Zur statistischen Theorie der Turbulenz*.

Von

W Heisenberg

Max Planck-Institut fur Physik, Gottingen

Mit 4 Figuren

(Eingegangen am 16 Dezember 1946)

Die in der vorhergehenden Arbeit von v Weizsacker dargestellte Auffassung von der Turbulenz wird mathematisch mit Hilfe der ublichen Methode der Fourierzerlegung behandelt Dabei wird das Spektrum der turbulenten Bewegung bis zu den kleinsten Wellenlangen, d h bis in den laminaren Bereich hinein abgeleitet, die mittleren Druckschwankungen und die Korrelationsfunktionen berechnet Schließlich wird versucht, die fur die Energiedissipation in der statistischen turbulenten Bewegung charakteristische Konstante aus den hydrodynamischen Gleichungen herzuleiten

In der von G J Taylor[1] und v Kármán[2] entwickelten statistischen Theorie der Turbulenz wird die unregelmaßige turbulente Bewegung einer Flussigkeit durch einige charakteristische Funktionen beschrieben, zwischen denen einfache mathematische Relationen bestehen die „spektrale" Verteilung der Energie auf Wellen verschiedener Wellenlange, die Korrelationen zwischen den Geschwindigkeiten an Punkten eines vorgegebenen raumlichen oder zeitlichen Abstandes und dgl Die Arbeiten von G J Taylor enthalten ausfuhrliche empirische und theoretische Angaben uber diese Funktionen

v Weizsacker[3] hat in der vorausgehenden Arbeit die wichtigste dieser Funktionen, namlich die spektrale Verteilung der Energie, fur den Grenz-

* Richard Becker zum 60 Geburtstag gewidmet

[1] Taylor, G J Proc Roy Soc A **151**, 421 (1935), **156**, 307 (1936), **164**, 15 (1938), **164**, 476 (1938)

[2] Kármán, Th v Journ Aero Sci **4**, 131 (1937)

[3] Weizsacker, C F v ZS f Phys im Erscheinen Die v Weizsackersche und die vorliegende Abhandlung sind in enger Zusammenarbeit in der Zeit des gemeinsamen Aufenthalts in England 1945 entstanden Erst nach Abschluß der Arbeiten hat uns Herr G J Taylor freundlicherweise mitgeteilt (Fruhjahr 1946), daß wesentliche Gedanken dieser Arbeiten schon von Kolmogoroff Compt Rend Acad Sc UdSSR **30**, 301 (1941), **32**, 16 (1941) und Onsager (Phys Rev, **68**, 286, 1945) gefunden und veroffentlicht worden sind Vgl einen Bericht von G K Batchelor am VI Int Kongr f angew Mechanik, Paris 1946 Etwa um die gleiche Zeit erhielten wir ferner Kenntnis von einer Arbeit von Prandtl und Wieghardt, die ahnliche Gedanken enthalt und die inzwischen in den Gottinger Akademie-Berichten erschienen ist (Nachrichten d Akad d Wissenschaften in Gottingen, Math -Physikal Klasse, aus dem Jahre 1945, S 6) Die vorliegende Arbeit kann also nur als Erganzung und Vervollstandigung dieser fruheren Untersuchungen gelten

fall großer Reynoldsscher Zahlen auf Grund von Ähnlichkeitsbetrachtungen abgeleitet. Die folgenden Abschnitte sollen zunächst die v. WEIZSÄCKERschen Überlegungen in die gewohnte Sprache der Fourierzerlegung übertragen und mit Hilfe dieser Übertragung das Abbrechen des Spektrums bei großen Frequenzen infolge der molekularen Zähigkeit studieren. Dann sollen die Folgerungen für die Korrelationsfunktionen und die Druckschwankungen gezogen werden und schließlich soll eine Ableitung der Grundkonstante der Energiedissipation versucht werden.

1. *Darstellung der v. Weizsäckerschen Überlegungen in der Sprache der Fourierkomponenten*

Bei hinreichend großen Reynoldsschen Zahlen findet die Energiedissipation bei der turbulenten Bewegung in der Weise statt, daß die großen Turbulenzelemente dadurch Energie verlieren, daß für sie die Energie- und Impulsübertragung durch kleine Turbulenzelemente wie eine zusätzliche Zähigkeit (vgl. z. B. PRANDTL[1]) wirkt. Im stationären Betrieb wird also dauernd Energie von größeren in kleinere Turbulenzelemente übergeführt, wobei der Spektralbereich einer bestimmten Wellenlänge stets von größeren Wellen her soviel Energie erhält, wie er nach kleineren Wellen abgibt. Zur Aufrechterhaltung dieses Gleichgewichtes ist eine bestimmte Energieverteilung notwendig, die dann, wenn die molekulare Reibung vernachlässigt wird, nach v. WEIZSÄCKER durch das Gesetz

$$\rho\,\frac{\overline{v^2}}{2} = \rho\,\frac{v_0^2}{2} = \rho \int F(k)\,dk \qquad (1)$$

$$F(k) \sim k^{-5/3}$$

dargestellt wird $\left(k = \frac{2\pi}{\text{Wellenlänge}}\right.$ bedeutet die Wellenzahl, $v_0 = \sqrt{\overline{v^2}}$ ein Maß für die mittlere Geschwindigkeit[2]$\left.\right)$. Dieses Spektrum $F(k) \sim k^{-5/3}$ ist nach zwei Seiten begrenzt. Bei kleinen Wellenzahlen, d. h. großen Wellenlängen, wird irgendwie die Strömung aufhören, als isotrop turbulent gelten zu können. Denn die größten Turbulenzelemente sind durch die Geometrie der Apparaturen gegeben, die die Turbulenz erzeugen. Dieses Ende des Spektrums bei kleinem k kann also überhaupt nicht Gegenstand einer rein statistischen Theorie sein. Bei großen k dagegen wird das Spektrum durch die molekulare Zähigkeit begrenzt. Bei großen k wird schließlich die molekulare Zähigkeit größer werden als die scheinbare turbulente Zähigkeit; das Spektrum wird dort dann sehr rasch abfallen.

[1] PRANDTL, L.: Strömungslehre, 3. Aufl., S. 105 u. f. Braunschweig: Vieweg 1942.

[2] Unser v_0 unterscheidet sich von dem v_0 in der v. WEIZSÄCKERschen Arbeit um einen Zahlenfaktor der Größenordnung 1.

Für die Rechnungen wollen wir die folgenden Bezeichnungen verwenden. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ soll in einem Normierungsvolumen V in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$\mathfrak{v} = \sum_{\mathfrak{k}} \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} e^{i \mathfrak{k} \mathfrak{r}} \left(\mathfrak{k}_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, \quad \ldots, n_x, n_y, n_z \text{ ganze Zahlen} \right) \tag{2}$$

Dabei ist $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{v}^*_{-\mathfrak{k}}$, und die Anzahl der „Eigenschwingungen" zwischen k und $k + \Delta k$ ist durch $\frac{4\pi k^2 \Delta k V}{(2\pi)^3}$ gegeben[1]. Dann wird

$$\frac{\overline{v^2}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{k}} |\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}^2| = \frac{1}{2} \int 4\pi k^2 \, dk \frac{V}{(2\pi)^3} |\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}^2| = \int F(k) \, dk, \tag{3}$$

also

$$F(k) = (2\pi)^{-2} k^2 V |\mathfrak{v}_k^2|. \tag{4}$$

Aus $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ folgt

$$(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} \mathfrak{k}) = 0. \tag{5}$$

Der Koeffizient der molekularen Zähigkeit werde μ genannt, der mittlere Energieverlust durch Reibung ist dann, wegen $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ unter der Voraussetzung ruhender Begrenzungsflächen

$$S = \mu \, \overline{(\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2} \tag{6}$$

$$= \mu \sum_{\mathfrak{k}} |[\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} \mathfrak{k}]^2| = \mu \int F(k) \, 2k^2 \, dk. \tag{7}$$

Wenn das Spektrum in einem großen Bereich dem Gesetz $F(k) \sim k^{-5/3}$ folgt, so wird die Gesamtenergie durch die größten Turbulenzelemente bestimmt. Wir können etwa annehmen, das Gesetz $k^{-5/3}$ gelte bis herunter zu einer kleinsten Wellenzahl k_0, für kleinere k sei $F(k) = 0$. Dann ist

$$v_0^2 = 2 \int_0^\infty F(k) \, dk = 2 \int_{k_0}^\infty \frac{C}{k^{5/3}} \, dk = 3 C \, k_0^{-\frac{2}{3}}, \tag{8}$$

[1] Dieses Verfahren ist etwas weniger anschaulich, aber mathematisch bequemer, als die übliche Entwicklung nach sin und cos. Es läuft formal auf die Grenzbedingung hinaus, daß $\mathfrak{v}$, $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}$, ... an einer Begrenzungsfläche des Volumens V die gleichen Werte haben soll wie an der gegenüberliegenden Begrenzungsfläche.

also $C = \frac{v_0^2}{3} k_0^{2/3}$ und

$$F(k) = \frac{v_0^2}{3} \frac{k_0^{2/3}}{k^{5/3}} \quad \text{für} \quad k \geq k_0\,, \tag{9}$$

$$\overline{|v_k^2|} = \frac{v_0^2\, k_0^{2/3}\, (2\pi)^3}{6\pi\, V k^{11/3}} \tag{10}$$

v. Weizsäcker betrachtet den Energieverlust S_k desjenigen Teiles des gesamten Spektrums, dessen Wellenzahlen unter k liegen. Für diese Turbulenzelemente wirken die Turbulenzelemente kleinerer Wellenlänge $\left(<\frac{2\pi}{k}\right)$ wie eine zusätzliche Zähigkeit. Man kann also allgemein schreiben

$$S_k = (\mu + \eta_k) \int_0^k F(k') \cdot 2k'^2\, dk', \tag{11}$$

wobei η_k die zusätzliche turbulente Zähigkeit bezeichnen soll und durch das Zusammenwirken aller Turbulenzelemente mit Wellenlänge $<\frac{2\pi}{k}$ zustande kommt. Dimensionsmäßig ist η_k nach Prandtl das Produkt aus Dichte, Mischungsweg und Geschwindigkeit, wobei der Mischungsweg vergleichbar sein wird mit dem Durchmesser der betreffenden Turbulenzelemente, während die Geschwindigkeit der Turbulenzelemente etwa durch $v_0 \left(\frac{k_0}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$ gegeben ist. In Anlehnung an die v. Weizsäckersche Arbeit wird man daher setzen

$$\eta_k = \varkappa \rho \int_k^\infty dk' \sqrt{\frac{F(k')}{k'^3}} \tag{12}$$

($\varkappa$ ist ein Zahlfaktor).

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen ist im wesentlichen durch Dimensionsbetrachtungen festgelegt, man könnte sich aber natürlich denken, daß etwa die Wellen k' in der Nähe von k mit etwas anderen Gewichten in das Integral eingehen, als die Wellen mit großen k-Werten, d. h. der Integrand könnte noch von der dimensionslosen Zahl k'/k abhängen. Wegen der einheitlichen Form des Spektrums $F(k) \sim k^{-5/3}$ kann man aber alle diese Unbestimmtheiten in den Zahlenfaktor $\varkappa$ aufnehmen und dem Integral willkürlich die exakte Form (12) geben. Dieses Verfahren ist einwandfrei im Gebiet des $k^{-5/3}$-Gesetzes, wird jedoch ungenau an den Enden des Gebietes, an denen die Geometrie oder die molekulare Reibung das Spektrum verändert. Aber auch an der letzteren Grenze wird (12) noch eine gute Approximation sein, die zum mindesten qualitativ das Eingreifen der Reibung richtig darstellt.

