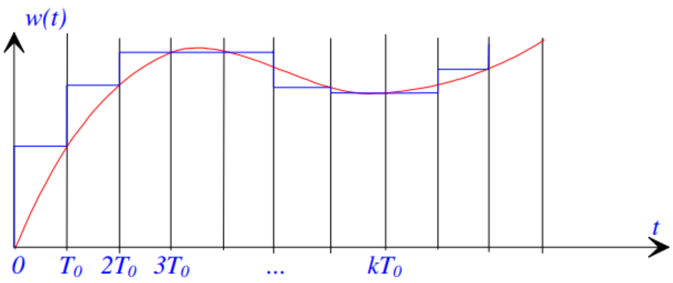
lista 1 - controle digital

1. Exercícios apostila antiga

a) Refazer o procedimento para obter a função discreta em forma recursiva para o seguinte caso. Compare com os resultados do exemplo da página 17.



Em forma discreta, nosso caso terá a seguinte função:

$$x(kT_0) = \frac{1}{T_1}\sum_{v=1}^{k} T_0\omega(vT_0)$$

Importante notar que não alteramos somente o valor final de $k-1$ para k, alteramos também o valor inicial, já que, para casos onde $\omega(0) \neq 0$ estaríamos contabilizando a área entre $-1T_0$ e 0.
Para o período de amostragem seguinte, podemos seguir o padrão e montar a seguinte expressão:

$$x((k+1)T_0) = \frac{1}{T_1}\sum_{v=1}^{k+1} T_0\omega(vT_0)$$

Visando obter a expressão recursiva $x_T(t) = x(kT_0)$ subtraímos a última equação da primeira:

$$x((k+1)T_0) - x(kT_0) = \frac{T_0}{T_1}\omega((k+1)T_0)$$

Aplicando a normalização $kT_0 = k$:

$$x(k+1) - x(k) = \frac{T_0}{T_1}\omega(k+1)$$

Adotando $k+1 = k$, $b_1 = \frac{T_0}{T_1}$ e $a_1 = -1$:

$$x(k) + a_1x(k-1) = b_1\omega(k)$$

Nessa situação, em contrates com o outro resultado, temos um sistema que depende da entrada no mesmo instante da saída.

b) Obter a Transformada Z para $x(t) = a^t$

Primeiro passamos a função contínua $x(t) = a^t$ para sua versão discreta: $x_T(t) = x(kT_0) = a^{kT_0}$, pela definição da transformada Z, obtemos $x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)z^{-k} = [1 + (a^{-T_0}z)^{-1} + (a^{-T_0}z)^{-2} + (a^{-T_0}z)^{-3} + \ldots]$ aplicando séries geométricas $\frac{1}{1-(a^{-T_0}z)^{-1}} = \frac{z}{z-a^{T_0}}$. O que condiz com a Tabela de Transformadas $e^{-at} \xrightarrow{z} \frac{z}{z-e^{-at}}$.

c) Obter a Transformada Z para $x(t) = sen(\omega_1 t)$

$x_T(t) = x(kT_0) = \sin(\omega_1 kT_0)$ de modo que pela transformada Z podemos chegar a: $x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\omega_1 kT_0)z^{-k}$

~~Tem que fazer muita prova pra chegar no cara certo KKKKKKKKKKKKKKKKKKKKKKKK~~
Pela Tabela chegamos a $\frac{z\sin(\omega_1 T_0)}{z^2 - 2z\cos(\omega_1 T_0) + 1}$.

d) Obter a Transformada Z para a sequência $x(kT_0) = 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, \ldots$

$x(z) = [z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}] = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^3}$

e) Obter a Transformada Z Inversa para os seguintes casos, sendo $T_0 = 1$. Avalie o valor final $x(k)\Big|_{k\to\infty}$, o valor inicial $x(k)\Big|_{k\to 0}$ e $k =_0 /^{10}$ (iterações nos instantes discretos de 0 a 10):

i - Use o método da Divisão Contínua até o quinto termo: $X(z) = \dfrac{1.6z^2 - 0.8}{z^3 - 2.6z^2 - 2.2z - 0.6}$

Primeiro igualamos a ordem dos polinômios do denominador e numerador de modo que: $N(z) = 0z^3 + 1.6z^2 + 0z - 0.8$ e $D(z) = z^3 - 2.6z^2 - 2.2z - 0.6$ e assim podemos iniciar nossa divisão polinomial $\frac{N(z)}{D(z)}$.

Para usar a tabela abaixo pense o seguinte: preciso zerar o termo de maior ordem de N utilizando R, que é a multiplicação entre D e M. Como inicio tento um valor de N e um valor de D, vou precisar encontrar um valor de M para que o termo de maior ordem de N e R sejam iguais e eu possa fazer a subtração $N - R$.

