统计信号处理

第十章

信号检测的基本准则

清华大学电子工程系
李洪 副教授

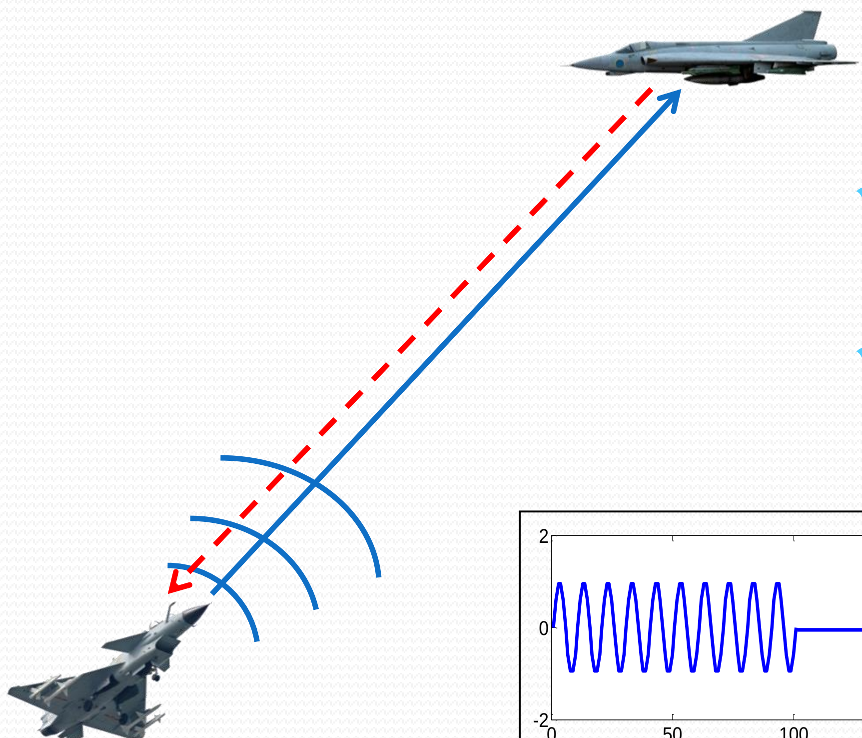
2023.5

内容概要

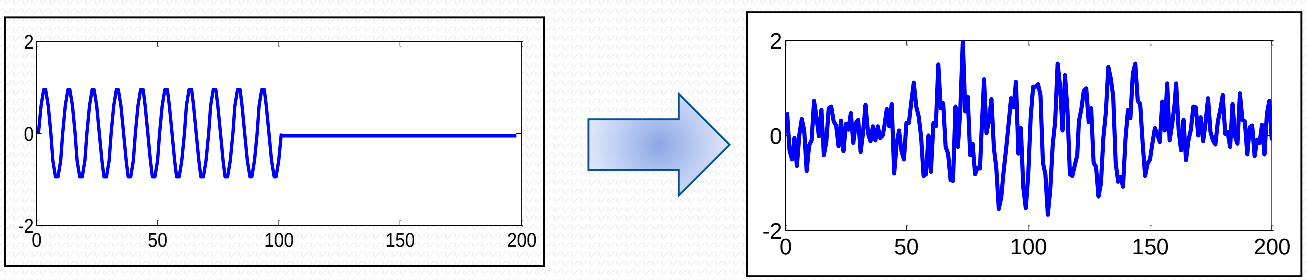
- 一、检测基本概念
- 二、常见PDF及其性质
- 三、Neyman-Pearson准则
- 四、最小错误概率准则
- 五、二元贝叶斯风险准则
- 六、多元贝叶斯风险准则
- 七、小结

