第四章 信道与编码
第2部分：高斯信道与容量

授课教师：樊平毅教授
清华大学电子工程系





2022年9月20日

内容简介

清華大學
Tsinghua University

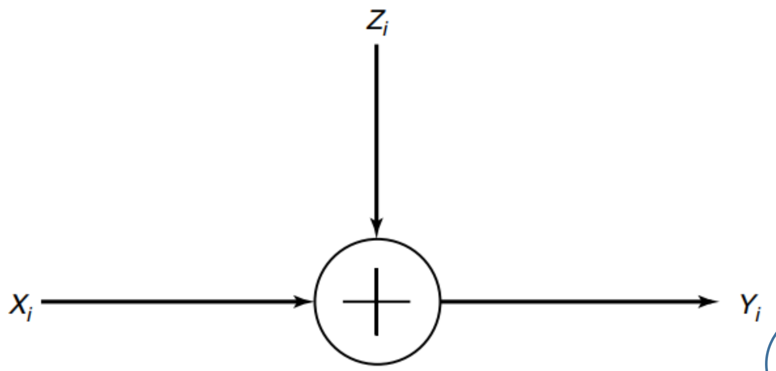
- 高斯信道的概念
- 高斯信道编码定理的逆定理
- 带宽有限信道
- 并联高斯信道
- 高斯彩色噪声信道
- 带反馈的噪声信道

知识拓展： 高斯信道容量逼近的编码技术

高斯信道的概念

高斯信道：在时刻i，输出信号是输入信号X_i与噪声Z_i之和Y_i，其中Z_i为独立同分布序列且服从方差为N的高斯分布。于是：

$$Y_i = X_i + Z_i, \qquad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N).$$



该如何选择输入信号？

思考：

- 如果噪声方差为0，信道容量为多大？
- 如果输入信号没有限制，信道容量为多大？
- 离散信道和连续信道的不同点在哪？

高斯信道的概念

清華大學 Tsinghua University

平均功率约束：对于在信道上传输的任意码字$(x_1, x_2, \dots, x_n)$，有：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le P.$$

例1：假定使用该高斯信道一次发送1比特消息。在额定功率限制下，最佳方案是发送$+\sqrt{P}$和$-\sqrt{P}$中的一个。接收者根据接收到的 Y 来推测发送的是两个中哪一个。假定二者是等可能的，则最优的译码规则为：当 $Y > 0$ 时 认为发送的是 $+\sqrt{P}$，而当$Y < 0$ 时认为发送的是$-\sqrt{P}$。此译码方案的误差概率是：

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{2}\Pr(Y < 0 | X = +\sqrt{P}) + \frac{1}{2}\Pr(Y > 0 | X = -\sqrt{P}) \\
&= \frac{1}{2}\Pr(Z < -\sqrt{P} | X = +\sqrt{P}) + \frac{1}{2}\Pr(Z > \sqrt{P} | X = -\sqrt{P}) \\
&= \Pr(Z > \sqrt{P}) \\
&= 1 - \Phi\left(\sqrt{P/N}\right),
\end{aligned}$$

高斯信道的概念

功率限制为P的高斯信道的信息容量为：

$$C = \max_{f(x):E X^2 \le P} I(X;Y).$$

将$I(X;Y)$ 展开，由于Z 与 X 独立，所以：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) \\ &= h(Y) - h(X+Z|X) \\ &= h(Y) - h(Z|X) \\ &= h(Y) - h(Z), \end{aligned}$$

此时，$h(Z)=\frac{1}{2}\log 2\pi e N$，又由于$Z$ 与 X 独立以及$E\,Z = 0$，所以

$$EY^2 = E(X+Z)^2 = EX^2 + 2EXEZ + EZ^2 = P + N,$$

高斯信道的概念

功率限制为P的高斯信道的信息容量为：

$$C = \max_{f(x):E X^2 \le P} I(X;Y).$$

在给定方差下，正态分布使熵最大，故Y的熵的上界为$\frac{1}{2}log2\pi e(P+N)$，得到互信息的上界：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Z) \\ &\le \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N) - \frac{1}{2}\log 2\pi eN \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right). \end{aligned}$$

因此，高斯信道的信道容量为下式，且最大值在$X \sim N(0,P)$时达到：

$$C = \max_{EX^2 \le P} I(X;Y) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right),$$

高斯信道的概念

一个功率限制为P的高斯信道所对应的(M,n)码由以下几个要素构成：

1. 下标集$\{1,2,\dots,M\}$
2. 编码函数$x:\{1,2,\dots,M\}\to\chi^n$，其对应的码字为$x^n(1),x^n(2),\dots,x^n(M)$，且满足功率限制$P$，即对每个码字
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w) \le nP, \qquad w=1,2,\dots,M.$$
3. 译码函数 $g:\mathcal{Y}^n \to \{1,2,\dots,M\}.$

对于一个功率限制为P的高斯信道，如果存在码字满足功率限制的一个$(2^{nR},n)$码序列，使得最大误差概率$\lambda^n\to 0$，则称码率R关于该功率限制为P的高斯信道是可达的。可以证明高斯信道的容量即是所有可达码率的上确界。

高斯信道的概念

清華大學 Tsinghua University

高斯信道编码定理

如何构造低误差概率$(2^{nC},n)$码

一个功率限制为P且噪声方差为N 的高斯信道的容量为：

$$C=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

直观论述：考虑长度为n的一个任意码字，则接收到的向量信号服从正态分布，并且其均值与真实的码字相等，方差等于噪声的方差。所以，接收到的向量将以很高的概率落在以真实的码字为中心，半径为$\sqrt{n(N+\epsilon)}$的球内。如果我们将该球中的所有向量指定给这个真实的码字，则当发送该码字时，只有当接收到的向量落在该球外时，译码才会出现错误，而且发生的概率很低。

