Peking University

思考题 3

袁磊祺

2021 年 3 月 23 日

1

设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降.

求证:

(1) $xf(x) \geqslant 0,\ (x \geqslant a)$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$.

证明.

(1) $\because \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

$\therefore H \to +\infty,\ \int_H^{2H} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0$.

$$\begin{aligned}
\int_H^{2H} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_H^{2H} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &(1)\\
&= Hf(H)\int_H^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 2Hf(2H)\int_c^{2H}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &(2)\\
&= Hf(H)(\ln c - \ln H) + 2Hf(2H)(\ln 2H - \ln c) &(3)\\
&= (Hf(H) - 2Hf(2H))\ln c - Hf(H)\ln H + 2Hf(2H)\ln 2H &(4)\\
&= (Hf(H) - 2Hf(2H))(\ln c - \ln H) + 2Hf(2H)\ln 2. &(5)
\end{aligned}$$

若 $\exists x^*$ 使得 $x^* f(x^*) = \zeta < 0$, 由单调性 $\forall x > x^*$, 有 $xf(x) < 0$. 当 $H = x^*$ 时,

$$\begin{aligned}\int_H^{2H} f(x)\,\mathrm{d}x &= (Hf(H) - 2Hf(2H))(\ln c - \ln H) + 2Hf(2H)\ln 2 &(6)\\ &\leqslant (Hf(H) - 2Hf(2H))\ln 2 + 2Hf(2H)\ln 2 &(7)\\ &= Hf(H)\ln 2 &(8)\\ &= \zeta \ln 2. &(9)\end{aligned}$$

与积分收敛矛盾, 因此 $xf(x) \geqslant 0, (x \geqslant a)$.

另: 也可直接得

$$\begin{aligned}\int_H^{2H} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_H^{2H} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &(10)\\ &\leqslant \int_H^{2H} Hf(H)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &(11)\\ &= Hf(H)\ln 2 &(12)\\ &\leqslant \zeta\ln 2. &(13)\end{aligned}$$

(2) 由收敛有 $H \to +\infty$, $\int_H^{H^2} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0$, $xf(x) \geqslant 0 (x \geqslant a)$,

$$\int_H^{H^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_H^{H^2} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}H^2 f\left(H^2\right)\ln H^2 \geqslant 0. \tag{14}$$

$\therefore xf(x)\ln x \to 0$.

□

2

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ 存在.

求证:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = [f(0) - f(+\infty)]\ln\frac{b}{a},\ (b > a > 0). \tag{15}$$

证明. 考虑 $\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, $c_1 \to 0$, $c_2 \to +\infty$,

其中

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{c_1}^{c_2} \frac{f(ax)}{ax}\,\mathrm{d}(ax) = \int_{ac_1}^{ac_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \tag{16}$$

同理

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{bc_1}^{bc_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \tag{17}$$

则

$$\begin{aligned}
\int_{c_1}^{c_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{ac_1}^{ac_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{bc_1}^{bc_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x && (18)\\
&= \int_{ac_1}^{bc_1} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{ac_2}^{bc_2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x && (19)\\
&= f(\xi)\int_{ac_1}^{bc_1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - f(\eta)\int_{ac_2}^{bc_2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x && (20)\\
&= (f(\xi)-f(\eta))\ln\frac{b}{a}. && (21)
\end{aligned}$$

其中 $\xi \in (ac_1, bc_1)\,, \eta \in (ac_2, bc_2)\,.$

$c_1 \to 0^+, c_2 \to +\infty$, 即有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}. \tag{22}$$

□

3

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明. 设 $f(x)$ 不收敛于 0, 则

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall N,\ \exists x_0>N,\ \text{s.t.} \left|f(x_0)\right| > \varepsilon.$$

由一致连续性, $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $\left|f(x)-f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, 即 $-\frac{\varepsilon}{2} < f(x)-f(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

若 $f(x_0) > \varepsilon$, 则 $f(x) > f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{2}$;

若 $f(x_0) < -\varepsilon$, 则 $f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < -\frac{\varepsilon}{2}$.

则有 $\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{\varepsilon\delta}{2}$ 或 $\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x < -\frac{\varepsilon\delta}{2}$, 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛矛盾.

$\therefore \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

$\square$