Laborator 3 – Metode moderne de calcul şi simulare
Autor: Lect. dr. Bianca Mogoş

1 Exemple de repartiţii discrete

1.1 Repartiţia Bernoulli

Fie un eveniment observabil A care are probabilitatea constantă $p = P(A) > 0$. Într-un experiment se poate produce A cu probabilitatea p sau evenimentul contrar A^C cu probabilitatea $q = 1-p$. Un astfel de experiment se numeşte *probă Bernoulli*. Când se produce A spunem că s-a realizat un "succes", iar când A nu se produce spunem că avem un "eşec".

Remarca 1.1.

Dacă $p = \frac{1}{2}$ atunci suntem în cazul particular al aruncării la întâmplare cu banul (tragerea la sorţi).

Asociem unei probe Bernoulli variabila aleatoare Z astfel încât $Z = 1$ dacă se produce A şi $Z = 0$ dacă se produce A^C. Variabila Z are repartiţia

$$Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, E[Z] = p, V(Z) = pq = p(1-p). \tag{1.1}$$

Funcţia de repartiţie a lui Z este

$$F(x) = P(Z \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x < 0 \\ q, & \text{dacă} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{dacă} \quad x \geq 1 \end{cases}. \tag{1.2}$$

1.2 Repartiţia binomială

Spunem că variabila discretă $X \in \mathbb{N}$ este o variabilă binomială $Binom(n,p), n \in \mathbb{N}^+, 0 < p < 1$ dacă X = numărul de succese în n probe Bernoulli independente, adică

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{1.3}$$

unde Z_i sunt variabile identic şi independent repartizate Bernoulli.

Repartiţia variabilei binomiale X este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & x & \dots & n \\ q^n & npq^{n-1} & C_n^2 p^2 q^{n-2} & \dots & P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} & \dots & p^n \end{pmatrix}, q = 1-p. \tag{1.4}$$

Media şi dispersia variabilei X sunt date de formulele

$$\begin{aligned} E[X] &= E[(\sum_{i=1}^{n} Z_i)] = \sum_{i=1}^{n} E[Z_i] = np \\ V(X) &= V((\sum_{i=1}^{n} Z_i))) = \sum_{i=1}^{n} V[Z_i] = npq. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Remarca 1.2.

Variabila $Binom(n, p)$ are şi o interpretare în termeni de experiment cu urnă. Presupunem că într-o urnă avem A bile albe şi B bile negre, $A+B = N$. Presupunem că se realizează extrageri succesive din urnă şi după fiecare extragere se introduce bila extrasă la loc în urnă (experimentul cu bila întoarsă). Fie $p = A/N$ probabilitatea de a extrage o bilă albă într-o extracţie. De aici rezultă că X = numărul de bile albe în n extrageri succesive cu întoarcere, este o variabilă binomială $Binom(n, p)$.

Câteva exemple în care rezultatele unui experiment pot fi modelate folosind o variabilă aleatoare binomială.

1. Un medicament are probabilitatea de 0.90 de a vindeca o boală. Acesta este administrat la 100 de pacienţi, iar rezultatul pentru fiecare pacient este vindecat sau nevindecat. Dacă X este numărul de pacienţi vindecaţi, atunci X este o variabilă aleatoare binomială. Determinaţi parametrii n şi p ai v.a. binomiale $X \sim Bin(n, p)$.

2. Institutul Naţional al sanătăţii mentale estimează că 20% dintre adulţii americani suferă de o afecţiune psihiatrică. Sunt selectaţi aleator 50 de adultţi. Dacă notăm cu X numărul de persoane cu afecţiuni, atunci X ia valori în concordanţă cu repartiţia binomială. Determinaţi parametrii n şi p ai v.a. binomiale $X \sim Bin(n, p)$.

Exerciţiul 1.3.

Pentru exemplul 2, calculaţi probabilitatea ca cel mult 3 persoane selectate să sufere de o boală psihică. Indicaţie: se pot folosi funcţiile “binopdf” şi “binocdf”.

1.3 Repartiţia Poisson

O variabilă aleatoare X este o variabilă aleatoare Poisson cu parametrul $\lambda, \lambda > 0$ dacă are funcţia de probabilitate dată prin

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \lambda > 0 \tag{1.6}$$

Media şi dispersia variabilei aleatoare Poisson X sunt

$$\begin{aligned} &E[X] = \lambda \\ &\text{şi} \\ &V(X) = \lambda. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Repartiţia Poisson poate fi utilizată în numeroase aplicaţii. Câteva situaţii în care o variabilă aleatoare discretă poate avea o distribuţie Poisson sunt:

- numărul erorilor de tipografie dintr-o pagină;
- numărul concediilor dintr-o firmă în decursul unei luni
- numărul defectelor de-a lungul unui fir.

Remarca 1.4.

Repartiţia Poisson este adesea utilizată pentru a aproxima repartiţia binomială. Pentru valori mari ale lui n şi mici ale lui p (deci valori moderate pentru np), numărul de succese apărute înn n probe poate fi aproximat de variabila aleatoare Poisson cu parametrul $\lambda = np$.

Exemplul 1.5.

Presupunem că numărul erorilor dintr-o pagină a unui manuscris urmează o distribuţie Poisson cu parametrul $\lambda = 0.25$. Calculaţi probabilitatea ca o pagină să aibă cel puţin 2 erori. Indicaţie: se pot folosi funcţiile "poisspdf" şi "poisscdf".

2 Exemple de repartiţii continue

2.1 Repartiţia normală

Spunem că $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ dacă X are densitatea de repartiţie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.1}$$

Remarca 2.1.

Dacă $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ atunci $X = \sigma Z + \mu$ este o v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Exerciţiul 2.2.

1. Reprezentaţi în aceeaşi fereastră graficele densităţilor de repartiţie ale v.a. normale $X \sim \mathcal{N}(-2, 2)$, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ şi $X \sim \mathcal{N}(2, 0.5)$. Interpretaţi rezultatele obţinute. Indicaţie: Pentru calculul densităţii de repartiţie se poate folosi funcţia "normpdf".
2. Fie $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Calculaţi $P(X \in [-2, 2])$, $P(X \in [-3, 3])$ şi $P(X \in [-4, 4])$. Interpretaţi rezultatele obţinute. Indicaţie: se poate folosi funcţia "normspec".

2.2 Repartiţia exponenţială

Densitatea de repartiţie a v.a. $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$ este

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Remarca 2.3.

Dacă $Z \sim Exp(1)$ atunci $X = \dfrac{Z}{\lambda} \sim Exp(\lambda)$.

Exerciţiul 2.4.

Timpul de aşteptare la un ghişeu este o variabilă aleatoare T care urmează o repartiţie Exp(λ) cu timpul mediu de aşteptare de 15 minute. Să se afle probabilitatea ca un cetăţean să aştepte mai mult de 20 de minute.

Bibliografie

[Craiu (1998)] M. Craiu (1998), *Statistică matematică: teorie şi probleme*, Editura Matrix Rom, Bucureşti

[Martinez, Martinez (2002)] W. L. Martinez, A. R. Martinez (2002), *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London New York Washington, D.C.

[Văduva (2004)] I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universităţii din Bucureşti, Bucureşti