SP第二次大作业

无研223 刘子源 2022310709

一、理论建模

对于IMU传感器，简化后可将其输出描述如下：

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{s}_k(\theta)+\mathbf{v}_k \tag{1}$$

其中，

$$\mathbf{s}_k(\theta)=\begin{bmatrix}\mathbf{s}_k^a(\theta)\\ \mathbf{s}_k^\omega(\theta)\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_k^a\\ \mathbf{v}_k^\omega\end{bmatrix} \tag{2}$$

v代表噪声项，与Project文件中的ω等价。

则在H_0和H_1假设下，IMU输出的PDF可写作

$$\begin{aligned} p\left(\mathbf{z}_n;\theta,\mathcal{H}_i\right) &= \prod_{k\in\Omega_n} p\left(\mathbf{y}_k;\theta,\mathcal{H}_i\right)\\ &= \prod_{k\in\Omega_n} p\left(\mathbf{y}_k^a;\theta,\mathcal{H}_i\right) p\left(\mathbf{y}_k^\omega;\theta,\mathcal{H}_i\right)\end{aligned} \tag{3}$$

其中，

$$\begin{aligned} p\left(\mathbf{y}_k^a;\theta,\mathcal{H}_i\right) &= \frac{1}{\left(2\pi\sigma_a^2\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_a^2}\left\|\mathbf{y}_k^a-\mathbf{s}_k^a(\theta)\right\|^2\right)\\ p\left(\mathbf{y}_k^\omega;\theta,\mathcal{H}_i\right) &= \frac{1}{\left(2\pi\sigma_\omega^2\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\omega^2}\left\|\mathbf{y}_k^\omega-\mathbf{s}_k^\omega(\theta)\right\|^2\right)\end{aligned} \tag{4}$$

上式中z_n代表观测序列$z_n=\{y_k\}_{k=n}^{n+N-1}$，θ表示描述信号所需的一组未知参数。

由于缺乏关于信号参数θ的知识，我们无法完全指定两种假设下观测的PDF，因此采用GLRT准则，判H_1当

$$L_G\left(\mathbf{z}_n\right)=\frac{p\left(\mathbf{z}_n;\hat{\theta}^1,\mathcal{H}_1\right)}{p\left(\mathbf{z}_n;\hat{\theta}^0,\mathcal{H}_0\right)}>\gamma \tag{5}$$

其中$\hat{\theta}^1$是在H_1为真假设下的未知参数的MLE，$\hat{\theta}^0$是在H_0为真假设下的未知参数的MLE，MLE由最大化（3）式得到。

在H_0假设下，我们对s_k一无所知，因此很显然$\hat{\theta}^0=z_n=\{y_k\}_{k=n}^{n+N-1}$，此时的PDF为

$$p\left(\mathbf{z}_n;\hat{\theta}^0,\mathcal{H}_0\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma_a^2\right)^{3N/2}}\cdot\frac{1}{\left(2\pi\sigma_\omega^2\right)^{3N/2}} \tag{6}$$

在H_1假设下，$\boldsymbol{y}_k=\begin{bmatrix}g\boldsymbol{u}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}+\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3, \|\boldsymbol{u}\|=1$，此时未知参数$\theta$为$u$，将$y_k$代入（3）式得到需要最大化的式子如下：

$$p\left(\mathbf{z}_n;\mathbf{u}_n,\mathcal{H}_1\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma_a^2\right)^{3N/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_a^2}\sum_{k\in\Omega_n}\left\|\mathbf{y}_k^a-g\mathbf{u}_n\right\|^2\right) \tag{7}$$

$$
\cdot \frac{1}{\left(2\pi\sigma_{\omega}^{2}\right)^{3N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\omega}^{2}} \sum_{k\in\Omega_n} \left\|\mathbf{y}_k^{\omega}\right\|^2\right)
$$

