第3章 最优滤波理论

Wiener滤波理论

最优预测和格型滤波器

LS滤波理论

本章是随机信号处理线性理论的基础

N. Wiener (1894 - 1964)

Wiener滤波

Wiener 滤波器是从统计意义上的最优滤波，

它要求输入信号是宽平稳随机序列，↵

由信号序列 $\left\{x(n-k)\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$

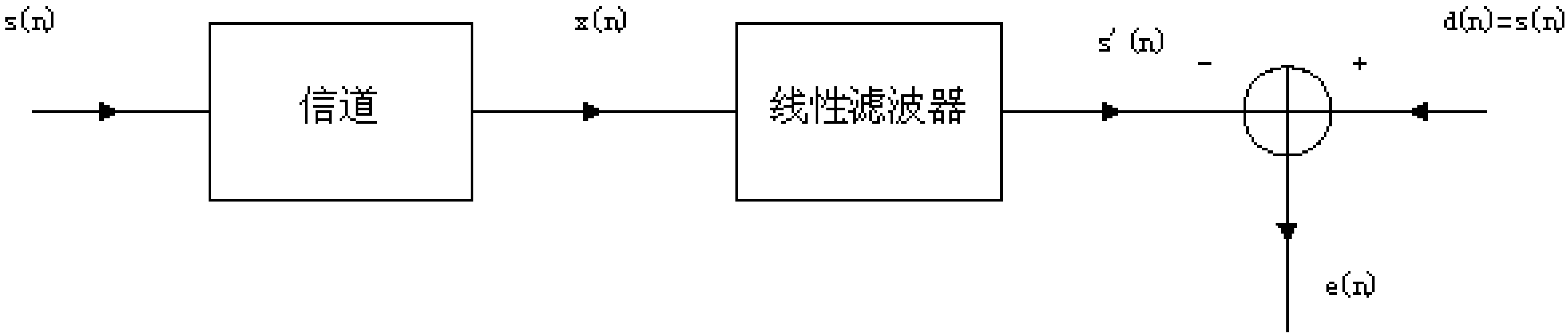
估计一个期望信号 $d(n)$，

输入信号是宽平稳的，输入信号与期望响应是联合宽平稳的。

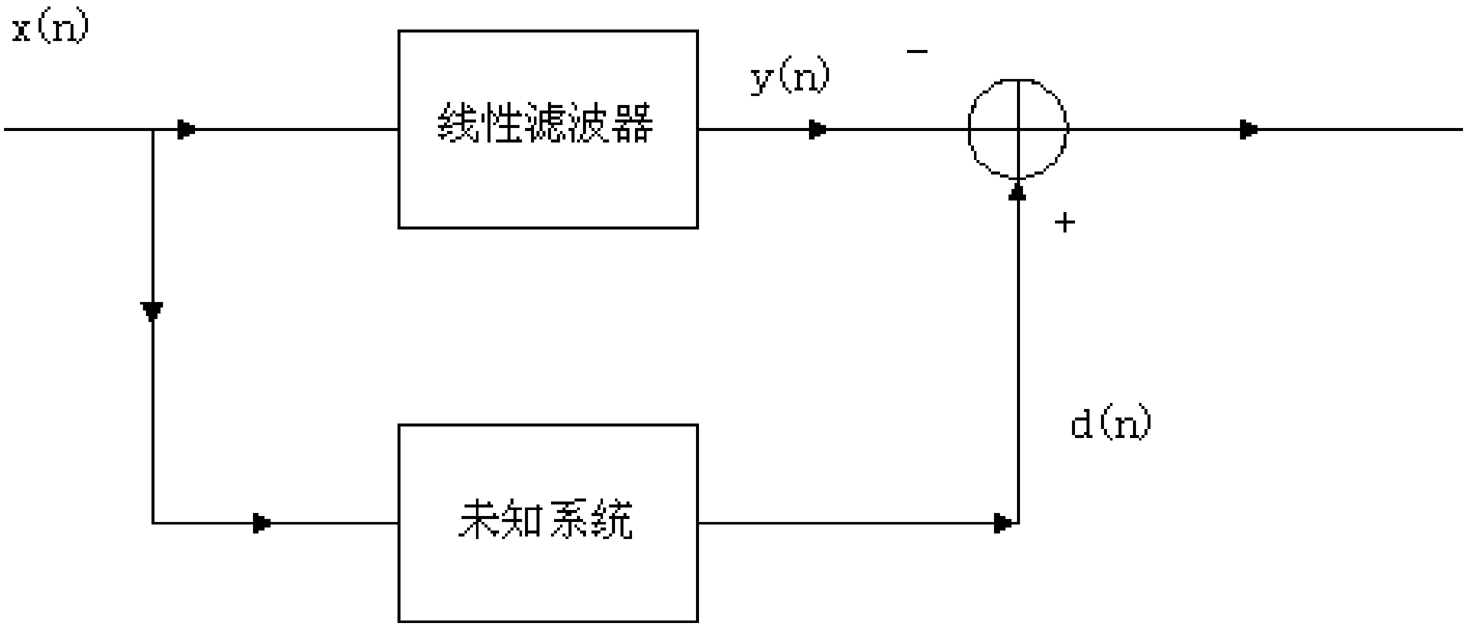
要求估计的均方误差最小。

详细讨论**FIR**结构和**IIR**结构的**Wiener**滤波器

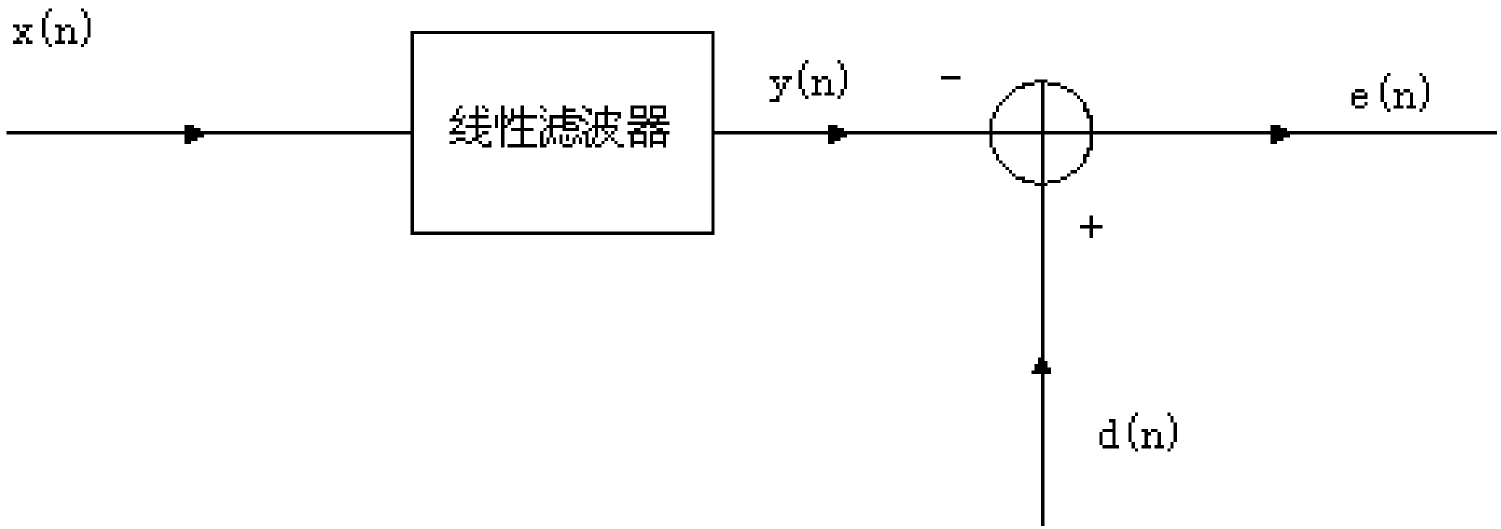
通信的信道均衡器



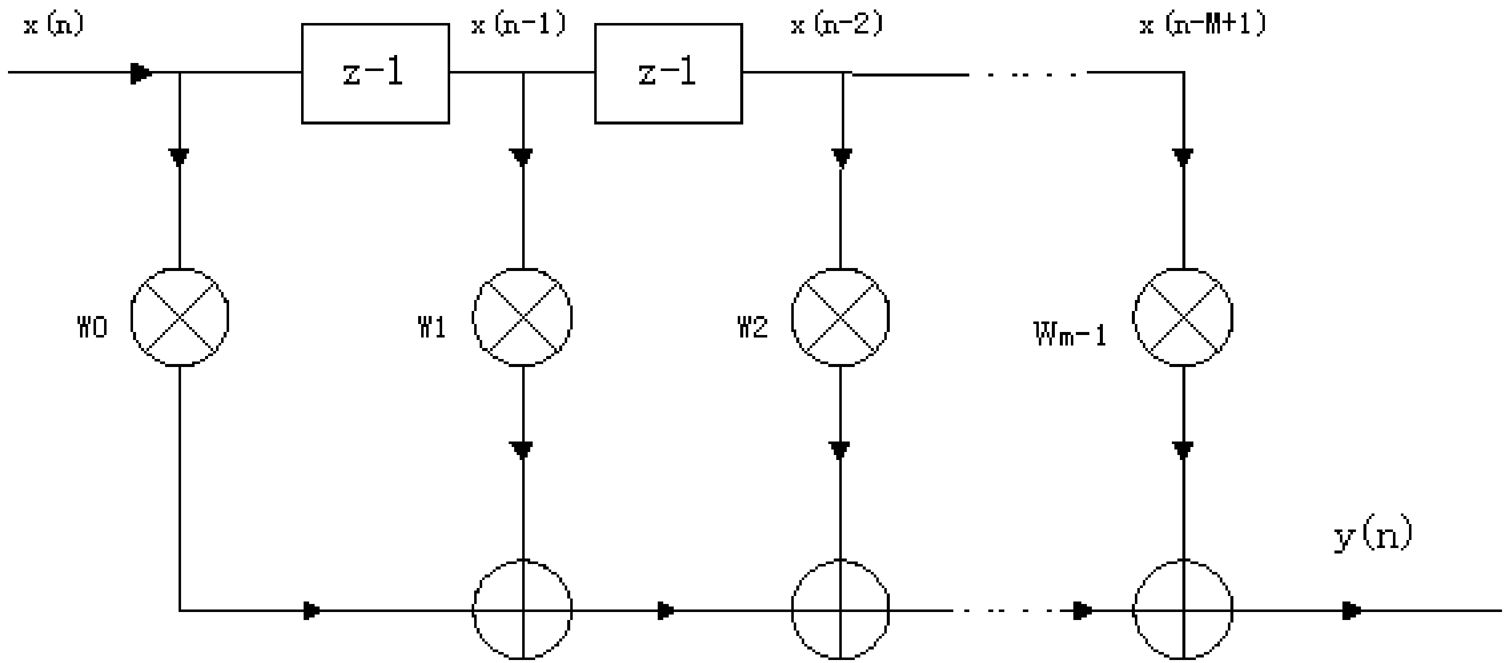
系统辨识



Wiener滤波器的一般结构



当线性滤波器部分是FIR结构时，结构图



Wiener滤波的横向滤波器

维纳滤波：正交原理

对复数据情况，推导一般结论，实数据是特例

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_k^* x(n-k)$$

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k^* x(n-k)$$

均方误差是：$J = E\{e[n]e^*[n]\} = E\{|e[n]|^2\}$

设权系数：$w_k = a_k + jb_k$

达到最优滤波时，误差和输入正交

$$E\left[x(n-k)e_o^*(n)\right] = 0$$

推论：

$$E\left[y_o(n)e_o^*(n)\right] = 0$$

$$k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$$

维纳一霍夫方程（Wiener-Hopf）

由正交性原理得 $k = \cdots,-1,0,1,2\cdots$

$$E\left[x(n-k)\left(d^*(n)-\sum_{i=-\infty}^{\infty} w_{oi}x^*(n-i)\right)\right]=0$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} w_{oi}E\left[x(n-k)x^*(n-i)\right]=E\left[x(n-k)d^*(n)\right]$$

