

Proyecto final Métodos Computacionales

Ciro Gélvez

July 22, 2015

1 OBJETIVOS

- Resolver algunos problemas de electromagnetismo con la ayuda de métodos vistos en la clase.
- Con el uso de método de diferencias finitas, ecuación de Laplace, ecuación de Bessel, analizar distintos sistemas y de esta forma generar sus líneas de campo magnético o campo eléctrico.

2 INTRODUCCIÓN

En este proyecto se encontrarán distintos problemas clásicos del electromagnetismo, los cuales poseen resultados interesantes, y los cuales necesitan de poder computacional para observar y analizar sus resultados. Se trabajará desde una problema muy sencillo como lo es el de un condensador de placas paralelas, hasta un cilindro para el cual será necesario el uso de las ecuaciones de Bessel.

En primer lugar se realizará una breve introducción al método de diferencias finitas, la ecuación de Laplace en distintas dimensiones, y las ecuaciones de Bessel. (Problemas sacados del libro de Vanderlinde ver ref [3])

No se realiza una introducción general, sino en cambio en cada caso específico se realiza la explicación tanto cualitativa como cuantitativa, teniendo en cuenta los cálculos matemáticos o de programación.

3 RESULTADOS Y ANÁLISIS

3.1 PLACAS PARALELAS

Como sabemos en el mundo de el electromagnetismo es de gran importancia el estudio de los condensadores, ya que estos tienen propiedades muy importantes para almacenar energía. Un condensador de placas paralelas se modela usualmente como un par de placas metálicas cuyas dimensiones son mucho más grandes que la separación entre ellas, de modo que una buena aproximación para su capacitancia es por ejemplo:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (3.1)$$

donde A es el área de las placas y d es su separación. Sin embargo, a medida que aumenta d los efectos de borde se vuelven cada vez más importantes, haciendo que esta fórmula pierda validez. El objetivo del ejercicio es entonces implementar una serie de códigos que nos permitan finalmente calcular (numéricamente) la capacitancia de un condensador de placas paralelas con distancias finitas.

Nos concentraremos en una región bidimensional del espacio $L \times L$, en donde centraremos el par de placas paralelas (cuadradas) de lado $l = \frac{2}{5}L$ y separación $d \leq l$. Discretizamos ese espacio en puntos (i, j) , separados una distancia h pequeña, tal que creamos una malla de $N \times N$ puntos, donde $N = \text{Odd}(L/h)$, es un entero impar. Igualmente podemos encontrar cuántos puntos cubre cada placa y cuántos la separación entre ellas.

Procedemos entonces a generar dos subrutinas que nos calculen el potencial y el campo eléctrico en la región de interés, respectivamente. Cada una de ellas recibe como parámetros: las dimensiones de interés L, l, d, h ; el voltaje entre las placas V_0 ; la tolerancia $\tau = 10^{-n}$, tal que el error de salida sea menor que este valor; y el número de iteraciones máximo permitido, por si no se alcanza la tolerancia escogida.

Para el potencial escogemos condiciones de frontera de Dirichlet, tal que en el borde de la región el potencial sea cero y sobre las placas una constante. Entonces se inicializa una matriz de $N \times N$ con estas condiciones de frontera y con un valor constante diferente de cero en el resto de la región.

Teniendo esto podemos iniciar las iteraciones, donde se debe garantizar que el error sea siempre mayor que la tolerancia, o que el número de iteraciones sea siempre menor que el máximo permitido. Se va llenando entonces la matriz usando el método de diferencias finitas:

$$\phi(i, j) = \frac{1}{4} [\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) + \phi(i, j+1) + \phi(i, j-1)] \quad (3.2)$$

Usando la subrutina anterior calculamos ahora el campo eléctrico en el espacio, sabiendo que $E = -\nabla\phi$, de modo tal que podemos generar una matriz $N \times N$, con entradas vectoriales $E_{i,j} = \{E_x, E_y\}_{i,j}$. Para calcular cada componente de campo usamos entonces las aproximaciones:

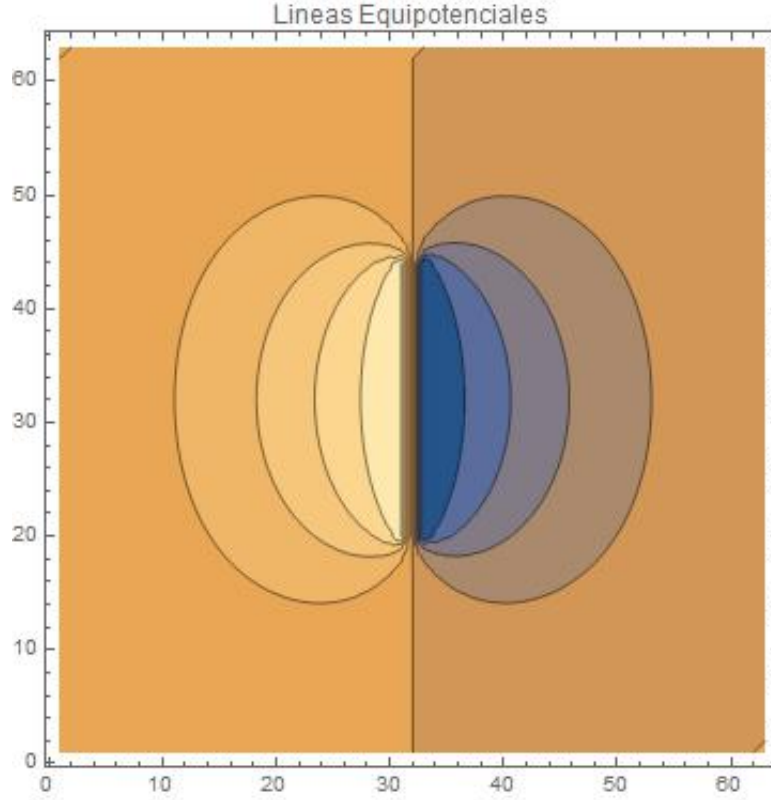


Figure 3.1: líneas equipotenciales para un par de placas con parámetros $L = 5cm, l = 2cm, d = 1cm, h = 0,08cm, V_0 = 100V, \tau = 10^{-2}, e \text{ itermax} = 500$.

$$E_x(i, j) \approx \frac{1}{h} [\phi(i, j) - \phi(i + 1, j)] \quad (3.3)$$

$$E_y(i, j) \approx \frac{1}{h} [\phi(i, j) - \phi(i, j + 1)] \quad (3.4)$$

Teniendo el campo en la región de interés, y particularmente en la vecindad de las placas, podemos entonces calcular primero la densidad de carga, y con esto la carga total Q sobre ellas. Este resultado es útil para calcular finalmente la capacitancia del sistema, simplemente como la ecuación 3.1. Para calcular la densidad, podemos aprovechar la discontinuidad del campo en la placa positiva, por ejemplo. Sabemos que sobre las placas, el campo justo encima y justo debajo se relacionan por:

$$\sigma(i) = \epsilon_0 [E_y(i, j^{(+)} - E_y(i, j^{(+)} - 1)], \quad i_{min}^{(+)} \leq i \leq i_{max}^{(+)} \quad (3.5)$$

donde $j^{(+)}$ es la ubicación de la placa positiva en el eje y , e $i_{min}^{(+)}, i_{max}^{(+)}$ son las coordenadas en x de las esquinas izquierda y derecha de tal placa, respectivamente, con $n = i_{max}^{(+)} - i_{min}^{(+)}$ el número de elementos en σ . Usando la subrutina del campo en la región, podemos entonces

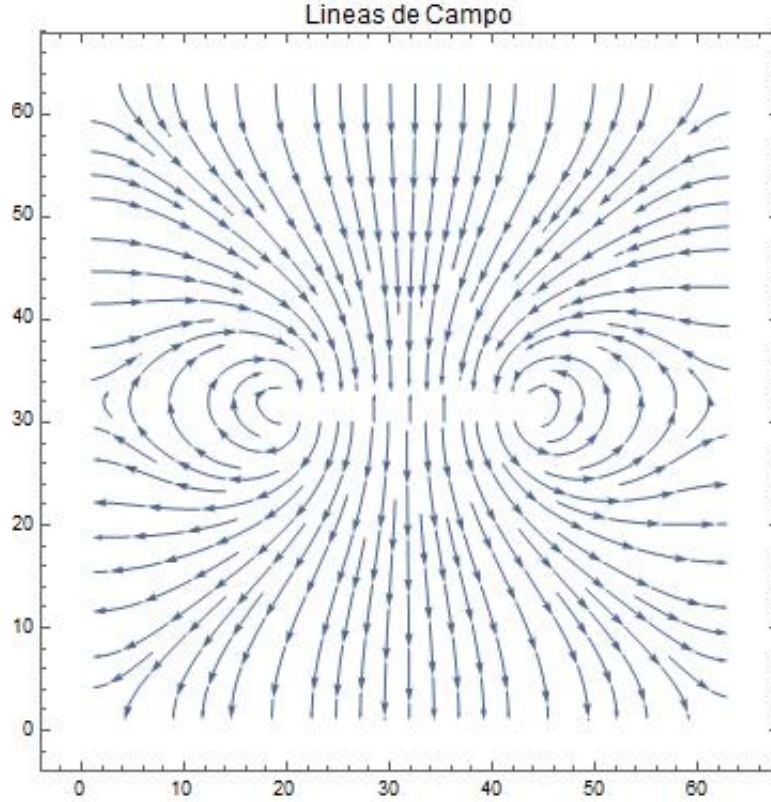


Figure 3.2: líneas de campo para un par de placas con parámetros $L = 5\text{cm}$, $l = 2\text{cm}$, $d = 1\text{cm}$, $h = 0,08\text{cm}$, $V_0 = 100\text{V}$, $\tau = 10^{-2}$, e $itermax = 500$.

extraer la información necesaria para calcular el vector σ de n elementos, y con él la carga total de la placa.

$$Q = h l \sum_i \sigma(i) \quad (3.6)$$

3.2 PLACAS ANGULARES

En este problema contamos con dos placas conductoras infinitas las cuales estan unidas en un extremo generando un ángulo $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Una cuenta con potencial 0 y la otra con V_0 . Se requiere encontrar el portencial entre las placas.

