Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica.

Maestría en Ciencias en la Especialidad de Electrónica

Optimización de oscilador caótico utilizando evolución diferencial

Ciro Fabián Bermúdez Márquez

Asesor: Dr. Esteban Tlelo Cuatle

Introducción

Cálculo fraccionario

El cálculo fraccionario es una generalización de la diferenciación y la integración para ordenes no enteros del operador ${}_aD_t^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. [1]

Ventajas

- Describe y modela fenómenos físicos con mayor precisión.
- Poseen memoria de todos los eventos pasados.
- Es un área de oportunidad emergente.

Desventajas

- Implementar algoritmos de orden fraccional no es trivial.
- Implementación física compleja.

Introducción

Áreas de impacto

- Física
- Electrónica
- Sistemas de control
- Robótica
- Procesamiento de señales
- Química
- Bio-ingeniería
- Teoría del caos

Objetivos

Objetivo general

Diseño e implementación electrónica de integradores de orden fraccionario mediante una expansión de fracciones continuas (CFE) para su aplicación en sistemas caóticos.

Objetivos específicos

- Analizar el método de expansión de fracciones continuas para generar una metodología de diseño en MATLAB.
- Caracterizar el error de la expansión de fracciones continuas para generar reglas de diseño.
- Diseñar e implementar en FPAA el integrador de orden fraccionario con aproximaciones de ordenes superiores.
- Diseñar e implementar de FPAA un oscilador caótico de orden fraccionario

Fundamentos teóricos

Derivada fraccionaria

Definición de Grünwald–Letnikov.

$$D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \tag{1}$$

Definición de Riemann-Louville.

$$D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \tag{2}$$

Fundamentos teóricos

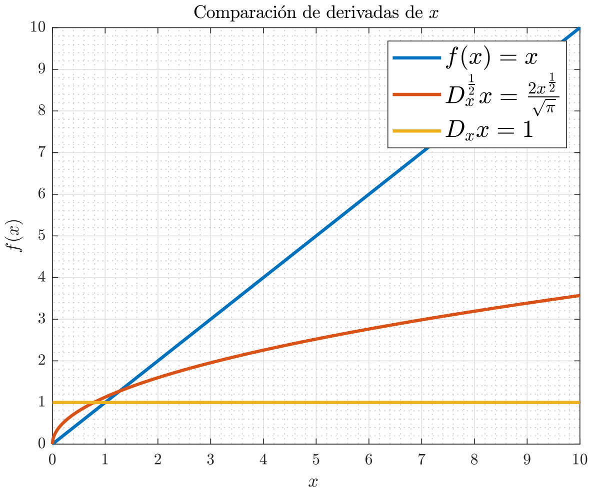


Figura 1: Comparación de derivada entera y fraccionaria.

Fundamentos teóricos

Transformada de Laplace de integrales y derivadas fraccionarias

La transformada de Laplace de la integral fraccionaria esta definida como:

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^{-p} f(t)\} = s^{-p} F(s) \tag{3}$$

y dadas condiciones iniciales cero la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de orden r es:

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^{r} f(t)\} = s^{r} F(s) \tag{4}$$

respuesta de 20α dB/década y 90 α deg.

Fundamentos teóricos

Expansión de fracciones continuas (CFE) definición

A una expresión de la forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \ddots}}} \tag{5}$$

se le conoce como una fracción continua. En general $a_1, a_2, a_3, \cdots, b_1, b_2, b_3$ pueden ser cualquier número real o complejo, y el número de términos pueden ser finito o infinito. Una manera más conveniente de escribir la ecuación (5) es:

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2+} \frac{b_2}{a_3+} \frac{b_3}{a_4+} \cdots \tag{6}$$

Fundamentos teóricos

Lagrange 1776 CFE de $(1+x)^\alpha$

Si consideramos:

$$x = s - 1 \tag{7}$$

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{1-}\,\frac{\alpha x}{1+}\,\frac{\frac{1(1+\alpha)}{1\cdot 2}x}{1+}\,\frac{\frac{1(1-\alpha)}{2\cdot 3}x}{1+}\,\frac{\frac{2(2+\alpha)}{3\cdot 4}x}{1+}\,\frac{\frac{2(2-\alpha)}{4\cdot 5}x}{1+}\cdots \tag{8}$$

La ecuación (9) es la encontrada en múltiples artículos:

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{1-}\,\frac{\alpha x}{1+}\,\frac{(1+\alpha)x}{2+}\,\frac{(1-\alpha)x}{3+}\,\frac{(2+\alpha)x}{2+}\,\frac{(2-\alpha)x}{5+}\cdots \tag{9}$$

Fundamentos teóricos

Algoritmo propuesto

El n-ésimo término de la expansión de fracciones continuas para la ecuación (8) se puede calcular utilizando la siguiente ecuación:

$$\frac{\psi(n)\left[\psi(n)+(-1)^n\alpha\right]}{(n-1)n} \tag{10}$$

donde la función $\psi(x)$ para $x \geq 2$, $x \in \mathbb{Z}^+$ esta definida como[a]:

$$\psi(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \tag{11}$$

[a] $\lfloor x \rfloor$ es la función redondeo hacia el entero inferior anterior.

