

Een nieuwe constructieve heuristiek voor het *circle-packing* probleem

Gebaseerd op een *best-fit* methodiek



Pablo BOLLANSÉE

Promotor:
Prof. dr. Patrick De Causmaecker
KU Leuven, Departement
Computerwetenschappen,
CODOE@KULAK

Proefschrift ingediend tot het
 behalen van de graad van
 Master of Science in de
 toegepaste informatica

Academiejaar 2015-2016

© Copyright by KU Leuven

Zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van zowel de promotor(en) als de auteur(s) is overnemen, kopiëren, gebruiken of realiseren van deze uitgave of gedeelten ervan verboden. Voor aanvragen tot of informatie i.v.m. het overnemen en/of gebruik en/of realisatie van gedeelten uit deze publicatie, wendt u tot de KU Leuven, Faculteit Wetenschappen, Geel Huis, Kasteelpark Arenberg 11 bus 2100, 3001 Leuven (Heverlee), Telefoon +32 16 32 14 01.

Voorafgaande schriftelijke toestemming van de promotor(en) is eveneens vereist voor het aanwenden van de in dit afstudeerwerk beschreven (originele) methoden, producten, schakelingen en programma's voor industrieel of commercieel nut en voor de inzending van deze publicatie ter deelname aan wetenschappelijke prijzen of wedstrijden.

Voorwoord

Het *circle-packing* probleem bestaat er uit om een aantal cirkels, met gekende radii, in een zo klein mogelijke container te plaatsen. De vorm van deze container kan verschillen, meestal is het een driehoek, rechthoek of cirkel. In deze thesis stel ik een nieuwe heuristiek voor het plaatsen van cirkels in een cirkel, gebaseerd op het *best-fit*-principe. Het is een constructieve heuristiek waarin stapsgewijs telkens de best-passende cirkel geplaatst zal worden. Alle broncode is beschikbaar op GitHub [3]

Hoewel dit probleem wiskundig relatief eenvoudig voor te stellen is, is het uitwerken van een computationeel exacte oplossing wél een uitdaging. Bestaande implementaties zijn niet tijds-geoptimaliseerd, en vragen dus veel berekeningstijd. In deze thesis stek ik een nieuwe heuristiek voor die het mogelijk maakt zéér snel oplossingen te genereren.

Dit werk werd gedaan als master proef voor de *Master of Science in de toegepaste informatica* te KU Leuven onder de CODeS onderzoeksgroep. Het hield 18 studiepunten in van deze éénjarige master.

Ik wil hierbij Patrick De Causmaeker bedanken voor alle hulp en ondersteuning bij het ontwerpen van deze heuristiek en verwezenlijken van dit werk. Ook wil ik Jim Bollansée, Marie Julia Bollansée en Pieter Van de Walle bedanken voor hun hulp bij het schrijven van deze tekst.

Abstract

Het *circle-packing* probleem bestaat er uit om een aantal cirkels, met gekende radii, in een zo klein mogelijke container te plaatsen. De vorm van deze container kan verschillen, meestal is het een driehoek, rechthoek of cirkel. In deze thesis stel ik een nieuwe *best-fit* gebaseerde heuristiek voor voor het plaatsen van cirkels in een cirkel. Het is een constructieve heuristiek waarin stapsgewijs telkens de *best-passende* cirkel geplaatst zal worden.

Wiskundig is dit een relatief eenvoudig probleem om voor te stellen, maar computatieve is het zeer zwaar om exact op te lossen. Bestaande pogingen om dit probleem op te lossen vragen zeer veel tijd om het te berekenen. In deze thesis stel ik een nieuwe heuristiek voor die het mogelijk maakt zéér snel oplossingen te genereren.

Oplossingen gegenereerd door het algoritme uit deze thesis hebben een iets grotere omschreven cirkel. In vergelijking met de best gekende oplossingen zijn de oplossingen uit deze thesis gemiddeld minder dan 6% groter. Dit is een zeer aanvaardbare uitbreiding van de omschreven cirkel, toch als je in rekening brengt dat deze oplossingen veel sneller bekomen zijn. Bestaande pogingen vragen uren en soms dagen tijd om slechts tientallen cirkels te plaatsen. De heuristiek voorgesteld in deze thesis lost deze problemen op in slechts milliseconden.

Daarbovenop maakt deze heuristiek het mogelijk om nieuwe problemen op te lossen. Zo zouden problemen met duizenden cirkels zouden met voorgaande pogingen onrealistisch veel tijd vragen, tientallen cirkels vragen al zeer veel tijd. Dit soort problemen kunnen wel opgelost worden met deze nieuwe heuristiek.

Abstract (English)

The *circle-packing* problem consists of packing a number of circles, with given radii, in a as small as possible container. The shape of this container can differ, mostly triangular, rectangular or circular. In this thesis I propose a new *best-fit* based heuristic to solve the problem of packing circles in a circle. It's a new constructive heuristic that builds a solution step-by-step by iteratively placing the circle that *fits best*.

Mathematically this is a relatively simple problem to model, but computationally it is very complex to solve. Existing methods to solve this problem are very time consuming. In this thesis I propose a new heuristic that can solve the problem very fast.

Solutions generated by the algorithm proposed in this thesis will result in a slight increase of radius of the circumscribed circle. Compared to the best-known solutions this method results in a radius that is on average less than 6% larger. This is a very acceptable increase when considering that the results are computed much faster. Existing solution require hours or days to compute a solution for just tens of circles. The heuristic in this thesis will give a solution in just milliseconds for the same problems.

On top of that this new heuristic allows us to solve new problems. Problems with thousands of circles would take an unrealistic amount of time for older algorithms. However for this new heuristic these problems aren't out of scope.

Inhoudsopgave

Voorwoord	i
Abstract	ii
Abstract (English)	iii
Lijst van figuren	vi
Lijst van tabellen	vii
1 Inleiding	1
2 Definities en termen	4
3 Handleiding voor het lezen van de visualisaties	5
4 Algoritme	7
4.1 Basis-idee	7
4.2 Structuur	8
4.3 Structuur van de <i>solver</i>	8
4.4 Initialisatie	10
4.5 Een cirkel tegen twee andere plaatsen	11
4.6 Holes	13
4.6.1 Grootste cirkel zoeken die past in een <i>hole</i>	14
4.6.2 Bepalen of een cirkel past in een <i>hole</i>	17
4.7 Shell	18
4.7.1 Slim de omcirkel berekenen gebaseerd op de <i>shell</i>	19
4.7.2 Bepalen of een cirkel past op de <i>shell</i>	21
4.7.3 Een cirkel plaatsen op de <i>shell</i>	22
4.8 Conclusie	23
5 Bedenkingen bij implementatie	24
5.1 Precisie	24
5.2 Veronderstellingen	24
6 Resultaten	25
6.1 Packomania vergelijking	26
6.1.1 Cirkels met gelijke grootte	26
6.1.2 Packomania Benchmark	29

6.1.3	Packomania Machten	30
6.2	Grotere aantallen cirkels	31
6.3	Conclusie	32
7	Verder werk	34
7.1	Constante-tijd omschreven cirkel	34
7.2	Best-Fit	34
8	Conclusie	36
A	Packomania Benchmark Verdelingen	39
B	Packomania Vergelijking Tabellen	41
B.1	Cirkels met gelijke grootte	41
B.2	Packomania Macht problemen	43
B.3	Packomania Benchmark problemen	56
B.4	Grotere aantallen cirkels	57
C	Extra <i>packing</i> figuren	61

Lijst van figuren

3.1	Voorbeeld visualisatie met drie duidelijke <i>holes</i>	6
3.2	Voorbeeld visualisatie met grote <i>shell</i>	6
4.1	Voorbeeld van initiële <i>packing</i>	10
4.2	Verkregen intersectie punt van <i>getMountPositionFor</i>	13
4.3	<i>Packing</i> voor het opvullen van een <i>hole</i>	14
4.4	<i>Packing</i> na het opvullen van een <i>hole</i>	15
4.5	<i>Packing</i> na het opvullen van een tweede <i>hole</i>	15
4.6	<i>Packing</i> als het opvullen van een tweede <i>hole</i> mislukt	16
4.7	Het plaatsen van de grootste cirkel op de <i>shell</i>	19
4.8	Het plaatsen van een kleinere cirkel op de <i>shell</i>	20
4.9	<i>Shell</i> aanpassen als geen enkele cirkel past	20
4.10	Een cirkel veroorzaakt een tegen-de-klok <i>shell</i>	22
4.11	Mogelijke fout indien de <i>shell</i> niet met de klok mee gesorteerd is	23
6.1	Packomania verdelingen	26
6.2	Vergelijking van <i>packings</i> van even grote cirkels	27
6.3	<i>Packing</i> voor 500 even grote cirkels	28
6.4	Vergelijking van Packomania Benchmark problemen	29
6.5	Vergelijking van Packomania Macht problemen	30
6.6	<i>Packing</i> voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$	32
C.1	<i>Packing</i> voor 50 cirkels met gelijke grootte	62
C.2	<i>Packing</i> voor 500 cirkels met gelijke grootte	62
C.3	<i>Packing</i> voor 2000 cirkels met gelijke grootte	63
C.4	<i>Packing</i> voor 5000 cirkels met gelijke grootte	63
C.5	<i>Packing</i> voor 100 cirkels met verdeling $r_i = i^{1/2}$	64
C.6	<i>Packing</i> voor 100 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$	64
C.7	<i>Packing</i> voor 100 cirkels met verdeling $r_i = i^{-2/3}$	65
C.8	<i>Packing</i> voor 100 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/5}$	65
C.9	<i>Packing</i> voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{1/2}$	66
C.10	<i>Packing</i> voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$	66
C.11	<i>Packing</i> voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-2/3}$	67
C.12	<i>Packing</i> voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/5}$	67
C.13	<i>Packing</i> voor 5000 cirkels met verdeling $r_i = i^{1/2}$	68
C.14	<i>Packing</i> voor 5000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$	68
C.15	<i>Packing</i> voor 5000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-2/3}$	69
C.16	<i>Packing</i> voor 5000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/5}$	69

Lijst van tabellen

6.1	Packomania Machten gemiddelde vergroting	30
6.1	Packomania Machten gemiddelde vergroting	31
A.1	Packomania Benchmark Verdelingen	39
A.1	Packomania Benchmark Verdelingen	40
B.1	Packomania $r_i = 1$	41
B.2	Packomania $r_i = i$	44
B.3	Packomania $r_i = i^{1/2}$	48
B.4	Packomania $r_i = i^{-1/5}$	51
B.5	Packomania $r_i = i^{-1/2}$	52
B.6	Packomania $r_i = i^{-2/3}$	54
B.7	Packomania Benchmark Instances	56
B.8	Grottere aantallen gelijke cirkels	57
B.9	Grottere aantallen cirkels: $r_i = i^{1/2}$	58
B.10	Grottere aantallen cirkels: $r_i = i^{-1/2}$	58
B.11	Grottere aantallen cirkels: $r_i = i^{-2/3}$	59
B.12	Grottere aantallen cirkels: $r_i = i^{-1/5}$	60

Hoofdstuk 1

Inleiding

In deze thesis stel ik een nieuwe heuristiek voor, gebaseerd op het *best-fit*-principe, als oplossing voor het *circle-packing* probleem. De heuristiek is specifiek ontworpen voor het sub-probleem van het plaatsen van cirkels in een cirkel. Het *circle-packing* probleem bestaat uit het plaatsen van n cirkels in een zo klein mogelijke cirkelvormige *container*. Het is de bedoeling om voor de gegeven cirkels de coördinaten van de middelpunten te vinden zodat de cirkels niet overlappen en de radius van de omschreven cirkel zo klein mogelijk is.

Circle-packing is zowel theoretisch als praktisch een zeer interessant probleem. Het kan gebruikt worden om verschillende *real-world* problemen op te lossen, zoals het plaatsen van zendmasten, stockage van cilindrische voorwerpen, en het combineren van verschillende kabels.

Mathematisch is het probleem redelijk eenvoudig als een optimalisatieprobleem te omschrijven:

$$\begin{aligned} \text{minimaliseer} \quad & r \\ \text{onderhevig aan} \quad & x_i^2 + y_i^2 \leq (r - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, n \\ & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i \neq j \end{aligned}$$

Hierin is r_i de radius, en (x_i, y_i) de coördinaten van het centrum van cirkel i . Hierbij wordt verondersteld dat de omcirkel het nulpunt als middelpunt heeft. De eerste formule verzekert dat de cirkels in de omcirkel liggen, en de tweede dat ze elkaar niet overlappen. Wanneer alle cirkels dezelfde grootte hebben, wordt meestal r_i gelijk aan 1 genomen. Het *circle-packing* probleem voor andere containers heeft gelijkaardige, relatief eenvoudige, wiskundige omschrijvingen.

Hoewel dit wiskundig eenvoudig te omschrijven is, blijft het toch een zeer moeilijk probleem om exact op te lossen. Het is een NP-moeilijk probleem. Er is reeds veel onderzoek gebeurd naar het oplossen van het circle-packing probleem voor zowel cirkels van gelijke grootte, als voor cirkels van verschillende grootte.

Er is reeds veel onderzoek gebeurd naar het oplossen van het *circle-packing* probleem voor zowel cirkels van gelijke grootte, als voor cirkels van verschillende grootte. In [7] en [15] probeert men vaste patronen te vinden die een optimale *packing* van cirkels met gelijke grootte geeft. In [8] en [19] worden fysisch geïnspireerde simulaties gebruikt om *packing* te bekomen.

In [6] worden verschillende meta-heuristieken, waaronder een genetisch algoritme, uitgeprobeerd en vergeleken. Zij ondervinden dat dit genetisch algoritme, alsook een quasi-

random techniek, in vergelijking met de andere uitgeprobeerde meta-heuristieken, resultaten met de kleinste omschreven cirkel geven. In [10] en [11] worden respectievelijk een genetisch en een simulated-annealing algoritme voorgesteld.

Een recentere poging is het Monotonic Basin Hopping algoritme voorgesteld in [9]. Hierin beschrijven de onderzoekers dat er te veel lokale optima zijn voor een eenvoudige multi-start behandeling, en ze stellen als mogelijke oplossing een variant voor waarin ze op een slimme manier de beginpunten proberen genereren. Meer recent zijn [2] (2011), [21] (2013) en [22] (2016). Zij gebruiken de combinatorische eigenschappen van circle-packing in combinatie met een zoekmethode zoals *tabu-search* en *iterated local search* om een goede volgorde te vinden waarin de cirkels geplaatst kunnen worden. In [2] plaatsen de onderzoekers zo één voor één elke cirkel en berekent een *non-linear optimizer* hiervoor telkens een lokaal extremum voor de *packing*.

Constructieve algoritmen voor het oplossen van *circle-packings* zijn veel minder onderzocht en gedocumenteerd. Een constructief algoritme is een algoritme dat, uitgaand van een zekere beginsituatie, stapsgewijs de oplossing uitbreidt tot deze volledig is. Eén van de weinige constructieve methoden wordt beschreven in [1], waarin een alternatieve vorm van het *circle-packing* probleem wordt opgelost. Bij deze variant ligt de grootte van de container vast, en er moeten zo veel mogelijk cirkels van gelijke grootte in deze container geplaatst worden. In [10] wordt er een aanpassing gedaan op de klassieke bottom-left-first heuristiek, voor het plaatsen van rechthoeken. Deze heuristiek plaats rechthoeken zo ver mogelijk in de linker beneden hoek. Dit is een zeer eenvoudige heuristiek die redelijk goede resultaten geeft. De onderzoekers hebben deze dan aangepast om cirkels in een rechthoek te plaatsen.

Hoewel veel van deze oplossingen zeer goede *packings* maken, en regelmatig hun voor-gangers verbeteren, vragen ze veel rekentijd en beperken ze zich tot een klein aantal cirkels. Voor slechts tientallen cirkels kan de nodige rekentijd oplopen tot tientallen uren. In deze thesis stel ik een nieuwe constructieve heuristiek voor om het *circle-packing* probleem op te lossen. Deze nieuwe heuristiek laat toe om *packings* te maken in een fractie van de tijd die eerdere algoritmen daarvoor nodig hebben. Ook is het mogelijk om veel grotere aantallen cirkels te plaatsen. De omcirkel van *packings* verkregen met deze nieuwe heuristiek is echter iets groter dan deze verkregen in eerder vernoemd onderzoek. Deze uitbreiding van de omcirkel blijft echter beperkt en laat toe de *packings* in slechts enkele ogenblikken te maken, waar andere oplossingen uren rekentijd vragen.

De heuristiek voorgesteld in deze thesis is een best-fit heuristiek gebaseerd op een oplossing voor het *orthogonal stock-cutting problem* voorgesteld in [5]. In dit probleem worden balken geplaatst in een container met een vaste breedte, zodat de hoogte zo klein mogelijk blijft. Deze heuristiek gebruikt het verschil tussen de breedte van een balk en een gat in de *packing* als maatstaf voor de *beste* positie. Hun heuristiek kiest dus de volgende balk om te plaatsen uit een lijst, en deze plaatst op de *beste* positie. Op een gelijkaardige manier kiest mijn algoritme de volgende cirkel die best past in de huidige *packing*. Deze aanpak verschilt van het cirkels plaatsen in een vooraf bepaalde volgorde zoals in [9] en [2].

In hoofdstuk 4 bespreek ik hoe mijn heuristiek opgebouwd is. Ik beschrijf de twee basisconcepten voor mijn best-fit heuristiek, de begrippen *holes* en *shell*, in detail. Ik bespreek hoe deze concepten werken, en op welke manier gekozen wordt welke cirkel best past in de *packing*. Ik illustreer deze concepten verder door naar de implementatie te verwijzen. In hoofdstuk 6 worden de verkregen resultaten besproken. Hier vergelijk ik de

packings met de best gekende resultaten zoals gerapporteerd op de Packomania website ([17]). Deze website verzamelt gekende oplossingen voor verschillende *circle-packing* problemen, en bevat informatie over hun efficientie en effectiviteit. Ik vergelijk de omtrek van de verkregen omcirkel en de nodige tijd om de *packing* te berekenen van mijn eigen heuristiek met de beste oplossingen op de Packomania website. Ook toon ik resultaten voor *packings* voor veel meer cirkels dan getoond op de Packomania website. In hoofdstuk 5 bespreek ik enkele bedenkingen die ik heb bij mijn onderzoek en de implementatie van de onderzochte heuristiek. In hoofdstuk 7 bespreek ik mogelijke verbeteringen en ideeën voor verder onderzoek. In hoofdstuk 3 wordt kort verduidelijkt hoe de visualisaties, die doorheen deze thesis gebruikt worden, dienen geïnterpreteerd te worden.

In het eerstvolgende hoofdstuk (hoofdstuk 2) worden echter eerst enkele termen die gebruikt worden in de verdere tekst, sommige uniek binnen dit onderzoek, toegelicht.

Hoofdstuk 2

Definities en termen

Cirkel: In de literatuur rond *circle-packing* en in deze thesis wordt het woord *cirkel* of *circle* gebruikt, maar eigenlijk zou het correcter zijn om *schijf* te gebruiken. Dit geeft (onder andere) aan dat er dus ook een overlap tussen *cirkel* is wanneer een cirkel volledig omringd is door een andere. Voor twee cirkels met radii r_a, r_b en coördinaten $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ is er een overlap wanneer $r_a + r_b > \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$.

Packing: Vertaald als **plaatsing**. En **packing** is een collectie cirkels met elk een toegewezen positie. Een *packing* is correct wanneer er geen overlap is tussen de cirkels in deze *packing*. Een *packing* is *beter* dan een andere *packing* wanneer deze een kleinere omschreven cirkel heeft.

Hole: Eén van de concepten uniek aan deze heuristiek. Op een *high-level* niveau is een **hole** een plek tussen drie cirkels waarin een andere cirkel kan geplaatst worden. Dit concept wordt in gedetailleerd uitgelegd in sectie 4.6.

Shell: Het tweede nieuwe concept in dit onderzoek. Een **shell** is, op *high-level* niveau, de collectie cirkels die aan de buitenkant van een *packing* liggen. Het gegeven wordt verder verduidelijkt in sectie 4.7.

Solver: Een programma dat, gegeven een aantal cirkels, een *packing* maakt voor deze cirkels.

Omschreven cirkel of omcirkel: De kleinst mogelijke cirkel (tenzij anders vermeld) waarvoor geldt dat alle cirkels in de *packing* volledig in deze cirkel liggen.

Binair zoeken: Een klassieke zoektechniek die werkt op gesorteerde lijsten. Hierin wordt de lijst steeds in twee verdeeld door telkens het middelste element te testen. Er wordt dan verder gezocht in één van de twee delen, afhangende op het geteste element kleiner of groter is dan de gezochte waarde. Dit geeft een logaritmische complexiteit.

Hoofdstuk 3

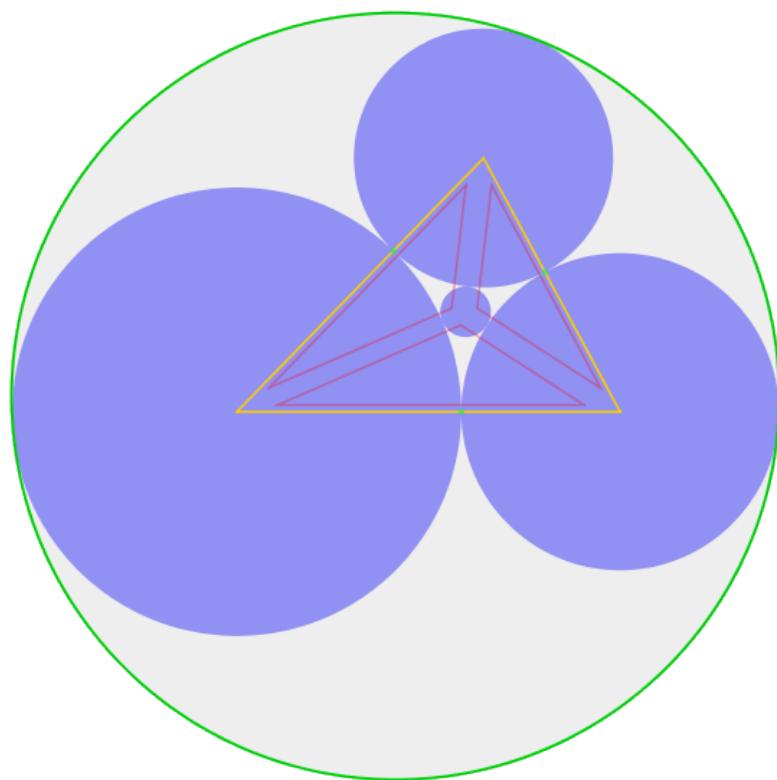
Handleiding voor het lezen van de visualisaties

Doorheen deze thesis zal ik gebruik maken van visualisaties die gegenereerd zijn door de implementatie (in Java) van het algoritme, ter illustratie van de besproken en onderzochte concepten. Twee voorbeelden van zulke visualisaties zijn figuur 3.1 en figuur 3.2.

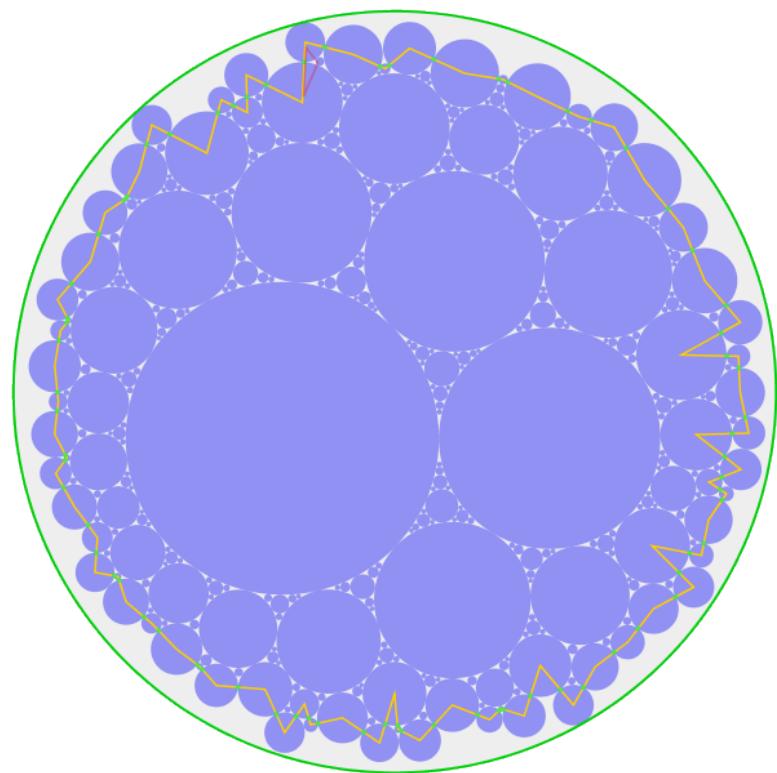
Deze figuren kan u op de volgende manier interpreteren:

- De **reeds geplaatste cirkels** worden getoond als **licht blauwe cirkels**.
- De **shell** is een **gele lijn** aan de buitenrand van de *packing*. Deze verbindt de middelpunten van de cirkels op de *shell*.
- De kleine **groene stippen** op de *shell* geven de posities aan waarop mogelijk een cirkel geplaatst zal worden.
- **Holes** worden getoond als **rode driehoeken**. De hoekpunten liggen dichtbij de middelpunten van de drie cirkels die de *hole* definiëren.
- De **omschreven cirkel** van de huidige *packing* wordt getoond als een **groene cirkel**.

Op figuur 3.1 is zijn er duidelijk drie *holes* te zien. Elk van de drie *holes* word gedefinieerd door de centrale cirkel en twee van de buitenste cirkels. Ook is er een kleine *shell* te zien, die bestaat uit de buitenste drie cirkels. In figuur 3.2 wordt een verder gevorderde *packing* getoond waarop één *hole* te zien is, en een veel grotere *shell*. Op beide figuren kan je ook de omcirkel zien.



Figuur 3.1: Voorbeeld visualisatie met drie duidelijke *holes*



Figuur 3.2: Voorbeeld visualisatie met grote *shell*

Hoofdstuk 4

Algoritme

In dit hoofdstuk bespreek ik de werking van de heuristiek. Eerst geef ik een korte beschrijving van het basis-idee van het algoritme, gevolgd door de structuur van de code. Vervolgens leg ik stelselmatig de volledige werking uit, samen met alle veronderstellingen die gemaakt worden en geef ik details omtrent implementatie waar nodig. De volledige implementatie gebeurde in Java, en de broncode is beschikbaar op GitHub [3].

Om het algoritme zeer snel te maken worden enkele veronderstellingen gemaakt omtrent de nodige overlap-checks bij elke stap. Deze veronderstellingen zijn niet theoretisch bewezen, maar wel zelf empirisch getest. Voor de meeste verdelingen van cirkels lijken deze veronderstellingen goed stand te houden, maar er zijn nog enkele *edge-cases* waarin er toch nog fouten gebeuren. Deze problemen worden besproken in hoofdstuk 5 en de snelheid en kwaliteit van de oplossingen wordt verder besproken in hoofdstuk 6.

