统计信号处理

第三章

最小方差无偏估计 II
——充分统计量方法

清华大学电子工程系
李洪 副教授

2023.3

内容概要

- 一、引言
- 二、充分统计量的概念
- 三、Neyman-Fisher因子分解定理
- 四、Rao-Black-Lehmann-Scheffe定理
- 五、对矢量参数的扩展
- 六、小结

一、引言

- MVU估计
- 如何找MVU
  - 借助于CRLB

$$\boxed{\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta})}$$

- CRLB并非总是可行
  - 不满足“正则”条件
  - 即使满足，不易求、或达不到CRLB
- 另一条路：充分统计量方法

二、充分统计量的概念

电平估计问题：

$$x[n] = A + w[n],\ n = 0,1,\dots,N-1$$

待估计参数为信号幅度A，$w[n]$ 为高斯白噪声，且$w[n] \sim N(0,\sigma^2)$

其MVU估计为：$\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$

可能的观测数据集：

$$S_1 = \{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$$ ——原始数据集

$$S_2 = \left\{\sum_{n=0}^{K-1} x[n], \sum_{n=K}^{N-1} x[n]\right\}$$

$$S_3 = \left\{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right\} \qquad \dots$$

充分统计量：包含原始数据有关待估计参数所有信息的统计量

对观测数据

$$x[n]=A+w[n],\ n=0,1,\dots,N-1$$

其似然函数为

$$p(\mathbf{x};A)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2\right\}$$

当 $T(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$ 给定时，似然函数会有何变化？

$$p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})=T_0;A\right)=\frac{p\left(\mathbf{x},T(\mathbf{x})=T_0;A\right)}{p\left(T(\mathbf{x})=T_0;A\right)}$$

$$\Rightarrow\ p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})=T_0;A\right)=\frac{p(\mathbf{x};A)\,\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)}{p\left(T(\mathbf{x})=T_0;A\right)}$$

$$p\left(\mathbf{x}\,\middle|\,T(\mathbf{x})=T_0;A\right)=\frac{p(\mathbf{x};A)\,\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)}{p\left(T(\mathbf{x})=T_0;A\right)}$$

- **分子**

$$p(\mathbf{x};A)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]+NA^2-2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]A\right)\right\}$$

$$p(\mathbf{x};A)\,\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]+NA^2-2T_0A\right)\right\}\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)$$

- **分母**

$$T(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\;\Rightarrow\;T(\mathbf{x})\sim N\left(NA,N\sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow\; p\left(T(\mathbf{x});A\right)=\frac{1}{\left(2\pi N\sigma^2\right)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2N\sigma^2}\left(T(\mathbf{x})-NA\right)^2\right\}$$

$$\Rightarrow\; p\left(T(\mathbf{x})=T_0;A\right)=\frac{1}{\left(2\pi N\sigma^2\right)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2N\sigma^2}\left(T_0-NA\right)^2\right\}$$

$$p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})=T_0;A\right)=\frac{\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]+NA^2-2T_0A\right)\right\}\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)}{\dfrac{1}{\left(2\pi N\sigma^2\right)^{1/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2N\sigma^2}(T_0-NA)^2\right\}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]+NA^2-2T_0A\right)\right\}\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)}{\dfrac{1}{\left(2\pi N\sigma^2\right)^{1/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2N\sigma^2}\left(T_0^2+N^2A^2-2T_0NA\right)\right\}}$$

$$=\frac{\sqrt{N}}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{N-1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]+\frac{T_0^2}{2N\sigma^2}\right\}\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)=p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})=T_0\right)$$

——此时似然函数与待估计参数无关

——因观测数据有关待估计参数所有信息已包含在充分统计量中

$$\left\{\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\right\} \qquad \left\{\sum_{n=0}^{K-1}x[n],\sum_{n=K}^{N-1}x[n]\right\} \qquad \left\{x[0],x[1],x[2],\ldots,x[N-1]\right\}$$

- 最小集充分统计量
- 联合充分统计量
- 充分统计量并不唯一

若

$$p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x});\theta\right)=p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})\right)$$

表示 $T(\mathbf{x})$ 包含了观测数据有关待估计参数 θ 有关的所有信息，此时 $T(\mathbf{x})$ 称之为**充分统计量**

充分统计量的性质：

- 一旦充分统计量确定，似然函数就与待估计参数无关
- 充分统计量依赖于待估计参数。待估计参数变化，其相应的充分统计量一般也会变化
- 所谓“充分”，是相对于原始观测数据而言的
- 原始观测量总是充分统计量，但通常不是最小集
- 充分统计量并不唯一

若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(T)p(T;\theta)dT=0 \text{ 对所有 } \theta$$

并非都满足

只对零函数 $v(T)=0$ 成立，则称充分统计量是**完备的**

多选题 1分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

下列有关充分统计量说法正确的是?