得到参数u的MLE为

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}}_n &= \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega_u} \left(p\left(\mathbf{z}_n; \mathbf{u}, \mathcal{H}_1\right)\right) \\
&= \arg\min_{\mathbf{u}\in\Omega_u} \left(\sum_{k\in\Omega_n} \left\|\mathbf{y}_k^a - g\mathbf{u}\right\|^2\right) \\
&= \arg\min_{\mathbf{u}\in\Omega_u} \left(\sum_{k\in\Omega_n} \left\|\mathbf{y}_k^a\right\|^2 - 2g(\mathbf{y}_k^a)^T\mathbf{u} + g^2\left\|\mathbf{u}\right\|^2\right) \\
&= \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega_u} \left((\overline{\mathbf{y}}_n^a)^T\mathbf{u}\right) = \frac{\overline{\mathbf{y}}_n^a}{\left\|\overline{\mathbf{y}}_n^a\right\|}
\end{aligned} \tag{8}
$$

将（8）式代入（7）式得到$p\left(\mathbf{z}_n; \hat{\theta}^1, \mathcal{H}_1\right)$，并与（6）式一起代入（5）式，得到GLRT检测器为

$$
\begin{aligned}
L_G\left(\mathbf{z}_n\right) =& \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{k\in\Omega_n} \left\|\mathbf{y}_k^a - g\frac{\overline{\mathbf{y}}_n^a}{\left\|\overline{\mathbf{y}}_n^a\right\|}\right\|^2\right) \\
&\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\omega}^2} \sum_{k\in\Omega_n} \left\|\mathbf{y}_k^{\omega}\right\|^2\right) > \gamma
\end{aligned} \tag{9}
$$

取对数化简后等价于

$$
T\left(\mathbf{z}_n\right) = \frac{1}{N} \sum_{k\in\Omega_n} \left(\frac{1}{\sigma_a^2} \left\|\mathbf{y}_k^a - g\frac{\overline{\mathbf{y}}_n^a}{\left\|\overline{\mathbf{y}}_n^a\right\|}\right\|^2 + \frac{1}{\sigma_{\omega}^2}\left\|\mathbf{y}_k^{\omega}\right\|^2\right) < \gamma' \tag{10}
$$

这里的检测器同时用到了加速度和角速度的信息，但是如参考论文下图所示，加入加速度对检测器的性能没有明显提升

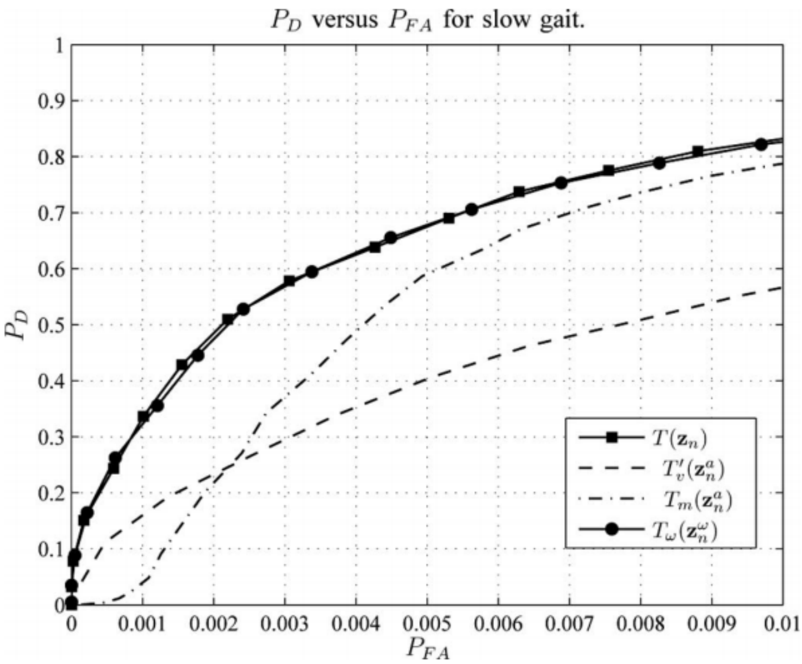


Fig. 5. Probability of detection versus probability of false alarm for the GLRT algorithms based on the slow-gait data.

