第10章 小波变换导论

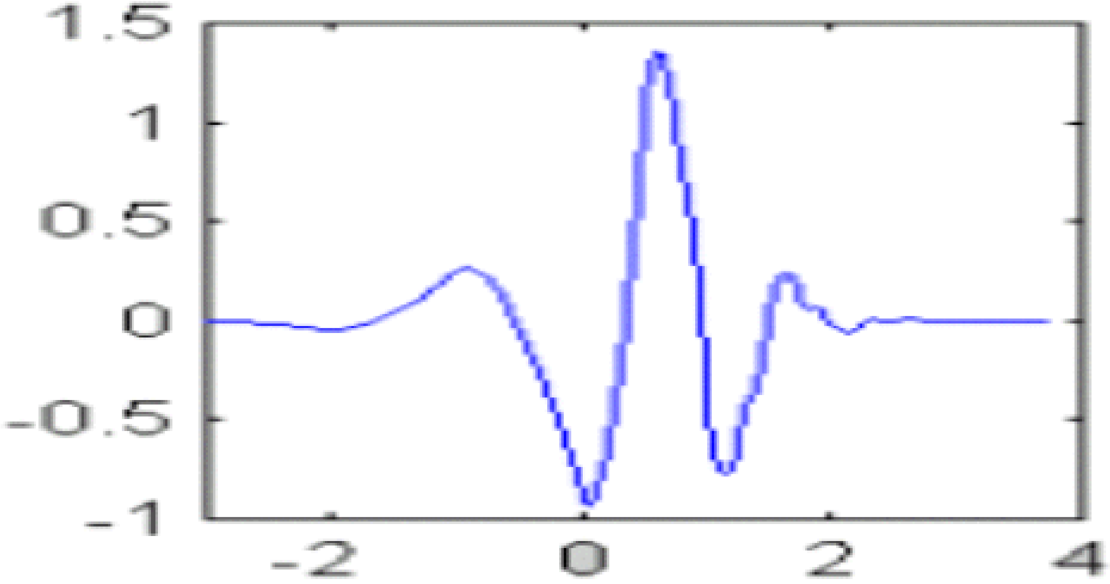
连续小波变换（Continuous wavelet tramsform)

定义：设 x(t)是平方可积函数（记作 $x(t)\in L^2(R)$ ），$\psi(t)$ 是被称为基本小波或母小波的函数，则

$$WT_x(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int x(t)\psi^*(\frac{t-b}{a})dt=\langle x(t),\psi_{ab}(t)\rangle$$

称为 x(t)的小波变换，式中 a>0 是尺度因子，b 是位移，$b\in R$，其中

$$\psi_{ab}(t)\triangleq\frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a})$$

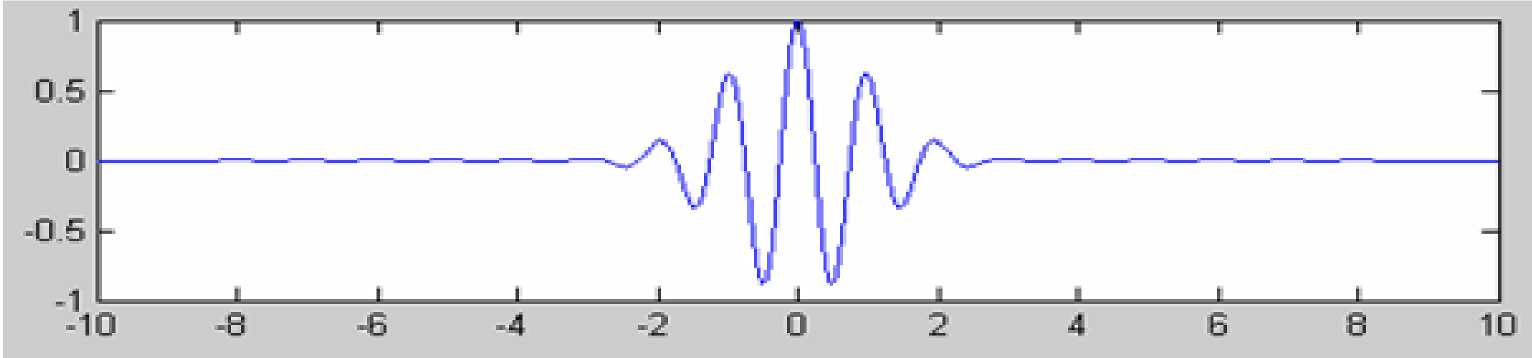


实小波的例子

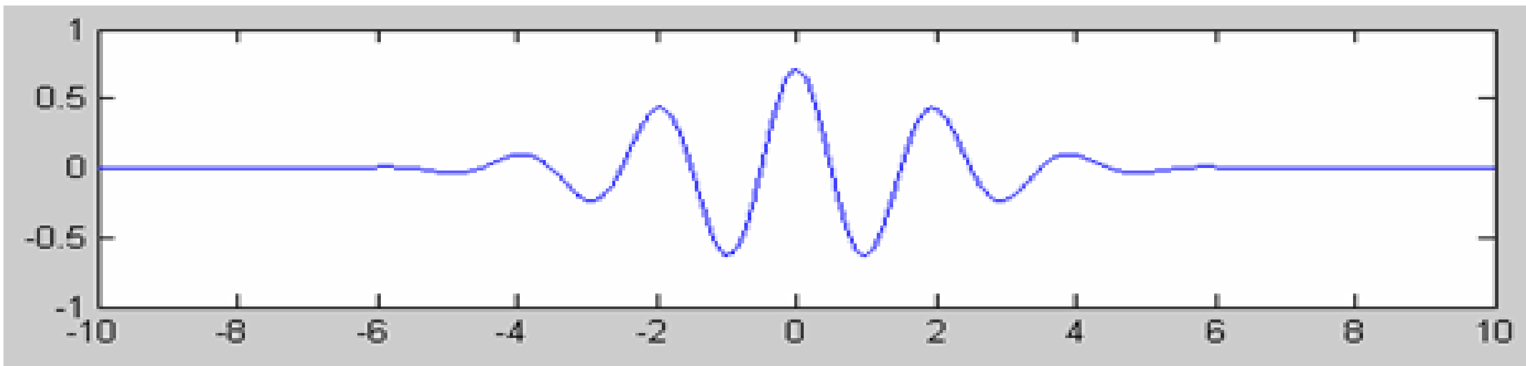
（1） 基本小波$\psi(t)$可能是复信号或实信号，在复信号时，一般是解析信号，例如 $\psi(t)=e^{-\frac{t^2}{T}}\cdot e^{j\omega_0 t}$，称为 Morlet 小波，它是高斯包络下的复指数函数。

（2） 尺度因子 a 的作用是将基本小波作伸缩，a 越大，$\psi(\frac{t}{a})$愈宽，a 越小，$\psi(\frac{t}{a})$越窄，$\frac{1}{a}$与角频率ω等价。改变 a，改变小波变换的分析区间。

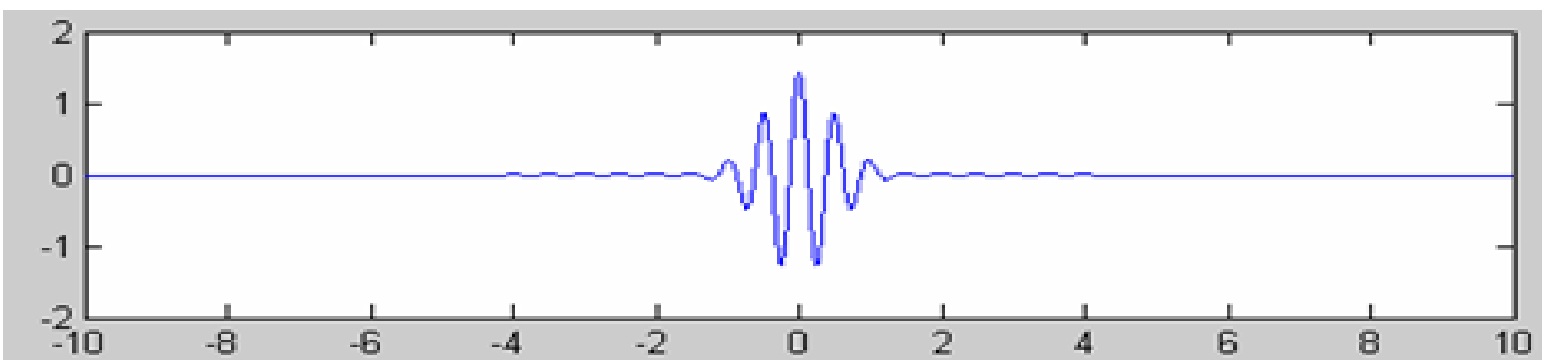
（3）$\psi_{ab}(t)$前加因子$\frac{1}{\sqrt{a}}$的目的是使不同 a 值下$\psi_{ab}(t)$的能量保持相等。



