现代信号处理

电子工程系
张旭东
zhangxd@tsinghua.edu.cn

一点思考和讨论

- 学习和思考？质疑？
- 知识和兴趣？功利和趣味？
- 研究生阶段的学习？一门课程框架下的多样化学习？
- 从被动学习，到自主学习，到探求未知，研究生阶段必要的角色转变？

本课程要讨论的主要问题

（1）对信号特性的了解

随机信号（随机过程，时间序列－随机过程的一个实现）

信号模型→什么是信号模型？ →模型参数估计

信号模型应用→现代谱估计：参数化谱估计

讨论信号模型及模型参数的估计问题，各种信号模型的作用

（2）对统计意义下最优滤波器设计的研究

平稳条件下：Wiener滤波器理论

非平稳条件下：Kalman滤波

非线性非高斯：贝叶斯滤波，粒子滤波

理论上的目标、实际算法可达到的最佳结果

（3）对环境的自适应，有“学习能力”的滤波算法

自适应均衡、波束形成、线性自适应滤波器、盲处理、与机器学习的密切关联

最优滤波和自适应滤波与机器学习中回归问题的联系

（4）信号的统计分析方法

现代谱估计方法，信号模型方法的应用，子空间方法

更多信息的利用，挖掘（针对非高斯问题）

非线性、多谱：高阶量，循环平稳

信号的盲处理（隐变量方法/与非监督机器学习的联系）

（5）对时间–频率关系的适应性

信号的时间-频率联合分析，反映信号更丰富特性

全局特性与局域特性，

线性时频变换、小波变换，二次型时频变换

（6）信号结构知识利用：稀疏表示与压缩感知

信号的稀疏表示和恢复，

压缩感知（CS）

（7）其它

（关联关系利用）图上信号处理（图网络GNN），

非规则采样技术

教材

- 张旭东，现代信号分析和处理，2018年，清华大学出版社
  - （姐妹篇）张旭东、崔晓伟、王希勤，数字信号分析和处理（第二版），清华大学出版社，2020（本科用）

欢迎同学们把阅读教材时发现的错误，用电子邮件发给我！
(指明页码、段、行或公式标号和疑似错误内容)
zhangxd@tsinghua.edu.cn

部分参考书列表

1. **S. Haykin, Adaptive Filter theory, Prentice-Hall, Fouth Edition 2001 (**电子工业出版社影印本和中文译本**)**
2. **S. V. Vaseghi, Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction, Willy, 2009**
3. **S.M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory, Prentice Hall PTR, 1993.**（有中文译本）
4. **S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic press, Third Edition 2009**
5. **Van Tree，Optimum Array Processing， Wiley， 2002** （有中文译本）
6. **J. G. Proakis, et al. Algorithms for Statistical Signal Processing， Prentice hall, 2002** （有中文译本）
7. **D. Simon，Optimal State Estimation, Wiley,2006**
8. **S. Foucart, H. Rauhut, A Mathematical Introduction to Compressive Sensing, Springer,2013**

主要杂志和会议文集

- IEEE Signal Processing Magazine
- IEEE Trans. On Signal Processing
- Signal Processing
- Proceedings of IEEE
- Proceedings of ICASSP，DSP

课程成绩

- 平时作业15%
- 2个Matlab作业60%（布置后2周内提交）
- 期末课程报告或测验25%（或包括5%出勤）

信号处理算法设计面向的几个主要因素

- 信噪比
  - 信噪比可能显式或隐式地影响信号处理方法的性能
- 先验知识
  - 雷达
  - 通信系统
  - 电子对抗
  - 对先验知识的利用：统计基础上的假设、学习过程
- 算法复杂性与性能要求的匹配性(问题的适宜性）
  - Occam剃刀原理：除非必要，“实体”不应该随便增加，或：设计者不应该选用比“必要”更加复杂的系统。
- 学术研究和工程应用中的信号处理角色

自然和自然律隐没在黑暗中；
神说，让牛顿去吧！万物遂成光明
--浦柏

建立了系统的科学方法的巨人牛顿

- 艾萨克·牛顿爵士，1643年~1727年(维基百科对他的定义是：英格兰物理学家、数学家、天文学家、自然哲学家和炼金术士）；
- 1687年发表《自然哲学的数学原理》；其他物理学上的贡献；
- 与莱布尼茨分享发展了“微积分学”的荣誉；
- 证明了广义二项式定理，提出了“牛顿法”以趋近函数的零点，并对幂级数的研究作出了贡献。

随机信号处理与贝叶斯

Thomas Bayes， 贝叶斯(1702-1763)， 英国数学家.

贝叶斯决策理论方法（1763）是统计模型决策中的一个基本方法，其基本思想是:

1、 已知条件概率密度参数表达式和先验概率;
2、 利用贝叶斯公式转换成后验概率;
3、 根据后验概率大小进行决策分类。

随机信号处理与高斯
(Carl Friedrich Gauss)

正态分布（高斯分布）
最小二乘LS
FFT，···

Born: April 30, 1777,
Brunswick, Germany
Died: February 23, 1855,
Göttingen, Germany

A scientific biographers wrote in *Nature* (128 [1931], 341): "He was not really a physicist in the sense of searching for new phenomena, but rather always a mathematician who attempted to formulate in exact mathematical terms the experimental results obtained by others."

