# 统计信号处理

## 第四章

# 最小方差无偏估计 III
## ——线性模型与最佳线性无偏估计

清华大学电子工程系
李洪 副教授

2023. 3

# 内容概要

- 一、引言
- 二、线性模型
- 三、最佳线性无偏估计
- 四、应用案例
- 五、小结

# 一、引言

- MVU估计量求解方法
  - 借助于CRLB：

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{g}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta})$$

✓ 正则条件不一定满足
✓ 无法达到CRLB
✓ 不一定好求解
✓ 无似然函数

  - 借助于充分统计量：

Neyman-Fisher因子分解：$p(\mathbf{x};\theta) = g(T(\mathbf{x}),\theta)h(\mathbf{x})$

若充分统计量完备，构造无偏估计量

$$\hat{\theta} = g(T(\mathbf{x}))$$

或求条件期望

$$\hat{\theta} = E(\breve{\theta} | T(\mathbf{x}))$$

✓ 不一定完备
✓ 不一定好求解
✓ 无似然函数

# 一、引言

- 特例——线性模型与一般线性模型
  - 观测数据是待估计参数的线性函数
  - 噪声为高斯的
- 妥协——最佳线性无偏估计(BLUE)
  - BLUE: best linear unbiased estimator
  - 线性 (linear)
  - 无偏 (unbiased)
  - 方差最小 (best)

# 二、线性模型

## 1. 线性模型

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{w}$$

其中，$\boldsymbol{x}$是$N\times 1$维的观测数据，$\mathbf{H}$ 是$N\times p\left(N>p\right)$维、秩为 $p$的观测矩阵，$\boldsymbol{\theta}$ 是 $p\times 1$维的待估计参数矢量，$\boldsymbol{w}$ 是$N\times 1$维的独立噪声矢量且服从$N\left(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I}\right)$。

观测数据的似然函数为：

$$p\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)^T\left(\boldsymbol{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \ln p\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}\right)=-\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)^T\left(\boldsymbol{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial\left\{\mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right\}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\mathbf{H}^T\boldsymbol{x} - \mathbf{H}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 2\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$$

（**A**为对称矩阵）

CRLB定理： $\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\theta}\right)$

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \underbrace{\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}}_{\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})}\left\{\underbrace{\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\boldsymbol{x}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \boldsymbol{\theta}\right\}$$

即，线性模型对应的MVU估计量是：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\boldsymbol{x}$$ ——且是有效估计量

相应的协方差阵为

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \sigma^2\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}$$

进一步地，该MVU估计量服从

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N\left(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\right)$$ ——这是普通MVU估计量不具备的

例：直线拟合

$$x[n]=A+Bn+w[n],\ \ n=0,1,\dots,N-1$$

噪声为高斯白噪声，且 $w[n]\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，待估计参数为 $\boldsymbol{\theta}=\left[A,B\right]^T$，其MVU估计量是?

## 方法一：直接利用矢量参数CRLB定理

$$\boxed{\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}}=\mathbf{I}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\left(\boldsymbol{g}\left(\mathbf{x}\right)-\boldsymbol{\theta}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned}&p\left(x[n];\boldsymbol{\theta}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x[n]-A-Bn\right)^2\right\}\\&p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}\right)=\prod_{n=0}^{N-1}p\left(x[n];\boldsymbol{\theta}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A-Bn\right)^2\right\}$$

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A-Bn)^2\right\}$$

$$\Rightarrow \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=-\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A-Bn)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A} \\ \dfrac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial B} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A-Bn) \\ \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A-Bn)n \end{Bmatrix} \\ \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})=\dfrac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} N & \dfrac{N(N-1)}{2} \\ \dfrac{N(N-1)}{2} & \dfrac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}=\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{g}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta})$$ 如何构建?

