粒子滤波简介

基于序列蒙特卡洛的后验概率逼近

用样本递推逼近后验概率

$$p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right)$$

1. 基本蒙特卡洛方法

对后验概率 $p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right)$

对该PDF采样产生一组样本 $\left\{\boldsymbol{x}_n^{(i)}, \quad i=1,2,\cdots,N_s\right\}$

N_s 充分大，则PDF逼近为

$$\hat{p}\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right) = \frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s}\delta\left(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_n^{(i)}\right)$$

MMSE意义下的最优滤波

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{n|n} \approx \frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s}\boldsymbol{x}_n^{(i)}$$

2. 蒙特卡洛方法：序列重要性采样

给出一个重要性密度 $\pi\left(\mathbf{x}_{0:n} \middle| \mathbf{y}_{1:n}\right)$

产生重要性采样 $\left\{\mathbf{x}_{0:n}^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,N_s\right\}$

计算权系数

$$w_n\left(\mathbf{x}_{0:n}\right)=\frac{p\left(\mathbf{y}_{1:n} \middle| \mathbf{x}_{0:n}\right)p\left(\mathbf{x}_{0:n}\right)}{\pi\left(\mathbf{x}_{0:n} \middle| \mathbf{y}_{1:n}\right)}$$

$$\tilde{w}_n^{(i)}=\frac{w_n\left(\mathbf{x}_{0:n}^{(i)}\right)}{\sum_{i=1}^{N_s} w_n\left(\mathbf{x}_{0:n}^{(i)}\right)}$$

（续上页）

则后验PDF逼近为

$$p\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0:n}} \middle| \boldsymbol{y}_{\mathbf{1:n}}\right) = \sum_{i=1}^{N_s} \tilde{w}_n^{(i)} \delta\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0:n}} - \boldsymbol{x}_{\mathbf{0:n}}^{(i)}\right)$$

