prova 1 - 2020 - controle digital

#uspGrad/controle

Os valores **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** e **G** eram para ser calculados pelo NUSP, mas o professor deu um exemplo na prova e vou usar eles:

A	B	C	D	E	F	G
3	4	3	9	3	3	4

Questão 1

Dado um sistema dinâmico contínuo representado pela função de transferência $G(s)$ a seguir:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.1s^2 + 0.Ds + 0.C}{s(s+F)(s+E)}$$

Encontre a função de transferência discreta equivalente, $G(z)$. **Não há retentor de ordem zero** (zero holder) na entrada da planta $G(s)$.
Considere uma frequência de amostragem com valor numérico **(A + 1)** Hz.
A resposta deve ser dada no seguinte formato:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Resposta

$$G(s) = \frac{0.1s^2 + 0.9s + 0.3}{s(s+3)^2} \qquad F_0 = 4[Hz] \rightarrow T_0 = \frac{1}{4}$$

Aplicando frações parciais para encontrar a equivalente pela Tabela:

$$G(s) = \frac{0.1s^2 + 0.9s + 0.3}{s(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{C}{(s+3)}$$

Multiplicando ambos os lados por $s(s+3)^2$:

$$0.1s^2 + 0.9s + 0.3 = A(s^2 + 6s + 9) + Bs + C(s^2 + 3s) = s^2(A + C) + s(6A + B + 3C) + 9A$$

Montando um sistema de equações:

- $1A + 0B + 1C = 0.1$
- $6A + 1B + 3C = 0.9$
- $9A + 0B + 0C = 0.3$
  Resolvendo ele encontramos $A = \frac{1}{30}$, $B = \frac{1}{2}$ e $C = \frac{1}{15}$.
  Agora substituindo em $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{(s+3)}$$

  Usando a Tabela podemos converter tudo para $G(z)$:

$$G(z) = \frac{1}{30} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{e^{-0.75}z}{(z - e^{-0.75})^2} + \frac{1}{15} \cdot \frac{z}{z - e^{-0.75}}$$

  Simplificando isso tudo:

$$G(z) = \frac{z}{30(z-1)} + \frac{e^{-0.75}z}{8(z - e^{-0.75})^2} + \frac{z}{15(z - e^{-0.75})}$$

  Para facilitar nossos cálculos vamos considerar $e^{-0.75} = a$. Calculando o denominador comum como $3600 \cdot (z-1)(z-a)^3$:

$$G(z) = \frac{[120z(z-a)^3] + [450za(z-a)(z-1)] + [240z(z-a)^2(z-1)]}{3600 \cdot (z-1)(z-a)^3}$$

  Agora, para facilitar ainda mais nossa vida, vamos extrair os três termos entre colchetes e o denominador e expandir de forma separada:
  Como todo mundo tem um $(z-a)$ já podemos simplificar isso:
- $3600 \cdot (z-1)(z-a)^3 = 3600(z-1)(z-a)^2$
- $120z(z-a)^3 = 120z(z-a)^2$
- $450za(z-a)(z-1) = 450za(z-1)$
- $240z(z-a)^2(z-1) = 240z(z-a)(z-1)$
  Continuando nossas simplificações:
- $3600(z-1)(z-a)^2 = 3600(z-1)(z^2 - 2az + a^2)$

- $= 3600(z^3 - 2az^2 + a^2z - z^2 + 2az - a^2) = 3600(z^3 - z^2(2a+1) + z(a^2+2a) - a^2)$

- $120z(z-a)^2 = 120z(z^2 - 2az + a^2) = 120(z^3 - 2az^2 + a^2z)$
- $450za(z-1) = 450(z^2(a) - z(a))$
- $240z(z-a)(z-1) = 240(z^3 - z^2(1+a) + z(a))$