Die Konstante $\varkappa$ in Gl. (12) muß durch die hydrodynamischen Gleichungen exakt festgelegt sein, sie hat in allen Fallen, in denen von statistischer isotroper Turbulenz gesprochen werden kann, den gleichen Zahlwert und hangt in keiner Weise von der Geometrie der Stromung ab. Die theoretische Bestimmung dieser wichtigen Zahl wird im Abschnitt 5 versucht werden. Dort wird sich auch zeigen, daß die turbulente Energiedissipation tatsächlich als ein Doppelintegral vom Typus $\int\limits_0^k dk' \int\limits_k^\infty dk''$ geschrieben werden kann, wobei der Integrand die von k' nach k'' pro Zeiteinheit ubergefuhrte Energie bedeutet [Gl. (89)]. Dieses Integral ist komplizierter als der vereinfachende Ausdruck (13), der aus (11) und (12) hervorgeht, aber fur die folgenden Betrachtungen konnen (11) und (12) als hinreichende Naherungen gelten. Fur S_k erhalt man so

$$S_k = \left(\mu + \rho\varkappa \int\limits_k^\infty dk'' \sqrt{\frac{F(k'')}{k''^3}}\right) \int\limits_0^k F(k') \cdot 2k'^2\, dk' \qquad (13)$$

Der entscheidende Schritt der v. Weizsäckerschen Uberlegung ist die Feststellung, daß dieser Ausdruck fur $k \ll k_0$ von k unabhangig sein muß.

$$S_k = S = \text{const (fur } k \gg k_0), \qquad (14)$$

weil ja die Gesamtenergie zum allergrößten Teil im langwelligen Gebiet des Spektrums liegt, also der Energie„durchsatz" von k unabhangig werden muß.

Die Gl. (13) kann als Bestimmungsgleichung des turbulenten Spektrums $F(k)$ aufgefaßt werden, die fur das Gebiet großer Reynoldsscher Zahlen das $k^{-5/3}$-Gesetz und fur noch großere k-Werte das Abklingen des Spektrums infolge der molekularen Zahigkeit liefern muß.

2. *Die Gestalt des Spektrums in der Gegend der kleinsten Turbulenzelemente*

Wir setzen zunachst $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ und differenzieren (13) nach k. Dann ergibt sich

$$\left(\frac{\nu}{\varkappa} + \int\limits_k^\infty dk' \sqrt{\frac{F(k')}{k'^3}}\right) F(k) \cdot k^2 = \sqrt{\frac{F(k)}{k^3}} \int\limits_0^k F(k')\, k'^2\, dk' \qquad (15)$$

Dann definieren wir neue Variable x und w durch die Gleichungen

$$x = \lg \frac{k}{k_0}, \quad F(k) = F(k_0)\, e^{-w}, \quad w = w(x) \qquad (16)$$

Damit geht (15) über in

$$e^{\frac{7}{2}x-\frac{w}{2}}\left(\frac{\nu}{\varkappa}\sqrt{\frac{k_0}{F_0}}+\int\limits_x^\infty e^{-\frac{w}{2}-\frac{x}{2}}\,dx\right)=\int\limits_0^x e^{3x-w}\,dx \qquad (17)$$

Die Konstante $\frac{\nu}{\varkappa}\sqrt{\frac{k_0}{F_0}}=\frac{\nu k_0\sqrt{3}}{\varkappa v_0}$ [vgl. Gl. (9)] ist im wesentlichen die reziproke Reynoldssche Zahl der Gesamtströmung und daher stets sehr klein; wenn die Reynoldssche Zahl selbst klein wäre, so könnte die Strömung überhaupt nicht turbulent sein. Durch nochmaliges Differenzieren entsteht aus (17)

$$\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{\nu}{\varkappa}\sqrt{\frac{k_0}{F_0}}+\int\limits_x^\infty e^{-\frac{w}{2}-\frac{x}{2}}\,dx\right)=2e^{-\frac{w}{2}-\frac{x}{2}} \qquad (18)$$

In dieser Gleichung kann man das Integral $\int\limits_x^\infty dx\, e^{-\frac{w+x}{2}}$ näherungsweise auswerten, indem man $w(x)$ in der Nähe von x entwickelt: $w(x_1)=$ $=w(x)+(x_1-x)\frac{dw}{dx}+\cdots$ und mit dem zweiten Gliede abbricht. Da die Exponentialfunktion rasch abfällt, erhält man so eine gute Näherung

$$\int\limits_x^\infty dx\, e^{-\frac{w+x}{2}}\approx 2\,\frac{e^{-\frac{w+x}{2}}}{1+\frac{dw}{dx}}. \qquad (19)$$

Durch Einsetzen in (18) ergibt sich schließlich

$$\left(7-\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{\nu}{2\varkappa}\sqrt{\frac{k_0}{F_0}}\,e^{\frac{w+x}{2}}+\frac{1}{1+\frac{dw}{dx}}\right)=2. \qquad (20)$$

Man erkennt aus (20) sofort den allgemeinen Verlauf des Spektrums. Für nicht zu große x und w kann das erste Glied in der Summe vernachlässigt werden und man erhält

$$\left(7-\frac{dw}{dx}\right)=2\left(1+\frac{dw}{dx}\right),\ \text{d. h.}\ \frac{dw}{dx}=\frac{5}{3}:\quad F(k)=F_0\left(\frac{k}{k_0}\right)^{-5/3}, \qquad (21)$$

wie es nach der v. WEIZSÄCKERschen Theorie sein muß. Für große x und w dagegen überwiegt das erste Glied, daher muß dann

$$\frac{dw}{dx}=7,\ F\sim\text{const.}\ k^{-7} \qquad (22)$$

sein. In der Gegend der kleinsten Turbulenzelemente fällt das Spektrum daher sehr rasch, nämlich mit der 7. Potenz der Wellenzahl, ab.

Nur im Übergangsgebiet von (21) nach (22) sind numerische Rechnungen nötig, um die Lösung von (20) zu ermitteln. Da für kleinere x, d. h. für das Gebiet

$$\begin{gathered} 1 \ll x \ll \frac{3}{4} \lg \frac{2\varkappa}{\nu} \sqrt{\frac{F_0}{k_0}} \\ w = \frac{5}{3} x \end{gathered} \tag{23}$$

gesetzt werden kann [damit ist dann nicht nur (18) sondern auch (17) in ausreichender Genauigkeit erfüllt], kann man von Punkt zu Punkt fortschreitend $\frac{d w}{d x}$ nach (20) aus w berechnen und damit w für höhere x ableiten. Dabei genügt es, die numerische Rechnung für einen bestimmten großen Wert der Konstanten, sagen wir $\frac{2\varkappa}{\nu} \sqrt{\frac{F_0}{k_0}} = a$ durchzuführen. Für einen anderen Wert b kann man dann w durch eine einfache Ähnlichkeitstransformation erhalten.

$$w_b(x) = w_a\left(x + \frac{3}{4} \lg \frac{a}{b}\right) - \frac{5}{4} \lg \frac{a}{b}, \tag{24}$$

wie man durch Einsetzen in (20) und (23) erkennt.

Die Abb. 1 gibt das Ergebnis der numerischen Rechnung für $\frac{2\varkappa}{\nu} \sqrt{\frac{F_0}{k_0}} = 1000$ wieder. Die numerische Integration zeigt, daß für diesen Wert im Gebiet

$$\begin{gathered} x > 5 \\ w(x) \approx 7x - 21{,}85 \end{gathered} \tag{25}$$

ist. Allgemeiner wird also in diesem Gebiet des k^{-7}-Gesetzes

$$w(x) = 7x + 3{,}0 - 4 \lg\left(\frac{\varkappa}{\nu} \sqrt{\frac{F_0}{k_0}}\right), \tag{26}$$

d. h.

$$F(k) = 0{,}0496 \; \frac{F_0}{k_0^2} \left(\frac{\varkappa}{\nu}\right)^4 \left(\frac{k_0}{k}\right)^7 \tag{27}$$

Eine brauchbare Interpolationsformel, die in den beiden Grenzfällen richtig ist und auch im Übergangsgebiet keine großen Fehler gibt, lautet

$$F(k) = F_0 \left(\frac{k_0}{k}\right)^{5/3} \left[1 + \left(\frac{k}{k_s}\right)^{\frac{8}{3}}\right]^{-2} \tag{28}$$

Definiert man $L_0 = \frac{\pi}{k_0}$ als den „Durchmesser der größten Turbulenzelemente“ und führt als Reynoldssche Zahl der Gesamtströmung

$$R_0 = \frac{\rho\, v_0\, L_0}{\mu} \tag{29}$$

ein, so wird nach (9), (27) und (29)

$$k_s = 0{,}16\; k_0\; (R_0\, \varkappa)^{3/4} \tag{30}$$

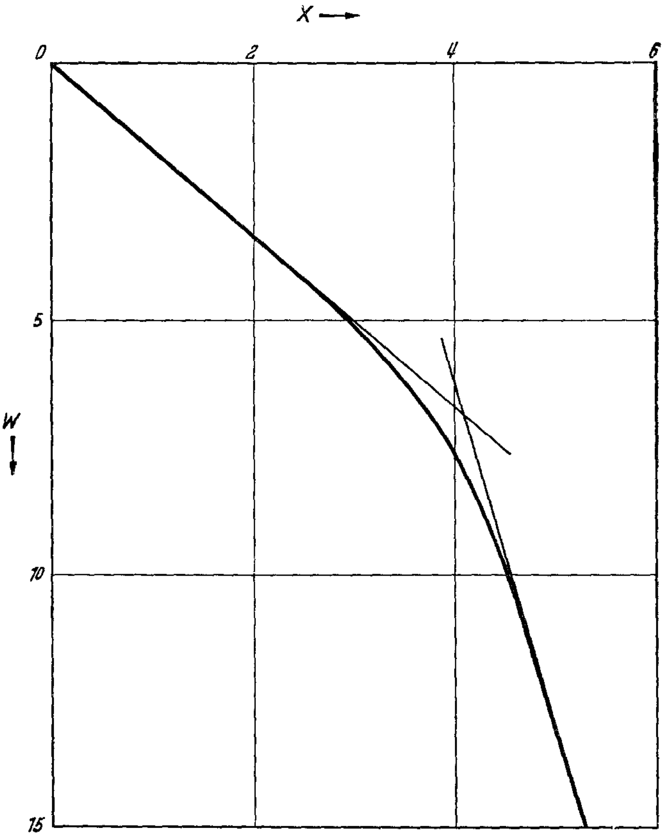

Abb 1 Darstellung der Funktion $w(\varkappa)$

Man kann $L_s = \frac{\pi}{k_s}$ als den „Durchmesser der kleinsten Turbulenzelemente“ bezeichnen und erhält

$$L_s = 6{,}25\; L_0\; (R_0\, \varkappa)^{-3/4} \tag{31}$$

Durch (9), (28) und (30) ist die Gestalt des Spektrums im ganzen k-Bereich festgelegt Bei den wirklichen Strömungen wird allerdings der Verlauf des Spektrums bei kleinen k-Werten ($k \sim k_0$) ein anderer sein, da dort die Geometrie der Versuche, z. B. die Gestalt der Gitter, mit denen die Turbulenz erzeugt wird, eine Rolle spielt. Man wird dann, um den Vergleich mit der Erfahrung sinngemäß durchführen zu können, eine Größe k_0 einführen derart, daß etwa im Bereich des $k^{-5/3}$-Gesetzes (also für $k_s \gg k \gg k_0$) die Formel

$$F(k) = \frac{v_0^2}{3\,k_0} \left(\frac{k_0}{k}\right)^{5/3} \tag{32}$$

richtig wird. Die so definierte Größe k_0 sagt dann nicht direkt etwas über den Verlauf des Spektrums bei den kleinsten k-Werten aus. Wohl aber wird das Spektrum im allgemeinen in der Gegend $k \sim k_0$ stark vom $k^{-5/3}$-Gesetz abweichen.

