Clase 9 - Análisis Matemático 1 - LC: Límites II

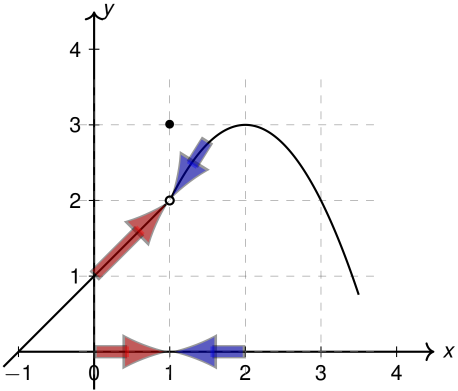
Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

15 de Abril de 2020

Índice

Límites (finitos) en un punto



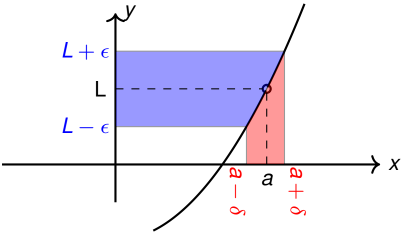
Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene al punto a, excepto quizás en $x = a$, Decimos que: el límite para x que tiende a a de $f(x)$ es el número L si para todo número $\epsilon > 0$, existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que si la distancia entre x y a es menor que δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \text{si } 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$



Si muevo x en el entorno (cercano) de a, la función está en el entorno (cercano) de L

Propiedades

1. Si $f(x) = c$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$
2. Si $f(x) = cx$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = ca$
3. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces:
   a. $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$
   b. $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = L.M$
   c. Si $M \neq 0$, $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$
   d. Si $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si n es par, L debe ser positivo)
4. Si $f(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$
5. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (quizás excepto en a), y además $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$ (Teorema del sandwich)

Muy útiles para calcular límites que involucren polinomios y operaciones entre polinomios!

- Si $p(x)$ es un polinomio, $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$
- Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios, y si $q(a) \neq 0$: $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$
- Si $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$: $\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt[n]{p(a)}$

Límites laterales

Límite por derecha

Decimos que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha si los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando nos acercamos a $x = a$ por valores más grandes (pero cercanos) que a: $L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

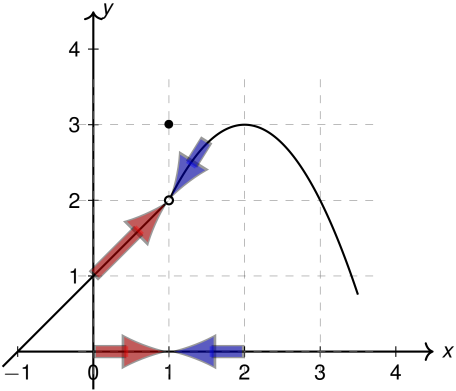
Límite por izquierda

Decimos que M es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda si los valores de $f(x)$ se aproximan a M cuando nos acercamos a $x = a$ por valores más chicos (pero cercanos) que a: $M = \lim_{x \to a^-} f(x)$

Teorema

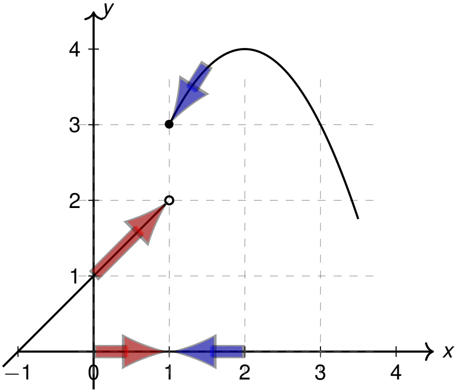
Sea una función definida en un intervalo abierto que contiene a a (excepto quizás en $x = a$), entonces: el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y vale L, sí y sólo sí existen ambos límites laterales y son iguales:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists$

Ejercicio 5a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{h^2}}{h}, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2}}{h}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h}$$

ya que el denominador se anula, no puedo usar propiedades!

$$\frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$|h| = \begin{cases} h & si \quad h \geq 0 \\ -h & si \quad h < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

- $$h \to 0^- \to h < 0$$
  $$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$
- $$h \to 0^+ \to h > 0$$
  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$
- $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} \to \nexists$$

Ejercicio 6a

Calcular $\lim_{x \to -1} f(x)$ sabiendo que $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2$

