

**PROGETTAZIONE DI UN SISTEMA DI CONTROLLO PER UN
COPPIA DI SMORZATORI ATTIVI**

Candidato
Ciro Mazzocchi
M58/276

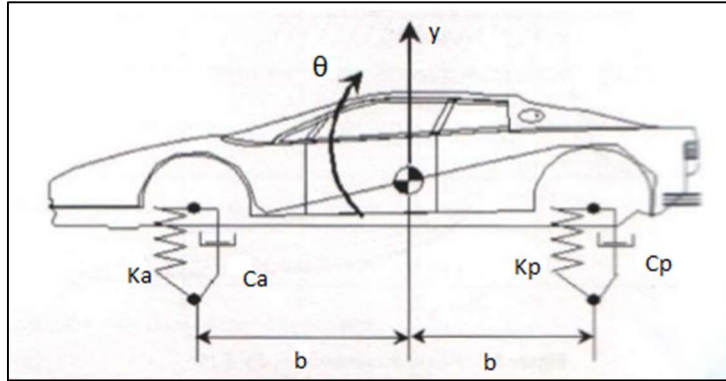
Anno Accademico 2018/2019

Sommario

Sommario	3
Descrizione del problema	4
Definizione del modello matematico	5
Calcolo del sistema ISU.....	5
Calcolo dei punti di equilibrio.....	5
Modello linearizzato rispetto al punto di equilibrio.....	6
Proprietà strutturali del sistema.....	7
Progetto del controllore	9
Tecnica dell'assegnamento degli autovalori	10
Tecnica del controllo ottimo LQG.....	15
Tecnica del controllo robusto H^∞	21
Simulazioni.....	27
Sistema sottoposto a stato iniziale non nullo.....	27
Sistema sottoposto ad un segnale di riferimento non nullo	28
Sistema sottoposto a disturbi e rumori non nulli.....	30
Simulazione 1	31
Simulazione 2	33

Descrizione del problema

Si vuole progettare un controllore per un sistema di sospensioni attive di un'auto. Una coppia di sospensioni è posizionata nella parte anteriore dell'auto ad una distanza pari a b dal baricentro dell'auto, mentre l'altra coppia di sospensioni è posizionata ad una distanza pari a b dal baricentro dell'auto.



Il pianale dell'auto deve rimanere in parallelo alla strada, inclinandosi al massimo di $\theta = \pm 5^\circ$.

L'altezza dell'auto rispetto al riferimento O non deve superare il valore di $0,1\text{ m}$

Eventuali transitori devono estinguersi in 3 s .

Inoltre, gli attuatori non possono produrre una forza superiore a 10^4 N

Di seguito sono riportati i dati dell'auto e delle sospensioni:

- La distanza dal baricentro delle coppie di sospensioni b è pari a 1.5 m ;
- Il coefficiente di smorzamento della coppia di sospensioni anteriore σ_a è pari a 1500 Ns/m ;
- Il coefficiente di smorzamento della coppia di sospensioni posteriore σ_p è pari a 1600 Ns/m ;
- Il coefficiente di elasticità della coppia di sospensioni anteriore k_a è pari a 22000 N/m ;
- Il coefficiente di elasticità della coppia di sospensioni posteriori k_p è pari a 19000 N/m ;
- La massa dell'auto m è pari a 1670 kg ;
- L'inerzia di massa I è pari a 4225 kgm^2 .

Definizione del modello matematico

Calcolo del sistema ISU

Il sistema è descritto dalle seguenti equazioni

$$M\dot{v} = -(k_a + k_p)y - (\sigma_a + \sigma_p)v + (\sigma_p - \sigma_a)b\cos\theta + (k_p - k_a)b\sin\theta + F_a + F_p + k_a y_{at} + k_p y_{pt} + \sigma_a \dot{y}_{at} + \sigma_p \dot{y}_{pt} + (k_a + k_p)l_k - Mg$$

$$I\dot{\omega} = (k_a - k_p)b\cos\theta y + (\sigma_a - \sigma_p)b\cos\theta v + (k_a + k_p)b^2\cos\theta\sin\theta + (\sigma_a + \sigma_p)b^2\cos^2\theta - b\cos\theta F_a + b\cos\theta F_p - k_a b\cos\theta y_{at} + k_p b\cos\theta y_{pt} - \sigma_a b\cos(\theta) \dot{y}_{at} + \sigma_p b\cos(\theta) \dot{y}_{pt} + b(k_p - k_a)l_k \cos(\theta)$$

$$y_a = y - b\sin(\theta)$$

$$y_b = y + b\sin(\theta)$$

Ponendo

$$\begin{array}{llllll} x_1 = y & x_2 = v & x_3 = \theta & x_4 = \omega & y_1 = y_a & y_2 = y_b \\ u_1 = F_a & u_2 = F_p & d_1 = y_{at} & d_2 = y_{pt} & d_3 = \dot{y}_{at} & d_4 = \dot{y}_{pt} \end{array}$$

Ottengo

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\frac{(k_a + k_p)}{M}x_1 - \frac{(\sigma_a + \sigma_p)}{M}x_2 + \frac{(\sigma_p - \sigma_a)b}{M}\cos(x_3) + \frac{(k_p - k_a)b}{M}\sin(x_3) + \frac{1}{M}u_1 + \frac{1}{M}u_2 + \frac{k_a}{M}d_1 \\ & + \frac{k_p}{M}d_2 + \frac{\sigma_a}{M}d_3 + \frac{\sigma_p}{M}d_4 + \frac{(k_a + k_p)l_k}{M} - g \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & \frac{(k_a - k_p)b}{I}\cos(x_3)x_1 + \frac{(\sigma_a - \sigma_p)b}{I}\cos(x_3)x_2 + \frac{(k_a + k_p)b^2}{I}\cos(x_3)\sin(x_3) + \frac{(\sigma_a + \sigma_p)b^2}{I}\cos^2(x_3) \\ & - \frac{b}{I}\cos(x_3)u_1 + \frac{b}{I}\cos(x_3)u_2 - \frac{k_a b}{I}\cos(x_3)d_1 + \frac{k_p b}{I}\cos(x_3)d_2 - \frac{\sigma_a b}{I}\cos(x_3)d_3 \\ & + \frac{\sigma_p b}{I}\cos(x_3)d_4 + \frac{b(k_p - k_a)l_k}{I}\cos(x_3) \end{aligned}$$

$$y_1 = x_1 - b\sin(x_3)$$

$$y_2 = x_1 + b\sin(x_3)$$

Calcolo dei punti di equilibrio

Supponendo di voler imporre il seguente stato

$$x_1 = l_k \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0$$

Il punto di equilibrio si ottiene risolvendo le seguenti equazioni

$$0 = \frac{(\sigma_p - \sigma_a)b}{M} + \frac{1}{M}u_1 + \frac{1}{M}u_2 - g$$

$$0 = \frac{(\sigma_a + \sigma_p)b^2}{I} - \frac{b}{I}u_1 + \frac{b}{I}u_2$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$u_1 = \sigma_a b + \frac{Mg}{2}$$

$$u_2 = -\sigma_p b + \frac{Mg}{2}$$

Quindi

$$x_1 = l_k \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad u_1 = \sigma_a b \quad u_2 = -\sigma_p b$$

Modello linearizzato rispetto al punto di equilibrio

Definito il punto di equilibrio, adesso è possibile calcolare il sistema linearizzato.

$$\delta \dot{x}_1 = \delta x_2$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_2 = & \left[-\frac{(k_a + k_p)}{M} \right] \delta x_1 + \left[-\frac{(\sigma_a + \sigma_p)}{M} \right] \delta x_2 + \left[\frac{(k_p - k_a)b}{M} \right] \delta x_3 + \left[\frac{1}{M} \right] \delta u_1 + \left[\frac{1}{M} \right] \delta u_2 + \left[\frac{k_a}{M} \right] \delta d_1 \\ & + \left[\frac{k_p}{M} \right] \delta d_2 + \left[\frac{\sigma_a}{M} \right] \delta d_3 + \left[\frac{\sigma_p}{M} \right] \delta d_4 \end{aligned}$$

$$\delta \dot{x}_3 = \delta x_4$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_4 = & \left[\frac{(k_a - k_p)b}{I} \right] \delta x_1 + \left[\frac{(\sigma_a - \sigma_p)b}{I} \right] \delta x_2 + \left[\frac{(k_a + k_p)b^2}{I} \right] \delta x_3 + \left[-\frac{b}{I} \right] \delta u_1 + \left[\frac{b}{I} \right] \delta u_2 + \left[-\frac{k_a b}{I} \right] \delta d_1 \\ & + \left[\frac{k_p b}{I} \right] \delta d_2 + \left[-\frac{\sigma_a b}{I} \right] \delta d_3 + \left[\frac{\sigma_p b}{I} \right] \delta d_4 \end{aligned}$$

$$\delta y_1 = \delta x_1 + [b] \delta x_3$$

$$\delta y_2 = \delta x_1 - [b] \delta x_3$$

Proprietà strutturali del sistema

Sostituendo i valori delle costanti nel sistema linearizzato si ottengono le seguenti matrici di stato

```
>> plant
plant =
A =
      x      v  theta  omega
x      0      1      0      0
v    -102.5  -7.75  -11.25      0
theta    0      0      0      1
omega    2.5 -0.08333  51.25      0

B =
      Fa      Fp
x      0      0
v    0.0025  0.0025
theta    0      0
omega -0.0008333  0.0008333

C =
      x      v  theta  omega
xa    1      0  1.5      0
xp    1      0 -1.5      0

D =
      Fa  Fp
xa  0  0
xp  0  0
```

Le matrici del disturbo sono

```
>> M,N

M =

    0    0    0    0
31.2500 30.0000 1.4063 1.5000
    0    0    0    0
-3.0960 2.9721 -0.1393 -0.1486

N =

    0    0    0    0
    0    0    0    0
```

Il sistema presenta i seguenti autovalori

```
>> eig(plant)

ans =

-3.8838 + 9.3447i
-3.8838 - 9.3447i
 7.1518 + 0.0000i
-7.1341 + 0.0000i
```

Dato che la matrice A presenta un autovalore a parte reale positiva, il punto di equilibrio scelto è instabile.

La matrice di controllabilità ha il seguente rango

```
>> rank(ctrb(plant.A,plant.B))

ans =

    4
```

Essendo il rango della matrice di controllabilità pari al grado del sistema, il sistema è completamente controllabile.

