单纯形法计算步骤：

初始基为B，初始基本可行解为$x^{(0)} = ((B^{-1}b)^T\ 0)^T$　$B^{-1}b \ge 0$

是否所有的$c_B B^{-1} P_j - c_j \le 0$　是　$x^{(0)}$为最优解

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0$$

是否$y_k = B^{-1}P_k \le 0$　是　无界

$$取\ \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0 \right\}$$

以P_k代替P_{B_r}换基，即x_{B_r}为离基变量，x_k为进基变量。

使用表格形式的单纯形方法

$$(1)\begin{cases}\min & f(x)=cx\\ s.t. & Ax=b\\ & x\geq 0\end{cases}$$

$$A=(B\ N)\quad x=\begin{pmatrix}x_B\\ x_N\end{pmatrix}\quad c=(c_B\ c_N)\quad (1)\text{等价于}$$

$$(2)\begin{cases}\min & f(x)=c_Bx_B+c_Nx_N\\ s.t. & Bx_B+Nx_N=b\\ & x_B,x_N\geq 0\end{cases}\qquad x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$

$$(3)\begin{cases}\min & f(x)=c_B\left(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N\right)+c_Nx_N\\ s.t. & x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b\\ & x_B,x_N\geq 0\end{cases}\qquad (1)\text{等价于}$$

$$(4)\begin{cases}\min & f(x)\\ s.t. & 0f(x)+x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b\\ & f(x)+0x_B+\left(c_BB^{-1}N-c_N\right)x_N=c_BB^{-1}b\\ & x_B,x_N\geq 0\end{cases}$$

单纯形表：

	$f(x)$	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f	1	0	$c_B B^{-1}N-c_N$	$c_B B^{-1}b$

基变量取值

可省略

检验数(判别数)

目标函数取值

$$B^{-1}N=B^{-1}\left(P_{N_1}\ P_{N_2}\ \cdots P_{N_{n-m}}\right)=\left(B^{-1}P_{N_1}\ B^{-1}P_{N_2}\ \cdots B^{-1}P_{N_{n-m}}\right)=\left(y_{N_1}\ y_{N_2}\ \cdots y_{N_{n-m}}\right)$$

$$B^{-1}b=\left(\bar{b}_1\ \bar{b}_2\ \cdots \bar{b}_m\right)^T$$

$$\begin{aligned}
c_B B^{-1}N-c_N &= c_B B^{-1}\left(P_{N_1}\ P_{N_2}\ \cdots P_{N_{n-m}}\right)-\left(c_{N_1}\ c_{N_2}\ \cdots c_{N_{n-m}}\right)\\
&=\left(z_{N_1}\ z_{N_2}\ \cdots z_{N_{n-m}}\right)-\left(c_{N_1}\ c_{N_2}\ \cdots c_{N_{n-m}}\right)\\
&=\left(z_{N_1}-c_{N_1}\ z_{N_2}-c_{N_2}\ \cdots z_{N_{n-m}}-c_{N_{n-m}}\right)
\end{aligned}$$

用单纯形表求解问题：

	x_B	x_N	右端
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0	$c_B B^{-1}N-c_N$	$c_B B^{-1}b$

假设$\bar{b}=B^{-1}b\geq 0$，有一基本可行解

$$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) 若$c_B B^{-1}N-c_N\leq 0$（极小化问题），则现行基本可行解为最优解

(2) 若存在$c_B B^{-1}P_j-c_j>0$，用主元消去法求改进的基本可行解。

用单纯形表求解问题：

	x_B	x_N	右端
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0	$c_B B^{-1}N-c_N$	$c_B B^{-1}b$

$\boxed{B^{-1}b \geq 0}$

(a) 选进基变量：在表的最后一行有 $z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0$，

则 x_k 为进基变量，它所对应的列作为主列；

(b) 若主列中所有元素 ≤ 0，则原问题无最优解；

(c) 若主列中存在元素 >0，令

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\}$$

则 x_r 为离基变量，第 r 行称为主行，主列和主行交叉处的元素 y_{rk} 称为主元。

主元消去：把主列化为单位向量。

例 $\min -x_2+2x_3$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\ \ & x_1-2x_2+x_3=2 \\
& x_2-3x_3\le 1 \\
& x_2-x_3\le 2 \\
& x_1,x_2,x_3\ge 0
\end{aligned}
$$

解：引入松弛变量化为标准型

$$
\begin{cases}
\min -x_2+2x_3 \\
\text{s.t}\ \ x_1-2x_2+x_3=2 \\
\qquad x_2-3x_3+x_4=1 \\
\qquad x_2-x_3+x_5=2 \\
\qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0
\end{cases}
$$