#	N	D	M	R
1	$0z^3 + 1.6z^2 + 0z - 0.8$	$z^3 - 2.6z^2 - 2.2z - 0.6$	0	$0z^3 + 0z^2 + 0z + 0$
2	$1.6z^2 + 0z - 0.8$	$z^3 - 2.6z^2 - 2.2z - 0.6$	$1.6z^{-1}$	$1.6z^2 - 4.16z - 3.52 - 0.96z^{-1}$
3	$4.16z + 2.72 + 0.96z^{-1}$	$z^3 - 2.6z^2 - 2.2z - 0.6$	$4.16z^{-2}$	$4.16z - 10.816 - 9.152z^{-1} - 2.496z^{-2}$
4	$13.536 + 10.112z^{-1} + 2.496z^{-2}$	$z^3 - 2.6z^2 - 2.2z - 0.6$	$13.536z^{-3}$	$13.536 - 35.1936z^{-1} - 29.7792z^{-2} - 8.1216z^{-3}$
5	$45.3056z^{-1} + 32.2752z^{-2} + 8.1216z^{-3}$	$z^3 - 2.6z^2 - 2.2z - 0.6$	$45.3056z^{-4}$	

Assim, obtemos:

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$
0	1.6	4.16	13.536	45.3056

Derivando a equação diferença, para isso precisamos primeiro dividir em cima e embaixo por z^3 para escrever o polinômio em função de z^{-1} :

$$X(z) = \frac{1.6z^{-1} - 0.8z^{-3}}{1 - 2.6z^{-1} - 2.2z^{-2} - 0.6z^{-3}}$$

Em seguida, fazemos a multiplicação cruzada:

$$X(z) \cdot (1 - 2.6z^{-1} - 2.2z^{-2} - 0.6z^{-3}) = 1.6z^{-1} - 0.8z^{-3}$$

Como $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$, podemos reescrever nossa equação de diferença como:

$$(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}) \cdot (1 - 2.6z^{-1} - 2.2z^{-2} - 0.6z^{-3}) = 1.6z^{-1} - 0.8z^{-3}$$

E aplicando a convolução no domínio do tempo teremos, do lado esquerdo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - 2.6\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k-1} - 2.2\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k-2} - 0.6\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k-3} = \sum_{k=0}^{\infty}[x(k) - 2.6x(k-1) - 2.2x(k-2) - 0.6x(k-3)]z^{-k}$$

E do lado direito:

$$1.6z^{-1} - 0.8z^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty}[1.6\delta(k-1) - 0.8\delta(k-3)]z^{-k}$$

Como temos de ambos os lados $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$, sabemos que:

$$x(k) - 2.6x(k-1) - 2.2x(k-2) - 0.6x(k-3) = 1.6\delta(k-1) - 0.8\delta(k-3)$$

E por fim:

$$x(k) = 2.6x(k-1) + 2.2x(k-2) + 0.6x(k-3) + 1.6\delta(k-1) - 0.8\delta(k-3)$$

E assim temos nossa equação diferença, com alguns termos já calculados podemos iniciar os cálculos em $x(5)$:

$$x(5) = 2.6x(4) + 2.2x(3) + 0.6x(1) + 1.6\delta(4) - 0.8\delta(2) = 2.6 \cdot 45.3056 + 2.2 \cdot 13.536 + 0.6 \cdot 4.16 + 0.6 \cdot 0 - 0.8 \cdot 0 = 150.06976$$

$$x(6) = 2.6 \cdot 150.06976 + 2.2 \cdot 45.3056 + 0.6 \cdot 13.536 = 497.975296$$

$$x(7) = 2.6 \cdot 497.975296 + 2.2 \cdot 150.06976 + 0.6 \cdot 45.3056 = 1652.0726016$$

$$x(8) = 2.6 \cdot 1652.0726016 + 2.2 \cdot 497.975296 + 0.6 \cdot 150.06976 = 5480.97627136$$

$$x(9) = 2.6 \cdot 5480.97627136 + 2.2 \cdot 1652.0726016 + 0.6 \cdot 497.975296 = 18183.883206656$$

$$x(10) = 2.6 \cdot 18183.883206656 + 2.2 \cdot 5480.97627136 + 0.6 \cdot 1652.0726016 = 60327.4876952576$$

Nossa tabela para $k =_0 /^{10}$ será:

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$
0	1.6	4.16	13.536	45.3056	150.06976	497.975296	1652.0726016	5480.97627136	18183.883206656	60327.4876952576

