1. $f_k(x)=\cos kx$, $k\in\mathbb{N}$, $g_k(x)=\sin kx$, $k\in\mathbb{N}^+$

求证 $\{f_k : k\in\mathbb{N}\}\cup\{g_k ; k\in\mathbb{N}^+\}$ 线性无关

证：注意到 $\forall n,m$，有 $\int_0^{2\pi}\cos nx\ \sin mx\ dx=0$

$\forall n\neq m$ 有 $\int_0^{2\pi}\cos nx\ \cos mx\ dx=0$

若 $\sum a_k\cos k\alpha+\sum b_l\sin lx=0$

则 $\int_0^{2\pi}\cos nx\left(\sum a_k\cos kx+\sum b_l\sin lx\right)dx=0$

$\Rightarrow a_n\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\ dx=0$，$a_n=0$，$\forall n$

同理，$b_m=0$，$\forall m$

故 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\cup\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ 线性无关

2. (1) $\bar{A}+\bar{B}\subset\overline{A+B}$

证：$\forall x\in\bar{A}$, $y\in\bar{B}$，$\exists x_n\in A$, $y_m\in B$，$x_n\to x$, $y_m\to y$

则 $x_n+y_n\to x+y$

故 $x+y\in\overline{A+B}$

(2) $x_0\in X$，$A\subset X$ 为开集 $\Leftrightarrow A+x_0\subset X$ 为开集

证：A 为开集 $\Leftrightarrow \forall a\in A$，$\exists r>0$，$B(a,r)\subset A$

$\Leftrightarrow \forall a+x_0\in A+x_0$，$\exists r>0$，$B(a+x_0,r)\subset A+x_0$

$\Leftrightarrow A+x_0$ 为开

(3) $x_0\in X$，$A\subset X$ 闭 $\Leftrightarrow A+x_0\subset X$ 闭

证：由(2)取余集即可

(4) $A,B\subset X$，A 为开集，则 $A+B$ 为开集

证：$A+B=\bigcup_{b\in B}(A+b)$ 为开集

(5) $A^\circ\neq\phi$，则 0 为 $A-A$ 的内点

证：$\exists a\in A$，$r>0$，$B(a,r)\subset A$

则 $B(0,r)\subset A-a\subset A-A$