Trabajo Práctico 1

Ej 3: Evalúa las siguientes fórmulas con xs = [141, 134, 137, 87] y xs = [133, 147, 137, 144]. Para los incisos b. y c., considera x = 134, e ys = [137, 141, 87], respectivamente.

a. $\langle \forall\ i : 0 \leq i < \#xs : xs\ !i > 140 \rangle$
b. $\langle \exists\ i : 0 \leq i < \#xs : xs\ !i = x \rangle$
c. $\langle \forall\ i : 0 \leq i < \#xs : \langle \exists\ j : 0 \leq j < \#ys : xs\ !i = ys\ !\ j \rangle \rangle$
d. $\langle \forall\ i : 0 \leq i < \#xs - 1 : xs\ !i \leq xs\ !\ (i + 1) \rangle$

a)
$\langle \forall\ i : 0 \leq i < \underline{\mathbf{\#xs}} : xs\ !i > 140 \rangle$
≡ {calculo rango sabiendo que #xs = 4}
$\langle \forall\ i : \underline{\mathbf{0 \leq i < 4}} : xs\ !i > 140 \rangle$
≡ {aplicó el término a cada elemento del rango i ∈ {0,1,2,3} y relaciono con ∧ }
$(\underline{\mathbf{xs!0}} > 140) \wedge (\underline{\mathbf{xs!1}} > 140) \wedge (\underline{\mathbf{xs!2}} > 140) \wedge (\underline{\mathbf{xs!3}} > 140)$
≡ {evalúo las indexaciones con **xs = [141,134,137,87]** }
$\underline{\mathbf{(141 > 140) \wedge (134 > 140) \wedge (137 > 140) \wedge (87 > 140)}}$
≡ {evalúo las desigualdades}
True ∧ False ∧ False ∧ False
≡ {resuelvo las conjunciones}
False

a.2)
$\langle \forall\ i : 0 \leq i < \underline{\mathbf{\#xs}} : xs\ !i > 140 \rangle$
≡ {calculo rango sabiendo que #xs = 4}
$\langle \forall\ i : \underline{\mathbf{0 \leq i < 4}} : xs\ !i > 140 \rangle$
≡ {aplicó el término a cada elemento del rango i ∈ {0,1,2,3} }
$(\underline{\mathbf{xs!0}} > 140) \wedge (\underline{\mathbf{xs!1}} > 140) \wedge (\underline{\mathbf{xs!2}} > 140) \wedge (\underline{\mathbf{xs!3}} > 140)$
≡ {evalúo las indexaciones con **xs = [133,147,137,144] }**
$\underline{\mathbf{(133 > 140) \wedge (147 > 140) \wedge (137 > 140) \wedge (144 > 140)}}$
≡ {evalúo las desigualdades}
False ∧ True ∧ False ∧ True
≡ {resuelvo las conjunciones}
False

b)

$\langle \exists\ i : 0 \le i < \underline{\mathbf{\#xs}} : xs\ !i = x \rangle$

≡ {calculo rango sabiendo que #xs = 4}

$\langle \exists\ i : \underline{\mathbf{0 \le i < 4}} : xs\ !i = x \rangle$

≡ {aplico el término a cada elemento del rango i ∈ {0,1,2,3} y relaciono con ∨ }

$(\underline{\mathbf{xs!0}} = x) \lor (\underline{\mathbf{xs!1}} = x) \lor (\underline{\mathbf{xs!2}} = x) \lor (\underline{\mathbf{xs!3}} = x)$

≡ {evalúo las indexaciones con xs = [141,134,137,87] y x= 134 }

$\underline{\mathbf{(141 = 134) \lor (134 = 134) \lor (137 = 134) \lor (87 = 134)}}$

≡ {evalúo las desigualdades}

False ∨ True ∨ False ∨ False

≡ {resuelvo las disyunciones}

True

b.2)

$\langle \exists\ i : 0 \le i < \mathbf{\#xs} : xs\ !i = x \rangle$

≡ {calculo rango sabiendo que #xs = 4}

$\langle \exists\ i : \underline{\mathbf{0 \le i < 4}} : xs\ !i = x \rangle$

≡ {aplico el término a cada elemento del rango i ∈ {0,1,2,3} }

$(\underline{\mathbf{xs!0}} = x) \lor (\underline{\mathbf{xs!1}} = x) \lor (\underline{\mathbf{xs!2}} = x) \lor (\underline{\mathbf{xs!3}} = x)$

≡ {evalúo las indexaciones con xs = [133,147,137,144] y x= 134 }

$\underline{\mathbf{(133 = 134) \lor (147 = 134) \lor (137 = 134) \lor (144 = 134)}}$

≡ {evalúo las desigualdades}

$\underline{\mathbf{False \lor False \lor False \lor False}}$

≡ {resuelvo las disyunciones}

False

c)

$\langle \forall\ i : 0 \le i < \underline{\mathbf{\#xs}} : \langle \exists\ j : 0 \le j < \underline{\mathbf{\#ys}} : xs\ !i = ys\ !\ j \rangle \rangle$

≡ {calculo rango sabiendo que #xs = 4 y #ys = 3}

$\langle \forall\ i : \underline{\mathbf{i \in [0,1,2,3]}} : \langle \exists\ j : i \in \underline{\mathbf{[0,1,2]}} : xs\ !i = ys\ !\ j \rangle \rangle$

≡ {aplico el término a cada elemento del rango i ∈ [0,1,2,3] y j ∈ [0,1,2]]

$\underline{\mathbf{(xs!0 = ys!0 \lor xs!0 = ys!1 \lor xs!0 = ys!2)}} \land \underline{\mathbf{(xs!1 = ys!0 \lor xs!1 = ys!1 \lor xs!1 = ys!2)}} \land \underline{\mathbf{(xs!2 = ys!0 \lor xs!2 = ys!1 \lor xs!2 = ys!2)}} \land \underline{\mathbf{(xs!3 = ys!0 \lor xs!3 = ys!1 \lor xs!3 = ys!2)}}$

≡ {evalúo las indexaciones con **xs = [141,134,137,87]** e **ys= [137,141,87]** }