傅里叶
Baron Jean-Baptiste-Joseph Fourier
(1768-1830)

*1807年12月21日，傅里叶提交了一篇关于热学原理的论文，其中，揭示了：在一个有限区间上任意不规则图形所定义的一个任意函数（连续或具有不连续点）总是能够表示为正弦信号的和，这被后来称为傅里叶级数。
*5位法国数学家组成的评审委员会，评审这篇论文，其中包括拉格朗日，拉普拉斯、勒让德等，最后以拉格朗日的激烈反对，而未能发表。
*15年后（1823年），傅里叶在其努力失败后，以“热的解析理论”的书的形式发表了他的成果。
*一些现在被广泛接受的方法，在历史上被不理解，甚至被认为是荒谬的例子，在科学史上很多，科学的进步之路，有时候需要打破权威，持之以恒地坚持。

N. Wiener与信号处理的统计学方法

- Norbert Wiener，1894-1964)
- 1942年发表了在统计准则下对时间序列进行外推/滤波和预测的维纳滤波理论
- 1948年，出版《控制论》
- 在纯数学里的许多贡献

Kalman

1930-2016（July 3）

Rudolf Emil Kalman

- Born 1930 in Hungary
- BS and MS from MIT
- PhD 1957 from Columbia
- Filter developed in 1960-61

随机信号处理/信号处理的统计方法

- 尽管从贝叶斯和高斯等的工作中，找到了信号统计处理的一些基本思想，作为研究领域，随机信号处理是一个“现代的科学分支”，并从现代统计学中吸收重要思想;
- Wiener滤波理论，对于推动信号处理的统计方法的发展，有显著的作用，（李郁荣对于Wiener滤波理论在电子工程的应用有实质贡献）；
- 二次世界大战后，雷达，通信，航空和地震勘探等的需求，推动了信号处理统计方法理论上的快速发展，大规模数字计算技术的飞跃，又为应用提供了支持，两者的推动，使该领域自50年代以来，一直非常活跃，至今，新的问题不断被提出。

