统计信号处理

第七章

矩估计方法

清华大学电子工程系
李洪 副教授

2023.4

假定观测数据 $x[n]$ 的 k 阶矩为 μ_k ，且与待估计参数 θ 间存在如下关系

$$\mu_k = h(\theta)$$

那么 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta} = h^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^k[n]\right)$$

矩估计

$$\mu_k = h(\theta)$$

$$\theta = h^{-1}(\mu_k)$$

$$\mu_k = E\left(x^k[n]\right) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^k[n]$$

$$\hat{\theta} = h^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^k[n]\right)$$

——背后是大数定理！

例：白噪声中电平估计问题：

$$x[n]=A+w[n],\ n=0,1,\ldots,N-1$$

待估计参数为信号幅度 A。$w[n]$为高斯白噪声，且其方差为 σ^2，即 $w[n]\sim N\left(0,\sigma^2\right)$ 。其矩估计量是？

$$\mu_1=E\left(x[n]\right)=A \Rightarrow \hat{A}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$$

例：指数PDF

$$p\left(x[n];\lambda\right)=\begin{cases}\lambda\exp\left\{-\lambda x[n]\right\}, & x[n]>0\\ 0, & x[n]\le 0\end{cases}$$

待估计参数为 λ ，其矩估计量是？

$$\mu_1=E\left(x[n]\right)=\int_0^{\infty}x[n]\lambda\exp\left(-\lambda x[n]\right)dx[n]=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \hat{\lambda}=\frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]}$$

● 扩展至矢量参数情况

假定观测数据 $x[n]$ 各阶矩 μ_k 与待估计参数 $\boldsymbol{\theta}=\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p\right)^T$ 间存在如下关系

$$\mu_1=h_1\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p\right)$$

$$\mu_2=h_2\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p\right)$$

$$\cdots$$

$$\mu_p=h_p\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p\right)$$

—— p 个有效方程

—— 尽可能采用低阶矩

即 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta})$，则矩估计量为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{h}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}\right)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\mu}}=\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n],\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n],\ldots,\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x^p[n]\right]^T$