4.1 Basis-idee

Het basis-idee van de heuristiek is om stelselmatig een *packing* op te bouwen, door telkens cirkels uit een reeks gegeven cirkels te zoeken die het best passen. Bij elke stap wordt telkens eerst een plek gekozen om een cirkel te plaatsen in een *hole*, of op de *shell* (zie voor verdere informatie respectievelijk en sectie 4.7). Hier wordt dan de best-passende cirkel geplaatst. Eenmaal een cirkel geplaatst is wordt deze nooit meer verplaatst. Dit laat toe om deze *holes* en *shell* efficiënt op te bouwen en gebruiken. Als de cirkels wel nog verplaatst kunnen worden zou het veel moeilijker, en rekenintensiever, zijn om deze structuren op te bouwen. Dan zouden in elke stap alle cirkels met elkaar vergeleken moeten worden om, bijvoorbeeld, te vinden waar nog *holes* zitten.

Het algoritme bouwt dus cirkel per cirkel een *packing* op. Dit gebeurt door in elke stap een positie te kiezen, en hierin een cirkel te proberen plaatsen. Eerst worden alle gaten uitgeprobeerd, in de volgorde waarin ze aangemaakt zijn, dan wordt er gekeken naar een plek op de shell. Indien er geen cirkel geplaatst kan worden, wordt de interne structuur van het probleem vernieuwd om deze nieuwe informatie te reflecteren. Dit gebeurt op verschillende manieren voor de *holes* en de *shell*. Meer hierover vindt u terug in sectie 4.6 en sectie 4.7. Als er wel een cirkel geplaatst kan worden dan wordt deze uit de lijst van nog-te-plaatsen cirkels verwijderd, en krijgt deze een permanente positie op de gekozen locatie. Het plaatsen van een nieuwe cirkel geeft op zijn beurt ook aanleiding tot aanpassen van de beschikbare *holes* en/of de *shell*. Hierdoor wordt er een nieuwe tussentijdse *packing* gemaakt. Deze wordt dan doorgegeven naar de volgende stap, waarin het algoritme

opnieuw zal proberen een cirkel te plaatsen. Op deze manier wordt een volledige *packing* opgebouwd voor alle cirkels.

4.2 Structuur

De implementatie van het algoritme bevat enkele belangrijke (programmeer-)klassen die regelmatig zullen terug komen in de verdere uitleg, vooral in codefragmenten:

- Cirkel (Circle)
- Vector2
- Locatie (Location)
- Probleem (Problem)
- Oplossing (Solution)
- Oplosser (Solver)
- Gat (Hole)
- Schil (Shell)

Een *circle* is voor de hand liggend. Deze heeft een radius, maar echter geen positie. *Vector2* is een 2D positie. Deze bevat een x en y coördinaat.

Een *location* of locatie is de combinatie van een cirkel met zijn positie. Deze bevat dus een referentie naar een *circle* en een *vector2*.

Een *problem* of probleem is een lijst van cirkels. Deze hebben nog geen positie, en worden gesorteerd van groot naar klein. Dit is wat de *solver* als input krijgt.

Een *solution* of oplossing is een lijst van cirkels met hun positie. Dit kan een tussenoplossing zijn, waarbij nog niet voor alle cirkels uit een gegeven probleem een positie bestaat. Ook geeft een *solution* geen garanties van correctheid, er kan dus bijvoorbeeld overlap zijn. De klasse voorziet echter functionaliteit om dit na te gaan. Dit is wat de *solver* als output geeft. Een correcte *solver* geeft natuurlijk wel altijd goede oplossingen.

Een *solver* of oplosser is het object dat een *packing* zoekt voor een gegeven probleem. Dit is dus het belangrijkste deel van de code, en hierin is de nieuwe heuristiek geïmplementeerd. De best-fit *solver*, zoals beschreven in deze thesis, doet dit stap voor stap. In elke stap wordt er één cirkel geplaatst op zijn finale positie, dit aan de hand van enkele keuzes die verder in dit hoofdstuk toegelicht zullen worden.

Hole en *shell* worden verder uitgelegd in respectievelijk sectie 4.6 en sectie 4.7.

4.3 Structuur van de *solver*

Zoals hierboven beschreven is de *solver* het hart van de implementatie. Deze klasse tracht een *packing* te genereren voor een gegeven probleem. De *solver* bevat een lijst van *holes* en de *shell*. Hij bevat ook een lijst van de nog te plaatsen cirkels en een tussen-oplossing met de cirkels die reeds een plaats gekregen hebben. Ook heeft hij een interne omcirkel voor

deze oplossing. Een oplossing kan zelf ook een omcirkel berekenen, maar de *solver* gebruikt een interne omcirkel die enkel vernieuwd wordt wanneer het nodig is. Bovendien heeft de *solver* extra informatie die de oplossing niet heeft, waardoor deze omcirkel efficiënter berekend kan worden. Zie sectie 4.7 voor meer uitleg hierover.

In de implementatie ziet de code van de *solver* er als volgt uit (vereenvoudigde versie):

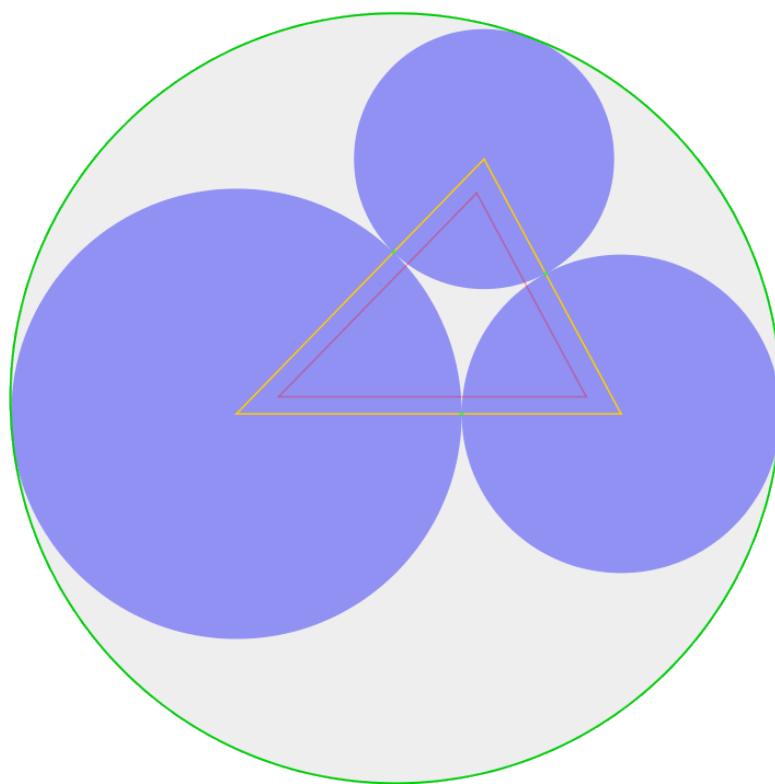
```

1 List<Circle> circlesToPack;
2 Queue<Hole> holes;
3 List<Location> shell;
4 Location enclosingCircle;
5
6 Solution solution;
7
8 void solve() {
9     init();
10    packFirstThree();
11
12    while(!circlesToPack.isEmpty()) {
13        boolean ok = bestFitStep();
14        if (!ok) break;
15    }
16}
17
18 boolean bestFitStep() {
19    if (circlesToPack.isEmpty()) {
20        return false;
21    }
22
23    if (!holes.isEmpty()) {
24        ...
25        // Probeer een cirkel in een gat te plaatsen
26        ...
27        return true;
28    }
29    else if (!shell.isEmpty()) {
30        ...
31        // Probeer een cirkel op de shell te plaatsen
32        ...
33        return true;
34    }
35}

```

De *solver* bevat alle nodige informatie over de *shell* en *holes*, alsook de cirkels die nog geplaatst moeten worden en de huidige tussen-oplossing (lijn 1 tot lijn 6). Om een probleem op te lossen wordt de *solve()* methode (lijn 8) aangeroepen. Deze initialiseert eerst alle nodige variabelen, doet dan de initiële *packing* (meer hierover in sectie 4.4) en voert dan best-fit-stappen uit tot een oplossing bereikt is (vanaf lijn 12).

De best-fit *solver* uit deze thesis kan stap voor stap de oplossing genereren en eveneens de tussentijdse oplossingen visualiseren. Het is dus niet nodig een *packing* volledig te



Figuur 4.1: Voorbeeld van initiële *packing*

maken en het kan zeer nuttig zijn tussentijdse oplossingen te zien, zeker bij het debuggen of implementeren van nieuwe functionaliteit.

4.4 Initialisatie

Zoals eerder gezegd bouwt het algoritme steeds verder op een *packing* uit de vorige stap. Hierdoor is het dus nodig om een initiële *packing* te maken van een aantal cirkels waarop de volgende stappen kunnen verderbouwen. Deze initiële *packing* is de optimale *packing* van de drie grootste cirkels in het probleem. Deze drie cirkels worden zo geplaatst dat ze alle drie aan elkaar raken, zoals getoond in figuur 4.1. De licht blauwe cirkels tonen de drie eerste-geplaatste cirkels. Meer uitleg over hoe u deze figuur kan interpreteren kan u vinden in hoofdstuk 3

Het exacte proces om deze initiële *packing* te bekomen wordt verduidelijkt aan de hand van code uit de implementatie:

```

1 private void packFirstThree() {
2     //Initially place the two biggest circles next to eachother
3     Circle first = circlesToPack.get(0);
4     Circle second = circlesToPack.get(1);
5
6     Vector2 firstPos = new Vector2(0, 0);
7     Vector2 secondPos = new Vector2(first.getRadius() + second.getRadius(),
8                                     0);

```

```

9     Location firstLoc = new Location(firstPos, first);
10    Location secondLoc = new Location(secondPos, second);
11    getSolution().add(firstLoc);
12    getSolution().add(secondLoc);

13
14    // Place the third biggest circle on top of the first two (assuming they
15    // are positioned clockwise)
15    Circle third = circlesToPack.get(2);
16    Vector2 thirdPos = Helpers.getMountPositionFor(third, firstLoc,
17        secondLoc);
17    Location thirdLoc = new Location(thirdPos, third);
18    getSolution().add(thirdLoc);

19
20    circlesToPack.remove(first);
21    circlesToPack.remove(second);
22    circlesToPack.remove(third);

23
24    // Create first hole
25    holes.add(new N Hole(firstLoc, secondLoc, thirdLoc));
26    // Create the initial shell
27    // IMPORTANT: must be clock-wise
28    shell.add(firstLoc);
29    shell.add(thirdLoc);
30    shell.add(secondLoc);

31
32    enclosingCircle =
33        Location.calculateEnclosingCircle(Arrays.asList(firstLoc, secondLoc,
34            thirdLoc));
33 }

```

Eerst worden de twee grootste cirkels naast elkaar geplaatst. Vanaf lijn 3 tot lijn 7 worden eerst de twee grootste cirkels uit het probleem opgevraagd. De lijst *circlesToPack* is gesorteerd van groot naar klein, dus dit zijn de eerste twee cirkels in deze lijst. De eerste wordt in de oorsprong geplaatst, en de tweede er tegen op de horizontale as. Deze worden ook reeds aan de tussentijdse oplossing toegevoegd (vanaf lijn 11). Vervolgens wordt de positie berekend voor de derde aan de hand van een helper functie op lijn 16. Deze helper functie komt regelmatig terug, en wordt verduidelijkt in sectie 4.5.

In de initialisatie wordt ook de eerste *hole* gemaakt, gedefinieerd door de eerste drie cirkels. Dit gat wordt toegevoegd aan de lijst van *holes* in de *solver* op lijn 25. Ook wordt de *shell* aangemaakt, vanaf lijn 28. Deze wordt met de klok mee (gezien vanuit het centrum van de huidige *packing*) bij gehouden. Verdere uitleg hierover is te vinden in sectie 4.7.

4.5 Een cirkel tegen twee andere plaatsen

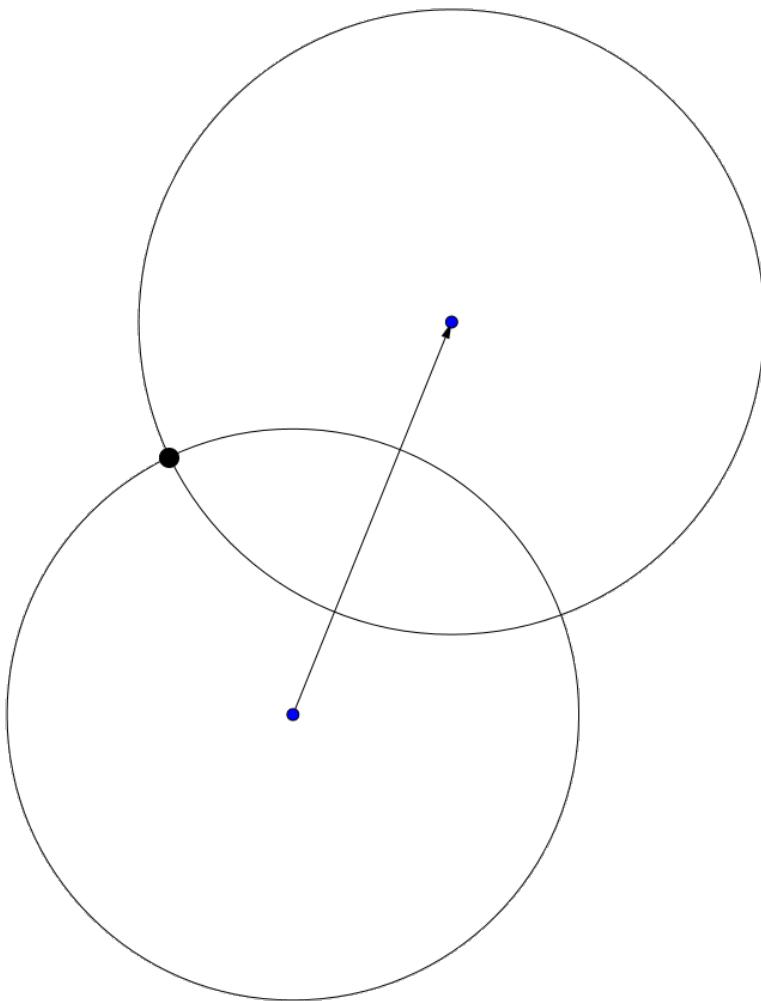
In verschillende delen van de implementatie is het nodig om een cirkel c_i , met radius r_i , tegen twee andere cirkels te plaatsen. Deze twee cirkels noemen we c_g1, c_g2 , en hun radii r_g1, r_g2 . Het punt waarop deze cirkel moet staan om beide andere cirkels te raken

wordt bepaald door een eenvoudige cirkel-cirkel intersectie, tussen twee cirkels met hun middelpunt gelijk aan het middelpunt van de cirkels c_g1 en c_g2 en als radii $r_g1 + r_i$ en $r_g2 + r_i$:

```

1 Vector2 getMountPositionFor(Circle cir, Location first, Location second) {
2     double x0 = first.getPosition().getX();
3     double y0 = first.getPosition().getY();
4     double r0 = first.getCircle().getRadius() + cir.getRadius();
5
6     double x1 = second.getPosition().getX();
7     double y1 = second.getPosition().getY();
8     double r1 = second.getCircle().getRadius() + cir.getRadius();
9
10    // dx en dy zijn de verticale en horizontale afstand tussen de
11    // cirkel-centra.
12    double dx = x1 - x0;
13    double dy = y1 - y0;
14
15    // Bepaalde de afstand tussen de centra
16    //d = sqrt((dy*dy) + (dx*dx));
17    double d = Math.hypot(dx, dy);
18
19    // 'Punt 2' is het punt waar de lijn door de cirkel-intersectie punten de
20    // lijn tussen de cirkel-centra kruist
21    // We berekenen hier de coördinaten x2 en y2 van dit punt
22
23    // Bepaal eerst de afstand van tussen Punt 2 en het centrum van de eerste
24    // cirkel
25    double a = ((r0*r0) - (r1*r1) + (d*d)) / (2.0 * d);
26
27    // Bepaal dan de coördinaten van Punt 2.
28    double x2 = x0 + (dx * a/d);
29    double y2 = y0 + (dy * a/d);
30
31    // Bepaal nu de afstand van Punt 2 naar een van de intersectie-punten
32    // Het tweede intersectie-punt ligt even ver
33    double h = Math.sqrt((r0*r0) - (a*a));
34
35    // Zet deze afstand om naar een vector met de juiste richting
36    double rx = -dy * (h/d);
37    double ry = dx * (h/d);
38
39    // Bepaal een van de tweede intersectie punten
40    return new Vector2(x2 - rx, y2 - ry);
41}
```

In deze code wordt één van de intersectiepunten bepaald. Dit punt is het punt dat aan uw linker kant zou liggen indien je wandelt van het centrum van de eerste cirkel naar het centrum van de tweede cirkel. Dit is verduidelijkt in figuur 4.2, de onderste cirkel is de eerste, de bovenste cirkel de tweede. De pijl tussen deze cirkels geeft de *wandel richting*



Figuur 4.2: Verkregen intersectie punt van *getMountPositionFor*
(Gemaakt met web.geogebra.org)

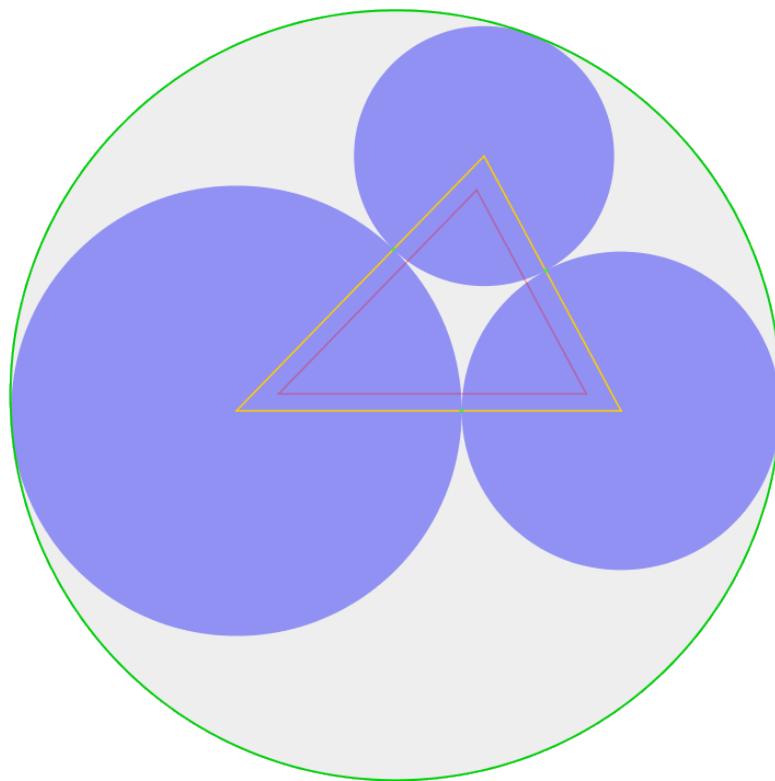
aan.

Ik noem dit intersectiepunt het *negatieve punt*. Als op lijn 37 + gebruikt wordt in plaats van – kan het tweede punt bekomen worden, het *positieve punt*. Het is ook mogelijk het andere intersectie punt te verkrijgen door de twee *location* parameters om te wisselen.

4.6 Holes

Het eerste van de twee belangrijkste concepten van de heuristiek is *holes* of *gaten*. Dit zijn plaatsen tussen andere, reeds geplaatste, cirkels waar potentieel nog een cirkel kan tussenpassen. De heuristiek zal telkens eerst deze *holes* proberen op te vullen, alvorens cirkels op de *shell* te plaatsen.

Holes worden gedefinieerd door exact drie cirkels in de huidige *packing*. De *solver* houdt informatie bij voor elk *hole* waar mogelijk nog een cirkel in kan passen. Bij elke stap van de *solver* zal er eerst gekeken worden of er nog *holes* in de oplossing zijn. Indien er nog *holes* zijn zal hij deze dus eerst hier een cirkel in proberen plaatsen. Indien de



Figuur 4.3: *Packing* voor het opvullen van een *hole*

hole te klein is voor alle nog-te-plaatsen cirkels wordt deze *hole* simpelweg verwijderd uit de lijst van *holes* in de *solver*. Op deze manier weet de *solver* in de volgende stap dat hij daar niet meer moet proberen om een cirkel te plaatsen, en zal hij een andere *hole* uitproberen. Indien er wel een cirkel in de *hole* past wordt deze daar in geplaatst. Dit zal leiden tot het creëren van drie nieuwe *holes*, zoals getoond in figuur 4.3 en figuur 4.4. De eerste figuur toont de *hole* waarin een cirkel geplaatst zal worden (de rode driehoek). De tweede figuur toont de nieuwe *packing*, nadat een cirkel geplaatst is in deze *hole*. Er zijn drie nieuwe kleinere *holes* gemaakt, die in de volgende stappen ook zullen opgevuld worden indien mogelijk. Het algoritme zal deze *holes* ook terug proberen op te vullen. In figuur 4.5 en figuur 4.6 wordt respectievelijk de tussen-oplossing getoond voor wanneer er nog een cirkel is die klein genoeg is, en wanneer dit niet het geval is, om de onderste *hole* op te vullen.

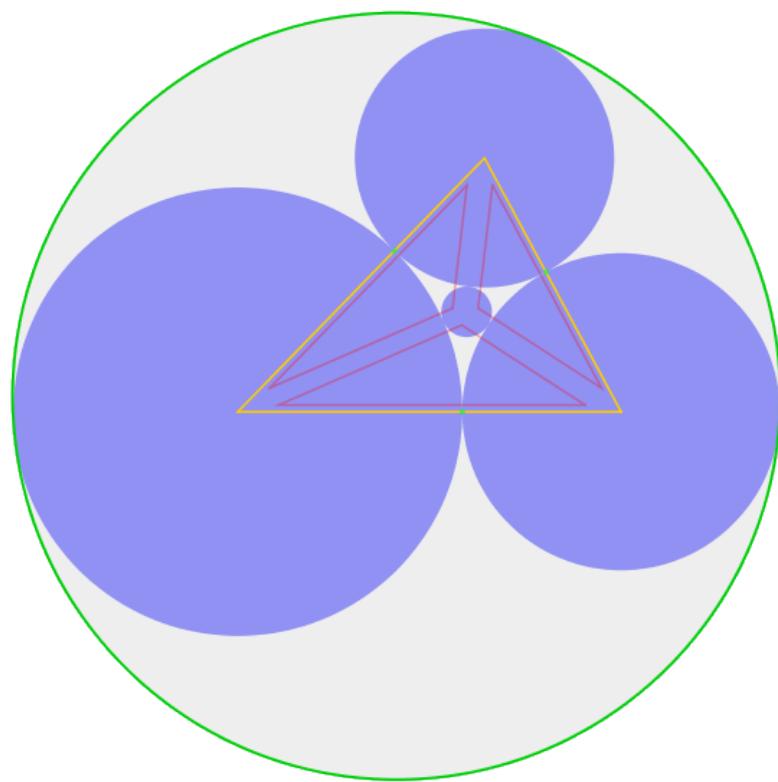
4.6.1 Grootste cirkel zoeken die past in een *hole*

Bij het plaatsen van een cirkel in een *hole* wordt een zo groot mogelijke cirkel gezocht die in dit *hole* past. Dit is bij wijze van spreken de best-passende cirkel, vandaar *best-fit*. Meer uitleg over hoe bepaald wordt of een cirkel past vind je in sectie 4.6.2. Hier wordt het proces om te vinden *welke* cirkel past verder verduidelijkt. Er wordt binair gezocht door de lijst van cirkels om te bepalen welke cirkel de grootste is die past. Onderstaande code verduidelijkt dit proces.

