Controle Digital

SEL620

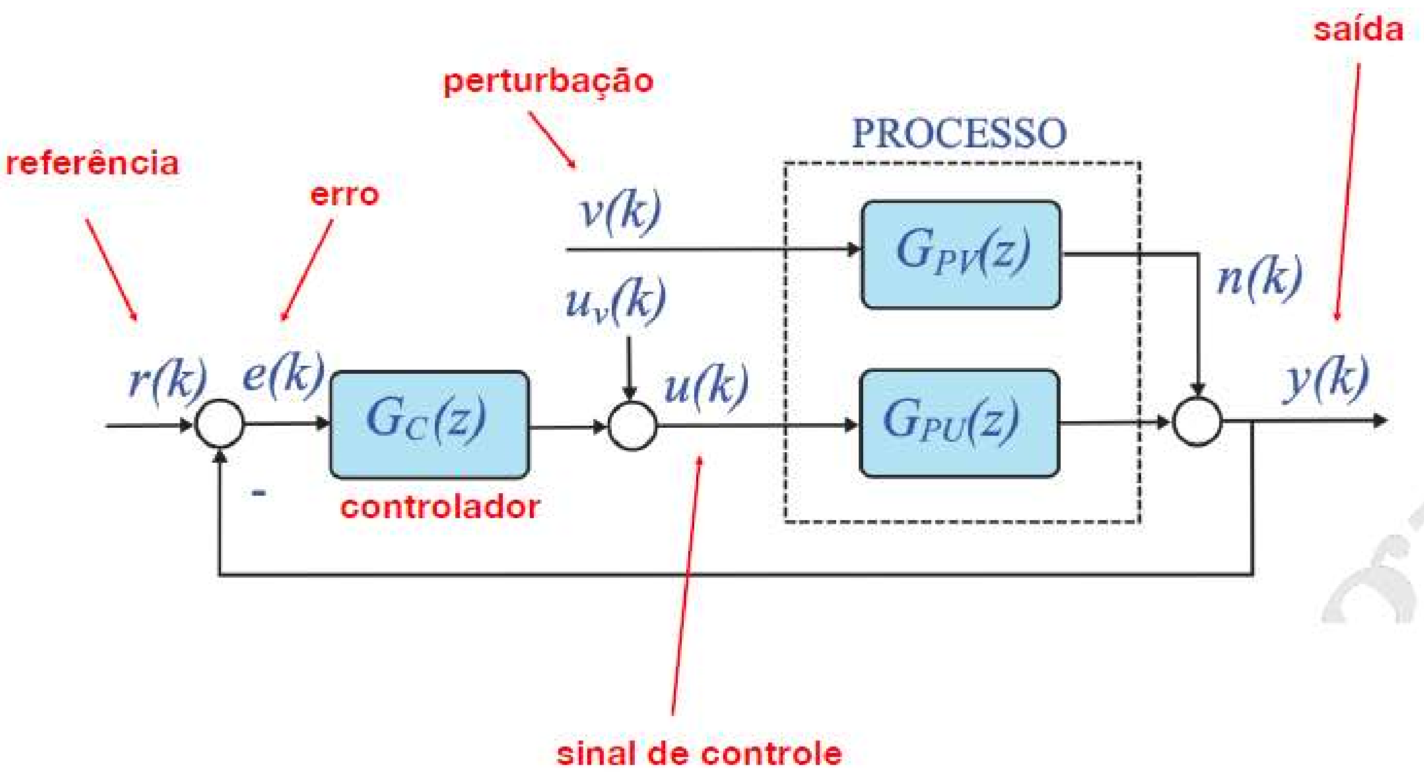
Prof. Dr. Valdir Grassi Jr

Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

Controladores Paramétricos

Capítulo 7

Processo SISO realimentado



Controlador PID

(Seção 7.2)

$$u(t) = K\left[\underbrace{e(t)}_{\text{Proporcional ao erro}} + \frac{1}{T_I}\underbrace{\int e(\tau)d\tau}_{\text{Integral do erro}} + T_D\underbrace{\frac{d}{dt}e(t)}_{\text{Derivada do erro}}\right]$$

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{(KT_D)s^2 + Ks + \left(K/T_I\right)}{s} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

$$G_{PID}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_0 s^2 + q_1 s + q_2}{s} = \frac{K(s+z_{01})(s+z_{02})}{s}$$

Controlador PID

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int e(\tau)d\tau + T_D\frac{d}{dt}e(t)\right].$$

Admitindo-se um tempo de amostragem pequeno pode-se aproximar a integral e derivada por:

$$u(k) = K\left[e(k) + \underbrace{\frac{T_0}{T_I}\sum_{v=0}^{k-1} e(v)}_{\text{Aproximação da integral}} + \underbrace{\frac{T_D}{T_0}(e(k) - e(k-1))}_{\text{AprIximação da derivada}}\right].$$

Controlador PID

$$u(k) = K\left[e(k) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{v=0}^{k-1} e(v) + \frac{T_D}{T_0}(e(k) - e(k-1))\right].$$

É possível escrever na forma recursiva (equação de diferenças):

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2),$$

$$q_0 = K\left(1 + \frac{T_D}{T_0}\right), \qquad q_1 = -K\left(1 + 2\frac{T_D}{T_0} - \frac{T_0}{T_I}\right),$$

$$q_2 = K\frac{T_D}{T_0}.$$

Controlador PID

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

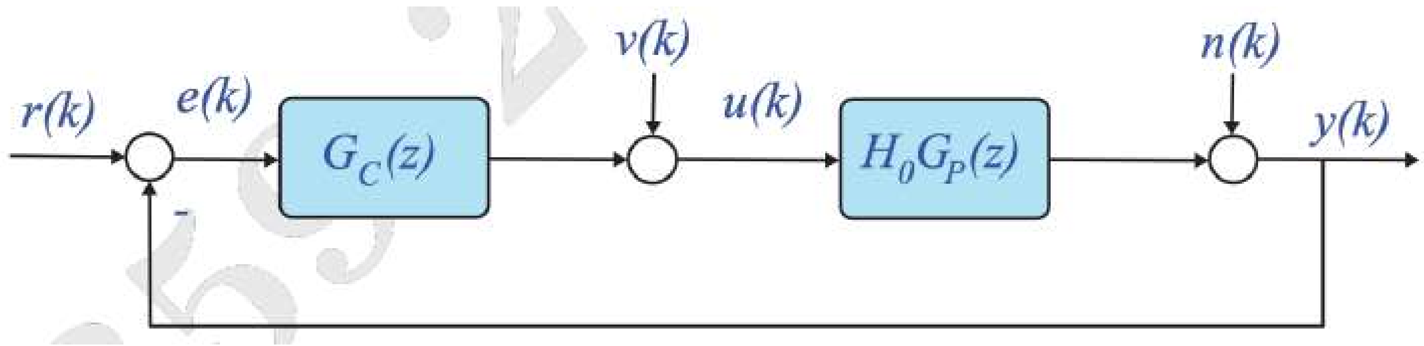
Pode-se obter a seguinte função de transferência para o PID discreto:

$$G_C(z) = G_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})},$$

$$= \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 - z} = \frac{q_0 (z - z_{01})(z - z_{02})}{z^2 - z} = \frac{Q(z)}{P(z)}.$$

Controlador paramétrico genérico

(Seção 7.3)



$$H_0G_P = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}},$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_\mu z^{-\mu}}.$$

Controlador paramétrico genérico

Para zerar o erro de regime permanente para uma entrada degrau, o controlador deve ter pelo menos um polo em $z = 1$ ($s = 0$, ação integral).
Portanto, a estrutura mais simples para o controlador genérico de ordem v:

$$G_C(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

A equação de diferenças seria:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + \ldots + q_v e(k-v).$$

Controlador paramétrico genérico

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + \ldots + q_v e(k-v).$$

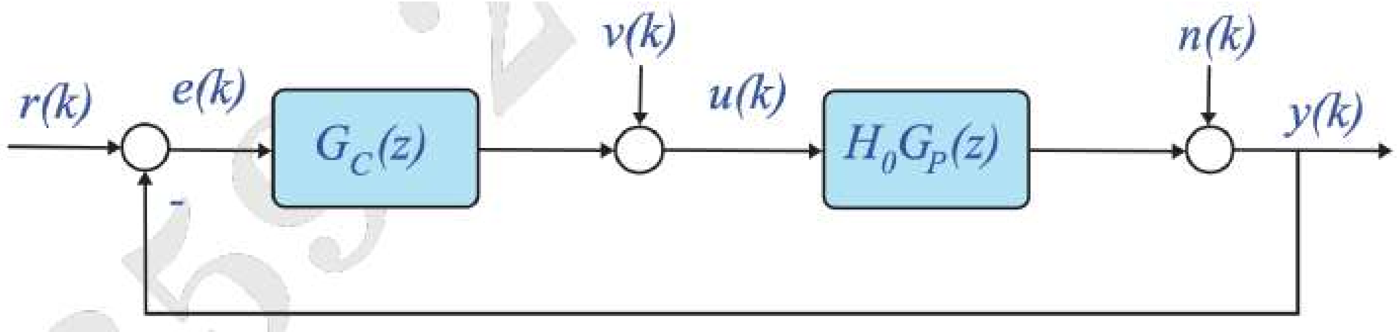
Para v=1 o controlador seria um PI.

Para v=2 o controlador seria um PID.

Para v=3 o controlador seria um PID2 ou PI2D.

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

(Seção 7.4)



$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

Suponha que o controlador receba uma entrada degrau:

$$e(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

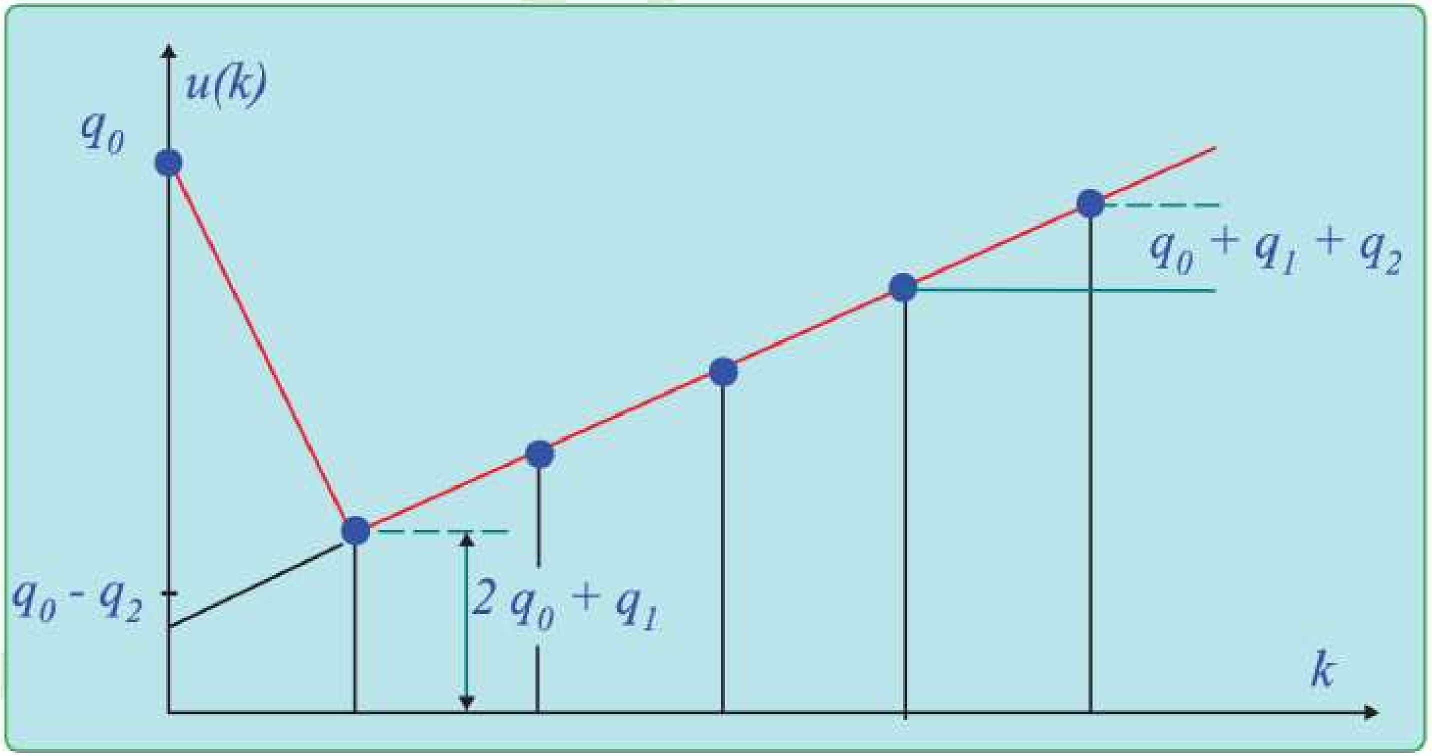
$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

Retirando-se o controlador da malha fechada e aplicando um degrau unitário na entrada do controlador, a resposta do controlador seria:

$$\begin{aligned}
u(0) &= q_0, \\
u(1) &= u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1, \\
u(2) &= u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2, \\
&\vdots \\
u(k) &= u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2.
\end{aligned}$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Resposta esperada de um controlador PID a entrada degrau unitário.



Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Espera-se que a resposta seja:

$u(1) < u(0)$,
$u(k) > u(k-1)$ para valores grandes de k.

Admitindo que $q_0 > 0$:

$$u(0) = q_0,$$

$$u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1,$$

$$u(1) < u(0) \implies q_0 + q_1 < 0, \quad \text{ou} \quad q_1 < -q_0.$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Espera-se que a resposta seja:

$u(1) < u(0)$,
$u(k) > u(k-1)$ para valores grandes de k.

Admitindo que $q_0 > 0$:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2,$$

$$u(k) > u(k-1)\Big|_{k\geq 2} \implies q_0 + q_1 + q_2 \geq 0, \quad \text{ou} \quad q_2 \geq -(q_0 + q_1)$$

$$\implies q_0 > q_2.$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Portanto, para que um controlador paramétrico de segunda ordem se comporte como um PID, deve-se ter:

$q_0 > 0,$

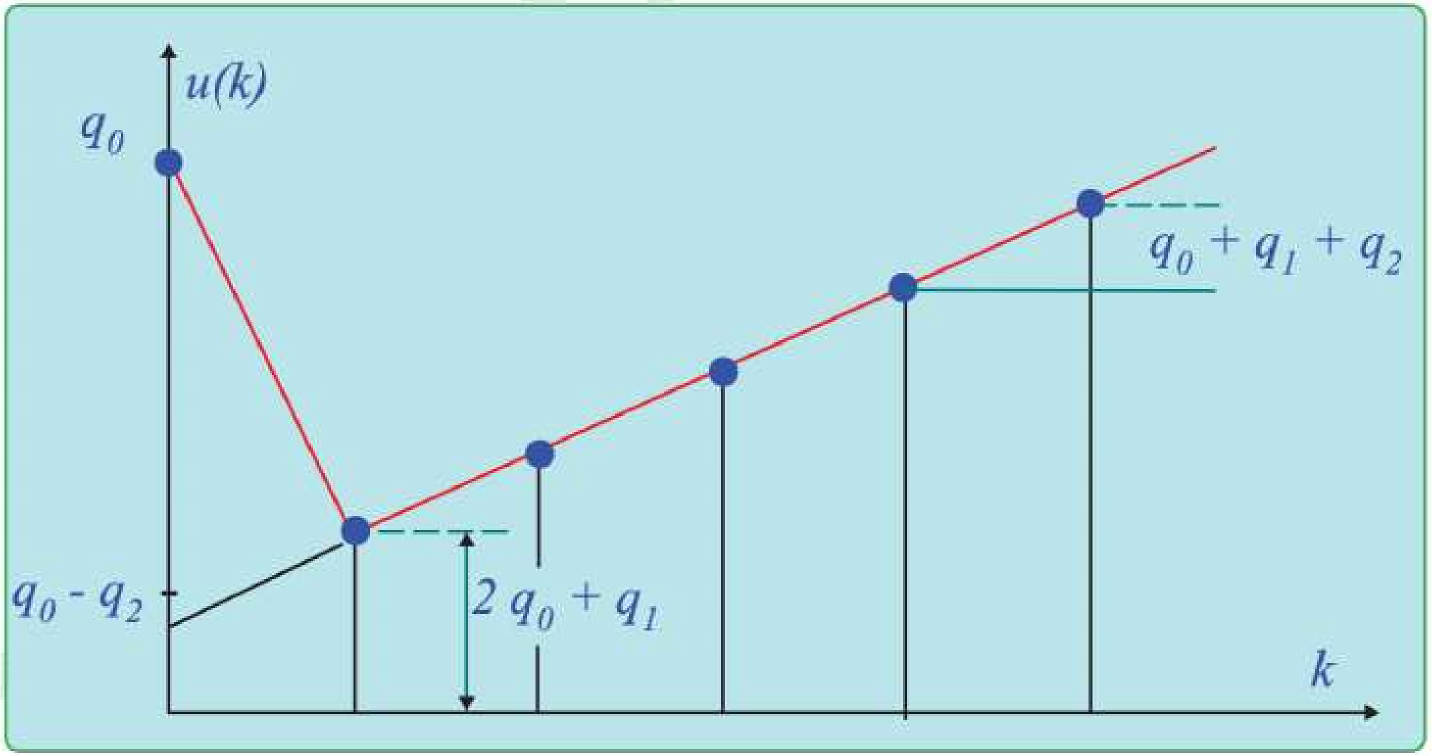
$q_1 < -q_0,$

$-(q_0 + q_1) < q_2 < q_0.$

Importante notar que $u(0) = q_0$, e que $u(0)$ é a maior resposta do controlador quando em malha fechada submetida a uma entrada da malha do tipo degrau unitário.

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

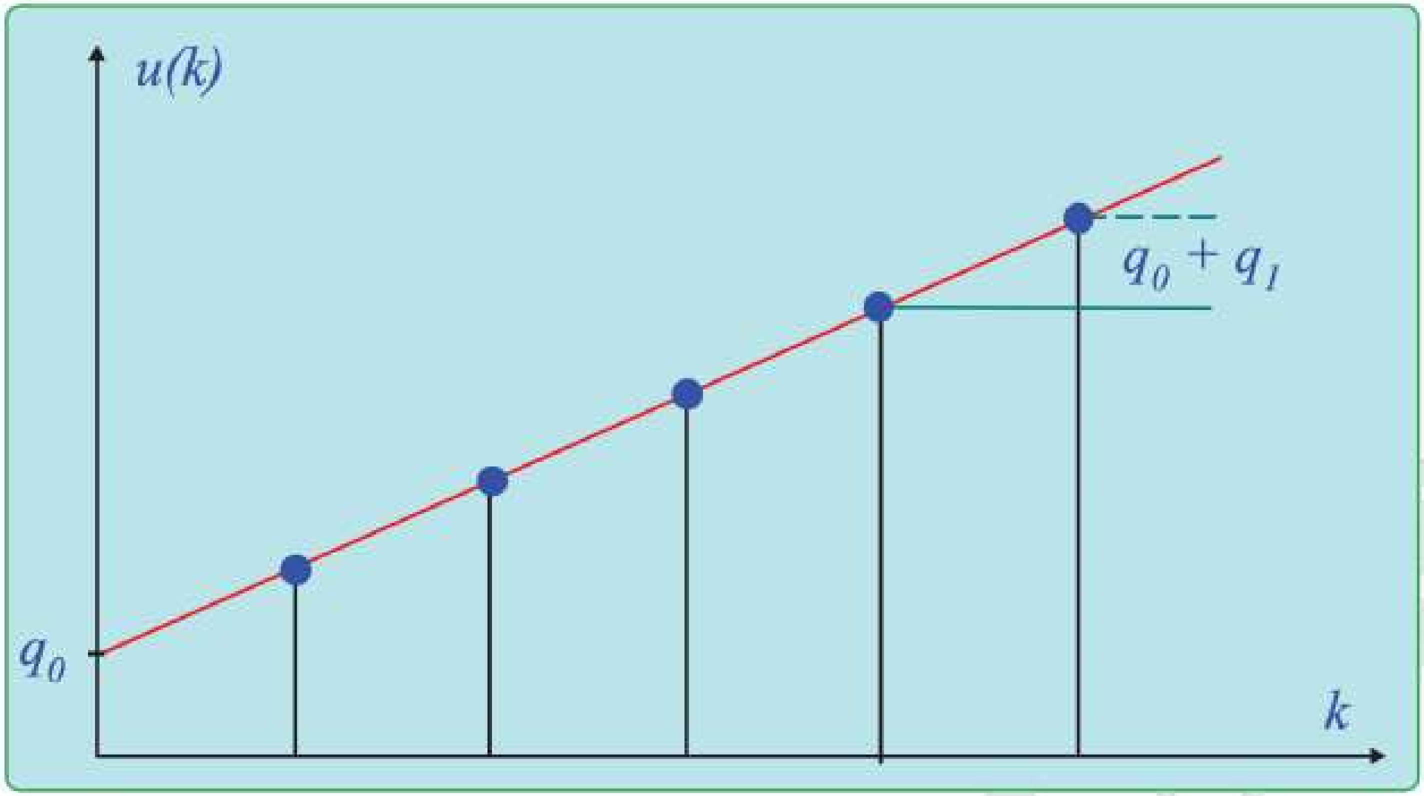
Resposta esperada de um controlador PID a entrada degrau unitário.

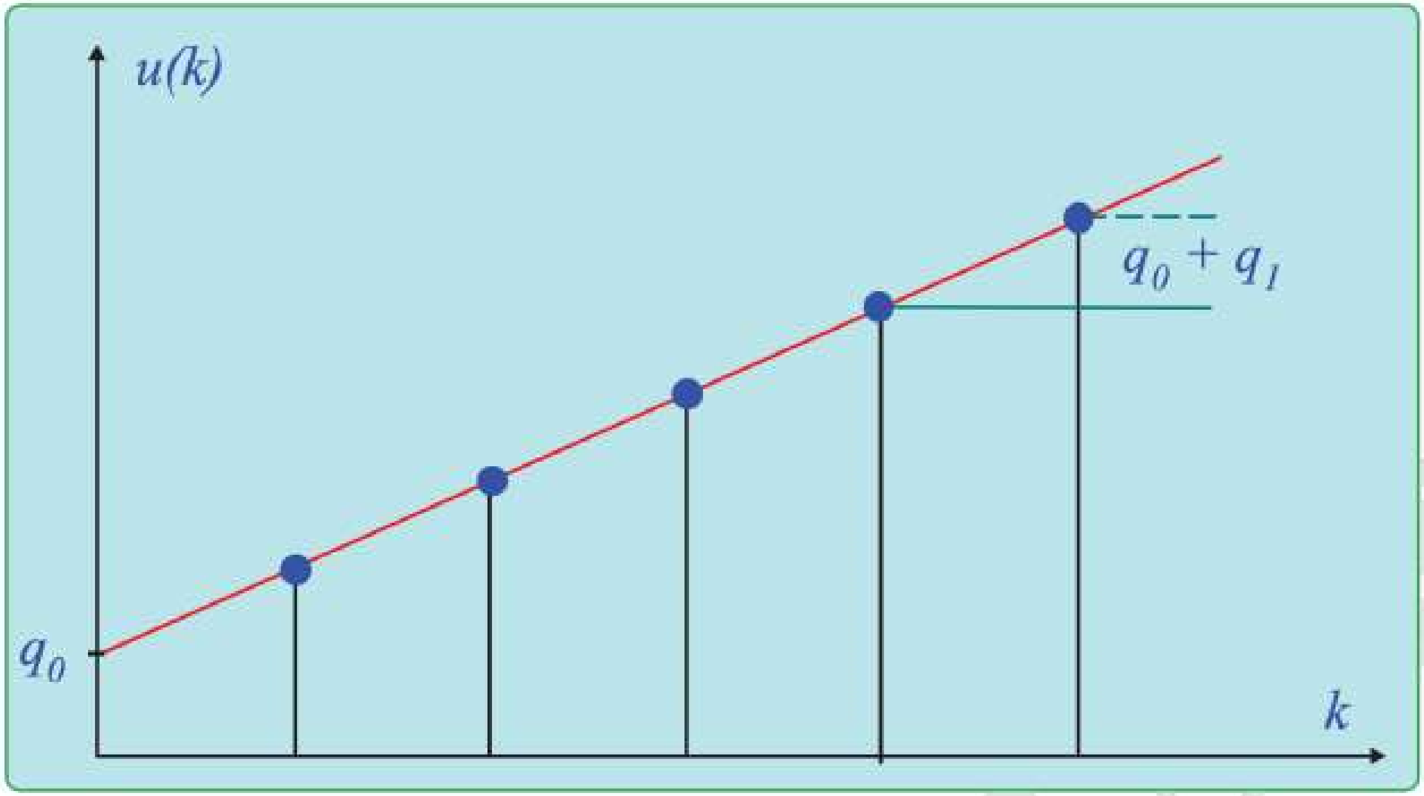


Controlador paramétrico de primeira ordem ($v = 1$)

(Seção 7.5)

Resposta esperada de um controlador PI a entrada degrau unitário.





