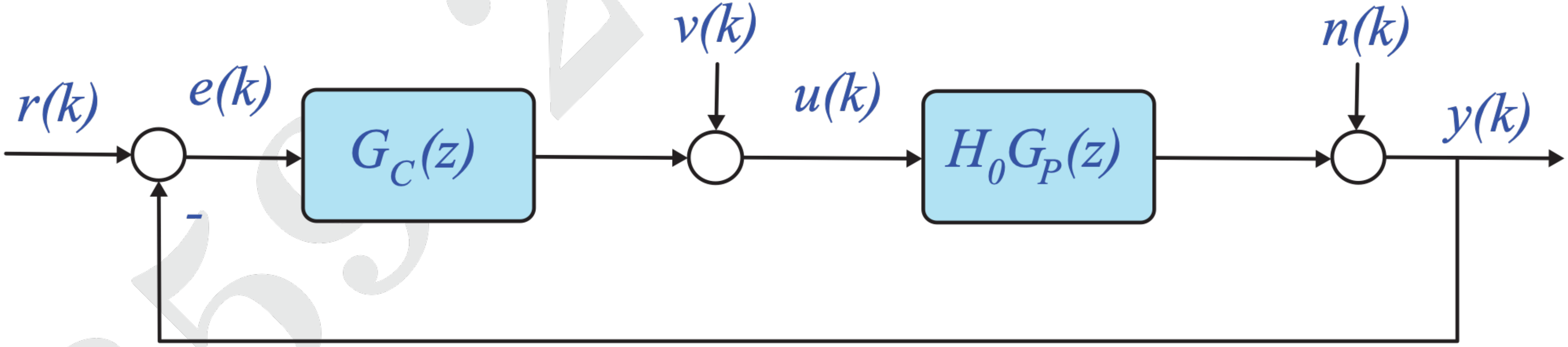
Efeito do Período de Amostragem no Dead-Beat

Controlador Paramétrico Genérico



$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ \dots \ + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ \dots \ + a_m z^{-m}}$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ \dots \ + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ \dots \ + p_\mu z^{-\mu}}$$

Fórmula do Controlador Dead-Beat:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ \dots \ + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \ \dots \ - p_m z^{-m}}$$

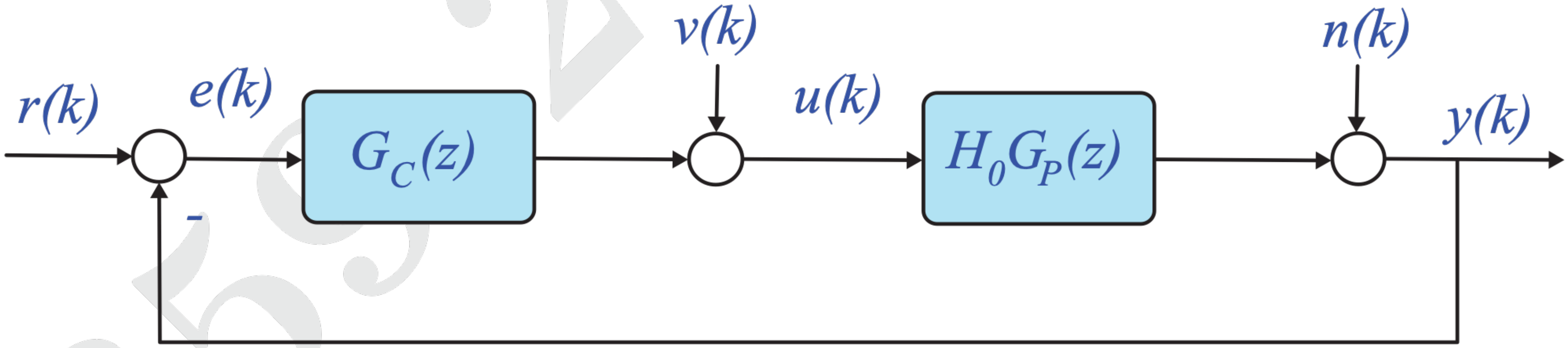
Com:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 q_0 & \qquad p_1 &= b_1 q_0 \\ q_2 &= a_2 q_0 & p_2 &= b_2 q_0 \\ q_3 &= a_3 q_0 & p_3 &= b_3 q_0 \\ &\vdots & &\vdots \\ q_m &= a_m q_0 & p_m &= b_m q_0 \end{aligned}$$

Para calcular q0:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = q_0 \sum_{i=1}^{m} b_i = 1 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} b_i} = u(0)$$

Para o Controlador Dead-Beat:



$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z)$$

$$\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z)$$

$$G_{BD(\nu)}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \ \ldots \ + p_m z^{-m}$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ \ldots \ + q_m z^{-m}$$

Exemplo 13

Calcular um controlador DB(ν) para o processo abaixo, sendo $T_0 = 4$ seg.

