9.5 Wigner-Ville 类分布

Wigner-Ville 分布是二次时频分析的代表

WVD及其性质

WVD的离散计算

模糊函数

Cohen类分布

Wigner-Ville 分布

连续Wigner－Ville分布的定义和性质

对于信号$x(t)$，它的自Wigner－Ville分布定义为

$$WVD_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\frac{\tau}{2})x^*(t-\frac{\tau}{2})e^{-j\omega\tau}d\tau$$

对于两个信号$x(t),y(t)$，定义其互Wigner－Ville分布为

$$WVD_{xy}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\frac{\tau}{2})y^*(t-\frac{\tau}{2})e^{-j\omega\tau}d\tau$$

WVD 的物理含义：定义信号的瞬时自相关函数为，

$$r_x(t,\tau)=x(t+\frac{\tau}{2})x^*(t-\frac{\tau}{2})$$

WVD 是瞬时自相关的傅立叶变换

$$WVD_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}r_x(t,\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

可以直观地理解 WVD 具有信号的“时变能量谱”的含义

互 WVD 的频域定义为

$$WVD_{xy}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}(\omega+\frac{\Omega}{2})\hat{y}^*(\omega-\frac{\Omega}{2})e^{j\Omega t}d\Omega$$

自 WVD 的频域定义为

$$WVD_{x}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}(\omega+\frac{\Omega}{2})\hat{x}^*(\omega-\frac{\Omega}{2})e^{j\Omega t}d\Omega$$

WVD的主要性质

WVD分布的边际特性

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} WVD_x(t,\omega)d\omega = \left|x(t)\right|^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} WVD_x(t,\omega)dt = \left|\hat{x}(\omega)\right|^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} WVD_x(t,\omega)dtd\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{x}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt$$

时移和频率调制不变性

(1) $y(t)=x(t-t_0)$

$$WVD_y(t,\omega)=WVD_x(t-t_0,\omega)$$

(2) $y(t)=x(t)e^{j\omega_0 t}$

$$WVD_y(t,\omega)=WVD_x(t,\omega-\omega_0)$$

瞬时频率

$$x(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$$

$$\varphi'(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega WVD_x(t,\omega)d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} WVD_x(t,\omega)d\omega}$$

群延迟

$$\hat{x}(\omega) = b(\omega)e^{j\psi(\omega)}$$

$$-\psi'(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} tWVD_x(t,\omega)dt}{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} WVD_x(t,\omega)dt}$$

WVD的几个实例

（1）几个理想信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad WVD_x(t,\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \delta(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad WVD_x(t,\omega) = \delta(t - t_0)$$

$$x(t) = e^{j\left(\beta t^2/2 + \omega_0 t\right)}$$

$$WVD_x(t,\omega) = 2\pi\delta(\omega - \beta t - \omega_0)$$

（2）几个局域信号

$$x(t) = g(t)e^{j\omega_0 t} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\omega_0 t}$$

