基础泛函分析期末试题（2018.01.13）

一、设 X 为 Hilbert 空间，A 和 B 都为从 X 到 X 的算子，任意 $x, y \in X$，都有

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

求证：1. A 和 B 都为线性算子；

2. A 为单射当且仅当 $R(B)$ 在 X 中稠密；

3. A 和 B 都为有界线性算子。

二、设 X, Y 为 Banach 空间，$T: X \to Y$ 为线性算子。设 $M \subset Y'$ 足以区分 Y 中的任意两个元素，即：任意 $x, y \in Y$，若对于任意 $f \in M$，都有 $f(x) = f(y)$，则 $x = y$。对于任意 $f \in M$，$f \circ T \in X'$。求证：$T \in B(X, Y)$。

三、在 $X = C[0,1]$ 上赋予范数 $\| x \|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt$。若 $x \in X$，令

$$f_1(x) = x(0),$$

$$f_2(x) = \int_0^1 tx(t) dt.$$

求证：1. f_1 和 f_2 都为 X 上的线性泛函；

2. $f_1 \notin X'$；

3. $f_2 \in X'$ 并求出 $\| f_2 \|$。

四、设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$T_n \in B(X, Y)$。设任取 $x \in X$，$\lim\limits_{n \to \infty} T_n x$ 在 Y 中存在，记 $Tx = \lim\limits_{n \to \infty} T_n x$。求证：

1. $T \in B(X, Y)$，且存在常数 $C \geq 0$,使得任取 $n \geq 1$ 都有 $\| T_n \| \leq C$；

2. $\| T \| \leq \sup\limits_{n \geq 1} \| T_n \|$。

五、设 X 为可分赋范空间，求证：存在一列 $\{f_n\} \in X'$ 且 $\| f_n \| = 1$，使得任取 $x \in X$，有 $\| x \| = \sup\limits_{n \geq 1} | f_n(x) |$。