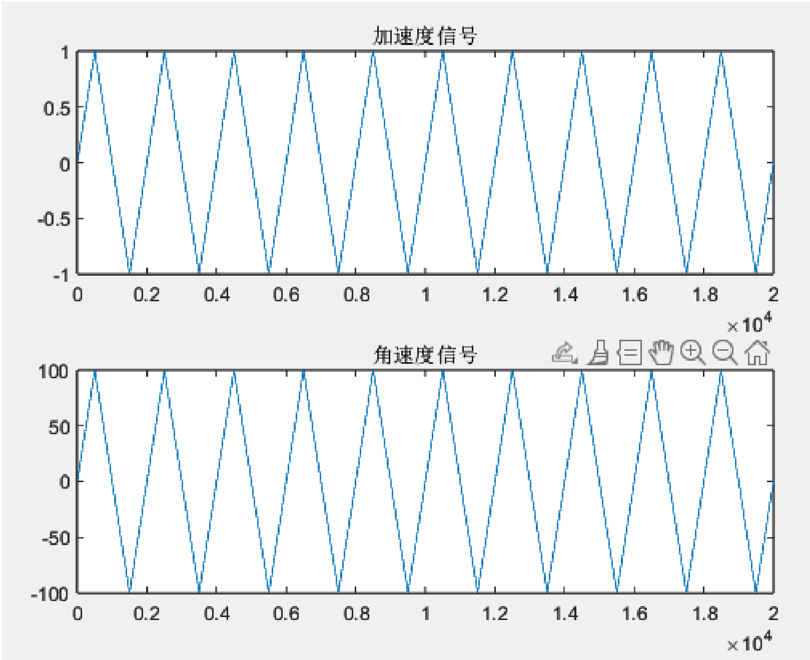
因此方便起见我们只需要检测角速度，则（10）式可进一步化简为

$$
T_{\omega}\left(\mathbf{z}_n^{\omega}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k\in\Omega_n} \left\|\mathbf{y}_k^{\omega}\right\|^2 < \gamma_{\omega} \tag{11}
$$