例：直线拟合

$$x[n]=A+Bn+w[n],\quad n=0,1,\ldots,N-1$$

噪声为高斯白噪声，且 $w[n]\sim N\left(0,\sigma^2\right)$ ，待估计参数为 $\boldsymbol{\theta}=\left[A,B\right]^T$ ，其MVU估计量是？

**方法二：采用线性模型的方法**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & N-1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}^T\mathbf{H}=\begin{pmatrix} N & \dfrac{N(N-1)}{2}\\ \dfrac{N(N-1)}{2} & \dfrac{N(N-1)(2N-1)}{6}\end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}=\frac{12}{N^2(N-1)(N+1)}\begin{pmatrix}\frac{N(N-1)(2N-1)}{6} & -\frac{N(N-1)}{2}\\ -\frac{N(N-1)}{2} & N\end{pmatrix}$$

**线性模型**

- 本质上源自于CRLB定理
- 但用起来更直观、方便

$$\mathbf{H}=\begin{Bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & 2 & \dots & N-1\end{Bmatrix}^T$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\boldsymbol{x}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\begin{Bmatrix}\frac{2(2N-1)}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)-\frac{6}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)n\\ -\frac{6}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)+\frac{12}{N(N-1)(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)n\end{Bmatrix}\begin{matrix}=\hat{A}\\ =\hat{B}\end{matrix}$$

$$\mathrm{C}_{\hat{\theta}}=\sigma^2\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}=\frac{12\sigma^2}{N^2(N-1)(N+1)}\begin{pmatrix}\frac{N(N-1)(2N-1)}{6} & -\frac{N(N-1)}{2}\\ -\frac{N(N-1)}{2} & N\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathrm{var}\left(\hat{A}\right)=\frac{2(2N-1)}{N(N+1)}\sigma^2\\ \mathrm{var}\left(\hat{B}\right)=\frac{12}{N(N^2-1)}\sigma^2\end{cases}$$

例：频率分量幅度分析

$$x[n]=\sum_{k=1}^{M}a_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)+\sum_{k=1}^{M}b_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)+w[n],\quad n=0,1,\ldots,N-1$$

假定频率是基频 $1/N$ 的谐波，即 $f_k=k/N$。噪声为高斯白噪声。待估计参数为各频率分量的幅度 $a_k,b_k\left(1\le k\le M\right)$。

观测数据：$\boldsymbol{x}=\left[x[0],x[1],\ldots,x[N-1]\right]^T$

待估计参数矢量：$\boldsymbol{\theta}=\left[a_1,a_2,\ldots,a_M,b_1,b_2,\ldots,b_M\right]^T$

观测矩阵：

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{N}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2M\pi}{N}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{N}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2\pi M}{N}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\left(\frac{2(N-1)\pi}{N}\right) & \cos\left(\frac{4(N-1)\pi}{N}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2M(N-1)\pi}{N}\right) & \sin\left(\frac{2(N-1)\pi}{N}\right) & \sin\left(\frac{4(N-1)\pi}{N}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2M(N-1)\pi}{N}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_1 \qquad \mathbf{h}_2 \qquad \mathbf{h}_M \qquad \mathbf{h}_{M+1} \qquad \mathbf{h}_{M+2} \qquad \mathbf{h}_{2M}$$

该模型为线性模型，因此待估计参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的MVU为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\boldsymbol{x}$$
$$= \frac{2}{N}\mathbf{H}^T\boldsymbol{x}$$
$$= \left[\frac{2}{N}\boldsymbol{h}_1^T\boldsymbol{x}, \frac{2}{N}\boldsymbol{h}_2^T\boldsymbol{x}, \ldots, \frac{2}{N}\boldsymbol{h}_{2M}^T\boldsymbol{x}\right]^T$$

即

$$\hat{a}_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$
$$\hat{b}_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

离散傅里叶变换的系数！

## 2.一般线性模型

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$$

其中，$\mathbf{x}$是$N\times1$维的观测数据，$\mathbf{H}$是$N\times p(N>p)$维、秩为$p$的观测矩阵，$\boldsymbol{\theta}$ 是$p\times1$维的待估计参数矢量，$\mathbf{w}$ 是 $N\times1$维的独立噪声矢量且服从$N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$。

拓展

拓展一：允许存在已知信号

拓展二：可以是高斯有色噪声

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

其中，$\mathbf{x}$是$N\times1$维的观测数据，$\mathbf{H}$是 $N\times p(N>p)$维、秩为$p$ 的观测矩阵，$\boldsymbol{\theta}$是$p\times1$维的待估计参数矢量，$\mathbf{s}$是$N\times1$维的已知信号矢量，$\mathbf{w}$是 $N\times1$维的噪声矢量且服从$N(\mathbf{0},\mathbf{C})$。