有

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} w_{oi}r_x(i-k)=r_{xd}(-k)$$

M阶FIR滤波器，

（横向滤波器）Wiener-Hopf方程为

$$\sum_{i=0}^{M-1} w_{0i} r_x[i-k] = r_{xd}[-k]$$

矩阵形式

$$R\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{r}_{xd}$$

$$\boldsymbol{w}_0 = R^{-1}\boldsymbol{r}_{xd}$$

最小均方误差

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \sigma_{\hat{d}}^2$$

$$\sigma_{\hat{d}}^2 = E[\hat{d}[n \mid X_n]\hat{d}^*[n \mid X_n]] = E[\boldsymbol{w}_0^H \boldsymbol{x}[n]\boldsymbol{x}^H[n]\boldsymbol{w}_0]$$

$$= \boldsymbol{w}_0^H E[\boldsymbol{x}[n]\boldsymbol{x}^H[n]]\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{w}_0^H R_x \boldsymbol{w}_0$$

$$= \boldsymbol{w}_0^H \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}} = \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}}^H \boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}}^{\boldsymbol{H}} R^{-1} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}}$$

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \sigma_{\hat{d}}^2 = \sigma_d^2 - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}}^H \boldsymbol{w}_0 = \sigma_d^2 - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}}^H R^{-1} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}}$$

