

1. 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, \vec{n} 为曲面 S 的单位外法向, $d(x, y, z)$

表示原点到 $(x, y, z) \in S$ 处切平面的距离, 求以下积分:

$$1) \iint_S \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$2) \iint_S d(x, y, z) d\sigma$$

$$3) \iint_S \frac{d\sigma}{d(x, y, z)}$$

2. 考虑空间 \mathbb{R}^3 中在原点电量为 Q 的电荷在 $\vec{r} = (x, y, z)$ 处产生的电场: $\vec{E} = \epsilon \frac{Q\vec{r}}{r^3}$, 这里

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 设 Ω 是 \mathbb{R}^3 的开区域, $\partial\Omega$ 充分光滑, \vec{n} 为 Ω 的外法向, 证明:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \begin{cases} 0 & (0, 0, 0) \notin \Omega \\ 4\pi\epsilon Q & (0, 0, 0) \in \Omega \end{cases}$$