第四章　对偶原理

窗含西岭千秋雪，门泊东吴万里船

对偶是一种普遍现象

材料 产品	甲	乙	丙	丁	每台收益	
A	3	2	1	1	2000	x_1
B	4	1	3	2	4000	x_2
C	2	2	3	4	3000	x_3
限额	600	400	200	300		
	y_1	y_2	y_3	y_4		

$$MaxZ = 2000x_1 + 4000x_2 + 3000x_3$$

$$ST:\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 600 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 400 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 200 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

假设工厂考虑不进行生产而把全部可利用的资源都让给其他企业，工厂希望给这些资源定出一个合理的价格，即使别的单位愿意购买，又使本工厂能得到生产这些产品所能获得的最大收益。

$$Minw = 600y_1 + 400y_2 + 300y_3 + 200y_4$$

$$ST:\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \ge 2000 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 \ge 4000 \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \ge 3000 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

厂长的最佳决策显然应符合两条：

（1）不吃亏原则：即资源定价所赚利润不能低于加工甲、乙、丙、丁四种产品所获利润。

（2）竞争性原则：即在上述不吃亏原则下，尽量降低资源总收费，以便争取更多用户。

二、对偶问题的表达

(1) 对称LP问题的定义

第一类对称形式

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

第二类对称形式

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ s.t. \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

(2) 对称LP问题的对偶问题

$$(L)\quad \begin{aligned} \min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (D)\quad \begin{aligned} \max \quad & wb \\ s.t. \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ s.t. \quad & A^T w^T \leq c^T \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

例1：写出下列LP问题的对偶问题

$$\min \quad 8x_1 + 16x_2 + 12x_3$$

$$s.t.: \begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

对偶

$$\max \quad 2w_1 + 3w_2$$

$$ST: \begin{cases} w_1 + 2w_2 \le 8 \\ 4w_1 \le 16 \\ 4w_2 \le 12 \\ w_1, w_2 \ge 0 \end{cases}$$

（3）对偶问题的对偶

推导过程

$$
\text{(D)}\quad
\begin{aligned}
\max\quad & wb \\
s.t.\quad & wA \le c \\
& w \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
\min\quad & -b^T w^T \\
s.t.\quad & -A^T w^T \ge -c^T \\
& w^T \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -b^T w^T \\
s.t. \quad & -A^T w^T \geq -c^T \\
& w^T \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -x^T c^T \\
s.t. \quad & (-A^T)^T x \leq -b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
(DD) \quad
\begin{aligned}
\min \quad & cx \\
s.t. \quad & Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

结论：对偶问题的对偶为原问题。

例2:写出下列LP问题的对偶问题:

$$\max 7y_1 + 8y_2 + y_3$$

$$ST:\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + y_3 \le 3 \\ -3y_1 + y_2 - y_3 \le 4 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 \le 0 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

- 写出对称形式的对偶规划的要点：
- (1)　min变成max
- (2)　价值系数与右端向量互换
- (3)　系数矩阵转置
- (4)　≥ 变 ≤

- 原问题中约束方程的个数=对偶问题中变量的个数
- 原问题中变量的个数=对偶问题中约束方程的个数

非对称形式的对偶

$$\begin{aligned} \min \ & cx \\ s.t. \ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

写成对称形式

$$\begin{aligned} \min \ & cx \\ s.t. \ & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

对偶问题为：

$$\begin{aligned} \max \ & ub - vb \\ s.t. \ & uA - vA \leq c \\ & u, v \geq 0 \end{aligned}$$

令$w = u - v$

$$\begin{aligned} \max \ & wb \\ s.t. \ & wA \leq c \\ & w\text{无限制} \end{aligned}$$

- 例 $\min \ 5x_1+4x_2+3x_3$
- $\text{s.t.} \quad x_1+x_2+x_3=4$
- $3x_1+2x_2+x_3=5$
- $x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0$
- 对偶问题为
- $\max \ 4w_1+5w_2$
- $\text{s.t.} \ w_1+3w_2\leq 5$
- $w_1+2w_2\leq 4$
- $w_1+w_2\leq 3$

一般情形LP问题的对偶问题

- $\min\ cx$
- $s.t.\quad A_1x \geq b_1$　A_1 为$m_1 \times n$, b_1为$m_1 \times 1$
- $\quad\quad A_2x = b_2$　A_2 为$m_2 \times n$, b_2为$m_2 \times 1$
- $\quad\quad A_3x \leq b_3$　A_3 为$m_3 \times n$, b_3为$m_3 \times 1$
- $\quad\quad x \geq 0$
- 引入松弛变量
- $\min\ cx$
- $s.t.\quad A_1x - x_s = b_1$　x_s为$m_1 \times 1$
- $\quad\quad A_2x = b_2$
- $\quad\quad A_3x + x_t = b_3$　x_t为$m_3 \times 1$
- $\quad\quad x, x_s, x_t \geq 0$