La matrice di osservabilità ha il seguente rango

```
>> rank(observ(plant.A,plant.C))

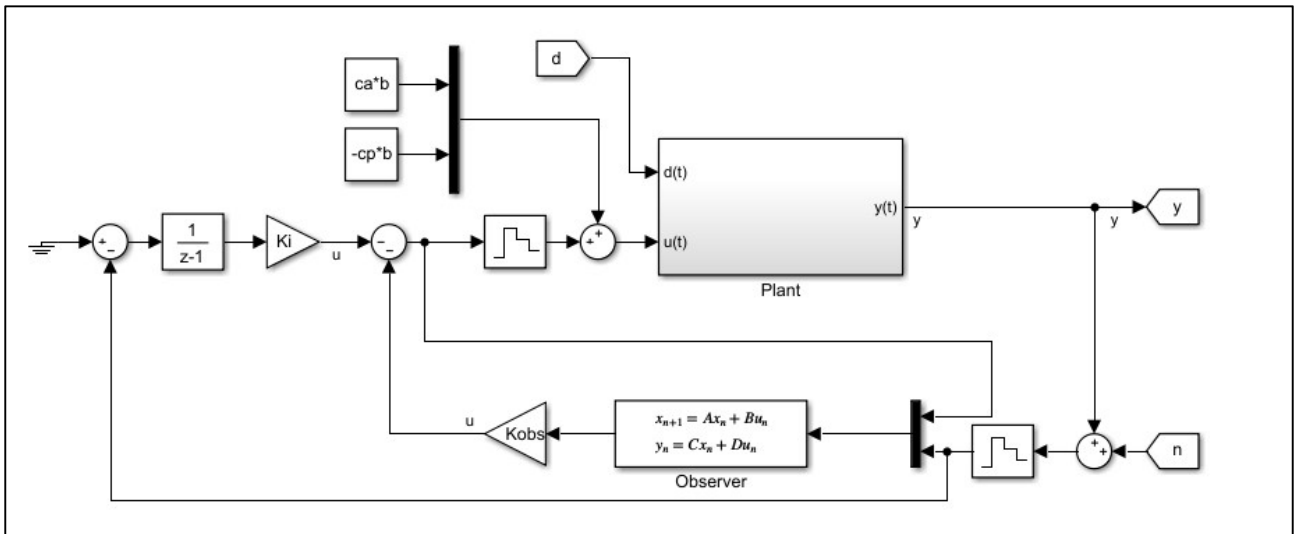
ans =

    4
```

Essendo il rango della matrice di osservabilità pari al grado del sistema, il sistema è completamente osservabile.

Progetto del controllore

Lo schema di progetto per la tecnica degli autovalori e la tecnica del controllo ottimo LQG fanno riferimento al seguente schema.



Il sistema complessivo presenta 10 autovalori (2 autovalori del sistema integratore, 4 sono gli autovalori del plant e 4 sono gli autovalori dell'osservatore).

Attraverso l'osservatore viene stimato lo stato del plant in modo da effettuare una retroazione di stato per poter modificare gli autovalori del sistema linearizzato.

Attraverso l'integratore è possibile far tendere a zero l'errore tra l'uscita del plant ed il segnale di riferimento.

Il sistema aumentato ha le seguenti matrici di stato.

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad B_{aug} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_{aug} = [C \quad 0] \quad D_{aug} = [0]$$

La matrice di controllabilità del sistema aumentato ha il seguente rango

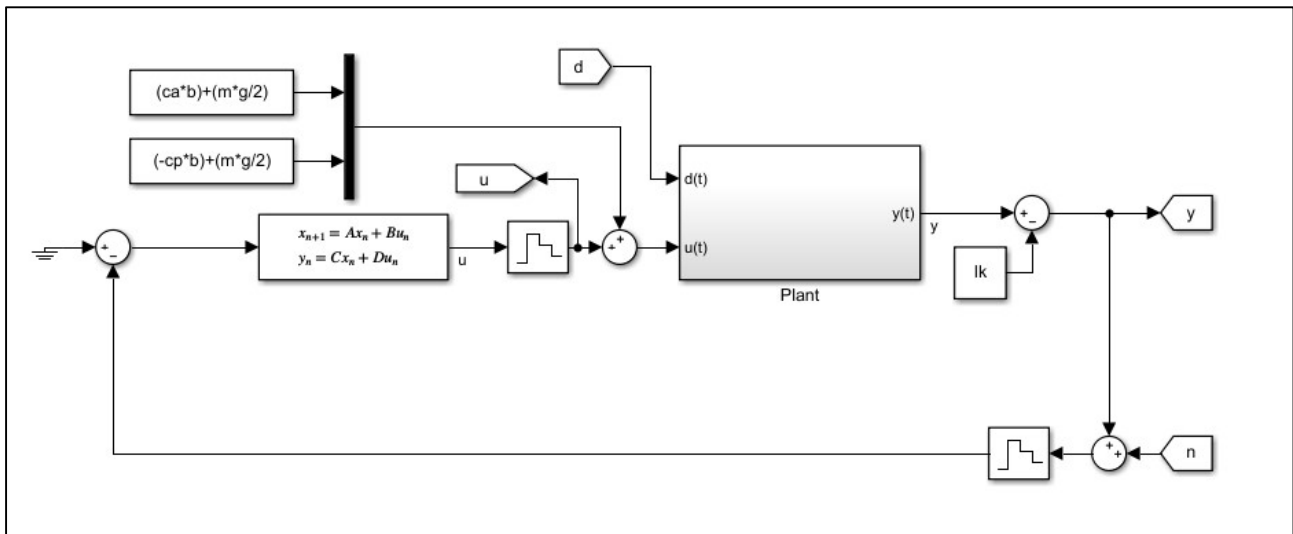
```
>> rank(ctrb(plant_aug.A,plant_aug.B))
```

```
ans =
```

```
6
```

Essendo il rango della matrice di controllabilità pari al grado del sistema aumentato, il sistema è completamente raggiungibile.

Lo schema di progetto per il controllo H_∞ è il seguente



I controllori e gli osservatori progettati saranno discretizzati con il metodo di Tustin con un tempo di campionamento $T_s = 0.01$ s.

Il codice è il seguente per la tecnica dell'assegnamento degli autovalori e per la tecnica del controllo ottimo LQG .

```
Int = ss(zeros(2,2), eye(2,2), Ki * eye(2,2), zeros(2,2));
Int = c2d(Int, Ts, 'tustin');
obsd = ss(obs.A, obs.B, Kobs * obs.C, Kobs * obs.D);
obsd = c2d(obsd, Ts, 'tustin');
```

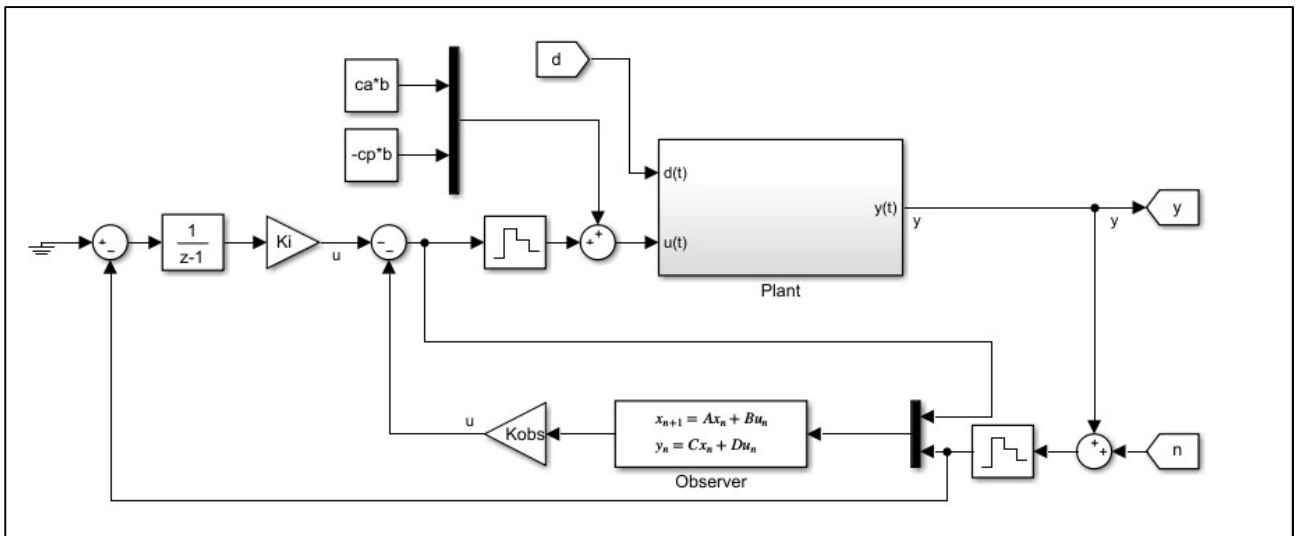
Per il controllore H_∞ il codice è il seguente

```
K = c2d(K, Ts, 'tustin');
```

Tecnica dell'assegnamento degli autovalori

La tecnica dell'assegnamento degli autovalori si basa sul modificare gli autovalori del sistema attraverso una retroazione di stato.

Lo schema di controllo è il seguente



Il sistema di controllo è formato da un sistema integratore che consente di azzerare asintoticamente l'errore di riferimento, mentre attraverso la retroazione di stato vengono cambiati gli autovalori del plant.

Inoltre, per effettuare la retroazione di stato è necessario progettare un osservatore che stimi lo stato del sistema.

Per il principio di separazione è possibile progettare la matrice di retroazione K e la matrice L dell'osservatore in maniera indipendente.

Dato che il tempo di assestamento deve essere minore a $T_a = 3$ s questo vuol dire che i poli del sistema devono avere la parte reale minore di

$$\lambda = -\frac{1}{T} \cong -\frac{5}{T_a} = -\frac{5}{3}$$

Una possibile scelta è

$$\lambda_1 = -5.1 \quad \lambda_2 = -5.2 \quad \lambda_3 = -5.3 \quad \lambda_4 = -5.4 \quad \lambda_5 = -5.5 \quad \lambda_6 = -5.6$$

Tramite il calcolatore è possibile trovare le matrici K_i e K_{obs}

```
K = place([plant.A zeros(4,2); -plant.C zeros(2,2)], [plant.B;
zeros(2,2)], [-5.1 -5.2 -5.3 -5.4 -5.5 -5.6]);
Kobs = K(:,1:4);
Ki = K(:,5:6);
```

I valori delle matrici K_i e K_{obs} sono

```
>> Ki, Kobs
```

```
Ki =
```

```
1.0e+05 *  
0.0469 -1.3924  
-1.3188 0.0768
```

```
Kobs =
```

```
1.0e+05 *  
0.5223 0.1214 -1.5406 -0.2262  
0.5136 0.1168 1.4711 0.2239
```

Adesso bisogna progettare l'osservatore.

Per far sì che lo stato stimato tenda allo stato effettivo il più velocemente possibile è buona norma scegliere la posizione dei poli degli osservatori che abbiano la parte reale 5 volte più piccola dei poli del sistema.

