7 (1987), 4, 467—481

数学物理学报
Acta Mathematica Scientia

等熵气体动力学方程组Lax-Friedrichs格式的收敛性(I)

丁夏畦
(中国科学院武汉数学物理研究所，刘徽数学研究中心，北京)

陈贵强　罗佩珠
(中国科学院系统科学研究所，北京)

§1 引　　言

如所周知，Lax-Friedrichs 格式是 P. D. Lax[1] 对拟线性双曲型守恒律方程组提出的一种有限差分格式．若得到了其相应的差分逼近解的收敛性，这格式不仅提供了证明整体广义解存在性的一种理想途径，而且能方便有效地直接用来进行整体解的数值计算．在单个守恒律方程情形，O. Oleinik[2], C. Conway and J. Smoller[3] 等证明了这一格式的收敛性，并得到了整体广义解的存在性．然而，对双曲型方程组，特别是气体动力学方程组，Lax-Friedrichs 格式的收敛性一直没有什么结果．

描述不定常流动的气体动力学方程组始值问题整体解存在性的研究，是目前拟线性双曲型方程组理论研究中的最核心的问题之一．对一维等熵多方气体，它在 Lagrange 坐标和 Eulev 坐标下的提法分别是

$$\begin{cases} v_t-u_x=0, & \text{(质量守恒)} \\ u_t+p(v)_x=0,\ p(v)=k^2v^{-\gamma}, & \text{(动量守恒)} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$(v,\ u)|_{t=0}=(v_0(x),\ u_0(x)). \tag{1.2}$$

和

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x=0, & \text{(质量守恒)} \\ (\rho u)_t+(\rho u^2+p(\rho))_x=0,\ p(\rho)=k^2\rho^\gamma, & \text{(动量守恒)} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$(\rho,\ u)|_{t=0}=(\rho_0(x),\ u_0(x)), \tag{1.4}$$

其中 u, v, ρ 和 p 分别表示气体的速度、比容、密度和压强，k 为常数，$\gamma>1$ 是绝热指数．对通常气体，$1<\gamma\leqslant\frac{5}{3}$.

对 $\gamma=1$, T. Nishida[4] 利用 Glimm 格式[5] 建立了一般有界变差初值的整体解存在定理．具有重要物理意义的 $1<\gamma\leqslant3$ 情形，对某些特殊类型的初值也已得到许多存在性结果[6-9].

1985年8月25日收到．

R. J. DiPerna[10] 把补偿列紧理论与粘性消失法相结合，对绝热指数 $\gamma=1+\frac{2}{2m+1}$，$m\geqslant 2$ 整数，建立了一般初值的整体解存在定理．他的结果可归纳为如下定理．

定理 1 假设初值 $(\rho_0(x),\ u_0(x))$ 满足：

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{|x|\to\infty}(\rho_0(x),\ u_0(x))=(\bar\rho,\ \bar u),\\&\rho_0(x)\geqslant\delta>0,\ (\rho_0(x)-\bar\rho,\ u_0(x)-\bar u)\in C^2\cap H^2,\\&\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\rho_0(x)(u_0(x)-\bar u)^2+\frac{1}{\gamma(\gamma-1)}(\rho_0^\gamma(x)-\bar\rho^\gamma)-\frac{1}{\gamma-1}\bar\rho^{\gamma-1}(\rho_0(x)-\bar\rho)\right]dx<\infty,\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

则，对 $\gamma=1+\frac{2}{2m+1}$，$m\geqslant 2$ 整数，存在 Cauchy 问题(1.3)—(1.4)的整体广义解 $(\rho(x,t),\ u(x,t))$ 且满足 $\rho(x,t)\geqslant 0$．

在本文中，我们利用一些嵌入定理并通过对 Lax-Friedrichs 格式和弱熵的分析，证明了 Cauchy 问题(1.3)—(1.4)的 Lax-Friedrichs 差分逼近解满足如下框架．

定理 2(框架定理) 若初值满足

$$\left.\begin{aligned}&\rho_0(x)\geqslant 0,\ \rho_0(x)+|u_0(x)|\leqslant M_0,\\&\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\rho_0(x)(u_0(x)-\bar u)^2+\frac{1}{\gamma(\gamma-1)}(\rho_0^\gamma(x)-\bar\rho^\gamma)-\frac{1}{\gamma-1}\bar\rho^{\gamma-1}(\rho_0(x)-\bar\rho)\right]dx<\infty,\\&\qquad\qquad\text{对某一常状态}(\bar\rho,\ \bar u)\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

则，对 $1<\gamma\leqslant 2$，Lax-Friedrichs 差分逼近解 $(\rho^l(x,t),\ u^l(x,t))$ 满足

(i) 存在常数 $M>0$，使得

$$0\leqslant\rho^l(x,t)\leqslant M,\quad |u^l(x,t)|\leqslant M.$$

(ii) 对任何弱熵对 $(\eta,\ q)$，测度

$$\eta(\rho^l,\ u^l)_t+q(\rho^l,\ u^l)_x\quad\text{在 } H^{-1}_{loc}(\Omega)\text{ 中紧},$$

其中 $\Omega\subset R\times R^+$ 是任一有界开集．

利用这定理，并注意到文[10]及本文第五节的结果，我们立即可得到如下结论．

推论 1 假设 $\gamma=1+\frac{2}{2m+1}$，$m\geqslant 2$ 整数，初值 $(\rho_0(x),\ u_0(x))$ 满足(1.6)，则 Cauchy 问题(1.3)—(1.4)的 Lax-Friedrichs 差分逼近解 $(\rho^l(x,t),\ u^l(x,t))$ 存在一子序列，使得

$$(\rho^{l_k}(x,t),\ u^{l_k}(x,t))\xrightarrow{*}(\rho(x,t),\ u(x,t)),\ (L^\infty\text{ 中弱}^*\text{收敛})$$

和

$$(\rho^{l_k}(x,t),\ u^{l_k}(x,t))\longrightarrow(\rho(x,t),\ u(x,t)),\ \text{a. e. }(x,t)\in\{(x,t):\ \rho(x,t)>0\},$$

而且 $(\rho(x,t),\ u(x,t))$ 是 Cauchy 问题(1.3)—(1.4)的整体广义解．

§2 预备知识

为今后的需要，在本节中我们首先来揭示一些基本事实．

等熵气体动力学方程组

考虑气体动力学方程组

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ (\rho u)_t+(\rho u^2+p(\rho))_x=0,\ p(\rho)=\rho^\gamma/\gamma,\end{cases}\tag{2.1}$$