- $\min\ cx$
- s.t. $A_1x - x_s = b_1$ $\quad x_s$为$m_1 \times 1$
- $A_2x = b_2$
- $A_3x + x_t = b_3$ $\quad x_t$为$m_3 \times 1$
- $x, x_s, x_t \geq 0$
- 对偶问题为
- $\max\ w_1b_1 + w_2b_2 + w_3b_3$
- s.t. $w_1A_1 + w_2A_2 + w_3A_3 \leq c$
- $-w_1I_s \leq 0$
- $w_3I_t \leq 0$
-
- $\max\ w_1b_1 + w_2b_2 + w_3b_3$
- $\Rightarrow$ s.t. $w_1A_1 + w_2A_2 + w_3A_3 \leq c$
- $w_1 \geq 0, \quad w_3 \leq 0$

$$
\begin{aligned}
\min\ & cx \\
s.t.\ & A_1x \geq b_1 \\
& A_2x = b_2 \\
& A_3x \leq b_3 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

	min	max	
变	≥0	≤	约
量	≤0	≥	束
	无限制	=	方
			程
约	≥	≥0	
束	≤	≤0	变
方	=	无限制	量
程			

$$\min\ 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$ST:\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2\text{无约束}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\max\ w_1 + 2w_2 + w_3$$

$$ST:\begin{cases} w_1 + w_2 - w_3 \leq 2 \\ w_1 - w_2 + w_3 = 1 \\ 2w_1 + w_2 + w_3 \geq 2 \\ w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3\text{无约束} \end{cases}$$

直接写出LP问题的对偶问题

$$\max\ x_1+2x_2+x_3$$

$$ST:\begin{cases} x_1+x_2-x_3 \le 2 \\ x_1-x_2+x_3 = 1 \\ 2x_1+x_2+x_3 \ge 2 \\ x_1\ge 0, x_2\le 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min\ 2w_1+w_2+2w_3$$

$$ST:\begin{cases} w_1+w_2+2w_3 \ge 1 \\ w_1-w_2+w_3 \le 2 \\ -w_1+w_2+w_3 = 1 \\ w_1\ge 0\ w_2\text{无约束}\ w_3\le 0 \end{cases}$$

$$\min \ 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$(L) \quad ST: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \ge 0, x_3 \le 0, x_2 \text{无约束} \end{cases}$$

第二节 对偶问题的基本性质

- 原问题(**L**) 对偶问题(D)
- min cx max wb
- s.t. $Ax \geq b$ s.t. $wA \leq c$
- $x \geq 0$ $w \geq 0$

定理1：弱对偶定理

若$x^{(0)}, w^{(0)}$分别为$(L),(D)$的可行解，则

$cx^{(0)} \geq w^{(0)}b$

证明:

由于$x^{(0)}$是(L)的可行解　所以$Ax^{(0)} \geq b, x^{(0)} \geq 0$

由于$w^{(0)}$是(D)的可行解　所以$w^{(0)} \geq 0$

$w^{(0)}$左乘不等式组的两边得　$w^{(0)}Ax^{(0)} \geq w^{(0)}b$

又$w^{(0)}A \leq c, x^{(0)} \geq 0$　所以 $w^{(0)}Ax^{(0)} \leq cx^{(0)}$

因此有$cx^{(0)} \geq w^{(0)}b$

例：

(LP)

$$\min 20x_1+20x_2$$
$$s.t\quad x_1+2x_2\ge 1$$
$$2x_1+x_2\ge 2$$
$$2x_1+3x_2\ge 3$$
$$3x_1+2x_2\ge 4$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

(DLP)

$$\max w_1+2w_2+3w_3+4w_4$$
$$s.t\quad w_1+2w_2+2w_3+3w_4\le 20$$
$$2w_1+w_2+3w_3+2w_4\le 20$$
$$w_j\ge 0,\ j=1,2,3,4$$

1）原问题任一可行解 $x=(1,1)^T$

目标值 =40

40是DLP问题最优目标值的上界.

2）对偶问题任一可行解 $w=$（1 1 1 1）

目标值 =10

10是LP问题最优目标值的下界.

$$x^*=\left(\tfrac{1}{5}\quad \tfrac{6}{5}\right)\qquad \text{最优值}=28$$
$$w^*=\left(0\ 0\ 4\ 4\right)^T\qquad \text{最优值}=28$$

推论1：

若LP(或DLP)问题有无界解，则其对偶问题(或原问题)无可行解；

若LP (或DLP)问题无可行解，则对偶问题(或原问题)或者无可行解,或者目标函数值趋于无穷。

推论2：

极大化问题的任何一个可行解所对应的目标函数值都是其对偶问题的目标函数值的下界。

推论3：

极小化问题的任何一个可行解所对应的目标函数值都是其对偶问题的目标函数值的上界。

定理2：最优性准则

若$x^{(0)}, w^{(0)}$分别为$(L),(D)$的可行解且

$cx^{(0)}=w^{(0)}b$，则

$x^{(0)}$，$w^{(0)}$分别为(L)、(D)问题的最优解

证明：

对原问题的任意可行解x

由定理1可知，$cx\geq w^{(0)}b$，而$cx^{(0)}=w^{(0)}b$

则$x^{(0)}$为(L)的最优解

同理，$w^{(0)}$为(D)的最优解

例5

$$MaxZ = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$(L) \quad ST: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$MinW = 20y_1 + 20y_2$$

$$(D) \quad ST: \begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由于$x^{(0)} = (0,0,4,4)^T$,

$y^{(0)} = \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)$是$(L),(D)$的可行解

且$cx^{(0)} = y^{(0)}b = 28$

所以，$x^{(0)}, y^{(0)}$分别是$(L),(D)$的最优解

定理3：强对偶定理

若(L),(D)均有可行解,则(L),(D)均有最优解,且(L),(D)的最优目标函数值相等.