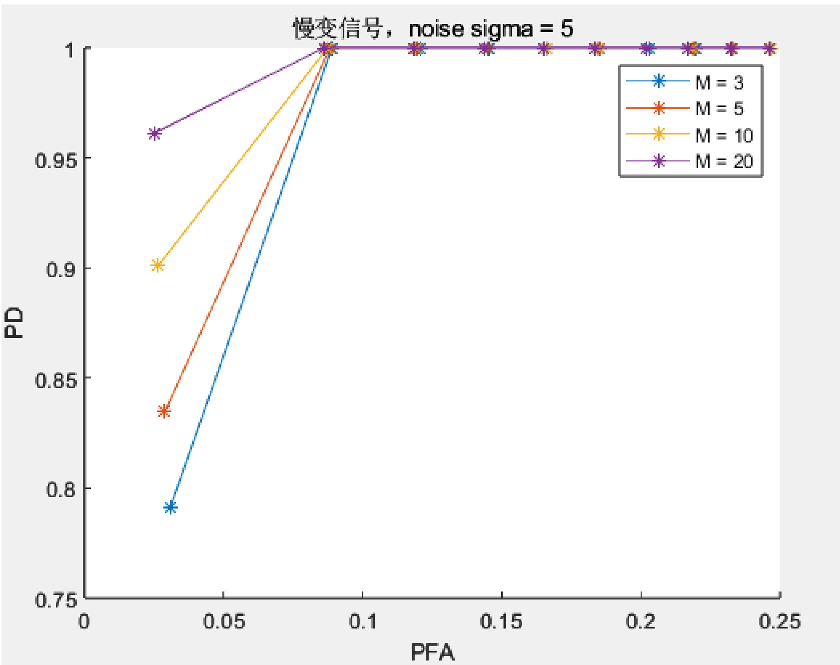
$k \in \Omega_n$

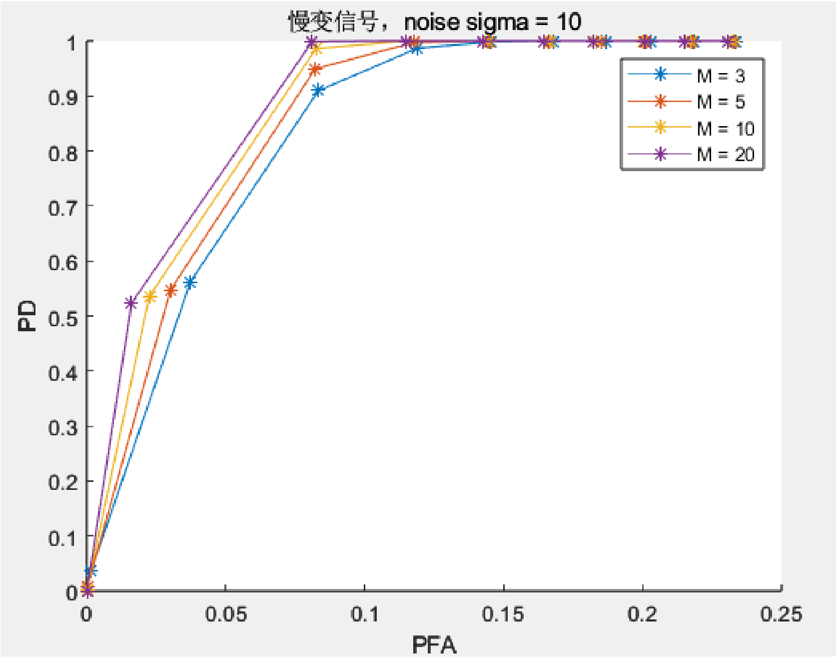
二、仿真验证

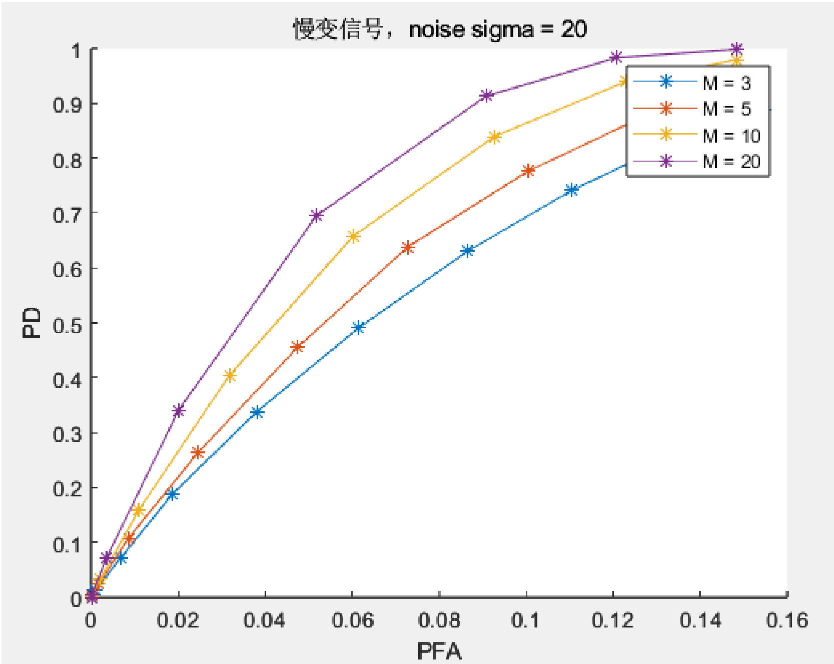
首先进行仿真实验，方便起见，设置xyz三个方向的加速度取值相同，角速度取值也相同。设置加速度变化的幅度为1，角速度变化的幅度为100，设置快慢两种信号，慢信号如下图所示，快信号的频率是慢信号的10倍：

