有关互感系数 $M_{21}=M_{12}$ 的严格证明

文盛乐†

（湖南师范大学物理与信息科学学院，湖南 长沙 410081）

摘　要：利用毕奥--萨伐尔定律和由矢势表出的磁感应通量的计算公式，直接证明了彼此邻近的二电感线圈间的互感系数相等。

关键词：互感系数；毕奥—萨伐尔定律；矢势；磁感应通量

中图分类号：O441　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1003-7551(2008)01-0050-02

1 引言

众所周知,彼此相邻的二电感线圈,当其中一个线圈内的电流随时间发生变化时,在另一个线圈中往往也会引起感应电动势,这就是互感现象. 设第一个线圈中通有时变电流 $i_1(t)$、第二个线圈中通有时变电流 $i_2(t)$, 则二线圈中出现的互感电动势:

$$e_{M1}=-M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad e_{M2}=-M_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

式中 M_{21} 为第二线圈对第一线圈的互感系数(或简称互感), M_{12} 为第一线圈对第二线圈的互感系数. M_{21} 与 M_{12} 间的关系,虽为大家所共知,但一般的电磁学教材中，或不做证明而直接利用、或只从特殊例子出发做简单的证明与说明[1, 2]，均未给出其严格证明. 本文的目的,就在于利用大家熟知的毕奥--萨伐尔定律、磁感应通量及矢势的计算公式,直接证明二互感系数相等.

2　$M_{21}=M_{12}$ 的严格证明

证法 1. 设有两组线圈 l_1 和 l_2(l_1 和 l_2 也代表它们的总长)，l_1 和 l_2 所围的面积(一般可能为螺旋面,有如螺旋形楼梯的台级面)为 S_1 和 S_2. 于是,线圈 1 中的电流 i_1 在线圈 2 的面 S_2 上某点产生的磁场:

$$\boldsymbol{B}_{12}=\frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{i_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}, \tag{2}$$

同理,线圈 2 中的电流 i_2 在线圈 1 的面 S_1 上某点产生的磁场:

$$\boldsymbol{B}_{21}=\frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{l_2}\frac{i_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}'_{21}}{r'^3_{21}}, \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{r}_{12}$ 为自 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 到 S_2 上某点的矢经, $\boldsymbol{r}'_{21}$ 为自 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 到 S_1 上某点的矢经. 电流 i_1 的磁场在面 S_2 上的总磁感通量:

$$\Psi_{12}=\iint_{S_2}\boldsymbol{B}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=\iint_{S_2}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2\cdot\frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{i_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}=\frac{\mu_o i_1}{4\pi}\iint_{S_2}\oint_{l_1}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2, \tag{4}$$

电流 i_2 的磁场在面 S_1 上的总磁感通量:

$$\Psi_{21}=\iint_{S_1}\boldsymbol{B}_{21}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1=\iint_{S_1}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\cdot\frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{l_2}\frac{i_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}'_{21}}{r'^3_{21}}=\frac{\mu_o i_2}{4\pi}\iint_{S_1}\oint_{l_2}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\frac{\boldsymbol{r}'_{21}}{r'^3_{21}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1. \tag{5}$$

由互感系数的定义: $M_{12}=\Psi_{12}/i_1$, $M_{21}=\Psi_{21}/i_2$, 则有:

$$\begin{aligned}M_{21}&=\frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{l_2}\iint_{S_1}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\frac{\boldsymbol{r}'_{21}}{r'^3_{21}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1=\frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{l_2}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\iint_{S_1}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\times\nabla'\frac{1}{r'_{21}},\\ M_{12}&=\frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{l_1}\iint_{S_2}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=\frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{l_1}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\iint_{S_2}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2\times\nabla\frac{1}{r_{12}};\end{aligned} \tag{6}$$

† 通讯作者：wsl_hnsd@sohu.com

收稿日期：2008-01-18

$$\iint_{S_1} \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \times \nabla' \frac{1}{r'_{21}} = \oint_{l_1} \frac{1}{r'_{21}} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$$

$$\iint_{S_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \times \nabla \frac{1}{r_{12}} = \oint_{l_2} \frac{1}{r_{12}} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \tag{7}$$

（7）式只需在其两边点乘任一常矢量并利用史托克斯公式便可得出[3]；于是可以得到：

$$M_{21} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r'_{21}}$$

$$M_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{12}} \tag{8}$$

由于在积分的过程中， r_{12} 和 r'_{21} 的两端都遍及 l_1 和 l_2 与 S_1 和 S_2 上的所有点,因此,它们必对应相等. 于是得到：$M_{21}= M_{12}=M$.

证法 2. 利用矢势沿任一闭曲线的环流就是通过以该闭曲线为边界的曲面的磁感应通量来推证. 设 $\boldsymbol{A}_1$ 为电流 i_1 在 l_2 上产生的矢势， $\boldsymbol{A}_2$ 为电流 i_2 在 l_1 上产生的矢势，则有[3]：

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{i_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{12}}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{i_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{21}} \tag{9}$$

各线圈中的总磁通量：

$$\Psi_{21} = \oint_{l_1} \boldsymbol{A}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 = \oint_{l_1} (\oint_{l_2} \frac{\mu_o i_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{4\pi r_{21}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 = \frac{\mu_o i_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{21}}$$

$$\Psi_{12} = \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = \oint_{l_2} (\oint_{l_1} \frac{\mu_o i_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{4\pi r_{12}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = \frac{\mu_o i_1}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{12}} \tag{10}$$

因此有：

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{21}}$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{12}} \tag{11}$$

由于 $r_{21} = r_{12}$，所以

$$M_{21} = M_{12} \tag{12}$$

3 结语

互感系数在电磁感应中是一个很重要的量，不仅在电磁学、而且在其它学科如电工学、电子技术等课程中都起着重要作用,掌握它的严格证明对充分理解其物理意义亦有很大的促进作用.这里顺便指出，上述证法 1 中化梯度（见（6）式）的做法，实际上隐含了证法 2 的矢势过渡.两法表面上看为直接利用毕--萨定律与直接利用矢势，实际只是数学处理上略有不同而已。

参 考 文 献

[1]梁灿彬等. 电磁学（第二版）[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
[2]赵凯华等. 电磁学（下册）[M]. 北京：高等教育出版社，1978.
[3]郭硕鸿. 电动力学（第二版）[M]. 北京：高等教育出版社，1997.