例 3.1.1 有一信号$s(n)$，它的自相关序列为$r_s(k)=\frac{10}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$，被一加性白噪声所污染，噪声方差为$2/3$，白噪声与信号不相关。被污染信号$x[n]$作为维纳滤波器的输入，求 2 个系数 FIR 滤波器使输出信号是$s(n)$的尽可能的恢复。

解： 输入$x(n)=s(n)+v(n)$

期望响应$d(n)=s(n)$

$$r_x(k)=r_s(k)+r_v(k)=\frac{10}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}+\frac{2}{3}\delta(n)$$

$$r_{xd}(k)=E\{x(n)d(n-k)\}=r_s(k)=\frac{10}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

续

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\frac{10}{27}+\frac{2}{3} & \frac{10}{27}\times\frac{1}{2}\\ \frac{10}{27}\times\frac{1}{2} & \frac{10}{27}+\frac{2}{3}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{r}_{xd}=\begin{bmatrix}\frac{10}{27}\\ \frac{10}{27}\times\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_o=\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{r}_{xd}=[0.3359,\quad 0.1186]^T$$

$$J_{\min}=\sigma_d^2-\boldsymbol{r}_{xd}^H\boldsymbol{w}_o=\frac{10}{27}-\begin{bmatrix}\frac{10}{27}\\ \frac{10}{27}\times\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0.3359\\ 0.1186\end{bmatrix}=0.2240$$