Definindo-se:

$$K' = q_0 - q_2, \qquad \text{(Fator de Amplificação)}$$

$$c_D = \frac{q_0}{K}, \qquad \text{(Fator de Derivação)}$$

$$c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K}. \qquad \text{(Fator de Integração)}$$

Controlador PID

$$u(k) = K\left[e(k) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{v=0}^{k-1} e(v) + \frac{T_D}{T_0}(e(k) - e(k-1))\right].$$

Para um período suficientemente pequeno:

$$K' = K, \qquad K' = q_0 - q_2,$$

$$c_D = \frac{T_D}{T_0}, \qquad c_D = \frac{q_0}{K},$$

$$c_I = \frac{T_0}{T_I} \qquad c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K}.$$

De forma que:

$$c_D > 0, \quad c_I > 0, \quad c_I < c_D.$$

Controlador PID

Substituindo

$$K' = q_0 - q_2, \qquad c_D = \frac{q_0}{K}, \qquad c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K},$$

no controlador genérico:

$$G_C(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)},$$

obtém-se:

$$G_C(z) = \frac{K\Big[(1 + c_D) + (c_I - 2c_D - 1)z^{-1} + c_D z^{-2}\Big]}{1 - z^{-1}},$$

$$= K\Big[1 + c_I\left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right) + c_D(1 + z^{-1})\Big].$$

Controlador PID

Pode-se obter uma separação dos efeitos de cada termo do PID:

$$
\begin{aligned}
u_P(k) &= K' e(k), \\
u_I(k) &= u_I(k-1) + K' c_I e(k-1), \\
u_D(k) &= K' c_D \big[e(k) - e(k-1) \big],
\end{aligned}
$$

$$u(k) = u_P(k) + u_I(k) + u_D(k).$$

Controlador PID

Ou escrito em função de q_0, q_1 e q_2:

$$u_P(k) = \big(q_0 - q_2\big)e(k),$$

$$u_I(k) = u_I(k-1) + \big(q_0 + q_1 + q_2\big)e(k-1),$$

$$u_D(k) = q_2\big[e(k) - e(k-1)\big].$$

Controladores:

$$
\begin{array}{lll}
P & c_D = 0, & c_I = 0, \\
I & K' = 0, & c_D = 0, \\
D & K' = 0, & c_I = 0, \\
PI & & c_D = 0, \\
PD & & c_I = 0.
\end{array}
$$

Sintese de Controladores PID

Seção 7.6

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

(Seção 7.6.1)

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$1 + G_C(z)H_0G_P(z) = 0,$$

$$H_0G_P = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \ldots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_mz^{-m}},$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \ldots + q_vz^{-v}}{1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \ldots + p_\mu z^{-\mu}}.$$

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1}) = 0.$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1}) = 0.$$

Para um PID:

$$G_C(z) = G_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}.$$

A equação característica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}&(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}) + \\ &\quad + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}) = 0.\end{aligned}$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

$$(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}) +$$
$$+ (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}) = 0.$$

Fazendo a multiplicação dos polinômios:

$$\mathbf{A}(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{n+2} z^{-(n+2)} = 0,$$

ou

$$z^{(n+2)} + a_1 z^{(n+1)} + a_2 z^n + \ldots + a_{n+2} = 0,$$

ou

$$\big(z - z_{a1}\big)\big(z - z_{a2}\big)\big(z - z_{a3}\big)\big(\ldots\big)\big(z - z_{an+2}\big) = 0.$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

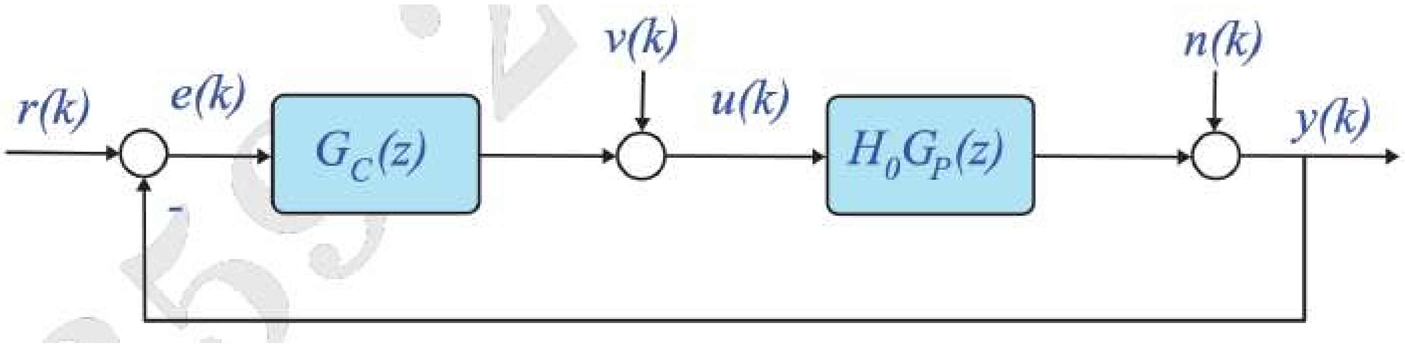
Escolhe-se a dinâmica do processo controlado através da escolha (alocação) dos polos do sistema de malha fechada.
Importante observar que se o processo tiver n polos (ordem n), a equação característica possui $n+2$ polos.

$$z^{(n+2)} + a_1 z^{(n+1)} + a_2 z^n + \ldots + a_{n+2} = 0,$$

Mas o PID possui 3 parâmetros (q_0, q_1 e q_2). Portanto, para que o sistema linear tenha uma única solução: $n+2=3$, ou seja, $n=1$.
Se o PID for modificado para possuir 4 parâmetros (2 polos e 2 zeros), então $n=2$.

Ação de controle limitada

(Seção 7.6.3)



$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{G_C(z)}{1 + G_C(z)H_0G_P(z)},$$

$$\frac{U(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})A(z^{-1})}{P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})}.$$

Ação de controle limitada

Para $b_0 = 0$:

$$\Big[(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}) +$$

$$+ (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m})\Big] u(z) =$$

$$= (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}) r(z).$$

Ou:

$$\begin{aligned} u(k) = (1 - a_1)u(k-1) + (a_1 - a_2)u(k-2) + \ldots \\ - q_0 b_1 u(k-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1)u(k-2) + \ldots \\ + q_0 r(k) + (q_0 a_1 + q_1) r(k-1) + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2) r(k-2) + \ldots \end{aligned}$$

Ação de controle limitada

$$
\begin{aligned}
u(k) = (1-a_1)u(k-1) + (a_1-a_2)u(k-2) + \dots \\
- q_0 b_1 u(k-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1)u(k-2) + \dots \\
+ q_0 r(k) + (q_0 a_1 + q_1)r(k-1) + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2)r(k-2) + \dots
\end{aligned}
$$

As duas primeiras ações de controle são:

$$
\begin{aligned}
u(0) &= q_0 r_0, \\
u(1) &= \left[q_0(2 - q_0 b_1) + q_1\right] r_0.
\end{aligned}
$$

Ação de controle limitada

$$
\begin{aligned}
u(0) &= q_0 r_0, \\
u(1) &= \big[q_0(2 - q_0 b_1) + q_1\big] r_0.
\end{aligned}
$$

Conhecendo a entrada máxima da planta $u(0)$ e uma variação brusca da amplitude da referência do sistema (degrau unitário) de no máximo r_0:

$$q_0 = \frac{u(0)}{r_0}.$$

Como o controlador é um PID: $u(1) < u(0)$.

Portanto: $q_1 \leq -q_0(1 - q_0 b_1)$.

PID Modificado 1 - Amortecido

(Seção 7.7.1)

PID com ação derivativa atrasada:

$$G(s) = K\left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_I s}\right].$$

Discretização com Holder:

$$\begin{aligned}
H_0 G_C(s) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_C(s)}{s}\right\}, \\
&= K\left[1 + \frac{T_0}{T_I}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})} + \frac{T_D}{T_0}\frac{(1-z^{-1})}{(1-\gamma z^{-1})}\right], \\
&= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-\gamma z^{-1})}, \\
&= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}.
\end{aligned}$$

Parâmetros do PID modificado 1:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= K\left(1 + \frac{T_D}{T_I}\right), \\
q_1 &= -K\left(1 - \gamma + 2\frac{T_D}{T_I} - \frac{T_0}{T_I}\right), \\
q_2 &= K\left(\frac{T_D}{T_I} + \left(\frac{T_0}{T_I} - 1\right)\gamma\right), \\
\gamma &= -e^{-T_0/T_I}, \\
p_1 &= \gamma - 1, \\
p_2 &= -\gamma.
\end{aligned}
$$

PID Modificado - outras formas

(Seção 7.7.2)

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_\mu z^{-\mu}},$$

$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = Q(z^{-1})E(z^{-1}) = Q(z^{-1})\Big[R(z^{-1}) - Y(z^{-1})\Big].$$

PID modificado 2 - Avaliar de forma diferente a referência R:

$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = S(z^{-1})R(z^{-1}) - Q(z^{-1})Y(z^{-1}),$$

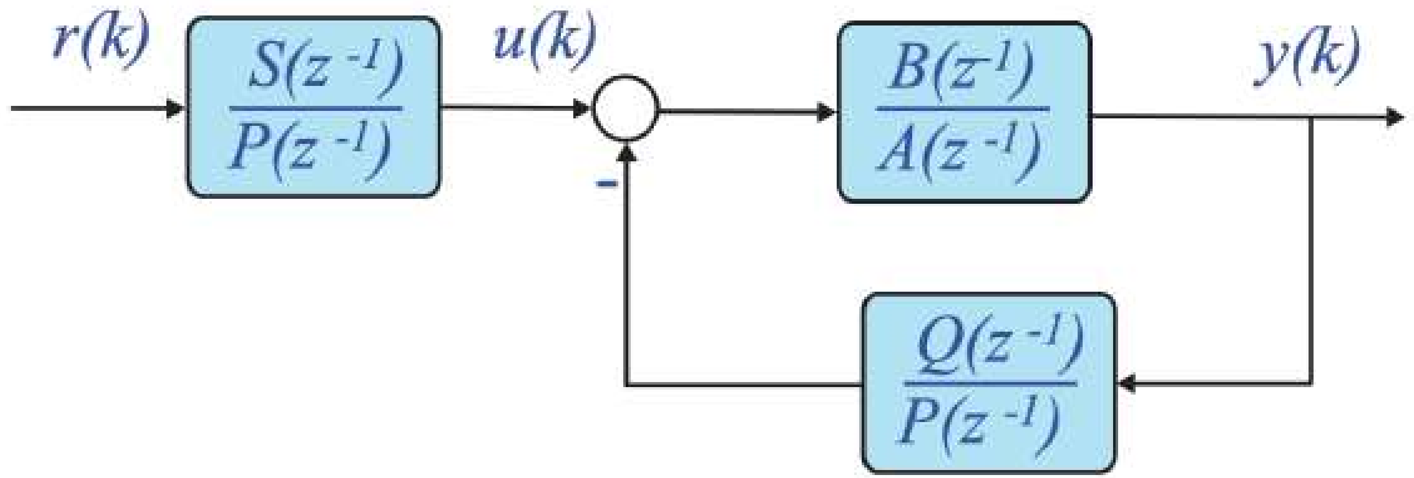
$$U(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})}R(z^{-1}) - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}Y(z^{-1}).$$

$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = S(z^{-1})R(z^{-1}) - Q(z^{-1})Y(z^{-1}),$$

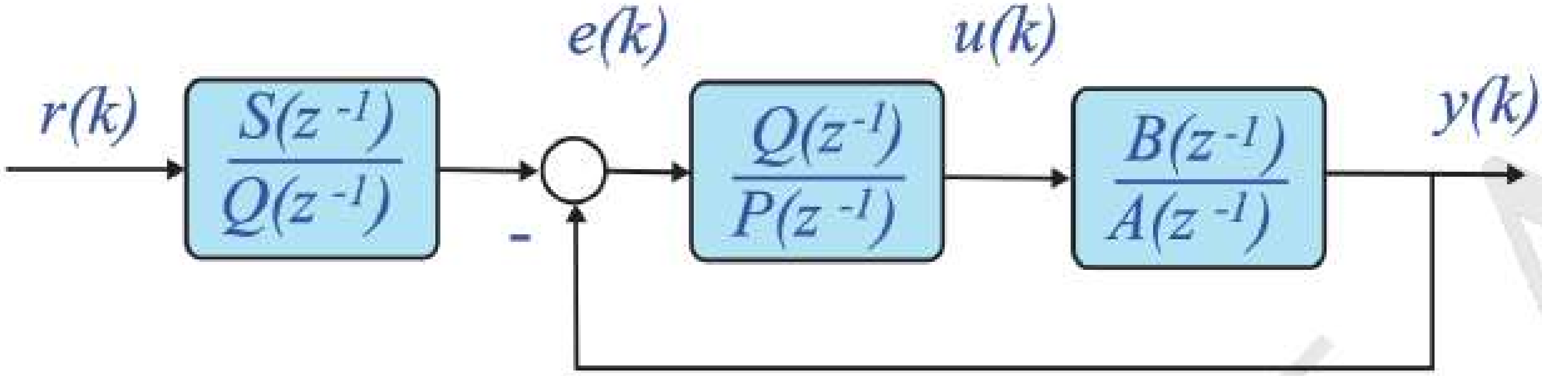
$$U(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})}R(z^{-1}) - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}Y(z^{-1}),$$

$$U(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}\left[\underbrace{\frac{S(z^{-1})}{Q(z^{-1})}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Existe um pré-filtro agindo} \\ \text{na referência de controle}}} R(z^{-1}) - Y(z^{-1})\right].$$

O filtro não muda os polos originais de malha fechada, mas produz um amortecimento em variações bruscas da referência de controle r.



r(k)
S(z -1)
P(z -1)
u(k)
-
B(z-1)
A(z -1)
y(k)
Q(z -1)
P(z -1)



r(k)
S(z -1)
Q(z -1)
-
e(k)
Q(z-1)
P(z -1)
u(k)
B(z -1)
A(z -1)
y(k)

PID - convencional:

$$u(k) - u(k-1) = K\Big[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I}e(k-1) + \\ + \frac{T_D}{T_0}\big(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)\big)\Big].$$

PID - Modificado 2:

$$u(k) - u(k-1) = K\Big[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I}e(k-1) + \\ + \frac{T_D}{T_0}\big(y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)\big)\Big].$$

PID - Modificado 2:

$$u(k) - u(k-1) = K\Big[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I}e(k-1) + \\ + \frac{T_D}{T_0}\big(y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)\big)\Big].$$

Para o modificado 2, o pré-filtro agindo na referência de controle equivale a:

$$S(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1},$$

$$s_0 = K,$$

$$s_1 = -K\left(1 - \frac{T_0}{T_I}\right).$$

PID - Modificado 3: para um amortecimento maior da referencia. O erro é utilizado apenas na parte integral.

$$u(k) - u(k-1) = K\Big[y(k) - y(k-1) + \frac{T_0}{T_I}e(k-1) + \\ + \frac{T_D}{T_0}\big(-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)\big)\Big].$$

Para o modificado 3, o pré-filtro agindo na referência de controle equivale a:

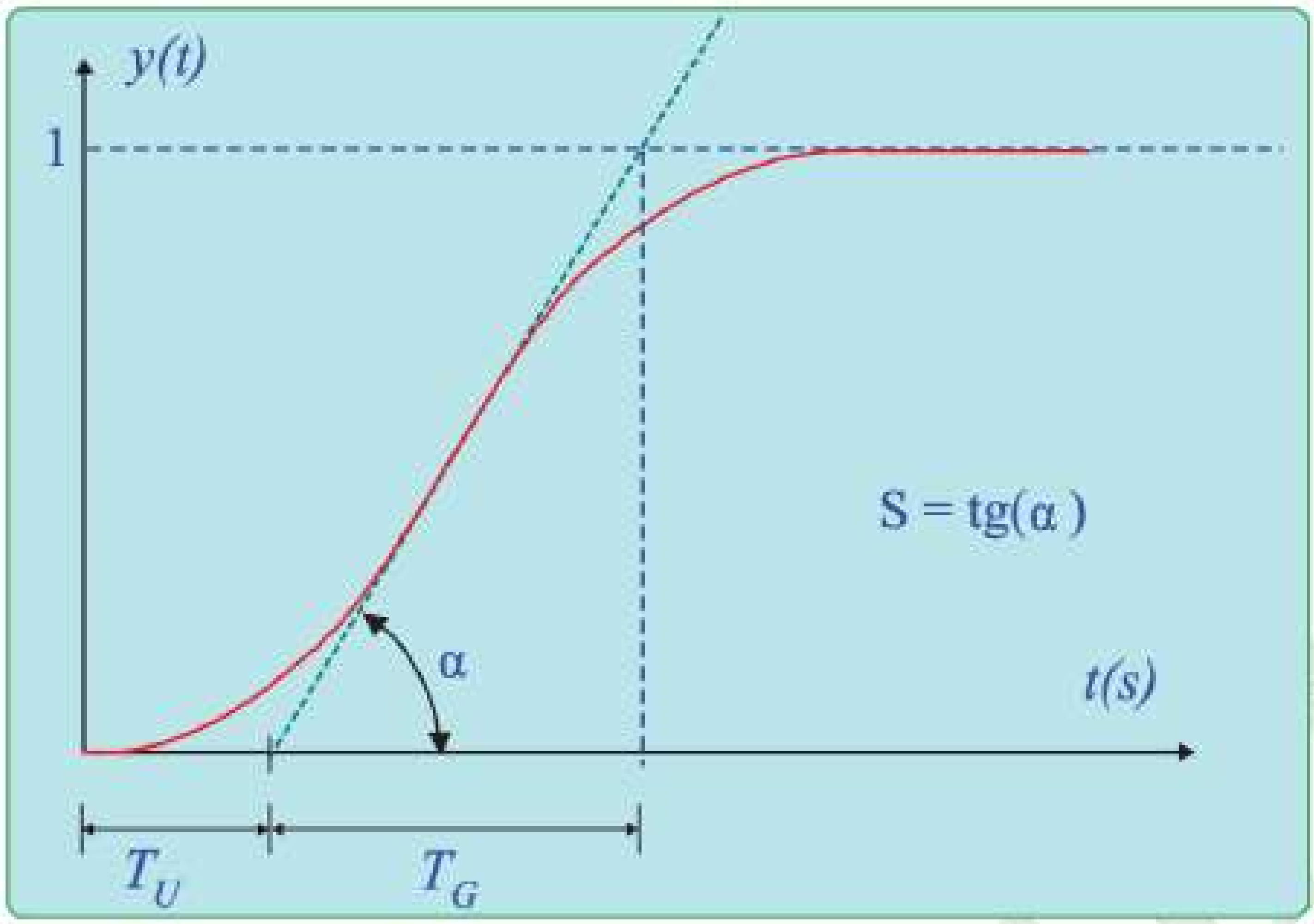
$$S(z^{-1}) = s_1 + 1z^{-1},$$

$$s_1 = K\frac{T_0}{T_I}.$$

Ajuste de PID com auxílio de tabelas

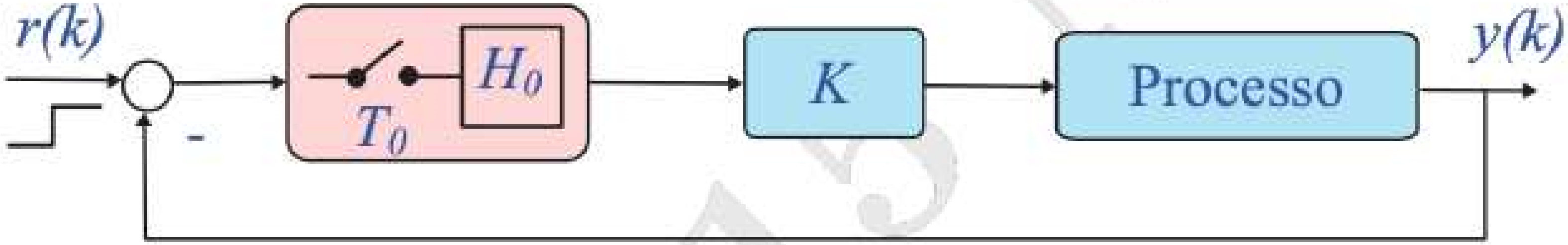
(Seção 7.7.3)

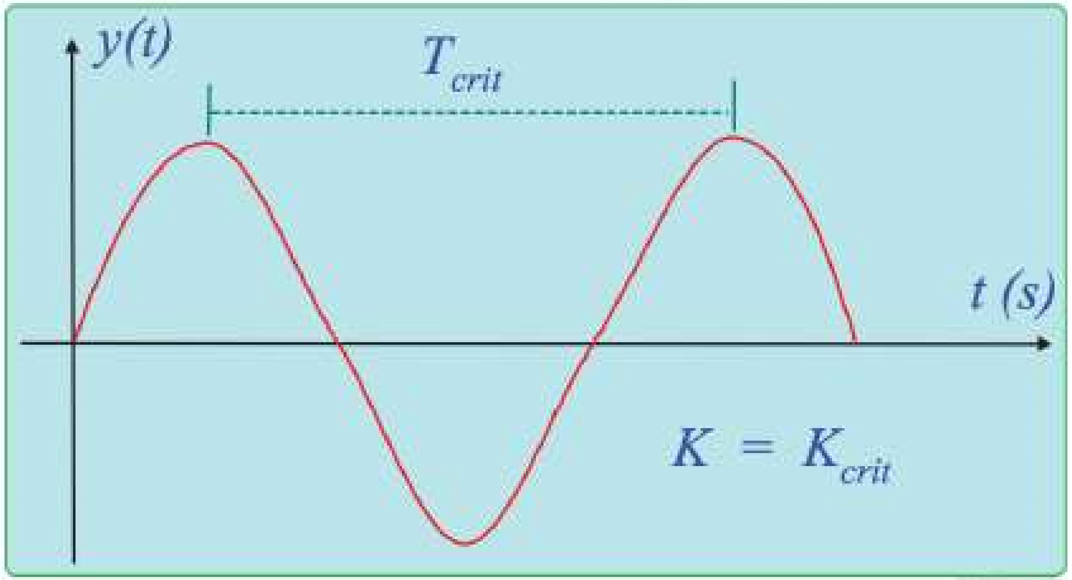
Ziegler-Nichols 1 - Ensaio resposta transitória.



Ajuste de PID com auxílio de tabelas

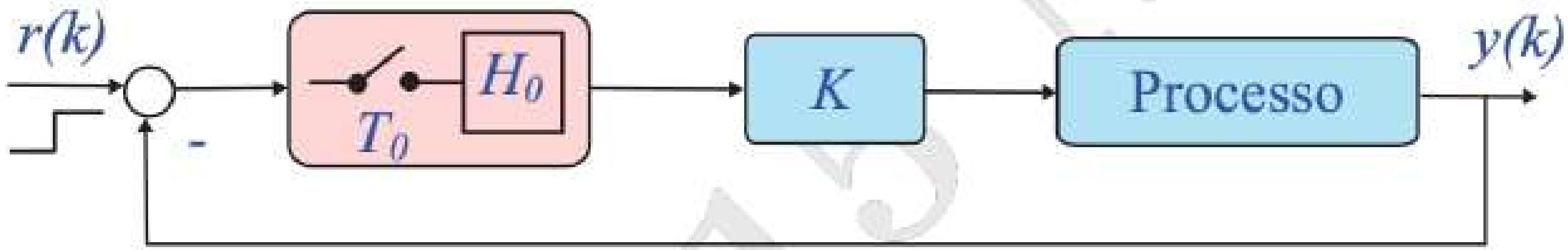
Ziegler-Nichols 2 - Oscilação limite.

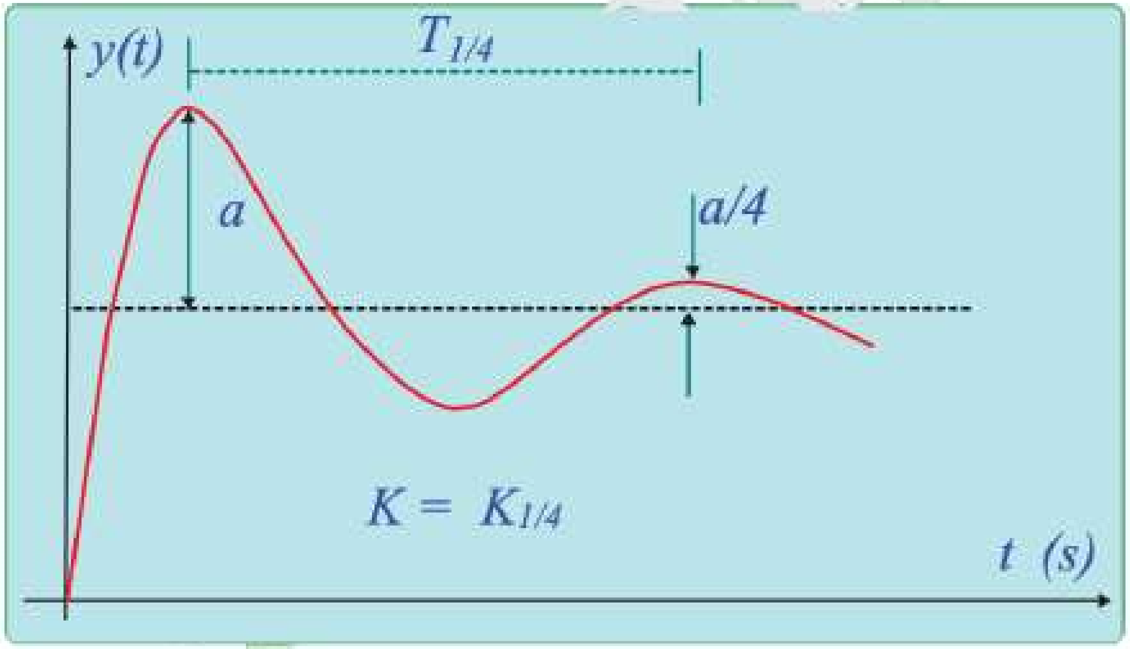




Ajuste de PID com auxílio de tabelas

Ziegler-Nichols 3 - Decaimento $1/4$.