$\underline{\mathbf{(141 = 137 \lor 141 = 141 \lor 141 = 87) \land (134 = 137 \lor 134 = 141 \lor 134 = 87) \land (137 = 137 \lor 137 = 141 \lor 137 = 87) \land (87 = 137 \lor 87 = 141 \lor 87 = 87)}}$

≡ {evalúo las desigualdades}

$\underline{\mathbf{(False \lor True \lor False) \land (False \lor False \lor False) \land (True \lor False \lor False) \land (False \lor False \lor True)}}$

≡ {resuelvo las disyunciones}

$\underline{\mathbf{True \wedge False \wedge True \wedge True}}$

≡ {resuelvo las conjunciones}

False

c2:

$\langle \forall\ i : 0 \leq i < \underline{\mathbf{\#xs}} : \langle \exists\ j : 0 \leq j < \underline{\mathbf{\#ys}} : xs\ !i = ys\ !\ j \rangle \rangle$

≡ {calculo rango sabiendo que **#xs = 4** y **#ys = 3**}

$\langle \forall\ i : \underline{\mathbf{i \in \{0,1,2,3\}}} : \langle \exists\ j : \underline{\mathbf{i \in \{0,1,2\}}} : xs\ !i = ys\ !\ j \rangle \rangle$

≡ {aplico el término a cada elemento del rango $i \in \{0,1,2,3\}$ y j e {0,1,2} }

$\underline{\mathbf{(xs!0 = ys!0 \vee xs!0 = ys!1\ v\ xs!0 = ys!2) \wedge (xs!1 = ys!0 \vee xs!1 = ys!1\ v\ xs!1 = ys!2) \wedge (xs!2 = ys!0}}$
$\underline{\mathbf{\vee\ xs!2 = ys!1\ v\ xs!2 = ys!2) \wedge (xs!3 = ys!0 \vee xs!3 = ys!1\ v\ xs!3 = ys!2)}}$

≡ {evalúo las indexaciones con **xs = [133,147,137,144]** e **ys= [137,141,87]** }

$\underline{\mathbf{(133 = 137 \vee 133 = 141 \vee 133 = 87) \wedge (147 = 137 \vee 147 = 141 \vee 147 = 87) \wedge (137 = 137 \vee 137 =}}$
$\underline{\mathbf{141 \vee 137 = 87) \wedge (144 = 137 \vee 144 = 141 \vee 144 = 87)}}$

≡ {evalúo las desigualdades}

$\underline{\mathbf{(False \vee False \vee False) \wedge (False \vee False \vee False) \wedge (True \vee False \vee False) \wedge (False \vee False}}$
$\underline{\mathbf{\vee\ False)}}$

≡ {resuelvo las disyunciones}

$\underline{\mathbf{False \wedge False \wedge True \wedge False}}$

≡ {resuelvo las conjunciones}

False

d)

$\langle \forall\ i : 0 \leq i < \underline{\mathbf{\#xs}} - 1 : xs\ !i \leq xs\ !\ (i + 1) \rangle$

≡ {calculo rango sabiendo que **#xs = 4**}

$\langle \forall\ i : \underline{\mathbf{i \in \{0,1,2\}}} : xs\ !i \leq xs\ !(i + 1) \rangle$

≡ {aplico el término a cada elemento del rango $i \in \{0,1,2\}$ }

$\underline{\mathbf{(xs!0 \leq xs!\ (0+1))}} \wedge \underline{\mathbf{(xs!1 \leq xs!\ (1+1))}} \wedge \underline{\mathbf{(xs!2 \leq xs!\ (2+1))}}$

≡ {evalúo las indexaciones con **xs = [141,134,137,87]** }

$\underline{\mathbf{(141 \leq 134) \wedge (134 \leq 137) \wedge (137 \leq 87)}}$

≡ {evalúo las desigualdades}

$\underline{\mathbf{False \wedge True \wedge False}}$

≡ {resuelvo las conjunciones}

False

d2)

$\langle \forall\ i : 0 \leq i < \underline{\mathbf{\#xs}} - 1 : xs\ !i \leq xs\ !\ (i + 1) \rangle$

≡ {calculo rango sabiendo que **#xs = 4**}

⟨ ∀ i : **<u>i ∈ {0,1,2}</u>** : xs !i ≤ xs ! (i + 1) ⟩

≡ {aplico el término a cada elemento del rango i ∈ {0,1,2} }

<u>(xs!0 ≤ xs! (0+1))</u> ∧ **<u>(xs!1 ≤ xs! (1+1))</u>** ∧ **<u>(xs!2 ≤ xs! (2+1))</u>**

≡ {evalúo las indexaciones con xs = [133,147,137,144]

<u>(133 ≤ 147) ∧ (147 ≤ 137) ∧ (137 ≤ 144)</u>

≡ {evalúo las desigualdades}

<u>True ∧ False ∧ True</u>

≡ {resuelvo las conjunciones}

False

4. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural. Marcá todas las ocurrencias de variables, indicando si son libres o ligadas.

a. $\langle \prod i \ : 1 \leq i \leq n : \ i \rangle$ **b.** $\langle \sum i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs\,!\,i \rangle / \#xs$

c. $\langle \text{Max} \ i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs\,!\,i \rangle < \langle \text{Min} \ i \ : 0 \leq i < \#ys : \ ys\,!\,i \rangle$

d. $\langle \exists i, j \ : (2 \leq i < n) \wedge (2 \leq j < n) : \ i * j = n \rangle$

a) El producto de los números desde 1 hasta n en el conjunto de los naturales.
   variable ligada : i
   variable libre: n
b) Promedio de los elementos de la lista xs.
   variable ligada : i
   variable libre: xs
c) El máximo de la lista xs es menor al mínimo de la lista ys.
   variable ligada : i
   variable libre: xs, ys
d) n no es un número primo, por lo que puede ser expresado como producto de dos números mayores a 2 y menores a n.
   variable ligada : i,j
   variable libre: n

5. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evaluá respectivamente con los siguientes valores:

a. $n = 5$. b. $xs = [6, 9, 3, 9, 8]$. c. $xs = [-3, 9, 8], ys = [6, 7, 8]$. d. $n = 5$.

