Clase 1 - Análisis Matemático 1 - LC: Ecuaciones

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

17 de Marzo de 2021

Índice

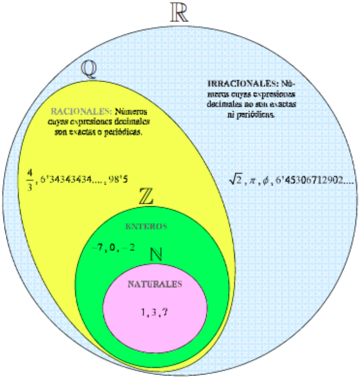
Naturales: $\mathbb{N}$ = usamos para contar. Ejemplos $1, 2, 3, 4, ...$

Enteros: $\mathbb{Z}$ = incluye enteros negativos, enteros positivos (naturales) y el cero. Ejemplos: $-3, 0, 2, 1000, ...$

Racionales: $\mathbb{Q} = \{r = \frac{m}{n} \ / \ m \wedge n \in \mathbb{Z} \ \& \ n \neq 0\}$

Irracionales: $\mathbb{I}$ = tienen infinitos decimales no periódicos. Ejemplos: $\sqrt{2}$, π, e

Reales: $\mathbb{R}$ = es la unión de los racionales e irracionales



Operaciones matemáticas en los reales:

- Suma (resta)
- Producto (división)
- Potencia (radicación)

Propiedades de la Suma

P1. Propiedad asociativa de la suma

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

P2. Elemento neutro para la suma

$$a + 0 = 0 + a = a$$

P3. Existencia del opuesto para la suma

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

P4. Propiedad conmutativa de la suma

$$a + b = b + a$$

Propiedades del Producto

P5. Propiedad asociativa del producto

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

P6. Elemento neutro para el producto

$$a.1 = 1.a = a$$

P7. Existencia del inverso multiplicativo

$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$$

P8. Propiedad conmutativa del producto

$$a.b = b.a$$

P9. Multiplicación por 0

$$a.0 = 0.a = 0$$

Otras propiedades

Otras propiedades

P10. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

P11. Propiedad distributiva de la potencia con respecto al producto

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

P12. Producto de potencias de igual base

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$

P13. Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$$

P14. Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Resumen

P1. Propiedad asociativa de la suma $a + (b + c) = (a + b) + c$
P2. Elemento neutro para la suma: $a + 0 = 0 + a = a$
P3. Existencia del opuesto para la suma: $a + (-a) = (-a) + a = 0$
P4. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a$
P5. Propiedad asociativa del producto: $a.(b.c) = (a.b).c$
P6. Elemento neutro para el producto: $a.1 = 1.a = a$
P7. Existencia del inverso multiplicativo: $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$
P8. Propiedad conmutativa del producto: $a.b = b.a$
P9. Multiplicación por 0 : $a.0 = 0.a = 0$
P10. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $a.(b + c) = a.b + a.c$
P11. Propiedad distributiva de la potencia con respecto al producto: $(a.b)^n = a^n.b^n$
P12. Producto de potencias de igual base: $a^n.a^m = a^{n+m}$
P13. Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$
P14. Cuadrado de un binomio: $(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Expresiones algebraicas y ecuaciones

Expresión algebraica

es aquella en la que aparecen letras y números vinculados a través de operaciones matemáticas

$$a + b \ ; \quad x^3 + 41 \ ; \quad a^2 + 2ab + b^2$$

Ecuación

es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que involucra una o más incógnitas. La igualdad es válida sólo para un (o algunos) valor de la incógnita

$$y + 3 = 7 \ ; \quad x^2 - ax = 0 \ ; \quad ax^2 + bx + c = 0 \ ; \quad A = L^2$$

Resolución de ecuaciones

Propiedade Uniforme

Si aplicamos la misma operación de ambos lados de una ecuación, entonces se mantiene la igualdad

Operaciones que podemos aplicar:

- Sumar (o restar) un número
- Multiplicar (o dividir) un número distinto de cero
- Elevar a una potencia (entera o fraccionaria)

Cada operación nos conduce a una ecuación equivalente

Cómo despejar una incógnita

1. Separar en términos (sumas y restas)
2. Identificar dónde está la incógnita y qué operaciones la están afectando
3. Aplicar la misma operación de ambos lados de la ecuación para buscar ecuaciones equivalentes
4. Seguir el paso anterior hasta encontrar una ecuación en la que la incógnita sea el único término en uno de los miembros de la ecuación

Instrucciones para subir una escalera

[...]