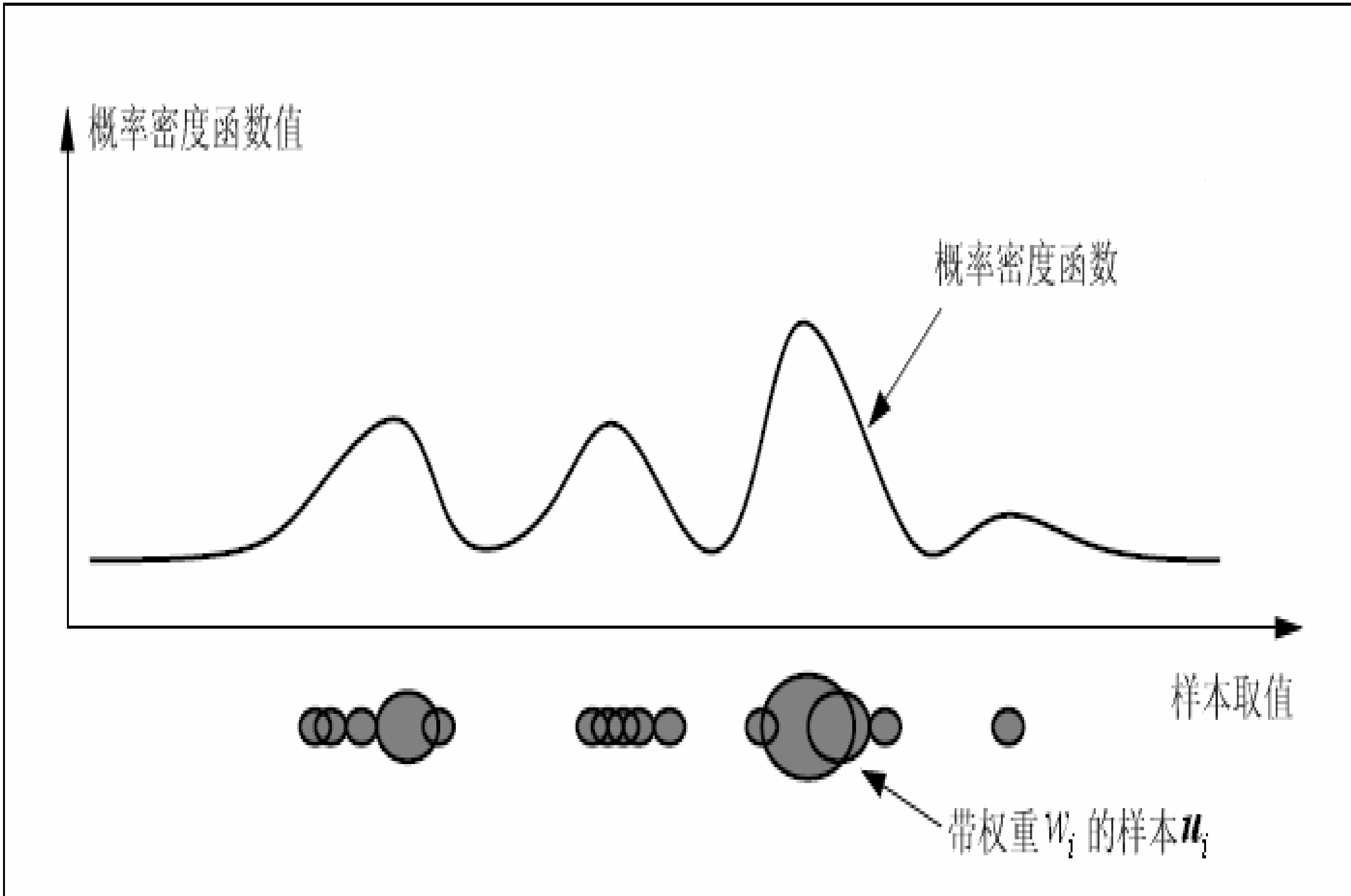
则任意均值函数的期望逼近为

$$E\left[\boldsymbol{g}_n\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0:n}}\right)\right] \approx \sum_{i=1}^{N_s} \boldsymbol{g}_n\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0:n}}^{(i)}\right) \tilde{w}_n^{(i)}$$

MMSE意义下的最优滤波

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{0:n|n}} = \sum_{i=1}^{N_s} \tilde{w}_n^{(i)} \boldsymbol{x}_{\mathbf{0:n}}^{(i)}$$

重要性采样及其所表示PDF的示意图



3. 基本粒子滤波(SIS)

非线性系统模型

$$\boldsymbol{x}_n = \mathbf{f}_{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{v}_{n-1}\right)$$

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{c}_{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}}\right)$$

由模型和已知PDF可确定：

$$p\left(\boldsymbol{x}_n \middle| \boldsymbol{x}_{n-1}\right) \qquad p\left(\boldsymbol{y}_n \middle| \boldsymbol{x}_n\right)$$

序列测量得到 $\left\{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{2}}, \cdots, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}\right\}$

得到状态 $\boldsymbol{x}_n$ 的最优估计： $\hat{\boldsymbol{x}}_{n|n}$

SIS算法描述：

初始条件：

从分布 $\pi(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_0,\mathbf{x}_{-1}) = p(\mathbf{x}_0)$ 产生 N_s 个样本 $\mathbf{x}_0^{(i)}$

权值为 $\tilde{w}_0^{(i)} = w_0^{(i)} = 1/N_s$

粒子更新和滤波公式

得到 $\mathbf{y}(1)$ 从 $n=1$ 开始

对于 $i = 1,2,\cdots,N_s$

产生新样本：$\mathbf{x}_\mathbf{n}^{(i)} \sim \pi(\mathbf{x}_\mathbf{n}|\mathbf{y}_\mathbf{n},\mathbf{x}_\mathbf{n-1}^{(i)})$

SIS算法描述（续）：

计算新权值：$w_n^{(i)} = w_{n-1}^{(i)} \dfrac{p\left(\boldsymbol{y}_{\mathrm{n}} \middle| \boldsymbol{x}_{\mathrm{n}}^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}}^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{\mathrm{n\text{-}1}}^{(i)}\right)}{\pi\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}}^{(i)} \middle| \boldsymbol{y}_{\mathrm{n}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{n\text{-}1}}^{(i)}\right)}$

权值归一化：$\widetilde{w}_n^{(i)} = \dfrac{w_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_s} w_n^{(i)}}$

得到 $p\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}} \middle| \boldsymbol{y}_{\mathrm{1:n}}\right)$逼近式：$\hat{p}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}} \middle| \boldsymbol{y}_{\mathrm{1:n}}\right) = \sum_{i=1}^{N_s} \widetilde{w}_n^{(i)} \delta\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{n}}^{(i)}\right)$