(a) $\psi_{ab}(t), a=1, b=0$



(b) $\psi_{ab}(t), a=2, b=0$



(c) $\psi_{ab}(t), a=1/2, b=0$

（4）注意到，$\psi(\frac{t}{a})$ 的付里叶变换为 $|a|\hat{\Psi}(a\omega)$

(5)小波变换的等效频域表示：

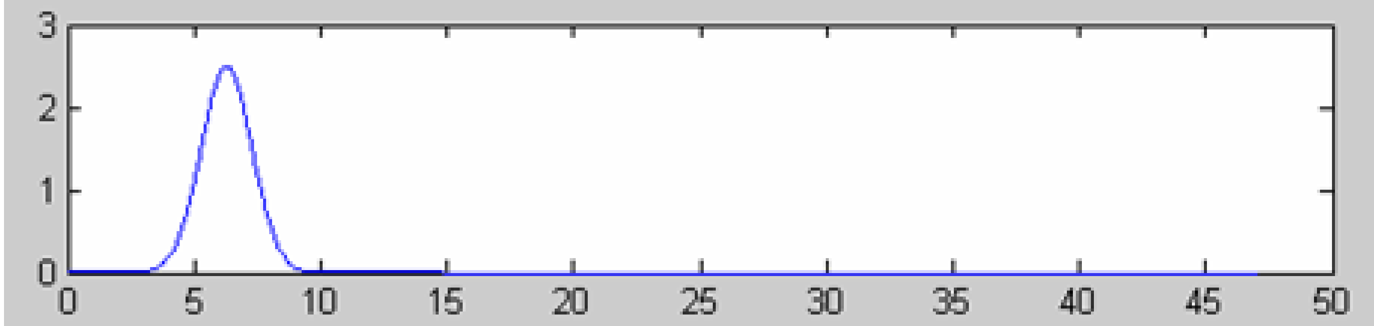
$$WT_x(a,b)=\frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int\hat{x}(\omega)\hat{\psi}^*(a\omega)e^{j\omega b}d\omega$$

6）如果 $\psi(t)$ 是幅频特性比较集中的带通函数，则小波变换便具有表征待分析信号 x(ω)频域上局部性质能力，改变 a 的值，可以分析 x(ω)不同频域区间的性质。

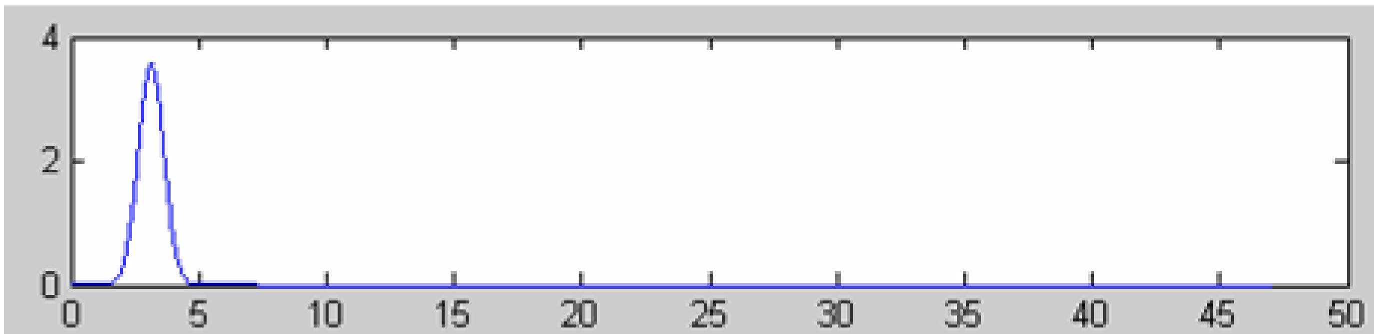
设 $\hat{\psi}(\omega)$ 在 ω_0 为中心的窄带内，$\hat{\psi}(\omega)=s(\omega-\omega_0)$，则

$\hat{\psi}(a\omega)=s\left[a(\omega-\frac{\omega_0}{a})\right]$ 中心在 $\frac{\omega_0}{a}$。

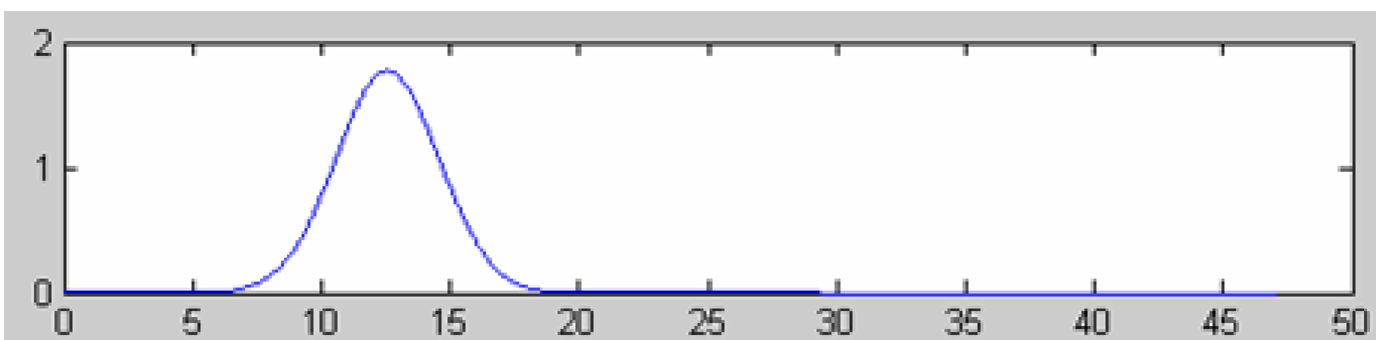
7)采用不同 a 值作处理时，各 $\hat{\psi}(a\omega)$ 的中心频率和带宽都不相同，但品质因数 Q 不变（Q＝中心频率／带宽）。



(a) $\hat{\psi}_{ab}(\omega), a = 1, b = 0$



(b) $\hat{\psi}_{ab}(\omega), a = 2, b = 0$



(c) $\hat{\psi}_{ab}(\omega), a = 1/2, b = 0$

- a增加，ω降低，$\psi(\frac{t}{a})$展宽，时域窗变宽，观测更长时间区间，

  $\hat{\psi}(a\omega)$ 变窄，观测更窄的频域窗，且频率中心向低频移动。

  对于低频部分，对时间看得粗些，对频域看得仔细一些。

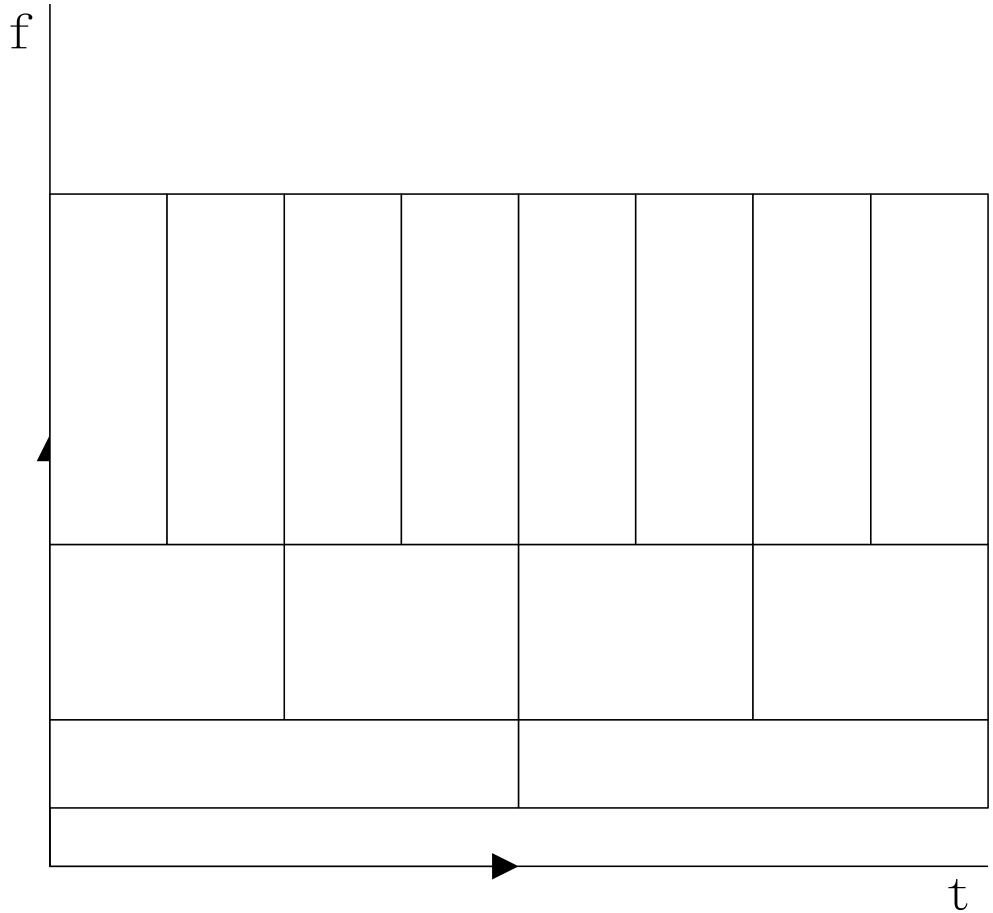
- a减小，ω增大，$\psi(\frac{t}{a})$变窄，时域窗变窄，观测更短时间区间。

