计算流体力学作业 6

College of Engineering　2001111690　袁磊祺

April 20, 2021

1

证明: 显式的线性保单调格式是单调的.

证明. 设 U^n 是任意的网格函数, 令

$$\begin{cases} V_J^n = U_J^n, & j \neq J, \\ V_J^n > U_J^n, & j = J. \end{cases} \tag{1.1}$$

接下来我们证明对所有的 j, $V_j^{n+1} \geq U_j^{n+1}$, 这意味这格式是单调的.

设 W^n 是单调的黎曼数据, 即

$$W_j^n = \begin{cases} U_J^n, & j < J, \\ V_J^n, & j \geq J. \end{cases} \tag{1.2}$$

所以 W_j^n 是不减的. 注意到对所有的 j

$$W_J^n = W_{j-1}^n + \left(V_j^n - U_j^n\right), \tag{1.3}$$

因为当 $j \neq J$ 时, 最后一项是 0. 又因为这个格式是线性的, 所以我们可以把式 (1.3) 变为

$$W_j^{n+1} = W_{j-1}^{n+1} + \left(V_j^{n+1} - U_j^{n+1}\right). \tag{1.4}$$

所以

$$V_j^{n+1} = U_j^{n+1} + \left(W_j^{n+1} - W_{j-1}^{n+1}\right). \tag{1.5}$$

因为格式是保单调的, 并且 W^n 是单调的, 即 $W_{j-1}^n \leqslant W_j^n$, 我们有 $W_j^{n+1} - W_j^{n+1} \geq 0$, 由式 (1.5) 可得 $V_j^{n+1} \geq U_j^{n+1}$. 这表明这个格式是单调的.

□

2

证明: 线性保单调方法最多一阶精度.

证明. 为简单起见, 仅对一个空间变量的情形证明. 这时单调差分格式可写为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} =& H\left(u_{i-l}^n, u_{i-l+1}^n, \cdots, u_{i+l}^n\right) \\ =& u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{f}\left(u_{i-l+1}^n, \cdots, u_{i+l}^n\right) - \bar{f}\left(u_{i-l}^n, \cdots, u_{j+l-1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 H 是每个参变量的非减函数, 且

$$\bar{f}(u, \cdots, u) = f(u). \tag{2.2}$$

首先证明几个恒等式. 令

$$\bar{u} = \left(u_{-l}, \cdots, u_{l-1}\right), \tag{2.3}$$

$$T\bar{u} = \left(u_{-l+1}, \cdots, u_l\right). \tag{2.4}$$

其中 $u_j = u(x + j\Delta x, t)$. 由式 (2.1) 和 (2.2) 则有

$$H(u, \cdots, u) = u. \tag{2.5}$$

式 (2.2) 两端对 u 求导得

$$\sum_{j=-l}^{l} \bar{f}_j(u, \cdots, u) = a(u), \tag{2.6}$$

其中 $a(u) = f'(u)$, 下标 j 表示对第 j 个参变量的偏导数, 当 $j \geqslant l$ 或 $j \leqslant -l-1$ 时 $\bar{f}_j \equiv 0$. 对式 (2.1) 的第二个等式两端求导则有

$$H_k = \delta_{0,k} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{f}_{k-1}(T\bar{u}) - \bar{f}_k(\bar{u})\right], \quad -l \leqslant k \leqslant l, \tag{2.7}$$

$$H_{k,m} = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{f}_{k-1,m-1}(T\bar{u}) - \bar{f}_{k,m}(\bar{u})\right], \quad -l \leqslant m \leqslant l. \tag{2.8}$$

从上述等式可得

$$\sum_{k=-1}^{l} H_k(u,\cdots,u)=\sum_{k}\delta_{0,k}=1, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-l}^{l} kH_k(u,\cdots,u)&=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k}\left(\bar{f}_{k-1}-\bar{f}_k\right)k=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k}[(k+1)-k]\bar{f}_k\\&=-\frac{\Delta t}{\Delta x}a(u),\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k,m=-l}^{l}(k-m)^2H_{k,m}(u,\cdots,u)&=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k,\infty}(k-m)^2\left[\bar{f}_{k,m}-\bar{f}_{k-1,m-1}\right]\\&=\sum_{k,m}(k-m)^2\bar{f}_{k,m}-\sum_{k,m}[k-1-(m-1)]^2\bar{f}_{k-1,m-1}\\&=0.\end{aligned} \tag{2.11}$$

