Controle Digital

SEL620

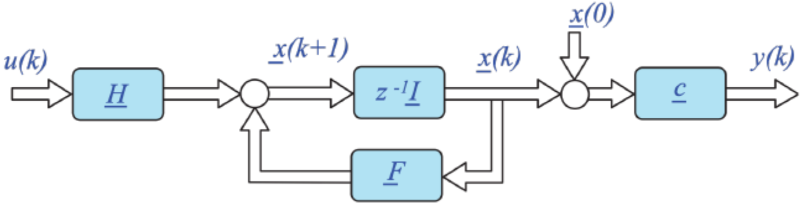
Prof. Dr. Valdir Grassi Jr

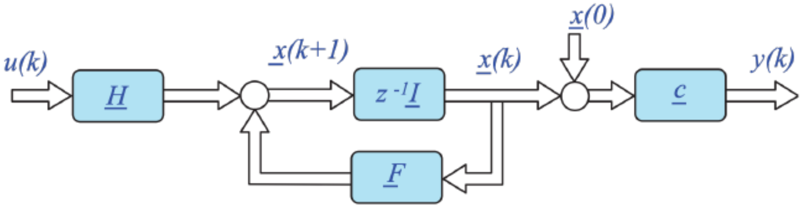
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

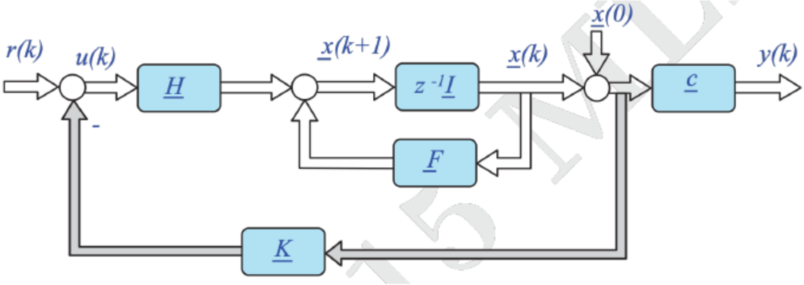
Controle por Realimentação de Estados Discretos

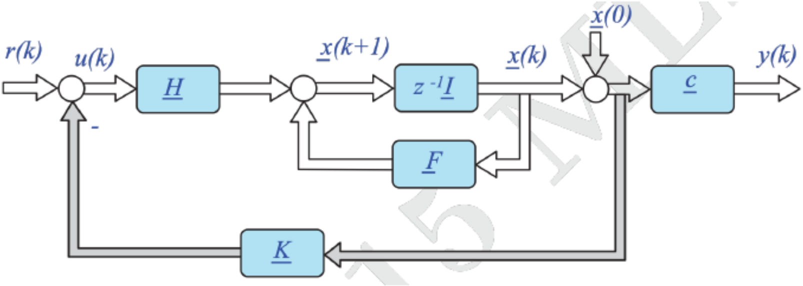
Capítulo 9

$$
\begin{cases}
\underline{\mathsf{x}}(k+1) = \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k), \\
\underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k).
\end{cases}
$$




u(k)
H
x(k+1)
z -1I
x(k)
x(0)
c
y(k)
F


r(k)
u(k)
H
x(k+1)
z -1I
x(k)
x(0)
c
y(k)
F
-
K



$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = (\underline{F} - \underline{H}\ \underline{K})\underline{x}(k) + \underline{H}\ \underline{r}(k), \\ \underline{y}(k) = \underline{c}\ \underline{x}(k). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = (\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}})\underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{r}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k). \end{cases}$$

A equação característica é dada por:

$$\mathsf{det}[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = 0.$$

O ganho é um vetor:

$$\underline{\mathsf{K}} = \begin{bmatrix} k_m & k_{m-1} & k_{m-2} & \dots & k_2 & k_1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = (\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}})\underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{r}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k). \end{cases}$$

Para um sistema na forma canônica controlável:

$$\underline{\mathsf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_m + k_m) & -(a_{m-1} + k_{m-1}) & \dots & -(a_1 + k_1) \end{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{\mathsf{r}}(k).$$

Para um sistema na forma canônica controlável:

$$\underline{\mathsf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_m + k_m) & -(a_{m-1} + k_{m-1}) & \dots & -(a_1 + k_1) \end{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{\mathsf{r}}(k).$$

A equação característica é dada por:

$$\mathsf{det}[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = 0,$$

$$(a_m + k_m) + (a_{m-1} + k_{m-1})z + \ldots + (a_1 + k_1)z^{m-1} + z^m \equiv$$

$$\equiv \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \ldots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m,$$

onde $k_i = \alpha_i - a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Portanto, se a equação característica desejada for especificada:

$$\alpha_m + \alpha_{m-1} z + \ldots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m = 0,$$

encontra-se os ganhos do controlador:

$$k_i = \alpha_i - a_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Projeto por alocação de polos

Especifica-se os polos desejados para o sistema realimentado:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = (z + z_1)(z + z_2)\ldots(z + z_m).$$

Encontra-se os valores de alpha, expandindo a equação em função dos polos:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \ldots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m.$$

Para o sistema na forma canônica controlável, encontra-se os ganhos do controlador aplicando:

$$k_i = \alpha_i - a_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Projeto por alocação de polos

Especifica-se os polos desejados para o sistema realimentado:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = (z + z_1)(z + z_2)\ldots(z + z_m).$$

Com o auxílio do Matlab é possível usar o comando "acker" ou "place" fornecendo os polos desejados e as matrizes $\underline{\mathsf{F}}$ e $\underline{\mathsf{H}}$.

No Scilab, o comando equivalente é "ppol".

Neste caso, o sistema não precisa estar na forma canônica controlável.