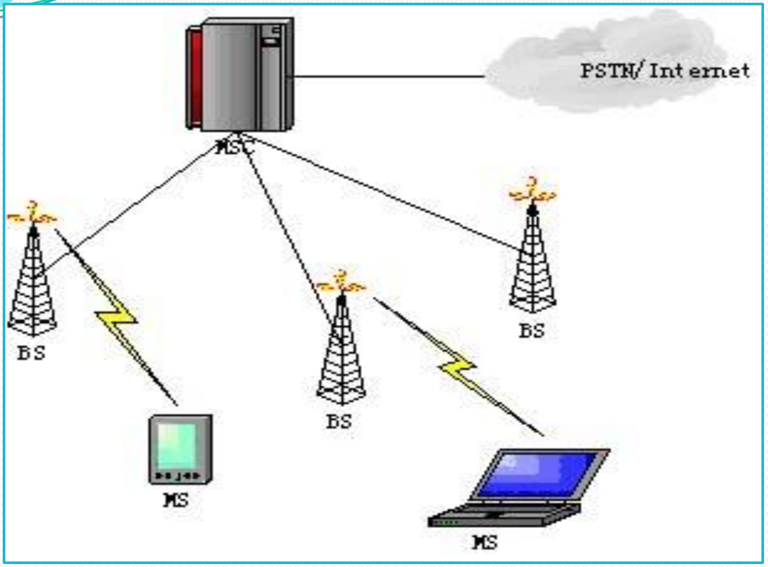
一、检测基本概念

- 什么是检测？



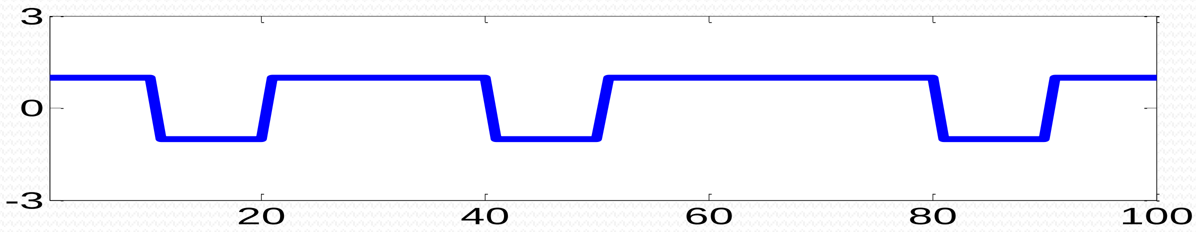
- ✓ **前提：** 有没有敌机？
- ✓ 敌机距离是多少？



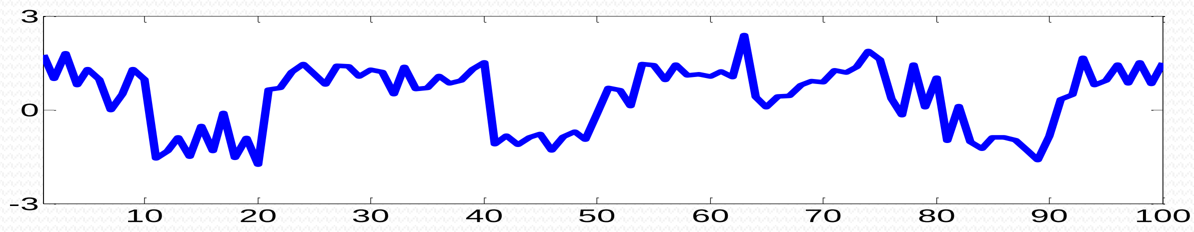


- ✓ 关心的不是具体数值，而是“0” or “1” ？

发端:



收端:



- ✓ 有没有人说话？电话号码是多少？
- ✓ **核心问题**：根据数据进行判决——究竟属于哪一个/类？

——应采用什么样的准则?

——如何才能达到最优?

- 检测的基本准则
  - Neyman-Pearson准则
  - 最小贝叶斯风险准则
    - 最小错误概率准则/最大后验概率准则
    - 最大似然准则
- 简单假设检验
  - 每种假设检验的PDF完全已知
  - 确定信号检测
  - 随机信号检测
- 复合假设检验
  - 假设检验的PDF含有未知参数
  - 贝叶斯方法
  - 广义似然比（GLRT）方法及其等效方法（Wald、Rao等）

二、常见PDF及其性质

1. 高斯分布

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\},\ -\infty<x<\infty \quad 简记为：N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

- 基本性质

$$E\left(x^n\right)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k E\left((x-\mu)^k\right)\mu^{n-k}$$

$$E\left((x-\mu)^k\right)=\begin{cases}(k-1)!!\sigma^k, & k为偶数\\ 0, & k为奇数\end{cases}$$

$$E\left((x+\mu)^n\right)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k E\left(x^k\right)\mu^{n-k}$$

- 进一步，若 $x \sim N\left(0,\sigma^2\right)$

$$E\left(x^n\right)=\begin{cases}(n-1)!!\sigma^n, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

- 特别地，若 $x \sim N\left(0,1\right)$

其**累积分布函数**（CDF）定义为

$$\Phi\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}dt$$

其**互补累积分布函数**定义为

$$Q\left(x\right)=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}dt$$ 又称为**右尾概率**

右尾概率性质：

$$1-Q\left(x\right)=Q\left(-x\right) \qquad Q^{-1}\left(x\right)=-Q^{-1}\left(1-x\right)$$

2. chi方分布

- 若 $x_i \sim N(0,1)$，则 $x=\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$ 服从**中心 χ_ν^2 分布**

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}x^{\nu/2-1}\exp\left(-\dfrac{1}{2}x\right), & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中 $\Gamma(u)$ 为伽马函数

- 若 $x_i \sim N(\mu_i,1)$，则 $x=\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$ 服从**非中心 $\chi_\nu^{'2}(\lambda)$ 分布**

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{\frac{\nu-2}{4}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(x+\lambda)\right\}I_{\nu/2-1}\left(\sqrt{\lambda x}\right), & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中非中心参量为 $\lambda=\sum_{i=1}^{\nu}\mu_i^2$，$I_r(u)$ 为 r 阶第一类修正贝塞尔(Bessel)函数

