

湍流第一次作业参考答案

第 1 题：考虑将连续不可微的 Weierstrass 函数变成非周期的平稳随机过程，给出其概率密度，以及二阶结构函数随尺度变化的双对数曲线。变成另一种非周期的函数，研究概率函数和二阶结构函数的双对数曲线如何受不同非周期化方式的影响。二阶结构函数定义为相距 l 的两点上的函数值之差的平方的平均值。

（参考孟昭远）注：下述 Weierstrass 函数表达式中，如果 b 取为无理数，级数前面再乘以一个平稳随机变量，是否直接就得到一个非周期的平稳随机过程？

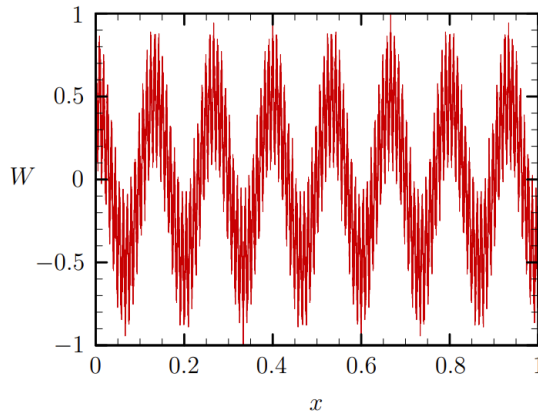


图 1: Weierstrass 函数在 $x \in [0, 1]$ 的图像，其中 $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, 15\right)$ ，其周期 $T < 1$ 。

解. Weierstrass 函数由一个 Fourier 级数的形式定义：

$$W(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad (1)$$

其中常数 $0 < a < 1$ ， b 为正奇数，且需满足约束 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ，注意到满足这个限制条件的 b 的最小值是 7，即 $b = \{7, 9, 11, \dots\}$ 。在以下的讨论中，不考虑 a, b 的参数域对问题的影响，取定 $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, 15\right)$ ，注意到这组 (a, b) 是满足约束条件的。

考虑将连续不可微的 Weierstrass 函数变成非周期的平稳随机过程, 为了将函数值仍控制在 $[-1, 1]$ 内, 我设置的第一种方式为

$$M_1(x) := W(x) \sin(\xi + \frac{\pi}{8}), \quad (2)$$

其中 $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 即 ξ 为满足标准 Gauss 分布的随机变量. 第二种方式为

$$M_2(x) := W(x) \tanh(\eta), \quad (3)$$

其中 $\eta \sim \mathcal{N}(5, 10)$, 即随机变量 η 服从该非标准 Gauss 分布, 其中 $\tanh(\cdot)$ 为双曲正切函数. 这两个函数图像如图 2 所示.

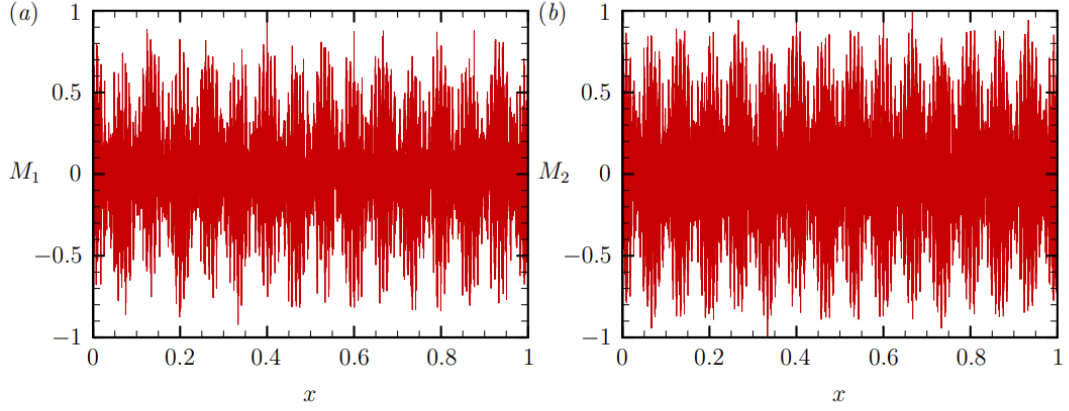


图 2: 非周期函数 (a) $M_1(x)$ 和 (b) $M_2(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 的图像.