Las escaleras se suben de frente, pues hacia atrás o de costado resultan particularmente incómodas. La actitud natural consiste en mantenerse de pie, los brazos colgando sin esfuerzo, la cabeza erguida aunque no tanto que los ojos dejen de ver los peldaños inmediatamente superiores al que se pisa, y respirando lenta y regularmente. [...]

Julio Cortázar

Cómo despejar una incógnita

$$2x + 6 = 3x + 5$$

Sumo el opuesto de 3x en ambos miembros:

$$2x + 6 + (-3x) = 3x + 5 + (-3x)$$

Aplico P4 propiedad conmutativa de la suma y después P1 asociativa de la suma

$$\underbrace{2x + (-3x)}_{P10.distr:=x.(2-3)} \; +6 = \underbrace{3x + (-3x)}_{P3.opuesto=0} +5$$

$$-x + 6 = 5$$

Sumo el opuesto de 6

$$-x + \; \underbrace{6 + (-6)}_{P3.opuesto=0} \; = 5 + (-6)$$

$$-x = -1$$

Multiplico por -1

$$-x(-1) = -1.(-1) \quad \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

VERIFICAR

Cómo despejar una incógnita

¿Dónde está el error?

$$\frac{1}{2+x} = 3$$

$$\frac{1}{2} = 3 - x$$

$$\frac{1}{2} - 3 = -x$$

$$\frac{1}{2} - 3\frac{2}{2} = -x \Rightarrow -x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Verificar:

$$\frac{1}{2+\frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{4+5}{2}} = \frac{2}{9} \neq 3$$

Cómo despejar una incógnita

¿Dónde está el error?

$$\frac{1}{2+x} = 3$$

$$\frac{1}{2} = 3 - x \quad \textit{Sumo el opuesto de } x \textit{ de ambos miembros}$$

$$\frac{1}{2} - 3 = -x$$

$$\frac{1}{2} - 3\frac{2}{2} = -x \Rightarrow -x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Verificar:

$$\frac{1}{2+\frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{4+5}{2}} = \frac{2}{9} \neq 3$$

Ecuaciones lineales

Son aquellas en las que la/s incógnita/s aparecen con potencia 1

Ejemplos:

$$3x + 2 = 5\ ;\ \ 2x - 7 = 9 - 6x\ ;\ \ xy = 5\ \ 2x = y - 3$$

¿Cuál es el número que al restarle 9 da como resultado 2?

Sistema de ecuaciones lineales

$$2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$x = 0,\ y = -3$$

$$x = 1,\ y = -1$$

$$x = \frac{5}{2},\ y = 2$$

Hay infinitas soluciones!

$$S = \{(x, y)/y = 2x - 3\}$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x & - & y & = 3 \\ x & + & 4y & = 8 \end{cases}$$

La solución es un par de números que es solución de ambas ecuaciones al mismo tiempo!

$$x = \frac{20}{9} \; e \; y = \frac{13}{9}$$

son solución ya que:

$$2\frac{20}{9} - \frac{13}{9} = \frac{40}{9} - \frac{13}{9} = \frac{40-13}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\frac{20}{9} + 4\frac{13}{9} = ...$$

Cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales

Buscamos sistemas equivalentes

- Reemplazamos una o ambas ecuaciones por una ecuación equivalente (Propiedad uniforme)
- Reemplazamos una o ambas ecuaciones por la que se obtiene de sumar/restar las dos ecuaciones

Métodos de resolución

de sustitución Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se la reemplaza en la otra para resolver la segunda incógnita

de igualación Se despeja una incógnita en ambas ecuaciones y se las iguala

de reducción Se reemplaza una de las ecuaciones por una equivalente en donde una de las incógnitas tiene el coeficiente opuesto al que tiene en la otra ecuación y se suman las ecuaciones para eliminar esa incógnita.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x & - & y & = & 7 \\ 2x & + & 3y & = & 1 \end{cases}$$

