

湍流第四次作业答案

1. 自己构造一个在适当的小尺度范围满足“2/3”定律的二阶纵向速度结构函数，画出结构函数和一维能谱，考察能谱函数是否满足“5/3”定律。

(参考王太阳)

考虑二阶纵向速度结构函数

$$B_{dd}(r) = 2\overline{u^2}[1 - f(r)]$$

注意到

$$B_{dd}(r) = 2\overline{u^2}[1 - f(r)] \begin{cases} \propto r^2 & r \ll \eta \\ \propto r^{\frac{2}{3}} & \eta \ll r \ll L \\ \rightarrow 1 & r \gg L \end{cases}$$

故可构造函数

$$B_{dd}(r) = 2\overline{u^2}[1 - f(r)] = 2\overline{u^2} \cdot \frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}} + 1} \tanh\left(\frac{r^{\frac{4}{3}}}{\eta}\right)$$

当 $r \ll \eta$ 时

$$\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}} + 1} \tanh\left(\frac{r^{\frac{4}{3}}}{\eta}\right) \sim r^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{r^{\frac{4}{3}}}{\eta} = \frac{r^2}{\eta} \propto r^2$$

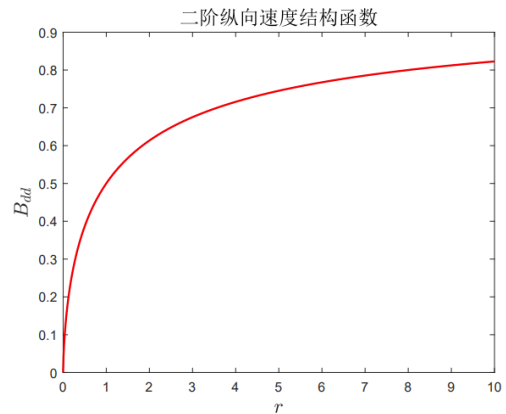
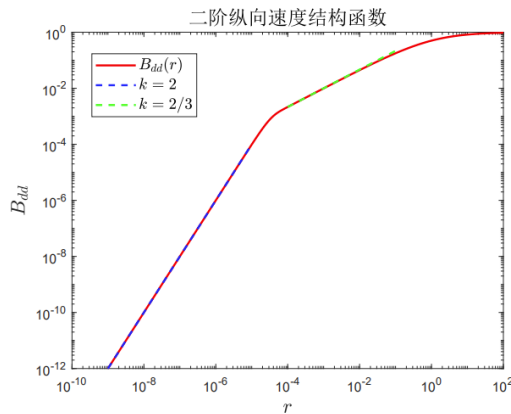
当 $\eta \ll r \ll L$ 时注意到 L 也为一小量, 则

$$\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}} + 1} \tanh\left(\frac{r^{\frac{4}{3}}}{\eta}\right) \sim r^{\frac{2}{3}} \cdot 1 = r^{\frac{2}{3}}$$

当 $r \gg L$ 时

$$\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}} + 1} \tanh\left(\frac{r^{\frac{4}{3}}}{\eta}\right) \sim \frac{1}{1 + r^{-\frac{2}{3}}} \cdot 1 \rightarrow 1$$

为了方便计算不妨取 $2\overline{u^2} = 1, \eta = 10^{-6}$, 则可做出结构函数图像如下:(见下页)



有一点请大家注意: $f(r)$ 是 r 的偶函数, 且在速度可以展为 Taylor 级数 (解析的) 的假定下 $f(r)$ 在原点也可以展为收敛的 Taylor 级数, 即在原点解析。可是上面的构造不满足这个条件。当然作为近似没有问题。通过此题, 也可以思考这样一个问题: 满足结构函数要求的“最简单的” (可定义为具有最简单数学表达式, 或者对应的能谱函数有解析表达式) 经验公式是什么? 从事理论研究应首先往简单处着眼, 简单的东西往往更加基本。例如, 假如问: 在所有速度结构函数的可能

