CRETCP – IAȘI

PRINCIPII SI METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICA

- selecție de probleme pentru clasa a VII-a -

- **Principul parității**
- **Probleme de numărare**
- **Principiul Dirichlet**
- **Principiul invariantului**
- **Probleme de logică**
- **Probleme de ordonare**
- **Metoda reducerii la absurd**

Profesor: SILVIU BOGA, silviumath@yahoo.com

Surse bibliografice utilizate:

1. Matematică pentru grupele de performanță - clasele VI-VIII, V. Pop, V. Lupșor, Ed. Dacia Educațional
2. Matematica gimnazială dincolo de manual, A. Ghioca, L. Cojocaru, Ed. GIL
3. Probleme elementare de matematică, M. Ganga, Ed. MATHPRESS

Iași – 23 octombrie 2010

CUPRINS

3.Câteva principii şi metode de rezolvare a problemelor de matematică

3.1. Principiul parităţii

În matematica elementară întâlnim multe probleme care folosesc noţiunea de paritate. Principiul parităţii constă în separarea cazurilor pare şi impare dintr-o situaţie. Regulile parităţii:

- suma a două numere pare este un număr par
- suma a două numere impare este un număr par
- suma dintre un număr par şi altul impar este un număr impar
- produsul a două numere pare este un număr par
- produsul a două numere impare este un număr impar
- produsul dintre un număr par şi un număr impar este un număr par.

Prezentăm în continuare câteva probleme rezolvate care folosesc principiul parităţii.

R3.1.1. Demonstraţi că dacă suma a două numere întregi este un număr impar, produsul lor este un număr par.

Soluţie. Fie a şi b numerele. Din ipoteză $a+b=2n+1$, $n\in\mathbf{N}$. Deci unul din numerele a sau b este par. Fie $a=2k$. Atunci $b=2n+1-a=2n+1-2k=2(n-k)+1$, adică b este impar. Atunci $a\cdot b$ este produsul dintre un număr par şi altul impar, deci va fi impar.

R3.1.2. Demonstraţi că 2^n $(n\geq 2, n\in\mathbf{N})$ se poate scrie ca o sumă de două numere naturale impare consecutive, iar 3^n se poate scrie ca o sumă de trei numere naturale consecutive şi ca sumă a trei numere impare consecutive.

Soluţie. Pentru orice $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$, 2^n este număr par. Avem:

$$2^n=2\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}+2^{n-1}=(2^{n-1}-1)+(2^{n-1}+1)$$

Pentru $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$, $2^{n-1}-1$ şi $2^{n-1}+1$ sunt impare consecutive.

Pentru orice $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$, $3^n\in\mathbf{N}$ şi

$$3^n=3\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1}=(3^{n-1}-1)+3^n+(3^{n-1}+1)$$

Numerele $3^{n-1}-1$, 3^n şi $3^{n-1}+1$ sunt consecutive pentru $n\geq 2$.

Mai avem că

$$3^n=3^{n-1}\cdot 3=3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1}=(3^{n-1}-2)+3^{n-1}+(3^{n-1}+2),$$

unde $3^{n-1}-2, 3^{n-1}, 3^{n-1}+2$ sunt impare consecutive.

R3.1.3. Se consideră şirul numerelor naturale de la 1 la 1979 adică: 1,2,3,4,...,1977,1978,1979. Luaţi la întâmplare oricare două numere din acest şir şi înlocuiţi-le cu modulul diferenţei lor. La fiecare operaţie de acest fel numărul numerelor din şir scade cu unu (fiindcă am înlocuit două numere cu unul) şi vom obţine, în final, un singur număr. Arătaţi că acest număr este par.

Soluţie. La fiecare etapă a operaţiei descrise, numărul numerelor impare din şir rămâne neschimbat sau descreşte cu doi, deoarece dacă, în primul caz, luăm un număr par şi unul impar, modulul diferenţei lor este impar, deci numărul impar l-am înlocuit cu altul impar, iar în al doilea caz dacă luăm două numere impare, modulul diferenţei lor este un număr par, deci numărul numerelor impare scade cu doi. În şirul 1,2,3,...,1979 avem (1+1979):2 numere impare, adică 990.

La fiecare pas rămâne un număr par de numere impare şi atunci ultimul număr va fi cu siguranţă par.

R3.1.4. Se consideră numerele impare $k, n_1, n_2, ..., n_k$. Să se demonstreze că printre numerele: $\frac{n_1+n_2}{2}, \frac{n_2+n_3}{2}, ..., \frac{n_{k-1}+n_k}{2}, \frac{n_k+n_1}{2}$ există un număr impar de numere impare.

Soluţie. Suma a două numere impare este un număr par, deci numerele $\frac{n_1+n_2}{2}, \frac{n_2+n_3}{2}, ..., \frac{n_k+n_1}{2}$ sunt naturale. Să presupunem că printre acestea se află un număr par de numere impare. Atunci suma lor

$$\frac{n_1+n_2}{2} + \frac{n_2+n_3}{2} + ... + \frac{n_k+n_1}{2} = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

este un număr par. Dar aceeaşi sumă este suma unui număr impar de numere impare deci este un număr impar. Contradicţie. Deci presupunerea făcută a fost falsă, deci printre numerele considerate în ipoteză există un număr impar de numere impare.

3.2. Probleme de numărare

Probleme de numărare întâlnim în diverse situaţii din viaţa cotidiană. În matematica şcolară sunt frecvente problemele de numărare ca de exemplu: numărul divizorilor unui număr, numărul triunghiurilor, numărul patrulaterelor dintr-o anumită configuraţie, numărul cifrelor unui număr, numărul termenilor unui şir, etc. Prezentăm în continuare câteva probleme care conduc la operaţia de numărare.

3.2.1. Numărul divizorilor şi suma divizorilor unui număr natural

3.2.1.1. a) Numărul divizorilor unui număr natural

Fie *a* un număr natural compus ce are următoarea descompunere în factori primi: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot .... \cdot p_n^{\alpha_n}$, unde $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt numere prime iar $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$. Pentru a obţine numărul divizorilor lui *a* formăm tabelul:

$$\begin{array}{cccccl} p_1^0 & p_1^1 & p_1^2 & ... & p_1^{\alpha_1} & \alpha_1+1 \text{ termeni} \\ p_2^0 & p_2^1 & p_2^2 & ... & p_2^{\alpha_2} & \alpha_2+1 \text{ termeni} \\ ... & ... & ... & ... & ... & \\ p_n^0 & p_n^1 & p_n^2 & ... & p_n^{\alpha_n} & \alpha_n+1 \text{ termeni} \end{array} \quad (1)$$

Observăm că:

1) Oricare număr din tabel este un divizor pentru *a*.

2) Linia întâi conține α_1+1 termeni, linia a doua conține α_2+1 termeni,..., ultima linie conține α_n+1 termeni.

3) Dacă înmulțim pe rând fiecare număr din linia întâi cu fiecare număr din linia a doua obținem $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)$ divizori ai lui *a*. Înmulțind apoi pe fiecare din aceste numere cu fiecare număr din linia a treia obținem $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)$ numere şi fiecare din acestea sunt divizori ai lui *a*. Continuând raționamentul obținem $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)...(\alpha_n+1)$ numere care sunt divizori ai lui *a*.

4) În numărul acestor divizori este inclus numărul însuşi şi divizorul 1.

Am obținut astfel următoarea

Teorema 3.2.1. Numărul divizorilor numărului $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot .... \cdot p_n^{\alpha_n}$ este $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1)$.

3.2.1.2. b) Suma divizorilor unui număr natural

Să calculăm întâi suma:

$$S = 1 + x + x^2 + ... + x^n \tag{2}$$

Avem

$$x \cdot S = x + x^2 + ... + x^{n-1} + x^n + x^{n+1} \tag{3}$$

Din (3) şi (2) scăzute membru cu membru obținem:

$$x \cdot S - S = (x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1}) - (1 + x + x^2 + ... + x^n)$$

care se mai scrie $S(x-1) = x^{n+1} - 1$, de unde

$$S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \tag{4}$$

cu $x \neq 1$.

Scriem produsul de *n* sume, având termenii pe cele *n* linii din tabelul (1) şi obținem:

$$(1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + ... + p_2^{\alpha_2})...(1 + p_n + p_n^2 + ... + p_n^{\alpha_n}) \tag{5}$$

Cu relația (4), (5) devine

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot ... \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

Am obținut astfel

Teorema 3.2.2. Suma divizorilor numărului $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot .... \cdot p_n^{\alpha_n}$ este

$$S = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot ... \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

Probleme rezolvate

R3.2.1. Fie S suma divizorilor naturali ai numărului 2001. Să se arate că $5 \cdot S$ este număr natural pătrat perfect.

Soluție. Fiindcă $2001=3^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1$, suma divizorilor numărului 2001 este:

$$S = \frac{3^2-1}{3-1} \cdot \frac{23^2-1}{23-1} \cdot \frac{29^2-1}{29-1} = 4 \cdot 24 \cdot 30$$

Atunci $5 \cdot S = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 120^2$, deci $5 \cdot S$ este pătrat perfect.

R3.2.2. Să se arate că pătratul produsului tuturor divizorilor naturali ai numărului 2001 este 2001^8.

Soluție. Avem următoarea

Lema 3.2.1. Dacă $d_1, d_2, ..., d_n$ sunt toți divizorii naturali ai numărului n atunci avem relația:

$$(d_1 \cdot d_2 ... d_k)^2 = n^k \qquad (*)$$

Fiindcă 1 şi n sunt şi ei divizori, considerând $d_1 < d_2 < ... < d_k$ obținem:

$$d_1 = \frac{n}{d_k}, d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}, ..., d_k = \frac{n}{d_1}$$

relații care înmulțite membru cu membru dau

$$d_1 \cdot d_2 ... d_k = \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} ... \frac{n}{d_1}$$

de unde $(d_1 \cdot d_2 ... d_k)^2 = n^k$.

În cazul nostru $2001 = 3^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1$, numărul divizorilor lui 2001 este: (1+1)(1+1)(1+1)=8. Pentru cei opt divizori naturali ai numărului 2001 avem relația (*)

$$(d_1 \cdot d_2 ... d_8)^2 = 2001^8.$$

3.3. Principiul lui Dirichlet

Matematicianul german Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) a elaborat un principiu extrem de simplu cu aplicații neaşteptate în variate domenii, principiu care-i poartă numele şi pe care-l enunțăm mai jos, fiind o metodă de demonstrație de tipul următor.

"Dacă repartizăm $n+1$ obiecte în n cutii, atunci cel puțin două obiecte vor fi în aceeaşi cutie."

Justificare: Considerăm cazul cel mai nefavorabil aşezând în fiecare cutie câte un obiect. Deci am folosit n cutii şi n obiecte. Obiectul cu numărul $n+1$ trebuie pus şi el într-o cutie oarecare. Dar în acea cutie există deja un obiect. Aşadar în acea cutie există deja un obiect pus anterior. În acea cutie vor fi două obiecte.

Forma generală a principiului lui Dirichlet este următoarea:

"Dacă aşezăm $kn+1$ obiecte în n cutii, atunci cel puțin $k+1$ obiecte, $k \in \mathbf{N}$, vor fi în aceeaşi cutie."

În literatura matematică principiul lui Dirichlet este întâlnit şi sub denumirea de "principiul cutiei", cu precizarea că denumirea de "cutie" desemnează "grupe de obiecte", stabilite după anumite criterii, iar "obiectele" desemnează lucruri, numere, figuri geometrice, etc. Prezentăm în continuare câteva probleme ale căror soluţii se bazează pe principiul de mai sus.

Probleme rezolvate

R3.3.1. La un turneu de şah au participat $n \geq 2$ şahişti. Să se demonstreze că în orice moment al turneului dinaintea ultimei runde cel puţin doi şahişti au acelaşi număr de victorii.

Soluţie. În orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, fiecare şahist a jucat maximum $n-2$ partide şi a putut obţine $0,1,2,...,n-2$ victorii, deci în total $n-1$ posibilităţi (cutii). Fiindcă la turneu au participat *n* şahişti rezultă că cel puţin doi şahişti au acelaşi număr de victorii înaintea ultimei runde.

R3.3.2. Arătaţi că în orice mulţime formată din 5 numere naturale există două a căror diferenţă este divizibilă cu 4.

Soluţie. La împărţirea unui număr cu 4 obţinem unul din resturile 0,1,2,3 (deci patru cutii). Fiindcă avem 5 numere (5 obiecte şi 4 cutii) rezultă că cel puţin două numere vor da acelaşi rest la împărţirea cu 4. Ele sunt de forma $x = 4k + r$ şi $y = 4l + r$. Atunci diferenţa lor este $x - y = 4(k - l)$, adică un număr divizibil cu 4.

R3.3.3. Într-o şcoală sunt 367 elevi. Să se demonstreze că există cel puţin doi elevi care-şi serbează ziua în aceeaşi zi a anului.

Soluţie. Un an are 365 sau 366 zile. Considerând cazul cel mai nefavorabil când în fiecare zi a anului ar fi născut câte un elev, înseamnă că în total ar fi născuţi 365 sau 366 elevi, dar în total sunt 367 elevi. Deci al 367-lea elev a fost şi el născut într-o zi a anului în care a mai fost născut un elev. Deci într-o zi s-au născut 2 elevi, deci cei doi îşi vor serba ziua de naştere în aceeaşi zi.

R3.3.4. Fiind date $n+1$ numere naturale $(n \neq 0)$ atunci cel puţin două dintre ele dau acelaşi rest la împărţirea cu *n*.

Soluţie. Folosim teorema împărţirii cu rest. Fiind date numerele naturale *a* şi *b* $(b \neq 0)$ există în mod unic numerele naturale *q* şi *r* astfel ca

$$a = b \cdot q + r \quad \text{cu} \quad r < b .$$

În cazul problemei noastre numerele fiind împărţite la *n* există pentru rest *n* valori posibile: 0,1,2,...,*n*-1. Fiindcă împărţim *n*+1 numere vor exista *n*+1 resturi, dintre care cel mult *n* sunt diferite. Rezultă că cel puţin două dintre cele *n*+1 numere împărţite la *n* dau acelaşi rest.

R3.3.5. Să se arate că oricum am alege 7 numere pătrate perfecte (distincte) există cel puţin două a căror diferenţă se divide cu 10.

Soluţie. Dacă *a* este numărul a cărui pătrat este a^2 atunci la împărţirea cu 10 a lui *a* obţinem unul din resturile: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Atunci a^2, la împărţirea cu 10 va da unul din resturile: 0,1,4,5,6,9. Fiindcă avem 7 pătrate perfecte şi numai resturile 0,1,4,5,6,9, deci există cel puţin două pătrate perfecte care dau acelaşi rest la împărţirea cu 10, deci diferenţa lor se divide cu 10.

3.4. Principiul invariantului

Invariantul este o mărime, o relaţie, sau o proprietate care rămâne neschimbată în urma aplicării sau intervenţiei unei transformări.

Deci o situaţie iniţială este supusă în mod repetat unor transformări. De obicei se cere să se demonstreze că în urma acestor transformări nu se poate ajunge la o anumită formă. Aceasta se poate face alegând caracteristica obiectului care a fost supus transformării, adică "invariantul" transformării. Dacă în final obiectul nu posedă "invariantul" atunci el nu poate fi obţinut în urma transformărilor descrise.

Probleme rezolvate

R3.4.1. Considerăm un număr natural căruia îi schimbăm în mod arbitrar ordinea cifrelor. Este posibil ca diferenţa dintre numărul iniţial şi cel final să fie 2003?

Soluţie. Restul împărţirii numărului la 9 este acelaşi cu restul împărţirii sumei cifrelor sale la 9. Suma cifrelor este aceeaşi, rezultă că restul împărţirii numărului la 9 este un invariant.

R3.4.2. Pe o tablă sunt scrise semne de "+" şi " ". Ştergem două semne şi le înlocuim cu un semn, după următoarea regulă: dacă cele două semne şterse sunt identice le înlocuim cu "+", iar dacă ştergem două semne diferite le înlocuim cu " ". Arătaţi că ultimul semn care rămâne după un număr de paşi nu depinde de ordinea alegerii perechilor.

Soluţie. În acest caz paritatea numărului de minusuri va fi invariantul. Dacă la început numărul de minusuri este impar, ultimul semn care va rămâne este minus, iar dacă la început numărul de minusuri este par, la sfârşit va rămâne plus.

R3.4.3. Trei greieri se găsesc pe o dreaptă în ordinea: A, B, C. Ei încep să sară capra, adică să sară unul peste altul (dar nu peste doi odată). Pot fi în aceeaşi ordine după 2003 sărituri?

Soluţie. În urma unei sărituri de acest fel numărul perechilor de greieri inversaţi creşte sau se micşorează cu 1 (proprietatea invariantă). După un număr impar de sărituri (2003) va exista un număr impar de perechi de greieri inversaţi. Deci nu se poate obţine ordinea iniţială (ce nu conţine o astfel de pereche).

R3.4.4. O cameră are dimensiunile podelei de 7m şi 10m. În cele patru colţuri ale camerei se aşează câte un dulap având baza pătrat cu latura de 1m. Să se arate că rămâne din suprafaţa podelei nu poate fi acoperită cu plăci dreptunghiulare de dimensiuni 3m×1m.

Soluţie. Se împarte camera într-o reţea de pătrate cu latura 1m pe care le vopsim în trei culori: roşu, alb, negru ca mai jos:

RANRANRANR
ANRANRANRA
NRANRANRAN
RANRANRANR
ANRANRANRA
NRANRANRAN
RANRANRANR

Obținem 24 de R, 23 de A, 23 de N. Eliminând colțurile rămân 20 de pătrățele roşii, 23 de pătrățele albe, 23 de pătrățele negre. Dar oricum am aşeza o placă de 3×1 ea acoperă un pătrățel roşu, unul alb şi unul negru. Dacă s-ar putea acoperi suprafața cu un număr întreg de plăci ar trebui să existe acelaşi număr de pătrățele pentru fiecare culoare.

3.5. Probleme de logică

Am inclus aici câteva probleme a căror rezolvare se realizează printr-o serie de judecăți logice ce solicită inventivitate, perspicacitate, etc. şi foarte puțin calcul.

Probleme rezolvate

R3.5.1. Mama a observat că din dulap au dispărut cinci tablete de ciocolată. Ele puteau fi luate de cei trei copii: A, B, C. Fiind traşi la răspundere, ei au dat mai întâi următoarele răspunsuri:
A: N-am luat nici o ciocolată!
B: N-am luat nici o ciocolată!
C: N-am luat nici o ciocolată!

După un nou "interogatoriu" copiii au făcut următoarele declarații:
A: B a luat mai multe tablete decât C!
B: (către A): Minți!
C: Toate au fost luate de A şi B!
A (către C): Minți!

Aflați câte tablete de ciocolată au fost luate de către fiecare copil, ştiind că fiecare a făcut atâtea declarații false câte tablete de ciocolată a luat.

Soluție. Fiindcă au "dispărut" 5 ciocolate şi s-au făcut 7 declarații, rezultă că cinci declarații erau false iar 2 (7-5) adevărate.

La al doilea "interogatoriu" prima afirmație a lui A este fie adevărată şi atunci afirmația lui B este falsă, fie este falsă şi atunci afirmația lui B este adevărată. Tot din "interogatoriul" al doilea afirmația lui C este fie adevărată şi atunci cea de-a doua afirmație a lui A este falsă, fie este falsă şi atunci cea de-a doua afirmație a lui A este adevărată. Deci rezultă că cele două afirmații adevărate au fost făcute la cel de-al doilea "interogatoriu", deci la primul "interogatoriu" toți copiii au făcut declarații false, de unde rezultă că fiecare din cei trei copii a luat cel puțin o ciocolată. Deci a doua afirmație a lui C este falsă, deci C a luat două tablete de ciocolată. B face numai două afirmații, deci el nu poate lua mai multe ciocolate decât C, rezultă că la al doilea "interogatoriu" prima afirmație a lui A este falsă, deci afirmația lui B este adevărată. Deci A a luat două ciocolate, B a luat o ciocolată, iar C a luat două ciocolate.

R3.5.2. Într-un bloc locuiesc familiile A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, R. La parter şi la fiecare etaj locuiesc câte două familii. Se mai ştie că: Familia A locuieşte cu două etaje mai jos ca familia B, iar aceasta cu şase etaje mai sus ca familia C. Familiile F şi G locuiesc la acelaşi etaj. Familia M locuieşte cu patru etaje mai sus ca familia N şi cu două etaje mai jos ca familia F. Un etaj deasupra familiei N locuieşte familia O. Familia A locuieşte cu trei etaje mai sus ca familia R, iar familia P locuieşte cu cinci etaje mai jos decât familia G.

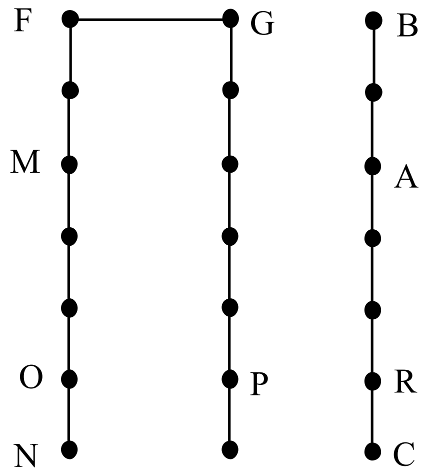
a) Câte etaje are blocul?

b) La ce etaj locuieşte familia A?

Soluţie. a) Fiindcă la parter şi la fiecare etaj locuiesc două familii, iar în tot blocul locuiesc 16 familii, rezultă că blocul are opt nivele (parter şi şapte etaje).

b) Diagramele alăturate (stabilite conform enunţului) pun în evidenţă modul cum sunt distribuite în bloc familiile N, O, M, F, G, P precum şi C, R, A, B. Blocul având opt nivele, rezultă că familia N poate locui numai la parter sau la etajul întâi. Aceeaşi remarcă şi pentru familia C. Familiile N şi C nu pot locui la acelaşi nivel, pentru că ar trebui ca familiile O, P, R să locuiască la acelaşi etaj, situaţie imposibilă, pentru că la un nivel pot locui numai două familii. Dacă familia N locuieşte la parter atunci familia C ar trebui să locuiască la etajul întâi, situaţie imposibilă deoarece ar rezulta că familiile O, P, C locuiesc la acelaşi etaj. Dacă familia N locuieşte la etajul întâi, atunci familia C locuieşte la parter. Urmărind comparativ diagramele observăm că este o situaţie posibilă pentru că la un nivel pot locui numai două familii.

Acestea fiind precizate putem stabili distribuţiile familiilor în bloc: Familiile F şi G la etajul şapte, familia B la etajul şase, familia M la etajul cinci, familia A la etajul patru, familiile P şi O la etajul doi, familiile N şi R la etajul întâi, iar familia C la parter. În cele şase locuri neocupate se vor distribui familiile D, E, H, I, K, L după voie.



R3.5.3. La un turneu de fotbal participă 15 echipe, fiecare dintre acestea jucând cu toate celelalte. Pentru victorie se acordă 3 puncte, pentru meci egal 2 puncte, iar pentru înfrângere un punct. În clasamentul întocmit la sfârşitul turneului nu există echipe cu acelaşi număr de puncte. Ştiind că ultima echipă are 21 de puncte, să se arate că prima a făcut cel puţin un meci nul.

Soluţie. Fiecare echipă a disputat 14 meciuri. Numărul meciurilor disputate a fost $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ deoarece fiecare meci a fost numărat de două ori (şi când a jucat A cu B şi când a jucat B cu A). Fiindcă echipa clasată pe ultimul loc are 21 de puncte, iar în clasament nu sunt echipe cu acelaşi număr de puncte rezultă că numărul de puncte este mai mare sau egal cu

$$21+(21+1)+(21+2)+...(21+14)=21\cdot 15+\frac{14\cdot 15}{2}=420$$

Fiindcă la fiecare meci s-au acordat 4 puncte, rezultă că numărul de puncte acordat a fost 105·4=420. Deci echipele au obținut punctajele: 21, 22,23,...,34, 35.

Să arătăm că echipa de pe locul întâi cu 35 puncte a făcut cu siguranță cel puțin un meci nul. Presupunem că nu a făcut nici un meci nul. Atunci dacă x este numărul victoriilor şi y numărul înfrângerilor avem:

$$x+y=14 \quad \text{şi} \quad 3x+y=35,$$

de unde $x=\frac{21}{2}$ şi $y=\frac{7}{2}$. Dar x, y trebuie să fie naturale. Deci presupunerea făcută este falsă, atunci echipa de pe locul întâi a făcut cel puțin un meci nul.

R3.5.4. La un concurs de atletism participă trei echipe: A_1, A_2, A_3, fiecare cu trei concurenți. Concurentul care soseşte primul primeşte 18 puncte, cel care soseşte al doilea 16 puncte, cel care soseşte al treilea 14 puncte,..., cel care soseşte ultimul primeşte două puncte. Punctajul unei echipe este suma punctelor obținute de cei trei reprezentanți ai săi. Aflați ce loc a ocupat fiecare echipă ştiind că:

i) Primele trei locuri au fost ocupate de concurenți de la echipe diferite.

ii) Fiecare concurent de la echipa A_2 avea în fața sa un concurent de la echipa A_1.

iii) Concurenții echipei A_3 au sosit unul după altul.

Soluție. Din prima şi a treia condiție rezultă că cei trei reprezentanți ai echipei A_3 au sosit al treilea, al patrulea şi al cincilea. Din primele două condiții rezultă că primul a sosit un concurent de la echipa A_1, iar al doilea un concurent de la echipa A_2. Din cele de mai sus şi din a doua condiție rezultă că al şaselea şi al optulea au sosit concurenții de la echipa A_1, iar al şaptelea şi al nouălea au fost concurenții de la echipa A_2. Deci echipa A_1 a acumulat 18+8+4=30 (puncte), echipa A_2 a acumulat 16+6+2=24 (puncte), iar echipa A_3 a acumulat 14+12+10=36 (puncte). Deci pe locul întâi se află echipa A_3, pe locul doi echipa A_1, iar pe locul trei echipa A_2.

R3.5.5. Opt şahişti participă la un turneu, jucând fiecare cu fiecare. Pentru fiecare victorie un jucător primeşte un punct, pentru remiză un jumătate de punct, iar pentru înfrângere nu primeşte nici un punct. La sfârşitul turneului primii doi clasați au obținut punctaje diferite, iar cel de-al doilea a obținut atâtea puncte câte au obținut ultimii patru şahişti împreună. Să se afle cum s-a încheiat partida dintre şahiştii clasați pe locurile trei şi cinci.

Soluție. Fiindcă au fost opt jucători şi fiecare a jucat cu fiecare, un şahist a jucat şapte partide şi ar fi putut câştiga cel mult şapte puncte (când învingea în toate cele şapte partide). Ultimii patru şahişti au jucat între ei şase partide. (Dacă A,B,C,D sunt ultimii şahişti, au jucat: A cu B, A cu D, B cu C, B cu D şi C cu D).

Deci ultimii patru şahişti au realizat împreună cel puţin şase puncte. Deci şahistul de pe locul doi a obţinut cel puţin şase puncte (deoarece el a obţinut un număr egal de puncte cu suma ultimilor patru). Fiindcă primii doi jucători au punctaje diferite înseamnă că al doilea a obţinut exact şase puncte, căci dacă obţinea 6,5 puncte primii doi aveau acelaşi punctaj, iar dacă ar fi obţinut şapte puncte era pe primul loc. Deci şahiştii de pe ultimele patru locuri au obţinut exact şase puncte, aceasta înseamnă că ei au pierdut toate partidele jucate împotriva primilor patru clasaţi. Deci şahistul de pe locul cinci a pierdut partida susţinută cu cel de pe locul trei.

R3.5.6. În trei coşuri sunt mere. Câte mere sunt în fiecare coş ştiind că în primele 2 împreună este un măr, în ultimele 2 împreună este cel puţin un măr, iar în ultimul şi al treilea împreună, numai unul.

Soluţie. Dacă mărul din primele 2 coşuri s-ar afla în primul coş, atunci din a treia condiţie ar rezultat că în al treilea coş nu se află nici un măr, deci al doilea şi al treilea coş ar fi goale şi astfel nu ar avea loc a doua condiţie. În concluzie primul coş este gol, al doilea coş conţine un măr, iar al treilea coş conţine tot un măr.

3.6. Probleme de ordonare

Pentru a stabili care dintre două numere *a* şi *b* este mai mare, putem folosi mai multe procedee, dintre care cele mai des întrebuinţate sunt:

1) Stabilim semnul diferenţei $a-b$.

Dacă $a-b>0$, atunci $a>b$.

Dacă $a-b=0$, atunci $a=b$.

Dacă $a-b<0$, atunci $a<b$.

2) Dacă numerele *a* şi *b* sunt pozitive şi $b\neq 0$, comparăm raportul $\frac{a}{b}$ cu 1.

Dacă $\frac{a}{b}<1$, atunci $a<b$.

Dacă $\frac{a}{b}=1$, atunci $a=b$.

Dacă $\frac{a}{b}>1$, atunci $a>b$.

3) În unele situaţii este suficient să demonstrăm existenţa unui număr *c* situat între cele două numere (exemplu: din $a<c<b$, rezultă $a<b$).

În unele situaţii avem nevoie de metode ingenioase pentru a rezolva problemele. Există cazuri când operaţia de ordonare ajută la dovedirea egalităţii a două numere *x* şi *y* prin stabilirea simultană a inegalităţilor $x\leq y$ şi $y\geq x$.

Probleme rezolvate

R3.6.1. Comparaţi numerele 31^{11} cu 17^{14}.

Soluție. $31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$.

R3.6.2. Scrieți în ordine crescătoare numerele:

$$4^{22}, 3^{34}, 2^{44}, 63^7.$$

Soluție. $63^7 < 64^7 = (2^6)^7 = 2^{42} < 2^{44} = (2^2)^{22} = 4^{22} < 2^{51} = (2^3)^{17} = = 8^{17} < 9^{17} = (3^2)^{17} = 3^{34}$. Deci $63^7 < 2^{44} = 4^{22} < 3^{34}$.

R3.6.3. Să se arate că pentru orice numere naturale a şi b avem

$$\frac{a+2^{360}}{a3^{240}} < \frac{b+5^{1800}}{b+7^{1440}}$$

Soluție. $2^{360} = (2^3)^{120} = 8^{120}$; $3^{240} = (3^2)^{120} = 9^{120}$.

Atunci obținem că $2^{360} < 3^{240}$, de unde rezultă că $a+2^{360} < a+3^{240}$ şi deci $\dfrac{a+2^{360}}{b+3^{240}} < 1$

$5^{1800} = (5^5)^{360} = 3125^{360}$; $7^{1440} = (7^4)^{360} = 2401^{360}$

Rezultă că $5^{1800} > 7^{1440}$, de unde rezultă că $b+5^{1800} > b+7^{1440}$ şi deci $\dfrac{b+5^{1800}}{b+7^{1400}} > 1$.

Deci prima fracție din ipoteză este subunitară iar a doua este supraunitară şi atunci relația cerută este adevărată.

R3.6.4. Comparați fracțiile A şi B unde

$$A = \frac{2+2^2+2^3+...+2^{1997}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{1997}}} \quad \text{şi} \quad B = \frac{3+3^2+...+3^{1331}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{1331}}}$$

Soluție. Amplificăm prima fracție cu 2^{1998} şi a doua cu 3^{1332} şi obținem:

$$A = \frac{2^{1998}(2+2^2+2^3+...+2^{1997})}{2^{1998}+2^{1997}+...+2} = 2^{1998} = (2^3)^{666} = 8^{666}$$

$$B = \frac{3^{1332}(3+3^2+...+3^{1331)}}{3+3^2+...+3^{1331}} = 3^{1332} = (3^2)^{666} = 9^{666}.$$

Deci $A > B$.

3.7. Metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd este o metodă specifică de demonstrație în matematică. La baza acestei metode stă una din legile fundamentale ale logicii clasice: legea terțului exclus, ce are următorul enunț:

Din două propoziții contradictorii una este adevărată, cealaltă falsă, iar a treia posibilitate nu există.

Legea terţului exclus nu ne precizează care din cele două propoziţii este adevărată şi care este falsă.

Când la două propoziţii contradictorii aplicăm legea terţului exclus este suficient să stabilim că una dintre ele este falsă pentru a deduce că cealaltă este adevărată.

Metoda reducerii la absurd constă în a admite în mod provizoriu, ca adevărată propoziţia contradictorie propoziţiei de demonstrat, apoi pe baza acestei presupuneri se deduc o serie de consecinţe care duc la un rezultat absurd, deoarece ele contrazic sau ipoteza problemei date sau un adevăr stabilit mai înainte. Mai departe raţionăm astfel: dacă presupunerea ar fi fost adevărată, atunci în urma raţionamentelor logic corecte ar fi trebuit să ajungem la o concluzie adevărată, deoarece am ajuns la o concluzie falsă, înseamnă că presupunerea noastră a fost falsă. Aceasta duce la concluzia că presupunerea făcută nu este posibilă şi rămâne ca adevărată concluzia propoziţiei date.

Metoda reducerii la absurd nu se reduce la propoziţia că "a demonstra o propoziţie este acelaşi lucru cu a demonstra contrara reciprocei ei", deoarece pot apărea şi situaţii în care nu se contrazice ipoteza ci o altă propoziţie (un rezultat cunoscut, o axiomă, o teoremă). Metoda reducerii la absurd se foloseşte atât în rezolvarea problemelor de calcul (de aflat) cât şi la rezolvarea problemelor de "demonstrat". Metoda este des utilizată în demonstrarea teoremelor reciproce, precum şi în demonstrarea teoremelor de unicitate.

Probleme rezolvate

R3.7.1. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ fracţia $\dfrac{39n+4}{26n+3}$ este ireductibilă.

Soluţie. Presupunem că fracţia este reductibilă şi fie $d = (39n+4, 26n+3)$ cu $d \in \mathbf{N}^*$, $d \neq 1$. Din $d \mid (39n+4)$ şi $d \mid (26n+3)$ obţinem că $d \mid (78n+8)$ şi $d \mid (78n+9)$, de unde rezultă că $d \mid [78n+9-(78n+8)]$, deci $d \mid 1$, de unde rezultă $d = 1$. Fals.

R3.7.2. Să se arate că nu există numere întregi a pentru care numerele $\dfrac{14a+5}{9}$ şi $\dfrac{17a-5}{12}$ să fie simultan întregi.

Soluţie. Presupunem că există numere întregi a astfel ca $\dfrac{14a+5}{9}$ şi $\dfrac{17a-5}{12}$ să fie simultan întregi, adică pentru $b, c \in \mathbf{Z}$, $\dfrac{14a+5}{9} = b$ şi $\dfrac{17a-5}{12} = c$, de unde $14a+5 = 9b$ şi $17a-5 = 12c$ şi scăzând prima relaţie din a doua obţinem: $3a-10 = 12c-9b$, de unde $10 = 3a-12c+9b$ sau $10 = 3(a-4c+3b)$. Atunci obţinem că 3 divide pe 10, ceea ce este absurd.

R3.7.3. Considerăm trei drepte diferite d_1, d_2, d_3 concurente într-un punct O. Arătați că cel puțin unul din unghiurile formate are măsura mai mare sau cel puțin egală cu 60°.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem concluzia falsă, adică nu există un unghi cu măsura mai mare sau egală cu 60°. Atunci cele şase unghiuri formate ar avea suma măsurilor mai mică decât 360°. Am ajuns la o contradicție deoarece suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360°. Deci presupunerea făcută este falsă, deci există cel puțin un unghi cu măsura de 60°.

PRINCIPII ŞI METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

3.1 PRINCIPIUL PARITAŢII

3.1.1. Se consideră un număr natural impar n şi 2003 numere, fiecare dintre ele egale cu n sau $-n$. Arătaţi că nu putem împărţi cele 2003 numere în două grupe, astfel încât suma numerelor dintr-o grupă să fie egală cu suma numerelor din cealaltă grupă.

3.1.2.. Suma unui număr par de numere consecutive impare este 7984. Să se găsească aceste numere.

Gigel Buth

3.1.3.. Numerele 1,2,...,100 sunt scrise pe 100 bileţele (câte un număr pe fiecare bileţel). Se aleg la întâmplare două bileţele şi în locul lor se pune un bileţel pe care este scris modulul diferenţei numerelor de pe cele două bileţele (cele două bileţele alese se aruncă). Procedăm la fel cu celelalte 99 bileţele până când rămâne un singur bileţel. Ce paritate are numărul scris pe acest bileţel?

