PEKING UNIVERSITY

COLLEGE OF ENGINEERING

思考题

MATHEMATICAL ANALYSIS (2)

袁磊祺

June 11, 2021

Contents

9

10

11

12

13

14

1

1

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且 $f(x)>a>0$. 证明:

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{1.1}$$

证明. 设 $F(x)=\frac{1}{x}, x>0$. 则 $F(x)$ 是个凸函数, 做 $[0,1]$ 划分:

$$P: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n,\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}. \tag{1.2}$$

那么 $\sum_{i=1}^n \Delta x_i=1$. 由 $F(x)$ 的凸性, (《数学分析新讲（二)》P43 定理 2)

$$F\left(\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n F\left(f\left(\xi_i\right)\right)\Delta x_i. \tag{1.3}$$

$|P|\to 0$, 取极限得

$$F\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 F(f(x))\,\mathrm{d}x, \tag{1.4}$$

即

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{1.5}$$

□

2

1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调下降, 求证:

(1) $\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\theta f(0)+(1-\theta)f(1)$;

(2) $\forall c>f(0)$, $\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\theta c+(1-\theta)f(1)$.

证明.

(1) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)\int_0^\theta \mathrm{d}x+f(1)\int_\theta^1 \mathrm{d}x=\theta f(0)+(1-\theta)f(1)$.

(2) 由 (1) 可知 $\exists\theta_1\in(0,1)\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\theta_1 f(0)+\left(1-\theta_1\right)f(1)$.

要证 $\exists\theta_2\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\theta_2 c+\left(1-\theta_2\right)f(1)$,

即证 $\exists\theta_2\in(0,1)$ 使得 $\theta_1 f(0)+\left(1-\theta_1\right)f(1)=\theta_2 c+\left(1-\theta_2\right)f(1)$ 取 $\theta_2=\frac{f(0)-f(1)}{c-f(1)}\theta_1$ 即可, $\theta_2\in(0,1)$.

□

2

设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调增加的正值函数, y 是微分方程 $y''+F(x)y=0$ 的解.

求证: y 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

证明. 由 $y''+F(x)y=0$ 可得

$$\frac{1}{F(x)}y'y''+yy'=0, \tag{2.1}$$

即

$$\frac{1}{F(x)}\frac{\mathrm{d}\big(y'\big)^2}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x}=0. \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
y^2(x)&=y^2(0)-\int_0^x\frac{1}{F(t)}\frac{\mathrm{d}\big(y'\big)^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t && (2.3)\\
&=y^2(0)-\frac{1}{F(0)}\int_0^\xi\frac{\mathrm{d}\big(y'\big)^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t && (2.4)\\
&=y^2(0)-\frac{1}{F(0)}\left[\left(y'(\xi)^2-y'(0)^2\right]\right. && (2.5)\\
&\leqslant y^2(0)+\frac{1}{F(0)}y'(0)^2. && (2.6)
\end{aligned}$$

其中 $\xi\in[0,x]$.

□

3

求 $F(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ 在原点的导数 $F'(0)$.

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{F(2x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{F(2x)-F(x)}{x}, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
F(2x)-F(x)&=\int_x^{2x}\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t && (2.8)\\
&=\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{t^2}\cos t\,\mathrm{d}t && (2.9)\\
&=4x^2\int_{\frac{1}{2x}}^{c}\cos t\,\mathrm{d}t && (2.10)\\
&=4x^2\left(\sin c-\sin\frac{1}{2x}\right). && (2.11)
\end{aligned}$$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(2x)-F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}4x\left(\sin c-\sin\frac{1}{2x}\right)=0. \tag{2.12}$$

另:

$$\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \tag{2.13}$$

$$=\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u \tag{2.14}$$

$$=\lim_{M\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{M}\frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u \tag{2.15}$$

$$=x^2\lim_{M\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{\xi}\cos u\,\mathrm{d}u \quad \left(\xi\in\left[\frac{1}{x},M\right]\right) \tag{2.16}$$

$$=\mathcal{O}(x^2). \tag{2.17}$$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\mathcal{O}(x)=0. \tag{2.18}$$

4

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降, 且积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

求证: $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=0$.

证明. 由收敛原理,

当 $\eta\to+\infty$ 有

$$\int_a^{2\eta}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{\eta}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\eta}^{2\eta}f(x)\,\mathrm{d}x\to 0. \tag{2.19}$$

$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降,

$$\therefore \int_{\eta}^{2\eta}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\eta}^{2\eta}f(\eta)\,\mathrm{d}x=f(\eta)\eta=2\int_{\eta/2}^{\eta}f(\eta)\,\mathrm{d}x\leqslant 2\int_{\eta/2}^{\eta}f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

由夹挤原理即有

$$\therefore \lim_{x\to\infty}xf(x)=0. \tag{2.21}$$

□

3

1

设 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降.

求证:

(1) $xf(x) \geqslant 0,\ (x \geqslant a)$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$.

证明.