的标度律中，满足凸性和光滑性要求的最简单的反常标度律（一定是非线性的）是哪个？我猜是 She-Leveque 标度律。（当然，简单性本身的定义是一个哲学问题，不过在相当程度上也是可以明确定义的数学问题）

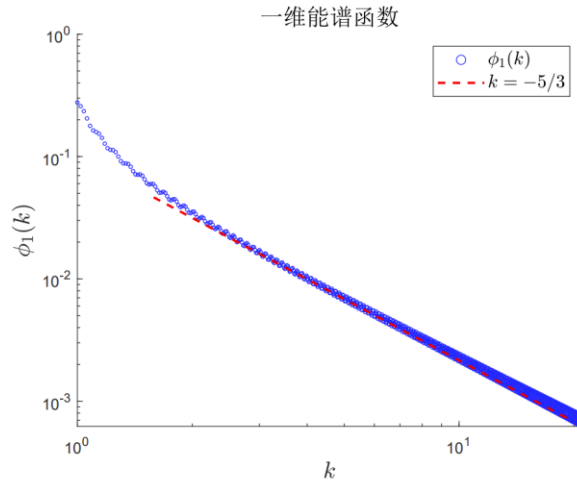
一维能谱 $\phi_1(k)$

$$\phi_1(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u^2 \rangle f(r) e^{ikr} dr = \frac{\langle u^2 \rangle}{\pi} \int_0^{+\infty} f(r) \cos(kr) dr$$

由于上述无穷积分在 Matlab 中达不到固定精度，另外注意到有

$$\left[1 - \frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}} + 1} \tanh\left(\frac{r^{\frac{4}{3}}}{\eta}\right) \right]_{r=10^3} \approx 0.01$$

故我们在此精度下取积分上限为 10^3 ，得到一维能谱函数满足“5/3”定律：



r 很大时，可否将 $B_{ad}(r)$ 展为 $r^{-4/3}$ 和 $r^{-2/3}$ 的级数形式，求得 $\phi_1(k)$ 的关于大 k 的渐近结果？

（参考周子铭）

考虑到 $\tanh(x)$ 函数在 x 较小时近似为 x ，在 x 较大时趋于 1。以中段标度 $r^{2/3}$ 为基底，用两个 $\tanh(x)$ 函数来调整过程中的次数变化，构造函数， $\tanh(x)$ 内的系数调整是为了调整拐点适当加长 $r^{2/3}$ 的区域，最后除 $6^{-2/3}$ 归一化。

$$B_{ad}(r) = 2\langle u^2 \rangle \cdot r^{\frac{2}{3}} \cdot \tanh[(10r)^{\frac{4}{3}}] \cdot \tanh\left[\left(\frac{r}{6}\right)^{-\frac{2}{3}}\right] / 6^{-\frac{2}{3}}$$

结构函数和一维能谱如下：

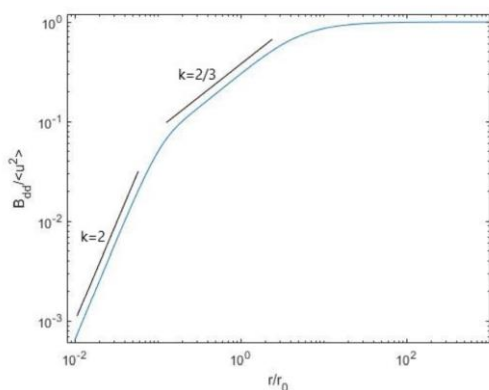


图 1: 二阶纵向速度关联函数

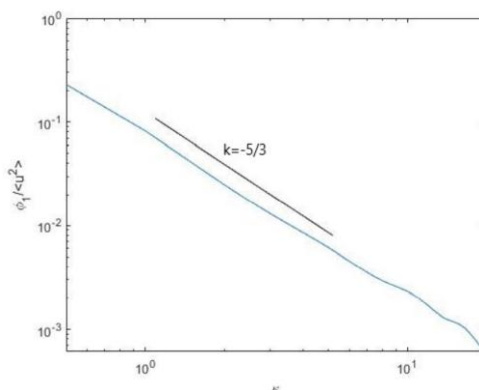


图 2: 一维能谱函数

(参考邱湛睿)

$$S_2(r) = r^2 \left(1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^4\right)^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \left(\frac{r}{r_2}\right)^4\right)^{-\frac{1}{6}}$$