误差性能表面

$$J = E[e[n]e*[n]]$$

$$J = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* r_{xd}(-k) - \sum_{k=0}^{M-1} w_k r_{xd}^*(-k) + \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{M-1} w_k^* w_i r_x(i-k)$$

矩阵形式

$$J(\boldsymbol{w}) = \sigma_d^2 - \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{xd}}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^H R \boldsymbol{w}$$

·IIR Wiener 滤波器

非因果条件下，**Wiener-Hopf**方程

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} w_{oi} r_x[i-k] = r_{xd}[-k] \quad k = -\infty, \cdots, -1, 0, 1, \cdots \infty$$

两边取**z**变换，得

$$W(z) S_x(z) = S_{dx}(z)$$

或

$$W(z) = \frac{S_{dx}(z)}{S_x(z)}$$

因果IIR维纳滤波器

因果IIR维纳滤波器的传输函数为

$$W(z)=\frac{1}{S_x^+(z)}\left[\frac{S_{dx}(z)}{S_x^-(z)}\right]_+$$

最小均方误差为

$$J_{\min}=\sigma_d^2-\sum_{l=0}^{\infty}w_{ol}r_{dx}(l)$$

例．有一信号 $s[n]$，它的自相关序列为 $r_s[k]=\frac{10}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$，

被一白噪声所污染，噪声方差为 2/3，被污染信号 $x[n]$

作为 Wiener 滤波器的输入，求 IIR 滤波器恢复信号 $s[n]$

解：本题中，$x[n]=s[n]+v[n]$，　$d[n]=s[n]$

$$r_x(k)=r_s(k)+r_v(k)=\frac{10}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}+\frac{2}{3}\delta(n)$$

$$r_{xd}(k)=E\{x(n)d(n-k)\}=r_s(k)=\frac{10}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

$$S_x(z)=\frac{20-6z-6z^{-1}}{18(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}=\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}$$

得到

$$S_x^{+}(z)=\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\ ,\qquad S_x^{-}(z)=\frac{(1-\frac{1}{3}z)}{(1-\frac{1}{2}z)}$$

$$\Gamma(z)=\frac{S_{dx}(z)}{S_x^-(z)}=\frac{5}{18(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}=\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}+\frac{1/3}{(1-\frac{1}{3}z)}$$

由反变换得

$$\gamma(n)=\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)+\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^{-n}u(-n)$$

$\gamma(n)$ 的因果部分 $\quad \gamma_+(n)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$\left[\Gamma(z)\right]_+=\left[\frac{S_{dx}(z)}{S_x^-(z)}\right]_+=\frac{1/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1}{S_x^+(z)}\left[\frac{S_{dx}(z)}{S_x^-(z)}\right]_+ = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\frac{1/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1/3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$w_{ok}=h_k=\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^k, k\geq 0$$

$$J_{\min}=\sigma_d^2-\sum_{l=0}^{\infty}w_{ol}r_{dx}[l]=\frac{10}{27}-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{|l|}\left(\frac{10}{27}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{|l|}=\frac{2}{9}\approx 0.2222$$

同一个问题分别用非因果IIR、因果IIR和2阶FIR Wiener滤波器进行处理，得到输出最小均方误差分别为：0.2083、0.2222和0.2240。

虽然非因果IIR的误差最小，但是不可实现的，可实现的因果IIR和2阶FIR的误差很接近。这个例子说明，对于一个给定问题，选择适当阶数的FIR滤波器可能得到与因果IIR滤波器非常接近的性能。由于FIR滤波器不存在数值稳定性问题，容易实现和集成，所以实际中更易使用

最优线性预测

	前向线性预测	后向线性预测
空间	$\{x(n-1), x(n-2), \cdots, x(n-M)\}$	$\{x(n), x(n-1), \cdots, x(n-M+1)\}$
预测	$x(n)$	$x(n-M)$
系数	$w_{f,1}, w_{f,2}, \cdots w_{f,M}$	$w_{b,1}, w_{b,2}, \cdots w_{b,M}$
预测值	$\hat{x}(n \mid X_{n-1}) = \sum_{k=1}^{M} w_{f,k}^{*} x(n-k)$	$\hat{x}(n-M \mid X_n) = \sum_{k=1}^{M} w_{b,k}^{*} x(n-k+1)$
期望响应	$d(n) = x(n)$	$d(n) = x(n-M)$
预测误差	$f_M(n) = x(n) - \hat{x}(n \mid X_{n-1})$	$b_M(n) = x(n-M) - \hat{x}(n-M \mid X_n)$
预测误差功率	$p_M = E[\mid f_M(n) \mid^2]$	$p_M = E[\mid b_M(n) \mid^2]$