初始基：$B=\left(P_1\ P_4\ P_5\right)$

	x_B	x_N	右端
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0	$c_BB^{-1}N-c_N$	$c_BB^{-1}b$

$$\begin{cases} \min -x_2+2x_3 \\ \text{s.t}\ \ x_1-2x_2+x_3=2 \\ \qquad x_2-3x_3+x_4=1 \\ \qquad x_2-x_3+x_5=2 \\ \qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \end{cases}$$

$$c_B=(c_1,c_4,c_5)=0$$

$$c_N=(c_2,c_3)=(-1,2)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-2	1	0	0	2
x_4	0	1	-3	1	0	1
x_5	0	1	-1	0	1	2
	0	1	-2	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-2	1	0	0	2
x_4	0	$\boxed{1}$	-3	1	0	1
x_5	0	1	-1	0	1	2
	0	1	-2	0	0	0
x_1	1	0	-5	2	0	4
x_2	0	1	-3	1	0	1
x_5	0	0	$\boxed{2}$	-1	1	1
	0	0	1	-1	0	-1
x_1	1	0	0	-1/2	5/2	13/2
x_2	0	1	0	-1/2	3/2	5/2
x_3	0	0	1	-1/2	1/2	1/2
	0	0	0	-1/2	-1/2	-3/2

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$$

$$f_{\min} = -\frac{3}{2}$$

例 $\max\ 2x_1+x_2-x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.t}\quad & x_1+x_2+2x_3\le 6 \\ & x_1+4x_2-x_3\le 4 \\ & x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

解：引入松弛变量化为标准型

$$\begin{cases} \max\ 2x_1+x_2-x_3 \\ \text{s.t}\quad x_1+x_2+2x_3+x_4=6 \\ \qquad x_1+4x_2-x_3\quad +x_5=4 \\ \qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0 \end{cases}$$

初始基：$B=\begin{pmatrix} P_4 & P_5 \end{pmatrix}$

$$c_B=(c_4,c_5)=0$$

$$c_N=(c_1,c_2,c_3)=(2,1,-1)$$

$$c_B = (c_4, c_5) = 0$$

$$c_N = (c_1, c_2, c_3) = (2, 1, -1)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	1	2	1	0	6
x_5	$\boxed{1}$	4	-1	0	1	4
	-2	-1	1	0	0	0
x_4	0	-3	$\boxed{3}$	1	-1	2
x_1	1	4	-1	0	1	4
	0	7	-1	0	2	8
x_3	0	-1	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	1	3	0	1/3	2/3	14/3
	0	6	0	1/3	5/3	26/3

$$x^* = \left(\frac{14}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{3}\right)^T$$

$$f_{\max} = \frac{26}{3}$$

旧基为$P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$ $\quad\Longrightarrow\quad$ x_r为离基变量

新基为$P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$ $\quad\quad\quad\quad$ x_k为进基变量。

证明：因为$B=(P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)$，$P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$线性无关，

$\because\ y_k=B^{-1}P_k$，

$$\therefore P_k=By_k=(P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)\begin{pmatrix} y_{1k}\\ y_{2k}\\ \cdots\\ y_{mk}\end{pmatrix}=y_{1k}P_1+\cdots+y_{rk}P_r+\cdots+y_{mk}P_m$$

即P_k是$P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$的线性组合；

又因为$y_{rk}\neq 0$，所以有

$$P_r=\frac{1}{y_{rk}}P_k-\frac{1}{y_{rk}}(y_{1k}P_1+\cdots+y_{r-1k}P_{r-1}+y_{r+1k}P_{r+1}+\cdots+y_{mk}P_m)$$

即P_r是$P_1,\cdots,P_{r-1},P_{r+1},\cdots,P_m,P_k$的线性组合

$\therefore\ P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m\sim P_1,\cdots,P_{r-1},P_{r+1},\cdots,P_m,P_k$

即$P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$线性无关

旧基为 $P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$

新基为 $P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$

$B=(P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)$，$\forall j$，$y_j=B^{-1}P_j$

$$P_r=\frac{1}{y_{rk}}P_k-\frac{1}{y_{rk}}(y_{1k}P_1+\cdots+y_{r-1k}P_{r-1}+y_{r+1k}P_{r+1}+\cdots+y_{mk}P_m)$$

$$=(P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m)\begin{pmatrix}-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}\\ \cdots\cdots\\ \frac{1}{y_{rk}}\\ \cdots\cdots\\ -\frac{y_{mk}}{y_{rk}}\end{pmatrix}=B'y_r' \quad y_r'=B'^{-1}P_r=\begin{pmatrix}-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}\\ \cdots\cdots\\ \frac{1}{y_{rk}}\\ \cdots\cdots\\ -\frac{y_{mk}}{y_{rk}}\end{pmatrix}$$

$$y'_r = B'^{-1}P_r = \left(-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}, \cdots, -\frac{y_{r-1k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{rk}}, -\frac{y_{r+1k}}{y_{rk}}, \cdots, -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \right)^T$$

$$\therefore z'_r - c'_r = c_{B'}B'^{-1}P_r - c_r = c_{B'}y'_r - c_r$$

$$= -\frac{y_{1k}}{y_{rk}}c_1 - \cdots - \frac{y_{r-1k}}{y_{rk}}c_{r-1} + \frac{1}{y_{rk}}c_k - \frac{y_{r+1k}}{y_{rk}}c_{r+1} - \cdots - \frac{y_{mk}}{y_{rk}}c_m - c_r$$

$$= -\frac{1}{y_{rk}}\left(y_{1k}c_1 + \cdots y_{r-1k}c_{r-1} + y_{rk}c_r + y_{r+1k}c_{r+1} + \cdots + y_{mk}c_m - c_k \right)$$

$$= -\frac{1}{y_{rk}}\left(z_k - c_k \right)$$

旧基为 $P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$　　　新基为 $P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$

