CFD–HW09 (2021-05-07)

THz@PKU

May 7, 2021

1 笔头作业

提示：提交作业的时间是下周五.

(A). 考虑1D双曲守恒律方程

$$u_t + f(u)_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$u(x,0) = u_0(x)$, 和均匀网格$\{x_j : x_j = jh, j \in \mathbb{Z}\}$. 试写出上述方程的守恒形式的Engquist-Osher格式. 它是否是单调格式? 如果是, 是否可以证明它满足极值原理？如果应用这些格式于具体问题的数值计算, 则时间步长如何选取？

上述格式可以看成是对双曲守恒律方程先空间离散为

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{1}{h}(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}) =: L(u_j(t)),$$

[属于线方法或半离散方法], 然后再对上式中的时间导数采用显式Euler方法离散. 如果把时间离散换成下列Runge-Kutta方法

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L\left(u^n\right) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}u^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L\left(u^{(1)}\right) \end{aligned}$$

或

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} &= u^n + \Delta t_n L\left(u^n\right) \\
u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}\left(u^{(1)} + \Delta t_n L\left(u^{(1)}\right)\right) \\
u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}\left(u^{(2)} + \Delta t_n L\left(u^{(2)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

前述结果又如何？

(B). 考虑2D双曲守恒律方程

$$
u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}, t > 0,
$$

$f = g = \frac{1}{2}u^2,\ u(x,y,0) = u_0(x,y)$, 和均匀的矩形网格$\{(x_j, y_k) : x_j = jh_x, y_k = kh_y, j,k \in \mathbb{Z}\}$. 请详细写出上述方程的如下形式的Godunov格式

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{j,k}^{n+1} =& \bar{u}_{j,k}^n - \frac{\tau}{h_x}\Big[f\big(\omega(0;\bar{u}_{j,k}^n,\bar{u}_{j+1,k}^n)\big) - f\big(\omega(0;\bar{u}_{j-1,k}^n,\bar{u}_{j,k}^n)\big)\Big] \\
& - \frac{\tau}{h_y}\Big[g\big(\omega(0;\bar{u}_{j,k}^n,\bar{u}_{j,k+1}^n)\big) - g\big(\omega(0;\bar{u}_{j,k-1}^n,\bar{u}_{j,k}^n)\big)\Big],
\end{aligned}
$$

其中$\omega(\frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{t-t_n};\bar{u}_{j,k}^n,\bar{u}_{j+1,k}^n)$是

$$
u_t + g(u)_x = 0,\ u(x,t_n) = \begin{cases} \bar{u}_{j,k}^n, & x - x_{j+\frac{1}{2}} < 0, \\ \bar{u}_{j+1,k}^n, & x - x_{j+\frac{1}{2}} > 0, \end{cases}
$$

的精确解; $\omega(\frac{y-y_{k+\frac{1}{2}}}{t-t_n};\bar{u}_{j,k}^n,\bar{u}_{j,k+1}^n)$是

$$
u_t + g(u)_y = 0,\ u(y,t_n) = \begin{cases} \bar{u}_{j,k}^n, & y - y_{k+\frac{1}{2}} < 0, \\ \bar{u}_{j,k+1}^n, & y - y_{k+\frac{1}{2}} > 0, \end{cases}
$$

的精确解. 也就是给出局部1D Riemann问题精确解, 再完整地给出$f\big(\omega(0;\bar{u}_{j,k}^n,\bar{u}_{j+1,k}^n)\big)$ 和$g\big(\omega(0;\bar{u}_{j,k}^n,\bar{u}_{j,k+1}^n)\big)$的计算.【提示：参照课堂上写的1D Burgers方程的Godunov格式】

(C). 证明1D完全气体Euler方程组的1激波的关系式, 即讲义【CFDLect06-com03_cn.pdf】的第27页的1激波的关系式.