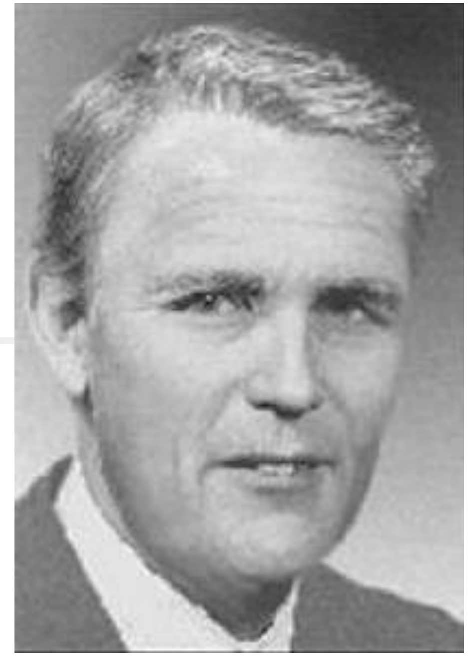
第4章 Kalman 滤波



Rudolf Emil Kalman

- Born 1930 in Hungary
- BS and MS from MIT
- PhD 1957 from Columbia
- Filter developed in 1960-61

2016年7月3号去世

Kalman滤波

- Kalman滤波，1960-，离散形式
- **Kalman-Bucy滤波，1961，连续形式**
- P. **Swerling,1959的工作，Kalman的特殊形式（发明权）**
- **信息-Kalman滤波器**
- QR-Kalman滤波（Potter，阿波罗计划），1964-
  - **矩阵的Cholesky分解，Andre Cholesky,1987-1918, 法国军官**
- **EKF，1967-**
- UKF，1995-
- 贝叶斯滤波，1990-

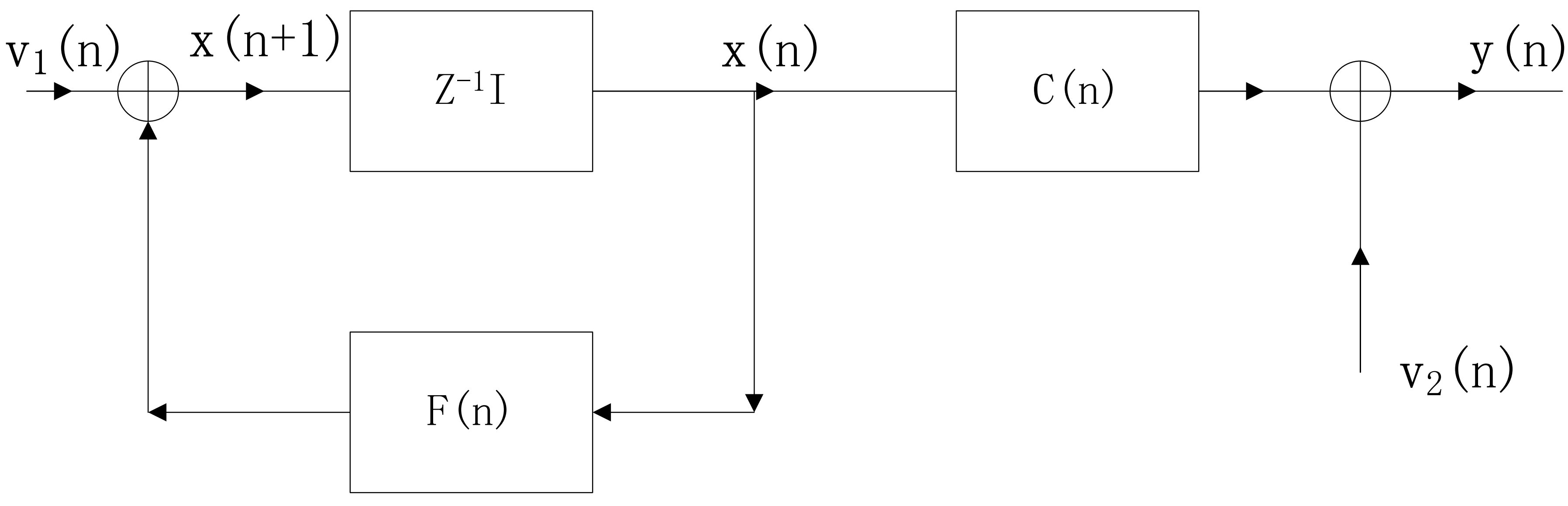
Kalman滤波

- 解决线性动力系统的最优状态估计问题
- 算法是递推的
- 可以适应于非平稳的情况
- 可通过局部线性化推广到非线性系统（EKF）
- 通过UT变换推广到非线性系统（UKF）
- 是当前目标跟踪与预测最有效的方法
- Kalman滤波可以看作贝叶斯滤波的特