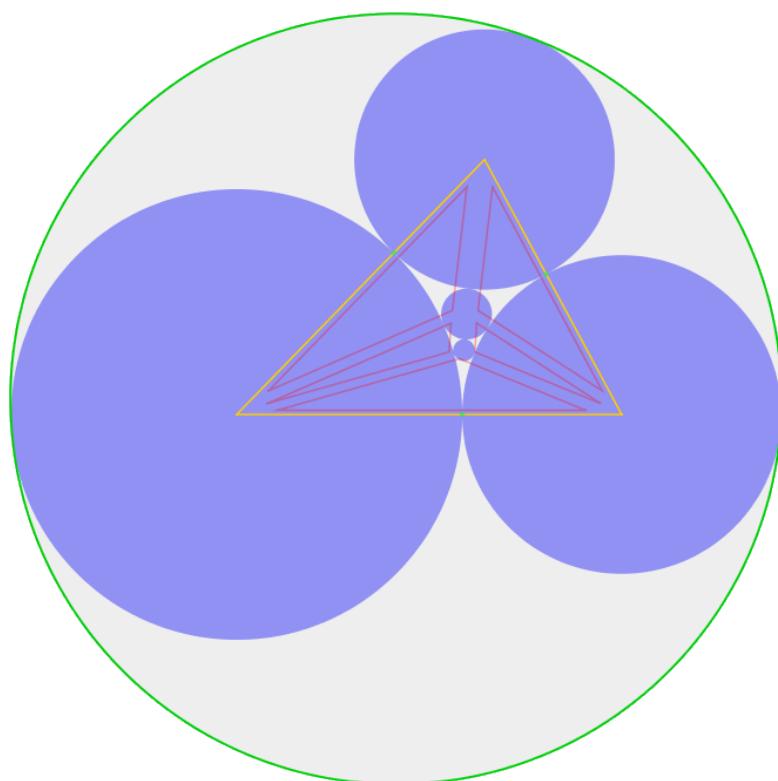
```

1 Location findBestFitFor(Hole hole, List<Circle> sortedBigToSmall) {
2     // Probeer eerst de kleinste cirkel

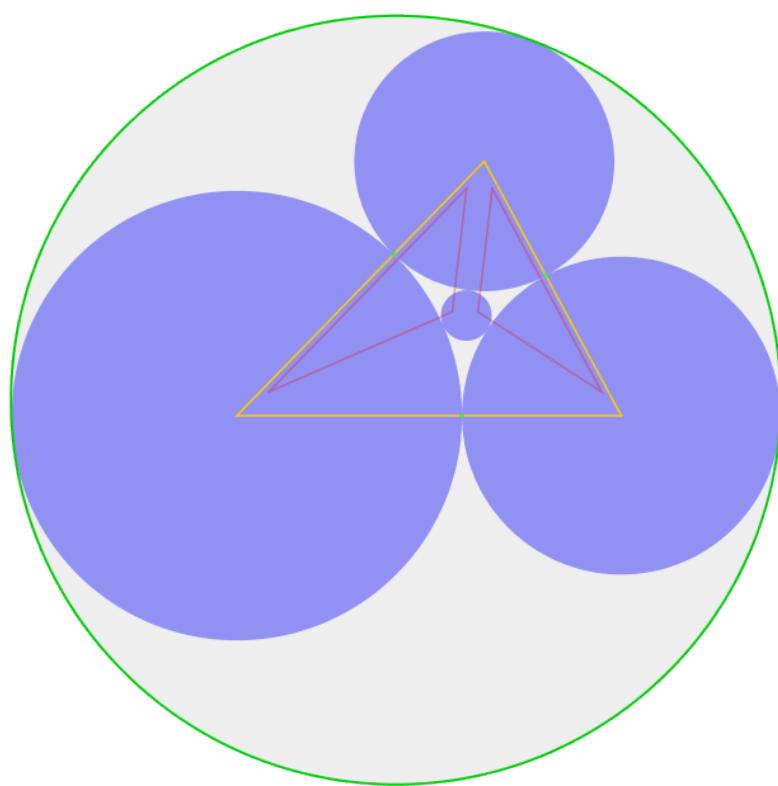
```



Figuur 4.4: *Packing* na het opvullen van een *hole*



Figuur 4.5: *Packing* na het opvullen van een tweede *hole*

Figuur 4.6: *Packing* als het opvullen van een tweede *hole* mislukt

```

3   int lower = sortedBigToSmall.size() - 1;
4   Circle smallestCir = sortedBigToSmall.get(lower);
5   Vector2 smallestPos = hole.tryFit(smallestCir);
6   if (smallestPos == null) {
7       return null;
8   }
9
10  // Probeer dan de grootste cirkel
11  int upper = 0;
12  Circle biggestCir = sortedBigToSmall.get(upper);
13  Vector2 biggestPos = hole.tryFit(biggestCir);
14  if (biggestPos != null) {
15      return new Location(biggestPos, biggestCir);
16  }
17
18  // Binair zoeken
19  Circle cir = null;
20  Vector2 pos = null;
21  while (lower - upper > 1) {
22      int middle = (upper + lower) / 2;
23      cir = sortedBigToSmall.get(middle);
24      pos = hole.tryFit(cir);
25
26      if (pos == null) {
27          upper = middle;

```

```

28     }
29     else {
30         lower = middle;
31     }
32 }
33
34 cir = sortedBigToSmall.get(lower);
35 pos = hole.tryFit(cir);
36 if (pos != null) {
37     return new Location(pos, cir);
38 }
39 else {
40     return null;
41 }
42 }
```

De *solver* houdt de lijst van cirkels bij gesorteerd op grootte, dat is cruciaal om snel de beste-passende cirkel te vinden. Eerst worden de grootste en kleinste cirkel uitgeprobeerd (lijn 3). Indien de kleinste niet past zal het algoritme direct rapporteren dat deze *hole* te klein is. De *hole* zal dan, zoals vermeld in sectie 4.6, verwijderd worden uit de lijst van mogelijk *holes*. Indien de grootste past (lijn 11) zal het algoritme onmiddellijk deze cirkel plaatsen in de *hole*. Er zijn immers geen grotere cirkels, dus deze is de cirkel die verondersteld wordt best te passen. Vervolgens wordt er een gebied bepaald in de overblijvende cirkels, waarin de best-passende cirkel zich bevindt. Initieel ligt de boven-en ondergrens van dit gebied op de uiteinden van de overblijvende cirkels. De cirkel in de midden van dit gebied wordt dan uitgeprobeerd. Afhangende of deze wel of niet past zal de boven-of ondergrens aangepast worden. Dit wordt telkens herhaald tot er nog maar één cirkel over blijft. Dit is dan de grootste cirkel die past, de *best-fit* voor deze *hole*.

4.6.2 Bepalen of een cirkel past in een *hole*

Er is geen exacte definitie van de grootte van een *hole*. Dit is niet mogelijk omdat de cirkels die de *hole* bepalen niet altijd aan elkaar raken. Het is echter wel mogelijk om te bepalen of een cirkel past.

Dit gebeurt door de cirkel die we willen testen te plaatsen in de *hole*. Eerst wordt de cirkel tegen twee van de cirkels in de *hole* geplaatst, met een cirkel-cirkel intersectie zoals beschreven in sectie 4.5. Deze cirkel-cirkel intersectie heeft natuurlijk altijd twee punten. Hiervan moet er één gekozen worden. De implementatie zorgt er voor dat de cirkels die de *hole* definiëren telkens tegen de klok gesorteerd zijn (ten op zichte van het middelpunt van deze drie cirkels). Dit maakt het mogelijk telkens het juiste punt te kiezen. Eenmaal dit punt bepaald is word de cirkel op deze plek gezet. Dan wordt gekeken of deze cirkel wel effectief in de *hole* geplaatst is, en of deze niet overlapt met de derde cirkel die de *hole* definieert.

```

1 public Vector2 tryFit(Circle cir) {
2     // Try to place circle
3     Vector2 pos = Helpers.getMountPositionFor(cir, first, second);
4
5     // Check that is inside the hole
```

```

6   boolean inside = Vector2.isInsideTriableBy(first.getPosition(),
7       second.getPosition(), third.getPosition(), pos);
8   if (!inside) {
9     return null;
10 }
11 // Test for overlap
12 Location loc = new Location(pos, cir);
13 if (third.overlaps(loc)) {
14   return null;
15 }
16 return pos;
17 }
```

Op lijn 6 wordt verzekerd dat het middelpunt van de cirkel in de *hole* ligt. Dit voorkomt dat de geplaatste cirkel buiten de *hole* geplaatst wordt, en dus zeker niet kan overlappen met cirkels buiten de *hole* zonder ook te overlappen met één van de cirkels die de *hole* definiëren. Op lijn 13 wordt dan de overlap met de derde *hole*-definiërende cirkel nagekeken. Er kan geen overlap zijn met de eerste twee, de methode *getMountPositionFor* plaatst de cirkel zodanig dat deze de twee andere cirkels raakt, maar niet overlapt. Indien de cirkel in de *hole* past, en dus alle checks doorstaat, wordt de positie voor deze cirkel teruggegeven. De *solver* zal deze cirkel dan in zijn oplossing plaatsen.

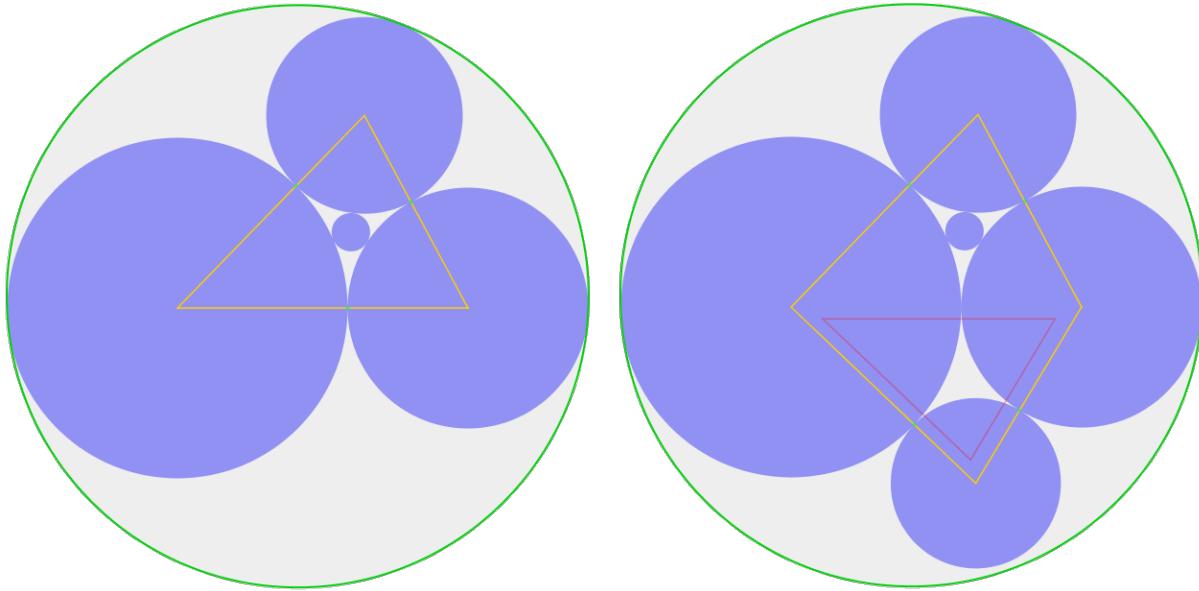
Het is niet nodig om na te gaan of er overlap is met andere cirkels in de oplossing. Als er met een andere overlap zou zijn, moet dit zijn omdat de cirkel buiten de *hole* geplaatst is, of er is ook overlap met één van de cirkels in de *hole* zelf. Dit zorgt er voor dat er zeer weinig overlap-checks gedaan moeten worden, wat het algoritme zeer snel maakt.

4.7 Shell

De *shell* of *schil* is het tweede van de belangrijkste concepten in de heuristiek. Dit is de buitenste laag van cirkels in een (tussen-)oplossing van de *solver*. Deze wordt in de implementatie simpelweg bijgehouden als een geordende lijst van cirkels. Cirkels die naast elkaar staan in de lijst, grenzen ook aan elkaar in de *shell*. De cirkels in deze laag zijn met de klok mee gesorteerd, ten opzichte van het middelpunt van de omcirkel. De eerste en laatste cirkel in de lijst volgen elkaar ook op in de *shell*.

De heuristiek voorgesteld in deze thesis probeert steeds eerst alle *holes* op te vullen. Maar wanneer er geen cirkels meer over zijn die klein genoeg zijn om te passen in *holes*, word er een cirkel op de *shell* geplaatst. Op de *shell* worden alle posities tegen twee cirkels van de *shell* overwogen. Deze aanpak beperkt het aantal mogelijke posities voor de geplaatste cirkel enorm en maakt het algoritme dus zeer snel (zie hoofdstuk 6 voor een vergelijking in snelheid). Er wordt steeds een cirkel zo dicht mogelijk bij het centrum van de huidige tussen-oplossing geplaatst. Dit om het uitbreiden van de omschreven cirkel zo min mogelijk te houden.

Eerst worden twee cirkels gekozen waartegen de nieuwe cirkel geplaatst zal worden. Hiervoor wordt gekeken naar het middelpunt tussen alle cirkels die naast elkaar staan op de *shell*. De twee cirkels waarvoor het middelpunt het dichtst bij het centrum van de huidige omschreven cirkel ligt worden gekozen als kandidaten om de derde cirkel tegen te



Figuur 4.7: Het plaatsen van de grootste cirkel op de *shell*

plaatsen. Dan wordt er gezocht naar een zo groot mogelijke cirkel die daar past op de *shell*.

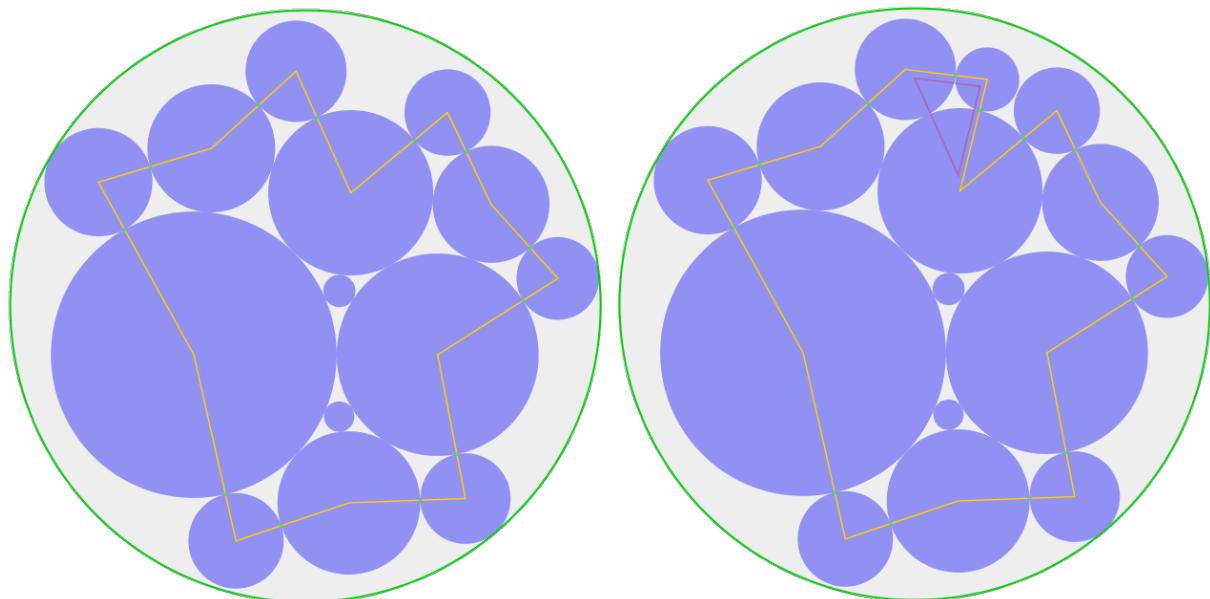
Indien geen enkele cirkel past wordt één van de twee kandidaat cirkels verwijderd uit de *shell*. Welke verwijderd wordt is verduidelijkt in sectie 4.7.2. Dit zorgt er voor dat de *shell* verandert en *groeit* naar buiten. In de volgende stap van het algoritme zal dan ook een andere positie voor een cirkel uitgeprobeerd worden.

Indien er wel een cirkel past wordt deze toegevoegd aan de *shell*, en geeft deze aanleiding tot een nieuwe *hole*. Deze *hole* zal vervolgens opgevuld worden indien mogelijk, zoals beschreven in sectie 4.6. Op figuur 4.7 wordt getoond hoe de *packing* verandert wanneer een cirkel geplaatst wordt op de *shell*. Eerst wordt een *packing* zonder *holes* getoond en vervolgens de *packing* nadat een cirkel op de *shell* geplaatst is. Hierop is duidelijk te zien hoe de *shell* aangepast werd, en deze plaatsing geleid heeft tot een nieuwe *hole*.

Zoals eerder aangegeven is het mogelijk dat de grootste cirkel niet past op deze positie op de *shell*. Het algoritme zal dan proberen een (beschikbare) kleinere cirkel op de *shell* te plaatsen, dit wordt geïllustreerd in figuur 4.8. Het is ook mogelijk dat geen enkele cirkel past op de positie in de *shell* die het dichts bij het centrum van de huidige omschreven cirkel ligt. Dit wordt getoond in figuur 4.9. Dan zal de *shell* uitgebreid worden naar buiten, en zal in de volgende stap van het algoritme een andere positie op de *shell* uitgeprobeerd worden.

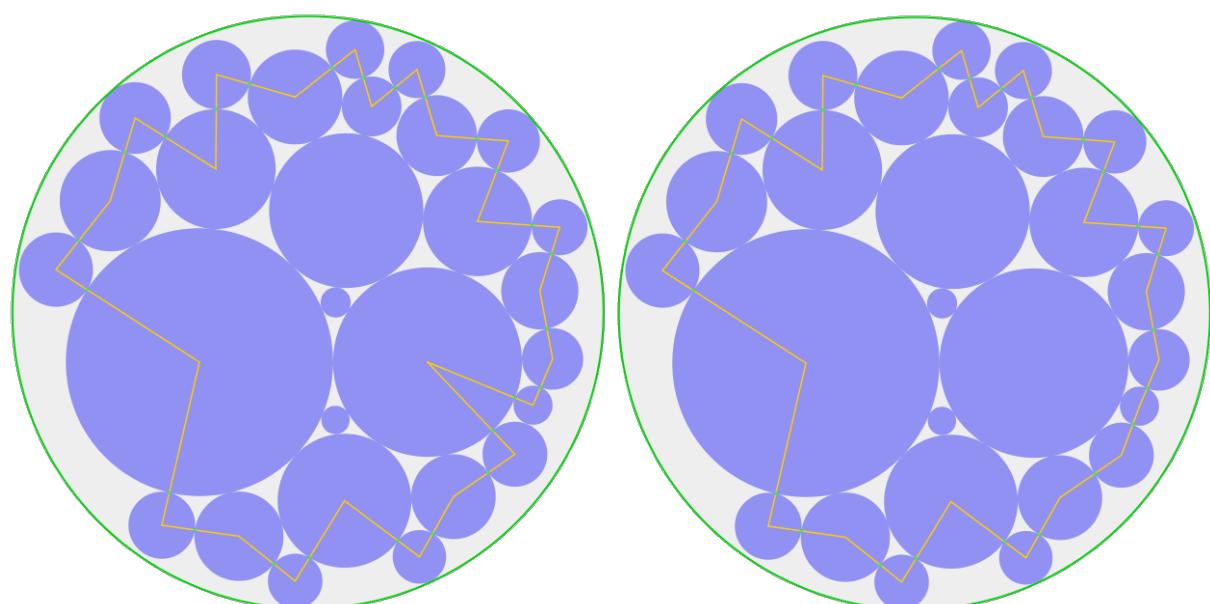
4.7.1 Slim de omcirkel berekenen gebaseerd op de *shell*

Bij het kiezen van de kandidaat-cirkels om een cirkel tegen te plaatsen op de *shell* wordt gebruik gemaakt van de omschreven cirkel van de huidige tussen-oplossing. Zoals eerder vermeld kan voor elke (tussen-)oplossing de omcirkel berekend worden. Dit gebeurt door een aangepaste versie van het Welz algoritme voor de omcirkel van punten beschreven in [20]. De gebruikte implementatie is gebaseerd op de implementatie in [18]. Het is een recursief algoritme dat in lineaire tijd de omcirkel kan berekenen. Het basisidee bestaat



Figuur 4.8: Het plaatsen van een kleinere cirkel op de *shell*

Focus: midden bovenaan



Figuur 4.9: *Shell* aanpassen als geen enkele cirkel past

Focus: rechts onderaan

eruit dat de omcirkel van een aantal cirkels (of punten) volledig gedefinieerd is door maximum drie van deze cirkels. Het algoritme vindt deze cirkels.

Het is intuïtief te begrijpen dat deze drie cirkels aan de buitenkant van een (tussen-)oplossing zullen liggen. Dat is ook net waaruit de *shell* bestaat, de cirkels aan de buitenkant van een oplossing. Het is dus mogelijk om in elke stap van de *solver* de omcirkel zeer efficiënt te berekenen. De complexiteit is dan slechts lineair in het aantal cirkels op de *shell* in huidige (tussen-)oplossing, wat slechts een subset is van het totaal aantal cirkels in de oplossing. Aangezien de omcirkel regelmatig moet worden herberekend doorheen het algoritme is dit een zeer interessante optimalisatie.

4.7.2 Bepalen of een cirkel past op de *shell*

Om te bepalen of een cirkel op de *shell* past plaatsen we de cirkel eerst tegen twee cirkels op de *shell*. Dit gebeurt op dezelfde manier als het plaatsen van een cirkel tegen twee cirkels van een *hole*. De exacte methode is reeds uiteengezet in sectie 4.5. Eenmaal deze positie gekend is, wordt er nagekeken of dit niet tot overlap leidt. Indien er overlap is is het niet mogelijk om de cirkel daar op de *shell* te plaatsen, en wordt er informatie teruggegeven over welke cirkel op de *shell* voor problemen zorgt.

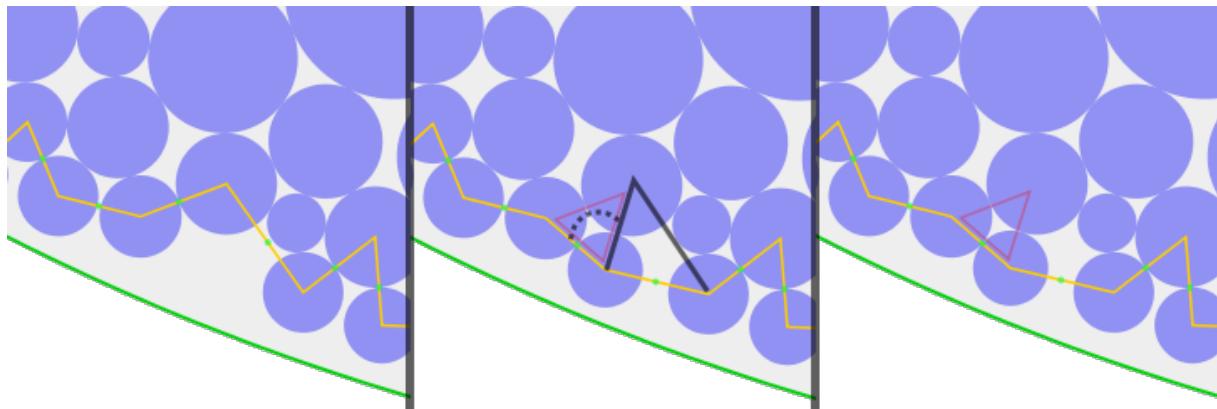
Om na te gaan of er overlap is, worden er systematisch een aantal cirkels op de *shell* nagekeken. Het is niet nodig andere cirkels, die niet op de *shell* zitten, na te kijken voor overlap. Dat is zo omdat, een nieuwe cirkel steeds op de *shell* geplaatst wordt zodanig dat als er overlap zou zijn met cirkels in de oplossing, minstens één van die cirkels op de *shell* ligt. Omdat ik geen exacte wiskundige definitie van de *shell* heb (de *shell* is enkel gedefinieerd door het algoritme dat ze opbouwt) is het niet mogelijk om hier een echt bewijs van te geven. Uit eigen empirische tests blijkt de verwachting omtrent deze overlappingen echter wel te kloppen. Verdere bedenkingen hierbij kan u terug vinden in hoofdstuk 5. Om deze overlappingstest zo snel mogelijk te kunnen uitvoeren worden eerst cirkels dichtbij nagekeken. Er staat ook een limiet op het aantal cirkels die getest worden. Uit tests, tot 5000 cirkels, blijkt dat drie cirkels aan elke kant van de *shell* nakijken genoeg is. Voor de meeste gevallen is één cirkel nakijken genoeg, maar sommige rand gevallen (wanneer meerdere kleine cirkels dichtbij elkaar staan op de *shell*) vragen deze extra checks.

Het aantal cirkels dat nagekeken wordt is een hyperparameter *checkRadius* van het algoritme. De volgende code toont hoe de overlap nagekeken wordt:

```

1  for (int i = 1; i <= checkRadius; ++i) {
2      int prevIndex = (firstIndex + shell.size() - i) % shell.size();
3      Location prev = shell.get(prevIndex);
4      if (loc.overlaps(prev)) {
5          toRemove = first;
6          break;
7      }
8      int nextIndex = (secondIndex + i) % shell.size();
9      Location next = shell.get(nextIndex);
10     if (loc.overlaps(next)) {
11         toRemove = second;
12         break;
13     }

```



Figuur 4.10: Een cirkel veroorzaakt een tegen-de-klok *shell*

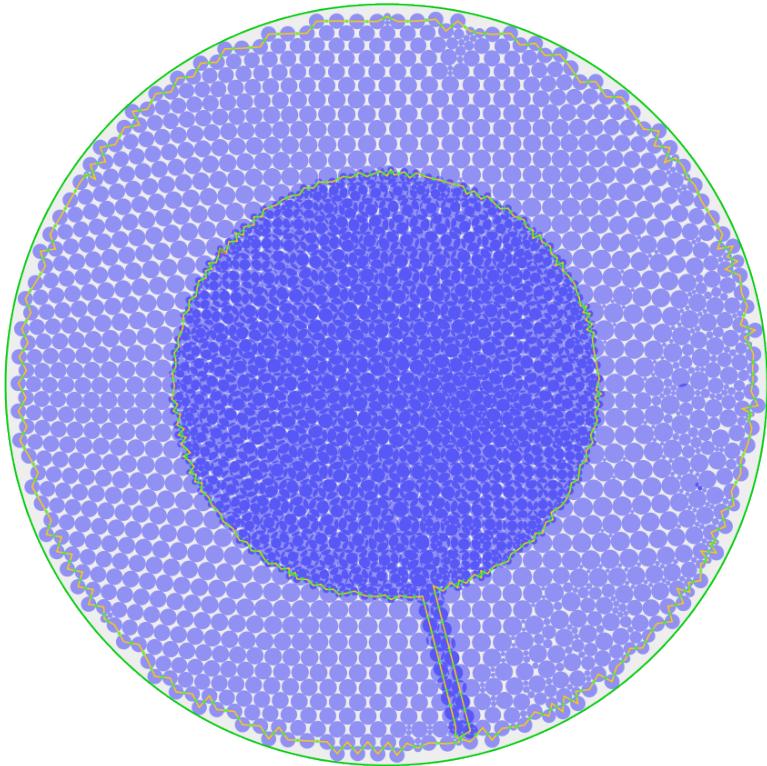
14 }

Er wordt dus om te beurt links en rechts van de huidige positie op de *shell* nagekeken voor overlap. Indien er overlap gevonden is, wordt bijgehouden aan welke kant van de *shell* dit gebeurd is. *toRemove* is dus uiteindelijk *first* of *second*, wat aan geeft of er aan de kant van de eerste cirkel, of van de tweede cirkel, overlap voorkomt. *toRemove* kan ook *null* zijn indien er geen overlap is. Deze informatie wordt dan gebruikt door de *solver* om te bepalen of de cirkel geplaatst kan worden (*toRemove = null*), of dat de *shell* aangepast moet worden. Deze stap wordt hieronder besproken in sectie 4.7.3.

4.7.3 Een cirkel plaatsen op de *shell*

Om een cirkel te op de *shell* plaatsen wordt eerst de grootste cirkel die op de *shell* past binair gezocht in de lijst van nog-te-plaatsen cirkels. De gebruikte methode is vergelijkbaar met het zoeken naar de grootste cirkel die past in een *hole*, zoals beschreven in sectie 4.6.1. Indien er een cirkel gevonden wordt die past op de *shell* wordt de *shell* uitgebreid met deze cirkel. De cirkel wordt dan tussen de cirkels, waartegen hij geplaatst is, in de *shell* (voorgesteld als lijst) geplaatst. Dit wordt geïllustreerd in figuur 4.7, figuur 4.8. De gele lijn (die de *shell* voorstelt, zoals beschreven in hoofdstuk 3) wordt uitgebreid met een extra punt. Dit zorgt er ook voor dat een nieuwe *hole* gemaakt wordt waar mogelijk kleinere cirkels in passen.

Een laatste check die gebeurt gaat na of er door het plaatsen van de cirkel de *shell* nog juist gevormd is. Indien een cirkel geplaatst wordt zodat de cirkels niet meer met de klok mee gesorteerd zijn, zou dit er voor kunnen zorgen dat foutieve plaatsingen voorkomen. Om dit te voorkomen wordt de gerichte hoek tussen de geplaatste cirkel en de cirkels waartegen hij geplaatst is nagekeken. Indien deze hoek negatief is wordt de *shell* hieraan aangepast. Dit wordt getoond in figuur 4.10. Het eerste deel toont de configuratie waarop een cirkel geplaatst zal worden. Het laatste deel toont de uiteindelijke configuratie van de *shell*. Het middelste deel toont met een zwarte lijn het deel van de *shell* dat verwijderd is om er voor te zorgen dat deze kloksgewijs gesorteerd blijft. Op figuur 4.11 wordt getoond wat er kan gebeuren als deze check niet gebeurt.