自相关矩阵

$$R = E[\boldsymbol{x}(n-1)\boldsymbol{x}^H(n-1)]$$

$$R = E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^H(n)]$$

互相关矢量

$$\boldsymbol{r}_{xd} = E[\boldsymbol{x}(n-1)x^*(n)] = \begin{pmatrix} r(-1) \\ r(-2) \\ \vdots \\ r(-M) \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r}_{xd} = E[\boldsymbol{x}(n)x^*(n-M)]$$

$$= [r(M), r(M-1), \cdots r(1)]^T$$

$$\overset{\Delta}{=} r^{B*}$$

Wiener-Hopf方程

$$R\boldsymbol{w}_f = \boldsymbol{r}$$

$$R\boldsymbol{w}_b = r^{B*}$$

最小预测误差

$$p_M = r(0) - \boldsymbol{r}^H \boldsymbol{w}_f$$

$$p_M = r(0) - \boldsymbol{r}^{BT} \boldsymbol{w}_b$$

前向与后向的预测系数的关系

$$\boldsymbol{w}_b^{B*} = \boldsymbol{w}_f$$

$$w^*_{b,M-k+1} = w_{f,k}$$

$$w_{b,k} = w^*_{f,M-k+1}$$

线性预测误差滤波器

$$f_M(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M} w_{f\cdot k}^{*} x(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{M} a_{M,k}^{*} x(n-k)$$

$$= x(n) + \sum_{k=1}^{M} a_{M,k}^{*} x(n-k)$$

$$a_{M,k} \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} 1 & k=0 \\ -w_{f,k} & k=1,2,\cdots M \end{cases}$$

$$b_M(n) = x(n-M) - \sum_{K=1}^{M} w_{bk}^{*} x(n-k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{M} C_{M,k}^{*} x(n-k)$$

$$b_M(n) = \sum_{k=0}^{M} a_{M,M-k} x(n-k)$$

$$= x(n-M) + \sum_{k=1}^{M} a_{M,M-k} x(n-k)$$

$$C_{M,k}^{*} = \begin{cases} -w_{b,k+1}^{*} & k = 0,1,\cdots,M-1, \\ 1 & k = M \end{cases}$$

$$C_{M,k} = a_{M,M-k}^{*} \qquad k = 0,\cdots M$$

预测误差滤波器的增广wiener-Hopf方程

$$\begin{pmatrix} r(0) & \boldsymbol{r}^H \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{w}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_M \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$R_{M+1}\boldsymbol{a}_M = \begin{pmatrix} p_M \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R & \boldsymbol{r}^{B*} \\ \boldsymbol{r}^{BT} & r(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{w}_b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ p_M \end{pmatrix}$$

$$R_{M+1}\boldsymbol{a}_M^{B*} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ p_M \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_M = \left(1, a_{M,1}, a_{M,2}, \cdots, a_{M,M}\right)^T$$

前向线性预测误差滤波器与AR模型的关系

AR(M)模型下

$$x(n)+\sum_{k=1}^{M}a_k^*x(n-k)=v(n)$$

比较 $a_k^* \leftrightarrow a_{M,k}^* \quad v(n) \leftrightarrow f_M(n)$

系数 a 与自相关之间所服从的方程是一致的。

预测是分析器，AR 模型是合成器，它们遵从相同的数学关系。

Levinson-Durbin算法：

假设 m-1 阶的解 a_{m-1}, p_{m-1} 已知，递推求解 a_m, p_m .

（1） $\Delta_{m-1} \stackrel{\Delta}{=} \boldsymbol{r}_m^{BT} \boldsymbol{a}_{m-1} = \sum_{\ell=0}^{m-1} r(\ell-m) a_{m-1,\ell}$

（2） $k_m = -\dfrac{\Delta_{m-1}}{p_{m-1}}$

（3） $a_{m,\ell} = a_{m-1,\ell} + k_m a_{m-1,m-\ell}^{*} \quad \ell = 0,1,\cdots m$

$$p_m = p_{m-1}(1-|k_m|^2)$$

初始化条件：

$$
\begin{cases}
f_0(n) = b_0(n) = x(n) \\
p_0 = r(0) \\
\Delta_0 = E[b_0(n-1) f_0^*(n)] = E[x(n-1)x^*(n)] = r^*(1) \\
a_{0,0} = 1
\end{cases}
$$

Δ_{m-1} 和 k_m 的解释

$$\Delta_{m-1} = E[b_{m-1}(n-1)f^*_{m-1}(n)]$$ 为偏相关系数

$$k_m = -\frac{E\left[(b_{m-1}(n-1)f^*_{m-1}(n)\right]}{E\left[|f_{m-1}(n)|^2\right]}$$

$$= -\frac{E\left[b_{m-1}(n-1)f^*_{m-1}(n)\right]}{E\left[|f_{m-1}(n)|^2\right]^{\frac{1}{2}}E\left[|b_{m-1}(n-1)|^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

