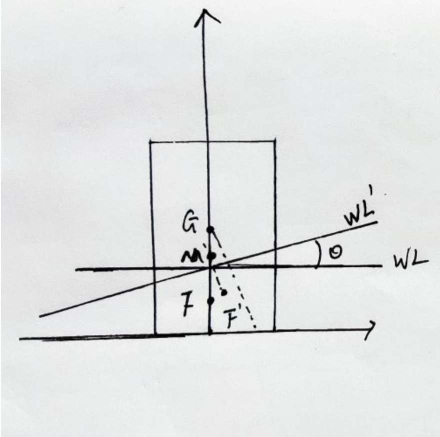
作业提交格式的统一说明：统一提交 PDF 文件，命名为“高等流体力学+学号+姓名”，邮件主题“高等流体力学+学号+姓名”。

关于作业成绩，只要大家认真做了都会有一个不错的分数！

本说明引用的各位同学的作业都是认真清晰的优秀作业，给大家提供一个范本，膜大佬！

第一题：

这是静力学中的经典问题，大部分同学的证明都不严格，解决本问题的浮体稳性理论详细介绍见上海交通大学《船舶原理》中初稳性部分的内容。



WL 为正浮水面，小扰动做等体积倾斜。水面偏转θ角后的位置为 WL‘， 为重心位置，F 为初始浮心，F’为倾斜后的浮心，M 为稳心。稳定的判据应该是稳心不低于重心。这是几何的方法，基于能量法亦可得到同样的结果。在底部加拉力相当于圆柱重心下移同时吃水增加。

第二题：

题目是开放性质的建模题，没有统一的答案，需要同学们自己提出合理的假设进行估算。但有一点要强调的是升力和阻力的定义，见吴望一书。阻力和升力方向是以相对来流方向定义的。

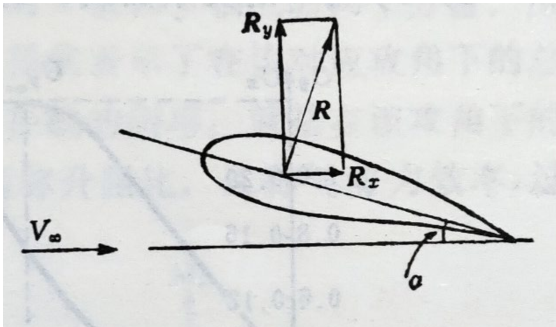


图 7.13.6

第三题：

法一：由奥高公式转化为体积分，用输运定理展开后再用一次奥高公式即可证明。

法二：解答来自黄楚芸和孟昭远同学

1） 黄：

3.证明：

$$\oint_S \frac{d}{dt}(d\vec{s}\circ\bar{F}) = \oint_S d\vec{s}\circ\frac{d}{dt}\bar{F} + \oint_S \frac{d}{dt}d\vec{s}\circ\bar{F}$$

$$= \oint_S d\vec{s}\circ\frac{\partial\bar{F}}{\partial t} + \oint_S d\vec{s}\circ(\vec{u}\cdot\nabla\bar{F}) + \oint_S (d\vec{s}\cdot\bar{B})\circ\bar{F}$$

其中 $\bar{B} = \theta I - (\nabla\vec{u})^T$

要证 $\frac{d}{dt}\oiint_S d\vec{S}\circ\bar{F} = \oiint_S \left(d\vec{S}\circ\frac{\partial\bar{F}}{\partial t} + u_n\nabla\circ F\, dS \right)$

只需证 $\oint \vec{n}\circ(\vec{u}\cdot\nabla\bar{F})\,dS + \oiint_S (\vec{n}\cdot\bar{B})\circ\bar{F}\,dS = \oiint_S u_n\nabla\circ\bar{F}\,dS$

即证 $\vec{n}\circ(\vec{u}\cdot\nabla\bar{F}) + (\vec{n}\cdot\bar{B})\circ\bar{F} = u_n\nabla\circ\bar{F}$

左边 $= \vec{n}\circ(\vec{u}\cdot\nabla\bar{F}) + [\theta\vec{n} - \vec{n}\cdot(\nabla\vec{u})^T]\circ\bar{F}$

即证 $\vec{n}\circ(\vec{u}\cdot\nabla\bar{F}) + \theta\vec{n}\circ\bar{F} = u_n\nabla\circ\bar{F} + \vec{n}\cdot(\nabla\vec{u})^T\circ\bar{F}$

