统计信号处理

第十二章

简单假设检验 II
（随机信号的检测）

清华大学电子工程系
李洪 副教授

2023.5

内容概要

- 一、估计器—相关器
- 二、线性模型及其应用
- 三、一般高斯信号检测
- 四、小结

一、估计器—相关器

两类假设：

$$H_0: \mathbf{x} = \mathbf{w}$$

$$H_1: \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

其中信号服从 $N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_s)$，噪声服从 $N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ 且与信号独立。如何检测是否存在信号？

采用NP准则，若似然比

$$L(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}; H_1)}{p(\mathbf{x}; H_0)} > \gamma$$

则判 H_1

$$L(\boldsymbol{x})=\frac{p(\boldsymbol{x};H_1)}{p(\boldsymbol{x};H_0)}>\gamma$$

$$\boldsymbol{x}\sim\begin{cases}N\left(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I}\right), & H_0\\ N\left(\mathbf{0},\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right), & H_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow L(\boldsymbol{x})=\frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\}}{\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right\}}>\gamma$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left\{\underline{\left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)}^{-1}-\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}\right\}\boldsymbol{x}>\gamma'$$

矩阵求逆引理：

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{BCD}\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$$

令： $\mathbf{A}=\sigma^2\mathbf{I},\ \mathbf{B}=\mathbf{D}=\mathbf{I},\ \mathbf{C}=\mathbf{C}_s$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}-\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}+\mathbf{C}_s^{-1}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{x}^T\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}+\mathbf{C}_s^{-1}\right)^{-1}\right\}\boldsymbol{x}>\gamma'$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^T\underline{\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}+\mathbf{C}_s^{-1}\right)^{-1}\right\}}\boldsymbol{x}>2\sigma^2\gamma'=\gamma'' \Rightarrow \boldsymbol{x}^T\mathbf{C}_s\left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}>\gamma''$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{I}+\sigma^2\mathbf{C}_s^{-1}\right)\right)^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)\mathbf{C}_s^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{C}_s\left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}$$

$$T(\boldsymbol{x}) = \underline{\boldsymbol{x}^T} \underline{\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{x}}$$

物理含义?

$$= \boldsymbol{x}^T\hat{\boldsymbol{s}}$$

——先估计信号，然后再与观测数据进行相关

——“估计器—相关器”

H_1 时观测数据：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{w}$

MMSE估计量: $\hat{\boldsymbol{s}} = \underbrace{E(\boldsymbol{s})}_{\mathbf{0}} + \mathbf{C}_{sx}\mathbf{C}_{xx}^{-1}\left(\boldsymbol{x} - \underbrace{E(\boldsymbol{x})}_{\mathbf{0}}\right) = \mathbf{C}_{sx}\mathbf{C}_{xx}^{-1}\boldsymbol{x}$

$$\mathbf{C}_{sx} = E\left(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}^T\right) = E\left(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w})^T\right) = E\left(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T + \boldsymbol{s}\boldsymbol{w}^T\right) = \mathbf{C}_s$$

$$\mathbf{C}_{xx} = E\left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right) = E\left((\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w})(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w})^T\right) = E\left(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T + \boldsymbol{s}\boldsymbol{w}^T + \boldsymbol{w}\boldsymbol{s}^T + \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\right) = \mathbf{C}_s + \sigma^2\mathbf{I}$$

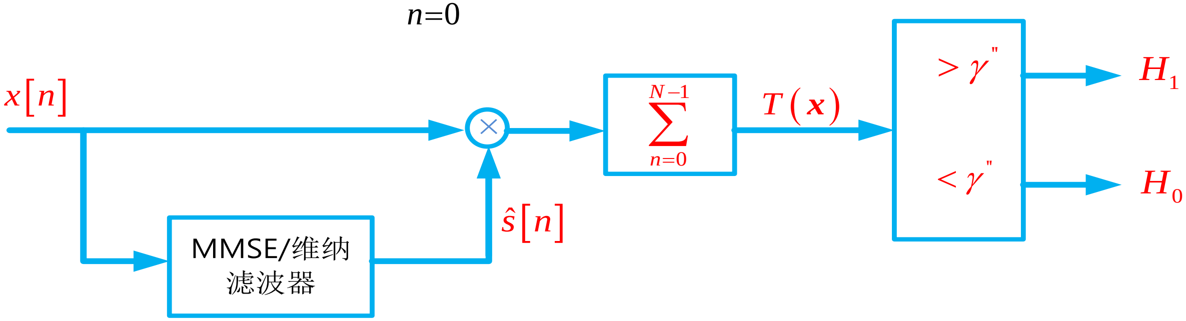
$$\Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{s}} = \mathbf{C}_s\left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}$$

维纳滤波

- 随机信号检测

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\hat{\mathbf{s}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\hat{s}[n]$$

估计+相关

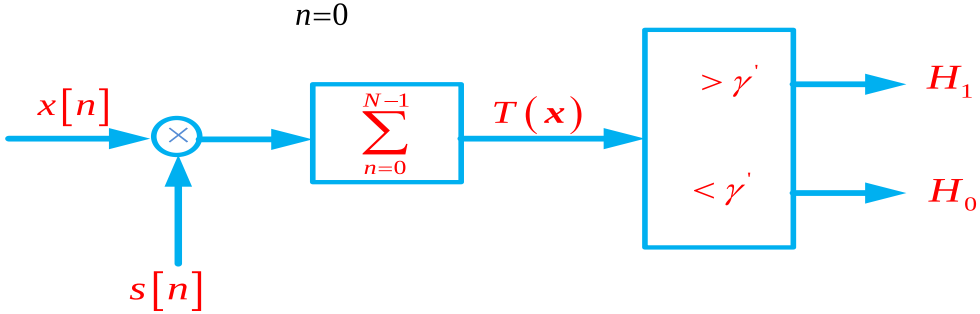


Vs

- 确定信号检测

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{s} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n]$$

仿形+相关



- 体现着相同思想：**利用当前信号与数据进行相关**
  - ✓ 对确定信号检测，当前信号是已知的，可直接使用
  - ✓ 对随机信号检测，当前信号是随机变量，是未知的，因此需要先估计

● 检测性能

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_s (\mathbf{C}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{x}$$

- 若信号为“WGN”时

$\mathbf{C}_s = \sigma_s^2 \mathbf{I}$ ⇨ $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \sigma_s^2 \mathbf{I} (\sigma_s^2 \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{x} = \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$