Para este caso utilizaremos la ecuación de laplace para coordenadas cilíndricas, pero por la configuración el problema se reduce únicamente a una dimensión. Por ende la ecuación de Laplace queda reducida a la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = 0 \quad (3.7)$$

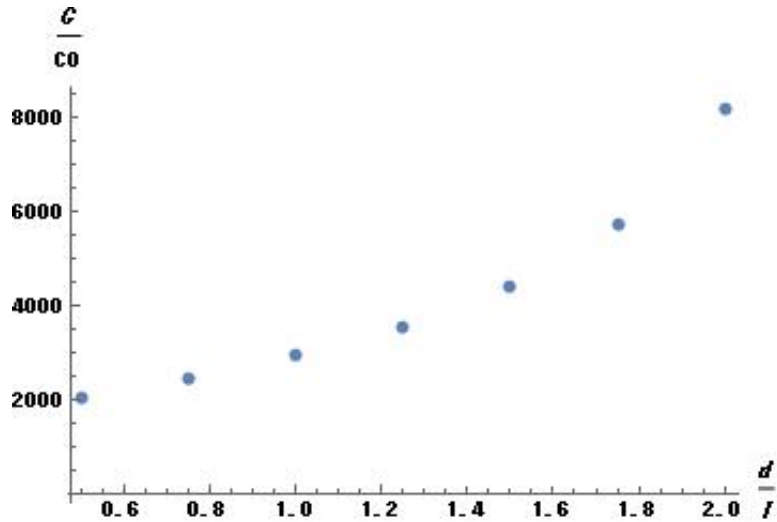


Figure 3.3: C/C_0 contra d/l para 5 valores distintos de d

Solucionando esta ecuación diferencial tenemos que:

$$\phi(\varphi) = A\varphi + B \quad (3.8)$$

Para hallar nuestras dos constantes A y B, utilizamos las condiciones de frontera dadas las cuales son $\phi(0) = 0$ y $\phi(\alpha) = V_0$. Por lo que solo nos queda la constante A tal que: $A = \frac{V_0}{\alpha}$. Finalmente la solución a este problema será:

$$\phi(r) = V_0 \frac{\varphi}{\alpha}, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad (3.9)$$

Por ende, el campo eléctrico estará dado por:

$$E(r) = -\nabla\phi = -\frac{V_0}{\alpha r} \hat{\varphi} \quad (3.10)$$

3.3 CILINDRO SEPARADO

Para este caso tenemos un cilindro infinito separado en dos mitades longitudinalmente. Existe una diferencia de potencial V_0 entre ellas. Se requiere encontrar el potencial eléctrico adentro y afuera del cilindro.

Para la simetría cilíndrica, tenemos las siguientes soluciones para el tubo, ver [4], [3].

$$\phi(r, \varphi) = \begin{cases} \sum_l \left(\frac{r}{a}\right)^l (A_l \cos l\varphi + B_l \sin l\varphi, & r \leq a \\ \sum_l \left(\frac{a}{r}\right)^l (C_l \cos l\varphi + D_l \sin l\varphi, & r > a \end{cases} \quad (3.11)$$

Para hallar las constantes A_l, B_l, C_l, D_l sabemos que e tiene que cumplir una continuidad en la frontera tal que $r = a$, es decir que $\phi(a_-, \varphi) = \phi(a_+, \varphi)$, es decir que $A_l = C_l, B_l = D_l$. Además podemos escribir la ecuación de frontera como:

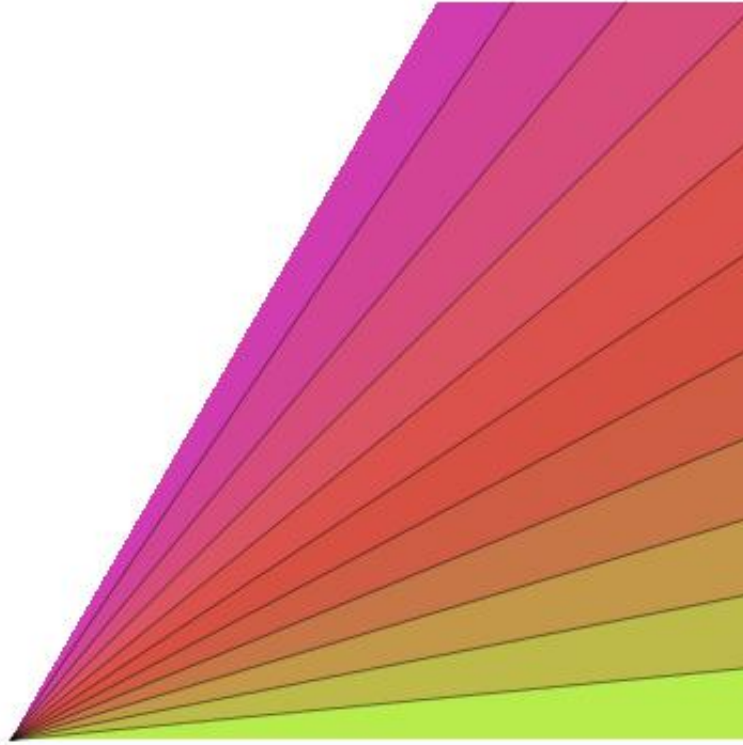


Figure 3.4: Campo escalar electrostático

$$\phi(x) = \frac{V_0}{2} \operatorname{sgn}(\varphi) \quad (3.12)$$

Donde la función $\operatorname{sgn}(\varphi)$ esta dada por:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

que también se puede escribir como la función de paso $\theta(x)$ como $\operatorname{sgn}(x) = 2\theta(x) - 1$, es decir que $\frac{d}{dx} \operatorname{sgn}(x) = 2\delta(x)$

