PEKING UNIVERSITY

思考题 1

袁磊祺

2021 年 4 月 26 日

1

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且 $f(x)>a>0$. 证明:

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{1}$$

证明. 设 $F(x)=\frac{1}{x}, x>0$. 则 $F(x)$ 是个凸函数, 做 $[0,1]$ 划分:

$$P: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n,\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}. \tag{2}$$

那么 $\sum_{i=1}^n \Delta x_i=1$. 由 $F(x)$ 的凸性, (《数学分析新讲（二)》P43 定理 2)

$$F\left(\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n F\big(f\left(\xi_i\right)\big)\Delta x_i. \tag{3}$$

$|P|\to 0$, 取极限得

$$F\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 F(f(x))\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

即

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{5}$$

□