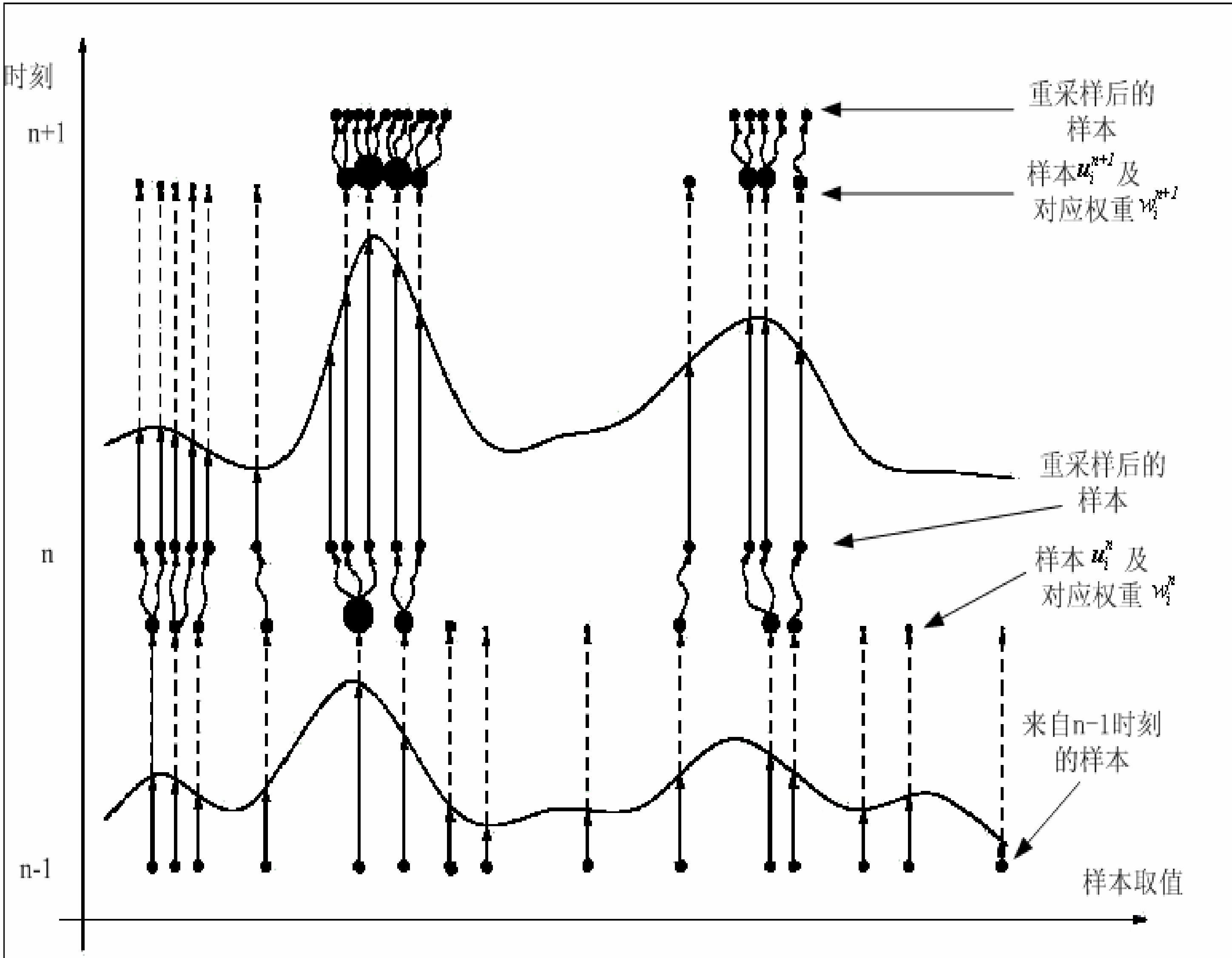
粒子滤波的输出（MMSE）：$\hat{\boldsymbol{x}}_{n|n} = \sum_{i=1}^{N_s} \widetilde{w}_n^{(i)} \boldsymbol{x}_n^{(i)}$

令 $n \leftarrow n+1$，得到新观测值 $\boldsymbol{y}(n)$ 进入下一次循环

粒子滤波的问题和改进

判断退化?
是否重采样?
怎样重采样?

