Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2020

Guía de Ejercicios N°4

Continuidad

1. Esboce el gráfico de una función f, sin dar su fórmula, que tenga las siguientes características:
   - Su dominio es $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$,
   - es discontinua en $x = -2$ y en $x = 4$,
   - $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$ y
   - $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$.

2. Determine si la función g, del ejercicio 9 de la Guía 3, es continua en $x = 1, 2, 6, -2, 0$ y justifique su respuesta.

3. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de límites para demostrar que la función dada es continua en el valor indicado.

   a) $f(x) = (x + 2x^3)^4$ en $x = -1$

   b) $f(t) = \dfrac{t^2}{(t+1)^3}$ en $t = 2$

4. Justifique por qué la función $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$ e indique qué propiedades de la continuidad de funciones utiliza.

5. Determine, en caso de que los haya, en qué puntos es discontinua la función f. En cada caso, indique si se trata de una discontinuidad evitable, de salto o esencial.

   a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x & x \leq 2 \end{cases}$

   c) $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

6. *a*) Determine la constante c para la cual la función g resulta continua en $\mathbb{R}$.

   $$g(x) = \begin{cases} x^2 - c & x < 4 \\ cx + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$

   b) Grafique g con el valor c obtenido en el ítem anterior.

7. Determine el dominio de f en los distintos casos y decida si existe una función F continua cuyo dominio es todo el conjunto $\mathbb{R}$ y que satisface $F(x) = f(x)$ si x está en el dominio de f. ¿Cómo está definida F, en caso de que exista?.

   a) $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 7}}{t + 2}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$ *c*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$

8. Aplicando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay una solución de la ecuación en el intervalo dado:

   a) $x^3 - 3x = -1$ en (0,1)
   b) $x^5 - 2x^2 - x - 3 = 0$ en (-2,3)
   c) $x^3 + 2x = x^2 + 1$ en (0,1)

9. Empleando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 0$.

   a) $f(x) = \ln(x) - \operatorname{sen}(x)$ *b*) $f(x) = 2^x + x - 2$

10. Determine si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass en el intervalo indicado. De ser así, indique cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo que alcanza la función:

    a) $f(x) = \cos x$, en $[-\pi/3, \pi/2]$.
    b) $f(x) = \tan x$, en $[0, \pi]$ con $f(\pi/2) = 0$.
    c) $f(x) = 1 - 2x^2$, en $[1, 3]$.

Material Extra

1. Determine, en caso de que los haya, en qué puntos es discontinua la función f. En cada caso, indique si se trata de una discontinuidad evitable, de salto o esencial.

   a) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
   b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{|x|}}$
   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. Determine el dominio de f en los distintos casos y decida si existe una función F continua cuyo dominio es todo el conjunto $\mathbb{R}$ y que satisface $F(x) = f(x)$ si x está en el dominio de f. ¿Cómo está definida F, en caso de que exista?

   a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$ *b*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

3. Tiene que graficar, en una computadora, el plano de una ruta y se le presenta el problema de graficar las curvas de la misma. Sabe que el camino se comporta como la función $y = -(x-1)^4+1$ en el intervalo $[0,5;\ 1]$ y como la función $(x - 1)^2 + k$ en el intervalo $[1;\ 1,2]$, pero desconoce la constante k. ¿Podría calcularla?

4. Determine si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass en el intervalo indicado. De ser así, indique cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo que alcanza la función:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$, en $[4, 8]$
   b) $f(x) = x$, en $(0, 1)$.