《基础泛函分析》第十三周作业

1. 设X,Y为赋范空间，$T\in B(X,Y)$，$T^*\in B(Y',X')$为其共轭算子. 求证：${}^{\perp}R(T)=N(T^*)$.
解：先证${}^{\perp}R(T)\subset N(T^*)$. 任取$g\in {}^{\perp}R(T)$，则任意$x\in X$，有$g(Tx)=0$，因此$gT=0=T^*g$，从而$g\in N(T^*)$. 再证$N(T^*)\subset {}^{\perp}R(T)$. 任取$g\in N(T^*)$，则$T^*g=0=gT$，故任意$x\in X$，有$g(Tx)=0$，因此任意$y\in R(T)$，有$g(y)=0$，故$g\in {}^{\perp}R(T)$.
2. 设X为赋范空间，$x_n,x\in X$，$x_n\rightharpoonup x$. 求证：$x\in\overline{\mathrm{span}\{x_n:x\geq 1\}}$.
解：记$Y=\overline{\mathrm{span}\{x_n:x\geq 1\}}$，则$Y$为$X$的闭线性子空间。若$x\notin Y$，由 Hahn-Banach 定理（定理 4.1.7），存在$f\in X'$，使得$f|_Y=0,f(x)>0$，而$f(x_n)=0$，与$x_n\rightharpoonup x$矛盾.
3. 设X为赋范空间，$x_n,x\in X$，$x_n\rightharpoonup x$. 求证：存在y_n为$x_1,x_2,\cdots$的线性组合，使得$y_n\to x$.
解：由上一题知$x\in\overline{\mathrm{span}\{x_n:x\geq 1\}}$，故存在$y_n\in\mathrm{span}\{x_n:x\geq 1\}$使得$y_n\to x$. 由于$y_n\in\mathrm{span}\{x_n:x\geq 1\}$，故$y_n$为$x_1,x_2,\cdots$的线性组合.