矢量Kalman滤波

目标：离散时间线性动力系统状态估计

模型：Kalman滤波的模型如图所示



相关参数

状态变量 $\boldsymbol{x}(n)$ 是 M 维向量

观测值 $\boldsymbol{y}(n)$ 是 N 维向量

状态转换矩阵 $\mathbf{F}(n)$ 是 M×M 矩阵

观测系数 $\mathbf{C}(n)$ 是 N×M 矩阵

模型组成：

状态方程

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\mathbf{F}(n)\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{v}_1(n)$$

观测方程

$$\boldsymbol{y}(n)=\mathbf{C}(n)\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{v}_2(n)$$

系统模型的噪声假设

$\boldsymbol{v}_1(n)$ 是 0 均值的白噪声向量

$$E[\boldsymbol{v}_1(n)\boldsymbol{v}_1^H(k)] = \begin{cases} \mathbf{Q}_1(n) & n = k \\ \mathbf{0}_{M\times M} & n \neq k \end{cases}$$

$\boldsymbol{v}_2(n)$ 也是 0 均值白噪声向量

$$E[\boldsymbol{v}_2(n)\boldsymbol{v}_2^H(k)] = \begin{cases} \mathbf{Q}_2(n) & n = k \\ \mathbf{0}_{N\times N} & n \neq k \end{cases}$$

$\boldsymbol{v}_1(n)$ 和 $\boldsymbol{v}_2(n)$ 不相关

初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 与 $\boldsymbol{v}_1(n), \boldsymbol{v}_2(n)$ 是统计独立的

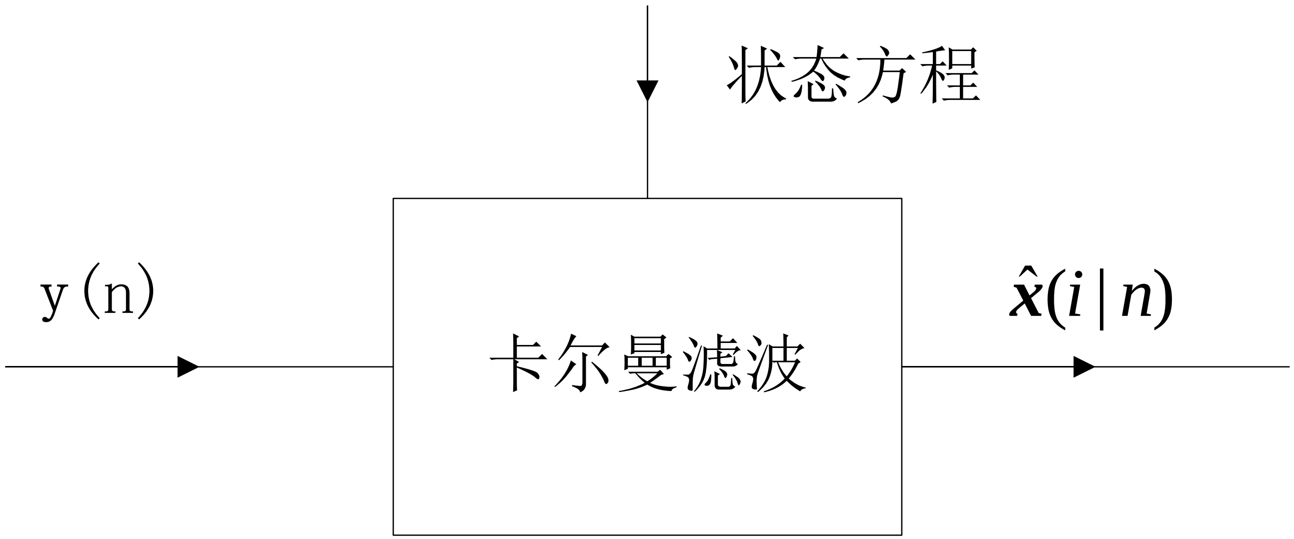
卡尔曼滤波功能描述

Kalman 滤波器的目标是离散时间线性动力系统状态估计

由观测值 $\{y(1), y(2), \cdots, y(n)\}$ 估计状态 $x(i)$

$\hat{x}(i \mid n)$

$$i = \begin{cases} n: & 滤波 \\ n+k: & k>0\ 预测 \\ n-k: & k>0\ 平滑 \end{cases}$$


状态方程
y(n)
卡尔曼滤波
$\hat{x}(i|n)$

例：一个AR(p)过程

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + v(n)$$

令

$$\mathbf{x}(n-1) = \begin{pmatrix} x(n-p) \\ x(n-p+1) \\ \vdots \\ x(n-1) \end{pmatrix}$$

状态方程

$$\begin{pmatrix} x(n-p+1) \\ x(n-p+2) \\ \vdots \\ x(n-1) \\ x(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 0, & 0, & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_p, & -a_{p-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n-p) \\ x(n-p+1) \\ \vdots \\ \\ x(n-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(n)$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) = A\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{v}_1(n)$$