左边 $= n_i u_j\frac{\partial F_s}{\partial x_j}\vec{e}_i\circ\vec{e}_s + n_i F_s\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\vec{e}_i\circ\vec{e}_s = n_i\frac{\partial u_j F_s}{\partial x_j}\vec{e}_i\circ\vec{e}_s$

右边 $= n_i u_i\frac{\partial F_s}{\partial x_j}\vec{e}_j\circ\vec{e}_s + n_i F_s\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\vec{e}_j\circ\vec{e}_s = n_i\frac{\partial u_i F_s}{\partial x_j}\vec{e}_j\circ\vec{e}_s$

又: $n_j\frac{\partial u_j F_s}{\partial x_i} = n_i\frac{\partial u_j F_s}{\partial x_j}$

∴ 左边 = 右边 □

2) 孟

三、

对于流体内闭合的物质曲面 S, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oiint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\circ F = \oiint_S\left[(\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B})\circ F + \mathrm{d}\mathbf{S}\circ\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla F\right)\right] = \oiint_S\left[((\nabla\cdot\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{S} - \nabla\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S})\circ F + \mathrm{d}\mathbf{S}\circ\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla F\right)\right],$$

即要证本题的恒等式, 只需证

$$\oiint_S\left[((\nabla\cdot\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{S} - \nabla\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S})\circ F + \mathrm{d}\mathbf{S}\circ(\mathbf{u}\cdot\nabla F)\right] = \oiint_S(\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S})\nabla\circ F.$$

为了之后书写方便, 我们记

$$\mathbf{T} = \oiint_S\left[((\nabla\cdot\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{S} - \nabla\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S})\circ F + \mathrm{d}\mathbf{S}\circ(\mathbf{u}\cdot\nabla F) - (\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S})\nabla\circ F\right],$$

即我们需要证明 $\mathbf{T} = \mathbf{0}$.

当“∘”代表数乘运算时,

下标为i

$$\mathbf{T} = \oiint_S\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}n_i F - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}n_j F + u_j n_i\frac{\partial F}{\partial x_j} - u_j n_j\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\mathbf{e}_i\,\mathrm{d}S = \oiint_S\left(n_i\frac{\partial}{\partial x_j}Fu_j - n_j\frac{\partial}{\partial x_i}Fu_j\right)\mathbf{e}_i\,\mathrm{d}S$$

$$=\boxed{-}\oiint_S(\mathbf{n}\times\nabla)\times(F\mathbf{u})\,\mathrm{d}S = -\int_{\varnothing}\mathrm{d}\mathbf{l}\times(F\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

我觉得这里有轮换对称性，应该是正的?

当“∘”代表点积运算时,

下标为i

$$\mathbf{T} = \oiint_S\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}n_i F_i - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}n_j F_i + u_j n_i\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - u_j n_j\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}S = \oiint_S\left(n_i\frac{\partial}{\partial x_j}F_i u_j - n_j\frac{\partial}{\partial x_i}F_i u_j\right)\mathrm{d}S$$

$$= \oiint_S[\nabla\cdot(\mathbf{uF})\cdot\mathbf{n} - \nabla\cdot(\mathbf{Fu})\cdot\mathbf{n}] = 0.$$

注: 记号 F_i 只是代表张量 $\mathbf{F}$ 参与运算的分量, 并不是说 $\mathbf{F}$ 一定是一阶张量.

当“∘”代表叉乘积运算时,

$$\mathbf{T} = \oiint_S\varepsilon_{ikm}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}n_i F_k - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}n_j F_k + u_j n_i\frac{\partial F_k}{\partial x_j} - u_j n_j\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)\mathbf{e}_m\,\mathrm{d}S = \oiint_S\varepsilon_{ikm}\left(n_i\frac{\partial}{\partial x_j}u_j F_k - n_j\frac{\partial}{\partial x_i}u_j F_k\right)\mathbf{e}_m\,\mathrm{d}S$$

$$= \oiint_S\left[\mathbf{n}\times[\nabla\cdot(\mathbf{uF})] - \mathbf{n}\cdot[\nabla\times(\mathbf{Fu})]^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}S = \int_V\left[\nabla\times[\nabla\cdot(\mathbf{uF})] - \nabla\cdot[\nabla\times(\mathbf{Fu})]^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}V = \mathbf{0},$$

第四题

解答来自袁磊祺同学（关于 Taylor—Couette 流的速度场分布求解是基本的经典问题，有问题的同学请自行参考流体力学书）

The radius of the inner cylinder is r_1, rotating at a constant angular velocity ω_1; The radius of the inner cylinder is r_2, rotating at a constant angular velocity ω_2.