$B=(P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)$，$\forall j,\ y_j=B^{-1}P_j$

$$P_r=\frac{1}{y_{rk}}P_k-\frac{1}{y_{rk}}(y_{1k}P_1+\cdots+y_{r-1k}P_{r-1}+y_{r+1k}P_{r+1}+\cdots+y_{mk}P_m)$$

当 $j\neq r$，在新基 $P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$ 下

$$P_j=By_j=y_{1j}P_1+\cdots+y_{rj}P_r+\cdots+y_{mj}P_m$$

$$=y_{1j}P_1+\cdots+\left[\frac{y_{rj}}{y_{rk}}P_k-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}(y_{1k}P_1+\cdots+y_{r-1k}P_{r-1}+y_{r+1k}P_{r+1}+\cdots+y_{mk}P_m)\right]+\cdots+y_{mj}P_m$$

$$=\left(y_{1j}-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}y_{rj}\right)P_1+\cdots+\frac{y_{rj}}{y_{rk}}P_k+\cdots+\left(y_{mj}-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}y_{rj}\right)P_m$$

$$=(P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m)\begin{pmatrix} y_{1j}-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}y_{rj} \\ \text{-----} \\ \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ \text{-----} \\ y_{mj}-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}y_{rj} \end{pmatrix}=B'y'_j \Rightarrow y'_j=B'^{-1}P_j=\begin{pmatrix} y_{1j}-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}y_{rj} \\ \text{-----} \\ \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ \text{-----} \\ y_{mj}-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}y_{rj} \end{pmatrix}$$

在新基下，检验数的变化：

$$z_j' - c_j' = c_{B'} B'^{-1} P_j - c_j \quad (j \neq r)$$

$$= c_1 y_{1j}' + \cdots + c_k y_{kj}' + \cdots + c_m y_{mj}' - c_j$$

$$= c_1 \left(y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{1k} \right) + \cdots + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} + \cdots + c_m \left(y_{mj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{mk} \right)$$

$$- c_j + c_r y_{rj} - c_r y_{rj}$$

$$= \left(c_1 y_{1j} + \cdots + c_r y_{rj} + \cdots + c_m y_{mj} - c_j \right)$$

$$- \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(c_1 y_{1k} + \cdots + c_r y_{rk} + \cdots + c_m y_{mk} - c_k \right)$$

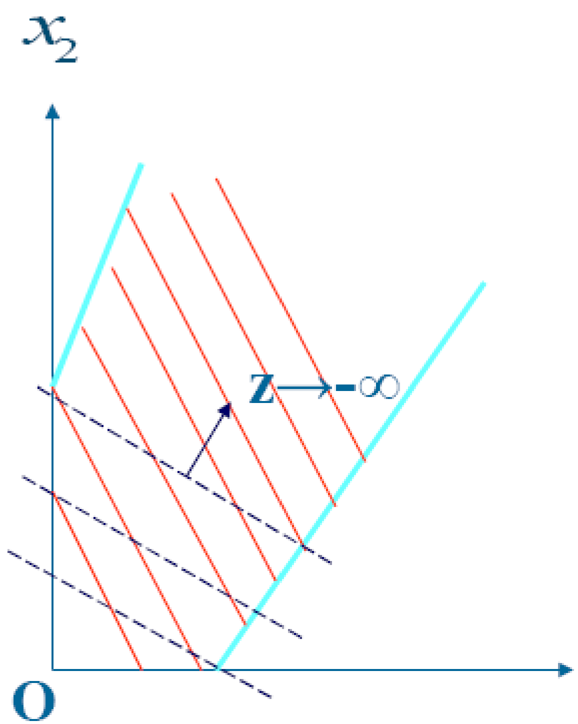
$$= \left(z_j - c_j \right) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(z_k - c_k \right)$$

四、单纯形法的进一步讨论

1、无界解

例： $\min z = -2x_1 - 3x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1 - x_2 + x_3 \qquad = 2 \quad l_1 \\
& -3x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 4 \quad l_2 \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$



