非平稳信号处理导论

时－频分析的一些基本概念
短时傅立叶变换和Gabor展开
Wavelet变换
Wigner－Ville分布及其一般化方法

非平稳信号

- 传统的以傅立叶变换为主的谱分析方法主要用于平稳信号，或慢变化的分段平稳信号的分析和设计
- 时一频分析主要用于频率瞬变的非平稳信号。
- 频率瞬变有两重主要意义
  - 频率随时间有规则或无规则连续变化或跳跃变化
  - 一些频率分量有其持续期，随机出现与消亡

第9章 时频分析

9.1 一些定义和解释

1：傅立叶变换对

$$\hat{x}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=<x(t),e^{j\omega t}>$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅立叶变换的局限性

几个非平稳信号的例子

对于信号分量 $x(t)=a(t)e^{j\varphi(t)}$ 信号的瞬时频率定义为

$$\omega(t)=\varphi'(t)$$

调制信号（Chirp信号）

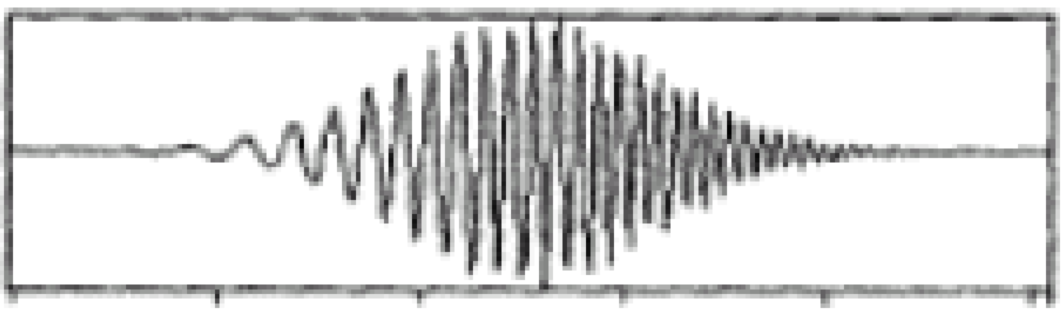
线性和二次调制函数及瞬时频率如下

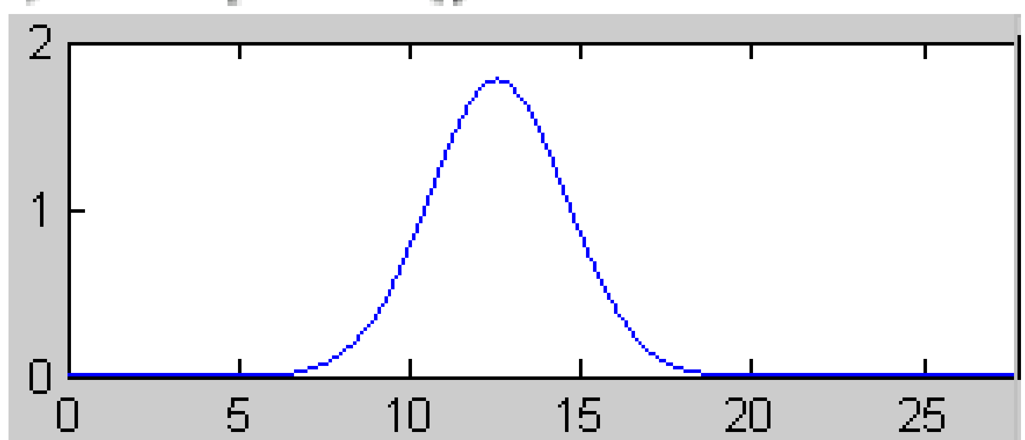
$$x(t)=ae^{j\left(\beta t^2+\omega_0 t+\varphi\right)},\quad \omega(t)=2\beta t+\omega_0$$

$$x(t)=ae^{j\left(\mu t^3+\beta t^2+\omega_0 t+\varphi\right)},\quad \omega(t)=3\mu t^2+2\beta t+\omega_0$$

高斯包络线性调制信号

$$x(t)=g(t-t_0)e^{j\left(\beta t^2+\omega_0 t\right)}=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha\left(t-t_0\right)^2/2+j\left(\beta t^2/2+\omega_0 t\right)}$$





高斯包络线性调制信号的傅立叶变换

$$x(t)=g(t-t_0)e^{j\left(\beta t^2+\omega_0 t\right)}=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha\left(t-t_0\right)^2/2+j\left(\beta t^2/2+\omega_0 t\right)}$$

$$\hat{x}(\omega)=\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}(\alpha+j\beta)}}e^{-(\omega-\omega_0)^2/2(\alpha-j\beta)}$$ 傅立叶变换

$$\left|\hat{x}(\omega)\right|^2=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\beta^2)}}e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2/(\alpha^2+\beta^2)}$$ 能量谱

例：雷达线调频脉冲

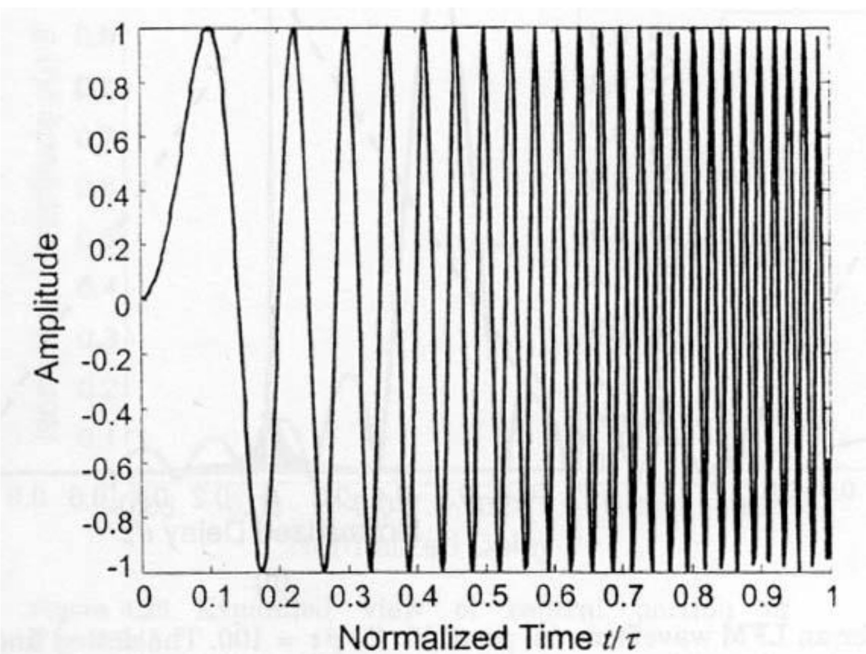
$$x(t) = A(t)e^{j\alpha t^2} \qquad \alpha = \pi\frac{\beta}{\tau}$$