Ajuste de PID com auxílio de tabelas

		Parâmetros de PID Contínuo		
		K_P	T_I	T_D
Método 1	P	T_G/T_U		
	PI	$0,9T_G/T_U$	$3,33T_U$	
	PID	$1,2T_G/T_U$	$2T_U$	$0,5T_U$
Método 2	P	$0,5K_{crit}$		
	PI	$0,45K_{crit}$	$0,85T_{crit}$	
	PID	$0,6K_{crit}$	0,5 T_{crit}	$0,125T_{crit}$
Método 3	P	$K_{1/4}$		
	PI	$0,9K_{1/4}$	$T_{1/4}$	
	PID	1,2 $K_{1/4}$	$T_{1/4}$	$0,25T_{1/4}$

T_0	$\approx$	$\Big(1/16 \text{ a } 1/8)\Big)(1/f_{bw})$	f_{bw} : Banda passante
T_0	$\approx$	$\Big(1/8 \text{ a } 1/4)\Big)T_t$	T_t : Tempo morto
T_0	$\approx$	$(0,35 \text{ a } 1,2)T_U$	$0,1 \leq (T_U/T_0) \leq 1$
T_0	$\approx$	$(0,22 \text{ a } 0,35)T_U$	$1 \leq (T_U/T_0) \leq 10$
T_0	$\approx$	π/ω_{max}	Teor. Amostragem
T_0	$\approx$	$\Big(1/15 \text{ a } 1/6\Big)T_{95\%}$	$T_{95\%}$: Tempo de subida

Tabela 7.6: Escolha intervalo de Amostragem

Controle Digital

SEL620

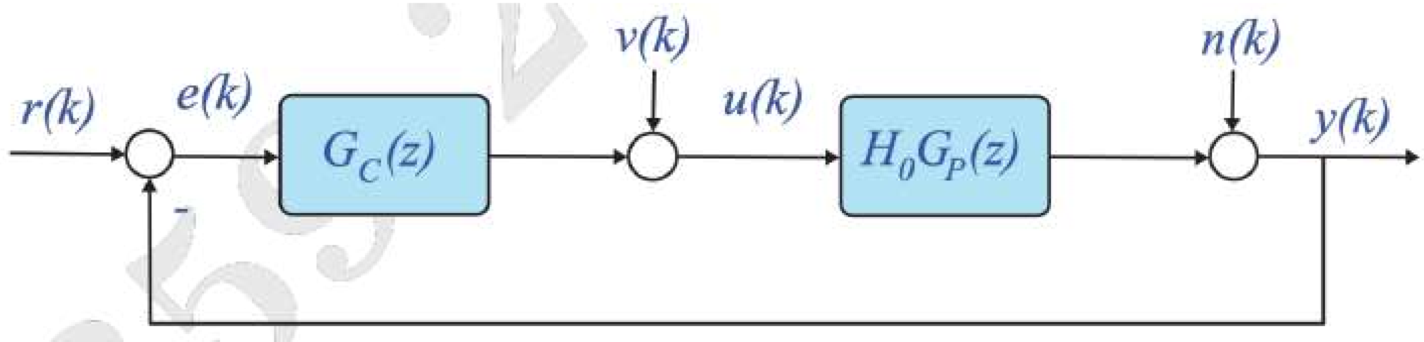
Prof. Dr. Valdir Grassi Jr

Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

Controlador Dead-Beat

Capítulo 8

Controlador Paramétrico Genérico



$$H_0G_P = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}},$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_\mu z^{-\mu}}.$$

Deseja-se que a resposta de malha fechada do sistema controlador por um Dead-Beat reproduza a entrada mas com um atraso puro.

Para um processo de ordem "m", deseja-se que na malha fechada:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = z^{-m}$$

Isso quer dizer que após m períodos de amostragem, a saída é igual a entrada.

Para uma entrada degrau:

$$r(k) = 1(k), \quad k = 0, \ldots, \infty. \tag{1}$$

Deseja-se que o comportamento do sistema controlador pelo Dead-Beat seja:

$$y(k) = r(k), \quad \text{para } k \geq m,$$

$$u(k) = u(m), \quad \text{para } k \geq m.$$

A transformada Z dos sinas fica:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = [1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots] \quad \text{(degrau unitário)},$$

$$\begin{aligned} Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots + y(m-1)z^{-(m-1)} + \\ 1\big(z^{-m} + z^{-(m+1)} + z^{-(m+2)} + \ldots\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \ldots + u(m-1)z^{-(m-1)} + \\ u(m)\big(z^{-m} + z^{-(m+1)} + z^{-(m+2)} + \ldots\big). \end{aligned}$$

A saída do sistema e do controlador permanecem constantes após m períodos.

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = [1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots],$$

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots + y(m-1)z^{-(m-1)} + \\ 1\big(z^{-m} + z^{-(m+1)} + z^{-(m+2)} + \ldots\big),$$

Dividindo $Y(z)$ por $R(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= (1 - z^{-1})Y(z), \\ &= y(1)z^{-1} - y(1)z^{-2} + y(2)z^{-2} - y(2)z^{-3} + \ldots \\ &\quad + y(m-1)z^{-(m-1)} - y(m-1)z^{-m} + \\ &\quad 1z^{-m} - 1z^{-(m+1)} + 1z^{-(m+1)} + \ldots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{R(z)} &= (1 - z^{-1})Y(z), \\
&= y(1)z^{-1} - y(1)z^{-2} + y(2)z^{-2} - y(2)z^{-3} + \ldots \\
&\quad + y(m-1)z^{-(m-1)} - y(m-1)z^{-m} + \\
&\quad\quad 1z^{-m} - 1z^{-(m+1)} + 1z^{-(m+1)} + \ldots
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{Y(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \ldots + p_m z^{-m},
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= y(1), \\
p_2 &= y(2) - y(1), \\
p_3 &= y(3) - y(2), \\
&\vdots \\
p_m &= 1 - y(m-1).
\end{aligned}
$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \ldots + p_m z^{-m},$$

$$\begin{aligned} p_1 &= y(1), \\ p_2 &= y(2) - y(1), \\ p_3 &= y(3) - y(2), \\ &\vdots \\ p_m &= 1 - y(m-1). \end{aligned}$$

$$\boxed{G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z)}$$

(Função de transferência de malha fechada.)

De forma semelhante:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = [1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots],$$

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \ldots + u(m-1)z^{-(m-1)} + u(m)\big(z^{-m} + z^{-(m+1)} + z^{-(m+2)} + \ldots\big).$$

Dividindo $U(z)$ por $R(z)$:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m} = Q(z).$$

Função de Transferência do sinal de controle

$$\frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m} = Q(z).$$

$$\begin{aligned} q_0 &= u(0), \\ q_1 &= u(1) - u(0), \\ q_2 &= u(2) - u(1), \\ &\vdots \\ q_m &= u(m) - u(m-1). \end{aligned}$$

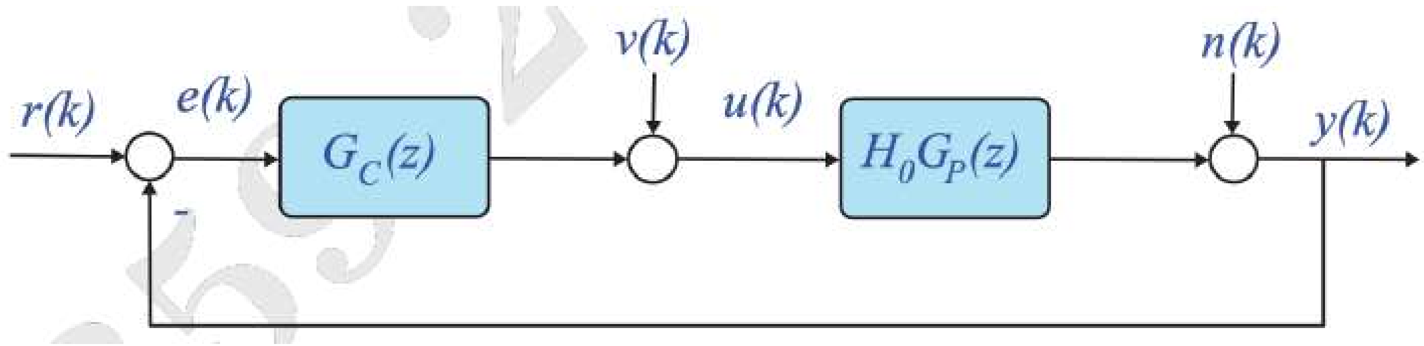
É importante observar que:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= y(1), \\ p_2 &= y(2) - y(1), \\ p_3 &= y(3) - y(2), \\ &\vdots \\ p_m &= 1 - y(m-1). \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

É importante observar que:

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= u(0), \\ q_1 &= u(1) - u(0), \\ q_2 &= u(2) - u(1), \\ &\vdots \\ q_m &= u(m) - u(m-1). \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} q_i = u(m) = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{H_0 G_P(1)}.$$

(K_P é o ganho da planta.)



$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)}\frac{R(z)}{U(z)}$$

Para o Dead-Beat:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = P(z), \qquad \frac{U(z)}{R(z)} = Q(z).$$

Para o Dead-Beat:

$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)}\frac{R(z)}{U(z)} = P(z)\frac{1}{Q(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Como:

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{H_0G_P(z)}\frac{G_r(z)}{1 - G_r(z)},$$ (exercício opcional: deduzir a expressão)

$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z),$$ (função de transferência da malha fechada)

$$\begin{aligned} G_R(z) = G_{DB(v)}(z) &= \frac{1}{H_0G_P(z)}\frac{G_r(z)}{1 - G_r(z)}, \\ &= \frac{Q(z)}{P(z)}\frac{P(z)}{1 - P(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}, \\ &= \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \ldots + q_mz^{-m}}{1 - p_1z^{-1} - p_2z^{-2} - \ldots - p_mz^{-m}}. \end{aligned}$$

Fórmula do Controlador Dead-Beat:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \ldots - p_m z^{-m}}.$$

Mas como foi visto:

$$H_0 G_P(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \ldots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}},$$

$$H_0 G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}}.$$

Portanto, é possível obter os polinômios $P(z)$ e $Q(z)$ a partir da função de transferência da planta.

$$H_0G_P(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \ldots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}},$$

$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 q_0, & p_1 &= b_1 q_0, \\ q_2 &= a_2 q_0, & p_2 &= b_2 q_0, \\ q_3 &= a_3 q_0, & p_3 &= b_3 q_0, \\ &\vdots & &\vdots \\ q_m &= a_m q_0, & p_m &= b_m q_0. \end{aligned}$$

Fórmula do controlador Dead-Beat:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \ldots - p_m z^{-m}},$$

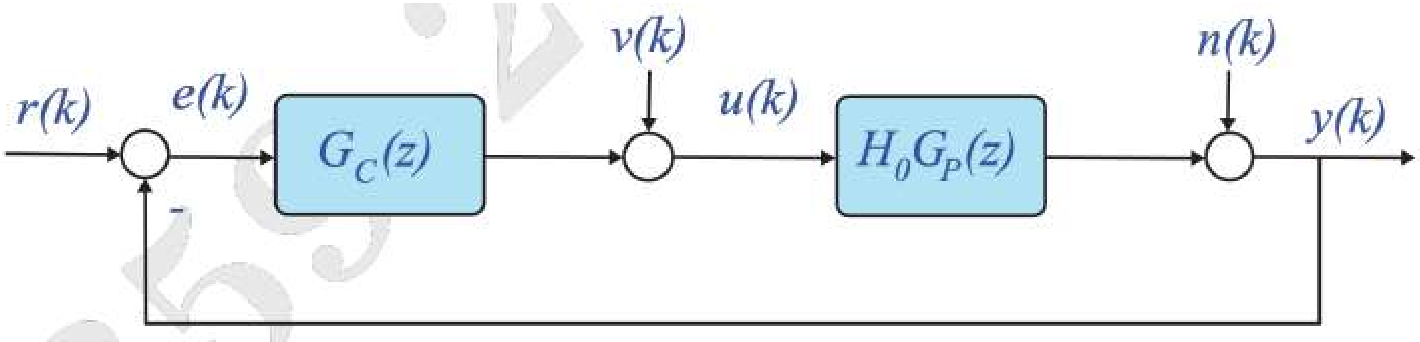
onde

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 q_0, & p_1 &= b_1 q_0, \\ q_2 &= a_2 q_0, & p_2 &= b_2 q_0, \\ q_3 &= a_3 q_0, & p_3 &= b_3 q_0, \\ &\vdots & &\vdots \\ q_m &= a_m q_0, & p_m &= b_m q_0. \end{aligned}$$

Para calcular q_0:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = q_0 \sum_{i=1}^{m} b_i = 1 \implies q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} b_i} = u(0).$$

Para o controlador Dead-Beat:



$$\boxed{G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z),} \qquad \boxed{\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z),}$$

$$\boxed{G_{DB(v)}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}.}$$

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \ldots + p_m z^{-m},$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}.$$

Exemplo 1

Calcular um controlador DB(v) para o processo abaixo, sendo $T_0 = 4s$:

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

$$K = 1, \quad T_1 = 10, \quad T_2 = 7,5, \quad T_3 = 5.$$

Solução: $\rightarrow$ discretização do processo.

Exemplo 1 (continuação)

$$\begin{aligned} H_0G_P(z) &= \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\} = \Big(\text{C2D no Matlab}\Big) \\ &= \frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}} \end{aligned}$$

$$a_1 = -1,7063 \quad a_2 = 0,9580 \quad a_3 = -1,1767$$

$$b_1 = 0,0186 \quad b_2 = 0,0486 \quad b_3 = 0,0078$$

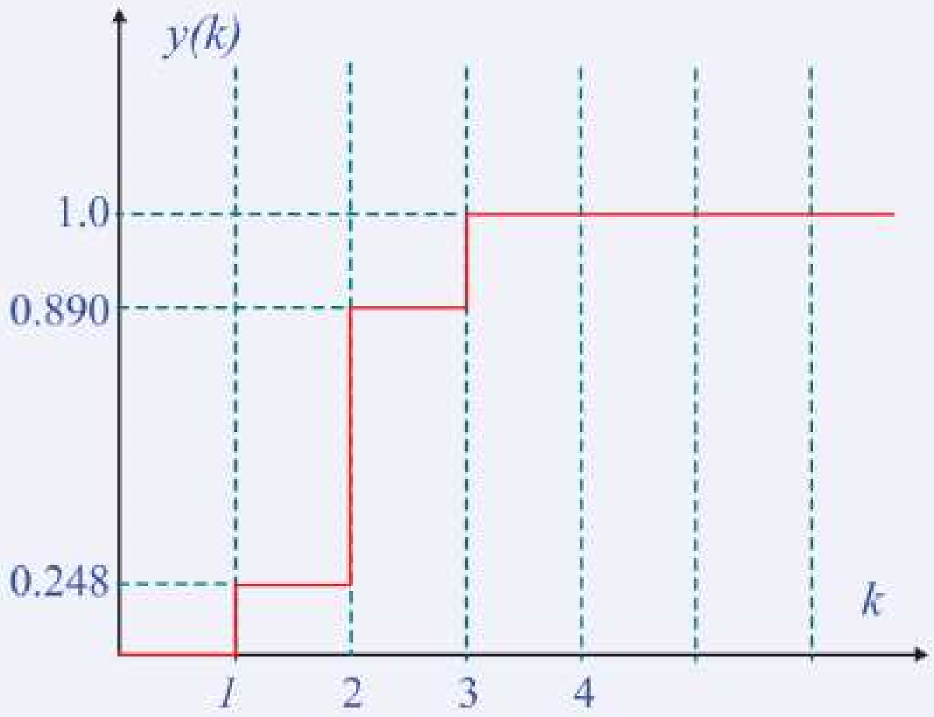
$\rightarrow$ Obtenção dos coeficientes do Controlador DB(ν) segundo as expressões (8.16) e (8.17).

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=3} b_i} = 13,3258 \\ q_1 &= a_1q_0 = -22,7378 & p_1 = b_1q_0 = 0,2478 \\ q_2 &= a_2q_0 = 12,7665 & p_2 = b_2q_0 = 0,6480 \\ q_3 &= a_3q_0 = -2,3546 & p_3 = b_3q_0 = 0,1042 \end{aligned}$$

Exemplo 1 (continuação)

→ Resposta transitória ao degrau do processo controlado, a partir de (8.20) é dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{R(z)} &= q_0 B(z^{-1}) \\
Y(z) &= q_0 B(z^{-1}) R(z) = \\
&= 0,2478\ z^{-1} R(z) + 0,6480\ z^{-2} R(z) + 0,1042\ z^{-3} R(z) \\
&= 0,2478\ r(k-1) + 0,6480\ r(k-2) + 0,1042\ r(k-3)
\end{aligned}
$$

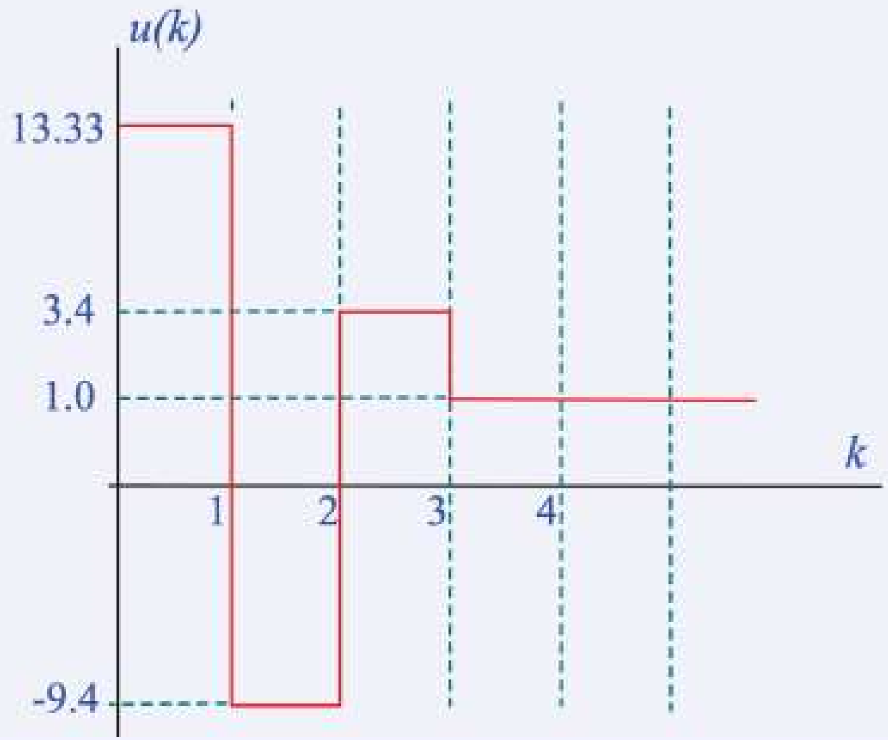


$y(0) = 0$
$y(1) = 0,248$
$y(2) = 0,896$
$y(3) = 1,000$
$y(4) = 1,000$
.
.
.

Exemplo 1 (continuação)

→ A respectiva ação de controle do processo controlado, a partir de (8.10) é dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{U(z)}{R(z)} &= Q(z^{-1}) \\
Y(z) &= Q(z^{-1})R(z) = \\
&= 13,3258 - 22,7378\, z^{-1}R(z) + 12,7665\, z^{-2}R(z) - 2,3546\, z^{-3}R(z) \\
&= 13,3258 - 22,7378\, r(k-1) + 12,7665\, r(k-2) - 2,3546\, r(k-3)
\end{aligned}
$$



u(0) = 13,3333
u(1) = -9,4147
u(2) = 3,3559
u(3) = 0,9999
u(4) = 0,9999

.
.
.

Controlador Dead-Beat

(Ordem $v + 1$)

Controlador Dead-Beat $(v+1)$

O controlador Dead-Beat $(v+1)$ é usado quando a primeira ação de controle $u(0)$ calculada pelo DB de ordem v é maior que um máximo permitido na entrada da planta.
Nesse caso, atrasa-se a convergência do sistema controlado controlador para o tempo $(m+1)T_0$.

Controlador Dead-Beat (v):

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \ldots + p_m z^{-m},$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}.$$

Controlador Dead-Beat ($v+1$):

$$P(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_m z^{-m} + p_{m+1} z^{-(m+1)},$$

$$Q(z^{-1}) = \frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}.$$

$$H_0G_P(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \ldots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_mz^{-m}}.$$

$$\frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \ldots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_mz^{-m}} =$$
$$\frac{p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \ldots + p_mz^{-m} + p_{m+1}z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \ldots + q_mz^{-m} + q_{m+1}z^{-(m+1)}}.$$

Os polinômios da direita e esquerda têm ordens diferentes. Para que seja possível compará-los, a razão de polinômios à direita possui raízes em comum.

Portanto, para o controlador Dead-Beat $(v+1)$:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\left(\bar{p}_1 z^{-1} + \bar{p}_2 z^{-2} + \ldots + \bar{p}_m z^{-m}\right)(\alpha - z^{-1})}{\left(\bar{q}_0 + \bar{q}_1 z^{-1} + \bar{q}_2 z^{-2} + \ldots + \bar{q}_m z^{-m}\right)(\alpha - z^{-1})}.$$

E comparando termo a termo com $H_0G_P(z)$:

$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}},$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= a_1 \bar{q}_0, & \bar{p}_1 &= b_1 \bar{q}_0, \\ \bar{q}_2 &= a_2 \bar{q}_0, & \bar{p}_2 &= b_2 \bar{q}_0, \\ \bar{q}_3 &= a_3 \bar{q}_0, & \bar{p}_3 &= b_3 \bar{q}_0, \\ &\vdots & &\vdots \\ \bar{q}_m &= a_m \bar{q}_0, & \bar{p}_m &= b_m \bar{q}_0. \end{aligned}$$

Expandindo:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\Big(\bar{p}_1 z^{-1} + \bar{p}_2 z^{-2} + \ldots + \bar{p}_m z^{-m}\Big)(\alpha - z^{-1})}{\Big(\bar{q}_0 + \bar{q}_1 z^{-1} + \bar{q}_2 z^{-2} + \ldots + \bar{q}_m z^{-m}\Big)(\alpha - z^{-1})}.$$

E comparando termo a termo com $H_0 G_P(z)$:

$$H_0 G_P(z) = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_m z^{-m} + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}},$$

onde

$$\begin{aligned}
q_0 &= \alpha \bar{q}_0, & & \\
q_1 &= (\alpha \bar{q}_1 - \bar{q}_0), & p_1 &= -\alpha \bar{p}_1, \\
q_2 &= (\alpha \bar{q}_2 - \bar{q}_1), & p_2 &= (\alpha \bar{p}_2 - \bar{p}_1), \\
q_3 &= (\alpha \bar{q}_3 - \bar{q}_2), & p_3 &= (\alpha \bar{p}_3 - \bar{p}_2), \\
&\vdots & &\vdots \\
q_m &= (\alpha \bar{q}_m - \bar{q}_{m-1}), & p_m &= (\alpha \bar{p}_m - \bar{p}_{m-1}), \\
q_{m+1} &= -\bar{q}_m, & p_{m+1} &= -\bar{p}_m.
\end{aligned}$$

Especificando o valor da primeira saída do controlador:

$$q_0 = \alpha\bar{q}_0 = u(0).$$

Como $\sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1$, e

$$\begin{aligned} p_1 &= -\alpha\bar{p}_1, & \bar{q}_1 &= a_1\bar{q}_0, \\ p_2 &= (\alpha\bar{p}_2 - \bar{p}_1), & \bar{q}_2 &= a_2\bar{q}_0, \\ p_3 &= (\alpha\bar{p}_3 - \bar{p}_2), & \bar{q}_3 &= a_3\bar{q}_0, \\ &\vdots & &\vdots \\ p_m &= (\alpha\bar{p}_m - \bar{p}_{m-1}), & \bar{q}_m &= a_m\bar{q}_0, \\ p_{m+1} &= -\bar{p}_m, \end{aligned}$$

obtém-se:

$$\bar{q}_0 = q_0 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m+1} b_i}.$$

Fórmula para o Controlador Dead-Beat $(v+1)$

$$G_{DB(v+1)} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \ldots - p_m z^{-m} - p_{m+1} z^{-(m+1)}},$$

onde,

$q_0 = u(0) \implies$ dado ou imposto pelo projetista.

