内容回顾

简谐振动的合成

1. 两个同方向、同频率简谐振动的合成

合振动仍然是简谐振动，而且角频率与分振动的角频率相同。合振动振幅和初相位可以由旋转矢量或三角函数计算。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

2. 两个同方向、频率接近的简谐振动的合成

同方向频率接近的两个简谐振动所形成的合振动，不再是等幅振动，其振幅时而加强，时而减弱，这个现象叫做拍。其振幅变化的频率，叫做拍频。

$$\nu=|\nu_2-\nu_1|$$

内容回顾

3. 两个相互垂直、同频率简谐振动的合成

合振动的轨迹方程

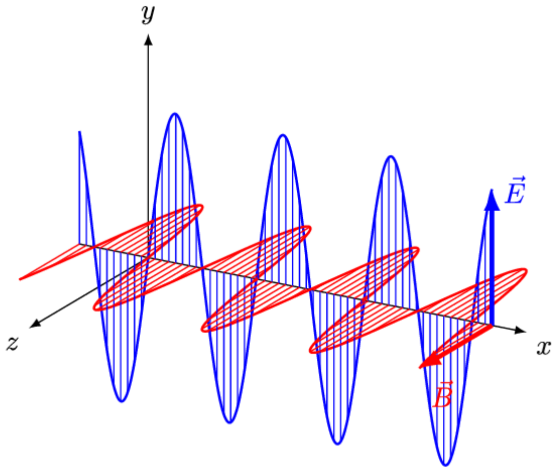
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

合振动是一个椭圆方程，它的形状由两个分振动的振幅及相位差决定。

$$0<\Delta\varphi<\pi$$ 质点沿顺时针方向运动

$$\left.\begin{array}{r} -\pi<\Delta\varphi<0 \\ \text{或}\ \pi<\Delta\varphi<2\pi \end{array}\right\}$$ 质点沿逆时针方向运动

第十章 波动


y
$\vec{E}$
z
x
$\vec{B}$

●振动在空间的传播过程叫波动。

●振动是造成波动的原因。

●波的传播不是物质的迁移，
而是振动状态（相位）和能量的传播。

波动的种类： 机械波、电磁波、量子波、引力波……

机械波： ●机械振动在弹性媒质中的传播过程。

机械波产生的条件 $\left\{ \begin{array}{l} \text{波源—激起波动的振动系统。} \\ \text{弹性媒质—能产生弹性形变的连续物质。} \end{array} \right.$

教学基本要求

一、理解描述简谐波的各物理量的意义及各量间的关系。

二、理解机械波产生的条件、振动与波动的关系。掌握由已知质点的简谐振动方程得出平面简谐波的波函数的方法。理解波函数的物理意义。

三、理解波的能量传播特征及能流、能流密度概念。

教学基本要求

四、了解惠更斯原理和波的叠加原理。理解波的相干条件，能应用相位差和波程差分析、确定相干波叠加后振幅加强和减弱的条件。

五、理解驻波及其形成，了解驻波和行波的区别。

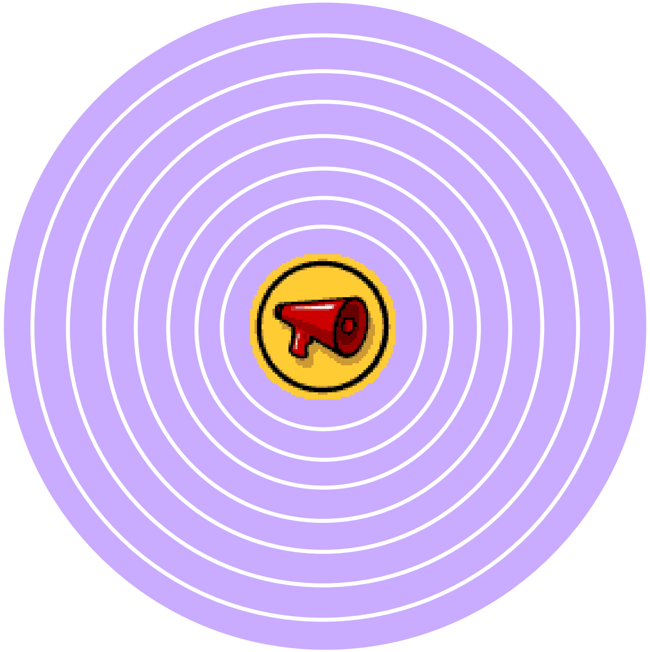
六、了解机械波的多普勒效应及其产生的原因。

七、了解声波、超声波和次声波、声强级。

10-1 机械波的几个概念

一 机械波的形成

◆介质中某处质点的振动状态，由于介质各部分之间的弹性相互作用而在整个介质中传播开来，形成了波动。



二 横波与纵波

横波—质点的振动方向与波的传播方向垂直的波。

纵波—质点的振动方向与波的传播方向平行的波。

●机械横波只能在具有切变弹性的介质中传播，即由切变弹性产生。（存在于固体、稠液体中。）

●纵波由介质发生体变（也称容变）产生。（存在于固体、液体、气体中。）

相同点

（1）质元并未“随波逐流”，波的传播不是媒质质元的传播，而是振动状态的传播。

（2）机械波的传播必须同时有波源和弹性介质。

（3）各质点的周期、频率和起振方向都与波源相同。

注意

波是振动状态的传播，介质的质点并不随波传播。

复杂波

例如：地震波

（纵波速度较快，上下振动，破坏性较弱；
横波速度较慢，左右振动，破坏性较强）

特点：复杂波可分解为横波和纵波的合成。

简谐波

若波源的振动是一个简谐振动，介质均匀无吸收，则由它产生的波就称为简谐波。

特点：波源及介质中各点均作简谐振动。

（本章重点研究对象）

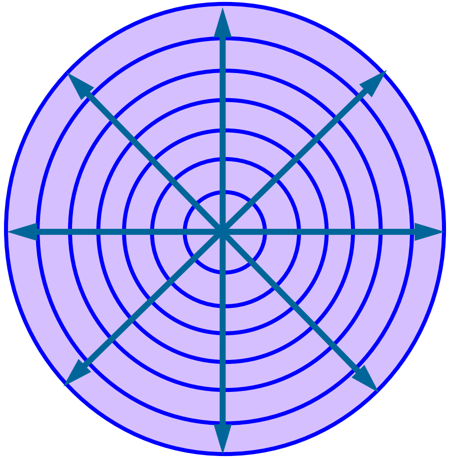
三　波线 波面 波前

波线：沿波的传播方向画一些带有箭头的线。

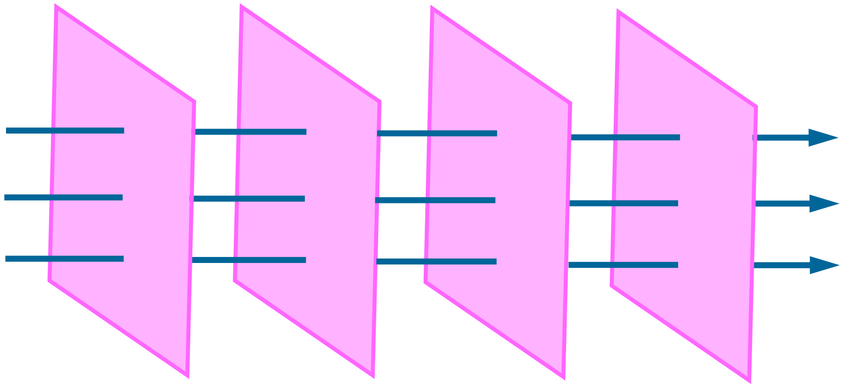
波面(同相面)：相位相同的点连成的曲面。

其中最前面波面称为波前（波阵面）。

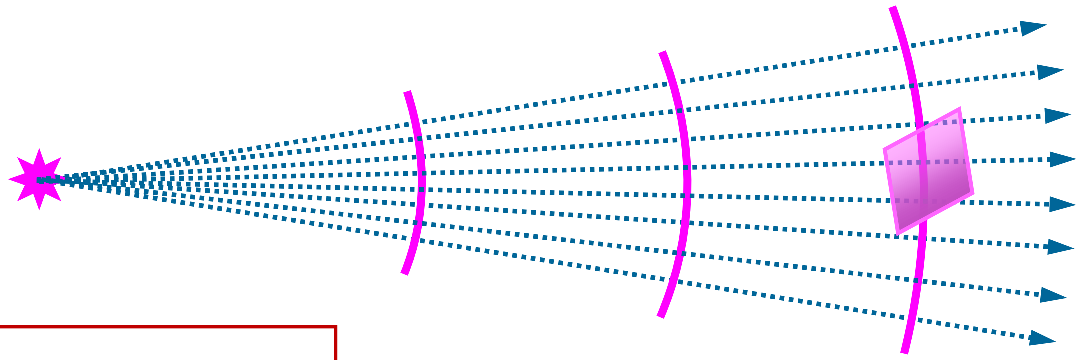
球面波



平面波



点波源产生的波在远处的一小部分可视为平面波。



波线、波面的性质

（1）同一波面上各点振动状态相同。

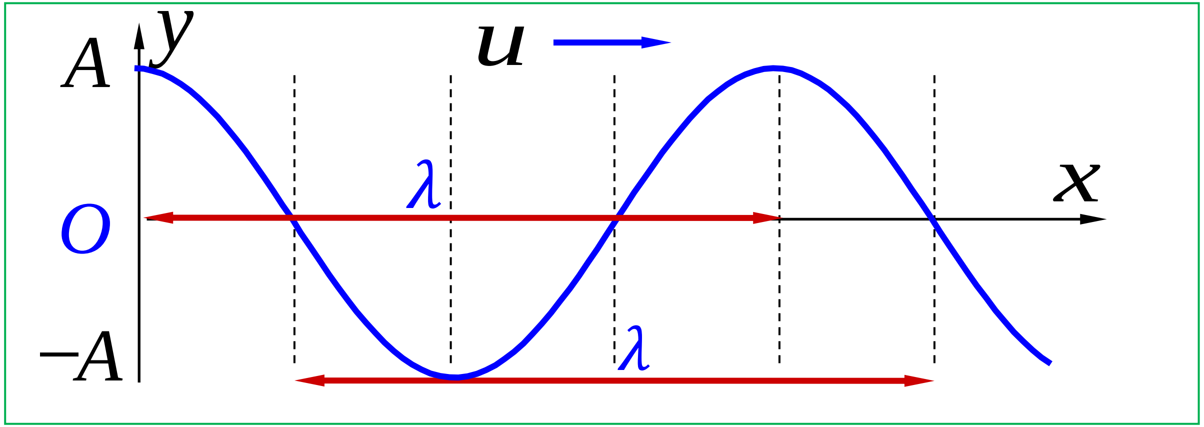
（2）波阵面的推进即为波的传播。

（3）各向同性介质中，波线垂直于波面。

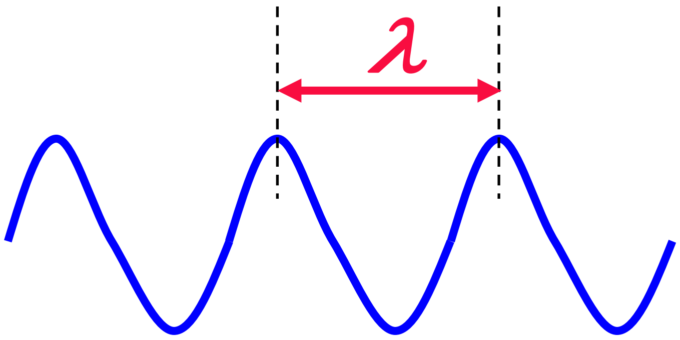
四　波长　波的周期和频率　波速

1　波长 λ

沿波传播方向两个相邻的、相位差为2π（振动状态完全相同）的振动质元之间的距离，即一个完整波的长度。



横波：相邻 波峰——波峰　波谷——波谷



纵波：相邻 波疏——波疏　波密——波密

2 周期 T

波前进一个波长所需的时间，或一完整波通过波线上某点所需的时间。

3 频率 ν

单位时间内波动所传播的完整波的数目。（1 s内向前传播了几个波长）

由于波源作一次完全振动，波就前进一个波长的距离，所以波的周期（频率）等于波源的振动周期（频率）。

4 波速 u

振动状态在单位时间内所传播的距离。

波速代表振动状态（相位）的传播, 故也称为相速。

- 理论和实验都证明，波速仅由介质的性质决定。

固体中的波速

横波： $u = \sqrt{G / \rho}$

纵波： $u = \sqrt{E / \rho}$

液体和气体中纵波 $u = \sqrt{K / \rho}$

ρ: 介质的质量体密度

G: 固体切变弹性模量

E: 固体杨氏弹性模量

K: 体积弹性模量

一些介质中的声速（m/s）

空气（15°C）	340	海水（25°C）	1531
空气（25°C）	346	铜（棒）	3750
软木（25°C）	500	大理石	3810
煤油（25°C）	1324	铝（棒）	5000
蒸馏水（25°C）	1497	铁（棒）	5200

★注意区分波速与振动速度

波速（相速）—振动的形式或者说振动状态在介质中的传播速度，完全由介质的性质决定。

振动速度—振动质点位移的时间变化率，由质点的振动规律决定。

四个物理量的联系

$$\nu = 1/T \qquad u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \qquad \lambda = \frac{u}{\nu} = Tu$$

注意

周期或频率只取决于波源的振动。

波速只取决于介质的性质。

以上关系具有普遍的意义，对各类波都适用！

例 在室温下，已知空气中的声速 u_1 为340 m s^{-1}，水中的声速 u_2 为1450 m s^{-1}，求频率为200 Hz和2 000 Hz 的声波在空气中和水中的波长各为多少?

