15.1.1.

$\because x_n$ 收敛于 x $\therefore$ 取 $\varepsilon=1$, $\exists N$, $n>N$ 时, $\|x_n-x\|<1$.

又 $\{x_1, \cdots, x_N\}$ 有界.

$\therefore$ $\forall n$, $\|x_n\| \leqslant \max\left\{\sup\limits_{1\leq k\leq N}\|x_k\|, \ 1+\|x\|\right\}$.

$\therefore$ $\{x_n\}$ 有界.

15.1.2. 证内积连续

$$|x_n\cdot y_n - a\cdot b| = |(x_n-a)\cdot y_n + a\cdot y_n - a\cdot b|$$

$$= |(x_n-a)\cdot y_n + a\cdot(y_n-b)|$$

$$\leqslant \big|\|x_n-a\|\,\|y_n\| + \|a\|\,\|y_n-b\|\big|$$

又 $x_n\to a$, $\|y_n\|$ 有界, $y_n \to b$.

$\therefore$ 上式收敛于 0.

15.2.2

15.2.2 $x\in R^m$，指出下列点集是否开区域或闭区域？是有界域还是无界域？（对 R^m 来说.）

（1）$a<|x|<b(b>a>0)$；

（2）$(a_1x\cdot e_1)^2+\cdots+(a_mx\cdot e_m)^2\leqslant 1$；

（3）$x_m=5, x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{m-1}^2<1$.

(1) 有界开区域

(2) 若 $a_1,\cdots,a_m$ 全不为0，则为有界闭区域

若 $\exists i$，$a_i=0$，但不全为0，则为无界闭区域

若 a_i 全为0，为 R^m，无界，又开又闭.

(3) 有界，非开非闭.

15.2.3

15.2.3 设 $z\in R^m$ 是常向量，c 为常数．证明：

（1）半空间 $\{x\,|\,x\in R^m, x\cdot z<c\}$ 是开集.

（2）$\{x\,|\,x\in R^m, x\cdot z\geqslant c\}$ 是闭集。

(1) 设 $\exists x_0$，$x_0\cdot z=c-\varepsilon<c$.

由内积连续，$\exists\delta$，$\forall x\in B(x_0,\delta)$，$x\cdot z<c$.

$\therefore$ x_0 为内点，开.

(2). 仍由内积连续，设 $x_n\to x_0$，$x_n\cdot z\geqslant c$，则 $x_0\cdot z\geqslant c$.

$\therefore$ 闭.

or 开集取补得闭集

15.5.4 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x+e^y}{\cos x-\sin y}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$;

(1)

$e^x+e^y\to 2$, $\cos x-\sin y\to 1$.

∴ 极限为2.

(2) $=\sqrt{y}\,\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. 又 $\left|\dfrac{x^4+y^2}{x^2y}\right|\geqslant 2$ (基本不等式)

∴ 上式趋于0.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;　　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

(3). $\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y$, $xy\to 0$. ∴ $\dfrac{\sin xy}{xy}\to 1$, $y\to 2$. ∴ 上式 $\to 2$.

(4). $x^2y^2\ln(x^2+y^2)$

x, y 充分小时, $\ln y^2<\ln(x^2+y^2)<0$.

$|\ln y^2|>|\ln(x^2+y^2)|$.

∴ $|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|<|x^2||y^2\ln y^2|$.

又. $u\ln u\to 0$, when $u\to 0$.

∴ 极限为0.

(5) $\dfrac{(x^2+y^2)}{e^{(x+y)}}$

$=\dfrac{x^2}{e^ye^x}+\dfrac{y^2}{e^xe^y}$

$\leqslant \dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{y^2}{e^y}\to 0$.

∴ 极限为0.

6、$\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$；考虑 $\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right|$

$\leqslant \left|\dfrac{x^3}{x^2}\right| + \left|\dfrac{y^3}{y^2}\right| \leqslant |x|+|y|$

∴极限为0.

7. $\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$. $x,y\to\infty$.

$\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, 又 $x^2\to\infty$. ∴极限为0.

8. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$. $x,y\to\infty$.

取 $y=x\to\infty$. 取 $y=x^2\to\infty$.

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}x} \to \sqrt{e}$. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+x^2}} \to (1+0)^1 = 1$.

∴极限不存在.

15.5.5 对下列函数 $f(x,y)$，证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$；　(2) $f(x,y)=\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$；

齐次. 取 $y=x\to0$.　　取 $y=2x\to0$.

$$\frac{y^4+3y^4+2y^4}{4y^4}\to\frac{3}{2}\qquad \frac{x^4+12x^4+16x^4}{25x^4}\to\frac{39}{25}$$

极限不存在.

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$；　(4) $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$；

(5) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$.

(4). 取 $x=y$, $\dfrac{y^8}{y^6(1+y^2)^3}\to0$.

取 $x=y^2$. $\dfrac{y^{12}}{(2y^4)^3}\to\dfrac{1}{2^3}\not\to0$.

