解答

根据题意，接收信号、即自均衡器的输入 r[n]可以表示为：

$$r(n)=0.3x[n]+0.9x[n-1]+0.3x[n-2]+w[n]$$

其中 $w[n]\sim N(0,\sigma^2)$，自适应均衡器的期望输出 d[n]为：

$$d[n]=x[n-7]$$

而自适应均衡器输出 y[n]可以表示为：

$$y[n]=\sum_{k=0}^{10}w[n]*r[n-k]=\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{r}(n)$$

其中，$\mathbf{w}[n]=(w[n-10],w[n-9],\ldots,w[n])$、$\mathbf{r}[n]=(r[n-10],r[n-9],\ldots,r[n])$。

（1）LMS 算法

采用归一化 LMS 算法实现这个自适应均衡器。则自适应均衡器输出 y[n]可以表示为：

$$y[n]=\sum_{k=0}^{10}w(n-k)*r[n-k]=\hat{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{r}(n)$$

估计误差 e[n]可以表示为：

$$e[n]=d[n]-y[n]=x[n-7]-\hat{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{r}(n)$$

滤波器权重自适应更新可以表示为：

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1)=\hat{\mathbf{w}}(n)+\frac{\tilde{\mu}}{\left\|r[n]\right\|^2}\mathbf{r}[n]e^*[n]$$

其中$\|r(n)\|^2=\sum_{k=0}^{10}|r(n-1)|^2$，若要使算法收敛，则步长满足 $0\le\tilde{\mu}\le 2$。

下图分别给出了 $\mathrm{SNR}=20\mathrm{dB}$、$10\mathrm{dB}$，$\tilde{\mu}=0.2$、1、1.8 时，1 次实验误差平方的收敛曲线和 20 次实验平均误差平方的收敛曲线。

如图所示，不同的步长值$\tilde{\mu}$最终得到误差平方的收敛曲线不同。更大的$\tilde{\mu}$使得误差平方的收敛速度更快，但对应的失调参数更大，最终收敛到的均方误差相比维纳滤波器得到的均方误差大的额外值J_{ex}更大。此外，相比于 SNR=20dB，SNR=10dB 时，1 次实现的误差曲线随机性显著增加，这是因为此时噪声功率增大，对随机梯度产生了影响。

