第二章　线性规划(linear programming)的基本性质

两变量线性规划问题的图解法

1.线性不等式的几何意义— 半平面

2.图解法步骤

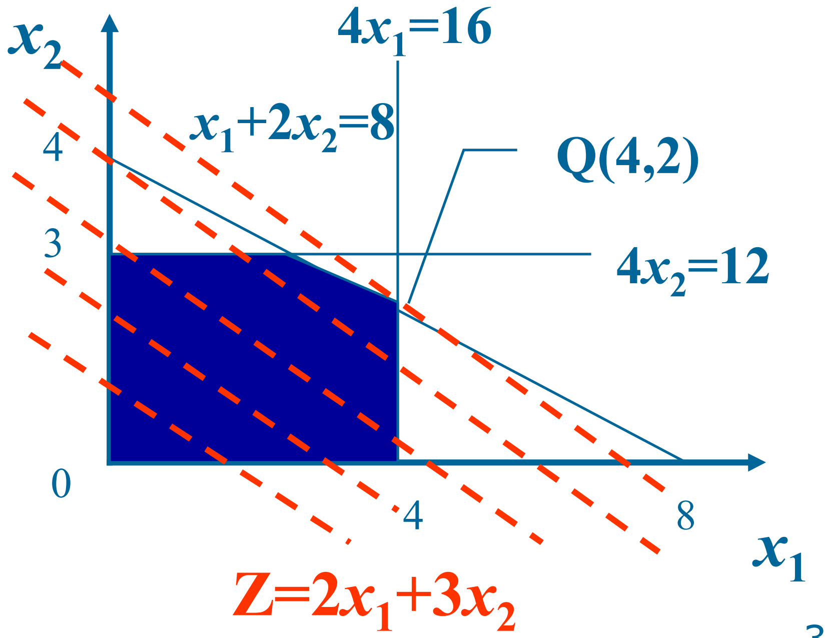
1) 作出LP问题的可行域

2) 作出目标函数的等值线

3) 移动等值线到可行域边界得到最优点

例 $\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$

$$
s.t.\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \le 8 \\
4x_1 \le 16 \\
4x_2 \le 12 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