a)

<u>⟨∏ i : 1 ≤ i ≤ 5 : i ⟩</u>

≡ { aplico el término a cada elemento del rango **i** ∈ **{1,2,3,4,5}** }

<u>1 x 2 x 3 x 4 x 5</u>

≡ { resuelvo aritmética }

120

b)

$\langle \sum i : 0 \le i < \underline{\mathbf{\#xs}} : xs\,!i \rangle / \underline{\mathbf{\#xs}}$

≡ { calculo rango sabiendo que #xs = 5 }

$\langle \sum i : \underline{\mathbf{0 \le i < 5 : xs\,!i}} \rangle / 5$

≡ { aplico el término a cada elemento del rango $i \in \{0,1,2,3,4\}$ }

$\underline{\mathbf{(xs!0+xs!1+xs!2+xs!3+xs!4)/5}}$

≡ { evalúo las indexaciones con **xs = [6,9,3,9,8]** }

$\underline{\mathbf{(6+9+3+9+8)/5}}$

≡ { resuelvo aritmética }

7

c)

$\langle Max\ i : 0 \le i < \underline{\mathbf{\#xs}} : xs!i \rangle < \langle Min\ i : 0 \le i < \underline{\mathbf{\#ys}} : ys!i \rangle$

≡ { calculo rango sabiendo que #xs = 3 y #ys = 3 }

$\langle Max\ i : 0 \le i < 3 : xs\,!i \rangle < \langle Min\ i : 0 \le i < 3 : ys\,!i \rangle$

≡ {aplico el término a cada elemento del rango $\mathbf{i} \in \mathbf{\{0,1,2\}}$ (para ambos casos por separado) }

Max [xs ! 0 , xs ! 1, xs ! 2] < Min [ys ! 0 , ys ! 1, ys ! 2]

≡ { evalúo las indexaciones con **xs = [-3,9,8]** , **ys = [6,7,8]** }

<u>Max [-3,9,8] < Min [6,7,8]</u>

≡ { resuelvo Max y Min }

$\underline{\mathbf{9 < 6}}$

≡ { resuelvo desigualdad }

False

d)

$\langle\ \exists\ i, j : (2 \le i < 5) \wedge \underline{\mathbf{(2 \le j < 5)}} : i * \underline{\mathbf{j}} = 5 \rangle$

≡ { aplico el término a cada elemento del rango $\mathbf{j} \in \mathbf{\{2,3,4\}}$ }

$\langle\ \exists\ i : \underline{\mathbf{(2 \le i < 5)}} : \underline{\mathbf{i}} * 2 = 5 \rangle \vee \langle\ \exists\ i : \underline{\mathbf{(2 \le i < 5)}} : \underline{\mathbf{i}} * 3 = 5 \rangle \vee \langle\ \exists\ i : \underline{\mathbf{(2 \le i < 5)}} : \underline{\mathbf{i}} * 4 = 5 \rangle$

≡ { aplico el término a cada elemento del rango $\mathbf{i} \in \mathbf{\{2,3,4\}}$ }

$\underline{\mathbf{(2*2 = 5 \vee 3*2 = 5 \vee 4*2 = 5) \vee (2*3 = 5 \vee 3*3 = 5 \vee 4*3=5) \vee (2*4=5 \vee 3*4=5 \vee 4*4=5)}}$

≡ { resuelvo la aritmética y evaluo igualdades}

$\underline{\mathbf{(False \vee False \vee False) \vee (False \vee False \vee False) \vee (False \vee False \vee False)}}$

≡ { resuelvo la disyunción }

False

6. Decidí el tipo de cada variable y de cada una de las expresiones en lenguaje natural. Luego escribí una expresión formal para cada una de ellas.

a. m es la cantidad de más contagios diarios en el registro *casos*.

b. La posición de la lista xs donde está su mayor elemento. (Para discutir en clase)

c. La suma de los elementos de xs entre i e $i+7$.

d. Los casos del día d son mayores al promedio móvil (promedio de los siete días anteriores a d).

e. La suma de los elementos en posición par de xs.

f. n es potencia de 2.

Reflexión: ¿Cuáles de esas expresiones son oraciones? Asegurate que las únicas variables libres de las expresiones formales sean las que aparecen explícitamente como tales en la expresión en castellano (por ejemplo, para la última no vale poner $n = 2^k$).

a) **casos**= lista de números y **m** = número

m =⟨**max x : x ∈ casos : x** ⟩

b) **xs** = lista de números y **elemento** = número

⟨max i : 0 ≤ i < #xs ⋀ xs!i = ⟨max x : x ∈ xs : x ⟩: i ⟩

c) **i** = número y **xs** = lista de números

⟨∑ j : i ≤ j ≤ i + 7 : xs!j ⟩

d) **casos** = lista de números y **d** = número

casos!d > ⟨∑ i : d - 7 ≤ i < d : casos!i ⟩/ 7

e) **xs** = lista de números y **i** =número

7⟨∑ i : 0 ≤ i < #xs ⋀ i mod 2 = 0 : xs!i ⟩

f) **n** = número

⟨ ∃ i : 0 ≤ i : 2^i = n ⟩

7. Calculá los rangos de las siguientes cuantificaciones como conjuntos de posibles valores. Tomar $n = 10$, $xs = [-3, 9, 8, 9]$, $m = 3$. Usá tuplas cuando haya más de una variable cuantificada.

a. $\langle \prod i : 1 \leq i \leq n \wedge i \bmod 3 = 1 : i \rangle$

b. $\langle \sum i, j : 0 \leq i < \#xs \wedge 0 \leq j < m : xs\,!\,i * j \rangle$

c. $\langle \forall i, j : 0 \leq i < j < \#xs : xs\,!\,i \neq xs\,!\,j \rangle$

d. $\langle \text{Max } as, bs : xs = as +\!\!+ bs : sum.as \rangle$

e. $\langle \sum i : 1 \leq i + 1 < \#xs + 1 : (x \triangleright xs)\,!\,(i+1) \rangle$

