1

假设板宽为 l, 在图 1.1中, 板和水的相互作用力垂直与板, 虚线下的水和虚线上的水的相互作用力为竖直方向. 如图 1.2, 单位时间内水的动量改变量为

$$\Delta \boldsymbol{p} = l\rho U d\Delta t(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}), \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1}$ 的大小为 U, 方向和 $\boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_1}$ 相同. 由图 1.2,

$$\Delta \boldsymbol{p} = \Delta \boldsymbol{F} \Delta t, \tag{1.2}$$

其中

$$\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_2} - \boldsymbol{F_1}. \tag{1.3}$$

由几何关系可算得

$$F = l\rho U^2 d \cot\frac{\alpha}{2}, \tag{1.4}$$

所以滑板受到的水的总的垂直向上的支持力

$$N = F\cos\alpha = l\rho U^2 d\cot\frac{\alpha}{2}\cos\alpha. \tag{1.5}$$

单位宽度滑板受到的水的总的垂直向上的支持力

$$N' = \rho U^2 d\cot\frac{\alpha}{2}\cos\alpha. \tag{1.6}$$

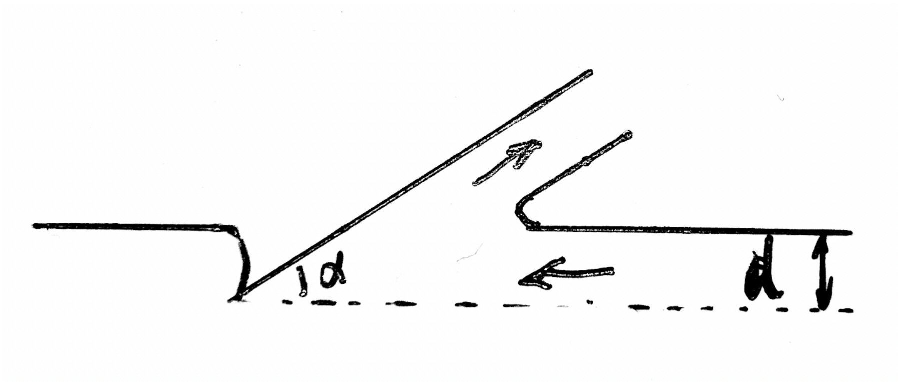


图 1.1. 流动示意图

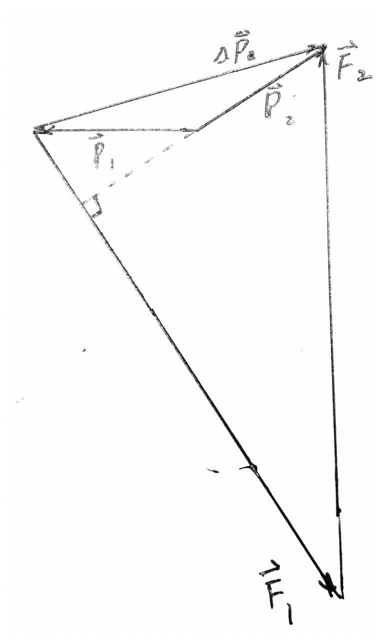


图 1.2. 受力示意图

二、

(1)

设下边的平板不动, 上边的平板以速度 U 匀速向下挤压流体, 以下边平板的圆心处为原点建立柱坐标系 (r,θ,z), 其中 z 轴向上为正. 由于该问题是轴对称的, 板间的不可压缩流体满足连续性方程

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0, \tag{2.1}$$

以及动量方程

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}\right), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}-\frac{u_\theta}{r^2}\right), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right). \tag{2.4}$$

由于平板的挤压方向沿 z 方向, 流体不会产生绕 z 轴的旋转运动, 也就是周向速度 $u_\theta=0$, 因此式 (2.3) 恒成立, 式 (2.2) 可以继续简化为

