

# Een nieuwe constructieve heuristisch voor het plaatsen van cirkels in een cirkel

Gebaseerd op een *best-fit* methodiek



**Pablo BOLLANSÉE**

Promotor: Prof. P. De Causmaecker  
*Affiliatie (facultatief)*

Co-promotor: *(facultatief)*  
*Affiliatie (facultatief)*

Begeleider: *(facultatief)*  
*Affiliatie (facultatief)*

Proefschrift ingediend tot het  
behalen van de graad van  
Master of Science in de  
toegepaste informatica

Academiejaar 2015-2016

© Copyright by KU Leuven

Zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van zowel de promotor(en) als de auteur(s) is overnemen, kopiëren, gebruiken of realiseren van deze uitgave of gedeelten ervan verboden. Voor aanvragen tot of informatie i.v.m. het overnemen en/of gebruik en/of realisatie van gedeelten uit deze publicatie, wendt u tot de KU Leuven, Faculteit Wetenschappen, Geel Huis, Kasteelpark Arenberg 11 bus 2100, 3001 Leuven (Heverlee), Telefoon +32 16 32 14 01.

Voorafgaande schriftelijke toestemming van de promotor(en) is eveneens vereist voor het aanwenden van de in dit afstudeerwerk beschreven (originele) methoden, producten, schakelingen en programma's voor industrieel of commercieel nut en voor de inzending van deze publicatie ter deelname aan wetenschappelijke prijzen of wedstrijden.

# Voorwoord

Het circle-packing probleem bestaat er uit om een aantal cirkels, met gekende radii, in een zo klein mogelijke container te plaatsen. De vorm van deze container kan verschillen, meestal is het een driehoek, rechthoek of cirkel. In deze thesis stel ik een nieuwe *best-fit* gebaseerde heuristiek voor voor het plaatsen van cirkels in een cirkel. Het is een constructieve heuristiek waarin stapsgewijs telkens de best-passende cirkel geplaatst zal worden. Alle code is beschikbaar op GitHub [3]

Wiskundig is dit een relatief eenvoudig probleem om voor te stellen, maar computationeel is het zeer zwaar om exact op te lossen. Bestaande pogingen om dit probleem op te lossen vragen zeer veel tijd om het te berekenen. In deze thesis stel ik een nieuwe heuristiek voor die het mogelijk maakt zéér snel oplossingen te genereren.

Ik wil hierbij Patrick De Causmaeker bedanken voor alle hulp en ondersteuning bij het ontwerpen van deze heuristiek en verwezenlijken van dit werk. Ook wil ik Jim Bollansée, Marie Julia Bollansée en Pieter Van de Walle bedanken voor hun hulp bij het schrijven van deze tekst.

# Abstract

TODO

# Inhoud

Voorwoord	i
Abstract	ii
Lijst van figuren	v
Lijst van tabellen	vi
<b>1 Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2 Definities en termen</b>	<b>4</b>
<b>3 Handleiding voor het lezen van de visualisaties</b>	<b>5</b>
<b>4 Algoritme</b>	<b>7</b>
4.1 Basis idee . . . . .	7
4.2 Structuur . . . . .	8
4.3 Structuur van de solver . . . . .	8
4.4 Initialisatie . . . . .	10
4.5 Een cirkel tegen twee andere plaatsen . . . . .	11
4.6 Holes . . . . .	13
4.6.1 Grootste cirkel zoeken die past in een <i>hole</i> . . . . .	14
4.6.2 Bepalen of een cirkel past in een <i>hole</i> . . . . .	17
4.7 Shell . . . . .	18
4.7.1 Slim de omcirkel berekenen gebaseerd op de shell . . . . .	19
4.7.2 Bepalen of een cirkel past op de shell . . . . .	21
4.7.3 Een cirkel plaatsen op de shell . . . . .	22
4.8 Conclusie . . . . .	22
<b>5 Resultaten</b>	<b>24</b>
5.1 Packomania vergelijking . . . . .	25
5.1.1 Even grote cirkels . . . . .	25
5.1.2 Packomania Machten . . . . .	28
5.1.3 Packomania Benchmark . . . . .	44
5.2 Grotere aantallen cirkels . . . . .	47
5.3 Conclusie . . . . .	47

<b>6</b>	<b>Bedenkingen</b>	<b>48</b>
6.1	Precisie . . . . .	48
6.2	Veronderstellingen . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Verder werk</b>	<b>49</b>
7.1	Constante-tijd omschreven cirkel . . . . .	49
7.2	Best-Fit . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Conclusie</b>	<b>50</b>

# Lijst van figuren

3.1	Voorbeeld visualisatie met drie duidelijke holes . . . . .	6
3.2	Voorbeeld visualisatie met grote shell . . . . .	6
4.1	Voorbeeld van initiële packing . . . . .	10
4.2	Verkregen intersectie punt van <i>getMountPositionFor</i> . . . . .	13
4.3	Packing voor het opvullen van een gat . . . . .	14
4.4	Packing na het opvullen van een gat . . . . .	15
4.5	Packing na het opvullen van een tweede gat . . . . .	15
4.6	Packing als het opvullen van een tweede gat mislukt . . . . .	16
4.7	Het plaatsen van de grootste cirkel op de shell . . . . .	19
4.8	Het plaatsen van een kleinere cirkel op de shell . . . . .	20
4.9	Shell aanpassen als geen enkele cirkel past . . . . .	20
4.10	Een cirkel veroorzaakt een tegen-ge-klok shell . . . . .	22
4.11	Mogelijke fout indien de shell niet met de klok mee gesorteerd is . . . . .	23
5.1	Packomania verdelingen . . . . .	25
5.2	Packing voor 50 even grote cirkels . . . . .	29
5.3	Packing voor 500 even grote cirkels . . . . .	29
5.4	Packing voor 2000 even grote cirkels . . . . .	30
5.5	Packing voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$ . . . . .	43
5.6	Packing voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/5}$ . . . . .	43

# Lijst van tabellen

5.1	Packomania $r_i = 1$	26
5.2	Packomania $r_i = i$	30
5.3	Packomania $r_i = i^{1/2}$	35
5.4	Packomania $r_i = i^{-1/5}$	37
5.5	Packomania $r_i = i^{-1/2}$	39
5.6	Packomania $r_i = i^{-2/3}$	41
5.7	Packomania Benchmark Verdelingen	44
5.7	Packomania Benchmark Verdelingen	45
5.8	Packomania Benchmark Instances	46



# Hoofdstuk 1

## Inleiding

In deze thesis stel ik een nieuwe *best-fit* gebaseerde heuristiek voor om het *circle-packing* probleem. De heuristiek is specifiek ontworpen voor het sub-probleem van het plaatsen van cirkels in een cirkel. Het *circle-packing* probleem bestaat uit het plaatsen van  $n$  cirkels in een zo klein mogelijke cirkelvormige *container*. Het is de bedoeling om voor de gegeven cirkels de coördinaten van de middelpunten te vinden zodat de cirkels niet overlappen en de radius van de omcirkel zo klein mogelijk is.

Circle-packing is zowel theoretisch als praktisch een zeer interessant probleem. Het kan gebruikt worden om verschillende *real-world* problemen op te lossen, zoals het plaatsen van zendmasten, stokage van cilindrische voorwerpen, en het combineren van verschillende kabels. //TODO voeg referenties toe voor deze gebruiken

Mathematisch is het probleem redelijk eenvoudig als een optimalisatieprobleem te omschrijven:

$$\begin{array}{ll} \text{minimaliseer} & r \\ \text{onderhevig aan} & x_i^2 + y_i^2 \leq (r - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, n \\ & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i \neq j \end{array}$$

Hierin is  $r_i$  de radius, en  $(x_i, y_i)$  de coördinaten van het centrum van cirkel  $i$ . Hierbij wordt verondersteld dat de omcirkel het nulpunt als middelpunt heeft. De eerste formule verzekert dat de cirkels in de omcirkel liggen, en de tweede dat ze elkaar niet overlappen. Wanneer alle cirkels dezelfde grootte hebben, wordt meestal  $r_i$  gelijk aan 1 genomen. Het circle-packing probleem voor andere containers heeft gelijkaardige, relatief eenvoudige, wiskundige omschrijvingen.

Hoewel dit wiskundig eenvoudig te omschrijven is, blijft het toch een zeer moeilijk probleem om exact op te lossen. Er is reeds veel onderzoek gebeurd naar het oplossen van het circle-packing probleem voor zowel cirkels van gelijke grootte, als voor cirkels van verschillende grootte. In [7] en [15] probeert men vaste patronen te vinden die een optimale packing van cirkels met gelijke grootte geeft. In [8] en [18] worden fysisch geïnspireerde simulaties gebruikt om packing te bekomen. In [6] worden verschillende meta-heuristieken, waaronder een genetisch algoritme, uitgeprobeerd en vergeleken. Zij ondervinden dat dit genetisch algoritme, als ook een quasi-random techniek, in vergelijking met de andere uitgeprobeerde meta-heuristieken, de beste resultaten geven. In [10] en [11] worden respectievelijk een genetisch en een simulated-annealing algoritme voorgesteld. Een recentere poging is het Monotonic Basin Hopping algoritme voorgesteld in [9]. Hierin beschrijven de auteurs dat er te veel lokale optima zijn voor een eenvoudige multi-start behandeling,

en stellen een variant voor waarin ze op een slimme manier de begin punten proberen genereren. Ook meer recent zijn [2] (2011), [20] (2013) en [21] (2016). Hierin worden de combinatorische eigenschappen van circle-packing in combinatie met een zoekmethode zoals *tabu-search* en *iterated local search* gebruikt om een goede volgorde te vinden waarin de cirkels geplaatst worden. In [2] plaatsen ze zo één voor één elke cirkel en berekend een *non-linear optimizer* hiervoor telkens een lokaal extremum voor de *packing*.

Constructieve algoritmen voor het oplossen van circle-packings zijn veel minder onderzocht. Een constructief algoritme is een algoritme dat, beginnende van een zekere begin situatie, stapsgewijs de oplossing uitbreidt tot een volledige oplossing bekomen is. Eén van de weinige constructieve methoden wordt beschreven in [1], waar ze een alternatieve vorm van het *circle-packing* probleem oplossen: de grootte van de container ligt vast, en er moeten zo veel mogelijk cirkels van gelijke grootte in de container geplaatst worden. In [10] wordt er een aanpassing gedaan op de klassieke bottom-left-first heuristiek, voor het plaatsen van rechthoeken. Deze heuristiek plaats rechthoeken zo ver mogelijk in de linker beneden hoek. Dit is een zeer eenvoudige heuristiek die redelijk goede resultaten geeft. Zij hebben deze dan aangepast om cirkels in een rechthoek te plaatsen.

Hoewel veel van deze oplossingen zeer goede packings maken, en regelmatig hun voorgangers verbeteren, vragen ze veel rekentijd en beperken ze zich tot een klein aantal cirkels. Voor slechts tientallen cirkels kan de nodige rekentijd oplopen tot tientallen uren. In deze thesis stel ik een nieuw constructieve heuristiek voor om het circle-packing probleem op te lossen. Deze nieuwe heuristiek laat toe om packings te maken in een fractie van de tijd die andere algoritmen daarvoor nodig hebben. Ook is het mogelijk om veel grotere aantallen cirkels te plaatsen. De omcirkel van packings verkregen met deze nieuwe heuristiek is echter iets groter dan deze verkregen in voorgenoemd onderzoek. Deze uitbreiding van de omcirkel blijft echter beperkt en laat toe de packings in slecht enkele ogenblikken te maken, waar anderen uren rekentijd vragen.

De heuristiek voorgesteld in deze thesis is een best-fit heuristiek gebaseerd op een oplossing voor het Orthogonal Stock-Cutting Problem voorgesteld in [5]. In dit probleem worden balken geplaatst in een container met een vaste breedte, zodat de hoogte zo klein mogelijk blijft. Zij gebruiken het verschil tussen de breedte van een balk en een gat in de packing als heuristiek voor de *beste* positie. Hun heuristiek kiest dus de volgende balk om te plaatsen uit een lijst, en deze plaatst op de *beste* positie. Dit is in tegenstelling tot cirkels plaatsen in een vooraf bepaalde volgorde zoals in [9] en [2]. Op een gelijkaardige manier kiest mijn algoritme de volgende cirkel die best past in de huidige packing.

In hoofdstuk 4 bespreek ik hoe de heuristiek opgebouwd is. Ik beschrijf de twee basisconcepten voor mijn best-fit heuristiek, *holes* en de *shell*, in detail. Ik bespreek hoe deze werken, en op welke manier gekozen wordt welke cirkel best past in de packing. Hierbij haal ik ook de implementatie aan om deze concepten te verduidelijken. In hoofdstuk 5 worden de verkregen resultaten besproken. Hier vergelijk ik de packings met de best gekende resultaten zoals gerapporteerd op de Packomania website ([16]). De Packomania website verzameld alle best gekende oplossingen voor verschillende circle-packing problemen. Ik vergelijk de omtrek van de verkregen omcirkel en de nodige tijd om de packing te berekenen van mijn eigen heuristiek met de best gekende oplossingen op de Packomania website. Ook toon ik resultaten voor packings voor veel meer cirkels dan getoond op de Packomania website. In hoofdstuk 6 bespreek ik enkele bedenkingen die ik heb bij de heuristiek en zijn implementatie. In hoofdstuk 7 bespreek ik mogelijke verbeteringen en ideeën voor verder onderzoek. In hoofdstuk 3 wordt kort verduidelijkt hoe de visualisaties

te interpreteren die doorheen deze thesis gebruikt worden. Maar eerst worden enkele termen die gebruikt worden in de verdere tekst, sommige uniek voor voor deze heuristiek, en definities gegeven in hoofdstuk 2.

// TODO: Is het nodig sommige termen te verduidelijken? De termen: NP-Moeilijk, meta-heuristiek, genetisch algoritme, quasi-random techniek, simulated-annealing, tabu-search, bottom-left-first heuristiek -> Ja. TODO

# Hoofdstuk 2

## Definities en termen

**Cirkel** In de literatuur rond *circle-packing* en deze thesis wordt het woord "cirkel" of "circle" gebruikt, maar eigenlijk zou het correcter zijn om "schijf" te gebruiken. Er is dus ook een overlap tussen cirkels wanneer een cirkel volledig omringd is door een andere. Voor twee cirkels met radii  $r_a, r_b$  en coördinaten  $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$  is er een overlap wanneer  $r_a + r_b > \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$ .

**Packing of Plaatsing** Is een collectie cirkels met elks een toegewezen positie. Een packing is correct wanneer er geen overlap is tussen de cirkels in de packing.

**Holes** Is één van de concepten uniek aan deze heuristiek. Op een *high-level* niveau is dit een plek tussen drie cirkels waar nog een andere cirkel kan geplaatst worden. Dit wordt in diep detail uitgelegd in sectie 4.6.

**Shell** Is het tweede concept uniek aan deze heuristiek. Dit is, op *high-level* niveau, de collectie cirkels die aan de buitenkant van een packing liggen. Dit wordt verder verduidelijkt in sectie 4.7.

## Hoofdstuk 3

# Handleiding voor het lezen van de visualisaties

Doorheen deze thesis zal ik gebruik maken van visualisaties gegenereerd door de java implementatie van het algoritme. Dit om de concepten grafisch te verduidelijken. Twee voorbeelden van zulke visualisaties zijn figuur 3.1 en figuur 3.2.

Deze figuren kan u op de volgende manier interpreteren:

- De **reeds geplaatste cirkels** worden getoond als **licht blauwe cirkels**.
- De **shell** is een **gele lijn** aan de buitenste rand van de packing. Deze verbind de middelpunten van de cirkels op de shell.
- De kleine **groene bolletjes** op de shell geven de posities aan waarop mogelijk een cirkel geplaatst zal worden.
- **Holes** worden getoond als **rode driehoeken**. De hoekpunten liggen dicht bij de middelpunten van de drie cirkels die het gat definiëren.
- De **omcirkel** van de huidige packing wordt getoond als een **groene cirkel**.

Op figuur 3.1 is zijn er duidelijk drie holes te zien. Elk van de drie holes word gedefinieerd door de centrale cirkel en twee van de buitenste cirkels. Ook is er een kleine shell te zien, die bestaat uit de buitenste drie cirkels. In figuur 3.2 wordt een verder gevorderde packing getoond waarop één hole te zien is, en een veel grotere shell. Op beide figuren kan je ook de omcirkel zien.

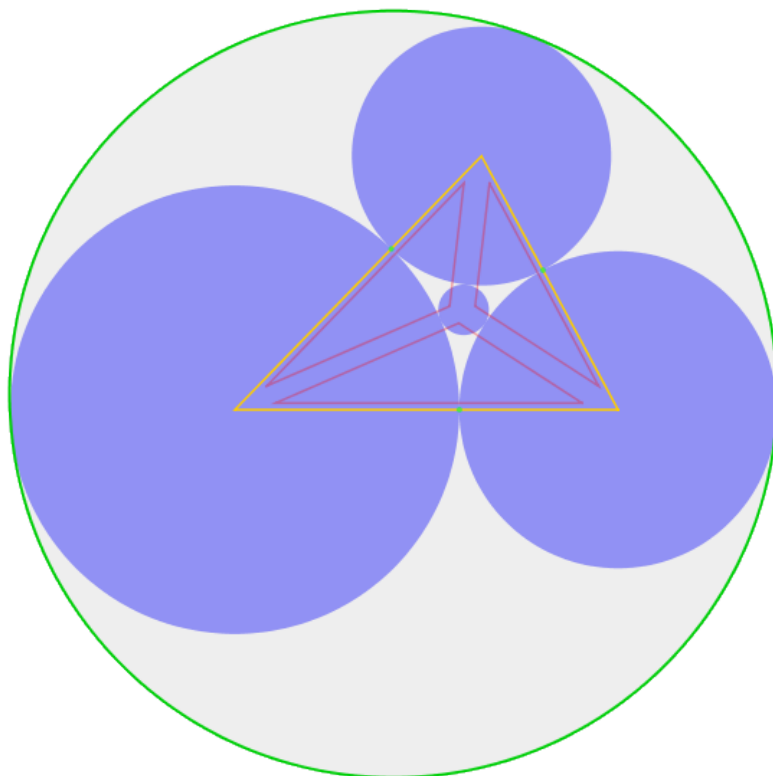


Figure 3.1: Voorbeeld visualisatie met drie duidelijke holes

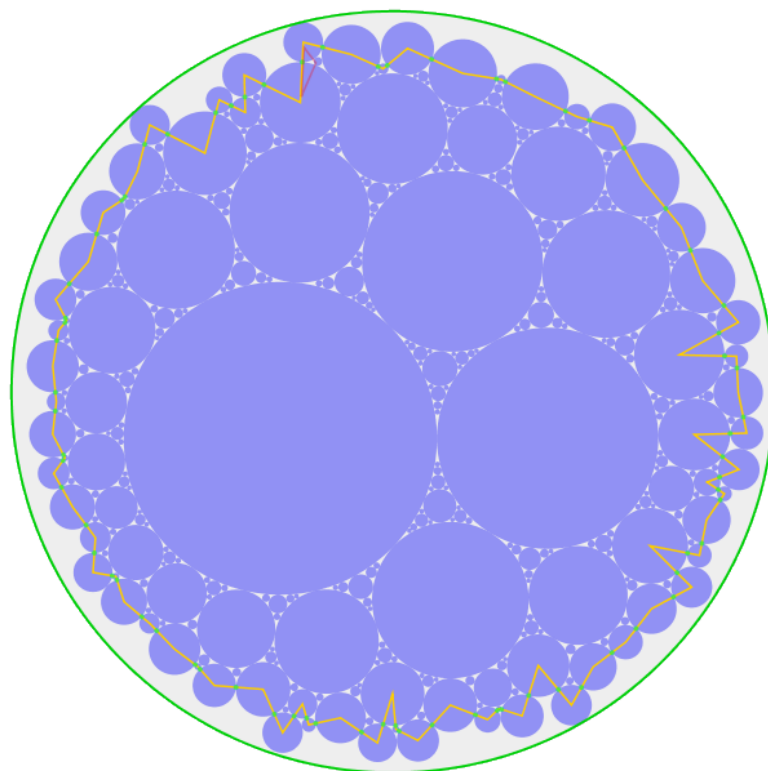


Figure 3.2: Voorbeeld visualisatie met grote shell

# Hoofdstuk 4

## Algoritme

In dit hoofdstuk bespreek ik de werking van de heuristiek. Eerst geef ik een korte beschrijving van het basis idee van het algoritme, gevolgd door de structuur van de code. Vervolgens leg ik stelselmatig de volledige werking uit, alle veronderstellingen die gemaakt worden en implementatie details waar nodig. De volledige implementatie is beschikbaar op GitHub [3] en is gebeurd in Java.