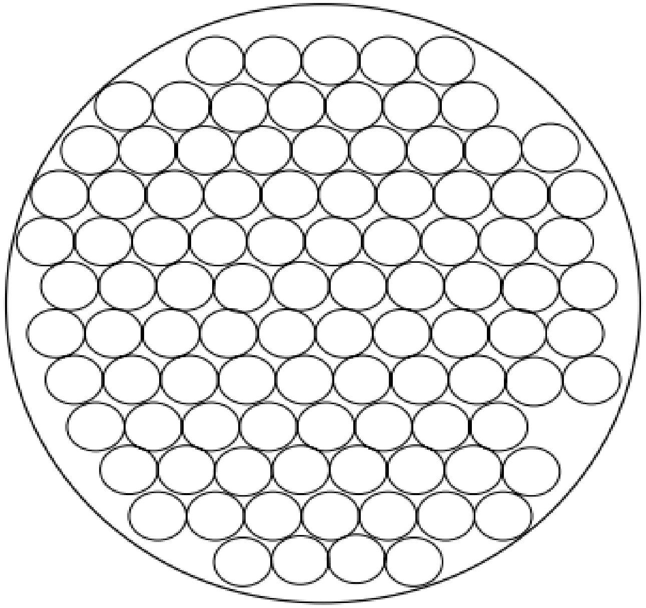
类似地，可以选择其他的码字及其对应的译码球。能够选择多少个这样的码字呢？一个n维球的体积公式是$C_n r^n$，其中r表示球的半径。在这种情况下，每个译码球有半径$\sqrt{nN}$。这些球遍布于接收向量空间。接收到的向量的能量不会大于$n(P+N)$，所以它们落于半径为$\sqrt{n(P+N)}$ 的球内。

高斯信道容量的猜测与解释

在这个体积内互不相交的译码球的最大数目不会超过：

$$\frac{C_n\left(n(P+N)\right)^{\frac{n}{2}}}{C_n(nN)^{\frac{n}{2}}}=2^{\frac{n}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)}$$

于是，该码的码率为$\frac{1}{2}\boldsymbol{log}\left(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{N}}\right)$



不能期望以高于C的码率而以低误差概率发送信号

定理 8.2.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个服从于密度函数 $f(x)$ 的独立同分布的随机变量序列。那么下面的极限依概率收敛。

$$-\frac{1}{n}\log f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \to E[-\log f(X)] = h(X) \quad \text{依概率} \tag{8-10}$$

连续变量的AEP讨论

定义 对 $\epsilon>0$ 及任意的 n，定义 $f(x)$ 的典型集 $A_\epsilon^{(n)}$ 如下：

$$A_\epsilon^{(n)} = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S^n : \left| -\frac{1}{n}\log f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - h(X) \right| \leqslant \epsilon \right\}$$

其中 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$。

AEP的体积处理（无法计数）

定义 集合 $A\subset\mathcal{R}^n$ 的体积 $\mathrm{Vol}(A)$ 定义为

$$\mathrm{Vol}(A)=\int_A dx_1dx_2\cdots dx_n$$

定理 8.2.2 典型集 $A_\varepsilon^{(n)}$ 有如下的性质： （取值范围，概率权重占比，集合大小）

1. 对于充分大的 n，$\Pr(A_\varepsilon^{(n)})>1-\varepsilon$。
2. 对于所有的 n，$\mathrm{Vol}(A_\varepsilon^{(n)})\leqslant 2^{n(h(X)+\varepsilon)}$。
3. 对于充分大的 n，$\mathrm{Vol}(A_\varepsilon^{(n)})\geqslant(1-\varepsilon)2^{n(h(X)-\varepsilon)}$。

- 支撑集A的空间位置，体积大小
- 概率 1-\Epson
- 2^{nh}

物理解释：

该定理表明拥有大部分概率的最小集合的体积大约为 2^{nh}。这是 n 维正方体，因而，对应的边长为 $(2^{nh})^{1/n}=2^h$。这给微分熵概念提供了一个解释：熵就是拥有大部分概率的最小集的边长的对数值。因此，较低的熵意味着随机变量被限于一个狭小的有效正方体内，而较高的熵意味着该随机变量是高度分散的。

证明：根据 AEP(定理 8.2.1)，依概率有 $-\frac{1}{n}\log f(X^n)=-\frac{1}{n}\sum\log f(x_i)\to h(X)$，故性质 1 获证。另外，

$$1=\int_{S^n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{8-13}$$

$$\geqslant\int_{A_\epsilon^{(n)}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{8-14}$$

$$\geqslant\int_{A_\epsilon^{(n)}} 2^{-n(h(X)+\epsilon)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{8-15}$$

$$=2^{-n(h(X)+\epsilon)}\int_{A_\epsilon^{(n)}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{8-16}$$

$$=2^{-n(h(X)+\epsilon)}\mathrm{Vol}(A_\epsilon^{(n)}) \tag{8-17}$$

因此，性质 2 获证。我们进一步论证该典型集的体积至少是这么大。如果 n 足够大使得性质 1 成立，那么

$$
\begin{aligned}
1-\varepsilon &\leqslant \int_{A_\varepsilon^{(n)}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
&\leqslant \int_{A_\varepsilon^{(n)}} 2^{-n(h(X)-\varepsilon)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= 2^{-n(h(X)-\varepsilon)}\int_{A_\varepsilon^{(n)}} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= 2^{-n(h(X)-\varepsilon)}\mathrm{Vol}(A_\varepsilon^{(n)})
\end{aligned}
$$

故性质 3 获证。因此，对充分大的 n，有

$$
(1-\varepsilon)2^{n(h(X)-\varepsilon)} \leqslant \mathrm{Vol}(A_\varepsilon^{(n)}) \leqslant 2^{n(h(X)+\varepsilon)}
$$

AEP典型集的选择一致性

定理8.2.3 在一阶指数意义下，在所有概率$\geqslant 1-\varepsilon$ 的集合中，$A_\varepsilon^{(n)}$ 是体积最小者。

高斯信道容量可达性

可达性证明：

1. **码簿的生成**。我们希望生成一个所有码字都满足功率限制的码簿。为达此目的，生成的码字必须是服从方差为$P-\epsilon$的**正态分布的 i.i.d. 序列**。由于对充分大的n，有$\frac{1}{n}\sum X_i^2 \to P-\epsilon$，所以一个码字不满足功率限制的概率将会很小。令$X_i(\omega), i=1,2,\dots,n, \omega=1,2,\dots,2^{nR}$为 i.i.d.$\sim N(0,P-\epsilon)$，形成码字$X^n(1), X^n(2), \dots, X^n(2^{nR}) \in R^n$。
2. **编码**。码簿生成后，将其告之发送方和接收方。为了发送消息下标ω，发送器则发送码簿中的第ω个码字$X^n(\omega)$。
3. **译码**。接收者在码字列表$\{X^n(\omega)\}$中**寻找与接收到的向量是联合典型的码字**。如果**存在且仅存在一个**这样的码字$X^n(\omega)$，则接收者断定$\widehat{W}=X^n(\omega)$就是所传输的码字。**否则，接收者断定出现错误**。如果被选择的码字**不满足功率限制**，则接收者**也断定它出现错误**。

