

湍流 2

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

November 14, 2021

2021 年 11 月 3 日前交电子版

代码等作业内容可在 <https://github.com/circlelq/Turbulence> 查看.

1

推导两个独立随机变量乘积的概率密度表达式.

解:

Given two continuous random variables, x and y , along with their joint probability density, $P(x, y)$, we wish to find the probability density of a new random variable, s , that is some function of the original random variables, $s = f(x, y)$. The formal solution can be written in terms of a Dirac delta function.[2]

$$P(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \delta(s - f(x, y)) dx dy. \quad (1.1)$$

As was the case for the corresponding discrete random variables, the probability

density of s is automatically normalized.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} P(s) \, ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \delta(s - f(x, y)) \, ds \, dx \, dy \\
P(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \delta(s - f(x, y)) \, dx \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) P_Y(y) \delta(s - xy) \, dx \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx P_X(x) \frac{1}{|x|} \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y) \delta(s/x - y) \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) \frac{1}{|x|} P_Y(s/x) \, dx
\end{aligned} \tag{1.2}$$

2

证明: 两个独立的高斯分布随机变量之比的概率密度为柯西分布.

设两个独立的高斯分布随机变量为

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{2.1}$$

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \tag{2.2}$$

新的变量 $f(x, y) = y/x$, 根据式 (1.1) 可得

$$\begin{aligned}
P(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \delta(s - f(x, y)) \, dx \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) P_Y(y) \delta(s - y/x) \, dx \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx |x| P_X(x) \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y) \delta(sx - y) \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x| P_X(x) P_Y(sx) \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{s^2 x^2}{2}} \, dx \\
&= \frac{1}{\pi(s^2 + 1)}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

□

3

对于概率密度 $p(x)$, 定义 $H = -\int p \ln p \, dx$ 为此概率分布的熵. 那么, 当给定数学期望和方差时, 求熵最大的概率密度函数.

解:

设数学期望和方差为

$$\mu = \int xp(x) dx, \quad \sigma = \int (x - \mu)^2 p(x) dx. \quad (3.1)$$

这里省略了上下限 $+\infty, -\infty$, 由归一化有

$$\int p(x) dx = 1, \quad (3.2)$$

拉格朗日乘子式

$$\begin{aligned} L(p) = & - \int p \ln p dx + \lambda_0 \left(1 - \int p dx \right) \\ & + \lambda_1 \left(\mu - \int xp dx \right) + \lambda_2 \left(\sigma - \int (x - \mu)^2 p dx \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

对 $L(p)$ 求 p 的变分, 得到下式

$$\delta L(p) = - \int (1 + \ln p + \lambda_0 + \lambda_1 x - \lambda_2 (x - \mu)^2) \delta p dx = 0. \quad (3.4)$$

所以

$$1 + \ln p + \lambda_0 + \lambda_1 x - \lambda_2 (x - \mu)^2 = 0, \quad (3.5)$$

$$p = e^{-1-\lambda_0-\lambda_1 x+\lambda_2(x-\mu)^2}. \quad (3.6)$$

根据式 (3.1) 和 (3.2) 可求出系数, 最终得

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.7)$$

4

设 U, V 是两个在 $(0, 1]$ 上均匀分布的独立随机变量, 若

$$X = \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V), \quad (4.1)$$

试证: X 与 Y 是两个独立的标准高斯分布的随机变量.

根据 [5, P91] 中的定理 2.5.2 有

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{(U,V)}(u(x, y), v(x, y)) |J| \quad (4.2)$$

其中 J 是雅可比矩阵

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}. \quad (4.3)$$

通过 Matlab 代码

```

1 syms x y
2 a = [x y];
3 f = [exp(-1/2*(x^2+y^2)) atan(y/x)/2/pi];
4 ja = jacobian(f, a)
5 det(ja)

```

可以求得

$$|J| = \frac{e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}}{2\pi}, \quad (4.4)$$

由于概率分布为正, 所以上式已经取了一个绝对值. 由均匀分布有

$$f_{(U,V)}(u(x,y), v(x,y)) = 1, \quad (4.5)$$

所以

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}}{2\pi}. \quad (4.6)$$

由此可见 X 与 Y 是两个独立的标准高斯分布的随机变量. \square

5

对于 $[0, 1]$ 上的分布, 证明其各阶矩构成一个完全单调序列.

k 阶矩定义为 [1, P196]

$$c_k = E(X^k) = \int_0^1 x^k F\{dx\}, \quad (5.1)$$

我们认为积分区间是闭的.

