湍流第二次作业答案

1. 推导两个独立随机变量乘积的概率密度表达式。

(参考阮玉藏，吴磊)

解 1：设X,Y为两个独立的随机变量，其概率密度分布函数分别为$f(x)$，$g(y)$，两者联合概率密度函数为$f(x)g(y)$。记$Z=XY$，则事件$\{Z\le z\}$的概率(即 Z的分布函数)为

$$F_Z(z)=P(XY\le z)=P(X\le\frac{z}{Y},Y>0)+P(X\ge\frac{z}{Y},Y<0)+P(Y=0)$$

$$=\int_0^{+\infty}g(y)\,dy\int_{-\infty}^{z/y}f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{0}g(y)\,dy\int_{z/y}^{+\infty}f(x)\,dx+P(Y=0)$$

若$z<0$，则不需要计入$P(Y=0)$

Z的概率密度函数

$$h(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}g(y)f(z/y)\,dy+\int_{-\infty}^{0}-\frac{1}{y}g(y)f(z/y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}g(y)f(z/y)\,dy$$

综上所述，$Z=XY$的概率密度函数为

$$h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y}\right)g(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}g\left(\frac{z}{x}\right)f(x)\,dx$$

(参考张非驰)注：上述结果称为 Mellin 卷积，应用也较多。对于正变量x,y，该结果也可以从$\ln x+\ln y=\ln z$通过所及变量之和的分布的标准卷积运算得到。

解 2：设两个随机变量分别为X,Y，其概率密度函数分别为$p_X(x),p_Y(y)$，对于两个随机变量的函数$Z=f(X,Y)$，其概率密度函数满足

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\delta(z-f(x,y))\,dxdy$$

由于X,Y相互独立，联合概率密度函数$f(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$，于是有

$$\begin{aligned}p_Z(z)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(y)\delta(z-xy)\,dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_X(x)}{|x|}p_Y(y)\delta(\frac{z}{x}-y)\,dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_X(x)}{|x|}p_Y(\frac{z}{x})\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_Y(y)}{|y|}p_X(\frac{z}{y})\,dy\end{aligned}$$

上式过程中用到$\delta(x)=|a|\delta(ax)$。

该做法具有一般性，也很好！

2.证明：两个独立的高斯分布随机变量之比的概率密度为柯西分布。

(参考阮玉藏)

证明：考虑两个独立变量U,V，其概率密度分布函数分别为$f(x),g(y)$.从而可以计算随机变量$W=U/V$的值小于z时的概率，即

$$F_W(z)=P(U/V\le z)=P(U\le zV,V>0)+P(U\ge zV,V<0)$$

$$F_W(z)=\int_0^{+\infty}g(y)\int_{-\infty}^{zy}f(x)\,dxdy+\int_{-\infty}^{0}g(y)\int_{zy}^{+\infty}f(x)\,dxdy$$

则W的概率密度函数$h(z)$

$$h(z)=\frac{dF_W(z)}{dz}=\int_0^{+\infty}yg(y)f(zy)\,dy+\int_{-\infty}^{0}-yg(y)f(zy)\,dy$$

$$h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy)g(y)dy$$

对于独立高斯分布,有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

可以进一步计算出

$$h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(zy-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}dy$$

$$h(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{(zy-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}dy-\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{0}ye^{-\frac{(zy-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}dy$$

对指数部分配方，可以得到

$$\frac{(zy-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{\sigma_2^2z^2+\sigma_1^2}y-\frac{\sigma_2^2z\mu_1+\sigma_1^2\mu_2}{\sqrt{\sigma_2^2z^2+\sigma_1^2}})^2+\sigma_2^2\mu_1^2+\sigma_1^2\mu_2^2-\frac{(\sigma_2^2z\mu_1+\sigma_1^2\mu_2)^2}{\sigma_2^2z^2+\sigma_1^2}}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

令

$$a=\sqrt{\frac{\sigma_2^2z^2+\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}},b=\frac{\sigma_2^2z\mu_1+\sigma_1^2\mu_2}{\sqrt{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\sqrt{\sigma_2^2z^2+\sigma_1^2}},c=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{\sigma_2^2\mu_1^2+\sigma_1^2\mu_2^2-\frac{(\sigma_2^2z\mu_1+\sigma_1^2\mu_2)^2}{\sigma_2^2z^2+\sigma_1^2}}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}$$