考虑码字生成和译码的每个细节，保证系统的完备性

Tsinghua University

可达性证明：

4 误差概率。不失一般性，假定码字1被发送。于是，$Y^n = X^n(1) + Z^n$。定义下列事件：

$$E_0 = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2(1) > P \right\} \qquad E_i = \left\{ (X^n(i), Y^n) \text{ is in } A_\epsilon^{(n)} \right\}.$$

如果$\boldsymbol{E_0}$出现，**或者**$\boldsymbol{E_1^C}$出现，**或者**$\boldsymbol{E_2 \cup E_3 \cup \cdots \cup E_{2^{nR}}}$出现，则会**出现错误**。因此，根据事件的并的概率不等式

$$\Pr(\mathcal{E}|W=1) = P(\mathcal{E}) = P\left(E_0 \cup E_1^c \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots \cup E_{2^{nR}}\right) \tag{9.25}$$

$$\leq P(E_0) + P(E_1^c) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} P(E_i), \tag{9.26}$$

高斯信道的概念

由大数定律，当$n \to \infty$时$P(E_0) \to 0$。现在，根据联合AEP，有$P(E_1^C) \to 0$，因此 $P(E_1^c) \le \epsilon$ for n sufficiently large.

由码的生成过程可以看出$X^n(1)$与$X^n(i)$是独立的，所以，Y^n与$X^n(i)$也是独立的。因此，根据联合AEP，**$X^n(i)$与Y^n为联合典型的概率$\le 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)}$**。

现在令W是$\{1,2,\dots,2^{nR}\}$上的均匀分布，因此，

$$\Pr(\mathcal{E}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum \lambda_i = P_e^{(n)}.$$

此时，**对充分大的n和$R < I(X;Y) - 3\epsilon$，下式证明了一个好的$(2^{nR}, n)$码的存在性**

高斯信道容量的可达性

此时，对充分大的n和$R < I(X;Y) - 3\epsilon$，下式证明了一个好的$(2^{nR}, n)$码的存在性

$$
\begin{aligned}
P_e^{(n)} &= \Pr(\mathcal{E}) = \Pr(\mathcal{E}|W=1) \\
&\le P(E_0) + P(E_1^c) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} P(E_i) \\
&\le \epsilon + \epsilon + \sum_{i=2}^{2^{nR}} 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)} \\
&= 2\epsilon + \left(2^{nR} - 1\right) 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)} \\
&\le 2\epsilon + 2^{3n\epsilon} 2^{-n(I(X;Y)-R)} \\
&\le 3\epsilon
\end{aligned}
$$

AEP 性质和容量的定义

高斯信道编码定理的逆定理

清華大學
Tsinghua University

$R > C$ 是否　可达?

对于功率限制为P的高斯信道中的一个$(2^{nR}, n)$序列，当$P_e^{(n)} \to 0$时，则

$$R \le C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right).$$

考虑满足功率限制的任意一个$(2^{nR}, n)$码，即对$\omega = 1, 2, \ldots, 2^{nR}$，满足

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w) \le P,$$

令W为$\{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$上的均匀分布。下标集$W = \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$上的均匀分布诱导出输入码字集的分布，进而诱导出输入信号字母表上的分布。这指定了关于链$W \to X^n(W) \to Y^n \to \widehat{W}$的一个联合分布。由费诺不等式:

$$\boxed{H(W|\hat{W}) \le 1 + nRP_e^{(n)} = n\epsilon_n,}$$

其中，当$P_e^{(n)} \to 0$时，$\epsilon_n \to 0$。从而

高斯信道编码定理的逆定理

清華大學 Tsinghua University

依据AEP 的理论推导

$$
\begin{aligned}
nR = H(W) &= I(W;\hat{W}) + H(W|\hat{W}) \\
&\le I(W;\hat{W}) + n\epsilon_n \\
&\le I(X^n;Y^n) + n\epsilon_n \quad \text{数据处理不等式} \\
&= h(Y^n) - h(Y^n|X^n) + n\epsilon_n \\
&= h(Y^n) - h(Z^n) + n\epsilon_n \\
&\le \sum_{i=1}^{n} h(Y_i) - h(Z^n) + n\epsilon_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} h(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} h(Z_i) + n\epsilon_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i) + n\epsilon_n.
\end{aligned}
$$

高斯信道编码定理的逆定理

其中$\boldsymbol{X_i = x_i(W)}$，而$\boldsymbol{W}$服从于$\{\boldsymbol{1, 2, \dots, 2^{nR}}\}$上的均匀分布。现在令$\boldsymbol{P_i}$表示码簿中第$\boldsymbol{i}$列的平均功率，即

$$P_i = \frac{1}{2^{nR}} \sum_w x_i^2(w).$$

那么，由于$\boldsymbol{Y_i = X_i + Z_i}$ 且$\boldsymbol{X_i}$与$\boldsymbol{Z_i}$是相互独立的，则$\boldsymbol{Y_i}$的平均功率$\boldsymbol{EY_i^2}$是$\boldsymbol{P_i + N}$。因此，由正态分布使熵达到最大值，可得

$$h(Y_i) \le \frac{1}{2} \log 2\pi e(P_i + N).$$ 最大熵不等式

由于：

$$\begin{aligned}
nR &\le \sum (h(Y_i) - h(Z_i)) + n\epsilon_n \\
&\le \sum \left(\frac{1}{2} \log(2\pi e(P_i + N)) - \frac{1}{2} \log 2\pi e N \right) + n\epsilon_n \\
&= \sum \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_i}{N} \right) + n\epsilon_n.
\end{aligned}$$

高斯信道编码定理的逆定理

清華大學 Tsinghua University

由于每个码字都满足功率限制，自然它们的平均也满足功率限制，因此：

$$\frac{1}{n}\sum_i P_i \le P.$$

由于$f(x)=\frac{1}{2}log(1+x)$是一个关于x的上凸函数，由Jensen不等式可得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_i}{N}\right) \le \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{N}\right) \le \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right).$$

能量集中使用

于是:

$$R \le \frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{N})+\epsilon_n,\ \epsilon_n \to 0,$$