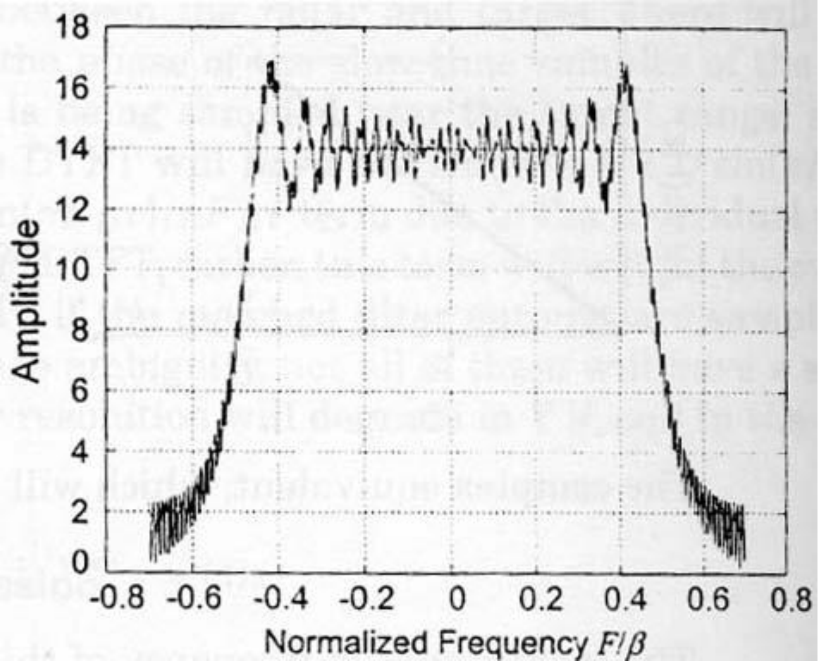
$$A(t) = \begin{cases} 1 & -\tau/2 \le t \le \tau/2 \\ 0 & others \end{cases}$$

此图例中

$$\beta\tau = 100$$

实部图形和幅度谱





2 有限持续波形的等效时宽和等效带宽

单位能量信号 $g(t)$

时间和频率中心分别为

$$\mu_t = \int t\left|g(t)\right|^2 dt$$

$$\mu_\omega = \int \omega\left|\hat{g}(\omega)\right|^2 d\omega$$

注解：对于非单位能量信号，均除以能量值

$$E = \int \left|g(t)\right|^2 dt$$

时间和频率域等效宽度平方分别为

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu_t)^2 |g(t)|^2 dt$$

$$\Delta_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \mu_\omega)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 dt$$

等效时宽 Δ_t

等效频宽 Δ_ω

不确定性原理（测不准原理）

对于任意函数 $g(t)$ 满足 $\lim_{|t|\to\infty}\sqrt{t}\,g(t)=0$

等效时宽－带宽积满足 $\Delta_t \cdot \Delta_\omega \geq \dfrac{1}{2}$

等号只针对高斯类函数成立，即 $g(t)=A\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2}$

等效时宽、带宽例

$$g(t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha t^2/2}$$

$$\mu_t=0,\qquad \Delta_t^2=\frac{1}{2\alpha}$$

$$\mu_\omega=0,\qquad \Delta_\omega^2=\frac{\alpha}{2}$$

$$\Delta_t\Delta_\omega=\frac{1}{2}$$

3 框架的概念

一个函数系 $\{\varphi_j(t)\}$，定义线性变换 $[Tx]_j=\langle x(t),\varphi_j(t)\rangle$，它满足：

（1）：唯一性：如果 $x_1=x_2$，则 $Tx_1=Tx_2$；

（2）：正变换连续性，如果 x_1 与 x_2 很接近，则 Tx_1 与 Tx_2 也很接近，

这要求：$\sum_j \left|\langle x,\varphi_j\rangle\right|^2 \le B\|x\|^2 \qquad 0\langle B\langle\infty$

（3）：反变换连续性：

当 $[Tx_1]_j=\langle x_1,\varphi_j\rangle$ 和 $[Tx_2]_j=\langle x_2,\varphi_j\rangle$，$j\in z$ 充分接近时，

要求：x_1 与 x_2 充分接近，这要求：

$$\sum_j \left|\langle x,\varphi_j\rangle\right|^2 \ge A\|x\|^2 \quad 0\langle A\langle\infty ,$$

概括起来，$A\|x\|^2 \le \sum_j \left|\langle x,\varphi_j\rangle\right|^2 \le B\|x\|^2$

满足这个条件的函数系 $\{\varphi_j(x),j\in z\}$ 称为一个框架

特例：

当A＝B时，

$$\sum_j \left|\langle x, \varphi_j \rangle\right|^2 = A\|x\|^2$$

称为紧框架

当 A=B= 1 时，$\sum_j \left|\langle x, \varphi_j \rangle\right|^2 = \|x\|^2$

此时满足：$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta(j-i)$，$\{\varphi_j\}$构成一个正交基。

通过框架对原函数x 的重建:

定义一个算子F, 设 $Fx = \sum_{j\in z} < x, \varphi_j > \varphi_j(t)$

则 $x = F^{-1}\left[\sum_{j\in z} < x, \varphi_j > \varphi_j(t)\right] = \sum_{j\in z} < x, \varphi_j > F^{-1}\varphi_j(t)$

令 $\tilde{\varphi}_j \stackrel{\Delta}{=} F^{-1}\varphi_j(t)$ 则

$$x = \sum_{j\in z} < x, \varphi_j > \tilde{\varphi}_j$$

称 $\{\tilde{\varphi}_j\}$为 $\{\varphi_j\}$的对偶, 如果 $\{\varphi_j\}$是一框架, 在一定条件下 $\{\tilde{\varphi}_j\}$是一个对偶框架, 由对偶框架重构信号 x.

框架和对偶框架的可交换性

$$x = \sum_{j \in z} < x, \varphi_j > \cdot \tilde{\varphi}_j$$

$$x = \sum_{j \in z} < x, \tilde{\varphi}_j > \cdot \varphi_j$$

框架理论也可
推广到多重序号

对于所有

$$\left\{x(n)\middle|0 \le n < N-1\right\}$$

构成的N维信号空间，有

$$e_{\hat{k}}(n)=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{j\frac{2\pi}{N}\hat{k}n} \qquad n=0,\cdots,N-1$$

$$\hat{k}=0,\frac{1}{2},1,1\frac{1}{2},\cdots,N-1,N-\frac{1}{2}$$

容易证明： $$\sum_{\hat{k}}\left|\langle x,e_{\hat{k}}\rangle\right|^2=2\|x\|^2$$

$e_{\hat{k}}(n)$ $\hat{k}=0,\frac{1}{2},1,1\frac{1}{2},\cdots,N-1,N-\frac{1}{2}$ 构成紧框架

Reisz 基：

设 $\{\varphi_j,\ j\in z\}$满足下述要求：

i)：$A\sum_{j\in z} c_j^2 \le \left\|\sum_{j\in z} c_j\varphi_j\right\|^2 \le B\sum_{j\in z} c_j^2 \qquad 0<A<B<\infty$

ii)：$\sum_{j\in z} c_j\varphi_j = 0$ 意味着 $c_j = 0 \quad j\in z$ 即 $\{\varphi_j,\ j\in z\}$ 是不相关的

则称 $\{\varphi_j,\ j\in z\}$ 为一组 Reisz 基。

4　信号的一种时一频变换:

时一频变换反映“信号随时间变化的频谱（或功率谱、或能量谱)”，

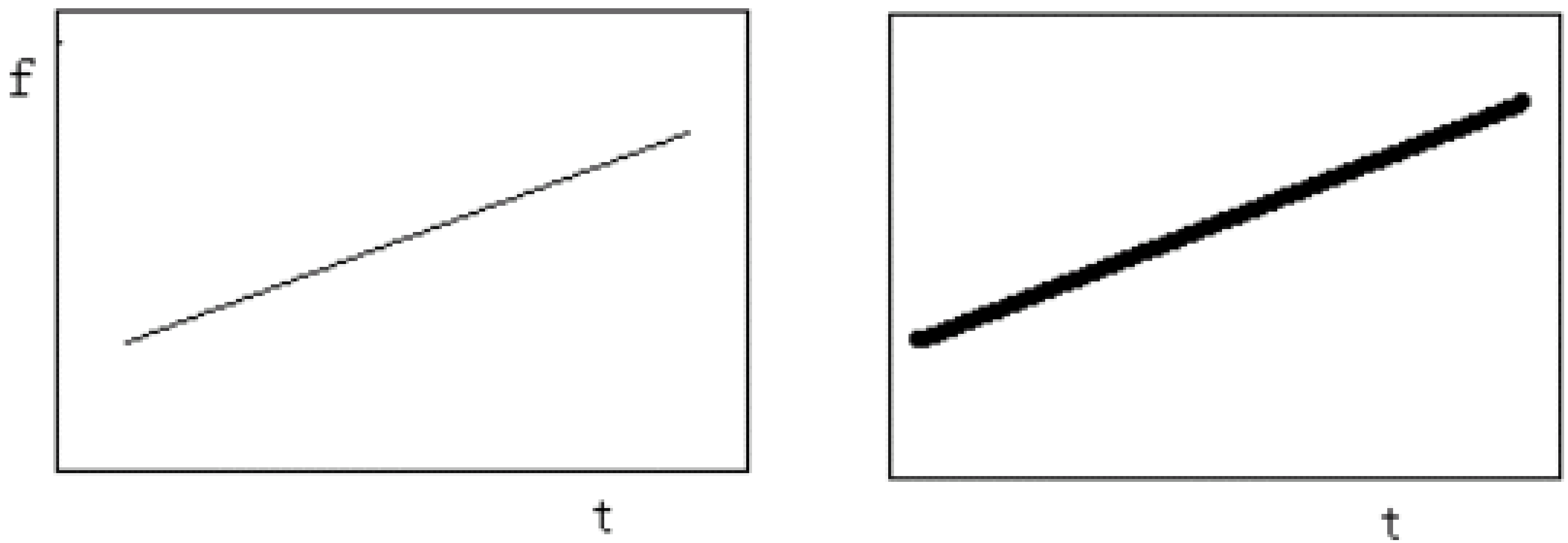
一个信号的时一频变换可以用符号 $TF_x(t,\omega)$ 表示，称时一频变换的

图形表示为时一频谱图，时一频谱图可以是三维立体图形，也可以是

平面图。对于平面图，在时一频平面，我们用黑白强度表示 $|TF_x(t,\omega)|$

的取值，越黑的点 $|TF_x(t,\omega)|$ 取值越大，白色点对应于 $|TF_x(t,\omega)|$ 取零。

线性调制信号 $x(t)=ae^{j\left(\beta t^2+\omega_0 t+\varphi\right)}$，



(a)理想情况，　　　　　　(b)实际谱图

时一频变换谱图

9.2 线性时频变换

$$TF_x(t,\omega) = < x(\tau), g(\tau,t,\omega) > = \int x(\tau) g(\tau,t,\omega) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} < \hat{x}(\lambda), \hat{g}(\lambda,t,\omega) > = \frac{1}{2\pi} \int \hat{x}(\lambda) \hat{g}(\lambda,t,\omega) d\lambda$$

考虑一个由母函数$g_0(\tau)$构成的函数集$g(\tau,t,\omega)$，

t,ω 是可变化的参数，例如$g(\tau,t,\omega) = g_0(\tau - t)e^{j\omega t}$.

就是由母函数$g_0(\tau)$生成的函数集，是由$g_0(\tau)$在

时间轴上移位t后再被角频率为ω的载波调制得到的。

（1） 信号的时域表示

取

$$g(\tau,t,\omega)=\delta(\tau-t),$$

则有

$$TF_x(t,\omega)=<x(\tau),\delta(\tau-t)>=x(t),$$

这是信号的时域表示，具有最高的时间分辨率，但没有频率分析能力。

（2） 信号的傅立叶变换

取

$$g(\tau,t,\omega)=e^{j\omega\tau}$$

则有

$$TF_x(t,\omega)=\langle x(\tau),e^{j\omega\tau}\rangle=\int x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\hat{x}(\omega)$$

这是信号的傅立叶变换，具有分析信号频率的最高分辨率，但没有时间定位的能力。

为了得到好的时一频局域性分析，取$g_0(\tau)$是一个在时域和频域都具有良好的能量集中特性的函数，在时域，$g_0(\tau)$的能量主要集中在$-\Delta_t/2 \le \tau \le \Delta_t/2$范围内，这个范围之外$g_0(\tau)$取值很小；在频域，$\hat{g}_0(\lambda)$的能量主要集中在$-\Delta_\omega/2 \le \lambda \le \Delta_\omega/2$范围内。

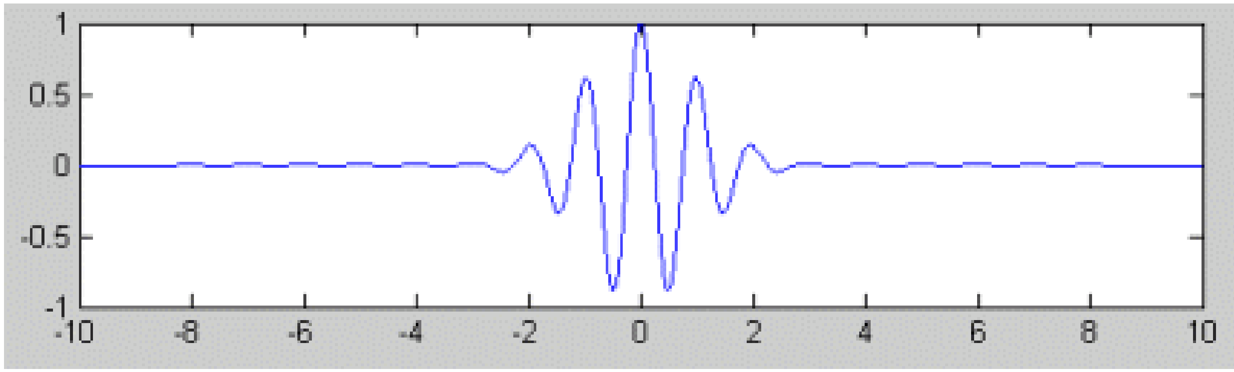
改变参数t,ω的取值，使得在时域$g(\tau,t,\omega)$的主要能量集中在$t-\Delta_t/2 \le \tau \le t+\Delta_t/2$，在频域$\hat{g}(\lambda,t,\omega)$的主要能量集中在$\omega-\Delta_\omega/2 \le \lambda \le \omega+\Delta_\omega/2$范围内，因此，时频变换$TF_x(t,\omega)$实际上是提取了信号在$t,\omega$附近，主要影响区间为

$$[t-\Delta_t/2, t+\Delta_t/2]\times[\omega-\Delta_\omega/2, \omega+\Delta_\omega/2]$$

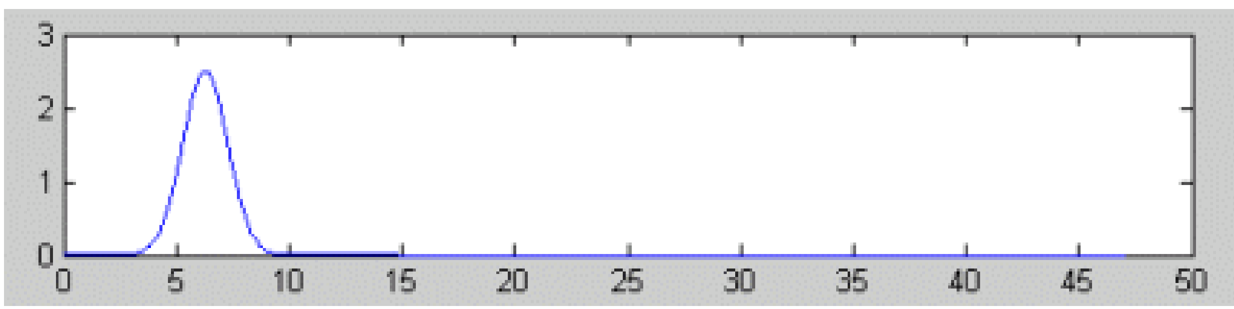
内信号的能量，区间的面积为$\Delta_t\Delta_\omega$。

例子，设 $g_0(\tau)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha\tau^2}$ 为高斯函数，取 $g(\tau,t,\omega)=g_0(\tau-t)e^{j\omega\tau}$，

