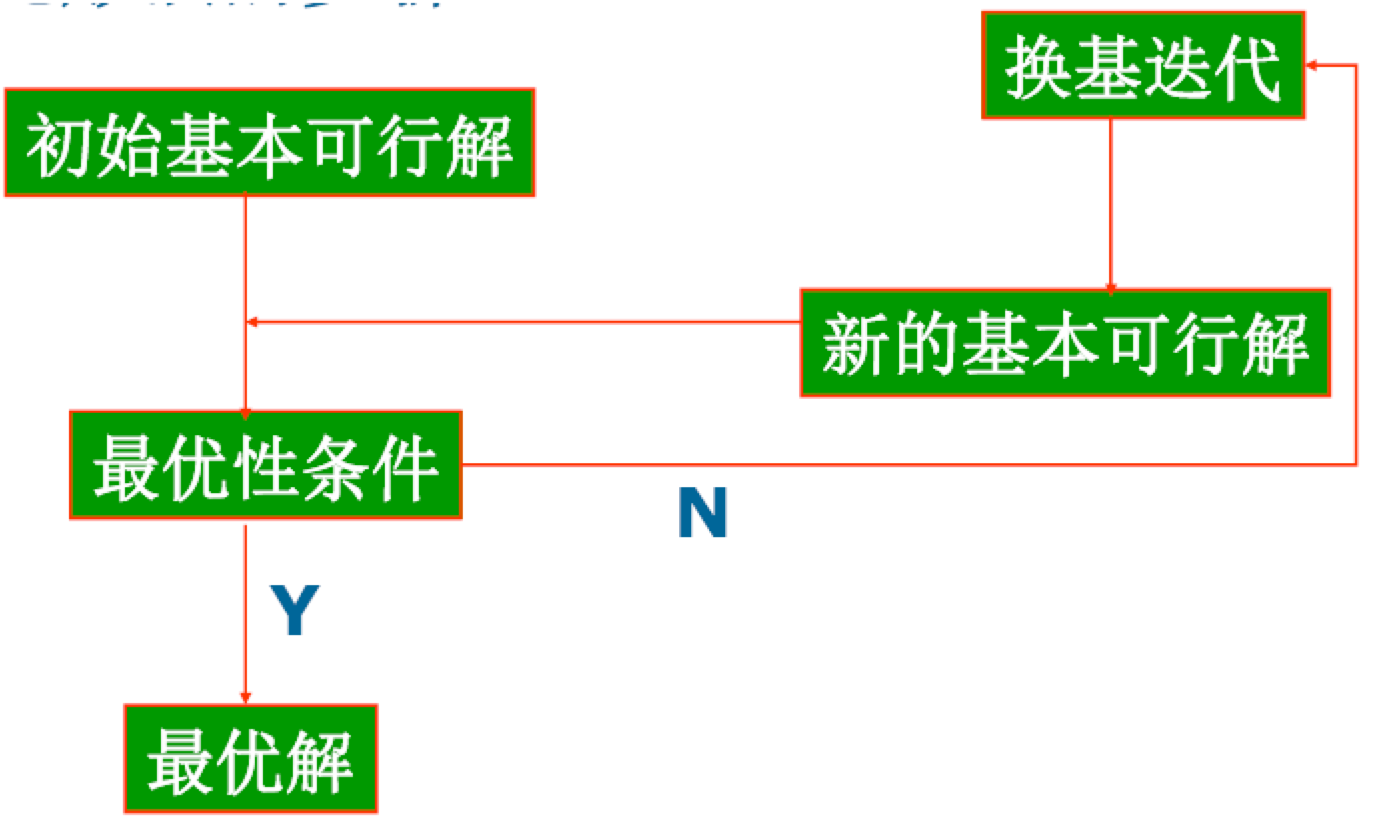
- 单纯形法

*可行域的极点对应LP问题的基可行解

*LP的最优解一定可以在基可行解中找到

思路



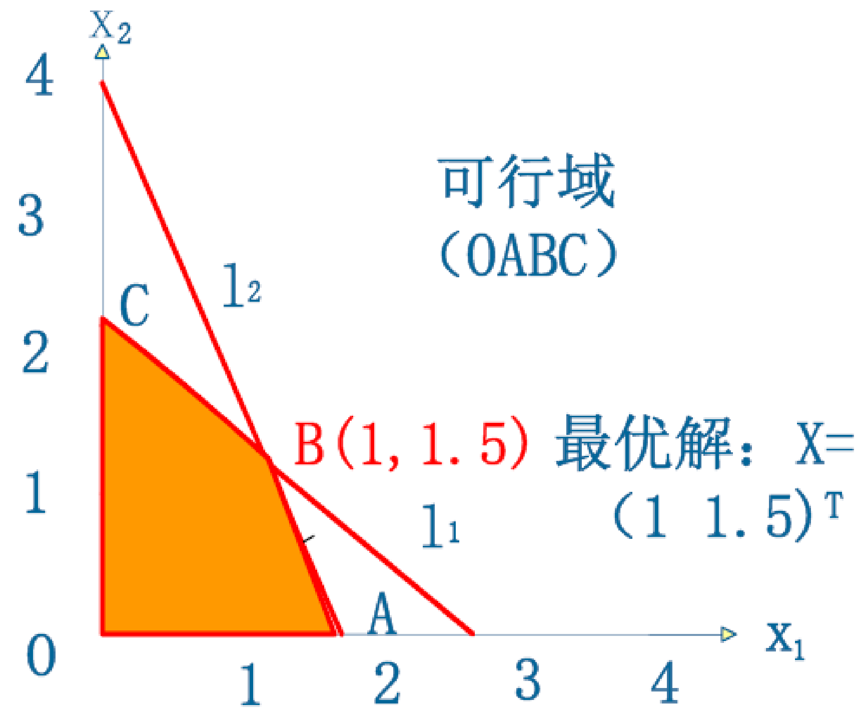
举例

$$\min z = -10x_1 - 5x_2$$

$$s.t \quad 3x_1 + 4x_2 \le 9 \qquad l_1$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 8 \qquad l_2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



步骤：

1、化标准型（SLP）

$$\min z = -10x_1 - 5x_2$$

$$s.t.\quad \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_4 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2、找初始基本可行解

$$\min z = -10x_1 - 5x_2$$

$$s.t.\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

*系数的增广矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

*取初始可行基为 $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X^{(0)} = (0\ 0\ 9\ 8)^T$ $z^{(0)} = 0$

3、判断

$$x_3 = 9 - 3x_1 - 4x_2$$

$$x_4 = 8 - 5x_1 - 2x_2$$

$\min z = -10x_1 - 5x_2$

4、换基迭代

*换基：找一个非基变量作为换入变量，同时确定一个基变量为换出变量。

*依据原则：1)新的基可行解能使目标值减少；

2)新的基仍然是可行基。

(1)确定换入变量：从x_1, x_2中选一变量进基；

选取x_1为换入变量。 $\Rightarrow x_1$

(2)确定换出变量

$(a)x_2$仍为非基变量，令$x_2=0$

(b)确定x_3,x_4与x_1的关系：

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_3 = 9 - 3x_1 \geq 0 \\ x_4 = 8 - 5x_1 \geq 0 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 \leq 3 \\ x_1 \leq 1.6 \end{matrix}}$$

x_1取$\min\{3,1.6\}=1.6$，　即$x_4=0 \Longrightarrow x_4$出基

得到新基$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

*迭代（求新的基可行解）

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & 1 & 0 & 9 \\ \underline{5} & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 2/5 & 0 & 1/5 & 8/5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 14/5 & 1 & -3/5 & 21/5 \\ 1 & 2/5 & 0 & 1/5 & 8/5 \end{pmatrix}$$

主元素

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 8/5 & 0 & 21/5 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad z^{(1)} = -16$$

5、判断

$$\begin{pmatrix} 0 & 14/5 & 1 & -3/5 & 21/5 \\ 1 & 2/5 & 0 & 1/5 & 8/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{14}{5}x_2 + x_3 - \tfrac{3}{5}x_4 &= \tfrac{21}{5} \\ x_1 + \tfrac{2}{5}x_2 \qquad + \tfrac{1}{5}x_4 &= \tfrac{8}{5} \end{aligned}$$

