Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

CURS nr. 3

METODE MODERNE DE CALCUL ȘI SIMULARE

1. Algoritmi de generare a numerelor aleatoare

2. Metode generale de simulare a v.a.: metoda inversă

Lect. dr. Bianca Mogoș

Conținut

- Noțiuni ajutătoare (NA)
  - Proprietăți ale funcției de repartiție
  - Construcția câmpului de probabilitate $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ pornind de la o funcție $F(x)$ ce îndeplinește 3 proprietăți de bază ale unei funcții de repartiție
  - Funcții de o variabilă aleatoare
- Structura generală a unui algoritm de generare/simulare a unei variabile aleatoare
- Algoritmi de generare a numerelor aleatoare
- Metode generale de simulare a variabilelor aleatoare: Metoda inversă

(NA): Proprietăți ale funcției de repartiție

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare.

Definiție

Funcția $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definită prin

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}) \overset{not}{=} P(X \leq x) \tag{1}$$

se numește *funcția de repartiție* a variabilei aleatoare X.

Proprietăți ale funcției de repartiție

1. $F_X(x) \in [0,1]$, $\quad \lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
2. $F_X(x+h) \geq F_X(x)$, pentru $h > 0$, deoarece

$$F_X(x+h) = F_X(x) + P(\{\omega \in \Omega | x < X(\omega) \leq x+h\}).$$

3. $F_X(x)$ este o funcție continuă la dreapta, adică:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F_X(x+h) = F_X(x)$$

(NA): Construcția unui câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ și a unei variabilei aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ pornind de la o funcție $F(x)$ ce îndeplinește 3 proprietăți de bază ale unei funcții de repartiție (1)

Ipoteză: Fie funcția $F(x)$ ce îndeplinește proprietățile 1., 2. și 3. prezentate pe slide-ul anterior.

- Fie spațiul de selecție $\Omega = (-\infty, \infty)$
- Definim $\mathcal{B}$ ca fiind σ – algebra generată de subintervalele de forma

$$(x_1, x_2], \quad (-\infty, x_2], \quad (x_1, \infty), \quad (-\infty, \infty)$$

  ale mulțimii $\Omega = (-\infty, \infty)$
- Definim variabila aleatoare (v.a.) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ prin

$$X(\omega) = \omega, \forall \omega \in \Omega$$

(NA): Construcția unui câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ și a unei variabilei aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ pornind de la o funcție $F(x)$ ce îndeplinește 3 proprietăți de bază ale unei funcții de repartiție (2) – continuare

- Definim funcția de probabilitate $P : \mathcal{B} \to [0, 1]$ prin

$$
\begin{aligned}
&P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \\
&P(-\infty < X \leq x_2) = F(x_2) \\
&P(x_1 < X < \infty) = 1 - F(x_1) \\
&P(-\infty < X < \infty) = 1 \\
&P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \text{pentru } A_n \in \mathcal{B}, A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j
\end{aligned}
$$

(NA): Construcția unui câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ și a unei variabilei aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ pornind de la o funcție $F(x)$ ce îndeplinește 3 proprietăți de bază ale unei funcții de repartiție (3) – continuare

Observații:

1. Se verifică că X este v.a. și că P este funcție de probabilitate binedefinită, folosind proprietățile din ipoteză ale funcției $F(x)$.
2. $F(x) = F_X(x)$, adică este funcția de repartiție a variabilei X.
3. Dacă $F(x)$ este o funcție derivabilă și $f(x)$ este densitatea de repartiție a variabilei X și este o funcție integrabilă atunci putem defini funcția de probabilitate prin

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx, \text{pentru } x_1 < x_2.$$

Funcții de o variabilă aleatoare (1)

- Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.
- Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. care ia valori în $D \subset \mathbb{R}$, $\phi : D \to \mathbb{R}$, ϕ continuă și
$$\left\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \phi^{-1}(A)\right\} \in \mathcal{B}, \forall A \subset \phi(D).$$
- Atunci v.a. $Y = \phi(X) : \Omega \to \phi(D) \subset \mathbb{R}$ are repartiția dată de
$$P(\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \in A\} = P(\left\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \phi^{-1}(A)\right\})) \quad (2)$$
pentru orice interval $A \subset \phi(D)$ și $\phi^{-1}(A) = \{z | \phi(z) \in A\}$.

Funcții de o variabilă aleatoare (2): Exemplu 1

Propoziție

Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ atunci $Y = e^X$ are densitatea de repartiție:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}}, y > 0 \tag{3}$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \leq y\}) &= P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = \\ &= F_X(\ln y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\ln y} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt. \end{aligned}$$

Definiție

Variabila aleatoare Y având densitatea de probabilitate (3) se numește lognormală.