图 2: 非周期函数 (a) $M_1(x)$ 和 (b) $M_2(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 的图像.

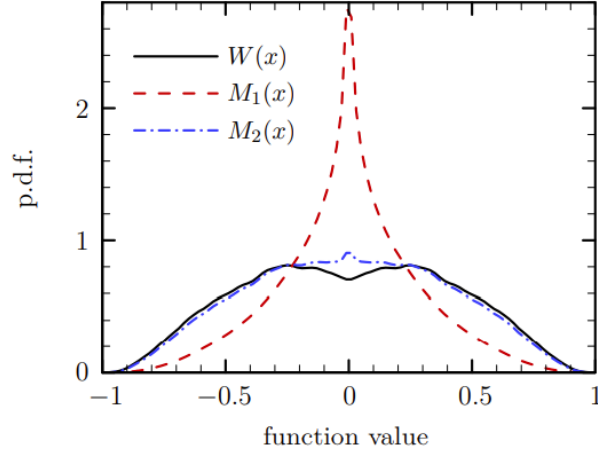


图 3: $W(x)$ 、 $M_1(x)$ 和 $M_2(x)$ 的概率密度函数.

给定一个函数 $g(x)$ ，定义概率密度函数（PDF）

$$f(X) := \frac{dF(X)}{dX} = \frac{d}{dX} P(g(x) < X), \quad (4)$$

其中 $F(X)$ 为累积分布函数（CDF）。基于此可给出以上三个函数的 PDF: $f_W(X)$ 、 $f_{M_1}(x)$ 和 $f_{M_2}(X)$ 。

给定一个函数 $f(x)$ ，定义二阶结构函数

$$\delta^2 f(\ell) := \langle (f(x+\ell) - f(x))^2 \rangle, \quad (5)$$

即其定义为相距 ℓ 的两点上的函数值之差的平方的平均值，其中符号 $\langle \cdot \rangle$ 定义为

$$\langle \cdot \rangle := \frac{1}{L} \int_L (\cdot) ds. \quad (6)$$

基于此可给出以上三个函数的二阶结构函数 $\delta^2 W(\ell)$ 、 $\delta^2 M_1(\ell)$ 和 $\delta^2 M_2(\ell)$ 。

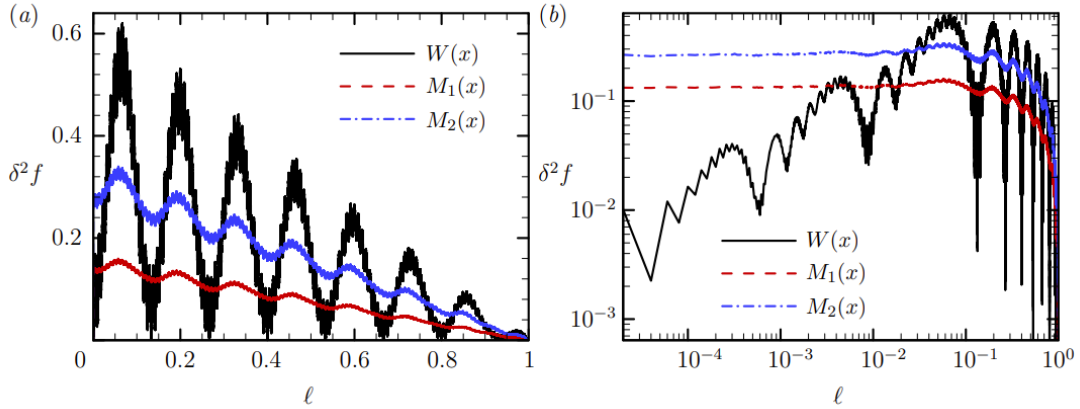


图 4: $W(x)$ 、 $M_1(x)$ 和 $M_2(x)$ 的二阶结构函数. (a) Cartesian 坐标; (b) 双对数坐标.

