《基础泛函分析》第十一周作业

1. 设$p$为赋范空间$X$上的次线性泛函，满足$p(0)=0$，且在0处连续，求证：$p$为连续映射.

**解**：任意$x\in X$，任意$\epsilon>0$，由于$p$在0处连续，故存在$\delta>0$，使得任意$x'\in B(0,\delta)$，有$|p(x')-p(0)|=|p(x')|<\epsilon$. 从而对任意$x''\in B(x,\delta)$，若$p(x'')\geq p(x')$，则$0\geq p(x')-p(x'')\geq p(x'-x'')>-\epsilon$，若$p(x'')<p(x')$，则$0>p(x'')-p(x')\geq p(x''-x')>-\epsilon$，故总有$|p(x')-p(x'')|<\epsilon$. 因此$p$为连续映射.

2. 设$a_1,a_2\in\mathbb{R}$固定，考虑$\mathbb{R}^3$的线性子空间

$$Z=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:x_3=0\},$$

及$Z$上的线性泛函$f(x_1,x_2,x_3)=a_1x_1+a_2x_2$. 求出所有$f$到$\mathbb{R}^3$上的线性延拓及相应线性泛函的范数.

**解**：由于$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$是$\mathbb{R}^3$的一组完全标准正交基，因此所有$f$到$\mathbb{R}^3$上的线性延拓$\bar{f}$可写成$\bar{f}(x_1,x_2,x_3)=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$. 由于$\bar{f}\big|_Z=f$，故$b_1=a_1$，$b_2=a_2$. 因此所有$f$到$\mathbb{R}^3$上的线性延拓$\bar{f}$的集合为$\{\bar{f}:\bar{f}(x_1,x_2,x_3)=a_1x_1+a_2x_2+b_3x_3,b_3\in\mathbb{R}\}$. 令$C=\sqrt{a_1^2+a_2^2+b_3^2}$，下证泛函$\bar{f}(x_1,x_2,x_3)=a_1x_1+a_2x_2+b_3x_3$的范数为$C$. 由Cauchy不等式可得任意$(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$，$\sqrt{a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+b_3^2x_3^2}\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+b_3^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=C\|(x_1,x_2,x_3)\|$. 取$(x_1,x_2,x_3)=(a_1,a_2,a_3)$时有$\|\bar{f}(x_1,x_2,x_3)\|=C\|(x_1,x_2,x_3)\|$，从而说明了$\bar{f}$的范数为$C=\sqrt{a_1^2+a_2^2+b_3^2}$.

3. 设$X$为可分赋范空间，求证：存在$X'$单位球面的可数子集$N$，使得任取$x\in X$，有$\|x\|=\sup\limits_{f\in N}|f(x)|$.

**解**：由于$X$为可分赋范空间，故存在$X$的可数稠密子集$M$. 任意$x_n\in M$，由定理 4.1.4（Hahn-Banach），存在$f_n\in X'$，$\|f\|=1$且$f(x_n)=x_n$. 从而$N=\{f_n\}$为$X'$单位球面的至多可数子集. 下证$N$满足任取$x\in X$，有$\|x\|=\sup\limits_{f\in N}|f(x)|$. 任取$x\in X$，由于任取$f\in N$有$|f(x)|\leq\|f\|\|x\|=\|x\|$，故$\|x\|\geq\sup\limits_{f\in N}|f(x)|$. 若$\sup\limits_{f\in N}|f(x)|=\|x\|-\epsilon$，$\epsilon>0$，由于$M$在$X$中稠密，故存在$x_n\in X$使得$\|x-x_n\|<\frac{\epsilon}{3}$，从而$\|x\|-|f_n(x)|=\|x\|-|f_n(x-x_n)-f_n(x_n)|=\|x\|-|f_n(x-x_n)-\|x_n\||\leq\|x\|-\|x_n\|+\frac{\epsilon}{3}\leq\frac{2\epsilon}{3}<\epsilon$，矛盾. 故$\|x\|=\sup\limits_{f\in N}|f(x)|$.

部分同学只证明了$\|x\|\geq\sup\limits_{f\in N}|f(x)|$，没有证明$\|x\|\leq\sup\limits_{f\in N}|f(x)|$. 另外需注意，题目要求的是$\|x\|=\sup\limits_{f\in N}|f(x)|$对任意$x\in X$成立，而不是只对某个$x$或$M$中的$x$成立.