Una possibile scelta è la seguente

$$\lambda_{obs_1} = -50.1 \quad \lambda_{obs_2} = -50.2 \quad \lambda_{obs_3} = -50.3 \quad \lambda_{obs_4} = -50.4$$

Tramite il calcolatore è possibile calcolare la matrice L

```
>>L = place(A',C',[-50.1 -50.2 -50.3 -50.4])';
```

```
L =
```

```
1.0e+03 *  
0.0493 0.0493  
1.1344 1.1391  
0.0334 -0.0335  
0.8421 -0.8469
```

Le matrici dell'osservatore sono i seguenti

```

>> obs
obs =
A =
      x1      x2      x3      x4
x1 -98.58      1  0.1086      0
x2 -2335  -1.938   5.25      0
x3  0.09254      0 -100.5      1
x4   4.948 -0.006192 -2524      0

B =
      u1      u2      u3      u4
x1      0      0  49.25  49.32
x2  0.000625  0.000625  1134  1139
x3      0      0  33.45 -33.54
x4 -6.192e-05  6.192e-05  842.1 -846.9

C =
      x1 x2 x3 x4
y1  1  0  0  0
y2  0  1  0  0
y3  0  0  1  0
y4  0  0  0  1

D =
      u1 u2 u3 u4
y1  0  0  0  0
y2  0  0  0  0
y3  0  0  0  0

```

Le matrici del sistema integratore discreto sono le seguenti:

```

>> Int
Int =

    A =
        x1 x2
    x1  1  0
    x2  0  1

    B =
        u1 u2
    x1 0.01  0
    x2  0 0.01

    C =
        x1 x2
    y1 3.306e+05 -4.842e+05
    y2 -4.525e+05 3.582e+05

    D =
        u1 u2
    y1 1653 -2421
    y2 -2262 1791

```

Le matrici dell'osservatore discreto sono le seguenti:

```
>> obsd

obsd =

A =

      x1      x2      x3      x4
x1  0.2897  0.006387  0.0005546  2.773e-06
x2 -14.91   0.907   0.0268  0.000134
x3 0.0004846  2.204e-06  0.2775  0.006388
x4  0.02626  7.117e-05  -16.12  0.9194

B =

      u1      u2      u3      u4
x1  1.996e-08  1.996e-08  0.3539  0.3544
x2  5.959e-06  5.959e-06  7.149  7.179
x3 -1.971e-09  1.984e-09  0.2407 -0.2412
x4 -5.94e-07  5.945e-07  5.391  -5.416

C =

      x1      x2      x3      x4
y1 -7.5e+04  1.195e+04  5.539e+05 -1.264e+05
y2 -6.806e+04  9820 -5.552e+05  1.262e+05

D =

      u1      u2      u3      u4
y1  0.07646 -0.001797 -3.902e+05  4.918e+05
y2 -0.008371  0.06974  4.772e+05 -4.019e+05
```

Tecnica del controllo ottimo LQG

La tecnica del controllo ottimo si basa sull'assegnare gli autovalori del plant in modo da minimizzare la funzione di costo

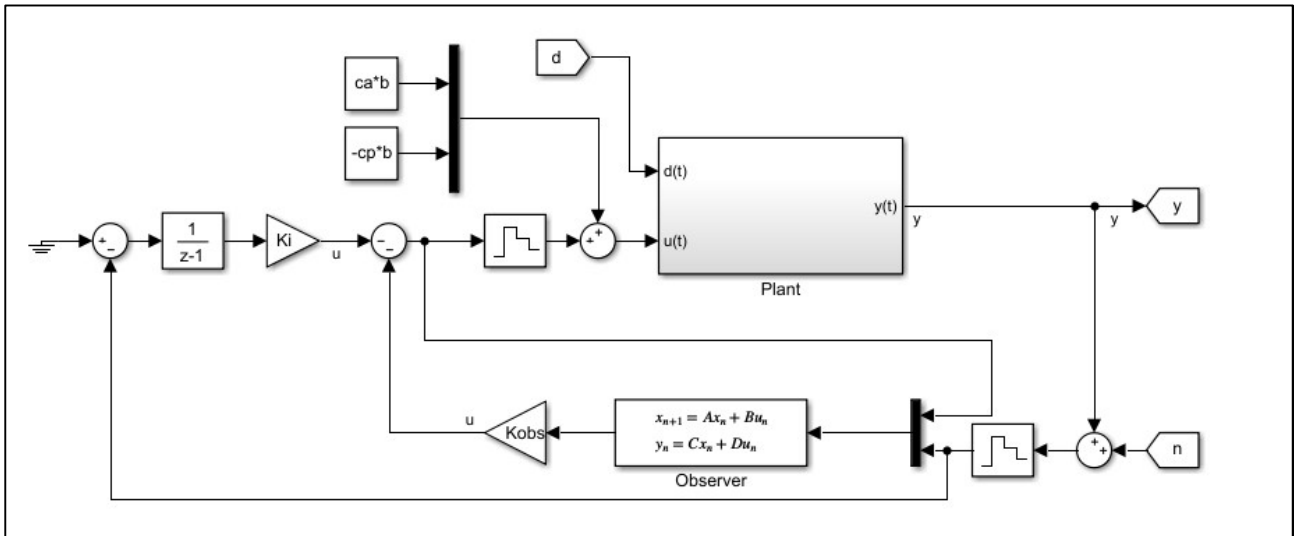
$$J = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau) d\tau$$

E di assegnare gli autovalori dell'osservatore ottima minimizzando la varianza dell'errore.

L'obiettivo di questa tecnica è ottenere delle buone prestazioni cercando di attenuare il rumore e i disturbi agenti sul sistema.

Il controllore progettato viene chiamato *LQR*, mentre l'osservatore ottimo è chiamato *Filtro di Kalman*.

Lo schema di controllo è il seguente



Per il principio di separazione è possibile progettare l'osservatore e la retroazione di stato in maniera indipendente.

I pesi scelti sono i seguenti

$$x_{max} = 0.1 \quad \theta_{max} = 5 \quad u_{max} = 10^4$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_{max})^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\theta_{max})^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{(u_{max})^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(u_{max})^2} \end{bmatrix}$$

Dato che il tempo di assestamento deve essere minore a $T_a = 3$ s questo vuol dire che i poli del sistema devono avere la parte reale minore di

$$\lambda = -\frac{1}{T} \cong -\frac{5}{T_a} = -\frac{5}{3}$$

Per poter imporre questa condizione basta considerare la matrice \tilde{A} come

$$\tilde{A} = A + \frac{5}{3} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tramite il calcolatore è possibile trovare le matrici Ki e $Kobs$


```
a = 5/3;
K = lqr(plant_aug.A+a*eye(6,6),plant_aug.B,Q,R);
Kobs = K(:,1:4);
Ki = K(:,5:6);
```

I valori delle matrici K_i e K_{obs} sono

```
>> Ki, Kobs

Ki =

1.0e+05 *

0.1592 -0.9370

-1.0664 0.1826

Kobs =

1.0e+05 *

0.1413 0.0512 -1.4062 -0.2218

0.2212 0.0557 1.4548 0.2293
```

Per il progetto dell'osservatore sono stati scelti i seguenti pesi:

$$Q_s = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 \end{bmatrix} \quad R_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per far sì che lo stato stimato tenda allo stato effettivo il più velocemente possibile è buona norma scegliere la posizione dei poli degli osservatori che abbiano la parte reale 5 volte più piccola dei poli del sistema.

La coppia $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ è completamente controllabile. Infatti,

```
>> rank(ctrb(A,sqrt(Qs)))

ans =

4
```

E dato che la coppia (A, C) è completamente osservabile, allora è possibile progettare un osservatore ottimo attraverso il seguente comando

```
[obs,L,~] = kalman(ss(plant.A,[plant.B M],plant.C,[plant.D N]),Qs,Rs);
```

La matrice L è la seguente

```
>> L
```

```
L =
```

```
1.0e+03 *
```

```
0.0539    0.0544
```

```
2.9142    2.9481
```

```
0.0141   -0.0144
```

```
0.2950   -0.3183
```

Le matrici del filtro di Kalman sono i seguenti

```

>> obs
obs =
A =
      x1      x2      x3      x4
x1 -108.3      1  0.684      0
x2 -5924  -1.938  49.05      0
x3  0.304      0 -42.89      1
x4  23.45 -0.006192 -910.8      0

B =
      u1      u2      u3      u4
x1      0      0  53.91  54.37
x2 0.000625 0.000625  2914  2948
x3      0      0  14.15 -14.45
x4 -6.192e-05 6.192e-05   295 -318.3

C =
      x1 x2 x3 x4
y1  1  0  0  0
y2  0  1  0  0
y3  0  0  1  0
y4  0  0  0  1

D =
      u1 u2 u3 u4
y1  0  0  0  0
y2  0  0  0  0
y3  0  0  0  0
y4  0  0  0  0

```

Le matrici del sistema integratore discreto sono le seguenti:

```

>> Int
Int =

    A =
        x1 x2
    x1  1  0
    x2  0  1

    B =
        u1 u2
    x1 0.01  0
    x2  0 0.01

    C =
        x1 x2
    y1 7.953e+04 -2.547e+05
    y2 -2.648e+05 8.83e+04

    D =
        u1 u2
    y1 397.7 -1273
    y2 -1324 441.5

```

Le matrici dell'osservatore discreto sono le seguenti:

```

>> obsd
obsd =
A =
      x1      x2      x3      x4
x1  0.1848  0.005867  0.004438  2.219e-05
x2 -34.75   0.8087   0.2624  0.001312
x3  0.002021 9.762e-06  0.6165  0.008083
x4  0.1308  0.0005874 -7.361   0.9632

B =
      u1      u2      u3      u4
x1  1.833e-08 1.834e-08  0.4052  0.4082
x2  5.652e-06 5.653e-06  17.01  17.19
x3 -2.472e-09 2.533e-09  0.1269 -0.129
x4 -6.06e-07 6.096e-07  2.419  -2.548

C =
      x1      x2      x3      x4
y1 -8.198e+04  4359  -8756 -1.016e+05
y2 -6.885e+04  4602  1.27e+04 1.035e+05

D =
      u1      u2      u3      u4
y1  0.04509 -0.01785 -1.091e+05 2.044e+05
y2 -0.01767  0.04644 2.021e+05 -1.166e+05

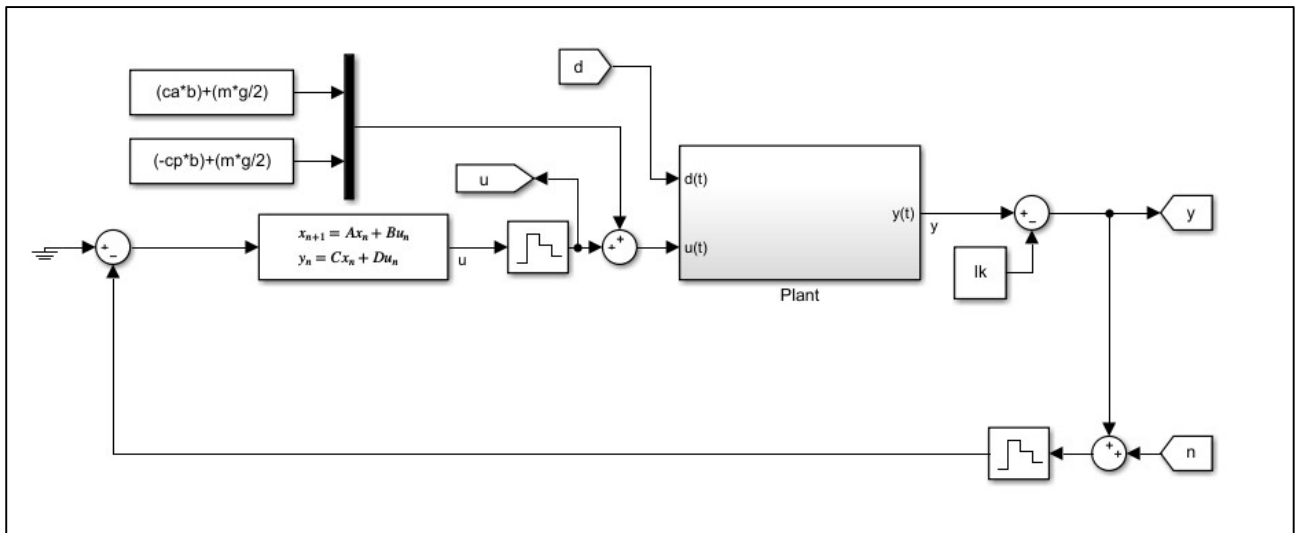
```

