PEKING UNIVERSITY

计算流体力学作业 9

College of Engineering   2001111690   袁磊祺

May 20, 2021

1

取 $(x_j, x_{j+1}) \times [t_n, t_{n+1})$, 对 $u_t + f_x = 0$ 积分, 在 $\lambda \max\limits_u \left|f'(u)\right| \le \frac{1}{2}$ 时, 能得到什么格式?

可以得到 Godunov 格式.

定义 $I_j := \left(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}\right)$, 设

$$\frac{\tau}{h} \max_u \left\{\left|f'(u)\right|\right\} \le \frac{1}{2}. \tag{1.1}$$

1. 计算初始函数的单元平均值:

$$u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, 0)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

2. 对于 $n \ge 0$, 由单元平均定义 (重构) t_n 时刻的近似解 (分片常数函数)

$$u_h\left(x, t_n\right) := u_j^n, \quad x \in I_j,\ t \in \left[t_n, t_{n+1}\right), \tag{1.3}$$

并精确地解 (局部)Riemann 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad t \in [t_n, t_{n+1}) \\ u\left(x, t_n\right) = \begin{cases} u_h\left(x_{j+\frac{1}{2}} - 0, t_n\right), & x < x_{j+\frac{1}{2}} \\ u_h\left(x_{j+\frac{1}{2}} + 0, t_n\right), & x > x_{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases} \tag{1.4}$$

用 $\omega(x,t)$ 表示式 (1.4) 的精确解. 特别地, $\omega(x,t)$ 具有形式:

$$\omega(x,t)=\omega\left(\frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{t-t_n},u_h\left(x_{j+\frac{1}{2}}-0,t_n\right),u_h\left(x_{j+\frac{1}{2}}+0,t_n\right)\right), \tag{1.5}$$

3. 计算单元平均:

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}\omega\left(x,t_{n+1}\right)\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

在 CFL 条件式 (1.1) 下, 有

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{1}{2}h}^{x_j}\omega\left(\frac{x-x_{j-\frac{1}{2}}}{\tau},u_{j-1}^n,u_j^n\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_j+\frac{1}{2}h}\omega\left(\frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{\tau},u_j^n,u_{j+1}^n\right)\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

2

$$u_t+f_x+g_x=0 \tag{2.1}$$

在矩形网格 $\{x_j=jh,\ y_k=kh\}$ 上可离散为

$$u_{j,k}^{n+1}=u_{j,k}^n-\lambda_x\left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2},k}^n-\hat{f}_{j-\frac{1}{2},k}^n\right)-\lambda_y\left(\hat{g}_{j,k+\frac{1}{2}}^n-\hat{g}_{j,k-\frac{1}{2}}^n\right), \tag{2.2}$$

其中 $\hat{f}_{j-\frac{1}{2},k}^n$ 形式可以是一维方程对应格式的数值通量, $\hat{g}_{j,k+\frac{1}{2}}^n$ 类似

问题:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2},k}^n=\frac{1}{2}\left(f_{j,k}+f_{j+1,k}\right)-\frac{1}{2\lambda_x}\left(u_{j+1,k}-u_{j,k}\right) \tag{2.3}$$

$$\hat{g}_{j,k+\frac{1}{2}}^n=\frac{1}{2}\left(g_{j,k}+g_{j,k+1}\right)-\frac{1}{2\lambda_x}\left(u_{j,k+1}-u_{j,k}\right) \tag{2.4}$$

是否合适?

将式 (2.3) 和 (2.4) 代入式 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}u_{j,k}^{n+1}=u_{j,k}^n&-\frac{\lambda_x}{2}\left(f_{j+1,k}^n-f_{j-1,k}^n\right)-\frac{\lambda_y}{2}\left(g_{j,k+1}^n-g_{j,k-1}^n\right)\\&+\frac{1}{2}\left(u_{j+1,k}^n-2u_{j,k}^n+u_{j-1,k}^n\right)+\frac{1}{2}\left(u_{j,k+1}^n-2u_{j,k}^n+u_{j,k-1}^n\right).\end{aligned} \tag{2.5}$$

这相当于在不稳定的中心差分格式上加了一个耗散项.

假设

$$f^n_{j+1,k} - f^n_{j-1,k} = f'\left(u^n_{j+1,k} - u^n_{j-1,k}\right), \tag{2.6}$$

$$g^n_{j,k+1} - g^n_{j,k-1} = g'\left(u^n_{j,k+1} - u^n_{j,k-1}\right). \tag{2.7}$$

将

$$u^n_{j,k} = \xi^n_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(j+k)h} \tag{2.8}$$

代入方程得放大因子为

$$G(\beta,h) = -1 + 2\cos(\beta h) - \left[\lambda(f'+g')\sin(\beta h)\right]\mathrm{i}. \tag{2.9}$$

是恒不稳定的.