Funcții de o variabilă aleatoare (3): Exemplu 2

Propoziție

Dacă $X \sim U(0,1)$ atunci variabila aleatoare

$$Y = \left(-\frac{1}{a}\ln(1-X)\right)^{1/b}$$

cu $a, b > 0$ are densitatea de probabilitate

$$f(y) = aby^{b-1}e^{-ay^b}, \quad 0 < y < \infty. \tag{4}$$

Definiție

O variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate (0.4) se numește Weibull cu parametrii a și b și este notată $W(a,b)$.

Structura generală a unui algoritm de generare/simulare a unei variabile aleatoare

Intrare	$F(x)$: funcția de repartiție a variabilei X pe care ne propunem să o simulăm
Pas 1	Se generează valorile de selecție $u_1, u_2, \ldots, u_n$ asupra v. a. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ uniforme pe [0,1]
Pas 2	Se definește $X = \phi(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ a.î. $F(x) = P(X \leq x), \forall x$
Pas 3	Se obține valoarea de selecție dorită $x = \phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X

Numere aleatoare

- Majoritatea metodelor de generare a v.a. se bazează pe generarea unor numere aleatoare uniform distribuite pe intervalul (0,1).
- Datorită calculatorului avem posibilitatea de a genera foarte ușor numere aleatoare uniforme.
- Totuși, trebuie cunoscut faptul că numerele generate de calculator sunt pseudo-aleatoare, deoarece acestea sunt generate cu un algoritm determinist.

Numere aleatoare uniform distribuite

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiție

(Variabilă aleatoare uniformă)
Spunem că *variabila aleatoare continuă* $U : \Omega \to \mathbb{R}$ este *repartizată uniform* pe intervalul $[a, b]$ și scriem $U \sim \mathcal{U}(a, b)$ dacă *densitatea sa de repartiție* este de forma:

$$f_U(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } x \in [a, b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \tag{5}$$

Funcția de repartiție $F_U(x)$ a v.a. $U \sim \mathcal{U}(a, b)$ este definită prin

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } x \in (a, b) \\ 1, & \text{dacă } x \geq b \end{cases} \tag{6}$$

Observații referitoare la repartiția uniformă și v.a. uniforme

- Probabilitatea ca v.a. uniformă $U \sim \mathcal{U}(a, b)$ să cadă într-un interval $[u_1, u_2]$, $a \leq u_1 < u_2 \leq b$ este proporțională cu lungimea intervalului:

$$P(u_1 < U \leq u_2) = \frac{u_2 - u_1}{b - a}. \tag{7}$$

- Pentru a genera numere aleatoare uniform distribuite pe un interval [a,b], și scriem $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, pornind de la numere generate uniform pe intervalul [0,1] se poate folosi transformarea

$$X = (b - a) \cdot U + a, \tag{8}$$

unde $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Generarea numerelor uniforme în Matlab (1)

- În Matlab există funcția **rand** pentru generarea variabilelor aleatoare uniforme.
- **rand(n)**, unde n este un număr natural, returnează o matrice de dimensiune $n \times n$ având ca elemente numere aleatoare uniform distribuite între 0 și 1.
- **rand(m, n)**, unde m, n sunt numere naturale, returnează o matrice de dimensiune $m \times n$ având ca elemente numere aleatoare uniform distribuite între 0 și 1.

Generarea numerelor uniforme în Matlab (2)

- O secvență de numere aleatoare generată în Matlab depinde de "sămânța" sau starea generatorului. Starea este resetată la valoarea implicită în momentul pornirii Matlab-ului, astfel aceeași secvență de variabile aleatoare este generată la o nouă pornire a Matlab-ului. Acesta poate fi un avantaj în situațiile în care analistul are nevoie să reproducă rezultatele unei simulări pentru a verifica anumite concluzii.
- **rng(SD)** setează sămânța generatorului pe baza întregului nenegativ *SD*
- **rng('shuffle')** setează sămânța generatorului pe baza momentului curent de timp
- **rng('default')** resetează setările generatorului la valorile inițiale, și anume, se folosește generatorul Mersenne Twister cu sămânța 0.

Generarea numerelor uniforme în Matlab (3)

Exemplu care ilustrează utilizarea funcției **rand**.