证明:

设$(L),(D)$问题的可行解分别为$x^{(0)}, w^{(0)}$

对于(L)问题的任意可行解 x，有$cx \geq w^{(0)}b$

所以cx在可行域内有下界

故(L)问题有最优解

同理对于(D)问题的任意可行解w，

有$wb \leq cx^{(0)}$

所以wb在可行域内有上界

故(D)问题有最优解

$$
\text{(L)} \quad \begin{cases} \min cx \\ s.t. \quad Ax \ge b \\ \qquad\quad x \ge 0 \end{cases}
$$

引入剩余变量，把**(L)**化为标准形.

$$
\begin{cases} \min\ (c, 0)\begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} \\ s.t. \quad (A, -I)\begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} = b \\ \qquad\quad x \ge 0,\ x_s \ge 0 \end{cases}
$$

(L)的最优解为$x^{(0)}$，

$x^{(0)}$所对应的最优基为B

$x^{(0)}$可以表示为$x^{(0)}=\begin{pmatrix} x_B^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

则$c_B B^{-1}(A,-I)-(c,0)\le 0$

令$w^{(0)}=c_B B^{-1}$，由上式，得

$w^{(0)}(A,-I)\le(c,0)$，

即$w^{(0)}A\le c$，$w^{(0)}\ge 0$，所以，$w^{(0)}$是(D)的可行解

又因为$w^{(0)}b=c_B B^{-1}b=c_B x_B^{(0)}=cx^{(0)}$

故$w^{(0)}$是(D)得最优解，且

$$\min cx=cx^{(0)}=w^{(0)}b=\max wb$$

推论：若原问题（对偶问题）有最优解，则对偶问题（原问题）也有最优解，且最优目标函数值相等。

例5　求下列问题对偶问题的最优解

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max \ 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	4	0	0	1	0	16
x_5	0	4	0	0	1	12
	-2	-3	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	-1/2	2
x_4	4	0	0	1	0	16
x_2	0	1	0	0	1/4	3
	-2	0	0	0	3/4	9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	1	0	-1/2	2
x_4	0	0	-4	1	$\boxed{2}$	8
x_2	0	1	0	0	1/4	3
	0	0	2	0	-1/4	13
x_1	1	0	0	1/4	0	4
x_5	0	0	-2	1/2	1	4
x_2	0	1	1/2	-1/8	0	2
	0	0	3/2	1/8	0	14

此时达到最优解。$x^*=(4,2)$, MaxZ=14。

$$
(\mathrm{L})\quad \begin{aligned} &\max \quad 2x_1+3x_2 \\ &s.t.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{DL})\quad \begin{aligned} &\min \quad 8w_1+16w_2+12w_3 \\ &s.t.\quad w_1+4w_2 \ge 2 \\ &\qquad\ \ 2w_1 + 4w_3 \ge 3 \\ &\qquad\ \ w_1, w_2, w_3 \ge 0 \end{aligned}
$$

最优解为: $w=\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)$

最优值=14。

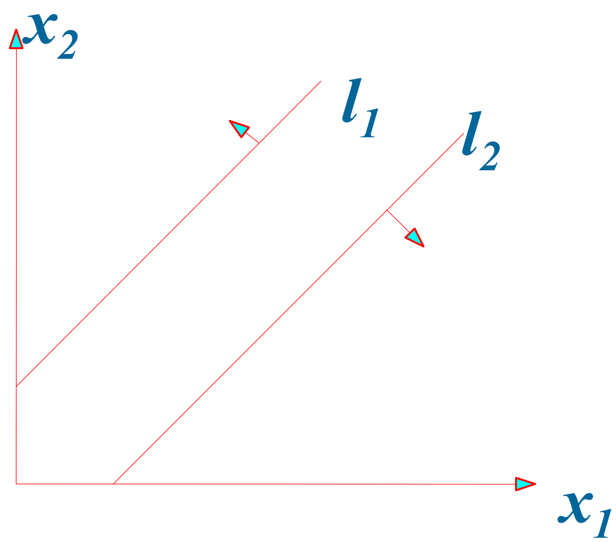
小结

原问题(min)	对应关系	对偶问题(max)
有最优解	↔	有最优解
无界解	↔	不可行
不可行	↔	无界解

例 $\min z = -x_1 - x_2$

$$
(LP)\quad
\begin{aligned}
s.t\quad & x_1 - x_2 \geq 1 \quad l_1 \\
& -x_1 + x_2 \geq 1 \quad l_2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