求逐次差分, 我们得到

$$(-1)^r \Delta^r c_k = E(X^k (1-X)^{r-k}) \geq 0, \quad (5.2)$$

因此矩数列 $\{c_k\}$ 是完全单调的. \square

6

对于如下稳定分布的特征函数 $\varphi(s) = \exp(-|s|^{1/2})$, 画出其概率密度函数, 并验证概率密度函数的尾部渐近于幂次律, 求出幂指数 (的近似值).

解:

由于

$$\int_0^{+\infty} \exp(-|s|^{1/2}) ds = 2, \quad (6.1)$$

所以特征函数是绝对可积的, 则对特征函数做逆变换有 [4, P190]

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \exp(-|t|^{1/2}) dt. \quad (6.2)$$

如图 6.1 所示, 尾部确实近似为幂次律, 幂指数近似为 -1.34 .

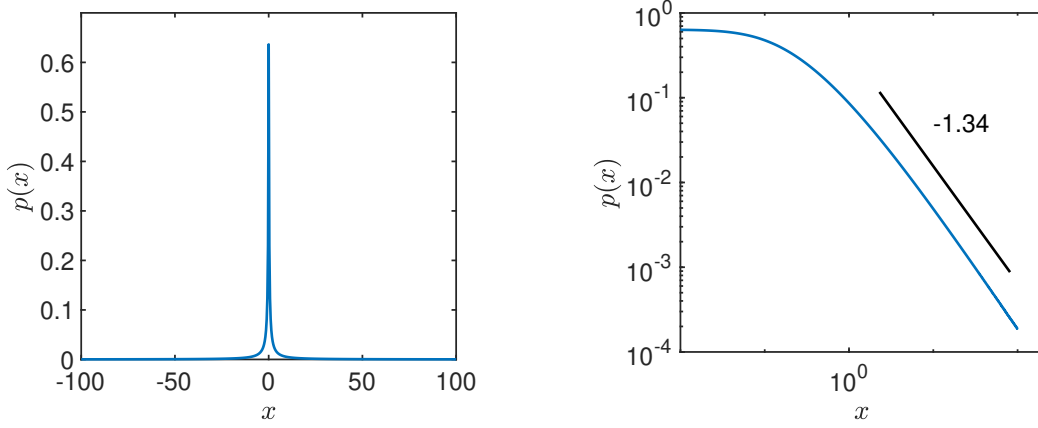


图 6.1. 概率密度函数及尾部双对数坐标图.

7

设 $X(t)$ 是一个零均值的平稳随机过程, 其自相关函数为 $R(\tau) = e^{-a|\tau|}$, $a > 0$. 定义

$$Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(\tau) d\tau. \quad (7.1)$$

求 $Y(t)$ 的自相关函数.

解:

$$\begin{aligned} R_Y(\Delta t) &= \langle Y(t_1)Y(t_2) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} X(\tau_1) d\tau_1 \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} X(\tau_2) d\tau_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} X(\tau_1) X(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle X(\tau_1) X(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-a|\tau_1 - \tau_2|} d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (7.2)$$

不妨设 $t_1 \geq t_2$,

$$\begin{aligned}
R_Y(\Delta t) &= \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-a|\tau_1 - \tau_2|} d\tau_1 d\tau_2, \\
&= \frac{1}{t_1 t_2} \left(\int_0^{t_2} (t_2 - \tau) e^{-a\tau} d\tau + \int_0^{t_1 - t_2} t_2 e^{-a\tau} d\tau + \int_0^{t_2} (t_2 - \tau) e^{-a(\tau + t_1 - t_2)} d\tau \right) \\
&= \frac{1}{t_1 t_2} \left(\frac{e^{-at_2}}{a^2} + \frac{at_2 - 1}{a^2} + t_2 \left(\frac{1}{a} - \frac{e^{at_2 - at_1}}{a} \right) + \frac{e^{-at_1} ((at_2 - 1)e^{at_2} + 1)}{a^2} \right) \\
&= - \frac{\left(e^{at_2} (e^{at_2} - e^{at_1} (2at_2 - 1) - 1) - e^{at_1} \right) e^{-a(t_2 + t_1)}}{t_1 t_2 a^2}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

8

令随机过程 $Z(t)$ 为

$$Z(t) = aX(t) + bY(t) \tag{8.1}$$

其中 a, b 为常数, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为平稳随机过程. 用 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的功率谱密度求 $Z(t)$ 的功率谱密度.