% Generam un vector de numere aleatoare pe intervalul (0,1).
x = rand(1,1000);
% Histograma eșantionului generat in x.
[N,X] = hist(x,15);
% x: mulțimea eșantion
% 15 reprezintă numărul de dreptunghiuri ale histogramei
% N: vector conținând numărul de elemente din fiecare dintre dreptunghiuri.
% X: vector conținând centrele dreptunghiurilor
% Folosirea funcției bar pentru reprezentarea grafică a histogramei.
bar(X,N,1,'w')
title('Histograma asociata unei variabile aleatoare uniforme')
xlabel('X')
ylabel('Frecventa absoluta')

Histograma rezultată este prezentată în Figura 1.

Generarea numerelor uniforme în Matlab (4)

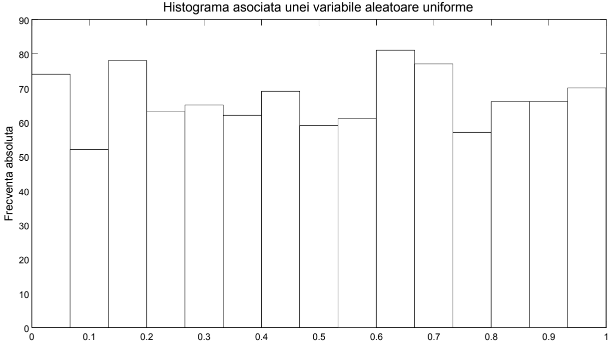


Figura : 1 – Histograma asociată unui eșantion de numere aleatoare uniform distribuite

Metoda inversă (1): Teorema lui Hincin

Propoziție

Fie X o variabilă aleatoare (v.a.) cu funcția de repartiție $F(x)$ inversabilă și de tip continuu. Atunci variabila aleatoare $Y = F(X)$ este repartizată uniform pe $[0,1]$.

Teoremă (Teorema lui Hincin)

Fie $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ și $F(x)$ o funcție de repartiție inversabilă, de tip continuu. Atunci variabila aleatoare

$$X = F^{-1}(U) \tag{9}$$

este o variabilă aleatoare continuă cu funcția de repartiție $F(x)$.

Demonstrație: Funcția de repartiție a v.a. X este

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$$

deoarece F este monoton crescătoare.
Cum $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ rezultă $F_U(u) = u$ pentru $u \in [0,1]$. Obținem astfel $P(X \leq x) = F(x)$.

Metoda inversă (2): Descrierea metodei

- este introdusă ca o consecință directă a teoremei lui Hincin
- se aplică în cazul în care funcția de repartiție se poate inversa ușor
- dacă am putea produce valorile de selecție $u_1, u_2, \ldots, u_n$ asupra v.a. $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ și am cunoaște funcția de repartiție F a variabilei X atunci am putea produce valorile de selecție $x_1, x_2, \ldots, x_n$ asupra lui X cu formula $x_i = F^{-1}(u_i), 1 \leq i \leq n$

Metoda inversă (3): Algoritm pentru simularea unor variabile aleatoare continue

Intrare	$F(x)$: funcția de repartiție a variabilei X pe care ne propunem să o simulăm
Pas 1	Se generează o valoare de selecție u uniformă pe $[0,1]$
Pas 2	Se determină expresia inversei funcției de repartiție $F^{-1}(u)$
Pas 3	Se obține valoarea de selecție dorită $x = F^{-1}(u)$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X

Metoda inversă (4): Variabile aleatoare continue care pot fi simulate folosind metoda inversă

Repartiția	**Densitatea f**	**Inversa F^{-1}**
$Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(u)$
$Weib(0, 1, \nu)$, $\nu > 0$	$f(x) = \nu x^{\nu-1} e^{-x^{\nu}}$	$x = (-\ln(u))^{1/\nu}$
Cauchy	$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$	$x = \tan\pi(u - 1/2)$
Arcsin	$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1, 1]$	$x = \sin\pi(u - 1/2)$

Metoda inversă (5): Exemplu – simularea unei variabile aleatoare având repartiția $Exp(\lambda), \lambda > 0$

- Se determină funcția de repartiție a unei v.a. $X \sim Exp(\lambda)$:

$$F : \mathbb{R} \to [0,1], F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \\ = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{10}$$

- Se determină funcția inversă a funcției de repartiție $F\Big|_{(0,\infty)}$: pentru $u \in (0,1)$, determinăm $x > 0$ a.î. $F(x) = u$. Obținem inversa funcției $F\Big|_{(0,\infty)}$ definită prin