Além disso temos que o valor inicial $x(k)\Big|_{k\to 0}$ é 0 e o valor final $x(k)\Big|_{k\to\infty}$ é ∞ pois a função visivelmente cresce de forma exponencial.

ii - Use o método da Divisão Contínua até o quinto termo: $X(z) = \dfrac{0.6z}{z^2 - 1.7z + 0.7}$

$N(z) = 0z^2 + 0.6z + 0$ e $D(z) = z^2 - 1.7z + 0.7$

#	N	D	M	R
1	$0z^2 + 0.6z + 0$	$z^2 - 1.7z + 0.7$	0	$0z^2 + 0z + 0$
2	$0.6z$	$z^2 - 1.7z + 0.7$	$0.6z^{-1}$	$0.6z - 1.02 + 0.42z^{-1}$
3	$1.02 - 0.42z^{-1}$	$z^2 - 1.7z + 0.7$	$1.02z^{-2}$	$1.02 - 1.743z^{-1} + 0.714z^{-2}$
4	$1.323z^{-1} - 0.714z^{-2}$	$z^2 - 1.7z + 0.7$	$1.323z^{-3}$	$1.323z^{-1} - 2.2491z^{-2} + 0.9261z^{-3}$
5	$1.5351z^{-2} - 0.9261z^{-3}$	$z^2 - 1.7z + 0.7$	$1.5351z^{-4}$	

Assim, obtemos:

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$
0	0.6	1.02	1.323	1.5351

Derivando a equação diferença, para isso precisamos primeiro dividir em cima e embaixo por z^2 para escrever o polinômio em função de z^{-1} :

$$X(z) = \frac{0.6z^{-1}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.7z^{-2}}$$

Em seguida, fazemos a multiplicação cruzada:

$$X(z) \cdot (1 - 1.7z^{-1} + 0.7z^{-2}) = 0.6z^{-1}$$

Aplicando a convolução do domínio do tempo:

$$x(k) - 1.7x(k-1) + 0.7x(k-2) = 0.6\delta(k-1)$$

Colocando em função de $x(k)$:

$$x(k) = 1.7x(k-1) - 0.7x(k-2) + 0.6\delta(k-1)$$

Iniciando nossos cálculos em $x(5)$:

$$x(5) = 1.7 \cdot 1.5351 - 0.7 \cdot 1.323 = 1.68357$$
$$x(6) = 1.7 \cdot 1.68357 - 0.7 \cdot 1.5351 = 1.787499$$
$$x(7) = 1.7 \cdot 1.787499 - 0.7 \cdot 1.68357 = 1.8602493$$
$$x(8) = 1.7 \cdot 1.8602493 - 0.7 \cdot 1.787499 = 1.91117451$$
$$x(9) = 1.7 \cdot 1.91117451 - 0.7 \cdot 1.8602493 = 1.946822157$$
$$x(10) = 1.7 \cdot 1.946822157 - 0.7 \cdot 1.91117451 = 1.9717755099$$

Nossa tabela para $k =_0 /^{10}$ será:

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$
0	0.6	1.02	1.323	1.5351	1.68357	1.787499	1.8602493	1.91117451	1.946822157	1.9717755099

Além disso temos que o valor inicial $x(k)\Big|_{k\to 0}$ é 0 e o valor final $x(k)\Big|_{k\to\infty}$ é algo próximo a 2, pois é evidente que a função cresce cada vez menos sem passar de 2.

iii - Use o método da Fatoração e indique a expressão da função discreta associada: $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2 \cdot (z-2)}$

$$X(z) = \frac{Az}{(z-2)} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{(z-1)}$$

Como $X(z) = X(z)$ temos que $\dfrac{z}{(z-1)^2 \cdot (z-2)} = \dfrac{Az}{(z-2)} + \dfrac{Bz}{(z-1)^2} + \dfrac{Cz}{(z-1)}$, multiplicando ambos os lados por $(z-1)^2 \cdot (z-2)$ temos:

$$z = Az \cdot (z-1)^2 + Bz \cdot (z-2) + Cz \cdot (z-1)(z-2)$$

Expandindo o termo a direita e agrupando por z:

$$A(z^3 - 2z^2 + z) + B(z^2 - 2z) + C(z^3 - 3z^2 + 2z) = z^3(A + C) + z^2(-2A + B - 3C) + z(A - 2B + 2C)$$

Como o esse termo precisa ser igual a z podemos obter o sistema:
$A + C = 0$
$B - 2A - 3C = 0$
$A - 2B + 2C = 1$

Onde:
$A = -C$:
$B - 2(-C) - 3C = 0 \to B + 2C - 3C = 0 \to B - C = 0 \to B = C$
$-C - 2C + 2C = 1 \to -C = 1 \to C = -1$
Portanto:
$A = 1$, $B = -1$ e $C = -1$