从而

$$h(z) = c\int_0^{+\infty} ye^{-(ay-b)^2}\,dy - c\int_{-\infty}^{0} ye^{-(ay-b)^2}\,dy$$

$$\int_0^{+\infty} ye^{-(ay-b)^2}\,dy = \int_{-b}^{+\infty}\frac{u+b}{a}e^{-u^2}\frac{du}{a} = \frac{1}{a^2}\int_{-b}^{+\infty} ue^{-u^2} + be^{-u^2}\,du$$

$$\int_{-\infty}^{0} ye^{-(ay-b)^2}\,dy = \int_{-\infty}^{-b}\frac{u+b}{a}e^{-u^2}\frac{du}{a} = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{-b} ue^{-u^2} + be^{-u^2}\,du$$

因此

$$h(z) = \frac{c}{a^2}\int_{-b}^{+\infty} ue^{-u^2} + be^{-u^2}\,du - \frac{c}{a^2}\int_{-\infty}^{-b} ue^{-u^2} + be^{-u^2}\,du$$

此时，为了能够有解析概率密度，需要$b = 0$，即$\mu_1 = \mu_2 = 0$，从而

$$h(z) = \frac{c}{a^2}$$

即

$$h(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 z^2 + \sigma_1^2}$$

令$\gamma = \sigma_1/\sigma_2$，从而

$$h(z) = \frac{1}{\pi\gamma[1 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2]}$$

即两个零均值独立高斯分布的商服从柯西分布。

3. 对于概率密度$p(x)$，定义$H = -\int p\cdot ln(p)\,dx$为此概率分布的熵。那么，当给定数学期望和方差时，求熵最大的概率密度函数。

(参考孟昭远)

解：该问题是一个在给定约束

$$\int_{\mathrm{R}} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{\mathrm{R}} xp(x)\,\mathrm{d}x = \mu$$

$$\int_{\mathrm{R}} (x-\mu)^2 p(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2$$

下的泛函极值问题，可采用 Lagrange 乘子法

$$I := -\int_R p(x)\ln p(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_0\int_R p(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_1\int_R xp(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2\int_R (x-\mu)^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

对上式作变分

$$\delta I = \int_{\mathrm{R}} \ [-\delta(p\ln\ p) + \lambda_0\delta(p) + \lambda_1\delta(xp) + \lambda_2\delta[(x-\mu)^2p]]\,\mathrm{dx}$$

$$= \int_R (-\ln p - 1 + \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2(x-\mu)^2]\delta p\,\mathrm{d}x$$

在极值点处

$$\delta I = 0$$

由δp的任意性

$$-\ln p - 1 + \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2(x-\mu)^2 = 0$$

有

$$p(x) = \mathrm{e}^{-1+\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2(x-\mu)^2}$$

将该概率密度函数的形式回代回约束中，可定出 3 个 Lagrange 乘子，即它们满足方程

$$\begin{cases} \int_R \mathrm{e}^{-1+\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2(x-\mu)^2}\mathrm{d}\,x = 1 \\ \int_R x\,\mathrm{e}^{-1+\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2(x-\mu)^2}\mathrm{d}x = \mu \\ \int_R (x-\mu)^2\mathrm{e}^{-1+\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2(x-\mu)^2}\mathrm{d}\,x = \sigma^2 \end{cases}$$

为了计算上式中的三个积分，对指数上的多项式进行配方

$$-1 + \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2(x-\mu)^2 = \lambda_2(x-\mu+\frac{\lambda_1}{2\lambda_2})^2 - \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + \mu\lambda_1 + \lambda_0 - 1$$

并利用高斯积分$\int_R \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}\,x = \sqrt{\pi}$，可以将式（15）中的三个约束简化为

$$\begin{cases} \exp\left[-\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + \mu\lambda_1 + \lambda_0 - 1\right]\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}\sqrt{\pi} = 1 \\ 0 + \mu - \frac{2\lambda_1}{\lambda_2} = \mu \\ \sqrt{-\frac{\lambda_2}{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2(-\lambda_2)^{3/2}} = -\frac{1}{2\lambda_2} = \sigma^2 \end{cases}$$

由此解得

$$\lambda_0 = 1 + \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

将 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$代入概率密度函数表达式中，得

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

因此当随机变量服从 Gauss 分布 N(μ，σ^2)时熵最大。

4．设U，V是两个在(0,1]上均匀分布的独立随机变量，若

$$X=\sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V), Y=\sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V)$$

