prova 2 rec - 2020 - controle digital

#uspGrad/controle

1. Considere uma planta com função de transferência discreta $G_p(z) = \frac{0.4z^2 + 0.1z}{(z-0.2)^2(4z-1)}$ e frequência de amostragem de $2Hz$.

Primeiramente expandimos G_p:

$$G_p(z) = \frac{0.4z^2 + 0.1z}{(z^2 - 0.4z + 0.04)(4z-1)} = \frac{0.4z^2 + 0.1z}{4z^3 - 1.6z^2 + 0.16z - z^2 + 0.4z - 0.04} = \frac{0.4z^2 + 0.1z}{4z^3 - 2.6z^2 + 0.56z - 0.04}$$

Continuando nossa simplificação multiplicando em cima e embaixo por $0.25 \cdot z^{-3}$:

$$G_p(z) = \frac{0.1z^{-1} + 0.025z^{-2}}{1 - 0.65z^{-1} + 0.14z^{-2} - 0.01z^{-3}}$$

a) Projete um controlador dead-beat de ordem $(v+1)$ tal que as saídas do controlador $u(0) = u(1)$. Considere uma referência degrau unitário para a malha fechada de controle.

Considerando que nossa planta $G_p(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ temos uma planta de terceira ordem tal que: (lembrando que o formulário fala que $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 0$, $b_0 = 0$, e $b_{n+1} = 0$)

n	a_n	b_n
0	1	0
1	-0.65	0.1
2	0.14	0.025
3	-0.01	0
4	0	0

Nossa função de transferência do dead-beat $(v+1)$ será: $G_{DB(v+1)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{n+1} z^{-(n+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - \ldots - p_{n+1} z^{-(n+1)}}$

Portanto precisamos fazer os cálculos até a ordem $m = n + 1 = 4$.
Lembrando que para um dead-beat $(v+1)$:

- $u(0) = q_0 r_0$
- $q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i}$
- $p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}$
  Assim, nosso primeiro passo é definirmos q_0 (para o $(v+1)$ ele é escolha de projeto). Como o enunciado pede que $u(0) = u(1)$ o primeiro passo na real é definir $u(1)$. Olhando para o formulário tem-se que $Q(z^{-1}) = U(z)/R(z) \to U(z) = Q(z^{-1})R(z)$, que quando aplicamos a inversa é $u(k) = q_0 r(k) + q_1 r(k-1) + \ldots + q_m r(k-m)$, dessa equação temos o $u(0) = q_0 r_0$ dado no formulário e podemos derivar o $u(1) = q_0 r_0 + q_1 r_1$, e como a referência é o degrau unitário $u(1) = q_0 + q_1$.
  Voltando a definição do enunciado podemos construir a seguinte cadeia de igualdade: $u(0) = u(1) \to q_0 = q_0 + q_1$, isso quer dizer que $q_1 = 0$. Desse resultado podemos aplicar a fórmula do q_m para o dead-beat $(v+1)$ visando separar o q_0.
  $q_1 = q_0(a_1 - a_0) + \frac{a_0}{\sum b_i}$, agora podemos substituir os valores.
  $0 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i} \to q_0(1 - a_1) = \frac{1}{\sum b_i} \to q_0 = \frac{1}{(1-a_1)(\sum b_i)}$. Agora conseguimos calcular o valor de q_m para todos os q, incluindo q_0

Primeiro calculamos $\sum b_i = 0.1 + 0.025 = 0.125$ e calculamos os q_m:

- $q_0 = \dfrac{1}{(1+0.65)\cdot 0.125} = 4.85$
- $q_1 = 0$, para permitir $u(0) = u(1)$
- $q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{0.125} = -1.3685$
- $q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{0.125} = 0.3925$
- $q_4 = q_0(a_4 - a_3) + \frac{a_3}{0.125} = -0.0315$

  Sabemos que $\sum q_i = \frac{1}{H_0 G_p(1)}$, calculando $G_p(1) = \dfrac{0.4+0.1}{(1-0.2)^2(4-1)} = 0.2604167$, tal que o inverso é 3.84. Somando nossos q_i chegamos a 3.8425, mostrando uma leve diferença de 0.0025, o que está dentro da expectativa de alguma margem de erro.

Agora podemos calcular os p_m:

- $p_1 = q_0(b_1 - b_0) + \frac{b_0}{\sum b_i} = 0.485$
- $p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i} = 0.43625$
- $p_3 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i} = 0.07875$
- $p_4 = q_0(b_4 - b_3) + \frac{b_3}{\sum b_i} = 0$

  Sabemos que $\sum p_i = 1$ e verificando com nossas contas vemos que o valor bate, aumentando a chance de estarmos no caminho certo!