观测数据似然函数为：

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\left(\det(\mathbf{C})\right)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{s}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right\}$$

$$\ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=-\ln\left\{(2\pi)^{N/2}\left(\det(\mathbf{C})\right)^{1/2}\right\}-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{s}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$$

$$\frac{\partial\ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\left\{(\mathbf{x}-\mathbf{s}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right\}}{\partial\boldsymbol{\theta}}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\left\{-2(\mathbf{x}-\mathbf{s})^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right\}}{\partial\boldsymbol{\theta}}$$

$$=\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s})-\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

CRLB定理： $\dfrac{\partial\ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\left(\mathbf{g}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta}\right)$

$$\frac{\partial\ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\left(\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s})-\boldsymbol{\theta}\right)$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s})$ ——是有效估计量

$\mathbf{C}_{\hat{\theta}}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$ 且 $\hat{\boldsymbol{\theta}}\sim N\left(\boldsymbol{\theta},\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\right)$

例：有色噪声电平估计

$$x[n]=A+w[n],\ \ n=0,1,\ldots,N-1$$

噪声为有色噪声，即 $\mathbf{w}\sim N(\mathbf{0},\mathbf{C})$，待估计参数为电平$A$，其MVU为？

其MVU估计为

$$\hat{A}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})$$

观测矩阵为 $\mathbf{H}=[1,1,\ldots,1]^T=\mathbf{1}$，

故 $\hat{A}=\dfrac{\mathbf{1}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x}}{\mathbf{1}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}}$

若为高斯白噪声，有

$$\hat{A}=\frac{\mathbf{1}^T\boldsymbol{x}}{N}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$$

令 $\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{D}^T\mathbf{D}$，则有

$$\hat{A}=\frac{(\mathbf{D1})^T(\mathbf{D}\boldsymbol{x})}{\mathbf{1}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D1}}=\frac{(\mathbf{D1})^T\boldsymbol{x}'}{\mathbf{1}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D1}}=\sum_{n=0}^{N-1}d_n x'[n]$$，其中 $d_n=\dfrac{[\mathbf{D1}]_n}{\mathbf{1}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D1}}$

# 三、最佳线性无偏估计（BLUE）

## 1. 标量参数的BLUE

- 观察数据 $\boldsymbol{x}=\{x[0],x[1],x[2],\dots,x[N-1]\}^T$
- BLUE意味着：

1 限定估计量与观察数据间呈线性关系

$$\hat{\theta}=\sum_{n=0}^{N-1}a_n x[n]=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}\quad ,\quad \text{其中}\ \boldsymbol{a}=[a_0,a_1,\dots,a_{N-1}]^T$$

2 无偏：$E\left(\hat{\theta}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n E\left(x[n]\right)=\theta$

$$\Downarrow$$

$$E\left(x[n]\right)=s[n]\theta$$

$$\Rightarrow\ \sum_{n=0}^{N-1}a_n s[n]=1\quad \text{即}\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s}=1$$

$$\Downarrow$$

$$E\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{s}\theta\quad \text{其中}\ \boldsymbol{s}=\left[s[0],s[1],\dots,s[N-1]\right]^T$$

$$\mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right)=E\left\{\left(\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2\right\}$$

$$\hat{\theta}=\sum_{n=0}^{N-1}a_n x[n]=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right)&=E\left\{\left(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}^T E\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^2\right\}\\&=E\left\{\left(\boldsymbol{a}^T\left(\boldsymbol{x}-E\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right)^2\right\}\\&=E\left\{\boldsymbol{a}^T\underbrace{\left(\boldsymbol{x}-E\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\left(\boldsymbol{x}-E\left(\boldsymbol{x}\right)\right)^T}_{\mathbf{C}}\boldsymbol{a}\right\}\\&=\boldsymbol{a}^T\mathbf{C}\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

3 $\min\left\{\boldsymbol{a}^T\mathbf{C}\boldsymbol{a}\right\}$

**标量参数BLUE：**

$$\begin{cases}\min\left\{\boldsymbol{a}^T\mathbf{C}\boldsymbol{a}\right\} & \text{方差最小(Best)}\\ s.t.\quad \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s}=1 & \text{线性(Linear)、无偏(Unbiased)}\end{cases}$$