Projeto para obter solução que equivale a um Dead-Beat

Na solução que equivale ao Dead-Beat, a equação característica é:

$$\det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{H}\ \underline{K}] = z_m.$$

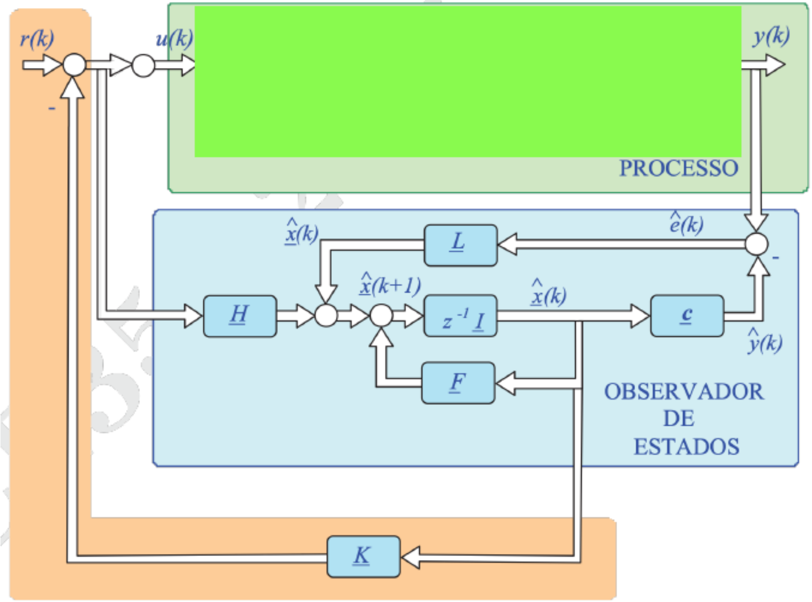
Portanto, todos os polos são zero.

Para o sistema na forma canônica controlável:

$$k_i = -a_i.$$

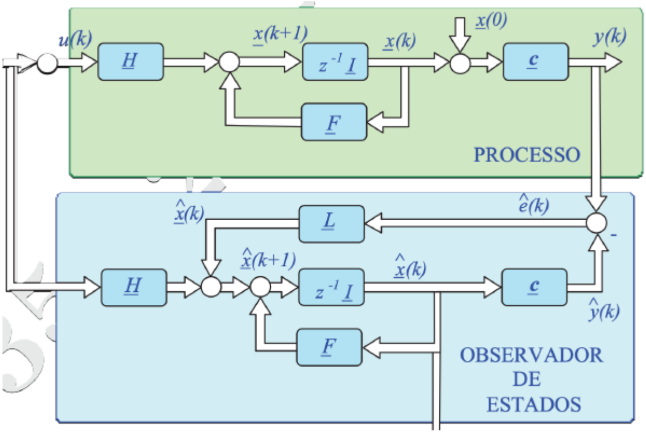
Observadores de estado

Capítulo 9


r(k)
u(k)
y(k)
PROCESSO
x̂(k)
L
ê(k)
x̂(k+1)
x̂(k)
H
z^{-1} I
c
ŷ(k)
F
OBSERVADOR
DE
ESTADOS
K

Assumindo que u e y podem ser medidos, e que a saída esperada ($\hat{y}(k)$) pode ser calculada pelo modelo:

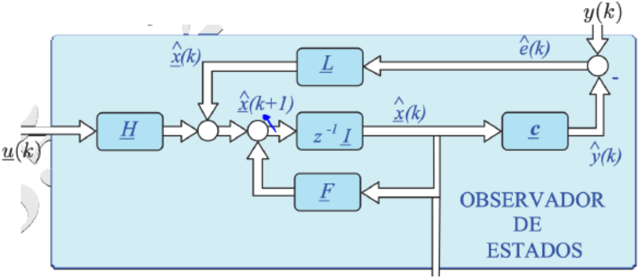
$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k), \\ \Delta\hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k). \end{cases}$$



A matriz de ponderação $\underline{\mathsf{L}}$ é usada para gerar uma correção do vetor de estados a partir do erro na saída. Essa matriz deve ser escolhida de forma que $\hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) \rightarrow \underline{\mathsf{x}}(k+1)$.

$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k), \\ \Delta\hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}\Delta\hat{e}(k), \\ &= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}(y(k) - \underline{\mathsf{c}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k)). \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
\underline{\mathsf{x}}(k+1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k), \\
\hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}\Delta\hat{e}(k), \\
&= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}(y(k) - \underline{\mathsf{c}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k)).
\end{aligned}
$$

Definindo:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \underline{\mathsf{x}}(k+1) - \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1), \\
\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \left[\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}\right]\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k).
\end{aligned}
$$

Deseja-se que:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k) = 0.$$

Isso significa que o sistema $\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k)$ deve ser estável.

$$\underline{\tilde{x}}(k+1) = \left[\underline{F} - \underline{L}\ \underline{c}\right]\underline{\tilde{x}}(k).$$

Equação característica:

$$\det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{L}\ \underline{c}] = (z + z_1)(z + z_2)\ldots(z + z_m) =$$
$$= \gamma_m + \gamma_{m-1}z + \ldots + \gamma_1 z^{m-1} + z^m = 0,$$

com polos z_i dentro do círculo unitário.

Pode-se escolher uma dinâmica para o observador que pode ter uma resposta rápida do tipo Dead-beat, por exemplo.

Equação característica do controlador por realimentação de estados:

$$\text{det}[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = 0.$$

Equação característica do observador de estados:

$$\text{det}[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}] = 0.$$

Para obter a matriz $\underline{\mathsf{L}}$, não podemos usar os comandos *place*, *acker*, ou *ppol* da mesma forma que foi usado para obter $\underline{\mathsf{K}}$, pois a ordem de $\underline{\mathsf{K}}$ e $\underline{\mathsf{L}}$ estão trocadas nas equações acima.

Obtenção da matriz $\underline{\mathsf{L}}$

Dado que o determinante de uma matriz $\underline{\mathsf{W}}$ é igual ao determinante de sua transposta $\underline{\mathsf{W}}^T$, vale então:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}] = \det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}}^T + \underline{\mathsf{c}}^T\underline{\mathsf{L}}^T].$$

Portanto, agora comparando com a equação característica do controlador por realimentação de estados:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = 0.$$

Para obter a matriz $\underline{\mathsf{L}}$, basta substituir no comando *acker*, *place*, ou *ppol*:
$\underline{\mathsf{F}}$ por $\underline{\mathsf{F}}^T$, $\underline{\mathsf{H}}$ por $\underline{\mathsf{c}}^T$, e $\underline{\mathsf{K}}$ por $\underline{\mathsf{L}}^T$.

