《基础泛函分析》第十四周作业

1. 设X,Y为赋范空间，$T:X\to Y$为闭线性算子，求证：

（1）$N(T)$为X的闭线性子空间；

（2）若T为一一映射，则$T^{-1}:Y\to X$也为闭线性算子；

（3）T将X的紧集映射到Y的闭集；

（4）Y中的紧集通过T的逆像为X的闭集.

解：（1）任意$x_1,x_2\in N(T),\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$，$T(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1Tx_1+\lambda_2Tx_2=0$，故$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\in N(T)$，从而$N(T)$为$X$的线性子空间. 任取$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset N(T),x_n\to x\in X$，由于$Tx_n=0\to 0$，故$(x_n,Tx_n)\to(x,0)$. 由于$T$为闭算子，故$Tx=0$，即$x\in N(T)$，因此$N(T)$为闭集.

（2）任意$y_1,y_2\in Y,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$，由于$T(\lambda_1T^{-1}y_1+\lambda_2T^{-1}y_2)=\lambda_1TT^{-1}y_1+\lambda_2TT^{-1}y_2=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2$，故$\lambda_1T^{-1}y_1+\lambda_2T^{-1}y_2=T^{-1}(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)$. 因此$T^{-1}$为线性算子. 任取$\{(y_n,T^{-1}y_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset Y\times X,y_n\to y\in Y,T^{-1}y_n\to x\in Y$，有$(T^{-1}y_n,TT^{-1}y_n)=(T^{-1}y_n,y_n)\to(x,y)$，由于$T$为闭算子，故$y=Tx,x=T^{-1}y$，因此$(y_n,T^{-1}y_n)\to(y,x)=(y,T^{-1}y)$. 从而$T^{-1}$为闭算子.

（3）任取X的紧集$C\subset X$. 任取$y_n\in T(C),y_n\to y\in Y$，存在$x_n\in C,Tx_n=y_n$. 由于$C$为紧集，故存在收敛子列$x_{n_k}\to x\in C(k\to\infty)$，此时$\left(x_{n_k},Tx_{n_k}\right)\to(x,y)$. 由于$T$为闭算子，故$y=Tx\in T(C)$. 故$T(C)$为闭集.

（4）任取Y的紧集$D\subset Y$. 任取$x_n\in T^{-1}(D),x_n\to x\in X$，存在$y_n\in D,y_n=Tx_n$. 由于$D$为紧集，故存在收敛子列$y_{n_k}\to y\in D(k\to\infty)$，此时$\left(x_{n_k},Tx_{n_k}\right)\to(x,y)$. 由于$T$为闭算子，故$y=Tx$，故$x\in T^{-1}(D)$. 故$T^{-1}(D)$为闭集.

注意（1）（2）（3）（4）小问为并列关系，第（4）小问不能用第（2）小问中T为一一映射的前提. 另外，（3）小问很多同学假定C中的序列$x_n\to x\in X$，然后用$Tx_n\to Tx\in T(C)$说明$T(C)$闭，这是不对的，因为说明$T(C)$闭需要说明任意满足$y_n\in T(C),y_n\to y\in Y$的序列都有$y\in T(C)$，由于已经假定了$x_n$收敛，所以$Tx_n$只能代表一类特殊的序列，不能代表$T(C)$中的任意收敛列. 第（4）小问也有同学犯类似的错误. 有的同学在（3）小问中使用闭图像定理，注意闭图像定理的应用前提是X,Y为 Banach 空间. 有的同学在（3）小问中通过$T|_C$的图像为闭集说明$T(C)$为闭集，这是不对的，注意闭集的投影不一定是闭集.

2. 设X为 Banach 空间，$f_n\in X'$. 假设任取$x\in X$，都有$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<\infty$. 求证：存在$C\geq 0$，使得任取$F\in X''$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|F(f_n)|\leq C\|F\|.$$

解：由于任取$x\in X$，都有$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<\infty$，故任取$N\geq 1$及$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$满足$|\lambda_n|=1,n=1,\cdots N$，任取$x\in X$，有$|\sum_{n=1}^{N}\lambda_nf_n(x)|\leq\sum_{n=1}^{N}|f_n(x)|<\infty$. 根据一致有界性原理，存在常数$C\geq 0$，使得任取$N\geq 1$及$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$满足$|\lambda_n|=1,n=1,\cdots N$，有$\|\sum_{n=1}^{N}\lambda_nf_n\|\leq C$. 记

$$\mu_n=\begin{cases}|F(f_n)|/F(f_n) & ,F(f_n)\neq 0\\ 1 & ,F(f_n)=0\end{cases},$$

则$|\mu_n|=1$. 任意$N\geq 1$，有$\sum_{n=1}^{N}|F(f_n)|=\sum_{n=1}^{N}\mu_nF(f_n)=F(\sum_{n=1}^{N}\mu_nf_n)\leq\|\sum_{n=1}^{N}\mu_nf_n\|\|F\|\leq C\|F\|$. 故$\sum_{n=1}^{\infty}|F(f_n)|\leq C\|F\|$.

部分同学认为任取$F\in X''$，存在$x\in X$，使得$F(f)=f(x)$，这是不对的，这一性质只对X是自反空间的情况成立，Banach 空间不一定是自反空间. 一般情况下只能得到典范映射 $c:X\to X''$为单射，不能得到其为满射. 另外，部分同学令$\mu_n=\pm 1$，这是不够严谨的，

因为题目中没有说X为实空间，X可能为复空间，μ_n可能为复平面单位圆上任意一点.