Clase 5 - Análisis Matemático 1 - LC: Funciones II

Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

25 de Marzo de 2020

Índice

Definición

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A un **ÚNICO** elemento de un conjunto B

Dominio

Es el subconjunto de todos los valores x del conjunto de salida en los cuales la función está definida

$$Dom\, f = \{x \in A \,/\, \exists\, f(x)\}$$

Imagen

Es el subconjunto de todos los valores y del conjunto de llegada que puede llegar a tomar la función

$$Im\, f = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in A, f(x) = y\}$$

Ecuación de una recta

$$y = ax + b$$

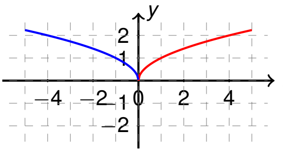
a=pendiente, b= ordenada al origen
Rectas paralelas: $a_1 = a_2$, Rectas perpendiculares: $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Transformaciones a partir de $f(x)$

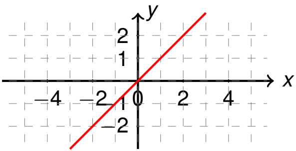
- **desplazamientos** (horizontal: $f(x+a)$, vertical: $f(x)+a$)
- **rotaciones** ($f(-x)$ es una rotación respecto del eje y, $-f(x)$ es una rotación respecto del eje x
- **reflexiones** ($f(|x|)$ para los $x<0$ es un reflejo respecto del eje y de la parte de la función definida para $x>0$, $|f(x)|$ para los $y<0$ se los hace rotar con respecto al eje x para que sean positivos)
- **compresión y estiramiento** ($f(ax)$ se comprime/estira el gráfico sobre el eje x un factor $\frac{1}{a}$, queda fijo $f(0)$; $af(x)$ se estira/comprime el gráfico sobre el eje y un factor a, quedan fijas las raíces, $f(x)=0$)

Ejemplo

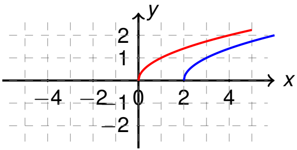
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & si \quad x < 0 \\ x & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$



$F(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = F(-x)$



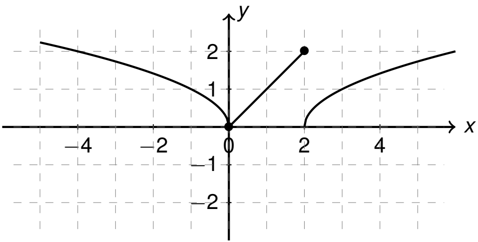
$F(x) = x \rightarrow f(x) = F(x)$



$F(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = F(x-2)$

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & si \quad x < 0 \\ x & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$



Función par e impar: definición

Función Par

Una función se dice par si $f(-x) = f(x)$

Función Impar

Una función se dice impar si $f(-x) = -f(x)$

Ejemplos

1. Determinar si $f(x) = x^2$ es par, impar o ninguna

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x)$$

Por lo tanto $f(x) = x^2$ es par

2. Determinar si $f(x) = x^3$ es par, impar o ninguna

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -1\, x^3 = -x^3 = -f(x)$$

Por lo tanto $f(x) = x^3$ es impar

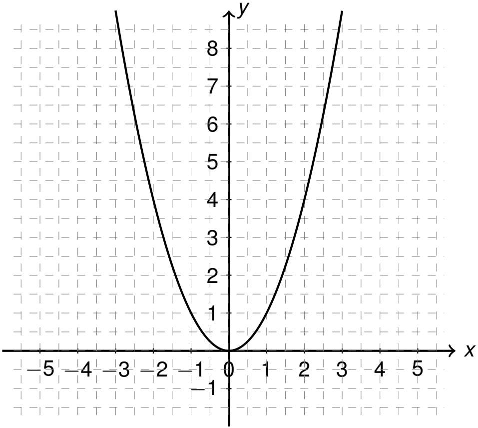
3. Determinar si $f(x) = x + x^2$ es par, impar o ninguna

$$f(-x) = (-x) + (-x)^2 = -x + x^2 = -(x - x^2)$$

Por lo tanto $f(x) = x + x^2$ no es par ni impar.

Función par e impar: gráficos

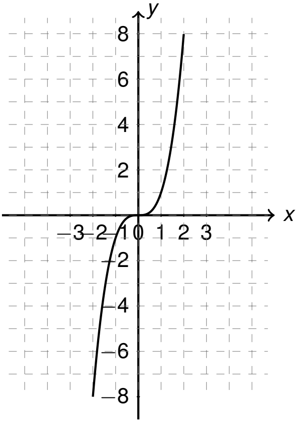
Función Par: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$



después de hacer una rotación en el eje vertical sigue quedando igual! Las funciones pares son simétricas respecto del eje vertical

Función par e impar: gráficos

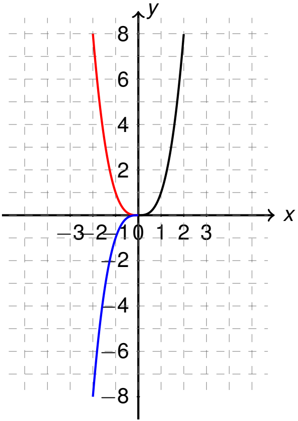
Función Impar: $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$



Para dibujar la función para $x < 0$ hago un reflejo respecto del eje vertical y luego un reflejo con respecto al eje horizontal.

Función par e impar: gráficos

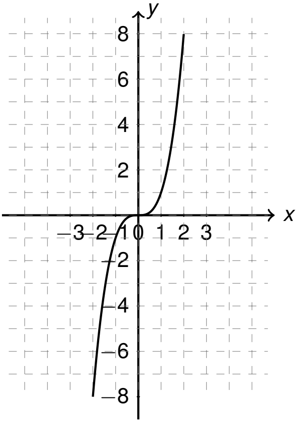
Función Impar: $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$



Para dibujar la función para $x < 0$ hago un reflejo respecto del eje vertical y luego un reflejo con respecto al eje horizontal.