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

$$K = 1,0 \qquad T_1 = 10,0 \qquad T_2 = 7,5 \qquad T_3 = 5,0$$

Solução: $\rightarrow$ Discretização do processo.

```
              1
--------------------------
                   2      3
1 + 22.5s + 162.5s + 375s
```

Alterando o período de amostragem para 2 segundos:

```
                                      2
   0.00186 + 0.0092594z + 0.0028689z
------------------------------------------
                                      2   3
-0.4203504 + 1.6893178z - 2.2549791z + z
```

```
                                      2
   0.00186 + 0.0092594z + 0.0028689z
----------------------------------------
                                      2   3
-0.4203504 + 1.6893178z - 2.2549791z + z
```

$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ \dots \ + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ \dots \ + a_m z^{-m}}$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ \dots \ + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ \dots \ + p_\mu z^{-\mu}}$$

$$\Rightarrow \quad q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} b_i} = u(0)$$ = 1/0,0139883 = 71,488

No exemplo 13, quando o período de amsotragem era 4 segundos:

q0 = 13,3258

Portanto, q0 = u(0) aumenta se o período de amostragem diminui.

$$
\begin{aligned}
H_0G_P(z) &= \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\} = \Big(\text{C2D no Matlab}\Big) \\
&= \frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}
\end{aligned}
$$

$a_1 =$ -2,2550 $a_2 =$ 1,6893 $a_3 =$ -0,4203

$b_1 =$ 0,0028 $b_2 =$ 0,0092 $b_3 =$ 0,0018

$\rightarrow$ Obtenção dos coeficientes do Controlador DB(ν) segundo as expressões (8.16) e (8.17).

$$
q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=3} b_i}
$$
= 71,488

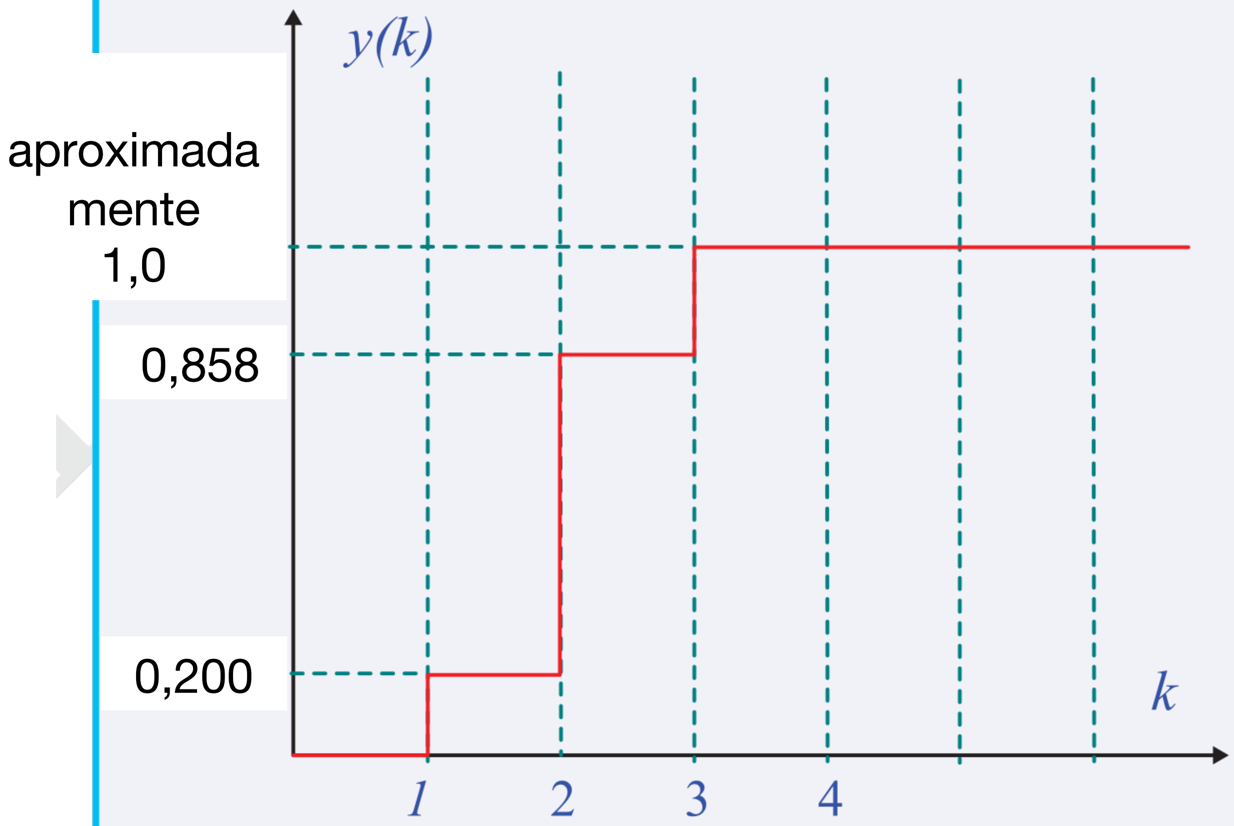
$q_1 = a_1q_0 =$ -161,20 $\qquad p_1 = b_1q_0 =$ 0,200

