



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO

**Controle Digital - SEL0620**

# **Modelagem e Discretização da Planta**

## **Relatório 3**

**Matheus Henrique Dias Cirillo - 12547750**  
**Gustavo Moura Scarenci de Carvalho Ferreira - 12547792**

**Docente responsável:** Dr. Valdir Grassi Jr.

São Carlos  
2º semestre/2024



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Desenvolvimento</b>	<b>2</b>
2.1	Questão 1 . . . . .	2
2.2	Questão 2 . . . . .	3
2.3	Questão 3 . . . . .	3
2.4	Questão 4 . . . . .	3
2.5	Questão 5 . . . . .	4
2.6	Questão 6 . . . . .	5
2.7	Questão 7 . . . . .	5
2.8	Questão 8 . . . . .	7
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>9</b>

## 1 Introdução

O função de transferência do sistema de segunda ordem é da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (1.1)$$

Os parâmetros  $\zeta$ ,  $w_n$ , e o valor de amplitude R para a entrada degrau que será utilizada são:

- $\zeta = 1,012$
- $w_n = 0,875 \frac{rad}{s}$
- $R = 1,18$

## 2 Desenvolvimento

### 2.1 Questão 1

Qual a função de transferência contínua do sistema para os valores numéricos do seu grupo? Quais os pólos do sistema de segunda ordem contínuo? Qual a classificação do sistema de segunda ordem (sobreamortecido, criticamente amortecido ou subamortecido)? Para obter os pólos da função de transferência, o seguinte comando de Matlab pode ser utilizado considerando que a função de transferência  $G$  já foi definida:

```
p = pole(G)
```

A função de transferência  $G(s)$  é obtida pelo Matlab:

```
zeta = 1.012  
wn = 0.875  
R = 1.18;  
g = tf(wn^2, [1 2*zeta*wn wn^2]) % Funcao de Transferencia
```

Tal que a função de transferência para os valores numéricos do meu grupo pode ser observada na Equação 2.1

$$G(s) = \frac{0.765625}{s^2 + 1.7755s + 0.765625} \quad (2.1)$$

Para encontrar os pólos do sistema, resolvemos a equação característica dada pelo denominador da função de transferência:

$$s^2 + 1.7755s + 0.765625 = 0$$

Assim, os pólos são:

$$s_1 = \frac{-1.7755 + 0.3081}{2} = -0.7337$$

$$s_2 = \frac{-1.7755 - 0.3081}{2} = -1.0418$$

Portanto, os pólos do sistema são aproximadamente  $s_1 = -0.7337$  e  $s_2 = -1.0418$ .

A classificação do sistema pode ser feita a partir do coeficiente de amortecimento  $\zeta$ :

- **Sobreamortecido:**  $\zeta > 1$
- **Criticamente Amortecido:**  $\zeta = 1$
- **Subamortecido:**  $\zeta < 1$

Com  $\zeta = 1.012$ , o sistema é **sobreamortecido**, pois o coeficiente de amortecimento é maior que 1.

---

## 2.2 Questão 2

Mostre no relatório qual o período de amostragem escolhido baseado na largura de banda do sistema. Como você chegou no valor para o período de amostragem? Mostre no relatório a largura de banda em [rad/s] e em [Hz], e também a frequência de amostragem em [rad/s] e em [Hz]. Observação: o valor escolhido para  $T_0$  baseado na largura de banda deve ser maior que 0,2 segundos. Justifique se precisar usar um valor igual ou menor.

Como vimos na Prática 2, a frequência de Nyquist exige que nossa frequência de amostragem seja pelo menos duas vezes maior que a nossa frequência de banda, todavia no mundo real isso não nos dá margem de variação, por isso, o ideal **ADICIONAR REFERENCIA** é que nossa frequência de amostragem seja pelo menos dez vezes maior. Desse modo, chegamos em um período de amostragem igual a 1,137s.

```
wb = bandwidth(g)
fb = wb/(2*pi)
F0 = 10*fb
W0 = F0*2*pi
T0 = 1/F0
```

Os resultados encontrados podem ser observados na Tabela 1

	Largura de Banda	Frequência de Amostragem
Hertz	0.0879	0.8795
Rad/s	0.5526	5.5259