为反射系数。且 $|k_m| \le 1$

运算量：Gaussian 消元法 $O(M^3)$，Levinson-Durbin 算法 $O(M^2)$

Levinson-Durbin算法要点：

由

$$\{r(0), r(1), \cdots, r(M)\} \Rightarrow \{k_m, m=1,2,\cdots M\}$$

$$\Rightarrow \{a_{m,k}, m=1,\cdots M, k=1,\cdots m-1, m\}$$

最终确定的是

$$\{a_{M,k,} \quad k=0,1,2,\cdots M\}$$

这是要求解的最优预测误差滤波器系数和（或）AR模型参数

例 设随机信号是满足 1 阶 AR 模型的，即满足

$x(n)=-a_1x(n-1)+v(n)$，用 Levinson-Durbin 算法解 $x(n)$ 的各阶最优线性预测滤波器系数。

解： $x(n)$ 的自相关序列为

$$r_x(k)=\frac{\sigma_v^2}{1-a_1^2}(-a_1)^{|k|}$$

初始的零阶预测误差滤波器器的参数为

$$a_{0,0}=1,\qquad p_0=r_x(0)=\frac{\sigma_v^2}{1-a_1^2},\quad \Delta_0=r_x(1)=\frac{-a_1\sigma_v^2}{1-a_1^2}$$

1 阶参数为：

$$k_1 = -\frac{\Delta_0}{p_0} = -\frac{r_x(1)}{r_x(0)} = a_1 \qquad a_{1,0} = 1, \quad a_{1,1} = k_1 = a_1$$

$$p_1 = p_0(1 - |k_1|^2) = \sigma_v^2$$

2 阶参数为：

$$\Delta_1 = r_x(2) + a_{1,1} r_x(1) = 0 \qquad k_2 = 0$$

$$p_2 = p_1 = \sigma_v^2$$

$$a_{2,0} = 1, \quad a_{2,1} = a_{1,1} = a_1, \quad a_{2,2} = 0$$

类似地，容易验证 M 阶预测误差滤波器系数为

$$a_{M,0} = 1, \quad a_{M,1} = a_1, \quad a_{M,k} = 0, k > 1$$

·反Levinson-Durbin算法

由 $$\begin{cases} a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a^*_{m-1,m-k} \\ a^*_{m,m-k} = a^*_{m-1,m-k} + k_m a_{m-1,k} \end{cases}$$

和 $k_m = a_{m,m}$

解得

$$a_{m-1,k} = \frac{a_{m,k} - a_{m,m} a^*_{m,m-k}}{1 - |a_{m,m}|^2} \qquad k = 0,1,\cdots m-1$$

