线性锥优化习题(研究生公共基础课)

April 23, 2023

1 第一部分习题

1.1 将下列问题写成决策变量定义在$\mathbb{R}^n_+$, 目标函数为线性函数, 约束为线性等式的等价形式，这种形式称为线性规划问题的标准形式。

(1)

$$\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\max \quad & -3x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 50x_1 - 10x_2 = -2 \\
& -10x_1 - 7x_2 - x_3 \leq 200 \\
& x_1 \geq 10 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq -12.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_3 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 \leq 3 \\
& x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 3 \\
& x_1 \geq 1, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

1.2 给定$A \in \mathcal{S}_+^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, 证明: $\left\{x \in \mathbb{R}^n | x^T Ax + b^T x + c \leq 0\right\}$与下列集合相同

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n | \sqrt{x^T Ax + (\frac{b^T x + c + 1}{2})^2} \leq \frac{-b^T x - c + 1}{2}\right\}.$$

1.3 将下列问题写成决策变量定义在$\mathbb{R}_+^n$, $\mathcal{L}^n$或$\mathcal{S}_+^n$ 锥上, 目标函数为线性函数, 约束为线性等式的等价形式，这种形式称为锥优化的标准形式。

(1)

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3 \leq 10 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 1.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + 2x_2^2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 - x_3 \leq 10 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_3 \leq 2.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3 \leq 10 \\
& x_1 \leq -1.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{13} \\
\text{s.t.} \quad & x_{11} \geq 1 \\
& x_{22} + x_{33} \leq 1 \\
& (x_{ij}) \in \mathcal{S}_+^3.
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \min \quad & x+y+z+u \\ \text{s.t.} \quad & x \geq 0 \\ & z \geq 0 \\ & v \geq 0 \\ & xz - y^2 \geq 0 \\ & zv - u^2 \geq 0. \end{aligned}$$

1.4 Steiner问题. (1) (min-max Steiner) 设$p^1, p^2, \cdots, p^K$ 为$\mathbb{R}^n$中的K 个给定的点, 求一点$x \in \mathbb{R}^n$使得该点到所有点的最大距离最小, 即优化问题

$$\min \max_{1 \leq i \leq K} \|x - p^i\|_2,$$

其中$\|\cdot\|_2$ 表示欧氏距离. 将其化成等价的线性锥优化问题. (2) 加权Steiner 问题: 设$p^1, p^2, \cdots, p^K$为$\mathbb{R}^n$ 中的K 个给定的点, $w_1, w_2, \cdots, w_K$ 为给定的正权数, 加权Steiner 问题定义为

$$\min \sum_{i=1}^{K} w_i \|x - p^i\|_2.$$

将其化成等价的线性锥优化问题.

1.5 给定$A \in \mathcal{S}^n$, (1) 证明: λ_0为A的最大特征值充分必要其与如下的线性锥优化问题的最优解

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda I - A \in \mathcal{S}^n_+ \\ & \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) 将上述模型写成等式约束的线性锥优化模型.

参考解答

1.1. (1) 添加松弛变量x_3, x_4, 得到

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 \\ s.t. \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

(2) 令$y_1 = x_1 - 10, x_2 = y_2 - y_4, y_3 = x_3 + 12$, 并且给目标函数添加负号, 得到

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 \\
s.t. \quad & 50y_1 - 10y_2 + 10y_4 = -502 \\
& -10y_1 - 7y_2 - y_3 + 7y_4 + y_5 = 288 \\
& y_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2, \cdots, 5
\end{aligned}
$$

此问题的最优值加18再取相反数是原问题的最优值.

(3) 用$x_3 - x_4$替换x_3, 添加松弛变量x_5, x_6, 并且给目标函数添加负号, 得到

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\
& x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 1 \\
& x_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2, \cdots, 6
\end{aligned}
$$

此问题的最优值的相反数是原问题的最优值.

(4) 用$x_2 - x_5$替换x_2, 用$x_4 - x_6$替换x_4, 添加松弛变量x_7, x_8, x_9, 得到

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_3 \\
s.t. \quad & -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 3x_5 - 6x_6 + x_7 = 3 \\
& x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 - x_8 = 1 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 - x_9 = 3 \\
& x_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2, \cdots, 9
\end{aligned}
$$

1.2. 由于A半正定, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x^TAx + (\tfrac{b^Tx+c+1}{2})^2} \ \le \ \tfrac{-b^Tx-c+1}{2} \\
\iff \quad & \begin{cases} x^TAx + (\frac{b^Tx+c+1}{2})^2 \ \le \ (\frac{-b^Tx-c+1}{2})^2 \\ \frac{-b^Tx-c+1}{2} \ \ge \ 0 \end{cases} \\
\iff \quad & \begin{cases} x^TAx + b^Tx + c \ \le \ 0 \\ b^Tx + c \ \le \ 1 \end{cases} \\
\iff \quad & b^Tx + c \ \le \ -x^TAx \\
\iff \quad & x^TAx + b^Tx + c \ \le \ 0
\end{aligned}
$$

因此两个集合相等.

1.3. (1) 令$y = x_3 - 1, t = x_3 + 10$, 则有

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + y \\ s.t. \quad & t - y = 11 \\ & x_1 - x_2 + y = 0 \\ & (x_1, x_2, t, y)^T \in \mathcal{L}^3 \times \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

此问题的最优值比原问题的最优值小1.

(2) 该模型等价

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ s.t. \quad & x_1^2 + 2x_2^2 \leq t \\ & x_1^2 + x_2^2 - x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \leq 2. \end{aligned}$$

由习题1.2的结论, 等价模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ s.t. \quad & y_1 - \sqrt{2}x_2 = 0 \\ & y_2 - \frac{t-1}{2} = 0 \\ & y_3 - \frac{t+1}{2} = 0 \\ & y_4 - \frac{x_3+9}{2} = 0 \\ & y_5 - \frac{x_3+11}{2} = 0 \\ & x_1 - x_4 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & (x_1, y_1, y_2, y_3)^T \in \mathcal{L}^4, (x_1, x_2, y_4, y_5)^T \in \mathcal{L}^4, (x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}
\min \quad & t_1 \\
s.t. \quad & y_1 - x_1 + x_2 = 0 \\
& y_2 - x_2 = 0 \\
& y_3 - x_1 - x_2 = 0 \\
& t_2 - x_3 = 10 \\
& y_1 + y_2 + y_4 = -1 \\
& (y_1, y_2, t_1, y_3, t_2, y_4)^T \in \mathcal{L}^3 \times \mathcal{L}^2 \times \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

此问题的最优值的平方是原问题的最优值.

(4) 加入松弛变量x_{44}, x_{55}, 则有

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{13} \\
s.t. \quad & x_{11} - x_{44} = 1 \\
& x_{22} + x_{33} + x_{55} = 1 \\
& x_{ij} = 0, i = 4, 5 \text{ 或 } j = 4, 5, \text{ 且 } i \neq j \\
& (x_{ij}) \in \mathcal{S}^5_+
\end{aligned}$$

(5) 令$t_1 = \frac{x+z}{2}, t_2 = \frac{x-z}{2}, t_3 = \frac{z+v}{2}, t_4 = \frac{z-v}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}
\min \quad & x + y + z + u \\
s.t. \quad & t_1 + t_2 = x \\
& t_1 - t_2 = z \\
& t_3 + t_4 = z \\
& t_3 - t_4 = v \\
& (y, t_2, t_1, u, t_4, t_3, x, z, v)^T \in \mathcal{L}^3 \times \mathcal{L}^3 \times \mathbb{R}^3_+
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_{11} + x_{12} + x_{22} + x_{34} \\
s.t. \quad & x_{13} = 0, x_{14} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 0 \\
& x_{22} - x_{33} = 0 \\
& (x_{ij}) \in \mathcal{S}^4_+.
\end{aligned}$$

1.4. (1)

$$\text{原问题} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min & t \\ s.t. & \|x-p^i\|_2 \le t, \quad i=1,\cdots,K \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min & t \\ s.t. & x-p^i=y^i, \quad i=1,\cdots,K \\ & (y^i,t)^T \in \mathcal{L}^{n+1} \quad i=1,\cdots,K \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min & t \\ s.t. & y^i-y^{i+1}=p^{i+1}-p^i, \quad i=1,\cdots,K-1 \\ & (y^i,t)^T \in \mathcal{L}^{n+1}, \quad i=1,\cdots,K \end{array}$$

(2)

$$\text{原问题} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^K w_i t_i \\ s.t. & x-p^i=y^i, \quad i=1,\ldots,K \\ & (y^i,t_i)^T \in \mathcal{L}^{n+1}, \quad i=1,\ldots,K \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^K w_i t_i \\ s.t. & y^i-y^{i+1}=p^{i+1}-p^i, \quad i=1,\cdots,K-1 \\ & (y^i,t_i)^T \in \mathcal{L}^{n+1}, \quad i=1,\ldots,K \end{array}$$

1.5. (1) 设A的n个特征值为λ_i, $i=1,\cdots,n$, 则$\lambda I-A$ 的n个特征值为$\lambda-\lambda_i, i=1,\cdots,n$, 则有：

$$\begin{array}{rl} \min & \lambda \\ s.t. & \lambda I - A \in \mathcal{S}^n_+ \\ & \lambda \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \min & \lambda \\ s.t. & \lambda-\lambda_i \ge 0 \\ & \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

而第二个问题的最优解为$\max_{i=1,\cdots,n}\lambda_i$即$A$的最大特征值, 因此$\lambda_0$ 为A 的最大特征值当且仅当λ_0是原问题的最优解.