  $\hat{\psi}(a\omega)$变宽，观测更宽的频域窗，且中心频率向高频方向移动。

  对于高频部分，对时间域看得细一些，对频域看得粗些。

这是数学显微镜的能力。

小波变换时一频局域性示意图



小波变换的内积定理

设

$$x_1(t) \to WT_{x_1}(a,b) = \langle x_1(t), \psi_{ab}(t) \rangle$$

$$x_2(t) \to WT_{x_2}(a,b) = \langle x_2(t), \psi_{ab}(t) \rangle$$

则

$$\langle WT_{x_1}(a,b), WT_{x_2}(a,b) \rangle = C_\psi \langle x_1(t), x_2(t) \rangle$$

式中

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega} d\omega$$

注意，两变量内积写成：

$$\langle WT_{x_1}(a,b), WT_{x_2}(a,b)\rangle =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} WT_{x_1}(a,b)\cdot WT_{x_2}{}^{*}(a,b)\frac{1}{a^2}\,dadb =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{da}{a^2}\cdot\int\langle x_1(t),\psi_{ab}(t)\rangle\langle\psi_{ab}(t),x_2(t)\rangle db =$$

$$= C_\psi\int x_1(t)x_2^{*}(t)dt$$

$$C_\psi = \int \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega} d\omega \langle \infty$$

称为容许条件，

推论：

$$\hat{\psi}(\omega)\Big|_{\omega=0} = 0$$

和

$$\int \psi(t) dt = 0,$$

$\psi(t)$ 是振荡的小波。

小波反变换

在小波内积定理中，取 $x_1(t)=x(t)$，　$x_2(t)=\delta(t-t')$ 得：

$$x(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^\infty \frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} WT_x(a,b)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a})db$$

小波能量公式：

取 $x_1(t)=x(t)$，$x_2(t)=x(t)$

$$\int_0^\infty \frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|WT_x(a,b)\right|^2 db = C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt$$

再生核方程

$x(t)$的小波变换满足如下式：

$$WT_x(a_0,b_0)=\int_0^{\infty}\frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}WT_x(a,b)k_{\psi}(a_0,b_0,a,b)db$$

上式中： $$K_{\psi}(a_0,b_0,a,b)=\frac{1}{C_{\psi}}\int\psi_{ab}(t)\psi^{*}_{a_0b_0}(t)dt$$

$$=\frac{1}{C_{\psi}}<\psi_{ab}(t),\psi_{a_0b_0}(t)>$$

为再生核

几个常见小波

（1）Morlet 小波

$$\psi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}e^{j\omega_0 t} \qquad \hat{\psi}(\omega)=\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{-(\omega-\omega_0)^2}{2}}$$

不严格满足允许性条件，近似满足

更一般的，一个能量归一化的小波，也称为 Gabor 小波

$$\psi(t)=g(t)e^{j\omega_0 t} \qquad g(t)=\frac{1}{\left(\sigma^2\pi\right)^{1/4}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

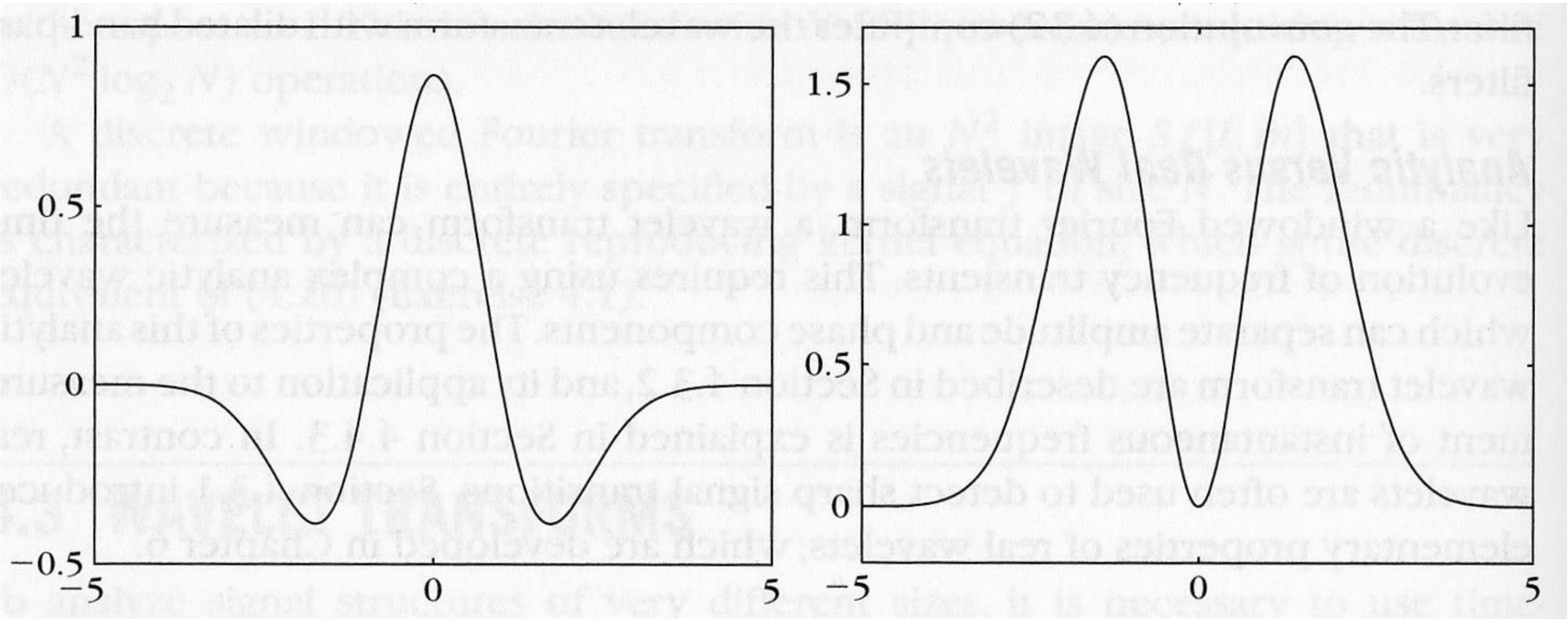
$$\hat{\psi}(\omega)=\left(4\pi\sigma^2\right)^{1/4}e^{\frac{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}$$

（2）Marr 小波

高斯函数二阶导数

$$\psi(t)=(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \hat{\psi}(\omega)=\sqrt{2\pi}\,\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

$\hat{\psi}(\omega)$ 在原点有两阶零点，用于边缘检测。



（3）Harr 小波

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<\dfrac{1}{2}\\ -1 & \dfrac{1}{2}\le t<1\end{cases}$$

满足正交条件：

$$<\psi(t),\psi(2^j t)>=0 ,\qquad <\psi(t),\psi(t-k)>=0$$

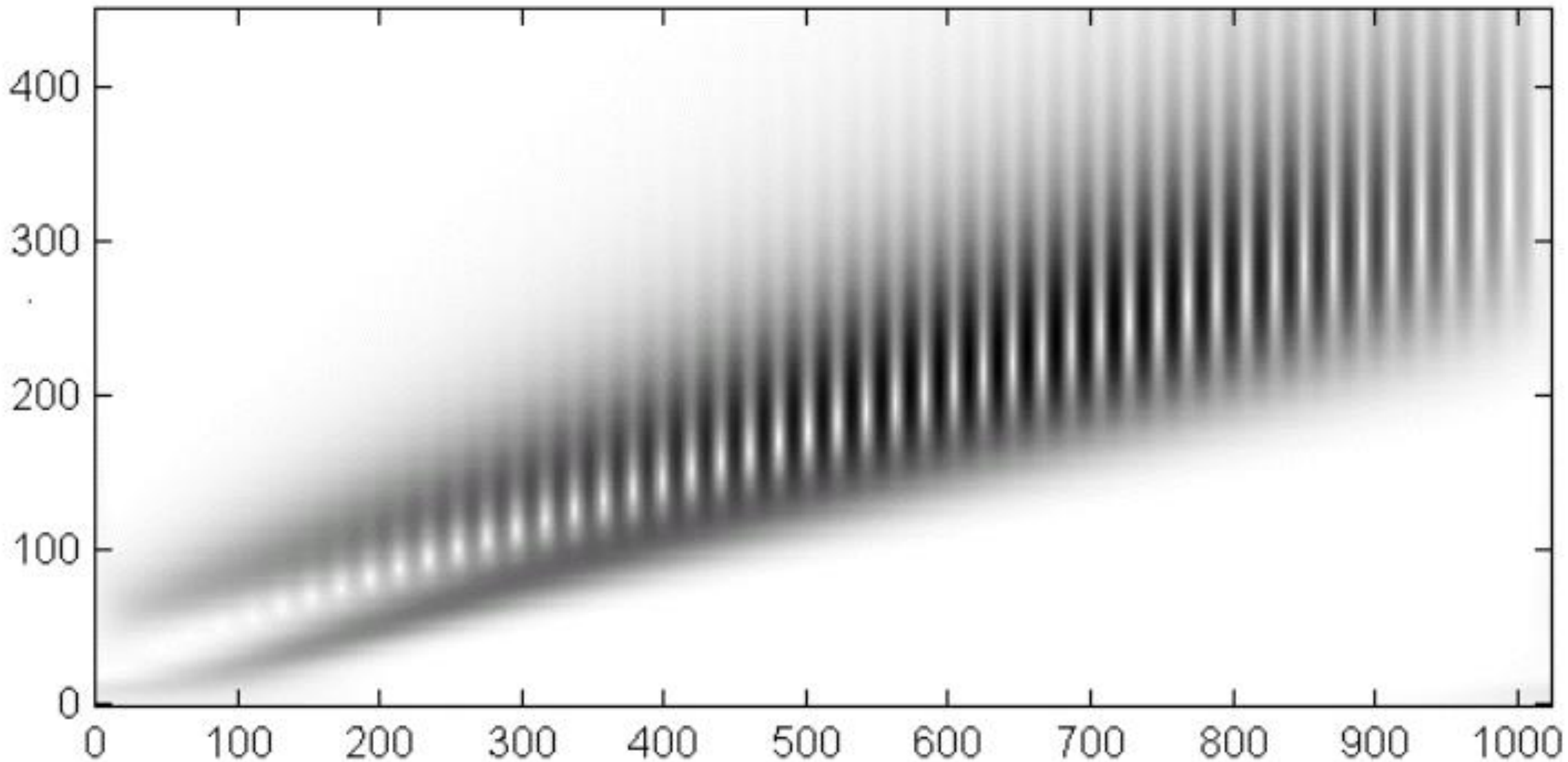
且 $$\hat{\psi}(\omega)=j\frac{4}{\omega}\sin^2(\frac{\omega}{4})e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