或

$$\begin{cases}\rho_t+m_x=0,\\ m_t+\left(\dfrac{m^2}{\rho}+p(\rho)\right)_x=0,\ p(\rho)=\rho^\gamma/\gamma,\end{cases}\tag{2.1'}$$

对光滑解，(2.1)等价于

$$v_t+\nabla f(v)v_x=0,\tag{2.2}$$

其中

$$\nabla f(v)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{m^2}{\rho}+p'(\rho) & \dfrac{2m}{\rho}\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}\rho\\ m\end{pmatrix}\quad 和\quad m=\rho u.$$

1．方程组(2.1)的特征值是

$$\begin{cases}\lambda_1=u-c,\\ \lambda_2=u+c,\end{cases}\quad c=\sqrt{p'(\rho)},$$

相应的特征向量分别是

$$\begin{cases}r_1=(1,\ \lambda_1)^T=\left(1,\ \dfrac{m}{\rho}-c\right)^T,\\ r_2=(1,\ \lambda_2)^T=\left(1,\ \dfrac{m}{\rho}+c\right)^T.\end{cases}$$

Riemann 不变量是

$$\begin{cases}w=u+\displaystyle\int_0^\rho\frac{\sqrt{p'(s)}}{s}ds=u+\frac{\rho^\theta}{\theta}=\frac{m}{\rho}+\frac{\rho^\theta}{\theta},\\ z=u-\displaystyle\int_0^\rho\frac{\sqrt{p'(s)}}{s}ds=u-\frac{\rho^\theta}{\theta}=\frac{m}{\rho}-\frac{\rho^\theta}{\theta},\end{cases}\quad \theta=\frac{\gamma-1}{2}.$$

2．稀疏波曲线，有两种不同类型的稀疏波，分别称为1-稀疏波和2-稀疏波．如果给定左状态$(\rho_0,\ m_0)$或$(\rho_0,\ u_0)$，则所有能从这左状态经1-稀疏波或2-稀疏波过渡到达的右状态$(\rho,\ m)$或$(\rho,\ u)$的集合——稀疏波曲线，分别为

$$\left.\begin{aligned}R_1(0):\ m-m_0&=\frac{m_0}{\rho_0}(\rho-\rho_0)-\rho\int_{\rho_0}^\rho\frac{\sqrt{p'(s)}}{s}ds\\ &=\frac{m_0}{\rho_0}(\rho-\rho_0)-\frac{\rho}{\theta}(\rho^\theta-\rho_0^\theta),\ \rho<\rho_0,\\ \text{或}\quad u-u_0&=-\int_{\rho_0}^\rho\frac{\sqrt{p'(s)}}{s}ds=-\frac{1}{\theta}(\rho^\theta-\rho_0^\theta),\ \rho<\rho_0,\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

和

$$\left.\begin{aligned} R_2(0):\ m-m_0&=\frac{m_0}{\rho_0}(\rho-\rho_0)+\rho\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\sqrt{p'(s)}}{s}ds \\ &=\frac{m_0}{\rho_0}(\rho-\rho_0)+\frac{\rho}{\theta}(\rho^\theta-\rho_0^\theta),\ \rho>\rho_0\geqslant 0, \\ \text{或}\quad u-u_0&=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\sqrt{p'(s)}}{s}ds=\frac{1}{\theta}(\rho^\theta-\rho_0^\theta),\ \rho>\rho_0\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

沿着曲线 $R_1(0)$,

$$\left.\frac{dm}{d\rho}\right|_{R_1(0)}=\frac{m_0}{\rho_0}+\frac{\rho_0^\theta}{\theta}-\frac{\theta+1}{\theta}\rho^\theta,\quad \left.\frac{d^2m}{d\rho^2}\right|_{R_1(0)}=-(\theta+1)\rho^{\theta-1}\leqslant 0,$$

沿着曲线 $R_2(0)$,

$$\left.\frac{dm}{d\rho}\right|_{R_2(0)}=\frac{m_0}{\rho_0}-\frac{\rho_0^\theta}{\theta}+\frac{\theta+1}{\theta}\rho^\theta,\quad \left.\frac{d^2m}{d\rho^2}\right|_{R_2(0)}=(\theta+1)\rho^{\theta-1}\geqslant 0.$$

这表明在 ρ-m 平面上,曲线 $R_1(0)$ 和 $R_2(0)$ 是凸的.

3．激波曲线,类似地,有两种不同类型的激波,分别称为1-激波和2-激波. 如果给定左状态(ρ_0, m_0)或(ρ_0, u_0),则所有能从这左状态经1-激波或2-激波过渡到达的右状态(ρ, m)或(ρ, u)的集合——激波曲线,分别为

$$\left.\begin{aligned} S_1(0):\ m-m_0&=\frac{m_0}{\rho_0}(\rho-\rho_0)-\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\frac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}(\rho-\rho_0),\ \rho>\rho_0>0, \\ \text{或}\quad u-u_0&=-\sqrt{\frac{1}{\rho_0\rho}\frac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}(\rho-\rho_0),\qquad \rho>\rho_0>0. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

和

$$\left.\begin{aligned} S_2(0):\ m-m_0&=\frac{m_0}{\rho_0}(\rho-\rho_0)+\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\frac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}(\rho-\rho_0),\ \rho<\rho_0, \\ \text{或}\quad u-u_0&=\sqrt{\frac{1}{\rho_0\rho}\frac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}(\rho-\rho_0),\qquad \rho<\rho_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

沿着曲线 $S_1(0)$:

$$\left.\frac{m-m_0}{\rho-\rho_0}\right|_{S_1(0)}=\frac{m_0}{\rho_0}-\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\frac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}$$

$$\left.\frac{d}{d\rho}\left(\frac{m-m_0}{\rho-\rho_0}\right)\right|_{S_1(0)}=-\frac{\frac{\rho}{\rho_0}p'(\rho)-\frac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}{2\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}(p(\rho)-p(\rho_0))(\rho-\rho_0)}}<0,$$

沿着曲线 $S_2(0)$:

$$\left.\frac{m-m_0}{\rho-\rho_0}\right|_{S_2(0)}=\frac{m_0}{\rho_0}+\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\frac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}},$$

$$\left.\frac{d}{d\rho}\left(\frac{m-m_0}{\rho-\rho_0}\right)\right|_{S_2(0)}=\frac{\frac{\rho}{\rho_0}p'(\rho)-\frac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}{2\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}(p(\rho)-p(\rho_0))(\rho-\rho_0)}}<0.$$

这表明在 ρ-m 平面上,曲线 $S_1(0)$ 和 $S_2(0)$ 关于 (ρ_0, m_0) 是凸的.

