Peking University

高等应用数学作业 5

第二组　袁磊祺　刘志如　宋庭鉴　岐亦铭　董淏翔　周子铭　撒普尔

December 1, 2020

1

Ch. 11 Sec. 11.3 Pro. 3

$\ddot{y}+\epsilon\dot{y}+y=0,\ y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$

忽略小量 ϵ，则 $y=\sin(t)$。

故 $f^{(0)}(t,\tau)=A(\tau)\sin(t)$ 且 $A(0)=1$

$y(t,\tau)=f^{(0)}(t,\tau)+\epsilon f^{(1)}(t,\tau)+O(\epsilon^2)$，$\tau=\epsilon t$

$\dot{y}(t,\tau)=f_1^{(0)}(t,\tau)+\epsilon(f_1^{(1)}(t,\tau)+f_2^{(0)}(t,\tau))+O(\epsilon^2)$

$\ddot{y}(t,\tau)=f_{11}^{(0)}(t,\tau)+\epsilon(f_{11}^{(1)}(t,\tau)+2f_{12}^{(0)}(t,\tau))+O(\epsilon^2)$

$\ddot{y}+\epsilon\dot{y}+y=f_{11}^{(0)}(t,\tau)+f^{(0)}(t,\tau)+\epsilon(f_{11}^{(1)}(t,\tau)+2f_{12}^{(0)}(t,\tau)+f_1^{(0)}(t,\tau)+f^{(1)}(t,\tau))+O(\epsilon^2)=0$

初始边界条件 $f^{(0)}(0,0)=f^{(1)}(0,0)=\cdots=0$，$f_1^{(0)}(0,0)=1$，$f_1^{(1)}(0,0)+f_2^{(0)}(0,0)=0$，$\cdots$

方程展开式条件:

$$\begin{cases} 0 & =f_{11}^{(0)}(t,\tau)+f^{(0)}(t,\tau)=-A(\tau)\sin(t)+A(\tau)\sin(t) \\ 0 & =f_{11}^{(1)}(t,\tau)+2f_{12}^{(0)}(t,\tau)+f_1^{(0)}(t,\tau)+f^{(1)}(t,\tau) \\ & =f_{11}^{(1)}(t,\tau)+f^{(1)}(t,\tau)+A(\tau)^3\cos^3(t)+2A'(\tau)\cos(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

消除共振项 $A(\tau)^3\cos^3(t)+2A'(\tau)\cos(t)=0=(3A^3/4+2A')\cos(t)+A^3/4\cos(3t)$

$3A^3/4+2A'=0$ 且 $A(0)=1$。

得 $A(\tau)=(1+3\tau/4)^{-0.5}$，$y\approx(1+3\epsilon t/4)^{-0.5}\sin(t)+O(\epsilon)$

解释：$\dot{y}$ 项系数小，针对快变量小尺度时间忽略该项，得到解主要受 $\ddot{y}$ 与 y 项影响的周期函数，在大尺度时间下慢变量的影响反映在解的幅值随时间逐渐下降。

3

Ch. 11 Sec. 11.3 Prob.7

2.1

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0;\quad y(0)=0,\quad y(1)=1,\quad 0<x<1,\quad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{2.1}$$

假设

$$y=f(x,X,\varepsilon)=f^{(0)}(x,X)+\varepsilon f^{(1)}(x,X)+\cdots \tag{2.2}$$

其中 $X=x/\varepsilon$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,X,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}f_2^{(0)}+f_1^{(0)}+f_2^{(1)}+\varepsilon f_1^{(1)} \tag{2.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x,X,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}f_{22}^{(0)}+\frac{1}{\varepsilon}\left[2f_{21}^{(0)}+f_{22}^{(1)}\right]+f_{11}^{(0)}+2f_{12}^{(1)}+\varepsilon f_{12}^{(1)} \tag{2.4}$$

把式 (2.1) to (2.3) 代入式 (2.1) 可得

$$\frac{1}{\varepsilon}f_{22}^{(0)}+2f_{21}^{(0)}+f_{22}^{(1)}+\varepsilon\left[f_{11}^{(0)}+2f_{12}^{(1)}\right]+\varepsilon^2f_{12}^{(1)}+\frac{2}{\varepsilon}f_2^{(0)}+2f_1^{(0)}+2f_2^{(1)}+2\varepsilon f_1^{(1)}+f^{(0)}+\varepsilon f^{(1)}=0 \tag{2.5}$$

$O(\varepsilon)$ 项为 0, 所以

$$f_{22}^{(0)}+2f_2^{(0)}=0 \tag{2.6}$$

求解式 (2.6) 可得

$$f^{(0)}(x,X)=C_1(x)+C_2(x)\exp(-2X). \tag{2.7}$$

2.2

$O(1)$ 项为 0, 所以

$$2f_{21}^{(0)}+f_{22}^{(1)}+2f_1^{(0)}+2f_2^{(1)}=0 \tag{2.8}$$

式 (2.7) 代入式 (2.8) 可得

$$-2C_2'\exp(-2X)+f_{22}^{(1)}+2C_1'+2f_2^{(1)}+C_1+C_2\exp(-2X)=0 \tag{2.9}$$

即

$$f_{22}^{(1)}+2f_2^{(1)}=(2C_2'-C_2)\exp(-2X)-(2C_1'+C_1) \tag{2.10}$$

因为对于任意的 ε，都要有 $O(1)=0$，所以有

$$2C_1'+C_1=0 \tag{2.11}$$

因为 ε 非常地小，$(2C_2'-C_2)\exp(-2X)$ 也很小，所以并不要求 $(2C_2'-C_2)\exp(-2X)=0$。由式 (2.11) 可以解得

$$C_1=\exp\left[A-\frac{1}{2}x\right] \tag{2.12}$$

由初始条件可得

$$C_1(1)=1 \tag{2.13}$$

所以

$$C_1=\exp\left[\frac{1}{2}(1-x)\right] \tag{2.14}$$

又根据初始条件 $y(0)=0$

$$C_1(0)+C_2(0)=0 \tag{2.15}$$

所以

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+C_2(0)=0 \tag{2.16}$$

$$C_2(0)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

式 (2.12) 和 9.2.5 远离边界层 $x=0$ 的解是一样的。

2.3

$\varepsilon<0$ 时，$(2C_2'-C_2)$ 必须为 0，最终解得

$$y(x,\varepsilon)=\mathrm{e}^{(2/\varepsilon)(1-x)} \tag{2.18}$$