采用拉格朗日乘子法

令 $J=\boldsymbol{a}^T\mathbf{C}\boldsymbol{a}+\lambda\left(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s}-1\right)$

$$J = \boldsymbol{a}^T \mathbf{C}\boldsymbol{a} + \lambda\left(\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{s} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial J}{\partial \boldsymbol{a}} = 2\mathbf{C}\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{s} \\ \dfrac{\partial J}{\partial \boldsymbol{a}} = 0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{a} = -\dfrac{\lambda}{2}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{s} = 1\end{array}\right\}$$

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\boldsymbol{s}^T \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{s}}$$

$$\boldsymbol{a}_{opt} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{s}^T \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{s}}$$

BLUE估计所需条件：

- 成比例的均值: $\boldsymbol{s}$
- 协方差矩阵: $\mathbf{C}$

优缺点：

- 无需PDF，只需一、二阶矩
- 假定线性，是否合理？

成比例的均值

协方差矩阵

BLUE: $\hat{\theta} = \boldsymbol{a}_{opt}^T \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{s}^T \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{s}^T \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{s}}$ $\Rightarrow$ $E\left(\hat{\theta}\right) = \dfrac{\boldsymbol{s}^T \mathbf{C}^{-1} E\left(\boldsymbol{x}\right)}{\boldsymbol{s}^T \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{s}}$

$= \theta$ 无偏！

相应的方差: $\mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right) = \boldsymbol{a}_{opt}^T \mathbf{C}\boldsymbol{a}_{opt} = \dfrac{1}{\boldsymbol{s}^T \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{s}}$

例：白噪声中电平估计

$$x[n]=A+w[n],\ n=0,1,\ldots,N-1$$

待估计参数为信号幅度 $A$，$w[n]$为高斯白噪声，且$w[n]\sim N(0,\sigma^2)$ 求 $A$ 的BLUE?

$$\hat{A}=\frac{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x}}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{s}=[1,1,1,\ldots,1]^T=\mathbf{1}$$

$$\mathbf{C}=\sigma^2\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\frac{\mathbf{1}^T\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}\boldsymbol{x}}{\mathbf{1}^T\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}\mathbf{1}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$$ ——BLUE估计量！

- 同时也是MVU估计量！
- BLUE = MVU ?

## 2. 矢量参数的BLUE

- 观察数据 $\mathbf{x}=\{x[0],x[1],x[2],\ldots,x[N-1]\}^T$
- BLUE意味着：

① 限定每个估计量与观察数据间呈线性关系

$$\hat{\theta}_i=\sum_{n=0}^{N-1}a_{in}x[n],\quad i=1,2,\ldots,p$$

$$=\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}\quad,\boldsymbol{a}_i=\left[a_{i0},a_{i1},\ldots,a_{i,N-1}\right]^T \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\theta}}_{p\times1}=\mathbf{A}_{p\times N}\boldsymbol{x}_{N\times1}\quad,\mathbf{A}_{p\times N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \boldsymbol{a}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_p^T\end{bmatrix}$$

② 无偏：$E\left(\hat{\theta}_i\right)=\sum_{n=0}^{N-1}a_{in}E\left(x[n]\right)=\theta_i \Rightarrow E\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)=\mathbf{A}E\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{\theta}$

$$E\left(\boldsymbol{x}\right)=\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

$$\Rightarrow \mathbf{AH}=\mathbf{I}$$

由于 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \boldsymbol{a}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_p^T\end{bmatrix}$, $\mathbf{H}=\left[\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\ldots,\boldsymbol{h}_p\right]$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{h}_j=\delta_{ij}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{var}\left(\hat{\theta}_i\right)=E\left\{\left(\hat{\theta}_i-E\left(\hat{\theta}_i\right)\right)^2\right\}\\&\hat{\theta}_i=\sum_{n=0}^{N-1}a_{in}x[n]\;=\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}\end{aligned}\right]\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(\hat{\theta}_i\right)&=E\left\{\left(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}-\mathbf{a}_i^TE(\mathbf{x})\right)^2\right\}\\&=E\left\{\left(\mathbf{a}_i^T\left(\mathbf{x}-E(\mathbf{x})\right)\right)^2\right\}\\&=E\left\{\mathbf{a}_i^T\underbrace{\left(\mathbf{x}-E(\mathbf{x})\right)\left(\mathbf{x}-E(\mathbf{x})\right)^T}_{\mathbf{C}}\mathbf{a}_i\right\}\\&=\mathbf{a}_i^T\mathbf{C}\mathbf{a}_i\end{aligned}$$