(1) $\because \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

$\therefore H \to +\infty,\ \int_H^{2H} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0$.

$$\int_H^{2H} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_H^{2H} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

$$= Hf(H)\int_H^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 2Hf(2H)\int_c^{2H}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

$$= Hf(H)(\ln c - \ln H) + 2Hf(2H)(\ln 2H - \ln c) \tag{3.3}$$

$$= (Hf(H) - 2Hf(2H))\ln c - Hf(H)\ln H + 2Hf(2H)\ln 2H \tag{3.4}$$

$$= (Hf(H) - 2Hf(2H))(\ln c - \ln H) + 2Hf(2H)\ln 2. \tag{3.5}$$

若 $\exists x^*$ 使得 $x^* f(x^*) = \zeta < 0$, 由单调性 $\forall x > x^*$, 有 $xf(x) < 0$. 当 $H = x^*$ 时,

$$\int_H^{2H} f(x)\,\mathrm{d}x = (Hf(H) - 2Hf(2H))(\ln c - \ln H) + 2Hf(2H)\ln 2 \tag{3.6}$$

$$\leqslant (Hf(H) - 2Hf(2H))\ln 2 + 2Hf(2H)\ln 2 \tag{3.7}$$

$$= Hf(H)\ln 2 \tag{3.8}$$

$$= \zeta\ln 2. \tag{3.9}$$

与积分收敛矛盾, 因此 $xf(x) \geqslant 0, (x \geqslant a)$.

另: 也可直接得

$$\int_H^{2H} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_H^{2H} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{3.10}$$

$$\leqslant \int_H^{2H} Hf(H)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{3.11}$$

$$= Hf(H)\ln 2 \tag{3.12}$$

$$\leqslant \zeta\ln 2. \tag{3.13}$$

(2) 由收敛有 $H \to +\infty,\ \int_H^{H^2} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0,\ xf(x) \geqslant 0 (x \geqslant a)$,

$$\int_H^{H^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_H^{H^2} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}H^2 f\left(H^2\right)\ln H^2 \geqslant 0. \tag{3.14}$$

$\therefore xf(x)\ln x \to 0$.

□

2

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$ 存在.

求证:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a},\ (b>a>0). \tag{3.15}$$

证明. 考虑 $\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x,\ c_1\to 0,\ c_2\to+\infty,$

其中

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(ax)}{ax}\,\mathrm{d}\,(ax)=\int_{ac_1}^{ac_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \tag{3.16}$$

同理

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{bc_1}^{bc_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \tag{3.17}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_{ac_1}^{ac_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{bc_1}^{bc_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x &(3.18)\\ &=\int_{ac_1}^{bc_1} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{ac_2}^{bc_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x &(3.19)\\ &=f(\xi)\int_{ac_1}^{bc_1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-f(\eta)\int_{ac_2}^{bc_2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &(3.20)\\ &=(f(\xi)-f(\eta))\ln\frac{b}{a}. &(3.21)\end{aligned}$$

其中 $\xi\in(ac_1,bc_1)\,,\eta\in(ac_2,bc_2)\,.$

$c_1\to 0^+, c_2\to+\infty,$ 即有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}. \tag{3.22}$$

□

3

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

证明. 设 $f(x)$ 不收敛于 0, 则

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall N,\ \exists x_0>N,\ \text{s.t.}\left|f\left(x_0\right)\right|>\varepsilon.$$

由一致连续性, $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, 即 $-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$.

若$f\left(x_0\right)>\varepsilon$，则$f(x)>f\left(x_0\right)-\frac{\varepsilon}{2}>\frac{\varepsilon}{2}$;

若$f\left(x_0\right)<-\varepsilon$，则$f(x)<f\left(x_0\right)+\frac{\varepsilon}{2}<-\frac{\varepsilon}{2}$.

则有 $\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x>\frac{\varepsilon\delta}{2}$ 或 $\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x<-\frac{\varepsilon\delta}{2}$，与 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛矛盾.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

□

4

1

求证:

$\lim\limits_{x\to+\infty,\ y\to-\infty}[f(x)+g(y)]$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y)$ 同时存在.

证明.

(1) 充分条件

设 $\lim\limits_{x\to+\infty,\ y\to-\infty}[f(x)+g(y)]=A$,

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1,N_2>0$, 当 $x_1>N_1,\ y_i<-N_2,(i=1,2)$ 时有

$$\left|f\left(x_1\right)+g\left(y_i\right)-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.1}$$

$\therefore \forall\varepsilon>0,\ \exists N_2>0,\ \forall y_1,y_2<-N_2$ 有

$$\begin{aligned}\left|g\left(y_1\right)-g\left(y_2\right)\right| &= \Big|\big(f\left(x_1\right)+g\left(y_1\right)-A\big)-\big(f\left(x_1\right)+g\left(y_2\right)-A\big)\Big| && (4.2)\\ &< \left|f\left(x_1\right)+g\left(y_1\right)-A\right|+\left|f\left(x_1\right)+g\left(y_2\right)-A\right|<\varepsilon && (4.3)\end{aligned}$$

$\therefore \lim\limits_{y\to-\infty} g(y)$ 存在

同理可证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

(2) 必要条件

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y)$ 同时存在, 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a,\quad \lim\limits_{y\to-\infty} g(y)=b$, 则

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1>0$, 当 $x>N_1$ 时 $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists N_2>0$, 当 $y<-N_2$ 时, $|g(y)-b|<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $|f(x)+g(y)-(a+b)|\leqslant|f(x)-a|+|g(y)-b|<\varepsilon$, 即有

$$\lim_{x\to+\infty,\ y\to-\infty}[f(x)+g(y)]=a+b. \tag{4.4}$$

□

2

设二元函数 $f(x,y)$ 在圆周 $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 上连续.

证明: $f(x,y)$ 在 C 上达到上确界 M 和下确界 m, 且取属于 (m,M) 的值至少两次.

证明.

(1) 在圆周 $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 上

$$\left\{\begin{array}{l} x=x(t)=x_0+R\cos t \\ y=y(t)=y_0+R\sin t \end{array}\right., \ t\in[\theta,2\pi+\theta] \tag{4.5}$$

则 $f(x,y)=f(x(t),y(t))=g(t)$ 连续.

