课程名称：数学分析（二）答案

2020 -2021 学年第（2）学期期中　　本试卷共 9　道大题，满分 100 分

一．设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛（10 分）

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可知 $\exists M>0$，$\forall x>M$，$|f(x)|<1$，

由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M'>0$，$\forall A_1,A_2>M'$，$\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx<\varepsilon$

取 $M''=\max\{M,M'\}$，$\forall A_1,A_2>M''$，$\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|^2dx<\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx<\varepsilon$，

因此 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛

二．讨论以下广义积分的敛散性（10 分）

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^\alpha}dx,\alpha\in\mathbb{R}$　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\ln x}{e^x-e^{-x}}dx,\alpha\in\mathbb{R}$

解：（1）$\alpha>1$，$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^\alpha}\right|\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\alpha}$，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^\alpha}dx$ 绝对收敛

$0<\alpha\le1$，当 x 充分大 $\left(\frac{\arctan x}{x^\alpha}\right)'=-\alpha\frac{\arctan x}{x^{\alpha+1}}+\frac{1}{x^\alpha(1+x^2)}<0$，

即 $\frac{\arctan x}{x^\alpha}$ 单调下降趋于 0. $\left|\int_H^{H'}\sin xdx\right|\le2$

由 Dirichlet 判别法 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^\alpha}dx$ 收敛。

又 $\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^\alpha}\right|\ge\frac{\sin^2 x\arctan x}{x^\alpha}=\frac{(1-\cos 2x)\arctan x}{x^\alpha}$

同理证明 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x\arctan x}{2x^\alpha}dx$ 收敛，而 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{2x^\alpha}dx$ 发散，因此 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^\alpha}\right|dx$ 发散。

综上 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^\alpha}dx$ 条件收敛。

$\alpha\le0$，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^\alpha}dx$ 发散。

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\ln x}{e^x-e^{-x}}dx,\alpha\in\mathbb{R}$ 收敛

考虑$\int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{e^x - e^{-x}}dx, \alpha \in \mathbb{R}$，由于$e^x - e^{-x} \sim 2x$

$\alpha > 0$ $\int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{e^x - e^{-x}}dx$收敛

$\alpha \le 0$ $\int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{e^x - e^{-x}}dx$发散

三．（10 分）（1）设 $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln(3x-2y)$ 在求 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)$；

（2）求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在$(1,1,1)$的切线方程。

解：（1）$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y) + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \frac{3}{3x-y}$

$$\frac{\partial f(1,y)}{\partial x} = \frac{2}{y^2}\ln(3-2y) + \left(\frac{1}{y}\right)^2 \frac{3}{3-2y}$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} = -4$$

（2）切线方程为

$$\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}$$

四．设$z = f(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$，且$f(0,1) = f(1,0)$，证明：在单位圆周$\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$上至少有两点满足$xf_y(x,y) = yf_x(x,y)$（10 分）

证明：令$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$，

则$f(r,\theta)$满足$f(r,\theta)|_{(r,\theta)=(1,0)} = f(r,\theta)|_{(r,\theta)=(1,\pi/2)}$

因此至少在$\theta = \theta_1, \theta_2, 0 < \theta_1 < \pi/2, \pi/2 < \theta_2 < 2\pi$上$\frac{\partial f(1,\theta)}{\partial \theta} = 0$，

$\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta} = xf_y - yf_x$，即证。

五．由$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 0$求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$（10 分）

解：$x, y, z \ne 0$，

对 $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=0$ 两端乘以 xyz 得 $x+y+z=0$，

因此 $\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

六．设 $f(x)\in C^1(\mathbb{R}^3)$，在包含 $(0,0,0)$ 的凸区域 Ω 上满足 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0$，证明在此区域上 f 为常数（10 分）

证明：由于是凸区域，由有限增量公式得到：

$\forall(x,y,z)\in\Omega$，$f(x,y,z)-f(0,0,0)=\theta x\frac{\partial f(\theta x,\theta y,\theta z)}{\partial x}+\theta y\frac{\partial f(\theta x,\theta y,\theta z)}{\partial y}+\theta z\frac{\partial f(\theta x,\theta y,\theta z)}{\partial z}$

$0<\theta<1$

又 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0$，可知

$$\theta x\frac{\partial f(\theta x,\theta y,\theta z)}{\partial x}+\theta y\frac{\partial f(\theta x,\theta y,\theta z)}{\partial y}+\theta z\frac{\partial f(\theta x,\theta y,\theta z)}{\partial z}=0$$

