最 优 化 方 法（1 月 4 日上午 8：00--10：00）

姓名____________________学号________________成绩______________________

一、填空题：下面有陈述和填空两类题。对于陈述题，若正确，则在后面的括号内打 √，若不正确，则打×。对于填空题，则将答案填在横线处。（44 分）

（1） 若 X 是某线性规划问题的最优解，则 X 必为该线性规划问题可行域的某一个极点。（ ）

（2） $f(x)=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-x_1-x_2$为$R^2$上的凸函数。 （ ）

（3） 已知非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2-2x_1-3x_2 \\ s.t. \quad & -x_1-x_2\ge -2 \\ & -x_1-5x_2\ge -5 \\ & x_1,x_2\ge 0, \end{aligned}$$

则在点$(0,1)^T$处起作用的约束有__________________；在点$(0,1)^T$处的一个下降方向为__________；在点$(0,1)^T$处的一个可行方向为________。

（4）函数 $f(x)=-2x_1^2-2x_2^2-2x_1x_2+4x_1+6x_2$ 在点 $(1,1)^T$ 处的最速下降方向为_____；牛顿方向为_____，该牛顿方向____（填“是”或“不是”）在点 $(1,1)^T$ 处的下降方向；若从点 $x^{(1)}=(0,0)^T$ 出发，沿方向 $d^{(1)}=(-1,1)^T$ 进行精确一维搜索，得到点 $x^{(2)}=x^{(1)}+\lambda_1 d^{(1)}$，则 $\lambda_1=$________。

（5）给定线性规划：

$$\begin{aligned} \min \ & 2x_1-x_2 \\ s.t. \ & x_1+x_3+x_4=7 \\ & -2x_1+x_2+3x_4=1 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0 \end{aligned}$$

则 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(4,0,0,3)^T$ 是一个基本可行解，但不是最优解。 （ ）

$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{15}{2},0\right)^T$ 是一个对偶可行的基本解。（ ）

二．（16 分）下面的单纯形表是某个线性规划问题的最优表，其中 x_4, x_5 是松弛变量，所有约束的类型均为“≤”．

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$
	0	-4	0	-4	-2	-40

（1） 写出原问题；（5 分）

（2） 写出原问题的对偶问题并用互补松弛原理求出对偶问题的最优解；（5 分）

（3） 原问题中，若 b_2 变为 $b_2' = 1$，则原最优基是否发生了变化？ 如果发生变化，求出新的最优解。（6分）

三．（10 分）用 KKT 条件求解下列约束问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1^2 - x_2 + 3x_3 \\
s.t.\ \ & x_1 + x_2 + x_3 \ge 0 \\
& x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0
\end{aligned}
$$

四．（10 分）考虑以下的非线性规划问题；

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & f(x) \\
s.t.\ \ & Ax = b
\end{aligned}
$$

其中 $f(x)$ 是连续可微函数，A 为 $m \times n\ (m < n)$ 阶矩阵，且 $r(A) = m$。设 $\bar{x}$ 是该问题的可行解，H 为 $n \times n$ 阶正定对称矩阵，令 $d = -P\nabla f(\bar{x})$，其中

$$P = H - HA^T\left(AHA^T\right)^{-1} AH$$

证明：（1）当 $P\nabla f\left(\bar{x}\right) = 0$ 时，$\bar{x}$ 是原问题的 KKT 点；

（2）当 $P\nabla f\left(\bar{x}\right) \ne 0$ 时，$d = -P\nabla f(\bar{x})$ 为下降可行方向。

<u>后面有题</u>

五．（10 分）设 x_0 是 $Ax=b, x\ge 0$ 的一个基本可行解，证明：存在一个向量 c，使 x_0 是下述线性规划问题的唯一最优解：$\min\{cx \mid Ax=b, x\ge 0\}$ 。

六．（10分）设有非线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min\ f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)\\ &s.t.\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=1\\ &\qquad\quad x_j\ge 0,\ j=1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

其中 $f_j(x_j)$ 为可微函数。证明，若可行解 $\overline{x}=\left(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n\right)^T$ 是局部最优解，则存在数 $\overline{v}$ ，使得：当 $\overline{x}_j>0$ 时，$f_j'(\overline{x}_j)=\overline{v}$ ；当 $\overline{x}_j=0$ 时，$f_j'(\overline{x}_j)\ge\overline{v}$ 。