

计算流体力学上机作业 2

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

June 2, 2021

编写一维完全气体 Euler 方程组的 WENO3, WENO5 程序, 撰写报告, 包括问题和算法描述, 输出结果及讨论, 程序说明.

$$\begin{cases} \left(\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \right)_t + \left(\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} \right)_x = 0, \\ p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right), \quad \gamma = 1.4. \end{cases} \quad (0.1)$$

计算动图可点击 <https://www.bilibili.com/video/BV1cp4y1t7Bc> 查看.

代码可点击 <https://github.com/circlelq/Computational-Fluid-Dynamics/tree/main/code2> 查看.

1

初始条件

$$U = \begin{cases} (1, 0, 2.5)^T, & x < 0.3, \\ (0.125, 0, 0.25)^T, & x > 0.3. \end{cases} \quad (1.1)$$

计算区间为 $[0, 1]$, 输出时刻 $t = 0.2$.

对于方程

$$u_t + f_x = 0, \quad (1.2)$$

使用 Steger-Warming 通量分裂方法是根据特征值 λ_i 来完成的, 首先将特征值分解为正负部分:

$$\lambda_i^+ = \frac{1}{2} (\lambda_i + |\lambda_i|), \quad \lambda_i^- = \frac{1}{2} (\lambda_i - |\lambda_i|). \quad (1.3)$$

进而将矩阵 A 分为正负两部分

$$A = T^{-1} \Lambda T = T^{-1} (\Lambda^+ + \Lambda^-) T = A^+ + A^-, \quad (1.4)$$

其中 Λ, Λ^\pm 是对角线上是特征值的对角矩阵. 于是正负通量为

$$f^+ = A^+ U, \quad f^- = A^- U. \quad (1.5)$$

WENO3

例如 $r = 2$ 时, 插值得到的可能 $f_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ 为

$$f_{j+\frac{1}{2}}^+ = \begin{cases} -\frac{1}{2}f_{j-1}^+ + \frac{3}{2}f_j^+ \\ \frac{1}{2}f_j^+ + \frac{1}{2}f_{j+1}^+ \end{cases}, \quad f_{j+\frac{1}{2}}^- = \begin{cases} \frac{3}{2}f_{j+1}^- - \frac{1}{2}f_{j+2}^- \\ \frac{1}{2}f_{j+1}^- + \frac{1}{2}f_j^- \end{cases}. \quad (1.6)$$

相应的三阶 WENO 插值为

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \omega_1 \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(1),+} + \omega_2 \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(2),+}, \quad (1.7)$$

$$\omega_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}, \quad \tilde{\omega}_i = \frac{\gamma_i}{(\varepsilon + \beta_i)^2}, \quad i = 1, 2, \quad (1.8)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{3}, \quad (1.9)$$

$$\beta_1 = \left(f_j^+ - f_{j-1}^+\right)^2, \quad \beta_2 = \left(f_{j+1}^+ - f_j^+\right)^2, \quad (1.10)$$

$$\hat{f} = \hat{f}^+ + \hat{f}^-. \quad (1.11)$$

其中 $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$.

可以得到半离散格式

$$\frac{d}{dt} u + \frac{1}{h} \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} \right) = 0. \quad (1.12)$$

然后再用三阶 TVD 性质的 RK 时间差分格式

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

其中 L 是空间离散算符.

如图 1.1 所示, WENO3 的计算结果比之前用 LF 等格式算的结果更接近理论解.