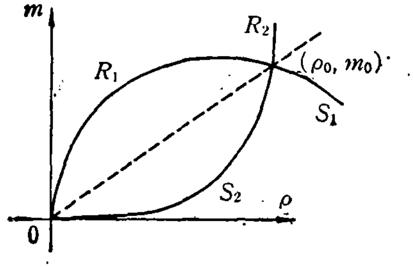

图 1

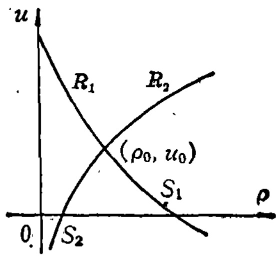

图 1′

在 ρ-m 平面和 ρ-u 平面上，把所有稀疏波曲线和激波曲线画在一起，就分别得到如图 1 和图 1′ 的图象.

图 1 表明曲线 $R_1(0)$ 和 $R_2(0)$ 分别位于连接点 $(0,\ 0)$ 和 $(\rho_0,\ m_0)$ 直线的一边，曲线 $S_1(0)$ 和 $S_2(0)$ 分别位于连接点 $(0,\ 0)$ 和 $(\rho_0,\ m_0)$ 直线的另一边.

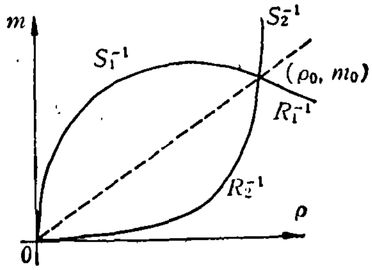

图 2

另一方面，如果给定右状态 $(\rho_0,\ m_0)$，所有能从这右状态经稀疏波和激波过渡到达的左状态 $(\rho,\ m)$ 的集合，即逆稀疏波曲线 $R_i^{-1}(0)\ (i=1,\ 2)$ 和逆激波曲线 $S_i^{-1}(0)\ (i=1,\ 2)$ 如图 2 所示. 曲线 $R_1^{-1}(0)$ 和 $R_2^{-1}(0)$ 位在连接点 $(0,\ 0)$ 和 $(\rho_0,\ m_0)$ 直线的同一边，曲线 $S_1^{-1}(0)$ 和 $S_2^{-1}(0)$ 位在这直线的另一边.

4. Riemann 问题. 考虑如下 Riemann 问题(允许真空 $\rho=0$ 出现)：

$$\begin{cases}(2.1)' \\ (\rho,\ m)\big|_{t=0}=\begin{cases}(\rho_-,\ m_-), & x<0, \\ (\rho_+,\ m_+). & x>0.\end{cases}\end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $\rho_\pm\geqslant 0$ 和 $m_\pm$ 都是常数，且 $\left|\dfrac{m_\pm}{\rho_\pm}\right|<\infty$.

对 Riemann 问题 (2.7)，我们有如下结论.

定理 3　Riemann 问题 (2.7) 在上半平面 $t>0$ 存在分片光滑的广义解(含有真空)且满足

$$\begin{cases}W(x,\ t)\equiv W(\rho(x,\ t),\ m(x,\ t))\leqslant \max(W(\rho_-,\ m_-),\ W(\rho_+,\ m_+)), \\ Z(x,\ t)\equiv Z(\rho(x,\ t),\ m(x,\ t))\geqslant \min(Z(\rho_-,\ m_-),\ Z(\rho_+,\ m_+)), \\ W(x,\ t)-Z(x,\ t)\geqslant 0.\end{cases} \tag{2.8}$$

由此，可立即得到下列结果.

推论 2　区域 $\Sigma=\{(\rho,\ m):\ W\leqslant W_0,\ Z\geqslant Z_0,\ W-z\geqslant 0\}$ 为 Riemann 问题 (2.7) 解的不变区域. 也就是说，若 Riemann 初值属于 Σ，则 Riemann 解也属于 Σ.

进一步，我们有如下结论.

引理 1　若 $\{(\rho(x),\ m(x)):\ a\leqslant x\leqslant b\}\subset\Sigma$，则

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \rho(x)dx,\ \frac{1}{b-a}\int_a^b m(x)dx\right)\in\Sigma.$$

注意到区域 Σ 的凸性，并利用 Jensen 不等式，可得到这一事实.

5. 熵

定义　一对映射 $\eta: R^2\to R$, $q: R^2\to R$ 称为熵-熵流对，如果它满足等式

$$\nabla q=\nabla\eta\nabla f.$$

又若 $\eta(\rho, u)$ 满足 $\eta(0, u)=0$，则称 η 为一弱熵.

例如，物理熵 $\eta_*=\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)}$ 为一弱凸熵.

方程组(2.1)$(1<\gamma\leqslant 3)$的弱熵有如下表达式[10-11]

$$\eta(\rho, m)=\rho\int_0^1[\tau(1-\tau)]^\lambda\varphi\left(\frac{m}{\rho}-\frac{\rho^\theta}{\theta}+\frac{2\rho^\theta}{\theta}\tau\right)d\tau, \tag{2.9}$$

其中 $\lambda=\frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}$.

我们约定，以后涉及的弱熵都是对满足 $\varphi\in C^2$ 的弱熵而言，下面不再提及.

利用表达式(2.9)，容易证明

引理 2　若 $0\leqslant\rho\leqslant M$, $|u|\leqslant M$，则弱熵 $\eta(\rho, m)$ 满足

(i) $|\nabla\eta(\rho, m)|\leqslant C$,

(ii) $|\nabla^2\eta(r, r)|\leqslant C\nabla^2\eta_*(r, r)$,

其中 r 为任一二维向量，$\eta_*=\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)}$ 为物理熵，C 为与 γ 无关的常数.

