1. X,Y为赋范空间，$T\in B(X,Y)$为一一映射，$\exists\alpha>0$，$\alpha\|x\|\leq\|Tx\|$，$\forall x\in X$
则$T^{-1}\in B(Y,X)$，且$\|T^{-1}\|\leq\frac{1}{\alpha}$

证：$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$，$y_1,y_2\in Y$

$T(\lambda T^{-1}y_1+\mu T^{-1}y_2)=\lambda y_1+\mu y_2$

故 $T^{-1}(\lambda y_1+\mu y_2)=\lambda T^{-1}y_1+\mu T^{-1}y_2$，　T^{-1}线性

$\forall y\in Y$，　$\alpha\|T^{-1}y\|\leq\|T(T^{-1}y)\|=\|y\|$

故 $\|T^{-1}y\|\leq\frac{1}{\alpha}\|y\|$，　$T^{-1}\in B(Y,X)$，$\|T^{-1}\|\leq\frac{1}{\alpha}$

2. X,Y赋范空间，$T:X\to Y$线性，求证：T不连续$\Leftrightarrow\exists x_n\in X$，$x_n\to0$，$\|Tx_n\|\to\infty$

证：对于线性算子，连续$\Leftrightarrow$有界

若$\exists x_n\in X$，$x_n\to0$，$\|Tx_n\|\to\infty$，则T无界，不连续

若T无界，$\exists y_n\in Y$，$\|Ty_n\|>n^2\|y_n\|$，$y_n\neq0$

令 $x_n=\frac{y_n}{n\|y_n\|}$，则 $x_n\to0$，$\|Tx_n\|\to\infty$

3. $C[-1,1]$上线性泛函 $f(x)=\int_{-1}^{0}x(t)dt-\int_{0}^{1}x(t)dt$，　$x\in C[-1,1]$

求证：$f\in C[-1,1]'$，求$\|f\|$，是否存在 $x\in C[-1,1]$，$\|x\|_\infty=1$，$|f(x)|=\|f\|$

证：$|f(x)|\leq\int_{-1}^{0}|x(t)|dt+\int_{0}^{1}|x(t)|dt\leq2\|x\|_\infty$　(*)

故f有界，$f\in C[-1,1]'$

令 $x_n(t)=\begin{cases}-1 & (-1\leq t\leq-\frac{1}{n})\\ nt & (-\frac{1}{n}\leq t\leq\frac{1}{n})\\ 1 & (\frac{1}{n}\leq t\leq1)\end{cases}$　则 $\|x_n\|_\infty=1$，$|f(x_n)|=2-\frac{1}{n}$

令 $n\to\infty$ 知 $\|f\|=2$

若存在 $x\in C[-1,1]$，$|f(x)|=\|f\|=2$，$\|x\|_\infty=1$

则(*)中取等号，$|x(t)|=\|x\|_\infty=1$，$\forall t\in[-1,1]$，

$x(t)\equiv1$ 或 $x(t)\equiv-1$，此时 $f(x)=0$，矛盾

故不存在 x 满足要求