作业(四)

10.4.1 (1) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$

解：令 $t=1-x$，则 $\int_0^1 \frac{dx}{|\ln x|} = \int_0^1 \frac{dt}{|\ln(1-t)|} > \int_0^1 \frac{dt}{t}$ 发散

(2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\ln x}{1-x}\right| = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x^{\frac{1}{2}}\ln x}{1-x} \overset{L'H}{=\!=} 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} x^0\left|\frac{\ln x}{1-x}\right| = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-\ln x}{1-x} = 1$

收敛

(3) $\int_0^1 \ln x\ln(1-x)dx$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^0|\ln x\ln(1-x)| = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} x^0|\ln x\ln(1-x)| = \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\ln(1-x) = 0$

收敛

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$

解：若 $p,q<0$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\right| = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left|\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\right| = 0$，收敛

对于 $p,q\geq 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^p\frac{1}{|\sin^p x\cos^q x|} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p\frac{1}{\cos^q x} = 1$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q\frac{1}{|\sin^p x\cos^q x|} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sin^p x}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^q = 1$

故当 $0\leq p,q<1$ 时收敛

综上，$p,q<1$ 时收敛，否则发散

(6) $\int_0^1 x^\alpha\ln x\,dx$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^p|x^\alpha\ln x| = -\lim\limits_{x\to 0^+} x^{p+\alpha}\ln x = \begin{cases} 0, & p+\alpha>0 \\ +\infty, & p+\alpha\leq 0\end{cases}$

若收敛，则 $\begin{cases} p+\alpha>0 \\ \exists p,\ s.t.\ 0\le p<1 \end{cases} \Rightarrow \alpha>-1$

若发散，则 $\begin{cases} p+\alpha\le 0 \\ \exists p,\ s.t.\ p\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha\le -1$

(8) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$

解：若 $p=q$，则原式收敛

若 $p>q$，则

$$\lim_{x\to 1^-}\left|\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\right| = \lim_{x\to 1^-}\left|(p-1)x^{p-1}-(q-1)x^{q-1}\right| = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^r\left|\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\right| = \lim_{x\to 0^+}\left|\frac{x^{p+r-1}-x^{q+r-1}}{\ln x}\right|$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left|(p+r-1)x^{p+r-1}-(q+r-1)x^{q+r-1}\right|$$

若收敛，则 $\begin{cases} q+r-1>0 \\ \exists r,\ s.t.\ 0\le r<1 \end{cases} \Rightarrow q>0$

同理，若 $p<q$ 时有当 $p>0$ 时收敛

综上，当 $p,q>0$ 或 $p=q$ 时收敛，否则发散

10.4.2 (2) $\int_1^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx$

解：原式 $= \int_1^2 \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx + \int_2^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx$

$$\int_1^2 \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx = \int_1^2 \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)dx = \int_1^2 2\ln x\,dx$$

$$-\int_1^2 \ln(x+1)dx - \int_1^2 \ln(x-1)dx$$

$$= \int_1^2 2\ln x\,dx - \int_1^2 \ln(x+1)dx - \int_0^1 \ln x\,dx$$ 收敛

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left|\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}\right| = \lim_{x\to+\infty} -x^2\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

故 $\int_2^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx$ 收敛，综上，收敛

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan x)^q}{x^p} dx$

思路：$x\to 0^+$时，$\frac{(\arctan x)^q}{x^p} \sim x^{q-p}$，故当 $q-p>-1$时

$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^q}{x^p} dx$ 收敛

$x\to+\infty$时，$\frac{(\arctan x)^q}{x^p} = \frac{(\frac{\pi}{2})^q}{x^p} \sim x^{-p}$，故当 $-p<-1$时

即 $p>1$

$\int_1^{+\infty} \frac{(\arctan x)^q}{x^p} dx$ 收敛

综上，$p>1$ 且 $q>p-1$ 时收敛

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$

思路：$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}}_{①} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}}_{②}$

若 $p\geq q$，$x\to 0^+$时，$\frac{1}{x^p+x^q} = \frac{1}{x^q}\frac{1}{x^{p-q}+1} \sim x^{-q}$

故当 $-q>-1$ 即 $q<1$ 时 ① 收敛

$x\to+\infty$时，$\frac{1}{x^p+x^q} = \frac{1}{x^p}\frac{1}{1+x^{q-p}} \sim x^{-p}$