且 $k_{m-1} = a_{m-1,m-1}$

由 $\{a_{M,k}, k = 0, 1, \cdots M\} \Rightarrow \{k_1, k_2, \cdots k_M\}$

预测误差滤波器的性质

$\{r(0), r(1), \cdots r(M)\}$ 和 $\{p_0, k_1, k_2, \cdots k_m\}$ 互相唯一确定

前向预测误差滤波器传输函数

$$H_{f,m}(z) = H_{f,m-1}(z) + k_m^* z^{-1} H_{b,m-1}(z)$$

前向预测误差滤波器是最小相位。后向预测误差滤波器是最大相位。

各阶反向预测误差滤波器是正交的。即：

$$E[b_m(n) b_i^*(n)] = \begin{cases} p_m & i = m \\ 0 & i \neq m \end{cases}$$

格型预测器

前向预测误差滤波器: $f_m(n) = \boldsymbol{a}_m^H \boldsymbol{x}_{m+1}(n)$

后向预测误差滤波器 $b_m(n) = a_m^{BT} \boldsymbol{x}_{m+1}(n)$

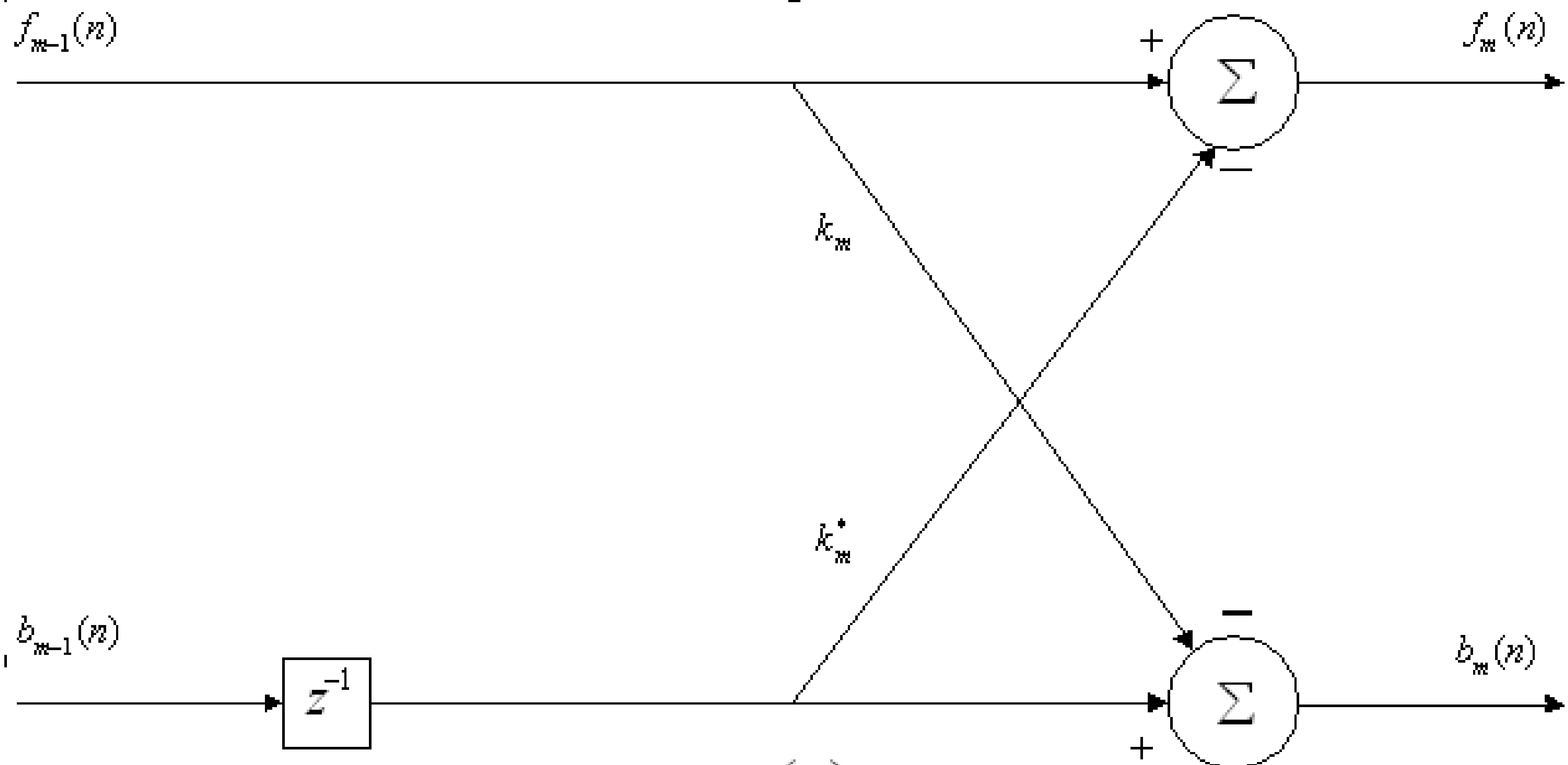
利用 Levinson-Durbin 递推公式，整理得到

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m^* b_{m-1}(n-1)$$

$$b_m(n) = b_{m-1}(n-1) + k_m f_{m-1}(n)$$

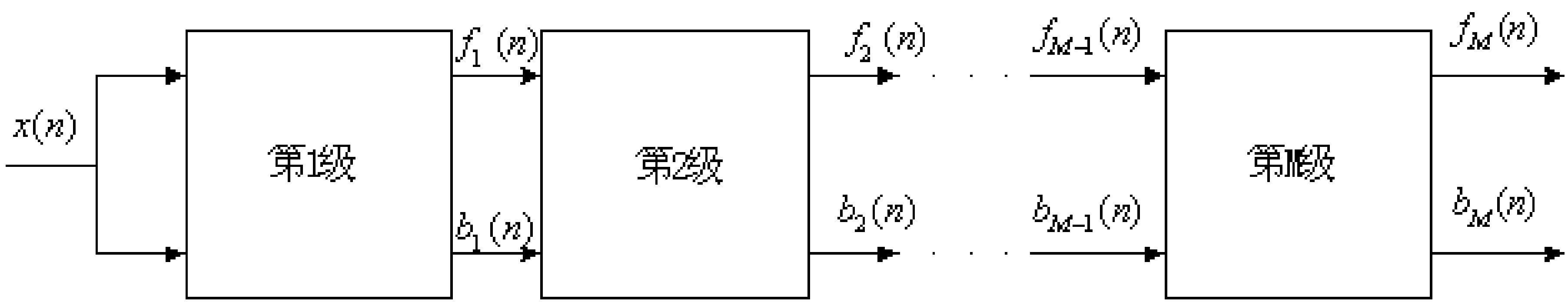
$$b_{m-1}(n-1) = Z^{-1}[b_{m-1}(n)]$$

$$f_0(n) = b_0(n) = x(n)$$



$f_{m-1}(n)$
$f_m(n)$
$+$
$-$
Σ
k_m
k_m^*
$b_{m-1}(n)$
z^{-1}
$-$
$+$
Σ
$b_m(n)$

(a)



$x(n)$
第1级
$f_1(n)$
$b_1(n)$
第2级
$f_2(n)$
$b_2(n)$
$f_{M-1}(n)$
$b_{M-1}(n)$
第M级
$f_M(n)$
$b_M(n)$

