# 最小方差谱估计

作为 Wiener 滤波器的应用，考虑约束最优滤波，输出为：

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1} w_k^* x(n-k)$$

它要求在输入为 $e^{j\omega_0 n}$ 时，为直通，即增益为 1：

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1} w_k^* e^{j\omega_0 (n-k)} = e^{j\omega_0 n}\sum_{k=0}^{M-1} w_k^* e^{-j\omega_0 k}$$

即要求：$$\sum_{k=0}^{M-1} w_k^* e^{-j\omega_0 k} = 1$$

在此条件下，要求 y(n) 的输出能量为最小

这实际上是一个约束最小化问题，用 Lagrange 乘积法，求：

$$J=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{M-1}w_k^* w_i r(i-k)+\mathrm{Re}\left[\lambda^*\left(\sum_{k=0}^{M-1}w_k^* e^{-j\omega_0 k}-1\right)\right]$$

最小，解这个最优问题得到

$$\boldsymbol{w}_0=\frac{R^{-1}\boldsymbol{e}_0}{\boldsymbol{e}_0^H R^{-1}\boldsymbol{e}_0}$$

这里：

$$\boldsymbol{e}_0=[1,e^{-j\omega_0},e^{-j\omega_0 2},\cdots,e^{-j(M-1)\omega_0}]^T$$

最小功率为：

$$J_{\min}=\frac{1}{\boldsymbol{e}_0^H R^{-1}\boldsymbol{e}_0}$$

进行谱估计时，信号失量的惯用顺序，定义：

$$X=[x(0),x(1),\cdots,x(p-1)]^T \quad R_{xx}=E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H]$$

仅考虑 P 阶滤波器情况，

$$R=[r_{xx}(i-j)]_{pxp}$$

$$\boldsymbol{e}(f)=[1,e^{j\omega},e^{j2\omega},\cdots e^{j(p-1)\omega}]^T$$

$$=[1,e^{j2\pi f},e^{j4\pi f},\cdots e^{j2(p-1)\pi f}]^T$$

最小方差谱估计器

$$P_{MVSE}(f)=\frac{1}{\boldsymbol{e}^H(f)R^{-1}\boldsymbol{e}(f)}$$

利用 Cholesky 分解，可以证明：

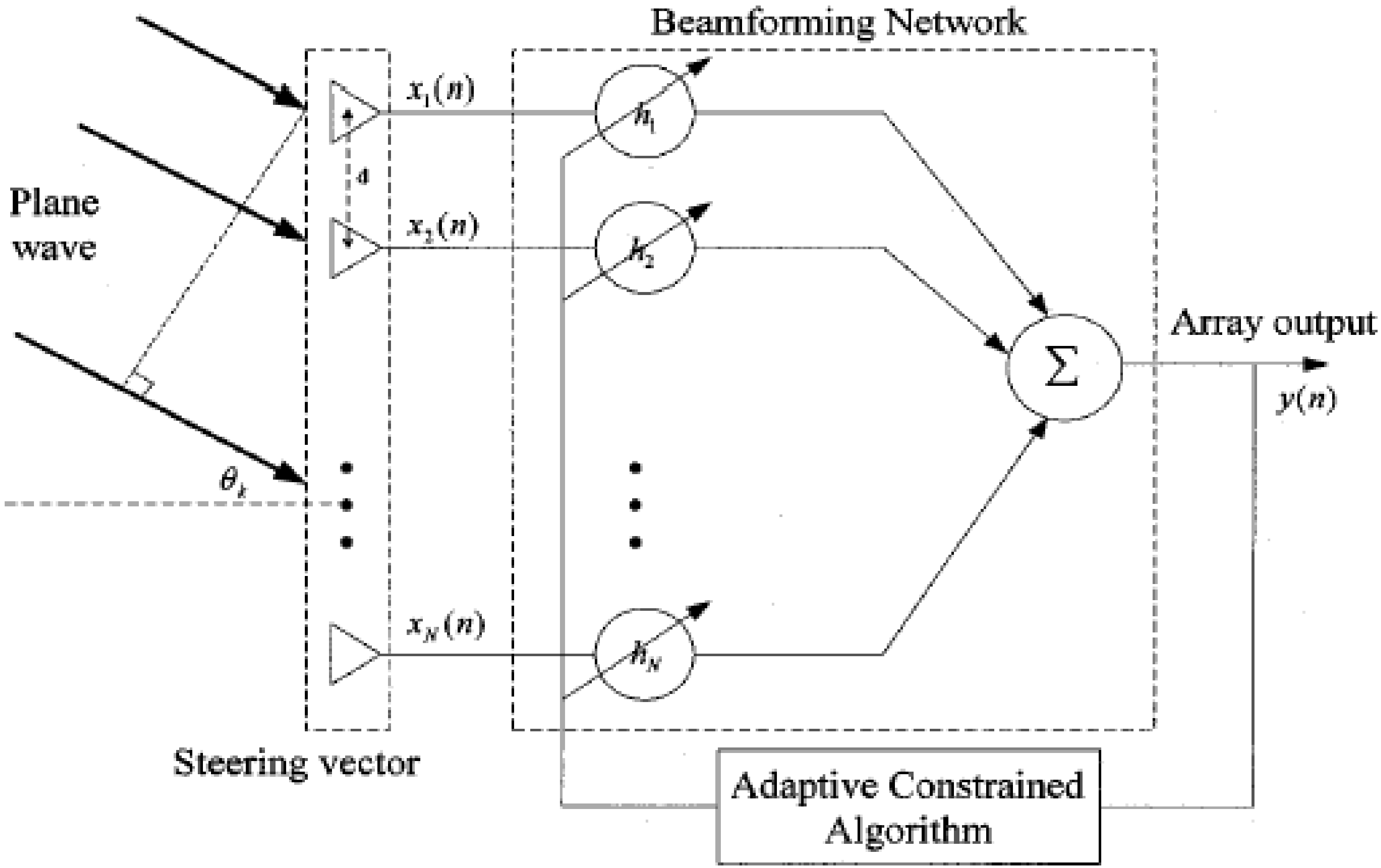
$$\frac{1}{P_{MVSE}(f)}=\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{P_{AR}^{(i)}(f)}$$