3 $\min\left\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{C}\mathbf{a}_i\right\}$

**矢量参数BLUE：**

$$\begin{cases}\min\left\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{C}\mathbf{a}_i\right\}\\ s.t.\quad \mathbf{a}_i^T\mathbf{h}_j=\delta_{ij},\ \ 1\le i,j\le p\end{cases}$$

采用拉格朗日乘子法

令 $J_i=\mathbf{a}_i^T\mathbf{C}\mathbf{a}_i+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^{(i)}\left(\mathbf{a}_i^T\mathbf{h}_j-\delta_{ij}\right)$

$$J_i = \boldsymbol{a}_i^T \mathbf{C} \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{(i)} \left( \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{h}_j - \delta_{ij} \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{a}_i} = 2\mathbf{C}\boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{(i)} \boldsymbol{h}_j \\ \text{令 } \boldsymbol{\lambda}_i = \left[ \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \ldots, \lambda_p^{(i)} \right]^T \\ \text{已知 } \mathbf{H} = \left[ \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_p \right] \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{a}_i} = 2\mathbf{C}\boldsymbol{a}_i + \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_i \\ \dfrac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{a}_i} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}_i = -\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_i$$

另一方面，对约束条件：

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{h}_j = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le p$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{h}_j^T \boldsymbol{a}_i = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le p$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{i-1}^T \\ \boldsymbol{h}_i^T \\ \boldsymbol{h}_{i+1}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_p^T \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}^T \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_i$$

$$\mathbf{H}^T\boldsymbol{a}_i = -\frac{1}{2}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{e}_i$$

$$\mathrm{var}\left(\hat{\theta}_i\right) = \boldsymbol{e}_i^T\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\boldsymbol{e}_i$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}_i &= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{a}_i &= -\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{a}_{i,opt} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\boldsymbol{e}_i$$

$$\mathrm{var}\left(\hat{\theta}_i\right) = \boldsymbol{a}_i^T\mathbf{C}\boldsymbol{a}_i$$

已知 $\hat{\theta}_i = \sum_{n=0}^{N-1} a_{in}x[n] = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,opt}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a}_{2,opt}^T\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{p,opt}^T\boldsymbol{x} \end{bmatrix}$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e}_2^T\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_p^T\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_p^T \end{bmatrix}}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x}$$

# ● 对具有一般线性模型形式的观测数据

观测数据模型：

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{w}$$

——噪声零均值、协方差为 **C**，具体分布未知

BLUE: $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x}$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} + \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{w}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = E\left[\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)^T\right]$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = E\left[\left(\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{w}\right)\left(\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{w}\right)^T\right]$$

$$= E\left[\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\right]$$

$$= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

$$= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

由上一页推导知：$\mathrm{var}\left(\hat{\theta}_i\right) = \boldsymbol{e}_i^T\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\boldsymbol{e}_i$

$$\mathrm{var}\left(\hat{\theta}_i\right) = \left[\mathbf{C}_{\hat{\theta}}\right]_{ii} = \left[\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\right]_{ii}$$

如果观测数据具有一般线性模型的**形式**，即

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{w}$$

其中 $\mathbf{H}$ 是已知的 $N \times p$ 矩阵，$\boldsymbol{\theta}$ 是 $p \times 1$ 的待估计参数，$\boldsymbol{w}$ 是的均值为零、协方差为 $\mathbf{C}$ 的噪声矢量（**不一定为高斯**），那么 $\boldsymbol{\theta}$ 的BLUE估计量是

