Clase 20 - Análisis Matemático 1 - LC: Integrales I

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

5 de Junio de 2020

Índice

Preguntas:

1. Dada una función $f(x)$: ¿Existe una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$?
2. ¿Es posible calcular el área debajo de una curva sin recurrir a argumentos puramente geométricos?

Antiderivada o Primitiva

Sea $f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x \qquad g(x) = sen(x) \Rightarrow g'(x) = cos(x)$

- $f(x) = 6x$ ¿Es posible encontrar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$? SÍ! $F(x) = 3x^2$
- $g(x) = cos(x)$ ¿Es posible encontrar $G(x)$ tal que $G'(x) = g(x)$? SÍ! $G(x) = sen(x)$

Definición

Sea f una función definida en un intervalo $\mathbb{I}$. Decimos que F es **una antiderivada o primitiva de f** si

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{I}$$

$F(x) = 3x^2$ y $G(x) = 3x^2 + 7$
$F'(x) = 6x$ y $G'(x) = 6x$
Ambas son primitivas de $f(x) = 6x$, **NO HAY UNA ÚNICA ANTIDERIVADA!**

Si $F(x)$ es una antiderivada de f, entonces $G(x) = F(x) + c$ también es antiderivada de f, para cualquier constante c.

Encontrar la antiderivada de $f(x) = 6x$ que pasa por el punto $P = (1, 4)$

$$F(x) = 3x^2 + c \qquad x = 1 \rightarrow y = 4 \Rightarrow 4 = 3.1^2 + c \rightarrow c = 1$$

$$F(x) = 3x^2 + 1$$

Integral Indefinida

Definición

Sea f una función definida en un intervalo $\mathbb{I}$. Se llama **integral indefinida de f al conjunto de TODAS las antiderivadas de f** y se simboliza:

$$\int f(x)\, dx$$

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces la integral indefinida es **el conjunto infinito** de todas las funciones que tienen la forma $G(x) = F(x) + c$, y se denota:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

	$f(x)$	$f'(x)$
constante	c	0
$r \in \mathbb{R}$	x^r	$r.x^{r-1}$
	$sen(x)$	$cos(x)$
	$cos(x)$	$-sen(x)$
	e^x	e^x
$a > 0$	a^x	$ln(a) \cdot a^x$
$x > 0$	$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$a > 0 \wedge x > 0$	$log_a(x)$	$\frac{1}{ln(a) \cdot x}$
$-1 \leq x \leq 1$	$arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$-1 \leq x \leq 1$	$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
constante	0	c
$r \neq -1$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$r = -1, x \neq 0$	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$
	$cos(x)$	$sen(x) + c$
	$sen(x)$	$-cos(x) + c$
	e^x	$e^x + c$
$a > 0$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$
$-1 \leq x \leq 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsen(x) + c$ $-arccos(x) + c$
	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x) + c$

Propiedades

1. $\displaystyle\int 0\,dx = c$
2. $\displaystyle\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

   $\displaystyle\int (f-g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
3. si k es una constante, $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

Ejemplos:

- $\displaystyle\int (e^x + x^2 + 3)\,dx = \int e^x\,dx + \int x^2\,dx + \int 3\,dx =$

  $\displaystyle e^x + c_1 + \frac{x^3}{3} + c_2 + 3\int dx = e^x + \frac{x^3}{3} + 3x + C$
- $\displaystyle\int 2cos(x)\,dx = 2\int cos(x)\,dx = 2sen(x) + c$
- $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} - 4x + e^x\right)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - 4\int x\,dx + \int e^x\,dx = \ln(|x|) - 4\frac{x^2}{2} + e^x + c$

Método de sustitución

Recordemos la regla de la cadena: $(F(g(x)))' = F'(g(x)).g'(x)$

Teorema

Sea $F(x)$ la primitiva de $f(x)$ (o sea: $F'(x) = f(x)$) y sea $g(x)$ una función derivable, entonces:

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$

Sólo necesitamos conocer la antiderivada de $f(x)$, i.e.,la $F(x)$ y evaluarla en $g(x)$!!!