其中 $r_1 = 1$, $r_2 = 20$ 。

(参考阮玉藏)

$$S_2(r) = r^2 \left(1 + \frac{r}{r_0}\right)^{-4/3} \left(1 + \frac{r}{r_1}\right)^{-2/3}$$

2. 考虑均匀各向同性湍流早期的衰减过程，用 Pao（鲍亦和）的能量传递模型和相似性解数值求解无量纲的三维能谱函数，并在一张图上画出若干初始雷诺数下的无量纲能谱函数曲线。

3. 阅读 Kolmogorov 1941 年的三篇湍流经典论文（见分享的书 Turbulence: Classical papers on statistical theory）。对较少关注的第二篇论文，在你阅读后用最简洁的论证给出“-10/7”衰减规律。并问用类似的方法，通过适当修改假设，可否推出湍流动能的指数规律衰减规律（有人在一定形状的分形格栅尾流中测量到此规律）？

4. 证明 She-Leveque 层次相似律 (Hierarchical Self-Similarity, SLHS) 是广义扩展自相似律 (Generalized Extended Self-Similarity, GESS) 的一个特殊情形。

(参考胡成龙, 见 1Ching E S C, She Z S, Su W, et al. Extended self-similarity and hierarchical structure in turbulence[J]. Physical Review E, 2002, 65(6): 066303.)

定义流场中相距 r 的两点速度差为 $\delta v_r = v(x+r) - v(x)$, 由此可以定义速度的 p 阶结构函数

$$S_p(r) \equiv \langle |\delta v_r|^p \rangle \quad (26)$$

实验中一般有幂律:

$$S_p(r) \sim r^{\zeta_p} \quad (27)$$

其中 ζ 是一个关于 p 的非线性函数。扩展自相似律 (Extended Self-Similarity, ESS) 指的是研究发现在相当长的 r 范围内 $S_p(r)$ 对 $S_3(r)$ 有幂律依赖关系。She-Leveque 层次相似律指出:

$$\frac{S_{p+2}(r)}{S_{p+1}(r)} = A_{p+1} \left[\frac{S_{p+1}(r)}{S_p(r)} \right]^\beta \left[S^{(\infty)}(r) \right]^{1-\beta} \quad (28)$$

其中 $S^{(\infty)}(r) \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} S_{p+1}(r)/S_p(r)$, $0 < \beta < 1$ 是一个常数。(28) 也可以写成

$$\begin{aligned} \frac{S_{k+1}(r)}{S_k(r)S^{(\infty)}(r)} &= A_k \left[\frac{S_k(r)}{S_{k-1}(r)S^{(\infty)}(r)} \right]^\beta = A_k \left[A_{k-1} \frac{S_{k-1}(r)}{S_{k-2}(r)S^{(\infty)}(r)} \right]^\beta \\ &= \Pi_{j=0}^{k-1} A_j^{k-1-j} \left[\frac{S_1(r)}{S^{(\infty)}(r)} \right]^{\beta^{k-1}} \end{aligned} \quad (29)$$

对 (29) 从 $k = 1, 2, \dots, n$ 进行累乘, 可以得到

$$S_n(r) = B_n \left[\frac{S_1(r)}{S^{(\infty)}(r)} \right]^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}} \quad (30)$$

其中 $B_n = \Pi_{k=1}^n \Pi_{j=0}^{k-1} A_j^{k-1-j}$, 进一步可以得到

$$\frac{S_n(r)}{S_3(r)^{n/3}} = \frac{B_n}{B_3^{n/3}} \left[\frac{S_1(r)}{S^{(\infty)}(r)} \right]^{\frac{3(1-\beta^n) - n(1-\beta^3)}{3(1-\beta)}} \quad (31)$$