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i}, \qquad p_1 = q_0 b_1,$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i}, \qquad p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i},$$

$$q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{\sum b_i}, \qquad p_3 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i}, \qquad p_m = q_0(b_{m-1} - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i},$$

$$q_{m+1} = a_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right), \qquad p_{m+1} = b_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right).$$

Malha fechada com o controlador Dead-Beat $(v+1)$

O controlador Dead-Beat $(v+1)$ pode ser representado como:

$$G_{DB(v+1)} = \frac{q_0 A(z^{-1})(1 - z^{-1}/\alpha)}{1 - q_0 B(z^{-1})(1 - z^{-1}/\alpha)},$$

onde

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{q_0 \sum b_i}.}$$

A função de transferência de malha fechada do sistema com controlador DB$(v+1)$ fica:

$$\boxed{\frac{Y(z)}{R(z)} = q_0 B(z^{-1})\big(1 - z^{-1}/\alpha\big).}$$

Saída do controlador DB($v+1$) é dada por:

$$\boxed{Q(z^{-1}) = \frac{U(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}.}$$

A segunda saída do controlador é:

$$u(1) = q_0 + q_1 = a_1 u(0) + \frac{1}{\sum b_i}.$$

Para se ter $u(1) < u(0)$, deve-se escolher $q_0 = u(0)$, tal que

$$u(0) = q_0 \leq \frac{1}{(1-a_1)\sum b_i}.$$

Exemplo 2

Calcular um controlador DB($\nu+1$) para o exemplo 16, tal que $u(0)=u(1)$.
Solução: Utilizando-se a Eq. (8.34), o coeficiente q_0 será dado por :

$$u(0)=q_0 \equiv \frac{1}{(1-a_1)\sum b_i} = 4,9245$$

e com (8.29), os demais coeficientes serão:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 & p_1 &= 0,0916 \\ q_2 &= -9,6172 & p_2 &= 0,3957 \\ q_3 &= 7,1785 & p_3 &= 0,4470 \\ q_4 &= -1,4845 & p_4 &= 0,0657 \end{aligned}$$

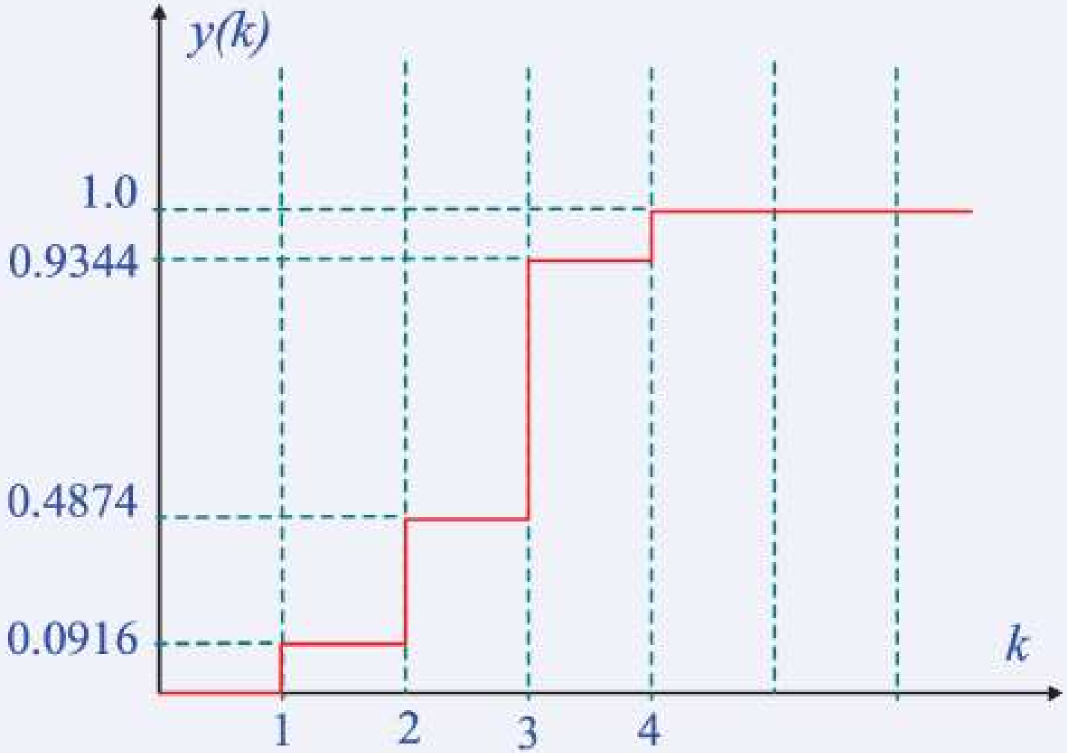
Através de (8.31), tem-se,

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{q_0 \, \sum b_i} = -1,7060$$

Com isto, a resposta transitória da saída controlada é dada por:

$$\begin{aligned} Y(z) &= q_0 \, B(z)\left(1+1,7060z^{-1}\right) R(z) = \\ y(k) &= 0,0916 \, r(k-1) + 0,3957 \, r(k-2) + 0,4470 \, r(k-3) + 0,0657 \, r(k-4) \end{aligned}$$

Exemplo 2 (continuação)



$y(0) = 0$
$y(1) = 0{,}0916$
$y(2) = 0{,}4874$
$y(3) = 0{,}9344$
$y(4) = 1{,}0000$
$y(5) = 1{,}0000$
.
.
.

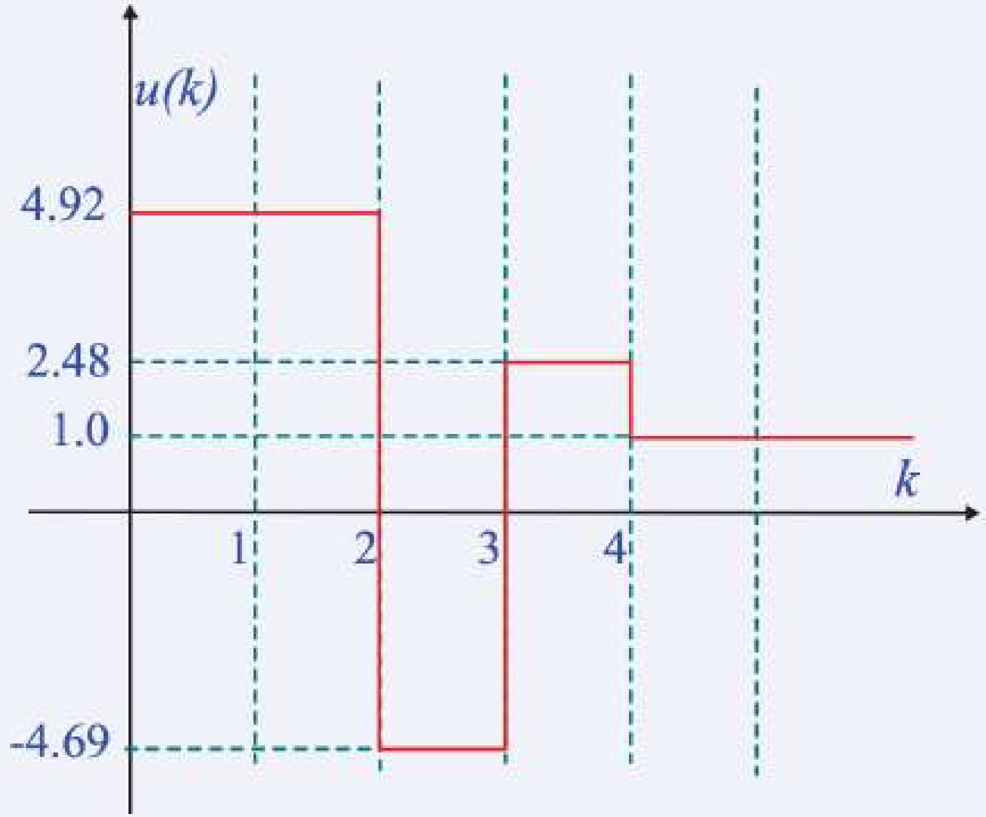
Resposta transitória da ação de controle limitada é expressa por (8.21) tal como:

$$
\begin{aligned}
U(z) &= Q(z^{-1}\ R(z) \\
u(k) &= 4,9245\ r(k) + 0 - 9,6172\ r(k-2) + 7,1785\ r(k-3) - 1,4845\ r(k-4)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (continuação)

Resposta transitória da ação de controle limitada é expressa por (8.21) tal como:

$$
\begin{aligned}
U(z) &= Q(z^{-1}\ R(z) \\
u(k) &= 4,9245\ r(k) + 0 - 9,6172\ r(k-2) + 7,1785\ r(k-3) - 1,4845\ r(k-4)
\end{aligned}
$$

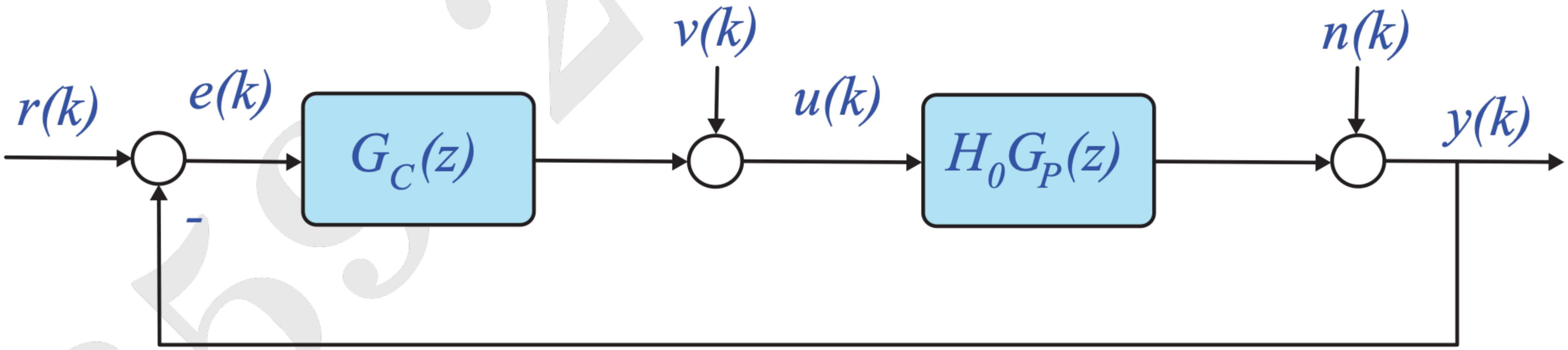


$u(0) = 4,92268$
$u(1) = 4,9268$
$u(2) = -4,6974$
$u(3) = 2,4855$
$y(4) = 1,0000$
$y(5) = 1,0000$

.
.
.

Efeito do Período de Amostragem no Dead-Beat

Controlador Paramétrico Genérico



$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ \dots \ + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ \dots \ + a_m z^{-m}}$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ \dots \ + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ \dots \ + p_\mu z^{-\mu}}$$

Fórmula do Controlador Dead-Beat:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ \dots \ + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \ \dots \ - p_m z^{-m}}$$

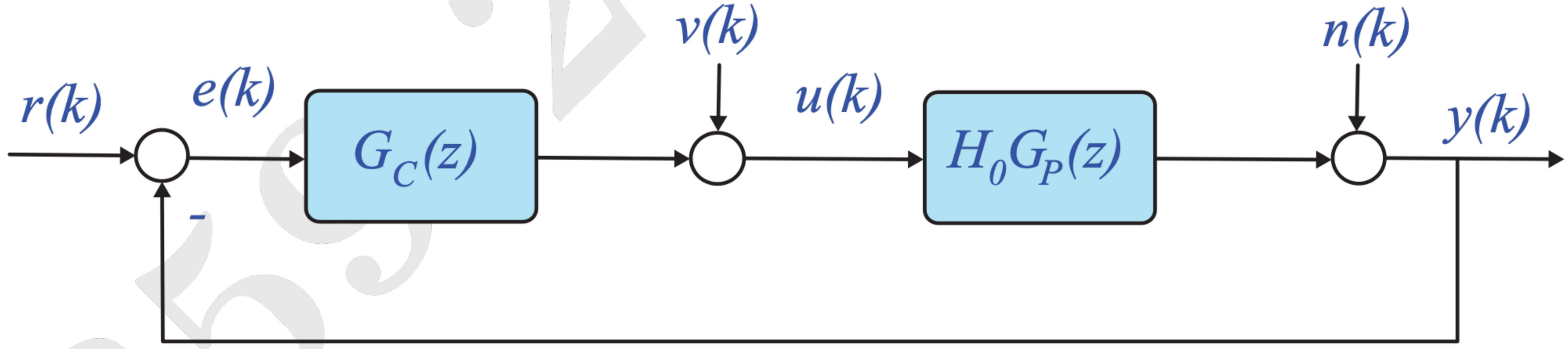
Com:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 q_0 & p_1 &= b_1 q_0 \\ q_2 &= a_2 q_0 & p_2 &= b_2 q_0 \\ q_3 &= a_3 q_0 & p_3 &= b_3 q_0 \\ &\vdots & &\vdots \\ q_m &= a_m q_0 & p_m &= b_m q_0 \end{aligned}$$

Para calcular q0:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = q_0 \sum_{i=1}^{m} b_i = 1 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} b_i} = u(0)$$

Para o Controlador Dead-Beat:



$$\boxed{G_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z)}$$

$$\boxed{\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z)}$$

$$\boxed{G_{BD(\nu)}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}}$$

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + \ \dots \ + p_m z^{-m}$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ \dots \ + q_m z^{-m}$$

Exemplo 13

Calcular um controlador DB(ν) para o processo abaixo, sendo $T_0 = 4$ seg.

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

$$K = 1,0 \quad T_1 = 10,0 \quad T_2 = 7,5 \quad T_3 = 5,0$$

Solução: $\rightarrow$ Discretização do processo.

$$\frac{1}{1 + 22.5s + 162.5s^2 + 375s^3}$$

Alterando o período de amostragem para 2 segundos:

$$\frac{0.00186 + 0.0092594z + 0.0028689z^2}{-0.4203504 + 1.6893178z - 2.2549791z^2 + z^3}$$

```
                                         2
   0.00186 + 0.0092594z + 0.0028689z
-----------------------------------------
                                         2   3
-0.4203504 + 1.6893178z - 2.2549791z + z
```

$$H_0G_P(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ \dots \ + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ \dots \ + a_m z^{-m}}$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ \dots \ + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ \dots \ + p_\mu z^{-\mu}}$$

$$\Rightarrow \quad q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} b_i} = u(0)$$ = 1/0,0139883 = 71,488

No exemplo 13, quando o período de amsotragem era 4 segundos:

q0 = 13,3258

Portanto, q0 = u(0) aumenta se o período de amostragem diminui.

$$
\begin{aligned}
H_0G_P(z) &= \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\} = \Big(\text{C2D no Matlab}\Big) \\
&= \frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}
\end{aligned}
$$

$$a_1 = -2{,}2550 \quad a_2 = 1{,}6893 \quad a_3 = -0{,}4203$$

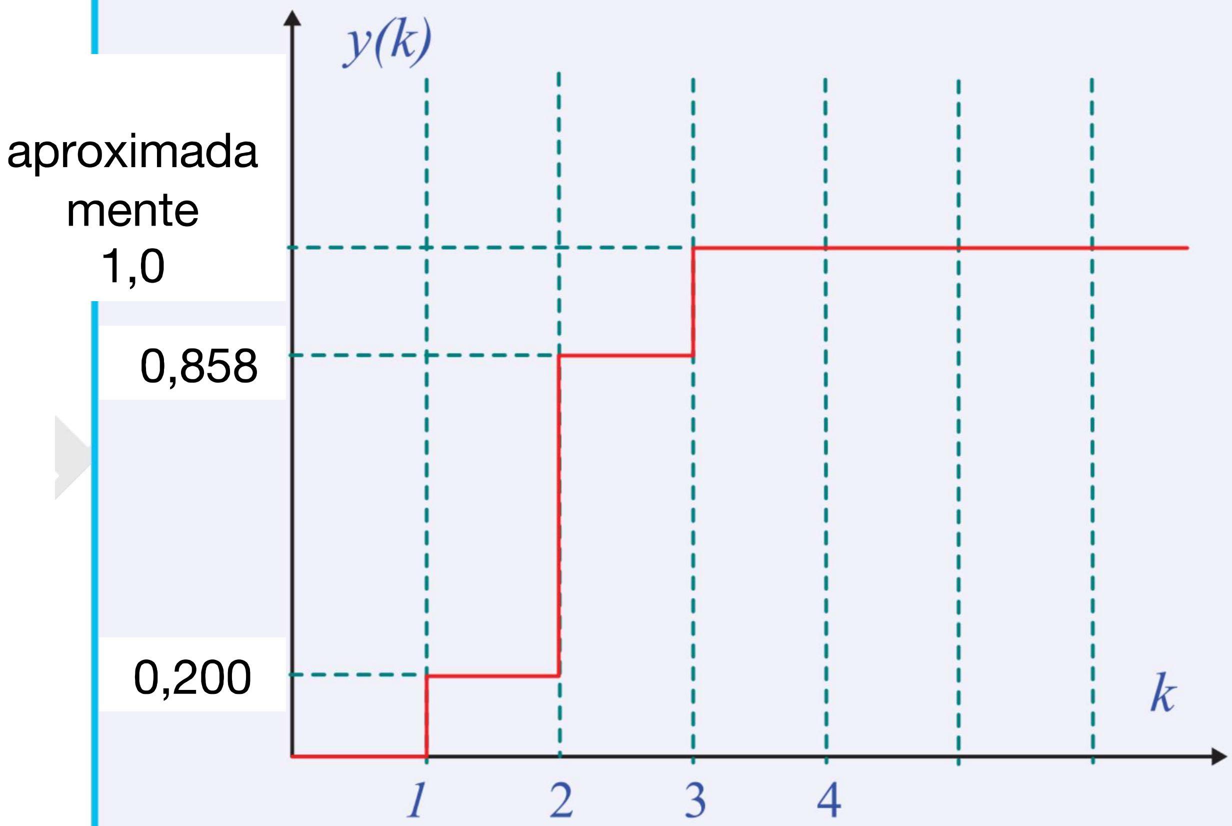
$$b_1 = 0{,}0028 \quad b_2 = 0{,}0092 \quad b_3 = 0{,}0018$$

→ Obtenção dos coeficientes do Controlador DB(ν) segundo as expressões (8.16) e (8.17).

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=3} b_i} = 71{,}488 \\
q_1 &= a_1q_0 = -161{,}20 & p_1 = b_1q_0 = 0{,}200 \\
q_2 &= a_2q_0 = 120{,}76 & p_2 = b_2q_0 = 0{,}658 \\
q_3 &= a_3q_0 = -30{,}046 & p_3 = b_3q_0 = 0{,}129
\end{aligned}
$$

→ Resposta transitória ao degrau do processo controlado, a partir de (8.20) é dada por:

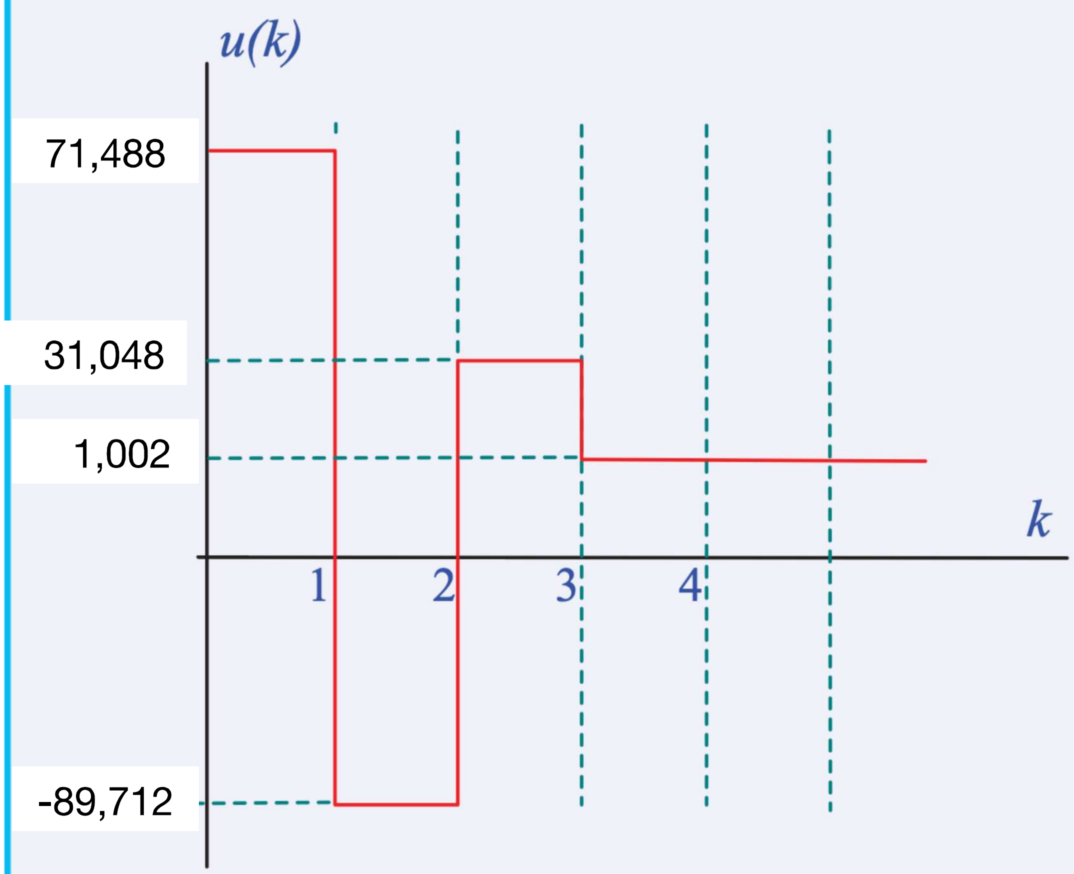
$$
\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{R(z)} &= q_0 B(z^{-1}) \\
Y(z) &= q_0 B(z^{-1}) R(z) = \\
&= 0{,}200 \; z^{-1}R(z) + 0{,}658 \; z^{-2}R(z) + 0{,}129 \; z^{-3}R(z) \\
&= 0{,}200 \; r(k-1) + 0{,}658 \; r(k-2) + 0{,}129 \; r(k-3)
\end{aligned}
$$



$y(0) = 0$
$y(1) = 0{,}200$
$y(2) = 0{,}858$
$y(3) = 0{,}987$
$y(4) = 0{,}987$
.
.
.

→ A respectiva ação de controle do processo controlado, a partir de (8.10) é dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{U(z)}{R(z)} &= Q(z^{-1}) \\
Y(z) &= Q(z^{-1})R(z) = \\
&= 71{,}488 - 161{,}20\, z^{-1}R(z) + 120{,}76\, z^{-2}R(z) - 30{,}046\, z^{-3}R(z) \\
&= 71{,}488 - 161{,}20\, r(k-1) + 120{,}76\, r(k-2) - 30{,}046\, r(k-3)
\end{aligned}
$$



$u(0) = 71{,}488$
$u(1) = -89{,}712$
$u(2) = 31{,}048$
$u(3) = 1{,}002$
$u(4) = 1{,}002$
.
.
.

Exemplo Dead-Beat ordem (v+1)

Fórmula para o Controlador Dead-Beat (v+1)

$$G_{DB(\nu+1)} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m} + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \ldots - p_m z^{-m} - p_{m+1} z^{-(m+1)}}$$

$$q_0 = u(0) \quad \Rightarrow \quad \text{Dado ou imposto pelo projetista}$$

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i} \qquad p_1 = q_0 b_1$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i} \qquad p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i}$$

$$q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{\sum b_i} \qquad p_3 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i} \qquad p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}$$

$$q_{m+1} = a_m\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right) \qquad p_{m+1} = b_m\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right)$$

$$H_0G_P(z) = \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\} = \Big(\text{C2D no Matlab}\Big)$$

$$= \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}}$$

$$a_1 = -1,7063 \quad a_2 = 0,9580 \quad a_3 = -1,1767$$

$$b_1 = 0,0186 \quad b_2 = 0,0486 \quad b_3 = 0,0078$$

Projete um controlador DB de ordem v+1 de forma que a maior entrada permitida na planta é 10.

Do enunciado u(0)=10, portanto:

$q_0 = u(0)$ = 10

O sistema é de ordem 3, portanto para o DB de ordem v+1, o valor de m=3+1=4
O calculo dos coeficientes do controlador é feito aplicando as formulas:

$$q_{m+1} = a_m\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right) \qquad p_{m+1} = b_m\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right)$$

$$H_0G_P(z) = \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\} = \Big(\text{C2D no Matlab}\Big)$$

$$= \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}}$$

$$a_1 = -1,7063 \quad a_2 = 0,9580 \quad a_3 = -1,1767$$

$$b_1 = 0,0186 \quad b_2 = 0,0486 \quad b_3 = 0,0078$$

$q_0 = u(0)$ = 10

$$q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i} \qquad p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}$$

Considere que a0=1, b0=0.

