PEKING UNIVERSITY

湍流 2

College of Engineering   2001111690   袁磊祺

October 29, 2021

2021 年 11 月 3 日前交电子版

代码等作业内容可在 https://github.com/circlelq/Turbulence 查看.

1

推导两个独立随机变量乘积的概率密度表达式.

解:

Given two continuous random variables, x and y, along with their joint probability density, $P(x, y)$, we wish to find the probability density of a new random variable, s, that is some function of the original random variables, $s = f(x, y)$. The formal solution can be written in terms of a Dirac delta function.[1]

$$P(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\delta(s - f(x, y)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{1.1}$$

As was the case for the corresponding discrete random variables, the probability density of s is automatically normalized.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} P(s) \, \mathrm{d}s &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\delta(s - f(x, y)) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 1.\end{aligned} \tag{1.2}$$

The last equality is due to the normalization of $P(x, y)$.

此题中 $f(x, y) = xy$, 又由于两个变量是独立的, 所以 $P(x, y) = P(x)P(y)$. 代

入式 (1.1) 可得

$$\begin{aligned} P(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\delta(s-f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)P_Y(y)\delta(s-xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x P_X(x)\frac{1}{|x|}\int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y)\delta(s/x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)\frac{1}{|x|}P_Y(s/x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.3}$$

2

证明: 两个独立的高斯分布随机变量之比的概率密度为柯西分布.

设两个独立的高斯分布随机变量为

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{2.1}$$

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}. \tag{2.2}$$

新的变量 $f(x,y) = y/x$, 根据式 (1.1) 可得

$$\begin{aligned} P(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\delta(s-f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)P_Y(y)\delta(s-y/x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x|x|\,P_X(x)\int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y)\delta(sx-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,P_X(x)P_Y(sx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{s^2x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi(s^2+1)}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

□

3

对于概率密度 $p(x)$, 定义 $H = -\int p\ln p\,\mathrm{d}x$ 为此概率分布的熵. 那么, 当给定数学期望和方差时, 求熵最大的概率密度函数.

解:

设数学期望和方差为

$$\mu = \int xp(x)\,\mathrm{d}x, \quad \sigma = \int (x-\mu)^2 p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

这里省略了上下限 $+\infty, -\infty$, 由归一化有

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{3.2}$$

拉格朗日乘子式

$$\begin{aligned} L(p) = &-\int p\ln p\,\mathrm{d}x + \lambda_0\left(1 - \int p\,\mathrm{d}x\right) \\ &+ \lambda_1\left(\mu - \int xp\,\mathrm{d}x\right) + \lambda_2\left(\sigma - \int (x-\mu)^2 p\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

对 $L(p)$ 求 p 的变分, 得到下式

$$\delta L(p) = -\int \left(1 + \ln p + \lambda_0 + \lambda_1 x - \lambda_2 (x-\mu)^2\right)\delta p\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.4}$$

所以

$$1 + \ln p + \lambda_0 + \lambda_1 x - \lambda_2 (x-\mu)^2 = 0, \tag{3.5}$$

$$p = \mathrm{e}^{-1-\lambda_0-\lambda_1 x+\lambda_2(x-\mu)^2}. \tag{3.6}$$

根据式 (3.1) 和 (3.2) 可求出系数, 最终得

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3.7}$$

4

设 U, V 是两个在 $(0,1]$ 上均匀分布的独立随机变量, 若

$$X = \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V), \tag{4.1}$$

试证: X 与 Y 是两个独立的标准高斯分布的随机变量.

根据 [4, P91] 中的定理 2.5.2 有

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(U,V)}(u(x,y), v(x,y))|J| \tag{4.2}$$

其中 J 是雅可比矩阵

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \tag{4.3}$$

通过 Matlab 代码

```
syms x y
a = [x y];
f = [exp(-1/2*(x^2+y^2)) atan(y/x)/2/pi];
ja = jacobian(f, a)
det(ja)
```

可以求得

$$|J| = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}{2\,\pi}, \tag{4.4}$$

由于概率分布为正, 所以上式已经取了一个绝对值. 由均匀分布有

$$f_{(U,V)}(u(x,y), v(x,y)) = 1, \tag{4.5}$$

所以

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}{2\,\pi}. \tag{4.6}$$

由此可见 X 与 Y 是两个独立的标准高斯分布的随机变量. □

5

对于 $[0,1]$ 上的分布, 证明其各阶矩构成一个完全单调序列.

k 阶矩

$$\sigma_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\,\mathrm{d}x, \quad n \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{5.1}$$

对 $\forall\{\xi_i\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\sigma_{i+j}\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{i+j}\xi_i\xi_j p(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i,j} x^i\xi_i x^j\xi_j p(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_i x^i\xi_i\right)^2 p(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant 0.\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $i,j \in \mathbb{Z}^+$. □

6

对于如下稳定分布的特征函数 $\varphi(s) = \exp\left(-|s|^{1/2}\right)$, 画出其概率密度函数, 并验证概率密度函数的尾部渐近于幂次律, 求出幂指数（的近似值）.