$$x_3 = \tfrac{21}{5} - \tfrac{14}{5}x_2 + \tfrac{3}{5}x_4$$

$$x_1 = \tfrac{8}{5} \quad - \tfrac{2}{5}x_2 - \tfrac{1}{5}x_4$$

代入目标函数得

$$z = -10x_1 - 5x_2 = -16 - x_2 + 2x_4$$

$(-1, 2$为检验系数$)$

6、确定进基变量和出基变量

*确定x_2为进基变量，则x_4仍为非基变量。

$$x_3 = 21/5 - 14/5\, x_2 + 3/5\, x_4$$
$$x_1 = 8/5 \quad - 2/5\, x_2 - 1/5\, x_4$$

$$x_3 = 21/5 - 14/5\, x_2 \ge 0 \Rightarrow x_2 \le 3/2$$
$$x_1 = 8/5 - 2/5\, x_2 \ge 0 \Rightarrow x_2 \le 4$$

$$x_2 = \min\left\{3/2, 4\right\} = 3/2$$

x_3为出基变量

7、换基迭代

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{14}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{21}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

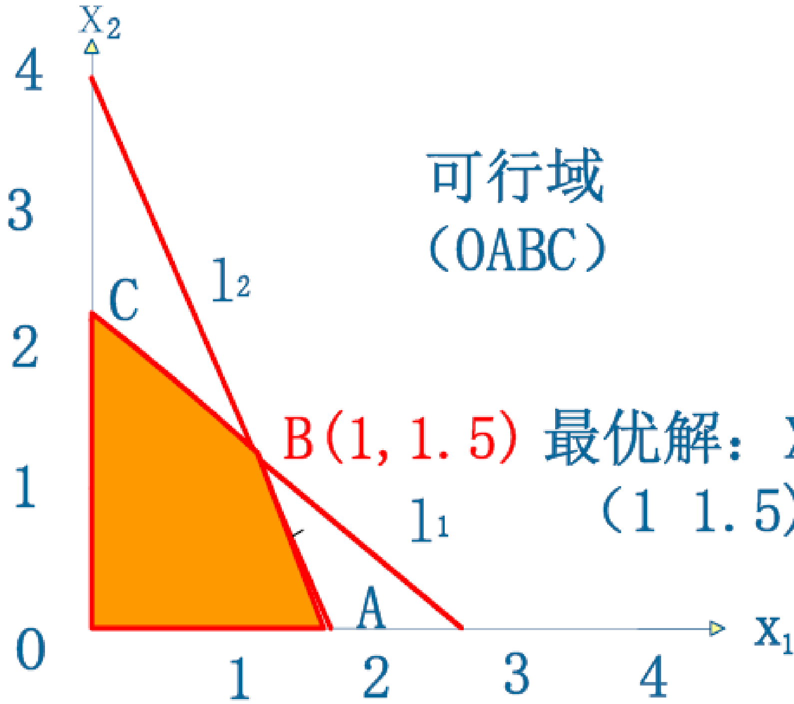
$$X^{(2)} = \left(1 \ \ \tfrac{3}{2} \ \ 0 \ \ 0\right)^T \qquad z^{(2)} = -17.5$$

8、判断

$$\begin{cases} x_2 + \frac{5}{14}x_3 - \frac{3}{14}x_4 = \frac{3}{2} \\ x_1 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{14}x_3 + \frac{3}{14}x_4 \\ x_1 = 1 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4 \end{cases}$$

代入目标函数： $z = -17.5 + \frac{5}{14}x_3 + \frac{25}{14}x_4$

最优解： $X^* = (1\ \ 1.5\ \ 0\ \ 0)^{\mathrm{T}} \quad z^* = -17.5$



l_1

l_2

最优解：X=（1 1. 5）^{T}

$$X^{(0)} = (0\ \ 0\ \ 9\ \ 8)^T$$

$$X^{(1)} = \left(\tfrac{8}{5}\ \ 0\ \ \tfrac{21}{5}\ \ 0\right)^T$$

$$X^{(2)} = \left(1\ \ \tfrac{3}{2}\ \ 0\ \ 0\right)^T$$ 最优解

$$(L)\quad \begin{cases} \min & f(x)=cx \\ s.t. & Ax=b \qquad A_{m\times n}\ r(A)=m \\ & x\geq 0 \end{cases}$$

$$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

设(L)有一个初始可行基 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m),\ A=(B,N)$ **$c=(c_B, c_N)$**