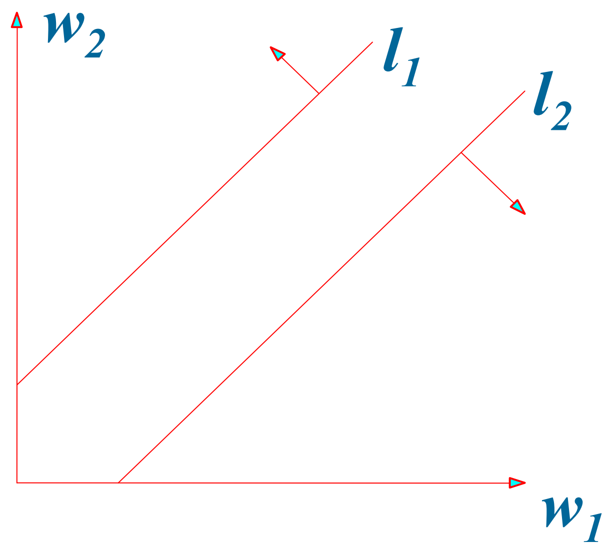
（无可行解）



例1: $\max y = w_1 + w_2$

$$
(LP)\quad
\begin{aligned}
s.t\quad & w_1 - w_2 \leq -1 \quad l_1 \\
& -w_1 + w_2 \leq -1 \quad l_2 \\
& w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

（无可行解）

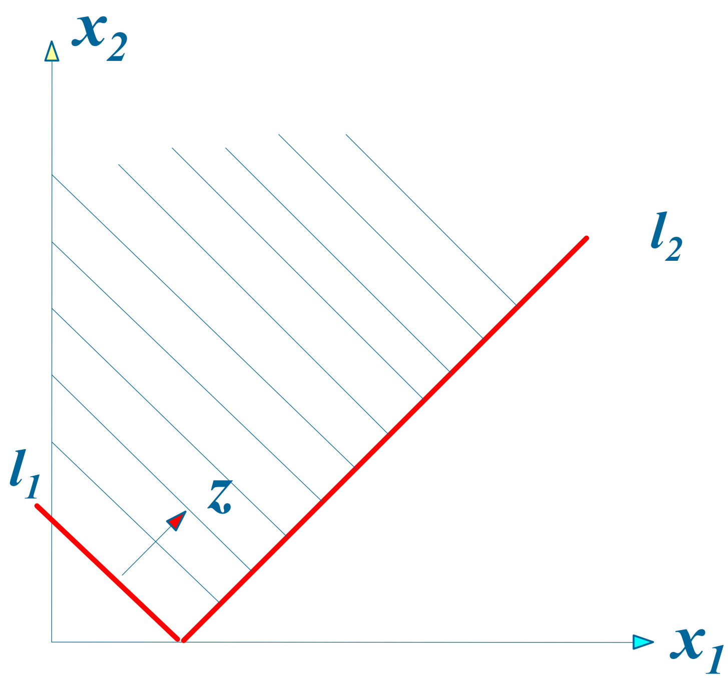


例2:

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & -x_1 - x_2 \le -1 \quad l_1 \\ \text{(LP)} \quad & x_1 - x_2 \le 1 \quad l_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

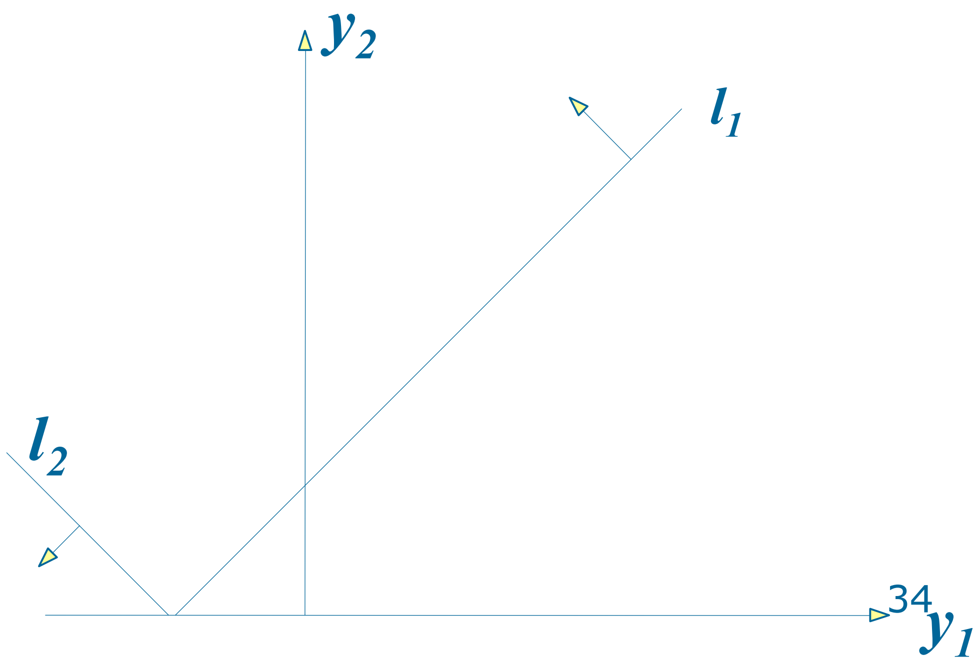
（无界解）



$$\min w = -y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & -y_1 + y_2 \ge 1 \quad l_1 \\ \text{(DLP)} \quad & -y_1 - y_2 \ge 1 \quad l_2 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

