

## 高等流体力学作业五

2021.1.5 发布, 2021.1.21 前完成

一、证明：对于均匀抽吸的零攻角半无穷平板边界层，动量方程的一个特解为

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp\left(-\frac{v_0 y}{\nu}\right)$$

其中  $v_0$  为抽吸速度，沿平板不变。试证明：对于上述速度剖面，位移厚度为  $\nu/v_0$ ，表面摩擦力为  $\rho U v_0$ 。这表明多孔壁抽吸可以阻止边界层增厚。

二、证明：对于不可压缩轴对称无粘旋流，在柱坐标  $(x, \sigma, \theta)$  下有

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega_\theta}{\sigma}\right) = -\frac{2u_\theta \omega_\sigma}{\sigma^2}$$

三、求出在远处看到流体为静止的参照系下，一个 Hill 涡球的流场的总动能。

四、试证明在平面极坐标系中流函数方程

$$\nabla^2 \psi = c\psi$$

的一个解为

$$\psi = c J_1(kr) \sin \theta$$

这里  $c, k$  都是常数。 $J_1(r)$  为第一类 Bessel 函数。仿照 Hill 球涡解的作法，选择外流解，并适当选择  $k$  后，构造一个圆形的“涡偶极子”并画出流线图。

五、对于直角坐标下表示的一个平面流动速度场  $(y^2, x^2)$ ，试画出奇点附近的流场结构，求出该奇点的指标。

六、阅读张涵信先生发表在 1985 年第 1 期《空气动力学学报》的论文上或其著作《分离流与旋涡运动的结构分析》（国防工业出版社，2002），说明三维定常分离流判据（教材（8.2.19）式）的由来。

七、试用你本学期所学到的知识，解释三角翼能产生非线性高升力的原理。可否根据此原理设计一种新型风力发电机（wind turbine）叶片或者其它叶轮机械的叶片？