解： 由 $\lambda = u/\nu$ ，频率为200 Hz和2 000 Hz 的声波在空气中的波长

$$\lambda_1 = \frac{u_1}{\nu_1} = \frac{340}{200}\ \mathrm{m} = 1.7\ \mathrm{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{u_1}{\nu_2} = 0.17\ \mathrm{m}$$

在水中的波长

$$\lambda_1' = \frac{u_2}{\nu_1} = \frac{1\,450}{200}\ \mathrm{m} = 7.25\ \mathrm{m}$$

$$\lambda_2' = \frac{u_2}{\nu_2} = 0.725\ \ \mathrm{m}$$

10-2 平面简谐波的波函数

一、平面简谐波的波函数

描述波传播的函数$y(x,t)$叫做波动函数，简称波函数。

波函数应满足 $y(x+\Delta x, t+\Delta t) = y(x,t)$

其中$\Delta x = u\Delta t$，u为波速。

反映了波动是振动形式的传播这一特性。

在均匀、无吸收的介质中，当波源做简谐振动时，在介质中所形成的波，叫做平面简谐波。

合成

简谐振动 ⟷ 复杂振动

分解

合成

简谐波 ⟷ 复杂波

分解

沿正x方向传播的平面简谐波

已知O点的振动方程 $y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$

O点的振动状态传到P点所需时间 $\Delta t = x / u$。

◆ t 时刻P 处质点重复 $t - \Delta t$ 时刻O点的振动状态。

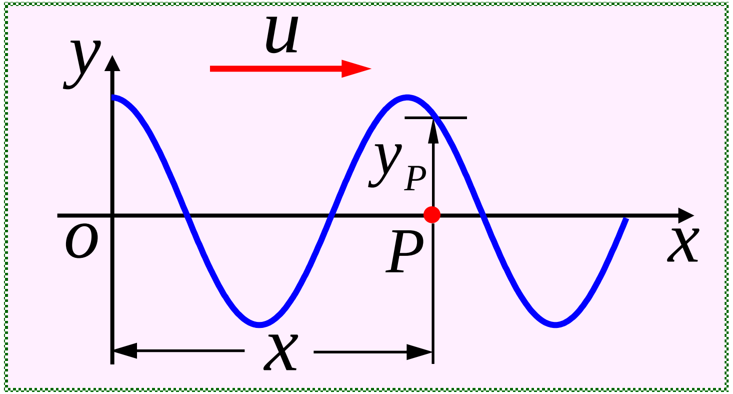
★ 故t 时刻P点振动可由 $t - x / u$ 时刻O点的振动来表示：

$$y_P(t) = y_O(t - \frac{x}{u}) = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi\right]$$

P为任意点

平面简谐波的波函数（波动方程）

$$\boxed{y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]}$$



利用 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ 和 $\lambda=uT$

可得波动方程的几种不同形式：

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

$$=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$

t/T与x/λ地位相当，λ亦可称为空间周期

$$=A\cos\left[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right]$$

定义$k=2\pi/\lambda$，称为角波数

波函数

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

质点的振动速度，加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

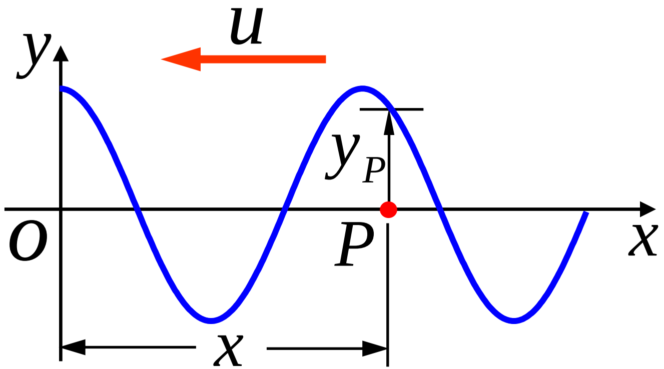
$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

如果波沿*Ox*轴负方向传播，则点*P*的振动比点*O*的早一段时间 $\frac{x}{u}$，则*P*点任意时刻的位移为：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right]$$



已知*O*点的振动规律：

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$$

推广：若波沿*Ox*轴正方向传播，已知横坐标为x_0的点Q的振动方程为 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$

则相应的波函数为： $y = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_0}{u}) + \varphi]$

二　波函数的物理含义

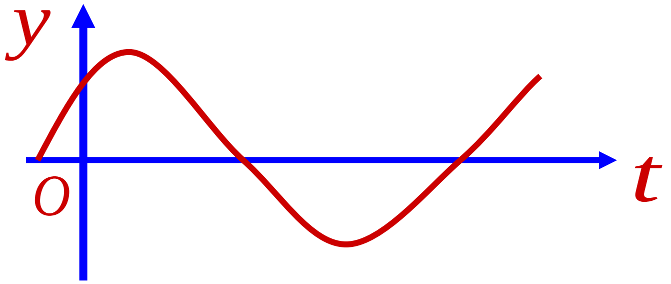
● 反映 y、x、t 三者之间的关系，它描述了振动在介质中传播的物理过程。

$$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$

1　x一定，t变化

令 $\varphi' = -\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi$

则 $y = A\cos(\omega t + \varphi')$



表示 x点处质点的振动方程（$y - t$的关系）

$$y(x,t) = y(x,t+T)$$（波具有时间的周期性）

- x为定值时，波动方程代表该处质点的振动方程。

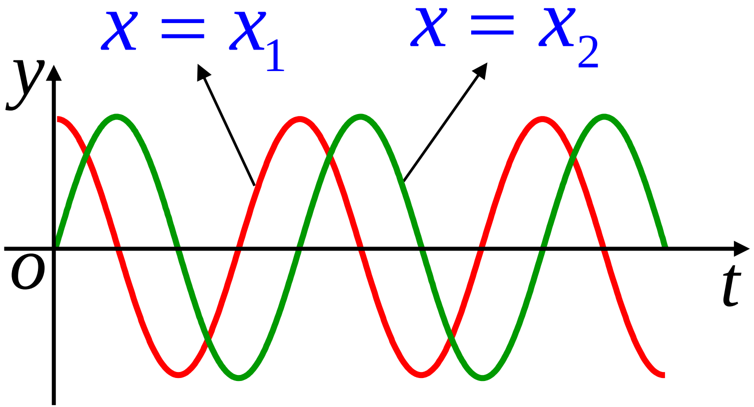
x处质点振动的初相位为 $\varphi' = -\dfrac{2\pi}{\lambda}x + \varphi$

x_1处质点振动的初相位比波源处落后$2\pi x_1/\lambda$。

x_2处质点振动的初相位比波源处落后$2\pi x_2/\lambda$。

- 波线上各点都做同频率的简谐振动，但相位依次落后。

$$\varphi_2' - \varphi_1' = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$



2　t一定，x变化

$$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$

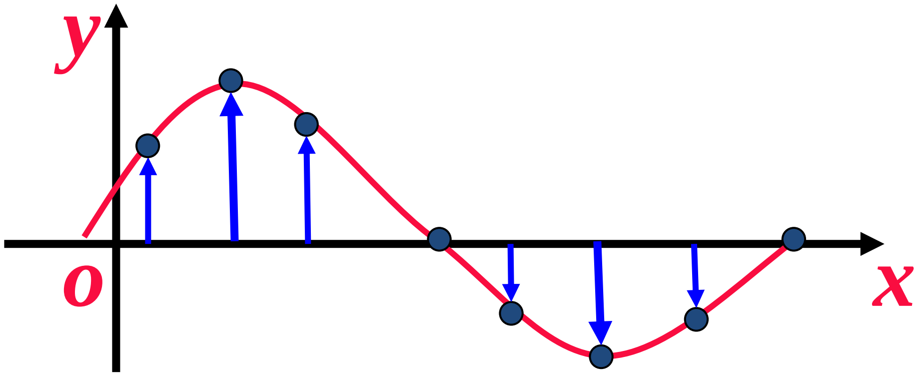
令　$\varphi'' = \omega t + \varphi = C$（定值）

则　$y = A\cos\left(-\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi''\right)$

该方程表示 t 时刻波传播方向上各质点的位移，

即 t 时刻的波形

（y - x 的关系）



波函数 $y = A\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$

同一时刻，距离波源O分别为x_1和x_2的两质元的相位分别为

$$\varphi_1 = \omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \varphi \qquad \varphi_2 = \omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda} + \varphi$$

其相位差为 $\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\left(\dfrac{x_2}{\lambda} - \dfrac{x_1}{\lambda}\right)$

式中 $x_2 - x_1 = \Delta x_{21}$叫做波程差 $\Delta\varphi_{12} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x_{21}$

若$x_2 > x_1$， $\Delta\varphi_{12} > 0$

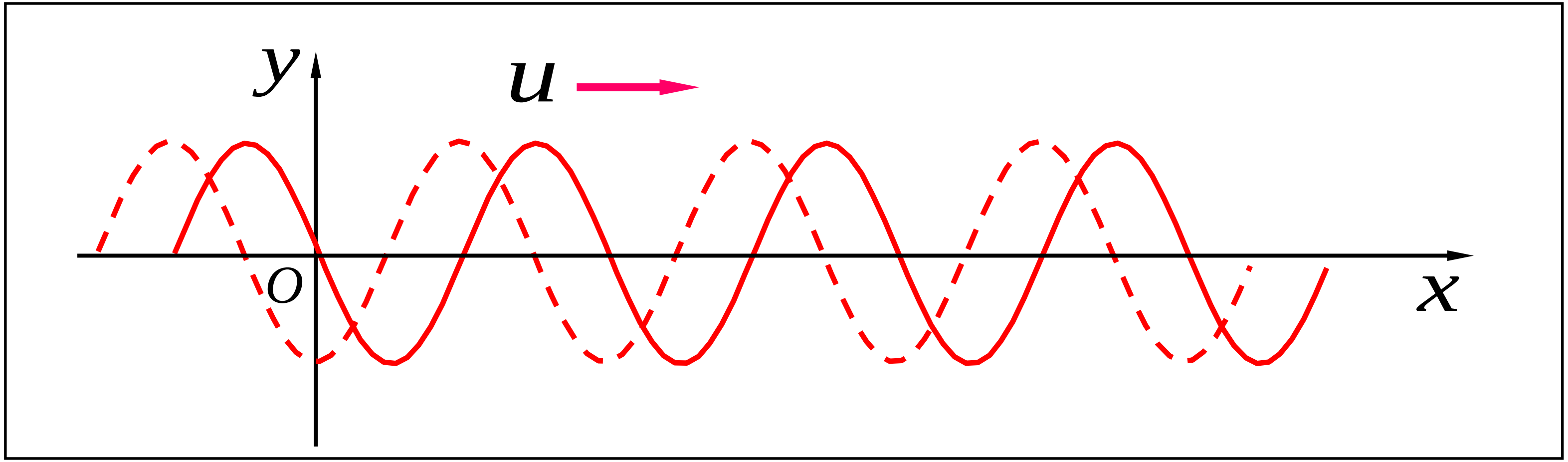
即$\varphi_1 > \varphi_2$，也就是x_2的相位落后于x_1处的相位

3　x、t 都变

$$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$

方程表示在不同时刻波线上所有质点的位移，即不同时刻的波形，体现了波的传播。

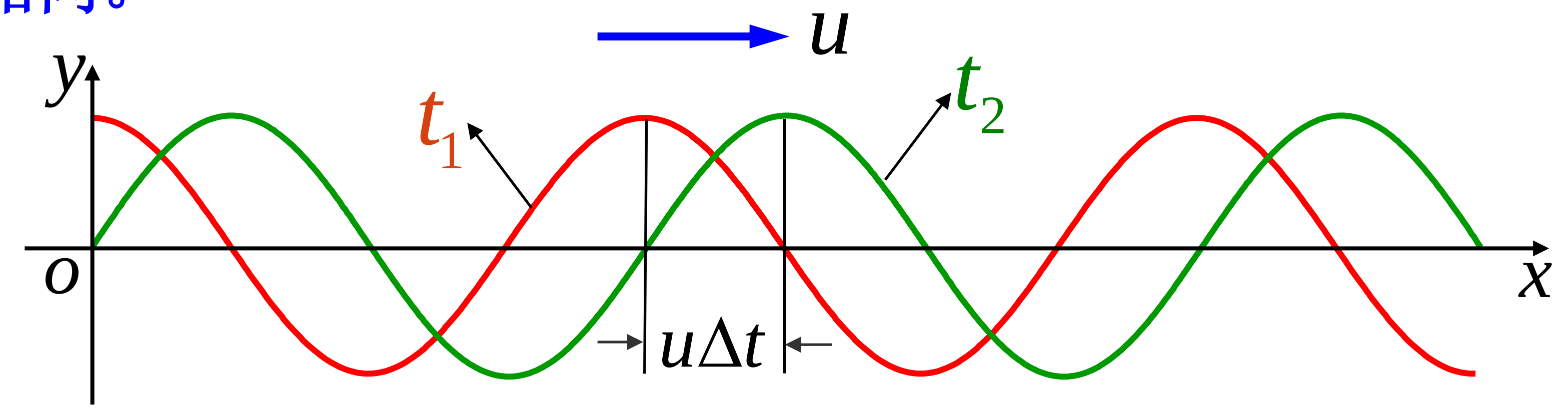
因此这种波也称为行波。



$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

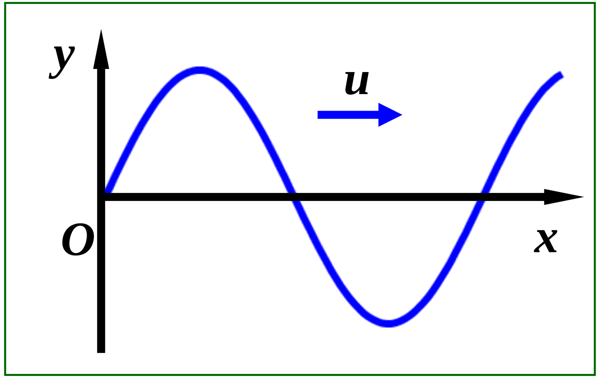
$$= A\cos\{\omega[(t+\Delta t)-\frac{(x+u\Delta t)}{u}]+\varphi\}$$

- $t+\Delta t$ 时刻，$x+u\Delta t$ 处的振动位移与t 时刻，x处的振动位移相同。

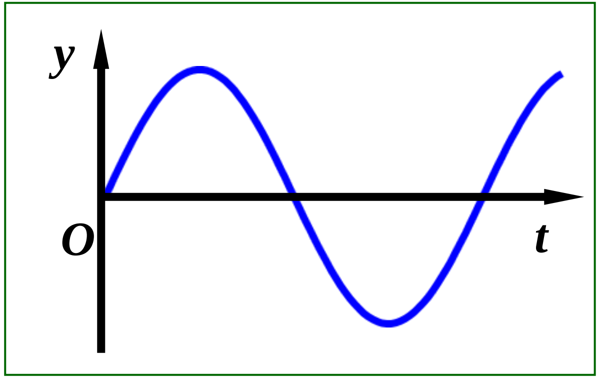


☆ 经过Δt，波向前传播了$u\Delta t$ 的距离。

例：图（a）表示$t = 0$时的简谐波的波形图，图（b）为一质点的振动曲线。则图（a）所表示的$x = 0$处质元振动初相位与图（b）所表示的振动的初相位分别为（　）



（a）



（b）

（A）均为零　（B）均为 $\frac{\pi}{2}$　（C）均为 $-\frac{\pi}{2}$

 $\frac{\pi}{2}$与 $-\frac{\pi}{2}$　（E） $-\frac{\pi}{2}$与 $\frac{\pi}{2}$

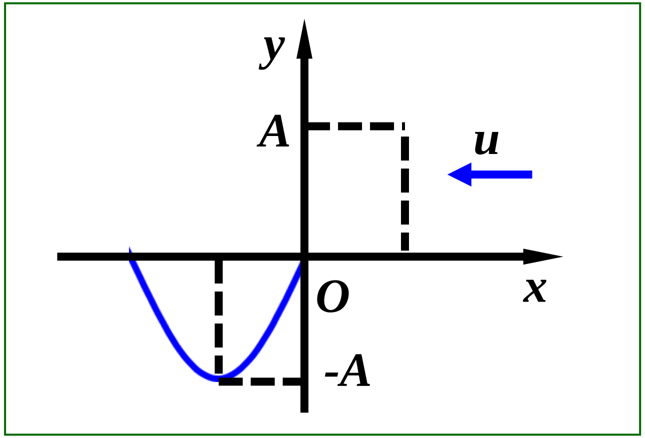
例：一平面简谐波沿x轴负方向传播，角频率为ω，波速为u。设 $t=\frac{T}{4}$ 时刻的波形如图所示，则该波的表达式为（ ）

（A）$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\pi\right]$

（B）$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$

（C）$y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$

$y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\pi\right]$



例　一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A = 1.0\ \mathrm{m}$, $T = 2.0\ \mathrm{s}$, $\lambda = 2.0\ \mathrm{m}$。在 $t = 0$ 时坐标原点处的质点在平衡位置沿 Oy 轴正向运动。求：