Agora, precisamos somar os termos do numerador:

$$120(z^3 - z^2(2a) + z(a^2)) + 450(z^2(a) - z(a)) + 240(z^3 - z^2(1+a) + z(a))$$

$$z^3(120+240) + z^2(-240a + 450a - 240 - 240a) + z(120a^2 - 450a + 240a)$$

$$z^3(360) - z^2(30a + 240) + z(120a^2 - 210a)$$

Finalmente, juntando tudo:

$$G(z) = \frac{12z^3 - z^2(a+8) + z(4a^2 - 7a)}{120(z^3 - z^2(2a+1) + z(a^2+2a) - a^2)}$$

Dividindo em cima e embaixo por 120 para deixar mais perto da forma pedida:

$$G(z) = \frac{\frac{1}{10}z^3 - z^2\frac{(a+8)}{120} + z\frac{(4a^2-7a)}{120}}{z^3 - z^2(2a+1) + z(a^2+2a) - a^2}$$

Retornando $a = e^{-0.75}$ e passando para a forma numérica:

$$G(z) = \frac{0.1 \cdot z^3 - 0.070603 \cdot z^2 - 0.020117 \cdot z}{z^3 - 1.944733 \cdot z^2 + 1.167863 \cdot z - 0.22313}$$

Dividindo em cima e embaixo por z^3 para chegar na forma pedida:

$$G(z) = \frac{0.1 - 0.070603 \cdot z^{-1} - 0.020117 \cdot z^{-2}}{1 - 1.944733 \cdot z^{-1} + 1.167863 \cdot z^{-2} - 0.22313 \cdot z^{-3}}$$

Questão 2

A função $X(z)$ dada a seguir é a transformada Z sem retentor de ordem zero da função contínua $x(t)$ considerando uma frequência de amostragem com valor numérico **(B + 1)** Hz:

$$X(z) = \frac{z(0.1z + 1.F)}{(z - 0.AB)(z - 0.E)^2}$$

Obtenha a função contínua $x(t)$, ou seja, a transformada Z inversa de $X(z)$.

Resposta

$$X(z) = \frac{z(0.1z + 1.3)}{(z - 0.34)(z - 0.3)^2} \qquad F_0 = 5[Hz] \rightarrow T_0 = \frac{1}{5}$$

Aplicando frações parciais para encontrar a equivalente pela Tabela:

$$X(z) = \frac{z(0.1z + 1.3)}{(z - 0.34)(z - 0.3)^2} = \frac{Az}{(z - 0.34)} + \frac{Bz}{(z - 0.3)^2} + \frac{Cz}{(z - 0.3)}$$

Multiplicando ambos os lados por $(z - 0.34)(z - 0.3)^2$:

$$z(0.1z + 1.3) = Az(z - 0.3)^2 + Bz(z - 0.34) + Cz(z - 0.34)(z - 0.3)$$

Distribuindo cada termo:

- $0.1z^2 + 1.3z$
- $Az(z^2 - 0.6z + 0.09) = Az^3 - 0.6Az^2 + 0.09Az$
- $Bz^2 - 0.34Bz$
- $Cz(z^2 - 0.64z + 0.102) = Cz^3 - 0.64Cz^2 + 0.102Cz$

Voltando tudo pro devido lugar:

$$0.1z^2 + 1.3z = z^3(A + C) + z^2(-0.6A + B - 0.64C) + z(0.09A - 0.34B + 0.102C)$$

Criando o sistema:

- $1A + 0B + 1C = 0$
- $-0.6A + 1B - 0.64C = 0.1$
- $0.09A - 0.34B + 0.102C = 1.3$

Resolvendo ele encontramos: $A = 833.75$, $B = -33.25$ e $C = -833.75$.

$$X(z) = 833.75 \cdot \frac{z}{(z-0.34)} - \frac{33.25 \cdot z}{(z-0.3)^2} - 833.75 \cdot \frac{z}{(z-0.3)}$$

