

第四章 刚体转动



教学基本要求

- **理解**角动量概念，**掌握**质点在平面内运动以及刚体绕定轴转动情况下的角动量守恒问题。
- **理解**描述刚体定轴转动的物理量，并**掌握**角量与线量的关系。
- **理解**力矩和转动惯量概念，**掌握**刚体绕定轴转动的转动定律。
- **理解**刚体定轴转动的转动动能概念，能在有刚体绕定轴转动的问题中正确地应用机械能守恒定律。

4.1 刚体的定轴转动 力矩

※ 刚体

在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组。）

说明：(1) 刚体是理想模型；
(2) 刚体模型是为简化问题引进的。

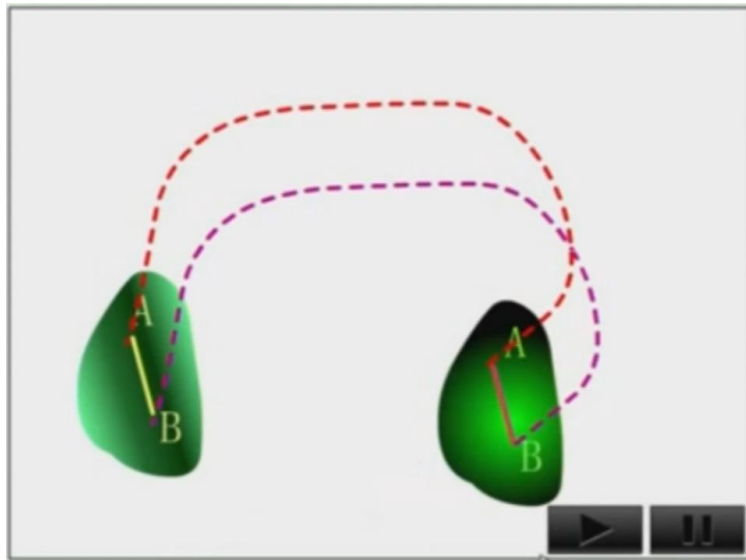
※ 刚体的运动形式：平动、转动。

※ **平动**：刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同。

特点：刚体上各点的运动状态一样，如：位移、速度、加速度等都相同。

刚体上任一点的运动可代表整个刚体的运动。

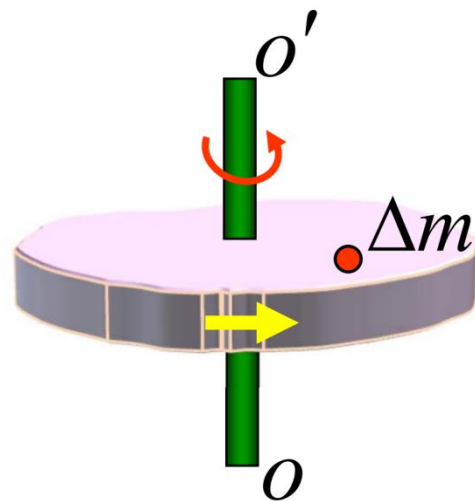
（刚体平动的运动规律与质点的运动规律相同）



刚体平动 → 质点运动

※ **刚体的转动**：刚体上的所有质元都绕同一直线作圆周运动（称该直线为**转轴**）。

定轴转动—当转轴固定不动时，刚体的转动称定轴转动。



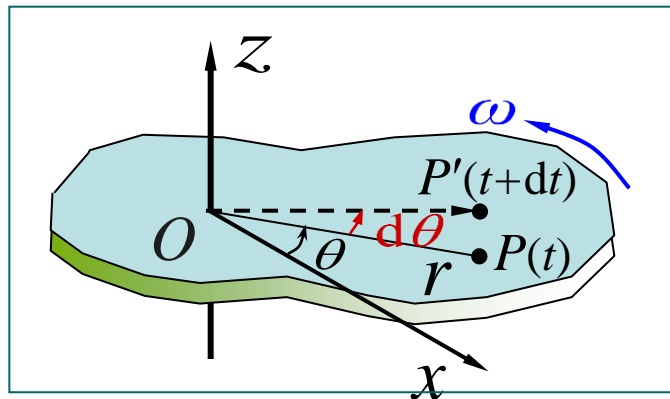
※ **刚体的一般运动**：刚体上的任一点的位移总可以表示为一个随质心的平动加上绕质心的转动。

※ 刚体定轴转动的角速度

角坐标 $\theta = \theta(t)$

角位移 $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$

角速度矢量 $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

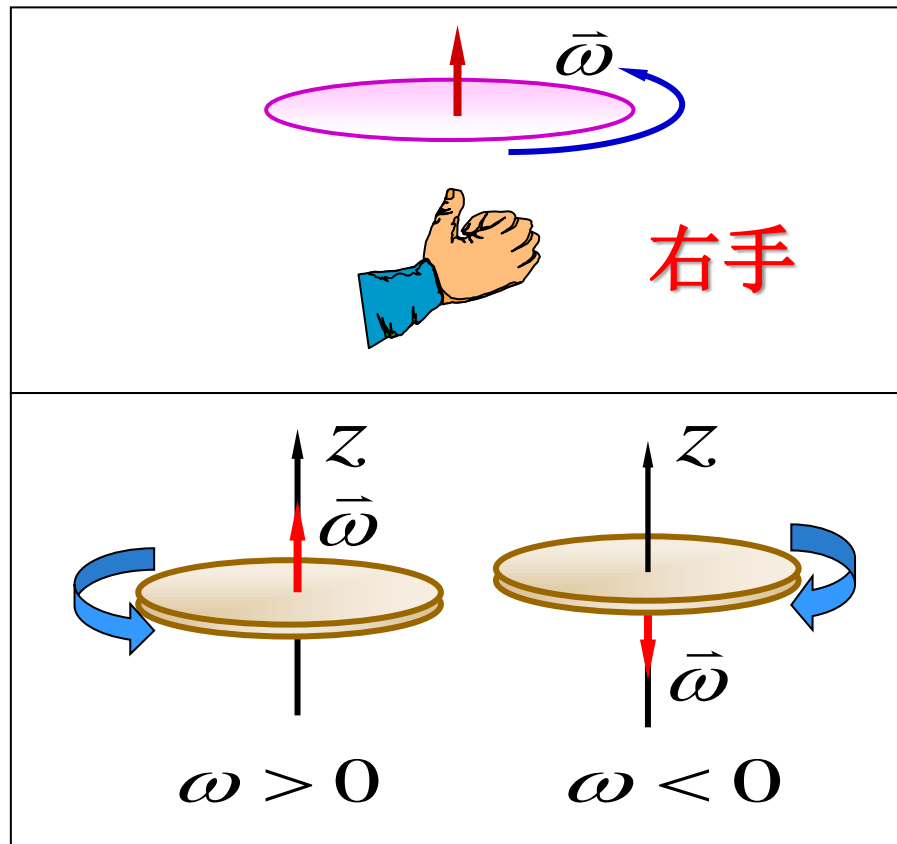


$\vec{\omega}$ 方向：右手螺旋方向

※ 刚体定轴转动的角速度和角加速度

刚体定轴转动(一维转动)
的转动方向可以用角速度
的正、负来表示。

角加速度 $\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$



定轴转动的特点

- (1) 刚体上任一质点均作圆周运动，与轴垂直的平面为转动平面；
- (2) 刚体上任一质点的运动 $\Delta\theta, \bar{\omega}, \bar{\alpha}$ 均相同，但 \bar{v}, \bar{a} 不同；
- (3) 运动描述仅需一个坐标（一维）。

※ 匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的 α =常量 时，刚体做匀变速转动。

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

与质点的匀变速圆周运动公式相同!