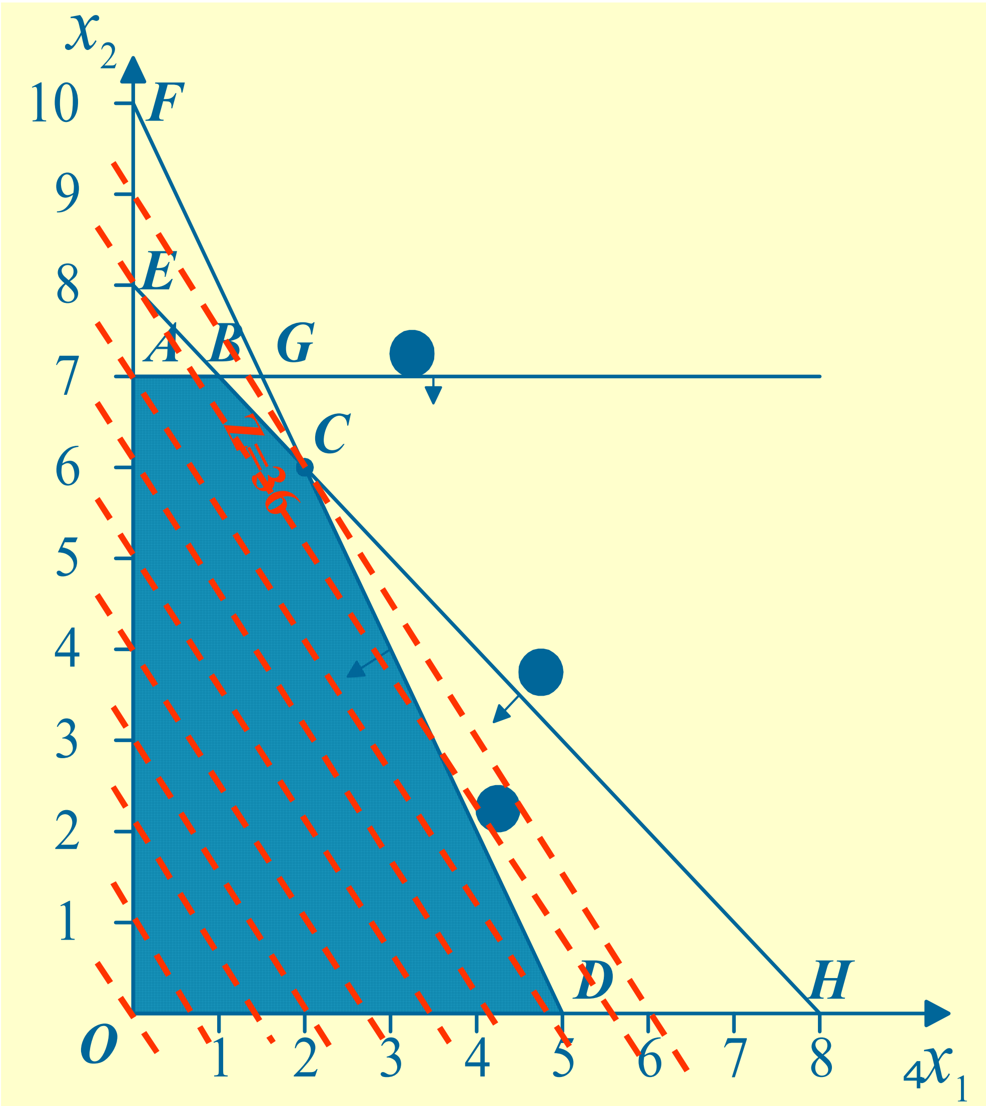


做目标函数$2x_1+3x_2$的等值线，与阴影部分的边界相交于Q(4,2)点，Q点为最优解。

例

$$\max Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



最优解: $x_1 = 2$

$x_2 = 6$

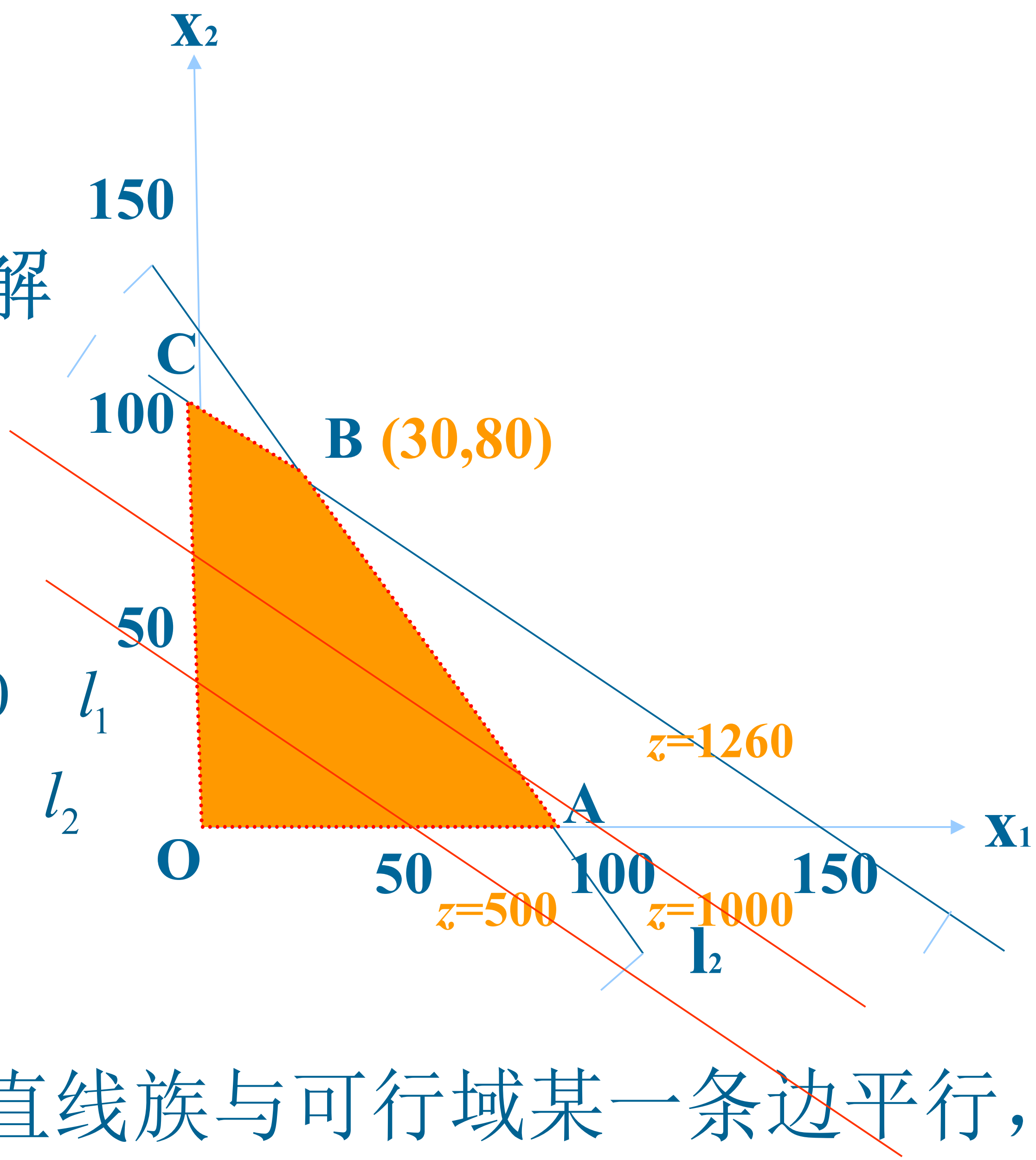
$Z = 36$

结论：若LP问题存在最优解，则必在可行域的某个极点上找到。

一般的，当等值线沿目标函数法向量方向平行移动时，目标函数值逐步增加；当等值线沿目标函数法向量反方向 平行移动时，目标函数值逐步减少。

二、几种特殊情况

1、LP存在多个解



例： $\min z = -10x_1 - 15x_2$

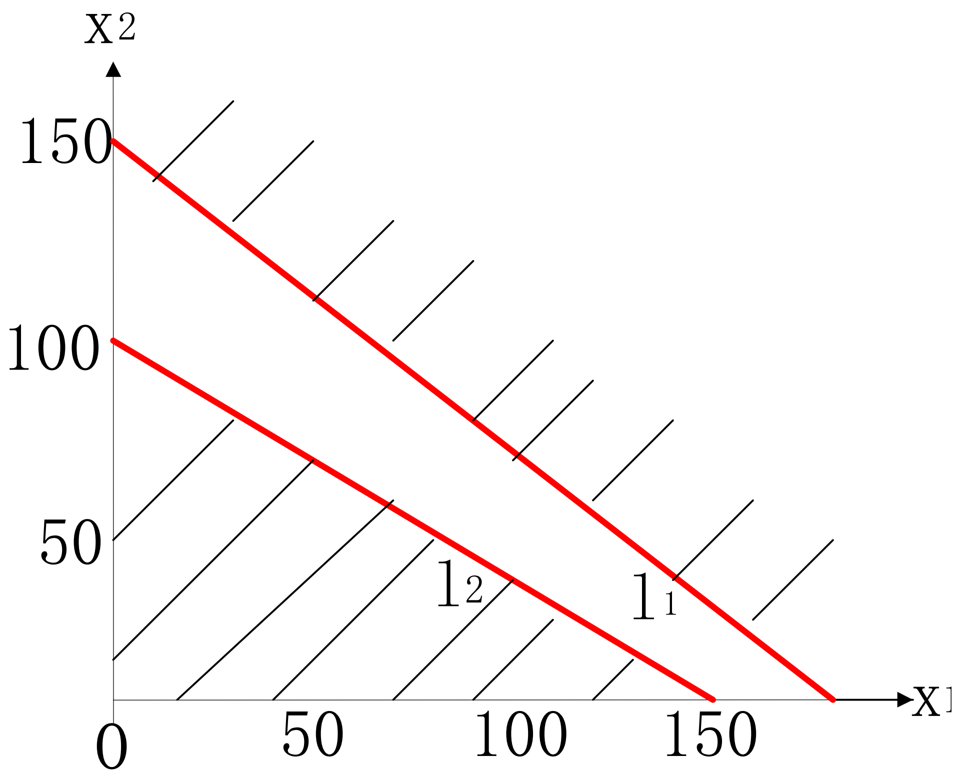
$$
\begin{aligned}
s.t \quad & 2x_1 + \ \ 3x_2 \le 300 \quad l_1 \\
& 2x_1 + 1.5x_2 \le 180 \quad l_2 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