观测方程

$$y(n) = x(n) + w(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + v_2(n)$$

其他参数

$$\mathbf{C} = [0,0,\cdots,0,1]$$

$$v_2(n) = w(n), \qquad \mathbf{Q}_2(n) = \sigma_w^2$$

$$\mathbf{Q}_1(n) = diag\{0,0,\cdots,0,\sigma_v^2\}$$

Kalman滤波器推导

已得到上一时刻的最优估计 $\hat{\mathbf{x}}(n-1 \mid n-1)$

新的观测值 $\mathbf{y}(n)$

求 $\hat{\mathbf{x}}(n \mid n)$ 和 $\mathbf{K}(n)$ 的递推公式

$$\mathbf{K}(n) = E\left\{\left[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid n)\right]\left[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid n)\right]^H\right\}$$

新息过程

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \boldsymbol{y}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}(n \mid n-1)$$

新息的性质

（1） $E\left[\boldsymbol{\alpha}(n)\boldsymbol{y}^H(k)\right] = \mathbf{0}_{N\times N} \qquad 1 \le k \le n-1$

（2） $E\left[\boldsymbol{\alpha}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(k)\right] = \mathbf{0}_{N\times N} \qquad 1 \le k \le n-1$

（3） $\{\boldsymbol{y}(1), \boldsymbol{y}(2), \cdots, \boldsymbol{y}(n)\}$ 和 $\{\boldsymbol{\alpha}(1), \boldsymbol{\alpha}(2), \cdots, \boldsymbol{\alpha}(n)\}$ 等价

几个正交关系

状态向量

$$\boldsymbol{x}(k)=\mathbf{F}(k,0)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{F}(k,i+1)\boldsymbol{v}_1(i)$$

缩写:

$$\mathbf{F}(k,i)=\mathbf{F}(k-1)\mathbf{F}(k-2)\cdots\mathbf{F}(i)$$

几个正交关系

（1） $E[\mathbf{x}(k)\mathbf{v}_2^H(n)] = \mathbf{0}_{M\times N} \qquad k, n \geq 0$

（2） $E[\mathbf{y}(k)\mathbf{v}_2^H(n)] = \mathbf{0}_{N\times N} \qquad 0 \leq k \leq n-1$

$$E[\boldsymbol{\alpha}(k)\mathbf{v}_2^H(n)] = \mathbf{0}_{N\times N} \qquad 0 \leq k \leq n-1$$

（3） $E[\mathbf{y}(k)\mathbf{v}_1^H(n)] = \mathbf{0}_{N\times M} \qquad 0 \leq k \leq n$

$$E[\boldsymbol{\alpha}(k)\mathbf{v}_1^H(n)] = \mathbf{0}_{N\times M} \qquad 0 \leq k \leq n$$

新息过程的计算

将观测方程投影到 $\mathbf{Y}(n-1)$ 空间得到

$$\hat{\boldsymbol{y}}(n \mid n-1)=\mathbf{C}(n)\hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1)+\hat{\boldsymbol{v}}_2(n \mid n-1)$$

$$=\mathbf{C}(n)\hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}(n)=\boldsymbol{y}(n)-\mathbf{C}(n)\hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1)}$$

状态方程投影到空间 $\mathbf{Y}(n-1)$

$$\hat{\mathbf{x}}(n|n-1)=\mathbf{F}(n-1)\hat{\mathbf{x}}(n-1|n-1)+\hat{\boldsymbol{v}}_1(n-1|n-1)$$

$$=\mathbf{F}(n-1)\hat{\mathbf{x}}(n-1|n-1)$$

新息的其他形式

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \mathbf{C}(n)\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{v}_2(n) - \mathbf{C}(n)\hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1)$$

$$= \mathbf{C}(n)[\boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{x}(n \mid n-1)] + \boldsymbol{v}_2(n)$$

$$= \mathbf{C}(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1) + \boldsymbol{v}_2(n)$$

定义

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1) = \boldsymbol{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1)$$

:状态向量的前验预测误差向量

前验预测误差的正交关系

新息 $\boldsymbol{\alpha}(1),\cdots,\boldsymbol{\alpha}(n-1)$ 是 $\hat{\boldsymbol{x}}(n \mid n-1)$ 的输入

正交原理

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1)\boldsymbol{\alpha}^H(k)]$$

$$= E[(\boldsymbol{x}(n)-\hat{\boldsymbol{x}}(n \mid n-1))\boldsymbol{\alpha}^H(k)] = \mathbf{0}_{M\times N} \qquad 1 \le k \le n-1$$

其他正交

$\boldsymbol{\varepsilon}(n,n-1)$ 是正交于 $\boldsymbol{v}_1(n)$ 和 $\boldsymbol{v}_2(n)$

