Peking University

计算流体力学上机作业 2

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

May 15, 2021

编写一维完全气体 Euler 方程组的 WENO3,WENO5 程序, 撰写报告, 包括问题和算法描述, 输出结果及讨论, 程序说明.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix}_x = 0, \\ p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho u^2\right), \ \gamma = 1.4. \end{cases} \tag{0.1}$$

计算动图可点击 https://www.bilibili.com/video/BV1cp4y1t7Bc 查看.

代码可点击 https://github.com/circlelq/Computational-Fluid-Dynamics/tree/main/code2 查看.

1

初始条件

$$\boldsymbol{U} = \begin{cases} (1, 0, 2.5)^{\mathrm{T}}, & x < 0.3, \\ (0.125, 0, 0.25)^{\mathrm{T}}, & x > 0.3. \end{cases} \tag{1.1}$$

计算区间为 $[0, 1]$, 输出时刻 $t = 0.2$.

对于方程

$$u_t + f_x = 0, \tag{1.2}$$

使用 Steger-Warming 通量分裂方法是根据特征值 λ_i 来完成的, 首先将特征值分解为正负部分:

$$\lambda_i^+ = \frac{1}{2}\left(\lambda_i + |\lambda_i|\right), \quad \lambda_i^- = \frac{1}{2}\left(\lambda_i - |\lambda_i|\right). \tag{1.3}$$

进而将矩阵 A 分为正负两部分

$$A = T^{-1}\Lambda T = T^{-1}\left(\Lambda^+ + \Lambda^-\right)T = A^+ + A^-, \tag{1.4}$$

其中 $\Lambda, \Lambda^\pm$ 是对角线上是特征值的对角矩阵. 于是正负通量为

$$f^+ = A^+U, \quad f^- = A^-U. \tag{1.5}$$

WENO3

例如 $r=2$ 时, 插值得到的可能 $f^\pm_{j+\frac{1}{2}}$ 为

$$f^+_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} -\frac{1}{2}f^+_{j-1} + \frac{3}{2}f^+_j \\ \frac{1}{2}f^+_j + \frac{1}{2}f^+_{j+1}, \end{cases}, \quad f^-_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{3}{2}f^-_{j+1} - \frac{1}{2}f^-_{j+2} \\ \frac{1}{2}f^-_{j+1} + \frac{1}{2}f^-_j \end{cases}. \tag{1.6}$$

相应的三阶 WENO 插值为

$$\hat{f}^+_{j+\frac{1}{2}} = \omega_1 \hat{f}^{(1),+}_{j+\frac{1}{2}} + \omega_2 \hat{f}^{(2),+}_{j+\frac{1}{2}}, \tag{1.7}$$

$$\omega_i = \frac{\widetilde{\omega}_i}{\widetilde{\omega}_1 + \widetilde{\omega}_2}, \quad \widetilde{\omega}_i = \frac{\gamma_l}{\left(\varepsilon + \beta_i\right)^2}, \quad i = 1, 2, \tag{1.8}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{3}, \tag{1.9}$$

$$\beta_1 = \left(f^+_j - f^+_{j-1}\right)^2, \quad \beta_2 = \left(f^+_{j+1} - f^+_j\right)^2, \tag{1.10}$$

$$\hat{f} = \hat{f}^+ + \hat{f}^-. \tag{1.11}$$

其中 $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$.

可以得到半离散格式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u + \frac{1}{h}\left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}\right) = 0. \tag{1.12}$$

然后再用三阶 TVD 性质的 RK 时间差分格式

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L\left(u^n\right), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L\left(u^{(1)}\right), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L\left(u^{(2)}\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

其中 L 是空间离散算符.

如图 1.1 所示,WENO3 的计算结果比之前用 LF 等格式算的结果更接近理论解.