Tecnica del controllo robusto H_∞

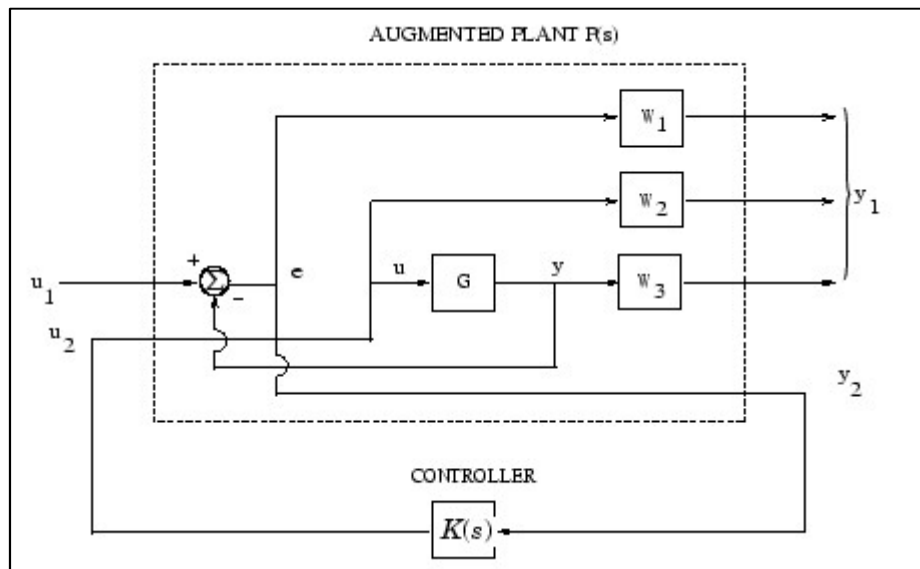
La tecnica del controllo robusto si basa sul progettare un controllore $K(s)$ che minimizzi la norma infinita del sistema a ciclo chiuso.

Obiettivo di questa tecnica è ottenere buone prestazioni mantenendo la norma H_∞ il più bassa possibile, in modo che il sistema non solo sia performante, ma anche robusto rispetto a variazioni del sistema.

Lo schema di controllo è il seguente



Dato il seguente schema



La progettazione del controllore $K(s)$ può essere effettuata minimizzando la norma della funzione di trasferimento

$$Ty_1u_1 = \begin{bmatrix} W_1S \\ W_2R \\ W_3T \end{bmatrix}$$

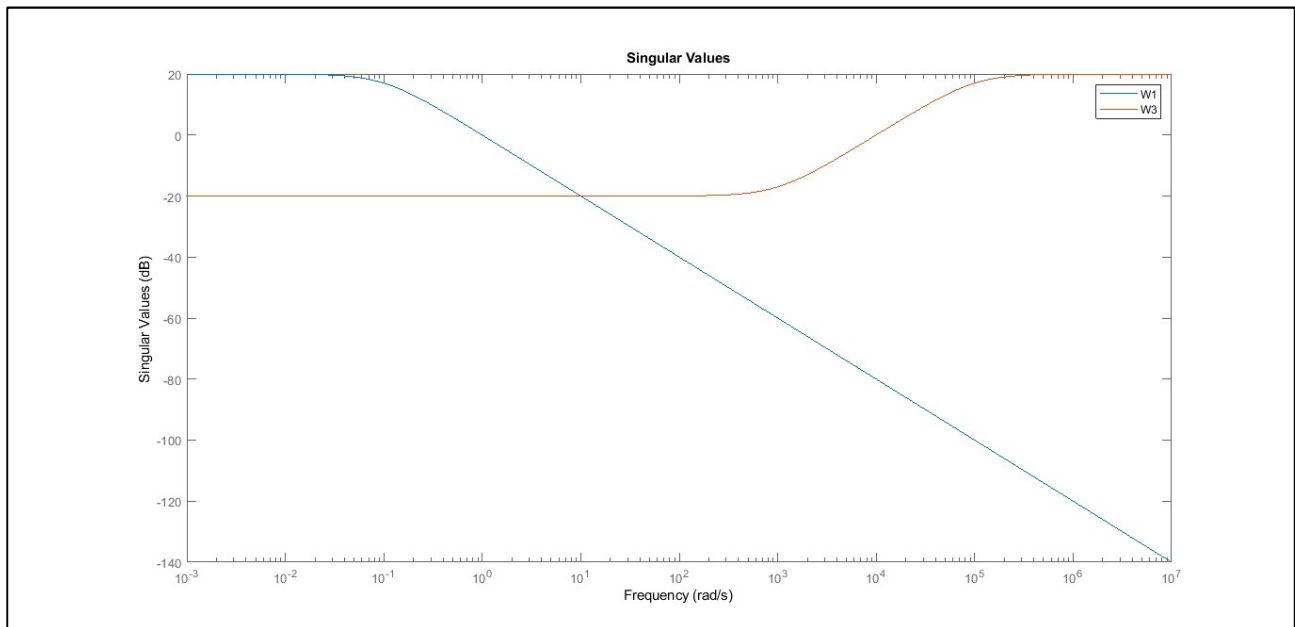
Dove

$$S = (I + GK)^{-1} \quad R = K(I + GK)^{-1} \quad T = GK(I + GK)^{-1}$$

Le funzioni di peso scelte sono le seguenti

$$\alpha = 0.1 \quad \beta = 0.1 \quad w_1 = 0.1 \quad w_2 = 10^3 \quad w_3 = 10^5$$

$$W_1 = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{s}{w_1} + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{s}{w_1} + 1} \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} \quad W_3 = \beta \begin{bmatrix} \frac{s}{\frac{w_2}{s} + 1} & 0 \\ 0 & \frac{s}{\frac{w_2}{s} + 1} \end{bmatrix}$$



Il controllore $K(s)$ può essere calcolato tramite i seguenti comandi

```
P = augw(G,W1,W2,W3);
nmeas = 2;
ncont = 2;
gamTry = 1;
opts = hinfsynOptions('Display','on');
[K,CL,gamma] = hinfsyn(P,nmeas,ncont,gamTry,opts);
```

La matrice K è la seguente

```
>> K
```

```
K =
```

```
A =
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
x1	-0.1	4.117e-46	-2.85e-54	-3.878e-54	-2.202e-47	-1.094e-48	1.446e-46	1.146e-47
x2	-4.019e-14	-0.1	7.133e-23	-8.143e-23	-3.143e-15	-2.364e-18	3.316e-13	1.729e-15
x3	0.02105	-0.02136	-1e+05	4.266e-11	1259	1.24e-06	1888	-0.0009055
x4	-0.02175	0.02207	3.86e-11	-1e+05	1259	-1.282e-06	-1888	0.0009358
x5	-0.0279	0.02831	4.951e-11	-5.653e-11	-0.002223	1	0.2301	0.0012
x6	626.3	625.1	0.3103	0.3103	-265.3	-20.32	-0.688	-0.1837
x7	1.134	-1.15	-2.012e-09	2.297e-09	0.09032	6.68e-05	-9.352	0.9512
x8	67.58	-67.73	0.004568	-0.004568	0.2503	-0.007829	-102.2	-13.08

```
B =
```

	u1	u2
x1	1	-1.367e-45
x2	1.016e-13	1
x3	-0.05324	0.0549
x4	0.05502	-0.05673
x5	0.07056	-0.07276
x6	0.2128	-0.2195
x7	-2.867	2.957
x8	-8.649	8.919

```
C =
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
y1	-1.701e+04	1.019e+06	211.3	285.1	-1.62e+05	-1.469e+04	6.71e+05	1.043e+05
y2	1.019e+06	-1.888e+04	285.1	211.3	-1.644e+05	-1.472e+04	-6.702e+05	-1.046e+05

```
D =
```

	u1	u2
y1	0	0
y2	0	0

La matrice di retroazione discretizzata è la seguente


```
>> K
```

```
K =
```

```
A =
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
x1	0.999	4.255e-16	-6.925e-20	-6.392e-20	9.837e-17	-4.268e-17	1.346e-18	7.481e-20
x2	-3.739e-16	0.999	8.974e-25	-1.867e-24	-2.974e-17	-1.566e-19	3.151e-15	3.029e-17
x3	0.0006098	9.648e-05	-0.996	3.439e-10	0.02499	0.0001134	0.03594	0.0001605
x4	9.312e-05	0.0006184	3.434e-10	-0.996	0.02495	0.0001133	-0.03589	-0.0001602
x5	0.02798	0.02846	2.794e-08	2.794e-08	0.988	0.009023	0.002149	1.301e-05
x6	5.648	5.638	5.588e-06	5.588e-06	-2.394	0.8047	-0.007779	-0.001604
x7	0.01369	-0.01383	4.01e-10	-3.75e-10	0.000866	4.206e-06	0.9065	0.008511
x8	0.6273	-0.629	8.523e-08	-8.558e-08	0.002008	-5.772e-05	-0.9141	0.8732

```
B =
```

	u1	u2
x1	0.009995	-1.418e-18
x2	9.675e-16	0.009995
x3	-0.0005113	0.0005309
x4	0.0005319	-0.0005449
x5	0.0008195	-0.0005585
x6	0.0295	0.0269
x7	-0.02763	0.02849
x8	-0.06477	0.06687

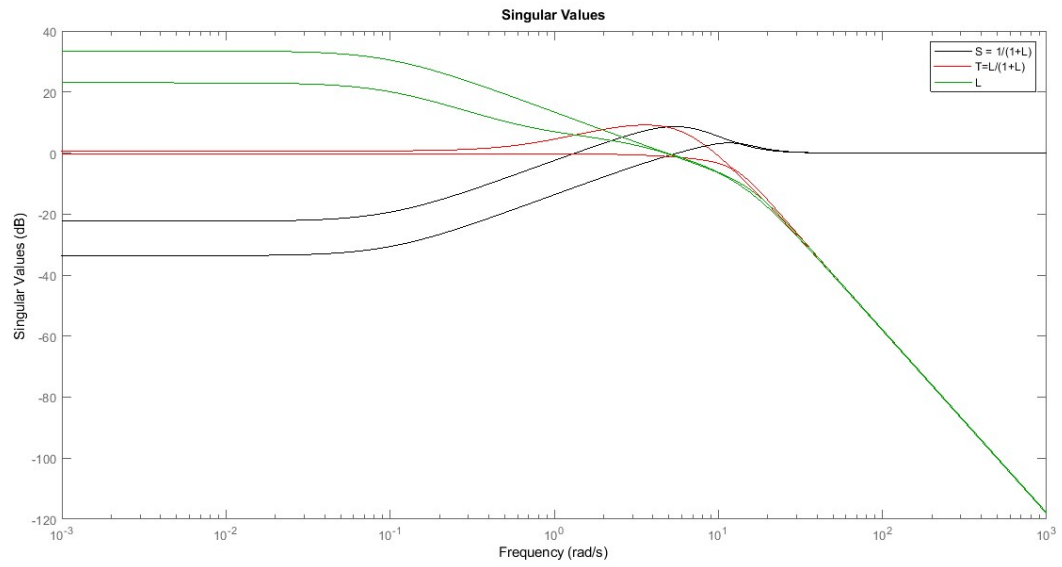
```
C =
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
y1	-2.346e+04	9.373e+05	0.3831	0.5212	-1.431e+05	-1.399e+04	5.919e+05	1.005e+05
y2	9.374e+05	-2.518e+04	0.5211	0.383	-1.462e+05	-1.402e+04	-5.912e+05	-1.008e+05

```
D =
```

	u1	u2
y1	-1.301e+04	1.799e+04
y2	1.745e+04	-1.329e+04

Di seguito sono riportati di grafici delle matrici S , T , L .