MATLAB 中打印出了最后得到的滤波器系数，这里不再给出。

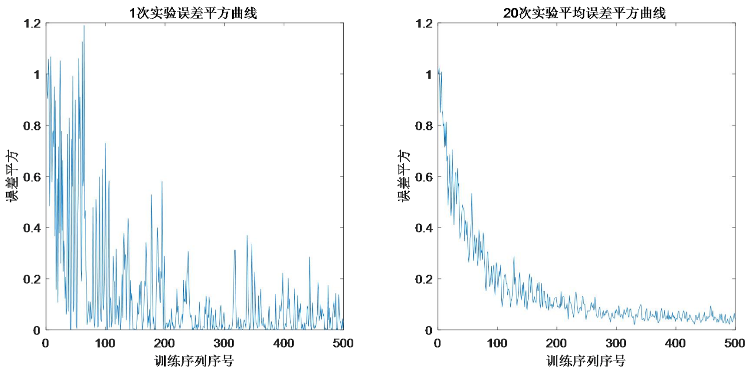

图 1-1 SNR=20dB，$\tilde{\mu}=0.2$

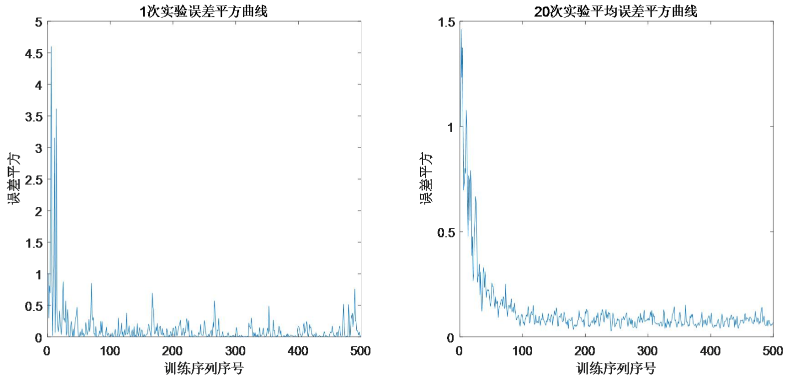

图 1-2 SNR=20dB，$\tilde{\mu}=1$

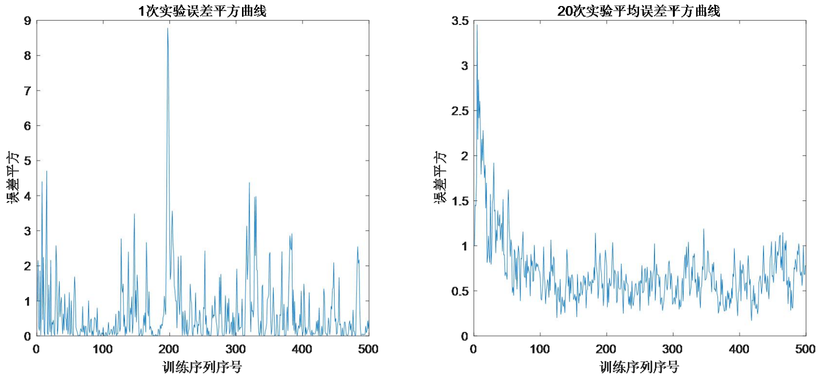

图 1-3 SNR=20dB，$\tilde{\mu}=1.8$

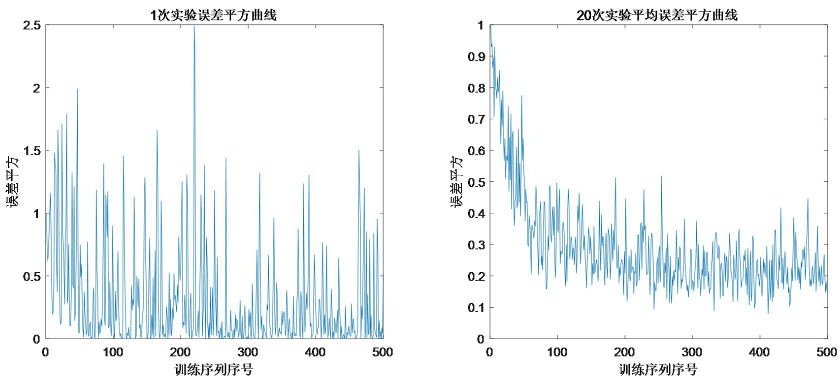

图 1-4 SNR=10dB，$\tilde{\mu}=0.2$

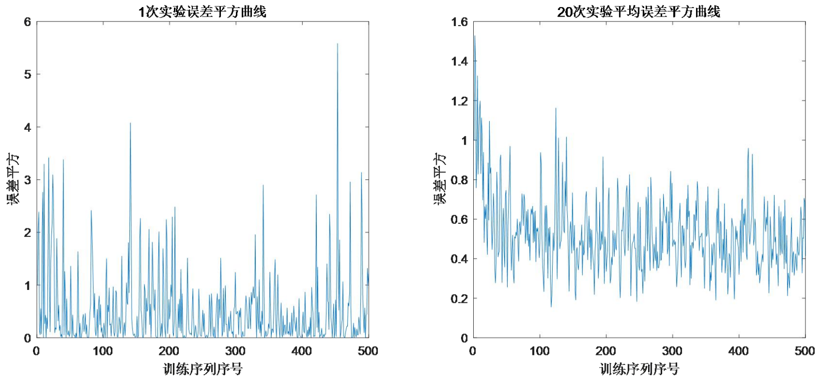

图 1-5 SNR=10dB，$\tilde{\mu}=1$

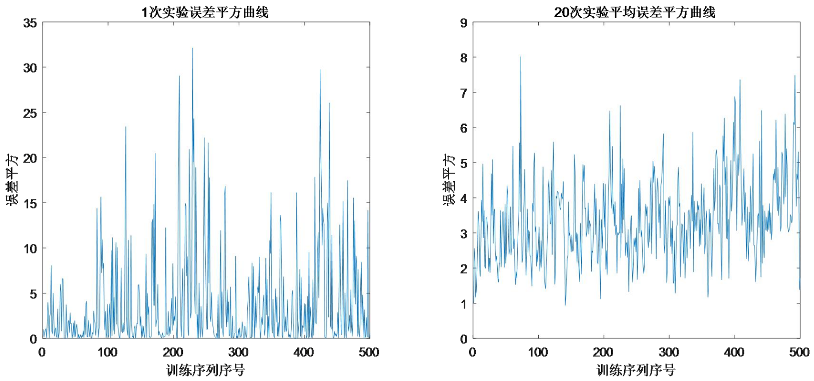

图 1-6 SNR=10dB，$\tilde{\mu}=1.8$

（2）RLS 算法

采用 RLS 算法，其递推方程可以表示如下。

计算 RLS 增益向量：

$$\mathbf{k}(n)=\frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{r}(n)}{1+\lambda^{-1}\mathbf{r}^{T}(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{r}(n)}$$

