

2022秋季学期《应用信息论基础》作业6

请于2022.12.11前在**网络学堂提交电子版**，请写明姓名学号

1. **信息投影**：分布 q 在概率空间 \mathcal{P} 上的投影定义为

$$p^* = \operatorname{argmin}_{p \in \mathcal{P}} D(p||q)$$

设在元素集 \mathcal{X} 上存在一分布 Q ，两个线性族 \mathcal{P}_1 、 \mathcal{P}_2 ， $Q \notin \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ 。证明将其先投影到 \mathcal{P}_1 再投影到 $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ ，得到的投影与直接投影到 $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ 的相同。

其中 \mathcal{P}_1 满足：

$$\begin{aligned} \sum_x p(x) &= 1 \\ \sum_x p(x) h_i(x) &\geq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

\mathcal{P}_2 满足：

$$\begin{aligned} \sum_x p(x) &= 1 \\ \sum_x p(x) g_j(x) &\geq \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

2. 抽自 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的 n 个iid数据样本，考虑对分布参数的估计问题。

- 1) 证明 \bar{X} 为 μ 的无偏估计。
- 2) 证明估计量

$$S_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

是 σ^2 的有偏估计，而估计量

$$S_{n-1}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

是无偏的。

3. $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{i.i.d. } p(x)$ ，考虑假设检验 $H_1 : p = p_1$ 与 $H_2 : p = p_2$ ，其中

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = -1 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 1 \end{cases} \quad p_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = -1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 1 \end{cases}$$

在约束条件 $\Pr\{\text{判定 } H_1 | H_2 \text{ 真}\} \leq \frac{1}{2}$ 之下, 求出 $\Pr\{\text{判定 } H_1 | H_2 \text{ 真}\}$ 关于 H_1 与 H_2 的假设检验的最佳误差指数。

4. 令 X_1, X_2, \dots, X_n 为服从几何分布的独立同分布随机变量:

$$\Pr\{X = k\} = p^{k-1}(1-p), \quad k = 1, 2, \dots$$

针对下面的情形, 找出 (在一阶指数意义下) 好的估计:

- 1) $\Pr\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \alpha\};$
- 2) $\Pr\{X_1 = k | \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \alpha\};$
- 3) 当 $p = 1/2, \alpha = 4$ 时, 计算1) 和2) 。