6. 广义解

定义　有界可测函数$(\rho(x, t), u(x, t))$称为初值问题(1.3)—(1.4)在区域

$$\Pi_T=\{(x, t): -\infty<x<\infty,\ 0\leqslant t<T\}$$

上的广义解，如果它满足

(i) 弱解条件：对任何 $\varphi(x, t)\in C_0^\infty(\Pi_T)$，有

$$\begin{cases}\displaystyle\iint_{0<t<T}(\rho\varphi_t+\rho u\varphi_x)dx\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(x)\varphi(x, 0)dx=0,\\ \displaystyle\iint_{0<t<T}(\rho u\varphi_t+(\rho u^2+p(\rho))\varphi_x)dx\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(x)\varphi(x, 0)dx=0.\end{cases}$$

(ii) 熵条件：对任何非负函数 $\varphi(x, t)\in C_0^\infty(\Pi_T-\{t=0\})$ 及凸弱熵-熵流对 (η, q)，有

$$\iint_{0<t<T}(\eta\varphi_t+q\varphi_x)dx\,dt\geqslant 0.$$

H^{-1} 紧性嵌入定理

我们先引入如下引理.

引理 3　若 $f\in W^{-1,p}(\Omega)$, $(1<p<\infty)$, $\operatorname{supp}f\subset\Omega$，则

$$u=G*f\in W^{1,p}(\Omega),$$

且

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

其中 C 是与 f 无关的常数，G 是 Laplace 算子 Δ 的基本解，即

$$G(x)=G(|x|)=\begin{cases}\dfrac{1}{N(2-N)\omega_N}|x|^{2-N}, & N>2,\\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & N=2.\end{cases}$$

$\omega_N=\dfrac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(N/2)}$ 为 R^N 中的单位球的体积.

利用 Calderon-Zygmund 定理并通过对奇异积分的一些估计,可得到这一结论.

定理 4 设 $\Omega\subset R^N$ 是有界开集,则

$(W^{-1,q}(\Omega)$ 中的紧集$)\cap(W^{-1,r}(\Omega)$ 中有界集$)\subset(H^{-1}_{loc}(\Omega)$ 紧集) 其中 $1<q\leqslant 2<r$.

证明 对任何集 $B\subset(W^{-1,q}(\Omega)$ 中紧集$)\cap(W^{-1,r}(\Omega)$ 中有界集),则存在一收敛子序列 $\{f_n\}\subset B$, 使得

$$\|f_m-f_n\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\to 0,\ (m,\ n\to\infty). \tag{2.10}$$

对任何 $\Omega_1\subset\subset\Omega$, 取函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi|_{\Omega_1}\equiv 1$, 定义 $\bar f_n=\varphi f_n$. 则

$$\operatorname{supp}\bar f_n\subset\subset\Omega,\ \bar f_n|_{\Omega_1}=f_n|_{\Omega_1}.$$

利用引理 3, 我们得

$$u_n=G*\bar f_n\in W^{1,q}(\Omega)\cap W^{1,r}(\Omega),$$

且

$$\begin{cases}\|u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)}\leqslant C\|\bar f_n\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\leqslant C\|f_n\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\\ \|u_n\|_{W^{1,r}(\Omega)}\leqslant C\|\bar f_n\|_{W^{-1,r}(\Omega)}\leqslant C\|f_n\|_{W^{-1,r}(\Omega)},\end{cases} \tag{2.11}$$

因此,由(2.10)—(2.11)得

$$\|u_m-u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)}\leqslant C\|f_m-f_n\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\to 0,\ (m,\ n\to\infty), \tag{2.12}$$

把 u_m-u_n 代入内插不等式

$$\|u\|_{W^{1,s}(\Omega)}\leqslant\|u\|^{1-\alpha}_{W^{1,r}(\Omega)}\|u\|^{\alpha}_{W^{1,q}(\Omega)},\quad \alpha=\frac{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{r}}{\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{r}},\ q\leqslant s\leqslant r.$$

我们有

$$\|u_m-u_n\|_{W^{1,s}(\Omega)}\leqslant\|u_m-u_n\|^{1-\alpha}_{W^{1,r}(\Omega)}\|u_m-u_n\|^{\alpha}_{W^{1,q}}\leqslant C\|u_m-u_n\|^{\alpha}_{W^{1,q}}\to 0,\ (m,\ n\to\infty)$$

因此

$$\begin{aligned}\|f_m-f_n\|_{H^{-1}(\Omega_1)}&=\sup_{\substack{\|\varphi\|_{H_0^1}<1\\ \operatorname{supp}\varphi\subset\Omega_1}}|\langle f_m-f_n,\ \varphi\rangle|=\sup_{\substack{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}<1\\ \operatorname{supp}\varphi\subset\Omega_1}}|\langle\bar f_m-\bar f_n,\ \varphi\rangle|\\ &\leqslant\sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}<1}|\langle\bar f_m-\bar f_n,\ \varphi\rangle|=\|\bar f_m-\bar f_n\|_{H^{-1}(\Omega)}\\ &=\|\Delta u_m-\Delta u_n\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant\|u_m-u_n\|_{H^1(\Omega)}\to 0,\ (m,\ n\to\infty)\end{aligned}$$

从而 B 是 $H^{-1}_{loc}(\Omega)$ 中的紧集,证毕. ∎

注 这定理是 Murat 引理[12]的一个推广.

弱极限的 Young 测度表示

定理 5 设 $K\subset R^m$, $\Omega\subset R^n$ 为有界开集, $f: R^m\to R$ 连续, $u^\varepsilon: \Omega\to R^m$ 可测函数, 满足 $u^\varepsilon(x)\in K$, a. e., 则存在子序列(仍记为 $\{u^\varepsilon\}$)及概率测度族 $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$, 使得

$$\operatorname{supp}\nu_x\subset\overline{K},\quad 且\quad f(u^\varepsilon)\xrightarrow{*}l(x),\ (L^\infty(\Omega)),$$

其中
$$l(x)=\langle\nu_x(\lambda),\ f(\lambda)\rangle=\int_{R^m}f(\lambda)d\nu_x(\lambda).$$

反之,若 $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ 是支集在 $\overline{K}$ 中的一概率测度族,则对任何连续函数 $f: K\to R^1$,存在一可测函数序列 $\{u^\varepsilon\}(u^\varepsilon: \Omega\to R^m)$, $u^\varepsilon(x)\in K$, a. e., 有

$$f(u^\varepsilon)\xrightarrow{*}l(x)=\langle\nu_x(\lambda),\ f(\lambda)\rangle.\ (L^\infty(\Omega)).$$

这定理的证明可参见文[12]或[13].

由此,我们即可得到如下推论.