Auch für $k \gg k_s$ wird das Spektrum nicht unbegrenzt die Form k^{-7} beibehalten. Denn die bekannten Untersuchungen von BURGERS[1] machen es sehr wahrscheinlich, daß es bei hinreichend kleinen Reynoldsschen Zahlen schließlich gar keine turbulenten Bewegungen mehr gibt. Andererseits fällt das k^{-7}-Gesetz so rasch ab, daß das Gebiet $k \gg k_s$ praktisch keine Rolle spielt. Ein etwas größerer Fehler wird, insbesondere im Übergangsgebiet, durch die Ungenauigkeit der Gl. (13) selbst entstehen, aber es lohnt wohl nicht, schon jetzt die sehr viel komplizierteren Gleichungen des 5. Abschnittes auf das hier gestellte Problem anzuwenden. Die richtigen Gleichungen würden jedenfalls zu etwas anderen Zahlfaktoren in (27), (30) und (31) führen.

Für den Vergleich mit der Erfahrung braucht man die Energieverteilung über die Wellenzahlen einer bestimmten Richtung, etwa über k_x, da die Spektren experimentell von SIMMONS[2] und DRYDEN[3] durch die zeitlichen Schwankungen der Geschwindigkeit in einem Luftstrom gemessen worden sind, der mit einer konstanten relativ zu v_0 großen Geschwindigkeit U am Meßort vorbeigeführt wird. Dieses Spektrum hat auch eine verschiedene Form, je nachdem es sich um die Fourierentwicklung von $\mathfrak{v}_x$ oder $\mathfrak{v}_y$ handelt. Experimentell wird zunächst das Spektrum für $\mathfrak{v}_x$ gebraucht, wir wollen aber auch das für $\mathfrak{v}_y$ ableiten, da es später bei der Berechnung der Korrelationsfunktionen notwendig ist. Da nach Gl. (5) $(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{k}) = 0$ ist, wird

$$\overline{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}x}^2} = \frac{v_k^2}{2}\left(1 - \frac{k_x^2}{k^2}\right) \tag{33}$$

---

[1] BURGERS, J. M.: Verh. d. Kgl. Ned. Akad. d. Wiss. **17**, Nr. 2, 1 (1939), **18**, Nr. 1, 1 (1940).

[2] SIMMONS u. SALTER: Proc. Roy. Soc. A **165**, 73 (1938).

[3] DRYDEN, SCHUBAUER, MOCK u. SKRAMSTAD: Nation. Adv. Comm. Aeron., Nr. 581 (1938), DRYDEN, H. L.: Proc. V. Intern. Congr. f. Applied Mech. Cambridge (Mass.), S. 362 (1938).

Das Spektrum von $\mathfrak{v}_x$ in k_x, das wir mit $F_x(k_x)$ bezeichnen wollen, wird daher

$$F_x(k_x) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,k_y\,d\,k_z}{4\,\pi\,k^2}\;\frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_x^2}{k^2}\right) F(k)$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{k_x}^{\infty} \frac{d\,k}{k^3}\,(k^2 - k_x^2)\;F(k) \tag{34}$$

In ahnlicher Weise wird das Spektrum fur $\mathfrak{v}_y$

$$F_y(k_x) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,k_y\,d\,k_z}{4\,\pi\,k^2}\;\frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_y^2}{k^2}\right) F(k)$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_{k_x}^{\infty} \frac{d\,k}{k^3}\,(k^2 + k_x^2)\;F(k) \tag{35}$$

Aus (34) und (35) folgt fur

a) $k_0 \ll k \ll k_s$

$$F(k) = F_0\left(\frac{k_0}{k}\right)^{5/3}, \quad \text{also}$$

$$F_x(k_x) = \frac{9\,F_0}{110}\left(\frac{k_0}{k_x}\right)^{5/3} \quad \text{und} \tag{36}$$

$$F_y(k_x) = \frac{6\,F_0}{55}\left(\frac{k_0}{k_x}\right)^{5/3}$$

b) $k \gg k_s$

$$F(k) = F_0\,\frac{k_0^{5/3}\,k_s^{\frac{16}{3}}}{k^7},$$

$$F_x(k_x) = \frac{F_0}{126}\,k_0^{5/3}\,k_s^{\frac{16}{3}}\,k_x^{-7},$$

$$F_y(k_x) = \frac{2\,F_0}{63}\,k_0^{5/3}\,k_s^{\frac{16}{3}}\,k_x^{-7} \tag{37}$$

Als brauchbare Interpolationsformel [die aber im Ubergangsgebiet etwas weniger genau als (28) ist] kann man wieder setzen

$$F_x(k_x) = \frac{9\,F_0}{110}\left(\frac{k_0}{k_x}\right)^{\frac{5}{3}}\left[1 + \left(\frac{k_x}{k_s^{xx}}\right)^{\frac{8}{3}}\right]^{-2} \tag{38}$$

mit

$$k_s^{x\,x} = 0{,}645\;k_s \tag{39}$$

und
$$F_y(k_x) = \frac{6\,F_0}{55}\left(\frac{k_0}{k_x}\right)^{5/3}\left[1+\left(\frac{k_x}{k_s^{y\,x}}\right)^{\frac{8}{3}}\right]^{-2} \tag{40}$$

mit
$$k_s^{y\,x} = 0{,}793\;k_s \tag{41}$$

Bevor der Vergleich mit der Erfahrung im einzelnen durchgeführt wird, soll die Frage gestellt werden, bei welchen kritischen Reynoldsschen Zahlen der Übergang vom $k^{-5/3}$-Gesetz in das k^{-7}-Gesetz – also, wenn man so will, der Übergang von der eigentlich turbulenten zur laminaren Bewegung – erfolgt. Als die kritische Reynoldssche Zahl hierfür kann man etwa den Ausdruck

$$R_s = \frac{\rho\, v_s\, L_s}{\mu} \tag{42}$$

ansehen, wobei nach v. WEIZSÄCKER $v_s = v_0\left(\frac{k_0}{k_s}\right)^{\frac{1}{3}}$ ist. Aus (29), (30) und (31) erhält man dann

$$R_s = \frac{10{,}2}{\varkappa} \tag{43}$$

Der Zahlwert von $\varkappa$ wird später noch diskutiert werden. Jedenfalls findet also der Übergang bei einem bestimmten numerischen Wert der Reynoldsschen Zahl statt, wie aus allgemeinen Ähnlichkeitsüberlegungen zu erwarten ist.

In Abb. 2 sind die Messungen des Spektrums $F_x(k_x)$ von SIMMONS (l. c.) mit der Theorie verglichen. Es handelt sich um Intensitätsmessungen an einen Luftstrom, der mit den Geschwindigkeiten $U = 456$ cm/sec (o), 608 cm/sec (×), 1060 cm/sec (□) am Meßort vorbeiströmt und durch ein Gitter von 7,6 cm Maschenweite turbulent gemacht worden ist, die Messung erfolgte 2,1 m hinter dem Gitter. Die Meßpunkte SIMMONS' sind nur im rechten Teil der Abb. einzeln eingetragen, in der linken Hälfte ist der ungefähre Streubereich der Meßpunkte durch einen senkrechten Strich angegeben. Abszisse ist k in cm^{-1} (in logarithmischem Maßstab), Ordinate $F_x(k_x)$ ebenfalls logarithmisch, in willkürlichen Einheiten. Wenn man annimmt, daß U/v_0 in allen drei Meßreihen den gleichen Wert hat, was durch andere Messungen von TAYLOR bestätigt wird, so erhält man bei einer geeigneten Wahl dieses Verhältnisses die drei in die Abb. eingezeichneten Kurven. Qualitativ werden die SIMMONSschen Meßpunkte durch die Kurven gut dargestellt, insbesondere auch das Auseinanderlaufen der drei Meßreihen im kurzwelligen Teil des Spektrums. Im einzelnen aber gibt es auch erhebliche Abweichungen, man erkennt aus der Figur, daß der Gültigkeitsbereich des $k^{-5/3}$-Gesetzes hier so klein ist, daß eine zuverlässige Nachprüfung nicht möglich ist. Dies liegt an der Kleinheit der Reynoldsschen Zahl R_0. Bei $k = 1$ cm^{-1} ist der Durchmesser der Turbulenzelemente

3 cm, also etwa halb so groß wie die Maschenweite des Gitters, in diesem Gebiet ist die Turbulenz noch nicht völlig isotrop, das $k^{-5/3}$-Gesetz kann also noch nicht gelten Schon bei $k = 4\ \mathrm{cm}^{-1}$ aber macht sich der Einfluß der molekularen Zähigkeit bemerkbar, die Intensität sinkt stärker ab

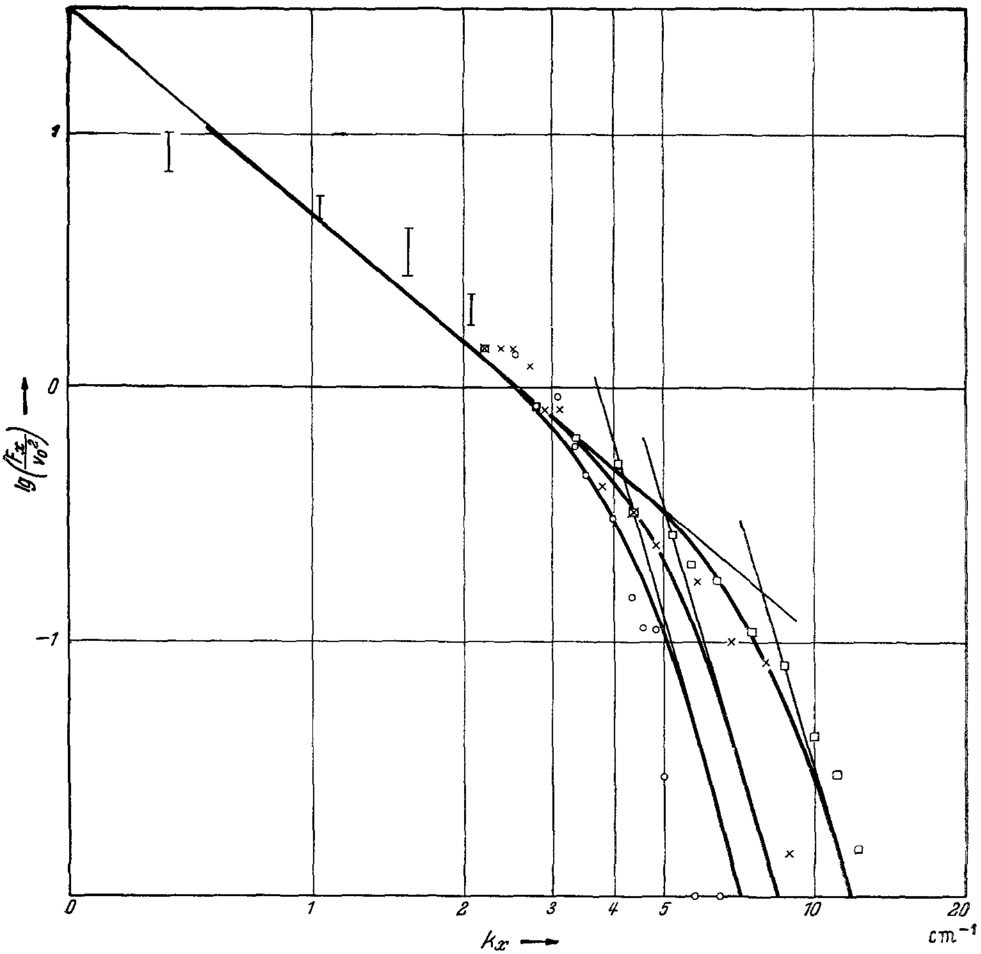

Abb 2 Die turbulente Energieverteilung als Funktion der Wellenzahl

Auch die verwandten Messungen von DRYDEN (l c), die sich über ein großes Spektralgebiet erstrecken, sind bei so kleinen Reynoldsschen Zahlen durchgeführt, daß die Gültigkeit des $k^{-5/3}$-Gesetzes kaum nachgeprüft werden kann Es wäre also wünschenswert, ähnliche Messungen mit sehr viel größeren Reynoldsschen Zahlen durchzuführen Für das Verhältnis U/v_0 erhält man aus der Angleichung der theoretischen Kurven an die