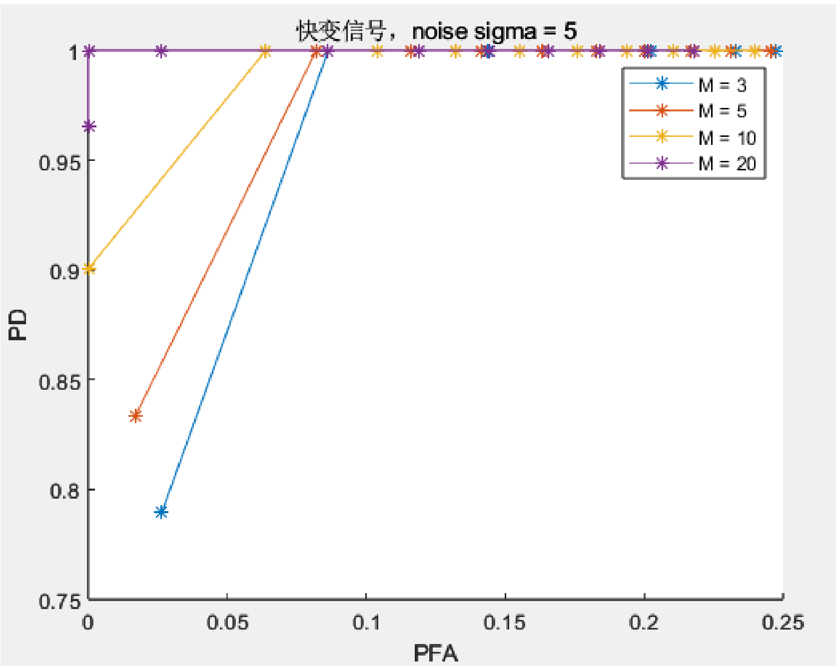


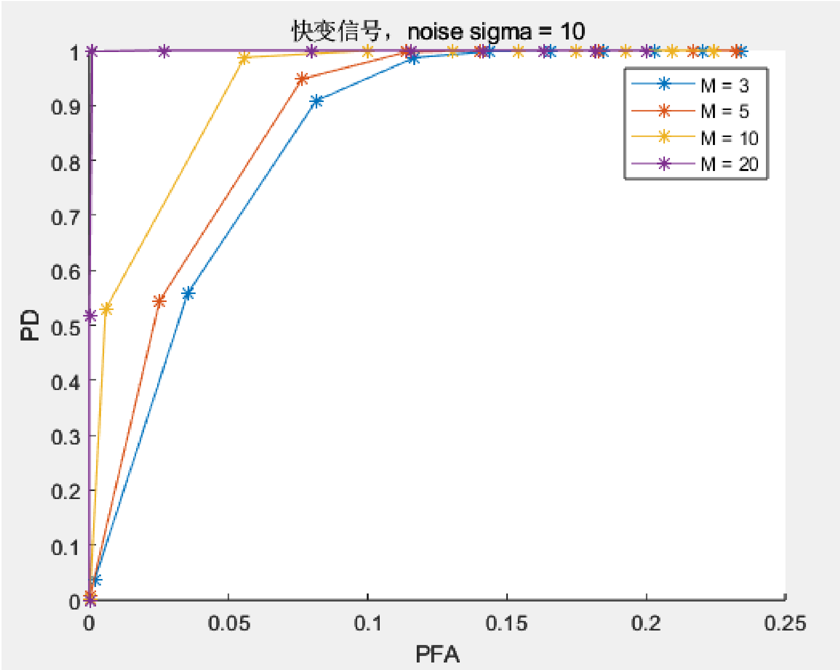
改变检测窗长和角速度观测噪声方差，进行一系列实验，得到的结果如下所示：

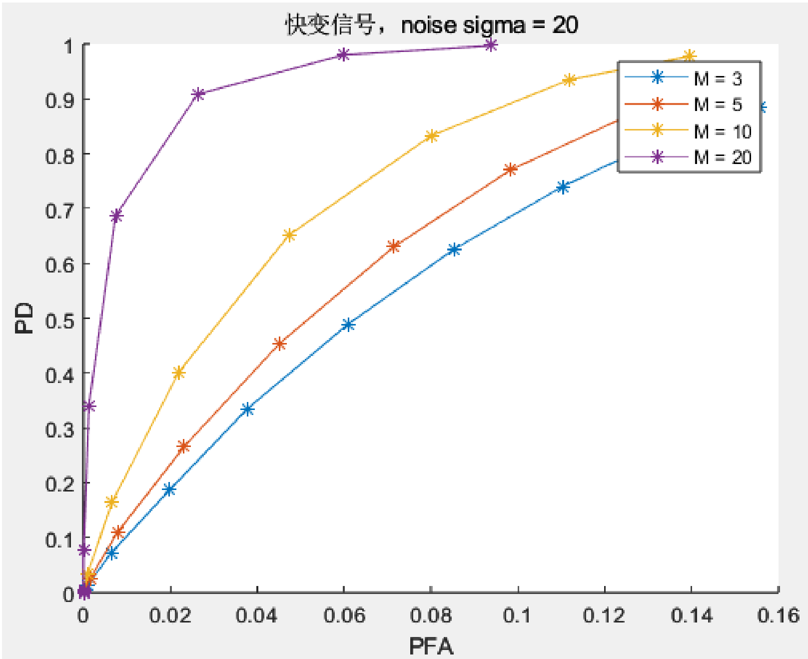



慢变信号，noise sigma = 10
PD
PFA
M = 3
M = 5
M = 10
M = 20


慢变信号，noise sigma = 20