※ 角量与线量的关系

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

质点的
线速度

$$\vec{v} = r\omega\vec{e}_t$$

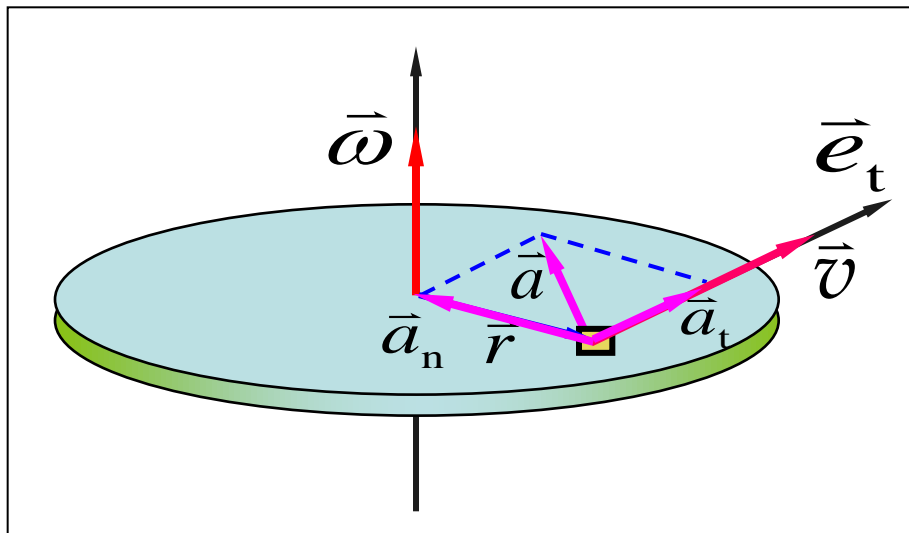
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

质点的
加速度

$$a_t = r\alpha$$

$$a_n = r\omega^2$$



$$\vec{a} = r\alpha\vec{e}_t + r\omega^2\vec{e}_n$$

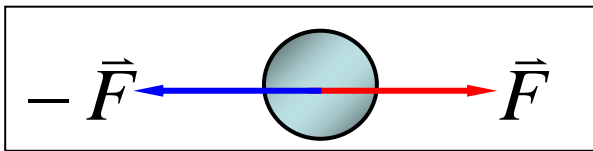
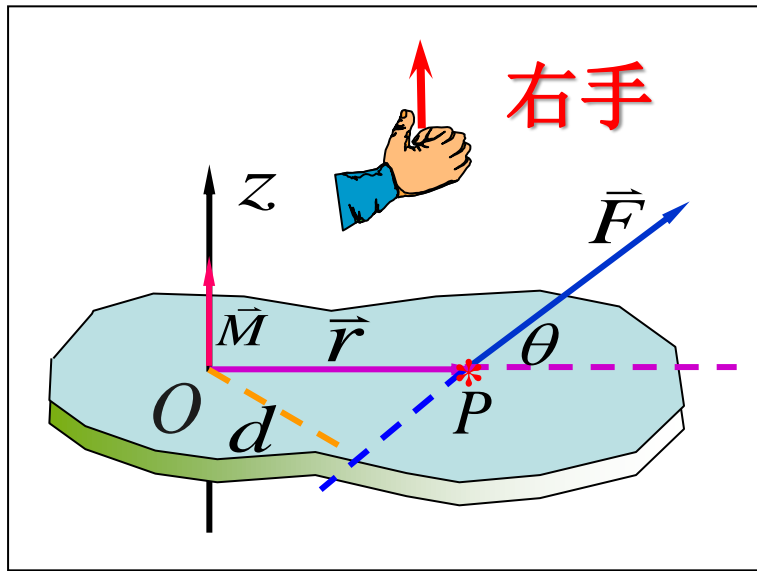
※ 力矩

用来描述力对刚体转动作用的物理量。（力的大小、方向、作用点）

\vec{F} 对转轴 z 的力矩定义：

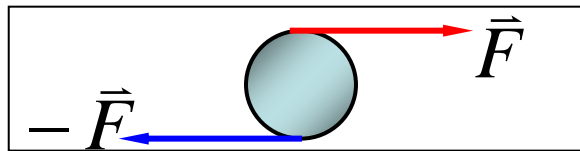
$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \quad (\text{矢积或叉乘})$$

大小： $M = Fr \sin \theta = Fd$
 d : 力臂



$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i = 0$$

作用点不同



$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i \neq 0$$

讨论

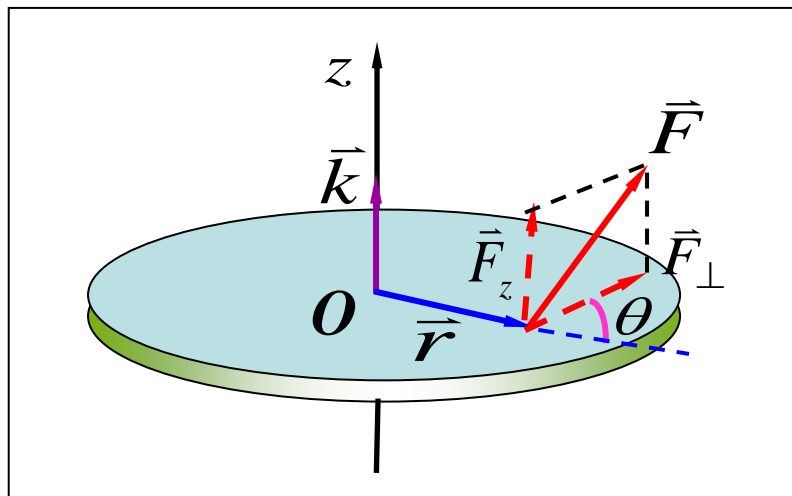
(1) 若力 \vec{F} 不在转动平面内，可将力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量。

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\perp$$

其中 \vec{F}_z 对绕轴转动无贡献，
 \vec{F}_\perp 对转轴的力矩：

$$M_z \vec{k} = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$

$$M_z = rF_\perp \sin \theta$$



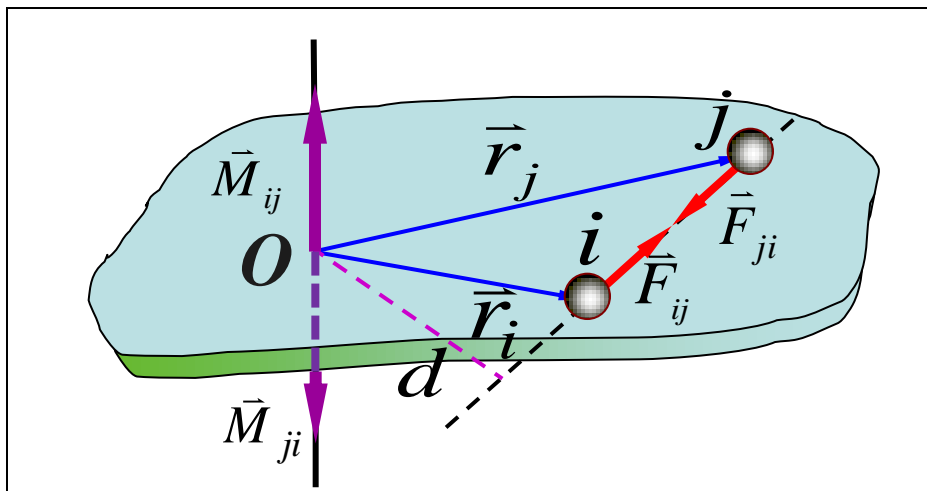
(2) 合力矩等于各分力矩的矢量和

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots$$

(3) 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消，
合力矩为零。

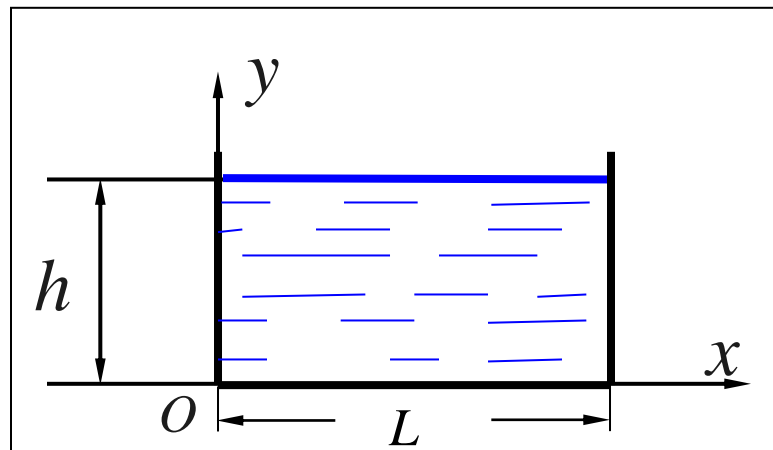
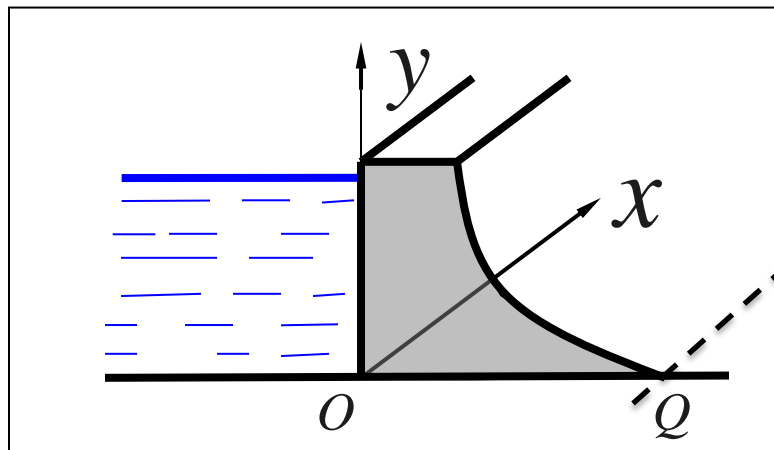
$$M = Fr \sin \theta = Fd$$