(1) 波动方程；

(2) $t = 1.0\ \mathrm{s}$ 时的波形图；

(3) $x = 0.5\ \mathrm{m}$ 处质点的振动规律并作图。

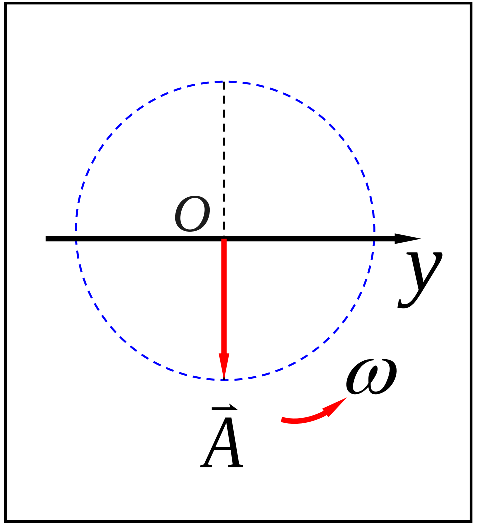
解:（1） 写出波动方程的标准式

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

利用初始条件，

$t = 0, \quad x = 0$ 时，有

$$y = 0, v = \frac{\partial y}{\partial t} > 0$$



$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

$$y = \cos[2\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}]$$

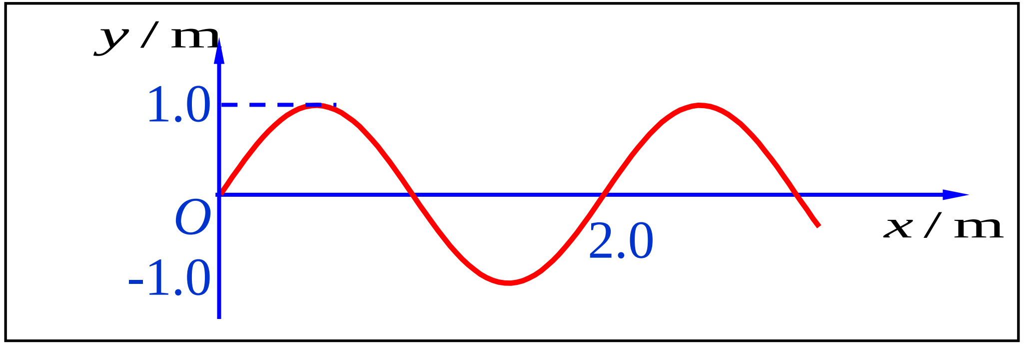
(x, y, t的单位分别是m, m, s)

(2) 求 $t = 1.0\mathrm{s}$ 时的波形图

将时间 t 代入 $y = \cos[2\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}]$，得

$$y = \cos[\frac{\pi}{2} - \pi x]$$

$$= \sin \pi x$$



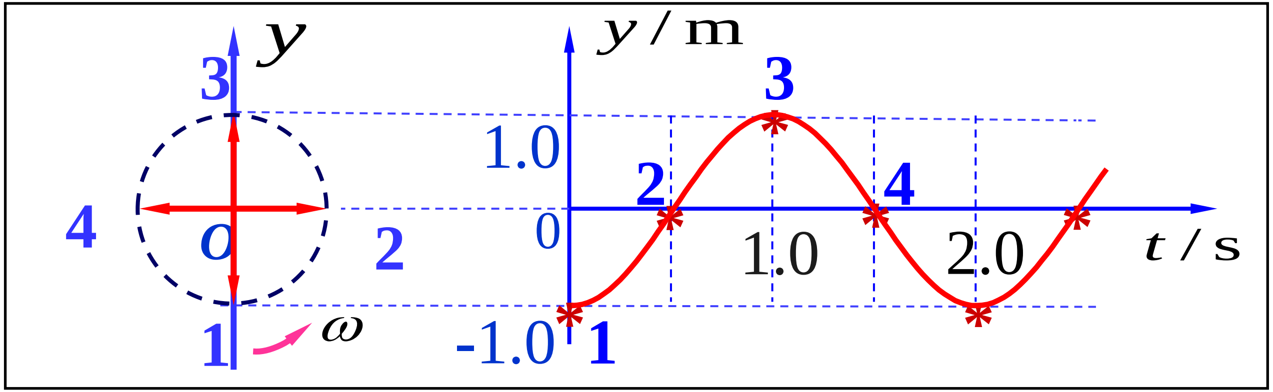
$t = 1.0\ \mathrm{s}$ 时刻波形图

(3) $x=0.5\text{m}$ 处质点的振动规律并作图

由 $y=\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$

得 $x=0.5\text{m}$ 处质点的振动方程

$$y=\cos(\pi t-\pi)$$



$x=0.5\ \text{m}$ 处质点的振动曲线

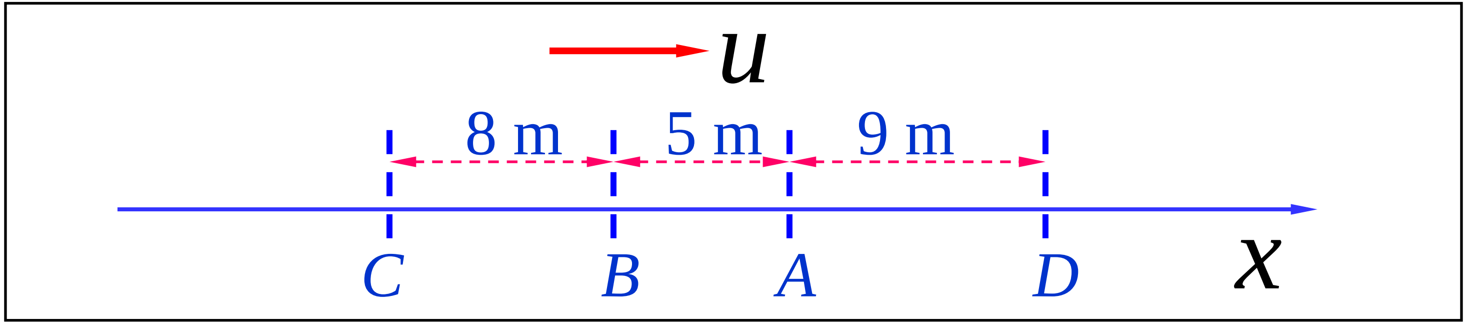
例 一平面简谐波以速度u = 20 m s^{-1} 沿直线传播，波线上点 A 的简谐运动方程是 $y = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$，($y$, t的单位分别是m, s）。

求: (1) 以A为坐标原点，写出波动方程；

(2) 以B为坐标原点，写出波动方程；

(3) 求传播方向上点C、D的简谐运动方程；

(4) 分别求出BC，CD两点间的相位差。



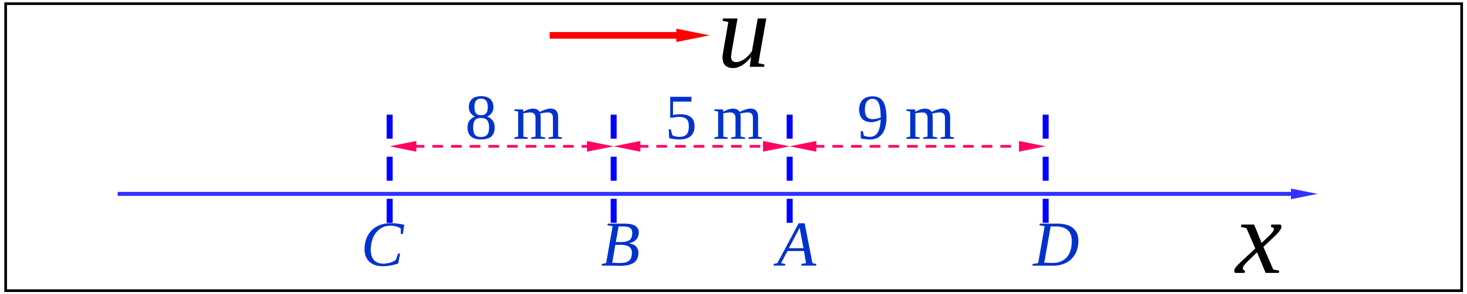
（1）以 A 为坐标原点，写出波动方程

$$A = 3\times 10^{-2}\ \text{m},\quad T = 0.5\ \text{s},\quad \varphi = 0,$$

$$\lambda = uT = 10\ \text{m}$$

代入 $y = A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi]$

得 $y = 3\times 10^{-2}\cos[2\pi(\dfrac{t}{0.5} - \dfrac{x}{10})]$



(2) 以 B 为坐标原点，写出波动方程

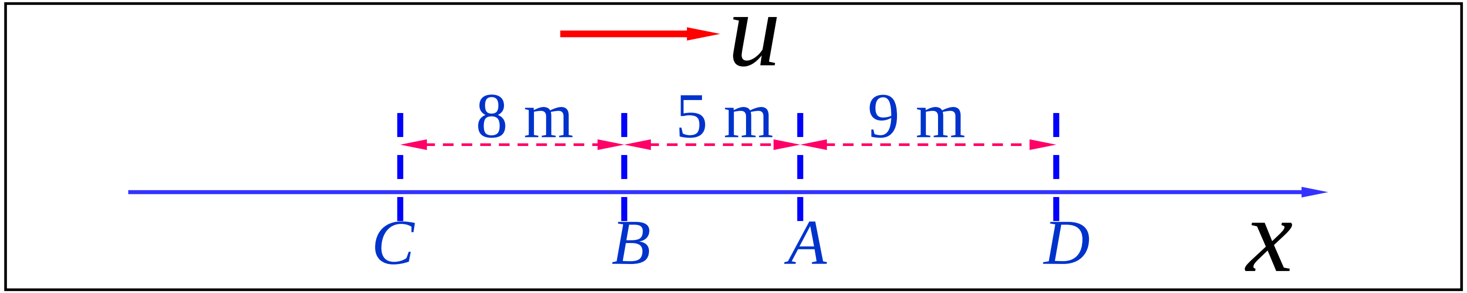
B 点的振动比 A点超前，

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi \frac{x_A - x_B}{\lambda} = \pi$$

所以，$\varphi_B = \pi$。B点的振动方程为

$$y_B = 3\times 10^{-2}\cos(4\pi t + \pi)$$

波动方程为 $y = 3\times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10}) + \pi]$



(3) 写出传播方向上点C、D的运动方程

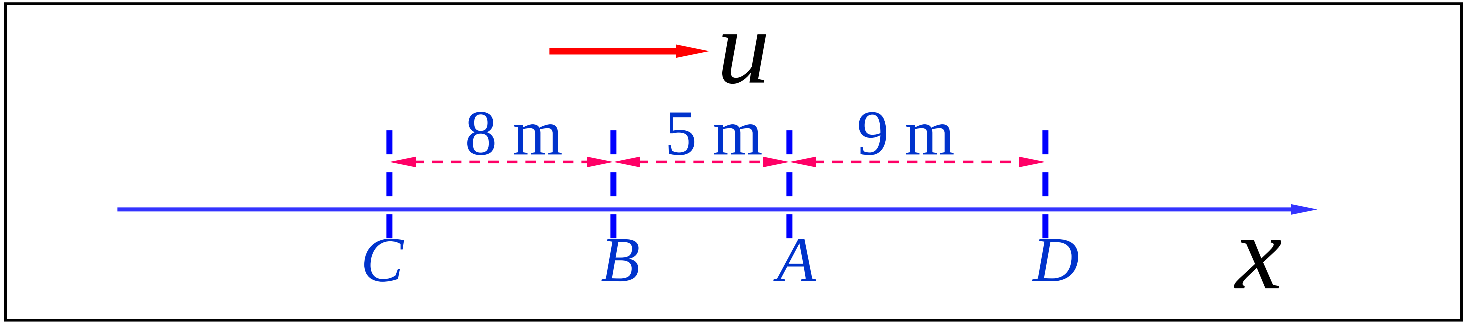
C点的相位比点A 超前

$$y_C = 3\times 10^{-2}\cos(4\pi t + 2\pi\frac{AC}{\lambda})$$

$$= 3\times 10^{-2}\cos(4\pi t + \frac{13}{5}\pi)$$

D点的相位落后于点A

$$y_D = 3\times 10^{-2}\cos(4\pi t - \frac{9\pi}{5})$$

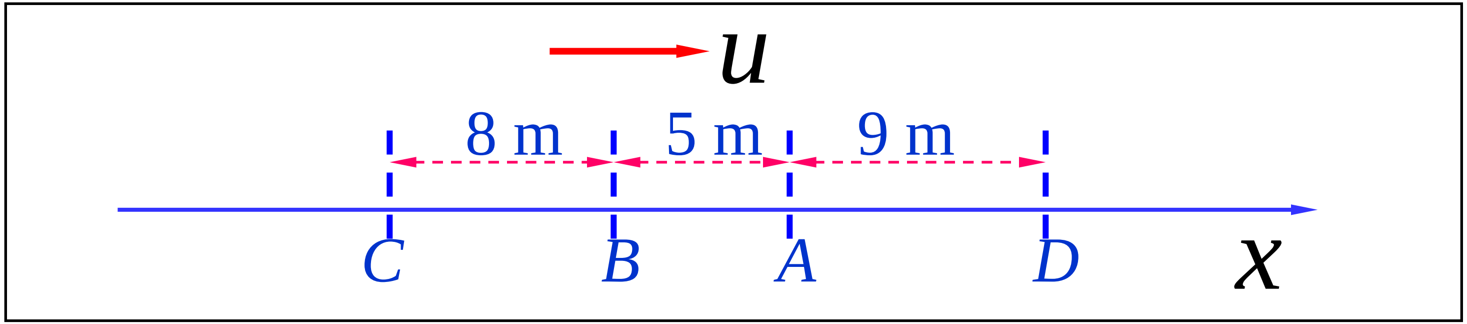


(4) 分别求出 BC，CD 两点间的相位差

由于 $\lambda = 10$ m， 所以

$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi \frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi \frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi \frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi \frac{-22}{10} = 4.4\pi$$

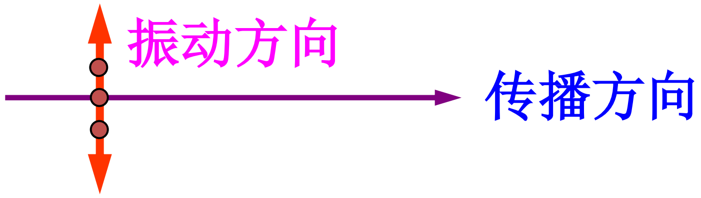


内容回顾

机械波：机械振动在弹性媒质中的传播。

机械波形成的条件：波源+弹性介质。

横波



传播机械横波的弹性介质：

能发生切变的固体、稠液体。

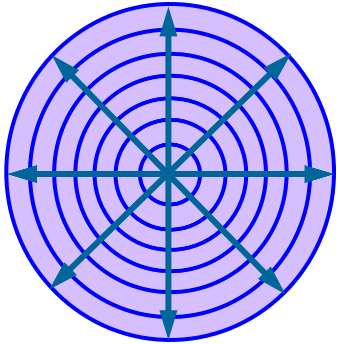
纵波

传播纵波的弹性介质：

能发生压缩或拉伸的固、液、气体。

波是振动状态的传播，介质的质元并不随波传播。

内容回顾



波线：沿波的传播方向画一些带有箭头的线。

波面：不同波线上相位相同点所连成的曲面。

波前：由波源最初振动状态传到的各点所连成的曲面。

在各向同性介质中，波线与波面垂直。

波长：沿波传播方向两个相邻的相位差为**2π**的振动质元之间的距离，即一个完整波形的长度。

周期：波前进一个波长的距离所需的时间（波源作一次完全振动的时间）。

波速：某一振动状态在单位时间内所传播的距离。 $u = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\nu$

内容回顾

不同形式的波动方程（波函数）

1. 波沿正x方向传播	2. 波沿负x方向传播
$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$	$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$
$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$	$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$
$= A\cos\left[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right]$	$= A\cos\left[\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right]$

