Peking University

Advanced Fluid Mechanics Homework 2

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

November 8, 2020

1

已知来流速度为 U, 下截面速度分布为 $u(y)$, 单位长度物体受到的阻力为 $\vec{D}$

取一个静止的闭曲面, 上下水平延伸到无穷远, 左右竖直延伸到无穷远。因为是定常流动, 面内的总动量保持不变

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\vec{u}\,\mathrm{d}V = -\oiint \rho\vec{u}u_n\,\mathrm{d}S - \vec{D} - \oiint p\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0, \tag{1.1}$$

$$\vec{D} = -\oiint \rho\vec{u}u_n\,\mathrm{d}S - \oiint p\vec{n}\,\mathrm{d}S. \tag{1.2}$$

伯努利方程

$$p + \frac{\rho}{2}u^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2}U^2. \tag{1.3}$$

所以

$$\begin{aligned} D &= -\oiint \rho\vec{u}u_n\,\mathrm{d}S - \oiint p\vec{n}\,\mathrm{d}S \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \rho\vec{u}u_n\,\mathrm{d}l - \int_{-\infty}^{\infty} p\vec{n}\,\mathrm{d}l \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{2}\left(u^2 - U^2\right)\mathrm{d}l + \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(u^2 - U^2\right)\mathrm{d}l \\ &= -\frac{\rho}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(U+u)(U-u)\,\mathrm{d}l \\ &\approx -\rho\int_{-\infty}^{+\infty} U(U-u)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 ρ 是流体的密度, 这里用到了 $u \approx U$ 的近似.

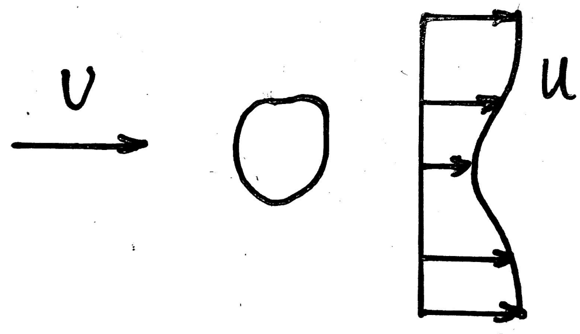

图 1.1. 二元风洞或水洞中测量钝体绕流尾流下游截面上速度分布

2

Assume the flow at a sufficiently larger fixed control surface Σ is irrotational, the pressure can be replaced by $-|\boldsymbol{u}|^2/2$ due to the Bernoulli integral:

$$\boldsymbol{F} = \rho \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{u}|^2 \boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \right) dS \tag{2.1}$$

Let $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{v}$ with $\boldsymbol{v}$ being the disturbance velocity that approaches zero at infinity, such that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 n_i - u_i u_j n_j =& \frac{1}{2}|v|^2 n_i + U_j v_j n_i + \frac{1}{2} U^2 n_i \\ & - v_i v_j n_j - U_i v_j n_j - v_i U_j n_j - U_i U_j n_j. \end{aligned} \tag{2.2}$$

For two-dimensional flow

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} dS = \int_{V} \boldsymbol{\omega} dV = \boldsymbol{e}_z \Gamma. \tag{2.3}$$

So,

$$\boldsymbol{F} = -\rho U \Gamma \boldsymbol{e}_y. \tag{2.4}$$

3

3.1 非零下界

速度分解为

$$\boldsymbol{u} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi. \tag{3.1}$$

因为有不可压缩条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{3.2}$$

所以

$$\Delta\phi = 0. \tag{3.3}$$

计算拟涡能

$$\iiint \frac{1}{2}\omega^2 \,\mathrm{d}V = \iiint \frac{1}{2}\nabla\times(\nabla\times\Psi)\cdot\nabla\times(\nabla\times\Psi)\,\mathrm{d}V = \iiint \frac{1}{2}(\Delta\Psi)\cdot(\Delta\Psi)\,\mathrm{d}V. \tag{3.4}$$

如果拟涡能等于 0, 则

$$\Delta\Psi = 0. \tag{3.5}$$

由式 (3.3) and (3.5) 解得的方程很可能无法边界条件, 所以拟涡能有一个非零下界.

3.2

旋转部件?

4

多连通区域并不影响泊松方程的求解, 所以 Helmholtz-Hodeg 分解定理保持不变.

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla\times\Psi, \tag{4.1}$$

$$\nabla\cdot\Psi = 0. \tag{4.2}$$

5

5.1 无界流场

在无界流场求解拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi = 0. \tag{5.1}$$

默认无穷远处速度都为 0, 否则流体的动能为无穷大, 无法讨论动能最小的问题.