**Tabela 1:** Largura de banda e frequência de amostragem

---

## 2.3 Questão 3

A partir da função de transferência contínua do sistema, encontre e mostre no relatório a função de transferência discreta do sistema considerando um retentor de ordem zero. Para isso, considerando que a função de transferência contínua já foi definida no Matlab como sendo  $G$ , e o período de amostragem foi definido como sendo  $T_0$ , utilize o seguinte comando no Matlab:

```
Gz = c2d(G, T0, 'zoh')
```

A função de transferência discreta do sistema  $G_z$  é dada pela Equação 2.2.

$$G(s) = \frac{0.2609z + 0.1331}{z^2 - 0.7395z + 0.1335} \quad (2.2)$$

---

## 2.4 Questão 4

Quais os pólos e zeros da função de transferência discreta? Para obter os zeros da função de transferência, o seguinte comando de Matlab pode ser utilizado considerando que a função de transferência  $G_z$  já foi definida:

$z = \text{zero}(Gz)$

Os pólos podem ser obtidos utilizando o seguinte comando no Matlab:

$p = \text{pole}(Gz)$

Os resultados obtidos foram:

$$z = -0.5101$$

$$p_1 = 0.4265, \quad p_2 = 0.3130$$

Portanto, a função de transferência discreta apresenta um zero em  $z = -0.5101$  e dois pólos em  $p_1 = 0.4265$  e  $p_2 = 0.3130$ .

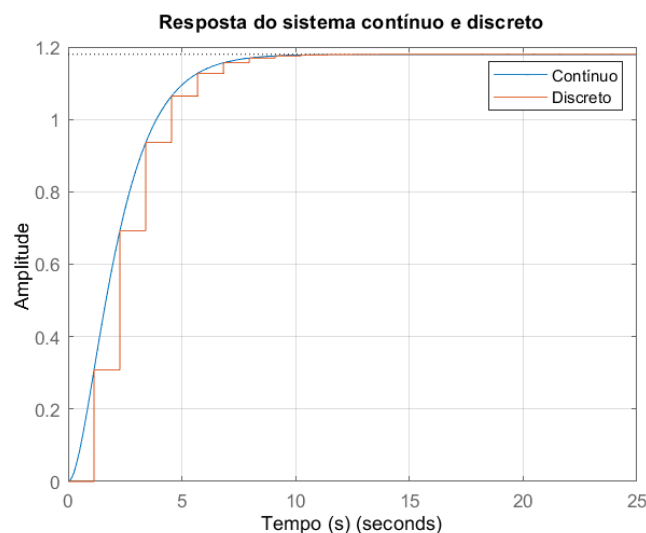
## 2.5 Questão 5

Plote a resposta do sistema contínuo a uma entrada degrau de amplitude  $r$ , indicada na tabela de parâmetros fornecida. Sobreponha a resposta contínua à resposta discreta. Utilize a seguinte sequência de comandos do Matlab considerando que a função de transferência contínua  $G$ , a função de transferência discreta  $Gz$ , e a amplitude do degrau  $r$  já foram definidas:

```
figure
step(r*G)
hold on
step(r*Gz)
```

**Acrescente título e legenda para completar a figura.**

A resposta do sistema contínuo a uma entrada degrau de amplitude  $r$  pode ser observada na Figura 1



**Figura 1:** Função de transferência contínua e função de transferência discreta

## 2.6 Questão 6

Qual o tempo de acomodação ( $t_s$ ) da resposta do sistema discreto considerando o critério de  $\pm 2\%$ ? Qual o tempo de subida ( $t_r$ ) da resposta do sistema discreto? Para encontrar esse valor, clique com o botão direito do mouse no gráfico mostrado pelo Matlab como resposta ao comando `step`. Então selecione *Characteristics*, e depois *Settling Time* ( $t_s$ ) e *Rise Time* ( $t_r$ ).