d : 力臂



$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

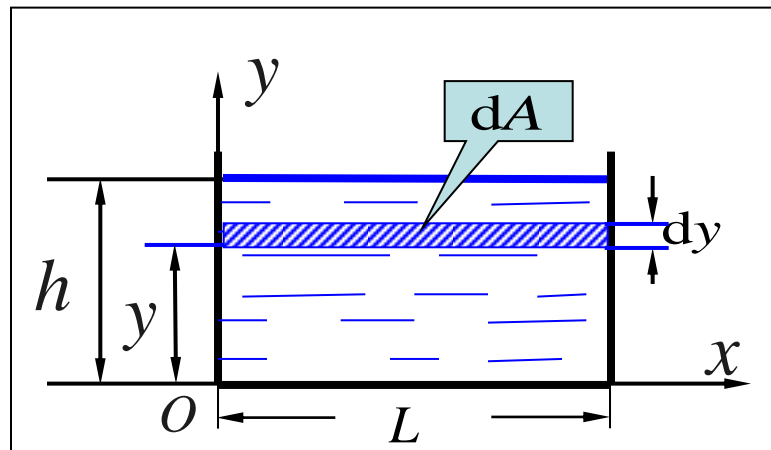
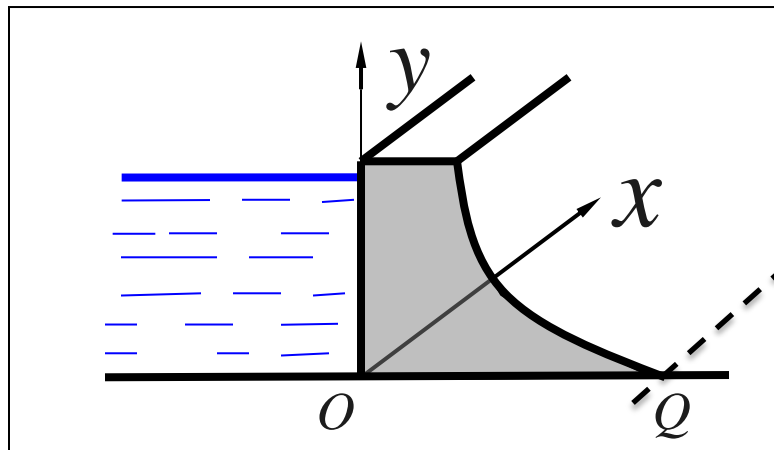
例1 有一大型水坝高110 m、长1000 m, 水深100m, 水面与大坝表面垂直, 如图所示。求水作用在大坝上的**力**, 以及这个力对通过大坝基点 Q 且与 x 轴平行的轴的**力矩**。



运用微积分思想和方法

解 (1) 设水深 h , 坝长 L ,
坝面上取面积元 $dA = Ldy$,
作用在此面积元上的力:

$$dF = p \, dA = pLdy$$



令大气压为 p_0 ， 则 $p = p_0 + \rho g(h - y)$ (水下的压强)

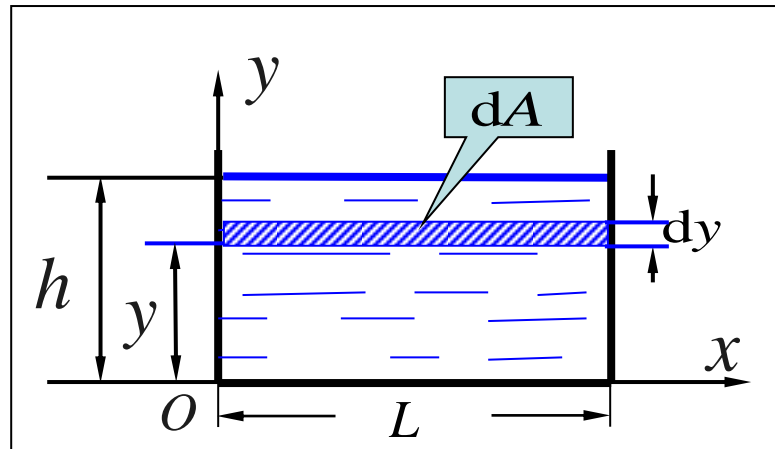
$$dF = p dA = [p_0 + \rho g(h - y)] L dy$$

$$F = \int_0^h [p_0 + \rho g(h - y)] L dy$$

$$= p_0 L h + \frac{1}{2} \rho g L h^2$$

代入数据，得

$$F = 5.91 \times 10^{10} \text{ N}$$



力的方向垂直坝面指向OQ

(2) 求该力对通过大坝基点

Q 且与 x 轴平行的轴的力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$dF = [p_0 + \rho g(h - y)]Ldy$$

$d\vec{F}$ 对通过点 Q 的轴的力矩: $dM = ydF$

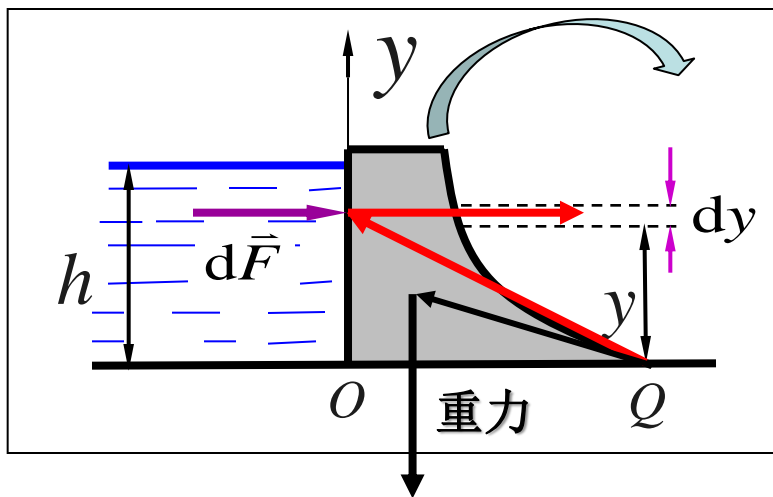
$$M = \int dM = \int_0^h y[p_0 + \rho g(h - y)]Ldy$$

$$= \frac{1}{2} p_0 L h^2 + \frac{1}{6} g \rho L h^3$$

代入数据, 得:

$$M = 2.14 \times 10^{12} \text{ N} \cdot \text{m}$$

力矩方向沿 x 轴正方向



4.2 转动惯量 转动定律

刚体内质量元 Δm_i 受外力 \vec{F}_i ,
内力 \vec{F}_i' , 由牛顿第二定律

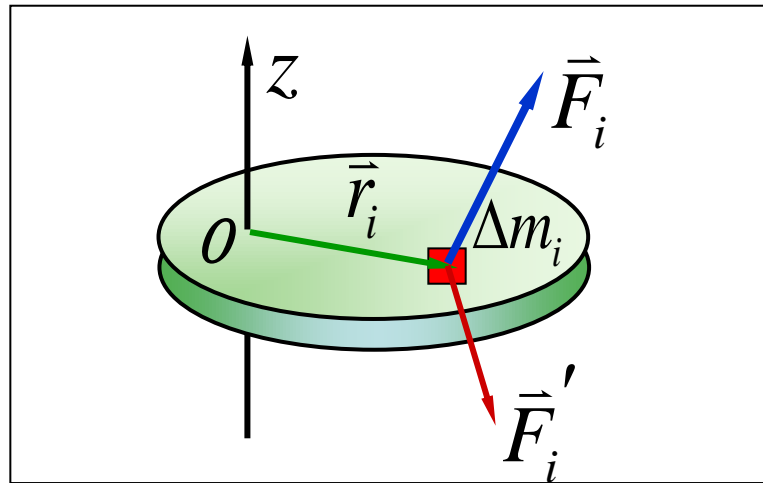
$$\vec{F}_i + \vec{F}_i' = \Delta m_i \vec{a}_i$$

质量元的切向运动方程为

$$F_{it} + F_{it}' = \Delta m_i a_{it} = \Delta m_i \cdot r_i \alpha$$

两边各乘以 r_i , 得

$$F_{it} r_i + F_{it}' r_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha$$



对所有质元，由上式可得

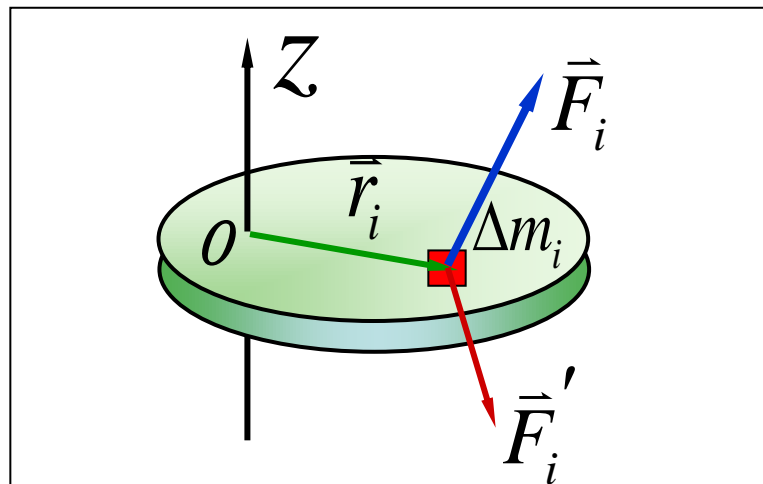
$$\sum F_{it} r_i + \sum F'_{it} r_i = \sum (\Delta m_i r_i^2) \alpha$$

