Controle Digital

SEL620

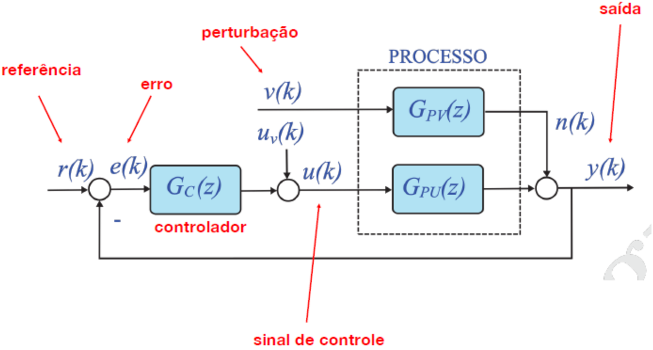
Prof. Dr. Valdir Grassi Jr

Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

Controladores Paramétricos

Capítulo 7

Processo SISO realimentado



Controlador PID

(Seção 7.2)

Integral do erro

Proporcional ao erro

Derivada do erro

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int e(\tau)d\tau + T_D\frac{d}{dt}e(t)\right]$$

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{(KT_D)s^2 + Ks + \left(K/T_I\right)}{s} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

$$G_{PID}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_0s^2 + q_1s + q_2}{s} = \frac{K(s+z_{01})(s+z_{02})}{s}$$

Controlador PID

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int e(\tau)d\tau + T_D\frac{d}{dt}e(t)\right].$$

Admitindo-se um tempo de amostragem pequeno pode-se aproximar a integral e derivada por:

$$u(k) = K\left[e(k) + \underbrace{\frac{T_0}{T_I}\sum_{v=0}^{k-1}e(v)}_{\text{Aproximação da integral}} + \underbrace{\frac{T_D}{T_0}(e(k) - e(k-1))}_{\text{Aprixima\c{c}ão da derivada}}\right].$$

Controlador PID

$$u(k) = K\left[e(k) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{v=0}^{k-1} e(v) + \frac{T_D}{T_0}(e(k) - e(k-1))\right].$$

É possível escrever na forma recursiva (equação de diferenças):

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2),$$

$$q_0 = K\left(1 + \frac{T_D}{T_0}\right), \quad q_1 = -K\left(1 + 2\frac{T_D}{T_0} - \frac{T_0}{T_I}\right),$$

$$q_2 = K\frac{T_D}{T_0}.$$

Controlador PID

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

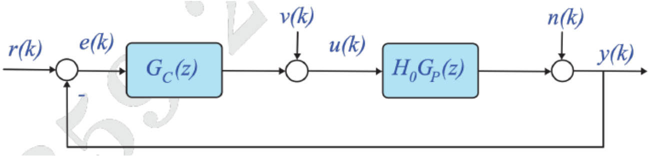
Pode-se obter a seguinte função de transferência para o PID discreto:

$$G_C(z) = G_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})},$$

$$= \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 - z} = \frac{q_0(z - z_{01})(z - z_{02})}{z^2 - z} = \frac{Q(z)}{P(z)}.$$

Controlador paramétrico genérico

(Seção 7.3)



$$H_0G_P = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}},$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_\mu z^{-\mu}}.$$

Controlador paramétrico genérico

Para zerar o erro de regime permanente para uma entrada degrau, o controlador deve ter pelo menos um polo em $z = 1$ ($s = 0$, ação integral).
Portanto, a estrutura mais simples para o controlador genérico de ordem v:

$$G_C(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

A equação de diferenças seria:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + \ldots + q_v e(k-v).$$

Controlador paramétrico genérico

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + \ldots + q_v e(k-v).$$

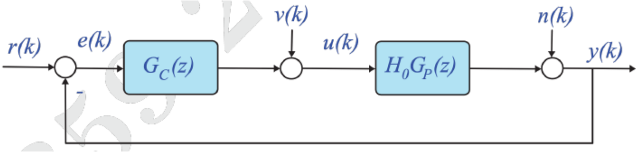
Para v=1 o controlador seria um PI.

Para v=2 o controlador seria um PID.

Para v=3 o controlador seria um PID2 ou PI2D.