$g(\tau,t,\omega)$ 是高斯调制函数集，$g(\tau,t=0,\omega)$ 实部的图形，$\left|\hat{g}(\lambda,t,\omega)\right|$ 如图



(a) 高斯调制函数时域信号



(b) 高斯调制函数的频谱图

9.3 短时傅立叶变换（STFT）

取一个窗函数$g(\tau)$，它在时域是一个（近似）有限持续时间函数，

即它的能量主要集中在$-\Delta_t/2 \le \tau \le \Delta_t/2$范围内，$x(\tau)g(\tau-t)$

反映了信号在以参考时间t为中心，在区间$[t-\Delta_t/2, t+\Delta_t/2]$范围的变化。

短时傅立叶变换的定义为

$$STFT(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)g^*(\tau-t)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)g_{t,\omega}^*(\tau)d\tau$$

$$=\langle x(\tau), g_{t,\omega}(\tau)\rangle$$

$$g_{t,\omega}(\tau)=g(\tau-t)e^{j\omega\tau}$$

STFT例子

信号 $x(t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2+j\left(\beta t^2/2+\omega_0 t\right)}$ 母函数 $g(t)=\left(\frac{b}{\pi}\right)^{1/4} e^{-bt^2/2}$

$$\left|STFT(t,\omega)\right|^2=\frac{P(t)}{\sqrt{2\pi\sigma_\omega^2}}\exp\left(-\frac{(\omega-\mu_\omega)^2}{2\sigma_\omega^2}\right)$$

$$P(t)=\sqrt{\frac{\alpha b}{\pi(\alpha+b)}}\exp\left(-\frac{\alpha b}{\alpha+b}t^2\right)$$

$$\sigma_\omega^2=\frac{1}{2}(\alpha+b)+\frac{\beta^2}{2(\alpha+\beta)} \qquad \mu_\omega=\frac{b}{\alpha+b}\beta t+\omega_0$$

例. 信号由两个线性调制信号（Chirp）构成，即

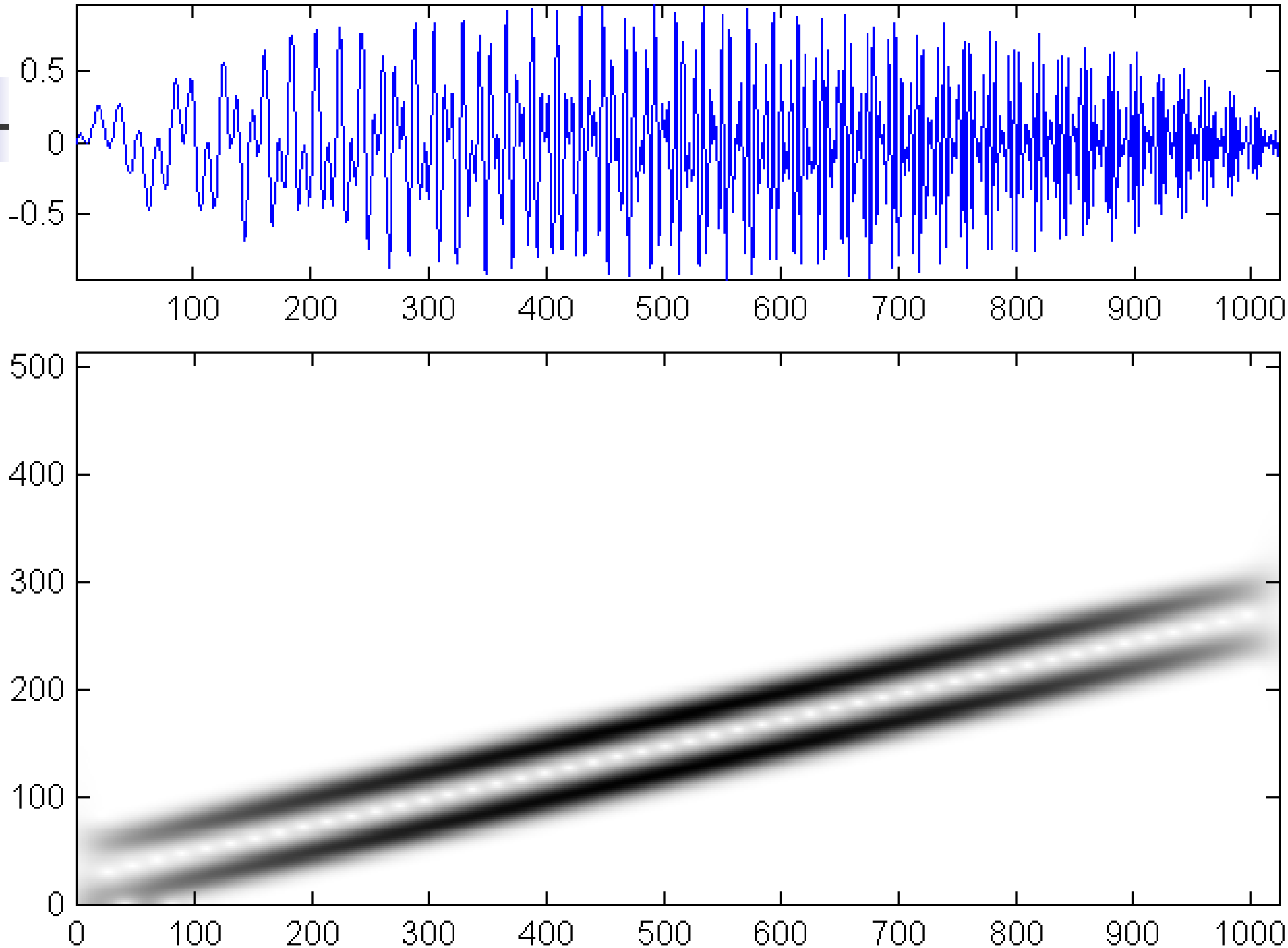
$$f(t) = a_1 e^{j(bt^2+ct)} + a_2 e^{j(bt^2)}$$

