

Clase 2 - Análisis Matemático 1 - LC: Desigualdades e Inecuaciones

Eugenia Díaz-Giménez¹

eugenia.diaz@unc.edu.ar

18 de Marzo de 2020

Índice

1 Propiedades básicas de los números

■ Desigualdades

2 Inecuaciones

Repasando...

Propiedades de los números reales

- P1. Propiedad asociativa de la suma: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- P2. Elemento neutro para la suma: $a + 0 = 0 + a = a$
- P3. Existencia del opuesto para la suma: $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- P4. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a$
- P5. Propiedad asociativa del producto: $a.(b.c) = (a.b).c$
- P6. Elemento neutro para el producto: $a.1 = 1.a = a$
- P7. Existencia del inverso multiplicativo: $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$
- P8. Propiedad conmutativa del producto: $a.b = b.a$
- P9. Multiplicación por 0 : $a.0 = 0.a = 0$
- P10. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $a.(b + c) = a.b + a.c$
- P11. Propiedad distributiva de la potencia con respecto al producto: $(a.b)^n = a^n.b^n$
- P12. Producto de potencias de igual base: $a^n.a^m = a^{n+m}$
- P13. Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$
- P14. Cuadrado de un binomio: $(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$



Repasando...

Propiedad Uniforme:

si efectuamos la misma operación de ambos lados de una **ecuación**, la igualdad se mantiene

- Sumar (restar) el mismo número de ambos miembros
- Multiplicar (dividir) el mismo número de ambos miembros ($\neq 0$)
- Elevar a una potencia a ambos miembros

Más propiedades...

Tomando el conjunto de **números positivos**, llamado P :

- 1 Ley de tricotomía: Todo número a cumple **una y sólo una** de las siguientes condiciones
 - i. $a = 0$
 - ii. a pertenece a P (a es positivo)
 - iii. $-a$ pertenece a P (el opuesto de a es positivo)
- 2 La suma es cerrada en P : Si a y b pertenecen a P , entonces $(a+b)$ pertenece a P
 (Si $a \in P$ y $b \in P \Rightarrow (a+b) \in P$ ó Si $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a+b > 0$)
- 3 La multiplicación es cerrada en P : Si $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

ATENCIÓN:

$a > b$ Se lee “ a es mayor que b ”, que es lo mismo que $b < a$ (“ b es menor que a ”)

$a \geq b$ Se lee “ a es mayor ó igual que b ”, y significa que o bien a es mayor que b , ó bien (excluyente) a es igual a b : $a > b \vee a = b$.

Definimos:

Si $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

Si $b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$

1 Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Demostración:

Por la definición: $a > b \rightarrow a - b > 0$, y $b > c \rightarrow b - c > 0$

Por la propiedad (suma cerrada en P):

$$(a - b) + (b - c) > 0 \Rightarrow a - b + b - c > 0$$

(suma del opuesto = 0): $a - c > 0$ por la definición: $a > c$

Definimos:

$$\text{Si } a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$$

$$\text{Si } b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$$

$$1 \quad \text{Si } a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$$

$$2 \quad \text{Si } a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c \text{ (ó } a < b < c)$$

$$3 \quad \text{Si } a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

Demostración:

$$a - b > 0 \text{ y } c > 0$$

$$\text{Producto cerrado en } \mathbb{P}: (a - b) \cdot c > 0$$

$$\text{Prop. Distrib.: } a \cdot c - b \cdot c > 0$$

$$\text{Por definición: } a \cdot c > b \cdot c$$

Definimos:

$$\text{Si } a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$$

$$\text{Si } b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$$

$$1 \quad \text{Si } a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$$

$$2 \quad \text{Si } a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c \text{ (ó } a < b < c)$$

$$3 \quad \text{Si } a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

$$4 \quad \text{Si } a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

Demostración:

$$a - b > 0 \text{ y } -c > 0$$

$$\text{Producto cerrado: } (a - b) \cdot (-c) > 0$$

$$\text{Prop. Dist. } -ac + bc > 0 \rightarrow bc - ac > 0$$

$$\text{Por definición: } ac < bc$$

$$\text{Ejemplo: } 3 > 2 \text{ y } -1 < 0$$

Multiplico de ambos lados por (-1) y doy vuelta la desigualdad:

$$3 \cdot (-1) < 2 \cdot (-1)$$

$$-3 < -2 \text{ Verdadero!!!}$$

Definimos:

$$\text{Si } a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$$

$$\text{Si } b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$$

$$\mathbf{1} \quad \text{Si } a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$$

$$\mathbf{2} \quad \text{Si } a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c \text{ (ó } a < b < c \text{)}$$

$$\mathbf{3} \quad \text{Si } a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

$$\mathbf{4} \quad \text{Si } a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

Inecuaciones

Una inecuación involucra una incógnita y una desigualdad

Ejemplos:

$$x < 7$$

$$x + 3 \geq 2$$

$$(x - 1) \cdot (x + 2) > 0$$

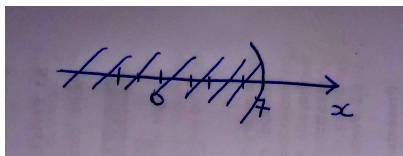
La solución de una inecuación será un rango o conjunto de valores

Usaremos notación de conjuntos para dar la solución (ver curso de nivelación), ya sea por comprensión o como intervalos.

Ejercicios

Expresar el conjunto solución como intervalos:

$$x < 7$$

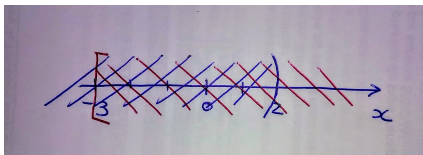


Solución: $(-\infty, 7)$

Ejercicios

Expresar el conjunto solución como intervalos:

$$x < 2 \wedge x \geq -3$$



Solución: $[-3, 2)$

Ejercicios

Expresar el conjunto solución como intervalos:

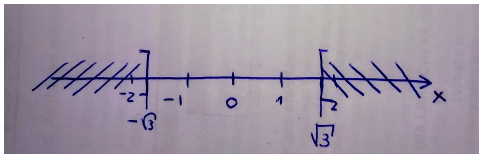
$$x^2 \geq 3$$

$$x^2 - 3 \geq 0$$

$$(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \geq 0$$

Ambos positivos (+). (+) > 0 o Ambos negativos (-). (-) > 0

$$(x - \sqrt{3} \geq 0 \wedge x + \sqrt{3} \geq 0) \vee (x - \sqrt{3} \leq 0 \wedge x + \sqrt{3} \leq 0)$$



Solución: $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$