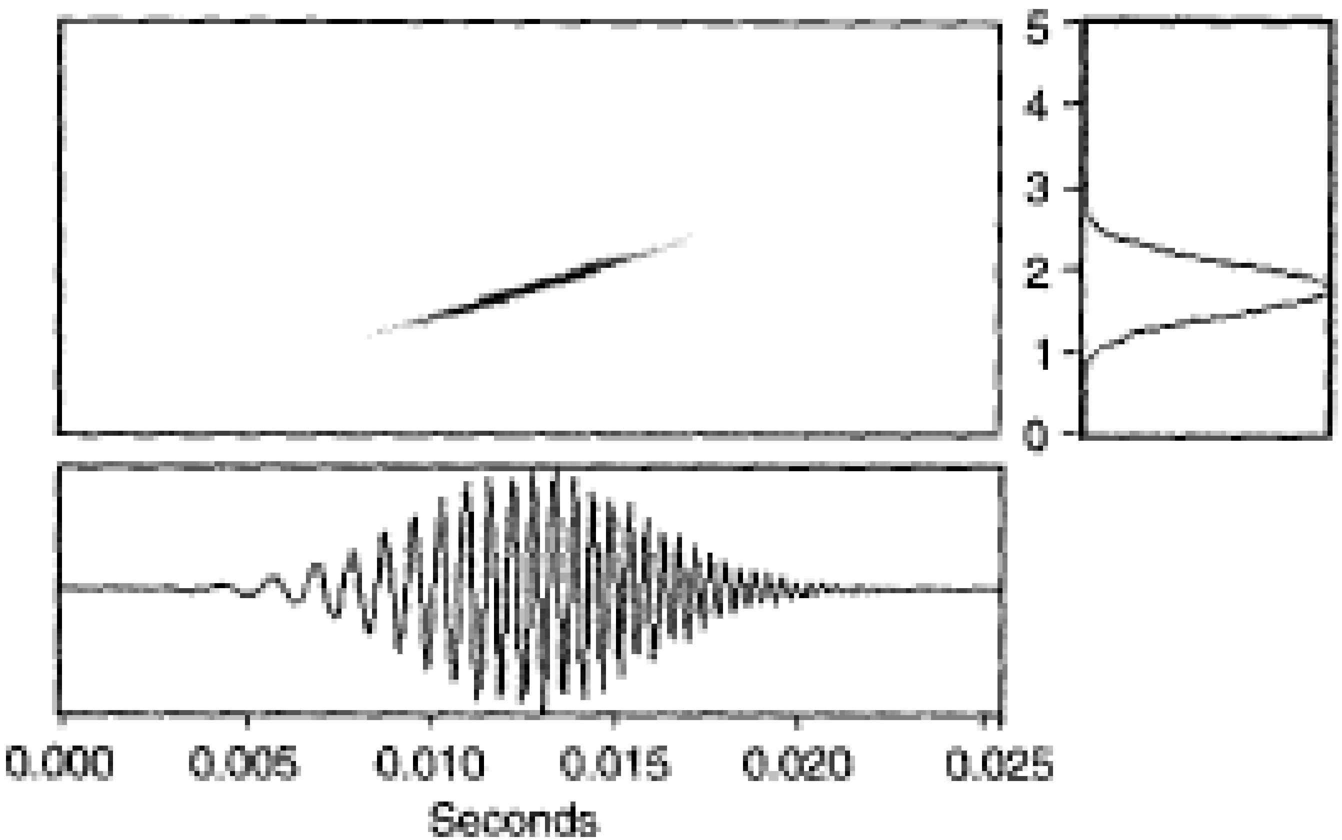
$$WVD_x(t,\omega) = 2e^{-\alpha t^2} e^{-(\omega-\omega_0)^2/\alpha}$$

$$x(t) = g(t)e^{j\left(\beta t^2/2+\omega_0 t\right)} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\left(\beta t^2/2+\omega_0 t\right)}$$

$$WVD_x(t,\omega) = 2e^{-\alpha t^2} e^{-(\omega-\beta t-\omega_0)^2/\alpha}$$

WVD的一些实例及问题

高斯包络线性调制信号



多分量信号的WVD分析

如果信号中含有N个分量，WVD中存在N(N-1)/2个交叉项

设： $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

则：
$$
\begin{aligned}
WVD_x(t,\omega) &= WVD_{x_1}(t,\omega)+WVD_{x_2}(t,\omega)+ \\
&+WVD_{x_1x_2}(t,\omega)+WVD_{x_2x_1}(t,\omega) \\
&=WVD_{x_1}(t,\omega)+WVD_{x_2}(t,\omega)+ \\
&\underline{+2\,\mathrm{Re}\left\{WVD_{x_1x_2}(t,\omega)\right\}}
\end{aligned}
$$