Como o DB(v+1) possui ordem 4, é preciso calcular: q1, q2, q3, q4, p1, p2, p3, p4

$$q_1 = q_0\left(a_1 - a_0\right) + \frac{a_0}{\sum b_i}$$

$$q_2 = q_0\left(a_2 - a_1\right) + \frac{a_1}{\sum b_i}$$

Controle Digital

SEL620

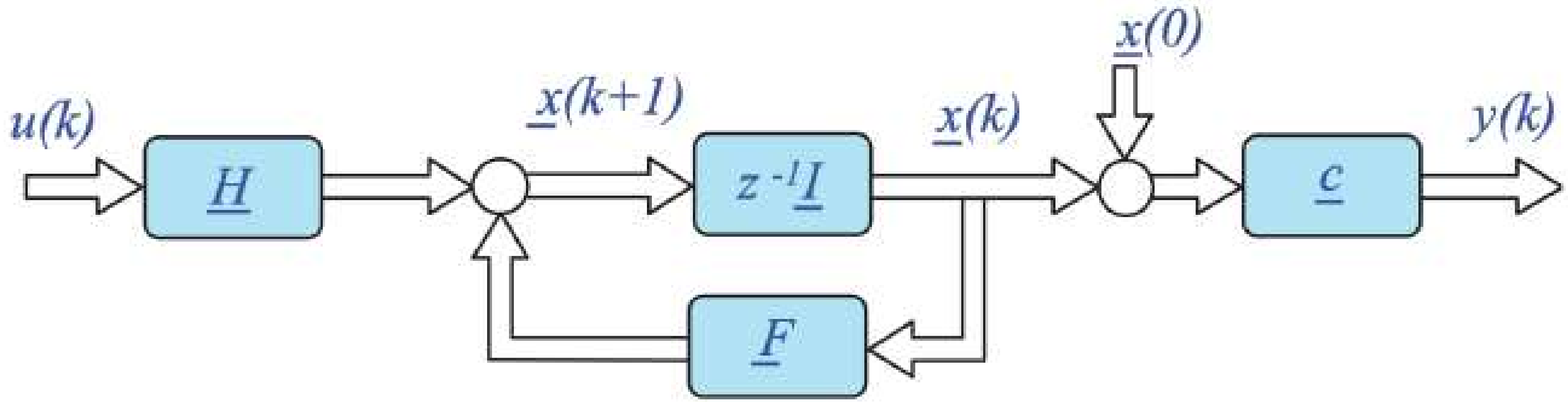
Prof. Dr. Valdir Grassi Jr

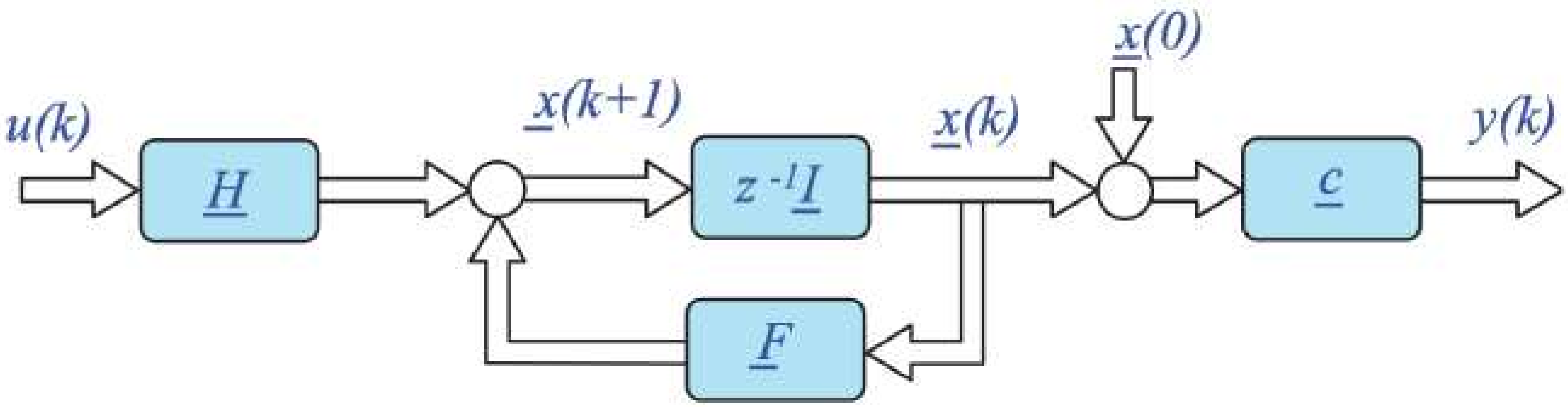
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

Controle por Realimentação de Estados Discretos

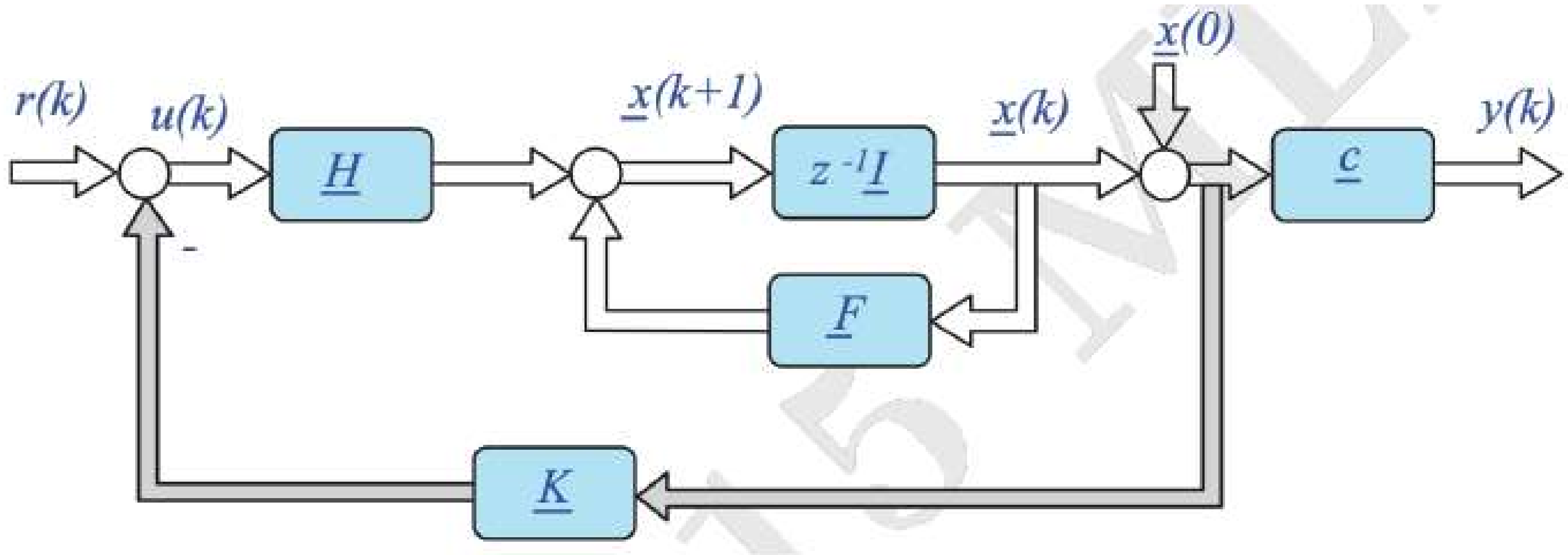
Capítulo 9

$$
\begin{cases}
\underline{\mathsf{x}}(k+1) = \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k), \\
\underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k).
\end{cases}
$$

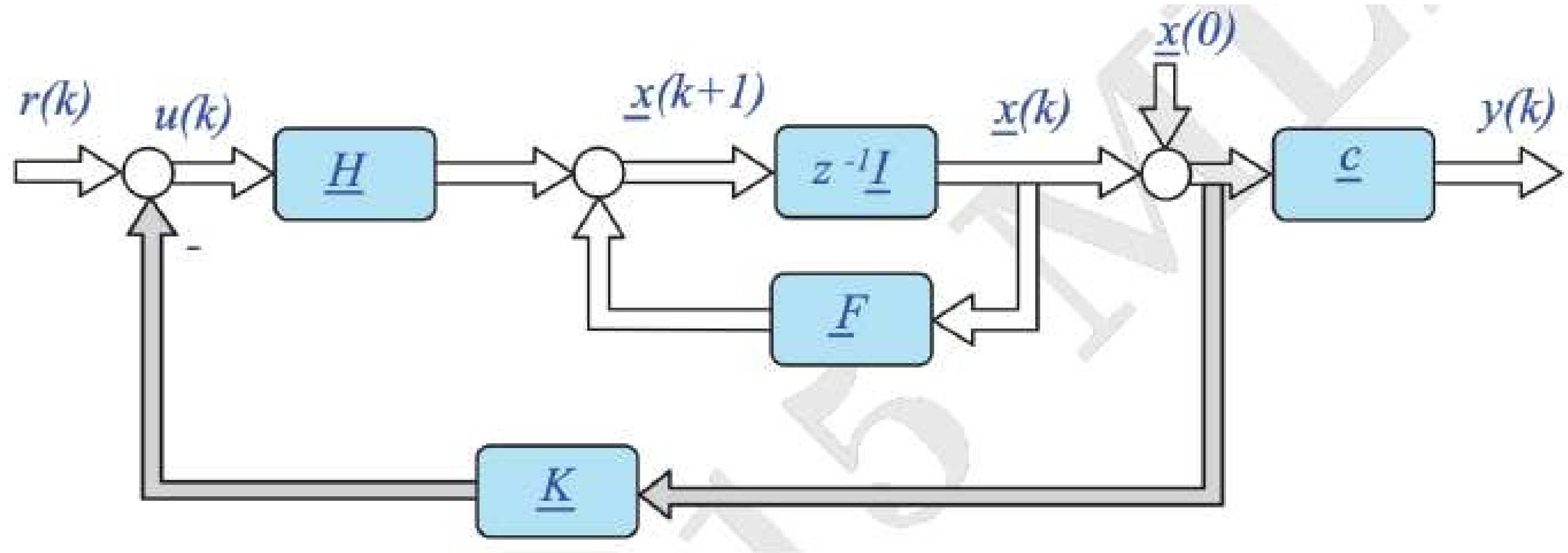




u(k)
H
x(k+1)
z -1I
x(k)
x(0)
c
y(k)
F



r(k)
u(k)
H
x(k+1)
z -1I
x(k)
x(0)
c
y(k)
F
K
-



$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = (\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}})\underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{r}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = (\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}})\underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{r}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k). \end{cases}$$

A equação característica é dada por:

$$\mathsf{det}[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = 0.$$

O ganho é um vetor:

$$\underline{\mathsf{K}} = \begin{bmatrix} k_m & k_{m-1} & k_{m-2} & \dots & k_2 & k_1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = (\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}})\underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{r}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k). \end{cases}$$

Para um sistema na forma canônica controlável:

$$\underline{\mathsf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_m + k_m) & -(a_{m-1} + k_{m-1}) & \dots & -(a_1 + k_1) \end{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{\mathsf{r}}(k).$$

Para um sistema na forma canônica controlável:

$$\underline{\mathsf{x}}(k{+}1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_m + k_m) & -(a_{m-1} + k_{m-1}) & \dots & -(a_1 + k_1) \end{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{\mathsf{r}}(k).$$

A equação característica é dada por:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = 0,$$

$$(a_m + k_m) + (a_{m-1} + k_{m-1})z + \ldots + (a_1 + k_1)z^{m-1} + z^m \equiv$$

$$\equiv \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \ldots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m,$$

onde $k_i = \alpha_i - a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Portanto, se a equação característica desejada for especificada:

$$\alpha_m + \alpha_{m-1}z + \ldots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m = 0,$$

encontra-se os ganhos do controlador:

$$k_i = \alpha_i - a_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Projeto por alocação de polos

Especifica-se os polos desejados para o sistema realimentado:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = (z + z_1)(z + z_2)\dots(z + z_m).$$

Encontra-se os valores de alpha, expandindo a equação em função dos polos:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \ldots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m.$$

Para o sistema na forma canônica controlável, encontra-se os ganhos do controlador aplicando:

$$k_i = \alpha_i - a_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Projeto por alocação de polos

Especifica-se os polos desejados para o sistema realimentado:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = (z + z_1)(z + z_2)\ldots(z + z_m).$$

Com o auxílio do Matlab é possível usar o comando “acker” ou “place” fornecendo os polos desejados e as matrizes $\underline{\mathsf{F}}$ e $\underline{\mathsf{H}}$.

No Scilab, o comando equivalente é “ppol”.

Neste caso, o sistema não precisa estar na forma canônica controlável.

Projeto para obter solução que equivale a um Dead-Beat

Na solução que equivale ao Dead-Beat, a equação característica é:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = z_m.$$

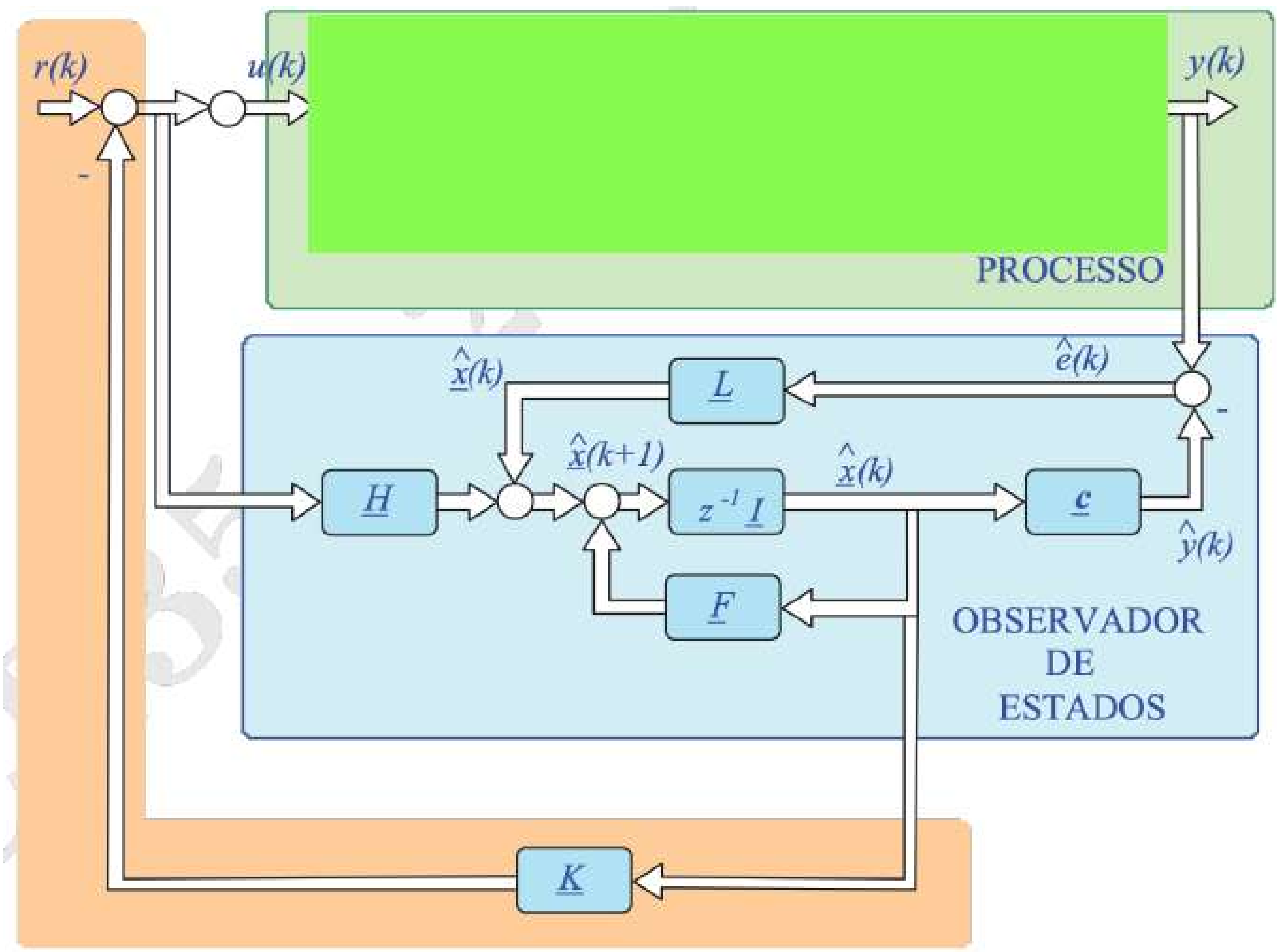
Portanto, todos os polos são zero.

Para o sistema na forma canônica controlável:

$$k_i = -a_i.$$

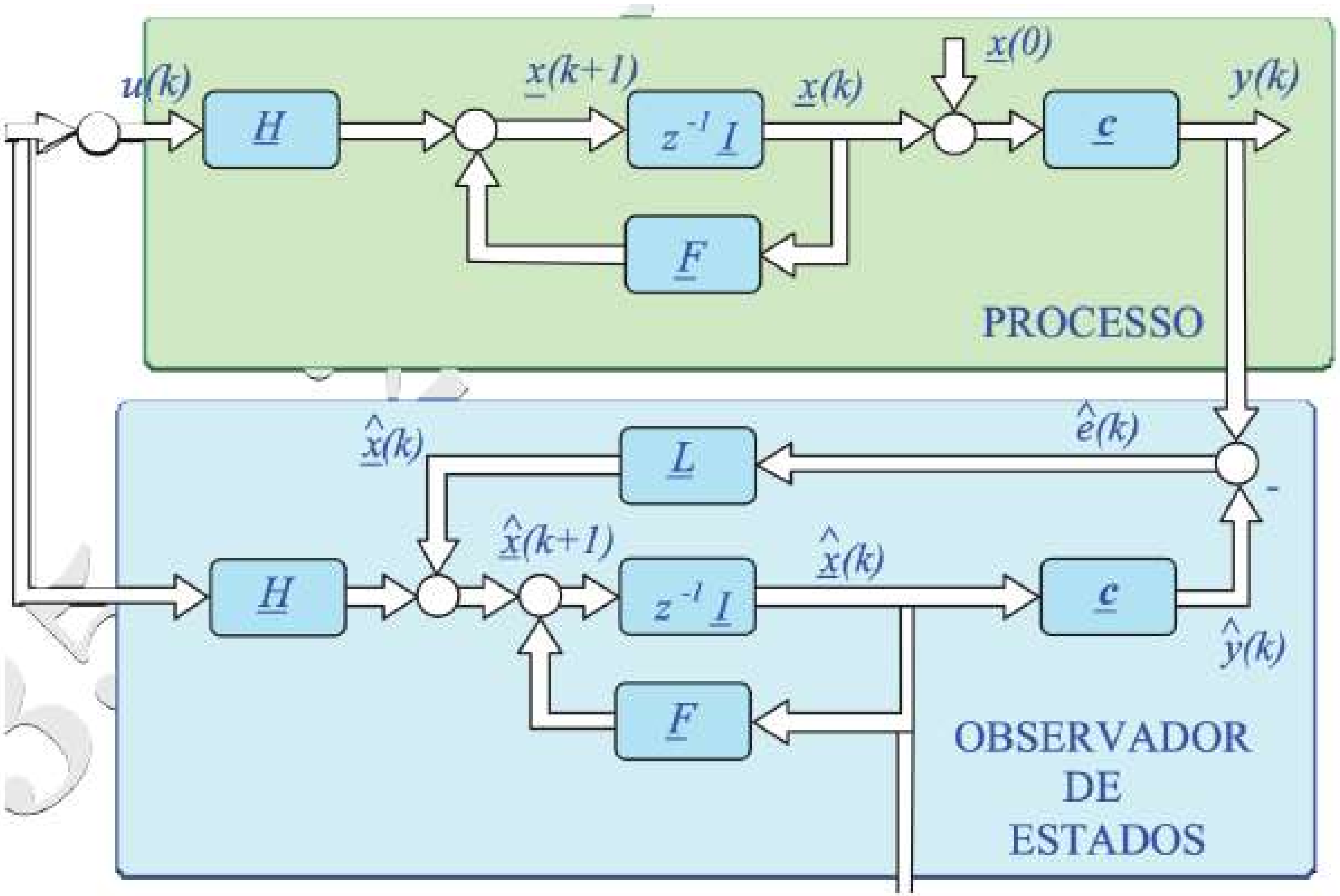
Observadores de estado

Capítulo 9


r(k)
u(k)
y(k)
PROCESSO
x̂(k)
ê(k)
L
x̂(k+1)
x̂(k)
H
z^-1 I
c
ŷ(k)
F
OBSERVADOR
DE
ESTADOS
K
-
-

Assumindo que u e y podem ser medidos, e que a saída esperada $(\hat{y}(k))$ pode ser calculada pelo modelo:

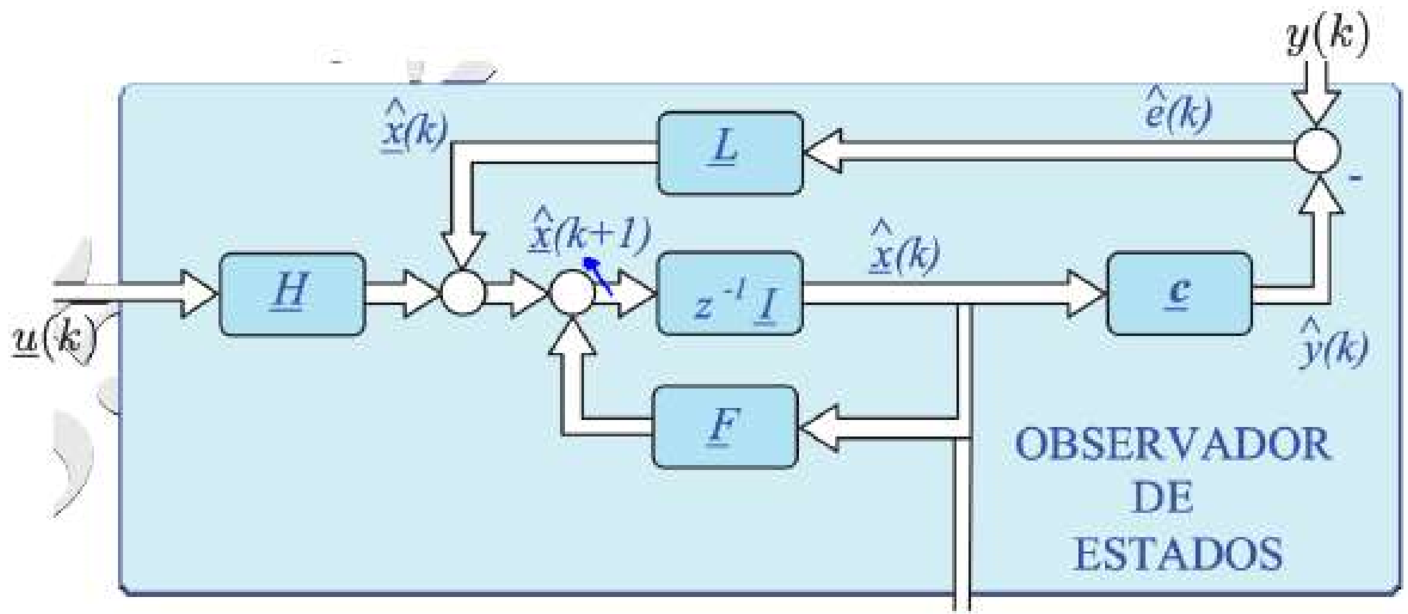
$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k), \\ \Delta\hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k). \end{cases}$$



A matriz de ponderação $\underline{\mathsf{L}}$ é usada para gerar uma correção do vetor de estados a partir do erro na saída. Essa matriz deve ser escolhida de forma que $\hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) \to \underline{\mathsf{x}}(k+1)$.

$$\begin{cases} \underline{\mathsf{x}}(k+1) = \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k), \\ \underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k), \\ \Delta\hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}\Delta\hat{e}(k), \\ &= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}(y(k) - \underline{\mathsf{c}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k)). \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
\underline{\mathsf{x}}(k+1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k), \\
\hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}\Delta\hat{e}(k), \\
&= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}(y(k) - \underline{\mathsf{c}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k)).
\end{aligned}
$$

Definindo:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \underline{\mathsf{x}}(k+1) - \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1), \\
\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \left[\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}\right]\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k).
\end{aligned}
$$

Deseja-se que:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k) = 0.$$

Isso significa que o sistema $\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k)$ deve ser estável.

$$\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) = \left[\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}\right]\tilde{\underline{\mathsf{x}}}(k).$$

Equação característica:

$$\begin{aligned}\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}] &= (z+z_1)(z+z_2)\ldots(z+z_m) = \\ &= \gamma_m + \gamma_{m-1}z + \ldots + \gamma_1 z^{m-1} + z^m = 0,\end{aligned}$$

com polos z_i dentro do círculo unitário.

Pode-se escolher uma dinâmica para o observador que pode ter uma resposta rápida do tipo Dead-beat, por exemplo.

Equação característica do controlador por realimentação de estados:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = 0.$$

Equação característica do observador de estados:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}] = 0.$$

Para obter a matriz $\underline{\mathsf{L}}$, não podemos usar os comandos *place*, *acker*, ou *ppol* da mesma forma que foi usado para obter $\underline{\mathsf{K}}$, pois a ordem de $\underline{\mathsf{K}}$ e $\underline{\mathsf{L}}$ estão trocadas nas equações acima.