GESS 有一般形式 $T_n(r) \sim T_m(r)^{\rho(n,m)}$, 对比 (31) 可知:

$$\begin{aligned} T_n(r) &= \frac{S_n(r)}{S_3(r)^{n/3}} \\ \rho(n, m) &= \frac{3(1-\beta^n) - n(1-\beta^3)}{3(1-\beta^m) - m(1-\beta^3)} \end{aligned} \quad (32)$$

即证明了 She-Leveque 层次相似律是广义扩展自相似律 (GESS) 的一个特殊情形。

不必参考任何文献的证明: **HS** 给出

$$\frac{S_{p+2}}{S_{p+1}S^{(\infty)}} \sim \left(\frac{S_{p+1}}{S_p S^{(\infty)}} \right)^\beta$$

由此，从任意正整数 p 出发，递推可得

$$\frac{S_{p+2}}{S_{p+1}S^{(\infty)}} \sim \left(\frac{S_1}{S_0 S^{(\infty)}} \right)^{\beta^{p+1}} = \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{\beta^{p+1}}$$

即

$$S_{p+2} \sim S_{p+1} \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{\beta^{p+1}}$$

也即

$$S_{p+1} \sim S_p \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{\beta^p}$$

继续往下递推可得

$$S_{p+1} \sim S_{p-1} \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{\beta^p + \beta^{p-1}} \sim S_0 \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{\beta^p + \beta^{p-1} + \dots + 1} = \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{(1-\beta^{p+1})/(1-\beta)}$$

即

$$S_p \sim \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{(1-\beta^p)/(1-\beta)}$$

故无量纲化的结构函数满足

$$\frac{S_p}{(S_m)^{p/m}} \sim \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{\frac{1-\beta^p}{1-\beta} - \frac{p}{m} \cdot \frac{1-\beta^m}{1-\beta}}$$

$$\frac{S_q}{(S_n)^{q/n}} \sim \left(\frac{S_1}{S^{(\infty)}} \right)^{\frac{1-\beta^q}{1-\beta} - \frac{q}{n} \cdot \frac{1-\beta^n}{1-\beta}}$$

因此就有

$$\frac{S_p}{(S_m)^{p/m}} \sim \left(\frac{S_q}{(S_n)^{q/n}} \right)^{\rho(p,q,m,n)}$$

其中

$$\rho(p,q,m,n) = \frac{\left(\frac{1-\beta^p}{1-\beta} - \frac{p}{m} \cdot \frac{1-\beta^m}{1-\beta} \right)}{\left(\frac{1-\beta^q}{1-\beta} - \frac{q}{n} \cdot \frac{1-\beta^n}{1-\beta} \right)} = \frac{1-\beta^p - p/m(1-\beta^m)}{1-\beta^q - q/n(1-\beta^n)}$$

这就是一种特殊的 GESS。

注意：ESS，GESS，HS 等标度律不一定意味着结构函数对尺度 ℓ 一定有标度律。

反之则不然。

5. K62 模型中假设湍流在尺度 ℓ 上的粗粒化耗散率 $\varepsilon\ell$ 满足对数正态分布，并且均值和方差也满足随尺度变化的一定的对数规律，由此推出 p 阶速度结构函数的标度指数规律为 $\zeta(p) = \frac{p}{3} + \frac{\mu p}{18}(3 - p)$ 。证明：尺度 ℓ 上速度增量的绝对值 U 作为随机变量，其概率密度 $P(\ell, U)$ 也符合对数正态分布，且满足如下方程：

$$\ell \frac{\partial P}{\partial \ell} + (\gamma + 4b)U \frac{\partial P}{\partial U} + bU^2 \frac{\partial^2 P}{\partial U^2} + (\gamma + 2b)P = 0 \quad (3.1)$$

其中 $\gamma = (3 + \mu)/9$, $b = \mu/18$ 。

6. 试估计用大涡模拟方法计算高雷诺数边界层湍流时的网格规模。参考 Pope 书习题 13.29 (A) 推出 (13.173) 式。
(参考胡成龙)