Desse modo:

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z-1)}$$

Assim, podemos obter $x(t)$ pela tabela. Primeiramente sabemos que:

- $\frac{z}{z-1}$ tem uma conversão direta para 1
- $\frac{z}{(z-1)^2}$ pode ser visto como $\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$, mas como T_0 é um, temos uma conversão direta para t
- $\frac{z}{(z-2)}$ pode ser visto como $\frac{z}{z - e^{-aT_0}}$, como T_0 é um, precisamos que $e^{-a} = 2$, de modo que $a = ln(2)$ e finalmente convertemos para $e^{-ln(2)t}$

  Finalmente obtemos a inversa da nossa transformada Z:

  $$x(t) = e^{-0.6931t} - t - 1$$

  Avaliando o valor inicial $x(k)\Big|_{k\to 0}$ teremos 0 e o valor final $x(k)\Big|_{k\to\infty}$ tende a $-\infty$, pois $e^{-0.6931t}$ tende a 0, fazendo com que t domine e leve o resultado a $-\infty$.

Avaliando para $k =_0 /^{10}$:

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$
0	-1.499976	-2.749976	-3.874982	-4.937488	-5.968742	-6.98437	-7.992184	-8.996092	-9.998046	-10.999022

iv - Use o método da Fatoração e indique a expressão da função discreta associada: $X(z) = \frac{0.1(z+1)z}{(z-1)^2 \cdot (z-0.6)}$

$\frac{0.1(z+1)z}{(z-1)^2 \cdot (z-0.6)} = \frac{Az}{(z-0.6)} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{(z-1)}$, multiplicando ambos os lados por $(z-1)^2 \cdot (z-0.6)$:

$$0.1(z+1)z = Az(z-1)^2 + Bz(z-0.6) + Cz(z-1)(z-0.6)$$

Expandindo o lado direito:

$$A(z^3 + 2z^2 + z) + B(z^2 - 0.6z) + C(z^3 - 1.6z^2 + 0.6z) = z^3(A + C) + z^2(2A + B - 1.6C) + z(A - 0.6B + 0.6C)$$

Expandindo o lado esquerdo:

$$0.1z^2 + 0.1z$$

Igualando ambos os lados:

$$0.1z^2 + 0.1z = z^3(A + C) + z^2(2A + B - 1.6C) + z(A - 0.6B + 0.6C)$$

Gerando o sistema:
$A + C = 0$
$2A + B - 1.6C = 0.1$
$A - 0.6B + 0.6C = 0.1$

Resolvendo:

- $A = 0.0625$
- $B = -0.125$

- $C = -0.0625$

Por fim temos a equação:

$$X(z) = 0.0625\frac{z}{(z-0.6)} - 0.125\frac{z}{(z-1)^2} - 0.0625\frac{z}{(z-1)}$$

- $\frac{z}{z-1}$ tem uma conversão direta para 1
- $\frac{z}{(z-1)^2}$ pode ser visto como $\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$, mas como T_0 é um, temos uma conversão direta para t
- $\frac{z}{(z-0.6)}$ pode ser visto como $\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$, como T_0 é 1, precisamos que $e^{-a} = 0.6$, de modo que $a = ln(0.6)$ e finalmente convertemos para $e^{0.510825t}$.

Finalmente obtemos a inversa da nossa transformada Z:

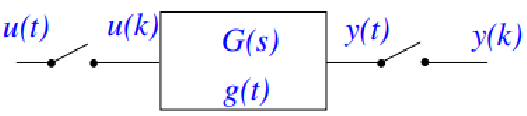
$$x(t) = 0.0625e^{0.510825t} - 0.125t - 0.0625$$

Avaliando o valor inicial $x(k)\Big|_{k\to 0}$ teremos 0 e o valor final $x(k)\Big|_{k\to\infty}$ tende a ∞, pois $e^{0.510825t}$ tende a ∞.
Avaliando para $k =_0 /^{10}$:

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$
0	-0.083333	-0.138889	-0.148148	-0.080248	0.116252	0.527086	1.295143	2.65857	5.014279	9.023792

f) Obter a sequência $y(kT_0)$ para $G(z) = \dfrac{0.13333}{1-0.5866z^{-1}}$ e $H_0G(z) = \dfrac{0.4134z^{-1}}{1-0.5866z^{-1}}$, para $k =_0 /^{10}$. Colocar os resultados em um mesmo gráfico e comparar as respostas considerando uma entrada do tipo degrau unitário. Avaliar a mesma situação para pelo menos 4 valores de T_0 diferentes.