初始基本可行解为: $x^{(0)}=\left(\left(B^{-1}b\right)^T 0\right)^T \quad f(x^{(0)})=c_B B^{-1}b \qquad B^{-1}b\geq 0$

设 $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ 为任一可行解，由 $Ax=b$ 得

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$

$$\therefore f(x)=c_Bx_B+c_Nx_N=c_B\left(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N\right)+c_Nx_N$$

$$=c_BB^{-1}b-\left(c_BB^{-1}N-c_N\right)x_N$$

$$\boxed{z_j=c_BB^{-1}P_j}$$

$$=f\left(x^{(0)}\right)-\sum_{j\in R}\left(z_j-c_j\right)x_j$$ R 非基变量下标集

$f(x)=f\left(x^{(0)}\right)-\sum_{j\in R}\left(z_j-c_j\right)x_j$　R非基变量下标集

z_j-c_j ————————称为检验数或判别数。

（注：基变量的检验数=0）

(1) 对任意的$j\in R$，有$z_j-c_j\le 0$，则$x^{(0)}$为最优解。

(2) 存在$j\in R$使得$z_j-c_j>0$. 令

$$z_k-c_k=\max_{j\in R}\left\{z_j-c_j\right\}$$

$$\boxed{z_j=c_B B^{-1}P_j}$$

取　$x_N=(0,\cdots,0,x_k,0,\cdots,0)^T$

则　$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N=\bar{b}-y_k x_k$

其中　$\bar{b}=B^{-1}b$，　$y_j=B^{-1}P_j$

而　$f(x)=f\left(x^{(0)}\right)-\left(z_k-c_k\right)x_k$

考虑x_k的取值。

$$f(x)=f\left(x^{(0)}\right)-(z_k-c_k)x_k$$

$$x_B=\bar{b}-y_k x_k=\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{b}_2\\ \vdots\\ \bar{b}_m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y_{1k}\\ y_{2k}\\ \vdots\\ y_{mk}\end{pmatrix}x_k\,(\geq 0)$$

$y_k=B^{-1}P_k$

(a) 若$\forall i, y_{ik}\leq 0$, 则$f(x)\to-\infty$, 原问题无界。

(b) 若$\exists i, y_{ik}>0$, 取 $x_k=\min\left\{\dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\mid y_{ik}>0\right\}=\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}}>0$

则得新解 $x=(x_1,\cdots,x_{r-1},0,x_{r+1},\cdots,x_m,0,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T$

且 $f(x)=f\left(x^{(0)}\right)-(z_k-c_k)\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}}\left(<f\left(x^{(0)}\right)\right)$.

旧基为 $P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$ → x_r 为离基变量

新基为 $P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$ → x_k 为进基变量。

证明：因为 $B=(P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)$，$P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$ 线性无关，

$\because \quad y_k = B^{-1}P_k$，

$$\therefore P_k = By_k = (P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \cdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} = y_{1k}P_1+\cdots+y_{rk}P_r+\cdots+y_{mk}P_m$$

即 P_k 是 $P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$ 的线性组合；

又因为 $y_{rk}\neq 0$，所以有

$$P_r = \frac{1}{y_{rk}}P_k - \frac{1}{y_{rk}}(y_{1k}P_1+\cdots+y_{r-1k}P_{r-1}+y_{r+1k}P_{r+1}+\cdots+y_{mk}P_m)$$

即 P_r 是 $P_1,\cdots,P_{r-1},P_{r+1},\cdots,P_m,P_k$ 的线性组合

$\therefore \quad P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m \sim P_1,\cdots,P_{r-1},P_{r+1},\cdots,P_m,P_k$

即 $P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$ 线性无关

单纯形法计算步骤：

初始基为B，初始基本可行解为$x^{(0)} = ((B^{-1}b)^T\ 0)^T$ $\quad B^{-1}b \geq 0$

↓

是否所有的$c_B B^{-1} P_j - c_j \leq 0$ —是→ $x^{(0)}$为最优解

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0$$

↓

是否$y_k = B^{-1} P_k \leq 0$ —是→ 无界

取$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\}$$

↓

以P_k代替P_{B_r}换基，即x_{B_r}为离基变量，x_k为进基变量。

$$\min z = x_1 - x_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{z_j - c_j = c_B B^{-1} P_j - c_j}$$