⇨ $T'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$ ——能量检测器

—— $T'(\mathbf{x})$服从 χ_N^2 分布

- 信号服从 $N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_s)$ 时

—— χ_1^2 分布加权和

$$\begin{cases} P_{FA} = \displaystyle\int_{\gamma''}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\alpha_n \omega}} \exp(-j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} dt \\ P_D = \displaystyle\int_{\gamma''}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\lambda_{s_n} \omega}} \exp(-j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} dt \end{cases}$$

其中，$\alpha_n = \lambda_{s_n} \sigma^2 / (\lambda_{s_n} + \sigma^2)$ ，λ_{s_n} 为 $\mathbf{C}_s$ 的第n个特征值（见附录5A）

二、线性模型及其应用

两类假设：

$$H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{w}$$
$$H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

其中信号服从 $N\left(\mathbf{0}, \mathbf{C}_s\right)$，噪声服从 $N\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}\right)$ 且与信号独立。如何检测是否存在信号？

特例情况

两类假设：

$$H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{w}$$
$$H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$$

$\mathbf{H}$ 是已知的 $N \times p$ 的观测矩阵，$\boldsymbol{\theta}$ 是 $p \times 1$ 的随机矢量且服从 $N\left(\mathbf{0}, \mathbf{C}_\theta\right)$。噪声服从 $N\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}\right)$ 且与信号独立。如何检测是否存在信号？

两类假设：

$$H_0: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}$$

$$H_1: \boldsymbol{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{w}$$

$\mathbf{H}$ 是已知的 $N\times p$ 的观测矩阵，$\boldsymbol{\theta}$ 是 $p\times 1$ 的随机矢量且服从 $N\left(\mathbf{0},\mathbf{C}_\theta\right)$。噪声服从 $N\left(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I}\right)$ 且与信号独立。如何检测是否存在信号？

检测统计量：

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\mathbf{C}_s\left(\mathbf{C}_s+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}$$

其中，$\boldsymbol{s} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{C}_s = E\left(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T\right) = E\left(\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\right) = \mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T$$

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\underline{\mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}}$$

$$= \boldsymbol{x}^T\underline{\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

$$= \boldsymbol{x}^T\hat{\boldsymbol{s}}$$

MMSE估计量：$\hat{\boldsymbol{\theta}} = E(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{C}_{\theta x}\mathbf{C}_{xx}^{-1}\left(\boldsymbol{x}-E(\boldsymbol{x})\right)$

$$= \mathbf{C}_{\theta x}\mathbf{C}_{xx}^{-1}\boldsymbol{x}$$

$$= \mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}$$

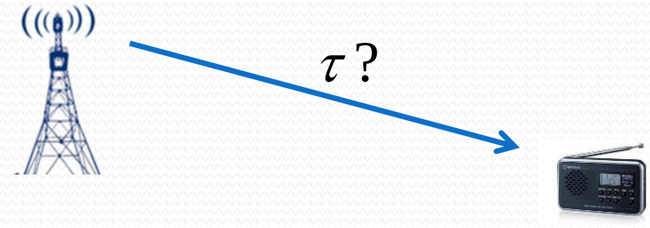
——先对未知参数进行估计，然后构建信号，最后再与观察数据进行匹配——匹配滤波的思想

应用1：通信信号检测

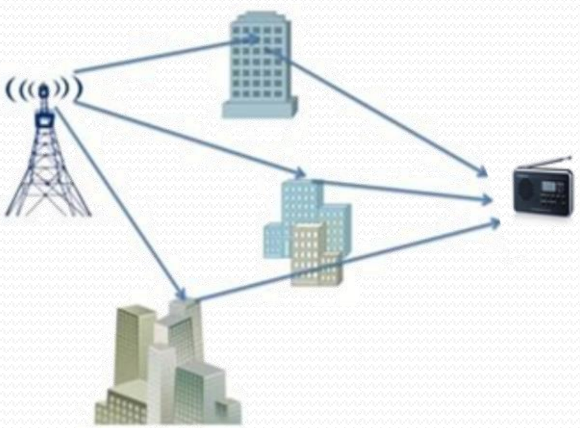
- 信号源/发端：

$$s_s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

- 收端：



$$\begin{cases} H_0: \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} \\ H_1: \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{w} \end{cases}$$



建筑物密集区域

如何判断是否存在信号？ 匹配滤波？

接收信号：

$$s(t) = \sum_{i=0}^{M-1} A_i \cos\left(2\pi f_0 (t - \tau_i) + \phi\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} A_i \cos\left(2\pi f_0 t \underbrace{- 2\pi f_0 \tau_i + \phi}_{\phi_i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} A_i \cos\left(2\pi f_0 t + \phi_i\right)$$

- **瑞利衰落信道信号检测**

$$s(t)=\sum_{i=0}^{M-1}A_i\cos\left(2\pi f_0 t+\phi_i\right)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=0}^{M-1}A_i\cos\left(\phi_i\right)}_{a}\cos\left(2\pi f_0 t\right)-\underbrace{\sum_{i=0}^{M-1}A_i\sin\left(\phi_i\right)}_{b}\sin\left(2\pi f_0 t\right)$$

——服从高斯分布 $N\left(\mathbf{0},\sigma_s^2\mathbf{I}\right)$

$$=a\cos\left(2\pi f_0 t\right)+b\sin\left(2\pi f_0 t\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(2\pi f_0 t+\phi'\right)$$

幅度 $B=\sqrt{a^2+b^2}$ 服从瑞利分布：$p(B)=\begin{cases}\dfrac{B}{\sigma_s^2}\exp\left(-\dfrac{B}{2\sigma_s^2}\right), & B>0\\ 0, & B<0\end{cases}$

瑞利包络均方根值：

$$R_{rms}=\sqrt{E\left(B^2\right)}=\left\{\int_0^{+\infty}B^2\frac{B}{\sigma_s^2}\exp\left(-\frac{B}{2\sigma_s^2}\right)dB\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sigma_s$$

瑞利衰落

H_1 下的观测数据可表示为：

$$x(t) = s(t) + w(t)$$
$$= a\cos(2\pi f_0 t) + b\sin(2\pi f_0 t) + w(t)$$

离散化后的观测数据可表示为：

$$x[n] = a\cos(2\pi f_0 n) + b\sin(2\pi f_0 n) + w[n]$$

该信号检测问题可表示为：

$$H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{w}$$

$$H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(2\pi f_0) & \sin(2\pi f_0) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi(N-1) f_0) & \sin(2\pi(N-1) f_0) \end{bmatrix}$ $,\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_s^2 \mathbf{I})$

$\mathbf{w} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$。如何检测是否存在信号？

根据线性模型，此时的检测统计量为：

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{x} = \sigma_s^2\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{H}^T\underline{\left(\sigma_s^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}}\mathbf{x}$$

