Peking University

高等实验流体力学小作业

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

June 21, 2021

1

- 阅读误差分析方法中, 关于数据拟合的相关知识, 重点以线性拟合为主.
- 分析随机误差对拟合结果的影响.

自 1794 年高斯提出按最小二乘准则估计未知参数以来, 测量平差中一直采用最小二乘准则或最小二乘原理估计未知参数. 它是测量中求未知参数估值最普遍、最主要的方法, 在其他科学领域中也有广泛的应用.

最小二乘估计准则

介平差问题一旦选定了数学模型, 进行平差时, 就要以这个模型为基础. 由于测量值含有误差, 在有了多余观测值的情况下, 即观测值的个数 n 总是大于待估参数的个数 t 的情况下, 待估参数的解不定, 也就是观测值与选定的数学模型不相适应. 平差的任务就是想办法使观测值适应模型. 为了使观测值适应数学模型, 必须对观测值进行处理, 处理后的观测值称为估值, 设原观测向量为 $\boldsymbol{L}$, 处理后的观测向量为 $\hat{\boldsymbol{L}}$, 两者之差

$$\boldsymbol{V}=\hat{\boldsymbol{L}}-\boldsymbol{L} \tag{1.1}$$

称为改正数或残差.

估值 $\hat{L}$ 满足数学模型, 但要知道 $\hat{L}$, 首先要求出 V, 使 $\hat{L}$ 满足数学模型的残差向量 V 可能有很多. 为了得到唯一的残差向量 $\boldsymbol{V}$, 就必须有一个准则, 可用的准则很多, 在测量中通常用最小二乘准则, 即

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\min \tag{1.2}$$

式中, $\boldsymbol{P}$ 为权矩阵, 它是适当选定的对称正定矩阵.

根据最小二乘准则, 求观测向量的估值 $\hat{\boldsymbol{L}}$, 称为最小二乘平差.

式 (1.2) 表明, 在考虑权矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的情况下, 尽量使 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 接近 $\boldsymbol{L}$ 或使残差向量 $\boldsymbol{V}$ 尽可能地小. 由此可见数学模型和观测向量 $\boldsymbol{L}$ 在平差中的重要性. 数学模型是平差的基础, 对于给定的观测向量 $\boldsymbol{L}$, 按最小二乘准则进行平差, 使平差值 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 尽量接近 $\boldsymbol{L}$, 这就是平差问题的实质.

应当指出, 上面给出的最小二乘准则并不需要观测向量 $\boldsymbol{L}$ 具有任何统计信息, 而且 $\boldsymbol{P}$ 可以任意选定. 但是, 测量平差中要求的估值是最优估值, 为了获得最优估值, 要求

$$E(\Delta)=\mathbf{0} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{LL}}^{-1}=\boldsymbol{D}_{\Delta\Delta}^{-1} \tag{1.4}$$

式 (5-17) 表示 $\boldsymbol{L}$ 中不含系统误差和粗差, 即观测向量 $\boldsymbol{L}$ 是无偏的, 式 (5-18) } 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 应由 $\boldsymbol{L}$ 或 Δ 的协方差矩阵确定. 当观测值等权时, 其权矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$, 按

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\sum_{i=1}^{n} v_i^2=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=\min \tag{1.5}$$

平差. 当

观测值不等权但相互之间独立时, 其权矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵, 按

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2=\min \tag{1.6}$$

平差. 当观测值之间相关时, 其权矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为非对角矩阵, 仍按 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\min$ 原则平差, 时进行的平差称为相关平差.

最小二乘估计与极大似然估计

极大似然估计和最小二乘估计都是点估计的方法, 下面研究两者之间的关系.

设有观测向量及其期望和方差矩阵为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, E(\boldsymbol{L})=\begin{bmatrix} E\left(L_1\right) \\ E\left(L_2\right) \\ \vdots \\ E\left(L_n\right) \end{bmatrix}, \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{LL}}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}\cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2\cdots\sigma_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2}\cdots\sigma_n^2 & \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

式中, 观测向量 $\boldsymbol{L}$ 服从正态分布, 即 $L_i \sim N\left(E\left(L_i\right), \sigma_i^2\right)$. 由极大似然准则可知, 其似然函数为

$$G=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left|\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{LL}}\right|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[L-E(\boldsymbol{L})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{LL}}^{-1}[L-E(\boldsymbol{L})]\right\} \tag{1.8}$$

极大似然准则的应用方法是在似然函数达到最大 ($G=\max$) 时对参数进行估计. 参数可以是分布中的期望 $E(L)$ 和方差 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{LL}}$, 此法得到的是渐近有效的参数估计量.