De esta forma podemos encontrar los coeficientes A_l, B_l usando la ortogonalidad de las funciones trigonométricas. Para A_l tenemos que $A_l = 0$ y para B_l tenemos:

$$B_l = \frac{V_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(\varphi) \sin l\varphi d\varphi \quad (3.14)$$

$$= \frac{V_0}{2\pi} \left[\frac{1}{l} \operatorname{sgn}(\varphi) \cos l\varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\varphi) \sin l\varphi d\varphi \right] \quad (3.15)$$

$$= \frac{V_0}{l\pi} [1 - (-1)^l] \quad (3.16)$$

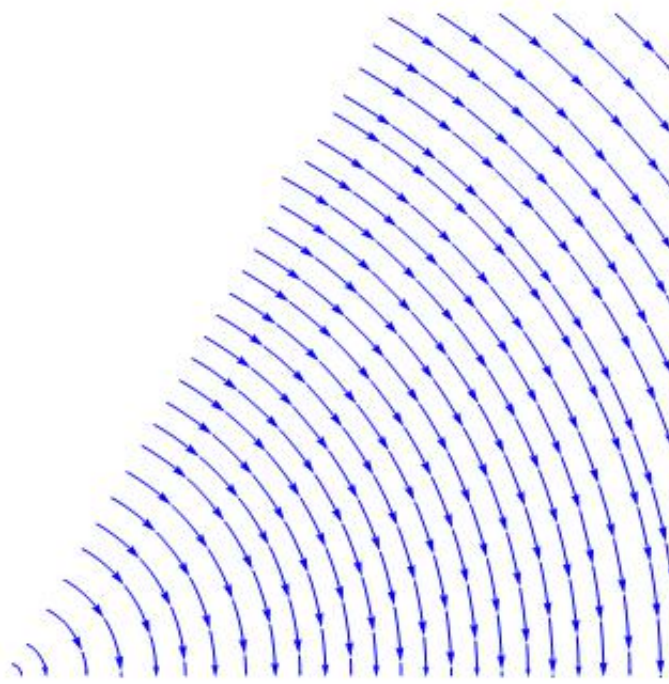


Figure 3.5: Líneas de campo asociado

Finalmente la solución será:

$$\phi(r) = \begin{cases} 2V_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1} \frac{\sin(2l-1)\varphi}{(2l-1)\pi}, & r \leq a \\ 2V_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l-1} \frac{\sin(2l-1)\varphi}{(2l-1)\pi}, & r > a \end{cases} \quad (3.17)$$

3.4 CILINDRO COMPLETO

Para este caso tenemos un cilindro recto de radio R y de longitud $2R$, el cual tiene un potencial en la tapa superior ϕ de la forma:

$$\phi = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (3.18)$$

y cero en todas las otras caras. Como sabemos el potencial fuera de este es cero, por lo que se requiere encontrar el potencial en todo punto dentro del cilindro. Este es un caso tridimensional de la ecuación de Laplace, en primer lugar suponemos una solución separable de la forma:

$$\phi(r, \theta, z) = f(r, \theta)h(z) \quad (3.19)$$

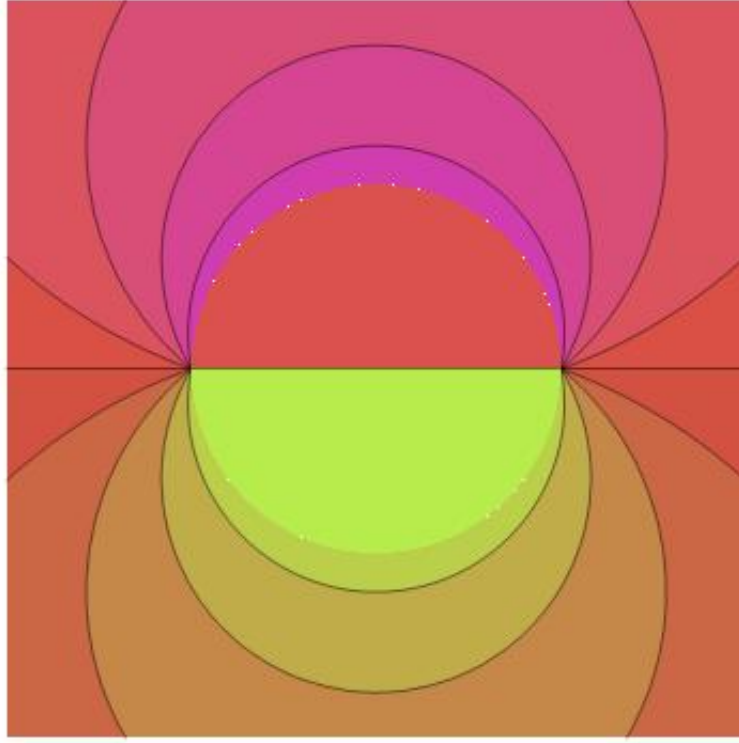


Figure 3.6: Campo escalar electrostático producido por un cilindro con diferencia de V_0

