Peking University

高等应用数学作业 3

第二组 袁磊祺 刘志如 宋庭鉴 岐亦铭 董湨翔 周子铭 撒普尔

November 9, 2020

1

外部

$$1-(y_0')^2, \tag{1.1}$$

$$y_0'=\pm 1. \tag{1.2}$$

因为

$$\lim_{x\to\infty}=1, \tag{1.3}$$

所以

$$y_0'=1, \tag{1.4}$$

$$y_0=x+C. \tag{1.5}$$

第一项为 x, 令 $\xi=\frac{y}{\delta}$, 则

$$\frac{\varepsilon}{\delta^3}\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}\xi^3}+\frac{\varepsilon}{\delta^2}y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2}+1-\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=0 \tag{1.6}$$

1. $\frac{\varepsilon}{\delta^3}=\frac{\varepsilon}{\delta^2}\Rightarrow\delta=\varepsilon$, $\frac{1}{\delta^2}$ 不是小量, 不符.
2. $\frac{\varepsilon}{\delta^3}=1\Rightarrow\delta=\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, $\frac{\varepsilon}{\delta^2}$ 不是小量, 不符.
3. $\frac{\varepsilon}{\delta^3}=\frac{1}{\delta^2}\Rightarrow\delta=\varepsilon$, $\frac{1}{\delta^2}$ 则有 $\frac{\varepsilon}{\delta^3}\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}\xi^3}-\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=0$
4. $\frac{\varepsilon}{\delta^2}=1\Rightarrow\delta=\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\varepsilon}{\delta^3}$ 不是小量, 不符.
5. $\frac{\varepsilon}{\delta^2}=\frac{1}{\delta^2}\Rightarrow\varepsilon=1$, $\frac{1}{\delta^3}$ 不是小量, 不符.

边界条件:

$$y_1(0)=y_1'(0)=0. \tag{1.7}$$

匹配条件:

$$\lim_{\xi\to\infty}y_1=\lim_{x\to\infty}y_0. \tag{1.8}$$

2

2.1

假设 $y^* = ay$,$t^* = bt$, 再引入参量 c, 由题意列方程组

$$m\frac{a}{b^2} = c\varepsilon,$$

$$\mu\frac{a}{b} = c,$$

$$ka = c,$$

$$\frac{m}{I}\frac{a}{b} = \varepsilon.$$

求解后可得, 需要做的尺度化为

$$y^* = \frac{I}{\mu}y, \quad t^* = \frac{\mu}{k}t, \quad \varepsilon = \frac{mk}{\mu^2}.$$

2.2

外部近似满足 $y' + y = 0$, 先算出外部近似解为

$$y_0(t) = C\mathrm{e}^{-t}.$$

引进 $\xi \equiv t/\delta$, 其中 $\varepsilon \downarrow 0$ 时,$\delta(\varepsilon) \to 0$. 再引进 $y(\xi\delta, \varepsilon) = Y(\xi)$, 可以得到

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{d^2Y}{d\xi^2} + \frac{1}{\delta}\frac{dY}{d\xi} + Y = 0.$$

在简化条件 $\delta = \varepsilon$ 下, 引进 $y_I(\xi) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} Y(\xi)$, 可以得到近似的内部方程

$$\frac{d^2y_I}{d\xi^2} + \frac{dy_I}{d\xi} = 0, \quad y_I(0) = 0, \quad \left.\frac{dy_I}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 1.$$

解得 $y_I(\xi) = 1 - \mathrm{e}^{-\xi}$.

最后经过匹配可以确定外部近似函数的系数为 $C = 1$, 即外部近似函数

$$y_0(t) = \mathrm{e}^{-t}.$$

2.3

前面得到的两部分近似解都是比较符合实际情况的. 本题的弹簧振子模型属于"强过阻尼"情况, 首先总体曲线是类似于所得外部函数的指数衰减型, 不会出现欠阻尼情况下的振动衰减, 同时, 初始时刻附近质量会有很大的速度, 垂直偏离会有一个阶跃增长, 该过程相对于后续过程是一个极快的过程, 这些都是正如内部函数所展示的.

关于题干中已给尺度化的正确性, 特别是在 t 不太大的情况下, 首先估计 y^* 的范围, 从初始时刻到达到最大垂直偏离 $y^*_{\max}$, 该过程持续的时间 Δt 非常小, 因此该短暂过程的平均速度很大, 内部阻尼起最主要作用, 它产生的反冲量 $\mu\bar{u}\Delta t = \mu\left(y^*_{\max}/\Delta t\right)\Delta t = \mu y^*_{\max}$ 近似于抵消掉 I, 进而估计出 $y^*_{\max} = I/\mu$. 再考虑时间尺度, 前述过程时间很短, 可以忽略, 假设垂直偏离衰减到某个很小的设定值需要 $t^*_{\max}$, 该过程（从达到最大垂直偏离到衰减到某个很小的设定值）中只有内部阻尼和弹力作用, 且两者强度整体基本相当, 因为过程始末的动量基本都为 0, 可以表达为

$$\mu\frac{y^*_{\max}}{t^*_{\max}} \sim k\frac{y^*_{\max}}{2}.$$

由此可以估计时间尺度为 $t^*_{\max} \sim \mu/k$.

2.4

在上一小题最后的匹配过程中, 已经求得了

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y_0(\eta\Theta) = 1.$$

这里

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Theta}{\delta} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Theta = 0, \quad \eta = \frac{t}{\Theta}.$$

因此在整个区域对 $t > 0$ 都成立的复合解为

$$y_U(t) = y_0(t) + y_I\left(\frac{t}{\delta}\right) - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} y_0(\eta\Theta) = \mathrm{e}^{-t} + \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right) - 1 = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}.$$

2.5

假设 m_1 和 m_2 是特征方程 $\varepsilon m^2 + m + 1 = 0$ 的两个根, 那么原方程在两个初始条件下的精确解为

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{m_1 t} - \mathrm{e}^{m_2 t}}{(m_1 - m_2)\,\varepsilon}.$$

对于方程 $\varepsilon m^2 + m + 1 = 0$, 在 $0 < \varepsilon \ll 1$ 的前提下, 可以用级数方法得到一个近似解-1, 再用初值迭代的逐次逼近方法得到另一个近似解 $-\varepsilon^{-1}$, 把这两个解代入到上面的结果中, 可以得到 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时的精确解为

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}}{(1 - \varepsilon)} \approx \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}.$$

这与上一小题求得的复合解形式相同.