1) Método de sustitución

$$1)\ y = 3x - 7$$

$$en\ 2)\ \ 2x + 3.(3x - 7) = 1$$

$$2x + 9x - 21 = 1 \Rightarrow 11x = 22$$

$$\boxed{x = 2 \Rightarrow y = 3.2 - 7 = -1}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x & - & y & = & 7 \\ 2x & + & 3y & = & 1 \end{cases}$$

2) Método de igualación

$$\begin{cases} y & = 3x - 7 \\ y & = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x \end{cases}$$

$$y = y$$

$$3x - 7 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x \Rightarrow 3x + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3} + 7 \Rightarrow \frac{11}{3}x = \frac{22}{3}$$

$$\boxed{x = 2 \Rightarrow y = 3.2 - 7 = -1}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x & - & y & = & 7 \\ 2x & + & 3y & = & 1 \end{cases}$$

3) Método de reducción
Si a la 1) la multiplicamos por 3 obtenemos:

$$\begin{cases} 9x & - & 3y & = & 21 \\ 2x & + & 3y & = & 1 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones (vertical)

$$9x + 2x - 3y + 3y = 21 + 1 \Rightarrow 11x = 22$$

$$\boxed{x = 2 \Rightarrow 2.2 + 3.y = 1 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1}$$

Ecuaciones cuadráticas

Son aquellas en las que la incógnita aparece con potencia 2.

Ejemplos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; ; \quad x^2 - d^2 = q \; ; \quad (rx + s)^2 = y \; ; \quad mx^2 + n = px$$

Cómo resolver una ecuación cuadrática

Para empezar tratamos de llevar el problema a una ecuación equivalente que nos quede una expresión igualada a cero $\rightarrow$ buscamos raíces

Caso 1: Expresión en forma polinómica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Bhaskara: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Caso 2: Expresión en forma factorizada

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

El producto de dos números es cero si alguno de ellos es cero (P9):
$x - x_1 = 0 \vee x - x_2 = 0 \Rightarrow x = x_1 \vee x = x_2$

Caso 3: Expresión en forma canónica

$$a(x - x_v)^2 + y_v = 0$$

Propiedad Uniforme para despejar

$a(x - x_v)^2 = -y_v \rightarrow (x - x_v)^2 = \dfrac{-y_v}{a} \rightarrow x - x_v = \pm\sqrt{\dfrac{-y_v}{a}} \rightarrow$
$x = x_v \pm \sqrt{\frac{-y_v}{a}}$
(este caso también se puede resolver aplicando el cuadrado del binomio y yendo al caso 1)

Ejercicios

1. $3x^2 + 2 = 5x$

   $3x^2 - 5x + 2 = 0$ Bhaskara: $x_{1,2} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.3.2}}{2.3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6}$

   $$x_1 = \frac{5+1}{6} = 1 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$$

2. $2(x-2)(x+7) = 0$

   (P9. multip. por cero): el producto es cero si algun término lo es:

   $$x - 2 = 0 \;\vee x + 7 = 0 \Rightarrow x = 2 \;\vee\; x = -7$$

3. $x^2 - 10 = 6$

   $x^2 - 16 = 0 \;\Rightarrow$ (P13.Dif de cuadrados) $0 = x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$

   $0 = (x-4)(x+4)$ P9. . . [completar]

4. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

   Cambio de variable: $y = x^2 \;\; \Rightarrow 0 = (x^2)^2 - 3(x^2) - 4 = y^2 - 3y - 4$ Bhaskara!

   $y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow \;\; y_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \;\wedge\; y_2 = \frac{3-5}{2} = -1$

   $x^2 = y \rightarrow \;\; x^2 = 4 \;\Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x_1 = 2 \;\wedge\; x_2 = -2$

   $x^2 = -1 \;\; \nexists solucion$

Ej.3-b) `https://www.youtube.com/watch?v=a7htX8jnuEU`