作业二

（2021 年 11 月 3 日前交电子版）

1. 推导两个独立随机变量乘积的概率密度表达式。
2. 证明：两个独立的高斯分布随机变量之比的概率密度为柯西分布。
3. 对于概率密度$p(x)$，定义$H = -\int p \ln p \, dx$为此概率分布的熵。那么，当给定数学期望和方差时，求熵最大的概率密度函数。
4. 设U, V是两个在$(0,1]$上均匀分布的独立随机变量，若

$$X = \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V), Y = \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V)$$

   试证：X与Y是两个独立的标准高斯分布的随机变量。
5. 对于$[0, 1]$上的分布，证明其各阶矩构成一个完全单调序列。
6. 对于如下稳定分布的特征函数$\varphi(s) = \mathrm{Exp}(-|s|^{1/2})$，画出其概率密度函数，并验证概率密度函数的尾部渐近于幂次律，求出幂指数（的近似值）。
7. 设$X(t)$是一个零均值的平稳随机过程，其自相关函数为$R(\tau) = e^{-a|\tau|}, a > 0$。定义

$$Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(\tau) d\tau$$

   求$Y(t)$的自相关函数。
8. 令随机过程$Z(t)$为

$$Z(t) = aX(t) + bY(t)$$

   其中a, b为常数，$X(t)$和$Y(t)$为平稳随机过程。用$X(t)$和$Y(t)$为功率谱密度求$Z(t)$的功率谱密度。
9. 试确定以下随机过程是否具有遍历性：

$$X(t) = A \sin[\omega_0 t + \sigma B(t) + \theta]$$

   其中A，ω_0，σ是正常数，$B(t)$是一个单位维纳过程，θ是$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，并且与$B(t)$独立。
10. 考虑一段突扩管流包含的总动能K，在大雷诺数时它是一个随机变量。如果管流的入口速度近似为不变的，问K可否近似服从对数正态分布？总耗散呢？