3. 高斯变量的二次型

已知 $\mathbf{x}$ 为 $n\times 1$ 高斯随机矢量 $\mathbf{x}\sim N(\boldsymbol{\mu},\mathbf{C})$，$\mathbf{A}$ 为 $n\times n$ 的对称矩阵，其二次型 $y=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 具有如下特性：

- 如果 $\mathbf{A}=\mathbf{C}^{-1},\ \boldsymbol{\mu}=0$，则

$$y=\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}\sim\chi_n^2$$

- 如果 $\mathbf{A}=\mathbf{C}^{-1},\ \boldsymbol{\mu}\neq 0$，则

$$y=\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}\sim\chi_n^{'2}(\lambda)$$，其中非中心参量 $\lambda=\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$

- 如果 $\mathbf{A}$ 是等幂的（即 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ ），且秩为 r，$\mathbf{C}=\mathbf{I},\ \boldsymbol{\mu}=0$，则

$$y=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\sim\chi_r^2$$

4. 瑞利分布&莱斯分布

- 若 $x_1 \sim N\left(0,\sigma^2\right),\ x_2 \sim N\left(0,\sigma^2\right)$，则 $x=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ 服从**瑞利**分布：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}x^2\right), & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

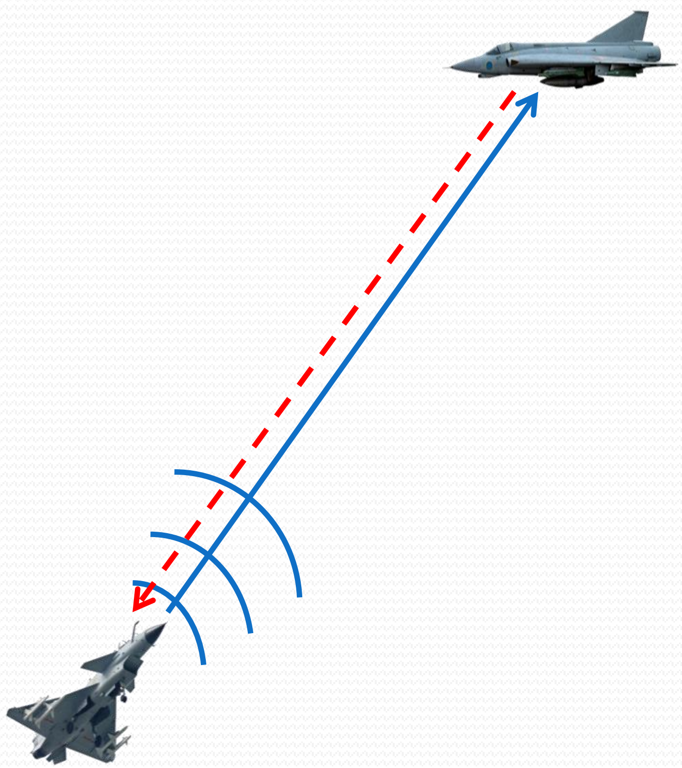
其中 $E(x)=\sqrt{\dfrac{\pi\sigma^2}{2}},\quad \mathrm{var}(x)=\dfrac{4-\pi}{2}\sigma^2$

- 若 $x_1 \sim N\left(\mu_1,\sigma^2\right),\ x_2 \sim N\left(\mu_2,\sigma^2\right)$，则 $x=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ 服从**莱斯**分布：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(x^2+\alpha^2\right)\right)I_0\left(\dfrac{\alpha x}{\sigma^2}\right), & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中 $\alpha^2=\mu_1^2+\mu_2^2$ ，$I_0(u)$ 为 0 阶第一类修正贝塞尔(Bessel)函数

三、Neyman-Pearson准则



- 需判断/选择：
  - ✓ 无敌机
  - ✓ 有敌机
- 判断/选择的结果：
  - ✓ 无敌机，判为无敌机
  - ✓ 无敌机，判为有敌机
  - ✓ 有敌机，判为无敌机
  - ✓ 有敌机，判为有敌机
- 特点：
  - ✓ 敌机是否出现**概率未知**
  - ✓ 判错/判对的代价/收益**难量化**

    ——既难以**绝对量化**，亦难以**相对量化**

- 特点：
  - ✓ 是否出现地震的概率未知
  - ✓ 成功预报与否的代价/收益难量化

——既难以绝对量化，亦难以相对量化

需判断/选择：	需判断/选择：	
✓无地震	✓无敌机	零假设/第一类假设 H_0
✓有地震	✓有敌机	备选假设/第二类假设 H_1

判断/选择的结果：	判断/选择的结果：	
✓无地震，判为无地震	✓无敌机，判为无敌机	
✓无地震，判为有地震	✓无敌机，判为有敌机	第一类错误/虚警(FA) $P(H_1;H_0)$
✓有地震，判为无地震	✓有敌机，判为无敌机	第二类错误/漏检(M) $P(H_0;H_1)$
✓有地震，判为有地震	✓有敌机，判为有敌机	检测概率(D) $P(H_1;H_1)$