矩阵求逆引理：$(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$

令 $\mathbf{A}=\sigma^2\mathbf{I},\ \mathbf{B}=\mathbf{H},\ \mathbf{C}=\sigma_s^2\mathbf{I},\ \mathbf{D}=\mathbf{H}^T$

$$\Rightarrow \left(\sigma_s^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}-\frac{\sigma_s^2}{\sigma^4}\mathbf{H}\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}\mathbf{H}^T\mathbf{H}+\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{H}^T$$

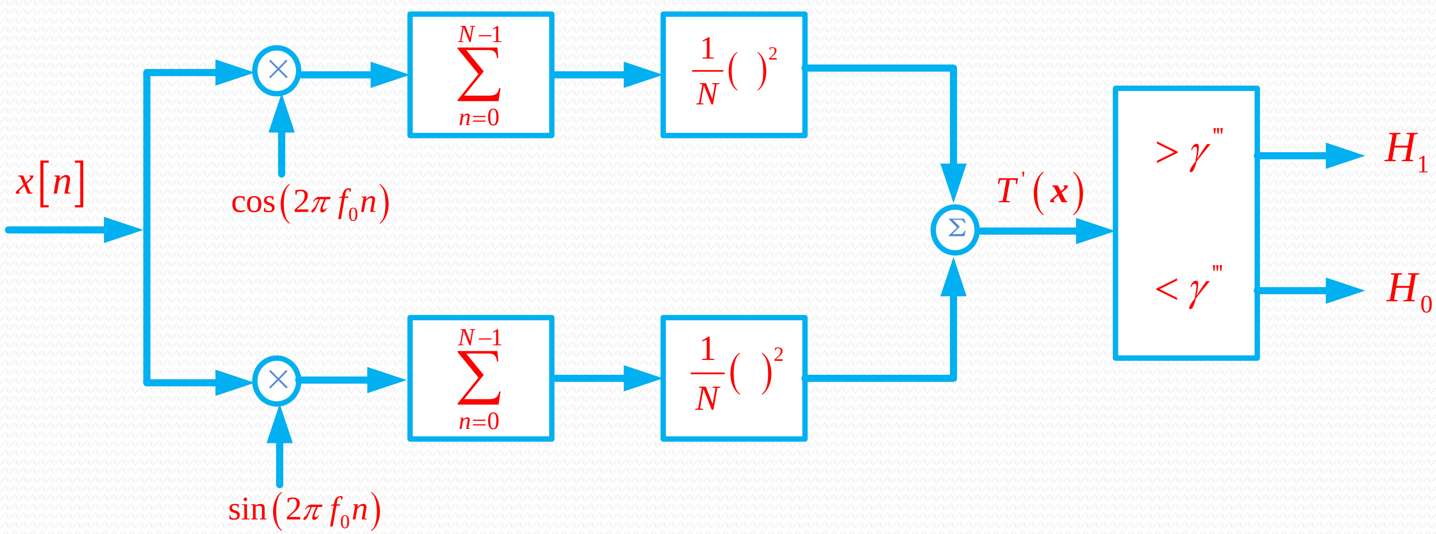
$$T(\mathbf{x})=\sigma_s^2\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{H}^T\left[\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}-\frac{\sigma_s^2}{\sigma^4}\mathbf{H}\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}\underbrace{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}_{\frac{N}{2}\mathbf{I}}+\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\right]\mathbf{x}=\frac{N\sigma_s^2}{\frac{N\sigma_s^2}{2}+\sigma^2}\frac{1}{N}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{x}$$

$$\Rightarrow T'(\mathbf{x})=\frac{1}{N}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{x}=\frac{1}{N}\left\|\mathbf{H}^T\mathbf{x}\right\|^2=\frac{1}{N}\left\|\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos(2\pi f_0 n)\\ \sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin(2\pi f_0 n)\end{bmatrix}\right\|^2$$

1 第一种实现方案

$$T^{'}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{N}\left\|\begin{bmatrix}\sum\limits_{n=0}^{N-1}x[n]\cos(2\pi f_0 n)\\ \sum\limits_{n=0}^{N-1}x[n]\sin(2\pi f_0 n)\end{bmatrix}\right\|^2$$

$$=\frac{1}{N}\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos(2\pi f_0 n)\right)^2+\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin(2\pi f_0 n)\right)^2\right\}$$



正交匹配滤波器/非相干匹配滤波器

$$T'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi f_0 n)\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi f_0 n)\right)^2\right\}$$

