1. $X=C[a,b]$ ， $d(f,g)=\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|$ ， $M=\{f\in X,\ f(a)=f(b)\}$

求证：M为X中闭集

证：M中任意收敛列 $\{f_n\}$ ， $f_n\to f$

则 $\{f_n(a)\}$ ， $\{f_n(b)\}$ 为柯西列，由M的定义， $\{f_n(a)\}$ ， $\{f_n(b)\}$ 均收敛至相同的值

故 $f(a)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(a)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(b)=f(b)$ ， $f\in M$ ，M为闭集

2、 $S=\{\{x_n\}_{n\geq1},\ x_n\in\mathbb{K}\}$ ， $d=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ ， 证明 (S,d) 完备

证：设 $x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n\geq1}$ ， $k=1,2,\cdots$ 为S中柯西列

对 $\forall m\geq1$ ， $d(x^{(k)},x^{(l)})\geqslant\frac{1}{2^m}\frac{|x_m^{(k)}-x_m^{(l)}|}{1+|x_m^{(k)}-x_m^{(l)}|}$

$\lim\limits_{k,l\to\infty}d(x^{(k)},x^{(l)})=0$ ，故 $\lim\limits_{k,l\to\infty}|x_m^{(k)}-x_m^{(l)}|=0$ ， $(x_m^{(k)})_{k\geq1}$ 为柯西列

$\exists\, x_m\in\mathbb{K}$ ， $x_m^{(k)}\xrightarrow{k\to\infty}x_m$

下证 $x^{(k)}\to x^{(\infty)}=\{x_m\}_{m\geq1}$

对 $\forall\varepsilon>0$ ， $\exists\, l>0$ ， $\frac{1}{2^l}<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\, N>0$ ， $k>N$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{l}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(k)}-x_n|}{1+|x_n^{(k)}-x_n|}<\frac{\varepsilon}{2}$

$\sum\limits_{n=l+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(k)}-x_n|}{1+|x_n^{(k)}-x_n|}\leqslant\sum\limits_{n=l+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^l}<\frac{\varepsilon}{2}$

故 $k>N$ 时 $d(x^{(k)},x^{(\infty)})<\varepsilon$

故 $x^{(k)}$ 收敛至 $x^{(\infty)}$

3. $C=\{(x_n)_{n\geq1},\ x_n\in\mathbb{K},\ \exists\, x\in\mathbb{K},\ x_n\to x\}\subset l^\infty$ ，证明 (C,d_∞) 完备

证：由于 (l^∞,d_∞) 完备，仅需证 C为 l^∞ 的闭子集

设C中序列 $x^{(k)}=(x_n^{(k)})_{n\geq1}$ 收敛至 $x^{(\infty)}=(x_n)_{n\geq1}$

$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-x_n^{(k)}|+|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}|+|x_m^{(k)}-x_m|$ ， $\forall\, k\geq1$

对 $\forall\varepsilon>0$ ， $\exists\, N>0$ ， $k>N$ 时有 $|x_n^{(k)}-x_n|<\frac{\varepsilon}{3}$ ， $\forall\, n\geq1$

由于 $(x_n^{(k)})_{n\geq1}$ 为柯西列，故 $\exists\, M>0$ ， $\forall\, n,m\geq M$ ，有 $|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{3}$

故 $|x_n-x_m|<\varepsilon$ ， $\forall\, n,m\geq M$

故 $(x_n)_{n\geq1}$ 为柯西列， $x^{(\infty)}\in C$ ， C为 l^∞ 的闭子集