故$R > C$ 是不可达的，完成了证明。

思考：功率限制是什么时候引入的？

带宽有限信道（1）

带白噪声的**带宽有限**信道：

$$Y(t) = (X(t) + Z(t)) * h(t),$$

其中$X(t)$是信号的波形，$Z(t)$是高斯白噪声的波形，$h(t)$是一个理想低通滤波器的冲击响应，它的作用是将大于W的所有频率过滤掉。

采样定理

一般来讲，一个信号具有无限个自由度，即信号在任意采样点的值是独立选取的。而采样定理说明一个具有最大截频的信号仅有每秒$2W$个自由度。信号在采样点上的值可以独立选取，这些特定的值就决定了整个信号

假定信号$f(t)$的最大截频为W，即对所有大于W的频率，该信号的谱为0。那么该信号可由间隔为$\frac{1}{2W}$秒的采样序列完全决定。

带宽有限信道（2）

清華大學 Tsinghua University

证明： 设$F(\omega)$表示f(t)的傅里叶变换。由于$F(\omega)$在带宽$-2\pi W \le \omega \le 2\pi W$之外为0，则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega,$$

如果考虑间隔为$\frac{1}{2W}$秒的采样序列，则信号在采样点的值可写为

$$f\left(\frac{n}{2W}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega)e^{i\omega\frac{n}{2W}}\,d\omega.$$

考虑函数：

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t}.$$

该函数在$t=0$时为1，在$t=\frac{n}{2W}, n \neq 0$时为0.这个函数的频谱在频带$(-W, W)$之内为常数，在该频带之外为0。

带宽有限信道（3）

清華大學 Tsinghua University

定义函数$g(t)$:

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right)\operatorname{sinc}\left(t-\frac{n}{2W}\right).$$

带限抽样定理

由函数sinc的性质可知，$g(t)$的最大截频为W，且在$\frac{t}{2W}$时等于$f\left(\frac{n}{2W}\right)$。由于满足这些限制条件的信号只有一个，则必有$g(t)=f(t)$。于是得出了$f(t)$可由采样序列重构的一个线性表达式。

由于：

$$C=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

假设使用信道的时间区间为$[0,T]$. 在该情形下，每个样本的功率为$\frac{PT}{2WT}=\frac{P}{2W}$，每样本的噪声方差为$\frac{N_0}{2}2W\frac{T}{2WT}=\frac{N_0}{2}$，因此每样本容量是：

$$C=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\frac{P}{2W}}{\frac{N_0}{2}}\right)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)$$

香农公式的由来

由于每秒内存在$2W$个样本，所以信道的容量可以重新写成：

$$C=W\log\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)$$

带宽有限信道（4）

如果令$W \to \infty$，则可以得到：

$$\boxed{C = \frac{P}{N_0}\log_2 e}$$

它是具有无限带宽，功率为P，噪声谱密度是$\frac{N_0}{2}$的信道的容量。

所以，对于无限带宽信道，信道容量与功率成线性增长关系。

通信系统相关问题：通信原理

（1）带宽W 趋于0， 容量如何？

（2）带宽的变化导致容量的变化的结果是什么？ 你观察到何种现象？

（3） 容量与功率之比的最大值何时可以达到？ 你会联想到什么？

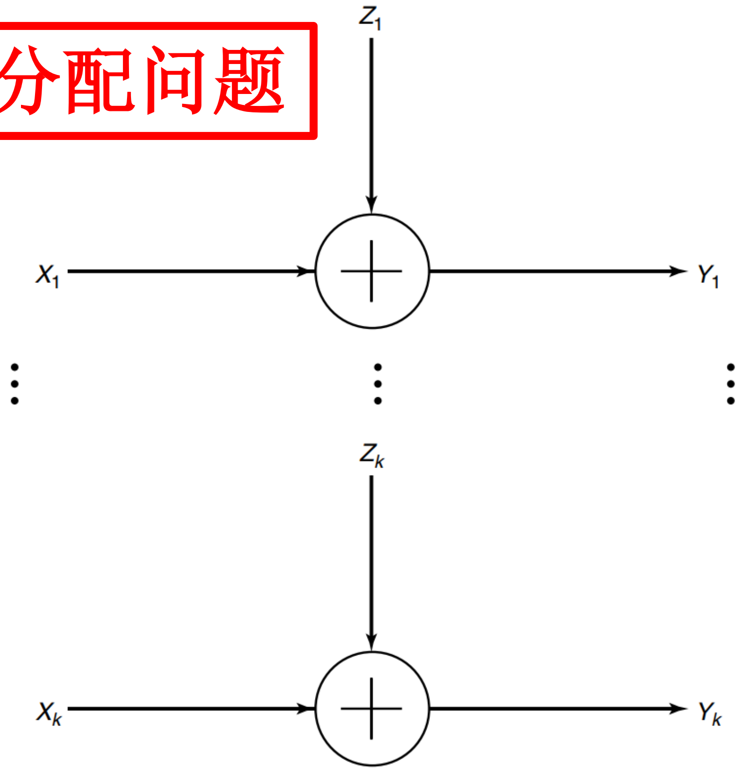
（4） 带宽利用效率与功率利用效率哪种更重要？ 它们对应的条件是什么？

并联高斯信道（1）

问题背景：假设有一组并联高斯信道。每个信道的输出是输入与高斯噪声之和。对于信道j：

$$Y_j = X_j + Z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j),$$

系统资源分配问题



假设噪声在信道与信道之间是相互独立的，所使用的总功率方面存在一个公共的功率限制，即

$$E \sum_{j=1}^{k} X_j^2 \le P.$$

希望将功率分配于各信道之中以使总容量达到最大。

并联高斯信道（2）

信道的信息容量C为：

$$C = \max_{f(x_1,x_2,\ldots,x_k):\sum E X_i^2 \le P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k).$$

由于$Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$是相互独立的：

$$\begin{aligned}
& I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) \\
&= h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k | X_1, X_2, \ldots, X_k) \\
&= h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - h(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k | X_1, X_2, \ldots, X_k) \\
&= h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - h(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k) \\
&= h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \\
&\le \sum_i h(Y_i) - h(Z_i) \\
&\le \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right),
\end{aligned}$$

其中$P_i = E X_i^2, \sum P_i = P$.