3.1.4.. Se consideră şirul $9^1, 9^2, 9^3, ..., 9^{1998}$. Se aleg din acest şir doi termeni oarecare, se împarte cel mai mare din aceşti doi termeni la cel mai mic, iar în şir în locul celor doi termeni se scrie câtul împărţirii obţinute. Noului şir i se aplică aceeaşi operaţie şi se continuă până când rămâne un singur termen. Să se afle paritatea acestui termen şi ultima sa cifră.

Manuela Prajea

3.1.5. Un elev a rupt la întâmplare 13 foi dintr-o carte, a adunat numerele tuturor paginilor rupte şi a spus că rezultatul se divide cu 4. Este adevărat? Justificaţi răspunsul.

3.1.6. Dacă $m \in \mathbf{N}$, cercetaţi dacă fracţia $\dfrac{9^m + 63}{5^m + 15}$ este ireductibilă.

Gh. Tutulan

3.1.7. Se consideră numărul $E = \dfrac{5\cdot(-1)^m + 2\cdot(-1)^{n+1}}{4\cdot(-1)^{2-n} + a\cdot(-1)^m}$, unde $m, n \in \mathbf{Z}$.

Să se determine numerele naturale a pentru care E este număr întreg.

Monica Mureşan

3.1.8. Determinați numerele naturale n, $n \geq 2$, pentru care există o alegere a semnelor + și – astfel încât $1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ldots \pm n = 0$.

3.2. PROBLEME DE NUMĂRARE

3.2.1. Aflați toate numerele naturale care se divid cu 30 și au 30 de divizori.

3.2.2. Determinați toate numerele de patru cifre, descompuse în factori primi, care au suma bazelor egală cu suma exponenților.

Adrian Zanoschi

3.2.3. Să se găsească un număr de cinci cifre știind că se divide cu 3 și cu 11 și că numărul divizorilor săi este 63.

3.2.4. Să se determine numerele naturale care au exact patru divizori, iar produsul acestor divizori este 3025.

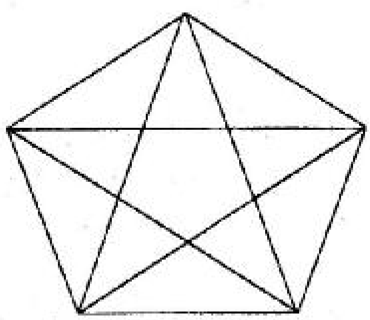
Nicolae Theodorescu

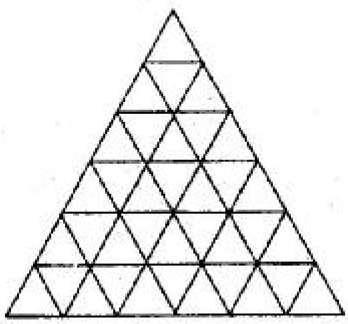
3.2.5. Determinați cel mai mic număr natural care are exact 12 divizori.

3.2.6. În câte moduri pot fi alipite patru triunghiuri echilaterale astfel încât să aibă laturi comune?

3.2.7. Câte cifre are numărul $16^8 \cdot 25^{13}$? Dar numărul 2^{100}?

3.2.8. Precizați numărul total al triunghiurilor din figurile de mai jos.





3.2.9. Se consideră numerele 1,2,3,...,48,49,50. Înmulțim aceste numere două câte două. Câte dintre numerele astfel obținute sunt multipli de 3?

E. Rogai

3.2.10. Să se determine al câtelea termen al şirului de mai jos este $\frac{p}{q}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & \ldots & \frac{1}{n}\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & \ldots & \frac{2}{n}\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & \ldots & \frac{3}{n}\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & \ldots & \frac{4}{n}\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{n}{1} & & \frac{n}{2} & & \frac{n}{3} & & \frac{n}{4} & \ldots & \frac{n}{n}\ldots
\end{array}
$$

Aurel Doboşan

3.3. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

3.3.1.. Din cei 24 de elevi ai unei clase, 19 au participat la olimpiada de limba română, 16 la olimpiada de matematică, 15 la olimpiada de geografie, 14 la olimpiada de fizică. Să se arate cel puţin opt elevi au participat la toate cele patru olimpiade.

3.3.2.Să se arate că printre oricare 52 de numere naturale, există cel puţin două care au suma sau diferenţa divizibilă cu 100.

3.3.3.Să se arate că din cei 37 urşi dintr-o rezervaţie cel puţin patru sunt născuţi în aceeaşi lună.

3.3.4. Într-un plan se află 2004 puncte distincte. Câte două puncte determină un segment. Să se arate că există două puncte din care pleacă acelaşi număr de segmente.

3.3.5. Să se arate că oricum am plasa 5 puncte pe suprafaţa unui pătrat de latură 1, există două puncte între care distanţa este cel mult $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.3.6. Să se arate că oricum am plasa 7 puncte pe suprafaţa unui disc de rază 1, există două puncte care se află la distanţa cel mult 1 unul de altul.

3.3.7. Intr-un pătrat de latură 1 se consideră un număr de segmente cu suma lungimilor egală cu 21. Să se arate că există o dreaptă paralelă cu una din laturi care taie cel puţin 11 segmente.

3.3.8. Se consideră în plan un hexagon. Să se arate că oricum s-ar colora laturile şi diagonalele, cu două culori, se formează cel puţin un triunghi cu laturile de aceeaşi culoare.

3.3.9. Să se arate că oricare ar fi 7 numere pătrate perfecte, există două a căror diferenţă se divide cu 10.

3.3.10. Să se arate că pentru orice trei numere prime $p>q>r\geq 5$ numărul

$N=(p^2-q^2)(p^2-r^2)(q^2-r^2)$ se divide cu 30.

3.3.11. Să se arate că oricare ar fi numerele naturale nenule n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, şi N diferenţa a două din numerele $N^{n_1}, N^{n_2}, N^{n_3}, N^{n_4}, N^{n_5}$ se divide cu 5.

3.3.12. Să se arate că pentru orice număr impar n există un număr $k\in \mathbf{N}^*$ astfel ca (2^k-1) să fie divizibil cu n.

3.4. PRINCIPIUL INVARIANTULUI

3.4.1. Pe o tablă sunt desenate 20 cerculeţe albe, 21 roşii şi 22 verzi. Se şterg două cerculeţe de culori diferite şi se desenează în loc un cerculeţ de a treia culoare. Se repetă operaţia de mai multe ori. Dacă la sfârşit rămâne un singur cerculeţ, precizaţi culoarea lui.

3.4.2. Considerăm un număr natural căruia îi schimbăm în mod arbitrar ordinea cifrelor. Este posibil, ca diferența dintre numărul inițial și cel final să fie 2001?

3.4.3.. Fiecare dintre numerele naturale de la 1 la 1.000.000 se înlocuiește în mod repetat prin suma cifrelor sale până la obținerea unui număr de o singură cifră. Vor fi mai mulți de 1 sau de 2?

3.4.4.. Pe o tablă sunt scrise semne de + și -. Ștergem două semne și le înlocuim cu un semn, după următoarea regula: dacă cele două semne sunt identice, le înlocuim cu +, iar dacă ștergem două semne diferite, scriem în locul lor -. Demonstrați că ultimul semn care rămâne după un număr de pași nu depinde de ordinea alegerii perechilor.

3.4.5.. Un cerc este împărțit în șase părți egale în care sunt plasate în sensul acelor de ceasornic numerele 0,0,1,0,1,0. Este permisă adăugarea câte unei unități la oricare două numere vecine. Procedeul poate fi repetat de un număr de ori. Se poate ajunge ca în final cele șase numere să fie egale?

3.4.6.. Într-unul din pătratele unei table de șah este scris numărul +1, iar în celelalte –1. Înțelegem prin "mutare" schimbarea tuturor semnelor numerelor dintr-o linie sau dintr-o coloană oarecare. Să se arate că oricâte "mutări" am efectua nu putem obține +1 în toate pătratele tablei.

3.5. PROBLEME DE ORDONARE

3.5.1. Să se compare numerele:
a) 2^{1987} cu 3^{1241}; b) 3^{1987} cu 4^{1490}; c) 4^{1987} cu 5^{1703}.

3.5.2. Care număr este mai mare: $999^{1000}+1000^{999}$ sau $999^{999}+1000^{1000}$?

3.5.3.. Fie *a, b, c, d* numere naturale diferite de zero astfel încât $a<c$ și $d<b$. Să se scrie în ordine crescătoare fracțiile:
$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{a+c}{b-d}, \frac{a-c}{b-d}$.

3.5.4. Scrieți în ordine crescătoare următoarele fracții

$$\frac{7}{10}, \frac{8}{15}, \frac{9}{20}, \ldots, \frac{1983}{9890}, \frac{1984}{9895}$$

3.5.5. Arătați că fracția $\dfrac{1999^{2000}+2000^{1999}}{1999^{1999}+2000^{2000}}$ este subunitară.

3.6. METODA REDUCERII LA ABSURD

3.6.1. Să se arate că dacă suma a cinci numere naturale distincte (nenule) este 27, atunci printre ele se află cel puțin un număr prim.

3.6.2. Pe cele șase fețe ale unui cub se scriu numerele de la 1 la 6 astfel încât să nu existe fețe diferite având înscrise pe ele același număr. Să se demonstreze că nu este posibil ca suma numerelor de pe cele trei fețe care se întâlnesc într-un vârf să fie aceeași pentru orice vârf al cubului.

3.6.3. Demonstrați că nu există nici un număr natural de două cifre care să fie de două ori mai mare decât răsturnatul său.

3.6.4. Dacă în triunghiul ABC bisectoarea unghiului B nu este și înălțime, atunci unghiul A nu este congruent cu unghiul C.

3.6.5. Dacă în triunghiul ABC mediana corespunzătoare laturii [BC] nu este și bisectoarea unghiului A, atunci latura [AB] nu este congruentă cu latura [AC].

3.1. PRINCIPIUL PARITĂȚII

3.1.1. Fiindcă 2003 este număr impar, rezultă că numărul numerelor dintr-o grupă și numărul numerelor din cealaltă grupă sunt de parități diferite.

Să presupunem că prima grupă conține un număr impar de numere și atunci numărul numerelor din cea de-a doua grupă este par. Fiindcă în prima grupă sunt un număr impar de numere rezultă că în această grupă numărul numerelor egale cu n și numărul numerelor egale cu $-n$ sunt de parități diferite, deci suma numerelor din această grupă este impară. Pentru a două grupă avem situațiile:

i) Grupa conține un număr par de numere egale cu n și un număr par de numere egale cu $-n$, deci suma numerelor din grupă este pară.

ii) Grupa conține un număr impar de numere egale cu n și un număr impar de numere egale cu $-n$, deci suma numerelor din grupă este par.

În concluzie suma numerelor din prima grupă este un număr impar, iar suma numerelor din cea de-a doua grupă este par și atunci egalitatea nu poatea avea loc.

3.1.2. Considerăm un șir par de numere consecutive impare: $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$,..., $2n+2k+1$ ($2n$ apare de $k+1$ ori). Enunțul este echivalent cu:

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+...+(2n+2k+1)=7984 \qquad (1)$$

Fiindcă $2n$ apare de $k+1$ ori și $1+3+5+...+2k+1=(k+1)^2$, relația (1) devine:

$$2n(k+1)+(k+1)^2=7984 \Leftrightarrow (k+1)(2n+k+1)=16\cdot 499$$

Din ipoteză $k+1$ este par atunci $2n+k+1$ este par și $2n+k+1>k+1$ avem posibilitățile:

a) $\begin{cases} k+1=2 \\ 2n+k+1=8\cdot 499 \end{cases}$; b) $\begin{cases} k+1=4 \\ 2n+k+1=4\cdot 499 \end{cases}$

c) $\begin{cases} k+1=8 \\ 2n+k+1=2\cdot 499 \end{cases}$

Atunci obținem:

a) $k=1$ și $n=1995$; b) $k=3$ și $n=996$; c) $k=7$ și $n=495$

Numerele consecutive impare sunt atunci:

a) $\{3991,3993\}$; b) $\{1993,1995,1997,1999\}$;

c) $\{991,993,995,997,999,1001,1003,1005\}$.

3.1.3. După o operație de tipul din enunț se înlocuiesc numerele x și y (cu $x>y$) prin $x-y$. Fiindcă $x+y$ și $x-y$ au aceeași paritate, deducem că orice operație de tipul din enunț lasă neschimbată paritatea sumei elementelor. (Dacă mulțimea A_1 are suma elementelor S_1, iar în urma unei operații din enunţ se obţine mulţimea A_2 cu suma elementelor S_2, atunci S_1 şi S_2 au aceeaşi paritate.)

Suma $1+2+3+...+100=\frac{100\cdot 101}{2}=50\cdot 101=5050$ este pară, atunci numărul care se obţine la sfârşit este par.

3.1.4. După o operaţie de tipul celei din ipoteză se înlocuiesc numerele 9^x şi 9^y $(x>y)$ cu 9^{x-y}. Ultimul termen care se obţine este de forma 9^z şi ultima sa cifră va fi 1 sau 9 după cum z este par sau impar. Dar $9^z=9^{\pm 1\pm 2\pm ... \pm 1998}$ şi cum $a+b$ şi $a-b$ au aceeaşi paritate, paritatea numărului $\pm 1\pm 2\pm ... \pm 1998$ este aceeaşi ca a sumei 1+2+...+1998=1999·999. Deci suma este impară. Ultima cifră a ultimului termen va fi 9.

3.1.5. Paginile unei foi sunt numerotate cu două numere consecutive. Suma acestor două numere este un număr impar. Numărul foilor rupte este impar (13). Suma unui număr impar de numere impare este un număr impar. Deci suma numerelor tuturor paginilor rupte este un număr impar, care evident nu se divide cu 4.

3.1.6. Suma a două numere impare este un număr par. Pentru orice $m\in \mathbf{N}$, 9^m şi 5^m sunt numere impare. Deci fracţia se poate simplifica cu 2, atunci ea nu mai este ireductibilă.

3.1.7. Se consideră cazurile 1) n par şi m impar; 2) n par şi m impar; 3) m par şi n impar; 4) m impar şi n impar.

Dacă m şi n au aceeaşi paritate obţinem $E=\frac{3}{a+4}\notin \mathbf{Z}, \forall a\in \mathbf{N}$.

Dacă m şi n sunt de parităţi diferite obţinem $E=\frac{3}{a-4}\in \mathbf{Z}$ rezultă $a\in \{3,5,11\}$.

3.1.8. Fie $\{x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_m\}=\{1,2,...,n\}$, $k+m=n$ şi $x_1+x_2+...+x_k=y_1+y_2+...+y_m$. Fiindcă

$x_1+x_2+...+x_k+y_1+y_2+...+y_m=2(x_1+x_2+...+x_k)$

şi

$$x_1+x_2+\ldots+x_k+y_1+y_2+\ldots+y_m=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

rezultă că $\frac{n(n+1)}{2}$ trebuie să fie un număr par, ceea ce are loc dacă şi numai dacă $n=4l$ $(l\in \mathbf{N}^*)$ sau $n=4l+3$ $(l\in \mathbf{N})$. Deci o condiţie necesară ca să aibă loc enunţul este ca $n=4l$ $(l\in \mathbf{N}^*)$ sau $n=4l+3$ $(n\in \mathbf{N})$. Condiţia este şi suficientă deoarece

i) Dacă $n=4l$ $(l\in \mathbf{N}^*)$, atunci alegând semnele ca mai jos, avem:

$$1\pm2\pm3\pm4\pm\ldots+n=1-2+3-4+\ldots+(2l-1)-2l-(2l+1)+(2l+2)-\ldots-(4l-1)+4l=$$
$$=\{(1-2)+(3-4)+\ldots+[(2l-1)-2l]\}+$$
$$+\{[-(2l+1)+(2l+2)]+[-(2l+3)+(2l+4)]+\ldots+[-(4l-1)+4l]=$$
$$=\underbrace{(-1-1-1-\ldots-1)}_{l\ termeni}+\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{l\ termeni}=-l+l=0$$

ii) Dacă $n=4l+3$ $(l\in \mathbf{N})$, alegând semnele ca mai jos, avem:

$$1\pm2\pm3\pm\ldots+n=1+2-3+4-5+6-7+\ldots+(2l+2)-$$
$$-(2l+3)-(2l+4)+(2l+5)-\ldots-(4l+2)+(4l+3)=$$
$$=(1+2-3)+\{(4-5)+(6-7)+\ldots+[(2l+2)-(2l+3)]\}+$$
$$+[(-(2l+4)+(2l+5)]+\ldots+[-(4l+2)+(4l+3)]\}=$$
$$=0+\underbrace{(-1-1-1-\ldots-1)}_{l\ termeni}+\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{l\ termeni}=-l+l=0$$

3.2. PROBLEME DE NUMĂRARE

3.2.1. Numerele sunt de forma $2^x\cdot3^y\cdot5^z\cdot k$, unde $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$, iar k nu are factori de 2, 3, 5.

Pentru $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ avem $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$ divizori.Atunci $2^x3^y5^zk$ are $(x+1)(y+1)(z+1)(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_n+1)$ divizori. Deci trebuie să găsim pe $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$ astfel ca

$(x+1)(y+1)(z+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)=30$.

Dar 30=2·3·5, atunci obţinem $k=1$ şi $\{x+1,y+1,z+1\}=\{2,3,5\}$.

Atunci obținem
$(x,y,z)\in\{(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,2,1),(4,1,2)\}$

Obținem numerele: $2^1\cdot3^2\cdot5^4$, $2\cdot3^4 5^2$, $2^2\cdot3\cdot5^4$, $2^2\cdot3^4\cdot5^1$, $2^4\cdot3^2\cdot5^1$, $2^4\cdot3^1\cdot5^2$.

3.2.2. Pentru $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$, relația din ipoteză se scrie
$p_1+p_2+...+p_n=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$
unde $p_1,p_2,...,p_n$ sunt numere prime.

a) Dacă numărul ar avea cel puțin patru factori în descompunerea sa atunci ar fi cel puțin $2^{14}\cdot3\cdot5\cdot7$, dar acesta depășește pe cel mai mare număr de patru cifre (9999). Deci această situație este imposibilă.

b) Dacă avem trei factori primi diferiți de 2 atunci ar fi cel puțin $2^{10}\cdot3\cdot7$, număr ce depășește pe 9999. Atunci căutăm numere cu factorii primi 2, 3, 5 și suma exponenților 10.

Obținem numerele:
$2^8\cdot3\cdot5=3840$, $2^7\cdot3^2\cdot5=5760$, $2^6\cdot3^3\cdot5=8640$, $2^7\cdot3\cdot5^2=9600$.

c) Dacă avem 2 factori primi mai mari ca 5 atunci numărul este măcar $5^{11}\cdot7$ care depășește pe 9999. Rezultă că un factor este de 2 sau 3. Obținem numerele: $2^4\cdot5^3=2000$, $2^3\cdot5^4=5000$, $2^8\cdot7=1792$, $2^7\cdot7^2=6722$.

d) Dacă avem un singur factor prim obținem $5^5=3125$. (Avem că $7^7>9999$).

3.2.3. Numărul divizorilor fiind impar, rezultă că exponenții factorilor numărului căutat trebuie să fie pari, deci numărul se divide cel puțin prin $3^2\cdot11^2=1089$. Împărțind numărul de 5 cifre la 1089 rezultă un cât ce are două cifre. Cum 63 (numărul divizorilor) se divide cu 7, rezultă că numărul de cinci cifre conține puterea a șasea a unui factor, care nu poate fi decât 2. Obținem numărul $2^6\cdot3^2\cdot11^2$ (69696).

3.2.4. Numerele care au exact patru divizori sunt de forma $n=p_1^3$ sau $n=p_1p_2$ cu p_1,p_2 numere prime diferite.

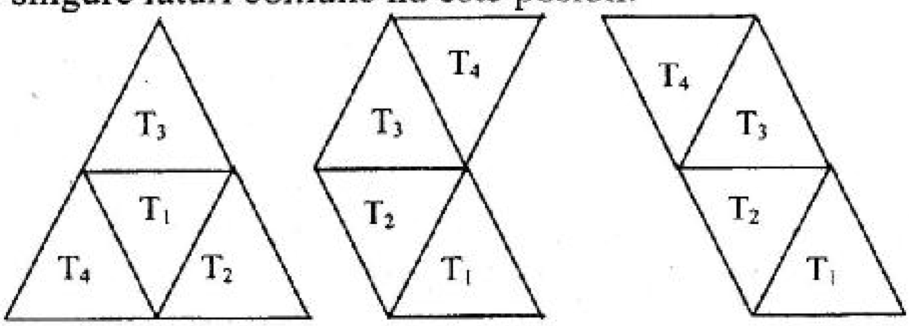
i) Dacă $n=p_1^3$, atunci n are divizorii $1,p_1,p_1^2$ și p_1^3, produsul lor este $1\cdot p_1\cdot p_1^2\cdot p_1^3=n^2$, deci $p_1^6=n^2$.

ii) Dacă $n = p_1 p_2$, atunci divizorii lui n sunt $1, p_1, p_2, p_1 \cdot p_2$ deci produsul lor este $1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_1 \cdot p_2 = (p_1 \cdot p_2)^2 = n^2$.

Deci căutăm numerele n pentru care avem $n^2 = 3025$ (55^2). Atunci $n = 55 = 5 \cdot 11$.

3.2.5. Avem $12 = 2^2 \cdot 3$. Numărul căutat poate fi de forma p^{11} sau $p_1^3 p_2^2$ sau $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^2$ unde p, p_1, p_2, p_3 sunt numere prime. Cel mai mic număr de prima formă este 2^{11}, de a doua formă cel mai mic este $2^3 \cdot 3^2 = 72$, iar de a treia $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, care este soluția.

3.2.6. Notăm triunghiurile cu T_1, T_2, T_3, T_4. Două din cele patru triunghiuri nu pot avea mai mult de o latură comună. Dacă ar avea câte două laturi comune ar coincide. Pentru a alcătui situațiile posibile, fixăm (de exemplu) triunghiul T_1 şi îi alipim triunghiurile T_2, T_3, T_4 care au fiecare o latură comună cu T_1. Deci în total cele patru triunghiuri au în comun 3 laturi. Altă situație poate fi când fixăm triunghiul T_1 şi îi alipim triunghiul T_2, acestuia îi alipim triunghiul T_3 şi apoi la T_3 alipim triunghiul T_4. Altă situație se deduce din a doua alipind triunghiul T_4 celeilalte laturi a triunghiului T_3. Alte configurații nu mai sunt posibile, fiindcă laturi comune date, unui triunghi nu pot fi decât trei, două şi în acest caz trei dintre triunghiuri sunt plasate, iar cel de-al patrulea poate fi alipit triunghiului T_1 sau triunghiului T_3 în două moduri. Cazul unei singure laturi comune nu este posibil.



3.2.7. Numărul se mai scrie

$$16^8 \cdot 25^{13} = (4^2)^8 \cdot 25^{12} \cdot 5 = 4^{16} \cdot 25^{12} \cdot 5 = (4^{12} \cdot 25^{12}) \cdot (4^4 \cdot 5) =$$
$$= (256 \cdot 5) \cdot 100^{12} = 1280 \cdot 10^{24} = 128 \cdot 10^{25}$$

Deci numărul are 28 de cifre.

Să vedem câte cifre are 2^{100}.

$2^{10}=1024$, atunci avem 1000<1024<1025 care se mai scrie $10^3<2^{10}<10^3+25$, înmulţind cu 4 obţinem $2^2\cdot10^3<2^{12}<10^3\cdot2^2+100$ sau $2^2\cdot10^3<2^{12}<10^2\cdot41$, relaţie care prin ridicare la pătrat devine: $2^4\cdot10^6<2^{24}<10^4\cdot41^2$ de unde $2^4\cdot10^6<2^{24}<10^4\cdot41^2<10^4\cdot1700$ $(41^2=1681)$ deci $2^4\cdot10^6<2^{24}<17\cdot10^6$, înmulţind cu 2 obţinem: $2^5\cdot10^6<2^{25}<34\cdot10^6$, relaţie care ridicată la puterea a patra devine: $2^{20}\cdot10^{24}<2^{100}<34^4\cdot10^{24}$. Însă $2^{20}\cdot10^{24}>10^6\cdot10^{24}=10^{30}$. Deci $2^{20}\cdot10^{24}>10^{30}$ iar $34^4<10^7$, atunci obţinem că $10^{30}<2^{100}<10^{31}$, de unde rezultă că 2^{100} are 31 de cifre.

3.2.8 . a) 35; b) 78.

3.2.9. Printre numerele 1,2,3,...,48,49,50 sunt 16 multipli de 3:
3, 6, 9, 12,..., 42, 45, 48.

Produsul dintre orice număr natural şi un multiplu de 3 este tot un multiplu de 3. Atunci prin înmulţirea lui 3 cu celelalte 49 de numere (1,2,4,5,...,40,50) obţinem 49 multipli de 3. Prin înmulţirea lui 6 cu celelalte 49 de numere (1,2,3,4,5,7,8,...,49,50) se obţin 49 multipli de 3, din care unul (6·3) a fost deja considerat când am format produsele având unul din factori 3. În acest caz avem (49-1) multipli de 3. Prin înmulţirea lui 9 cu celelalte 49 de numere, se obţin 49 multipli de 3 din care doi au fost consideraţi (9·3, 9·6). Deci în acest caz avem (49-2) multipli de 3. La fel se arată ca mai sus că pentru multiplul de 3 ce ocupă poziţia 16 se obţin (49-15) multipli de 3. Numărul total al multiplilor de 3 obţinuţi este:

$$49+(49-1)+(49-2)+...+(49-14)+(49-15)=$$
$$=49\cdot16-(1+2+3+...+15)=49\cdot16-120=664$$

3.2.10. Grupăm termenii şirul astfel:

$$\frac{1}{1},\underbrace{\frac{1}{2},\frac{2}{1}},\underbrace{\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3}},\underbrace{\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}},...$$

Fracţiile din fiecare grupă au proprietatea că suma dintre numărător şi numitor este aceeaşi şi mai mare cu o unitate decât rangul grupării. Deci

Grupa 2: $\frac{1}{1}$; Grupa 3: $\frac{2}{1},\frac{1}{2}$;

Grupa 4: $\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},...$

Grupa m: $\frac{m-1}{1},\frac{m-2}{2},\frac{m-3}{3},...,\frac{2}{m-2},\frac{1}{m-1}$

În grupa m sunt m-1 numere. Ordinea lor în grupă este dată de numărul de la numitor. Deci fracţia $\frac{p}{q}$ se află în grupa $p+q-1$. Dacă $p+q$ este par, termenii grupei sunt: $\frac{p+q-1}{1},\frac{p+q-2}{2},...,\frac{p}{q},\frac{p-1}{q-1},...,\frac{1}{p+q-1}$. Dacă $p+q$ este impar termenii se scriu în ordine inversă. Rangul termenul $\frac{p}{q}$ în gruparea $p+q-1$ este q, dacă $p+q$ este număr par şi p dacă $p+q$ este număr impar. Numărul termenilor din fiecare grupare este egal cu rangul grupării, obţinem că grupările de rang $1,2,...,p+q-2$ conţin $1+2+...+p+q-2=\frac{(p+q-2)(p+q+1)}{2}$ termeni. Deci rangul termenului $\frac{p}{q}$ este:

i) $\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+q$ dacă $p+q$ este par

ii) $\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p$ dacă $p+q$ este impar.

3.3 PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

3.3.1. Presupunem că nici un elev nu a participat la toate cele patru olimpiade , deci fiecare a participat la cel mult trei olimpiade . Dacă fiecare elev a participat la trei olimpiade, atunci la cele patru olimpiade au participat 24.3=72 (elevi). Dar numărul elevilor participanţi la olimpiade este 19+16+15+14=64. Avem în plus 8 elevi .Deci cel puţin 8 elevi au participat la toate cele patru olimpiade.

3.3.2. Ne fixăm asupra 51 de submulţimi. Prima submulţime conţine toate numerele naturale ce se termină cu 00, a doua conţine numerele care se

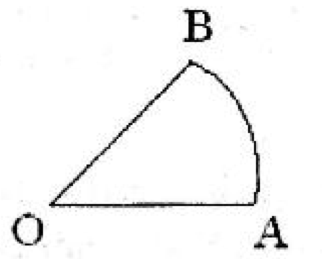
termină în 01 sau 99,a treia conține pe cele care se termină cu 02 sau 98 ,..., a 50-a submulțime conține numerele care se termină cu 49 sau 51 , iar a 51 –a submulțime conține numerele care se termină cu 50 .Deoarece avem 52 de numere conform principiului lui Dirichlet cel puțin două se vor găsi în aceeași submulțime din cele de mai sus .
Dar în orice submulțime de mai sus suma sau diferența a două numere se divide cu 100, deci cel puțin 2 numere din cele 52 au suma sau diferența divizibilă cu 100.

3.3.3. Dacă în fiecare lună a anului ar fi născuți cel mult trei urși , atunci în cele 12 luni ar fi născuți 12.3=36(urși) ,fiindcă avem 37 de urși rezultă că există o lună în care sunt născuți cel puțin 4 .

3.3.4. Dintr-un punct pleacă cel puțin un segment și cel mult 2003 segmente, Fiindcă avem 2004 puncte există două din care pleacă același număr de segmente.

3.3.5. Impărțim pătratul în patru pătrate de latură $\frac{1}{2}$. In cel puțin unul din acestea se află două puncte din cele 5. Distanța între două puncte dintr-un pătrat este cel mult egală cu diagonala lui, care este $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.3.6. Impărțim suprafața discului în 6 sectoare de forma

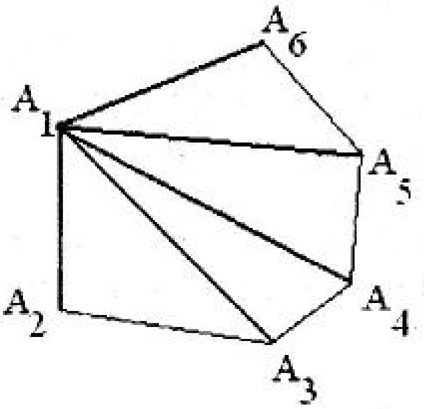


În cel puțin unul din sectoare se găsesc cel puțin 2 puncte din cele 7. Distanța maximă între cele două puncte dintr-un sector este 1 și ea se atinge dacă unul din puncte este O iar celălalt este pe arcul de cerc AB sau dacă cele două puncte sunt A sau B.

3.3.7. Dacă proiectăm segmentele pe laturile AB și AD, pentru fiecare segment MN avem $MN \leq pr_{AB}(MN) \cdot pr_{AD}(MN)$. Adunând toate aceste relații obținem $21 \le S_1 + S_2$, unde S_1 este suma lungimilor proiecțiilor pe AB și S_2 este suma lungimilor proiecțiilor pe AD. Din $S_1+S_2>20$ rezultă că cel puțin unul din numerele S_1 sau S_2 este mai mare ca 10.

Dacă $S_1>10$ rezultă că pe latura AB (de lungime 1) există puncte acoperite de cel puțin 11 proiecții. O paralelă la AD dusă printr-un astfel de punct taie aceste segmente (cel puțin 11).

3.3.8.



Din punctul A_1 pornesc 5 segmente colorate, cel puțin 3 din ele cu aceeași culoare. Să considerăm că segmentele A_1A_i, A_1A_j, A_1A_k sunt de culoare C_1. Triunghiurile $A_1A_iA_j$, $A_1A_iA_k$ și $A_1A_jA_k$ au câte două laturi de culoarea C_1, deci dacă unul din segmentele A_iA_j, A_jA_k, A_iA_k ar fi de culoarea C_1 am avea un triunghi cu toate laturile de culoarea C_1, dacă nu atunci triunghiul $A_iA_jA_k$ ar avea toate laturile de culoarea C_2.

3.3.9. Pătratele perfecte se termină doar în cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9, deci din cele 7 cel puțin două se termină cu aceeași cifră. Diferența lor se divide cu 10.

3.3.10. Numerele fiind prime (diferite de 2) ele sunt toate impare și atunci (p-q)(p+q) se divide cu 4 deci N se divide cu 2 (chiar cu $2^6=32$).

Numerele fiind prime, nici unul nu se divide cu 3, deci sunt de forma 3k+1 sau 3k+2, cel puțin două din trei au aceeași formă. Dacă p=3k+1 și q=3m+1 atunci $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 3(k-m)(p+q) \vdots 3$, deci N se divide cu 3.

Dacă două dintre numerele p, q, r dau același rest prin împărțire cu 5, suma pătratelor lor (implicit și diferența pătratelor) se divide cu 5. Dacă nu, resturile sunt 1, 2, 3 sau 1, 2, 4 sau 1, 3, 4 sau 2, 3,, 4. In fiecare caz suma a două din ele este divizibilă cu 5.

Deci N se divide cu 2 cu 3 şi cu 5, rezultă 30|N.

3.3.11. Pentru orice număr natural N şirul ultimelor cifre este periodic de perioadă cel mult 4, deci ultima cifră a lui N^k, este una din 4 cifre (pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$). Există două din cele cinci puteri care au ultima cifră aceeaşi. Diferenţa lor se divide cu 10 deci şi cu 5.

3.3.12. Considerăm numerele 2^1-1, 2^2-1,..., 2^n-1, $2^{n+1}-1$ care dau n+1 resturi la împărţirea cu n. Cel puţin două dau acelaşi rest, deci diferenţa lor se divide cu n.

Dar $(2^k-1)-(2^p-1)=2^k-2^p=2^p(2^{k-p}-1)\,\vdots\,$ n şi deoarece 2^p şi n (impar) sunt relativ prime,
rezultă $(2^{k-p}-1)\,\vdots\,n$

3.4. PRINCIPIUL INVARIANTULUI

3.4.1. Sunt în total 63 de cerculeţe, deci pentru a ajunge în final la un singur cerculeţ sunt necesari 62 de paşi. La fiecare pas numărul cerculeţelor de fiecare culoare îşi schimbă paritatea, deci după un număr par de paşi paritatea numărului de cerculeţe de fiecare culoare este aceeaşi cu cea iniţială. Rezultă că cerculeţul rămas va fi roşu.

3.4.2. Restul împărţirii numărul la 9 este acelaşi cu restul împărţirii sumei cifrelor sale la 9. Cum suma cifrelor rămâne constantă, rezultă că restul numărului la împărţirea cu 9 este invariant. Diferenţa dintre numărul iniţial şi cel final trebuie să fie divizibilă cu 9, deci nu poate fi 2001.

3.4.3. La o transformare de tipul celei enunţate restul la împărţirea cu 9 este invariant, deci se obţin numerele:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, ..., 9, 1

Rezultă că sunt mai multe cifre de 1.

3.4.4. Invariantul este paritatea numărului de minusuri. Dacă la început numărul de minusuri este impar, ultimul semn care rămâne este minus, iar dacă la început numărul minusurilor este par, la sfârşit va rămâne plus.

3.4.5. Notăm cu $x_1, x_2, ..., x_6$ cele 6 numere în ordinea menţionată. Considerăm suma

$S = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6$

După o transformare de tipul considerat suma rămâne invariantă. Valoarea iniţială a sumei este 2, deci nu este posibil ca cele 6 numere să devină egale, deoarece în acest caz suma ar fi 0.

3.4.6. Pe tablă se află un număr impar de semne +. Paritatea numărului de semne plus nu se schimbă oricâte "mutări" am face. Presupunând că înainte de a efectua o "mutare" pe linia sau coloana pe care efectuăm "mutarea" există x semne de + şi y semne de -. Deoarece $x + y = 8$, x şi y au aceeaşi paritate, deci paritatea numărului de semne + rămâne aceeaşi. Deci pe tablă se vor afla întotdeauna un număr impar de semne +, adică niciodată nu vom putea obţine +1 în toate cele 64 de pătrate.

3.5. PROBLEME DE ORDONARE

3.5.1. a) $2^{1987} = 2^{8\cdot 248+3} = (2^8)^{248} \cdot 2^3 = 256^{248} \cdot 8 > 243^{248} \cdot 3 =$
$= (3^5)^{248} \cdot 3 = 3^{1240} \cdot 3 = 3^{1241}$ deci $2^{1987} > 3^{1241}$.

b) $3^{1987} = 3^{2\cdot 993+1} = (3^2)^{993} \cdot 3 = 3^{993} \cdot 3$, iar
$4^{1490} = 2^{2980} = (2^3)^{993} \cdot 2^1 = 8^{993} \cdot 2$. Atunci obţinem că $3^{1987} > 4^{1490}$.

c) Vom arăta că $4 \cdot 4^{1987} > 4 \cdot 5^{1703}$.
$4 \cdot 4^{1987} = 4^{1988} = (4^7)^{284} = 2^{2\cdot 7\cdot 284} = (2^7)^{568} > 128^{568} = 125^{568} =$
$= (5^3)^{568} = 5^{1704} = 5^{1703} \cdot 5 > 5^{1703} \cdot 4$. Atunci $4^{1987} > 5^{1703}$.