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

(Seção 7.4)



$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

Suponha que o controlador receba uma entrada degrau:

$$e(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

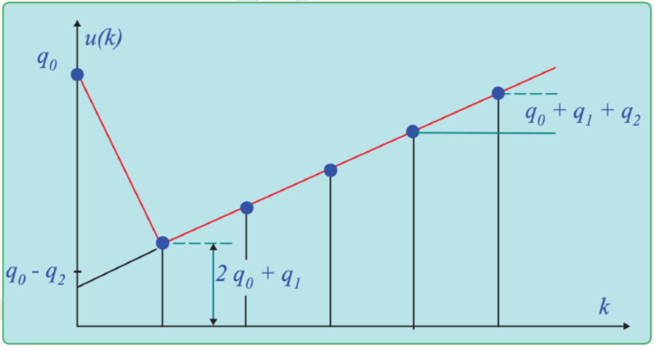
$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

Retirando-se o controlador da malha fechada e aplicando um degrau unitário na entrada do controlador, a resposta do controlador seria:

$$\begin{aligned}
u(0) &= q_0, \\
u(1) &= u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1, \\
u(2) &= u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2, \\
&\vdots \\
u(k) &= u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2.
\end{aligned}$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Resposta esperada de um controlador PID a entrada degrau unitário.



Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Espera-se que a resposta seja:

$u(1) < u(0)$,
$u(k) > u(k-1)$ para valores grandes de k.

Admitindo que $q_0 > 0$:

$$u(0) = q_0,$$

$$u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1,$$

$$u(1) < u(0) \implies q_0 + q_1 < 0, \quad \text{ou} \quad q_1 < -q_0.$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Espera-se que a resposta seja:

$u(1) < u(0)$,
$u(k) > u(k-1)$ para valores grandes de k.

Admitindo que $q_0 > 0$:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2,$$

$$u(k) > u(k-1)\Big|_{k\geq 2} \implies q_0 + q_1 + q_2 \geq 0, \quad \text{ou} \quad q_2 \geq -(q_0 + q_1)$$

$$\implies q_0 > q_2.$$

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

Portanto, para que um controlador paramétrico de segunda ordem se comporte como um PID, deve-se ter:

$q_0 > 0,$

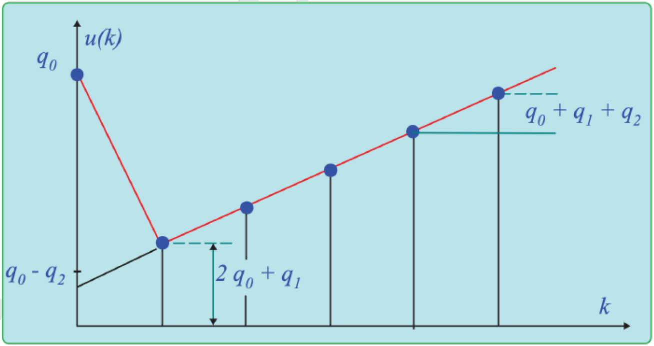
$q_1 < -q_0,$

$-(q_0 + q_1) < q_2 < q_0.$

Importante notar que $u(0) = q_0$, e que $u(0)$ é a maior resposta do controlador quando em malha fechada submetida a uma entrada da malha do tipo degrau unitário.

Controlador paramétrico de segunda ordem ($v = 2$)

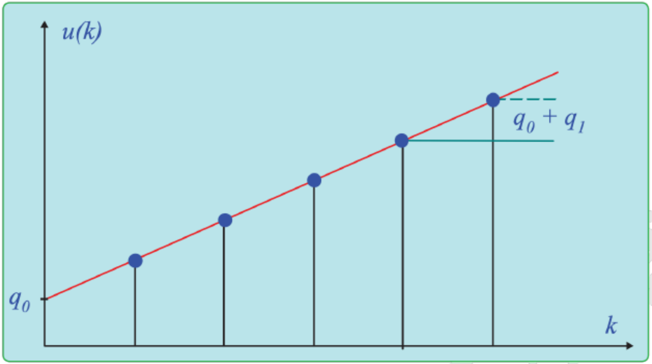
Resposta esperada de um controlador PID a entrada degrau unitário.