Om het algoritme zeer snel te maken worden enkele veronderstellingen gemaakt omtrent de nodige overlap checks bij elke stap. Deze veronderstellingen zijn niet theoretisch bewezen, maar wel empirisch getest. Voor de meeste verdelingen van cirkels lijken ze goed stand te houden, maar er zijn nog enkele *edge-cases* waarin er toch nog fouten gebeuren. Deze problemen worden besproken in hoofdstuk 6 en de snelheid en kwaliteit van de oplossingen wordt verder besproken in hoofdstuk 5.

### 4.1 Basis idee

Het basis idee van de heuristiek is om stelselmatig een packing op te bouwen, door telkens cirkels te zoeken die het best passen. Bij elke stap wordt telkens eerst een plek gekozen wordt om een cirkel te plaatsen (in een hole, of op de shell, later hier meer over). Hier wordt dan de best-passende cirkel geplaatst. Eenmaal een cirkel geplaatst is wordt deze nooit meer verplaatst. Dit laat toe om intelligente structuren op te bouwen en deze op een zeer efficiënte manier te gebruiken.

Het algoritme bouwt dus cirkel per cirkel een packing op. Dit door in elke stap een positie te kiezen, en hierin een cirkel te proberen plaatsen. Indien er geen cirkel geplaatst kan worden wordt de interne structuur van het probleem vernieuwd om deze nieuwe informatie te reflecteren. Dit gebeurt op verschillende manieren voor de holes en de shell. Meer hierover vindt u terug in sectie 4.6 en sectie 4.7. Als er wel een cirkel geplaatst kan worden dan wordt deze uit de lijst van nog-te-plaatsen cirkels verwijderd, en krijgt deze een permanente positie daar. Dit geeft ook aanleiding tot aanpassen van de holes en/of shell. Hierdoor wordt er een nieuwe tussentijdse packing gemaakt. Deze wordt dan door gegeven naar de volgende stap, waarin het algoritme opnieuw zal proberen een cirkel te plaatsen. Op deze manier word een volledige packing opgebouwd voor alle cirkels.

## 4.2 Structuur

De implementatie van het algoritme bevat enkele belangrijke (programmeer-)klassen die regelmatig zullen terug komen in de verdere uit, vooral in code fragmenten:

- Cirkel (Circle)
- Vector2
- Locatie (Location)
- Probleem (Problem)
- Oplossing (Solution)
- Oplosser (Solver)
- Gat (Hole)
- Schil (Shell)

Een *circle* is voor de hand liggend. Deze heeft een radius, maar geen positie.

*Vector2* is een 2D positie. Deze bevat een x en y coördinaat.

Een *location* of locatie is de combinatie van een cirkel met mijn positie. Deze bevat dus een referentie naar een *circle* en een *vector2*.

Een *problem* of probleem is een lijst van cirkels. Deze hebben nog geen positie, en worden gesorteerd van groot naar klein. Dit is wat de *solver* als input krijgt.

Een *solution* of oplossing is een lijst van cirkels met hun positie. Dit kan een tussen oplossing zijn, waar nog niet voor alle cirkels uit een probleem een positie gevonden is. Ook geeft dit geen garanties van correctheid, er kan dus bijvoorbeeld overlap zijn, maar voorziet functionaliteit om dit na te gaan. Dit is wat de solver als output geeft. Een correcte solver geeft natuurlijk wel altijd goede oplossingen.

Een *solver* of oplosser is het object dat een packing zoekt voor een gegeven probleem. Dit is dus het belangrijkste deel van de code, en hier is de nieuwe heuristiek geïmplementeerd. De best-fit solver, zoals beschreven in deze thesis, doet dit stap voor stap. In elke stap wordt er één cirkel geplaatst op zijn finale positie, dit aan de hand van enkele keuzes die verder in dit hoofdstuk toegelicht zullen worden.

*Hole* en *shell* worden verder uitgelegd in respectievelijk sectie 4.6 en sectie 4.7.

## 4.3 Structuur van de solver

Zoals hierboven gezegd is de solver het hart van de implementatie. Deze maakt effectief een packing voor een gegeven probleem. De solver bevat een lijst van *holes* en de *shell*. Het bevat ook een lijst van de nog te plaatsen cirkels, en een tussen-oplossing met de cirkels die reeds een plaats gekregen hebben. Ook heeft hij interne omcirkel voor deze oplossing. Een oplossing kan zelf ook een omcirkel berekenen, maar de solver gebruikt een interne omcirkel die enkel vernieuwd wordt als het nodig is. Bovendien heeft de solver extra informatie die de oplossing niet heeft, waardoor deze omcirkel efficiënter berekend kan worden. Zie sectie 4.7 voor meer uitleg hierover.

In de implementatie ziet de code van de solver er als volgt uit (vereenvoudigde versie):



---

```

1 List<Circle> circlesToPack;
2 Queue<Hole> holes;
3 List<Location> shell;
4 Location enclosingCircle;
5
6 Solution solution;
7
8 void solve() {
9     init();
10    packFirstThree();
11
12    while(!circlesToPack.isEmpty()) {
13        boolean ok = bestFitStep();
14        if (!ok) break;
15    }
16 }
17
18 boolean bestFitStep() {
19     if (circlesToPack.isEmpty()) {
20         return false;
21     }
22
23     if(!holes.isEmpty()) {
24         ...
25         // Probeer een cirkel in een gat te plaatsen
26         ...
27         return true;
28     }
29     else if (!shell.isEmpty()) {
30         ...
31         // Probeer een cirkel op de shell te plaatsen
32         ...
33         return true;
34     }
35 }

```

---

De solver bevat alle nodige informatie over de shell en holes, als ook de cirkels die nog geplaatst moeten worden en de huidige tussen-oplossing (lijn 1 tot lijn 6). Om een probleem op te lossen wordt de solve methode (lijn 8) aangeroepen. Deze initialiseert eerst alle nodige variabelen, doet dan de initiële packing (meer hierover in sectie 4.4) en voert dan best-fit-stappen uit tot een oplossing bereikt is (vanaf lijn 12).

De best-fit solver implementatie uit deze thesis kan stap voor stap de oplossing genereren en tussentijdse oplossingen visualiseren. Het is dus niet nodig een packing volledig te maken, het kan zeer nuttig zijn tussentijdse oplossingen te zien, zeker bij het debuggen of implementeren van nieuwe functionaliteit.

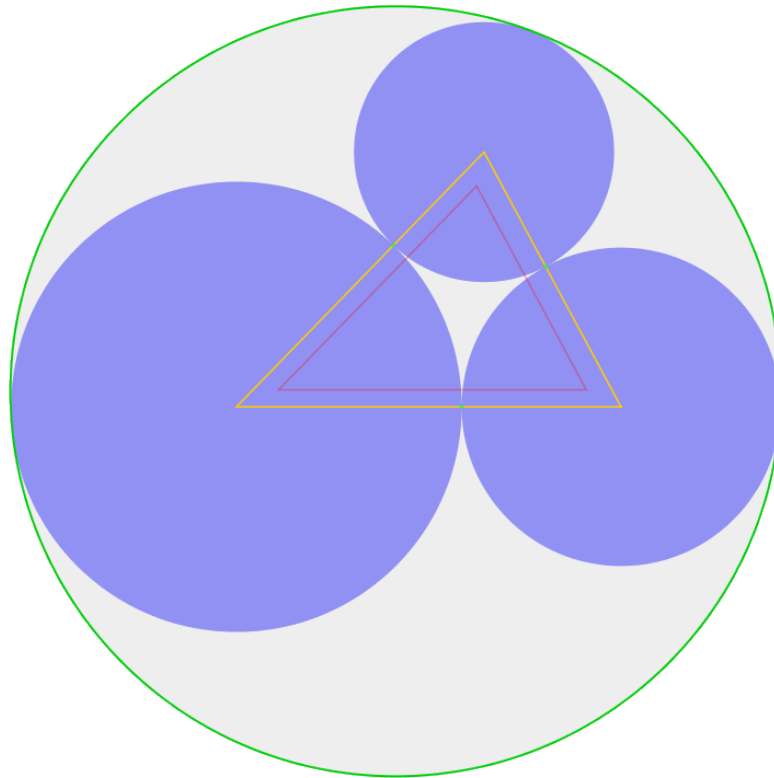


Figure 4.1: Voorbeeld van initiële packing

## 4.4 Initialisatie

Zoals eerder gezegd bouwt het algoritme steeds verder op een packing uit de vorige stap. Hierdoor is het dus nodig om een initiële packing te maken van een aantal cirkels waarop de volgende stappen kunnen verder bouwen. Deze initiële packing is de optimale packing van de drie grootste cirkels in het probleem. Deze drie cirkels worden zo geplaatst dat ze alle drie aan elkaar raken, zoals getoond in figuur 4.1. De licht blauwe cirkels tonen de drie eerste-geplaatste cirkels. Meer uitleg over hoe u deze figuur kan interpreteren kan u vinden in hoofdstuk 3

Het exacte proces om deze initiële packing te bekomen wordt verduidelijkt aan de hand van code uit de implementatie:

---

```

1 private void packFirstThree() {
2     //Initially place the two biggest circles next to eachother
3     Circle first = circlesToPack.get(0);
4     Circle second = circlesToPack.get(1);
5
6     Vector2 firstPos = new Vector2(0, 0);
7     Vector2 secondPos = new Vector2(first.getRadius() + second.getRadius(),
8         0);
9
10    Location firstLoc = new Location(firstPos, first);
11    Location secondLoc = new Location(secondPos, second);
12    getSolution().add(firstLoc);
13    getSolution().add(secondLoc);

```

```

13
14 // Place the third biggest circle on top of the first two (assuming they
    are positioned clockwise)
15 Circle third = circlesToPack.get(2);
16 Vector2 thirdPos = Helpers.getMountPositionFor(third, firstLoc,
    secondLoc);
17 Location thirdLoc = new Location(thirdPos, third);
18 getSolution().add(thirdLoc);
19
20 circlesToPack.remove(first);
21 circlesToPack.remove(second);
22 circlesToPack.remove(third);
23
24 // Create first hole
25 holes.add(new NHole(firstLoc, secondLoc, thirdLoc));
26 // Create the initial shell
27 // IMPORTANT: must be clock-wise
28 shell.add(firstLoc);
29 shell.add(thirdLoc);
30 shell.add(secondLoc);
31
32 enclosingCircle =
    Location.calculateEnclosingCircle(Arrays.asList(firstLoc, secondLoc,
    thirdLoc));
33 }

```

Eerst worden de twee grootste cirkels naast elkaar geplaatst. Vanaf lijn 3 tot lijn 7 worden eerst de twee grootste cirkels uit het probleem opgevraagd. De lijst *circlesToPack* is gesorteerd van groot naar klein, dus dit zijn de eerste twee cirkels in deze lijst. De eerste wordt in de oorsprong geplaatst, en de tweede er tegen op de horizontale as. Deze worden ook reeds aan de tussentijdse oplossing toegevoegd (vanaf lijn 11). Vervolgend wordt de positie berekend voor de derde aan de hand van een helper functie op lijn 16. Deze helper functie komt regelmatig terug, en wordt verduidelijkt in sectie 4.5.

In de initialisatie wordt ook het eerste gat gemaakt, gedefinieerd door de eerste drie cirkels. Dit gat wordt toegevoegd aan de lijst van gaten in de solver op lijn 25. Ook wordt de shell aangemaakt, vanaf lijn 28. Deze wordt met de klok mee (gezien vanuit het centrum van de huidige packing) bij gehouden. Verdere uitleg hierover is te vinden in sectie 4.7.

## 4.5 Een cirkel tegen twee andere plaatsen

In verschillende delen van de heuristiek is het nodig om een cirkel  $c_i$ , met radius  $r_i$ , tegen twee andere cirkels te plaatsen. Deze twee cirkels noemen we  $c_{g1}$ ,  $c_{g2}$ , en hun radii  $r_{g1}$ ,  $r_{g2}$ . Het punt vinden waarop deze cirkel moet staan om beide andere cirkels te raken wordt bepaald door een eenvoudige cirkel-cirkel intersectie, tussen twee cirkels met hun middelpunt gelijk aan het middelpunt van de cirkels  $c_{g1}$  en  $c_{g2}$  en als radii  $r_{g1} + r_i$  en  $r_{g2} + r_i$ :

```

1 Vector2 getMountPositionFor(Circle cir, Location first, Location second) {
2     double x0 = first.getPosition().getX();
3     double y0 = first.getPosition().getY();
4     double r0 = first.getCircle().getRadius() + cir.getRadius();
5
6     double x1 = second.getPosition().getX();
7     double y1 = second.getPosition().getY();
8     double r1 = second.getCircle().getRadius() + cir.getRadius();
9
10    // dx en dy zijn de verticale en horizontale afstand tussen de
        cirkel-centra.
11    double dx = x1 - x0;
12    double dy = y1 - y0;
13
14    // Bepaalde de afstand tussen de centra
15    //d = sqrt((dy*dy) + (dx*dx));
16    double d = Math.hypot(dx, dy);
17
18    // 'Punt 2' is het punt waar de lijn door de cirkel-intersectie punten de
        lijn tussen de cirkel-centra kruist
19    // We berekenen hier de coördinaten x2 en y2 van dit punt
20
21    // Bepaal eerst de afstand van tussen Punt 2 en het centrum van de eerste
        cirkel
22    double a = ((r0*r0) - (r1*r1) + (d*d)) / (2.0 * d);
23
24    // Bepaal dan de coördinaten van Punt 2.
25    double x2 = x0 + (dx * a/d);
26    double y2 = y0 + (dy * a/d);
27
28    // Bepaal nu de afstand van Punt 2 naar een van de intersectie-punten
29    // Het tweede intersectie-punt ligt even ver
30    double h = Math.sqrt((r0*r0) - (a*a));
31
32    // Zet deze afstand om naar een vector met de juiste richting
33    double rx = -dy * (h/d);
34    double ry = dx * (h/d);
35
36    // Bepaal een van de tweede intersectie punten
37    return new Vector2(x2 - rx, y2 - ry);
38 }

```

In deze code wordt één van de intersectie punten bepaald. Dit intersectie punt is steeds het negatieve punt. Als op lijn 37 + gebruikt wordt in plaats van  $-$  kan het tweede punt bekomen worden. Het is ook mogelijk het andere intersectie punt te verkrijgen door de twee *location* parameters om te wisselen.

Het bekomen punt is steeds het punt dat aan uw linker kant zou liggen indien je wandelt van het centrum van de eerste cirkel naar het centrum van de tweede cirkel. Dit is verduidelijkt in figuur 4.2, de onderste cirkel is de eerste, de bovenste cirkel de tweede.

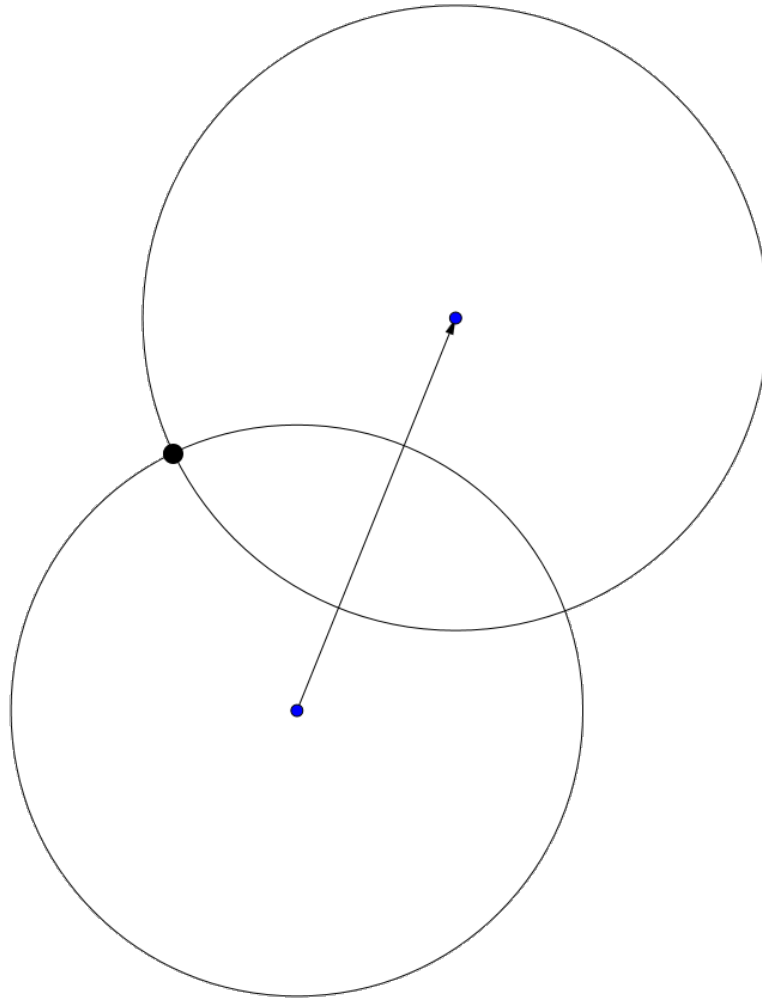


Figure 4.2: Verkregen intersectie punt van *getMountPositionFor*  
(Gemaakt met web.geogebra.org)

De pijl tussen deze cirkels geeft de *wandel richting* aan.

## 4.6 Holes

Het eerste van de twee belangrijkste concepten van de heuristiek is *holes* of *gaten*. Dit zijn plaatsen tussen andere, reeds geplaatste, cirkels waar potentieel nog een cirkel tussen kan passen. De heuristiek zal telkens eerst deze gaten proberen op te vullen, alvorens cirkels op de shell te plaatsen.

Gaten worden gedefinieerd door exact drie cirkels in de huidige packing. De solver houdt informatie bij voor elk gat waar mogelijk nog een cirkel in kan passen. Bij elke stap van de solver zal er eerst gekeken worden of er nog gaten in de oplossing zijn. Indien er nog gaten zijn zal hij deze dus eerst hier een cirkel in proberen plaatsen. Indien het gat te klein is voor alle nog-te-plaatsen cirkels wordt dit gat simpelweg verwijderd uit de lijst van gaten in de solver. Op deze manier weet de solver in de volgende stap dat hij daar niet meer moet proberen om een cirkel te plaatsen, en zal hij een ander gat uitproberen.