Figuur 4.11: Mogelijke fout indien de *shell* niet met de klok mee gesorteerd is

4.8 Conclusie

Dit hoofdstuk gaf een volledig overzicht van de nieuwe constructieve heuristiek. Waar nodig werd de uitleg verduidelijkt met code uit de implementatie. Er werden ook de verschillende veronderstellingen geformuleerd die gebruikt worden om het algoritme zeer snel te maken. Zie ook hoofdstuk 5 voor verdere bedenkingen hieromtrent.

Hoofdstuk 5

Bedenkingen bij implementatie

5.1 Precisie

De implementatie gebruikt *double* variabelen. Ook geeft de methode gebruikt om cirkels tegen elkaar te plaatsen, beschreven in sectie 4.5, geen exacte oplossing. Deze posities worden gebruikt om cirkels te plaatsen, en later worden tegen deze cirkels nieuwe cirkels geplaatst. Hierdoor wordt er doorheen het algoritme dus een kleine fout opgebouwd. Deze fout uit zich in een kleine overlap tussen cirkels in de uiteindelijke verkregen *packing*. Deze overlap blijft echter beperkt tot 10^{-15} vierkante eenheden voor de grootste *packings*.

Dit is een inherent probleem van werken in eindige precisie. Andere algoritmen hebben dus te kampen met hetzelfde probleem, hoewel er niet altijd aandacht aan wordt besteed in de gepubliceerde papers. In [1], [21] en [16] worden resultaten verkregen met een precisie van respectievelijk 10^{-10} , 10^{-28} en 10^{-7} .

Aangezien de vergelijkingen in hoofdstuk 6 tot een precisie van 10^{-10} gebeuren heeft dit verder geen impact op deze resultaten.

5.2 Veronderstellingen

Zoals eerder vermeld worden er, bij de *holes* en *shell*, enkele veronderstellingen gedaan om het algoritme zeer snel te laten werken. Deze veronderstellingen lijken voor de meeste problemen correct te zijn. Er zijn echter sommige problemen, vooral als er gewerkt wordt met zeer hoge aantallen cirkels (duizenden), die wél significante fouten kunnen opleveren. Deze uiten zich dan in *packings* met een grote overlap.

Uit huidige tests blijkt er vooral een probleem met de *holes*, de *shell* heeft voor zover mijn huidige tests uitwijzen geen problemen. Doordat de cirkels die een *hole* definiëren niet altijd aan elkaar raken kan het gebeuren dat er toch nog een overlap is, als twee *holes* naast elkaar staan.

Een voorstel om dit op te lossen is een *hole* niet op te delen in drie *holes* als er een cirkel in geplaatst wordt, maar slechts in twee. Eén van die *holes* bestaat dan uit meer dan drie cirkels. Zo is het wel mogelijk om altijd aaneensluitende cirkels een *hole* te laten bepalen. Dit is een oplossing die mogelijk geëxplooreerd kan worden in de toekomst, maar wegens tijdsbeperkingen geen deel is van deze thesis.

Hoofdstuk 6

Resultaten

In dit hoofdstuk worden de verkregen *packings* vergeleken met een reeks gekende *packings*, zoals gerapporteerd op de Packomania website [17]. Packomania is een website die de beste oplossingen (in radius van omschreven cirkel) voor verschillende *circle-packing* problemen probeert te verzamelen. De oplossingen worden onderling vergeleken, op zowel de verkregen radius van de omschreven cirkel, als ook de tijd nodig om tot deze *packing* te komen indien deze gekend is. De nodige rekentijd voor deze algoritmen is echter niet altijd even makkelijk te vinden. Veel van de *packings* op Packomania hebben geen bijhorende publicatie. Het gebruikte algoritme en de nodige tijd om de *packing* te bekomen is dus niet gekend, enkel de verkregen omschreven cirkel en coördinaten van de *packing*. De vergelijking in tijd zal dus een zeer ruwe vergelijking zijn gebaseerd op slechts enkele papers.

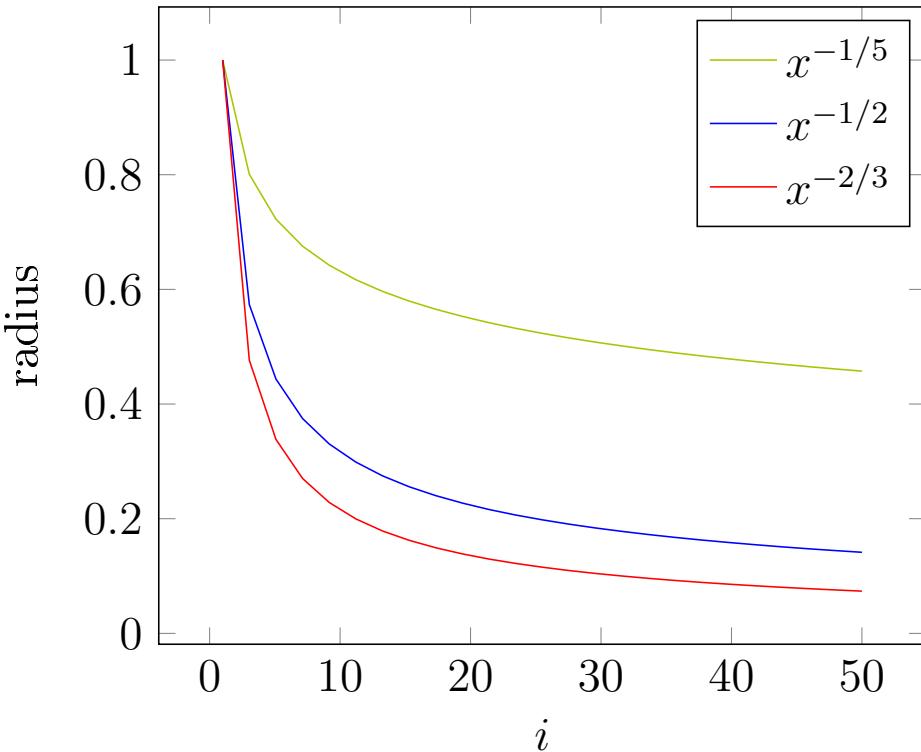
Ook geef ik resultaten voor *packings* met veel meer cirkels dan deze gerapporteerd op Packomania. Hiervoor heb ik geen andere resultaten gevonden in de literatuur om mee te vergelijken.

Packomania heeft resultaten voor verschillende verdelingen van cirkels. Deze verdelingen zijn als volgt:

- $r_i = 1$ (alle cirkels gelijke grootte)
- $r_i = i$
- $r_i = i^{1/2}$
- $r_i = i^{-1/5}$
- $r_i = i^{-1/2}$
- $r_i = i^{-2/3}$

Hierbij zijn er telkens N cirkels in het probleem, en is $i \in (1, 2, \dots, N)$. De verhouding tussen enkele van deze verdelingen worden verduidelijkt in figuur 6.1.

Al deze berekeningen zijn uitgevoerd op een Mid 2009 Macbook-Pro 15 inch met een 2.8Ghz Core 2 Duo processor en 4GB ram.



Figuur 6.1: Packomania verdelingen

6.1 Packomania vergelijking

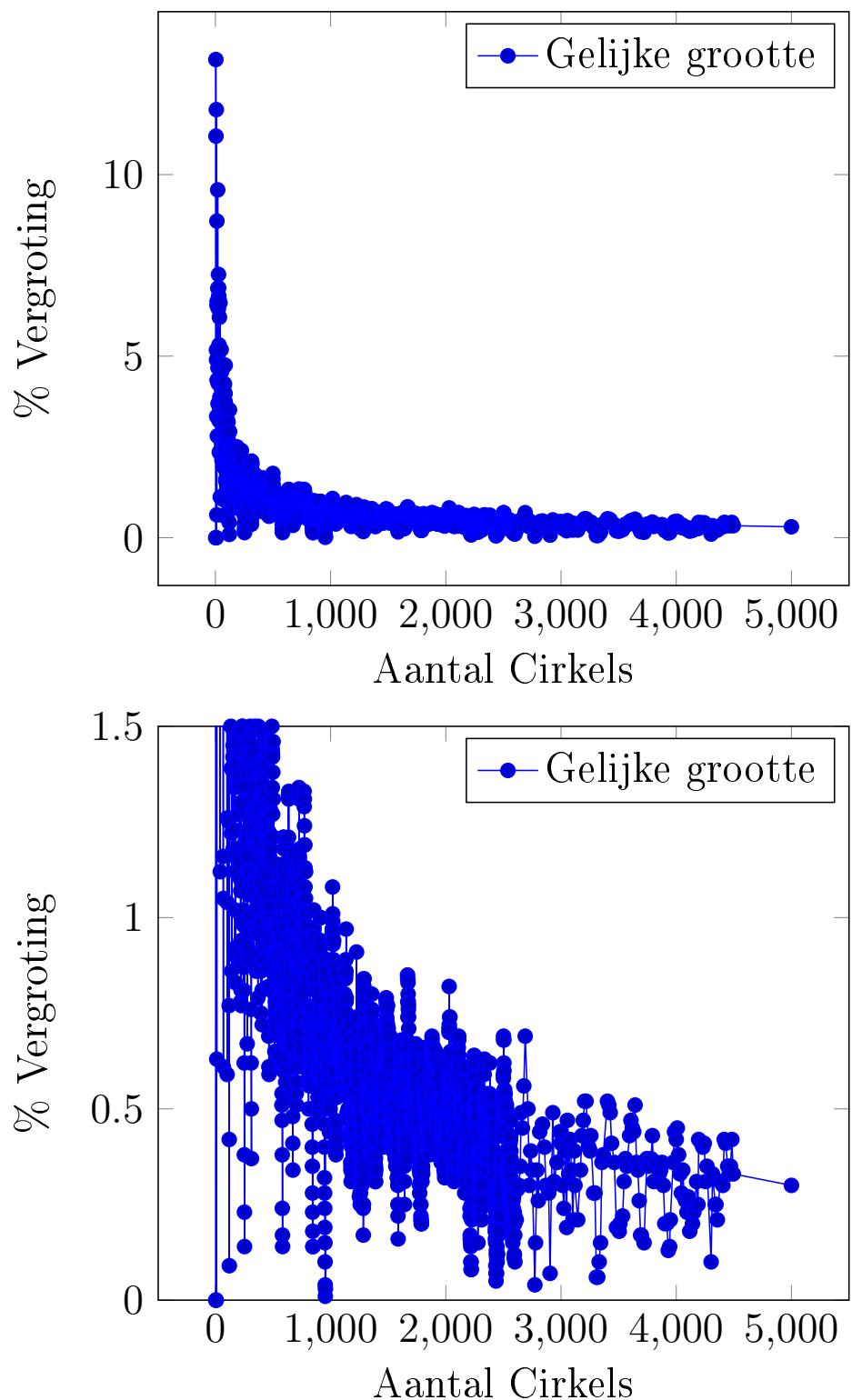
6.1.1 Cirkels met gelijke grootte

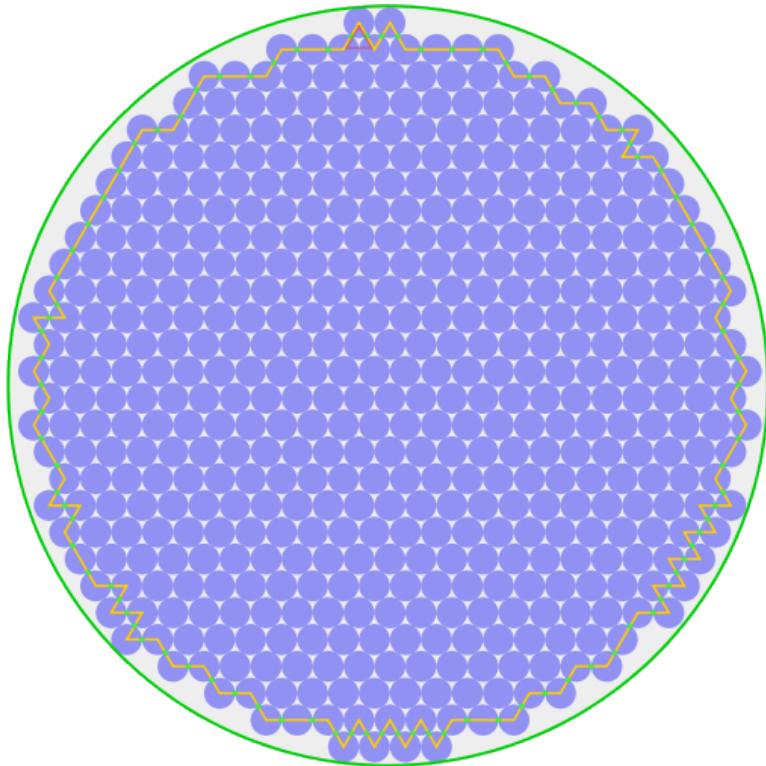
In figuur 6.2 wordt de procentuele vergroting weergegeven voor *packings* met N cirkels van gelijke grootte. Er wordt een volledig beeld gegeven, als ook een gedetailleerder beeld waar vergrotingen boven de 1,5% niet worden weergegeven. Deze vergroting is afgemeten ten opzichte van de best gekende oplossing op de Packomania website. Tabellen die mijn resultaten vergeleken met de best gekende tonen kan u terug vinden in bijlage B.1.

Gemiddeld geeft mijn algoritme een resultaat dat 0,79% groter is dan het best gekende resultaat voor problemen met cirkels van gelijke grootte. Er is echter een duidelijke neerwaartse trend. Voor problemen met meer dan 1000 cirkels is de gemiddelde vergroting nog slechts 0,48%. Voor meer dan 2000 cirkels nog 0,39% en voor meer dan 3000 nog 0,32%. Problemen met een groter aantal cirkels geven duidelijk een beter resultaat.

Dit komt mogelijk omdat hoe meer cirkels er zijn, hoe moeilijker het probleem wordt. Hierdoor zullen de best gekende oplossingen voor problemen met zulke grote aantallen cirkels minder dichtbij de absolute optimale oplossing liggen. Omdat mijn algoritme enkel nieuwe cirkels tegen twee reeds geplaatste cirkels plaatst, hebben al mijn oplossingen voor dit probleem een duidelijke structuur. Deze structuur is een zeshoekige structuur. Dit wordt geïllustreerd in ???. Dit is een zeer eenvoudige structuur, maar benaderd redelijk goed de best gekende oplossingen. Meer figuren hiervan vindt u terug in bijlage C.

De benodigde tijd om tot een oplossing te komen blijft onder 10 milliseconden tot $N = 100$. Tot 500 cirkels blijft de nodige rekentijd onder 100 milliseconden. De rekentijd loopt pas op tot één seconde bij 2200 cirkels, en slechts 3,5 seconden voor 5000 cirkels.

Figuur 6.2: Vergelijking van *packings* van even grote cirkels



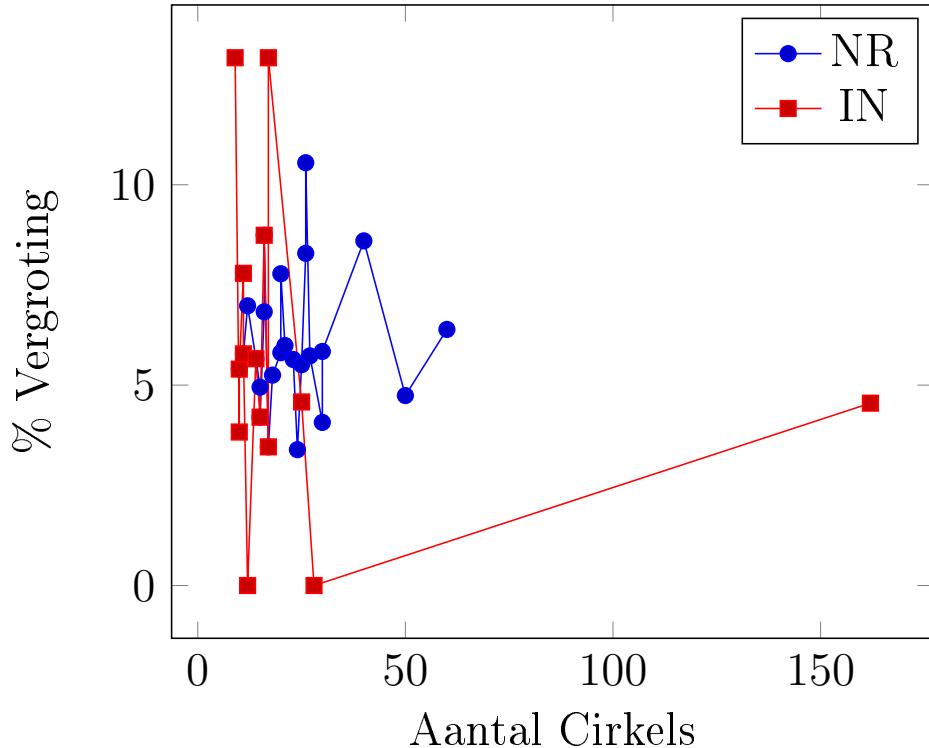
Figuur 6.3: *Packing* voor 500 even grote cirkels

Zoals eerder vermeld zijn vergelijkingen van berekeningstijden moeilijk te vinden. In [9] worden echter tijden gerapporteerd van 110 seconden voor 30 cirkels (mijn algoritme gebruikte hier minder dan een milliseconde), en 15311 seconden (meer dan 4 uur) voor 100 cirkels (mijn algoritme gebruikte voor hetzelfde probleem 7 milliseconden). Zij halen resultaten die zeer dichtbij de best gekende liggen (soms de beste).

Zelfs de constructieve algoritmen beschreven in [1] en [10] vragen meerdere seconden, en soms minuten, om te berekenen. Hun resultaten zijn echter moeilijk te vergelijken omdat [1] een alternatieve versie van *circle-packing* oplost, en [10] *packings* maakt in rechthoeken.

Besprekking

Over het algemeen zijn dit goede resultaten. Ze liggen redelijk dichtbij de best gekende oplossing, maar hebben een duidelijk en eenvoudig patroon. Dit patroon kan je eenvoudig genereren met een ander algoritme, en dus zijn dit zeker niet de meest indrukwekkende resultaten. Het probleem waar alle cirkels een gelijke grootte hebben is dan ook niet de kracht van mijn algoritme. Aangezien elke cirkel even groot is, zal er nooit een cirkel gevonden worden dat in een *hole* past. Ook is dit het eenvoudigste probleem. Het feit dat er resultaten zijn tot 5000 cirkels, waar voor problemen met verschillende radii slechts tot maximum 200 cirkels opgelost zijn, wijst hier op. Hoewel mijn algoritme dus relatief goede resultaten geeft voor dit probleem, zijn de resultaten die volgen interessanter.



Figuur 6.4: Vergelijking van Packomania Benchmark problemen

6.1.2 Packomania Benchmark

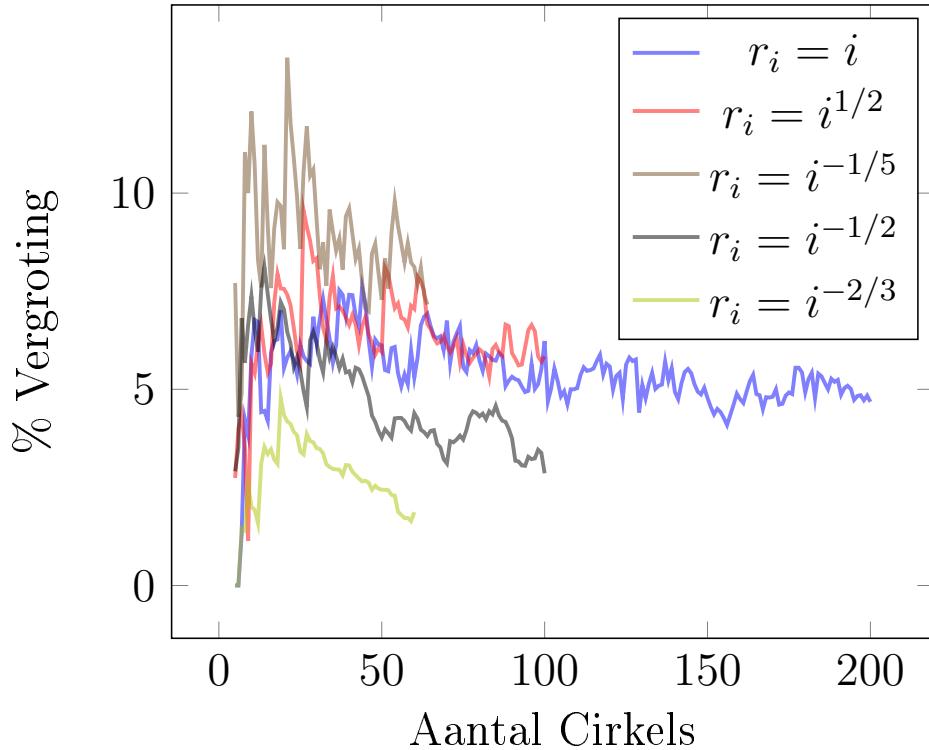
Packomania geeft ook resultaten voor enkele benchmark instanties. Deze benchmarks werden geïntroduceerd door WenQi Huang in verscheidene papers, en samengevat in [12]. De radii van de cirkels in deze benchmark instanties kan u terug vinden in bijlage A. Een eerste set verdelingen (met prefix *NR*) heeft tussen 10 en 60 cirkels per probleem, een tweede set (met prefix *IN*) tussen 9 en 28 cirkels met nog één probleem van 162 cirkels. In elke verdeling zitten cirkels met verschillende raddii, maar ook cirkels met gelijke raddii.

In figuur 6.4 wordt de procentuele vergroting van de oplossing verkregen met mijn algoritme, vergeleken met de best gekende oplossing. Gemiddeld geeft mijn algoritme een resultaat dat 5,94% groter is dan de best gekende resultaten. Door het zeer gelimiteerd aantal instanties is er echter geen duidelijke trend te zien zoals bij *packings* voor cirkels met gelijke grootte, en de Packomania Macht problemen.

De benodigde rekentijd bedraagt voor al deze problemen ook slechts enkele milliseconden. In [21] worden deze problemen opgelost in tijden tussen 1 seconde voor 10 cirkels, en meer dan 2 uur voor 60 cirkels. Ook in [13] kan de nodige tijd oplopen tot meerdere uren voor de grotere problemen. Zelfs de kleinere problemen (10 tot 15 cirkels) kunnen slechts meerdere minuten worden berekend. Mijn algoritme heeft, in vergelijking, slechts enkele miliseconden nodig voor hetzelfde probleem.

Bespreking

Ook deze resultaten zijn over het algemeen goed. Gemiddeld is er slechts een 5,94% vergroting van de radius van de omschreven cirkel, met slechts 3 problemen die meer dan 10% vergroting hebben. Er zijn echter ook 2 problemen die even goed opgelost worden



Figuur 6.5: Vergelijking van Packomania Macht problemen

dan de best gekende!

Dit zijn dus goede resultaten, maar het aantal probleeminstancies blijft zeer beperkt. In de volgende sectie wordt de kracht van dit nieuwe algoritme duidelijker met meer cirkel-verdelingen.

6.1.3 Packomania Machten

Packomania rapporteert ook resultaten voor verschillende verdelingen met een vaste structuur: $r_i = i^X$. Hier is X steeds een andere macht. Deze problemen verzamelen ik onder één noemer: de *Packomania macht* problemen. Tabellen die mijn resultaten met de best gekende vergelijken kan u terug vinden in bijlage B.2.

In figuur 6.5 worden voor al deze macht problemen de procentuele vergroting getoond. Dit is de omtrek van de omschreven cirkel verkregen uit mijn algoritme ten opzichte van de best gekende oplossingen.

Gemiddeld geeft mijn algoritme een resultaat dat 5,61% groter is dan de best gekende resultaten voor deze problemen. Ook is er duidelijk een neerwaartse trend. Problemen met een groter aantal cirkels liggen dichterbij de best gekende oplossing.

In volgende tabel worden de gemiddelde vergroting per macht probleem weergegeven:

Tabel 6.1: Packomania Machten gemiddelde vergroting

Probleem	Aantal cirkels	% Vergroting
$r_i = i$	5 tot 200	5,41%
$r_i = i^{1/2}$	5 tot 100	6,42%

Tabel 6.1: Packomania Machten gemiddelde vergroting

Probleem	Aantal cirkels	% Vergroting
$r_i = i^{-1/2}$	5 tot 100	4,77%
$r_i = i^{-2/3}$	5 tot 60	2,78%
$r_i = i^{-1/5}$	5 tot 64	8,88%

Nodige rekentijd is voor al deze problemen slechts enkele milliseconden voor mijn algoritme, terwijl de rekentijd voor de implementaties in de literatuur oploopt op tot 6 uur in [2], tot 7 uur in [14] en zelfs meer dan een volledige dag (27 uur) in [22], voor slechts 30 cirkels. Het snelste andere algoritme, tot zover ik weet, werd gegeven in [21]. Zij hadden tijden tussen 1 seconden voor 5 cirkels, en 1 uur voor 30 cirkels. Zij hadden echter geen goed stopping-criteria, en deze tijd was dus de tijd nodig alvorens ze hun beste oplossing vonden, maar hun algoritme bleef ongeacht meer dan 2,5 uur zoeken.

In figuur 6.6 wordt een *packing* getoond voor het $r_i = i^{-1/2}$ probleem. Meer afbeeldingen van *packings* vindt u terug in bijlage C

Bespreking

Deze resultaten zijn volgens mij zeer indrukwekkend. Resultaten voor de problemen $r_i = i$, $r_i = i^{1/2}$, $r_i = i^{-1/2}$ en $r_i = i^{-2/3}$ blijven steeds onder 10% vergroting tegenover de best gekende. Enkel het probleem $r_i = i^{-1/5}$ heeft enkele uitschieters tot maximum 13,45% vergroting. Dit laatste resultaat komt waarschijnlijk omdat $r_i = i^{-1/5}$ het probleem is waarin de cirkels het minst verschillen van grootte (zie figuur 6.1). Dit zorgt er voor dat het algoritme minder gebruik kan maken van *holes*, aangezien meestal enkel de kleinere cirkels *holes* zullen opvullen. Het probleem met het meeste verschil in radii, $r_i = i^{-2/3}$, heeft dan ook de beste resultaten. Met maximum 4,77% vergroting en gemiddeld slechts 2,78%.