Fundamentos teóricos

Fundamentos teóricos

Aproximación de primer y segundo orden de la CFE

La aproximación para un integrador fraccionario $\frac{1}{s^\alpha}$ para primer y segundo orden tienen la forma:

$$ {}_{(c_2)}\frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{(1-\alpha)s + (1+\alpha)}{(1+\alpha)s + (1-\alpha)} \tag{12} $$

$$ {}_{(c_4)}\frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{(\alpha^2 - 3\alpha + 2)s^2 + (8 - 2\alpha^2)s + (\alpha^2 + 3\alpha + 2)}{(\alpha^2 + 3\alpha + 2)s^2 + (8 - 2\alpha^2)s + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)} \tag{13} $$

Fundamentos teóricos

Ejemplo

Tabla 1: Aproximaciones racionales de $\frac{1}{s^{0.5}}$

Orden	No. de términos	Aproximación racional
1	2	$\dfrac{s+3}{3s+1}$
2	4	$\dfrac{s^2+10s+5}{5s^2+10s+1}$
3	6	$\dfrac{s^3+21s^2+35s+7}{7s^3+35s^2+21s+1}$
4	8	$\dfrac{s^4+36s^3+126s^2+84s+9}{9s^4+84s^3+126s^2+36s+1}$
5	10	$\dfrac{s^5+55s^4+330s^3+462s^2+165s+11}{11s^5+165s^4+462s^3+330s^2+55s+1}$

Fundamentos teóricos

Figura 2: Diagramas de bode comparativos de integrador fraccionario $\alpha = 0.5$.

../imagenes/F1_bode_integrador_alpha05-eps-converted-to.pdf

Fundamentos teóricos

Análisis de error de la CFE

$$\text{error}_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left|\frac{H(j\omega)}{G(j\omega)}\right| \tag{14}$$

$$\text{error}_{\text{deg}} = \angle H(j\omega) - \angle G(j\omega) \tag{15}$$

$$\text{error}_{\text{norm de mag}} = \frac{20\log_{10}\left|\frac{H(j\omega)}{G(j\omega)}\right|}{20\alpha} = \frac{\log_{10}\left|\frac{H(j\omega)}{G(j\omega)}\right|}{\alpha} \tag{16}$$

$$\text{error}_{\text{norm de fase}} = \frac{\angle H(j\omega) - \angle G(j\omega)}{90\alpha} \tag{17}$$

donde $H(j\omega)$ es el integrador ideal $\frac{1}{s^\alpha}$ y $G(j\omega)$ es la función de transferencia aproximada del integrador utilizando CFE $_{(c_n)}\frac{1}{s^\alpha}$.

Fundamentos teóricos

Figura 3: Magnitud normalizada.

../imagenes/F6_bode_magnitud_norm_c-eps-converted-to.pdf

Fundamentos teóricos

Figura 4: Fase normalizada.

../imagenes/F7_bode_fase_norm_c-eps-converted-to.pdf

Fundamentos teóricos

Figura 5: Error magnitud normalizado.

../imagenes/F8_bode_error_mag_norm_c-eps-converted-to.pdf

Fundamentos teóricos

Figura 6: Error fase normalizado.

../imagenes/F9_bode_error_fase_norm_c-eps-converted-to.pdf

Fundamentos teóricos

Análisis

El porcentaje de error es mayor cuanto más pequeño sea α

Tabla 2: Promedio de error absoluto de magnitud normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.

α/Orden	1$^{\text{er}}$	2$^{\text{do}}$	3$^{\text{er}}$	4$^{\text{to}}$	5$^{\text{to}}$
0.1	13.4397	7.5755	2.4058	0.5407	0.2754
0.2	13.1089	7.3398	2.2960	0.5155	0.2639
0.3	12.5614	6.9432	2.1189	0.4751	0.2454
0.4	11.8034	6.3812	1.8827	0.4217	0.2203
0.5	10.8454	5.6502	1.5991	0.3580	0.1897
0.6	9.7075	4.7507	1.2822	0.2875	0.1548
0.7	8.4275	3.6945	0.9478	0.2133	0.1168
0.8	6.8606	2.5119	0.6123	0.1387	0.0772
0.9	4.2249	1.2563	0.2916	0.0667	0.0377

Implementación de integradores fraccionarios

¿Qué es una FPAA?