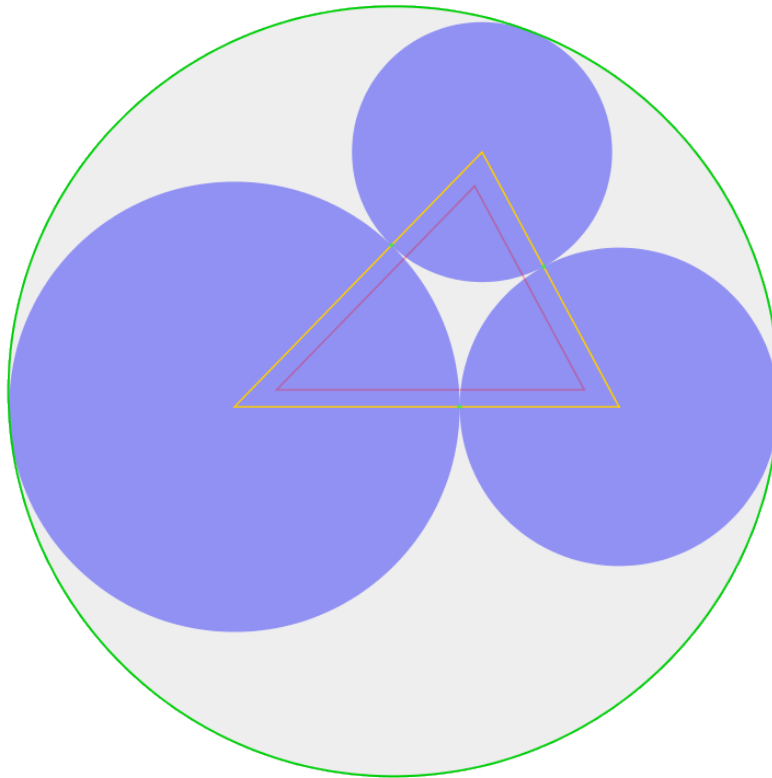


Figure 4.3: Packing voor het opvullen van een gat

Indien er wel een cirkel in het gat past wordt deze daar in geplaatst. Dit zal leiden tot het creëren van drie nieuwe gaten, zoals getoond in figuur 4.3 en figuur 4.4. De eerste figuur toont het gat waarin een cirkel geplaatst zal worden (de rode driehoek). De tweede figuur toont de nieuwe packing, nadat een cirkel geplaatst is in dit gat. Er zijn drie nieuwe kleinere gaten gemaakt, die in de volgende stappen ook zullen opgevuld worden indien mogelijk. Het algoritme zal deze gaten ook terug proberen opvullen. In figuur 4.5 en figuur 4.6 wordt respectievelijk de tussen-oplossing getoond voor wanneer er nog een cirkel is die klein genoeg is, en wanneer dit niet het geval is, om het onderste gat op te vullen.

#### 4.6.1 Grootste cirkel zoeken die past in een *hole*

Bij het plaatsen van een cirkel in een gat wordt een zo groot mogelijke cirkel gezocht die in dit gat past. Dit is bij wijze van spreken de best-passende cirkel, vandaar *best-fit*. Meer uitleg over hoe bepaald wordt of een cirkel past vind je in sectie 4.6.2. Hier wordt het proces om te vinden *welke* cirkel past verder verduidelijkt. Er wordt binair gezocht door de lijst van cirkels om te bepalen welke cirkel de grootste is die past. Onderstaande code verduidelijkt dit proces.

---

```

1 Location findBestFitFor(Hole hole, List<Circle> sortedBigToSmall) {
2     // Probeer eerst de kleinste cirkel
3     int lower = sortedBigToSmall.size() - 1;
4     Circle smallestCir = sortedBigToSmall.get(lower);
5     Vector2 smallestPos = hole.tryFit(smallestCir);

```

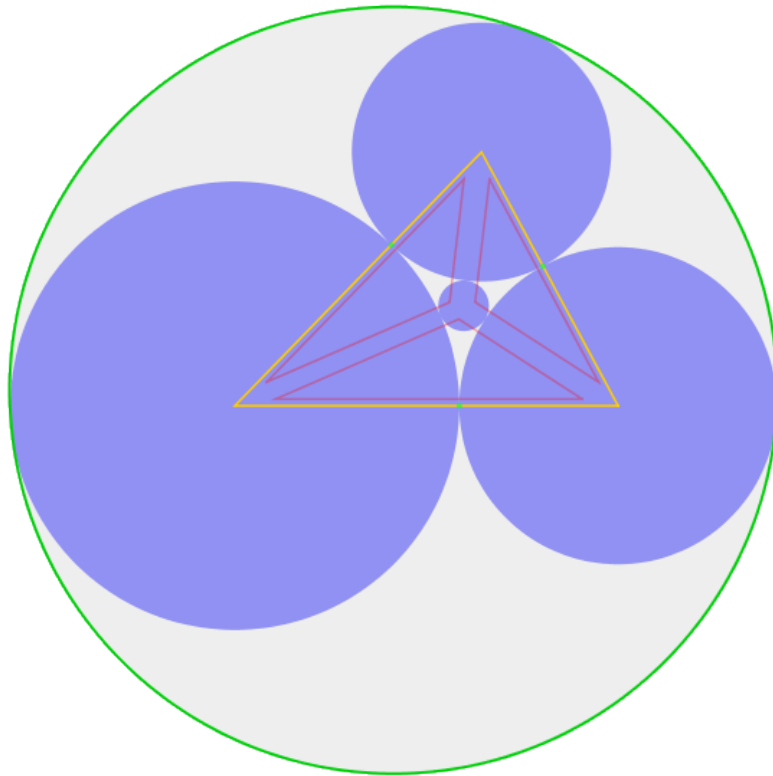


Figure 4.4: Packing na het opvullen van een gat

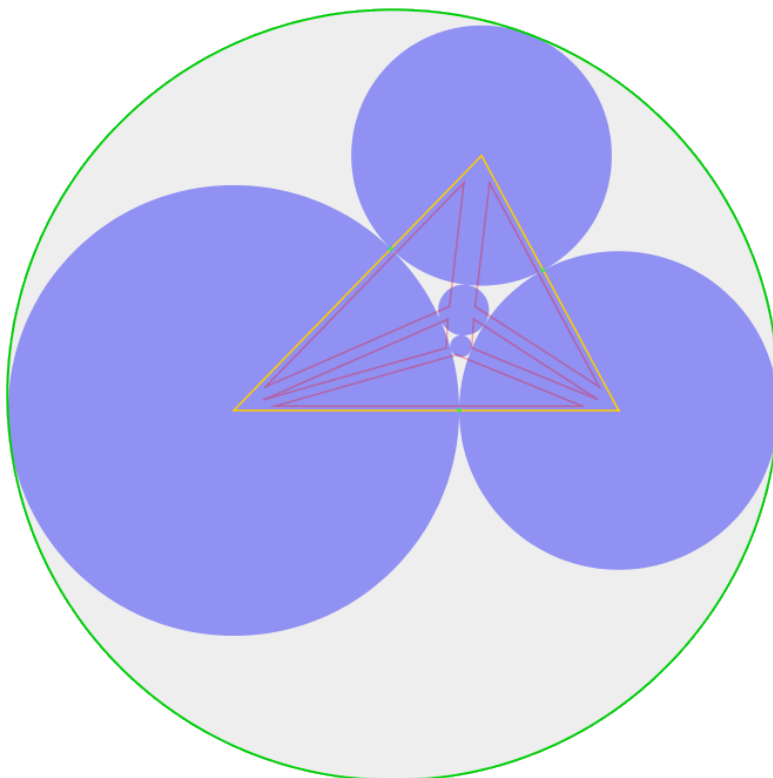


Figure 4.5: Packing na het opvullen van een tweede gat

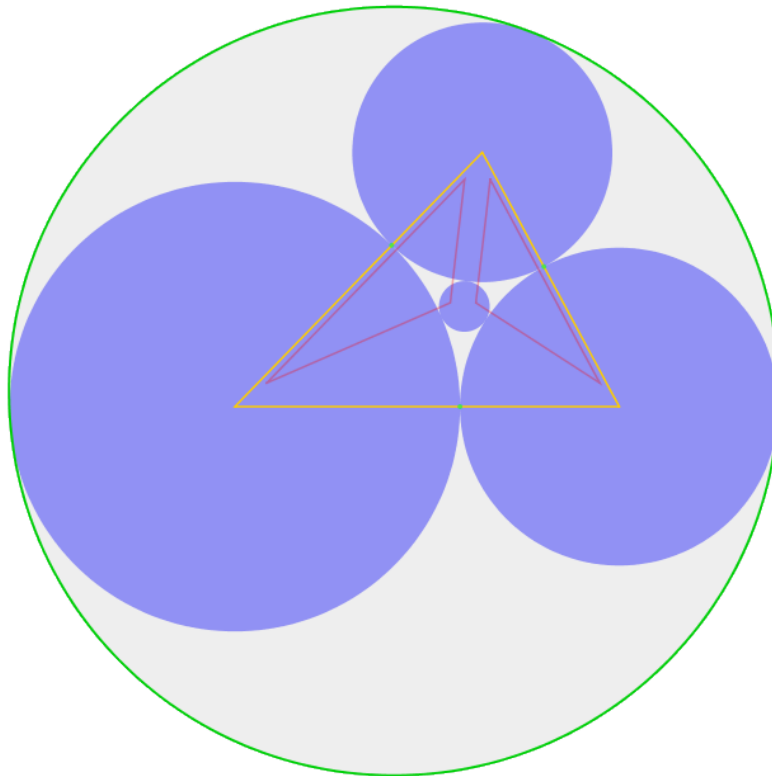


Figure 4.6: Packing als het opvullen van een tweede gat mislukt

```

6     if (smallestPos == null) {
7         return null;
8     }
9
10    // Probeer dan de grootste cirkel
11    int upper = 0;
12    Circle biggestCir = sortedBigToSmall.get(upper);
13    Vector2 biggestPos = hole.tryFit(biggestCir);
14    if (biggestPos != null) {
15        return new Location(biggestPos, biggestCir);
16    }
17
18    // Binair zoeken
19    Circle cir = null;
20    Vector2 pos = null;
21    while (lower - upper > 1) {
22        int middle = (upper + lower) / 2;
23        cir = sortedBigToSmall.get(middle);
24        pos = hole.tryFit(cir);
25
26        if (pos == null) {
27            upper = middle;
28        }
29        else {
30            lower = middle;

```



```

31     }
32 }
33
34     cir = sortedBigToSmall.get(lower);
35     pos = hole.tryFit(cir);
36     if (pos != null) {
37         return new Location(pos, cir);
38     }
39     else {
40         return null;
41     }
42 }

```

---

De solver houdt de lijst van cirkels bij gesorteerd op grootte, dat is cruciaal om snel de beste-passende cirkel te vinden. Eerst worden de grootste en kleinste cirkel uitgetest (lijn 3). Indien de kleinste niet past zal het algoritme direct rapporteren dat dit gat te klein is. Het gat zal dan, zoals vermeld in sectie 4.6, verwijderd worden uit de lijst van mogelijk holes. Indien de grootste past (lijn 11) zal het algoritme onmiddellijk deze cirkel plaatsen in het gat. Er zijn immers geen grotere cirkels, dus deze is de cirkel die verondersteld wordt best te passen. Vervolgens wordt er een gebied bepaald in de overblijvende cirkels, waarin de best-passende cirkel zich bevindt. Initieel ligt de boven- en ondergrens van dit gebied op de uiteinden van de overblijvende cirkels. De cirkel in de midden van dit gebied wordt dan uitgetest. Afhangende of deze wel of niet past zal de boven- of ondergrens aangepast worden. Dit wordt telkens herhaald tot er nog maar één cirkel over blijft. Dit is dan de grootste cirkel die past in het gat.

#### 4.6.2 Bepalen of een cirkel past in een *hole*

Er is geen exact definitie van de grootte van een gat. Dit is niet mogelijk omdat de cirkels die het gat bepalen niet altijd aan elkaar raken. Het is echter wel mogelijk om te bepalen of een cirkel past.

Dit gebeurt door de cirkel die we willen testen te plaatsen in het gat. Eerst wordt de cirkel tegen twee van de cirkels in het gat geplaatst, met een cirkel-cirkel intersectie zoals beschreven in sectie 4.5. Deze cirkel-cirkel intersectie heeft natuurlijk altijd twee punten. Hiervan moet er één gekozen worden. De implementatie zorgt er voor dat de cirkels die het gat definiëren telkens tegen de klok gesorteerd zijn (ten op zichte van het middelpunt van deze drie cirkels). Dit maakt het mogelijk telkens het juiste punt te kiezen. Eenmaal dit punt bepaald is wordt de cirkel op deze plek gezet. Dan wordt gekeken of deze cirkel wel effectief in het gat geplaatst is, en of deze niet overlapt met de derde cirkel die het gat definieert.

---

```

1 public Vector2 tryFit(Circle cir) {
2     // Try to place circle
3     Vector2 pos = Helpers.getMountPositionFor(cir, first, second);
4
5     // Check that is inside the hole
6     boolean inside = Vector2.isInsideTriableBy(first.getPosition(),
7         second.getPosition(), third.getPosition(), pos);
8     if (!inside) {

```

```

8         return null;
9     }
10
11     // Test for overlap
12     Location loc = new Location(pos, cir);
13     if (third.overlaps(loc)) {
14         return null;
15     }
16     return pos;
17 }

```

---

Op lijn 6 wordt verzekerd dat het middelpunt van de cirkel in het gat ligt. Dit voorkomt dat de geplaatste cirkel buiten het gat geplaatst wordt, en dus zeker niet kan overlappen met cirkels buiten het gat zonder ook te overlappen met één van de cirkels die het gat definiëren. Op lijn 13 wordt dan de overlap met de derde gat-definiërende cirkel nagekeken. Er kan geen overlap zijn met de eerste twee, de methode *getMountPositionFor* plaatst de cirkel zodanig dat deze de twee andere cirkels raakt, maar niet overlapt. Indien de cirkel in het gat past, en dus alle checks doorstaat, wordt de positie voor deze cirkel terug gegeven. De solver zal deze cirkel dan plaatsen in zijn oplossing.

Het is niet nodig om na te gaan of er overlap is met andere cirkels in de oplossing. Als er met een andere overlap zou zijn, moet dit zijn omdat de cirkel buiten het gat geplaatst is, of er is ook overlap met één van de cirkels in het gat zelf. Dit zorgt er voor dat er zeer weinig overlap-checks gedaan moeten worden, wat het algoritme zeer snel maakt.

## 4.7 Shell

De *shell* of *schil* is het tweede van de belangrijkste concepten van de heuristiek. Dit is de buitenste laag van cirkels in een (tussen-)oplossing van de solver. Deze wordt in de implementatie simpelweg bijgehouden als een geordende lijst van cirkels. Cirkels die naast elkaar staan in de lijst, grenzen ook aan elkaar in de shell. De cirkels in deze laag zijn met de klok mee gesorteerd, ten opzichte van het middelpunt van de omcirkel. De eerste en laatste cirkel in de lijst grenzen ook aan elkaar in de shell.

De heuristiek voorgesteld in deze thesis probeert steeds eerst alle gaten op te vullen. Maar wanneer er geen cirkels meer over zijn die klein genoeg zijn om te passen in gaten, word er een cirkel op de shell geplaatst. Op de shell worden alle posities tegen twee cirkels van de shell overwogen. Dit is een goede heuristiek voor de optimale positie, beperkt het aantal mogelijke posities voor de geplaatste cirkel enorm en maakt het algoritme dus zeer snel (zie hoofdstuk 5 voor een vergelijking in snelheid). Er wordt steeds een cirkel zo dicht mogelijk bij het centrum van de huidige tussen-oplossing geplaatst. Dit om het uitbreiden van de omcirkel zo min mogelijk te houden.

Eerst worden twee cirkels gekozen waartegen de nieuwe geplaatst zal worden. Hiervoor wordt gekeken naar het middelpunt tussen alle cirkels die naast elkaar staan op de shell. De twee cirkels waarvoor het middelpunt het dichtst bij het centrum van de huidige omcirkel ligt worden gekozen als kandidaten om de derde cirkel tegen te plaatsen. Dan wordt er gezocht naar een zo groot mogelijke cirkel die daar past op de shell. Indien geen enkele cirkel past wordt één van de twee kandidaat cirkels verwijderd uit de shell. Welke verwijderd wordt verduidelijkt in sectie 4.7.2. Dit zorgt er voor dat de shell verandert en

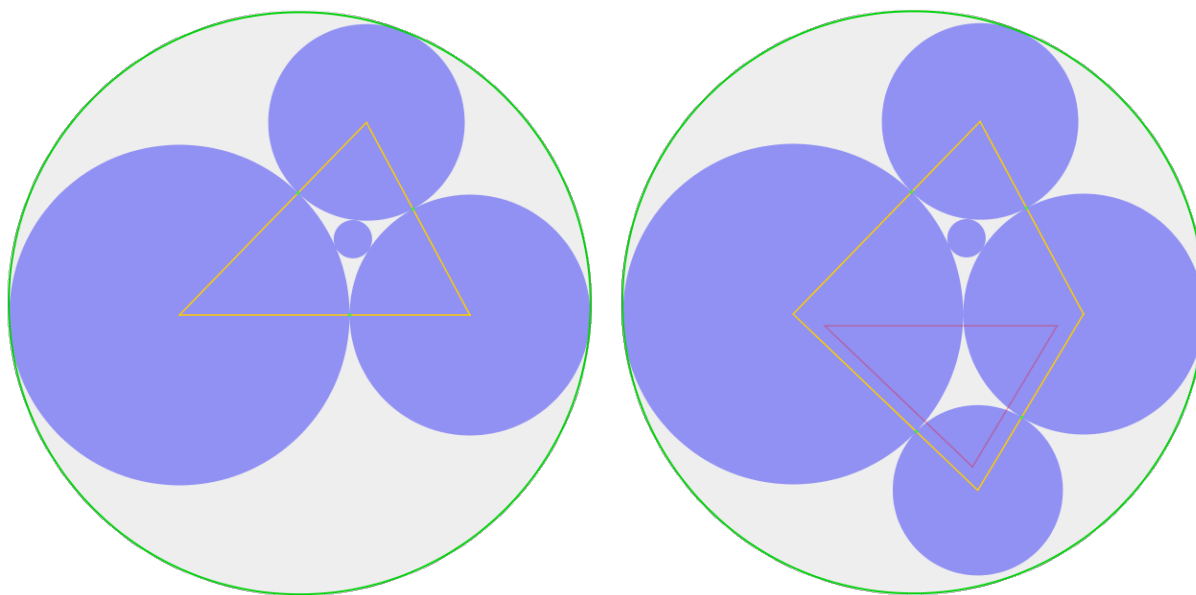


Figure 4.7: Het plaatsen van de grootste cirkel op de shell

*groeit* naar buiten. In de volgende stap van het algoritme zal dan ook een andere positie voor een cirkel uitgeprobeerd worden. Indien er wel een cirkel past wordt deze toegevoegd aan de shell, en geeft deze aanleiding tot een nieuw gat. Dit gat zal vervolgens opgevuld worden indien mogelijk, zoals beschreven in sectie 4.6. Op figuur 4.7 wordt getoond hoe de packing verandert wanneer een cirkel geplaatst wordt op de shell. Eerst wordt een packing zonder gaten getoond en vervolgens de packing nadat een cirkel op de shell geplaatst is. Hierop is duidelijk te zien hoe de shell aangepast is geweest, en deze plaatsing geleid heeft tot een nieuw gat. Zoals eerder gezegd is het mogelijk dat op een positie op de shell de grootste cirkel niet past. Dit wordt geïllustreerd in figuur 4.8. Het is ook mogelijk dat geen enkele cirkel nog past op de shell, zoals getoond in figuur 4.9.