粒子退化和重采样



实例

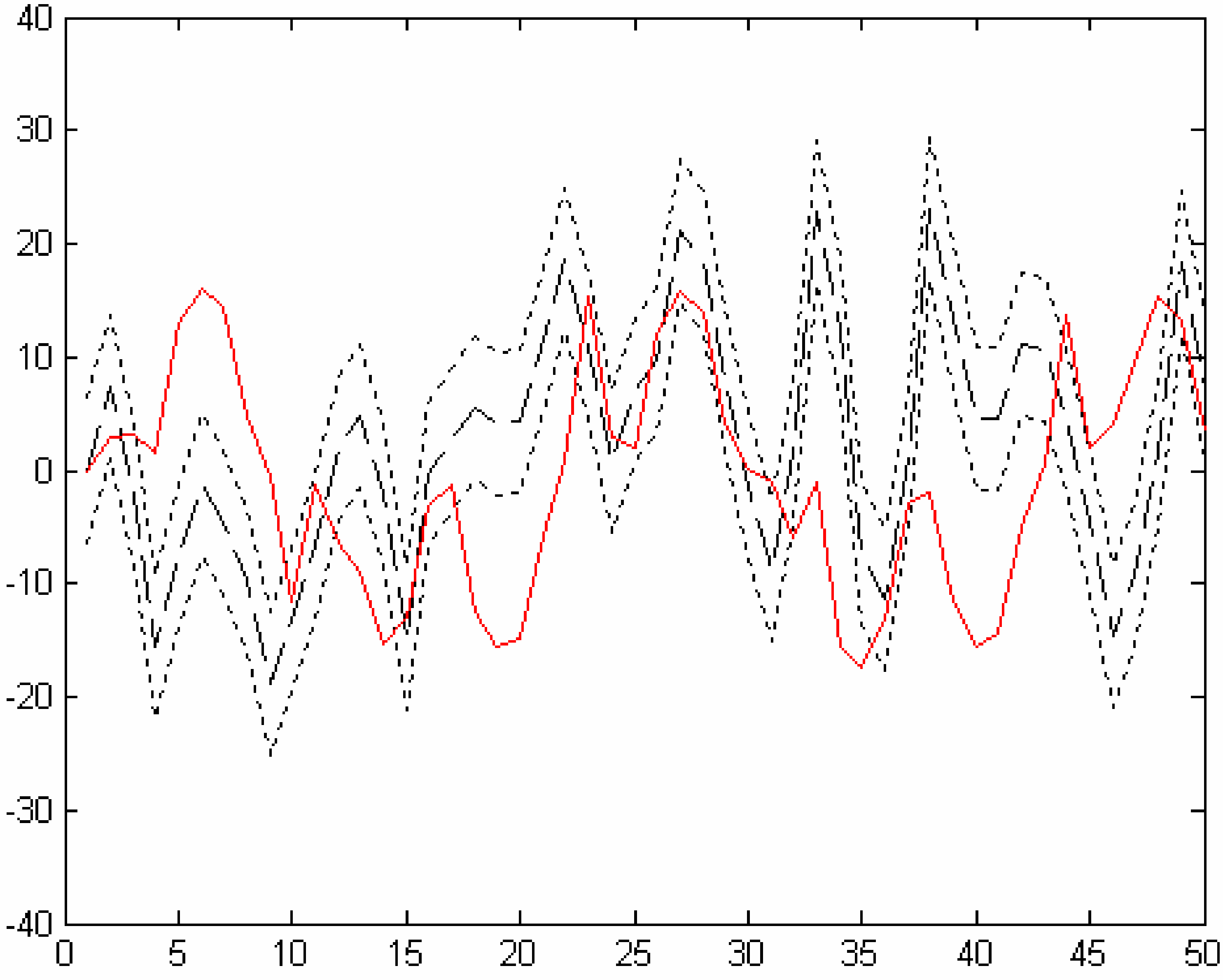
例4.7.4 为了显示粒子滤波在非线性动态系统条件下的优势，讨论如下模型，其状态转移方程为

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + 25\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}^2} + 8\cos(1.2n) + v_n$$