1. Field Programmable Analog Arrays.
2. Es un dispositivo analógico equivalente a las FPGA.
3. QuadApex Develovment Board v2.0
4. CAM (Configurable Analog Module)
5. AnadigmDesigner2

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 7: Metodología de conexiones.

../imagenes/X6_conexiones_AD2-eps-converted-to.pdf

Implementación de integradores fraccionarios

Configuración de relojes

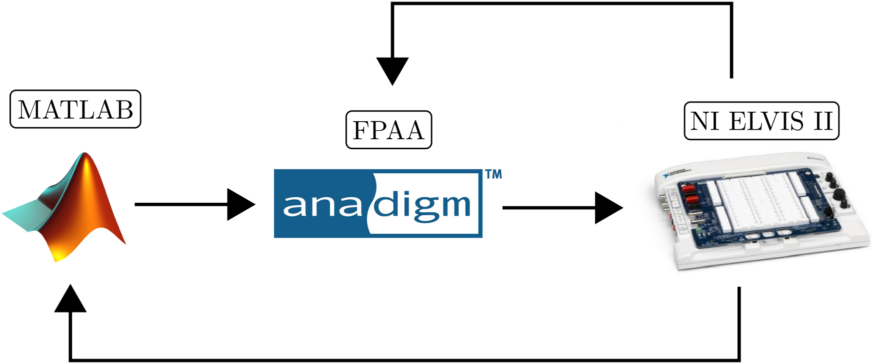
El diseño se basa en seleccionar correctamente las frecuencias de reloj.

$$\mathrm{Sys1} = \frac{f_c}{m} \qquad \mathrm{Sys2} = \frac{f_c}{m} \tag{18}$$

$$\mathrm{Clock}\, h = \frac{\mathrm{Sys1}}{n} \qquad \mathrm{Clock}\, h = \frac{\mathrm{Sys2}}{n} \tag{19}$$

donde la frecuencia de reloj principal $f_c = 16$ MHz y donde $n, m \in [1, 510]$.

Implementación de integradores fraccionarios



Implementación de integradores fraccionarios

Configuración bilineal polo y cero

CAM FilterBilinear

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = -\frac{G_H(s + 2\pi f_z)}{s + 2\pi f_p} \tag{20}$$

$$_{(c_2)}\frac{1}{s^{\alpha}} \approx \frac{(1-\alpha)s + (1+\alpha)}{(1+\alpha)s + (1-\alpha)} \qquad A = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{21}$$

podemos reescribir la ecuación (21) de la siguiente manera y escalado en frecuencia:

$$_{(c_2)}\frac{1}{s^{\alpha}} \approx \frac{As + 1}{s + A} \quad \Longrightarrow \quad _{(c_2)}\frac{1}{s^{\alpha}} \approx \frac{As + k_f}{s + Ak_f} \tag{22}$$

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 8: Diagrama de bode de aproximación bilineal polo y cero para un integrador fraccionario con $k_f = 2\pi 1000$ y $\alpha = 0.5$.

../imagenes/F12_bode_1er_orden_escalado-eps-converted-to

Implementación de integradores fraccionarios

Ecuaciones de metodología bilineal polo y cero.

$$\frac{G_H(s + 2\pi f_z)}{s + 2\pi f_p} = \frac{As + k_f}{s + Ak_f} \tag{23}$$

de la ecuación (23) se deducen las siguientes ecuaciones:

$$G_H = A \tag{24}$$

$$f_p = \frac{Ak_f}{2\pi} \tag{25}$$

$$f_z = \frac{k_f}{2A\pi} \tag{26}$$

$$G_L = \frac{1}{A} \tag{27}$$

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 9: Gráfica de mérito, análisis de orden fraccionario dependiente de n para implementación con CAM FilterBilinear.

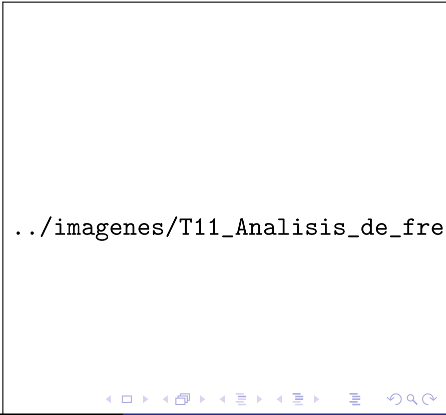


Tabla 3: Valores para configurar un filtro bilineal como integrador de orden fraccionario en el rango de ordenes de 0.1 a 0.95.

