

计算流体力学作业 6

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

May 4, 2021

编写一维完全气体 Euler 方程组的 LF 格式, MacCormack 格式, 和一阶精度的显式迎风格式 (Roe 格式) 的程序, 并计算讲义 (CFDLect04-com01_cn.pdf) 的第 101-102 页的问题 2 和问题 4.

$$\begin{cases} \left(\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}_x \right) = 0, \\ p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right), \quad \gamma = 1.4. \end{cases} \quad (0.1)$$

计算动图可点击 <https://www.bilibili.com/video/bv17N411f7tX> 查看.

代码可点击 <https://github.com/circlelq/Computational-Fluid-Dynamics/tree/main/code1> 查看.

1

初始条件

$$\mathbf{U} = \begin{cases} (1, 0, 2.5)^T, & x < 0.3, \\ (0.125, 0, 0.25)^T, & x > 0.3. \end{cases} \quad (1.1)$$

计算区间为 $[0, 1]$, 输出时刻 $t = 0.2$.

如图 1.1 所示为初始条件, 密度 ρ 和压强 p 有一个初始间断, 速度 u 都为 0. 之后的格式都采用固定 CFL 数, 根据 CFL 数来求 dt . 其中 N 是 x 的网格数. 之

后的输出结果都是 $t = 0.2$ 时刻的结果, 除非震荡剧烈, 无法继续计算.

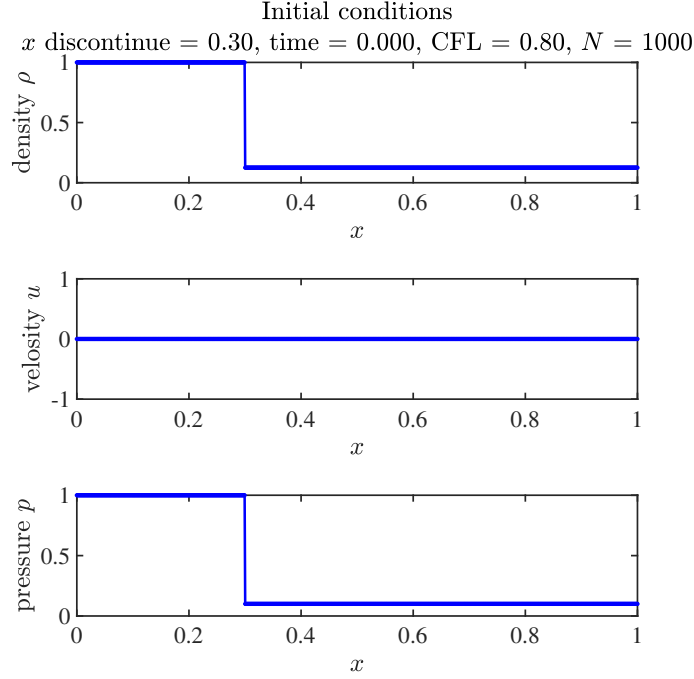


图 1.1. 初始条件.

LF 格式

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_{j-1}^n \right) - \frac{1}{2} r \left(\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_{j-1}^n \right). \quad (1.2)$$

其中 $r = \tau/h$, 稳定性条件为

$$|\mathbf{u}|_{\max} \frac{\tau}{h} \leq 1. \quad (1.3)$$

如图 1.2 所示, LF 格式是 TVD 的, 所以无震荡. 可以发现, 计算结果为左边是一个稀疏波, 中间是一个接触间断, 右边是一个激波.