(2) 令$X=\lambda I-A$, 则有

$$\begin{array}{rl} \min & \lambda \\ s.t. & \lambda I - X = A \\ & (X,\lambda) \in \mathcal{S}^n_+ \times \mathbb{R} \end{array}$$

2 第二部分习题

2.1. 证明: $\mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_+) = \mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_{++}) = \mathcal{S}^n_+$.

2.2. 证明: (1) $\left\{x \in \mathbb{R}^n | \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \le dx_n\right\}$ 为一个真锥, 其中$d > 1$, 写出其对偶锥;
(2) 证明: $\mathcal{X} = \left\{x \in \mathbb{R}^n | \sqrt{x^TAx} \le a^Tx\right\}$为一个真锥, 其中$A \in \mathcal{S}^n_{++}$, $a \in \mathbb{R}^n, a \ne 0$, $\mathrm{int}(\mathcal{X}) \ne \emptyset$; 求其对偶锥.

2.3. 记

$$\mathcal{C} = \left\{U \in \mathcal{S}^{n+1} | \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T U \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}.$$

证明：$\mathcal{C}$为真锥. 写出$\mathcal{C}$的对偶锥.

2.4. 设$Q \in \mathcal{S}^n_{++}$, $c \in \mathbb{R}^n$, 讨论Q和c的条件, 使得$\{x | x^TQx \le (c^Tx)^2, c^Tx \ge 0\}$为真锥(提示：类似2.2 讨论).

2.5. 设$f(x) = \sin(x), -\frac{\pi}{2} < x \le 2\pi$, 写出$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(f))(x)$ 及函数值有界的定义域.

2.6. 设$f : \mathcal{X}$是一个凸函数且在$\bar{x}$一阶连续可微, 证明: $\partial f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})$.

2.7. 设$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, 求$\partial f(0)$.

2.8. 设$f(x) = x^3, x \ge 0$, 求共轭函数$f^*(y) : \mathcal{Y}$, 再分别求$f(x) + b$, $f(x + a)$, $cf(x + a)$, 其中$a \ge 0, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ 在定义域$x \ge 0$ 的共轭函数.

2.9. 设$f(x) = x^TAx : \mathbb{R}^n$, 其中$A \in \mathcal{S}^n_{++}$, 分别求$f(x) + b$, $f(x + a)$, $cf(x + a)$, 其中$a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ 的共轭函数.

2.10. 记

$$\mathcal{F}_m = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \le b_i, i = 1, 2, \ldots, m, x \in \mathcal{K}\},$$

其中对每一个i, $g_i(x)$为连续凸函数, $\mathcal{K}$为有界闭凸集且$\mathcal{F}_m \ne \emptyset$. 当减少一个约束$g_m(x) \le b_m$ 时, 假设$\mathcal{F}_{m-1}$与$\mathcal{F}_m$不相等. 证明: 存在$c \in \mathbb{R}^n$, 使得优化问题$\min\limits_{x \in \mathcal{F}_m} c^Tx > \min\limits_{x \in \mathcal{F}_{m-1}} c^Tx$.

参考解答

2.1. $\forall A \in \mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_+), \exists A_k \in \mathcal{S}^n_+,\ s.t. A_k \to A$. $\forall x,\ x^TAx = \lim_{k\to\infty} x^TA_kx \ge 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S}^n_+ \Rightarrow \mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_+) = \mathcal{S}^n_+$.

$\mathcal{S}^n_{++} \subset \mathcal{S}^n_+ \Rightarrow \mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_{++}) \subset \mathcal{S}^n_+$. $\forall A \in \mathcal{S}^n_+$, 令$A_k = A + \frac{1}{k}I \in S^n_{++}, k = 1, 2, \cdots$, 且$A_k \to A$, 可知$\mathcal{S}^n_+ \subset \mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_{++})$.从而$\mathcal{S}^n_+ = \mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_{++})$.

因此$\mathcal{S}^n_+ = \mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_+) = \mathrm{cl}(\mathcal{S}^n_{++})$.

2.2. (1)记该集合为K. 锥：$\forall x \in K, \forall \lambda > 0$, $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \le d(\lambda x_n) \Rightarrow \lambda x \in K$. 尖：$-K = \{x \in \mathbb{R}^n | \sqrt{\sum_{i=1}^n} \le -dx_n\}$, $\forall x \in (-K) \cap K$, 有$-dx_n \ge 0, dx_n \ge 0$, 因此$x_n = 0$, 故$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 0$, 因此$x = 0$. 实：易见$(0, \cdots, 0, 1) \in \mathrm{int}(K) \neq \emptyset$. 闭：设$x^k \to x, \{x^k\}_{k=1}^\infty \subset K$, 则$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k)^2} \le \lim_{k\to\infty} dx_n^k = dx_n$, 因此$x \in K$, K闭. 凸：$\forall x, y \in K, \forall 0 \le \lambda \le 1, \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)^2 \le \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\lambda(1-\lambda)(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{\frac{1}{2}} \le d^2\lambda^2 x_n^2 + d^2(1-\lambda^2)y_n^2 + 2d^2\lambda(1-\lambda)x_n y_n = d^2(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n)^2$. 从而K凸.

令$S = \{x \in \mathbb{R}^n | \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \le \sqrt{\frac{1}{d^2-1}} x_n\}$. 下证$K^* = S$.

" $\supset$ " : $\forall x \in K$, $\forall y \in S$, $|\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2} \le \sqrt{d^2-1} x_n \sqrt{\frac{1}{d^2-1}} y_n = x_n y_n$, 因此$\sum_{i=1}^n x_n y_n \ge 0$, 故$y \in K^*$, 因此$S \subset K^*$.

" $\subset$ " : $\forall x \in K, y \in K^*$, 反设$y \notin S$, i. e. $\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2} > \sqrt{\frac{1}{d^2-1}} y_n$, 若$y_n < 0$, 取$x = (0, \ldots, 0, 1)^T$易见矛盾, 故$y_n \ge 0$, 因此不等式左边非负, 记其为$t$. 令

$$x = (-y_1/t, \ldots, -y_{n-1}/t, 1/\sqrt{d^2-1}),$$

由

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} = 1 = \sqrt{d^2-1} x_n$$

可知$x \in K$, 但$x^T y = -t + \frac{y_n}{\sqrt{d^2-1}} < 0$, 矛盾, 故$K^* \subset S$.

综上, $K^* = S$.

(2) 锥：易见 $\forall x \in \mathcal{X}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{X}$是锥.

尖：$\forall x \in \mathcal{X} \cap -\mathcal{X}$, 有$\sqrt{x^T A x} \le a^T x, \sqrt{x^T A x} \le -a^T x$, 因此$x^T A x = 0$, 可得$x = 0$, 即$\mathcal{X}$为尖锥.

实：由条件$\mathrm{int}(\mathcal{X}) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{X}$是实锥.

闭：$\forall x^k \in \mathcal{X}, x^k \to x$有$\sqrt{x^T A x} = \lim_k \sqrt{(x^k)^T A x^k} \leqslant \lim_k a^T x^k = a^T x \Rightarrow x \in \mathcal{X}$. 于是$\mathcal{X}$ 是闭锥.

凸：由 $A \in \mathcal{S}^n{++} \Rightarrow \exists\, C$为可逆阵$s.t.$ $A = C^T C$, 记

$$d^T = a^T C^{-1}, \mathcal{Y} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \leqslant d^T y \right\} = C\mathcal{X}$$

由于C为可逆阵, 只需证明$\mathcal{Y}$凸. $\forall x, y \in \mathcal{Y}, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad d^T(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)^2 \\
\leqslant&\lambda^2\sum_{i=1}^{2}x_i^2 + (1-\lambda)^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2 + 2\lambda(1-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leqslant&\lambda^2(d^Tx)^2 + (1-\lambda)^2(d^Ty)^2 + 2\lambda(1-\lambda)d^Txd^Ty \\
=&(d^T(\lambda x + (1-\lambda)y))^2
\end{aligned}$$

于是有 $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{Y}$ 进而有 $\mathcal{X}$ 凸.

综上有 $\mathcal{X}$ 是真锥.

