Peking University

计算流体力学作业 11

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

May 26, 2021

A

讲义 (CFDLect06-com0_cn.pdf) 中给出了完全气体 Euler 方程组和等温方程组的 Steger-Wearming 通量向量分裂格式, 是否能给出等熵方程组 (见讲义 (CFDLect06-com03_cn.pdf) 的第 12 页页底) 的 Steger-Wearming 通量向量分裂格式?

考虑气体动力学方程组

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho^\gamma/\gamma \end{pmatrix}_x = 0, \quad p(\rho) = \rho^\gamma/\gamma. \tag{1.1}$$

对光滑解, 式 (1.1) 等价于

$$\boldsymbol{U}_t + \nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}_x = 0, \tag{1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + p' & 2u \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

式 (1.1) 的特征值矩阵是

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} u-a & 0 \\ 0 & u+a \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

其中

$$a = \sqrt{p'}, \tag{1.5}$$

相应的特征向量矩阵是

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u-a & u+a \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1 & u-a\\ 1 & u+a\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{L}^{-1}=\frac{1}{2a}\begin{pmatrix}u+a & -u+a\\ -1 & 1\end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}. \tag{1.9}$$

Steger-Wearming 通量向量分裂

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{+}+\boldsymbol{A}^{-}, \tag{1.10}$$

其中

$$\boldsymbol{A}^{+}=\frac{1}{2}\boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+|\boldsymbol{\Lambda}|)\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{A}^{-}=\frac{1}{2}\boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}-|\boldsymbol{\Lambda}|)\boldsymbol{L}\cdot \tag{1.11}$$

B

尝试给出等熵方程组 (同上) 的 Roe 矩阵及 Roe 格式/方法.

Roe 格式

$$\hat{\boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{U}_j,\boldsymbol{U}_{j+1}\right)=\frac{\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}_j\right)+\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}_{j+1}\right)}{2}-\frac{1}{2}\left|\hat{\boldsymbol{A}}_{j+1/2}\right|\left(\boldsymbol{U}_{j+1}-\boldsymbol{U}_j\right). \tag{2.1}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_l,\boldsymbol{U}_r)=\boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{U}}), \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+\rho^{\gamma}/\gamma\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{U}}=\begin{cases}\bar{\rho}=\dfrac{\sqrt{\rho_r}\rho_\ell+\sqrt{\rho_\ell}\rho_r}{\sqrt{\rho_\ell}+\sqrt{\rho_r}}=\sqrt{\rho_\ell\rho_r},\\ \bar{u}=\dfrac{\sqrt{\rho_\ell}u_\ell+\sqrt{\rho_r}u_r}{\sqrt{\rho_\ell}+\sqrt{\rho_r}}.\end{cases} \tag{2.4}$$

而

$$\left|\hat{\boldsymbol{A}}\right|=\boldsymbol{L}^{-1}|\boldsymbol{\Lambda}|\,\boldsymbol{L} \tag{2.5}$$

这里的 $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的左特征向量矩阵和特征值矩阵.

C

尝试给出等温方程组 (见讲义 (CFDLect06-com03_cn.pdf) 的第 84 页) 和等熵方程组 (同上) 的动理学通量向量分裂格式.

等温方程

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho a^2 \end{pmatrix}_x = 0, \quad p(\rho) = \rho a^2. \tag{3.1}$$

Kinetic flux-vector splitting: KFVS:

$$F^{\pm} = \int v^{\pm} \Psi g dv d\xi = \rho \begin{pmatrix} < v^1 >_{\pm} \\ < v^2 >_{\pm} \\ \frac{1}{2} < v^3 >_{\pm} + \frac{K}{2\lambda} < v^1 >_{\pm} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