MacCormack 格式

MacCormack 格式 [R.W. MacCormack, AIAA Paper No. 1969-354 (1969)]

$$\begin{aligned} u(x_j, t_{n+1}) &= u(x_j, t_n) + \tau (u_t)_j^n + \frac{1}{2} \tau^2 (u_{tt})_j^n + \mathcal{O}(\tau^3) \\ &= \frac{1}{2} u(x_j, t_n) + \frac{1}{2} (\bar{u} + \tau \bar{u}_t)_j^n + \mathcal{O}(\tau^3), \quad \bar{u} := u + \tau u_t \end{aligned} \quad (1.4)$$

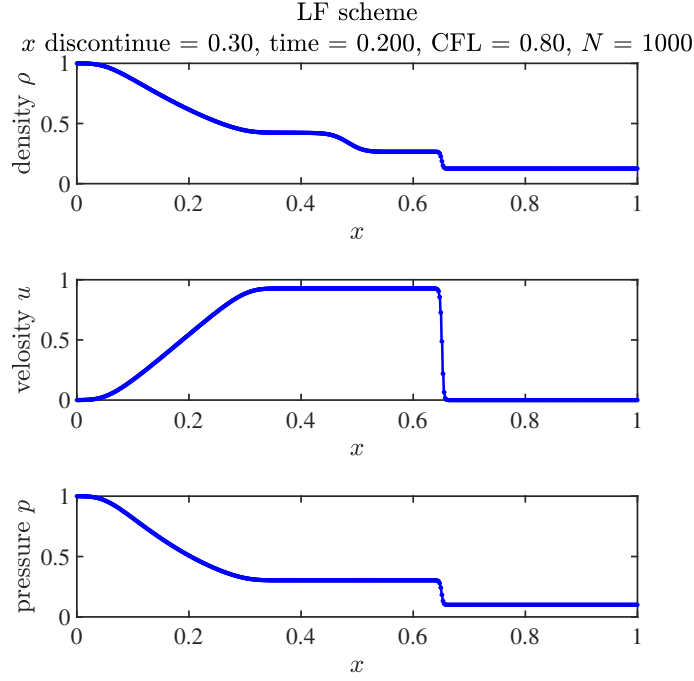


图 1.2. LF 格式计算结果.

$$\begin{cases} \bar{u}_j^* = u_j^n - \frac{\tau}{h} \left(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n) \right), \\ u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_j^n + \bar{u}_j^* \right) - \frac{\tau}{2h} \left(f(\bar{u}_j^*) - f(\bar{u}_{j-1}^*) \right). \end{cases} \quad (1.5)$$

或

$$\begin{cases} \bar{u}_j^* = u_j^n - \frac{\tau}{h} \left(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n) \right), \\ u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_j^n + \bar{u}_j^* \right) - \frac{\tau}{2h} \left(f(\bar{u}_{j+1}^*) - f(\bar{u}_j^*) \right). \end{cases} \quad (1.6)$$

如图 1.3 所示, MacCormack 格式震荡严重, 导致 dt 只能取非常小的值, 所以经过 300 步的计算后还是停留在 $t = 0.001$.

Roe 格式

(P.L. Roe, JCP, 43, 1981, 357 – 372/135, 1997, 250 – 258)

$$\hat{F}(U_j, U_{j+1}) = \frac{F(U_j) + F(U_{j+1})}{2} - \frac{1}{2} \left| \hat{A}_{j+1/2} \right| (U_{j+1} - U_j). \quad (1.7)$$

