Clase 10 - Análisis Matemático 1 - LC: Continuidad I

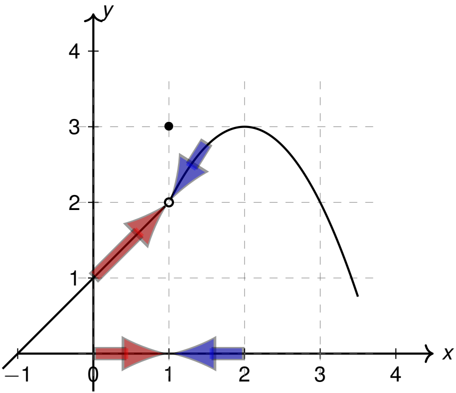
Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

22 de Abril de 2020

Índice

Repaso: Límite en un punto



$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

- $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene al punto a, quizás excepto en a
- NO IMPORTA cuánto vale $f(x)$ en $x = a$, sino cómo se comporta en un **entorno** de a
- $f(a)$ no está relacionado con $\lim_{x\to a} f(x)$

Continuidad en un punto

Definición

Una función f es continua en un número a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Se deben cumplir las siguientes 3 características:

1. f debe estar definida en $x = a$
2. Tiene que existir el límite de f alrededor de a
   a. f está definida en un intervalo abierto que contiene a a
   b. los límites laterales son iguales: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$
3. Deben coincidir el valor del límite y el valor de la función en el punto $((1) = (2))$

1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Si alguno de los 3 items NO se cumple, decimos que **f es discontinua en a**

Ejemplos

1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$
2. $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 1 \\ 2-x & si \quad x < 1 \end{cases}$$

¿es $g(x)$ continua en $a = 1$?

1. $x = 1 \in Dom\, g$, $g(1) = 1^2 = 1$ ✔
2. $\lim_{x\to 1} g(x)$?

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} 2 - x = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$$

$\exists \lim_{x\to 1} g(x) = 1$ ✔

3. $g(a) = 1 = \lim_{x\to 1} g(x)$ ✔

$g(x)$ **es continua en** $a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x < 1 \\ 3 & si \quad x = 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

¿Es f(x) continua en $a = 1$?

1. $x = 1 \in Dom\, f$, $f(1) = 3$ ✔
2. $\lim_{x\to 1} f(x)$?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x + 1 = 2$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x^2 + 4x - 1 = -(1)^2 + 4(1) - 1 = 2$
$\exists \lim_{x\to 1} f(x) = 2$ ✔

3. $f(a) = 3 \neq 2 = \lim_{x\to 1} f(x)$ ✗

$f(x)$ **NO es continua en** $a = 1$

Ejemplos

1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \leq 1 \\ -x^2 + 4x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

¿es $g(x)$ continua en $a = 1$?

1. $x = 1 \;\in Dom\, g,\; g(1) = 1 + 1 = 2$ ✔
2. $\lim_{x \to 1} g(x)$?

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} x + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} -x^2 + 4x = -(1^2) + 4.1 = 3$$

$$\nexists \lim_{x \to 1} g(x)$$ ✗

$g(x)$ **NO es continua en** $a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

¿Es f(x) continua en $a = 1$?

1. $x = 1 \;\in Dom\, f,\; f(1) = 1 + 1 = 2$ ✔
2. $\lim_{x \to 1} f(x)$?

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} =$$

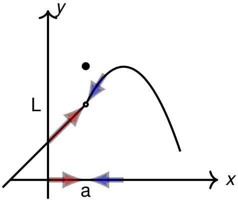
$$\lim_{\underbrace{x \to 1^+}_{x>1 \to x-1>0}} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to 0} = +\infty$$

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$ ✗

$f(x)$ **NO es continua en** $a = 1$

Tipos de discontinuidad

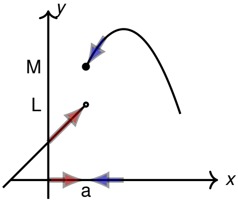
1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$ ✔✗
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ ✔
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ ✗



DISCONTINUIDAD EVITABLE
(la evito redefiniendo f(a)=L)

1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$ ✔✗
2. $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ ✗

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \neq M = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

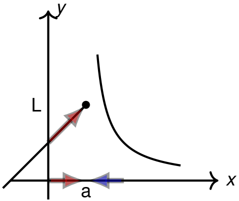


DISCONTINUIDAD DE SALTO

1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$ ✔✗
2. $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ ✗

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad o\ bien$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$



DISCONTINUIDAD ESENCIAL

(Una función es continua si puedo dibujarla sin levantar nunca el lápiz)

Continuidad lateral

Continua por izquierda

Una función es continua por izquierda en un número a si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Continua por derecha