Obtenção da matriz $\underline{\mathsf{L}}$

$$
\begin{aligned}
\underline{\hat{\mathsf{x}}}(k+1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\hat{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}\Delta\hat{e}(k),\\
&= \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\hat{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}(y(k) - \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\hat{\mathsf{x}}}(k)).\\
&= [\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}]\underline{\hat{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{y}}(k).
\end{aligned}
$$

Usando a forma canônica observável do sistema:

$$
\underline{\hat{\mathsf{x}}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -(a_m + l_m) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -(a_{m-1} + l_{m-1}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -(a_{m-2} + l_{m-2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -(a_1 + l_1) \end{bmatrix} \underline{\hat{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \begin{bmatrix} l_m \\ l_{m-1} \\ l_{m-2} \\ \vdots \\ l_1 \end{bmatrix} \underline{\mathsf{y}}(k).
$$

A equação característica fica:

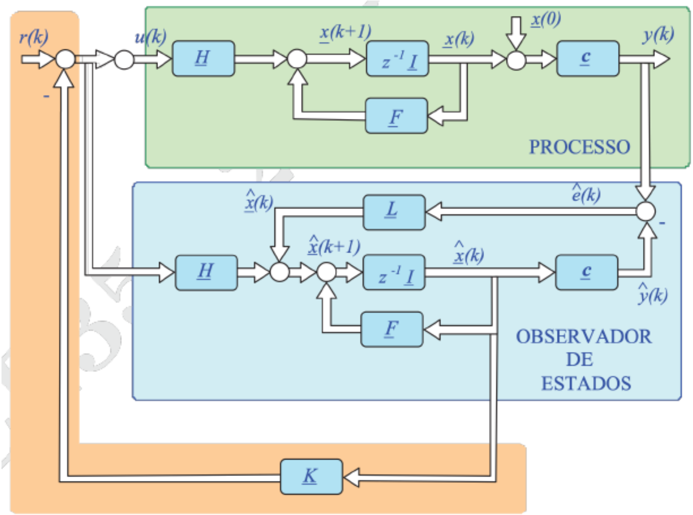
$$
\begin{aligned}
&\mathsf{det}[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}] = 0,\\
&(a_m + l_m) + (a_{m-1} + l_{m-1})z + \ldots + (a_1 + l_1)z^{m-1} + z^m \equiv\\
&\qquad \equiv \gamma_m + \gamma_{m-1}z + \ldots + \gamma_1 z^{m-1} + z^m.
\end{aligned}
$$

Portanto os valores de L podem ser encontrados:

$$
l_i = \gamma_i - a_i, \qquad i = 1, \ldots, n.
$$

Para encontrar a solução com comportamento Dead-beat, basta fazer os valores de gama iguais a zeros.

Controlador de estados com observador de estados



Controlador de estados com observador de estados

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \hat{\underline{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{F} & (-\underline{H}\ \underline{K}) \\ \underline{L}\ \underline{c} & (\underline{F} - \underline{H}\ \underline{K} - \underline{L}\ \underline{c}) \end{bmatrix}}_{\underline{F}^*} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \hat{\underline{x}}(k) \end{bmatrix},$$

$$\underline{y}(k) = \underline{c}\ \underline{x}(k).$$

Equação característica para sistema completo:

$$\det[z\underline{I} - \underline{F}^*] = \det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{H}\ \underline{K}] \times \det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{L}\ \underline{c}].$$

Para observador e controlador com comportamento Dead-beat:

$$\det[z\underline{I} - \underline{F}^*] = z^m z^m = z^{2m}.$$

No projeto do controlador por realimentação de estados observados, é importante que a dinâmica do observador seja mais rápida que a dinâmica do controlador.

Intuitivamente, o observador converge mais rápido para a estimativa correta dos estados. Isso permite a convergência do controlador (mais lento) para o valor desejado utilizando a estimativa correta dos estados (que rapidamente é obtida).

Exemplo 1

No exemplo a seguir é ilustrado o controle de estados com observador de estados realizado no Simulink. O processo considerado, de duas entradas e duas saídas, é descrito pela sua formulação contínua no espaço de estados como sendo:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = 0$$

O processo deverá ser controlado e observado por uma estrutura digital operando com uma frequência de 4 Hz. Os polos desejados para o Controlador e para o Observador de Estados para o caso contínuo, são dados respectivamente por:

$$\underline{p}_{D\_Con} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \end{bmatrix} \qquad \underline{p}_{D\_Obs} = \begin{bmatrix} -9 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

Observe que neste caso a dinâmica do Observador foi designada ligeiramente mais rápida que a desejada para a dinâmica do Controle, pois os polos desejados do Observador se encontram um pouco mais distantes da origem (do plano-s) do que os polos do Controle.

Exemplo 1 (cont.)

Solução :

A primeira etapa envolve a discretização do processo e dos polos desejados segundo o tempo de amostragem dado. Desta forma o processo discretizado resulta:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9892 & 0,2294 & 0,0191 \\ -0,1143 & 0,7796 & 0,1151 \\ -0,6907 & -1,3805 & 0,0889 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1,2493 & 0,0616 \\ -0,0108 & 0,4779 \\ -0,1143 & -0,3257 \end{bmatrix}$$

sendo $\underline{C}$ e $\underline{D}$ inalterados. Os polos desejados em ambos os casos são discretizados pela relação de definição $z = e^{T_0 s}$ e obtidos como sendo:

$$\underline{p}_{D\_Con} = \begin{bmatrix} 0,2865 & 0,2231 & 0,2231 \end{bmatrix} \quad \underline{p}_{D\_Obs} = \begin{bmatrix} 0,1054 & 0,0821 & 0,0821 \end{bmatrix}$$