数学建模：

两类假设：

$$H_0 : x[n] = w[n], n = 0,1,\ldots, N-1$$

$$H_1 : x[n] = s[n] + w[n], n = 0,1,\ldots, N-1$$

$s[n]$表示雷达系统中反射信号，或地震前存在的某种“信号”

三种概率：

$P(H_1;H_0)$ ： **虚警**概率 (P_{FA})

$P(H_0;H_1)$ ： **漏检**概率 (P_M)

$P(H_1;H_1)$ ： **检测**概率 (P_D)

共同特征：**无先验知识、“代价/收益”不好量化**

常用办法：**“在虚警概率一定的情况下，使检测概率最大化”**

问题：如何实现？

核心问题：

$$\begin{cases} \max\{P_D\} \\ s.t.\ \ P_{FA}=\alpha \end{cases}$$

采用拉格朗日乘子法：

$$J=P_D+\lambda\left(P_{FA}-\alpha\right)=\int_{R_1}p\left(\mathbf{x};H_1\right)d\mathbf{x}+\lambda\left(\int_{R_1}p\left(\mathbf{x};H_0\right)d\mathbf{x}-\alpha\right)$$

$$=\int_{R_1}\left(p\left(\mathbf{x};H_1\right)+\lambda p\left(\mathbf{x};H_0\right)\right)d\mathbf{x}-\lambda\alpha$$

$p\left(\mathbf{x};H_1\right)+\lambda p\left(\mathbf{x};H_0\right)>0$ 时，判 H_1

$$L\left(\mathbf{x}\right)=\frac{p\left(\mathbf{x};H_1\right)}{p\left(\mathbf{x};H_0\right)}>-\lambda=\gamma$$

似然比检验(likelihood ratio test, LRT)

门限由虚警概率决定：$P_{FA}=\int_{\{\mathbf{x}:\,L(\mathbf{x})>\gamma\}}p\left(\mathbf{x};H_0\right)d\mathbf{x}=\alpha$

对给定的虚警概率 $P_{FA}=\alpha$，使检测概率 P_D 最大的判决为

$$L\left(x\right)=\frac{p\left(\mathbf{x};H_1\right)}{p\left(\mathbf{x};H_0\right)}>\gamma$$

其中门限由 $P_{FA}=\int_{\{\mathbf{x}:L(\mathbf{x})>\gamma\}}p\left(\mathbf{x};H_0\right)d\mathbf{x}=\alpha$ 决定

Neyman-Pearson（NP）准则

例：信号检测

$$H_0: x[n]=w[n], n=0,1,\ldots,N-1$$

$$H_1: x[n]=A+w[n], n=0,1,\ldots,N-1$$

其中信号$A>0$。噪声$w[n]$为均值为零方差为σ^2的WGN。在NP准则下，如何判断是否存在信号？

$$H_0: \mathbf{x} \sim N\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}\right)$$

$$H_1: \mathbf{x} \sim N\left(A\mathbf{1}, \sigma^2 \mathbf{I}\right)$$

NP检测器：

$$\frac{\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2\right\}}{\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\right\}} > \gamma$$

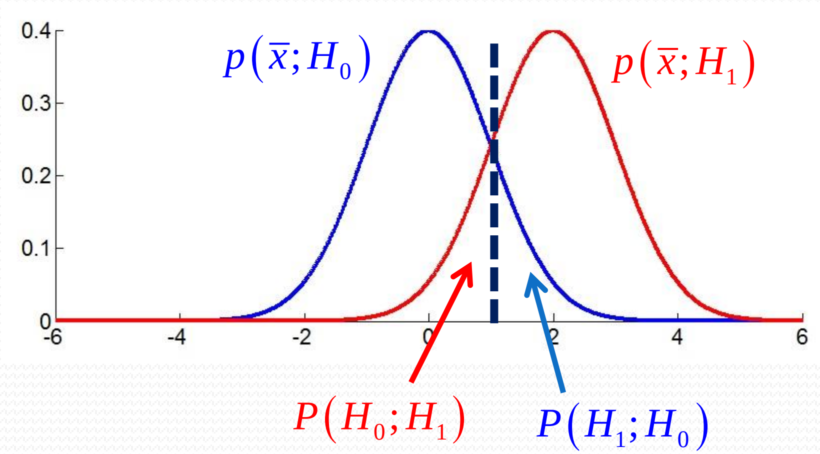
$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\right\} > \gamma$$

