

1. 求证  $d_1(x, y) = \sqrt{|x-y|}$  为  $\mathbb{R}$  上度量,  $d_2(x, y) = |x-y|^2$  是否为  $\mathbb{R}$  上度量

证: (1) 逐一验证度量定义, 知  $d_1$  为度量

(2) 取  $x, y, z$  为  $0, 1, 2$ , 则  $d_2(x, y) + d_2(y, z) < d_2(x, z)$ , 故  $d_2$  非度量

2.  $(X, d)$  度量空间,  $x, y, z, w \in X$ , 求证:  $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$

证: 不妨设  $d(x, y) \geq d(z, w)$

则由三角不等式  $d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z) \leq d(y, w) + d(z, w)$

故  $d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w)$

3. 证明闭球  $\overline{B}(x, r)$  为闭集

证:  $\forall y \notin \overline{B}(x, r)$ , 有  $d(x, y) > r$

取  $\varepsilon = \frac{d(x, y) - r}{2}$ , 则  $\overline{B}(x, r) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$

故  $\overline{B}(x, r)$  的余集为开集,  $\overline{B}(x, r)$  为闭集