Obtenção da matriz $\underline{\mathsf{L}}$

Dado que o determinante de uma matriz $\underline{\mathsf{W}}$ é igual ao determinante de sua transposta $\underline{\mathsf{W}}^T$, vale então:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}] = \det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}}^T + \underline{\mathsf{c}}^T\underline{\mathsf{L}}^T].$$

Portanto, agora comparando com a equação característica do controlador por realimentação de estados:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] = 0.$$

Para obter a matriz $\underline{\mathsf{L}}$, basta substituir no comando *acker*, *place*, ou *ppol*:
$\underline{\mathsf{F}}$ por $\underline{\mathsf{F}}^T$, $\underline{\mathsf{H}}$ por $\underline{\mathsf{c}}^T$, e $\underline{\mathsf{K}}$ por $\underline{\mathsf{L}}^T$.

Obtenção da matriz $\underline{\mathsf{L}}$

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}\Delta\hat{e}(k), \\
&= \underline{\mathsf{F}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}(y(k) - \underline{\mathsf{c}}\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k)). \\
&= [\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}]\hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{y}}(k).
\end{aligned}$$

Usando a forma canônica observável do sistema:

$$\hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -(a_m + l_m) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -(a_{m-1} + l_{m-1}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -(a_{m-2} + l_{m-2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -(a_1 + l_1) \end{bmatrix} \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k) + \begin{bmatrix} l_m \\ l_{m-1} \\ l_{m-2} \\ \vdots \\ l_1 \end{bmatrix} \underline{\mathsf{y}}(k).$$

A equação característica fica:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}] = 0,$$

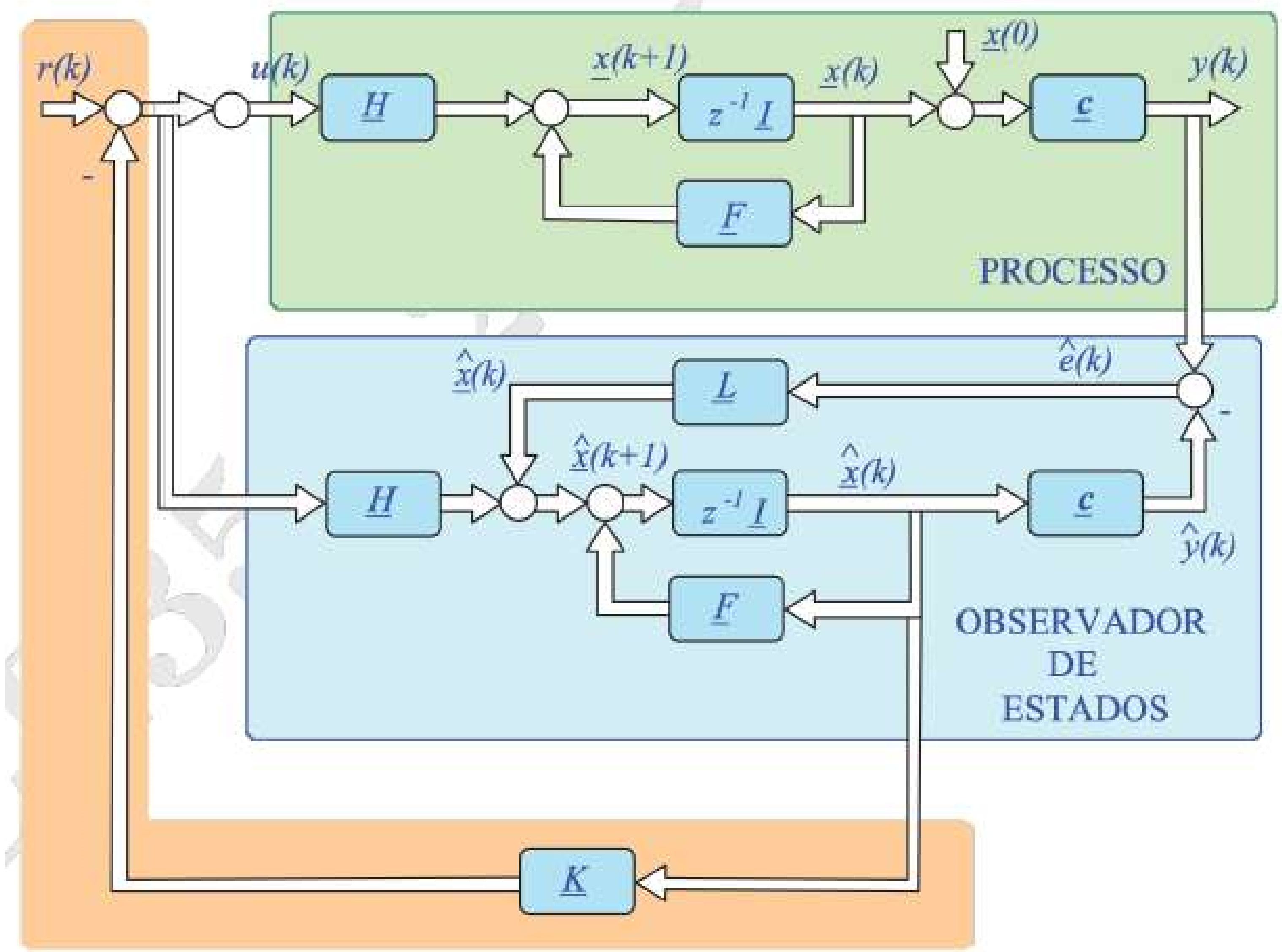
$$(a_m + l_m) + (a_{m-1} + l_{m-1})z + \ldots + (a_1 + l_1)z^{m-1} + z^m \equiv$$
$$\equiv \gamma_m + \gamma_{m-1}z + \ldots + \gamma_1 z^{m-1} + z^m.$$

Portanto os valores de L podem ser encontrados:

$$l_i = \gamma_i - a_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Para encontrar a solução com comportamento Dead-beat, basta fazer os valores de gama iguais a zeros.

Controlador de estados com observador de estados



Controlador de estados com observador de estados

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k+1) \\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathsf{F}} & (-\underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}) \\ \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}} & (\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}} - \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}) \end{bmatrix}}_{\underline{\mathsf{F}}^*} \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) \\ \hat{\underline{\mathsf{x}}}(k) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathsf{y}}(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k).$$

Equação característica para sistema completo:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}}^*] = \det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}] \times \det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}} + \underline{\mathsf{L}}\ \underline{\mathsf{c}}].$$

Para observador e controlador com comportamento Dead-beat:

$$\det[z\underline{\mathsf{I}} - \underline{\mathsf{F}}^*] = z^m z^m = z^{2m}.$$

No projeto do controlador por realimentação de estados observados, é importante que a dinâmica do observador seja mais rápida que a dinâmica do controlador.

Intuitivamente, o observador converge mais rápido para a estimativa correta dos estados. Isso permite a convergência do controlador (mais lento) para o valor desejado utilizando a estimativa correta dos estados (que rapidamente é obtida).

Exemplo 1

No exemplo a seguir é ilustrado o controle de estados com observador de estados realizado no Simulink. O processo considerado, de duas entradas e duas saídas, é descrito pela sua formulação contínua no espaço de estados como sendo:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = 0$$

O processo deverá ser controlado e observado por uma estrutura digital operando com uma frequência de 4 Hz. Os polos desejados para o Controlador e para o Observador de Estados para o caso contínuo, são dados respectivamente por:

$$\underline{p}_{D\_Con} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \end{bmatrix} \qquad \underline{p}_{D\_Obs} = \begin{bmatrix} -9 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

Observe que neste caso a dinâmica do Observador foi designada ligeiramente mais rápida que a desejada para a dinâmica do Controle, pois os polos desejados do Observador se encontram um pouco mais distantes da origem (do plano-s) do que os polos do Controle.

Exemplo 1 (cont.)

Solução :

A primeira etapa envolve a discretização do processo e dos polos desejados segundo o tempo de amostragem dado. Desta forma o processo discretizado resulta:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9892 & 0,2294 & 0,0191 \\ -0,1143 & 0,7796 & 0,1151 \\ -0,6907 & -1,3805 & 0,0889 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1,2493 & 0,0616 \\ -0,0108 & 0,4779 \\ -0,1143 & -0,3257 \end{bmatrix}$$

sendo $\underline{C}$ e $\underline{D}$ inalterados. Os polos desejados em ambos os casos são discretizados pela relação de definição $z = e^{T_0 s}$ e obtidos como sendo:

$$\underline{p}_{D\_Con} = \begin{bmatrix} 0,2865 & 0,2231 & 0,2231 \end{bmatrix} \quad \underline{p}_{D\_Obs} = \begin{bmatrix} 0,1054 & 0,0821 & 0,0821 \end{bmatrix}$$

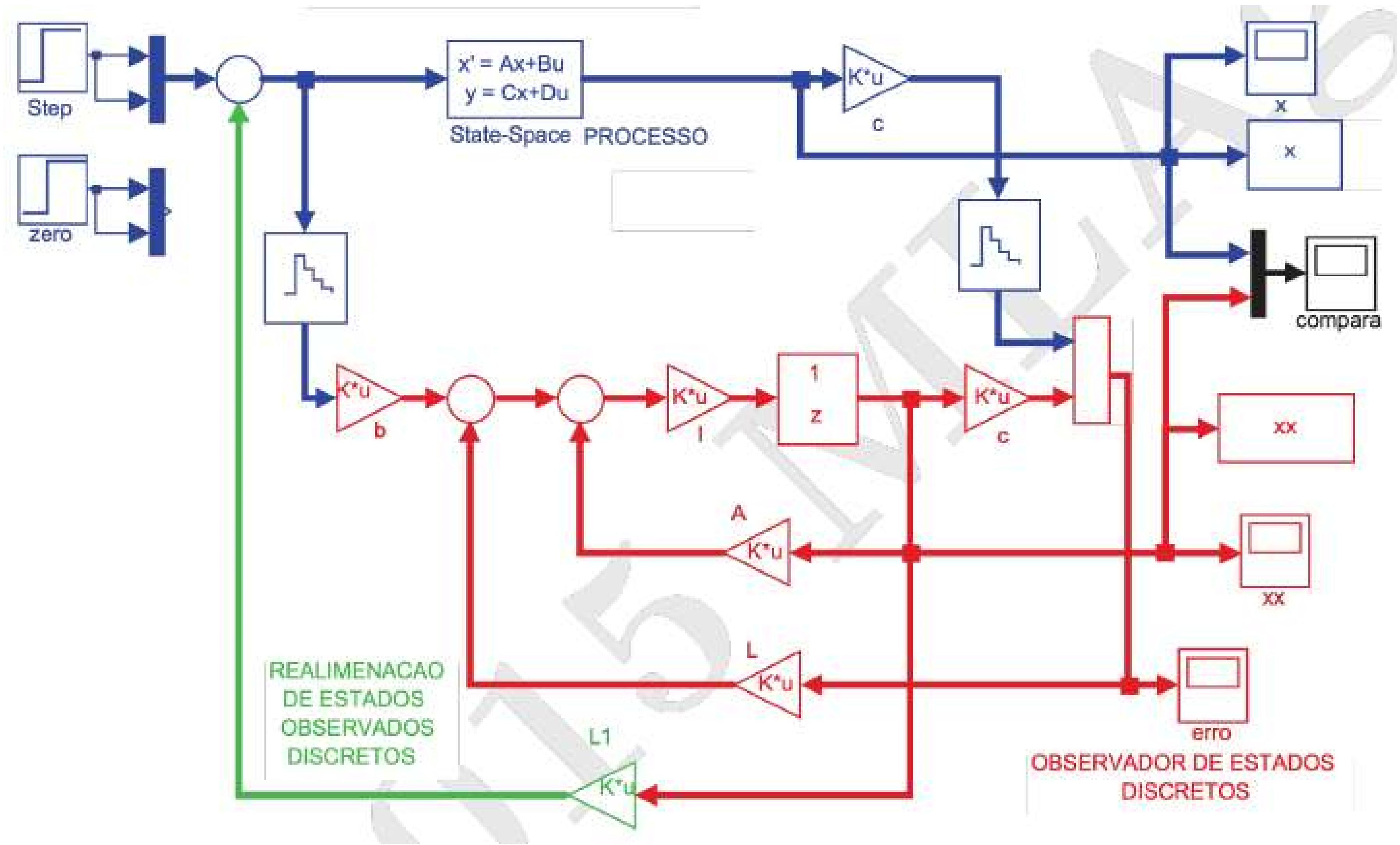
Na versão discreta, observa-se que os polos mais rápidos do Observador apresentam módulo menor que o módulo dos polos do Controlador.
Com o comando `place` do Matlab e usando-se as matrizes $\underline{F}$ e $\underline{c}$ transpostas e o vetor de polos desejados acima, obtém-se o vetor $\underline{\mathbf{L}}$ do Observador como sendo:

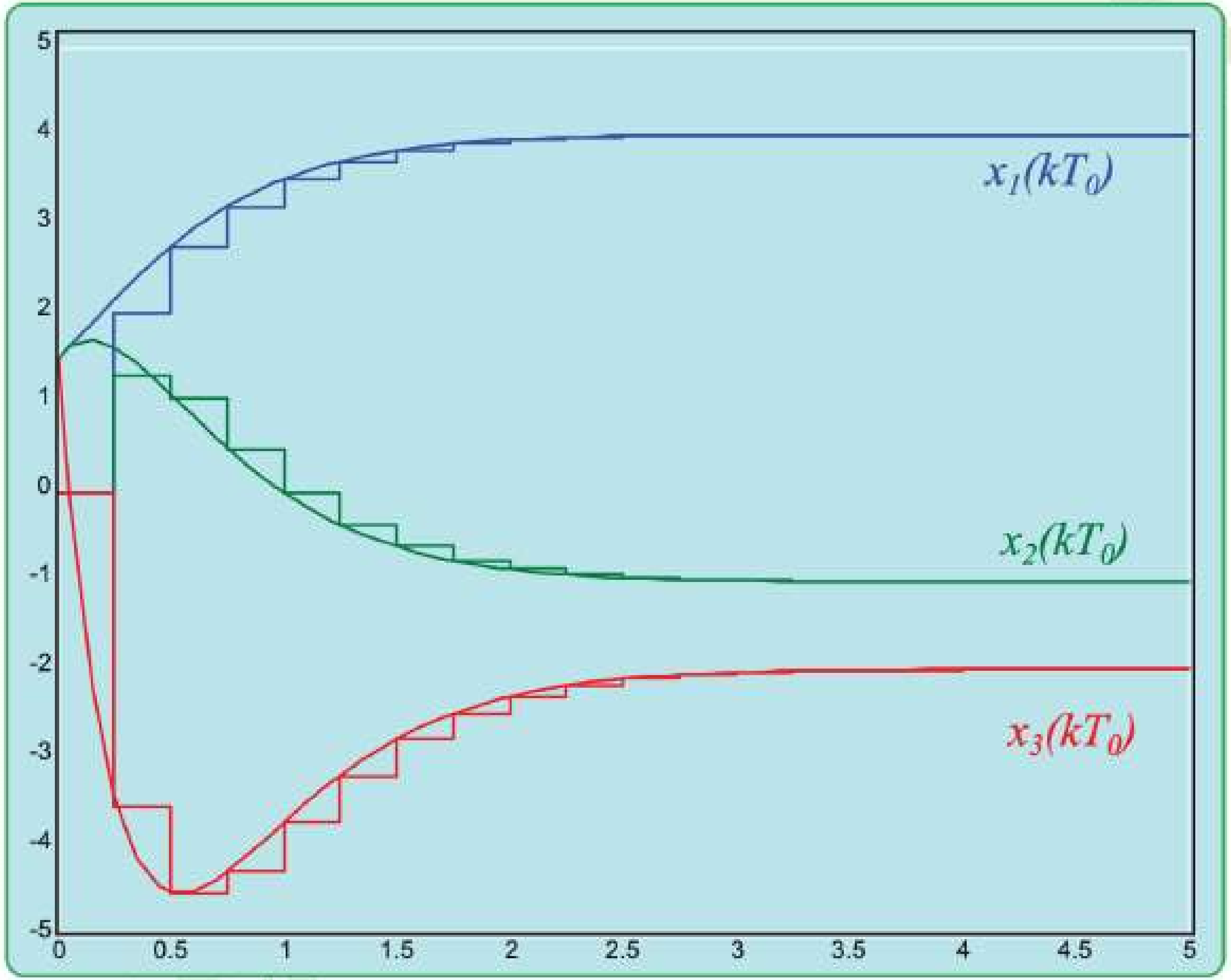
$$\underline{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1,1334 & 0,5645 & -2,0723 \\ 0.9067 & -0,1170 & -0,6908 \end{bmatrix}^T$$

Exemplo 1 (cont.)

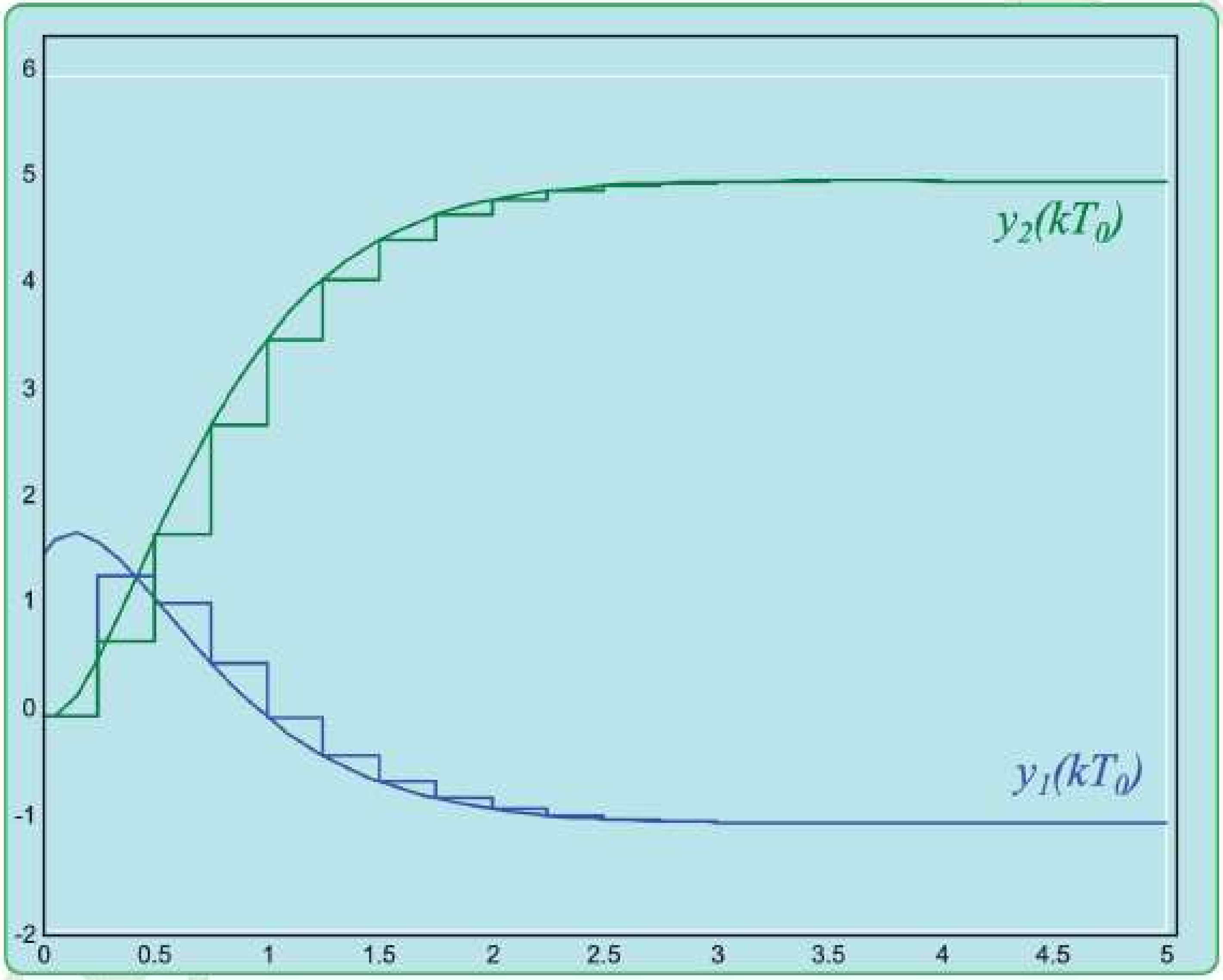
Com o mesmo comando `place` do Matlab e usando-se as matrizes $\underline{F}$ e $\underline{H}$ mais o vetor de polos desejados para a estrutura controlada, obtém-se o vetor $\underline{\mathbf{K}}$ do Controlador como sendo:

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 3,4071 & 1.3233 & 0,0572 \\ -0,3231 & 0,8119 & 0,2199 \end{bmatrix}$$

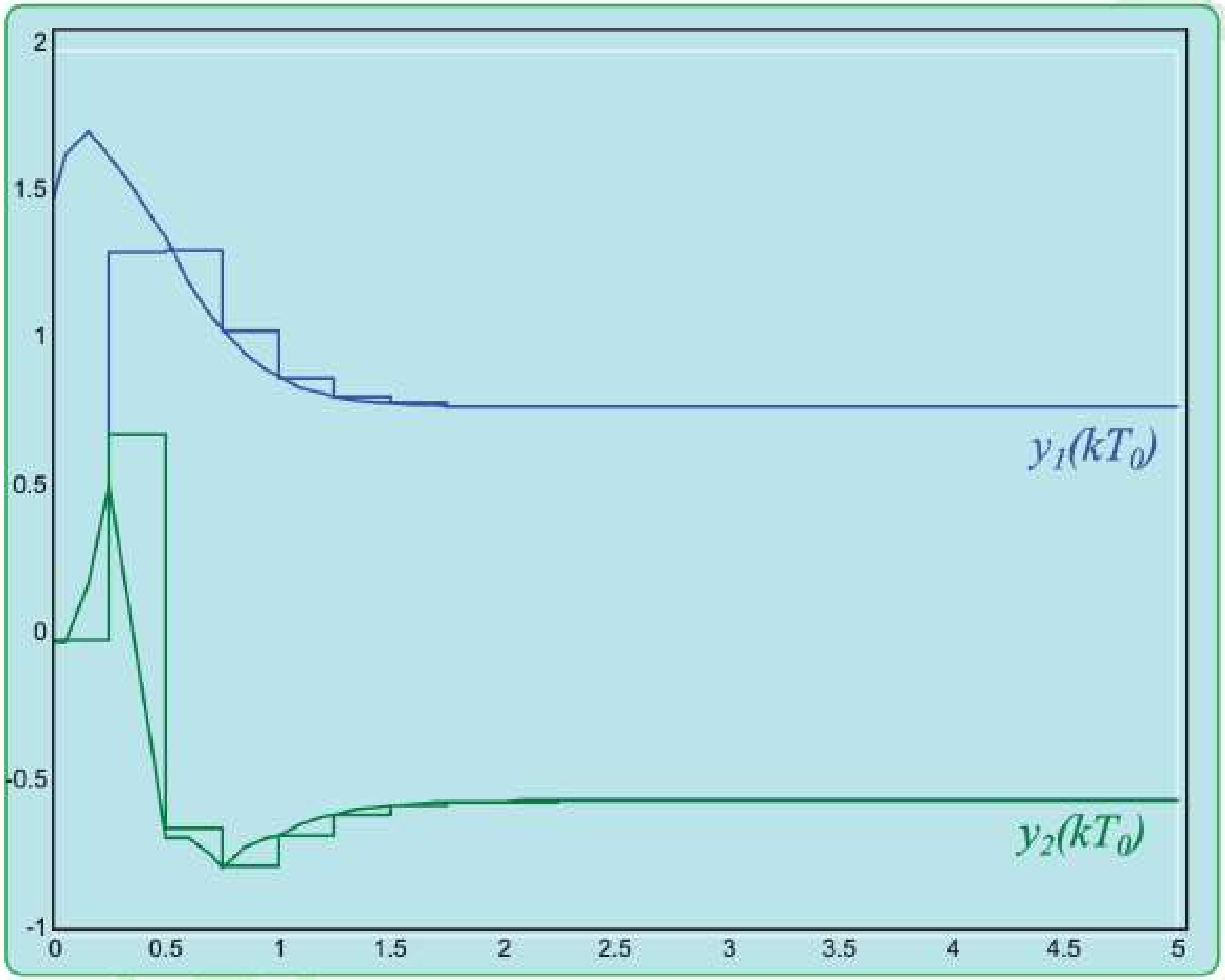

Step
zero
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space PROCESSO
K*u
c
x
x
compara
K*u
b
K*u
l
1
z
K*u
c
xx
A
K*u
xx
L
K*u
erro
REALIMENACAO
DE ESTADOS
OBSERVADOS
DISCRETOS
L1
K*u
OBSERVADOR DE ESTADOS
DISCRETOS



Resposta dos estados em malha aberta (contínuo e discreto) à uma entrada degrau.