3.5.2. $999^{1000} + 1000^{999} = 999^{999} \cdot 999 + 1000^{999}$. Dar
$999^{999} + 1000^{1000} = 999^{999} + 1000^{999} \cdot 1000 = 999^{999} + 1000^{999}(999+1) =$
$= 999^{999} + 1000^{999} \cdot 999 + 1000^{999}$.
Avem $999^{999}999 + 1000^{999} < 999^{999} + 1000^{999} \cdot 999 + 1000^{999}$.

Rezultă $999^{1000}+1000^{999}<999^{999}+1000^{1000}$.

3.5.3. Avem $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ deoarece $\frac{a+a}{b+b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c+c}{d+d}$. Fracția $\frac{a-c}{b-d}$ fiind negativă $(c-a\triangleright 0)$ va fi cea mai mică fracție. Fiindcă $b+d>b-d$ rezultă $\frac{a+c}{b+d}<\frac{a+c}{b-d}$. Avem ordinea

$\frac{a-c}{b-d}<\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{a+c}{b-d}<\frac{c}{d}$ sau $\frac{a-c}{b-d}<\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}<\frac{a+c}{b-d}$.

3.5.4. Fiecare fracție din șir se scrie ca o sumă de două fracții

$$\frac{7}{10}=\frac{5+2}{10}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$$

$$\frac{8}{15}=\frac{5+3}{15}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

....

$$\frac{1984}{9895}=\frac{5+1979}{9895}=\frac{5+1979}{5\cdot 1979}=\frac{1}{1979}+\frac{1}{5}$$

În scrierea fiecărei fracții de mai sus ca sumă de două fracții apare fracția $\frac{1}{5}$. Rămâne să comparăm șirul format de fracțiile: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{1979}$. Avem $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\dots>\frac{1}{1979}$. Deci $\frac{1984}{9895}<\frac{1983}{9890}<\dots,\frac{9}{20}<\frac{8}{15}<\frac{7}{10}$.

3.5.5. $1999^{2000}+2000^{1999}<1999^{1999}+2000^{2000}\Leftrightarrow$

$1999^{2000}-1999^{1999}<2000^{2000}-2000^{1999}$, rezultă că

$1999^{1999}\cdot 1998<2000^{1999}\cdot 1999\Leftrightarrow\left(\frac{1999}{2000}\right)^{1999}<\frac{1999}{1998}$.

3.6. METODA REDUCERII LA ABSURD

3.6.1. Presupunem că printre cele cinci numere naturale nenule distincte nu s-ar găsi nici un număr prim. Dacă le considerăm pe cele mai mici, suma lor este 1+4+6+8+9=28, ceea ce contrazice ipoteza și deci printre ele se află cel puțin un număr prim.

3.6.2. Metoda reducerii la absurd. Presupunem că suma respectivă este aceeași pentru fiecare din cele opt vârfuri și fie x valoarea sa. Fiecare număr din mulțimea $\{1,2,3,4,5,6\}$ apare ca termen în patru sume corespunzătoare celor patru vârfuri ale feței care poartă numărul respectiv. Atunci pentru cele opt vârfuri obținem:

$8x = 4(1+2+3+4+5+6)$,

de unde $x = \dfrac{21}{2}$, dar x trebuie să fie natural. Am ajuns la o contradicție.

3.6.3. Metoda reducerii la absurd. Presupunem că există numărul $\overline{xy}$ astfel ca $\overline{xy} = 2\overline{yx}$, relație care se mai scrie $10x + y = 2(10y + x)$, de unde obținem $8x = 19y$, de unde rezultă că 19 divide pe x, imposibil fiindcă x este cifră $x \in \{1,2,...,9\}$.

3.6.4. Cu metoda reducerii la absurd presupunem concluzia falsă, atunci $\angle A \equiv \angle C$ și deci triunghiul ABC este isoscel. În triunghiul isoscel bisectoarea unghiului de la vârf este și înălțime, deci contrazicem ipoteza. Atunci presupunerea făcută nu este adevărată și deci unghiul A nu este congruent cu C.

3.6.5. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem concluzia falsă. Înseamnă că [AB]≡[AC], deci triunghiul ABC este isoscel, și deci mediana ce pleacă din A este și bisectoare și se contrazice ipoteza. Deci presupunerea făcută nu este adevărată.

6. Probleme de numărare

Multe probleme din viaţa cotidiană cer numărarea elementelor unor mulţimi finite, ale părţilor unei mulţimi, etc. şi de aici importanţa aprofundării operaţiei de numărare prin probleme care conduc la numărarea elementelor unor mulţimi diverse. Domeniul matematicii în care se studiază astfel de probleme se numeşte combinatorică. Pentru a aborda diverse probleme de numărare un rol important îl joacă noţiunea de partea întreagă, numărul divizorilor naturali ai unui număr natural, forma canonică a unui număr natural *n* (descompunerea în mod unic în produs de factori primi), etc.

1) Prin partea întreagă a unui număr *x* înţelegem cel mai mare număr întreg care nu îl depăşeşte pe *x* şi se notează [*x*].

Avem $x-1<[x]\le x$.

Folosim partea întreagă, de exemplu când numărăm multiplii unui număr natural p cuprins în mulţimea: $\{1,2,3,...,n\}$.

2) Orice număr natural *n*, diferit de zero, se descompune în mod unic într-un produs de factori primi:

$$n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}\,, \tag{1}$$

unde $p_1, p_2,..., p_k$ sunt numere prime, iar $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ sunt numere nenule. Relaţia (1) se numeşte forma canonică a lui *n*.

Numărul divizorilor naturali ai lui *n* este: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$.

Vom prezenta în continuare câteva probleme de aritmetică, teoria numerelor, geometrie, care se încadrează la această problematică.

R6.1. Care este exponentul lui 3 în descompunerea în factori primi a numărului 100! (100!=1·2·3·...·100).

Soluţie. Dintre numerele 1,2,3,4,...,100 fiecare al treilea este divizibil cu 3. Fiindcă 100=3·33+1, rezultă că de la 1 la 100 sunt 33 de numere divizibile cu 3. Dintre aceste 33 de numere fiecare al treilea este divizibil cel puţin cu puterea a 2-a a lui 3. Fiindcă 33:3=11, rezultă că sunt 11 numere divizibile cu 3^2. Dintre cele 11 fiecare al 3-lea este divizibil cu 3^3. Fiindcă 11=3·3+1, rezultă că sunt 3 astfel de numere. Dintre aceste 3 numere unul este divizibil cu 3^4. Nu există nici un număr dintre primele 100, divizibil cu 3^5 pentru că $3^5>100$. Atunci exponentul lui 3 din descompunerea în produs de factori primi a numărului 100! este: 33+11+3+1=48.

Fiindcă la împărţirile efectuate am reţinut numai câturile, acestea reprezintă de fapt părţile întregi ale numerelor: $\frac{100}{3},\frac{100}{3^2},\frac{100}{3^3},\frac{100}{3^4}$. Deci exponentul lui 3 din descompunerea în factori primi a numărului 100! este:

$$\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]=33+11+3+1=48.$$

Cu acelaşi raţionament se arată că exponentul numărului prim *p* din descompunerea în factori primi a lui *n*! (*n*!=1·2·3...*n*) este:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

R6.2. Se consideră într-un plan 5 puncte, oricare trei necoliniare.

a) Câte drepte determină aceste puncte?

b) Câte triunghiuri determină aceste puncte?

c) Dacă avem *n* puncte (oricare trei necoliniare), câte drepte şi câte triunghiuri determină?

Soluție. a) Fie A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 punctele din ipoteză. Punctul A_1 determină cu celelalte 4 puncte un număr de 4 drepte. Din cele 5 puncte pleacă $4\cdot5=20$ semidrepte. Fiecare dreaptă a fost numărată de două ori (de exemplu A_1A_2 şi A_2A_1). Atunci numărul dreptelor care trec prin cele 5 puncte este 20:2=10.

În general, dacă avem *n* puncte ($n\geq3$) şi oricare trei sunt necoliniare atunci ele determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte.

Fie punctele $A_1,A_2,...,A_n$. Fixând punctul A_i, acesta va determina cu celelalte puncte n-1 drepte. Având *n* puncte, din ele pleacă $n(n-1)$ semidrepte. Fiecare dreaptă este numărată de două ori: A_iA_k şi A_kA_i. Atunci *n* puncte (oricare trei necoliniare) determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte.

b)-c) Pentru numărul de triunghiuri considerăm cazul când avem *n* puncte (oricare trei necoliniare). Fixăm un vârf A_i de exemplu, fapt ce poate fi realizat în *n* moduri. Fixăm al doilea vârf A_j, realizabil în n-1 moduri (după prima fixare). Fixăm al 3-lea vârf A_k, realizabil în n-2 moduri. Ținând seama cum au fost alese vârfurile, obținem $n(n-1)(n-2)$ variante. Fiecare triunghi $A_iA_jA_k$ a fost numărat de 6 ori: $A_iA_jA_k$, $A_iA_kA_j$, $A_jA_iA_k$, $A_jA_kA_i$, $A_kA_jA_i$, $A_kA_iA_j$. Atunci numărul de triunghiuri determinat de *n* puncte (oricare trei necoliniare) este $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

R6.3. Determinați numărul diagonalelor unui poligon convex cu *n* laturi ($n\geq4$).

Soluție. Din fiecare vârf pleacă n-3 diagonale pentru că un vârf şi cu două adiacente nu determină diagonale. Fiind *n* vârfuri avem $n(n-3)$ segmente. Dar fiecare diagonală a fost numărată de două ori, deci numărul diagonalelor unui poligon convex cu *n* laturi este $\frac{n(n-3)}{2}$.

Altfel. Dacă avem *n* puncte distincte (oricare trei necoliniare), ele determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte. Pentru a afla numărul diagonalelor trebuie să scădem numărul laturilor. Obținem:

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}.$$

R6.4. Să se determine numărul minim de monede de 1, 3, 5 euro de care avem nevoie pentru a plăti orice sumă întreagă cuprinsă între 1 şi $5n$ euro.

Soluție. i) Pentru a plăti orice sumă întreagă cuprinsă între 1 şi $5n$ euro avem nevoie de cel puțin $n+2$ monede: pentru a plăti sumele de 2 euro şi $5n$ euro avem nevoie de două monede de un euro şi încă cel puțin n monede.

ii) Pentru a plăti toate sumele întregi între 1 euro şi $5n$ euro sunt suficiente $n+2$ monede: două monede de 1 euro, o monedă de trei euro şi $n-1$ monede de 5 euro.

Orice număr natural cuprins între 1 şi $5n$ inclusiv are una din formele $5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4, 5k+5$ unde $0 \le k \le n-1$.

Sumele de forma $5k+1$ pot fi plătite cu k din cele $n-1$ monede de 5 euro $(n-1 \ge k)$ şi una dintre monedele de 1 euro. Sumele de forma $5k+2$ pot fi plătite cu k monede 5 euro şi monedele de 1 euro. Sumele de forma $5k+3$ şi $5k+4$ le putem plăti cu orice monede de 5 euro şi moneda de 3 euro respectiv k monede de 5 euro o monedă de 3 euro şi una de 1 euro. Sumele de forma $5k+5$ $(n-1 \ge k)$ pot fi plătite cu k monede de 5 euro şi cu monede de 1 şi 3 euro. Deci numărul minim cerut este $n+2$.

6.2. Principiul cutiei sau principiul lui Dirichlet

Sunt multe probleme de matematică cu enunțuri inedite ce pot fi abordate cu mijloace ale gândirii cotidiene, fără a fi nevoie de metode rafinate. Un exemplu elocvent este principiul cutiei sau principiul lui Dirichlet. Ceea ce caracterizează problemele în care acest principiu se foloseşte este dificultatea de a le aborda pe căi cunoscute. Într-o formulare fără pretenții acest principiu revine la observația că dacă avem două cutii în care trebuie puse trei obiecte, într-una din ele va trebui să aşezăm cel puțin două obiecte. Mai general, dacă repartizăm un număr mai mare de n obiecte în n clase, atunci cel puțin într-o clasă vor fi cel puțin două obiecte. Deci avem

Teorema 6.2.1. Considerăm o mulțime nevidă A şi $A_1, A_2, ..., A_n$ o partiție a mulțimii A (adică $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$ şi $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$. Dacă avem $n+1$ elemente din A: $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ atunci există o submulțime A_i a partiției care să conțină cel puțin două elemente ale mulțimii $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$.

În general principiul cutiei este un principiu de numărare. În ultimul timp acest principiu a căpătat o mare popularitate, fiind pus la baza unui mare număr de probleme, dintre care unele deosebit de dificile. Vom prezenta câteva exemple în care se foloseşte acest principiu în aritmetică, geometrie.

R6.2.1. Considerăm mulțimea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ cu elementele numere întregi. Să se demonstreze că A are cel puțin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.

Soluție. Dacă a este număr întreg şi n număr natural, există numerele q şi r unice astfel încât $a = n \cdot q + r$ cu $q \in \mathbf{Z}$ şi $r \in \{0,1,2,...,n-1\}$. Vom aplica principiul cutiei. Considerăm următoarele n submulțimi ale lui A: $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_1, a_2\}$, $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$,..., $A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Dacă notăm cu S_i cu $i = \overline{1,n}$ suma elementelor fiecărei mulțimi avem: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,..., $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

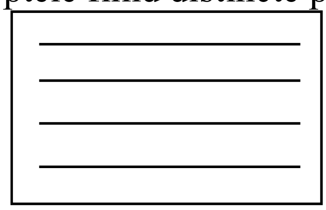
Dacă unul din numerele S_i cu $i = \overline{1,n}$ se divide cu n problema este rezolvată. Dacă nu, cele n resturi obținute prin împărțirea cu n a numerelor S_i aparțin mulțimii {1,2,3,...,n-1} ce are n-1 elemente diferite. Deci există cu siguranță două numere S_i şi S_j care dau acelaşi rest la împărțirea cu n. Fie $S_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$ şi $S_j = a_1 + a_2 + ... + a_j$ cele două numere. Fie $i < j$. Fiindcă n divide pe $S_j - S_i$ rezultă că submulțimea căutată este $B = \{a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_j\}$.

R6.2.2. Să se arate că oricum am alege cinci numere întregi, există două dintre acestea, care au suma sau diferența divizibile cu 7.

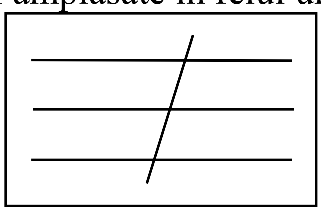
Soluție. La împărțirea cu 7 a unui număr se obține unul din resturile 0,1,2,3,4,5,6. Pătratul său va da la împărțirea cu 7 unul din resturile 0,1,2,4. Deoarece avem cinci numere *a,b,c,d,e,* cele cinci pătrate ale lor nu pot da la împărțirea cu 7 decât unul din cele patru resturi: 0,1,2,4. Conform principiului cutiei cel puțin două din aceste cinci pătrate dau la împărțirea cu 7 acelaşi rest. Deci există $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$ astfel încât $x^2 - y^2$ se divide cu 7. Deci 7 divide pe $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, dar fiind şi prim rezultă că 7 divide pe $x + y$ sau 7 divide pe $x - y$.

R6.2.3. Patru drepte distincte situate într-un plan, îl împart în mai multe regiuni distincte. Să se arate că oricum s-ar aşeza 12 puncte în acest plan astfel încât nici unul să nu aparțină dreptelor date, cel puțin două dintre ele se află în aceeaşi regiune.

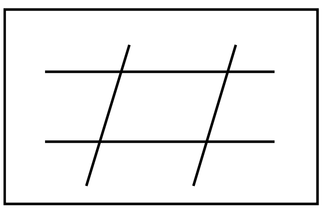
Soluție. Dreptele fiind distincte pot fi amplasate în felul următor:



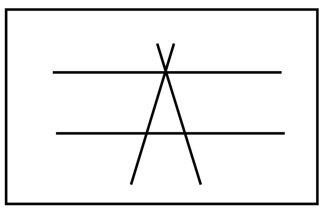
a)



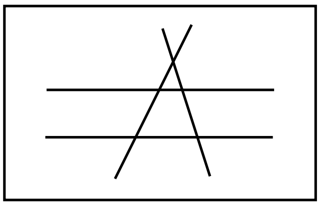
b)



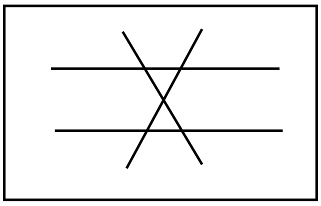
c)



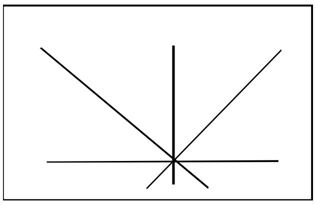
d)



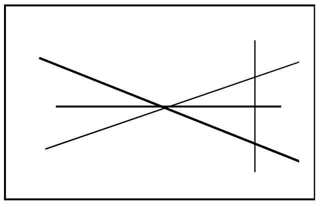
e)



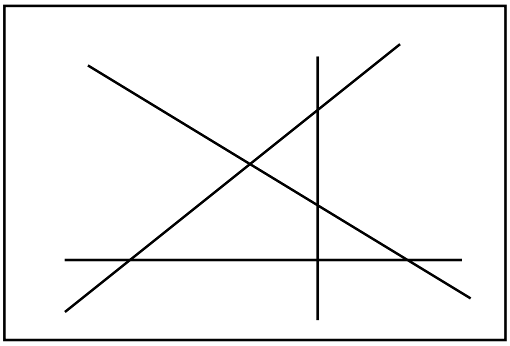
f)



g)



h)



i)

Numărul maxim de regiuni este 11 şi se obţine în cazul i). Regiunile în care a fost împărţit planul vor fi "căsuţele" din principiul cutiei. Dacă am aşeza câte un punct în fiecare regiune am avea nevoie de 11 puncte. Având însă 12 puncte, rezultă că în cel puţin o regiune vor fi două puncte.

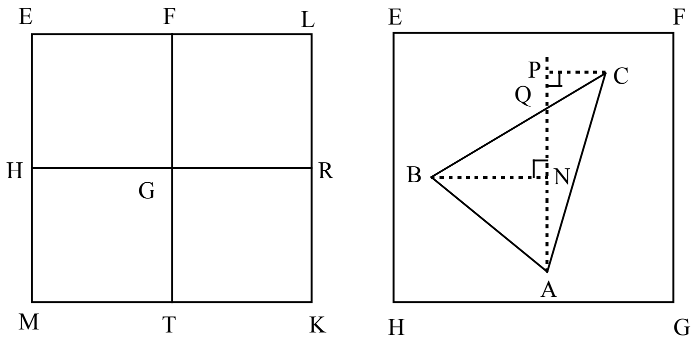
R6.2.4. Considerăm nouă puncte într-un pătrat cu latura de lungime 1. Să se demonstreze că există un triunghi cu vârfurile în trei din cele nouă puncte a cărui arie să fie cel mult egală cu $\frac{1}{8}$.

Soluţie. Unind două câte două mijloacele laturilor opuse în pătratul dat, obţinem o împărţire a acestuia în patru pătrate de arie $\frac{1}{4}$. Oricum am plasa cele nouă puncte, întotdeauna trei se vor afla în interiorul sau pe laturile aceluiaşi pătrat. Fie A, B, C cele trei puncte situate în pătratul EFGH. Să arătăm că aria triunghiului ABC este mai mică sau egală cu $\frac{1}{8}$. Ducem prin A, B, C paralele la EH. Una dintre acestea se va afla între celelalte două, deci va intersecta latura opusă vârfului prin care trece. Fie AQ această paralelă la EH, $Q\in[BC]$. Ducem $BN\perp AQ$ şi $CP\perp AQ$ ($N,P\in AQ$). Atunci avem:

$$S_{[ABC]} = S_{[ABQ]} + S_{[ACQ]} = \frac{AQ\cdot BN}{2} + \frac{AQ\cdot CP}{2} = \frac{AQ}{2}(BN+CP) \le$$

$$\leq \frac{1}{2} EH \cdot HG = \frac{1}{2} S_{[EHGF]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Deci $S_{[ABC]} \leq \frac{1}{8}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $AQ(BN + CP) = EH \cdot HG$, deci NQ=HF şi BN+CP=HG. Deci egalitatea se obţine când o latură a triunghiului coincide cu o latură a pătratului şi celălalt vârf al triunghiului se află pe latura opusă.



R6.2.5. Considerăm 17 drepte care împart un pătrat în două patrulatere care au raportul ariilor $\frac{1}{6}$. Să se arate că cel puţin 5 dintre aceste drepte trec prin acelaşi punct.

Soluţie. Fiecare din cele 17 drepte nu poate tăia două laturi consecutive ale pătratului, deoarece atunci pătratul ar fi împărţit într-un triunghi şi un pentagon. Deci fiecare dreaptă împarte pătratul în două trapeze dreptunghice care au aceeaşi înălţime. Fie a una din aceste drepte care taie laturile AB şi CD în punctele T şi R. Dacă L şi K sunt mijloacele laturilor AD respectiv BC, iar E_1 este punctul de intersecţie al dreptelor Q şi TR, avem:

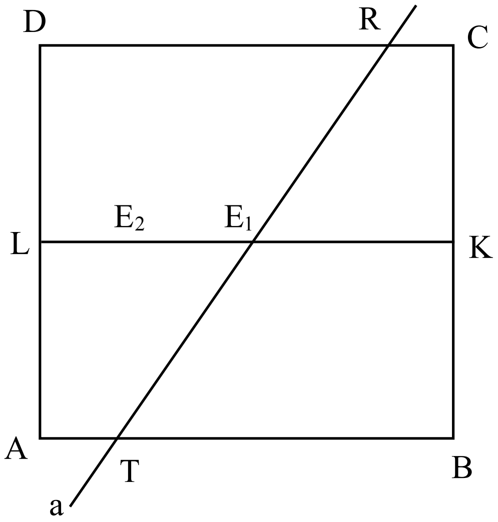
$$\frac{S_{[BTRC]}}{S_{[ATRD]}} = \frac{\frac{(TB + RC) \cdot BC}{2}}{\frac{(AT + DR) \cdot AD}{2}} = \frac{KE_1}{E_1L} = \frac{1}{6}$$

Am ţinut seama că trapezele au înălţimile egale şi liniile mijlocii au lungimile: $E_1K = \frac{TB + RC}{2}$, $LE_1 = \frac{AT + DR}{2}$.

Pe dreapta LK există două puncte care împart segmentul LK în raportul $\frac{1}{6}$. Fie al doilea punct E_2. Atunci avem:

$$\frac{KE_1}{E_1L} = \frac{E_2K}{E_2L} = \frac{1}{6}.$$

Fiindcă într-un pătrat există numai două segmente care unesc mijloacele laturilor opuse rezultă că în interiorul pătratului există exact patru puncte: E_1,E_2,E_3,E_4 care împart liniile mijlocii ale pătratului în raportul $\frac{1}{6}$. deci oricare din cele 17 drepte trece prin unul din punctele E_1,E_2,E_3,E_4. Fiindcă avem 17 drepte care trec prin patru puncte, conform principiului "cutiei" cel puțin 5 drepte trec prin acelaşi punct.

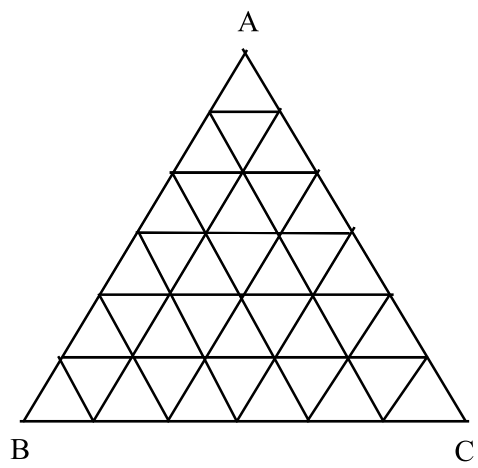


R6.2.6. Să se arate că oricum am aşeza 37 puncte în interiorul unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1, există cel puțin două puncte astfel încât distanța dintre ele să nu depăşească 0,1(6).

Soluție. Împărțim fiecare latură a triunghiului în 6 segmente cu lungimea $\frac{1}{6}$. Prin punctele de diviziune ducem paralele la laturile triunghiului şi obținem $1+3+5+7+9+11=36=6^2$ triunghiuri echilaterale cu latura de lungime $\frac{1}{6}$. Considerând 37 puncte în triunghiul inițial, cel puțin două dintre acestea se vor afla în interiorul (sau pe laturi) unui triunghi cu latura $\frac{1}{6}=0,1(6)$, şi deci distanța dintre acestea va fi cel mult $\frac{1}{6}$.

R6.2.7. Să se arate că, oricum am aşeza n^2+1 puncte în interiorul unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1, există cel puțin două puncte astfel încât distanța dintre ele să nu depăşească $\frac{1}{n}$.

Soluție. Împărțim fiecare latură a triunghiului în n segmente cu lungimea $\frac{1}{n}$. Ducând paralele la laturile triunghiului prin punctele de diviziune, triunghiul se descompune în $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$ triunghiuri echilaterale cu latura de lungime $\frac{1}{n}$. Căsuțele din principiul cutiei sunt acum cele n^2 triunghiuri echilaterale. Considerând n^2+1 puncte în interiorul triunghiului inițial evident cel puțin două dintre acestea se vor afla în interiorul unui triunghi (sau pe laturi) cu latura de lungime $\frac{1}{n}$ şi distanţa dintre acestea va fi cel mult $\frac{1}{n}$.



PROBLEME DE NUMĂRARE. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

II.3.1. Câte numere naturale A se pot scrie sub forma A=$\overline{abc}+\overline{cba}$?

II.3.2. Câte numere naturale n satisfac inegalitățile : $2^{80} < n^{50} < 2^{120}$?

Aurel Ene

II.3.3. Un număr natural x are cu 9 divizori mai puțini decât 6x. Demonstrați că dacă 2 și 3 nu divid pe x, atunci x este pătratul unui număr prim.

Alexandra Borandă

II.3.4. Să se demonstreze că printre puterile a patra a oricăror cinci numere naturale se găsesc întotdeauna cel puțin două a căror diferență se divide cu zece.

II.3.5. Se consideră mulțime A={1,5,9,13, ..., 193,197 } Să se arate că orice submulțime a mulțimii A ce are 27 elemente conține cel puțin două elemente a căror sumă este 202.

Chiteș Costel

II.3.6. Să se arate că oricum am așeza 50 de puncte în interiorul unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1, există cel puțin două puncte astfel ca distanța dintre ele să nu depășească 1:7 .

II.3.7. Să se arate că în orice poligon cu 21 de laturi există două diagonale care formează între ele un unghi mai mic decât un grad.

Dorel Miheț

PROBLEME DE NUMĂRARE. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

II.3.1. A=100a+10b+c+100c+10b+a=101(a+c) +20b. Fiindcă a,c sunt diferite de zero şi a+c$\in$ {2,3,...17,18}(17 posibilităţi), avem 17.10 =170 de numere (b fiind orice cifră)

II.3.2. Inegalitatea $2^{80} < n^{50}$ se mai scrie $(2^8)^{10} < (n^5)^{10}$, de unde obţinem că $2^8 < n^5$ sau $256 < n^5$, de unde $n \geq 4$ (1). Inegalitatea $n^{50} < 2^{120}$ se mai scrie $(n^5)^{10} < (2^{12})^{10}$, de unde obţinem că $n^5 < 2^{12}$, sau $n^5 < 4096$, inegalitate pentru $n \leq 5$ (2) Din (1) şi (2) obţinem că $n \in \{4,5\}$.

II.3.3. Fie $x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$ descompunerea în factori primi. Numărul divizorilor săi este $(a_1+1)(a_2+1)..(a_k+1)$. Dacă x nu este divizibil cu 2 şi 3 descompunerea lui 6x

este : $2^1 \cdot 3^1 \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ şi numărul divizorilor lui 6x este :

$(1+1)(1+1)(a_1+1)(a_2+1)..(a_k+1)$, adică de patru ori mai mare decât numărul N a divizorilor lui x. Deci 3N=9, de unde N=3. Deci $(a_1+1)(a_2+1)..(a_k+1)=3$

şi atunci k=1, adică x are un singur factor prim cu exponentul 2, adică x este pătratul unui număr prim.

II.3.4. Pătratul oricărui număr natural se termină cu una din cifrele :0,1,4,5,6.9, iar puterea a patra se termină cu una din cifrele 0,1,5,6. Fiindcă avem cinci numere, conform principiului lui Dirichlet printre ele există cel puţin două care se termină cu aceeaşi cifră şi deci diferenţa acestora se divide cu 10.

II.3..5. Mulţimea are 50 de elemente de forma 4n-3. Considerăm partiţia mulţimii A formată din 26 submulţimi:

{1},{5,197},{9,193},...,{97,105},{101}.Dacă printre cele 27 numere alese se află elementele uneia din cele 24 de submulţimi formată din două elemente problema este rezolvată. Dacă submulţimea lui A formată din 27 de elemente conţine pe 1 şi pe 101 şi câte un număr din cele 24 de submulţimi formate din două elemente, oricum am alege pe cel de-al 27-lea număr, conform principiului cutiei, problema este rezolvată.

II.3.6. Împărţim fiecare latură a triunghiului în şapte segmente de lungime 1:7 şi ducem paralele la celelalte două prin punctele de diviziune. Obţinem 1+3+5+7+9+11+13 (49)triunghiuri echilaterale cu latura 1:7. Considerând 50 de puncte în interiorul triunghiului iniţial cel puţin două se vor afla în interiorul unui triunghi echilateral cu latura 1:7 şi distanţa dintre acestea nu depăşeşte 1:7.

II.3.7. Se consideră un punct M în planul poligonului. Numărul diagonalelor poligonului convex cu n laturi este n(n-3):2, deci în cazul nostru 21.18:2=189.

Ducem prin M paralele la cele 189 de diagonale şi se formează 378 de unghiuri.

Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360 de grade, deci cel puţin unul din cele 378 de unghiuri are măsura mai mică de un grad.

1. Probleme de numărare

Rezumat: În cadrul temei se vor prezenta elementele de bază ale combinatoricii, regula sumei, produsului, precum şi aplicarea lor în diferite probleme de algebră, aritmetică, respectiv geometrie combinatorică (probleme de numărare, colorare, descompunere).

1.1 Reprezentarea regulei sumei, respectiv produsului, şi aplicaţii ale acestor reguli în studierea unor probleme de combinatorică, respectiv a unor probleme de numărare

1.1.1. Regula sumei

Dacă un anumit obiect poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect poate fi ales în n moduri , atunci alegerea lui A sau B poate fi realizată în m+n moduri (trebuie avut grijă ca nici o alegere a lui A să nu coincidă cu nici o alegere a lui B).Dacă totuşi exista astfel de coincidențe, atunci regula sumei de mai sus dă m+n-k moduri de alegere a lui A sau B unde k este numărul de coincidențe.

1.1.2. Regula produsului

Dacă un obiect A se poate alege în m moduri si dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A,B) în această ordine poate fi realizată în m·n moduri.

1.1.3. Principiul cutiei (Dirichlet)

Dacă n cutii şi mai mult de n+1 obiecte trebuie aranjate în cele n cutii, atunci cel puțin 2 obiecte se aflǎ în aceeaşi cutie.

1.1.4. Principiul inducției matematice

Fie P(n),n≥k o propoziție matematică, $k \in N$ fixat, $n \in N$.
Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
I. P(k) A
II. Dacă P(p) A , $(\forall)$ p=$\overline{k,n}$ atunci P(n+1) A
Atunci p(n) A , $(\forall)$ n≥k
Schiță de demonstrație P(k) A =>P(k+1) A =>P(k+2) A =>

1.1.5. Principiul includerii şi excluderii

$|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$

$|A \cup B \cup C|=|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|$

$$|A_1 \cup \quad \cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i\prec j\le n}|A_i \cap A_J|+\ldots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|$$

unde A,B,C, A_1,A_2, ,A_n mulţimi finite

1.2. Probleme rezolvate (Algebră)

1.2.1. Mulţimi ordonate

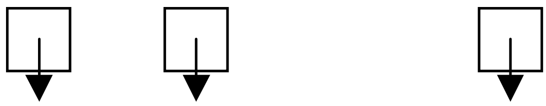
O mulţime împreună cu o ordine bine determinată de dispunerea elementelor sale este o combinaţie (sau mulţime ordonată).

Se numeşte aranjament de n elemente luate câte k orice combinaţie alcătuită din k elemente ale mulţimii A.

Două aranjamente de n elemente luate câte k se deosebesc prin natura elementelor sau prin ordinea lor.

A_n^k=numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k= n(n-1)·...·(n-k+1) $=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

1 2 k



n moduri n-1 moduri n-k+1 moduri

Prima poziţie a unui aranjament se poate completa în n moduri.

A doua poziţie în n-1 moduri etc.

Total, conform regulii produsului = n(n-1)· ·(n-k+1)=$\dfrac{n!}{(n-k)!}$, unde n!=1·2·3· ·n, 0!=1, 1!=1.

1.2.2. Permutări

Pentru A={a_1,a_2, ,a_n} considerăm un aranjament de n elemente luate câte n. Acest aranjament se numeşte permutare de n elemente.

Numărul permutărilor de n elemente =Pn=n(n-1)· ·1=n!, Pn=n!, n≥1.

1.2.3. Numărul de funcţii f:A→B (|A|=m, |B|=n)

Numărul de funcţii f:A→B (|A|=m, |B|=n) este n^m.

Rezolvare

$B^A=\{f|f:A\rightarrow B\}$

$|B^A|=|B|^{|A|}$

$A=\{a_1, \ldots ,a_m\}$, $B=\{b_1, \ldots ,bn\}$

$f : A \rightarrow B$ este bine determinată dacă ştim care sunt valorile lui $f(a_1)$, $f(a_2)$, … , $f(a_m)$ care se pot alege conform regulii produsului dintre elementele lui B în număr de $\underbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{m\ ori}$ moduri= n^m moduri $\Rightarrow |B^A|=n^m$.

1.2.4. Funcţii injective

$f : A \rightarrow B$ injectivă $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ x_1,x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

$\Leftrightarrow (\forall)x_1,x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow$ ecuaţia $f(x)=y$ are cel mult o soluţie în A.

Funcţii surjective

$f :A\rightarrow B$ surjectivă $\Leftrightarrow (\forall)\ y \in B$, ecuaţia $f(x)=y$ are cel puţin o soluţie în A

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f =B$

Funcţii bijective

$f :A\rightarrow B$ bijectivă $\Leftrightarrow$ funcţie injectivă+ surjectivă

$\Leftrightarrow (\forall)y \in B$, ecuaţia $f(x)=y$ are exact o soluţie în A.

Numărul de funcţii injective $=A_m^n$, $n\leq m$.

$f :A\rightarrow B$ a.î. $|A|=n$, $|B|=m$.

Numărul de funcţii bijective

$f :A\rightarrow B$, $|A|=|B|=n$ este $P_n=n!$.

Observaţii

$f :A\rightarrow B$ bijectivă $\Rightarrow |A|=|B|$, A,B-finite

1.2.5. Combinări

Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci submulţimile lui A formate din k elemente $0\leq k\leq n$ se numesc combinări de n elemente luate câte k.

Numărul lor se notează $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}$ deoarece nu contează ordinea elementelor $= \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \leq k \leq n, n \in N$.

1.2.6. Mulţimea părţilor unei mulţimi date

Fie A o mulţime. $P(A)=\{B|B\subseteq A\}$

Dacă $|A|=n$, atunci $|P(A)|=2^n$.

Rezolvare

I. Verificăm dacă P(0) este adevărată.

$A=\emptyset$, $|A|=0$ Singura submulțime a lui A este $\emptyset$
$\Rightarrow |P(A)|=1=2^0$ adevărată.
II. Presupunem că dacă $|A|=p$, $0\le p\le n$, atunci $|P(A)|=2^p$, A este o mulțime oarecare
Fie B a.î. $|B|==n+1$, $B=\{a_1,a_2, \quad ,a_n,a_{n+1}\}$.
$P(B)=T\cup S$

T={mulțimea submulțimilor lui B, cu proprietatea că $a_{n+1}\notin$ unei altfel de submulțimi}.

S={mulțimea submulțimilor lui B, cu proprietatea că $a_{n+1}\in$ unei altfel de submulțimi}.