故当 $-p<-1$ 即 $p>1$ 时 ② 收敛

$p<q$ 同理，综上，$p<1<q$ 或 $q<1<p$ 时收敛

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{x^n+x^p}$

思路：$\frac{x^m}{x^n+x^p} = \frac{1}{x^{n-m}+x^{p-m}}$，与(6)同理

即 $n-m<1<p-m$ 或 $p-m<1<n-m$ 时收敛

10.4.3 (1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^p x}{1+x^q} dx$

解：只考虑 $q>0$ 且 $p\in N$ 的情况

$$\left|\frac{\sin^p x}{1+x^q}\right| \leqslant \left|\frac{1}{1+x^q}\right| < \frac{1}{x^q}$$

① 若 $q>1$，则绝对收敛

② 若 $0<q\leq 1$，则需考虑 p 的奇偶性

1° 若 p 为偶数，则 收敛 $\Leftrightarrow$ 绝对收敛

$$\text{原式} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^p x}{1+x^q}dx \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^q\pi^q}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin^p x\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k}{1+(n+1)^q\pi^q} \to +\infty \text{ 发散}$$

2° 若 p 为奇数，$\left|\int_0^{+\infty}\sin^p x\,dx\right|$ 有界，$\frac{1}{1+x^q}$ 在 $[0,+\infty)\downarrow$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^q}=0$，根据 Dirichlet 判别法可知原式收敛

综上，$\begin{cases} q>1，\text{绝对收敛} \\ 0<q\leq 1，\begin{cases} p \text{ 为偶数，发散} \\ p \text{ 为奇数，条件收敛} \end{cases} \end{cases}$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^p x}{x^q}dx$

思路：$\text{原式} = \underbrace{\int_0^1\frac{\sin^p x}{x^q}dx}_{①} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin^p x}{x^q}dx}_{②}$

$x\to 0^+$ 时，$\frac{\sin^p x}{x^q}\sim x^{p-q} \Rightarrow p>q-1$ 时 ①（绝对）收敛

$x\to+\infty$ 时，与 (1) 结论一致

(3) $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$

思路：令 $t=x^2$，则 $dx=\frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$

原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$ 由 (2) 知条件收敛

(4) $\int_1^{+\infty}(\ln x)^p\frac{\sin x}{x}dx$

思路：原式 $=\underbrace{\int_1^2(\ln x)^p\frac{\sin x}{x}dx}_{①}+\underbrace{\int_2^{+\infty}(\ln x)^p\frac{\sin x}{x}dx}_{②}$

对①

$p\geq 0$，①（绝对）收敛

$p<0$，$x\to 1$ 时，$(\ln x)^p\frac{\sin x}{x}\sim[\ln(1+x-1)]^p\sim(x-1)^p$

$\Rightarrow -1<p<0$ 时（绝对）收敛

对②

$\frac{(\ln x)^p}{x}$ 在 $[2,+\infty)\downarrow$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^p}{x}=0$，且 $\left|\int_2^{+\infty}\sin x\,dx\right|$ 有界

根据 Dirichlet 判别法知②收敛

$$\int_2^{+\infty}\left|(\ln x)^p\frac{\sin x}{x}\right|dx>\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(\ln x)^p}{x}|\sin x|dx}_{③}$$

$$\frac{[\ln((n+1)\pi)]^p}{(n+1)\pi}k\leq ③\leq\frac{[\ln(n\pi)]^p}{n\pi}k$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}③$ 的收敛性与 $\int_2^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{x}dx$ 相同

$$\int_2^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{x}dx=\int_2^{+\infty}(\ln x)^p d(\ln x)=(\ln x)^{p+1}\Big|_2^{+\infty}-\int_2^{+\infty}\frac{p(\ln x)^p}{x}dx\to+\infty \text{ 发散}$$

故②条件收敛

综上，$p>-1$ 时条件收敛

10.4.4 (5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$

思路：原式 $=\underbrace{\int_0^1\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx}_{①}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx}_{②}$

对①：令$t=\frac{1}{x}$，则

$①=\int_1^{+\infty} t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\cos t\,dt$

$t\to+\infty$时，$|t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\cos t|<t^{p-3}$，故$p-3<-1$即$p<2$时，