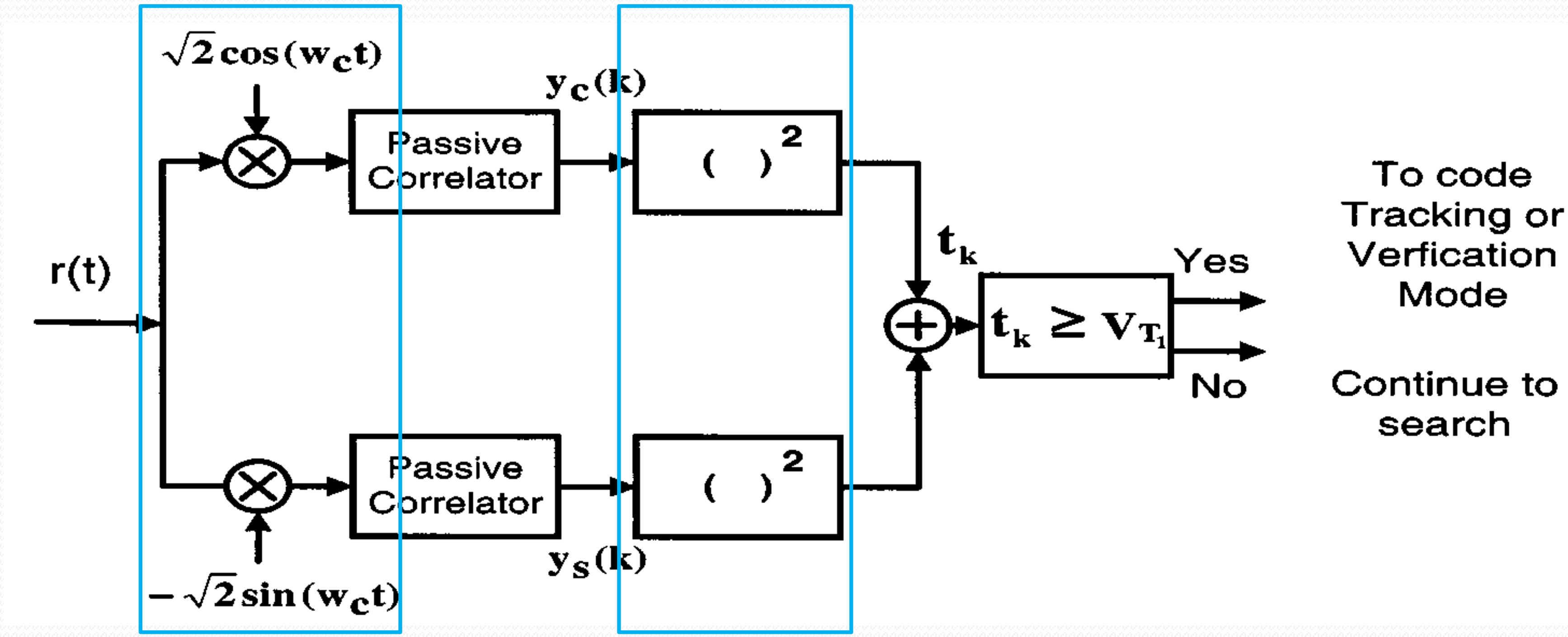


Fig 1 (a), Sheen W H, Wang H C. A new analysis of direct-sequence pseudonoise code acquisition on Rayleigh fading channels[J]. Selected Areas in Communications, IEEE Journal on, 2001, 19(11): 2225-2232.

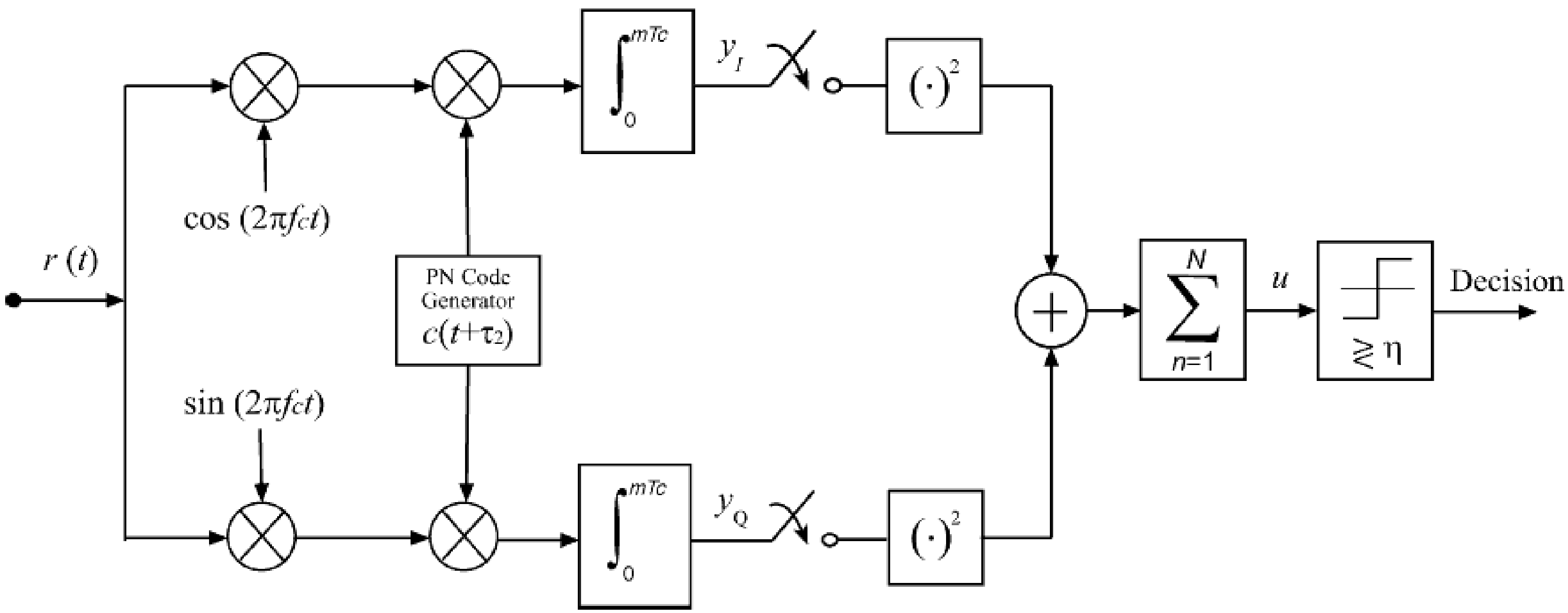
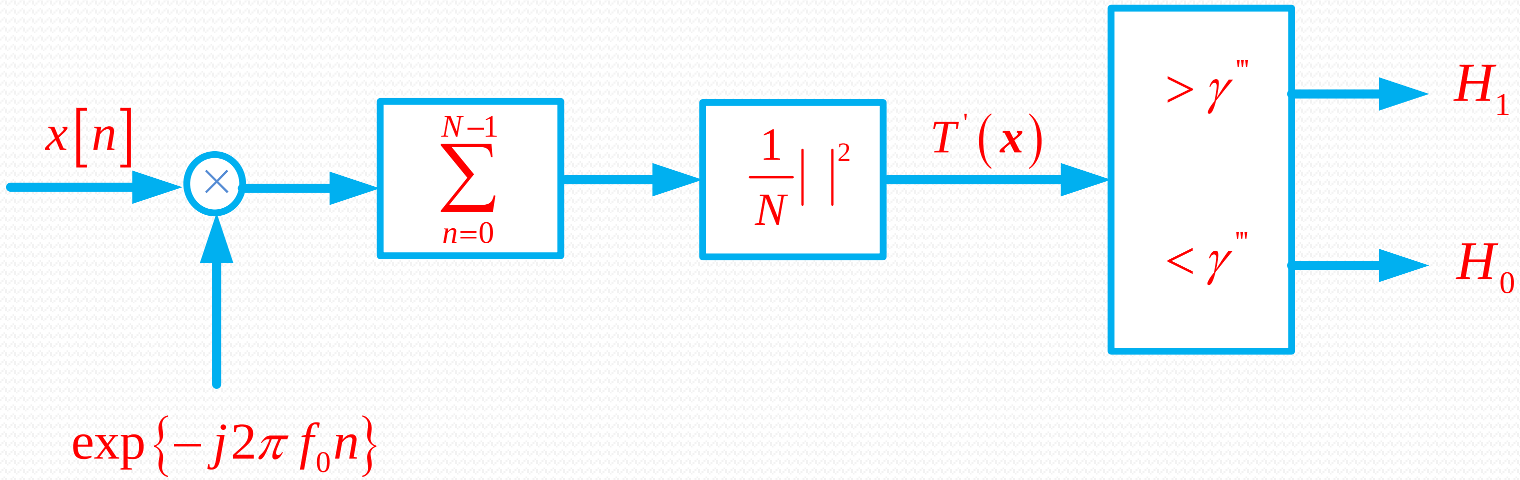


