Clase 3 - Análisis Matemático 1 - LC: Valor Absoluto

Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

20 de Marzo de 2020

Índice

Repasando...

Expresar el conjunto solución como intervalos:

$$x^2 \geq 3$$

$$x^2 - 3 \geq 0$$

(diferencia de cuadrados ó busco raíces con Baskhara y escribo en forma factorizada)

$$(x - \sqrt{3}).(x + \sqrt{3}) \geq 0$$

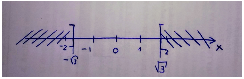
Forma analítica de resolver: **Ambos** positivos $(+).(+) > 0$ **ó** **Ambos** negativos $(-).(-) > 0$

$$\left(x - \sqrt{3} \geq 0 \wedge x + \sqrt{3} \geq 0\right) \vee \left(x - \sqrt{3} \leq 0 \wedge x + \sqrt{3} \leq 0\right)$$

$$\left(x \geq \sqrt{3} \wedge x \geq -\sqrt{3}\right) \vee \left(x \leq \sqrt{3} \wedge x \leq -\sqrt{3}\right)$$

$$\left([\sqrt{3}, +\infty) \cap (-\sqrt{3, +\infty}]\right) \cup \left((-\infty, \sqrt{3}] \cap (-\infty, -\sqrt{3}]\right)$$

$$[\sqrt{3}, +\infty) \cup (-\infty, -\sqrt{3}]$$



Repasando...

Expresar el conjunto solución como intervalos:

$$x^2 \geq 3$$

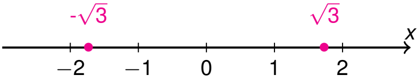
$$x^2 - 3 \geq 0$$

(diferencia de cuadrados ó busco raíces con Baskhara y escribo en forma factorizada)

$$(x - \sqrt{3}).(x + \sqrt{3}) \geq 0$$

Tabla para resolver:

1. Buscamos los puntos que anulan (hacen 0) la expresión
   El producto de dos factores es cero cuando alguno de ellos lo es. Entonces $x = \sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$ anulan la expresión.
2. Dibujarlos sobre la recta real



3. Escribir los intervalos definidos por esos puntos:

$$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \quad \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \quad \left(\sqrt{3, +\infty}\right)$$

Repasando...

4. Construir una tabla para ver signos de los factores en cada intervalo y los signos resultantes del producto

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$x = -\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$	$x = \sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
$(x-\sqrt{3})$					
$(x+\sqrt{3})$					
$(x-\sqrt{3}).(x+\sqrt{3})$					

5. Elegir un número cualquiera en cada intervalo de las columnas y evaluarlo en cada factor de las filas y anotar el signo del resultado
(por ejemplo: elegimos $x = -10000$ para la primer columna, $x = 0$ para la columna del centro y $x = 10000$ para la última columna)

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$x = -\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$	$x = \sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
$(x-\sqrt{3})$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+\sqrt{3})$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-\sqrt{3}).(x+\sqrt{3})$	$+$	0	$-$	0	$+$

6. Seleccionar las columnas que tengan el signo de la desigualdad que estamos resolviendo

$$(x-\sqrt{3}).(x+\sqrt{3}) \geq 0 \Rightarrow (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$$

Repasando...

Resolver (fraccionarias)

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$

$$x \neq 1 \ , \ x \neq -1$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0$$

$$\frac{3}{x-1} \cdot \left(\frac{x+1}{x+1}\right) - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x-1}{x-1}\right) < 0$$

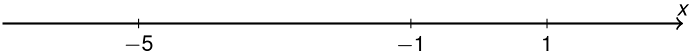
$$\frac{3(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$\frac{3x+3-2x+2}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$\frac{x+5}{(x+1)(x-1)} < 0$$

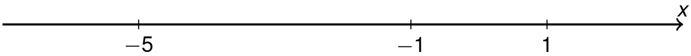
Hay 3 factores que se podrían hacer 0: $(x+5)$, $(x+1)$, $(x-1)$. Dónde?

Repasando...



	$(-\infty, -5)$	$x = -5$	$(-5, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x+5)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$		$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	$-$	$+$
$\frac{x+5}{(x+1)(x-1)}$					

Repasando...



	$(-\infty, -5)$	$x = -5$	$(-5, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x+5)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$		$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	$-$	$+$
$\frac{x+5}{(x+1)(x-1)}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

$$\frac{x+5}{(x+1)(x-1)} < 0 \Rightarrow (-\infty, -5) \cup (-1, 1)$$

Definición

Valor absoluto de a

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de un número es siempre ≥ 0:
$|7| = 7$ ya que $7 \geq 0$
$|-7| = -(-7) = 7$ ya que $-7 < 0$

Siempre podemos pensar el valor absoluto como una distancia (medida con una regla por ejemplo): es la distancia desde ese número al 0. Y las distancias son siempre positivas!