计算前验估计误差：

$$\varepsilon(n)=d(n)-\hat{\mathbf{w}}(n-1)\mathbf{x}(n)=x(n-7)-\hat{\mathbf{w}}(n-1)\mathbf{r}(n)$$

更新权系数向量

$$\hat{\mathbf{w}}(n)=\hat{\mathbf{w}}(n-1)+\mathbf{k}(n)\varepsilon^{*}(n)$$

递推系数逆矩阵：

$$\mathbf{P}(n)=\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)-\lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{r}^{T}(n)\mathbf{P}(n-1)$$

当前均衡器输出：

$$y(n)=\hat{\mathbf{w}}^{T}(n)\mathbf{r}(n)$$

当前估计误差

$$e(n) = d(n) - y(n) = x(n-7) - \hat{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{r}(n)$$

而初始值按照以下方式给出：

$$\mathbf{P}(0) = \delta^{-1}\mathbf{I}, \hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}$$

下图分别给出了 SNR = 20dB、10dB，λ = 0.2、0.5、0.8、δ = 0.001 时，1 次实验误差平方的收敛曲线和 20 次实验平均误差平方的收敛曲线。如图所示，

如图所示，不同的忘却因子λ最终得到误差平方的收敛曲线不同。更大的λ使得误差平方的收敛速度更快，且不同λ对应的最终收敛结果相同。此外，相比于 SNR=20dB，SNR=10dB 时，1 次实现的误差曲线随机性也显著增加。