$f(x,y,z)=f(0,0,0)$ 为常数。

七．证明方程 $x+\frac{1}{2}y^2+z+\sin z=0$ 在 $(0,0,0)$ 附近唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$，并在 $(0,0)$ 处将 $z=f(x,y)$ 展开成二阶带 Peano 余项的 Taylor 公式（10 分）

解：令 $F(x,y,z)=x+\frac{1}{2}y^2+z+\sin z$，$F_z(0,0,0)=2\neq 0$，因此隐函数 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0,0)$ 附近存在；

由 $\sin z=z-\frac{z^3}{6}+o(z^4)$，　可将 $x+\frac{1}{2}y^2+z+\sin z=0$ 写为

$$x+\frac{1}{2}y^2+z+z-\frac{z^3}{6}+o(z^3)=0$$

设 $z=f(x,y)$ 展开成 n 次多项式为 $z=P_n(x,y)+o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)$ 将其代入 $-\frac{z^3}{6}+o(z^3)$ 可得

$$-\frac{z^3}{6}+o(z^3)=o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\right)$$

因此 $x+\frac{1}{2}y^2+z+z-\frac{z^3}{6}+o(z^3)=x+\frac{1}{2}y^2+z+z+o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\right)=0$

所以$z=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y^2+o\left(x^2+y^2\right)$

八．设光滑曲线γ每一点的切线方向与z轴夹角为$\frac{\pi}{4}$，证明连接曲线上任意两点$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$的弧长为$\sqrt{2}\,|z_2-z_1|$（10 分）

解：设曲线的参数为t，则满足$\vec{r}'(t)\neq 0$，又因为$\vec{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$与$z$轴夹角为$\frac{\pi}{4}$，可知：

$$x'(t)^2+y'(t)^2=z'(t)^2$$

因此$z'(t)\neq 0$，由 Darboux 引理$z'(t)$不变号。设A,B对应弧长参数为t_1,t_2，

曲线弧长为$\left|\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt\right|=\left|\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{2z'(t)^2}\,dt\right|$

由于$z'(t)$不变号，$\left|\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{2z'(t)^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{2}z'(t)dt\right|=\sqrt{2}\left|z_2-z_1\right|$

九．$f\in C^1(\mathbb{R}^2)$，$D=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1^2+x_2^2\le 1\}$，已知$\|\nabla f(0,0)\|=1$，$\|\nabla f(\mathbf{x})-\nabla f(\mathbf{y})\|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$，证明：$f\big|_{\mathrm{D}}$在 D 的边界上取到最大和最小值，$\|\bullet\|$为欧几里得范数（10 分）；求函数 $z(x,y)=\frac{(x-4)^2}{4}+(y-4)^2$在约束条件$|x|+|y|\le 1$下的最大最小值（10 分）。

证明：（1）设$\mathbf{u}=(x,y)$在D的内部，则$\|\mathbf{u}\|<1$

考虑$\nabla f(\mathbf{u})$，$\|\nabla f(\mathbf{u})-\nabla f(0,0)\|\le\|\mathbf{u}-(0,0)\|=\|\mathbf{u}\|$

由三角形表达式$\|\nabla f(0,0)\|-\|\nabla f(\mathbf{u})\|\le\|\nabla f(\mathbf{u})-\nabla f(0,0)\|$

又因为$\|\nabla f(0,0)\|=1$，因此$1-\|\nabla f(\mathbf{u})\|\le\|\mathbf{u}\|$，所以$0<1-\|\mathbf{u}\|\le\|\nabla f(\mathbf{u})\|$

因此$\nabla f(\mathbf{u})\neq 0$，$D$的内部没有临界点，$f\big|_{\mathrm{D}}$在 D 的边界上取到最大和最小值。

（2）$z(x,y)=\frac{(x-4)^2}{4}+(y-4)^2$在$\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$内部没有临界点，因此最大最小值只在$\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=1\}$上取到。

因为$z(x,y)=\frac{(x-4)^2}{4}+(y-4)^2$的等值线与$y=x\pm 1$及$y=-x\pm 1$相切的点都不在$\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=1\}$上，因此$z(x,y)=\frac{(x-4)^2}{4}+(y-4)^2$的等值线只有在$\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=1\}$顶点处与约束曲线有唯一的交点，最大最小值只有在顶点处取到。

$z(x,y)=\dfrac{(x-4)^2}{4}+(y-4)^2$ 在 $\{(x,y)||x|+|y|=1\}$ 四个顶点的值为 $13,29,\dfrac{73}{4},\dfrac{89}{4}$ 。

最大值为 29，最小值为 13.