Propiedad 5) Teorema del Sandwich: Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (quizás excepto en a), y además $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x) \leq \lim_{x \to a} h(x) \to L \leq \lim_{x \to a} g(x) \leq L \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = L$

$\lim_{x \to -1} 1 = 1$

$\lim_{x \to -1} x^2 + 2x + 2 = (-1)^2 + 2.(-1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$

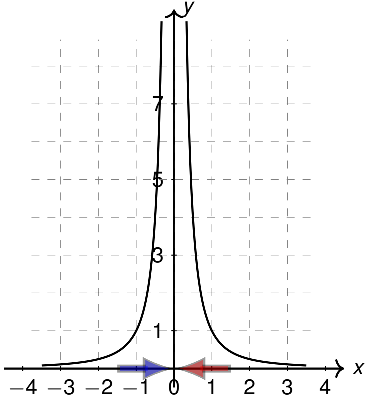
Por el teorema del sandwich, ya que $\lim_{x \to -1} 1 = 1 = \lim_{x \to -1} x^2 + 2x + 2$, entonces:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 1$$

Límites infinitos

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Qué pasa cuando x se acerca a 0?



x	y
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{\frac{1}{36}} = 36$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{\frac{1}{100}} = 100$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{\frac{1}{10000}} = 10000$

$f(x)$ es par por lo que $f(-x) = f(x)$

Qué pasa cuando x se acerca a 0? **f es más y más grande!**

los valores de f superan cualquier cota a medida que x se aproxima a 0

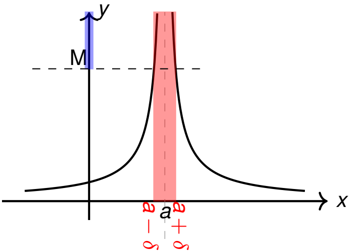
Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene al punto a (excepto quizás en $x = a$), decimos que el límite de f(x) para x que tiende a a tiende a ∞ si para cualquier número M, existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que si la distancia entre x y a es menor que δ, entonces $f(x)$ supera a la cota M

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

si

$$\forall\, M > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \text{si } 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M$$



Si muevo x en el entorno (cercano) de a, la función da más grande que M

Demostración por definición

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, queremos demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$
Es decir, dado $M > 0$ queremos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| < \delta$ (o de otra forma: si $x \in (-\delta, \delta) - \{0\}$), se cumpla que $f(x) > M$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > M \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M}$$

tomando raíz cuadrada de ambos lados

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{\frac{1}{M}} \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{M}}$$

Tomando $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$ entonces para los

$$x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{M}}, \sqrt{\frac{1}{M}}\right)$$

Se cumple que $f(x) > M$

Ejemplo: tomo $M = 100$, entonces si $x \in \left(-\sqrt{\dfrac{1}{100}}, \sqrt{\dfrac{1}{100}}\right)$, es decir si $-\dfrac{1}{10} < x < \dfrac{1}{10}$ se cumple que $\dfrac{1}{x^2} > 100$

Definición

De manera análoga podemos definir el concepto de

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

(Cuando x se acerca a a la función es más y más chica, i.e., es menor que cualquier cota negativa)

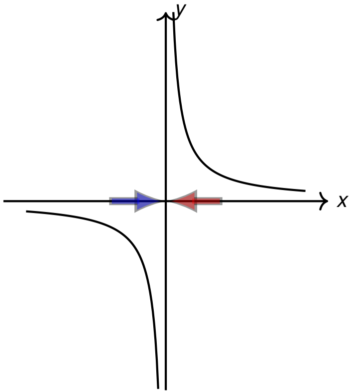
También, se puede definir los límites infinitos, en los laterales de a:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = ¿\pm?\infty$$

$$x \to 0^- \Rightarrow x < 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = ¿\pm?\infty$$

$$x \to 0^+ \Rightarrow x > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

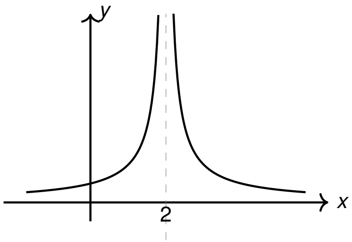
¿Qué podemos decir de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$? No es posible encontrar un intervalo abierto alrededor de $a = 0$ en donde siempre la $f(x) > M$ o $f(x) < -M$: $\nexists$ el límite

Asíntotas verticales

Asíntota vertical

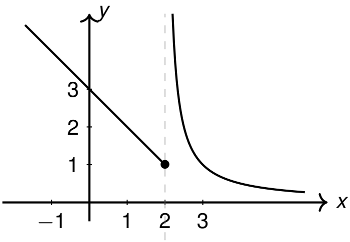
La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si **al menos uno** de los siguientes enunciados es verdadero:

$$i)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad ii)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad iii)\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad iv)\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$

$x = 2$ es A.V.