Meßpunkte $U/v_0 = 53\,\varkappa$, wenn man L_0 mit der Maschenweite des Gitters identifiziert. Dieser Wert paßt gut zu Messungen[1] dieses Verhältnisses bei ähnlichen Versuchen, wenn man annimmt, daß $\varkappa$ etwa 0,5 ist.

Eine andere und wohl genauere Bestimmung von $\varkappa$ erhält man aus dem zeitlichen Abklingen der Turbulenz, das schon von Taylor (l. c.) theoretisch vollständig behandelt worden ist. Für den gesamten Energieverlust pro cm³ und sec. S ergibt sich aus (9), (13) und (14)

$$S = \rho \varkappa \frac{\sqrt{3}}{8} v_0^3 k_0 \tag{44}$$

Also muß für die zeitliche Abklingung von v_0 gelten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_0^2}{2}\right) = -\varkappa \frac{\sqrt{3}}{8} v_0^3 k_0, \tag{45}$$

mit der Lösung[2]

$$v_0(t) = \frac{v_0(0)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{8} \varkappa k_0 v_0(0)\, t} \tag{46}$$

Taylor, der im wesentlichen diese Gl. abgeleitet hat, berichtet über Messungen von Simmons, bei denen $\frac{U}{v_0(t)}$ als Funktion von $t = \frac{x}{U}$ (x = Abstand des Meßpunktes vom Gitter) ermittelt wurde. Aus (46) folgt

$$\frac{U}{v_0(t)} = \frac{U}{v_0(0)} + \frac{\sqrt{3}}{8} \varkappa \pi \frac{x}{L_0} = \frac{U}{v_0(0)} + 0{,}68\varkappa \frac{x}{L_0} \tag{47}$$

Wenn man $v_0 = u' \sqrt{3}$ setzt ($u' = \sqrt{\overline{v_x^2}}$ nach Taylor) und L_0 mit der Maschenweite identifiziert, so folgt aus den Taylorschen Messungen $\varkappa = 0{,}85$, aus den entsprechenden Messungen von Dryden ein etwas kleinerer Wert. Wegen der Unsicherheit in dem für L_0 einzusetzenden Wert ist diese Bestimmung aber wohl noch um etwa 50% unsicher.

3. *Die Korrelationsfunktionen*

Taylor und v. Kármán (l. c.) haben die Korrelationen studiert, die zwischen den Geschwindigkeiten an zwei Punkten in gegebenem Abstand bestehen. Die beiden Korrelationsfunktionen $R_1(x)$ und $R_2(x)$, die hierbei die Hauptrolle spielen, sind definiert als

---

[1] Vgl. Taylor, G. J.: Proc. Roy. Soc. A **164**, 486 (1938).

[2] Anm. bei der Korrektur: Bei dieser Lösung ist k_0 = const vorausgesetzt, was sicher für größere Zeiten nicht zutrifft. Das Problem der Abklingung wird genauer untersucht in einer im Erscheinen begriffenen Arbeit des Verfassers (Proc. Roy. Soc. A).

$$R_1(x) = \frac{\overline{v_x(P_1)\, v_x(P_2)}}{\overline{v_x^2}}, \qquad R_2(x) = \frac{\overline{v_y(P_1)\, v_y(P_2)}}{\overline{v_y^2}}, \tag{48}$$

wobei der Punkt P_2 um die Strecke x in der x-Richtung gegen den Punkt P_1 verschoben ist.

Diese Funktionen stehen nach TAYLOR in einfachem Zusammenhang mit den Spektren

$$\left.\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{\int\limits_0^\infty d k_x\, F_x(k_x) \cos k_x x}{\int\limits_0^\infty d k_x\, F_x(k_x)}, \\ R_2(x) &= \frac{\int\limits_0^\infty d k_x\, F_y(k_x) \cos k_x x}{\int\limits_0^\infty d k_x\, F_y(k_x)} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Mit Hilfe der Gl. (34) und (35) geht (49) über in

$$R_1(x) = \frac{3 \int\limits_0^\infty d k\, F(k)\, (\sin k x - k x \cos k x)\, k^{-3}\, x^{-3}}{\int\limits_0^\infty d k\, F(k)},$$

$$R_2(x) = \frac{\frac{3}{2} \int\limits_0^\infty d k\, F(k)\, (k^2 x^2 \sin k x + k x \cos k x - \sin k x)\, k^{-3}\, x^{-3}}{\int\limits_0^\infty d k\, F(k)} \tag{50}$$

An diesen Ausdrücken erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der v. KARMÁNschen Beziehung

$$R_2 = R_1 + \frac{x}{2} \frac{d R_1}{d x} \tag{51}$$

Die Formeln (50) können näherungsweise ausgewertet werden in den beiden Grenzfällen $x \ll \frac{1}{k_s}$ und $\frac{1}{k_s} \ll x \ll \frac{1}{k_0}$. Wenn $x \ll \frac{1}{k_s}$ ist, entwickelt man die Integranden zweckmäßig nach Potenzen von x. Die ersten Entwicklungsglieder führen dann auf die Größe

$$\overline{k^2} = \frac{\int\limits_0^\infty d k\, F(k)\, k^2}{\int\limits_0^\infty d k\, F(k)}, \tag{52}$$

die aus (13), (44) und (29) leicht berechnet werden kann

$$\overline{k^2} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \varkappa R_0 k_0^2 \tag{53}$$

So erhalt man

$$\text{Fur } x \ll \frac{1}{k_s} \qquad \begin{aligned} R_1(x) &= 1 - \frac{x^2 \overline{k^2}}{10} + \\ R_2(x) &= 1 - \frac{x^2 \overline{k^2}}{5} + \end{aligned} \tag{54}$$

TAYLOR hat eine Lange λ durch die Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{5}{\overline{k^2}} \tag{55}$$

definiert und als ein Maß fur die Große der kleinsten Turbulenzelemente bezeichnet Nach (53) wird

$$\lambda = 2{,}71 \frac{L_0}{\sqrt{R_0 \varkappa}} = 0{,}434 L_s (R_0 \varkappa)^{\frac{1}{4}} \tag{56}$$

Es muß betont werden, daß λ nicht identisch ist mit der Große L_s [Gl (31)], die wir als „Durchmesser der kleinsten Turbulenzelemente" bezeichnet haben, und daß λ auch anders als L_s von L_0 und v_0 abhangt Ein Vergleich von (31) und (56) zeigt, daß fur hinreichend große Reynoldssche Zahlen die Lange $L_s \ll \lambda$ wird

Im entgegengesetzten Grenzfall $\frac{1}{k_s} \ll x \ll \frac{1}{k_0}$ erhalt man aus (50)

$$\begin{aligned} R_1(x) &= 1 - 0{,}643\,(k_0 x)^{2/3} + \\ R_2(x) &= 1 - 0{,}858\,(k_0 x)^{2/3} + \end{aligned} \tag{57}$$

Dabei hangen diese ersten Entwicklungsglieder noch nicht von der speziellen Form des Spektrums in der Nahe von k_0 ab, erst fur $x \sim \frac{1}{k_0}$ wird die Form des Spektrums in der Nahe von k_0 wichtig, dort kann man aber das Problem nicht mehr mit rein statistischen Methoden behandeln Die Formeln (54) und (57) geben also wohl eine vollstandige Beschreibung der Korrelationen, soweit sie als Folge statistischer isotroper Turbulenz betrachtet werden konnen

Die Formeln (54) und (57) zeigen auch deutlich, daß die Korrelationsfunktion nicht in allen Stromungen die gleiche Form hat, daß vielmehr bei Veranderungen der Parameter die inneren und die außeren Teile der

Funktion verschiedenartige Ahnlichkeitstransformationen durchmachen Dieser Punkt ist besonders von TAYLOR[1] gegenuber einer andersartigen Vermutung von v KÁRMÁN (l c) betont worden

Zum Vergleich mit der Erfahrung sind in Abb 3 die Messungen von $R_1(x)$ und $R_2(x)$ durch SIMMONS eingetragen (Kreise bzw Punkte), ferner die nach der genauen Formel (50) berechneten theoretischen Kurven

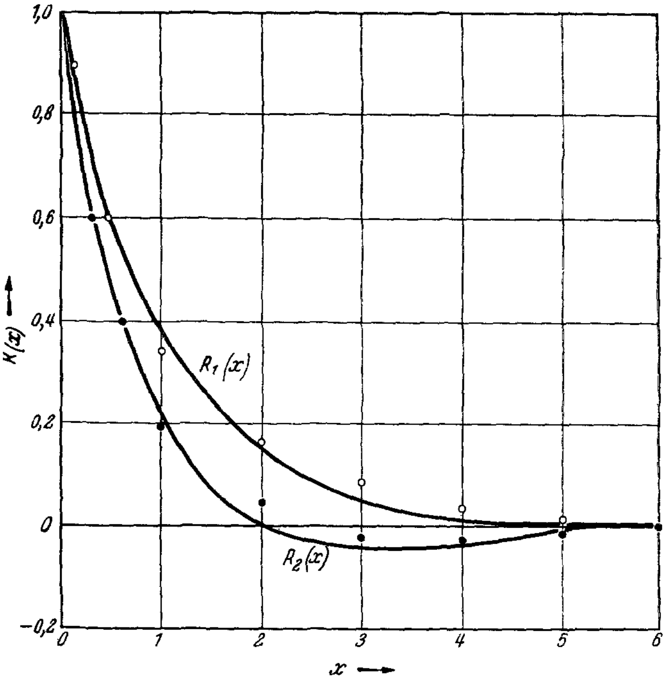

Abb 3 Die Korrelationsfunktionen

Dabei ist wieder L_0 mit der Maschenweite des Gitters identifiziert und λ aus dem Spektrum fur $U = 1060$ cm/sec berechnet worden Die experimentellen Werte stimmen tatsachlich mit den theoretischen bei kleineren Werten von x sehr genau uberein, eigentlich genauer, als bei der Unbestimmtheit von L_0 erwartet werden konnte Von $xk_0 \sim 1$ ab wird die Abweichung der experimentellen Punkte von den theoretischen Kurven merklich, was auch nach der Ableitung anzunehmen war Denn der Verlauf bei großeren x-Werten hangt vom Verhalten des Spektrums in der Nahe von k_0 ab, das durch unsere Formeln prinzipiell nicht erfaßt werden kann Aber selbst bei großeren x-Werten bleiben die Abweichungen von den theoretischen Kurven klein