A 充分统计量总是存在的

B 充分统计量与待估计参数有关

C 一旦充分统计量确定，似然函数就与待估计参数无关

D 充分统计量有可能唯一，也可能不唯一

E 最小集充分统计量是唯一的

提交

三、Neyman-Fisher因子分解定理

若 $p(\mathbf{x};\theta)$ 可以分解为

$$p(\mathbf{x};\theta)=g(T(\mathbf{x}),\theta)h(\mathbf{x})$$

其中 g 是只通过 $T(\mathbf{x})$ 才与 $\mathbf{x}$ 有关的函数，h 只是 $\mathbf{x}$ 的函数，那么 $T(\mathbf{x})$ 是 θ 的充分统计量。反之，若 $T(\mathbf{x})$ 是 θ 的充分统计量，那么PDF可以分解为上述形式

Neyman-Fisher因子分解定理

含义：

1. 当因子分解定理成立时，$T(\mathbf{x})$是 θ 的充分统计量

2. $T(\mathbf{x})$是θ 的充分统计量时，因子分解定理成立

证明

1.首先证明当因子分解定理成立时，$T(x)$是θ 的充分统计量

$$\boxed{p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)=p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})=T_0\right)}$$

$$p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)=\frac{p\left(\mathbf{x},T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)}{p\left(T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)}$$

$$p\left(\mathbf{x},T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)=p(\mathbf{x};\theta)\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)$$

因子分解定理：$p(\mathbf{x};\theta)=g\left(T(\mathbf{x}),\theta\right)h(\mathbf{x})$

$$p\left(T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)=\int p(\mathbf{x};\theta)\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)d\mathbf{x}$$

因子分解定理：$p(\mathbf{x};\theta)=g\left(T(\mathbf{x}),\theta\right)h(\mathbf{x})$

$$p\left(\mathbf{x},T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)=g\left(T(\mathbf{x})=T_0,\theta\right)h(\mathbf{x})\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)$$

$$p\left(T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)=\int g\left(T(\mathbf{x})=T_0,\theta\right)h(\mathbf{x})\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)d\mathbf{x}$$

$$p\left(T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)=g\left(T(\mathbf{x})=T_0,\theta\right)\int h(\mathbf{x})\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)d\mathbf{x}$$

$$p\left(\mathbf{x}\middle|T(\mathbf{x})=T_0;\theta\right)=\frac{h(\mathbf{x})\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)}{\int h(\mathbf{x})\delta\left(T(\mathbf{x})-T_0\right)d\mathbf{x}}$$

与 θ 无关！ 得证！

2. 证明当 $T(x)$ 是 θ 的充分统计量时，因子分解定理成立

$$\boxed{p(\boldsymbol{x};\theta)=g\left(T(\boldsymbol{x}),\theta\right)h(\boldsymbol{x})}$$

$$p\left(\boldsymbol{x},T(\boldsymbol{x})=T_0;\theta\right)=p\left(\boldsymbol{x}\,|\,T(\boldsymbol{x})=T_0;\theta\right)p\left(T(\boldsymbol{x})=T_0;\theta\right)$$

$$p\left(\boldsymbol{x},T(\boldsymbol{x})=T_0;\theta\right)=p(\boldsymbol{x};\theta)\delta\left(T(\boldsymbol{x})-T_0\right)$$

$$p\left(\boldsymbol{x}\,|\,T(\boldsymbol{x})=T_0;\theta\right)=p\left(\boldsymbol{x}\,|\,T(\boldsymbol{x})=T_0\right)=w(\boldsymbol{x})\,\delta\left(T(\boldsymbol{x})-T_0\right)$$