$g(t)$ 连续性证明: x,y 是 t 的连续函数, $\therefore\ \forall\delta>0,\ \exists\delta_1,\delta_2>0$, 当 $|t-t^*|<\delta_1$ 时有 $|x-x^*|<\frac{\delta}{2}$, 当 $|t-t^*|<\delta_2$ 时有 $|y-y^*|<\frac{\delta}{2}$. 又由 $f(x,y)$ 连续性, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 只要 $(x,y)\in C,\ \sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2}<\delta$, 就有 $\left|f(x,y)-f\left(x^*,y^*\right)\right|<\varepsilon$.

因此 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_0=\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$, 当 $|t-t^*|<\delta_0$ 时有

$$(x,y)\in C,\sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2}<\sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}<\delta, \tag{4.6}$$

进而有 $\left|g(t)-g\left(t^*\right)\right|=\left|f(x,y)-f\left(x^*,y^*\right)\right|<\varepsilon,\quad\therefore g(t)$ 是 t 的连续函数.

$\therefore g(t)$ 在闭区间 $[\theta,2\pi+\theta]$ 有界, 且 $\exists t_1,\ t_2\in[\theta,2\pi+\theta]$, s.t.$g\left(t_1\right)=m,\ g\left(t_2\right)=M($ 最大值与最小值定理). 即 $f\left(x_1,y_1\right)=m,\ f\left(x_2,y_2\right)=M$, 其中 $x_i=x\left(t_i\right),\ y_i=y\left(t_i\right),\ (i=1,2)$.

(2) 若 $m=M$, 则结论显然. $m\neq M$ 时, 设 $g\left(\theta_1\right)=g\left(\theta_1+2\pi\right)=f\left(x_1,y_1\right)=m,\ g\left(\theta_2\right)=f\left(x_2,y_2\right)=M$, 则圆周可分为两段

$$\Gamma_1:\left\{\begin{array}{l} x=x(t)=x_0+R\cos t \\ y=y(t)=y_0+R\sin t \end{array}\right.,t\in\left[\theta_1,\theta_2\right]; \tag{4.7}$$

$$\Gamma_2:\left\{\begin{array}{l} x=x(t)=x_0+R\cos t \\ y=y(t)=y_0+R\sin t \end{array}\right.,t\in\left[\theta_2,\theta_1+2\pi\right]. \tag{4.8}$$

则 $\forall\mu\in(m,M),\ \exists t_1^*\in\left(\theta_1,\theta_2\right),t_2^*\in\left(\theta_2,\theta_1+2\pi\right)$, 满足 $g\left(t_1^*\right)=g\left(t_2^*\right)=\mu$. 相应即有 $f\left(x_1^*,y_1^*\right)=f\left(x_2^*,y_2^*\right)=\mu$.

$\square$

3

证明: 若 $f(x,y)$ 分别对每一个变量 x,y 是连续的，且对其中一个单调，则 $f(x,y)$ 是二元连续函数。

证明. 不妨设 $f(x,y)$ 对 y 单调。

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_1>0,\ \text{s.t. } x_0<x<x_0+\delta_1$ 时

$$\left|f\left(x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)\right|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.9}$$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_2>0,\ \text{s.t. } y_0<y<y_0+\delta_2$ 时

$$\left|f\left(x_0, y_0\right)-f\left(x_0, y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.10}$$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_3>0,\ \text{s.t. } x_0<x<x_0+\delta_3$ 时

$$\left|f\left(x, y_0+\delta_2\right)-f\left(x_0, y_0+\delta_2\right)\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.11}$$

由以上三式可得 $\left|f\left(x, y_0+\delta_2\right)-f\left(x, y_0\right)\right|<\frac{3 \varepsilon}{4}$.

令 $\delta=\min \left\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\right\}$, 当 $x \in\left(x_0, x_0+\delta\right), y \in\left(y_0, y_0+\delta\right)$ 时, 由 f 关于 y 的单调性,

$$\left|f(x, y)-f\left(x, y_0\right)\right|<\left|f\left(x, y_0+\delta_2\right)-f\left(x, y_0\right)\right|<\frac{3 \varepsilon}{4}. \tag{4.12}$$

$\therefore\left|f(x, y)-f\left(x_0, y_0\right)\right|<\varepsilon$.

对于 (x_0,y_0) 左方和下方的邻域内类似有同上结论。$\therefore f(x,y)$ 二元连续。

□

5

1

设 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 存在，$f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。

求证: $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微。

证明.

$$\begin{aligned}
f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0, y_0\right)= & f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0+\Delta x, y_0\right) && (5.1)\\
& +f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right) && (5.2)\\
= & f_y\left(x_0+\Delta x, y_0+\theta \Delta y\right) \Delta y+f_x\left(x_0, y_0\right) \Delta x+o(\Delta x) && (5.3)\\
= & f_y\left(x_0, y_0\right) \Delta y+\alpha \Delta y+f_x\left(x_0, y_0\right) \Delta x+o(\Delta x), && (5.4)
\end{aligned}$$

其中 $\alpha = f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y) - f_y(x_0,y_0), \quad 0<\theta<1$

当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时, $\alpha \to 0$,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \alpha\Delta y/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = 0.$

$\therefore \alpha\Delta y = o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$

$\therefore f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0)\Delta y + f_x(x_0,y_0)\Delta x + o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$

□

附: 二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，则在 (x_0,y_0) 临域内由

$$\left|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)\right| \le \left|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right| \tag{5.5}$$

$$+\left|f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)\right| \tag{5.6}$$

可得 $f(x_0+\Delta x, y)$ 在 $(x_0+\Delta x, y_0)$ 关于 y 连续.