左上图和右上图都是结构函数，仅仅是线性坐标和对数坐标的差别，为何增长趋势不同（右边的貌似更合理）？

从图 3 可以看出对 Weierstrass 函数乘上不同的重排列因子对 PDF 的影响是比较显著的，对于 $M_1(x)$ ，其值分布除了仍关于 0 对称外几乎与改造前的 Weierstrass 函数毫无相似之处；而对于 $M_2(x)$ ，该调整可以使得其 PDF 在 $|f| > 0.2$ 的范围内基本跟 Weierstrass 函数一致，并且将在 $|f| \leq 0.2$ 的 PDF 图像上翻，原先的极小值点变为了极大值点。

图 4 给出了 $W(x)$ 、 $M_1(x)$ 和 $M_2(x)$ 的二阶结构函数，可以看到改造过程成功地一定程度抹平了 Weierstrass 函数的周期性， M_1 和 M_2 的二阶结构函数有点像 Weierstrass 二阶结构函数的滤波结果（这个波的尺度很大）。具体地来说，从 PDF 已经看出 $M_1(x)$ 的分布跟 $W(x)$ 具有极大的不同，因此其结构函数是偏心的，并不完全像是 $W(x)$ 的结构函数滤波或取平均；而 $M_2(x)$ 的分布与 $W(x)$ 非常相似，因此二者结构函数波包的中心线几乎是完全重合的。同时还可以注意

到，改造后的函数仍然具有微弱的类周期特征。另外，从对数坐标系上看， $\delta^2 M_1$ 与 $\delta^2 M_2$ 非常相似，并且在 $\ell < 10^{-2}$ 时二阶结构函数为定值，这一点与 $\delta^2 W$ 有极大的不同。□

第2题：对于固壁包围的均质不可压缩黏性流体，当容器围绕一个固定不动的轴做刚体旋转时，一定时间后整个容器内的流体都做相对容器静止的刚体运动。可以根据容器尺寸，旋转的角速度和黏性定义一个雷诺数。证明：无论雷诺数多高，容器内流体的这种刚体旋转运动都不会变成湍流。提示：考虑对容器内流体所加扰动（不限于小扰动）的演化。

（参考胡成龙、张非驰）

解：设绝对坐标系速度 \mathbf{v}_0 ，旋转坐标系相对速度 \mathbf{v} ，圆柱旋转角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ ，绝对坐标系时间导数 $\frac{d_0}{dt}$ ，旋转坐标系时间导数 $\frac{d}{dt}$ 。

已知 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ ，等价于 $\frac{d_0 \mathbf{r}}{dt} = \frac{d \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ ，由于导数与叉乘均为线性算子，

因此对任意矢量 \mathbf{A} ，有 $\frac{d_0 \mathbf{A}}{dt} = \frac{d \mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$ ，因此

$$\begin{aligned}\frac{d_0 \mathbf{v}_0}{dt} &= \frac{d \mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0 = \frac{d(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{d \mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \\ &= \frac{d \mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \Omega^2 \mathbf{R}\end{aligned}$$

其中 \mathbf{R} 是 \mathbf{r} 的径向投影矢量。

设旋转坐标系的扰动速度场为 \mathbf{v} ，考虑旋转坐标系的均质不可压流动的NS方程，

$$\frac{d \mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \Omega^2 \mathbf{R} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

即

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2} R^2 \right) - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega}$$

在旋转参照系下，刚体旋转的基本流动为静止状态。流场受扰动后，假设扰动速度在容器壁上为0。对上式两边点乘 \mathbf{v} ，并在圆柱内积分，均质流体在常转速下离心力有势，得到动能 $E = \frac{1}{2} \int_V v^2 dV$ 的时间变化率

$$\frac{dE}{dt} = -\nu \int_V \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} dV < 0$$

