

Controle Digital

SEL620

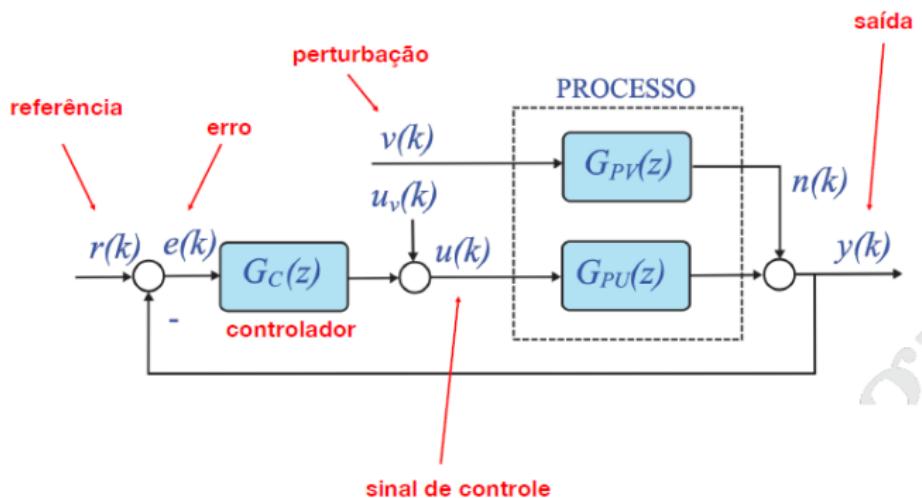
Prof. Dr. Valdir Grassi Jr

Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

Controladores Paramétricos

Capítulo 7

Processo SISO realimentado



Controlador PID

(Seção 7.2)

Proporcional ao erro Integral do erro Derivada do erro

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(\tau) d\tau + T_D \frac{d}{dt} e(t) \right]$$

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{(KT_D)s^2 + Ks + (K/T_I)}{s} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

$$G_{PID}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_0 s^2 + q_1 s + q_2}{s} = \frac{K(s + z_{01})(s + z_{02})}{s}$$

Controlador PID

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(\tau) d\tau + T_D \frac{d}{dt} e(t) \right].$$

Admitindo-se um tempo de amostragem pequeno pode-se aproximar a integral e derivada por:

$$u(k) = K \left[e(k) + \underbrace{\frac{T_0}{T_I} \sum_{v=0}^{k-1} e(v)}_{\text{Aproximação da integral}} + \underbrace{\frac{T_D}{T_0} (e(k) - e(k-1))}_{\text{Aproximação da derivada}} \right].$$

Controlador PID

$$u(k) = K \left[e(k) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{v=0}^{k-1} e(v) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - e(k-1)) \right].$$

É possível escrever na forma recursiva (equação de diferenças):

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2),$$

$$q_0 = K \left(1 + \frac{T_D}{T_0} \right), \quad q_1 = -K \left(1 + 2\frac{T_D}{T_0} - \frac{T_0}{T_I} \right),$$

$$q_2 = K \frac{T_D}{T_0}.$$

Controlador PID

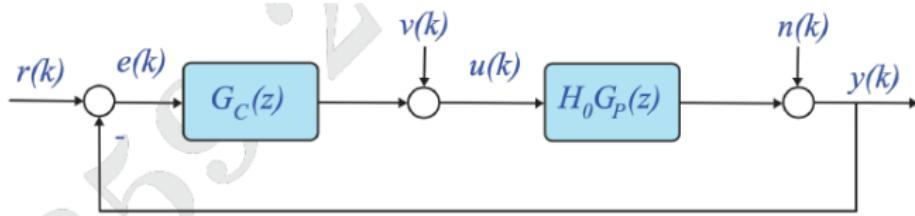
$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

Pode-se obter a seguinte função de transferência para o PID discreto:

$$\begin{aligned} G_C(z) &= G_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}, \\ &= \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 - z} = \frac{q_0(z - z_{01})(z - z_{02})}{z^2 - z} = \frac{Q(z)}{P(z)}. \end{aligned}$$

Controlador paramétrico genérico

(Seção 7.3)



$$H_0 G_P = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}},$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_\mu z^{-\mu}}.$$

Controlador paramétrico genérico

Para zerar o erro de regime permanente para uma entrada degrau, o controlador deve ter pelo menos um polo em $z = 1$ ($s = 0$, ação integral).

Portanto, a estrutura mais simples para o controlador genérico de ordem v :

$$G_C(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_v z^{-v}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

A equação de diferenças seria:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + \dots + q_v e(k-v).$$

Controlador paramétrico genérico

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + \dots + q_v e(k-v).$$

Para $v=1$ o controlador seria um PI.

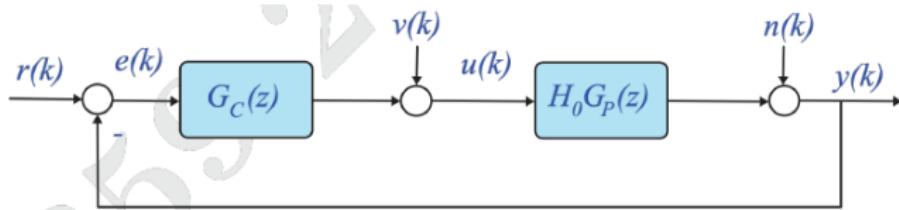
Para $v=2$ o controlador seria um PID.

Para $v=3$ o controlador seria um PID2 ou PI2D.

Controlador paramétrico de segunda ordem

($v = 2$)

(Seção 7.4)



$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

Suponha que o controlador receba uma entrada degrau:

$$e(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

$$u(k) = u(k - 1) + q_0 e(k) + q_1 e(k - 1) + q_2 e(k - 2).$$

Retirando-se o controlador da malha fechada e aplicando um degrau unitário na entrada do controlador, a resposta do controlador seria:

$$u(0) = q_0,$$

$$u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1,$$

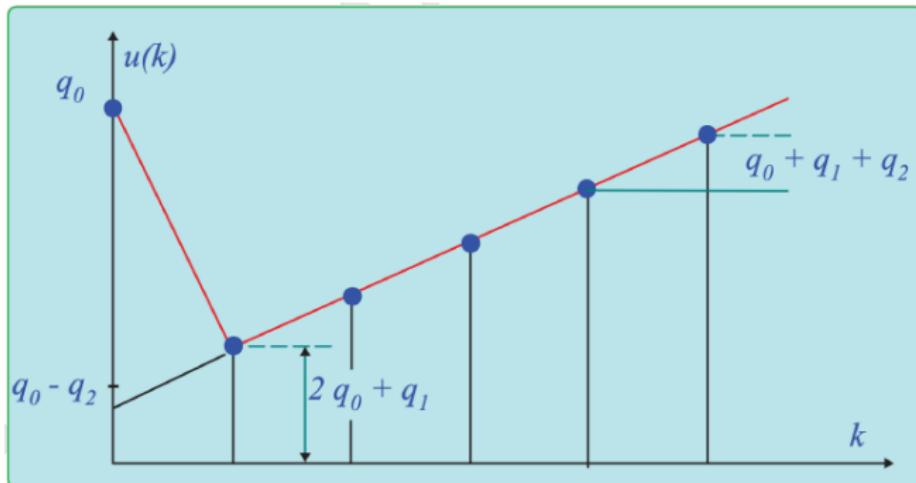
$$u(2) = u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2,$$

$$\vdots$$

$$u(k) = u(k - 1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k + 1)q_0 + kq_1 + (k - 1)q_2.$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Resposta esperada de um controlador PID a entrada degrau unitário.



Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Espera-se que a resposta seja:

$$u(1) < u(0),$$

$$u(k) > u(k - 1) \text{ para valores grandes de } k.$$

Admitindo que $q_0 > 0$:

$$u(0) = q_0,$$

$$u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1,$$

$$u(1) < u(0) \implies q_0 + q_1 < 0, \text{ ou } q_1 < -q_0.$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Espera-se que a resposta seja:

$$u(1) < u(0),$$

$$u(k) > u(k - 1) \text{ para valores grandes de } k.$$

Admitindo que $q_0 > 0$:

$$u(k) = u(k - 1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k + 1)q_0 + kq_1 + (k - 1)q_2,$$

$$\begin{aligned} u(k) > u(k - 1) \Big|_{k \geq 2} &\implies q_0 + q_1 + q_2 \geq 0, \text{ ou } q_2 \geq -(q_0 + q_1) \\ &\implies q_0 > q_2. \end{aligned}$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Portanto, para que um controlador paramétrico de segunda ordem se comporte como um PID, deve-se ter:

$$q_0 > 0,$$

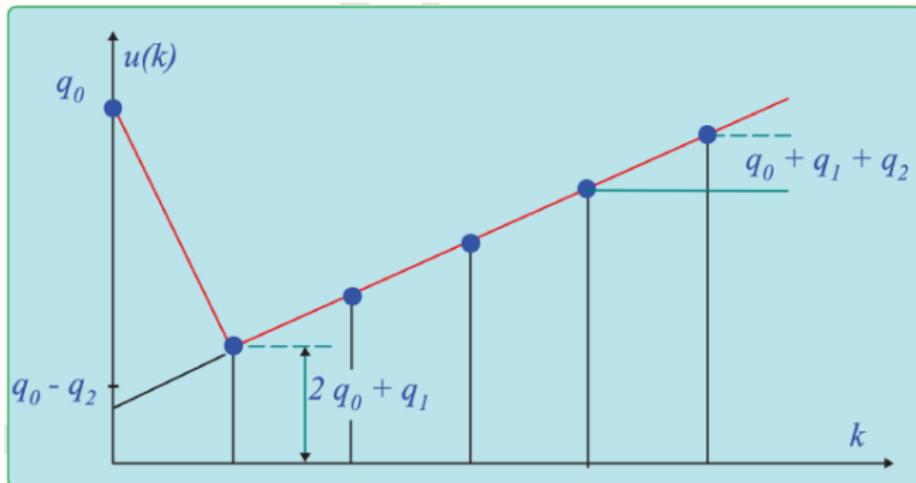
$$q_1 < -q_0,$$

$$-(q_0 + q_1) < q_2 < q_0.$$

Importante notar que $u(0) = q_0$, e que $u(0)$ é a maior resposta do controlador quando em malha fechada submetida a uma entrada da malha do tipo degrau unitário.

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Resposta esperada de um controlador PID a entrada degrau unitário.

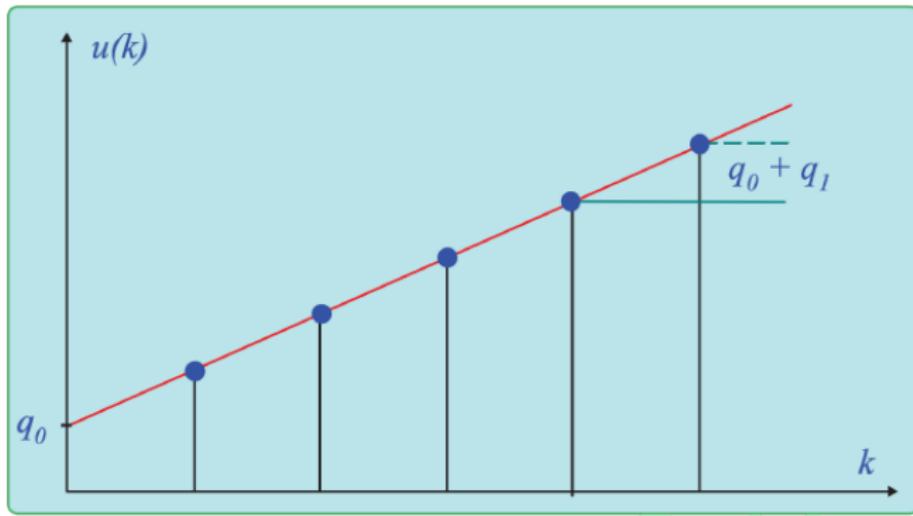


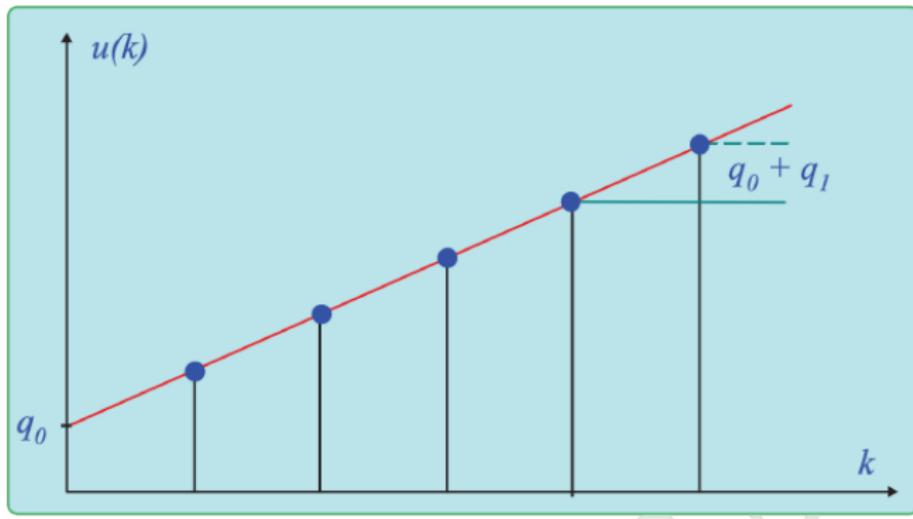
Controlador paramétrico de primeira ordem

$(v = 1)$

(Seção 7.5)

Resposta esperada de um controlador PI a entrada degrau unitário.





Definindo-se:

$$K' = q_0 - q_2, \quad (\text{Fator de Amplificação})$$

$$c_D = \frac{q_0}{K}, \quad (\text{Fator de Derivação})$$

$$c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K}. \quad (\text{Fator de Integração})$$

Controlador PID

$$u(k) = K \left[e(k) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{v=0}^{k-1} e(v) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - e(k-1)) \right].$$

Para um período suficientemente pequeno:

$$K' = K,$$

$$K' = q_0 - q_2,$$

$$c_D = \frac{T_D}{T_0},$$

$$c_D = \frac{q_0}{K},$$

$$c_I = \frac{T_0}{T_I}$$

$$c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K}.$$

De forma que:

$$c_D > 0, \quad c_I > 0, \quad c_I < c_D.$$

Controlador PID

Substituindo

$$K' = q_0 - q_2, \quad c_D = \frac{q_0}{K}, \quad c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K},$$

no controlador genérico:

$$G_C(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_v z^{-v}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)},$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} G_C(z) &= \frac{K \left[(1 + c_D) + (c_I - 2c_D - 1)z^{-1} + c_D z^{-2} \right]}{1 - z^{-1}}, \\ &= K \left[1 + c_I \left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) + c_D (1 + z^{-1}) \right]. \end{aligned}$$

Controlador PID

Pode-se obter uma separação dos efeitos de cada termo do PID:

$$u_P(k) = K'e(k),$$

$$u_I(k) = u_I(k - 1) + K'c_I e(k - 1),$$

$$u_D(k) = K'c_D [e(k) - e(k - 1)],$$

$$u(k) = u_P(k) + u_I(k) + u_D(k).$$

Controlador PID

Ou escrito em função de q_0 , q_1 e q_2 :

$$u_P(k) = (q_0 - q_2)e(k),$$

$$u_I(k) = u_I(k-1) + (q_0 + q_1 + q_2)e(k-1),$$

$$u_D(k) = q_2[e(k) - e(k-1)].$$

Controladores:

$$P \quad c_D = 0, \quad c_I = 0,$$

$$I \quad K' = 0, \quad c_D = 0,$$

$$D \quad K' = 0, \quad c_I = 0,$$

$$PI \quad c_D = 0,$$

$$PD \quad c_I = 0.$$

Síntese de Controladores PID

Seção 7.6

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

(Seção 7.6.1)

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$1 + G_C(z)H_0G_P(z) = 0,$$

$$H_0G_P = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_mz^{-m}},$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \dots + q_vz^{-v}}{1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_\mu z^{-\mu}}.$$

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1}) = 0.$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1}) = 0.$$

Para um PID:

$$G_C(z) = G_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}.$$

A equação característica pode ser escrita como:

$$(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) + \\ + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}) = 0.$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

$$(1 - z^{-1})(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}) + \\ + (q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2})(b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n}) = 0.$$

Fazendo a multiplicação dos polinômios:

$$\mathbf{A}(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{n+2}z^{-(n+2)} = 0,$$

ou

$$z^{(n+2)} + a_1z^{(n+1)} + a_2z^n + \dots + a_{n+2} = 0,$$

ou

$$(z - z_{a1})(z - z_{a2})(z - z_{a3})(\dots)(z - z_{an+2}) = 0.$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

Escolhe-se a dinâmica do processo controlado através da escolha (alação) dos polos do sistema de malha fechada.