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}\right). \tag{2.5}$$

以平板半径 R 和平板速度 U 作为特征长度和特征速度, 则 r 方向的尺度为 R, z 方向的尺度为 $h\ll R$, z 方向的速度分量的量级为 $u_z\sim U$. 在连续性方程 (2.1) 中各项的量级应相等, 即 $\left|\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|\sim\left|\frac{u_r}{r}\right|\sim\left|\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|\sim\frac{U}{h}$, 所以 $u_r\sim\frac{R}{h}U$, 从而式 (2.5) 中涉及到 u_r 的各空间导数项的量级分别为

$$u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\sim\frac{RU^2}{h^2},\qquad u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\sim\frac{RU^2}{h^2},\qquad \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\sim\frac{U}{Rh},\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\sim\frac{U}{Rh},\qquad \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\sim\frac{RU}{h^3},\qquad \frac{u_r}{r^2}\sim\frac{U}{Rh}. \tag{2.6}$$

同理, 式 (2.4) 中涉及到 u_z 的各空间导数的量级分别为

$$u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}\sim\frac{U^2}{h},\qquad u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\sim\frac{U^2}{h},\qquad \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}\sim\frac{U}{R^2},\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\sim\frac{U}{R^2},\qquad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\sim\frac{U}{h^2}. \tag{2.7}$$

由于 $h\ll R$, 在式 (2.4) 和式 (2.5) 的粘性项中总有

$$\left|\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}\right|\ll\left|\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right|,\qquad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right|\ll\left|\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right|, \tag{2.8}$$

以及

$$\left|\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|\ll\left|\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right|,\qquad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|\ll\left|\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right|,\qquad \left|\frac{u_r}{r^2}\right|\ll\left|\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right|. \tag{2.9}$$

于是动量方程 (2.4) 和 (2.5) 可以继续简化为

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \tag{2.11}$$

若假设非定常项 $\frac{\partial u_r}{\partial t}$ 的量级不会超过惯性项 $u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}$ 的量级, 则可认为局部速度发生显著变化的时间量级为 h/U, 从而有

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}\sim u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\sim u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\sim\frac{RU^2}{h^2},\qquad \frac{\partial u_z}{\partial t}\sim u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}\sim u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\sim\frac{U^2}{h}. \tag{2.12}$$

压力是被动项，是用来平衡方程中的大项的，这里应该是和粘性力相当。边界层是粘性力逐渐重要与惯性力相当所以压力项才与惯性力相当的。

压力项总是与惯性项同量级, 即 $\dfrac{\partial p}{\partial r} \sim \rho u_r \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \sim \dfrac{\rho R U^2}{h^2}$, 由此可以对各个量进行尺度化

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \qquad \bar{z} = \frac{z}{h}, \qquad \bar{t} = \frac{t}{h/U}, \qquad \bar{u}_r = \frac{u_r}{RU/h}, \qquad \bar{u}_z = \frac{u_z}{U}, \qquad \bar{p} = \frac{p - p_0}{\rho R^2 U^2/h^2}, \tag{2.13}$$

同时记 $\lambda = h/R$, 并引入雷诺数 $\mathrm{Re} = \rho U h/\mu = Uh/\nu$, 将无量纲量代入方程 (2.10) 和 (2.11) 中, 得

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{z}^2}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \bar{z}^2}. \tag{2.15}$$

由于两板间距 h 和挤压速度 U 都非常小, 有 $\lambda \ll 1$ 以及 $\mathrm{Re} \ll 1$, 也就是说它们的倒数都非常大, 忽略方程 (2.14) 和 (2.15) 中不带倒数的其他项, 并结合尺度化后的连续性方程 (1.1), 建立流体满足的简化后的控制方程组为