2

若函数 $f(x,y,z)$ 对任意正实数 t 满足关系 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$, 则称 $f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数。设 $f(x,y,z)$ 可微。

证明: $f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数的充要条件是 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$。

证明.

(1) 必要性对任意固定参数 X,Y,Z, 设 $x=Xt,\ y=Yt,\ z=Zt$,

$$f(x,y,z)=f(Xt,Yt,Zt)=t^n f(X,Y,Z), \tag{5.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z=nt^{n-1}f(X,Y,Z), \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}Xt+\frac{\partial f}{\partial y}Yt+\frac{\partial f}{\partial z}Zt=nt^n f(X,Y,Z), \tag{5.9}$$

即

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z). \tag{5.10}$$

(2) 充分性对任意固定 x,y,z

设$X=xt,\ Y=yt,\ Z=zt,$

$$f(X,Y,Z)=f(tx,ty,tz), \tag{5.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(X,Y,Z)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial X}x+\frac{\partial f}{\partial Y}y+\frac{\partial f}{\partial Z}z, \tag{5.12}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial X}\frac{X}{t}+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{Y}{t}+\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{Z}{t}, \tag{5.13}$$

$$=\frac{1}{t}nf(X,Y,Z). \tag{5.14}$$

$$\therefore f(X,Y,Z)=Ct^n. \tag{5.15}$$

令 $t=1$ 可得 $C=f(x,y,z)$, 即 $f(xt,yt,zt)=t^nf(x,y,z)$.

□

3

设 $f(x,y)$ 在区域 D 上满足 $f_x(x,y)\equiv 0$。

问: $f(x,y)$ 在 D 上能否表示为 $\varphi(y)$。

不能。可举反例:

$$f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(x)y^2 & (x\neq 0,y>0)\\ 0 & (y\leq 0)\end{cases} \tag{5.16}$$

若对于区域内任意 $y=y_0$, x 的定义域是连续的（凸区域即满足此条件），则可由 $f(x,y)=f(x_0,y)+f_x(x_0+\theta\Delta x,y)\Delta x=f(x_0,y)$ 得 $f(x,y)$ 在 D 上能表示为 $\varphi(y)$。

6

1

设可微函数 $u=f(x,y)$ 满足方程 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$

证明: $f(x,y)$ 在极坐标系里除原点的全空间只是 θ 的函数.

证明. 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}r\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\sin\theta\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\right)=0. \tag{6.1}$$

$\therefore f(x,y)$ 是 θ 的函数.

若题中 $u=f(x,y)\in C^1(D)$, D 为含原点的凸区域，则 $f(x,y)$ 在 D 上为一常数。由 $u=f(x,y)\in C^1(D)$ 可得 $r=0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial r}=0$.

由有限增量定理

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta) = g_0 + g_r(\lambda r,\theta)r = g_0 = f(0,0), \tag{6.2}$$

其中 $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r} = 0$, $r = 0$ 时, $g(r,\theta) = g_0 = f(0,0)$.

□

2

设二元函数 $F(x,y) = f(x)g(y)$, 在极坐标系可表示为 $F(x,y) = S(r)$, 求 $F(x,y)$.

解: 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$\because F(x,y) = S(r)$,

$\therefore$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\frac{\partial F}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial F}{\partial y} r\cos\theta = -y\frac{\partial F}{\partial x} + x\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{6.3}$$

即 $yf'(x)g(y) = xf(x)g'(y)$

$$\frac{f'(x)}{xf(x)} = \frac{g'(y)}{yg(y)} = C, \tag{6.4}$$

可得 $f(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{C}{2}x^2}$, $g(y) = C_2 \mathrm{e}^{\frac{C}{2}y^2}$, $F(x,y) = f(x)g(y) = C_3 \mathrm{e}^{C_4\left(x^2+y^2\right)}$.

3

函数 u 满足 $uu_{xy} = u_x u_y$.

求证: $u(x,y) = f(x)g(y)$.

证明. 由已知

$$\frac{\partial u_x}{u_x \partial y} = \frac{\partial u}{u \partial y}, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial \ln u_x}{\partial y} = \frac{\partial \ln u}{\partial y}, \tag{6.6}$$

$$\ln u_x = \ln u + c(x), \tag{6.7}$$

$$u_x = uC(x), \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial \ln u}{\partial x} = C(x), \tag{6.9}$$

$$\ln u = F(x) + G(y), \tag{6.10}$$

$$u(x,y) = f(x)g(y). \tag{6.11}$$

□

7

1

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是凸域, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\mathrm{D}f$ 是 Ω 上的正定矩阵.

求证: $f(x)$ 是 Ω 上的一一映射.

证明. 若 $\exists x_1, x_2 \in \Omega$, s.t. $f(x_1) = f(x_2)$,

令

$$g(x) = (x_2 - x_1) \cdot \left(f(x) - f(x_1)\right), \tag{7.1}$$

$$G(t) = g\left(x_1 + t(x_2 - x_1)\right), \tag{7.2}$$

则 $G(0) = G(1) = 0$,

$\because \Omega$ 是凸域,

$\therefore \exists \xi \in (0,1)$, s.t. $G'(\xi) = 0$,

即 $\mathrm{D}g\left(x_1 + \xi(x_2 - x_1)\right) \cdot (x_2 - x_1) = 0$,

$(x_2 - x_1)\,\mathrm{D}f\left(x_1 + \xi(x_2 - x_1)\right)(x_2 - x_1)^T = 0$.