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$

$x = 2$ es A.V.

Ejercicio 8b

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$$

Determinar si tiene asíntotas verticales

Potenciales asíntotas verticales: puntos que no pertenecen al dominio de f o que son cortes de los tramos en una función por partes.

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Calcular:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x), \quad \lim_{x \to -1^+} f(x), \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x), \quad \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Ejercicio 8b

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1}$$

Empiezo con: $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{x^2+4}{x^2-1}$

El numerador no tiene problemas ($\to 5$), pero el denominador se anula ($\to 0$)

Al acercarme a $x = -1$ el denominador da *casi* 0, por lo que el cociente va a dar, o bien valores muy muy grandes (∞), o bien valores muy muy chicos ($-\infty$). **NO puedo saber a priori el signo del resultado!**

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+4}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+4}{(x-1)(x+1)}$$

$$x \to -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x+1 < 0$$

$$x \to -1^- \Rightarrow (x^2+4) \to 5 \qquad (x-1) \to -2 \qquad (x+1) \to 0 \text{ con } x+1<0$$

$$\frac{(+)}{(-).(-)} = (+) \qquad \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+4}{(x-1)(x+1)} = \infty \qquad x = -1 \text{ es asintota vertical}$$

Ejercicio 8b

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1}$$

Ahora: $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2+4}{x^2-1}$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+4}{x^2-1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+4}{(x-1)(x+1)}$$

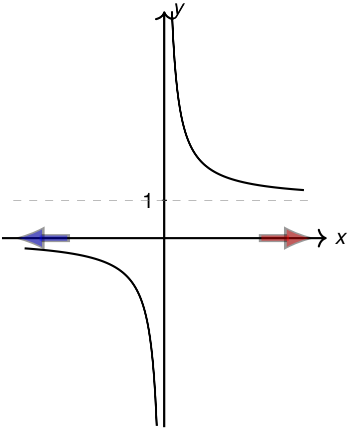
$$x \to -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$$

$x \to -1^+ \Rightarrow (x^2+4) \to 5$ $\quad (x-1) \to -2$ $\quad (x+1) \to 0 \text{ con } x+1 > 0$

$\frac{(+)}{(-).(+)} = (-)$ $\quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2+4}{(x-1)(x+1)} = -\infty$ $\quad x = -1 \text{ es asintota vertical}$

Tarea: Falta calcular $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

¿Qué pasa cuando la variable x es muy grande (en valor absoluto)?



x	y
100	$\frac{1}{100} = 1.01$
1000	$\frac{1}{1000} = 1.001$
10000	$\frac{1}{10000} = 1.0001$
-100	$\frac{1}{-100} = -0.01$
-1000	$\frac{1}{-1000} = -0.001$
-10000	$\frac{1}{-10000} = -0.0001$

Si x es muy muy grande (+), f se acerca a 1:

$$x \to +\infty \Rightarrow f \to 1$$

Si x es muy muy chico (-), f se acerca a 0:

$$x \to -\infty \Rightarrow f \to 0$$

Límites cuando la variable tiende a infinito

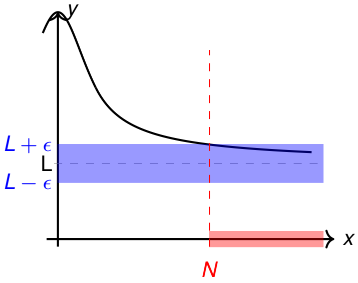
$x \to +\infty$

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, ∞), decimos que: el límite para x que tiende a ∞ de $f(x)$ es el número L si para todo número $\epsilon > 0$, existe una correspondiente "cota" N tal que si la x supera cualquier cota, la $f(x)$ se aproxima a L a una distancia menor que ϵ