$\hat{\psi}(\omega)$在原点仅有一阶零点。

（4）Daubechies小波族

小波族由满足一定条件的滤波器，迭代逼近一个小波

例



两个线性调制信号的连续小波变换

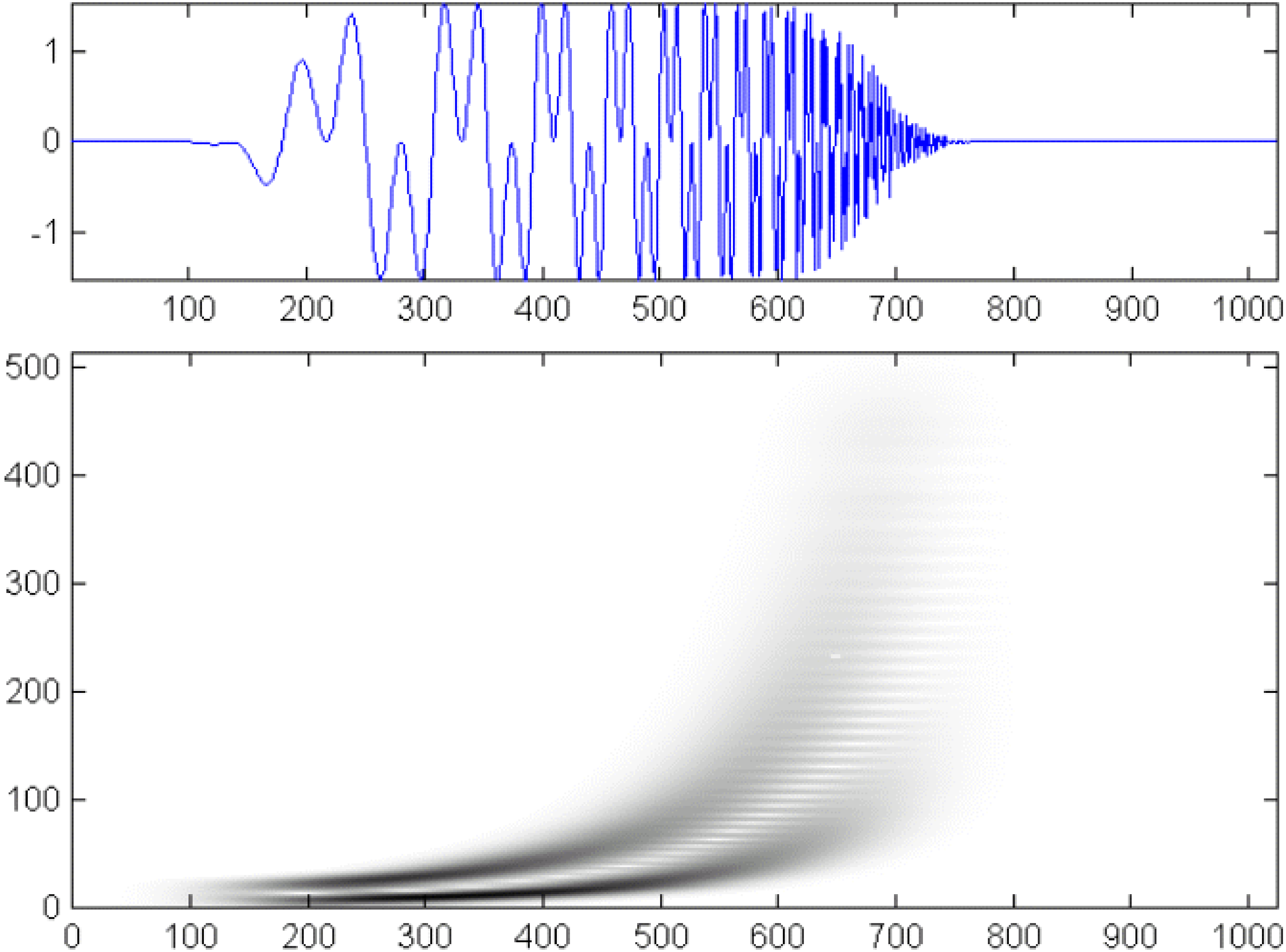
例：两个超调制信号（hyperbolic chirp）构成，即

$$f(t) = a_1 \cos\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1 - t}\right) + a_2 \cos\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2 - t}\right)$$

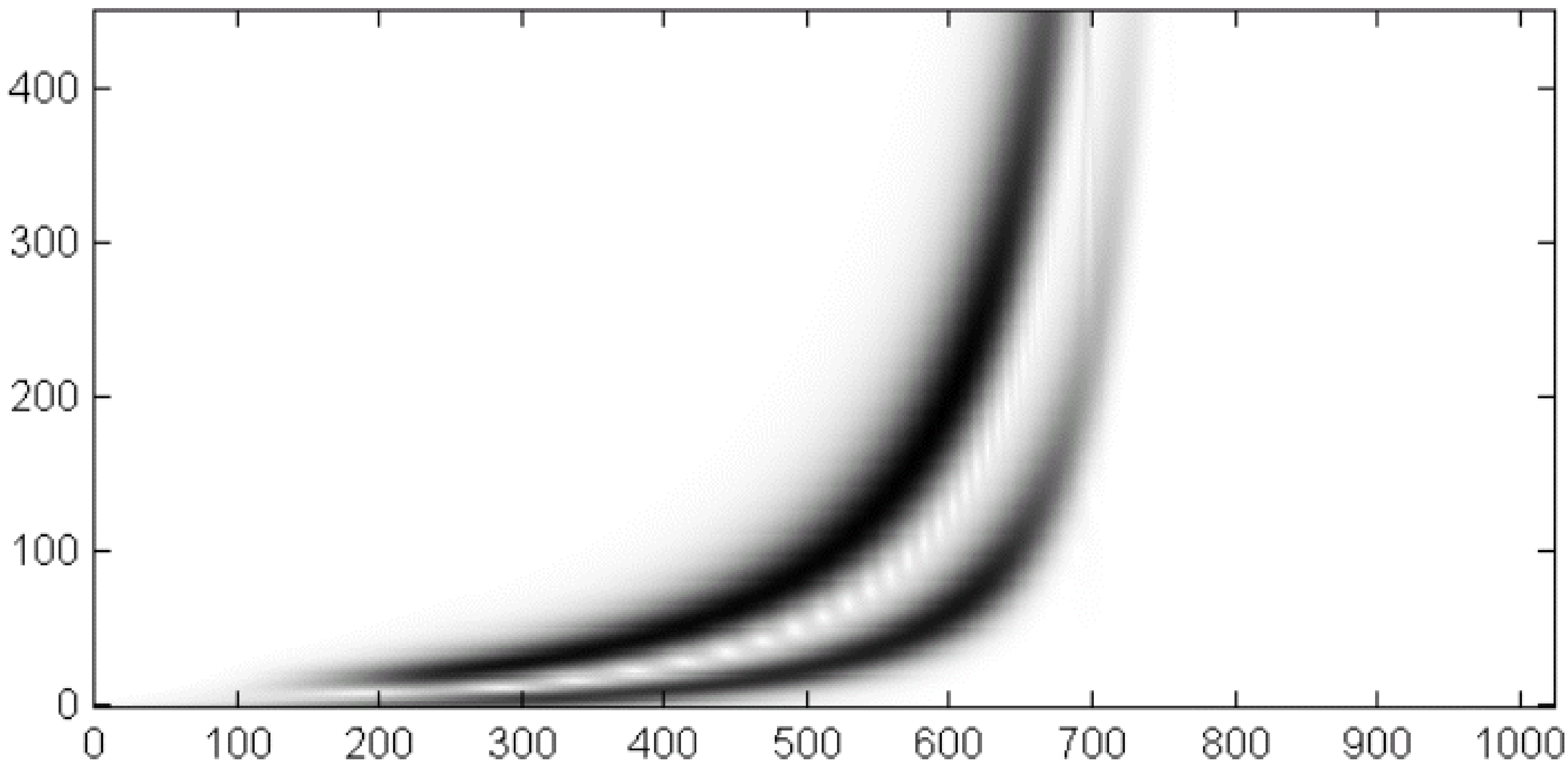
其中 $\beta_1 = 0.68, \quad \beta_2 = 0.72$