相当于两个信号的瞬时频率分别是：$\omega_1(t) = 2bt + c$，$\omega_2(t) = 2bt$，

其频率差为常数，为进行短时傅立叶变换，选择一个窗函数，取高斯窗 $\sigma = 0.05$;，窗函数为

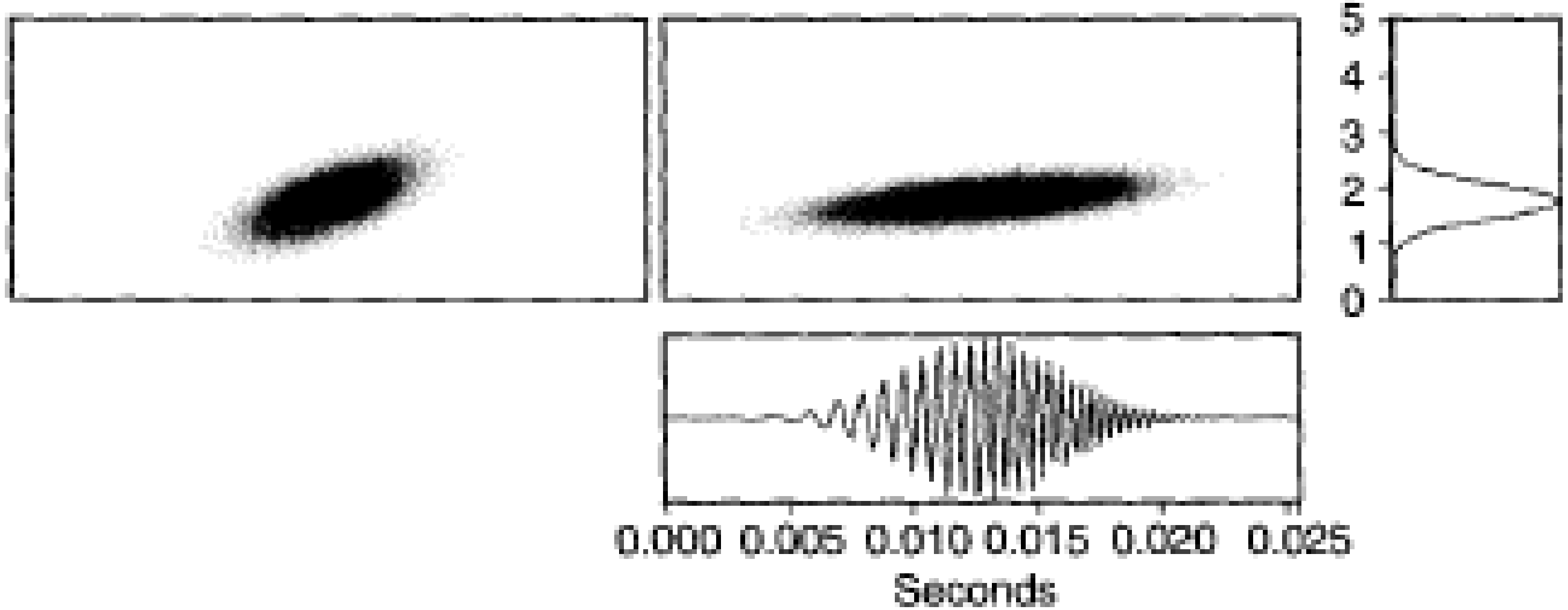
$$g(t) = \frac{1}{(\sigma^2\pi)^{1/4}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$$

信号波形(实部)和它的短时傅立叶变换的幅度图 $|STFT(t,\omega)|^2$。



0.5
0
-0.5
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

例．线性Chirp信号的例子，对STFT和功率谱进行比较



STFT 的频域等价形式

$$STFT(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)g^{*}(\tau-t)e^{-j\omega\tau}d\tau=\hat{x}(\omega)*\left(\hat{g}^{*}(\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}(\lambda)\hat{g}^{*}(\omega-\lambda)e^{-j(\omega-\lambda)t}d\lambda=e^{-j\omega t}<\hat{x}(\lambda),\hat{g}_{\omega,t}(\lambda)>$$

$$\hat{g}_{\omega,t}(\lambda)=\hat{g}(\omega-\lambda)e^{-j\lambda t}$$

$STFT(t,\omega)$ 反映了信号在时一频联合区域

$\left[t-\Delta_t/2,t+\Delta_t/2\right]\times\left[\omega-\Delta_\omega/2,\omega+\Delta_\omega/2\right]$ 的性质。

$$\Delta_t\Delta_\omega\geq 1/2$$

对于能量归一化的窗函数g, $\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)|^2 d\tau = 1$，STFT 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2\pi} \iint |STFT(t,\omega)|^2 dt d\omega$$

说明，$|STFT(t,\omega)|^2$ 反映了信号的时一频联合能量谱。

STFT 的反变换

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi \|g\|^2} \iint DTFT(t,\omega) g_{t,\omega}(\tau) dt d\omega$$

核函数方程和冗余性

STFT 满足如下的核函数方程，

$$STFT(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\iint STFT(t',\omega')K(t,\omega;t'\omega')dt'd\omega'$$

核函数为

$$K(t,\omega;t'\omega')=< g_{t,\omega}(\tau),g_{t',\omega'}(\tau) >$$

STFT 的离散化

仅计算在 (t,ω) 离散采样点 $(t=nT,\omega=m\Omega)$ 的值 $STFT(nT,m\Omega)$，

这里 T,Ω 分别是时间和频率的采样间隔。

离散化的一个重要问题是：如何选取采样间隔 T,Ω，

才能由 $\{STFT(nT,m\Omega),n\in Z,m\in Z\}$ 重构信号，如何重构？

Gabor 展开

从时频谱图的角度，快速计算参数离散STFT

设 $\tilde{x}(m) = x(mT_s),$

$$\tilde{g}(m) = 0 \qquad m < 0, m > L-1$$

$$N \geq L$$

定义：

$$X_D(n,k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m + n\Delta M)\tilde{g}^*(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

一个数据滑动的FFT结构，也可以用多FFT机并行实现

$$SFTF\left(nT, k\frac{1}{N}\omega_s\right) = T_s e^{-\frac{2\pi}{N}kn\Delta M} X_D(n,k)$$

忽略幅度因子，时频谱图为

$$\left|SFTF(nT, k\Omega)\right|^2 = \left|X_D(n,k)\right|^2$$

$$\Omega = \frac{1}{N}\omega_s, \qquad \Delta M = \frac{T}{T_s}$$

$$N \geq L \geq \Delta M$$

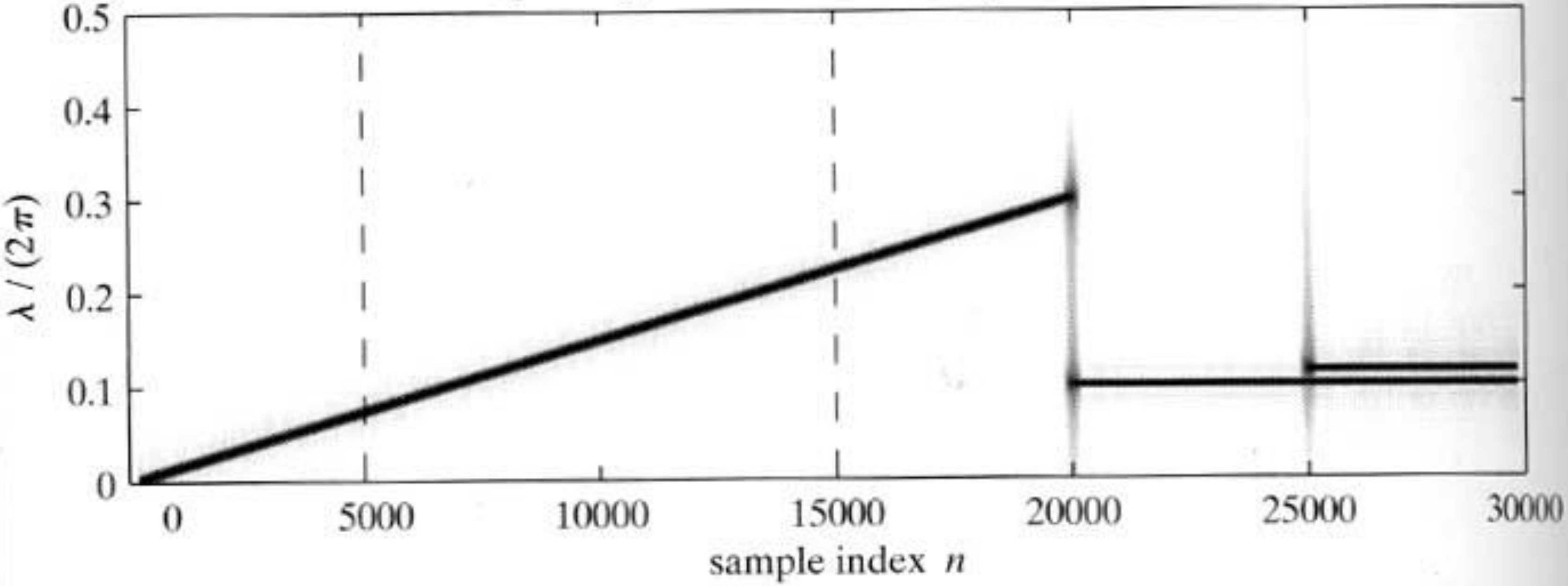
一个实例研究

$$x(n)=\begin{cases}0 & n<0\\ \cos\left(\alpha_0 n^2\right) & 0\le n\le 20000\\ \cos(0.2\pi n) & 20000<n\le 25000\\ \cos(0.2\pi n)+\cos(0.23\pi n) & 25000<n\end{cases}$$