α	f_p [kHz]	f_z [kHz]	G_L	G_H
0.10	0.818182	1.222222	1.222222	0.818182
0.15	0.739130	1.352941	1.352941	0.739130
0.20	0.666667	1.500000	1.500000	0.666667
0.25	0.600000	1.666667	1.666667	0.600000
0.30	0.538462	1.857143	1.857143	0.538462
0.35	0.481481	2.076923	2.076923	0.481481
0.40	0.428571	2.333333	2.333333	0.428571
0.45	0.379310	2.636364	2.636364	0.379310
0.50	0.333333	3.000000	3.000000	0.333333
0.55	0.290323	3.444444	3.444444	0.290323
0.60	0.250000	4.000000	4.000000	0.250000
0.65	0.212121	4.714286	4.714286	0.212121
0.70	0.176471	5.666667	5.666667	0.176471
0.75	0.142857	7.000000	7.000000	0.142857
0.80	0.111111	9.000000	9.000000	0.111111
0.85	0.081081	12.333333	12.333333	0.081081
0.90	0.052632	19.000000	19.000000	0.052632

Implementación de integradores fraccionarios

Restricciones

Tabla 4: Rango de frecuencias absolutas dependiente de F_c y el valor de n.

$\boldsymbol{F_c}$ [kHz]	$\boldsymbol{n}$	**min=** $\boldsymbol{F_c/1000}$ [kHz]	**max=** $\boldsymbol{F_c/10}$ [kHz]
16000.0000	1.0000	16.0000	1600.0000
8000.0000	2.0000	8.0000	800.0000
4000.0000	4.0000	4.0000	400.0000
⋮	⋮	⋮	⋮
31.6206	506.0000	0.0316	3.1621
31.4961	508.0000	0.0315	3.1496
31.3725	510.0000	0.0314	3.1373

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 10: Implementación de integrador de orden fraccionario utilizando la aproximación de primer orden.

../imagenes/G4_AD2_BilinearFilter_implementation.

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 11: Resultados experimentales de respuesta en frecuencia con $\alpha = 0.5$.

../imagenes/M1_05.png

Figura 12: Diagrama de bode de comparativo, respuesta teórica contra experimental, $k_f = 2\pi 1000$ y $\alpha = 0.5$.

../imagenes/V13_comparacion_exp

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 13: Análisis transitorio de aproximación de primer orden.

Figura 14: Medición experimental de análisis transitorio.

../imagenes/V14_analisis_transitorio.pdf

../imagenes/V15_transitorio_real

Implementación de integradores fraccionarios

Configuración bilineal pasabajas y pasaaltas

CAM FilterBilinear

Pasabajas

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \pm\frac{2\pi f_0 G_1}{s + 2\pi f_0} \tag{28}$$

Pasaaltas

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = -\frac{G_2 s}{s + 2\pi f_0} \tag{29}$$

Suma:

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{2\pi f_0 G_1}{s + 2\pi f_0} + \frac{G_2 s}{s + 2\pi f_0} = \frac{G_2 s + G_1 2\pi f_0}{s + 2\pi f_0} \tag{30}$$

Implementación de integradores fraccionarios

Ecuaciones de metodología bilineal pabajas y pasaltas.

$$\frac{G_2 s + G_1 2\pi f_0}{s + 2\pi f_0} = \frac{As + k_f}{s + Ak_f} \tag{31}$$

de la ecuación (31) se deducen las siguientes ecuaciones:

$$G_1 = \frac{1}{A} \tag{32}$$

$$G_2 = A \tag{33}$$

$$f_0 = \frac{Ak_f}{2\pi} \tag{34}$$

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 15: Gráfica de mérito, análisis de orden fraccionario dependiente de n para implementación con suma de filtros.

Tabla 5: Valores para configurar implementación suma de pasabajas y pasaltas de ordenes de 0.1 a 0.95.