10-3 波的能量 能流密度

一　波动能量的传播

波动过程也是能量传播的过程：

在波动传播过程中，波源的振动通过弹性介质由近及远地一层一层地传播出去，使介质中各质元依次在各自的平衡位置附近作振动。

介质中质元具有动能，同时介质因发生形变还具有势能。

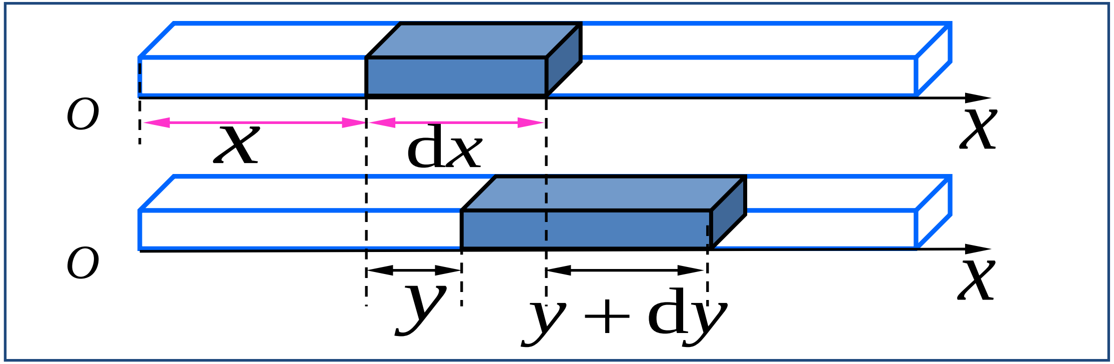
以固体棒中传播的纵波为例分析波动能量的传播：

设初相位为0，有 $y = A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]$$

计算*x*位置处d*V*体积元（质量为d*m*）介质的动能，

$$\mathrm{d}W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)v^2 = \frac{1}{2}(\rho\mathrm{d}V)v^2 = \frac{1}{2}(\rho\mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]$$



弹性势能 $\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2$ $k=\frac{ES}{\mathrm{d}x}$ E：杨氏模量

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2=\frac{1}{2}ES\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{1}{2}\rho u^2\mathrm{d}V\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

纵波速度 $u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 严格来说应是y对x的偏导：$\frac{\partial y}{\partial x}=A\frac{\omega}{u}\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}(\rho\mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]=\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}$$

体积元的总能量：

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_{\mathrm{k}} + \mathrm{d}W_{\mathrm{p}} = (\rho \mathrm{d}V) A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega(t - \frac{x}{u})\right]$$

能量密度：单位体积介质中的波动能量

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega(t - \frac{x}{u})\right]$$

平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

讨 论

$$\mathrm{d}W=2\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}=2\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=(\rho\mathrm{d}V)A^{2}\omega^{2}\sin^{2}\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]$$

（1） 在波动传播的介质中，任一体积元的动能、势能、总机械能均随 x, t 作周期性变化，且变化是<u>同相位</u>的。

体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大。

体积元的位移最大时，三者均为零。

讨 论

(2) 任一体积元的机械能不守恒。能量以波的形式在介质中传播。波动是能量传递的一种方式。

(3) 尽管体积元的机械能不守恒，但能量密度在一个周期内的平均值却是常量。体积元不断从后面的介质获得能量，又不断地把能量传给前面的介质。平均说来，介质中无能量积累。

二 能流和能流密度

能流：单位时间内垂直通过某一面积的能量。

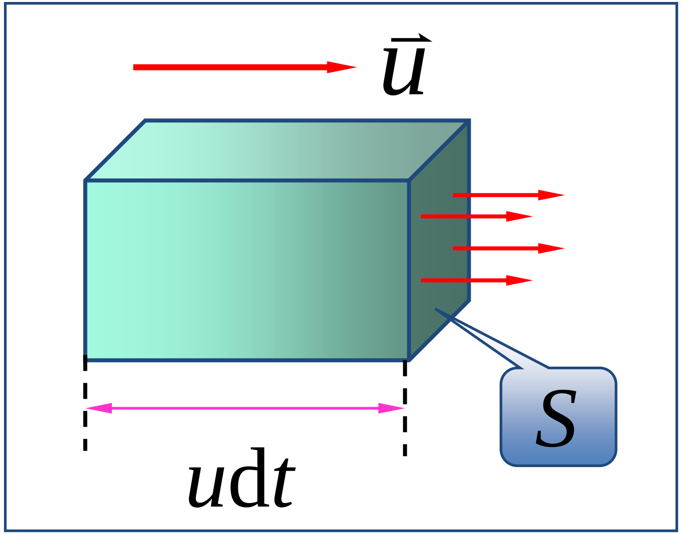
$$\boxed{P = wuS}$$

平均能流 （波的功率）：

单位时间内垂直通过某一面积的平均能量。

$$\boxed{\overline{P} = \overline{w}uS}$$

能流的单位：瓦特



能流密度（波的强度）I:

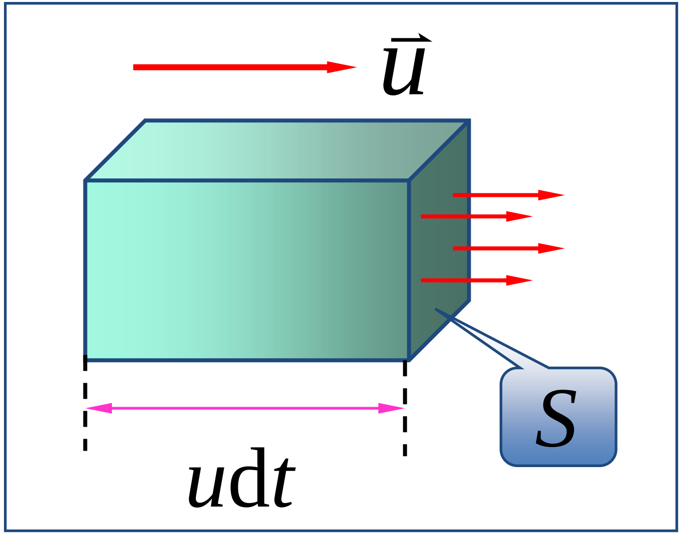
通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流。

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}u$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u}$$

能流密度单位：

瓦特每平方米

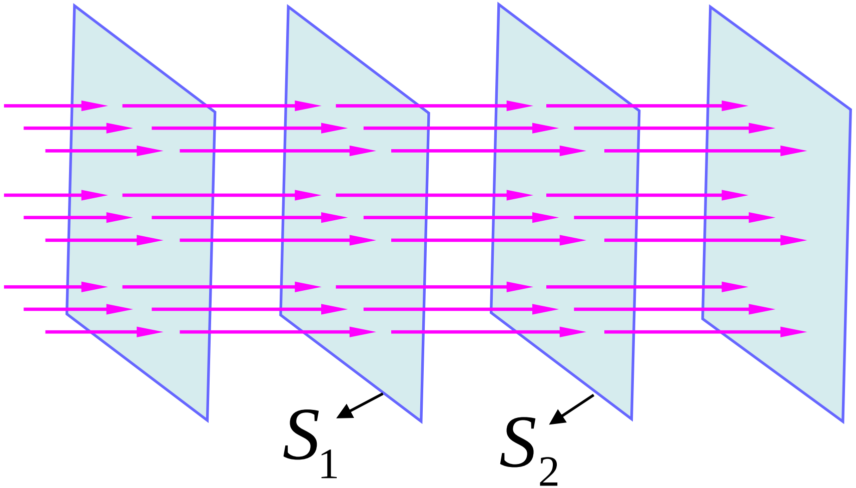


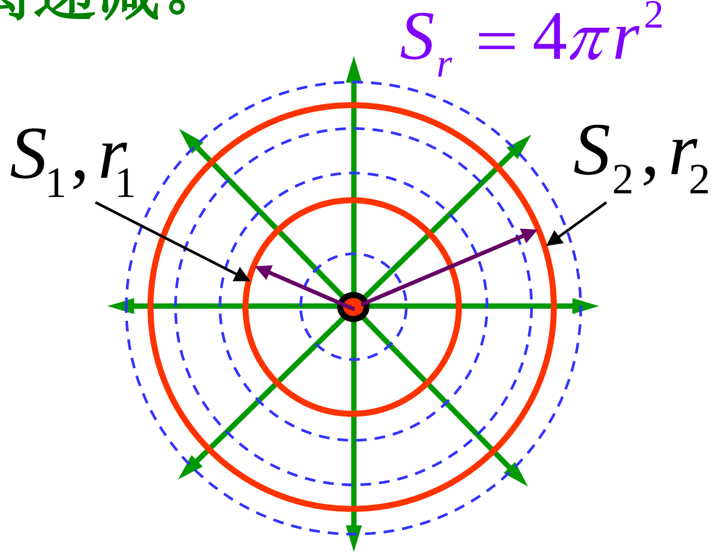
讨论：$\bar{P}=\frac{1}{2}uS\rho A^2\omega^2$ 对无吸收介质：$\bar{P}_{S_1}=\bar{P}_{S_2}$

1. 平面波 $S_1=S_2\rightarrow A_1=A_2$ 振幅不变！

2. 球面波 $\bar{P}_{S1}:\bar{P}_{S2}=S_1A_1^2:S_2A_2^2=r_1^2A_1^2:r_2^2A_2^2$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_2}{r_1}\rightarrow A_r\propto\frac{1}{r}$$ 振幅随距离递减。





10-4 惠更斯原理 波的衍射和干涉

惠更斯 1629-1695
(Huygens）

荷兰物理学家、天文学家和数学家，土卫六的发现者。一生研究成果丰富，在多个领域都有所建树，许多重要著作是在他逝世后才发表的。

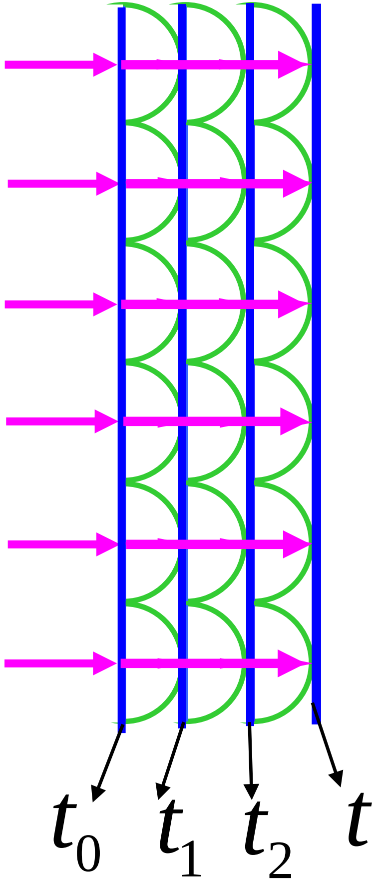
一　惠更斯原理

介质中波动传播到的各点都可以看作是发射子波的波源，而在其后的任意时刻，这些子波的包络就是新的波面。

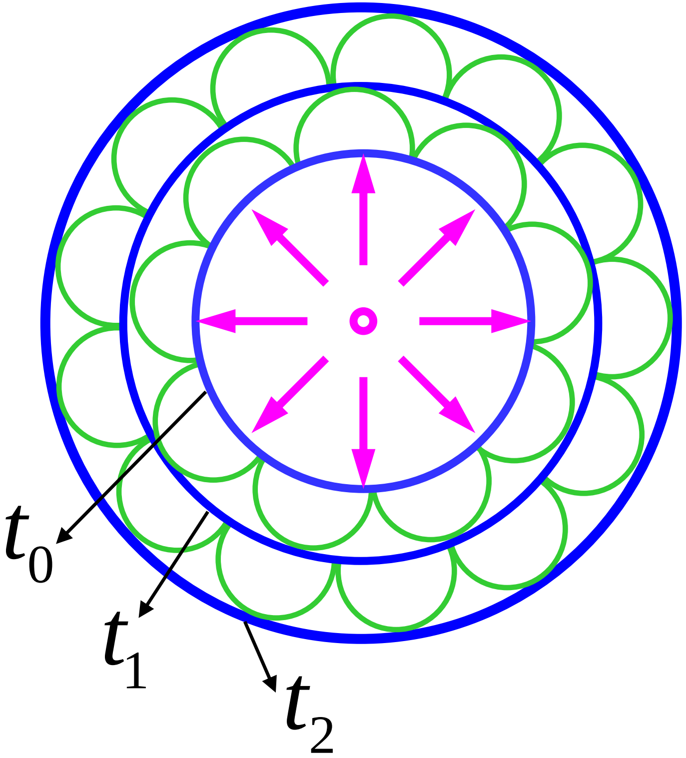
依据：在连续弹性介质中，任何一点的振动都将引起邻近各点的振动。所以介质中任何一点都可以看作是新的波源。

用惠更斯原理求平面波以及球面波波面：

平面波



球面波



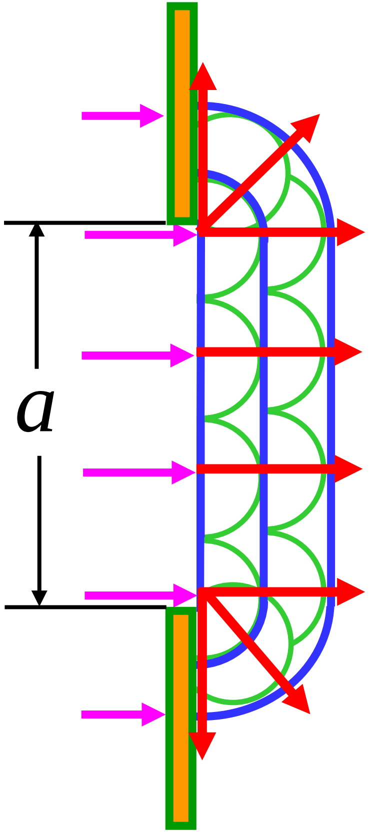
讨 论

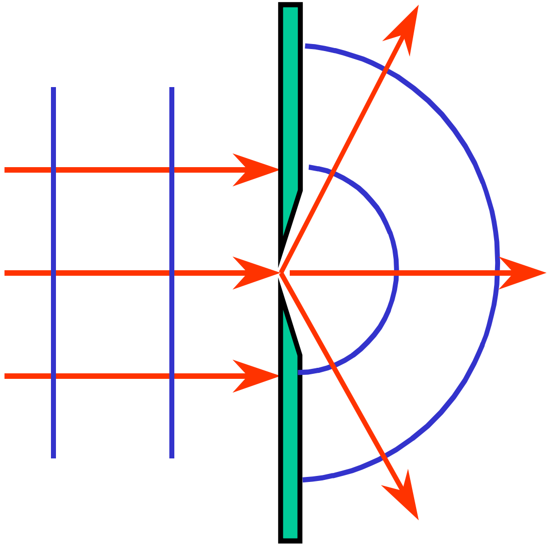
对任何波动过程（机械波或电磁波），不论其传播波动介质是均匀的还是非均匀的，是各向同性的还是各向异性的，惠更斯原理都是适用的。