①绝对收敛

当$2\le p<3$时，$t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\cos t\sim t^{p-3}\cos t$

t^{p-3}在$[1,+\infty)\downarrow$且$\lim\limits_{t\to+\infty}t^{p-3}=0$，$|\int_1^{+\infty}\cos t\,dt|$有界

根据Dirichlet判别法①收敛

当t足够大时，有$\sin\frac{1}{t}>\frac{1}{2t}$，因此

$\int_1^{+\infty}|t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\cos t|\,dt>\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}|t^{p-3}\cos t|\,dt$

$=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}t^{p-3}|\cos t|\,dt>\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}t^{p-3}|\cos t|\,dt$

$>\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)^{p-3}\pi^{p-3}\cdot K\to+\infty$ 发散

故$2\le p<3$时条件收敛

当$p\ge3$时，①发散

对②：$p\le0$时发散

$p>0$时，$\frac{1}{x^p}$在$[1,+\infty)\downarrow$且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，$|\int_1^{+\infty}\sin x\cos\frac{1}{x}dx|$有界

根据Dirichlet判别法②收敛

$\left|\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right|\sim Kx^{-p}\ (x\to+\infty)$，故$-p<-1$即$p>1$时

②绝对收敛

当$0<p\le1$时，$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right|dx>\cos1\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}dx$

$>\cos1\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}x^{-p}|\sin x|\,dx>K\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)^{-p}\pi^{-p}\to+\infty$ 发散

综上：$p\le0$发散，$0<p\le1$条件收敛，$1<p<2$绝对收敛，

$2\le p<3$条件收敛，$p\ge3$发散

15.1.1 证明：设 $\vec{x}_n$ 的极限为 $\vec{a}$，则

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N$，$\|\vec{x}_n-\vec{a}\|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=1$，则 $\|\vec{x}_n-\vec{a}\|<\varepsilon$，$\|\vec{x}_n\|\leq\|\vec{x}_n-\vec{a}\|+\|\vec{a}\|<1+\|\vec{a}\|$

取 $K=\max(\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_{N-1}\|,1+\|\vec{a}\|)$，则 $\|\vec{x}_n\|\leq K$ //

15.1.2 证明：证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\vec{x}_n\cdot\vec{y}_n=\vec{a}\cdot\vec{b}$，只需证：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N$，$\|\vec{x}_n\cdot\vec{y}_n-\vec{a}\cdot\vec{b}\|<\varepsilon$

$$\begin{aligned}\|\vec{x}_n\cdot\vec{y}_n-\vec{a}\cdot\vec{b}\| &= \|\vec{x}_n\cdot\vec{y}_n-\vec{x}_n\cdot\vec{b}+\vec{x}_n\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}\|\\ &\leq \|\vec{x}_n\cdot(\vec{y}_n-\vec{b})\|+\|(\vec{x}_n-\vec{a})\cdot\vec{b}\|\\ &= \|\vec{x}_n\|\,\|\vec{y}_n-\vec{b}\|+\|\vec{b}\|\,\|\vec{x}_n-\vec{a}\|\end{aligned}$$

$\vec{x}_n$，$\vec{y}_n$ 有界，则 $\|\vec{x}_n\|\leq K$，$\|\vec{b}\|\leq L$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\vec{x}_n=\vec{a}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N_1$，$\|\vec{x}_n-\vec{a}\|<\frac{\varepsilon}{2L}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\vec{y}_n=\vec{b}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N_2$，$\|\vec{y}_n-\vec{b}\|<\frac{\varepsilon}{2K}$

因此 $\|\vec{x}_n\cdot\vec{y}_n-\vec{a}\cdot\vec{b}\|<\varepsilon$ //

15.5.4 (1) 2 (2) 0 (3) 2

(4) $0\leq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)\leq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\ln(x^2+y^2)=0$

(5) $0\leq\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\leq\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x+y)^2e^{-(x+y)}=0$

(6) $0\leq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2}$

$\leq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$

(7) $0\leq\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leq\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{1+\frac{y}{x}}}$

令 $y=kx$，则原式 $=e^{k}$ 与 k 有关，故极限不存在

15.5.5 (2) $y=kx$ 与 k 有关

(4) $x=y$．原式 $=0$；$x=y^2$，原式 $=\frac{1}{8}$

(5) $x=-y$，故极限不存在