新息向量的相关矩阵

$$\mathbf{R}(n) = E[\boldsymbol{\alpha}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(n)]$$

$$\boxed{\mathbf{R}(n) = \mathbf{C}(n)\mathbf{K}(n|n-1)\mathbf{C}^H(n) + \mathbf{Q}_2(n)}$$

其中

$$\mathbf{K}(n|n-1) = E[\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1)\boldsymbol{\varepsilon}^H(n|n-1)]$$

$\mathbf{K}(n-1)$递推计算

$$\mathbf{K}(n|n-1)=\mathbf{F}(n-1)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{F}^{\mathbf{H}}(n-1)+\mathbf{Q}_1(n-1)$$

$$\mathbf{K}(n|n-1)=E[\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1)\boldsymbol{\varepsilon}^H(n|n-1)$$

$$=E\left\{\left[\boldsymbol{x}(n)-\hat{\boldsymbol{x}}(n\,|\,n-1)\right]\left[\boldsymbol{x}(n)-\hat{\boldsymbol{x}}(n\,|\,n-1)\right]^H\right\}$$

$$=\left\{\left[\mathbf{F}(n-1)\boldsymbol{x}(n-1)+\boldsymbol{v}_1(n-1)-\mathbf{F}(n-1)\hat{\boldsymbol{x}}(n-1\,|\,n-1)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\mathbf{F}(n-1)\boldsymbol{x}(n-1)+\boldsymbol{v}_1(n-1)-\mathbf{F}(n-1)\hat{\boldsymbol{x}}(n-1\,|\,n-1)\right]^H\right\}$$

$$=\mathbf{F}(n-1)E\left\{\begin{matrix}\left[\boldsymbol{x}(n-1)-\hat{\boldsymbol{x}}(n-1\,|\,n-1)\right]\\ \times\left[\boldsymbol{x}(n-1)-\hat{\boldsymbol{x}}(n-1\,|\,n-1)\right]^H\end{matrix}\right\}\mathbf{F}^{\mathbf{H}}(n-1)+$$

$$+E\left[\boldsymbol{v}_1(n-1)\boldsymbol{v}_1^H(n-1)\right]$$

$$=\mathbf{F}(n-1)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{F}^{\mathbf{H}}(n-1)+\mathbf{Q}_1(n-1)$$

用新息向量估计状态

$$\mathbf{x}(n|n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{B}(k)\boldsymbol{\alpha}(k)$$

由正交原理

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(k)]=E[(\mathbf{x}(n)-\hat{\mathbf{x}}(n|n))\boldsymbol{\alpha}^H(k)]=\mathbf{0}_{M\times N}$$

$$k=1,2,\cdots n$$

得

$$E[\mathbf{x}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(k)]=\mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)$$

$$\mathbf{B}(k)=E[\mathbf{x}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(k)]\mathbf{R}^{-1}(k)$$

状态方程得

$$E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(k)]$$

$$= E\left[[\mathbf{F}(n-1)\boldsymbol{x}(n-1)+\boldsymbol{v}_1(n-1)]\boldsymbol{\alpha}^H(k)\right]$$

$$= \mathbf{F}(n-1)E[\boldsymbol{x}(n-1)\boldsymbol{\alpha}^H(k)]$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n|n) = \sum_{k=1}^{n-1} E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(k)]\mathbf{R}^{-1}(k)\boldsymbol{\alpha}(k) + E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(n)]\mathbf{R}^{-1}(n)\boldsymbol{\alpha}(n)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n|n) = \mathbf{F}(n-1)\hat{\mathbf{x}}(n-1|n-1) + \mathbf{G}_f(n)\boldsymbol{\alpha}(n)$$

$$= \hat{\mathbf{x}}(n|n-1) + \mathbf{G}_f(n)\boldsymbol{\alpha}(n)$$

Kalman增益

$$\mathbf{G}_f(n) = E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(n)]\mathbf{R}^{-1}(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_f(n) &= E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{\alpha}^H(n)]\mathbf{R}^{-1}(n) \\
&= E\left\{\left[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1)\right]\boldsymbol{\alpha}^H(n)\right\}\mathbf{R}^{-1}(n) \\
&= E\left\{\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1)\left[\boldsymbol{\varepsilon}^H(n|n-1)\mathbf{C}^H(n) + \boldsymbol{v}_2^H(n)\right]\right\}\mathbf{R}^{-1}(n) \\
&= \mathbf{K}(n|n-1)\mathbf{C}^H(n)\mathbf{R}^{-1}(n)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{G}_f(n) = \mathbf{K}(n|n-1)\mathbf{C}^H(n)\mathbf{R}^{-1}(n)$$