又 $\mathrm{D}f$ 是正定的,

$\therefore x_2 - x_1 = 0$, 即 $x_1 = x_2$, $f(x)$ 是 Ω 上的单射. □

8

1

设 f 可微，证明曲面 $f\left(\frac{z}{y}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x}\right) = 0$ 上任一点的切平面均过某一定点。

证明. 设 $u = \frac{z}{y}, v = \frac{x}{z}, w = \frac{y}{x}$

考虑任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面，法向为

$$\left(f'_v \frac{1}{z_0} - f'_w \frac{y_0}{x_0^2}, f'_w \frac{1}{x_0} - f'_u \frac{z_0}{y_0^2}, f'_u \frac{1}{y_0} - f'_v \frac{x_0}{z_0^2}\right), \tag{8.1}$$

切平面为

$$\left(f'_v \frac{1}{z_0} - f'_w \frac{y_0}{x_0^2}\right)(x - x_0) + \left(f'_w \frac{1}{x_0} - f'_u \frac{z_0}{y_0^2}\right)(y - y_0) + \left(f'_u \frac{1}{y_0} - f'_v \frac{x_0}{z_0^2}\right)(z - z_0) = 0, \tag{8.2}$$

即

$$\left(f'_v\frac{1}{z_0}-f'_w\frac{y_0}{x_0^2}\right)x+\left(f'_w\frac{1}{x_0}-f'_u\frac{z_0}{y_0^2}\right)y+\left(f'_u\frac{1}{y_0}-f'_v\frac{x_0}{z_0^2}\right)z=0, \tag{8.3}$$

必过 $(0,0,0)$ 点. □

2

求椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{8}=1$ 上法线与平面 $x+2y+z=100$ 垂直的点.

考虑任一点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向为

$$\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{3},\frac{z_0}{4}\right). \tag{8.4}$$

平面 $x+2y+z=100$ 的法向为

$$(1,2,1). \tag{8.5}$$

若椭球面上法线与平面垂直，则 eqs. (8.4) and (8.5) 平行

$$\frac{\frac{x_0}{2}}{1}=\frac{\frac{y_0}{3}}{2}=\frac{\frac{z_0}{4}}{1}. \tag{8.6}$$

将 eq. (8.6) 代入

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{8}=1 \tag{8.7}$$

解得

$$a=\left(\frac{2}{3},2,\frac{4}{3}\right),\quad b=\left(-\frac{2}{3},-2,-\frac{4}{3}\right). \tag{8.8}$$

3

求曲面 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ 交线的切线, 以及 a,b,c 满足什么条件时, 交线的副法向与椭球面的法向正交?

考虑交线上任一点 (x_0,y_0,z_0) 处的两平面的法向为

$$(1,1,1)\,,\quad\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right). \tag{8.9}$$

则交线的切线为

$$(1,1,1)\times\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)=\left(\frac{2z_0}{c^2}-\frac{2y_0}{b^2},\frac{2x_0}{a^2}-\frac{2z_0}{c^2},\frac{2y_0}{b^2}-\frac{2x_0}{a^2}\right). \tag{8.10}$$

由于交线在平面上，所以交线的副法向为

$$(1,1,1), \tag{8.11}$$

与椭球面的法向正交则

$$(1,1,1)\cdot\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)=\frac{2x_0}{a^2}+\frac{2y_0}{b^2}+\frac{2z_0}{c^2}=0. \tag{8.12}$$

由 eq. (8.12) 和原始方程三个方程联立求解得

$$\frac{z^2\left(a^6\,b^2+a^6\,c^2-2\,a^4\,b^4-2\,a^4\,c^4+a^2\,b^6+a^2\,c^6+b^6\,c^2-2\,b^4\,c^4+b^2\,c^6\right)}{a^2\,b^2\,c^2\left(a^2-b^2\right)^2}=0. \tag{8.13}$$

要和 z 无关，则

$$a^6\,b^2+a^6\,c^2-2\,a^4\,b^4-2\,a^4\,c^4+a^2\,b^6+a^2\,c^6+b^6\,c^2-2\,b^4\,c^4+b^2\,c^6=0, \tag{8.14}$$

即

$$\left(a^3b-b^3a\right)^2+\left(b^3c-c^3b\right)^2+\left(c^3a-a^3c\right)^2=0, \tag{8.15}$$

所以

$$a^2=b^2=c^2. \tag{8.16}$$

代入原方程，满足要求。

9

1

设 $f\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$, 且在 $\mathbb{R}^n$ 上 $\det \mathrm{D}f(x)\neq 0$, 又当 $|x|\to+\infty$ 时, $|f(x)|\to+\infty$.

求证: $f\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}^n$.

证明. 即证 $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $\exists x_0\in\mathbb{R}^n$, s.t. $f\left(x_0\right)=\xi$

$\because |x|\to+\infty$ 时, $|f(x)|\to+\infty$,

$\therefore \forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $|x|\to+\infty$ 时, $|f(x)-\xi|\to+\infty$,

$\therefore \exists x_0\in\mathbb{R}^n$, s.t. $|f(x)-\xi|$ 取最小值, 即 $|f(x)-\xi|^2$ 取最小值.

$\therefore \frac{\partial}{\partial x_i}|f(x)-\xi|^2=0$, 当 $x=x_0$,

即有 $\mathrm{D}f\left(x_0\right)\cdot\left(f\left(x_0\right)-\xi\right)=0$.

又 $\det \mathrm{D}f(x)\neq 0$, $\therefore f\left(x_0\right)-\xi=0$, 即 $f\left(x_0\right)=\xi$. □

2

设 D 为有界凸域, 二元函数 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上连续, 在边界上为常数, 在 D 内可微.

求证: D 内一定有一函数的临界点.

证明. $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上连续 $\Rightarrow$

$f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上可取到最大值和最小 $f_{\max}=f\left(x_1,y_1\right), f_{\min}=f\left(x_2,y_2\right)$.