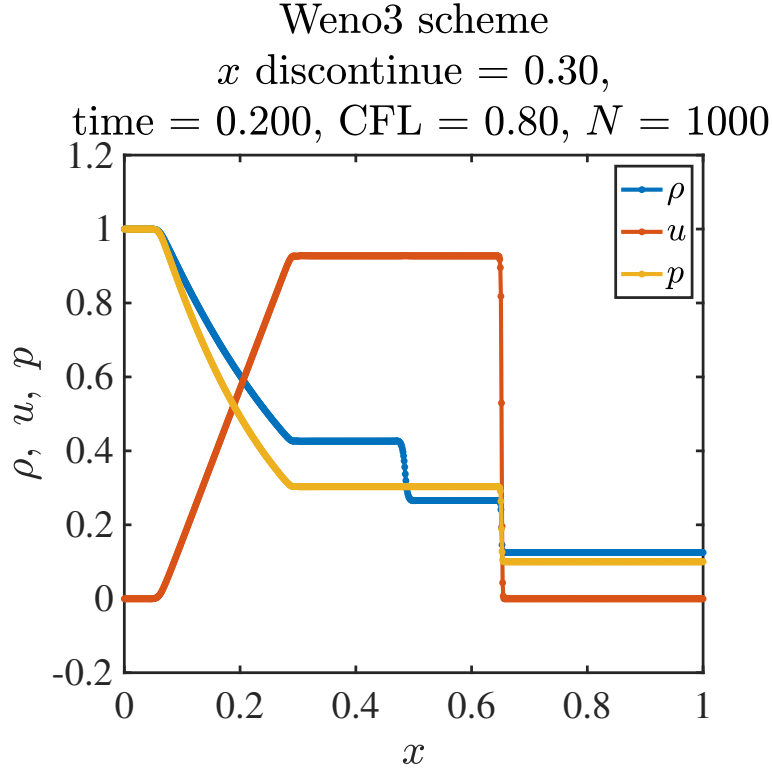


图 1.1. 第二题 WENO3 格式.

WENO5

WENO5 采用的是使用三个长度为 3 的模版进行非线性组合

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{3}{8}u_{i-2} - \frac{5}{4}u_{i-1} + \frac{15}{8}u_i, \quad (1.14)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} = -\frac{1}{8}u_{i-1} + \frac{3}{4}u_i + \frac{3}{8}u_{i+1}, \quad (1.15)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{3}{8}u_i + \frac{3}{4}u_{i+1} - \frac{1}{8}u_{i+2}, \quad (1.16)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = w_1 u_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} + w_2 u_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} + w_3 u_{i+\frac{1}{2}}^{(3)}, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{3} (4u_{i-2}^2 - 19u_{i-2}u_{i-1} + 25u_{i-1}^2 + 11u_{i-2}u_i - 31u_{i-1}u_i + 10u_i^2), \\ \beta_2 &= \frac{1}{3} (4u_{i-1}^2 - 13u_{i-1}u_i + 13u_i^2 + 5u_{i-1}u_{i+1} - 13u_iu_{i+1} + 4u_{i+1}^2), \\ \beta_3 &= \frac{1}{3} (10u_i^2 - 31u_iu_{i+1} + 25u_{i+1}^2 + 11u_iu_{i+2} - 19u_{i+1}u_{i+2} + 4u_{i+2}^2).\end{aligned}\quad (1.18)$$

$$w_j = \frac{\tilde{w}_j}{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3}, \quad \text{with} \quad \tilde{w}_j = \frac{\gamma_j}{(\varepsilon + \beta_j)^2}, \quad (1.19)$$

其中 $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$.

$$\gamma_1 = \frac{1}{16}, \quad \gamma_2 = \frac{5}{8}, \quad \gamma_3 = \frac{5}{16}. \quad (1.20)$$

时间使用同样的离散方式式 (1.13). 如图 1.2 所示, 间断处的点比 WENO3 更少, 更接近理论解.

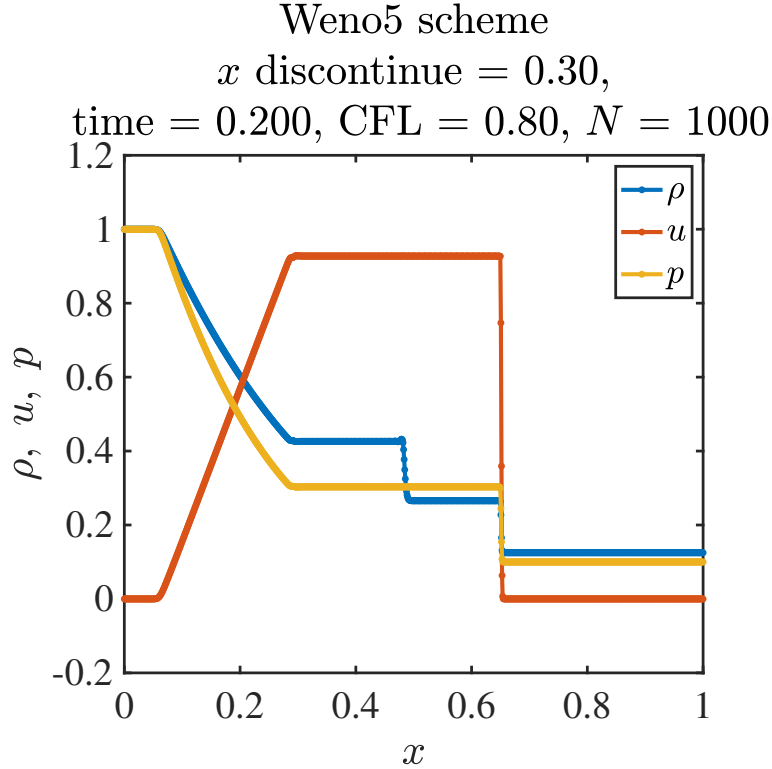


图 1.2. 第二题 WENO5 格式.