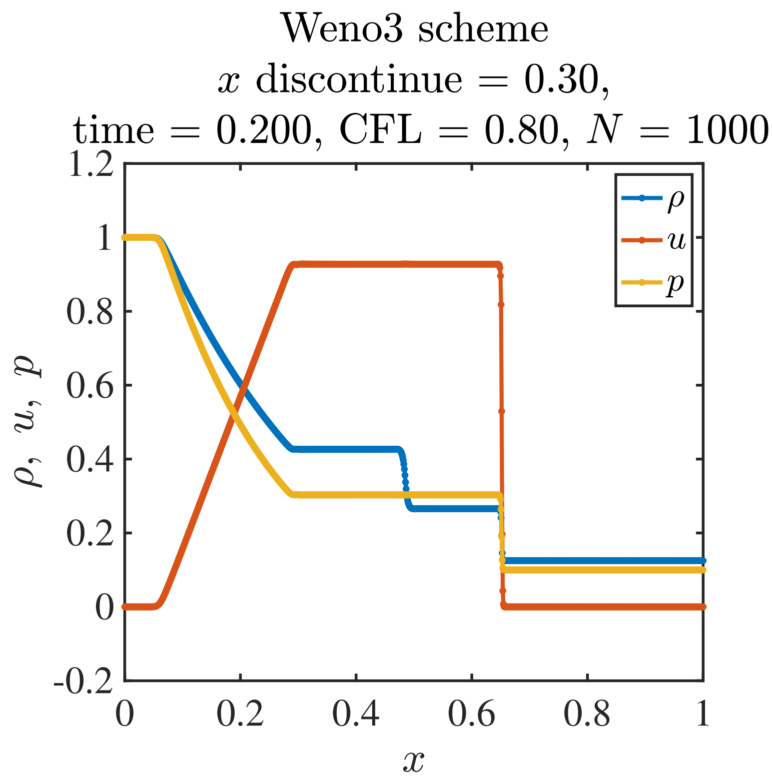

图 1.1. 第二题 WENO3 格式.

WENO5

WENO5 采用的是使用三个长度为 3 的模版进行非线性组合

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{3}{8}u_{i-2} - \frac{5}{4}u_{i-1} + \frac{15}{8}u_i, \tag{1.14}$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} = -\frac{1}{8}u_{i-1} + \frac{3}{4}u_i + \frac{3}{8}u_{i+1}, \tag{1.15}$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{3}{8}u_i + \frac{3}{4}u_{i+1} - \frac{1}{8}u_{i+2}, \tag{1.16}$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = w_1 u_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} + w_2 u_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} + w_3 u_{i+\frac{1}{2}}^{(3)}, \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{3}\left(4u_{i-2}^2 - 19u_{i-2}u_{i-1} + 25u_{i-1}^2 + 11u_{i-2}u_i - 31u_{i-1}u_i + 10u_i^2\right), \\ \beta_2 &= \frac{1}{3}\left(4u_{i-1}^2 - 13u_{i-1}u_i + 13u_i^2 + 5u_{i-1}u_{i+1} - 13u_iu_{i+1} + 4u_{i+1}^2\right), \\ \beta_3 &= \frac{1}{3}\left(10u_i^2 - 31u_iu_{i+1} + 25u_{i+1}^2 + 11u_iu_{i+2} - 19u_{i+1}u_{i+2} + 4u_{i+2}^2\right).\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$w_j = \frac{\tilde{w}_j}{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3}, \quad \text{with} \quad \tilde{w}_j = \frac{\gamma_j}{\left(\varepsilon + \beta_j\right)^2}, \tag{1.19}$$

其中 $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$.

$$\gamma_1 = \frac{1}{16}, \quad \gamma_2 = \frac{5}{8}, \quad \gamma_3 = \frac{5}{16}. \tag{1.20}$$

时间使用同样的离散方式式 (1.13). 如图 1.2 所示, 间断处的点比 WENO3 更少, 更接近理论解.

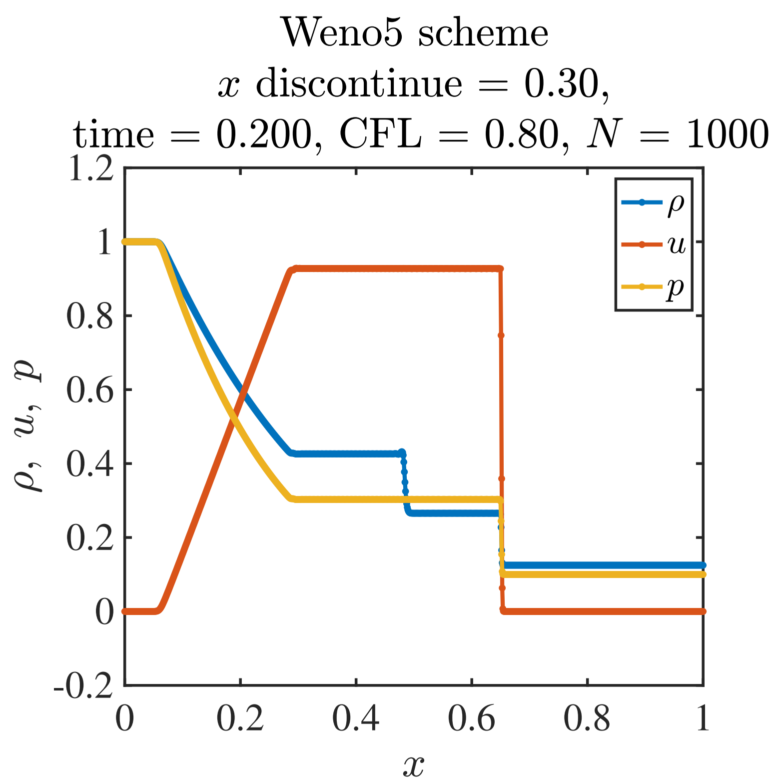

图 1.2. 第二题 WENO5 格式.