若 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$ 同在边界上, 则 $f_{\max}=f_{\min}, f=C, \quad f_x\equiv 0, f_y\equiv 0$.

若 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$ 不同在边界上, 则 D 内一定有一极值点 $\left(x_0,y_0\right)$, 则

$$f_x\left(x_0,y_0\right)=0, \quad f_y\left(x_0,y_0\right)=0. \tag{9.1}$$

□

3

(1) 求 $f(x,y,z)=x^a y^b z^c$ 在约束条件 $x+y+z=1$ 下的最大值, 其中 a,b,c 是正常数, x,y,z 非负.

(2) 证明对六个正数 a,b,c,u,v,w

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c \leq\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \tag{9.2}$$

成立.

(1) **解:** $f(x,y,z)=x^a y^b z^c=x^a y^b(1-x-y)^c$

$\ln f=a\ln x+b\ln y+c\ln(1-x-y)$

f 的最大值即 $\ln f$ 的最大值

求导

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{x}-\frac{c}{1-x-y}=0 \\ \frac{b}{y}-\frac{c}{1-x-y}=0\end{array} \Rightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{1-x-y}\right. \tag{9.3}$$

可得 $x=\frac{a}{a+b+c}, y=\frac{b}{a+b+c}, z=\frac{c}{a+b+c}$ 时取最大值 $\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}$.

(2) **证明.** 令 $x=\frac{u}{u+v+w},\ y=\frac{v}{u+v+w},\ z=\frac{w}{u+v+w}$ 则由 (1) 有

$$\left(\frac{u}{u+v+w}\right)^a\left(\frac{v}{u+v+w}\right)^b\left(\frac{w}{u+v+w}\right)^c \leqslant \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}, \tag{9.4}$$

即

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c \leqslant\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}. \tag{9.5}$$

□

4

设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2 \leq 1$ 上连续, 在 $x^2+y^2<1$ 上满足:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u, \tag{9.6}$$

且在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$, 证明:

(1) 当 $x^2+y^2 \leq 1$ 时, $u(x,y) \geq 0$;

(2) 当 $x^2+y^2 \leq 1$ 时, $u(x,y)>0$.

证明.

(1) 上可取得最小值 $u_0=u\left(x_0,y_0\right)$.

反证: 设 $\exists\left(x',y'\right)$, 使得 $u\left(x',y'\right)<0$, 则 $u_0=u\left(x_0,y_0\right)<0$, 且 $x_0^2+y_0^2<1$.

所以

$$\frac{\partial u\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}=\frac{\partial u\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}=0, \tag{9.7}$$

$$\frac{\partial^2 u\left(x_0,y_0\right)}{\partial x^2} \geqslant 0, \frac{\partial^2 u\left(x_0,y_0\right)}{\partial y^2} \geqslant 0, \tag{9.8}$$

即 $H_u\left(x_0,y_0\right)$ 至少是半正定.

$\frac{\partial^2 u\left(x_0,y_0\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u\left(x_0,y_0\right)}{\partial y^2}=u\left(x_0,y_0\right) \geqslant 0$, 与 $u_0=u\left(x_0,y_0\right)<0$ 矛盾, 所以 $u(x,y) \geqslant 0$.

(2) 已知 : $\frac{\partial^2 C\mathrm{e}^x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C\mathrm{e}^x}{\partial y^2}=C\mathrm{e}^x$, 可得

$$\frac{\partial^2 u-C\mathrm{e}^x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u-C\mathrm{e}^x}{\partial y^2}=u-C\mathrm{e}^x. \tag{9.9}$$

令 $v=u-C\mathrm{e}^x$, 则 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=v$,

因为在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$, 所以在 $x^2+y^2=1$ 存在最小值 $\bar{u}>0$.

取 C 使得 $C>0$, 且 $\bar{u}-C\mathrm{e}>0$, 则在 $x^2+y^2=1$ 上, $v>0$.

由 (1) 可知: 当 $x^2+y^2 \leq 1$ 时, $v(x,y) \geq 0$, 而 $u=v+C\mathrm{e}^x>0$.

□

10

1

若 $F(x,y,z)=0$ 可分别解出 $x=f(y,z),\ y=g(z,x),\ z=h(x,y)$, 则 $f_z g_x h_y=-1$.

证明. $F(x,y,z)=F(f(y,z),y,z)=0$ 对 z 求偏导 $F_x\cdot f_z+F_z=0$,

$\therefore f_z=-\frac{F_z}{F_x}$,

同理 $g_x=-\frac{F_x}{F_y},\ h_y=-\frac{F_y}{F_z}$.

$\therefore f_z\cdot g_x\cdot h_y=-1.$ □

2

讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2} & \left(x^2+y^2\neq 0\right),\\ 0 & \left(x^2+y^2=0\right).\end{cases} \tag{10.1}$$

的连续性，可导性与可微性。

解: 令 $g(x,y)=\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}$.

连续性

$\alpha<0$ 或 $\beta<0$ 时, 不连续.

$\alpha\geq 0,\ \beta\geq 0$ 时, 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则

$$g(x,y)=\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}=|r|^{\alpha+\beta-2}|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta, \tag{10.2}$$

$\alpha+\beta>2$ 时, $\lim\limits_{r\to 0}g=0$, 连续,

$\alpha+\beta=2$ 时, $\lim\limits_{r\to 0}g=|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta$, 不连续,

$\alpha+\beta<2$ 时，不连续,

$\therefore \alpha\geq 0,\beta\geq 0$, 且 $\alpha+\beta>2$ 时连续.