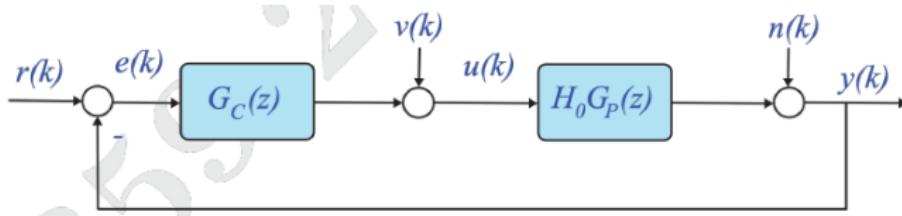
Importante observar que se o processo tiver n polos (ordem n), a equação característica possui $n + 2$ polos.

$$z^{(n+2)} + a_1 z^{(n+1)} + a_2 z^n + \dots + a_{n+2} = 0,$$

Mas o PID possui 3 parâmetros (q_0 , q_1 e q_2). Portanto, para que o sistema linear tenha uma única solução: $n + 2 = 3$, ou seja, $n = 1$. Se o PID for modificado para possuir 4 parâmetros (2 polos e 2 zeros), então $n = 2$.

Ação de controle limitada

(Seção 7.6.3)



$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{G_C(z)}{1 + G_C(z)H_0G_P(z)},$$

$$\frac{U(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})A(z^{-1})}{P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})}.$$

Ação de controle limitada

Para $b_0 = 0$:

$$\begin{aligned} & \left[(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) + \right. \\ & \left. + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) \right] u(z) = \\ & = (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) r(z). \end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned} u(k) &= (1 - a_1)u(k-1) + (a_1 - a_2)u(k-2) + \dots \\ &\quad - q_0 b_1 u(k-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1)u(k-2) + \dots \\ &+ q_0 r(k) + (q_0 a_1 + q_1)r(k-1) + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2)r(k-2) + \dots \end{aligned}$$

Ação de controle limitada

$$\begin{aligned} u(k) &= (1 - a_1)u(k-1) + (a_1 - a_2)u(k-2) + \dots \\ &\quad - q_0 b_1 u(k-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1)u(k-2) + \dots \\ &+ q_0 r(k) + (q_0 a_1 + q_1) r(k-1) + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2) r(k-2) + \dots \end{aligned}$$

As duas primeiras ações de controle são:

$$u(0) = q_0 r_0,$$

$$u(1) = [q_0(2 - q_0 b_1) + q_1] r_0.$$

Ação de controle limitada

$$u(0) = q_0 r_0,$$

$$u(1) = [q_0(2 - q_0 b_1) + q_1] r_0.$$

Conhecendo a entrada máxima da planta $u(0)$ e uma variação brusca da amplitude da referência do sistema (degrau unitário) de no máximo r_0 :

$$q_0 = \frac{u(0)}{r_0}.$$

Como o controlador é um PID: $u(1) < u(0)$.

Portanto: $q_1 \leq -q_0(1 - q_0 b_1)$.

PID Modificado 1 - Amortecido

(Seção 7.7.1)

PID com ação derivativa atrasada:

$$G(s) = K \left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_I s} \right].$$

Discretização com Holder:

$$\begin{aligned} H_0 G_C(s) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_C(s)}{s} \right\}, \\ &= K \left[1 + \frac{T_0}{T_I} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})} + \frac{T_D}{T_0} \frac{(1-z^{-1})}{(1-\gamma z^{-1})} \right], \\ &= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-\gamma z^{-1})}, \\ &= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}. \end{aligned}$$

Parâmetros do PID modificado 1:

$$q_0 = K \left(1 + \frac{T_D}{T_I} \right),$$

$$q_1 = -K \left(1 - \gamma + 2 \frac{T_D}{T_I} - \frac{T_0}{T_I} \right),$$

$$q_2 = K \left(\frac{T_D}{T_I} + \left(\frac{T_0}{T_I} - 1 \right) \gamma \right),$$

$$\gamma = -e^{-T_0/T_I},$$

$$p_1 = \gamma - 1,$$

$$p_2 = -\gamma.$$

PID Modificado - outras formas

(Seção 7.7.2)

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_\mu z^{-\mu}},$$

$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = Q(z^{-1})E(z^{-1}) = Q(z^{-1})[R(z^{-1}) - Y(z^{-1})].$$

PID modificado 2 - Avaliar de forma diferente a referência R :

$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = S(z^{-1})R(z^{-1}) - Q(z^{-1})Y(z^{-1}),$$

$$U(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})}R(z^{-1}) - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}Y(z^{-1}).$$

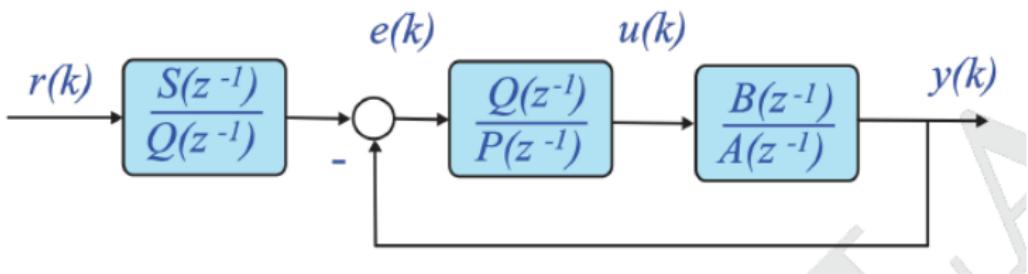
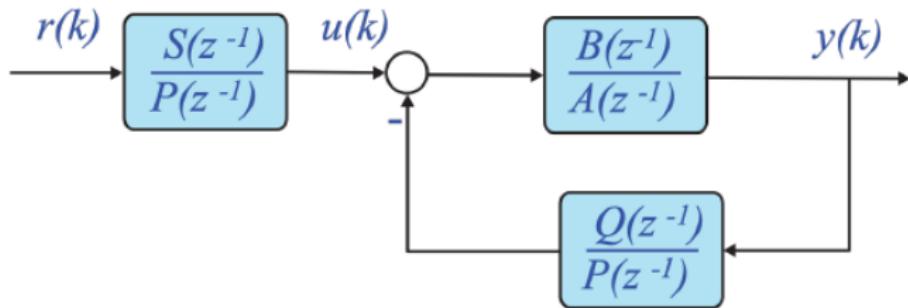
$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = S(z^{-1})R(z^{-1}) - Q(z^{-1})Y(z^{-1}),$$

$$U(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})}R(z^{-1}) - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}Y(z^{-1}),$$

$$U(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \left[\underbrace{\frac{S(z^{-1})}{Q(z^{-1})}}_{\uparrow} R(z^{-1}) - Y(z^{-1}) \right].$$

Existe um pré-filtro agindo
na referência de controle

O filtro não muda os polos originais de malha fechada, mas produz um amortecimento em variações bruscas da referência de controle r .



PID - convencional:

$$u(k) - u(k-1) = K \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \right].$$

PID - Modificado 2:

$$u(k) - u(k-1) = K \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T_0} (y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)) \right].$$

PID - Modificado 2:

$$u(k) - u(k-1) = K \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I} e(k-1) + \right. \\ \left. + \frac{T_D}{T_0} (y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)) \right].$$

Para o modificado 2, o pré-filtro agindo na referência de controle equivale a:

$$S(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1},$$

$$s_0 = K,$$

$$s_1 = -K \left(1 - \frac{T_0}{T_I} \right).$$

PID - Modificado 3: para um amortecimento maior da referência.
O erro é utilizado apenas na parte integral.

$$\begin{aligned} u(k) - u(k-1) = K & \left[y(k) - y(k-1) + \frac{T_0}{T_I} e(k-1) + \right. \\ & \left. + \frac{T_D}{T_0} (-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)) \right]. \end{aligned}$$

Para o modificado 3, o pré-filtro agindo na referência de controle equivale a:

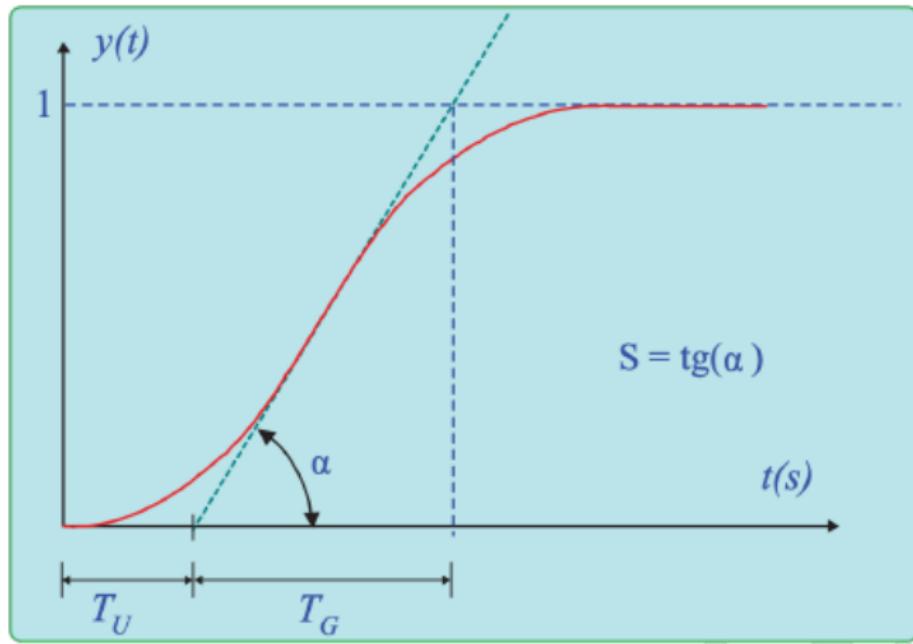
$$S(z^{-1}) = s_1 + 1z^{-1},$$

$$s_1 = K \frac{T_0}{T_I}.$$

Ajuste de PID com auxílio de tabelas

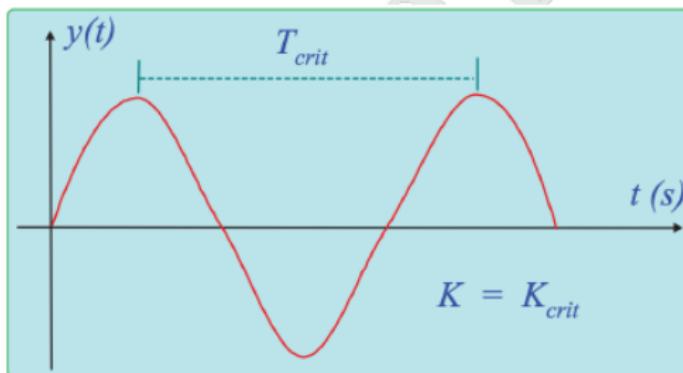
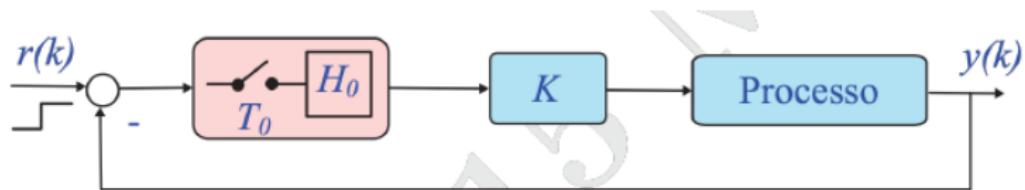
(Seção 7.7.3)

Ziegler-Nichols 1 - Ensaio resposta transitória.



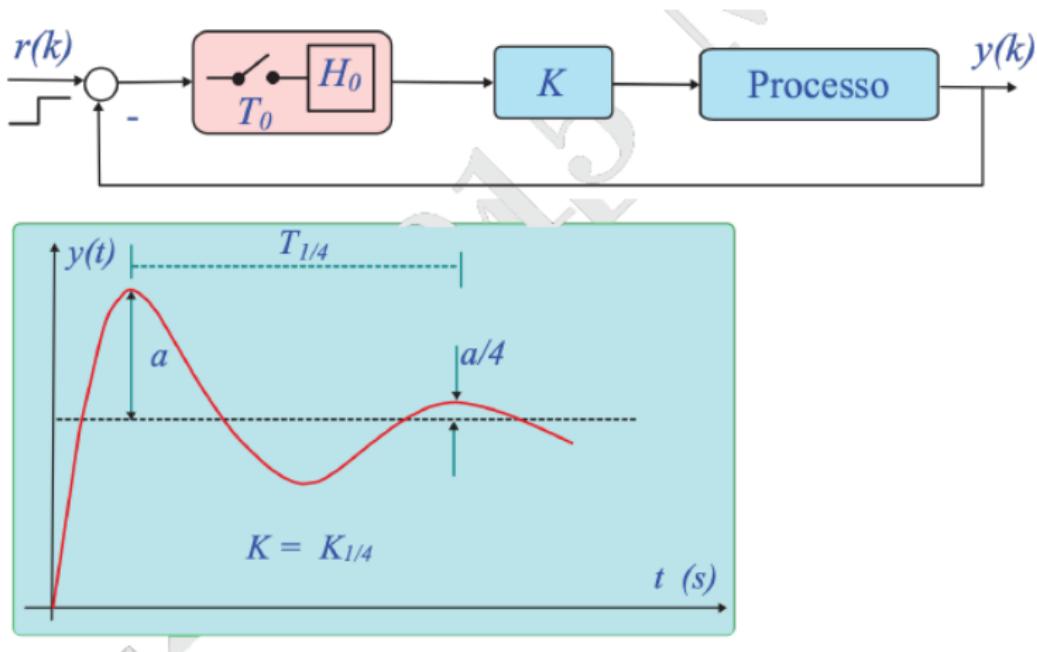
Ajuste de PID com auxílio de tabelas

Ziegler-Nichols 2 - Oscilação limite.



Ajuste de PID com auxílio de tabelas

Ziegler-Nichols 3 - Decaimento 1/4.



Ajuste de PID com auxílio de tabelas

		Parâmetros de PID Contínuo		
		K_P	T_I	T_D
Método 1	P	T_G/T_U		
	PI	$0,9T_G/T_U$	$3,33T_U$	
	PID	$1,2T_G/T_U$	$2T_U$	$0,5T_U$
Método 2	P	$0,5K_{crit}$		
	PI	$0,45K_{crit}$	$0,85T_{crit}$	
	PID	$0,6K_{crit}$	$0,5 T_{crit}$	$0,125T_{crit}$
Método 3	P	$K_{1/4}$		
	PI	$0,9K_{1/4}$	$T_{1/4}$	
	PID	$1,2 K_{1/4}$	$T_{1/4}$	$0,25T_{1/4}$

$T_0 \approx (1/16 \text{ a } 1/8)(1/f_{bw})$	f_{bw} : Banda passante
$T_0 \approx (1/8 \text{ a } 1/4)T_t$	T_t : Tempo morto
$T_0 \approx (0,35 \text{ a } 1,2)T_U$	$0,1 \leq (T_U/T_0) \leq 1$
$T_0 \approx (0,22 \text{ a } 0,35)T_U$	$1 \leq (T_U/T_0) \leq 10$
$T_0 \approx \pi/\omega_{max}$	Teor. Amostragem
$T_0 \approx (1/15 \text{ a } 1/6)T_{95\%}$	$T_{95\%}$: Tempo de subida

Tabela 7.6: Escolha intervalo de Amostragem

Controle Digital

SEL620

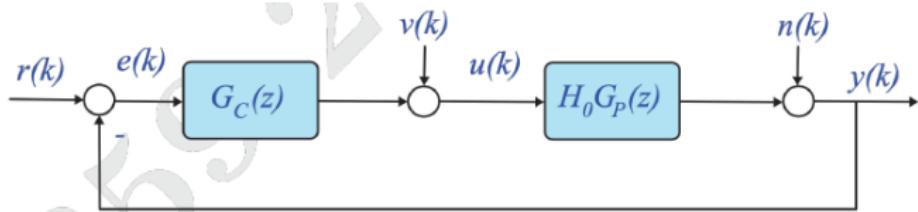
Prof. Dr. Valdir Grassi Jr

Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

Controlador Dead-Beat

Capítulo 8

Controlador Paramétrico Genérico



$$H_0 G_P = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}},$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_\mu z^{-\mu}}.$$

Deseja-se que a resposta de malha fechada do sistema controlador por um Dead-Beat reproduza a entrada mas com um atraso puro.

Para um processo de ordem “ m ”, deseja-se que na malha fechada:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = z^{-m}$$

Isso quer dizer que após m períodos de amostragem, a saída é igual a entrada.

Para uma entrada degrau:

$$r(k) = 1(k), \quad k = 0, \dots, \infty. \quad (1)$$

Deseja-se que o comportamento do sistema controlador pelo Dead-BEAT seja:

$$y(k) = r(k), \quad \text{para } k \geq m,$$

$$u(k) = u(m), \quad \text{para } k \geq m.$$

A transformada Z dos sinas fica:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = [1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots] \quad (\text{degrau unitário}),$$

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)} + \\ 1(z^{-m} + z^{-(m+1)} + z^{-(m+2)} + \dots),$$

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots + u(m-1)z^{-(m-1)} + \\ u(m)(z^{-m} + z^{-(m+1)} + z^{-(m+2)} + \dots).$$

A saída do sistema e do controlador permanecem constantes após m períodos.