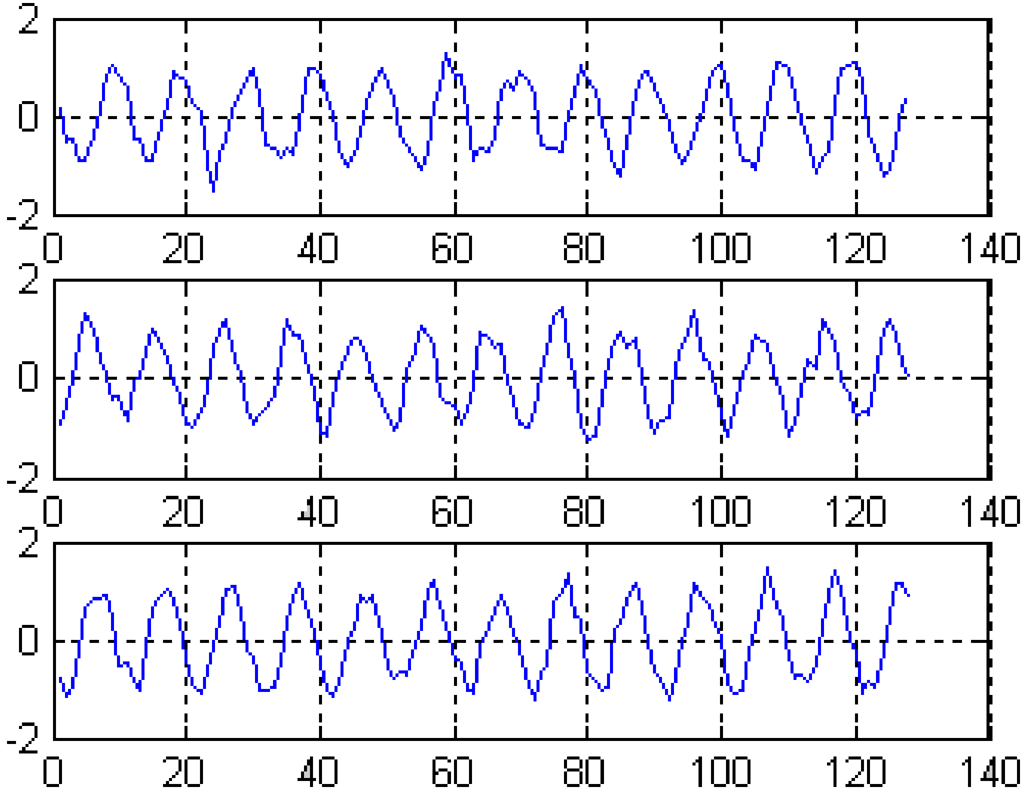
一些进展中的课题

- 盲信号处理（无监督学习）
- 序列贝叶斯估计、粒子滤波
- 空时信号处理
- 压缩传感和信号的稀疏化表示理论
- 图上信号采样、重构和处理
- 等等

与信号处理紧密关联的领域

- 应用统计学
- 机器学习（机器智能，大数据等）
- 模式识别
- 等等

1.1 随机信号基础



信号本质上均是随机的，但将信号作为随机信号处理，还是做为确定信号处理，与我们的应用目标和我们的先验知识有关，一般地，我们总是选择对应用有利的处理方式。

例：被噪声干扰的初相位是随机值的正弦波

1. 随机过程(信号)复习

- 随机信号 $\{x(n,\xi)\}$ 简记为 $x(n)$
- 均值

$$\mu(n)=E[x(n)]=\int xp(x,n)dx$$

- 自相关 $r(n_1,n_2)=E[x(n_1)x^*(n_2)]=$

$$=\iint x_{n1}x_{n2}p(x_{n1},x_{n2},n_1,n_2)dx_{n1}dx_{n2}$$

- 自协方差函数

$$c(n_1,n_2)=E[(x(n_1)-\mu(n_1))(x(n_2)-\mu(n_2))^*]$$

$$=r(n_1,n_2)-\mu(n_1)\mu^*(n_2)$$

平稳随机过程：

联合概率密度函数与起始时间无关

宽平稳（二阶）

宽平稳和严格平稳的关系？

$$\mu(n) = \mu$$

$$r(n, n-k) = r(n_1, n_2) = r(n_1 - n_2) = r(k)$$

相关函数的性质

$$r(0) \geq |r(k)|$$

$$r(-k) = r^*(k)$$

$$\sum_i \sum_j a_i a_j^* r(i-j) \geq 0$$ 半正定性

互相关 $$r_{xy}(n_1,n_2)=E[x(n_1)y^*(n_2)]$$

联合宽平稳有 $$r_{xy}(k)=E[x(n)y^*(n-k)]$$

相关性质

相关度量 $E\left[x(n)y^*(m)\right]$

不相关 $E\left[x(n)y^*(m)\right]=E\left[x(n)\right]E\left[y^*(m)\right]$

正交 $E\left[x(n)y^*(m)\right]=0$

等价性 零均值条件下，不相关就一定是正交

例 设有两个测量信号（实、零均值）

$$x(n)=s(n)+n_1(n),\quad y(n)=As(n-K)+n_2(n)$$

解：噪声互不相关，噪声与信号分量互不相关

$$r_{yx}(k)=E\{x(n)y(n+k)\}=$$

$$=E\{[s(n)+n_1(n)][As(n-K+k)+n_2(n+k)]\}=$$

$$=Ar_s(k-K)+r_{sn_2}(k)+Ar_{sn_1}(k-K)+r_{n_1n_2}(k)=$$

$$=Ar_s(k-K)$$

可见互相关的最大值发生在 $k=K$ 处，测量了延迟

1.2 自相关矩阵

定义：设M维信号向量用 $\boldsymbol{x}$ 表示，

随机信号的自相关矩阵定义为信号向量外积的期望值，即

$$\mathbf{R} = E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H]$$

这是一个 $M \times M$ 方阵。

自协方差矩阵

$$\mathbf{C} = E[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^H]$$

互相关矩阵、互协方差矩阵的定义类似，不再保证是方阵，自行练习

$\mathbf{R}_{xy}, \mathbf{C}_{xy}$

自相关矩阵的一种常用形式

$$\boldsymbol{x}(n)=[x(n),\ x(n-1),\ \cdots,\ x(n-M+1)]^T$$

$$\mathbf{R}=E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^H(n)]=$$

$$=\begin{bmatrix} E[x(n)x^*(n)] & E[x(n)x^*(n-1)] & \cdots & E[x(n)x^*(n-M+1)] \\ E[x(n-1)x^*(n)] & E[x(n-1)x^*(n-1)] & \cdots & E[x(n-1)x^*(n-M+1)] \\ \vdots & \ddots & \cdots & \\ E[x(n-M+1)x^*(n)] & E[x(n-M+1)x^*(n-1)] & \cdots & E[x(n-M+1)x^*(n-M+1)] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} r(0), & r(1), & \cdots, & r(M-1) \\ r(-1), & r(0), & \cdots, & r(M-2) \\ \vdots & & \cdots & \\ r(-M+1), & r(-M+2), & \cdots; & r(0) \end{bmatrix}$$

自相关矩阵的第二种常用形式

$$\boldsymbol{x}(n)=[x(n),x(n+1),\cdots,x(n+M-1)]^T$$

$$\mathbf{R}=E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H]$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} r(0), & r(-1), & r(-2), & \cdots & r(-M+1), \\ r(1), & r(0), & r(-1), & \cdots & r(-M+2) \\ \cdots & \cdots & & & \\ r(M-1), & r(M-2), & \cdots & \cdots & r(0) \end{bmatrix}$$

自相关矩阵的几个性质

$$\mathbf{R}^H = \mathbf{R}$$

Toeplitz矩阵 $[\mathbf{R}]_{ij} = r(j-i)$

半正定：对任意 $\boldsymbol{x} \neq 0$ $\boldsymbol{x}^H \mathbf{R} \boldsymbol{x} \geq 0$

一般情况下，R是正定的，只有当观察矢量是由K个正弦组成，且

$K \leq M$ 是例外的

自相关矩阵的特征分解

自相关矩阵的特征值总是大于或等于零

不同的两个特征值对应的特征矢量是正交的

令： $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M \qquad \mathbf{Q} = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_M]$

则： $$\mathbf{R} = \mathbf{Q\Lambda Q}^H = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^H$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{QQ}^H = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^H$$

增广性质

$$\mathbf{R}_{M+1}=\left[\begin{array}{c|c} r(0) & \boldsymbol{r}^H \\ \hline \boldsymbol{r} & \mathbf{R}_M \end{array}\right]$$

$$\mathbf{R}_{M+1}=\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_M & \boldsymbol{r}^{B*} \\ \hline \boldsymbol{r}^{BT} & r(0) \end{array}\right]$$