交叉项

两信号分量的实例1

$$x(t) = a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t}$$

$$WVD_x(t,\omega) = 2\pi a_1^2 \delta(\omega - \omega_1) + 2\pi a_2^2 \delta(\omega - \omega_2) +$$

$$+ 4\pi a_1 a_2 \delta\left(\omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\cos\left((\omega_2 - \omega_1)t\right)$$

特例： $x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$

$$WVD_x(t,\omega) = \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0) +$$

$$+ \pi\delta(\omega)\cos(2\omega_0 t)$$

两信号分量的实例2

$$x(t) = g(t-t_1)e^{j\omega_1 t} + g(t-t_2)e^{j\omega_2 t}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha(t-t_1)^2/2+j\omega_1 t} + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha(t-t_2)^2/2+j\omega_2 t}$$

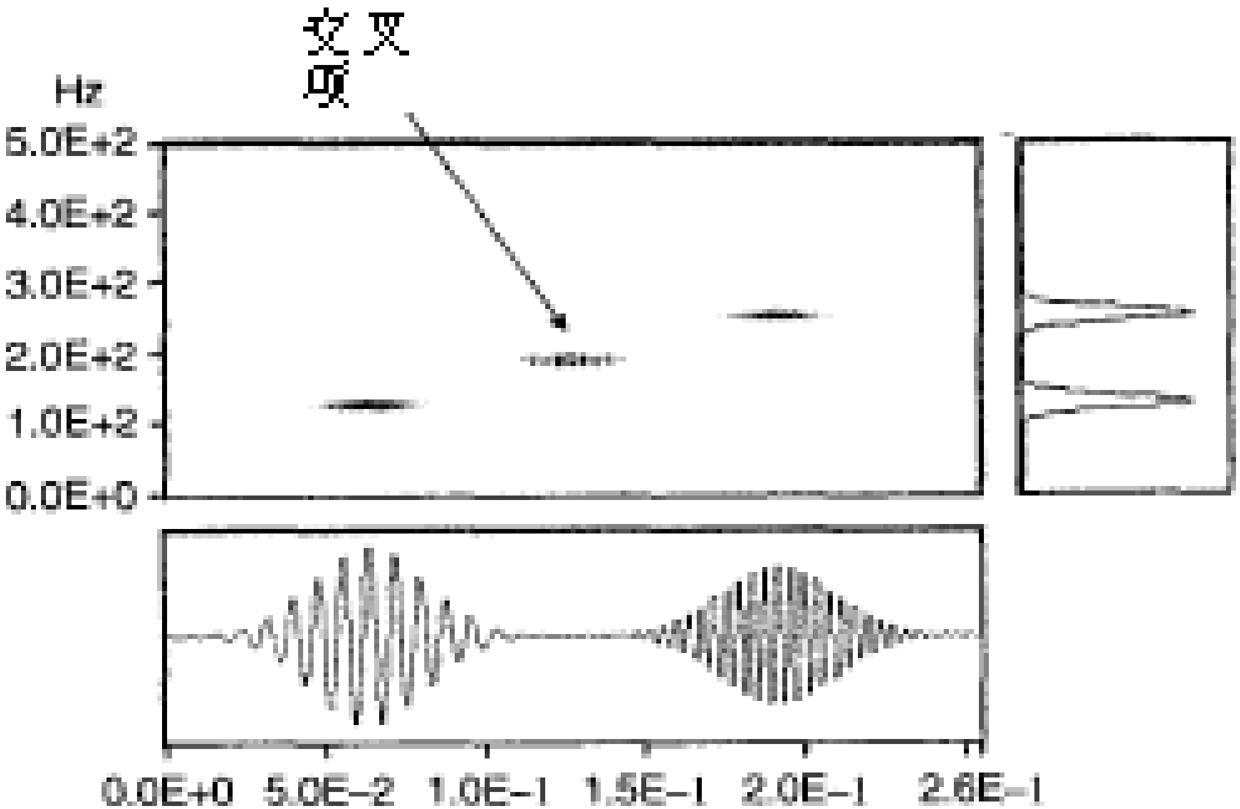
$$WVD_x(t,\omega) = 2e^{-\alpha(t-t_1)^2-(\omega-\omega_1)^2/\alpha} + 2e^{-\alpha(t-t_2)^2-(\omega-\omega_2)^2/\alpha}$$

$$+ 4e^{-\alpha(t-\bar{t})^2-(\omega-\bar{\omega})^2/\alpha} \cos\left[(\omega-\bar{\omega})t_d + \omega_d(t-\bar{t}) + \omega_d \bar{t}\right]$$