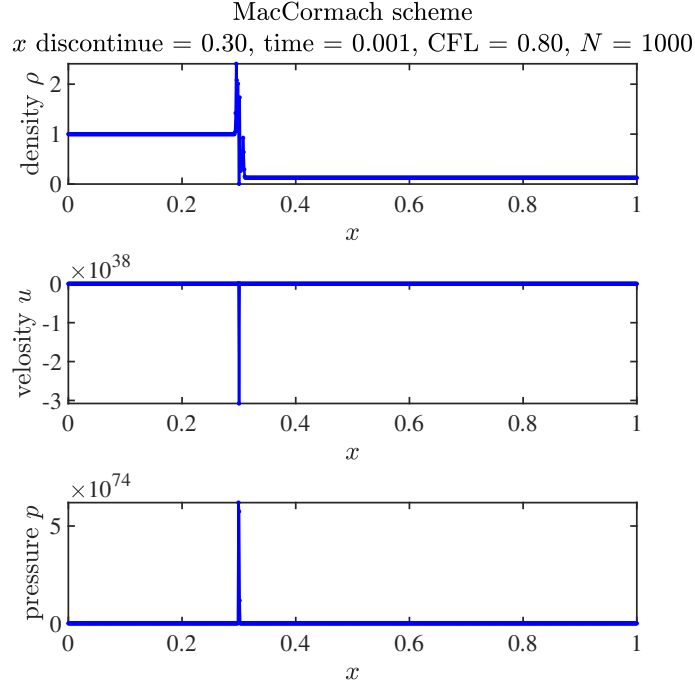


图 1.3. Mac 格式计算结果.

其中 $|\hat{\mathbf{A}}|$ 定义为: $|\hat{\mathbf{A}}| = \mathbf{R}|\hat{\mathbf{\Lambda}}|\mathbf{R}^{-1}$, $|\hat{\mathbf{\Lambda}}| = \text{diag}\left\{|\hat{\lambda}_1|, \dots, |\hat{\lambda}_m|\right\}$, \mathbf{R} 为 $\hat{\mathbf{A}}$ 的右特征向量矩阵, $\hat{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}\left\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m\right\}$, 即 $\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{R} = \hat{\mathbf{\Lambda}}$,

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{R}^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - a & u & u + a \\ H - ua & \frac{1}{2}u^2 & H + ua \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} u - a & & \\ & u & \\ & & u + a \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_j). \quad (1.10)$$

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - r \left(\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (1.11)$$

对于理性气体, 通过如下方法构造 $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \frac{\sqrt{\rho_r}\rho_\ell + \sqrt{\rho_\ell}\rho_r}{\sqrt{\rho_\ell} + \sqrt{\rho_r}} = \sqrt{\rho_\ell\rho_r} = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_\ell})\right]^2, \\ \bar{u} = \frac{\sqrt{\rho_\ell}u_\ell + \sqrt{\rho_r}u_r}{\sqrt{\rho_\ell} + \sqrt{\rho_r}}, \\ \bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_\ell}H_\ell + \sqrt{\rho_r}H_r}{\sqrt{\rho_\ell} + \sqrt{\rho_r}}. \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-2}{2}u^3 - \frac{a^2u}{\gamma-1} & \frac{3-2\gamma}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} & \gamma u \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

$$a = \sqrt{\gamma p / \rho}, \quad H = (E + p) / \rho, \quad p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right). \quad (1.14)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}}). \quad (1.15)$$

因为

$$E = \frac{1}{\gamma} \left[H\rho + (\gamma - 1) \frac{1}{2} \rho u^2 \right], \quad p = H\rho - E, \quad (1.16)$$

所以

$$\bar{a}^2 = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} = \gamma \frac{\bar{H}\bar{\rho} - \bar{E}}{\bar{\rho}} = \gamma \frac{\bar{H}\bar{\rho} - \frac{1}{\gamma} [\bar{H}\bar{\rho} + (\gamma - 1) \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}^2]}{\bar{\rho}} = (\gamma - 1) \left(\bar{H} - \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right). \quad (1.17)$$

如图 1.4 所示, Roe 格式也无震荡.

2

初始条件

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.333333), & x < -4, \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1), & x \geq -4. \end{cases} \quad (2.1)$$

计算区间为 $[-5, 5]$, 其中在 $x = \pm 5$ 边界处 $\partial_x \rho = \partial_x u = \partial_x p = 0$. 输出时刻为 $t = 1.8$.

如图 2.1 所示为初始条件.