Ejemplo: En el segundo ítem tenemos que i y j son independientes entre sí. Por lo tanto tenemos que ver todas las combinaciones posibles con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $j \in \{0, 1, 2\}$. En el tercer ítem hay una dependencia de j respecto de i; por lo tanto primero podés calcular los valores posibles de i y luego, para cada posible valor de i, los posibles valores de j.

a)

n = 10

⟨ ∏ *i* : 1 ≤ *i* ≤ ***n*** ⋀ *i* mod 3 = 1 : *i* ⟩

≡ { calculo rango sabiendo que ***n* = 10** }

⟨ ∏ *i* : ***i*** **∈ { 4, 7, 10 }** : *i* ⟩

b)

xs = [-3, 9, 8, 9], *m* = 3

$\langle \sum i, j : 0 \leq i < \underline{\#xs} \wedge 0 \leq j < \underline{m} : xs \,!\, i * j \rangle$

≡ { calculo rango sabiendo que *xs* = [-3, 9, 8, 9] y *m* = 3 }

$\langle \sum i, j : i, j \in \{ (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2) \} : xs \,!\, i * j \rangle$

c)

xs = [-3, 9, 8, 9]

$\langle \forall\ i, j : 0 \leq i < j < \underline{\#xs} : xs \,!\, i \neq xs \,!\, j \rangle$

≡ { calculo rango sabiendo que *xs* = [-3, 9, 8, 9] }

$\langle \sum i, j : \boldsymbol{i, j \in \{ (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3) \}} : xs \,!\, i \neq xs \,!\, j \rangle$

d)

xs = [-3, 9, 8, 9]

$\langle$ Max *as*, *bs* : ***xs* = *as*** ⧺ ***bs*** : *sum.as* $\rangle$

≡ { calculo rango sabiendo que *xs* **= [-3, 9, 8, 9]** }

$\langle$ Max *as*, *bs* : **(*as*, *bs*)** ∈ **{ ([ ], [-3, 9, 8, 9]), ([-3], [9, 8, 9]), ([-3, 9], [8, 9]), ([-3, 9, 8], [9]), ([-3, 9, 8, 9], [ ]) }** : *sum.as* $\rangle$

e)

xs = [-3, 9, 8, 9]

$\langle \sum i : 1 \leq i + 1 < \boldsymbol{\#xs + 1} : (x \triangleright xs) \,!\, (i + 1) \rangle$

≡ { calculo rango sabiendo que ***xs* = [-3, 9, 8, 9]** }

$\langle \sum i : \boldsymbol{i \in \{ 0, 1, 2, 3 \}} : (x \triangleright xs) \,!\, (i + 1) \rangle$

8. Simplificá y aplicá, según corresponda, **rango vacío, rango unitario o término constante**.

a. $\langle \exists i : i = 3 \wedge par.i : 2 * i = 6 \rangle$

b. $\langle \sum i : 5 \leq i \wedge i \leq 5 : -2 * i \rangle$

c. $\langle \prod i : 0 < i < 1 : 34 \rangle$

d. $\langle \text{Min } i : i \leq 0 : n * (i + 2) - n * i \rangle$

e. $\langle \text{Max } as : a \triangleright as = [\,] : \#as \rangle$

Reflexión: No hay trampas acá: simplificá tanto como puedas usando aritmética.

a) $\langle \exists$ i : $\underline{\textbf{i = 3} \wedge \textbf{par.i}}$: 2∗i = 6 $\rangle$

≡ {conjunción}

$\langle \exists$ i : **False** : 2 * i = 6 $\rangle$

≡ {rango vacío}

False ⇒(false es el elemento neutro de ∃)

b) ⟨Σ i : **5 ≤ i ∧ i ≤ 5** : −2 ∗ i ⟩
≡ { 5 ≤ i ∧ i ≤ 5 por lo tanto **i = 5**}
⟨Σ i : **i = 5 : −2 ∗ i** ⟩
≡ {aplica rango unitario}
(**-2 * 5**)
≡ {aplicar aritmética}
-10

c) ⟨Π i : **0 < i < 1** : 34 ⟩
≡ {0 < i < 1 no se cumple}
⟨Π i : **False** : 34 ⟩
≡ {aplica rango vacío}
1⇒ (1 es el elemento neutro de ∏)

d) ⟨Min i : **i ≤ 0** : n ∗ (i + 2) − n ∗ i ⟩
≡ { i ≤ 0 cumplido solo por el 0}
⟨Min i : **i = 0** : **n ∗ (i + 2) − n ∗ i** ⟩
≡ {aplicar rango unitario}
n ∗ (0 + 2) − n ∗ 0
≡ {aplicar aritmética}
n * 2

e) ⟨Max as : **a ▹ as = [ ]** : #as ⟩
≡ { cálculo de rango}
⟨Max as : **False** : #as ⟩
≡ {aplica rango vacío}
-∞

9. Aplicá **partición de rango** si es que se puede, y si no se puede, explicá porqué.

a. $\langle \sum i \ : i = 0 \ \vee \ 4 > i \geq 1 : \ n * (i+1) \rangle$ **b.** $\langle \forall i \ : 3 \leq |i| \leq 4 \ \vee \ 0 < i < 4 : \ \neg f.i \rangle$

c. $\langle \sum i \ : |i| \leq 1 \ \vee \ 0 \leq 2 * i < 7 : \ i * n \rangle$

d. $\langle \prod i \ : 0 \leq i < n \ \wedge \ (i \bmod 3 = 0 \ \vee \ i \bmod 3 = 1) : \ 2 * i \rangle$

Reflexión: Recordá que no siempre es necesario ver el rango para decidir si se puede usar partición de rango. Como siempre, simplificá lo más que puedas aritméticamente.

a)
⟨ ∑ i : **i = 0 ⋁ 4 > i ≥ 1** : n ∗ (i + 1) ⟩
≡ {aplicar A3 partición de rango por disyunción}
⟨ ∑ i : **i = 0** : **n * (i+1** ⟩ + ⟨ ∑ i : 4 > i ≥ 1 : n * (i+1) ⟩
≡ {aplicar A2 rango unitario}
n + ⟨ ∑ i : **4 > i ≥ 1** : n * (i+1) ⟩
≡ {proceder con los valores indicados}
n + ⟨ ∑ i : **i ∈ {1,2,3} : n * (i+1) ⟩**
≡ {aplicar término a los elementos pertenecientes al rango}

n * (0+1) + n * (1+1) + n * (2+1) + n * (3+1)