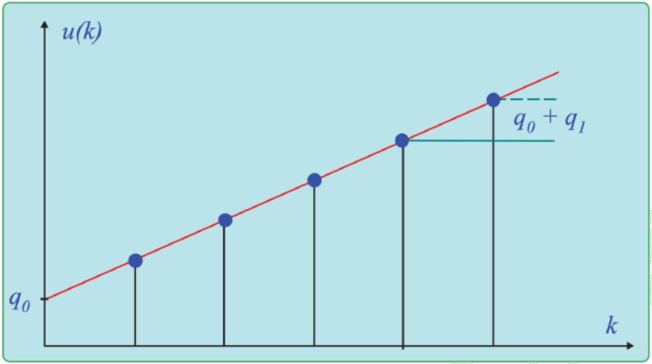


Controlador paramétrico de primeira ordem ($v = 1$)

(Seção 7.5)

Resposta esperada de um controlador PI a entrada degrau unitário.





Definindo-se:

$$K' = q_0 - q_2, \qquad \text{(Fator de Amplificação)}$$

$$c_D = \frac{q_0}{K}, \qquad \text{(Fator de Derivação)}$$

$$c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K}. \qquad \text{(Fator de Integração)}$$

Controlador PID

$$u(k) = K\left[e(k) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{v=0}^{k-1} e(v) + \frac{T_D}{T_0}(e(k) - e(k-1))\right].$$

Para um período suficientemente pequeno:

$$K' = K, \qquad K' = q_0 - q_2,$$

$$c_D = \frac{T_D}{T_0}, \qquad c_D = \frac{q_0}{K},$$

$$c_I = \frac{T_0}{T_I} \qquad c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K}.$$

De forma que:

$$c_D > 0, \quad c_I > 0, \quad c_I < c_D.$$

Controlador PID

Substituindo

$$K' = q_0 - q_2, \qquad c_D = \frac{q_0}{K}, \qquad c_I = \frac{q_0 + q_1 + q_2}{K},$$

no controlador genérico:

$$G_C(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)},$$

obtém-se:

$$G_C(z) = \frac{K\Big[(1 + c_D) + (c_I - 2c_D - 1)z^{-1} + c_D z^{-2}\Big]}{1 - z^{-1}},$$

$$= K\Big[1 + c_I\left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right) + c_D(1 + z^{-1})\Big].$$

Controlador PID

Pode-se obter uma separação dos efeitos de cada termo do PID:

$$\begin{aligned} u_P(k) &= K'e(k), \\ u_I(k) &= u_I(k-1) + K'c_I e(k-1), \\ u_D(k) &= K'c_D\big[e(k) - e(k-1)\big], \end{aligned}$$

$$u(k) = u_P(k) + u_I(k) + u_D(k).$$

Controlador PID

Ou escrito em função de q_0, q_1 e q_2:

$$u_P(k) = \big(q_0 - q_2\big)e(k),$$

$$u_I(k) = u_I(k-1) + \big(q_0 + q_1 + q_2\big)e(k-1),$$

$$u_D(k) = q_2\big[e(k) - e(k-1)\big].$$

Controladores:

$$
\begin{array}{lll}
P & c_D = 0, & c_I = 0, \\
I & K' = 0, & c_D = 0, \\
D & K' = 0, & c_I = 0, \\
PI & & c_D = 0, \\
PD & & c_I = 0.
\end{array}
$$

Sintese de Controladores PID

Seção 7.6

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

(Seção 7.6.1)

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$1 + G_C(z)H_0G_P(z) = 0,$$

$$H_0G_P = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \ldots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_mz^{-m}},$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \ldots + q_vz^{-v}}{1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \ldots + p_\mu z^{-\mu}}.$$

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1}) = 0.$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

Equação característica do sistema de malha fechada:

$$P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1}) = 0.$$

Para um PID:

$$G_C(z) = G_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}.$$

A equação característica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}&(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}) + \\ &\quad + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}) = 0.\end{aligned}$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

$$
\begin{aligned}
&(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}) + \\
&\quad + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}) = 0.
\end{aligned}
$$