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{x}$$

高斯-马尔可夫定理

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的协方差矩阵为

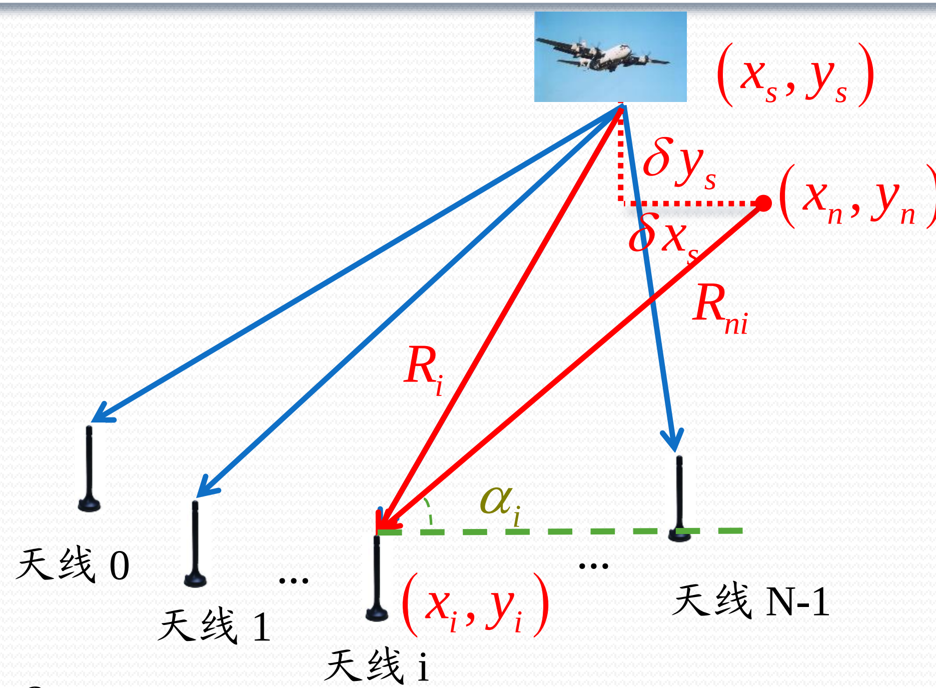
$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1}$$

每个估计量 $\hat{\theta}_i$ 的方差为

$$\mathrm{var}\left(\hat{\theta}_i\right) = \left[\left(\mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1}\right]_{ii}$$

- **若为高斯噪声，则BLUE为MVU，且为有效估计量**

# 四、应用案例




到第 i 颗天线的时间：$t_i = T_0 + \frac{R_i}{c} + \varepsilon_i$

$$R_i = \sqrt{(x_s - x_i)^2 + (y_s - y_i)^2}$$

$$= \underbrace{\sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2}}_{R_{ni}} + \frac{x_n - x_i}{R_{ni}}\delta x_s + \frac{y_n - y_i}{R_{ni}}\delta y_s = R_{ni} + \underbrace{\frac{x_n - x_i}{R_{ni}}}_{\cos\alpha_i}\delta x_s + \underbrace{\frac{y_n - y_i}{R_{ni}}}_{\sin\alpha_i}\delta y_s$$

$$t_i = T_0 + \frac{R_{ni}}{c} + \frac{\cos\alpha_i}{c}\delta x_s + \frac{\sin\alpha_i}{c}\delta y_s + \varepsilon_i \quad ,i = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\underline{t_i - \frac{R_{ni}}{c}} = T_0 + \frac{\cos\alpha_i}{c}\delta x_s + \frac{\sin\alpha_i}{c}\delta y_s + \varepsilon_i$$

$$\downarrow$$

$$\tau_i = T_0 + \frac{\cos\alpha_i}{c}\delta x_s + \frac{\sin\alpha_i}{c}\delta y_s + \varepsilon_i$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \tau_1 - \tau_0 = \frac{1}{c}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)\delta x_s + \frac{1}{c}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_0)\delta y_s + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \\
\xi_2 &= \tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{c}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\delta x_s + \frac{1}{c}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\delta y_s + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \\
&\ldots \\
\xi_i &= \tau_i - \tau_{i-1} = \frac{1}{c}(\cos\alpha_i - \cos\alpha_{i-1})\delta x_s + \frac{1}{c}(\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1})\delta y_s + (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \xi = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{w}$$

数据模型：$\xi = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{w}$

待估计参数：$\boldsymbol{\theta} = \left[\delta x_s, \delta y_s\right]^T$

观测矩阵：$\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 & \sin\alpha_1 - \sin\alpha_0 \\ \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 & \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_{N-1} - \cos\alpha_{N-2} & \sin\alpha_{N-1} - \sin\alpha_{N-2} \end{bmatrix}$