其中 $v^{\pm} = \frac{1}{2}(v \pm |v|)$, $< v^0 >_{\pm} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}(\mp\sqrt{\lambda}u)$, $< v^1 >_{\pm} = u < v^0 >_{\pm} \pm \frac{\mathrm{e}^{-\lambda u^2}}{2\sqrt{\pi\lambda}}$, $< v^{m+2} >_{\pm} = u < v^{m+1} >_{\pm} + \frac{m+1}{2\lambda} < v^m >_{\pm}$, 其中 $\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 其中 λ 是温度的函数,

$$\lambda = \frac{(K+d)\rho}{4\left(E - \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{u}^2\right)} = \frac{\rho}{2p}. \tag{3.3}$$

对于等温方程组和等熵方程组有

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \end{pmatrix}_x = 0. \tag{3.4}$$

式 (3.2) 变为

$$F^{\pm} = \int v^{\pm} \Psi g dv d\xi = \rho \begin{pmatrix} < v^1 >_{\pm} \\ < v^2 >_{\pm} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$< v^0 >_{\pm} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}(\mp\sqrt{\lambda}u), \tag{3.6}$$

$$< v^1 >_{\pm} = u < v^0 >_{\pm} \pm \frac{\mathrm{e}^{-\lambda u^2}}{2\sqrt{\pi\lambda}}, \tag{3.7}$$

$$< v^2 >_{\pm} = u < v^1 >_{\pm} + \frac{1}{2\lambda} < v^0 >_{\pm}. \tag{3.8}$$

对于等温气体

$$\lambda = \frac{\rho}{2p} = \frac{\rho}{2\rho a^2} = \frac{1}{2a^2}. \tag{3.9}$$

对于等熵气体

$$\lambda = \frac{\rho}{2p} = \frac{\rho}{2\rho^{\gamma}/\gamma} = \frac{\gamma\rho^{1-\gamma}}{2}. \tag{3.10}$$

D

尝试给出等熵方程组 (同上) 的 HLL 解法器和格式.

类似 Godunov 格式, 计算初始函数的单元平均值:

$$\bar{\boldsymbol{u}}_j^0 = \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \boldsymbol{u}(x,0)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

将方程离散为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}\right|_j + \frac{1}{h}\left(\boldsymbol{f}_{j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{f}_{j-\frac{1}{2}}\right) = 0, \tag{4.2}$$

近似 Godunov 方法的界面通量

$$\boldsymbol{f}_{i+\frac{1}{2}}^{\mathrm{hll}} = \begin{cases} \boldsymbol{f}_L, & 0 \le S_L, \\ \frac{S_R\boldsymbol{f}_L - S_L\boldsymbol{f}_R + S_LS_R(u_R-u_L)}{S_R-S_L}, & S_L \le 0 \le S_R, \\ \boldsymbol{f}_R, & 0 \le S_R. \end{cases} \tag{4.3}$$

其中

$$\boldsymbol{f}_R = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{u}}_r), \quad \boldsymbol{f}_L = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{u}}_l) \tag{4.4}$$

对 HLL 方法需要估计 S_L, S_R. 基本上有两个方法估计 S_L 和 S_R. 最受欢迎的是直接估计速度. 较最近的方法取决于星型区内的压力、速度的估计, 然后利用精确波关系得到 S_L, S_R.

方法一: 直接波速估计, 例如

$$S_L = u_L - a_L, \quad S_R = u_R + a_R, \tag{4.5}$$

和

$$\begin{aligned} S_L &= \min\{u_L - a_L, \quad u_R - a_R\}, \\ S_R &= \max\{u_L + a_L, \quad u_R + a_R\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

假设我们采用式 (4.5), 则

$$a_L = \sqrt{\bar{\rho}_L^{\gamma-1}}, \quad a_R = \sqrt{\bar{\rho}_R^{\gamma-1}}, \tag{4.7}$$

$$S_L = \bar{u}_L - a_L = \bar{u}_L - \sqrt{\bar{\rho}_L^{\gamma-1}}, \quad S_R = \bar{u}_R + a_R = \bar{u}_R + \sqrt{\bar{\rho}_R^{\gamma-1}}, \tag{4.8}$$

将式 (4.5) 代入式 (4.3) 即可. 下标 $L=i$, $R=i+1$.