PEKING UNIVERSITY

思考题 14

袁磊祺

2021 年 6 月 8 日

1

设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{n}$ 为曲面 S 的单位外法向, $d(x,y,z)$ 表示原点到 $(x,y,z)\in S$ 处切平面的距离, 求以下积分:

1. $\oiint_S \vec{r}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$
2. $\oiint_S d(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$
3. $\oiint_S \frac{\mathrm{d}\sigma}{d(x,y,z)}$

1

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right). \tag{1}$$

$$\oiint_S \vec{n}\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint \nabla\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}V=3V=4\pi abc. \tag{2}$$

2

$\because d=\vec{n}\cdot\vec{r}$, $\therefore$

$$\oiint_S d(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=4\pi abc. \tag{3}$$

3

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{d} &= \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{b^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{c^2}\cos^2\varphi} \\
&= \frac{1}{abc}\sqrt{b^2c^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+a^2c\sin^2\theta\sin^2\varphi+a^2b^2\cos^2\varphi}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\mathrm{d}\sigma = \left|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi\right|\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{b^2c^2\cos^2\theta\sin^4\varphi+a^2c^2\sin^2\theta\sin^4\varphi+a^2b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\oiint_S \frac{\mathrm{d}\sigma}{d(x,y,z)} \\
&= \frac{4}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}|\sin\varphi|\left(b^2c^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+a^2c^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+a^2b^2\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{4\pi}{3abc}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

2

考虑空间 $\mathbb{R}^3$ 中在原点电量为 Q 的电荷在 $\vec{r}=(x,y,z)$ 处产生的电场: $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}$, 这里 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 设 Ω 是 R^3 的开区域, $\partial\Omega$ 充分光滑, $\vec{n}$ 为 Ω 的外法向, 证明:

$$
\oiint_{\partial\Omega}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & (0,0,0)\notin\Omega \\ \frac{Q}{\varepsilon_0}, & (0,0,0)\in\Omega \end{cases} \tag{7}
$$

证明. 若电荷在 Ω 内.

取一个以 $\vec{r}=(x,y,z)$ 为球心的半径为 a 的小球面 S, 使得 S 在 $\partial\Omega$ 内, 对于两曲面中间的区域 V 有

$$
\oiint_{\partial\Omega}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma-\oiint_S\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_V\nabla\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}v=\iiint_V\nabla\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}\,\mathrm{d}v=0 \tag{8}
$$

$$
\oiint_{\partial\Omega}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma=\oiint_S\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\oiint_S\frac{\vec{r}}{a^3}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{9}
$$

若电荷不在 Ω 内, 则 Ω 内无暇点.

$$
\oiint_{\partial\Omega}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_\Omega\nabla\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}\,\mathrm{d}v=0 \tag{10}
$$

□