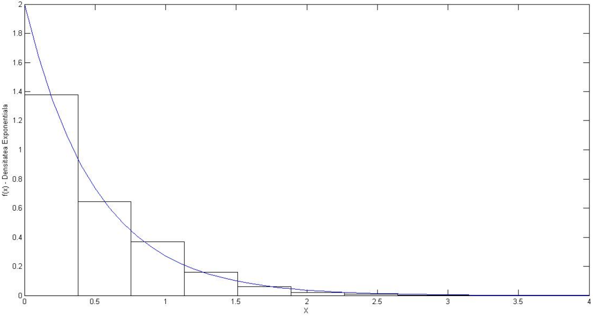
$$F^{-1} : (0,1) \to (0,\infty), F^{-1}(u) = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda} \tag{11}$$

- Din Teorema lui Hincin rezultă că

$$X = -ln(U)/\lambda, U \sim \mathcal{U}(0,1) \tag{12}$$

este o v.a. repartizată $Exp(\lambda)$.

Metoda inversă (6): Histograma asociată variabilei aleatoare exponențiale



Metoda inversă (7): Simularea unei variabile aleatoare discrete (1)

- Fie v.a. discretă X definită prin repartiția

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, x_1 < x_2 < \dots < x_m. \tag{13}$$

- Funcția de repartiție a v.a. X este dată de

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{dacă} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{dacă} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \dots \quad \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k & \text{dacă} \quad x_k \leq x < x_{k+1} \\ \dots & \dots \quad \dots \\ 1 & \text{dacă} \quad x \geq x_m \end{cases} \tag{14}$$

Metoda inversă (8): Simularea unei variabile aleatoare discrete (2)

- Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și
$$X, U : \Omega \to \mathbb{R}, U \sim \mathcal{U}(0,1).$$
- Definim v.a. $X = Y \circ U$, $X(\omega) = Y(U(\omega)), \forall \omega \in \Omega$, unde funcția $Y : [0,1] \to \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ este definită prin
$$Y(u) = \begin{cases} x_1, & 0 < u \leq F(x_1) \\ x_2, & F(x_1) < u \leq F(x_2) \\ \ldots & \ldots \\ x_m, & F(x_{m-1}) < u \leq 1 \end{cases} \tag{15}$$
- Funcția de probabilitate a v.a. X, $f(x_i) \stackrel{def}{=} P(X = x_i)$, devine
$$\begin{aligned} P(X = x_i) &= P(\{\omega \in \Omega \mid Y(U(\omega)) = x_i\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega \mid F(x_{i-1}) < U(\omega) \leq F(x_i)\}) = \\ &= F(x_i) - F(x_{i-1}) = p_i. \end{aligned} \tag{16}$$

Metoda inversă (9): Algoritm pentru simularea unor variabile aleatoare discrete

- Regula de generare a unei valori de selecție asupra v.a. X, pornind de la valoarea de selecție u a v.a. $U \sim \mathcal{U}(0,1)$:

$$X = x_i \text{ dacă } F(x_{i-1}) < u \leq F(x_i) \text{ și } x_0 < x_1 \qquad (17)$$

- Algoritmul pentru simularea v.a. X:

Intrare	Repartiția variabilei X $P(X = x_i) = p_i, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, x_1 < x_2 < \ldots < x_m.$
Pas 1	Se generează o valoare de selecție u uniformă pe [0,1]
Pas 2	Dacă $u \leq p_1$ atunci $x = x_1$ Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2$ atunci $x = x_2$ Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2 + p_3$ atunci $x = x_3$ ... Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2 + \ldots + p_m$ atunci $x = x_m$
Ieșire	Valoarea de selecție, x, a v.a. X

Metoda inversă (10): Exemplu simularea unei v.a. discrete

- Vrem să generăm o v.a. discretă X cu repartiția

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \tag{18}$$

- Funcția de repartiție este dată de

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} & x < 0 \\ 0.3 & \text{dacă} & 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & \text{dacă} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{dacă} & x \geq 2 \end{cases} \tag{19}$$

- Se generează valori de selecție asupra v.a. X conform regulilor

$$X = \begin{cases} 0 & U \leq 0.3 \\ 1 & 0.3 < U \leq 0.5 \\ 2 & 0.5 < U \leq 1 \end{cases} \tag{20}$$

- Dacă v.a. $u = 0.78$ atunci obținem valoarea de selecție $x = 2$.

Bibliografie I

- M. Craiu (1998), *Statistică matematică: teorie și probleme*, Editura Matrix Rom, București
- W. L. Martinez, A. R. Martinez (2002), *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London New York Washington, D.C.
- J. B. Thomas, *Introduction to probability*
- I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București