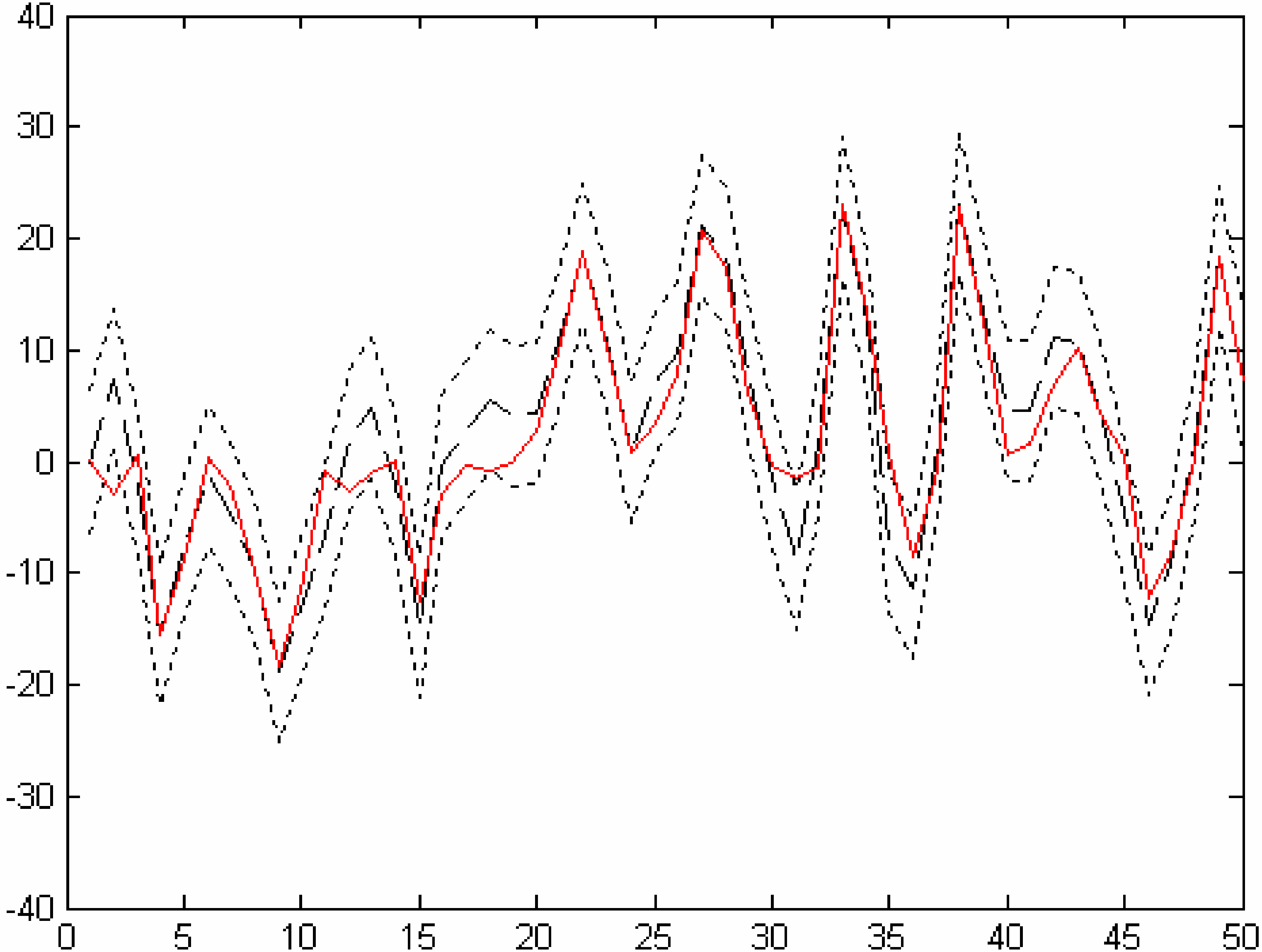
观测方程为

$$y_n = \frac{x_n^2}{20} + s_n$$

其中 $v_n \sim N(0,10)$，$s_n \sim N(0,1)$。



EKF对非线性系统的仿真结果

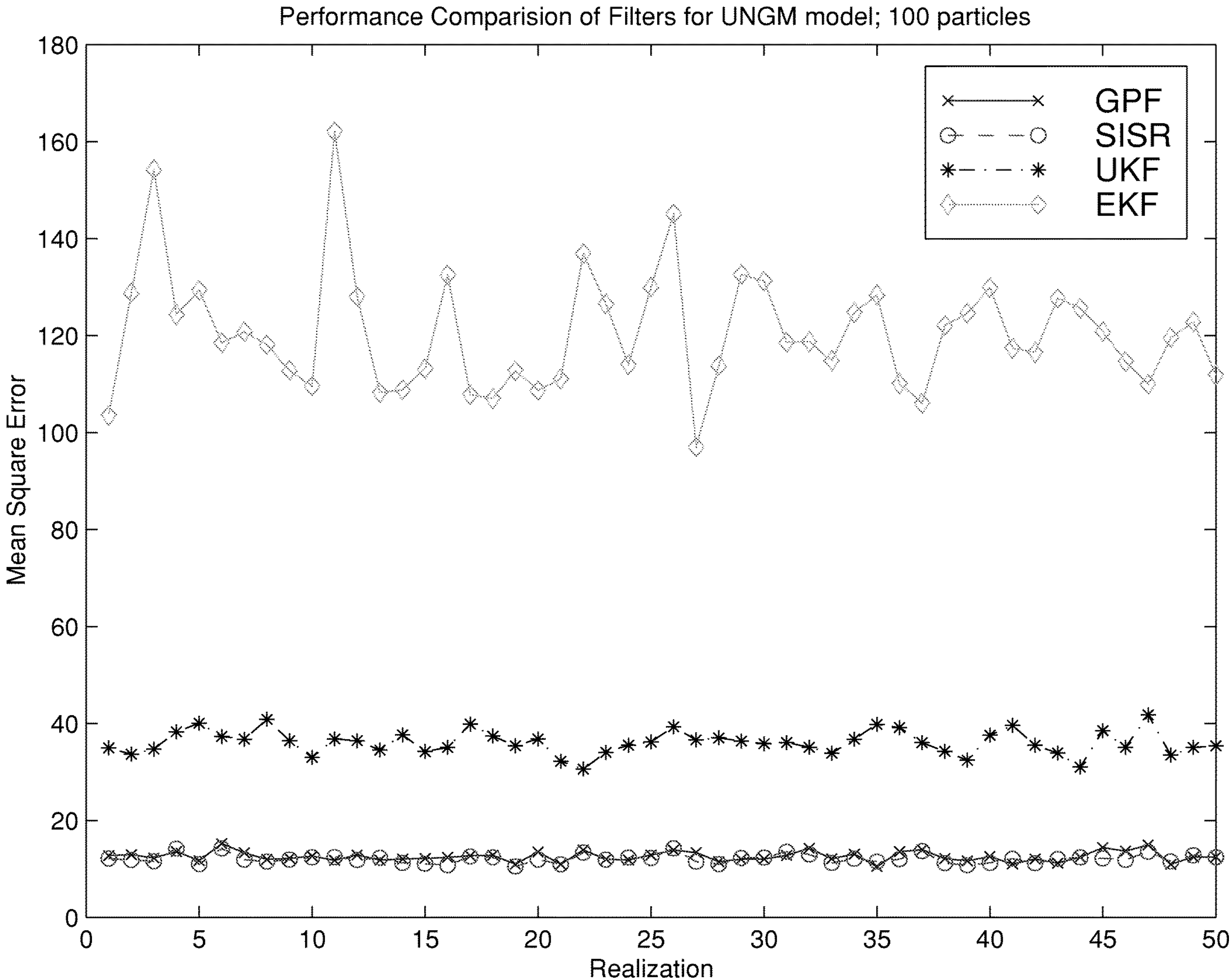