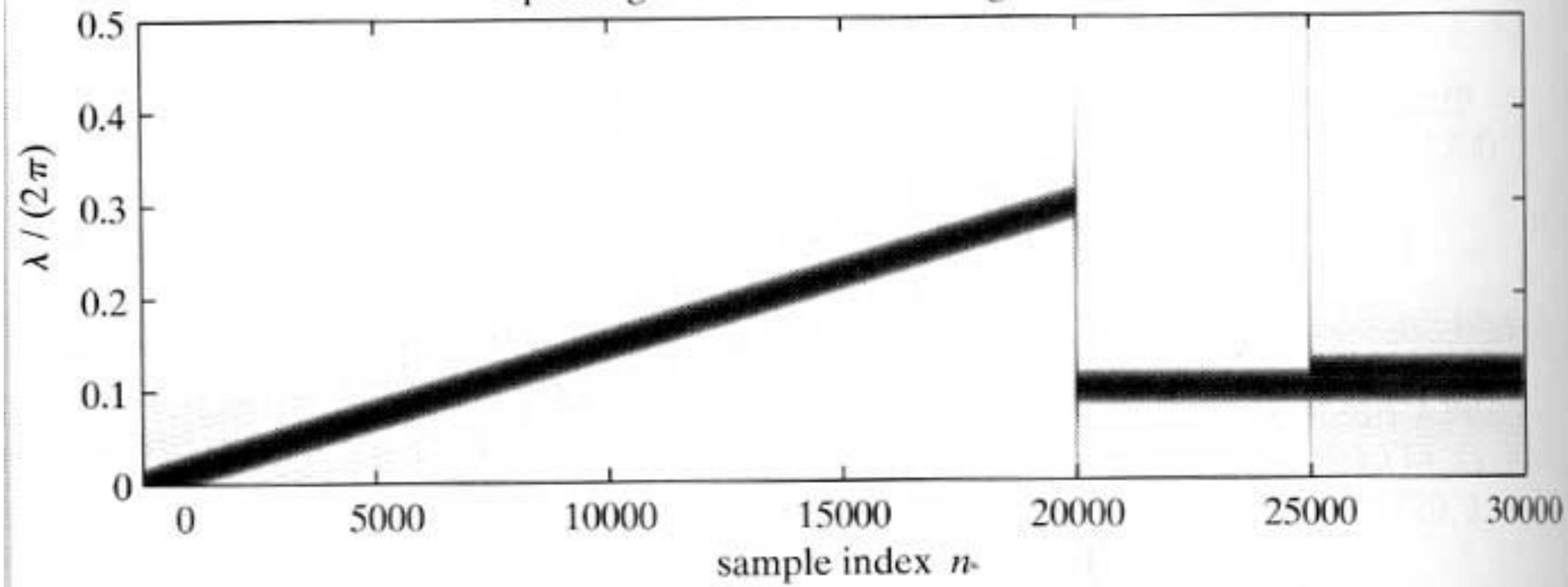
采用Hamming窗作为分析窗进行STFT

$$g(m)=\begin{cases}0.54-0.46\cos(2\pi m/M), & 0\le m\le M\\ 0, & otherwise\end{cases}\qquad \Delta_\omega\approx\frac{8\pi}{M}$$

Spectrogram for Window Length $L = 401$



Spectrogram for Window Length $L = 101$



9.4 Cabor 展开

Gabor 展开是 Gabor 于 1946 年提出的，

1980 年 Bastianns 提出了利用对偶函数计算 Gabor 系数的方法，

1990 年 Wexler 等发表了离散 Gabor 展开的计算问题的论文，

Gabor 获得 1971 年诺贝尔奖

连续 Gabor 展开

对于信号$x(t)$，Gabor 展开定义为

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{m,n}h_{m,n}(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{m,n}h(t-mT)e^{jn\Omega t}$$

$h_{m,n}(t)=h(t-mT)e^{jn\Omega t}$ 是 Gabor 展开的基函数集， **时频原子**

它是由原函数$h(t)$经过平移和调制生成的函数集，$c_{m,n}$ 是 Gabor 展开系数，

T 和 Ω 分别是时间和频率采样间隔。

为使 Gabor 展开成为信号的一种良好的时一频局域性表示，要求 $h(t)$ 在时域和频域能量都是集中在零附近，

设在时域 $h(t)$ 能量主要集中在 $\left[-\Delta_t/2, \Delta_t/2\right]$，

而 $h(t)$ 的傅立叶变换 $\hat{h}(\omega)$ 的能量主要集中在 $\left[-\Delta_\omega/2, \Delta_\omega/2\right]$

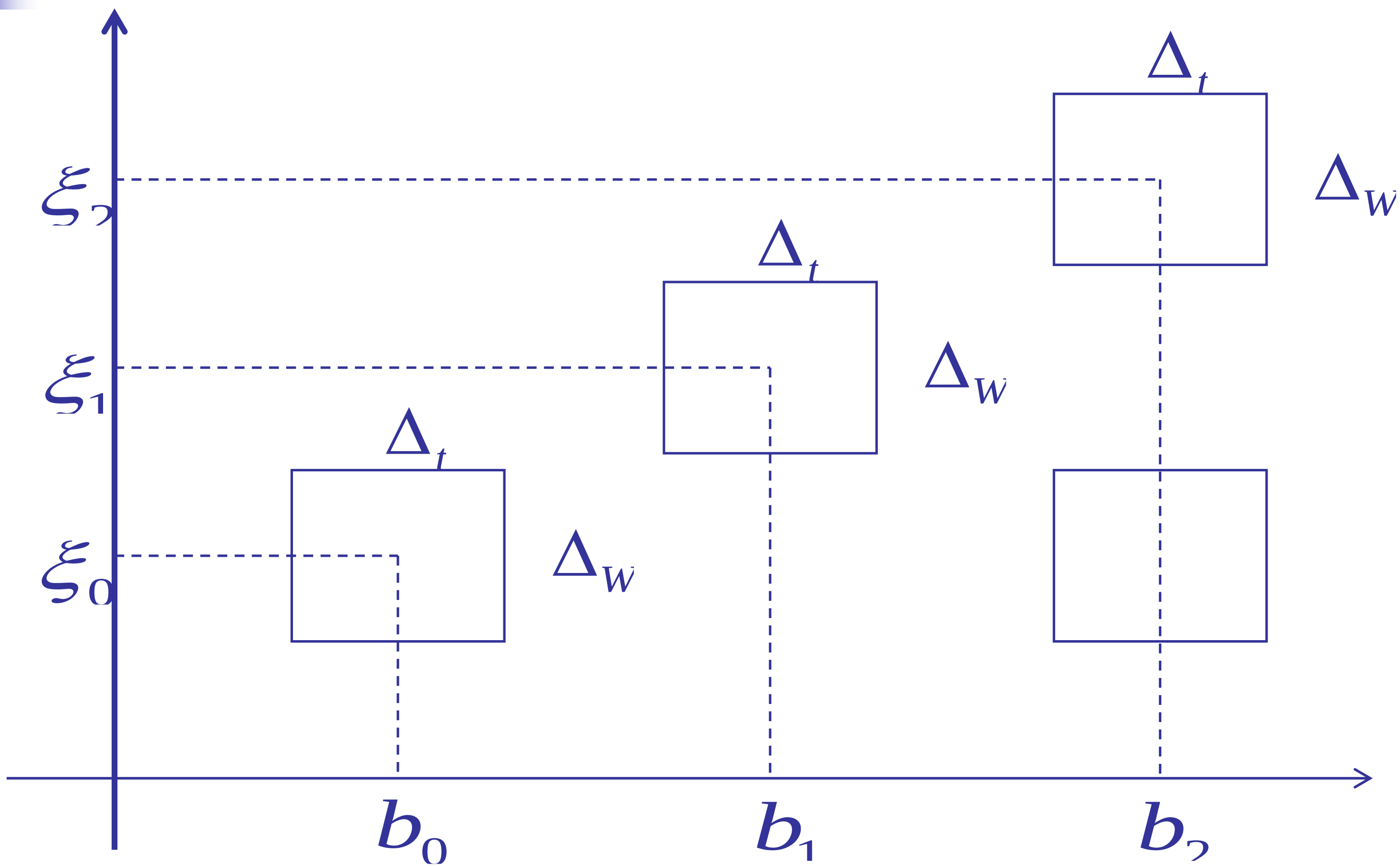
$h_{m,n}(t) = h(t-mT)e^{jn\Omega t}$ 在时域和频域的能量分别集中在

