PEKING UNIVERSITY

思考题 12

袁磊祺

2021 年 5 月 25 日

1

设在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上定义的二元函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数

(1) 证明: $\iint_D f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f''_{yx}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \forall(x,y)\in D$;

(2) 利用 (1) 证明: $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y),\ \forall(x,y)\in D$,

证明.

(1)

$$\begin{aligned}\iint_D f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=&\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y\\=&\int_a^b\big(f'_x(x,d)-f'_x(x,c)\big)\,\mathrm{d}x\\=&f(b,d)-f(b,c)-f(a,d)+f(a,c).\end{aligned}\tag{1}$$

同理

$$\iint_D f''_{yx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(b,d)-f(b,c)-f(a,d)+f(a,c)\tag{2}$$

所以

$$\iint_D f''_{yx}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\tag{3}$$

(2) 以上关系在任意 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上成立. 若 $F(x,y)$ 连续, 在任意 $D=[a,b]\times[c,d]$ 成立 $\iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$, 则有 $F(x,y)\equiv0$.

假设 $F(x,y)\equiv 0$ 不成立, 即在某点 (x_0,y_0) , $F(x_0,y_0)\neq 0$, 不妨设 $F(x_0,y_0)>0$.

由连续性, 在 (x_0,y_0) 某方形领域 $D'=[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上 $F(x,y)>0$.

则 $\iint_{D'}F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$, 矛盾. 所以 $F(x,y)\equiv 0$.

取 $F(x,y)=f''_{yx}(x,y)-f''_{xy}(x,y)$, 即可证明 $f''_{yx}(x,y)=f''_{xy}(x,y)$.

$\square$

2

计算 $x^2+y^2\leq 1,\ z^2+y^2\leq 1,\ x^2+z^2\leq 1$ 围成区域的体积.

解:

$$8(2-\sqrt{2}). \tag{4}$$