初始条件

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4, \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1), & x \geq -4. \end{cases} \quad (2.1)$$

计算区间为 $[-5, 5]$, 其中在 $x = \pm 5$ 边界处 $\partial_x \rho = \partial_x u = \partial_x p = 0$. 输出时刻为 $t = 1.8$.

如图 2.1 和 2.2 所示, 分别为 WENO3 和 WNENO5 的计算结果. 可以发现接近激波的地方密度 ρ 震荡较剧烈, 而且 WENO5 的震荡更明显, 但是离激波较远的地方比较稳定.

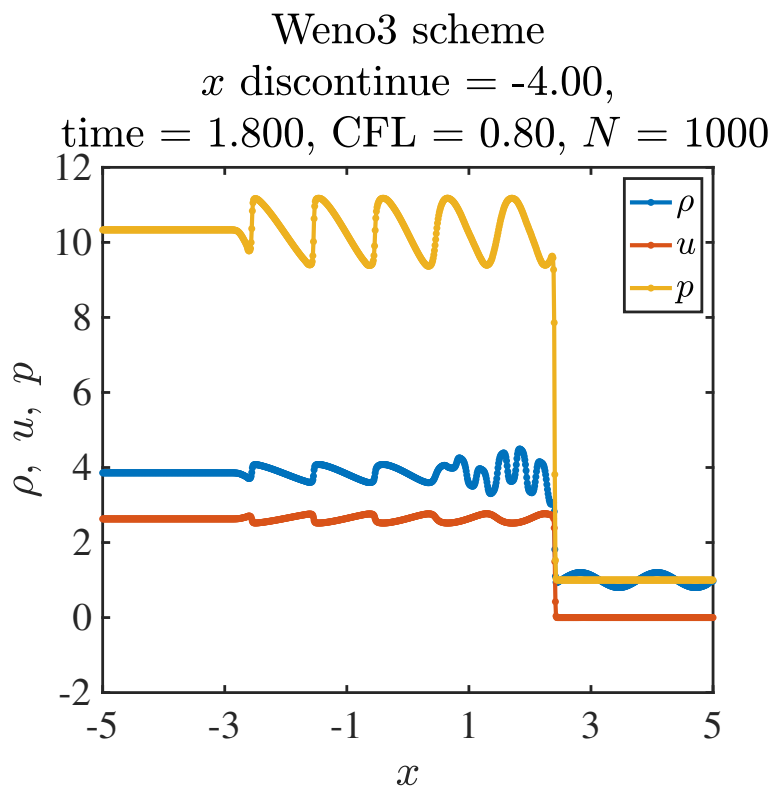


图 2.1. 第四题 WENO3 格式.

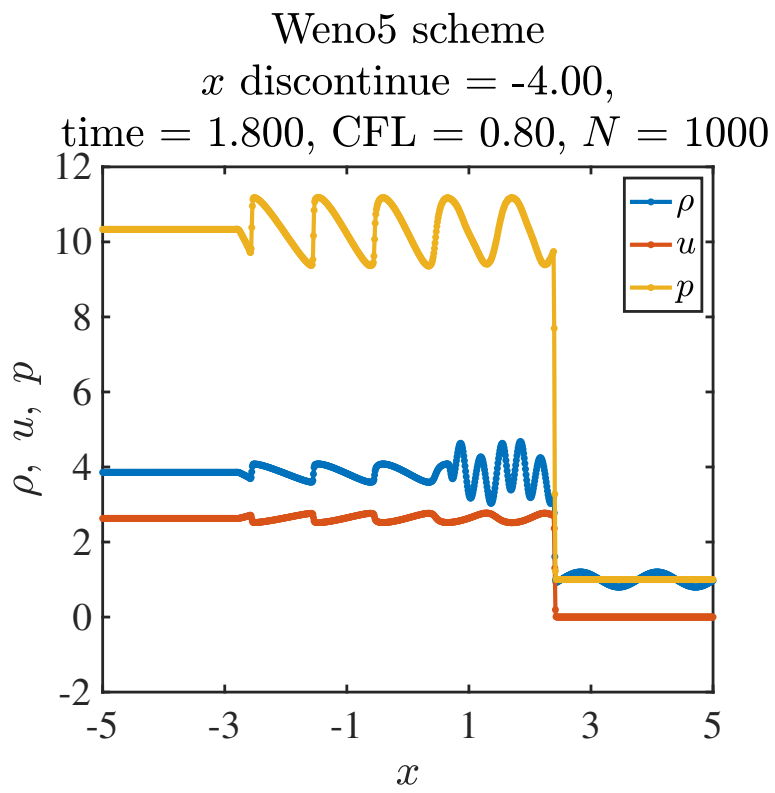


图 2.2. 第四题 WENO5 格式.