取一个半径为 R 的球, 设边界条件为 $u_n = 0$, 则根据唯一解性质, 球内流场全部为 0. 任何一个有速度的流场的动能都会更大. 令 $R \to +\infty$, 则全空间流场都为 0, 比任何其它流场的动能都要小, 所以开尔文最小动能定理适用于无界流场.

5.2 多连通区域

首先多连通域并不影响式 (5.1) 求解的唯一性, 这个可以通过考察一个多连通物体的静电场来理解, 静电场必定是唯一的. 另外, 多连通并不影响高斯定理, 所以开尔文最小动能定理成立.

6

6.1 适用条件

设正交坐标系 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, $\boldsymbol{k}$ 为壁面外法向, 壁面法向速度都为 0, 如果壁面在运动, 则壁面法向速度在一微元内为常矢量, 所以壁面法向速度沿壁面的偏导数为 0.

$$\boldsymbol{\tau}=\mu\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}=\mu\frac{\partial u_y}{\partial z}\boldsymbol{j}+\mu\frac{\partial u_x}{\partial z}\boldsymbol{i}. \tag{6.1}$$

式 (6.1) 即为牛顿粘性公式. 该公式适用条件即为牛顿粘性公式的适用条件.

6.2 总功率

根据牛顿第三定律, 壁面给流体的力为 $-\boldsymbol{\tau}$, 所以输入总功率为

$$P=\iint-\mu(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S. \tag{6.2}$$

7

7.1 核电站放射性物质泄漏扩散安全评估

将核泄漏时设为 $t_0=0$, 以核电站为坐标原点, 建立以正东为 x 正方向, 正北为 y 正方向, 建立三维直角坐标系.

时刻无穷空间中任意一点 (x,y,z) 的放射性物质浓度记为 C. 时间通过单位法相面的流量为:

$$q=-k\times\nabla C \tag{7.1}$$

k 是扩散系数, 负号表示有浓度高香浓度低的地方扩散. 考察空间域 Ω, Ω 的体积为 V, 包围 Ω 的曲面为 S, S 的外法线向量为 $\boldsymbol{n}$, 则在 $[t,t+\Delta t]$ 内通过 Ω 的流量为:

$$Q_1=\int_t^{t+\Delta t}\iint_S q\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t=\int_t^{t+\Delta t}\iiint_V\nabla q\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t, \tag{7.2}$$

而 Ω 内放射性物质的增量为:

$$Q_2=\iiint_V C(t)-C(t+\Delta t)\,\mathrm{d}V. \tag{7.3}$$

有质量守恒定律:

$$Q_1=Q_2. \tag{7.4}$$

由以上各个式子可得

$$\frac{\partial C}{\partial t}=k\Delta C. \tag{7.5}$$

这是无界区域的抛物型偏微分方程. 初始条件为作用在坐标原点的点源函数, 可以记作:

$$C(0) = Q\delta(\boldsymbol{x}). \tag{7.6}$$

其中解为

$$C = \frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}} \exp -\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}. \tag{7.7}$$

8

考虑非定常不可压缩位势流. 远场 $|\vec{u}| \to 0$ 圆柱在流体中运动速度为 $U(t)$, 从考察物体的受力转变为研究流场动量的变化.

$$\vec{P} = \rho \int \vec{u} \,\mathrm{d}V = \rho \int \nabla\varphi \,\mathrm{d}V = \rho \oiint_{\Sigma+\Sigma'} \vec{n}\varphi \,\mathrm{d}S = -\rho \oiint_{\Sigma} \vec{n}\varphi \,\mathrm{d}S, \tag{8.1}$$

$$\vec{p} = \rho \oiint_{\partial B} \vec{n}\varphi \,\mathrm{d}S = \rho U(t) \iint \vec{n}\varphi_1 \,\mathrm{d}S, \tag{8.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{e}_x = D = \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t) \oiint (\vec{n} \cdot \vec{e}_x)\, \varphi_1 \,\mathrm{d}S = \rho \frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} \oiint \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \,\mathrm{d}S. \tag{8.3}$$

所以单位长度圆柱的附加质量为

$$m = \rho \oiint \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \,\mathrm{d}S. \tag{8.4}$$

其中

$$\varphi_1 = x, \tag{8.5}$$

$$\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \vec{e}_x \cdot \vec{n}. \tag{8.6}$$

所以

$$m = \rho \oiint \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \,\mathrm{d}S = \rho \oint x \cos\theta \,\mathrm{d}l = \rho \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta \,\mathrm{d}l = \rho\pi r^2. \tag{8.7}$$

其中 r 为圆柱的半径.