Una función es continua por derecha en un número a si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \leq 1 \\ -3 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

f es continua por izquierda en $a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

f es continua por derecha en $a = 0$

Si f es continua en a, entonces es continua por derecha y por izquierda en el punto a

Continuidad en intervalo

f es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todo número del intervalo

f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si :

- es continua en todo número del intervalo abierto (a, b),
- es continua por derecha en a, y
- es continua por izquierda en b

(similarmente se puede definir continuidad en $(a, b]$ o en $[a, b)$)

Propiedades de funciones continuas

Sean f y g continuas en a, entonces también son continuas en a las siguientes funciones:

1. $(f+g)(x)$
2. $(f.g)(x)$
3. $c.f(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, si $g(a) \neq 0$
5. $(f\, o\, g)(x)$, si f es continua en $g(a)$

a cualquier punto en el dominio (sin los extremos):

- Los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$
- Toda función racional es continua en cualquier punto **de su dominio**
- La radicación es continua en los puntos de su dominio (sin extremos)
- Las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$

Ejercicio 3 (similar) - Continuidad en un punto

Usando definición de cont. y props de límites: demostrar que f es continua en a:

$$f(x) = \sqrt[3]{3.x^2}\ ,\ a = 3$$

1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ ✔

$$Dom\, f = \mathbb{R} \quad f(3) = \sqrt[3]{3.(3^2)} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ ✔}$$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{3x^2} \underbrace{=}_{prop.\ raiz} \sqrt[3]{\lim_{x \to 3} 3x^2} \underbrace{=}_{prop.\ poli} \sqrt[3]{3.3^2} = 3 \text{ ✔}$$

$f(x)$ es continua en $a = 3$

Ejercicio 4 (similar) - Continuidad en un intervalo

Usando props. de continuidad, demostrar que f es continua en el intervalo dado:

$f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ *en* $[-1, 1]$

f es suma de dos funciones: $g(x) = x$ y $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $(-1, 1)$

$h(x)$ es composición de funciones: $j(x) = \sqrt{x}$ y $m(x) = 1 - x^2$, tal que $h(x) = j(m(x))$

- $m(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
- *Dom* $h(x) = \{x \in \ / \ 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \ / \ (1 - x)(1 + x) \geq 0\}$
$(1 - x \geq 0 \ \wedge \ 1 + x \geq 0) \vee (1 - x \leq 0 \wedge 1 + x \leq 0) \Rightarrow x \in [-1, 1]$
- $h(x)$ es composición de funcs continuas $\underbrace{\rightarrow}_{\textit{prop compo.}}$ es continua en $(-1, 1)$

Ya que $g(x)$ es continua en $(-1, 1)$ y $h(x)$ es continua en $(-1, 1)$

$\underbrace{\Rightarrow f(x) = g(x) + h(x)}_{\textit{Prop suma cont.}}$ **es continua en $(-1, 1)$**

Veamos en los extremos:

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x + \sqrt{1 - x^2} = -1 = f(-1)$ **Es continua por derecha en $a = -1$**

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x + \sqrt{1 - x^2} = 1 = f(1)$ **Es continua por izquierda en $a = 1$**

$$\boxed{f(x) \textbf{ es continua en } [-1, 1]}$$

Atención

Si me piden demostrar o decidir sobre la continuidad de una función en UN PUNTO DADO:

1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Si me preguntan en qué puntos es discontinua una función:

1. determinar el dominio
2. determinar continuidad en intervalos abiertos (con propiedades)
3. decidir sobre la continuidad en los puntos extremos de los intervalos (si hubiera), utilizando los 3 items de def. de continuidad en un punto .
4. expresar qué tipo de discontinuidad encontramos (evitable, salto o esencial)

Ejercicio 7 (similar) - extensión continua

Dada la función f, dar su dominio y determinar si se puede definir una g(x) cuyo dominio sea $\mathbb{R}$ y que coincida con f(x) en el dominio de f.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$
¿qué le pasa a la función cerca de x=1?

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^2 - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x - 1}_{\to 0}} \to \frac{0}{0} \; INDETERMINADO$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Discontinuidad evitable!

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in Dom\, f \\ \lim_{x\to a} f(x) & si \quad x = a \notin Dom\, f \end{cases}}$$

Tarea

Analizar continuidad y si tiene discontinuidades, clasificarlas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & si \quad x \leq 1 \\ \frac{1-x}{x} & si \quad 1 < x \leq 3 \\ \frac{2x}{x-5} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Ayudas:
Cuál es el Dominio de f?
qué pasa en los puntos que sí pertenecen al dominio (intervalos!)?
qué pasa en los puntos que no pertencen al dominio?
qué pasa en los puntos de corte de las partes?

parte de la Solución: `https://www.youtube.com/watch?v=vF-Kz2nLJPU`

FIN