α	G_1 [LP]	G_2 [HP]	f_0 [kHz]
0.10	1.222222	0.818182	0.818182
0.15	1.352941	0.739130	0.739130
0.20	1.500000	0.666667	0.666667
0.25	1.666667	0.600000	0.600000
0.30	1.857143	0.538462	0.538462
0.35	2.076923	0.481481	0.481481
0.40	2.333333	0.428571	0.428571
0.45	2.636364	0.379310	0.379310
0.50	3.000000	0.333333	0.333333
0.55	3.444444	0.290323	0.290323
0.60	4.000000	0.250000	0.250000
0.65	4.714286	0.212121	0.212121
0.70	5.666667	0.176471	0.176471
0.75	7.000000	0.142857	0.142857
0.80	9.000000	0.111111	0.111111
0.85	12.333333	0.081081	0.081081
0.90	19.000000	0.052632	0.052632

../imagenes/T12_Analisis_de_fre

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 16: Implementación de integrador de orden fraccionario utilizando la aproximación de primer orden configuración suma de filtros.

../imagenes/V16_AD2_imple_suma_filtros.png

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 17: Resultados experimentales de respuesta en frecuencia con $\alpha = 0.5$ configuración de dos filtros y punto suma.

Figura 18: Diagrama de bode de comparativo, respuesta teórica contra experimental configuración de dos filtros y punto suma, $k_f = 2\pi 1000$ y $\alpha = 0.5$.

../imagenes/M2_05.png

../imagenes/V15_bodes_comparati

Implementación de integradores fraccionarios

Configuración bicuadratico polo y cero

CAM FilterBiquad

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = -\frac{G_H\left(s^2 + \frac{2\pi f_z}{Q_z}s + 4\pi^2 f_z^2\right)}{s^2 + \frac{2\pi f_p}{Q_p}s + 4\pi^2 f_p^2} \tag{35}$$

$$_{(c_4)}\frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{(\alpha^2 - 3\alpha + 2)s^2 + (8 - 2\alpha^2)s + (\alpha^2 + 3\alpha + 2)}{(\alpha^2 + 3\alpha + 2)s^2 + (8 - 2\alpha^2)s + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)} \tag{36}$$

$$D = \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{\alpha^2 + 3\alpha + 2} \qquad C = \frac{8 - 2\alpha^2}{\alpha^2 + 3\alpha + 2} \tag{37}$$

$$_{(c_4)}\frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{Ds^2 + Cs + 1}{s^2 + Cs + D} \implies N(s) = \frac{Ds^2 + Ck_f s + k_f^2}{s^2 + Ck_f s + Dk_f^2} \tag{38}$$

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 19: Diagrama de bode de aproximación bicuadratico polo y cero para un integrador fraccionario con $k_f = 2\pi 1000$ y $\alpha = 0.5$.

../imagenes/V19_segundo_orden_esc-eps-converted-to.pdf

Implementación de integradores fraccionarios

Ecuaciones de metodología bicuadratico polo y cero 1.

$$\frac{G_H\left(s^2+\frac{2\pi f_z}{Q_z}s+4\pi^2 f_z^2\right)}{s^2+\frac{2\pi f_p}{Q_p}s+4\pi^2 f_p^2}=\frac{Ds^2+Ck_f s+k_f^2}{s^2+Ck_f s+Dk_f^2} \tag{39}$$

$$G_H=D \qquad G_L=\frac{1}{D} \tag{40}$$

$$f_z=\frac{k_f}{2\pi D^{\frac{1}{2}}} \qquad f_p=\frac{D^{\frac{1}{2}}k_f}{2\pi} \tag{41}$$

$$Q_z=\frac{D^{\frac{1}{2}}}{C} \qquad Q_p=\frac{D^{\frac{1}{2}}}{C} \tag{42}$$

Implementación de integradores fraccionarios

Ecuaciones de metodología bicuadratico polo y cero 2.

$$\frac{G_H\left(s^2+\frac{2\pi f_z}{Q_z}s+4\pi^2 f_z^2\right)}{s^2+\frac{2\pi f_p}{Q_p}s+4\pi^2 f_p^2}=\frac{Ds^2+Ck_f s+k_f^2}{s^2+Ck_f s+Dk_f^2} \tag{43}$$

Elegir manualmente los factores de calidad Q_z y Q_p de modo que $\gamma=\frac{Q_z}{Q_p}$ y surjan las siguientes ecuaciones:

$$G_H=D \qquad G_L=\frac{\gamma^2}{D} \tag{44}$$

$$f_z=\frac{Ck_f Q_z}{D2\pi} \qquad f_p=\frac{Ck_f Q_p}{2\pi} \tag{45}$$

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 20: Gráfica de mérito, análisis de orden fraccionario dependiente de n para implementación con CAM FilterBiquad teórica INCORRECTA.