	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	-1	1	0	2
x_4	-3	1	0	1	4
	2	3	0	0	0
x_3	-2	0	1	1	6
x_2	-3	1	0	1	4
	11	0	0	-3	-12

$$-2x_1+x_3=6,\ -3x_1+x_2=4 \to x_3=6+2x_1>0, x_2=4+3x_1>0$$

对x_1无约束$x_1 \to \infty, z \to -\infty$

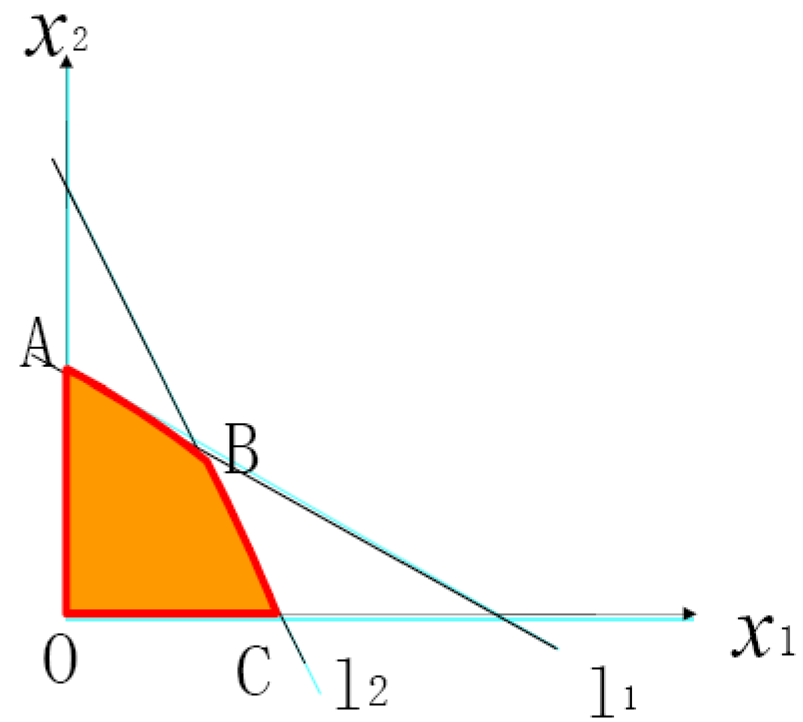
结论：若$z_j-c_j>0$,对应的系数列向量≤0，则该LP存在无界解。

2、多个解

例： $\min z = -4x_1 - 14x_2$

$$s.t \quad 2x_1 + 7x_2 \le 21 \quad l_1$$

$$7x_1 + 2x_2 \le 21 \quad l_2$$



$$\min -4x_1 - 14x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21 \\ & 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

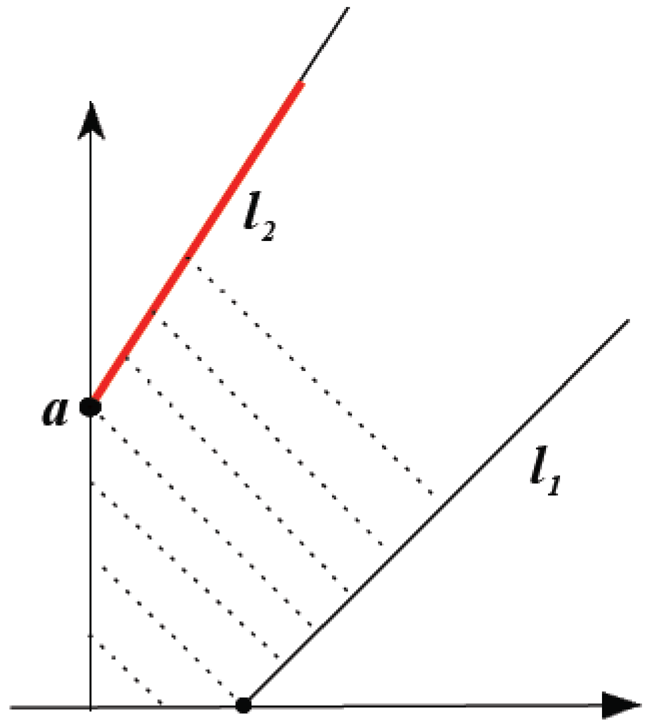
	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	$\boxed{7}$	1	0	21
x_4	7	2	0	1	21
	4	14	0	0	0
x_2	2/7	1	1/7	0	3
x_4	$\boxed{45/7}$	0	-2/7	1	15
	0	0	-2	0	-42
x_2	0	1	7/45	-2/45	7/3
x_1	1	0	-2/45	7/45	7/3
	0	0	-2	0	-42

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 15\end{pmatrix}^T, x^{(2)}=\begin{pmatrix}7/3 & 7/3 & 0 & 0\end{pmatrix}^T \quad z^*=-42$$

结论：非退化情形下，若某个非基变量的检验数为零，

则该线性规划问题存在多个最优解。

$$\begin{aligned}\min \quad & 3x_1 - x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 \le 2 \\ & -3x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\min \quad & 3x_1 - x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 + x_3 \quad = 2 \\ & -3x_1 + x_2 \quad + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	-1	1	0	2
x_4	-3	$\boxed{1}$	0	1	4
	-3	1	0	0	0
x_3	-2	0	1	1	6
x_2	-3	1	0	1	4
	0	0	0	-1	-4

$$x^{(1)} = (0 \ \ 4)^T, \text{最优值} = -4$$

$$x^{(2)} = (1 \ \ 7)^T, f\left(x^{(2)}\right) = -4$$

结论：非退化情形下，若某个非基变量的检验数为零，则该线性规划问题存在多个最优解。

两阶段法和大M法

$$(L)\quad\begin{cases}\min\quad f(x)=cx\\ s.t.\qquad Ax=b \qquad A_{m\times n}\ r(A)=m\quad b\geq 0\\ \qquad\qquad x\geq 0\end{cases}$$

$$(*)\quad\begin{cases}Ax+x_a=b\\ x,x_a\geq 0\end{cases}\quad x_a\text{——}m\times 1$$

$\begin{pmatrix}x\\ x_a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix}$为$(*)$的基本可行解。

x_a的每个分量称为人工变量.