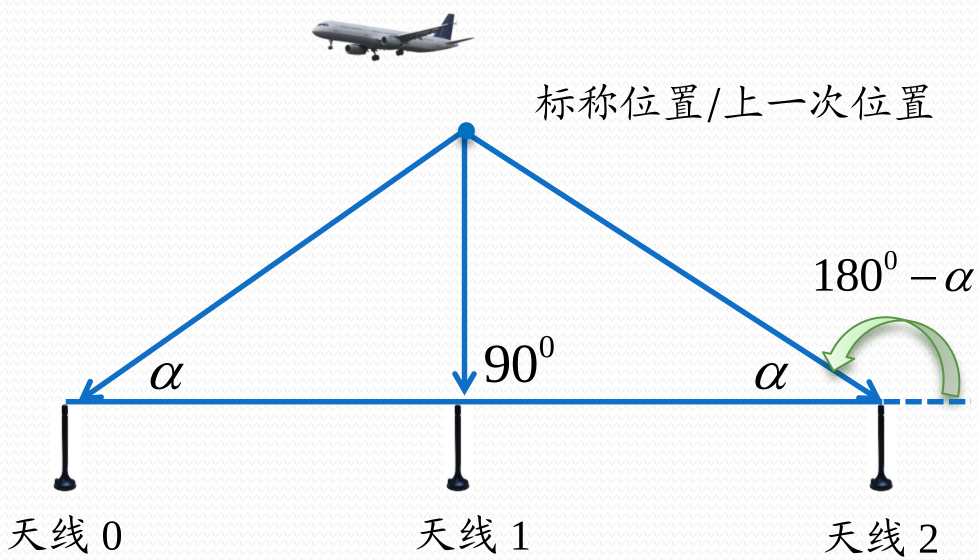
噪声矢量：$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} - \varepsilon_{N-2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\mathbf{C} = E\left(\left(\boldsymbol{w} - E(\boldsymbol{w})\right)\left(\boldsymbol{w} - E(\boldsymbol{w})\right)^T\right) = E\left(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\right) = E\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}^T\right) = \sigma^2\mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

BLUE估计量：$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x} = \left(\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\xi$

相应的协方差矩阵：$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1} = \sigma^2\left(\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$

# 特例：三天线时




$$\alpha_0=\alpha$$

$$\alpha_1=90^0$$

$$\alpha_2=180^0-\alpha$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\begin{bmatrix}-\cos\alpha & 1-\sin\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha-1\end{bmatrix}$$

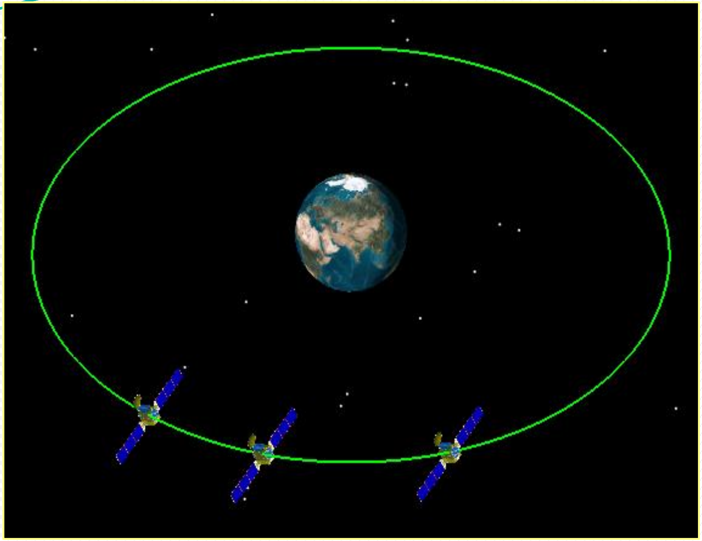
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}}=\sigma^2\left(\mathbf{H}^T\left(\mathbf{AA}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}}=\sigma^2c^2\begin{bmatrix}\boxed{\dfrac{1}{2\cos^2\alpha}} & 0\\ 0 & \boxed{\dfrac{3/2}{\left(1-\sin\alpha\right)^2}}\end{bmatrix}$$