PD
PFA
M = 3
M = 5
M = 10
M = 20


快变信号，noise sigma = 5
PD
PFA
M = 3
M = 5
M = 10
M = 20

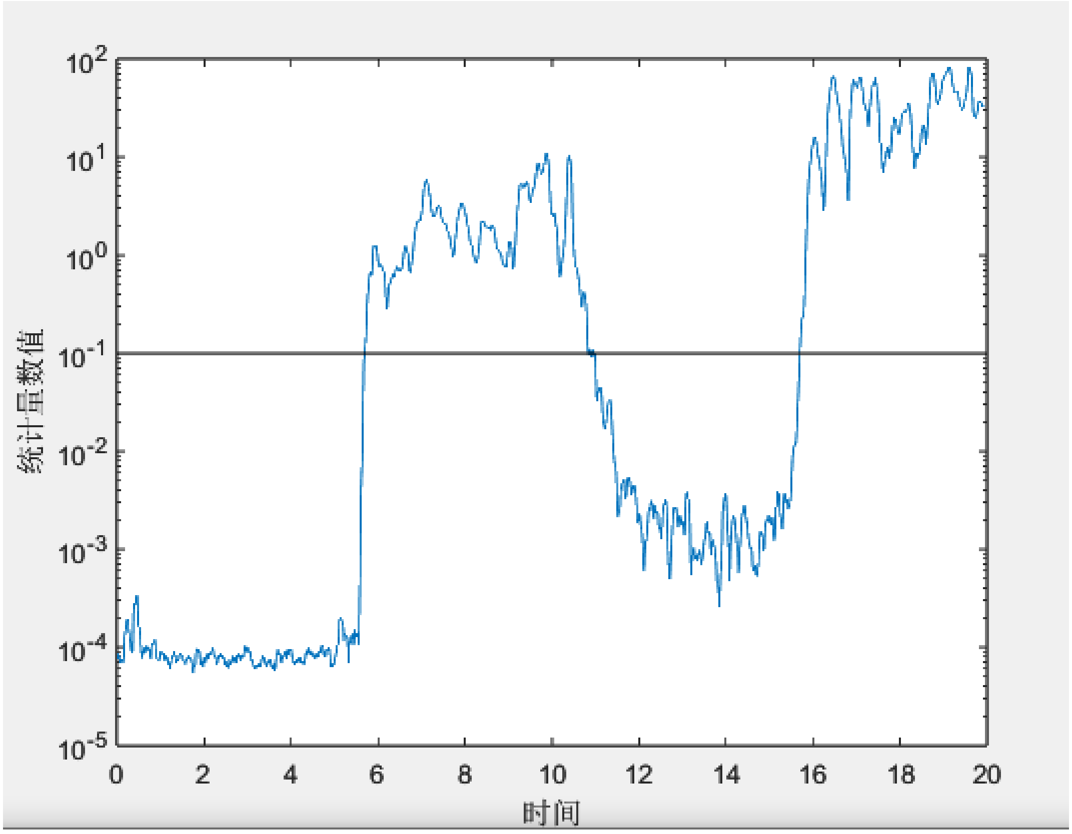




观察可得结论：窗长越长，检测效果越好；噪声越大，检测效果越差；信号变化越快，检测效果越好。

实测数据

对于实际数据data2.mat，测得的统计量数值及判决结果如下图所示：