它们的瞬时频率分别为

$$\omega_1(t) = \frac{\alpha_1}{(\beta_1 - t)^2}, \quad \omega_2(t) = \frac{\alpha_2}{(\beta_2 - t)^2}$$



超调制信号的短时付里叶变换



超调制信号的连续小波变换

尺度和位移离散化的小波变换

连续小波存在信息冗余，计算离散的位移和尺度下的小波变换值。

尺度离散化：取 a_0，尺度因子 a 只取 a_0 的整数幂，例如：a 仅取：

$$a_0^0 = 1, a_0^{\pm 1}, a_0^{\pm 2}, \cdots a_0^{\pm j} \cdots$$

位移离散化：尺度取 $a = a_0^0$ 时，取 b=b_0，各位移为 kb_0。

在 $a = a_0^j$ 时，相应取 $b = k a_0^j b_0$。

在这些离散位置的小波伸缩平移系构成：

$$\left\{ a_0^{-\frac{j}{2}} \psi\left(a_0^{-j}\left(t - k a_0^j b_0\right)\right) \right\} = \left\{ a_0^{-\frac{j}{2}} \psi\left(a_0^{-j} t - k b_0\right), \quad \begin{matrix} k \in z \\ j \in z \end{matrix} \right\}$$

用 CWT 公式得到在离散尺度和位移处的小波变换：

$$WT_x(a_0^j, kb_0) = \int x(t) \cdot \psi^*_{a_0^j, kb_0}(t)dt$$

最典型的 a_0, b_0 取值是：$a_0=2$, $b_0=1$ 得到小波伸缩平移系：

$$\psi_{jk}(t) \triangleq 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k)$$

和

$$WT_x(j,k) = \langle x(t), \psi_{jk}(t) \rangle$$

问题是：由 $\{WT_x(a_0^j, kb_0)\}_{j,k\in Z}$ 能否稳定地重构 $x(t)$。

如果函数系 $\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in Z}$ 构成一个框架，通过对偶框架，可以稳定地重构 $x(t)$

到小波框架的概念和结论：

（1）小波框架定义：当由基本小波$\psi(t)$经伸宿与位移引出的函数族：

$$\left\{\psi_{j,k}(t)=2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-k),\ j\in z^{+},\ k\in z\right\}$$

具有下述性质时，便称它构成一个框架。

$$A\|X\|^2\le\sum_j\sum_k\left|<x,\psi_{jk}>\right|^2\le B\|X\|^2$$

（2）ψ_{jk}存在对偶函数系$\tilde{\psi}_{jk}(t)$也构成一个标架，其标架的上、

下界是$\psi_{jk}(t)$框架上、下界的倒数：

$$\frac{1}{B}\|X\|^2\le\sum_j\sum_k\left|<x,\tilde{\psi}_{jk}>\right|^2\le\frac{1}{A}\|X\|^2$$

（3）信号重建：

对于紧框架：有 $\tilde{\psi}_{jk}(t)=\dfrac{1}{A}\psi_{jk}(t)$

$$x(t)=\frac{1}{A}\sum_j\sum_k<x,\psi_{jk}>\cdot\psi_{jk}(t)$$

对一般情况，当 A 与 B 接近时，可取

$$\tilde{\psi}_{jk}(t)=\frac{2}{A+B}\psi_{jk}(t)$$

$$x(t)\approx\frac{2}{A+B}\sum_j\sum_k<x,\psi_{jk}(t)>\psi_{jk}(t)$$

对一般情况，由离散采样点的小波系数和对偶框架，可以重构信号

$$x(t)=\sum_j\sum_k < x,\psi_{jk} > \cdot\tilde{\psi}_{jk}(t)=$$

$$=\sum_j\sum_k < x,\tilde{\psi}_{jk} > \cdot\psi_{jk}(t)$$

如何由选定的小波函数集构造对偶框架，已有学者提出了一些算法

（4）一般紧框架下，存在：

$$WT_x(j_0,k_0)=\frac{1}{A}\sum_j\sum_k K_\psi(j_0,k_0;j,k)\cdot WT_x(j,k)$$

这里：

$$K_\psi(j_0,k_0;j,k)=<\psi_{jk}(t),\psi_{j_0,k_0}(t)>$$

当 $\psi_{jk}(t)$ 与 ψ_{j_0,k_0} 互相交时，即：

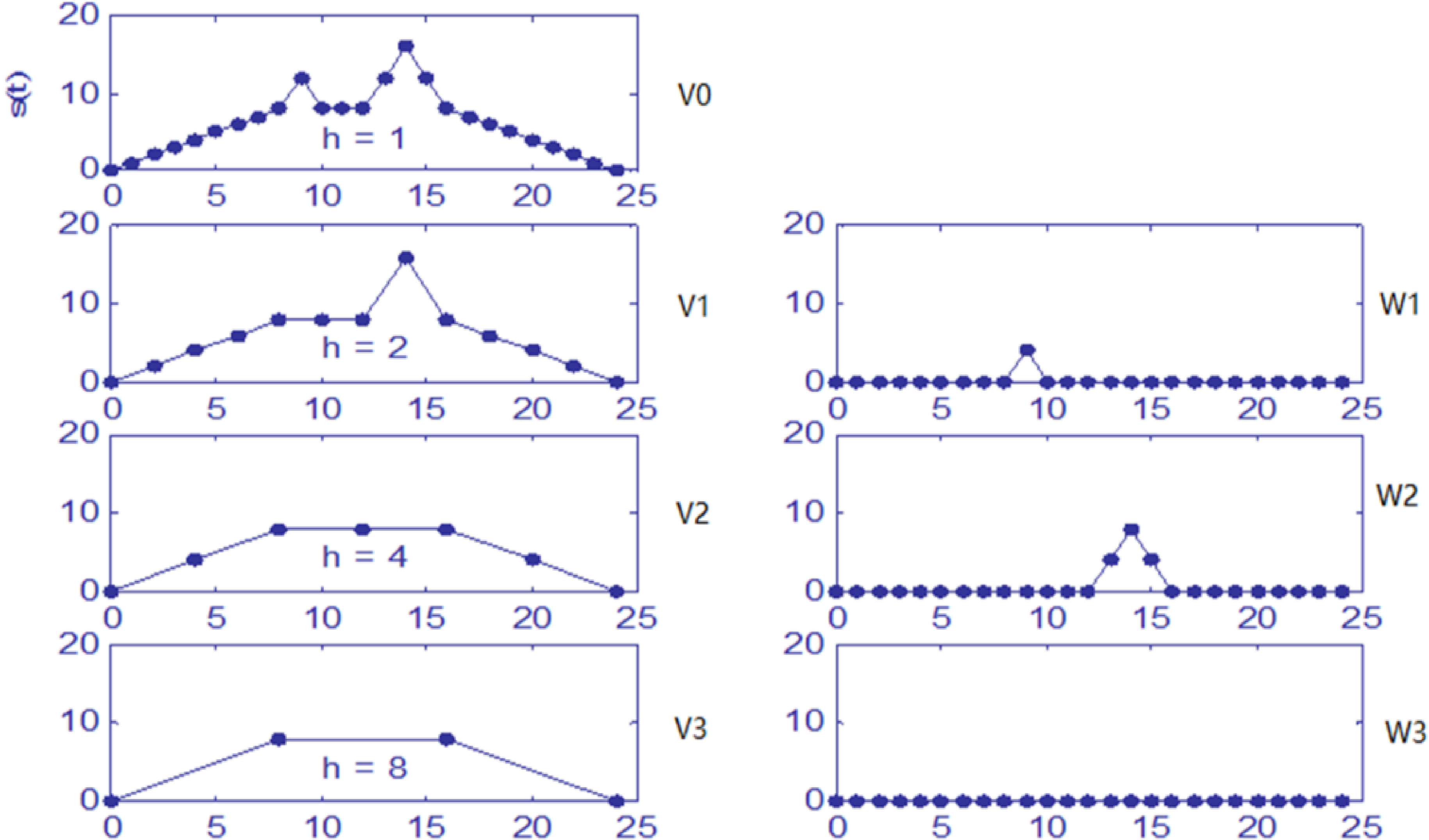
$$K_\psi(j_0,k_0;j,k)=\delta(j-j_0)\delta(k-k_0)\,,$$