取正交阵 $Q, s.t.\ Qd = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ ||d|| \end{pmatrix}, \mathcal{Z} = Q\mathcal{Y}, P = QC$ 则

$$\mathcal{Z} = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \middle| \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_n^2} \leqslant ||d||z_n \right\} = P\mathcal{X}$$

由于$\mathcal{X}$ 是真锥, $\mathcal{Z}$ 是真锥, 因此$\|d\| = \|a^TC^{-1}\| > 1$.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathcal{X}, \quad u^Tx \geqslant 0 \\
&\qquad\Leftrightarrow (P^{-T}u)^Tz \geqslant 0, \forall z \\
&\qquad\Leftrightarrow P^{-T}u \in \text{dual } \mathcal{Z} = \left\{ z \middle| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2} \leqslant \frac{||d||}{\sqrt{||d||^2 - 1}} z_n \right\} \\
&\qquad\Leftrightarrow u \in U := \left\{ u \in \mathbb{R}^n \middle| \sqrt{u^TP^{-1}P^{-T}u} \leqslant \frac{||d||}{\sqrt{||d||^2 - 1}}(P^{-T}u)_n \right\} \\
&\qquad\Leftrightarrow u \in U = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \middle| \sqrt{u^TA^{-1}u} \leqslant \frac{\sqrt{a^TA^{-1}a}}{\sqrt{a^TA^{-1}a - 1}}(P^{-T}u)_n \right\}
\end{aligned}$$

于是U为所求$\mathcal{X}$的对偶.

2.3. 锥：$\forall U \in \mathcal{C}, \forall \lambda > 0, \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T (\lambda U) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T U \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \geq 0, \Rightarrow \lambda U \in \mathcal{C}$

尖：$\forall U \in \mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}), \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T U \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^n$. 取$x = 0$, 可知$U_{11} = 0$. 另外取$x = te_i$, 其中$e_i$代表只有$i$ 分量为1 其他分量都为0的向量. 要使得对任意的$t > 0$, 该式等于0恒成立, 可知必有$U_{ii} = U_{1i} = U_{i1} = 0$. 再取$x = e_i + e_j$, 则知$U_{ij} = U_{ji} = 0$. 因此$U = 0$.

实：由$\mathcal{S}_+^n \subset \mathcal{C}$, int$(\mathcal{C}) \neq \emptyset$

闭：设$U_k \in \mathcal{C}$, $U_k \to U$. 则由$\mathcal{S}^n$闭, $U \in \mathcal{S}^n$. 而$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T U \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \lim_{k\to+\infty} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T U_k \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \geq 0$, 则$U \in \mathcal{C}$.

凸：$\forall\, U_1, U_2 \in \mathcal{C}, \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T (\lambda U_1 + (1-\lambda)U_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T U_1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T U_2 \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \geq 0,$$

$\Rightarrow \lambda U_1 + (1-\lambda)U_2 \in \mathcal{C}$. 综上所述, $\mathcal{C}$为真锥.

令$D = \{V | V = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T,\ x \in \mathbb{R}^n_+\}$, 令$E = \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(D))$, 任意$U \in C, V \in D$, $U \bullet V = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T U \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0$. 故$D \subseteq C^\star$, 由于对偶锥$C^\star$为闭凸锥, 我们有$E \subseteq C^\star$. 由于$C$是闭凸锥, 我们知道$E^\star \supseteq C^{\star\star} = C$.

对任意$U \in E^\star$, 由于对任意的$x \in R^n_+$, $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T \in E$, 我们有$U \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T U \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0$, 故$U \in C$. 即$E^\star \subseteq C$.

得到$E^\star = C$, 又E是闭凸锥, 综上$E = E^{\star\star} = C^\star$.

2.4. 设$K = \{x \in R^n | x^{\mathrm{T}} Q x \leq (c^{\mathrm{T}} x)^2, c^{\mathrm{T}} x \geq 0\}$.

锥：对$\lambda > 0$,

$$(\lambda x)^T Q (\lambda x) = (\lambda)^2 x^T Q x \leq (\lambda)^2 (c^T x)^2 = (c^T(\lambda x))^2.$$

故$\lambda x \in K$, K是锥.

闭：设$x_m \in K$且$\lim_{m\to+\infty} x_m = x$. 对$x_m^{\mathrm{T}} Q x_m \leq (c^{\mathrm{T}} x_m)^2$两边取极限得$x^{\mathrm{T}} Q x \leq (c^{\mathrm{T}} x)^2$, 故$x \in K$, K 闭.

凸：存在R可逆使得$Q = R^{\mathrm{T}} R$. 设$x_1, x_2 \in K$, 则有

$$(x_1^{\mathrm{T}} Q x_2)^2 = ((Rx_1)^{\mathrm{T}} (Rx_2))^2 \leq \|Rx_1\|^2 \|Rx_2\|^2 \leq (c^{\mathrm{T}} x_2)^2 (c^{\mathrm{T}} x_1)^2.$$

则对任意的$0 \leq s \leq 1$

$$\begin{aligned} (sx_1 + (1-s)x_2)^{\mathrm{T}} Q (sx_1 + (1-s)x_2) &= s^2 x_1^{\mathrm{T}} Q x_1 + 2s(1-s) x_1^{\mathrm{T}} Q x_2 + (1-s)^2 x_2^{\mathrm{T}} Q x_2 \\ &\leq s^2 (c^{\mathrm{T}} x_1)^2 + 2s(1-s) c^{\mathrm{T}} x_2 c^{\mathrm{T}} x_1 + (1-s)^2 (c^{\mathrm{T}} x_2)^2 = (c^{\mathrm{T}}(sx_1 + (1-s)x_2))^2. \end{aligned}$$

故$sx_1 + (1-s)x_2 \in K$, K凸.

尖：$-K\cap K=\{x\in R^n|x^{\mathrm{T}}Qx\le(c^{\mathrm{T}}x)^2,c^{\mathrm{T}}x=0\}=\{x\in R^n|x^{\mathrm{T}}Qx=0\}=\{0\}$. 故K是尖的.

余下的任务只需给出实的充要条件. 首先需要证明习题2.2的$d>1$ 是对应集合实锥的充要条件. 而

$$x^TQx\le(c^Tx)^2,c^Tx\ge0\Leftrightarrow\sqrt{x^TQx}\le c^Tx.$$

记$Q=B^TB$, B 可逆. 令$y=Bx$, 有

$$\sqrt{x^TQx}\le c^Tx\Leftrightarrow\sqrt{y^Ty}\le c^TB^{-1}y.$$

存在一个正交矩阵U, 在正交$z=Uy$ 替换后满足$z_n=\frac{C^TB^{-1}}{\|C^TB^{-1}\|_2}y$, 此时

$$\sqrt{y^Ty}\le c^TB^{-1}y\Leftrightarrow\sqrt{z^Tz}\le\|C^TB^{-1}\|_2z_n.$$

由已证明的习题2.2中$d>1$是对应集合实锥的充要条件, 要求$\|C^TB^{-1}\|_2>1$.

2.5. 利用$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(f))$的定义, $\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(f)))=\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\mathrm{epi}(f)))$. 而

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\mathrm{epi}(f)))=\{(x,y)^T|\ y\ge-1,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\}\bigcup\{(x,y)^T|\ y\ge\sin(x),\frac{3\pi}{2}<x\le2\pi\},$$

故有：

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(f))(x)=\begin{cases}-1 & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\\ \sin(x) & \frac{3\pi}{2}<x\le2\pi\end{cases}$$

函数值有界的定义域为$[-\frac{\pi}{2},2\pi]$.

2.6. 由f在$\bar{x}$处可微和$\bar{x}$为$\mathcal{X}$的内点, 于是由定理可知$\partial f(\bar{x})$ 非空. 对于任意的$d\in\partial f(\bar{x})$, 我们令$x=\bar{x}+\alpha e_i$, 其中e_i是第i个位置为1, 其他位置为0的向量. 由于$\bar{x}$是内点, 则我们总可以取到充分小的α使得$x\in\mathcal{X}$, 且满足$f(x)\ge f(\bar{x})+\alpha d_i$. 令$\alpha\to0^+$, 有

$$\lim_{\alpha\to0^+}\frac{f(\bar{x}+\alpha e_i)-f(\bar{x})}{\alpha}\ge d_i$$

即$\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})\ge d_i$. 类似地令$\alpha\to0^-$, 则我们可以得到$\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})\le d_i$. 因此我们有$\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})d_i,i=1,\cdots,n$成立. 由梯度函数的定义可知, 有$d=\nabla f(\bar{x})$, 由$d$的任意性可知, $\partial f(\bar{x})=\nabla f(\bar{x})$.

2.7. $\partial f(0)=[0,1]$

2.8. (1) $f(x)=x^3\ (x\ge0)$的共轭函数：$f^*(y)=\sup_{x\ge0}(xy-x^3)$. 令$g(x)\equiv xy-x^3\ (x\ge0)$, 则$g'(x)=y-3x^2$.

- 当$y\le0$时, 对任意$x(>0)$都有$g'(x)<0$.

x	0	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$(-\infty)$

由上图可知, $g(x)$在$x=0$取最大值$g(0)=0$. 于是$f^*(y)=0$.

- 当$y > 0$时, 满足$g'(x) = 0$的$x = \sqrt{\frac{y}{3}}$.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{y}{3}}$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$(-\infty)$

由上图可知, $g(x)$在$x = \sqrt{\frac{y}{3}}$取最大值$g\left(\sqrt{\frac{y}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}y\sqrt{y}$. 于是$f^*(y) = \frac{2\sqrt{3}}{9}y\sqrt{y}$.