其中 $\int w(\boldsymbol{x})\delta\left(T(\boldsymbol{x})-T_0\right)d\boldsymbol{x}=1$

$$p(\boldsymbol{x};\theta)\delta\left(T(\boldsymbol{x})-T_0\right)=\underline{w(\boldsymbol{x})}\delta\left(T(\boldsymbol{x})-T_0\right)p\left(T(\boldsymbol{x})=T_0;\theta\right)$$

$$=\frac{h(\boldsymbol{x})}{\int h(\boldsymbol{x})\delta\left(T(\boldsymbol{x})-T_0\right)d\boldsymbol{x}}\delta\left(T(\boldsymbol{x})-T_0\right)p\left(T(\boldsymbol{x})=T_0;\theta\right)$$

$$\Rightarrow\quad p(\boldsymbol{x};\theta)=\boxed{\frac{p\left(T(\boldsymbol{x})=T_0;\theta\right)}{\int h(\boldsymbol{x})\delta\left(T(\boldsymbol{x})-T_0\right)d\boldsymbol{x}}}h(\boldsymbol{x})$$

$$\Rightarrow\quad p(\boldsymbol{x};\theta)=g\left(T(\boldsymbol{x}),\theta\right)h(\boldsymbol{x})$$ 得证！

例：电平估计问题：

$$x[n] = A + w[n],\ n = 0,1,\dots,N-1$$

待估计参数为信号幅度A。$w[n]$为高斯白噪声，且$w[n] \sim N(0,\sigma^2)$。待估计参数A的充分统计量是？

$$p(\mathbf{x};A) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A)^2\right\}$$

$$p(\mathbf{x};\theta) = g(T(\mathbf{x}),\theta)h(\mathbf{x})$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n] + NA^2 - 2A\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\right)\right\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(NA^2 - 2A\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\right)\right\}}_{g(T(\mathbf{x}),A)} \underbrace{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\right\}}_{h(\mathbf{x})}$$

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1}x[n] \qquad T(\mathbf{x}) = 2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\ ?$$

- 充分统计量并不唯一

四、Rao-Black-Lehmann-Scheffe定理

若 $\breve{\theta}$ 是θ的无偏估计， $T(\boldsymbol{x})$ 是 θ 的充分统计量，那么

$$\hat{\theta} = E\left(\breve{\theta} \middle| T(\boldsymbol{x})\right)$$

1. 是 θ 的一个适用的估计量（与 θ 无关）
2. 无偏的
3. 对所有的 θ， 它的方差小于等于 $\breve{\theta}$ 的方差
4. 若$T(\boldsymbol{x})$是完备的，那么$\hat{\theta}$ 是MVU估计量

Rao-Black-Lehmann-Scheffe定理

证明

1. $\hat{\theta}=E\left(\breve{\theta}\middle|T(\boldsymbol{x})\right)$ 是 θ 的一个适用的估计量（与 θ 无关）

$$\hat{\theta}=E\left(\breve{\theta}\middle|T(\boldsymbol{x})\right)$$

$$=\int\breve{\theta}(\boldsymbol{x})p\left(\boldsymbol{x}\middle|T(\boldsymbol{x});\theta\right)d\boldsymbol{x}$$

$$=\int\breve{\theta}(\boldsymbol{x})p\left(\boldsymbol{x}\middle|T(\boldsymbol{x})\right)d\boldsymbol{x}$$

$$=f\left(T(\boldsymbol{x})\right)$$ ——仅与 T 有关，与 θ 无关！

---

2. $\hat{\theta}=E\left(\breve{\theta}\middle|T(\boldsymbol{x})\right)$ 是无偏的

$$E\left(\hat{\theta}\right)=E\left(E\left(\breve{\theta}\middle|T(\boldsymbol{x})\right)\right)$$

$$=E\left(\int\breve{\theta}(\boldsymbol{x})p\left(\boldsymbol{x}\middle|T(\boldsymbol{x});\theta\right)d\boldsymbol{x}\right)$$

$$=\int\int\breve{\theta}(\boldsymbol{x})p\left(\boldsymbol{x}\middle|T(\boldsymbol{x});\theta\right)d\boldsymbol{x}\times p\left(T(\boldsymbol{x});\theta\right)dT$$

$$=\int\int\breve{\theta}(\boldsymbol{x})p\left(\boldsymbol{x}\middle|T(\boldsymbol{x});\theta\right)p\left(T(\boldsymbol{x});\theta\right)dTd\boldsymbol{x}$$

$$=\int\int\breve{\theta}(\boldsymbol{x})p\left(\boldsymbol{x},T(\boldsymbol{x});\theta\right)dTd\boldsymbol{x}$$

$$=\int\breve{\theta}(\boldsymbol{x})p\left(\boldsymbol{x};\theta\right)d\boldsymbol{x}$$

$$=E\left(\breve{\theta}\right)$$

$$=\theta$$ 无偏！

3. 对所有的 θ ，$\hat{\theta}$ 的方差小于等于 $\breve{\theta}$ 的方差

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left(\breve{\theta}\right) &= E\left(\left(\breve{\theta}-\theta\right)^2\right)\\ &= E\left(\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}+\hat{\theta}-\theta\right)^2\right)\\ &= E\left(\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}\right)^2+\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2+2\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right)\\ &= E\left(\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}\right)^2\right)+\mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right)+\underline{2E\left(\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right)}\\ &= E\left(\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}\right)^2\right)+\mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right)\end{aligned}$$

