Lista 2 - Produtos notáveis e fatoração

Projeto de Extensão: NIVELAUERJ

Cálculo Zero

Questão 1 ....

Verifique que:

(a) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

(b) $a^3 + b^3 = (a-b)(a^2-ab+b^2)$

(c) $a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

(d) $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

Questão 2 ....

Efetue as operações:

(a) $2\sqrt{3}(3\sqrt{5} - 2\sqrt{20} - \sqrt{45})$

(a) $-8\sqrt{15}$

(b) $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}) \div 2\sqrt{5}$

(b) 7

(c) $(3+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$

(c) $13 + 2\sqrt{2}$

(d) $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$

(d) 7

(e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{6})$

(e) $2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

(f) $(6+\sqrt{2})^2$

(f) $38 + 12\sqrt{2}$

(g) $(1-\sqrt{2})^4$

(g) $17 - 12\sqrt{2}$

(h) $(2+3\sqrt{5})^3$

(h) $278 + 171\sqrt{5}$

Questão 3 ....

Racionalize os denominadores das frações:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(b) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$

(b) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

(c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$

(c) $\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

(d) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

(e) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

(e) $2-\sqrt{3}$

(f) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(f) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{15}$

(g) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(g) $\dfrac{10\sqrt{5}-14\sqrt{3}-4\sqrt{15}+8}{44}$

Questão 4 ....

Simplifique:

(a) $\sqrt{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x^2-y}$

(a) x^2-y

(b) $(2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x})\div\sqrt{xy}$

(b) $2+\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Questão 5 ....

Efetue as operações:

(a) $\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}$

(a) 1

(b) $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$

(b) 5

(c) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

(d) $\sqrt{9-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{9+\sqrt{6}}$

(d) $5\sqrt{3}$

Questão 6 ....

Simplifique:

(a) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$

(a) $x+3$

(b) $\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

(b) $2x+1$

(c) $\dfrac{9x^2-1}{3x-1}$

(c) $3x+1$

(d) $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

(d) $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

(e) $\dfrac{x^3-x^2}{x^7-x^2}$

(e) $\dfrac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$

(f) $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$

(f) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

(g) $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}, \forall n \in \mathbb{N}$

(g) $x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$

Questão 7 ....

Faça o uso do conceito de racionalização:

(a) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

(b) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}{\sqrt{x+7}}$

(e) $\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}}{x-y}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Questão 8 ....

Demonstre que: $2^{40}-1$ é múltiplo de 31. Sugestão: $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

Solução: Note que $2^{40}-1=(2^{20}+1)(2^{20}-1)=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^{10}-1)=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^5-1)(2^5+1)$. Como $2^5-1=31$, temos que $2^{40}-1$ é múltiplo de 31.

Questão 9 ....

Prove que, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Solução: Queremos provar que, para todos $a,b,c \in \mathbb{R}$:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Demonstração

Expandimos o quadrado do trinômio usando a distributiva:

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)\cdot(a+b+c).$$

Distribuímos cada termo:

$$=a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c).$$

Realizando as multiplicações:

$$=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2.$$

Usamos a propriedade comutativa ($ab=ba$, $ac=ca$, $bc=cb$) e reescrevemos:

$$=a^2+b^2+c^2+ab+ab+ac+ac+bc+bc.$$

Agrupamos os termos semelhantes:

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Conclusão Como obtivemos o lado direito da equação original, provamos a identidade:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

■

Questão 10 ....

Prove que, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$:

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac \Leftrightarrow a=b=c$$

Solução: Queremos provar que, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac \Leftrightarrow a = b = c.$$

Demonstração

Passo 1: Reescrevendo a Equação

A equação dada é:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac.$$

Rearranjamos os termos para obter:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0.$$

Passo 2: Fatoração

Observamos que a expressão à esquerda pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}\left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac\right).$$

Usamos a identidade:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right).$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) = 0.$$

Passo 3: Conclusão

Como cada termo da soma é um quadrado, eles são sempre não negativos ($x^2 \geq 0$). A soma de números não negativos só pode ser zero se todos os termos forem zero. Assim, temos:

$$(a-b)^2 = 0, \quad (b-c)^2 = 0, \quad (c-a)^2 = 0.$$

Isso implica que:

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b, \quad b - c = 0 \Rightarrow b = c, \quad c - a = 0 \Rightarrow c = a.$$

Portanto, concluímos que:

$$a = b = c.$$

Conclusão

Dessa forma, provamos que:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac \Leftrightarrow a = b = c.$$

Questão 11 ....

Prove que, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

Solução:

Queremos provar que, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$ distintos:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

Demonstração

Seja a expressão:

$$S = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

Passo 1: Definição do Denominador Comum

O denominador comum de todas as frações é o produto dos três fatores:

$$(a-b)(a-c)(b-c).$$

Reescrevendo cada fração com esse denominador:

$$S = \frac{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Passo 2: Verificando o Numerador

O numerador é:

$$a(b-c) + b(c-a) + c(a-b).$$

Distribuindo os termos:

$$ab - ac + bc - ba + ca - cb.$$

Rearranjando:

$$ab - ba + bc - cb + ca - ac.$$

Como $ab - ba = 0$, $bc - cb = 0$ e $ca - ac = 0$, o numerador resulta em:

$$0.$$

Passo 3: Conclusão

Assim, temos:

$$S = \frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0.$$

Portanto, a identidade está demonstrada. ■

Questão 12 ....

Calcule:

(a) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}$

(b) $\dfrac{2}{(x^2-1)^2} - \dfrac{1}{2x^2+4x+2} - \dfrac{1}{1-x^2}$

(c) $\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1}$

(a) $\dfrac{2}{x+2}$

(b) $\dfrac{1}{2(x-1)^2}$

(c) $\dfrac{x^2+2x}{x+1}$

Questão 13 ....

Complete e forme quadrados perfeitos: Forma genérica: $(x \pm a)^2 + (y \pm a)^2 = \pm b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 10x - 4x + 8y = -25$

(c) $x^2 + y^2 - y + 5x = 0$

(d) $x^2 + y^2 + x\sqrt{5} - 3y = 0$

(a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$

(b) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 0$

(c) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

Questão 14 ....

Prove a identidade Cauchy:

$$(x+y)^5 - (x^5 + y^5) = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$$

Solução: Enunciado da Identidade Queremos demonstrar a seguinte identidade:

$$(x+y)^5 - (x^5 + y^5) = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2).$$

Demonstração

Passo 1: Expandindo $(x+y)^5$ usando o Binômio de Newton Aplicamos o Teorema do Binômio:

$$(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} y^k.$$

Expandindo os termos:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Passo 2: Subtraindo $x^5 + y^5$

$$(x+y)^5 - (x^5 + y^5) = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 - x^5 - y^5.$$

Cancelamos x^5 e y^5:

$$5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4.$$

Passo 3: Fatoração Colocamos $5xy$ em evidência:

$$5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3).$$

Agora, reescrevemos o termo dentro do parênteses:

$$x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = (x + y)(x^2 + xy + y^2).$$

Portanto, temos:

$$(x + y)^5 - (x^5 + y^5) = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2).$$

Mostramos que ambos os lados da equação são iguais, o que conclui a demonstração. ■