PEKING UNIVERSITY

湍流 2

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

November 2, 2021

2021 年 11 月 3 日前交电子版

代码等作业内容可在 https://github.com/circlelq/Turbulence 查看.

1

推导两个独立随机变量乘积的概率密度表达式.

解:

Given two continuous random variables, x and y, along with their joint probability density, $P(x, y)$, we wish to find the probability density of a new random variable, s, that is some function of the original random variables, $s = f(x, y)$. The formal solution can be written in terms of a Dirac delta function.[2]

$$P(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\delta(s - f(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.1}$$

As was the case for the corresponding discrete random variables, the probability density of s is automatically normalized.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} P(s)\,\mathrm{d}s &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\delta(s - f(x, y))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.\end{aligned} \tag{1.2}$$

The last equality is due to the normalization of $P(x, y)$.

此题中 $f(x, y) = xy$, 又由于两个变量是独立的, 所以 $P(x, y) = P(x)P(y)$. 代

入式 (1.1) 可得

$$
\begin{aligned}
P(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\delta(s-f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)P_Y(y)\delta(s-xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x P_X(x)\frac{1}{|x|}\int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y)\delta(s/x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)\frac{1}{|x|}P_Y(s/x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

2

证明: 两个独立的高斯分布随机变量之比的概率密度为柯西分布.

设两个独立的高斯分布随机变量为

$$
P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{2.1}
$$

$$
P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}. \tag{2.2}
$$

新的变量 $f(x,y)=y/x$, 根据式 (1.1) 可得

$$
\begin{aligned}
P(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\delta(s-f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)P_Y(y)\delta(s-y/x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x|\,P_X(x)\int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y)\delta(sx-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|x|\,P_X(x)P_Y(sx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{s^2x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi(s^2+1)}.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

□

3

对于概率密度 $p(x)$, 定义 $H=-\int p\ln p\,\mathrm{d}x$ 为此概率分布的熵. 那么, 当给定数学期望和方差时, 求熵最大的概率密度函数.

解:

设数学期望和方差为

$$\mu=\int xp(x)\,\mathrm{d}x,\quad \sigma=\int (x-\mu)^2p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

这里省略了上下限 $+\infty,-\infty$, 由归一化有

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x=1, \tag{3.2}$$

拉格朗日乘子式

$$\begin{aligned} L(p)=&-\int p\ln p\,\mathrm{d}x+\lambda_0\left(1-\int p\,\mathrm{d}x\right)\\ &+\lambda_1\left(\mu-\int xp\,\mathrm{d}x\right)+\lambda_2\left(\sigma-\int (x-\mu)^2p\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

对 $L(p)$ 求 p 的变分, 得到下式

$$\delta L(p)=-\int\left(1+\ln p+\lambda_0+\lambda_1x-\lambda_2(x-\mu)^2\right)\delta p\,\mathrm{d}x=0. \tag{3.4}$$

所以

$$1+\ln p+\lambda_0+\lambda_1x-\lambda_2(x-\mu)^2=0, \tag{3.5}$$

$$p=\mathrm{e}^{-1-\lambda_0-\lambda_1x+\lambda_2(x-\mu)^2}. \tag{3.6}$$

根据式 (3.1) 和 (3.2) 可求出系数, 最终得

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3.7}$$

4

设 U,V 是两个在 $(0,1]$ 上均匀分布的独立随机变量, 若

$$X=\sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V),\quad Y=\sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V), \tag{4.1}$$

试证: X 与 Y 是两个独立的标准高斯分布的随机变量.

根据 [5, P91] 中的定理 2.5.2 有

$$f_{(X,Y)}(x,y)=f_{(U,V)}(u(x,y),v(x,y))|J| \tag{4.2}$$

其中 J 是雅可比矩阵

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \tag{4.3}$$

通过 Matlab 代码

```
syms x y
a = [x y];
f = [exp(-1/2*(x^2+y^2)) atan(y/x)/2/pi];
ja = jacobian(f, a)
det(ja)
```

可以求得

$$|J| = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}{2\,\pi}, \tag{4.4}$$

由于概率分布为正, 所以上式已经取了一个绝对值. 由均匀分布有

$$f_{(U,V)}(u(x,y), v(x,y)) = 1, \tag{4.5}$$

所以

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}{2\,\pi}. \tag{4.6}$$

由此可见 X 与 Y 是两个独立的标准高斯分布的随机变量. □

5

对于 $[0,1]$ 上的分布, 证明其各阶矩构成一个完全单调序列.

k 阶矩定义为 [1, P196]

$$c_k = E(X^k) = \int_0^1 x^k F\{\mathrm{d}x\}, \tag{5.1}$$

我们认为积分区间是闭的.