由 Taylor 展开及式 (2.5) 则有

$$\begin{aligned}H\left(u_{-l},u_{-l+1},\cdots,u_l\right)=&\,H\left(u_0,u_0,\cdots,u_0\right)+\sum_{i=-1}^{l}H_j\left(u_0,\cdots,u_0\right)\left(u_j-u_0\right)\\&+\frac{1}{2}\sum_{k,m}H_{k,m}\left(u_0,\cdots,u_0\right)\left(u_k-u_0\right)\left(u_m-u_0\right)+\mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\\=&\,u_0+\Delta xu_x\sum_{j}jH_j+\frac{1}{2}\Delta x^2u_{xx}\sum_{j}j^2H_j\\&+\frac{1}{2}\Delta x^2u_x^2\sum_{k,m}kmH_{k,m}+\mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\\=&\,u_0+\Delta xu_x\sum_{j}jH_j+\frac{1}{2}\Delta x^2\left[\sum_{j}j^2H_ju_x\right]_x\\&+\frac{1}{2}\Delta x^2u_x^2\sum_{k,m}H_{k,m}(km-k^2)+\mathcal{O}\left(\Delta x^3\right).\end{aligned} \tag{2.12}$$

由式 (2.10) 有

$$\Delta xu_x\sum jH_j=\Delta xu_x\left[-\frac{\Delta t}{\Delta x}a(u)\right]=-\Delta tf(u), \tag{2.13}$$

利用对称性 $H_{k,m}=H_{m,k}$ 及式 (2.11), 则有

$$\sum_{k,m}H_{k,m}(km-k^2)=-\frac{1}{2}\sum H_{k,m}(k-m)^2=0. \tag{2.14}$$

因此差分格式的 Taylor 展式为

$$
\begin{aligned}
&H(u(x-l\Delta x,t),\cdots,u(x+l\Delta x,t))\\
&=u(x,t)-\Delta t f(u)_x+\left(\frac{1}{2}\Delta x^2\right)\cdot\left\{\sum_{j=-l}^{l} j^2 H_j(u(x,t),\cdots,u(x,t))u_x(x,t)\right\}_x+\mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

如果 u 是一维守恒律方程式的光滑解, 则有

$$
u(x,t+\Delta t)=u(x,t)-\Delta t f(u)_x+\left(\frac{1}{2}\Delta t^2\right)\left[a^2(u)u_x\right]_x+\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right), \tag{2.16}
$$

因此截断误差为

$$
u(x,t+\Delta t)-H(u(x-l\Delta x,t),\cdots,u(x+l\Delta x,t))=-(\Delta t)^2\left[\beta\left(u,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_*\right]_x+\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right), \tag{2.17}
$$

其中

$$
\beta(u,\lambda)=\frac{1}{2\lambda^2}\sum_{j=-l}^{l} j^2 H_j(u,\cdots,u)-\frac{1}{2}a^2(u) \tag{2.18}
$$

由于格式是单调的, 所以 $H_j \geqslant 0$, 再利用 式 (2.10) 及 Schwarz 不等式就得到

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 a^2(u)&=\left(\sum_j jH_j\right)^2=\left(\sum j\sqrt{H_j}\sqrt{H_j}\right)^2\\
&\leqslant \sum j^2 H_j\cdot\sum H_j=\sum j^2 H_j.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

由此可知 $\beta(u,\lambda)\geqslant 0$, 而等号只有当 $j\sqrt{H_j}=\sqrt{H_j}(j=-l,\cdots,l)$ 满足时才成立. 这意味着除 $j=1$ 外, 所有的 $H_j=0$, 也即 H 仅与 u^n_{j+1} 有关. 这样的格式是没有意义的. 所以式 (2.17) 右端第一项的系数不为 0, 定理得证.

□

3

证明讲义 (CFDLect05-com02_cn.pdf) 的第 11 页的引理.

引理: 令 Q 是具有如下形式的差分算子

$$
(\mathcal{Q}\cdot u)_j=u_j+C_{j+\frac{1}{2}}\Delta u_j-D_{j-\frac{1}{2}}\Delta u_{j-1}, \tag{3.1}
$$

则

1. 如果对所有 j

$$C_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \quad D_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \quad C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}} \leqslant 1, \tag{3.2}$$

则 $\mathcal{Q}$ 为 TVD;

2. 如果对所有 j

$$-\infty < C \leqslant C_{j+\frac{1}{2}}, D_{j+\frac{1}{2}} \leqslant 0, \tag{3.3}$$

则 $\mathcal{Q}$ 为 TVI.