Ook is er een duidelijke neerwaartse trend zichtbaar in de vergroting van de omschreven cirkel als het aantal cirkels groter wordt. Dit komt doordat het algoritme dan meer keuzemogelijkheden heeft in elke stap. Hierdoor zal het algoritme vaker *holes* kunnen opvullen, en een dichtere *shell* opbouwen. Hier zie je duidelijk de kracht van het algoritme als dit genoeg verschillende cirkels heeft om uit te kiezen.

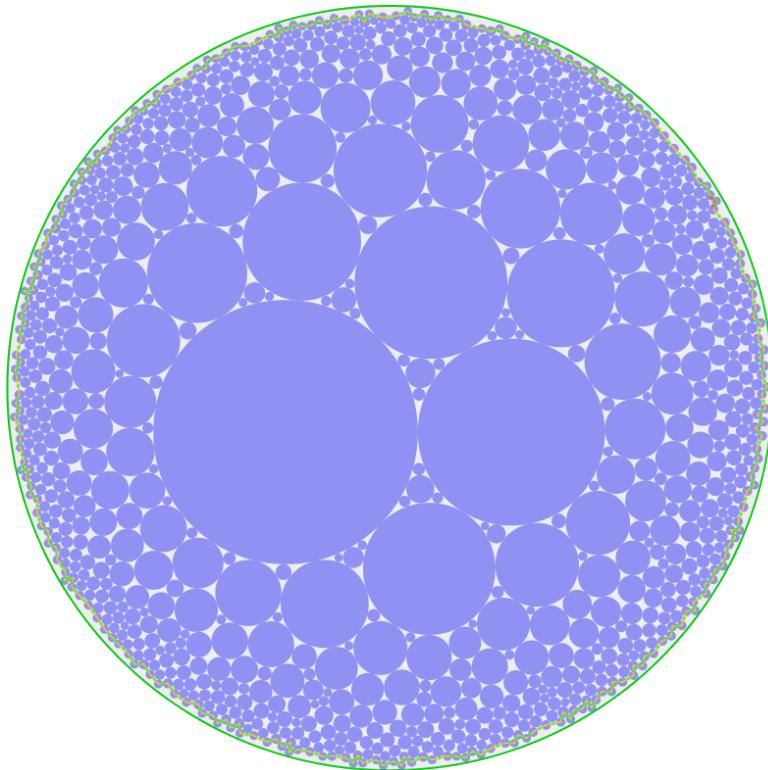
Bovendien worden deze resultaten zeer snel bekomen. Waar andere algoritmen uit de literatuur uren nodig hebben, vraagt mijn algoritme slechts milliseconden.

Dit zijn denk ik de meest indrukwekkende resultaten, en tonen het best de kracht van het algoritme.

6.2 Grottere aantallen cirkels

Het algoritme uit deze thesis laat ook toe om problemen met veel grotere aantallen cirkels op te lossen. Resultaten voor 1000 tot 14000 cirkels kan je vinden in bijlage B.4. Ik heb geen andere methoden gevonden die problemen met zo'n grote aantallen cirkels kunnen oplossen. De verkregen radii van de omschreven cirkel kan ik dus niet vergelijken.

De nodige tijd om deze problemen op te lossen blijft ook beperkt. Problemen tot 1400 cirkels blijven onder één seconde. Problemen tot 9000 cirkels onder 10 seconden, en 14000



Figuur 6.6: *Packing* voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$

cirkels vragen minder dan één minuut tijd.

Bij deze grote aantallen cirkels komen echter wel enkele problemen naar boven, zoals beschreven in hoofdstuk 5. Ook was het niet mogelijk op mijn computer om problemen met meer dan 14000 cirkels op te lossen. Bij het nakijken van de oplossing wordt een recursief algoritme gebruikt op de volledige lijst cirkels. Dit geeft een *stack-overflow* en heb ik nog niet kunnen oplossen.

Mits de resterende problemen met overlap voor sommige van deze problemen met grote aantallen cirkels, zijn dit interessante resultaten. Zelfs voor duizenden cirkels kan het algoritme een resultaat geven in enkele seconden. Dit is, voor zover ik weet, niet mogelijk met andere algoritmen in aanvaardbare tijd, laat staan in enkele seconden.

6.3 Conclusie

In dit hoofdstuk heb ik oplossingen verkregen door mijn algoritme vergeleken met de best gekende *packings*. Ook heb ik de nodige rekentijd vergeleken met enkele andere algoritmen.

De oplossingen verkregen met mijn nieuwe constructieve heuristiek hebben een gemiddeld minder dan 6% grotere omschreven cirkel. Dit lijkt mij een zeer aanvaardbare vergroting van de omschreven cirkel, rekening houdend met het feit dat het nieuwe algoritme deze problemen in slechts milliseconden oplost. Zelfs de grootste problemen, bestaande uit duizenden cirkels, kunnen in slechts enkele seconden opgelost worden. Ook is er een interessante neerwaartse trend in de vergroting van de radius van de bekomen omschreven cirkel. Dit toont de kracht van het algoritme wanneer het meer cirkels heeft

met verschillende radii om uit te kiezen.

Bovendien laat het algoritme toe om problemen met veel grotere aantallen cirkels in aanvaardbare tijd op te lossen. Voor zover ik weet is er geen enkel ander algoritme dat dit mogelijk maakt voor cirkels met verschillende radii.

Hoofdstuk 7

Verder werk

In dit hoofdstuk geef ik enkele voorstellen voor verdere uitwerkingen van het algoritme. Mogelijke verbeteringen, zowel in snelheid als kwaliteit (de grootte van de bekomen omcirkel) van uitkomsten. Dit zijn mogelijke ideeën om in de toekomst op verder te werken.

7.1 Constante-tijd omschreven cirkel

In het algoritme bij het plaatsen op de *shell* wordt gebruik gemaakt van de omschreven cirkel van de huidige tussen-oplossing. Deze omschreven cirkel wordt berekend in lineaire tijd ten opzichte van het aantal cirkels op de *shell*. Dit geeft dan de kleinste mogelijke omschreven cirkel van de huidige oplossing.

Het is echter mogelijk om in constante tijd een omschreven cirkel te berekenen. Simpelweg door, telkens er een cirkel geplaatst wordt buiten de huidige omschreven cirkel, een nieuwe te berekenen die rond de oude omcirkel en deze nieuwe cirkel past. Dit kan zeer eenvoudig in constante tijd, maar geeft niet de kleinste-mogelijke omschreven cirkel voor de *packing*. Deze constante-tijd omschreven cirkel is mogelijk wel goed genoeg als benadering, en kan een grote snelheids-winst geven voor zeer grote *packings*.

7.2 Best-Fit

Het algoritme is gebaseerd op een *best-fit* principe. Met andere woorden in elke stap wordt de best-passende cirkel gekozen. Wat de best-passende cirkel is is echter moeilijk te bepalen. In de huidige implementatie worden er daarom enkele keuzes gemaakt, gebaseerd op bestaande heuristieken en intuïtie. Hier kunnen echter andere keuzes gemaakt worden, die mogelijk tot betere resultaten zullen leiden.

Eén voorbeeld van een alternatieve keuze is bij het plaatsen van een cirkel op de *shell*. Nu worden de nieuwe cirkels zo dicht mogelijk bij het huidige middelpunt geplaatst. Dit gebeurt omdat de omschreven cirkel dan zo weinig mogelijk uitgebreid moet worden. Maar wat als, wanneer we geen cirkel meer binnen de huidige omcirkel kunnen plaatsen, we de cirkel zo ver mogelijk van het middelpunt plaatsen (maar wel nog tegen twee cirkels op de *shell*)? Dit zal er voor zorgen dat de omschreven cirkel veel verder uitgebreid zal worden. Het zal er ook voor zorgen dat de omcirkel veel minder vaak uitgebreid moet worden, omdat hij in grotere stappen uitbreidt. Mogelijk geeft dit aanleiding tot betere

en misschien schnellere *packings* omdat de omschreven cirkel minder vaak herberekend moet worden.

Hoofdstuk 8

Conclusie

In deze thesis heb ik een nieuwe constructieve heuristiek voorgesteld. Deze is gebaseerd op het *best-fit* principe, waarbij in elke stap de beste cirkel gekozen wordt om aan de oplossing toe te voegen. Deze nieuwe heuristiek gebruikt twee nieuwe concepten: *holes* en de *shell*. Eerst worden de *holes* opgevuld, en dan cirkels geplaatst aan de buitenkant van de tussen-oplossing, op de *shell*. Door enkele veronderstellingen te maken over het aantal cirkels die getest moeten worden voor overlap bij elke plaatsing, kan het algoritme zeer snel relatief goede *packings* genereren. Ik heb resultaten getoond, vergeleken met *packings* voor een groot aantal cirkel-verdelingen. Deze tonen aan dat het algoritme goede *packings* maakt in vergelijking met bestaande algoritmen. Deze *packings* werden gegenereerd in een fractie van de tijd die andere, state-of-the-art algoritmen, nodig hebben (milliseconden tegenover uren).

Ik denk dus dat ik zeker geslaagd ben in mijn opzet. Een constructief algoritme maken dat in real-time goede *packings* kan maken voor het zeer moeilijke *cirkel-packing* probleem.

Bibliografie

- [1] Hakim Akeb and Yu Li. A basic heuristic for packing equal circles into a circular container. *Comput. Oper. Res.*, 33:2125–2142, 2006.
- [2] I Al-Mudahka, Mhand Hifi, and Rym M’Hallah. Packing circles in the smallest circle: an adaptive hybrid algorithm. *Journal of the Operational Research Society*, 62(11):1917–1930, 2011.
- [3] P. Bollansée. Circle packing. <https://github.com/circle-packing/best-fit>.
- [4] P. Bollansée. Packomania tabellen. <https://github.com/circle-packing/docs/blob/master/thesis/packomania-tables.pdf>.
- [5] Edmund K Burke, Graham Kendall, and Glenn Whitwell. A new placement heuristic for the orthogonal stock-cutting problem. *Operations Research*, 52(4):655–671, 2004.
- [6] John A George, Jennifer M George, and Bruce W Lamar. Packing different-sized circles into a rectangular container. *European Journal of Operational Research*, 84(3):693–712, 1995.
- [7] Ronald L Graham and Boris D Lubachevsky. Repeated patterns of dense packings of equal disks in a square. *the electronic journal of combinatorics*, 3(1):R16, 1996.
- [8] Ronald L Graham, Boris D Lubachevsky, Kari J Nurmela, and Patric RJ Östergård. Dense packings of congruent circles in a circle. *Discrete Mathematics*, 181(1):139–154, 1998.
- [9] Andrea Gross, ARMJU Jamali, Marco Locatelli, and Fabio Schoen. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container. *Journal of Global Optimization*, 47(1):63–81, 2010.
- [10] Mhand Hifi and Rym M’Hallah. Approximate algorithms for constrained circular cutting problems. *Computers & Operations Research*, 31(5):675–694, 2004.
- [11] Mhand Hifi, Evangelis Th Paschos, and Vassilis Zissimopoulos. A simulated annealing approach for the circular cutting problem. *European Journal of Operational Research*, 159(2):430–448, 2004.
- [12] Wen Qi Huang, Yu Li, Chu Min Li, and Ru Chu Xu. New heuristics for packing unequal circles into a circular container. *Computers & Operations Research*, 33(8):2125–2142, 2006.

- [13] WenQi Huang, ZhangHua Fu, and RuChu Xu. Tabu search algorithm combined with global perturbation for packing arbitrary sized circles into a circular container. *Science China Information Sciences*, 56(9):1–14, 2013.
- [14] CO Lopez and JE Beasley. Packing unequal circles using formulation space search. *Computers & Operations Research*, 40(5):1276–1288, 2013.
- [15] Boris D Lubachevsky and Ronald L Graham. Curved hexagonal packings of equal disks in a circle. *Discrete & Computational Geometry*, 18(2):179–194, 1997.
- [16] Rym M'Hallah, Abdulaziz Alkandari, and Nenad Mladenovic. Packing unit spheres into the smallest sphere using vns and nlp. *Computers & Operations Research*, 40(2):603–615, 2013.
- [17] E. Specht. Packomania. <http://www.packomania.com/>. Accessed: 2016-05-23.
- [18] Sunshine. Computing the smallest enclosing disk in 2d. <http://www.sunshine2k.de/coding/java/Welzl/Welzl.html>, 2008.
- [19] Huaiqing Wang, Wenqi Huang, Quan Zhang, and Dongming Xu. An improved algorithm for the packing of unequal circles within a larger containing circle. *European Journal of Operational Research*, 141(2):440–453, 2002.
- [20] Emo Welzl. *Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids)*. Springer, 1991.
- [21] Tao Ye, Wenqi Huang, and Zhipeng Lu. Iterated tabu search algorithm for packing unequal circles in a circle. *arXiv preprint arXiv:1306.0694*, 2013.
- [22] Zhizhong Zeng, Xinguo Yu, Kun He, Wenqi Huang, and Zhanghua Fu. Iterated tabu search and variable neighborhood descent for packing unequal circles into a circular container. *European Journal of Operational Research*, 250(2):615–627, 2016.

Bijlage A

Packomania Benchmark Verdelingen

Tabel A.1: Packomania Benchmark Verdelingen

Instantie	N	Radii
NR10-1	10	10, 12, 15, 20, 21, 30, 30, 30, 40, 50
NR11-1	11	8.4, 11, 10, 10.5, 12, 14, 15, 20, 20, 25, 25
NR12-1	12	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
NR14-1	14	11, 14, 15, 16, 17, 19, 23, 27, 31, 35, 36, 37, 38, 40
NR15-1	15	3, 3, 4, 4, 4.5, 6, 7.5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
NR15-2	15	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
NR16-1	16	13, 14, 15, 15, 17, 19, 23, 26, 27, 27, 32, 37, 38, 47, 57, 63
NR16-2	16	21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
NR17-1	17	5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 10, 10, 10, 15, 15, 20, 25
NR18-1	18	12, 14, 16, 23, 25, 26, 27, 28, 33, 35, 47, 49, 53, 53, 55, 60, 67, 71
NR20-1	20	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42
NR20-2	20	6, 8, 9, 12, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 24, 27, 28, 30, 32, 33, 36, 40, 44
NR21-1	21	10, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 33, 34, 37, 37, 38, 39, 40, 42, 45
NR23-1	23	14, 14, 16, 18, 18, 21, 22, 23, 26, 28, 28, 32, 34, 34, 36, 37, 39, 41, 45, 48, 49, 49, 51
NR24-1	24	9, 10, 11, 13, 13, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 22, 23, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 82
NR25-1	25	14, 17, 22, 26, 26, 27, 28, 29, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 34, 34, 34, 35, 37, 37, 37, 47, 52, 53, 55
NR26-1	26	31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56
NR26-2	26	41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66
NR27-1	27	17, 21, 25, 26, 26, 27, 27, 28, 29, 33, 33, 34, 35, 35, 35, 37, 40, 42, 43, 44, 45, 49, 53, 55, 55, 55, 63
NR30-1	30	5, 8, 10, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 20, 20, 20, 22, 24, 25, 26, 30, 30, 30, 30, 35, 40, 40, 45, 48, 50, 55, 60
NR30-2	30	6, 8, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 31, 33, 33, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 43, 48, 53

Tabel A.1: Packomania Benchmark Verdelingen

Bijlage B

Packomania Vergelijking Tabellen

In deze tabellen wordt telkens het aantal cirkels in de kolom N gegeven, de best gekende radius van op Packomania in kolom *Besteradius* en de radius verkregen door mijn algoritme in kolom *Radius*. Ook wordt het absolute verschil van mijn oplossing ten opzichte van de best gekende radius in de kolom *Vergroting* gegeven, en de procentuele vergroting in kolom *Vergroting(%)*. Als laatste wordt de rekentijd die mijn algoritme nodig had om tot deze oplossing te komen gegeven in kolom *Tijd*.

B.1 Cirkels met gelijke grootte

Merk op dat voor het *circle-packing* probleem met even grote cirkels enkel de oplossingen voor $N = 3$ tot $N = 100$ hier getoond worden. Dit is slechts een subset van alle gekende oplossingen. De volledige lijst van vergelijkingen voor dit probleem, meer dan 2500 vergelijkingen, kan u terug vinden op GitHub [4].

Tabel B.1: Packomania $r_i = 1$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
3	2.154700538	2.154700538	0.0000000000	0.00	0s:0ms
4	2.414213562	2.732050808	0.3178372452	13.17	0s:0ms
5	2.701301617	3	0.2986983833	11.06	0s:0ms
6	3	3	0.0000000000	0.00	0s:0ms
7	3	3	0.0000000000	0.00	0s:0ms
8	3.304764871	3.694301256	0.3895363853	11.79	0s:0ms
9	3.61312593	3.8	0.1868740702	5.17	0s:0ms
10	3.813025631	4	0.1869743686	4.90	0s:0ms
11	3.9238044	4.055050463	0.1312460631	3.34	0s:0ms
12	4.02960193	4.055050463	0.0254485332	0.63	0s:0ms
13	4.236067977	4.605551275	0.3694832980	8.72	0s:0ms
14	4.328428555	4.605551275	0.2771227206	6.40	0s:0ms
15	4.521356965	4.815756806	0.2943998410	6.51	0s:0ms
16	4.615425595	4.815756806	0.2003312108	4.34	0s:0ms
17	4.792033748	5	0.2079662517	4.34	0s:0ms
18	4.863703305	5	0.1362966948	2.80	0s:0ms

Tabel B.1: Packomania $r_i = 1$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
19	4.863703305	5	0.1362966948	2.80	0s:0ms
20	5.122320737	5.613025038	0.4907043009	9.58	0s:0ms
21	5.252317475	5.613025038	0.3607075629	6.87	0s:0ms
22	5.439718959	5.694198862	0.2544799032	4.68	0s:0ms
23	5.545204223	5.75	0.2047957774	3.69	0s:0ms
24	5.651661092	5.891911267	0.2402501756	4.25	0s:0ms
25	5.752824331	6.003702333	0.2508780021	4.36	0s:0ms
26	5.828176537	6.196152423	0.3679758858	6.31	0s:0ms
27	5.906397847	6.33487632	0.4284784726	7.25	0s:0ms
28	6.014938097	6.428571429	0.4136333312	6.88	0s:0ms
29	6.138597904	6.547689565	0.4090916605	6.66	0s:0ms
30	6.197741071	6.604759882	0.4070188110	6.57	0s:0ms
31	6.291502622	6.625462944	0.3339603218	5.31	0s:0ms
32	6.429462971	6.636363636	0.2069006654	3.22	0s:1ms
33	6.486703124	6.669933699	0.1832305752	2.82	0s:1ms
34	6.61095709	6.766281297	0.1553242073	2.35	0s:1ms
35	6.697171092	7.103417131	0.4062460396	6.07	0s:1ms
36	6.746753793	7	0.2532462066	3.75	0s:1ms
37	6.758770483	7	0.2412295169	3.57	0s:2ms
38	6.961886965	7.293994497	0.3321075319	4.77	0s:1ms
39	7.057884163	7.331139971	0.2732558085	3.87	0s:1ms
40	7.123846436	7.584629125	0.4607826895	6.47	0s:1ms
41	7.260012329	7.609084657	0.3490723281	4.81	0s:1ms
42	7.346796407	7.429100507	0.0823041004	1.12	0s:1ms
43	7.419944856	7.677768534	0.2578236776	3.47	0s:1ms
44	7.498036683	7.677768534	0.1797318509	2.40	0s:1ms
45	7.572912326	7.82657133	0.2536590037	3.35	0s:2ms
46	7.650179915	8	0.3498200853	4.57	0s:2ms
47	7.724170053	8	0.2758299474	3.57	0s:2ms
48	7.791271431	8	0.2087285694	2.68	0s:2ms
49	7.886870959	8.253232038	0.3663610794	4.65	0s:2ms
50	7.947515275	8.359291376	0.4117761008	5.18	0s:2ms
51	8.027506952	8.408103671	0.3805967186	4.74	0s:2ms
52	8.084717191	8.472517892	0.3878007012	4.80	0s:2ms
53	8.179582827	8.488877336	0.3092945096	3.78	0s:2ms
54	8.203982383	8.538461538	0.3344791550	4.08	0s:2ms
55	8.211102551	8.587147277	0.3760447262	4.58	0s:2ms
56	8.383529923	8.6	0.2164700774	2.58	0s:2ms
57	8.447184653	8.628073151	0.1808884978	2.14	0s:2ms
58	8.52455377	8.741697766	0.2171439957	2.55	0s:3ms
59	8.592499959	8.95896775	0.3664677911	4.26	0s:3ms
60	8.646219845	8.967076656	0.3208568103	3.71	0s:3ms
61	8.661297576	9.021337505	0.3600399294	4.16	0s:3ms

Tabel B.1: Packomania $r_i = 1$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
62	8.829765409	9.045787337	0.2160219284	2.45	0s:3ms
63	8.892351538	9.185352772	0.2930012343	3.29	0s:3ms
64	8.961971108	9.185352772	0.2233816634	2.49	0s:3ms
65	9.017397323	9.275353858	0.2579565352	2.86	0s:3ms
66	9.096279427	9.275353858	0.1790744315	1.97	0s:3ms
67	9.168971882	9.275353858	0.1063819766	1.16	0s:3ms
68	9.229773747	9.326663998	0.0968902511	1.05	0s:3ms
69	9.269761267	9.326663998	0.0569027312	0.61	0s:3ms
70	9.345653194	9.632545009	0.2868918150	3.07	0s:4ms
71	9.415796897	9.632545009	0.2167481122	2.30	0s:4ms
72	9.473890857	9.801090841	0.3271999848	3.45	0s:4ms
73	9.540346152	9.801090841	0.2607446893	2.73	0s:4ms
74	9.589232764	9.888925926	0.2996931615	3.13	0s:4ms
75	9.672029632	9.909090909	0.2370612771	2.45	0s:4ms
76	9.729596802	10	0.2704031978	2.78	0s:4ms
77	9.798911925	10.21190226	0.4129903345	4.21	0s:4ms
78	9.8577099	10.27521352	0.4175036178	4.24	0s:4ms
79	9.905063468	10.27521352	0.3701500500	3.74	0s:4ms
80	9.968151813	10.34126647	0.3731146566	3.74	0s:5ms
81	10.01086424	10.38839772	0.3775334833	3.77	0s:5ms
82	10.05082422	10.38839772	0.3375735011	3.36	0s:5ms
83	10.11685788	10.40638081	0.2895229379	2.86	0s:5ms
84	10.14953087	10.55252264	0.4029917684	3.97	0s:6ms
85	10.16311147	10.64622206	0.4831105925	4.75	0s:6ms
86	10.29870105	10.68161804	0.3829169837	3.72	0s:5ms
87	10.36320851	10.71444133	0.3512328258	3.39	0s:5ms
88	10.43233769	10.71444133	0.2821036381	2.70	0s:5ms
89	10.50049181	10.71444133	0.2139495163	2.04	0s:5ms
90	10.54606918	10.71444133	0.1683721529	1.60	0s:5ms
91	10.56677223	10.8488578	0.2820855683	2.67	0s:5ms
92	10.68464585	10.8488578	0.1642119539	1.54	0s:5ms
93	10.7333526	10.97505539	0.2417027933	2.25	0s:6ms
94	10.77803216	10.97505539	0.1970232333	1.83	0s:6ms
95	10.84020502	11.12553963	0.2853346097	2.63	0s:6ms
96	10.88320276	11.13086122	0.2476584589	2.28	0s:6ms
97	10.93859011	11.15326389	0.2146737787	1.96	0s:6ms
98	10.97938313	11.19403587	0.2146527432	1.96	0s:6ms
99	11.03314115	11.22161834	0.1884771882	1.71	0s:7ms
100	11.08214972	11.22161834	0.1394686153	1.26	0s:6ms

B.2 Packomania Macht problemen

Tabel B.2: Packomania $r_i = i$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	9.001397746	9.001397746	0.0000000000	0.00	0s:0ms
6	11.0570404	11.0570404	0.0000000000	0.00	0s:0ms
7	13.46211068	13.63864452	0.1765338429	1.31	0s:0ms
8	16.22174668	16.9084418	0.6866951196	4.23	0s:0ms
9	19.23319391	19.96907573	0.7358818171	3.83	0s:0ms
10	22.00019301	23.2877147	1.2875216823	5.85	0s:0ms
11	24.96063429	26.65104175	1.6904074596	6.77	0s:0ms
12	28.37138944	30.27869776	1.9073083282	6.72	0s:0ms
13	31.54586702	32.93900634	1.3931393191	4.42	0s:0ms
14	35.09564714	36.65714933	1.5615021892	4.45	0s:0ms
15	38.83799551	40.46917515	1.6311796458	4.20	0s:0ms
16	42.45811644	44.97670011	2.5185836705	5.93	0s:0ms
17	46.29134212	49.17727631	2.8859341932	6.23	0s:0ms
18	50.11976262	53.26425023	3.1444876017	6.27	0s:0ms
19	54.24029359	58.0413688	3.8010752065	7.01	0s:0ms
20	58.40056748	61.63712441	3.2365569305	5.54	0s:0ms
21	62.55887709	66.19614909	3.6372719987	5.81	0s:0ms
22	66.76028624	70.74575745	3.9854712097	5.97	0s:0ms
23	71.19946161	75.28800296	4.0885413566	5.74	0s:0ms
24	75.74914258	79.82437643	4.0752338484	5.38	0s:0ms
25	80.28586444	85.20507608	4.9192116398	6.13	0s:0ms
26	84.97819107	89.93692251	4.9587314446	5.84	0s:0ms
27	89.75096268	94.88136225	5.1303995654	5.72	0s:0ms
28	94.5258771	99.86768794	5.3418108395	5.65	0s:1ms
29	99.48311156	106.2962349	6.8131233045	6.85	0s:1ms
30	104.5403638	111.0148098	6.4744460321	6.19	0s:1ms
31	109.6292407	117.0878782	7.4586375248	6.80	0s:1ms
32	114.7998147	123.1802853	8.3804706408	7.30	0s:1ms
33	120.0656596	128.215259	8.1495993452	6.79	0s:1ms
34	125.3669392	133.247447	7.8805077664	6.29	0s:1ms
35	130.8490788	138.2771663	7.4280874986	5.68	0s:1ms
36	136.3079108	144.6463617	8.3384509125	6.12	0s:1ms
37	141.7837334	152.4389507	10.6552172234	7.52	0s:1ms
38	147.4521165	158.3732762	10.9211597336	7.41	0s:1ms
39	153.1997434	163.7256474	10.5259040974	6.87	0s:1ms
40	159.0215769	170.8117726	11.7901957151	7.41	0s:1ms
41	164.8062304	177.004655	12.1984245382	7.40	0s:1ms
42	170.697811	182.440372	11.7425609294	6.88	0s:1ms
43	176.7326562	188.4172803	11.6846240215	6.61	0s:2ms
44	182.7726194	196.6620902	13.8894708123	7.60	0s:2ms
45	188.964969	202.5286416	13.5636726221	7.18	0s:2ms
46	195.2039014	207.3758687	12.1719673837	6.24	0s:2ms
47	201.4861933	212.7149266	11.2287332287	5.57	0s:2ms