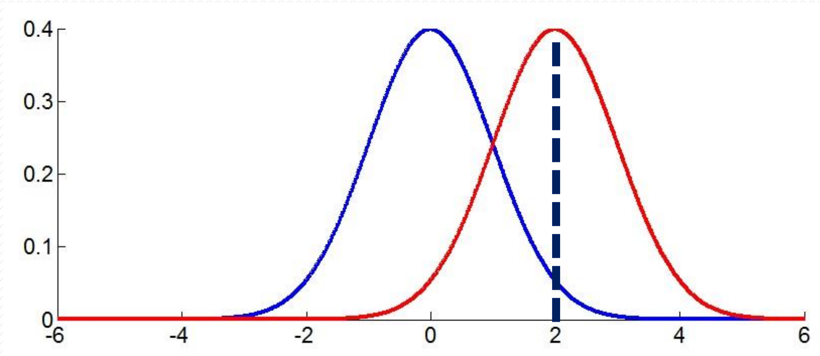
$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2A\sum_{n=0}^{N-1}x[n]+NA^2\right)>\ln\gamma$$

$$\underline{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]}>\frac{\sigma^2}{NA}\ln\gamma+\frac{A}{2}$$

称为**检测统计量**

- 利用均值来进行判决
- 判决方法
  - ✓ 若均值大于某门限，则判为有信号（H_1）
  - ✓ 若均值小于某门限，则判为没有信号（H_0）





✓ 可通过改变门限来改变虚警率、漏检率

检测统计量： $$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n] > \frac{\sigma^2}{NA}\ln\gamma + \frac{A}{2}$$

● 实际用法及检测性能分析

1 检测统计量： $$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n] \sim \begin{cases} N\left(0, \sigma^2/N\right), & H_0 \\ N\left(A, \sigma^2/N\right), & H_1 \end{cases}$$

2 虚警概率： $$P_{FA} = Pr\left(T(\mathbf{x}) > \gamma^{'}; H_0\right) = Q\left(\frac{\gamma^{'}}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)$$

3 门限设置： $$\gamma^{'} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}Q^{-1}(P_{FA})$$

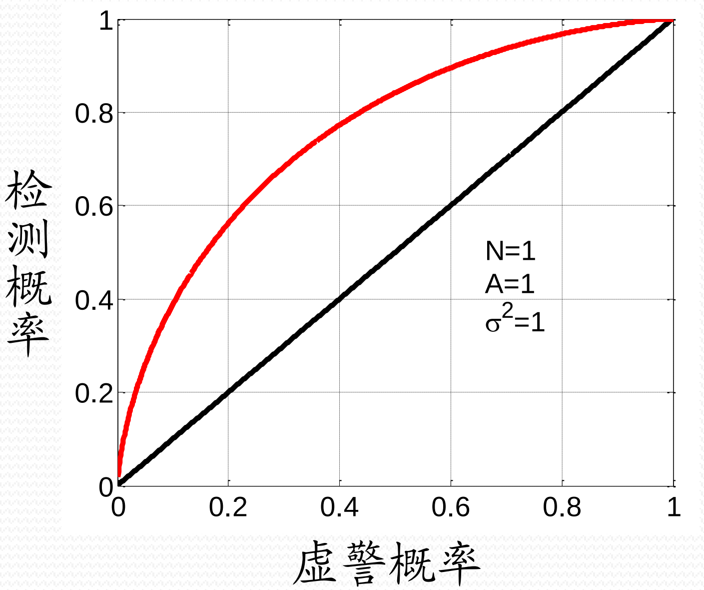
4 相应的检测概率：

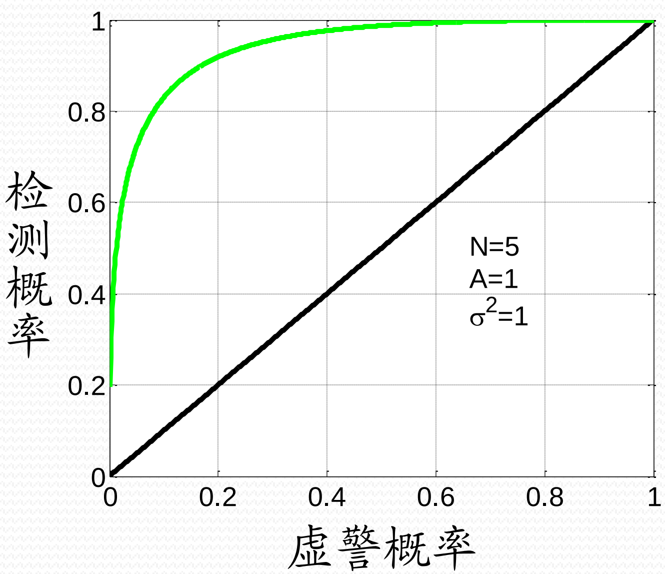
$$P_D = Pr\left(T(\mathbf{x}) > \gamma^{'}; H_1\right) = Q\left(\frac{\gamma^{'} - A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}Q^{-1}(P_{FA}) - A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)$$

$$= Q\left(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{\frac{NA^2}{\sigma^2}}\right)$$