≡ {aplicar aritmética}

1n + 2n + 3n + 4n

≡ {aplicar aritmética}

10n

b)

⟨ ∀ i : **3 ≤ |i| ≤ 4 ⋁ 0 < i < 4** : ¬f.i ⟩

≡ {aplicar A3 partición de rango por idempotencia}

⟨ ∀ i : **3 ≤ |i| ≤ 4** : ¬f.i ⟩ ⋀ ⟨ ∀ i : **0 < i < 4** : ¬f.i ⟩

≡ {aplicar cálculo de los rangos}

⟨ ∀ i : **i ∈ {3,4} : ¬f.i** ⟩ ⋀ ⟨ ∀ i : **i ∈ {1,2,3} : ¬f.i** ⟩

≡ {aplicar término a los elementos pertenecientes al rango}

¬f.3 ⋀ ¬f.4 ⋀ ¬f.1 ⋀ ¬f.2 ⋀ ¬f.3

≡ {aplicar idempotencia por conjunción}

¬f.1 ⋀ ¬f.2 ⋀ ¬f.3 ⋀ ¬f.4

c)

⟨ ∑ i : |i| ≤ 1 ⋁ 0 ≤ 2 ∗ i < 7 : i ∗ n ⟩

≡ {No hay manera de aplicar partición de rango en este caso debido a que los dos conjuntos de este rango no se encuentran disjuntos, por lo tanto no se puede aplicar, además que no hay forma de aplicarlo por idempotente}

d)

⟨ ∏ *i* : **0 ≤ *i* < *n* ⋀ (*i* mod 3 = 0 ⋁ *i* mod 3 = 1)** : 2 * *i* ⟩

≡ {aplicar distributividad de la conjunción con la disyunción}

⟨ ∏ *i* : **0 ≤ *i* < *n* ⋀ *i* mod 3 = 0) ⋁ (0 ≤ *i* < *n* ⋀ *i* mod 3 = 1)** : 2 * *i* ⟩

≡ {aplicar A4 partición de rango por disyunción}

⟨ ∏ *i* : 0 ≤ *i* < *n* ⋀ *i* mod 3 = 0) : 2 * *i* ⟩ * ⟨ ∏ *i* : 0 ≤ *i* < *n* ⋀ *i* mod 3 = 1) : 2 * *i* ⟩

10. Evalúa las expresiones del ejercicio 9 en $n = 3$, $f.x \doteq |x| < 4$,

a. $\langle \sum i \ : i = 0 \ \vee \ 4 > i \geq 1 : \ n * (i + 1) \rangle$ **b.** $\langle \forall i \ : 3 \leq |i| \leq 4 \ \vee \ 0 < i < 4 : \ \neg f.i \rangle$

c. $\langle \sum i \ : |i| \leq 1 \ \vee \ 0 \leq 2 * i < 7 : \ i * n \rangle$

d. $\langle \prod i \ : 0 \leq i < n \ \wedge \ (i \bmod 3 = 0 \ \vee \ i \bmod 3 = 1) : \ 2 * i \rangle$

a)

$\langle \sum i : \underline{\mathbf{i = 0 \lor 4 > i \geq 1}} : 3 * (i + 1) \rangle$

≡ {aplicar A4 partición de rango por disyunción}

$\langle \sum i : i = 0 : 3 * (i+1) \rangle + \langle \sum i : \underline{\mathbf{4 > i \geq 1 : 3 * (i+1)}} \rangle$

≡ {aplicar el término a cada elemento del rango **i** ∈ **{1,2,3}** }

$\langle \sum i : \underline{\mathbf{i = 0 : 3 * (i+1)}} \rangle + (3 * (1+1)) + (3 * (2+1)) + (3 * (3+1))$

≡ {aplicar A2 rango unitario}

$\underline{\mathbf{(3 * (0+1)) + (3 * (1+1)) + (3 * (2+1)) + (3 * (3+1))}}$

≡ {aplicar aritmética}

$\underline{\mathbf{3 + 6 + 9 + 12}}$

≡ {aplicar aritmética}

30

b)

$\langle \forall i : \underline{\mathbf{3 \leq |i| \leq 4 \lor 0 < i < 4}} : \neg(|i| < 4) \rangle$

≡ {aplicar A4 partición de rango por idempotencia}

$\langle \forall i : \underline{\mathbf{3 \leq |i| \leq 4}} : \mathbf{\neg(|i| < 4)} \rangle \land \langle \forall i : \underline{\mathbf{0 < i < 4}} : \mathbf{\neg(|i| < 4)} \rangle$

≡ {aplicar el término a cada elemento del rango **i** ∈ **{-4,-3,3,4**} y **i** ∈ **{1,2,3**}

$\neg(\underline{\mathbf{|-4| < 4}}) \land \neg(\underline{\mathbf{|-3| < 4}}) \land \neg(\underline{\mathbf{|3| < 4}}) \land \neg(\underline{\mathbf{|4| < 4}}) \land \neg(\underline{\mathbf{|1| < 4}}) \land \neg(\underline{\mathbf{|2| < 4}}) \land \neg(\underline{\mathbf{|3| < 4}})$

≡ {resolver las desigualdades}

$\underline{\mathbf{\neg False \land \neg True \land \neg True \land \neg False \land \neg True \land \neg True \land \neg True}}$

≡ {aplicar negación}

$\underline{\mathbf{True \land False \land False \land True \land False \land False \land False}}$

≡ {aplicar absorbencia de conjunción}

False

c)

$\langle \sum i : \underline{\mathbf{|i| \leq 1 \lor 0 \leq 2 * i < 7}} : i * 3 \rangle$

≡ {re-escritura de rangos}

$\langle \sum i : \underline{\mathbf{i \in [-1,0,1] \lor i \in [0,1,2,3]}} : \underline{\mathbf{i * 3}} \rangle$

