基础泛函分析 2012 考题——暨考后总结

Naroahlee

2012-01-04

1.内积空间的闭算子

这大概是一道有关闭算子的考题：

题目：H 为内积空间，A,B 为 H 上线性算子，满足 $<Ax,y>=<x,By>$，试证明 A,B 均为有界线性算子。且 $\|A\|=\|B\|$。

这道题做的波澜不惊。总之应该不会得 0 分。

可以参考老步书上 P156 的 28 题证明。

例 16　设 H 为希尔伯特空间，A 是从 H 到 H 的线性算子，

$D(A)=H$，且满足

$$(Ax,y)=(x,Ay),\quad x,y\in H,$$

证明：A 一定是 H 上的有界线性算子.

证 设序列 $\{x_n\}\subset H$，且 $x_n\to x_0$，$Ax_0\to y_0$，则$\forall\ y\in H$，可得 $(Ax_n,y)=(x_n,Ay)$.

对上式两端令$n\to\infty$，则由内积连续性得$(y_0,y)=(x_0,Ay)$. 类似地，有

$$(x_0,Ay)=(Ax_0,y)\Longrightarrow(y_0,y)=(Ax_0,y).$$

由 y 的任意性知，$y_0=Ax_0$，从而知 A 为闭算子.

2.可分空间和 Hahn-Banach 定理

题目：X 为赋范空间，$\{x_1,x_2,...\}$为其中一列元素；

求证：

(1) $M=\overline{span\{x_1,x_2,x_3,\ ...\}}$是一个可分赋范空间

(2)X 可分$\Leftrightarrow$ X 为赋范空间存在元列，$\{x_1,x_2,...\}$，对于$\forall f\in X'$，有 $f(x_i)=0$时，必有 $f=0$

看到这道题，我基本认命了，马上把可分的定义背出来写上去，然后跳过。

后来在把会做的题做完后，回过来想，虽然$span\{x_1,x_2,x_3,\ ...\}$在 M 中稠密，但显然 $span\{x_1,x_2,x_3,\ ...\}$不可分，究其根因，是因为生成子空间中取加权系数$\alpha\in\mathrm{K}$，导致其不可分，如果能够取$\alpha\in\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$，或许能够解决这个问题？于是写了一通证明。

第二问还是直接投降了，后来在回来的路上，战友**诸葛**提到，用 Hahn-Banach 定理啊！刹那间，想起老步书上一道题，回来一查 P155 20。微笑，认命了。

例8 设X为赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$\Gamma\subset X^*$，Γ中元的线性组合在X^*中稠密，证明$\{x_n\}$弱收敛于x_0的充要条件是：

(1)数列$\{\|x_n\|\}$有界；

(2)$f(x_n)\to f(x_0)(n\to\infty)$，$\forall f\in\Gamma$.

证 **必要性** 设$\{x_n\}$弱收敛于x_0，则$\forall f\in X^*$，$f(x_n)\to f(x_0)$，因而$x_n^{**}(f)\to x_0^{**}f(x)$，故由共鸣定理得

$$\sup_n\|x_n\|=\sup_n\|x^{**}\|<\infty,$$

即数列$\{\|x_n\|\}$有界. $\forall f\in\Gamma$，$f(x_n)\to f(x_0)(n\to\infty)$是显然的.

充分性 设条件成立，则$\forall f\in\Gamma$，有

$$x_n^{**}(f)\to x_0^{**}(f)\quad(n\to\infty).\qquad ①$$

因为x_n^{**}与x_0^{**}都是线性的，所以式①对一切$f\in\operatorname{span}\Gamma$成立.

$X\ \overline{\operatorname{span}\Gamma}=X$，而$\sup_n\|x_n^{**}\|<\infty$，所以$\forall f\in X$，有$x_n^{**}(f)\to x_0^{**}(f)$，即$f(x_n)\to f(x_0)$，就是$\{x_n\}$弱收敛于$x_0$.

问题 3.2.6 设在赋范空间 X 中有 $x_n\xrightarrow{w}x$，求证：若$Y=\operatorname{span}\{x_n\}$，则$x\in\overline{Y}$.

解答 假设$x\notin\overline{Y}$，则由问题 1.4.1 知存在$f\in X'$使得任取$y\in Y$有$f(y)=0$且

$$f(x)=d(x,Y),\quad \|f\|=1.$$

因此任取n有$f(x_n)=0$，但$f(x)>0$. 所以$f(x_n)$不可能收敛到$f(x)$，从而$\{x_n\}$不弱收敛到x. ■

这里的问题 1.4.1 就是 Hahn-Banach 定理。

3. 谱论和预解式

谱论我完全没有复习，理由是“第 3,4 章的问题都没有吃透”，这不过是个理由，最终给了我狠狠的一巴掌。我不会。

题目：有关谱论的考题我记不太清了，但是有这个，很相似：

7. 令$T\in B(X,X)$。证明当$\lambda\to\infty$时$\|R_\lambda(T)\|\to 0$。

7. 设$|\lambda|>\|T\|$且$y=T_\lambda x$，则

$$\|y\|=\|\lambda x-Tx\|\geqslant|\lambda|\,\|x\|-\|Tx\|\geqslant(|\lambda|-\|T\|)\|x\|;$$

因此有

$$\|R_\lambda(T)\|=\sup_{y\neq 0}(\|x\|/\|y\|)\leqslant 1/(|\lambda|-\|T\|)\|$$

4.一致有界性原理和典范映射

问题如下：加拿大那个X佬的《泛函分析导论及其应用》P162 13题

13. 若(x_n)是巴拿赫空间X中的一个序列，并且对所有的$f \in X'$使得$(f(x_n))$都是有界的。证明$(\|x_n\|)$是有界的。

附参考答案如下：

13. 让我们记$f(x_n)=g_n(f)$，则$(g_n(f))$对每个f是有界的，所以据4.7-3知$(\|g_n\|)$是有界的，并且据4.6-1有$\|x_n\|=\|g_n\|$。

看到，心头一宽，又捡到12分。

其实就是构造了典范映射，利用X'总为Banach，用一致有界性原理。

5.Banach空间与赋范空间

泪目。难道我真的有可能通过这次考试吗？

这是2011年步老师考试出过的题。

题目：Ω为非空集合，$B(\Omega)$为定义在Ω上的有界线性泛函，$f \in B(\Omega)$，定义：

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

求证：$\|\bullet\|$是$B(\Omega)$上范数，且构成完备的赋范空间。

没有什么犹豫，范数4个定义一一验证。

必杀技，完备四大步：

一取柯西待操作，二猜极限在心中，三证极限留圈内，四判收敛有完备。

猜极限想想$\{f_n(x)\}$在K的Cauchy列，必然收敛的结论。

6. c_0与l^1的那点事

有些心碎。

这种惨绝人寰的题目出现，基本上我打算投降了，不过是最后一题，也没甚好说的。

题目：$x=\{x_n\}, y=\{y_n\}$为纯量点列，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$收敛

构造 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k$ ，为有限和泛函。

求证：（1） $|y_k|=\varepsilon_k y_k$ ，并求出 $\|f_n\|$

(2) $y\in l^1$

步老师已经手下留情了，说不是的同志，看看步老师书的 P157 37 题，考试前你觉得你会做吗？

证明的关键与 $c_0{}'=l^1$ 中的关键相似，那个恶心的旋转因子：

$\varepsilon_k=\exp(-i\arg(y_k))$ ，$\|\varepsilon_k\|=1$，$|y_k|=\varepsilon_k y_k$

当然多半是 Naroah 自以为是了。