证明：考虑充分发展的槽道流, 利用传统的 LES-NWR 方法构建网格

$$\begin{aligned}\Delta x &= a_x \delta_\nu, \quad \Delta z = a_z \delta_\nu, \\ \Delta y &= \min \{ \max \{ a \delta_\nu, b y \}, c \delta \},\end{aligned}\quad (42)$$

其中 $\delta_\nu \equiv \nu/u_\tau$ 为粘性底层的特征尺度, δ 为边界层的特征尺度, a_x, a_z, a, b 和 c 均为正常数, 并且 $b > c$ 。利用下面的积分关系来估计网格量 N_{xyz}

$$N_{xyz} = \int_0^\delta \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{dx \, dy \, dz}{\Delta x \Delta y \Delta z} \quad (43)$$

代入 (42), 定义 $\text{Re}_\tau = \delta/\delta_\nu$, 分别计算三个积分 (由于 $\delta \gg \delta_\nu$, 计算中会用到 $a\delta_\nu < c\delta$)

$$\begin{aligned}\int_0^\delta \frac{dx}{\Delta x} &= \int_0^\delta \frac{dx}{a_x \delta_\nu} = \frac{\text{Re}_\tau}{a_x} \\ \int_0^\delta \frac{dz}{\Delta z} &= \int_0^\delta \frac{dz}{a_z \delta_\nu} = \frac{\text{Re}_\tau}{a_z} \\ \int_0^\delta \frac{dy}{\Delta y} &= \int_0^\delta \frac{dy}{\min \{ \max \{ a \delta_\nu, b y \}, c \delta \}} \\ &= \int_0^{a\delta_\nu/b} \frac{dy}{\min \{ a \delta_\nu, c \delta \}} + \int_{a\delta_\nu/b}^\delta \frac{dy}{\min \{ b y, c \delta \}} \\ &= \int_0^{a\delta_\nu/b} \frac{dy}{a \delta_\nu} + \int_{a\delta_\nu/b}^{c\delta/b} \frac{dy}{b y} + \int_{c\delta/b}^\delta \frac{dy}{c \delta} \\ &= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \ln \left(\frac{c \text{Re}_\tau}{a} \right) + \frac{1}{c \delta} \left(\delta - \frac{c \delta}{b} \right) \\ &= \frac{1}{b} \ln \frac{c \text{Re}_\tau}{a} + \frac{1}{c}\end{aligned}\quad (44)$$

a, b, c 是何意义, 如何取值应给出具体说明。

7. Prandtl 混合长模型是应用最多的一个湍流模型。但教科书中通常都是针对平均流动为二维单向的剪切湍流给出给模型。试给出混合长模型的一个三维各向异性推广。注意：模型应符合坐标不变的张量性质。

(参考孟昭远, 见 Czernuszenko W., Rylov A. (2000), A generalization of Prandtl's model for 3D open channel flows, Journal of Hydraulic Research, 38, No. 2, 133 - 139.)

解. Prandtl 的混合长模型是对壁面附近的单向二维流动提出的, 且速度须只与离壁面距离有关, 他提出这种简单情形下雷诺剪应力的形式为

$$-\rho \langle u_x u_y \rangle = \rho \ell_m^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy} \equiv \rho \nu_t \frac{dU}{dy}, \quad (69)$$

其中 ℓ_m 为混合长, u_x 和 u_y 分别为流向和垂向的脉动速度, U 为流向平均速度。

在 Prandtl 混合长模型的思路基础上, 可以类比式 (69) 中的各个量, 将它们进行三维各项异性的推广。

- 首先, 在三维情况下, 湍流在不同方向上可能有不同的长度尺度, 它当然可能是各向异性的。因此, 混合长 ℓ_m 应用具有长度量纲的对称二阶张量 ℓ_{ij} 来替代, 这个张量可以用来计算 \mathbf{n} 方向的混合长度

$$\ell_n = \ell_{ij} n_i n_j. \quad (70)$$

由于长度 $\ell_n > 0$, 矩阵 ℓ_{ij} 必须是正定的。

- 其次，可以将 Prandtl 理论中流向平均速度在垂向的变化率 $|dU/dy|$ 推广为更为普适的横向剪切率

$$\mathcal{S} = \sum_{i,k} \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right|. \quad (71)$$