$$P_D = Q\left(Q^{-1}\left(P_{FA}\right) - \sqrt{\frac{NA^2}{\sigma^2}}\right)$$

- 接收机工作特性曲线（ROC，receiver operating characteristics）





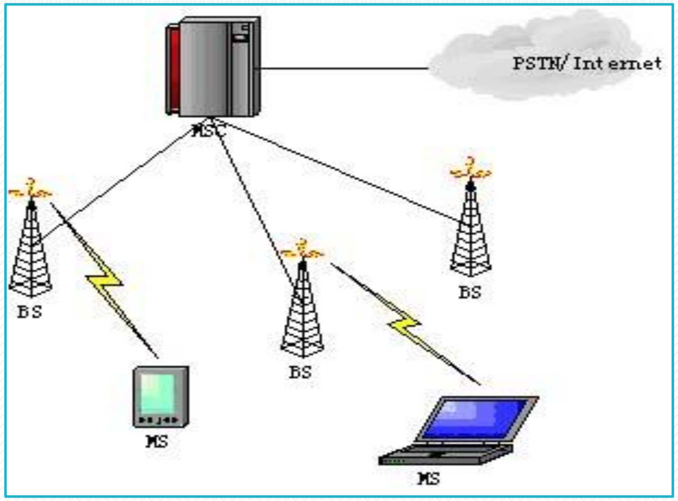
✓ 虚警概率越低，检测概率越低，反之亦然

✓ 如何改善性能？

✓ 增加N $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$

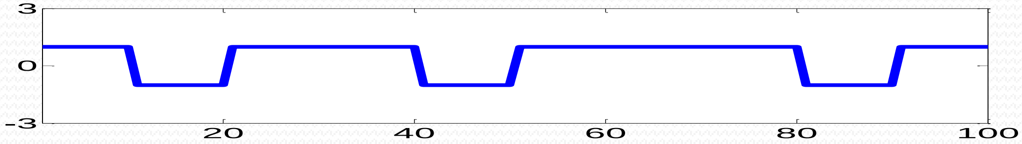
——不同假设下pdf区分越明显，检测性能越好

四、最小错误概率准则

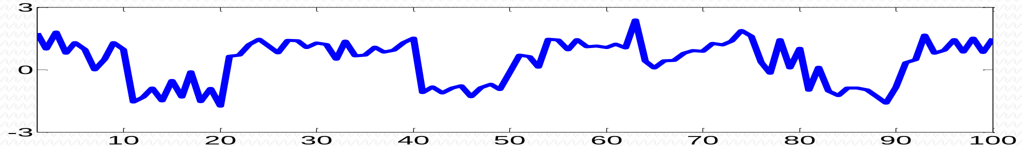


- 特点：
  - ✓ “0” 和 “1” 出现的**概率已知**
  - ✓ 判错的代价可 **“相对” 量化**
- 应如何判决 “0”、 “1” ？
  ——**使总的错误概率最小化**

发端：



收端：



错误概率：

$$P_e = \Pr\{判H_0, H_1为真\} + \Pr\{判H_1, H_0为真\}$$

$$= P(H_0, H_1) + P(H_1, H_0)$$

$$= P(H_0 | H_1)P(H_1) + P(H_1 | H_0)P(H_0)$$

$$= P(H_1)\int_{R_0} p(\mathbf{x} | H_1)d\mathbf{x} + P(H_0)\int_{R_1} p(\mathbf{x} | H_0)d\mathbf{x}$$

$$= P(H_1)\left(1 - \int_{R_1} p(\mathbf{x} | H_1)d\mathbf{x}\right) + P(H_0)\int_{R_1} p(\mathbf{x} | H_0)d\mathbf{x}$$

$$= P(H_1) + \int_{R_1} \underline{\{P(H_0)p(\mathbf{x} | H_0) - P(H_1)p(\mathbf{x} | H_1)\}} d\mathbf{x}$$

$P(H_0)p(\mathbf{x} | H_0) - P(H_1)p(\mathbf{x} | H_1) < 0$ 时，判 H_1

$\dfrac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} > \dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}$ 时，判 H_1

最小错误概率判决准则

$$\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} > \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$ 时，判 H_1

1 似然比与由**先验概率**决定的门限进行比较

2 **最大后验概率检测器** (MAP, maximum a posteriori probability)

$$\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} > \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \Leftrightarrow p(\mathbf{x}|H_1)P(H_1) > p(\mathbf{x}|H_0)P(H_0)$$

$$\frac{p(\mathbf{x}|H_1)P(H_1)}{p(\mathbf{x})} > \frac{p(\mathbf{x}|H_0)P(H_0)}{p(\mathbf{x})}$$

$$p(H_1|\mathbf{x}) > p(H_0|\mathbf{x})$$

3 若先验概率相同，则为**最大似然检测器** (ML, maximum likelihood)

$$p(\mathbf{x}|H_1) > p(\mathbf{x}|H_0)$$

例：信号检测——开关键控系统

$$H_0 : x[n] = w[n], n = 0,1,\ldots, N-1$$

$$H_1 : x[n] = A + w[n], A > 0, n = 0,1,\ldots, N-1$$

$w[n]$ 为方差为 σ^2 的WGN。假定发送“0”和“1”的先验概率相同。在最小错误概率准则下，该如何判决？

应采用最大似然检测器

即，若

$$\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} = \frac{\dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A)^2\right\}}{\dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\right\}} > 1 \quad \text{则判 } H_1$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2A\sum_{n=0}^{N-1}x[n] + NA^2\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n] > \frac{A}{2}$$