两阶段法:

1. 第一阶段:用单纯形法把人工变量变为非基变量，求出原问题的一个基本可行解。

方法：求解下列模型

$$
(1)\quad \begin{cases} \min \quad e^T x_a \\ s.t. \qquad Ax + x_a = b \quad e = (1\,1\cdots 1)^T \\ \qquad\qquad x, x_a \geq 0 \end{cases}
$$

最优解为: $\left(\bar{x}^T \ \ \bar{x}_a^T\right)^T$, 最优值$= e^T \bar{x}_a$. 最优表为

$$
\begin{array}{c|cccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{a_1} & x_{a_2} & \cdots & x_{a_m} & \\
\hline
 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & b_{1,n+1} & b_{2,n+2} & \cdots & b_{1,n+m} & \bar{b}_1 \\
\text{基变量} & \cdots & \cdots & & & & & & & \\
 & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} & b_{m,n+1} & b_{m,n+2} & \cdots & b_{m,n+m} & \bar{b}_m \\
\hline
 & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0n} & b_{0,n+1} & b_{0,n+2} & \cdots & b_{0,n+m} & b_{00}
\end{array}
$$

(1) 若 $\bar{x}_a \neq 0$，则 (L) 无可行解；

(2) $\bar{x}_a = 0$ 而且所有的人工变量都是非基变量，则 $\bar{x}$ 是 (L) 的基本可行解；

(3) $\bar{x}_a = 0$ 但 $\bar{x}_a$ 的某个分量 $\bar{x}_{a_j}$ 为基变量，则设法将 $\bar{x}_{a_j}$ 从基变量中去掉。

$\bar{x}_{a_j}$ 所在行对应的方程为：

$$x_{a_j} + \sum_{k \in K} b_{jk} x_k + \sum_{i \in I} b_{ji} x_{a_i} = 0 \qquad (*)$$

其中，K, I 分别为 x 和 x_a 中的非基变量的指标集合。

若 $(*)$ 式中所有的 $b_{jk} = 0, k \in K$，即有 $x_{a_j} + \sum_{i \in I} b_{ji} x_{a_i} = 0$，说明 (L) 的约束方程 $Ax = b$ 中第 j 个方程是多余的，应该删去。

若 $(*)$ 式中有 $b_{jk} \neq 0, k \in K$，设为 $b_{js} \neq 0$（可正可负），用主元消去法，使 x_s 进基，x_{a_j} 离基。

第二阶段:从得到的基本可行解出发,用单纯形法求(L)的最优解.

例 $\min\ z=-2x_1-x_2$

$$\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1+x_2-x_3 &&=3\\
& -x_1+x_2 \quad -x_4 &&=1\\
& x_1+2x_2 \qquad +x_5 &&=8\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0
\end{aligned}$$

解：引入人工变量，得辅助问题

$$\begin{cases}
\min\ g=x_6+x_7\\
\text{s.t}\quad x_1+x_2-x_3 \qquad\qquad +x_6 \qquad =3\\
\qquad -x_1+x_2 \quad -x_4 \qquad\qquad +x_7=1\\
\qquad x_1+2x_2 \qquad +x_5 \qquad\qquad =8\\
\qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\ge 0
\end{cases}$$

求解第1阶段问题：

$$c_B=(1,1,0)$$

$$c_N=(0,0,0,0)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	3
x_7	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	2	0	0	1	0	0	8
	0	2	-1	-1	0	0	0	4
x_6	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	1	-1	2
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	3	0	0	2	1	0	-2	6
	2	0	-1	1	0	0	-2	2
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	2
x_5	0	0	3/2	1/2	1	-3/2	-1/2	3
	0	0	0	0	0	-1	-1	0

得基本可行解

$x=(12003)^T$

$g_{min}=0$

开始第2阶段：

$$\min\ z=-2x_1-x_2$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	1
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	2
x_5	0	0	$\boxed{3/2}$	1/2	1	3
	0	0	3/2	-1/2	0	-4
x_1	1	0	0	2/3	1/3	2
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	3
x_3	0	0	1	1/3	2/3	2
	0	0	0	-1	-1	-7

$$c_B B^{-1}N-c_N$$

$$=(-2,-1,0)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}-(0,0)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1}b=(-2,-1,0)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=-4$$

最优解为：$x^*=(2\ 3\ 2\ 0\ 0)^T$

$z_{\min}=-7$

例 $\min\ z = x_1 - x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\
& -4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\
& x_1 - x_3 = 0 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