[1] TAYLOR, G J Journ Aeron Sci 4, Nr 8, 311 (1937)

4 *Die Druckschwankungen*

Beim Studium der Diffusion in einem turbulenten Luftstrom hat TAYLOR (l c) eine Beziehung zwischen der fur die Diffusion maßgebenden Korrelationsfunktion und dem quadratischen Mittelwert des Druckgradienten abgeleitet Wir wollen daher auch die quadratischen Mittelwerte der Druckschwankungen vom Standpunkt der hier beschriebenen Theorie aus untersuchen

In Anlehnung an Gl (2) kann man den Druck in eine Fourierreihe entwickeln

$$p = \sum_{\mathfrak{k}} p_{\mathfrak{k}}\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}, \quad p_{-\mathfrak{k}} = p_{\mathfrak{k}}^{*}, \tag{58}$$

und die hydrodynamische Grundgleichung

$$\mathfrak{v} = -(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathfrak{v}$$

geht uber in

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} = -\sum_{\mathfrak{k}'} i\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'} - \frac{i\,\mathfrak{k}}{\rho}\,p_{\mathfrak{k}} - \frac{\mu}{\rho}\,k^2\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} \tag{59}$$

Wegen $(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{k}) = 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} &= -\sum_{\mathfrak{k}'} i\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}\,\mathfrak{k})\left[\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'} - \frac{\mathfrak{k}}{k^2}\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'},\,\mathfrak{k})\right] - \frac{\mu}{\rho}\,k^2\,\mathfrak{v}_{k}, \\ p_{\mathfrak{k}} &= -\frac{\rho}{k^2}\sum_{\mathfrak{k}'}(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'},\,\mathfrak{k}) \end{aligned} \tag{60}$$

Fur die quadratischen Mittelwerte von Druck und Druckgradient ergibt sich

$$\overline{p^2} = \sum_{\mathfrak{k}} \left|\overline{p_{\mathfrak{k}}^2}\right| \quad , \quad \overline{\operatorname{grad}^2 p} = \sum_{\mathfrak{k}} k^2 \left|\overline{p_{\mathfrak{k}}^2}\right| \tag{61}$$

Wir interessieren uns zunachst fur diesen letzteren Mittelwert

$$\overline{\operatorname{grad}^2 p} = \sum_{\mathfrak{k}}\sum_{\mathfrak{k}'}\sum_{\mathfrak{k}''}\frac{\rho^2}{k^2}\,\overline{(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}''}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}''}\,\mathfrak{k})} \tag{62}$$

Der Mittelungsstrich bedeutet hier einfach zeitliche Mittelung Wenn man Mittelwerte der Art (62) ausrechnen will, muß man in irgendeiner Form eine „Unordnungsannahme“ uber die turbulente Bewegung zugrunde legen Dabei kann man davon ausgehen, daß die Amplituden $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}$ im Lauf der Zeit um einen durch (10) bzw (28) gegebenen Wert schwanken, so daß der zeitliche Mittelwert $\overline{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}}$ einfach durch das Spektrum (28) gegeben ist. Die Phasen der $\mathfrak{v}_\mathfrak{k}$ aber werden im Lauf der Zeit alle möglichen Werte durchlaufen, alle Werte der Phase werden im Durchschnitt gleich häufig vorkommen. Wenn man die Phasen zu verschiedenen Wellenzahlen als statistisch völlig unabhängig ansehen konnte, so würden bei der Mittelung solcher Produkte von vier Faktoren

$$\overline{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_3}\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_4}}$$

nur die Glieder übrigbleiben, bei denen je zwei Wellenzahlen entgegengesetzt gleich sind, also Glieder vom Typus

$$\overline{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_2}\,\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}}\,,$$

und diese Mittelwerte könnten durch die Produkte der Mittelwerte der Amplitudenquadrate ersetzt werden

$$\overline{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}_2}} = \overline{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}_1}}\;\overline{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}} \tag{63}$$

In Wirklichkeit werden jedoch statistische Korrelationen zwischen den Phasen zu verschiedenen Wellenzahlen bestehen, da die Wellen sich gegenseitig beeinflussen. Im Abschnitt 5 wird versucht werden, in einem einfachen Fall solche Korrelationen abzuschätzen. Trotz des Vorhandenseins der Korrelationen möchten wir aber annehmen, daß in einer Summe von der Art (62) die Glieder vom Typus (63) den größten Anteil beisteuern, denn ihr Mittelwert ist schon in der ersten Näherung, ohne jede Annahme über das zeitliche Verhalten der Wellen, von Null verschieden, während die anderen Mittelwerte erst durch das feinere Wechselspiel verschiedener Wellen einen von Null verschiedenen Wert erhalten. Wir glauben also, daß man eine brauchbare Näherung erhält, wenn man in (62) nur die Glieder vom Typus (63) berücksichtigt. Dann ergibt sich

$$\overline{\operatorname{grad}^2 p} = 2\rho^2 \sum_{\mathfrak{k}'\mathfrak{k}''} \frac{(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}\mathfrak{k}'')\,(\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}'}\mathfrak{k}'')\,(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}''}\mathfrak{k}')\,(\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}''}\mathfrak{k}')}{(\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}'')^2} \tag{64}$$

Bei der Mitteilung über die Richtungen der $\mathfrak{v}_\mathfrak{k}$ – man nimmt dabei wieder an, daß alle Richtungen $\perp \mathfrak{k}$ für $\mathfrak{v}_\mathfrak{k}$ gleichwahrscheinlich seien – benutzt man zweckmäßig die Relation

$$\overline{(\mathfrak{v}_\mathfrak{k}\,\mathfrak{a})\,(\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}\,\mathfrak{b})} = \frac{|\overline{\mathfrak{v}_\mathfrak{k}^2}|}{2}\left[\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{k})\,(\mathfrak{b}\mathfrak{k})}{k^2}\right] \tag{65}$$

So erhält man

$$\overline{\operatorname{grad}^2 p} = \frac{\rho^2}{2} \sum_{\mathfrak{k}'\mathfrak{k}''} |\overline{v_{\mathfrak{k}'}^2}|\;|\overline{v_{\mathfrak{k}''}^2}|\,\frac{[k'^2 k''^2 - (\mathfrak{k}'\mathfrak{k}'')^2]^2}{(\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}'')^2} \tag{66}$$

Setzt man $(\mathfrak{k}' \mathfrak{k}'') = k' k'' \zeta$, so kann man die Integration uber ζ ausfuhren und findet

$$\overline{\mathrm{grad}^2 p} = \frac{\rho^2}{2} \sum_{\mathfrak{k}' \mathfrak{k}''} |\overline{v_{\mathfrak{k}'}^2}| \, |\overline{v_{\mathfrak{k}''}^2}| \, k' k'' \, \psi\left(\frac{k'}{k''}\right), \tag{67}$$

wobei

$$\psi(s) = \psi\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{16 s^3}\left[-1 + \frac{11}{3} s^2 + \frac{11}{3} s^4 - s^6 + \frac{(1-s^2)^4}{2s} \lg \frac{1+s}{|1-s|}\right]. \tag{68}$$

Fur $0 \leq s \ll 1$ gilt naherungsweise

$$\psi(s) \approx \frac{8s}{15}\left(1 - \frac{3}{7} s^2 + \frac{s^4}{21}\right) \tag{69}$$

Verwandelt man die Summen in Integrale und setzt das Spektrum (28) in (67) ein, so folgt schließlich

$$\overline{\mathrm{grad}^2 p} = \frac{2}{9} \rho^2 v_0^4 k_0^{\frac{4}{3}} \int\limits_{k_0}^{\infty} \frac{dk'}{k'^{\frac{2}{3}}} \int\limits_{k_0}^{\infty} \frac{dk''}{k''^{\frac{2}{3}}} \frac{\psi\left(\frac{k'}{k''}\right)}{\left[1 + \left(\frac{k'}{k_s}\right)^{\frac{8}{3}}\right]^2 \left[1 + \left(\frac{k''}{k_s}\right)^{\frac{8}{3}}\right]^2} \tag{70}$$

Man erkennt aus (70), daß die Integrale bei kleinen k-Werten konvergieren, daß man die Integration also ohne erheblichen Fehler von $k = 0$ ab fuhren kann Dies zeigt, daß $\overline{\mathrm{grad}^2 p}$ tatsachlich durch das Verhalten des Spektrums bei großen k, d h durch die *kleinsten* Turbulenzelemente bestimmt ist Hatten wir $\overline{p^2}$ berechnet, so hatte sich im Gegenteil ergeben, daß das Integral bei kleinen Werten von k divergiert, daß sein Wert also ganz durch die großten Turbulenzelemente bestimmt wird Der Wert von $\overline{p^2}$ kann daher uberhaupt nicht nach dem hier angewandten Verfahren berechnet werden, denn erstens hat das Spektrum bei kleinen k eine von der Geometrie abhangige Form, und zweitens ware es bei den großten Turbulenzelementen sicher ganz unberechtigt, nur die Mittelwerte vom Typus (63) zu berucksichtigen, da die Geometrie dem System der großten Wirbel sicher bestimmte Phasenbeziehungen aufpragt

Aus (70) wird jetzt

$$\overline{\mathrm{grad}^2 p} = \frac{2}{9} \rho^2 v_0^4 k_0^{\frac{4}{3}} k_s^{\frac{2}{3}} \int\limits_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^{\frac{2}{3}}} \int\limits_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^{\frac{2}{3}}} \frac{\psi\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)}{\left[1 + \zeta^{\frac{8}{3}}\right]^2 \left[1 + \eta^{\frac{8}{3}}\right]^2} \tag{71}$$