Finalmente vamos ter que a função de transferência do dead-beat $(v+1)$ é:

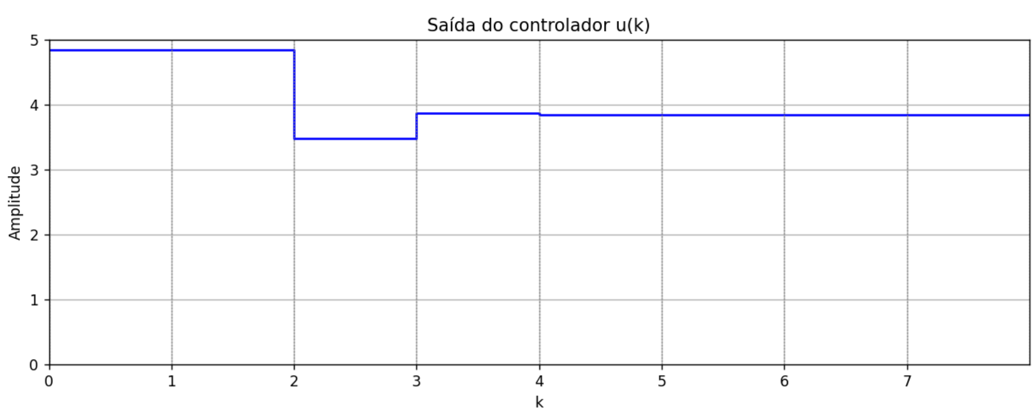
$$G_{DB(v+1)}(z) = \frac{4.85 - 1.3685z^{-2} + 0.3925z^{-3} - 0.0315z^{-4}}{1 - 0.485z^{-1} - 0.43625z^{-2} - 0.07875z^{-3}}$$

b) Para o sistema de malha fechada controlado pelo Dead-beat projetado no item (a) submetido a uma entrada degrau unitário. Esboce os gráficos até a convergência:

i. Saída do controlador dead-beat $u(k)$ (ou seja, entrada da planta do sistema)

$u(k) = 4.85 \cdot r(k) - 1.3685 \cdot r(k-2) + 0.3925 \cdot r(k-3) - 0.0315 \cdot r(k-4)$

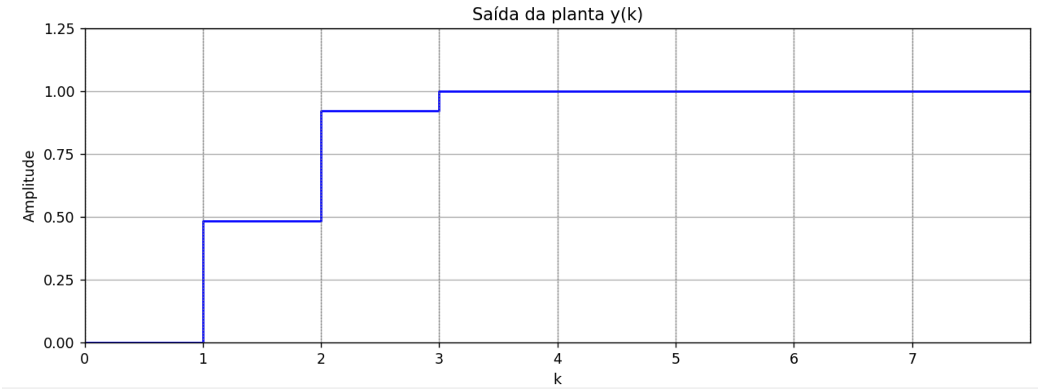
k	u(k)
0	4.85
1	4.85
2	3.4815
3	3.874
4	3.8425



ii. Saída da planta do sistema $y(k)$

$y(k) = 0.485 \cdot r(k-1) + 0.43625 \cdot r(k-2) + 0.07875 \cdot r(k-3)$

k	y(k)
0	0
1	0.485
2	0.92125
3	1
4	1



2. Considere o sistema a seguir, onde x é o vetor de estados, y é a saída do sistema e u é a entrada do sistema:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.6 & 1.1 \end{bmatrix} \cdot x(k)$$

Tal que

$$\underline{x}(k+1) = \underline{F}\underline{x}(k) + \underline{H}\underline{u}(k)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{c}\underline{x}(k)$$

RELEMBRANDO

$$\underline{F}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Antes de começar precisamos lembrar de como fica nosso sistema quando adicionamos um controlador por realimentação:

$$\underline{x}(k+1) = (\underline{F} - \underline{H}\underline{K})\underline{x}(k) + \underline{H}\underline{r}(k)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{c}\underline{x}(k)$$

Onde a equação característica é dada por $det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{H}\underline{K}] = 0$ de modo que o ganho é um vetor $\underline{K} = [k_m \quad k_{m-1} \quad \dots \quad k_2 \quad k_1]$.
Assim, para um sistema na forma canônica controlável temos:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_m + k_m) & -(a_{m-1} + k_{m-1}) & \dots & -(a_1 + k_1) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

De modo que $det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{H}\underline{K}] = (a_m + k_m) + (a_{m-1} + k_{m-1})z + \dots + (a_1 + k_1)z^{m-1} + z_m$.
Para projetarmos por:

- **Alocação de polos:** $det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{H}\underline{K}] = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_m)$
- **Equivalência a dead-beat:** $det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{H}\underline{K}] = z_m$

Como $\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$, $a_3 = 0.2$, $a_2 = 0.1$ e $a_1 = -0.3$. Disso podemos definir $(\underline{F} - \underline{HK}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(0.2+k_3) & -(0.1+k_2) & -(-0.3+k_1) \end{bmatrix}$, de forma que $det[z\underline{I} - \underline{F} + \underline{HK}] = (0.2+k_3) + (0.1+k_2)z + (-0.3+k_1)z^2 + z^3$.

a) Encontre a matriz de ganho K para implementar um controlador por realimentação de estados que possua um comportamento do tipo dead-beat.