MATLAB 中打印出了最后得到的滤波器系数，这里不再给出。

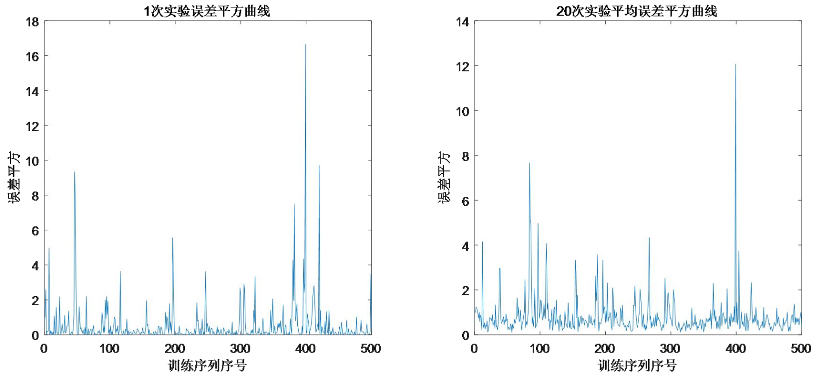

图 2-1 SNR=20dB，λ = 0.2

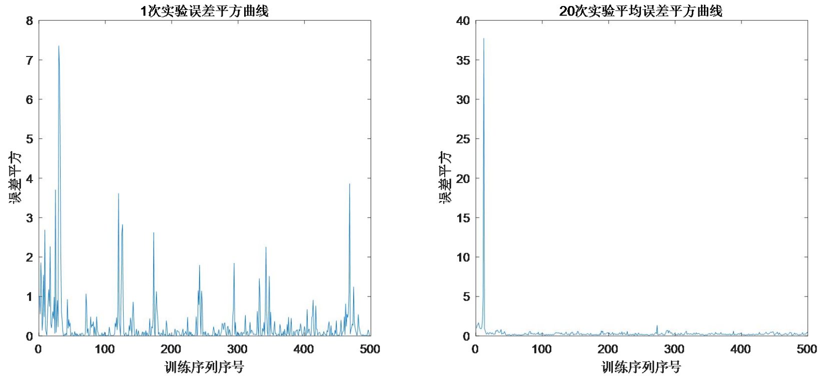

图 2-2 SNR=20dB，λ = 0.5

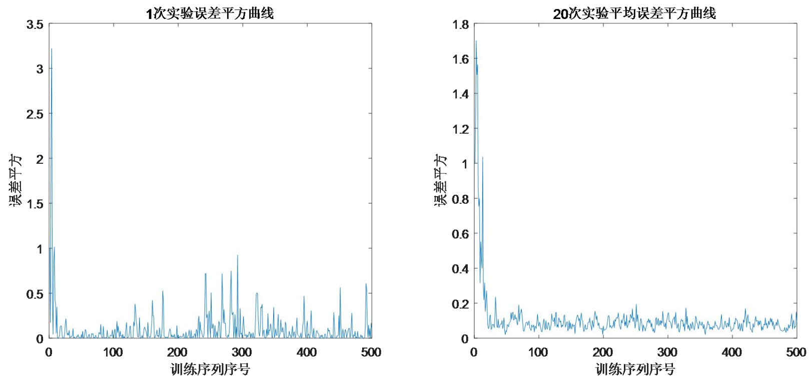

图 2-3 SNR=20dB，$\lambda = 0.8$

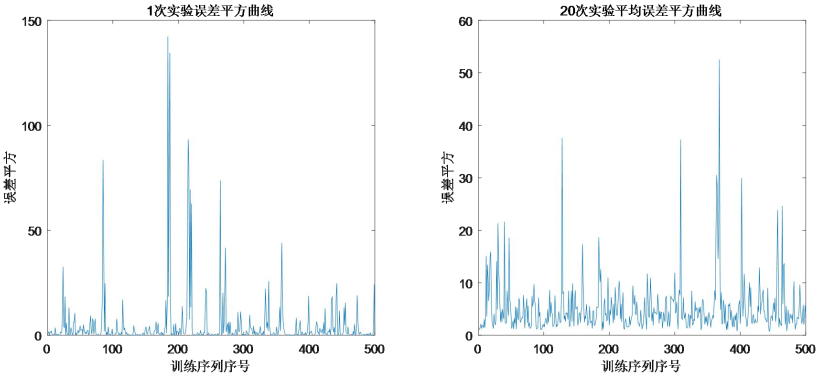

图 2-4 SNR=10dB，$\lambda = 0.2$

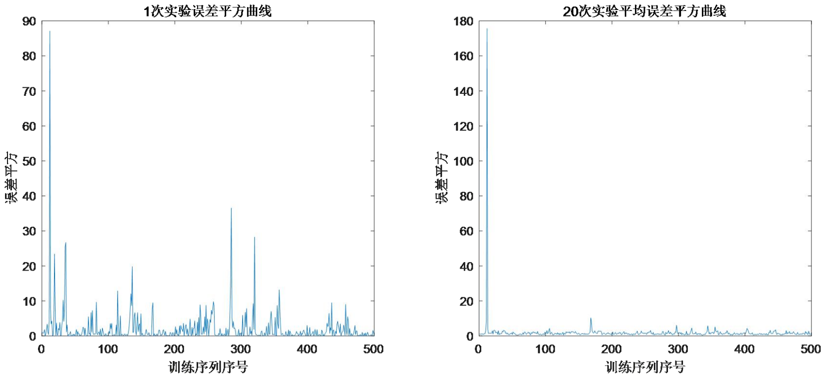

图 2-5 SNR=10dB，$\lambda = 0.5$

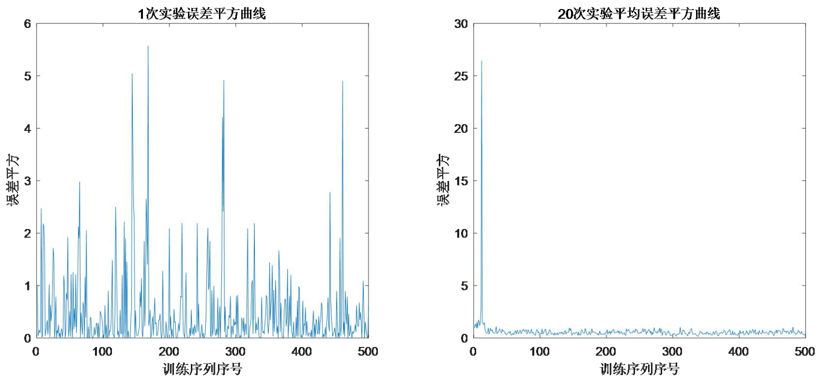

图 2-6 SNR=10dB，$\lambda = 0.8$

（3）LMS 算法和 RLS 算法对比

对比（1）和（2）中的图可知，在上述 SNR 条件下，相比于 LMS 算法，RLS 算法的收敛速度明显更快，且不存在额外误差项，即其收敛到明显小于 LMS 算法的最终误差值。但是，由于涉及矩阵乘法运算，因此相比于 LMS 算法，RLS 算法的计算复杂度明显更高。

ex_1_NLMS 和 ex_2_RLS 分别是分别对应（1）和（2）的仿真程序。