（无可行解）



定理4：互补松弛定理

设$x^{(0)}$，$w^{(0)}$分别为（L），（D）问题的可行解

则$x^{(0)}$，$w^{(0)}$分别为（L），（D）的最优解的充要

条件是$\forall i, j (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$,有

(1) 若$x_j^{(0)} > 0$,则$w^{(0)} P_j = c_j$

(2) 若$w^{(0)} P_j < c_j$,则$x_j^{(0)} = 0$

$$(c - w^{(0)} A) x^{(0)} = 0$$

(3) 若$w_i^{(0)} > 0$,则$A_i x^{(0)} = b_i$

(4) 若$A_i x^{(0)} > b_i$,则$w_i^{(0)} = 0$

$$w^{(0)} (A x^{(0)} - b) = 0$$

其中P_j是A的第j列，A_i是A的第i行.

证明：（必要性）

设$x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是(L)和(D)的最优解，则

$Ax^{(0)} \geq b \quad x^{(0)} \geq 0$ 且$w^{(0)}A \leq c, \quad w^{(0)} \geq 0$

故有 $w^{(0)}Ax^{(0)} \geq w^{(0)}b, \quad w^{(0)}Ax^{(0)} \leq cx^{(0)}$

即 $cx^{(0)} \geq w^{(0)}Ax^{(0)} \geq w^{(0)}b$

因为$x^{(0)}, w^{(0)}$是最优解，所以有$cx^{(0)} = w^{(0)}b$

所以，$cx^{(0)} = w^{(0)}Ax^{(0)} = w^{(0)}b$

即，$(c - w^{(0)}A)x^{(0)} = 0$，且$w^{(0)}(Ax^{(0)} - b) = 0$.

证明：（充分性）

由$(c-w^{(0)}A)x^{(0)}=0$，得$cx^{(0)}=w^{(0)}Ax^{(0)}$

由$w^{(0)}(Ax^{(0)}-b)=0$，得$w^{(0)}Ax^{(0)}=w^{(0)}b$

因此有 $cx^{(0)}=w^{(0)}b$

有定理2知，$x^{(0)}, w^{(0)}$为(L)和(D)的最优解.

定理4'：互补松驰定理(非对称形式)

设$x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是

$$\begin{cases} \min cx \\ s.t. \quad Ax = b \\ \qquad\quad x \geq 0 \end{cases} \qquad 和 \qquad \begin{cases} \max wb \\ s.t. \quad wA \leq c \end{cases}$$

的可行解，则$x^{(0)}$和$w^{(0)}$是最优解的充要条件是：

对任意的j，下列关系成立：

(1)若$x_j^{(0)} > 0$，则$w^{(0)}P_j = c_j$；

(2)若$w^{(0)}P_j < c_j$，则$x_j^{(0)} = 0$.

例6 考虑下面问题

$$(L)\quad \begin{aligned} &MaxZ = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ &ST: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(D)\quad \begin{aligned} &MinW = 20y_1 + 20y_2 \\ &ST: \begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

已知(D)的最优解为$y^* = \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)$

用互补松弛定理求出(L)的最优解

解:

由于 $y_1^* > 0, y_2^* > 0$

由定理4知

$$x_1^* + 2x_2^* + 2x_3^* + 3x_4^* = 20 \quad (1)$$

$$2x_1^* + x_2^* + 3x_3^* + 2x_4^* = 20 \quad (2)$$

$$y_1^* + 2y_2^* = 1.2 + 0.4 = 1.6 > 1$$

$$2y_1^* + y_2^* = 2.4 + 0.2 = 2.6 > 2$$

$x_1^* = x_2^* = 0$，代入（1），（2）

$$2x_3^* + 3x_4^* = 20$$

$$3x_3^* + 2x_4^* = 20$$

则，$x_3^* = x_4^* = 4$

所以(L)问题的最优解为

$$x^* = (0, 0, 4, 4)$$

$$MinW = 20y_1 + 20y_2$$

$$ST:\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$
(L) \quad \begin{aligned} & \min cx \\ & s.t. \quad Ax \geq b \\ & \qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}
$$

其中，$A_{m\times n}, r(A)=m$

定理（最优性条件，$Karush-Kuhn-Tucker(KKT)$条件）

对于线性规划(L)来说，x^*是其最优解，当且仅当存在向量$w_{m\times 1}, r_{n\times 1}$，使得

$$Ax^* \geq b, \quad x^* \geq 0; \tag{1}$$

$$c^T - A^T w - r = 0, \quad w \geq 0, \quad r \geq 0; \tag{2}$$

$$w^T(Ax^* - b) = 0, \quad r^T x^* = 0. \tag{3}$$

对偶问题的经济学解释：影子价格

1、定义

影子价格是最优配置下资源的理想价格

2、含义

由于 $f^* = cx^* = w^* b = w_1^* b_1 + w_2^* b_2 + \cdots + w_m^* b_m$

考虑在最优解处,右端项 b_i 的微小变动对目标函数值的影响.