误差自相关矩阵递推公式

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \boldsymbol{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid n)$$

$$= \boldsymbol{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1) - \mathbf{G}_f(n)\boldsymbol{\alpha}(n)$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1) - \mathbf{G}_f(n)\boldsymbol{\alpha}(n)$$

$$\mathbf{K}(n) = E[\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^H(n)]$$

$$= E\left\{\left[\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1) - \mathbf{G}_f(n)\boldsymbol{\alpha}(n)\right]\left[\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1) - \mathbf{G}_f(n)\boldsymbol{\alpha}(n)\right]^H\right\}$$

$$= E\left[\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1)\boldsymbol{\varepsilon}^H(n|n-1)\right] - \mathbf{G}_f(n)E\left[\boldsymbol{\alpha}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^H(n|n-1)\right]$$

$$- E\left[\boldsymbol{\varepsilon}(n|n-1)\boldsymbol{\alpha}^H(n)\right]\mathbf{G}_f^H(n) + \mathbf{G}_f(n)\mathbf{R}(n)\mathbf{G}_f^H(n)$$

整理得

$$\mathbf{K}(n) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{G}_f(n)\mathbf{C}(n))\right]\mathbf{K}(n|n-1)$$

初始条件

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0 \mid 0) = E[\boldsymbol{x}(0)]$$

$$\mathbf{K}(0) = E\left[(\boldsymbol{x}(0) - E[\boldsymbol{x}(0)])(\boldsymbol{x}(0) - E[\boldsymbol{x}(0)])^H\right]$$

$$= \mathbf{C}_{xx}(0)$$

Kalman滤波的计算流程

初始条件

$$\hat{x}(0|0)=E[x(0)]$$

$$\mathbf{K}(0)=\mathbf{C}_{xx}(0)$$

得到 $y(1)$ 从 $n=1$ 开始

$$\hat{\mathbf{x}}(n|n-1)=\mathbf{F}(n-1)\hat{\mathbf{x}}(n-1|n-1)$$

$$\alpha(n)=y(n)-\mathbf{C}(n)\hat{\mathbf{x}}(n|n-1)$$

$$\mathbf{K}(n|n-1)=\mathbf{F}(n-1)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{F}^{\mathrm{H}}(n-1)+\mathbf{Q}_1(n-1)$$

$$\mathbf{R}(n)=\mathbf{C}(n)\mathbf{K}(n|n-1)\mathbf{C}^{H}(n)+\mathbf{Q}_2(n)$$

$$\mathbf{G}_f(n)=\mathbf{K}(n|n-1)\mathbf{C}^{H}(n)\mathbf{R}^{-1}(n)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n|n)=\hat{\mathbf{x}}(n|n-1)+\mathbf{G}_f(n)\alpha(n)$$

$$\mathbf{K}(n)=\left[\mathbf{I}-\mathbf{G}_f(n)\mathbf{C}(n)\right]\mathbf{K}(n|n-1)$$

令 $n\leftarrow n+1$，得到新观测值 $y(n)$ 进入下一次循环

例 用如下差分方程产生一个 $AR(2)$ 随机序列

$$x(n)=1.74x(n-1)-0.81x(n-2)+v(n) \qquad x(-1)=x(0)=0$$

用观测方程 $y(n)=x(n)+v_2(n)$ 观测 $x(n)$，

其中 $v(n),v_2(n)$ 分别是方差为 0.04 和 9 的白噪声，

利用 Kalman 预测对 $x(n)$ 进行预测。

解：令 $\quad \boldsymbol{x}(n)=\begin{pmatrix} x(n-1) \\ x(n) \end{pmatrix}$，

状态方程为 $\quad \begin{pmatrix} x(n-1) \\ x(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.81 & 1.74 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(n-2) \\ x(n-1) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ v(n) \end{pmatrix}$

观测方程已知为 $\quad y(n)=x(n)+v_2(n)$，

Kalman 预测的参数为

$$F(n+1,n)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -0.81 & 1.74\end{pmatrix} \qquad Q_1(n)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.04\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \qquad Q_2(n)=9$$