#### 4.7.1 Slim de omcirkel berekenen gebaseerd op de shell

Bij het kiezen van de kandidaat cirkels om een cirkel tegen te plaatsen op de shell wordt gebruik gemaakt van de omcirkel van de huidige tussen-oplossing. Zoals eerder vermeld kan voor elke (tussen-)oplossing de omcirkel berekend worden. Dit gebeurt door een aangepaste versie van het Welz algoritme voor de omcirkel van punten beschreven in [19]. De implementatie is gebaseerd op de implementatie in [17]. Het is een recursief algoritme dat in lineaire tijd de omcirkel kan berekenen. Het idee is dat de omcirkel van een aantal cirkels (of punten) volledig gedefinieerd is door maximum drie cirkels. Het algoritme vindt deze twee of drie cirkels.

Het is eenvoudig in te zien dat deze drie cirkels aan de buitenkant van een (tussen-)oplossing zullen liggen. Dit is ook net wat de shell is, de cirkels aan de buitenkant van een oplossing. Het is dus mogelijk om in elke stap van de solver de omcirkel zeer efficient te berekenen. De complexiteit is dan slechts lineair in het aantal cirkels op de shell in huidige (tussen-)oplossing, wat slechts een subset is van totaal aantal cirkels in de oplossing. Aangezien de omcirkel regelmatig moet herberekend worden doorheen het algoritme is dit een zeer interessante optimalisatie.

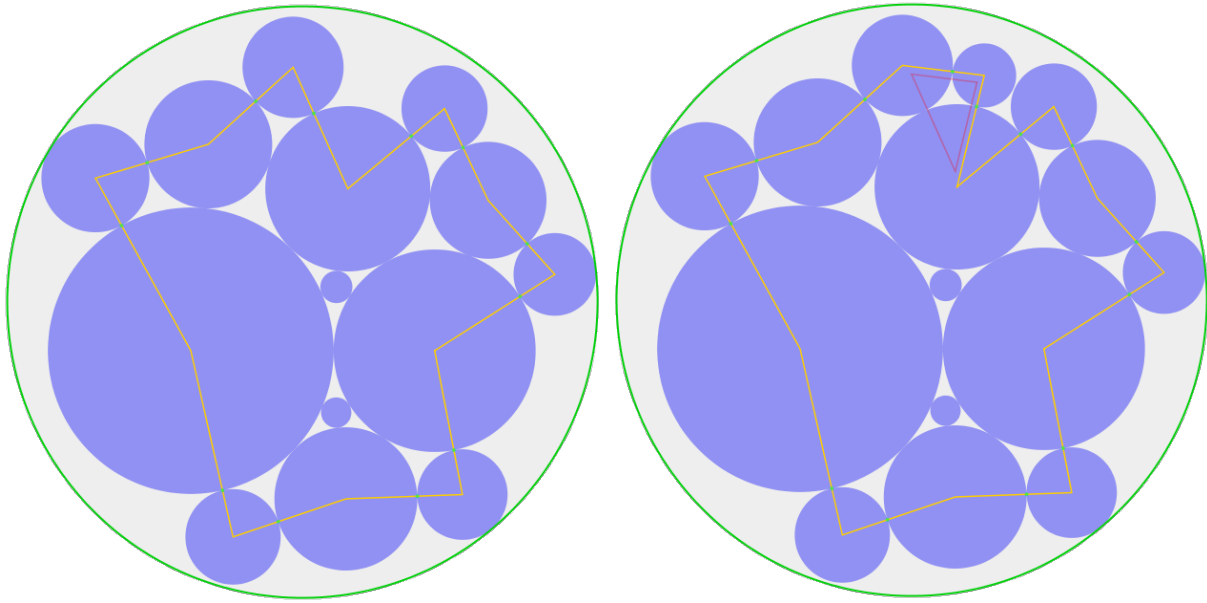


Figure 4.8: Het plaatsen van een kleinere cirkel op de shell

Focus: midden bovenaan

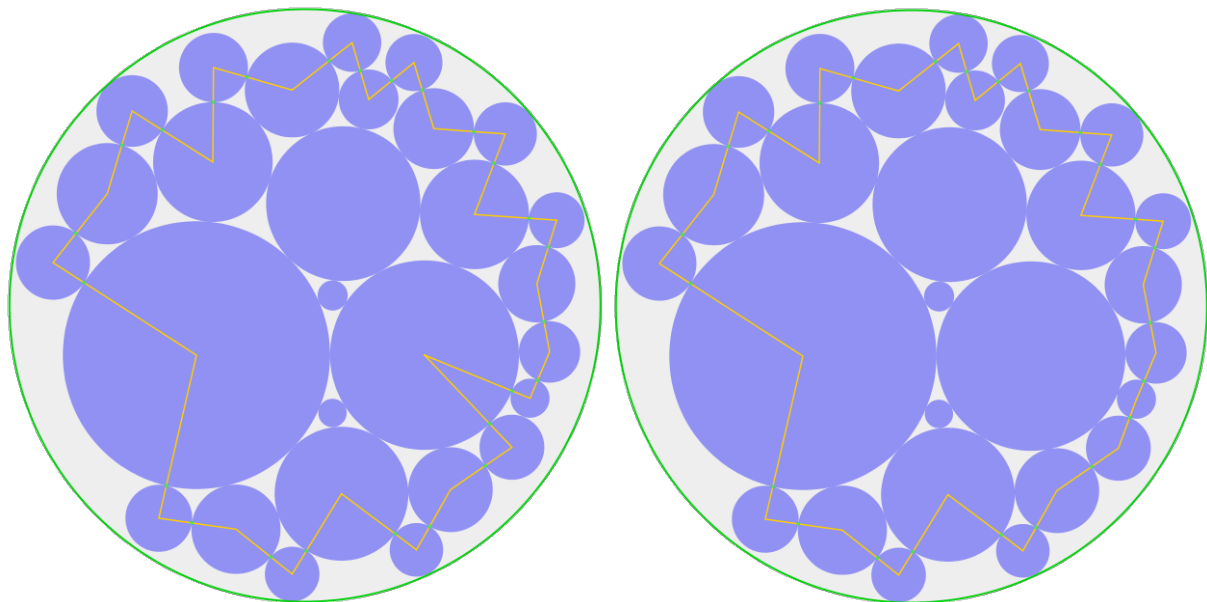


Figure 4.9: Shell aanpassen als geen enkele cirkel past

Focus: rechts onderaan

### 4.7.2 Bepalen of een cirkel past op de shell

Om te bepalen of een cirkel op de shell past plaatsen we de cirkel eerst tegen twee cirkels op de shell. Dit gebeurt op de zelfde manier als het plaatsen van een cirkel tegen twee cirkels van een gat. De exacte methode is reeds uitgelegd in sectie 4.5. Eenmaal deze positie gekend is, wordt er nagekeken of dit niet tot overlap leidt. Indien er overlap is is het niet mogelijk om de cirkel daar op de shell te plaatsen, en wordt er informatie terug gegeven over welke cirkel op de shell voor problemen zorgt.

Om na te gaan of er overlap is, wordt er systematisch een aantal cirkels op de shell nagekeken. Het is niet nodig andere cirkels, die niet op de shell zitten, na te kijken voor overlap. Een nieuwe cirkel wordt steeds op de shell geplaatst zodanig dat als er overlap zou zijn met cirkels in de oplossing, minstens één van die cirkels op de shell ligt. Doordat ik geen exacte definitie van de shell heb, ze is enkel gedefinieerd door het algoritme dat ze opbouwt, is het niet mogelijk om hier een echt bewijs van te geven. Uit empirische tests lijkt dit echter wel te kloppen. Verdere bedenkingen hierbij kan u terug vinden in hoofdstuk 6. Om deze overlappings-test zeer snel te kunnen uitvoeren worden eerst cirkels dicht bij nagekeken. Er staat ook een limiet op het aantal cirkels die getest worden. Uit tests, tot 5000 cirkels, blijkt dat drie cirkels aan elke kant van de shell nakijken genoeg is. Voor de meeste gevallen is één cirkel nakijken genoeg, maar sommige randgevallen (wanneer meerdere kleine cirkels dicht bij elkaar staan op de shell) vragen deze extra checks.

Het aantal cirkels dat nagekeken wordt is een hyperparameter *checkRadius* van het algoritme. De volgende code toont hoe de overlap nagekeken wordt:

---

```

1  for (int i = 1; i <= checkRadius; ++i) {
2      int prevIndex = (firstIndex + shell.size() - i) % shell.size();
3      Location prev = shell.get(prevIndex);
4      if (loc.overlaps(prev)) {
5          toRemove = first;
6          break;
7      }
8      int nextIndex = (secondIndex + i) % shell.size();
9      Location next = shell.get(nextIndex);
10     if (loc.overlaps(next)) {
11         toRemove = second;
12         break;
13     }
14 }
```

---

Er wordt dus om te beurt links en rechts van de huidige positie op de shell nakeken voor overlap. Indien er overlap gevonden is, wordt bijgehouden aan welke kant van de shell dit gebeurd is. *toRemove* is dus uiteindelijk *first* of *secons*, wat aan geeft of er aan de kant van de eerste cirkel, of van de tweede cirkel, overlap voorkomt. *toRemove* kan ook *null* zijn indien er geen overlap is. Deze informatie wordt dan gebruikt door de solver om te bepalen of de cirkel geplaatst kan worden (*toRemove* = *null*), of dat de shell aangepast moet worden. Meer informatie hierover in sectie 4.7.3

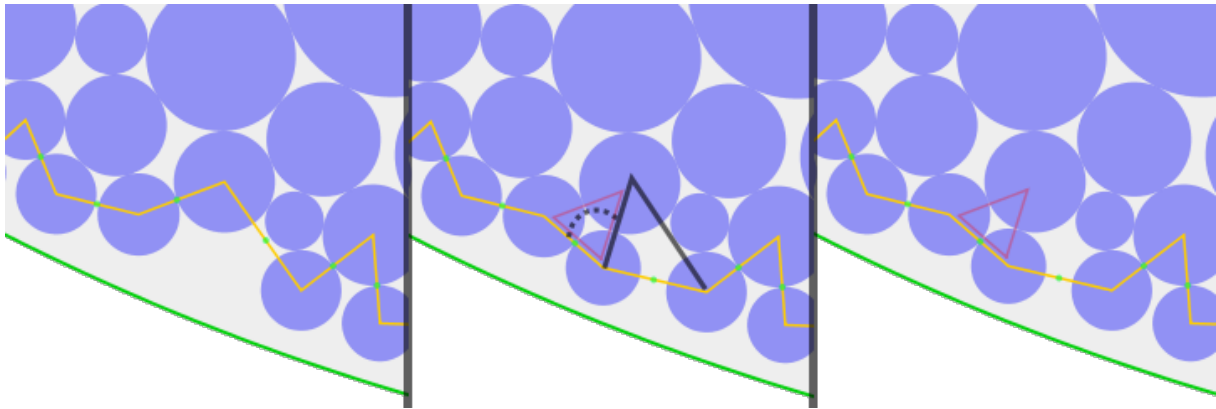


Figure 4.10: Een cirkel veroorzaakt een tegen-ge-klok shell

### 4.7.3 Een cirkel plaatsen op de shell

Om een cirkel te plaatsen op de shell wordt eerst de grootste cirkel is die past op de shell binair gezocht in de lijst van nog-te-plaatsen cirkels. Dit gebeurt op analoge manier als het zoeken naar de grootste cirkel die past in een gat, zoals beschreven in sectie 4.6.1. Indien er een cirkel gevonden wordt die past op de shell wordt de shell uitgebreid met deze cirkel. De cirkel wordt dan tussen de cirkels, waartegen hij geplaatst is, gezet in de shell. Dit wordt geïllustreerd in figuur 4.7, figuur 4.8. De gele lijn (die de shell voorstelt, zoals beschreven in hoofdstuk 3) wordt uitgebreid met een extra punt. Ook zorgt dit er voor dat een nieuw gat gemaakt wordt waar mogelijk kleinere cirkels in passen.

Een laatste check die gebeurt is om na te gaan of door het plaatsen van de cirkel de shell nog juist gevormd is. Indien een cirkel geplaatst wordt zodat de cirkels niet meer met de klok mee gesorteerd zijn, zou dit er voor kunnen zorgen dat foutieve plaatsingen voorkomen. Om dit te voorkomen wordt de gerichte hoek tussen de geplaatste cirkel en de cirkels waartegen hij geplaatst is nagekeken. Indien deze hoek negatief is wordt de shell hier voor aangepast. Dit wordt getoond in figuur 4.10. Het eerste deel toont de configuratie waarop een cirkel geplaatst zal worden. Het laatste deel de uiteindelijke configuratie van de shell. Het middelste deel toont met een zwarte lijn het deel van de shell dat verwijderd is om er voor te zorgen dat deze kloksgewijs gesorteerd blijft. Op figuur 4.11 wordt getoond wat er kan gebeuren als deze check niet gebeurt.

## 4.8 Conclusie

Dit hoofdstuk gaf een volledig overzicht van de nieuwe constructieve heuristiek. Waar nodig werd het uitleg verduidelijkt met code uit de implementatie. Er werden ook de verschillende veronderstellingen geformuleerd die gebruikt worden om het algoritme zeer snel te maken. Zie ook hoofdstuk 6 voor verdere bedenkingen hieromtrent.

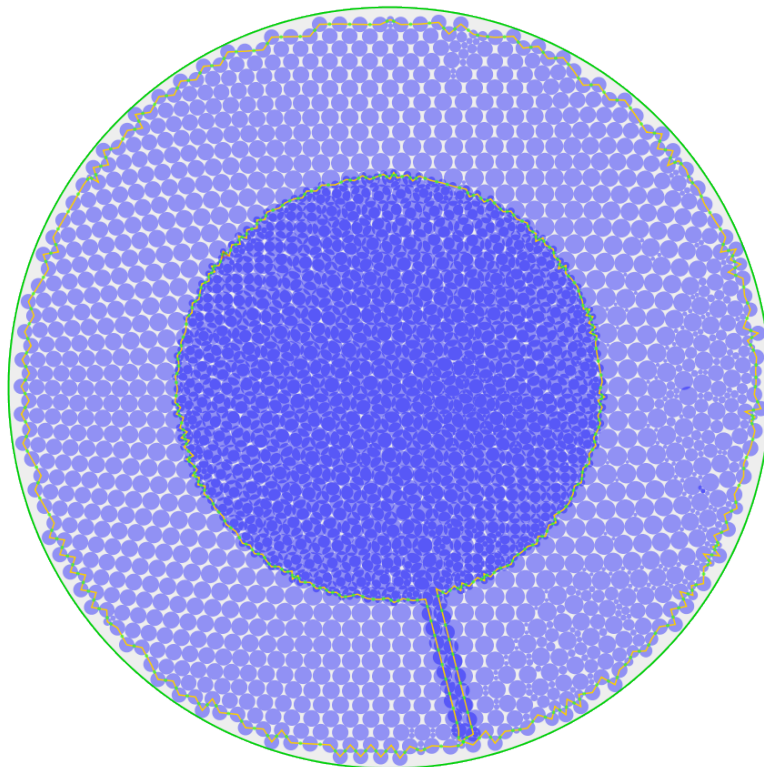


Figure 4.11: Mogelijke fout indien de shell niet met de klok mee gesorteerd is

# Hoofdstuk 5

## Resultaten

In dit hoofdstuk worden de verkregen packings vergeleken met de best gekende packings, zoals gerapporteerd op de Packomania website [16]. Packomania is een website die de best gekende oplossingen voor verschillende circle-packing problemen verzameld. Deze vergelijking wordt gemaakt op zowel de verkregen radius van de omschreven cirkel, als ook de tijd nodig om tot deze packing te komen indien deze gekend is. De nodige rekentijd voor deze algoritmen is echter niet altijd even makkelijk te vinden. Veel van de packings op Packomania hebben geen bijkomende publicatie. Het gebruikte algoritme en de nodige tijd om de packing te bekomen is dus niet gekend, enkel de coördinaten van de uiteindelijke packing. De vergelijking in tijd zal dus een zeer ruwe vergelijking zijn gebaseerd op slechts enkele papers.

Ook geef ik resultaten voor packings met veel meer cirkels dan deze gerapporteerd op Packomania. Hiervoor heb ik geen andere resultaten gevonden in de literatuur om met te vergelijken.

Packomania heeft resultaten voor verschillende verdelingen van cirkels. Deze verdelingen zijn als volgt:

- $r_i = 1$  (alle cirkels gelijke grootte)
- $r_i = i$
- $r_i = i^{1/2}$
- $r_i = i^{-1/5}$
- $r_i = i^{-1/2}$
- $r_i = i^{-2/3}$

Hierbij zijn er telkens  $N$  cirkels in het probleem, en is  $i \in (1, 2, \dots, N)$ . De verhouding tussen enkele van deze verdelingen worden verduidelijkt in figuur 5.1.

Al deze berekeningen zijn uitgevoerd op een Mid 2009 Macbook-Pro 15 inc met een 2.8Ghz Core 2 Duo processor en 4GB ram.



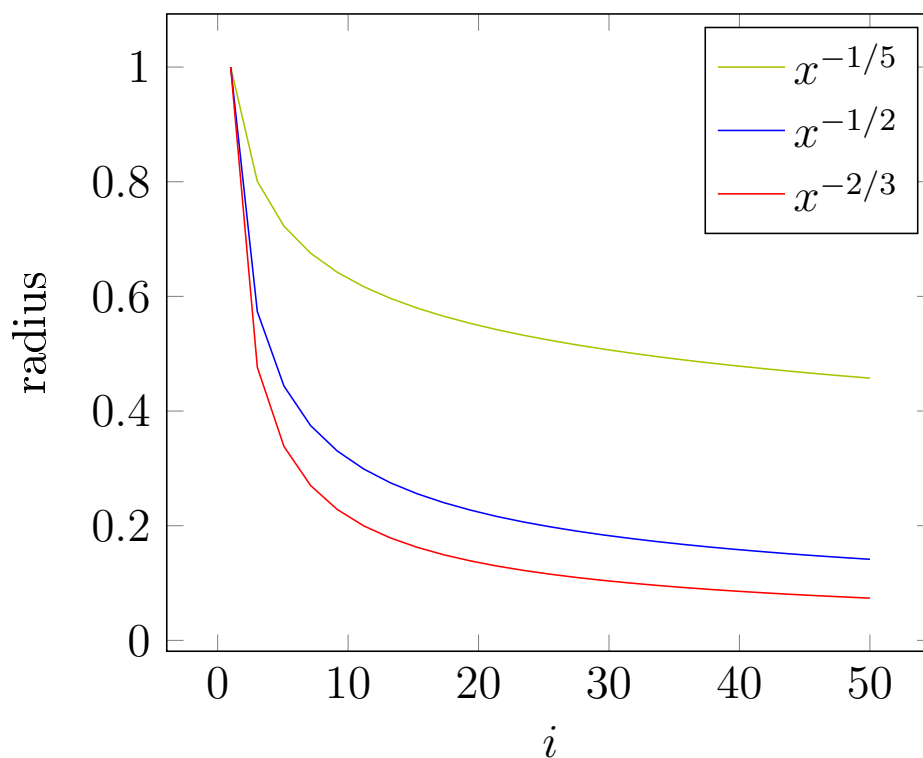


Figure 5.1: Packomania verdelingen

## 5.1 Packomania vergelijking

In de tabellen in deze sectie wordt telkens het aantal cirkels in de kolom  $N$  gegeven, de best gekende radius van op Packomania in kolom *Besteradius* en de radius verkregen door mijn algoritme in kolom *Radius*. Ook wordt het absolute verschil van mijn oplossing ten opzichte van de best gekende radius in de kolom *Vergroting* gegeven, en de procentuele vergroting in kolom *Vergroting(%)*. Als laatste geef ik de rekentijd die mijn algoritme nodig had om tot deze oplossing te komen.