≡ {aplicar término a cada elemento del rango **i** ∈ **{-1,0,1,2,3}** }

$\underline{\mathbf{(-1 * 3) + (0 * 3) + (1 * 3) + (2 * 3) + (3 * 3)}}$

≡ {aplicar aritmética}

$\underline{\mathbf{-3 + 0 + 3 + 6 + 9}}$

≡ {aplicar aritmética}

15

d)

⟨ ∏ i : **<u>0 ≤ i < 3 ∧ (i mod 3 = 0 ∨ i mod 3 = 1)</u>** : 2 * i ⟩

≡ {aplicar la distributividad de ∧ con ∨}

⟨ ∏ i : **<u>(0 ≤ i < 3 ∧ i mod 3 = 0) ∨ (0 ≤ i < n ∧ i mod 3 = 1)</u>** : 2 * i⟩

≡ {aplicar A4 partición de rango por disyunción}

⟨ ∏ i : (**<u>0 ≤ i < 3 ∧ i mod 3 = 0</u>** : 2 * i ⟩ * ⟨ ∏ i : (**<u>0 ≤ i < 3 ∧ i mod 3 = 1</u>** : 2 * i ⟩

≡ {aplicar cálculo de valores}

⟨ ∏ i : **<u>i ∈ {0}</u>** : **2 * i** ⟩ * ⟨∏ i : **<u>i ∈ {1}</u>** : **2 * i** ⟩

≡ {aplicar A2 rango unitario}

<u>(2 * 1) * (2 * 0)</u>

≡ {aplicar aritmética}

<u>2 * 0</u>

≡ {aplicar aritmética}

0

11. Descubrí y explicá el error en la siguiente prueba:

$$
\begin{aligned}
& \langle \sum i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \,\rangle \\
= & \ \{ \text{ lógica } \} \\
& \langle \sum i \ : i = 0 \ \vee \ 1 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \,\rangle \\
= & \ \{ \text{ partición de rango disjunto } \} \\
& \langle \sum i \ : i = 0 : \ xs \,!\, i \,\rangle + \langle \sum i \ : 1 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \,\rangle \\
= & \ \{ \text{ rango unitario } \} \\
& xs \,!\, 0 + \langle \sum i \ : 1 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \,\rangle
\end{aligned}
$$

Ejemplo visto en clase:

[1, 5, 6]
0 <= i < 3
i = 0 o 1 <= i < 3

[1]
0 <= i < 1
i = 0 o 1 <= i < 1

[ ]
0 <= i < 0 —-------------> rango vacío
i = 0 o 1 <= i < 0 ———-> rango = {0}

El error está en el primer paso, al aplicar ese paso hace que **el rango no pueda ser vacío** (siempre va a estar el 0 en el rango), y en la expresión original si se puede dar ese caso(con xs = [] el rango quedaría **<u>0 <= i < 0, lo cual sería un rango vacío</u>**), lo cual hace que la expresión original y la expresión transformada luego de aplicar ese primer paso no sean equivalentes.

i = 0 ∨ 1 ≤ i < **#xs**
≡ {tamaño de lista []}
i = 0 ∨ **1 ≤ i < 0**
≡ { no existe un i entre mayor o igual a 1 y menor a 0}
i = 0 ∨ False
≡ {Cuando i = 0 , esta daría **True**}

En cambio , en la función original:
0 ≤ i < **#xs**
≡ {tamaño de lista []}
0 ≤ i < 0
≡ {Cuando i = 0 , daria **False**}

Por lo tanto, 0 ≤ i < #xs es distinto de i = 0 ∨ 1 ≤ i < #xs

12. Aplicá **distributividad**, si es que se puede.

a. $\langle \sum i : i = 0 \lor 1 \le i < 4 : n * (i+1) \rangle$
b. $\langle \prod i : 3 \le |i| \le 4 \lor 0 < i < 4 : n + i \rangle$
c. $\langle \forall i : i = 0 \lor 4 > i \ge 1 : \neg f.i \lor \neg f.n \rangle$
d. $\langle \text{Max } i : 0 \le i < \#xs : k + xs!i \rangle$

a)

⟨ ∑ ***i* : *i* = 0 ∨ 1 ≤ *i* < 4 : *n* * (*i* + 1)** ⟩

≡ {⊕ es **+** , ⓧ es ***** , **C** es **n** y no depende de **i**, **+ se distribuye con *** y **el rango es no vacío** , aplicó distributividad.}

⟨ ∑ *i* : ***i* = 0 ∨ 1 ≤ *i* < 4** : *i* + 1 ⟩ * n

≡ { calculo el rango }

⟨ ∑ *i* : ***i* ∈ { 0, 1, 2, 3 }** : ***i* + 1** ⟩ * n

≡ {aplicó el término a cada elemento del rango}

(**(0 + 1) + (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1)**) * n

≡ { aritmética }

(**1 + 2 + 3 + 4**) * n

≡ { aritmética }

10*n

b)

⟨ ∏ *i* : 3 ≤ |*i*| ≤ 4 ∨ 0 < *i* < 4 : *n* + *i* ⟩

≡ {⊕ es ***** , ⓧ es **+** , **C** es **n** y no depende de **i**, **+ no se distribuye con *** por lo que no se puede aplicar}

c)

⟨ ∀ *i* : *i* = 0 ∨ 4 > *i* ≥ 1 : *¬f.i ∨ ¬f.n* ⟩

≡ {⊕ es ∧ , ⓧ es ∨ , **C** es **¬ f.n** y no depende de **i**, ∨ **se distribuye con** ∧ y el **rango es no vacío**, aplicó distributividad }

⟨ ∀ *i* : ***i* = 0 ∨ 4 > *i* ≥ 1** : ¬*f.i* ⟩ ∨ ¬*f.n*

≡ {calculo el rango }

⟨ ∀ *i* : ***i* ∈ { 0, 1, 2, 3 } : ¬*f.i*** ⟩ ∨ ¬*f.n*

≡ { aplicó el término a cada elemento del rango }

(¬*f*.0 ∧ ¬*f*.1 ∧ ¬*f*.2 ∧ ¬*f*.3) ∨ ¬*f*.*n*

d)

si xs ≠ [ ] => #xs > 0

⟨ Max i : 0 ≤ i < #xs : k + xs !i ⟩

≡ { ⊕ es **max** , ⓧ es **+** , **C es k**, **+ se distribuye con max** y el **rango es no vacío** , aplicó distributividad }