在实际中，可以用

$$[\hat{R}_{xx}]_{ij}=\frac{1}{2(N-1)}\left[\sum_{n=p}^{N-1}x(n-i)x(n-j)+\sum_{n=0}^{N-1-p}x(n+i)x(n+j)\right]$$

来估计理论上的自相关值。

# 空间阵列信号处理：波束形成问题



则在第m个阵元上的接收信号为

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^{P} s_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} md \sin\theta_i} + n_m(t)$$

阵列输出

$$y(t) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m^* x_m(t)$$

要求

$$\sum_{m=0}^{M-1} w_m e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} md \sin\theta_0} = \sum_{m=0}^{M-1} w_m e^{-j\varpi_0 m} = 1$$

$$\min\left\{E\left(\left|y(t)\right|^2\right)\right\}$$

# 快照信号矢量和自相关矩阵

$$\boldsymbol{x}(t_m) = \left[x_0(t_m), x_1(t_m), \cdots, x_{M-1}(t_m)\right]^T$$

$$R = \frac{1}{N}\sum_{t_m=t_1}^{t_N} \boldsymbol{x}(t_m)\boldsymbol{x}^H(t_m)$$

# 阵列信号处理与时域信号处理比较

- 波束形成 .VS. 约束最优滤波器
- DOA估计 .VS. 频率估计
- 阵列方向图 .VS. FIR滤波器设计
- 自适应空间滤波 .VS. 自适应滤波器
- … …