### 5.1.1 Even grote cirkels

Voor het circle-packing probleem met even grote cirkels worden de oplossingen voor  $N = 3$  tot  $N = 100$  in tabel 5.1.1 getoond. Dit is slechts een subset van alle gekende oplossingen. De volledige lijst van vergelijkingen voor dit probleem, meer dan 2500 vergelijkingen, kan u terug vinden op GitHub [4].

Table 5.1: Packomania  $r_i = 1$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
3	2.154700538	2.154700538	0.0000000000	0.00	0s:0ms
4	2.414213562	2.732050808	0.3178372452	13.17	0s:0ms
5	2.701301617	3	0.2986983833	11.06	0s:0ms
6	3	3	0.0000000000	0.00	0s:0ms
7	3	3	0.0000000000	0.00	0s:0ms
8	3.304764871	3.694301256	0.3895363853	11.79	0s:0ms
9	3.61312593	3.8	0.1868740702	5.17	0s:0ms
10	3.813025631	4	0.1869743686	4.90	0s:0ms
11	3.9238044	4.055050463	0.1312460631	3.34	0s:0ms
12	4.02960193	4.055050463	0.0254485332	0.63	0s:0ms
13	4.236067977	4.605551275	0.3694832980	8.72	0s:0ms
14	4.328428555	4.605551275	0.2771227206	6.40	0s:0ms
15	4.521356965	4.815756806	0.2943998410	6.51	0s:0ms
16	4.615425595	4.815756806	0.2003312108	4.34	0s:0ms
17	4.792033748	5	0.2079662517	4.34	0s:0ms
18	4.863703305	5	0.1362966948	2.80	0s:0ms
19	4.863703305	5	0.1362966948	2.80	0s:0ms
20	5.122320737	5.613025038	0.4907043009	9.58	0s:0ms
21	5.252317475	5.613025038	0.3607075629	6.87	0s:0ms
22	5.439718959	5.694198862	0.2544799032	4.68	0s:0ms
23	5.545204223	5.75	0.2047957774	3.69	0s:0ms
24	5.651661092	5.891911267	0.2402501756	4.25	0s:0ms
25	5.752824331	6.003702333	0.2508780021	4.36	0s:0ms
26	5.828176537	6.196152423	0.3679758858	6.31	0s:0ms
27	5.906397847	6.33487632	0.4284784726	7.25	0s:0ms
28	6.014938097	6.428571429	0.4136333312	6.88	0s:0ms
29	6.138597904	6.547689565	0.4090916605	6.66	0s:0ms
30	6.197741071	6.604759882	0.4070188110	6.57	0s:0ms
31	6.291502622	6.625462944	0.3339603218	5.31	0s:0ms
32	6.429462971	6.636363636	0.2069006654	3.22	0s:1ms
33	6.486703124	6.669933699	0.1832305752	2.82	0s:1ms
34	6.61095709	6.766281297	0.1553242073	2.35	0s:1ms
35	6.697171092	7.103417131	0.4062460396	6.07	0s:1ms
36	6.746753793	7	0.2532462066	3.75	0s:1ms
37	6.758770483	7	0.2412295169	3.57	0s:2ms
38	6.961886965	7.293994497	0.3321075319	4.77	0s:1ms
39	7.057884163	7.331139971	0.2732558085	3.87	0s:1ms
40	7.123846436	7.584629125	0.4607826895	6.47	0s:1ms
41	7.260012329	7.609084657	0.3490723281	4.81	0s:1ms
42	7.346796407	7.429100507	0.0823041004	1.12	0s:1ms
43	7.419944856	7.677768534	0.2578236776	3.47	0s:1ms
44	7.498036683	7.677768534	0.1797318509	2.40	0s:1ms
45	7.572912326	7.82657133	0.2536590037	3.35	0s:2ms

Table 5.1: Packomania  $r_i = 1$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
46	7.650179915	8	0.3498200853	4.57	0s:2ms
47	7.724170053	8	0.2758299474	3.57	0s:2ms
48	7.791271431	8	0.2087285694	2.68	0s:2ms
49	7.886870959	8.253232038	0.3663610794	4.65	0s:2ms
50	7.947515275	8.359291376	0.4117761008	5.18	0s:2ms
51	8.027506952	8.408103671	0.3805967186	4.74	0s:2ms
52	8.084717191	8.472517892	0.3878007012	4.80	0s:2ms
53	8.179582827	8.488877336	0.3092945096	3.78	0s:2ms
54	8.203982383	8.538461538	0.3344791550	4.08	0s:2ms
55	8.211102551	8.587147277	0.3760447262	4.58	0s:2ms
56	8.383529923	8.6	0.2164700774	2.58	0s:2ms
57	8.447184653	8.628073151	0.1808884978	2.14	0s:2ms
58	8.52455377	8.741697766	0.2171439957	2.55	0s:3ms
59	8.592499959	8.95896775	0.3664677911	4.26	0s:3ms
60	8.646219845	8.967076656	0.3208568103	3.71	0s:3ms
61	8.661297576	9.021337505	0.3600399294	4.16	0s:3ms
62	8.829765409	9.045787337	0.2160219284	2.45	0s:3ms
63	8.892351538	9.185352772	0.2930012343	3.29	0s:3ms
64	8.961971108	9.185352772	0.2233816634	2.49	0s:3ms
65	9.017397323	9.275353858	0.2579565352	2.86	0s:3ms
66	9.096279427	9.275353858	0.1790744315	1.97	0s:3ms
67	9.168971882	9.275353858	0.1063819766	1.16	0s:3ms
68	9.229773747	9.326663998	0.0968902511	1.05	0s:3ms
69	9.269761267	9.326663998	0.0569027312	0.61	0s:3ms
70	9.345653194	9.632545009	0.2868918150	3.07	0s:4ms
71	9.415796897	9.632545009	0.2167481122	2.30	0s:4ms
72	9.473890857	9.801090841	0.3271999848	3.45	0s:4ms
73	9.540346152	9.801090841	0.2607446893	2.73	0s:4ms
74	9.589232764	9.888925926	0.2996931615	3.13	0s:4ms
75	9.672029632	9.909090909	0.2370612771	2.45	0s:4ms
76	9.729596802	10	0.2704031978	2.78	0s:4ms
77	9.798911925	10.21190226	0.4129903345	4.21	0s:4ms
78	9.8577099	10.27521352	0.4175036178	4.24	0s:4ms
79	9.905063468	10.27521352	0.3701500500	3.74	0s:4ms
80	9.968151813	10.34126647	0.3731146566	3.74	0s:5ms
81	10.01086424	10.38839772	0.3775334833	3.77	0s:5ms
82	10.05082422	10.38839772	0.3375735011	3.36	0s:5ms
83	10.11685788	10.40638081	0.2895229379	2.86	0s:5ms
84	10.14953087	10.55252264	0.4029917684	3.97	0s:6ms
85	10.16311147	10.64622206	0.4831105925	4.75	0s:6ms
86	10.29870105	10.68161804	0.3829169837	3.72	0s:5ms
87	10.36320851	10.71444133	0.3512328258	3.39	0s:5ms
88	10.43233769	10.71444133	0.2821036381	2.70	0s:5ms

Table 5.1: Packomania  $r_i = 1$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
89	10.50049181	10.71444133	0.2139495163	2.04	0s:5ms
90	10.54606918	10.71444133	0.1683721529	1.60	0s:5ms
91	10.56677223	10.8488578	0.2820855683	2.67	0s:5ms
92	10.68464585	10.8488578	0.1642119539	1.54	0s:5ms
93	10.7333526	10.97505539	0.2417027933	2.25	0s:6ms
94	10.77803216	10.97505539	0.1970232333	1.83	0s:6ms
95	10.84020502	11.12553963	0.2853346097	2.63	0s:6ms
96	10.88320276	11.13086122	0.2476584589	2.28	0s:6ms
97	10.93859011	11.15326389	0.2146737787	1.96	0s:6ms
98	10.97938313	11.19403587	0.2146527432	1.96	0s:6ms
99	11.03314115	11.22161834	0.1884771882	1.71	0s:7ms
100	11.08214972	11.22161834	0.1394686153	1.26	0s:6ms

Gemiddeld geeft mijn algoritme een resultaat dat 1.89% groter is dan de het best gekende resultaat. Nodige tijd blijft onder 10 milliseconden tot  $N = 100$ . Tot 500 cirkels blijft de nodige rekentijd onder 100 milliseconden. De rekentijd loopt pas op tot één seconden bij 2200 cirkels, en slechts 3,5 seconden voor 5000 cirkels.

Zoals eerder vermeld zijn vergelijkingen in nodige rekentijd moeilijk te vinden. In [9] worden echter tijden gerapporteerd van 110 seconden voor 30 cirkels (mijn algoritme vroeg hier minder dan een milliseconden tijd), en 15311 seconden (meer dan 4 uur) voor 100 cirkels (mijn algoritme vroeg hier 7 milliseconden). Zij halen resultaten die zeer dicht bij de best gekende liggen (soms de beste).

Zelfs de constructieve algoritmen beschreven in [1] en [10] vragen meerdere seconden, en soms minuten, om te berekenen. Hun resultaten zijn echter moeilijk te vergelijken omdat [1] een alternatieve versie van circle-packing op lost, en [10] packings maakt in rechthoeken.

Omdat mijn algoritme enkel nieuwe cirkels tegen twee reeds geplaatste cirkels plaats, hebben alle oplossingen voor dit probleem een duidelijke structuur. Deze structuur is een zeshoekige structuur. Dit wordt geïllustreerd in figuur 5.2, figuur 5.3 en figuur 5.4.

### 5.1.2 Packomania Machten

Packomania rapporteert ook resultaten voor verschillende verdelingen met een vaste structuur:  $r_i = i^X$ . Hier is X steeds een andere macht. Deze problemen neem ik onder één noemen, de *Packomania macht* problemen.

In onderstaande tabellen worden alle resultaten van deze problemen gegeven:

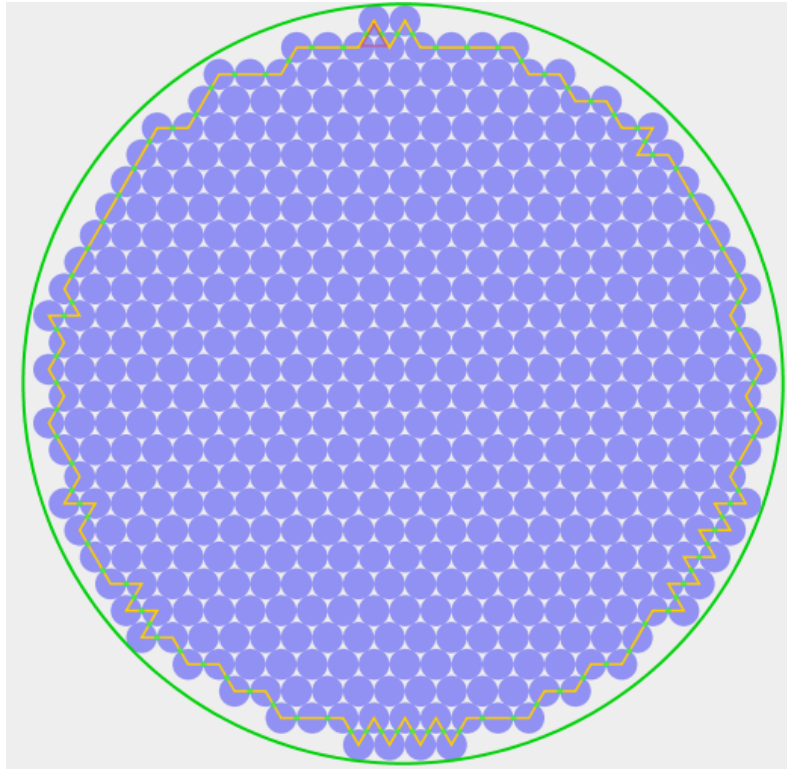


Figure 5.2: Packing voor 50 even grote cirkels

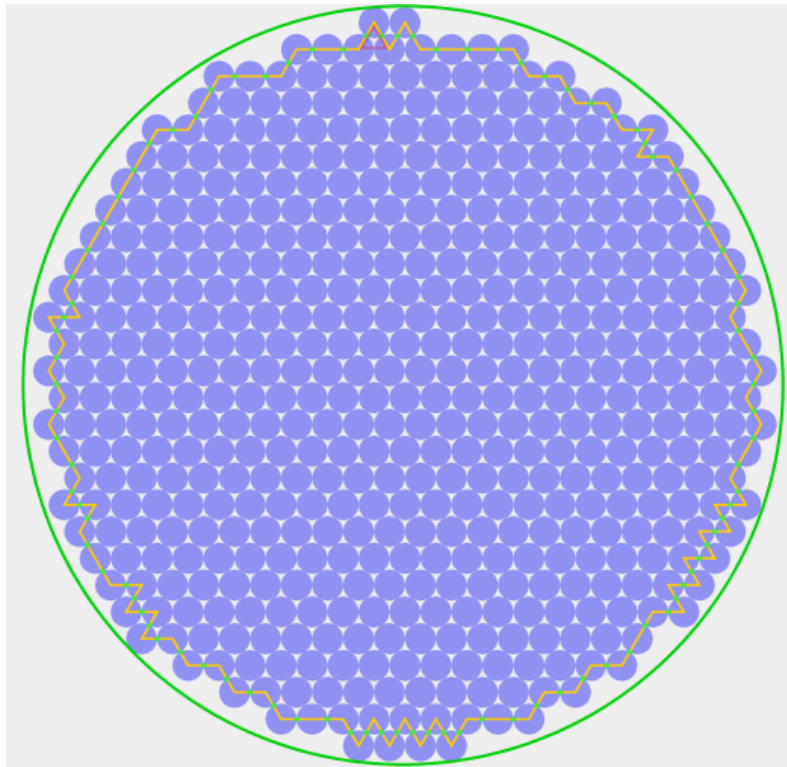


Figure 5.3: Packing voor 500 even grote cirkels

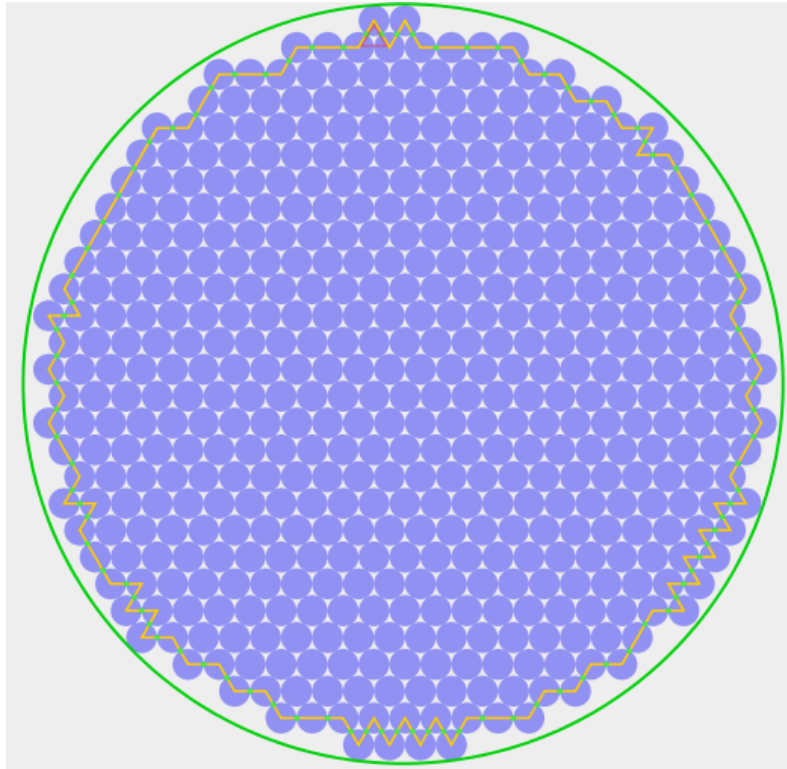


Figure 5.4: Packing voor 2000 even grote cirkels

Table 5.2: Packomania  $r_i = i$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	9.001397746	9.001397746	0.0000000000	0.00	0s:0ms
6	11.0570404	11.0570404	0.0000000000	0.00	0s:0ms
7	13.46211068	13.63864452	0.1765338429	1.31	0s:0ms
8	16.22174668	16.9084418	0.6866951196	4.23	0s:0ms
9	19.23319391	19.96907573	0.7358818171	3.83	0s:0ms
10	22.00019301	23.2877147	1.2875216823	5.85	0s:0ms
11	24.96063429	26.65104175	1.6904074596	6.77	0s:0ms
12	28.37138944	30.27869776	1.9073083282	6.72	0s:0ms
13	31.54586702	32.93900634	1.3931393191	4.42	0s:0ms
14	35.09564714	36.65714933	1.5615021892	4.45	0s:0ms
15	38.83799551	40.46917515	1.6311796458	4.20	0s:0ms
16	42.45811644	44.97670011	2.5185836705	5.93	0s:0ms
17	46.29134212	49.17727631	2.8859341932	6.23	0s:0ms
18	50.11976262	53.26425023	3.1444876017	6.27	0s:0ms
19	54.24029359	58.0413688	3.8010752065	7.01	0s:0ms
20	58.40056748	61.63712441	3.2365569305	5.54	0s:0ms
21	62.55887709	66.19614909	3.6372719987	5.81	0s:0ms
22	66.76028624	70.74575745	3.9854712097	5.97	0s:0ms
23	71.19946161	75.28800296	4.0885413566	5.74	0s:0ms
24	75.74914258	79.82437643	4.0752338484	5.38	0s:0ms

Table 5.2: Packomania  $r_i = i$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
25	80.28586444	85.20507608	4.9192116398	6.13	0s:0ms
26	84.97819107	89.93692251	4.9587314446	5.84	0s:0ms
27	89.75096268	94.88136225	5.1303995654	5.72	0s:0ms
28	94.5258771	99.86768794	5.3418108395	5.65	0s:1ms
29	99.48311156	106.2962349	6.8131233045	6.85	0s:1ms
30	104.5403638	111.0148098	6.4744460321	6.19	0s:1ms
31	109.6292407	117.0878782	7.4586375248	6.80	0s:1ms
32	114.7998147	123.1802853	8.3804706408	7.30	0s:1ms
33	120.0656596	128.215259	8.1495993452	6.79	0s:1ms
34	125.3669392	133.247447	7.8805077664	6.29	0s:1ms
35	130.8490788	138.2771663	7.4280874986	5.68	0s:1ms
36	136.3079108	144.6463617	8.3384509125	6.12	0s:1ms
37	141.7837334	152.4389507	10.6552172234	7.52	0s:1ms
38	147.4521165	158.3732762	10.9211597336	7.41	0s:1ms
39	153.1997434	163.7256474	10.5259040974	6.87	0s:1ms
40	159.0215769	170.8117726	11.7901957151	7.41	0s:1ms
41	164.8062304	177.004655	12.1984245382	7.40	0s:1ms
42	170.697811	182.440372	11.7425609294	6.88	0s:1ms
43	176.7326562	188.4172803	11.6846240215	6.61	0s:2ms
44	182.7726194	196.6620902	13.8894708123	7.60	0s:2ms
45	188.964969	202.5286416	13.5636726221	7.18	0s:2ms
46	195.2039014	207.3758687	12.1719673837	6.24	0s:2ms
47	201.4861933	212.7149266	11.2287332287	5.57	0s:2ms
48	207.8008434	220.8336262	13.0327828219	6.27	0s:2ms
49	214.1809301	227.3484969	13.1675667664	6.15	0s:2ms
50	220.5654003	234.0553916	13.4899913627	6.12	0s:2ms
51	227.6803362	240.1831765	12.5028402517	5.49	0s:2ms
52	234.4402714	247.2368978	12.7966263895	5.46	0s:2ms
53	241.13286	255.7171621	14.5843020125	6.05	0s:2ms
54	247.8032878	262.868371	15.0650832017	6.08	0s:2ms
55	254.7210367	268.5141407	13.7931039905	5.41	0s:3ms
56	261.640041	274.9108253	13.2707843507	5.07	0s:3ms
57	268.4240815	282.8776937	14.4536122679	5.38	0s:3ms
58	275.4715577	289.605714	14.1341563166	5.13	0s:3ms
59	282.3339759	299.2757681	16.9417921475	6.00	0s:3ms
60	289.3422659	304.6812371	15.3389711825	5.30	0s:3ms
61	296.717773	313.9597079	17.2419348953	5.81	0s:3ms
62	303.7777367	323.9177529	20.1400161641	6.63	0s:3ms
63	310.9235322	332.2123812	21.2888489762	6.85	0s:3ms
64	318.5409988	340.6053063	22.0643074867	6.93	0s:3ms
65	325.5680022	347.0994671	21.5314649851	6.61	0s:3ms
66	333.243233	354.4394593	21.1962262651	6.36	0s:3ms
67	340.7251536	362.181251	21.4560974215	6.30	0s:3ms

