思考题 2

袁磊祺

2021 年 3 月 16 日

1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调下降, 求证:

(1) $\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\theta f(0)+(1-\theta)f(1)$;

(2) $\forall c>f(0)$, $\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\theta c+(1-\theta)f(1)$.

证明.

(1) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)\int_0^\theta \mathrm{d}x+f(1)\int_\theta^1 \mathrm{d}x=\theta f(0)+(1-\theta)f(1)$.

(2) 由 (1) 可知 $\exists\theta_1\in(0,1)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\theta_1 f(0)+(1-\theta_1)\,f(1)$.

要证 $\exists\theta_2\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\theta_2 c+(1-\theta_2)\,f(1)$,

即证 $\exists\theta_2\in(0,1)$ 使得 $\theta_1 f(0)+(1-\theta_1)\,f(1)=\theta_2 c+(1-\theta_2)\,f(1)$ 取 $\theta_2=\frac{f(0)-f(1)}{c-f(1)}\theta_1$ 即可, $\theta_2\in(0,1)$.

□

2

设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调增加的正值函数, y 是微分方程 $y''+F(x)y=0$ 的解.

求证: y 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

证明. 由 $y'' + F(x)y = 0$ 可得

$$\frac{1}{F(x)} y' y'' + y y' = 0, \tag{1}$$

即

$$\frac{1}{F(x)} \frac{\mathrm{d}(y')^2}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
y^2(x) &= y^2(0) - \int_0^x \frac{1}{F(t)} \frac{\mathrm{d}(y')^2}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t && (3)\\
&= y^2(0) - \frac{1}{F(0)} \int_0^\xi \frac{\mathrm{d}(y')^2}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t && (4)\\
&= y^2(0) - \frac{1}{F(0)} \left[\left(y'(\xi)^2 - y'(0)^2 \right] \right. && (5)\\
&\leqslant y^2(0) + \frac{1}{F(0)} y'(0)^2. && (6)
\end{aligned}$$

其中 $\xi \in [0, x]$.

□

3

求 $F(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$ 在原点的导数 $F'(0)$.

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{F(2x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{F(2x) - F(x)}{x}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
F(2x) - F(x) &= \int_x^{2x} \cos \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t && (8)\\
&= \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2} \cos t \,\mathrm{d}t && (9)\\
&= 4x^2 \int_{\frac{1}{2x}}^{c} \cos t \,\mathrm{d}t && (10)\\
&= 4x^2 \left(\sin c - \sin \frac{1}{2x} \right). && (11)
\end{aligned}$$

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(2x) - F(x)}{x} = \lim_{x \to 0} 4x \left(\sin c - \sin \frac{1}{2x} \right) = 0. \tag{12}$$

另:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t && (13)\\
=&\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u && (14)\\
=&\lim_{M\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{M} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u && (15)\\
=&x^2\lim_{M\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{\xi} \cos u\,\mathrm{d}u \quad \left(\xi\in\left[\frac{1}{x},M\right]\right) && (16)\\
=&\mathcal{O}(x^2). && (17)
\end{aligned}
$$

$$
F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\mathcal{O}(x)=0. \tag{18}
$$

4

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降, 且积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

求证: $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=0$.

证明. 由收敛原理,

当 $\eta\to+\infty$ 有

$$
\int_a^{2\eta} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\eta^{2\eta} f(x)\,\mathrm{d}x\to 0. \tag{19}
$$

$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降,

$$
\therefore \int_\eta^{2\eta} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_\eta^{2\eta} f(\eta)\,\mathrm{d}x=f(\eta)\eta=2\int_{\eta/2}^{\eta} f(\eta)\,\mathrm{d}x\leqslant 2\int_{\eta/2}^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{20}
$$

由夹挤原理即有

$$
\therefore \lim_{x\to\infty} xf(x)=0. \tag{21}
$$

□