../imagenes/W4_analisis_frecuen

Tabla 6: Valores para configurar implementación de segundo orden FilterBiquad de ordenes de 0.1 a 0.95.

α	G_H	G_L	f_z [kHz]	f_p [kHz]	$Q_z = Q_p$
0.10	0.740260	1.350877	1.162272	0.860383	0.249058
0.15	0.635996	1.572337	1.253929	0.797494	0.247870
0.20	0.545455	1.833333	1.354006	0.738549	0.246183
0.25	0.466667	2.142857	1.463850	0.683130	0.243975
0.30	0.397993	2.512605	1.585120	0.630867	0.241214
0.35	0.338061	2.958042	1.719896	0.581431	0.237858
0.40	0.285714	3.500000	1.870829	0.534522	0.233854
0.45	0.239972	4.167155	2.041361	0.489869	0.229132
0.50	0.200000	5.000000	2.236068	0.447214	0.223607
0.55	0.165085	6.057471	2.461193	0.406307	0.217164
0.60	0.134615	7.428571	2.725541	0.366900	0.209657
0.65	0.108062	9.253968	3.042034	0.328727	0.200889
0.70	0.084967	11.769231	3.430631	0.291492	0.190591

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 21: Implementación de integrador de orden fraccionario utilizando la aproximación de segundo orden.

Implementación de integradores fraccionarios

Figura 22: Resultados experimentales de respuesta en frecuencia con $\alpha = 0.5$.

../imagenes/W1_impl_seg_ord.png

Figura 23: Diagrama de bode de comparativo, respuesta teórica contra experimental, $k_f = 2\pi 1000$ y $\alpha = 0.5$.

../imagenes/W2_seg_ord_teoria_e

Implementación de integradores fraccionarios

Resumen

Tabla 7: Resumen de configuraciones para aproximación de integradores fraccionarios utilizando la CFE.

Configuración	**Rango** α	**Ventajas**	**Desventajas**
Bilineal polo y cero	$[0.01, 0.81]$	Consume pocos recursos. Facilidad de implementación. Proceso de diseño sencillo.	Mayor error para α grande. Menor rango.
Bilineal LP y HP	$[0.01, 0.93]$	Mayor rango. Ajuste de ganancia flexible. Proceso de diseño sencillo.	Consume más recursos. Mayor error que configuración polo y cero.
Bicuadrático	$[0.01, 0.6]$	Menor error. Oportunidad de nuevos esquemas de diseño.	Proceso de diseño complejo. Menor rango.

Oscilador caótico

Oscilador caótico fraccionario basado en funciones no lineales saturadas (SNLF)

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha}x &= y \\ {}_0D_t^{\alpha}y &= z \\ {}_0D_t^{\alpha}z &= -ax - by - cz + hf(x) \end{aligned} \tag{46}$$

donde a, b, c y h son coeficientes reales positivas. $f(x)$ es una función lineal a trozos conocida como deestabilizadora o función saturada.

Oscilador caótico

Función deestabilizadora

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad x > \beta \\ sx & \text{si} \quad -\beta \leq x \leq \beta \\ -k & \text{si} \quad x < -\beta \end{cases} \tag{47}$$

donde el parámetro k representa la saturación del sistema, β es el punto de quiebre en la función y s es la pendiente entre tramos.

Figura 24: Función no lineal saturada de dos enrollamientos.

../imagenes/Z1_saturacion-eps-converted-to.pd

Oscilador caótico

Figura 25: Solución de sistema de orden fraccionario.

../imagenes/Z2_bloques-eps-converted-to.pdf

Oscilador caótico

Implementación de oscilador caótico

- Utilizando filtro bilineal polo y cero.
- $\alpha = 0.8$.
- Dos enrollamientos.

Oscilador caótico

Figura 26: Implementación en AD2 configuración bilineal polo y cero.

../imagenes/Y1_implementacion.png

Oscilador caótico

Topología de filtro bilineal

Figura 27: Vistas de plano fase del comportamiento del oscilador caótico con $\alpha = 0.8$ y dos enrollamientos.

../imagenes/Y2_X_vs_Y.png ../imagenes/Y4_X_vs_Z.png ../imagenes/Y6_Y_vs_Z.p

(a) x vs y (b) x vs z (c) y vs z

Oscilador caótico

Topología de filtro bilineal

Figura 29: Respuesta en el dominio temporal de oscilador caótico con $\alpha = 0.8$ y dos enrollamientos.

../imagenes/Y3_X_vs_Y_s.png

(a) x,y respecto al tiempo.

../imagenes/Y5_X_vs_Z_s.png

(b) x,z respecto al tiempo.