解：系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$

第1次迭代：$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$

$x_B = B^{-1}b = (x_3\ x_4)^T = (1\quad 5)^T,\ x_N = (x_1\ x_2)^T = (0\,0)^T$

$c_B = (0\,0),\ f_1 = c_B B^{-1} b = 0$

令 $w = c_B B^{-1}$ ————————称为单纯形乘子

$z_1 - c_1 = wP_1 - c_1 = -1 < 0$

$z_2 - c_2 = wP_2 - c_2 = 1 > 0$ $\qquad \therefore$ 原问题无界。

$$y_2 = B^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} < 0$$

$$\min -4x_1 - x_2$$

$$
\begin{aligned}
s.t\quad & -x_1+2x_2+x_3 &&=4\\
& 2x_1+3x_2 \quad +x_4 &&=12\\
& x_1-x_2 \quad\quad +x_5 &&=3\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0
\end{aligned}
$$

$$\boxed{z_j-c_j=c_BB^{-1}P_j-c_j}$$

解：$A=(P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

第1次迭代：$B=(P_3\ P_4\ P_5)=I,\ B^{-1}=B,\ c_B=0$

$x_B=(x_3\ x_4\ x_5)^T=B^{-1}b=(4\ 12\ 3)^T,\ x_N=(x_1\ x_2)^T=0$

$f_1=c_BB^{-1}b=0,\quad w=c_BB^{-1}=0$

$z_1-c_1=wP_1-c_1=4\quad z_2-c_2=wP_2-c_2=1$

最大判别数是z_1-c_1，$\therefore x_1$是进基变量。计算

$y_1=B^{-1}P_1=P_1=(-1\ 2\ 1)^T$，而$\bar{b}=(4\ 12\ 3)^T$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}}=\min\left\{\frac{\bar{b}_2}{y_{21}},\frac{\bar{b}_3}{y_{31}}\right\}=\min\left\{\frac{12}{2},\frac{3}{1}\right\}=\frac{3}{1}$$

$\therefore r=3$，即x_5为离基变量，用P_1代替P_5得到新基。

$$A=(P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$z_j-c_j=c_BB^{-1}P_j-c_j$$

第2次迭代： $B=(P_3\ P_4\ P_1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$c_B=(0\ 0\ -4)$

$x_B=(x_3\ x_4\ x_1)^T=B^{-1}b=(7\ \ 6\ \ 3)^T,\ x_N=(x_2\ x_5)^T=0$

$f_1=c_BB^{-1}b=-12,\quad w=c_BB^{-1}=(0\ \ 0\ \ -4)$

$\boxed{\min -4x_1-x_2}$

$z_2-c_2=wP_2-c_2=5\quad z_5-c_5=wP_5-c_5=-4$

最大判别数是z_2-c_2，$\therefore x_2$是进基变量。计算

$y_2=B^{-1}P_2=(1\ \ 5\ \ -1)^T$，而$\bar{b}=B^{-1}b=(7\ \ 6\ \ 3)^T$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}}=\min\left\{\frac{\bar{b}_1}{y_{12}},\frac{\bar{b}_2}{y_{22}}\right\}=\min\left\{\frac{7}{1},\ \frac{6}{5}\right\}=\frac{6}{5}=\frac{\bar{b}_2}{y_{22}}$$

$\therefore x_4$为离基变量，用P_2代替P_4得到新基。

$$A=(P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5)=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{z_j-c_j=c_B B^{-1}P_j-c_j}$$

$$\boxed{\min -4x_1-x_2}$$

第3次迭代： $B=(P_3\ P_2\ P_1)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$$c_B=(0\ -1\ -4)$$

$$x_B=(x_3\ x_2\ x_1)^T=B^{-1}b=\left(29/5\ \ 6/5\ \ 21/5\right)^T, x_N=(x_4\ x_5)^T=0$$

$$f_1=c_B B^{-1}b=-18, \quad w=c_B B^{-1}=(0\ -1\ -2)$$

$$z_4-c_4=wP_4-c_4=-1 \quad z_5-c_5=wP_5-c_5=-2$$

$\therefore$得到最优解

$$\bar{x}=\left(\frac{21}{5}\ \frac{6}{5}\ \frac{29}{5}\ 0\ 0\right)^T, f_{\min}=-18$$