说明是斯托克斯流，又说明压力项和粘性项占主导

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

正确的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \dfrac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + \dfrac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} = 0, \\ \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{z}^2} = 0, \\ -\dfrac{1}{\lambda^2} \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \bar{z}^2} = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

r方向上只有粘性力没有压力驱动它怎么会一直流动？显然这里把压力项扔掉是有问题的

Z方向上只剩压力项

方程组 (2.16) 很容易求解, 可以得到通解

接下来解方程的思路一致

$$\bar{u}_r = A(\bar{r})\bar{z} + B(\bar{r}), \tag{2.17}$$

$$\bar{u}_z = -\frac{1}{2}\left(A'(\bar{r}) + \frac{A(\bar{r})}{\bar{r}}\right)\bar{z}^2 - \left(B'(\bar{r}) + \frac{B(\bar{r})}{\bar{r}}\right)\bar{z} + C(\bar{r}), \tag{2.18}$$

$$\bar{p} = -\frac{\lambda^2}{\mathrm{Re}}\left(A'(\bar{r}) + \frac{A(\bar{r})}{\bar{r}}\right)\bar{z} + D(\bar{r}), \tag{2.19}$$

其中 $A(\bar{r}), B(\bar{r}), C(\bar{r}), D(\bar{r})$ 为待定函数.

在上板 $\bar{z} = 1$ 处, 成立无滑移无穿透边界条件 $\bar{u}_r|_{\bar{z}=1} = 0$, $\bar{u}_z|_{\bar{z}=1} = -1$; 在下板 $\bar{z} = 0$ 处, 成立无穿透边界条件 $\bar{u}_z|_{\bar{z}=0} = 0$, 将以上边界条件代入通解 (2.17) 和 (2.18), 可定出

$$A(\bar{r}) = -\bar{r} + \frac{C_0}{\bar{r}}, \qquad B(\bar{r}) = -A(\bar{r}) = \bar{r} - \frac{C_0}{\bar{r}}, \qquad C(\bar{r}) = 0, \tag{2.20}$$

为了保证速度在圆板中心 $\bar{r} = 0$ 处没有奇性, 需使得常数 $C_0 = 0$, 因此解 (2.17) $\sim$ (2.19) 可进一步写为

$$\bar{u}_r = -\bar{r}\bar{z} + \bar{r}, \tag{2.21}$$

$$\bar{u}_z = \bar{z}^2 - 2\bar{z}, \tag{2.22}$$

$$\bar{p} = \frac{2\lambda^2}{\mathrm{Re}}\bar{z} + D(\bar{r}). \tag{2.23}$$

注意到压强的表达式 (2.23) 中还包含着一个待定函数 $D(\bar{r})$, 为了定出它, 可以将解 (2.21) $\sim$ (2.23) 代回式 (2.14), 也就是多施加一个相容性约束, 得

$$(-\bar{r}\bar{z} + \bar{r})(-\bar{z} + 1) - (\bar{z}^2 - 2\bar{z})\bar{r} = -D'(\bar{r}), \tag{2.24}$$

化简后刚好得到 $D'(\bar{r}) = -\bar{r}$, 解得 $D(\bar{r}) = -\dfrac{1}{2}\bar{r}^2$, 不写出常数项是因为压强的相对值才有意义, 而静水压已经在式 (2.13) 的尺度化过程中刨除了. 由此得到了有量纲的压强

$$p(r,z) = p_0 + \frac{\rho R^2 U^2}{h^2}\left(\frac{2\lambda^2}{\mathrm{Re}}\frac{z}{h} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right) = p_0 + \frac{\rho U^2}{h^2}\left(\frac{2\nu}{U}z - \frac{1}{2}r^2\right). \tag{2.25}$$

因此上板受到阻力

$$F_D = \int_S (p(r,h) - p_0)\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\rho U^2}{h^2}\left(\frac{2\nu h}{U} - \frac{1}{2}r^2\right) r\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi U^2 R^2}{h^2}\left(\frac{\mu h}{U} - \frac{\rho R^2}{8}\right). \tag{2.26}$$

3、在吴介之、杨越《关于旋涡定义的思考》中讨论黏性作用时提到:

"黏性有几个重要的作用。首先,涡面变成有限厚度的剪切层,但这个厚度必须足够薄才能使剪切层发生卷绕。剪切层这样的结构只在小黏性流体或大雷诺数流动中才出现。……。黏性的第二个作用,是消除前述卷绕涡面不可避免的奇异性,在大雷诺数下,剪切层的厚度为 $O(Re^{-\frac{1}{2}}L)$ 的量级,L是物体长度尺度。涡层卷得越紧,其强度随之减小,涡量分布和速度分布越趋于光滑。当相邻剪切层间的距离小到与层的厚度这个量级时,卷绕结构变得模糊,退化为环量 $\Gamma = O(1)$ 的黏性涡量管,特征雷诺数为 $Re = \frac{\Gamma}{\nu} \gg 1$。"

可以看出有黏性作用时,涡面变成有限厚度的剪切层,在大Re数下其厚度约为 $O(Re^{-\frac{1}{2}}L)$ 的量级,这和平板边界层厚度量级表达式类似。我们可以理解为在黏性作用下,涡量从壁面产生后会向流体内部扩散并经黏性耗散掉,所以脱落的涡面的厚度大概与边界层厚度相当,为 $O(Re^{-\frac{1}{2}}L)$ 量级。

第三题

运用已知的结果推断很好

3.解：

有限Re，边界层即为面涡，以平板边界层为例

1) 当流动为层流

根据 Blasius 方程 $\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$ 其中 $Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$

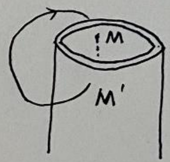
x 为特征尺度 U_∞ 为特征速度

2) 当流动为湍流时 $\frac{\delta}{x} = 0.37\, Re_x^{-1/5}$ 其中 $Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$

第四题

4.解：

对于封闭面涡，构造仅通过面涡上二点 M M′ 的曲线



面涡外 $\vec{u} = \nabla\varphi$ 则曲线上 $\Gamma = -[\varphi_M] + [\varphi_{M'}]$

又∵ M′处 $[\vec{u}] = \nabla\varphi_{M'}$

∴ M′处 $\gamma = \vec{n} \times [\vec{u}] = \vec{n} \times \nabla[\Gamma + [\varphi_M]] = \vec{n} \times \nabla_\pi \Gamma$

五、

考虑远处静止的二维无旋流场中, 在初始时刻有一个强度为常数 $\boldsymbol{\gamma}_0 = \gamma_0 \boldsymbol{e}_z$、半径为 R 的圆形面涡, 则由广义 Biot-Savart 公式, 面涡的自诱导速度为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{\boldsymbol{\gamma}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} \,\mathrm{d}s'. \tag{5.1}$$

将坐标原点取在初始时刻面涡的圆心处, 并建立极坐标系, 则有

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = R\cos\theta', \\ y' = R\sin\theta'. \end{cases} \tag{5.2}$$

代入积分 (5.1) 中得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\gamma}_0 \times \int_0^{2\pi} \frac{(R\cos\theta - R\cos\theta', R\sin\theta - R\sin\theta')}{(R\cos\theta - R\cos\theta')^2 + (R\sin\theta - R\sin\theta')^2} R\,\mathrm{d}\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\gamma}_0 \times \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta - \cos\theta', \sin\theta - \sin\theta')}{2 - 2\cos(\theta - \theta')} \,\mathrm{d}\theta'. \end{aligned} \tag{5.3}$$

注意到

$$\int \frac{\cos\theta-\cos\theta'}{2-2\cos(\theta-\theta')}\,\mathrm{d}\theta' = \int \frac{2\sin\dfrac{\theta'+\theta}{2}\sin\dfrac{\theta'-\theta}{2}}{4\sin^2\dfrac{\theta'-\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta' = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\dfrac{\theta'+\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta'-\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta' = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\left(\dfrac{\theta'-\theta}{2}+\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta'-\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta'$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta' + \frac{1}{2}\int \sin\theta\cot\frac{\theta'-\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta' = \frac{1}{2}\theta'\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\ln\left|\sin\frac{\theta'-\theta}{2}\right| + C, \tag{5.4}$$