推论 3 设 $u^\varepsilon\xrightarrow{*}u(L^\infty(\Omega))$, 则

$$u^\varepsilon\to u(L^p(\Omega),\ 1<p<\infty)\Leftrightarrow\nu_x=\delta_{u(x)},(在\ u(x)\ 处的\ \mathrm{Dirac}\ 测度).$$

§3 逼近解的构造

现在我们利用 Lax-Friedrichs 格式来构造逼近解 $v^l(x,\ t)=(\rho^l(x,\ t),\ m^l(x,\ t))=(\rho^l(x,\ t),\ \rho^l(x,\ t)u^l(x,\ t))$.

在上半平面 $t\geqslant0$ 上作网格: $t=nh,\ x=jl$, 其中 h 和 l 是某正数, 分别称为时间步长和空间步长,满足:

$$\max_{i=1,2}(\sup|\lambda_i(v^l)|)<\frac{l}{h}\leqslant K.$$

我们将证明 $\rho^l(x,\ t)\geqslant0$, 从而构造的逼近解是合理的.

对整数 $n\geqslant1$, 令 $J_n=\{j: j\ 整数,\ n+j=偶数\}$.

在矩形 $\{(x,\ t):\ (j-1)l<x<(j+1)l,\ 0\leqslant t<h,\ j\ 奇数\}$ 上, 我们定义 $(\rho^l(x,\ t),\ m^l(x,\ t))$ 为 Riemann 问題

$$\begin{cases}(2.1)'\\(\rho,\ m)|_{t=0}=\begin{cases}(\rho_0^l((j-1)l),\ m_0^l((j-1)l)),\ x<jl,\\(\rho_0^l((j+1)l),\ m_0^l((j+1)l)),\ x>jl,\end{cases}\end{cases}$$

之解,其中 $\rho_0^l(x)=\rho_0(x)X_l(x)$, $m_0^l(x)=\rho_0^l(x)u_0(x)X_l(x)$,

$$X_l(x)=\begin{cases}1,\ x\in\left[-\frac{1}{l},\ \frac{1}{l}\right],\\0,\ 其它.\end{cases}$$

假设 $(\rho^l,\ m^l)$ 在 $t<nh$ 上已经定义, 则在矩形 $\{(x,\ t):\ jl<x<(j+2)l,\ nh<t<(n+1)h,\ j\in J_n\}$ 上,定义 $(\rho^l(x,\ t),\ m^l(x,\ t))$ 为 Riemann 问题:

$(2.1)'$

$$(\rho,\ m)|_{t=nh}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2l}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}\rho^l(x,\ nh-0)dx,\ \frac{1}{2l}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}m^l(x,\ nh-0)dx\right),\ x<(j+1)l,\\\left(\frac{1}{2l}\int_{(j+1)l}^{(j+3)l}\rho^l(x,\ nh-0)dx,\ \frac{1}{2l}\int_{(j+1)l}^{(j+3)l}m^p(x,\ nh-0)dx\right),\ x>(j+1)l,\end{cases}$$

的解.

以这种方式，我们就构造了上半平面的 Lax-Friedrichs 逼近解.

注 上面定义的差分格式正是 Lax-Friedrichs 格式[1]，所构造的逼近解 $(\rho^l(x, t), m^l(x, t))$ 与 Glimm[5] 逼近解有同样的局部结构.

§4 逼近解的框架定理

在这一节，我们来建立 Lax-Friedrichs 差分逼近解所满足的框架定理. 首先，我们有下列结论.

定理 6 若初值满足

$$\rho_0(x)\geqslant 0,\ \rho_0(x)+|u_0(x)|\leqslant M, \tag{4.1}$$

则 Lax-Friedrichs 逼近解一致有界，即存在常数 $C>0$，使得

$$0\leqslant\rho^l(x, t)\leqslant C,\ |u^l(x, t)|=\left|\frac{m^l(x, t)}{\rho^l(x, t)}\right|\leqslant C.$$

利用推论 2 和引理 1，立即可得到这一结果.

定理 7 若初值满足(4.1)和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\rho_0(x)(u_0(x)-\bar{u})^2+\frac{1}{\gamma(\gamma-1)}(\rho_0^\gamma(x)-\bar{\rho}^\gamma)-\frac{1}{\gamma-1}\bar{\rho}^{\gamma-1}(\rho_0(x)-\bar{\rho})\right\}dx<\infty,$$

对某一常状态$(\bar{\rho}, \bar{u})$. (4.2)

则对 $1<\gamma\leqslant 2$，对任何弱熵对(η, q)，测度

$$\eta(v^l)_t+q(v^l)_x \quad 在\ H_{loc}^{-1}(\Omega)\ 中紧,$$

其中 $\Omega\subset R\times R^+$ 的有界开集.

证明 为方便起见，在如下证明过程中省略逼近解 $v^l(x, t)$ 的指标 l.

不失一般性，我们假定 $\int_{-\infty}^{\infty}\eta_*(\rho_0(x), u_0(x))dx<\infty$，否则只须引入如下熵对

$$\begin{cases}\tilde{\eta}_*=\eta_*(v)-\eta_*(\bar{v})-\nabla\eta_*(\bar{v})(v-\bar{v}),\\ \tilde{q}_*=q_*(v)-q_*(\bar{v})-\nabla\eta_*(\bar{v})(f(v)-f(\bar{v})),\end{cases}$$

重复下面的讨论即可.

第一步，由于 $v=(\rho, m)$ 在区域 Π_T 中有紧支集，故熵等式可成为：对任意 $\varphi\in C^1(\Pi_T)$，有

$$\iint\limits_{0<t<T=mh}(\eta(v)\varphi_t+q(v)\varphi_x)dx\,dt=M(\varphi)+L(\varphi)+\Sigma(\varphi), \tag{4.3}$$

其中

$$M(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, T)\eta(v(x, T))dx-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, 0)\eta(v(x, 0))dx, \tag{4.4}$$

$$L(\varphi)=\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta(v_-^n)-\eta(v_j^n))\varphi(x, nh)dx\equiv L_1(\varphi)+L_2(\varphi), \tag{4.5}$$

$$L_1(\varphi)=\sum_{j,n}\varphi_j^n\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta(v_-^n)-\eta(v_j^n))dx, \tag{4.6}$$

$$L_2(\varphi)=\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta(v_-^n)-\eta(v_j^n))(\varphi-\varphi_j^n)dx, \tag{4.7}$$

$$\Sigma(\varphi)=\int_0^T \Sigma\{\sigma[\eta]-[q]\}\varphi(x(t),\ t)dt, \tag{4.8}$$

