1. $v\in C[0,1]$，求证：存在唯一 $x\in C[0,1]$，使得

$$x(t)=\frac{1}{3}\cos(x(t))+v(t)\qquad 0\le t\le 1$$

证：考虑 $T: C[0,1]\to C[0,1]$

$$Tx(t)=\frac{1}{3}\cos(x(t))+v(t)$$

$$d_\infty(Tx,Ty)=\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{3}\cos(x(t))-\frac{1}{3}\cos(y(t))\right|\le\frac{1}{3}|x(t)-y(t)|=\frac{1}{3}d_\infty(x,y)$$

故T为压缩映射，有不动点，该不动点满足要求

2. 举例说明Banach不动点定理中X完备为必要的

取 $X=(0,1)$，$T: X\to X$，$Tx=\frac{x}{2}$

3. $c>0$，$x_0>\sqrt{c}$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{c}{x_n})$，求证 $x_n\to\sqrt{c}$

取 $c=2$，$x_0=2$，求 x_1,x_2,x_3,x_4，并给出 $|x_n-\sqrt{2}|$ 的一个上界

证：令 $X=[\sqrt{c},+\infty)$，$T: X\to X$，$Tx=\frac{1}{2}(x+\frac{c}{x})$

$$|Tx-Ty|=\frac{1}{2}|x-y|\left(1-\frac{c}{xy}\right)\le\frac{|x-y|}{2}$$

故T为压缩映射，$\sqrt{c}$为T的不动点.

$$|x_{n+1}-\sqrt{c}|=|Tx_n-T\sqrt{c}|\le\frac{1}{2}|x_n-\sqrt{c}|$$

故 $|x_n-\sqrt{c}|\le\frac{1}{2^n}|x_0-\sqrt{c}|$

故 $x_n\to\sqrt{c}$

$c=2$，$x_0=2$ 时 $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{17}{12}$，$x_3=\frac{577}{408}$，$x_4=\frac{665857}{470832}$

$$|x_n-\sqrt{2}|\le\frac{2-\sqrt{2}}{2^n}$$