Das Doppelintegral rechts wurde nach einem graphischen Verfahren zu 0,763 abgeschatzt, so folgt schließlich [vgl (30)]

$$\overline{\mathrm{grad}^2 p} = 0{,}17 \, \rho^2 v_0^4 k_0^{\frac{4}{3}} k_s^{\frac{2}{3}} \tag{72}$$

$$= 0{,}05 \, \rho^2 v_0^4 k_0^2 \sqrt{R_0 \varkappa} \tag{73}$$

TAYLOR (l. c.) hatte die Vermutung ausgesprochen, daß $\overline{\operatorname{grad}^2 p}$ die gleiche Großenordnung wie $\overline{\rho^2 v_0^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$ haben sollte, also die Großenordnung $\rho^2 v_0^4 k_0^{2/3} k_s^{4/3}$. Man erkennt nun aus (72), daß $\overline{\operatorname{grad}^2 p}$ erheblich kleiner sein muß, und zwar um so mehr, je großer das Verhaltnis $\frac{k_s}{k_0}$ ist. Die von TAYLOR definierte Lange λ_η

$$\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} = 2\rho^2 \frac{(\overline{\mathfrak{v}_y^2})^2}{\lambda_\eta^2}, \text{ d. h.} \tag{74}$$

$$\overline{\operatorname{grad}^2 p} = \frac{2}{3} \rho^2 \frac{v_0^4}{\lambda_\eta^2} \tag{75}$$

muß daher fur große Reynoldssche Zahlen erheblich großer werden als die Lange λ von Gl. (55). Aus (75), (73) und (56) folgt

$$\lambda_\eta = \lambda \cdot 0{,}42 \sqrt[4]{R_0 \varkappa}. \tag{76}$$

Dieses Ergebnis paßt allerdings schlecht zum experimentellen Befund, denn TAYLOR gibt bei einem Versuch, den SIMMONS im Anschluß an ähnliche Experimente von SCHUBAUER[1] ausgefuhrt hatte, $\frac{\lambda_\eta}{\lambda} = 0{,}5$ an, wobei nach den Versuchsbedingungen etwa $\sqrt[4]{R_0 \varkappa} \approx 3{,}9$ angenommen werden muß. Man muß daher die Frage stellen, ob etwa das Ergebnis (72) dadurch gefalscht worden ist, daß nur die Glieder (63) bei der Mittelung berucksichtigt wurden. Man kann aber leicht einsehen, daß zwar vielleicht der Zahlenfaktor in (72) dadurch beeinflußt werden kann, daß aber die Abhangigkeit von k_0 und k_s, d. h. die Abhangigkeit des λ_η von $(R_0 \varkappa)$ nichts mit dieser Vernachlassigung zu tun hat. Denn schon die Gl. (62) zeigt, daß auf der rechten Seite wegen Gl. (10) der Normierungsfaktor $v_0^4 k_0^{4/3}$ auftreten muß. Dieser Faktor wird nach Ausfuhrung der Mittelung erganzt durch einen Faktor der Dimension $k^{2/3}$, der offenbar hochstens von der Ordnung $k_s^{2/3}$ sein kann – und auch sein muß, denn das zugehorige Integral uber k wurde eben wie $k^{2/3}$ divergieren, wenn nicht bei $k \sim k_s$ der Abfall des Spektrums mit k^{-7} einsetzen wurde. Es bliebe noch die Moglichkeit, daß nur der Zahlenfaktor in (72) durch die alleinige Berucksichtigung der Glieder (63) zu niedrig geschatzt worden ist. Aber man kann sich schwer vorstellen, daß der richtige Ausdruck um mehr als das Zehnfache großer wurde – was zur Deutung der Experimente notig ware.

Vielleicht laßt sich der Widerspruch in folgender Weise aufklaren. Der Hauptbeitrag zu $\overline{\operatorname{grad}^2 p}$ ruhrt von Wellenzahlen der Ordnung k_s her, also von Turbulenzelementen, deren Durchmesser wenige Milli-

[1] SCHUBAUER: Rep. Nat. Adv. Comm. Aero. Nachr. Nr. 524 (1935).

meter beträgt. Beim Versuch von SIMMONS wird der Luftstrom durch einen 20 cm langen, quer zum Windkanal gespannten Heizdraht erwärmt und dann die Verteilung der erwärmten Luft in einem gewissen Abstand hinter dem Heizdraht gemessen. Für die Bestimmung von λ_η sind gerade die kleineren Abstände (5 bis 15 cm) maßgebend. Es liegt nahe anzunehmen, daß der Heizdraht selbst im Luftstrom eine kleine Wirbelstraße und zusätzliche Turbulenz hervorruft, wobei die Turbulenzelemente einige Millimeter groß sein dürften – d. h. der Draht erhöht gerade die Intensität der Turbulenz in dem Spektralgebiet, das auf $\overline{\mathrm{grad}^2\, p}$ den stärksten Einfluß hat. Dabei dürfte die zusätzliche Turbulenz in der unmittelbaren Nachbarschaft des Drahtes viel größer sein als die ursprüngliche Turbulenz des gleichen Wellenlängenbereiches. Aber diese zusätzliche Turbulenz klingt natürlich schnell ab, und es ist wohl schwer abzuschätzen, ob sie allein die Diskrepanz zwischen (76) und dem empirischen λ_η-Wert erklären kann.

5. *Die Energiedissipation bei normaler isotroper Turbulenz*

Die Untersuchungen des vorausgehenden Abschnitts hängen bereits eng mit einem Grundproblem der statistischen Turbulenztheorie zusammen: mit der Bestimmung der Energiedissipation bei normaler Energieverteilung, d. h. der Bestimmung der Konstante $\varkappa$ in Gl. (12). Bei diesem Problem kann die molekulare Reibung völlig vernachlässigt werden. Die hydrodynamischen Grundgleichungen können also in der Form

$$\dot{\mathfrak{v}} = -(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p\,, \quad \nabla\mathfrak{v} = 0$$

vorausgesetzt werden. Ferner soll als Normierungsvolumen ein geeignet herausgegriffenes Teilvolumen der Flüssigkeit gewählt werden, das unter Umständen mit der Flüssigkeit – etwa dem Mittelwert der Geschwindigkeit über das Volumen entsprechend – mitbewegt wird. Wir nehmen also an, das Volumen bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$. Dann geht (60) über in

$$\dot{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{k}} = -i\sum_{\mathfrak{k}'}(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}\,\mathfrak{k})\left[\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'} - \frac{\mathfrak{k}}{k^2}(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'}\,,\,\mathfrak{k})\right] + i\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}} \qquad (77)$$

Für die Berechnung der Energiedissipation muß man ermitteln, wie sich die Intensität $|\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}^2|$ einer bestimmten Eigenschwingung (oder vielleicht besser die Summe solcher Amplitudenquadrate über einen kleinen Spektralbereich Δk: $\sum_{k}^{k+\Delta k}|\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}^2|$) im Lauf der Zeit ändert. Man erkennt aus (77), daß man dafür Zeitmittelwerte über Produkte vom Typus

$$\overline{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_2}\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}_3}} \qquad (78)$$

braucht, wobei $\mathfrak{k}_3 = -\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2$ ist. Wegen der statistisch gleichmäßigen Verteilung der Phasen würden diese Mittelwerte verschwinden, wenn es nicht statistische Korrelationen zwischen den Phasen zu verschiedenen $\mathfrak{k}$ gäbe, die von der gegenseitigen Beeinflussung der verschiedenen Wellen herrühren, wie bereits im Abschnitt 4 auseinandergesetzt wurde. Um diese Korrelationen zu ermitteln, muß man den Einfluß, der auf eine Welle mit gegebenem $\mathfrak{k}$ von Wellen mit anderem $\mathfrak{k}$ ausgeübt wird, irgendwie in den Gleichungen ausdrücken, das kann z. B. dadurch geschehen, daß man eine der drei Amplituden in (78) als Zeitintegral über $\dot{\mathfrak{v}}_\mathfrak{k}$ darstellt und $\dot{\mathfrak{v}}_\mathfrak{k}$ wieder durch eine Summe über zwei andere $\mathfrak{v}_\mathfrak{k}$ nach (77) ausdrückt. Dann erhält man Produkte von je vier Amplituden $\mathfrak{v}_\mathfrak{k}$, die z. T. aber zu verschiedenen Zeiten zu nehmen sind. Für solche Produkte gelten die Überlegungen des 4. Abschnittes, nach denen man eine erste Näherung dadurch bekommt, daß man nur Produkte vom Typus (63) berücksichtigt. Natürlich könnte man das Verfahren im Prinzip fortsetzen und die anderen Mittelwerte von vierfachen Produkten dadurch zu berechnen suchen, daß man sie auf sechsfache zurückführt usw. Aber solche Rechnungen würden wohl viel zu kompliziert werden, die höheren Glieder tragen wohl auch weniger bei, und wir werden uns mit dem ersten Schritt begnügen.

Bei diesen Rechnungen wird man offenbar Mittelwerte vom Typus

$$\overline{\mathfrak{v}_\mathfrak{k}(t)\,\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}(t+\tau)}$$

brauchen und wir definieren daher

$$R_k(t,\tau) = \frac{\sum\limits_{k}^{k+\Delta k} \mathfrak{v}_\mathfrak{k}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}{\sum\limits_{k}^{k+\Delta k} \overline{\mathfrak{v}_\mathfrak{k}\,\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}}} \tag{79}$$

Dabei ist die Summation über einen kleinen Spektralbereich Δk in die Definition von $R_k(t,\tau)$ aufgenommen worden, damit in $R_k(t,\tau)$ nicht die Größe des Normierungsvolumens unmittelbar eingeht und damit die Mittelung über alle Richtungen von $\mathfrak{k}$ gleich vorgenommen wird. Der Spektralbereich Δk ist dabei offenbar so breit zu wählen, daß noch viele Eigenschwingungen des Normierungsvolumens in ihm Platz haben (d. h. $k^2 \Delta k\, V \gg 1$), aber doch sehr klein gegen k selbst. Diese Forderungen sind bei den Turbulenzelementen von der Größenordnung V selbst nicht mehr vereinbar, aber für diese kann man die statistischen Methoden ohnehin nicht anwenden. Das ganze Verfahren ist also nur durchführbar, wenn sich herausstellt, daß die großen Turbulenzelemente zu den zu untersuchenden Mittelwerten praktisch nichts mehr beitragen.

Um aus den hydrodynamischen Gleichungen Aussagen uber die Großen $R_k(t, \tau)$ zu erhalten, liegt es nahe, den folgenden Ausdruck zu untersuchen

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}\left(t-\frac{\tau}{2}\right) = -i\sum_{\mathfrak{k}'}\left(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}^{t+\frac{\tau}{2}},\ \mathfrak{k}\right)\left(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'}^{t+\frac{\tau}{2}}\ \mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}^{t-\frac{\tau}{2}}\right) + i\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}^{t+\frac{\tau}{2}}\,\mathfrak{v}_{-k}^{t-\frac{\tau}{2}}. \tag{80}$$

In diesem Ausdruck kann man $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}^{t+\frac{\tau}{2}}$ ersetzen durch ein Zeitintegral uber $\dot{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{k}'}^{t+\frac{\tau}{2}}$.