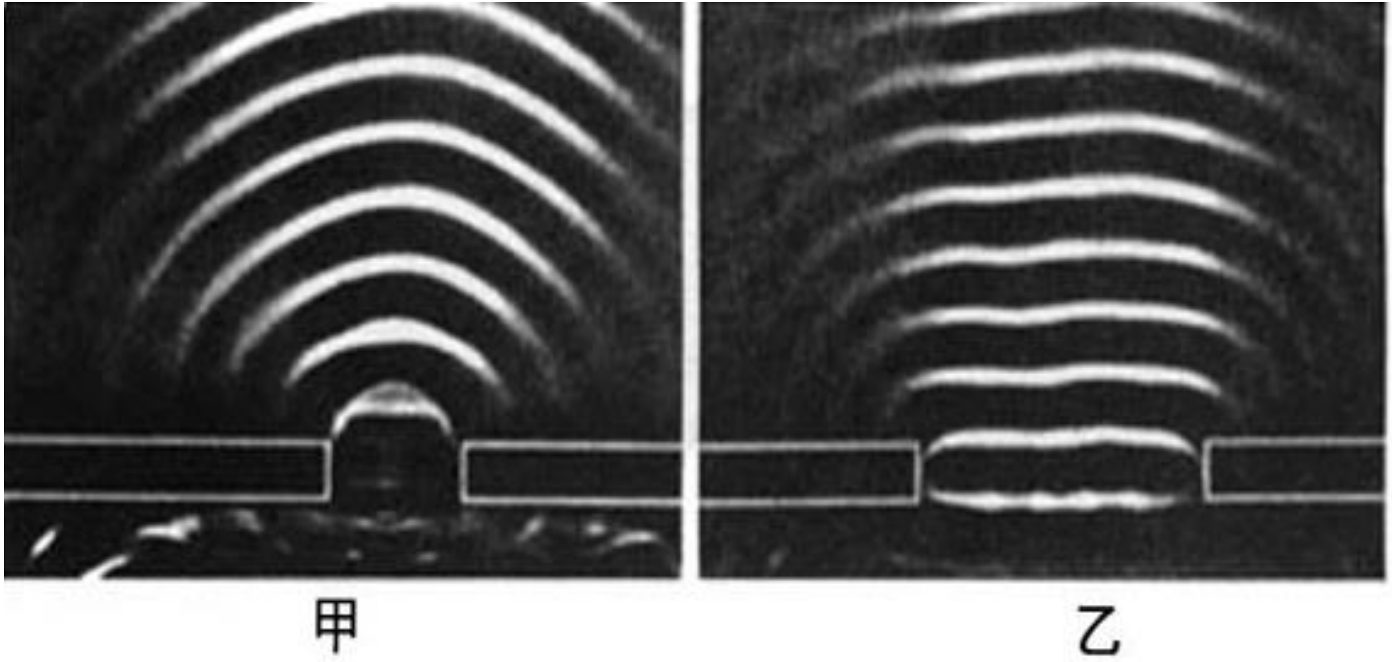
若已知某一时刻波前的位置，就可以根据惠更斯原理，用几何作图的方法，确定出下一时刻波前的位置，从而确定波传播的方向。

二　波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播。







波长相同的水波通过宽度不同的窄缝

讨 论

衍射现象显著与否，和障碍物的大小与波长之比有关。

对一定波长的波：线度小的障碍物衍射现象明显；线度大的障碍物衍射现象不明显。

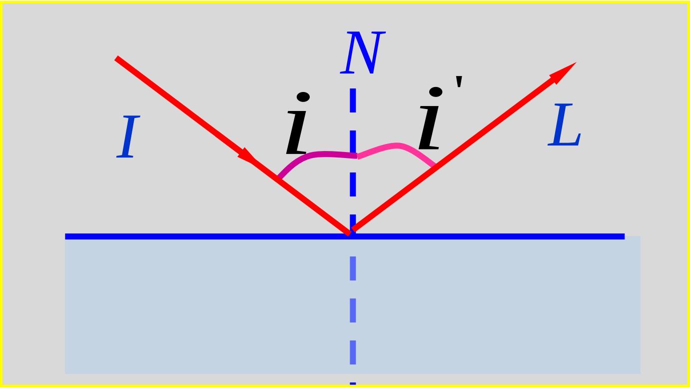
机械波和电磁波都会产生衍射现象，衍射现象是波动的重要特征之一。

三 波的反射和折射

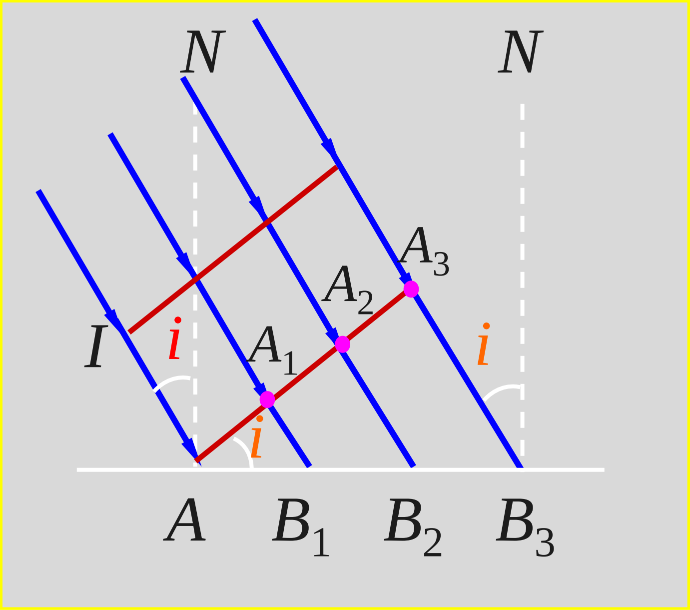
1 反射定律

（1）反射线、入射线和界面的法线在同一平面内；

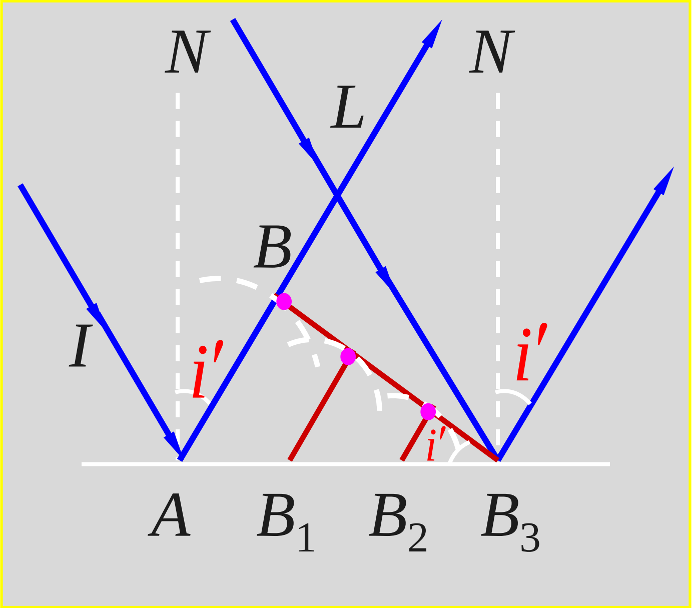
（2）$i = i'$



如何用惠更斯原理证明？



时刻 t



时刻 $t+\triangle t$

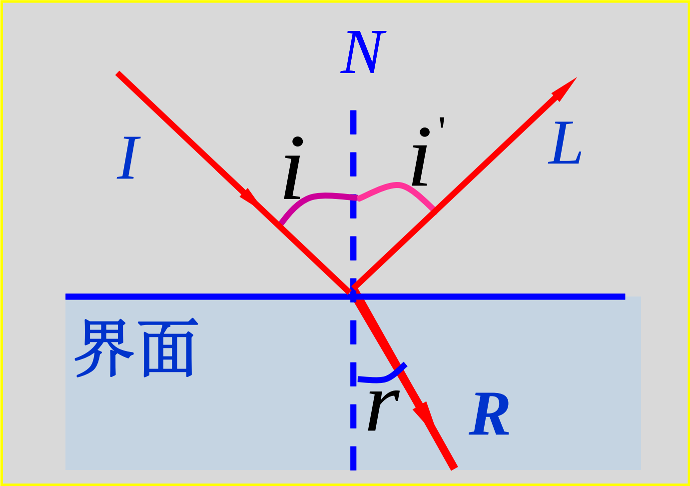
$$A_3B_3 = AB \qquad AB_3 = \frac{A_3B_3}{\sin i} = \frac{AB}{\sin i'}$$

所以 $i = i'$

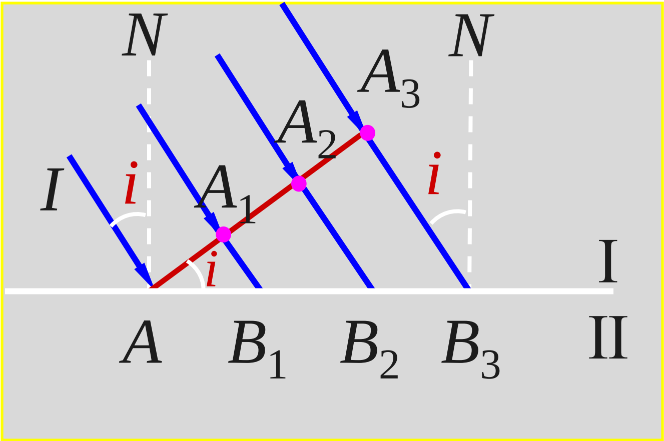
2 折射定律

（1） 折射线、入射线和界面的法线在同一平面内；

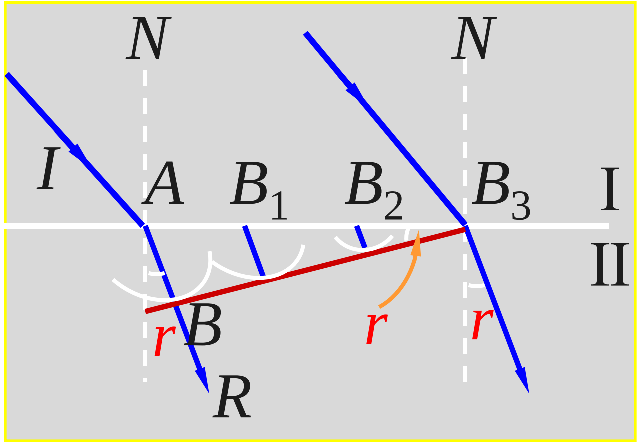
（2） $$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2}$$



用惠更斯原理证明：



时刻 t



时刻 $t+\triangle t$

$$AB_3 = \frac{A_3B_3}{\sin i} = \frac{AB}{\sin r} \qquad A_3B_3 = u_1\Delta t \qquad AB = u_2\Delta t$$

所以 $$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{A_3B_3}{AB} = \frac{u_1}{u_2}$$

在波动传播的介质中，任一体积元的动能、势能、总机械能均随 x,t 作周期性变化，且变化是同相位的。

$$\mathrm{d}W=2\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}=2\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=(\rho \mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]$$

能流：单位时间内垂直通过某一面积的能量。

$$\boxed{P=wuS}$$

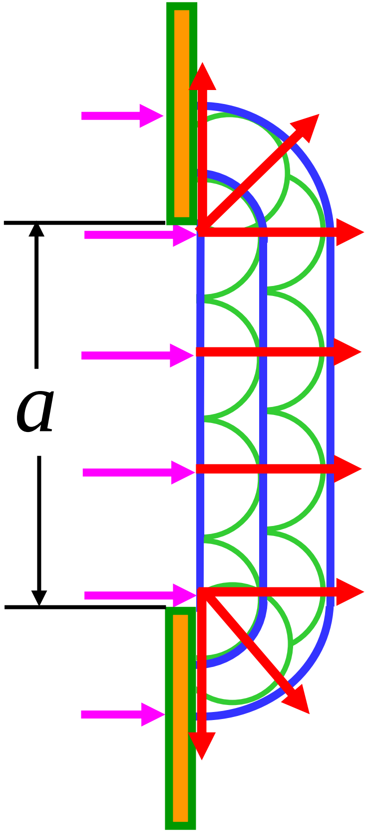
能流密度(波的强度) I:

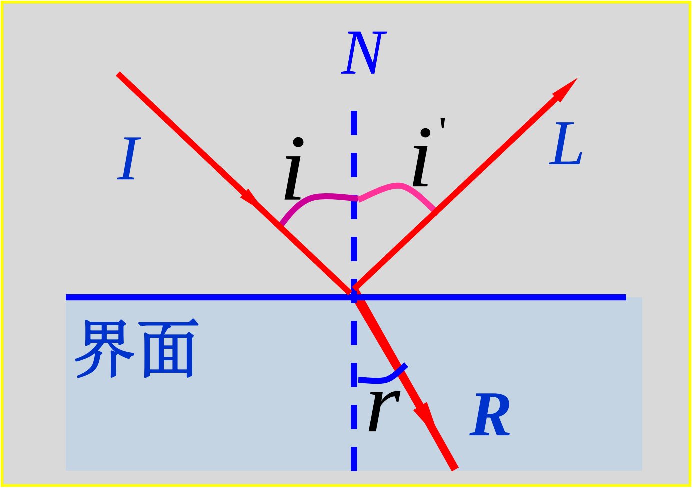
$$\boxed{I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u}$$

