基础泛函分析期末考试试题（2022.12.30）

（提示：可以不按大题顺序答题，但请务必标明题号。）

一、(15分）设X为复Hilbert空间，$T \in B(X)$。我们称T为正规算子，若等式$TT^* = T^*T$成立。求证：

1. 若任给$x \in H$，都有$< Tx, x >= 0$，则$T = 0$。
2. T为正规的当且仅当任取$x \in H$，有$\|Tx\| = \|T^*x\|$。
3. 举例说明当X为实Hilbert空间时，第一问的结论一般不成立。

(提示：对于第一问，当$x, y \in X$时，可以考虑$x + iy$及$x + y$这两个向量)

二、(15分）设X为赋范空间，f为X上给定的非零有界线性泛函，令$E = \{x \in X : f(x) = \|f\|\}$。求证：

1. E为X的非空凸子集。
2. 若$dim(X) \geq 2$，则f为满射但不为单设，进而证明E不为有界集。
3. $\inf_{x \in E} \|x\| = 1$。

三、(15分）设H为可分无穷维Hilbert空间，$A \in B(H)$，且存在H的完全标准正交集$\{e_n : n \geq 1\}$，使得$\sum_{n \geq 1} \|Ae_n\|^2 < \infty$。定义$A$ 的Hilbert-Schmidt范数为

$$\|A\|_{HS} = \Big(\sum_{n \geq 1} \|Ae_n\|^2 \Big)^{1/2}.$$

求证：

1. $\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$，其中$A^*$为$A$的伴随算子。
2. 若$\{f_n : n \geq 1\}$为H的另外一个完全标准正交集，则$\sum_{n \geq 1} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n \geq 1} \|Af_n\|^2$。
3. $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$。

四、(15分）设$(X_1, \|\cdot\|_1)$及$(X_2, \|\cdot\|_2)$均为赋范空间，令

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) :\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

为X_1及X_2的笛卡尔乘积。对$x = (x_1, x_2) \in X$，定义$\|x\| = \max\{\|x_1\|_1,\ \|x_2\|_2\}$。求证：

1. 上面定义的$\|\cdot\|$为X上的范数。
2. $(X, \|\cdot\|)$为Banach空间当且仅当X_1和X_2为Banach空间。

五、(15分）设X, Y为Banach空间，$F \in B(X, Y)$为单射。令$Y_1 = \{Fx :\ x \in X\}$为F的值域。求证：Y_1在Y中为闭线性子空间当且仅当F的逆映射$F^{-1} : Y_1 \to X$为有界线性算子。

六、(5分）给出压缩映射的定义，并叙述Banach不动点定理。