思考题 8

袁磊祺

2021 年 4 月 27 日

1

设 f 可微, 证明曲面 $f\left(\frac{z}{y}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x}\right)=0$ 上任一点的切平面均过某一定点.

证明. 设 $u=\frac{z}{y}, v=\frac{x}{z}, w=\frac{y}{x}$

考虑任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面, 法向为

$$\left(f_v' \frac{1}{z_0}-f_w' \frac{y_0}{x_0^2}, f_w' \frac{1}{x_0}-f_u' \frac{z_0}{y_0^2}, f_u' \frac{1}{y_0}-f_v' \frac{x_0}{z_0^2}\right), \tag{1}$$

切平面为

$$\left(f_v' \frac{1}{z_0}-f_w' \frac{y_0}{x_0^2}\right)(x-x_0)+\left(f_w' \frac{1}{x_0}-f_u' \frac{z_0}{y_0^2}\right)(y-y_0)+\left(f_u' \frac{1}{y_0}-f_v' \frac{x_0}{z_0^2}\right)(z-z_0)=0, \tag{2}$$

即

$$\left(f_v' \frac{1}{z_0}-f_w' \frac{y_0}{x_0^2}\right) x+\left(f_w' \frac{1}{x_0}-f_u' \frac{z_0}{y_0^2}\right) y+\left(f_u' \frac{1}{y_0}-f_v' \frac{x_0}{z_0^2}\right) z=0, \tag{3}$$

必过 $(0,0,0)$ 点. □

2

求椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{8}=1$ 上法线与平面 $x+2y+z=100$ 垂直的点.

考虑任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向为

$$\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{4}\right). \tag{4}$$

平面 $x + 2y + z = 100$ 的法向为

$$(1, 2, 1). \tag{5}$$

若椭球面上法线与平面垂直, 则 eqs. (4) and (5) 平行

$$\frac{\frac{x_0}{2}}{1} = \frac{\frac{y_0}{3}}{2} = \frac{\frac{z_0}{4}}{1}. \tag{6}$$

将 eq. (6) 代入

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{8} = 1 \tag{7}$$

解得

$$a = \left(\frac{2}{3}, 2, \frac{4}{3}\right), \quad b = \left(-\frac{2}{3}, -2, -\frac{4}{3}\right). \tag{8}$$

3

求曲面 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ 交线的切线, 以及 a, b, c 满足什么条件时, 交线的副法向与椭球面的法向正交?

考虑交线上任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的两平面的法向为

$$(1, 1, 1), \quad \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right). \tag{9}$$

则交线的切线为

$$(1, 1, 1) \times \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right) = \left(\frac{2z_0}{c^2} - \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2x_0}{a^2} - \frac{2z_0}{c^2}, \frac{2y_0}{b^2} - \frac{2x_0}{a^2}\right). \tag{10}$$

由于交线在平面上, 所以交线的副法向为

$$(1, 1, 1), \tag{11}$$

与椭球面的法向正交则

$$(1, 1, 1) \cdot \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right) = \frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0}{b^2} + \frac{2z_0}{c^2} = 0. \tag{12}$$

由 eq. (12) 和原始方程三个方程联立求解得

$$\frac{z^2\left(a^6\,b^2+a^6\,c^2-2\,a^4\,b^4-2\,a^4\,c^4+a^2\,b^6+a^2\,c^6+b^6\,c^2-2\,b^4\,c^4+b^2\,c^6\right)}{a^2\,b^2\,c^2\left(a^2-b^2\right)^2}=0. \tag{13}$$

要和 z 无关, 则

$$a^6\,b^2+a^6\,c^2-2\,a^4\,b^4-2\,a^4\,c^4+a^2\,b^6+a^2\,c^6+b^6\,c^2-2\,b^4\,c^4+b^2\,c^6=0, \tag{14}$$

即

$$\left(a^3b-b^3a\right)^2+\left(b^3c-c^3b\right)^2+\left(c^3a-a^3c\right)^2=0, \tag{15}$$

所以

$$a^2=b^2=c^2. \tag{16}$$

代入原方程, 满足要求.