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$$

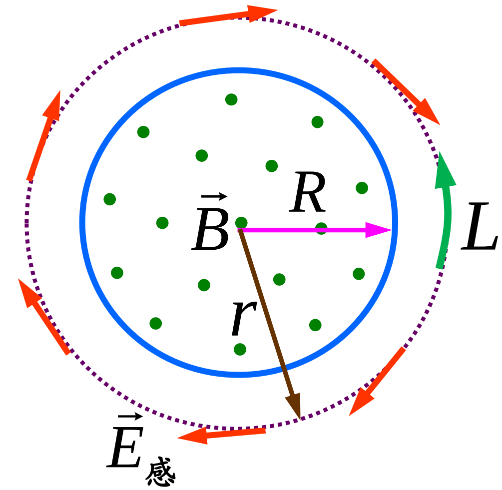
$$E_{感} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$



说明：上面计算感应电场的环路积分时，是假设其与回路绕行方向相同。而最后算出结果中的负号正表明其实际方向与回路绕行方向L相反。

2.在螺线管外，沿感应电场线（$r > R$）积分：

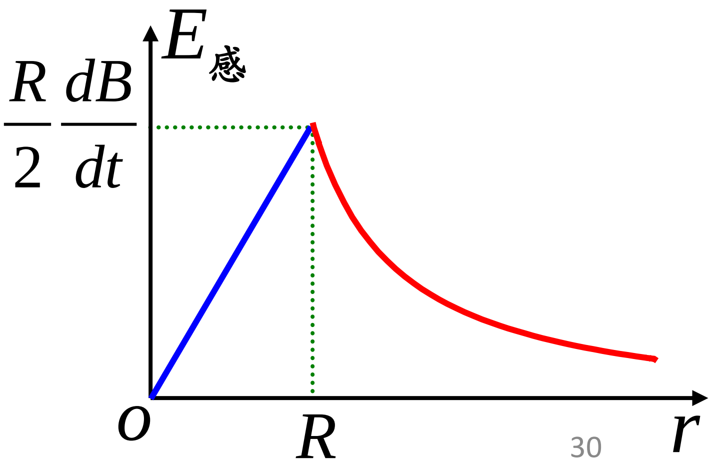
$$\oint_r \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_{感}$$



因积分环路L内磁通只分布于πR^2面积内，所以

$$E_{感} 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt} S_R = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$$

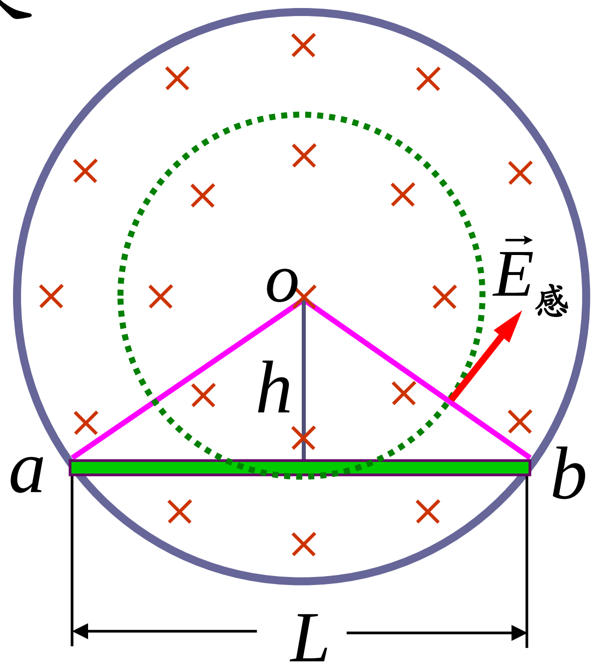
$$E_{感} = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \quad (r > R)$$