即 $\mathrm{var}\left(\breve{\theta}\right)\geq \mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right)$

$$\begin{aligned}&= E_{T,\breve{\theta}}\left\{\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\}\\ &= E_T\left\{E_{\breve{\theta}|T}\left\{\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\}\right\}\\ &= E_T\left\{E_{\breve{\theta}|T}\left(\breve{\theta}-\hat{\theta}\right)\times\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\}\\ &= E_T\left\{\left(E_{\breve{\theta}|T}\left(\breve{\theta}\right)-\hat{\theta}\right)\times\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\}\\ &= E_T\left\{\left(\hat{\theta}-\hat{\theta}\right)\times\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

4. 若 $T(x)$ 是完备的，那么 $\hat{\theta}$ 是MVU估计量

$$\hat{\theta} = E\left(\breve{\theta} \middle| T(\mathbf{x})\right) = \int \breve{\theta}(\mathbf{x})\, p\left(\mathbf{x} \middle| T(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} = f\left(T(\mathbf{x})\right)$$

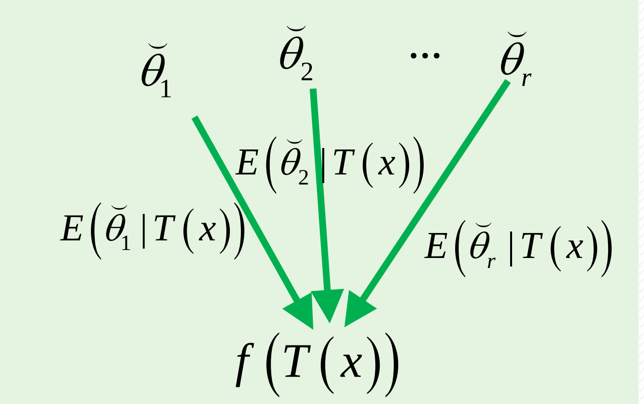
若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(T) p(T;\theta)\, dT = 0 \quad 对所有\ \theta$$

只对零函数 $v(T)=0$ 成立，则称充分统计量是**完备的**

完备性意味着什么？

- **意味着：由它所构造的无偏估计量是唯一的**
- 再者 $\mathrm{var}(\hat{\theta}) \le \mathrm{var}(\breve{\theta})$ ，因此 $\hat{\theta}$ 是MVU估计量



利用唯一性，找使 $f\left(T(\mathbf{x})\right)$ 为无偏估计的函数 f ，那么 $\hat{\theta} = f\left(T(\mathbf{x})\right)$ 是MVU估计量

利用RBLS定理求MVU估计量：

1 利用Neyman-Fisher定理求出 θ 的充分统计量 $T(\boldsymbol{x})$

2 检查充分统计量是否完备

3 若完备，则求充分统计量的无偏函数

$$\hat{\theta} = f\left(T(\boldsymbol{x})\right)$$

或对任意无偏估计量 $\breve{\theta}$ 求条件期望

$$\hat{\theta} = E\left(\breve{\theta} \middle| T(\boldsymbol{x})\right)$$

例：电平估计问题：

$$x[n] = A + w[n],\ n = 0,1,\dots,N-1$$

待估计参数为信号幅度A。$w[n]$为高斯白噪声，且 $w[n] \sim N(0,\sigma^2)$

求其MVU?

第一步：求充分统计量

$$p(\mathbf{x};\theta) = g(T(\mathbf{x}),\theta)h(\mathbf{x})$$

$$p(\mathbf{x};A) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n] + NA^2 - 2A\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(NA^2 - 2A\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\right)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\right\}$$

其充分统计量是$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1}x[n]$

第二步：完备性检验

充分统计量 $T(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$ 是否完备？

若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(T)p(T;\theta)dT=0 \quad \text{对所有 } \theta$$

只对零函数 $v(T)=0$ 成立，则称充分统计量是完备的

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(T)p(T;A)dT=\int_{-\infty}^{+\infty} v(T)\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2N\sigma^2}(T-NA)^2\right\}}dT$$