证明 $f_m(n)=\sum_{k=0}^{M} a_{m,k}^{*} x(n-k)$

在如上式带入**Levinson-Durbin**递推公式得到

$$f_m(n)=\sum_{k=0}^{M} a_{m,k}^{*} x(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{m} (a_{m-1,k}+k_m a_{m-1,m-k}^{*})^{*} x(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{m} (a_{m-1,k})^{*} x(n-k)+k_m^{*}\sum_{k=0}^{m} a_{m-1,m-k} x(n-k)$$

利用 $a_{m-1,m}=0$，带入上式得到

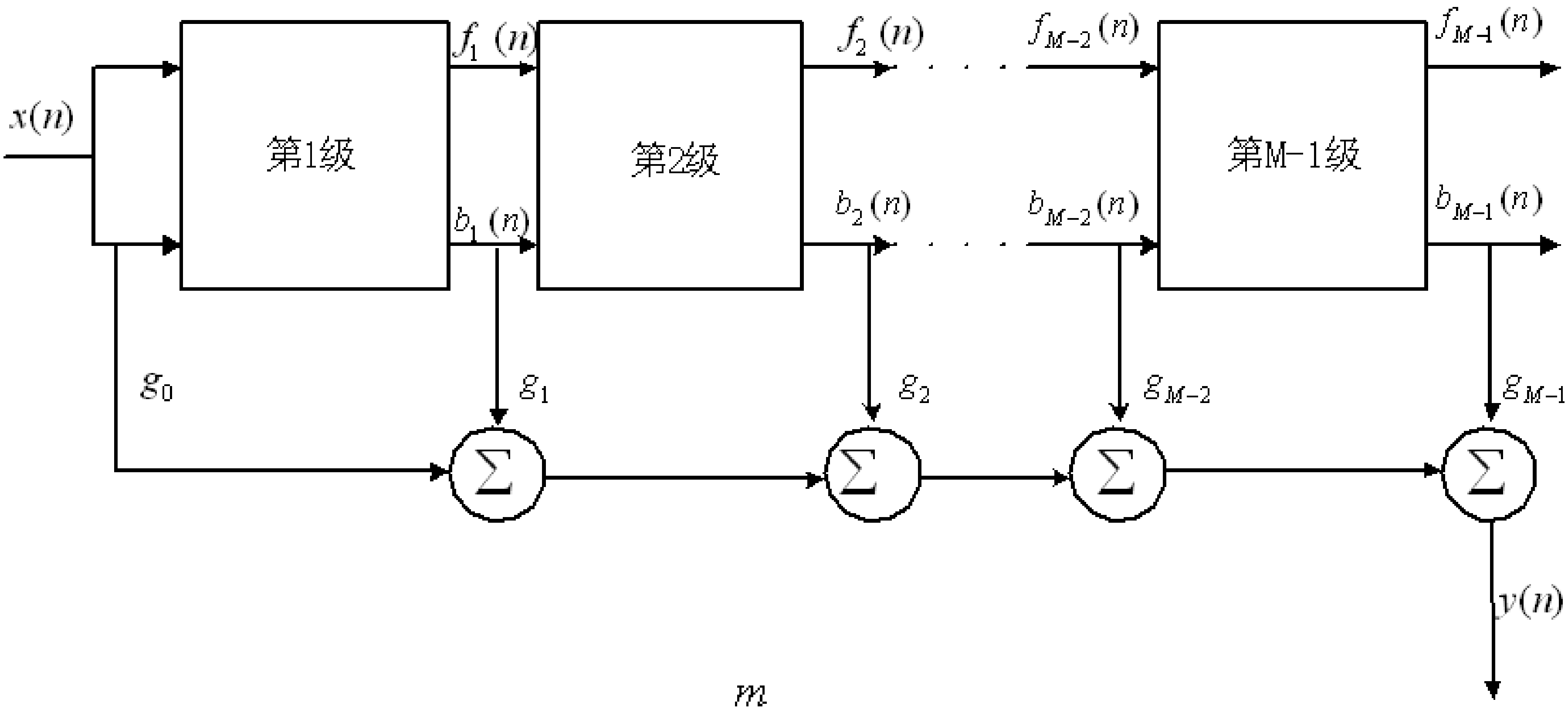
$$f_m(n)=\sum_{k=0}^{m-1}a^*_{m-1,k}x(n-k)+k^*_m\sum_{k=1}^{m}a_{m-1,m-k}x(n-k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}a^*_{m-1,k}x(n-k)+k^*_m\sum_{k=0}^{m-1}a_{m-1,m-1-k}x(n-1-k)=$$

$$=f_{m-1}(n)+k^*_m b_{m-1}(n-1)$$

- 模块化结构
- 增加阶数后不改变前面的参数
- 同时计算前向和后向预测误差

Wiener滤波器的格型结构如图



$$g_m = p_m^{-1} \sum_{k=0}^{m} a_{m,m-k} r_{xd}(-k)$$