结论：以z为参数的直线族与可行域某一条边平行，最终重合，则 该LP存在多个解。

2、LP问题无可行解

例： $\min z = -10x_1 - 12x_2$

$$
\begin{aligned}
s.t \quad & 5x_1 + 6x_2 \geq 900 \quad l_1 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 300 \quad l_2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

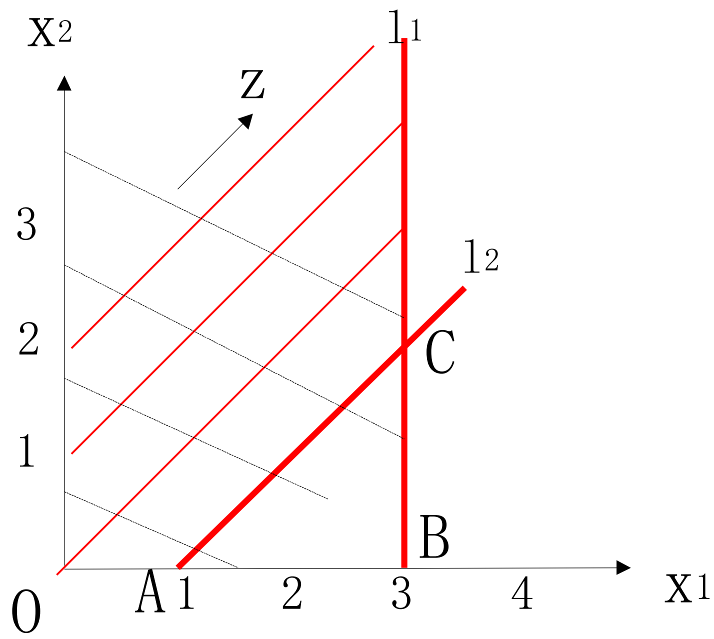


结论：若*LP*的可行域为空集，则该*LP*问题无可行解。

3、LP问题存在无界解

例： $\min z = -3x_1 - 4x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & x_1 \le 3 & l_1 \\ & x_1 - x_2 \le 1 & l_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 & \end{aligned}$$



判断：若LP的可行域无界，则该LP可能存在无界解。

3．图解法的作用

- 能解决少量问题
- 揭示了线性规划问题的若干规律

规律1：

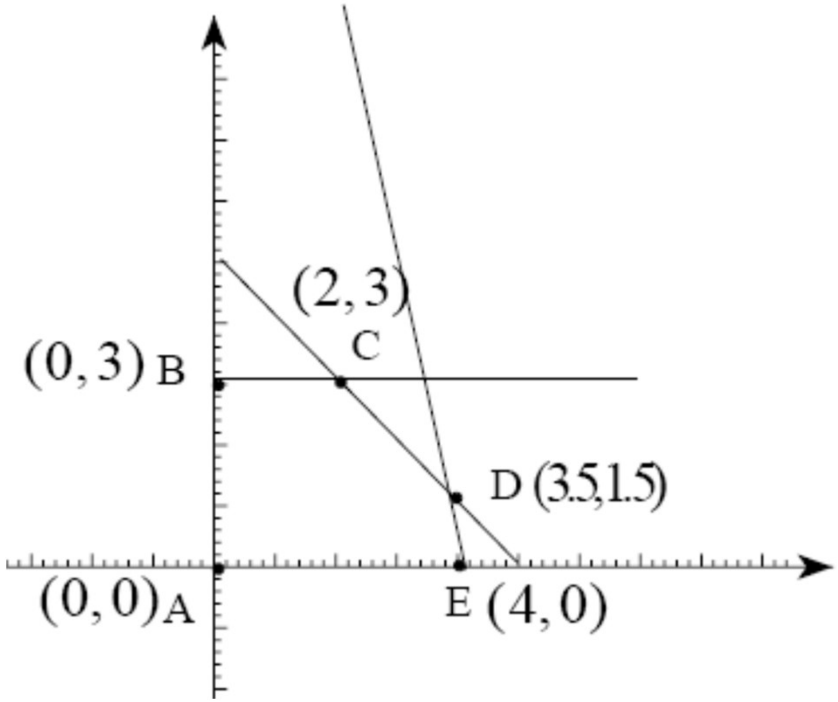
- LP问题
  - 有可行解
    - 有最优解
      - 唯一解
      - 无穷多解
    - 无界（可行域为无界）
  - 无可行解（无解）

思考题

已知LP问题如下：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 5x_2 \le 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ & x_1 + \quad x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