由此得知,

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & (y \leq 0) \\ \frac{2\sqrt{3}}{9}y\sqrt{y} & (y > 0) \end{cases}$$

(2) $f_1(x) \equiv f(x) + b$ $(x \geq 0)$的共轭函数:

$$\begin{aligned} f_1^*(y) &= \sup_{x\geq 0}(xy - f_1(x)) = \sup_{x\geq 0}(xy - x^3 - b) = \sup_{x\geq 0}(xy - x^3) - b = f^*(y) - b \\ &= \begin{cases} -b & y \leq 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{9}y\sqrt{y} - b & y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $f_2^*(x) \equiv f(x+a)$的共轭函数: $f_2^*(y) = \sup_{x\geq 0}(xy - f_2(x)) = \sup_{x\geq 0}(xy - (x+a)^3)$. 令$g_2(x) \equiv xy - (x+a)^3$, 则$g_2'(x) = y - 3(x+a)^2$.

- 当$y \leq 3a^2$时, 对任意$x > 0$都有$g_2'(x) < 0$.

x	0	$\cdots$	$(+\infty)$
$g_2'(x)$		$-$	
$g_2(x)$	$-a^3$	$\searrow$	$(-\infty)$

由上图可知, $g_2(x)$在$x = 0$取最大值$g_2(0) = -a^3$.

- 当$y > 3a^2$时, 满足$g_2'(x) = 0$的$x = \sqrt{\frac{y}{3}} - a$.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{y}{3}} - a$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-a^3$	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$(-\infty)$

由上图可知, $g_2(x)$在$x = \sqrt{\frac{y}{3}} - a$取最大值$g_2\left(\sqrt{\frac{y}{3}} - a\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}y\sqrt{y} - ay$.

由此得知

$$f_2^*(y) = \begin{cases} -a^3 & y \leq 3a^2 \\ \frac{2\sqrt{3}}{9}y\sqrt{y} - ay & y > 3a^2 \end{cases}$$

(4) $f_3(x) \equiv cf(x+a)$ $(x \geq 0)$的共轭函数：$f_3^*(y) = \sup_{x\geq 0}(xy - f_3(x)) = \sup_{x\geq 0}(xy - c(x+a)^3)$. 令$g_3(x) \equiv xy - c(x+a^3)$, 则$g_3'(x) = y - 3c(x+a)^2$.

- 当$y \leq 3ca^2$时, 对任意$x > 0$都有$g_3'(x) < 0$.

x	0	$\cdots$	$(+\infty)$
$g_2'(x)$		$-$	
$g_2(x)$	$-ca^3$	$\searrow$	$(-\infty)$

  由上图可知, $g_3(x)$在$x=0$取最大值$g_3(0) = -ca^3$.

- 当$y > 3ca^2$时, 满足$g_3'(x) = 0$的$x = \sqrt{\frac{y}{3c}} - a$.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{y}{3c}} - a$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-ca^3$	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$(-\infty)$

  由上图可知, $g_3(x)$在$x = \sqrt{\frac{y}{3c}} - a$取最大值$g_3\left(\sqrt{\frac{y}{3c}} - a\right) = \frac{2\sqrt{3c}}{9c}y\sqrt{y} - ay$.

由此得到

$$f_3^*(y) = \begin{cases} -ca^3 & y \leq 3ca^2 \\ \frac{2\sqrt{3c}}{9c}y\sqrt{y} - ay & y > 3ca^2 \end{cases}$$

2.9. 先求$f(x)$的共轭函数$f^*(y) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{y^Tx - x^TAx\}$, 由$A$正定, 知其存在逆矩阵, 且在$x = \frac{1}{2}A^{-1}y$取得最小值, 因此

$$f^*(y) = \frac{1}{4}y^TA^{-1}y, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n.$$

$f(x)+b$的共轭函数：

$$f_1^*(y) = f^*(y) - b = \frac{1}{4}y^TA^{-1}y - b, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n.$$

$f(x+a)$的共轭函数：

$$f_2^*(y) = f^*(y) - a^Ty = \frac{1}{4}y^TA^{-1}y - a^Ty, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n.$$

$cf(x+a)$的共轭函数：

$$f_3^*(y) = cf_2^*(y/c) = \frac{1}{4c}y^TA^{-1}y - a^Ty, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n.$$

2.10. 由g_i为连续凸函数和$\mathcal{K}$为有界闭凸集可知, $\mathcal{F}_m$, $\mathcal{F}_{m-1}$为闭凸集, 由题目知$\mathcal{F}_m \neq \mathcal{F}_{m-1}$, 我们取$x_0 \in \mathcal{F}_{m-1}\backslash\mathcal{F}_m$, 由凸集分离定律可得$\exists c \neq 0$, $s.t.$ $c^Tx > c^Tx_0$, $\forall x \in \mathcal{F}_m$, 又由于$\mathcal{F}_m$是有界闭集, 于是$\min_{x\in\mathcal{F}_m} c^Tx > c^Tx_0 \geq \min_{x\in\mathcal{F}_{m-1}} c^Tx$.

3 第三部分习题

3.1. 下列结论是否正确？正确则给出证明, 不正确请举反例.

(1) 任何一个优化问题都有局部最优解;

(2) 当一个优化问题最优目标值有限, 则一定存在最优解;

(3) 设x^*达到优化问题的最优目标值, 则x^*一定为最优解;

(4) 一个优化问题的最优目标值无界, 则可行解区域一定无界;

(5) 一个优化问题的可行解区域有界且其目标函数连续, 则最优目标值一定有限.

3.2. 设非线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \dots, m \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

中$f(x)$和$g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \dots, m$都是光滑凸函数, 若存在$\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$ 使得$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$, 其中, $L(x, \lambda)$ 为Lagrange函数, $\bar{x}$ 是否为非线性规划问题的最优解？结论正确给出证明，不正确则举例说明.

3.3. 对如下的0-1整数规划

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T Q x + q^T x \\ \text{s.t.} \quad & x \in \{0, 1\}^n, \end{aligned}$$

写出其二次约束二次规划模型及Lagrange对偶模型.

3.4. 对于二次约束二次规划问题, 写出Lagrange对偶模型.

3.5. 用共轭对偶方法写出下列模型的对偶模型, 并从理论上判断原始对偶模型是否具有强对偶性.

(1) $$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 - x_3 = 0 \\ & x \in \mathcal{L}^3. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad \min\quad & -x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_3 = 0 \\
& x_2 + x_4 = -1 \\
& x_1 + x_5 = 0 \\
& -x_1 + x_2 + x_6 = 0 \\
& x_1 + x_7 = 0 \\
& (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \\
& (x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \in \mathcal{L}^3 \times \mathcal{L}^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \min\quad & 2t_1 - 5t_2 \\
\text{s.t.}\quad & \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2 + (x_3+2)^2} \le t_1 \\
& \sqrt{x_4^2 + x_5^2} \le t_2 \\
& (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \min\quad & -x \\
\text{s.t.}\quad & x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& S \in \mathcal{S}_+^2, x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \min\quad & x_{11} + x_{22} \\
\text{s.t.}\quad & 2x_{12} = 1 \\
& X = (x_{ij}) \in \mathcal{S}_+^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6)\quad \min\quad & -x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& S \in \mathcal{S}_+^3, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

3.6. 投资组合问题. 某投资公司欲将50万元基金用于股票投资, 股票的收益是随机的. 公司选择了3种股票作为候选的投资对象. 从统计数据的分析得到: 股票A每股的年期望收益为5元, 标准差为2元; 股票B每股的年期望收益为8元, 标准差为6元; 股票C每股的年期望收益为10 元, 标准差也为10元; 股票A、B 收益的相关系数为5/24, 股票A、C 收益的相关系数为-0.5, 股票B、C收益的相关系数为-0.25. 目前股票A、B、C的市价分别为每股20 元、25 元、30 元. (1) 用方差或标准差衡量风险, 当公司期望今年得到至少20%的投资回报，建立优化模型. (2) 将优化模型等价地写成二阶锥优化模型. (3) 写出共轭对偶模型. (4) 讨论(1)的优化问题可解且与对偶问题满足强对偶的条件.

参考解答

3.1. (1)否, e^x在$x\in\mathbb{R}$上就没有局部最优解. (2)否, 同(1), 最优值为0, 有限, 但不存在最优可行解. (3)否, 考虑在$(0,1]$上极小化x, 则最优值为0且在$x^*=0$处达到最优值, 但$x^*\notin(0,1]$, 所以x^* 不是最优解. (4)否, 考虑在可行域$(0,1]$上极小化$\log(x)$, 由于$\log(x)\to-\infty$当$x\to+0$, 所以最优目标值无界, 但可行解区域$(0,1]$有界. (5)是, 当可行解区域非空时, 由于$\mathcal{F}$有界, 则$\mathrm{cl}(\mathcal{F})$为紧集. 又因为, f 在全空间连续, 故在$\mathrm{cl}(\mathcal{F})$上亦连续, 于是$f(x)$在$\mathrm{cl}(\mathcal{F})$上可以取到有限的最小值, 不妨设为$f(x^*)$, 其中$x^*\in\mathrm{cl}(\mathcal{F})$. 于是有$f(x)$在$\mathcal{F}$上的最小值不小于$f(x^*)$, 故有限. 同理, 如果是在$\mathcal{F}$ 上极大化$f(x)$, 也可以类似得到最优值有限.

