1. $C[a,b]$ 上线性泛函 f 被称为正泛函，若 $\forall x\in C[a,b]$，$x\geq 0$，有 $f(x)\geq 0$

求证：f 为正泛函 当且仅当 f 连续且 $\|f\|=f(1)$

证：若 f 为正泛函，$\forall x\in C[a,b]$，$x\geq 0$，令 $y=\|x\|\cdot 1-x$，则 $y\in C[a,b]$，$y\geq 0$

$$f(x)+f(y)=f(x+y)=f(\|x\|\cdot 1)=\|x\|\cdot f(1)$$

故 $f(x)\leq \|x\|\cdot f(1)$

令 $z=\|x\|\cdot 1+x$，$z\geq 0$

$f(z)-f(x)=\|x\|\cdot f(1)$

故 $-f(x)\leq \|x\|\cdot f(1)$

故 $\|f\|\leq f(1)$，且 x 恒为1时 有 $f(x)=f(1)$，故 $\|f\|=f(1)$，f 有界故连续

若 f 连续 且 $\|f\|=f(1)$

$\forall x\in C[a,b]$，$x\geq 0$，且 x 不恒为0，有 $0\leq 1-\frac{x}{\|x\|}\leq 1$

$f(1-\frac{x}{\|x\|})\leq \|1-\frac{x}{\|x\|}\|\cdot\|f\|\leq f(1)$，故 $f(\frac{x}{\|x\|})\geq 0$，$f(x)\geq 0$

故 f 为正泛函

2. $p\in[1,\infty)$，$\alpha=\{\alpha_n\}\in l^\infty$，任取 $x=\{x_n\}\in l^p$，$Tx=\{\alpha_n x_n\}$

求证 $T\in B(l^p)$，求 $\|T\|$

证：$(\Sigma|\alpha_n x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\leq \sup|\alpha_n|\cdot(\Sigma|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}=\|\alpha\|_\infty\cdot\|x\|_p$

故 $T\in B(l^p)$，$\|T\|\leq\|\alpha\|_\infty$

对 $\forall n$，取 x 仅有第 n 个元素为1，其余为0，则 $\|Tx\|_p=|\alpha_n|$，$\|x\|_p=1$

故 $\|T\|\geq|\alpha_n|$ 对 $\forall n$ 成立，故 $\|T\|\geq\|\alpha\|_\infty$，故 $\|T\|=\|\alpha\|_\infty$

注：$\{\alpha_n\}$ 中不一定有 n 使得 $|\alpha_n|=\|\alpha\|_\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 不一定存在

如 $\{\alpha_n\}=\{0,\frac{1}{2},0,\frac{2}{3},0,\frac{3}{4},\cdots\}$

3. 证明 $\|x-z\|^2+\|y-z\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\|z-\frac{1}{2}(x+y)\|^2$

证：平行四边形等式：$\|a-b\|^2+\|a+b\|^2=2(\|a\|^2+\|b\|^2)$

令 $a=x-z$，$b=y-z$ 代入即可