并联高斯信道（3）

等号在如下条件达到时成立：

$$(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k \end{bmatrix}\right).$$

问题简化为在满足约束条件$\sum \boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{P}$下，寻求一个功率分配方法使得容量达到最大。可以利用拉格朗日乘子法得到解决：

$$\boxed{J(P_1, \ldots, P_k) = \sum \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right) + \lambda\left(\sum P_i\right)}$$

对$\boldsymbol{P_i}$求导，有：$\boxed{\frac{1}{2}\frac{1}{P_i + N_i} + \lambda = 0}$

然而，由于 $\boldsymbol{P_i}$非负 ，所以，并不总能找到一个如此形式的解。利用库恩塔克条件:

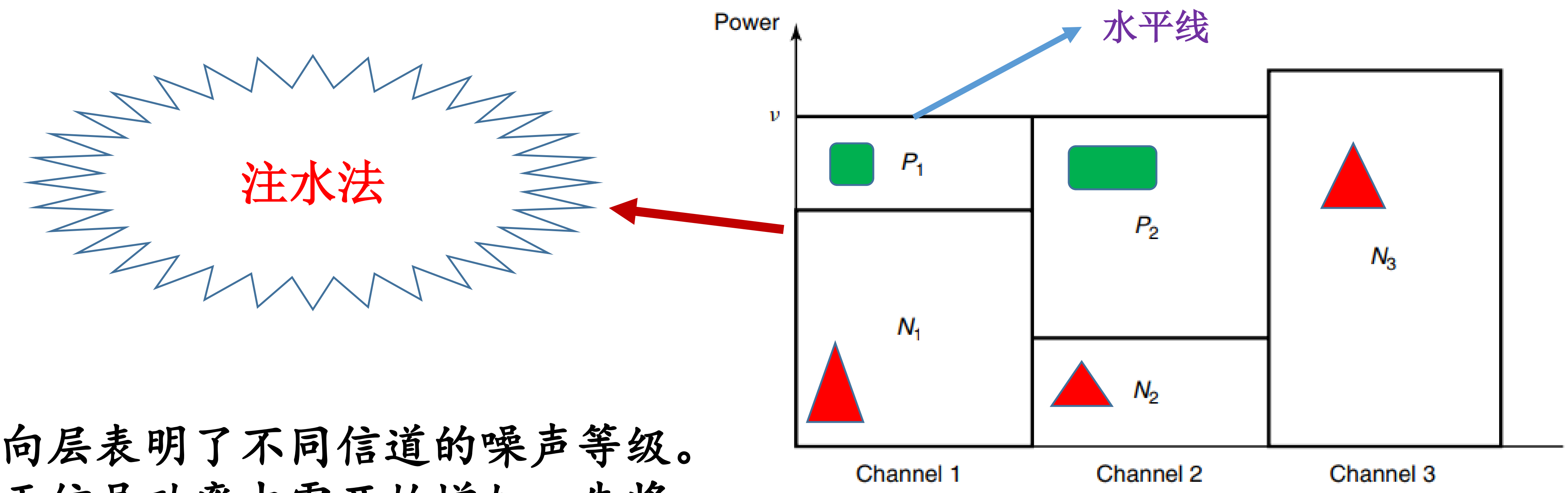
$$P_i = (\nu - N_i)^+$$

v 称为水平线

使得容量达到最大的分配方法，其中$\boldsymbol{v}$的选取满足：

$$\boxed{\sum (\nu - N_i)^+ = P.}$$

并联高斯信道（3）



纵向层表明了不同信道的噪声等级。由于信号功率由零开始增加，先将功率分配给噪声水平最低的信道。当进一步增加可获得的功率时，一部分功率分配给噪声更大的信道。

高斯彩色噪声信道（1）

建模原则

对于有记忆的信道，可把连续n次使用同一个信道的效果视作使用一次由噪声相关的n个信道并联所得的信道。下面计算该信道的信道容量：

设K_Z为噪声的协方差阵，K_X为输入信号的协方差阵。那么，对于输入信号的功率限制可以写为：

$$\frac{1}{n}\sum_i EX_i^2 \le P, \qquad \frac{1}{n}\mathrm{tr}(K_X) \le P.$$

与独立信道情形相同，有：

$$I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) - h(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n).$$

当Y服从正态分布时，输出信号的熵达到最大，这情形是在输入分布是正态分布时达到。由于输入信号与噪声是相互独立的，所以，输出Y的协方差矩阵为$K_Y = K_X + K_Z$，且熵为

$$h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \frac{1}{2}\log\left((2\pi e)^n |K_X + K_Z|\right).$$

问题简化为在K_X的迹约束下，选取K_X使得$|K_X + K_Z|$达到最大。将K_Z分解成对角形：

高斯彩色噪声信道（2）

$$K_Z = Q\Lambda Q^t, \quad \text{where } QQ^t = I.$$

$$\begin{aligned}|K_X + K_Z| &= |K_X + Q\Lambda Q^t| \\ &= |Q||Q^t K_X Q + \Lambda||Q^t| \\ &= |Q^t K_X Q + \Lambda| \\ &= |A + \Lambda|,\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{K}_X\boldsymbol{Q}$。则：

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}(Q^t K_X Q) \\ &= \operatorname{tr}(QQ^t K_X) \\ &= \operatorname{tr}(K_X).\end{aligned}}$$

问题进一步简化为在迹约束条件$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A}) \le \boldsymbol{nP}$之下，求$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Lambda}|$的最大值。由于任意正定阵的行列式一定小于它的对角元素的乘积，即

$$\boxed{|K| \le \prod_i K_{ii}}$$

当且仅当矩阵为对角型等号成立。于是：

高斯彩色噪声信道（3）

清华大学 Tsinghua University

$$\boxed{|A+\Lambda| \le \prod_i (A_{ii}+\lambda_i)}$$

由于$\boldsymbol{A}$受到迹的约束：

$$\frac{1}{n}\sum_i A_{ii} \le P,$$

且$\boldsymbol{A_{ii}} \ge \mathbf{0}$，所以，$\prod(\boldsymbol{A_{ii}}+\boldsymbol{\lambda_i})$的最大值在满足下列条件时达到：