解：引入松弛变量和人工变量，得辅助问题

$$
\begin{cases}
\min\ g = x_5 + x_6 \\
\text{s.t}\quad -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\
\qquad -4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\
\qquad x_1 - x_3 + x_6 = 0 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{cases}
$$

$c_B = (0,1,1)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	-1	$\boxed{2}$	1	1	0	0	2
x_5	-4	4	-1	0	1	0	4
x_6	1	0	-1	0	0	1	0
	-3	4	-2	0	0	0	4
x_2	-1/2	1	1/2	1/2	0	0	1
x_5	-2	0	-3	-2	1	0	0
x_6	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	0
	-1	0	-4	-2	0	0	0
x_2	0	1	0	1/2	0	1/2	1
x_5	0	0	$\boxed{-5}$	-2	1	2	0
x_1	1	0	-1	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	0	1/2	0	1/2	1
x_5	0	0	-5	-2	1	2	0
x_1	1	0	-1	0	0	1	0
x_2	0	1	0	1/2	0	1/2	1
x_3	0	0	1	2/5	-1/5	-2/5	0
x_1	1	0	0	2/5	-1/5	3/5	0

得基本可行解:

$x=(0100)^T$

$g_{\min}=0$

$\boxed{\min x_1 - x_2}$

第2阶段:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	0	1/2	1
x_3	0	0	1	2/5	0
x_1	1	0	0	2/5	0
	0	0	0	-1/10	-1

$c_B = (-1, 0, 1)$

最优解为:

$x^* = (010)^T$

$z_{\min} = -1$

例 $\max \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& x_1 + x_4 = 2 \\
& 3x_1 + 2x_3 = 10 \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 4
\end{aligned}
$$

解：引入人工变量，解第一阶段问题：

$\min \quad x_5 + x_6 + x_7$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\
& x_1 + x_4 = 2 \\
& 3x_1 + 2x_3 + x_7 = 10 \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 7
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	2	-1	1	0	1	0	0	4
x_6	1	1	1	0	0	1	0	6
x_4	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	2
x_7	3	0	2	0	0	0	1	10
	6	0	4	0	0	0	0	20
x_5	0	-1	$\boxed{1}$	-2	1	0	0	0
x_6	0	1	1	-1	0	1	0	4
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	0	2	-3	0	0	1	4
	0	0	4	-6	0	0	0	8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	-1	1	-2	1	0	0	0
x_6	0	$\boxed{2}$	0	1	-1	1	0	4
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	2	0	1	-2	0	1	4
	0	4	0	2	-4	0	0	8
x_3	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	0	0	0	-1	-1	1	0
	0	0	0	0	-2	-2	0	0

初始基本可行解：$(2, 2, 2, 0)^T$

$$\max\ 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
x_3 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & 2 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{2} & 2 \\
x_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{13}{2} & 4 \\
\hline
\end{array}$$

最优解为：$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 2, 2, 0)^T$

目标函数最优值 $= 4$。

大M法

$$(L)\quad \begin{cases} \min \quad cx \\ s.t. \quad Ax=b \quad b\geq 0 \\ \qquad\quad x\geq 0 \end{cases}$$

引入人工变量:

$$(*)\quad \begin{cases} \min \quad cx+Me^T x_a \\ s.t. \quad Ax+x_a=b \quad e=(11\cdots 1)^T_{m\times 1} \quad M>0 \\ \qquad\quad x,\ x_a\geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解问题(*)，其结果必为下列几种情形之一：

(1) 达到$(*)$的最优解$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_a \end{pmatrix}$且$\bar{x}_a=0$，此时，$\bar{x}$为$(L)$的最优解。

(2) 达到$(*)$的最优解$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_a \end{pmatrix}$且$\bar{x}_a\neq 0$，此时，$(L)$无可行解。

定理2．设线性规划(L)的可行域非空，则

（1）(L)存在最优解的充要条件是对任意的j, $cd^{(j)}\geq 0$, 其中$d^{(j)}$为可行域的极方向。

（2）若(L)存在最优解，则目标函数的最优值可在某个极点达到。

定理： 设$S=\{x \mid Ax=b, x\geq 0\}\neq\varnothing$, d是非零向量，则d是S的方向$\Leftrightarrow d\geq 0$，且$Ad=0$.

定理3 设$S=\{x \mid Ax=b, x\geq 0\}$的方向$d$有$k$个非零分量，则$d$是$S$的极方向$\Leftrightarrow$ d的非零分量所对应的A的列向量组的秩为$k-1$.