Fazendo a multiplicação dos polinômios:

$$\mathbf{A}(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{n+2} z^{-(n+2)} = 0,$$

ou

$$z^{(n+2)} + a_1 z^{(n+1)} + a_2 z^n + \ldots + a_{n+2} = 0,$$

ou

$$\big(z - z_{a1}\big)\big(z - z_{a2}\big)\big(z - z_{a3}\big)\big(\ldots\big)\big(z - z_{an+2}\big) = 0.$$

Síntese pelo Método de Alocação de Polos

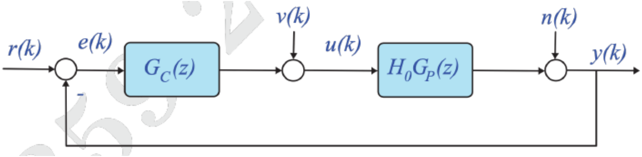
Escolhe-se a dinâmica do processo controlado através da escolha (alocação) dos polos do sistema de malha fechada.
Importante observar que se o processo tiver n polos (ordem n), a equação característica possui $n+2$ polos.

$$z^{(n+2)} + a_1 z^{(n+1)} + a_2 z^n + \ldots + a_{n+2} = 0,$$

Mas o PID possui 3 parâmetros (q_0, q_1 e q_2). Portanto, para que o sistema linear tenha uma única solução: $n+2=3$, ou seja, $n=1$.
Se o PID for modificado para possuir 4 parâmetros (2 polos e 2 zeros), então $n=2$.

Ação de controle limitada

(Seção 7.6.3)



$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{G_C(z)}{1 + G_C(z)H_0G_P(z)},$$

$$\frac{U(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})A(z^{-1})}{P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})}.$$

Ação de controle limitada

Para $b_0 = 0$:

$$\Big[(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}) +$$

$$+ (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m})\Big] u(z) =$$

$$= (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}) r(z).$$

Ou:

$$\begin{aligned} u(k) = (1 - a_1) u(k-1) + (a_1 - a_2) u(k-2) + \ldots \\ - q_0 b_1 u(k-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1) u(k-2) + \ldots \\ + q_0 r(k) + (q_0 a_1 + q_1) r(k-1) + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2) r(k-2) + \ldots \end{aligned}$$

Ação de controle limitada

$$
\begin{aligned}
u(k) = (1 - a_1)u(k-1) + (a_1 - a_2)u(k-2) + \dots \\
- q_0 b_1 u(k-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1)u(k-2) + \dots \\
+ q_0 r(k) + (q_0 a_1 + q_1) r(k-1) + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2) r(k-2) + \dots
\end{aligned}
$$

As duas primeiras ações de controle são:

$$
\begin{aligned}
u(0) &= q_0 r_0, \\
u(1) &= \big[q_0(2 - q_0 b_1) + q_1\big] r_0.
\end{aligned}
$$

Ação de controle limitada

$$u(0) = q_0 r_0,$$
$$u(1) = \big[q_0(2 - q_0 b_1) + q_1\big] r_0.$$

Conhecendo a entrada máxima da planta $u(0)$ e uma variação brusca da amplitude da referência do sistema (degrau unitário) de no máximo r_0:

$$q_0 = \frac{u(0)}{r_0}.$$

Como o controlador é um PID: $u(1) < u(0)$.

Portanto: $q_1 \leq -q_0(1 - q_0 b_1)$.

PID Modificado 1 - Amortecido

(Seção 7.7.1)

PID com ação derivativa atrasada:

$$G(s) = K\left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_I s}\right].$$

Discretização com Holder:

$$\begin{aligned}
H_0 G_C(s) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G_C(s)}{s}\right\}, \\
&= K\left[1 + \frac{T_0}{T_I}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})} + \frac{T_D}{T_0}\frac{(1-z^{-1})}{(1-\gamma z^{-1})}\right], \\
&= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-\gamma z^{-1})}, \\
&= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}.
\end{aligned}$$

Parâmetros do PID modificado 1:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= K\left(1 + \frac{T_D}{T_I}\right), \\
q_1 &= -K\left(1 - \gamma + 2\frac{T_D}{T_I} - \frac{T_0}{T_I}\right), \\
q_2 &= K\left(\frac{T_D}{T_I} + \left(\frac{T_0}{T_I} - 1\right)\gamma\right), \\
\gamma &= -e^{-T_0/T_I}, \\
p_1 &= \gamma - 1, \\
p_2 &= -\gamma.
\end{aligned}
$$