高1阶自相关矩阵必包含一个完整的低1阶的自相关阵。反之，由低1阶自相关阵，按一定方式可增广出高1阶自相关阵

$$\boldsymbol{r}=[r(-1),r(-2),\cdots r(-M)]^T$$

$$\boldsymbol{r}^B=[r(-M),r(-M+1),\cdots r(-1)]^T$$

1.3 常见信号实例

正弦波加噪声:

$$x(n)=\alpha e^{j(\omega_0 n+\varphi)}+v(n)$$

噪声与正弦波是统计独立的，噪声是白噪声

$$r_v(k)=\sigma_v^2\delta(k)$$

$x(n)$ 的自相关函数为

$$r(k)=E[x(n)x^*(n-k)]=\begin{cases}|\alpha|^2+\sigma_v^2 & k=0\\ |\alpha|^2\exp(j\omega_0 k) & k\neq 0\end{cases}$$

$$=|\alpha|^2\exp(j\omega_0 k)+\sigma_v^2\delta(k)$$

由正弦波加噪声构成的信号矢量

$$\boldsymbol{x} = [x(0), x(1), \cdots, x(M-1)]^T$$

M×M的自相关矩阵R

$$\mathbf{R} = |\alpha|^2 \boldsymbol{e}_0 \boldsymbol{e}_0^H + \sigma_V^2 \mathbf{I}$$

其中

$$\boldsymbol{e}_0 = [1, e^{j\omega_0}, \cdots, e^{j(M-1)\omega_0}]^T$$

实高斯过程

<u>实高斯过程的一些结果</u>：M 维实高斯分布，均值不为零的一般情况：

$$p_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})=\frac{1}{(2\pi)^{M/2}\det^{1/2}(\mathbf{C}_{\mathbf{xx}})}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^T\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})\right)=N(\boldsymbol{x}|\mu_x,\mathbf{C}_{xx})$$

均值为零时，以自相关 R 代协方差 C，并令相应均值项为零。

矩分解公式：（零均值情况）

$$E\{x_1x_2x_3\}=0$$

$$E\{x_1x_2x_3x_4\}=E\{x_1x_2\}E\{x_3x_4\}+E\{x_1x_3\}E\{x_2x_4\}+E\{x_1x_4\}E\{x_2x_3\}$$

联合高斯分布的边际分布和条件分布

前提条件

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \qquad (1.3.14)$$

$$\mathbf{C}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{yx} & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix}$$

$$N\left(z \middle| \mu_z, \mathbf{C}_{zz}\right)$$

定理 1.3.2，若 $z \sim N(z|\mu_z, \mathbf{C}_{zz})$，且 z 由式（1.3.14）所示，则 z 中部分向量 $\boldsymbol{x}$ 仍服从高斯分布，且其概率密度函数为：$\boldsymbol{x} \sim N(x|\mu_x, \mathbf{C}_{xx})$。

定理 1.3.3，若 $z \sim N(z|\mu_z, \mathbf{C}_{zz})$，且 z 由式（1.3.14）所示，则条件概率密度函数 $p(x|y)$ 仍是高斯的，且可写为

$$p(x|y) = N(x|\mu_{x|y}, \mathbf{C}_{x|y}) \tag{1.3.17}$$

其中

$$\mu_{x|y} = \mu_x + \mathbf{C}_{xy}\mathbf{C}_{yy}^{-1}(y - \mu_y) \tag{1.3.18}$$

$$\mathbf{C}_{x|y} = \mathbf{C}_{xx} - \mathbf{C}_{xy}\mathbf{C}_{yy}^{-1}\mathbf{C}_{yx} \tag{1.3.19}$$

1.4 功率谱密度

复功率谱 $$\tilde{S}(z)=\sum_{R=-\infty}^{+\infty}r(k)z^{-k}$$

功率谱 $$S(\omega)=\tilde{S}(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}r(k)e^{-j\omega k}$$

$$S(f)=\tilde{S}(e^{j2\pi f})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}r(k)e^{-j2\pi fk}$$

反变换 $$r(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega)e^{j\omega k}d\omega$$

维纳——辛钦定理（**Wiener-Khinchin Theorem**）

例 1：白噪声的相关函数为：$r(k)=\sigma_v^2\delta(k)$ 功率谱密度 PSD：$S(\omega)=\sigma_v^2$

例 2．单个复正弦加噪声的信号为 $x(n)=\alpha\cdot e^{j(\omega_0 n+\varphi)}+v(n)$，它的自相关序列为

$$r(k)=\begin{cases}|\alpha|^2+\sigma_v^2 & k=0\\ |\alpha|^2\exp(j\omega_0 k) & k\neq 0\end{cases}=|\alpha|^2\exp(j\omega_0 k)+\sigma_v^2\delta(k)$$

对自相关序列做 DTFT，考虑到 $\exp(j\omega_0 k)$ 的 DTFT 是冲击函数[Oppenheim,1999]，PSD 为

$$S(\omega)=\sigma_v^2+2\pi|\alpha|^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$$

例 3 设一个随机信号的自相关函数为$r(k)=c\cdot a^{|k|}$，求它的 PSD。

为方便，先求复 PSD，

$$\tilde{S}(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c\cdot a^{|k|}z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}c\cdot a^{k}z^{-k}+\sum_{k=-\infty}^{-1}c\cdot a^{-k}z^{-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}c\cdot a^{k}z^{-k}+\sum_{k=1}^{+\infty}c\cdot a^{k}z^{k}=\frac{c}{1-az^{-1}}+\frac{caz}{1-az}=$$

$$=\frac{c(1-a^{2})}{1+a^{2}-a(z+z^{-1})}\qquad |a|<|z|<|1/a|$$

当$|a|<1$时，复 PSD 收敛域包含单位圆，PSD 为

$$S(\omega)=\tilde{S}(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{c(1-a^{2})}{1+a^{2}-2a\cos\omega}$$