又因 $\sum F'_{it} r_i = 0$ ，故上式为

$$\sum F_{it} r_i = (\sum \Delta m_i r_i^2) \alpha$$

合外力矩 M

转动惯量 J



※ 转动定律

$$M = J \alpha$$

表述：刚体定轴转动的角加速度 α 与它所受的合外力矩 M 成正比，与刚体的转动惯量 J 成反比。

讨论

转动定律

$$M = J\alpha$$

(1) 若 $M = 0$, ω 不变

(2) $\alpha \propto \frac{M}{J}$

(3) $M = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt}$

(转动定律)

比较: $F = ma = m \frac{dv}{dt}$

(牛顿定律)

转动惯量

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

$$J = \int r^2 dm$$

- 转动惯量的单位：kg m²
- 转动惯量是**对某一转轴的**
- 转动惯量的**意义**：转动惯性的量度
- 转动惯量**具有可叠加性**
- 转动惯量与刚体的**质量、质量分布、转轴位置**有关

※ J 的计算方法

❖ 质量离散分布

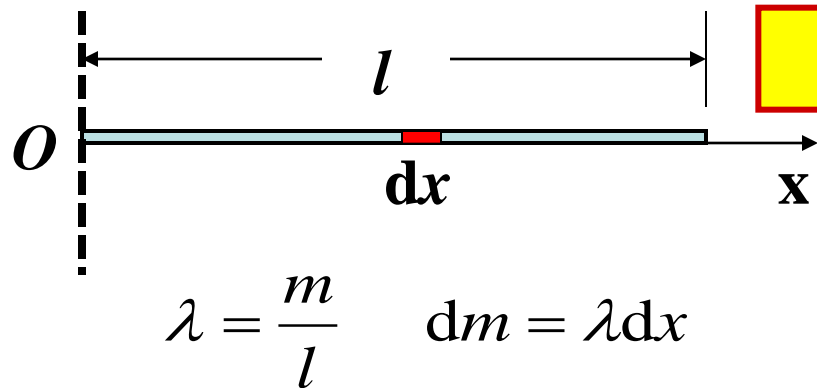
$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_i r_i^2$$

❖ 质量连续分布

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad dm: \text{质量元}$$

$$= \int_V r^2 \rho dV \quad dV: \text{体积元}$$

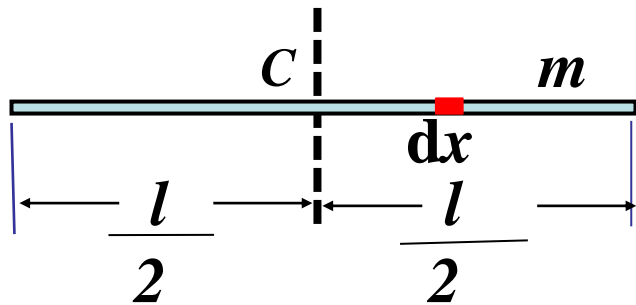
例题 质量为 m 的均匀杆，求杆对过 O 点的垂直轴的转动惯量。



运用微积分思想和方法

$$J_O = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 dx \lambda$$
$$= \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2$$

杆对过中心 C 点的垂直轴的转动惯量？

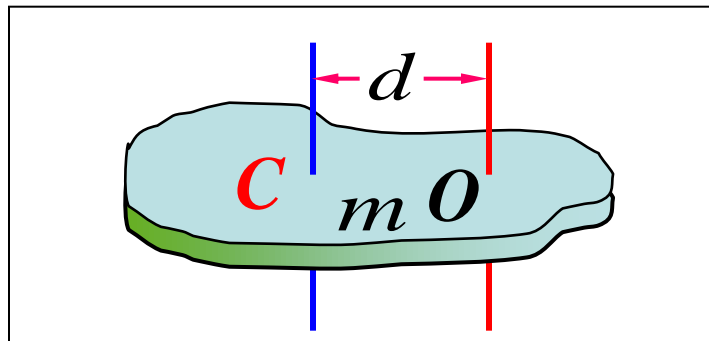


$$J_C = \int x^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx \lambda$$
$$= \frac{1}{12} \lambda l^3 = \frac{1}{12} ml^2$$

※ 平行轴定理

质量为 m 的刚体，如果对过其质心轴的转动惯量为 J_C ，则对任一与该轴平行，相距为 d 的转轴 O 的转动惯量为：

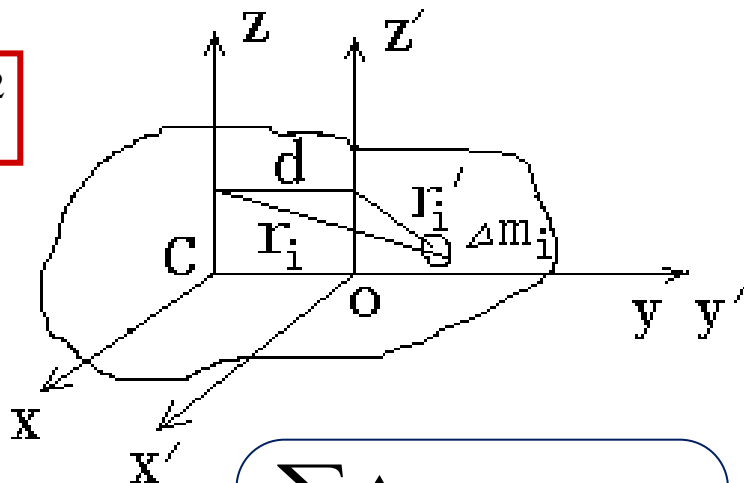
$$J_O = J_C + md^2$$



平行轴定理的证明

$$J_O = J_C + md^2$$

C 为刚体的质心,
 J_C 为通过质心轴的转动惯量



$$\underline{J_C = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2)}$$

$$J_O = \sum_i \Delta m_i r_i'^2 = \sum_i \Delta m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

$$x_i' = x_i, \quad y_i' = y_i - d, \quad z_i' = z_i$$

$$J_O = \sum_i \Delta m_i r_i'^2 = \sum_i \Delta m_i [x_i^2 + (y_i - d)^2]$$

$$J_O = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) + d^2 \sum_i \Delta m_i - 2d \sum_i \Delta m_i y_i$$

$$\sum_i \Delta m_i y_i = my_C$$

质心通过坐标原点,
 $y_C = 0$

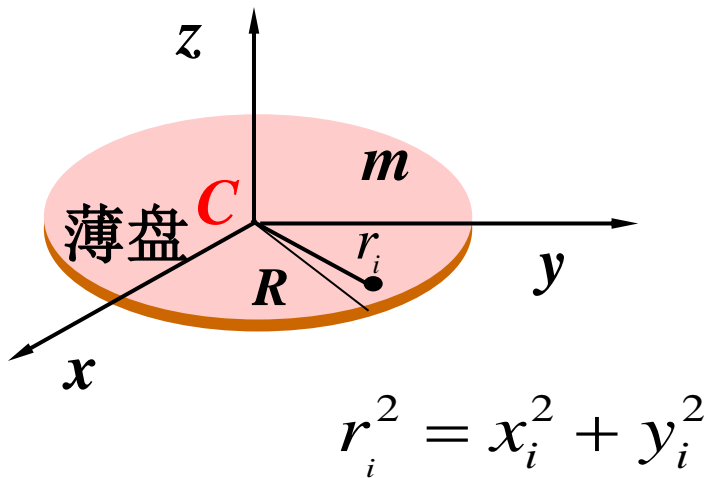
$$= m$$

$$= 0$$

※ 垂直轴定理

适用：薄板型物体

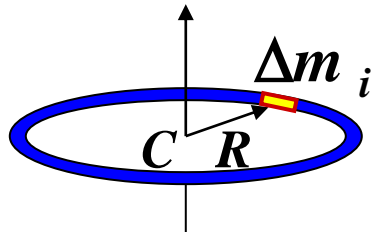
$$J_z = J_x + J_y$$



证明：

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_i \Delta m_i r_i^2 \\ &= \sum_i \Delta m_i x_i^2 + \sum_i \Delta m_i y_i^2 \\ &= J_x + J_y \end{aligned}$$

例题 求半径为 R 均匀圆环 m 对过质心并垂直于环面的转轴的转动惯量:



$$J_C = \sum \Delta m_i R^2 = R^2 \sum \Delta m_i$$

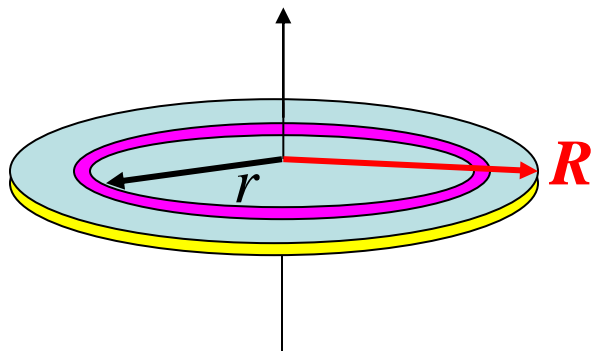
$$J_C = mR^2$$

1/2圆环?