通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流。

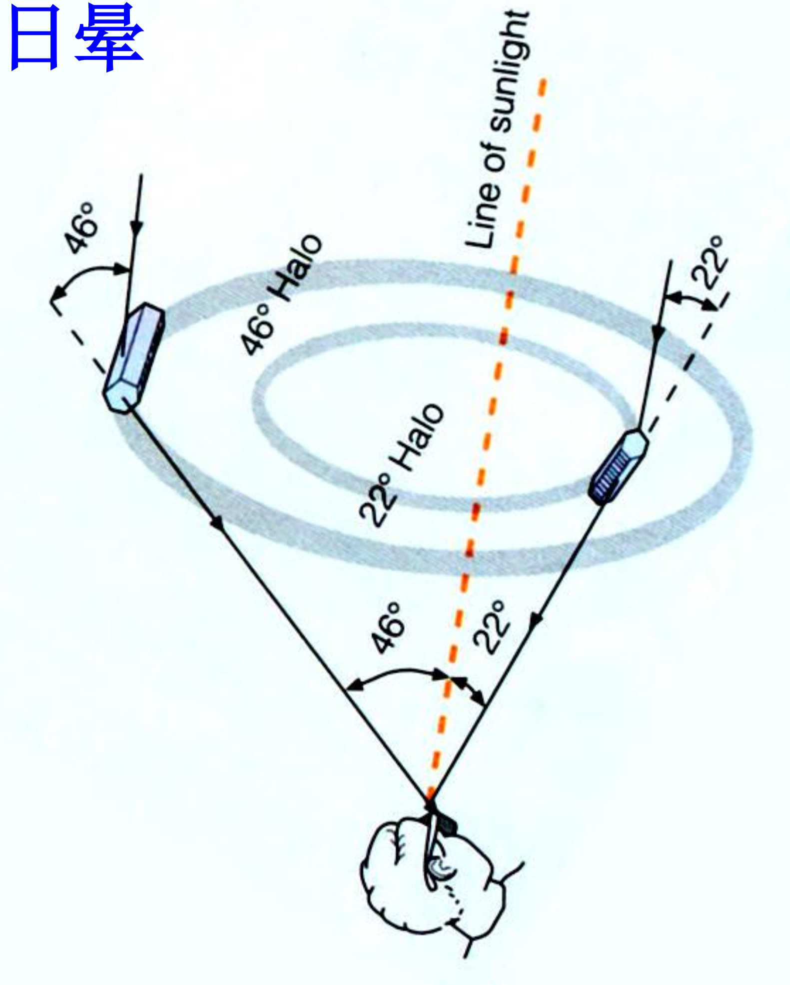
内容回顾

用惠更斯原理解释衍射、反射和折射：





日晕



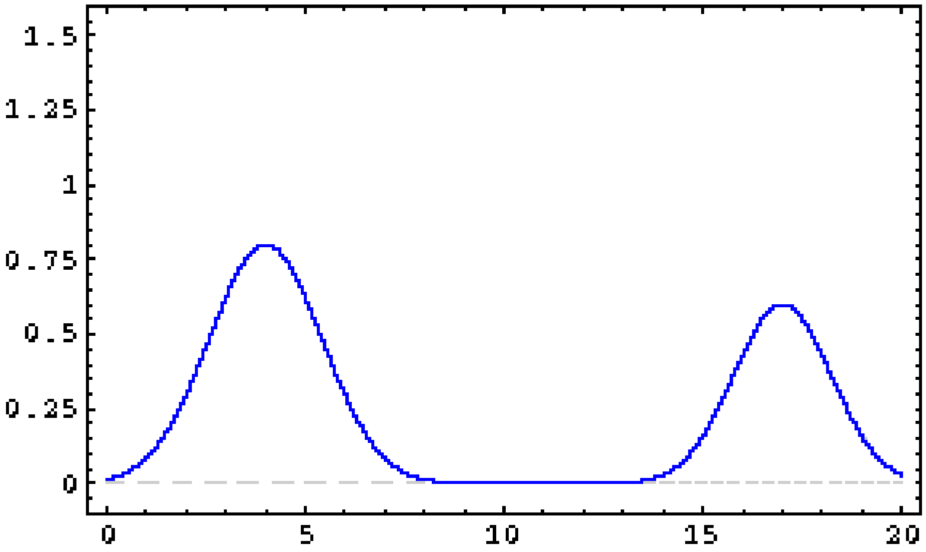
四 波的干涉

1 波的叠加原理

波传播的独立性：两列或多列波在某区域相遇后再分开，分开之后各自仍保持自身的特性（振动方向、频率、传播方向等）不变，就如同没有和其它波动相遇过一样。

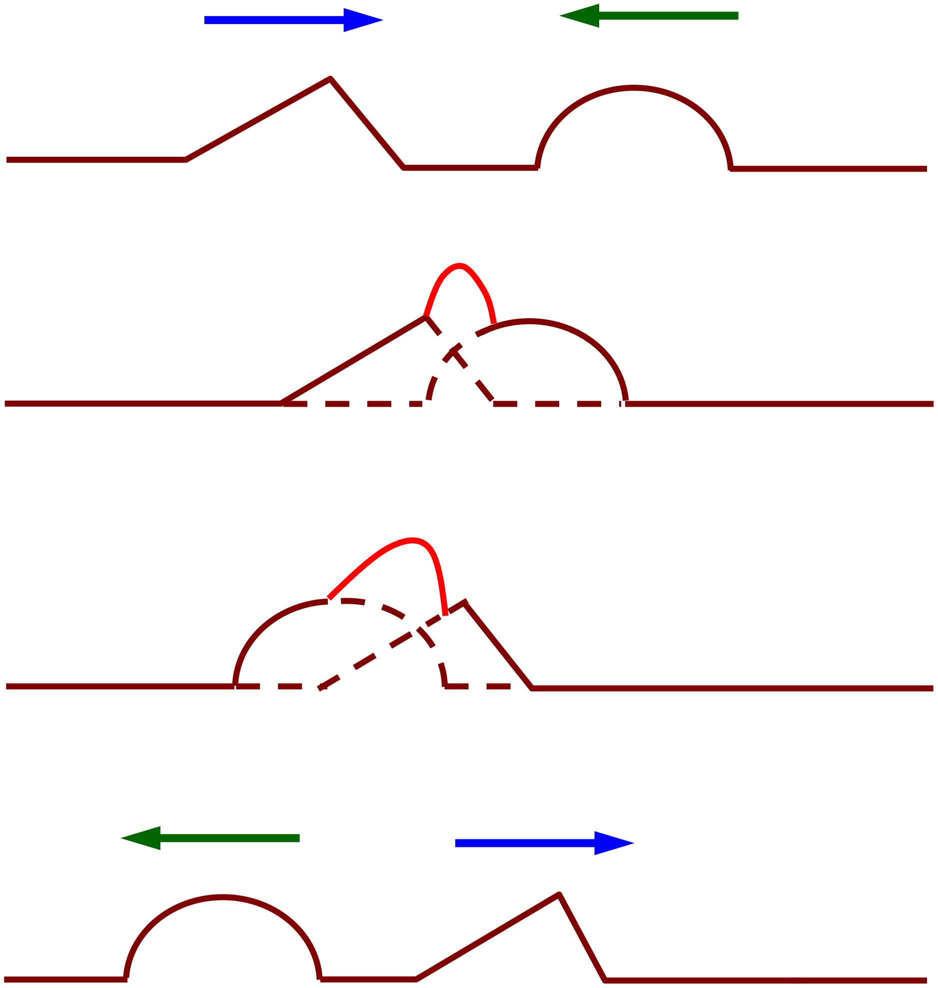
波的叠加性：在相遇区，任一质点的振动为两列波或多列波单独在该点时引起的振动的合成。适用于线性介质中小振幅波动的叠加。

$$\vec{y}=\vec{y}_1+\vec{y}_2+\cdots$$

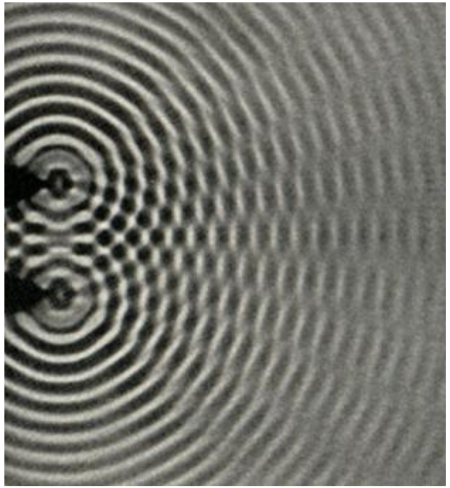


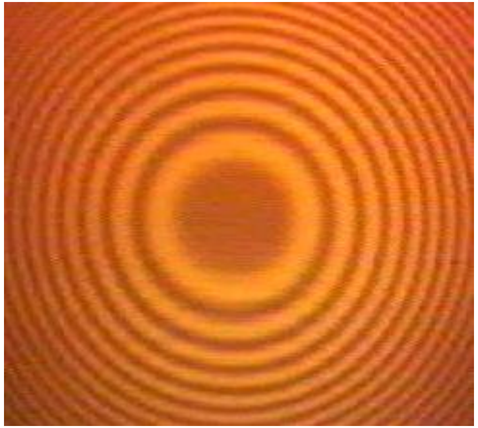
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
0
0
5
10
15
20

波的独立传播特性和可叠加性示意图



2 波的干涉





频率相同、振动方向平行、相位差恒定的两列波相遇时，使某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象，称为**波的干涉现象**。

讨 论

(1) 干涉条件

波频率相同，振动方向相同，相位差恒定。

满足干涉条件的波称为相干波。

(2) 干涉现象

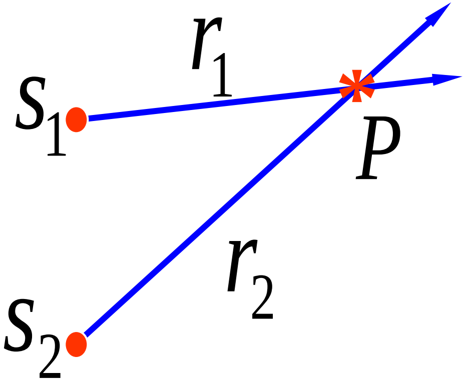
某些点振动始终加强，另一些点振动始终减弱或完全抵消。

(3) 干涉现象的定量讨论

波源振动 $\begin{cases} y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

点 P 的两个分振动

$$\begin{cases} y_{1P} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 \boxed{- 2\pi \dfrac{r_1}{\lambda})} \\ y_{2P} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 \boxed{- 2\pi \dfrac{r_2}{\lambda})} \end{cases}$$



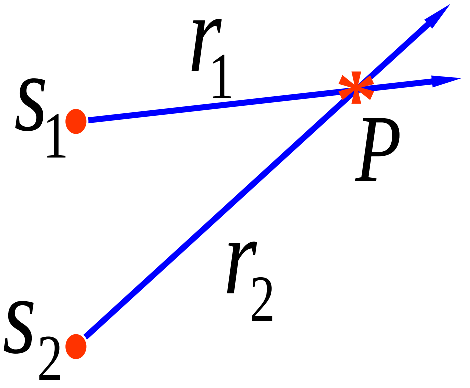
P点总振动

$$y_P = y_{1P} + y_{2P} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\sin(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\cos(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$



不含t

讨 论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

相位差 $\Delta\varphi$ 决定了合振幅的大小。

干涉的相位差条件

当 $\Delta\varphi=2k\pi$时$(k=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots)$

合振幅最大 $A_{max}=A_1+A_2$

当 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$

合振幅最小 $A_{min}=|A_1-A_2|$

相位差 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}) - (\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$

如果 $\varphi_2 = \varphi_1$ 即相干波源S_1、S_2同相位

则 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$

$\delta = r_1 - r_2$ 称为波程差（波走过的路程之差）

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \begin{cases} 2k\pi & \text{加强} \\ (2k+1)\pi & \text{减弱} \end{cases}$$

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)=\frac{2\pi}{\lambda}\delta=\begin{cases}2k\pi & \text{加强}\\(2k+1)\pi & \text{减弱}\end{cases}$$

干涉的波程差条件

当 $\delta=r_1-r_2=k\lambda$ 时（半波长偶数倍）

合振幅最大 $A_{max}=A_1+A_2$

当 $\delta=r_1-r_2=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$ 时（半波长奇数倍）

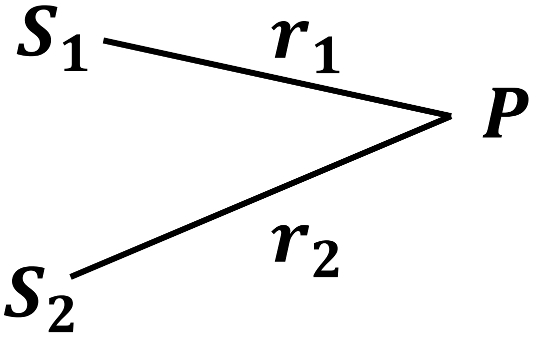
合振幅最小 $A_{min}=|A_1-A_2|$

干涉和衍射现象都是波动的基本特性。
可依此来判断一种物理现象是否具有波动性。

注意：若两波源不是相干波源，则不会出现干涉现象。

干涉现象是波动所独有的现象，对于光学、声学和许多工程学科都非常重要，并且有广泛的实际应用。

例 如图所示，两列波长为λ的相干波在点P相遇，波在点S_1振动的初相是φ_1，点S_1到点P的距离是r_1，波在点S_2的初相是φ_2，点S_2到点P的距离是r_2。以k代表零或正、负整数，则点P是干涉极大的条件为（ ）



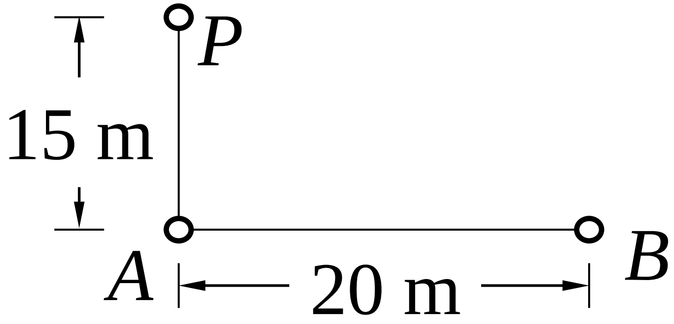
（A）$r_2 - r_1 = k\pi$

（B）$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$

（C）$\varphi_2 - \varphi_1 + \dfrac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 2k\pi$

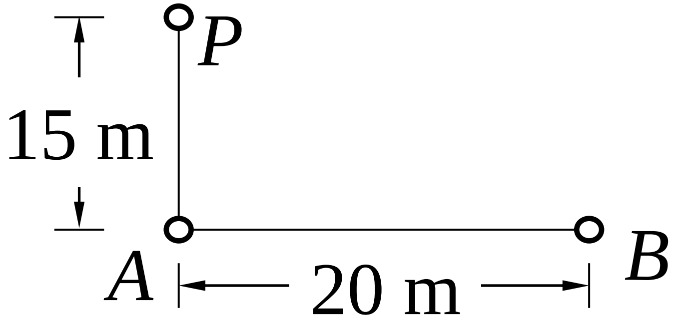
 $\varphi_2 - \varphi_1 + \dfrac{2\pi(r_1 - r_2)}{\lambda} = 2k\pi$

例 如图所示，A、B 两点为同一介质中两相干波源。其振幅皆为5 cm，频率皆为100 Hz，但当点A为波峰时，点B 恰为波谷。设波速为10 m·s^{-1}，试写出由A、B发出的两列波传到点P 时干涉的结果。



解： $BP=\sqrt{15^2+20^2}=25$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{10}{100}=0.10$$



设 A 的相位较 B 超前

$$\varphi_A-\varphi_B=\pi$$

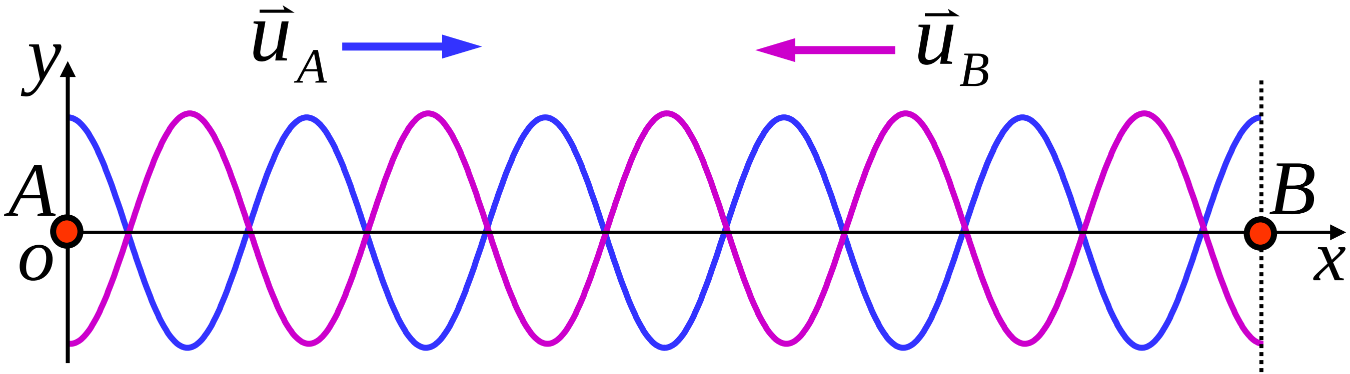
$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{BP-AP}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{25-15}{0.1}=-201\pi$$

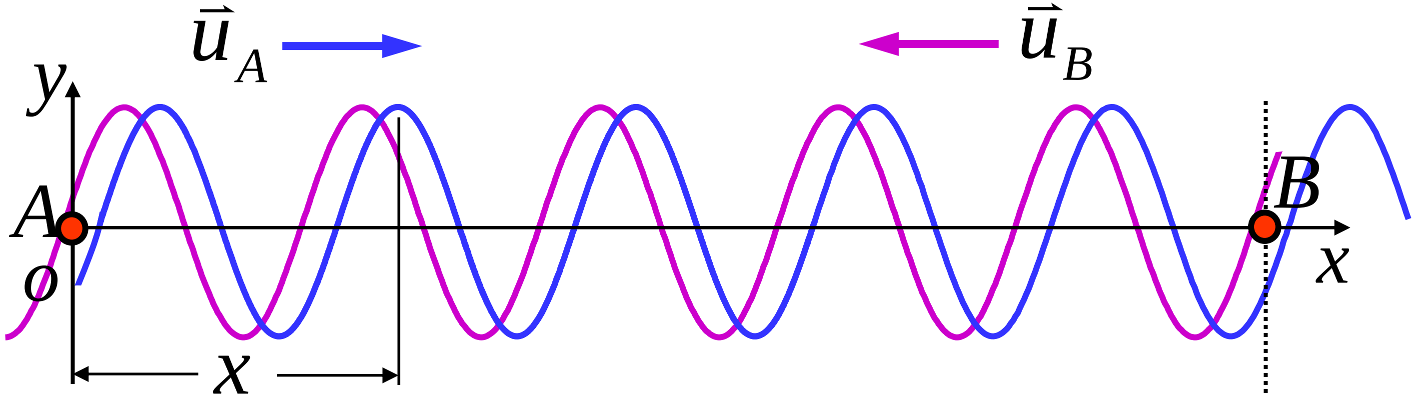
点P合振幅 $A=|A_1-A_2|=0$

例 两相干波源A、B相距为20 m，振动频率为80 Hz，振动相位相反。若两波均为平面波，且在两者之间相向传播，求A、B连线上因干涉而静止的各点的位置。设振幅均为5 cm。波速为320 m/s。