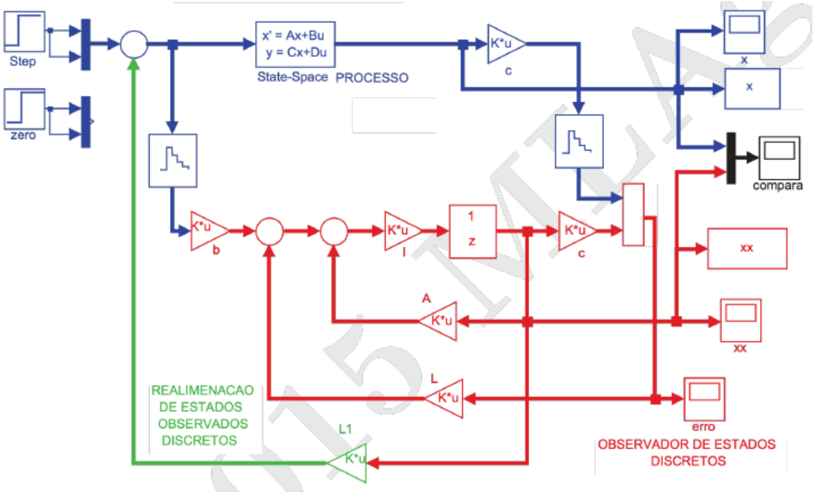
Na versão discreta, observa-se que os polos mais rápidos do Observador apresentam módulo menor que o módulo dos polos do Controlador.
Com o comando `place` do Matlab e usando-se as matrizes $\underline{F}$ e $\underline{c}$ transpostas e o vetor de polos desejados acima, obtém-se o vetor $\underline{\mathbf{L}}$ do Observador como sendo:

$$\underline{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1,1334 & 0,5645 & -2,0723 \\ 0.9067 & -0,1170 & -0,6908 \end{bmatrix}^T$$

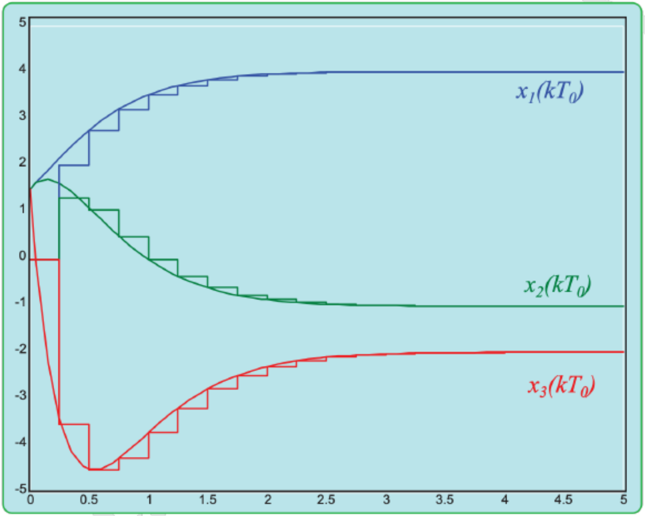
Exemplo 1 (cont.)

Com o mesmo comando `place` do Matlab e usando-se as matrizes $\underline{F}$ e $\underline{H}$ mais o vetor de polos desejados para a estrutura controlada, obtém-se o vetor $\underline{\mathbf{K}}$ do Controlador como sendo:

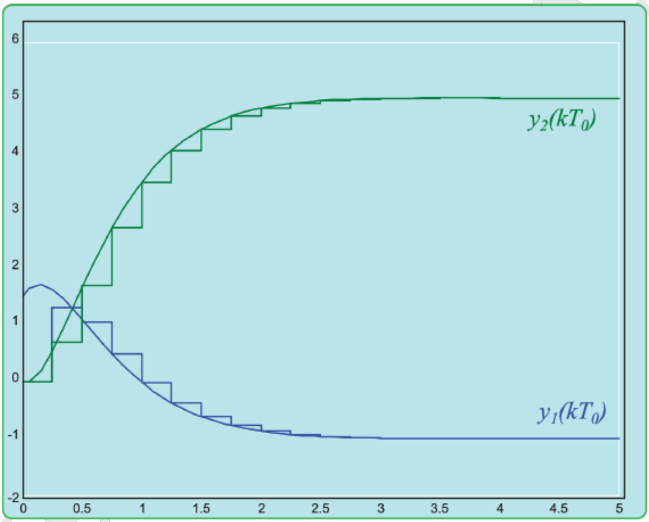
$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 3,4071 & 1.3233 & 0,0572 \\ -0,3231 & 0,8119 & 0,2199 \end{bmatrix}$$



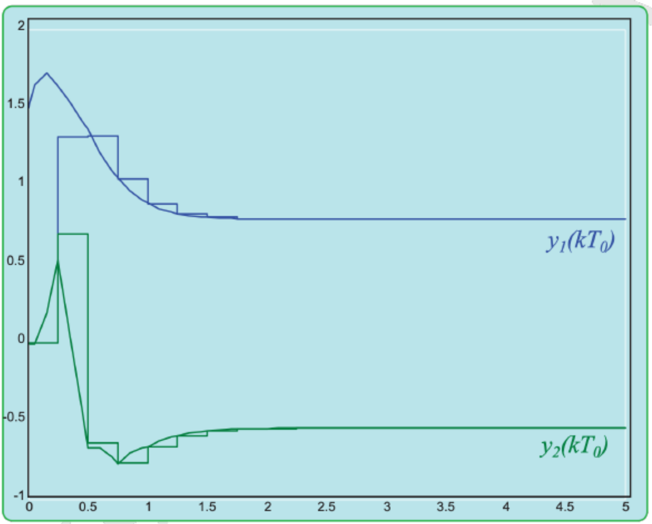
Step
zero
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space
PROCESSO
K*u
c
x
x
compara
K*u
b
K*u
I
1
z
K*u
c
xx
A
K*u
xx
L
K*u
erro
L1
K*u
REALIMENACAO
DE ESTADOS
OBSERVADOS
DISCRETOS
OBSERVADOR DE ESTADOS
DISCRETOS