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = [1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots],$$

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)} + \\ 1(z^{-m} + z^{-(m+1)} + z^{-(m+2)} + \dots),$$

Dividindo $Y(z)$ por $R(z)$:

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{R(z)} &= (1 - z^{-1})Y(z), \\ &= y(1)z^{-1} - y(1)z^{-2} + y(2)z^{-2} - y(2)z^{-3} + \dots \\ &\quad + y(m-1)z^{-(m-1)} - y(m-1)z^{-m} + \\ &\quad 1z^{-m} - 1z^{-(m+1)} + 1z^{-(m+1)} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{R(z)} &= (1 - z^{-1})Y(z), \\
&= y(1)z^{-1} - y(1)z^{-2} + y(2)z^{-2} - y(2)z^{-3} + \dots \\
&\quad + y(m-1)z^{-(m-1)} - y(m-1)z^{-m} + \\
&\quad 1z^{-m} - 1z^{-(m+1)} + 1z^{-(m+1)} + \dots
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \dots + p_m z^{-m},$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= y(1), \\
p_2 &= y(2) - y(1), \\
p_3 &= y(3) - y(2), \\
&\vdots \\
p_m &= 1 - y(m-1).
\end{aligned}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \dots + p_m z^{-m},$$

$$p_1 = y(1),$$

$$p_2 = y(2) - y(1),$$

$$p_3 = y(3) - y(2),$$

⋮

$$p_m = 1 - y(m-1).$$

$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z)$$

(Função de transferência de malha fechada.)

De forma semelhante:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = [1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots],$$

$$\begin{aligned} U(z) &= u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots + u(m-1)z^{-(m-1)} + \\ &\quad u(m)(z^{-m} + z^{-(m+1)} + z^{-(m+2)} + \dots). \end{aligned}$$

Dividindo $U(z)$ por $R(z)$:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} = Q(z).$$

Função de Transferência do sinal de controle

$$\frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} = Q(z).$$

$$q_0 = u(0),$$

$$q_1 = u(1) - u(0),$$

$$q_2 = u(2) - u(1),$$

⋮

$$q_m = u(m) - u(m-1).$$

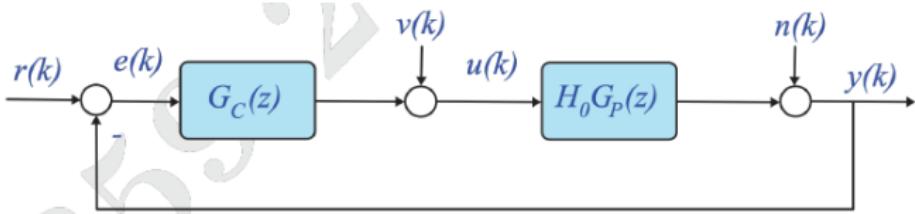
É importante observar que:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = y(1), \\ p_2 = y(2) - y(1), \\ p_3 = y(3) - y(2), \\ \vdots \\ p_m = 1 - y(m-1). \end{array} \right\} \implies \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

É importante observar que:

$$\left. \begin{array}{l} q_0 = u(0), \\ q_1 = u(1) - u(0), \\ q_2 = u(2) - u(1), \\ \vdots \\ q_m = u(m) - u(m-1). \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^m q_i = u(m) = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{H_0 G_P(1)}.$$

$(K_P$ é o ganho da planta.)



$$H_0 G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} \frac{R(z)}{U(z)}$$

Para o Dead-Beat:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = P(z), \quad \frac{U(z)}{R(z)} = Q(z).$$

Para o Dead-Beat:

$$H_0 G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} \frac{R(z)}{U(z)} = P(z) \frac{1}{Q(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Como:

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{H_0 G_P(z)} \frac{G_r(z)}{1 - G_r(z)}, \quad (\text{exercício opcional: deduzir a expressão})$$

$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z), \quad (\text{função de transferência da malha fechada})$$

$$\begin{aligned} G_R(z) &= G_{DB(v)}(z) = \frac{1}{H_0 G_P(z)} \frac{G_r(z)}{1 - G_r(z)}, \\ &= \frac{Q(z)}{P(z)} \frac{P(z)}{1 - P(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}, \\ &= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m}}. \end{aligned}$$

Fórmula do Controlador Dead-Beat:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m}}.$$

Mas como foi visto:

$$H_0 G_P(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \dots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}},$$

$$H_0 G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}.$$

Portanto, é possível obter os polinômios $P(z)$ e $Q(z)$ a partir da função de transferência da planta.

$$H_0 G_P(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \dots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}},$$

$$H_0 G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}.$$

Portanto,

$$q_1 = a_1 q_0, \quad p_1 = b_1 q_0,$$

$$q_2 = a_2 q_0, \quad p_2 = b_2 q_0,$$

$$q_3 = a_3 q_0, \quad p_3 = b_3 q_0,$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$q_m = a_m q_0, \quad p_m = b_m q_0.$$

Fórmula do controlador Dead-Beat:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m}},$$

onde

$$q_1 = a_1 q_0, \quad p_1 = b_1 q_0,$$

$$q_2 = a_2 q_0, \quad p_2 = b_2 q_0,$$

$$q_3 = a_3 q_0, \quad p_3 = b_3 q_0,$$

⋮

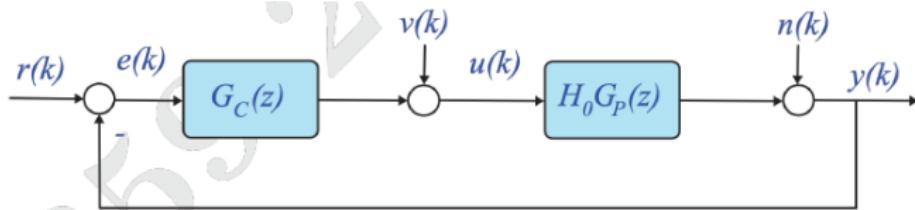
⋮

$$q_m = a_m q_0, \quad p_m = b_m q_0.$$

Para calcular q_0 :

$$\sum_{i=1}^m p_i = q_0 \sum_{i=1}^m b_i = 1 \implies q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m b_i} = u(0).$$

Para o controlador Dead-Beat:



$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z),$$

$$\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z),$$

$$G_{DB(v)}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}.$$

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \dots + p_m z^{-m},$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}.$$

Exemplo 1

Calcular um controlador DB(v) para o processo abaixo, sendo $T_0 = 4s$:

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

$$K = 1, \quad T_1 = 10, \quad T_2 = 7, 5, \quad T_3 = 5.$$

Solução: → discretização do processo.

Exemplo 1 (continuação)

$$\begin{aligned} H_0 G_P(z) &= \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_P(s)}{s} \right\} = (\text{C2D no Matlab}) \\ &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} \end{aligned}$$

$$a_1 = -1,7063 \quad a_2 = 0,9580 \quad a_3 = -1,1767$$

$$b_1 = 0,0186 \quad b_2 = 0,0486 \quad b_3 = 0,0078$$

→ Obtenção dos coeficientes do Controlador DB(ν) segundo as expressões (8.16) e (8.17).

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=3} b_i} = 13,3258$$

$$q_1 = a_1 q_0 = -22,7378$$

$$p_1 = b_1 q_0 = 0,2478$$

$$q_2 = a_2 q_0 = 12,7665$$

$$p_2 = b_2 q_0 = 0,6480$$

$$q_3 = a_3 q_0 = -2,3546$$

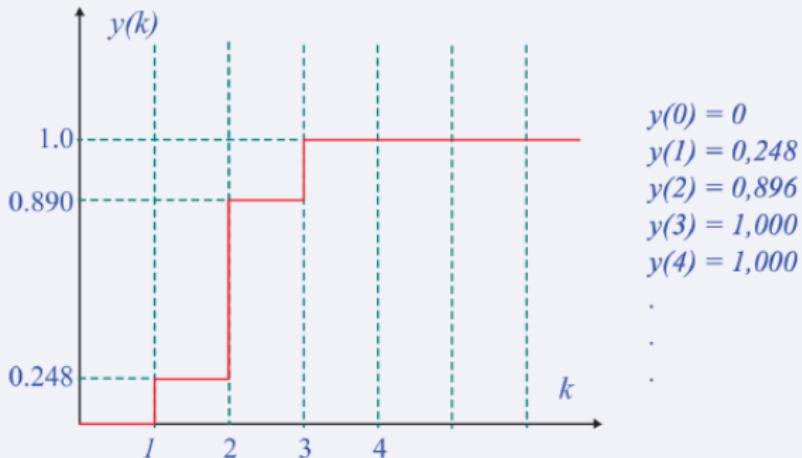
$$p_3 = b_3 q_0 = 0,1042$$

Exemplo 1 (continuação)

→ Resposta transitória ao degrau do processo controlado, a partir de (8.20) é dada por:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = q_0 B(z^{-1})$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= q_0 B(z^{-1}) R(z) = \\ &= 0,2478 z^{-1} R(z) + 0,6480 z^{-2} R(z) + 0,1042 z^{-3} R(z) \\ &= 0,2478 r(k-1) + 0,6480 r(k-2) + 0,1042 r(k-3) \end{aligned}$$

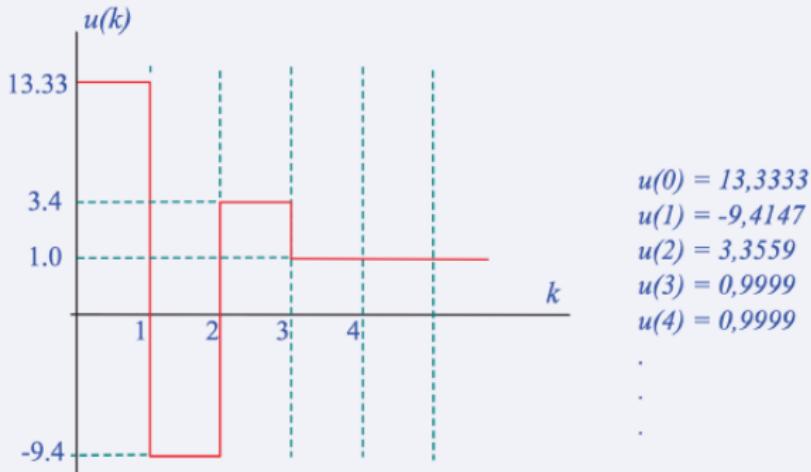


Exemplo 1 (continuação)

→ A respectiva ação de controle do processo controlado, a partir de (8.10) é dada por:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z^{-1})$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= Q(z^{-1})R(z) = \\ &= 13,3258 - 22,7378 z^{-1}R(z) + 12,7665 z^{-2}R(z) - 2,3546 z^{-3}R(z) \\ &= 13,3258 - 22,7378 r(k-1) + 12,7665 r(k-2) - 2,3546 r(k-3) \end{aligned}$$



Controlador Dead-Beat

(Ordem $v + 1$)

Controlador Dead-Beat ($v + 1$)

O controlador Dead-Beat ($v + 1$) é usado quando a primeira ação de controle $u(0)$ calculada pelo DB de ordem v é maior que um máximo permitido na entrada da planta.

Nesse caso, atrasa-se a convergência do sistema controlado controlador para o tempo $(m + 1)T_0$.

Controlador Dead-Beat (v):

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \dots + p_m z^{-m},$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}.$$

Controlador Dead-Beat ($v + 1$):

$$P(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m} + p_{m+1} z^{-(m+1)},$$

$$Q(z^{-1}) = \frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}.$$

$$H_0 G_P(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

$$H_0 G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}} = \\ & \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m} + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}}. \end{aligned}$$

Os polinômios da direita e esquerda têm ordens diferentes. Para que seja possível compará-los, a razão de polinômios à direita possui raízes em comum.

Portanto, para o controlador Dead-Beat ($v + 1$):

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\left(\bar{p}_1 z^{-1} + \bar{p}_2 z^{-2} + \dots + \bar{p}_m z^{-m}\right)(\alpha - z^{-1})}{\left(\bar{q}_0 + \bar{q}_1 z^{-1} + \bar{q}_2 z^{-2} + \dots + \bar{q}_m z^{-m}\right)(\alpha - z^{-1})}.$$

E comparando termo a termo com $H_0 G_P(z)$:

$$H_0 G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}},$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= a_1 \bar{q}_0, & \bar{p}_1 &= b_1 \bar{q}_0, \\ \bar{q}_2 &= a_2 \bar{q}_0, & \bar{p}_2 &= b_2 \bar{q}_0, \\ \bar{q}_3 &= a_3 \bar{q}_0, & \bar{p}_3 &= b_3 \bar{q}_0, \\ &\vdots &&\vdots \\ \bar{q}_m &= a_m \bar{q}_0, & \bar{p}_m &= b_m \bar{q}_0. \end{aligned}$$

Expandindo:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\left(\bar{p}_1 z^{-1} + \bar{p}_2 z^{-2} + \dots + \bar{p}_m z^{-m}\right)(\alpha - z^{-1})}{\left(\bar{q}_0 + \bar{q}_1 z^{-1} + \bar{q}_2 z^{-2} + \dots + \bar{q}_m z^{-m}\right)(\alpha - z^{-1})}.$$

E comparando termo a termo com $H_0 G_P(z)$:

$$H_0 G_P(z) = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m} + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}},$$

onde

$$q_0 = \alpha \bar{q}_0,$$

$$q_1 = (\alpha \bar{q}_1 - \bar{q}_0),$$

$$p_1 = -\alpha \bar{p}_1,$$

$$q_2 = (\alpha \bar{q}_2 - \bar{q}_1),$$

$$p_2 = (\alpha \bar{p}_2 - \bar{p}_1),$$

$$q_3 = (\alpha \bar{q}_3 - \bar{q}_2),$$

$$p_3 = (\alpha \bar{p}_3 - \bar{p}_2),$$

\vdots

\vdots

$$q_m = (\alpha \bar{q}_m - \bar{q}_{m-1}),$$

$$p_m = (\alpha \bar{p}_m - \bar{p}_{m-1}),$$

$$q_{m+1} = -\bar{q}_m,$$

$$p_{m+1} = -\bar{p}_m.$$

Especificando o valor da primeira saída do controlador:

$$q_0 = \alpha \bar{q}_0 = u(0).$$

Como $\sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1$, e

$$\begin{aligned} p_1 &= -\alpha \bar{p}_1, & \bar{q}_1 &= a_1 \bar{q}_0, \\ p_2 &= (\alpha \bar{p}_2 - \bar{p}_1), & \bar{q}_2 &= a_2 \bar{q}_0, \\ p_3 &= (\alpha \bar{p}_3 - \bar{p}_2), & \bar{q}_3 &= a_3 \bar{q}_0, \\ &\vdots & &\vdots \\ p_m &= (\alpha \bar{p}_m - \bar{p}_{m-1}), & \bar{q}_m &= a_m \bar{q}_0, \\ p_{m+1} &= -\bar{p}_m, \end{aligned}$$

obtém-se:

$$\bar{q}_0 = q_0 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m+1} b_i}.$$

Fórmula para o Controlador Dead-Beat ($v + 1$)

$$G_{DB(v+1)} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m} - p_{m+1} z^{-(m+1)}},$$

onde,

$$q_0 = u(0) \implies \text{dado ou imposto pelo projetista.}$$

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i},$$

$$p_1 = q_0 b_1,$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i},$$

$$p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i},$$

$$q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{\sum b_i},$$

$$p_3 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i},$$

\vdots

\vdots

$$q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i},$$

$$p_m = q_0(b_{m-1} - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i},$$

$$q_{m+1} = a_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right),$$

$$p_{m+1} = b_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right).$$

Malha fechada com o controlador Dead-Beat $(v + 1)$

O controlador Dead-Beat $(v + 1)$ pode ser representado como:

$$G_{DB(v+1)} = \frac{q_0 A(z^{-1})(1 - z^{-1}/\alpha)}{1 - q_0 B(z^{-1})(1 - z^{-1}/\alpha)},$$

onde

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{q_0 \sum b_i}.$$

A função de transferência de malha fechada do sistema com controlador DB $(v + 1)$ fica:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = q_0 B(z^{-1}) (1 - z^{-1}/\alpha).$$

Saída do controlador DB($v + 1$) é dada por:

$$Q(z^{-1}) = \frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}.$$

A segunda saída do controlador é:

$$u(1) = q_0 + q_1 = a_1 u(0) + \frac{1}{\sum b_i}.$$

Para se ter $u(1) < u(0)$, deve-se escolher $q_0 = u(0)$, tal que

$$u(0) = q_0 \leq \frac{1}{(1 - a_1) \sum b_i}.$$

Exemplo 2

Calcular um controlador DB($\nu + 1$) para o exemplo 16, tal que $u(0) = u(1)$.