例9: 在半径为R的圆柱体空间内磁场均匀分布，一长为L的导体棒在磁场中如图放置。设$d\vec{B}/dt$值恒定且大于零，求棒两端的感生电动势。

解法1: 直接用法拉第电磁感应定律求

作一假想回路$oabo$，则



$$\varepsilon_{oabo} = -\frac{d\Phi}{dt} = S_{oabo}\frac{dB}{dt}$$

$$= \frac{L}{2}h\frac{dB}{dt} = \frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \cdot \frac{dB}{dt}$$

（回路$oabo$所围面积正法线方向与$d\vec{B}/dt$反向.）

$$\varepsilon_{oabo} = \varepsilon_{oa} + \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bo}$$

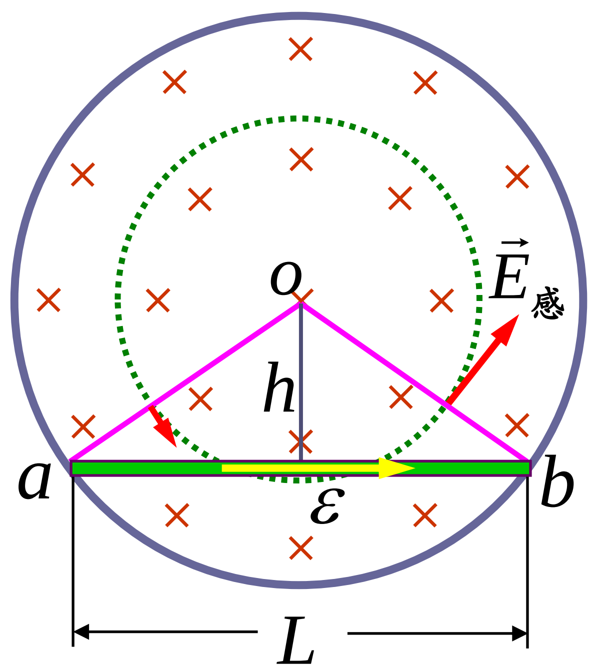
$$\varepsilon_{oa} = \int_o^a \vec{E}_{感} \cdot d\vec{r} = \int_r E_{感} dr \cos 90° = 0$$

同理： $\varepsilon_{bo} = \int_b^o \vec{E}_{感} \cdot d\vec{r} = 0$

$\rightarrow \varepsilon_{ab} = \varepsilon_{oabo}$

$$= \frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \cdot \frac{dB}{dt}$$

方向 $a \rightarrow b \ \ (U_b > U_a)$



解法2: 用定义 $\varepsilon=\int_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$ 求

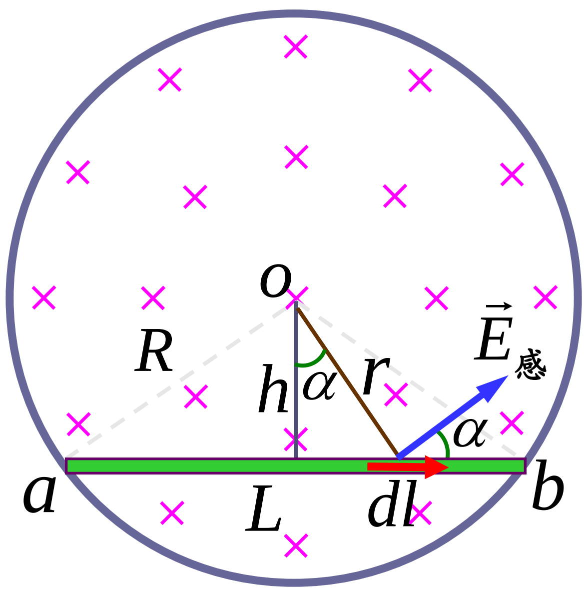
$$E_{感}=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

上例结果

$$d\varepsilon=\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cos\alpha dl=\frac{h}{2}\frac{dB}{dt}dl$$

$$\varepsilon=\int_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=\int_a^b\frac{h}{2}\frac{dB}{dt}dl$$

$$=\frac{1}{2}hL\frac{dB}{dt}=\frac{L}{2}\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\cdot\frac{dB}{dt}$$



方向 $a\to b\ \ (U_b>U_a)$