$\left[mT-\Delta_t/2, mT+\Delta_t/2\right]$ 和 $\left[n\Omega-\Delta_\omega/2, n\Omega+\Delta_\omega/2\right]$，

每个系数 $c_{m,n}$ 近似表达了信号在时一频区间

$\left[mT-\Delta_t/2, mT+\Delta_t/2\right] \times \left[n\Omega-\Delta_\omega/2, n\Omega+\Delta_\omega/2\right]$ 的性质.

系数$c_{m,n}$所代表的时一频格子的示意图如图



在 Gabor 的原始论文中，采用的原函数$h(t)$是高斯函数，即

$$h(t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha t^2/2},\quad \hat{h}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/4}e^{-\omega^2/2\alpha}.$$

时一频格子的大小可以达到测不准原理的下界，

$$\Delta_t\Delta_\omega=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}$$

要使 Gabor 展开存在，T 和 Ω 满足的约束条件为[Wexler，1990]

$$T\Omega \le 2\pi$$

当 $T\Omega = 2\pi$ 时称为临界采样，对应着使 Gabor 展开成立的最稀疏的时一频采样

$T\Omega < 2\pi$ 时称为过采样，过采样情况下，Gabor 展开系数 $c_{m,n}$ 中存在冗余

但这种冗余，在信号处理中可用于噪声消除或更有效地检测信号。

Gabor 展开的完整性

当基函数集$\{h_{m,n}(t)=h(t-mT)e^{jn\Omega t}, m\in Z, n\in Z\}$构成一个框架时，

存在一个对偶原函数$\gamma(t)$，$\{\gamma_{m,n}(t)=\gamma(t-mT)e^{jn\Omega t}, m\in Z, n\in Z\}$

构成对偶框架[Daubechies，1992]，利用对偶框架计算 Gabor 展开系数$c_{m,n}$，

$$c_{m,n}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\gamma_{m,n}^{*}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\gamma_{m,n}^{*}(t-mT)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$=\langle x(t),\gamma_{m,n}(t)\rangle=STFT(mT,n\Omega)$$

Gabor 展开系数$c_{m,n}$实际是以$\gamma(t)$做窗函数的 STFT 在时一频离散

采样位置$(mT,n\Omega)$的取值

信号理想重构

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t')\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_{m,n}^{*}(t')h_{m,n}(t)dt'$$

要求

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_{m,n}^{*}(t')h_{m,n}(t)=\delta(t-t')$$

利用 Poisson 求和公式，可以转化为如下的积分方程

$$\frac{T_0\Omega_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\gamma_{m,n}^{0*}(t)dt=\delta(m)\delta(n)$$

$$\gamma_{m,n}^{0*}(t)=\gamma(t-mT_0)e^{jn\Omega_0}\quad T_0=2\pi/\Omega,\Omega_0=2\pi/T$$

周期离散Gabor展开

周期离散 Gabor 展开为

$$\tilde{x}(k)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{c}_{m,n}\tilde{h}(k-m\Delta M)W_L^{nk\Delta N}$$

Gabor 展开系数利用如下求和式获得

$$\tilde{c}_{m,n}=\sum_{k=0}^{L}\tilde{x}(k)\tilde{\gamma}^*(k-m\Delta M)W_L^{-nk\Delta N}$$

离散信号的周期是 L（对有限长信号，将信号作为周期序列的一个周期），

Gabor 系数 $c_{m,n}$ 在时一频方向的周期分别是 M,N，考虑到周期性，令

$$\tilde{x}(k)=x(kT_s),\quad \tilde{h}(k)=h(T_sk)$$

$$\Delta M=\frac{T}{T_s},\quad \Delta N=\frac{\Omega T_sL}{2\pi},\quad W_L=e^{j\frac{2\pi}{L}}$$

假设 $L=\Delta MM=\Delta NN$，Gabor 展开公式简化成如下形式

$$\tilde{x}(k)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{c}_{m,n}\tilde{h}(k-m\Delta M)W_N^{nk}$$

$$\tilde{c}_{m,n}=\sum_{k=0}^{L}\tilde{x}(k)\tilde{\gamma}^*(k-m\Delta M)W_N^{-nk}$$

可以利用 FFT 进行计算

过采样率 $\alpha=\dfrac{2\pi}{T\Omega}=\dfrac{L}{\Delta M\Delta N}=\dfrac{MN}{L}=\dfrac{N}{\Delta M}$

由 $\tilde{h}(k)$ 求 $\tilde{\gamma}(k)$ 的方程

求解方程[Wexler,1990]

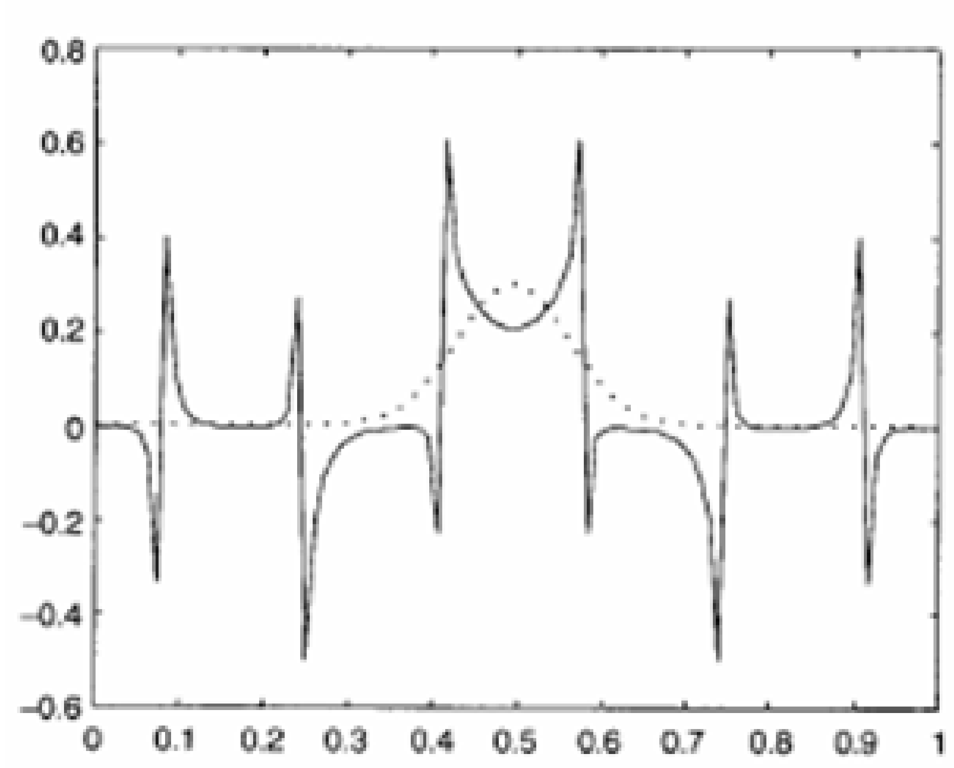
$$\sum_{k=0}^{L-1} \tilde{h}(k+qN) W_{\Delta M}^{-pk} \tilde{\gamma}^*(k) = \frac{\Delta M}{N} \delta(p)\delta(q) \qquad 0 \le p < \Delta M, 0 \le q < \Delta N$$