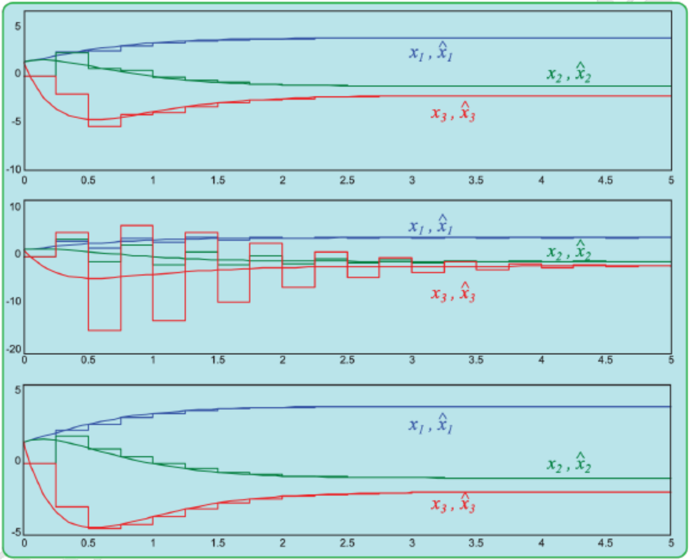
Resposta dos estados em malha aberta (contínuo e discreto) à uma entrada degrau.



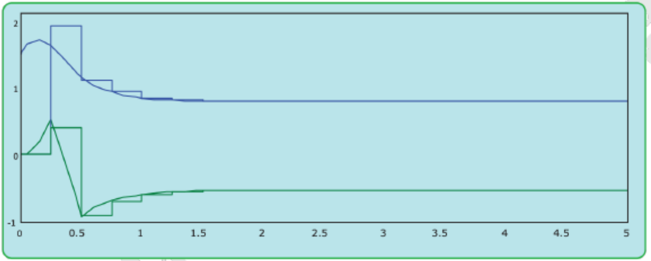
Resposta do processo em malha aberta (contínuo e discreto):
$u = [1 \;\; 1]^T$.



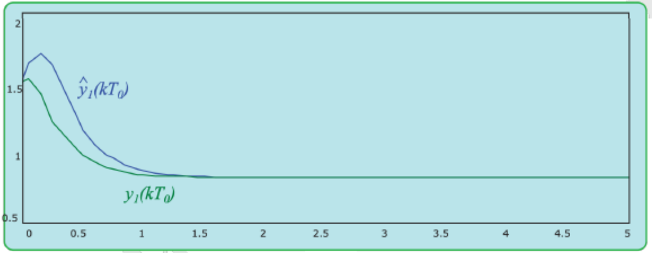
Resposta do processo em malha aberta (contínuo e discreto):
$u = [1 \;\; 1]^T$.



Resultados do observador com diferentes dinâmicas de convergência: (a) lenta; (b) muito lenta; (c) rápida.



(a)



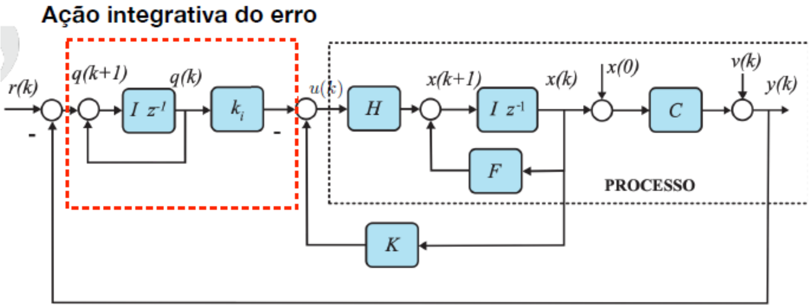
(b)

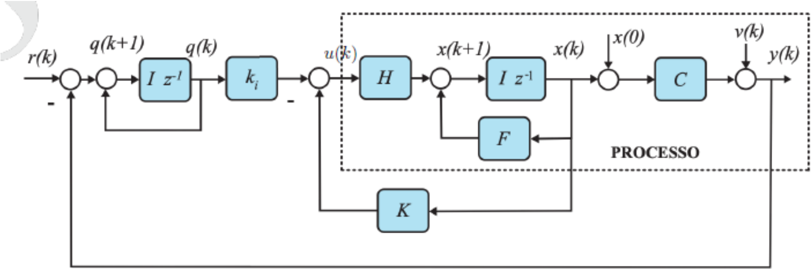
Desempenho do controle por realimentação de estados observados: (a) resposta das saídas $y_1(k)$ e $y_2(k)$ com realimentação de estados observados; (b) comparação da saída $y_1(k)$ em relação à realimentação de estados reais (verde) e observados (azul).

Controle de Servomecanismo com Realimentação de Estados

Capítulo 9

Controle de posição em que se deseja que o erro seja nulo entre a referência degrau e a saída controlada.





$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = \left(\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}\right) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}_i\ \underline{\mathsf{q}}(k), \\ \underline{\mathsf{q}}(k+1) = \underline{\mathsf{I}}\ \underline{\mathsf{q}}(k) + \underline{\mathsf{r}}(k) - \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k). \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k+1) \\ \underline{\mathsf{q}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}\right) & \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}_i \\ -\underline{\mathsf{c}} & \underline{\mathsf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) \\ \underline{\mathsf{q}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{0}} \\ \underline{\mathsf{I}} \end{bmatrix} \underline{\mathsf{r}}(k).$$

$$\begin{bmatrix}\underline{x}(k+1)\\ \underline{q}(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(\underline{F}-\underline{H}\ \underline{K}\right) & \underline{H}\ \underline{K}_i\\ -\underline{c} & \underline{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}(k)\\ \underline{q}(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}\underline{r}(k).$$