Table 5.2: Packomania  $r_i = i$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
68	348.1910155	370.3151028	22.1240873386	6.35	0s:4ms
69	355.6061123	376.9371949	21.3310825298	6.00	0s:4ms
70	363.5378366	388.0662131	24.5283764994	6.75	0s:4ms
71	371.3559914	392.3562249	21.0002335141	5.66	0s:4ms
72	378.9536133	402.5022428	23.5486294950	6.21	0s:4ms
73	386.7761998	411.6110859	24.8348860634	6.42	0s:4ms
74	394.6660409	420.7679123	26.1018713787	6.61	0s:4ms
75	402.3461644	424.7177231	22.3715586755	5.56	0s:4ms
76	410.1895435	432.5052319	22.3156883095	5.44	0s:4ms
77	418.5499612	443.6467399	25.0967787844	6.00	0s:4ms
78	426.3941267	451.6199239	25.2257972078	5.92	0s:4ms
79	434.7680082	461.4070427	26.6390345424	6.13	0s:4ms
80	442.7191587	468.0681694	25.3490106831	5.73	0s:5ms
81	450.9036642	475.5595161	24.6558519794	5.47	0s:4ms
82	459.3903517	486.5415641	27.1512124091	5.91	0s:5ms
83	467.6800865	494.9875395	27.3074530526	5.84	0s:5ms
84	475.8025872	503.1575199	27.3549327168	5.75	0s:5ms
85	484.4776292	512.2361165	27.7584873045	5.73	0s:5ms
86	492.7211187	521.9387989	29.2176801460	5.93	0s:5ms
87	501.3589996	530.6873361	29.3283365110	5.85	0s:6ms
88	509.9171158	535.810191	25.8930752125	5.08	0s:5ms
89	518.3668565	545.4204186	27.0535621118	5.22	0s:5ms
90	526.9030101	554.9318685	28.0288584034	5.32	0s:6ms
91	535.6241529	563.8084375	28.1842846818	5.26	0s:6ms
92	544.4518726	572.9225881	28.4707155757	5.23	0s:5ms
93	553.2844216	581.3293274	28.0449058225	5.07	0s:5ms
94	562.2873009	590.033592	27.7462911062	4.93	0s:6ms
95	570.9739657	599.2930087	28.3190430029	4.96	0s:6ms
96	579.9547414	612.6535248	32.6987833884	5.64	0s:6ms
97	589.1016036	618.6339788	29.5323752126	5.01	0s:6ms
98	598.0873457	628.7495879	30.6622421306	5.13	0s:6ms
99	607.2130456	640.7227437	33.5096980965	5.52	0s:6ms
100	615.8676392	654.2342342	38.3665949658	6.23	0s:6ms
101	625.4129166	654.7565755	29.3436589135	4.69	0s:6ms
102	635.0014481	666.8855903	31.8841421988	5.02	0s:6ms
103	644.0261452	679.660035	35.6338898842	5.53	0s:6ms
104	653.2488265	687.260894	34.0120675068	5.21	0s:7ms
105	662.757924	694.7227123	31.9647883149	4.82	0s:7ms
106	672.3912463	705.6561613	33.2649149921	4.95	0s:7ms
107	681.7774575	713.2447002	31.4672427496	4.62	0s:6ms
108	691.021475	725.6010759	34.5796008747	5.00	0s:7ms
109	700.2736046	735.262392	34.9887873584	5.00	0s:7ms
110	710.0999889	745.7975534	35.6975644566	5.03	0s:7ms



Table 5.2: Packomania  $r_i = i$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
111	719.5987078	758.1779863	38.5792784127	5.36	0s:8ms
112	728.9808997	769.5217717	40.5408719841	5.56	0s:8ms
113	739.2681393	779.6794931	40.4113538763	5.47	0s:8ms
114	748.9170311	790.0110369	41.0940057618	5.49	0s:8ms
115	758.5403224	800.4993412	41.9590188761	5.53	0s:8ms
116	768.0575864	811.9736432	43.9160567286	5.72	0s:9ms
117	778.0802266	823.8439535	45.7637268808	5.88	0s:8ms
118	787.955193	830.3459981	42.3908051008	5.38	0s:8ms
119	797.8699489	842.9611167	45.0911678906	5.65	0s:8ms
120	808.3093264	853.4123081	45.1029817409	5.58	0s:8ms
121	818.2475492	859.0828754	40.8353261717	4.99	0s:8ms
122	828.1642448	872.3640645	44.1998196689	5.34	0s:9ms
123	837.9108474	883.3198174	45.4089699367	5.42	0s:9ms
124	848.265692	888.5239112	40.2582192058	4.75	0s:8ms
125	858.5698155	906.9182567	48.3484411811	5.63	0s:9ms
126	868.7452097	919.1873186	50.4421088463	5.81	0s:9ms
127	878.9113552	929.1894792	50.2781240664	5.72	0s:9ms
128	889.4083279	940.6625452	51.2542173032	5.76	0s:9ms
129	899.3794711	939.0402908	39.6608196933	4.41	0s:10ms
130	910.0149851	956.4974894	46.4825042620	5.11	0s:9ms
131	920.3565478	964.284437	43.9278891473	4.77	0s:9ms
132	931.0037789	978.8995627	47.8957838592	5.14	0s:10ms
133	941.572814	992.651323	51.0785089994	5.42	0s:10ms
134	951.4867325	999.1692947	47.6825622415	5.01	0s:10ms
135	962.6267783	1011.670356	49.0435779611	5.09	0s:10ms
136	973.5501094	1023.408578	49.8584681961	5.12	0s:11ms
137	983.6545581	1039.839059	56.1845006701	5.71	0s:11ms
138	994.589987	1046.579775	51.9897882140	5.23	0s:11ms
139	1005.134043	1060.799299	55.6652552216	5.54	0s:11ms
140	1016.243955	1066.391406	50.1474504792	4.93	0s:11ms
141	1027.012735	1075.826455	48.8137198003	4.75	0s:11ms
142	1038.033343	1091.535835	53.5024911515	5.15	0s:12ms
143	1048.086632	1105.062108	56.9754760099	5.44	0s:11ms
144	1059.610594	1118.135792	58.5251983013	5.52	0s:11ms
145	1070.299995	1128.198594	57.8985985688	5.41	0s:11ms
146	1081.849804	1137.382853	55.5330488821	5.13	0s:12ms
147	1092.224839	1146.180093	53.9552534597	4.94	0s:11ms
148	1103.625998	1157.325822	53.6998239456	4.87	0s:12ms
149	1114.562888	1170.783856	56.2209683647	5.04	0s:12ms
150	1125.962247	1179.834746	53.8724990106	4.78	0s:12ms
151	1136.450736	1188.206974	51.7562382973	4.55	0s:12ms
152	1148.381201	1198.503306	50.1221048286	4.36	0s:12ms
153	1159.288108	1211.469481	52.1813720335	4.50	0s:13ms

Table 5.2: Packomania  $r_i = i$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
154	1170.008519	1221.771848	51.7633292913	4.42	0s:12ms
155	1182.306413	1232.750873	50.4444602860	4.27	0s:12ms
156	1193.219558	1241.96315	48.7435918571	4.09	0s:13ms
157	1205.242985	1257.673634	52.4306489161	4.35	0s:13ms
158	1216.514329	1272.623712	56.1093833890	4.61	0s:13ms
159	1227.02294	1287.046839	60.0238985772	4.89	0s:14ms
160	1238.93349	1297.811321	58.8778314960	4.75	0s:13ms
161	1251.042708	1309.194957	58.1522496450	4.65	0s:13ms
162	1262.789645	1325.157536	62.3678910466	4.94	0s:14ms
163	1273.875363	1340.254659	66.3792957824	5.21	0s:13ms
164	1286.025828	1355.126621	69.1007934484	5.37	0s:14ms
165	1297.507389	1360.843465	63.3360754563	4.88	0s:14ms
166	1309.139789	1372.652535	63.5127460293	4.85	0s:14ms
167	1321.053819	1380.367699	59.3138806314	4.49	0s:14ms
168	1332.790901	1396.706975	63.9160738570	4.80	0s:14ms
169	1344.525206	1408.899427	64.3742216180	4.79	0s:14ms
170	1356.179054	1421.473252	65.2941986483	4.81	0s:17ms
171	1368.338575	1436.819503	68.4809275612	5.00	0s:15ms
172	1380.333616	1443.901427	63.5678107594	4.61	0s:15ms
173	1391.879458	1456.325953	64.4464957907	4.63	0s:15ms
174	1403.566254	1471.496936	67.9306813422	4.84	0s:15ms
175	1415.989735	1485.609411	69.6196752979	4.92	0s:15ms
176	1428.497598	1498.150763	69.6531648576	4.88	0s:15ms
177	1440.624114	1520.601441	79.9773270606	5.55	0s:15ms
178	1452.757272	1533.313102	80.5558307306	5.55	0s:16ms
179	1464.812903	1544.279674	79.4667714894	5.43	0s:15ms
180	1476.565762	1549.253422	72.6876600373	4.92	0s:16ms
181	1489.017452	1567.397547	78.3800946877	5.26	0s:16ms
182	1501.087384	1582.428192	81.3408078754	5.42	0s:17ms
183	1514.01682	1586.179083	72.1622628565	4.77	0s:16ms
184	1525.885179	1608.260257	82.3750775373	5.40	0s:16ms
185	1537.376408	1619.244541	81.8681332884	5.33	0s:16ms
186	1550.809164	1630.783013	79.9738492793	5.16	0s:16ms
187	1563.028446	1641.222098	78.1936519827	5.00	0s:17ms
188	1575.802178	1658.869995	83.0678169214	5.27	0s:18ms
189	1588.346875	1670.718704	82.3718286801	5.19	0s:17ms
190	1600.66992	1684.525388	83.8554676059	5.24	0s:17ms
191	1613.286429	1691.729998	78.4435689224	4.86	0s:17ms
192	1626.176015	1707.916237	81.7402226434	5.03	0s:18ms
193	1638.978104	1722.336844	83.3587400976	5.09	0s:18ms
194	1651.184614	1733.930788	82.7461736083	5.01	0s:18ms
195	1663.511587	1742.176526	78.6649392823	4.73	0s:18ms
196	1676.838498	1757.798572	80.9600734542	4.83	0s:17ms

Table 5.2: Packomania  $r_i = i$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
197	1688.921565	1770.904998	81.9834328647	4.85	0s:18ms
198	1701.700662	1782.097388	80.3967258220	4.72	0s:18ms
199	1714.696039	1797.645421	82.9493820303	4.84	0s:19ms
200	1726.221913	1807.004915	80.7830024141	4.68	0s:20ms

Table 5.3: Packomania  $r_i = i^{1/2}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	4.521480277	4.645331059	0.1238507820	2.74	0s:0ms
6	5.35096299	5.565200476	0.2142374858	4.00	0s:0ms
7	6.049378486	6.313171861	0.2637933742	4.36	0s:0ms
8	6.774266652	7.011200784	0.2369341324	3.50	0s:0ms
9	7.559002377	7.645002451	0.0860000737	1.14	0s:0ms
10	8.303468122	8.773595833	0.4701277110	5.66	0s:0ms
11	9.072125879	9.564217949	0.4920920696	5.42	0s:0ms
12	9.865320304	10.47459566	0.6092753519	6.18	0s:0ms
13	10.58832629	11.28988685	0.7015605668	6.63	0s:0ms
14	11.36497759	12.03662293	0.6716453426	5.91	0s:0ms
15	12.0755266	12.73140124	0.6558746339	5.43	0s:0ms
16	12.81931152	13.54360586	0.7242943423	5.65	0s:0ms
17	13.58212394	14.56084288	0.9787189360	7.21	0s:0ms
18	14.32496989	15.462612	1.1376421126	7.94	0s:0ms
19	15.03535243	16.1728907	1.1375382697	7.57	0s:0ms
20	15.80237882	16.99625392	1.1938751032	7.56	0s:0ms
21	16.55930116	17.78557896	1.2262778069	7.41	0s:0ms
22	17.29396452	18.52909152	1.2351270012	7.14	0s:0ms
23	18.0499852	19.23530642	1.1853212204	6.57	0s:0ms
24	18.79875241	19.91971384	1.1209614357	5.96	0s:0ms
25	19.5506756	20.66318875	1.1125131521	5.69	0s:0ms
26	20.2902618	22.23042619	1.9401643933	9.56	0s:0ms
27	21.06193173	22.9880056	1.9260738751	9.14	0s:1ms
28	21.79712527	23.71343628	1.9163110120	8.79	0s:1ms
29	22.54735751	24.41115787	1.8638003585	8.27	0s:1ms
30	23.25868018	25.19760804	1.9389278525	8.34	0s:1ms
31	24.03727193	25.81304012	1.7757681886	7.39	0s:1ms
32	24.78200903	26.41001473	1.6280056998	6.57	0s:1ms
33	25.54486052	27.14270567	1.5978451512	6.26	0s:1ms
34	26.30459206	28.23676513	1.9321730714	7.35	0s:1ms
35	27.03382245	29.1675068	2.1336843460	7.89	0s:1ms
36	27.77995711	29.74228203	1.9623249292	7.06	0s:1ms
37	28.52327223	30.55237025	2.0290980255	7.11	0s:1ms
38	29.2801575	31.32911627	2.0489587647	7.00	0s:1ms
39	30.02551081	32.07750685	2.0519960334	6.83	0s:1ms

Table 5.3: Packomania  $r_i = i^{1/2}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
40	30.75824676	32.80128099	2.0430342306	6.64	0s:1ms
41	31.5074417	33.67925509	2.1718133896	6.89	0s:1ms
42	32.27253417	34.41887774	2.1463435677	6.65	0s:2ms
43	33.01068077	35.03290206	2.0222212869	6.13	0s:2ms
44	33.76125465	35.99501679	2.2337621450	6.62	0s:2ms
45	34.52293182	36.88407979	2.3611479634	6.84	0s:2ms
46	35.24429078	37.49808526	2.2537944845	6.39	0s:2ms
47	35.99250776	38.21813911	2.2256313508	6.18	0s:2ms
48	36.76013222	38.92008922	2.1599570026	5.88	0s:2ms
49	37.46753983	39.73435907	2.2668192423	6.05	0s:2ms
50	38.25556972	40.53178138	2.2762116663	5.95	0s:2ms
51	38.98768932	42.15091723	3.1632279036	8.11	0s:2ms
52	39.74306968	42.89795161	3.1548819271	7.94	0s:2ms
53	40.48968483	43.52039716	3.0307123211	7.49	0s:2ms
54	41.23581075	44.15285577	2.9170450216	7.07	0s:3ms
55	41.98271338	45.00105715	3.0183437706	7.19	0s:3ms
56	42.72931327	45.64420809	2.9148948170	6.82	0s:3ms
57	43.50080653	46.45103577	2.9502292405	6.78	0s:3ms
58	44.22194556	47.13057987	2.9086343035	6.58	0s:3ms
59	44.9825593	48.18944065	3.2068813482	7.13	0s:3ms
60	45.70598269	48.92807634	3.2220936565	7.05	0s:3ms
61	46.47167529	50.12902499	3.6573496935	7.87	0s:3ms
62	47.19034394	50.84643939	3.6560954536	7.75	0s:4ms
63	47.96038659	51.56087869	3.6004921000	7.51	0s:4ms
64	48.70530574	51.94948876	3.2441830170	6.66	0s:4ms
65	49.42245241	52.65486666	3.2324142527	6.54	0s:4ms
66	50.18742036	53.35552985	3.1681094893	6.31	0s:4ms
67	50.90373739	54.0422335	3.1384961055	6.17	0s:4ms
68	51.64886468	54.85582673	3.2069620523	6.21	0s:5ms
69	52.44298308	55.77600995	3.3330268692	6.36	0s:5ms
70	53.18043899	56.43020596	3.2497669710	6.11	0s:4ms
71	53.93496914	57.13993526	3.2049661248	5.94	0s:5ms
72	54.65674105	57.98591706	3.3291760153	6.09	0s:5ms
73	55.42818864	58.92061484	3.4924262054	6.30	0s:5ms
74	56.17979032	59.38454976	3.2047594461	5.70	0s:5ms
75	56.88186606	60.37897148	3.4971054144	6.15	0s:6ms
76	57.65288799	61.03664465	3.3837566627	5.87	0s:5ms
77	58.42166044	61.73259783	3.3109373885	5.67	0s:5ms
78	59.1476465	62.57629857	3.4286520715	5.80	0s:6ms
79	59.86847145	63.39927675	3.5308053035	5.90	0s:6ms
80	60.63356054	64.2854286	3.6518680539	6.02	0s:6ms
81	61.38066647	65.02500355	3.6443370809	5.94	0s:6ms
82	62.10506478	65.65078433	3.5457195519	5.71	0s:6ms

Table 5.3: Packomania  $r_i = i^{1/2}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
83	62.88171517	66.23500237	3.3532871953	5.33	0s:6ms
84	63.62031086	67.45460619	3.8342953230	6.03	0s:6ms
85	64.37295794	68.32063478	3.9476768349	6.13	0s:6ms
86	65.10351537	68.97796537	3.8744500057	5.95	0s:6ms
87	65.85511151	69.71427598	3.8591644643	5.86	0s:6ms
88	66.52181857	70.94485009	4.4230315140	6.65	0s:6ms
89	67.3413989	71.79373861	4.4523397045	6.61	0s:7ms
90	68.08292742	72.11066047	4.0277330422	5.92	0s:7ms
91	68.83792287	72.81415128	3.9762284068	5.78	0s:7ms
92	69.58671058	73.49111243	3.9044018523	5.61	0s:7ms
93	70.31569892	74.27702903	3.9613301133	5.63	0s:7ms
94	71.03023084	75.33180092	4.3015700839	6.06	0s:8ms
95	71.82403089	76.50249183	4.6784609402	6.51	0s:8ms
96	72.54565607	77.36198139	4.8163253140	6.64	0s:7ms
97	73.30173645	78.05100651	4.7492700614	6.48	0s:7ms
98	74.06394605	78.39015055	4.3262045063	5.84	0s:8ms
99	74.80086926	79.06946294	4.2685936749	5.71	0s:8ms
100	75.54699422	79.96233173	4.4153375112	5.84	0s:8ms