求逐次差分, 我们得到

$$(-1)^r \Delta^r c_k = E(X^k(1-X)^{r-k}) \geqslant 0, \tag{5.2}$$

因此矩数列 $\{c_k\}$ 是完全单调的. □

6

对于如下稳定分布的特征函数 $\varphi(s) = \exp\left(-|s|^{1/2}\right)$, 画出其概率密度函数, 并验证概率密度函数的尾部渐近于幂次律, 求出幂指数（的近似值）.

解:

由于

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-|s|^{1/2}\right) \mathrm{d}s = 2, \tag{6.1}$$

所以特征函数是绝对可积的, 则对特征函数做逆变换有 [4, P190]

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\exp\left(-|t|^{1/2}\right)\mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

如图 6.1 所示, 尾部确实近似为幂次律, 幂指数近似为 -1.34.

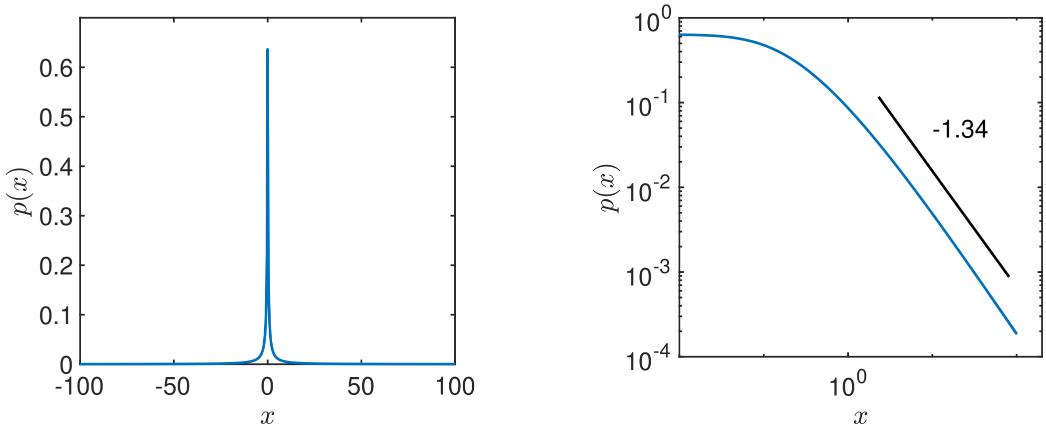

图 6.1. 概率密度函数及尾部双对数坐标图.

7

设 $X(t)$ 是一个零均值的平稳随机过程, 其自相关函数为 $R(\tau) = \mathrm{e}^{-a|\tau|}$, $a > 0$. 定义

$$Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{7.1}$$

求 $Y(t)$ 的自相关函数.

解:

$$\begin{aligned}
R_Y(\Delta t) &= \left\langle Y(t_1)Y(t_2)\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} X(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1 \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} X(\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{t_1 t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} X(\tau_1)X(\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{t_1 t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \left\langle X(\tau_1)X(\tau_2)\right\rangle \mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 \\
&= \frac{1}{t_1 t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \mathrm{e}^{-a|\tau_1-\tau_2|}\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2,
\end{aligned} \tag{7.2}$$

不妨设 $t_1 \geqslant t_2$,

$$\begin{aligned}
R_Y(\Delta t) &= \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathrm{e}^{-a|\tau_1-\tau_2|} \,\mathrm{d}\tau_1 \,\mathrm{d}\tau_2, \\
&= \frac{1}{t_1 t_2} \left(\int_0^{t_2} (t_2-\tau)\mathrm{e}^{-a\tau} \,\mathrm{d}\tau + \int_0^{t_1-t_2} t_2 \mathrm{e}^{-a\tau} \,\mathrm{d}\tau + \int_0^{t_2} (t_2-\tau)\mathrm{e}^{-a(\tau+t_1-t_2)} \,\mathrm{d}\tau \right) \\
&= \frac{1}{t_1 t_2} \left(\frac{\mathrm{e}^{-at_2}}{a^2} + \frac{at_2-1}{a^2} + t_2 \left(\frac{1}{a} - \frac{\mathrm{e}^{at_2-at_1}}{a} \right) + \frac{\mathrm{e}^{-at_1} \left((at_2-1)\,\mathrm{e}^{at_2} + 1 \right)}{a^2} \right) \\
&= -\frac{\left(\mathrm{e}^{at_2} \left(\mathrm{e}^{at_2} - \mathrm{e}^{at_1} (2at_2-1) - 1 \right) - \mathrm{e}^{at_1} \right) \mathrm{e}^{-a(t_2+t_1)}}{t_1 t_2 a^2}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

8

令随机过程 $Z(t)$ 为

$$Z(t) = aX(t) + bY(t) \tag{8.1}$$

其中 a, b 为常数, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为平稳随机过程. 用 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的功率谱密度求 $Z(t)$ 的功率谱密度.