Función par e impar: gráficos

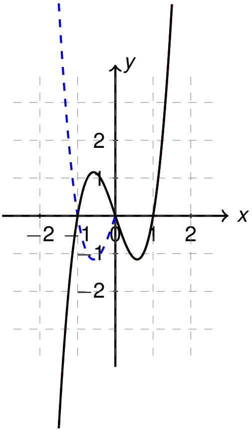
Función Impar: $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$



Para dibujar la función para $x < 0$ hago un reflejo respecto del eje vertical y luego un reflejo con respecto al eje horizontal.

Función par e impar: gráficos

Función Impar: $f(-x) = -f(x)$



Para dibujar la función para $x < 0$ hago un reflejo respecto del eje vertical y luego un reflejo con respecto al eje horizontal.

Composición de funciones

¿Qué es evaluar una función en un punto?

$$f(x) = 3.x + 7$$

Evaluar en $x = 2$

$$f(2) = 3.2 + 7 = 6 + 7 = 13$$

Evaluar en el punto t+1

$$f(t + 1) = 3.(t + 1) + 7$$

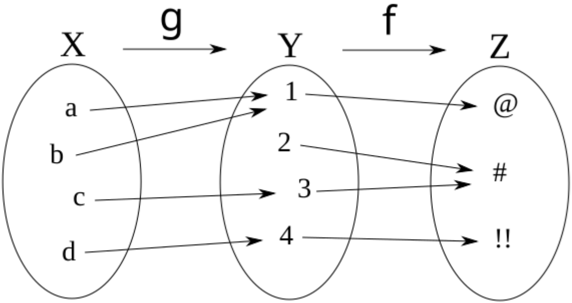
Evaluar en g(x)

$$f(g(x)) = 3.g(x) + 7$$

Composición de funciones

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, definimos

$$(f\,o\,g)(x) = f(g(x))$$



$$g(a) = 1 \quad f(1) = @ \quad \Rightarrow f(g(a)) = @$$

$$Dom\,(f\,o\,g) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in Dom\,g(x) \wedge g(x) \in Dom\,f(x)\} = Dom\,f(g(x)) \cap Dom\,g(x)$$

Ejemplo

Sean $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Calcular $(f\,o\,g)$ y dar su dominio

$$(f\,o\,g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$Dom(f\,o\,g) = Dom\,f(g(x)) \cap Dom\,g(x)$$

$$Dom\,f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0 \wedge x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\} = (0, +\infty)$$

$$Dom\,g(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

$$Dom(f\,o\,g) = Dom\,f(g(x)) \cap Dom\,g(x) = (0, +\infty) \cap [0, +\infty) = (0, +\infty)$$

Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcular $(f\ o\ f)$ y dar su dominio

$$(f\ o\ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$Dom(f\ o\ f) = Dom\, f(f(x)) \cap Dom\, f(x)$$

$$Dom\, f(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$Dom\, f(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$Dom(f\ o\ f) = Dom\, f(f(x)) \cap Dom\, f(x) = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Función inyectiva y sobreyectiva

Inyectivas

Una función $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ se dice **inyectiva** si no hay dos elementos del dominio de f con igual imagen. Es decir, si

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ej:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \vee \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 = -x_2$$

Por lo tanto: $f(x) = x^2$ NO es inyectiva. Gráficamente: una recta horizontal debe cortar un único punto a la curva para que sea inyectiva

Función inyectiva y sobreyectiva

Sobreyectiva (o suryectiva)

Una función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ se dice **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto de llegada es un elemento de la imagen de f. Es decir, si

$$\mathbb{B} = Im\, f$$

Ej:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\; f(x) = x^2$$

Ya que $y = x^2 \geq 0 \Rightarrow Im\, f = [0, +\infty)$
Y el conjunto de llegada es $\mathbb{R}$
Por lo tanto: $f(x) = x^2$ NO es sobreyectiva

Biyectiva

Una función se dice **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva

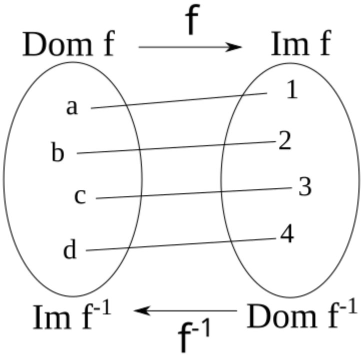
Función inversa

Función Inversa

Si una función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es **biyectiva**, entonces tiene inversa y se llama f^{-1}. Se define de manera que

$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$$

Si $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$



Ejemplo

Decidir si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$ tiene inversa, y de ser posible, calcularla.
Es inyectiva?

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$$

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3}$$

$$x_1 = x_2$$

f es inyectiva
Es sobreyectiva? Del gráfico de la función elemental x^3, debo desplazarla 1 unidad hacia abajo. Qué valores de y toma? $Im\, f = \mathbb{R} \Rightarrow$ f es sobreyectiva

f es biyectiva $\Rightarrow$ TIENE INVERSA

Ejemplo

Decidir si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$ tiene inversa, y de ser posible, calcularla.

forma 1 definición: $f(f^{-1}(x)) = x$

$$f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^3 - 1 = x$$

$$(f^{-1}(x))^3 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

forma 2 despejo x en función de y

$$y = x^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad y + 1 = x^3$$

$$\sqrt[3]{y+1} = x$$

Cambio los nombres: $x \to f^{-1}$, $y \to x$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

FIN