假设 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 是变化的，则

$$\frac{\partial f^*}{\partial b_1} = w_1^*, \frac{\partial f^*}{\partial b_2} = w_2^*, \cdots, \frac{\partial f^*}{\partial b_m} = w_m^*$$

w_i^* 可以理解成当资源 b_i 变化1单位时,

极小化 (L) 问题的目标函数值的变化量

- 若把原问题的约束条件看成是广义的资源约束,则右端项的值表示每种资源的可用量.
- 对偶解的经济含义:资源的单位改变量引起目标函数值的增加量.
- 通常称对偶解为影子价格.
- 影子价格的大小客观地反映了资源在系统内的稀缺程度.资源的影子价格越高,说明资源在系统内越稀缺,而增加该资源的供应量对系统目标函数值贡献越大.

	木门	木窗	
木工	4小时	3小时	120小时/日
油漆工	2小时	1小时	50小时/日
收入	56	30	

- 解：设该车间每日安排
- 生产木门x_1扇，木窗x_2。
- max $z=56x_1+30x_2$
- s.t. $4x_1+3x_2\le 120$
- $2x_1+x_2\le 50$
- $x_1\ \ x_2\ge 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	4	3	1	0	120
x_4	2	1	0	1	50
	-56	-30	0	0	0
x_3	0	1	1	-2	20
x_1	1	1/2	0	1/2	25
	0	-2	0	28	1400
x_2	0	1	1	-2	20
x_1	0	0	-1/2	-1/2	15
	0	0	2	24	1440

对偶问题的解为:

$w^*=(2, 24)$

3、影子价格的作用

（1）告诉管理者增加何种资源对企业更有利

（2）告诉管理者花多大代价购买进资源或卖出资源是合适的

（3）为新产品定价提供依据

对偶单纯形法

- 原问题(L)
- min cx
- s.t. $Ax = b$
- $x \geq 0$

对偶问题(D)

max wb

s.t. $wA \leq c$

- 对偶问题(D′)
- max wb
- s.t. $wA + w_s = c$
- $w_s \geq 0$

结论：设$x^{(0)}$是原问题**(L)**的一个基本可行解，对应的基矩阵为**B**，则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题**(D′)**的一个解，且目标函数值相等。

证明：设**A=(B,N)**，则原问题**(L)**和对偶问题**(D′)**可以改写为

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_B x_B + c_N x_N \\
s.t.\ & Bx_B + Nx_N = b \\
& x_B, x_N \geq 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\max\ & wb \\
s.t.\ & wB + w_{s1} = c_B \\
& wN + w_{s2} = c_N \\
& w_{s1}, w_{s2} \geq 0
\end{aligned}
$$

其中w_{s1}, w_{s2}分别是$1\times m, 1\times(n-m)$阶行向量

当求得原问题的一个基本可行解$\boldsymbol{x}^{(0)}$时，其相应的检验数为

$$c_B B^{-1}(B, N) - (c_B, c_N)$$

取 $w = c_B B^{-1}, w_{s1} = 0, w_{s2} = -(c_B B^{-1} N - c_N)$

则得到对偶问题**(D′)**的一个解，且目标函数值均为$\boldsymbol{c_B B^{-1} b}$.

- 定义：设$x^{(0)}$是**(L)**的一个基本解（不一定是可行解），它对应的矩阵为B，记$w=c_B B^{-1}$，若w是**(L)**的对偶问题的可行解，即对任意的j, $wP_j-c_j \leq 0$，则称$x^{(0)}$为原问题的对偶可行的基本解。

- 结论：当对偶可行的基本解是原问题的可行解时，由于判别数≤ 0，因此，它就是原问题的最优解。

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ & -x_1 + 4x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T$$

$$c_B B^{-1} A - c = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

所以，$x^{(0)}$为对偶可行的基本解。

- 基本思想：
- 从原问题的一个对偶可行的基本解出发；
- 求改进的对偶可行的基本解：每个对偶可行的基本解$x=(x_B^T,0)^T$对应一个对偶问题的可行解$w=c_BB^{-1}$，相应的对偶问题的目标函数值为$wb=c_BB^{-1}b$，所谓改进的对偶可行的基本解，是指对于原问题的这个基本解，相应的对偶问题的目标函数值wb有改进（选择离基变量和进基变量，进行主元消去）；
- 当得到的对偶可行的基本解是原问题的可行解时，就达到最优解。

- 与原单纯形法的区别：
- 原单纯形法保持原问题的可行性，对偶单纯形法保持所有检验数$\boldsymbol{wP_j-c_j \le 0}$，即保持对偶问题的可行性。
- 特点：先选择出基变量，再选择进基变量。

步骤：

1. 化标准型,建立初始单纯形表

2、判断，若$B^{-1}b \geq 0$，则已得到最优解

3、换基迭代

1）确定换出变量，$\bar{b}_r = \min_i \{\bar{b}_i\} < 0, x_r$为换出变量

2）确定换入变量,$\min_j \left\langle \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \middle| y_{rj} < 0 \right\rangle = \frac{z_k - c_k}{y_{rk}}, x_k$为换入变量

(若所有$y_{rj} \geq 0$, 则该LP无可行解）

3）换基迭代，y_{rk}为主元

4、回到第2步

x迭代到$\bar{x}$时，$\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i\} < 0$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \mid y_{rj} < 0\right\}$$

$$\bar{b}_r \to \bar{b}_r' = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$$

$$\text{检验数}\sigma_j \to \sigma_j' = (z_j - c_j) - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} y_{rj} \le 0$$