功率谱密度的几个性质：

（1） 正实性，对所有平稳随机信号和所有 ω，$S(\omega)$ 是实函数，且 $S(\omega)\geq 0$

（2） 周期性，$S(\omega)$ 是以 2π 为周期的周期函数，$S(\omega)=S(\omega+2\pi k)$

（3） 对于实信号，$r(k)$ 是实对称序列，功率谱密度公式也可以简化为

$$S(\omega)=r(0)+2\sum_{k=1}^{+\infty}r(k)\cos(k\omega)$$

功率谱密度满足对称关系，$S(\omega)=S(-\omega)=S(2\pi-\omega),|\omega|\leq\pi$。

1.4.2 随机信号通过线性系统

输入和输出的互相关及输出的自相关序列为:

$$r_{xy}(k) = h^*(-k) * r_x(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(-l) r_x(k-l)$$

$$r_{yx}(k) = h(k) * r_x(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l) r_x(k-l)$$

$$r_y(k) = h^*(-k) * h(k) * r_x(k)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i-k) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l) r_x(i-l)$$

复功率谱关系 $S_y(z) = H(z)H^*(\frac{1}{z^*})S_x(z)$

功率谱密度关系 $S_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega)$

若输入是白噪声，方差为 σ_v^2，则

$$S_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 \sigma_v^2$$

1.4.3 连续信号与离散信号功率谱的关系

随机信号采样定理：一个随机过程 $x_a(t)$，如果它的功率谱密度是带限的，即

$$S_a(\Omega)=0, \qquad 对|\Omega|>B$$

如果以周期 $T_s \le \pi / B$ 对 $x_a(t)$ 进行采样，由采样信号重构的随机过程为

$$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s)\frac{\sin B(t-nT_s)}{B(t-nT_s)}$$

在均方意义上 $x_a(t)$ 等于 $\hat{x}_a(t)$，即 $E\left\{\left|x_a(t)-\hat{x}_a(t)\right|^2\right\}=0$.

$$r(k)=r(n_1-n_2)==r_a(n_1T_s-n_2T_s)$$

自相关关系

$$=r_a(t_1-t_2)\Big|_{t_1-t_2=n_1T_s-n_2T}=r_a(\tau)\Big|_{\tau=kT_s}$$

离散域功率谱和连续域功率谱之间满足[Oppenheim,1999]

$$S(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}S_a\left(\frac{\omega}{T_s}-\frac{2\pi}{T_s}k\right)$$

在满足采样定理时户 $S(\omega)=\frac{1}{T_s}S_a\left(\frac{\omega}{T_s}\right),\quad |\omega|\le\pi$

或 $S_a(\Omega)=T_sS(T_s\Omega),\quad |\Omega|\le\pi/T_s$

在连续域和离散域的频率之间存在一个转换关系，即

$$\Omega=\omega/T_s$$ 。

1.5 随机信号模型

有理传递函数模型

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{P} a^*(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b^*(k)v(n-k)$$

称做ARMA模型：自回归滑动平均模型

谱分解定理

定义：一个平稳随机信号如果满足 Paley－Wiener 条件，称它是规则的，Paley－Wiener 条件是 $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln S(\omega)\right|d\omega<\infty$。

如果一个随机信号的功率谱是连续的，不取零值，也没有离散谱（冲激函数），那么，该随机信号必然是满足 Paley－Wiener 条件的。

定理：一个平稳随机信号如果是规则的，它的复功率谱和功率谱必然可以分解为

$$\tilde{S}(z)=\sigma^2 Q(z)\cdot Q^*(1/z^*)\qquad S(\omega)=\left|Q(e^{j\omega})\right|^2\sigma^2$$

这里 $Q(z)$ 是最小相位系统。

有理函数模型的复频域表示

对于如上结构，系统传输函数为 $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$

其中，$B(z)=\sum_{k=0}^{q} b^*(k) z^{-k}$ 为前馈支路

$A(z)=\sum_{k=0}^{p} a^*(k) z^{-k}$ 为反馈支路，并令 a(0)=1

x(n)的输出自相关序列 $r_x(n)$ 的 Z 变换为：

$$S_{ARMA}(z)=H(z)H^*(\frac{1}{z^*})S_v(z)=\frac{B(z)B^*(\frac{1}{z^*})}{A(z)A^*(\frac{1}{z^*})}S_v(z)$$

沿单位圆取 $z=e^{j\omega}$ 得到 $x(n)$ 的 PSD 为：

$$S_{ARMA}(\omega)=\left|\frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})}\right|^2 S_v(\omega)=\left|\frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})}\right|^2 \sigma_v^2$$

$$=\left|\frac{\sum_{k=0}^{q} b^*(k)e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{P} a^*(k)e^{-j\omega k}}\right|^2 \sigma_v^2$$

ARMA 模型，也称为极零点模型，并用 ARMA(p,q) 表示。

MA 模型（滑动平均）

令 $a[0]=1, a[i]=0$，$i \neq 0$ 则 $x(n)=\sum_{k=0}^{q} b^*(k)v(n-k)$

该过程称为 q 阶 MA(q)过程，并且

$$S_{MA}(\omega)=\sigma_v^2\left|B(e^{j\omega})\right|^2$$

该模型也称为全零点模型

AR 模型（自回归）

令 $b(0)=1$，$b(i)=0$，$i\neq 0$，则 $x(n)=-\sum_{k=1}^{p}a^*(k)x(n-k)+v(n)$

AR(P)也称为全极点模型，PSD 为：

$$S_{AR}(\omega)=\frac{\sigma_v^2}{|A(e^{j\omega})|^2}=\frac{\sigma_v^2}{|\sum_{k=0}^{p}a^*(k)e^{-j\omega k}|^2}$$

