Clase 6 - Análisis Matemático 1 - LC: Funciones III

Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

27 de Marzo de 2020

Índice

Repaso...

Función Par

Una función se dice par si $f(-x) = f(x)$

Función Impar

Una función se dice impar si $f(-x) = -f(x)$

Composición de funciones

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, definimos

$$(f \, o \, g)(x) = f(g(x))$$

Repaso...

Inyectivas

Una función $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ se dice **inyectiva** si no hay dos elementos del dominio de f con igual imagen. Es decir, si

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Sobreyectiva (o suryectiva)

Una función $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ se dice **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto de llegada es un elemento de la imagen de f. Es decir, si

$$\mathbb{B} = Im\, f$$

Biyectiva

Una función se dice **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva

Función Inversa

Si una función $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ es **biyectiva**, entonces tiene inversa y se llama f^{-1}. Se define de manera que

$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x)) \quad \rightarrow \ \mathrm{Si}\ f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists f(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x - 1 \neq 0\}$$

$$2x - 1 = 0 \;\Rightarrow 2x = 1 \;\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$Dom\, f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$Im\, f = ??? = Dom\, f^{-1}$$

Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

Es inyectiva?

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{2x_1+1}{2x_1-1} = \frac{2x_2+1}{2x_2-1}$$

$$(2x_1+1)(2x_2-1) = (2x_2+1)(2x_1-1)$$

$$4x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 - 1 = 4x_1x_2 - 2x_2 + 2x_1 - 1$$

$$4x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 - 1 - 4x_1x_2 + 2x_2 - 2x_1 + 1 = 0$$

$$4x_2 - 4x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 4x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$f(x)$ SÍ es inyectiva

Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

Es sobreyectiva?
Si una función es inyectiva y no conocemos de antemano el conjunto de llegada, podemos decidir que el conjunto de llegada ES IGUAL a la imagen
Tomando que el conjunto de llegada es $Im\, f$, $f(x)$ SÍ es sobreyectiva.
Por lo tanto, $f(x)$ es biyectiva y tiene inversa.

Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

Cálculo de la inversa:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2f^{-1}(x)+1}{2f^{-1}(x)-1} = x$$

llamo $f^{-1}(x) = \beta$ (sólo para que no se vea tan feo!)

$$\frac{2\beta+1}{2\beta-1} = x$$

$$2\beta + 1 = x(2\beta - 1) \;\Rightarrow\; 2\beta + 1 = 2x\beta - x$$

$$2\beta - 2x\beta = -x - 1$$

$$(2-2x)\beta = -x - 1$$

$$\beta = \frac{-x-1}{2-2x} \;\Rightarrow\; f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2-2x}$$

Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2-2x}$$

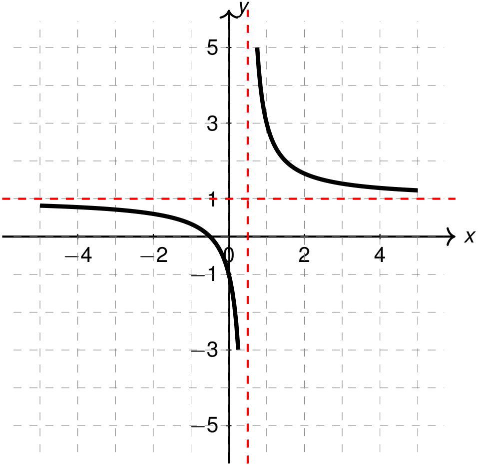
$$Im\, f = Dom\, f^{-1}$$

$$Dom\, f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists f^{-1}(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2-2x \neq 0\}$$

$$2-2x=0 \Rightarrow 2=2x \Rightarrow x=1$$

$$Dom\, f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$Domf = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \quad Imf = \mathbb{R} - \{1\}, \quad f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2-2x}$$



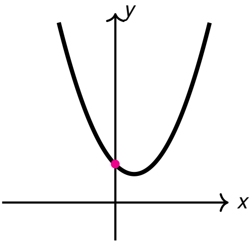
$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2-2x}$$

Parábola

Forma polinómica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- c es el valor de la función para $x = 0 \rightarrow$ corte en el eje y
- El signo de a indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo

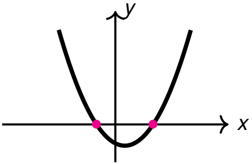


Parábola

Forma factorizada:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- x_1 y x_2 son las raíces, i.e., $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 0 \rightarrow$ corte en el eje x
- El signo de a indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo



Para pasar de la forma polinómica a la forma factorizada $\rightarrow$ Baskhara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para pasar de la forma factorizada a la forma polinómica $\rightarrow$ Propiedad distributiva

