1. $X$ 赋范线性空间，求证：$X$ Banach $\Leftrightarrow$ $S_X=\{x\in X, \|x\|=1\}$ 完备

证："$\Rightarrow$" $S_X\subset X$ 为闭集，故完备

"$\Leftarrow$" $\forall$ $X$ 中柯西列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$，则 $\{\|x_n\|\}_{n\geq 1}$ 为 $\mathbb{R}$ 上柯西列

设 $\|x_n\|\to c$

若 $c=0$，则 $x_n\to 0$

若 $c>0$，则 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}_{n\geq 1}$ 为 $S_X$ 上柯西列，设 $\frac{x_n}{\|x_n\|}\to y$

则 $x_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}\cdot\|x_n\|\to cy$

故 $X$ 完备

注1：若 $c=0$，则 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 不一定为柯西列

注2：$X$ 有限维时 才能 由闭集推出紧集

2. $x_0\in X$, $\delta>0$, $T: X\to X$, $x\mapsto\frac{x-x_0}{\delta}$ 求证：$T(\overline{B(x_0,\delta)})=\overline{B(0,1)}$

证：$T^{-1}: X\to X$, $y\mapsto \delta y+x_0$ 有 $T(\overline{B(x_0,\delta)})\subset\overline{B(0,1)}$

$T^{-1}(\overline{B(0,1)})\subset\overline{B(x_0,\delta)}$

故 $T(\overline{B(x_0,\delta)})=\overline{B(0,1)}$