离散尺度和位移下的小波变换没有冗余。

多分辨分析和正交小波基

- 由多分辨分析引出构造正交小波基的一般方法。
- 离散尺度和位移小波变换的快速算法（Mallat算法）

多分辨信号表示例



多分辨分析定义：

一个多分辨分析由一个嵌入式闭子空间序列组成，它们满足：

$$\cdots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \cdots$$

并且满足：

（1）上完整性：$\overline{\bigcup_{m\in z} V_m} = L_2(R)$

（2）下完整性：$\bigcap_{m\in z} V_m = \{0\}$

（3）尺度不变性：$x(t) \in V_m \Leftrightarrow x(2^m t) \in V_0$

（4）位移不变性：$x(t) \in V_0 \Rightarrow x(t-n) \in V_0 \qquad n \in z$

（5）存在一个基 $\varphi \in V_0$，使得 $\{\varphi(t-n) \quad n \in z\}$ 是 V_0 的正交基

（1）由于$V_1 \subset V_0$，设W_1是V_1在V_0中的正交补子空间，

则 $W_1 \perp V_1$，和 $V_1 \oplus W_1 = V_0$

同理可以得到：$V_1 = V_2 \oplus W_2$ ，且$W_2 \perp W_1$.……， 由此构成一组互正交的子空间…,W_2，W_1，W_0，W_{-1}， …， 使得

$$\overline{\bigcup_{m\in z} W_m} = L_2(R)$$

如果$\psi(t) \in W_0$，且$\{\psi(t-n), n \in Z\}$构成W_0的正交基，则

$$\left\{\psi_{jk}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-k), \quad k \in z\right\}$$ 构成 W_j 的正交基。

$$\left\{\psi_{jk}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-k), \quad j,k \in z\right\}$$ 构成L_2（R）的正交基。

（2）由于$\{\varphi(t-n), n\in Z\}$构成V$_0$的正交基，

并且，$V_1\subset V_0$，$W_1\subset V_0$，和

$$\varphi(\frac{t}{2})\in V_1\subset V_0 \quad , \quad \psi(\frac{t}{2})\in W_1\subset V_0$$

由此，构成二尺度方程：

$$\varphi(\frac{t}{2})=\sqrt{2}\sum_k h_k\cdot\varphi(t-k)$$

$$\psi(\frac{t}{2})=\sqrt{2}\sum_k g_k\cdot\varphi(t-k)$$

还有以下关系式成立：

(利用$\varphi(t)$能量特性，和$\psi(t)$的积分为零)

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}$$

$$\sum_k g_k = 0$$

（3）设

$$\hat{h}(e^{j\omega})=\sum_k h_k e^{-jk\omega}\triangleq\hat{h}(\omega)\Rightarrow$$

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\frac{\omega}{2})\hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})$$

$$\hat{g}(e^{j\omega})=\sum_k g_k e^{-jk\omega}\triangleq\hat{g}(\omega)\Rightarrow$$

$$\hat{\psi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\frac{\omega}{2})\cdot\hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})$$

由如下关系式：

$$\sum_k \left|\hat{\varphi}(\omega+2\pi k)\right|^2 = 1$$

$$\sum_k \left|\hat{\psi}(\omega+2\pi k)\right|^2 = 1$$

$$\sum_k \hat{\varphi}(\omega+2\pi k)\cdot\hat{\psi}^*(\omega+2k\pi) = 0$$

得一组关系式：

$$\left|\hat{h}(\omega)\right|^2+\left|\hat{h}(\omega+\pi)\right|^2=2$$

$$\left|\hat{g}(\omega)\right|^2+\left|\hat{g}(\omega+\pi)\right|^2=2$$

$$\hat{h}(\omega)\cdot\hat{g}^*(\omega)+\hat{h}(\omega+\pi)\hat{g}^*(\omega+\pi)=0$$

为满足如上等式，两个系统函数间建立了一定的关系，这种关系式的解不是唯一的，其中一个解是：

$$\hat{g}(\omega) = e^{-j\omega}\hat{h}^{*}(\omega+\pi)$$

即：
$$g(k) = (-1)^{1-k}h(1-k)$$

h 和 g 等价于一个离散滤波器，称为双通道滤波器组，满足如上关系的这些滤波器称为共轭镜象滤波器，相应的滤波器组称为共轭镜象滤波器组.

（4）由如上讨论，得到小波母函数的关系式：

令 $$\hat{h}'(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\omega),\qquad \hat{g}'(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\omega)$$

得到:

$$\hat{\varphi}(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty}\hat{h}'(2^{-j}\omega)$$

$$\hat{\psi}(\omega)=\hat{g}'(\frac{\omega}{2})\prod_{j=2}^{\infty}\hat{h}'(2^{-j}\omega)$$

（5）有限级的空间分解关系：

从V_0出发，经过 J 级分解得：$V_0 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \cdots \oplus W_J \oplus V_J$

设有函数$x(t)$，它在V_0空间投影，$X_0(t) = P_0 x(t)$由一组系数$a_n^{(0)}$构成，即

$$P_0 x(t) = \sum_n a_n^{(0)} \varphi_{0n}(t) = \sum_n a_n^{(0)} \varphi(t-n)$$

由 $V_0 = V_1 \oplus W_1$，$P_0 x(t) = P_1 x(t) + D_1 x(t)$

D_1是$x(t)$在W_1上的投影算子。因此，

$$P_0 x(t) = \sum_n a_n^{(0)} \varphi_{0n}(t) = \sum_n a_n^{(1)} \varphi_{1n}(t) + \sum_n d_n^{(1)} \psi_{1n}(t)$$

这个过程可以继续下去，可以将它分解为$W_1, W_2, \cdots W_J, V_J$内的系数集：

$$\left\{d_k^{(i)}, a_k^{(J)}, i=1,\cdots J\right\}$$

由两尺度方程可以证明：分解方程为：

$$a_k^{(1)} = \sum_n h_{(n-2k)} a_n^{(0)}$$

$$d_k^{(1)} = \sum_n g_{(n-2k)} a_n^{(0)}$$

合成方程为：

$$a_n^{(0)} = \sum_k h_{(n-2k)} a_k^{(1)} + \sum_k g_{(n-2k)} d_k^{(1)}$$

这个分解与合成过程可以进行 J 阶，一般分解公式：

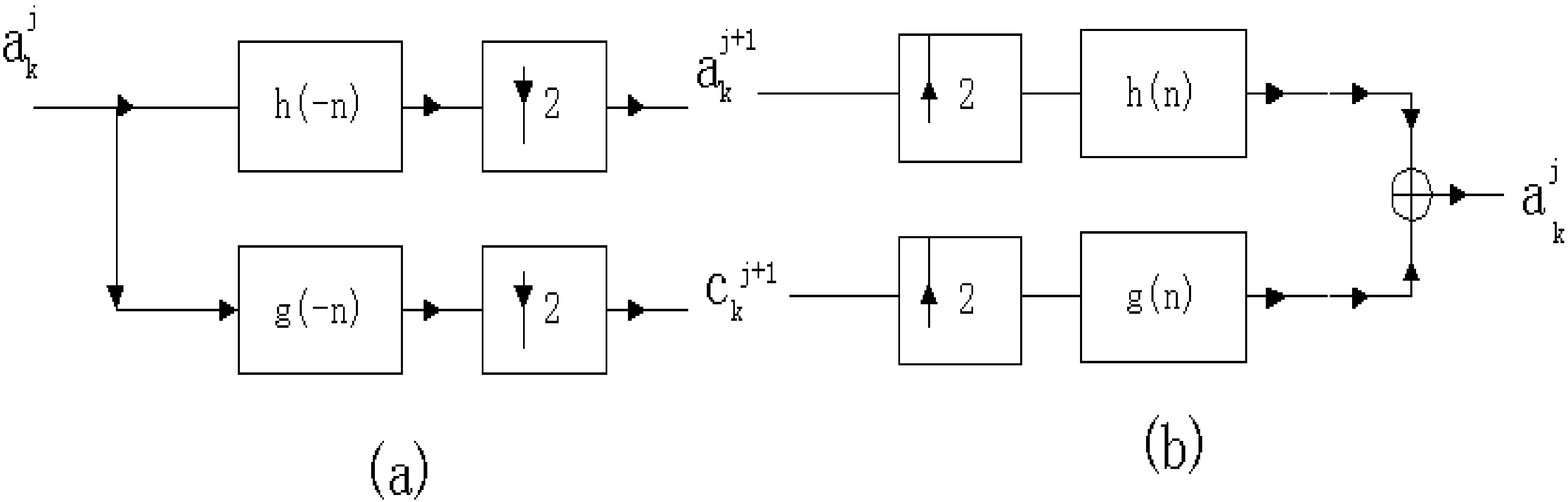
$$\begin{cases} a_k^{(i+1)} = \sum_n h_{(n-2k)} a_n^{(i)} \\ d_k^{(i+1)} = \sum_k g_{(n-2k)} d_n^{(i)} \end{cases}$$