Solução: Utilizando-se a Eq. (8.34), o coeficiente q_0 será dado por :

$$u(0) = q_0 \equiv \frac{1}{(1 - a_1) \sum b_i} = 4,9245$$

e com (8.29), os demais coeficientes serão:

$$\begin{array}{ll} q_1 = 0 & p_1 = 0,0916 \\ q_2 = -9,6172 & p_2 = 0,3957 \\ q_3 = 7,1785 & p_3 = 0,4470 \\ q_4 = -1,4845 & p_4 = 0,0657 \end{array}$$

Através de (8.31), tem-se,

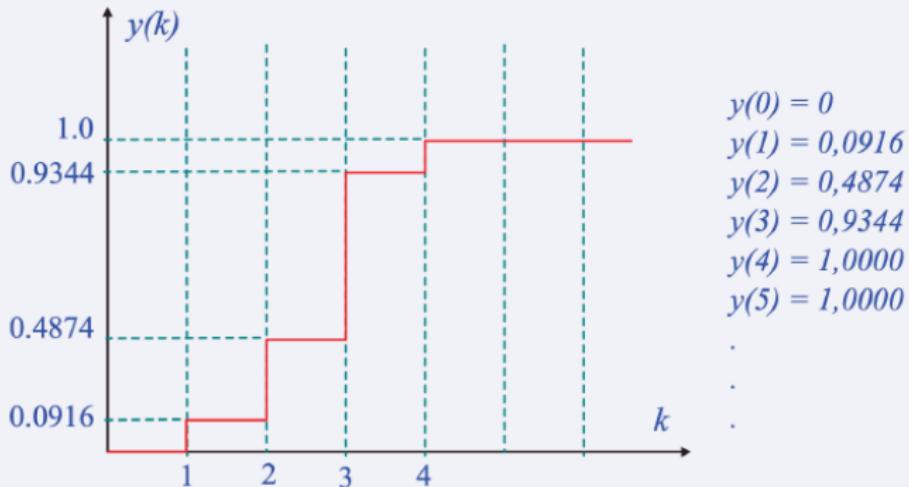
$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{q_0 \sum b_i} = -1,7060$$

Com isto, a resposta transitória da saída controlada é dada por:

$$Y(z) = q_0 B(z) \left(1 + \frac{1}{\alpha} z^{-1} \right) R(z) =$$

$$y(k) = 0,0916 r(k-1) + 0,3957 r(k-2) + 0,4470 r(k-3) + 0,0657 r(k-4)$$

Exemplo 2 (continuação)



Resposta transitória da ação de controle limitada é expressa por (8.21) tal como:

$$U(z) = Q(z^{-1} R(z))$$

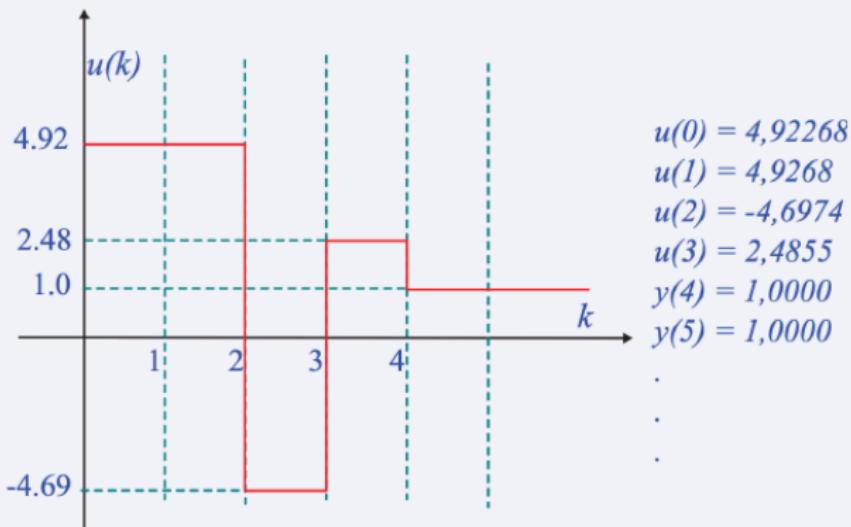
$$u(k) = 4,9245 r(k) + 0 - 9,6172 r(k-2) + 7,1785 r(k-3) - 1,4845 r(k-4)$$

Exemplo 2 (continuação)

Resposta transitória da ação de controle limitada é expressa por (8.21) tal como:

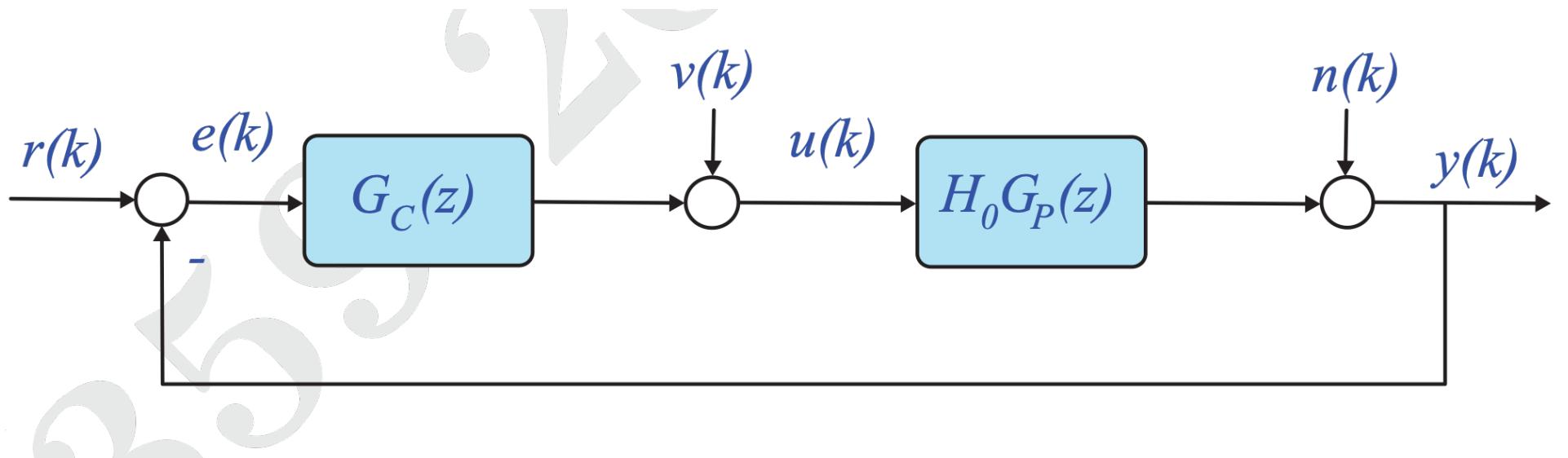
$$U(z) = Q(z^{-1}) R(z)$$

$$u(k) = 4,9245 r(k) + 0 - 9,6172 r(k-2) + 7,1785 r(k-3) - 1,4845 r(k-4)$$



Efeito do Período de Amostragem no Dead-Beat

Controlador Paramétrico Genérico



$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_\mu z^{-\mu}}$$

Fórmula do Controlador Dead-Beat:



$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m}}$$

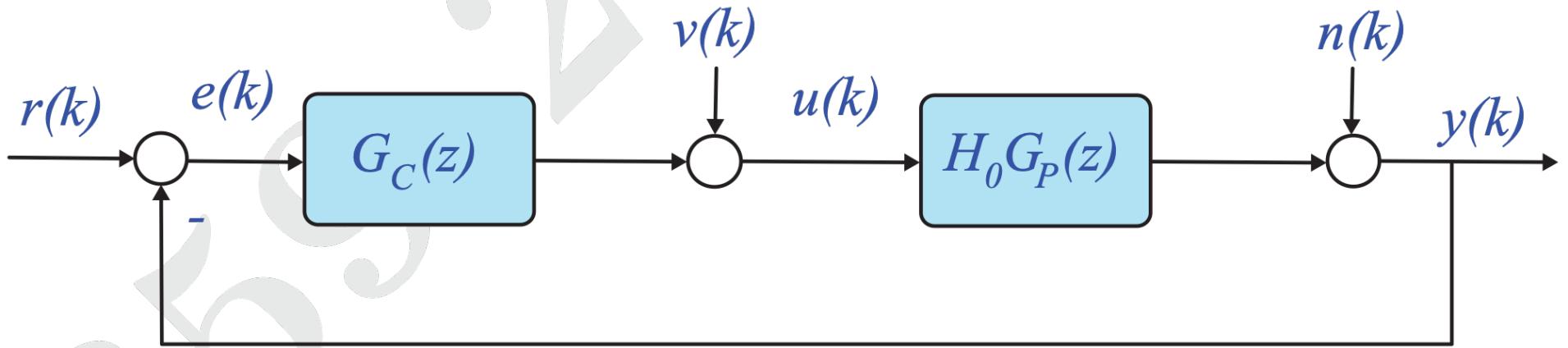
Com:

$$\begin{array}{ll} q_1 = a_1 q_0 & p_1 = b_1 q_0 \\ q_2 = a_2 q_0 & p_2 = b_2 q_0 \\ q_3 = a_3 q_0 & p_3 = b_3 q_0 \\ \vdots & \vdots \\ q_m = a_m q_0 & p_m = b_m q_0 \end{array}$$

Para calcular q_0 :

$$\sum_{i=1}^m p_i = q_0 \sum_{i=1}^m b_i = 1 \Rightarrow q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m b_i} = u(0)$$

Para o Controlador Dead-Beat:



$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z)$$

$$\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z)$$

$$G_{BD(\nu)}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \dots + p_m z^{-m}$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}$$

Exemplo 13

Calcular um controlador DB(ν) para o processo abaixo, sendo $T_0 = 4$ seg.

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

$$K = 1,0 \quad T_1 = 10,0 \quad T_2 = 7,5 \quad T_3 = 5,0$$

Solução: → Discretização do processo.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 2 & 3 \\ 1 + 22.5s + 162.5s + 375s \end{array}$$

Alterando o período de amostragem para 2 segundos:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 0.00186 + 0.0092594z + 0.0028689z \\ \hline 2 & 3 \\ -0.4203504 + 1.6893178z - 2.2549791z + z \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 & & 2 \\
 & 0.00186 + 0.0092594z + 0.0028689z \\
 \hline
 & & 2 \quad 3 \\
 -0.4203504 + 1.6893178z - 2.2549791z + z
 \end{array}$$

$$H_0 G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_\mu z^{-\mu}}$$

$$\Rightarrow q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m b_i} = u(0) = 1/0,0139883 = 71,488$$

No exemplo 13, quando o período de amostragem era 4 segundos:

$$q_0 = 13,3258$$

Portanto, $q_0 = u(0)$ aumenta se o período de amostragem diminui.

$$\begin{aligned}
 H_0 G_P(z) &= \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_P(s)}{s} \right\} = \left(\text{C2D no Matlab} \right) \\
 &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}
 \end{aligned}$$

$$a_1 = -2,2550 \quad a_2 = 1,6893 \quad a_3 = -0,4203$$

$$b_1 = 0,0028 \quad b_2 = 0,0092 \quad b_3 = 0,0018$$

→ Obtenção dos coeficientes do Controlador DB(ν) segundo as expressões (8.16) e (8.17).

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=3} b_i} = 71,488$$

$$q_1 = a_1 q_0 = -161,20$$

$$q_2 = a_2 q_0 = 120,76$$

$$q_3 = a_3 q_0 = -30,046$$

$$p_1 = b_1 q_0 = 0,200$$

$$p_2 = b_2 q_0 = 0,658$$

$$p_3 = b_3 q_0 = 0,129$$

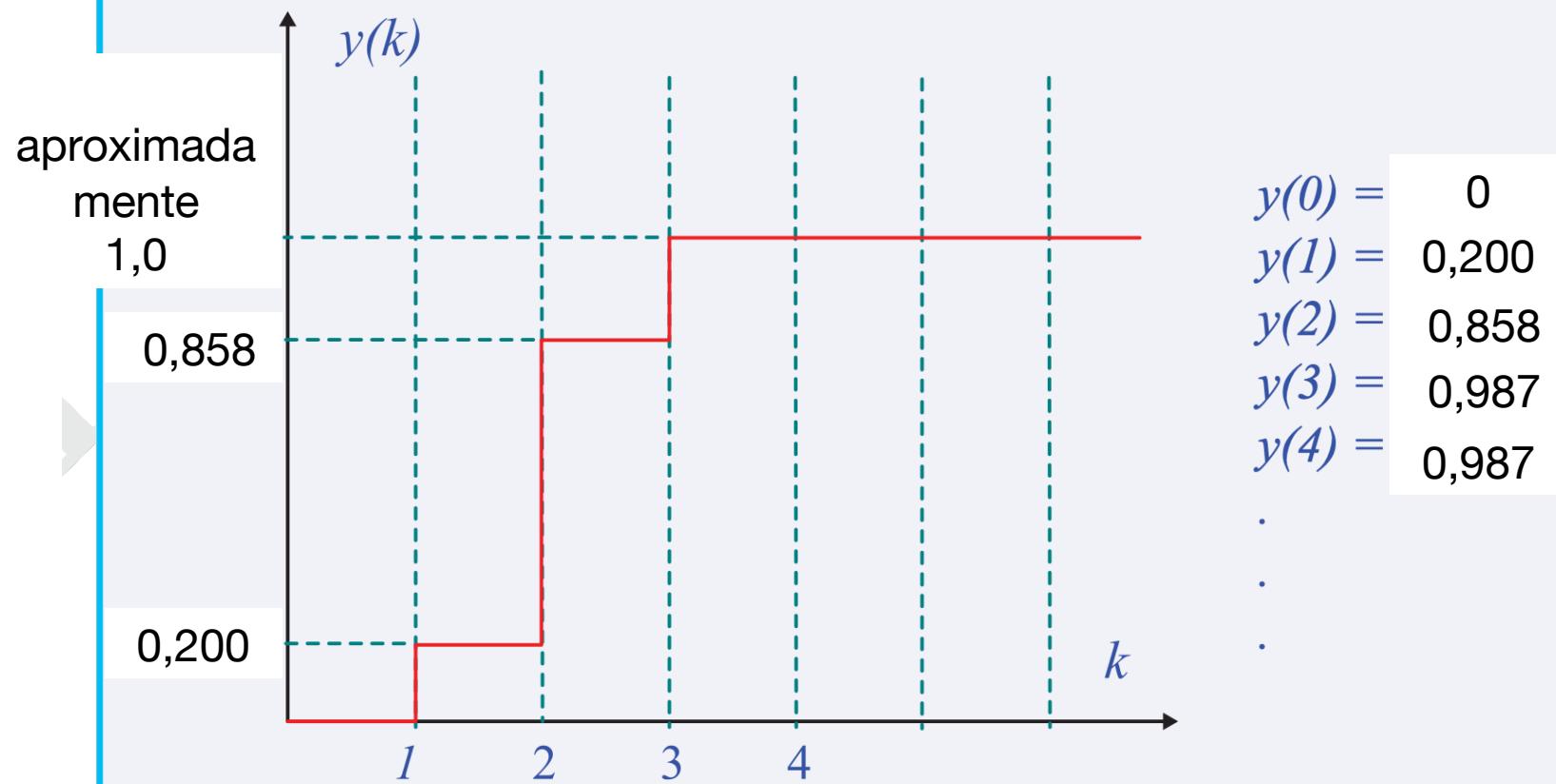
→ Resposta transitória ao degrau do processo controlado, a partir de (8.20) é dada por:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = q_0 B(z^{-1})$$

$$Y(z) = q_0 B(z^{-1}) R(z) =$$

$$= 0,200 z^{-1} R(z) + 0,658 z^{-2} R(z) + 0,129 z^{-3} R(z)$$

$$= 0,200 r(k-1) + 0,658 r(k-2) + 0,129 r(k-3)$$



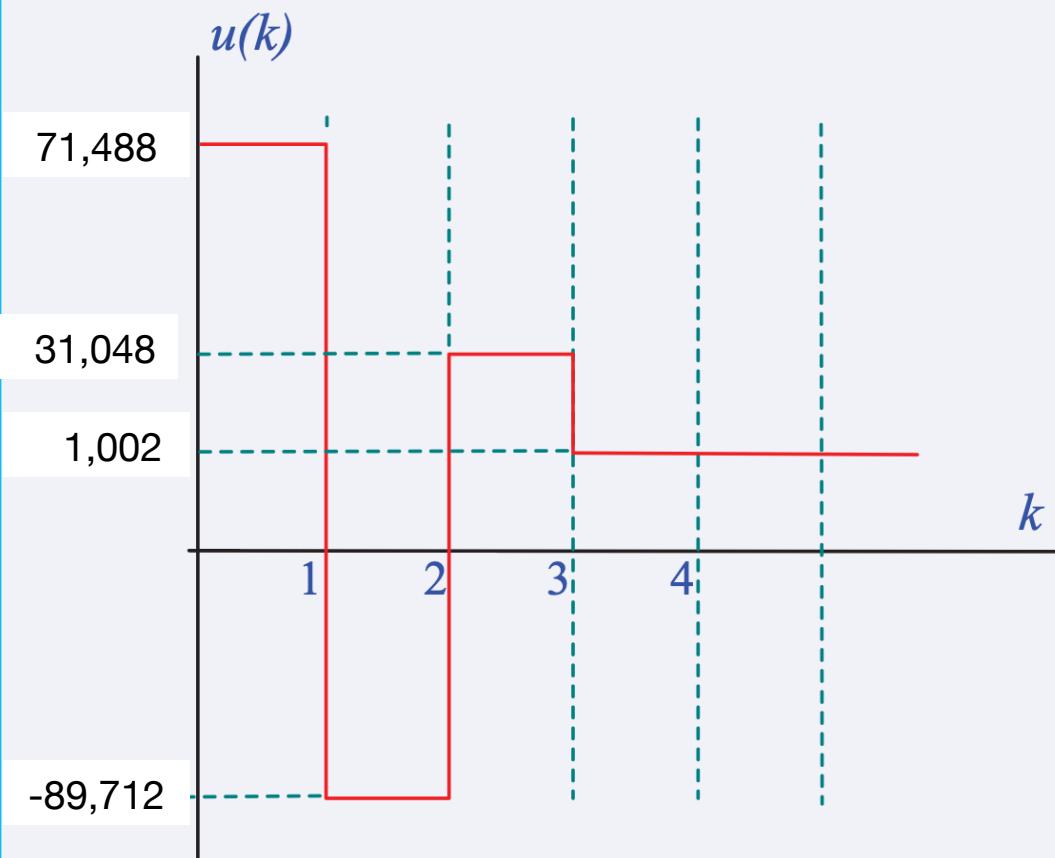
→ A respectiva ação de controle do processo controlado, a partir de (8.10) é dada por:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z^{-1})$$

$$Y(z) = Q(z^{-1})R(z) =$$

$$= 71,488 - 161,20 z^{-1}R(z) + 120,76 z^{-2}R(z) - 30,046 z^{-3}R(z)$$

$$= 71,488 - 161,20 r(k-1) + 120,76 r(k-2) - 30,046 r(k-3)$$



$$u(0) = 71,488$$

$$u(1) = -89,712$$

$$u(2) = 31,048$$

$$u(3) = 1,002$$

$$u(4) = 1,002$$

.