Sustituyendo esto en la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ y dividiendo por ϕ tenemos que:

$$\nabla^2 \phi = h(z) \nabla^2 f(r, \theta) + f(r, \theta) \frac{d^2 h(z)}{dz^2} = 0 \quad (3.20)$$

$$= \frac{\nabla^2 f(r, \theta)}{f(r, \theta)} = -\frac{1}{h(z)} \frac{d^2 h(z)}{dz^2} = \pm k^2 \quad (3.21)$$

donde k es una constante de separación que puede ser positiva o negativa. De esta forma nos quedan dos ecuaciones que dependen de sí mismas, las cuales son:

$$\nabla^2 f(r, \theta) = \pm k^2 f(r, \theta) \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2 h(z)}{dz^2} = \mp k^2 \quad (3.23)$$

De esta forma, para la ecuación de $h(z)$ tenemos una solución directa como se vio en el punto anterior tal que:

$$h(z) = \begin{cases} (A \cos kz + B \sin kz), & -k^2 \\ (C \cosh kz + D \sinh kz), & +k^2 \end{cases} \quad (3.24)$$

Para la otra ecuación decimos que $f(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, y reemplazandolo en la ecuación diferencial tenemos:

$$\nabla^2 f(r, \theta) \frac{r^2}{f(r, \theta)} = \pm k^2 r^2 \quad (3.25)$$

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \pm k^2 r^2 \quad (3.26)$$

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) \mp k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = m^2 \quad (3.27)$$

donde m^2 es otra constante de separación. Por lo que tenemos de nuevo dos ecuaciones nuevas tal que m sea entero. Para $\Theta(\theta)$ tenemos que sus soluciones serán:

$$\Theta(\theta) = C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta \quad (3.28)$$

Para $R(r)$ tenemos que:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (\mp k^2 r^2 - m^2) R = 0 \quad (3.29)$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r R'(x)) + \left(1 - \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) R(r) = 0 \quad (3.30)$$

Y sus soluciones son(ver [4]):

$$H_m^{(1)} = J_m + i N_m \quad (3.31)$$

$$H_m^{(2)} = I_m - i K_m \quad (3.32)$$

De esta forma tenemos tres soluciones linealmente independientes que generan nuestra solución general para nuestra ecuación de Laplace, pero queremos ver la solución particular, por lo que aplicamos nuestras condiciones de frontera. Como se dijo al principio queremos buscar las soluciones al interior del cilindro, por lo que estas no pueden divergir dentro del mismo, específicamente en $r = 0$, por lo tanto para la ecuación 3.32, N_m, K_m son cero.

Por otra parte para la ecuación 3.24, decimos que $\phi = (r, \theta, 0) = 0$ tal que $A=0$, en cualquiera de los dos casos. Otra condición nos dice que $\phi = (R, \theta, z) = 0$, lo que implica que la solución de $R(r)$ debe tener ceros, pero para I_m no existen ceros, por lo que no puede aparecer en la solución general, por lo que:

$$J_m(k_m R) = 0 \quad (3.33)$$

$$k_m = \frac{j_{m,i}}{R} \quad (3.34)$$

donde $j_{m,i}$ son los i -ésimos ceros de la función de Bessel de orden m (ver ref REFERENCIA)

Finalmente tenemos una solución parcial tal que:

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{m,i} J_m \left(j_{m,i} \frac{r}{a} \right) \sinh \left(j_{m,i} \frac{z}{a} \right) (A_{m,i} \cos m\theta + B_{m,i} \sin m\theta) \quad (3.35)$$

Solo falta aplicar la condición de frontera más importante la ecuación 3.18, usando la ortogonalidad de las funciones de Bessel y las trigonométricas:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cdot \sin m\theta d\theta = \pi \delta_{m,l} \quad (3.36)$$

$$\int_0^R J_m \left(j_{m,i} \frac{r}{R} \right) J_m \left(j_{m,j} \frac{r}{R} \right) r dr = \frac{1}{2} R^2 J_{m+1}^2(j_{m,i}) \delta_{i,j} \quad (3.37)$$

Volvemos a nuestra función $f(r, \theta)$ tal que:

$$f(r, \theta) = \sum_{m,i} J_m \left(j_{m,i} \frac{r}{R} \right) \sinh(2j_{m,i}) (A_{m,i} \cos m\theta + B_{m,i} \sin m\theta) \quad (3.38)$$

si multiplicamos a ambos lados por coseno, y J_m y luego integramos, tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \theta) J_m \left(j_{m,i} \frac{r}{R} \right) \cos l\theta r dr d\theta = \sum_{m,i} A_{m,i} \sinh(2j_{m,i}) \left(\frac{1}{2} R^2 J_{m+1}^2(j_{m,i}) \delta_{i,j} \right) [\pi \delta_{m,l}] \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{2} \pi R^2 \sinh(2j_{l,j}) J_{l+1}^2(j_{l,j}) A_{l,j} \quad (3.40)$$

Despejando $A_{m,i}$

$$A_{m,i} = \frac{2}{\pi R^2 \sinh(2j_{m,i}) J_{m+1}^2(j_{m,i})} \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \theta) J_m \left(j_{m,i} \frac{r}{R} \right) \cos m\theta r dr d\theta \quad (3.41)$$