假设$c_1 \ne 0, c_2 \ne 0$，讨论c_1, c_2的值如何变化，该 LP 可行域的每个极点依次使目标函数达到唯一最优。

线性规划的基本性质

LP的标准形式

1、极小化型

2、约束方程为等式

3、所有的决策变量为非负值

4、约束方程的右端项系数为非负值

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,\cdots,n$$

$$\min \quad z = cx \qquad c_{1\times n}$$

$$s.t. \quad Ax = b \quad A_{m\times n} \quad b_{m\times 1} \geq 0$$

$$x \geq 0 \qquad x_{n\times 1}$$

- 非标准型**LP**模型转化为标准型**LP**模型

一、目标函数是极大化的转化

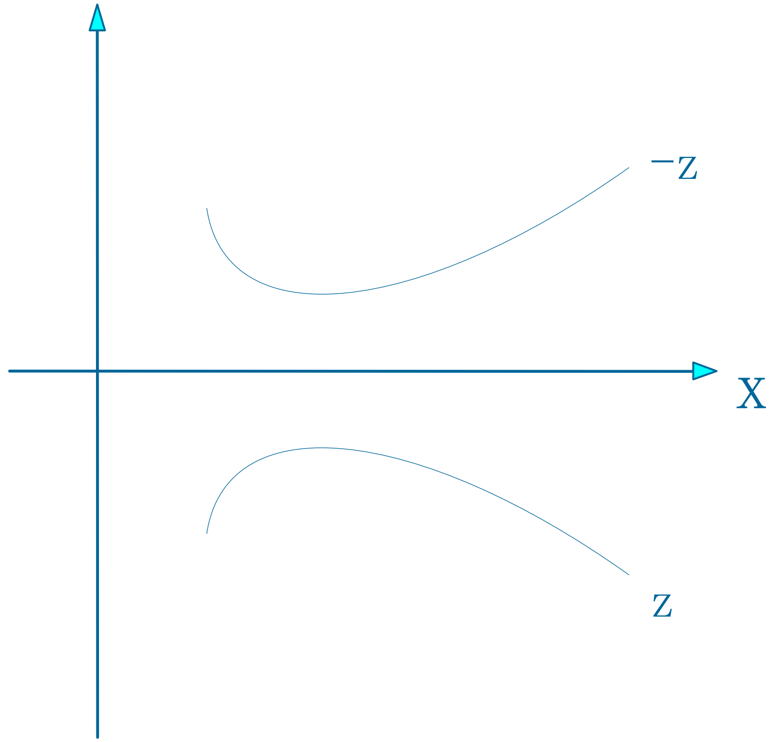
例： $\max\ z = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3$

等价变换：令$z' = -z$,

则目标函数转换为$\rightarrow$

$z' = -3x_1 - 2x_2 + 7x_3$

$$\max z \Rightarrow \min z'$$



二、约束方程为不等式的转换

1、约束方程为≤

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$$

等价于

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i$$

$y_i \ge 0$ y_i称为松弛变量(slack variable)

2、约束方程为≥

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i$$

等价于

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y_i = b_i$$

$y_i \ge 0$ y_i称为剩余变量(surplus variable)

三、决策变量x_j无非负限制的转换

如：x_j无非负约束

引入$x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0$, 令$x_j = x_j' - x_j''$

四、决策变量有上下界的转换

如：$1 \le x_3 \le 5, \to x_3 \ge 1,\ x_3 \le 5$

令 $x_3' = x_3 - 1$, 则 $x_3' \ge 0, x_3' \le 4$

例：
$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$\begin{aligned} s.t \quad & x_1 + x_2 \le 7 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \ge 5 \\ & 1 \le x_3 \le 6 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \text{无非负约束} \end{aligned}$$

令：$\overline{z} = -3x_1 + 2x_2 - x_3$ ，

$x_2 = x_2' - x_2'', x_3' = x_3 - 1$

$$\min \overline{z} = -3x_1 + 2(x_2' - x_2'') - (x_3' + 1)$$
$$\begin{aligned} s.t \quad & x_1 + (x_2' - x_2'') + x_4 = 7 \\ & x_1 - (x_2' - x_2'') + x_3' - x_5 = 4 \\ & x_3' + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2', x_2'', x_3', x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{aligned}$$

第二节　LP问题的基本性质

一、可行解

满足LP模型的约束条件且满足非负条件的解。

例：

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\
s.t\quad & x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

判断 $X=(5\ \ 1)^T$，$X=(-1\ \ 3)^T$，$X=(2\ \ 1)^T$ 是否为可行解？

定理1：线性规划的可行域$\{x|Ax=b,x\geq 0\}$是凸集。

二．最优极点

考虑标准形式：$\begin{cases} \min & cx \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$

设可行域$S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \varnothing.$

极点：$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$

极方向：$d^{(1)}, d^{(2)}, \cdots, d^{(l)}.$

由表示定理，对任意$x \in S$

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^{(j)}$$

代入标准型 →

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, j = 1, \cdots, k$$

$$\mu_j \geq 0, j = 1, \cdots, l.$$

$$\begin{cases} \min & \sum_{j=1}^{k}\lambda_j cx^{(j)}+\sum_{j=1}^{l}\mu_j cd^{(j)}=f(x) \\ s.t. & \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1 \\ & \lambda_j\geq 0,\ j=1,\cdots,k \\ & \mu_j\geq 0,\ j=1,\cdots,l. \end{cases}$$

(1) 若存在j,使得$cd^{(j)}<0$，则$f(x)\to-\infty$,即该问题无界.

(2) 对任意j,$cd^{(j)}\geq 0$,令$\mu_j=0$, $j=1,\cdots,l$.得

$$\begin{cases} \min & \sum_{j=1}^{k}\lambda_j cx^{(j)} \\ s.t. & \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1 \\ & \lambda_j\geq 0,\ j=1,\cdots,k \end{cases}$$

令$cx^{(p)}=\min_{1\leq j\leq k} cx^{(j)}$,则当$\lambda_p=1,\lambda_j=0\,(j\neq p)$时，$f(x)=cx^{(p)}$最小。

对任意$x \in S$,由于

$$cx = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j cx^{(j)} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j cd^{(j)}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j cx^{(j)} \geq \sum_{j=1}^{k} \left(cx^{(p)}\right) \lambda_j$$

$$\geq \left(cx^{(p)}\right) \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = cx^{(p)}$$

所以，极点$x^{(p)}$是原问题的最优解。

定理2. 设线性规划**(L)**的可行域非空，则

（**1**）**(L)**存在最优解的充要条件是对任意的j, $cd^{(j)} \geq 0$,

其中$d^{(j)}$为可行域的极方向。

（**2**）若**(L)**存在最优解，则目标函数的最优值可在某个极点达到。

三、基和基本解

$$\min \quad z = cx \qquad\qquad c_{1\times n}$$

$$s.t. \quad Ax = b \qquad\qquad A_{m\times n}\,(n \geq m)$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad x_{n\times 1}$$