例：AR(1)分析.

$$A(z)=1+a^*[1]z^{-1}$$

设 $a[1]$ 为实数 $|a(1)|<1$

$$S_x(z)=\sigma^2\frac{1}{A(z)A^*(\frac{1}{z^*})}=\frac{\sigma^2}{(1+a(1)z^{-1})(1+a(1)z)}$$

两个极点： $z_1=-a(1)\quad z_2=-\frac{1}{a(1)}$

收敛域： $|a(1)|<|z|<\frac{1}{|a(1)|}$

一个极点对应左序列，一个极点对应右序列

$$S_x(z)=\frac{\sigma^2}{1-a^2(1)}\left(\frac{1}{1+a(1)z^{-1}}-\frac{a(1)z}{1+a(1)z}\right)$$

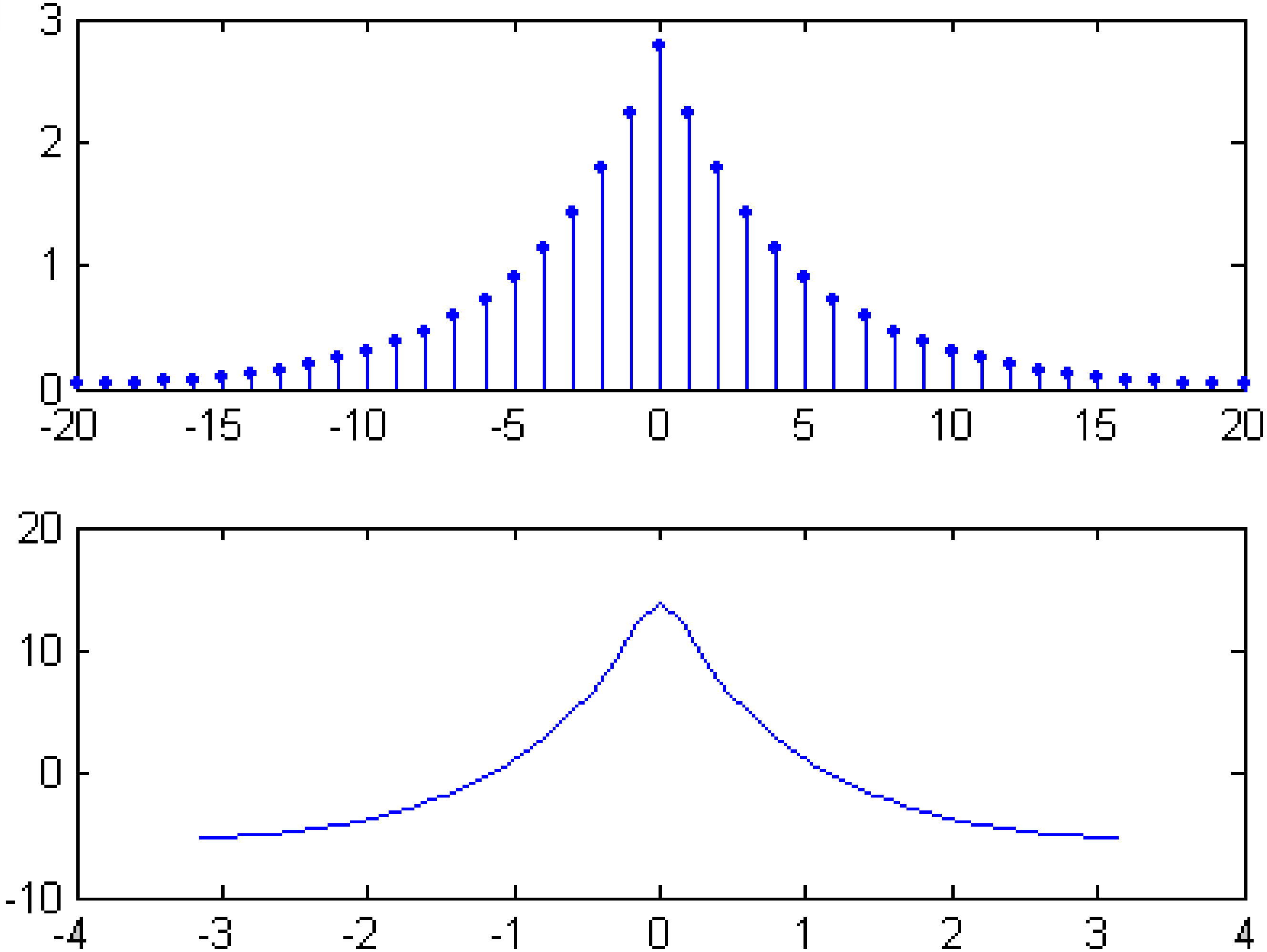
反变换得

$$r_x(k)=\frac{\sigma^2}{1-a^2(1)}[(-a(1))^k u(k)+(-a(1))^{-k}u(-k-1)]$$

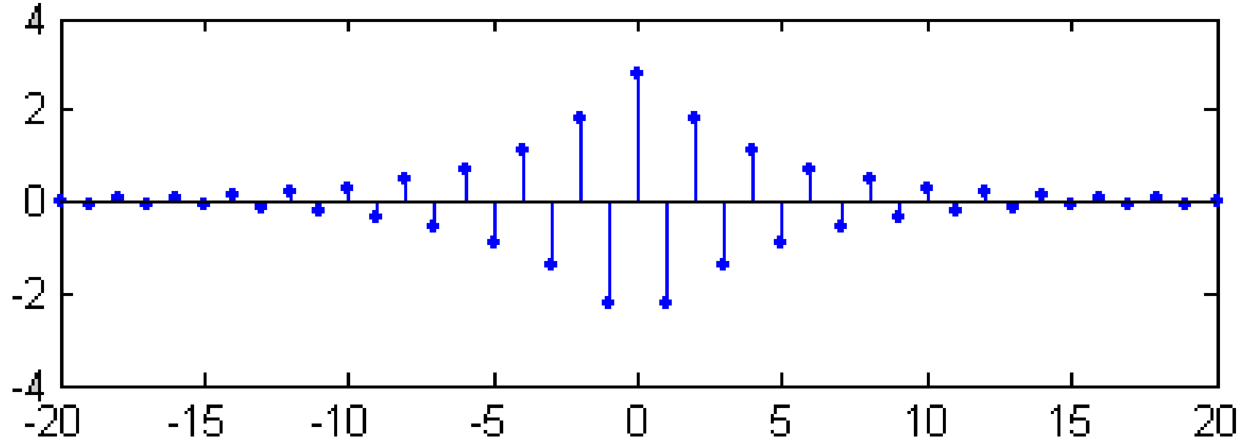
$$r_x(k)=\frac{\sigma^2}{1-a^2(1)}(-a(1))^{|k|}$$

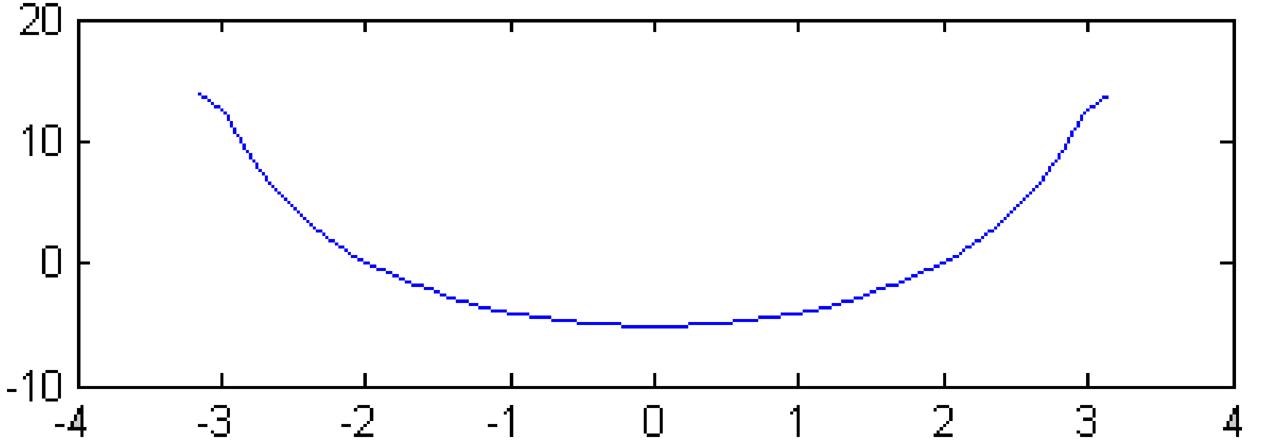
功率谱密度PSD： $$S(\omega)=\frac{\sigma^2}{|1+a(1)e^{-j\omega}|^2}$$

a．取a(1)=−0.8, 自相关序列和功率谱密度如图所示



b．取a(1)=0.8, 自相关序列和功率谱密度





1.5.2 自相关与模型参数的关系：Yule-Walker方程

AR过程

重写差分方程为

$$\sum_{k=0}^{p} a_k^* x(n-k) = v(n)$$

两边同乘 $x^*(n-\ell)$ 并取期望值

$$E\left[\sum_{k=0}^{P} a_k^* x(n-k) x^*(n-\ell)\right] = E[v(n) x^*(n-\ell)]$$

噪声 功率方程

$\ell = 0$ 时 $$\sum_{k=0}^{p} a_k^* r^*(k) = E[v(n)v^*(n)]$$

即 $$\sigma_v^2 = \sum_{k=0}^{p} a_k r(k) \qquad (1)$$

模型系数方程