- $\frac{z}{(z-0.34)}$: $\quad \frac{z}{(z-e^{-aT_0})} \xrightarrow{Z} e^{-at}$
  - $0.34 = e^{-aT_0}$
- $\frac{33.25 \cdot z}{(z-0.3)^2}$: $\quad \alpha \frac{T_0 e^{-bT_0} z}{(z-e^{-bT_0})} \xrightarrow{Z} \alpha t e^{-bt}$
  - $33.25 = \alpha T_0 e^{-bT_0}$
  - $0.3 = e^{-bT_0}$
- $\frac{z}{(z-0.3)}$: $\quad \frac{z}{(z-e^{-cT_0})} \xrightarrow{Z} e^{-ct}$
  - $0.3 = e^{-cT_0}$
  Sabendo que $T_0 = \frac{1}{5}$:
- $a = 5.394048$
- $\alpha = 554.1667$
- $b = 6.019864$
- $c = 6.019864$

Assim:

$$x(t) = 833.75 e^{-5.394t} - 554.167t \cdot e^{-6.02t} - 833.75 e^{-6.02t}$$

Simplificando mais ainda:

$$x(t) = 833.75(-e^{5.394t} - e^{-6.02t}) - 554.167t \cdot e^{-6.02t}$$

Questão 3

Considere um sistema descrito pela seguinte equação de diferença, onde y é a saída do sistema e u é a entrada do sistema:

$$0.5y(k) + 1.Gy(k-1) + 0.Fy(k-2) + 0.Ey(k-3) = u(k-1) + Au(k-2) + 0.Bu(k-3)$$

Resposta:
Alterando a forma:

$$y(k) = -2.8y(k-1) - 0.6y(k-2) - 0.6y(k-3) + 2u(k-1) + 6u(k-2) + 0.8u(k-3)$$

(a) Considerando uma entrada degrau unitário aplicada a partir de $t = 0$, encontre os valores da saída do sistema, $y(k)$, para $k = 0, 1, 2, 3$.

Minha calculadora (Casio fx-911LAX) tem o modo de planilha que consegue fazer isso automaticamente, o próximo passo que eu vou fazer é simplesmente formatar esse cara pra deixar num jeito fácil pra mim:

$$B4 = -2.8B3 - 0.6B2 - 0.6B1 + 2A3 + 6A2 + 0.8A1$$

Colocando na calculadora vamos ter:

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$
0	2	2.4	0.88

(b) Verifique se o sistema é estável. Se for estável, para qual valor o sistema converge considerando entrada degrau unitária aplicada a partir de $t = 0$?

Para verificar se o sistema converge precisamos da equação característica, o modo mais seguro de encontrar ela é pegando o denominador da função de transferência em Z:

$$0.5Y(z) + 1.4Y(z)z^{-1} + 0.3Y(z)z^{-2} + 0.3Y(z)z^{-3} = U(z)z^{-1} + 3U(z)z^{-2} + 0.4U(z)z^{-3}$$

Deixando $Y(z)$ e $U(z)$ em evidência:

$$Y(z)(0.5 + 1.4z^{-1} + 0.3z^{-2} + 0.3z^{-3}) = U(z)(z^{-1} + 3z^{-2} + 0.4z^{-3})$$

Como sabemos que a função de transferência é $\frac{Y(z)}{U(z)}$, nossa equação característica será $0.5 + 1.4z^{-1} + 0.3z^{-2} + 0.3z^{-3}$. Precisamos multiplicar ela por z^3 para deixar na forma canônica:

$$A(z) = 0.5z^3 + 1.4z^2 + 0.3z^1 + 0.3$$

Sendo que $a_3 = 0.5$, $a_2 = 1.4$, $a_1 = 0.3$, $a_0 = 0.3$.
A ordem dessa equação é $m = 3$, ou seja, precisamos cumprir 4 condições:

- $A(1) > 0$
- $(-1)^3 A(-1) > 0$
- $|a_0| < a_3$
- $|b_0| > b_2$

Sendo:

- $A(1) = 0.5 + 1.4 + 0.3 + 0.3 = 2.5$
- $A(-1) = -0.5 + 1.4 - 0.3 + 0.3 = 0.9$
- $b_0 = det \begin{vmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 \end{vmatrix} = -0.16$
- $b_2 = det \begin{vmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 1.4 \end{vmatrix} = 0.27$

Colocando os valores e validando:

- $2.5 > 0$ ✅
- $-1 \cdot 0.9 > 0$ ❌
- $|0.3| < 0.5$ ✅
- $|-0.16| > 0.27$ ❌

(c) Obtenha a representação em espaço de estados discreta na forma canônica controlável do sistema. Mostre as matrizes e as equações.

