PEKING UNIVERSITY

思考题 7

袁磊祺

2021 年 4 月 19 日

1

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是凸域, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\mathrm{D}f$ 是 Ω 上的正定矩阵.

求证: $f(x)$ 是 Ω 上的一一映射.

证明. 若 $\exists x_1, x_2 \in \Omega$, s.t. $f(x_1) = f(x_2)$,

令

$$g(x) = (x_2 - x_1) \cdot \big(f(x) - f(x_1)\big), \tag{1}$$

$$G(t) = g\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big), \tag{2}$$

则 $G(0) = G(1) = 0$,

$\because \Omega$ 是凸域,

$\therefore \exists \xi \in (0,1)$, s.t. $G'(\xi) = 0$,

即 $\mathrm{D}g\big(x_1 + \xi(x_2 - x_1)\big) \cdot (x_2 - x_1) = 0$,

$(x_2 - x_1)\,\mathrm{D}f\big(x_1 + \xi(x_2 - x_1)\big)(x_2 - x_1)^T = 0.$

又 $\mathrm{D}f$ 是正定的,

$\therefore x_2 - x_1 = 0$, 即 $x_1 = x_2$, $f(x)$ 是 Ω 上的单射. □