设$r(A) = m$, $\qquad A \xrightarrow{\text{按列分块}} (P_1, P_2, \cdots, P_n)$

$Ax = b$ 等价于

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n = b$$

1、系数矩阵**A**中任意$\boldsymbol{m}$列所组成的$\boldsymbol{m}$阶可逆子方阵**B**，称为**(LP)**的一个基**(**矩阵**)**，变量$\boldsymbol{x_j}$，若它所对应的列$\boldsymbol{P_j}$包含在基**B**中，则称$\boldsymbol{x_j}$为基变量，否则称为非基变量。基变量的全体称为一组基变量，记

$$x_{B_1}, x_{B_2}, \cdots, x_{B_m}.$$

基矩阵的个数最多为 $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

(2) 设$A=\begin{bmatrix}B & N\end{bmatrix}$，其中$r(B)=m$，设$x=\begin{bmatrix}x_B \\ x_N\end{bmatrix}$.

由$Ax=b$得，$Bx_B+Nx_N=b$

$\Rightarrow \quad x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$

令 $x_N=0$，得$x=\begin{bmatrix}B^{-1}b \\ 0\end{bmatrix}$ 称**x为(LP)**的基本解。

(3) 若$B^{-1}b\geq 0$，则称$x=\begin{bmatrix}B^{-1}b \\ 0\end{bmatrix}$为$(LP)$的基本可行解，

B称为可行基矩阵，$x_{B_1}, x_{B_2}, \cdots, x_{B_m}$为一组可行基。

(4) 若$B^{-1}b>0$，则称基本可行解是非退化的，否则称为退化的。

例：$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \end{cases}$ 引入松弛变量化为

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad = 6 \\ x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 = 4 \end{cases}$$

系数矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

基矩阵为：

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad = 6 \\ x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 = 4 \end{cases}$$

求基本解。

$$(1)\quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_1^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1}b = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{24}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{基本解为} x^{(1)} = \left(\frac{24}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0\right)^T.$$

或 $B_1 X_{B_1} = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{增广矩阵}} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xRightarrow{\text{初等变换}} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

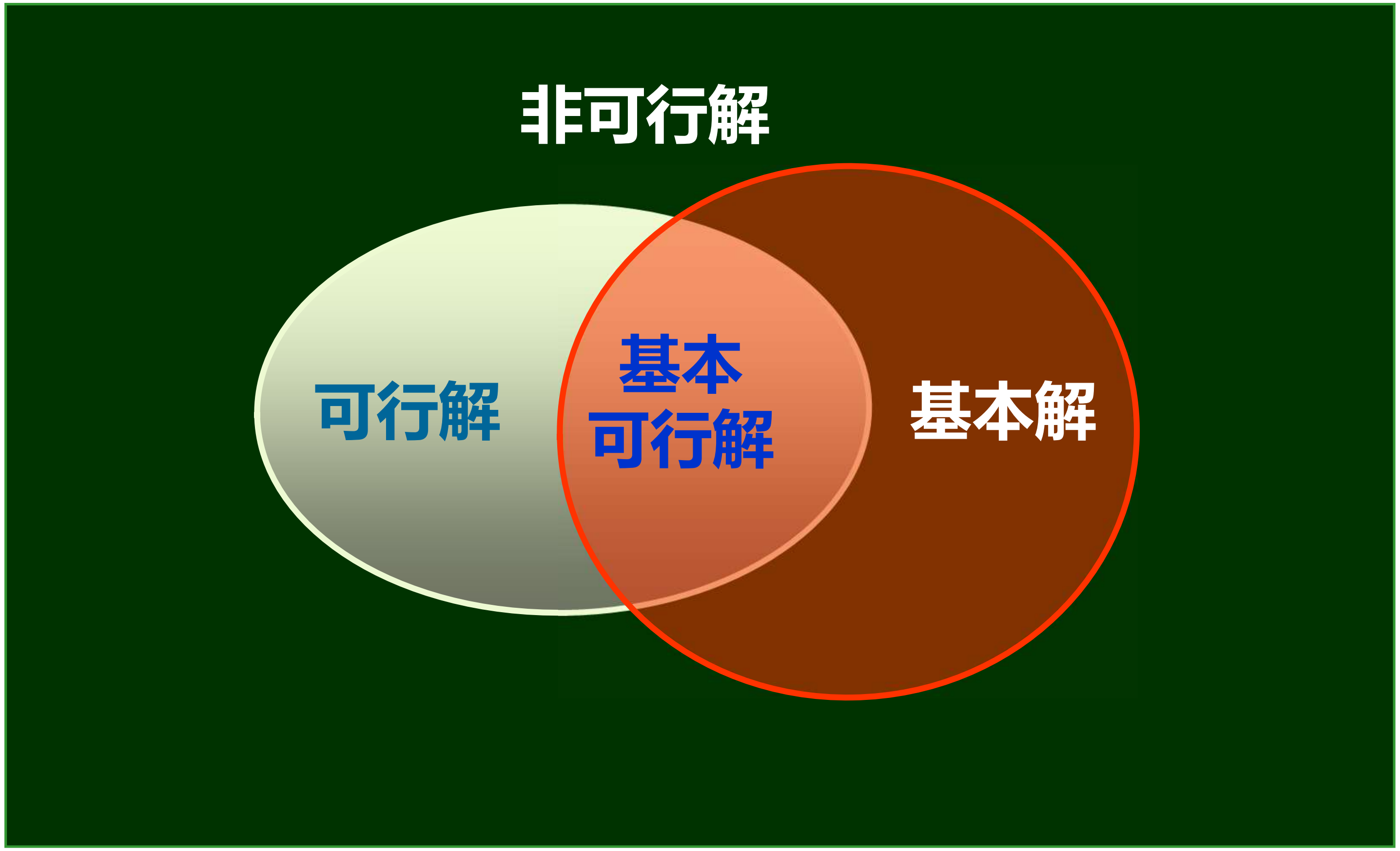
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 24/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right) \qquad x_1 = 24/5 \quad x_2 = 2/5$$

$$x^{(1)} = \left(24/5 \quad 2/5 \quad 0 \quad 0\right)^T \; x^{(2)} = (4 \quad 0 \quad -2 \quad 0)^T \; x^{(3)} = (6 \quad 0 \quad 0 \quad -2)^T$$

$$x^{(4)} = (0 \quad -2 \quad -12 \quad 0)^T \; x^{(5)} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 8)^T \; x^{(6)} = (0 \quad 0 \quad -6 \quad 4)^T$$