../imagenes/Y7_Y_vs_Z_s

(c) y,z respecto al tiempo.

Oscilador caótico

Implementación de oscilador caótico

- Utilizando filtro bilineal en suma de filtros pasabajas y pasaaltas.
- $\alpha = 0.8$.
- Dos enrollamientos.

Oscilador caótico

Figura 31: Implementación en AD2 configuración bilineal pasabajas y pasaltas.

../imagenes/Y1p_implementacion.png

Oscilador caótico

Topología de suma de filtros

Figura 32: Vistas de plano fase del comportamiento del oscilador caótico con $\alpha = 0.8$ y dos enrollamientos.

../imagenes/Y2p_X_vs_Y.png ../imagenes/Y4p_X_vs_Z.png ../imagenes/Y6p_Y_vs_Z

(a) x vs y (b) x vs z (c) y vs z

Oscilador caótico

Topología de suma de filtros

Figura 34: Respuesta en el dominio temporal de oscilador caótico con $\alpha = 0.8$ y dos enrollamientos.

../imagenes/Y3p_X_vs_Y.png ../imagenes/Y5p_X_vs_Z.png ../imagenes/Y7p_Y_vs_Z.

(a) x,y respecto al tiempo.

(b) x,z respecto al tiempo.

(c) y,z respecto al tiempo.

Conclusión

Conclusiones

- 3 topologías de diseño para la síntesis de integradores fraccionarios.
  - Primer orden con filtro bilineal pasabajas:
  - Primer orden con suma de filtros bilineales, pasabajas y pasaaltas.
  - Segundo orden con filtro bicuadrático
- Integradores de orden fraccionario con rangos de [0.01, 0.93].
- Creación de metodologías de diseño en hardware y software:
  - Conexiones y configuraciones del FPAA detalladas y simplificadas.
  - Programas en MATLAB para generar tablas de diseño y gráficas de mérito.
- Aplicaciones futuras:
  - Controladores de orden fraccionario.
  - Sistemas de encriptación.

Bibliografía I

I. Petráš, *Fractional-Order Nonlinear Systems*.
Springer Berlin Heidelberg, 2011.

C. D. Olds, *Continued Fractions*.
The Mathematical Association of America, 2009.

I. Petráš and J. Terpak, "Fractional calculus as a simple tool for modeling and analysis of long memory process in industry," *Mathematics*, vol. 7, p. 511, jun 2019.

C. Li, W. J.-C. Thio, J. C. Sprott, H. H.-C. Iu, and Y. Xu, "Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 29003–29012, 2018.

B. T. Krishna and K. V. V. S. Reddy, "Active and passive realization of fractance device of order 1/2," *Active and Passive Electronic Components*, vol. 2008, pp. 1–5, 2008.

Bibliografía II

- B. Krishna, "Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey," *Signal Processing*, vol. 91, pp. 386–426, Mar. 2011.
- J. G. Lu and G. Chen, "A note on the fractional-order chen system," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 27, pp. 685–688, feb 2006.
- M. S. Charles Alexander, *Fundamentals of Electric Circuits*. McGraw-Hill Education, 2016.
- L. P. Huelsman and P. E. Allen, *Introduction to the Theory and Design of Active Filters (Electrical Engineering Series)*. McGraw-Hill Book Company, 1980.
- J. M. Muñoz-Pacheco, "Infinitely many hidden attractors in a new fractional-order chaotic system based on a fracmemristor," *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 228, pp. 2185–2196, oct 2019.

Bibliografía III

J. M. M. Pacheco and E. T. Cuautle, *Electronic Design Automation of Multi-Scroll Chaos Generators*.
BENTHAM SCIENCE PUB, 2010.

A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca, and G. Sciuto, *A Concise Guide to Chaotic Electronic Circuits*.
Springer-Verlag GmbH, 2014.

S. W. Khubalkar, A. S. Junghare, M. V. Aware, A. S. Chopade, and S. Das, "Demonstrative fractional order – PID controller based DC motor drive on digital platform," *ISA Transactions*, vol. 82, pp. 79–93, nov 2018.

A. Tepljakov, E. A. Gonzalez, E. Petlenkov, J. Belikov, C. A. Monje, and I. Petráš, "Incorporation of fractional-order dynamics into an existing PI/PID DC motor control loop," *ISA Transactions*, vol. 60, pp. 262–273, jan 2016.