$\ell > 0$ 时，$x(n-\ell)$ 与 $v(n)$ 不相关，得

$$\sum_{k=0}^{p} a_k^* r(\ell - k) = 0$$

矩阵形式

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1), & \cdots & r(p-1) \\ r^*(1), & r(0), & \cdots & r(p-2) \\ \cdots & & & \\ r^*(p-1), & \cdots & \cdots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(p) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$\boldsymbol{Ra} = -\boldsymbol{r}$ Yule-Walker 方程

(1)式和(2)式结合，利用自相关矩阵的增广特性，得增广Yule_Walker 方程

$$
\begin{pmatrix}
r(0) & r(1), & \cdots & r(p-1) & r(p) \\
r^*(1), & r(0), & \cdots & r(p-2) & r(p-1) \\
\cdots & & & & \\
r^*(p), & \cdots & \cdots & r^*(1) & r(0)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \sigma_v^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

若知模型阶P，P×P相关矩阵R，由Yule-Walker方程，可求得模型参数

进而可以得到PSD

实际中，R是未知的，我们只有一组观测值，构成观测矢量，由它估计r(k)或直接估计模型参数。由随机过程的一组观测值估计它的有关参数，这个问题是估计理论讨论的主要内容。

对于ARMA(p,q)模型

$$r_x(k)=\begin{cases}-\sum_{\ell=1}^{p}a(\ell)r_x(k-\ell)+\sum_{\ell=k}^{q}b(1)r_{xv}(k-\ell) & k=0,1,\cdots q\\ -\sum_{\ell=1}^{p}a(\ell)r_x(k-\ell) & k\ge q+1\end{cases}$$

