《基础泛函分析》第九周作业

本次作业有将近30%的同学漏掉题目中的某个小问，请大家今后务必仔细审题，特别是期末考试中不要犯这种低级错误。

1. 设$C[-1,1]$为$[-1,1]$上实值连续函数空间，$C_{\text{odd}}[-1,1]$为所有$[-1,1]$上实值连续奇函数所构成的空间，$C_{\text{even}}[-1,1]$为所有$[-1,1]$上实值连续偶函数所构成的空间. 求证：
$$C[-1,1]=C_{\text{odd}}[-1,1]\oplus C_{\text{even}}[-1,1].$$
若$C[-1,1]$上赋予内积
$$\langle x,y\rangle=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$
求证：上面的直和为正交直和.

解：任意$x\in C[-1,1]$，取$x_{\text{odd}}(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$，$x_{\text{even}}(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$，则$x=x_{\text{odd}}+x_{\text{even}}$，$x_{\text{odd}}\in C_{\text{odd}}[-1,1],x_{\text{even}}\in C_{\text{even}}[-1,1]$. 若$x_0\in C_{\text{odd}}[-1,1]\cap C_{\text{even}}[-1,1]$，则$x_0(t)=-x_0(-t)=-x_0(t)$，故$x_0(t)\equiv 0$. 因此$C[-1,1]=C_{\text{odd}}[-1,1]\oplus C_{\text{even}}[-1,1]$. 由于$x_{\text{odd}}(t)x_{\text{even}}(t)=-x_{\text{odd}}(-t)x_{\text{even}}(-t)$，故$\langle x_{\text{odd}},x_{\text{even}}\rangle=\int_{-1}^{1}x_{\text{odd}}(t)x_{\text{even}}(t)\mathrm{d}t=0$，因此上面的直和为正交直和.

有的同学在证明$C[-1,1]=C_{\text{odd}}[-1,1]\oplus C_{\text{even}}[-1,1]$时漏掉了分解的唯一性或$C_{\text{odd}}[-1,1]\cap C_{\text{even}}[-1,1]=\{0\}$的证明.

2. 证明$M=\left\{\{x_n\}\in\ell^2:\text{任给}n\geq 1,\text{有}x_{2n}=0\right\}$为$\ell^2$的闭线性子空间. 求$M^{\perp}$.

解：下证M为线性子空间. 取$x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in M$及$\lambda,\mu\in\mathbb{F}$，任给$n\geq 1$，$\lambda x_{2n}+\mu y_{2n}=0$，故$\lambda x+\mu y\in M$.下证$M$闭. 取$\{x^{(n)}\}\subset M$，其中$x^{(n)}=\left\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots\right\}$，且$x^{(n)}\to x=\{x_1,x_2,\cdots\}\in\ell^2$，若存在$i$使得$x_{2i}\neq 0$，则$\|x^{(n)}-x\|\geq|x_{2i}|>0$，与$x^{(n)}\to x$矛盾，故$x\in M$. 因此$M$为$\ell^2$的闭线性子空间.

取$M'=\left\{\{x_n\}\in\ell^2:\text{任给}n\geq 1,\text{有}x_{2n-1}=0\right\}$. 显然任意$y\in M'$，$y\perp M$，故$M'\subset M^{\perp}$. 对$y'=\{y_n'\}\in\ell^2\backslash M'$，存在$n_0\geq 1$，使得$y_{2n_0-1}'\neq 0$. 取$x'=\{x_n'\}\in M$，其中
$$x_n'=\begin{cases}1, & n=2n_0-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$
则$\langle x',y'\rangle=y_{2n_0-1}'\neq 0$，从而$y'$不与$M$正交，故$M^{\perp}\subset M'$. 因此$M^{\perp}=M'$.

前一问要求证明M为闭线性子空间，有的同学漏掉了对“闭”的证明或对“线性”的证明. 后一问有的同学直接给出$M^{\perp}$而没有过程，或者在证明$M^{\perp}=M'$时只证明了$M'\subset M^{\perp}$而没有证明$M^{\perp}\subset M'$. 当然，证明$M'\subset M^{\perp}$和$M'\oplus M=\ell^2$也是可以的.

3. 求最小值：$\min\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|t^3-a-bt-ct^2|^2\mathrm{d}t$.

解：取内积空间$C[-1,1]$，内积定义为$\langle f,g\rangle\coloneqq\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\mathrm{d}t$，设$x_0\in C[-1,1]$，$x_0(t)=t^3$，则原问题转化为求$M\coloneqq\operatorname{span}\{1,t,t^2\}$中$x_0$的最佳逼近元。设$y_0(t)=a+bt+ct^2$为该最佳逼近元，则$y_0$满足$x_0-y_0\perp M$，因此有

$$
\begin{cases}
\int_{-1}^{1}(t^3-a-bt-ct^2)\cdot 1\mathrm{d}t=0\\
\int_{-1}^{1}(t^3-a-bt-ct^2)\cdot t\mathrm{d}t=0\\
\int_{-1}^{1}(t^3-a-bt-ct^2)\cdot t^2\mathrm{d}t=0
\end{cases}
$$

解得$a=0,b=\frac{3}{5},c=0$. $\min\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|t^3-a-bt-ct^2|^2\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\left|t^3-\frac{3}{5}t\right|^2\mathrm{d}t=\frac{8}{175}$.

有的同学取$\{1,t,t^2,t^3\}$为$C[-1,1]$的正交集并据此得出了错误答案，需要注意在此内积定义下，$\{1,t,t^2,t^3\}$并不是$C[-1,1]$的正交集.

4. 设H为 Hilbert 空间，M为其线性子空间，Y为 Banach 空间，$T\in B(M,Y)$. 求证：存在$T_0\in B(H,Y)$，使得$T_0|_M=T$，$\|T\|=\|T_0\|$.

解：$H=\bar{M}\oplus M^{\perp}$，故对任意$x_0\in H$，存在唯一$x\in\bar{M}$和唯一$y\in M^{\perp}$，使得$x_0=x+y$. 由于$x\in\bar{M}$，存在序列$\{x_n\}\subset M,x_n\to x$. 由于$T\in B(M,Y)$，故存在$z\in Y$，使得$Tx_n\to z$，且易见$z$与$\{x_n\}$的选取无关. 定义$T_0x_0=z$. 容易验证$T_0$为线性算子；当$x\in M$时，$T_0x=Tx$；$\|T_0x_0\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n\|\le\|T\|\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|T\|\|x\|\le\|T\|\|x_0\|$. 故$T_0\in B(H,Y)$且$\|T_0\|\le\|T\|$. 又$\|T_0\|=\sup\limits_{x\in H\setminus\{0\}}\frac{\|T_0x\|}{\|x\|}\ge\sup\limits_{x\in M\setminus\{0\}}\frac{\|T_0x\|}{\|x\|}=\sup\limits_{x\in M\setminus\{0\}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\|T\|$，故$\|T_0\|=\|T\|$.

很多同学直接令$T_0=T\circ P_M$，需要注意的是投影映射只能在M为闭子空间时定义，这里并没有M闭的条件，需要考虑M的闭包，先将T延拓到$\bar{M}$上，再与$P_{\bar{M}}$复合.