Tabel B.2: Packomania $r_i = i$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
48	207.8008434	220.8336262	13.0327828219	6.27	0s:2ms
49	214.1809301	227.3484969	13.1675667664	6.15	0s:2ms
50	220.5654003	234.0553916	13.4899913627	6.12	0s:2ms
51	227.6803362	240.1831765	12.5028402517	5.49	0s:2ms
52	234.4402714	247.2368978	12.7966263895	5.46	0s:2ms
53	241.13286	255.7171621	14.5843020125	6.05	0s:2ms
54	247.8032878	262.868371	15.0650832017	6.08	0s:2ms
55	254.7210367	268.5141407	13.7931039905	5.41	0s:3ms
56	261.640041	274.9108253	13.2707843507	5.07	0s:3ms
57	268.4240815	282.8776937	14.4536122679	5.38	0s:3ms
58	275.4715577	289.605714	14.1341563166	5.13	0s:3ms
59	282.3339759	299.2757681	16.9417921475	6.00	0s:3ms
60	289.3422659	304.6812371	15.3389711825	5.30	0s:3ms
61	296.717773	313.9597079	17.2419348953	5.81	0s:3ms
62	303.7777367	323.9177529	20.1400161641	6.63	0s:3ms
63	310.9235322	332.2123812	21.2888489762	6.85	0s:3ms
64	318.5409988	340.6053063	22.0643074867	6.93	0s:3ms
65	325.5680022	347.0994671	21.5314649851	6.61	0s:3ms
66	333.243233	354.4394593	21.1962262651	6.36	0s:3ms
67	340.7251536	362.181251	21.4560974215	6.30	0s:3ms
68	348.1910155	370.3151028	22.1240873386	6.35	0s:4ms
69	355.6061123	376.9371949	21.3310825298	6.00	0s:4ms
70	363.5378366	388.0662131	24.5283764994	6.75	0s:4ms
71	371.3559914	392.3562249	21.0002335141	5.66	0s:4ms
72	378.9536133	402.5022428	23.5486294950	6.21	0s:4ms
73	386.7761998	411.6110859	24.8348860634	6.42	0s:4ms
74	394.6660409	420.7679123	26.1018713787	6.61	0s:4ms
75	402.3461644	424.7177231	22.3715586755	5.56	0s:4ms
76	410.1895435	432.5052319	22.3156883095	5.44	0s:4ms
77	418.5499612	443.6467399	25.0967787844	6.00	0s:4ms
78	426.3941267	451.6199239	25.2257972078	5.92	0s:4ms
79	434.7680082	461.4070427	26.6390345424	6.13	0s:4ms
80	442.7191587	468.0681694	25.3490106831	5.73	0s:5ms
81	450.9036642	475.5595161	24.6558519794	5.47	0s:4ms
82	459.3903517	486.5415641	27.1512124091	5.91	0s:5ms
83	467.6800865	494.9875395	27.3074530526	5.84	0s:5ms
84	475.8025872	503.1575199	27.3549327168	5.75	0s:5ms
85	484.4776292	512.2361165	27.7584873045	5.73	0s:5ms
86	492.7211187	521.9387989	29.2176801460	5.93	0s:5ms
87	501.3589996	530.6873361	29.3283365110	5.85	0s:6ms
88	509.9171158	535.810191	25.8930752125	5.08	0s:5ms
89	518.3668565	545.4204186	27.0535621118	5.22	0s:5ms
90	526.9030101	554.9318685	28.0288584034	5.32	0s:6ms

Tabel B.2: Packomania $r_i = i$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
91	535.6241529	563.8084375	28.1842846818	5.26	0s:6ms
92	544.4518726	572.9225881	28.4707155757	5.23	0s:5ms
93	553.2844216	581.3293274	28.0449058225	5.07	0s:5ms
94	562.2873009	590.033592	27.7462911062	4.93	0s:6ms
95	570.9739657	599.2930087	28.3190430029	4.96	0s:6ms
96	579.9547414	612.6535248	32.6987833884	5.64	0s:6ms
97	589.1016036	618.6339788	29.5323752126	5.01	0s:6ms
98	598.0873457	628.7495879	30.6622421306	5.13	0s:6ms
99	607.2130456	640.7227437	33.5096980965	5.52	0s:6ms
100	615.8676392	654.2342342	38.3665949658	6.23	0s:6ms
101	625.4129166	654.7565755	29.3436589135	4.69	0s:6ms
102	635.0014481	666.8855903	31.8841421988	5.02	0s:6ms
103	644.0261452	679.660035	35.6338898842	5.53	0s:6ms
104	653.2488265	687.260894	34.0120675068	5.21	0s:7ms
105	662.757924	694.7227123	31.9647883149	4.82	0s:7ms
106	672.3912463	705.6561613	33.2649149921	4.95	0s:7ms
107	681.7774575	713.2447002	31.4672427496	4.62	0s:6ms
108	691.021475	725.6010759	34.5796008747	5.00	0s:7ms
109	700.2736046	735.262392	34.9887873584	5.00	0s:7ms
110	710.0999889	745.7975534	35.6975644566	5.03	0s:7ms
111	719.5987078	758.1779863	38.5792784127	5.36	0s:8ms
112	728.9808997	769.5217717	40.5408719841	5.56	0s:8ms
113	739.2681393	779.6794931	40.4113538763	5.47	0s:8ms
114	748.9170311	790.0110369	41.0940057618	5.49	0s:8ms
115	758.5403224	800.4993412	41.9590188761	5.53	0s:8ms
116	768.0575864	811.9736432	43.9160567286	5.72	0s:9ms
117	778.0802266	823.8439535	45.7637268808	5.88	0s:8ms
118	787.955193	830.3459981	42.3908051008	5.38	0s:8ms
119	797.8699489	842.9611167	45.0911678906	5.65	0s:8ms
120	808.3093264	853.4123081	45.1029817409	5.58	0s:8ms
121	818.2475492	859.0828754	40.8353261717	4.99	0s:8ms
122	828.1642448	872.3640645	44.1998196689	5.34	0s:9ms
123	837.9108474	883.3198174	45.4089699367	5.42	0s:9ms
124	848.265692	888.5239112	40.2582192058	4.75	0s:8ms
125	858.5698155	906.9182567	48.3484411811	5.63	0s:9ms
126	868.7452097	919.1873186	50.4421088463	5.81	0s:9ms
127	878.9113552	929.1894792	50.2781240664	5.72	0s:9ms
128	889.4083279	940.6625452	51.2542173032	5.76	0s:9ms
129	899.3794711	939.0402908	39.6608196933	4.41	0s:10ms
130	910.0149851	956.4974894	46.4825042620	5.11	0s:9ms
131	920.3565478	964.284437	43.9278891473	4.77	0s:9ms
132	931.0037789	978.8995627	47.8957838592	5.14	0s:10ms
133	941.572814	992.651323	51.0785089994	5.42	0s:10ms

Tabel B.2: Packomania $r_i = i$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
134	951.4867325	999.1692947	47.6825622415	5.01	0s:10ms
135	962.6267783	1011.670356	49.0435779611	5.09	0s:10ms
136	973.5501094	1023.408578	49.8584681961	5.12	0s:11ms
137	983.6545581	1039.839059	56.1845006701	5.71	0s:11ms
138	994.589987	1046.579775	51.9897882140	5.23	0s:11ms
139	1005.134043	1060.799299	55.6652552216	5.54	0s:11ms
140	1016.243955	1066.391406	50.1474504792	4.93	0s:11ms
141	1027.012735	1075.826455	48.8137198003	4.75	0s:11ms
142	1038.033343	1091.535835	53.5024911515	5.15	0s:12ms
143	1048.086632	1105.062108	56.9754760099	5.44	0s:11ms
144	1059.610594	1118.135792	58.5251983013	5.52	0s:11ms
145	1070.299995	1128.198594	57.8985985688	5.41	0s:11ms
146	1081.849804	1137.382853	55.5330488821	5.13	0s:12ms
147	1092.224839	1146.180093	53.9552534597	4.94	0s:11ms
148	1103.625998	1157.325822	53.6998239456	4.87	0s:12ms
149	1114.562888	1170.783856	56.2209683647	5.04	0s:12ms
150	1125.962247	1179.834746	53.8724990106	4.78	0s:12ms
151	1136.450736	1188.206974	51.7562382973	4.55	0s:12ms
152	1148.381201	1198.503306	50.1221048286	4.36	0s:12ms
153	1159.288108	1211.469481	52.1813720335	4.50	0s:13ms
154	1170.008519	1221.771848	51.7633292913	4.42	0s:12ms
155	1182.306413	1232.750873	50.4444602860	4.27	0s:12ms
156	1193.219558	1241.96315	48.7435918571	4.09	0s:13ms
157	1205.242985	1257.673634	52.4306489161	4.35	0s:13ms
158	1216.514329	1272.623712	56.1093833890	4.61	0s:13ms
159	1227.02294	1287.046839	60.0238985772	4.89	0s:14ms
160	1238.93349	1297.811321	58.8778314960	4.75	0s:13ms
161	1251.042708	1309.194957	58.1522496450	4.65	0s:13ms
162	1262.789645	1325.157536	62.3678910466	4.94	0s:14ms
163	1273.875363	1340.254659	66.3792957824	5.21	0s:13ms
164	1286.025828	1355.126621	69.1007934484	5.37	0s:14ms
165	1297.507389	1360.843465	63.3360754563	4.88	0s:14ms
166	1309.139789	1372.652535	63.5127460293	4.85	0s:14ms
167	1321.053819	1380.367699	59.3138806314	4.49	0s:14ms
168	1332.790901	1396.706975	63.9160738570	4.80	0s:14ms
169	1344.525206	1408.899427	64.3742216180	4.79	0s:14ms
170	1356.179054	1421.473252	65.2941986483	4.81	0s:17ms
171	1368.338575	1436.819503	68.4809275612	5.00	0s:15ms
172	1380.333616	1443.901427	63.5678107594	4.61	0s:15ms
173	1391.879458	1456.325953	64.4464957907	4.63	0s:15ms
174	1403.566254	1471.496936	67.9306813422	4.84	0s:15ms
175	1415.989735	1485.609411	69.6196752979	4.92	0s:15ms
176	1428.497598	1498.150763	69.6531648576	4.88	0s:15ms

Tabel B.2: Packomania $r_i = i$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
177	1440.624114	1520.601441	79.9773270606	5.55	0s:15ms
178	1452.757272	1533.313102	80.5558307306	5.55	0s:16ms
179	1464.812903	1544.279674	79.4667714894	5.43	0s:15ms
180	1476.565762	1549.253422	72.6876600373	4.92	0s:16ms
181	1489.017452	1567.397547	78.3800946877	5.26	0s:16ms
182	1501.087384	1582.428192	81.3408078754	5.42	0s:17ms
183	1514.01682	1586.179083	72.1622628565	4.77	0s:16ms
184	1525.885179	1608.260257	82.3750775373	5.40	0s:16ms
185	1537.376408	1619.244541	81.8681332884	5.33	0s:16ms
186	1550.809164	1630.783013	79.9738492793	5.16	0s:16ms
187	1563.028446	1641.222098	78.1936519827	5.00	0s:17ms
188	1575.802178	1658.869995	83.0678169214	5.27	0s:18ms
189	1588.346875	1670.718704	82.3718286801	5.19	0s:17ms
190	1600.66992	1684.525388	83.8554676059	5.24	0s:17ms
191	1613.286429	1691.729998	78.4435689224	4.86	0s:17ms
192	1626.176015	1707.916237	81.7402226434	5.03	0s:18ms
193	1638.978104	1722.336844	83.3587400976	5.09	0s:18ms
194	1651.184614	1733.930788	82.7461736083	5.01	0s:18ms
195	1663.511587	1742.176526	78.6649392823	4.73	0s:18ms
196	1676.838498	1757.798572	80.9600734542	4.83	0s:17ms
197	1688.921565	1770.904998	81.9834328647	4.85	0s:18ms
198	1701.700662	1782.097388	80.3967258220	4.72	0s:18ms
199	1714.696039	1797.645421	82.9493820303	4.84	0s:19ms
200	1726.221913	1807.004915	80.7830024141	4.68	0s:20ms

Tabel B.3: Packomania $r_i = i^{1/2}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	4.521480277	4.645331059	0.1238507820	2.74	0s:0ms
6	5.35096299	5.565200476	0.2142374858	4.00	0s:0ms
7	6.049378486	6.313171861	0.2637933742	4.36	0s:0ms
8	6.774266652	7.011200784	0.2369341324	3.50	0s:0ms
9	7.559002377	7.645002451	0.0860000737	1.14	0s:0ms
10	8.303468122	8.773595833	0.4701277110	5.66	0s:0ms
11	9.072125879	9.564217949	0.4920920696	5.42	0s:0ms
12	9.865320304	10.47459566	0.6092753519	6.18	0s:0ms
13	10.58832629	11.28988685	0.7015605668	6.63	0s:0ms
14	11.36497759	12.03662293	0.6716453426	5.91	0s:0ms
15	12.0755266	12.73140124	0.6558746339	5.43	0s:0ms
16	12.81931152	13.54360586	0.7242943423	5.65	0s:0ms
17	13.58212394	14.56084288	0.9787189360	7.21	0s:0ms
18	14.32496989	15.462612	1.1376421126	7.94	0s:0ms
19	15.03535243	16.1728907	1.1375382697	7.57	0s:0ms

Tabel B.3: Packomania $r_i = i^{1/2}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
20	15.80237882	16.99625392	1.1938751032	7.56	0s:0ms
21	16.55930116	17.78557896	1.2262778069	7.41	0s:0ms
22	17.29396452	18.52909152	1.2351270012	7.14	0s:0ms
23	18.0499852	19.23530642	1.1853212204	6.57	0s:0ms
24	18.79875241	19.91971384	1.1209614357	5.96	0s:0ms
25	19.5506756	20.66318875	1.1125131521	5.69	0s:0ms
26	20.2902618	22.23042619	1.9401643933	9.56	0s:0ms
27	21.06193173	22.9880056	1.9260738751	9.14	0s:1ms
28	21.79712527	23.71343628	1.9163110120	8.79	0s:1ms
29	22.54735751	24.41115787	1.8638003585	8.27	0s:1ms
30	23.25868018	25.19760804	1.9389278525	8.34	0s:1ms
31	24.03727193	25.81304012	1.7757681886	7.39	0s:1ms
32	24.78200903	26.41001473	1.6280056998	6.57	0s:1ms
33	25.54486052	27.14270567	1.5978451512	6.26	0s:1ms
34	26.30459206	28.23676513	1.9321730714	7.35	0s:1ms
35	27.03382245	29.1675068	2.1336843460	7.89	0s:1ms
36	27.77995711	29.74228203	1.9623249292	7.06	0s:1ms
37	28.52327223	30.55237025	2.0290980255	7.11	0s:1ms
38	29.2801575	31.32911627	2.0489587647	7.00	0s:1ms
39	30.02551081	32.07750685	2.0519960334	6.83	0s:1ms
40	30.75824676	32.80128099	2.0430342306	6.64	0s:1ms
41	31.5074417	33.67925509	2.1718133896	6.89	0s:1ms
42	32.27253417	34.41887774	2.1463435677	6.65	0s:2ms
43	33.01068077	35.03290206	2.0222212869	6.13	0s:2ms
44	33.76125465	35.99501679	2.2337621450	6.62	0s:2ms
45	34.52293182	36.88407979	2.3611479634	6.84	0s:2ms
46	35.24429078	37.49808526	2.2537944845	6.39	0s:2ms
47	35.99250776	38.21813911	2.2256313508	6.18	0s:2ms
48	36.76013222	38.92008922	2.1599570026	5.88	0s:2ms
49	37.46753983	39.73435907	2.2668192423	6.05	0s:2ms
50	38.25556972	40.53178138	2.2762116663	5.95	0s:2ms
51	38.98768932	42.15091723	3.1632279036	8.11	0s:2ms
52	39.74306968	42.89795161	3.1548819271	7.94	0s:2ms
53	40.48968483	43.52039716	3.0307123211	7.49	0s:2ms
54	41.23581075	44.15285577	2.9170450216	7.07	0s:3ms
55	41.98271338	45.00105715	3.0183437706	7.19	0s:3ms
56	42.72931327	45.64420809	2.9148948170	6.82	0s:3ms
57	43.50080653	46.45103577	2.9502292405	6.78	0s:3ms
58	44.22194556	47.13057987	2.9086343035	6.58	0s:3ms
59	44.9825593	48.18944065	3.2068813482	7.13	0s:3ms
60	45.70598269	48.92807634	3.2220936565	7.05	0s:3ms
61	46.47167529	50.12902499	3.6573496935	7.87	0s:3ms
62	47.19034394	50.84643939	3.6560954536	7.75	0s:4ms

Tabel B.3: Packomania $r_i = i^{1/2}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
63	47.96038659	51.56087869	3.6004921000	7.51	0s:4ms
64	48.70530574	51.94948876	3.2441830170	6.66	0s:4ms
65	49.42245241	52.65486666	3.2324142527	6.54	0s:4ms
66	50.18742036	53.35552985	3.1681094893	6.31	0s:4ms
67	50.90373739	54.0422335	3.1384961055	6.17	0s:4ms
68	51.64886468	54.85582673	3.2069620523	6.21	0s:5ms
69	52.44298308	55.77600995	3.3330268692	6.36	0s:5ms
70	53.18043899	56.43020596	3.2497669710	6.11	0s:4ms
71	53.93496914	57.13993526	3.2049661248	5.94	0s:5ms
72	54.65674105	57.98591706	3.3291760153	6.09	0s:5ms
73	55.42818864	58.92061484	3.4924262054	6.30	0s:5ms
74	56.17979032	59.38454976	3.2047594461	5.70	0s:5ms
75	56.88186606	60.37897148	3.4971054144	6.15	0s:6ms
76	57.65288799	61.03664465	3.3837566627	5.87	0s:5ms
77	58.42166044	61.73259783	3.3109373885	5.67	0s:5ms
78	59.1476465	62.57629857	3.4286520715	5.80	0s:6ms
79	59.86847145	63.39927675	3.5308053035	5.90	0s:6ms
80	60.63356054	64.2854286	3.6518680539	6.02	0s:6ms
81	61.38066647	65.02500355	3.6443370809	5.94	0s:6ms
82	62.10506478	65.65078433	3.5457195519	5.71	0s:6ms
83	62.88171517	66.23500237	3.3532871953	5.33	0s:6ms
84	63.62031086	67.45460619	3.8342953230	6.03	0s:6ms
85	64.37295794	68.32063478	3.9476768349	6.13	0s:6ms
86	65.10351537	68.97796537	3.8744500057	5.95	0s:6ms
87	65.85511151	69.71427598	3.8591644643	5.86	0s:6ms
88	66.52181857	70.94485009	4.4230315140	6.65	0s:6ms
89	67.3413989	71.79373861	4.4523397045	6.61	0s:7ms
90	68.08292742	72.11066047	4.0277330422	5.92	0s:7ms
91	68.83792287	72.81415128	3.9762284068	5.78	0s:7ms
92	69.58671058	73.49111243	3.9044018523	5.61	0s:7ms
93	70.31569892	74.27702903	3.9613301133	5.63	0s:7ms
94	71.03023084	75.33180092	4.3015700839	6.06	0s:8ms
95	71.82403089	76.50249183	4.6784609402	6.51	0s:8ms
96	72.54565607	77.36198139	4.8163253140	6.64	0s:7ms
97	73.30173645	78.05100651	4.7492700614	6.48	0s:7ms
98	74.06394605	78.39015055	4.3262045063	5.84	0s:8ms
99	74.80086926	79.06946294	4.2685936749	5.71	0s:8ms
100	75.54699422	79.96233173	4.4153375112	5.84	0s:8ms

Tabel B.4: Packomania $r_i = i^{-1/5}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	2.244615846	2.417764166	0.1731483194	7.71	0s:0ms
6	2.387986383	2.490641404	0.1026550210	4.30	0s:0ms
7	2.422623343	2.541024002	0.1184006594	4.89	0s:0ms
8	2.523820904	2.802493413	0.2786725086	11.04	0s:0ms
9	2.630026572	2.893082814	0.2630562428	10.00	0s:0ms
10	2.715784826	3.043778646	0.3279938201	12.08	0s:0ms
11	2.767466306	3.06381508	0.2963487739	10.71	0s:0ms
12	2.829018403	3.06381508	0.2347966767	8.30	0s:0ms
13	2.92391778	3.146230401	0.2223126209	7.60	0s:0ms
14	2.984783969	3.31986946	0.3350854907	11.23	0s:0ms
15	3.040492052	3.31986946	0.2793774083	9.19	0s:0ms
16	3.096414432	3.33097666	0.2345622289	7.58	0s:0ms
17	3.15212915	3.438918964	0.2867898134	9.10	0s:0ms
18	3.214823783	3.529068281	0.3142444981	9.77	0s:0ms
19	3.259332781	3.574355458	0.3150226770	9.67	0s:0ms
20	3.311831017	3.595528088	0.2836970703	8.57	0s:0ms
21	3.36159381	3.813698731	0.4521049215	13.45	0s:0ms
22	3.411451256	3.813698731	0.4022474751	11.79	0s:0ms
23	3.450137359	3.826191897	0.3760545382	10.90	0s:0ms
24	3.502510278	3.849500792	0.3469905142	9.91	0s:0ms
25	3.545245578	3.849500792	0.3042552139	8.58	0s:0ms
26	3.591133783	3.969766564	0.3786327815	10.54	0s:1ms
27	3.632687191	4.057652417	0.4249652256	11.70	0s:1ms
28	3.673947341	4.057652417	0.3837050759	10.44	0s:1ms
29	3.709614743	4.102992738	0.3933779955	10.60	0s:1ms
30	3.753020534	4.102992738	0.3499722044	9.33	0s:1ms
31	3.794636899	4.100467051	0.3058301526	8.06	0s:1ms
32	3.826360682	4.161242705	0.3348820228	8.75	0s:1ms
33	3.866024486	4.161242705	0.2952182183	7.64	0s:1ms
34	3.901727549	4.27545313	0.3737255803	9.58	0s:1ms
35	3.936688768	4.291727438	0.3550386705	9.02	0s:1ms
36	3.969717962	4.308499631	0.3387816690	8.53	0s:1ms
37	4.006158224	4.360397929	0.3542397051	8.84	0s:1ms
38	4.038554895	4.363613142	0.3250582469	8.05	0s:1ms
39	4.074618568	4.457940853	0.3833222845	9.41	0s:1ms
40	4.105672784	4.500185046	0.3945122618	9.61	0s:2ms
41	4.129990611	4.500185046	0.3701944350	8.96	0s:2ms
42	4.170056305	4.516843613	0.3467873080	8.32	0s:2ms
43	4.196545217	4.556691854	0.3601466376	8.58	0s:2ms
44	4.230014441	4.556691854	0.3266774127	7.72	0s:2ms
45	4.258819887	4.559478152	0.3006582655	7.06	0s:2ms
46	4.279963899	4.578989471	0.2990255718	6.99	0s:2ms
47	4.31934031	4.684566353	0.3652260424	8.46	0s:2ms

Tabel B.4: Packomania $r_i = i^{-1/5}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
48	4.340298255	4.718254714	0.3779564595	8.71	0s:2ms
49	4.369922887	4.718254714	0.3483318277	7.97	0s:2ms
50	4.398199789	4.718254714	0.3200549252	7.28	0s:2ms
51	4.421005635	4.789771253	0.3687656172	8.34	0s:3ms
52	4.457103013	4.79446383	0.3373608175	7.57	0s:3ms
53	4.481095278	4.88401277	0.4029174922	8.99	0s:3ms
54	4.507233924	4.94871256	0.4414786359	9.79	0s:3ms
55	4.533359692	4.94871256	0.4153528680	9.16	0s:3ms
56	4.552402168	4.94871256	0.3963103920	8.71	0s:3ms
57	4.583331939	4.960637843	0.3773059034	8.23	0s:3ms
58	4.604279546	5.006194354	0.4019148082	8.73	0s:3ms
59	4.633931987	5.015140166	0.3812081781	8.23	0s:3ms
60	4.661004393	5.039668431	0.3786640380	8.12	0s:3ms
61	4.67975982	5.039668431	0.3599086110	7.69	0s:3ms
62	4.703936871	5.08559604	0.3816591685	8.11	0s:4ms
63	4.734693491	5.08559604	0.3509025491	7.41	0s:4ms
64	4.754788576	5.09503129	0.3402427132	7.16	0s:4ms

Tabel B.5: Packomania $r_i = i^{-1/2}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	1.751552455	1.802472656	0.0509202011	2.91	0s:0ms
6	1.810076939	1.873533983	0.0634570432	3.51	0s:0ms
7	1.838724068	1.963882951	0.1251588836	6.81	0s:0ms
8	1.858400955	1.963882951	0.1054819968	5.68	0s:0ms
9	1.878812755	2.003759856	0.1249471003	6.65	0s:0ms
10	1.913435515	2.054440116	0.1410046004	7.37	0s:0ms
11	1.929187751	2.055014716	0.1258269651	6.52	0s:0ms
12	1.949823437	2.0660242	0.1162007622	5.96	0s:0ms
13	1.965236819	2.113388316	0.1481514969	7.54	0s:0ms
14	1.980248748	2.14077957	0.1605308220	8.11	0s:0ms
15	1.992709274	2.14077957	0.1480702960	7.43	0s:0ms
16	2.004585778	2.140794139	0.1362083606	6.79	0s:0ms
17	2.015257783	2.140794139	0.1255363550	6.23	0s:0ms
18	2.028148582	2.161557565	0.1334089823	6.58	0s:0ms
19	2.041997315	2.189486219	0.1474889039	7.22	0s:0ms
20	2.051442268	2.195567792	0.1441255240	7.03	0s:0ms
21	2.062331108	2.195567792	0.1332366847	6.46	0s:0ms
22	2.06796317	2.195567792	0.1276046224	6.17	0s:0ms
23	2.079772368	2.195567792	0.1157954243	5.57	0s:0ms
24	2.090383164	2.212125838	0.1217426733	5.82	0s:0ms
25	2.097527836	2.212125838	0.1145980019	5.46	0s:0ms
26	2.107630171	2.212125838	0.1044956670	4.96	0s:0ms