Bibliografía IV

- S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer-Verlag GmbH, 2007.
- M. D. Ortigueira, *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Springer-Verlag GmbH, 2011.
- K. S. Adel S. Sedra, *Microelectronic Circuits*. Oxford University Press Inc, 2015.
- R. Caponetto and D. Porto, "Analog implementation of non integer order integrator via field programmable analog array," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, pp. 107–111, jan 2006.
- I. S. Jesus and J. A. T. Machado, "Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes," *Nonlinear Dynamics*, vol. 56, pp. 45–55, jun 2008.

Bibliografía V

- K. Biswas, S. Sen, and P. Dutta, "Realization of a constant phase element and its performance study in a differentiator circuit," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 53, pp. 802–806, sep 2006.
- N. Fragoulis, G. Souliotis, D. Besiris, and K. Giannakopoulos, "Field programmable analogue array design based on the wave active filter design method," *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 63, pp. 889–895, oct 2009.
- Y. Chen, I. Petras, and D. Xue, "Fractional order control - a tutorial," *American Control Conference*, 2009.
- E. Gunay and K. Altun, "A performance comparison study of programmable platforms: FPAA and FPGA implementation of COOK communication system," *European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, sep 2017.

Bibliografía VI

- A. Charef, "Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional PI$^{\lambda}$ D$^{\mu}$ controller," *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 153, pp. 714–720, nov 2006.
- L. Dorcak, J. Terpak, I. Petras, J. Valsa, and E. Gonzalez, "Comparison of the electronic realization of the fractional-order system and its model," *Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, may 2012.
- A. Tepljakov, E. Petlenkov, and J. Belikov, "Efficient analog implementations of fractional-order controllers," *Proceedings of the 14th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, may 2013.
- B. Kumari and N. Gupta, "Experimental investigation on chaotic oscillator coupled dielectric resonator antenna for medical applications," *IEEE International Conference on Antenna Innovations & Modern Technologies for Ground, Aircraft and Satellite Applications (iAIM)*, nov 2017.

Bibliografía VII

- F. Jiang, X. Wang, J. Jin, and D. Yang, *The application of chaotic duffing oscillators to ballistocardiograph signal detection*. IEEE, jul 2010.
- G. Wang, D. Chen, J. Lin, and X. Chen, "The application of chaotic oscillators to weak signal detection," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 46, pp. 440–444, apr 1999.
- V. Tepin, *Self-parametric chaotic oscillators for secure communication systems*. St. Petersburg State Polytech. Univ, 2002.

Introducción

¿Qué es el caos?

El caos se refiere a un tipo de comportamiento dinámico complejo que posee algunas características muy especiales:

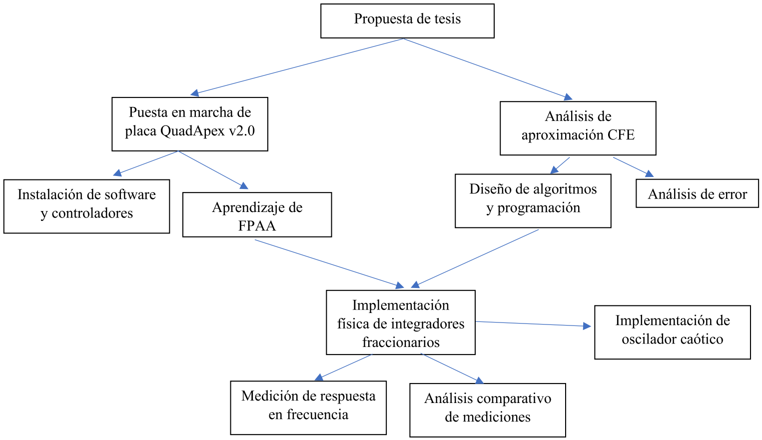
- Se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Posee extrema sensibilidad a pequeñas variaciones.
- Presenta trayectorias encerradas en el espacio de fase.

Introducción

Aplicaciones de osciladores caóticos

- Técnicas de modulación.
- Sistemas de comunicación.
- Encriptación de datos usando caos.
- Modelado de sistemas biológicos.
- Reacciones químicas.
- Toma de decisiones criticas en política, economía y eventos militares.

Diagrama de bloques



Oscilador caótico

Tabla 8: Conexiones de DIP switches, jumpers y cables externos.

Switch		Jumper	Cables externos
S3	2 $\downarrow$	J8	FPAA1 O3 $\rightarrow$ FPAA3 I5
S5	2 $\downarrow$	J9	FPAA1 I5 $\rightarrow$ FPAA3 O5
S4	2 $\uparrow$	J10	
S6	2 $\uparrow$	ACT1	
S7	2 $\uparrow$	ACT2	
S12		ACT3	
S13		ACT4	