As funções G são funções de transferência, assim, por definição, nossa saída será essa função multiplicado por uma entrada:



Portanto, quando o exercício pede para obtermos a sequência $y(kT_0)$ considerando uma entrada do tipo degrau unitário $u(k)$, precisamos fazer uma multiplicação.

i - $G(z) = \dfrac{0.13333}{1-0.5866z^{-1}}$

$Y(z) = G(z)U(z) \to Y(z) = \frac{0.13333}{1-0.5866z^{-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)z^{-k} \to Y(z) = \frac{0.13333}{1-0.5866z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}$
$Y(z) = \frac{0.13333z \cdot z}{(z-0.5866)(z-1)} \to Y(z) = \frac{0.13333z^2}{(z-0.5866)(z-1)} \to Y(z) = \frac{Az}{z-0.5866} + \frac{Bz}{z-1}$
$0.13333z^2 = Az(z-1) + Bz(z-0.5866) \to 0.13333z^2 = A(z^2-z) + B(z^2-0.5866z) \to 0.13333z^2 = z^2(A+B) + z(-A-0.5866B)$

Montando o sistema:

- $-A - 0.5866B = 0$
  - $A = -0.5866B$
- $A + B = 0.13333$

$-0.5866B + B = 0.13333 \to 0.4134B = 0.13333$
$B = 0.3225205612$
$A = -0.1891905612$

$$Y(z) = 0.3225205612 \cdot \frac{z}{z-1} - 0.1891905612 \cdot \frac{z}{z-0.5866}$$

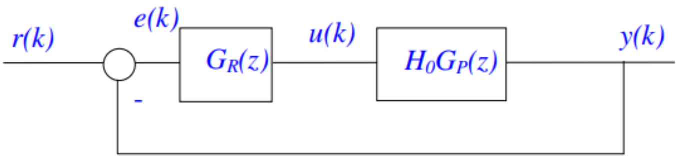
- $\frac{z}{z-1}$ tem uma conversão direta para 1
- $\frac{z}{(z-0.5866)}$ pode ser visto como $\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$, como T_0 é pode assumir vários valores precisamos deixar em função dele, assim é necessário que $(e^{-a})^{T_0} = 0.5866$, de modo que $e^{-a} = 0.5866^{\frac{1}{T_0}}$, portanto podemos considerar a inversa como $0.5866^{\frac{t}{T_0}}$
  Finalmente: $y(t) = 0.3225205612 - 0.1891905612 \cdot 0.5866^{\frac{t}{T_0}}$, com essa equação podemos plugar os diferentes T_0 e fazer a discretização kT_0.

ii - $H_0G(z) = \dfrac{0.4134z^{-1}}{1-0.5866z^{-1}}$

$Y(z) = G(z)U(z) \rightarrow Y(z) = \frac{0.4134z^{-1}}{1-0.5866z^{-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)z^{-k} \rightarrow Y(z) = \frac{0.4134z^{-1}}{1-0.5866z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}$

~~é a mesma merda do outro vei, vsf~~

g) Considere o sistema de controle realimentado $H_0G_p(z) = \frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$ e $G_R(z) = q_0$. Avalie a faixa de valores de q_0 que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada.



A estabilidade de um sistema é dado pela equação característica (dominador simplificado da equação de transferência em z) na forma padrão:

$$A(z) = a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + a_{m-2}z^{m-2} + \ldots + + a_1z + a_0$$

Sendo $a_m > 0$ e m a ordem do processo. Para sabermos se o sistema é estável precisamos checar as primeiras $m+1$ condições da seguinte lista:

- - $A(1) > 0$
- $(-1)^m A(-1) > 0$
- $|a_0| < a_m$
- $|b_0| > |b_{m-1}|$
- $|c_0| > |c_{m-2}|$
- $|d_0| > |d_{m-3}|$
- ...

Sendo que a_k são os coeficientes da equação característica e o resto é dado por:

- $b_k = \det \begin{vmatrix} a_0 & a_{m-k} \\ a_m & a_k \end{vmatrix}$
- $c_k = \det \begin{vmatrix} b_0 & b_{m-k-1} \\ b_{m-1} & b_k \end{vmatrix}$
- $d_k = \det \begin{vmatrix} c_0 & c_{m-k-2} \\ c_{m-2} & c_k \end{vmatrix}$

A função de transferência de malha fechada do sistema é:

$$G_{MF}(z) = \frac{q_0\left(\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}\right)}{1+q_0\left(\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}\right)}$$

$$\frac{1}{\frac{q_0(b_1z+b_2)}{q_0(b_1z+b_2)} + \frac{z^2+a_1z+a_2}{q_0(b_1z+b_2)}} = \frac{1}{\frac{z^2+z(a_1+b_1q_0)+b_2q_0+a_2}{q_0(b_1z+b_2)}} = \frac{q_0b_1z+q_0b_2}{z^2+z(a_1+q_0b_1)+(q_0b_2+a_2)}$$