O tempo de acomodação do sistema é de 6,82s e o de subida 4,09s. Os resultados podem ser observados na Figura 2

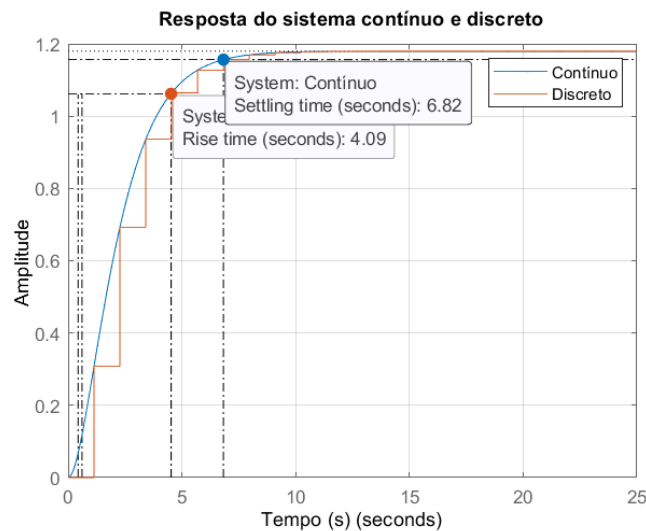


Figura 2: Tempo de acomodação e tempo de subida do sistema discreto

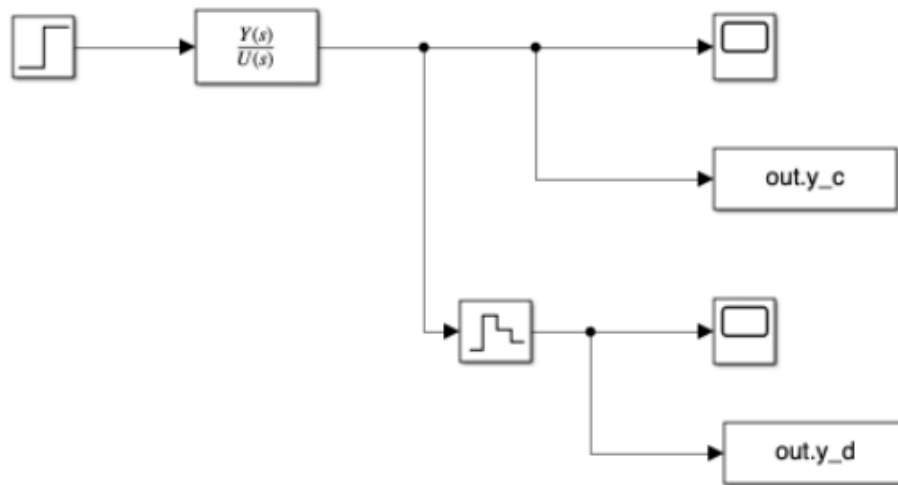
## 2.7 Questão 7

Utilizando o Simulink, implemente o diagrama da Figura 3 que faz a simulação do sistema contínuo em malha aberta submetido a uma entrada degrau. Sequência a ser utilizada para isso:

1. Abra o Simulink digitando `simulink` no prompt da janela de comando do Matlab, ou utilize o botão disponível na aba *Home*.
2. Quando a janela do Simulink abrir, escolha a opção de criar um *Blank Model*.
3. Clique no botão *Library Browser*.
4. Arraste do *Library Browser* para a área em branco à direita os blocos que você vai utilizar para criar o diagrama (Transfer Fcn, Zero-Order Hold, Scope, To Workspace, Step). Eles podem ser encontrados dentro da categoria *Simulink* nas sub-categorias: *Continuous*, *Discrete*, *Sinks*, *Sources*.



5. Conecte os blocos clicando na entrada de um bloco e arrastando para a saída de outro bloco ou ponto de conexão desejado.
6. Configure o tempo de simulação para 15 segundos alterando o valor de *Stop Time* na barra superior da janela do Simulink.
7. Configure as propriedades de cada bloco:
  - **Step:** Ajustar o *Step Time* para 0, ajustar o *Final Value* para o valor da amplitude do degrau  $r$ ;
  - **Transfer Function:** Insira os vetores com os valores dos coeficientes do polinômio do numerador e denominador da função de transferência (ordem decrescente de expoentes). Para recuperar os vetores que representam os polinômios do numerador e denominador da função de transferência: `[num, den] = tfdata(G, 'v')`
  - **Zero-Order Holder:** Configure o *Sample Time* como sendo o valor do período de amostragem  $T_0$  escolhido;
  - **To Workspace:** Configure o *Variable name* para o nome da variável do workspace onde você quer armazenar os dados. Por exemplo, `yc` para a saída contínua, e `yd` para a saída discreta.
8. Execute a simulação apertando o botão de play da barra superior da janela do Simulink.