矩阵形式为

$$H\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{u} \qquad\qquad H = \left[h_{i,j}\right]_{\Delta M \Delta N \times L}$$

$$h_{p\Delta M+q,k} = \tilde{h}(k+qN) W_{\Delta M}^{-pk} \qquad \boldsymbol{u} = \left[\frac{\Delta M}{N}, 0, \cdots, 0\right]^T$$

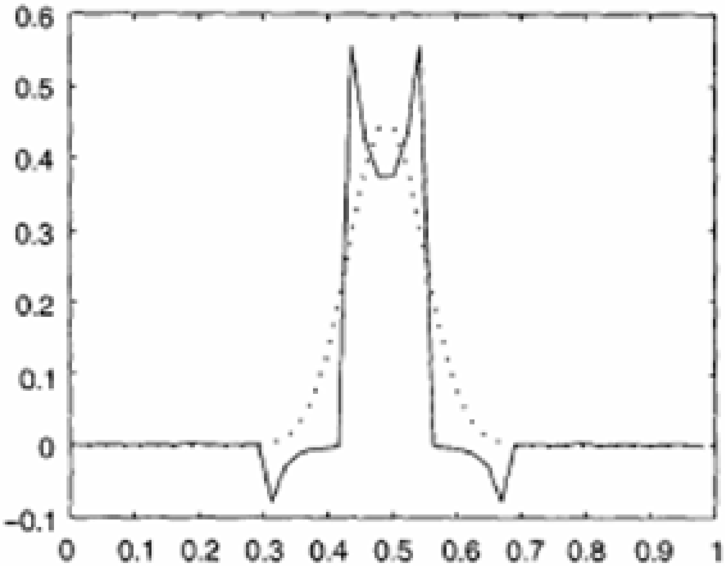
$$\boldsymbol{\gamma} = \left[\tilde{\gamma}^*(0), \tilde{\gamma}^*(1), \cdots, \tilde{\gamma}^*(L-1)\right]^T$$



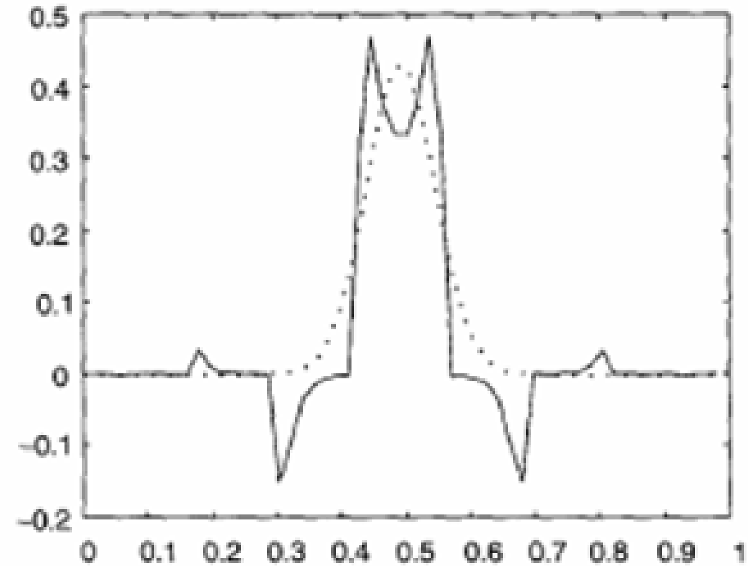
$\tilde{h}(k)$ 和 $\tilde{\gamma}(k)$ 的包络图，虚线表示 $\tilde{h}(k)$，实线表示 $\tilde{\gamma}(k)$

这是临界采样的情况，$L=128, \Delta M=N=16$，横坐标归一化

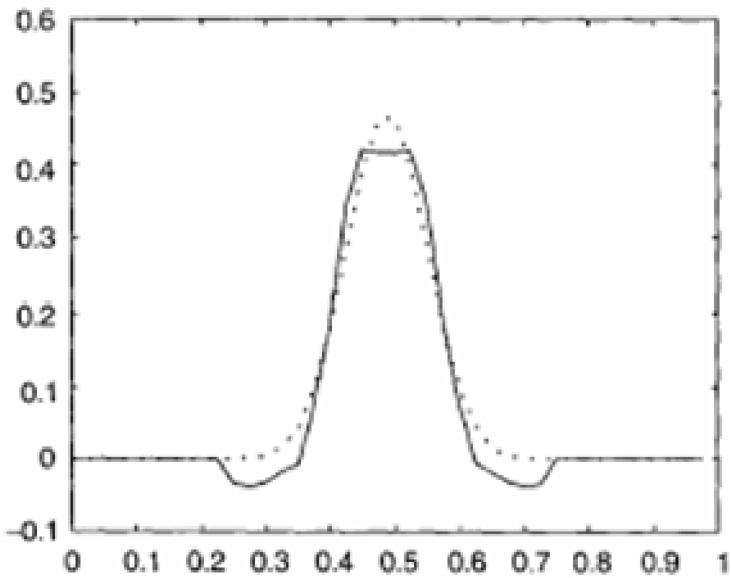
过采样率



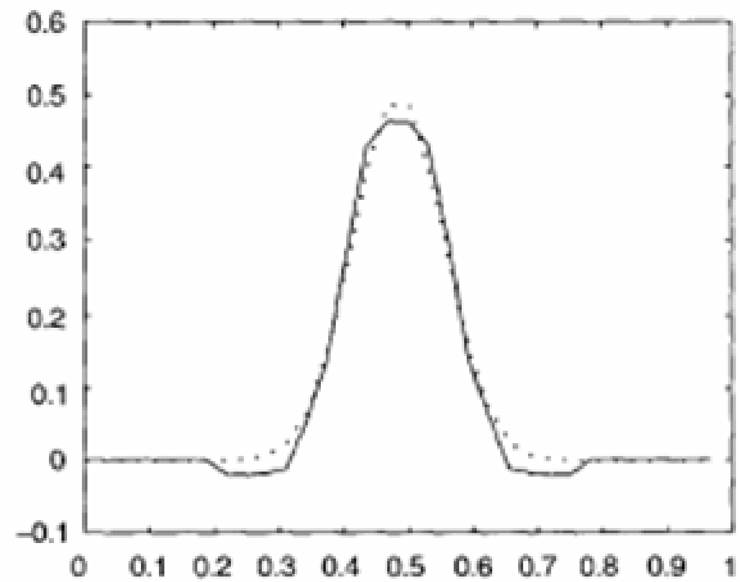
(a) $L = 56$, $N = 8$, $\Delta M = 7$,
Oversampling = 8/7, err = 0.4018



(b) $L = 48$, $N = 8$, $\Delta M = 6$,
Oversampling = 4/3, err = 0.2598



(c) $L = 40$, $N = 8$, $\Delta M = 5$,
Oversampling = 8/5, err = 0.1628



(d) $L = 32$, $N = 8$, $\Delta M = 4$
Oversampling = 2, err = 0.0865