解:

由于

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-|s|^{1/2}\right) \mathrm{d}s = 2, \tag{6.1}$$

所以特征函数是绝对可积的, 则对特征函数做逆变换有 [3, P190]

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \varphi(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \exp\left(-|t|^{1/2}\right) \mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

如图 6.1 所示, 尾部确实近似为幂次律, 幂指数近似为 -1.34.

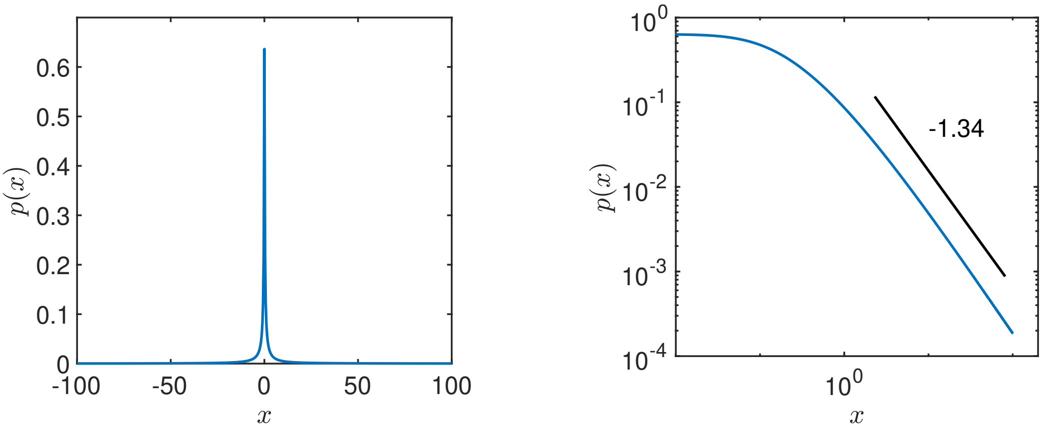

图 6.1. 概率密度函数及尾部双对数坐标图.

7

设 $X(t)$ 是一个零均值的平稳随机过程, 其自相关函数为 $R(\tau) = \mathrm{e}^{-a|\tau|}$, $a > 0$. 定义

$$Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(\tau) \,\mathrm{d}\tau. \tag{7.1}$$

求 $Y(t)$ 的自相关函数.

解:

$$
\begin{aligned}
R_Y(\Delta t) &= \big\langle Y(t_1)Y(t_2)\big\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} X(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1 \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} X(\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_2 \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{t_1 t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} X(\tau_1)X(\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{t_1 t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \big\langle X(\tau_1)X(\tau_2)\big\rangle\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 \\
&= \frac{1}{t_1 t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \mathrm{e}^{-a|\tau_1-\tau_2|}\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2,
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

不妨设 $t_1 \geqslant t_2$,

$$
\begin{aligned}
R_Y(\Delta t) &= \frac{1}{t_1 t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \mathrm{e}^{-a|\tau_1-\tau_2|}\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2, \\
&= \frac{1}{t_1 t_2}\left(\int_0^{t_2}(t_2-\tau)\mathrm{e}^{-a\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^{t_1-t_2} t_2\mathrm{e}^{-a\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^{t_2}(t_2-\tau)\mathrm{e}^{-a(\tau+t_1-t_2)}\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{t_1 t_2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-at_2}}{a^2} + \frac{at_2-1}{a^2} + t_2\left(\frac{1}{a} - \frac{\mathrm{e}^{at_2-at_1}}{a}\right) + \frac{\mathrm{e}^{-at_1}\left(\left(at_2-1\right)\mathrm{e}^{at_2}+1\right)}{a^2}\right) \\
&= -\frac{\left(\mathrm{e}^{at_2}\left(\mathrm{e}^{at_2} - \mathrm{e}^{at_1}\left(2at_2-1\right)-1\right) - \mathrm{e}^{at_1}\right)\mathrm{e}^{-a(t_2+t_1)}}{t_1 t_2 a^2}.
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

8

令随机过程 $Z(t)$ 为

$$
Z(t) = aX(t) + bY(t) \tag{8.1}
$$

其中 a, b 为常数, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为平稳随机过程. 用 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的功率谱密度求 $Z(t)$ 的功率谱密度.