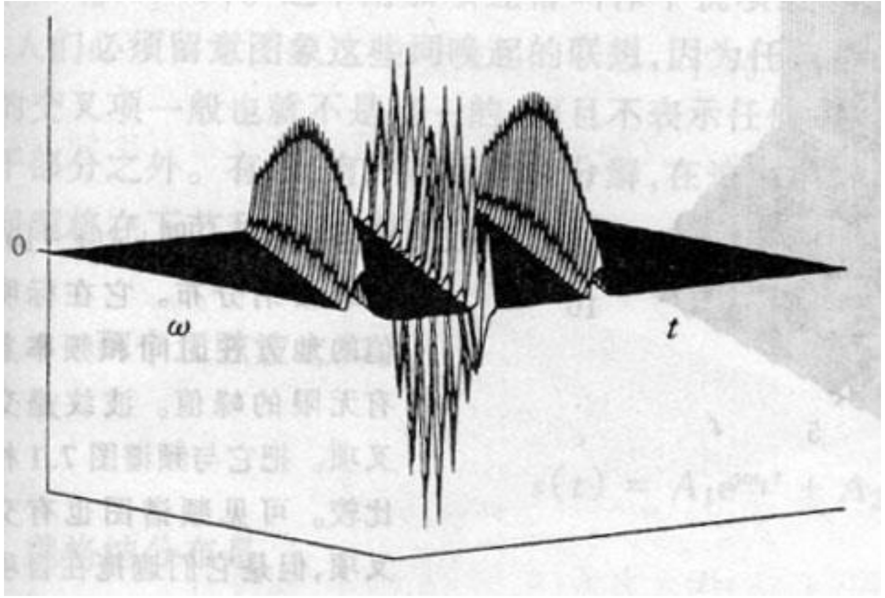
其中

$$\bar{t} = \frac{t_1+t_2}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \quad t_d = \frac{t_1-t_2}{2}, \quad \omega_d = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