只有$\boldsymbol{x}^{(1)}$和$\boldsymbol{x}^{(5)}$为基本可行解。

线性规划标准型问题解的关系



可行解、基本解和基本可行解举例

$$\max Z = 6x_1 + 4x_2$$

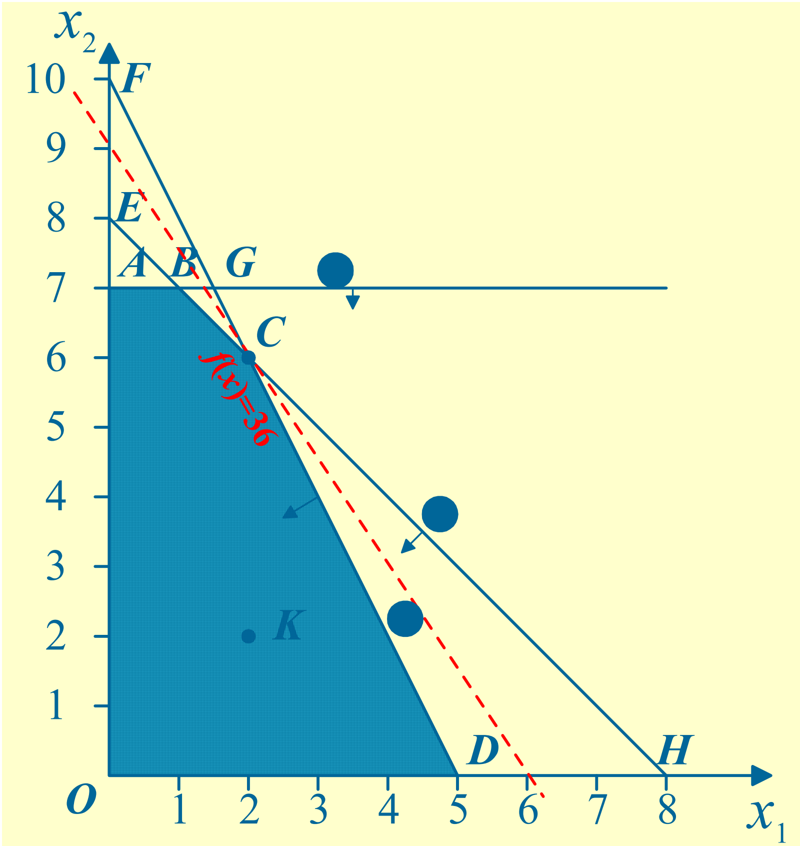
$$s.t.\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min Z = -6x_1 - 4x_2$$

$$\Rightarrow s.t.\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可行解、基本解和基本可行解举例



非基变量	基变量			图中的点解
x_1, x_2	$x_3=10$	$x_4=8$	$x_5=7$	O 基本可行解
x_1, x_3	$x_2=10$	$x_4=-2$	$x_5=-3$	F 基本解
x_1, x_4	$x_2=8$	$x_3=2$	$x_5=-1$	E 基本解
x_1, x_5	$x_2=7$	$x_3=3$	$x_4=1$	A 基本可行解
x_2, x_3	$x_1=5$	$x_4=3$	$x_5=7$	D 基本可行解
x_2, x_4	$x_1=8$	$x_3=-6$	$x_5=7$	H 基本解
x_3, x_4	$x_1=2$	$x_2=6$	$x_5=1$	C 基本可行解 最优解
x_3, x_5	$x_1=1.5$	$x_2=7$	$x_4=-0.5$	G 基本解
x_4, x_5	$x_1=1$	$x_2=7$	$x_3=1$	B 基本可行解
$x_1=2, x_2=2, x_3=4, x_4=4, x_5=3$				K 可行解

三. 基本可行解与极点之间的关系

引理：可行解$\bar{x}$是基本可行解 $\Leftrightarrow$ $\bar{x}$的非零分量所对应的A的列向量线性无关。

证明：不妨设$\bar{x}$的前k个分量为正分量

$$\bar{x}=\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_k,0,\cdots,0\right)^T,\ \bar{x}_j>0,\ j=1,\cdots,k.$$

"$\Rightarrow$"$\bar{x}$是基本可行解,则取正值的变量必为基变量，它们对应的列向量$P_1,P_2,\cdots,P_k$为基向量，所以线性无关。

"$\Leftarrow$"设$P_1,P_2,\cdots,P_k$线性无关,则$k\le m$.因为$\bar{x}$是可行解,所以有

$$P_1\bar{x}_1+P_2\bar{x}_2+\cdots+P_k\bar{x}_k=b$$

若$k=m$,则$B=\left(P_1,P_2,\cdots,P_k\right)$就是基.

若$k<m$,则一定可以从其余的$n-k$个列向量中再挑出$m-k$个列向量,设为$P_{k+1},\cdots,P_m$,使$P_1,P_2,\cdots,P_k,\cdots,P_m$线性无关。令$B=\left(P_1,P_2,\cdots,P_m\right)$

则B是基，且$P_1\bar{x}_1+P_2\bar{x}_2+\cdots+P_m\bar{x}_m+\cdots+P_n\bar{x}_n=b.$

所以,$\bar{x}$是相应于B的基本可行解。

定理2 设S是(L)的可行域,$\bar{x}\in S$，则$\bar{x}$是S的极点$\Leftrightarrow$ $\bar{x}$是(L)的基本可行解。

证明：“$\Rightarrow$” 设$\bar{x}=\left(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_k,\bar{x}_{k+1},\cdots,\bar{x}_n\right)^T$是$S$的极点，其中$\bar{x}_j>0, j=1,\cdots,k,$ $\bar{x}_j=0, j=k+1,\cdots,n.$ 设$\bar{x}_j$对应的列向量为P_j,则$P_1,P_2,\cdots,P_k$线性无关.