证明.

1

由式 (3.1) 得

$$(\mathcal{Q} \cdot u)_{j+1} = \; u_{j+1} + C_{j+\frac{3}{2}} \Delta u_{j+1} - D_{j+\frac{1}{2}} \Delta u_j \tag{3.4}$$

式 (3.4) 减式 (3.1) 得

$$\begin{aligned} \left|\Delta(\mathcal{Q} \cdot u)_j\right| &= \left|\Delta u_j + C_{j+\frac{3}{2}} \Delta u_{j+1} - C_{j+\frac{1}{2}} \Delta u_j - D_{j+\frac{1}{2}} \Delta u_j + D_{j-\frac{1}{2}} \Delta u_{j-1}\right| \\ &= \left|D_{j-\frac{1}{2}} \Delta u_{j-1} + \left(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}}\right) \Delta u_j + C_{j+\frac{3}{2}} \Delta u_{j+1}\right| \\ &\leqslant D_{j-\frac{1}{2}} \left|\Delta u_{j-1}\right| + \left(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}}\right) \left|\Delta u_j\right| + C_{j+\frac{3}{2}} \left|\Delta u_{j+1}\right|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

因为对所有 j

$$C_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \quad D_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \quad C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}} \leqslant 1, \tag{3.6}$$

所以有上面的不等式, 然后对 j 求和

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}(\mathcal{Q} \cdot u) &= \sum_j \left|\Delta(\mathcal{Q} \cdot u)_j\right| \\ &\leqslant \sum_j D_{j-\frac{1}{2}} \left|\Delta u_{j-1}\right| + \sum_j \left(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}}\right) \left|\Delta u_j\right| + \sum_j C_{j+\frac{3}{2}} \left|\Delta u_{j+1}\right| \\ &= \sum_j \left|\Delta u_j\right| = \mathrm{TV}(u), \end{aligned} \tag{3.7}$$

所以差分算子是 TVD.

2

同样的, 式 (3.4) 减式 (3.1) 并移项得

$$\Delta(\mathcal{Q}\cdot u)_j - D_{j-\frac{1}{2}}\Delta u_{j-1} - C_{j+\frac{3}{2}}\Delta u_{j+1} = \left(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta u_j. \tag{3.8}$$

两边取绝对值, 并利用三角不等式得

$$\left|\Delta(\mathcal{Q}\cdot u)_j\right| - D_{j-\frac{1}{2}}\left|\Delta u_{j-1}\right| - C_{j+\frac{3}{2}}\left|\Delta u_{j+1}\right| \geqslant \left(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta u_j. \tag{3.9}$$

然后对式子两边求和得

$$\sum_j\left|\Delta(\mathcal{Q}\cdot u)_j\right| - \sum_j D_{j-\frac{1}{2}}\left|\Delta u_{j-1}\right| - \sum_j C_{j+\frac{3}{2}}\left|\Delta u_{j+1}\right| \geqslant \sum_j\left(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta u_j. \tag{3.10}$$

移项得

$$\mathrm{TV}(\mathcal{Q}\cdot u) \geqslant \mathrm{TV}(u). \tag{3.11}$$

□

4

设讲义 (CFDLect05-com02_cn.pdf) 的第 39 页中对流方程的系数 $a < 0$, 类似 (4.5) 的做法, 给出和讨论相关 TVD 格式及限制器.

$$u_t + a u_x = 0, \tag{4.1}$$

取 $\hat{f}^H = \hat{f}^{LW}, \quad \hat{f}^L = \hat{f}^U$(一阶迎风).

如果 $a < 0$, 则可将 LW 格式改写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) + \frac{1}{2}\nu(1+\nu)\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right), \tag{4.2}$$

其中 $\nu = a\tau/h$.

