2022秋季学期《应用信息论基础》作业5

请于2022.12.7随堂提交，请写明姓名学号

1. 设离散无记忆信源X熵为$H(X)$，失真矩阵为$[d(k,j)]_{K\times J}$，率失真函数为$R(D)$，试证明$R(0)=H(X)$的充要条件是失真矩阵的每一行至少有一个0元素，而每一列至多有一个0元素。

2. 令X和$\tilde{X}$为离散随机变量，均取值于集合$\{0,1\}$，X的取值分布为$\{0.5,0.5\}$。现针对离散无记忆信源进行限失真压缩编码，编码器输入和输出分别为X和$\tilde{X}$，定义非对称失真度量矩阵为$\begin{bmatrix}0 & \infty \\ 1 & 0\end{bmatrix}$。设失真度量为$d(x,\tilde{x})$，$R(D)$为$X$的率失真函数。

   1）求$R(0)$；

   2）求使$R(D_0)=0$的最小D_0；

   3）对于$D<D_0$，在$\mathrm{E}[d(x,\tilde{x})]\le D$条件下，求使$I(X;\tilde{X})$最小的条件分布$p(\tilde{x}|x)$；

   4）给出率失真函数$R(D)$，$0\le D\le D_0$.

3. 已知信源$U=\{0,1\}$，信宿$V=\{0,1,2\}$。设信源输入为等概分布，失真矩阵为$D=\begin{bmatrix}0 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 1\end{bmatrix}$，求此信源的率失真函数。

4. 设已知离散无记忆信源在给定失真量度$d(k,j)$，$k=1,2,\cdots,K$，$j=1,2,\cdots,J$下的率失真函数为$R(D)$。现定义新的失真度量$d'(k,j)=d(k,j)-g_k$，试证：在新的失真度量下率失真函数$R'(D)=R(D+G)$，其中$G=\sum\limits_k p_k g_k$。

5. 设有离散无记忆信源X经编码后输出Y，失真矩阵的所有列是集合$\{d_1,\cdots,d_m\}$的某一置换。

定义函数：$\Phi(D)=\max\limits_{P:\sum_{i=1}^{m}P_i d_i\le D} H(P)$，试证明：

1）$\Phi(D)$是D的上凸函数；

2）$I(X;Y)\ge H(X)-\Phi(D)$；

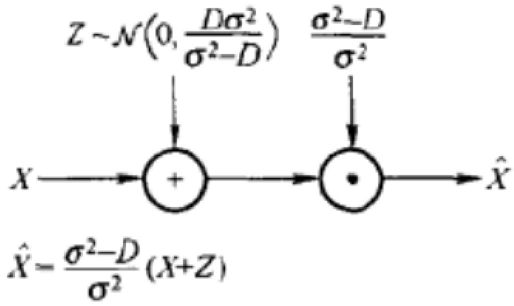
3）$R(D)\ge H(X)-\Phi(D)$；

4）若信源服从均匀分布，且失真矩阵的所有行互为置换，则$R(D)=H(X)-\Phi(D)$.

6. 考虑连续型随机变量X，其均值为0，方差为σ^2，失真度量是平方误差的失真度量，试证明：

$h(X)-\frac{1}{2}\log(2\pi eD)\le R(D)\le\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}$.

（可考虑下图所示系统）



7. 设信源为N长随机向量：$X=X_1X_2\cdots X_N$，各分量统计独立，且$X_n\sim\mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$。

1）若对该信源进行熵压缩编码，则在平方和失真准则下，如果允许的均方误差为D，试求压缩后的信源信息速率$R(D)$。（给出表达式即可）

2）设存在一无记忆加性噪声信道，当噪声功率限定为P_N，而输入信号的功率限制在P_S以下时，若要保证该信道能够全部传送压缩后的上述信源信息，试求此时信道噪声的最大微分熵。