(5). 取 $x=y$, $\dfrac{x^4}{2x^3}\to0$,

取 $x=y(y-1)$. $x^3=y^3(y-1)^3$, $x^3+y^3=y^3\left((y-1)^3+1\right)$

$=y^4(y^2-3y+3)$

但 $x^2y^2=y^4(y-1)^2$.　$y\to0$, $x=y(y-1)\to0$. 但

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\frac{(y-1)^2}{y^2-3y+3}\not\to0.$$

15.6.4 设 $u=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 连续，$f(x_0,y_0)>0$. 证明: 存在 M_0 的一个邻域 $U(M_0)$ 使 $f(x,y)$ 在 $U(M_0)$ 取正值.

证明：设 $f(x_0,y_0)=A>0$. 取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$.

则 $\exists\delta$, $(x,y)\in B[(x_0,y_0),\delta]$ 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le\frac{A}{2}$.

$\Rightarrow f(x,y)\ge\frac{A}{2}>0$. 取 $U(M_0)=B[(x_0,y_0),\delta]$ 即可.

15.6.12 设二元数值函数 $f(x,y)$ 在全平面连续，$\lim\limits_{r\to+\infty} f(x,y)=A$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 求证:

(1) $f(x,y)$ 在全平面有界;

(2) $f(x,y)$ 在全平面一致连续.

(1). 取 $\varepsilon=1$. $\exists R>0$, $r>R$ 时, $|f(x,y)-A|\le 1$

即 $A-1\le|f(x,y)|\le A+1$

又. $r\le R$ 时, $|f(x,y)|\le M$ (有界闭集上连续函数取最值)

$\therefore |f(x,y)|\le\max\{M, |A+1|, |A-1|\}$

(2). $\forall\varepsilon>0$, 取 $R>0$, $r>R$ 时, $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{4}$ (记 $x=(x,y)$)

$\Rightarrow |f(x_2)-f(x_1)|<|f(x_2)-A|+|f(x_1)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$.

又. 于 $r\le 1+R$ 时. 由一致连续性, $\exists\delta>0$, $|x_2-x_1|<\delta$, $|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{4}$.

($|x_2|\le 1+R$, $|x_1|\le 1+R$). 取 $\delta'=\min(\delta,\frac{1}{4})$

(转下一页)

则 $\forall x$，至少有一成立：

$$\begin{cases} \|x\|+\delta \leqslant R+1 & \text{①} \\ \|x\|+\delta > R+1 & \text{②} \end{cases}$$

取 $|y-x|<\delta'$.

$x-\delta'<|y|<x+\delta'$

对于①. $\|y-x\|<\delta$，则 $\|y\| \leqslant R+1-\delta+\delta = R+1$.

$\Rightarrow |f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$.（因为 $\|x\|, \|y\| \leqslant R+1$）.

对于②. $\|y-x\|<\delta$，则 $\|y\| > R+1-\delta-\delta > R$.

$\Rightarrow |f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.（因为 $|x|, |y| > R$）. $\square$.

15.6.15 设 $f(x)$ 在 R^m 连续, 对 $x \neq \theta$, $f(x)>0$, 对任意 x 和 $c>0$ 有 $f(cx)=cf(x)$. 求证: 存在 $a>0$ 和 $b>0$ 使得

$$a|x| \leqslant f(x) \leqslant b|x| \qquad (x \in R^m).$$

取 $\mathbb{R}^m$ 中单位球 E, 由 E 紧, f 于 E 上取最值.

记 $b=\max\limits_{x\in E}\{f(x)\}$ $a=\min\limits_{x\in E}\{f(x)\}$. $b \geqslant a>0$.

(若 $a=0$, 则 $\exists x_0 \in E$, $f(x_0)=0$. 矛盾).

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^m$, $a \leqslant f\left(\dfrac{x}{|x|}\right) \leqslant b$. 由 f 正齐次性,

$$a|x| \leqslant f(x) \leqslant b|x| \qquad \square.$$

15.6.16 A 是 $m\times m$ 矩阵，$\det A$(A 的行列式)$\neq 0$. 求证：存在正常数 α，使得对任意 $x\in R^m$ 有

$$|Ax|\geqslant\alpha|x|.$$

由 $\det A\neq 0$，知 A 非奇异. 将 A 看作 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的映射.

显然 A 连续、($A(x_2-x_1)\leqslant\|A\|\,\|x_2-x_1\|$)

则 A 对 $\mathbb{R}^n$ 单位球取最值. 且最值不取异号)

否则由介值性，$\exists x_0$，$|x_0|=1$，$Ax_0=0$. 与 A 非奇异矛盾.

不妨设 $\max\limits_{|x|=1} Ax>\min\limits_{|x|=1} Ax>0$ $\left(\min\limits_{|x|=1} Ax\neq 0\right.$，否则 $\exists x_0$，$Ax_0=0$. $\left.|x_0|=1\right)$.

$\Rightarrow$ $A\dfrac{x}{|x|}>\alpha$. $Ax>\alpha|x|$. $(|x|\neq 0)$.