解:

假设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均值为 0, 功率谱密度 [3, P101]

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{8.2}$$

$$P_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad P_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{8.3}$$

$$P_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{8.4}$$

相关函数

$$\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= \langle Z(t_1) Z(t_2) \rangle \\
&= \langle (aX(t_1) + bY(t_1))(aX(t_2) + bY(t_2)) \rangle \\
&= a^2 \langle X(t_1) X(t_2) \rangle + ab \langle X(t_1) Y(t_2) \rangle + ab \langle X(t_2) Y(t_1) \rangle + b^2 \langle Y(t_1) Y(t_2) \rangle \\
&= a^2 \langle X(t_1) X(t_2) \rangle + b^2 \langle Y(t_1) Y(t_2) \rangle \\
&= a^2 R_X(\tau) + b^2 R_Y(\tau).
\end{aligned} \tag{8.5}$$

所以

$$\begin{aligned}
P_Z(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 R_X(\tau) + b^2 R_Y(\tau)) e^{-i\omega\tau} d\tau. \\
&= a^2 P_X(\omega) + b^2 P_Y(\omega).
\end{aligned} \tag{8.6}$$

试确定以下随机过程是否具有遍历性:

$$X(t) = A \sin(\omega_0 t + \sigma B(t) + \theta), \quad (9.1)$$

其中 A, ω_0, σ 是正常数, $B(t)$ 是一个单位维纳过程, θ 是 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机变量, 并且与 $B(t)$ 独立.

解:

相关函数

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \langle X(t_1)X(t_2) \rangle \\ &= A^2 \left\langle \sin(\omega_0 t_1 + \sigma B(t_1) + \theta) \sin(\omega_0 t_2 + \sigma B(t_2) + \theta) \right\rangle \\ &= A^2 \left\langle \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t_1 + \sigma B(t_1) + \theta) \sin(\omega_0 t_2 + \sigma B(t_2) + \theta) d\frac{\theta}{2\pi} \right\rangle_B \\ &= \frac{A^2}{2} \left\langle \cos(\omega_0 \tau + \sigma B(\tau)) \right\rangle_B \\ &= \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 \tau + \sigma x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} dx \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-\frac{\sigma^2 \tau}{2}}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

所以

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-\frac{\sigma^2 \tau}{2}} d\tau = 0. \quad (9.3)$$

根据各态历经定理有此随机过程具有遍历性.

考虑一段突扩管流包含的总动能 K , 在大雷诺数时它是一个随机变量. 如果管流的入口速度近似为不变的, 问 K 可否近似服从对数正态分布? 总耗散呢?

解:

可以. 假设初始总动能为 K_0 , 经过一段时间后乘以放大系数 x_1 变成 $x_1 K_0$, 以此类推有

$$K_n = K_0 \prod_{i=1}^n x_i, \quad (10.1)$$

两边取对数得

$$\ln K_n = \ln K_0 + \sum_{i=1}^n \ln x_i. \quad (10.2)$$

由于 $\ln x_i$ 是近似独立同分布的, 由中心极限定理得 $\ln K_n$ 近似符合正态分布, 即 K 可近似服从对数正态分布.

根据上面一样的推导可以得总耗散可近似服从对数正态分布. 或者换一个思路, 假设总耗散由所有各个地方的耗散加起来, 各处的耗散满足独立同分布, 所以总耗散满足正态分布.

参考文献

- [1] William Feller. 概率论及其应用, volume 2. 人民邮电出版社, 2008. 4
- [2] Robert H. Swendsen. *An Introduction to Statistical Mechanics and Thermodynamics*. Oxford University Press, 2012. 1
- [3] 熊大国. 随机过程理论与应用. 国防工业出版社, 1991. 6
- [4] 王梓坤. 概率论基础及其应用. 北京师范大学出版社, 2018. 5
- [5] 葛余博. 概率论与数理统计. 清华大学出版社, 2005. 3