只有 $v(T)=0$，上式才能对所有 A 均为零，因此是完备的

第三步：构造无偏函数

$$E\left(f\left(T\left(\mathbf{x}\right)\right)\right)=A$$

$$T\left(\mathbf{x}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$$

$$\Rightarrow f\left(T\left(\mathbf{x}\right)\right)=\frac{T\left(\mathbf{x}\right)}{N} \Rightarrow \hat{A}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$$

MVU估计量！

或求条件期望 $\hat{\theta}=E\left(\breve{\theta}\middle|T\left(\mathbf{x}\right)\right)$

$$\operatorname{cov}\left(x,y\right)=E\left(xy\right)-E\left(x\right)E\left(y\right)$$

$$=E\left(x[0]\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\right)-NA^2 \quad =\sigma^2$$

构造一无偏估计： $\breve{\theta}=x[0]$

现求： $\hat{\theta}=E\left(\breve{\theta}\middle|T\left(\mathbf{x}\right)\right)=E\left(x[0]\middle|\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\right)$

公式：$E\left(x\,|\,y\right)=E\left(x\right)+\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(y)}\left(y-E(y)\right)$

$$E(x)\to A,\quad \operatorname{var}(y)\to N\sigma^2,\quad y\to\sum_{n=0}^{N-1}x[n],\quad E(y)\to NA$$

$$\Rightarrow \hat{A}=A+\frac{\sigma^2}{N\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]-NA\right)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$$

多选题 1分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

下列说法正确的是?

A 充分统计量总是存在的

B 对任意无偏估计量，利用充分统计量求条件期望，所得估计量可能是无偏的也可能是有偏的

C 对任意无偏估计量，利用充分统计量求条件期望，所得估计量的方差不会比原无偏估计量的方差大

D 由于无偏估计量总是存在的，因此利用充分统计量总是可以求得MVU估计量

E 在无偏估计量存在的情况下，利用充分统计量总是可以求得MVU估计量

提交

五、对矢量参数的扩展

若

$$p\left(\mathbf{x}\middle|\mathbf{T}(\mathbf{x});\boldsymbol{\theta}\right)=p\left(\mathbf{x}\middle|\mathbf{T}(\mathbf{x})\right)$$

$\mathbf{T}(\mathbf{x})$ 包含了估计 $\boldsymbol{\theta}$ 有关的所有信息，$\mathbf{T}(\mathbf{x})$ 称之为**充分统计量**

Neyman-Fisher因子分解定理（矢量参数）

若 $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ 可以分解为

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=g\left(\mathbf{T}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\theta}\right)h(\mathbf{x})$$

其中 g 是只通过 $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ 才与 $\mathbf{x}$ 有关的函数，h 只是 $\mathbf{x}$ 的函数，那么 $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的充分统计量。反之，若 $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的充分统计量，那么PDF可以分解为上述形式

若

$$\int v(\mathbf{T})p(\mathbf{T};\boldsymbol{\theta})d\mathbf{T}=\mathbf{0} \quad 对所有\ \boldsymbol{\theta}$$

并非都满足

只对零函数 $\boldsymbol{v}(\mathbf{T})=\mathbf{0}$ 成立，则称充分统计量 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x})$ 是完备的

若 $\breve{\boldsymbol{\theta}}$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的无偏估计，$\mathbf{T}(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的充分统计量，那么

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=E\left(\breve{\boldsymbol{\theta}}\middle|\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)$$

Rao-Black-Lehmann-Scheffe定理（矢量参数）

1. 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个适用的估计量（与 $\boldsymbol{\theta}$ 无关）
2. 无偏的
3. 对所有的 $\boldsymbol{\theta}$，它的方差小于等于 $\breve{\boldsymbol{\theta}}$ 的方差（即 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的每一个元素的方差都不大于 $\breve{\boldsymbol{\theta}}$ 中对应元素的方差）
4. 若 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x})$ 是完备的，那么 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是MVU估计量

利用RBLS定理（矢量参数）求MVU估计量：

1. 利用Neyman-Fisher定理求出 $\boldsymbol{\theta}$ 的充分统计量 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x})$

2. 检查充分统计量是否完备

3. 若完备，则求充分统计量的无偏函数

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)$$

或对任意无偏估计量 $\breve{\boldsymbol{\theta}}$ 求条件期望

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = E\left(\breve{\boldsymbol{\theta}} \middle| \mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)$$

例：电平估计问题：

$$x[n]=A+w[n],\ n=0,1,\ldots,N-1$$

$w[n]$为高斯白噪声，且 $w[n]\sim N(0,\sigma^2)$，待估计参数 $\boldsymbol{\theta}=\left[A,\sigma^2\right]^T$