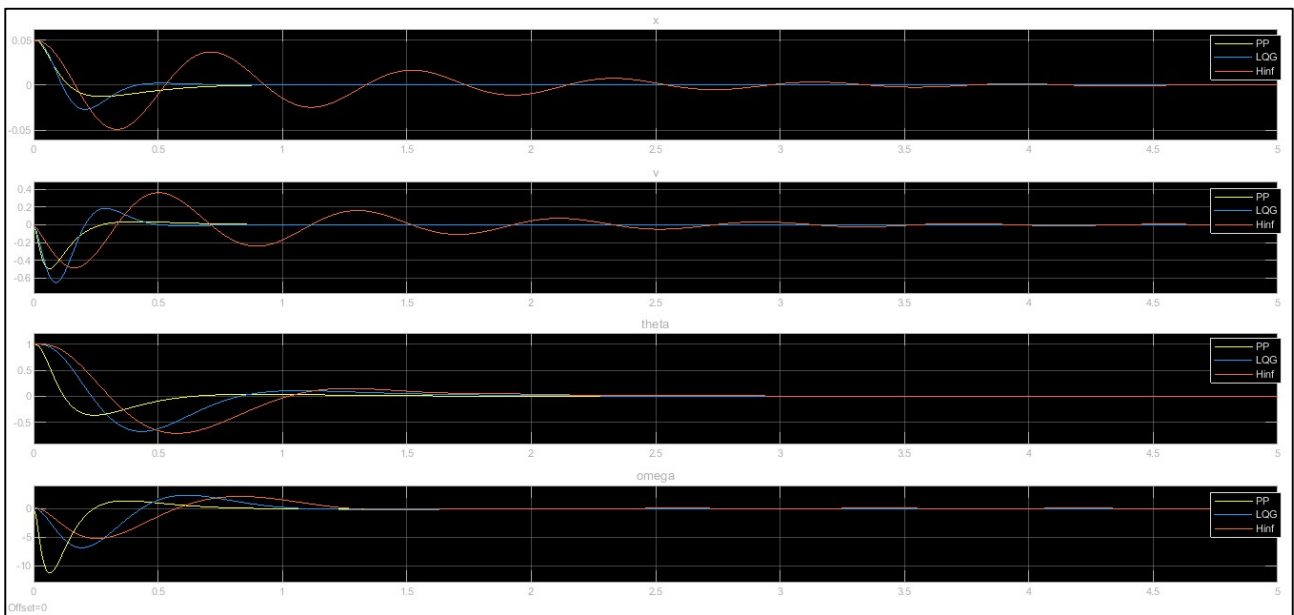
Simulazioni

Sistema sottoposto a stato iniziale non nullo

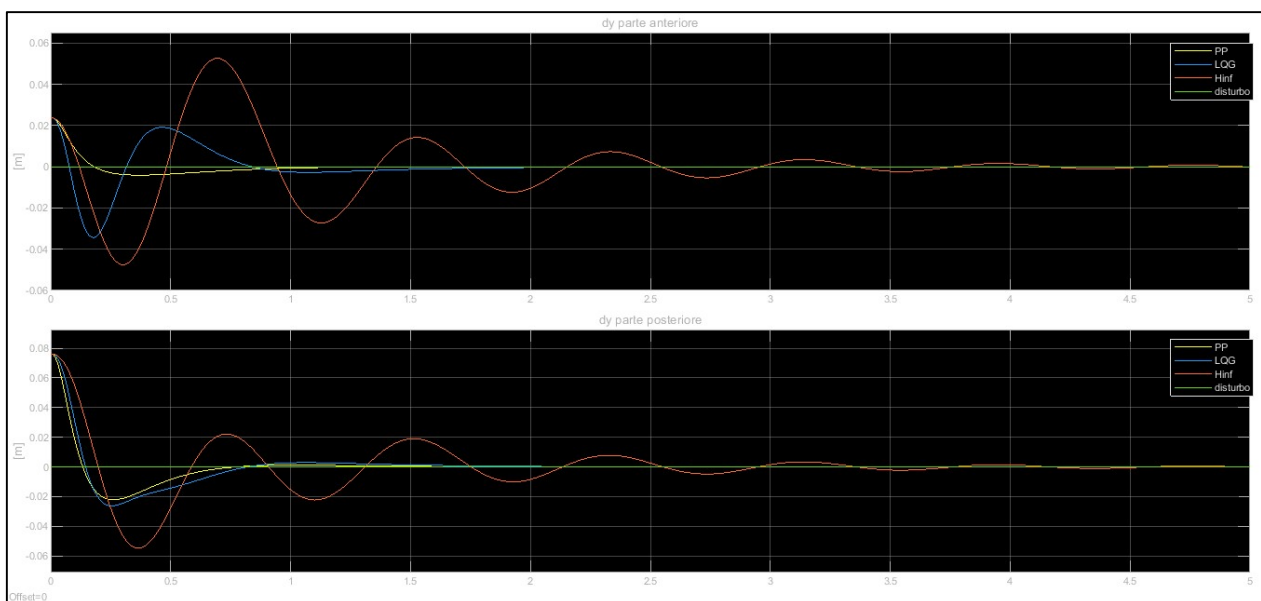
Per la simulazione si suppone che il sistema non sia affetto da disturbi o rumori e che lo stato iniziale del sistema sia

$$\delta x = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 5 \\ \frac{180}{180} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

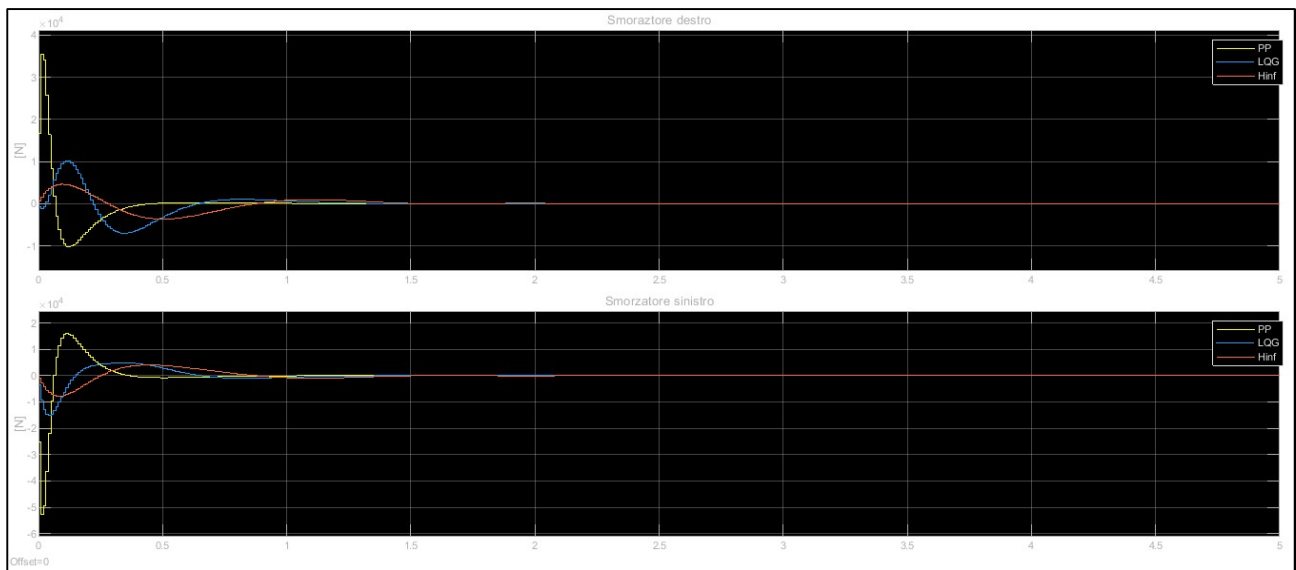
Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo dello stato del sistema.



Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo dell'uscita del sistema.



Di seguito è riportato l'evoluzione nel tempo del segnale di controllo

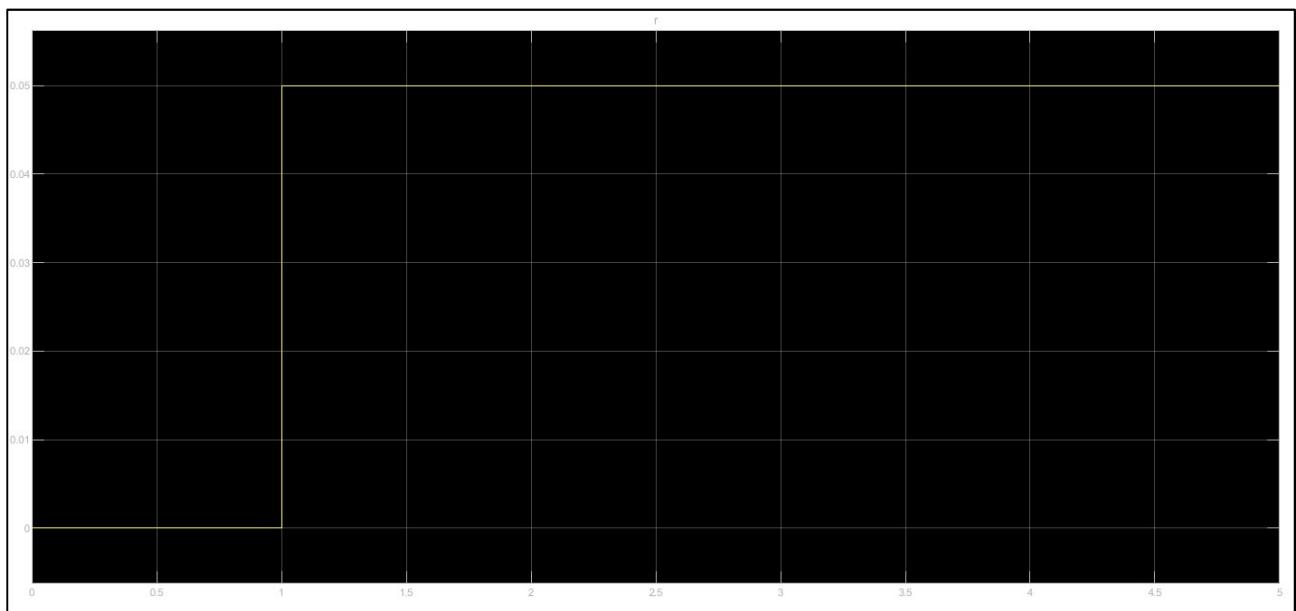


Come si può notare dai grafici, sia per il controllore progettato con la tecnica degli autovalori sia per il controllore progettato con il controllo LQG il tempo di assestamento risulta essere inferiore a 3 s, mentre nel caso del controllore progettato con il controllo H_∞ risulta essere circa 4 s.