解:

假设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均值为 0, 功率谱密度 [2, P101]

$$
P(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{8.2}
$$

$$
P_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau, \quad P_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{8.3}
$$

$$
P_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{8.4}
$$

相关函数

$$
\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= \left\langle Z(t_1)Z(t_2) \right\rangle \\
&= \left\langle (aX(t_1)+bY(t_1))(aX(t_2)+bY(t_2)) \right\rangle \\
&= a^2 \left\langle X(t_1)X(t_2) \right\rangle + ab \left\langle X(t_1)Y(t_2) \right\rangle + ab \left\langle X(t_2)Y(t_1) \right\rangle + b^2 \left\langle Y(t_1)Y(t_2) \right\rangle \\
&= a^2 \left\langle X(t_1)X(t_2) \right\rangle + b^2 \left\langle Y(t_1)Y(t_2) \right\rangle \\
&= a^2 R_X(\tau) + b^2 R_Y(\tau).
\end{aligned} \tag{8.5}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
P_Z(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(a^2 R_X(\tau) + b^2 R_Y(\tau)\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau. \\
&= a^2 P_X(\omega) + b^2 P_Y(\omega).
\end{aligned} \tag{8.6}
$$

9

试确定以下随机过程是否具有遍历性:

$$
X(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \sigma B(t) + \theta\right), \tag{9.1}
$$

其中 A, ω_0, σ 是正常数, $B(t)$ 是一个单位维纳过程, θ 是 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机变量, 并且与 $B(t)$ 独立.

解:

相关函数

$$
\begin{aligned}
R(\tau) &= \left\langle X(t_1)X(t_2) \right\rangle \\
&= A^2 \left\langle \sin\left(\omega_0 t_1 + \sigma B(t_1) + \theta\right) \sin\left(\omega_0 t_2 + \sigma B(t_2) + \theta\right) \right\rangle \\
&= A^2 \left\langle \int_0^{2\pi} \sin\left(\omega_0 t_1 + \sigma B(t_1) + \theta\right) \sin\left(\omega_0 t_2 + \sigma B(t_2) + \theta\right) \mathrm{d}\frac{\theta}{2\pi} \right\rangle_B \\
&= A^2 \left\langle \cos\left(\omega_0 \tau + \sigma B(\tau)\right) \right\rangle_B \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\omega_0\tau + \sigma x\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0\tau) \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{4}}.
\end{aligned} \tag{9.2}
$$

所以

$$
\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T R(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2}{\sqrt{2}}\cos(\omega_0\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{4}}\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{9.3}
$$

根据各态历经定理有此随机过程具有遍历性.

10

考虑一段突扩管流包含的总动能 K, 在大雷诺数时它是一个随机变量. 如果管流的入口速度近似为不变的, 问 K 可否近似服从对数正态分布? 总耗散呢?

解:

可以. 假设初始总动能为 K_0, 经过一段时间后乘以放大系数 x_1 变成 $x_1 K_0$, 以此类推有

$$K_n = K_0 \prod_{i=1}^{n} x_i, \tag{10.1}$$

两边取对数得

$$\ln K_n = \ln K_0 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i. \tag{10.2}$$

由于 $\ln x_i$ 是近似独立同分布的, 由中心极限定理得 $\ln K_n$ 近似符合正态分布, 即 K 可近似服从对数正态分布.

根据上面一样的推导可以得总耗散可近似服从对数正态分布. 或者换一个思路, 假设总耗散由所有各个地方的耗散加起来, 各处的耗散满足独立同分布, 所以总耗散满足正态分布.

参考文献

[1] Robert H. Swendsen. *An Introduction to Statistical Mechanics and Thermodynamics*. Oxford University Press, 2012. 1

[2] 熊大国. *随机过程理论与应用*. 国防工业出版社, 1991. 6

[3] 王梓坤. *概率论基础及其应用*. 北京师范大学出版社, 2018. 5

[4] 葛余博. *概率论与数理统计*. 清华大学出版社, 2005. 3