1/4圆环?



例题 求半径为 R 均匀圆盘 m 对通过质心并与盘面垂直的转轴的转动惯量:



$$dJ = dm r^2 \quad dm = \sigma 2\pi r dr \quad \sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

$$J = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr$$

$$= \frac{\pi \sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

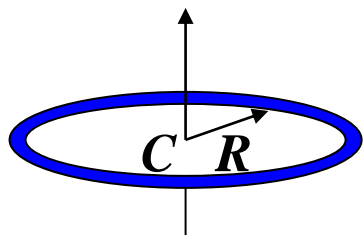
形状复杂刚体的 J 常通过实验来测定。

常见的形状简单对称、质量均匀的刚体的很容易计算得到。

可以记住的几个常用结果：

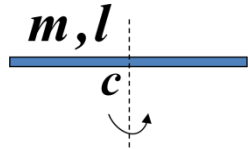
(1) 细圆环

$$J_C = mR^2$$

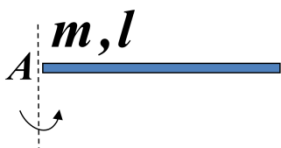


(2) 均匀细棒

$$J_C = \frac{1}{12} ml^2$$

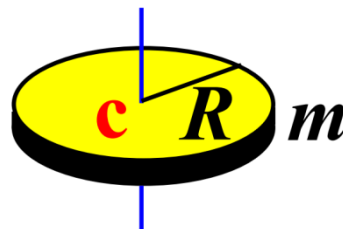


$$J_A = \frac{1}{3} ml^2$$

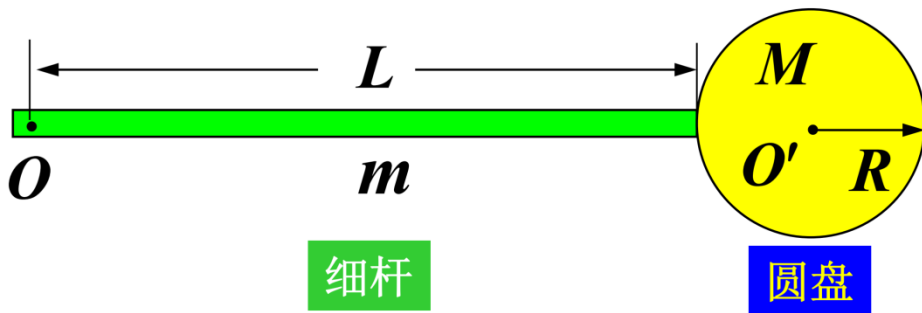


(3) 均匀圆盘、圆柱

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$



例题 写出下面刚体对 O 轴（垂直屏幕）的转动惯量：



解：利用转动惯量的可叠加性和平行轴定理：

$$\begin{aligned} J_O &= \frac{1}{3}mL^2 + [J_{O'} + M(L + R)^2] \\ &= \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M(L + R)^2 \end{aligned}$$

考虑方向时，转动定律可写作

$$\vec{M} = J\vec{\alpha}$$

说明

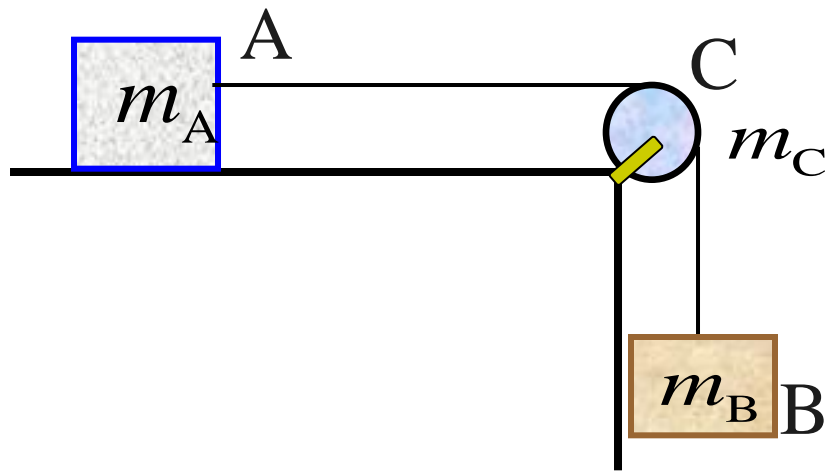
(1) \vec{M} 与 $\vec{\alpha}$ 方向相同

(2) 为瞬时关系

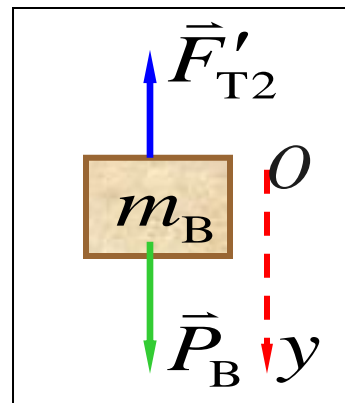
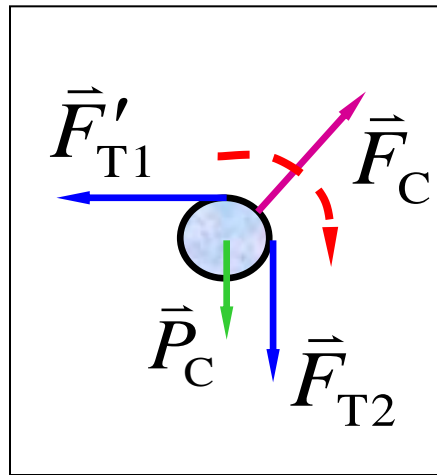
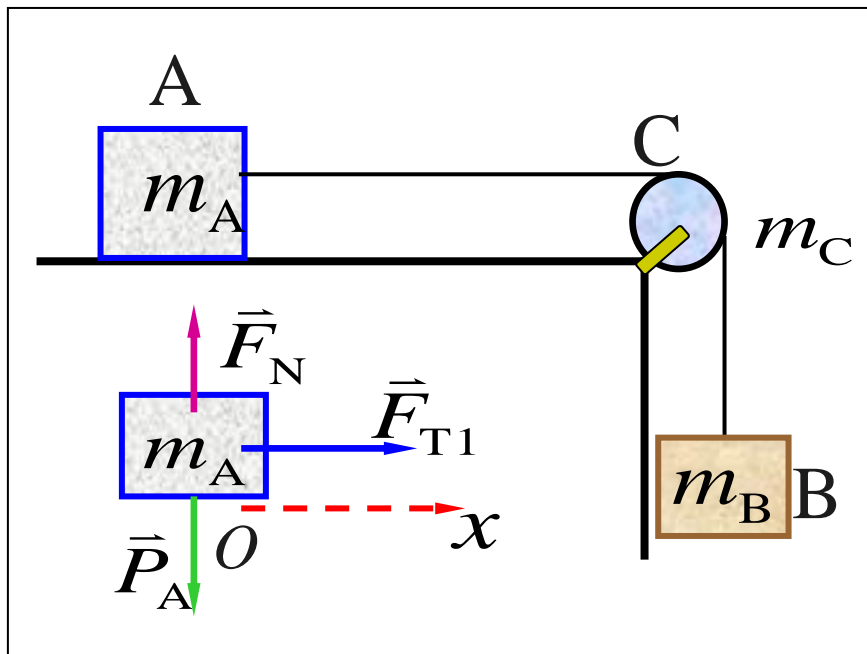
(3) 转动中 $\vec{M} = J\vec{\alpha}$ 与平动中 $\vec{F} = m\vec{a}$ 地位相同。

例 质量为 m_A 的物体A 静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为 R 、质量为 m_C 的圆柱形滑轮C，并系在另一质量为 m_B 的物体B上，B 竖直悬挂。滑轮与绳索间无滑动， 且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。