(3) (*) 不存在最优解，在单纯形表中有

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0, y_k \le 0, x_a = 0$$

则 (L) 无界。

证明：此时，(L) 有可行解，(*)的可行域为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} \middle| Ax + x_a = b, x \ge 0, x_a \ge 0 \right\}$$

是无界多面体，又因为(*)不存在有限最优值，

因此有极方向 $\begin{pmatrix} d \\ d_a \end{pmatrix}$ 且 $\begin{pmatrix} d \\ d_a \end{pmatrix} \ge 0, Ad + d_a = 0$ 使得

$$\begin{pmatrix} c & Me^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d_a \end{pmatrix} = cd + Me^T d_a < 0$$

$\because$ M 是任意大的正数，$d_a \ge 0$,

$\therefore$ $d_a = 0, cd < 0, \Rightarrow Ad = 0$

即 d 是 (L) 的可行域的极方向且 $cd < 0$，所以，(L) 无界。

(4) (*) 不存在有限最优值，在单纯形表中有

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0,\ y_k \le 0,$$

而且有些人工变量不等于0，则 (L) 无可行解。

证明：设经迭代后得到下列的单纯形表：

	x_1	$\cdots$	x_p	x_{p+1}	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_{n+m}	
x_1	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	y_{1m+1}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	y_{1n+m}	$\bar{b}_1$
$\cdots$							$\cdots\cdots$				$\cdots$	
x_p	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	y_{pm+1}	$\cdots$	y_{pk}	$\cdots$	y_{pn+m}	$\bar{b}_p$
x_{p+1}	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	0	$y_{p+1,m+1}$	$\cdots$	$y_{p+1,k}$	$\cdots$	$y_{p+1,n+m}$	$\bar{b}_{p+1}$
$\cdots$							$\cdots\cdots$				$\cdots$	
x_m	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1	y_{mm+1}	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	$y_{m,n+m}$	$\bar{b}_m$
	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	$\cdots$	z_k-c_k	$\cdots$	$z_{n+m}-c_{n+m}$	$c_B\bar{b}$

$\because$ 有些人工变量 $\neq 0$，$\therefore$ $\sum_{i=p+1}^{m}\bar{b}_i > 0.$

以下证明：$\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \le 0,\ j = m+1,\cdots,n+m,$ 其中 x_j 不是人工变量.

以下证明：$\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \le 0,\ j=m+1,\cdots,n+m,$ 其中 x_j 不是人工变量.

(a) $j=k$，由假设有 $y_k \le 0$，所以上式成立。

(b) $j \ne k,\ j \in \{m+1,\cdots,n+m\}$，且 x_j 不是人工变量，相应的判别数为

$$z_j - c_j = c_B y_j - c_j = \sum_{i=1}^{p} c_i y_{ij} + M \sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} - c_j,$$

若 $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} > 0,\quad \because\quad M$ 是很大的正数，

$\therefore\quad z_j - c_j > z_k - c_k$ 矛盾，$\quad\therefore\quad \sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \le 0.$

将最后 $m-p$ 个方程相加,得到

$$\sum_{j=p+1}^{m} x_j + \sum_{j=m+1}^{n+m}\left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij}\right)x_j = \sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_i.$$

设 (L) 有可行解 $\tilde{x}$，则 $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\0\end{pmatrix}$ 为 $(*)$ 的可行解，代入上式，得

$$\sum_{j=m+1}^{n+m}\left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij}\right)\tilde{x}_j = \sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_i > 0 \text{ 与 } \sum_{j=m+1}^{p}\left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij}\right)\tilde{x}_j \le 0 \text{ 矛盾。}$$

例 $\min\ z = -2x_1 - x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\
& -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
& x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

解：引入人工变量，用单纯形法解下列问题：

$$
\begin{cases}
\min\ z = -2x_1 - x_2 + M(x_6 + x_7) \\
\text{s.t}\quad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 3 \\
\qquad -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\
\qquad x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	3
x_7	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	2	0	0	1	0	0	8
	2	2M+1	-M	-M	0	0	0	4M
x_6	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	1	-1	2
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	3	0	0	2	1	0	-2	6
	2M+3	0	-M	M+1	0	0	-2M-1	2M-1

$$\min -2x_1 - x_2 + M(x_6 + x_7)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	1	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	2
x_5	0	0	3/2	1/2	1	-3/2	-1/2	3
	0	0	3/2	-2	0	-M-3/2	-M+1/2	-4
x_1	1	0	0	2/3	1/3	0	-2/3	2
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	0	1/3	3
x_3	0	0	1	1/3	2/3	-1	-1/3	2
	0	0	0	-5/2	-1	-M	-M+1	-7

最优解为：$x^{(0)} = (2, 3, 2, 0, 0)^T$

最优值=-7。

无可行解

$$
\begin{aligned}
\min\ & -20x_1 - 30x_2 \\
s.t\ & 3x_1 + 10x_2 \le 150 \\
& x_1 \le 30 \\
& x_1 + x_2 \ge 40 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & -20x_1 - 30x_2 + Mx_6 \\
s.t\ & 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 150 \\
& x_1 + x_4 = 30 \\
& x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 40 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	3	10	1	0	0	0	150
x_4	1	0	0	1	0	0	30
x_6	1	1	0	0	-1	1	40
	20+M	30+M	0	0	-M	0	40M

x_2	0	1	1/10	-3/10	0	0	6
x_1	1	0	0	1	0	0	30
x_6	0	0	-1/10	-7/10	-1	1	14
	0	0	–3-M/10	-11-7M/10	–M	0	

结论：<u>若基变量中有非零的人工变量，则该LP无可行解。</u>

例 $\min\ z = -2x_1 - 7x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1 - x_2 - x_3 && = 3 \\
& -x_1 + x_2 \quad - x_4 && = 1 \\
& -2x_1 + 2x_2 \quad + x_5 && = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