$|S|=|T|$
$S=\{U\cup\{a_{n+1}\}|U\in T\}$
$|T|=|P(\{a_1, \quad a_n\})|=2^n \Rightarrow |P(B)|=|T\cup S|=|T|+|S|=2^n+2^n=2^{n+1}$.
Din I şi II $\Rightarrow |P(A)|=2^{|A|}$ $(\forall)$ A mulțime finită

Observație. Din această relație rezultă $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$

Probleme rezolvate

R1.2.1. Se consideră un tablou în formă de pătrat astfel încât pe fiecare linie şi fiecare coloană să avem n căsuțe ($n\ge 2$) care se completează cu numere întregi. Determinați în câte moduri poate fi completat tabloul dacă produsul numerelor de pe fiecare linie, coloană este 5 sau -5.

Rezolvare

Pentru început determinăm numărul de aranjări ale numerelor 5 sau -5. Dacă pe o linie, coloană apare 5 sau -5, atunci pe acea linie, coloană nu va mai apărea 5 sau -5.

Este suficient să vedem în câte moduri putem completa liniile cu 5, respectiv -5.

Linia 1 2n posibilități de completare cu 5 sau -5
Linia 2 2(n-1) posibilități de completare cu 5 sau -5

Linia n 2 posibilități de completare cu 5 sau -5

Din regula produsului rezultă că avem $2^n \cdot n!$ posibilități de completare cu 5 sau -5

În continuare pentru fiecare completare a unei linii cu 5 sau -5 mai avem 2^{n^2-n} posibilități de completare cu 1,-1= numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu n^2-n elemente (pozițiile rămase libere) cu valori în mulțimea {-1,1}.

În total numărul de completări este $2^n \cdot n!\cdot 2^{n^2-n}= 2^{n^2}\cdot n!$

R1.2.2. Fie $n\ge 3$ un număr întreg. Demonstrați că este posibil ca eliminând cel mult două dintre elementele mulțimii {1,2, ,n} să obținem o mulțime care are suma elementelor pătrat perfect.

Rezolvare

S= 1+2+3+ +n=$\dfrac{n(n+1)}{2} < \dfrac{2n^2}{2} = n^2$.

Se consideră S,S-1,S-2, ,S-2n+1 sumele formate cu elementele mulțimii A din care ori nu scoatem nici un element, ori un element, respectiv 2 elemente (am ales aici sumele distincte).

Presupunem că nici un număr nu este pătrat perfect => ($\exists$) k≤n a.î. $(k-1)^2 <$ S-2n+1<S-2n< <S<k^2.

Numerele dintre cele două pătrate perfecte sunt în număr de $k^2-(k-1)^2+1-2=$ =2k-2 numere =>contradicție, ele fiind cel puțin S-S+2n-1+1=2n numere şi 2k-2<2n. Deci cel puțin unul dintre numerele de mai sus este pătrat perfect.

R1.2.3. La un turneu de tenis au participat de două ori mai mulți băieți decât fete. Fiecare pereche de participanți a jucat exact o dată şi nu au fost rezultate egale. Raportul dintre numărul victoriilor obținute de fete, față de cele obținute de băieți a fost de $\dfrac{7}{5}$. Câți participanți au fost la acest turneu?

Rezolvare

n-numărul fetelor

2n-numărul băieților

3n-număr participanți

Numărul total de meciuri =$C_{3n}^{2} = \dfrac{3n(3n-1)}{2}$.. Numărul total de victorii ale băieților reprezintă $\dfrac{5}{12}$ din total, deci $\dfrac{5}{12}C_{3n}^{2} = \dfrac{5n(3n-1)}{8}$. Meciurile jucate între băieți sunt în număr de $C_{2n}^{2} = \dfrac{2n(2n-1)}{2}$ =n(2n-1)- considerate victorii ale băieților.

$\dfrac{5n(3n-1)}{8} \geq n(2n-1) \Leftrightarrow 15n-5 \geq 16n-8 \Leftrightarrow n \leq 3$.

Analizăm cazurile n=1, n=2, nu convin. n=3 convine. Numărul participanților este 9.

R1.2.4. Se consideră un dreptunghi de dimensiuni1x n, n≥1număr natural şi dale pătrate de dimensiuni 1 x 1 de patru culori. Se pavează dreptunghiul cu dale astfel încât oricare două dale alăturate să aibă culori diferite.

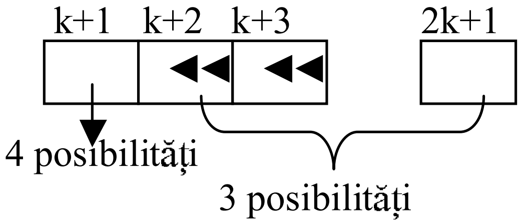
a) Câte pavări simetrice există?

b) Câte pavări au proprietatea că oricare trei dale consecutive au culori diferite?

Rezolvare

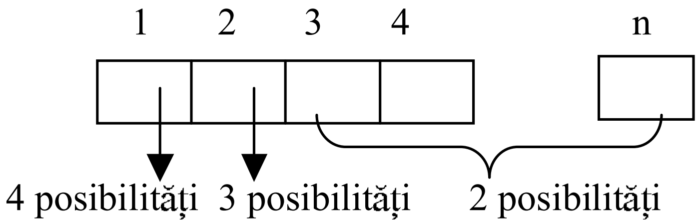
a) Cazul I n=2k, imposibilă efectuarea unei pavări simetrice ca mai sus, cele două dale din mijloc având aceeaşi culoare

Cazul II n=2k+1 vom discuta modalitățile de pavare în funcție de dala din mijloc spre dreapta, ținând cont că pavarea este simetrică.



Total, conform regulii produsului $4\cdot 3^k$ posibilități.

b)



Total, $4\cdot 3\cdot 2^{n-2}=3\cdot 2^n$ posibilități.

R1.2.5.Să se determine numărul de diagonale ale unui patrulater convex cu n laturi.

Rezolvare

Numărul de diagonale = numărul de segmente determinate de cele n vârfuri din care scoatem cele n laturi $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

R1.2.6. Care sunt poligoanele convexe care au proprietatea: numărul diagonalelor lor este egal cu numărul punctelor de intersecție ale acestor diagonale situate în interiorul poligonului şi nu există trei diagonale concurente în interiorul poligonului?

Rezolvare

Numărul diagonalelor $= \dfrac{n(n-3)}{2}$

Numărul punctelor date $= C_n^4 =$ deoarece intersecția a două diagonale în interiorul patrulaterului convex reprezintă intersecția diagonalelor în patrulaterul convex determinat de 4 vârfuri ale poligonului corespunzătoare celor două diagonale şi reciproc 4 vârfuri ale poligonului determină două diagonale care se intersectează în interiorul poligonului.

Deci rămâne de rezolvat ecuația $C_n^4 = \dfrac{n(n-3)}{2}$, $n\geq 4 \Leftrightarrow (n-1)(n-2)=12 \Leftrightarrow n=5$

Poligoanele căutate sunt pentagoanele convexe.

R1.2.7. Care este numărul maxim de unghiuri ascuțite pe care le poate avea un poligon convex cu n laturi?

Rezolvare

Considerăm că poligonul are k unghiuri ascuțite. Deci suma unghiurilor sale este mai mică decât $k\cdot 90^o+(n-k)\cdot 180^o$. Pe de altă parte suma unghiurilor unui poligon cu n laturi este egală cu $(n-2)\cdot 180^\circ$. Deci $(n-2)\cdot 180^\circ < k\cdot 90^\circ+(n-k)\cdot 180^\circ \Rightarrow k<4 \Rightarrow k=3$ numărul maxim (vezi cazul unui triunghi ascuțitunghic).

R1.2.8. Fiecărui punct din plan i se asociază un număr real astfel încât numărul asociat centrului cercului înscris într-un triunghi să fie egal cu media aritmetică a numerelor asociate vârfurilor triunghiului, oricare ar fi acesta. Să se arate că tuturor punctelor din plan le este asociat acelaşi număr.

Rezolvare

Fie ABCDEF hexagon regulat

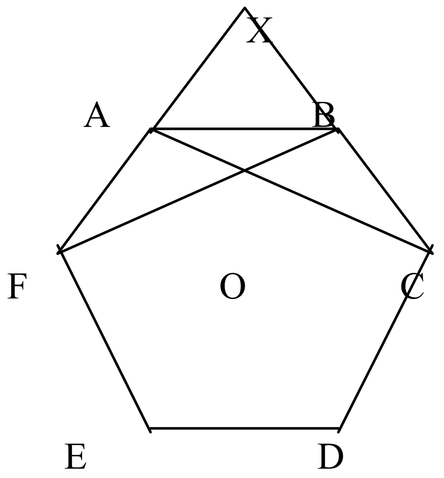
D,E alese arbitrar, de la ele pornind construcția.

A(a), B(b), C(c), D(d), E(e), X(x) unde $\{X\}=AF \cap BC$

Δ ACE şi Δ BDF - triunghiuri echilaterale cu centrul 0 => a + c + e = b + f + d.

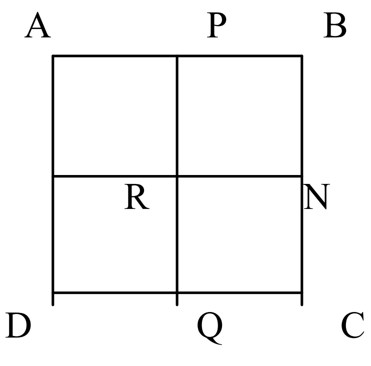
Δ XBF şi Δ XAC au aceleaşi centru pentru cercurile înscrise datorită simetriei față de dreapta OX. x + b + f = x + a + c => b + f = a + c => d = e q.e.d, D şi E fiind alese arbitrar.

O este centrul hexagonului regulat



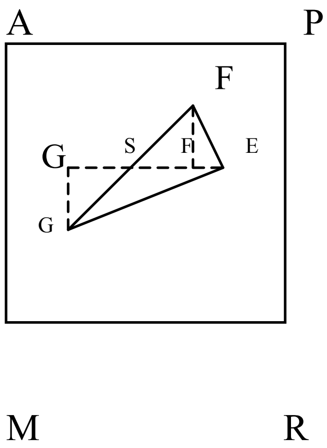
R1.2.9. În interiorul unui pătrat de latură 1 se consideră 9 puncte. Să se arate că putem alege 3 dintre acestea să fie vârfurile unui triunghi cu aria cel mult egală cu 1/8.

Rezolvare



Se iau mijloacele laturilor pătratului ca în figură.

Conform principiului lui Dirichlet, cel puțin 3 se află într-un pătrat mic.



Ducem ES || MR (cazul când una din laturile triunghiului este paralelă cu o latură a pătratului sau inclusă în ea este trivial).

$$A_{[EFG]}=A_{[FES]}+A_{[ESG]}=\frac{h_1 SE}{2}+\frac{h_2 SE}{2}=\frac{SE(h_1+h_2)}{2}\leq\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{8}$$ q.e.d. FF $=h_1$ GG $=h_2$

Bibliografie

Manual cls. X-a - M.Ganga-Editura Math Press
Probleme elementare de matematică -M.Ganga-Editura Math Press 2003
*Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori- L.*Panaitopol, D.Şerbănescu
Olimpiade balcanice pentru juniori- D.Brânzei, I.Şerdean, V. Şerdean

Probleme de numărare

VI.1. a) Câte numere de trei cifre ($n \geq 3$) cu suma cifrelor trei există? b) Pentru $n \geq 3$ să se determine numărul numerelor de n cifre pentru care produsul cifrelor este 8. c) Câte numere de n cifre, $n \geq 2$ se pot forma dacă suma dintre prima şi ultima cifră este 12 ?.

VI.2. Câţi cai se pot aşeza pe o tablă de şah, fără ca aceştia să se atace?

VI.3. Numerele întregi impare consecutive pozitive sunt grupate în felul următor $\{1\}$; $\{3,5\}$; $\{7,9,11\}$; $\{13,15,17,19\}$... Găsiţi suma cifrelor din a n-a grupă.

VI.4. Zece tenismeni participă la un turneu în care fiecare joacă 9 partide cu toţi ceilalţi participanţi. Notăm cu X_i numărul de victorii ale jucătorului i şi cu Y_i numărul de înfrângeri. Să se arate că $X_1^2 + \dots\dots + X_n^2 = Y_1^2 + \dots\dots + Y_n^2$

VI.5. Care este numărul maxim de numere alese dintre 1,2,3,4,...,2002 care se pot alege astfel încât suma oricăror două numere alese să nu se dividă cu diferenţa lor?

VI.6. Se consideră o mulţime de 10 numere arbitrare de 2 cifre. Să se arate că există două submulţimi disjuncte ale acesteia astfel încât suma numerelor din cele două submulţimi să fie aceeaşi.

VI.7. Se consideră 8 grămezi formate dintr-un număr diferit de pietricele. Se ştie că pietricelele oricărei grămezi pot fi distribuite celorlalte 7 astfel încât numărul pietricelelor după redistribuire să fie acelaşi în fiecare grămadă. Să se afle numărul minim de pietricele din grămada cea mai numeroasă.

VI.8. Să se demonstreze că numărul de cărţi roşii din primele 26 de cărţi ale unui pachet de cărţi de joc bine amestecat este egal cu numărul de cărţi negre din ultimele 26 de cărţi (un pachet de cărţi este format din 52 de cărţi, 26 roşii şi 26 negre).

VI.9. Fie $x_k=\frac{k(k+1)}{2}$, $n\geq 10$. $A=x_1+x_2+...+x_{n-1}$, $B=A+x_n$. Demonstrați că între A și B există cel puțin un pătrat perfect.

VI.10. Pentru $a\in N$ considerăm mulțimea $A=\{x|x\in \mathbf{Z}, \frac{2^a}{3x+1}\in \mathbf{Z}\}$. Găsiți numărul elementelor mulțimii A.

VI.11. Vârful pătratelor unitate ale unei table dreptunghiulare m x n sunt colorate cu roșu, verde sau albastru, astfel încât toate vârfurile de pe conturul tablei sunt colorate cu roșu. Spunem că un pătrat unitate este bine colorat dacă exact o pereche de vârfuri adiacente ale pătratului are vârfurile la fel colorate. Să se arate că numărul pătratelor bine colorate este par.

VI.12. Care este numărul maxim de numere care pot fi alese dintre 1,2,3,4,5,...,50 astfel încât suma oricăror două numere alese să nu fie divizibilă cu 7 ?

VI.13. Numerele naturale sunt aranjate astfel. Să se afle numărul liniei și coloanei pe care este scris numărul 2002.

1	3	6	10	15	...
2	5	9	14	...	
4	8	13	...		
7	12	...			
11	...				
...					

Geometrie combinatorică

VI.14. În interiorul unui cub se consideră 2003 puncte. Arătați că se poate împărți cubul în mai mult de 2003^3 cuburi astfel încât orice punct din celelalte să se afle în interiorul unuia dintre cuburile mici (și nu pe fețe).

VI.15. Se dau 5 puncte în plan printre care nu există trei care să fie situate pe o aceeaşi dreaptă. Să se demonstreze că printre acestea se găsesc patru puncte care sunt vârfurile unui patrulater convex.

VI.16. Se dau 5 puncte în plan astfel încât fiecare din cele zece triunghiuri formate are aria mai mare ca 2. Demonstraţi că există un triunghi de arie mai mare ca 3.

VI.17. Se consideră 2n puncte în plan. Să se arate că există o dreaptă cu proprietatea că în semiplanele determinate de ea se află n puncte.

VI.18. Pe un cerc sunt aşezate 10 puncte. Câte linii frânte neînchise formate din 9 segmente (care nu se intersectează) cu vârfurile în aceste puncte există ?

VI.19. Într-o ţară sunt mai multe oraşe astfel încât distanţa dintre oricare două oraşe este diferită faţă de cea dintre oricare două oraşe. Într-o dimineaţă din fiecare oraş pleacă câte un avion către oraşul cel mai apropiat. Se poate ca într-un oraş să aterizeze mai mult de 5 avioane ?.

VI.20. În plan se duc n drepte câte două neparalele şi astfel încât oricare trei nu sunt concurente. În câte părţi împart aceste drepte planul ?

VI.21.Se dau în plan un număr finit de puncte. Să se arate că dintre ele se poate alege întotdeauna un punct pentru care există nu mai mult de trei puncte din cele date care să fie cele mai apropiate de el.

VI.22. În plan se consideră $n \geq 4$ puncte cu proprietatea că oricare trei dintre ele nu sunt situate pe aceeaşi dreaptă. Arătaţi că dacă pentru oricare trei dintre ele există un al patrulea punct dintre cele date astfel încât ele să determine un paralelogram atunci $n=4$.

VI.23. În interiorul unui pătrat de latură 1 este aşezată o linie frântă ale cărei laturi se intersectează şi au suma lungimilor egală cu 1000. Arătaţi că există o dreaptă paralelă cu una din laturile pătratului care intersectează linia frântă în cel puţin 500 puncte.

VI.24. În interiorul unui poligon convex se consideră două puncte P şi Q. Arătaţi că există un vârf al poligonului a cărui distanţă până la Q este mai mică decât distanţa până la P.

VI.25. În câte moduri distincte se poate acoperi suprafaţa unui pătrat de latura 8 cu 64 de triunghiuri dreptunghice de catete 1 colorate în roşu şi 64 de triunghiuri dreptunghice de catete 1 colorate în albastru dacă două triunghiuri care au o latură comună sunt la fel colorate?

Probleme de numărare

VI.1. a) Cazul I – prima cifră 3 – 1 singur număr (restul cifrelor nule)

Cazul II – prima cifră 2 – n-1 numere (posibilități de aranjare a singurei cifre nenule 1)

Cazul III – prima cifră 1 - n-1 numere (conțin cifra 2)

- C^2_{n-1} – numere formate numai din 1.

Total=$1+2n-2+\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ numere.

b) Numere care-l conțin pe 8 – n numere

Numere care conțin cifrele 2 și 4 (restul sunt 1) - A^2_n

Numere care conțin de 3 ori cifra 2 (restul cifrelor 1) - C^3_n

Total=$n+A^2_n+C^3_n$

c) prima cifră 3, ultima 9 – în total 10^{n-2} numere.

Prima cifră 4; ultima cifră. 8 - 10^{n-2}

Vom folosi prescurtările: p.c.- prima cifră, u.c. – ultima cifră

p.c. 5; u.c.7 - 10^{n-2}

p.c. 6; u.c.6 - 10^{n-2} Total 7 10^{n-2} numere de acest tip.

p.c. 7; u.c.5 - 10^{n-2}

p.c. 8; u.c.4 - 10^{n-2}

p.c. 9; u.c.3 - 10^{n-2}

VI.2. Numărul maxim este 32.
Plasăm caii pe cele 32 de câmpuri albe ale tablei. Orice cal atacă câmpuri negre, deci nu se atacă.
Fie 33 de cai. Numerotând câmpurile de la 1 la 64 urmând traseul unui cal ce trece prin toate câmpurile fără să revină pe un câmp ocupat anterior. Dacă am plasa 33 de cai vom avea două câmpuri numerotate consecutiv ce vor fi ocupate de doi cai. Aceştia se atacă.

VI.3. Suma primelor numere impare consecutive este k^2.

$x_1=3$ $G_1=\{1\}$

.... $G_2=\{3, 5\}$

$x_k=2k-1$ $|G_{n-1}|=n-1$

$|G_1 \cup \ldots G_{n-1}|=1+\ldots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$

$G_n=\{ x_{\frac{n(n-1)}{2}+1},\ldots, x_{\frac{n(n-1)}{2}+n} \}$

$x_{\frac{n(n-1)}{2}+1}=2\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)-1=n^2-n+1$

$x_{\frac{n(n-1)}{2}+n}=n^2+n-1$

$S: \frac{n^2+n-1+n^2-n+1}{2}\cdot n=n^3$

VI.4. $x_i+y_i=9$, $i=\overline{1,9}$.

Numărul de partide jucate este $C^2_{10}=45$ şi cum fiecare are un învingător şi un învins rezultă $x_1+\ldots+x_{10}=y_1+\ldots+y_{10}$. Atunci $(x^2_1+\ldots+x^2_{10})-(y^2_1+\ldots+y^2_{10})=$

$(x^2_1-y^2_1)+(x^2_2-y^2_2)+\ldots+(x^2_{10}-y^2_{10})=(x_1-y_1)(x_1+y_1)+\ldots+(x_{10}-y_{10})(x_{10}+y_{10})=$

$=9(x_1-y_1)+\ldots+9(x_{10}-y_{10})=0$.

VI.5. Alegem numerele 1, 4, 7, 10,..., 2002 adică cele de forma M_3+1. Se obţin 668 de numere şi arătăm că acestea satisfac cerinţa. Suma oricăror numere este de forma M_3+2 iar diferenţa M_3, deci diferenţa nu divide suma. Vom arăta că numărul 668 este maxim. Într-adevăr, dacă alegem cel puţin 669 de numere vom găsi două numere alese dintr-una din cele 667 grupe formate astfel {1, 2, 3},..., {1999, 2000. 2001}. Dacă numerele alese sunt consecutive atunci diferenţa lor este 1 şi divide suma lor. Dacă numerele alese au diferenţa 2 atunci numerele au aceeaşi paritate şi suma lor se divide cu 2 deci cu diferenţa lor.

VI.6. $2^{10}-1=1023$ submulţimi nevide ale mulţimii cu cele 10 numere. Suma elementelor unei submulţimi este evident între 100 şi 1000, deci avem cel mult 900 sume posibile. Există prin urmare două submulţimi având aceeaşi sumă a elementelor. Dacă acestea nu sunt disjuncte eliminăm partea comună şi egalitatea se menţine.

VI.7. Fie $a_1<a_2<\ldots<a_n$ numărul de pietricele din cele 8 grămezi. Conform ipotezei cele a_1 pietricele ale primei grămezi sunt suficiente pentru a egaliza celelalte 7 grămezi. Cum $a_8\geq a_7+1$ trebuie să adăugăm cel puţin o pietricică în a 7-a grămadă, apoi cel puţin 2 în a 6-a grămadă etc.

$a_1 \geq 1+2+3+\ldots+6=21$, $a_8 \geq a_7+1 \geq \ldots \geq a_1+7=28$

Arătăm că numărul minim de pietricele din a 8-a grămadă este 28. Distribuția 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 satisface condițiile problemei după redistribuirea oricărei grămezi celelalte 7 vor avea

$\frac{21+22+\ldots+28}{7}=\frac{196}{7}=28$ pietricele.

VI.8. x - numărul de cărți din primele 26 rezultă 26-x – numărul de cărți negre din prima jumătate.

26-26+x=x – numărul de cărți negre din a doua jumătate.

VI.9. $A=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

$$B=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Calculăm $\sqrt{B}-\sqrt{A}=\sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}-\sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)}{6}}$ Demonstrăm că $\sqrt{B}-\sqrt{A}>1$ este echivalentă cu

$$\sqrt{(n+1)\cdot n}>\sqrt{2(n+2)}+\sqrt{2(n-1)}$$

$$\sqrt{n(n+1)}>\sqrt{n^2}=n$$

$$n>2\sqrt{2(n+2)}$$

$$2\sqrt{2(n+2)}>\sqrt{2(n+2)}+\sqrt{2(n-1)} \qquad n>2\sqrt{2(n+2)}$$

(echivalent cu $n^2>8n+16$, adică $(n-4)^2>32$ adevărată pentru $n \geq 10$)
Deci relațiile sunt adevărate, deci între A și B există cel puțin un pătrat perfect.

VI.10. Este necesar să găsim $b \leq a$ și $c=1$ sau $c=-1$ astfel încât $3x+1=c2^b$.

Pentru c=1 trebuie să avem $3x=2^b-1$ ceea ce înseamnă că b este par, b=2k unde $0 \le k \le \left[\frac{a}{2}\right]$

Deci această eventualitate ne dă $1+\left[\frac{a}{2}\right]$ elemente.

Pentru c=-1 trebuie să avem $3x+2^b+1=0$ deci b trebuie să fie impar, b=2k+1 cu

$$0 \le k \le \left[\frac{a-1}{2}\right]$$

Eventualitatea ne dă $1+\left[\frac{a-1}{2}\right]$ elemente. Numărul total de elemente este a+1.

VI.11. Pentru fiecare k aparţinând {0, 1, 2, 3, 4} notăm cu S_k numărul pătratelor unitate având exact k laturi cu capetele la fel de colorate. Avem de demonstrat că S_1 este număr par. Să observăm că $S_3=0$ deoarece dacă 3 laturi ale unui pătrat au capetele de aceeaşi culoare atunci patru au capetele de aceeaşi culoare. Ptentru fiecare pereche de vârfuri adiacente de aceeaşi culoare vom scrie numarul 1 în interiorul pătratelor unitate de care acest vârf aparţine. Astfel fiecare pereche monocromatică de pe contur va avea asociat un număr 1, iar fiecărei perechi monocromatice i se vor asocia două numere 1. Cum numărul perechilor monocromatice de pe contur este 2m+2n rezultă că suma numerelor din interiorul pătratelor tablei este număr par. Pe de altă parte în interiorul unui pătrat unitate cu exact k laturi având extremităţile de aceeaşi culoare se scriu k de 1; prin urmare suma numerelor din interiorul tablei este

$0\ S_0+1\ S_1+2\ S_2+3\ S_3+4\ S_4=S_1+2\ S_2+4\ S_4$. Cum acest număr este par $\Rightarrow$ S_1 e par q.e.d.

VI.12. Împărţim numerele în mulţimile

$A_0=\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$
$A_1=\{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\}$
$A_2=\{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\}$
$A_3=\{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}$
$A_4=\{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\}$
$A_5=\{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\}$
$A_6=\{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\}$

Este clar că nu putem alege două numere din multimea A_0 şi de asemenea nu putem alege concomitent un element din multimea A_I şi unul din A_{7-I}, $I \in \{1, 2, 3\}$. Deoarece mulţimile A_I au 7 elemente cu excepţia mulţimii A_1 care are 8 elemente vom alege elementele din A_1, A_2, A_3 şi un element din A_0, deci 8+7+7+1=23 de numere.

VI.13. Fie i numărul coloanei şi j numărul liniei în care este situat 2002. Al n-lea număr. de pe prima

linie este $\frac{n(n+1)}{2}$. Fiindcă $\frac{62 \cdot 63}{2}$ =1953 şi $\frac{63 \cdot 64}{2}$ =2016 şi

1953<2002<2016 deducem i+j=64.

Obţinem că j=2016-2002+1=15 iar i=64-15=49.

VI.14. Se consideră un sistem ortogonal tridimensional Oxyz un vârf al pătratului O şi laturile de lungime 1.

Fie n un nr. prim >2003 a.î. n să fie prim cu orice numitor al coordonatelor punctelor (raţionale) scrisă sub formă ireductibilă.

Împărţim cubul în n^3 cuburi cu plane paralele cu xOz, yOz, xOy de ecuaţii $x,y,z=\frac{k}{n}$, $k=\overline{1, n-1}$.

Nici unul dintre aceste puncte nu se află în aceste plane şi se află in interiorul cubului mare $\Rightarrow$ toate punctele se află în interiorul cubului mic.

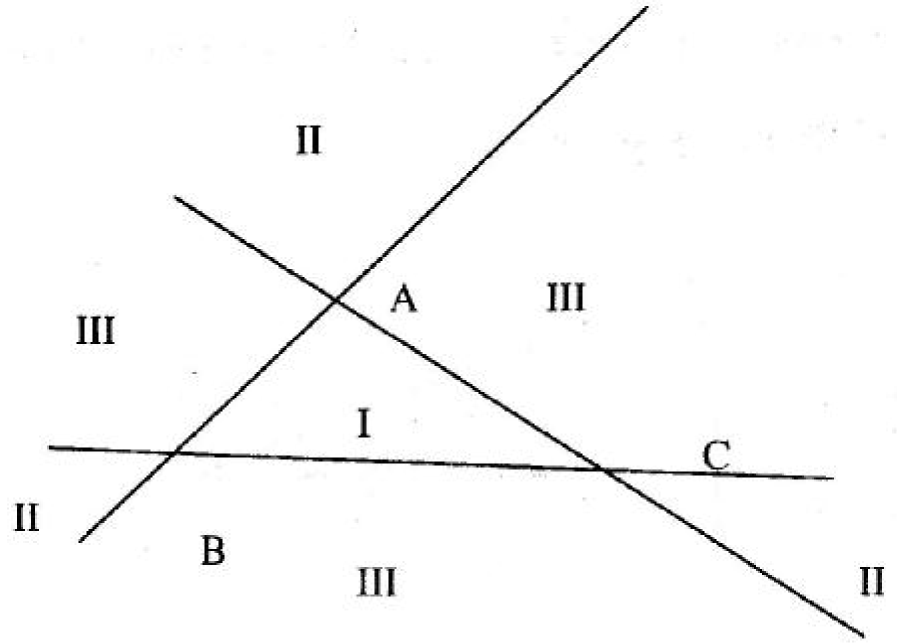
VI.15. Cu cele 5 pct. Putem forma zece triunghiuri distincte. Fie punctele distincte A, B, C, D, E şi ΔABC al cărui interior conţine cel mai mare număr de puncte din cele rămase.

Dreptele AB, BC, AC împart planul în trei tipuri de regiuni

a) R_I – interiorul triunghiului.

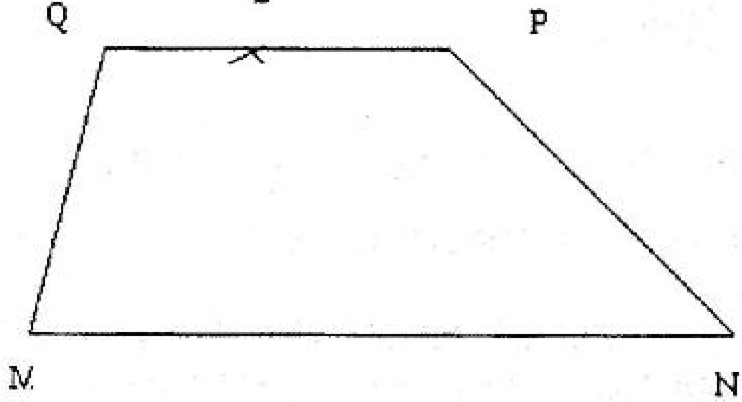
b) RII- interiorul unghiurilor opuse la vârf unghiurilor ΔABC.

c) RIII- conţine interiorul unghiurilor ΔABC din care înlăturăm ΔABC şi interiorul său.



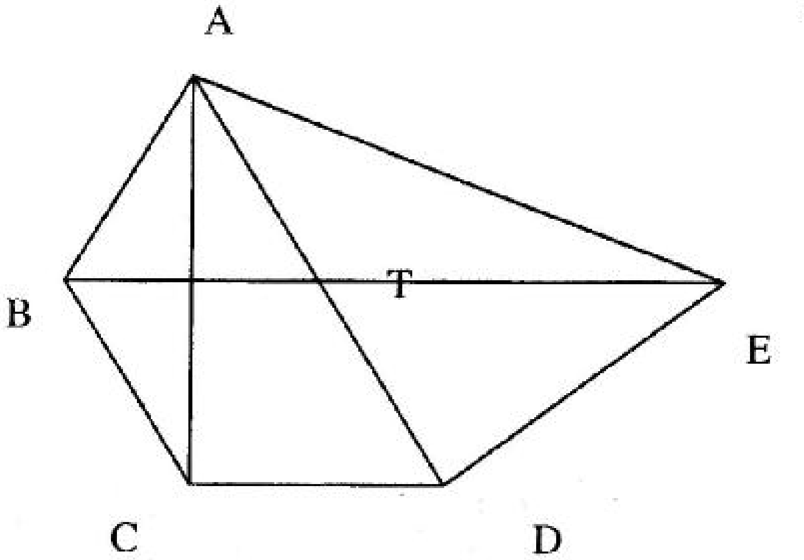
1) Dacă cel puțin unul din punctele D, E se află într-o regiune de tipul III atunci acest punct împreună cu A, B, C determină un patrulater convex.
2) Dacă punctele D şi E sunt în regiunea I dreapta DE intersectează numai două laturi ale ΔABC şi deci patrulaterul format din capetele laturii pe care nu o intersectează şi din punctele D şi E este convex.
3) Dacă punctele D şi E sunt în regiunea II de exemplu cea cu vârful în A iar celălalt E în cea cu vârful în B punctul A ar fi în interiorul ΔDBC, iar B în interiorul ΔEAC contrazicând alegerea ΔABC.
4) Dacă D ar fi în interiorul ΔABC iar E într-o regiune II, de exemplu cea cu vârful în A, atunci A şi D ar fi în interiorul ΔEBC, se contrazice alegerea ΔABC.

VI.16.



Lema. MNPQ patrulater convex $S\in(QP)$ atunci $A_{[SMN]}\geq\min(A_{[QMN]};$ $A_{[PMN]})$.

Cazul I ABCDE pentagon convex.



C1. $BS\geq\dfrac{BE}{3}$, $BE\geq\dfrac{SE}{2}$.

$A_{[BDE]}=A_{[BDS]}+A_{[SDE]}\geq\dfrac{A_{[SDE]}}{2}+A_{[SDE]}=\dfrac{3\cdot A_{[SDE]}}{2}\geq\dfrac{3}{2}\min(A_{[ECD]},$ $A_{[AED]})\geq\dfrac{3}{2}\cdot 2=3$.

Analog cazul când $TE\geq\dfrac{BE}{3}$.

C2. $ST\geq\dfrac{BE}{3}$

$A_{[AST]}\geq\dfrac{A_{[ABE]}}{3}>\dfrac{2}{3}$; $A_{[DTS]}\geq\dfrac{A_{[BED]}}{3}\geq\dfrac{2}{3}$

$A_{[CDS]}\geq\min(A_{[BCD]},A_{[CDE]})>2$ deci $A_{[ACD]}>2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}>3$.

Cazul II Pentagonul ABCDE concav $D\in\operatorname{Int}\Delta ABC$ atunci $A_{[ABC]}=A_{[ABD]}+A_{[ACD]}+A_{[BDC]}>6>3$.

Dacă $D\in\operatorname{Int}$ ABCE va fi în unul dininterioarele ΔABC, ΔABE, ΔACE, ΔBCE.

Presupunem că $D\in\operatorname{Int}\Delta BCE$ şi avem $A_{[BCE]}>A_{[CDE]}+A_{[DCB]}>4>3$ q.e.d.

VI.17. Se consideră d o dreaptă ce lasă toate cele 2n puncte de aceeași parte a sa. Fie $P_1,\ldots,P_{2n}$ cele 2n puncte și O un punct al dreptei d care nu se află pe nici una din dreptele P_iP_j I $i \neq j \in \{1, 2,\ldots, 2n\}$. Fie $A \neq 0$ un punct al dreptei d și observăm că unghiul AOP_i, $i \in \{1,2,\ldots,2n\}$ cu toate măsurile diferite (în cazul în care $\langle AOP_i \equiv \langle AOP_j \Rightarrow O \in PiPj$, contradicție).

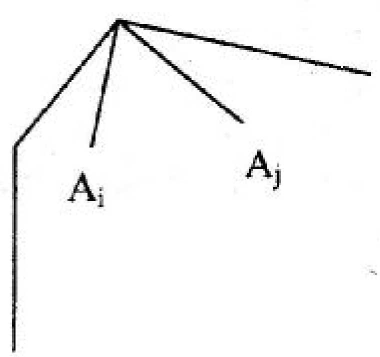
Notăm și ordonăm crescător $m_1<m_2<\ldots<m_{2n}$ măsurile $\langle AOPi$, $i=1,2,\ldots 2n$. Fie $m \in (m_n, m_{n+1})$ și o dreaptă ce trece prin O și face cu d un unghi de măsură m. Atunci cele n puncte care determină unghiurile $m_1, \ldots, m_n$ se află de o parte a dreptei iar celelalte n corespunzătoare unghiurilor de măsură m_{n+1}, $m_{n+2},\ldots,$ m_{2n} se află de cealaltă parte, ceea ce trebuia demonstrat.

VI.18. Primul punct al liniei frânte poate fi ales în 10 moduri. Alegând un punct ca punct de plecare avem fixat și capătul acesteia. Fiecare din cele 8 puncte rămase le putem alege în două moduri a.î. el să fie vecin cu unul din punctele alese de mai sus. Deoarece începutul și sfârșitul unei linii frânte nu contează, rezultatul se împarte la 2. Deci numărul cerut este $\frac{10 \cdot 2^8}{2} = 10 \cdot 2^7$ linii frânte.