因此动能总是衰减的，流动是稳定的。

（注：虽然扰动动能是减少的，但会不会趋于非零常数呢？答案是：不会。因为 $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$ ，成立Poincare不等式

$$\int_V \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dV \geq C \int_V \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \, dV$$

其中 $C > 0$ 是仅依赖于容器几何形状 Ω 的几何常数（实际上 C 为 Ω 上旋度算子非零最小特征值的平方），于是

$$\frac{dE}{dt} < -2\nu C \cdot E$$

由此可知（Gronwall 微分不等式），

$$E(t) \leq E(0)e^{-2\nu C t}$$

故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$$

即扰动终将消散，流动回归相对静止（即刚体旋转）态。该结论只依赖于边界扰动为 0 的假设，与雷诺数和扰动大小无关。

第 3 题：推导洛伦兹方程，即：导出两平行平间满足流向周期性和板上自由滑移速度边界条件（即只限制法向速度为 0）二维不可压热对流的截断至 3 阶傅立叶模态满足的常微分方程组，验证该方程组是耗散型的。

（参考袁磊祺，见教材第八篇相关内容）

对满足 Boussinesq 假设的二维不可压缩热对流，用流函数表示的 NS 方程如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu \nabla^4 \psi, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\Delta T}{d} + \kappa \nabla^2 \theta. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} y = 0, \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \theta = 0, \\ y = d, \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \theta = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

根据边条件, 采用三角级数展开

$$\begin{aligned} \psi(t, x, y) &= \sum a_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum b_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \\ \theta(t, x, y) &= \sum c_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum d_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

将式 (3.3) 代入式 (3.1), 并利用三角函数的正交性

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \, dt = \delta_{mn}, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt \, dt = \delta_{mn}, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cos nt \, dt = 0. \quad (3.6)$$

可得 $a_{mn}, d_{mn} = 0$ 是可能的解, 重新定义 $a = \pi d/\alpha$, 假设题目所说的三阶指的是 $m, n \in \{-1, 0, 1\}$, 则 ψ, θ 的表达式可以写成 [4, P252]

$$\pi\alpha(\pi^2 + a^2)^{-1} \kappa^{-1} \psi = X\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right) \sin\left(\frac{ax}{d}\right), \quad (3.7)$$

$$\pi R_c^{-1} R_a \Delta T^{-1} \theta = Y\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right) \cos\left(\frac{ax}{d}\right) - Z \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right). \quad (3.8)$$

其中 X, Y, Z 都只是和无量纲时间 $\tau = (\pi^2 + a^2)\kappa t/d^2$ 有关的函数. $R_a = g\alpha\Delta T d^3/(\nu\kappa)$ 是 Rayleigh 数, $R_c = (\pi^2 + a^2)^3/a^2$ 是线性化小扰动理论导出的临界 Rayleigh 数, 代入式 (3.1) 可得

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -\sigma X + \sigma Y, \\ \frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ. \end{cases} \quad (3.9)$$

其中 $\sigma = \gamma/\kappa$ 是 Prandtl 数, $r = R_a/R_c$, $b = 4(1 + a^2\pi^{-2})^{-1}$. 此方程组是 Lorenz 方程组.

式 (3.9) 可写成

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}, \quad (3.10)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\sigma X + \sigma Y \\ -XZ + rX - Y \\ XY - bZ \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

设相空间内有一体积 V , 则体积变化

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} ds \\ &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dv \\ &= \int_V \left(\frac{\partial}{\partial X}(-\sigma X + \sigma Y) + \frac{\partial}{\partial Y}(-XZ + rX - Y) + \frac{\partial}{\partial Z}(XY - bZ) \right) dv \\ &= (-\sigma - 1 - b)V. \end{aligned} \quad (3.12)$$

