

# 布朗运动实验报告

无88 刘子源 2018010895

## 一、实验原理

布朗运动是指悬浮在液体或气体中的微粒所做的不停息的无规则运动，其数学方程为

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi$$

右边第一项 $-\gamma v$ 是微粒所受的阻力，有 $\gamma = 3\pi d\eta$ ；第二项是噪声，具有随机性。

得到扩散系数D有两个方法，一是利用微粒 X 方向位移的平均平方偏差的公式 $\langle [x(t) - x(t_0)]^2 \rangle = 2Dt$ 拟合直线得到D，二是利用微粒每隔时间 $\tau$ 的位移的平方平均值公式 $\langle (\Delta x)^2 \rangle = 2D\tau$ 得到D。进而根据公式 $D = \frac{k_B T}{\gamma}$ 得到玻尔兹曼常数 $k_B$ ，利用公式 $R = N_A k_B$ 得到阿伏伽德罗常数 $N_A$ 。

## 二、实验方法

微粒布朗运动的实验观测需要使用超显微镜，但并不具备这样的条件，所以用C++程序来代替真实实验观测。程序参数如下：

微粒直径： $d = 1 \mu\text{m}$

微粒质量： $m = 1 \mu\text{g}$

流体温度： $T = 293 \text{ K}$

流体粘度： $\eta = 0.1 \text{ cP}$ ,  $1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