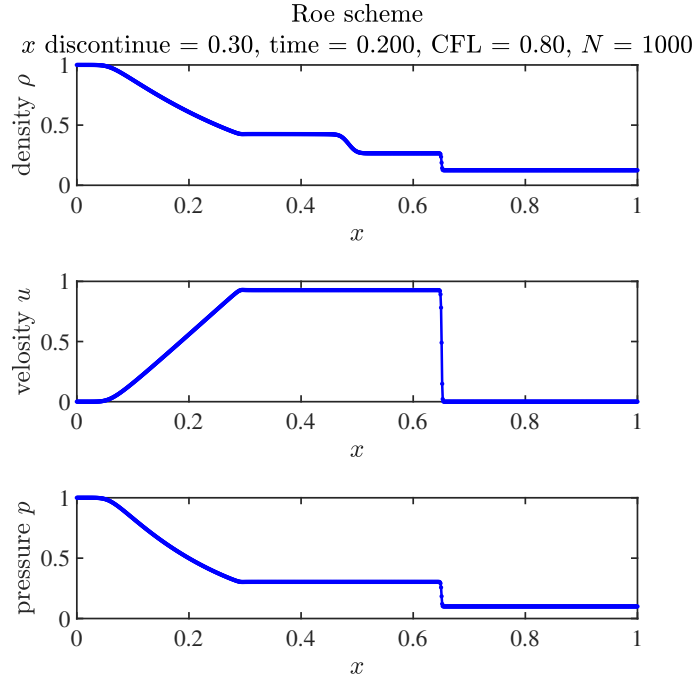


图 1.4. Roe 格式计算结果.

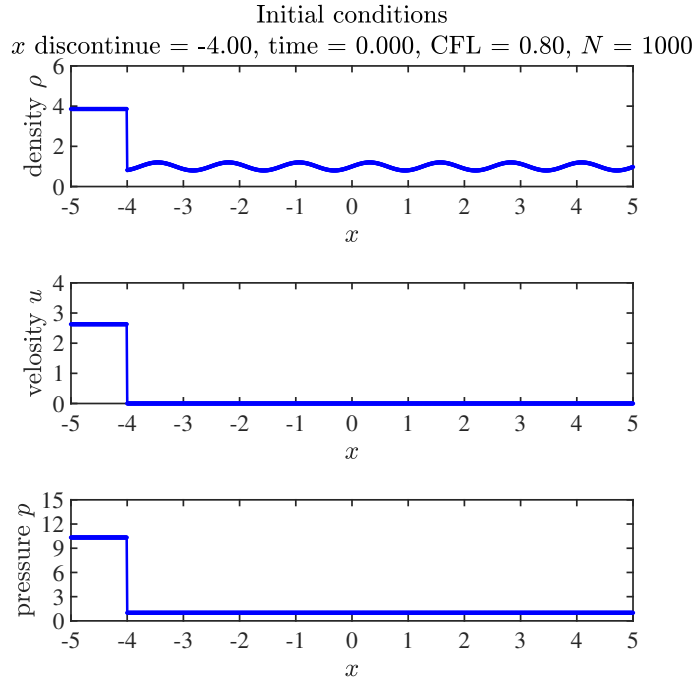


图 2.1. 初始条件.

LF 格式

如图 2.2 所示. 可以发现, 计算结果为一激波向右传播, 耗散性较强, 磨平了初始的密度浮动.

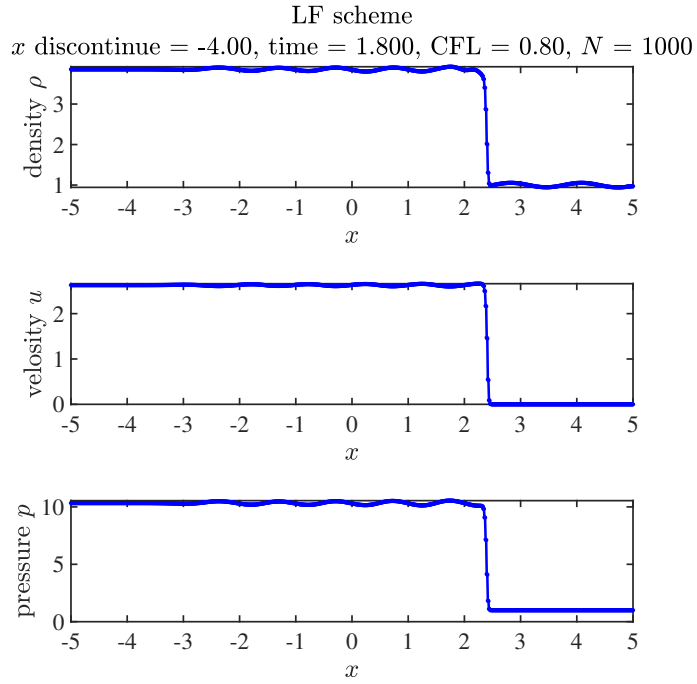


图 2.2. LF 格式计算结果.