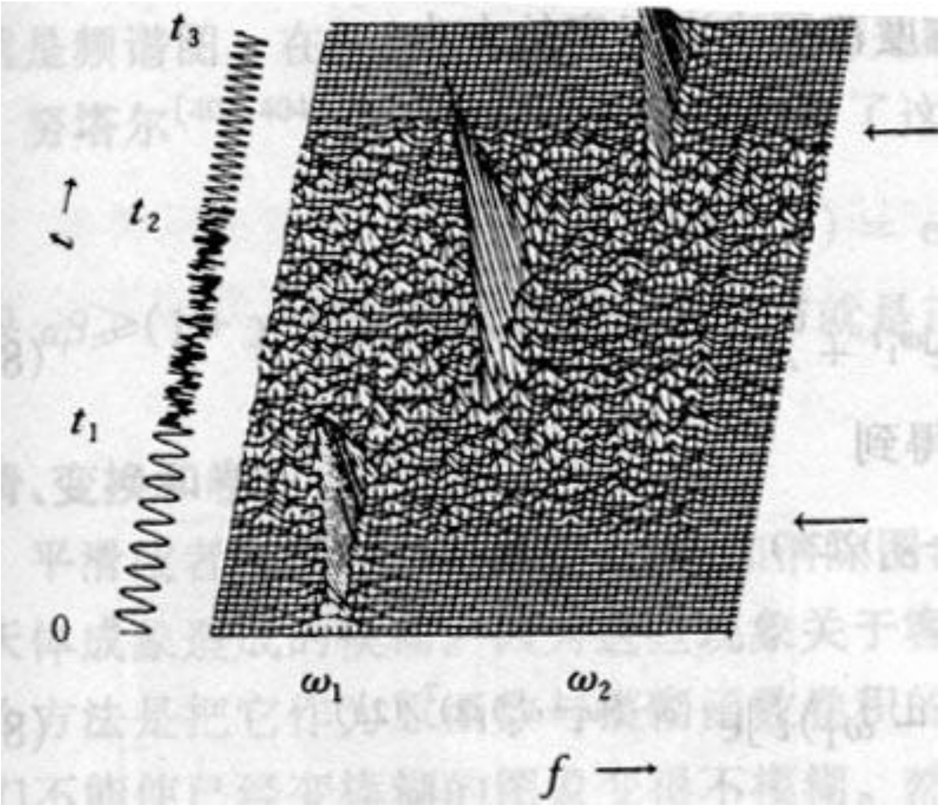
两个在不同时间和以不同频率出现的高斯调制复正弦之和构成的信号



立体图表示：两个线性调频信号的WVD



存在噪声情况下的WVD：也引起交叉项



实窄带调制信号的WVD分析

解决思路：将实信号变成解析信号，进行WVD

实信号 $x(t)$ 的解析信号为：

$$x_a(t) = x(t) + jH\left\{x(t)\right\}$$

这里：

$$H\left\{x(t)\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

模糊函数

信号的瞬时自相关函数为，

$$r_x(t,\tau)=x(t+\frac{\tau}{2})x^*(t-\frac{\tau}{2})$$

如果以t为变量，对$r_x(t,\tau)$作傅立叶反变换，为信号$x(t)$的对称模糊函数

$$AF_x(\theta,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\frac{\tau}{2})x^*(t-\frac{\tau}{2})e^{j\theta t}dt$$

定义两个信号的互模糊函数为

$$AF_{x,y}(\theta,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\frac{\tau}{2})y^*(t-\frac{\tau}{2})e^{j\theta t}dt$$

WVD 和 AF 之间的关系:

既然 $r_x(t,\tau)$ 和 $AF_x(\theta,\tau)$ 是傅立叶变换对，则有

$$r_x(t,\tau)=x(t+\frac{\tau}{2})x^*(t-\frac{\tau}{2})=\int_{-\infty}^{+\infty}AF_x(\theta,\tau)e^{-j\theta t}d\theta$$

WVD 和 AF 之间的关系式为

$$WVD_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}AF_x(\theta,\tau)e^{-j(\theta t+\omega\tau)}d\theta d\tau$$

AF与WVD是两维傅立叶变换对

高斯包络信号的（复）模糊函数

例 信号 $x(t)=g(t-t_0)e^{j\omega_0 t}=\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha(t-t_0)^2/2+j\omega_0 t}$ 的模糊函数为

$$AF_x(\theta,\tau)=e^{-\left(\frac{1}{4\alpha}\theta^2+\frac{\alpha}{4}\tau^2\right)}e^{j(\omega_0\tau+\theta t_0)}$$

在 AF 的 (θ,τ) 平面，其能量集中在原点附近.

例 两个分量信号

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=g(t-t_1)e^{j\omega_1 t}+g(t-t_2)e^{j\omega_2 t}$$
$$=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha(t-t_1)^2/2+j\omega_1 t}+\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha(t-t_2)^2/2+j\omega_2 t}$$

模糊函数为如下 4 项组成

$$AF_x(\theta,\tau)=AF_{x1}(\theta,\tau)+AF_{x2}(\theta,\tau)+AF_{x1,x2}(\theta,\tau)+AF_{x2,x1}(\theta,\tau)$$

