Lista 5 - Função polinomial do segundo grau

Projeto de Extensão: NIVELAUERJ

Cálculo Zero

Questão 1 ....

Construa os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$:

Solução: Qualquer função polinomial do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ pode ter o esboço do gráfico determinado da seguinte forma:

1. Se $\Delta < 0$, então observamos a concavidade da parábola. Se $a > 0$, então a parábola é côncava para cima e $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $a < 0$, então a parábola é côncava para baixo e $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Se $\Delta = 0$, então a função possui apenas um zero dado por $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$. Por fim basta observar a sua concavidade. Se $a > 0$, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $a < 0$, então $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. Se $\Delta > 0$, então a função possui dois zeros dados por $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Observando a sua concavidade temos que:
   (a) Se $a > 0$, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$ e $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [x_1, x_2]$.
   (b) Se $a < 0$, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [x_1, x_2]$ e $f(x) \leq 0$ para todo $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$.

(a) $y = x^2 - 3x$

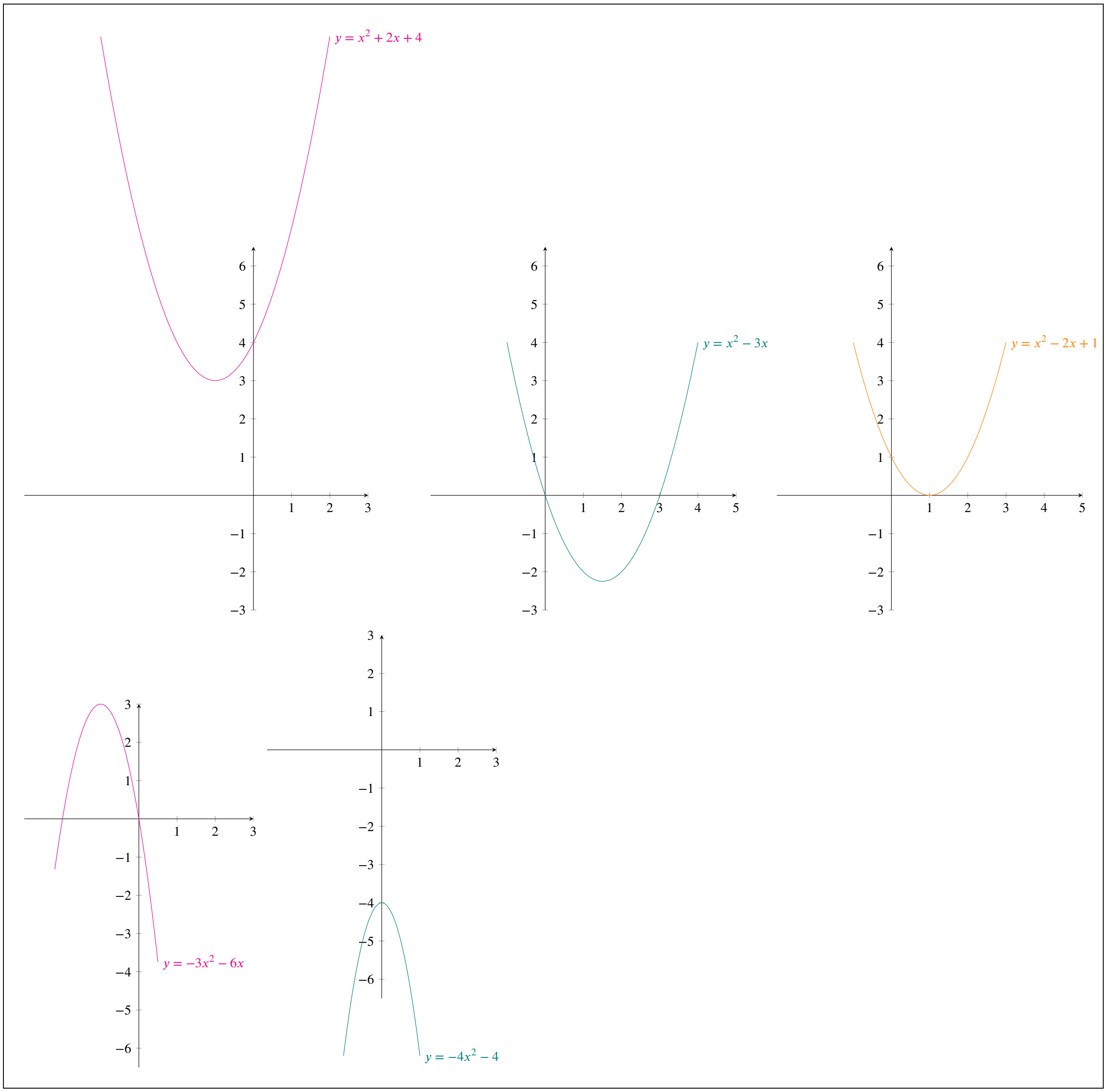
(b) $y = -3x^2 - 6x$

(c) $y = -4x^2 - 4$

(d) $y = x^2 + 2x + 4$

(e) $y = x^2 - 2x + 1$

Solução:



Questão 2 . . . .

Em que condições a função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$, está definida?

2. $m \neq 2$ **ou** $m \neq -2$

Questão 3 . . . .

Determine a função quadrática tal que $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$.

3. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{11}{3}$

Questão 4 . . . .

Determine os zeros reais das funções:

(a) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

(a) $x_1 = 3$ **e** $x_2 = 4$

(b) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

(b) $x_1 = \frac{1}{3}$ **e** $x_2 = 2$

(c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(c) **Não há raízes reais.**

(d) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

(d) $x = -2$

Questão 5 ....

Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, da seguinte forma: a um preço y ela consegue vender x unidades do produto, de acordo coma equação $y = 30 - \frac{x}{4}$. Sabendo que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de R\$1250,00, qual foi a quantidade vendida?

5. **50**

Questão 6 ....

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

6. $S = \{(3, 4), (4, 3)\}$

Questão 7 ....

Determine os valores de m para que a função quadrática:

$$f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$$

tenha dois zeros reais e distintos.

7. $m \neq 0$ **e** $m > -\frac{1}{4}$

Questão 8 ....

Determine os valores de m para que a função quadrática:

$$f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$$

tenha dois zeros reais e distintos.

8. $m \neq 1$ **e** $m > -\frac{9}{16}$

Questão 9 ....

Determine os valores de m para que a função quadrática:

$$f(x) = (m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1)$$

tenha raízes reais.

9. $m \neq -2$ **e** $m \leq \dfrac{17}{16}$

Questão 10 . . . .

Determine os valores de m para que a função quadrática:

$$f(x) = mx^2 + (m+1)x + (m+1)$$

tenha um zero real duplo.

10. $m = -1$ **ou** $m = \dfrac{1}{3}$

Questão 11 . . . .

Determine os vértices das parábolas:

(a) $y = x^2 - 4$

(a) $V = (0, -4)$

(b) $y = -x^2 + 3x$

(b) $V = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$

(c) $y = -x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

(c) $V = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{25}{16}\right)$

(d) $y = -x^2 + x - \dfrac{2}{9}$

(d) $V = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{17}{36}\right)$

Questão 12 . . . .

Determine o valor de máximo ou valor de mínimo e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em $\mathbb{R}$.

(a) $y = -3x^2 + 12x$

O valor máximo é: $y_m = 12$**, quando** $x_m = 2$ **e não há valor finito mínimo.**

(b) $y = 4x^2 - 8x + 4$

O valor mínimo é: $y_m = 0$**, quando** $x_m = 1$ **e não há valor finito máximo.**

Questão 13 . . . .

Determine o valor de m na função real $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ para que o valor mínimo seja $\dfrac{5}{3}$.

13. $m = 2$

Questão 14 . . . .

Determine o valor de m na função

$$f(x) = -3x^2 + 2(m-1)x + (m+1)$$

para que o valor máximo seja 2.