$q_2 = a_2q_0 =$ 120,76 $\qquad p_2 = b_2q_0 =$ 0,658

$q_3 = a_3q_0 =$ -30,046 $\qquad p_3 = b_3q_0 =$ 0,129

→ Resposta transitória ao degrau do processo controlado, a partir de (8.20) é dada por:

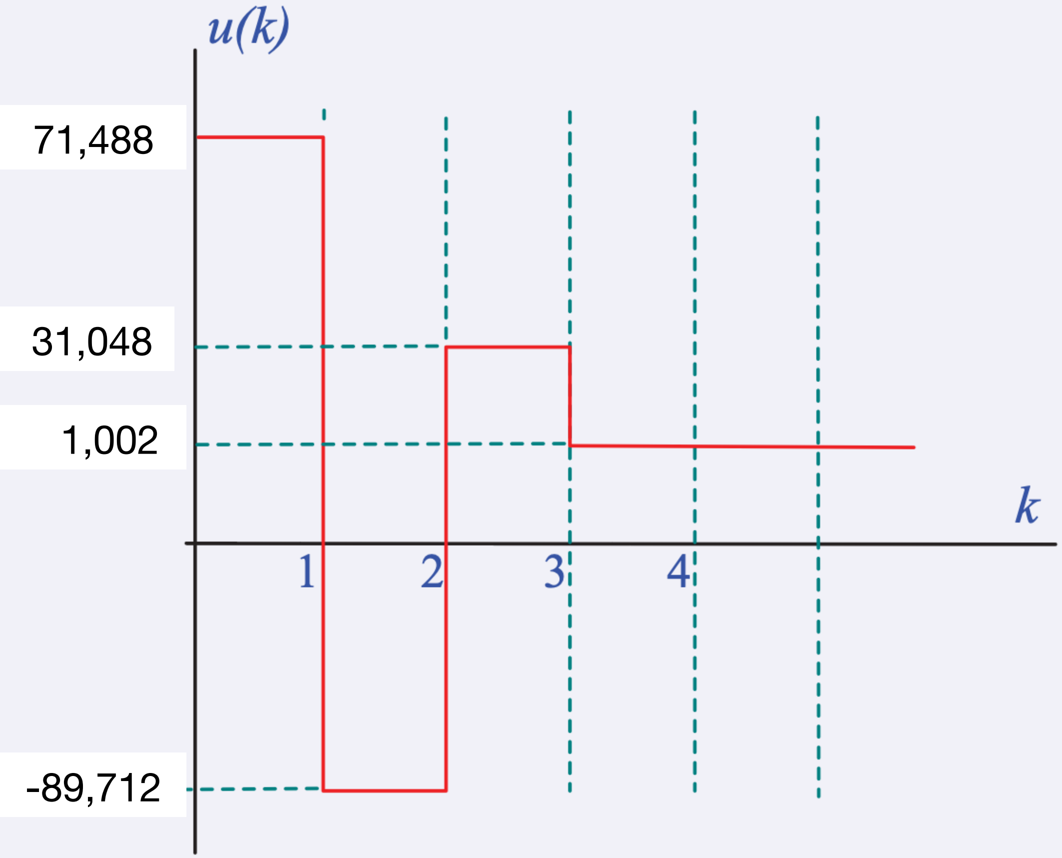
$$
\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{R(z)} &= q_0 B(z^{-1}) \\
Y(z) &= q_0 B(z^{-1}) R(z) = \\
&= 0{,}200 \; z^{-1}R(z) + 0{,}658 \; z^{-2}R(z) + 0{,}129 \; z^{-3}R(z) \\
&= 0{,}200 \; r(k-1) + 0{,}658 \; r(k-2) + 0{,}129 \; r(k-3)
\end{aligned}
$$