2

初始条件

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4, \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & x \geq -4. \end{cases} \tag{2.1}$$

计算区间为 $[-5, 5]$, 其中在 $x = \pm 5$ 边界处 $\partial_x \rho = \partial_x u = \partial_x p = 0$. 输出时刻为 $t = 1.8$.

如图 2.1 和 2.2 所示, 分别为 WENO3 和 WNENO5 的计算结果. 可以发现接近激波的地方密度 ρ 震荡较剧烈, 而且 WENO5 的震荡更明显, 但是离激波较远的地方比较稳定.

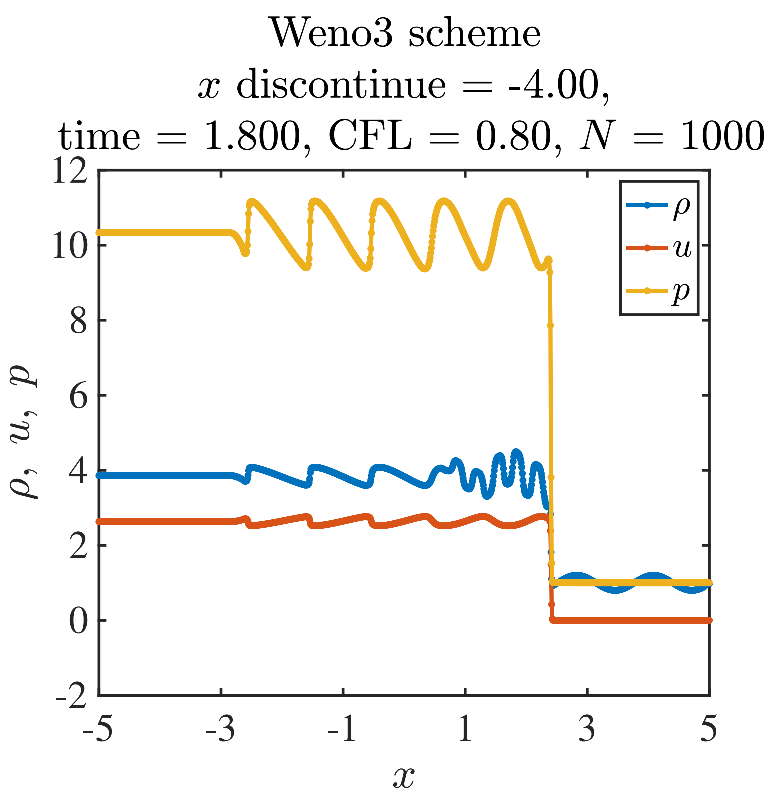

图 2.1. 第四题 WENO3 格式.

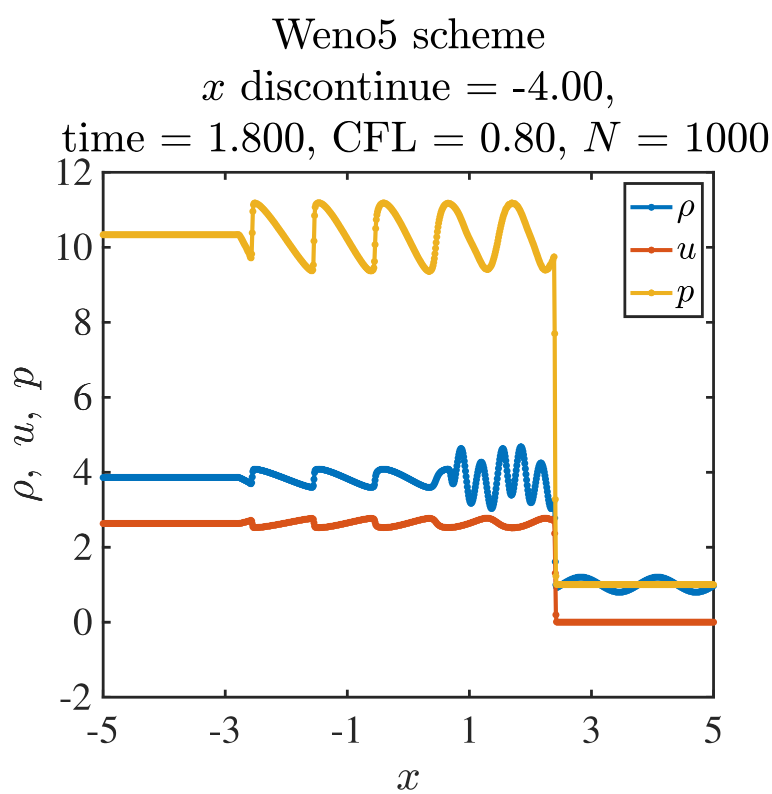

图 2.2. 第四题 WENO5 格式.