- 最后，将最后一项速度梯度 dU/dy 替换为更为普适的应变率张量

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right). \quad (72)$$

定义出以上三个量后，直接类比式 (69) 得

$$-\rho \langle u_i u_j \rangle = 2\rho \ell_{ik}^2 \mathcal{S} S_{kj}, \quad (73)$$

然而注意到上式对指标 i, j 是不对称的，这不符合雷诺应力的对称性，因此可在其上略微修改得到满足坐标不变性的雷诺应力模型

$$-\rho \langle u_i u_j \rangle = -\frac{2}{3} \rho (k + \ell_{km}^2 S_{km} \mathcal{S}) \delta_{ij} + \rho (\ell_{ik}^2 S_{kj} + \ell_{jk}^2 S_{ki}) \mathcal{S}, \quad (74)$$

其中湍动能 $k \equiv \langle u_i u_i \rangle / 2$ 。计算式 (74) 的迹可得

$$-\rho \langle u_i u_i \rangle = -\frac{2}{3} \rho (k + \ell_{km}^2 S_{km} \mathcal{S}) \times 3 + 2\rho \ell_{ik}^2 S_{ki} \mathcal{S} = -2\rho k - 2\rho \ell_{km}^2 S_{km} \mathcal{S} + 2\rho \ell_{ik}^2 S_{ki} \mathcal{S} = -2\rho k, \quad (75)$$

满足二阶张量的第一主不变量性质，且正好符合湍动能的定义。

对模型 (74) 考虑平均流动为二维单向的剪切湍流，则 $\mathcal{S} = |dU/dy|$, $S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2} dU/dy$, $S_{xx} = S_{xz} = S_{yy} = S_{yz} = 0$ ，因此式 (74) 可简化为

$$-\rho \langle u_x u_y \rangle = \rho (\ell_{xk}^2 S_{ky} + \ell_{yk}^2 S_{kx}) \left| \frac{dU}{dy} \right| = \frac{1}{2} \rho (\ell_{xx}^2 + \ell_{yy}^2) \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy}, \quad (76)$$

如果定义混合长 $\ell_m^2 \equiv (\ell_{xx}^2 + \ell_{yy}^2)/2$ ，注意到这正好是 Prandtl 的模型 (69)，因此模型 (74) 是混合长模型的一个很好的三维各向异性推广，它可以在二维单向情形下自然地退化为 Prandtl 的模型。□

很好！但需注意两点：1. 按 (71) 定义的 \mathcal{S} 应该不是标量（即坐标变换下的不变量），这不符合物理要求。当然，这个很容易改正：令 $\mathcal{S} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$ 即可。2.

ℓ_{ij} 的具体形式没有给出，这使得推广的混合长模型无法直接应用。在近壁流动中，经典混合长的表达式为 $\ell = \kappa y$ ， κ 是 Karman 常数。这就很好用。给定混合长张量的具体形式是关键和有趣的问题。大家要发挥想象力（当然还要有理性加持）啊。

8. 推导周期边界条件下 Navier-Stokes 方程在傅立叶谱空间中的形式。从数学形式上看，二维和三维情况下最后有区别吗？用周期边界条件模拟高雷诺数均匀各向同性湍流，在模拟时计算参数的选取应注意什么问题？

（参考王太阳）

对周期区域的速度场和压力场作 Fourier 级数展开：

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \\ p(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{p}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \end{aligned}$$

定义投影算子：

考虑一个向量相对于波数的方向。任何一个向量 $\hat{\mathbf{G}}$ 都可以分解为一个平行于 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量 $\hat{\mathbf{G}}^{\parallel}$ 和一个垂直于 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量 $\hat{\mathbf{G}}^{\perp}$ ，即 $\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}}^{\parallel} + \hat{\mathbf{G}}^{\perp}$ ，以 $\mathbf{e} = \boldsymbol{\kappa}/\kappa$ 表示沿 $\boldsymbol{\kappa}$ 的单位向量，则

$$\hat{\mathbf{G}}^{\parallel} = \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{G}}) = \boldsymbol{\kappa} (\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{G}}) / \kappa^2$$