⟨ Max i : 0 ≤ i < #xs : xs !i ⟩ + k

si xs = [ ] => #xs = 0

⟨ Max i : 0 ≤ i < #xs : k + xs !i ⟩

=> el **rango es vacío** pero el **neutro de max (-inf)** es **absorbente de +** =>

≡ {⊕ es **max** , ⓧ es **+** , **C** es **k**, **+ se distribuye con max** y el **rango es vacio** pero el **neutro de max es absorbente en +** , aplicó distributividad}

⟨ Max i : 0 ≤ i < #xs : xs !i ⟩ + k

13. Evalúa las expresiones del ejercicio 12, considerando $n = 3$, $f.x \doteq (x = 0)$, $k = -1$, y $xs = [1, 0, 3]$.

a. $\langle \sum i \ : i = 0 \ \vee \ 1 \leq i < 4 : \ n * (i+1) \rangle$

b. $\langle \prod \ i \ : 3 \leq |i| \leq 4 \ \vee \ 0 < i < 4 : \ n + i \rangle$

c. $\langle \forall i \ : i = 0 \ \vee \ 4 > i \geq 1 : \ \neg f.i \ \vee \ \neg f.n \rangle$

d. $\langle \text{Max} \ i \ : 0 \leq i < \#xs : \ k + xs \,!\, i \rangle$

a)

⟨ ∑ i : i = 0 ∨ 1 ≤ i < 4 : 3 ∗ (i + 1) ⟩

≡ {⊕ es + , ⓧ es * , C es 3 (no depende de i), + se distribuye con * y el rango es no vacío , aplicó distributividad.}

⟨ ∑ i : **i = 0 ∨ 1 ≤ i < 4 : (i + 1)** ⟩ * 3

≡ {aplicó el término a cada elemento del rango **i** ∈ **{0,1,2,3}**}

((0+1) + (1+1) + (2+1) + (3+1)) * 3

= { resuelvo }

30

b)

⟨ ∏ i : **3 ≤ |i| ≤ 4 ∨ 0 < i < 4 : 3 + i** ⟩

= {aplicó el término a cada elemento del rango **i** ∈ **{-4,-3,1,2,3,4}** }

(3 + (-4))*(3 + (-3))*(3 + 1)*(3 + 2)*(3 + 3)*(3 + 4)

= { resuelvo }

-1*0*4*5*6*7

≡ {Aritmética}

0

c)

⟨ ∀ i : i = 0 ∨ 4 > i ≥ 1 : **¬ (i=0) ∨ ¬(3=0)** ⟩

≡ {**3=0 ≡ False => ¬(3=0) ≡ True**}

⟨ ∀ i : i = 0 ∨ 4 > i ≥ 1 : **¬ (i=0) ∨ True**⟩

≡ {True absorbente de la disyunción}

⟨ ∀ i : i = 0 ∨ 4 > i ≥ 1 : **True** ⟩

≡ { término constante **C = True**, **True idempotente en la conjunción y rango no vacío** }

True

d)

⟨ Max i : 0 ≤ i < #[1, 0, 3] : (-1) + [1, 0, 3] !i ⟩

≡ {⊕ es max , ⊗ es + , C es k, + se distribuye con max y el rango es no vacío , aplicó distributividad}

⟨ Max i : **0 ≤ i < 3 : [1, 0, 3] !i** ⟩ + (-1)

≡ { aplicó el término a cada elemento del **rango i ∈ {0,1,2}** }

(xs!0 max xs!1 max xs!2) -1

≡ { resuelvo }

(1 max 0 max 3) -1

≡ {Aritmética}

3-1= 2

14. Decidí si se puede aplicar o no el **cambio de variable** indicado. Justificá tu decisión y escribí la expresión aplicandolo si dijiste que se podía.

a. $\langle \sum i \ : |i| < 5 : \ i \text{ div } 2 \rangle$ con $f.j \doteq 2 * j$. **b.** $\langle \sum i \ : par.i \wedge |i| < 5 : \ i \text{ div } 2 \rangle$ con $f.j \doteq 2 * j$.

c. $\langle \prod i \ : 1 \leq i < \#(x \triangleright xs) : \ (x \triangleright xs) \, ! \, i \rangle$ con $f.j \doteq j + 1$.

d. $\langle \text{Max } as \ : as \neq [\,] : \ \#as \rangle$ con $f.(x, xs) \doteq x \triangleright xs$.

Reflexión: Es importante que escribas la inversa y te convenzas que es efectivamente inversa en el rango apropiado.

a)

⟨ ∑ *i* : |*i*| < 5 : *i* div 2 ⟩ con *f.j* ≐ 2 * j

El rango aquí es { -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 }.

Aplicando cambio de variable ***i* = *f.j*, con *f.j* ≐ 2 * j** , quedaría:

⟨ ∑ *j* : |2 * *j*| < 5 : (2 * *j*) div 2 ⟩

El **dominio aquí es { -2, -1, 0, 1, 2 }** y su **imagen sería { -4, -2, 0, 2, 4 }**. Esto **no es igual al rango original**, por lo cual ***f.j* no es inyectiva** y no se puede aplicar el cambio de variable.

b)
$\langle \sum i : \underline{\boldsymbol{par.i \wedge |i| < 5}} : i \text{ div } 2 \rangle$ con $f.j \doteq 2 * j$

El **rango aquí es { -4, -2, 0, 2, 4 }**.

Aplicando **cambio de variable *i = f.j*, con *f.j* ≐ 2 * *j***, quedaría:

$\langle \sum j : \underline{\mathbf{par.(2 * j) \wedge |2 * j| < 5}} : (2 * j) \text{ div } 2 \rangle$

El **dominio aquí es { -2, -1, 0, 1, 2 }**, y su **imagen sería { -4, -2, 0, 2, 4 }**. Esto sí es igual al rango original, por lo cual ***f.j* tiene inversa en el rango original**. Dado esto, y dado que ***j* no aparece en el rango y el término original**, entonces se puede aplicar el **cambio de variable**.