初始观测时刻： $0 \text{ s}$

微粒初始坐标： $0 \mu\text{m}$

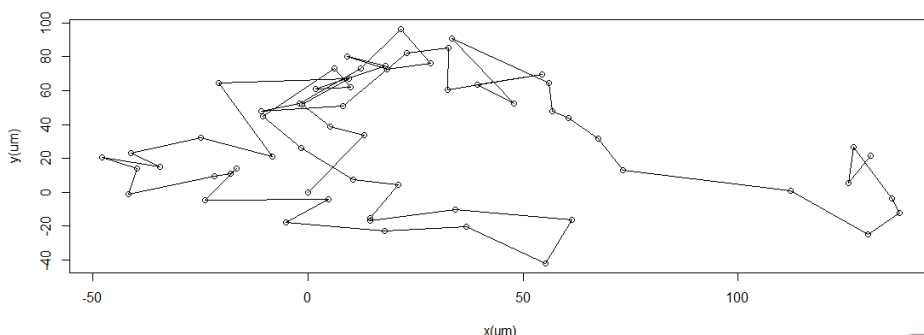
微粒初始速度： $0 \mu\text{m/s}$

程序运行一次相当于一次连续观测的结果。

由于该实验需要记录1000组数据，数据量较大，在处理数据的时候，我选择了非常便于统计的R，后续绘图、拟合等操作均用R完成。

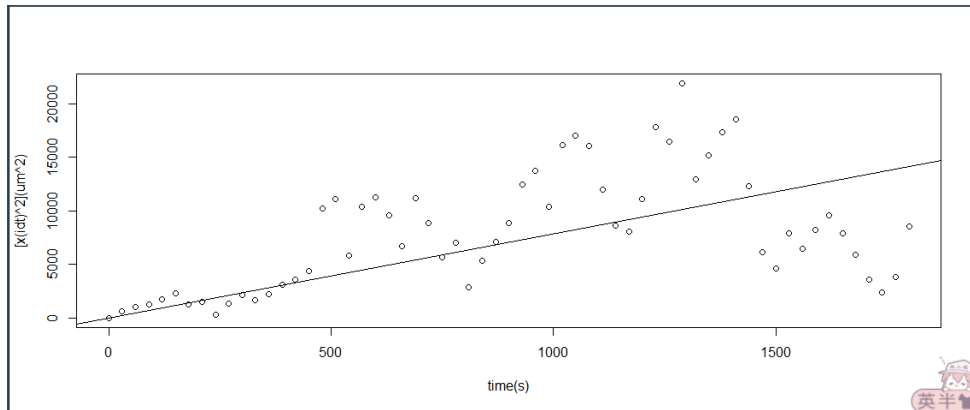
## 三、数据处理

### a 布朗运动轨迹

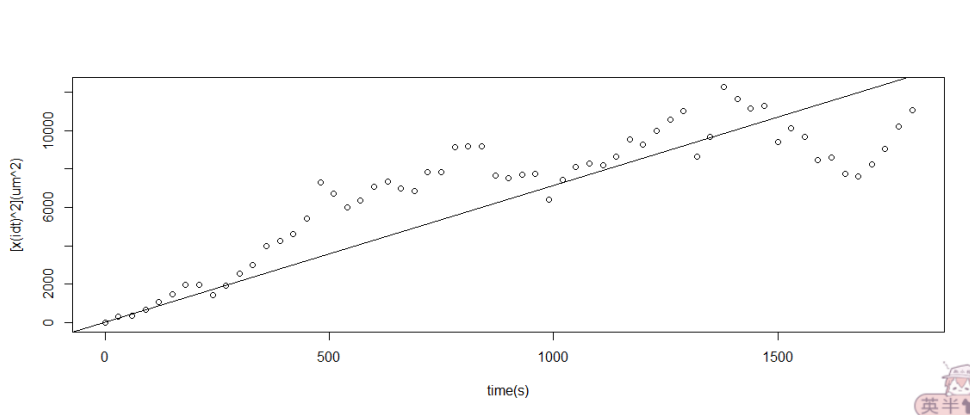


## b统计 $\langle x^2(t) \rangle$

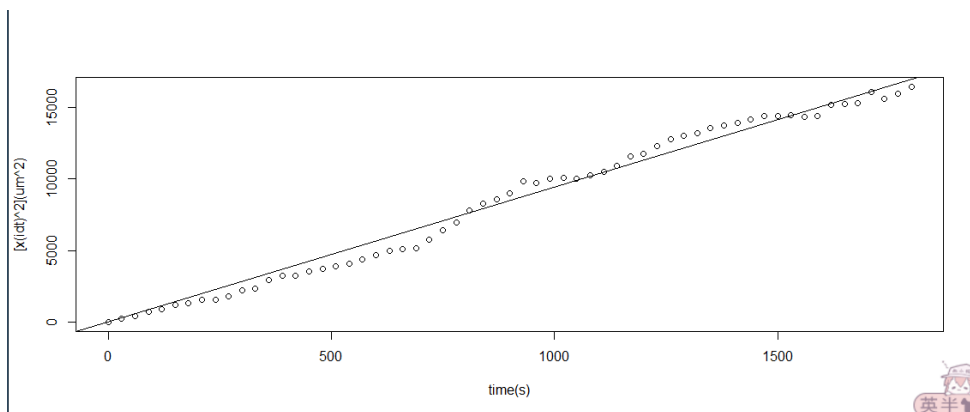
观测次数  $n=1$



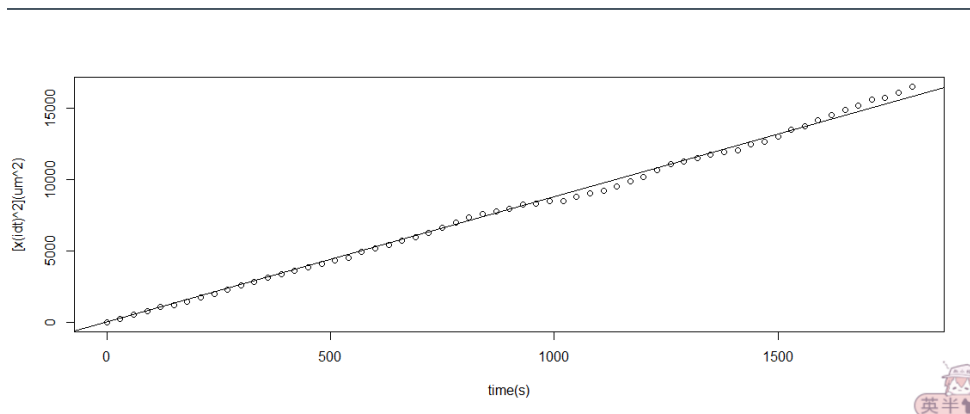
观测次数  $n=10$



观测次数  $n=100$



观测次数  $n=1000$



通过拟合1000次观测的实验数据，得到拟合直线斜率

$$k = 8.775$$

扩散系数

$$D = 4.388 \mu m^2 / s$$

玻尔兹曼常数

$$k_B = \frac{D\gamma}{T} = 1.411 \times 10^{-23} J/K$$

阿伏伽德罗常数