- $\alpha$ 越小，定位精度越好
- 增加天线阵距离

## ➢ 工程应用——北斗一号





**北斗一号主要特点：**

✓1994年开始建设，2002年正式投入使用

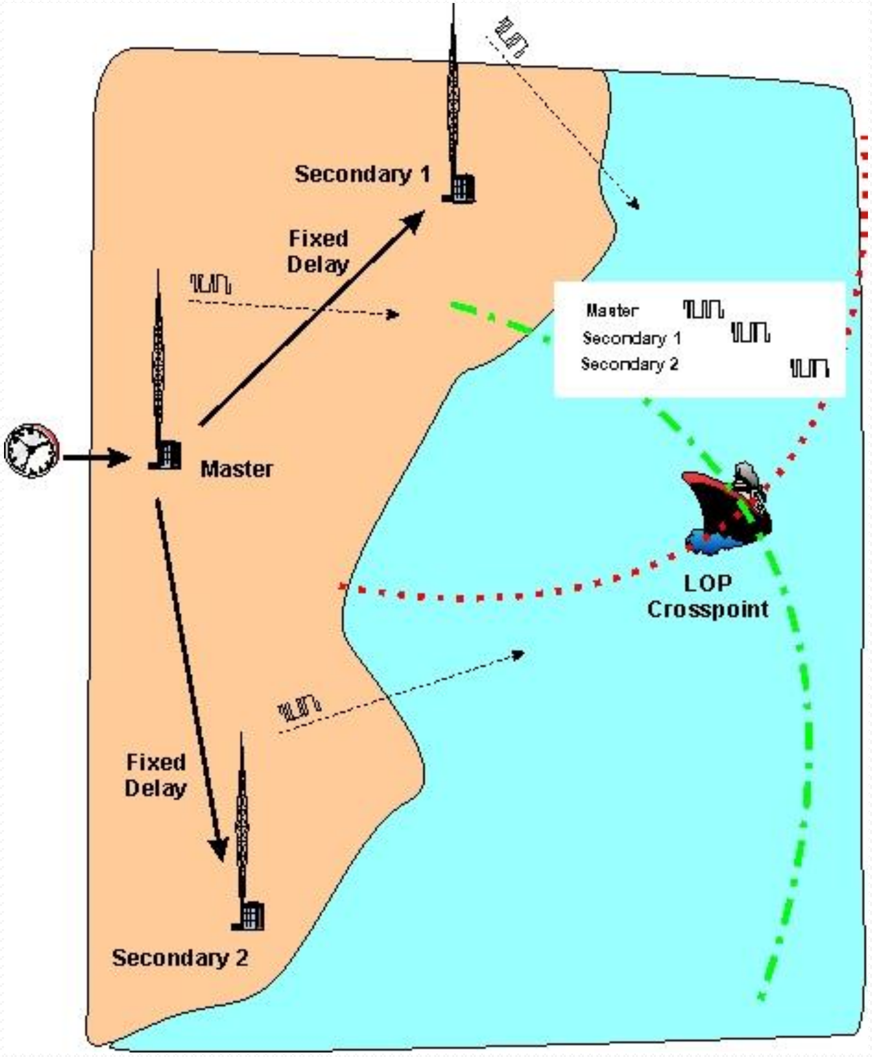
✓由3颗GEO卫星构成，其中一颗为备份卫星，分别位于东经80度、140度和110.5度

✓覆盖范围北纬5~55度，东经70~145度

✓定位精度：约100米，标较后20米

✓授时精度：单向100纳秒，双向20纳秒

# 罗兰系统（Loran）



Secondary 1
Fixed
Delay
Master
Secondary 1
Secondary 2
Master
LOP
Crosspoint
Fixed
Delay
Secondary 2

# 五、小结

- 求解MVU的难处
- 特例——线性模型与一般线性模型 ——易于求解

线性模型：

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w} \qquad N\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N\left(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\right)$$

一般线性模型：

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s} + \mathbf{w} \qquad N\left(\mathbf{0}, \mathbf{C}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{x} - \mathbf{s}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N\left(\boldsymbol{\theta}, \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\right)$$

- 妥协——最佳线性无偏估计（BLUE）——方便实用
  - Best Linear Unbiased Estimator
  - 假定估计量与观测数据间呈线性关系
  - 全局来看（包括线性、非线性估计），并不一定最优
  - 但仅需观测数据一、二阶矩，无需PDF——很实用！
  - 若数据高斯的，则BLUE等效于MVU，是有效的（高斯-马尔可夫定理）