这里 $v_-^n=v(x,\ nh-0)$, $\varphi_j^n=\varphi(jl,\ nh)$, Σ 中和号是对固定 t 对 v 中所有激波取的, σ 是激波的传播速度. 若 $S=(X(t),\ t)$ 为 $v(x,\ t)$ 的一个激波,则

$$\begin{cases}[\eta]=\eta\{v(X(t)+0,\ t)\}-\eta\{v(x(t)-0,\ t)\},\\ [q]=q\{v(x(t)+0,\ t)\}-q\{v(x(t)-0,\ t)\}.\end{cases}$$

第二步,在(4.3)中,取

$$\eta=\eta_*\equiv\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^\gamma,\ \ q=q_*\equiv\frac{1}{2}\rho u^3+\frac{1}{\gamma-1}\rho^\gamma u,\ \varphi\equiv 1,$$

则

$$\begin{aligned}&\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta_*(v_-^n)-\eta_*(v_j^n))dx+\int_0^T\Sigma\{\sigma[\eta_*]-[q_*]\}dt\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\eta_*(v(x,\ 0))dx-\int_{-\infty}^{\infty}\eta_*(v(x,\ T))dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\eta_*(v_0(x))dx\leqslant C.\end{aligned} \tag{4.9}$$

而

$$\begin{aligned}&\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta_*(v_-^n)-\eta_*(v_j^n))dx\\ &=\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}dx\int_0^1(1-\theta)\nabla^2\eta_*(v_j^n+\theta(v_-^n-v_j^n))(v_-^n-v_j^n)^2d\theta,\end{aligned} \tag{4.10}$$

注意到 η_* 是一凸熵,利用点熵条件[14]

$$\sigma[\eta_*]-[q_*]\geqslant 0,$$

及(4.9)和(4.10),我们得到

$$\int_0^T\Sigma\{\sigma[\eta_*]-[q_*]\}dt\leqslant C, \tag{4.11}$$

$$\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}dx\int_0^1(1-\theta)\nabla^2\eta_*(v_j^n+\theta(v_-^n-v_j^n))(v_-^n-v_j^n)^2dx\leqslant C. \tag{4.12}$$

特别,当 $1<\gamma\leqslant 2$ 时, η_* 为严格凸熵,则有

$$\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}|v_-^n-v_j^n|^2dx\leqslant C. \tag{4.13}$$

第三步,给定左状态 $(\rho_0,\ m_0)$, 设 $v=(\rho,\ m)$ 是从这左状态经1-激波或2-激波过渡到达的右状态. 注意到(2.5)和(2.6),沿激波曲线

$$m(\rho)=\begin{cases}\dfrac{m_0}{\rho_0}\rho-\sqrt{\dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}(\rho-\rho_0),\ \rho>\rho_0,\ (1\text{-激波})\\ \dfrac{m_0}{\rho_0}\rho+\sqrt{\dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}(\rho-\rho_0),\ \rho<\rho_0,\ (2\text{-激波})\end{cases}$$

$$\sigma(\rho)=\frac{m(\rho)-m_0}{\rho-\rho_0}=\begin{cases}\dfrac{m_0}{\rho_0}-\sqrt{\dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}},\ \rho>\rho_0,\ (1\text{-激波})\\ \dfrac{m_0}{\rho_0}+\sqrt{\dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{p(\rho)-p(\rho_0)}{\rho-\rho_0}},\ \rho<\rho_0,\ (2\text{-激波})\end{cases}$$

和

$$\dot{\sigma}(\rho)\mathrm{sign}(\rho-\rho_0)\leqslant 0.$$

现令 $$Q(\rho)=\sigma(\rho)(\eta(v(\rho))-\eta(v_0))-(q(v(\rho))-q(v_0)),$$

则 $$\dot{Q}(\rho)=\dot{\sigma}(\rho)(\eta(v(\rho))-\eta(v_0))+\sigma(\rho)\dot{\eta}(v(\rho))-\dot{q}(v(\rho)),$$

而 $$\dot{\sigma}(\rho)(v(\rho)-v_0)+\sigma(\rho)\dot{v}(\rho)=\dot{f}(v(\rho)),\ (\text{Rankine-Hugoniot 条件})$$
$$\dot{q}(v(\rho))=\nabla q\dot{v}(\rho)=\nabla\eta\dot{f}(v(\rho)).$$

我们有

$$\begin{aligned}\dot{Q}(\rho)&=\dot{\sigma}(\rho)(\eta(v(\rho))-\eta(v_0)-\nabla\eta(v(\rho))(v(\rho)-v_0))\\&=-\dot{\sigma}(\rho)\int_0^1\theta\frac{d^2}{d\theta^2}\eta(v_0+\theta(v(\rho)-v_0))d\theta.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|Q(\rho)|&=\left|\int_{\rho_*}^{\rho}\dot{Q}(s)ds\right|\\&=\left|\int_{\rho_*}^{\rho}(-\dot{\sigma}(s))ds\int_0^1\theta\nabla^2\eta(v_0+\theta(v(s)-v_0))(v(s)-v_0)^2d\theta\right|\\&\leqslant\int_{\rho_*}^{\rho}(-\dot{\sigma}(s))ds\int_0^1\theta|\nabla^2\eta(v_0+\theta(v(s)-v_0))(v(s)-v_0)^2|d\theta\\&\leqslant C\int_{\rho_*}^{\rho}(-\dot{\sigma}(s))ds\int_0^1\theta\nabla^2\eta_*(v_0+\theta(v(s)-v_0))(v(s)-v_0)^2d\theta\\&=CQ_*=C(\sigma[\eta_*]-[q_*]).\end{aligned}$$

