高等流体力学作业一

2020.9.30 发布，2020.10.15 前完成

一、有一个圆柱形浮标，高 1.8 米，直径为 1.35 米，质量为 770 千克，其重心离底部为 0.9 米，证明此浮标在密度为 1025 千克/米 ^{3} 的海水中是不能稳定直立漂浮的。现用一链子拴在圆柱的底部，问使此浮标能够稳定直立漂浮时，链子沿铅垂向下的最小拉力应为多少？

二、假如民用大飞机的升力系数提高百分之一，而阻力系数不变，问在同样载客量和飞行速度的情况下大概可以节省多少百分比的燃油？（考虑飞行过程中油量的变化）

三、证明：对于流体内闭合的物质曲面S，成立

$$\frac{d}{dt}\oiint_S d\boldsymbol{S}\circ F=\oiint_S\left(d\boldsymbol{S}\circ\frac{\partial F}{\partial t}+u_n\nabla\circ F dS\right)$$

这里F是一般的张量场，“ $\circ$ ”可以代表数量乘积、点积或者叉乘积。（提示：可以使用 Gauss 定理将面积分化为体积分。但鼓励不使用体积分的证法，只用定义在S上的面积分即可）

四、对于两个同轴旋转圆筒之间的定常的 Taylor-Couette 流，求出变形梯度张量、变形速度张量，并将变形梯度张量用场描述表示出来。

五、请画出圆柱绕流出现层流涡街之后某时刻的一幅完整的流线示意图。

六、在球坐标系(r,θ,φ)中（θ是纬向角），假如均质不可压缩流体的速度场取如下轴对称形式

$$\boldsymbol{u}=\lambda\nabla\times(\psi\boldsymbol{r})+\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r})$$

其中标量函数

$$\psi=j_2(\lambda r)(3\cos^2\theta-1),$$

这里$\boldsymbol{r}$为以球心为起始点的位置矢量，$r=|\boldsymbol{r}|$， $j_2(r)$为 2 阶球 Bessel 函数，$\lambda=5.763\ldots$是其最小零点。

（1）证明：该流场满足有势力作用下的定常 Euler 方程；

（2）在此基础上定义衰减的非定常流场$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}^{-\nu\lambda^2 t}\boldsymbol{u}$，证明该流场满足 Navier-Stokes 方程。这里ν是运动学黏性系数；

（3）求出该流场的一族流面，并画出几条典型的流线。

（4）（选做）注意到每一个上述流场都与一个固定的极轴相对应，若取相互垂直的两个极轴，将每个极轴分别对应的上述流场进行线性叠加，则会形成一个非轴对称流场。在直角坐标系下写出叠加流场的具体表达式，证明该流场仍满足定常 Euler 方程，并画出几条典型的流线。

七、对面变形梯度张量$\mathbb{B}$，证明 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbb{B}=-(\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{u}$。

八、物体在大气中做匀速飞行，将物体所受阻力用流场的耗散函数和（可能的）压力积分项表示出来。