Table 5.4: Packomania  $r_i = i^{-1/5}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	2.244615846	2.417764166	0.1731483194	7.71	0s:0ms
6	2.387986383	2.490641404	0.1026550210	4.30	0s:0ms
7	2.422623343	2.541024002	0.1184006594	4.89	0s:0ms
8	2.523820904	2.802493413	0.2786725086	11.04	0s:0ms
9	2.630026572	2.893082814	0.2630562428	10.00	0s:0ms
10	2.715784826	3.043778646	0.3279938201	12.08	0s:0ms
11	2.767466306	3.06381508	0.2963487739	10.71	0s:0ms
12	2.829018403	3.06381508	0.2347966767	8.30	0s:0ms
13	2.92391778	3.146230401	0.2223126209	7.60	0s:0ms
14	2.984783969	3.31986946	0.3350854907	11.23	0s:0ms
15	3.040492052	3.31986946	0.2793774083	9.19	0s:0ms
16	3.096414432	3.33097666	0.2345622289	7.58	0s:0ms
17	3.15212915	3.438918964	0.2867898134	9.10	0s:0ms
18	3.214823783	3.529068281	0.3142444981	9.77	0s:0ms
19	3.259332781	3.574355458	0.3150226770	9.67	0s:0ms
20	3.311831017	3.595528088	0.2836970703	8.57	0s:0ms
21	3.36159381	3.813698731	0.4521049215	13.45	0s:0ms
22	3.411451256	3.813698731	0.4022474751	11.79	0s:0ms
23	3.450137359	3.826191897	0.3760545382	10.90	0s:0ms
24	3.502510278	3.849500792	0.3469905142	9.91	0s:0ms
25	3.545245578	3.849500792	0.3042552139	8.58	0s:0ms

Table 5.4: Packomania  $r_i = i^{-1/5}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
26	3.591133783	3.969766564	0.3786327815	10.54	0s:1ms
27	3.632687191	4.057652417	0.4249652256	11.70	0s:1ms
28	3.673947341	4.057652417	0.3837050759	10.44	0s:1ms
29	3.709614743	4.102992738	0.3933779955	10.60	0s:1ms
30	3.753020534	4.102992738	0.3499722044	9.33	0s:1ms
31	3.794636899	4.100467051	0.3058301526	8.06	0s:1ms
32	3.826360682	4.161242705	0.3348820228	8.75	0s:1ms
33	3.866024486	4.161242705	0.2952182183	7.64	0s:1ms
34	3.901727549	4.27545313	0.3737255803	9.58	0s:1ms
35	3.936688768	4.291727438	0.3550386705	9.02	0s:1ms
36	3.969717962	4.308499631	0.3387816690	8.53	0s:1ms
37	4.006158224	4.360397929	0.3542397051	8.84	0s:1ms
38	4.038554895	4.363613142	0.3250582469	8.05	0s:1ms
39	4.074618568	4.457940853	0.3833222845	9.41	0s:1ms
40	4.105672784	4.500185046	0.3945122618	9.61	0s:2ms
41	4.129990611	4.500185046	0.3701944350	8.96	0s:2ms
42	4.170056305	4.516843613	0.3467873080	8.32	0s:2ms
43	4.196545217	4.556691854	0.3601466376	8.58	0s:2ms
44	4.230014441	4.556691854	0.3266774127	7.72	0s:2ms
45	4.258819887	4.559478152	0.3006582655	7.06	0s:2ms
46	4.279963899	4.578989471	0.2990255718	6.99	0s:2ms
47	4.31934031	4.684566353	0.3652260424	8.46	0s:2ms
48	4.340298255	4.718254714	0.3779564595	8.71	0s:2ms
49	4.369922887	4.718254714	0.3483318277	7.97	0s:2ms
50	4.398199789	4.718254714	0.3200549252	7.28	0s:2ms
51	4.421005635	4.789771253	0.3687656172	8.34	0s:3ms
52	4.457103013	4.79446383	0.3373608175	7.57	0s:3ms
53	4.481095278	4.88401277	0.4029174922	8.99	0s:3ms
54	4.507233924	4.94871256	0.4414786359	9.79	0s:3ms
55	4.533359692	4.94871256	0.4153528680	9.16	0s:3ms
56	4.552402168	4.94871256	0.3963103920	8.71	0s:3ms
57	4.583331939	4.960637843	0.3773059034	8.23	0s:3ms
58	4.604279546	5.006194354	0.4019148082	8.73	0s:3ms
59	4.633931987	5.015140166	0.3812081781	8.23	0s:3ms
60	4.661004393	5.039668431	0.3786640380	8.12	0s:3ms
61	4.67975982	5.039668431	0.3599086110	7.69	0s:3ms
62	4.703936871	5.08559604	0.3816591685	8.11	0s:4ms
63	4.734693491	5.08559604	0.3509025491	7.41	0s:4ms
64	4.754788576	5.09503129	0.3402427132	7.16	0s:4ms

Table 5.5: Packomania  $r_i = i^{-1/2}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	1.751552455	1.802472656	0.0509202011	2.91	0s:0ms
6	1.810076939	1.873533983	0.0634570432	3.51	0s:0ms
7	1.838724068	1.963882951	0.1251588836	6.81	0s:0ms
8	1.858400955	1.963882951	0.1054819968	5.68	0s:0ms
9	1.878812755	2.003759856	0.1249471003	6.65	0s:0ms
10	1.913435515	2.054440116	0.1410046004	7.37	0s:0ms
11	1.929187751	2.055014716	0.1258269651	6.52	0s:0ms
12	1.949823437	2.0660242	0.1162007622	5.96	0s:0ms
13	1.965236819	2.113388316	0.1481514969	7.54	0s:0ms
14	1.980248748	2.14077957	0.1605308220	8.11	0s:0ms
15	1.992709274	2.14077957	0.1480702960	7.43	0s:0ms
16	2.004585778	2.140794139	0.1362083606	6.79	0s:0ms
17	2.015257783	2.140794139	0.1255363550	6.23	0s:0ms
18	2.028148582	2.161557565	0.1334089823	6.58	0s:0ms
19	2.041997315	2.189486219	0.1474889039	7.22	0s:0ms
20	2.051442268	2.195567792	0.1441255240	7.03	0s:0ms
21	2.062331108	2.195567792	0.1332366847	6.46	0s:0ms
22	2.06796317	2.195567792	0.1276046224	6.17	0s:0ms
23	2.079772368	2.195567792	0.1157954243	5.57	0s:0ms
24	2.090383164	2.212125838	0.1217426733	5.82	0s:0ms
25	2.097527836	2.212125838	0.1145980019	5.46	0s:0ms
26	2.107630171	2.212125838	0.1044956670	4.96	0s:0ms
27	2.115890492	2.212125838	0.0962353458	4.55	0s:1ms
28	2.122849176	2.25561005	0.1327608737	6.25	0s:1ms
29	2.13197913	2.26989985	0.1379207195	6.47	0s:1ms
30	2.137483926	2.26989985	0.1324159233	6.19	0s:1ms
31	2.148983307	2.272391577	0.1234082702	5.74	0s:1ms
32	2.155354151	2.272391577	0.1170374256	5.43	0s:1ms
33	2.165803682	2.300760835	0.1349571532	6.23	0s:1ms
34	2.174364112	2.300760835	0.1263967230	5.81	0s:1ms
35	2.171162102	2.303126269	0.1319641666	6.08	0s:1ms
36	2.184151152	2.31172537	0.1275742188	5.84	0s:1ms
37	2.190324008	2.31172537	0.1214013622	5.54	0s:1ms
38	2.200283193	2.327362681	0.1270794878	5.78	0s:1ms
39	2.207438262	2.327362681	0.1199244191	5.43	0s:2ms
40	2.215788047	2.336852047	0.1210639995	5.46	0s:2ms
41	2.221496388	2.336852047	0.1153556592	5.19	0s:2ms
42	2.225063517	2.348630674	0.1235671577	5.55	0s:2ms
43	2.225967367	2.348630674	0.1226633073	5.51	0s:2ms
44	2.22976905	2.348630674	0.1188616248	5.33	0s:2ms
45	2.235330122	2.348630674	0.1133005522	5.07	0s:2ms
46	2.24069414	2.348630674	0.1079365346	4.82	0s:2ms
47	2.251179399	2.348630674	0.0974512759	4.33	0s:2ms

Table 5.5: Packomania  $r_i = i^{-1/2}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
48	2.2546717	2.348630674	0.0939589745	4.17	0s:3ms
49	2.259576657	2.348630674	0.0890540172	3.94	0s:3ms
50	2.263343706	2.348630674	0.0852869681	3.77	0s:3ms
51	2.270868233	2.361262988	0.0903947555	3.98	0s:3ms
52	2.279267038	2.367760412	0.0884933744	3.88	0s:3ms
53	2.281766324	2.367760412	0.0859940880	3.77	0s:3ms
54	2.284519164	2.381915573	0.0973964091	4.26	0s:7ms
55	2.285947292	2.383596802	0.0976495093	4.27	0s:4ms
56	2.285979541	2.383596802	0.0976172611	4.27	0s:4ms
57	2.288534442	2.384328728	0.0957942864	4.19	0s:4ms
58	2.292664714	2.385305153	0.0926404388	4.04	0s:4ms
59	2.296297312	2.38689011	0.0905927983	3.95	0s:4ms
60	2.306501919	2.407776328	0.1012744095	4.39	0s:4ms
61	2.311319628	2.409449022	0.0981293940	4.25	0s:4ms
62	2.317481916	2.409449022	0.0919671063	3.97	0s:4ms
63	2.318797322	2.409449022	0.0906517004	3.91	0s:4ms
64	2.320980355	2.409449022	0.0884686673	3.81	0s:5ms
65	2.321469818	2.413031572	0.0915617534	3.94	0s:5ms
66	2.324362904	2.416403418	0.0920405139	3.96	0s:5ms
67	2.332217263	2.416403418	0.0841861545	3.61	0s:5ms
68	2.334282511	2.416403418	0.0821209072	3.52	0s:5ms
69	2.341094038	2.416403418	0.0753093795	3.22	0s:5ms
70	2.344495311	2.41743353	0.0729382190	3.11	0s:5ms
71	2.348186028	2.434594573	0.0864085445	3.68	0s:6ms
72	2.348822083	2.434594573	0.0857724897	3.65	0s:6ms
73	2.347237572	2.434594573	0.0873570010	3.72	0s:7ms
74	2.35004496	2.439743433	0.0896984733	3.82	0s:6ms
75	2.352202465	2.439743433	0.0875409681	3.72	0s:7ms
76	2.352948629	2.446211033	0.0932624035	3.96	0s:7ms
77	2.357614973	2.458852324	0.1012373513	4.29	0s:8ms
78	2.354416639	2.458852324	0.1044356856	4.44	0s:7ms
79	2.355232406	2.458852324	0.1036199180	4.40	0s:7ms
80	2.35721057	2.458852324	0.1016417546	4.31	0s:7ms
81	2.358864905	2.462287263	0.1034223576	4.38	0s:9ms
82	2.362221053	2.462287263	0.1000662097	4.24	0s:9ms
83	2.364586515	2.469562772	0.1049762569	4.44	0s:8ms
84	2.367639497	2.470848575	0.1032090780	4.36	0s:8ms
85	2.369100792	2.477635185	0.1085343927	4.58	0s:9ms
86	2.374745075	2.477635185	0.1028901101	4.33	0s:9ms
87	2.37769523	2.477635185	0.0999399553	4.20	0s:8ms
88	2.378456936	2.477635185	0.0991782491	4.17	0s:10ms
89	2.382644831	2.477635185	0.0949903541	3.99	0s:14ms
90	2.388107932	2.477635185	0.0895272530	3.75	0s:9ms



Table 5.5: Packomania  $r_i = i^{-1/2}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
91	2.40120373	2.477635185	0.0764314548	3.18	0s:10ms
92	2.40172684	2.477635185	0.0759083455	3.16	0s:10ms
93	2.404023803	2.477635185	0.0736113818	3.06	0s:9ms
94	2.404197382	2.477635185	0.0734378028	3.05	0s:9ms
95	2.410782192	2.48978687	0.0790046782	3.28	0s:10ms
96	2.413190402	2.490964995	0.0777745929	3.22	0s:10ms
97	2.412677724	2.490964995	0.0782872702	3.24	0s:10ms
98	2.414386149	2.497843145	0.0834569954	3.46	0s:10ms
99	2.416192906	2.497843145	0.0816502382	3.38	0s:11ms
100	2.426033793	2.495438263	0.0694044704	2.86	0s:11ms

Table 5.6: Packomania  $r_i = i^{-2/3}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	1.629960525	1.629960525	0.0000000000	0.00	0s:0ms
6	1.629960525	1.629960525	0.0000000000	0.00	0s:0ms
7	1.62997278	1.653697845	0.0237250648	1.46	0s:0ms
8	1.631484075	1.654338063	0.0228539885	1.40	0s:0ms
9	1.637863996	1.679866987	0.0420029910	2.56	0s:0ms
10	1.646957238	1.679866987	0.0329097486	2.00	0s:0ms
11	1.650313825	1.682192134	0.0318783092	1.93	0s:0ms
12	1.656760259	1.683078469	0.0263182105	1.59	0s:0ms
13	1.662778033	1.714281175	0.0515031423	3.10	0s:0ms
14	1.670183528	1.729067653	0.0588841247	3.53	0s:0ms
15	1.673001055	1.729067653	0.0560665977	3.35	0s:0ms
16	1.679631815	1.73789466	0.0582628453	3.47	0s:0ms
17	1.683840973	1.73789466	0.0540536868	3.21	0s:0ms
18	1.686025242	1.738271955	0.0522467129	3.10	0s:0ms
19	1.689532602	1.770039695	0.0805070930	4.77	0s:0ms
20	1.696447725	1.770039695	0.0735919695	4.34	0s:0ms
21	1.698943028	1.770039695	0.0710966671	4.18	0s:0ms
22	1.700668034	1.770757259	0.0700892256	4.12	0s:0ms
23	1.703933782	1.770757259	0.0668234774	3.92	0s:0ms
24	1.705387705	1.770757259	0.0653695549	3.83	0s:0ms
25	1.712330424	1.770757259	0.0584268354	3.41	0s:0ms
26	1.714593298	1.771802524	0.0572092258	3.34	0s:0ms
27	1.718985638	1.785339316	0.0663536785	3.86	0s:1ms
28	1.721909048	1.785339316	0.0634302683	3.68	0s:1ms
29	1.722427772	1.785339316	0.0629115448	3.65	0s:1ms
30	1.725040754	1.785339316	0.0602985628	3.50	0s:1ms
31	1.72537599	1.785339316	0.0599633265	3.48	0s:1ms
32	1.727084673	1.785339316	0.0582546429	3.37	0s:1ms
33	1.731890808	1.785339316	0.0534485086	3.09	0s:1ms

Table 5.6: Packomania  $r_i = i^{-2/3}$ 

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
34	1.732984603	1.785339316	0.0523547133	3.02	0s:1ms
35	1.733788081	1.785339316	0.0515512354	2.97	0s:1ms
36	1.733942525	1.785339316	0.0513967910	2.96	0s:1ms
37	1.73433911	1.785480739	0.0511416288	2.95	0s:1ms
38	1.736647727	1.785480739	0.0488330114	2.81	0s:1ms
39	1.740163339	1.793653228	0.0534898894	3.07	0s:1ms
40	1.740440323	1.793653228	0.0532129052	3.06	0s:1ms
41	1.743049384	1.793653228	0.0506038436	2.90	0s:1ms
42	1.74463862	1.793653228	0.0490146083	2.81	0s:1ms
43	1.746050874	1.793653228	0.0476023541	2.73	0s:2ms
44	1.747310651	1.793653228	0.0463425767	2.65	0s:2ms
45	1.74702235	1.793653228	0.0466308777	2.67	0s:2ms
46	1.747830527	1.793653228	0.0458227015	2.62	0s:2ms
47	1.750876036	1.793653228	0.0427771925	2.44	0s:2ms
48	1.752745314	1.79723811	0.0444927958	2.54	0s:2ms
49	1.753835619	1.79723811	0.0434024905	2.47	0s:2ms
50	1.754493929	1.79723811	0.0427441809	2.44	0s:2ms
51	1.754510736	1.79723811	0.0427273733	2.44	0s:2ms
52	1.754548663	1.79723811	0.0426894470	2.43	0s:2ms
53	1.757284994	1.797834156	0.0405491620	2.31	0s:3ms
54	1.76113362	1.801421901	0.0402882810	2.29	0s:3ms
55	1.768231856	1.801421901	0.0331900447	1.88	0s:3ms
56	Missing	1.803122244			0s:3ms
57	1.772557462	1.803122244	0.0305647820	1.72	0s:3ms
58	1.772711083	1.803122244	0.0304111611	1.72	0s:3ms
59	1.774022224	1.803122244	0.0291000203	1.64	0s:3ms
60	1.772831554	1.806012683	0.0331811293	1.87	0s:3ms

Opmerking: Een oplossing voor 56 cirkels, met raddii  $r_i = i^{-2/3}$  miste op de Packomania website op het moment van het schrijven van deze thesis.

//TODO Vraag voor Patrick: Deze tabellen tonen een vergelijking alle problemen van op Packomania, behalve voor de gelijke grote cirkels aangezien dit anders meer dan 60 bladzijden voor één tabel zou zijn. De tabellen die er nu staan nemen echter ook wel wat paginas in beslag. Moet ik deze ook slechts deels tonen, of is het ok zo?

Gemiddeld geeft mijn algoritme een resultaat dat 5,61% groter is dan de best gekende resultaten. Nodige rekentijd is voor al deze problemen slechts enkele milliseconden.

Nodige rekentijd in de literatuur loopt op tot 6 uur in [2], tot 7 uur in [14] en zelfs meer dan een volledige dag (27 uur) in [21], voor slechts 30 cirkels (dit in vergelijking met één milliseconde voor mijn algoritme). Het snelste andere algoritme, tot zover ik weet, werd gegeven in [20]. Zij hadden tijden tussen 1 seconden voor 5 cirkels, en 1 uur voor 30 cirkels. Zij hadden echter geen goed stopping-criteria, en deze tijd was dus de tijd nodig alvorens ze hun beste oplossing vonden, maar hun algoritme bleef ongeacht meer dan 2,5 uur zoeken.

