CFD–HW07 (2021-04-23)

THz@PKU

April 23, 2021

1 HW07

提示：提交作业的时间不晚于下周三(或下周五之前单独给助教).

(A). 已知

$$u_t + f(u)_x = 0,\ \ x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{1}$$

考虑(1)的松弛(relaxation)方程组

$$\begin{aligned} u_t + v_x =& 0, \\ v_t + Au_x =& -\frac{1}{\varepsilon}\big(v - f(u)\big), \end{aligned} \tag{2}$$

其中松弛参数$0 < \varepsilon \ll 1$. 直观上, 当$\varepsilon \to 0$ 时, $v \to f(u)$, 将其代入(2)中的第一方程可以得到(1).

鉴于(2)和(1)的上述"直观关系", 是否可以从(2) 出发, 构造逼近(1)的格式? 如果可以, 则系数A如何选取?

提示: S. Jin & Z.P. Xin, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, *Commun. Pure Appl. Math.*, 48(1995), 235-276.

(B). 如果对Hamilton-Jacobi方程

$$\phi_t + f(\phi_x) = 0, \tag{3}$$

两边关于x求偏导数, 令$u=\phi_x$, 则可得到(1).

已知(1)的守恒型格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\tau}{h}(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}-\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}),$$

其中$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}=\hat{f}(u_j,u_{j+1})$, 如何将它推广于(3)?

提示: `https://uma.ensta-paris.fr/files/zidani/NOTES_de_COURS_CEA-EDF-INRIA08/LectureNotes_Ch-W_Shu.pdf` C.-W. Shu, High order numerical methods for time dependent Hamilton-Jacobi equations, WSPC/Lecture Notes Series, 2007.

(C). 考虑2D双曲守恒律方程

$$u_t+f(u)_x+g(u)_y=0,\ x,y\in\mathbb{R},t>0, \tag{4}$$

和均匀的矩形网格剖分, 其中网格单元$\Omega_{j,k}=[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]\times[y_{k-\frac{1}{2}},y_{k+\frac{1}{2}}]$, $h_x=x_{j+\frac{1}{2}}-x_{j-\frac{1}{2}}$, $h_y=y_{k+\frac{1}{2}}-y_{k-\frac{1}{2}}$. 对方程(4)在$\Omega_{j,k}$上关于$x,y$积分, 则得"等价的"积分方程

$$\frac{d}{dt}\bar{\bar{u}}_{j,k}+\frac{1}{h_x}(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2},k}-\tilde{f}_{j-\frac{1}{2},k})+\frac{1}{h_y}(\tilde{g}_{j,k+\frac{1}{2}}-\tilde{g}_{j,k-\frac{1}{2}})=0, \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{u}}_{j,k}(t) :=&\frac{1}{h_xh_y}\int_{\Omega_{j,k}}u(x,y,t)\ dxdy, &&\text{—}u\text{的2D 单元平均值}\\
\tilde{f}_{j+\frac{1}{2},k}(t) :=&\frac{1}{h_y}\int_{y_{k-\frac{1}{2}}}^{y_{k+\frac{1}{2}}}f(u(x_{j+\frac{1}{2}},y))\ dy, &&\text{—}f\text{的1D 单元平均值}\\
\tilde{g}_{j,k+\frac{1}{2}}(t) :=&\frac{1}{h_x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}f(u(x,y_{k+\frac{1}{2}}))\ dx, &&\text{—}g\text{的1D 单元平均值}
\end{aligned}$$

从方程(5)出发, 可以构造微分方程(4)的半离散和全离散的有限体积方法/格式. 例如, 对$\tilde{f}_{j+\frac{1}{2},k}$和$\tilde{g}_{j,k+\frac{1}{2}}$中的积分分别用中点积分公式近似，且通量$f$,$g$在相应积分区间的中点(单元边的中点)处的值用两点型数值通量$\hat{f}$,$\hat{g}$近似，则有(4)的半离散有限体积格式

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_{j,k}+\frac{1}{h_x}(\hat{f}_{j+\frac{1}{2},k}-\hat{f}_{j-\frac{1}{2},k})+\frac{1}{h_y}(\hat{g}_{j,k+\frac{1}{2}}-\hat{g}_{j,k-\frac{1}{2}})=0, \tag{6}$$

其中$\bar{u}_{j,k} \approx \bar{\bar{u}}_{j,k}$是近似的单元平均值,

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2},k} = \hat{f}(u^L_{j+\frac{1}{2},k}, u^R_{j+\frac{1}{2},k}) \approx \tilde{f}_{j+\frac{1}{2},k},$$
$$\hat{g}_{j,k+\frac{1}{2}} = \hat{g}(u^L_{j,k+\frac{1}{2}}, u^R_{j,k+\frac{1}{2}}) \approx \tilde{g}_{j,k+\frac{1}{2}}.$$

如果$u^L_{j+\frac{1}{2},k} = \bar{u}_{j,k}$, $u^R_{j+\frac{1}{2},k} = \bar{u}_{j+1,k}$, $u^L_{j,k+\frac{1}{2}} = \bar{u}_{j,k}$, $u^R_{j,k+\frac{1}{2}} = \bar{u}_{j,k+1}$, 则格式(6)一般只有一阶精度.

如何从(5)出发构造出(4)的高精度有限体积格式?

(D). 写出逼近(4)的类似上面(A)中的松弛方程组，并给出次特征条件. 分别对上面的1D松弛方程组和该2D的松弛方程组进行离散(初始函数重构，迎风), 此时源项如何离散? 时间步长如何选取?

提示: S. Jin & Z.P. Xin, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, *Commun. Pure Appl. Math.*, 48(1995), 235-276.