Teoremas

Teoremas:

1. $|a| = \sqrt{a^2}$
2. $|a|^2 = a^2$
3. $|a.b| = |a|.|b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. $|a - b| = |b - a|$

Ecuaciones - Ejercicio

$$|x+1| = 2$$

Por cada par de barras de módulo tendremos 2 casos (i.e, para “deshacernos” de las barras de módulo debemos reescribir 2 veces la ecuación original)

Ejercicio

$$|x+1| = 2$$

El miembro izquierdo de la ecuación será:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & si \quad x+1 < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
Ecuación a resolver

$$x+1 = 2$$

Solución:

$$x = 2-1$$

$$x = 1$$

Vive en el intervalo que estoy trabajando?
SÍ: $\Rightarrow x = 1$ es una solución

Caso 2: $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$
Ecuación a resolver

$$-(x+1) = 2$$

$$-x-1 = 2$$

$$-1-2 = x$$

$$-3 = x$$

Vive en el intervalo que estoy trabajando?
SÍ: $\Rightarrow x = -3$ es una solución

La solución final es la unión de las dos soluciones:
Solución: $x = -3$ **y** $x = 1$

Ejercicio 9b

$$|x-1| = 1-x$$

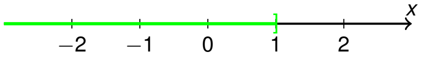
El miembro izquierdo de la ecuación será:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & si \quad x-1 < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
Ecuación a resolver
$x-1 = 1-x$
$x+x = 1+1$
$2x = 2 \Rightarrow x = 1$
Vive en el intervalo que estoy trabajando?
SÍ: $\Rightarrow x = 1$ es una solución

Caso 2: $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$
Ecuación a resolver
$-(x-1) = 1-x$
$-x+1 = 1-x$
$-x+x = 1-1$
$0 = 0$
Vale para cualquier x! PERO, estoy trabajando sobre un intervalo particular.
$\Rightarrow x < 1$ es un conjunto solución

La solución final es la unión de las dos soluciones:
Solución: $x = 1 \vee x < 1 = (-\infty, 1) \cup \{1\} = (-\infty, 1]$



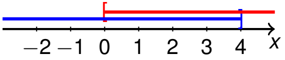
Inecuación

$$|x| \leq 4$$

El miembro izquierdo de la ecuación será:

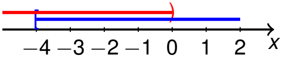
$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $x \geq 0$
Ecuación a resolver
$x \leq 4$
$(-\infty, 4]$
Vive en el intervalo que estoy trabajando?
PARCIALMENTE! $\Rightarrow$ Busco la intersección entre el intervalo solución y el de definición



Solución: $[0, 4]$

Caso 2: $x < 0$
Ecuación a resolver
$-x \leq 4$
$(-1).(-x) \geq (-1).4$
$x \geq -4$
$[-4, \infty)$
Vive en el intervalo que estoy trabajando?
PARCIALMENTE! $\Rightarrow$ Busco la intersección entre el intervalo solución y el de definición



Solución: $[-4, 0)$

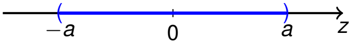
La solución final es la unión de las dos soluciones:

Solución: $[-4, 0) \cup [0, 4] = [-4, 4] = -4 \leq x \leq 4$

Generalización

|z|<a

Sea $a > 0$, un número z satisface la desigualdad $|z| < a$ sí y sólo sí $-a < z < a$

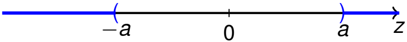


Solución: $(-a, a)$

(similarmente con $\leq$)

|z|>a

Sea $a > 0$, un número z satisface la desigualdad $|z| > a$ sí y sólo sí $z < -a \vee z > a$



Solución: $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

(similarmente con $\geq$)

Ejercicio 10c

$$|x+4|<1$$

(uso propiedad $|z|<a \Leftrightarrow -a<z<a$):

$$-1<x+4<1$$

(sumo -4 en todos lados):

$$-1-4<x+4-4<1-4$$

$$-5<x<-3$$

Solución= (-5,-3)

Ejercicio 10b

$$|x^2 - 1| \leq 1$$

(uso propiedad $|z| < a \Leftrightarrow -a < z < a$):

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1$$

$$-1 + 1 \leq x^2 - 1 + 1 \leq 1 + 1$$

$$0 \leq x^2 \leq 2$$

la desigualdad izquierda SIEMPRE se cumple ya que $x^2 \geq 0$ para todo x

$$x^2 \leq 2$$

Puedo resolverlo como en los ejercicios 6-7-8 de la guía, ó bien tomo raíz de ambos lados:

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{2}$$

Uso el teorema (1): $\sqrt{x^2} = |x|$

$$|x| \leq \sqrt{2}$$

Uso prop. $|z| < a \Leftrightarrow -a < z < a$:

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Solución: $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Ejercicio 9d

$$|x+1| > |x-3|$$

(ver video extra para la resolución usando la definición de valor absoluto)
Usaremos el teorema (2): $|a|^2 = a^2$, entonces elevo al cuadrado de ambos lados (la desigualdad se mantiene porque ambos miembros son positivos):

$$|x+1|^2 > |x-3|^2$$

$$(x+1)^2 > (x-3)^2$$

(cuadrado de binomios)

$$x^2 + 2x + 1 > x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 6x - 9 > 0$$

$$8x - 8 > 0 \Rightarrow 8x > 8 \Rightarrow x > 1$$

Solución: $(1, +\infty)$

Tarea...

Es posible resolver el 1er problema de esta clase de otra forma que involucre valor absoluto???

$$x^2 \geq 3$$