Tabel B.5: Packomania $r_i = i^{-1/2}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
27	2.115890492	2.212125838	0.0962353458	4.55	0s:1ms
28	2.122849176	2.25561005	0.1327608737	6.25	0s:1ms
29	2.13197913	2.26989985	0.1379207195	6.47	0s:1ms
30	2.137483926	2.26989985	0.1324159233	6.19	0s:1ms
31	2.148983307	2.272391577	0.1234082702	5.74	0s:1ms
32	2.155354151	2.272391577	0.1170374256	5.43	0s:1ms
33	2.165803682	2.300760835	0.1349571532	6.23	0s:1ms
34	2.174364112	2.300760835	0.1263967230	5.81	0s:1ms
35	2.171162102	2.303126269	0.1319641666	6.08	0s:1ms
36	2.184151152	2.31172537	0.1275742188	5.84	0s:1ms
37	2.190324008	2.31172537	0.1214013622	5.54	0s:1ms
38	2.200283193	2.327362681	0.1270794878	5.78	0s:1ms
39	2.207438262	2.327362681	0.1199244191	5.43	0s:2ms
40	2.215788047	2.336852047	0.1210639995	5.46	0s:2ms
41	2.221496388	2.336852047	0.1153556592	5.19	0s:2ms
42	2.225063517	2.348630674	0.1235671577	5.55	0s:2ms
43	2.225967367	2.348630674	0.1226633073	5.51	0s:2ms
44	2.22976905	2.348630674	0.1188616248	5.33	0s:2ms
45	2.235330122	2.348630674	0.1133005522	5.07	0s:2ms
46	2.24069414	2.348630674	0.1079365346	4.82	0s:2ms
47	2.251179399	2.348630674	0.0974512759	4.33	0s:2ms
48	2.2546717	2.348630674	0.0939589745	4.17	0s:3ms
49	2.259576657	2.348630674	0.0890540172	3.94	0s:3ms
50	2.263343706	2.348630674	0.0852869681	3.77	0s:3ms
51	2.270868233	2.361262988	0.0903947555	3.98	0s:3ms
52	2.279267038	2.367760412	0.0884933744	3.88	0s:3ms
53	2.281766324	2.367760412	0.0859940880	3.77	0s:3ms
54	2.284519164	2.381915573	0.0973964091	4.26	0s:7ms
55	2.285947292	2.383596802	0.0976495093	4.27	0s:4ms
56	2.285979541	2.383596802	0.0976172611	4.27	0s:4ms
57	2.288534442	2.384328728	0.0957942864	4.19	0s:4ms
58	2.292664714	2.385305153	0.0926404388	4.04	0s:4ms
59	2.296297312	2.38689011	0.0905927983	3.95	0s:4ms
60	2.306501919	2.407776328	0.1012744095	4.39	0s:4ms
61	2.311319628	2.409449022	0.0981293940	4.25	0s:4ms
62	2.317481916	2.409449022	0.0919671063	3.97	0s:4ms
63	2.318797322	2.409449022	0.0906517004	3.91	0s:4ms
64	2.320980355	2.409449022	0.0884686673	3.81	0s:5ms
65	2.321469818	2.413031572	0.0915617534	3.94	0s:5ms
66	2.324362904	2.416403418	0.0920405139	3.96	0s:5ms
67	2.332217263	2.416403418	0.0841861545	3.61	0s:5ms
68	2.334282511	2.416403418	0.0821209072	3.52	0s:5ms
69	2.341094038	2.416403418	0.0753093795	3.22	0s:5ms

Tabel B.5: Packomania $r_i = i^{-1/2}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
70	2.344495311	2.41743353	0.0729382190	3.11	0s:5ms
71	2.348186028	2.434594573	0.0864085445	3.68	0s:6ms
72	2.348822083	2.434594573	0.0857724897	3.65	0s:6ms
73	2.347237572	2.434594573	0.0873570010	3.72	0s:7ms
74	2.35004496	2.439743433	0.0896984733	3.82	0s:6ms
75	2.352202465	2.439743433	0.0875409681	3.72	0s:7ms
76	2.352948629	2.446211033	0.0932624035	3.96	0s:7ms
77	2.357614973	2.458852324	0.1012373513	4.29	0s:8ms
78	2.354416639	2.458852324	0.1044356856	4.44	0s:7ms
79	2.355232406	2.458852324	0.1036199180	4.40	0s:7ms
80	2.35721057	2.458852324	0.1016417546	4.31	0s:7ms
81	2.358864905	2.462287263	0.1034223576	4.38	0s:9ms
82	2.362221053	2.462287263	0.1000662097	4.24	0s:9ms
83	2.364586515	2.469562772	0.1049762569	4.44	0s:8ms
84	2.367639497	2.470848575	0.1032090780	4.36	0s:8ms
85	2.369100792	2.477635185	0.1085343927	4.58	0s:9ms
86	2.374745075	2.477635185	0.1028901101	4.33	0s:9ms
87	2.37769523	2.477635185	0.0999399553	4.20	0s:8ms
88	2.378456936	2.477635185	0.0991782491	4.17	0s:10ms
89	2.382644831	2.477635185	0.0949903541	3.99	0s:14ms
90	2.388107932	2.477635185	0.0895272530	3.75	0s:9ms
91	2.40120373	2.477635185	0.0764314548	3.18	0s:10ms
92	2.40172684	2.477635185	0.0759083455	3.16	0s:10ms
93	2.404023803	2.477635185	0.0736113818	3.06	0s:9ms
94	2.404197382	2.477635185	0.0734378028	3.05	0s:9ms
95	2.410782192	2.48978687	0.0790046782	3.28	0s:10ms
96	2.413190402	2.490964995	0.0777745929	3.22	0s:10ms
97	2.412677724	2.490964995	0.0782872702	3.24	0s:10ms
98	2.414386149	2.497843145	0.0834569954	3.46	0s:10ms
99	2.416192906	2.497843145	0.0816502382	3.38	0s:11ms
100	2.426033793	2.495438263	0.0694044704	2.86	0s:11ms

Tabel B.6: Packomania $r_i = i^{-2/3}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
5	1.629960525	1.629960525	0.0000000000	0.00	0s:0ms
6	1.629960525	1.629960525	0.0000000000	0.00	0s:0ms
7	1.62997278	1.653697845	0.0237250648	1.46	0s:0ms
8	1.631484075	1.654338063	0.0228539885	1.40	0s:0ms
9	1.637863996	1.679866987	0.0420029910	2.56	0s:0ms
10	1.646957238	1.679866987	0.0329097486	2.00	0s:0ms
11	1.650313825	1.682192134	0.0318783092	1.93	0s:0ms
12	1.656760259	1.683078469	0.0263182105	1.59	0s:0ms

Tabel B.6: Packomania $r_i = i^{-2/3}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
13	1.662778033	1.714281175	0.0515031423	3.10	0s:0ms
14	1.670183528	1.729067653	0.0588841247	3.53	0s:0ms
15	1.673001055	1.729067653	0.0560665977	3.35	0s:0ms
16	1.679631815	1.73789466	0.0582628453	3.47	0s:0ms
17	1.683840973	1.73789466	0.0540536868	3.21	0s:0ms
18	1.686025242	1.738271955	0.0522467129	3.10	0s:0ms
19	1.689532602	1.770039695	0.0805070930	4.77	0s:0ms
20	1.696447725	1.770039695	0.0735919695	4.34	0s:0ms
21	1.698943028	1.770039695	0.0710966671	4.18	0s:0ms
22	1.700668034	1.770757259	0.0700892256	4.12	0s:0ms
23	1.703933782	1.770757259	0.0668234774	3.92	0s:0ms
24	1.705387705	1.770757259	0.0653695549	3.83	0s:0ms
25	1.712330424	1.770757259	0.0584268354	3.41	0s:0ms
26	1.714593298	1.771802524	0.0572092258	3.34	0s:0ms
27	1.718985638	1.785339316	0.0663536785	3.86	0s:1ms
28	1.721909048	1.785339316	0.0634302683	3.68	0s:1ms
29	1.722427772	1.785339316	0.0629115448	3.65	0s:1ms
30	1.725040754	1.785339316	0.0602985628	3.50	0s:1ms
31	1.72537599	1.785339316	0.0599633265	3.48	0s:1ms
32	1.727084673	1.785339316	0.0582546429	3.37	0s:1ms
33	1.731890808	1.785339316	0.0534485086	3.09	0s:1ms
34	1.732984603	1.785339316	0.0523547133	3.02	0s:1ms
35	1.733788081	1.785339316	0.0515512354	2.97	0s:1ms
36	1.733942525	1.785339316	0.0513967910	2.96	0s:1ms
37	1.73433911	1.785480739	0.0511416288	2.95	0s:1ms
38	1.736647727	1.785480739	0.0488330114	2.81	0s:1ms
39	1.740163339	1.793653228	0.0534898894	3.07	0s:1ms
40	1.740440323	1.793653228	0.0532129052	3.06	0s:1ms
41	1.743049384	1.793653228	0.0506038436	2.90	0s:1ms
42	1.74463862	1.793653228	0.0490146083	2.81	0s:1ms
43	1.746050874	1.793653228	0.0476023541	2.73	0s:2ms
44	1.747310651	1.793653228	0.0463425767	2.65	0s:2ms
45	1.74702235	1.793653228	0.0466308777	2.67	0s:2ms
46	1.747830527	1.793653228	0.0458227015	2.62	0s:2ms
47	1.750876036	1.793653228	0.0427771925	2.44	0s:2ms
48	1.752745314	1.79723811	0.0444927958	2.54	0s:2ms
49	1.753835619	1.79723811	0.0434024905	2.47	0s:2ms
50	1.754493929	1.79723811	0.0427441809	2.44	0s:2ms
51	1.754510736	1.79723811	0.0427273733	2.44	0s:2ms
52	1.754548663	1.79723811	0.0426894470	2.43	0s:2ms
53	1.757284994	1.797834156	0.0405491620	2.31	0s:3ms
54	1.76113362	1.801421901	0.0402882810	2.29	0s:3ms
55	1.768231856	1.801421901	0.0331900447	1.88	0s:3ms

Tabel B.6: Packomania $r_i = i^{-2/3}$

N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
56	Missing	1.803122244			0s:3ms
57	1.772557462	1.803122244	0.0305647820	1.72	0s:3ms
58	1.772711083	1.803122244	0.0304111611	1.72	0s:3ms
59	1.774022224	1.803122244	0.0291000203	1.64	0s:3ms
60	1.772831554	1.806012683	0.0331811293	1.87	0s:3ms

Opmerking: Een oplossing voor 56 cirkels, met raddii $r_i = i^{-2/3}$ miste op de Packomania website op het moment van het schrijven van deze thesis.

B.3 Packomania Benchmark problemen

Tabel B.7: Packomania Benchmark Instances

Instantie	N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
NR10-1	10	99.88507689	105.2785764	5.3934994850	5.40	0s:0ms
NR11-1	11	60.70996139	64.21790153	3.5079401370	5.78	0s:1ms
NR12-1	12	65.02442247	69.5660027	4.5415802283	6.98	0s:0ms
NR14-1	14	113.5587629	119.9892774	6.4305144700	5.66	0s:1ms
NR15-1	15	38.91138667	40.83623531	1.9248486471	4.95	0s:1ms
NR15-2	15	38.83799551	40.46917515	1.6311796458	4.20	0s:0ms
NR16-1	16	143.3797811	153.1680967	9.7883156069	6.83	0s:0ms
NR16-2	16	127.6978254	138.852915	11.1550895980	8.74	0s:0ms
NR17-1	17	49.18730653	50.88962734	1.7023208042	3.46	0s:0ms
NR18-1	18	196.982624	207.315911	10.3332869685	5.25	0s:0ms
NR20-1	20	125.1177542	132.3922982	7.2745439975	5.81	0s:0ms
NR20-2	20	121.7887166	131.2593927	9.4706761087	7.78	0s:0ms
NR21-1	21	148.0967879	156.9650187	8.8682307593	5.99	0s:0ms
NR23-1	23	174.3425422	184.1686439	9.8261016920	5.64	0s:0ms
NR24-1	24	137.7590521	142.434406	4.6753539539	3.39	0s:1ms
NR25-1	25	188.7187899	199.1131651	10.3943751609	5.51	0s:1ms
NR26-1	26	244.5742803	264.8485458	20.2742655209	8.29	0s:1ms
NR26-2	26	300.2630794	331.9292039	31.6661245429	10.55	0s:1ms
NR27-1	27	220.659606	233.3093883	12.6497823783	5.73	0s:1ms
NR30-1	30	177.2586681	184.4651984	7.2065303184	4.07	0s:1ms
NR30-2	30	172.6501848	182.7352882	10.0851033839	5.84	0s:1ms
NR40-1	40	352.4026268	382.7128028	30.3101760009	8.60	0s:2ms
NR50-1	50	376.8063801	394.6690622	17.8626821409	4.74	0s:3ms
NR60-1	60	514.8363192	547.7523987	32.9160794969	6.39	0s:4ms
IN9-1	9	24.14213562	27.32050808	3.1783724520	13.17	0s:0ms
IN10-1	10	98.8354317	102.6159684	3.7805367434	3.83	0s:0ms
IN10-2	10	99.88507689	105.2785764	5.3934994850	5.40	0s:0ms
IN11-1	11	56.98440037	61.42216631	4.4377659420	7.79	0s:0ms

Tabel B.7: Packomania Benchmark Instances

Instantie	N	Beste radius	Radius	Vergroting	Vergroting (%)	Tijd
IN11-2	11	60.70996139	64.21790153	3.5079401370	5.78	0s:0ms
IN12-1	12	215.4700538	215.4700538	0.00000000000	0.00	0s:0ms
IN14-1	14	113.5587629	119.9892774	6.4305144700	5.66	0s:0ms
IN15-1	15	38.83799551	40.46917515	1.6311796458	4.20	0s:0ms
IN16-1	16	127.6978254	138.852915	11.1550895980	8.74	0s:0ms
IN17-1	17	49.18730653	50.88962734	1.7023208042	3.46	0s:0ms
IN17-2	17	241.4213562	273.2050808	31.7837245196	13.17	0s:0ms
IN25-1	25	21.54700538	22.53477869	0.9877733061	4.58	0s:0ms
IN28-1	28	21.54700538	21.54700538	0.00000000000	0.00	0s:1ms
IN162-1	162	11.40165346	11.92099073	0.5193372717	4.55	0s:27ms

B.4 Grottere aantallen cirkels

Enkel de resultaten voor meer dan 1000 cirkels worden hier getoond. De volledige lijst van grotere problemen, van 100 cirkels tot 14000 cirkels, kan je terug vinden op GitHub [4].

Tabel B.8: Grottere aantallen gelijke cirkels

circlecount	Radius	Overlap (eenheden ²)	Tijd
1000	34.19787581	1.94E-19	0s:252ms
1100	35.8477868	2.41E-19	0s:295ms
1200	37.28489633	2.94E-19	0s:336ms
1300	38.89323424	3.45E-19	0s:391ms
1400	40.26528552	3.81E-19	0s:425ms
1500	41.68391561	4.29E-19	0s:472ms
1600	42.93386435	4.76E-19	0s:530ms
1700	44.30874729	6.18E-19	0s:581ms
1800	45.52705198	7.04E-19	0s:644ms
1900	46.78978667	6.85E-19	0s:698ms
2000	47.98140222	7.66E-19	0s:747ms
3000	58.49108183	1.76E-18	1s:447ms
4000	67.45994578	3.07E-18	2s:325ms
5000	75.2832421	4.80E-18	3s:237ms
6000	82.39743073	7.21E-18	4s:300ms
7000	88.91507648	1.03E-17	5s:544ms
8000	95.01109884	1.43E-17	6s:842ms
9000	100.6438734	1.89E-17	8s:315ms
10000	106.0253597	2.32E-17	9s:848ms
11000	111.1346661	3.14E-17	11s:309ms
12000	116.0794088	3.76E-17	12s:915ms
13000	120.7501442	4.43E-17	14s:766ms
14000	125.3002024	5.07E-17	16s:606ms

Tabel B.9: Grottere aantalen cirkels: $r_i = i^{1/2}$

circlecount	Radius	Overlap (eenheden ²)	Tijd
1000	774.0131872	2.72E-17	0s:339ms
1100	849.6728853	3.23E-17	0s:385ms
1200	926.1796164	4.35E-17	0s:448ms
1300	1001.604293	5.46E-17	0s:509ms
1400	1079.798785	6.69E-17	0s:562ms
1500	1156.055812	8.82E-17	0s:631ms
1600	1233.213828	9.67E-17	0s:705ms
1700	1309.750398	1.20E-16	0s:768ms
1800	1386.13319	1.34E-16	0s:824ms
1900	1462.807238	1.54E-16	0s:888ms
2000	1539.951867	1.79E-16	1s:15ms
3000	2303.207787	4.22E-16	1s:810ms
4000	3066.965929	1.11E-15	2s:816ms
5000	3830.949569	1.90E-15	3s:968ms
6000	4595.507795	336.1716726	5s:210ms
7000	5358.723848	585.3556305	6s:511ms
8000	6116.413934	7.83E-15	7s:726ms
9000	6874.532534	0.1235373296	9s:550ms
10000	7646.122416	1.454465798	11s:589ms
11000	8398.61771	1.64E-14	13s:231ms
12000	9164.900313	2267.23912	14s:473ms
13000	9928.581657	2.543904356	16s:154ms
14000	10694.5632	3.48E-14	18s:90ms

Tabel B.10: Grottere aantalen cirkels: $r_i = i^{-1/2}$

circlecount	Radius	Overlap (eenheden ²)	Tijd
1000	2.893283783	4.51E-22	0s:538ms
1100	2.908350125	5.10E-22	0s:617ms
1200	2.923408029	5.19E-22	0s:716ms
1300	2.936039285	6.21E-22	0s:833ms
1400	2.943533134	6.57E-22	0s:946ms
1500	2.953979594	6.30E-22	1s:78ms
1600	2.966069401	6.77E-22	1s:154ms
1700	2.976648708	7.33E-22	1s:304ms
1800	2.985482798	7.81E-22	1s:429ms
1900	2.995659982	8.14E-22	1s:572ms
2000	3.000845426	8.10E-22	1s:698ms
3000	3.065430097	1.07E-21	3s:288ms
4000	3.111816155	1.39E-21	5s:248ms
5000	3.145865417	1.62E-21	7s:509ms
6000	3.173380049	1.90E-21	10s:94ms

Tabel B.10: Grottere aantalen cirkels: $r_i = i^{-1/2}$

circlecount	Radius	Overlap (eenheden ²)	Tijd
7000	3.19748614	2.11E-21	12s:814ms
8000	3.217527155	2.37E-21	15s:977ms
9000	3.234875939	2.63E-21	19s:132ms
10000	3.251215521	6.92E-06	22s:468ms
11000	3.265715891	3.19E-21	26s:522ms
12000	3.278766989	5.51E-17	30s:235ms
13000	3.291515829	3.49E-21	34s:392ms
14000	3.301772515	3.86E-21	39s:261ms

Tabel B.11: Grottere aantalen cirkels: $r_i = i^{-2/3}$

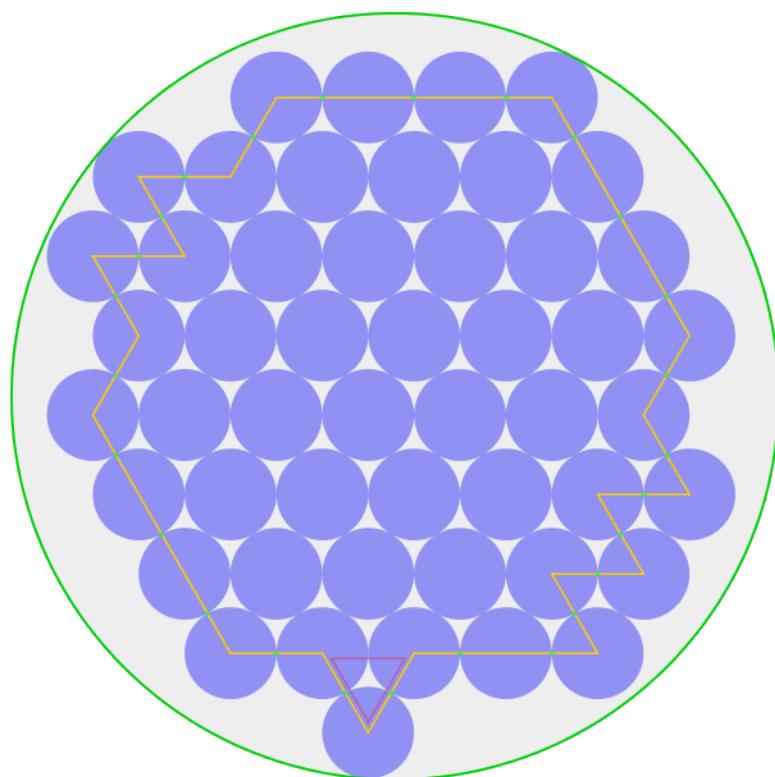
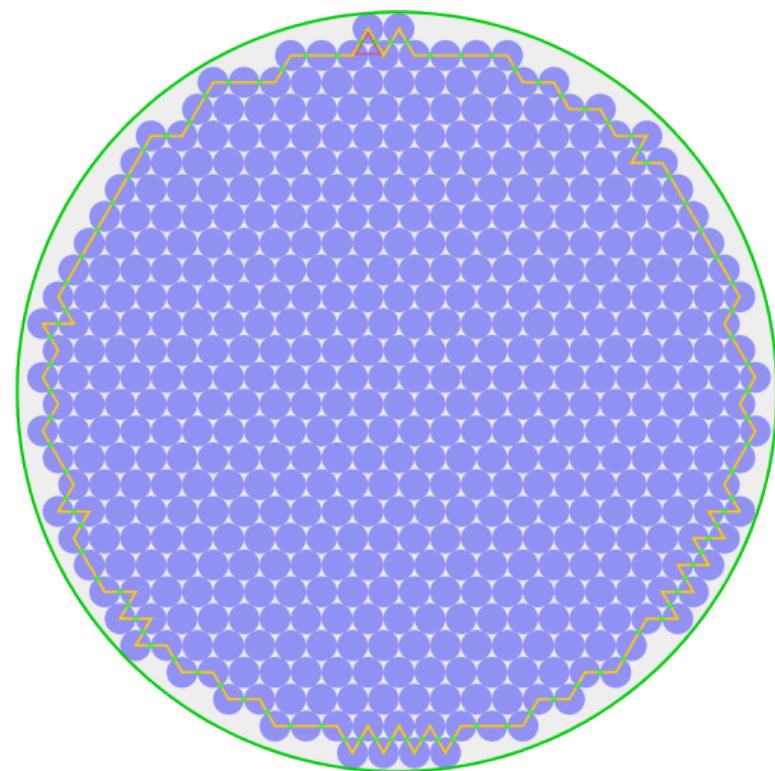
circlecount	Radius	Overlap (eenheden ²)	Tijd
1000	1.856466117	5.37E-22	0s:539ms
1100	1.858198724	4.73E-22	0s:635ms
1200	1.859175544	4.16E-22	0s:748ms
1300	1.859678713	1.11E-21	0s:848ms
1400	1.860597082	8.41E-22	0s:942ms
1500	1.86111262	9.23E-22	1s:88ms
1600	1.861617779	7.82E-22	1s:229ms
1700	1.862434075	1.02E-21	1s:364ms
1800	1.862989167	9.70E-22	1s:544ms
1900	1.863786306	1.29E-21	1s:668ms
2000	1.864143827	8.76E-22	1s:833ms
3000	1.868063495	1.29E-21	3s:677ms
4000	1.870522828	2.51E-21	6s:232ms
5000	1.872601012	3.12E-21	9s:237ms
6000	1.873700703	3.46E-21	12s:617ms
7000	1.874811381	4.58E-21	16s:713ms
8000	1.875973551	4.03E-21	21s:538ms
9000	1.87660983	6.46E-21	25s:726ms
10000	1.87406634	0.03735698644	31s:536ms
11000	1.875967596	0.03611959323	37s:846ms
12000	1.876456183	0.03611959323	44s:796ms
13000	1.87685631	0.03611959323	50s:342ms
14000	1.877341355	0.03611959323	57s:698ms

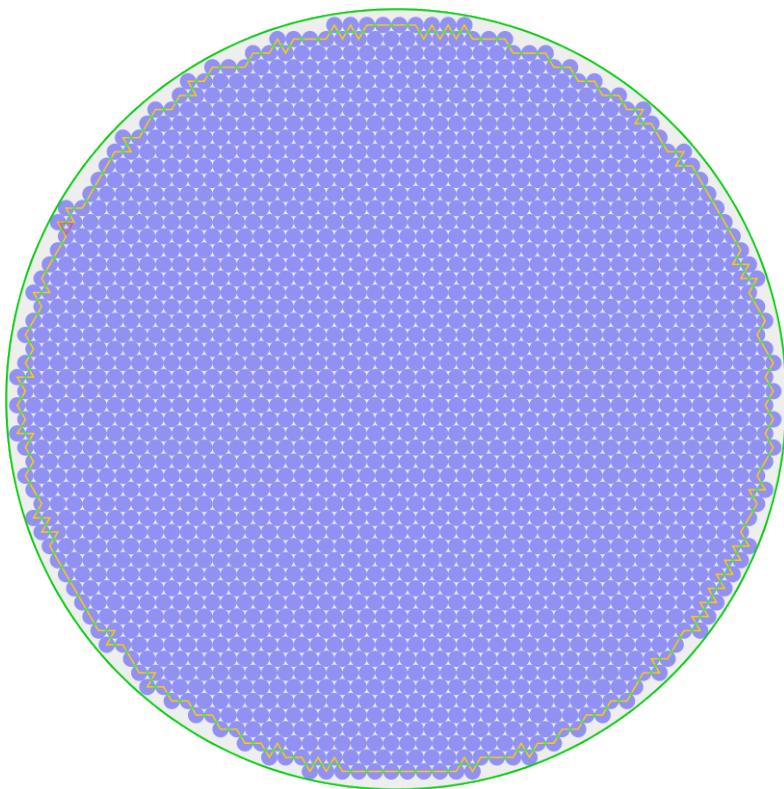
Tabel B.12: Grottere aantalen cirkels: $r_i = i^{-1/5}$

circlecount	Radius	Overlap (eenheden ²)	Tijd
1000	11.42927809	5.26E-21	0s:324ms
1100	11.73702799	7.34E-21	0s:383ms
1200	12.04875608	7.00E-21	0s:438ms
1300	12.34201715	8.30E-21	0s:496ms
1400	12.59566073	8.52E-21	0s:561ms
1500	12.86483556	9.24E-21	0s:614ms
1600	13.10781613	1.04E-20	0s:701ms
1700	13.37232588	1.09E-20	0s:759ms
1800	13.56759994	1.23E-20	0s:809ms
1900	13.79318079	1.31E-20	0s:862ms
2000	14.00920357	1.33E-20	0s:926ms
3000	15.7834951	2.15E-20	1s:788ms
4000	17.19442986	3.29E-20	2s:758ms
5000	18.38386809	4.42E-20	3s:887ms
6000	19.39991246	5.92E-20	5s:150ms
7000	20.29329017	7.32E-20	6s:536ms
8000	21.11324047	8.98E-20	7s:953ms
9000	21.8771281	1.09E-19	9s:610ms
10000	22.55910849	1.22E-19	11s:336ms
11000	23.23957158	1.37E-19	13s:33ms
12000	23.8376261	1.55E-19	14s:991ms
13000	24.40974434	1.73E-19	16s:856ms
14000	24.95175949	1.90E-19	18s:923ms

