2022秋季学期《应用信息论基础》作业1-1

请于2022.10.12随堂提交，请写明姓名学号

1. 设有n个球，每个球都以同样的概率落入N个格子（N ≥ n）中。假定：
   A：某指定的 n 个格子各落入一球；
   B：任意 n 个格子各落入一球。
   请计算事件 A、B 发生后所提供的信息量。

2. 设二元离散随机变量X具有分布P_1和P_2，$P_2 > P_1$，现将其分布变为新的分布$P_1+\varepsilon$和$P_2-\varepsilon$，ε满足$0<2\varepsilon<P_2-P_1$，试分析在新的分布下熵$H(X)$随ε的变化规律，并证明你的结论。

3. 设离散随机变量X_1和X_2分别定义于集合：
   $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_K\}$和$B=\{a_{K+1},a_{K+2},\cdots,a_M\}$
   其概率分布分别为$p(a_i)$和$p(a_j)$，其中$i=1,2,\cdots,K$，$j=K+1,\cdots,M$。现构造随机变量X：
   $X=\begin{cases}X_1 & \text{依概率}\alpha\\ X_2 & \text{依概率}1-\alpha\end{cases}$
   求$H(X)$（用$H(X_1)$、$H(X_2)$和α表示。

4. 设离散随机变量X_1和X_2具有相同的分布。令
   $\rho=1-\frac{H(X_2|X_1)}{H(X_1)}$
   1）证明：$\rho=\frac{I(X_1;X_2)}{H(X_1)}$及$0\le\rho\le1$；
   2）分别给出$\rho=0$和$\rho=1$时X_1和X_2之间的统计关系。

5. 设随机变量X，Y分别取值于$\{x_0,x_1\}$和$\{y_0,y_1\}$，已知$P\{X=x_i\}=0.5\,(i=0,1)$，且联合分布为$p(x_k,y_k)=\frac{1-\varepsilon}{2}$，$p(x_k,y_{1-k})=\frac{\varepsilon}{2}$，求$I(X;Y)$。

6. X、Y、Z为离散随机变量，证明如下不等式并说明等号成立条件。
   1）$H(XY|Z)\ge H(X|Z)$；
   2）$H(XYZ)-H(XY)\le H(XZ)-H(X)$。

7. 设随机变量X和Y的联合分布如下所示：

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

随机变量$Z = X \bigoplus Y$，其中$\bigoplus$为模2和。试求：

1）$H(X)$，$H(Y)$；

2）$H(XY)$，$H(Y X)$，$H(XZ)$；

3）$I(X;Y)$，$H(XYZ)$。

8. 设离散随机变量X，Y，Z的值均取自集合{0,1}，试给出实例，满足：$I(X;Y) = 0\text{bit}$，$I(X;Y|Z) = 1\text{bit}$。

9. X、Y、Z为离散随机变量，证明如下不等式并借助通信系统的例子说明其物理含义：

1）$I(XY;Z) \geq I(X;Z)$；

2）若X与Y独立，则$I(Y;Z|X) \geq I(Y;Z)$；

3）若X与Y独立，则$I(XY;Z) \geq I(X;Z) + I(Y;Z)$。

10. X为离散随机变量，$g(X)$为X的函数，证明：$H(g(X)) \leq H(X)$，并给出等号成立条件。

11. 随机变量X、Y、Z联合分布与边际分布乘积之间的KL散度为$D\big(p(x,y,z)||p(x)p(y)p(z)\big)$，用熵的形式将其展开，并说明何时该散度为0.