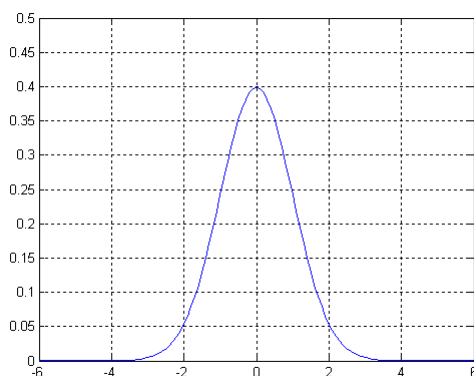


2022秋季学期《应用信息论基础》作业1-2

请于2022.10.19随堂提交，请写明姓名学号

1. 连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x) = \exp(-a|x|)$ ，其中 $a > 0$ ，求其微分熵。

2. 连续型随机变量 X 和 Y 的联合分布为下图所示的区域内（ x 轴与曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2x^2/2}$ ， $-\infty < x < +\infty$ ）的均匀分布。



1) 求 $h(X, Y)$, $h(X)$;

2) 证明： $-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2} < h(Y) < -\frac{1}{2}\ln 2\pi$ 。

3. 英文熵率的估计：设英文27个字符（考虑空格“_”），随机变量 X 取值于该27个字符的集合，其取值用 x_i ， $i = 1, 2, \dots, 27$ 表示。

1) 零阶/一阶估计：按27个字符等概出现可得熵率的零阶估计，即 $H(X) = \log 27/\text{字母}$ ；按27个字符的出现概率计算熵值作为一阶估计。根据下面的序列计算熵率的一阶估计。

AI_NGAE_ITF_NR_ASAEV_OIE_BAINTHHHYROO_POER_SETRYGAJETRWC
O_EHDUARU_EU_C_FT_NSREM_DIY_EESE_F_O_SRIS_R_UNNASHOR_CIE
_AT_XEOIT_UTKLOOUL_E

2) 二阶估计：考虑1阶Markov链，计算相邻字符的条件熵 $H(X_1|X_2)$ 作为熵率的二阶估计。请以下面字符序列为例计算出条件熵值作为熵率的二阶估值。需要计算两个字符的联合分布以及相关的条件概率，共有 $27*27=279$ 个条件概率，例如 $p(A|A)$, $p(B|A)$, $p(C|A)$, ...等，其中一些概率可能为0。

URTESHETHING_AD_EAT_FOULE_ITHALIORT_WACT_D_STE_MINTSAN_
OLINS__TWID_OULY_TE_THIGHE_CO_YS_TH_HR_UPAVIDE_PAD_CTAVE
D_QUES_E

3) 请基于Markov链给出三阶估值的计算方案（无需给出计算结果）。

4. 设无记忆稳恒信源产生由0和1构成 i.i.d. 的 $\{X_n\}$, $p(X_n = 0) = 0.4$, $p(X_n = 1) = 0.6$ 。

- 1) 计算2次扩展信源熵 $H(X^2)$, $H(X_3|X_1X_2)$ 和 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} H(X_1X_2 \dots X_N)$;
- 2) 计算4次扩展信源熵 $H(X^4)$ 并给出信源中所有的符号序列。

5. 设 $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为一平稳随机过程。证明：

- 1) $H(X_0|X_{-1}X_{-2} \dots X_{-n}) = H(X_0|X_1X_2 \dots X_n)$, 即给定过去, 当前时刻的条件熵与给定将来、当前时刻的条件熵相等;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} H(X_nX_{n-1}|X_1X_2 \dots X_{n-2}) = 2H_{\infty}$ 。

6. 一个离散稳恒遍历的Markov过程转移概率矩阵如下：

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ p_{10} & 1 - p_{10} \end{bmatrix}$$

- 1) 求此Markov信源熵率;
- 2) p_{01} 和 p_{10} 分别为多少时, 熵率最大? 并求最大熵率;
- 3) 另一个离散稳恒遍历Markov过程转移概率矩阵如下, 求其熵率;

$$\bar{P}' = \begin{bmatrix} 1 - p & p \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 4) p 为多少时上一问中熵率最大, 最大熵率为多少? 此外, 解释 p 应小于 0.5 这一结果。

7. 考虑下图所示的无向图中的随机走动。在每一步, 当前节点都会以相同的概率选择一条移动路径。

- 1) 求图中随机走动的稳态分布;
- 2) 求图中随机走动的熵率。