Fig.1, J. Diez, C. Pantaleon, etc, A Simple Expression for the optimization for Spread-Spectrum Code Acquisition Detectors Operating in the Presence of Carrier-Frequency Offset, IEEE Transactions on Communications, 2014, 52(4):550-552

2 第二种实现方案

$$T'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\left\|\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi f_0 n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi f_0 n)\end{bmatrix}\right\|^2$$

$$= \frac{1}{N}\left\|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi f_0 n)\right\|^2$$



周期图检测器

应用2：多径信道的非相干FSK

两类假设：

$$H_0 : x[n] = A_0 \cos(2\pi f_0 n + \phi_0) + w[n]$$

$$H_1 : x[n] = A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) + w[n]$$

假定信号的幅度与相位服从瑞利衰落模型，且两种假设服从相同的PDF。噪声服从 $\mathbf{w} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$。在最小错误概率准则下，若两种假设的先验概率相同，如何检测出现的是哪个信号？

采用最小错误概率准则，若似然比

$$L(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} \mid H_1)}{p(\mathbf{x} \mid H_0)} > 1$$

则判 H_1

$$p(\mathbf{x}|H_i)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C}_{xx})}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-E(\mathbf{x}))^T\mathbf{C}_{xx}^{-1}(\mathbf{x}-E(\mathbf{x}))\right\}$$

- **第一种假设** $H_0:\mathbf{x}=\mathbf{H}_0\boldsymbol{\theta}_0+\mathbf{w}$

观测矩阵： $\mathbf{H}_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \cos(2\pi f_0) & \sin(2\pi f_0)\\ \vdots & \vdots\\ \cos(2\pi(N-1)f_0) & \sin(2\pi(N-1)f_0)\end{bmatrix}$

瑞利衰落信道： $\boldsymbol{\theta}_0\sim N(\mathbf{0},\sigma_s^2\mathbf{I})$ ，其中 $\boldsymbol{\theta}_0=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{M-1}A_{0i}\cos(\phi_{0i})\\ \sum_{i=0}^{M-1}A_{0i}\sin(\phi_{0i})\end{bmatrix}$

噪声： $\mathbf{w}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$

$\Rightarrow E(\mathbf{x})=\mathbf{0}$

$$\mathbf{C}_{xx}=E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)=E\left((\mathbf{H}_0\boldsymbol{\theta}_0+\mathbf{w})(\mathbf{H}_0\boldsymbol{\theta}_0+\mathbf{w})^T\right)=\mathbf{H}_0\mathbf{C}_{\theta_0}\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I}=\sigma_s^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I}$$

$$\Rightarrow p(\mathbf{x}|H_0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}(\sigma_s^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I})}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(\sigma_s^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{x}\right\}$$

$$p(\boldsymbol{x}\,|\,H_i)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C}_{xx})}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-E(\boldsymbol{x})\right)^T\mathbf{C}_{xx}^{-1}\left(\boldsymbol{x}-E(\boldsymbol{x})\right)\right\}$$

- **同理，对第二种假设** $H_1:\boldsymbol{x}=\mathbf{H}_1\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{w}$

观测矩阵：$\mathbf{H}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \cos(2\pi f_1) & \sin(2\pi f_1)\\ \vdots & \vdots\\ \cos(2\pi(N-1)f_1) & \sin(2\pi(N-1)f_1)\end{bmatrix}$

瑞利衰落信道：$\boldsymbol{\theta}_1\sim N(\mathbf{0},\sigma_s^2\mathbf{I})$，其中 $\boldsymbol{\theta}_1=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{M-1}A_{1i}\cos(\phi_{1i})\\ \sum_{i=0}^{M-1}A_{1i}\sin(\phi_{1i})\end{bmatrix}$

噪声：$\boldsymbol{w}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$

$\Rightarrow E(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$

$$\mathbf{C}_{xx}=E\left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right)=E\left((\mathbf{H}_1\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{w})(\mathbf{H}_1\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{w})^T\right)=\mathbf{H}_1\mathbf{C}_{\theta_1}\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}=\sigma_s^2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}$$

$$\Rightarrow p(\boldsymbol{x}\,|\,H_1)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\}$$

似然比：$L(\boldsymbol{x})=\dfrac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)}$

$$=\frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\}}$$

$$\det\left(\mathbf{I}_K+\mathbf{A}_{KL}\mathbf{B}_{LK}\right)=\det\left(\mathbf{I}_L+\mathbf{B}_{LK}\mathbf{A}_{KL}\right)\Rightarrow$$

$$\det\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)=\det\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_i^T\mathbf{H}_i+\sigma^2\mathbf{I}_2\right)=\det\left(\sigma_s^2\frac{N}{2}\mathbf{I}_2+\sigma^2\mathbf{I}_2\right),\quad i=0,1$$

$$\Rightarrow L(\boldsymbol{x})=\frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\}}{\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\}}$$

即 $L(\boldsymbol{x})=\dfrac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\}}>1$ 时判 H_1

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^T\underline{\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}}\boldsymbol{x}<\boldsymbol{x}^T\underline{\left(\sigma_s^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}}\boldsymbol{x}$$

