《基础泛函分析》第十二周作业

1. 设X为赋范空间，M为X的线性子空间，令${}^{\perp}M=\{f\in X':f|_M=0\}$. 若$M_1,M_2$为$X$的闭线性子空间，且$M_1\neq M_2$. 求证：${}^{\perp}M_1\neq{}^{\perp}M_2$.
   解：由于$M_1\neq M_2$，故$M_1\not\subset M_2$和$M_2\not\subset M_1$至少有一个成立。设$M_1\not\subset M_2$，即存在$x\in M_1,x\notin M_2$. 由 Hahn-Banach 定理（定理 4.1.7），存在$f\in X'$，使得$\|f\|=1,f|_{M_2}=0,f(x)=\rho(x,M_2)$. 由于$M_2$为$X$的闭线性子空间，故$\rho(x,M_2)>0$，因此$f\in{}^{\perp}M_2$但$f\notin{}^{\perp}M_1$. 故${}^{\perp}M_2\not\subset{}^{\perp}M_1$. 同理，若$M_2\not\subset M_1$，则${}^{\perp}M_1\not\subset{}^{\perp}M_2$. 故总有${}^{\perp}M_1\neq{}^{\perp}M_2$.
2. 设赋范空间X包含n个线性无关的元素，求证：X'也包含至少n个线性无关的元素.
   解：以下证明，设赋范空间X包含线性无关的元素$\{x_1,\cdots,x_n\}$，则，X'也包含线性无关的元素$\{f_1,\cdots,f_n\}$，且对任意$i=2,\cdots,n$和任意$x\in\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_{i-1}\}$，有$f_i(x)=0$. 对$n$使用数学归纳法. 当$n=1$时，取$x_1\in X,x_1\neq 0$，由 Hahn-Banach 定理（定理 4.1.4），存在$f_1\in X'$，使得$\|f_1\|=1$，从而$f_1(x_1)=\|x_1\|>0$，因而结论成立. 设结论对$n=k$成立，当$n=k+1$时，设$\{x_1,\cdots,x_{k+1}\}$为X中$k+1$个线性无关的元素. 对前k个元素应用归纳假设，可得到X'中线性无关的$\{f_1,\cdots,f_k\}$. 由 Hahn-Banach 定理（定理 4.1.7），存在$f_{k+1}\in X'$，使得 $\|f_{k+1}\|=1,f_{k+1}(x_1)=\cdots=f_{k+1}(x_k)=0,f(x_{k+1})=\rho(x_{k+1},\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_k\})>0$. 设$\mu_1f_1+\cdots+\mu_{k+1}f_{k+1}=0$，考虑两端在$x=x_1,\cdots,x_{k+1}$的值可得$\mu_1=\cdots=\mu_{k+1}=0$，因此$\{f_1,\cdots,f_{k+1}\}$线性无关，因此结论成立. 由数学归纳法可知结论对所有$n\geq 1$成立.
3. 设X为赋范空间，M为X的线性子空间，$x\in X$，求证：
   $$\rho(x,M)=\sup\{|f(x)|:f\in X',\|f\|\leq 1,f|_M=0\}.$$
   解：将M改为$\bar{M}$不改变等式两端的值，因此下面不妨设M为闭集. 若$x\in M$，则$\rho(x,M)=0$，且任意满足$f|_M=0$的f都有$|f(x)|=0$，因此等式成立. 若$x\notin M$，由 Hahn-Banach 定理（定理 4.1.7）知，存在$f\in X'$，使得$\|f\|=1,f|_M=0,f(x)=\rho(x,M)=|f(x)|$，因此$\rho(x,M)\leq\sup\{|f(x)|:f\in X',\|f\|\leq 1,f|_M=0\}$. 若$\rho(x,M)<\sup\{|f(x)|:f\in X',\|f\|\leq 1,f|_M=0\}$，则存在$\sup\{|f(x)|:f\in X',\|f\|=1,f|_M=0\}$，使得$|f(x)|>\rho(x,M)$. 此时，任取$x'\in M$，有$|f(x)|=|f(x)-f(x')|=|f(x-x')|>\rho(x,M)\geq\|x-x'\|=\|f\|\|x-x'\|$，矛盾！故$\rho(x,M)=\sup\{|f(x)|:f\in X',\|f\|\leq 1,f|_M=0\}$.