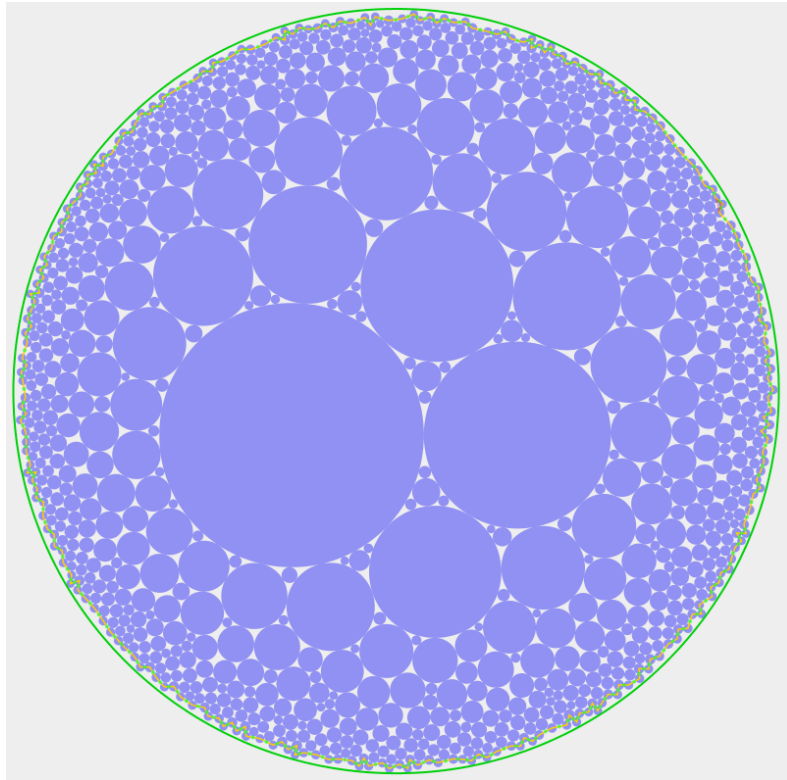


Figure 5.5: Packing voor 1000 cirkels met verdeling  $r_i = i^{-1/2}$

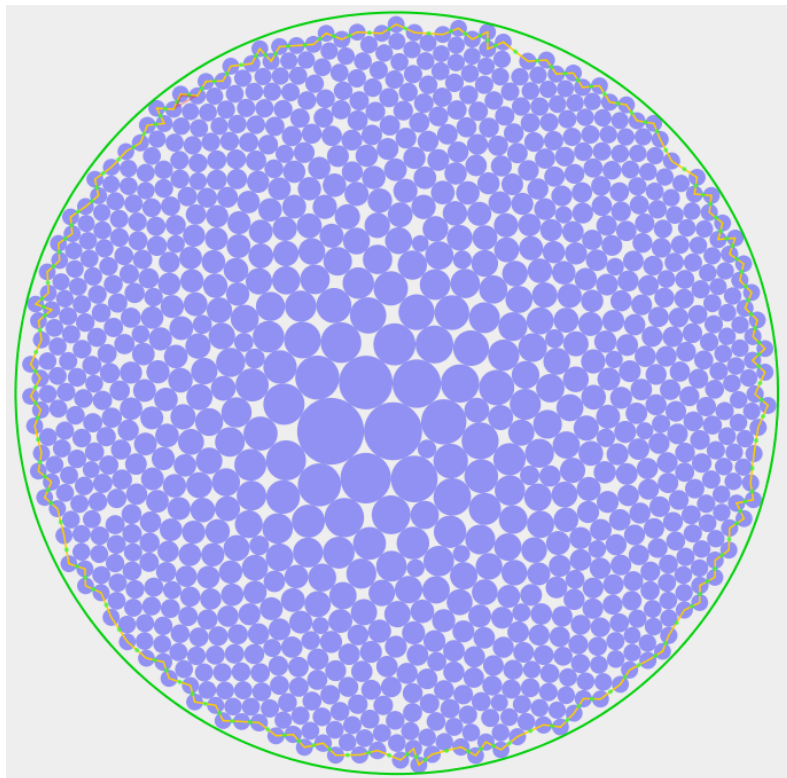


Figure 5.6: Packing voor 1000 cirkels met verdeling  $r_i = i^{-1/5}$

//TODO: Meer afbeeldingen van machten packings

### 5.1.3 Packomania Benchmark

Packomania geeft ook resultaten voor enkele benchmark instanties geïntroduceerd in [12]. Deze benchmark instanties hebben de volgende verdelingen:

Table 5.7: Packomania Benchmark Verdelingen

Instantie	N	Radii
NR10-1	10	10, 12, 15, 20, 21, 30, 30, 30, 40, 50
NR11-1	11	8.4, 11, 10, 10.5, 12, 14, 15, 20, 20, 25, 25
NR12-1	12	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
NR14-1	14	11, 14, 15, 16, 17, 19, 23, 27, 31, 35, 36, 37, 38, 40
NR15-1	15	3, 3, 4, 4, 4.5, 6, 7.5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
NR15-2	15	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
NR16-1	16	13, 14, 15, 15, 17, 19, 23, 26, 27, 27, 32, 37, 38, 47, 57, 63
NR16-2	16	21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
NR17-1	17	5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 10, 10, 10, 15, 15, 20, 25
NR18-1	18	12, 14, 16, 23, 25, 26, 27, 28, 33, 35, 47, 49, 53, 53, 55, 60, 67, 71
NR20-1	20	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42
NR20-2	20	6, 8, 9, 12, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 24, 27, 28, 30, 32, 33, 36, 40, 44
NR21-1	21	10, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 33, 34, 37, 37, 38, 39, 40, 42, 45
NR23-1	23	14, 14, 16, 18, 18, 21, 22, 23, 26, 28, 28, 32, 34, 34, 36, 37, 39, 41, 45, 48, 49, 49, 51
NR24-1	24	9, 10, 11, 13, 13, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 22, 23, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 82
NR25-1	25	14, 17, 22, 26, 26, 27, 28, 29, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 34, 34, 34, 35, 37, 37, 37, 47, 52, 53, 55
NR26-1	26	31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56
NR26-2	26	41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66
NR27-1	27	17, 21, 25, 26, 26, 27, 27, 28, 29, 33, 33, 34, 35, 35, 35, 37, 40, 42, 43, 44, 45, 49, 53, 55, 55, 55, 63
NR30-1	30	5, 8, 10, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 20, 20, 20, 20, 22, 24, 25, 26, 30, 30, 30, 30, 35, 40, 40, 45, 48, 50, 55, 60
NR30-2	30	6, 8, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 31, 33, 33, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 43, 48, 53
NR40-1	40	31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70
NR50-1	50	18, 18, 19, 19, 19, 19, 21, 21, 24, 25, 25, 30, 31, 31, 33, 33, 36, 36, 40, 42, 43, 46, 46, 47, 49, 49, 49, 50, 50, 54, 56, 56, 57, 57, 58, 58, 59, 59, 59, 61, 62, 63, 63, 64, 65, 68, 78, 79, 80, 86



Table 5.8: Packomania Benchmark Instances

Instantie	N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
NR10-1	10	99.88507689	105.2785764	5.3934994850	5.40	0s:0ms
NR11-1	11	60.70996139	64.21790153	3.5079401370	5.78	0s:1ms
NR12-1	12	65.02442247	69.5660027	4.5415802283	6.98	0s:0ms
NR14-1	14	113.5587629	119.9892774	6.4305144700	5.66	0s:1ms
NR15-1	15	38.91138667	40.83623531	1.9248486471	4.95	0s:1ms
NR15-2	15	38.83799551	40.46917515	1.6311796458	4.20	0s:0ms
NR16-1	16	143.3797811	153.1680967	9.7883156069	6.83	0s:0ms
NR16-2	16	127.6978254	138.852915	11.1550895980	8.74	0s:0ms
NR17-1	17	49.18730653	50.88962734	1.7023208042	3.46	0s:0ms
NR18-1	18	196.982624	207.315911	10.3332869685	5.25	0s:0ms
NR20-1	20	125.1177542	132.3922982	7.2745439975	5.81	0s:0ms
NR20-2	20	121.7887166	131.2593927	9.4706761087	7.78	0s:0ms
NR21-1	21	148.0967879	156.9650187	8.8682307593	5.99	0s:0ms
NR23-1	23	174.3425422	184.1686439	9.8261016920	5.64	0s:0ms
NR24-1	24	137.7590521	142.434406	4.6753539539	3.39	0s:1ms
NR25-1	25	188.7187899	199.1131651	10.3943751609	5.51	0s:1ms
NR26-1	26	244.5742803	264.8485458	20.2742655209	8.29	0s:1ms
NR26-2	26	300.2630794	331.9292039	31.6661245429	10.55	0s:1ms
NR27-1	27	220.659606	233.3093883	12.6497823783	5.73	0s:1ms
NR30-1	30	177.2586681	184.4651984	7.2065303184	4.07	0s:1ms
NR30-2	30	172.6501848	182.7352882	10.0851033839	5.84	0s:1ms
NR40-1	40	352.4026268	382.7128028	30.3101760009	8.60	0s:2ms
NR50-1	50	376.8063801	394.6690622	17.8626821409	4.74	0s:3ms
NR60-1	60	514.8363192	547.7523987	32.9160794969	6.39	0s:4ms
IN9-1	9	24.14213562	27.32050808	3.1783724520	13.17	0s:0ms
IN10-1	10	98.8354317	102.6159684	3.7805367434	3.83	0s:0ms
IN10-2	10	99.88507689	105.2785764	5.3934994850	5.40	0s:0ms
IN11-1	11	56.98440037	61.42216631	4.4377659420	7.79	0s:0ms
IN11-2	11	60.70996139	64.21790153	3.5079401370	5.78	0s:0ms
IN12-1	12	215.4700538	215.4700538	0.0000000000	0.00	0s:0ms
IN14-1	14	113.5587629	119.9892774	6.4305144700	5.66	0s:0ms
IN15-1	15	38.83799551	40.46917515	1.6311796458	4.20	0s:0ms
IN16-1	16	127.6978254	138.852915	11.1550895980	8.74	0s:0ms
IN17-1	17	49.18730653	50.88962734	1.7023208042	3.46	0s:0ms
IN17-2	17	241.4213562	273.2050808	31.7837245196	13.17	0s:0ms
IN25-1	25	21.54700538	22.53477869	0.9877733061	4.58	0s:0ms
IN28-1	28	21.54700538	21.54700538	0.0000000000	0.00	0s:1ms
IN162-1	162	11.40165346	11.92099073	0.5193372717	4.55	0s:27ms

Gemiddeld geeft mijn algoritme een resultaat dat 5,94% groter is dan de best gekende resultaten. In het slechtste geval krijg ik resultaten die 13.17% groter zijn. Maar in het beste geval zijn vind mijn algoritme een oplossing die even goed is als de best gekende! Nodige rekentijd is voor al deze problemen weer slechts enkele milliseconden.

In [20] worden deze problemen opgelost in tijden tussen 1 second voor 10 cirkels, en meer dan 2 uur voor 60 cirkels. Ook in [13] kan de nodige tijd oplopen tot meerdere uren voor de grotere problemen. Zelfs de kleinere problemen (10 tot 15 cirkels) vragen soms meerdere minuten om te berekenen. Dit in vergelijking met mijn heuristiek die slechts enkele milliseconden nodig heeft voor elk probleem.

## 5.2 Grotere aantallen cirkels

// TODO, laat pc enkele grotere aantallen berekenen.

## 5.3 Conclusie

In dit hoofdstuk heb ik oplossingen verkregen door mijn algoritme vergeleken met de best gekende packings. Ook heb ik kort de nodige rekentijd vergeleken met enkele andere algoritmen. De oplossingen verkregen met mijn nieuwe constructieve heuristiek hebben gemiddeld een minder dan 6% grotere omschreven cirkel. Dit lijkt mij een zeer aanvaardbare vergroting van de omschreven cirkel, rekening houdend dat het algoritme deze problemen in slechts milliseconden op lost. Zelfs de grootste problemen, bestaande uit duizenden cirkels, kunnen in slechts enkele seconden opgelost worden.

# Hoofdstuk 6

## Bedenkingen

### 6.1 Precisie

De implementatie gebruikt *double* variabelen voor getallen voor te stellen. Ook geeft de methode gebruikt om cirkels tegen elkaar te plaatsen, beschreven in sectie 4.5, geen exacte oplossing. Hierdoor wordt er doorheen het algoritme een kleine fout opgebouwd. Deze fout uit zich in een kleine overlap in de uiteindelijke verkregen packing. Deze overlap blijft echter beperkt tot  $10^{-15}$  vierkante eenheden voor de grootste packings.

### 6.2 Veronderstellingen

Zoals eerder vermeld worden er, bij de gaten en shell, enkele veronderstellingen gedaan om het algoritme zeer snel te laten verlopen. Deze veronderstellingen lijken voor de meeste problemen correct te zijn. Er zijn echter sommige problemen, vooral als er gewerkt wordt met zeer hoge aantallen cirkels (duizenden), dat er toch nog fouten kunnen gebeuren. Dit uit zich dan in packings met een grote overlap.

Uit huidige tests lijkt er vooral een probleem met de gaten, de shell heeft voor zover mijn huidige tests uitwijzen geen problemen. Doordat de cirkels die een gat definiëren niet altijd aan elkaar raken kan het gebeuren, als twee gaten naast elkaar staan, er toch nog een overlap is.

Een voorstel om dit op te lossen is een gat niet op te delen in drie gaten als er een cirkel in geplaatst wordt, maar slechts in twee. Eén van die gaten bestaat dan uit meer dan drie cirkels. Zo is het wel mogelijk om altijd aaneensluitende cirkels een gat te laten bepalen.



# Hoofdstuk 7

## Verder werk

In dit hoofdstuk geef ik enkele voorstellen voor verdere uitwerkingen van het algoritme. Mogelijke verbeteringen, zowel in snelheid als kwaliteit van uitkomsten. Dit zijn mogelijke ideeën om in de toekomst op verder te werken.

### 7.1 Constante-tijd omschreven cirkel

In het algoritme bij het plaatsen op de shell wordt gebruik gemaakt van de omschreven cirkel van de huidige tussen-oplossing. Deze omschreven cirkel wordt berekend in lineaire tijd ten opzichte van het aantal cirkels op de shell. Dit geeft dan de kleinst mogelijke omschreven cirkel van de huidige oplossing.

Het is echter mogelijk om in constante tijd een omschreven cirkel te berekenen. Simpelweg door, telkens er een cirkel geplaatst wordt buiten de huidige omschreven cirkel, een nieuwe te berekenen die rond de oude omcirkel en deze nieuwe cirkel past. Dit kan zeer eenvoudig in constante tijd, maar geeft niet de kleinst-mogelijke omschreven cirkel voor de packing. Deze constante-tijd omschreven cirkel is mogelijk wel goed genoeg als benadering, en kan een grote snelheids-winst geven voor zeer grote packings.

### 7.2 Best-Fit

Het algoritme is gebaseerd op een *best-fit* principe. Met andere woorden in elke stap wordt de best-passende cirkel gekozen. Wat de best-passende cirkel is is echter moeilijk te bepalen. In de huidige implementatie worden er daarom enkele keuzes gemaakt, gebaseerd op bestaande heuristieken en intuïtie. Hier kunnen echter andere keuzes gemaakt worden, die mogelijk tot betere resultaten zullen leiden.

Eén zo'n alternatieve keuze is bij het plaatsen op de shell. Nu worden de nieuwe cirkels zo dicht mogelijk bij het huidige middelpunt geplaatst. Dit omdat de omschreven cirkel dan zo weinig mogelijk uitgebreid moet worden. Maar wat als, wanneer we geen cirkel meer binnen de huidige omcirkel kunnen plaatsen, we de cirkel zo ver mogelijk van het middelpunt plaatsen (maar wel nog tegen twee cirkels op de shell)? Dit zal er voor zorgen dat de omschreven cirkel veel verder uitgebreid zal worden. Het zal er ook voor zorgen dat de omcirkel veel minder vaak uitgebreid moet worden, omdat hij in grotere stappen uitbreid. Mogelijk geeft dit aanleiding tot betere en misschien snellere packings omdat de omschreven cirkel minder vaak herberekend moet worden.

# Hoofdstuk 8

## Conclusie

In deze thesis heb ik een nieuwe constructieve heuristiek voorgesteld. Deze is gebaseerd op het *best-fit* principe, waarbij in elke stap de beste cirkel gekozen wordt om aan de oplossing toe te voegen. Deze keuze werd gebaseerd op twee concepten: *gaten* en de *shell*. Eerst werden de gaten opgevuld, en dan cirkels geplaatst aan de buitenkant van de tussen-oplossing, op de shell. Door enkele veronderstellingen te maken over het aantal cirkels die getest moeten worden voor overlap bij elke plaatsing, kan het algoritme zeer snel relatief goede packings genereren. Ik heb resultaten getoond, vergeleken met de best-gekende packings voor een groot aantal cirkel-verdelingen, die aantonen dat het algoritme packings maakt die gemiddeld slechts 5% groter zijn. Deze packings werden gegenereerd in een fractie van de tijd die andere, state-of-the-art algoritmen nodig hebben (milliseconden tegenover uren).

Ik denk dus dat ik zeker geslaagd ben in mijn opzet. Een constructief algoritme maken dat in real-time goede packings kan maken voor het zeer moeilijke *cirkel-packing* probleem.

// TODO ALGEMEEN: Minder informele termen? Omcirkel->omschreven cirkel

// TODO ALGEMEEN: Voeg echte definities toe, bv bij Hole echt een hoofding "Definitie" en dan het gat definiëren. Ook voor shell, omcirkel.

# Bibliography

- [1] Hakim Akeb and Yu Li. A basic heuristic for packing equal circles into a circular container. *Comput. Oper. Res.*, 33:2125–2142, 2006.
- [2] I Al-Mudahka, Mhand Hifi, and Rym M’Hallah. Packing circles in the smallest circle: an adaptive hybrid algorithm. *Journal of the Operational Research Society*, 62(11):1917–1930, 2011.
- [3] P. Bollansée. Circle packing. <https://github.com/circle-packing/best-fit>.
- [4] P. Bollansée. Packomania tabellen. <https://github.com/circle-packing/docs/blob/master/thesis/packomania-tables.pdf>.
- [5] Edmund K Burke, Graham Kendall, and Glenn Whitwell. A new placement heuristic for the orthogonal stock-cutting problem. *Operations Research*, 52(4):655–671, 2004.
- [6] John A George, Jennifer M George, and Bruce W Lamar. Packing different-sized circles into a rectangular container. *European Journal of Operational Research*, 84(3):693–712, 1995.
- [7] Ronald L Graham and Boris D Lubachevsky. Repeated patterns of dense packings of equal disks in a square. *the electronic journal of combinatorics*, 3(1):R16, 1996.
- [8] Ronald L Graham, Boris D Lubachevsky, Kari J Nurmela, and Patric RJ Östergård. Dense packings of congruent circles in a circle. *Discrete Mathematics*, 181(1):139–154, 1998.
- [9] Andrea Grosso, ARMJU Jamali, Marco Locatelli, and Fabio Schoen. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container. *Journal of Global Optimization*, 47(1):63–81, 2010.
- [10] Mhand Hifi and Rym M’Hallah. Approximate algorithms for constrained circular cutting problems. *Computers & Operations Research*, 31(5):675–694, 2004.
- [11] Mhand Hifi, Vangelis Th Paschos, and Vassilis Zissimopoulos. A simulated annealing approach for the circular cutting problem. *European Journal of Operational Research*, 159(2):430–448, 2004.
- [12] Wen Qi Huang, Yu Li, Chu Min Li, and Ru Chu Xu. New heuristics for packing unequal circles into a circular container. *Computers & Operations Research*, 33(8):2125–2142, 2006.

- [13] WenQi Huang, ZhangHua Fu, and RuChu Xu. Tabu search algorithm combined with global perturbation for packing arbitrary sized circles into a circular container. *Science China Information Sciences*, 56(9):1–14, 2013.
- [14] CO Lopez and JE Beasley. Packing unequal circles using formulation space search. *Computers & Operations Research*, 40(5):1276–1288, 2013.
- [15] Boris D Lubachevsky and Ronald L Graham. Curved hexagonal packings of equal disks in a circle. *Discrete & Computational Geometry*, 18(2):179–194, 1997.
- [16] E. Specht. Packomania. <http://www.packomania.com/>. Accessed: 2016-05-23.
- [17] Sunshine. Computing the smallest enclosing disk in 2d. <http://www.sunshine2k.de/coding/java/Welzl/Welzl.html>, 2008.
- [18] Huaiqing Wang, Wenqi Huang, Quan Zhang, and Dongming Xu. An improved algorithm for the packing of unequal circles within a larger containing circle. *European Journal of Operational Research*, 141(2):440–453, 2002.
- [19] Emo Welzl. *Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids)*. Springer, 1991.
- [20] Tao Ye, Wenqi Huang, and Zhipeng Lu. Iterated tabu search algorithm for packing unequal circles in a circle. *arXiv preprint arXiv:1306.0694*, 2013.
- [21] Zhizhong Zeng, Xinguo Yu, Kun He, Wenqi Huang, and Zhanghua Fu. Iterated tabu search and variable neighborhood descent for packing unequal circles into a circular container. *European Journal of Operational Research*, 250(2):615–627, 2016.

**AFDELING**  
Straat nr bus 0000  
3000 LEUVEN, BELGIË  
tel. + 32 16 00 00 00  
fax + 32 16 00 00 00  
[www.kuleuven.be](http://www.kuleuven.be)