Como: $u(k) = \underline{K}_i\ \underline{q}(k) - \underline{K}\ \underline{x}(k)$, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix}\underline{x}(k+1)\\ \underline{q}(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{F} & \underline{0}\\ -\underline{c} & \underline{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}(k)\\ \underline{q}(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{H}\\ \underline{0}\end{bmatrix}u(k) + \begin{bmatrix}\underline{0}\\ \underline{I}\end{bmatrix}\underline{r}(k),$$

$$\underline{x}'(k+1) = \underline{F}'\underline{x}'(k) + \underline{H}'u(k) + \underline{G}'\underline{r}(k).$$

Considerando $\underline{u}(k) = \underline{K}'\underline{x}'$ ou

$$\underline{u}(k) = \begin{bmatrix}-\underline{K} & \underline{K}_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}(k)\\ \underline{q}(k)\end{bmatrix}.$$

$\underline{x}'(k+1) = \underline{F}'\underline{x}'(k) + \underline{H}'u(k) + \underline{G}'\underline{r}(k).$

Considerando $\underline{u}(k) = \underline{K}'\underline{x}'$ ou

$$\underline{u}(k) = \begin{bmatrix} -\underline{K} & \underline{K}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{q}(k) \end{bmatrix},$$

chegamos a:

$$\underline{x}'(k+1) = (\underline{F}' + \underline{H}'\ \underline{K}')\underline{x}'(k) + \underline{G}'\underline{r}(k).$$

Essa expressão é a mesma obtida para o controle por realimentação de estados. Portanto podemos aplicar o comando *place*, *acker*, ou *ppol* para as matrizes $\underline{F}'$ e $\underline{H}'$, e utilizar o valor de $\underline{K}'$ obtido.

Exemplo 2

Realimentação de Estados com Ação Integrativa
Considere o processo descrito no espaço de estados (contínuo) a seguir e investigue uma solução de controle de realimentação de estados e uma ação integrativa para garantir erro de posição nulo da saída controlada. Neste caso um tempo amostragem de 0.5 seg deve ser usado e os polos desejados do processo controlado foram escolhidos para garantir uma reposta dinâmica com sobresinal de 15% em 2.6 seg.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = 0$$

$$Polos\_desejados \qquad \Rightarrow \qquad s_{1,2,3} = \Big[-0,5 \pm 0,22i \quad -2 \Big]$$

Solução : Para este caso, o ideal é processar toda solução no domínio do tempo discreto. Tomando-se todos os dados com devidas discretizações, obtém-se:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 \end{bmatrix} \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 (cont.)

Solução : Para este caso, o ideal é processar toda solução no domínio do tempo discreto. Tomando-se todos os dados com devidas discretizações, obtém-se:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 \end{bmatrix} \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e os respectivos polos desejados, mapeados no plano-Z resultam:

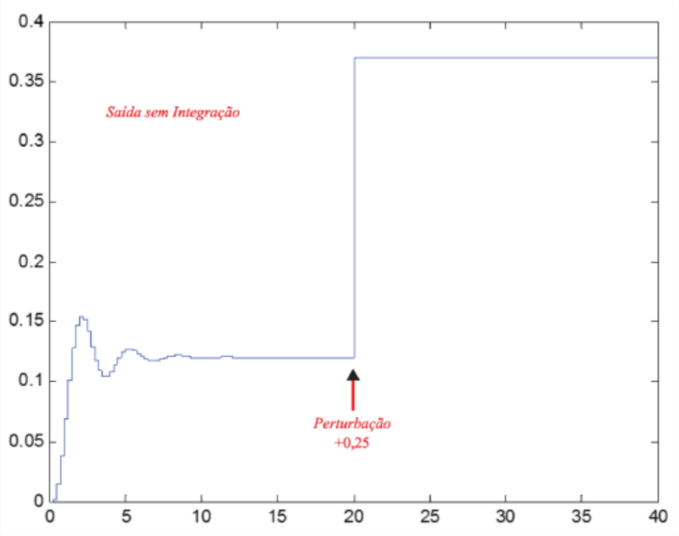
$$P_d \qquad \Rightarrow \qquad z_{1,2,3} = \begin{bmatrix} 0,4208 \pm 0,6553i & 0,8896 \end{bmatrix}$$

Para o processo com uma simples realimentação de estados, alocando-se a dinâmica de acordo com os polos desejados, obtém-se com o comando `place` ou `acker`, o ganho de realimentação dado por:

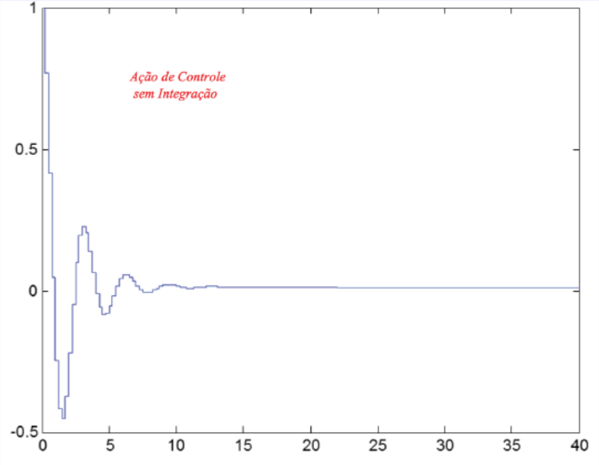
$$\underline{\mathbf{K}} = \mathtt{place}(\underline{F},\ \underline{h},\ \underline{P}_d) = \begin{bmatrix} 7,6767 & 5,6483 & 0,8896 \end{bmatrix}$$

Para este caso a resposta obtida da saída e da devida ação de controle é indicada a seguir.

Exemplo 2 (cont.)