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}^{t+\frac{\tau}{2}} = \int\limits_{-T}^{t+\frac{\tau}{2}} \dot{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{k}'}^{t'}\,dt' + \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}(-T) = \int\limits_{0}^{t+\frac{\tau}{2}+T} d\tau'\,\dot{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{k}'}^{t+\frac{\tau}{2}-\tau'} + \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'}(-T) \tag{81}$$

Wenn man T hinreichend groß wahlt, wird die Korrelation zwischen $\mathfrak{v}_{-k'}(t)$ und $\mathfrak{v}_{k'}(T)$ verschwinden, es ist daher zweckmaßig, nach dem Einsetzen in (80) den Grenzubergang $T \to \infty$ vorzunehmen Wenn man auch noch die Mittelung uber die Richtungen vornimmt – dadurch fallt das Glied mit $\mathfrak{u}$ weg –, erhalt man aus (80) und (81)

$$\sum_{k}^{k+\Delta k} \mathfrak{v}_k\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathfrak{v}_{-k}\left(t-\frac{\tau}{2}\right) = \tag{82}$$

$$= -\sum_{k}^{k+\Delta k}\sum_{\mathfrak{k}'}\sum_{\mathfrak{k}''}\int\limits_0^\infty d\tau'\left(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}''}^{t+\frac{\tau}{2}-\tau'}\ \mathfrak{k}'\right)\left[\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}''}^{t+\frac{\tau}{2}-\tau'}\ \mathfrak{k} - \frac{(\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}')\left(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}''}^{t+\frac{\tau}{2}-\tau'},\ \mathfrak{k}'\right)}{k'^2}\right]\left(\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'}^{t+\frac{\tau}{2}}\ \mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}^{t-\frac{\tau}{2}}\right)$$

Berucksichtigt man weiter, wie im Abschnitt 4, nur die Glieder vom Typus (63), ersetzt ferner $\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'$ durch $\mathfrak{k}'$ und integriert uber den Kosinus des Winkels zwischen $\mathfrak{k}$ und diesem Vektor, so folgt

$$\sum_{k}^{k+\Delta k} \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathfrak{v}_{-\mathfrak{k}}\left(t-\frac{\tau}{2}\right) = \tag{83}$$

$$= \sum_{k}^{k+\Delta k}\int dk'\,k'^2\,\frac{V}{(2\pi)^3}\,\frac{\pi}{16}\int\limits_0^\infty d\tau'\,\left|\overline{\mathfrak{v}_k^2}\right|\,\left|\overline{\mathfrak{v}_{k'}^2}\right|\,R_k\left(t-\frac{\tau'}{2},\ \tau-\tau'\right)R_{k'}\left(t+\frac{\tau-\tau'}{2},\ \tau'\right)\cdot$$

$$k^{-3}\,k'^{-3}\,(k^2-k'^2)\left[2\,k\,k'\left(k^4+k'^4-\frac{2}{3}\,k^2\,k'^2\right)-(k^2+k'^2)\,(k^2-k'^2)\,\lg\frac{k+k'}{|k-k'|}\right]$$

Diese Gleichung gibt die Möglichkeit, die zeitlichen Differentialquotienten $\frac{d R_k(t,\tau)}{dt}$ und $\frac{d R_k(t,\tau)}{d\tau}$ durch die R_k selbst auszudrücken, außerdem kann man, wenn die R_k bekannt sind, aus (83) die Energiedissipation berechnen, indem man $\tau = 0$ setzt. Dabei wollen wir annehmen, daß der ganze Turbulenzvorgang entweder stationär ist oder nur sehr langsam abklingt, so daß die Zeiten, in denen sich die Intensität $|\overline{\mathfrak{v}_k^2}|$ merklich ändert, sehr lang sind verglichen mit den Schwankungsperioden von $\mathfrak{v}_k$. $|\overline{\mathfrak{v}_k^2}|$ bedeutet dann den Mittelwert über eine Zeit, die zwar sehr lang gegen die Schwankungsperioden, aber sehr viel kürzer als die Abklingzeit ist.

Die Gleichung für $\frac{d R_k(t,\tau)}{dt}$ gibt ein Maß für die Schwankungen der Größe $R_k(t,\tau)$ als Funktion von t um ihren zeitlichen Mittelwert

$$R_k(\tau) = \overline{R_k(t,\tau)} \tag{84}$$

Man kann vermuten, daß diese Schwankungen klein sind im Gebiet kleiner τ, das durch die kleinen Turbulenzelemente bestimmt ist, und daß sie mit wachsendem τ größer werden; diese Frage wird später noch untersucht werden.

Vor der Durchführung der weiteren Rechnungen muß nun noch festgelegt werden, wie das Teilvolumen V und seine Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ gewählt werden sollen. Man könnte zuerst versuchen, $\mathfrak{u} = 0$ zu setzen und V mit dem Gesamtvolumen zu identifizieren. Dadurch würde man aber ein falsches Bild der Verhältnisse erhalten. Der zeitliche Abfall der Korrelationsfunktion $\overline{R_k(t,\tau)} = R_k(\tau)$ als Funktion von τ ist in diesem Koordinatensystem nämlich durch die größten Turbulenzelemente bestimmt, und daher sehr rasch. Man kann zeigen, daß die Korrelationsfunktion in diesem Koordinatensystem in hinreichender Näherung durch

$$R_k(\tau) = 1 - \frac{k v_0 \tau}{\sqrt{3}} \, e^{-\frac{k^2 v_0^2 \tau^2}{12}} \int_0^{\frac{k v_0 \tau}{\sqrt{12}}} dx \, e^{x^2}$$

gegeben ist; auf die Rechnungen, die zu diesem Ausdruck geführt haben, braucht nicht näher eingegangen zu werden, da der Ausdruck später nicht weiter verwendet wird. Die physikalische Deutung des Ausdrucks wird durch die folgende Überlegung gegeben. Die Funktion $R_k(\tau)$ in ihm fällt nach einer Zeit der Ordnung $\frac{2\pi}{k v_0}$ ab, das ist die Zeit, in der etwa gerade ein Wirbel der Wellenlänge $\frac{2\pi}{k}$ infolge der großen Geschwindigkeit in den größten Turbulenzelementen am Beobachtungspunkt vorbeizieht. Daß die Korrelationsfunktion nach dieser Zeit absinkt, bedeutet also einfach, daß die Geschwindigkeit in den großten Turbulenzelementen die Großenordnung v_0 hat, aber statistisch um Werte dieser Ordnung schwankt Mit der Auflosung des Wirbels von der Wellenlange $\frac{2\pi}{k}$ hat dieser Vorgang nichts zu tun Vielmehr ist bei Gultigkeit des $F(k) \sim k^{-5/3}$-Gesetzes nach den Ahnlichkeitsbetrachtungen v Weizsackers zu erwarten, daß sich die Auflosung des Wirbels erst nach Zeiten der Ordnung $2\pi\, v_0^{-1}\, k^{-\frac{2}{3}}\, k_0^{-\frac{1}{3}}$ vollzieht Andererseits hat die Energiedissipation aber mit der Auflosung der Wirbel zu tun und nicht mit der Bewegung im großen Wenn man die Auflosung der Wirbel in den Gleichungen beschreiben will, muß man das Koordinatensystem also mitbewegen Man muß dann das Teilvolumen V in den Lineardimensionen etwas, aber nicht sehr viel großer machen als $\frac{2\pi}{k}$ und es nach Maßgabe der mittleren Geschwindigkeit in ihm mitbewegen Wir wollen versuchsweise annehmen, daß man fur jedes k ein ihm entsprechendes Volumen V angeben kann, derart, daß $V k^3$ von k unabhangig wird und daß fur die so gewahlten mitbewegten Volumenelemente die Korrelationsfunktion $R\ (t, \tau)$ eine universelle Funktion der Variabeln $v_0\, k^{2/3}\, k_0^{1/3}\, t$ bzw $v_0\, k^{2/3}\, k_0^{1/3}\, \tau$ ist, wie nach der v Weizsackerschen Ahnlichkeitsuberlegung zu erwarten ist Wir werden zeigen, daß die aus (83) hervorgehenden Beziehungen fur $R_k\,(t, \tau)$ durch diese Annahme tatsachlich befriedigt werden konnen, wenn die F_k nach dem $k^{-5/3}$-Gesetz verteilt sind

Setzt man namlich $R_k\,(t, \tau) = g\,(\zeta, \eta)$ wobei

$$\zeta = \frac{v_0}{6}\, k^{2/3}\, k_0^{1/3}\, t \quad , \quad \eta = \frac{v_0}{6}\, k^{2/3}\, k_0^{1/3}\, \tau \quad , \quad \frac{k'}{k} = y\,, \tag{85}$$

so folgt aus (83)

$$\frac{dg\,(\zeta, \eta)}{d\eta} = \frac{3}{16} \int_0^\infty dy\, f\,(y) \int_0^\infty d\eta' \tag{86}$$

$$\left[g\left(\zeta - \frac{\eta'}{2}, \eta' - \eta\right) g\left(\left(\zeta + \frac{\eta - \eta'}{2}\right) y^{2/3}, \eta' y^{2/3}\right) - g\left(\zeta - \frac{\eta'}{2}, \eta + \eta'\right) g\left(\left(\zeta - \frac{\eta + \eta'}{2}\right) y^{\frac{2}{3}}, \eta' y^{\frac{2}{3}}\right)\right],$$

$$\frac{dg\,(\zeta, \eta)}{d\zeta} = \frac{3}{8} \int_0^\infty dy\, f\,(y) \int_0^\infty d\eta'$$

$$\left[g\left(\zeta - \frac{\eta'}{2}, \eta' - \eta\right) g\left(\left(\zeta + \frac{\eta - \eta'}{2}\right) y^{2/3}, \eta' y^{2/3}\right) - g\left(\zeta - \frac{\eta'}{2}, \eta + \eta'\right) g\left(\left(\zeta - \frac{\eta + \eta'}{2}\right) y^{\frac{2}{3}}, \eta' y^{\frac{2}{3}}\right)\right],$$

wobei

$$f(y) = \frac{1-y^2}{y^{\frac{14}{3}}}\left[2y\left(1-\frac{2}{3}y^2+y^4\right)-(1-y^2)(1-y^4)\lg\frac{1+y}{|1-y|}\right] \quad (87)$$

Diese Gleichungen enthalten tatsächlich die Konstanten k_0, v_0 nicht mehr. Dies liegt daran, daß das Integral über y sowohl bei kleinen wie bei großen y konvergiert [$f(y)$ verschwindet hinreichend stark sowohl bei $y=0$ wie für $y\to\infty$], daher kann man das Integral über k' ohne erheblichen Fehler statt von k_0 einfach von 0 ab führen, außerdem zeigt die Konvergenz des Integrals bei großen Werten von k, daß die molekulare Reibung in diesem Problem tatsächlich keine Rolle spielt, das Verhalten des Spektrums im Gebiet der kleinsten Turbulenzelemente ist für die Korrelationsfunktionen $R(t, \tau)$ und die Energiedissipation bei mittleren k-Werten unwichtig.

Ehe wir die numerische Lösung von (86) versuchen, soll die Gl. (83) noch benutzt werden, um in der hier angestrebten Näherung die Energiedissipation zu berechnen. Zu diesem Zweck setzen wir $\tau = 0$ und integrieren die Gl. (83) über k zwischen zwei willkürlichen Grenzen K_1 und K_2.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{K_1}^{K_2} 4\pi k^2\, dk \left|\frac{\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}^2}{2}\right| = \quad (88)$$

$$= \frac{\pi^2 V}{4(2\pi)^3}\int\limits_{K_1}^{K_2}\frac{dk}{k}\int\limits_0^\infty\frac{dk'}{k'}\,|\overline{\mathfrak{v}_k^2}|\,|\overline{\mathfrak{v}_{k'}^2}|\int\limits_0^\infty d\tau'\,\overline{R_k\left(t-\frac{\tau'}{2},\tau'\right)R_{k'}\left(t-\frac{\tau'}{2},\tau'\right)}$$

$$(k^2-k'^2)\left[2kk'\left(k^4+k'^4-\frac{2}{3}k^2k'^2\right)-(k^2+k'^2)(k^2-k'^2)^2\lg\frac{|k-k'|}{k+k'}\right]$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist eine antisymmetrische Funktion in k und k'. Wenn man die zeitliche Änderung der Gesamtenergie berechnet, d. h. $K_1 = 0$, $K_2 = \infty$ setzt, so ergibt sich also Null, sofern das Integral rechts überhaupt konvergiert. D. h. die Gesamtenergie ist zeitlich konstant, was auch gefordert werden muß, da die molekulare Reibung nicht berücksichtigt worden ist. Wenn man jedoch die zeitliche Änderung der Energie betrachtet, die in dem zwischen K_1 und K_2 gelegenen Teil des Spektrums enthalten ist, so läßt sich das Integral auf der rechten Seite in der folgenden Weise umformen (der antisymmetrische Integrand sei einfach J genannt):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{K_1}^{K_2}4\pi k^2\,dk\left|\frac{v_k^2}{2}\right| = \int\limits_{K_1}^{K_2}dk\int\limits_0^\infty dk'\,J = \int\limits_{K_1}^{K_2}dk\int\limits_0^{K_1}dk'\,J - \int\limits_{K_1}^{K_2}dk\int\limits_{K_2}^\infty dk'\,(-J) \quad (89)$$