求逆引理: $(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$

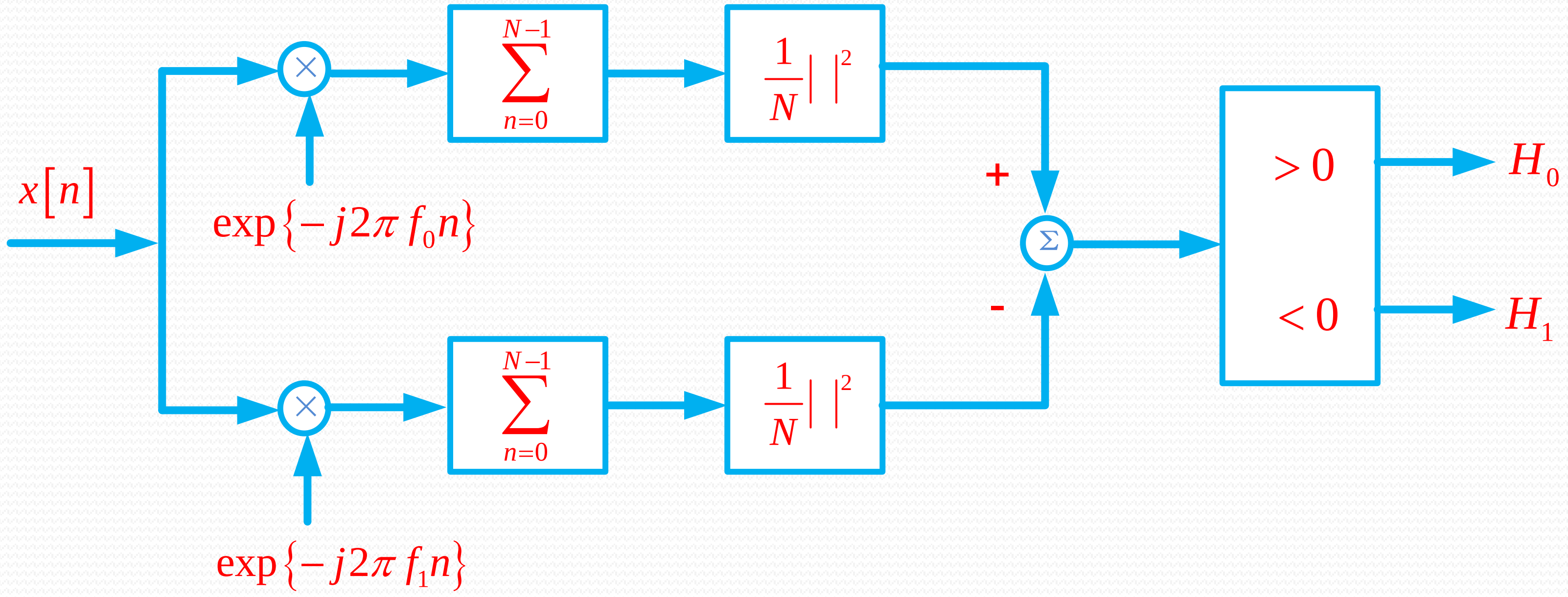
令 $\mathbf{A}=\sigma^2\mathbf{I},\ \mathbf{B}=\mathbf{H}_i,\ \mathbf{C}=\sigma_s^2\mathbf{I},\ \mathbf{D}=\mathbf{H}_i^T$

$$\Rightarrow \left(\sigma_s^2\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i^T+\sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}-\frac{1}{\sigma^4}\mathbf{H}_i\left(\frac{N}{2\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_s^2}\right)^{-1}\mathbf{H}_i^T$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-\frac{1}{\sigma^4}\boldsymbol{x}^T\mathbf{H}_1\frac{1}{\frac{N}{2\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_s^2}}\mathbf{H}_1^T\boldsymbol{x}<\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-\frac{1}{\sigma^4}\boldsymbol{x}^T\mathbf{H}_0\frac{1}{\frac{N}{2\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_s^2}}\mathbf{H}_0^T\boldsymbol{x}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^T\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^T\boldsymbol{x}>\boldsymbol{x}^T\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T\boldsymbol{x} \Rightarrow \frac{1}{N}\left\|\mathbf{H}_1^T\boldsymbol{x}\right\|^2>\frac{1}{N}\left\|\mathbf{H}_0^T\boldsymbol{x}\right\|^2$$

周期图检测器

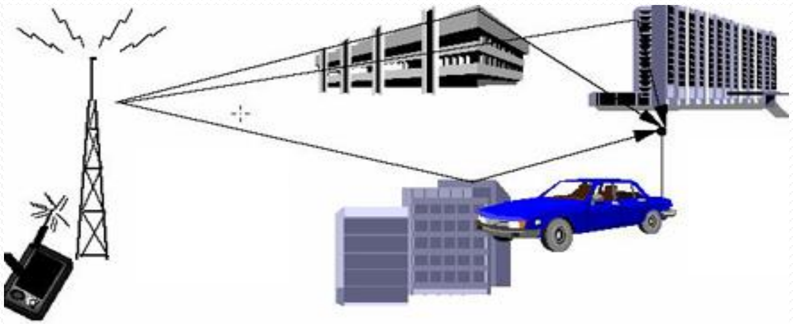


多路径信道中非相干FSK检测

应用3：对DSSS的启示

- **信号源/发端：**

$$s_s(t) = AD(t)p(t)\cos(2\pi f_c t + \phi)$$



- **收端第i条支路信号：**

$$s_i(t) = A_i \underline{D(t-\tau_i)} p(t-\tau_i)\cos(2\pi(f_c + f_D)(t-\tau_i) + \phi)$$

在一个数据比特以内，无数据比特翻转，此时有

$$s_i(t) = A_i' \underline{p(t-\tau_i)}\cos(2\pi(f_c + f_D)t + \phi_i)$$

进一步地，暂不考虑伪码影响时

$$s_i(t) = A_i' \cos(2\pi(f_c + f_D)t + \phi_i)$$

- **此时，接收端观测数据可表示为：**

$$x(t) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i(t) + w(t)$$

$$x(t)=\sum_{i=0}^{M-1}A_i^{'}\cos\left(2\pi\left(f_c+f_D\right)t+\phi_i\right)+w(t)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=0}^{M-1}A_i^{'}\cos\left(\phi_i\right)}_{a}\cos\left(2\pi\left(f_c+f_D\right)t\right)-\underbrace{\sum_{i=0}^{M-1}A_i^{'}\sin\left(\phi_i\right)}_{b}\sin\left(2\pi\left(f_c+f_D\right)t\right)+w(t)$$

$$=a\cos\left(2\pi\left(f_c+f_D\right)t\right)+b\sin\left(2\pi\left(f_c+f_D\right)t\right)+w(t)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(2\pi\left(f_c+f_D\right)t+\phi^{'}\right)+w(t)$$