SISR粒子滤波对非线性系统的仿真结果

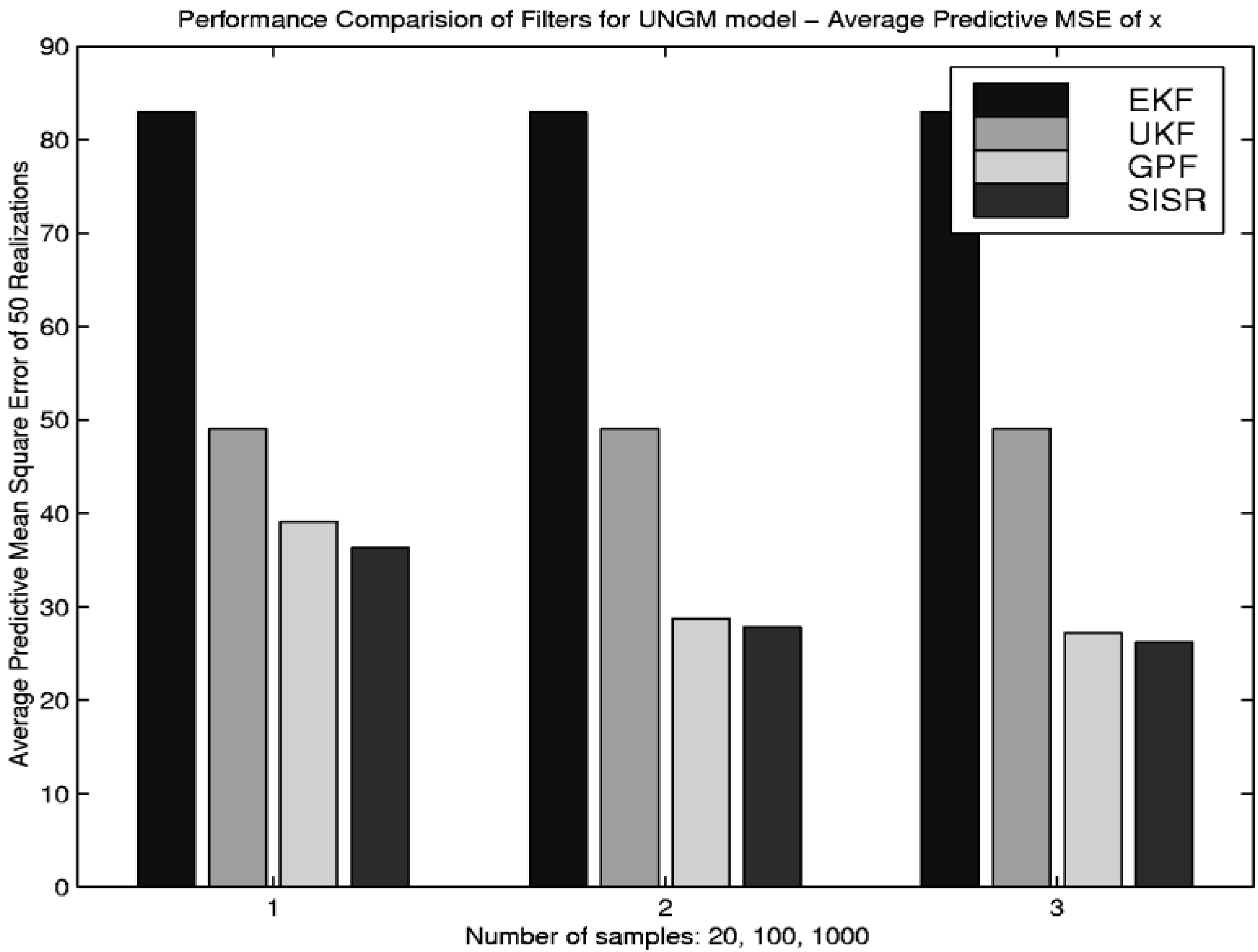
粒子滤波的改进和简化

- 辅助采样重要性重采样（Auxiliary Sampling Importance Resampling，ASIR）
- 规则化粒子滤波（Regularized Particle Filter，RPF）
- 高斯粒子滤波（Gaussian Particle Filter，GPF）
- 高斯和粒子滤波（Gaussian Sum Particle Filter，GSPF）
- 无迹粒子滤波（Unscented Particle Filter，UPF）
- Rao-Blackwellisatio粒子滤波