可导性

考察

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{g}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{|r|^{\alpha+\beta-2}|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta}{r}. \tag{10.3}$$

$\alpha+\beta>3$ 时, $\lim\limits_{r\to 0}\frac{g}{r}=0$, 可导,

$\alpha+\beta=3$ 时, $\lim\limits_{r\to 0+}\frac{g}{r}=|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta$, $\lim\limits_{r\to 0-}\frac{g}{r}=-|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta$, 不可导,

$\alpha+\beta<3$ 时，不可导,

$\therefore \alpha\geq 0,\beta\geq 0$, 且 $\alpha+\beta>3$ 时可导.

可微性

若可微, 则各方向导数存在, 由可导性 $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha+\beta > 3$, 且 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$,

$\therefore f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \alpha+\beta > 3$,

$\therefore \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$, 且 $\alpha+\beta > 3$ 时可微.

3

求函数 $u = x^3+y^3+z^3-2xyz$ 在单位球内部 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ 的最大值与最小值。

解: 最大值与最小值在极值点或边界上取得.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \Rightarrow x = y = z = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{10.4}$$

对任意 $x = y = z = \varepsilon > 0, u > 0$, 对任意 $x = y = z = -\varepsilon < 0, u < 0$, 所以临界点 $(0,0,0)$ 不是极值点，最大最小值在边界上取得

设 $f = x^3+y^3+z^3-2xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-2yz+2x\lambda = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-2xz+2y\lambda = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2-2xy+2z\lambda = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 = 0. \end{cases} \tag{10.5}$$

$\Rightarrow (x,y,z) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad$ 或 $\quad (0,0,\pm 1) \quad$ 或 $\quad \left(\frac{5\sqrt{6}}{18}, \frac{5\sqrt{6}}{18}, -\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$.

$\left(-\frac{5\sqrt{6}}{18}, -\frac{5\sqrt{6}}{18}, \frac{\sqrt{6}}{9}\right)$ 可轮换.

在 $(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$ 取最大值 1, 在 $(0,0,-1),(0,0,-1),(-1,0,0)$ 取最小值-1.

11

1

设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上定义 $F(x,y) = [f(x)-f(y)]^2$

(1) 将重积分 $\iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 化为累次积分;

(2) 证明: $\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

(1) **解:**

$$\begin{aligned}\iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b\int_a^b \left[f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_a^b\int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.\end{aligned} \tag{11.1}$$

(2) **证明.** $F(x,y)=[f(x)-f(y)]^2\geqslant 0,\ \therefore \iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant 0$, 由 (1) 即有

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11.2}$$

□

2

计算三重积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}z$.

解:

$$I = \int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}y\int_0^y y\sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}x \tag{11.3}$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z y^2\sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}y \tag{11.4}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 z^3\sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}z \tag{11.5}$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 \sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}\left(1+z^4\right) \tag{11.6}$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\left(1+z^4\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \tag{11.7}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{18}. \tag{11.8}$$

3

化重积分为累次计分 $\iiint_V f\,\mathrm{d}V$, 其中 V 是 $x^2+y^2=1,\ y^2+z^2=1,\ x^2+z^2=1$ 围成的区域.

解:

$$\iiint_V f\,\mathrm{d}V = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_{|y|}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f\,\mathrm{d}z + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-|y|} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f\,\mathrm{d}z$$
$$+ \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f\,\mathrm{d}z + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-|x|} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f\,\mathrm{d}z. \tag{11.9}$$

12

1

设在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上定义的二元函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数

(1) 证明: $\iint_D f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f''_{yx}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \forall (x,y)\in D$;

(2) 利用 (1) 证明: $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y),\ \forall (x,y)\in D$,

证明.

(1)

$$\begin{aligned}\iint_D f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left(f'_x(x,d) - f'_x(x,c)\right)\mathrm{d}x \\ &= f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c).\end{aligned} \tag{12.1}$$

同理

$$\iint_D f''_{yx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c) \tag{12.2}$$

所以

$$\iint_D f''_{yx}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{12.3}$$

(2) 以上关系在任意 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上成立. 若 $F(x,y)$ 连续, 在任意 $D=[a,b]\times[c,d]$ 成立 $\iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$, 则有 $F(x,y)\equiv 0$.

假设 $F(x,y)\equiv 0$ 不成立, 即在某点 (x_0,y_0), $F(x_0,y_0)\neq 0$, 不妨设 $F(x_0,y_0)>0$.

由连续性, 在 (x_0,y_0) 某方形领域 $D'=[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上 $F(x,y)>0$.

则 $\iint_{D'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$, 矛盾. 所以 $F(x,y)\equiv 0$。

取 $F(x,y) = f''_{yx}(x,y) - f''_{xy}(x,y)$, 即可证明 $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$.

□

2

计算 $x^2+y^2\le 1,\ z^2+y^2\le 1,\ x^2+z^2\le 1$ 围成区域的体积.

解:

$$8(2-\sqrt{2}). \tag{12.4}$$

13

1

$f(x)\in C[-h,h],\ h=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, 证明:

$$\iint_S f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f(hu)\,\mathrm{d}u, \tag{13.1}$$

其中 $S=x^2+y^2+z^2=1$.