Para este caso sabemos que la condición 3.18 es independiente del ángulo. Por lo que las integrales angulares son cero excepto de $m = 0$, por lo que:

$$A_{0,i} = \frac{4}{R^2 \sinh(2j_{0,i}) J_1^2(j_{0,i})} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) J_0 \left(j_{0,i} \frac{r}{R} \right) r dr \quad (3.42)$$

$$= \frac{4}{j_{0,i}^2 \sinh(2j_{0,i}) J_1^2(j_{0,i})} \left[\int_0^{j_{0,i}} x J_0(x) dx - \frac{1}{j_{0,i}^2} \int_0^{j_{0,i}} x^3 J_0(x) dx \right] \quad (3.43)$$

para realizar estas dos integrales usamos la regla de la recursión tal que:

$$\int x^m J_{m-1}(x) dx = x^m J_m(x) \quad (3.44)$$

Realizando esto tenemos que:

$$\int_0^{j_{0,i}} x J_0(x) dx = j_{0,i} J_1(j_{0,i}) \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{j_{0,i}^2} \int_0^{j_{0,i}} x^3 J_0(x) dx = j_{0,i} J_1(j_{0,i}) - 2J_2(j_{0,i}) \quad (3.46)$$

Finalmente nuestra solución particular será:

$$\phi(r, \theta, z) = 8V_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_2(j_{0,i})}{j_{0,i}^2 \sinh(2j_{0,i}) J_1^2(j_{0,i})} J_0\left(j_{0,i} \frac{r}{R}\right) \sinh\left(j_{0,i} \frac{z}{R}\right) \quad (3.47)$$

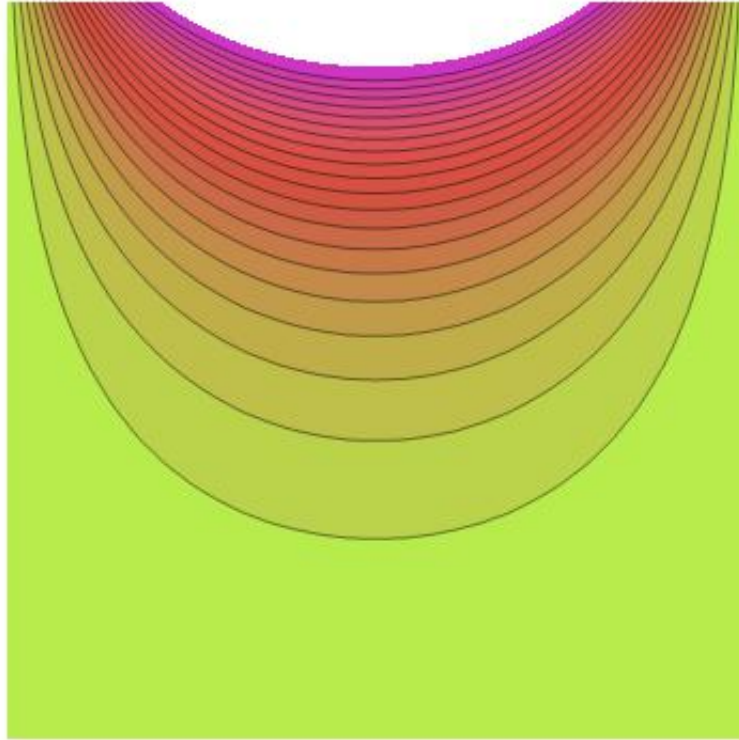


Figure 3.7: Potencial electrostático dentro de un cilindro (vista longitudinal)

3.5 CASCARÓN ESFÉRICO CON DENSIDAD DE CARGA

Se tiene un cascarón esférico de radio a con una densidad de carga $\sigma(\theta, \phi) = \sigma \sin \theta \sin \phi$ y se requiere calcular el potencial dentro y fuera de la esfera. De nuevo se utiliza la ecuación de Laplace pero para coordenadas esféricas, de tal forma, suponemos una solución de tipo $\phi(r) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, de esta forma tenemos que el laplaciano será:

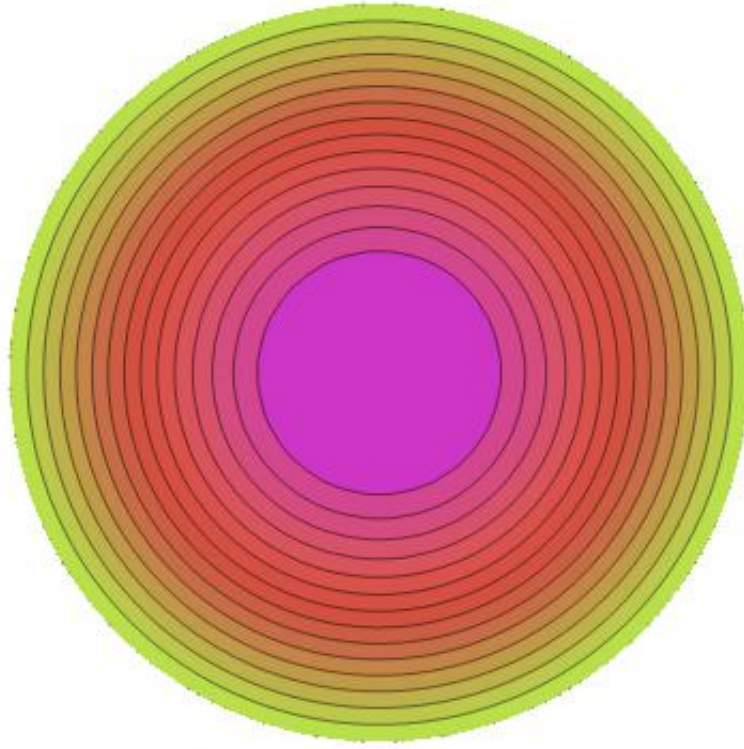


Figure 3.8: Potencial electrostático dentro de un cilindro (vista transversal)