$$A_{ii}+\lambda_i = \nu.$$

库恩塔克条件在求解过程中起到了什么作用

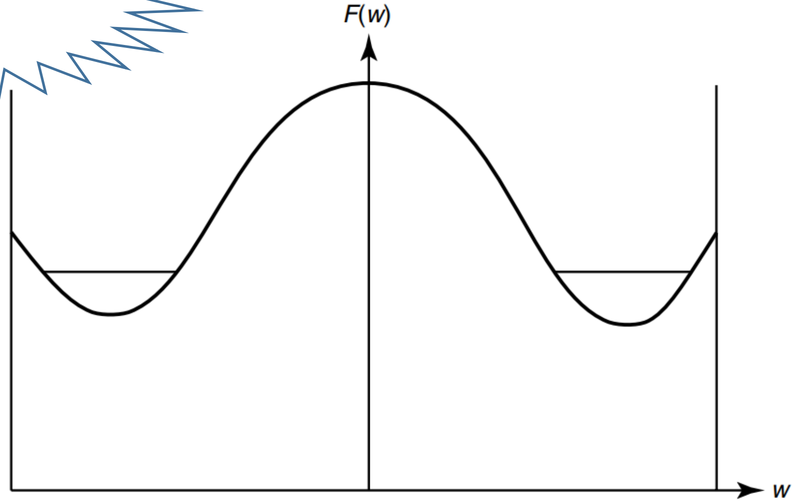
考虑到约束条件，不可能总是存在整得$\boldsymbol{A_{ii}}$满足上述方程。在不满足的条件下，根据标准库恩--塔克条件可以证明最优解对应于取：

$$A_{ii} = (\nu-\lambda_i)^+,$$

其中选取$\boldsymbol{v}$使得$\sum \boldsymbol{A_{ii}} = \boldsymbol{nP}$。此时$\boldsymbol{A}$的值使$\boldsymbol{Y}$的熵达到最大，因此，互信息达到最大。

高斯彩色噪声信道（4）

频域注水法



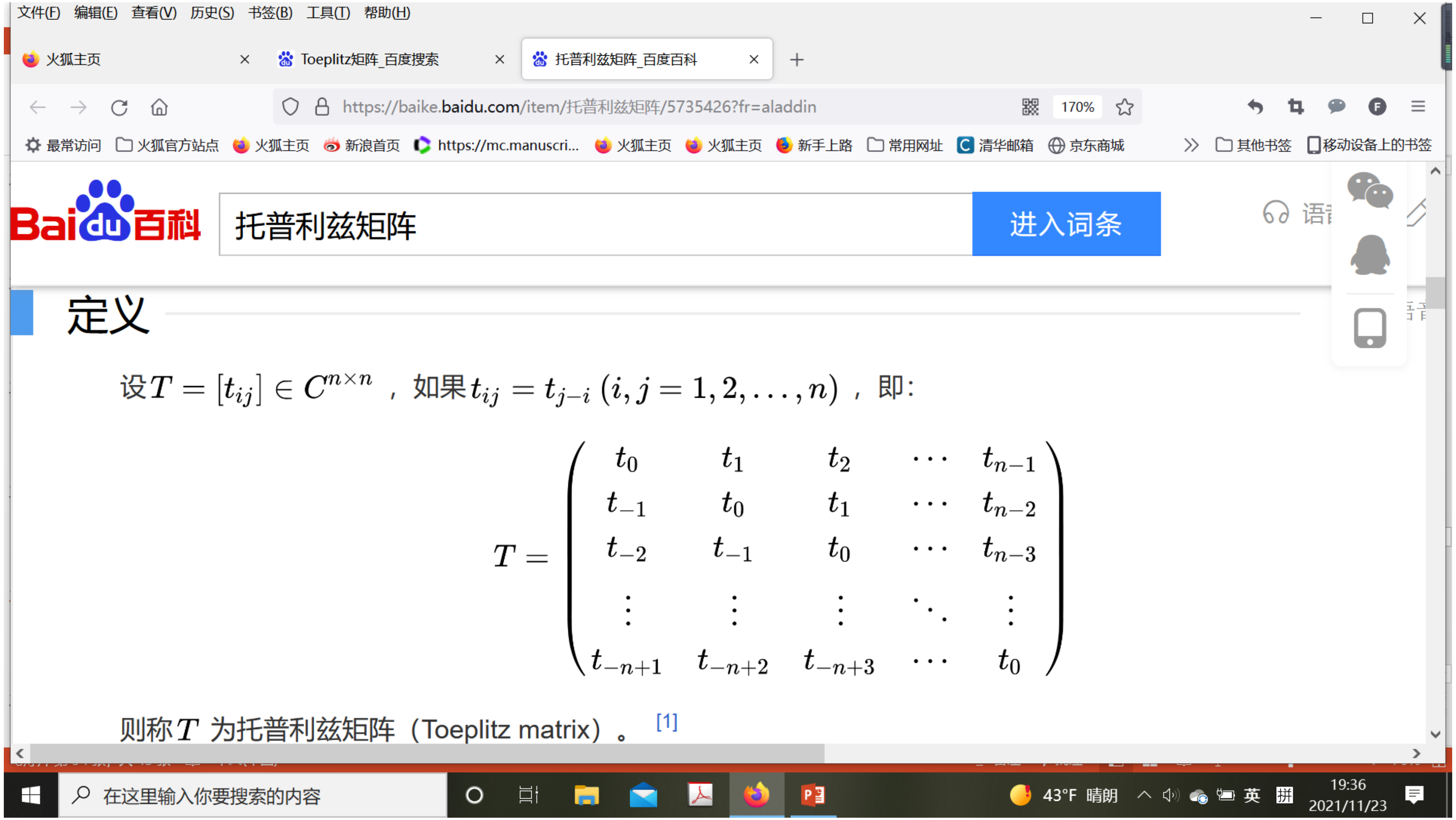
考虑这样一个信道，它的可加高斯噪声构成一个具有有限维协方差阵$K_Z^{(n)}$的随机过程。如果该过程是平稳的，则协方差矩阵是Toeplitz矩阵，并且当$n\to\infty$时所有特征根都有个极限。而特征值在实轴上凝聚出的包络函数逼近于该随机过程的功率谱。

对于噪声为一个平稳随机过程的信道而言，输入信号应选为一个高斯过程使得在噪声的频谱小的频率上它的频谱大。可以证明一个噪声功率谱为$N(f)$的可加高斯噪声信道的容量为：