求：两物体的线加速度大小？
水平和竖直两段绳索的张力大小各为多少？



解 用隔离法分别对各物体作受力分析，取如图所示坐标系。



$$F_{T1} = m_A a$$

$$m_B g - F_{T2} = m_B a$$

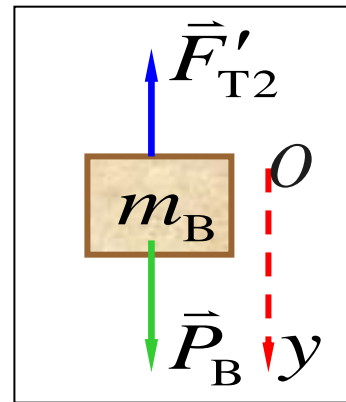
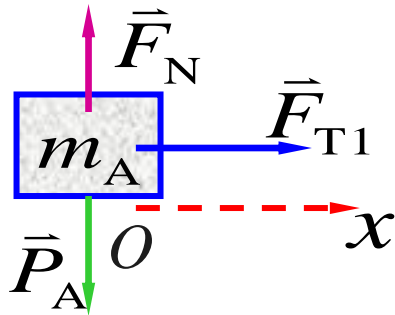
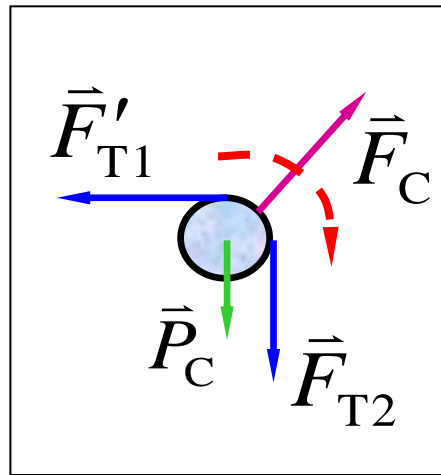
$$R F_{T2} - R F_{T1} = J \alpha$$

$$J = \frac{1}{2} m_C R^2$$

$$a = R \alpha \quad (\text{角量与线量关系})$$

牛顿定律

转动定律



解得：

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{m_B g}{m_A + m_B + m_C / 2} \\ F_{T1} = \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B + m_C / 2} \\ F_{T2} = \frac{(m_A + m_C / 2) m_B g}{m_A + m_B + m_C / 2} \end{array} \right.$$

如不考虑滑轮质量
——“轻滑轮”

即： $m_C = 0$ ， 由上式可得： $F_{T1} = F_{T2} = \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B}$

4.3 角动量 角动量守恒定律

力的时间累积效应：

——→ 冲量、动量、动量定理、动量守恒定律

力矩的时间累积效应：

——→ 冲量矩、角动量、角动量定理、角动量
守恒定律 (动量矩)

※ 角动量的引入

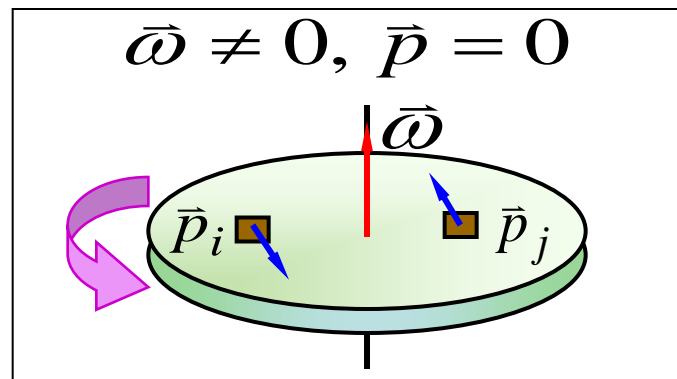
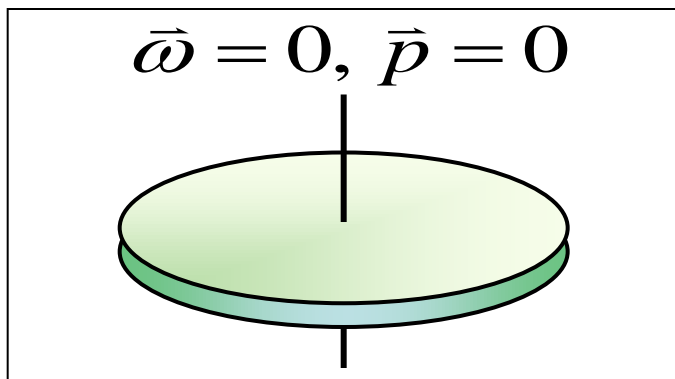
质点运动描述

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad E_k = mv^2/2$$

刚体定轴转动描述

$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \quad E_k = J\omega^2/2$$

角动量



刚体定轴转动

※ 质点角动量的定义

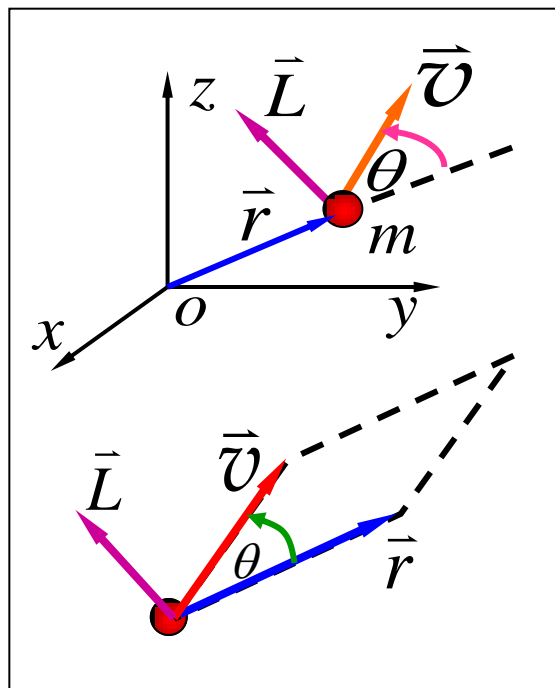
质量为 m 的质点以速度 \vec{v} 在空间运动，某时刻对 O 的位矢为 \vec{r} ，则质点对 O 点的角动量定义为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (\text{矢积或叉乘})$$

大小为： $L = rmv \sin \theta$

\vec{L} 的方向符合右手法则

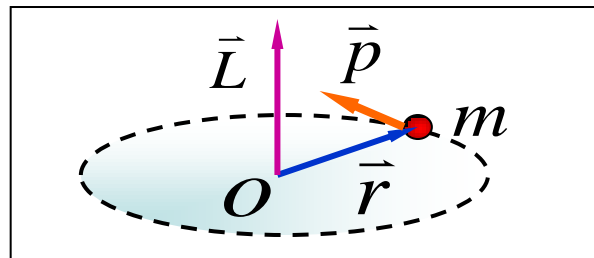
角动量单位： $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$



若质点 m 以 ω 作半径为 r 的圆周运动，则相对圆心 O 的角动量：

$$L = mr^2\omega = J\omega$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = ?$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

表述：作用于质点的合力对参考点 O 的力矩，
等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率。

推导过程:

角动量的定义

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$\because \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \vec{v} \times \vec{p} = \vec{0} \quad \therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

定义合力对参考点 O 的合力矩:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

角动量定理
微分形式：

$$\vec{M} dt = d\vec{L}$$



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

角动量定理
积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

定义冲量矩： $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$

※ 质点的角动量定理：对同一参考点 O ，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

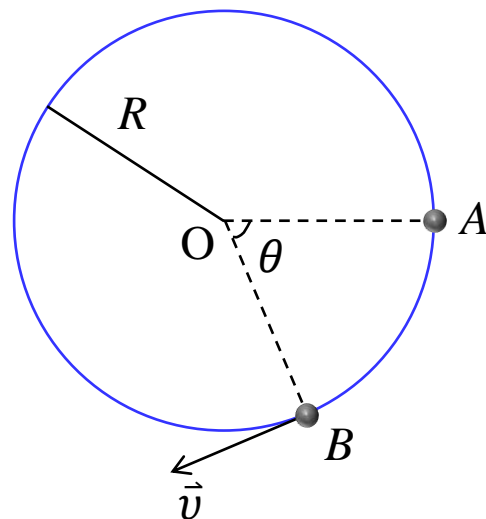
※ 质点的角动量守恒定律

合力矩为零时, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ 为常矢量。

若质点所受合外力对某给定点 O 的力矩为零, 则质点对 O 点的角动量保持不变。

用角动量定律求解下题：

例 一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内。一质量为 m 的小球穿在圆环上，并可在圆环上滑动。小球开始时静止于圆环上的点 A (该点在通过环心 O 的水平面上)，然后从 A 点开始下滑。



设小球与圆环间的摩擦力略去不计。求小球滑到点 B (任意角度 θ) 时对环心 O 的**角动量**和**角速度**大小。

解： 小球受力 \vec{F}_N 、 \vec{P} 作用, \vec{F}_N 对 O 点的力矩为零,
重力矩垂直板面向里

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

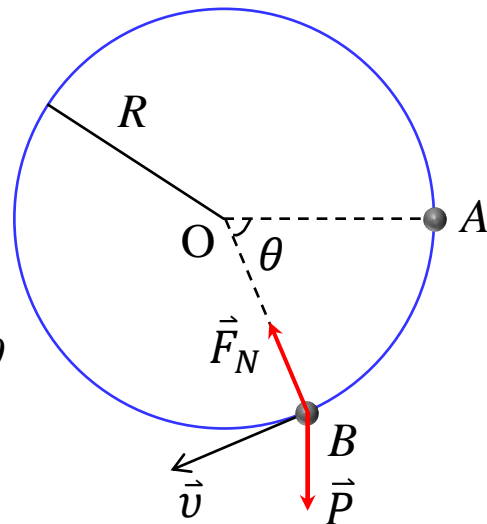
$$M = mgR \cos \theta$$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$