Demostración: cambiemos las variables:

$$u = g(x)$$

$$\rightarrow u' = \frac{du}{dx} = g'(x)$$

$$du = g'(x)dx$$

Entonces:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u}).\underbrace{g'(x).dx}_{du} = \int f(u)\,du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Ejemplos

1. $\int sen(2x)\, 2\, dx$

   $f(x) = sen(x)$ y $u = 2x$ $\qquad \frac{du}{dx} = 2 \rightarrow du = 2dx$

$$\int sen(2x) 2dx = \int sen(u) du = -cos(u) + c = \boxed{-cos(2x) + c}$$

2. $\int e^{3x}\, dx$

   $f(x) = e^x$ y $u = 3x$ $\qquad du = 3dx \rightarrow \frac{du}{3} = dx$

$$\int e^{\overbrace{3x}^{u}} \underbrace{dx}_{\frac{du}{3}} = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + c = \boxed{\frac{1}{3} e^{3x} + c}$$

Otra forma:

$$du = 3dx \rightarrow \int e^{3x} dx = \int e^{3x} \frac{3}{3} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} 3dx = \dots$$

Ejemplos

3. $\int (x^3+x)^9(3x^2+1)dx$

$f(x) = x^9$ y $u = x^3 + x \qquad du = (3x^2+1)dx$

$$\int (x^3+x)^9(3x^2+1)dx = \int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + c = \boxed{\frac{(x^3+x)^{10}}{10} + c}$$

4. $\int sen(x)cos(x)dx$

$(f(x) = x)$ y $u = sen(x) \qquad du = cos(x)dx$

$$\int \underbrace{sen(x)}_{u}\underbrace{cos(x)dx}_{du} = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \boxed{\frac{sen^2(x)}{2} + c}$$

5. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$f(x) = \frac{1}{x}$ y $u = x^2 + x + 1 \qquad du = (2x+1)dx$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{du}{u} = log(|u|) + c = \boxed{log(|x^2+x+1|) + c}$$

Integración por partes

Recordemos la derivada del producto: $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Si f' y g' son funciones continuas, entonces

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Demostración:

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$\int (f.g)'(x)dx = \int \left(f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\right) dx$$

$$(f.g)(x) = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)dx$$

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

Ejemplos

$$\boxed{\int f.g' = f.g - \int f'g}$$

1. $\int x\, e^x\, dx$

   $f = x$ y $g' = e^x$ $\qquad f' = 1$ y $g = e^x$

$$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int 1.e^x dx = \boxed{x\, e^x - e^x + c}$$

2. $\int \ln(x) dx$

   $f = \ln(x)$ y $g' = 1$ $\qquad f' = \frac{1}{x}$ y $g = x$

$$\int \ln(x).1.dx = \ln(x).x - \int \frac{1}{x} x\, dx = x \ln(x) - \int dx = \boxed{x \ln(x) - x + c}$$

3. $\int x\, cos(x)\, dx$

   $f = x$ y $g' = cos(x)$ $\qquad f' = 1$ y $g = sen(x)$

$$\int x\, cos(x)\, dx = x\, sen(x) - \int 1.sen(x)\, dx = \boxed{x\, sen(x) - (-cos(x)) + c}$$

Ejemplos

$$\boxed{\int f.g' = f.g - \int f'g}$$

4. $\int e^{2x} sen(3x)dx \qquad f = e^{2x}$ y $g' = sen(3x) \qquad f' = 2\,e^{2x}$ y $g = -\frac{cos(3x)}{3}$

$$\int e^{2x} sen(3x)dx = -e^{2x}\frac{cos(3x)}{3} - \int 2\,e^{2x}\left(-\frac{cos(3x)}{3}\right)dx =$$

$$-\frac{cos(3x)e^{2x}}{3} + \frac{2}{3}\int e^{2x} cos(3x)dx$$

$f = e^{2x}, g' = cos(3x) \rightarrow f' = 2e^{2x}, g = \frac{sen(3x)}{3}$

$$= -\frac{cos(3x)e^{2x}}{3} + \frac{2}{3}\left(e^{2x}\frac{sen(3x)}{3} - \int 2e^{2x}\frac{sen(3x)}{3}dx\right)$$

$$= \underbrace{\frac{e^{2x}}{3}\left(-cos(3x) + \frac{2}{3}sen(3x)\right)}_{P(x)} - \frac{4}{9}\int e^{2x} sen(3x)dx$$

$$\int e^{2x} sen(3x)dx = P(x) - \frac{4}{9}\int e^{2x} sen(3x)dx$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x} sen(3x)dx = P(x) \Rightarrow \int e^{2x} sen(3x)dx = \frac{9}{13}\frac{e^{2x}}{3}\left(-cos(3x) + \frac{2}{3}sen(3x)\right) + c$$