实验的方法是：由

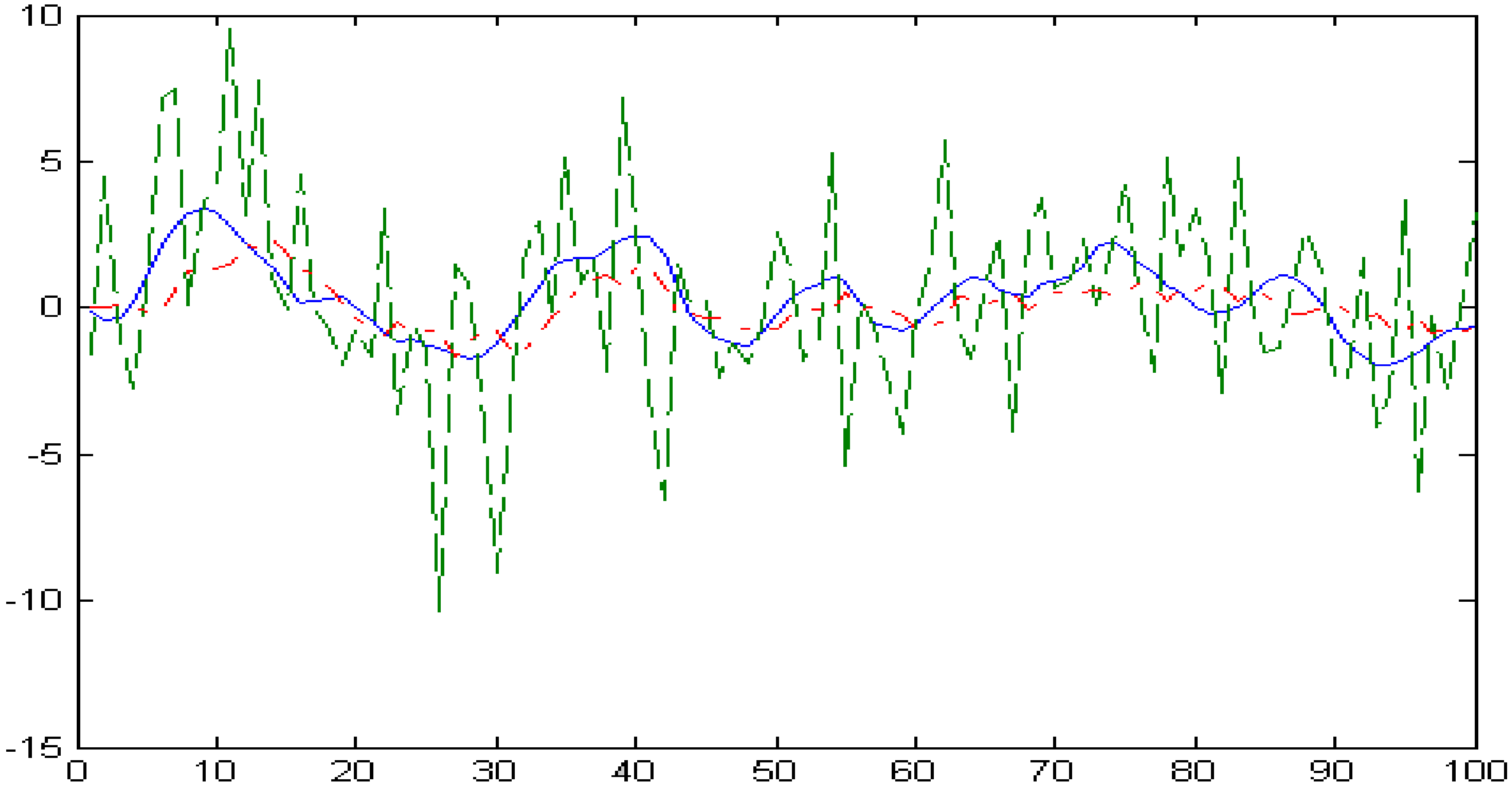
$$x(n)=1.74x(n-1)-0.81x(n-2)+v(n) \qquad x(-1)=x(0)=0$$

产生随机序列的一次实现 $x(n)$，

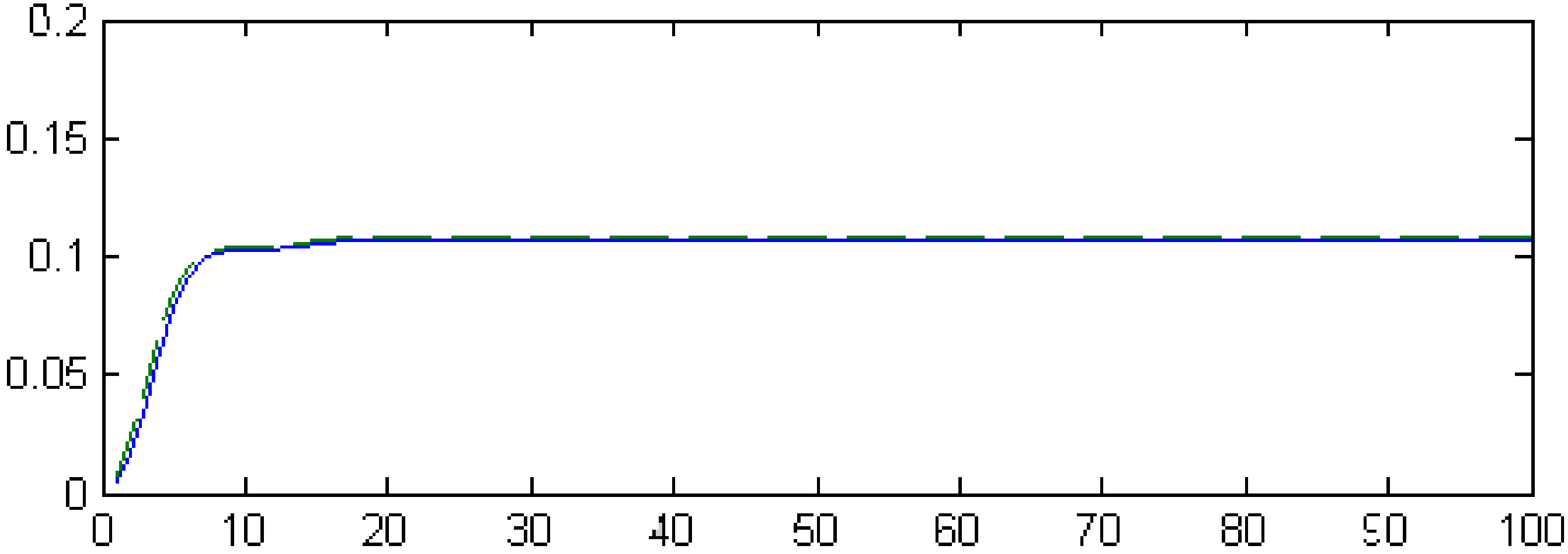
利用 $y(n)=x(n)+v_2(n)$ 作为观测数据得到预测值 $\hat{x}(n+1|Y_n)$，