迭代前，对偶问题的目标函数值$= c_B \bar{b} = c_B B^{-1} b.$

迭代后，对偶问题的目标函数值

$$= c_B \bar{b} - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \bar{b}_r \ge c_B \bar{b}.$$

例: $\min x_1+x_2+x_3$

$$
\begin{aligned}
s.t\quad & 3x_1+x_2+x_3\geq 1\\
& -x_1+4x_2+x_3\geq 2\\
& x_1,x_2,x_3\geq 0
\end{aligned}
$$

解: 引入松弛变量, 化为标准型

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1+x_2+x_3\\
s.t\quad & 3x_1+x_2+x_3-x_4 \quad =1\\
& -x_1+4x_2+x_3 \quad -x_5=2\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1+x_2+x_3\\
s.t\quad & -3x_1-x_2-x_3+x_4 \quad =-1\\
& x_1-4x_2-x_3 \quad +x_5=-2\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0
\end{aligned}
$$

$$c_B B^{-1}A-c=-c=(-1,-1,-1,0,0)\leq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-3	-1	-1	1	0	-1
x_5	1	$\boxed{-4}$	-1	0	1	-2
	-1	-1	-1	0	0	0
x_4	$\boxed{-13/4}$	0	-3/4	1	-1/4	-1/2
x_2	-1/4	1	1/4	0	-1/4	1/2
	-5/4	0	-3/4	0	-1/4	1/2
x_1	1	0	3/13	-4/13	1/13	2/13
x_2	0	1	4/13	-1/13	-3/13	7/13
	0	0	-6/13	-5/13	-2/13	9/13

$x^* = \left(\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, 0, 0, 0\right)$为最优解，$f_{\min} = \frac{9}{13}$

对偶问题的最优解为 $\left(\frac{5}{13}, \frac{2}{13}\right)$

用对偶单纯形法求解下列LP问题

$$\min x_1+2x_2+3x_3$$

$$ST:\begin{cases} x_1-x_2+x_3\geq 4 \\ x_1+x_2+2x_3\leq 8 \\ x_2-x_3\geq 2 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases}$$

解：原问题变形为

$$\min x_1+2x_2+3x_3$$

$$ST:\begin{cases} -x_1+x_2-x_3+x_4=-4 \\ x_1+x_2+2x_3+x_5=8 \\ -x_2+x_3+x_6=-2 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	-1	1	-1	1	0	0	-4
x_5	1	1	2	0	1	0	8
x_6	0	-1	1	0	0	1	-2
	-1	-2	-3	0	0	0	0
x_1	1	-1	1	-1	0	0	4
x_5	0	2	1	1	1	0	4
x_6	0	-1	1	0	0	1	-2
	0	-3	-2	-1	0	0	4
x_1	1	0	0	-1	0	-1	6
x_5	0	0	3	1	1	2	0
x_2	0	1	-1	0	0	-1	2
	0	0	-5	-1	0	-3	10

$$x^* = (6, 2, 0)^T$$

$$f_{\min} = 10$$

关于初始对偶可行的基本解

- **min** cx
- **s.t.** $Ax=b$
- $x\geq 0$
- 若初始对偶可行的基本解不易直接得到，则解一个扩充问题，通过这个问题的求解，给出原问题的解答。

方法

设A的前m列线性无关，由这m列构成基B，则

$$\min cx$$

$$s.t.\quad x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x \ge 0$$

即 $\min cx$

$$s.t.\ x_B + \sum_{j\in R} y_j x_j = \bar{b}$$ （R为非基变量下标集）

$$x \ge 0$$

增加一个变量x_{n+1}和一个约束条件

$$\sum_{j\in R} x_j + x_{n+1} = M$$ M为充分大的数

得扩充问题

附加人工约束

$$\min cx$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_B + \sum_{j\in R} y_j x_j = \bar{b} \\ & \sum_{j\in R} x_j + x_{n+1} = M \\ & x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,n+1 \end{aligned}$$

得基本解 $x_B = \begin{pmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ M \end{pmatrix},\quad x_j = 0\ j \in R$

令 y_j 表示约束矩阵的第 j 列，令

$$z_k - c_k = \max(z_j - c_j) > 0$$

以 y_k 的第 $m+1$ 个分量 $y_{m+1,k}$ 为主元进行主元消去，把第 k 列化为单位向量，得到扩充问题的对偶可行的基本解。

用对偶单纯形法解扩充问题

$$\min cx$$

$$s.t.\quad x_B + \sum_{j\in R} y_j x_j = \bar{b}$$

$$\sum_{j\in R} x_j + x_{n+1} = M$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+1$$

有下列两种可能:

1.扩充问题无可行解，则原问题亦无可行解。

2.得扩充问题的最优解 $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, x_{n+1}^{(0)}\right)$

则 $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)$ 为原问题的可行解，若扩充问题的目标函数最优值与 M 无关，则 $x^{(0)}$ 为原问题最优解。

扩充问题的最优解 $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},x_{n+1}^{(0)}\right)^T=\bar{x}^1+\bar{x}^2M$，

最优值 $f\left(\bar{x}^{(0)}\right)=f\left(\bar{x}^1\right)+Mf\left(\bar{x}^2\right)$，这时原问题有可行解

$\hat{x}$，且 $f\left(\bar{x}^1\right)+Mf\left(\bar{x}^2\right)\le c\hat{x}$，$\therefore f\left(\bar{x}^2\right)\le 0$，

令 $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)=x^1+x^2M$，则 $f\left(\bar{x}^{(0)}\right)=f\left(x^{(0)}\right)$.