3.2. 对偶问题为

$$\max_{\lambda\geq 0}[\min_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda)]$$

其中, $L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(x)$. 令

$$v(\lambda)\equiv\min_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda)$$

由$(\bar{x},\bar{\lambda})$满足KKT条件, 因此

$$\nabla f(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i\nabla g(\bar{x})=0.$$

由f和g_i $(i=1\cdots,m)$均为凸函数, $L(\cdot,\bar{\lambda})$亦为$\mathbb{R}^n$上的凸函数, 故$\bar{x}$ 为$L(\cdot,\bar{\lambda})$的全局最小解. 于是, 记v_p 为原问题的最优值, v_d 为对偶问题的最优值, 则

$$v_d\geq v(\bar{\lambda})=L(\bar{x},\bar{\lambda})=f(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x})=f(\bar{x})\geq v_p$$

另一方面, 由弱对偶定理, $v_p\geq v_d$, 因此$v_p=v_d$. 因此$f(\bar{x})=v_p, v(\bar{\lambda})=v_d$, 即$\bar{x}$ 是原始问题的最优解, $\bar{\lambda}$为对偶问题的最优解.

3.3. 注意

$$x\in\{0,1\}^n\Leftrightarrow x_i(x_i-1)=0, i=1,\cdots,n$$

于是, 我们得到二次约束二次规划模型:

$$\begin{aligned}
\min\quad & x^TQx+q^Tx\\
\text{s.t.}\quad & x_i^2-x_i\leq 0\quad(\forall i=1,\cdots,n)\\
& -x_i^2+x_i\leq 0\quad(\forall i=1,\cdots,n)
\end{aligned}$$

Lagrange函数:

$$\begin{aligned}
L(x,\lambda)&=x^TQx+q^Tx+\sum_{i=1}^n\lambda_i(x_i^2-x_i)\\
&=x^TQx+q^Tx+x^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)x-\lambda^Tx\ (\lambda\in\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Lagrange对偶问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sigma \\ \text{s.t.} \quad & L(x,\lambda) \geq \sigma \quad, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ & \sigma \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

我们可以得到

$$\begin{aligned} L(x,\lambda) \geq \sigma, \forall x \in \mathbb{R}^n &\Leftrightarrow x^T Q x + x^T \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) x + q^T x - \lambda^T x - \sigma \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma & \frac{1}{2}(q-\lambda)^T \\ \frac{1}{2}(q-\lambda) & Q + \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sigma & \frac{1}{2}(q-\lambda)^T \\ \frac{1}{2}(q-\lambda) & Q + \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_+^{n+1} \end{aligned}$$

最后一个等价可参考教材4.3.3节, 则我们可以将对偶问题写称下述半正定规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & \sigma \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -\sigma & \frac{1}{2}(q-\lambda)^T \\ \frac{1}{2}(q-\lambda) & Q + \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_+^{n+1}, \sigma \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

3.4. 一般的QCQP模型如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T Q_0 x + q_0^T x + c_0 \\ s.t. \quad & \frac{1}{2} x^T Q_i x + q_i^T x + c_i \leq 0, \forall i = 0, 1, \cdots, n. \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

其Lagrange对偶模型如下

$$\begin{aligned} \max \quad & \sigma \\ s.t. \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T U \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \\ & \sigma \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+^m \end{aligned}$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} -2(\sigma - c_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i) & (q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i q_i)^T \\ q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i q_i & Q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i Q_i \end{pmatrix}$$

进一步等价为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sigma \\
s.t. \quad & \begin{pmatrix} -2(\sigma - c_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i) & (q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i q_i)^T \\ q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i q_i & Q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i Q_i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_+^{n+1} \\
& \sigma \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+^m
\end{aligned}
$$

3.5. (1)根据原问题, 我们得到$\mathcal{X} \equiv \{(x_1\ x_2\ x_3)^T \mid x_2 - x_3 = 0\}$. 于是$f$的共轭函数$f^*$为

$$
\begin{aligned}
f^*(y) &= \max_{x \in \mathcal{X}} \{x^T y - f(x)\} = \max_{x \in \mathbb{R}^3,\ x_2 - x_3 = 0} \{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_1\} \\
&= \max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \{(y_1 + 2)x_1 + (y_2 + y_3)x_2\} \\
&= \begin{cases} 0 & y_1 = -2, y_2 + y_3 = 0) \\ +\infty & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

于是共轭对偶问题是

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 0 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 = -2 \\
& y_2 + y_3 = 0 \\
& y \in \mathcal{L}^3
\end{aligned}
$$

易知对偶问题不可行, 故最优值为$-\infty$. 对原问题, 必须有有$x_1 = 0$, 故目标函数值恒为0, 即原始最优值为0, 原问题和对偶问题不具有强对偶性.

(2)由$x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = -1, x_1 + x_5 = 0$且$(x_3\ x_4\ x_5)^T \in \mathcal{L}^3$, 可知$x_4 = 0, x_2 = -1$, 因此目标函数值恒为1, 于是原问题的最优值为1. 另外此时

$$
\mathcal{X} \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^7 \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = -1,\ x_1 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_6 = 0,\ x_1 + x_7 = 0 \end{array} \right\},
$$

于是f的共轭函数f^*为

$$
\begin{aligned}
f^*(y) &= \max_{x \in \mathcal{X}} \{x^T y - f(x)\} \\
&= \max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \{(y_1 - y_3 - y_5 + y_6 - y_7)x_1 + (y_2 - y_4 - y_6 + 1)x_2 - y_4\} \\
&= \begin{cases} -y_4 & y_1 - y_3 - y_5 + y_6 - y_7 = 0, y_2 - y_4 - y_6 = -1 \\ +\infty & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

共轭对偶问题是

$$\begin{aligned}
\max \quad & y_4 \\
\text{s.t.} \quad & -y_3 - y_5 + y_6 - y_7 = 0 \\
& -y_4 - y_6 = -1 \\
& (y_3\ y_4\ y_5)^T \in \mathcal{L}^3 \\
& (y_6\ y_7)^T \in \mathcal{L}^2
\end{aligned}$$

对偶问题显然可行, $(y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = (0, 0, 0, 1, 1)$是一个可行解. 由弱对偶定理, 对任意的对偶可行解, 均有$y_4 \le 1$, 故$y_6 = -y_4 + 1 \ge 0$, 再由此和$(y_6\ y_7)^T \in \mathcal{L}^2$可知$y_6 = -y_4 + 1 \le y_7$. 由$-y_3 - y_5 + y_6 - y_7 = -y_3 - y_5 - y_4 + 1 - y_7 = 0$可知$y_3 + y_5 \le 0$, 又由$(y_3, y_4, y_5)^T \in \mathcal{L}^3$ 可知$y_4 = 0$, 因此对偶问题的最优值为0. 所以原始对偶问题不具有强对偶性.

(3) 对任意$k \ge 0$, $(x_1, x_2, x_3, t_1, x_4, x_5, t_2) = (1, 0, -2, 0, 0, 0, k)$是一个原问题的可行解并且此时的目标函数值为$-5k$. 因$k$ 的任意性, $-5k \to -\infty$ $(k \to +\infty)$, 故原问题的最优值为$-\infty$. 原问题等价为:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 2t_1 - 5t_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1' - x_1 = -1 \\
& x_3' - x_3 = 2 \\
& x = (x_1', x_2, x_3', t_1, x_4, x_5, t_2, x_1, x_3) \in \mathcal{L}^4 \times \mathcal{L}^3 \times \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

于是, 令$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1' - x_1 = -1, x_3' - x_3 = 2\}$, 则

$$\begin{aligned}
& f^*(y) = \max_{x \in \mathcal{X}} \{x^T y - f(x)\} \\
= & \max_{(x_1', x_2, x_3', t_1, x_4, x_5, t_2) \in \mathbb{R}^7} \{x_1' y_1 + x_2 y_2 + x_3' y_3 + t_1 y_4 + x_4 y_5 + x_5 y_6 + t_2 y_7 \\
& + (x_1' + 1) y_8 + (x_3' - 2) y_9 - 2t_1 + 5t_2\} \\
= & \max_{(x_1', x_2, x_3', t_1, x_4, x_5, t_2) \in \mathbb{R}^7} \{(y_1 + y_8) x_1' + y_2 x_2 + (y_3 + y_9) x_3' \\
& + (y_4 - 2) t_1 + y_5 x_4 + y_6 x_5 + (y_7 + 5) t_2 + y_8 - 2y_9\} \\
= & \begin{cases} y_8 - 2y_9 & y_1 + y_8 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 + y_9 = 0,\ y_4 = 2,\ y_5 = 0,\ y_6 = 0,\ y_7 = -5 \\ +\infty & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}$$

于是, 此优化问题的共轭对偶问题是

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -y_8 + 2y_9 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + y_8 = 0 \\
& y_2 = 0 \\
& y_3 + y_9 = 0 \\
& y_4 = 2 \\
& y_5 = 0 \\
& y_6 = 0 \\
& y_7 = -5 \\
& y \in \mathcal{L}^4 \times \mathcal{L}^3 \times \{0\}^2
\end{aligned}
$$

可以进一步化为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 0 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 = 0 \\
& y_2 = 0 \\
& y_3 = 0 \\
& y_4 = 2 \\
& y_5 = 0 \\
& y_6 = 0 \\
& y_7 = -5 \\
& y \in \mathcal{L}^4 \times \mathcal{L}^3
\end{aligned}
$$

由于$y_7 = -5$, 所以对偶问题不可行, 对偶问题最优值亦为$-\infty$. 原始对偶问题的目标值相等, 但是由于对偶不可行, 故强对偶不成立.