解： 振幅为零的点的位置满足 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$

取A点振动相位等于零时为初始时刻，则依题意有振动方程： $y_A = A\cos\omega t$， $y_B = A\cos(\omega t + \pi)$





波动方程： $y_A = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})]$， $y_B = A\cos[\omega(t-\frac{20-x}{u})+\pi]$

相位差 $\Delta\varphi = [\omega(t-\frac{20-x}{u})+\pi]-\omega(t-\frac{x}{u})$

$$= -10\pi + \pi + \pi x \qquad \left(\because \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi\nu}{u} = \frac{2\pi * 80}{320}\right)$$

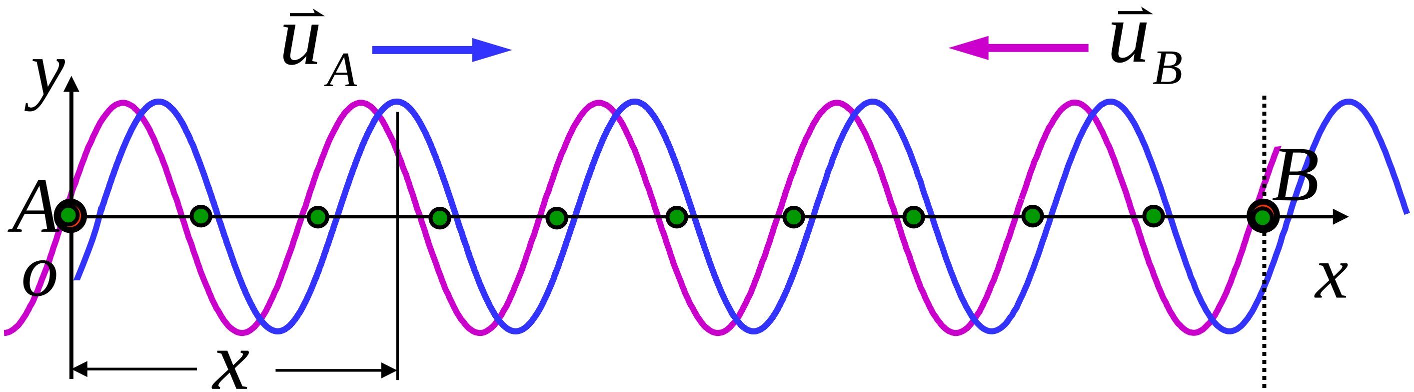
$$\Delta\varphi = -10\pi + \pi + \pi x$$

当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ 时振幅为零。

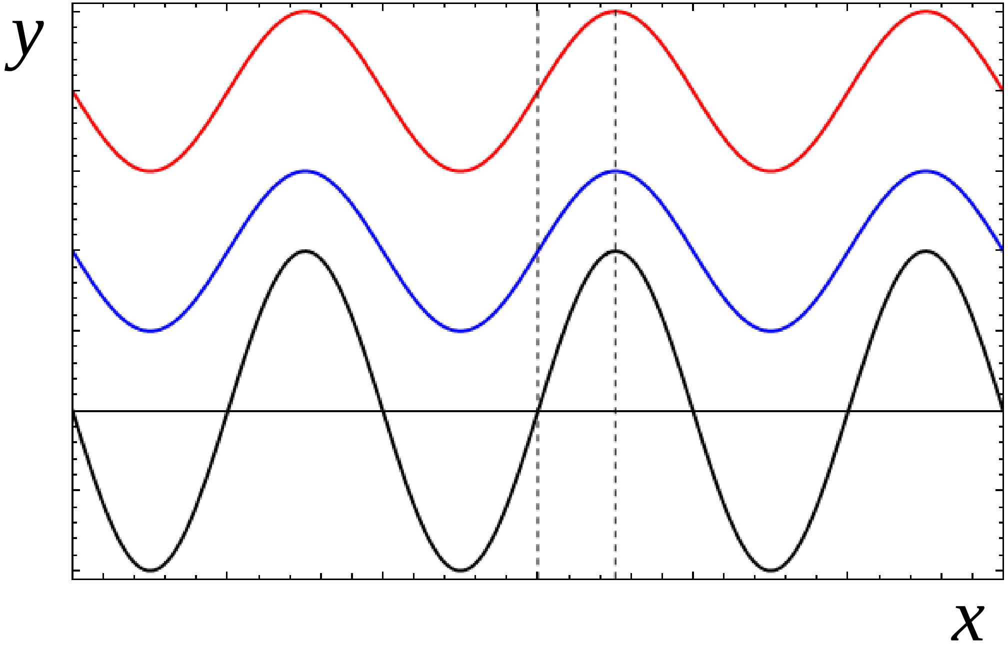
即 $x = 2(k+5)(\mathrm{m})$ 时振幅为零。

k取值： $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm 5)$ （包括两端点）

$\rightarrow x = 0,\ 2,\ 4\ \ \cdots\ 18,\ 20\mathrm{m}$



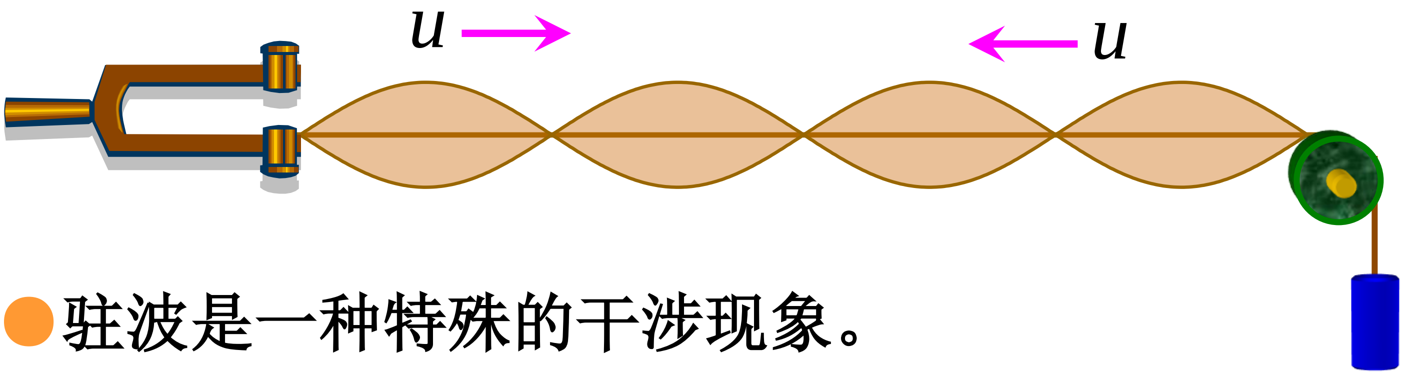
10-5　驻波



一 驻波的产生

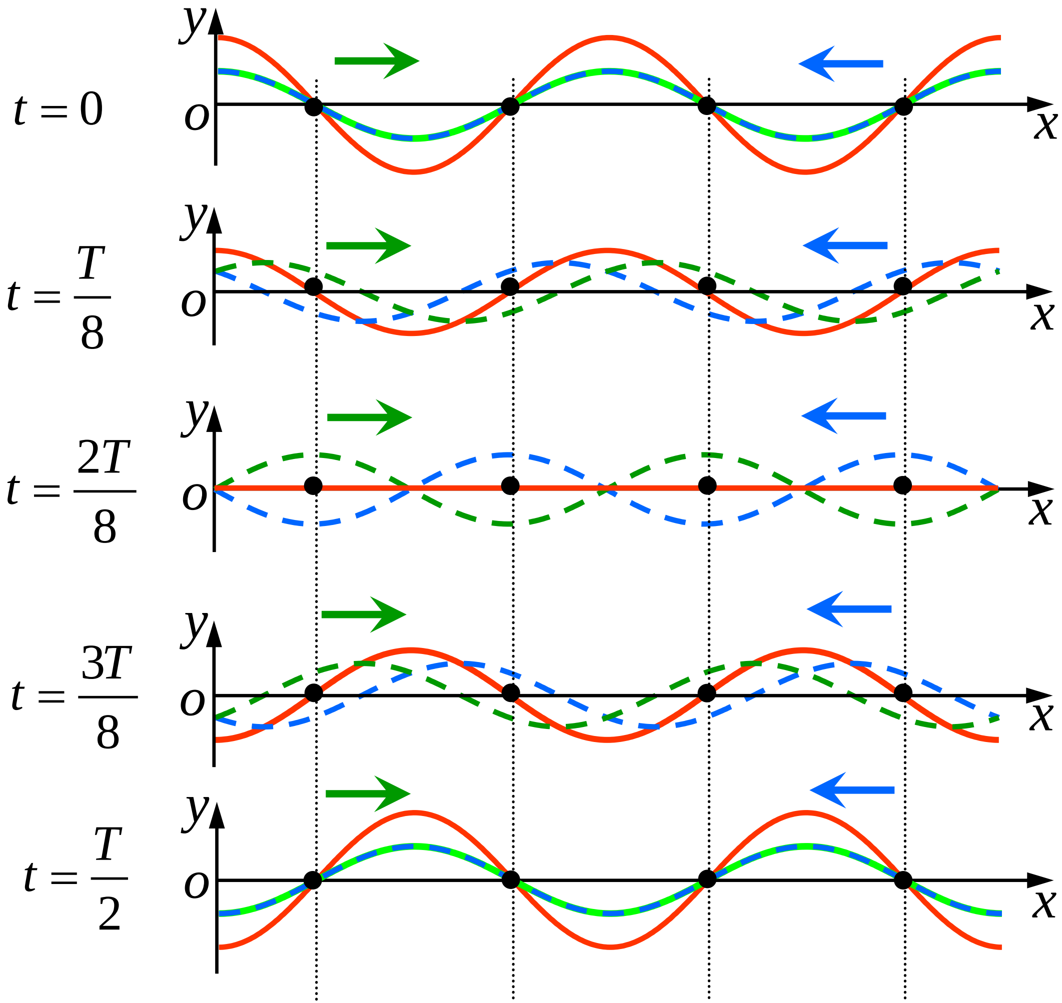
合成波中各质元以各自确定的不同振幅在各自平衡位置附近振动，且没有振动状态或相位传播的波，称为驻波。

驻波的形成—两列振幅相同的相干波在同一介质中的同一直线上沿相反方向传播时相遇叠加所产生。



- 驻波是一种特殊的干涉现象。

驻波的形成



二　驻波方程

正向　$y_1 = A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$　设初相位为零

负向　$y_2 = A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$　设初相位为零

$$y = y_1 + y_2$$

$$= A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$$

$$= 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi\nu t)$$

讨论

驻波方程 $y = 2A\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi\nu t)$

(1) 振幅 $\left|2A\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)\right|$ 随x而异，与时间无关

$$\left|\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right| = \begin{cases} 1 & 2\pi\dfrac{x}{\lambda} = \pm k\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \\ 0 & 2\pi\dfrac{x}{\lambda} = \pm\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

a 当 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)=0$ 时， $A'=0$ 为波节

$$x=(2k+1)\frac{\lambda}{4}$$ ($\dfrac{\lambda}{4}$的奇数倍)

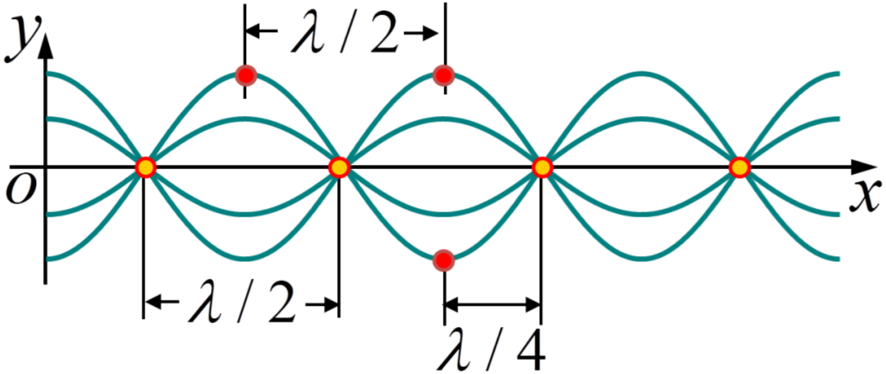
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

b 当 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)=\pm1$时，$|A'|=2A$ 为波腹

$$x=2k\frac{\lambda}{4}$$ ($\dfrac{\lambda}{4}$的偶数倍)

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(2) 波腹、波节间的距离



①相邻两波腹间的距离

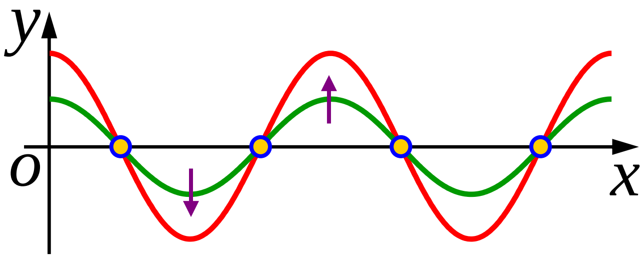
$$\Delta x_{腹} = (k+1)\frac{\lambda}{2} - k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

②相邻两波节间的距离

$$\Delta x_{节} = (2k+3)\frac{\lambda}{4} - (2k+1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

③相邻的节点与腹点间的距离 $x_{节} - x_{腹} = (2k+1)\frac{\lambda}{4} - k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$

(3) 以波节为界，分段作同相振动。



★两相邻波节点之间各质点同相；

★同一波节点两侧质点反相。

$$y = 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi\nu t)$$

弦线是按波节点分段振动的，两相邻波节点之间的各段作为一个整体，一起同步振动。

(4) 在每一时刻，驻波都有一定的波形，但此波形既不左移，也不右移，各点以确定的振幅在各自的平衡位置附近振动，因此叫做驻波（与行波相对）。从能量的角度来说，驻波的能流密度为零。代表系统的一种稳定的振动状态。

