1. 求证：(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，(2) $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$　　((X,d)为度量空间，$A,B\subset X$)

(3) $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$，(4) $A^\circ\cup B^\circ\subset(A\cup B)^\circ$

举例说明(2),(4)可以是严格包含关系

证：(1) $\overline{A},\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$，故 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$

$\forall x\notin\overline{A},\overline{B}\Rightarrow\exists r>0$，$B(x,r)\cap\overline{A}$，$B(x,r)\cap\overline{B}=\phi$

故 $B(x,r)\cap(A\cup B)=\phi$，$B(x,\frac{r}{2})\cap\overline{A\cup B}=\phi$，$x\notin\overline{A\cup B}$

故 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$

(2) $A\cap B\subset\overline{A}\cap\overline{B}$，而 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 为闭集，故 $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$

用A和B在X中的余集替代A,B代入(1),(2)中即得(3),(4)

取 $A=(0,1)$，$B=(1,2)$

$\overline{A\cap B}=\phi$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$

取 $A=[0,1]$，$B=[1,2]$

$A^\circ\cup B^\circ=(0,1)\cup(1,2)$，$(A\cup B)^\circ=(0,2)$

故(2),(4)中可以是严格包含

2. $S=\{(x_n)_{n\geq1},\ x_n\in\mathbb{R}\}$，$d((x_n)_{n\geq1},(y_n)_{n\geq1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$，求证$(S,d)$可分

证：取 $M=\{(x_n)_{n\geq1},\ x_n\in\mathbb{Q},\ \exists N>0,\ \forall n>N 有 x_n=0\}$

$M_k=\{(x_n)_{n\geq1},\ x_n\in\mathbb{Q},\ \forall n>k 有 x_n=0\}$

$M=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k$，且 M_k 可数，$\forall k$，故 M 可数

而 $\overline{M}=S$，故(S,d)可分

注：$\{(x_n)_{n\geq1},\ x_n\in\mathbb{Q}\}\neq M$

恒为1的序列在第一个集合内，不在M内

$\{(x_n)_{n\geq1},\ x_n\in\mathbb{Q}\}$ 非可数集