《基础泛函分析》第十周作业

1. 设H为 Hilbert 空间，$A \in B(H)$，且存在$C > 0$，使得

$$C\|x\|^2 \leq |\langle Ax, x\rangle|, x \in H.$$

求证：A为一一映射，$A^{-1} \in B(H)$且$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$.

解：先证A为单射. 若$x_1, x_2 \in H$，$A(x_1) = A(x_2)$，则$A(x_1 - x_2) = A(x_1) - A(x_2) = 0$，且$|\langle A(x_1 - x_2), x_1 - x_2\rangle| = 0 \geq C\|x_1 - x_2\|^2 \geq 0$，从而$\|x_1 - x_2\|^2 = 0$， $x_1 = x_2$. 这就证明了A为单射.

再证A为满射. 在此之前我们先证明A的值域$R(A)$为闭集. 取A的值域$R(A)$中的柯西列$\{y_n\}$，由于H为 Hilbert 空间，故$y_n \to y \in H$，由于A为单射，存在唯一的H中的序列$\{x_n\}$，使得$y_n = Ax_n$. 对任意$m, n \geq 1$， $\|x_n - x_m\|^2 \leq \frac{1}{C}|\langle A(x_n - x_m), x_n - x_m\rangle| = \frac{1}{C}|\langle y_n - y_m, x_n - x_m\rangle| \leq \frac{1}{C}\|y_n - y_m\|\|x_n - x_m\|$，故$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|y_n - y_m\|$（由此也说明如果$A^{-1}$存在且为线性算子，则$A^{-1} \in B(H)$，且$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$)，从而$\{x_n\}$为柯西列，$x_n \to x \in H$，$y_n = Ax_n \to Ax = y \in R(A)$， 从而$R(A)$为闭集. 因此$H = R(A) \oplus R(A)^{\perp}$. 如果$z \in R(A)^{\perp}$，则$z \perp Az$，从而$C\|z\|^2 \leq |\langle Az, z\rangle| = 0$，$z = 0$. 因此$R(A)^{\perp} = \{0\}$，$R(A) = H$，这就证明了$A$为满射.

任给$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$和$y_1, y_2 \in H$， 由于$A(\lambda A^{-1}y_1 + \mu A^{-1}y_2) = \lambda AA^{-1}y_1 + \mu AA^{-1}y_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$，故$A^{-1}$为线性算子. 由前面的讨论知则$A^{-1} \in B(H)$，且$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$.

很多同学没有证明$R(A)$为闭集，或者写由A是单射/连续映射显然可得$R(A)$为闭集，这是不对的，连续映射并不一定是闭映射，A是单射也推不出A是闭映射. 考虑一个例子：取$H = \ell^2$，$A(x_1, x_2, x_3 \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$，取$\left\{\left(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-\frac{3}{2}}, 3^{-\frac{3}{2}}, \cdots, n^{-\frac{3}{2}}, 0, 0, \cdots\right)\right\} \subset R(A)$，该列在$\ell^2$中收敛，但极限并不在$R(A)$中，因为$\left(1^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, 3^{-\frac{1}{2}}, \cdots, n^{-\frac{1}{2}}, \cdots\right) \notin \ell^2$. 要证明$R(A)$为闭集，必须用到$C\|x\|^2 \leq |\langle Ax, x\rangle|$的条件. 另外，证明$R(A)$为闭集的逻辑应该是取$R(A)$中的收敛列，证明极限仍在$R(A)$中，而不是取$H$中的收敛列$\{x_n\}$，证明$\{Ax_n\}$的极限在$R(A)$中，因为$\{Ax_n\}$只是一类特殊的由$H$中的收敛列的像构成的序列，并不能代表$R(A)$中的任意收敛列. 还有部分同学对$A \in B(H)$或$A: H \to H$记号的理解有误，认为这样的记号就说明$H$是$A$的像空间，从而说明$R(A) = H$，但事实上这样的记号仅表明$A$的像落在$H$中，并不保证$H$中的每一个元素都能取到.

2. 设H为 Hilbert 空间，$\{e_n: n \geq 1\}$和$\{f_n: n \geq 1\}$均为H的标准正交集，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n - f_n\|^2 < 1,$$

且$\{f_n: n \geq 1\}$为标准正交基. 求证：$\{e_n: n \geq 1\}$也为标准正交基.

解：若$\{e_n: n \geq 1\}$不是标准正交基，则$\mathrm{span}\{e_n\} \neq H$. 从而存在$x \in H \setminus \{0\}$，使得$x \perp \{e_n\}$. 由于$\{f_n\}$均$H$的标准正交集， 故$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, f_n\rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, f_n - e_n\rangle f_n$， 从而$\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x\|^2\|e_n - f_n\|^2 = \|x\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n - f_n\|^2 < \|x\|^2$，矛盾.

3. 设H_1, H_2为 Hilbert 空间，$T \in B(H_1, H_2)$. 若$M_1 \subset H_1$，$M_2 \subset H_2$，使得$T(M_1) \subset M_2$，求证：$T^*(M_2^{\perp}) \subset M_1^{\perp}$.

解：任取$y \in M_2^{\perp}$，任取$x \in M_1$，由于$T(M_1) \subset M_2$，故$\langle Tx, y\rangle = 0 = \langle x, T^*y\rangle$，因此$T^*y \in M_1^{\perp}$. 故$T^*(M_2^{\perp}) \subset M_1^{\perp}$.

4. 在上一题中，设M_1, M_2均为闭线性子空间，求证：$T(M_1) \subset M_2$当且仅当$T^*(M_2^{\perp}) \subset M_1^{\perp}$.
   解：由$T(M_1) \subset M_2$推出$T^*(M_2^{\perp}) \subset M_1^{\perp}$为上一题内容，下证$T^*(M_2^{\perp}) \subset M_1^{\perp}$可推出$T(M_1) \subset M_2$. 假设$T^*(M_2^{\perp}) \subset M_1^{\perp}$，则任取$x \in M_1$，任取$y \in M_2^{\perp}$，有$T^*y \in M_1^{\perp}$，从而$\langle x, T^*y\rangle = 0 = \langle Tx, y\rangle$，因此 $Tx \in M_2^{\perp\perp}$. 由于M_2为闭线性子空间，$M_2^{\perp\perp} = M_2$，从而$T(M_1) \subset M_2$.