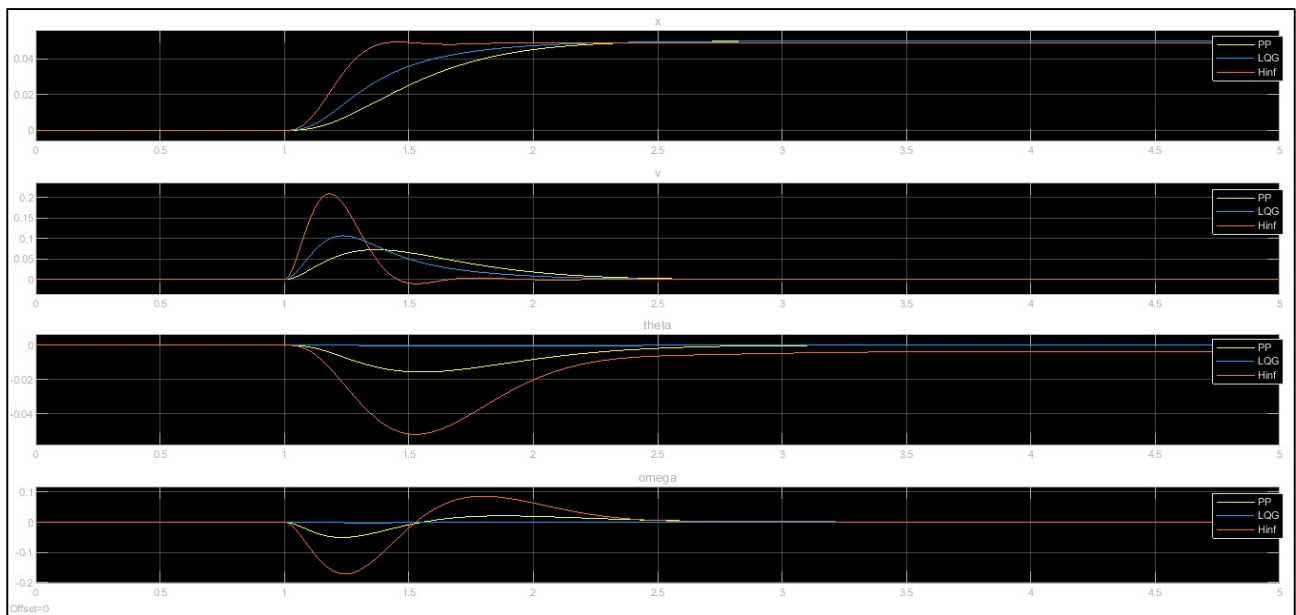
Inoltre, dal grafico del segnale di controllo è possibile notare che la tecnica dell'assegnamento degli autovalori ha le prestazioni migliori pagandone con un segnale di controllo molto più elevato rispetto agli altri due controllori.

Sistema sottoposto ad un segnale di riferimento non nullo

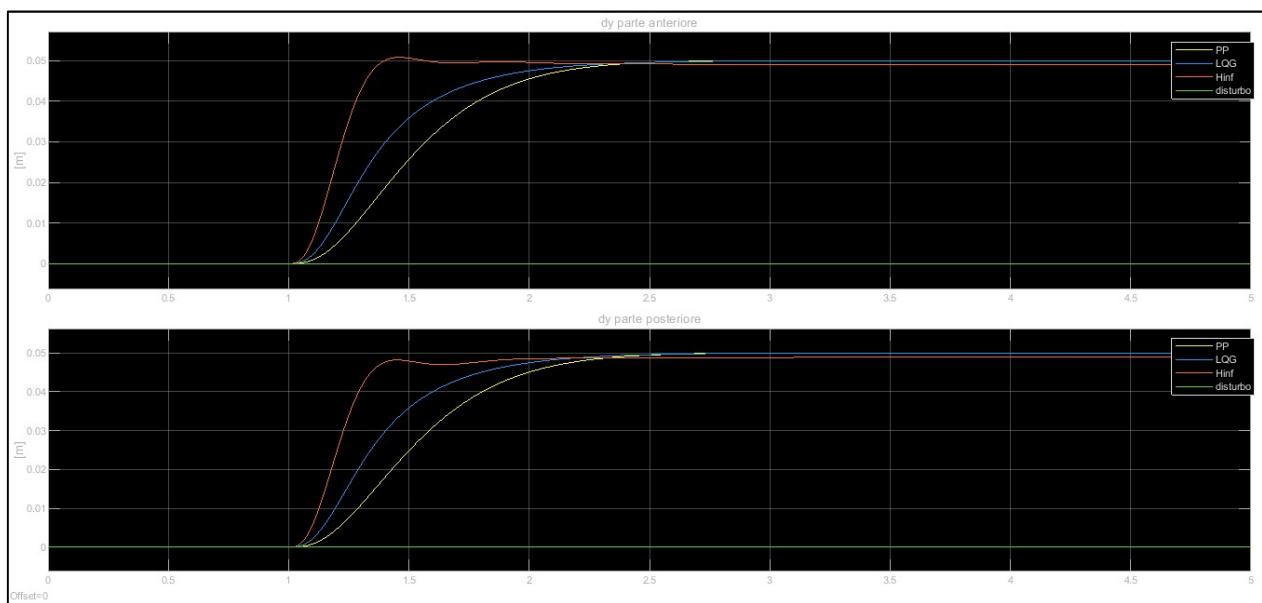
Per la simulazione si suppone che il segnale di riferimento sia il seguente



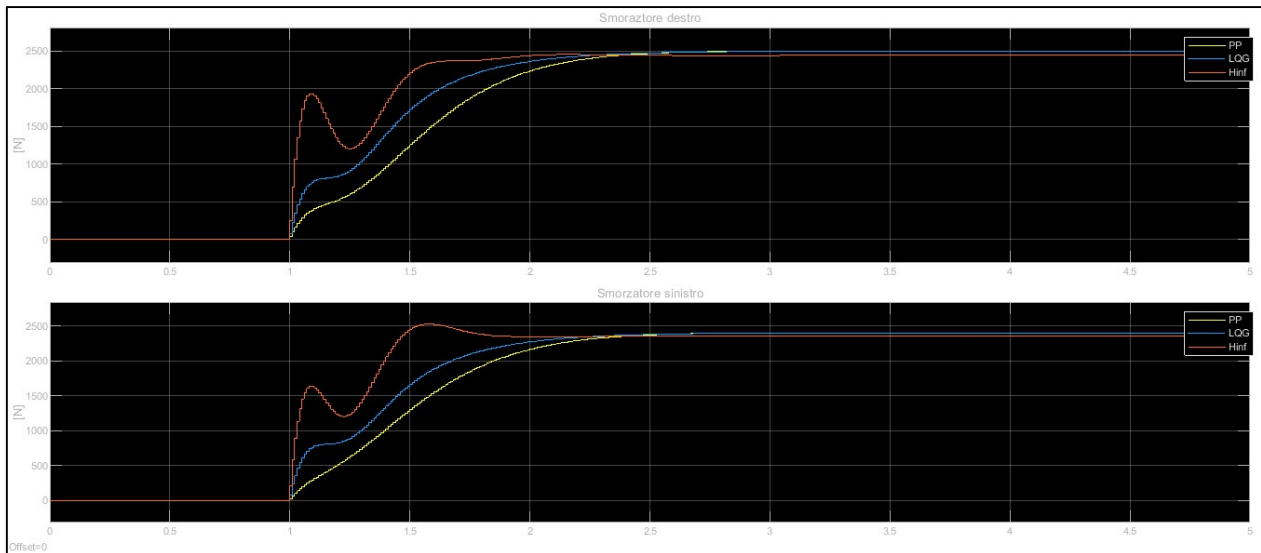
Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo dello stato del sistema.



Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo dell'uscita del sistema.



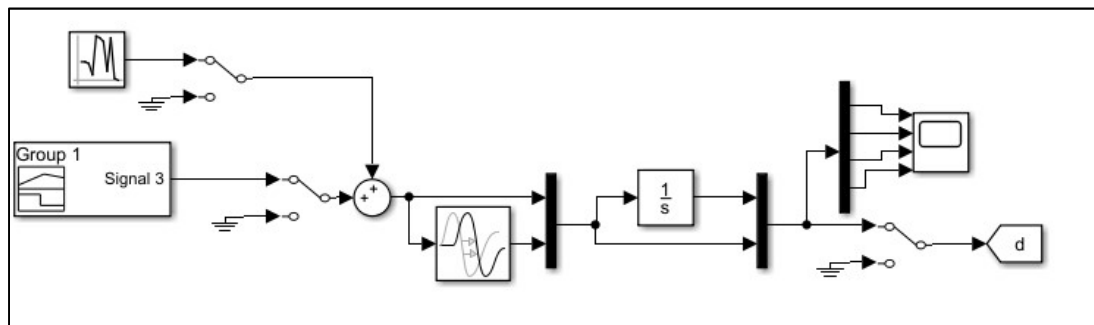
Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo del segnale di controllo del sistema.



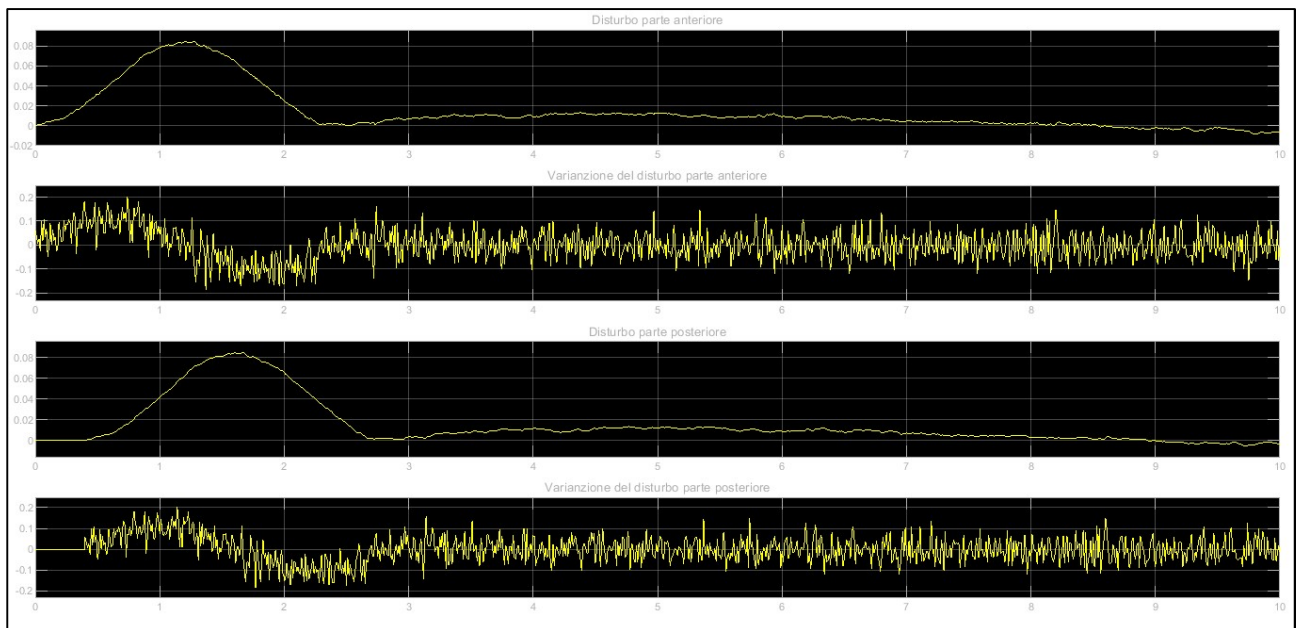
Sistema sottoposto a disturbi e rumori non nulli

Per la simulazione si suppone che il sistema sia affetto da un disturbo dovuto alle irregolarità della strada e che sulla misura dell'uscita sia presente un rumore di tipo gaussiano.