(1) $f\left(\bar{x}^2\right)<0$，则有 $x^2\neq 0$，当 $M\to+\infty$ 时，$x^{(0)}$ 总是原问题

的可行解，但 $f\left(x^{(0)}\right)\to-\infty$，所以，原问题无界。

(2) $f\left(\bar{x}^2\right)=0$，则 $f\left(\bar{x}^{(0)}\right)=f\left(\bar{x}^1\right)=f\left(x^{(0)}\right)$ 是原问题的最

优值。若 $x^2=0$，则 $x^{(0)}$ 还是一个基本可行解；若 $x^2\neq 0$，令

$$M_0=\min\left\{M \mid x^1+x^2M\ge 0\right\}$$

此时，$x^1+x^2M_0$ 也是基本可行解，而 $\left\{x \mid x=x^1+x^2M, M\ge M_0\right\}$

中任意一点均为原问题的最优解。

$$Min\ -2x_4+4x_5$$

$$ST:\begin{cases} x_1 \quad +x_4-2x_5=2 \\ x_2 \quad -3x_4+x_5=3 \\ x_3-x_4-x_5=-2 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	-3	1	3
x_3	0	0	1	-1	-1	-2
	0	0	0	2	-4	0

显然，
(2，3，-2，0，0)
不是对偶可行解，
所以加一个约束

$$Min\ -2x_4+4x_5$$

$$ST:\begin{cases} x_1 \qquad\quad +x_4-2x_5 =2 \\ x_2 \quad -3x_4+x_5 \qquad =3 \\ \quad x_3-x_4-x_5 \qquad =-2 \\ \qquad\qquad x_4+x_5+x_6=M \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geq 0 \end{cases}$$

方法一

$$Min\ -2x_4+4x_5$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	1	-2	0	2
x_2	0	1	0	-3	1	0	3
x_3	0	0	1	-1	-1	0	-2
x_6	0	0	0	**1**	1	1	M
	0	0	0	2	-4	0	0
x_1	1	0	0	0	-3	**-1**	2-M
x_2	0	1	0	0	4	3	3+3M
x_3	0	0	1	0	0	1	M-2
x_4	0	0	0	1	1	1	M
	0	0	0	0	-6	-2	-2M
x_6	-1	0	0	0	3	1	M-2
x_2	3	1	0	0	-5	0	9
x_3	1	0	1	0	-3	0	0
x_4	1	0	0	1	-2	0	2
	-2	0	0	0	0	0	-4

最优解为
(0,9,0,2,0)
最优值=-4

方法二

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	1	-2	0	2
x_2	0	1	0	-3	1	0	3
x_3	0	0	1	-1	-1	0	-2
x_6	0	0	0	**1**	1	1	M
	0	0	0	2	-4	0	0
x_1	1	0	0	0	**-3**	-1	2-M
x_2	0	1	0	0	4	3	3+3M
x_3	0	0	1	0	0	1	M-2
x_4	0	0	0	1	1	1	M
	0	0	0	0	-6	-2	-2M
x_5	-1/3	0	0	0	1	1/3	(M-2)/3
x_2	-4/3	1	0	0	0	5/3	17/3+5M/3
x_3	0	0	1	0	0	1	M-2
x_4	1/3	0	0	1	6	2/3	2/3+2M/3
	-2	0	0	0	0	0	-4

扩充问题有最优解

$$\bar{x}=\left(0,\frac{17}{3}+\frac{5M}{3},M-2,\frac{2}{3}+\frac{2}{3}M,\frac{M-2}{3},0\right)$$

最优值=-4

原问题最优解为

$$x^{(0)}=\left(0,\frac{17}{3}+\frac{5M}{3},M-2,\frac{2}{3}+\frac{2}{3}M,\frac{M-2}{3}\right)$$

其中$M\geq 2$

最优值=-4

用对偶单纯形法解下列问题

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 5 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge 4 \\ & x_j \ge 0,\ j = 1, \cdots, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ s.t.\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -5 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = M \\ & x_j \ge 0,\ j = 1, \cdots, 7 \end{aligned}$$

最优表为:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	0	$\frac{11}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{7}{9}+\frac{5}{9}M$
x_1	1	0	0	$\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{22}{9}+\frac{1}{9}M$
x_3	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}M$
	0	0	0	0	-1	-1	-2	$9-2M$

扩充问题的最优解是:

$$\tilde{x}=\left(\frac{22}{9}+\frac{1}{9}M,-\frac{7}{9}+\frac{5}{9}M,-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}M,0,0,0,0\right)$$

$$\tilde{f}_{\min}=9-2M$$

所以原问题无界。