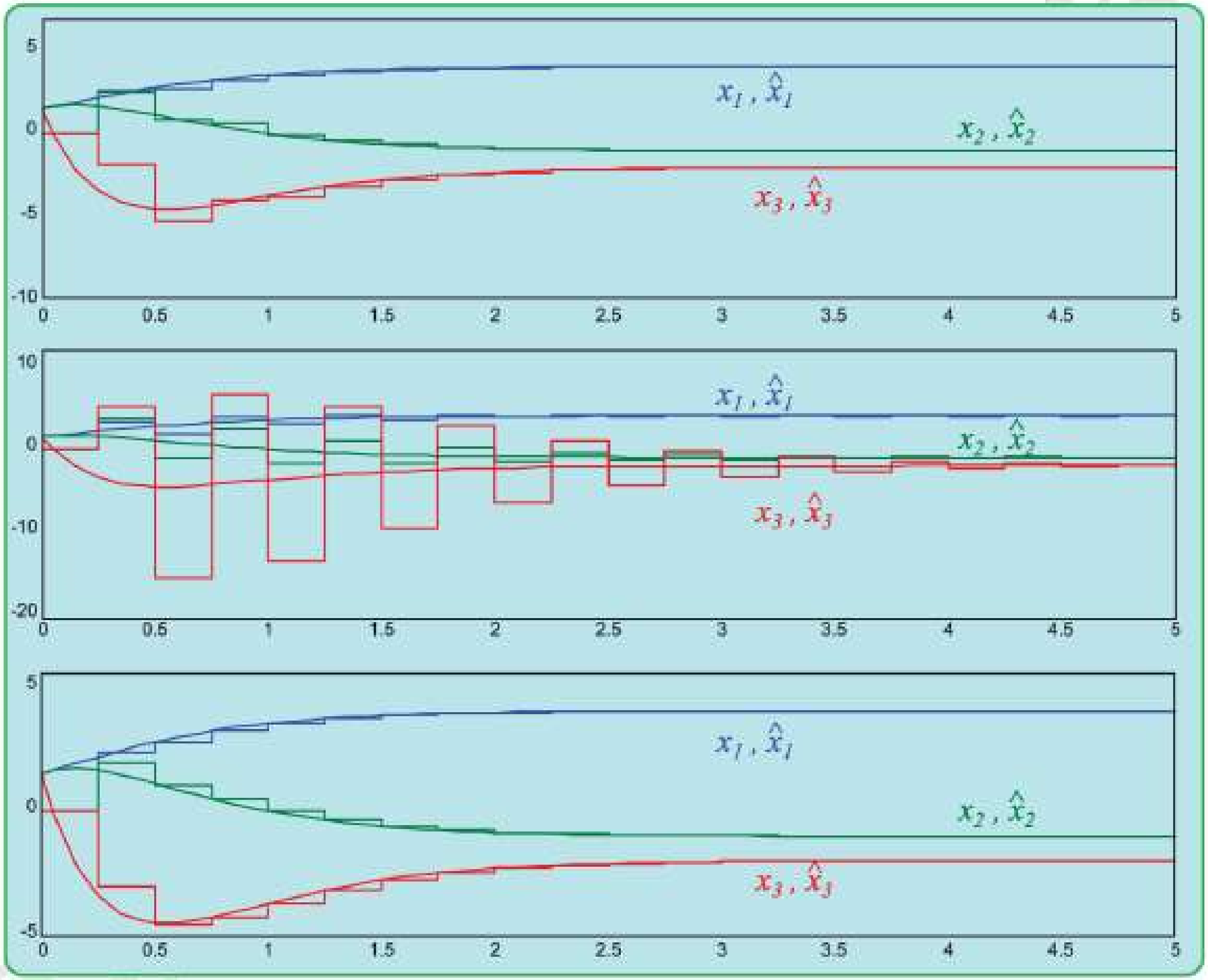


Resposta do processo em malha aberta (contínuo e discreto):
$u = [1 \;\; 1]^T$.

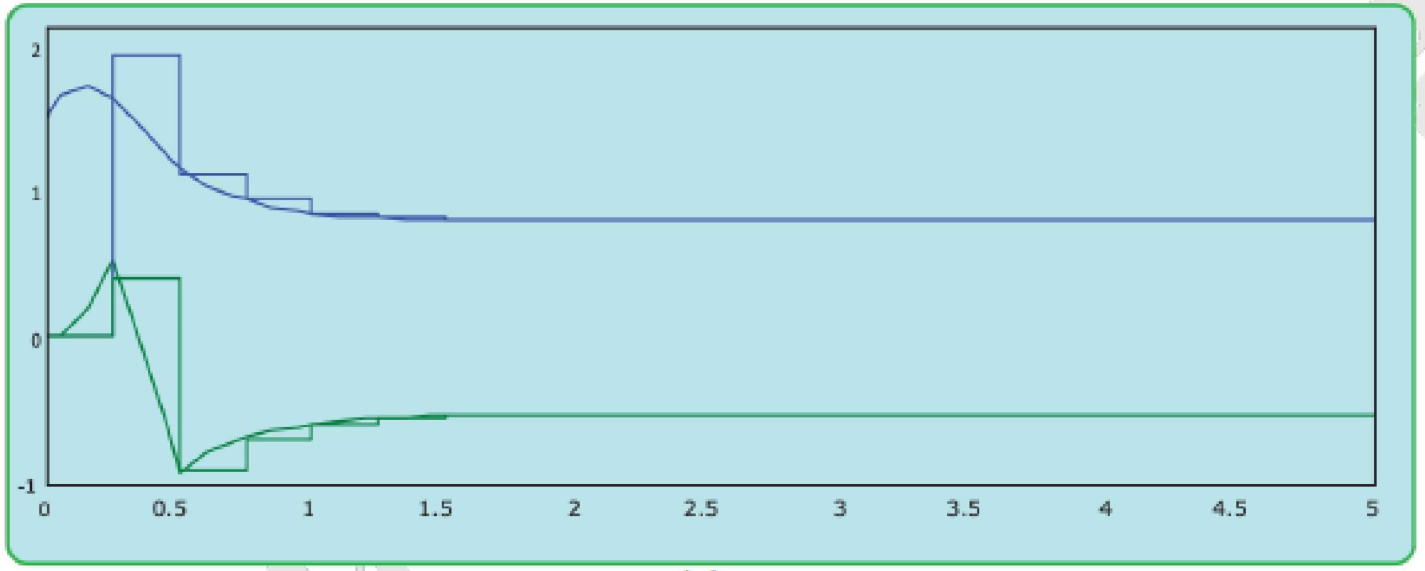


Resposta do processo em malha aberta (contínuo e discreto):

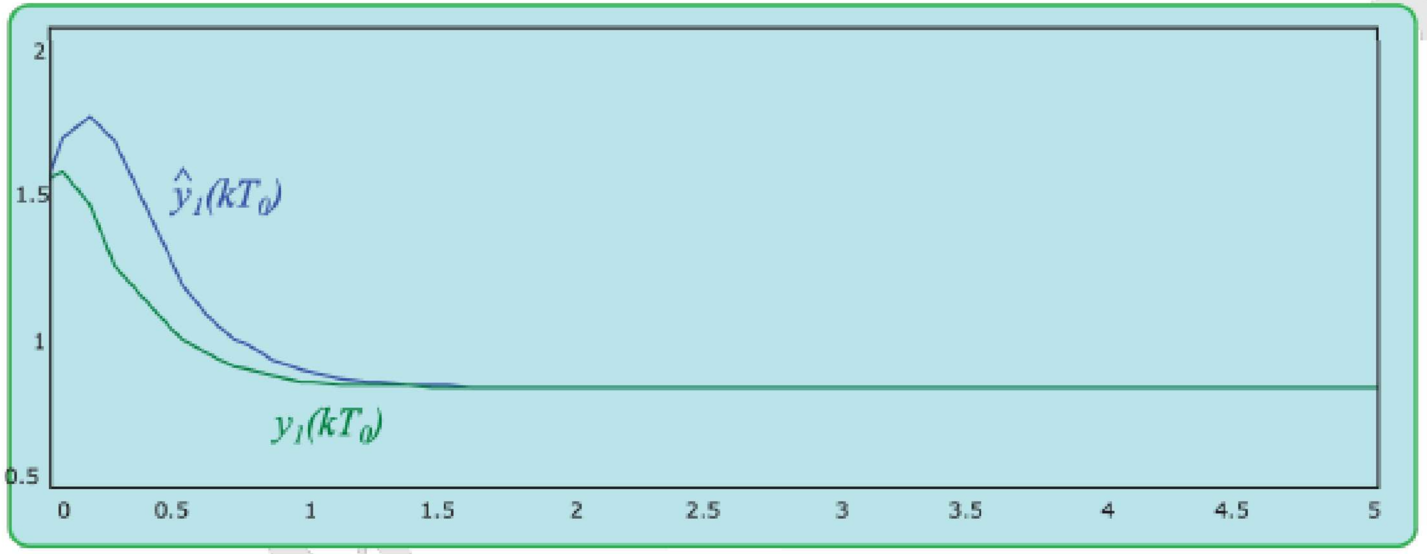
$$u = [1 \;\; 1]^T.$$



Resultados do observador com diferentes dinâmicas de convergência: (a) lenta; (b) muito lenta; (c) rápida.



(a)



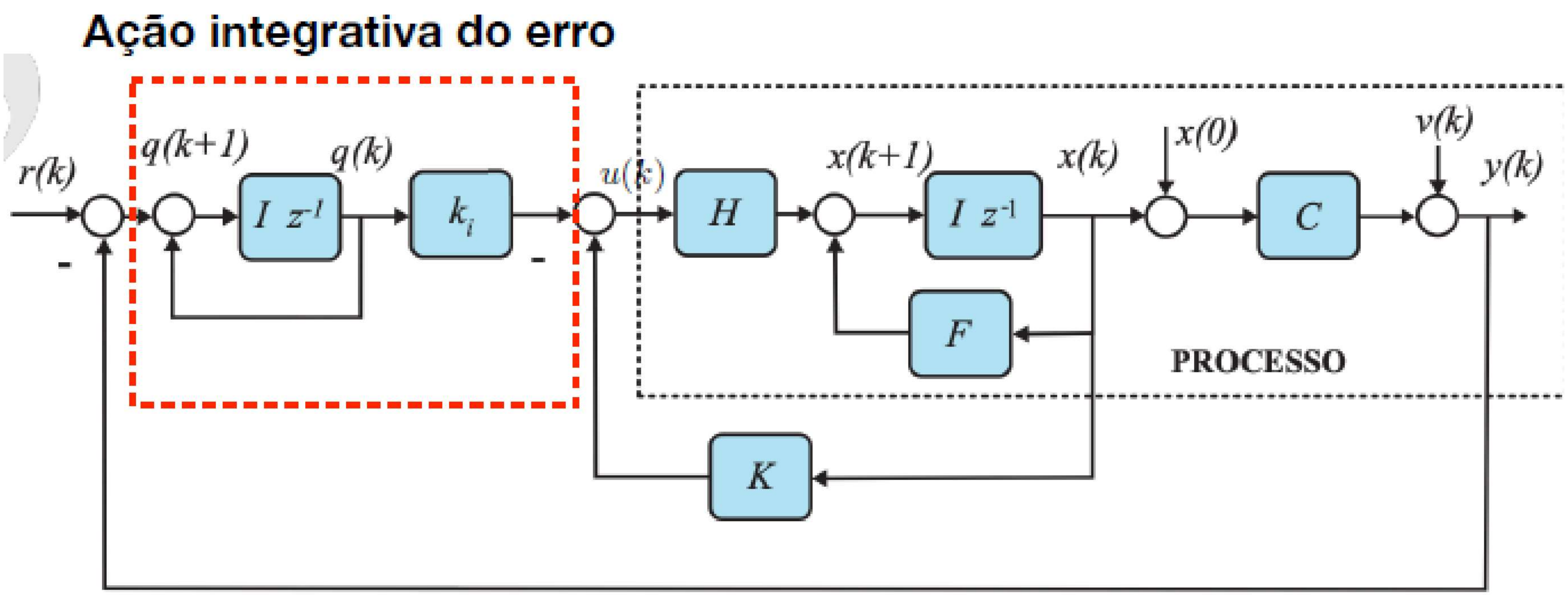
(b)

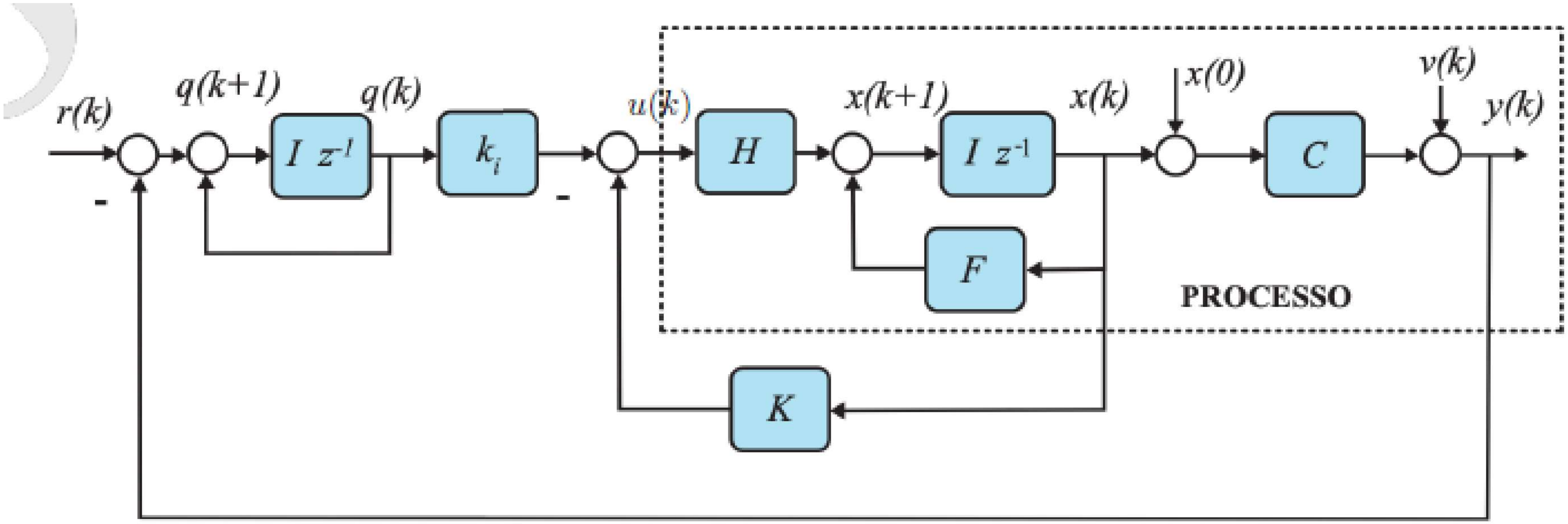
Desempenho do controle por realimentação de estados observados: (a) resposta das saídas $y_1(k)$ e $y_2(k)$ com realimentação de estados observados; (b) comparação da saída $y_1(k)$ em relação à realimentação de estados reais (verde) e observados (azul).

Controle de Servomecanismo com Realimentação de Estados

Capítulo 9

Controle de posição em que se deseja que o erro seja nulo entre a referência degrau e a saída controlada.





$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \left(\underline{F} - \underline{H}\ \underline{K}\right) + \underline{H}\ \underline{K}_i\ \underline{q}(k), \\ \underline{q}(k+1) = \underline{I}\ \underline{q}(k) + \underline{r}(k) - \underline{c}\ \underline{x}(k). \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\underline{F} - \underline{H}\ \underline{K}\right) & \underline{H}\ \underline{K}_i \\ -\underline{c} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{q}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \underline{r}(k).$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k+1) \\ \underline{\mathsf{q}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\underline{\mathsf{F}} - \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}\right) & \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{K}}_i \\ -\underline{\mathsf{c}} & \underline{\mathsf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) \\ \underline{\mathsf{q}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{0}} \\ \underline{\mathsf{I}} \end{bmatrix} \underline{\mathsf{r}}(k).$$

Como: $u(k) = \underline{\mathsf{K}}_i\ \underline{\mathsf{q}}(k) - \underline{\mathsf{K}}\ \underline{\mathsf{x}}(k)$, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k+1) \\ \underline{\mathsf{q}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{F}} & \underline{\mathsf{0}} \\ -\underline{\mathsf{c}} & \underline{\mathsf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) \\ \underline{\mathsf{q}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{H}} \\ \underline{\mathsf{0}} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{0}} \\ \underline{\mathsf{I}} \end{bmatrix} \underline{\mathsf{r}}(k),$$

$$\underline{\mathsf{x}}'(k+1) = \underline{\mathsf{F}}'\underline{\mathsf{x}}'(k) + \underline{\mathsf{H}}'u(k) + \underline{\mathsf{G}}'\underline{\mathsf{r}}(k).$$

Considerando $\underline{\mathsf{u}}(k) = \underline{\mathsf{K}}'\underline{\mathsf{x}}'$ ou

$$\underline{\mathsf{u}}(k) = \begin{bmatrix} -\underline{\mathsf{K}} & \underline{\mathsf{K}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) \\ \underline{\mathsf{q}}(k) \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\mathsf{x}}'(k+1) = \underline{\mathsf{F}}'\underline{\mathsf{x}}'(k) + \underline{\mathsf{H}}'u(k) + \underline{\mathsf{G}}'\underline{\mathsf{r}}(k).$$

Considerando $\underline{\mathsf{u}}(k) = \underline{\mathsf{K}}'\underline{\mathsf{x}}'$ ou

$$\underline{\mathsf{u}}(k) = \begin{bmatrix} -\underline{\mathsf{K}} & \underline{\mathsf{K}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{x}}(k) \\ \underline{\mathsf{q}}(k) \end{bmatrix},$$

chegamos a:

$$\underline{\mathsf{x}}'(k+1) = (\underline{\mathsf{F}}' + \underline{\mathsf{H}}'\ \underline{\mathsf{K}}')\underline{\mathsf{x}}'(k) + \underline{\mathsf{G}}'\underline{\mathsf{r}}(k).$$

Essa expressão é a mesma obtida para o controle por realimentação de estados. Portanto podemos aplicar o comando *place*, *acker*, ou *ppol* para as matrizes $\underline{\mathsf{F}}'$ e $\underline{\mathsf{H}}'$, e utilizar o valor de $\underline{\mathsf{K}}'$ obtido.

Exemplo 2

Realimentação de Estados com Ação Integrativa

Considere o processo descrito no espaço de estados (contínuo) a seguir e investigue uma solução de controle de realimentação de estados e uma ação integrativa para garantir erro de posição nulo da saída controlada. Neste caso um tempo amostragem de 0.5 seg deve ser usado e os polos desejados do processo controlado foram escolhidos para garantir uma reposta dinâmica com sobresinal de 15% em 2.6 seg.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = 0$$

$$Polos\_desejados \quad \Rightarrow \quad s_{1,2,3} = \begin{bmatrix} -0,5 \pm 0,22i & -2 \end{bmatrix}$$

Solução : Para este caso, o ideal é processar toda solução no domínio do tempo discreto. Tomando-se todos os dados com devidas discretizações, obtém-se:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 \end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 (cont.)

Solução : Para este caso, o ideal é processar toda solução no domínio do tempo discreto. Tomando-se todos os dados com devidas discretizações, obtém-se:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 \end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e os respectivos polos desejados, mapeados no plano-**Z** resultam:

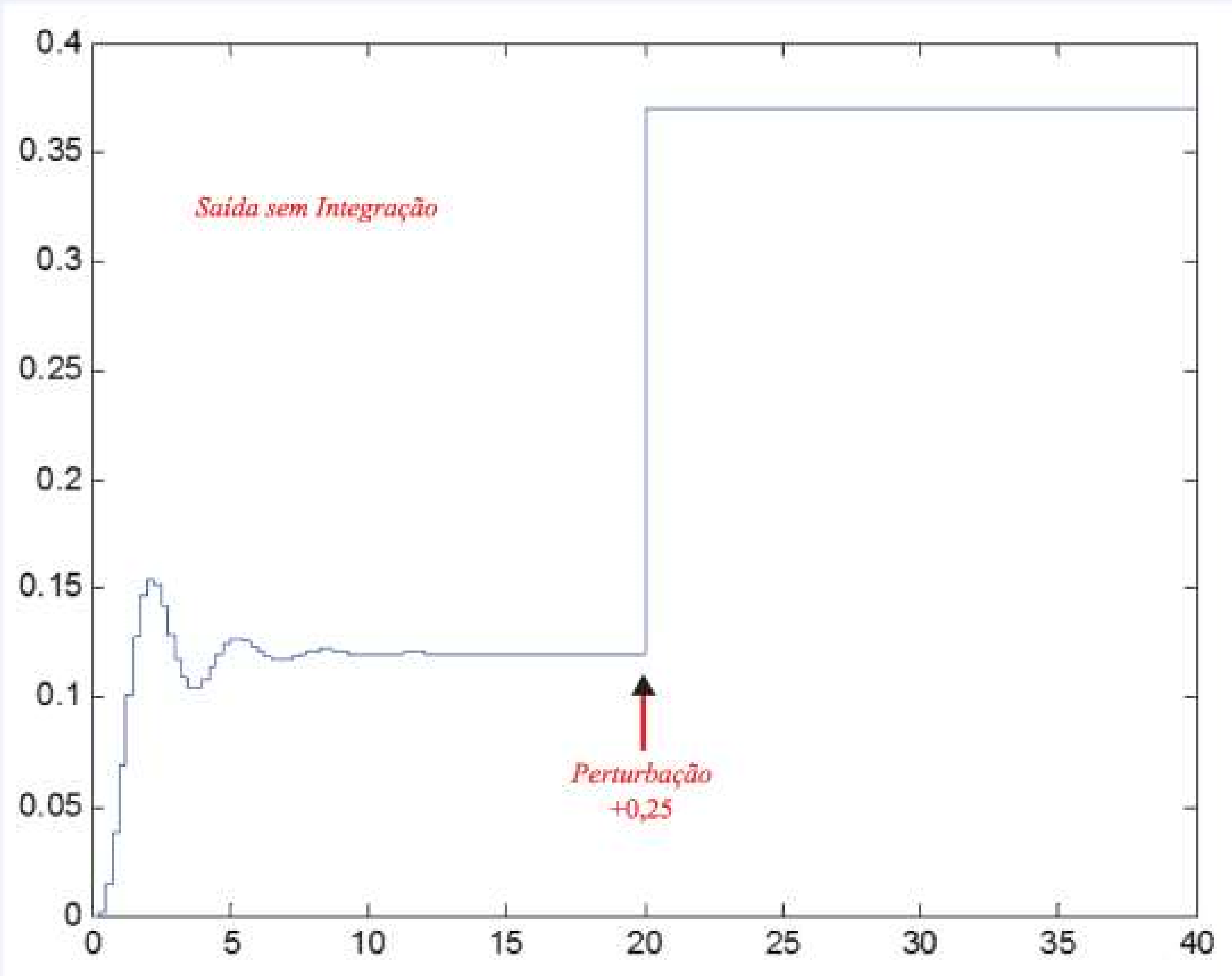
$$P_d \qquad \Rightarrow \qquad z_{1,2,3} = \begin{bmatrix} 0,4208 \pm 0,6553i & 0,8896 \end{bmatrix}$$

Para o processo com uma simples realimentação de estados, alocando-se a dinâmica de acordo com os polos desejados, obtém-se com o comando `place` ou `acker`, o ganho de realimentação dado por:

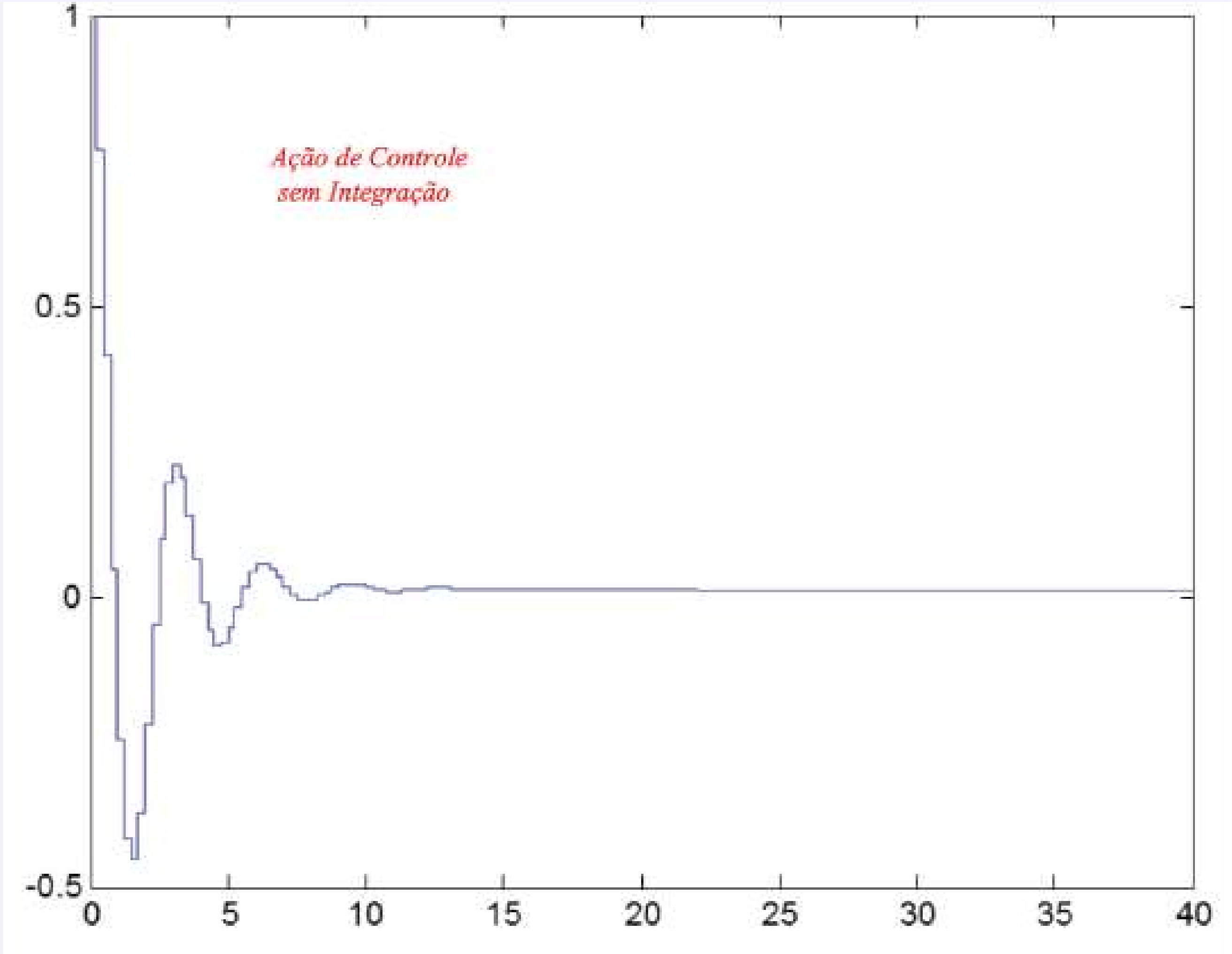
$$\underline{\mathbf{K}} = \texttt{place}(\underline{F},\ \underline{h},\ \underline{P}_d) = \begin{bmatrix} 7,6767 & 5,6483 & 0,8896 \end{bmatrix}$$

Para este caso a resposta obtida da saída e da devida ação de controle é indicada a seguir.