Usando o formulário temos que:

$$\underline{F} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & -0.3 & -1.4 \end{vmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{vmatrix} 0.4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{d} = 0$$

Sendo que as fórmulas são:

- $\underline{x}(k+1) = \underline{F}\,\underline{x}(k) + \underline{H}u(k)$
- $y(k) = \underline{c}\,\underline{x}(k) + \underline{d}u(k)$

Questão 4

Considere o sistema de malha fechada da Figura 1, para o qual:

$$G(z) = \frac{K(z + 1.G)}{z(z-1)(z-0.GFE)}$$

Encontre a faixa de valores de K para que o sistema de malha fechada seja estável.

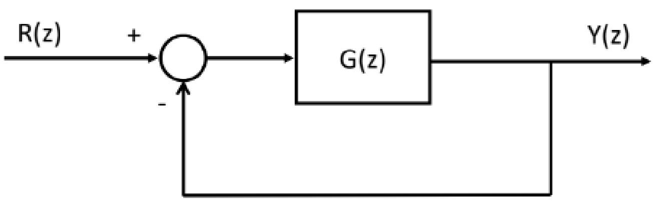

Figura 1: Sistema de Malha fechada

Resposta

$$G(z) = \frac{K(z+1.4)}{z(z-1)(z-0.433)}$$

A equação de malha fechada é $\frac{G(z)}{1+G(z)}$, assim teremos:

$$\frac{\frac{K(z+1.4)}{z(z-1)(z-0.433)}}{1+\frac{K(z+1.4)}{z(z-1)(z-0.433)}}$$

Essa equação pode ser escrita como:

$$\frac{\frac{K(z+1.4)}{z(z-1)(z-0.433)}}{\frac{z(z-1)(z-0.433)+K(z+1.4)}{z(z-1)(z-0.433)}} = \frac{K(z+1.4)}{z(z-1)(z-0.433)+K(z+1.4)}$$

Expandindo $z(z-1)(z-0.433) = z^3 - 1.433z^2 + 0.433z$:

$$\frac{Kz+1.4K}{z^3-1.433z^2+(0.433+K)z+1.4K}$$

Assim $A(z) = z^3 - 1.433z^2 + (0.433+K)z + 1.4K$. Assim, como na questão anterior, precisaremos verificar 4 condições:

- $A(1) > 0$
- $(-1)^3A(-1) > 0$
- $|a_0| < a_3$
- $|b_0| > b_2$

Portanto:

- $A(1) = 1 - 1.433 + 0.433 + K + 1.4K = 2.4K$
- $A(-1) = -1 - 1.433 - 0.433 - K + 1.4K = -2.866 + 0.4K$

$det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Etapa	coeficiente	coeficiente	coeficiente	coeficiente
a	$1.4K$	$(0.433+K)$	-1.433	1
	1	-1.433	$(0.433+K)$	$1.4K$
b	$1.96K^2-1$	$1.4K^2+0.6062K+1.433$	$-2.4392-K$	

- $2.4K > 0$
- $0.4K < 2.866$
- $-1 < 1.4K < 1$
- $2.4392 + K > 1.96K^2 - 1 > -2.4392 - K$

Deixando K mais em evidência temos que:

- $0 < K$
- $K < 7.165$
- $-0.7143 < K < 0.7143$
- $-1.09388 < K < 1.60409$

As inequações que realmente limitam tudo são a primeira e a terceira de modo que:

$$0 < K < 0.7146$$