(4) 由

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1-x \\ 1-x & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2_+,$$

可知必有$x = 1$, S是全零矩阵, 此时的目标函数值为-1. 因此原问题的最优值为-1 且可达. 令

$$\mathcal{X} \equiv \left\{ (x, S) \middle| x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

于是共轭函数

$$\begin{aligned}
f^*(y,T) &= \max_{(x,S)\in\mathcal{X}}\{xy + S\bullet T + x\} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}}\left\{xy + \begin{pmatrix} 0 & 1-x \\ 1-x & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} + x\right\} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}}\{xy + t_{12}(1-x) + t_{21}(1-x) + x\} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}}\{x(y - t_{12} - t_{21} + 1) + t_{12} + t_{21}\} \\
&= \begin{cases} t_{12}+t_{21} & y - t_{12} - t_{21} + 1 = 0 \\ +\infty & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}$$

于是, 此优化问题的共轭对偶问题是

$$\begin{aligned}
\max \quad & -t_{12} - t_{21} \\
\text{s.t.} \quad & y - t_{12} - t_{21} = -1 \\
& (y,T) \in \{0\}\times\mathcal{S}_+^2
\end{aligned}$$

等价为

$$\begin{aligned}
\max \quad & -t_{12} - t_{21} \\
\text{s.t.} \quad & t_{12} + t_{21} = 1 \\
& T \in \mathcal{S}_+^2
\end{aligned}$$

该问题显然可行, 且目标函数值恒为-1. 于是对偶问题的最优值为-1且可达. 因此, 原始对偶问题具有强对偶性. 易知对偶问题存在严格可行内点, 且目标值有限, 强对偶成立.

(5) 由定义

$$x_{11} \geq 0,\ x_{22} \geq 0, x_{11}x_{22} - \frac{1}{4} \geq 0.$$

于是

$$x_{11} + x_{22} \geq 2\sqrt{x_{11}x_{22}} = 1,$$

故原问题的最优值大于等于1. 显然

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

可行, 且此时的目标值为1, 故原问题的最优值为1.

令$\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{S}^2 \mid 2x_{12} = 1\}$, 则共轭函数为

$$\begin{aligned}
f^*(Y) &= \max_{X \in \mathcal{X}} \{X \bullet Y - f(X)\} \\
&= \max_{X \in \mathcal{S}^2, 2x_{12}=1} \{x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12} + x_{21}y_{21} + x_{22}y_{22} - x_{11} - x_{22}\} \\
&= \max_{x_{11}, x_{22} \in \mathbb{R}} \{(y_{11} - 1)x_{11} + (y_{22} - 1)x_{22} + \frac{1}{2}y_{12} + \frac{1}{2}y_{21}\} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}y_{12} + \frac{1}{2}y_{21} & y_{11} = 1, y_{22} = 1 \\ +\infty & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}$$

于是共轭对偶问题是

$$\begin{aligned}
\max \quad & -\frac{1}{2}y_{12} - \frac{1}{2}y_{21} \\
\text{s.t.} \quad & y_{11} = 1 \\
& y_{22} = 1 \\
& Y \in \mathcal{S}^2_+
\end{aligned}$$

取

$$Y^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

则Y^*是对偶问题的可行解并且此时的目标函数值为1. 由弱对偶定理和原问题的最优值为1, 可知Y^*为对偶问题的最优解且对偶问题的最优值亦为1, 故原始对偶问题具有强对偶性. 我们可以看出对偶问题的可行域与$\mathcal{S}^2_{++}$相交非空, 且目标值有限, 强对偶成立.

(6) 由原问题的约束可知

$$S = \begin{pmatrix} -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 1 + x_2 \\ 0 & 1 + x_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^3_+ \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}),$$

因此必有$x_2 = -1$, 此时的目标函数值为1, 原问题显然可行, 我们可以取

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = -1,\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则(x_1^*, x_2^*, S)是原问题的可行解, 故原问题的最优值为1.

令

$$\mathcal{X} \equiv \left\{ (x_1, x_2, S) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^3 \middle| x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

则共轭函数

$$
\begin{aligned}
f^*(y_1,y_2,T) &= \max_{(x_1,x_2,S)\in\mathcal{X}}\{x_1y_1+x_2y_2+S\bullet T+x_2\} \\
&= \max_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\{x_1y_1+x_2y_2-x_2t_{11}-x_1t_{22}+(1+x_2)t_{23}+(1+x_2)t_{32}+x_2\} \\
&= \max_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\{(y_1-t_{22})x_1+(y_2-t_{11}+t_{23}+t_{32}+1)x_2+t_{23}+t_{32}\} \\
&= \begin{cases} t_{23}+t_{32} & y_1-t_{22}=0,\ y_2-t_{11}+t_{23}+t_{32}+1=0 \\ +\infty & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

于是共轭对偶问题是

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -t_{23}-t_{32} \\
\text{s.t.} \quad & y_1-t_{22}=0 \\
& y_2-t_{11}+t_{23}+t_{32}=-1 \\
& (y_1,y_2,T)\in\{0\}^2\times\mathcal{S}_+^2
\end{aligned}
$$

等价于

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -t_{23}-t_{32} \\
\text{s.t.} \quad & t_{22}=0 \\
& -t_{11}+t_{23}+t_{32}=-1 \\
& T\in\mathcal{S}_+^2
\end{aligned}
$$

由$t_{22}=0$可知必有$t_{12}=t_{21}t_{23}=t_{32}=0$, 此时的目标函数值为0. 对偶问题显然可行, 例如

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

故对偶问题的最优值为0. 由$1>0$, 原始对偶问题不具有强对偶性.

3.6. (1) 由给定的条件, 股票之间的协方差矩阵V为

$$
V=\begin{pmatrix} 2^2 & 5/24\times 2\times 6 & -0.5\times 2\times 10 \\ 5/24\times 2\times 6 & 6^2 & -0.25\times 6\times 10 \\ -0.5\times 2\times 10 & -0.25\times 6\times 10 & 10^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2.5 & -10 \\ 2.5 & 36 & -15 \\ -10 & -15 & 100 \end{pmatrix},
$$

期望收益率b为

$$
b^T=\begin{pmatrix} 5/20 & 8/25 & 10/30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.25 & 0.32 & 1/3 \end{pmatrix}.
$$

于是, 风险最小化的优化模型为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x^T V x \\
\text{s.t.} \quad & b^T x \geq 0.3 \\
& x_A + x_B + x_C = 1 \\
& x^T = (x_A,\ x_B,\ x_C) \in \mathbb{R}^3_+
\end{aligned}
$$

(2) 在(1)中得到的优化问题等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & t \\
\text{s.t.} \quad & x^T V x \leq t \\
& b^T x \geq 0.3 \\
& x_A + x_B + x_C = 1 \\
& x^T = (x_A,\ x_B,\ x_C) \in \mathbb{R}^3_+,\ t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\quad . \tag{1}
$$

其中, 记B为满足$V = B^T B$的$r \times 3$矩阵($r = rank(V)$), 而且注意由V 为半定矩阵可知$t \geq 0$, 则

$$
\begin{aligned}
x^T V x \leq t &\Leftrightarrow x^T V x + \left(\frac{-t+1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\|Bx\|^2 + \left(\frac{-t+1}{2}\right)} \leq \frac{t+1}{2}.
\end{aligned}
$$

于是,

$$
(1) \Leftrightarrow
\begin{aligned}
\min \quad & t \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} Bx \\ \frac{-t+1}{2} \\ \frac{t+1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^{r+2} \\
& b^T x \geq 0.3 \\
& x_A + x_B + x_C = 1 \\
& x^T = (x_A,\ x_B,\ x_C) \in \mathbb{R}^3_+,\ t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\quad . \tag{2}
$$