试证：X与Y是两个独立的标准高斯分布的随机变量
(参考冯铮浩，吴磊)
解：由于U，V是两个在(0,1]上均匀分布的独立随机变量，则U，V的概率密度函数

$$f_U(u)=1，f_V(v)=1$$

联合概率密度函数

$$f_{UV}(u,v)=1$$

其中

$$u(x,y)=e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}，v(x,y)=\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

设X,Y的联合概率密度函数为$f_{UV}(u,v)$，根据

$$f_{XY}(x,y)dxdy=f_{UV}(u,v)dudv$$

有

$$f_{XY}(x,y)dxdy=f_{UV}(u(x,y),v(x,y))\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|dxdy$$

其中$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$，因此

$$f_{XY}(x,y)=e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

因此 X 与 Y 均为标准的高斯分布。

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

因此 X 与 Y 相互独立。

5．对于[0,1]上的分布，证明其各阶矩构成一个完全单调序列。
(参考温岭)
证明：[0,1]上分布的零阶矩,一阶矩,二阶矩,⋯n阶矩为：

$$\int_0^1 p(x)\,dx,\qquad \int_0^1 xp(x)\,dx,\qquad \int_0^1 x^2p(x)\,dx,\ldots,\int_0^1 x^np(x)\,dx$$

记上面的序列为$\{\delta_n\}$，根据差商的定义，有

$$\Delta^m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \delta_{m-k} = \sum_{k=0}^{m}\int_0^1 C_m^k(-1)^k x^{m-k} p(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)^m p(x)\,dx$$

因此，

$$(-1)^m\Delta^m = \int_0^1 (1-x)^m p(x)\,dx \geq 0, \forall m = 1,2,\cdots,N$$

符合完全单调序列的定义。

6. 对于如下稳定分布的特征函数$\varphi(s) = \mathrm{Exp}\left(-|s|^{1/2}\right)$，画出其概率密度函数，并验证概率密度函数的尾部渐近于幂次律，求出幂指数（的近似值）。

(参考孟昭远)

解：该稳定分布的概率密度函数可通过对特征函数作 Fourier 逆变换求出，即

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\mathrm{e}^{-|s|^{1/2}}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\mathrm{e}^{-\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\mathrm{e}^{-\sqrt{-s}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt^2}\mathrm{e}^{-t}2t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt^2}\mathrm{e}^{-t}(-2t\,\mathrm{d}t) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt^2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt^2})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-t}\cos(xt^2)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

积分应该是没有初等表达式，用 MATLAB 数值计算该积分并画出概率密度函数（PDF）如下

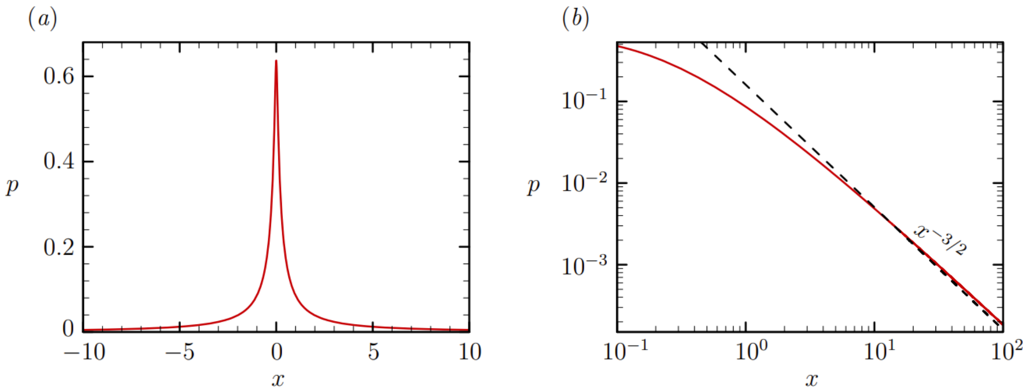

图 1: (a) 概率密度函数 $p(x)$，结果由 MATLAB 数值计算积分 (30) 给出。(b) 对数坐标下的 PDF，尾部近似按 $x^{-3/2}$ 幂次律衰减，与理论结果 (31) 一致。

接下来理论地给出 PDF 尾部的近似标度律，易见 $p(x)$是偶函数，因此只需关注$x > 0$的情况，作变量代换$y = \sqrt{x}\cdot t$，将积分化为