Im ersten der beiden Integrale rechts ist J, im zweiten $(-J)$ stets positiv Aus dieser Schreibweise folgt, daß man das erste Integral auffassen darf als die Energie, die pro Zeiteinheit von kleineren Wellenzahlen $(k' < K_1)$ her in das Gebiet zwischen K_1 und K_2 einstromt, das zweite Integral als die Energie, die nach großeren Wellenzahlen $(k' > K_2)$ abstromt Setzt man insbesondere $K_1 = 0$ und $K_2 \gg k_0$, so stellt das zweite Integral die gesamte Energiedissipation dar, sie muß sich beim Normalspektrum $[F(k) \sim k^{-5/3}]$ als von K_2 unabhangig erweisen So erhalt man aus (83), (86) und (89) fur die Energiedissipation den Ausdruck

$$S = \frac{\rho}{24} v_0^3 h_0 \int_{K_2}^{\infty} \frac{dk''}{k''} \int_0^{\frac{K_2}{k''}} dy\, f(y) \int_0^{\eta} d\eta\, \overline{g\left(\zeta - \frac{\eta}{2}, \eta\right) g\left(\left(\zeta - \frac{\eta}{2}\right) y^{\frac{2}{3}}\ \ \eta\, y^{\frac{2}{3}}\right)} = \tag{90}$$

$$= \frac{\rho}{24} v_0^3 h_0 \int_0^1 dy\, (-\lg y)\, f(y) \int_0^{\infty} d\eta\, \overline{g\left(\zeta - \frac{\eta}{2}, \eta\right) g\left(\left(\zeta - \frac{\eta}{2}\right) y^{\frac{2}{3}}, \eta\, y^{\frac{2}{3}}\right)}$$

Dieser Ausdruck ist tatsachlich von K_2 unabhangig, wie es sein muß Da die gesamte Energiedissipation nach Gl (44) auch durch $\rho\, \varkappa \frac{\sqrt{3}}{8} v_0^3 k_0$ gegeben ist, so folgt

$$\varkappa = \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_0^1 dy\, (-\lg y)\, f(y) \int_0^{\infty} d\eta\, \overline{g\left(\zeta - \frac{\eta}{2}, \eta\right) g\left(\left(\zeta - \frac{\eta}{2}\right) y^{\frac{2}{3}}, \eta\, y^{\frac{2}{3}}\right)} \tag{91}$$

Aus dieser Gleichung kann $\varkappa$ numerisch berechnet werden, wenn die Funktion $g(\zeta, \eta)$ bekannt ist

Wir gehen nun zur Behandlung des Gleichungssystems (86) uber Dieses System stellt insofern eine große Vereinfachung gegenuber der Ausgangsgleichung (77) dar, als es keine dimensionsbehafteten Großen mehr enthalt und schon aus dem Gleichgewichtsspektrum $k^{-5/3}$ hergeleitet ist Andererseits enthalt auch (86) noch Aussagen uber die Schwankungen der $g(\zeta, \eta)$ als Funktion der ζ und ist deswegen wohl zu kompliziert, um strenge Losungen zuzulassen Man konnte versuchen, in einer ersten Naherung die Schwankungen ganz zu vernachlassigen und mit den Mittelwerten zu rechnen Leider stellt sich aber heraus, daß der Beitrag der Schwankungen in gewissen Gebieten groß ist Man erkennt dies aus der zweiten Gl (86)

Setzt man namlich

$$g(\zeta, \eta) = g(\eta) + \Delta g(\zeta, \eta), \quad \text{wobei} \tag{92}$$

$g(\eta)$ den Mittelwert über ζ von $g(\zeta, \eta)$ bedeutet

$$g(\eta) = \overline{g(\zeta, \eta)}, \tag{93}$$

so folgt aus dem Zeitmittelwert der zweiten Gl. (86)

$$\frac{3}{8}\int_0^\infty dy\, f(y)\int_0^\infty d\eta' \left[g(\eta'-\eta) + g(\eta'+\eta)\right] g\left(\eta' y^{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= -\frac{3}{8}\int_0^\infty dy\, f(y)\int_0^\infty d\eta' \Big[\overline{\Delta g\left(\zeta-\frac{\eta'}{2}, \eta'-\eta\right)\Delta g\left(\left(\zeta+\frac{\eta-\eta'}{2}\right)y^{\frac{2}{3}}, \eta' y^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$+ \overline{\Delta g\left(\zeta-\frac{\eta'}{2}, \eta'+\eta\right)\Delta g\left(\left(\zeta-\frac{\eta+\eta'}{2}\right)y^{\frac{2}{3}}, \eta' y^{\frac{2}{3}}\right)}\Big] \tag{94}$$

Diese Beziehung zeigt, daß die Schwankungen $\Delta g(\zeta, \eta)$ nicht immer klein sein können. Zwar verschwindet die linke Seite von (94) für $\eta = 0$; dies folgt aus der später noch zu besprechenden Beziehung

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = -y^{4/3} f(y) \tag{95}$$

und bedeutet, daß das Spektrum $k^{-5/3}$ tatsächlich im Gleichgewicht ist, aber für größere $|\eta|$ nimmt die linke Seite erhebliche Werte an. Es ist daher auch zweifelhaft, ob man eine ausreichende Näherung bekommt, wenn man beim Übergang von (82) nach (83) nur die Mittelwerte vom Typus (63) berücksichtigt. Es ist mir aber nicht gelungen, hier die Näherung zu verbessern oder mehr als eine ganz grobe Abschätzung der Lösung von (86) zu gewinnen.

Man kann für eine solche Abschätzung vielleicht annehmen, daß für große Werte von η der erste Summand auf der rechten Seite von (94) viel größer ist, als der zweite. Denn im ersten wird das Integral über das Gebiet $\eta' \sim \eta$ hinweggeführt, was wahrscheinlich viel beträgt, während im zweiten für große η die Faktoren Δg im ganzen Integrationsgebiet schon stark abgefallen sind. Man kann also, wenigstens für große η, die Annahme versuchen, daß der zweite Summand auf der rechten Seite von (94) vernachlässigt werden darf. Dann wird in dieser Näherung aus dem Zeitmittelwert der ersten Gl. (86) unter Benutzung von (94)

$$\frac{d g(\eta)}{d\eta} = -\frac{3}{8}\int_0^\infty (f y\, dy)\int_0^\infty d\eta'\, g(\eta+\eta')\, g\left(\eta' y^{\frac{2}{3}}\right) \qquad (\text{für } \eta \gg 0) \tag{96}$$

Diese Gleichung kann man etwa in der Weise ausnutzen, daß man eine plausible Form fur $g(\eta)$ annimmt, wobei man den Maßstab in der η-Richtung zuerst offenlaßt und ihn nachtraglich so bestimmt, daß die Gl (96) fur große η moglichst genau gilt Damit wird man die Steilheit des Abfalls von $g(\eta)$ bei großen η einigermaßen richtig treffen, und eben diese Steilheit ist fur den Wert von $\varkappa$ maßgebend

Bei der praktischen Durchfuhrung der Rechnung ist es zweckmaßig, an Stelle von y und $f(y)$ neue Variable

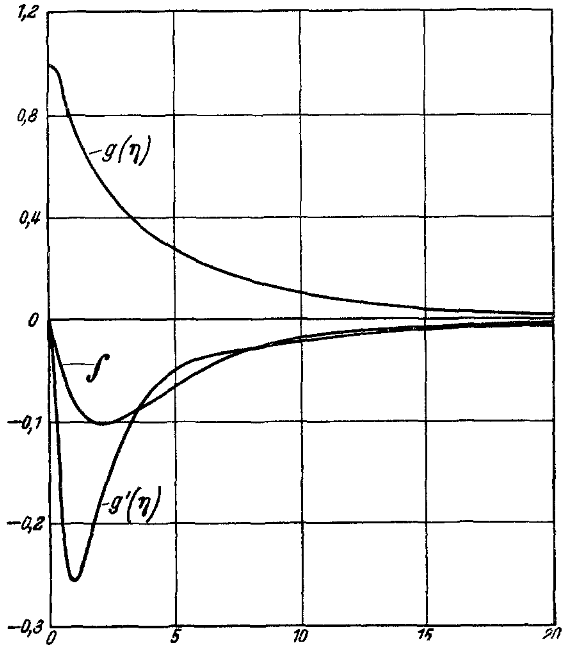

Abb 4 Die Korrelationsfunktion $g(\eta)$

$$s = y^{\frac{2}{3}}, \quad \varphi(s)\, ds = f(y)\, dy \tag{97}$$

einzufuhren Dann gilt, wie man aus (87) erkennt [vgl auch (95)]

$$\varphi\left(\frac{1}{s}\right) = - s\, \varphi(s) \tag{98}$$

Diese Gleichung beruht auf dem Umstand, daß die Energiedissipation von der Wellenzahl $\frac{1}{\alpha} k$ nach der Wellenzahl k bis auf einen durch die Ahnlichkeitstransformation bedingten Faktor ubereinstimmt mit der von k nach αk Ferner gilt dann in guter Naherung

$$\varphi(s) = \frac{32}{5}\, s\,(1 - s^3)\left(1 - \frac{2}{7}\, s^3\right) \qquad \text{fur } 0 \leq s \leq 1 \tag{99}$$

und fur großere s kann man $\varphi(s)$ durch (98) auf den Bereich $0 \leq s \leq 1$ zuruckfuhren

Die Abb 4 gibt eine plausible Kurve fur $g(\eta)$, dazu die rechte Seite von (96) als $\int\limits_0^\infty d\eta$ und $g'(\eta)$ Der Maßstab ist bereits so gewahlt, daß die beiden letzten Kurven bei großen η ubereinstimmen Bei kleinen η gibt es dann erhebliche Unterschiede, aber dort kann auch die Gl (96) nicht mehr richtig sein Setzt man die so gewonnene Funktion $g(\eta)$ in (91) ein und vernachlassigt die Schwankungen, so ergibt sich fur $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int\limits_0^1 ds\,(-\lg s)\,\varphi(s) \int\limits_0^\infty d\eta\, g(\eta)\, g(\eta s) = 0{,}98 \tag{100}$$

Diese grobe Abschatzung gibt also die richtige Großenordnung fur $\varkappa$, aber der exakte Wert mag gut um einen Faktor 2 von 0,98 verschieden sein Die Rechnungen dieses Abschnitts haben also zwar nicht zu einer exakten Berechnung der Konstante $\varkappa$ gefuhrt, wohl aber zu einer qualitativen mathematischen Darstellung der Vorgange, auf denen die Energiedissipation beruht Vielleicht wird es moglich sein, durch eine umfassende Diskussion der verschiedenen Versuche von SIMMONS, DRYDEN (l c), PRANDTL[1] und anderen uber das Spektrum und uber das Abklingen der Turbulenz zu einer recht genauen experimentellen Bestimmung von $\varkappa$ zu gelangen

[1] PRANDTL, L Proc VI Intern Congr f Appl Mech Cambridge (Mass) 1938, S 340