

作业四

(2022 年 1 月 3 日前交电子版)

1. 自己构造一个在适当的小尺度范围满足“2/3”定律的二阶纵向速度结构函数，画出结构函数和一维能谱，考察能谱函数是否满足“5/3”定律。
2. 考虑均匀各向同性湍流早期的衰减过程，用 Pao (鲍亦和) 的能量传递模型和相似性解数值求解无量纲的三维能谱函数，并在一张图上画出若干初始雷诺数下的无量纲能谱函数曲线。
3. 阅读 Kolmogorov 1941 年的三篇湍流经典论文 (见分享的书 *Turbulence: Classical papers on statistical theory*)。对较少关注的第二篇论文，在你阅读后用最简洁的论证给出“-10/7”衰减规律。并问用类似的方法，通过适当修改假设，可否推出湍流动能的指数规律衰减规律 (有人在一定形状的分形格栅尾流中测量到此规律)？
4. 证明 She-Leveque 层次相似律 (Hierarchical Self-Similarity, HSS) 是广义扩展自相似律 (Generalized Extended Self-Similarity, GESS) 的一个特殊情形。
5. K62 模型中假设湍流在尺度 ℓ 上的粗粒化耗散率 ε_ℓ 满足对数正态分布，并且均值和方差也满足随尺度变化的一定的对数规律，由此推出 p 阶速度结构函数的标度指数规律为 $\zeta(p) = \frac{p}{3} + \frac{\mu p}{18}(3 - p)$ 。证明：尺度 ℓ 上速度增量的绝对值 U 作为随机变量，其概率密度 $P(\ell, U)$ 也符合对数正态分布，且满足如下方程：
$$\ell \frac{\partial P}{\partial \ell} + (\gamma + 4b)U \frac{\partial P}{\partial U} + bU^2 \frac{\partial^2 P}{\partial U^2} + (\gamma + 2b)P = 0$$
其中 $\gamma = (3 + \mu)/9, b = \mu/18$ 。
6. 试估计用大涡模拟方法计算高雷诺数边界层湍流时的网格规模。参考 Pope 书习题 13.29 (A) 推出 (13.173) 式。
7. Prandtl 混合长模型是应用最多的一个湍流模型。但教科书中通常都是针对平均流动为二维单向的剪切湍流给出给模型。试给出混合长模型的一个三维各向异性推广。注意：模型应符合坐标不变的张量性质。
8. 推导周期边界条件下 Navier-Stokes 方程在傅立叶谱空间中的形式。从数学形式上看，二维和三维情况下最后有区别吗？用周期边界条件模拟高雷诺数均匀各向同性湍流，在模拟时计算参数的选取应注意什么问题？