# 频率估计

设已知所观测的数据来自白噪声中的正弦波，即

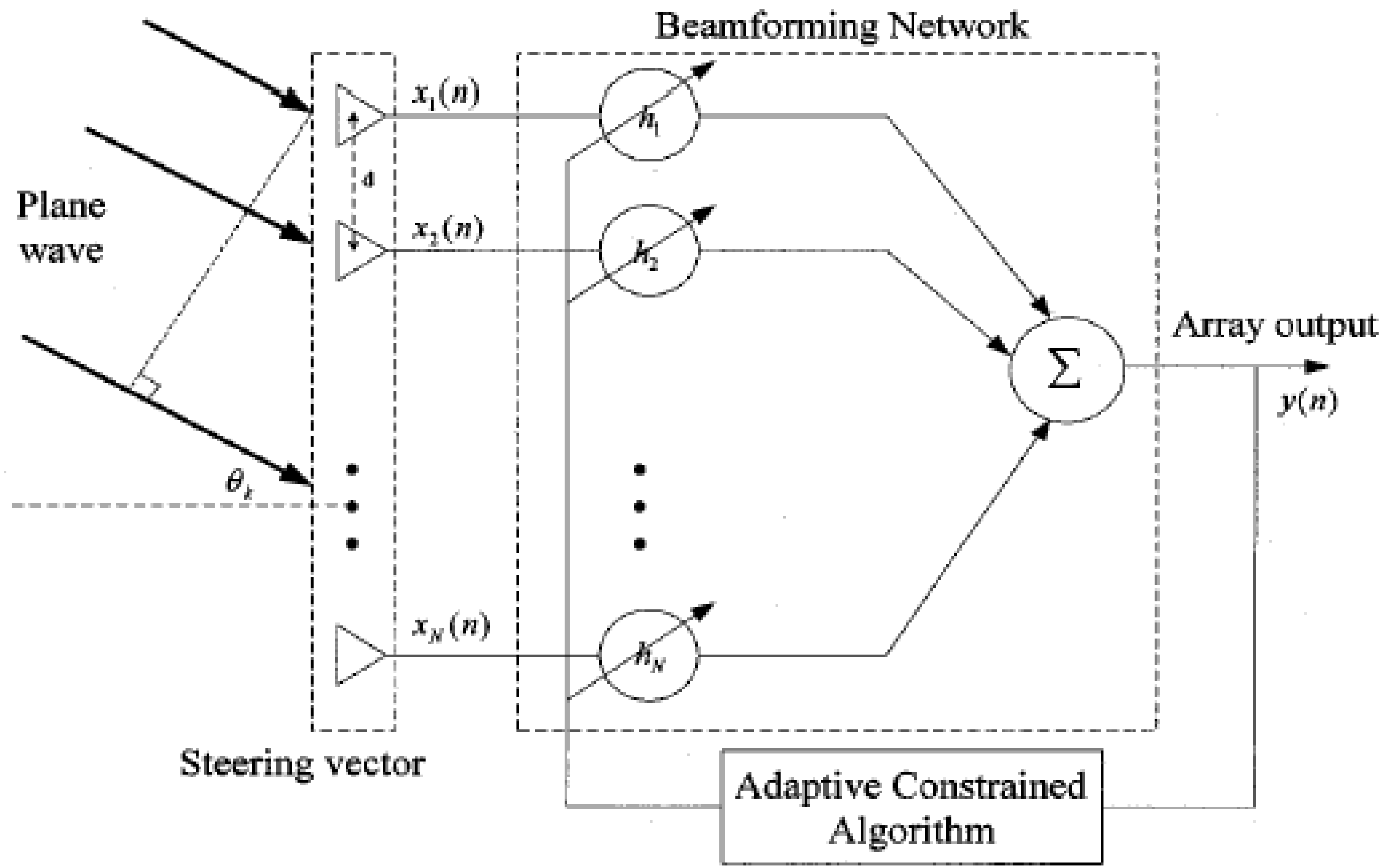
$$x(n)=\sum_{i=1}^{P}A_i e^{j2\pi f_i n+\varphi_i}+z(n)$$

$z(n)$是白高斯噪声，方差为$\sigma_z^2$，均值为 0，为使该序列是 WSS 的，

假设$\varphi_i$是$[0,2\pi]$之间均匀分布的随机变量。

为了估计频率$\{f_i, i=1,2,\cdots p\}$，有效的方法是利用自相关矩阵的特征分解性质。

# 空间阵列信号处理：波达方向估计问题



则在第m个阵元上的接收信号为

$$x_m(t)=\sum_{i=1}^{P} s_i(t)e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}md\sin\theta_i}+n_m(t)$$

各阵元上的接收信号写成向量形式

$$\boldsymbol{x}(t)=A\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{n}(t)$$

$$A=\left[\boldsymbol{\alpha}(\theta_1),\boldsymbol{\alpha}(\theta_2),\cdots,\boldsymbol{\alpha}(\theta_P)\right]$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin(\theta_1)} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin(\theta_2)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin(\theta_P)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d\sin(\theta_1)} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d\sin(\theta_2)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d\sin(\theta_P)} \end{bmatrix}$$

# 阵列处理是：空间信号处理问题

阵列处理的波达估计问题
时间信号的频率估计问题

一般叙述见课本3.2
详见：Van Trees 《Optimum Array Processing》 Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory

对于噪声中的正弦波情况，（M×M 自相关矩阵）

$$R_{xx}=\sum_{i=1}^{p}A_i^2\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^H+\sigma_Z^2 I\overset{\Delta}{=}R_{ss}+R_{ZZ}$$

$R_{ss}$对应于信号分量，$R_{zz}$对应于噪声分量，且

$$\boldsymbol{e}_i=[1,e^{j2\pi f_i},e^{j2\pi f_i 2},\cdots e^{j2\pi f_i(M-1)}]^T$$

对于简单情况：P=1 仅有一个复正弦情况，可以看到：

$$V_1=(\frac{1}{\sqrt{M}})e_1$$

是 $R_{ss}$ 和 $R_{xx}$ 的一个特征矢量，另设 $V_2,\cdots V_M$ 为 $R_{xx}$ 的其它特征矢量，$R_{xx}$ 容易分解为：

$$R_{xx}=(MA_1^2+\sigma_z^2)V_1V^H{}_1+\sigma_z^2\sum_{i=2}^{M}V_iV_i^H$$

相当于它有特征值：$\{MA_1^2+\sigma_z^2,\sigma_z^2,\cdots\sigma_z^2\}$

★ 最大的特征值对应着信号分量：$V_1$（也包含噪声贡献），其它特征值对应着噪声分量

★ 由$V_1$张成信号空间，$\{V_2, V_3, \cdots V_M\}$张成噪声空间，两个空间是正交的，由此：

$$V_1^H \sum_{i=2}^{M} \alpha_i V_i = \frac{1}{\sqrt{M}} \boldsymbol{e}_1^H \sum_{i=2}^{M} \alpha_i V_i = 0$$

推广到一般 P 情况：$R_{xx}$可以分解为：

$$R_{xx}=\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i+\sigma_z^2)V_iV_i^H+\sum_{i=p+1}^{M}\sigma_z^2V_iV_i^H$$

几点注意：

a. $\sum_{i=1}^{p}\lambda_iV_iV_i^H$ 表示信号自相关阵$R_{ss}$.

b. 可以证明：$\{V_1,V_2,\cdots V_p\}$与$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots\boldsymbol{e}_p\}$张成相同空间。

c. $\boldsymbol{e}_i^H\sum_{j=p+1}^{M}\alpha_jV_j=0,\quad i=1,2,\cdots p$

# Pisarenko 谱波分解

取特殊情况：M=p+1 $\quad e_i^H V_{p+1} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots p$

这里$V_{p+1}$是联系到最小特征值的特征矢量

上式可以写成标量形式：

$$\sum_{n=0}^{p} [V_{p+1}]_n e^{-j2\pi f_i n} = 0$$

它相当于多项式：

$$\sum_{n=0}^{p} [V_{p+1}]_n Z^{-n} = 0$$

在单位圆上的解。

## MUSIC 方法（Multiple Signal Classification）

令 $$\hat{P}_{MUSIC}(f)=\frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M}\left|e^{H}\hat{V}_{k}\right|^{2}}$$

在 $e=e_i$ 时，

$$\hat{P}_{MUSIC}(f)\Big|_{f=f_i}=\frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M}\left|e_i^{H}\hat{V}_{k}\right|^{2}}\rightarrow\infty$$

由于 $\hat{V}_k$ 是估计值而不是精确值，如上式将得到一个极大值，取前 P 个极大值点，得到相应频率估计。

**等价表示**

MUSIC 算法也经常按矢量空间语言描述，$U_1=[V_1,V_2,\cdots V_p]$ 表示信号空间，$U_2=[V_{p+1},V_{p+2},\cdots,V_M]$ 表示噪声子空间，

等价的定义 MUSIC 谱为

$$\hat{P}_{MUSIC}(f)=\frac{1}{\boldsymbol{e}^H U_2 U_2^H \boldsymbol{e}}$$

★直接可以验证两个 MUSIC 谱定义是等价的。

★　由于 $\hat{V}_k$ 是估计值而不是精确值，在待求的各频率点上将得到一个极大值，取前 P 个极大值点，得到相应频率估计。

# MUSIC 算法小结：

（1） 由记录的观测数据，估计自相关序列的前 M 个值，并构成 M×M 自相关矩阵。

（2） 对自相关矩阵进行特征值分解，得到 $p$ 个主特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_p$，