VI.19. Presupunem prin absurd că într-un oraș P ar ateriza 6 avioane venite din $A_1, \ldots, A_6$. Avem $A_1A_2>A_1P$, $A_1A_2>A_2P$. Atunci $m(\prec A_1PA_2)>60°$. Analog $m(\prec A_2PA_3)>60°$ și deci $m(\prec A_iPA_{i+1})>360°$, fals.

VI.20. Fie a_n nr. de părți în care se împarte planul de cele n drepte. Mai ducem încă o dreaptă. Prin aceasta numărul de părți se mărește cu n+1. Atunci $a_{n+1}=a_n+n+1$. De aici $a_n=2+2+3+\ldots+n=\frac{n^2+n+2}{2}$.

VI.21. Alegem cea mai mică pereche de distanțe dintre punctele date. Considerăm punctele care sunt cele mai apropiate de această pereche. Fie P un vârf al unui contur convex, cel mai mic care conține toate punctele.



Dacă Ai, Aj sunt cele mai apropiate puncte de P atunci $A_iA_j \geq A_iP$, $A_iA_j \geq A_jP$ și deci $m(<A_iPA_j) \geq 60°$.

Prin urmare, lângă P nu poate fi un al patrulea punct cel mai apropiat punct vecin căci unul din unghiurile $\sphericalangle AiPAj$ ar fi mai mic decât $\frac{180°}{3} = 60°$. Deci P este punctul căutat.

VI.22. Considerăm cel mai mic poligon convex care conţine punctele date (cel mai mic poligon convex în sensul că alt poligon convex care conţine punctele date îl conţine)

Cazul I Poligonul convex cel mai mic este paralelogramul ABCD. (Dacă M se află în interiorul paralelogramului ABCD atunci vârfurile tuturor celor trei paralelograme care au vârfurile comune A, B, M se află în exteriorul paralelogramului ABCD, fals).

Cazul II Poligonul convex cel mai mic nu este paralelogram. Fie [AB], [CD] laturi ale acestui poligon. Prin P şi Q vârfuri ale poligonului ducem paralele la AB, respectiv BC. Al patrulea vârf al celor trei paralelograme (care au în comun vârfurile B, P, Q) se află în afara poligonului convex cel mai mic. Mai mult, ele se află în afara paralelogramului format de AB, BC şi paralelele prin P şi Q la AB şi respectiv BC, când P şi Q sunt vârfuri ale acestui paralelogram.

VI.23. Fie l_1, l_2,… lungimile segmentelor care formează linia poligonată. Pentru segmentul l_i fie a_i, b_i lungimile proiecţiilor acestuia pe laturile pătratului $l_i \leq a_i + b_i$.

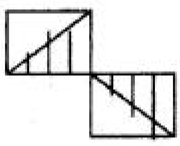
$1000 = l_1 + l_2 + ... \leq (a_1 + a_2 + ...) + (b_1 + b_2 + ...) \Rightarrow a_1 + a_2 + ... \geq 500$ sau $b_1 + b_2 + ... \geq 500$

Dacă suma lungimilor proiecţiilor pe latura de lungime 1 nu-i mai mică decât 500 atunci pe unul din punctele acestei laturi se proiectează nu mai puţin de 500 segmente diferite ale liniei frânte. Perpendiculara pe latură ce trece prin aceste punct intersectează linia frântă în nu mai putin de 500 puncte.

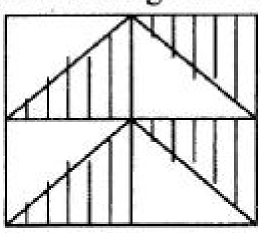
VI.24. Presupunem prin absurd că distanţele de la vârfurile poligonului la Q sunt mai mari decât distanţele de la aceleaşi vârfuri până la P. Aceasta înseamnă că dacă luăm mediatoarea segmentului [PQ] atunci toate vârfurile poligonului se vor afla în acel semiplan determinat de mediatoarea care conţine punctul P. Cu alte cuvinte Q ar fi exterior poligonului. Contradicţie.

VI.25. Împărţim pătratul de latură 8 în 64 pătrate unitate. Un pătrat unitate se poate acoperi în 4 moduri

Cele 8 pătrate ale unei diagonale pot fi acoperite în $4^8 = 2^{16}$ moduri. În rest acoperirea este unic determinată. Într-adevăr, să considerăm două pătrate ale diagonalei având un vârf comun de exemplu



Ipoteza atrage următoarea acoperire (unică!) a pătratelor vecine amândurora.



În mod analog se probează unicitatea pentru orice altă combinaţie. Astfel acoperirea a 8 pătrate ale unei diagonale implică acoperirea diagonalelor adiacente ei (cu câte 7 pătrate fiecare) în mod unic; apoi acoperirea diagonalelor de câte 6 pătrate etc.

PROBLEME DE NUMĂRARE

În limbaj cotidian a rezolva o problemă înseamnă a găsi o ieşire dintr-un impas (sau dintr-o situaţie dificilă), înseamnă a găsi o cale pentru a atinge un obiectiv sau pentru a face credibilă o anumită afirmaţie.

Matematica, prin prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural sau contextual urmăreşte atât rezolvarea fiecărei probleme în parte, cât şi găsirea de strategii şi algoritmi ce se pot aplica unei clase întregi de probleme.

O clasificare certă a problemelor nu este posibilă.

Există probleme de aritmetică, de algebră, de geometrie, de trigonometrie, de analiză etc, dar şi probleme combinate.

Putem împărţi problemele în "probleme de aflat" sau "probleme de demonstrat", îl "probleme de inventivitate" sau "probleme de rutină", în "probleme teoretice" sau "probleme practice" etc.

O diferenţiere a problemelor poate fi facută şi în funcţie de numărul de soluţii ale acestora. Există probleme cu o soluţie, cu un alt număr finit nenul de soluţii, dar şi probleme fără soluţii sau cu o infinitate de soluţii.

O categorie specială o constituie *problemele de numărare*. În multe dintre acestea apar întrebări de genul "câte ?", "în câte moduri" sau rezolvarea efectivă conduce la astfel de întrebări. Pentru unele dintre ele există o metodă comună de rezolvare.

Vom analiza aici câteva exemple:

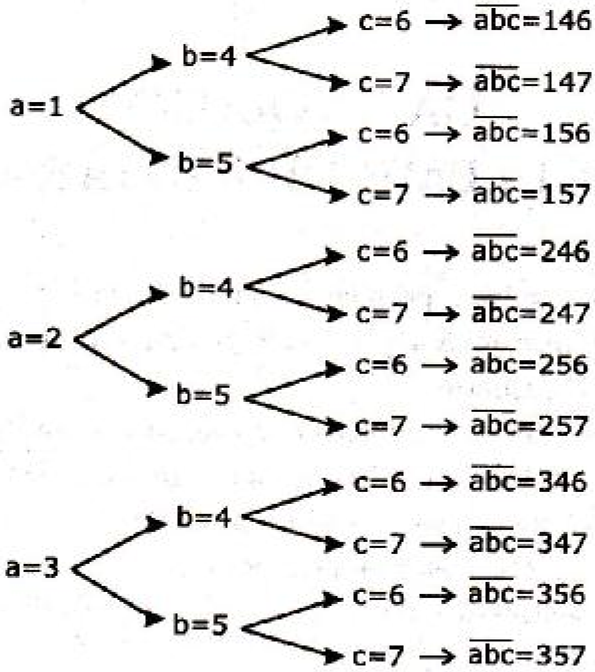
1. Câte numere de şase cifre încep şi se termină cu cifra 1?

Soluţie. Numerele sunt de forma $\overline{1abcd1}$ unde a, b, c, d sunt cifre. Cum a poate lua oricare din valorile $0, 1, 2, \ldots, 9$ (deci 10 valori), b poate lua, de asemenea, oricare din aceste 10 valori, indiferent de valoare lui a, rezultă că gruparea ab se poate forma în $10 \cdot 10 = 10^2$ moduri. Raţionând în continuare analog pentru c şi apoi pentru d, obţinem $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ grupări $abcd$, deci există 10^4 numere de forma $\overline{1abcd1}$.

Altfel. Este suficient să observăm că $\overline{abcd}$ poate avea una din formele: $\overline{0000}$, $\overline{0001}$, $\ldots$, $\overline{9998}$, $\overline{9999}$ deci, în total, 10000 de posibilităţi.

2. În câte moduri putem forma numărul $\overline{abc}$ astfel încât $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{4, 5\}$, $c \in \{6, 7\}$?

Soluţie. Cifra a o pot alege în trei moduri. Pentru fiecare dintre acestea există două posibilităţi de a alege cifra b deci există $3 \cdot 2 = 6$ posibilităţi pentru a alege primele două cifre. Pentru fiecare dintre acestea există două posibilităţi de alegere pentru cifra c. În total există $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ numere cu proprietăţile cerute. Fiecare dintre aceste numere este o ramură în arborele posibilităţilor (deciziilor) din figura de mai jos.



3. Luând în considerare performanţele, indiferent de sportul practicat, a fost întocmită o listă cu cei mai buni 10 sportivi ai secolului trecut. Pentru ierarhizarea acestora se efectuează un sondaj de opinie. Fiecare dintre participanţii la sondaj trebuie să întocmească un clasament al celor zece astfel încât pe fiecare dintre locurile de la 1 la 10 să fie un singur nume şi pe fiecare listă să apară numele tuturor celor 10 sportivi. Care este numărul minim de participanţi la sondaj astfel încât , cu certitudine, cel puţin doi participanţi să întocmească liste identice?

Soluţie. Pe locul 1 poate fi trecut oricare dintre cei zece. Pe locul 2 oricare din cei nouă rămaşi. În total pentru primele 2 locuri sunt $10 \cdot 9$ posibilităţi. Pentru locul 3 sunt opt posibilităţi. Pentru locurile 1,2 şi 3 sunt deci $10 \cdot 9 \cdot 8$ posibilităţi. Raţionând analog rămâne că pentru locurile de la 1 la 8 sunt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, iar pentru locurile de la 1 la 9 sunt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Ocupând primele 9 locuri al zecelea se ocupă automat de cel rămas, deci într-un singur mod.

Numărul de variante distincte posibile este deci:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Pentru a avea cel puţin două variante identice trebuie ca la sondaj să participe cel puţin $3628800 + 1 = 3628801$ persoane.

Aceste probleme sugerează o metodă comună de rezolvare. Este vorba de *principiul multiplicităţii.*

Presupunem că trebuie să formăm toate grupările (secvenţele) de forma $(a_1, a_2, \dots, a_n), n \in \mathbb{N}^*$, n finit, în condiţiile în care elementul a_1 poate fi ales în p_1 moduri, elementul a_2 în p_2 moduri şi aşa mai departe, deci elementul a_n în p_n moduri.

Se cere să determinăm numărul total de astfel de grupări. Vom arăta, că acest număr este $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$.

Dacă a_1 poate lua p_1 valori înseamnă că gruparea (a_1) poate fi formată în p_1 moduri. Pentru fiecare din cele p_1 posibilităţi ale lui a_1 gruparea (a_1, a_2) poate fi formată în p_2 moduri, deci în total există $p_1 p_2$ grupări de forma (a_1, a_2).

Presupunem că $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ poate fi formată în $p_1 p_2 \dots p_k$ moduri. Atunci grupările de forma $(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$ se pot forma adăugând pe rând la cele $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ grupări de forma $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ câte una din cele p_{k+1} valori pe care le poate lua a_{k+1}. Rămâne că numărul lor este $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k) \cdot p_{k+1}$.

Am demonstrat astfel că numărul cerut este $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$.

Observaţii

• 1. Raţionamentul făcut este reluat la capitolul VI.

• 2. Reamintim că dacă $E_1, E_2, \dots, E_n$ sunt mulţimi, produsul lor este:

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in E_i, i = \overline{1,n}\}.$$

Prin $i = \overline{1,n}$ înţelegem că i parcurge toate valorile naturale de la 1 la n.

Principiul multiplicităţii arată că numărul elementelor acestui produs cartezian este $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ unde p_i este numărul de elemente al mulţimii $E_i, i = \overline{1,n}$.

• 3. Două grupări (secvenţe) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ şi $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ sunt egale dacă şi numai dacă au acelaşi număr de elemente $(n = m)$ şi în plus $a_i = b_i, i = \overline{1,n}$.

• 4. Dacă într-o secvenţă $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ cel puţin un element se repetă o vom numi secvenţă cu repetiţie, iar în caz contrar o vom numi secvenţă cu elemente distincte. Două secvenţe cu elemente distincte pot diferi între ele fie prin ordinea, fie prin natura elementelor. Astfel secvenţele $(1, 2, 3)$ şi $(2, 3, 1)$ diferă prin ordinea elementelor, iar secvenţele $(1, 2, 3)$ şi $(1, 2, 4)$ diferă prin natura elementelor.

• 5. Dacă toate elementele secvenţelor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sunt dintr-o aceeaşi mulţime având m elemente atunci numărul acestora este $\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{de } n \text{ ori}}$ deci m^n.

• 6. Unele probleme care folosesc principiul multiplicităţii revin la calcularea de produse ca: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sau $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Pentru astfel de produse se foloseşte o notaţie specială. Dacă n este un număr natural nenul atunci produsul $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ se notează cu $n!$ şi se citeşte "n factorial". Cum produsul este comutativ putem scrie $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, sau $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Convenţie : $\boxed{0! = 1}$

Se observă cu uşurinţă că $n! = (n-1)! \cdot n$ şi că $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$.

Cu aceste notaţii putem scrie produsul $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ în felul următor:

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k-1)(n-k)}$$

deci $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1 = \dfrac{n!}{(n-k)!})$ unde $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pentru $k = n$ obţinem $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \dfrac{n!}{0!}$ şi de aici se justifică necesitatea convenţiei $0! = 1$.

Exemplele de mai sus au avut o metodă comună de rezolvare: **principiul multiplicității** (acesta se mai numeşte şi principiul produsului).

Varietatea problemelor de numărare presupune folosirea unei mari diversități de metode. Pentru adordarea problemelor din acest capitol mai facem următoarele precizări:

1) Orice număr real x se scrie sub forma $x = [x] + \{x\}$ unde $[x]$ este partea întreagă a lui x iar $\{x\}$ partea fracțională.

Partea întreagă a numărului real x este cel mai mare număr întreg care nu-l depăşeşte pe x, deci $x - 1 < [x] \leq x$.

Partea fracțională este întotdeauna un număr din intervalul $[0, 1]$.

Exemple:

$[2,3] = 2$; $\{2,3\} = 0,3$; $[5] = 5$; $\{5\} = 0$; $[1,243] = 1$; $\{1,243\} = 0,243$; $[0,73] = 0$; $\{0,73\} = 0,73$; $[-7] = -7$; $\{-7\} = 0$; $[-2,51] = -3$; $\{-2,51\} = 0,49$; $[-0,63] = -1$; $\{-0,63\} = 0,37$; $3,6 = 3 + 0,6$; $7 = 7 + 0$; $-2,8 = -3 + 0,2$; $-0,9 = -1 + 0,1$.

2) Dacă se dă mulțimea $\{1, 2, 3, ..., n\}$ şi un număr natural p nenul, atunci în această mulțime sunt exact $\left[\frac{n}{p}\right]$ multipli ai lui p. Altfel spus, numărul multiplilor nenuli ai numărului natural nenul p până la un număr natural n, dat, este egal cu $\left[\frac{n}{p}\right]$.

3) Orice număr natural n, diferit de 0, se descompune în mod unic într-un produs de factori primi, adică:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .. p_k^{\alpha_k},$$

unde $p_1, p_2, ..., p_k$ sunt numere prime distincte, iar $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ numere naturale nenule.

Această reprezentare a lui n se mai numeşte şi *forma canonică* a lui n.

Numărul divizorilor naturali al lui n este dat de produsul:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1).$$

4) Suma primelor n numere naturale nenule este:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5) În cele ce urmează folosim în loc de denumirile: leu, dolar, euro, denumirile de "unitate monetară" pe care o scriem prescurtat u.m.

PROBLEME COMENTATE

1. În câte moduri se poate schimba o bancnotă de 25 de u.m. cu monede de 5 u.m., 3 u.m. şi o u.m.?

Soluție. Pentru a uşura redactarea vom nota moneda de 5 u.m. cu A, cea de 3 u.m. cu B şi cea de o u.m. cu C. O variantă o vom da, de exemplu, astfel: $3A + 2B + 4C$ şi o vom citi: 3 monede de 5 u.m., două de 3 u.m. şi 4 monede de o u.m.

Varianta $0 \cdot A + 6B + 7C$ reprezintă: 0 monede de 5 u.m., 6 de 3 u.m. şi 7 de o u.m. Există următoarele posibilități:

1) $5A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$;

2) $4A + 1 \cdot B + 2C$;

16) $1 \cdot A + 4B + 8C$;

17) $1 \cdot A + 3B + 11C$;

3) $4A + 0 \cdot B + 5C$;
4) $3A + 3B + 1 \cdot C$;
5) $3A + 2B + 4C$;
6) $3A + 1 \cdot B + 7C$;
7) $3A + 0 \cdot B + 10C$;
8) $2A + 5 \cdot B + 10C$;
9) $2A + 4B + 3C$;
10) $2A + 3B + 6C$;
11) $2A + 2B + 9C$;
12) $2A + 1 \cdot B + 12C$;
13) $2A + 0 \cdot B + 15C$;
14) $1 \cdot A + 6B + 2C$;
15) $1 \cdot A + 5B + 5C$;
18) $1 \cdot A + 2B + 14C$;
19) $1 \cdot A + 1 \cdot B + 17C$;
20) $1 \cdot A + 0 \cdot B + 20C$;
21) $0 \cdot A + 8B + 1 \cdot C$;
22) $0 \cdot A + 7B + 4C$;
23) $0 \cdot A + 6B + 7C$;
24) $0 \cdot A + 5B + 10C$;
25) $0 \cdot A + 4B + 13C$;
26) $0 \cdot A + 3B + 16C$;
27) $0 \cdot A + 2B + 19C$;
28) $0 \cdot A + 1 \cdot B + 22C$;
29) $0 \cdot A + 0 \cdot B + 25C$.

În concluzie, există 29 posibilităţi distincte de a se schimba o bancnotă de 25 lei cu monede de 5 lei, 3 lei şi un leu.

Comentariu. 1) Am avut, de fapt, de rezolvat ecuaţia $5x + 3y + 1 \cdot z = 25$ în mulţimea numerelor naturale. Evident că:

$$0 \leq x \leq 5;\ 0 \leq y \leq 8;\ 0 \leq z \leq 25.$$

În rezolvare am pornit de la $x = 5$.

2) Aflaţi în câte moduri puteţi schimba o bancnotă de 100 de u.m. cu bancnote de 50 de u.m., 25 u.m. şi 10 u.m.

2. Să se determine suma tuturor cifrelor numerelor naturale de la 1 la 1000000000.

Soluţie. Dacă vom considera şi numărul 0, acesta nu influenţează suma cerută. Vom grupa numerele naturale de la 0 la 999999999 în perechi astfel: $(0; 999999999)$; $(1; 999999998)$; $(2; 999999997)$; ...; $(K; 999999999 - K)$; ...; $(499999999; 500000000)$.

Observăm că sunt exact 500000000 astfel de perechi. Suma cifrelor oricărei perechi este egală cu $9 \cdot 9 = 81$. Suma cifrelor tuturor perechilor este $81 \cdot 500000000 = 40500000000$. La acest număr trebuie adăugată şi suma cifrelor numărului 1000000000. Rezultă că suma cerută este 40500000001.

Comentariu. Există şi alte modalităţi de a calcula suma cerută. Soluţia dată a transformat problema într-o problemă de numărare a perechilor de numere cu proprietatea că suma lor este 999999999.

3. Se scriu numerele naturale în ordine, începând cu 1. Să se determine cifra de pe locul 34788.

Soluţie. Există 9 numere de o cifră, $99 - 9 = 90$ de numere de două cifre, $999 - 99 = 900$ de numere de trei cifre, $9999 - 999 = 9000$ de numere de patru cifre. Numărul cifrelor cu care sunt scrise primele 999 de numere naturale începând cu 1 este $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$, iar numărul cifrelor cu care sunt scrise primele 9999 numere naturale, începând cu 1 este $2889 + 4 \cdot 9000 = 38889$. Rezultă de aici că numărul care conţine cifra căutată este un număr de patru cifre.

Numărul de cifre cu care s-au scris numerele de 4 cifre până la cea de pe locul 34788 inclusiv este $34788 - 2889 = 31899$. Fiecare număr având patru cifre, rezultă din calculul $31899 = 4 \cdot 7974 + 3$, că numărul care conţine cifra căutată este al 7975-lea din cele de 4 cifre. Acesta este $7975 + 999 = 8974$. Cifra căutată este a treia cifră a acestui număr, deci 7.

Comentariu. În rezolvarea problemei am parcurs următoarele etape:

1) am stabilit câte cifre are numărul care conţine cifra cerută;
2) am stabilit al câtelea este acesta printre numerele cu 4 cifre;
3) am aflat efectiv numărul care conţine cifra cerută.

4. Considerăm toţi multiplii lui 5, începând cu 0, în ordine crescătoare. Al câtelea este cel mai mic dintre aceştia, având suma cifrelor egală cu 45?

Soluţie. Să observăm că astfel de multipli există. De exemplu: 919191915. Să-l aflăm întâi pe cel mai mic cu proprietatea cerută. El se află, cu siguranţă, printre multiplii cu 6 cifre pentru că cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 45 este 99999, dar acesta nu este multiplu de 5. Singurul multiplu de 5 cu şase cifre care se termină în 0 şi are proprietatea cerută este 999990.

Să căutăm, acum, cel mai mic multiplu de 5 cu 6 cifre care are suma cifrelor 45 şi se termină în 5. Dacă ultima cifră este 5, atunci celelalte 5 cifre au suma 40, iar cel mai mic număr de 5 cifre, cu suma 40 este 49999. (Dacă ar începe cu 3 am avea $3 + 9 + 9 + 9 + 9 = 39 < 40$). Rezultă că cel mai mic număr cu proprietatea cerută este 499995. Rămâne să aflăm al câtelea este acesta, în şirul multiplilor lui 5, începând cu 0.

Până la el inclusiv sunt $499995 : 5 = 99999$ multipli nenuli ai lui 5. Întrucât numărătoarea o facem de la 0, rezultă că cel mai mic multiplu de 5 cu proprietatea că suma cifrelor sale este 45 este al 100000 în succesiunea cerută.

Comentariu. Să observăm că, pentru a rezolva problema, a fost necesar să determinăm întâi efectiv numărul şi apoi să stabilim pe ce loc se află.

5. În câte moduri pot fi distribuite 10 cărţi la două persoane?

Soluţie. Numerotăm cărţile de la 1 la 10. Fie cele două persoane A şi B. Un mod de împărţire a cărţilor poate fi de exemplu: $ABAABBBABB$, adică persoana A primeşte cărţile cu numerele de ordine 1, 3, 4, 8, iar persoana B primeşte cărţile cu numerele de ordine 2, 5, 6, 7, 9, 10. O singură carte o putem da lui A sau lui B. Două cărţi pot fi distribuite în patru moduri: AA, AB, BA, BB(1) adică ambele lui A, prima lui A a doua lui B prima lui B a doua lui A sau ambele lui B. Pentru a afla în câte moduri pot fi distribuite primele trei cărţi celor două persoane adăugăm la distribuirile (1) la dreapta litera A sau B şi obţinem:

$$AAA,\ ABA,\ BAA,\ BBA,$$
$$AAB,\ ABB,\ BAB,\ BBB.\ (2)$$

Există, deci, $4 \cdot 2 = 8$ moduri de distribuire a trei cărţi celor două persoane.

De exemplu, prin ABA înţelegem că persoana A primeşte cărţile cu numărul de ordine 1 şi 3, iar persoana B cartea cu numărul de ordine 2. Fiecare carte adăugată în continuare dublează numărul posibilităţilor.

Să recapitulăm:

O carte o putem distribui în două moduri: două cărţi în $4 = 2^2$ moduri; 3 cărţi în $4 \cdot 2 = 2^3$ moduri; 4 cărţi în $2^3 \cdot 2 = 2^4$ moduri.

Cum pentru fiecare carte adăugată în continuare numărul posibilităţilor se dublează, înseamnă că pentru 10 cărţi există 2^{10} posibilităţi. Dintre acestea, trebuie excluse cele două cazuri în care A sau B ar primi toate cele 10 cărţi. Există, deci, $2^{10} - 2 = 1024 - 2 = 1022$ posibilităţi de distribuire a celor 10 cărţi la două persoane.

Comentarii. 1) Dacă în locul lui A punem cifra 1, iar în locul lui B cifra 2 atunci putem interpreta problema în felul următor: Există 2^{10} numere de câte 10 cifre formate numai cu cifrele 1 şi 2 (am considerat şi numerele cu toate cifrele egale cu 1, respectiv cu 2).

2) O generalizare este următoarea:

Există 2^n numere de câte n cifre formate numai cu două cifre diferite de zero.

3) Se poate demonstra că numărul numerelor de n cifre formate cu m cifre diferite de zero este m^n.

4) Problema poate fi interpretată astfel:

Dacă din mulţimea celor 10 cărţi fixăm o submulţimne nevidă pe care o dăm persoanei A, atunci persoanei B îi dăm complementara acestei mulţimi. Evident că o dată cu mulţimea vidă se exclude şi mulţimea totală. Rămâne că problema revine la a afla numărul submulţimilor unei mulţimi E cu 10 elemente, diferite de mulţimea vidă şi de E. Cum numărul total este 2^{10}, răspunsul este $2^{10} - 2$.

6. Se scriu numerele raţionale pozitive sub forma următorului şir:

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$$

Al câtelea termen al şirului este $\frac{2003}{1999}$?

Soluţie. Împărţim numerele în grupe în felul următor:

În grupa $k (k \geq 2)$ intră numerele pentru care suma dintre numărător şi numitor este k. De exemplu:

Grupa $2: \frac{1}{1}$; Grupa $3: \frac{2}{1}, \frac{1}{2}$; Grupa $4: \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$; Grupa $k: \frac{k-1}{1}, \frac{k-2}{2}, \frac{k-3}{3}, \ldots, \frac{2}{k-2}, \frac{1}{k-1}$.

În grupa k vor fi $k-1$ numere. Ordinea lor în această grupă este dată de numărul de la numitor. În cazul problemei noastre, k este $2003 + 1999 = 4002$.

Numărul $\frac{2003}{1999}$ este al 1999-lea în această grupă. În grupa 4001 vor fi 4000 numere. Până la primul număr din grupa 4002 vor fi:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 4000 = \frac{4000 \cdot 4001}{2} = 2000 \cdot 4001 = 8002000$$

numere. Numărul $\frac{2003}{1999}$ va fi deci pe locul $8002000 + 1999 = 8003999$ în şirul considerat.

Comentarii. 1) Se observă că, în şirul considerat, dintre două numere, înainte este acela în care suma dintre numărător şi numitor este mai mică, iar dacă acestea sunt egale primul este acela cu numitorul mai mic.

2) Comparaţi cu soluţia problemei nr. 4.

7. a) Câte numere naturale nenule, mai mici decât 100, nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3?

b) Câte numere naturale nenule, mai mici cu 1000, nu sunt divizibile nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7?

Soluţie. a) Pentru că numerele cerute sunt mai mici decât 100 vom considera primele 99 de numere naturale începând cu 1. Vom exclude, în primul rând, numerele divizibile cu 2.

Ele sunt 2, 4, 6, ..., 98 adică $\left[\frac{99}{2}\right] = 49$ de numere. Excludem, apoi, numerele multipli de 3. Acestea sunt 3, 6, ..., 99. Avem $\left[\frac{99}{3}\right] = 33$ astfel de numere. Ar părea că rămân $99 - (49 + 33)$ numere care nu sunt divizibile cu 2, nici cu 3.

Să observăm însă că anumite numere au fost numărate de două ori. De exemplu, 6, 12, 18, ... adică numere care se divid şi cu 2 şi cu 3, deci cu 6. Ele sunt în număr de $\left[\frac{99}{6}\right] = 16$. Rezultă că numărul numerelor divizibile cu 2 sau 3 este: $49 + 33 - 16 = 66$.

Rămâne că numărul numerelor mai mici ca 100 care nu sunt divizibile cu 2, nici cu 3 este:

$$99 - 66 = 33.$$

b) Vom folosi acelaşi procedeu ca la punctul a) adică vom afla întâi numărul numerelor divizibile cu 3 sau cu 5 sau cu 7, mai mici ca 1000.

Numărul celor divizibile cu 3 este $\left[\frac{999}{3}\right] = 333$, al celor divizibile cu 5 este $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$, iar al celor divizibile cu 7 este $\left[\frac{999}{7}\right] = 142$.

Printre aceste $333+199+142 = 674$ numere am numărat de două ori pe cele divizibile cu $3 \cdot 5$, cu $3 \cdot 7$ şi cu $5 \cdot 7$.

Numărul lor este:

$$\left[\frac{999}{15}\right] + \left[\frac{999}{21}\right] + \left[\frac{999}{35}\right] - \left[\frac{999}{105}\right] = 66 + 47 + 28 - 9 = 132.$$

Am scăzut numărul $\left[\frac{999}{105}\right]$ pentru că altfel am fi numărat de două ori numerele divizibile cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 3, 5, 7, adică pe cele divizibile cu 15 şi cu 21 şi cu 35.

Rămâne că numărul numerelor naturale nenule mai mici ca 1000, care nu se divid nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7 este:

$$999 - (674 - 132) = 457.$$

Comentariu. Problema admite numeroase alte variante. Pentru o rezolvare corectă este necesar să nu se numere de mai multe ori acelaşi număr.

Numerele cerute puteau fi calculate astfel:

În problema a):

$$n = 99 - \left[\frac{99}{2}\right] - \left[\frac{99}{3}\right] + \left[\frac{99}{2\cdot 3}\right];$$

În problema b):

$$n = 999 - \left[\frac{999}{3}\right] - \left[\frac{999}{5}\right] - \left[\frac{999}{7}\right] + \left[\frac{999}{3\cdot 5}\right] + \left[\frac{999}{3\cdot 7}\right] + \left[\frac{999}{5\cdot 7}\right] - \left[\frac{999}{3\cdot 5\cdot 7}\right]$$

8. a) Care este exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui 100!?

b) În câte zerouri se termină 1000!?

Soluţie. a) Dintre numerele 1, 2, 3, ..., 100, fiecare al doilea număr este divizibil cu 2.

Cum $100 = 2\cdot 50 + 0$, rezultă că de la 1 la 100 sunt 50 de numere divizibile cu 2. Dintre aceste 50 de numere, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu puterea a doua a lui 2. Cum $50 = 2\cdot 25 + 0$, rezultă că sunt 25 de astfel de numere. Dintre acestea 25 de numere, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu 2^3.

Cum $25 = 2\cdot 12 + 1$, rezultă că sunt 12 astfel de numere. Dintre aceste 12 numere, fiecare al doilea este divizibil cu 2^4, deci din $12 = 2\cdot 6 + 0$ rezultă că sunt 6 astfel de numere, iar 3 sunt divizibile cu cel puţin 2^5, iar din aceste 3 numere, cum $3 = 2\cdot 1 + 1$, unul este divizibil cu 2^6.

Nu există nici un număr divizibil cu 2^7 pentru $2^7 = 128$ care este mai mare ca 100. Fie acum produsul $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 99\cdot 100 = 100!$. Exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi este:

$$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

deoarece fiecare factor al produsului 100!, divizibil cu 2^k, însă nu şi cu 2^{k+1}, $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$, se socoteşte, în modul indicat, de k ori ca fiind divizibil cu 2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^k.

Comentarii. 1) De la împărţirile efectuate am reţinut numai câturile, nu şi resturile. Aceste câturi reprezintă, de fapt, părţile întregi ale numerelor $\frac{100}{2}, \frac{100}{2^2}, \frac{100}{2^3}, \frac{100}{2^4}$ etc.

Deci, exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a lui 100! este:

$$\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \left[\frac{100}{2^4}\right] + \left[\frac{100}{2^5}\right] + \left[\frac{100}{2^6}\right] =$$

$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$$

Ne-am oprit la $\left[\frac{100}{2^6}\right] = 1$ pentru că $\left[\frac{100}{2^k}\right]$, pentru $k \geq 7$, este egal cu 0.

2) Folosind acelaşi raţionament se poate arăta că exponentul numărului prim p din descompunerea în factori primi a lui $n!$ este egal cu:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

Această sumă este finită pentru că există, cu siguranţă, un număr natural a astfel încât $n < p^a$ şi deci $\left[\frac{n}{p^b}\right] = 0$, pentru orice număr natural b, cu $b \geq a$.

b) Pentru a se afla cu câte zerouri se termină 1000! să observăm că acest număr este dat de exponentul lui 10 din acest produs.

Cum $10 = 2 \cdot 5$, exponentul lui 10 este dat de exponentul lui 5 din descompunerea în factori primi a lui 1000! pentru că exponentul lui 2 din aceeaşi descompunere este mai mare decât cel al lui 5.

Pentru aflarea acestuia folosim procedeul indicat în comentariul punctului a). Avem

$$\left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{5^2}\right] + \left[\frac{1000}{5^3}\right] + \left[\frac{1000}{5^4}\right] = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Rezultă că 1000! se termină în 249 de zerouri.

9. **În câte moduri distincte se poate descompune numărul 17640 într-un produs de doi factori primi între ei?**

Soluţie. Trebuie să determinăm perechile (a, b) de numere prime între ele astfel încât $17640 = a \cdot b$. Perechile (a, b) şi (b, a) nu vor fi considerate distincte.

Din faptul că $17640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$, rezultă următoarele 8 posibilităţi:

1) $a = 1$; $\quad b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$;
2) $a = 2^3$; $\quad b = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$;
3) $a = 2^3 \cdot 3^2$; $\quad b = 5 \cdot 7^2$;
4) $a = 2^3 \cdot 5$; $\quad b = 3^2 \cdot 7^2$;
5) $a = 2^3 \cdot 7^2$; $\quad b = 3^2 \cdot 5$;
6) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $\quad b = 7^2$;
7) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$; $\quad b = 5$;
8) $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$; $\quad b = 3^2$.

Comentarii. 1) Am considerat soluţie şi perechea (1, 17640) pentru că cel mai mare divizor comun al numerelor 1 şi 17640 este 1 şi deci cele două numere sunt prime între ele.

2) Pentru a putea generaliza problema este suficient să observăm că numărul de posibilităţi de descompunere a numărului $17640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ în produs de doi factori primi între ei este acelaşi cu numărul de posibilităţi de descompunere a numărului $2 \cdot 3 \cdot 7 = 210$ într-un produs de doi factori primi între ei. Această afirmaţie este adevărată pentru că la orice descompunere cerută pentru 17640 corespunde o descompunere a lui 210 - prin reducerea exponenţilor la unitate. Era, deci, suficient să aflăm numărul divizorilor lui $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Aceasta este $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$. Dar dacă d este un divizor al lui 210 atunci şi $\frac{210}{d}$ este un divizor al lui 210 şi cum perechile $\left(d, \frac{210}{d}\right)$ şi $\left(\frac{210}{d}, d\right)$ nu sunt distincte rezultă că numărul posibilităţilor este $16 : 2 = 8$.

Generalizare: În câte moduri distincte se poate descompune un număr natural n în produs de doi factori primi între ei?

Soluţie. Vom face acelaşi raţionament din comentariu. Fie:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Acestuia îi asociem numărul $n' = p_1p_2...p_k$. Cele două numere n şi n' se descompun în acelaşi număr de moduri ca produse de doi factori primi între ei. Numărul divizorilor lui n' este:

$$\underbrace{(1+1)(1+1)...(1+1)}_{k} = 2^k.$$

Dacă d este un divizor al lui n' atunci perechile $\left(d, \frac{n'}{d}\right)$ şi $\left(\frac{n'}{d}, d\right)$ nu sunt distincte. Rezultă că avem, în total, $2^k : 2 = 2^{k-1}$ descompuneri.

10. Fie zece puncte distincte situate într-un plan.

1) Dacă cele zece puncte determină 43 şi numai 43 de drepte distincte, arătaţi că trei puncte şi numai trei sunt coliniare.

2) Este posibil ca acele zece puncte să determine numai 40 de drepte distincte? Dar numai 41? Dar numai 42 de drepte distincte?

Soluţie. Dacă se dau n puncte, A_1, A_2, ..., A_n, trei câte trei necoliniare, acestea determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte distincte. Într-adevăr, unind un punct cu toate celelalte se obţin $n-1$ drepte. Cum sunt n puncte, se obţin de n ori $n-1$ drepte, deci $n(n-1)$. Dar fiecare dintre acestea a fost numărată de două ori (de exemplu, dr. A_1A_2 şi dr. A_2A_1). Rezultă că numărul dreptelor distincte determinate de n puncte, trei câte trei necoliniare, este $\frac{n(n-1)}{2}$.

