

湍流 4

College of Engineering 2001111690 袁磊祺

December 26, 2021

2021 年 1 月 3 日前交电子版.

代码等作业内容可在 <https://github.com/circlelq/Turbulence> 查看.

1

自己构造一个在适当的小尺度范围满足“ $2/3$ ”定律的二阶纵向速度结构函数, 画出结构函数和一维能谱, 考察能谱函数是否满足“ $5/3$ ”定律.

解:

2

考虑均匀各向同性湍流早期的衰减过程, 用 Pao (鲍亦和) 的能量传递模型和相似性解数值求解无量纲的三维能谱函数, 并在一张图上画出若干初始雷诺数下的无量纲能谱函数曲线.

3

阅读 Kolmogorov 1941 年的三篇湍流经典论文 (见分享的书 *Turbulence: Classical papers on statistical theory*). 对较少关注的第二篇论文, 在你阅读后用最简洁的论证给出“ $-10/7$ ”衰减规律. 并问用类似的方法, 通过适当修改假设, 可否推出湍流动能的指数规律衰减规律 (有人在一定形状的分形格栅尾流中测量到此规律)?

5

K62 模型中假设湍流在尺度 ℓ 上的粗粒化耗散率 ε_ℓ 满足对数正态分布, 并且均值和方差也满足随尺度变化的一定的对数规律, 由此推出 p 阶速度结构函数的标度指数规律为 $\zeta(p) = \frac{p}{3} + \frac{\mu p}{18}(3-p)$.

证明: 尺度 ℓ 上速度增量的绝对值 U 作为随机变量, 其概率密度 $P(\ell, U)$ 也符合对数正态分布, 且满足如下方程:

$$\ell \frac{\partial P}{\partial \ell} + (\gamma + 4b)U \frac{\partial P}{\partial U} + bU^2 \frac{\partial^2 P}{\partial U^2} + (\gamma + 2b)P = 0, \quad (4.1)$$

其中 $\gamma = (3 + \mu)/9, b = \mu/18$.

6

试估计用大涡模拟方法计算高雷诺数边界层湍流时的网格规模. 参考 Pope 书习题 13.29 (A) 推出 (13.173) 式.

解:

In LES-NWR, in order to resolve the near-wall motions, the filter width and grid spacing in the viscous near-wall region must be on the order of δ_ν . [1] So

$$\Delta x = a_x \delta_\nu, \quad \Delta z = a_z \delta_\nu. \quad (5.1)$$

where a_x and a_z are positive constants. □

7

Prandtl 混合长模型是应用最多的一个湍流模型. 但教科书中通常都是针对平均流动为二维单向的剪切湍流给出模型. 试给出混合长模型的一个三维各向异性推广. 注意: 模型应符合坐标不变的张量性质.

8

推导周期边界条件下 Navier-Stokes 方程在傅立叶谱空间中的形式. 从数学形式上看, 二维和三维情况下最后有区别吗? 用周期边界条件模拟高雷诺数均匀各向同性湍流, 在模拟时计算参数的选取应注意什么问题?

参考文献

- [1] Stephen B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge Univ. Press, 2000. 2