由于 $-\sigma - 1 - b < 0$, 所以 V 关于时间指数衰减, 所以 Lorenz 方程组是耗散型的。

注：耗散型的动力系统由于相体积随时间不断缩小，因而存在吸引子。对非线性动力系统，吸引子在很多情况下是混沌的，称为奇怪吸引子（**strange attractor**）。湍流可认为是高维的奇怪吸引子。有关湍流吸引子和惯性流形的工作可参考 **Ruelle & Takens**, **Temam**, **Foias** 等经典文献。

第 4 题：周培源 1940 中的论文中提出，假如湍流脉动用三角函数的形式来表示，则有

$$\langle u_i u_j u_k u_l \rangle = \frac{1}{2} (\langle u_i u_j \rangle \langle u_k u_l \rangle + \langle u_i u_k \rangle \langle u_j u_l \rangle + \langle u_i u_l \rangle \langle u_k u_j \rangle)$$

并指出，在一般情况下，这“是一个独立的假设”。Kolmogorov 的学生 Millionshchikov 在 1941 年假设脉动速度为正态分布，提出

$$\langle u_i u_j u_k u_l \rangle = \langle u_i u_j \rangle \cdot \langle u_k u_l \rangle + \langle u_i u_k \rangle \cdot \langle u_j u_l \rangle + \langle u_i u_l \rangle \cdot \langle u_j u_k \rangle$$

这称为准正态（QN）封闭假设，后来许多人对此都有进一步研究，该假设也是现代湍流解析理论（如 EDQNM）的基础。的确，正态分布作为基本而重要的概率分布在湍流研究中自然也是首先值得关注的。因为该分布具有一些基本的性质，例如，无论是一维还是多维，分布都由均值和两两相关的二阶协方差矩阵决定。

对满足联合正态分布的零均值随机变量 u_i, u_j, u_k, u_l , 证明上述 QN 封闭假设。

（答案补充了 Frisch 书中的证明细节）

解：该结论本质上是线性变换、正定二次型和一维正态分布相结合的一个美妙结果。直接用 4 维正态分布的概率密度表达式（Pope 书）

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \mathbb{C}}} \text{Exp} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \alpha_{ij} u_i u_j \right)$$

计算即可。其中

$$(\mathbb{C})_{ij} \equiv \langle u_i u_j \rangle \equiv \mu_{ij}$$

是协方差矩阵，

$$\alpha_{ij} = (\mathbb{C}^{-1})_{ij}, \text{ 即 } \alpha_{im} \mu_{mj} = \delta_{ij}$$

关键技巧是由于 \mathbb{C} 是对称正定矩阵，因此 \mathbb{C}^{-1} 也是对称正定的，因而可以通过线性变换将 $\sum_{i,j=1}^4 \alpha_{ij} u_i u_j$ 变为标准的没有交叉项的平方和形式，这样就可以将 4 重积分化成 1 维积分了。

下面是来自同学们的做法（主要参考了 Frisch 的书）。

解：首先证明高斯分布积分定理：

Gaussian integration by parts (Furutsu 1963; Donsker 1964; Novikov 1964). *Let $v = (v_i, i = 1, \dots, n)$ be a vector-valued centered Gaussian variable and let f be a differentiable function of n variables, then, assuming all averages exist,*

$$\langle v_i f(v_1, v_2, \dots, v_n) \rangle = \Gamma_{ij} \left\langle \frac{\partial f}{\partial v_j} \right\rangle, \quad (4.14)$$

where $\Gamma = \langle v_i v_j \rangle$.

设高斯分布随机变量 g ，方差 $\langle g^2 \rangle = \sigma^2$ ，概率密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

注意到 $x\varphi(x) = -\sigma^2 \varphi'(x)$ ，因此，对连续可微函数 $F(g)$ ，有

$$\begin{aligned} \langle gF(g) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} xF(x)\varphi(x)dx = -\sigma^2 F(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x)\varphi(x)dx \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x)\varphi(x)dx = \sigma^2 \langle F'(x) \rangle = \langle g^2 \rangle \langle F'(x) \rangle \end{aligned}$$