.

.

Exemplo Dead-Beat ordem ($v+1$)

Fórmula para o Controlador Dead-Beat (v+1)



$$G_{DB(v+1)} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m} - p_{m+1} z^{-(m+1)}}$$

$$q_0 = u(0)$$

⇒ Dado ou imposto pelo projetista

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i}$$

$$p_1 = q_0 b_1$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i}$$

$$p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i}$$

$$q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{\sum b_i}$$

$$p_3 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i}$$

⋮

⋮

$$q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i}$$

$$p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}$$

$$q_{m+1} = a_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right)$$

$$p_{m+1} = b_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right)$$

$$H_0 G_P(z) = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_P(s)}{s} \right\} = (\text{C2D no Matlab})$$

$$= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

$$a_1 = -1,7063 \quad a_2 = 0,9580 \quad a_3 = -1,1767$$

$$b_1 = 0,0186 \quad b_2 = 0,0486 \quad b_3 = 0,0078$$

Projete um controlador DB de ordem v+1 de forma que a maior entrada permitida na planta é 10.

Do enunciado $u(0)=10$, portanto:

$$q_0 = u(0) = 10$$

O sistema é de ordem 3, portanto para o DB de ordem $v+1$, o valor de $m=3+1=4$
O calculo dos coeficientes do controlador é feito aplicando as formulas:

$$q_{m+1} = a_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right)$$

$$p_{m+1} = b_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right)$$

$$H_0 G_P(z) = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_P(s)}{s} \right\} = \text{ (C2D no Matlab)}$$

$$= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

$$a_1 = -1,7063 \quad a_2 = 0,9580 \quad a_3 = -1,1767$$

$$b_1 = 0,0186 \quad b_2 = 0,0486 \quad b_3 = 0,0078$$

$$q_0 = u(0) = 10$$

$$q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i} \quad p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}$$

Considere que $a_0=1$, $b_0=0$.

Como o DB(v+1) possui ordem 4, é preciso calcular: $q_1, q_2, q_3, q_4, p_1, p_2, p_3, p_4$

$$q_1 = q_0 (a_1 - a_0) + \frac{a_0}{\sum b_i}$$

$$q_2 = q_0 (a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i}$$

Controle Digital

SEL620

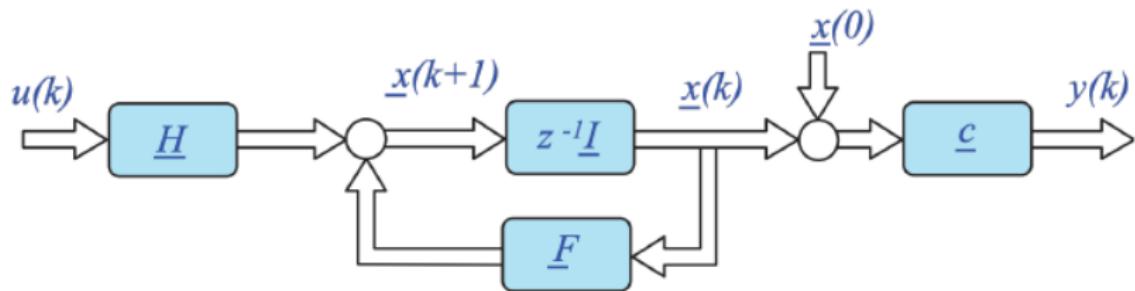
Prof. Dr. Valdir Grassi Jr

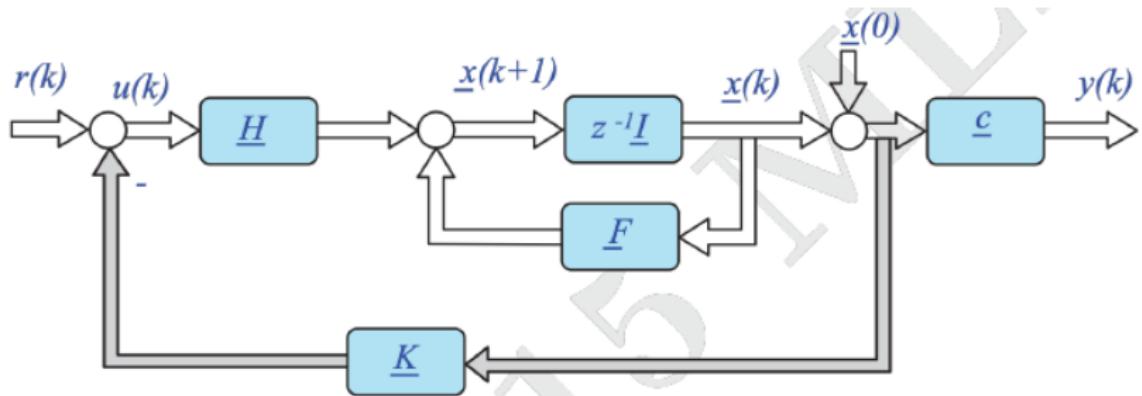
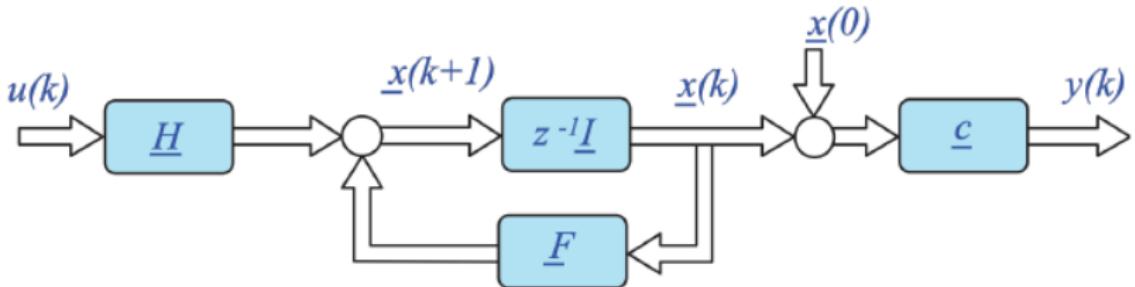
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

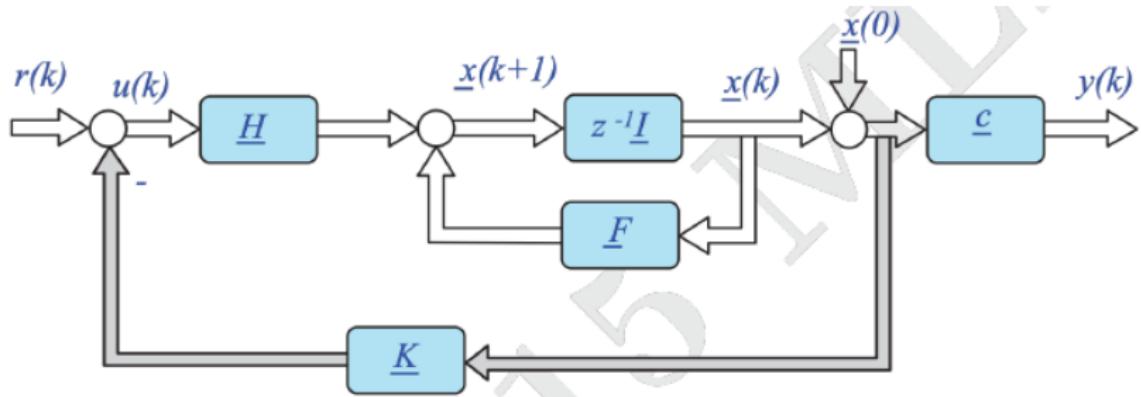
Controle por Realimentação de Estados Discretos

Capítulo 9

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{E} \underline{x}(k) + \underline{H} \underline{u}(k), \\ \underline{y}(k) = \underline{c} \underline{x}(k). \end{cases}$$







$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = (\underline{F} - \underline{H} \underline{K})\underline{x}(k) + \underline{H} \underline{r}(k), \\ \underline{y}(k) = \underline{C} \underline{x}(k). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = (\underline{F} - \underline{H} \underline{K})\underline{x}(k) + \underline{H} \underline{r}(k), \\ \underline{y}(k) = \underline{c} \underline{x}(k). \end{cases}$$

A equação característica é dada por:

$$\det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{H} \underline{K}] = 0.$$

O ganho é um vetor:

$$\underline{K} = [k_m \quad k_{m-1} \quad k_{m-2} \quad \dots \quad k_2 \quad k_1].$$

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = (\underline{E} - \underline{H} \underline{K})\underline{x}(k) + \underline{H} \underline{r}(k), \\ y(k) = \underline{c} \underline{x}(k). \end{cases}$$

Para um sistema na forma canônica controlável:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_m + k_m) & -(a_{m-1} + k_{m-1}) & \dots & -(a_1 + k_1) \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{r}(k).$$

Para um sistema na forma canônica controlável:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_m + k_m) & -(a_{m-1} + k_{m-1}) & \dots & -(a_1 + k_1) \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{r}(k).$$

A equação característica é dada por:

$$\det[zI - \underline{E} + \underline{H} \ \underline{K}] = 0,$$

$$(a_m + k_m) + (a_{m-1} + k_{m-1})z + \dots + (a_1 + k_1)z^{m-1} + z^m \equiv \\ \equiv \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \dots + \alpha_1z^{m-1} + z^m,$$

onde $k_i = \alpha_i - a_i$, $i = 1, \dots, n$.

Portanto, se a equação característica desejada for especificada:

$$\alpha_m + \alpha_{m-1}z + \dots + \alpha_1z^{m-1} + z^m = 0,$$

encontra-se os ganhos do controlador:

$$k_i = \alpha_i - a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Projeto por alocação de polos

Especifica-se os polos desejados para o sistema realimentado:

$$\det[z\mathbf{I} - \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{K}}] = (z + z_1)(z + z_2) \dots (z + z_m).$$

Encontra-se os valores de alpha, expandindo a equação em função dos polos:

$$\det[z\mathbf{I} - \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{K}}] = \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \dots + \alpha_1z^{m-1} + z^m.$$

Para o sistema na forma canônica controlável, encontra-se os ganhos do controlador aplicando:

$$k_i = \alpha_i - a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Projeto por alocação de polos

Especifica-se os polos desejados para o sistema realimentado:

$$\det[z\mathbf{I} - \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{K}}] = (z + z_1)(z + z_2) \dots (z + z_m).$$

Com o auxílio do Matlab é possível usar o comando “acker” ou “place” fornecendo os polos desejados e as matrizes $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{H}}$.

No Scilab, o comando equivalente é “ppol”.

Neste caso, o sistema não precisa estar na forma canônica controlável.

Projeto para obter solução que equivale a um Dead-Beat

Na solução que equivale ao Dead-Beat, a equação característica é:

$$\det[zI - E + H K] = z_m.$$

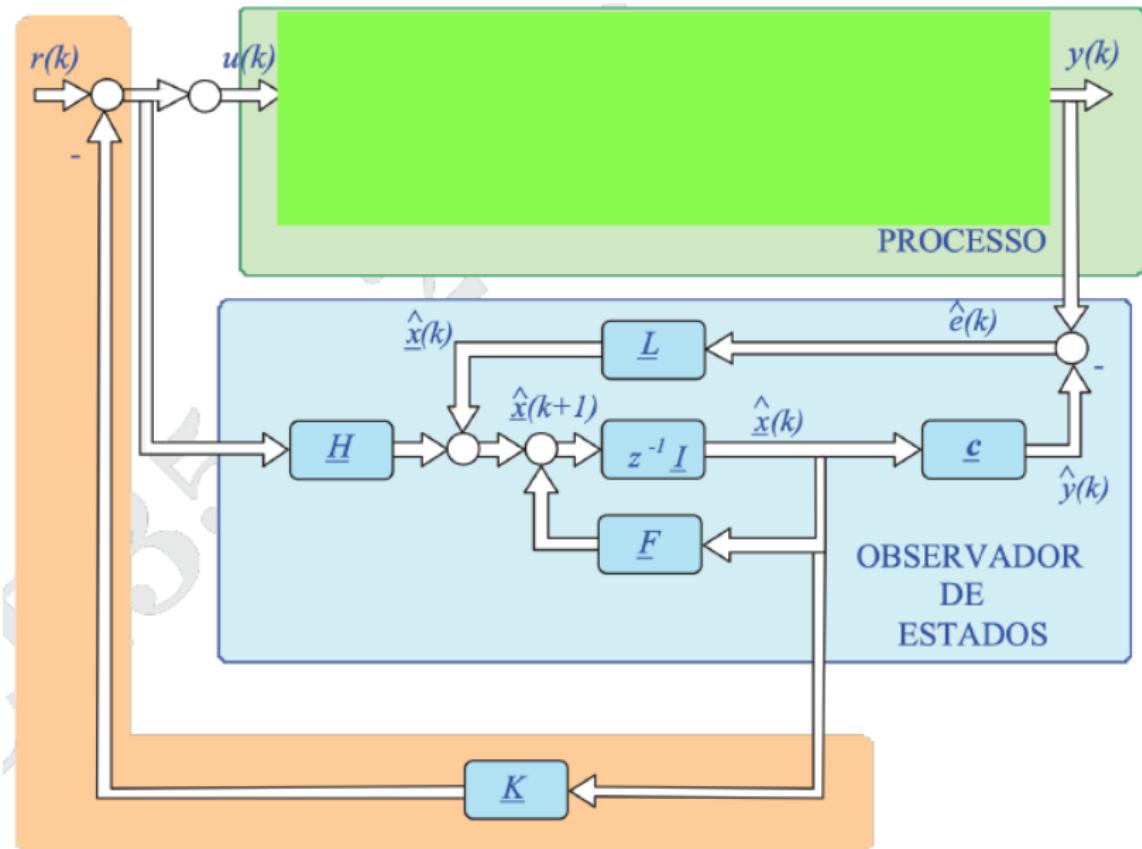
Portanto, todos os polos são zero.

Para o sistema na forma canônica controlável:

$$k_i = -a_i.$$

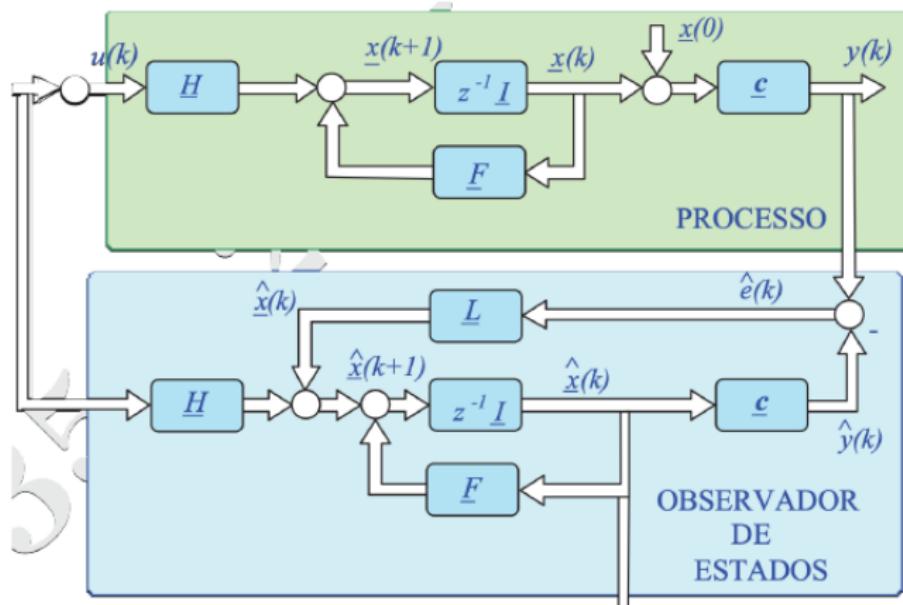
Observadores de estado

Capítulo 9



Assumindo que u e y podem ser medidos, e que a saída esperada ($\hat{y}(k)$) pode ser calculada pelo modelo:

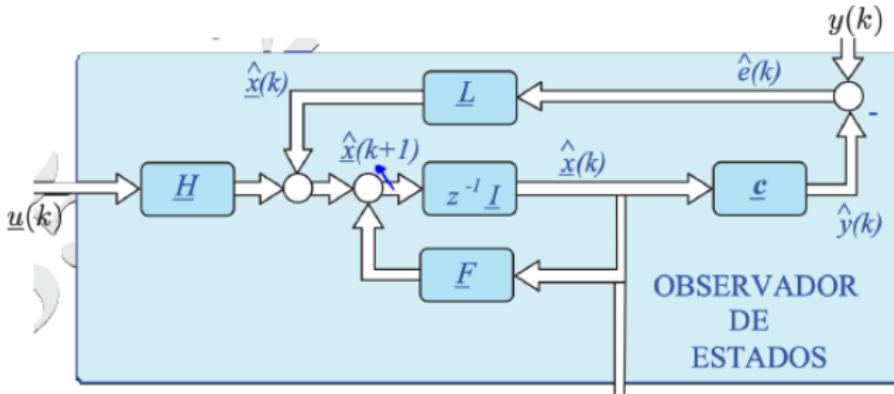
$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{E} \underline{x}(k) + \underline{H} u(k), \\ \underline{y}(k) = \underline{c} \underline{x}(k), \\ \Delta \hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k). \end{cases}$$



A matriz de ponderação \underline{L} é usada para gerar uma correção do vetor de estados a partir do erro na saída. Essa matriz deve ser escolhida de forma que $\hat{\underline{x}}(k+1) \rightarrow \underline{x}(k+1)$.

$$\begin{cases} \hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{F} \hat{\underline{x}}(k) + \underline{H} \underline{u}(k), \\ \underline{y}(k) = \underline{c} \hat{\underline{x}}(k), \\ \Delta \hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1) &= \underline{F} \hat{\underline{x}}(k) + \underline{H} \underline{u}(k) + \underline{L} \Delta \hat{e}(k), \\ &= \underline{F} \hat{\underline{x}}(k) + \underline{H} \underline{u}(k) + \underline{L}(y(k) - \underline{c} \hat{\underline{x}}(k)). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= \underline{E} \underline{x}(k) + \underline{H} \underline{u}(k), \\ \hat{x}(k+1) &= \underline{E} \hat{x}(k) + \underline{H} \underline{u}(k) + \underline{L} \Delta \hat{e}(k), \\ &= \underline{E} \hat{x}(k) + \underline{H} \underline{u}(k) + \underline{L}(y(k) - \underline{c} \hat{x}(k)).\end{aligned}$$

Definindo:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \underline{x}(k+1) - \hat{x}(k+1), \\ \tilde{x}(k+1) &= [\underline{E} - \underline{L} \underline{c}] \tilde{x}(k).\end{aligned}$$

Deseja-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}(k) = 0.$$

Isso significa que o sistema $\tilde{x}(k)$ deve ser estável.

$$\tilde{\underline{x}}(k+1) = [\underline{E} - \underline{L} \; \underline{c}] \tilde{\underline{x}}(k).$$

Equação característica:

$$\begin{aligned}\det[z\underline{I} - \underline{E} + \underline{L} \; \underline{c}] &= (z + z_1)(z + z_2) \dots (z + z_m) = \\ &= \gamma_m + \gamma_{m-1}z + \dots + \gamma_1z^{m-1} + z^m = 0,\end{aligned}$$

com polos z_i dentro do círculo unitário.

Pode-se escolher uma dinâmica para o observador que pode ter uma resposta rápida do tipo Dead-beat, por exemplo.

Equação característica do controlador por realimentação de estados:

$$\det[zI - \underline{E} + \underline{H} \underline{K}] = 0.$$

Equação característica do observador de estados:

$$\det[zI - \underline{E} + \underline{L} \underline{c}] = 0.$$

Para obter a matriz \underline{L} , não podemos usar os comandos *place*, *acker*, ou *ppol* da mesma forma que foi usado para obter \underline{K} , pois a ordem de \underline{K} e \underline{L} estão trocadas nas equações acima.

Obtenção da matriz \underline{L}

Dado que o determinante de uma matriz \underline{W} é igual ao determinante de sua transposta \underline{W}^T , vale então:

$$\det[z\underline{I} - \underline{E} + \underline{L} \underline{c}] = \det[z\underline{I} - \underline{E}^T + \underline{c}^T \underline{L}^T].$$

Portanto, agora comparando com a equação característica do controlador por realimentação de estados:

$$\det[z\underline{I} - \underline{E} + \underline{H} \underline{K}] = 0.$$

Para obter a matriz \underline{L} , basta substituir no comando *acker*, *place*, ou *ppol*:

\underline{E} por \underline{E}^T , \underline{H} por \underline{c}^T , e \underline{K} por \underline{L}^T .

Obtenção da matriz \underline{L}

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(k+1) &= \underline{E} \hat{\underline{x}}(k) + \underline{H} \underline{u}(k) + \underline{L} \Delta \hat{e}(k), \\ &= \underline{E} \hat{\underline{x}}(k) + \underline{H} \underline{u}(k) + \underline{L}(y(k) - \underline{c} \hat{\underline{x}}(k)). \\ &= [\underline{E} - \underline{L} \underline{c}] \hat{\underline{x}}(k) + \underline{H} \underline{u}(k) + \underline{L} y(k).\end{aligned}$$

Usando a forma canônica observável do sistema:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -(a_m + l_m) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -(a_{m-1} + l_{m-1}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -(a_{m-2} + l_{m-2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -(a_1 + l_1) \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}(k) + \underline{H} \underline{u}(k) + \begin{bmatrix} l_m \\ l_{m-1} \\ l_{m-2} \\ \vdots \\ l_1 \end{bmatrix} y(k).$$

A equação característica fica:

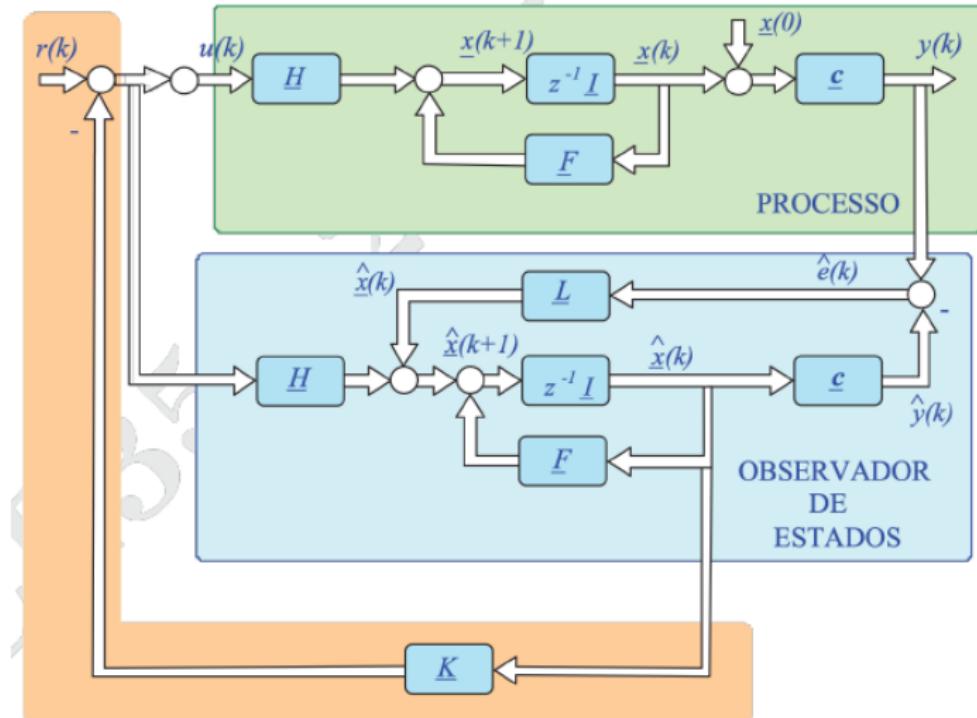
$$\det[zI - \underline{F} + \underline{L} \underline{c}] = 0,$$
$$(a_m + l_m) + (a_{m-1} + l_{m-1})z + \dots + (a_1 + l_1)z^{m-1} + z^m \equiv$$
$$\equiv \gamma_m + \gamma_{m-1}z + \dots + \gamma_1z^{m-1} + z^m.$$

Portanto os valores de L podem ser encontrados:

$$l_i = \gamma_i - a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para encontrar a solução com comportamento Dead-beat, basta fazer os valores de gama iguais a zeros.

Controlador de estados com observador de estados



Controlador de estados com observador de estados

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{F} & (-\underline{H} \underline{K}) \\ \underline{L} \underline{c} & (\underline{F} - \underline{H} \underline{K} - \underline{L} \underline{c}) \end{bmatrix}}_{\underline{E}^*} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix},$$
$$y(k) = \underline{c} \underline{x}(k).$$

Equação característica para sistema completo:

$$\det[zI - \underline{E}^*] = \det[zI - \underline{F} + \underline{H} \underline{K}] \times \det[zI - \underline{F} + \underline{L} \underline{c}].$$

Para observador e controlador com comportamento Dead-beat:

$$\det[zI - \underline{E}^*] = z^m z^m = z^{2m}.$$

No projeto do controlador por realimentação de estados observados, é importante que a dinâmica do observador seja mais rápida que a dinâmica do controlador.

Intuitivamente, o observador converge mais rápido para a estimativa correta dos estados. Isso permite a convergência do controlador (mais lento) para o valor desejado utilizando a estimativa correta dos estados (que rapidamente é obtida).

Exemplo 1

No exemplo a seguir é ilustrado o controle de estados com observador de estados realizado no Simulink. O processo considerado, de duas entradas e duas saídas, é descrito pela sua formulação contínua no espaço de estados como sendo:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{D} = 0$$

O processo deverá ser controlado e observado por uma estrutura digital operando com uma frequência de 4 Hz. Os polos desejados para o Controlador e para o Observador de Estados para o caso contínuo, são dados respectivamente por:

$$\underline{p}_{D_Con} = [-5 \quad -6 \quad -6] \quad \underline{p}_{D_Obs} = [-9 \quad -10 \quad -10]$$

Observe que neste caso a dinâmica do Observador foi designada ligeiramente mais rápida que a desejada para a dinâmica do Controle, pois os polos desejados do Observador se encontram um pouco mais distantes da origem (do plano-s) do que os polos do Controle.

Exemplo 1 (cont.)

Solução :

A primeira etapa envolve a discretização do processo e dos polos desejados segundo o tempo de amostragem dado. Desta forma o processo discretizado resulta:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9892 & 0,2294 & 0,0191 \\ -0,1143 & 0,7796 & 0,1151 \\ -0,6907 & -1,3805 & 0,0889 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1,2493 & 0,0616 \\ -0,0108 & 0,4779 \\ -0,1143 & -0,3257 \end{bmatrix}$$

sendo \underline{C} e \underline{D} inalterados. Os polos desejados em ambos os casos são discretizados pela relação de definição $z = e^{T_0 s}$ e obtidos como sendo:

$$\underline{p}_{D_Con} = [0,2865 \ 0,2231 \ 0,2231] \quad \underline{p}_{D_Obs} = [0,1054 \ 0,0821 \ 0,0821]$$

Na versão discreta, observa-se que os polos mais rápidos do Observador apresentam módulo menor que o módulo dos polos do Controlador.

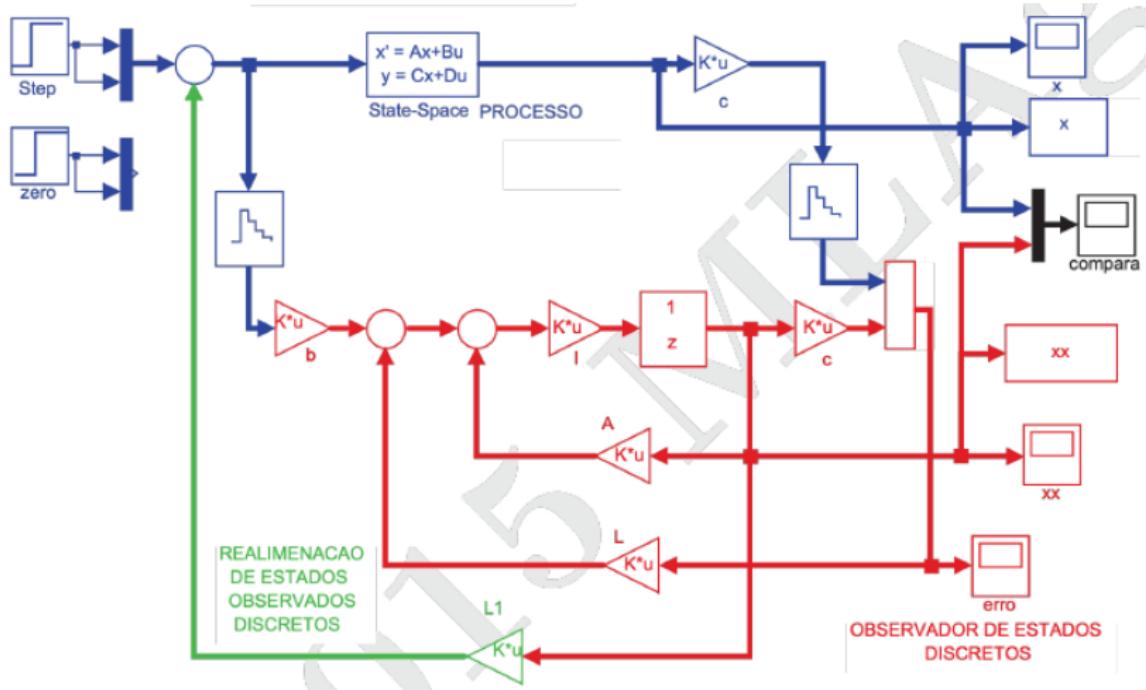
Com o comando `place` do Matlab e usando-se as matrizes \underline{F} e \underline{c} transpostas e o vetor de polos desejados acima, obtém-se o vetor \underline{L} do Observador como sendo:

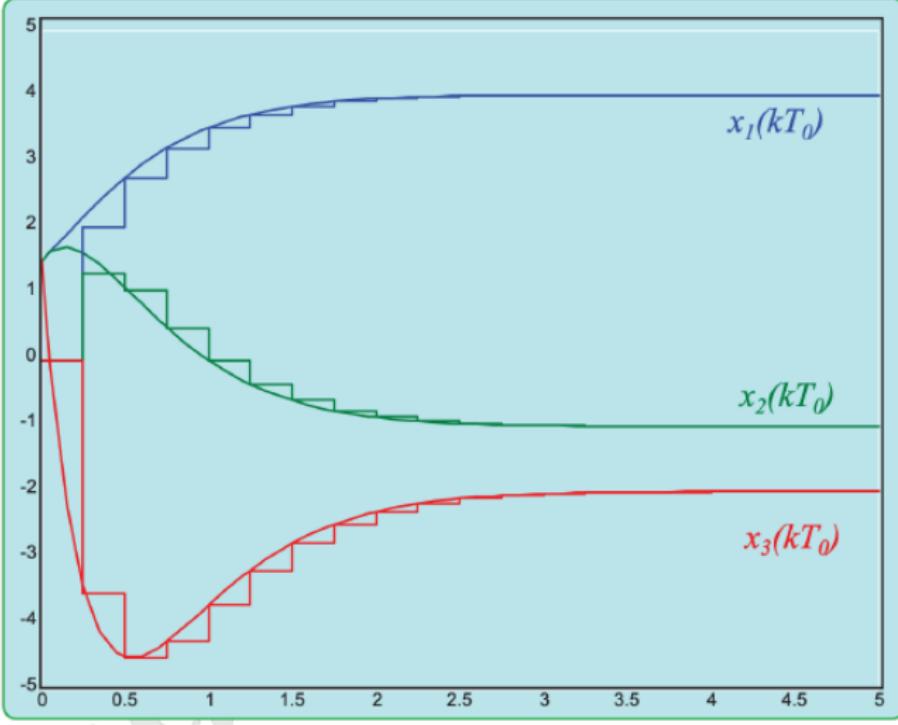
$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1,1334 & 0,5645 & -2,0723 \\ 0,9067 & -0,1170 & -0,6908 \end{bmatrix}^T$$

Exemplo 1 (cont.)