Para que o nosso controlador se comporte tal qual um dead-beat precisamos que $(0.2+k_3) + (0.1+k_2)z + (-0.3+k_1)z^2 + z^3 = z^3$, ou seja:

- $0.2 + k_3 = 0$
- $0.1 + k_2 = 0$
- $-0.3 + k_1 = 0$
  Assim $\underline{K} = [-0.2 \quad -0.1 \quad 0.3]$.

b) Encontre a matriz de ganho K para implementar um controlador por realimentação de estados que possua pólos em: $z_1 = 0.5$, $z_2 = -0.6$ e $z_3 = 0$.

Para que o nosso controlador possua os pólos onde foi pedido precisamos que $(0.2+k_3) + (0.1+k_2)z + (-0.3+k_1)z^2 + z^3 = (z-0.5)(z+0.6)(z-0) \rightarrow$ $(0.2+k_3) + (0.1+k_2)z + (-0.3+k_1)z^2 + z^3 = 0 - 0.3z + 0.1z^2 + z^3$, ou seja:

- $0.2 + k_3 = 0$
- $0.1 + k_2 = -0.3$
- $-0.3 + k_1 = 0.1$
  Assim $\underline{K} = [-0.2 \quad -0.4 \quad 0.4]$.

3. Explique com suas palavras o ensaio experimental que deve ser feito para projetar um controlador PID pelo método de Ziegler-Nichols 2 (oscilação limite).

Para projetar um controlador PID utilizando o método de Ziegler-Nichols 2 precisamos levar o sistema a margem da estabilidade, para isso utilizamos um controlador P (sem parte integral ou derivativa) e aumentamos o ganho K_p até que o sistema se torne marginalmente estável (fique oscilando infinitamente). O valor do ganho proporcional nesse ponto é chamado de K_{crit}, de modo que $K_p < K_{crit}$ o sistema é estável e para $K_p > K_{crit}$ o sistema é instável. Assim, em K_{crit} o sistema vai oscilar com algum período, sendo que T_{crit} é o período da oscilação. Usando os valores críticos podemos usar a tabela para definir K_p, K_i e K_d.

Referência: https://www.youtube.com/watch?v=nvAQHSe-Ax4

4. Considere a função de transferência discreta do processo a seguir, dada em função de período de amostragem T_0 e calcule o menor valor possível para T_0, de forma que seja possível implementar um dead-beat de ordem v tal que a saída do controlador $u(0) = 10$. Considere um degrau unitário como referência de controle.

$$G_d(z) = \frac{(1 - e^{-2T_0}(1 + 2T_0))z + e^{-2T_0}(e^{-2T_0} - 1 + 2T_0)}{4(z - e^{-2T_0})^2}$$

O primeiro passo é colocar nossa planta na forma canônica $\frac{b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} - \ldots - a_n z^{-n}}$, para isso o primeiro passo é fazer uma substituição de variável visando facilitar nossa vida $e^{-2T_0} = y$ e aplicar as distribuições:

$$\frac{(1 - y(1 + 2T_0))z + y(y - 1 + 2T_0)}{4(z - y)^2} = \frac{(1 - y(1 + 2T_0))z + y(y - 1 + 2T_0)}{4z^2 - 8yz + 4y^2}$$

Agora multiplicamos em cima e embaixo por $0.25z^{-2}$:

$$\frac{0.25(1 - y(1 + 2T_0))z^{-1} + 0.25y(y - 1 + 2T_0)z^{-2}}{1 - 2yz^{-1} + y^2 z^{-2}}$$

Como $u(0) = q_0 r$ e $q0 = \frac{1}{\sum b_i}$. Como r é um degrau unitário tem-se que $\frac{1}{\sum b_i} = 10$:

$$0.25(1 - y(1 + 2T_0)) + 0.25y(y - 1 + 2T_0) = \frac{1}{10}$$

$$10 \cdot (0.25 - 0.25y - 0.5yT_0 + 0.25y^2 - 0.25y + 0.5yT_0) = 1$$

$$10 \cdot (0.25 + y(-0.25 - 0.5T_0 - 0.25 + 0.5T_0) + y^2(0.25)) = 1$$

$$10 \cdot (0.25 - 0.5y + 0.25y^2) = 1$$

$$1.5 - 5y + 2.5y^2 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática temos que:

$$\begin{cases} y' = 1.6325 \\ y'' = 0.3675 \end{cases}$$

Como $y = e^{-2T_0}$ temos duas equações:

$$\begin{cases} e^{-2T_0} = 1.6325 \rightarrow T_0 = -0.2451 \\ e^{-2T_0} = 0.3675 \rightarrow T_0 = 0.5005 \end{cases}$$

Como T_0 não faz sentido ser negativo, o tempo mínimo de amostragem é de $0.5s$.