或者

$$\hat{G}^{\parallel} = \frac{\kappa_j \kappa_k}{\kappa^2} \hat{G}_k$$

因此由 $\hat{\mathbf{G}}^{\perp} = \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{G}}^{\parallel}$ 我们有

$$\hat{\mathbf{G}}^{\perp} = \hat{\mathbf{G}} - \boldsymbol{\kappa} (\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{G}}) / \kappa^2$$

或者

$$\hat{G}^{\perp} = P_{jk} \hat{G}_k$$

这里投影张量 $P_{jk}(\boldsymbol{\kappa})$ 为

$$P_{jk} = \delta_{jk} - \frac{\kappa_j \kappa_k}{\kappa^2}$$

不可压条件：

在波数空间里，速度的散度为

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\kappa}} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\} = i \kappa_j \hat{u}_j = i \boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

因此连续性方程 $\Delta \cdot \mathbf{u} = 0$ 表明 $\hat{\mathbf{u}}$ 垂直于 $\boldsymbol{\kappa}$ ：

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$$

NS 方程傅里叶基函数投影，得到谱系数满足的方程：

Navier-Stokes 方程的分量形式如下：

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k} = \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

为了得到其在傅立叶谱空间中的形式，我们对上式作用傅里叶变换算子 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\kappa}}\{\}$ ，时间偏导数项为

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\kappa}} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial t} \right\} = \frac{d \hat{u}_j}{dt}$$

粘性项为

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\kappa}} \left\{ \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right\} = -\nu \kappa^2 \hat{u}_j$$

记 $\hat{p}(\boldsymbol{\kappa}, t) \equiv \mathcal{F}_{\boldsymbol{\kappa}} \{p(\mathbf{x}, t)/\rho\}$ 为动压 (p/ρ) 的傅里叶系数，则压强梯度项为

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\kappa}} \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\} = -i \kappa_j \hat{p}$$

非线性对流项则写为

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\kappa}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j u_k) \right\} = \hat{G}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)$$

整理上述结果有

$$\frac{d \hat{u}_j}{dt} + \nu \kappa^2 \hat{u}_j = -i \kappa_j \hat{p} - \hat{G}_j(\boldsymbol{\kappa}, t) \quad (1)$$

将上式乘以 κ_j 利用连续性方程 $\kappa_j \hat{u}_j = 0$ 缩并有

$$\kappa^2 \hat{p} = i\kappa_j \hat{G}_j$$

进而有

$$-i\kappa_j \hat{p} = \frac{\kappa_j \kappa_k}{\kappa^2} \hat{G}_k = \hat{G}_j^{\parallel}$$

故压力项严格地平衡了 $-\hat{G}^{\parallel}$, $-\hat{G}$ 平行于 κ 的分量, 则方程 (1) 右边化 $-\hat{G}^{\perp}$, $-\hat{G}$ 垂直于 κ 的分量。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}_j}{dt} + \nu\kappa^2 \hat{u}_j &= -\left(\delta_{jk} - \frac{\kappa_j \kappa_k}{\kappa^2}\right) \hat{G}_k \\ &= -P_{jk} \hat{G}_k = -\hat{G}_j^{\perp} \end{aligned} \quad (2)$$

最后我们来计算非线性对流项:

$$\begin{aligned} \hat{G}_j(\kappa, t) &\equiv \mathcal{F}_{\kappa} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j u_k) \right\} = i\kappa_k \mathcal{F}_{\kappa} \{u_j u_k\} \\ &= i\kappa_k \mathcal{F}_{\kappa} \left\{ \left(\sum_{\kappa'} \hat{u}_j(\kappa') e^{i\kappa' \cdot x} \right) \left(\sum_{\kappa''} \hat{u}_k(\kappa'') e^{i\kappa'' \cdot x} \right) \right\} \\ &= i\kappa_k \sum_{\kappa'} \sum_{\kappa''} \hat{u}_j(\kappa') \hat{u}_k(\kappa'') \langle e^{i(\kappa' + \kappa'') \cdot x} e^{-i\kappa \cdot x} \rangle_{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