否则，存在不全为0的数$y_1,y_2,\cdots,y_k$,使得

$$y_1P_1+y_2P_2+\cdots+y_kP_k=0$$

令 $x_j^{(1)}=\begin{cases}\bar{x}_j+\lambda y_j & j=1,2,\cdots,k\\ 0 & j=k+1,\cdots,n\end{cases}$ $\quad x_j^{(2)}=\begin{cases}\bar{x}_j-\lambda y_j & j=1,2,\cdots,k\\ 0 & j=k+1,\cdots,n\end{cases}$

因为$\bar{x}_j>0, j=1,2,\cdots,k,$所以，当$\lambda$充分小时，有$x^{(1)}\geq 0$，$x^{(2)}\geq 0$。

由于$\bar{x}\in S$，因此$A\bar{x}=b,$即$\bar{x}_1P_1+\bar{x}_2P_2+\cdots+\bar{x}_kP_k=b.$

则 $Ax^{(1)}=\left(P_1,P_2,\cdots,P_k,P_{k+1},\cdots,P_n\right)\left(\bar{x}_1+\lambda y_1,\cdots,\bar{x}_k+\lambda y_k,0,\cdots,0\right)^T$

$$=\left(\bar{x}_1P_1+\bar{x}_2P_2+\cdots+\bar{x}_kP_k\right)+\lambda\left(y_1P_1+y_2P_2+\cdots+y_kP_k\right)=b$$

同理可证 $Ax^{(2)}=b$

所以，$x^{(1)}$，$x^{(2)}\in S$, 且$x^{(1)}\neq x^{(2)}$, 但$\bar{x}=\dfrac{1}{2}x^{(1)}+\dfrac{1}{2}x^{(2)}$

与$\bar{x}$是极点矛盾，所以$P_1,P_2,\cdots,P_k$线性无关，由引理,$\bar{x}$是基本可行解。

定理2 设S是(L)的可行域,$\bar{x}\in S$，则$\bar{x}$是S的极点$\Leftrightarrow$ $\bar{x}$是(L)的基本可行解。

“$\Leftarrow$” 已知$\bar{x}$是$Ax=b, x\geq 0$的基本可行解，即

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}\geq 0.$$

假设存在$x^{(1)}, x^{(2)}\in S$及$\lambda\in(0,1)$使得$\bar{x}=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}$.

设 $x^{(1)}=\begin{pmatrix} x_B^{(1)} \\ x_N^{(1)} \end{pmatrix}$, $x^{(2)}=\begin{pmatrix} x_B^{(2)} \\ x_N^{(2)} \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_B^{(1)} \\ x_N^{(1)} \end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix} x_B^{(2)} \\ x_N^{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_B^{(1)}+(1-\lambda)x_B^{(2)} \\ \lambda x_N^{(1)}+(1-\lambda)x_N^{(2)} \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad 0=\lambda x_N^{(1)}+(1-\lambda)x_N^{(2)}$

$\because\quad x^{(1)}, x^{(2)}\in S,\quad\therefore\quad x_N^{(1)}, x_N^{(2)}\geq 0$又因为$\lambda, 1-\lambda>0$, 所以 $x_N^{(1)}=x_N^{(2)}=0$。

$\because\quad x^{(1)}, x^{(2)}\in S,\quad\therefore\quad Ax^{(1)}=b,\ Ax^{(2)}=b$

即$Bx_B^{(1)}+Nx_N^{(1)}=b$ 且 $Bx_B^{(2)}+Nx_N^{(2)}=b$因此有 $x_B^{(1)}=B^{-1}b$ $x_B^{(2)}=B^{-1}b$

所以 $\bar{x}=x^{(1)}=x^{(2)}$,即$\bar{x}$是极点。

例：$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$

x_1, x_2

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

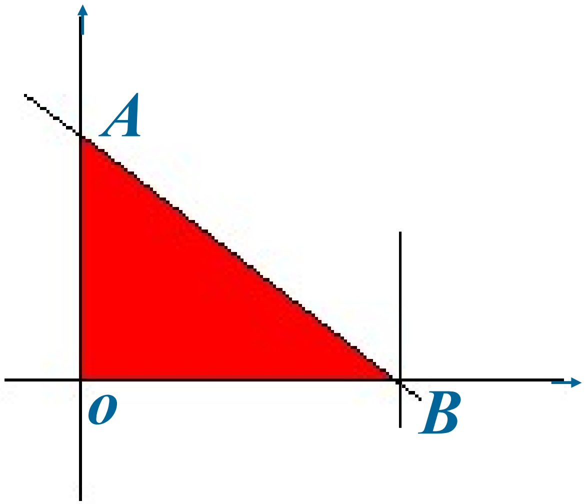
x_1, x_4

x_1, x_3

$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

x_2, x_4

x_3, x_4



$x^{(1)} = x^{(2)} = x^{(3)} = (10, 0, 0, 0)^T$

$x^{(4)} = (0, 10, 0, 10)^T, x^{(5)} = (0, 0, 10, 10)^T$

定理3 设$S=\{x\mid Ax=b,x\geq 0\}$的方向d有k个非零分量，则d是S的极方向$\Leftrightarrow$ d的非零分量所对应的A的列向量组的秩为$k-1$。

证明："$\Leftarrow$"$\because\ r(A)=m,\therefore\ k\leq m+1.$

设d的非零分量为$d_1,d_2,\cdots,d_{k-1},d_{m+1}$，使得$P_1,P_2,\cdots,P_{k-1}$线性无关，

则这$k-1$个向量可以扩充为一组基，设$B=(P_1,P_2,\cdots,P_m),r(B)=m.$

设存在S的方向$d^{(1)},d^{(2)}$及λ_1，$\lambda_2>0$使得$d=\lambda_1 d^{(1)}+\lambda_2 d^{(2)}$