也即

$$|\sigma[\eta]-[q]|\leqslant C(\sigma[\eta_*]-[q_*]).\tag{4.14}$$

第四步，由(4.4), (4.6), (4.8), (4.11)—(4.12)和(4.14)，我们得到

$$|M(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|_{C_0(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}|\Sigma(\varphi)|&\leqslant\int_0^T\sum|\sigma[\eta]-[q]|dx\|\varphi\|_{C_0}\leqslant C\int_0^T\sum\{\sigma[\eta_*]-[q_*]\}dx\|\varphi\|_{C_0}\\&\leqslant C\|\varphi\|_{C_0(\Omega)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|L_1(\varphi)|&\leqslant\left|\sum_{j,n}\varphi_j^n\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta(v_-^n)-\eta(v_j^n))dx\right|\\&\leqslant\|\varphi\|_{C_0}\sum_{j,n}\left|\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta(v_-^n)-\eta(v_j^n))dx\right|\\&=\|\varphi\|_{C_0}\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}dx\int_0^1(1-\theta)|\nabla^2\eta(v_j^n+\theta(v_-^n-v_j^n))(v_-^n-v_j^n)^2|d\theta\\&\leqslant C\|\varphi\|_{C_0}\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}dx\int_0^1(1-\theta)\nabla^2\eta_*(v_j^n+\theta(v_-^n-v_j^n))(v_-^n-v_j^n)^2d\theta\\&\leqslant C\|\varphi\|_{C_0}.\end{aligned}$$

因此 $$|(M+L_1+\Sigma)(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|_{C_0}$$

即 $$\|M+L_1+\Sigma\|_{C_0^*}\leqslant C.$$

利用嵌入定理 $C_0^*(\Omega)\xrightarrow{\text{紧}}W^{-1,q_0}(\Omega)$, $1<q_0<\frac{N}{N-1}$, 我们有

$$M+L_1+\Sigma\quad\text{在 } W^{-1,q_0}(\Omega)\text{ 中紧}\tag{4.15}$$

又对任何 $\varphi\in C_0^\alpha(\Omega)$, $\frac{1}{2}<\alpha<1$, 注意到(4.13), 则

$$
\begin{aligned}
|L_2(\varphi)| &\leqslant \sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}|\varphi(x, nh)-\varphi_j^n|\,|\eta(v_-^n)-\eta(v_j^n)|\,dx \\
&\leqslant l^\alpha\|\varphi\|_{C_0^\alpha}\sum_n\Big(\sum_j\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}|\eta(v_-^n)-\eta(v_j^n)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|\nabla\eta\|_L l^{\alpha-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{C_0^\alpha}\Big(\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}|v_-^n-v_j^n|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant Cl^{\alpha-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{C_0^\alpha(\Omega)}\leqslant Cl^{\alpha-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},\ \ p>\frac{N}{1-\alpha}=\frac{2}{1-\alpha},
\end{aligned}
$$

故

$$\|L_2\|_{W^{-1,q_0}(\Omega)}\leqslant Cl^{\alpha-\frac{1}{2}}\to 0,\ (l\to 0), \tag{4.16}$$

其中 $1<q_0<\dfrac{2}{1+\alpha}<2$.

由(4.15)和(4.16),得到

$$M+L+\Sigma\quad 在\ W^{-1,q_0}(\Omega)\ 中紧,$$

也即

$$\eta(v)_t+q(v)_x\quad 在\ W^{-1,q_0}(\Omega)\ 中紧 \tag{4.17}$$

又由于 $0\leqslant\rho\leqslant C$, $|u|\leqslant C$, 我们得到

$$\eta(v)_t+q(v)_x\quad 是\ W^{-1,r}(\Omega)\,(r>1)\,中的有界集, \tag{4.18}$$

由(4.17)和(4.18),并利用定理4, 我们得到

$$\eta(v)_t+q(v)_x\quad 在\ H_{loc}^{-1}(\Omega)\ 中紧,$$

这就完成了定理的证明. ∎

从定理6和定理7的结果,我们能立即得到定理2(§1).

§5 存在性问题

在本节中,我们将讨论 Cauchy 问题(1.3)—(1.4)的广义解存在性问题. 我们有如下定理.

定理8 假设逼近解 $v^l(x,t)=(\rho^l(x,t),m^l(x,t))=(\rho^l(x,t),\rho^l(x,t)u^l(x,t))$ 除满足框架定理2(§1)外,还满足收敛定理,即存在一子序列(不失一般性,仍设本身收敛),使得

$$(\rho^l(x,t),u^l(x,t))\xrightarrow{\ *\ }(\rho(x,t),u(x,t)),\ (L^\infty), \tag{5.1}$$

且

$$(\rho^l(x,t),u^l(x,t))\longrightarrow(\rho(x,t),u(x,t)),\ \text{a.e.}\ (x,t)\in\{(x,t):\rho(x,t)>0\}. \tag{5.2}$$

则极限函数$(\rho(x,t),u(x,t))$是 Cauchy 问题(1.3)—(1.4)的广义解,满足

$$0\leqslant\rho(x,t)\leqslant M,\ |u(x,t)|\leqslant M\quad \text{a.e.}$$

证明 由于$(\rho^l(x,t),u^l(x,t))$满足框架定理2及(5.1),故由定理5,在任何有界开集 $\Omega\subset R\times R^+$ 上,对任何连续函数 $F: R^+\times R\to R$, 存在 $(\rho^l(x,t),u^l(x,t))$ 的子序列(不

妨设其本身)及概率测度族 $\{\nu_{x,t}\}_{(x,t)\in\Omega}$, 使得

$$F(\rho^l, u^l)\xrightarrow{*}\langle\nu_{x,t}(\lambda), F(\lambda_1, \lambda_2)\rangle. \tag{5.3}$$

特别
$$\rho(x, t)=\langle\nu_{x,t}(\lambda), \lambda_1\rangle.$$

从而若 $(x, t)\in\{(x, t): \rho(x, t)=0\}$ 则必有

$$\operatorname{supp}\nu_{x,t}\subset\{(\lambda_1, \lambda_2): \lambda_1=0\}$$

由此即知,对任何方程组(1.3)的弱熵-熵流对(η, q)恒有:

$$\langle\nu_{x,t}, \eta(\lambda)\rangle=\langle\nu_{x,t}, q(\lambda)\rangle=0, \text{对}(x, t)\in\{(x, t): \rho(x, t)=0\}. \tag{5.4}$$

现在对任何函数 $\varphi(x, t)\in C_0^\infty(\Pi_T)$, 我们有

$$\iint_{\Pi_T}(\varphi_t v^l(x, t)+\varphi_x f(v^l(x, t)))dx\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi v^l(x, 0)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{m-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, nh)(v_-^{ln}-v_j^{ln})dx$$

$$=\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}\varphi_j^n(v_-^{ln}-v_j^{ln})dx+\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\varphi-\varphi_j^n)(v_-^{ln}-v_j^{ln})dx\equiv I_1^l+I_2^l$$