$\langle \Sigma\ i : \underline{\mathbf{par\ .i \wedge |i| < 5}} : i \text{ div } 2 \rangle$

$\equiv$ { cambio de variable con f.j = 2 ∗ j }

$\langle \Sigma\ j : \underline{\mathbf{par\ .(2{*}j)}} \wedge \mathbf{|2{*}j|} < 5 : (2{*}j) \text{ div } 2 \rangle$

$\equiv$ { par.(2∗j) ≡ True }

$\langle \Sigma\ j : \underline{\mathbf{True \wedge |2{*}j| < 5}} : (2{*}j) \text{ div } 2 \rangle$

$\equiv$ {Lógica}

$\langle \Sigma\ j : |2{*}j| < 5 : \underline{\mathbf{(2{*}j) \text{ div } 2}} \rangle$

$\equiv$ { (2∗j) div 2 ≡ j }

$\langle \Sigma\ j : \underline{\mathbf{|2{*}j| < 5}}\ \mathbf{: j} \rangle$

$\equiv${calcular el rango}

$\langle \Sigma\ j\ \mathbf{: j \in \{-2,-1,0,1,2\}} : j \rangle$

$\equiv$ {aplico el término a cada elemento del rango y uno con +}

$\underline{\mathbf{-2 + (-1) + 0 + 1 + 2}}$

$\equiv$ {aritmética}

0

c)
$\langle \prod i : \underline{\boldsymbol{1 \leq i < \#(x \triangleright xs)}} : (x \triangleright xs) \,!\, i \rangle$ con $\underline{\boldsymbol{f.j \doteq j + 1}}$

El **rango** es **{1, 2, 3, … , #(*x* ▹ *xs*) - 2, #(*x* ▹ *xs*) - 1, #(*x* ▹ *xs*)}**.

Aplicando **cambio de variable con *f.j* ≐ *j* + 1**, quedaría:

$\langle \prod j : \underline{\boldsymbol{1 \leq (j + 1) < \#(x \triangleright xs)}} : (x \triangleright xs) \,!\, (j + 1) \rangle$

$\equiv$ { aritmética }

$\langle \prod j : \underline{\boldsymbol{0 \leq j < \#(x \triangleright xs) - 1}} : (x \triangleright xs) \,!\, (j + 1) \rangle$

El **dominio** aquí es **{0, 1, 2, 3, … , #(*x* ▹ *xs*) - 2, #(*x* ▹ *xs*) - 1 }**, y su imagen es **{ 1, 2, 3, … , #(*x* ▹ *xs*) - 1, #(*x* ▹ *xs*) }**. Esto sí es igual al rango original, por lo cual ***f.j* tiene inversa en el rango original**. Dado esto, y dado que *j* no aparece en el rango y el término original, entonces se puede aplicar el cambio de variable.

$\langle \Pi\ i : \underline{\mathbf{1 \leq i < \#(x \triangleright xs)}} : (x \triangleright xs) \,!\, \underline{\mathbf{i}} \rangle$

$\equiv$ { cambio de variable, con f.j = j + 1 }

$\langle \Pi\ j : 1 \leq j{+}1 < \underline{\mathbf{\#(x \triangleright xs)}} : \underline{\mathbf{(x \triangleright xs) \,!\, (j{+}1)}} \rangle$

$\equiv$ { definición de ▹ }

⟨Π j : 1 ≤ j+1 < #xs+1 : xs ! j ⟩
≡ { aritmética }
⟨Π j : 0 ≤ j < #xs : xs ! j ⟩

d)
⟨ Max *as* : *as* ≠ [ ] : #*as* ⟩ con ***f.(x, xs)*** ≐ ***x*** ▹ ***xs***
El rango es **{ 1, 2, 3, … , #*as* - 1, #*as* }**.
Aplicando **cambio de variable** con ***f.(x, xs)*** ≐ ***x*** ▹ ***xs***, quedaría:
⟨ Max ***(x, xs)*** : **(*x* ▹ *xs*) ≠ [ ]** : #***(x*** ▹ ***xs)*** ⟩
≡ { definición de ▹ }
⟨ Max *(x, xs)* : **True** : #*(x* ▹ *xs)* ⟩

15. Simplificá el rango y aplicá alguna de las **reglas para la cuantificación de conteo**:

a. $\langle N\, a, as\ : a \triangleright as = xs \wedge xs = [\,] :\ \#as = 1\,\rangle$ **b.** $\langle N\, i\ : i - n = 1 :\ par.i\,\rangle$
c. $\langle N\, i\ : i = 0 \vee 1 \leq i < \#xs + 1 :\ par.((x \triangleright xs)\,!\,i)\,\rangle$

a)
⟨N a, as : **a ▹ as = xs ⋀ xs = [ ]** : #as = 1 ⟩
= { Leibniz 2 }
⟨N a, as : **a ▹ as = [ ]** ⋀ xs = [ ] : #as = 1 ⟩
= { a ▹ as = [ ] ≡ False }
⟨N a, as : **False ⋀ xs = [ ]** : #as = 1 ⟩
= { Lógica }
⟨N a, as : False : #as = 1 ⟩
= { Rango vacío (TN1) }

0

b)
⟨N i : **i − n = 1** : par .i ⟩
= { aritmética }
⟨N i : i = n + 1 : par .i ⟩
{Rango unitario Conteo}
(par.(n+1) →1
[]¬ par.(n+1) →0
)

c)
⟨N i : **i = 0 ⋁ 1 ≤ i < #xs + 1** : par .((x ▹ xs) ! i) ⟩
≡{TN3: partición de rango}
⟨N i : i = 0 : par .((x ▹ xs) ! i) ⟩ + ⟨N i : 1 ≤ i < #xs + 1 : par .((x ▹ xs) ! i) ⟩
≡{TN2: rango unitario}
(Par.((x ▹ xs) ! 0)→ 1
□ **¬(Par.((x ▹ xs) ! 0)) → 0**
) + ⟨N i : 1 ≤ i < #xs + 1 : par .((x ▹ xs) ! i) ⟩