Peking University

Advanced Fluid Mechanics Homework 3

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

December 30, 2020

1

在飞机参考系中, 飞行中可用的净推力 F_N 由两个动量通量之差得出, 即

$$F_N = \dot{m}_{\text{air}} V_j - \dot{m}_{\text{air}} V. \tag{1.1}$$

其中 $\dot{m}_{\text{air}}$ 为单位时间进入的空气质量,$V_j = 650\text{m/s}$ 为喷气速度,$V = 222\text{m/s}$ 为进气速度, 8000m 处的空气密度为 $\rho = 5.25 \times 10^{-1}\text{kg/m}^3$,

$$\dot{m}_{\text{air}} = \frac{\pi D^2}{4} \times V\rho, \tag{1.2}$$

其中 $D = 0.86\text{m}$ 是进口截面直径, 所以

$$F_N = \frac{\pi D^2}{4} \times V\rho\left(V_j - V\right) = 2.90 \times 10^4\text{N}. \tag{1.3}$$

2

空气密度 $\rho = 1.29\text{kg/m}^3$, 摩尔质量 $\mu = 29\text{g/mol}$, 满足理想气体状态方程

$$p = \frac{\rho RT}{\mu} \tag{2.1}$$

设船和水之间的空气压强为 p_1, 大气压强为 p_0, 压力差

$$F = (p_1 - p_0)S = 98000\text{N}, \tag{2.2}$$

与重力平衡, 其中 $S=3\times 10\mathrm{m}^2$ 为软裙覆盖面积, 由伯努利方程,

$$p_0+\frac{1}{2}\rho v^2=p_1, \tag{2.3}$$

所以

$$v=\sqrt{\frac{2F}{S\rho}}=71\mathrm{m/s}. \tag{2.4}$$

气流量

$$\dot{m}=v\rho hL=71\times 1.29\times 0.02\times 26\mathrm{kg/s}=47\mathrm{kg/s}, \tag{2.5}$$

其中 $h=20\mathrm{mm}$ 是间隙,$L=2\times(3+10)\mathrm{m}=26\mathrm{m}$.

$$P=\frac{1}{2}\rho v^2Lv=6.0\times 10^6\mathrm{W}=8.2\times 10^3\mathrm{hp}. \tag{2.6}$$

3

我觉得远处的星体对物体的影响可以忽略不计, 旋转水桶使得水向下凹陷是因为时空的不对称性, 宇宙是有边界的, 所以不存在没有物体的完美空间.

在一个远离各个星球（星球对物体对引力极小时）, 存在一个坐标系, 在这个坐标系里, 互不影响的物体做匀速直线运动, 这个坐标系就是惯性坐标系, 任何相对其做匀速直线运动的坐标系都是惯性坐标系, 而任何相对其做加速运动（包括旋转）的坐标系都是非惯性系.

爱因斯坦的相对论并没有讨论把所有物体都去掉以后空间的行为. 他谈论的是空间与时间的耦合（狭义相对论）, 以及空间、时间、物质的耦合（广义相对论）. 讨论的基础都是假设存在一个惯性系.

4

速度场分布

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_\tau\frac{\boldsymbol{\omega}(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,\mathrm{d}\tau\right)=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\oint_L\frac{\Gamma}{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\frac{\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^3} \tag{4.1}$$

设 $\boldsymbol{x_0}=(x_0,y_0,z_0)$ 处速度场势函数为 0, 则

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.2}$$

$\boldsymbol{l}$ 沿着 $\boldsymbol{x_0}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的某一路径, 由于速度场成环状, 且圈住涡丝, 所以势函数是多值的.$\varphi(\boldsymbol{x})$ 不同值的物理意义是：势函数的差为绕一圈后圈住的涡丝量乘以负环量 $-\Gamma$.

5

设矢量线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s,t)$ 是一条物质线,s 是定义矢量线的参数. 在 $t=0$ 时刻, 它与涡线重合的充分必要条件是

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}\times\boldsymbol{\omega}=0 \tag{5.1}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}=f\boldsymbol{\omega}\quad(t=0), \tag{5.2}$$

其中 $f\neq 0$ 是一个标量. 若涡线在 $t>0$ 时仍与此武陟县相切, 则必有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}\times\boldsymbol{\omega})=0. \tag{5.3}$$

利用物质线元的物质导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{x})=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=\mathrm{d}\boldsymbol{u}, \tag{5.4}$$

式 (5.3) 变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}\times\boldsymbol{\omega}\right)=\left(\tfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)\times\boldsymbol{\omega}+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}, \tag{5.5}$$

若涡线在 $t>0$ 仍与 $\boldsymbol{x}(s,t)$ 重合, 可将式 (5.2) 代入式 (5.5), 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\times\omega\right)=f\omega\times\left(\tfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}-\omega\cdot\nabla u\right)=f\omega\times(\nabla\times a), \tag{5.6}$$

和式 (5.3) 相比, 克制涡线是物质线的必要条件是

$$\omega\times(\nabla\times a)=0. \tag{5.7}$$

反之, 若成立, 且在 $t=0$ 时有式 (5.2), 则 $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}\times\boldsymbol{\omega}$ 总是 0, 所以5.7又是涡线为物质线的充分条件. □