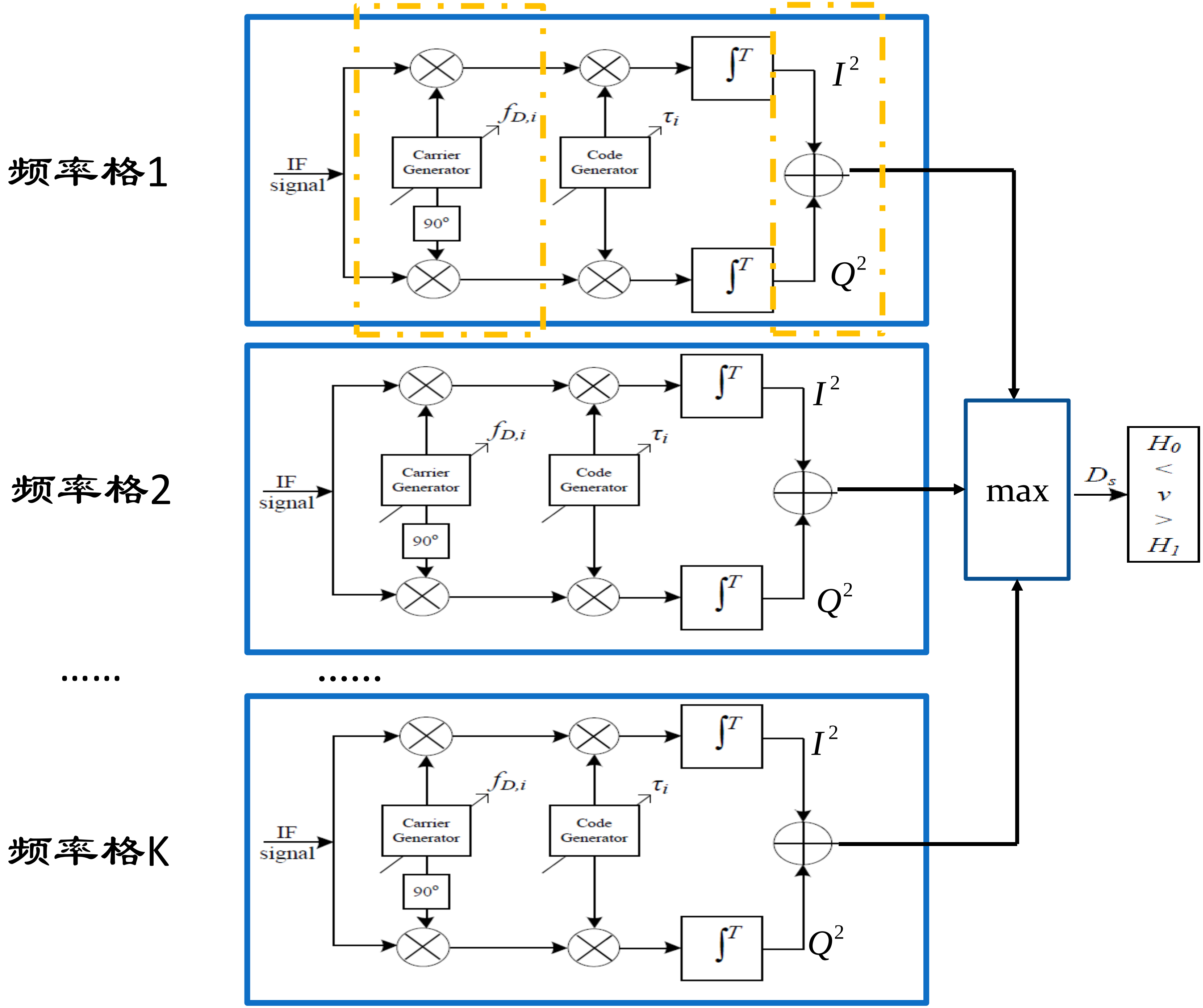
$$=\underline{B}\cos\left(2\pi\left(f_c+\underline{f_D}\right)t+\underline{\phi^{'}}\right)+w(t)$$

——正交变频 + 非相干

——频率需分格检测

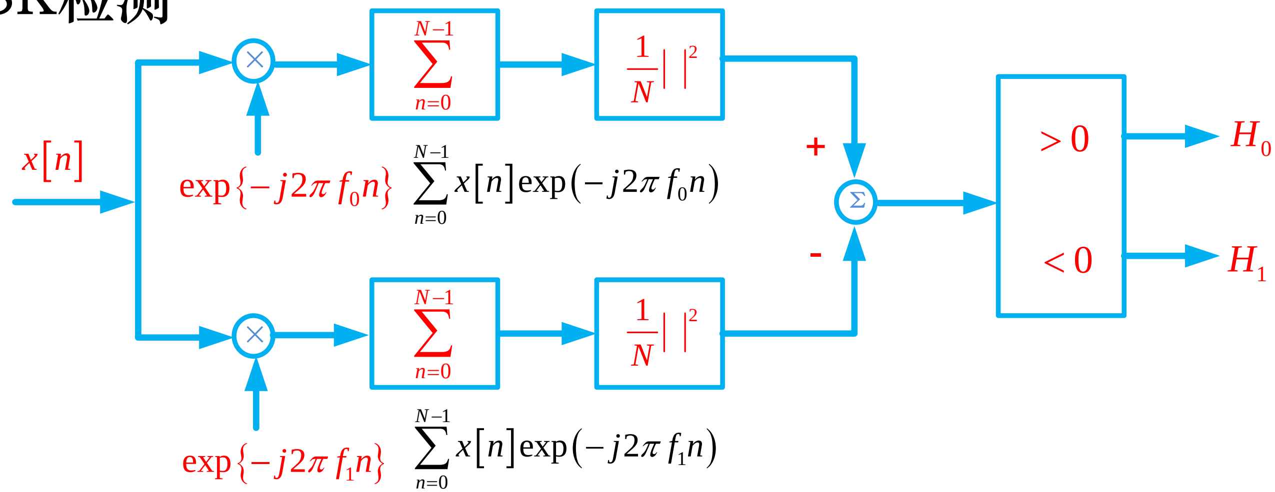
回顾：瑞利衰弱信道信号检测

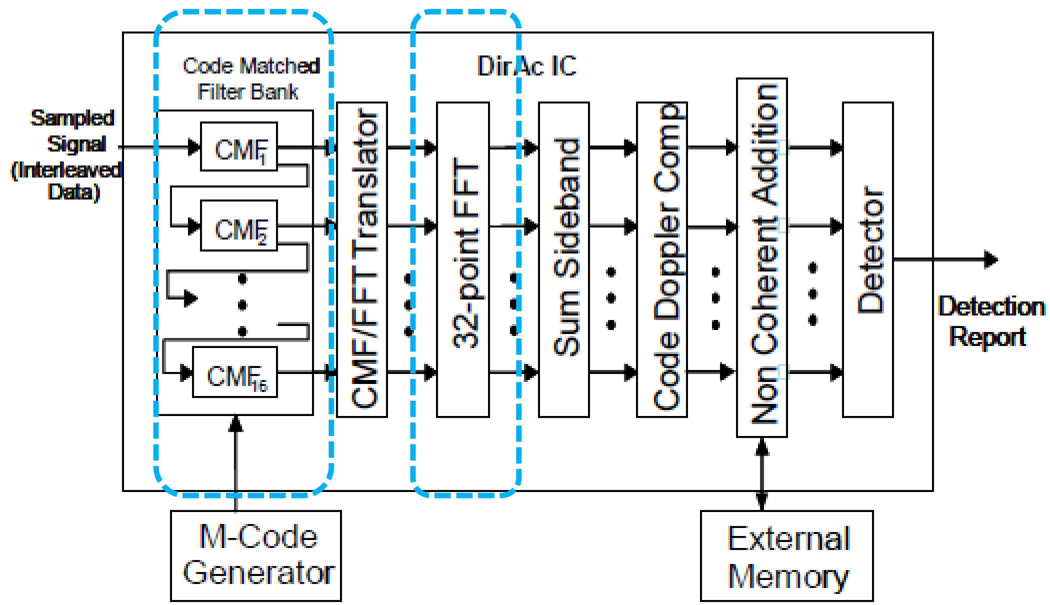
$$T^{'}(\mathbf{x})=\frac{1}{N}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{x}=\frac{1}{N}\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(2\pi f_c n\right)\right)^2+\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(2\pi f_c n\right)\right)^2\right\}$$