Exemplo 2 (cont.)



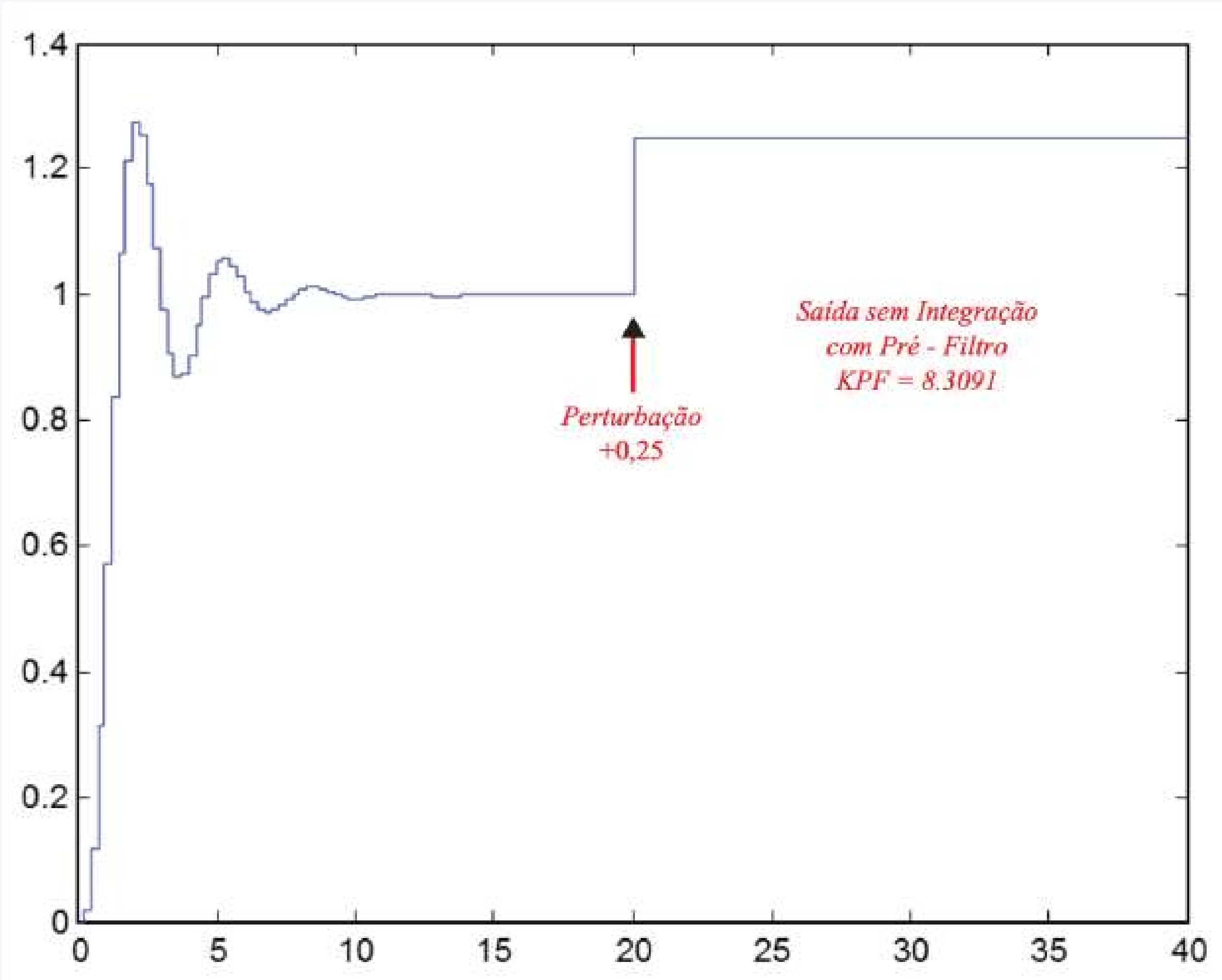
Exemplo 2 (cont.)



Observa-se nesse caso, como já alertado anteriormente, que a saída apresenta a dinâmica desejada, porém com elevado erro de posição ou erro de regime para entrada degrau.

Exemplo 2 (cont.)

Inserindo-se um ganho de pré-filtro com valor apropriado para escalonar a referência de entrada, pode-se obter o resultado a seguir.



Exemplo 2 (cont.)

Como visto o Pré-Filtro ou escalonamento da entrada só atua na correção da saída relativa ao tero de entrada e não consegue eliminar eventuais erros de perturbação.

A correção automática destas situações é conseguida com a inclusão de uma ação integrativa atuando sobre a saída em forma de uma realimentação adicional. Para a solução, deve-se prepara no novo modelo com a inclusão desta ação integrativa, tal como ilustrado a seguir.

$$\underline{F}' = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4707 & 00,0774 & 0 \\ -0,0077 & 0,8438 & 0,2385 & 0 \\ -0,0239 & -0,4848 & 0,1282 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{H}' = \begin{bmatrix} 0,0146 \\ 0,0774 \\ 0,2385 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para este novo processo, deve se especificar um polo desejado adicional para se obter a solução com o comando `place` ou `acker`. Para não se afetar a dinâmica desejada inicialmente escolhe-se a alocação deste polo adicional de forma que não afete a dominância da dinâmica desejada. Para isto, no plano-S basta alocar o polo adicional distante do eixo imaginário e no plano-Z próximo a origem. Admitindo-se no plano-S o quarto polo em -8, equivale no plano-Z com $T_0 = 0.5$ seg. a $z = 0.0183$. Assim os polos desejados do novo sistema serão:

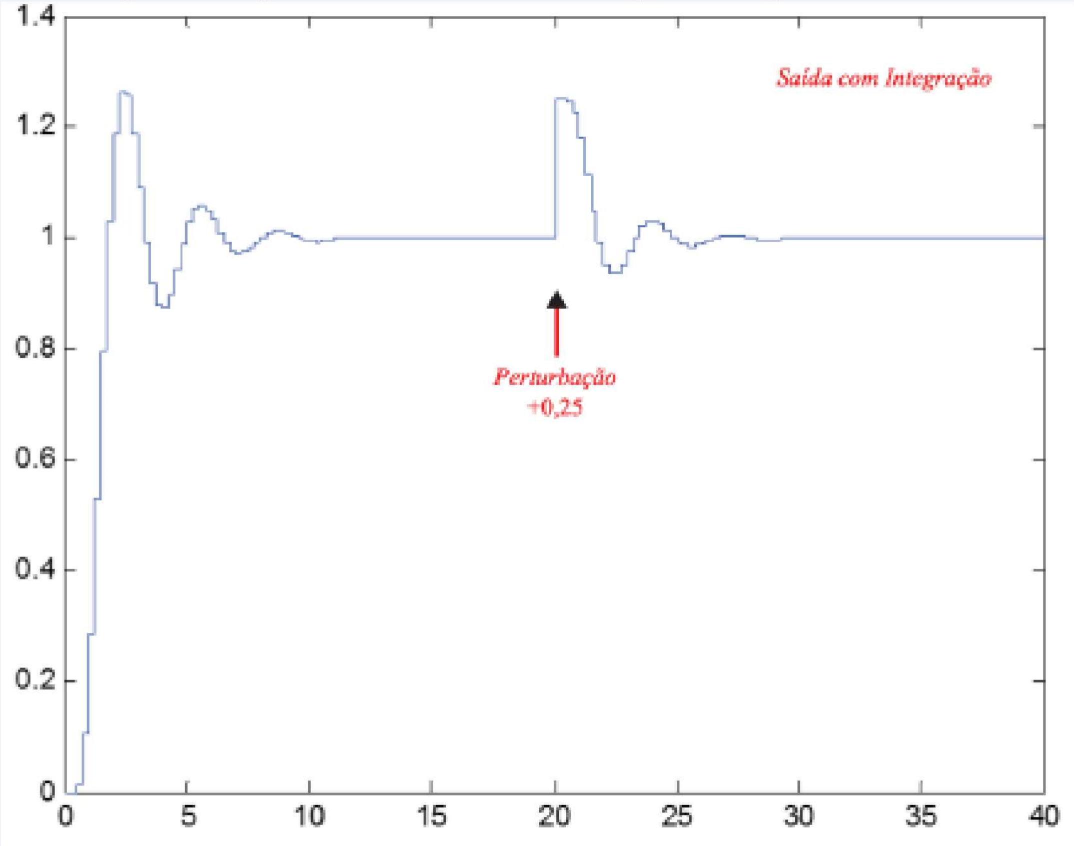
$$P_d' = \begin{bmatrix} P_d & 0,0183 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 (cont.)

Usando o comando indicado, obtém o novo ganho de realimentação como sendo:

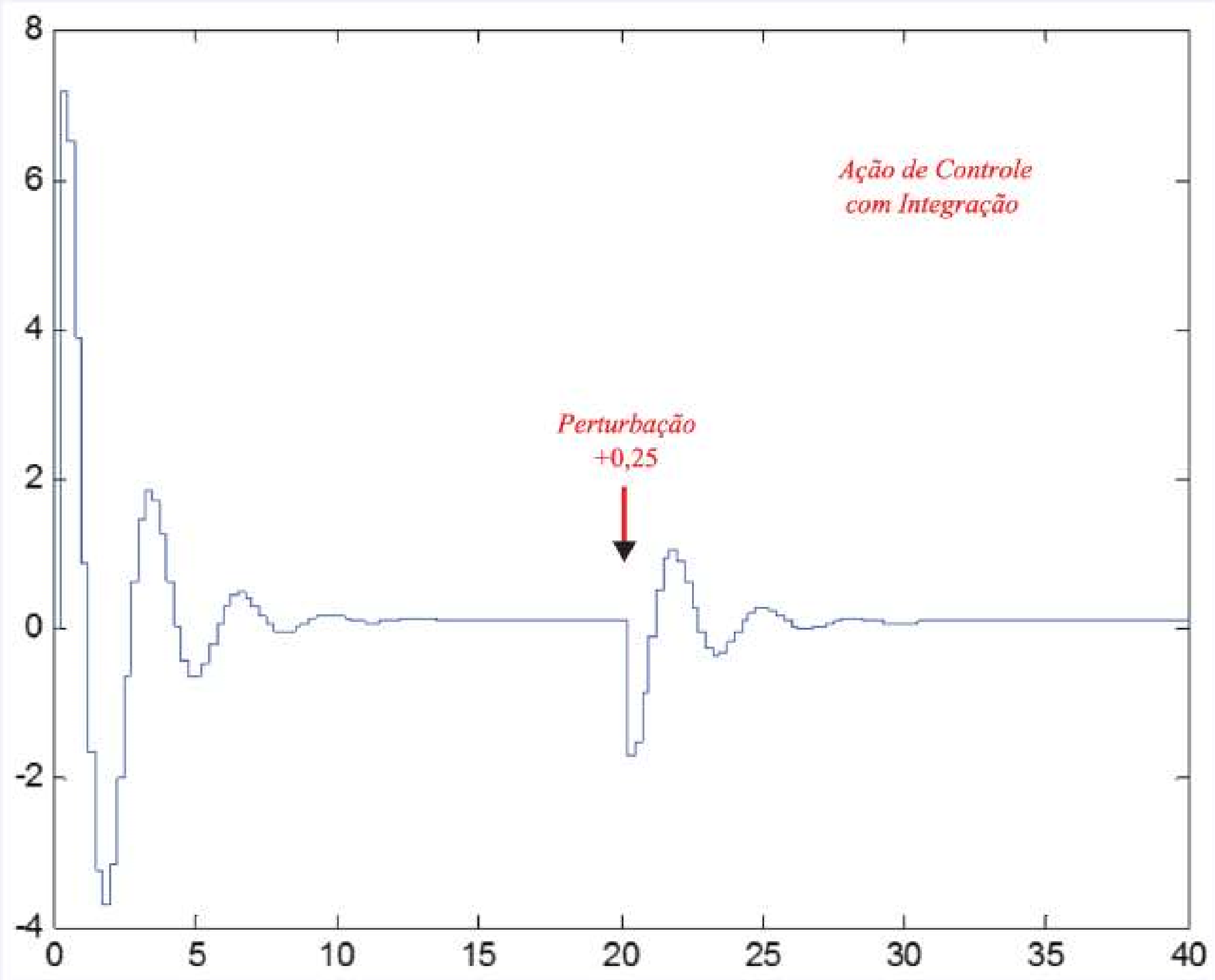
$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}' &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \underline{\mathbf{K}}_i \end{bmatrix} = \texttt{place}(\underline{F}', \underline{h}', \underline{P}'_d) \\ &= \begin{bmatrix} 22,7384 & 10,4322 & 2,5338 & -7,6343 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com esta estrutura de realimentado de estados mais a ação integrativa, o resultado do processo passa a ser tal como na figura a seguir.



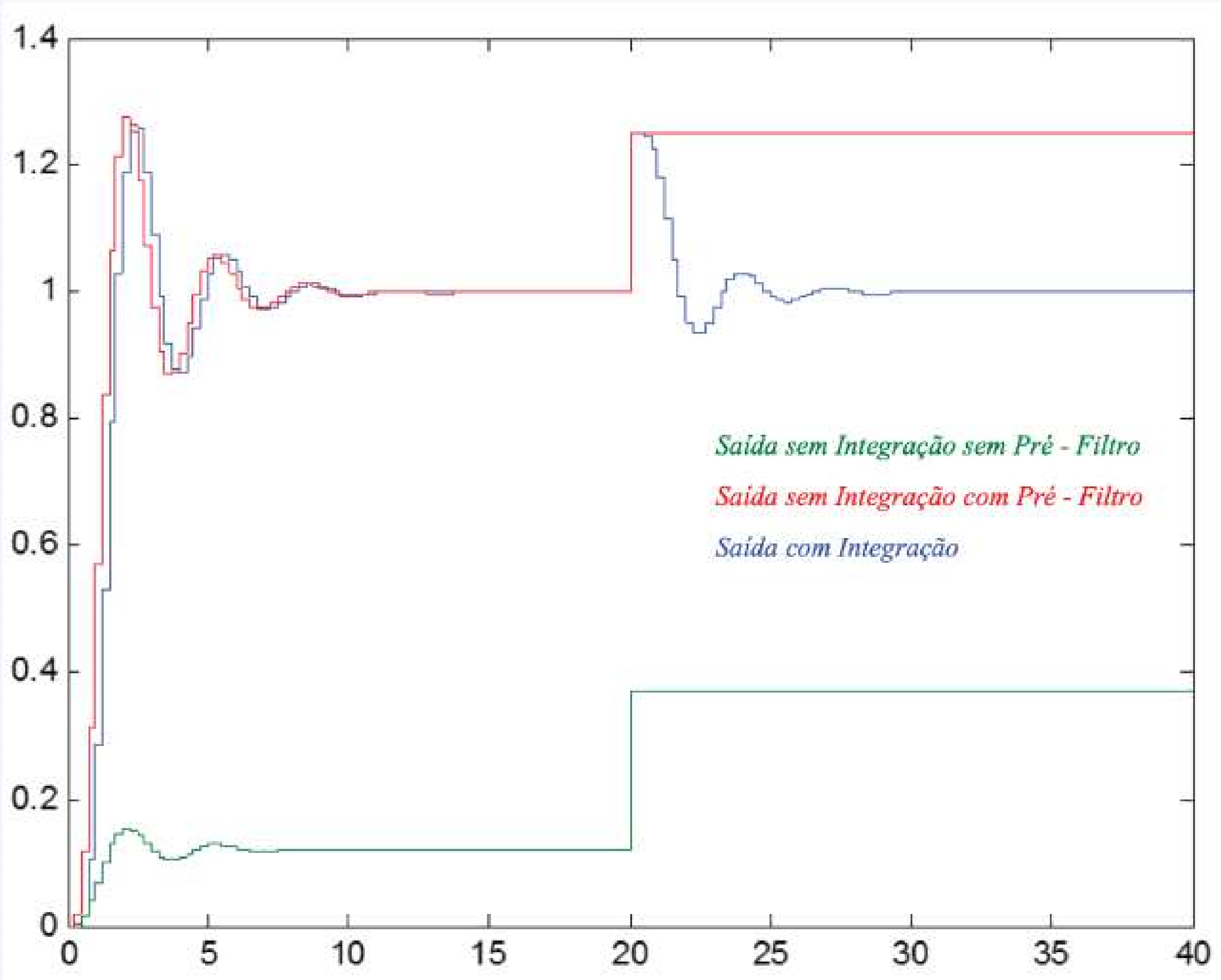
Verifica-se que a saída atendeu as expectativas de dinâmica e de regime com erro nulo. A ação de controle $u(k)$ passa a ser muito diferente neste caso e pode ser vista a seguir.

Exemplo 2 (cont.)



Exemplo 2 (cont.)

A figura a seguir ilustra os três casos simultaneamente para efeito de comparação.



Controlabilidade e Observabilidade

Definição de controlabilidade

Um sistema será dito controlável se existir uma única sequência de ação de controle ou excitação $u(k)$ que seja capaz de levar o sistema do estado inicial $x(0)$ para um estado final $x(N)$ em um tempo finito N.
A sequência desejada $u(k)$ é tal que:

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathsf{x}}(1) &= \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(0) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(0),\\
\underline{\mathsf{x}}(2) &= \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(1) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(1) = \underline{\mathsf{F}}^2\ \underline{\mathsf{x}}(0) + \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(0) + \underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(1),\\
&\vdots\\
\underline{\mathsf{x}}(k) &= \underbrace{\underline{\mathsf{F}}^k\ \underline{\mathsf{x}}(0)}_{\text{S. homogênea}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \underline{\mathsf{F}}^{i-1}\underline{\mathsf{H}}\ \underline{\mathsf{u}}(k-i)}_{\text{S. Particular}}.
\end{aligned}
$$

Para o instante N, a equação acima pode ser escrita como

$$\underline{\mathsf{X}}(N) = \underline{\mathsf{F}}^N\ \underline{\mathsf{x}}(0) + \left[\underline{\mathsf{H}} \quad (\underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}}) \quad (\underline{\mathsf{F}}^2\ \underline{\mathsf{H}}) \quad \ldots \quad (\underline{\mathsf{F}}^{N-1}\ \underline{\mathsf{H}})\right] \underline{\mathsf{U}}_N,$$

com

$$\underline{\mathsf{U}}_N = \left[u(N-1) \quad u(N-2) \quad u(N-3) \quad \ldots \quad u(0)\right]^T.$$

$$\underline{\mathsf{X}}(N) = \underline{\mathsf{F}}^N\, \underline{\mathsf{x}}(0) + \begin{bmatrix}\underline{\mathsf{H}} & (\underline{\mathsf{F}}\, \underline{\mathsf{H}}) & (\underline{\mathsf{F}}^2\, \underline{\mathsf{H}}) & \ldots & (\underline{\mathsf{F}}^{N-1}\, \underline{\mathsf{H}})\end{bmatrix} \underline{\mathsf{U}}_N,$$

com

$$\underline{\mathsf{U}}_N = \begin{bmatrix}u(N-1) & u(N-2) & u(N-3) & \ldots & u(0)\end{bmatrix}^T.$$

Se a ordem do sistema é m, uma solução única para a sequência $\underline{\mathsf{U}}_N$ é obtida se $N = m$, tal que:

$$\underline{\mathsf{U}}_m = \underline{\mathsf{Q}}_S^{-1}\big(\underline{\mathsf{X}}(m) - \underline{\mathsf{F}}^m\, \underline{\mathsf{x}}(0)\big),$$
$$\underline{\mathsf{Q}}_S = \begin{bmatrix}\underline{\mathsf{H}} & (\underline{\mathsf{F}}\, \underline{\mathsf{H}}) & (\underline{\mathsf{F}}^2\, \underline{\mathsf{H}}) & \ldots & (\underline{\mathsf{F}}^{N-1}\, \underline{\mathsf{H}})\end{bmatrix}.$$

A matriz de controlabilidade $\underline{\mathsf{Q}}_S$ definida acima será inversível se

$$\det\{\underline{\mathsf{Q}}_S\} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \text{Rank}\{\underline{\mathsf{Q}}_S\} = m.$$

Para $N < m$, não haverá solução para o sistema linear definido por $\underline{\mathsf{U}}_m$ e $\underline{\mathsf{Q}}_S$. E se $N > m$, haverá múltiplas soluções.

Definição de observabilidade

Um sistema é dito observável se a partir do conhecimento de uma sequência de saída $y(k)$, $y(k+1)$, ..., $y(k+N-1)$, e de uma sequência de entrada $u(k)$, $u(k+1)$, ..., $u(k+N-1)$, é possível encontrar o vetor de estado $x(k)$ em um instante qualquer.
Neste caso, o ponto de partida é a equação de saída de estado:

$$y(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k).$$

Com auxílio de $\underline{\mathsf{x}}(k+1) = \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{H}}\ u(k)$, podemos escrever:

$$\begin{cases} y(k) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{x}}(k), \\ y(k+1) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{H}}\ u(k), \\ \vdots \\ y(k+N-1) = \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^{N-1}\ \underline{\mathsf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{H}} & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}} & \dots & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^{N-2}\ \underline{\mathsf{H}} \end{bmatrix} \underline{\mathsf{U}}_N^*, \end{cases}$$

com

$$\underline{\mathsf{U}}_N^* = \begin{bmatrix} u(k+N-1) & u(k+N-2) & \dots & u(k+1) & u(k) \end{bmatrix}^T.$$

Se a sequência de entrada $\underline{\mathsf{U}}_N^*$ é conhecida, uma solução única para os m elementos do vetor $\underline{\mathsf{x}}(k)$ só será possível se existirem m equações no sistema definido por $y(k)$, $y(k+1)$, …, $y(k+N-1)$, ou seja, $N=m$ e tal que:

$$\underline{\mathsf{Y}}_m = \underline{\mathsf{Q}}_B \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{S}}\ \underline{\mathsf{U}}_m^*,$$

com

$$\underline{\mathsf{Y}}_m = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \dots & u(k+m-2) & u(k+m-1) \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{\mathsf{U}}_m^* = \begin{bmatrix} u(k+m-1) & u(k+m-2) & \dots & u(k+1) & u(k) \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{\mathsf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}} & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}\ \underline{\mathsf{H}} & \dots & \underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^{m-2}\ \underline{\mathsf{H}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathsf{Q}}_B = \begin{bmatrix} \underline{\mathsf{c}} & (\underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}) & (\underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^2) & \dots & (\underline{\mathsf{c}}\ \underline{\mathsf{F}}^{m-1}) \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\mathsf{Y}}_m = \underline{\mathsf{Q}}_B \ \underline{\mathsf{x}}(k) + \underline{\mathsf{S}} \ \underline{\mathsf{U}}^*_m.$$

Portanto, o estado genérico $\underline{\mathsf{x}}(k)$ no instante k será conhecido pela expressão:

$$\underline{\mathsf{x}}(k) = \underline{\mathsf{Q}}_B^{-1} \left(\underline{\mathsf{Y}}_m - \underline{\mathsf{S}} \ \underline{\mathsf{U}}^*_m\right),$$

se a matrix de observabilidade $\underline{\mathsf{Q}}_B$ for inversível, ou seja, se

$$\det\{\underline{\mathsf{Q}}_B\} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \text{Rank}\{\underline{\mathsf{Q}}_B\} = m.$$