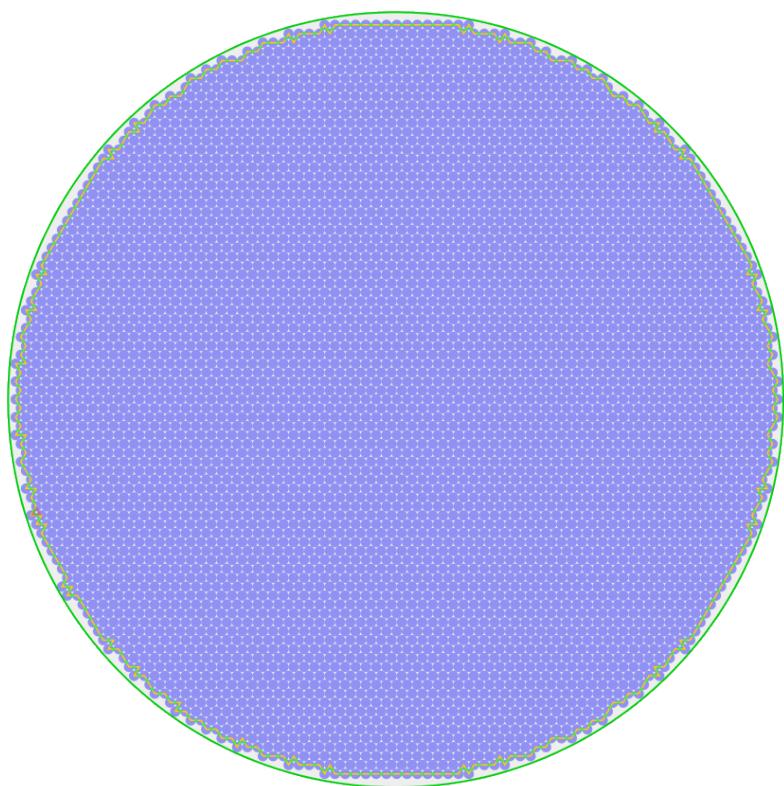
Bijlage C

Extra *packing* figuren

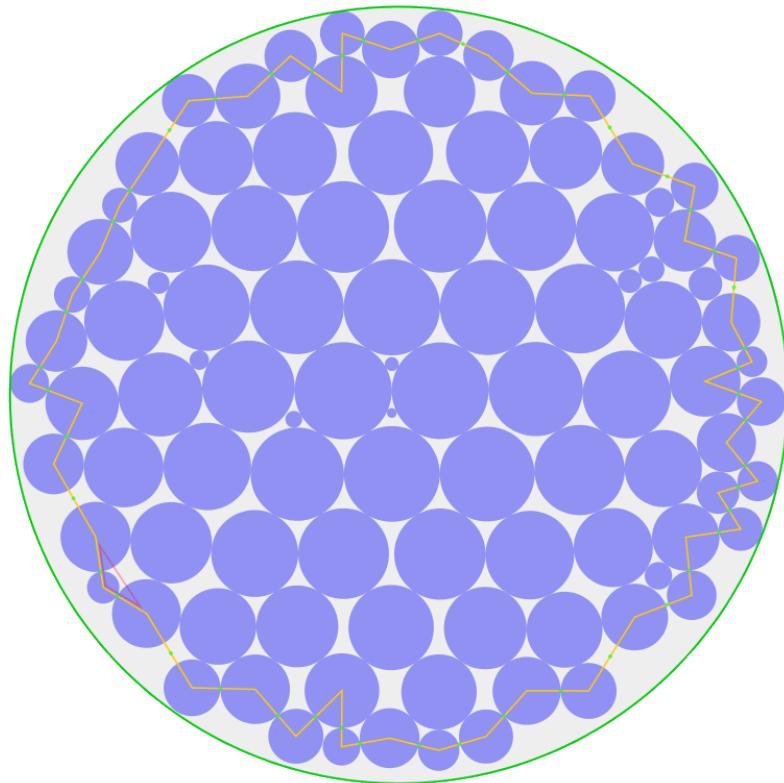
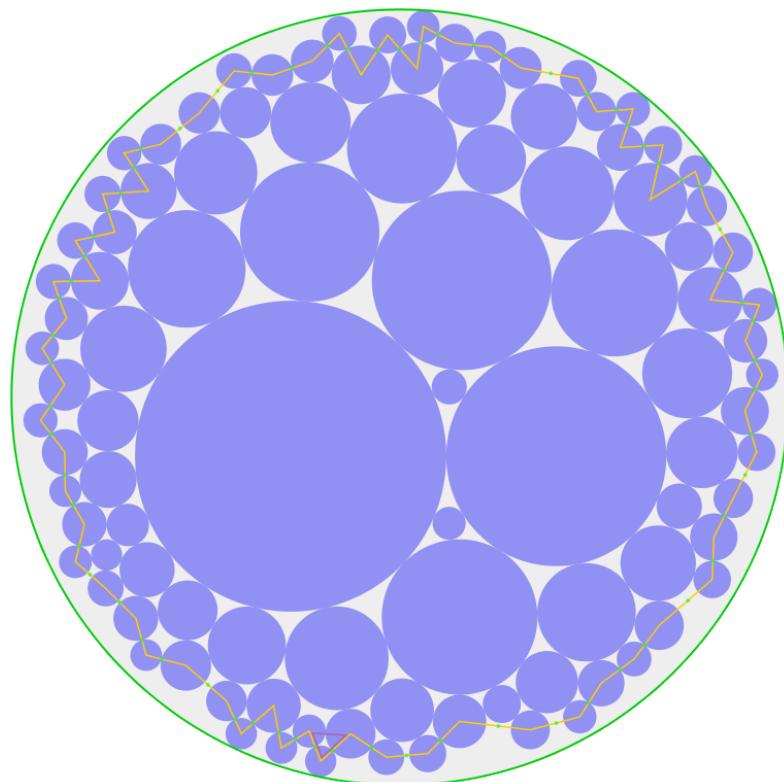
Figuur C.1: *Packing* voor 50 cirkels met gelijke grootteFiguur C.2: *Packing* voor 500 cirkels met gelijke grootte

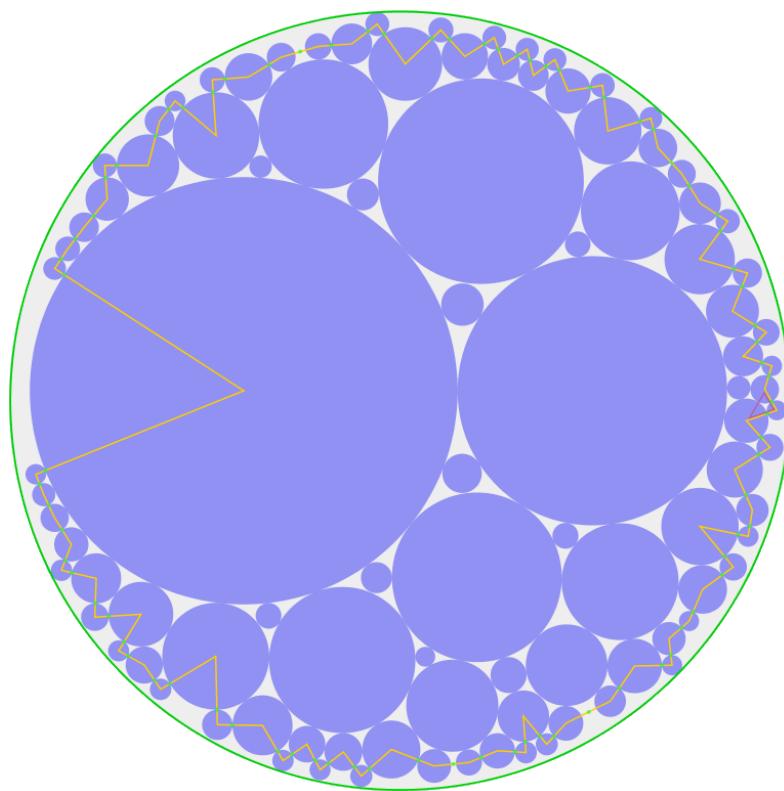
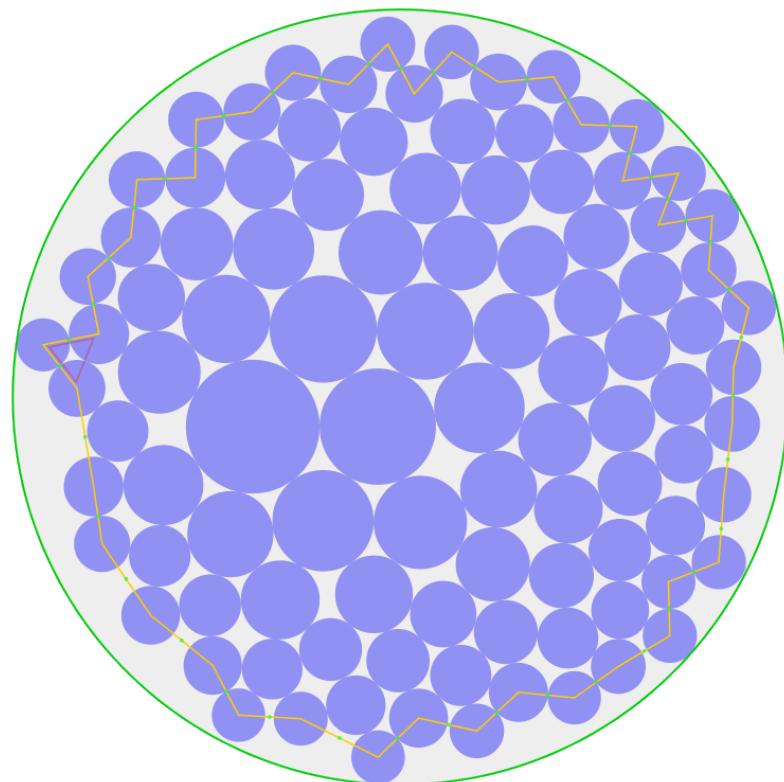


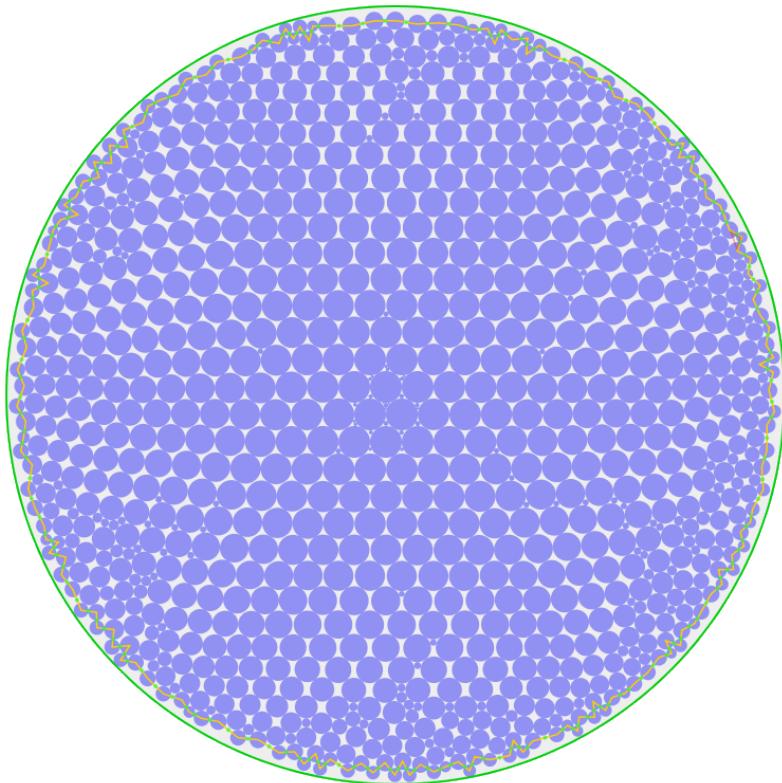
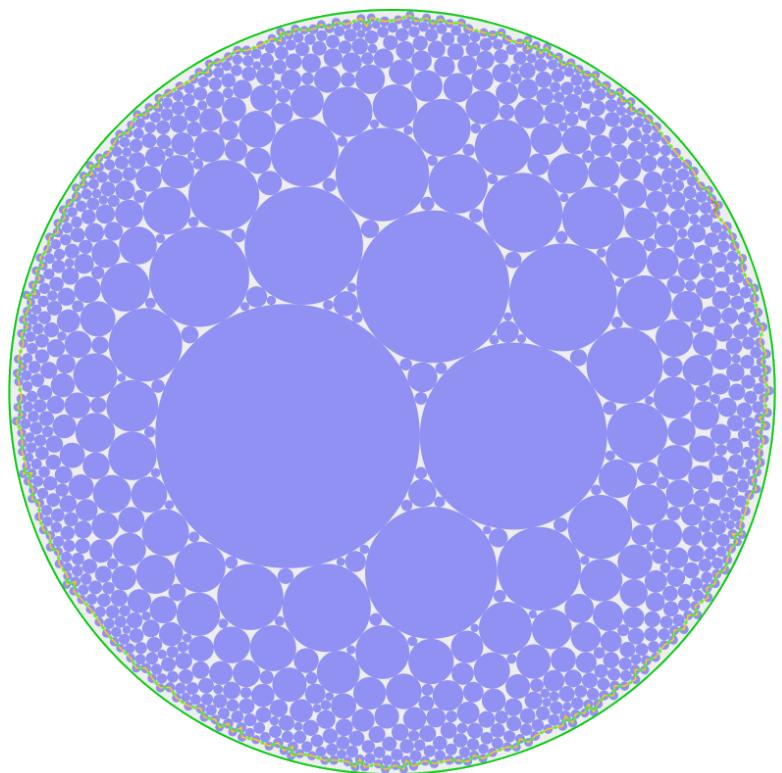
Figuur C.3: *Packing* voor 2000 cirkels met gelijke grootte

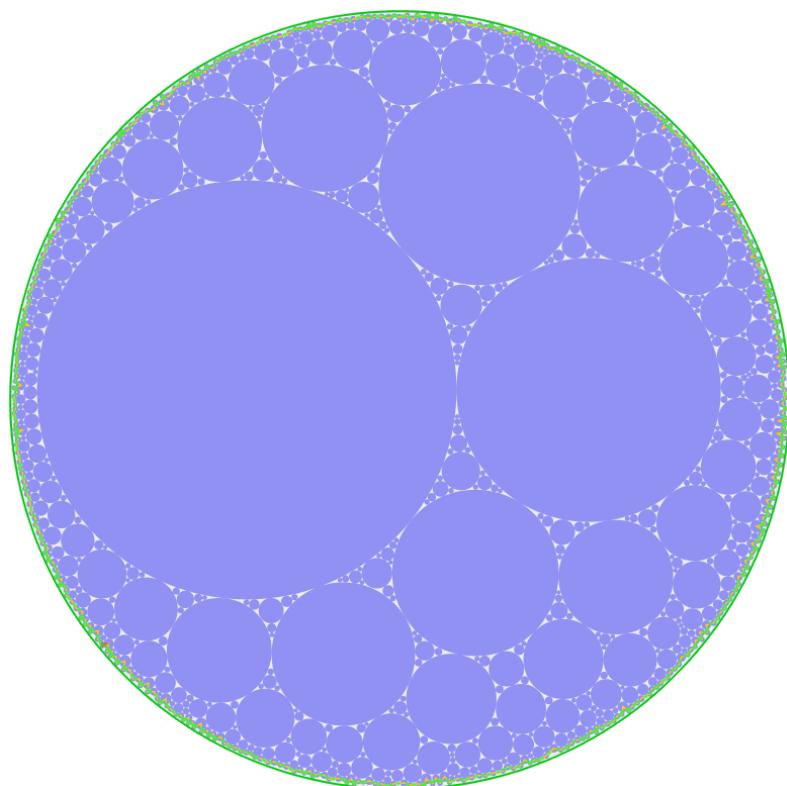


Figuur C.4: *Packing* voor 5000 cirkels met gelijke grootte

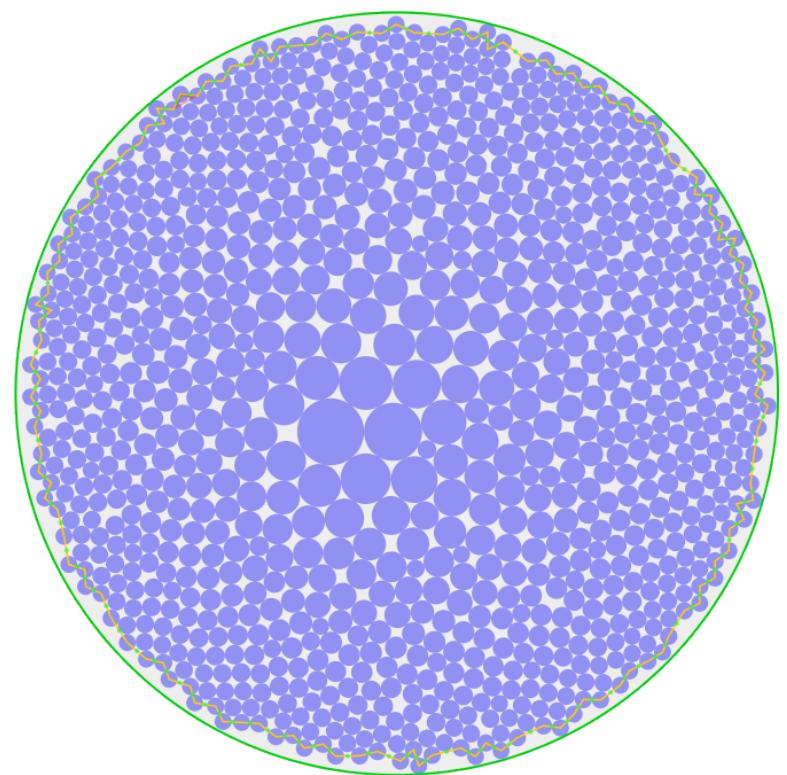
Figuur C.5: *Packing voor 100 cirkels met verdeling $r_i = i^{1/2}$* Figuur C.6: *Packing voor 100 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$*

Figuur C.7: *Packing voor 100 cirkels met verdeling $r_i = i^{-2/3}$* Figuur C.8: *Packing voor 100 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/5}$*

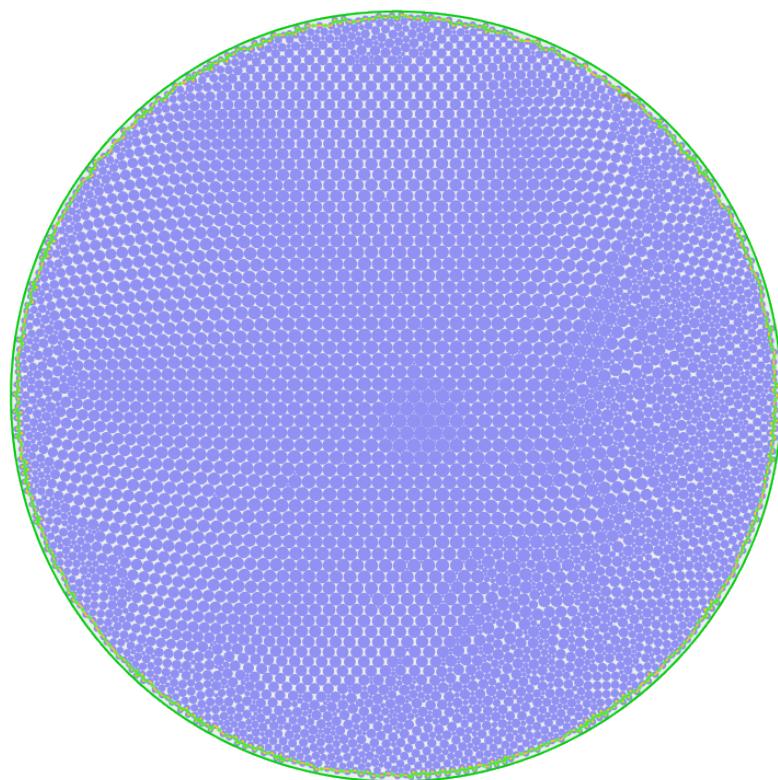
Figuur C.9: *Packing voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{1/2}$* Figuur C.10: *Packing voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$*



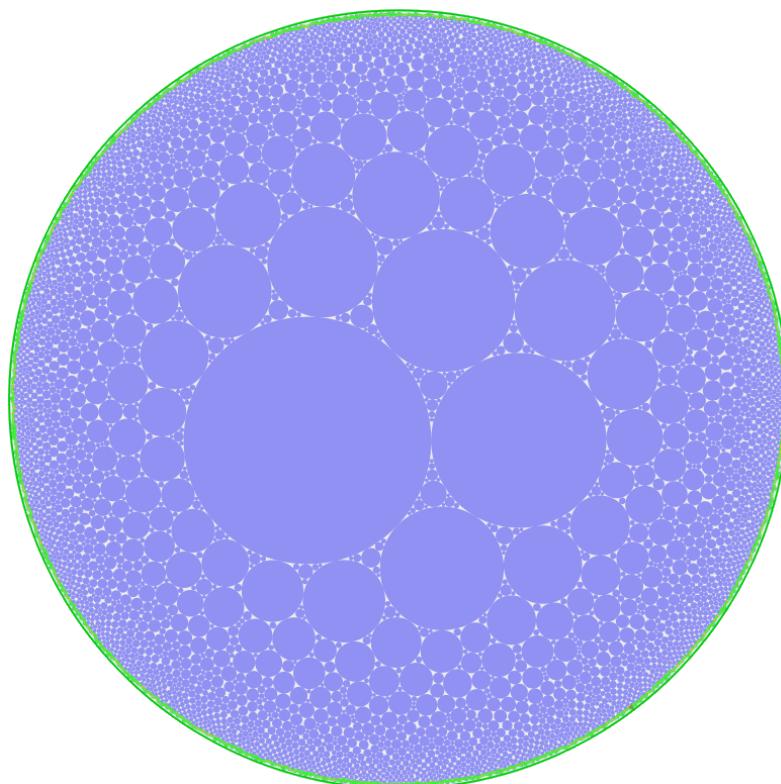
Figuur C.11: *Packing* voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-2/3}$



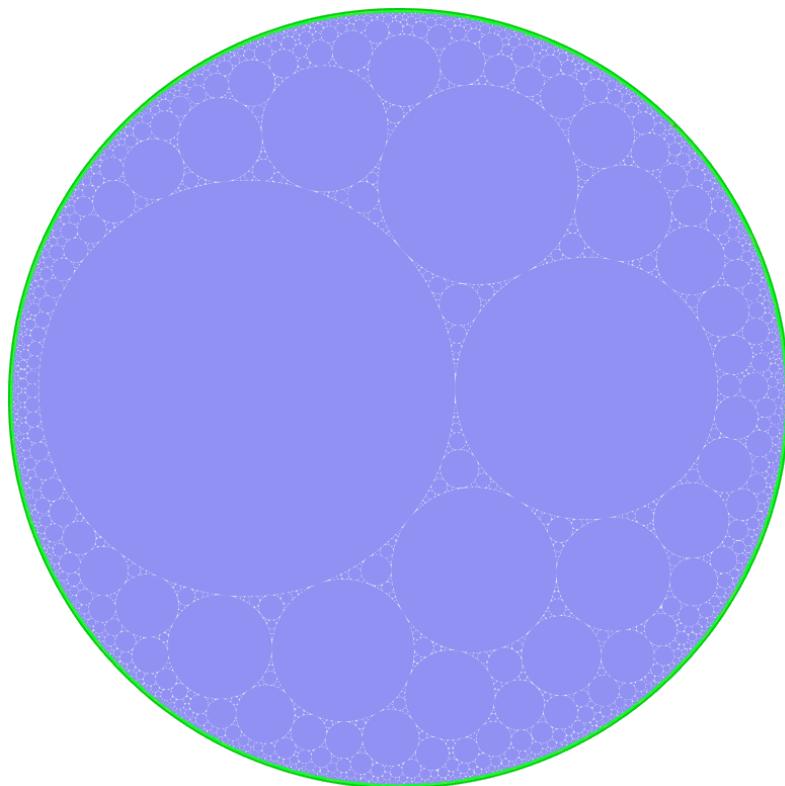
Figuur C.12: *Packing* voor 1000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/5}$



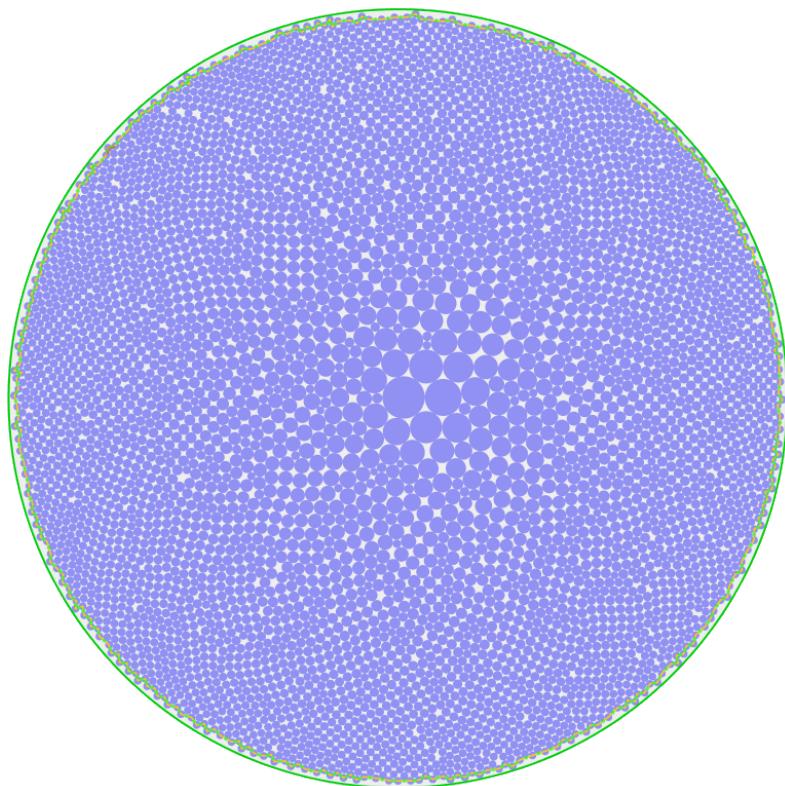
Figuur C.13: *Packing* voor 5000 cirkels met verdeling $r_i = i^{1/2}$



Figuur C.14: *Packing* voor 5000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/2}$



Figuur C.15: *Packing voor 5000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-2/3}$*



Figuur C.16: *Packing voor 5000 cirkels met verdeling $r_i = i^{-1/5}$*

COMPUTERWETENSCHAPPEN
Celestijnenlaan 200A - bus 2402
3001 HEVERLEE, BELGIË
tel. + 32 16 32 77 00
fax + 32 16 32 79 96
www.kuleuven.be