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{rR} \frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2 \quad (3.48)$$

con m una constante de separación, tomamos la parte azimutal por lo que sus soluciones serán periódicas entonces:

$$\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi \quad (3.49)$$

Para la otra parte de la ecuación tenemos que:

$$\frac{r^2}{rR} \frac{d^2}{dr^2}(rR) = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = l(l+1) \quad (3.50)$$

Para la parte radial tenemos que:

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2}(rR) = l(l+1)(rR) \quad (3.51)$$

que tiene una solución de tipo:

$$R(r) = Cr^l + \frac{D}{r^{l+1}} \quad (3.52)$$

Para la última ecuación, es decir la de la parte angular tenemos que:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0 \quad (3.53)$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0 \quad (3.54)$$

Donde se utilizó una sustitución de tipo $x = \cos\theta$, y la regla del producto para las derivadas internas. La ecuación 3.54 tiene como solución las funciones asociadas de Legendre, $P_l^m(x)$ y $Q_l^m(x)$. Las segundas derivadas divergen siempre en $x = \pm 1$, mientras que las primeras lo hacen a menos que l sea entero.

De esta forma las soluciones angulares están dadas por los Armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, obteniendo la solución:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \left(A_{l,m} r^l + \frac{D_{l,m}}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (3.55)$$

Para nuestro caso particular hallaremos las constantes con nuestras condiciones de frontera, nuestra solución será de tipo:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \sum_{l,m} A_{l,m} \left(\frac{r}{a} \right)^l Y_l^m(\theta, \varphi), & r \leq a \\ \sum_{l,m} A_{l,m} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} Y_l^m(\theta, \varphi), & r > a \end{cases} \quad (3.56)$$

Como tenemos densidad superficial sobre la esfera, podemos hacer uso de la discontinuidad del campo eléctrico en $r = a$, para encontrar los coeficientes faltantes. Decimos que:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_0 \sin\theta \sin\varphi \quad (3.57)$$

$$= \frac{\sigma_0}{2i} (\sin\theta e^{i\varphi} - \sin\theta e^{-i\varphi}) \quad (3.58)$$

$$= i\sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [Y_1^1(\theta, \varphi) + Y_1^{-1}(\theta, \varphi)] \quad (3.59)$$

donde se usaron las definiciones de los esféricos armónicos. La condición de frontera será:

$$E_r(a_+) - E_r(a_-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.60)$$

$$-\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{a_+} + \left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{a_-} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin\theta \sin\varphi \quad (3.61)$$

$$\sum_{m,l} -\frac{(2l+1)}{a} A_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) = i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [Y_1^1(\theta, \varphi) + Y_1^{-1}(\theta, \varphi)] \quad (3.62)$$

encontrando que todos los coeficientes de la expansión son cero, a excepción de $A_{1,1}, A_{1,-1}$, que también son iguales por lo que:

$$A_{1,\pm 1} = -i \frac{\sigma_0 a}{3\epsilon_0} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \quad (3.63)$$

Finalmente nuestra solución será e tipo:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} -i \frac{\sigma_0 a}{3\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right) \sin \theta \sin \varphi, & r \leq a \\ -i \frac{\sigma_0 a}{3\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin \theta \sin \varphi, & r > a \end{cases} \quad (3.64)$$

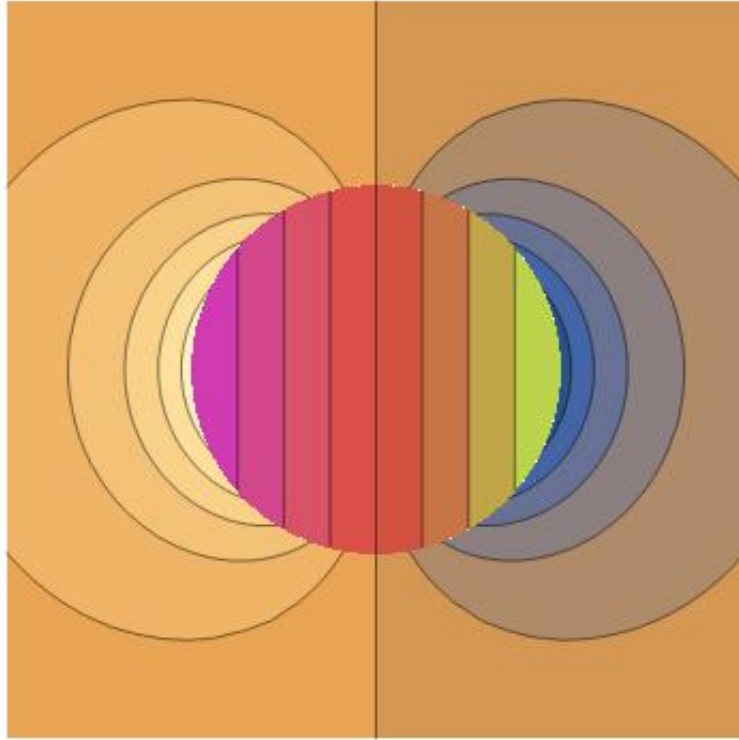


Figure 3.9: Potencial electrostático para un cascarón esférico con una distribución de carga ($\varphi = (0, \frac{\pi}{2})$)

4 CONCLUSIONES

Para esta sección se realizaron distintas conclusiones para cada problema, terminando con una conclusión general.