14. $m = -2$ **ou** $m = 1$

Questão 15 . . . .

Dentre todos os números reais de soma 8, determine aqueles cujo o produto é máximo.

O número 4.

15. ______________

Questão 16 . . . .

A parábola $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e o seu vértice é o ponto de coordenada $(3, v)$. Determine v.

$v = 8$

16. ______________

Questão 17 . . . .

Dentre todos os retângulos de perímetro 20 cm, determine o de área máxima.

Quadrado de lado 5.

17. ______________

Questão 18 . . . .

Dentre todos os números x e z de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

O número é 3**.**

18. ______________

Questão 19 . . . .

Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta $y = -4x + 5$.

Lados $\frac{5}{8}$ **e** $\frac{5}{2}$**.**

19. ______________

Questão 20 . . . .

Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero (cujo tem todos lados iguais), de lado 4 cm, estando a base do triângulo num lado do retângulo.

Lado 2 **e** $\sqrt{3}$

20. ______________

Questão 21 . . . .

Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar 400 metros de tela de arame, de modo a produzir uma área máxima. Qual é o quociente de um lado pelo outro?

2

21. ______________

Questão 22 . . . .

Determine a imagem das funções da questão 4, 7 e 12.

Basta fazer: Se $a > 0$**, então** $Im = \{x \in \mathbb{R} | x \geq y_m\}$**. Se** $a < 0$**, então** $Im = \{x \in \mathbb{R} | x \leq y_m\}$

Questão 23 . . . .

Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$, definida em $\mathbb{R}$ para que a imagem seja: $Im = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 2\}$.

$m = \frac{10}{3}$

23. ______________

Questão 24 . . . .

Resolva as inequações:

(a) $x^2 - 2x + 2 > 0$

$$S = \mathbb{R}$$

(b) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

$$S = \{1\}$$

(c) $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$$

(d) $x^2 - 3x + 2 > 0$

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x < 1 \textbf{ ou } x > 2\}$$

(e) $-x^2 + \frac{3}{2}x + 10 \geq 10$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$$

(f) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

$$S = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Questão 25 ....

Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

(a) $\dfrac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{5}{4} \textbf{ ou } -\frac{1}{2} < x \leq 1 \textbf{ ou } x > 2\right\}$$

(b) $\dfrac{-9x^2 + 9x - 2}{3x^2 + 7x + 2} < 0$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x < -2 \textbf{ ou } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \textbf{ ou } x > \frac{2}{3}\right\}$$

(c) $\dfrac{2x^2 + 4x + 5}{3x^2 + 7x + 2} \geq -1$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x < -2 \textbf{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$$

(d) $\dfrac{(x + 1)^3 - 1}{(x - 1)^3 + 1} > 1$

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

(e) $\dfrac{6x^2 + 12x + 17}{-2x^2 + 7x - 5} \geq 1$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | 1 < x < \frac{5}{2}\right\}$$

Questão 26 ....

Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das inequações:

(a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 1 \textbf{ ou } x > 2\}$$

(b) $\dfrac{x - 3}{x - 2} \leq x - 1$

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$$

(c) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \geq 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \textbf{ ou } 0 \leq x < 1\}$

(d) $\dfrac{1}{x} + x \leq -2$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

(e) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1} \geq \dfrac{1}{x+1}$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \textbf{ ou } -1 < x \leq 0 \textbf{ ou } x > 1\}$

Questão 27 ....

Ache o domínio da função em $\mathbb{R}$:

$$y = \sqrt{\frac{-x+5}{x^2+x-6}}$$

$D = \{x \in \mathbb{R} | x < -3 \textbf{ ou } 2 < x \leq 5\}$

Questão 28 ....

Seja $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Para quais valores de x, a função f está bem definida?

$$y = \sqrt{\frac{(x-3)(x^2+2x-8)}{x-1}}$$

Quando $x \geq 3$ **ou** $1 < x \leq 2$ **ou** $x \leq -4$**.**