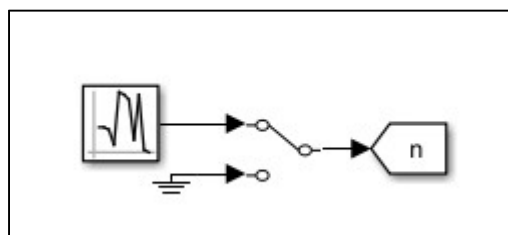
Lo schema di simulazione che genera il disturbo è il seguente:



Il segnale di disturbo è il seguente



Lo schema di simulazione è il seguente



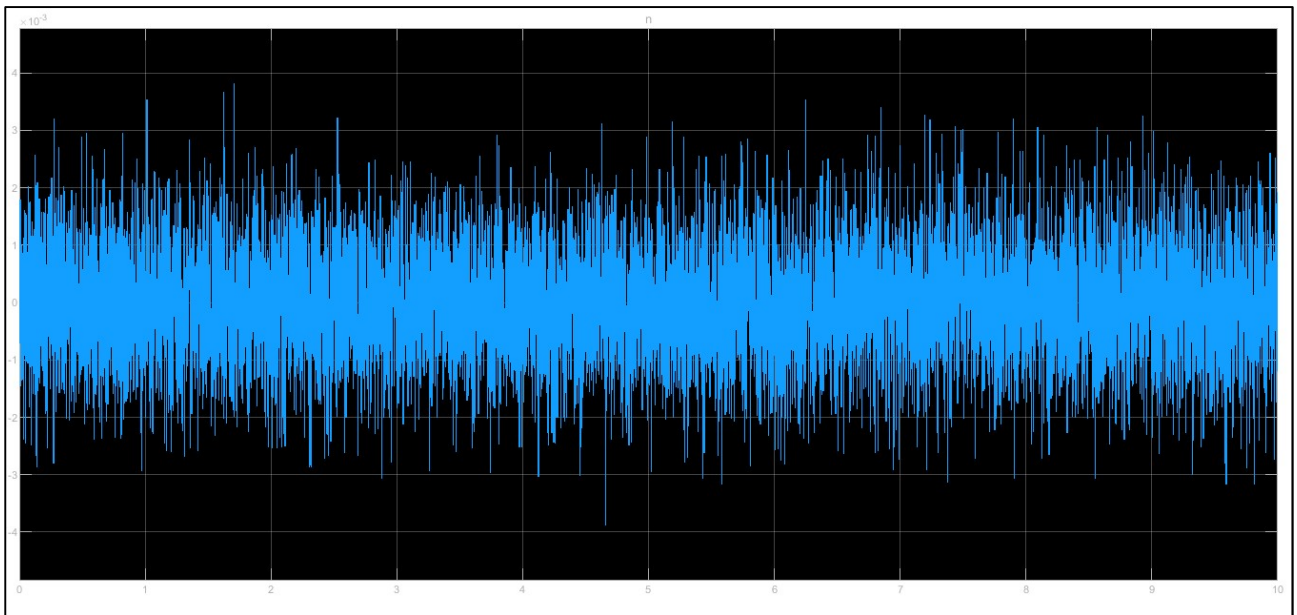
Inoltre, verranno fatte due simulazione con diversi valori della varianza del rumore di misura in modo da simulare eventuali incertezze del sistema.

Nella simulazione 1 il rumore avrà media nulla e varianza 10^{-6} .

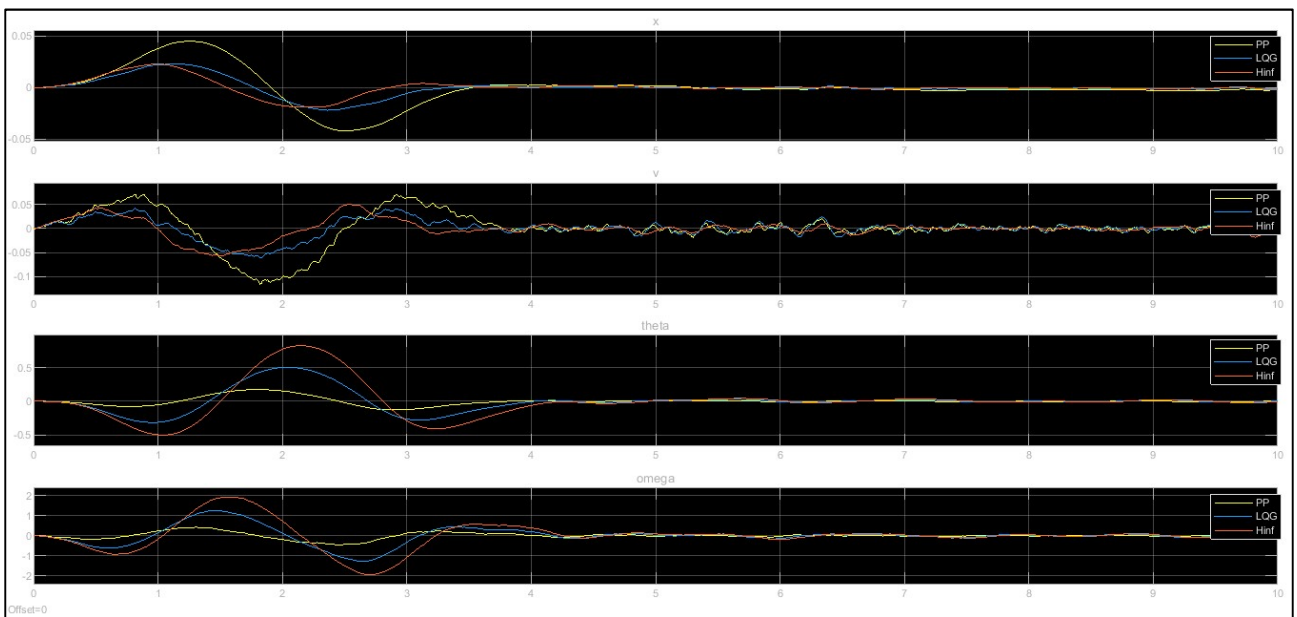
Nella simulazione 2 il rumore avrà media nulla e varianza 10^{-4} .

Simulazione 1

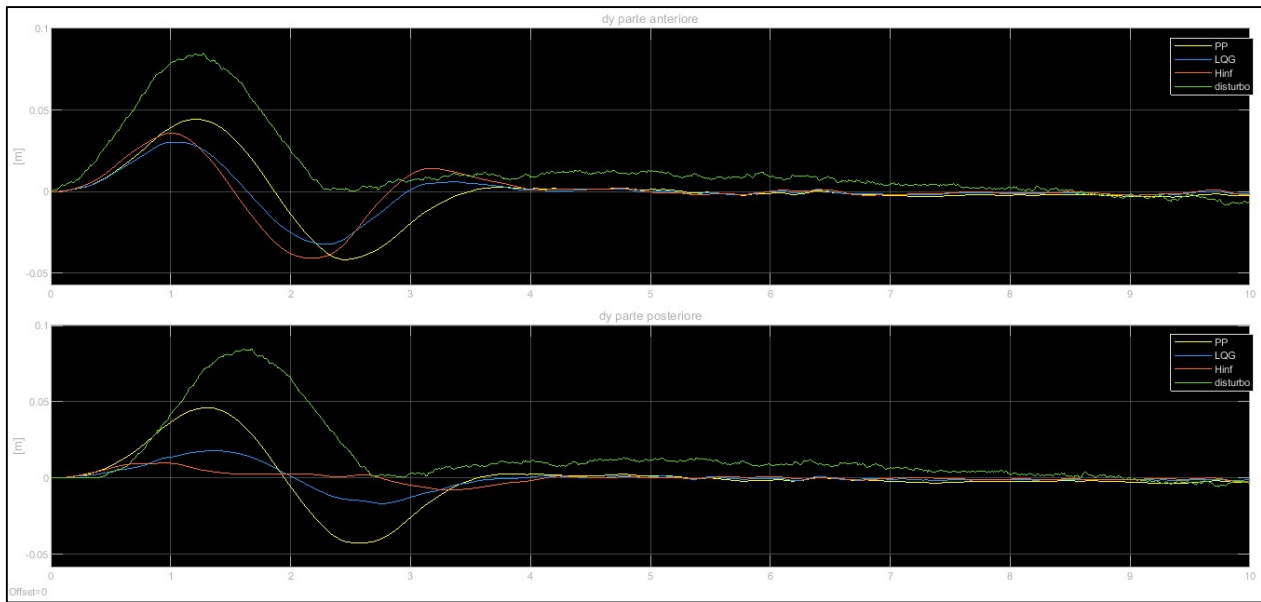
Di seguito è riportata il rumore di misura



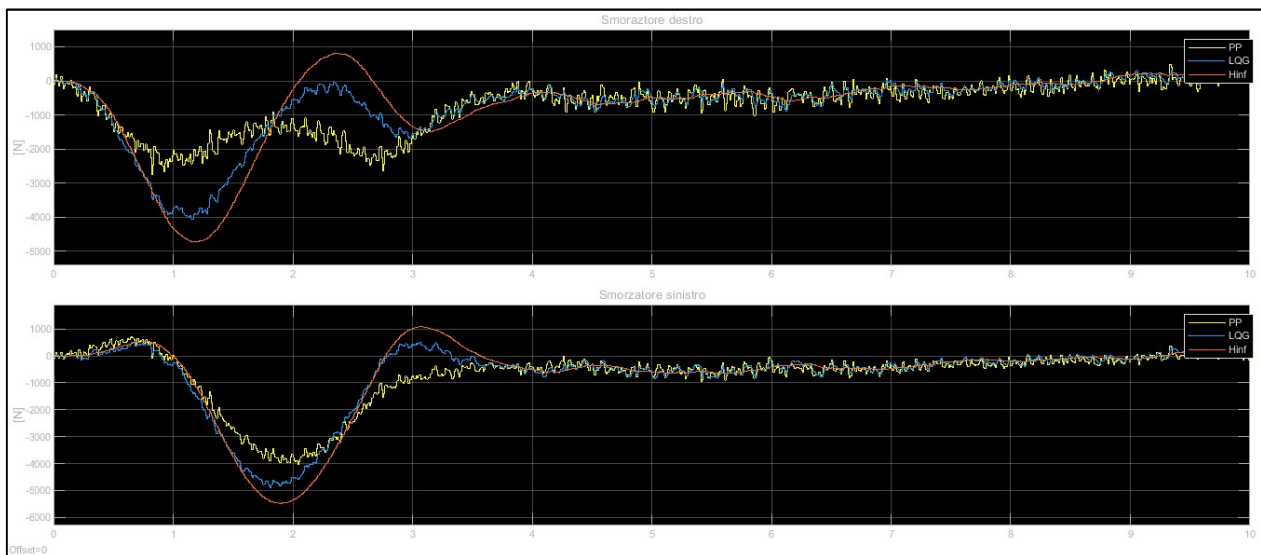
Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo dello stato del sistema.



Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo dell'uscita del sistema.



Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo del segnale di controllo del sistema.



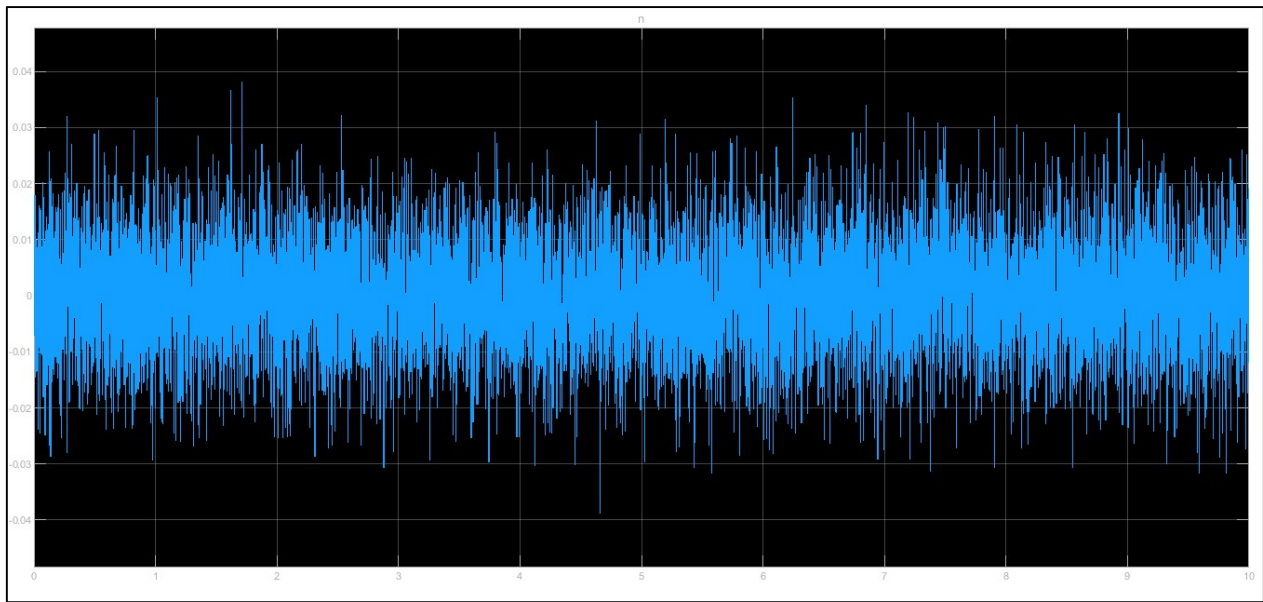
Come si può notare dai grafici, con tutti i controllori il discostamento massimo dell'altezza del baricentro dell'auto rimane confinato nell'intervallo $\pm 0.1 \text{ m}$ mentre l'angolo di inclinazione dell'auto rimane confinato nell'intervallo $\pm 5^\circ$.

Il controllore progettato con la tecnica dell'assegnamento degli autovalori risulta essere il più sensibile al rumore

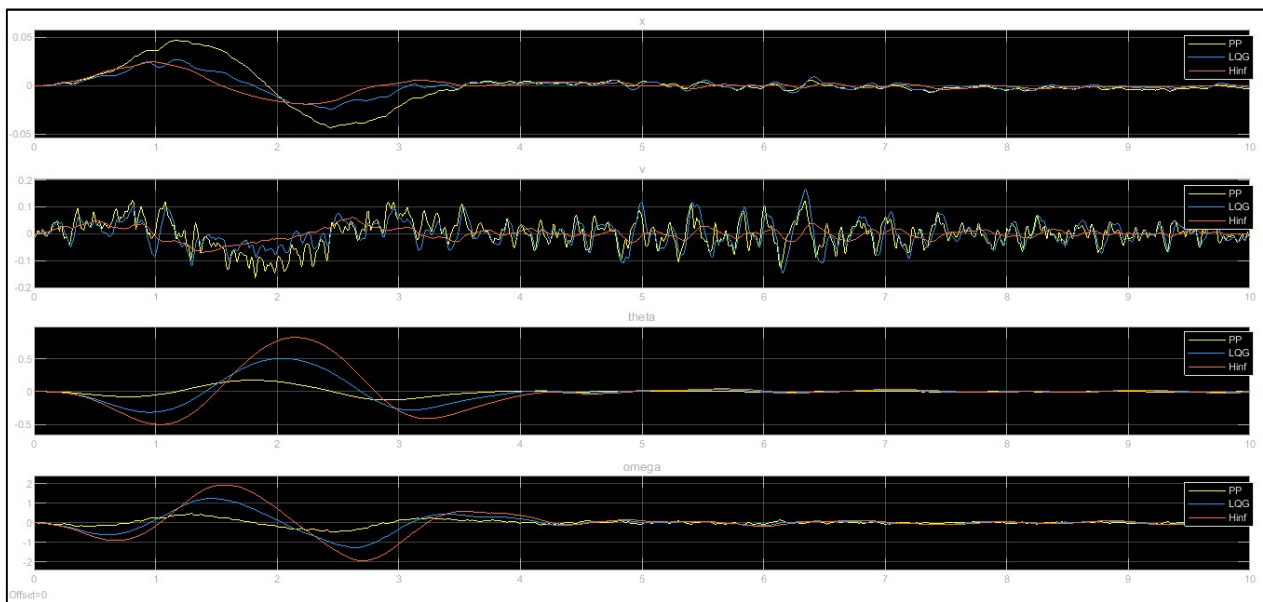
Il controllore H_∞ è il meno sensibile al rumore e produce discostamenti dell'uscita minori rispetto al controllore LQG , ma ne paga con una legge di controllo più grande.

Simulazione 2

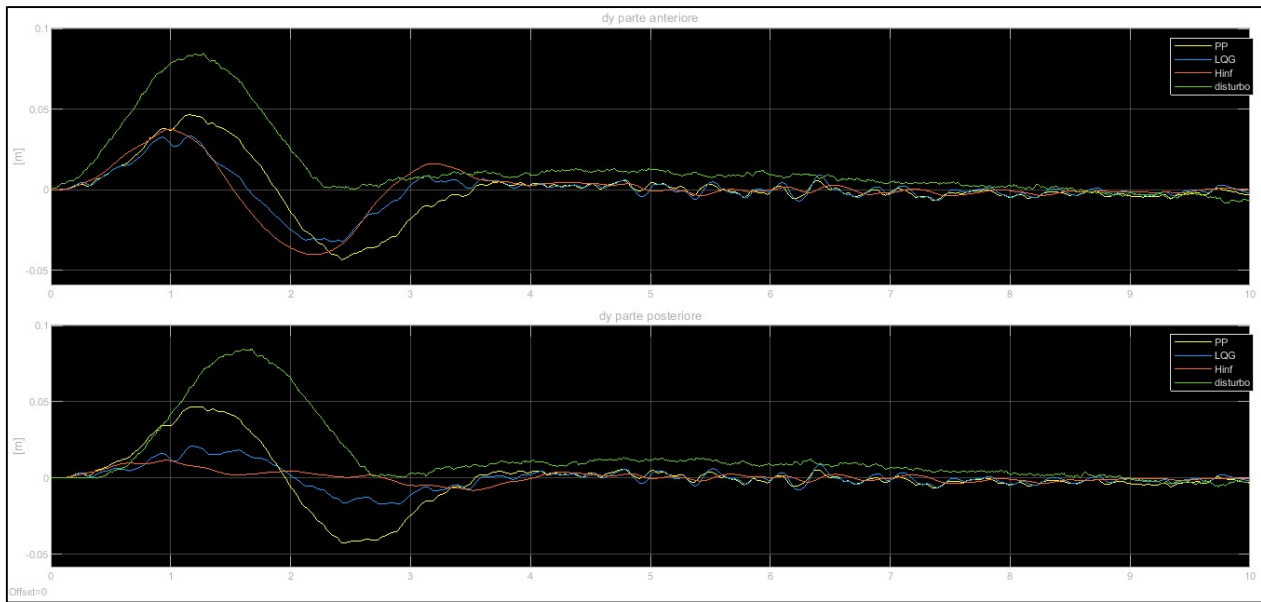
Di seguito è riportata il rumore di misura



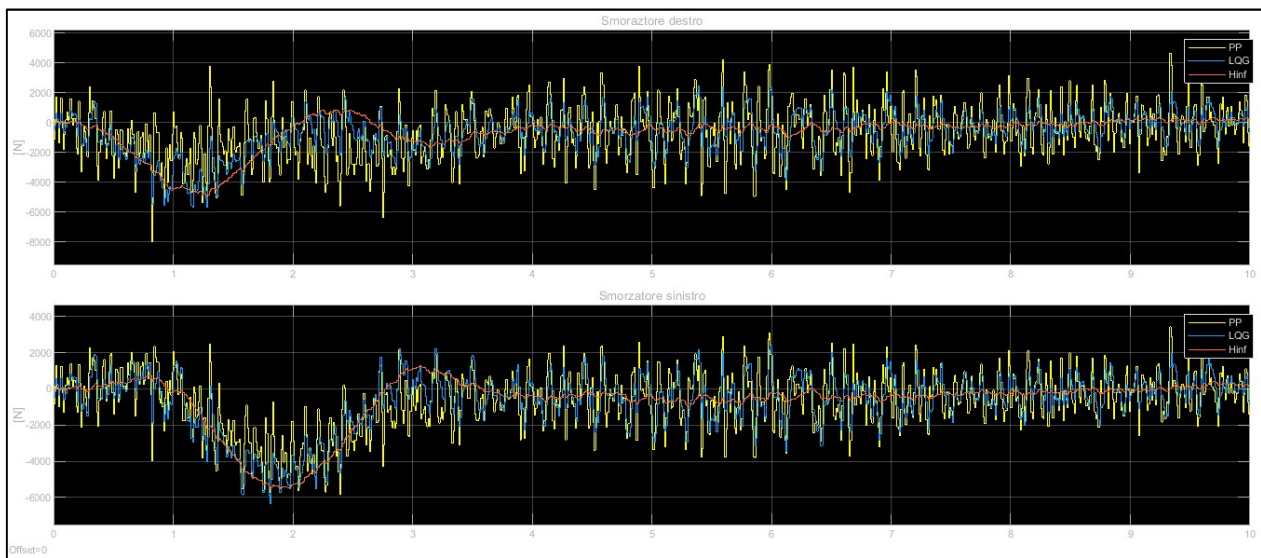
Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo dello stato del sistema.



Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo dell'uscita del sistema.



Di seguito è riportata l'evoluzione nel tempo del segnale di controllo del sistema.



Come si può notare dai grafici, il controllore H_{∞} mostra le sue particolarità, risultando essere il più robusto rispetto alle incertezze del sistema.