可以将 LW 格式看作是在迎风格式上加了一校正项得到的, 此时数值通量又可写为

$$\hat{f}^{LW} = a u_{j+1} - \frac{1}{2}a(1+\nu)\left(u_{j+1} - u_j\right), \tag{4.3}$$

由于 LW 格式不是 TVD 的, 所以我们需要修正它, 以便得到一个具有 TVD 性质的高分辨通量限制器方法. 思想是加一个有限制的反扩散通量于一阶格式, 具体是将式 (4.2) 修改为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\nu\Delta_x^+u_j^n+\Delta_x^-\left(\varphi_{j+1}^n\frac{1}{2}\nu(1+\nu)\Delta_x^+u_j^n\right), \tag{4.4}$$

这里 φ_j 是某种形式的 limiter, 取值为非正, 以便保持反扩散项的符号. 下面的任务是定义 φ_j.

将式 (4.4) 改写为另一种增量形式:

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}&=u_j^n-\left[\nu-\frac{1}{2}\nu(1+\nu)\frac{\varphi_{j+1}\Delta_x^+u_j^n-\varphi_j\Delta_x^-u_j^n}{\Delta_x^+u_j^n}\right]\Delta_x^+u_j^n\\&=:u_j^n-D_{j-\frac{1}{2}}^n\Delta_x^+u_j^n,\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中

$$D_{j-\frac{1}{2}}^n=\nu\left\{1-\frac{1}{2}(1+\nu)\left[\varphi\left(r_{j+1}\right)-r_j\varphi\left(r_j\right)\right]\right\}, \tag{4.6}$$

设 Φ 为 $\left|\varphi\left(r_{j+1}\right)-r_j\varphi\left(r_j\right)\right|$ 的上界, 即

$$\left|\varphi\left(r_{j+1}\right)-r_j\varphi\left(r_j\right)\right|\leqslant\Phi, \tag{4.7}$$

其中

$$r_j=\frac{\Delta_x^-u_j}{\Delta_x^+u_j}, \tag{4.8}$$

则有

$$\nu\left(1+\frac{1}{2}(1+\nu)\Phi\right)\leqslant D_{j-\frac{1}{2}}\leqslant\nu\left(1-\frac{1}{2}(1+\nu)\Phi\right). \tag{4.9}$$

如果格式式 (4.5) 中增量系数满足

$$-1\leqslant D_{j-\frac{1}{2}}\leqslant 0, \tag{4.10}$$

则格式式 (4.4) 为 TVD 的. 由此得:

$$\Phi\leqslant-\frac{2}{\nu},\quad \Phi\leqslant\frac{2}{1+\nu}, \tag{4.11}$$

即需要 $\Phi\leqslant\min\left\{-\frac{2}{\nu},\frac{2}{1+\nu}\right\}\leqslant 2$. 如果除了需要 $\varphi(r)$ 非正, 也假设, 当 $r\leqslant 0$ 时, $\varphi(r)=0$, 则由式 (4.7) 及 $\Phi\leqslant 2$ 得

$$-2\leqslant\varphi(r),r\varphi(r)\leqslant 0 \tag{4.12}$$

这是格式式 (4.4) 为 TVD 的充分条件.

5

证明标量方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 的 LF 格式在 CFL 条件下满足离散的商不等式.(提示: 格式两边乘以 $v_j^{n+1} := \eta'\left(u_j^{n+1}\right)$)

证明. 对于 LF 格式,

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\lambda}{2}\left(f\left(u_{j+1}^n\right) - f\left(u_{j-1}^n\right)\right), \tag{5.1}$$

是相容的守恒型差分格式, 因为

$$\hat{f}_{1+\frac{1}{2}}^n = \hat{f}\left(u_j^n, u_{j+1}^n\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(u_j^n\right) + f\left(u_{j+1}^n\right)\right] - \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right)\frac{h}{\tau}, \tag{5.2}$$

所以 $\hat{f}(u,u) = f(u)$.

下面证 LF 格式在 CFL 条件

$$\frac{\tau}{h}\max\left\{\left|f'(u)\right|\right\} \leqslant 1 \tag{5.3}$$

下是单调的.

因为 H 可以表示成

$$H\left(u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n\right) = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\tau}{2h}\left(f\left(u_{j+1}^n\right) - f\left(u_{j-1}^n\right)\right), \tag{5.4}$$

当式 (5.3) 满足时, 有

$$\frac{\partial H}{\partial u_{j\pm1}^n} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{\Delta t}{\Delta x} f'\left(u_{j\pm1}^n\right)\right) \geqslant 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j^n} = 0. \tag{5.5}$$

所以 LF 格式是单调的.

根据 CFDLect04-com01_cn.pdf 中 P92 的定理: 如果守恒型单调差分格式相容, 则它满足离散的熵条件, 由此得证.

□