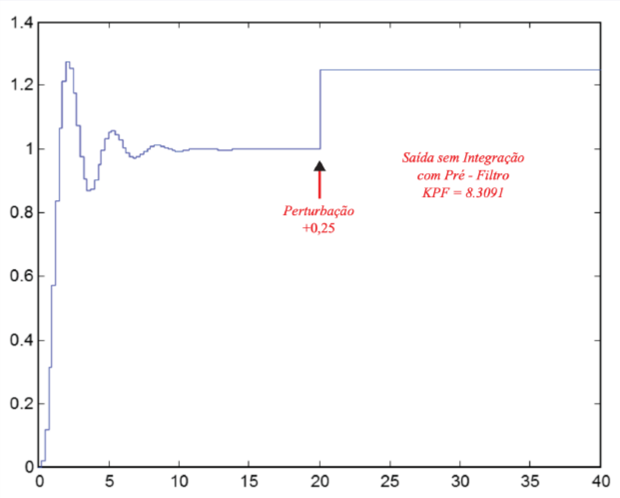
Exemplo 2 (cont.)



Observa-se nesse caso, como já alertado anteriormente, que a saída apresenta a dinâmica desejada, porém com elevado erro de posição ou erro de regime para entrada degrau.

Exemplo 2 (cont.)

Inserindo-se um ganho de pré-filtro com valor apropriado para escalonar a referência de entrada, pode-se obter o resultado a seguir.



Exemplo 2 (cont.)

Como visto o Pré-Filtro ou escalonamento da entrada só atua na correção da saída relativa ao tero de entrada e não consegue eliminar eventuais erros de perturbação.

A correção automática destas situações é conseguida com a inclusão de uma ação integrativa atuando sobre a saída em forma de uma realimentação adicional. Para a solução, deve-se prepara no novo modelo com a inclusão desta ação integrativa, tal como ilustrado a seguir.

$$\underline{F}' = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 & 0 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 & 0 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{H}' = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para este novo processo, deve se especificar um polo desejado adicional para se obter a solução com o comando `place` ou `acker`. Para não se afetar a dinâmica desejada inicialmente escolhe-se a alocação deste polo adicional de forma que não afete a dominância da dinâmica desejada. Para isto, no plano-S basta alocar o polo adicional distante do eixo imaginário e no plano-Z próximo a origem. Admitindo-se no plano-S o quarto polo em -8, equivale no plano-Z com $T_0 = 0.5$ seg. a $z = 0.0183$. Assim os polos desejados do novo sistema serão:

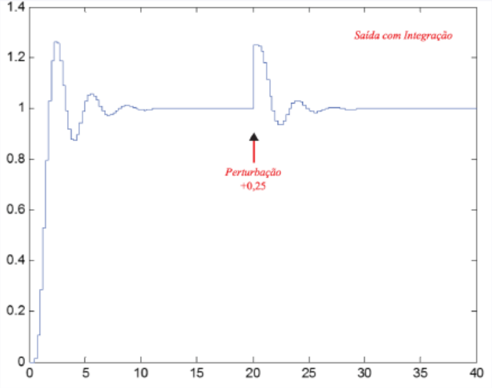
$$P_d' = \begin{bmatrix} P_d & 0,0183 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 (cont.)

Usando o comando indicado, obtém o novo ganho de realimentação como sendo:

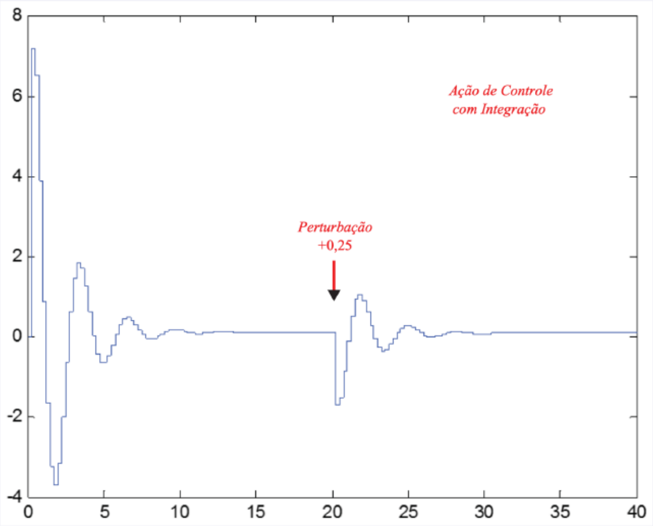
$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}' &= \left[\underline{\mathbf{K}} \quad \underline{\mathbf{K}}_i\right] = \texttt{place}(\underline{F}', \ \underline{h}', \ \underline{P}_d') \\ &= \left[22,7384 \quad 10,4322 \quad 2,5338 \quad -7,6343\right] \end{aligned}$$

Com esta estrutura de realimentado de estados mais a ação integrativa, o resultado do processo passa a ser tal como na figura a seguir.



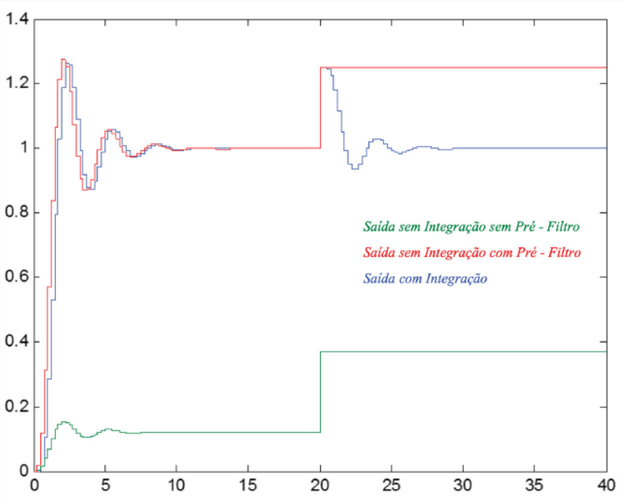
Verifica-se que a saída atendeu as expectativas de dinâmica e de regime com erro nulo. A ação de controle $u(k)$ passa a ser muito diferente neste caso e pode ser vista a seguir.

Exemplo 2 (cont.)



Exemplo 2 (cont.)

A figura a seguir ilustra os três casos simultaneamente para efeito de comparação.