解:

假设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均值为 0, 功率谱密度 [3, P101]

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \,\mathrm{d}\tau. \tag{8.2}$$

$$P_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \,\mathrm{d}\tau, \quad P_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \,\mathrm{d}\tau. \tag{8.3}$$

$$P_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \,\mathrm{d}\tau. \tag{8.4}$$

相关函数

$$\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= \left\langle Z(t_1) Z(t_2) \right\rangle \\
&= \left\langle (aX(t_1) + bY(t_1))(aX(t_2) + bY(t_2)) \right\rangle \\
&= a^2 \left\langle X(t_1)X(t_2) \right\rangle + ab \left\langle X(t_1)Y(t_2) \right\rangle + ab \left\langle X(t_2)Y(t_1) \right\rangle + b^2 \left\langle Y(t_1)Y(t_2) \right\rangle \\
&= a^2 \left\langle X(t_1)X(t_2) \right\rangle + b^2 \left\langle Y(t_1)Y(t_2) \right\rangle \\
&= a^2 R_X(\tau) + b^2 R_Y(\tau).
\end{aligned} \tag{8.5}$$

所以

$$\begin{aligned}
P_Z(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(a^2 R_X(\tau) + b^2 R_Y(\tau) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \,\mathrm{d}\tau. \\
&= a^2 P_X(\omega) + b^2 P_Y(\omega).
\end{aligned} \tag{8.6}$$

9

试确定以下随机过程是否具有遍历性:

$$X(t)=A\sin\left(\omega_0 t+\sigma B(t)+\theta\right), \tag{9.1}$$

其中 A, ω_0, σ 是正常数, $B(t)$ 是一个单位维纳过程, θ 是 $[0,2\pi]$ 上均匀分布的随机变量, 并且与 $B(t)$ 独立.

解:

相关函数

$$\begin{aligned}
R(\tau)&=\left\langle X(t_1)X(t_2)\right\rangle\\
&=A^2\left\langle \sin\left(\omega_0 t_1+\sigma B(t_1)+\theta\right)\sin\left(\omega_0 t_2+\sigma B(t_2)+\theta\right)\right\rangle\\
&=A^2\left\langle \int_0^{2\pi}\sin\left(\omega_0 t_1+\sigma B(t_1)+\theta\right)\sin\left(\omega_0 t_2+\sigma B(t_2)+\theta\right)\mathrm{d}\frac{\theta}{2\pi}\right\rangle_B\\
&=\frac{A^2}{2}\left\langle\cos\left(\omega_0\tau+\sigma B(\tau)\right)\right\rangle_B\\
&=\frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\omega_0\tau+\sigma x\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\tau}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\tau}{2}}.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

所以

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T R(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\tau}{2}}\,\mathrm{d}\tau=0. \tag{9.3}$$

根据各态历经定理有此随机过程具有遍历性.

10

考虑一段突扩管流包含的总动能 K, 在大雷诺数时它是一个随机变量. 如果管流的入口速度近似为不变的, 问 K 可否近似服从对数正态分布? 总耗散呢?

解:

可以. 假设初始总动能为 K_0, 经过一段时间后乘以放大系数 x_1 变成 x_1K_0, 以此类推有

$$K_n=K_0\prod_{i=1}^n x_i, \tag{10.1}$$

两边取对数得

$$\ln K_n=\ln K_0+\sum_{i=1}^n\ln x_i. \tag{10.2}$$

由于 $\ln x_i$ 是近似独立同分布的, 由中心极限定理得 $\ln K_n$ 近似符合正态分布, 即 K 可近似服从对数正态分布.

根据上面一样的推导可以得总耗散可近似服从对数正态分布. 或者换一个思路, 假设总耗散由所有各个地方的耗散加起来, 各处的耗散满足独立同分布, 所以总耗散满足正态分布.

参考文献

[1] William Feller. 概率论及其应用, volume 2. 人民邮电出版社, 2008. 4

[2] Robert H. Swendsen. *An Introduction to Statistical Mechanics and Thermodynamics*. Oxford University Press, 2012. 1

[3] 熊大国. 随机过程理论与应用. 国防工业出版社, 1991. 6

[4] 王梓坤. 概率论基础及其应用. 北京师范大学出版社, 2018. 5

[5] 葛余博. 概率论与数理统计. 清华大学出版社, 2005. 3