连续模式

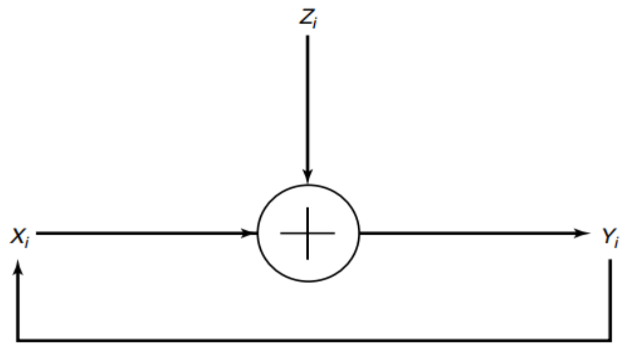
$$\boxed{C=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{(\nu-N(f))^{+}}{N(f)}\right)df,}$$

$$\boxed{\int(\nu-N(f))^{+}\,df=P.}$$


文件(F) 编辑(E) 查看(V) 历史(S) 书签(B) 工具(T) 帮助(H)
火狐主页
Toeplitz矩阵_百度搜索
托普利兹矩阵_百度百科
https://baike.baidu.com/item/托普利兹矩阵/5735426?fr=aladdin
170%
最常访问 火狐官方站点 火狐主页 新浪首页 https://mc.manuscri... 火狐主页 火狐主页 新手上路 常用网址 清华邮箱 京东商城 其他书签 移动设备上的书签
Bai du 百科
托普利兹矩阵
进入词条
定义
设 $T=[t_{ij}]\in C^{n\times n}$ ，如果 $t_{ij}=t_{j-i}\ (i,j=1,2,\ldots,n)$ ，即：
$$T=\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \cdots & t_0 \end{pmatrix}$$
则称 T 为托普利兹矩阵（Toeplitz matrix）。[1]
在这里输入你要搜索的内容
43°F 晴朗
英
拼
19:36
2021/11/23

带反馈的高斯信道（1）

带反馈的高斯信道：$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, K_Z^{(n)}).$



定理

对于带反馈的高斯信道，使得$\boldsymbol{P_e^{(n)}} \to \mathbf{0}$的任意$(\mathbf{2}^{\boldsymbol{nR_n}}, \boldsymbol{n})$码的码率满足

$$R_n \le C_{n,FB} + \epsilon_n,$$

其中当$\boldsymbol{n} \to \infty$时，$\boldsymbol{\epsilon_n} \to \mathbf{0}$，且$\boldsymbol{C_{n,FB}}$：

$$\boxed{C_{n,\mathrm{FB}} = \max_{\frac{1}{n}\mathrm{tr}(K_X^{(n)}) \le P} \frac{1}{2n} \log \frac{|K_{X+Z}^{(n)}|}{|K_Z^{(n)}|},}$$

带反馈的高斯信道（2）

证明：令W在2^{nR}上是均匀的，因此，误差概率满足费诺不等式：

$$H(W|\hat{W}) \le 1 + nR_n P_e^{(n)} = n\epsilon_n,$$

其中当$P_e^{(n)} \to 0$时，$\epsilon_n \to 0$. 此时，可对码率界定如下：

$$\begin{aligned}
nR_n &= H(W) && (9.109)\\
&= I(W;\hat{W}) + H(W|\hat{W}) && (9.110)\\
&\le I(W;\hat{W}) + n\epsilon_n && (9.111)\\
&\le I(W;Y^n) + n\epsilon_n && (9.112)\\
&= \sum I(W;Y_i|Y^{i-1}) + n\epsilon_n && (9.113)\\
&\overset{(a)}{=} \sum \left(h(Y_i|Y^{i-1}) - h(Y_i|W,Y^{i-1},X_i,X^{i-1},Z^{i-1})\right) + n\epsilon_n && (9.114)\\
&\overset{(b)}{=} \sum \left(h(Y_i|Y^{i-1}) - h(Z_i|W,Y^{i-1},X_i,X^{i-1},Z^{i-1})\right) + n\epsilon_n && (9.115)\\
&\overset{(c)}{=} \sum \left(h(Y_i|Y^{i-1}) - h(Z_i|Z^{i-1})\right) + n\epsilon_n && (9.116)\\
&= h(Y^n) - h(Z^n) + n\epsilon_n, && (9.117)
\end{aligned}$$

对上面不等式的两边同除n，再有正态分布使熵达到最大的性质，可得：

$$
\begin{aligned}
R_n &\le \frac{1}{n}\left(h(Y^n) - h(Z^n)\right) + \epsilon_n \\
&\le \frac{1}{2n}\log\frac{|K_Y^{(n)}|}{|K_Z^{(n)}|} + \epsilon_n \\
&\le C_{n,FB} + \epsilon_n,
\end{aligned}
$$

注解：具体的计算，并不需要去计算Y的序列自相关矩阵， 此外， 该结果似乎与n 有关，并非一个常数。

带反馈的高斯信道（3）

问题：

带反馈的高斯信道是否可以增加容量？

高斯信道是否有记忆呢？

如果有容量提升，提升的幅度是多大？

下面介绍5个引理，用于计算反馈容量

引理1

设X和Z是n维随机向量，则：

干扰对称消除的影响

$$K_{X+Z}+K_{X-Z}=2K_X+2K_Z.$$

证明：

$$\begin{aligned}K_{X+Z}&=E(X+Z)(X+Z)^t\\&=EXX^t+EXZ^t+EZX^t+EZZ^t\\&=K_X+K_{XZ}+K_{ZX}+K_Z.\end{aligned}$$

同理可得：

$$\boxed{K_{X-Z}=K_X-K_{XZ}-K_{ZX}+K_Z.}$$

将以上两个等式相加即可完成证明

带反馈的高斯信道（4）

清華大學 Tsinghua University

引理2 对于两个$n \times n$的非负定阵A和B，如果A-B是非负定的，那么 $|A| \geq |B|$.

证明：令 $C = A - B$。 由于B和C是 非负定的，可以将它们看作是协方差矩阵。考虑两个独立的正态分布$x_1 \sim N(0, B)$和$x_2 \sim N(0, C)$。令$Y = X_1 + X_2$，则

$$
\begin{aligned}
h(\mathbf{Y}) &\geq h(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_2) \\
&= h(\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2) \\
&= h(\mathbf{X}_1),
\end{aligned}
$$

正定矩阵的性质：
高斯微分熵的处理

将正态分布的微分熵代入上式，可以得到：

$$\frac{1}{2}\log(2\pi e)^n|A| > \frac{1}{2}\log(2\pi e)^n|B|,$$

引理3 对两个n维随机向量X和Z，$|K_{X+Z}| \leq 2^n|K_X + K_Z|$.