比较预测值 $\hat{x}(n+1|Y_n)$ 和真实值 $x(n+1)$，

评价 Kalman 预测的跟踪性能。



Kalman预测的跟踪性能



增益的变化曲线

卡尔曼滤波器的一些变化形式

卡尔曼预测器

卡尔曼信息滤波器

稳态卡尔曼滤波器

卡尔曼QR分解滤波器

卡尔曼非线性滤波:
扩展Kalman滤波(EKF)

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \mathbf{f}\big(n, \boldsymbol{x}(n)\big) + \boldsymbol{v}_1(n)$$

$$\boldsymbol{y}(n) = \mathbf{c}\big(n, \boldsymbol{x}(n)\big) + \boldsymbol{v}_2(n)$$

令

$$\mathbf{F}(n) \stackrel{\Delta}{=} \left.\frac{\partial \mathbf{f}(n, \boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{x}(n|n)}$$

$$\mathbf{C}(n) \stackrel{\Delta}{=} \left.\frac{\partial \mathbf{c}(n, \boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{x=\hat{x}(n|n-1)}$$

通过泰勒级数展开成线性模型

卡尔曼非线性滤波:无迹卡尔曼滤波 (UKF：Unscented Kalman Filter)

无迹变换（**UT**）

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{x})$$

UT：计算非线性变换的均值和协方差矩阵

Sigma样本构造

$$\boldsymbol{x}^{(\mathrm{i})} = \bar{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{x}^{(\mathrm{i})} = \bar{\boldsymbol{x}} + \left(\sqrt{(M+\lambda)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}}\right)_i \qquad i = 1, \cdots, M$$

$$\boldsymbol{x}^{(\mathrm{i})} = \bar{\boldsymbol{x}} - \left(\sqrt{(M+\lambda)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}}\right)_{i-M} \qquad i = M+1, \cdots, 2M$$

$$W_0 = \frac{\lambda}{\lambda + M}, \qquad W_i = \frac{1}{2(M+\lambda)} \qquad i = 1, 2, \cdots, 2M$$

得到非线性变换后的样本集

$$\boldsymbol{y}^{(\mathrm{i})}=\mathbf{g}\left(\boldsymbol{x}^{(\mathrm{i})}\right),\quad i=0,1,\cdots,2M$$

非线性输出的均值和协方差矩阵

$$\bar{\boldsymbol{y}}\approx\sum_{i=0}^{2M}W_i\boldsymbol{y}^{(\mathrm{i})}$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{y}}\approx\sum_{i=0}^{2M}W_i\left(\boldsymbol{y}^{(\mathrm{i})}-\bar{\boldsymbol{y}}\right)\left(\boldsymbol{y}^{(\mathrm{i})}-\bar{\boldsymbol{y}}\right)^T$$

比Monte-Carlo方法需要的样本数少几个数量级

加性噪声非线性系统的UKF

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\mathbf{f}\left(n,\boldsymbol{x}(n)\right)+\boldsymbol{v}_1(n)$$

$$\boldsymbol{y}(n)=\mathbf{c}\left(n,\boldsymbol{x}(n)\right)+\boldsymbol{v}_2(n)$$

初始条件

$$\hat{\mathbf{x}}(0\,|\,0)=E[\boldsymbol{x}(0)]$$

$$\mathbf{K}(0)=\mathbf{C}_{xx}(0)$$

UKF 流程

得到 $\mathbf{y}(1)$ 从 $n=1$ 开始

（1）状态向量 UT

$$\hat{\mathbf{x}}_{n-1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}(n-1|n-1) + \left(\sqrt{M\mathbf{K}(n-1)}\right)_i \qquad i=1,\cdots,M$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n-1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}(n-1|n-1) - \left(\sqrt{M\mathbf{K}(n-1)}\right)_{i-M} \qquad i=M+1,\cdots,2M$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n}^{(i)} = \mathbf{f}\left(n,\hat{\mathbf{x}}_{n-1}^{(i)}\right), \qquad i=1,\cdots,2M$$