The velocity in the cylinder are

$$v_\theta = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[r(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) - \frac{r_1^2 r_2^2}{r}(\omega_2 - \omega_1)\right], \tag{4.1}$$

$$v_r = 0, \tag{4.2}$$

$$v_z = 0. \tag{4.3}$$

The coordinates of the mass point are

$$\boldsymbol{x} = r_0 \cos\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right)\boldsymbol{e}_r + r_0 \sin\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right)\boldsymbol{e}_\theta + z_0 \boldsymbol{e}_z. \tag{4.4}$$

Deformation gradient tensor is

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = \nabla \boldsymbol{x} &= \left(\frac{\partial}{\partial r_0}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \theta_0}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z_0}\boldsymbol{e}_z\right)\boldsymbol{x} \\ &= \left[\cos\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right) - \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} t \sin\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right) + \frac{v_\theta t}{r_0}\sin\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right)\right]\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r \\ &\quad + \left[\sin\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right) + \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} t \cos\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right) - \frac{v_\theta t}{r_0}\cos\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right)\right]\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_\theta \\ &\quad - \sin\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right)\boldsymbol{e}_\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\left(\frac{v_\theta t}{r_0}\right)\boldsymbol{e}_\theta\boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Velocity deformation tensor is

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{v_\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

where $\frac{1}{2}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{1}{2(r_2^2 - r_1^2)}\left[(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}(\omega_2 - \omega_1)\right]$.

In field form,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \left[\cos\left(\frac{v_\theta t}{r}\right) - \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} t \sin\left(\frac{v_\theta t}{r}\right) + \frac{v_\theta t}{r}\sin\left(\frac{v_\theta t}{r}\right)\right]\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r \\ &\quad + \left[\sin\left(\frac{v_\theta t}{r}\right) + \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} t \cos\left(\frac{v_\theta t}{r}\right) - \frac{v_\theta t}{r}\cos\left(\frac{v_\theta t}{r}\right)\right]\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_\theta \\ &\quad - \sin\left(\frac{v_\theta t}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\left(\frac{v_\theta t}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta\boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z.\end{aligned} \tag{4.7}$$

第五题

见参考文献。题目本意是让大家去调研一下，部分同学用 CFD 也得到了很好的结果，但要注意的是流线要标明箭头，即流动方向，在有些情况下是很难直接从流线分布看出流动方向的。

第六题

本问题给出的流场是经典的 Beltrami 流动（涡量与速度平行）的一种，是球形涡流。详细知识补充见黄永念老师的《非线性动力学引论》Beltrami 流动章节。本问题的关键也

在于证明给出的速度场是 Beltrami 流动。下面的基本解答过程来自谭湘葵同学。

六、解：

(1) 证明：

r为位矢：r=r e_r+\sita e_\sita+\phi e_\phi(公式以latex表示，蓝色表示矢量)，r的拉普拉斯经过展开可以证明为0.

对连续性方程，显然有

$$\nabla\cdot\vec{u}=\lambda\nabla\cdot[\nabla\times(\psi\vec{r_0})]+\nabla\cdot[\nabla\times\nabla\times\psi\vec{r_0}]=0$$

即流场符合连续性方程。此外，

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}=\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}=\frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2+(\nabla\times\vec{u})\times\vec{u}$$

由于 $\vec{u}=\lambda\nabla\times(\psi\vec{r_0})+\nabla\times\nabla\times(\psi\vec{r_0})$

故 $\nabla\times\vec{u}=\lambda\nabla\times\nabla\times(\psi\vec{r_0})+\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\vec{r_0})$

$$=\lambda\nabla\times\nabla\times(\psi\vec{r_0})+\nabla\times\{\nabla[\nabla\cdot(\psi\vec{r_0})]-\Delta(\psi\vec{r_0})\}$$

$$=\lambda\nabla\times\nabla\times(\psi\vec{r_0})-\nabla\times[\Delta(\psi\vec{r_0})]$$