第一步：求充分统计量

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=g(\mathbf{T}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\theta})h(\mathbf{x})$$

$$p\left(\mathbf{x};\left[A,\sigma^2\right]^T\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2\right\}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]-2A\sum_{n=0}^{N-1}x[n]+NA^2\right)\right\}}_{g(\mathbf{T}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\theta})}\ \times\underbrace{1}_{h(\mathbf{x})}$$

其充分统计量是 $\mathbf{T}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\\ \sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\end{bmatrix}$

第二步：完备性检验

其充分统计量 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\\ \sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\end{bmatrix}$ 是否完备？

若

$$\int \boldsymbol{v}(\mathbf{T})p(\mathbf{T};\boldsymbol{\theta})d\mathbf{T}=\mathbf{0}\quad \text{对所有 } \boldsymbol{\theta}$$

只对零函数 $\boldsymbol{v}(\mathbf{T})=\mathbf{0}$ 成立，则称充分统计量 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x})$ 是完备的

只有 $\boldsymbol{v}(\mathbf{T})=\mathbf{0}$ ，上式才能对所有 $\boldsymbol{\theta}=\left[A,\sigma^2\right]^T$ 均为零

因此，充分统计量是完备的

第三步：构造无偏函数

即，找个函数 $\boldsymbol{f}$ ，使 $E\left(\boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)\right)=\begin{bmatrix} A \\ \sigma^2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} T_1(\boldsymbol{x}) \\ T_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \\ \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \end{bmatrix} \Rightarrow E\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)=\begin{bmatrix} NA \\ N\left(A^2+\sigma^2\right) \end{bmatrix}$$

构建

$$\boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)=\begin{bmatrix} \frac{1}{N}T_1(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{N}T_2(\boldsymbol{x})-\left(\frac{1}{N}T_1(\boldsymbol{x})\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$E\left(\boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)\right)=\begin{bmatrix} A \\ \frac{1}{N}E\left(T_2(\boldsymbol{x})\right)-E\left(\left(\frac{1}{N}T_1(\boldsymbol{x})\right)^2\right) \end{bmatrix}$$

$$E\left(\boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)\right)=\begin{bmatrix} A \\ \frac{N-1}{N}\sigma^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

新构建 $\boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)=\begin{bmatrix} \frac{1}{N}T_1(\boldsymbol{x}) \\ \frac{N}{N-1}\left(\frac{1}{N}T_2(\boldsymbol{x})-\left(\frac{1}{N}T_1(\boldsymbol{x})\right)^2\right) \end{bmatrix}$

第三步：构造无偏函数（续）

$$\boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{N}T_1(\boldsymbol{x})\\ \frac{N}{N-1}\left(\frac{1}{N}T_2(\boldsymbol{x})-\left(\frac{1}{N}T_1(\boldsymbol{x})\right)^2\right)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}T_1(\boldsymbol{x})\\ T_2(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\\ \sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)=\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \frac{N}{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]-\bar{x}^2\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \frac{1}{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]-N\bar{x}^2\right)\end{bmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]-N\bar{x}^2=\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]-2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\bar{x}+N\bar{x}^2=\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-\bar{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\right)=\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-\bar{x}\right)^2\end{bmatrix}=\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

MVU估计量！

第三步：构造无偏函数（续）

MVU估计量：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-\bar{x}\right)^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{N-1} \end{bmatrix}$$

$$x[n] = A + w[n],\ n = 0,1,\ldots,N-1 \Rightarrow \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{N} \end{bmatrix}$$

- 此例中，利用CRLB方法难以求出MVU
- 同时也说明利用RBLS定理求解MVU的有效性

六、小结

- 充分统计量 ——包含原始数据有关待估计参数所有信息的统计量
- Neyman-Fisher (NF)因子分解定理
- Rao-Black-Lehmann-Scheffe (RBLS)定理
- 利用RBLS定理求MVU估计量
  - 1. 应用Neyman-Fisher因子分解定理求充分统计量
  - 2. 检查充分统计量是否完备

    ——完备意味着利用充分统计量只能构建出一个无偏估计量
  - 3. 若完备，构建充分统计量的无偏函数，或对任意无偏估计求条件期望，即可得MVU估计量

    ——为求解“普通”MVU估计量提供了一种可能的方法

    Vs CRLB只能用于求解有效估计量
- 对矢量参数扩展