思考题 9

袁磊祺

2021 年 5 月 4 日

1

设 $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, 且在 $\mathbb{R}^n$ 上 $\det \mathrm{D}f(x) \neq 0$, 又当 $|x| \to +\infty$ 时, $|f(x)| \to +\infty$.

求证: $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

证明. 即证 $\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, s.t. $f(x_0) = \xi$

$\because |x| \to +\infty$ 时, $|f(x)| \to +\infty$,

$\therefore \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| \to +\infty$ 时, $|f(x) - \xi| \to +\infty$,

$\therefore \exists x_0 \in \mathbb{R}^n,$ s.t. $|f(x) - \xi|$ 取最小值, 即 $|f(x) - \xi|^2$ 取最小值.

$\therefore \frac{\partial}{\partial x_i}|f(x) - \xi|^2 = 0$, 当 $x = x_0$,

即有 $\mathrm{D}f(x_0) \cdot \big(f(x_0) - \xi\big) = 0$.

又 $\det \mathrm{D}f(x) \neq 0,\ \therefore f(x_0) - \xi = 0$, 即 $f(x_0) = \xi$. $\square$

2

设 D 为有界凸域, 二元函数 $f(x, y)$ 在 $\bar{D}$ 上连续, 在边界上为常数, 在 D 内可微.

求证: D 内一定有一函数的临界点.

证明. $f(x, y)$ 在 $\bar{D}$ 上连续 $\Rightarrow$

$f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上可取到最大值和最小 $f_{\max}=f\left(x_1,y_1\right),f_{\min}=f\left(x_2,y_2\right)$.

若 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$ 同在边界上, 则 $f_{\max}=f_{\min},f=C,\quad f_x\equiv 0,f_y\equiv 0$.

若 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$ 不同在边界上, 则 D 内一定有一极值点 $\left(x_0,y_0\right)$, 则

$$f_x\left(x_0,y_0\right)=0,\quad f_y\left(x_0,y_0\right)=0. \tag{1}$$

□

3

(1) 求 $f(x,y,z)=x^ay^bz^c$ 在约束条件 $x+y+z=1$ 下的最大值, 其中 a,b,c 是正常数, x,y,z 非负.

(2) 证明对六个正数 a,b,c,u,v,w

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c\leq\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \tag{2}$$

成立.

(1) **解:** $f(x,y,z)=x^ay^bz^c=x^ay^b(1-x-y)^c$

$\ln f=a\ln x+b\ln y+c\ln(1-x-y)$

f 的最大值即 $\ln f$ 的最大值

求导

$$\begin{cases}\frac{a}{x}-\frac{c}{1-x-y}=0\\ \frac{b}{y}-\frac{c}{1-x-y}=0\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{1-x-y} \tag{3}$$

可得 $x=\frac{a}{a+b+c},y=\frac{b}{a+b+c},z=\frac{c}{a+b+c}$ 时取最大值 $\frac{a^ab^bc^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}$.

(2) **证明.** 令 $x=\frac{u}{u+v+w},\ y=\frac{v}{u+v+w},\ z=\frac{w}{u+v+w}$ 则由 (1) 有

$$\left(\frac{u}{u+v+w}\right)^a\left(\frac{v}{u+v+w}\right)^b\left(\frac{w}{u+v+w}\right)^c\leqslant\frac{a^ab^bc^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}, \tag{4}$$

即

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c\leqslant\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}. \tag{5}$$

□

4

设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2 \leq 1$ 上连续, 在 $x^2+y^2<1$ 上满足:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u, \tag{6}$$

且在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$, 证明:

(1) 当 $x^2+y^2 \leq 1$ 时, $u(x,y) \geq 0$;

(2) 当 $x^2+y^2 \leq 1$ 时, $u(x,y)>0$.

证明.

(1) 上可取得最小值 $u_0=u\left(x_0, y_0\right)$.

反证: 设 $\exists\left(x^{\prime}, y^{\prime}\right)$, 使得 $u\left(x^{\prime}, y^{\prime}\right)<0$, 则 $u_0=u\left(x_0, y_0\right)<0$, 且 $x_0^2+y_0^2<1$.

所以

$$\frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}=\frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^2} \geqslant 0, \frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0\right)}{\partial y^2} \geqslant 0, \tag{8}$$

即 $H_u\left(x_0, y_0\right)$ 至少是半正定.

$\frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0\right)}{\partial y^2}=u\left(x_0, y_0\right) \geqslant 0$, 与 $u_0=u\left(x_0, y_0\right)<0$ 矛盾, 所以 $u(x,y) \geqslant 0$.

(2) 已知 : $\frac{\partial^2 C \mathrm{e}^x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C \mathrm{e}^x}{\partial y^2}=C \mathrm{e}^x$, 可得

$$\frac{\partial^2 u-C \mathrm{e}^x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u-C \mathrm{e}^x}{\partial y^2}=u-C \mathrm{e}^x. \tag{9}$$

令 $v=u-C \mathrm{e}^x$, 则 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=v$,

因为在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$, 所以在 $x^2+y^2=1$ 存在最小值 $\bar{u}>0$.

取 C 使得 $C>0$, 且 $\bar{u}-C \mathrm{e}>0$, 则在 $x^2+y^2=1$ 上, $v>0$.

由 (1) 可知: 当 $x^2+y^2 \leq 1$ 时, $v(x,y) \geq 0$, 而 $u=v+C \mathrm{e}^x>0$.

$\square$