和次特征值 $\sigma^2$，并求出相应的特征矢量，构成 $U_1$ 和 $U_2$。

（3） 计算 MUSIC 谱 $\hat{P}_{MUSIC}(f_i)$，这里取 $f_i = i \cdot \Delta f$，其中根据对待估计值的频率精度要求确定 $\Delta f$ 的值，（例如要求精度为 0.001，取 $\Delta f$ =0.001）。

（4） 从如上计算结果中取 $p$ 个峰值，构成待估计的 $p$ 个频率。

# 求根MUSIC算法

令 $$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}(z)=\left[1, z, \cdots, z^{M-1}\right]^{T}$$

定义 $$Q(z)=\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}^{T}\left(\frac{1}{z}\right)\left[I-U_{1} U_{1}^{H}\right] \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}(z)$$

求解$Q(z)$最靠近单位圆的$p$个根$z_i$

$$\hat{\omega}_{i}=\arg\left(z_{i}\right)$$

# ESPRIT算法

(Estimating Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)

利用子空间旋转方法估计噪声中复正弦信号的频率和幅度，ESPRIT方法利用了两个时间上互相位移的数据集张成的信号子空间的旋转不变性，通过广义特征值估计复正弦信号的频率.

# 预备知识：广义特征值和特征向量

设 A 和 B 是两个 $n\times n$ 的矩阵，具有形式 $A-\lambda B$ 的所有矩阵组称为矩阵束(Matrix pencil)(也表示成(A,B))，λ是任意复数，矩阵束的广义特征值集合 $\lambda(A,B)$ 定义为：

$$\lambda(A,B)=\{z\in C \mid \det(A-zB)=0\}$$

更一般的定义：使(A-zB)降秩的 z 值集合

若 $\lambda\in\lambda(A,B)$，如果有一矢量 $\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，满足

$$Ax=\lambda Bx$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵束 $A-\lambda B$ 的广义特征矢量

# 信号模型为

$$x(k)=\sum_{i=1}^{d}s_i e^{jk\omega_i}+n(k)$$

★定义: $x(n)$的时间位移信号$y(n)$. $y(n)=x(n+1)$

★定义: m维矢量(这里要求$m>d$)

$$\boldsymbol{x}(k)=\left[x(k),\cdots\cdots,x(k+m-1)\right]^T$$

$$\boldsymbol{n}(k)=\left[n(k),\cdots\cdots,n(k+m-1)\right]^T$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\left[y(k),\cdots\cdots,y(k+m-1)\right]^T$$

$$=\left[x(k+1),\cdots\cdots,x(k+m)\right]^T$$

矩阵表示:

$$\boldsymbol{x}(k)=A\boldsymbol{s}+\boldsymbol{n}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=A\Phi\boldsymbol{s}+\boldsymbol{n}(k+1)$$

$\boldsymbol{s}=[s_1,\cdots s_d]^T$, Φ是 d×d 矩阵，它反映了 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的时移关系，又称为旋转算子.

$$\Phi=diag[e^{j\omega_1},\cdots e^{j\omega_d}]$$

A 是 m×d Vandermonde 矩阵，它的列矢量

$\{\boldsymbol{a}(\omega_i);i=1,\cdots d\}$ 定义为: $\boldsymbol{a}(\omega_i)=\left[1,e^{j\omega_i},\cdots e^{j(m-1)\omega_i}\right]^T$

★ $\boldsymbol{x}$ 的自相关矩阵写成:

$$R_{xx} = E\left[\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}^{H}(k)\right] = ASA^{H} + \sigma^{2}I$$

$$S = diag\left[|s_1|^2, \cdots |s_d|^2\right]$$

★类似地, $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的互相关矩阵为:

$$R_{xy} = E\left[\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{y}^{H}(k)\right] = AS\Phi^{H}A^{H} + \sigma^{2}Z$$

注意, $\sigma^{2}Z = E\left[\boldsymbol{n}(k)\boldsymbol{n}^{H}(k+1)\right]$, Z 是 m×m 矩阵, 它的次对角元素为 1, 其它元素为零.

