CFD–HW12 (2021-05-28)

THz@PKU

1 笔头作业

提示：提交作业的时间是下周五.

(A). 考虑二维的守恒律方程

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y).$$

给定空间网格剖分: $x_j = jh_x, y_k = kh_y$, 其中网格步长h_x可不等于h_y.

试导出/写出WENO有限差分方法和WENO有限体积方法(时间方向采用显式Euler). 【提示：基于解u插值/重构，或者基于通量f,g的插值/重构；要求：在截断误差意义下至少具有空间三阶精度】

(B). 考虑对流扩散方程(Navier-Stokes方程对应的模型方程)

$$u_t + au_x = \nu u_{xx}, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

其中$a, \nu > 0$是常数. 给定空间网格剖分: $x_j = jh$, h为网格步长.

(1) 讨论(空间导数采用二阶中心差商近似, 时间导数采用显式Euler)有限差分格式的稳定性[提示: Fourier方法或von Neumann方法]. 当$0 < \nu \ll 1$时, 该格式是否可以用于实际问题计算?

(2) 采用ENO/WENO离散，给出一个在截断误差意义下至少具有时空三阶精度的数值方法.

(C). 考虑二维非定常的Stokes方程的定解问题

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t + \nabla p = \nu \Delta \boldsymbol{u}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0,\ (x,y) \in \Omega, t > 0 \\
\boldsymbol{u}(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\
\boldsymbol{u}(x,y,t) = \boldsymbol{u}_b(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega, t \geq 0.
\end{aligned}
$$

(1) 引入流函数ψ和涡函数ω, 导出上述定解问题对应的涡流函数公式的定解问题.

(2) 设Ω是长方形区域, $(a,b)\times(c,d)$, 给定其长方形网格剖分$x_j = jh_x, y_k = kh_y$, 网格步长h_x可不等于h_y, 利用交错网格离散解, 二阶中心有限差商近似空间偏导数，时间方向采用隐式Euler方法离散, 详细写出数值格式（含定解条件）. 类似上述的涡流函数公式得到，尝试从该离散格式出发导出离散的涡流函数公式的定解问题.

(3) 对上述的涡流函数公式的定解问题在网格单元中心点或其它点处尝试有限差分离散，是否可以得到上述离散的涡流函数公式的定解问题。