- Placas Paralelas:

La fórmula aproximada realmente es menor que la calculada con el vector σ , de hecho C_0 se vuelve mas pequeño (es decir una peor aproximación) para la capacitancia real, a medida que la separación entre las placas aumenta, sin embargo es obvio que la capacitancia

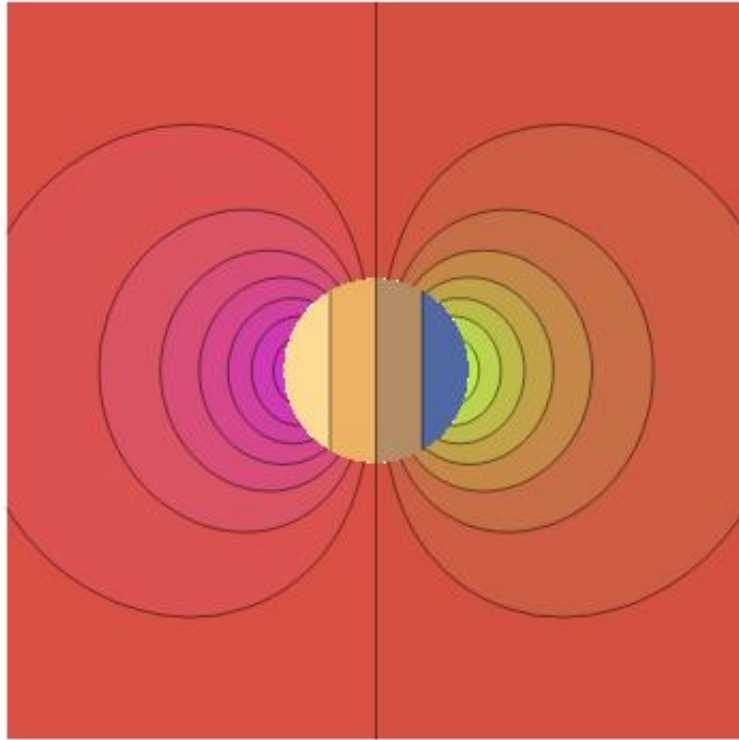


Figure 3.10: Potencial electrostático para un cascarón esférico con una distribución de carga
 $(\varphi = (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}))$

es proporcional al inverso de la separación de las placas. Entonces a medida que la separación de las placas se aproxima a cero, C_0 debería ser igual a C , y también es directamente proporcional al área de las placas, por lo que a medida que el área de las placas aumenta la capacitancia aumenta. Al juntar ambas cosas es fácil darse cuenta de que $\frac{d}{l}$ es una cantidad inversamente proporcional a la capacitancia y por las razones enunciadas anteriormente a medida que aumenta C_0 se vuelve mas pequeño con respecto a C , como lo muestra la gráfica.

-Placas Angulares:

Podemos observar en las gráficas que el campo eléctrico disminuye con la distancia al punto de unión de las placas, y además estas van desde la placa con potencial V_0 hasta la que tiene potencial 0. Podemos concluir anticipadamente que este tipo de configuración será muy parecida a la de un cilindro, ya que a medida de va aumentando el ángulo las líneas de campo tienden a ser circulares. Además podemos ver también que es muy parecido a una sección de las líneas equipotenciales para una carga sola.

-Cilindro separado:

Como era de esperarse, en el interior del cilindro, el potencial asumirá un valor constante en la parte superior y otro igual y negativo en la parte inferior. Afuera en cambio, tenderá a

comportarse como el campo de un dipolo a grandes distancias de la distribución, debido a la polaridad de las regiones superior en inferior del cilindro.

-Cilindro completo:

En la gráfica obtenida observamos que cada coeficiente decrece rápidamente con el i -ésimo término (cae alrededor de tres órdenes de magnitud entre i e $i + 1$). Esta solución puede ser entendida para muchos tipos de configuraciones, no solamente en el mundo del electromagnetismo, sino también en las ondas de sonido, por ejemplo se entiende el por qué un tambor tiene esta configuración cilíndrica. Además, las funciones de Bessel explican la forma cilíndrica del lente de las cámaras, y demás elementos ópticos.

REFERENCES

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 1999), and references therein.
- [2] D. P. Jackson, R. E. Goldstein and A. O. Cebers, Phys. Rev. E **50**, 298 (1994).
- [3] J. Vanderlinde, *Classical Electromagnetic Theory* (Springer Netherlands, Fundamental Theories of Physics, Netherlands, 2006).
- [4] G. Tellez, *Métodos matemáticos* (Ediciones Uniandes, Bogotá, Colombia, 2004).
- [5] C-K. Cheung, G. E. Keough, Robert H. Gross, Charles Landraitis, *Getting Started with Mathematica* (John Wiley & Sons, USA, 1976).
- [6] P. Wellin, *Programming with Mathematica: An Introduction* (Cambridge University Press, New York, USA, 2013).
- [7] R.P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics, Volume II, mainly electromagnetism and matter* (Basic Books, California Institute of Technology, USA, 2011).