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

两个相关矩阵分别可以写成:

$$[R_{xx}]_{ij}=E\left[x(i)x^*(j)\right]=r_{i-j}=r_{j-i}^*$$

即

$$R_{xx}=\begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & \cdots & r_{m-1}^* \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{m-2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m-1} & r_{m-2} & \cdots & r_0 \end{bmatrix}$$

## 互相关

$$\left[R_{xy}\right]_{ij} = E\left[x(i)x^*(j+1)\right] = r_{i-j-1}$$

$$R_{xy} = \begin{bmatrix} r_1^* & r_2^* & \cdots & r_m^* \\ r_0 & r_1^* & \cdots & r_{m-1}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m-2} & r_{m-3} & \cdots & r_1^* \end{bmatrix}$$

# 估计算法的基础是如下定理

*定理:* 定义矩阵束$\{C_{xx}, C_{xy}\}$，这里$C_{xx} = R_{xx} - \lambda_{\min} I$

和$C_{xy} = R_{xy} - \lambda_{\min} Z$，$\lambda_{\min}$是$R_{xx}$的最小特征值.

定义Γ是矩阵束的广义特征值矩阵，如果S是非奇异的，则Φ和Γ具备如下关系:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该式中Φ的元素可能是重排列的.#

证明： A是满秩矩阵，S是非奇异的，故 $ASA^H$ 的秩是 $d$，

因此 $R_{xx}$ 具有 $m$-$d$ 阶特征值 $\sigma^2$，它是最小特征值，因此，

$$C_{xx} = R_{xx} - \lambda_{\min} I = R_{xx} - \sigma^2 I = ASA^H$$

$$C_{xy} = R_{xy} - \lambda_{\min} Z = R_{xy} - \sigma^2 Z = AS\Phi^H A^H$$

现在考虑矩阵束

$$C_{xx} - \gamma C_{xy} = AS(I - \gamma\Phi^H)A^H$$

容易检查，$ASA^H$ 和 $AS\Phi^H A^H$ 的列空间是一致的，对一般的γ取值，$C_{xx} - \gamma C_{xy} = AS(I - \gamma\Phi^H)A^H$ 的秩为 d，只有

当 $\gamma = e^{j\omega_i}$，$(I - \gamma\Phi^H)$ 的第 $i$ 行为零，

$C_{xx} - \gamma C_{xy} = AS(I - \gamma\Phi^H)A^H$ 的秩降为 $d$-1，按定义，$\gamma = e^{j\omega_i}$ 是矩阵束的一个广义特征值，这样的特征值有 $d$ 个，其余 $m$-$d$ 个广义特征值为零.#

由如上定理，得到ESPRIT算法如下：

1) 由观测数据得到$\{r_0, r_1, \cdots r_m\}$的估计值.

2) 由$\{r_0, r_1, \cdots r_m\}$构造自相关和互相关矩阵$R_{xx}, R_{xy}$.

3) 对$R_{xx}$作特征分解，对于 m>d，最小特征值是$\sigma^2$.

4) 计算$(C_{xx}, C_{xy})$, $(ASA^H, AS\Phi^H A^H)$

5) 计算矩阵束$(C_{xx}, C_{xy}) = (ASA^H, AS\Phi^H A^H)$的广义特征值，在单位圆上的对应复正弦的频率，其它为 0.

6) 设广义特征值$\gamma_i$的特征矢量记为：$\boldsymbol{v}_i$，由

$$AS\left(I - \gamma_i \Phi^H\right)A^H \boldsymbol{v}_i = 0$$

可以导出：

$$|s_i|^2 = \frac{\boldsymbol{v}_i^H C_{xx} \boldsymbol{v}_i}{\left|\boldsymbol{v}_i^H \boldsymbol{a}(\omega_i)\right|}$$

# ESPRIT算法的其他形式

- LS－ESPRIT算法
- TLS－ ESPRIT算法
- 酉阵－ ESPRIT算法

# 模型阶估计

MDL 准则:

$$MDL(k) = -N\log\left(\frac{G(k)}{A(k)}\right) + \frac{1}{2}k(2M-k)\log N$$

这里

$$A(k) = \left(\frac{1}{M-k}\sum_{i=k+1}^{M}\lambda_i\right)^{M-k} \qquad G(k) = \prod_{i=k+1}^{M}\lambda_i$$

计算 $MDL(k)$, $k = 0,1,2,\cdots,M-1$，当 $k = p$ 时 $MDL(k)$ 最小，$p$ 为正弦波数目的估计值。

# 备注

- 本章内容大多数可直接或稍作变化而应用于阵列信号处理
- AR模型等方法，在雷达等领域，也被称为超分辨技术。