质点的角动量定理:

$$mgR \cos \theta = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = mgR \cos \theta dt$$



技巧：变量代换

$$dL = mgR \cos \theta dt$$

考虑到 $\omega = d\theta/dt$, $L = mRv = mR^2\omega$

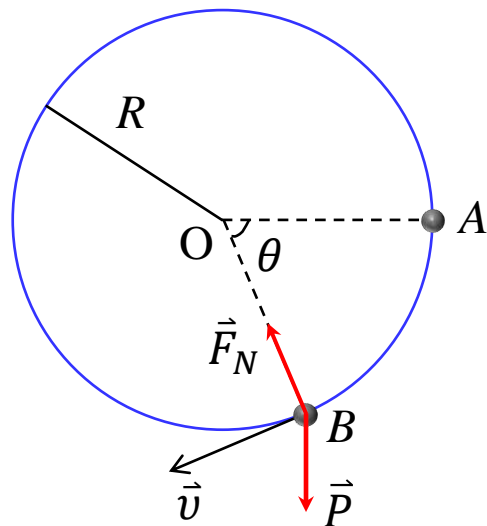
$$\text{得: } LdL = m^2 g R^3 \cos \theta d\theta$$

由题设条件积分上式

$$\int_0^L LdL = m^2 g R^3 \int_0^\theta \cos \theta d\theta$$

$$\text{得: } L = mR^{3/2} (2g \sin \theta)^{1/2}$$

$$\omega = \left(\frac{2g}{R} \sin \theta \right)^{1/2}$$



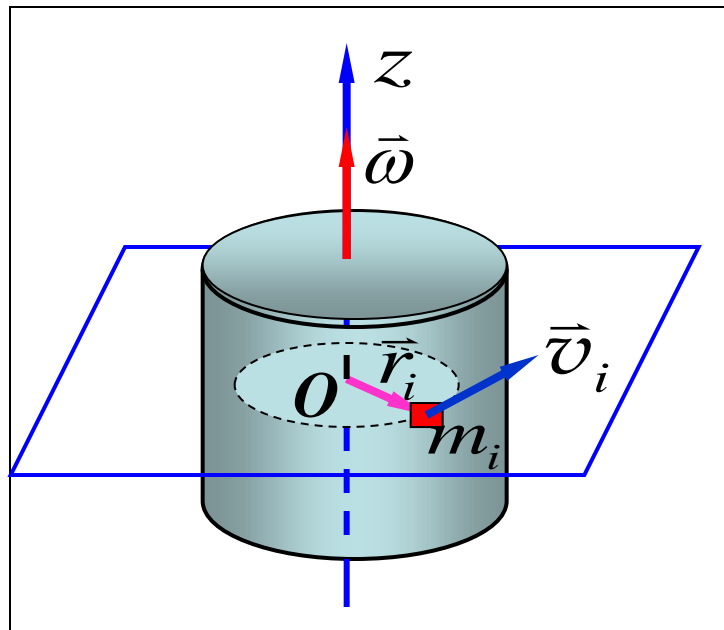
※ 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

刚体上所有质点对 z 轴的角动量，
即刚体在 z 轴方向上的角动量为：

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} \\ &= \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\omega}\end{aligned}$$

$$\vec{L} = J \vec{\omega}$$

转动惯量 J $\left\{ \begin{array}{l} J = \sum_i m_i r_i^2 \\ J = \int r^2 dm \end{array} \right.$



※ 刚体定轴转动的角动量定理

质点 m_i 受合力矩 M_i (包括系统的 M_i^{ex} 、 M_i^{in})

$$\vec{M}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i r_i^2 \vec{\omega})$$

对定轴转动刚体（系统） $\sum \vec{M}_i^{\text{in}} = 0$

合外力矩：
$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i^{\text{ex}} = \frac{d}{dt}(\sum m_i r_i^2 \vec{\omega}) = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}$$

$$\vec{M} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

刚体所受合外力矩等于其角动量对时间的变化率

$$\vec{M}dt = d\vec{L}$$

$$\vec{M}dt = d\vec{L} = d(J\vec{\omega})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = J\omega_2 - J\omega_1$$

转动物体所受合外力矩的冲量矩等于在这段时间内转动物体角动量的增量——定轴转动刚体的角动量定理。

※ 非刚体定轴转动的角动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$$

※ 刚体定轴转动的角动量守恒定律

$$\vec{M}dt = d\vec{L}$$

若 $\vec{M} = 0$, 则 $\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{常量}$

如果物体所受的合外力矩等于零（或者不受外力矩的作用），
物体的角动量保持不变。——角动量守恒定律

✓ 可扩展到任意质点系：对同一参考点，当合外力矩为零时，
质点系总角动量不随时间变化。

$\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } J \text{ 不变, } \vec{\omega} \text{ 不变;} \\ \text{若 } J \text{ 变, } \vec{\omega} \text{ 也变, 但 } \vec{L} = J\vec{\omega} \text{ 不变。} \end{array} \right.$

讨论

- 守恒条件：合外力矩为零
- 内力矩不改变系统的角动量
- 在冲击等问题中 $\because M^{\text{in}} \gg M^{\text{ex}} \therefore L \approx \text{常量}$
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律

许多现象都可以用
角动量守恒来说明：

- 花样滑冰、跳台滑雪
- 跳水运动员跳水

自然界中存在多种守恒定律

▣ 动量守恒定律

▣ 能量守恒定律

▣ 角动量守恒定律

▣ 电荷守恒定律

▣ 质量守恒定律

4.4 力矩做功 刚体定轴转动的动能定理

力的空间累积效应：

————→ 力的功、动能、动能定理。

力矩的空间累积效应：

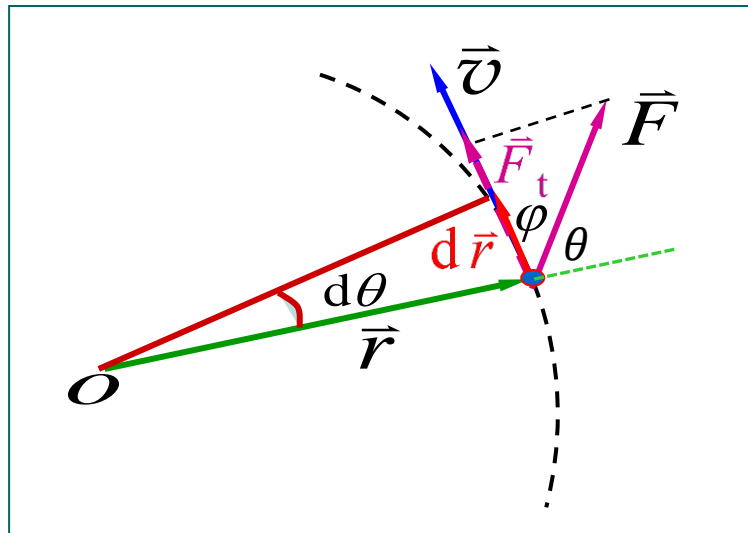
————→ 力矩的功、转动动能、动能定理。

※ 力矩做功

元功: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \varphi |d\vec{r}|$
 $= F \sin \theta ds = F \sin \theta r d\theta$

$dW = Md\theta$ (力矩乘角位移)

力矩的功: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta$



说明: 所谓力矩的功, 实质上还是力的功, 并无任何关于力矩的功的新的定义。只是在刚体转动中, 用力矩和角位移的乘积来表示功更为方便而已。

※ 力矩的功率

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

$$P = M\omega$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

比较 $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

当 \vec{M} 与 $\vec{\omega}$ 同方向, W 和 P 为正

当 \vec{M} 与 $\vec{\omega}$ 反方向, W 和 P 为负

※ 转动动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$v_i = r_i \omega$$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

比较: $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

※ 刚体绕定轴转动的动能定理

$$M = J\alpha$$

$$\begin{aligned} W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} J \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega \\ &= \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 \end{aligned}$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