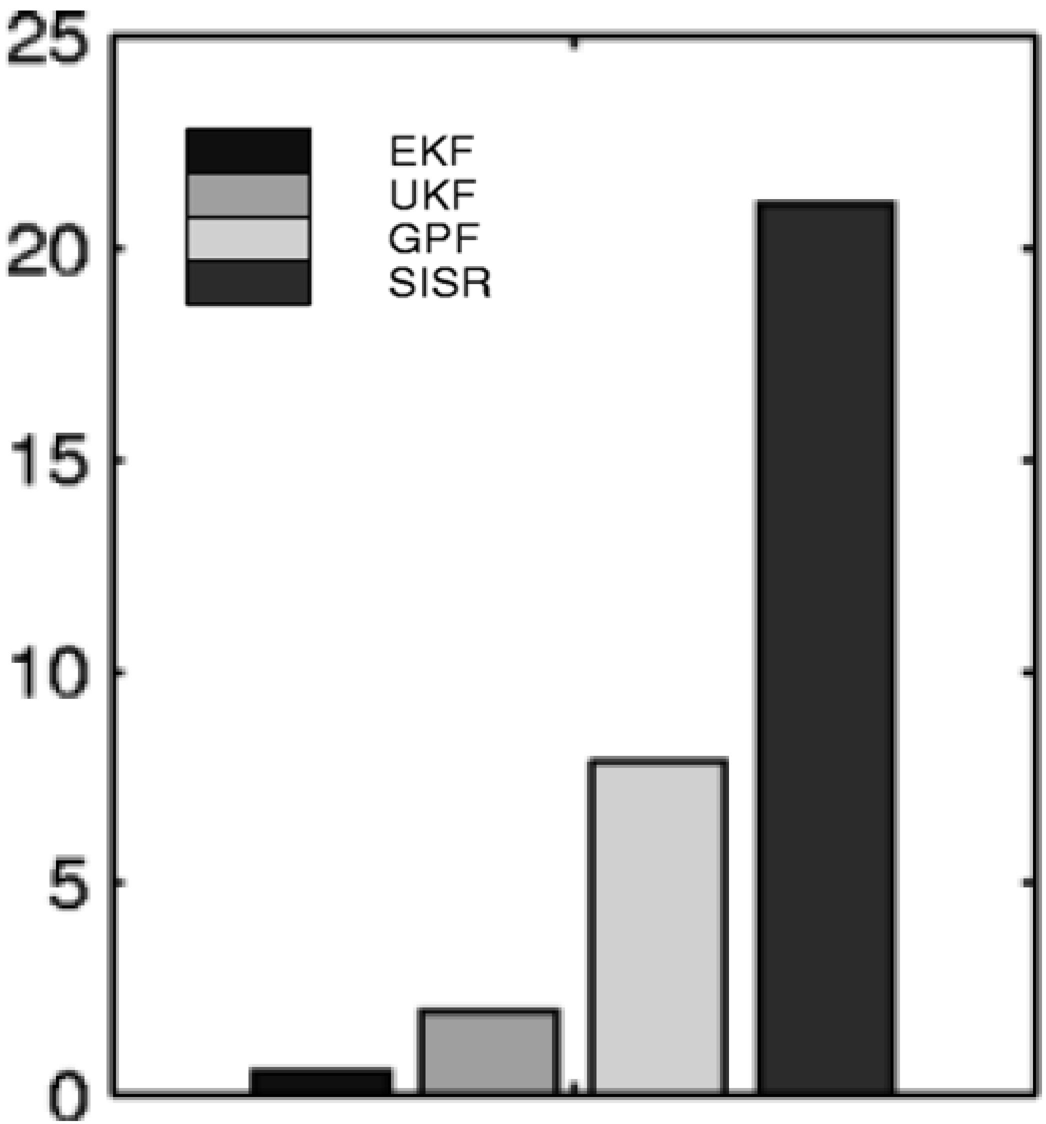
非线性方法的综合实验说明：性能



非线性方法的综合实验说明：不同粒子数性能比较



非线性方法的综合实验说明：100粒子数计算复杂性比较



粒子滤波参考文献选

- M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon and T. Clapp, "A tutorial on particle filter for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.50,No.2,2002, 174-188
- A. Doucet, S. Godsill and C. Andrieu, On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering, Statistics and Computing, (2000) 10,p197-208
- A. Doucet, J. F. G. de Freitas, N. J. Gordon, An introduction to sequential Monte Carlomethods, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, New York: Springer-Verlag, 2001
- P. M. Djuric, J. H. Kotecha, J. Zhang, Y. Huang, T. Ghirmai, M. F. Bugallo, J. Miguez, Particle filtering, *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 20, No. 5, pp.19-38, 2003
- P. M. Djuric*,* M. Vemula*,* and M. F. Bugallo*,* Target Tracking by Particle Filtering in Binary Sensor Networks, IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 56, NO. 6, JUNE 2008,2229-2238
- J. H. Kotecha and P. M. Djuric, “Gaussian Particle Filtering”, IEEE Trans. On Signal Processing, Vol. 51, No.10,p.2592-2601, Oct. 2003