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

si

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N > 0 \,/\, \text{si } x > N \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$



Límites en infinitos

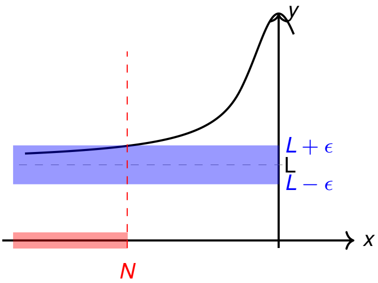
$x \to -\infty$

Sea f una función definida en un intervalo abierto $(-\infty, a)$, decimos que: el límite para x que tiende a $-\infty$ de $f(x)$ es el número L si para todo número $\epsilon > 0$, existe una correspondiente "cota" N (negativa) tal que si la x es más chica que cualquier cota, la $f(x)$ se aproxima a L a una distancia menor que ϵ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N < 0 \,/\, \text{si } x < N \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$



Propiedades

Valen las mismas propiedades enunciadas para cuando x tiende hacia algún valor finito (reemplazando $x \to a$ por $x \to \infty$ o $x \to -\infty$)
Si los límites de f y g son finitos (L y M) cuando la variable tiende a ∞ o a $-\infty$:

1. El límite de una constante es la constante
2. El límite de la suma es la suma de los límites
3. El límite del producto es el producto de los límites
4. El límites del cociente es el cociente de los límites siempre que el límite del denominador no sea 0
5. El límite de la radicación de una función es la raíz del límite de la función (cuidado con las raíces pares)
6. Teo del sandwich

Agregamos una más:

7. Si $r > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

Ejemplos

$f(x) = 2 + \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$, calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Si tomamos $g(x) = 2$ y $h(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$ analizamos:

$$\lim_{x \to -\infty} 2 = 2 \text{ por (1) limite de constante es constante}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{x}} = 0 \text{ por (7) limite de } \frac{c}{x^r} \text{ es 0 si } x \to -\infty$$

Ambos existen y son finitos, entonces por (2) limite de suma es suma de límites

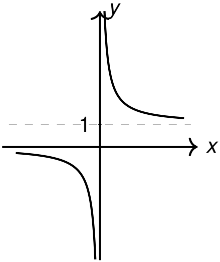
$$\lim_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right) = \lim_{x \to -\infty} 2 + \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{x}} = 2 + 0 = 2$$

Asíntotas horizontales

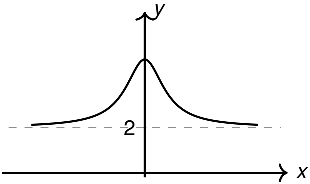
Asíntota horizontal

La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de la gráfica de una función f si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$(i) \lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad o \qquad (ii) \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$



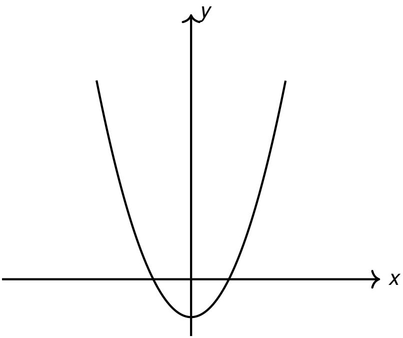
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ es A.H.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ es A.H.



$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ es A.H.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ es A.H.

Volvamos a preguntarnos qué pasa en algunas funciones cuando x es muy grande (en valor absoluto)

$$f(x) = x^2 - 1$$



Si x es muy grande, f es muy grande: $x \to +\infty \Rightarrow f \to \infty$
Si x es muy chico, f es muy grande: $x \to -\infty \Rightarrow f \to \infty$

Límite infinito cuando la variable tiende a infinito

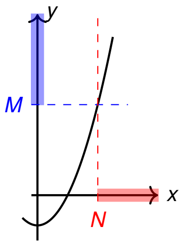
$x \to \infty, \; f \to \infty$

Sea una función definida en un intervalo (a, ∞), decimos que el límite para x que tiende a infinito tiende a infinito si para cualquier $M > 0$ hay un correspondiente $N > 0$ tal que si x supera a la cota N, entonces f supera a la cota M

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

si

$$\forall\, M > 0, \exists\, N > 0 \,/\, \text{si } x > N \Rightarrow \; f(x) > M$$