频率格1
频率格2
……
频率格K
……
IF signal
Carrier Generator
Code Generator
90°
$f_{D,i}$
τ_i
$\int^T$
I^2
Q^2
max
D_s
H_0
<
v
>
H_1

非相干FSK检测





Betz, J.W., Fite, J.D., Capozza, P.T, DirAc: an integrated circuit for direct acquisition of the M-code signal, Proc. ION GNSS 2004, Long Beach, CA, USA, 2004, pp. 447–456

三、一般高斯信号检测

两类假设：

$$H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{w}$$
$$H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

其中信号服从 $N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_s)$，噪声服从$N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$且与信号独立。如何检测是否存在信号？

推广

两类假设：

$$H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{w}$$
$$H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

其中信号服从 $N(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{C}_s)$，噪声服从 $N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_w)$ 且与信号独立。如何检测是否存在信号？

信号由**确定性部分**和**随机性部分**共同组成

两类假设：

$$H_0: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}$$

$$H_1: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{w}$$

其中信号服从 $N(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{C}_s)$，噪声服从 $N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_w)$ 且与信号独立。如何检测是否存在信号？

采用NP准则，若似然比

$$L(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}; H_1)}{p(\boldsymbol{x}; H_0)} > \gamma$$

则判 H_1

$$p(\boldsymbol{x}; H_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_w)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_s)^T (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_w)^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_s)\right\}$$

$$p(\boldsymbol{x}; H_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C}_w)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \mathbf{C}_w^{-1} \boldsymbol{x}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_s)^T(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_s)\right\}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{C}_w)}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\boldsymbol{x}\right\}}>\gamma$$

$$\Rightarrow T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_s)^T(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_s)$$

$$=\boldsymbol{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^T(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{\mu}_s-\boldsymbol{\mu}_s^T(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{\mu}_s$$

$$\Rightarrow T'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{\mu}_s+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\left(\underline{\mathbf{C}_w^{-1}-(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}}\right)\boldsymbol{x}$$

求逆引理：$(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$

令 $\mathbf{A}=\mathbf{C}_w,\mathbf{B}=\mathbf{C}_w,\mathbf{C}=\mathbf{C}_s^{-1},\mathbf{D}=\mathbf{C}_w$

$$\mathbf{C}_w^{-1}-(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}=\left(\mathbf{C}_w+\mathbf{C}_w\mathbf{C}_s^{-1}\mathbf{C}_w\right)^{-1}=\left(\left(\mathbf{I}+\mathbf{C}_w\mathbf{C}_s^{-1}\right)\mathbf{C}_w\right)^{-1}$$

$$=\mathbf{C}_w^{-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{C}_w\mathbf{C}_s^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{C}_w^{-1}\left((\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)\mathbf{C}_s^{-1}\right)^{-1}$$

$$=\mathbf{C}_w^{-1}\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}$$

$$\Rightarrow T'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{\mu}_s+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{x}$$

检测统计量：$T'(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{\mu}_s+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\mathbf{x}$

- 当 $\mathbf{C}_s=0$ 时，表示确定性信号（ $\mathbf{s}=\boldsymbol{\mu}_s$ ）

$$T'(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\boldsymbol{\mu}_s$$

广义匹配滤波器

- 当 $\boldsymbol{\mu}_s=\mathbf{0}$ 时，表示零均值高斯信号（ $\mathbf{s}\sim N(\mathbf{0},\mathbf{C}_s)$ ）

$$T'(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\underbrace{\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s+\mathbf{C}_w)^{-1}\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\hat{\mathbf{s}} \Rightarrow T''(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\hat{\mathbf{s}}$$

有色噪声中零均值随机信号的检测

- 若满足贝叶斯一般线性模型：$\mathbf{s}=\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ ，$\boldsymbol{\theta}\sim N(\boldsymbol{\mu}_\theta,\mathbf{C}_\theta)$ 且与 $\mathbf{w}$ 独立

$$T'(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T+\mathbf{C}_w\right)^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_\theta+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{C}_\theta\mathbf{H}^T+\mathbf{C}_w\right)^{-1}\mathbf{x}$$

例：WGN中一般高斯“噪声”信号检测

$$H_0: x[n] = w[n]$$

$$H_1: x[n] = s[n] + w[n]$$

$w[n]$是均值为零方差为 σ^2 的WGN。$s[n] \sim N\left(A, \sigma_s^2\right)$ 且是独立同分布的，$s[n]$与 $w[n]$ 相互独立。此时的检测统计量是？

满足一般高斯检测模型，检测统计量为：

$$T'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_w)^{-1} \boldsymbol{\mu}_s + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{C}_s (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_w)^{-1} \boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{C}_s = \sigma_s^2 \mathbf{I} \qquad \mathbf{C}_w = \sigma^2 \mathbf{I} \qquad \boldsymbol{\mu}_s = \begin{bmatrix} A \\ A \\ \vdots \\ A \end{bmatrix} = A\mathbf{1}$$

$$T'(\boldsymbol{x}) = \frac{NA}{\sigma_s^2 + \sigma^2} \bar{x} + \frac{\sigma_s^2 / \sigma^2}{2\left(\sigma_s^2 + \sigma^2\right)} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

“平均器”　　“能量器”

四、小结

- 高斯噪声中高斯信号检测

一般高斯检测模型

两类假设：

$$H_0: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}$$

$$H_1: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{w}$$

其中信号服从 $N(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{C}_s)$，噪声服从 $N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_w)$ 且与信号独立。检测统计量为：

$$T'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{\mu}_s + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\mathbf{C}_w^{-1}\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_w)^{-1}\boldsymbol{x}$$

- 不同参数对应不同信号模型
  - 有色噪声中零均值随机信号检测（ $\boldsymbol{\mu}_s = 0$ ）
  - 估计器-相关器（ $\boldsymbol{\mu}_s = 0$, $\mathbf{C}_w = \sigma^2\mathbf{I}$ ）
  - 贝叶斯一般线性模型（ $\boldsymbol{s} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ ），……
- 实际系统中具体应用