Assim a equação característica do sistema será $z^2+z(a_1+q_0b_1)+(q_0b_2+a_2)$. De modo que $p_2 = 1$, $p_1 = a_1+q_0b_1$ e $p_0 = a_2+q_0b_2$. Portanto precisamos que os seguintes critérios sejam válidos:

- $A(1) > 0 \rightarrow 1 + (a_1+q_0b_1) + (a_2+q_0b_2) > 0 \rightarrow a_1+a_2+q_0(b_1+b_2) > -1$
- $(-1)^2A(-1) > 0 \rightarrow 1 - (a_1+q_0b_1) + (a_2+q_0b_2) > 0 \rightarrow a_2-a_1+q_0(b_2-b_1) > -1$
- $|p_0| < p_2 \rightarrow |a_2+q_0b_2| < 1 \rightarrow -1 < a_2+q_0b_2 < 1$

O resultado final vai exigir que q_0 obedece as seguintes condições:

- $q_0 > \dfrac{-1-a_1-a_2}{b_1+b_2}$
- $q_0 > \dfrac{a_1-a_2-1}{b_2-b_1}$
- $\dfrac{-1-a_2}{b_2} < q_0 < \dfrac{1-a_2}{b_2}$

h) Obter as matrizes $\underline{F}$ e $\underline{H}$ da equação diferencial $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$ (pg. 67), pelo método de expansão em série, com truncamento no 3º elemento da série.

O primeiro passo é colocar o sistema numa representação de espaço de estados, para isso precisamos definir as variáveis de estado:

- $x_1(t) = y(t)$
- $x_2(t) = \dot{y}(t)$
  Assim, podemos definir as derivadas como: $\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$ e $\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t)$. E reescrevendo nossa equação original: $\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$.
  As equações modelo do espaço de estados são $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot u(t)$ e $y(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + D \cdot u(t)$. De modo que: $\underline{x}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}$ e como $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$ e $y(t) = x_1(t)$ podemos definir $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$.

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(t) \rightarrow \underline{\dot{x}}(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \underline{x}(t) + 0 \cdot u(t)$$

Assim:

- $\underline{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$
- $\underline{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$
- $\underline{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$
- $\underline{D} = 0$

Precisamos encontrar $\underline{F}$ e $\underline{H}$ de modo que: $x[k+1] = \underline{F}x[k] + \underline{H}u[k]$, para isso podemos usar as fórmulas na versão de expansão em série:

- $\underline{F} = \underline{I} + \underline{A} \cdot \underline{L}$
- $\underline{H} = \underline{L} \cdot \underline{B}$
- $\underline{L} = T_0 \cdot \sum_{v=0}^{M} \frac{(\underline{A}T_0)^v}{(v+1)!}$

Logo, o primeiro passo é calcular $\underline{L}$ truncando até o terceiro elemento da série ($M = 2$): $\underline{L} = T_0(\frac{(\underline{A}T_0)^0}{1!} + \frac{(\underline{A}T_0)^1}{2!} + \frac{(\underline{A}T_0)^2}{3!})$ $\rightarrow \underline{L} = T_0 + T_0^2\frac{\underline{A}}{2} + T_0^3\frac{\underline{A}^2}{6}$. Precisamos agora calcular $\underline{A}^2$:

$$\underline{A}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Assim:

$$\underline{L} = T_0 + \frac{T_0^2}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + \frac{T_0^3}{6}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = T_0 + T_0^2\begin{vmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & -1.5 \end{vmatrix} + T_0^3\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{7}{6} \end{vmatrix} = T_0 + \begin{vmatrix} 0 & 0.5T_0^2 \\ -T_0^2 & -1.5T_0^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{T_0^3}{3} & -\frac{T_0^3}{2} \\ T_0^3 & \frac{7T_0^3}{6} \end{vmatrix}$$

$$\underline{L} = T_0 + \begin{vmatrix} -\frac{T_0^3}{3} & 0.5T_0^2 - \frac{T_0^3}{2} \\ T_0^3 - T_0^2 & \frac{7T_0^3}{6} - 1.5T_0^2 \end{vmatrix}$$