一般合成公式为：

$$a_n^{(i)} = \sum_k h_{(n-2k)} a_k^{(i+1)} + \sum_k g_{(n-2k)} d_k^{(i+1)}$$

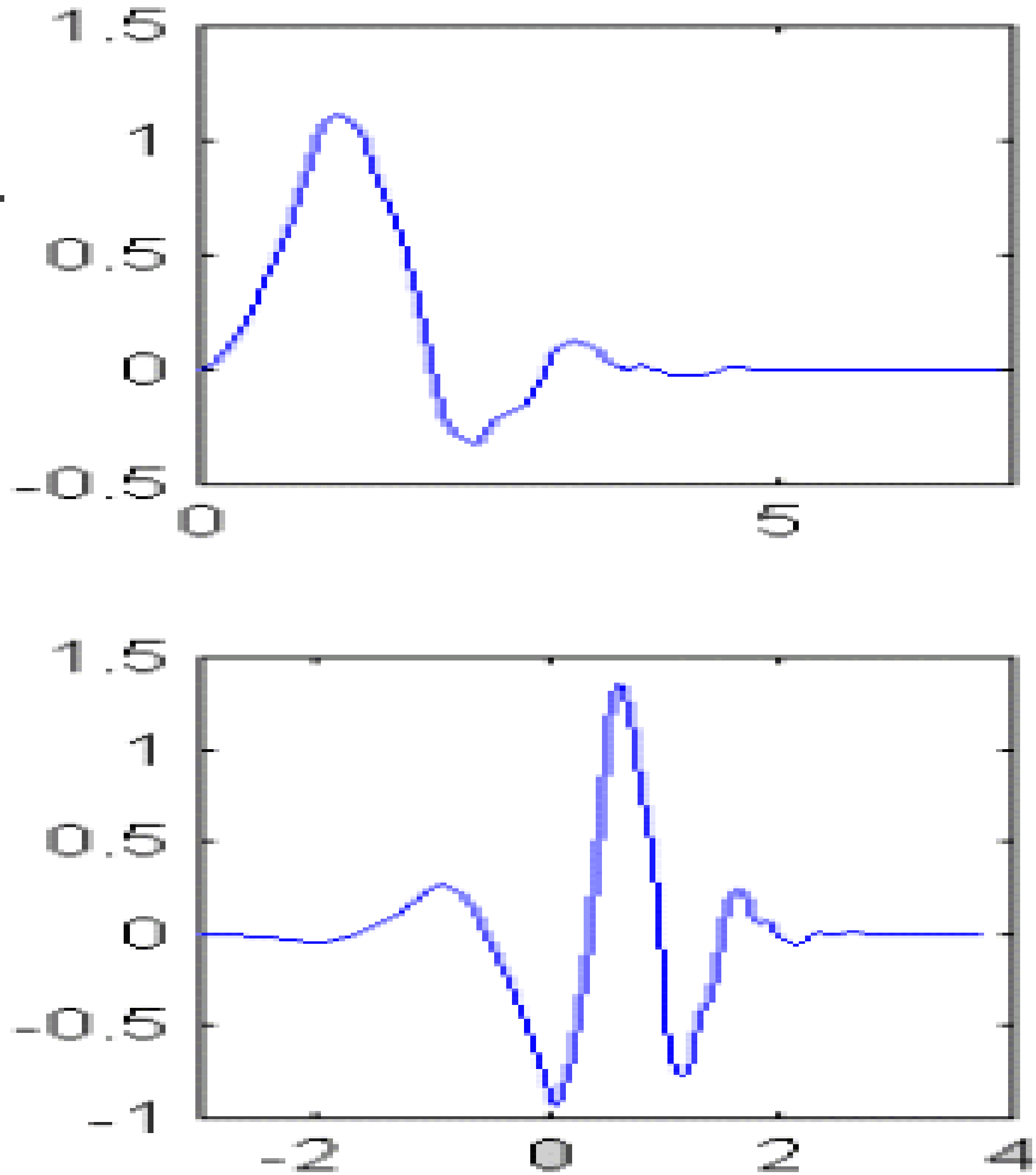
注意到：$d_k^{(i)} = < x(t), \psi_{i,k}(t) >$ $a_k^{(J)} = < x(t), \varphi_{J,k} >$

$$P_0 x(t) = \sum_{i=1}^{J} \sum_{k} d_k^{(i)} \psi_{i,k}(t) + \sum_{k} a_k^{(J)} \varphi_{J,k}(t)$$



单层小波分解与合成示意图 (a.分解部分 b.合成部分)

例



滤波器系数*h(n), n=0,12,3,4,5,6,7*

.230377813309

.714846570553

.630880767930

-.027983769417

-.187034811719

.030841381836

.032883011667

.010597401785

双正交小波变换

★正交基与正交子波变换从数学性质上说是最理想的，但是Daubechies已经证明，除Harr基外，所有正交基都不具有对称性

★希望具有对称性质的子波基，有一类具有双正交性质的小波基具有这个特性，Cohen和Daubechies从数学上构造了具有紧支特性和正则性的对称双正交子波基，Vetterli和Herley从理想重构的滤波器组理论出发构造了对称的双正交子波基。

双正交小波基是框架理论的一个特例，
存在两个对偶的母小波

$$\langle \psi_{m,n}, \tilde{\psi}_{m',n'} \rangle = \delta_{mm'} \cdot \delta_{nn'}$$

相应的尺度函数也满足

$$\langle \varphi_{mn}, \tilde{\varphi}_{mn'} \rangle = \delta_{nn'}$$

$$\phi(\frac{t}{2}) = \sqrt{2}\sum_k h_k \varphi(t-k)$$

$$\psi(\frac{t}{2}) = \sqrt{2}\sum_k g_k \varphi(t-k)$$

$$\widetilde{\phi}(x) = \sqrt{2}\sum_n \widetilde{h}_n \widetilde{\phi}(2x-n)$$

$$\widetilde{\psi}(x) = \sqrt{2}\sum_n \widetilde{g}_n \widetilde{\phi}(2x-n)$$

滤波器系数$h,\tilde{h},g,\tilde{g}$施加约束，使$\psi(x)$和$\tilde{\psi}(x)$构成正交基的一种

约束条件为：

$$\hat{h}^*(\omega)\hat{\tilde{h}}(\omega)+\hat{h}^*(\omega+\pi)\hat{\tilde{h}}(\omega+\pi)=2$$

$$g_n=(-1)^{1-n}\tilde{h}_{1-n}, \quad \tilde{g}_n=(-1)^{1-n}h_{1-n}$$

$$\sum_n h_n\tilde{h}_{n+2k}=\delta_{k,0}$$

满足如上关系的滤波器组称为准确重构滤波器，这组滤波器获得后，由下式构造尺度函数和小波函数

双正交时，小波变换的递推公式仍然成立，写成如下式:

$$\begin{cases} a_k^{(i+1)} = \sum_n h_{(n-2k)} a_n^{(i)} \\ d_k^{(i+1)} = \sum_k g_{(n-2k)} a_n^{(i)} \end{cases}$$