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-y/\sqrt{x}}\cos y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi x}\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y/\sqrt{x}}\cos y^2\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y/\sqrt{x}}\mathrm{d}(\sin y^2)\\
&= \frac{2}{\pi x}\left(\mathrm{e}^{-y/\sqrt{x}}\sin y^2\Big|_{y=0}^{\infty} - \int_0^\infty \sin y^2(-\frac{1}{\sqrt{x}})\mathrm{e}^{-y/\sqrt{x}}\,\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{2}{\pi x^{3/2}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y/\sqrt{x}}\sin y^2\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

因此 PDF 的尾部应近似地遵从幂次律$p(x)\sim x^{-3/2}$。

7. 设$X(t)$是一个零均值的平稳随机过程，其自相关函数为$R(\tau)=e^{-a|\tau|}, a>0$。定义

$$
Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t X(\tau)\,d\tau
$$

求$Y(t)$的自相关函数。

(参考孟昭远)

解：$Y(t)$的相关函数

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= \langle Y(t_1)Y(t_2)\rangle = \left\langle \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} X(\tau)\,\mathrm{d}\tau \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} X(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\rangle\\
&= \frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\langle X(\tau_1)X(\tau_2)\rangle\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\\
&= \frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\mathrm{e}^{-a|\tau_1-\tau_2|}\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_1.
\end{aligned}
$$

首先考虑$t_1\geq t_2$的情形，积分可化为

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= \frac{1}{t_1t_2}\left(\int_0^{t_2}\mathrm{d}\tau_2\int_0^{\tau_2}\mathrm{e}^{-a(\tau_2-\tau_1)}\,\mathrm{d}\tau_1 + \int_0^{t_2}\mathrm{d}\tau_2\int_{\tau_2}^{t_1}\mathrm{e}^{-a(\tau_1-\tau_2)}\,\mathrm{d}\tau_1\right)\\
&= \frac{1}{t_1t_2}\left[\frac{1}{a}\left(t_2+\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at_2}-\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\mathrm{e}^{a(t_2-t_1)}-t_2-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at_1}\right)\right]\\
&= \frac{1}{a^2t_1t_2}\left(2at_2+\mathrm{e}^{-at_1}+\mathrm{e}^{-at_2}-\mathrm{e}^{a(t_2-t_1)}-1\right).
\end{aligned}
$$

考虑$t_1<t_2$的情形，积分可化为

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= \frac{1}{t_1t_2}\left(\int_0^{t_1}\mathrm{d}\tau_1\int_0^{\tau_1}\mathrm{e}^{-a(\tau_1-\tau_2)}\,\mathrm{d}\tau_2 + \int_0^{t_1}\mathrm{d}\tau_1\int_{\tau_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-a(\tau_2-\tau_1)}\,\mathrm{d}\tau_2\right)\\
&= \frac{1}{t_1t_2}\left[\frac{1}{a}\left(t_1+\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at_1}-\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\mathrm{e}^{a(t_1-t_2)}-t_1-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at_2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{a^2t_1t_2}\left(2at_1+\mathrm{e}^{-at_1}+\mathrm{e}^{-at_2}-\mathrm{e}^{a(t_1-t_2)}-1\right).
\end{aligned}
$$

综上，$Y(t)$的相关函数

$$R_Y(t_1,t_2)=\frac{1}{a^2t_1t_2}\left(\mathrm{e}^{-at_1}+\mathrm{e}^{-at_2}-\mathrm{e}^{-a|t_1-t_2|}-1\right)+\frac{2}{at_1t_2}\min\{t_1,t_2\}.$$

8. 令随机过程$Z(t)$为$Z(t)$=$aX(t)$+$bY(t)$，其中a,b为常数$X(t)$和$Y(t)$为平稳随机过程。用$X(t)$和$Y(t)$的功率谱密度求$Z(t)$的功率谱密度。

(参考温岭)

解：$Z(t)$的功率谱密度可以表示为：

$$\begin{aligned}S_Z(w)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_z(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle Z(t)\cdot Z(t+\tau)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle[aX(t)+bY(t)]\cdot[aX(t+\tau)+bY(t+\tau)]\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle a^2X(t)X(t+\tau)+b^2Y(t)Y(t+\tau)+abX(t)Y(t+\tau)\\&+abY(t)X(t+\tau)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}a^2R_X(\tau)+b^2R_Y(\tau)+ab[R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau\end{aligned}$$

这里$R_{XY}(\tau)$，$R_{YX}(\tau)$为互相关函数，定义为：

$$R_{XY}(\tau)=\langle X(t)Y(t+\tau)\rangle,\qquad R_{YX}(\tau)=\langle Y(t)X(t+\tau)\rangle$$