**Figura 3:** Diagrama do Simulink a ser implementado

A implementação feita no Simulink pode ser observada na Figura 4.

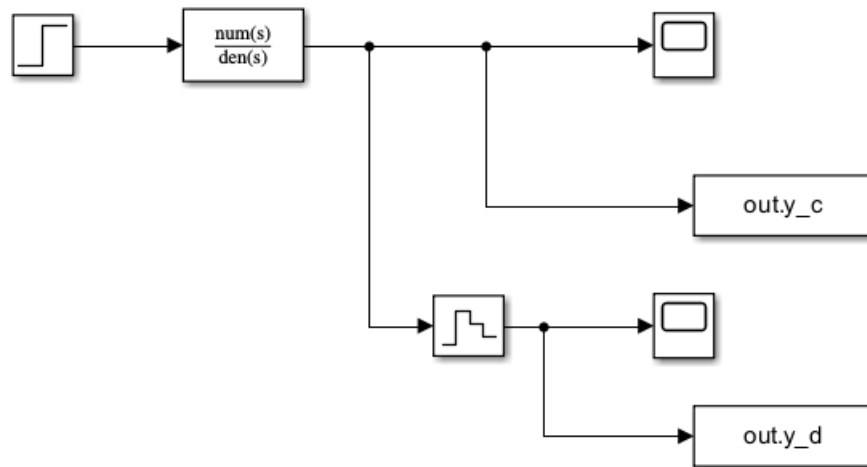


Figura 4: Simulink implementado pelos autores

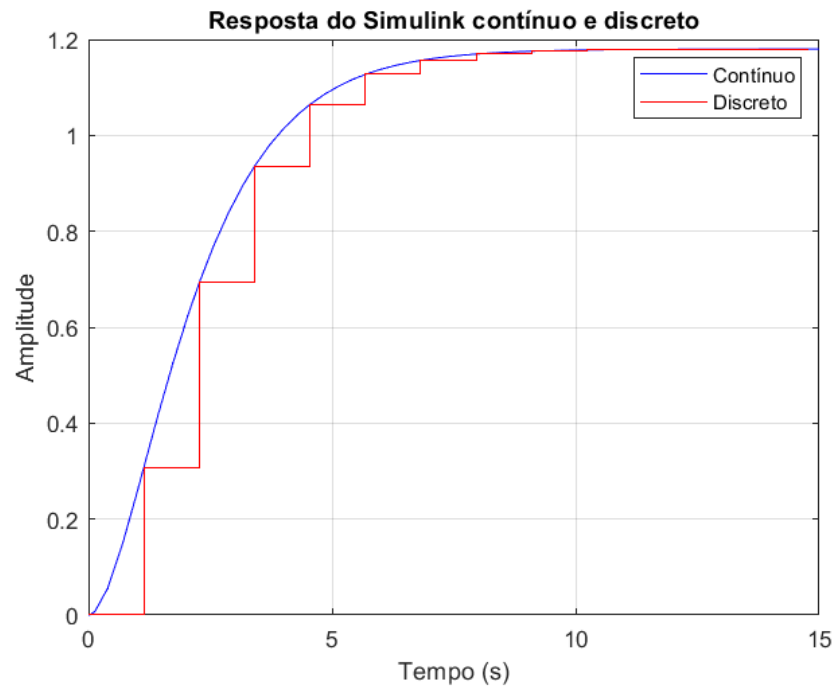
## 2.8 Questão 8

Mostre no relatório uma figura com as saídas sobrepostas geradas pelo Simulink e exportadas pelos blocos *To Workspace*. Para plotar os dados exportados pelos blocos *To Workspace* utilize a seguinte sequência de comandos no Matlab:

```
figure
plot(out.yc.Time, out.yc.Data, 'b')
hold on
stairs(out.yd.Time, out.yd.Data, 'r')
```

**Acrescente título e legenda para completar a figura. Observe que a saída discreta obtida utilizando o retentor de ordem zero no Simulink é a mesma saída obtida pelo comando `step` aplicado na função de transferência discreta.**

As saídas geradas pelo Simulink podem ser observadas na Figura 5



**Figura 5:** *Saída gerada pelos blocos Simulink*

---

## **Referências Bibliográficas**