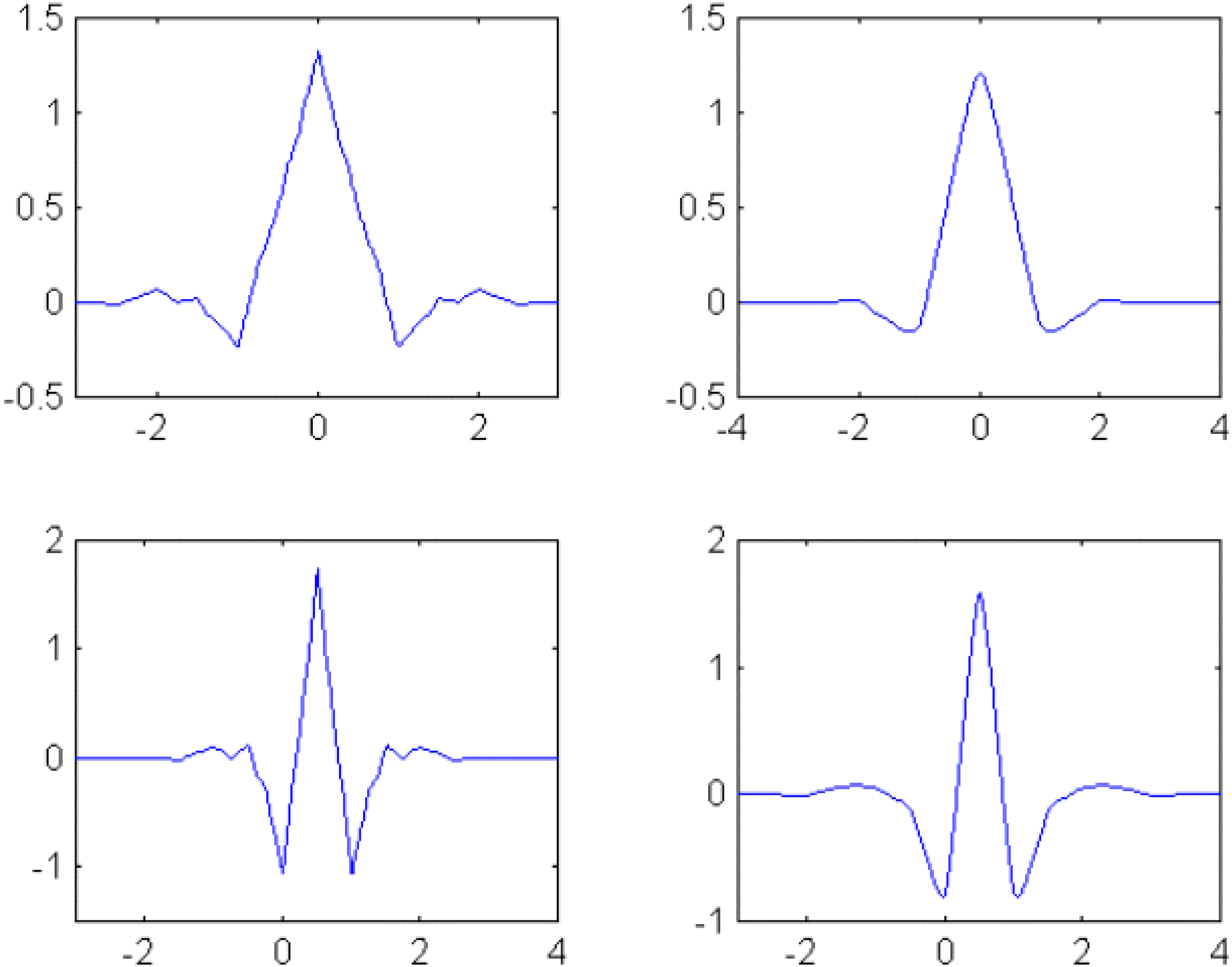
反递推（合成）公式修改为

$$a_n^{(j-1)} = \sum_k \left[\tilde{h}_{n-2k} a_k^{(j)} + \tilde{g}_{n-2k} d_k^{(j)} \right]$$

注意，其实递推和反递推中滤波器组 h, g 和 $\tilde{h}, \tilde{g}$ 是可以互换的，但必须一个出现在递推中,另一个出现在反递推中.

例:

$p, \tilde{p}$	n	h[n]	$\tilde{h}[n]$
$p = 4$ $\tilde{p} = 4$	0	0.78848561640637	0.85269867900889
	-1,1	0.41809227322204	0.37740285561283
	-2,2	-0.04068941760920	-0.1106244044184
	-3,3	-0.06453888262876	-0.0238494650195
	-4,4	0	0.0378284555496



双正交近似等长小波的尺度函数和小波函数示

多维空间小波变换

二维可分的多分辨分析是一个嵌套的子空间序列

$$V_m = V_m^1 \otimes V_m^2$$

尺度函数和相应滤波器系数

$$\Phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y), \qquad h_{n,m} = h_n h_m$$

两分辨层的关系为

$$V_{m-1} = V_m \oplus (V_m^1 \otimes W_m^2) \oplus (W_m^1 \otimes V_m^2) \oplus (W_m^1 \otimes W_m^2)$$

得到三个小波函数和相应滤波器系数

$$\Psi^1(x,y)=\varphi(x)\psi(y), \qquad g^1_{n,m}=h_n g_m$$

$$\Psi^2(x,y)=\psi(x)\varphi(y), \qquad g^2_{n,m}=g_n h_m$$

$$\Psi^3(x,y)=\psi(x)\psi(y), \qquad g^3_{n,m}=g_n g_m$$

小波展开式的二维推广为

$$f(x,y)=\sum_d\sum_m\sum_{i,j}< f,\Psi^{m,d}_{i,j}>\tilde{\Psi}^{m,d}_{i,j}\ \hat{=}\sum_d\sum_m\sum_{i,j}c^{m,d}_{i,j}\cdot\tilde{\Psi}^{m,d}_{i,j}$$

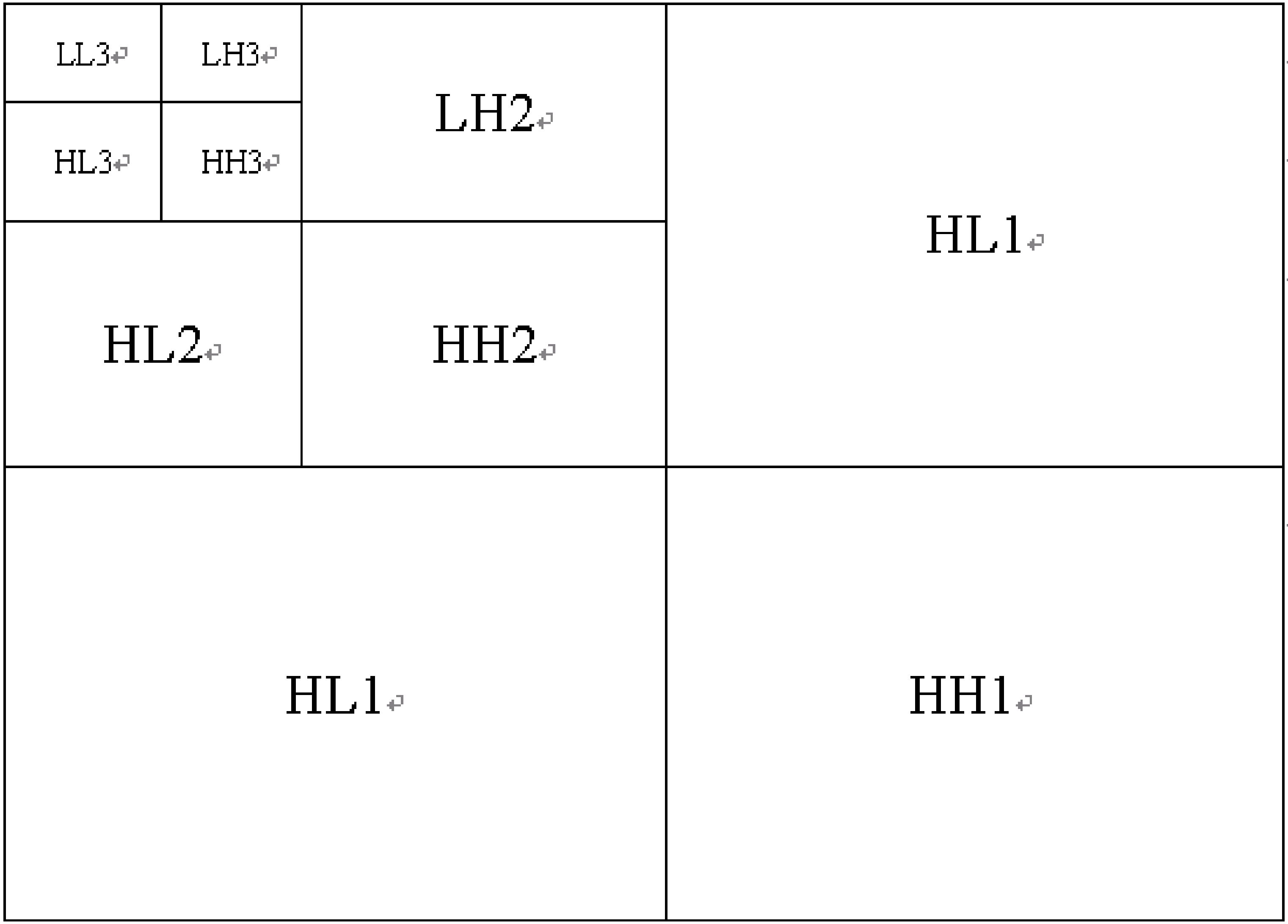
二维离散小波变换系数的递推公式为

$$a_{i,j}^{m} = \sum_{d}\sum_{m} a_{k,l}^{m-1} \cdot h_{2i-k,2j-l} = \sum_{k} h_{2i-k} \cdot \sum_{l} a_{k,l}^{m-1} \cdot h_{2j-l}$$

$$c_{i,j}^{m,d} = \sum_{k}\sum_{l} a_{k,l}^{m-1} \cdot g_{2i-k,2j-l}^{d} = \sum_{k} g_{2i-k}^{i2} \cdot \sum_{l} a_{k,l}^{m-1} \cdot g_{2j-l}^{i1}, \quad d = 1,2,3$$

反递推公式为

$$a_{i,j}^{m-1} = \sum_{k}\sum_{l} a_{k,l}^{m} \cdot \tilde{h}_{2k-i,2l-j} + \sum_{d=1,2,3}\sum_{k}\sum_{l} c_{k,l}^{m,d} \cdot \tilde{g}_{2k-i,2l-j}^{d}$$


LL3
LH3
HL3
HH3
LH2
HL2
HH2
HL1
HL1
HH1