则$d^{(1)},d^{(2)}$的后$n-m-1$个分量为0，故可设

$$d^{(1)}=\begin{pmatrix} d_B^{(1)} \\ d_{m+1}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix},\quad d^{(2)}=\begin{pmatrix} d_B^{(2)} \\ d_{m+1}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

由$Ad^{(1)}=0,\ Ad^{(2)}=0$知

$$\begin{aligned} Bd_B^{(1)}+d_{m+1}^{(1)}P_{m+1}=0 \\ Bd_B^{(2)}+d_{m+1}^{(2)}P_{m+1}=0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} d_B^{(1)}=-d_{m+1}^{(1)}B^{-1}P_{m+1} \\ d_B^{(2)}=-d_{m+1}^{(2)}B^{-1}P_{m+1} \end{aligned}$$

若$d_{m+1}^{(1)}=0$，则$d_B^{(1)}=0\ \Rightarrow\ d^{(1)}=0$与$d^{(1)}$是方向矛盾.

所以，$d_{m+1}^{(1)}>0$，同理，$d_{m+1}^{(2)}>0$，$\therefore\ d^{(1)}=\dfrac{d_{m+1}^{(1)}}{d_{m+1}^{(2)}}d^{(2)}$

即$d^{(1)},d^{(2)}$是相同的方向，所以，d为极方向.

定理3 设$S=\{x\mid Ax=b, x\geq 0\}$的方向$d$有$k$个非零分量，则$d$是$S$的极方向$\Leftrightarrow$ d的非零分量所对应的A的列向量组的秩为$k-1$。

“$\Rightarrow$” 设d为极方向， 且$d_{m+1}>0.$

(1) $k=1$, 则由$Ad=0$得$d_{m+1}P_{m+1}=0$, 因此$P_{m+1}=0$, 结论成立。

(2) $k>1$.设$d_1,\cdots,d_{k-1}>0$, $d=(d_1,\cdots,d_{k-1},0,\cdots,0,d_{m+1},0,\cdots,0)^T$.

由$Ad=0$, 得$d_1P_1+\cdots+d_{k-1}P_{k-1}+d_{m+1}P_{m+1}=0$,

因此， $P_1,\cdots,$ P_{k-1}, P_{m+1}线性相关。

若$P_1,\cdots,$ P_{k-1}线性相关， 则存在不全为0的数$y_1,\cdots,$ y_{k-1},使得

$$y_1P_1+y_2P_2+\cdots+y_{k-1}P_{k-1}=0$$

令$$d_j^{(1)}=\begin{cases} d_j+\lambda y_j & j=1,\cdots,k-1 \\ d_{m+1} & j=m+1 \\ 0 & 其余 \end{cases} \qquad d_j^{(2)}=\begin{cases} d_j-\lambda y_j & j=1,\cdots,k-1 \\ d_{m+1} & j=m+1 \\ 0 & 其余 \end{cases}$$

则有$Ad^{(1)}=Ad^{(2)}=0$, 且当λ充分小时， 有$d^{(1)},d^{(2)}\geq 0$,

$d^{(1)}\neq 0, d^{(2)}\neq 0, \therefore d^{(1)},d^{(2)}$是方向。

显然， $d^{(1)}\neq d^{(2)}$， 但$d=\frac{1}{2}d^{(1)}+\frac{1}{2}d^{(2)}$， 与$d$是极方向矛盾。

四．基本可行解的存在问题 可行解可由极点表示，极点一定是基本可行解

定理1．如果(LP)有可行解,则一定存在基本可行解.

证明：设$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$, $x=(x_1,\cdots,x_s,0,\cdots,0)^T$ 是一个可行解且$x_j>0, j=1,\cdots,s.$

若$P_1,P_2,\cdots,P_s$线性无关，则由引理，x为基本可行解；

设$P_1,P_2,\cdots,P_s$线性相关，则存在不全为0的、而且其中至少有一个为正的数$y_1,\cdots,y_s$

使得 $$y_1P_1+y_2P_2+\cdots+y_sP_s=0.$$

定义 $$\bar{x}_j=\begin{cases} x_j-\lambda y_j & j=1,2,\cdots s \\ 0 & j=s+1,\cdots,n \end{cases}$$ 其中 $$\lambda=\min\left\{\frac{x_j}{y_j}\,\middle|\, y_j>0\right\}=\frac{x_k}{y_k}(>0)$$

则当$j=1,2,\cdots,s$时，有$\bar{x}_j=x_j-\lambda y_j=x_j-\dfrac{x_k}{y_k}y_j\geq 0$

且 $$\bar{x}_k=x_k-\frac{x_k}{y_k}y_k=0.$$

$$\because A\bar{x}=\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_jP_j=\sum_{j=1}^{s}\left(x_j-\frac{x_k}{y_k}y_j\right)P_j=\sum_{j=1}^{s}x_jP_j+\frac{x_k}{y_k}\sum_{j=1}^{s}y_jP_j=b$$

$\therefore \bar{x}$是可行解,且$\bar{x}$的正分量至少比x少1.若$\bar{x}$的正分量所对应的A的列线性无关，则$\bar{x}$为基本可行解，否则，从$\bar{x}$出发，重复以上步骤，直至获得一个基本可行解。

定理2. 如果(LP)有最优解，则存在一个基本可行解是最优解。

结论：若LP问题有最优解，则要么最优解唯一，要么有无穷多最优解。

证明：$\min \quad z = cx$

$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

不妨设$x^{(1)} \neq x^{(2)}$是LP问题的最优解

则有$Ax^{(1)} = b$，$x \geq 0$，$z^{*} = cx^{(1)}$

$Ax^{(2)} = b$，$x \geq 0$，$z^{*} = cx^{(2)}$

作$\bar{x} = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}$，$\alpha \in [0,1]$

则$A\bar{x} = A[\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}] = \alpha b + (1-\alpha)b = b$

又$\bar{x} \geq 0$，且$c\bar{x} = c[\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}] = \alpha z^{*} + (1-\alpha)z^{*} = z^{*}$

则$\bar{x}$是最优解。