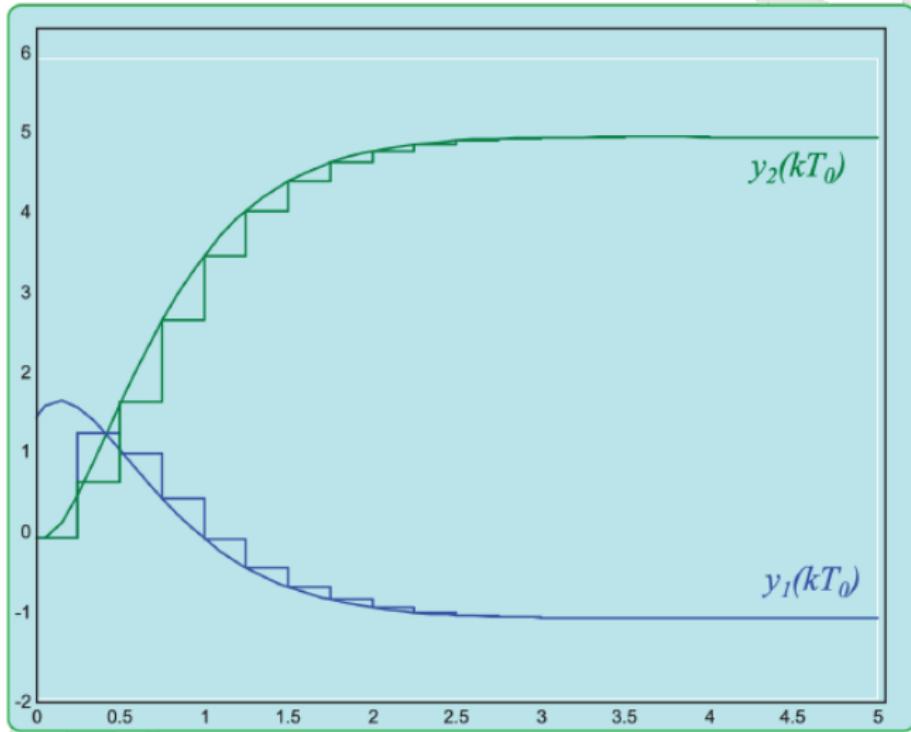
Com o mesmo comando `place` do Matlab e usando-se as matrizes \underline{F} e \underline{H} mais o vetor de polos desejados para a estrutura controlada, obtém-se o vetor \underline{K} do Controlador como sendo:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 3,4071 & 1.3233 & 0,0572 \\ -0,3231 & 0,8119 & 0,2199 \end{bmatrix}$$

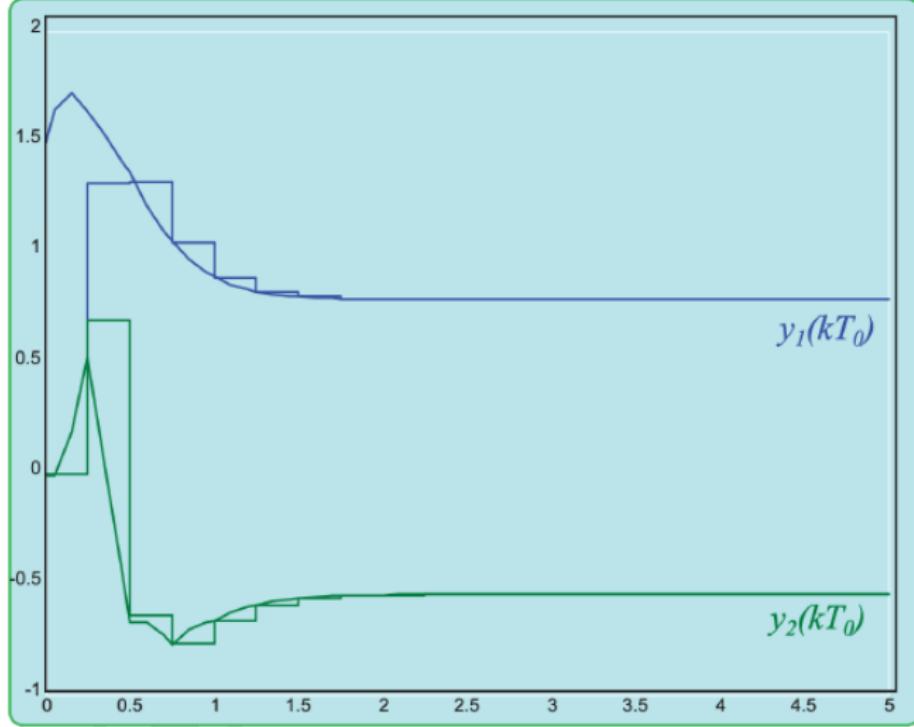




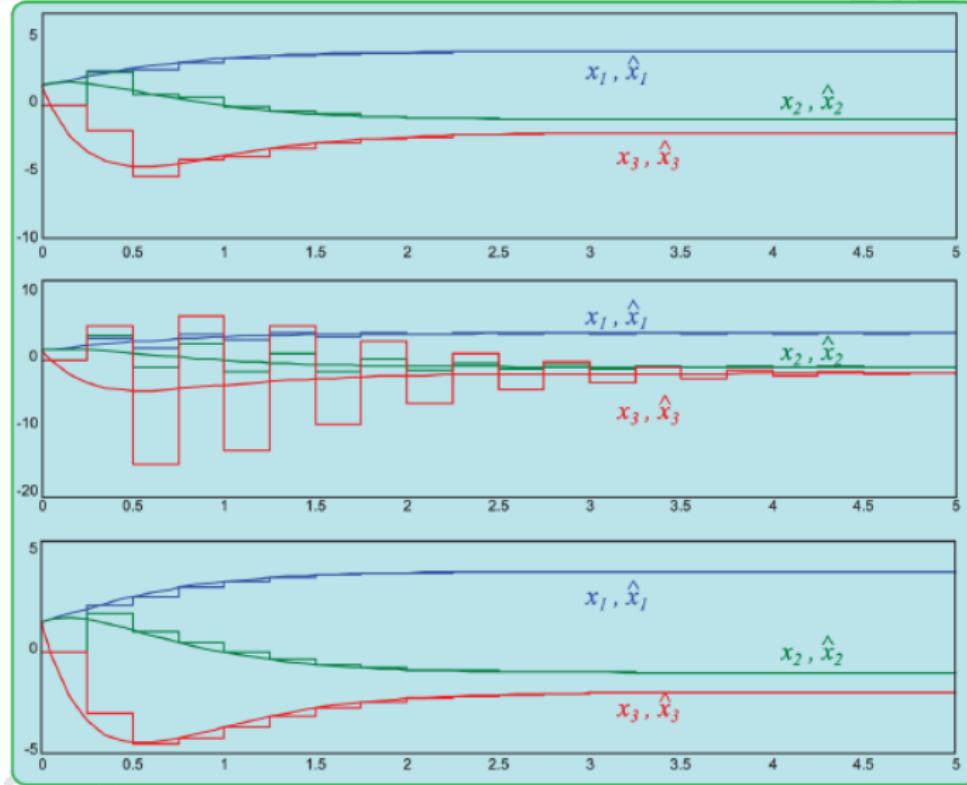
Resposta dos estados em malha aberta (contínuo e discreto) à uma
entrada degrau.



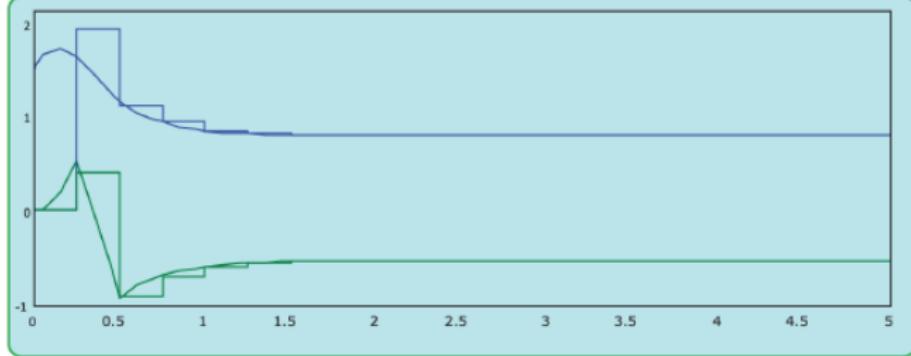
Resposta do processo em malha aberta (contínuo e discreto):
 $u = [1 \ 1]^T.$



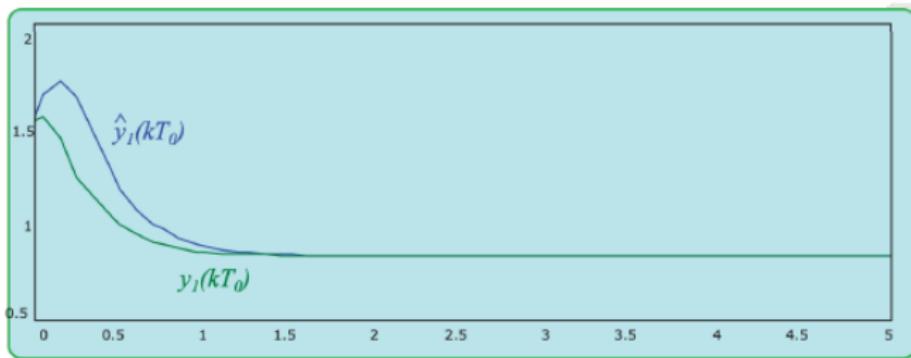
Resposta do processo em malha aberta (contínuo e discreto):
 $u = [1 \ 1]^T$.



Resultados do observador com diferentes dinâmicas de convergência: (a) lenta; (b) muito lenta; (c) rápida.



(a)



(b)

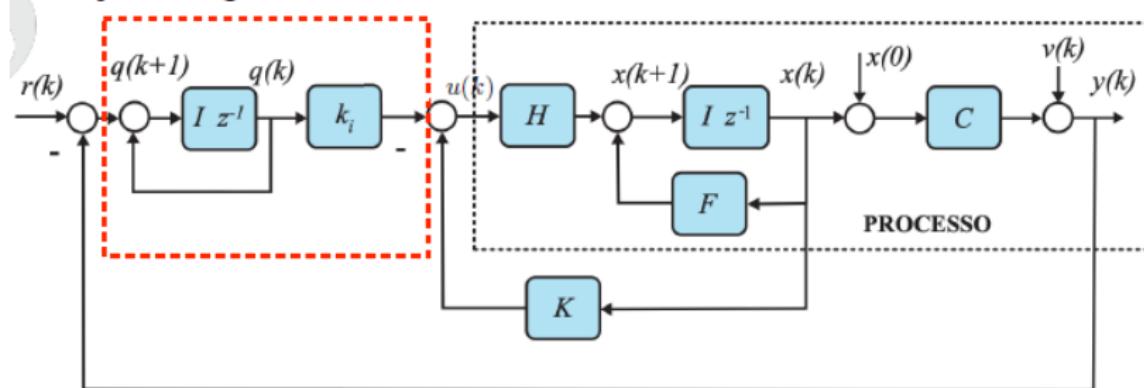
Desempenho do controle por realimentação de estados observados: (a) resposta das saídas $y_1(k)$ e $y_2(k)$ com realimentação de estados observados; (b) comparação da saída $y_1(k)$ em relação à realimentação de estados reais (verde) e observados (azul).

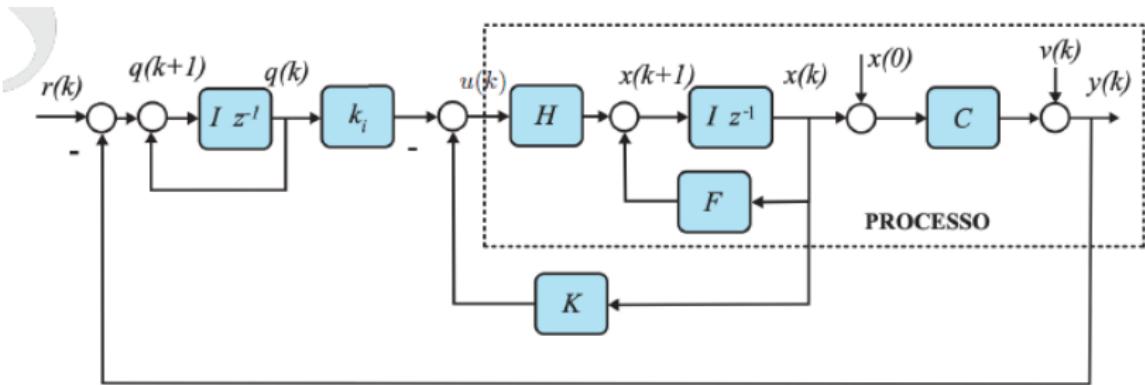
Controle de Servomecanismo com Realimentação de Estados

Capítulo 9

Controle de posição em que se deseja que o erro seja nulo entre a referência degrau e a saída controlada.

Ação integrativa do erro





$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = (\underline{F} - \underline{H} \underline{K}) + \underline{H} \underline{K}_i \underline{q}(k), \\ \underline{q}(k+1) = \underline{l} \underline{q}(k) + \underline{r}(k) - \underline{c} \underline{x}(k). \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{F} - \underline{H} \underline{K}) & \underline{H} \underline{K}_i \\ -\underline{c} & \underline{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{q}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{l} \end{bmatrix} \underline{r}(k).$$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{E} - \underline{H} \underline{K}) & \underline{H} \underline{K}_i \\ -\underline{c} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{q}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \underline{r}(k).$$

Como: $u(k) = \underline{K}_i \underline{q}(k) - \underline{K} \underline{x}(k)$, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{0} \\ -\underline{c} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{q}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{H} \\ \underline{0} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \underline{r}(k),$$

$$\underline{x}'(k+1) = \underline{E}' \underline{x}'(k) + \underline{H}' u(k) + \underline{G}' \underline{r}(k).$$

Considerando $\underline{u}(k) = \underline{K}' \underline{x}'$ ou

$$\underline{u}(k) = [-\underline{K} \quad \underline{K}_i] \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{q}(k) \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}'(k+1) = \underline{E}'\underline{x}'(k) + \underline{H}'u(k) + \underline{G}'\underline{r}(k).$$

Considerando $\underline{u}(k) = \underline{K}'\underline{x}'$ ou

$$\underline{u}(k) = [-\underline{K} \quad \underline{K}_i] \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{q}(k) \end{bmatrix},$$

chegamos a:

$$\underline{x}'(k+1) = (\underline{E}' + \underline{H}' \underline{K}')\underline{x}'(k) + \underline{G}'\underline{r}(k).$$

Essa expressão é a mesma obtida para o controle por realimentação de estados. Portanto podemos aplicar o comando *place*, *acker*, ou *ppol* para as matrizes \underline{E}' e \underline{H}' , e utilizar o valor de \underline{K}' obtido.

Exemplo 2

Realimentação de Estados com Ação Integrativa

Considere o processo descrito no espaço de estados (contínuo) a seguir e investigue uma solução de controle de realimentação de estados e uma ação integrativa para garantir erro de posição nulo da saída controlada. Neste caso um tempo amostragem de 0.5 seg deve ser usado e os polos desejados do processo controlado foram escolhidos para garantir uma resposta dinâmica com sobresinal de 15% em 2.6 seg.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = [1 \ 0 \ 0] \quad \underline{D} = 0$$

$$Polos_{desejados} \Rightarrow s_{1,2,3} = [-0,5 \pm 0,22i \quad -2]$$

Solução : Para este caso, o ideal é processar toda solução no domínio do tempo discreto. Tomando-se todos os dados com devidas discretizações, obtém-se:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 \end{bmatrix} \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

Exemplo 2 (cont.)

Solução : Para este caso, o ideal é processar toda solução no domínio do tempo discreto. Tomando-se todos os dados com devidas discretizações, obtém-se:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 \end{bmatrix} \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

e os respectivos polos desejados, mapeados no plano-Z resultam:

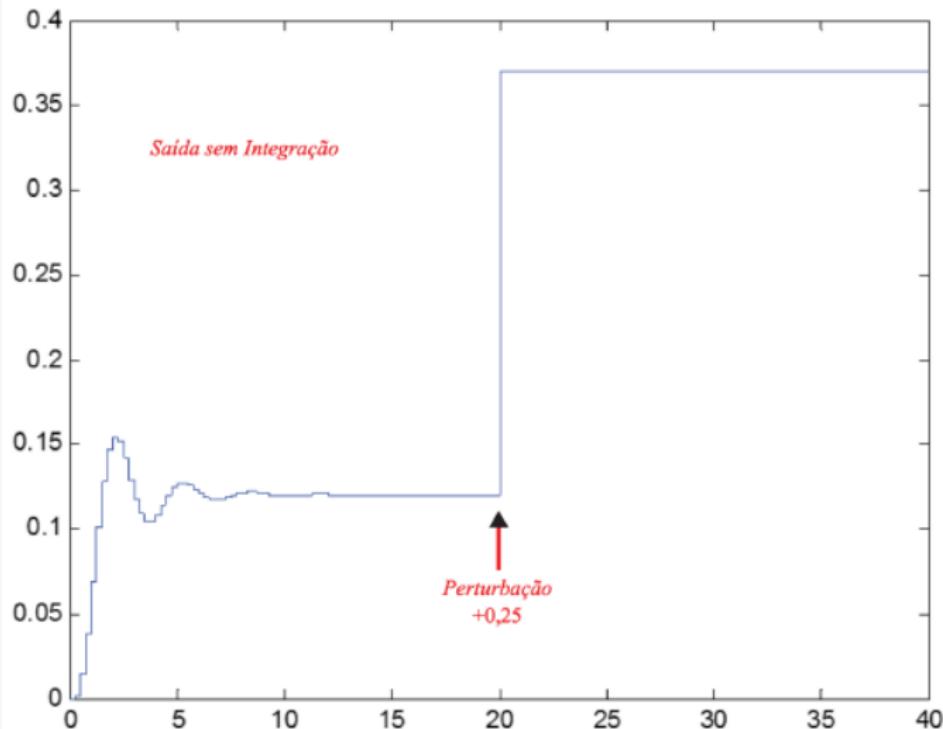
$$P_d \quad \Rightarrow \quad z_{1,2,3} = [0,4208 \pm 0,6553i \quad 0,8896]$$

Para o processo com uma simples realimentação de estados, alocando-se a dinâmica de acordo com os polos desejados, obtém-se com o comando `place` ou `acker`, o ganho de realimentação dado por:

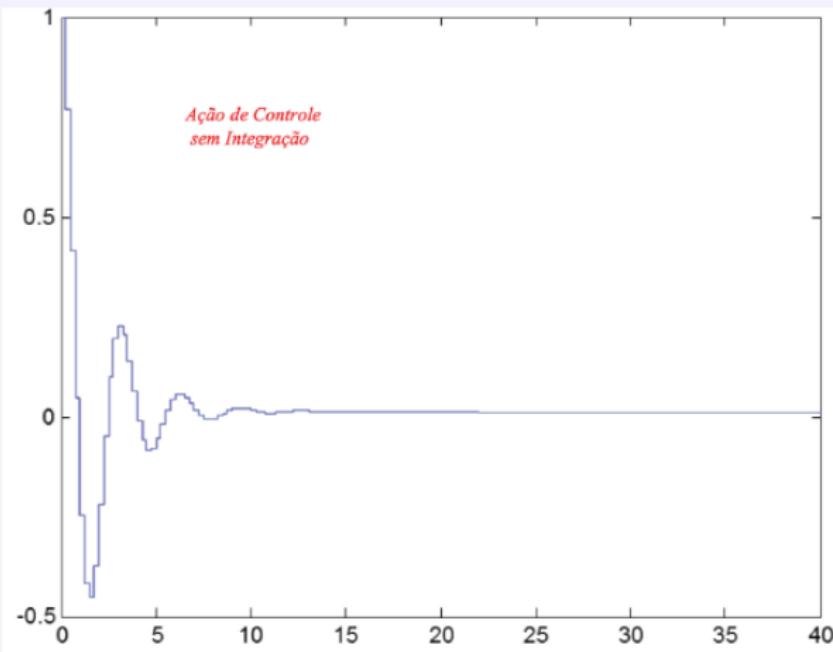
$$\underline{K} = \text{place}(\underline{F}, \underline{h}, P_d) = [7,6767 \quad 5,6483 \quad 0,8896]$$

Para este caso a resposta obtida da saída e da devida ação de controle é indicada a seguir.