1) Dacă printre cele zece puncte ar fi trei câte trei necoliniare, acelea ar determina $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ drepte. Deoarece sunt numai 43 de drepte distincte înseamnă că trei dintre cele 45 de drepte sunt confundate, deci trei puncte coliniare.

În cazul în care trei puncte devin coliniare, "se pierd" două dintre dreptele distincte.

2) Dacă patru puncte devin coliniare, se pierd $\frac{4 \cdot 3}{2} - 1 = 5$ drepte distincte. Tot cinci drepte distincte "se pierd" şi în cazul când există două grupe de câte trei puncte coliniare, grupe ce au un punct comun.

Patru drepte se pot "pierde" când există două grupe disjuncte de câte trei puncte coliniare.

Nu există însă nici o situaţie în care să se poată "pierde" trei şi numai trei drepte distincte din cele 45 posibile.

Comentariu. Realizaţi modele intuitive pentru cazurile posibile de mai sus.

11. Câte soluţii în numere naturale are ecuaţia:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}? \ (1)$$

Pentru $x \neq y$ soluţiile (x, y) şi (y, x) sunt considerate distincte.

Soluţie. Dacă x şi y sunt numere naturale nenule este necesar ca $x > 12$ şi $y > 12$. Dacă, de exemplu, $x \leq 12$, atunci $\frac{1}{12} - \frac{1}{x} \leq 0$, adică $\frac{1}{y} \leq 0$, ceea ce nu se poate.

Ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$, (1) se transformă în următoarele ecuaţii echivalente:

$$\begin{aligned}12x+12y &= xy;\ 12x-xy+12y=0;\ 12x-144-xy+12y+144=0\\ 12(x-12)-y(x-12)+144 &= 0;\ (x-12)(y-12)-144=0;\\ (x-12)(y-12) &= 144;\ (x-12)(y-12)=2^4\cdot 3^2.\end{aligned}$$

Cum $x-12$ şi $y-12$ sunt numere naturale înseamnă că fiecare este un divizor al lui $2^4\cdot 3^2$. Numărul divizorilor lui $2^4\cdot 3^3$ este $(4+1)(2+1)=15$, deci ecuaţia are 15 soluţii.

Comentarii. 1) Soluţiile se obţin, efectiv, astfel:

Fie d un divizor natural al lui 144. Atunci $x-12=d$ şi $y-12=\frac{144}{d}$, de unde:

$$x=12+d,\ y=12+\frac{144}{d}.$$

Cum d ia 15 valori distincte înseamnă că obţinem efectiv 15 soluţii pentru ecuaţia (1).

2) Se arată, în acelaşi mod, că numărul soluţiilor ecuaţiei $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$, în mulţimea numerelor naturale, $(n\in \mathbf{N}^*)$, este egal cu numărul divizorilor naturali ai lui n^2.

12. Câte soluţii în numere întregi are inegalitatea:

$$|a|+|b|<10?$$

Se va considera că pentru $a\neq b$ soluţiile (a,b) şi (b,a) sunt diferite.

Soluţie. Suma $|a|+|b|$ poate lua 10 valori distincte: 0, 1, 2, ..., 9. Fie K una dintre aceste valori, diferită de zero. Să analizăm câte soluţii are ecuaţia $|a|+|b|=K$, (1). Numărul $|a|$ poate lua valorile 0, 1, 2, ..., $K-1$, K, deci $K+1$ valori distincte; $|b|$ va lua, respectiv, valorile K, $K-1$, ..., 1, 0.

Dacă $(a_0,\ b_0)$ este o soluţie cu componente nenule şi diferite de K atunci soluţiile sunt perechile $(-a_0,\ b_0)$, $(a_0,\ -b_0)$, $(-a_0,\ -b_0)$, deci, în total, $4(K-1)$ perechi.

Dacă $a_0=0$, soluţii sunt perechile $(0,\ K)$ şi $(0,\ -K)$, iar dacă $a_0=K$, sunt soluţii şi $(K,\ 0)$, $(-K,\ 0)$ deci, în total, pentru un K fixat din mulţimea $\{1,\ 2,\ ...,\ 9\}$, avem $4(K-1)+2+2=4K$ soluţii pentru ecuaţia (1). Pentru $K=0$ ecuaţia (1) are o singură soluţie: (0, 0). Pentru a afla numărul soluţiilor inegalităţii date, însumăm numărul de soluţii ale ecuaţiei (1) pentru $K\in\{0,\ 1,\ ...,\ 9\}$.

Avem:

$$\begin{aligned}1+4\cdot 1+4\cdot 2+...+4\cdot 9 &= 1+4(1+2+3+...+9)=1+4\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=\\ &= 1+180=181 \text{ soluţii.}\end{aligned}$$

Comentariu. Dacă avem de rezolvat în aceleaşi condiţii ecuaţia:

$$|a|+|b|<p,\ p\in\mathbf{N}$$

numărul de soluţii va fi:

$$1+4[1+2+3+...+(p-1)]=1+4\frac{(p-1)\cdot p}{2}=1+2p(p-1).$$

13. Se dă un număr natural a. Să se determine câte valori poate lua numărul b astfel încât $a+b$ să dividă pe ab.

Soluţie. Dacă $a+b$ divide pe ab atunci există un număr natural K astfel încât:

$$k(a+b) = ab.$$

Această egalitate se transformă, succesiv, în:

$$\begin{aligned} k(a+b) - ab - a^2 &= -a^2; \\ k(a+b) - a(a+b) &= -a^2; \\ (a+b)(a-k) &= a^2. \end{aligned}$$

Dacă p este un divizor al lui a^2, atunci din:

$$(a+b)(a-k) = p \cdot \frac{a^2}{p}$$

şi din faptul că $a+b$ şi $a-K$ sunt numere naturale, rezultă că putem avea:

$$(1) \begin{cases} a+b=p \\ a-k=\frac{a^2}{p} \end{cases} \text{ sau } (2) \begin{cases} a+b=\frac{a^2}{p} \\ a-k=p \end{cases}$$

Să analizăm varianta (1);

$$b = p - a,\ k = a - \frac{a^2}{p}.$$

Din faptul că b este număr natural rezultă că $p - a \geq 0$, adică $p \geq a$. Deducem de aici că p poate lua atâtea valori câţi divizori naturali mai mari (nestrict) ca a are a^2. Dar numărul divizorilor naturali ai lui a^2 strict mai mari ca a, este egal cu numărul divizorilor lui a^2 strict mai mici ca a.

Această afirmaţie se justifică imediat: dacă p divide a^2 şi $p > a$, există $q < a$ astfel încât $p \cdot q = a^2$. Dacă $q \geq a$ ar rezulta $p \cdot q > a^2$ ceea ce nu se poate.

Dacă notăm cu n' numărul divizorilor naturali ai lui a^2 strict mai mici ca a, iar cu $\tau(a^2)$ numărul tuturor divizorilor naturali ai lui a^2 şi observind că şi a este un divizor al lui a^2 avem:

$$\tau(a^2) = n' + n' + 1 = 2n' + 1.$$

Pe de altă parte, numărul căutat, pe care îl notăm cu $n(b)$, este egal cu $n'+1$ deci:

$$\tau(a^2) = n' + n' + 1 = n(b) - 1 + n(b) - 1 + 1$$

de unde $n(b) = \dfrac{\tau(a^2)+1}{2}$. Cum $\tau(a^2)$ este număr impar rezultă că $n(b)$ este număr natural.

Comentarii. 1) La acelaşi rezultat se ajungea şi pornind de la varianta (2).

2) Să aplicăm rezultatul obţinut pentru $a = 6$. Atunci:

Trebuie ca $6+b$ să dividă $6b$:

$$a^2 = 36 = 2^2 \cdot 3^2,$$

deci $\tau(36) = (2+1)(2+1) = 9$ şi $n(b) = \dfrac{9+1}{2} = 5$.

Cum $b=p-a=p-6$, obţinem valorile lui b pentru p divizor mai mare sau cel puţin egal cu 6 al lui 36. Avem:

$p=6 \quad b=0 \quad$ şi $\quad 6+0|6\cdot 0$

$p=9 \quad b=3 \quad$ şi $\quad 6+3|6\cdot 3$

$p=12 \quad b=6 \quad$ şi $\quad 6+6|6\cdot 6$

$p=18 \quad b=12 \quad$ şi $\quad 6+12|6\cdot 12$

$p=36 \quad b=30 \quad$ şi $\quad 6+30|6\cdot 30.$

14. În câte moduri se poate scrie un număr întreg sub forma unei diferenţe de două pătrate de numere raţionale?

Soluţie. Fie K un număr întreg. Problema cere să determinăm toate numerele raţionale a şi b astfel încât:

$$K=a^2-b^2 \ (1)$$

Oricare ar fi X număr raţional nenul putem scrie $K=K\cdot X\cdot\frac{1}{X}$. Relaţia (1) devine:

$$(a+b)(a-b)=K\cdot X\cdot\frac{1}{X}.$$

Pentru determinarea lui a şi b putem face o alegere, de exemplu:

$$\begin{cases} a+b=KX; \\ a-b=\frac{1}{X}. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obţinem:

$$a=\frac{KX}{2}+\frac{1}{2X},\ b=\frac{KX}{2}-\frac{1}{2X}.$$

Se observă cu uşurinţă că a şi b sunt numere raţionale, deci:

$$K=\left(\frac{KX}{2}+\frac{1}{2X}\right)^2-\left(\frac{KX}{2}-\frac{1}{2X}\right)^2,$$

oricare ar fi X număr raţional nenul. Rezultă de aici că există o infinitate de moduri în care se poate scrie un număr întreg sub forma unei diferenţe de două pătrate de numere raţionale.

Comentariu. Pentru $X=1$ avem:

$$K=\left(\frac{K+1}{2}\right)^2-\left(\frac{K-1}{2}\right)^2. \ (*)$$

Această relaţie sugerează următoarea interpretare gemetrică: dacă numărul K este natural, diferit de un pătrat perfect, atunci egalitatea (*) permite construcţia cu rigla şi compasul a oricărui număr iraţional de forma $\sqrt{K}$.

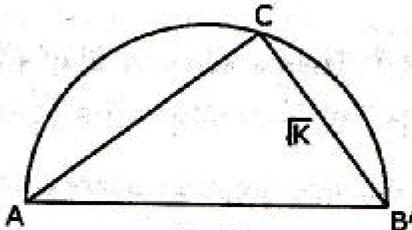


Fig. 1

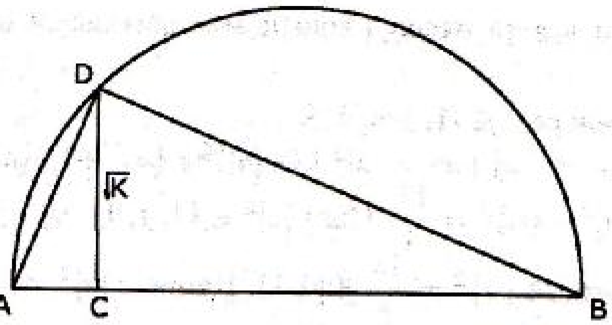


Fig. 2

Se construieşte semicercul cu diametrul de lungime $AB = \dfrac{K+1}{2}$ (fig. 1), apoi, cu centrul în una din extremităţile acestui diametru, de exemplu în A, se construieşte un arc cu raza de lungime $\dfrac{K-1}{2}$ care intersectează semicercul de diametru $[AB]$ în C. Segmentul $[BC]$, conform teoremei lui Pitagora, este de lungime $\sqrt{K}$, deci este segmentul căutat. Se cunoaşte faptul că acest segment se poate obţine şi astfel: se construieşte semicercul de diametru $[AB]$, cu $AB = K+1$, iar din punctul C al acestui diametru, astfel că $AC = 1$, se construieşte perpendiculara pe dreapta AB care intersectează semicercul în D. Triunghiul ADB fiind dreptunghic, rezultă, conform teoremei înălţimii, că segmentul $[CD]$ este de lungime $\sqrt{K}$(fig. 2).

Faţă de această metodă, prima reprezintă avantajul că nu mai este necesară construcţia perpendicularei şi, în plus, când K este mare, segmentele de lungime 1 şi respectiv K sunt greu comparabile faţă de segmentele de lungime $\dfrac{K+1}{2}$ şi $\dfrac{K-1}{2}$.

16. Să se afle numărul numerelor de cinci cifre aşezate astfel încât să existe două perechi de cifre, fiecare pereche fiind alcătuită din două cifre alăturate egale, cifrele unei perechi fiind diferite de cifrele altei perechi, iar cifra rămasă să fie diferită de cifrele celor două perechi.

Soluţie. Cu 3 cifre, a, b, c putem forma în ordinea dată numerele: $\overline{aabbc}$, $\overline{aabcc}$, $\overline{abbcc}$. Problema se reduce deci la a găsi numărul numerelor $\overline{abc}$ cu a, b, c, din mulţimea dată. "a" poate lua valorile $1, \ldots, 9$ deci 9 valori. "b" poate lua valorile $0, 1, 2, \ldots, 9$ mai puţin valoarea luată de "a" deci tot 9 valori. "c" poate lua 8 valori.

Numărul numerelor de această formă este $3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 243 \cdot 8 = 1944$.

Comentariu

Să observăm că s-a aplicat de fapt principiul multiplicităţii.

17. Fie ecuaţia $x^2 - a \cdot |x| + [a] \cdot \{a\} = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

1) Să se arate că ecuaţia are cel mult 4 soluţii reale şi să se determine valorile lui "a" pentru care ecuaţia are exact 4 soluţii.

2) Determinaţi "a" astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \dfrac{17}{2}$ unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt soluţiile distincte ale ecuaţiei date.

Soluţie.

1) Luăm $a = [a] + \{a\}$ şi $x^2 = |x|^2$, ecuaţia devine: $(|x| - [a])(|x| - \{x\}) = 0$ cu posibilele soluţii: $[a], -[a], -\{a\}$.

Dacă $[a] \leq 0$ sau $\{a\} = 0$ atunci ecuaţia are mai puţin de 4 soluţii (de ce?).

Pentru a avea exact 4 soluţii este necesar ca $[a] > 0$ şi în plus a să nu fie număr natural.

Rămâne ca $a \in [1, +\infty)\backslash\mathbb{N}$.

2) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = [a]^2+(-[a])^2+\{a\}^2+(-\{a\})^2$. Trebuie să avem: $2[a]^2+2\{a\}^2 = \frac{17}{2}$ deci $[a]^2+\{a\}^2 = \frac{17}{4}$. Cum $[a]^2 \in \{1,4,9,\ldots\}$ şi $[a]^2 \leq \frac{17}{4}$ rezultă $[a]^2 \in \{1,4\}$. Dacă $[a]^2 = 1$ rezultă $\{a\}^2 = \frac{13}{4} \notin [0,1)$. Rămâne $[a]^2 = 4$ de unde singura valoare convenabilă este $[a] = 2$. Rezultă $\{a\}^2 = \frac{1}{4}$, deci $\{a\} = \frac{1}{2}$.

Valoarea căutată este $a = 2 + \frac{1}{2}, a = \frac{5}{2}$.

Comentariu. În ce condiţii asupra lui a, ecuaţia are exact 2 soluţii? Dar exact 3? Dar o singură soluţie?

18. Fie p un număr natural prim. Considerăm un tablou cu n linii şi n coloane cu elemente numere întregi astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană să fie p sau $-p$. În câte moduri poate fi comlpetat acest tablou?

Soluţie. Din enunţ rezultă că pe fiecare linie şi pe fiecare coloană există un singur element p sau $-p$ restul fiind ± 1.

Pe prima coloană p (sau $-p$) poate fi exact în n noduri. Pe a doua coloană în $n-1$ noduri. Deci pe primele două coloane p (sau $-p$) poate fi aşezat în $n(n-1)$ noduri:

Aplicând principiul multiplicităţii constatăm că p poate fi plasat în $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ moduri (analog la $-p$). Cum p şi $-p$ pot alterna rezultă că numărul total de moduri în care putem plasa numerele p şi $-p$ este $(2n)[2(n-1)][2(n-2)]\cdot\ldots\cdot[2\cdot 3]\cdot[2\cdot 2]\cdot[2\cdot 1] = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot 2^n = n!2^n$.

De fiecare dată rămâne n^2-n "căsuţe" în care putem plasa unul dintre numerele ± 1. Numărul funcţiilor ce se pot defini pe o mulţime cu a elemente într-o mulţime cu b elemente este b^a.

Cu cazul nostru $a = n^2 - n$ iar $b = 2$. Deci numerele, pot fi plasate în 2^{n^2-n} moduri. Rezultă că numărul căutat este $n!2^n \cdot 2^{n^2-n} = n! \cdot 2^{n^2}$.

Comentariu. Comparaţi cu problemele 13 şi 14 de la capitolul VII.

19. Notăm cu $\mathcal{M}_n(E)$ mulţimea tuturor tablourilor cu n linii şi n coloane completate numerar cu elemente din mulţimea $E = \{-1,0,1\}$.

Fie $\mathcal{N}_n(E) = \{(A,B) | A,B \in \mathcal{M}_n(E), A+B \in \mathcal{M}_n(E)\}$. Să se determine "$n$" ştiind că mulţimea $\mathcal{N}_n(E)$ are cu 2320 elemente mai mult decât mulţimea $\mathcal{M}_n(E)$. (Prin $A+B$ înţelegem a aduna un element din A cu elementul de pe aceiaşi poziţie din B)

Soluţie. Numărul elementelor mulţimi $\mathcal{M}_n(E)$ este 3^{n^2} (numărul aplicaţiilor unei mulţimi cu a elemente într-o mulţime cu b elemente este b^a)

Dacă un element a lui A este 0 el poate fi adunat cu orice element al mulţimii E şi obţinem tot element a lui E deci pentru fiecare "0" există trei posibilităţi.

Dacă un element a lui A este -1 atunci el poate fi adunat numai cu 0 sau cu 1 deci două posibilităţi.

Dacă un element a lui A este 1 el poate fi adunat cu 0 sau cu -1 pentru a obţine tot element din E, deci tot 2 posibilităţi.

Rezultă de aici că fiecare element din $A+B$ se poate completa în 7 moduri. Cum în $A+B$ sunt n^2 elemente rezultă că $\mathcal{N}_n(E)$ are 7^{n^2} elemente.

Problema revine la a rezolva ecuaţia:

$$7^{n^2}-3^{n^2}=2320 \text{ adică } (7-3)(7^{n^2-1}+7^{n^2-2}\cdot 3+7^{n^2-3}\cdot 3^2+\ldots+3^{n^2-1})=2320.$$

De aici $7^{n^2-1}+7^{n^2-2}\cdot 3+\ldots+3^{n^2-1}=580$.

Cum $n\in\mathbb{N}^*$, n nu poate fi mai mare sau egal cu 3 pentru că $7^{3^2-1}=7^8>580$. Cum $n=1$ nu convine rămâne să verificăm $n=2$. $7^4-3^4=(7^2-3^2)(7^2+3^2)=40\cdot 58=2320$, deci $n=2$.

Comentariu. Am folosit formula: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1})$.

20. Un cub cu latura de n cm, $n\in\mathbb{N}^*$ se împarte în n^3 cuburi, fiecare având latura de 1 cm. Se desenează cu roşu toate diagonalele feţelor cubului iniţial. Numim "cub marcat" cubul de latură 1 cm, care are cel puţin un segment roşu pe cel puţin una dintre feţe. Să se determine n astfel încât numărul cuburilor "nemarcate" să fie mai mic sau cel mult egal cu numărul cuburilor "marcate".

Soluţie. Există 8 cubuleţe (cele ce conţin vârfurile cubului dat) care vor fi marcare pe trei feţe. Celelalte cubuleţe vor avea cel mult o faţă marcată.

Cazul I. n par. Pe fiecare faţă a cubului dat vor fi marcate $2n$ cubuleţe. (justificaţi!) În total $6\cdot 2n=12n$ dar care trebuie să le scoatem pe cele "triplu" marcate. Rămâne în total $12n-2\cdot 8=12n-16$. Trebuie să rezolvăm inecuaţia $n^3-(12n-16)\leq 12n-16$. $n^3-24n+32\leq 0$ unde n este număr natural par.

Pentru $n=2$ obţinem $8-48+32<0$ deci $n=2$ verifică.

Pentru $n=4$ obţinem $64-96+32<0$ deci şi $n=4$ verifică.

Pentru $n\geq 6$ observăm că $n^3-24n+32=n(n^2-24)+32>0$.

Cazul II. n impar. Pentru fiecare faăă vor fi marcate $2n-1$ cubuleţe (justificaţi!). În total vor fi marcate $6(2n-1)-2\cdot 8=12n-22$. Obţinem inecuaţia $n^3-(12n-22)<12n-22$, n impar, adică $n^3-24n+44<0$, $n=1$ şi $n=3$ verifică.

Pentru $n\geq 5$ avem: $n(n^2-24)+44>0$. Deci singurele valori posibile sunt: $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$.

Comentariu. Există valori ale lui n pentru care numărul celor "marcate" este un sfert din numărul celor nemarcate?

PROBLEME PROPUSE

1. Câte numere pare de trei cifre se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3? Care este suma lor?

2. Câte numere de patru cifre, divizibile cu 4 se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5?

3. În câte moduri se poate plăti suma de 100 lei cu monede de 3 lei şi de 1 leu? Dar suma de n lei?

4. În câte moduri poate fi reprezentat numărul natural n sub forma unei sume de două numere naturale nenule dacă reprezentările care diferă doar prin ordinea termenilor sunt considerate identice?

5. Pentru numerotarea paginilor unui dicţionar enciclopedic s-au folosit 3829 cifre. Câte pagini are dicţionarul?

6. Câte numere naturale, mai mici ca 1331, sunt prime cu numărul 1331?

7. Câte numere naturale, mai mici ca 4500, sunt prime cu numărul 4500?

8. Câte soluţii are, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia:

$$\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}=\frac{1}{12}?$$

(Pentru $X \neq Y$, soluţiile (X,Y) şi (Y,X) sunt considerate distincte).

9. Câte funcţii $f : E \to F$ se pot defini dacă mulţimea E are 10 elemente, iar mulţimea F are două elemente?

10. a) Câte diagonale are un poligon convex cu n laturi?

b) Câte diagonale are o prismă având la bază un poligon convex cu n laturi?

11. Câte plane determină 5 puncte în spaţiu?

12. Fie p un număr natural prim şi k un număr natural dat. În câte moduri se poate scrie p^k sub formă de diferenţă de două pătrate perfecte?

13. Câte numere naturale există printre numerele:

$$\frac{1\cdot m}{n},\ \frac{2\cdot m}{n},\ \ldots,\ \frac{p\cdot m}{n},$$

unde m, n, p sunt numere naturale nenule?

14. La un joc LOTO, participanţii completează bilete cu 6 numere diferite, alese dintre numerele 1,2,3,. . . ,49. Un jucător câştigă premiul cel mare dacă numerele scrise pe biletul său coincid cu numerele extrase şi ordinea lor este aceeaşi.

a) Câte bilete ar trebui să cumpleteze un jucător, pentru a fi sigur că a câştigat premiul cel mare?

b) Dacă primul număr extras coincide cu primul scris pe biletul jucătorului, câte variante de câştig sunt? Dar dacă primele două numere scrise pe biletul jucătorului coincid cu cele extrase?

15. Locuitorii unei planete vorbesc o limbă cu numai două semne. Pentru a evita greşelile, orice două cuvine de aceeaşi lungime, diferă între ele în cel puţin trei locuri.

Determinaţi numărul maxim de cuvinte distincte, fiecare având 5 semne. Generalizare.

16. Fie ecuaţia: $\left[\frac{x+a}{2}\right]=\frac{x+1}{3}$, $a \in \mathbb{R}$.

1) Să se rezolve pentru $a=1$.

2) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că mulţimea soluţiilor este $S=\{-1,2\}$.

3) Există valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are cel puţin 3 soluţii?

17. La intrarea într-un bloc de locuinţe se află un dispozitiv ce conţine 12 taste: prima, litera A, a doua litera B, a treia litera C, iar celelalte 9 reprezinta cifrele de la 1 la 9.

Pentru a deschide uşa este necesar să se formeze un cod, format dintr-o literă urmată de trei cifre distincte.

a) Câte coduri se pot forma?

b) Câte coduri se pot forma, astfel încât fiecare dintre ele să conţină o litară fixată?

c) Câte coduri se pot forma, astfel încât să nu conţină nici una dintre cifrele 1,2,3?

18. Dacă p este un număr prim şi $k \in \mathbb{N}$, determinaţi numărul numerelor relativ prime cu p şi mai mici decât p^k.

19. În jurul unei mese circulare se aşează pe scaune 5 persoane.

a) În câte moduri distincte se poate face aşezarea, dacă scaunele sunt numerotate de la 1 la 5?

b) În câte moduri distincte se poate face aşezarea, dacă două aşezări sunt distincte atunci când o persoană are cel puţin un nou vecin?

20. Câte funcţii $f : E \to E$ se pot defini ştiind că E are n elemente iar mulţimea imaginilor $f(E)$ are mai puţin de n elemente.

SOLUŢII

1. Fie $\overline{abc}$ unul dintre aceste numere. Cifra a poate lua trei valori: 1, 2, 3, b poate lua 4 valori: 0, 1, 2, 3, iar c numai două valori: 0, 2. În total avem $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ de numere pare de trei cifre formate cu cifrele 0, 1, 2, 3. Pentru a afla suma acestor 24 de numere procedăm astfel:

Pentru a fixat avem $4 \cdot 2 = 8$ numere. Deci suma sutelor este $8(1+2+3) \cdot 100 = 4800$.

Numărul numerelor ce îl au pe b fixat este $3 \cdot 2 = 6$, deci suma zecilor este:

$$6(0+1+2+3) \cdot 10 = 360.$$

Pentru c fixat sunt $3 \cdot 4 = 12$ numere. Deci, suma unităţilor este $12(0+2) = 24$.

Suma cerută va fi: $4800 + 360 + 24 = 5184$.

2. Fie $n = \overline{abcd}$. Cifra a poate lua 5 valori iar b, 6 valori. Pentru ultimele două cifre fixate există $5 \cdot 6 = 30$ numere. Din $4|n$ rezultă $4|\overline{cd}$. Dacă $c \in \{1, 3, 5\}$ rezultă că $d = 2$, iar dacă $c \in \{0, 2, 4\}$ rezultă $d \in \{0, 4\}$ deci $\overline{cd}$ poate lua $3 + 6 = 9$ valori.

În total, există $30 \cdot 9 = 270$ numere cu proprietatea cerută.

3. Putem folosi cel mult 33 de monede de 3 u.m. Dacă folosim k monede de 3 u.m. ($k \leq 33$) atunci vom folosi şi $100 - 3k$ monede de o u.m. Cum k ia exact 34 de valori ($k \in \{0, 1, 2, ..., 33\}$) rezultă că sunt exact 34 de posibilităţi distincte.

Pentru cazul în care avem de plătit o sumă de n u.m., putem folosi cel mult $\left[\frac{n}{3}\right]$ monede de 3 u.m. Deci plata se poate face folosind k monede de 3 u.m., $k \in \left\{0, 1..., \left[\frac{n}{3}\right]\right\}$, şi $n - 3k$ monede de o u.m. În total, avem exact $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$ posibilităţi distincte.

4. Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = x + y$.

Cu necesitate, unul din termenii x şi y (şi numai unul) este mai mic sau egal cu $\left[\frac{n}{2}\right]$. Dacă ambii termeni ar fi mai mari decât $\left[\frac{n}{2}\right]$, atunci $x + y > n$, iar dacă amândoi ar fi mai mici ca $\left[\frac{n}{2}\right]$, atunci $x + y < n$.

Rezultă că unul dintre termeni poate lua valorile 1, 2, ..., $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Toate cazurile sunt diferite deoarece al doilea termen nu poate fi mai mic decât $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Deci numărul de moduri diferite care realizează cerinţa problemei este $\left[\frac{n}{2}\right]$.

5. Numărul cifrelor tuturor numerelor de una, două şi trei cifre este $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889 < 3829$, iar a tuturor numerelor de una, două, trei şi patru cifre este $2889 + 4 \cdot 9000 > 3829$ (vezi problema comentată nr. 4).

Rezultă că dicţionarul are mai mult de 1000 pagini şi mai puţin de 10000. Cum pentru scrierea tuturor numerelor de una, două şi trei cifre se folosesc 2889 cifre atunci rămân $3829 - 2889 = 940$ cifre cu care se scriu $940 : 4 = 235$ numere de patru cifre. Rezultă că dicţionarul are $999 + 235 = 1234$ pagini.

6. Avem $1331 = 11^3$. Să numărăm câte numere nu sunt prime cu 1331. Acestea sunt:

$$1 \cdot 11,\ 2 \cdot 11,\ \ldots,\ 10 \cdot 11,\ 11 \cdot 11,\ \ldots,\ 120 \cdot 11,\ 121 \cdot 11$$

deci în total $121 = 11^2$ numere. Rămâne că $1331 - 121 = 1210$ numere sunt relativ prime cu 1331. Evident că problema se poate generaliza:

Dacă p este prim şi $k \in \mathbf{N}^*$ atunci există $p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$ numere relativ prime cu p şi mai mici decât p^k.

7. Avem $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Trebuie să găsim numărul numerelor mai mici decât 4500 care nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5. Conform problemei comentate nr. 8 avem:

$$\begin{aligned} n &= 4500 - \frac{4500}{2} - \frac{4500}{3} - \frac{4500}{5} + \frac{4500}{2 \cdot 3} + \frac{4500}{5 \cdot 3} + \frac{4500}{2 \cdot 5} - \frac{4500}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \\ &= 4500 - 2250 - 1500 - 900 + 750 + 450 + 300 - 150 = 1200. \end{aligned}$$

Acest număr se mai poate scrie:

$$n = 4500\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1200.$$

Generalizare. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ atunci numărul numerelor mai mici ca n şi prime cu acesta este:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

8. Conform problemei comentate numărul **12** ecuaţia are 15 soluţii în $\mathbf{N}^*$. Pentru a afla şi soluţiile în care una şi numai una dintre componente este negativă (de ce nu pot fi ambele componente negative?) scriem ecuaţia sub forma:

$$(12 - x)(12 - y) = 144.$$

Conform comentariului de la problema comentată nr. 12 avem:

$$x = 12 + d,\ y = 12 + \frac{144}{d},$$

unde d este un divizor întreg al lui 144. Avem 30 astfel de divizori. Trebuie exclus $d = -12$ pentru că, în acest caz, $x = y = 0$ şi împărţirea cu zero nu este definită. Rămân $30 - 1 = 29$ de soluţii.

9. Vezi problema comentată nr. 6. Se obţin 2^{10} funcţii.

Demonstraţi (folosiţi „principiul multiplicităţii") că dacă E are m elemente, iar F are n elemente atunci numărul funcţiilor $f : E \to F$ este n^m.

10. a) Un număr de n puncte distincte, 3 câte 3 necoliniare, determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte. Pentru a afla numărul diagonalelor, din $\frac{n(n-1)}{2}$ trebuie să scădem numărul laturilor deci:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

b) Unind un vârf al unuia dintre poligoanele de bază cu toate vârfurile celui de-al doilea poligon obţinem n segmente. Dintre acestea, unul este muchie a prismei şi încă două sunt diagonale ale feţelor prismei. Rămâne că dintr-un vârf al unuia dintre poligoanele de bază se pot duce $n-3$ diagonale ale prismei. În total, vom avea $n(n-3)$ diagonale.

11. Analizăm cazurile: a) punctele sunt 3 câte 3 necoliniare şi nu există 4 coplanare; b) 3 coliniare şi nu sunt toate 5 coplanare; c) toate 5 coliniare; d) 3 câte 3 necoliniare şi 4 şi numai 4 coplanare; e) toate 5 coplanare.

12. Este suficient să determinăm perechile de numere naturale (a, b) astfel încât $a^2 - b^2 = p^k$. Putem scrie $(a-b)(a+b) = p^k$, de unde $\begin{cases} a - b = p^m; \\ a + b = p^{k-m}. \end{cases}$

Cum $a - b \leq a + b$, rezultă $p^m \leq p^{k-m}$, de unde $m \leq k - m$, $m \leq \frac{k}{2}$, cu $m \in \mathbf{N}$.

Dacă $p = 2$, numărul căutat este $\left[\frac{k}{2}\right]$, iar pentru p prim impar numărul soluţiilor este $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$.

13. Despre m şi n nu ştim dacă sunt sau nu prime între ele. Fie d cel mai mare divizor comun al lor. Atunci există numerele naturale a şi b astfel încât:

$$m = ad,\ n = bd,$$

unde a şi b sunt prime între ele.

Numerele din enunţ devin:

$$\frac{1 \cdot a}{b},\ \frac{2 \cdot a}{b},\ \ldots,\ \frac{p \cdot a}{b}.\ (*)$$

Cum a şi b sunt prime între ele rezultă că printre numerele (*) sunt exact $\left[\frac{p}{b}\right]$ numere naturale. Din $n = bd$ avem $b = \frac{n}{d}$. Înlocuind, obţinem că numărul căutat este $\left[\frac{pd}{n}\right]$.

14. Principiul multiplicităţii:

a) $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$;

b) $48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$;

c) $47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$.

15. Fie $A = a_1a_2a_3a_4a_5$ şi $B = b_1b_2b_3b_4b_5$ două cuvinte cu 5 semne. Numărul total al acestora este 2^5. Dacă schimbăm un singur semn din cuvântul A obţinem un cuvânt care nu se distinge de A. Obţinem deci 5 cuvinte care nu se disting de A. Acestea, împreună cu A reprezintă 6 cuvinte diferite, dar nedistincte între ele în limba planetei considerate. Dacă A şi B au fost distincte, înseamnă că mulţimile de cuvinte diferite, dar nedistincte, ce se pot forma cu cele 5 semne ale fiecărui cuvânt sunt disjuncte. Obţinem că, cel mai mare număr de cuvinte de 5 semne distincte în limba planetei este $\left[\frac{2^5}{6}\right] = 5$.

Generalizare: $\left[\frac{2^n}{n+1}\right]$.

16. 1) Notăm $\left[\frac{x+a}{2}\right] = k$, $k \in \mathbb{Z}$ obţinem: $\frac{x+1}{3} = k$ deci $x = 3k - 1$. Pe de altă parte din $\left[\frac{x+a}{2}\right] = k$ rezultă: $k \leq \frac{x+a}{2} < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ de unde $1 - a \leq k < 3 - a$. Pentru $a = 1$ avem $a \in \{0, 2\}$ şi cum $x = 3k - 1$ avem $S = \{-1, 2\}$.

2) Dacă $x \in \{-1, 2\}$ rezultă $k \in \{0, 1\}$ deci $[1 - a, 3 - a) \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$.

De aici $1 - a \leq 0$ şi $3 - a > 1$. Cum lungimea intervalului $[1 - a, 3 - a)$ este $3 - n - 1 + n = 2$ deci nu poate conţine alte numere întregi în afara lui -1 şi 2. Rezultă $a \in [1, 2)$.

3) Din punctul precedent rezultă că intervalul $[1 - a, 3 - a)$ are lungimea 2 şi nu poate conţine 3 întregi, deci răspunsul este negativ.

17. a) $3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1512$;

b) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$;

c) $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$.

18. Numerele neprime cu p^k mai mici, nestrict decât p sunt: $1 \cdot p, 2p, 3p, \ldots, (p^{k-1} - 1)p, p^{k-1} \cdot p$. Numărul lor este p^{k-1}. Rămâne că numărul căutat este $p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1)$.

19. a) $5! = 120$;

b) Dacă notăm cu A, B, C, D, E cele 5 persoane, aşezarea (A, B, C, D, E) coincide cu următoarele 9 aşezări: (B, C, D, E, A), (C, D, E, A, B),$\ldots$,(B, A, E, D, C) - permutările circulare ale formaţiei (A, B, C, D, E). În mod analog, orice altă aşezare coincide cu alte 9 aşezări. Numărul căutat este $120 : 10 = 12$, aşezări distincte.

20. Numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu a elemente într-o mulţime cu b elemente este b^a. În cazul nostru numărul total de funcţii $f : E \to E$ este n^n. Dintre acestea $n!$ au proprietatea că $f(E) = E$ (justificaţi!). Numărul căutat este $n^n - n!$.

PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

5.1. Principiul lui Dirichlet în algebră

Principiul lui Dirichlet sau principiul cutiilor cum mai este cunoscut, se poate formula astfel: dacă repartizăm $(nk+1)$ obiecte în k cutii, atunci în cel puţin o cutie vor fi cel puţin $(n+1)$ obiecte. Să observăm că în acest enunţ este pusă în evidenţă existenţa unnui număr minim de obiecte repartizate în aceeaşi cutie.