(2)预测和协方差矩阵计算

$$\hat{\mathbf{x}}(n|n-1) = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{2M}\hat{\mathbf{x}}_{n}^{(i)}$$

$$\mathbf{K}(n|n-1) = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{2M}\left(\hat{\mathbf{x}}_{n}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}(n|n-1)\right)\left(\hat{\mathbf{x}}_{n}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}(n|n-1)\right)^T + \mathbf{Q}_1(n-1)$$

（3）测量向量 UT

$$\hat{\boldsymbol{y}}_n^{(i)} = \mathbf{c}\left(n, \hat{\boldsymbol{x}}_n^{(i)}\right), \qquad i = 1, \cdots, 2M$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{2M} \hat{\boldsymbol{y}}_n^{(i)}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}}(n) = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{2M} \left(\hat{\boldsymbol{y}}_n^{(i)} - \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\right)\left(\hat{\boldsymbol{y}}_n^{(i)} - \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\right)^T + \mathbf{Q}_2(n)$$

（4）状态向量和测量向量互协方差

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xy}}(n) = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{2M} \left(\hat{\boldsymbol{x}}_n^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}(n|n-1)\right)\left(\hat{\boldsymbol{y}}_n^{(i)} - \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\right)^T$$

（5）状态更新

$$\mathbf{G}_f(n)=\mathbf{P}_{\mathbf{xy}}(n)\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1}(n)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n\mid n)=\hat{\boldsymbol{x}}(n\mid n-1)+\mathbf{G}_f(n)\left(\boldsymbol{y}(n)-\hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\right)$$

$$\mathbf{K}(n)=\mathbf{K}(n|n-1)-\mathbf{G}_f(n)\mathbf{P}_{\mathbf{y}}(n)\mathbf{G}_f^T(n)$$

令 $n\leftarrow n+1$，得到新观测值 $\boldsymbol{y}(n)$ 进入下一次循环

UKF优于EKF

EKF是1阶线性近似，UKF是2或3阶线性近似

贝叶斯滤波

针对一般非线性系统

$$\boldsymbol{x}_n = \mathbf{f}_{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{v}_{n-1}\right)$$

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{c}_{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}}\right)$$

在测量得到 $\left\{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{2}}, \cdots, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}\right\}$ $\boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}$

求状态 的最优估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{n|n}$

贝叶斯滤波

$n-1$ 时刻 $p\left(\boldsymbol{x}_{n-1} \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)$

n 时刻得到新观测值 $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}$

递推求 $p\left(\boldsymbol{x}_{n} \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right)$

MMSE估计 $\hat{\mathbf{x}}_{n|n} = E_{\boldsymbol{x}_n | \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}}\left\{p\left(\boldsymbol{x}_{n} \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right)\right\}$

MAP估计 $\hat{\mathbf{x}}_{n|n} = \arg\max_{\boldsymbol{x}_n}\left\{p\left(\boldsymbol{x}_{n} \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right)\right\}$

贝叶斯滤波分两步：预测和更新

1. 预测过程

利用 $\mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}}$ 对 $\mathbf{x}_n$ 进行预测，得到预测 PDF $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}})$

$$
\begin{aligned}
& p\left(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1} \middle| \mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right) \\
& = p\left(\mathbf{x}_n \middle| \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right) p\left(\mathbf{x}_{n-1} \middle| \mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right) \\
& = p\left(\mathbf{x}_n \middle| \mathbf{x}_{n-1}\right) p\left(\mathbf{x}_{n-1} \middle| \mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}}) = \int p(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_{n-1}) p(\mathbf{x}_{n-1}|\mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}}) d\mathbf{x}_{n-1}
$$

注意： $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_{\mathbf{1:n-1}}) = p(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_{n-1})$

2. 更新过程

$$p\left(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)$$
$$= p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right) p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)$$
$$= p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right) p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{x}_n\right)$$

$$p\left(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)$$
$$= p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right) p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)$$
$$= p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right) p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right)$$

贝叶斯滤波的更新过程为

$$p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right)=\frac{p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{x}_n\right)}{p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)}$$

注意：

$$p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)=\int p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n-1}}\right)p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{x}_n\right)d\boldsymbol{x}_n$$

一般情况下贝叶斯滤波在每一步难以得到闭式解，退而求次最优的数值解：粒子滤波等方法

最优滤波的评述

Wiener滤波、Kalman滤波的最优性限制
高斯、非高斯问题
序列蒙特卡罗方法，粒子滤波*等

粒子滤波介绍见单独Slides