由于 $\Delta(\psi\vec{r_0})=\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi}\right]\vec{r_0}$ +\psi \inc r

$$=\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial j_2(\lambda r)}{\partial r}\right)+\frac{j(\lambda r)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(3\cos^2\theta-1)}{\partial\theta}\right)\right]\vec{r_0}$$

利用球 Bessel 方程，

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial j_2(x)}{\partial x}\right)+\left(1-\frac{6}{x^2}\right)j_2(x)=0$$

故 $\Delta(\psi\vec{r_0})=\left[-\left(\lambda^2-\frac{6}{r^2}\right)j_2(\lambda r)(3\cos^2\theta-1)-\frac{6}{r^2}j_2(\lambda r)(3\cos^2\theta-1)\right]\vec{r_0}$

$$=-\lambda^2 j_2(\lambda r)(3\cos^2\theta-1)\vec{r_0}$$

$$=-\lambda^2\psi\vec{r_0}$$

说明涡量与速度平行

故 $\boxed{\nabla\times\vec{u}}=\lambda\nabla\times\nabla\times(\psi\vec{r_0})+\lambda^2\nabla\times(\psi\vec{r_0})=\boxed{\lambda\vec{u}}$

于是 $\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2+(\nabla\times\vec{u})\times\vec{u}=\frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2+\lambda\vec{u}\times\vec{u}=\frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2$

定常欧拉，体积力有势，只需要证明对流项有势即可

令 $\Pi=\frac{\vec{u}^2}{2}+\frac{p}{\rho}$，即有

$$\rho\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}=\rho\frac{d\vec{u}}{dt}=\rho\nabla\Pi-\nabla p$$

故满足有势力作用下的定常欧拉方程。

(2) 证明：

同(1)问，

$$\nabla\cdot\vec{v}=e^{-\nu\lambda^2 t}\nabla\cdot\vec{u}=0$$

满足连续性方程。

$$\frac{d\vec{v}}{dt}-\nu\Delta\vec{v}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}-\nu\Delta\vec{v}$$

利用(1)问结论，

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=e^{-2\nu\lambda^2 t}\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}=e^{-2\nu\lambda^2 t}\nabla\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right)=\nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right)$$

而 $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{v}=-\nu\lambda^2 e^{-\nu\lambda^2 t}\vec{u}-\nu e^{-\nu\lambda^2 t}\Delta\vec{u}$

由于 $\Delta\vec{u} = \lambda\nabla\times\Delta(\psi\vec{e}_3) + \nabla\times\nabla\times(\Delta\psi\vec{e}_3)$

$$= \lambda\nabla\times(-\lambda^2\psi\vec{e}_3) + \nabla\times\nabla\times(-\lambda^2\psi\vec{e}_3)$$

$$= -\lambda^2[\lambda\nabla\times(\psi\vec{e}_3) + \nabla\times\nabla\times(\psi\vec{e}_3)]$$

$$= -\lambda^2\vec{u}$$

于是 $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{v} = -\nu\lambda^2 e^{-\nu\lambda^2 t}\vec{u} - \nu e^{-\nu\lambda^2 t}\cdot(-\lambda^2\vec{u}) = 0$

于是 $\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}) = \rho\nabla\pi^* - \nabla p + \mu\Delta\vec{v}$

式中 $\pi^* = \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho}$，$\mu$为动力学黏度。

满足有势力作用下的N-S方程。

速度场已知，大家很容易就可以用 MATLAB 或者 TECPLOT 等工具绘制流线，这里就留给大家自己验证了，黄老师的书里也有详细的流场分布图片。

第七题

此题较为简单，大家做的都比较好。运用指标运算很容易就可以得到结果。解答来自谭湘葵同学。

七、证明：

$$-(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{u} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\, n_i \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\vec{e}_m$$

$$= -(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, n_i \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\vec{e}_m$$

$$= n_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\vec{e}_i - n_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\vec{e}_j$$

$$= (\nabla\cdot\vec{u})\vec{n} - (\nabla\vec{u})\cdot\vec{n}$$

$$= \vec{n}\cdot[(\nabla\cdot\vec{u})I - (\nabla\vec{u})^T]$$

$$= \vec{n}\cdot B$$

证毕。

第八题

课堂已讲。