这里

$$\langle e^{i(\kappa' + \kappa'') \cdot x} e^{-i\kappa \cdot x} \rangle_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\mathcal{L}^3} \int_0^{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} e^{i(\kappa' + \kappa'') \cdot x} e^{-i\kappa \cdot x} dx_1 dx_2 dx_3 = \delta_{\kappa, \kappa' + \kappa''}$$

则

$$\begin{aligned} \hat{G}_j(\kappa, t) &= i\kappa_k \sum_{\kappa'} \sum_{\kappa''} \hat{u}_j(\kappa') \hat{u}_k(\kappa'') \langle e^{i(\kappa' + \kappa'') \cdot x} e^{-i\kappa \cdot x} \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= i\kappa_k \sum_{\kappa'} \sum_{\kappa''} \hat{u}_j(\kappa') \hat{u}_k(\kappa'') \delta_{\kappa, \kappa' + \kappa''} \\ &= i\kappa_k \sum_{\kappa'} \hat{u}_j(\kappa') \hat{u}_k(\kappa - \kappa') \end{aligned}$$

将其带入方程 (2) 得到 Navier-Stokes 方程在傅立叶谱空间中的形式:

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu\kappa^2 \right) \hat{u}_j = -i\kappa_{\ell} P_{jk}(\kappa) \sum_{\kappa'} \hat{u}_k(\kappa') \hat{u}_{\ell}(\kappa - \kappa', t)$$

从数学形式上看二维和三维情况下最后没有区别。

数值模拟计算参数要求:

最大计算波数 k_{max} 和 Kolmogorov 尺度 η 关系 $k_{max} \cdot \eta \geq 1$

有效网格数 \tilde{N} 与 k_{max} 关系 $2k_{max} \cdot \frac{2}{3} = \tilde{N}$

网格尺度 Δx 与有效网格数 \tilde{N} 关系 $\tilde{N} \cdot \Delta x = 2\pi$

因此 $\eta = \frac{1}{k_{max}}$, $\Delta x = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{k_{max}}$

因此 $\frac{\Delta x}{\eta} = \frac{3\pi}{2} \approx 4.7$

(参考孟昭远)

从数学形式上看，二维情况和三维情况有区别。先讨论比较简单的二维情形，由于谱空间内不可压条件 $\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0$ 的限制，在一个平面内垂直于一条直线的另一条直线的方向是确定的，也就是说 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 在谱空间内每一点的方向都是确定的，只有一个伸缩变换的自由度。如果设波矢量 $\boldsymbol{\kappa}$ 旋转 90° 得到的单位矢量为 $\boldsymbol{\kappa}^\perp$ ，则 $\hat{\boldsymbol{u}} = \lambda(\boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{\kappa}^\perp$ ，即求解速度场 \boldsymbol{u} 的问题可以降维为求解标量场 $\lambda(\boldsymbol{\kappa})$ 的问题。然而对于三维问题，垂直于一根直线的线可以在一整个平面上任意转动，即 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 有一个旋转自由度和一个伸缩变换的自由度，这跟二维问题在数学本质上是不一样的，不是单纯增加一个维度这么简单。

有道理！翻译到物理空间，就是有没有流函数的差别。当然，从谱动力学方程中，如何看到这个约束发挥作用仍然值得思考、分析或研究。二维湍流和三维湍流在动力学性质上有很大的差别，但多数是从涡矢量能不能拉伸，或者是否存在更多的无粘守恒量这个角度讨论，鲜见直接从能谱动力学方面入手分析的。感兴趣的同学可以参阅 Kraichnan 关于二维湍流的文献。课上没有讲二维湍流，但三维湍流的某些统计学研究方法完全适用于二维湍流。