由于$R_{YX}(\tau)=\langle X(t)Y(t-\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)Y(t-\tau)\,d\tau$，令$\eta=-\tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty}X(t)Y(t-\tau)\,d\tau=-\int_{\infty}^{-\infty}X(t)Y(t+\eta)\,d\eta=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)Y(t+\eta)\,d\eta$$

因此

$$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(\tau)$$

定义互功率谱密度为：

$$S_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau$$

因此有：

$$S_Z(w)=a^2S_X(\tau)+b^2S_Y(\tau)+2abS_{XY}(\tau)$$

9. 试确定以下随机过程是否具有遍历性

$$\boldsymbol{X(t)=A\sin[w_0t+\sigma B(t)+\theta]}$$

其中$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{w_0}$，$\boldsymbol{\sigma}$是正常数，$B(t)$是一个单位维纳过程，θ是$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量并且与$B(t)$独立。

(参考孟昭远，温岭，邱湛睿)

解：$X(t)$的均值为 0：

$$\mu = \langle X(t)\rangle = \quad A\langle \sin[\omega_0 t+\sigma B(t)]\cos[\theta]+\cos[\omega_0 t+\sigma B(t)]\sin[\theta]\rangle$$
$$= A\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin[\omega_0 t+\sigma B(t)]\,dt\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos[\theta]\,d\theta$$
$$+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos[\omega_0 t+\sigma B(t)]\,dt\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin[\theta]\,d\theta\} = 0$$

自相关函数为：

$$R_X(t_1,t_2) = \langle X(t_1)X(t_2)\rangle$$
$$= \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle sin(w_0 t_1+\sigma B(t_1)+\theta)\cdot sin(w_0 t_2+\sigma B(t_2)+\theta)\rangle|_\tau\,d\theta$$
$$= \frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\langle \cos\left[\omega_0(t_1-t_2)+\sigma\left(B(t_1)-B(t_2)\right)\right]$$
$$-\cos\left[\omega_0(t_1+t_2)+\sigma\left(B(t_1)+B(t_2)\right)+2\theta\right]\rangle|_\tau\,d\theta$$
$$= \frac{A^2}{2}\langle cos\left[w_0(t_1-t_2)+\sigma\left(B(t_1)-B(t_2)\right)\right]\rangle|_\tau$$

$B(t)$是一个单位维纳过程，$B(t_1)-B(t_2)$服从正态分布，即有：

$$W(\tau) = B(t_1)-B(t_2)\sim N(0,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{w^2}{2\tau}}$$

因此有：

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}cos[w_0\tau+\sigma\cdot W(\tau)] = R_X(\tau)$$

只与时间间隔τ有关，为广义平稳过程，又有：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T R_X(\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \cos(w_0\tau)\cos\left(\sigma\cdot W(\tau)\right)-\sin(w_0\tau)\sin\left(\sigma\cdot W(\tau)\right)d\tau$$
$$= 0$$

由遍历定理可知，该随机过程是否具有遍历性。

10. 考虑一段突扩管流包含的总动能K，在大雷诺数时它是一个随机变量。如果管流的入口速度近似为不变的，问K可否近似服从对数正态分布?总耗散呢?

解：已知 Helmholtz-Hodge 分解，将不可压速度场分解为满足法向速度边条件的梯度场（纵场）和无法向速度的旋度场（横场）之和

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}$$

其中ϕ满足 Laplace 方程。

容易证明，流场总动能满足

$$2K=\int_V v^2\,dV=\int_V (\nabla\phi)^2\,dV+\int_V (\nabla\times\boldsymbol{\psi})^2\,dV\geq\int_V (\nabla\phi)^2\,dV$$

突扩管道是单连通域，当边界法向速度给定时，$\nabla\phi$是唯一确定的（Laplace 方程标准的 Neumann 边值问题），又由于边界法向速度近似不变，因此$\nabla\phi$不是随机变量，这样$\int_V (\nabla\phi)^2\,dV$为非零正数（这是由给定的非零入口速度决定的关键结论），并不是随机变量。这样，我们得出作为随机变量的总动能存在一个非零的下界，其对数自然也有有限的下界。于是其不可能符合对数正态分布。

对于突扩管流，流场不可能是刚体运动场，根据边界法向速度是确定的非零分布可以证明总耗散率也有非零下界（其平均值是可以根据水头损失求出的），因而也不符合对数正态分布。