6.6 多目标优化模型 i

例 6-58 设商店有糖果 A1,A2,A3，价格分别为 4，2.8，2.4 元/kg。要求购买不超过 20 元，总重不超过 6kg。A1+A2 总重不少于 3kg，如何购买？

应该设立两个目标函数，一个是花钱最少，一个是重量最总，其他条件可以认为是约束条件。假设购买三种糖果的重量分别为 x1, x2, x3kg，这时目标函数分别为

花钱：$f_1(x) = 4x_1 + 2.8x_2 + 2.4x_3 \rightarrow min$

重量：$f_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow max$ 那么模型该如何设立呢？

多目标优化模型 i

$$\min \begin{bmatrix} 4x_1 + 2.8x_2 + 2.4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}\ s.t. \begin{cases} 4x_1 + 2.8x_2 + 2.4x_3 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

从这之中我们可以得出多目标优化模型的一般表示形式：

$$J = min \quad \mathbf{F(x)}$$

$$\mathbf{x} s.t. \mathbf{G(x)} \leq 0$$

其中，$\mathbf{F(x)} = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), \cdots, f_p(\mathbf{x})]^T$

多目标问题转化为单目标问题求解 i

那么如何解这类问题呢？
下面介绍三种转换方法:

(1) 线性加权变换及求解
(2) 线性规划问题的最佳妥协解
(3) 线性规划问题的最小二乘解

根据两个指标的侧重情况引入加权，目标函数改写为:

$$f(\mathbf{x}) = w_1 f_1(\mathbf{x}) + w_2 f_2(\mathbf{x}) + w_3 f_3(\mathbf{x}) + \cdots + w_p f_p(\mathbf{x})$$

其中，$w_1 + w_2 + \cdots + w_p = 1$, $0 \leq w_1, w_2, \cdots, w_p \leq 1$.

则例 6-58 就可以改写成下面的线性规划系数

$$\min \quad (w_1[4, 2.8, 2.4] - w_2[1, 1, 1])\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} \ s.t. \begin{cases} 4x_1 + 2.8x_2 + 2.4x_3 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(演示将在 Matlab 上进行)

考虑一类特殊的线性规划问题

$$\mathbf{J} = \max \mathbf{Cx}$$
$$\mathbf{x}\ s.t. \begin{cases} Ax \le B \\ A_{eq}x = B_{eq} \\ x_m \le x \le x_M \end{cases}$$

目标函数的 **C** 不是一个向量，而是一个矩阵。
每一个目标函数 $j_i(x) = c_i x, i = 1, 2, \cdots, p,$ 可以理解为第 i 方的利益分配，所以这样的最优化问题可以认为是各方利益的最大分配。
最佳妥协解的求解步骤如下：

(2) 线性规划问题的最佳妥协解 ii

1. 单独求解每个单目标函数的最优化问题，得出最优解 $f_k, k = 1, 2, \cdots, p$
2. 通过规范化构造单独的目标函数

$$f(x) = -\frac{1}{f_1}c_1x - \frac{1}{f_2}c_2x - \cdots - \frac{1}{f_p}c_px$$

3. 最佳妥协解可以变换成下面的单目标限性规划问题并直接求解

$$\mathbf{J} = \quad max \quad \mathbf{f(x)}$$

$$\mathbf{x}\ s.t. \begin{cases} Ax \leq B \\ A_{eq}x = B_{eq} \\ x_m \leq x \leq x_M \end{cases}$$

(3) 线性规划问题的最小二乘解 i

考虑下面多目标线性规划问题的最小二乘表示

$$\max \qquad \frac{1}{2}||Cx - d||^2$$

$$\mathbf{x}\ s.t. \begin{cases} Ax \leq B \\ A_{eq}x = B_{eq} \\ x_m \leq x \leq x_M \end{cases}$$

则最小二乘解可以由
$x = lsqlin(C, d, A, B, A_{eq}, B_{eq}, x_m, x_M, x_0, options)$ 函数直接得到。