$y(0) =$ 0
$y(1) =$ 0,200
$y(2) =$ 0,858
$y(3) =$ 0,987
$y(4) =$ 0,987
.
.
.

→ A respectiva ação de controle do processo controlado, a partir de (8.10) é dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{U(z)}{R(z)} &= Q(z^{-1}) \\
Y(z) &= Q(z^{-1})R(z) = \\
&= 71{,}488 - 161{,}20\, z^{-1}R(z) + 120{,}76\, z^{-2}R(z) - 30{,}046\, z^{-3}R(z) \\
&= 71{,}488 - 161{,}20\, r(k-1) + 120{,}76\, r(k-2) - 30{,}046\, r(k-3)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
u(0) &= 71{,}488 \\
u(1) &= -89.712 \\
u(2) &= 31{,}048 \\
u(3) &= 1{,}002 \\
u(4) &= 1{,}002 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Exemplo Dead-Beat ordem (v+1)

Fórmula para o Controlador Dead-Beat (v+1)

$$G_{DB(\nu+1)} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m} - p_{m+1} z^{-(m+1)}}$$

$$q_0 = u(0) \quad \Rightarrow \quad \text{Dado ou imposto pelo projetista}$$

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i} \qquad p_1 = q_0 b_1$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i} \qquad p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i}$$

$$q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{\sum b_i} \qquad p_3 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i} \qquad p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}$$

$$q_{m+1} = a_m\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right) \qquad p_{m+1} = b_m\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right)$$

$$
\begin{aligned}
H_0G_P(z) &= \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\} = \Big(\text{C2D no Matlab}\Big) \\
&= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}
\end{aligned}
$$

$$a_1 = -1,7063 \quad a_2 = 0,9580 \quad a_3 = -1,1767$$

$$b_1 = 0,0186 \quad b_2 = 0,0486 \quad b_3 = 0,0078$$

Projete um controlador DB de ordem v+1 de forma que a maior entrada permitida na planta é 10.

Do enunciado u(0)=10, portanto:

$$q_0 = u(0) = 10$$

O sistema é de ordem 3, portanto para o DB de ordem v+1, o valor de m=3+1=4
O calculo dos coeficientes do controlador é feito aplicando as formulas:

$$q_{m+1} = a_m\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right) \qquad p_{m+1} = b_m\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right)$$

$$
\begin{aligned}
H_0G_P(z) &= \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\} = \Big(\text{C2D no Matlab}\Big) \\
&= \frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}
\end{aligned}
$$

$$a_1 = -1,7063 \quad a_2 = 0,9580 \quad a_3 = -1,1767$$

$$b_1 = 0,0186 \quad b_2 = 0,0486 \quad b_3 = 0,0078$$

$q_0 = u(0)$ = 10

$$q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i} \qquad p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}$$

Considere que a0=1, b0=0.

Como o DB(v+1) possui ordem 4, é preciso calcular: q1, q2, q3, q4, p1, p2, p3, p4

$$q_1 = q_0\left(a_1 - a_0\right) + \frac{a_0}{\sum b_i}$$

$$q_2 = q_0\left(a_2 - a_1\right) + \frac{a_1}{\sum b_i}$$