Peking University

思考题 10

袁磊祺

2021 年 5 月 10 日

1

若 $F(x,y,z)=0$ 可分别解出 $x=f(y,z),\ y=g(z,x),\ z=h(x,y)$, 则 $f_z g_x h_y=-1$.

证明. $F(x,y,z)=F(f(y,z),y,z)=0$ 对 z 求偏导 $F_x\cdot f_z+F_z=0$,

$\therefore f_z=-\frac{F_z}{F_x}$,

同理 $g_x=-\frac{F_x}{F_y},\ h_y=-\frac{F_y}{F_z}$.

$\therefore f_z\cdot g_x\cdot h_y=-1$. □

2

讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2} & \left(x^2+y^2\neq 0\right),\\ 0 & \left(x^2+y^2=0\right).\end{cases} \tag{1}$$

的连续性, 可导性与可微性.

解: 令 $g(x,y)=\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}$.

连续性

$\alpha<0$ 或 $\beta<0$ 时, 不连续.

$\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$ 时, 令 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 则

$$g(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} = |r|^{\alpha+\beta-2}|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta, \tag{2}$$

$\alpha+\beta > 2$ 时, $\lim\limits_{r\to 0} g = 0$, 连续,

$\alpha+\beta = 2$ 时, $\lim\limits_{r\to 0} g = |\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta$, 不连续,

$\alpha+\beta < 2$ 时, 不连续,

$\therefore \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, 且 $\alpha+\beta > 2$ 时连续.

可导性

考察

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{g}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{|r|^{\alpha+\beta-2}|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta}{r}. \tag{3}$$

$\alpha+\beta > 3$ 时, $\lim\limits_{r\to 0}\frac{g}{r} = 0$, 可导,

$\alpha+\beta = 3$ 时, $\lim\limits_{r\to 0+}\frac{g}{r} = |\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta$, $\lim\limits_{r\to 0-}\frac{g}{r} = -|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta$, 不可导,

$\alpha+\beta < 3$ 时, 不可导,

$\therefore \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, 且 $\alpha+\beta > 3$ 时可导.

可微性

若可微, 则各方向导数存在, 由可导性 $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha+\beta > 3$, 且 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$,

$\therefore f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \alpha+\beta > 3$,

$\therefore \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$, 且 $\alpha+\beta > 3$ 时可微.

3

求函数 $u = x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz$ 在单位球内部 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ 的最大值与最小值.

解: 最大值与最小值在极值点或边界上取得.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \Rightarrow x = y = z = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

对任意 $x=y=z=\varepsilon>0, u>0$, 对任意 $x=y=z=-\varepsilon<0, u<0$, 所以临界点 $(0,0,0)$ 不是极值点, 最大最小值在边界上取得

设 $f=x^3+y^3+z^3-2xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-2yz+2x\lambda=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-2xz+2y\lambda=0,\\ \frac{\partial f}{\partial z}=3z^2-2xy+2z\lambda=0,\\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0.\end{array}\right. \tag{5}$$

$\Rightarrow (x,y,z)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $(0,0,\pm1)$ 或 $\left(\frac{5\sqrt{6}}{18},\frac{5\sqrt{6}}{18},-\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$.

$\left(-\frac{5\sqrt{6}}{18},-\frac{5\sqrt{6}}{18},\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$ 可轮换.

在 $(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$ 取最大值 1, 在 $(0,0,-1),(0,0,-1),(-1,0,0)$ 取最小值-1.