证明.

$$\begin{cases}\xi=a_1x+b_1y+c_1z\\ \eta=a_2x+b_2y+c_2z\\ \zeta=\dfrac{1}{h}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\end{cases} \tag{13.2}$$

其中

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ \frac{\alpha}{h} & \frac{\beta}{h} & \frac{\gamma}{h}\end{pmatrix} \tag{13.3}$$

是单位正交矩阵。令

$$\xi=\cos\theta\cos\varphi,\quad \eta=\sin\theta\sin\varphi,\quad \zeta=\sin\varphi.\qquad D:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \tag{13.4}$$

$$\begin{aligned}\iint_S f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,\mathrm{d}S&=\iint_D f(h\zeta)\,\mathrm{d}S\\ &=\iint_D f(h\zeta)\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(h\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &=2\pi\int_{-1}^{1} f(hu)\,\mathrm{d}u,\end{aligned} \tag{13.5}$$

□

2

在无穷大三维空间中，半径为 R 的球面上均匀分布着电荷密度为 ρ 的电荷，求任一空间点的电势。

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{cases} \tag{13.6}$$

$$\begin{aligned} W(0,0,a) &= \iint_S \frac{\rho\,\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \\ &= \rho R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{R^2+a^2-2R\sin\varphi}} \\ &= \rho R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(-\frac{1}{2Ra}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\big(R^2+a^2-2R\sin\varphi\big)}{\sqrt{R^2+a^2-2R\sin\varphi}} \\ &= \frac{2\pi\rho R}{a}\sqrt{R^2+a^2-2R\sin\varphi}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\pi\rho R}{a}\big(R+a-|R-a|\big) = \begin{cases} 4\pi R\rho, & 0<a<R \\ \frac{4\pi R^2}{a}\rho, & a\ge R \end{cases} \end{aligned} \tag{13.7}$$

3

设 $f(x,y)$ 连续, L 是一封闭的分段光滑简单曲线，设

$$u(x,y) = \oint_L f(\xi,\eta)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right)\mathrm{d}s, \tag{13.8}$$

证明: $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty} u(x,y)=0$ 的充要条件是 $\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s=0$.

证明. $f(x,y)$ 在 L 上有界，$\big|f(x,y)\big|\le k$，设 L 的长度为 S。固定一点 $(\xi_0,\eta_0)\in\alpha$.

$$\left|\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\right)-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi_0-x)^2+(\eta_0-y)^2}}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{\sqrt{(\xi_0-x)^2+(\eta_0-y)^2}}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\right)\right| \tag{13.9}$$

趋于 0.

$$u(x,y) = \oint f(\xi,\eta)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2}}\right) + f(\xi,\eta)\ln\left(\frac{\sqrt{(\xi_0-x)^2+(\eta_0-y)^2}}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\right)\mathrm{d}s \tag{13.10}$$

所以

$$\left|u(x,y)-\oint f(\xi,\eta)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2}}\right)\mathrm{d}s\right|\le kS\varepsilon \tag{13.11}$$

又

$$\oint f(\xi,\eta)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2}}\right)\mathrm{d}s=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_0)^2+(y-\eta_0)^2}}\right)\oint f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s \tag{13.12}$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}u(x,y)=0$ 的充要条件是 $\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s=0$.

□

14

1

设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$\vec{n}$ 为曲面 S 的单位外法向，$d(x,y,z)$ 表示原点到 $(x,y,z)\in S$ 处切平面的距离，求以下积分:

1. $\oiint_S \vec{r}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$
2. $\oiint_S d(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$
3. $\oiint_S \frac{\mathrm{d}\sigma}{d(x,y,z)}$

1

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right). \tag{14.1}$$

$$\oiint_S \vec{n}\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint\nabla\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}V=3V=4\pi abc. \tag{14.2}$$

2

$\because d=\vec{n}\cdot\vec{r}$，$\therefore$

$$\oiint_S d(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=4\pi abc. \tag{14.3}$$

3

$$\begin{aligned}\frac{1}{d}&=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{b^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{c^2}\cos^2\varphi}\\&=\frac{1}{abc}\sqrt{b^2c^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+a^2c\sin^2\theta\sin^2\varphi+a^2b^2\cos^2\varphi}.\end{aligned} \tag{14.4}$$

$$d\sigma = \left|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi\right| d\theta\, d\varphi = \sqrt{b^2c^2\cos^2\theta\sin^4\varphi + a^2c^2\sin^2\theta\sin^4\varphi + a^2b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\, d\theta\, d\varphi \tag{14.5}$$

$$\begin{aligned}
&\oiint_S \frac{d\sigma}{d(x,y,z)} \\
&= \frac{4}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\pi} |\sin\varphi| \left(b^2c^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + a^2c^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + a^2b^2\cos^2\varphi\right) d\varphi \\
&= \frac{4\pi}{3abc}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)
\end{aligned} \tag{14.6}$$

2

考虑空间 $\mathbb{R}^3$ 中在原点电量为 Q 的电荷在 $\vec{r} = (x, y, z)$ 处产生的电场: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}$, 这里 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 设 Ω 是 R^3 的开区域, $\partial\Omega$ 充分光滑，$\vec{n}$ 为 Ω 的外法向，证明:

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \begin{cases} 0, & (0,0,0) \notin \Omega \\ \frac{Q}{\varepsilon_0}, & (0,0,0) \in \Omega \end{cases} \tag{14.7}$$

证明. 若电荷在 Ω 内。

取一个以 $\vec{r} = (x, y, z)$ 为球心的半径为 a 的小球面 S, 使得 S 在 $\partial\Omega$ 内，对于两曲面中间的区域 V 有

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot\vec{n}\, d\sigma - \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iiint_V \nabla\cdot\vec{E}\, dv = \iiint_V \nabla\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}\, dv = 0 \tag{14.8}$$

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\oiint_S \frac{\vec{r}}{a^3}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{14.9}$$

若电荷不在 Ω 内, 则 Ω 内无暇点。

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \nabla\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}\, dv = 0 \tag{14.10}$$

□