(3) 优化问题(2)等价于

$$\begin{aligned}
\min \quad & t \\
\text{s.t.} \quad & Bx = y_{[1:r]} \\
& \frac{-t+1}{2} = y_{r+1} \\
& \frac{t+1}{2} = y_{r+2} \\
& b^T x \geq 0.3 \\
& x_A + x_B + x_C = 1 \\
& x^T = (x_A,\ x_B,\ x_C) \in \mathbb{R}_+^3,\ t \in \mathbb{R}, y \in \mathcal{L}^{r+2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

令

$$\mathcal{X} = \left\{ (u_0, u_1, u_2, y) \in \mathbb{R}^{r+5} \;\middle|\; \begin{array}{r} y_{[1:r]} = Bx, y_{r+1} = \dfrac{-t+1}{2}, y_{r+2} = \dfrac{t+1}{2}, \\ u_0 = b^T x - 0.3, u_1 = x_A + x_B + x_C - 1, u_2 = t \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{K} = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathcal{L}^{r+2}$$

$$f(u_0, u_1, u_2, y) = u_2$$

则(3)可改写为

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(u_0, u_1, u_2, y) \\
\text{s.t.} \quad & (u_0, u_1, u_2, y) \in \mathcal{X} \cap \mathcal{K}.
\end{aligned} \tag{4}$$

记$B=(b_1,\ b_2,\ b_3)$, 则f的共轭函数f^*为

$$
\begin{aligned}
& f^*(v_0,v_1,v_2,w) \\
&= \max_{(u_0,u_1,u_2,y)\in\mathcal{X}}\{w_0u_0+w_1u_1+w_2u_2+y^Tw-u_2\} \\
&= \max_{t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^3_+}\left\{\begin{aligned}&(0.25x_A+0.32x_B+1/3x_C-0.3)v_0+(x_A+x_B+x_C-1)v_1+tv_2\\ &+x_Ab_1^Tw_{[1:r]}+x_Bb_2^Tw_{[1:r]}+x_Cb^Tw_{[1:r]}+\frac{-t+1}{2}w_{r+1}+\frac{t+1}{2}w_{r+2}-t\end{aligned}\right\} \\
&= \max_{t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^3_+}\left\{\begin{aligned}&(0.25v_0+v_1+b_1^Tw_{[1:r]})x_A+(0.32v_0+v_1+b_2^Tw_{[1:r]})x_B\\ &+(1/3v_0+v_1+b_3^Tw_{[1:r]})x_C+(v_2-1/2w_{r+1}\\ &+1/2w_{r+2}-1)t-0.3v_0-v_1+1/2w_{r+1}+1/2w_{r+2}\end{aligned}\right\} \\
&= \begin{cases} -0.3v_0-v_1+1/2w_{r+1}+1/2w_{r+2} & \left(\begin{aligned}&v_2-1/2w_{r+1}+1/2w_{r+2}-1=0\\ &0.25v_0+v_1+b_1^Tw_{[1:r]}\le 0\\ &0.32v_0+v_1+b_2^Tw_{[1:r]}\le 0\\ &1/3v_0+v_1+b_3^Tw_{[1:r]}\le 0\end{aligned}\right) \\ +\infty & (\text{其它}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

于是, 共轭对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 0.3v_0+v_1-1/2w_{r+1}-1/2w_{r+2}\\
\text{s.t.}\quad & v_2-1/2w_{r+1}+1/2w_{r+2}=1\\
& 0.25v_0+v_1+b_1^Tw_{[1:r]}\le 0\\
& 0.32v_0+v_1+b_2^Tw_{[1:r]}\le 0\\
& 1/3v_0+v_1+b_3^Tw_{[1:r]}\le 0\\
& (v_0,v_1,v_2,w)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathcal{L}^{r+2}
\end{aligned}
\quad = \quad
\begin{aligned}
\max\quad & 0.3v_0+v_1-1/2w_{r+1}-1/2w_{r+2}\\
\text{s.t.}\quad & -1/2w_{r+1}+1/2w_{r+2}=1\\
& 0.25v_0+v_1+b_1^Tw_{[1:r]}\le 0\\
& 0.32v_0+v_1+b_2^Tw_{[1:r]}\le 0\\
& 1/3v_0+v_1+b_3^Tw_{[1:r]}\le 0\\
& (v_0,v_2,w)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathcal{L}^{r+2}.
\end{aligned}
$$

(4) 将M作为充分大的正数, 取$(v_0,v_1,w_{[1:r]},w_{r+1},w_{r+2})=(1,-M,0,0,2)$, 则其满足

$$
\begin{aligned}
& -1/2w_{r+1}+1/2w_{r+2}=1\\
& 0.25v_0+v_1+b_1^Tw_{[1:r]}<0\\
& 0.32v_0+v_1+b_2^Tw_{[1:r]}<0\\
& 1/3v_0+v_1+b_3^Tw_{[1:r]}<0\\
& v_0\in\mathbb{R}_{++},\ v_1\in\mathbb{R},\ w\in int(\mathcal{L}^{r+2})
\end{aligned}
$$

即对偶问题至少有一个内点解. 于是, 若原问题的可行解集合非空, 则由弱对偶问题可知对偶问题的最优值有限, 所以(1)的优化问题可解且与对偶问题满足强对偶.

4 第四部分习题

4.1. 试将下问题写成等价的二阶锥规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & (\textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i^T x - b_i})^{-1} \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x - b_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

其中$a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots, m$为给定常数.

4.2. 试将下问题写成等价的半定规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & (Ax+b)^T (I + B(diag(x))B^T)^{-1}(Ax+b) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathbb{R}_+^n, \end{aligned}$$

其中$A, B \in \mathcal{M}(n,n), b \in \mathbb{R}^n$为给定常数.

4.3. 将求解给定n阶实对称矩阵A所有特征值绝对值的最大值问题写成半定规划问题.

4.4. 对于给定n阶实对称矩阵A和给定的正整数$K \le n$, 证明: 下列半定规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & t - Ks - tr(X) \ge 0 \\ & X - A + sI \in \mathcal{S}_+^n \\ & X \in \mathcal{S}_+^n \\ & s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

的最优目标值为A的前K个(包含第K个)最大特征值之和.

4.5. 记多项式$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_{2k+1} t^{2k}$, $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^{2k+1} | p(t) \ge 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$. (1)证明$\mathcal{K}$为真锥;
(2)对于阶数为$2k$的多项式$p(t) \ge 0$, 一个基本的结论是它可以被表示为$p(t) = \sum_{i=1}^{s} r_i^2(t)$, 这里$r_i(t)$为阶数不超过$k$ 的多项式. 利用这个结论, 证明:

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^{2k+1} | x_i = \sum_{p+q=i+1} y_{pq}, Y = (y_{pq}) \in \mathcal{S}_+^{k+1}\};$$

(3)将如下问题写成半定规划问题:

$$\begin{aligned} \max_x \inf_t \quad & p(t) \\ \text{s.t.} \quad & l_i \le p(t_i) \le u_i, i = 1, 2, \ldots, m \\ & x \in \mathbb{R}^{2k+1}, \end{aligned}$$

其中, $l_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$为给定常数。

4.6. 证明: $\mathcal{K} = \left\{(x_1, x_2, t)^T \in \mathbb{R}^3_+ | t \le \sqrt{x_1 x_2}\right\}$ 是二阶锥可表示集合.

4.7. 证明: $\mathcal{K} = \left\{(x_1, x_2, t)^T \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R} | t \le \sqrt{x_1 x_2}\right\}$ 是二阶锥可表示集合.

4.8. 试将下列问题写成半定规划问题

(1)

$$\begin{array}{rl} \min & ||\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i v_i^T||_2 \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \\ & \lambda \in \mathbb{R}^p_+. \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rl} \min & (\operatorname{tr} \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i v_i^T)^{-1} \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \\ & \lambda \in \mathbb{R}^p_+. \end{array}$$

4.9. 设$f(X) = -(\det(X))^q$, 其中$0 \le q \le \frac{1}{m}$为有理数, 证明:

$$\begin{array}{rl} \min & f(X) \\ \text{s.t.} & x_{ii} \le 1, i = 1, 2, \ldots, n \\ & X = (x_{ij}) \in \mathcal{S}^n_+ \end{array}$$

可等价写成一个半定规划问题. 请写出等价的半定规划模型.

参考解答

4.1. 原问题等价为:

$$\begin{array}{rl} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^m t_i \\ s.t. & (a^i)^T x - b_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m \\ & \dfrac{1}{(a^i)^T x - b_i} \le t_i, i = 1, 2, \ldots, m \\ & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

由于$\frac{1}{(a^i)^Tx-b_i} \le t_i, (a^i)^Tx-b_i>0 \Leftrightarrow \sqrt{(\frac{(a^i)^Tx-b_i-t_i}{2})^2+1} \le \frac{(a^i)^Tx-b_i+t_i}{2}, (a^i)^Tx-b_i \ge 0$, 因此进一步等价为二阶锥规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} t_i \\
s.t. \quad & (a^i)^Tx-b_i \ge 0, i=1,2,\dots,m \\
& \begin{pmatrix} \frac{(a^i)^Tx-b_i-t_i}{2} \\ 1 \\ \frac{(a^i)^Tx-b_i+t_i}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^3, i=1,2,\dots,m \\
& x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}^m
\end{aligned}
$$

4.2. 不难看出$I+B(\mathrm{diag}(x))B^T$是一个正定矩阵. 因此优化问题等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & t \\
\text{s.t.} \quad & (Ax+b)^T(I+B(\mathrm{diag}(x))B^T)^{-1}(Ax+b) \le t \\
& x\in\mathbb{R}^n_+,\ t\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

注意$I+B(\mathrm{diag}(x))B^T$正定, 于是由Schur引理, 原问题等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & t \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} I+B(\mathrm{diag}(x))B^T & Ax+b \\ (Ax+b)^T & t \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{n+1}_+ \\
& x\in\mathbb{R}^n_+,\ t\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

是一个半定规划问题.

