计算流体力学作业 14

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

June 17, 2021

A

考虑圆环区域 $\Omega_p = \left\{(x,y) : 0 < R_0 < r = \sqrt{x^2+y^2} < R_2\right\}$ 上求解二维不可压缩 Navier–Stokes 方程的涡流函数公式. 在圆环的边界上流体速度为 0. 给出其显式 (截断误差意义下二阶精度) 有限差分或有限体积离散, 并给定局部涡边界条件.

二维不可压 Navier-Stokes 方程的涡流函数公式

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\omega = \nu\Delta\omega, \\ -\Delta\psi = \omega, \\ u = \partial_y\psi, \quad v = -\partial_x\psi, \quad \Longleftarrow \boldsymbol{u} = \nabla\times\boldsymbol{\psi} \Longleftarrow \nabla\cdot u = 0 \\ \omega = \partial_x v - \partial_y u \Longleftarrow \boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{1.1}$$

这里假设齐次 Dirichlet 边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$. 对一般情况 $u|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{u}_b$, 可类似地处理. 设左边界位于 $x = x_0$ 处, 其单位外法向量 $\boldsymbol{n} = (-1, 0)$, 则由无穿透边界 $0 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ 得 $\partial_y\psi = 0$. 进而知, 在边界 $x = x_0$ 上, ψ 为常数 (不妨设为 0); 由无滑移边界: $0 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau}$ 得 $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$. 流函数边界条件

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \tag{1.2}$$

将式 (1.1) 第一个式子左边写成守恒型得

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} = \mu\nabla^2\omega. \tag{1.3}$$

或者

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{u}\omega) = \mu\nabla^2\omega. \tag{1.4}$$

对于坐标变换 $(x,y)\to(r,\theta)$

$$
\begin{cases}
x = r\cos\theta, \\
y = r\sin\theta.
\end{cases} \tag{1.5}
$$

有雅可比行列式

$$
J = \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{vmatrix} = \frac{1}{r}. \tag{1.6}
$$

可得式 (1.4) 在极坐标下的表达式 [2]

$$
\frac{\partial \omega}{\partial t} + J\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u\omega r_x + v\omega r_y}{J}\right) + J\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u\omega \theta_x + v\omega \theta_y}{J}\right) = \mu\nabla^2\omega. \tag{1.7}
$$

然后将拉普拉斯算符在极坐标中展开得

$$
\frac{\partial \omega}{\partial t} + J\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u\omega r_x + v\omega r_y}{J}\right) + J\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u\omega \theta_x + v\omega \theta_y}{J}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\omega. \tag{1.8}
$$

即为 (r,θ) 坐标下的方程组. 为了达到二阶精度, 这里采用中心差商进行离散. 在极坐标下构建结构网格, 对某一个量 $a_{i,j}^n$, 其中 i 下标对应的是变量 r,j 下标对应的是变量 θ,

$$
\frac{\partial a_{i,j}^n}{\partial r} = \frac{a_{i+1,j}^n - a_{i-1,j}^n}{2\Delta r}, \quad \frac{\partial^2 a_{i,j}^n}{\partial r^2} = \frac{a_{i+1,j}^n - 2a_{i,j}^n + a_{i-1,j}^n}{\Delta r^2}. \tag{1.9}
$$

由于要给定局部涡边界条件, 这里采用独立求解涡流方程的方法, 式 (1.1) 的第二个式子在极坐标下写为

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\psi = -\omega, \tag{1.10}
$$

为了二阶精度, 使用中心差分离散, 因为格式写出来过于繁琐, 这里就不详细写了, 总之, 就是用式 (1.9) 的方法离散.