În continuare prezentăm unele probleme din algebră a căror rezolvare se face utilizând acest principiu.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că printre orice 11 numere naturale există două a căror diferenţă se divide la 10.

Rezolvare. Resturile celor 11 numere naturale la împărţirea prin 10 pot fi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Conform principiului lui Dirichlet cel puţin două numere vor da acelaşi rest la împărţirea prin 10. Deci diferenţa acestora se divide prin 10.

2. Într-o sală se găsesc n persoane $(n \geq 2)$. Să se demonstreze că printre ele se găsesc doi oameni care au acelaşi număr de cunoscuţi (se presupune că dacă A este cunoscut al lui B, atunci şi B este cunoscut al lui A; nimeni nu este considerat ca fiind cunoscut al lui însuşi).

Rezolvare. Se vor lăsa la o parte persoanele care nu au nici un cunoscut în sală. Fie k numărul persoanelor care au cel puţin o cunoştinţă în sală. Fiecare din cele k persoane poate avea $1, 2, \ldots, (k-1)$ cunoscuţi. Dar în sală sunt k persoane. Conforn principiului cutiei vor exista cel puţin două persoane care au acelaşi număr de cunoscuţi (aici cutiile sunt numărul de cunoscuţi $1, 2, \ldots, (k-1)$).

3. Se dă o mulţime M formată din n numere întregi. Să se arate că există o submulţime a lui M astfel încât suma elementelor sale să fie divizibilă prin n.

Rezolvare. Fie $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Considerăm sumele următoare: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, în total n numere.

Dacă unul din numere S_k, să spunem, se divide la n, atunci submulţimea căutată este $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Dacă nici unul din numerele S_k, $1 \leq k \leq n$ nu se divide la n atunci resturile lor la împărţirea prin n vor fi $1, 2, \ldots, (n-1)$. Cum sunt n numere S_k, atunci cel puţin două vor da la împărţirea prin n acelaşi rest.

Fie două astfel de numere S_i, S_j, $1 \leq i, j \leq n$, $i < j$. Atunci $S_j - S_i$ se divide prin n şi deci submulţimea formată din $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j$ este cea căutată ($S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$).

4. Să se arate că printre $n+1$ numere naturale diferite mai mici decât $2n$ se găsesc trei numere cu proprietatea că unul din ele este egal cu suma celorlalte două.

Rezolvare. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ cele $(n+1)$ numere naturale cu proprietatea că $a_i \leq 2n$, $1 \leq i \leq n+1$. Să presupunem că $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Atunci $a_{n+1} - a_1$, $a_{n+1} - a_2$, $\ldots$, $a_{n+1} - a_n$ sunt încă numere naturale mai mici decât $2n$, în total (cu cele iniţiale) avem $n + 1 + n = 2n + 1$ numere. Cum ele sunt mai mici decât $2n$, conform principiului lui Dirichlet, există două numere ce vor coincide

$$a_i = a_{n+1} - a_j \quad (i \in \{1, 2, \ldots, n+1\},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

De aici $a_{n+1} = a_i + a_j$.

5. Să se arate că printre orice $(n+2)$ numere naturale există două numere de sumă sau diferenţă divizibile prin $2n$.

Rezolvare. Aplicăm principiul lui Dirichlet în rezolvare, considerând cutiile cu numerele de la 0 la n. În cutia cu numărul k se introduce acel număr a pentru care $a + k$ sau $a - k$ se divide prin $2n$. Cum sunt $(n+1)$ cutii şi $(n+2)$ numere, vor exista două numere în aceeaşi cutie şi problema se rezolvă imediat.

6. Să se arate că printre orice $(n+1)$ numere naturale mai mici decât $2n$, există două având raportul o putere a lui 2.

Rezolvare. Punem numerele date sub forma $2^k \cdot a_1$, unde a_1 este impar, iar a_1 îl vom lua numărul cutiei în care se va plasa numărul $(2^k \cdot a_1)$. Cum numere impare mai mici decât $2n$ sunt n, atunci conform principiului cutiei (Dirichlet) există două numere din cele $(n+1)$ ce vor fi plasate în aceeaşi cutie. Deci câtul lor va fi o putere a lui 2.

7. Să se arate că din orice trei numere prime, mai mari decât 3, se pot alege două cu proprietatea că suma lor sau diferenţa lor se divide cu 12.

Rezolvare. Scriem numărul p sub forma $p = 12q + r$, $r \in \{0, 1, \ldots, 11\}$. Dacă p este număr prim mai mare decât 3, atunci r nu poate fi par şi nu se poate divide prin 3. Deci $r \in \{1, 5, 7, 11\}$. Deci, orice număr prim p poate aparţine la una din cele două mulţimi: A – formată din numerele care prin împărţire la 12 dau resturile 1 sau 11 şi B – formată din numerele care prin împărţire la 12 dau resturile 5 sau 7.

Deci din trei numere prime două (cel puţin) se vor afla în aceeaşi mulţime (conform principiului lui Dirichlet). Dacă resturile acestor două numere coincid, atunci diferenţa lor se divide la 12; în caz contrar, suma lor se divide prin 12, cum uşor se poate constata.

8. Să se arate că orice şir finit format din $(mn+1)$ numere reale conţine un subşir crescător format din $(m+1)$ numere sau un subşir descrescător format din $(n+1)$ nmere.

Rezolvare. Fiecărui termen al şirului îi asociem o pereche de numere reale (x, y), unde x este lungimea celui mai lung subşir crescător ce are ca prim termen termenul şirului, iar y reprezintă lungimea celui mai lung subşir descrescător ce are ca prim termen termenul şirului (prin lungimea unui şir finit înţelegem numărul de termeni din şir). Presupunem că toate valorile lui x sunt mai mici decât m şi de asemenea toate valorile lui y sunt mai mici decât n.

Atunci $\text{Card}\{x \mid 1 \leq x \leq m\} \cdot \text{Card}\{y \mid 1 \leq y \leq n\} = m \cdot n$. Cum în şirul dat avem $(mn+1)$ elemente, deducem că vor exista cel puţin doi termeni cărora să le corespundă aceeaşi pereche (x, y) (conform principiului lui Dirichlet), ceea ce este imposibil (din modul în care s-au construit x şi y). Deci va exista un subşir format din cel puţin $(m+1)$ numere reale care să fie crescător sau unul format din cel puţin $(n+1)$ numere reale care să fie descrescător.

9. Să se demonstreze că pentru orice număr impar a se găseşte un număr natural b, astfel încât $2^b - 1$ să se dividă prin a.

Rezolvare. Fie numerele $2^0-1, 2^1-1, \ldots, 2^a-1$ în număr de $a+1$. Prin împărţirea la a se vor obţine a resturi. Conform principiului lui Dirichlet există (cel puţin) două numere ce dau acelaşi rest. Fie ele 2^k-1, 2^m-1, cu $k < m$. Atunci numărul $(2^k-1)-(2^m-1) = 2^k(2^{m-k}-1)$ se divide prin a. Cum a este impar rezultă $2^{m-k}-1$ se divide prin a.

10. Să se arate că dacă a şi b sunt numere relativ prime, atunci există n- natural, $n \leq b$, astfel că $a^n - 1$ se divide prin b.

Rezolvare. Nici unul din numere $a, a^2, a^3, \ldots, a^b$ nu se divide la b. Atunci resturile ce se obţin sunt din mulţimea $\{1, 2, \ldots, b-1\}$. Din principiul lui Dirichlet deducem că există $k, l \in \mathbb{N}^*$, $k, l \leq b$, astfel ca a^k şi a^l să dea acelaşi rest la împărţirea prin b. Deci $a^k - a^l$ se divide prin b. Dacă, de exemplu, $k > l$, atunci $a^l(a^{k-l}-1)$ se divide prin b şi cum a^l nu se divide la b, rezultă $a^{k-l}-1$ se divide la b.

11. Să se arate că din orice n numere este posibil să se aleagă câteva (eventual unul) astfel ca suma numerelor alese să difere de partea întreagă a sumei cu mai puţin de $\dfrac{1}{n+1}$.

Rezolvare. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numerele date, iar $b_1 = \{a_1\}$, $b_2 = \{a_1 + a_2\}, \ldots, b_n = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x. Este clar că $b_i \in [0, 1)$. Împărţim acest interval în $(n+1)$

intervale de lungimi egale:

$$\left[0,\frac{1}{n+1}\right],\ \left[\frac{1}{n+1},\frac{2}{n+1}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{n}{n+1},1\right].$$

Dacă unul din b_i se află în primul sau în ultimul din intervale, atunci $a_1+a_2+\ldots+a_i$ reprezintă suma căutată. Dacă nici un b_i nu se află în aceste intervale, atunci cele n numere vor fi plasate în cele $(n-1)$ intervale. Conform principiului lui Dirichlet, două numere să zicem b_k şi b_l, se vor afla în acelaşi interval. Să presupunem că avem $k>l$. Atunci $a_{l+1}+a_{l+2}+$ $+\ldots+a_k=(a_1+\ldots+a_k)-(a_1+\ldots+a_l)=$ număr întreg $+(b_k-b_l)$ şi deci suma căutată este $a_{l+1}+a_{l+2}+\ldots+a_k$.

12. Să se arate că în şirul format din 2^n numere naturale, cu produsul lor conţinând nu mai mult de n divizori primi diferiţi, unul din numere sau produsul a două numere este pătratul unui număr natural.

Rezolvare. Fie $p_1,p_2,\ldots,p_s$ toţi divizorii primi ce apar în produsul numerelor $(s\le n)$. Vom asocia fiecăruia din cele 2^n numere naturale un alt număr format din 0 şi 1. Dacă numărul dat are forma:

$$a=p_1^{2l_1}\cdot p_2^{2l_2+1}\cdot p_3^{2l_3+1}\cdot\ldots\cdot p_k^{2l_k},\ k\le s,$$

atunci acestui număr îi asociem numărul $011\ldots0$ găsit astfel: dacă factorul prim de pe poziţia i, să zicem p_i are exponentul par, atunci în numărul asociat pe poziţia i figurează cifra 0, iar dacă exponentul este impar atunci în numărul asociat pe poziţia i punem cifra 1. Dacă un număr este pătrat perfect lui îi asociem numărul $00\ldots0$. Numărul tuturor numerelor formate din 0 şi 1 este egal cu 2^s. Dacă $2^s=2^n$, atunci avem şi configuraţia $00\ldots0$ şi numărul căruia îi corespunde această configuraţie este pătrat perfect al unui număr natural.

Daca $2^s<2^n$ şi avem configuraţia $00\ldots0$, problema este rezolvată. În cazul în care această configuraţie nu apare, deoarece numărul de numere este 2^n mai mare decât numărul de reprezentări, atunci vor exista (conform principiului lui Dirichlet) cel puţin două numere cu aceeaşi reprezentare de 0 şi 1. Făcând produsul celor, două numere se va obţine un număr pentru care reprezentarea va fi de forma $00\ldots.0$, ceea ce înseamnă că produsul celor două numere este un pătrat perfect.

13. Fracţia subunitară raţională $\frac{r}{s}$ se scrie sub formă de fracţie zecimală $\frac{r}{s}=0,k_1k_2\ldots$. Să se demonstreze că dintre numerele $n_1=10\cdot\frac{r}{s}-k_1$, $n_2=100\cdot\frac{r}{s}-(10k_1+k_2)$, $n_3=10^3\cdot\frac{r}{s}-(100k_1+10k_2+k_3),\ldots$ cel puţin două sunt egale între ele.

Rezolvare. Cifrele fracţiei subunitare raţionale $\frac{r}{s}$ scrisă sub formă de fracţie zecimală infinită $0,k_1k_2\ldots$ sunt astfel determinate încât fracţia zecimală finită

$$0,k_1k_2\ldots k_m = \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \ldots + \frac{k_m}{10^m}$$

nu este mai mare decât $\frac{r}{s}$, dar adăugând $\frac{1}{10^m}$, atunci se obţine un număr mai mare decât $\frac{r}{s}$, adică: $0 \le \frac{r}{s} - \left(\frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \ldots + \frac{k_m}{10^m}\right) < \frac{1}{10^m}$.

De aici se obţine imediat:

$$0 \le n_m = \frac{10^m r - s\left(10^{m-1}k_1 + 10^{m-2}k_2 + \ldots + k_m\right)}{s} < 1.$$

Evident $n_m \in [0,1)$. Deci, numărătorul lui n_m este unul din numerele $0, 1, 2, \ldots, (s-1)$ şi deci numerele $n_1, n_2, \ldots$, pot fi incluse în s clase (cutii) după cum numărătorul este egal cu unul din numerele $0, 1, \ldots, (s-1)$.

14. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o permutare oarecare a numerelor $1, 2, 3, \ldots, n$. Să se arate că produsul $(a_1-1)(a_2-2)\cdot\ldots\cdot(a_n-n)$ este par dacă n este impar.

Rezolvare. Fie $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$. În mulţimea de numere considerate $(k+1)$ vor fi impare. În produsul dat printre descăzuţi şi scăzători vor fi $(k+1)+(k+1) = 2(k+1) = n+1$ numere impare. Cum în produs sunt n factori, unul din ei (cel puţin) conţine numai numere impare. Deci, acel factor este par, ca şi produsul de altfel.

15. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi a, b, c, d numărul

$$abcd(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-d^2)(b^2-c^2)(b^2-d^2)(c^2-d^2)$$

este multiplu de şapte.

(Etapa finală, 1982, x)

Rezolvare. Deoarece produsul trebuie să fie divizibil prin 7, vom considera $\mathbb{Z} = \bigcup_{k=0}^{6}(7\mathbb{Z}+k)$, unde $7\mathbb{Z}+k = \{7n+k \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dacă unul din numerele a, b, c, d este în $7\mathbb{Z}$, rezultă produsul din problemă se divide prin 7. Dacă nici unul din numere nu este în mulţimea $7\mathbb{Z}$, atunci ele pot fi în oricare din celelalte şase. Le grupăm astfel:

$$(7\mathbb{Z}+1, 7\mathbb{Z}+6), (7\mathbb{Z}+2, 7\mathbb{Z}+5), (7\mathbb{Z}+3, 7\mathbb{Z}+4)$$

(ele vor reprezenta cutiile). Deoarece avem patru numere cel puţin două vor fi în aceeaşi grupă (cutie) şi au diferenţa divizibilă prin 7 (dacă amândouă numerele au aceeaşi formă) sau suma lor se divide la 7 (dacă numerele au forme diferite).

16. Fie A o mulţime formată din 19 numere întregi, distincte două câte două, care aparţin progresiei aritmetice 1, 4, 7, 10, ..., 100. Să se arate că există doi întregi distincţi în A a căror sumă este egală cu 104.

(Concursul Putnam, 1978)

Rezolvare. Fiecare din cele 19 numere din A aparţine uneia din următoarele 18 mulţimi disjuncte, două câte două:

$$\{1\}, \{52\}, \{4,100\}, \{7,97\}, \{10,94\}, \ldots, \{49,55\}.$$

Deci există doi întregi distincţi din A care aparţin uneia din perechile: $\{4,100\}, \ldots, \{49,55\}$, şi care deci au suma egală cu 104.

17. Să se demonstreze că din oricare zece numere naturale de câte două cifre (scrise în baza zece) se pot extrage două grupe diferite, distincte, nevide, astfel ca suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeaşi.

(O.I.M)

Rezolvare. Numărul de grupe distincte din zece numere este

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

Nu vom lua în considerare gruparea fără nici un element sau cea cu cele 10 numere. Deci rămân 1 022 grupe (submulţimi). Pentru numerele având câte două cifre, suma lor este cuprinsă între 10 şi $99 + 98 + \ldots + 91 = 855$. Dar există 1 022 grupe cu sumele mărginite de 10 şi 855 şi deci există în mod necesar grupe cu sume egale (sumele de la 10 la 855 reprezintă cutiile).

18. Să se arate că pentru orice număr natural există un multiplu al lui scris numai cu cifrele 0 şi 1.

Rezolvare. Fie n un număr natural. Considerăm mulţimea formată din $(n+1)$ numere 1, 11, 111, ..., 11...1. Printre ele, există cel puţin două care la împărţirea prin n să dea acelaşi rest. Atunci diferenţa lor se divide cu n şi mai mult se scrie numai cu ajutorul lui 1 şi 0.

19. Fie şirul 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... în care un termen începând cu al treilea este egal cu suma precedenţilor doi (şirul lui Fibonacci). Se scrie sub fiecare termen al şirului numărul format din ultimele sale trei cifre (aici 001, 001, 002, 003, 008, 013, 021, 034, ...). Să se arate că şirul obţinut este periodic.

Rezolvare. Se formează perechi cu termenii noului şir astfel: (001, 001), (001, 002), (002, 003) etc. Numărul acestor perechi de câte trei cifre este $1000 \cdot 1000 = 10^6$, în timp ce şirul dat este infinit. Suma ultimelor trei cifre a două numere depinde numai de ultimele cifre ale fiecarui termen. De aceea, dacă se repetă o pereche de numere alăturate din şir se vor repeta şi celelalte.

20. În 500 de cutii se află mere. Se ştie că în fiecare cutie se află cel mult 240 mere. Să se arate că există cel puţin 3 cutii ce conţin acelaşi număr de mere.

Rezolvare. Dacă analizăm cazul cel mai nefavorabil când în primele 240 de cutii se află un număr diferit de mere (de la 1 la 240) şi apoi în alt număr de 240 de cutii tot un număr diferit de mere de la 1 la 240 ne mai rămân $500 - 480 = 20$ de cutii în care vor trebui plasate mere de la 1 la 240. Deci chiar cel puţin 20 de cutii conţin acelaşi număr de mere. Având în vedere acest raţionament problema se poate uşor generaliza.

21. Fişele sunt numerotate cu numere întregi consecutive de la 1 la $(2n+1)$. Care este cel mai mare număr de fişe care se poate alege astfel încât nici unul din numere să nu fie egal cu suma altor două numere?

Rezolvare. Condiţia problemei este echivalentă cu următoarea: dacă alegem două numere dintr-o mulţime, atunci diferenţa lor nu face parte din mulţimea considerată. De aici rezultă că o astfel de mulţime nu poate conţine mai mult de $(n+1)$ numere. Să luăm oricare $(n+2)$ numere cu S cel mai mic dintre ele. Eliminând pe S din această mulţime se obţin $(n+1)$ numere. Ele nu pot fi toate diferite de numărul alegerii, chiar dacă din ele îl excludem pe S, deoarece totalitatea numerelor care nu intră în alegere împreună cu S, este egală cu n. Alegerea alcătuită din $(n+1)$ numere şi care verifică condiţia problemei există. Aceasta mulţime este $\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2n+1\}$.

22. 2^n numere prime sunt scrise în linie. Se ştie că printre ele mai puţin de n sunt diferite. Să se arate că se poate alege un grup compact de numere din linie al căror produs să fie pătrat perfect.

Rezolvare. Este de ajuns să se arate că în fiecare grup compact fiecare număr prim se întâlneşte de un număr par de ori. Să presupunem că în şirul dat $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$ se întâlnesc m numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_m$ $(m < n)$ diferite. Notăm c_{ij} exponentul lui p_i $(1 \le i \le m)$, cu care acest număr apare în produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_j$ al primelor j numere din şirul dat, $1 \le j \le 2^n$. Fie d_{ij} restul la împărţirea prin 2 a lui c_{ij}; $c_{ij} = 2l_{ij} + d_{ij}$, $d_{ij} \in \{0,1\}$. Fiecare sistem de forma $(d_{1j}, d_{2j}, \ldots, d_{mj})$ este format din m zerouri şi unităţi. Numărul sistemelor $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ cu $d_i \in \{0,1\}$ este egal cu 2^m. Dar $2^m < 2^n$ şi deci printre cele 2^n sisteme se află două identice.

$(d_{1j}, d_{2j}, \ldots, d_{mj}) = (d_{1k}, d_{2k}, \ldots, d_{mk})$, $1 \le j < k \le 2^n$. Deci $d_{ij} = d_{ik}$, $1 \le i \le m$. De aici $c_{ik} - c_{ij} = 2(l_{ik} - l_{ij}) + (d_{ik} - d_{ik}) = 2(l_{ik} - l_{ij})$ se divide prin 2, $1 \le i \le m$.

Din cele de mai sus rezultă că exponentul cu care apare p_i în produsul $a_{j+1} \cdot a_{j+2} \cdot \ldots \cdot a_k = \dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_j}$ este egal cu $c_{ik} - c_{ij}$ şi deci orice număr p_i intră în produsul $a_{j+1} \ldots a_k$ cu exponent par, adică $a_{j+1} \cdot \ldots \cdot a_k$ este pătrat perfect.

23. Fie $n \in N$, $n > 1$. Să se arate că oricum am alege $(n+2)$ numere din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, printre ele există două cu diferenţa situată în intervalul $(n, 2n)$.

Rezolvare. Începem rezolvarea printr-o observaţie.

Dacă printre numerele alese nu se află numărul $3n$, se mărsc toate cu acelaşi număr, astfel încât cel mai mare să devină $3n$ (diferenţa rămânând aceeaşi se poate lua unul din numere egal cu $3n$). Avem două cazuri:

1) Dacă printre numerele alese se află unul din numerele $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n-1$, atunci diferenţa dintre $3n$ şi acest număr este cuprinsă între n şi $2n$.

2) Dacă printre numerele alese nu se află nici unul din numerele $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n-1$, atunci numerele rămase între 1 şi $3n$ se grupează în $(n+1)$ perechi

$$(1, 2n), (2, 2n+1), (3, 2n+2), \ldots, (n, 3n-1).$$

24. La un congres internaţional participă 17 matematicieni. Fiecare cunoaşte cel mult trei limbi şi oricare doi conversează între ei. Să se demonstreze că există cel puţin trei matematicieni care cunosc aceeaşi limbă.

Rezolvare. Fie A unul din participanţii la congres. El poate vorbi cu oricare din cei 16 participanţi, în cel mult o limbă din cele trei. Atunci este clar că există o limbă în care A vorbeşte cu nu mai puţin de 6 participanţi. Printre aceştia fie B unul oarecare. Este clar că printre alţi 5 participanţi sunt 3 cu care B poate vorbi în aceeaşi limbă (o vom numi a doua limbă). Dacă printre aceşti trei, cel puţin doi, să spunem C şi D, pot vorbi cu oricare în a doua limbă, atunci B, C şi D sunt cei trei participanţi ce vorbesc aceeaşi limbă.

25. Fie $(2n+1)$ numere reale mai mari ca 1 şi mai mici ca $2n$. Să se arate că există trei între ele care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Rezolvare. Se partiţionează intervalul $(1, 2^n)$ în n intervale;

$$(1,2), [2, 2^2), [2^2, 2^3), \ldots, [2^{n-2}, 2^{n-1}), [2^{n-1}, 2^n).$$

Conform principiului cutiei, există un interval din cele n de mai sus ce conţine cel puţin trei din cele $(2n+1)$ numere. Fie x_1, x_2, x_3 aceste numere situate în $[2^k, 2^{k+1})$, $0 \leq k \leq n-1$. Avem: $2^k \leq x_1 < 2^{k+1}$, $2^k \leq x_2 < 2^{k+1}$, $2^k \leq x_3 < 2^{k+1}$. Au loc inegalităţile triunghiului.

26. Să se determine numărul maxim de numere raţionale pozitive diferite cu proprietatea că din oricare 7 se pot alege două cu produsul egal cu 1.

Rezolvare. Se arată că se pot găsi 12 numere raţionale astfel încât din oricare 7 să existe două cu produsul 1. Fie numerele $a_1, 1/a_1$, $a_2, 1/a_2$, $a_3, 1/a_3$, $\ldots$, $a_6, 1/a_6$ cu a_i numere raţionale pozitive, distincte şi diferite de 1. Se grupează aceste 12 numere în perechi astfel:

$$(a_1, 1/a_1), (a_2, 1/a_2), (a_3, 1/a_3), \ldots, (a_6, 1/a_6).$$

Oricum am alege şapte numere, vor exista două care aparţin aceleiaşi perechi, deci al căror produs este egal cu 1. Pentru a arată că 12 este numărul maxim cerut trebuie aratăt că din oricare 13 numere raţionale, pozitive, distincte, nenule există 7 din care nu putem alege două cu produsul egal cu 1.

Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{13}\}$ o mulţime de numere raţionale nenule şi $A_1 = \{a \mid a \in A,\ a \geq 1\}$, $A_2 = \{a \mid a \in A,\ a < 1\}$. Deoarece $A = A_1 \cup A_2$ şi A_1, A_2 sunt disjuncte, iar A are 13 elemente, cel puţin una din mulţimile A_1 sau A_2 are 7 sau mai multe elemente cu produsul oricăror două elemente ale acestei mulţimi diferit de unu.

27. Să se arate că printre orice 39 numere naturale consecutive obligatoriu se găseşte unul la care suma cifrelor se divide la 11.

Rezolvare. Printre primele 20 din numerele date se găsesc două la care ultima cifră în scriere zecimală este zero. La unul din aceste două numere înaintea zeroului se află o cifră diferită de 9. Fie N acest număr şi $S(N)$ suma cifrelor sale.

Atunci numerele N, $N+1$, $N+2, \ldots$, $N+9$, $N+19$ se află printre cele 39 de numere date şi au suma cifrelor $S(N)$, $S(N)+1$, $S(N)+2, \ldots$, $S(N)+10$. Cum aici avem 11 numere naturale consecutive $(S_{(N)}, S_{(N)}+1, \ldots, S(N)+10)$ se ştie că printre ele există unul care se divide prin 11.

28. Se consideră un poligon regulat cu 45 de laturi. Se pot pune în vârfurile sale cifrele 0, 1, 2, ..., 9 astfel încât la capetele fiecărei laturi să se găsească perechi de cifre diferite?

Rezolvare. Fie a una din cifrele date. Este clar că a intră în 9 perechi de cifre distincte (cu fiecare dintre cele nouă cifre rămase diferite de a). Deci pentru o cifră fixată putem nota nouă din laturile poligonului. Cum poligonul are 45 de laturi, avem nevoie de 45:9=5 ori de prezenţa unei cifre. Deci cifra a trebuie să figureze de 5 ori. Cum a este una din cele zece cifre, atunci pentru aşezarea lor am avea nevoie de 50 de vârfuri. Prin urmare răspunsul este negativ.

29. a) O comisie s-a reunit de 40 de ori. De fiecare dată la şedinţe au fost prezenţi câte 10 oameni, oricare doi membri ai comisiei n-au fost împreună la şedinţe mai mult de o dată. Arătaţi că numărul membrilor comisiei este mai mare de 60.

b) Arătaţi că din 25 de oameni nu se pot alcătui mai mult de 30 de comisii din 5 oameni fiecare, astfel ca oricare două comisii n-au mai mult de un membru comun.

Rezolvare. a) Fiecare pereche a membrilor comisiei au putut să se întâlnească de cel mult o şedinţă. La fiecare şedinţă au fost $C_{10}^2 = 45$ perechi. Cum au fost 40 de şedinţe, atunci din membrii comisiei se pot forma nu mai puţin de $45 \cdot 40 = 1800$ perechi. Dar din 60 (sau mai puţini) se pot forma $C_{60}^2 = 30 \cdot 59 (< 1800)$ perechi.

Altfel. Fie n numărul de membri ai comisiei, $n \leq 60$.

Numărul $10 \cdot 40 = 400$ dă numărul de prezenţe ale membrilor la cele 40 şedinţe, iar $\frac{10 \cdot 40}{n} > 6$, arată că cel puţin un membru a fost la cel puţin 7 şedinţe. Toţi oamenii cu care el s-a întâlnit sunt alţii şi numărul lor $7 \cdot 9 > 59$. Contradicţie. Deci $n > 60$.

b) Analog cu a).

30. Pe fiecare din planetele unui sistem se află astronomi care cercetează planeta cea mai apropiată. Distanţele dintre oricare două planete sunt distincte. Arătaţi că dacă numărul planetelor este impar, atunci va exista o planetă care nu va fi cercetată niciodată.

Rezolvare. Luăm două planete care sunt cele mai apropiate. Este clar că astronomii celor două planete le cercetează reciproc. Rămân încă $n-2$ planete şi $n-2$ astronomi. Dacă unul din ei cerecetează una din planetele deja alese (mai sus), atunci pentru una din cele $n-2$ planete nu mai rămâne astronom. Dacă pe aceste două planete nici un astronom nu le mai cercetează, atunci din nou se poate aplica acelaşi raţionament: din cele $n-2$ planete se aleg două cele mai apropiate etc. Deoarece n este impar, în final va rămâne o planetă pe care nici un astronom nu o va cerceta.

31. Se pot aşeza pe un cerc cifrele $0, 1, 2, \ldots, 9$ astfel încât orice două cifre vecine să difere prin 3, 4 sau 5?

Rezolvare. Analizăm care sunt cifrele vecine posibile pentru fiecare cifră dată astfel ca diferenţa lor să fie 3, 4 sau 5.

Să observăm că 0, 1, 2, 8, 9 nu pot fi vecine. Sunt primele care le punem pe cerc. Între 0 şi 1 punem cifra 4. Între 0 şi 9 punem 3, iar între 3 şi 9 cifra 6. Între 9 şi 8 se pune 5. Cifra rămasă 7 ar trebui să ocupe poziţia între 1 şi 2 sau 2 şi 8. Ceea ce este imposibil.

Probleme propuse

1. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ se divide prin 12.

2. Fiind date 12 numere naturale distincte de două cifre, din ele se pot alege două a căror diferenţă este un număr de două cifre identice?

3. Să se arate că din orice n $(n > 3)$ numere naturale se pot alege trei a, b, c, astfel încât $a(b-c)$ să se dividă prin n.

4. Se dau 100 de numere întregi $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Să se arate că din ele se pot alege câteva (se poate şi unul singur) a căror sumă se divide cu 100.

5. Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbf{N}$ şi oricare ar fi $m \in \mathbf{N}^*$, resturile împărţirii numerelor $a, a^2, \ldots, a^k, \ldots$ la m se repetă periodic (nu neapărat de la început).

6. La un turneu de şah participă $n \geq 2$ şahişti. Să se arate că în orice moment al turneului, înaintea ultimei runde (pot exista şi partide întrerupte), cel puţin doi şahişti au acelaşi număr de victorii. Rămâne proprietatea adevărată la sfârşitul turneului?

7. Fie $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ şi $\frac{p}{q}$ o fracţie zecimală infinită. Să se arate că în acest caz $\frac{p}{q}$ este periodică.

8. Fie a un numar iraţional. Să se arate că mulţimea

$$A = \{ma + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

are proprietatea că oricare ar fi $I \subset \mathbb{R}$, I interval, există $b \in A$, astfel ca $b \in I$.

9. Să se arate că există o putere a lui 2, care începe cu trei cifre de 9.

10. Se consideră $(n+1)$ numere naturale mai mici sau egale cu $2n$. Să se arate că există două între ele astfel că unul îl divide pe celălalt.

11. a) Să se arate că din 52 de numere întregi există două între ele, astfel că suma sau diferenţa lor se divide cu 100.

b) Se dau n numere naturale mai mici decât 100 şi cu suma egală cu 200. Atunci există câteva cu suma egală cu 100?

12. Un şahist pentru a se antrena joacă cel puţin o partidă pe zi, dar nu mai mult de 12 partide pe săptămînă. Să se arate că pe parcursul a 77 de zile există câteva zile consecutive când s-au jucat exact 20 de partide.

13. Pentru un număr natural dat n, notăm cu n_1 suma cuburilor cifrelor lui n. Pentru n_1 formăm analog n_2 etc. Să se arate că începând de la un anumit rang numerele din acest şir se repetă periodic.

14. Se dau zece numere naturale diferite între ele şi formate din câte două cifre. Să se demonstreze că se pot forma cu acestea două grupe disjuncte de numere, astfel încât suma numerelor ce alcătuiesc una din grupe să fie egală cu suma numerelor care formează cealaltă grupă.

15. Un determinant de ordinul n are $n^2 - n + 2$ elemente egale, atunci determinantul este nul.

16. Fie $n, z \in \mathbb{N}$, $(n, z) = 1$. Să se arate că cel puţin unul din numerele $1, 1+z, 1+z+z^2, \ldots, 1+z+\ldots+z^{n-l}$ se divide cu n.

17. Se dă şirul infinit de cifre diferite de 9, $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. Să se arate că printre numerele $a_1, \overline{a_1a_2}, \overline{a_1a_2a_3}, \ldots$ există o infinitate de numere compuse.

18. Să se arate că din oricare 16 numere naturale mai mici decât 100 se pot alege patru, $a \neq b \neq c \neq d \neq a$ astfel încât $a + b = c + d$.

19. Să se arate că din orice şapte numere reale se pot alege două x şi y astfel că $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(Olimpiada, Canada, 1984)

Indicaţie. Funcţia tangentă definită pe $(-\pi/2, \pi/2)$ cu valori în $\mathbb{R}$ este bijectivă. Se împarte intervalul $(-\pi/2, \pi/2)$ în şase părţi egale etc.

5.2. Principiul lui Dirichlet în geometrie

În geometrie principiul lui Dirichlet are următorul enunţ: dacă figurile $F_1, F_2, \ldots, F_n$ cu ariile $S_1, S_2, \ldots$ şi respectiv S_n sunt incluse în figura F cu aria S şi $S_1 + S_2 + \ldots + S_n > kS$, atunci $(k+1)$ din figurile $F_1, F_2, \ldots, F_n$ au un punct comun.

Principiul lui Dirichlet poate avea şi formularea următoare: fie în plan o figură F de arie S şi n figuri F_i de arie S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dacă $S > \sum_{i=1}^{n} S_i$, atunci cele n figuri F_i nu pot acoperi figura F; dacă cele n figuri F_i acoperă pe F, atunci $\sum_{i=1}^{n} S_i \geq S$.

Prezentăm în continuare probleme ce să ilustreze aplicarea acestui principiu.

Probleme rezolvate

1. Se consideră în plan n puncte distincte. Câte două puncte determină un segment. Să se arate că există două puncte din care pleacă acelaşi număr de segmente.

Rezolvare. Dintr-un punct pleacă maxim $(n-1)$ segmente şi minim 1. Cum avem n puncte, vor exista două din care pleacă acelaşi număr de segmente.

2. În interiorul pătratului de latură 1 sunt aşezate câteva cercuri având suma lungimilor egală cu 10. Să se arate că există o dreaptă care să intersecteze cel puţin patru din aceste cercuri.

Rezolvare. Se proiectează cercurile pe una din laturile pătratului. Proiecţia fiecărui cerc este un segment cu lungimea egală cu a diametrului cercului respectiv. Suma tuturor acestor segmente este $10/\pi > 3{,}1$. Conform principiului lui Dirichlet, enunţat mai sus, există cel puţin patru segmente ce au în comun un punct. Perpendiculara ridicată în acest punct, pe latura pătratului va intersecta cel puţin patru cercuri.

3. În interiorul cercului de rază 16 se află marcate 650 de puncte. Să se arate că există un inel cu raza interioară egală cu 2, iar cu cea exterioară egală cu 3, care să conţină 10 puncte.

Rezolvare. Pentru fiecare din cele 650 de puncte construim inelul cu centrul în acest punct şi delimitat de cercurile de raze 2 şi 3. Toate aceste inele sunt incluse în cercul de rază $16 + 3 = 19$ şi suma ariilor lor este egală cu $650(9\pi - 4\pi) = 3250\pi > 9 \cdot 361\pi$ (361π este aria discului de rază 19). Conform principiului lui Dirichlet, există cel puţin 10 inele care au un punct comun A. Atunci inelul cu centrul în A conţine centrele celor 10 inele şi problema este rezolvată.

4. În pătratul de latură 1 se consideră 64 de puncte. Să se arate că există trei puncte dintre acestea ce pot fi acoperite cu un cerc de rază $1/8$.

Rezolvare. Începem rezolvarea prin a observa că dacă cercul de rază r conţine punctul A, atunci şi centrul acestui cerc va aparţine cercului de centru A şi rază r. Deci pentru rezolvarea problemei este de ajuns să găsim trei cercuri, de rază $\frac{1}{8}$ cu centrele în trei din cele 64 de punete, care să aibă în comun un punct. Observăm că punctele din cercurile cu centrele în unele din cele 64 de punete pot fi depărtate de laturile pătratului cu mai puţin de $1/8$. Aria figurii maxime ce poate fi acoperită cu cercuri de rază $1/8$ şi cu centrele în interiorul pătratului este:

$$1+4\cdot\frac{1}{8}\cdot 1+4\cdot\frac{\pi}{4^4}=1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^4}.$$

Aria celor 64 cercuri de rază $\frac{1}{8}$ este egală cu π. Cum $\pi-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^3}\right)>0$ în timp ce $\pi-2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^3}\right)>0$, conform principiului lui Dirichlet există trei cercuri (de fapt discuri) care să aibă în comun un punct.

