Peking University

统计力学及应用作业 7

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

May 30, 2021

1

在一个装有理想气体的容器上开一小孔, 由麦克斯韦分布求出

1. 单位时间小孔中跑出的气体分子数.
2. 跑出的气体分子的平均能量.
3. 求 γ_{12}，γ_{22}.

1

假设面元 $\mathrm{d}A$ 在 x, y 平面内, 单位时间 $\mathrm{d}t$ 矢量为 $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 的碰壁分子数为

$$\mathrm{d}N'(v_x, v_y, v_z) = nf(v_x)f(v_y)f(v_z)\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z \cdot v_x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A. \tag{1.1}$$

对 v_y, v_z 积分得

$$\mathrm{d}N'(v_x) = nf(v_x)\,\mathrm{d}v_x \cdot v_x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A. \tag{1.2}$$

因为只有 $v_x > 0$ 的部分才能碰壁, 所以

$$\begin{aligned} N' &= n\int_0^\infty f\left(v_x\right) v_x\,\mathrm{d}v_x \cdot \mathrm{d}A\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^\infty \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \cdot v_x\,\mathrm{d}v_x \cdot \mathrm{d}A\,\mathrm{d}t \\ &= n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}n\bar{v}\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 $\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ 为麦克斯韦分布的平均速率. 单位时间内捧在单位面积上的总分子数为

$$\Gamma=\frac{N'}{\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}n\bar{v}. \tag{1.4}$$

对于理想气体, 利用 $p=nkT$, 则有

$$\Gamma=\frac{n}{4}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\frac{p}{\sqrt{2\pi mkT}}. \tag{1.5}$$

即为单位时间从单位面积小孔中跑出的气体分子数.

2

分子束的速率分布函数正比于 $f(v)v$, 故

$$F(v)\,\mathrm{d}v=Af(v)v\,\mathrm{d}v, \tag{1.6}$$

由归一化条件得 $A=\frac{1}{\bar{v}}$. 分子束的方均根速率为

$$\left(\overline{v^2_{\text{束}}}\right)=\int_0^\infty F(v)v^2\,\mathrm{d}v=\frac{4kT}{m}. \tag{1.7}$$

跑出的气体分子的平均能量为

$$e=\frac{1}{2}m\left(\overline{v^2_{\text{束}}}\right)/k=2T. \tag{1.8}$$

3

设小孔面积为 σ, 单位时间小孔交换的粒子数为

$$\Delta N=\frac{1}{4}(n_1-n_2)\bar{v}\sigma\Delta t=\frac{1}{4}\frac{\Delta p}{kT}\bar{v}\sigma\Delta t. \tag{1.9}$$

$$\Delta E=\Delta Nk\cdot 2T=2T\frac{1}{4}\frac{\Delta p}{T}\bar{v}\sigma\Delta t. \tag{1.10}$$

又根据

$$\frac{\Delta E}{\Delta t}=\gamma_{12}\frac{1}{T}\frac{T}{p}\Delta p, \tag{1.11}$$

所以

$$\gamma_{12}=\frac{p\bar{v}\sigma}{2}. \tag{1.12}$$

$$\gamma_{22}=\frac{\gamma_{12}}{2T}=\frac{p\bar{v}\sigma}{4T}. \tag{1.13}$$