性能如何？

例：信号检测——开关键控系统

$$H_0: x[n]=w[n], n=0,1,\ldots,N-1$$

$$H_1: x[n]=A+w[n], A>0, n=0,1,\ldots,N-1$$

$w[n]$ 为方差为 σ^2 的WGN。假定发送“0”和“1”的先验概率相同。在最小错误概率准则下，该如何判决？

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]>\frac{A}{2}$$ 性能如何?

误码率：

$$P_e=P(H_0|H_1)P(H_1)+P(H_1|H_0)P(H_0)$$

$$=\frac{1}{2}\{P(H_0|H_1)+P(H_1|H_0)\}$$

检测统计量分布特性：

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sim\begin{cases}N\left(0,\sigma^2/N\right), & H_0\\ N\left(A,\sigma^2/N\right), & H_1\end{cases}$$

$$P_e=\frac{1}{2}\left\{\Pr\left(\bar{x}<\frac{A}{2}|H_1\right)+\Pr\left(\bar{x}>\frac{A}{2}|H_0\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-Q\left(\frac{A/2-A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)\right)+Q\left(\frac{A/2}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)\right\}$$

$$\boxed{1-Q(x)=Q(-x)}$$

$$P_e=Q\left(\frac{A/2}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{NA^2}{4\sigma^2}}\right)$$

五、二元贝叶斯风险准则

对某零件：

- 合格零件判为合格：√
- 不合格零件判为不合格：√
- 合格零件判为不合格：损失一零件
- 不合格零件判为合格：损失可能是整个飞机，甚至带来人员安全问题

最小错误概率：
$$
\begin{aligned}
P_e &= \Pr\{判H_0, H_1为真\} + \Pr\{判H_1, H_0为真\} \\
&= P(H_0, H_1) + P(H_1, H_0) \\
&= P(H_0 \mid H_1)P(H_1) + P(H_1 \mid H_0)P(H_0)
\end{aligned}
$$

- ✓ **最小错误概率准则，不再适用**
- ✓ **引入判错代价较为合理**

引入判错代价后：

$$R=C_{01}P(H_1)P(H_0|H_1)+C_{10}P(H_0)P(H_1|H_0)$$

对风险进一步**泛化**（对每个判决均赋予“代价”）：

$$\begin{aligned}R=&C_{00}P(H_0)P(H_0|H_0)+C_{10}P(H_0)P(H_1|H_0)\\&+C_{01}P(H_1)P(H_0|H_1)+C_{11}P(H_1)P(H_1|H_1)\end{aligned}$$

贝叶斯风险

$$\begin{aligned}&=C_{00}P(H_0)\int_{R_0}p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}+C_{10}P(H_0)\int_{R_1}p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}\\&\quad+C_{01}P(H_1)\int_{R_0}p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}+C_{11}P(H_1)\int_{R_1}p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=C_{00}P(H_0)\left(1-\int_{R_1}p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}\right)+C_{10}P(H_0)\int_{R_1}p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}\\&\quad+C_{01}P(H_1)\left(1-\int_{R_1}p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}\right)+C_{11}P(H_1)\int_{R_1}p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$R = C_{00}P(H_0) + C_{01}P(H_1) + \int_{R_1} \{(C_{10} - C_{00})P(H_0)p(\mathbf{x}|H_0) - (C_{01} - C_{11})P(H_1)p(\mathbf{x}|H_1)\} d\mathbf{x}$$

$(C_{10} - C_{00})P(H_0)p(\mathbf{x}|H_0) - (C_{01} - C_{11})P(H_1)p(\mathbf{x}|H_1) < 0$ 时，判 H_1

一般地，判错的代价大于判对时，因此有

$$\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} > \frac{(C_{10} - C_{00})P(H_0)}{(C_{01} - C_{11})P(H_1)}$$ 时，判 H_1

最小贝叶斯风险判决准则

特例，若**风险一致**即 $C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = 1$ 时

$$\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} > \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

——即风险一致时，回到最小错误概率准则

六、多元贝叶斯风险准则

二元：$\{H_0, H_1\}$ 推广 多元：$\{H_0, H_1, H_2, \ldots, H_{M-1}\}$

多元假设的贝叶斯风险：

$$R = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P\left(H_i, H_j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} \int_{R_i} P\left(\mathbf{x}, H_j\right) d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P\left(\mathbf{x}, H_j\right) d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P\left(H_j \mid \mathbf{x}\right) p\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}$$

$$R=\sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0}^{M-1}C_{ij}P\left(H_j\mid\boldsymbol{x}\right)p\left(\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}$$