同理可得

$$\int \frac{\sin\theta-\sin\theta'}{2-2\cos(\theta-\theta')}\,\mathrm{d}\theta' = \int \frac{-2\cos\dfrac{\theta'+\theta}{2}\sin\dfrac{\theta'-\theta}{2}}{4\sin^2\dfrac{\theta'-\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta' = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos\dfrac{\theta'+\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta'-\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta' = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos\left(\dfrac{\theta'-\theta}{2}+\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta'-\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta'$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin\theta\,\mathrm{d}\theta' - \frac{1}{2}\int \cos\theta\cot\frac{\theta'-\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta' = \frac{1}{2}\theta'\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\ln\left|\sin\frac{\theta'-\theta}{2}\right| + C. \tag{5.5}$$

于是有

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta-\cos\theta'}{2-2\cos(\theta-\theta')}\,\mathrm{d}\theta' = \left[\frac{1}{2}\theta'\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\ln\left|\sin\frac{\theta'-\theta}{2}\right|\right]_{\theta'=0}^{\theta'=2\pi} = \pi\cos\theta, \tag{5.6}$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta-\sin\theta'}{2-2\cos(\theta-\theta')}\,\mathrm{d}\theta' = \left[\frac{1}{2}\theta'\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\ln\left|\sin\frac{\theta'-\theta}{2}\right|\right]_{\theta'=0}^{\theta'=2\pi} = \pi\sin\theta. \tag{5.7}$$

将式 (5.6) 和式 (5.7) 代入式 (5.3) 中, 即得面涡的自诱导速度

$$\boldsymbol{u}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\gamma}_0 \times (\pi\cos\theta, \pi\sin\theta) = \frac{1}{2}\gamma_0\cos\theta\boldsymbol{e}_y - \frac{1}{2}\gamma_0\sin\theta\boldsymbol{e}_x = \frac{1}{2}\gamma_0\boldsymbol{e}_\theta, \tag{5.8}$$

也就是说面涡只会诱导自己在原地匀速旋转, 角速度为 $\dfrac{\gamma_0}{2R}$, 其形状不会发生改变.

六、

自由面涡将沿固壁切向脱落, 因此在面涡外侧和内侧的速度分别可以写为

$$\boldsymbol{u}^+ = u_1^+\boldsymbol{e}_1 + u_2^+\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{u}^- = u_1^-\boldsymbol{e}_1, \tag{6.1}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$ 是分离线 L 的切向, $\boldsymbol{e}_2$ 是固壁切平面上与 $\boldsymbol{e}_1$ 正交的方向. 因此速度间断和面涡速度分别为

$$[[\boldsymbol{u}]] = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^- = (u_1^+ - u_1^-)\boldsymbol{e}_1 + u_2^+\boldsymbol{e}_2, \tag{6.2}$$
$$\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}^+ + \boldsymbol{u}^-) = \frac{1}{2}(u_1^+ + u_1^-)\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}u_2^+\boldsymbol{e}_2. \tag{6.3}$$

定义 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ 是从面涡 $-$ 向指向 $+$ 向的单位法向量, 则面涡强度

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{n} \times [[\boldsymbol{u}]] = (u_1^+ - u_1^-)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_1 + u_2^+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_2 = (u_1^+ - u_1^-)\boldsymbol{e}_2 - u_2^+\boldsymbol{e}_1. \tag{6.4}$$

对于定常均质不可压情形, 沿流线成立 Bernoulli 积分 (不考虑体积力)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} = C, \tag{6.5}$$

又由于面涡两侧压强没有间断, 因此有

$$[[p]] = [[q^2]] = 0, \tag{6.6}$$

所以成立

$$(q^+)^2 = (u_1^+)^2 + (u_2^+)^2 = (u_1^-)^2 = (q^-)^2. \tag{6.7}$$