6

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}V\\&=2\int_V(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{6.1}$$

在旋转参照系中, 离心力有势, 设刚体旋转角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\nabla(h+\phi)-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u}, \tag{6.2}$$

其中 $h = \int \mathrm{d}p/\rho$, ϕ 是体力势.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= -4\int_V (\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V \\
&= -4\boldsymbol{\Omega} \cdot \int_V (\nabla \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V \\
&= -2\boldsymbol{\Omega} \cdot \int_V \nabla \boldsymbol{u}^2\,\mathrm{d}V \\
&= -2\boldsymbol{\Omega} \cdot \int_{\partial V} \boldsymbol{n}\boldsymbol{u}^2\,\mathrm{d}S \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

上式考虑到了 $\boldsymbol{\Omega}$ 是常矢量, 以及液体不可压, 并且边界速度, 边界法向涡量为 0, 并且用到了

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\nabla \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\nabla \cdot \boldsymbol{a}. \tag{6.4}$$

7

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_{\partial\mathcal{V}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\phi\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S), \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\partial\mathcal{V}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{x} \times \phi\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S) \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_{\partial\mathcal{V}}}{\mathrm{d}t} &= \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\phi\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S) \\
&= \int_{\partial\mathcal{V}} \phi\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S) + \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\phi \\
&= -\int_{\partial\mathcal{V}} \phi\boldsymbol{n} \cdot \nabla\nabla\phi\,\mathrm{d}S + \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\phi \\
&= -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\phi\nabla\nabla\phi)\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{V}} \nabla\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\phi\,\mathrm{d}V \\
&= -\int_{\mathcal{V}} \phi\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\frac{\boldsymbol{u}^2}{2}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\boldsymbol{u}^2\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}^2\,\mathrm{d}V = -\frac{1}{\rho}\int_{\mathcal{V}} \nabla p\,\mathrm{d}V \\
&= -\frac{1}{\rho}\int_{\partial\mathcal{V}} p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{7.2}$$

上式在推导过程中没有考虑到远场是否为 0.

8

3.12

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_{\partial\mathcal{V}}}{\mathrm{d}t}=\int_{\partial\mathcal{V}}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\phi\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S),\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\partial\mathcal{V}}}{\mathrm{d}t}=\int_{\partial\mathcal{V}}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{x}\times\phi\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S) \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_{\partial\mathcal{V}}}{\mathrm{d}t}&=\int_{\partial\mathcal{V}}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\phi\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S)\\&=\int_{\partial\mathcal{V}}\phi\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S)+\int_{\partial\mathcal{V}}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\phi\\&=-\int_{\partial\mathcal{V}}\phi\boldsymbol{n}\cdot\nabla\nabla\phi\,\mathrm{d}S+\int_{\partial\mathcal{V}}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\phi\\&=-\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot(\phi\nabla\nabla\phi)\,\mathrm{d}V+\int_{\mathcal{V}}\nabla\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\phi\,\mathrm{d}V\\&=-\int_{\mathcal{V}}\phi\Delta\boldsymbol{u}+\nabla\frac{\boldsymbol{u}^2}{2}\,\mathrm{d}V+\int_{\mathcal{V}}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\boldsymbol{u}^2\,\mathrm{d}V\\&=\int_{\mathcal{V}}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}^2\,\mathrm{d}V=-\frac{1}{\rho}\int_{\mathcal{V}}\nabla p\,\mathrm{d}V\\&=-\frac{1}{\rho}\int_{\partial\mathcal{V}}p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.2}$$

3.2

(1)

反证法

假设有两个解 $\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{1,2}=\theta, \tag{8.3}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{u}_{1,2}=\boldsymbol{\omega}, \tag{8.4}$$

边界上,

$$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{e}_n,\quad \text{或者}\quad \boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{e}_n. \tag{8.5}$$

设

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2, \tag{8.6}$$

则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{8.7}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{u}=0. \tag{8.8}$$

边界上,

$$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{e}_n=0,\quad \text{或者}\quad \boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{e}_n=0. \tag{8.9}$$

因为

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=0, \tag{8.10}$$

所以

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi. \tag{8.11}$$

又因为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{8.12}$$

所以

$$\nabla^2\phi=0. \tag{8.13}$$

1. 若 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n=0$, 则

$$\partial_n\phi=0. \tag{8.14}$$

2. 若 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{e}_n=0$, 则

$$\partial_t\phi=0. \tag{8.15}$$

   即 ϕ 为常数

对以上两种情况, 即为拉普拉斯方程的两种边界条件, 由唯一性定理可知, 解唯一, 即 ϕ 为常数, 所以

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi=0. \tag{8.16}$$

所以解唯一. □

(2)

对于无滑移和无穿透边界条件来说, 速度在边界就是为 0, 按照上面的分析来看, 全场速度为 0, 但是对于有粘度的流体来说, 流体在边界有一个边界层, 边界层涡量极大, 和给定条件有所不同, 所以边界条件不矛盾.