其中
$$I_1^l=\sum_{j,n}\varphi_j^n\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}\left[v^l(x, nh-0)-\frac{1}{2l}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}v^l(x, nh-0)\right]dx\equiv 0,$$

$$|I_2^l|=\left|\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\varphi-\varphi_j^n)(v_-^{ln}-v_j^{ln})dx\right|$$

$$\leqslant Cl^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{C_0}\left\{\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}|v_-^{ln}-v_j^{ln}|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant Cl^{\frac{1}{2}}\to 0,\ (l\to 0).$$

所以

$$\lim_{l\to 0}\iint_{\Pi_T}(\varphi_t v^l(x, t)+\varphi_x f(v^l(x, t)))dx\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, 0)v_0(x)dx=0. \tag{5.5}$$

由(5.3)和(5.4),立即得到

$$\lim_{l\to 0}\iint_{\Pi_T\wedge\{(x,t):\rho(x,t)=0\}}(\varphi_t v^l(x, t)+\varphi_x f(v^l(x, t)))dx\,dt=0. \tag{5.6}$$

而

$$(\rho^l(x, t), u^l(x, t))\to(\rho(x, t), u(x, t)), \text{ a. e. }(x, t)\in\{(x, t): \rho(x, t)>0\}$$

故利用控制收敛定理,得

$$\lim_{l\to 0}\iint_{\Pi_T\wedge\{(x,t):\rho(x,t)>0\}}(\varphi_t v^l(x, t)+\varphi_x f(v^l(x, t)))dx\,dt$$

$$=\iint_{\pi_T\cap\{(x,t):\rho(x,t)>0\}}\left\{\varphi_t\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\end{pmatrix}+\varphi_x\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p(\rho)\end{pmatrix}\right\}dx\,dt. \tag{5.7}$$

从(5.5)—(5.7),得到

$$\begin{cases}\displaystyle\iint_{\Pi_T}(\rho\varphi_t+\rho u\varphi_x)dx\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, 0)\rho_0(x)dx=0,\\ \displaystyle\iint_{\Pi_T}(\rho u\varphi_t+(\rho u^2+p(\rho))\varphi_x)dxdt+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, 0)\rho_0(x)u_0(x)dx=0.\end{cases} \tag{5.8}$$

又对任何(1.3)的弱熵-熵流对(η, q)和 $\varphi\in C_0^\infty(\Pi_T-\{t=0\})$, $\varphi\geqslant 0$, 有

$$\iint_{\Pi_T}(\eta(v^l)\varphi_t+q(v^l)\varphi_x)dx\,dt=\int_0^T\Sigma(\varphi)dt+\sum_{n=1}^{m-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ nh)(\eta(v_-^{ln})-\eta(v_j^{ln}))dx$$

$$=\int_0^T\Sigma(\varphi)\,dt+\sum_{j,n}\varphi_j^n\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta(v_-^{ln})-\eta(v_i^{ln}))dx$$

$$+\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\varphi(x,\ nh)-\varphi_j^n)(\eta(v_-^{ln})-\eta(v_j^{ln}))\,dx \qquad (5.9)$$

注意到 η 是凸熵,满足点熵条件 $\sigma[\eta]-[q]\geqslant 0$, 故

$$\int_0^T\Sigma(\varphi)dt\geqslant 0 \qquad (5.10)$$

而

$$\sum_{j,n}\varphi_j^n\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}(\eta(v_-^{ln})-\eta(v_j^{ln}))dx$$

$$=\sum_{j,n}\varphi_j^n\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}dx\int_0^1(1-\theta)\nabla^2\eta(v_j^{ln}+\theta(v_-^{ln}-v_j^{ln}))(v_-^{ln}-v_j^{ln})^2d\theta\geqslant 0. \qquad (5.11)$$

$$\left|\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}|(\varphi-\varphi_j^n)(\eta(v_-^{ln})-\eta(v_j^{ln}))dx\right|\leqslant\|\nabla\eta\|_{L^\infty}\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}|v_-^{ln}-v_j^{ln}|\,|\varphi-\varphi_j^n|dx$$

$$\leqslant Cl^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{C_0^1}\left\{\sum_{j,n}\int_{(j-1)l}^{(j+1)l}|v_-^{ln}-v_j^{ln}|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant Cl^{\frac{1}{2}}\to 0,\ (l\to 0), \qquad (5.12)$$

类似于前面的讨论,并利用(5.9)—(5.12)知$(\rho(x,\ t),\ u(x,\ t))$满足 Lax 熵条件

$$\iint_{\Pi_T}(\eta\varphi_t+q\varphi_x)dx\,dt\geqslant 0,\quad 对任何非负\ \varphi\in C_0^\infty(\Pi_T-\{t=0\}),$$

这就完成了定理的证明. ∎

参考文献

[1] Lax, P. D., Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 159—193.

[2] Oleinik, O., Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. Usp. Mat. Nauk. (N. S.), 12 (1957), 3—73.

[3] Conway, E. and J. Smoller, Global solutions of the Cauchy problem for quasilinear first-order equations in several space variable. *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966), 95—105.

[4] Nishida, T., Global solution for an initial-boundary-value problem for a quasilinear hyperbolic system. *Proc. Jap. Acad.*, **44** (1968), 642—646.

[5] Glimm, J., Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 95—105.

[6] 张 同、郭于法,气体动力学方程组的一类始值问题. 数学学报, **15** (1965), 386—396.

[7] 丁夏畦、张同,王靖华、肖玲、李才中,拟线性双曲型守恒律组的整体解的研究. 中国科学, **16** (1973), 239—254.

[8] Nishida, T. and J. Smoller, Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, **26** (1973), 183—200.

[9] 林龙威,气体动力学方程组整体解的存在性,吉林大学自然科学学报, **1** (1978), 96—106.

[10] DiPerna, R. J., Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics. *Comm. Math. Phys.*, **91** (1983), 1—30.

[11] 吴新谋,数学物理方程讲义,高等教育出版社, 1956.

[12] Tartar, T., Compensated compactness and applications to partial differential equations. In: Research notes in mathematics, nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. 4, Knops, R. J. (ed.), New York: Pitman Press, 1979.

[13] 丁夏畦、陈贵强,补偿列紧理论与气体动力学方程组, 1985 年刘徽数学研究中心论文集.

[14] Smoller, J., Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[15] DiPerna, R. J. Convergence of approximate solutions to conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82** (1983), 27—70.