高等流体力学作业一

2020.9.30 发布，2020.10.15 前完成

一、有一个圆柱形浮标，高 1.8 米，直径为 1.35 米，质量为 770 千克，其重心离底部为 0.9 米，证明此浮标在密度为 1025 千克/米 ^{3} 的海水中是不能稳定直立漂浮的。现用一链子拴在圆柱的底部，问使此浮标能够稳定直立漂浮时，链子沿铅垂向下的最小拉力应为多少？

二、假如民用大飞机的升力系数提高百分之一，而阻力系数不变，问在同样载客量和飞行速度的情况下大概可以节省多少百分比的燃油？（考虑飞行过程中油量的变化）

三、证明：对于流体内闭合的物质曲面S，成立

$$\frac{d}{dt}\oiint_S d\boldsymbol{S}\circ F=\oiint_S\left(d\boldsymbol{S}\circ\frac{\partial F}{\partial t}+u_n\nabla\circ F dS\right)$$

这里F是一般的张量场，“ $\circ$ ”可以代表数量乘积、点积或者叉乘积。（提示：可以使用 Gauss 定理将面积分化为体积分。但鼓励不使用体积分的证法，只用定义在S上的面积分即可）

四、对于两个同轴旋转圆筒之间的定常的 Taylor-Couette 流，求出变形梯度张量、变形速度张量，并将变形梯度张量用场描述表示出来。

五、请画出圆柱绕流出现层流涡街之后某时刻的一幅完整的流线示意图。

六、在球坐标系(r,θ,φ)中（θ是纬向角），假如均质不可压缩流体的速度场取如下轴对称形式

$$\boldsymbol{u}=\lambda\nabla\times(\psi\boldsymbol{r})+\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r})$$

其中标量函数

$$\psi=j_2(\lambda r)(3\cos^2\theta-1),$$

这里$\boldsymbol{r}$为以球心为起始点的位置矢量，$r=|\boldsymbol{r}|$， $j_2(r)$为 2 阶球 Bessel 函数，$\lambda=5.763\ldots$是其最小零点。

（1）证明：该流场满足有势力作用下的定常 Euler 方程；

（2）在此基础上定义衰减的非定常流场$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}^{-\nu\lambda^2 t}\boldsymbol{u}$，证明该流场满足 Navier-Stokes 方程。这里ν是运动学黏性系数；

（3）求出该流场的一族流面，并画出几条典型的流线。

（4）（选做）注意到每一个上述流场都与一个固定的极轴相对应，若取相互垂直的两个极轴，将每个极轴分别对应的上述流场进行线性叠加，则会形成一个非轴对称流场。在直角坐标系下写出叠加流场的具体表达式，证明该流场仍满足定常 Euler 方程，并画出几条典型的流线。

七、对面变形梯度张量$\mathbb{B}$，证明 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbb{B}=-(\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{u}$。

八、物体在大气中做匀速飞行，将物体所受阻力用流场的耗散函数和（可能的）压力积分项表示出来。

高等流体力学作业二

2020.10.26 发布，2020.11.10 前完成

一、 考虑在二元风洞或水洞中用测量钝体绕流尾流下游截面上速度分布的方法获得物体所受的阻力。不考虑非定常效应，已知来流速度和流体密度，请推出阻力用速度积分表达的公式。

二、用积分形式的动量定理结合远场渐近估计，推导出 Joukowsky 升力公式。

三、考虑一个空间空间有界区域内的不可压流场。假如边界上的速度矢量给定，1）请证明拟涡能一般来说会有一个非零下界；2）假设边界静止，但其内部还有一个旋转部件，请给出此时流场拟涡能的一个非零下界。

四、考虑一个多连通有界区域，请给出其上的 Helmholtz-Hodeg 分解定理。

五、请研究二维情况下的开尔文最小动能定理是否适用于：1）无界流场；2）多连通区域。

六、在文献中常看到一个流体在固壁表面的摩擦切应力公式：$\boldsymbol{\tau}=\mu\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}$。其中$\boldsymbol{\omega}$是壁面上流体的涡矢量，$\boldsymbol{n}$是壁面单位法矢量。1）请讨论该公式的适用条件；2）对于有固壁切向运动驱动的内流，请给出固壁向流场输入总功率的表达式。

七、对下列案例，任选一个指出其中**一种重要**的流动现象，并**有针对地**给出定量刻画该现象的方程和定解条件：1) 直升机气动设计中的关键问题；2) 小汽车或空间站内部通风系统设计；3) 航空发动机设计；4) 核电站放射性物质泄漏扩散安全评估；5) 定向加热法治疗恶性肿瘤；6）生物芯片中的微流；7) 流觞曲水。