Controlabilidade e Observabilidade

Definição de controlabilidade

Um sistema será dito controlável se existir uma única sequência de ação de controle ou excitação $u(k)$ que seja capaz de levar o sistema do estado inicial $x(0)$ para um estado final $x(N)$ em um tempo finito N.
A sequência desejada $u(k)$ é tal que:

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathsf{x}}(1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(0) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(0),\\
\underline{\mathsf{x}}(2) &= \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(1) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(1) = \underline{\mathsf{F}}^2\ \underline{\mathsf{x}}(0) + \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(0) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(1),\\
&\vdots\\
\underline{\mathsf{x}}(k) &= \underbrace{\underline{\mathsf{F}}^k\ \underline{\mathsf{x}}(0)}_{\text{S. homogênea}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \underline{\mathsf{F}}^{i-1}\underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k-i)}_{\text{S. Particular}}.
\end{aligned}
$$

Para o instante N, a equação acima pode ser escrita como

$$
\underline{\mathsf{X}}(N) = \underline{\mathsf{F}}^N\ \underline{\mathsf{x}}(0) + \begin{bmatrix}\underline{\mathsf{H}} & (\underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}}) & (\underline{\mathsf{F}}^2\ \underline{\mathsf{H}}) & \dots & (\underline{\mathsf{F}}^{N-1}\ \underline{\mathsf{H}})\end{bmatrix} \underline{\mathsf{U}}_N,
$$

com

$$
\underline{\mathsf{U}}_N = \begin{bmatrix} u(N-1) & u(N-2) & u(N-3) & \dots & u(0)\end{bmatrix}^T.
$$

$$\underline{\mathsf{X}}(N) = \underline{\mathsf{F}}^N \, \underline{\mathsf{x}}(0) + \left[\underline{\mathsf{H}} \quad (\underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}}) \quad (\underline{\mathsf{F}}^2\ \underline{\mathsf{H}}) \quad \ldots \quad (\underline{\mathsf{F}}^{N-1}\ \underline{\mathsf{H}})\right] \underline{\mathsf{U}}_N,$$

com

$$\underline{\mathsf{U}}_N = \left[u(N-1) \quad u(N-2) \quad u(N-3) \quad \ldots \quad u(0)\right]^T.$$

Se a ordem do sistema é m, uma solução única para a sequência $\underline{\mathsf{U}}_N$ é obtida se $N = m$, tal que:

$$\underline{\mathsf{U}}_m = \underline{\mathsf{Q}}_S^{-1}\left(\underline{\mathsf{X}}(m) - \underline{\mathsf{F}}^m \, \underline{\mathsf{x}}(0)\right),$$
$$\underline{\mathsf{Q}}_S = \left[\underline{\mathsf{H}} \quad (\underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}}) \quad (\underline{\mathsf{F}}^2\ \underline{\mathsf{H}}) \quad \ldots \quad (\underline{\mathsf{F}}^{N-1}\ \underline{\mathsf{H}})\right].$$

A matriz de controlabilidade $\underline{\mathsf{Q}}_S$ definida acima será inversível se

$$\mathsf{det}\{\underline{\mathsf{Q}}_S\} \neq 0, \quad \mathsf{ou} \quad \mathsf{Rank}\{\underline{\mathsf{Q}}_S\} = m.$$

Para $N < m$, não haverá solução para o sistema linear definido por $\underline{\mathsf{U}}_m$ e $\underline{\mathsf{Q}}_S$. E se $N > m$, haverá múltiplas soluções.

Definição de observabilidade

Um sistema é dito observável se a partir do conhecimento de uma sequência de saída $y(k)$, $y(k+1)$, ..., $y(k+N-1)$, e de uma sequência de entrada $u(k)$, $u(k+1)$, ..., $u(k+N-1)$, é possível encontrar o vetor de estado $x(k)$ em um instante qualquer.
Neste caso, o ponto de partida é a equação de saída de estado:

$$y(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k).$$

Com auxílio de $\underline{\mathsf{x}}(k+1) = \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ u(k)$, podemos escrever:

$$\begin{cases} y(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k), \\ y(k+1) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{H}}\ u(k), \\ \vdots \\ y(k+N-1) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^{N-1}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{H}} & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}} & \ldots & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^{N-2}\ \underline{\mathsf{H}} \end{bmatrix} \underline{\mathsf{U}}_N^*, \end{cases}$$

com

$$\underline{\mathsf{U}}_N^* = \begin{bmatrix} u(k+N-1) & u(k+N-2) & \ldots & u(k+1) & u(k) \end{bmatrix}^T.$$

Se a sequência de entrada $\underline{\mathsf{U}}_N^*$ é conhecida, uma solução única para os m elementos do vetor $\underline{\mathsf{x}}(k)$ só será possível se existirem m equações no sistema definido por $y(k)$, $y(k+1)$, …, $y(k+N-1)$, ou seja, $N=m$ e tal que:

$$\underline{\mathsf{Y}}_m = \underline{\mathsf{Q}}_B \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{S}}\ \underline{\mathsf{U}}_m^*,$$

com

$$\underline{\mathsf{Y}}_m = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \dots & u(k+m-2) & u(k+m-1) \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{\mathsf{U}}_m^* = \begin{bmatrix} u(k+m-1) & u(k+m-2) & \dots & u(k+1) & u(k) \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{\mathsf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}} & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}} & \dots & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^{m-2}\ \underline{\mathsf{H}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathsf{Q}}_B = \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{c}} & (\underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}) & (\underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^2) & \dots & (\underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^{m-1}) \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\mathsf{Y}}_m = \underline{\mathsf{Q}}_B\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{S}}\ \underline{\mathsf{U}}_m^*.$$

Portanto, o estado genérico $\underline{\mathsf{x}}(k)$ no instante k será conhecido pela expressão:

$$\underline{\mathsf{x}}(k) = \underline{\mathsf{Q}}_B^{-1} \left(\underline{\mathsf{Y}}_m - \underline{\mathsf{S}}\ \underline{\mathsf{U}}_m^* \right),$$

se a matrix de observabilidade $\underline{\mathsf{Q}}_B$ for inversível, ou seja, se

$$\det\{\underline{\mathsf{Q}}_B\} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{Rank}\{\underline{\mathsf{Q}}_B\} = m.$$