Exemplo 2 (cont.)



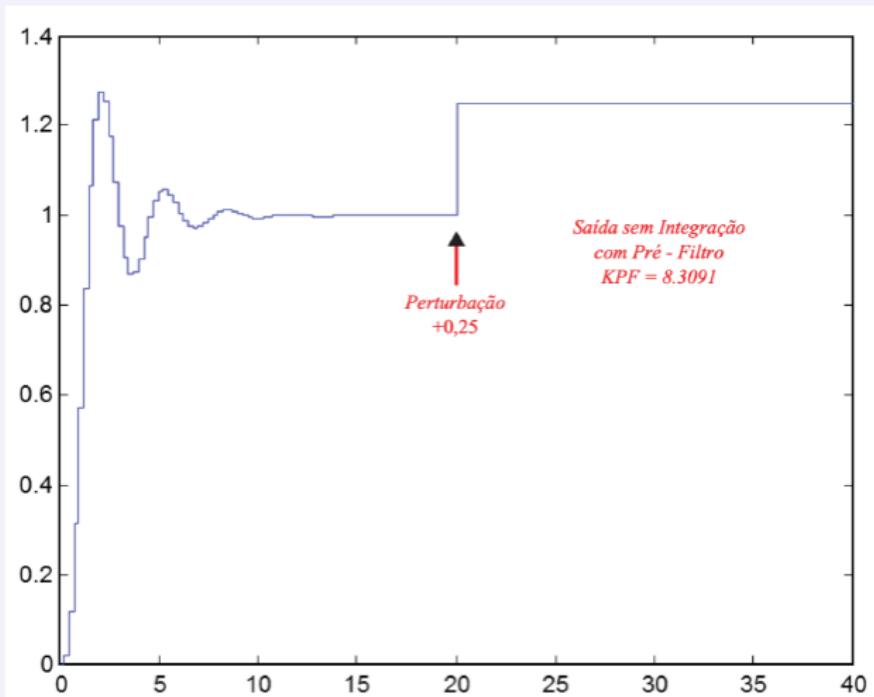
Exemplo 2 (cont.)



Observa-se nesse caso, como já alertado anteriormente, que a saída apresenta a dinâmica desejada, porém com elevado erro de posição ou erro de regime para entrada degrau.

Exemplo 2 (cont.)

Inserindo-se um ganho de pré-filtro com valor apropriado para escalarizar a referência de entrada, pode-se obter o resultado a seguir.



Exemplo 2 (cont.)

Como visto o Pré-Filtro ou escalonamento da entrada só atua na correção da saída relativa ao tero de entrada e não consegue eliminar eventuais erros de perturbação.

A correção automática destas situações é conseguida com a inclusão de uma ação integrativa atuando sobre a saída em forma de uma realimentação adicional. Para a solução, deve-se preparar no novo modelo com a inclusão desta ação integrativa, tal como ilustrado a seguir.

$$\underline{F}' = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 & 0 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 & 0 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{H}' = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para este novo processo, deve se especificar um polo desejado adicional para se obter a solução com o comando `place` ou `acker`. Para não se afetar a dinâmica desejada inicialmente escolhe-se a alocação deste polo adicional de forma que não afete a dominância da dinâmica desejada. Para isto, no plano-S basta alocar o polo adicional distante do eixo imaginário e no plano-Z próximo a origem. Admitindo-se no plano-S o quarto polo em -8 , equivale no plano-Z com $T_0 = 0.5$ seg. a $z = 0.0183$. Assim os polos desejados do novo sistema serão:

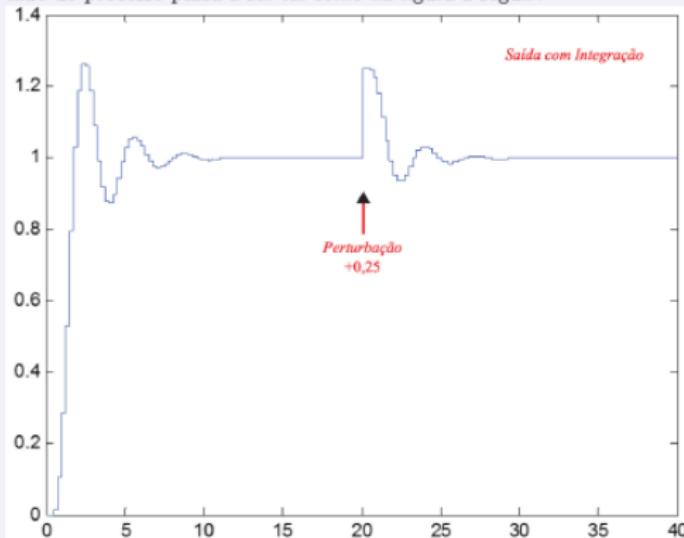
$$P_d' = [P_d \quad 0,0183]$$

Exemplo 2 (cont.)

Usando o comando indicado, obtém o novo ganho de realimentação como sendo:

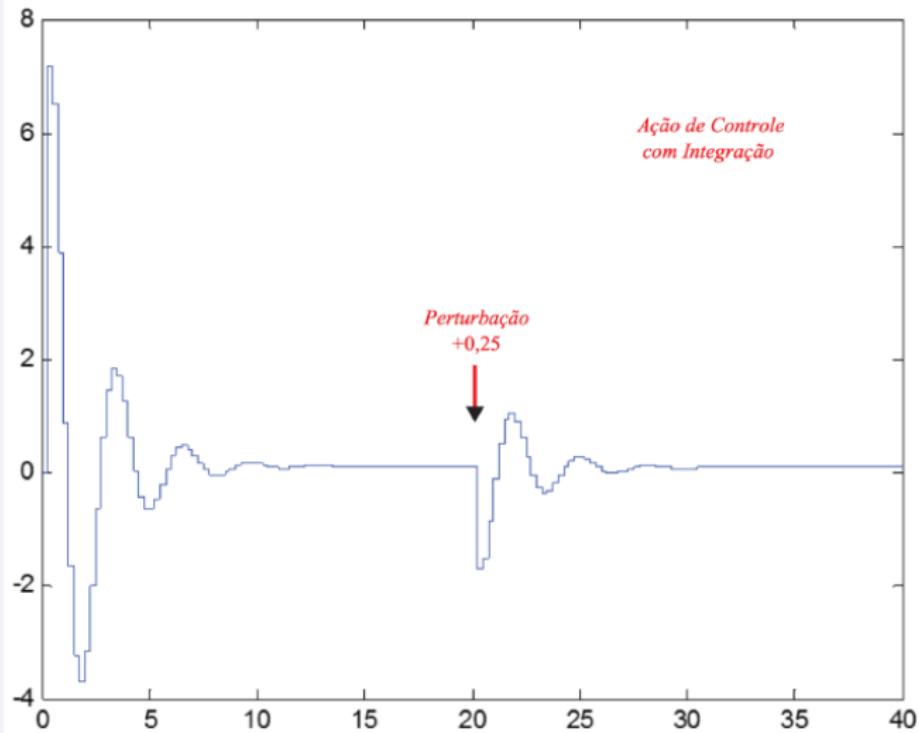
$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{K}}' &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \underline{\mathbf{K}}_i \end{bmatrix} = \text{place}(\underline{F}', \underline{h}', \underline{P}'_d) \\ &= \begin{bmatrix} 22,7384 & 10,4322 & 2,5338 & -7,6343 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Com esta estrutura de realimentação de estados mais a ação integrativa, o resultado do processo passa a ser tal como na figura a seguir.



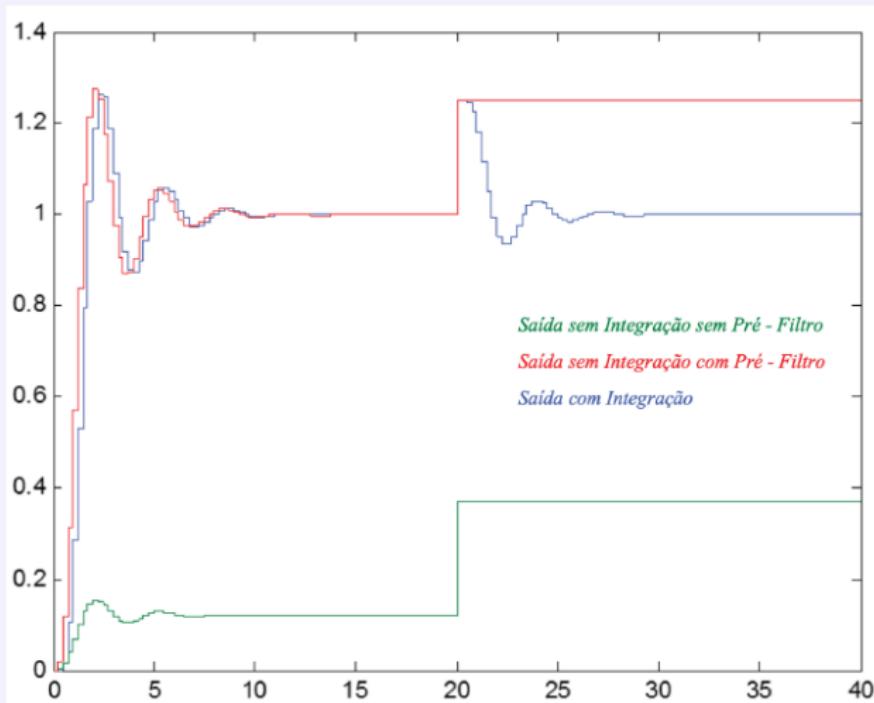
Verifica-se que a saída atendeu as expectativas de dinâmica e de regime com erro nulo. A ação de controle $u(k)$ passa a ser muito diferente neste caso e pode ser vista a seguir.

Exemplo 2 (cont.)



Exemplo 2 (cont.)

A figura a seguir ilustra os três casos simultaneamente para efeito de comparação.



Controlabilidade e Observabilidade

Definição de controlabilidade

Um sistema será dito controlável se existir uma única sequência de ação de controle ou excitação $u(k)$ que seja capaz de levar o sistema do estado inicial $x(0)$ para um estado final $x(N)$ em um tempo finito N .

A sequência desejada $u(k)$ é tal que:

$$\underline{x}(1) = \underline{E} \underline{x}(0) + \underline{H} \underline{u}(0),$$

$$\underline{x}(2) = \underline{E} \underline{x}(1) + \underline{H} \underline{u}(1) = \underline{E}^2 \underline{x}(0) + \underline{E} \underline{H} \underline{u}(0) + \underline{H} \underline{u}(1),$$

⋮

$$\underline{x}(k) = \underbrace{\underline{E}^k \underline{x}(0)}_{\text{S. homogênea}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \underline{E}^{i-1} \underline{H} \underline{u}(k-i)}_{\text{S. Particular}}.$$

Para o instante N , a equação acima pode ser escrita como

$$\underline{X}(N) = \underline{E}^N \underline{x}(0) + [\underline{H} \quad (\underline{E} \underline{H}) \quad (\underline{E}^2 \underline{H}) \quad \dots \quad (\underline{E}^{N-1} \underline{H})] \underline{U}_N,$$

com

$$\underline{U}_N = [u(N-1) \quad u(N-2) \quad u(N-3) \quad \dots \quad u(0)]^T.$$

$$\underline{\mathbf{X}}(N) = \underline{\mathbf{E}}^N \underline{\mathbf{x}}(0) + [\underline{\mathbf{H}} \quad (\underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{H}}) \quad (\underline{\mathbf{E}}^2 \underline{\mathbf{H}}) \quad \dots \quad (\underline{\mathbf{E}}^{N-1} \underline{\mathbf{H}})] \underline{\mathbf{U}}_N,$$

com

$$\underline{\mathbf{U}}_N = [u(N-1) \quad u(N-2) \quad u(N-3) \quad \dots \quad u(0)]^T.$$

Se a ordem do sistema é m , uma solução única para a sequência $\underline{\mathbf{U}}_N$ é obtida se $N = m$, tal que:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{U}}_m &= \underline{\mathbf{Q}}_S^{-1} (\underline{\mathbf{X}}(m) - \underline{\mathbf{E}}^m \underline{\mathbf{x}}(0)), \\ \underline{\mathbf{Q}}_S &= [\underline{\mathbf{H}} \quad (\underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{H}}) \quad (\underline{\mathbf{E}}^2 \underline{\mathbf{H}}) \quad \dots \quad (\underline{\mathbf{E}}^{N-1} \underline{\mathbf{H}})].\end{aligned}$$

A matriz de controlabilidade $\underline{\mathbf{Q}}_S$ definida acima será inversível se

$$\det\{\underline{\mathbf{Q}}_S\} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \text{Rank}\{\underline{\mathbf{Q}}_S\} = m.$$

Para $N < m$, não haverá solução para o sistema linear definido por $\underline{\mathbf{U}}_m$ e $\underline{\mathbf{Q}}_S$. E se $N > m$, haverá múltiplas soluções.

Definição de observabilidade

Um sistema é dito observável se a partir do conhecimento de uma sequência de saída $y(k), y(k+1), \dots, y(k+N-1)$, e de uma sequência de entrada $u(k), u(k+1), \dots, u(k+N-1)$, é possível encontrar o vetor de estado $x(k)$ em um instante qualquer.

Neste caso, o ponto de partida é a equação de saída de estado:

$$y(k) = \underline{c} \underline{x}(k).$$

Com auxílio de $\underline{x}(k+1) = \underline{F} \underline{x}(k) + \underline{H} u(k)$, podemos escrever:

$$\begin{cases} y(k) = \underline{c} \underline{x}(k), \\ y(k+1) = \underline{c} \underline{F} \underline{x}(k) + \underline{c} \underline{H} u(k), \\ \vdots \\ y(k+N-1) = \underline{c} \underline{F}^{N-1} \underline{x}(k) + \left[0 \quad \underline{c} \underline{H} \quad \underline{c} \underline{F} \underline{H} \quad \dots \quad \underline{c} \underline{F}^{N-2} \underline{H} \right] \underline{U}_N^*, \end{cases}$$

com

$$\underline{U}_N^* = [u(k+N-1) \quad u(k+N-2) \quad \dots \quad u(k+1) \quad u(k)]^T.$$

Se a sequência de entrada \underline{U}_N^* é conhecida, uma solução única para os m elementos do vetor $\underline{x}(k)$ só será possível se existirem m equações no sistema definido por $y(k), y(k+1), \dots, y(k+N-1)$, ou seja, $N = m$ e tal que:

$$\underline{Y}_m = \underline{Q}_B \underline{x}(k) + \underline{S} \underline{U}_m^*,$$

com

$$\underline{Y}_m = [y(k) \quad y(k+1) \quad \dots \quad u(k+m-2) \quad u(k+m-1)]^T,$$

$$\underline{U}_m^* = [u(k+m-1) \quad u(k+m-2) \quad \dots \quad u(k+1) \quad u(k)]^T,$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{\underline{cE}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{\underline{cEH}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underline{\underline{cE}} & \underline{\underline{cEH}} & \dots & \underline{\underline{cE^{m-2}H}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{Q}_B = [\underline{\underline{c}} \quad (\underline{\underline{cE}}) \quad (\underline{\underline{cE^2}}) \quad \dots \quad (\underline{\underline{cE^{m-1}}})].$$

$$\underline{Y}_m = \underline{Q}_B \underline{x}(k) + \underline{S} \underline{U}_m^*.$$

Portanto, o estado genérico $\underline{x}(k)$ no instante k será conhecido pela expressão:

$$\underline{x}(k) = \underline{Q}_B^{-1} (\underline{Y}_m - \underline{S} \underline{U}_m^*),$$

se a matrix de observabilidade \underline{Q}_B for inversível, ou seja, se

$$\det\{\underline{Q}_B\} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \text{Rank}\{\underline{Q}_B\} = m.$$