PID Modificado - outras formas

(Seção 7.7.2)

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_\mu z^{-\mu}},$$

$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = Q(z^{-1})E(z^{-1}) = Q(z^{-1})\Big[R(z^{-1}) - Y(z^{-1})\Big].$$

PID modificado 2 - Avaliar de forma diferente a referência R:

$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = S(z^{-1})R(z^{-1}) - Q(z^{-1})Y(z^{-1}),$$

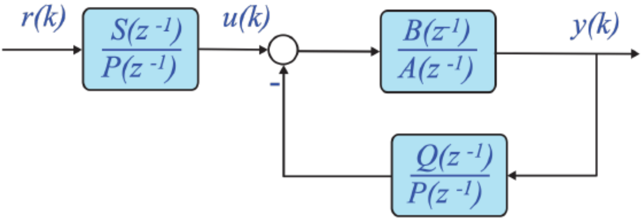
$$U(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})}R(z^{-1}) - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}Y(z^{-1}).$$

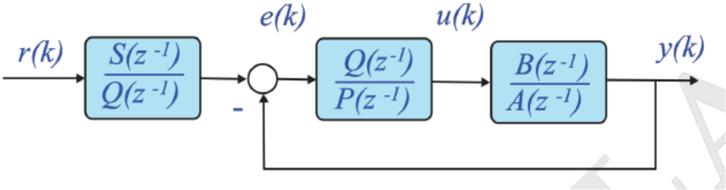
$$P(z^{-1})U(z^{-1}) = S(z^{-1})R(z^{-1}) - Q(z^{-1})Y(z^{-1}),$$

$$U(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})}R(z^{-1}) - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}Y(z^{-1}),$$

$$U(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}\left[\underbrace{\frac{S(z^{-1})}{Q(z^{-1})}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Existe um pré-filtro agindo} \\ \text{na referência de controle}}} R(z^{-1}) - Y(z^{-1})\right].$$

O filtro não muda os polos originais de malha fechada, mas produz um amortecimento em variações bruscas da referência de controle r.


r(k)
S(z -1) / P(z -1)
u(k)
-
B(z-1) / A(z -1)
y(k)
Q(z -1) / P(z -1)


r(k)
S(z -1) / Q(z -1)
e(k)
-
Q(z-1) / P(z -1)
u(k)
B(z -1) / A(z -1)
y(k)

PID - convencional:

$$u(k) - u(k-1) = K\Big[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I}e(k-1) + \\ + \frac{T_D}{T_0}\big(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)\big)\Big].$$

PID - Modificado 2:

$$u(k) - u(k-1) = K\Big[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I}e(k-1) + \\ + \frac{T_D}{T_0}\big(y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)\big)\Big].$$

PID - Modificado 2:

$$u(k) - u(k-1) = K\Big[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I}e(k-1) + \\ + \frac{T_D}{T_0}\big(y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)\big)\Big].$$

Para o modificado 2, o pré-filtro agindo na referência de controle equivale a:

$$S(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1},$$

$$s_0 = K,$$

$$s_1 = -K\left(1 - \frac{T_0}{T_I}\right).$$

PID - Modificado 3: para um amortecimento maior da referencia. O erro é utilizado apenas na parte integral.

$$
\begin{aligned}
u(k) - u(k-1) = K\Big[y(k) - y(k-1) + \frac{T_0}{T_I}e(k-1) + \\
+ \frac{T_D}{T_0}\big(-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)\big)\Big].
\end{aligned}
$$

Para o modificado 3, o pré-filtro agindo na referência de controle equivale a:

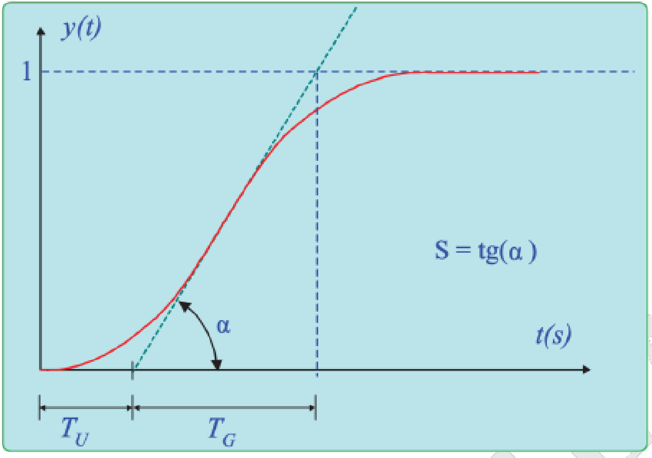
$$
S(z^{-1}) = s_1 + 1z^{-1},
$$

$$
s_1 = K\frac{T_0}{T_I}.
$$

Ajuste de PID com auxílio de tabelas

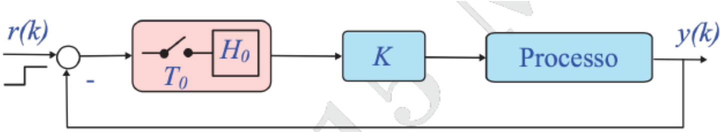
(Seção 7.7.3)

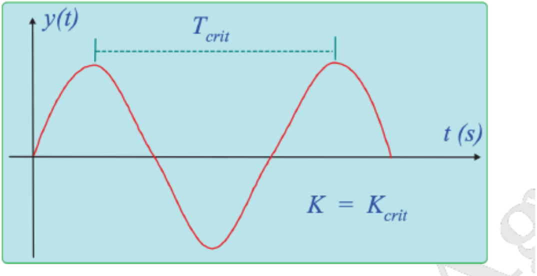
Ziegler-Nichols 1 - Ensaio resposta transitória.



Ajuste de PID com auxílio de tabelas

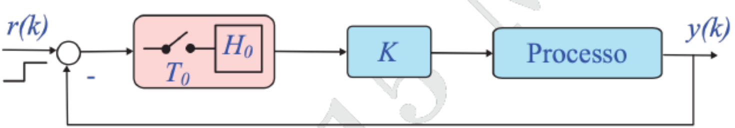
Ziegler-Nichols 2 - Oscilação limite.

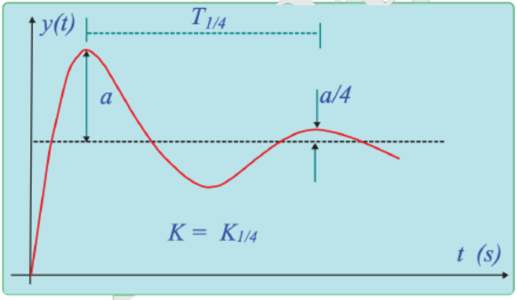




Ajuste de PID com auxílio de tabelas

Ziegler-Nichols 3 - Decaimento $1/4$.





Ajuste de PID com auxílio de tabelas

		Parâmetros de PID Contínuo		
		K_P	T_I	T_D
Método 1	P	T_G/T_U		
	PI	$0,9T_G/T_U$	$3,33T_U$	
	PID	$1,2T_G/T_U$	$2T_U$	$0,5T_U$
Método 2	P	$0,5K_{crit}$		
	PI	$0,45K_{crit}$	$0,85T_{crit}$	
	PID	$0,6K_{crit}$	0,5 T_{crit}	$0,125T_{crit}$
Método 3	P	$K_{1/4}$		
	PI	$0,9K_{1/4}$	$T_{1/4}$	
	PID	1,2 $K_{1/4}$	$T_{1/4}$	$0,25T_{1/4}$

T_0	$\approx$	$\Big(1/16 \text{ a } 1/8)\Big)(1/f_{bw})$	f_{bw} : Banda passante
T_0	$\approx$	$\Big(1/8 \text{ a } 1/4)\Big)T_t$	T_t : Tempo morto
T_0	$\approx$	$(0,35 \text{ a } 1,2)T_U$	$0,1 \leq (T_U/T_0) \leq 1$
T_0	$\approx$	$(0,22 \text{ a } 0,35)T_U$	$1 \leq (T_U/T_0) \leq 10$
T_0	$\approx$	π/ω_{max}	Teor. Amostragem
T_0	$\approx$	$\Big(1/15 \text{ a } 1/6\Big)T_{95\%}$	$T_{95\%}$: Tempo de subida

Tabela 7.6: Escolha intervalo de Amostragem