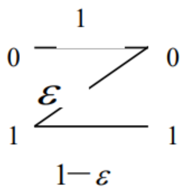
2022 秋季学期《应用信息论基础》作业 4

请于 2022.12.7 随堂提交，请写明姓名学号

1.试求以下信道的信道容量

$$Q_1=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3\end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

2. Z 信道有二进制的输入和输出，如下所示

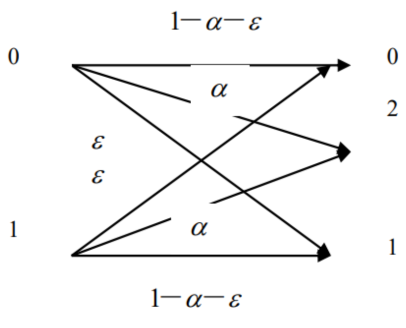


$$p(y\mid x)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}$$

（1）求 Z 信道的最大的输入的 pdf。提示$\frac{dH(x)}{dx}=ln\frac{1-x}{x}$

（2）当$\varepsilon=0.5$时，求 Z 信道的信道容量。

3. 求下面二进制对称删除信道的容量，其中错误概率为ε，删除概率为α



$$p(y\mid x)=\begin{bmatrix}1-\alpha-\varepsilon & \varepsilon & \alpha\\ \varepsilon & 1-\alpha-\varepsilon & \alpha\end{bmatrix}\qquad \begin{matrix}x\in\{0,1\}\\ y\in\{0,1,2\}\end{matrix}$$

4. 二元离散对称无记忆信道的容量为$C=0.5\text{bit/symbol}$，现按香农随机编码的方法对每一消息$m(m=0,1,2,\dots,M-1)$给以相应的长为N的码字$C_m=(c_{m1},c_{m2},\dots,c_{mN})$。全部$M=2^{NR}$个码字组成一分组码。现设$N=10^{10}$，

$R=0.5b/s$，设信道输入和输出分别用随机变量X和Y表示。试求在输出序列中与某一特定输入码字构成联合典型的序列的数目为。

5.和信道：设$(X_1,p(y|x),Y_1)$和$(X_2,p(y|x),Y_2)$均为离散无记忆信道，信道容量分别为C_1和C_2。输入字母表X_1和X_2是不同的，输出字母表Y_1和Y_2也是不同的。一个新的信道，输入$x\in X_1\cup X_2$，输出$y\in Y_1$或$y\in Y_2$，构造了一个输入字母表为$X_1\cup X_2$，输出字母表为$Y_1\cup Y_2$的信道，求其信道容量。

6. 设二进制对称信道$C_1,C_2,\dots,C_m$，所有信道的错误转移概率都为$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，并且构成级联信道，即$C_i$的输出是$C_{i+1}$的输入$(i=1,2,\dots,m-1)$。设信道$C_1$输入0 的概率为$p_0$，在不引入任何编译码机制的基础上，试求

（1）在C_1的输入端给定任何概率分布下C_m的输出端出现 0 的概率

（2）该级联信道的容量C以及$\lim_{m\to+\infty}C$

7.考虑一个$x,y\in\{0,1,2,3\}$的信道，转移概率矩阵$p(y|x)$由下列矩阵给出：

$$\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$$

（1）求该信道的信道容量

（2）定义随机变量$z=g(y)$，其中

$$g(y)=\begin{cases}A, & if\ y\in\{0,1\}\\ B, & if\ y\in\{2,3\}\end{cases}$$

对以下的概率分布，计算$I(X;Z)$: $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & if\ x\in\{1,3\}\\ 0, & if\ x\in\{0,2\}\end{cases}$

（3）求x和z之间的信道容量

（4）对于（2）中的分布，证明或证伪下述命题

“$X\to Z\to Y$形成一个马尔科夫链”

8. 设离散无记忆信道的输入和输出皆为 r 个符号，每一个输入符号对应 r 个输出符号，其传输概率为概率组$p_1, p_2, \dots, p_r$的一个置换，并且每一个输出符号对应的转移概率的和是相同的。试证明上述信道的信道容量为：

$$logr + \sum_{j=1}^{r} p_j log p_j$$

9. 等噪声信道：一个无记忆信道有离散的输入X和连续的输出$Y = X + Z$，其中Z在区间$[-a, +a]$上服从均匀分布。

（1）当$X \in \{-1, +1\}$等概时，求$I(X;Y)$（为a的函数）

（2）当$a = 1/2$时，在区间$[-1, +1]$上选择X的离散值和他们的概率分布，使得$I(X;Y)$最大

（3）当$\frac{1}{2} < a < 1$时，求限幅信道（$|X| \leq 1$）的容量

10. 设两个n长离散随机矢量x^n和y^n构成随机序列对(x^n, y^n)，其联合分布$p(x^n, y^n)$满足：$p(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$。当$x^n$和$y^n$构成联合典型序列时，试证明，对于任意正实数$\varepsilon$，存在足够大的正整数 N，当$n > N$时，满足

$$2^{-n[H(Y|X)+\varepsilon]} < p(y^n|x^n) < 2^{-n[H(Y|X)-\varepsilon]}$$

11.设 X 和 Y 为信道的输入和输出，均取值于集合$a = \{a_1, a_2, \dots, a_K\}$。已知$p(x = a_k) = p_k$，$p\left(y = a_j | x = a_k\right) = p_{kj}$，定义$P_e = \sum_k p_k \sum_{j \neq k} p_{kj}$，求证：

$$H(X|Y) \leq P_e\, log(K-1) + H(P_e)$$