Límite infinito cuando la variable tiende a infinito

$x \to \infty,\ f \to -\infty$

Sea una función definida en un intervalo (a, ∞), decimos que el límite para x que tiende a infinito tiende a $-\infty$ si para cualquier $M > 0$ hay un correspondiente $N > 0$ tal que si x supera a la cota N, entonces f es menor que la cota $-M$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall\, M > 0, \exists\, N > 0 \,/\, \text{si } x > N \Rightarrow\ f(x) < -M$$

$x \to -\infty,\ f \to \infty$

Sea una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$, decimos que el límite para x que tiende a $-\infty$ tiende a ∞ si para cualquier $M > 0$ hay un correspondiente $N > 0$ tal que si x es menor a la cota $-N$, entonces f es supera a la cota M

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ si } \forall\, M > 0, \exists\, N > 0 \,/\, \text{si } x < -N \Rightarrow\ f(x) > M$$

$x \to -\infty,\ f \to -\infty$

Sea una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$, decimos que el límite para x que tiende a $-\infty$ tiende a $-\infty$ si para cualquier $M > 0$ hay un correspondiente $N > 0$ tal que si x es menor a la cota $-N$, entonces f es menor que la cota $-M$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ si } \forall\, M > 0, \exists\, N > 0 \,/\, \text{si } x < -N \Rightarrow\ f(x) < -M$$

Reglas (evidentes)

Sumas y restas

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$ finito,
  $\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty$
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, $\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty$

Productos

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$ finito y no nulo,
  $\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \pm\infty$ (depende el signo de L)
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, $\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \pm\infty$
  (depende de los signos de cada función)

Cocientes

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$ finito y no nulo,
  $\Rightarrow \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \pm\infty$ (depende el signo de L)
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, $\Rightarrow \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \pm 0$
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $\Rightarrow \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \pm\infty$
  (depende el signo de las funciones)

Válidas para $x \to a$ (límite en un punto) y para $x \to \pm\infty$ (límite en el infinito)

Ejemplo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3}{x^2+1}$$

Primer intento: calculamos el límite del numerador y del denominador. $\frac{-\infty}{\infty}$ No me sirve para usar propiedades

(saco factor común – en num y en el denom– el x con el exponente más grande del polinomio de grado más chico (x^2), u otra opción podría ser sacar x con el exponente del grado más alto entre los dos(x^3))

$$\frac{x^3-3}{x^2+1}=\frac{x^2(x-\frac{3}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\frac{x-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Vuelvo a intentar con num y denom:

$$\lim_{x\to-\infty}x-\frac{3}{x^2}=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

Ejercicio (englobador)

Determinar si el gráfico de la f tiene asíntotas verticales y/o horizontales

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 + x}$$

A.V:
Potenciales: puntos que no están en el dominio de f
Calcular todos los límites laterales alrededor de los puntos que NO están en *Dom f*
Si alguno de los límites laterales tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, la recta $x = x_{out}$ es A.V

A.H:
Calcular Límites de f(x) cuando la variable tiende a ∞ y a $-\infty$
Si alguno de los resultados es un número L (finito), entonces $y = L$ es A.H.

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+x}$$

A.V?

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f\,\exists\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^3 + x \neq 0\}$$

$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 = -1$
No existen $x^2 = -1$ por que $x^2 \geq 0$ siempre!

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$$

1. $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+1}{x(x^2+1)} = \lim_{\underbrace{x \to 0^-}_{x<0}} \frac{\overbrace{x^3+1}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0(-)}\ \underbrace{x^2+1}_{\to 1}}$$

ya que sólo un factor en el denom $\to 0$, y los otros son constantes, el resultado será $+\infty$ ó $-\infty$. Analizamos signos:

$$\frac{(+)}{(-).(+)} = (-) \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Por lo tanto: $x = 0$ es A.V

TAREA: CALCULAR EL OTRO LÍMITE LATERAL

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+x}$$

A.H.?

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x}$
   si evaluamos el cociente $\to \frac{\infty}{\infty}$ trabajamos un poco

$$\frac{x^3+1}{x^3+x} = \frac{x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

   $y = 1$ es A.H.

2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x}$
   si evaluamos el cociente $\to \frac{-\infty}{-\infty}$ trabajamos un poco

$$\frac{x^3+1}{x^3+x} = \frac{x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

   $y = 1$ es A.H.

Índice