后两项是互 AF 函数，互 AF 函数的形式为

$$AF_{x1,x2}(\theta,\tau)=e^{-\left(\frac{1}{4\alpha}(\theta-\omega_d)^2+\frac{\alpha}{4}(\tau-t_d)^2\right)}e^{j(\bar{\omega}\tau-\theta\bar{t}+\omega_d\bar{t})}$$

$$\bar{t}=\frac{t_1+t_2}{2},\qquad \bar{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2},\qquad t_d=\frac{t_1-t_2}{2},\qquad \omega_d=\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

AF 的交叉项的能量中心在 $(\theta,\tau)=(\omega_d,t_d)$ 处

Cohen 类

$WVD_x(t,\omega)$ 和 $AF_x(\theta,\tau)$ 互为二维傅立叶变换，可以将 (θ,τ) 看作是 (t,ω)

的“频域”，由 AF 的性质，构造一个在 (θ,τ) 域的低通滤波器 $\Phi(\theta,\tau)$，

由于 $\Phi(\theta,\tau)$ 的低通特性，它与 $AF_x(\theta,\tau)$ 相乘，保存了 $AF_x(\theta,\tau)$ 在原点附近的

能量（自项），降低了 $AF_x(\theta,\tau)$ 远离原点处的能量（交叉项），$AF_x(\theta,\tau)\times\Phi(\theta,\tau)$

作二维傅立叶变换，就得到一个压制了交叉项的新的时一频分布，

这样构造的时一频分布称为 Cohen 类，即

$$C_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}AF_x(\theta,\tau)\Phi(\theta,\tau)e^{-j(\theta t+\omega\tau)}d\theta d\tau$$

Cohen类的另一种形式

信号 $x(t)$ 的 Cohen 类定义为：

$$C_x(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty}x(u+\frac{\tau}{2})x^*(u-\frac{\tau}{2})\Phi(\theta,\tau)e^{-j(\theta t+\omega\tau-\theta u)}du\,d\tau\,d\theta$$

$\Phi(\theta,\tau)$ 称为核函数，取不同的核函数，构成一系列不同的时一频分析

例：Cohen类将STFT包含为一个特例

若取 $\Phi(\theta,\tau)$ 是窗函数的模糊函数，$C_x(t,\omega)$ 就是 STFT 的谱图 $\left|STFT(t,\omega)\right|^2$

Cohen类的一些例子

名称	核函数	分布 $C_x(t,\omega)$
WVD	1	$WVD_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\frac{\tau}{2})x^*(t-\frac{\tau}{2})e^{-j\omega\tau}d\tau$
Margenau －Hill	$\cos\frac{\theta\tau}{2}$	$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}x(t)\hat{x}^*(\omega)e^{-j\omega t}\right\}$
Born- Jordan Cohen	$\frac{\sin\frac{\theta\tau}{2}}{\frac{\theta\tau}{2}}$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lvert\tau\rvert}e^{-j\omega\tau}\int_{t-\lvert\tau\rvert/2}^{t+\lvert\tau\rvert/2}x(u+\frac{\tau}{2})x^*(u-\frac{\tau}{2})du\,d\tau$

Choi-William	$e^{-(\theta\tau)^2/\sigma}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau^2/\sigma}}e^{-\sigma(u-t)^2/\tau^2-j\tau\omega}x(u+\frac{\tau}{2})x^*(u-\frac{\tau}{2})du\,d\tau$
Cone-Shape	$\frac{\sin\alpha\theta\tau}{\alpha\theta\tau}\lvert\tau\rvert g(\tau)$	$\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)e^{-j\omega\tau}\int_{t-\lvert\tau\rvert\alpha}^{t+\lvert\tau\rvert\alpha}x(u+\frac{\tau}{2})x^*(u-\frac{\tau}{2})du\,d\tau$
谱图	$g(t)$的 AF	$\lvert STFT(t,\omega)\rvert^2=\left\lvert\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)g^*(\tau-t)e^{-j\omega\tau}d\tau\right\rvert^2$