4.3.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & t \\
s.t. \quad & tI-A \succeq 0 \\
& tI+A \succeq 0 \\
& t\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

4.4. 取正交阵P使得$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P^TAP,\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$为A的特征值, 原问题等价于：

$$\begin{aligned}
\min\quad & t \\
s.t.\quad & t-Ks-\mathrm{tr}(P^TXP)\geq 0 \\
& P^TXP-\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)+sI\in S_+^n \\
& P^TXP\in S_+^n \\
& s,t\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

用变量Y可代替P^TXP, 故在原问题中不妨设$A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 注意到$X-A+sI\in S_+^n$, 因此$\mathrm{tr}(X)\geq x_{11}+\cdots+x_{KK}\geq(\lambda_1-s+\cdots+\lambda_K-s)$, 于是$Ks+\mathrm{tr}(X)\geq\lambda_1+\cdots,+\lambda_K$, 即$\lambda_1+\cdots,+\lambda_K$为原问题的下界, 而若取$s=\lambda_K,X=\mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda_K,\cdots,\lambda_1-\lambda_K,0,\cdots,0)$(后$n-K$项为0), $t=\lambda_1+\cdots+\lambda_K$达到下界, 故$\lambda_1+\cdots+\lambda_K$为原问题的最优目标值.

4.5. (1) 锥：取任意$x\in\mathcal{K}$和$\alpha>0$, 则对任意$t\in\mathbb{R}$都有

$$p(t;\alpha x)=\alpha x_1+\alpha x_2t+\cdots+\alpha x_{2k+1}t^{2k}=\alpha p(t;x)\geq 0$$

故$\mathcal{K}$为锥.

闭：取任意$\{x^{(i)}\}\subseteq\mathcal{K}$使$x^{(i)}\to x\in\mathbb{R}^{2k+1}$ $(i\to+\infty)$. 任意固定$t\in\mathbb{R}$, 则对任意$i\in\mathbb{N}$都有$p(t;x^{(i)})\geq 0$. 由$p(t;x)$关于x的连续性得知

$$p(t;x^{(i)})\to p(t;x)\ (i\to+\infty).$$

因$t\in\mathbb{R}$是任意的, 得$x\in\mathcal{K}$. 于是, $\mathcal{K}$为闭集.

凸：取任意$x,y\in\mathcal{K}$和$\alpha\in[0,1]$, 则

$$\begin{aligned}
p(t;\alpha x+(1-\alpha)y)&=\sum_{i=1}^{2k+1}(\alpha x_i+(1-\alpha)y_i)t^{i-1}=\alpha\sum_{i=1}^{2k+1}x_it^{i-1}+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{2k+1}y_it^{i-1}\\
&=\alpha p(t;x)+(1-\alpha)p(t;y)\geq 0
\end{aligned}$$

尖：注意$-\mathcal{K}=\{x\in\mathbb{R}^{2k+1}|p(t;x)\leq 0\}$. 对任意的$x\in\mathcal{K}\cap(-\mathcal{K})$, 则对任意$t\in\mathbb{R}$都有$p(t;x)=0$, 即$p(t;x)$为$\mathbb{R}$上的常函数, 恒取0. 于是$x$只能为0, 故$\mathcal{K}\cap(-\mathcal{K})=\{0\}$.

实：考虑$x^0=(1,0,1,0,\cdots,1,0,1)\in\mathcal{K}$且取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$, $\forall\|y-x^0\|<\varepsilon$ 有 $y_{2j-1}\geqslant\frac{3}{4}$, $|y_{2j}|\leqslant\frac{1}{4}$, $\forall 1\leqslant j\leqslant k\Rightarrow p_y(t)\geqslant\frac{3}{4}+y_2t+\frac{3}{4}t^2+y_4t^3+\cdots+y_{2k}t^{2k-1}+\frac{3}{4}t^{2k}\geqslant\sum_{i=1}^k(\frac{3}{8}+y_{2i}t+\frac{3}{8}t^2)t^{2i-2}\geqslant 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$ 于是有 $B(x^0,\frac{1}{4})\subseteq\mathcal{K}$ 于是有 $\mathcal{K}$为实锥.

因此$\mathcal{K}$为真锥.

(2) $\forall x\in\mathcal{K}$, 由上题知可以记

$$p_x(t)=\sum_{i=1}^r(c_{1,i}+c_{2,i}t+\cdots+c_{k+1,i}t^k)^2$$

则有

$$x_i = \sum_{j=1}^{r} \sum_{p=1}^{i} c_{p,j} c_{i+1-p,j} = \sum_{p+q=i+1} \sum_{j=1}^{r} c_{p,j} c_{q,j} \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant 2k+1$$

记

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k+1,1} & \cdots & c_{k+1,r} \end{pmatrix} \quad Y = CC^T \in \mathcal{S}_+^{k+1}$$

则有

$$x_i = \sum_{p+q=i+1} \sum_{j=1}^{r} c_{p,j} c_{q,j} = \sum_{p+q=i+1} y_{p,q} \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant 2k+1$$

即有

$$x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^{2k+1} | x_i = \sum_{p+q=i+1} y_{pq}, Y = (y_{pq}) \in \mathcal{S}_+^{k+1} \right\}$$

另一方面,

$$\forall x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^{2k+1} | x_i = \sum_{p+q=i+1} y_{pq}, Y = (y_{pq}) \in \mathcal{S}_+^{k+1} \right\}$$

设

$$Y = CC^T \in \mathcal{S}_+^{k+1}, C \in \mathcal{M}_{k+1 \times r}, x_i = \sum_{p+q=i+1} y_{p,q} = \sum_{p+q=i+1} \sum_{j=1}^{r} c_{p,j} c_{q,j}, \forall 1 \leqslant i \leqslant 2k+1$$

则有

$$p_x(t) = \sum_{i=1}^{r} (c_{1,i} + c_{2,i} t + \cdots + c_{k+1,i} t^k)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \in \mathcal{K}$$

综上有

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2k+1} | x_i = \sum_{p+q=i+1} y_{pq}, Y = (y_{pq}) \in \mathcal{S}_+^{k+1} \right\}$$

(3) 优化模型

$$\begin{aligned} \max \quad & u \\ \text{s.t.} \quad & p(t) - u \geqslant 0 \quad \forall t \\ & l_i \leqslant p\left(t_i\right) \leqslant u_i, i = 1, 2, \ldots, m \\ & x \in \mathbb{R}^{2k+1}, u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

等价于

$$\begin{aligned}
\max \quad & u \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1 - u \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2k+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \\
& l_i \leqslant (1, t_i, \cdots, t_i^{2k+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2k+1} \end{pmatrix} \leqslant u_i, i = 1, 2, \ldots, m \\
& x \in \mathbb{R}^{2k+1}, u \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

等价于

$$\begin{aligned}
\max \quad & u \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1 - u \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{1,2} + y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \\
& l_i \leqslant (1, t_i, \cdots, t_i^{2k+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2k+1} \end{pmatrix} \leqslant u_i, i = 1, 2, \ldots, m \\
& Y \in \mathcal{S}_+^{k+1}, x \in \mathbb{R}^{2k+1}, u \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

即为半定规划.

4.6, **4.7** 参考书中例5.4.

4.8. (1)记$P = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v^i (v^i)^T$, 则有$P$ 是对称矩阵, 因此$\min ||P||_2$等价于最小化矩阵P绝对值

最大的特征值, 因此写成半定规划模型为

$$
\begin{aligned}
&\min\ t \\
&s.t.\ P = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v^i (v^i)^T \\
&\quad tI - P \in \mathcal{S}_+^n \\
&\quad tI + P \in \mathcal{S}_+^n \\
&\quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \\
&\quad \lambda \in \mathbb{R}_+^p
\end{aligned}
$$

(2)$P = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v^i (v^i)^T$, 注意到$P \in \mathcal{S}_+^n$, 因此$tr(P) \geq 0$, 原问题可以转化为求解$\max\ tr(P) = I \bullet P$, 因此写成半定规划模型为

$$
\begin{aligned}
&\max\ I \bullet P \\
&s.t.\ P = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v^i (v^i)^T \\
&\quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \\
&\quad \lambda \in \mathbb{R}_+^p
\end{aligned}
$$

其中I是单位阵.

4.9. 参考书中半定矩阵可表示的第5项.