$$N_A = \frac{R}{k_B} = 5.892 \times 10^{23} mol^{-1}$$

相对误差为2.16%，在误差允许范围内。

## c统计 $\langle (\Delta x)^2 \rangle$

观测次数	1	10	100	1000
$(\Delta x)^2 / (\mu m^2)$	208.912	234.731	253.113	248.172
$D (\mu m^2 / s)$	3.482	3.912	4.218	4.136

通过拟合1000次观测的实验数据，得到扩散系数

$$D = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2dt} = 4.136 \mu m^2 / s$$

玻尔兹曼常数

$$k_B = \frac{D\gamma}{T} = 1.330 \times 10^{-23} J/K$$

阿伏伽德罗常数

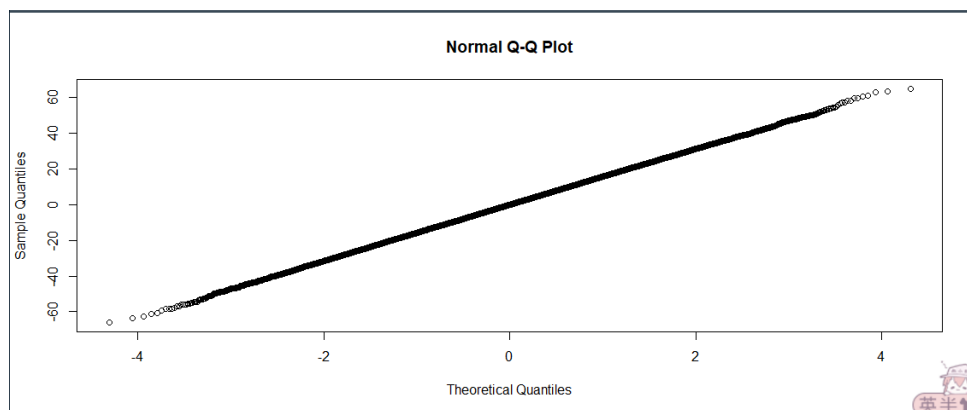
$$N_A = \frac{R}{k_B} = 6.249 \times 10^{23} mol^{-1}$$

相对误差为3.77%，在误差允许范围内。

## d统计给出 $\Delta x$ 的分布

用R进行数据分析

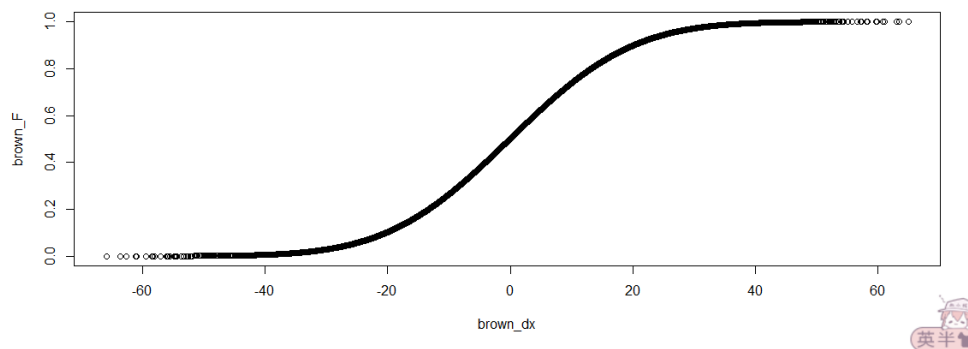
取1000次观测中  $60 \times 1000$  个  $\Delta x$ ，进行正态性检验，画出QQ图：