证明：由引理1，$2(K_X + K_Z) - K_{X+Z} = K_{X-Z} \geq 0,$

其中记号$A \geq 0$表示A是非负定的。利用引理2，有

$$|K_{X+Z}| \leq |2(K_X + K_Z)| = 2^n|K_X + K_Z|,$$

带反馈的高斯信道（5）

引理4 对两个任意非负定矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$，以及$\mathbf{0} \le \boldsymbol{\lambda} \le \mathbf{1}$，

$$\boxed{|\lambda A + (1-\lambda)B| \ge |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}.}$$

证明：令 $\boldsymbol{X}$服从$\boldsymbol{N_n}(\mathbf{0},\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{Y}$服从$\boldsymbol{N_n}(\mathbf{0},\boldsymbol{B})$, 令$\boldsymbol{Z}$为 如下形式的混合随机向量：

几何平均与算术平均

$$\mathbf{Z} = \begin{cases} \mathbf{X} & \text{if } \theta = 1 \\ \mathbf{Y} & \text{if } \theta = 2, \end{cases} \qquad \theta = \begin{cases} 1 & \text{with probability } \lambda \\ 2 & \text{with probability } 1-\lambda. \end{cases}$$

假设$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$及$\boldsymbol{\theta}$独立，那么 $K_Z = \lambda A + (1-\lambda)B$.

则：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln(2\pi e)^n|\lambda A + (1-\lambda)B| &\ge h(\mathbf{Z}) \quad \text{最大熵不等式} \\ &\ge h(\mathbf{Z}|\theta) \\ &= \lambda h(\mathbf{X}) + (1-\lambda)h(\mathbf{Y}) \\ &= \frac{1}{2}\ln(2\pi e)^n|A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}, \end{aligned}$$

带反馈的高斯信道（6）

清華大學 Tsinghua University

- 随机向量X^n与Z^n是因果关系，如下面等式成立：

链式导出关系准则

$$f(x^n, z^n) = f(z^n)\prod_{i=1}^{n} f(x_i|x^{i-1}, z^{i-1}).$$

引理5

如果X^n与Z^n是因果关系，那么：

$$h(X^n - Z^n) \geq h(Z^n) \qquad |K_{X-Z}| \geq |K_Z|,$$

其中K_{X-Z}与K_Z分别是$X^n - Z^n$与Z^n的协方差矩阵。

基本游戏就是续牌处理

证明：

$$\begin{aligned}
h(X^n - Z^n) &\overset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{n} h(X_i - Z_i|X^{i-1} - Z^{i-1}) \\
&\overset{(b)}{\geq} \sum_{i=1}^{n} h(X_i - Z_i|X^{i-1}, Z^{i-1}, X_i) \\
&\overset{(c)}{=} \sum_{i=1}^{n} h(Z_i|X^{i-1}, Z^{i-1}, X_i) \\
&\overset{(d)}{=} \sum_{i=1}^{n} h(Z_i|Z^{i-1}) \\
&\overset{(e)}{=} h(Z^n).
\end{aligned}$$

假设X^n与Z^n是因果关系且伴随$X^n - Z^n$与Z^n的协方差矩阵分别为K_{X-Z}与K_Z，那么显然存在具有相同的协方差矩阵的多元正态随机向量对$\tilde{X}^n$与 Z^n。所以：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln(2\pi e)^n|K_{X-Z}| &= h(\tilde{X}^n - \tilde{Z}^n)\\ &\geq h(\tilde{Z}^n)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2\pi e)^n|K_Z|,\end{aligned}$$

反馈增益估计1

定理

$$\boxed{C_{n,\mathrm{FB}} \leq C_n + \frac{1}{2}}$$

证明：

$$\boxed{C_{n,\mathrm{FB}} \leq \max_{\mathrm{tr}(K_X)\leq nP} \frac{1}{2n}\log\frac{|K_Y|}{|K_Z|}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\leq \max_{\mathrm{tr}(K_X)\leq nP} \frac{1}{2n}\log\frac{2^n|K_X+K_Z|}{|K_Z|}\\ &= \max_{\mathrm{tr}(K_X)\leq nP} \frac{1}{2n}\log\frac{|K_X+K_Z|}{|K_Z|}+\frac{1}{2}\\ &\leq C_n + \frac{1}{2} \qquad \text{bits per transmission,}\end{aligned}}$$

带反馈的高斯信道（8）

清華大學 Tsinghua University

定理 $C_{n,\mathrm{FB}} \le 2C_n.$

反馈增益估计2 证明：只要能够证明如下不等式：

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2n}\log\frac{|K_{X+Z}|}{|K_Z|} \le \frac{1}{2n}\log\frac{|K_X+K_Z|}{|K_Z|},$$

先对上式右边取最大，然后再对左边取最大，可以得到：

$$\frac{1}{2}C_{n,\mathrm{FB}} \le C_n.$$

具体细节

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\log\frac{|K_X+K_Z|}{|K_Z|} &\overset{(a)}{=} \frac{1}{2n}\log\frac{|\frac{1}{2}K_{X+Z}+\frac{1}{2}K_{X-Z}|}{|K_Z|}\\
&\overset{(b)}{\ge} \frac{1}{2n}\log\frac{|K_{X+Z}|^{\frac{1}{2}}|K_{X-Z}|^{\frac{1}{2}}}{|K_Z|}\\
&\overset{(c)}{\ge} \frac{1}{2n}\log\frac{|K_{X+Z}|^{\frac{1}{2}}|K_Z|^{\frac{1}{2}}}{|K_Z|}\\
&\overset{(d)}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{2n}\log\frac{|K_{X+Z}|}{|K_Z|}
\end{aligned}$$

小结

对于高斯信道的容量讨论：

（1） 简单信道容量；简单计算
（2） 信道容量的实现与编码；信道容量可达性
（3）多信道-简单处理（并行）容量；注水策略
（4）彩色信道容量；
（5）带反馈模式的信道容量；两个不等式，一个多1/2比特，一个为 2倍；

思考：

（6） 信道是衰落信道情况如何计算？
（7）带反馈的信道容量的增益来自哪里？在什么情况下，这两个不等式哪个更紧一些？
（8）如果是多天线技术，反馈是否可以带来更大的速率增益？

由简到繁，不断扩展

《道德经》：万物之始，大道至简，衍化至繁

知识拓展：高斯信道容量逼近编码技术

- **TCM 编码（ Trellis Coded Modulation）**

- **BCM编码 （Bit Coded Modulation）**

- **Trellis Shaping 技术**

（将 多符号联合调制技术组合在一起，
使它们的联合分布与高斯分布的KL divergence 尽可能小）

因为属于通信原理部分，此处不再重复。