统计量数值
时间
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

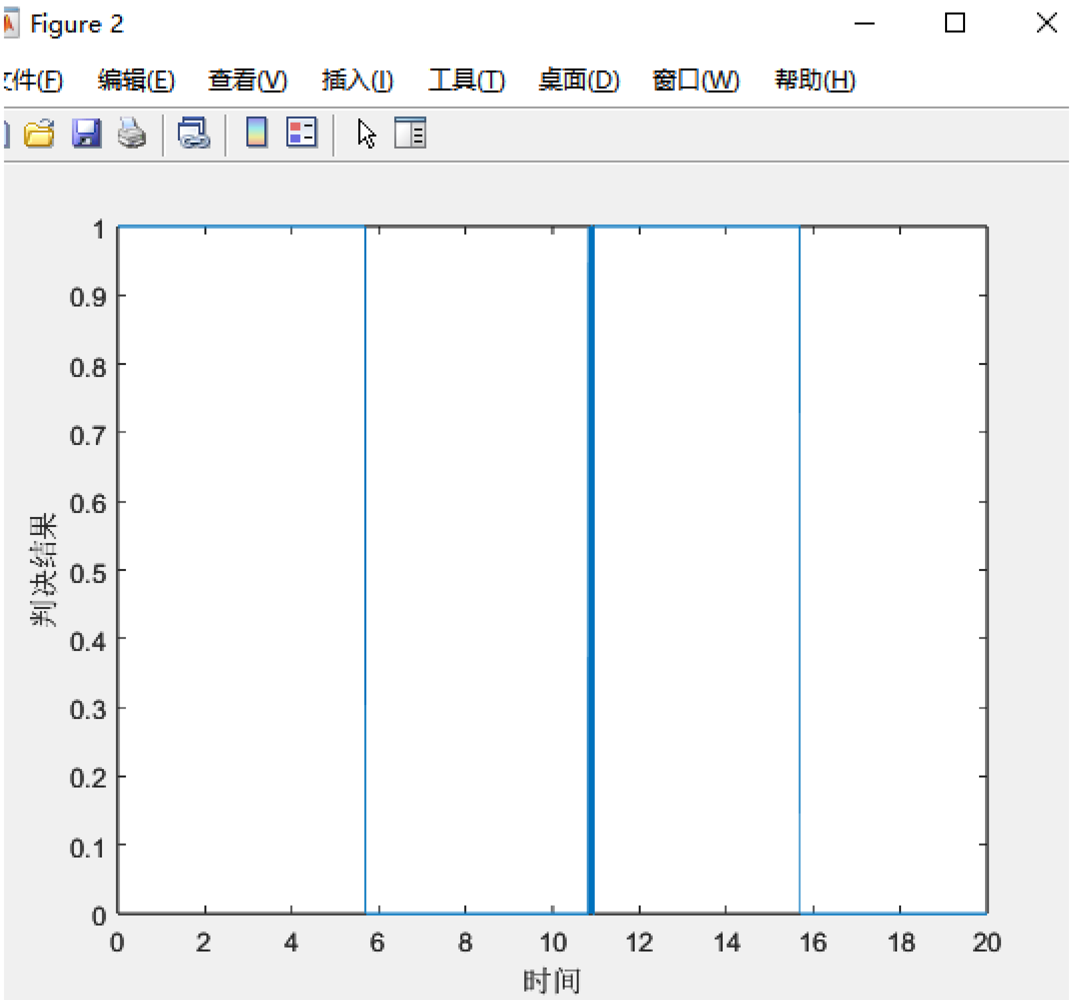


Figure 2
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
判决结果
时间
1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20