时间采用显示 Euler 离散

$$
\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t}. \tag{1.11}
$$

边界条件为

$$
\psi\big|_{r=R_0} = 0, \quad \psi\big|_{r=R_2} = \text{const}. \tag{1.12}
$$

由于 ψ 有两个边界, 所以这里令 $r=R_0$ 的地方为 0. 以 $r=R_0$ 为例, 无滑移边界在 $r=R_0$ 处可近似为

$$\frac{\psi_{1,j}-\psi_{-1,j}}{2\Delta r}=0 \quad \text{或} \quad \psi_{-1,j}=\psi_{1,j}. \tag{1.13}$$

得到

$$\omega_{0,j}=-\frac{2\psi_{1,j}}{\Delta r^2}. \tag{1.14}$$

B

考虑

$$u_t+au_x=\nu u_{xx}, \quad u(x,0)=u_0(x), \tag{2.1}$$

其中 a 和 $\nu>0$ 是常数. 利用紧致 (Compact) 有限差分在空间方向离散, 显式或隐式 Euler 时间离散, 给出空间高阶 (至少四阶) 紧致有限差分格式. 是否可以分析其线性稳定性?

采用显式 Euler 时间离散和四阶精度紧致有限差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}=-au_j'+\nu u_j''. \tag{2.2}$$

其中 [1]

$$\begin{aligned} u'+\frac{1}{4}\left(u_{j+1}'+u_{j-1}'\right)&=\frac{3}{4h}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right), \\ u_j''+\frac{1}{10}\left(u_{j+1}''+u_{j-1}''\right)&=\frac{6}{5h^2}\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

通过求解两个三对角方程得到 u_j', u_j'', 其中没有上标的点都是指 n 时刻的点.

对 $u(x)$ 进行傅立叶分解得

$$u(x)=\sum_k \hat{u}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x/h}, \tag{2.4}$$

$$u'(x)=\sum_k \hat{u}_k' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x/h}, \tag{2.5}$$

$$u''(x)=\sum_k \hat{u}_k'' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x/h}. \tag{2.6}$$

有关系式

$$\hat{u}_k'=\frac{\mathrm{i}\omega}{h}\hat{u}_k, \quad \hat{u}_k''=-\left(\frac{\omega}{h}\right)^2\hat{u}_k \tag{2.7}$$

可以求得

$$\omega'(\omega)=\frac{a\sin\omega+\frac{b}{2}\sin 2\omega+\frac{c}{3}\sin 3\omega}{1+2\alpha\cos\omega+2\beta\cos 2\omega}, \tag{2.8}$$

$$\omega''(\omega)=\sqrt{\frac{2a(1-\cos\omega)+\frac{b}{2}(1-\cos 2\omega)+\frac{2c}{9}(1-\cos 3\omega)}{1+2\alpha\cos\omega+2\beta\cos 2\omega}}. \tag{2.9}$$

代入系数可得

$$\omega' = \frac{3\sin\omega}{2+\cos\omega}, \quad \omega'' = \sqrt{\frac{12(1-\cos\omega)}{5+\cos\omega}}, \tag{2.10}$$

$$\hat{u}'_k = \frac{3\mathrm{i}\sin\omega}{h(2+\cos\omega)}\hat{u}_k, \quad \hat{u}''_k = \frac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}\hat{u}_k. \tag{2.11}$$

代入式 (2.2) 可得

$$\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau} = -a\frac{3\mathrm{i}\sin\omega}{h(2+\cos\omega)}V^n + \nu\frac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}V^n. \tag{2.12}$$

放大因子

$$G = \frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 - \frac{a\tau}{h}\frac{3\mathrm{i}\sin\omega}{2+\cos\omega} + \frac{\nu\tau}{h^2}\frac{12(\cos\omega-1)}{\cos\omega+5}, \tag{2.13}$$

$$|G| = \left[1+\frac{\nu\tau}{h^2}\frac{12(\cos\omega-1)}{\cos\omega+5}\right]^2 + \left[\frac{a\tau}{h}\frac{3\sin\omega}{2+\cos\omega}\right]^2. \tag{2.14}$$

经分析可知放大因子 G 是可能小于 1 的, 即在某些情况下格式是稳定的.

参考文献

[1] Peter C. Chu and Chenwu Fan. A three-point combined compact difference scheme. *Journal of Computational Physics*, 140(2):370–399, 1998. 3

[2] 张德良. 计算流体力学教程. 高等教育出版社, 2010. 2