MacCormack 格式

如图 2.3 所示, MacCormack 格式稍微有一些震荡, 尤其是在间断处间断明显, 但是能完成计算. 此格式的耗散性较弱.

Roe 格式

如图 2.4 所示, Roe 格式也无震荡.

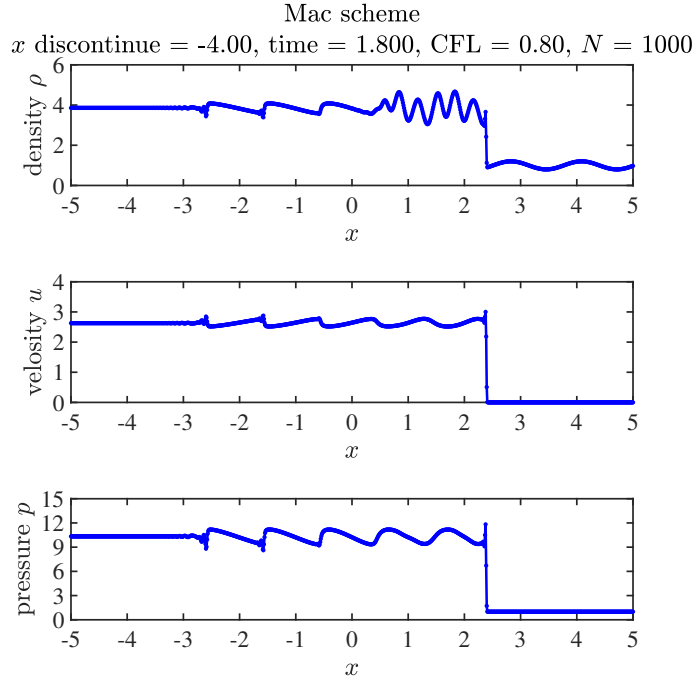


图 2.3. Mac 格式计算结果.

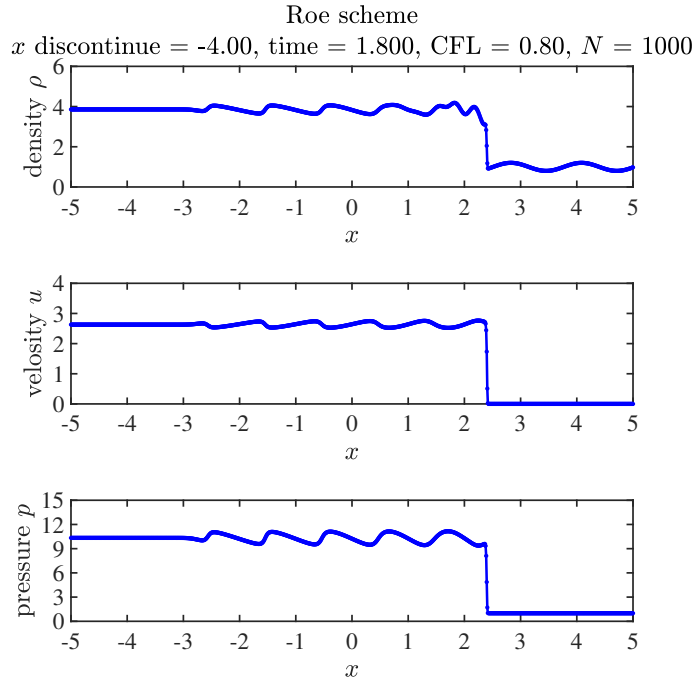


图 2.4. Roe 格式计算结果.