Com isso podemos calcular $\underline{F}$ e $\underline{H}$:

$$\underline{H} = \left(T_0 + \begin{vmatrix} -\frac{T_0^3}{3} & 0.5T_0^2 - \frac{T_0^3}{2} \\ T_0^3 - T_0^2 & \frac{7T_0^3}{6} - 1.5T_0^2 \end{vmatrix}\right) \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ T_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{T_0^2}{2} - \frac{T_0^3}{2} \\ \frac{7T_0^3}{6} - \frac{3T_0^2}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{T_0^2}{2} - \frac{T_0^3}{2} \\ \frac{7T_0^3}{6} - \frac{3T_0^2}{2} + T_0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \left(T_0 + \begin{vmatrix} -\frac{T_0^3}{3} & 0.5T_0^2 - \frac{T_0^3}{2} \\ T_0^3 - T_0^2 & \frac{7T_0^3}{6} - 1.5T_0^2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 - T_0^2 + T_0^3 & T_0 - \frac{3T_0^2}{2} + \frac{7T_0^3}{6} \\ -2T_0 + 3T_0^2 - \frac{7T_0^3}{3} & 1 - 3T_0 + \frac{7T_0^2}{2} - \frac{5T_0^3}{2} \end{vmatrix}$$

Considerando $T_0 = 1$:

$$\underline{H} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} - \frac{3}{2} + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{vmatrix} 1 - 1 + 1 & 1 - \frac{3}{2} + \frac{71}{6} \\ -2 + 3 - \frac{7}{3} & 1 - 3 + \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -1 \end{vmatrix}$$

2. Dado um sistema representado pela equação diferencial $4\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$:

a) obtenha a respectiva representação discreta por equação diferença usando: (trabalhe com $T_0 = 1s$)

i - aproximação da derivada

^45fd3f

A equação da derivada aproximada é dada por: $\dot{y}(t) = \frac{y(t) - y(t-T_0)}{T_0}$ e $\ddot{y}(t) = \frac{\dot{y}(t) - \dot{y}(t-T_0)}{T_0} = \frac{\frac{y(t)-y(t-T_0)}{T_0} - \frac{y(t-T_0)-y(t-2T_0)}{T_0}}{T_0}$
$\rightarrow \ddot{y}(t) = \frac{y(t) - 2y(t-T_0) + y(t-2T_0)}{T_0^2}$.
Com essas equações em mão podemos substituir na equação diferencial original e simplificar $T_0 = 1$:
$4[y(t) - 2y(t-1) + y(t-2)] + 2[y(t) - y(t-1)] + y(t) = 2u(t)$ e terminando tudo temos:

$$7y(t) - 10y(t-1) + 4y(t-2) = 2u(t)$$

Finalmente podemos passar para discreto trocando o termo contínuo t para o discreto k:

$$7y[k] - 10y[k-1] + 4y[k-2] = 2u[k]$$

$$y[k] = \frac{10y[k-1] - 4y[k-2] + 2u[k]}{7}$$

ii - por transformada de Laplace convertida em Z

^cac5ea
Aplicando a transformada de Laplace em $4\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$ temos $4s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{2}{s}$, agrupando e simplificando temos: $Y(s) = \frac{2}{s(4s^2+2s+1)}$, como $Y(s) = G(s) \cdot U(s) \rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ nossa função de transferência será: $G(s) = \frac{2}{4s^2 + 2s + 1}$
$\rightarrow G(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.5s + 0.25} \rightarrow G(s) = \frac{0.5}{(s+0.25)^2 + 0.1875}$. Com isso podemos usar $\alpha e^{-at}\sin(w_1 t) \xrightarrow{L} \alpha \frac{w_1}{(s+a)^2 + w_1^2}$ com $w_1 = 0.25\sqrt{3}$,
$\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $a = 0.25$ e $T_0 = 1$, assim $G(z) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{ze^{-0.25}\sin(0.25\sqrt{3})}{z^2 - 2ze^{-0.25}\cos(0.25\sqrt{3}) + e^{-0.5}} = \frac{0.377345z}{z^2 - 1.413843z + 0.60653} = \frac{0.377345z^{-1}}{1 - 1.413843z^{-1} + 0.60653z^{-2}}$.
Como $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \rightarrow Y(z) = G(z)U(z)$ teremos que $Y(z)[1 - 1.413843z^{-1} + 0.60653z^{-2}] = U(z)0.377345z^{-1}$ e aplicando as transformações temporais $y[k] - 1.413843y[k-1] + 0.60653y[k-2] = 0.377345u[k-1]$:

$$y[k] = 1.413843y[k-1] - 0.60653y[k-2] + 0.377345u[k-1]$$

b) Usando a equação diferença da resposta $y(k)$ do exercício 2.a) para uma entrada $u(t)$ dada por um degrau unitário, apresente uma resposta gráfica para $k =_0 /^{10}$ em cada caso, ou seja, para a resposta do item 2.a) i - e 2.a) ii -.

