Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2020

Guía de Ejercicios N^{o}7

Integrales

Antiderivadas

1. Exprese las antiderivadas de las siguientes funciones:

   a) $g(x) = x^3 - 5x$

   b) $g(x) = \mathrm{e}^{0,3x}$

   c) $g(x) = \operatorname{sen} 2x$

   d) $g(x) = 2x\cos(x^2)$

   e) $g(x) = x^{3/2}$

   f) $g(x) = \sqrt{x+2}$

2. Encuentre la antiderivada F de $f(x) = x + \cos x$ que pasa por el punto $(0, 4)$.

3. Encuentre la antiderivada F de $f(x) = \frac{3}{x}$ tal que $F(1) = 5$.

4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x^2}$

   b) $f(x) = 3x^3 - 8x^{\frac{3}{2}} + 4\ln|x|$

   c) $f(x) = (3x+1)^{\frac{3}{2}}$

   d) $f(x) = (9-2x)^{\frac{4}{3}}$

   e) $f(x) = (x+9)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$

   f) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

   g) $f(x) = 2^x$

   h) $f(x) = \ln|7-x|$

   i) $f(x) = \ln|x^2+3x+4|$

   j) $f(x) = \ln|x^2+2x+5|$

   k) $f(x) = \ln|\mathrm{e}^{3x} - 24|$

   l) $f(x) = \ln|\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}|$

   m) $f(x) = \ln|\cos(x) + \operatorname{sen}(x)|$

   n) $f(x) = -\cos(2x) + \operatorname{sen}(3x)$

   ñ) $f(x) = \ln(\cos(x))$

   o) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

5. Calcule las siguientes integrales indefinidas usando las correspondientes primitivas (Está permitido ver los resultados del ejercicio 4):

   a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int \sqrt[3]{9-2x}\,\mathrm{d}x$

   e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{7-x}$

   f) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x$

   g) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

   h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}-24}\,\mathrm{d}x$

   i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

   j) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$

   k) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$

   l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x}$

6. Calcule las siguientes integrales indefinidas utilizando integración por sustitución:

   a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

   e) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

   f) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)^{-1}\,\mathrm{d}x$

   g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,\mathrm{d}x$

7. Calcule las siguientes integrales indefinidas, utilizando integración por partes:

   a) $\int x\ \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x$
   b) $\int (1-2x)\ \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x$
   c) $\int x^2 \cos x\ \mathrm{d}x$
   d) $\int x\ \ln(x-1)\ \mathrm{d}x$
   e) $\int \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} 2x\ \mathrm{d}x$
   f) $\int \cos^2 x\ \mathrm{d}x$
   g) $\int \cos^4 x\ \mathrm{d}x$

Integral Definida y Cálculo de Áreas .

8. Calcule las siguientes integrales definidas usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

   a) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x$
   b) $\int_1^2 2^x\ \mathrm{d}x$
   c) $\int_1^4 \sqrt{3x+1}\ \mathrm{d}x$
   d) $\int_3^5 \sqrt[3]{9-2x}\ \mathrm{d}x$
   e) $\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{7-x}$
   f) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\ \mathrm{d}x$
   g) $\int_0^5 \frac{x+1}{x^2+2x+5}\ \mathrm{d}x$
   h) $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}-24}\ \mathrm{d}x$
   i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^{x}-\ \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\ \mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$
   j) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x}$

9. Sin realizar el cálculo de la integral definida justifique las siguientes igualdades y desigualdades (puede usar gráficos):

   a) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x\ \mathrm{d}x = 0$
   b) $\int_{-5}^{5} x^4\ \mathrm{d}x = 2\int_0^5 x^4\ \mathrm{d}x$
   c) $\int_0^4 (x-2)^3\ \mathrm{d}x = 0$
   d) $\int_1^2 \sqrt{5-x}\ \mathrm{d}x \geq \int_1^2 \sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x$
   e) $\pi/6 \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x \leq \pi/3$

10. Trace la región limitada por las curvas dadas y calcule el área de dicha región:

    a) $y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3$
    b) $x + y^2 = 2, \quad x + y = 0$
    c) $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
    d) $y = |x|, \quad y = (x+1)^2 - 7, \quad x = -4$

11. Use el cálculo integral para determinar el área de los triángulos cuyos vértices se dan a continuación:

    a) (0,0); (1,8); (4,3).
    b) (-2,5); (0,-3); (5,2).

12. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la tangente a ella en el punto (1,1) y el eje x.

13. Calcule el número b tal que la recta $y = b$ divida la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.