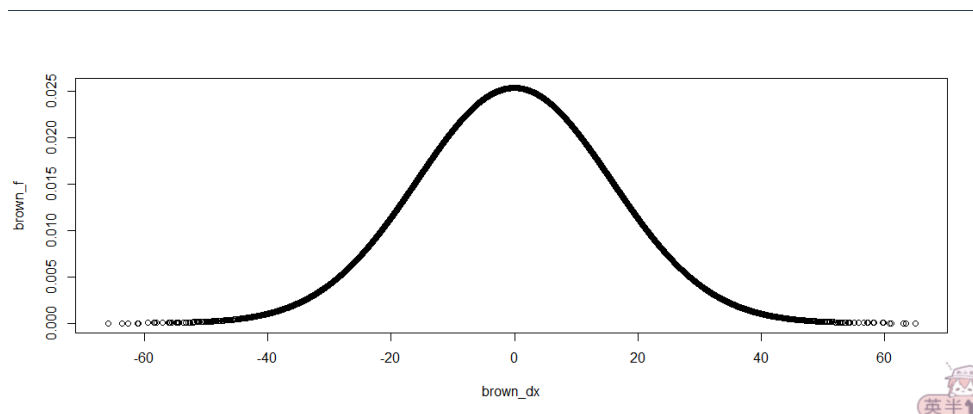
可以明显看出  $\Delta x$  服从正态分布

其样本均值为  $-0.0322 \mu m$ ，样本方差为  $248.1751 \mu m^2$

概率分布函数图像为：



概率密度函数图像为：



## 四、思考题

1、什么是流体中原子或分子的平均自由程，确定阿伏伽德罗常数后如何估计原子或分子的大小？

平均自由程是指一个分子在连续两次碰撞之间可能通过的各段自由程的平均值。

根据公式  $\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} n d^2 P}$ ，通过上述实验可测得平均自由程  $\lambda$ ，进而得到分子有效直径  $d$ 。

2、数值计算所使用的参数是否合理？如果不合理对计算结果有何影响？

判断：主要考察微粒密度是否合理，假设微粒是实心固体，其密度为  $\frac{m}{\frac{\pi}{6} d^3} = 1.9 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$ ，正常情况下微粒应悬浮在流体中，其密度应与流体密度相当，所以这是不合理的。

解释：微粒的参数显然不合理，但实验还能顺利进行，我仔细查看了一下代码，这是因为代码中对各常数做了一些调整，比如代码

```
1 | const double kb = 1.380649;
```

就是对玻尔兹曼常数进行了数量级的调整，微粒的质量和直径都设置成  $1 \mu\text{m}$ ，是方便计算机数值仿真，但现实中是不可这样的。

影响：根据郎之万方程可知，其他参数不变，微粒密度越大， $\Delta x$  越小，计算出来的扩散系数  $D$  就会偏小。

验证：程序仿真验证，保持所有参数不变， $\Delta x$  为：

```
1 -13.393
2 -12.7813
3 11.4026
4 25.9368
5 -48.2772
6 -95.7588
7 -48.2972
8 -13.0671
9 -12.6992
10 -35.1995
11 -55.0313
12 61.9493
13 -34.4802
14 -87.8034
15 -14.037
16 68.9129
17 34.7976
18 37.4386
19 -1.34728
20 28.5918
```

将密度变大1000倍， $\Delta x$ 为：

```
1 -0.000667838
2 0.0846507
3 0.00310249
4 -0.0364149
5 -0.148181
6 -0.146353
7 -0.262692
8 -0.307643
9 -0.272059
10 -0.232753
11 -0.174821
12 -0.0775588
13 -0.0945646
14 -0.0784449
15 0.0283652
16 0.298683
17 0.408713
18 0.481566
19 0.60468
20 0.688339
```

$\Delta x$ 显著变小，结论正确。

## 五、总结

通过本次实验，我掌握了更多的计算机仿真和R语言技巧，比如说对1000次观测结果进行拟合时，跑1000次程序显然是不现实的，所以我先通过修改cpp文件，将1000次循环运行得到的结果输入到txt文件中，然后用Rstudio读取，将其切分成 $60 \times 1000$ 的矩阵，通过对矩阵运算，大大减轻了工作量。

感谢老师和助教的耐心指导。