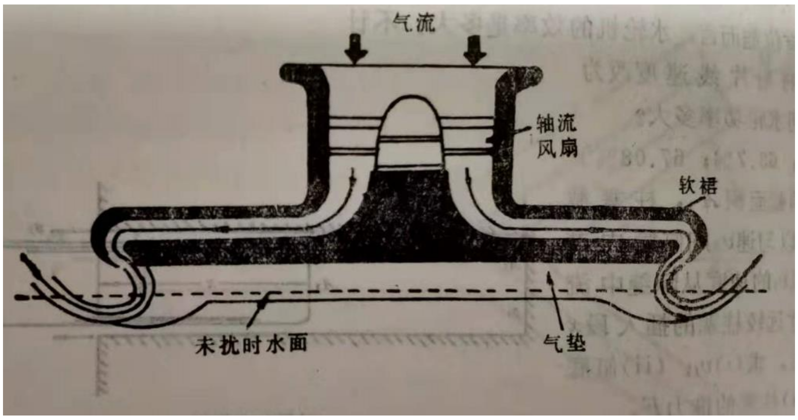
八、请计算圆柱的附加质量。

高等流体力学作业三

2020.11.21 发布，2020.12.6 前完成

一、 喷气飞机以每小时800公里的速度在8000米上空飞行。发动机的进口截面直径是0.86米，假设当时的流量系数（即气流实际流入发动机的流量对气流假如直接撞入进口时应有的流量二者之比）为1。尾喷口截面上气流相对飞机的喷出平均速度是650米/秒，喷出气流静压与外界大气相同。求发动机的净推力（外壳上的压力也要算在内）。

二、如下图所示，气垫船重98000牛顿，软裙覆盖面积是3×10米^2。工作时，裙缘离地面的间隙是20毫米，裙内流速很低，其动压可以略去不计。求；（1）维持悬停所需的气流量；（2）驱动风扇的理论功率，用马力表示。



三、 从网上搜索阅读沈致远的科学散文《三百年来一桶水》，谈谈你的看法及启发。可以对作者所发感想再感想，但不得照搬作者的感想。

四、远处静止的无界不可压流场中有一个强度为Γ的闭合涡丝，在该涡丝之外流动都是无旋的，试求出涡丝之外速度场的势函数，并给出该势函数的物理意义，并问该势函数是单值还是多值的？

五、证明：流场涡线保持的充分必要条件是，涡量动理学矢量（即加速度旋度）与涡矢量平行。

六、考虑一个密闭固体容器中的液体。如果固体容器做刚体旋转，取旋转参照系，推导流场总螺度的时间变化率公式。

七、教材 p110 页最后一段，采用高斯定理的推导方法有没有问题？

八、完成教材习题 3.2，3.7，3.10，3.12 中至少 3 道题。

高等流体力学作业四

2020.12.21 发布，2021.1.5 前完成

一、 考虑二维打水漂或者滑水问题。假设水的密度为ρ，平直滑板的速度为常速U，倾角为α。水受向前运动的滑板的挤压，从滑板上端的前下方流出，水流厚度为d。试估算滑板受到的水的总的垂直向上的支持力。要求明确写出求解过程中所作的假设。

二、有两块平行的半径为R的圆形平板，其中一块置于另一块的上方，其间充满黏度为μ的不可压缩流体，两板间距h很小。设平板以速度U缓慢地相互靠拢，排挤着流体，（1）试确定平板所受的阻力；（2）假设板的初始速度为U_0，板除受流体作用力外，只受重力作用，问两板最后可否完全合拢。提示：用类似边界层理论的量阶估计简化问题。

三、面涡是雷诺数无穷大时的一种理想的涡结构模型，厚度为 0。那么，对于有限雷诺数情况，即$\mu \neq 0$的情况，则面涡成为有限厚度的。请估计面涡厚度同雷诺数的关系。

四、对于无旋流场中的一片面涡，可以在面涡表面引入一个标量的环量函数来描述面涡强度。现在，假设无旋流场中有一个封闭的面涡，面涡内部也是无旋的。请问：可否继续引入类似的环量函数来描述该封闭面涡的强度？

五、考虑远处静止的二维无旋流场中的一个强度为常数的圆形面涡。证明：该面涡的形状将不发生改变。

六、教材习题 5.2。

七、考虑二维无旋流场中一个半无穷长的面涡。取面涡起始点为原点，面涡所在的直线为x轴负半轴，面涡强度分布为$\gamma(x) = x^{-1/2}$，试根据 Birkhoff-Rott 方程用数值方法模拟面涡的卷起过程。画出几个不同时刻的面涡的图形，并给出计算程序。

八、假设你给自己布置一道教材第 4、5 章的作业题，请给出题目（要求不与前面的题目雷同）。