例 在驻波中，两个相邻波节间各质元的振动（ ）

（A）振幅相同，相位相同  振幅不同，相位相同

（C）振幅相同，相位不同 （D）振幅不同，相位不同

例 在驻波中，一个波节的两侧各质元的振动（ ）

（A）对称点的振幅相同，相位相同

（B）对称点的振幅不同，相位相同

 对称点的振幅相同，相位相反

（D）对称点的振幅不同，相位相反

三 驻波的能量

已知驻波方程 $y = 2A\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi\nu t)$

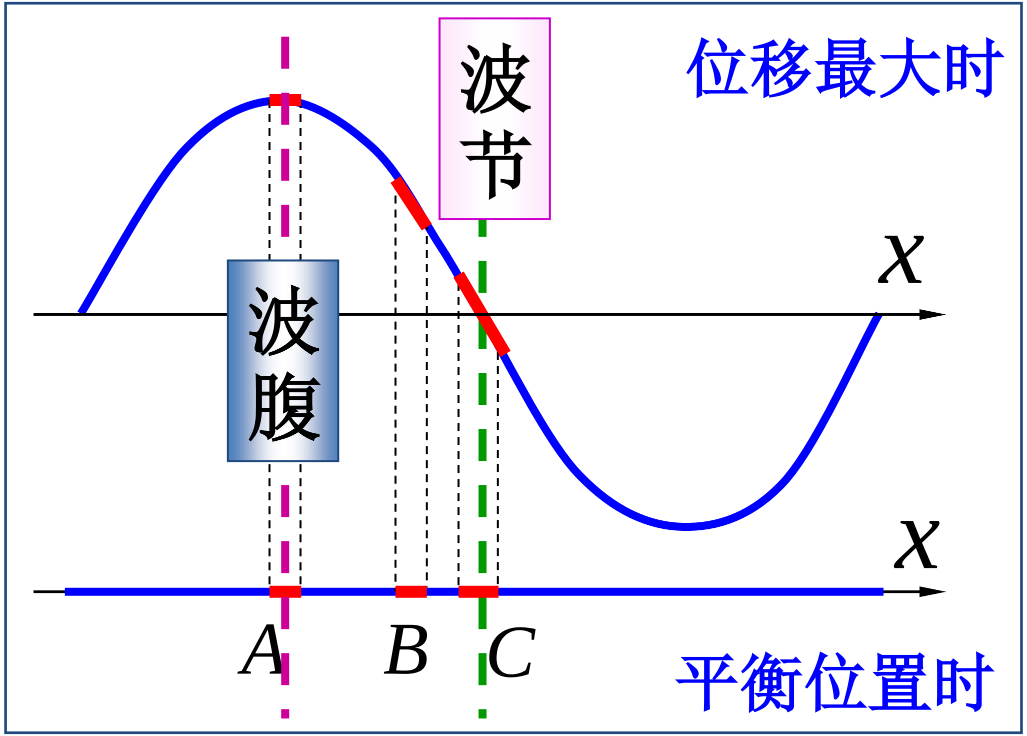
$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)v^2 = \frac{1}{2}(\rho\mathrm{d}V)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = 2(\rho\mathrm{d}V)A^2\omega^2\cos^2(\frac{2\pi}{\lambda}x)\sin^2(\omega t)$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\left(\rho u^2\mathrm{d}V\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2(\rho u^2\mathrm{d}V)A^2(\frac{2\pi}{\lambda})^2\sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos^2(\omega t)$$

引自课件P53

$$= 2(\rho\mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos^2(\omega t)$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad \mathrm{d}W_{\mathrm{k}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$



各质点位移达到最大时，动能全为零，势能各处不同。

- 在波节处相对形变最大，势能最大；在波腹处相对形变最小，势能最小。

各质点回到平衡位置时，势能全为零，动能各处不同。

- 在波节处动能最小；在波腹处动能最大。

驻波的能量

- 驻波的能量从波腹传到波节，又从波节传到波腹，往复循环，无能量的定向传播。
- 驻波不传播能量，它是媒质的一种特殊的运动状态，稳定态。
- 势能主要集中在波节，动能主要集中在波腹。

四 相位跃变

驻波一般由入射、反射波叠加而成，反射发生在两介质交界面上，在交界面处出现波节还是波腹，取决于介质的性质。

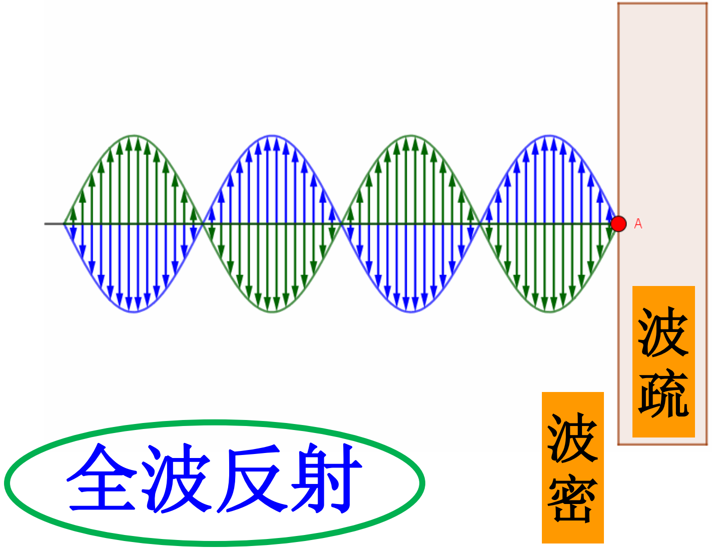
机械波：取决于波阻（介质密度ρ与波速u的乘积ρu ）

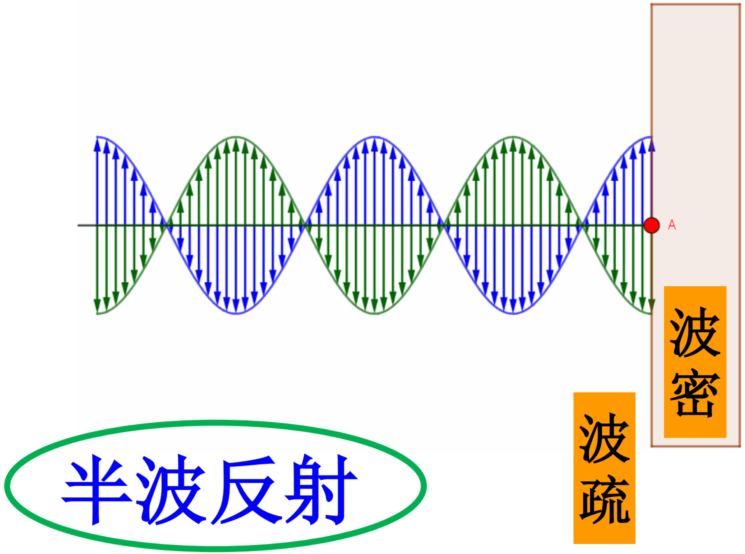
波密介质—波阻ρu较大的介质。

波疏介质—波阻ρu较小的介质。

1. 波密→波疏介质，界面处反射波与入射波同相位。

2. 波疏→波密介质，界面处反射波与入射波反相位。





反射波和入射波在界面处的相位差为π，相位跃变π对应半个波长的改变，故称半波损失。

总结　波在两种介质界面上反射的一般规律：

★ ρu 大→波密介质； ρu 小→波疏介质。

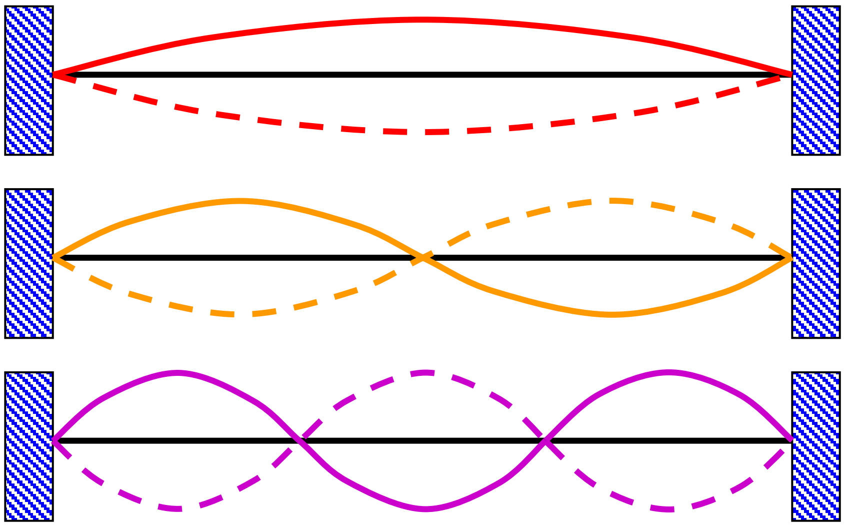
- 波从波密介质传向波疏介质，$(\rho_1 u_1 > \rho_2 u_2)$ 反射波无“半波损失”，反射点为腹点。
  - 全波反射。
- 波从波疏介质传向波密介质，$(\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2)$ 反射波产生“半波损失”，反射点为节点。
  - 半波反射。

五 振动的简正模式

两端固定的弦线形成驻波时，波长 λ_n和弦线长 l应满足

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad \nu_n = n\frac{u}{2l} \qquad n = 1,2,\cdots$$

两端固定的弦振动的简正模式：



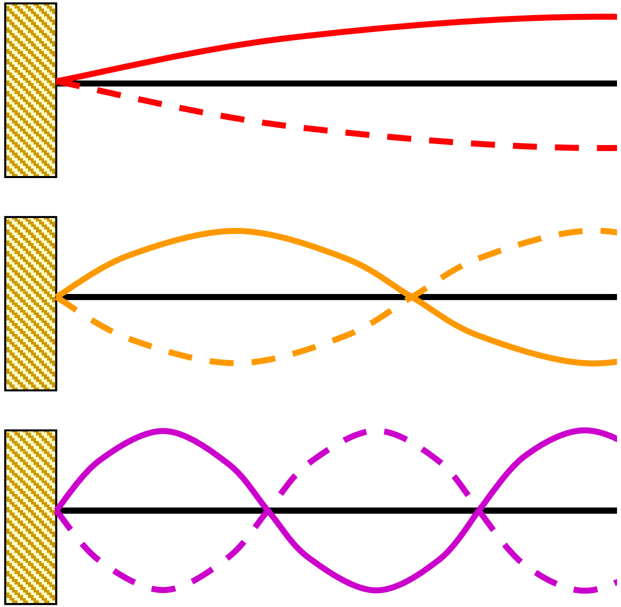
$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$l = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$l = \frac{3\lambda_3}{2}$$

一端固定一端自由的弦振动的简正模式：

$$l = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4} \quad n = 1, 2, \cdots$$



$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

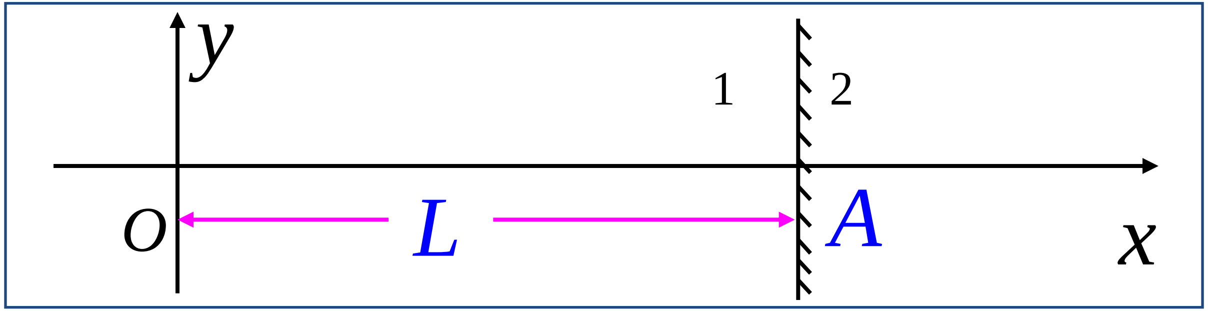
例 如图，一列沿x轴正向传播的简谐波方程为

$$y_1 = 10^{-3}\cos[200\pi(t-\frac{x}{200})] \quad \text{(m)}$$

在1、2两种介质分界面上点A与坐标原点O相距 L = 2.25 m。已知介质2的波阻大于介质1的波阻。假设反射波与入射波的振幅相等，求：

（a）反射波方程; （b）驻波方程;

（c）在OA之间波节和波腹的位置坐标。

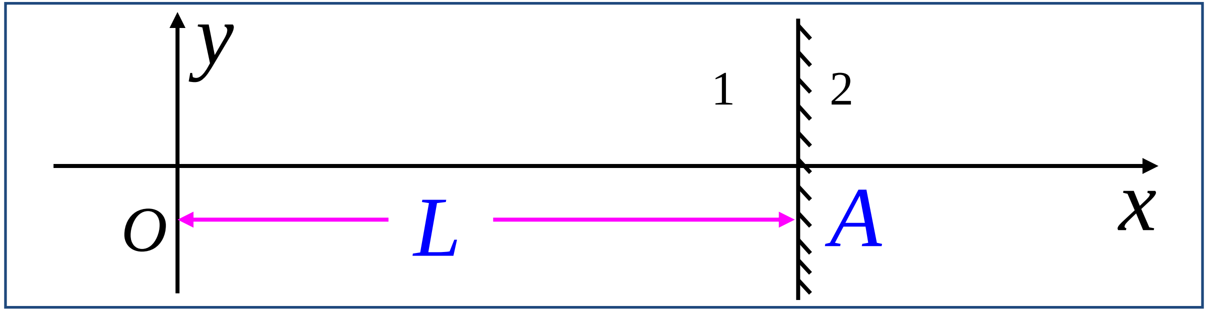


解：（a）已知入射波方程：

$$y_1 = 10^{-3} \cos[200\pi(t - \frac{x}{200})]$$

取$x = L$得入射波在A点的振动方程：

$$y_{1A} = 10^{-3} \cos[200\pi(t - \frac{L}{200})]$$



由于半波损失，反射时反射波在A点的振动方程为

$$y_{2A}=10^{-3}\cos[200\pi(t-\frac{L}{200})+\pi]$$

反射波波函数为：

$$y_2=10^{-3}\cos[200\pi(t-\frac{L-x}{u})-\frac{200\pi L}{200}+\pi]$$

代入 L = 2.25 m，波速u = 200 m/s，得反射波方程为：

$$y_2=10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{x}{200})-3.5\pi]$$

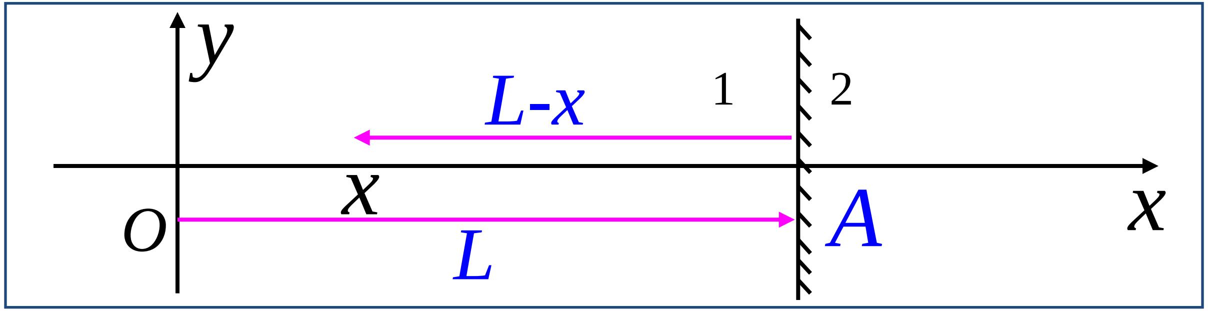
$$=10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{x}{200})+\frac{\pi}{2}]\ (\mathrm{m})$$

熟练后的直接解法：

入射波任意时刻在*O*点的振动经过时间(2*L*-*x*)/*u*后第二次传播到位置*x*处，并考虑从波疏到波密界面的反射伴随相位突变π，有：

$$y_2 = 10^{-3}\cos[200\pi(t-\frac{2L-x}{200})+\pi]$$

$$=10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{x}{200})+\frac{\pi}{2}]$$



（b） $y = y_1 + y_2 = 2\times10^{-3}\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})\cos(200\pi t + \frac{\pi}{4})$

（c） 令 $\cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) = 0$

得波节坐标 $x = n + \frac{1}{4} \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$

$x \le 2.25\ \text{m} \qquad x = 0.25\ \text{m},\ 1.25\ \text{m},\ 2.25\ \text{m}$

令 $\left|\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})\right| = 1$

得波腹坐标 $x = n - \frac{1}{4} \qquad (n = 1,2,\cdots)$

$x \le 2.25\ \text{m} \qquad x = 0.75\ \text{m},\ 1.75\ \text{m}$