设 X 为标准正态分布向量，且向量中各变量独立，单变量关系式 $\langle gF(g) \rangle = \langle g^2 \rangle \langle F'(x) \rangle$ 写成向量形式

$$\text{Cov}[X, f(X)] = \Gamma_X \cdot \langle \nabla f(X) \rangle$$

其中 Γ_X 为对角矩阵，对角元素为 $\langle X_i^2 \rangle$ 。

令 $Z = \Gamma \cdot X$ ， Γ 为线性变换矩阵，同时对函数做替换 $f(X) = h(\Gamma \cdot X) = h(Z)$ ，则

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z, h(Z)] &= \text{Cov}[\Gamma \cdot X, f(X)] \\ &= \Gamma \cdot \text{Cov}[X, f(X)] \\ &= \Gamma \cdot \Gamma_X \cdot \langle \nabla f(X) \rangle \end{aligned}$$

$$= \Gamma \cdot \Gamma_X \cdot \Gamma^T \cdot \langle \nabla h(Z) \rangle$$

由 $Z = \Gamma \cdot X$ 及 X 内变量独立可知, $\Gamma \cdot \Gamma_X \cdot \Gamma^T = \Gamma_Z$, 其中 $\Gamma_{Zij} = \langle Z_i Z_j \rangle$, 故

$$\text{Cov}[Z, h(Z)] = \Gamma_Z \cdot \langle \nabla h(Z) \rangle$$

高斯分布积分定理得证。

然后证明高斯随机变量矩关系:

Moment relation for Gaussian random variables (Isserlis 1918). *Let v be a centered vector-valued Gaussian random variable, then*

$$\langle v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{2m+1}} \rangle = 0, \quad \forall m, i_1, i_2, \dots, i_{2m+1} \quad (4.17)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \langle v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{2m}} \rangle &= \sum \langle v_{i_{\ell_1}} v_{i_{\ell_2}} \rangle \langle v_{i_{\ell_3}} v_{i_{\ell_4}} \rangle \dots \langle v_{i_{\ell_{2m-1}}} v_{i_{\ell_{2m}}} \rangle, \\ &\forall m, i_1, i_2, \dots, i_{2m}, \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

where

$$(\ell_1, \ell_2), (\ell_3, \ell_4), \dots, (\ell_{2m-1}, \ell_{2m}) \quad (4.19)$$

is an arbitrary partition of $\{1, 2, \dots, 2m\}$ into pairs and the summation is over all possible partitions.⁴

(1) 奇数阶矩, 将 v 变为 $-v$, 则矩数值乘-1; 同时, $-v$ 与 v 的概率密度相同, 矩不变。因此, 奇数阶矩为 0。

(2) 偶数阶矩: $m = 1$ 等式成立。利用归纳法证明, 设 $m - 1$ 等式成立, 即

$$\langle v_1 v_2 \dots v_{2m-2} \rangle = \sum \langle v_{l_1} v_{l_2} \rangle \langle v_{l_3} v_{l_4} \rangle \dots \langle v_{l_{2m-3}} v_{l_{2m-4}} \rangle$$

将 $\langle v_1 v_2 \dots v_{2m} \rangle$ 利用高斯分布积分定理展开, 令 $f = v_2 \dots v_{2m}$, 则

$$\langle v_1 \cdot v_2 \dots v_{2m} \rangle = \sum_j \langle v_1 v_j \rangle \langle v_2 \dots \hat{v}_j \dots v_{2m} \rangle$$

其中 \hat{v}_j 表示无 v_j 。上式 $\langle v_2 \dots \hat{v}_j \dots v_{2m} \rangle$ 利用 $m - 1$ 情况展开, 便可得到 (4.18) 右侧结果。定理得证。

令 $m = 2$, 有

$$\langle u_i u_j u_k u_l \rangle = \langle u_i u_j \rangle \cdot \langle u_k u_l \rangle + \langle u_i u_k \rangle \cdot \langle u_j u_l \rangle + \langle u_i u_l \rangle \cdot \langle u_j u_k \rangle$$