5. În orice poliedru convex există cel puţin două feţe cu acelaşi număr de laturi.

(Kömal)

Rezolvare. Să analizăm faţa cu cele mai multe muchii. Fie aceasta un poligon cu n laturi. Poliedrul fiind convex la fiecare muchie îi corespunde două feţe. Cum numărul de muchii pentru poligoanele poliedrului (feţe ale poliedrului) este cuprins între 3 şi n, deducem, conform principiului lui Dirichlet, că cel puţin două feţe au acelaşi număr de laturi.

6. Fie C un cub de latură 1 şi A o mulţime finită, $A\subset C$. Atunci există cel puţin două puncte ale lui A a căror distanţă este mai mică sau egală cu $\sqrt{3}/\left[\sqrt[3]{m-1}\right]$ unde $m=\operatorname{Card}(A)$ (≥ 2), $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Rezolvare. Fie n cel mai mare număr natural astfel încât $m\geq n^3+1$, deci $n\leq\sqrt[3]{m-1}$. De aici $n=\left[\sqrt[3]{m-1}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Să împărţim cubul C în n^3 cuburi egale, fiecare având latura $1/n$. Deoarece $m\geq n^3+1$ se obţine că cel puţin un cub de latură $1/n$ cuprinde două puncte a, b ale mulţimii A. Evident $|a-b|<\sqrt{3}/n$. Dar $n=\left[\sqrt[3]{m-1}\right]$. Deci $|a-b|\leq\sqrt{3}\left[\sqrt[3]{m-1}\right]$.

7. În dreptunghiul 3×4 sunt aşezate şase puncte. Arătaţi că se găseşte o pereche de puncte pentru care distanţa este mai mică decât $\sqrt{3}$.

Rezolvare. Se împarte dreptunghiul considerat în cinci poligoane, astfel încât distanţa cea mai mare între două puncte din fiecare poligon este $\sqrt{5}$. Dar avem şase puncte şi numai cinci poligoane, deci, conform principiului

lui Dirichlet într-un poligon vor fi aşezate cel puţin două puncte, distanţa dintre ele fiind deci mai mică decât $\sqrt{5}$.

8. Să se arate că dacă într-un punct din interiorul unui poligon regulat cu $(2n)$ laturi se întâlnesc n diagonale, atunci acest punct este centrul cercului circumscris poligonului.

Rezolvare. Prin reducere la absurd, presupunem că o diagonală din cele n nu trece prin centrul cercului circumscris. Atunci cel puţin de o parte a acestei diagonale se găsesc mai puţin de $(n-2)$ vârfuri ale poligonului. Deci, din principiul lui Dirichlet, deducem că din cele $(n-1)$ diagonale rămase, cel puţin două pornesc din acelaşi vârf. Acest lucru însă nu este posibil, deoarece ele se intersectează şi în centrul cercului circumscris şi sunt distincte. Am ajuns deci la o contradicţie. Aşadar toate diagonalele trec prin centrul cercului circumscris poligonului.

9. În pătratul de latură 1 se află 500 de puncte. Să se arate că din ele se pot alege 12 puncte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{12}$ astfel ca lungimea liniei frânte $A_1A_2\ldots A_{12}$ să fie mai mică decât 1.

Rezolvare. Împărţim una din laturile pătratului în 22 de parţi egale, iar cealaltă latură în 2 părţi egale. S-a împărţit pătratul în 44 de dreptunghiuri. Cum $500 : 44 > 11$, rezultă conform principiului lui Dirichlet că există un dreptunghi în care se află cel puţin 12 puncte. Fie acestea $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. Linia frântă $A_1A_2\ldots A_{12}$ este mai mică decât linia frântă $A_1B_1A_2B_2\ldots B_{11}A_{12}$, ultima fiind formată din 11 segmente verticale, fiecare din ele de lungime mai mică decât $1/22$ şi 12 segmente orizontale de lungime totală mai mică decât $1/2$. Avem deci lungimea liniei frânte $A_1A_2\ldots A_{12}$ mai mică decât $11/22+1/2=1$.

10. În pătratul cu latura 1 se aşază o figură, cu distanţa între orice două puncte diferite de 0,001. Să se arate că aria acestei figuri este mai mică decât 0,34. Să se arate că aria acestei figuri este mai mică decât 0,29.

Rezolvare. Fie F, figura dată, F_1 şi F_2 figuri obţinute din figura F translatată cu 0,001 în direcţii, cu unghiul între ele de 60^0. Se arată că figurile F şi F_1, F şi F_2, F_1 şi F_2 n-au puncte comune şi sunt incluse în pătratul de latură 1,001. Se obţine de aici prima aproximare a ariei figurii F. Fie figurile F_3 şi F_4 obţinute din figura F printr-o translaţie cu $0,001\cdot\sqrt{3}$ în direcţii al căror unghi este egal cu unghiul de la vârful triunghiului isoscel de laturi $0,001\cdot\sqrt{3}$ şi baza 0,001. Cum figurile F_3 şi F_4 nu se intersectează, atunci intersecţia uneia din ele cu F are aria nu mai mare decât jumătatea ariei lui F. Fie această figură F_3 şi fie figurile F_5 şi F_6 obţinute din F prin translaţii cu 0,001 în direcţii ce formează unghiul de 30^0 cu direcţia translaţiei ce duce F în F_2. Se arată că aria comună ocupată de figurile F, F_3, F_5, F_6 este mai mare decât $(7/2)S$, unde S este aria figurii, iar de aici se obţine a doua aproximare.

11. În plan se consideră $(2n^2+1)$ puncte cu proprietatea că pentru oricare trei dintre ele există un cerc de rază 1 care să le conţină în interior. Să se arate că există un cerc de rază $2\sqrt{6}/(3n)$ care să conţină în interior trei dintre punctele date.

Rezolvare. Se consideră cercurile (discurile) de rază 1 ce au centrele în punctele date. Se deduce de aici că intersecţia oricăror trei cercuri este nevidă şi conform teoremei lui Helly, intersecţia tuturor cercurilor este nevidă. În această intersecţie se află un punct care este centrul unui cerc de rază 1. Acest cerc conţine toate punctele date. Fie O acest cerc. Construim un pătrat circumscris lui O. Acesta are latura 2. Se împarte pătratul în n^2 pătrăţele egale, de latură $2/n$. Toate cele $(2n^2+1)$ puncte sunt în interiorul pătratului. Cum sunt n^2 pătrăţele, se deduce că există un pătrăţel ce include trei puncte date. Laturile triunghiului format de cele trei puncte vor fi mai mici decât $2\sqrt{2}/n$. Dacă un triunghi are laturi mai mici decât l, el poate fi inclus într-un cerc de rază $l/\sqrt{3}$.

12. Să se arate că în orice poligon convex cu 21 de laturi există două diagonale care formează între ele un unghi mai mic de 1^0.

Rezolvare. Se consideră un punct P în planul poligonului. Ducând prin P paralele la cele $21 \cdot 18/2 = 189$ diagonale ale poligonului, în jurul lui P se fonrmeaza $2 \cdot 189 = 378$ unghiuri. Dar suma unghiurilor în jurul unui punct este 360^0; se deduce că cel puţin unul din cele 378 de unghiuri are măsura mai mică decât 1^0. Diagonalele cu proprietatea din enunţ sunt cele paralele cu laturile acestui unghi.

13. Fie n puncte în plan cu proprietatea că distanţa dintre oricare două este mai mare ca unu. Să se arate că raza oricărui cerc care le conţine pe toate este mai mare ca $\left(\sqrt{n}-1\right)/2$.

Rezolvare. Fie C cercul de rază R ce conţine toate punctele în interior. Se consideră cercurile de rază $1/2$ cu centrele în punctele date. Este clar că toate aceste cercuri sunt disjuncte şi cuprinse în cercul C_∞, concentric cu C şi de rază $(R+1)$. Suma ariilor cercurilor este strict mai mică decât aria cercului C_∞; se deduce: $\dfrac{n\pi}{4} < \pi(R+1/2)^2$. De aici $R > \dfrac{(\sqrt{n}-1)}{2}$.

14. Într-un pătrat de latură 1 se află un poligon convex de arie mai mare sau egală cu $1/2$. Să se arate că există o dreaptă d paralelă cu una din laturi care să intersecteze poligonul după un segment de lungime mai mare sau egală cu $1/2$.

Rezolvare. Se duc prin toate vârfurile poligonului paralele la o latură fixată a pătratului. Aceste paralele împart poligonul în triunghiuri şi trapeze. Dacă intersecţiile acestor drepte cu poligonul ar fi toate mai mici decât $1/2$, aria poligonului ar fi mai mică decât $1/2$, deoarece suma înălţimilor nu poate depăşi lungimea laturii pătratului, care este egală cu 1.

15. O sferă de rază egală cu 10 este înscrisă într-un poliedru cu 19 fețe. Să se arate că pe suprafața sa se pot găsi două puncte astfel încât distanța între ele să fie mai mare decât 21.

Rezolvare. Vom rezolva problema prin reducere la absurd. Presupunem că distanța între orice două puncte ale suprafeței poliedrului cu 19 fețe este mai mică decât 21. Atunci acest poliedru va fi situat în interiorul unei sfere de rază 11 concentrică cu sfera de rază 10 şi fiecare față a sa va fi situată între sfere. Din acest motiv aria fiecărei fețe nu depăşeşte aria unui cerc de rază $\sqrt{21}$ (obținut prin secționarea sferei de rază 11 cu un plan tangent sferei de rază 10). Aria poliedrului nu depăşeşte $19\pi\left(\sqrt{21}\right)^2 = \pi\left(20^2 - 1^2\right) = 399\pi$; dar aria lui este mai mare decât aria sferei de rază 10, egală cu $4\pi \cdot 10^2$. Am obținut astfel o contradicție.

16. Într-un cerc de rază 1 se duc mai multe coarde. Să se demonstreze că dacă fiecare diametru intersectează cel mult k coarde, atunci suma lungimilor coardelor este mai mică decât $k\pi$.

Rezolvare. Se presupune că suma lungimilor coardelor nu este mai mică decât $k\pi$. Atunci suma arcelor (celor mai mici) subîntinse de aceste coarde este mai mare decât πk. Se adaugă la acestea şi arcele simetrice față de centrul cercului. Suma lungimilor tuturor arcelor este mai mare decât $2k\pi$. De aceea se va găsi un punct pe cerc acoperit de cel puțin $(k+1)$ arce (lungimea cercului este de 2π). Dacă vom duce diametrul prin acest punct el va intersecta cel puțin $(k+1)$ coarde, ceea ce contrazice ipoteza.

17. Vârfurile unui poligon regulat cu nouă laturi sunt colorate cu roşu şi albastru. Să se arate că există două triunghiuri congruente, fiecare din ele având vârfurile colorate cu o aceeaşi culoare.

Rezolvare. Din nouă vârfuri, colorate cu două culori, se pot separa cel puțin cinci, care sunt colorate la fel. Presupunem că această culoare este roşie. Cinci vârfuri colorate în roşu formează $C_5^3 = 10$ triunghiuri diferite la fel colorate (în roşu). Rotația de centru O şi unghi $2k\pi/9$, $k = 0, 1, \ldots, 8$ (O este centrul poligonului regulat) nu schimbă mulțimea M a vârfurilor acestui poligon. Prin rotația de unghi $2k\pi/9$ a fiecăruia din cele 10 triunghiuri colorate în roşu se obțin $10 \cdot 9 = 90$ de triunghiuri cu vârfurile în mulțimea M. Dar multimea tuturor triunghiurilor formate cu cele două vârfuri ale poligonului este egală cu $C_9^3 = 78 < 90$. Deci există două triunghiuri D_1 şi D_2 colorate în roşu, care după câteva rotații coincid cu un acelaşi triunghi.

18. În interiorul triunghiului echilateral cu latura 1 se află cinci puncte. Să se arate că există cel puțin două puncte cu distanța între ele mai mică decât 0,5.

Rezolvare. Liniile mijlocii ale triunghiului echilateral cu latura 1 împart triunghiul în patru triunghiuri echilaterale cu latura 0,5. Deci în unul din aceste triunghiuri se află cel puţin două puncte pentru care distanţa între ele este mai mică decât 0,5.

19. Pe tabla de şah 8×8 notăm centrele tuturor câmpurilor. Un număr de treisprezece drepte pot împărţi tabla în părţi astfel ca în interiorul fiecărei părţi să nu se afle mai mult decât un centru al unui câmp?

Rezolvare. Pe marginea tablei de şah 8×8 considerăm 28 de câmpuri. Se duc cele 28 de segmente ce unesc centrele a două câmpuri consecutive (din cele 28 considerate). Orice dreaptă poate intersecta cel mult două din segmentele considerate şi deci treisprezece drepte pot intersecta cel mult 26 de segmente, adică se pot găsi cel puţin două segmente ce nu sunt intersectate de dreptele considerate. Deci răspunsul este negativ.

20. Se consideră în plan 25 de puncte cu proprietatea că din oricare trei puncte există două cu distanţa dintre ele mai mică decât unu. Să se arate că există un cerc de rază 1 ce conţine nu mai puţin de treisprezece din punctele considerate.

Rezolvare. Fie A unul din punctele date. Dacă toate punctele sunt situate în cercul S_1 de centru A şi raza 1, atunci problema este rezolvată. Dacă există puncte exterioare lui S_1, atunci fie B unul din ele. Deci $AB > 1$. Se consideră cercul S_2 cu centrul în B şi de rază 1. Printre punctele A, B, C unde C este unul din punctele date, atunci $AC < 1$ sau $BC < 1$, ceea ce arată că cercurile S_1 şi S_2 conţin toate punctele date, adică unul din cercuri conţine cel puţin treisprezece puncte.

21. În pătratul cu latura unu se consideră 51 puncte. Să se arate că există cel puţin trei puncte, din cele considerate, conţinute într-un cerc de rază $1/7$.

Rezolvare. Se împarte pătratul dat în 25 de pătrate egale de latura 0,2. Deci va exista un pătrat de latură 0,2 în care se află cel puţin trei puncte. Raza cercului circumscris pătratului de latura 0,2 este egală cu $1/5\sqrt{2} < 1/7$.

22. Fiecare din cele nouă drepte împart pătratul în două patrulatere cu raportul ariilor egal cu $2/3$. Să se arate că cel puţin trei dintre dreptele considerate trec prin acelaşi punct.

Rezolvare. Se observă că dreptele date nu pot intersecta două laturi vecine ale pătratului $ABCD$, deoarece s-ar forma, pentru fiecare dreaptă considerată un trinnghi şi un pentagon. Fie o dreaptă ce intersectează laturile AB şi CD în punctele M şi N (fig. 1, pag.189). Trapezele $AMND$, $MBCN$ au înălţimile egale şi deci raportul ariilor lor este egal cu raportul liniilor mijlocii adică MN împarte segmentul ce uneşte mijloacele laturilor AD, BC în raportul $2/3$. Numărul punctelor ce împart liniile mijlocii ale pătratului în raportul $2/3$ este egal cu 4 (câte două pe fiecare linie mijlocie).

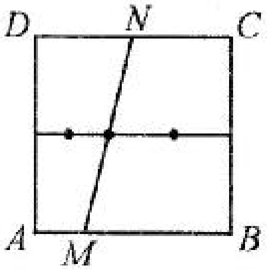


Fig. 1

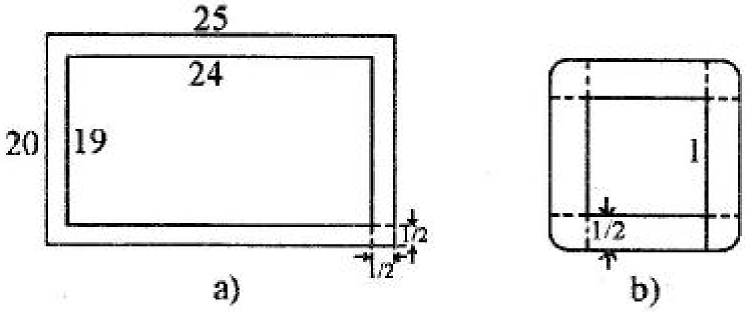


Fig. 2

23. În plan se consideră n drepte neparalele două câte două. Să se arate că există două drepte cu unghiul între ele mai mic decât $180^0/n$.

Rezolvare. Se alege un punct în plan prin care se duc drepte paralele la cele n drepte. Aceste drepte împart planul în $2n$ unghiuri cu suma măsurilor egală cu 360^0. Deci cel puţin unul din unghiuri este mai mic decât $180^0/n$.

24. În interiorul cercului de rază n sunt aşezate $(4n)$ segmente de lungime unu. Să se arate că se poate duce o dreaptă paralelă sau perpendiculară pe o dreaptă dată l şi intersectând cel puţin două segmente.

Rezolvare. Se consideră l_1 o dreaptă arbitrară perpendiculară pe l. Se notează cu a_i, b_i lungimile proiecţiilor celui de-al i-lea segment pe dreapta l şi respectiv l_1. Din enunţ rezultă $a_i + b_i \geq 1$. Deci $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{4n}) + $ $+ (b_1 + b_2 + \ldots + b_{4n}) \geq 4n$. Se poate presupune că $a_1 + a_2 + \ldots + a_{4n} \geq 2n$. Toate segmentele se proiectează pe un segment de lungime $(2n)$, deoarece ele se află în cercul de rază n. Dacă proiecţiile segmentelor date pe drapta l nu au puncte comune, atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_{4n} < 2n$. De aceea pe dreapta l se află un punct (cel puţin) ce aparţine la două segmente proiectate. Perpendiculara prin acest punct pe dreapta l intersectează cel puţin două segmente date.

25. În dreptunghiul de laturi 20 şi 25 se aruncă 120 de pătrate de latură 1. Arătaţi că în dreptunghi se poate aşeza un cerc de diametru 1 care nu intersectează nici unul din pătratele date.

Rezolvare. Centrul cercului de diametru 1, aşezat în întregime în dreptunghiul dat, se află aşezat la o distanţă mai mare ca $\frac{1}{2}$ de laturile dreptunghiului (fig. 2a), adică în dreptunghiul de laturi 19 şi 24. Aria acestui dreptunghi este egală cu $19 \cdot 24 = 456$. Pentru ca cercul de diametru 1 să nu taie un pătrăţel de latură 1, centrul lui trebuie să fie la distanţă mai mare ca $\frac{1}{2}$ de laturile acestuia (fig. 2.b), adică în afara conturului, care delimitează o arie egală cu $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{\pi \frac{1}{4} + 1}{4} = 3 + \frac{\pi}{4}$. Chiar dacă aceste figuri nu se intersectează (situaţia cea mai nefavorabilă), suma ariilor acestora este egală cu $120\left(3 + \frac{\pi}{4}\right) = 360 + 30\pi < 360 + 30 \times 3,2 = 456$.

Prin urmare aceste figuri nu pot acoperi dreptunghiul de arie 456 şi deci există un cerc cu diametrul egal cu 1, care nu intersectează nici unul din pătrate.

26. Fie 9 puncte într-un pătrat de latura 1. Arătaţi că există un triunghi de arie $\leq \frac{1}{8}$ cu capetele în trei puncte din cele 9.

Rezolvare. Se împarte pătratul în patru pătrate egale de latură $\frac{1}{2}$. Conform principiului cutiei într-unul din cele patru pătrate vor fi cel puţin trei puncte. Arătăm că dacă un triunghi T are vârfurile pe laturile unui pătrat P atunci $S_T \leq \frac{1}{2}S_P$, unde S_T, S_P reprezintă aria triunghiului şi respectiv a pătratului. Fie pătratul $ABCD$ şi vârfurile P, Q, R ale triunghiului înscris în pătrat, $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$ şi $R \in [DC]$ (fig. 3). Ducem $QQ' \| AB$, $Q' \in [AD]$. Atunci $S_{PQR} \leq S_{PQR} + S_{PQ'R} = S_{PQRQ'} = S_{PQQ'} + S_{QRQ'} = \frac{1}{2}S_{ABQQ'} + \frac{1}{2}S_{QCDQ'} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

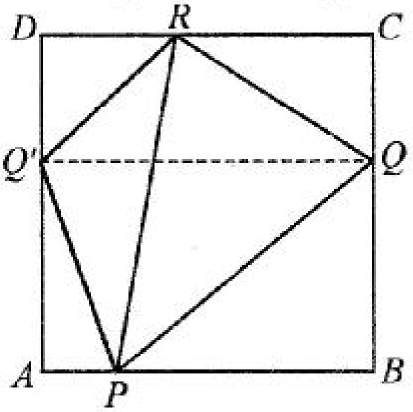


Fig. 3

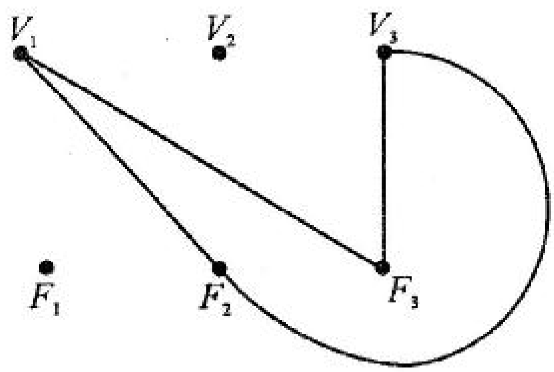


Fig. 4

27. Într-un cerc de rază $n(n \in N)$ se consideră m coarde cu proprietatea că orice punct din interiorul cercului este la distanţă mai mică sau egală cu 1 de cel puţin una dintre ele. Să se arate că $m \geq n$.

Rezolvare. Putem reformula enunţul astfel: benzile de lăţime 2 construite pe cele m coarde acoperă cercul. Se consideră o sferă de rază n având diametrul comun cu al cercului dat. Porţiunile din sferă care se proiectează pe câte una din benzi au ariile $\leq 2 \cdot 2\pi n$ şi ele acoperă sfera. De aici avem: $m \cdot 4\pi n \geq 4\pi n^2$ când $m > n$.

28. Într-un triunghi echilateral de latură 1 se aleg la întâmplare 49 puncte distincte. Să se arate că cel puţin 4 dintre ele se află în interiorul unui cerc de rază $\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Rezolvare. Se înjumătăţeşte fiecare latură a triunghiului şi se unesc punctele respective. Se formează 4 triunghiuri echilaterale de latură $\frac{1}{2}$. Se procedează analog cu fiecare din cele 4 triunghiuri obţinute şi se obţin 16 triunghiuri echilaterale de latură $\frac{1}{4}$. Cel puţin unul din aceste triunghiuri conţine cel puţin 4 puncte distincte (altfel am avea $3 \cdot 16 = 48$ puncte).

Raza cercului circumscris triunghiului echilateral (din cele 16) este $\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

29. Pătratul cu latura 25 este descompus cu ajutorul celor 625 de pătrăţele având laturile paralele respectiv cu cele ale pătratului dat. În cele 625 de pătrăţele se scriu numerele 1,2,3,...,25 astfel:

a) pătrăţelele simetrice faţă de diagonala principală conţin numere egale;

b) două numere egale nu sunt aşezate pe aceeaşi linie sau pe aceeaşi coloană.

Să se demonstreze că diagonala principală conţine numere diferite.

Rezolvare. a) În afara diagonalei principale fiecare număr apare scris de un număr par de ori. Cum fiecare număr dintre cele 25 este scris de 25 de ori ($25 \cdot 25 = 625$), deci de un număr impar de ori, înseamnă că pe diagonala principală fiecare număr apare de un număr impar de ori. Dacă pe diagonala principală un număr ar fi dus de cel puţin două ori atunci s-ar încălca condiţia b). Deci pe diagonala principală sunt scrise numai numere diferite.

30. Trei vecini certaţi au trei fântâni comune. Se pot oare duce drumuri care să nu se întretaie de la fiecare vecin la fiecare fântână?

Rezolvare. În rezolvarea acestei probleme utilizăm celebra teoremă a lui Euler (relaţia lui Euler): $m - n + l = 2$, unde m este numărul de puncte din plan, n este numărul de arce care nu se intersectează (fiecare arc uneşte două puncte oarecare şi nu trece prin celelalte puncte), iar l este numărul de regiuni în care este împărţit planul de cele n arce.

În cazul nostru avem şase puncte (cei trei vecini V_1, V_2, V_3 şi cele trei fântâni F_1, F_2, F_3), nouă arce şi numărul de regiuni se determină din formula lui Euler $6 - 9 + l = 2$. Găsim $l = 5$ (fig. 4, pag. 190). Fiecare regiune este determinată de cel puţin 4 arce. Deci vor trebui cel puţin $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ drumuri. Cum noi avem doar 9 drumuri problema este imposibilă.

31. În interiorul unui pătrat de latură 1 se consideră $2n^2 + 1$ puncte. Să se arate că există un cerc de rază $\frac{1}{n}$ care conţine trei din aceste puncte.

Rezolvare. Se împarte pătratul dat în n^2 pătrate de latură $\frac{1}{n}$ ducând paralele la laturile pătratului echidistante (la distanţa $\frac{1}{n}$). Conform principiului cutiei există un pătrat care conţine în interior sau pe contur cel puţin trei puncte. Ducând un cerc cu raza $\frac{1}{n}$ cu centrul în centrul pătratului se obţine cercul căutat (diagonala pătratului este egală cu $\frac{\sqrt{2}}{n}$ şi $\frac{1}{n} > \frac{\sqrt{2}}{2n}$).

32. Baza unei piramide este un poligon convex cu 9 laturi (nonagon). Fiecare diagonală a bazei şi fiecare muchie laterală este colorată fie negru, fie alb. Ambele culori sunt utilizate cel puţin o dată (laturile bazei nu sunt colorate). Arătaţi că există trei segmente colorate cu aceeaşi culoare care formează un triunghi.

Rezolvare. Vom proceda prin reducerea la absurd. Cu principiul cutiei, cinci din muchiile laterale trebuie să aibă aceeaşi culoare.

Presupunem că aceasta este culoarea neagră. Fie aceste segmente duse din vârful V la B_1, B_2, B_3, B_4 şi B_5, unde $B_1B_2B_3B_4B_5$ este un pentagon convex (unde B_i nu sunt neapărat vârfuri vecine ale nonagonului). Segmentele $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$, $[B_3, B_4]$, $[B_4B_5]$ şi $[B_5B_1]$ nu pot fi toate laturi ale nonagonului şi deci putem presupune, fără a restrânge generalitatea că $[B_1B_2]$ este colorat. Deoarece triunghiul VB_iB_j nu poate avea cele trei laturi colorate negru, segmentele $[B_1B_2]$, $[B_2, B_4]$, $[B_4B_1]$ trebuie să fie colorate în alb. Acum triunghiul $B_1B_2B_4$ are toate laturile colorate în alb, contradicţie.

33. În interiorul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c se consideră n^3+1 puncte distincte. Să se arate că există cel puţin două puncte cu proprietatea că distanţa dintre acestea nu este mai mare decât $\frac{1}{n}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Rezolvare. Se descompune paralelipipedul în n^3 paralelipipede de dimensiuni $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\frac{c}{n}$. Există un paralelipiped unic care conţine două puncte.

34. Pe un satelit sferic cu raza de 2 unităţi sunt amplasate la întâmplare 9 staţii (puncte) de emisie-recepţie. Arătaţi că există două staţii pe satelit aflate la o distanţă ce nu depăşeşte π.

Rezolvare. Se împarte sfera în 8 părţi cu ajutorul a trei plane perpendiculare două câte două, duse prin centrul sferei.

35. Punctele unui cerc sunt colorate în trei culori diferite.

Arătaţi că există o infinitate de triunghiuri isoscele cu vârfurile pe cerc şi de aceeaşi culoare (triunghiuri monocromatice).

Rezolvare. Partiţionăm punctele cercului într-o infinitate de poligoane regulate cu 13 laturi. În fiecare astfel de poligon (conform principiului cutiei) există cel puţin 5 vârfuri la fel colorate: să spunem roşu. Vom arăta că printre cele 5 vârfuri există trei care formează un triunghi isoscel. Deci pentru fiecare poligon cu 13 laturi există un triunghi isoscel monocromatic. Prin urmare vom avea o infinitate de astfel de triunghiuri. Vom demonstra acum că printre cele 5 vârfuri colorate cu roşu ale unui poligon regulat cu 13 laturi există trei care formează un triunghi isoscel.

Vom proceda prin reducere la absurd. Notăm vârfurile poligonului cu $P_0, P_1, \ldots, P_{12}$ (cu indicii luaţi modulo 13). Arătăm mai întâi că P_i şi P_{i+2} nu pot fi amândouă roşii. Prin absurd, presupunem, fără a restrânge generalitatea că P_{12} şi P_1 sunt roşii. Atunci P_{10}, P_0 şi P_3 nu pot fi roşii. În plus, cel mult un vârf din fiecare pereche (P_{11}, P_4), (P_4, P_7) şi (P_7, P_8) este roşu deoarece fiecare din aceste perechi formează un triunghi isoscel cu P_1. Analog, cel mult un vârf din fiecare pereche (P_2, P_9), (P_9, P_6), (P_6, P_5) este roşu. Avem trei vârfuri din $\{P_{11}, P_4, P_7, P_8\} \cup \{P_2, P_9, P_6, P_5\}$ sunt roşii; presupunem, fără a restrânge generalitatea, că două vârfuri din $\{P_{11}, P_4, P_7, P_8\}$ sunt de asemenea roşii. Vârfurile P_4 şi P_8 nu pot fi amândouă roşii deoarece formează un triunghi isoscel cu P_{12} şi deci P_{11} şi P_7 trebuie să fie roşii. Totuşi, orice vârf rămas formează un triunghi isoscel cu două dintre P_1, P_7, P_{11}, P_{12}. Astfel nu putem avea cinci vârfuri roşii, contradicţie.

Să arătăm acum că P_i şi P_{i+1} nu pot fi roşii. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că P_6 şi P_7 sunt roşii.

Atunci P_4, P_5, P_8 şi P_9 nu pot fi roşii (cum s-a văzut mai sus). Punctul P_0 nu poate fi roşu, altfel $P_0P_6P_7$ ar fi isoscel. Fiecare pereche (P_3, P_{11}) şi (P_{11}, P_1) conţine cel mult un vârf roşu deoarece triunghiurile $P_3P_7P_{11}$ şi $P_1P_6P_{11}$ sunt isoscele.

De asemenea P_1 şi P_3 nu pot fi roşii, cum s-a văzut mai sus. Astfel cel mult unul din punctele P_1, P_3, P_{11} poate fi roşu. Analog, cel mult unul din punctele P_{12}, P_{10}, P_2 poate fi roşu. Deci am avea cel mult patru vârfuri roşii, contradicţie.

Dacă P_i este roşu, atunci $P_{i-2}, P_{i-1}, P_{i+1}, P_{i+2}$ nu pot fi roşii. Astfel am obţinut cel mult patru vârfuri roşii, contradicţie.

Altfel. Altă soluţie are la bază teorema lui Van der Warden care afirmă că date fiind două numere naturale n şi k, există un număr natural N cu proprietatea: printre orice N întregi consecutivi, fiecare colorat în una din cele n culori, există k în progresie aritmetică la fel colorate. Aplicăm această teoremă pentru $k = n = 3$ să determinăm un N şi să partiţionăm punctele de pe cerc într-o infinitate de poligoane regulate cu N laturi, mai exact cu 13 laturi. Pentru fiecare astfel de poligon $P_1P_2 \ldots P_N$, există i, j, k (între 1 şi N) în progresie aritmetică astfel încât P_i, P_j, P_k să fie toate de aceeaşi culoare. Deci triunghiul $P_iP_jP_k$ este isoscel monocromatic. Deoarece avem o infinitate de poligoane, avem şi o infinitate de triunghiuri isoscele monocromatice.

36. Se consideră un hexagon regulat şi k drepte cu proprietatea că fiecare împarte hexagonul în două pentagoane, astfel încât raportul ariilor acestora este egal cu $\frac{1}{3}$ sau cu $\frac{1}{2}$. Dacă avem $k \geq 25$, să se arate că cel puţin trei dintre aceste drepte trec prin acelaşi punct.

(D. M. Bătineţu)

Rezolvare. Facem mai întâi observaţia că dacă $ABCD$ este dreptunghi, iar $M \in [AB]$, $N \in [CD]$ şi $\frac{S_{AMND}}{S_{BCNM}} = m$ (constant), atunci MN trece printr-un punct fix care depinde de m.

Fie P mijlocul lui $[MN]$ şi prin P ducem $M'N' \| AD$. Avem $S_{AMND} = S_{AM'N'D}$ şi deci $m = \frac{S_{AM'N'D}}{S_{BM'N'C}} = \frac{AM'}{M'B}$, adică dreapta $M'N'$ este fixă şi deci şi P, mijlocul lui $[M'N']$ este fix.

Cu această observaţie trecem să rezolvăm problema. Fie d o dreaptă din cele k (≥ 25). Pentru ca d să împartă hexagonul în cele două pentagoane ea trebuie să treacă prin două laturi opuse, adică printr-una din perechile de laturi $([AB],[DE])$, $([BC],[EF])$, $([AF],[CD])$. Conform principiului cutiei, există cel puţin $\left[\frac{k}{3}\right] + 1 \geq 9$ drepte care trec prin aceeaşi pereche de laturi, de exemplu $([AB],[DE])$. Deoarece o dreaptă d din cele k poate intersecta hexagonul în două pentagoane cu raportul ariilor $\frac{1}{2}$ sau $\frac{1}{3}$, conform principiului cutiei, există cel puţin $\left[\frac{9}{2}\right] + 1 = 5$ drepte din cele 9 care să împartă hexagonul în două pentagoane cu raportul ariilor $\frac{1}{2}$ sau $\frac{1}{3}$. Fie $p \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$. Considerăm o dreaptă care trece prin perechea $([AB],[DE])$. Fie aceasta d. Notăm pentagoanele cu P_1, P_2. Considerăm că d face parte din cele 5 drepte care împart hexagonul în două pentagoane cu raportul ariilor p. Putem avea $\frac{S_{P_1}}{S_{P_2}} = p$ sau $\frac{S_{P_2}}{S_{P_1}} = p$.

Conform principiului cutiei, există cel puţin $\left[\frac{5}{2}\right] + 1 = 3$ drepte care verifică una şi numai una din relaţiile de mai sus. Fie d_1, d_2, d_3 cele trei drepte. Pentru fiecare d_i, $i = 1, 2, 3$, avem $\frac{S_{P_1}}{S_{P_2}} =$ constant şi deci $S_{P_1} =$ constant, adică $S_{AMNE} =$ constant şi conform observaţiei de la începutul rezolvării dreptele d_1, d_2, d_3 trec princtr-un punct fix.

Probleme propuse

1. Să se arate că nu se pot colora feţele unui cub, folosind numai două culori, astfel încât oricare două feţe vecine să aibă culori diferite.

2. Fie $(n^3 + 1)$ puncte plasate într-un cub cu latura de lungime 1. Să se arate că există cel puţin două puncte astfel încât distanţa între ele să fie mai mică decât $\sqrt{3}/n$.

3. Pe un drum rectangular la distanţe egale sunt săpate canale; distanţa dintre centrele acestor canale este $\sqrt{2}$. Să se arate că indiferent de lărgimea acestor canale, un călător care merge pe drum cu lungimea pasului egală cu unu, mai devreme sau mai târziu va cădea într-un canal.

4. Un dreptunghi cu dimensiunile 3 şi 7 este acoperit cu o reţea de 21 de pătrate de latură 1, care se colorează cu roşu sau cu albastru. Să se arate că există un dreptunghi ale cărui vârfuri sunt colorate cu aceeaşi culoare.

5. Un pătrat de latură 44 se împarte în 44^2 pătrăţele de latură 1. În fiecare pătrăţel se scrie un număr natural pozitiv mai mic sau egal cu 1977. Să se arate că există două dreptunghiuri cu vârfurile în centrele pătrăţelelor astfel încât suma numerelor scrise în vârfurile unui dreptunghi să fie egală cu suma numerelor scrise în vârfurile celuilalt dreptunghi.

6. În interiorul pătratului de latură 1 sunt aşezate câteva cercuri având suma razelor egală cu 0,51. Să se arate că există o dreaptă, care este paralelă cu una din laturile pătratului şi intersectează cel puţin două cercuri.

7. Să se arate că în fiecare poligon cu nouă laturi există o pereche de diagonale cu unghiul între ele mai mic decât 7^0.