——刚体绕定轴转动的动能定理

比较:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

说明：

1、**刚体绕定轴转动的**动能定理与质点动力学中讲的动能定理相同，只是动能的表示形式不同而已。

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

2、**对刚体，内力(矩)**的功总和在任何过程中都为零。

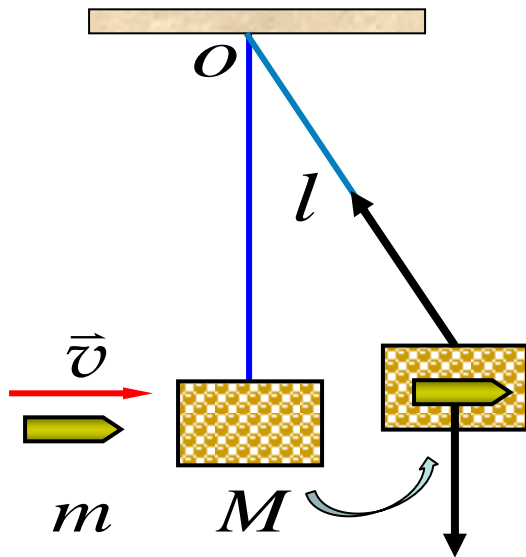
$$(\because \text{相对位移为 } 0) \quad \sum W_{\text{内}} = 0$$

讨论

求沙箱升高的最大高度 h

子弹
击入
沙箱

细绳
质量
不计



以子弹和沙箱为系统

过程：(1碰，2摆)

动量守恒? (Y, N)

角动量守恒? (Y, N)

机械能守恒? (N, Y)

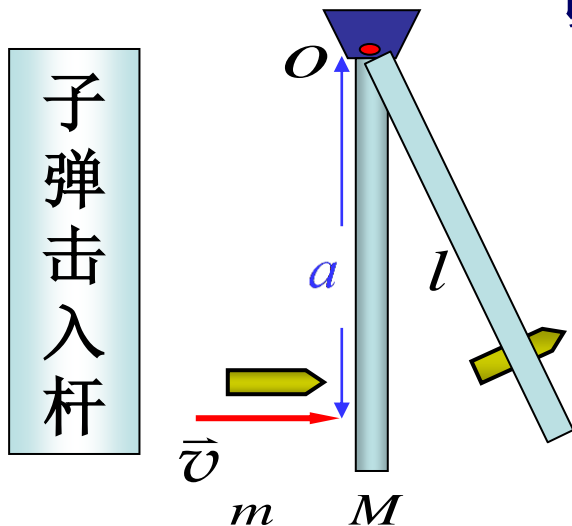
$$mv = (m + M)v'$$

$$mvl = (m + M)v'l$$

两方程等效

$$\frac{1}{2}(m + M)v'^2 = (m + M)gh$$

求杆的最大摆动角度 ϕ



以子弹和杆为系统

过程: (1击, 2摆)

动量守恒?

(N, N)

角动量守恒?

(Y, N)

机械能守恒?

(N, Y)

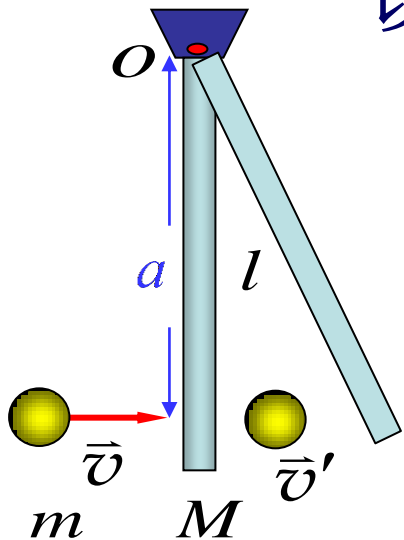
$$amv = \left(ma^2 + \frac{1}{3}Ml^2 \right) \omega$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2 \right) \omega^2 = mga(1 - \cos \phi) + Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \phi)$$

求杆的最大摆动角度 ϕ

小球与杆弹性碰撞



以弹性球和杆为系统

过程: (1碰, 2摆)

动量守恒?

(N, N)

角动量守恒?

(Y, N)

机械能守恒?

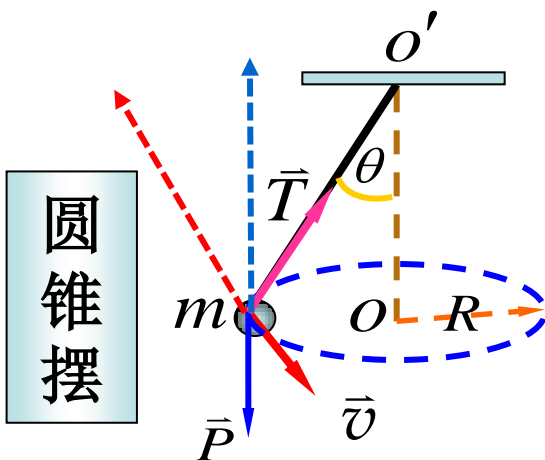
(Y, Y)

$$amv = amv' + \left(\frac{1}{3} Ml^2 \right) \omega$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} Ml^2 \right) \omega^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} Ml^2 \right) \omega^2 = Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \phi)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



圆锥摆

圆锥摆系统

动量守恒? (N)

角动量守恒? (Y: 对O点)

机械能守恒? (Y)

对O'点 $\sum \vec{M} \neq 0, \vec{L} \neq \text{恒矢量}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

对O点 $\sum \vec{M} = 0, \vec{L} = \text{恒矢量}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = C$$

总结：守恒定律的使用条件

动量守恒定律： 若质点系所受的合外力为零

$$\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0 \quad \text{则系统的总动量不变。}$$

依据质点系动量定理：
$$\vec{I} = \int_{t_0}^t \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} dt = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{p}_{i0}$$

机械能守恒定律：如果： $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = 0$ 则： $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$

依据功能原理：
$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}}$$

角动量守恒定律：若 $M = 0$ ，则 $L = J\omega = \text{常量}$

合外力矩等于零，物体的角动量保持不变

依据角动量定理：
$$\vec{M} dt = d\vec{L}$$

例 **留声机**的转盘绕通过盘心垂直盘面的轴以角速率 ω 作匀速转动。放上唱片后，唱片将在摩擦力作用下随转盘一起转动。设唱片的半径为 R ，质量为 m ，它与转盘间的摩擦系数为 μ ，求：(1) 唱片与转盘间的摩擦力矩；(2) 唱片达到角速度 ω 时需要多长时间；(3) 在这段时间内，**摩擦力矩对唱片做的功及转盘的驱动力矩做的功。**



解：（1）如图取面积元 $ds = drdl$ ，该面元所受的摩擦力为：

$$df = \frac{\mu mg}{\pi R^2} drdl$$

此力对点O的摩擦力矩为：

$$dM' = r df = \frac{\mu mg}{\pi R^2} r drdl$$

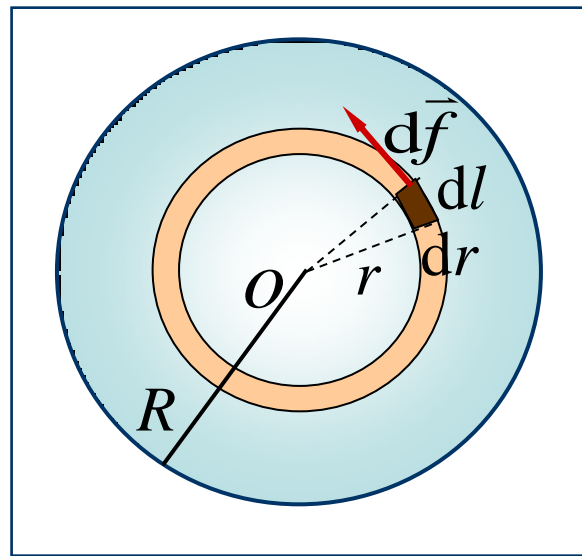
在宽为 dr 的圆环上，唱片所受的摩擦力矩为

$$dM = \frac{\mu mg}{\pi R^2} r dr (2\pi r) = \frac{2\mu mg}{R^2} r^2 dr$$

唱片与转盘间总的摩擦力矩为：

$$M = \frac{2\mu mg}{R^2} \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \mu R mg$$

用微积分思想和方法



(2) 由转动定律求 α , $\alpha = \frac{M}{J} = \frac{4\mu g}{3R}$ (唱片 $J = m R^2/2$)

唱片作匀加速转动, 由 $\omega = \omega_0 + \alpha t$ 可求得: $t = \frac{3\omega R}{4\mu g}$ ($\omega_0 = 0$)

(3) 由 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ 可得在0 到 t 的

时间内, 唱片转过的角度为: $\theta = \frac{3\omega^2 R}{8\mu g}$

摩擦力矩对唱片做的功为: $W = \int M d\theta = M\theta = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2$

期间转盘转过角度: $\theta' = \omega \cdot t = \frac{3\omega^2 R}{4\mu g}$

转盘驱动力矩做功: $W = \int M d\theta = M\theta' = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$

第四章（书后）作业题：

4-1~4-5, 4-10, 4-12, 4-13, 4-14,
4-16, 4-18, 4-25, 4-29, 4-30, 4-32,
4-33, 4-35, 4-37, 4-39 共19道题。