OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA (INF 2912)

Lista 1 (L1)

Esta lista será aceita somente se entregue em escrita de próprio punho.

1. Seja o problema de Alocação Linear (*Assignment Problem*).

   Problema 1 *: Dados um conjunto de tarefas T, $|T| = n$, e um conjunto de máquinas M, $|M| = n$ e os custos c_{ij} de alocar a tarefa i à máquina j, determinar uma alocação das n tarefas às n máquinas cujo* **custo total seja mínimo**.

   Seja a formulação, como programa linear, Primal abaixo para este problema, onde x_{ij} assume valor 1 quando a tarefa i é alocada à máquina j:

$$
\begin{aligned}
(P) : \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} && (1) \\
\text{S.t.} \quad & && \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n && (2) \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n && (3) \\
& x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n && (4)
\end{aligned}
$$

   (a) Argumente por que a resolução deste programa linear resolve o problema de Alocação Linear.

   (b) Escreva o problema de programação linear Dual ao problema acima.

   (c) Partindo da formulação Primal aplique o método Primal-Dual para propor um algoritmo combinatório para o problema de Alocação Linear.

   (d) Exemplifique o seu algoritmo $n = 3$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 10$, $c_{13} = 7$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 9$, $c_{23} = 6$, $c_{31} = 3$, $c_{32} = 13$, $c_{33} = 2$.

   (e) Repita os 2 itens anteriores assumindo que o problema inicial é o Dual.

   Comente cada passo do desenvolvimento dos algoritmos acima.

2. Seja o problema de Transportes

   Problema 2 *: Dados um conjunto de centros de produção A, $|A| = m$, e um conjunto de centros de consumo B, $|B| = n$, os custos* **unitários** *c_{ij} de deslocamento dos centros de produção para os centros de consumo, e a produção e o consumo dos centros, respectivamente, $\{a_1, \ldots, a_m\}$ e $\{b_1, \ldots, b_n\}$, onde a quantidade total produzida é igual à quantidade total consumida, determinar com que quantidade cada centro de produção supre cada centro de consumo de modo que* **o custo total de transporte seja mínimo**.

   Seja a formulação, como programa linear, Primal abaixo para este problema, onde x_{ij} representa a quantidade que é enviada do centro de produção i para o centro de consumo j, para todo par i, j:

$$(P) : \text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{5}$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n \tag{7}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

   (a) Argumente por que a resolução deste programa linear resolve o problema de Transportes.

   (b) Escreva o problema de programação linear Dual ao problema acima.

   (c) Partindo da formulação Primal aplique o método Primal-Dual para propor um algoritmo combinatório para o problema de Transportes.

   (d) Exemplifique o seu algoritmo $m = 2$, $n = 3$, $a_1 = 15$, $a_2 = 25$, $b_1 = 15$, $b_2 = 15$, $b_3 = 10$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 10$, $c_{13} = 7$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 9$, $c_{23} = 6$.

   Comente cada passo do desenvolvimento do algoritmo acima.

3. Seja de Localização de p Centros com Capacidade Ilimitada

Problema 3 *: Dados um conjunto $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ de pontos (locais) que devem ser atendidos por p centros, e custos fixos c_{ij} de atendimento do ponto j a partir de um centro no ponto i; determinar p entre os n pontos para localizar centros de modo que* **o custo total de atender os pontos seja mínimo**.

Observe que um ponto será atendido por apenas um centro e que este centro é aquele que oferece o menor custo. Observe também que os custos c_{jj} são sempre nulos. Seja a formulação, como programa linear, Primal abaixo para este problema, onde $x_{ij} = 1$ indica que o ponto j será atendido por um centro no ponto i, sendo zero caso contrário. Nesta formulação as variáveis y_i indicam se um centro foi aberto no ponto i ($y_i = 1$) ou não (y_i zero):

$$
\begin{aligned}
(ULP): \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} && (9)\\
\text{S.t.} \quad & && \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n && (10)\\
& \sum_{i=1}^{n} y_i = p && (11)\\
& x_{ij} - y_i \leq 0 \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n; && (12)\\
& x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n && (13)\\
& y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, n; && (14)
\end{aligned}
$$

Considere a relaxação linear ($\overline{ULP}$) de (ULP).

(a) Explique cada uma das restrições da formulação (ULP).

(b) Escreva o problema de programação linear Dual ao problema acima.

(c) Partindo da formulação Primal aplique o método Primal-Dual para propor um algoritmo combinatório para ($\overline{ULP}$).

(d) Exemplifique o seu algoritmo $p = 2, n = 3, c_{11} = 5, c_{12} = 10, c_{13} = 7, c_{21} = 8, c_{22} = 9, c_{23} = 6, c_{31} = 7, \ c_{32} = 11, \ c_{33} = 0$.

(e) Proponha uma algoritmo para obter uma solução para (ULP) a partir de uma solução ótima para ($\overline{ULP}$).

(f) Quando é possível afirmar que um centro estará em um ponto q em toda solução ótima de (ULP)?