^3e6fec
Usando o modo de Tabela da Casio fx-911LAX:

	$y[0]$	$y[1]$	$y[2]$	$y[3]$	$y[4]$	$y[5]$	$y[6]$	$y[7]$	$y[8]$	$y[9]$	$y[10]$
derivada	0.2587	0.6938	1.1137	1.4802	1.7639	1.9597	2.0774	2.1335	2.1465	2.133	2.1063
laplace	0	0.3773	0.9108	1.4362	1.8555	2.1296	2.2629	2.285	2.2355	2.152	2.0641

c) Represente a resposta gráfica do item 2.a) no caso da função de excitação ser uma sequência de dois impulsos do tipo $u(t) = \delta(t) + \delta(t-2)$ (somente no caso 2.a) ii -).

	$y[0]$	$y[1]$	$y[2]$	$y[3]$	$y[4]$	$y[5]$	$y[6]$	$y[7]$	$y[8]$	$y[9]$	$y[10]$
laplace	0	0.3773	0.5335	0.9027	0.9527	0.7995	0.5525	0.2962	0.0837	-0.061	-0.137

d) Obtenha a respectiva função discreta $y(kT_0)$ para o sistema considerando-se a entrada degrau do item 2.b).

Aplicando a transformada de Laplace em $4\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$ temos $4s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = 2U(s)$, agrupando e simplificando temos: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{4s^2+2s+1}$, como $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ nossa função de transferência será: $G(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.5s + 0.25}$. Aplicando uma entrada degrau $u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}$ temos que $Y(s) = \frac{0.5}{s(s^2 + 0.5s + 0.25)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s^2 + 0.5s + 0.25)}$ solucionando a fração parcial:

$$0.5 = A(s^2 + 0.5s + 0.25) + (Bs + C)s \rightarrow 0.5 = As^2 + 0.5As + 0.25A + Bs^2 + Cs \rightarrow 0.5 = s^2(A + B) + s(0.5A + C) + 0.25A$$

Assim é possível montar o sistema:

- $1A + 1B + 0C = 0$
- $0.5A + 0B + 1C = 0$
- $0.25A + 0B + 0C = 0.5$

Onde $A = 2$, $B = -2$ e $C = -1$. Com isso podemos colocar os valores numéricos e fazer transformações matemáticas que exigem mais visão do que o Dr. Estranho vendo todos os multiversos.

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{-2s-1}{(s^2+0.5s+0.25)} = \frac{2}{s} + \frac{-2(s+0.25)-0.5}{(s+0.25)^2+0.1875} = \frac{2}{s} - 2\cdot\frac{s+0.25}{(s+0.25)^2+0.1875} - \frac{0.5}{(s+0.25)^2+0.1875}$$

$$Y(s) = \left(2\cdot\frac{1}{s}\right) - \left(2\cdot\frac{s+0.25}{(s+0.25)^2+(0.25\sqrt{3})^2}\right) - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{0.25\sqrt{3}}{(s+0.25)^2+(0.25\sqrt{3})^2}\right)$$

Aplicando a inversa nos caras certos:

$$y(t) = 2u(t) - 2e^{-0.25t}\cos(0.25\sqrt{3}\cdot t) - \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0.25t}\sin(0.25\sqrt{3}\cdot t)$$

$$y(t) = 2u(t) - e^{-0.25t}[2\cos(0.25\sqrt{3}\cdot t) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(0.25\sqrt{3}\cdot t)]$$

Discretizando:

$$y[kT_0] = 2u[kT_0] - e^{-0.25kT_0}(2\cdot\cos[0.433\cdot kT_0] + 1.1574\cdot\sin[0.433\cdot kT_0])$$

3. Dado o processo $y(k) + a_1 y(k-1) + 0.72y(k-2) + 0.32y(k-3) = 0.4u(k-1) - 0.4u(k-2) + 0.84u(k-3)$ com $a_1 = 1.2$

a) Obtenha a descrição do processo em forma da Função Transferência Discreta:

$y(k) + a_1 y(k-1) + 0.72y(k-2) + 0.32y(k-3) = 0.4u(k-1) - 0.4u(k-2) + 0.84u(k-3)$ reescrevendo em z:

$$Y(z)(1 + 1.2z^{-1} + 0.72z^{-2} + 0.32z^{-3}) = U(z)(0.4z^{-1} - 0.4z^{-2} + 0.84z^{-3})$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.4z^{-1} - 0.4z^{-2} + 0.84z^{-3}}{1 + 1.2z^{-1} + 0.72z^{-2} + 0.32z^{-3}}$$

b) Obter a equação característica (denominador da Função de Transferência):

A equação característica é dada pelo denominador da função de transferência discreta sem expoentes negativos:

$$A(z) = z^3 + 1.2z^2 + 0.72z^1 + 0.32$$