对于MA(q)模型

$$r_x(k)=\begin{cases}\sigma_v^2\sum_{\ell=0}^{q-k} b^*(\ell)b(\ell+k) & k=0,1,\cdots q\\ 0 & k\ge q+1\end{cases}$$

1.6 概率分布模型

正态分布模型（高斯分布）

$$N(\boldsymbol{x}|\mu,\mathbf{C})=\frac{1}{(2\pi)^{M/2}\det^{1/2}(\mathbf{C})}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\mu)^T\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)\right)$$

$\mu,\mathbf{C}$ 可通过采集的样本进行估计（第二章）

其他：

超高斯，亚高斯

指数类，…

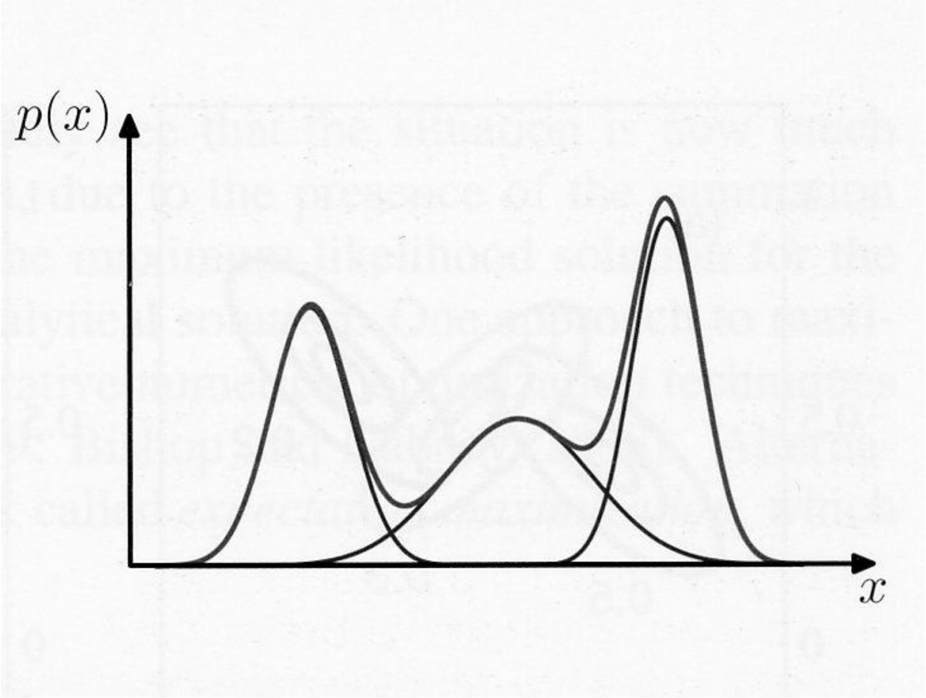
混合高斯分布模型

$$p(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{K}\pi_k N(\mathbf{x}|\mu_k,\mathbf{C_k})$$

且

$$\sum_{k=1}^{K}\pi_k=1$$

$$0\le\pi_k\le1$$



参数估计？

指数族分布

$$p(\boldsymbol{x}|\eta) = h(\boldsymbol{x})g(\eta)\exp\left(\eta^T \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right)$$

例： 伯努力分布（Bernoulli)

$$p(x|\mu) = \mu^x(1-\mu)^{1-x} = \exp\left(x\ln\mu + (1-x)\ln(1-\mu)\right)$$

$$= (1-\mu)\exp\left(x\ln\frac{\mu}{1-\mu}\right) = \frac{1}{1+\exp(\eta)}\exp(\eta x)$$

相当于指数族

$$\eta = \ln\frac{\mu}{1-\mu}, \quad u(x) = x$$

$$h(x) = 1, \quad g(\eta) = \frac{1}{1+\exp(\eta)}$$

高斯分布等价于指数族自行练习！

附注1

- 在现代信号处理系统和通信系统仿真中，利用ARMA方法，产生规定功率谱性质的随机信号，是常用的方法之一。
- ARMA方法可以有效的产生具有规定功率谱的高斯随机信号，和瑞利随机信号。
- 用ARMA方法产生平稳随机信号，要丢弃初始的瞬态值，取进入稳态的序列。
- 也可同时规定任意谱与任意PDF的随机信号产生过程，例如可参考文献：
  - M. M. Sondhi, Bell system Technical Journay, Vol.62,1983,679-700

附注2

- ARMA模型是“时间序列分析”中的重要组成部分。
- 时间序列分析是一个应用范围很广泛的学科，属于统计学中的一个分支，在信息科学和金融学中的应用尤为受到关注。
- 除ARMA模型外，还包括描述非平稳序列的ARIMA模型（1.6.5），以及各种非线性模型等。
- 参考文献

  - P.J.Brockwell, R. A. Davis,Time Series:Theory and Methods, Springer， 1991
  - Box G E et al Time Series Analysis: Forecadting and Control. Three Edition. New York：Pearson Education. 1994

附注3

- 用一定的数学形式描述一类信号的方式，都可以称为信号模型。用一种模型描述一类信号的过程，称为信号建模
  - ***类1：用概率密度函数描述信号，高斯分布，混合高斯模型等***
  - ***类2：噪声中的典型特殊信号，噪声中的正弦信号，***
  - ***类3：有理传输函数模型，ARMA***
  - ***类4：非平稳差分方程模型，非线性模型***
  - ***类5：基于状态转移的非平稳模型，HMM***