当要求 $G=\max$ 时, 有

$$(\boldsymbol{L}-E(\boldsymbol{L}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{LL}}^{-1}(\boldsymbol{L}-E(\boldsymbol{L}))=\min \tag{1.9}$$

式中, $L-E(L)=\Delta, \Delta$ 是真误差, 其估值是改正数 $\boldsymbol{V}$. 上式等价于

$$\sigma_0^{-2}V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}=\min \tag{1.10}$$

由于 σ_0^{-2} 是常数, $G=\max$ 可与下式等价:

$$\sigma_0^{-2}V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}=\min \tag{1.11}$$

x 当观测值为正态随机变量时, 可以从极大似然准则推导出最小二乘准则, 从以上两个准则出发的平差结果将完全一致. 由于平差中最小二乘法与极大似然法得到的估值相同, 所以参数的最小二乘估值通常也称为最或然值, 平差值也就是最或然值.

2

试运用量纲分析方法, 从分子热运动机理和气体黏性机理关系入手, 分析气体黏性与温度之间的粗略函数关系.

对于气体, 黏性系数 μ 和温度 T 的关系可表成:

$$\mu=C_1\times\frac{T^{\frac{3}{2}}}{T+C_2} \tag{2.1}$$

其中 C_1 为常数,$C_2\approx 110.4\mathrm{K}$, 此式称为索士兰特公式, 其在相当大的范围内 ($T<2000\mathrm{K}$) 对空气是适用的. 由于上式较复杂, 在实用上多采用幂次公式

$$\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^n \tag{2.2}$$

从量纲角度来分析, 假设黏性系数 μ 只和温度 T 有关, 选取特征黏性系数 μ_0 和特征温度 T_0 根据 Π 定理,

$$\frac{\mu}{\mu_0}=f\left(\frac{T}{T_0}\right) \tag{2.3}$$

而式 (2.2) 就是较为简单的一种形式.

3

1

某数据采集过程中, 被采信号最高频率 f_c, 信号平均幅值 $\bar{A}$, 信号最大幅值 $A_{\max}$; 采集系统的最大采样频率 f_s, 增益 G, 偏置 Offset , 试分析一下问题:

- 试设计该被采信号的数据采集方案, 给出各参数之间的关系及分析
- 当 $f_s < 2f_c$ 时, 被采信号的畸变分析

若采样频率 f_s 满足 $f_s > 2f_c$, 则符合采样定理的条件, 采样频率越大越准确.

若采样频率 $f_s < 2f_c$, 则可以通过选用合适的低通滤波, 使采样定理条件得以满足, 例如巴特沃斯滤波 (Butterworth).

如图 3.1 所示, 当 $f_s < 2f_c$ 时, 原本是高频信号, 在图中的采样过程中已经经过了多个周期, 但是采样得到的结果是只经过了一个周期.

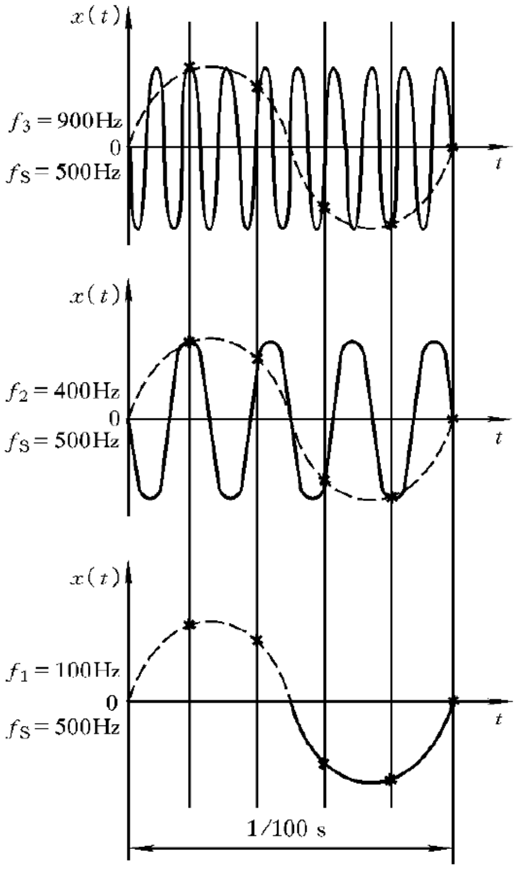

图 3.1. $f_s < 2f_c$ 时.

2

通常对实验数据会在采集前设置前置滤波器, 对采集到的数据, 通常在进行分析前也会采用数字滤波器, 试分析这两个滤波器使用的目的有何不同? 如果 $f_s < 2f_c$, 前置滤波器和后置滤波器的使用区别在什么地方?

若 $f_s < 2f_c$, 则采样得到的低频数据有可能是从高频数据来的. 采集前设置前置滤波器, 去掉 $f > f_s/2$ 的部分, 保证采样得到的低频部分是不受高频影响的. 在进行分析前采用数字滤波器则是去掉不想研究的频段. 前置滤波器对于有高频段数据来说是必要的, 而分析前采用数字滤波器是为了分析数据而服务, 可以自行选择.