$C_i\left(\boldsymbol{x}\right)$：判为 H_i 的**平均风险/代价**

应选择使 $C_i\left(\boldsymbol{x}\right)=\sum_{j=0}^{M-1}C_{ij}P\left(H_j\mid\boldsymbol{x}\right)$ 最小的假设

——谁的风险小就判给谁

1 若风险为 $C_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ 1, & i\neq j\end{cases}$ **（风险一致）**

$$R=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}C_{ij}P\left(H_i\mid H_j\right)P\left(H_j\right)\quad\Rightarrow\quad R=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{M-1}P\left(H_i\mid H_j\right)P\left(H_j\right)$$

即，风险一致时最小贝叶斯风险准则转换为最小错误概率准则！

$$C_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(H_j \mid \boldsymbol{x})$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} P(H_j \mid \boldsymbol{x})$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} P(H_j \mid \boldsymbol{x}) - \underline{P(H_i \mid \boldsymbol{x})}$$

选择 $P(H_i \mid \boldsymbol{x})$ 最大者，即采用**最大后验概率判决准则** $\max_i P(H_i \mid \boldsymbol{x})$

——即**最小错误概率准则**等价于**最大后验概率判决准则**！

2 进一步，若先验概率相同，则转变为**最大似然判决准则**

$$\max_i P(H_i \mid \boldsymbol{x})$$

$$P(H_i \mid \boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x} \mid H_i) P(H_i)}{p(\boldsymbol{x})}$$

$$\Rightarrow \max_i P(\boldsymbol{x} \mid H_i)$$

例：三元信号检测

$$H_0: x[n] = -A + w[n], n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$H_1: x[n] = w[n], n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$H_2: x[n] = A + w[n], n = 0,1,\ldots,N-1$$

$w[n]$ 为方差为 σ^2 的WGN。假定各种假设出现的先验概率相同。在最小错误概率准则下，该如何判决?

应采用最大似然判决准则

$$p(\mathbf{x} \mid H_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A_i)^2}_{\text{使之最小化}}\right\}，其中\ A_i = \begin{cases} -A, & i = 0 \\ 0, & i = 1 \\ A, & i = 2 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A_i)^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \bar{x} + \bar{x} - A_i)^2$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \bar{x})^2 + N \underline{(\bar{x} - A_i)^2} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} < -A/2, & 判H_0 \\ -A/2 < \bar{x} < A/2, & 判H_1 \\ \bar{x} > A/2, & 判H_2 \end{cases}$$

性能如何?

例：三元信号检测

$$H_0: x[n] = -A + w[n], n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$H_1: x[n] = w[n], n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$H_2: x[n] = A + w[n], n = 0,1,\ldots,N-1$$

$w[n]$为方差为σ^2的WGN。假定各种假设出现的先验概率相同。在最小错误概率准则下，该如何判决？

$$\begin{cases} \bar{x} < -A/2, & \text{判}H_0 \\ -A/2 < \bar{x} < A/2, & \text{判}H_1 \\ \bar{x} > A/2, & \text{判}H_2 \end{cases}$$

性能如何?

错误概率：

$$P_e = P(H_0)\big(P(H_1|H_0) + P(H_2|H_0)\big) + P(H_1)\big(P(H_0|H_1) + P(H_2|H_1)\big) + P(H_2)\big(P(H_0|H_2) + P(H_1|H_2)\big)$$

正确率：$P_c = P(H_0)P(H_0|H_0) + P(H_1)P(H_1|H_1) + P(H_2)P(H_2|H_2)$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(1 - Q\left(\frac{-A/2 + A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)\right) + \left(Q\left(\frac{-A/2}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right) - Q\left(\frac{A/2}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)\right) + Q\left(\frac{A/2 - A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)\right\}$$

$$= 1 - \frac{4}{3}Q\left(\sqrt{\frac{NA^2}{4\sigma^2}}\right) \Rightarrow P_e = 1 - P_c = \frac{4}{3}Q\left(\sqrt{\frac{NA^2}{4\sigma^2}}\right)$$

七、小结

- 检测的基本概念
- 两种检测准则

> • 无先验、风险不好量化
> • 如声纳、雷达等系统

- NP准则：固定虚警概率，使检测概率最大化

$$C_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ 1, & i\neq j\end{cases}$$

- 最小贝叶斯风险准则 $\xrightarrow{\text{风险一致}}$ 最小错误概率准则/最大后验概率判决准则 $\xrightarrow{\text{先验概率相同}}$ 最大似然判决准则

- 应用场景

——准则的选取应视条件而定，而非系统！

> • 有先验、风险可量化
> • 如通信、模式识别等系统

- 对量化、风险的理解
  - 泛化的风险：既可以是风险，也可以是收益
  - 量化：绝对量化、相对量化