解：引入人工变量，用单纯形法解下列问题

$$
\begin{cases}
\min\ z = -2x_1 - 7x_2 + M(x_6 + x_7) \\
\text{s.t}\quad x_1 - x_2 - x_3 \quad + x_6 = 3 \\
\quad -x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad + x_7 = 1 \\
\quad -2x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 8 \\
\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	-1	-1	0	0	1	0	3
x_7	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	-2	2	0	0	1	0	0	8
	2	7	-M	-M	0	0	0	4M
x_6	0	0	-1	-1	0	1	1	4
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	0	2	1	0	-2	6
	9	0	-M	-M+7	0	0	-7	4M-7

$$\min -2x_1 - 7x_2 + M\left(x_6 + x_7\right)$$

原问题没有可行解！

无界解

例 $\min\ z=-2x_1-x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1+x_2-x_3 = 3\\
& -x_1+x_2-x_4 = 1\\
& -2x_1+2x_2+x_5 = 8\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0
\end{aligned}
$$

解：引入人工变量，用单纯形法解下列问题

$$
\begin{cases}
\min\ z=-2x_1-x_2+M(x_6+x_7)\\
\text{s.t}\ \ x_1+x_2-x_3+x_6=3\\
\quad -x_1+x_2-x_4+x_7=1\\
\quad -2x_1+2x_2+x_5=8\\
\quad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\ge 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	3
x_7	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	-2	2	0	0	1	0	0	8
	2	2M+1	-M	-M	0	0	0	4M
x_6	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	1	-1	2
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	0	2	1	0	-2	6
	2M+3	0	-M	M+1	0	0	-2M-1	2M-1

$$\min -2x_1 - x_2 + M(x_6 + x_7)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	1	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	2
x_5	0	0	0	2	1	0	-2	6
	0	0	3/2	-2	0	-M-3/2	-M+1/2	-4

原问题无界。

3、退化情形

例: $\max z = 2x_1 + 1.5x_3$

$$
\begin{aligned}
s.t \quad & x_1 - x_2 \qquad \leq 2 \\
& 2x_1 \qquad + x_3 \leq 4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	1	-1	0	1	0	0	2
x_5	2	0	1	0	1	0	4
x_6	1	1	1	0	0	1	3
	-2	0	-1.5	0	0	0	0
x_1	1	-1	0	1	0	0	2
x_5	0	2	1	-2	1	0	0
x_6	0	2	1	-1	0	1	1
	0	2	-1.5	2	0	0	4

*在单纯形法的计算过程中，确定出基变量时存在两个或两个以上的最小比值，这时会出现退化解。

*有时，退化会造成计算过程的循环，永远达不到最优解。

由E.Beale给出的循环例子：（迭代6次后又回到初始解）

$$\min z = -\tfrac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \tfrac{1}{2}x_6 + 6x_7$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1 + \tfrac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
& x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \tfrac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\
& x_3 + x_6 = 1 \\
& x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 7
\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	$\boxed{1/4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	0
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	$\boxed{4}$	3/2	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-3	0	0	0	4	7/2	-33	0
x_4	-12	8	0	1	0	$\boxed{8}$	-84	0
x_5	-1/2	1/4	0	0	1	3/8	-15/4	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-1	-1	0	0	0	2	-18	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
x_5	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	$\boxed{3/16}$	0
x_3	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1
	2	-3	0	-1/4	0	0	3	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	$\boxed{2}$	-6	0	-5/2	56	1	0	0
x_7	1/3	-2/3	0	-1/4	16/3	0	1	0
x_3	-2	6	1	5/2	-56	0	0	1
	1	-1	0	1/2	-16	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	-3	0	-5/4	28	1/2	0	0
x_7	0	$\boxed{1/3}$	0	1/6	-4	-1/6	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	2	0	7/4	-44	-1/2	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	0

出现循环的特点：

1. 线性规划必然是退化的，即存在某个基变量取值为0。

2. 在迭代过程中，即使基变量（可行基矩阵）是不同的，但是它们对应着同一个极点$(0,0,1,0,0,0,0)^T$，因而目标函数值始终为0。

解决退化的方法有：

“摄动法”、“字典序法”、 Bland规则等

1974年Bland提出Bland算法规则：

(1)$k=\min\{j \mid z_j - c_j > 0\}$，则选取$z_k - c_k$所对应的变量为进基变量。

(2) 当按θ规则计算存在两个和两个以上的最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量。

讨论题

在求解极小化LP问题中，得到如下单纯形表：（无人工变量）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	1	0	-4	0	5
x_3	-2	0	1	-3	0	3
x_5	3	0	0	a	1	d
	-3	0	0	δ	0	

1、当前解为唯一最优解时，各参数应满足的条件；

2、原问题存在无界解时，各参数应满足的条件；

3、原问题存在多个解时，各参数应满足的条件；

4、当 x_4 作为进基变量取代 x_5 时，目标值的增量为多少？ $\dfrac{d\delta}{a}$