

计算流体力学作业 9

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

June 2, 2021

1

取 $(x_j, x_{j+1}) \times [t_n, t_{n+1})$, 对 $u_t + f_x = 0$ 积分, 在 $\lambda \max_u |f'(u)| \leq \frac{1}{2}$ 时, 能得到什么格式?

可以得到 Godunov 格式.

定义 $I_j := (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$, 设

$$\frac{\tau}{h} \max_u \left\{ |f'(u)| \right\} \leq \frac{1}{2}. \quad (1.1)$$

1. 计算初始函数的单元平均值:

$$u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, 0) dx. \quad (1.2)$$

2. 对于 $n \geq 0$, 由单元平均定义 (重构) t_n 时刻的近似解 (分片常数函数)

$$u_h(x, t_n) := u_j^n, \quad x \in I_j, \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \quad (1.3)$$

并精确地解 (局部)Riemann 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, & t \in [t_n, t_{n+1}) \\ u(x, t_n) = \begin{cases} u_h(x_{j+\frac{1}{2}} - 0, t_n), & x < x_{j+\frac{1}{2}} \\ u_h(x_{j+\frac{1}{2}} + 0, t_n), & x > x_{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases} \quad (1.4)$$

用 $\omega(x, t)$ 表示式 (1.4) 的精确解. 特别地, $\omega(x, t)$ 具有形式:

$$\omega(x, t) = \omega \left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t_n}, u_h \left(x_{j+\frac{1}{2}} - 0, t_n \right), u_h \left(x_{j+\frac{1}{2}} + 0, t_n \right) \right), \quad (1.5)$$

3. 计算单元平均:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \omega(x, t_{n+1}) dx. \quad (1.6)$$

在 CFL 条件式 (1.1) 下, 有

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}h}}^{x_j} \omega \left(\frac{x - x_{j-\frac{1}{2}}}{\tau}, u_{j-1}^n, u_j^n \right) dx + \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}h}} \omega \left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\tau}, u_j^n, u_{j+1}^n \right) dx. \quad (1.7)$$

2

$$u_t + f_x + g_x = 0 \quad (2.1)$$

在矩形网格 $\{x_j = jh, y_k = kh\}$ 上可离散为

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n - \lambda_x \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2},k}^n - \hat{f}_{j-\frac{1}{2},k}^n \right) - \lambda_y \left(\hat{g}_{j,k+\frac{1}{2}}^n - \hat{g}_{j,k-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (2.2)$$

其中 $\hat{f}_{j-\frac{1}{2},k}^n$ 形式可以是一维方程对应格式的数值通量, $\hat{g}_{j,k+\frac{1}{2}}^n$ 类似

问题:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2},k}^n = \frac{1}{2} (f_{j,k} + f_{j+1,k}) - \frac{1}{2\lambda_x} (u_{j+1,k} - u_{j,k}) \quad (2.3)$$

$$\hat{g}_{j,k+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (g_{j,k} + g_{j,k+1}) - \frac{1}{2\lambda_y} (u_{j,k+1} - u_{j,k}) \quad (2.4)$$

是否合适?

将式 (2.3) 和 (2.4) 代入式 (2.2) 可得

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} = & u_{j,k}^n - \frac{\lambda_x}{2} (f_{j+1,k}^n - f_{j-1,k}^n) - \frac{\lambda_y}{2} (g_{j,k+1}^n - g_{j,k-1}^n) \\ & + \frac{1}{2} (u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n) + \frac{1}{2} (u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

这相当于在不稳定的中心差分格式上加了一个耗散项.

假设

$$f_{j+1,k}^n - f_{j-1,k}^n = f' \left(u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n \right), \quad (2.6)$$

$$g_{j,k+1}^n - g_{j,k-1}^n = g' \left(u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n \right). \quad (2.7)$$

将

$$u_{j,k}^n = \xi_l^n e^{i\beta(j+k)h} \quad (2.8)$$

代入方程得放大因子为

$$G(\beta, h) = -1 + 2 \cos(\beta h) - [\lambda(f' + g') \sin(\beta h)] i. \quad (2.9)$$

是恒不稳定的.