第 5 题: 证明高雷诺数下射流的耗散率是常数, 与粘性无关。

解: 取包含射流入口、侧壁、射流远处的控制体, NS 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \omega \times u = -\nabla H - \nu \nabla \times \omega$$

其中总焓 $H = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$ 。方程两边点乘 u 并对控制体积分

$$\frac{dE}{dt} = - \oint_{\partial\Omega} u_n H dS - \nu \int_V \omega \cdot \omega dV - \nu \oint_{\partial\Omega} n \cdot (\omega \times u) dS$$

对高雷诺数湍流，两端求平均， $\langle E \rangle$ 不随时间变化，有

$$- \oint_{\partial\Omega} \langle u_n \rangle \langle H \rangle dS - \oint_{\partial\Omega} \langle u'_n H' \rangle dS = \nu \int_V \langle \omega^2 \rangle dV + \nu \oint_{\partial\Omega} n \cdot \langle \omega \times u \rangle dS$$

其中 $\langle u_n \rangle$ 为常数， $\langle u'_n H' \rangle$ 相比 $\langle u_n \rangle \langle H \rangle$ 为小量（为什么？），可以略去， $n \cdot \langle \omega \times u \rangle$ 为 ω 的一次方，相比 $\langle \omega^2 \rangle$ 是小量，可以略去，（或者：考虑到远处涡量在射流核心区外很快趋于0，而射流核心区控制面上平均速度与法向近似平行，脉动速度小于平均速度，因此当控制面越来越大时 $\oint_{\partial\Omega} n \cdot \langle \omega \times u \rangle dS \rightarrow 0$ ）因此

$$- \oint_{\partial\Omega} \langle u_n \rangle \langle H \rangle dS \approx \nu \int_V \langle \omega^2 \rangle dV$$

耗散率定义

$$\Phi = 2\mu \int_V S:S dV = \mu \int_V \omega^2 dV + 2\mu \oint_{\partial\Omega} (u \cdot \nabla u) \cdot n dS$$

其中 $u \cdot \nabla u = \omega \times u + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right)$ ， $\oint_{\partial\Omega} (u \cdot \nabla u) \cdot n dS$ 为小量可略去，因此

$$\Phi \approx \mu \int_V \omega^2 dV \approx - \oint_{\partial\Omega} \langle u_n \rangle \langle H \rangle dS$$

由于自由射流压力 p 在全场相同，根据质量守恒，有

$$\oint_{\partial\Omega} \langle u_n \rangle \langle p \rangle dS = 0$$

$$- \oint_{\partial\Omega} \langle u_n \rangle \langle H \rangle dS = - \oint_{\partial\Omega} \langle u_n \rangle \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle dS$$

射流轴线速度 u 的衰减速度是 r^{-1} ，因此，远处 $u_n \cdot \frac{u^2}{2}$ 衰减速率为 $r^{-(3+\delta)}$ ，远处动能面积分为0，面积分只剩下射流入口的 $u_n \cdot \frac{u^2}{2}$ ，因此，射流的动能全部被耗散，与粘性无关。

另证：根据高雷诺数时突扩管流的局部水头损失的著名结果（经验公式）

$$H_1 - H_2 = \frac{V_1^2}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

和上述推导中的关系式

$$\Phi \approx \mu \int_V \omega^2 dV \approx - \oint_{\partial\Omega} \langle u_n \rangle \langle H \rangle dS$$

可知突扩管流总耗散近似为

$$\Phi \approx V_1 A_1 \frac{V_1^2}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

注意到该值与黏性无关。当 $A_2 \rightarrow \infty$ 时，突扩管流即为射流，

$$\Phi \approx V_1 A_1 \frac{V_1^2}{2}$$

是与黏性（或雷诺数 $V_1 \sqrt{A_1}/\nu$ ）无关的非零常数。

注：对于出口面积和管长有限的突扩管流，平均耗散率($\varepsilon \equiv \frac{\Phi}{\text{流场总体积}}$)是与雷诺数无关的非零常数。当雷诺数趋于无穷时平均耗散率有非零极限值是许多湍流的一个基本特征。