思考题 4

袁磊祺

2021 年 3 月 29 日

1

求证:

$\lim\limits_{x\to+\infty,\ y\to-\infty}[f(x)+g(y)]$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y)$ 同时存在.

证明.

(1) 充分条件

设 $\lim\limits_{x\to+\infty,\ y\to-\infty}[f(x)+g(y)]=A,$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1,N_2>0,$ 当 $x_1>N_1,\ y_i<-N_2,(i=1,2)$ 时有

$$\left|f\left(x_1\right)+g\left(y_i\right)-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

$\therefore \forall\varepsilon>0,\ \exists N_2>0,\ \forall y_1,y_2<-N_2$ 有

$$\begin{aligned}\left|g\left(y_1\right)-g\left(y_2\right)\right| &= \Big|\big(f\left(x_1\right)+g\left(y_1\right)-A\big)-\big(f\left(x_1\right)+g\left(y_2\right)-A\big)\Big| &(2)\\ &< \left|f\left(x_1\right)+g\left(y_1\right)-A\right|+\left|f\left(x_1\right)+g\left(y_2\right)-A\right|<\varepsilon &(3)\end{aligned}$$

$\therefore \lim\limits_{y\to-\infty} g(y)$ 存在

同理可证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

(2) 必要条件

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y)$ 同时存在, 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a,\quad \lim\limits_{y\to-\infty} g(y)=b$, 则

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1>0$, 当 $x>N_1$ 时 $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2},\ \exists N_2>0$, 当 $y<-N_2$ 时, $|g(y)-b|<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $|f(x)+g(y)-(a+b)|\leqslant|f(x)-a|+|g(y)-b|<\varepsilon$, 即有

$$\lim_{x\to+\infty,\ y\to-\infty}[f(x)+g(y)]=a+b. \tag{4}$$

□

2

设二元函数 $f(x,y)$ 在圆周 $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 上连续.

证明: $f(x,y)$ 在 C 上达到上确界 M 和下确界 m, 且取属于 (m,M) 的值至少两次.

证明.

(1) 在圆周 $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 上

$$\begin{cases} x=x(t)=x_0+R\cos t \\ y=y(t)=y_0+R\sin t \end{cases},\ t\in[\theta,2\pi+\theta] \tag{5}$$

则 $f(x,y)=f(x(t),y(t))=g(t)$ 连续.

$g(t)$ 连续性证明: x,y 是 t 的连续函数, $\therefore\ \forall\delta>0,\ \exists\delta_1,\delta_2>0$, 当 $|t-t^*|<\delta_1$ 时有 $|x-x^*|<\frac{\delta}{2}$, 当 $|t-t^*|<\delta_2$ 时有 $|y-y^*|<\frac{\delta}{2}$. 又由 $f(x,y)$ 连续性, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 只要 $(x,y)\in C,\ \sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2}<\delta$, 就有 $\left|f(x,y)-f(x^*,y^*)\right|<\varepsilon$.

因此 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $|t-t^*|<\delta_0$ 时有

$$(x,y)\in C,\sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2}<\sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}<\delta, \tag{6}$$

进而有 $\left|g(t)-g(t^*)\right|=\left|f(x,y)-f(x^*,y^*)\right|<\varepsilon,\quad \therefore g(t)$ 是 t 的连续函数.

$\therefore g(t)$ 在闭区间 $[\theta,2\pi+\theta]$ 有界, 且 $\exists t_1,\ t_2\in[\theta,2\pi+\theta]$, s.t.$g(t_1)=m,\ g(t_2)=M($ 最大值与最小值定理). 即 $f(x_1,y_1)=m,\ f(x_2,y_2)=M$, 其中 $x_i=x(t_i),\ y_i=y(t_i),\ (i=1,2)$.

(2) 若 $m=M$, 则结论显然. $m\neq M$ 时, 设 $g(\theta_1)=g(\theta_1+2\pi)=f(x_1,y_1)=m,\ g(\theta_2)=f(x_2,y_2)=M$, 则圆周可分为两段

$$\Gamma_1:\begin{cases} x=x(t)=x_0+R\cos t \\ y=y(t)=y_0+R\sin t \end{cases},t\in[\theta_1,\theta_2]\,; \tag{7}$$

$$\Gamma_2:\begin{cases} x=x(t)=x_0+R\cos t \\ y=y(t)=y_0+R\sin t \end{cases},t\in[\theta_2,\theta_1+2\pi]\,. \tag{8}$$

则 $\forall\mu\in(m,M),\ \exists t_1^*\in(\theta_1,\theta_2)\,,t_2^*\in(\theta_2,\theta_1+2\pi)\,$, 满足 $g(t_1^*)=g(t_2^*)=\mu$. 相应即有 $f(x_1^*,y_1^*)=f(x_2^*,y_2^*)=\mu$.

$\square$

3

证明: 若 $f(x,y)$ 分别对每一个变量 x,y 是连续的, 且对其中一个单调, 则 $f(x,y)$ 是二元连续函数.

证明. 不妨设 $f(x,y)$ 对 y 单调.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1>0,\ \text{s.t. } x_0<x<x_0+\delta_1$ 时

$$\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{9}$$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_2>0,\ \text{s.t. } y_0<y<y_0+\delta_2$ 时

$$\left|f(x_0,y_0)-f(x_0,y)\right|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{10}$$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_3>0,\ \text{s.t. } x_0<x<x_0+\delta_3$ 时

$$\left|f(x,y_0+\delta_2)-f(x_0,y_0+\delta_2)\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

由以上三式可得 $\left|f(x,y_0+\delta_2)-f(x,y_0)\right|<\frac{3\varepsilon}{4}$.

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}\,$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)\,,y\in(y_0,y_0+\delta)$ 时, 由 f 关于 y 的单调性,

$$\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|<\left|f(x,y_0+\delta_2)-f(x,y_0)\right|<\frac{3\varepsilon}{4}. \tag{12}$$

$\therefore \left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$.

对于 (x_0, y_0) 左方和下方的邻域内类似有同上结论. $\therefore f(x,y)$ 二元连续.

$\square$