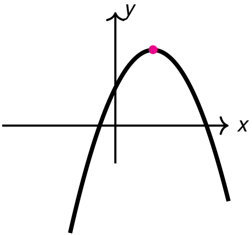
$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \rightarrow (x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}\ ,\ x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Parábola

Forma canónica

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

- x_v e y_v son las coordenadas del vértice de la curva
- El signo de a indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo



Para pasar de la forma canónica a la forma polinómica $\rightarrow$ Cuadrado del binomio

$$a(x-x_v)^2+y_v = a(x^2-2x_vx+x_v^2)+y_v = ax^2-2ax_vx+ax_v^2+y_v \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}\ ,\ y_v = c-\frac{b^2}{4a}$$

Para pasar de la forma polinómica a la forma canónica $\rightarrow$ Completar cuadrados* o usar la definición de $x_v - \frac{b}{2a}$, y una vez calculado, evaluar $f(x_v) = y_v$

Competar cuadrados

Queremos pasar de la forma polinómica a la forma canónica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + y_v$$

1. Calculamos $x_v = -\frac{b}{2a}$ Dónde vimos esa expresión?

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las raíces están equidistantes respecto del vértice! $x = x_v$ es el eje de simetría de la parábola

Ejemplo: $f(x) = 2x^2 - x + 3$

$$x_v = -\frac{(-1)}{2.2} = \frac{1}{4}$$

$$y_v = f(x_v) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{23}{8}$$

$$f(x) = 2x^2 - x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$$

Queremos pasar de la forma polinómica a la forma canónica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + y_v$$

2. Completando cuadrados (va a servirnos para otros temas)

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Queremos que aparezca el cuadrado de un binomio: $(x + B)^2 = x^2 + 2Bx + B^2$
Queremos:

- que el término lineal sea "el doble producto del primero por el segundo"
- que aparezca el término "el segundo al cuadrado"
- construir el binomio al cuadrado

Cómo hacemos?

- Saco factor común a y trabajo adentro del otro factor
- Multiplico el término lineal por el número 1 escrito como $\frac{2}{2}$
- Identifico cuál es el valor del término del binomio (el otro que no es x!)
- Sumo y resto ese término al cuadrado
- Reordeno los términos para identificar el binomio

Ejemplo

Queremos pasar de la forma polinómica a la forma canónica

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

Cómo hacemos? (quiero que aparezca un término del tipo $(x+B)^2 = x^2 + 2Bx + B^2$)

- saco factor común a y trabajo adentro del otro factor
- Multiplico el término lineal por el número 1 escrito como $\frac{2}{2}$ o trato de que quede escrito como 2.(*algo*)
- Identifico cuál es el valor del término del binomio (el otro que no es x!) (me concentro en el término lineal)
- Sumo y resto ese término al cuadrado
- Reordeno los términos para identificar el binomio

$$2x^2 - x + 3 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 2\left(x^2 - \frac{2}{2}\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right)$$

$$= 2\left(x^2 - 2\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 2\left(x^2 - 2\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{16}\right) = 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$$

Ejemplo

Escribir de la forma canónica completando cuadrados ($y = a(x - x_v)^2 + y_v$)

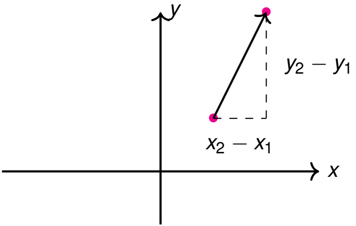
$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = x^2 + 2.3.x + 5 = x^2 + 2.3.x + 5 = x^2 + 2.3.x + 5 + 3^2 - 3^2$$

$$y = x^2 + 2.3.x + 3^2 + 5 - 3^2 = (x+3)^2 + 5 - 9 = (x+3)^2 - 4$$

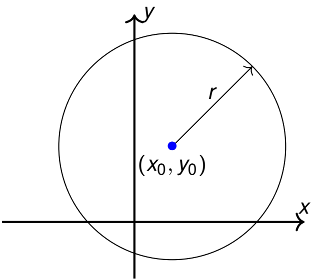
$$x_v = -3 \quad , y_v = -4$$

Circunferencia y Elipse



$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$



Ejemplo

Dar la ecuación de la circunferencia con centro en $(1, 2)$ y radio 3

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

Encontrar el centro y radio de la siguiente circunferencia:

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$$

$$x^2 - 6x = x^2 - 2.3x = x^2 - 2.3x + 3^2 - 3^2 = (x-3)^2 - 9$$

$$y^2 - 4y = y^2 - 2.2y = y^2 - 2.2y + 2^2 - 2^2 = (y-2)^2 - 4$$

$$-9 = x^2 - 6x + y^2 - 4y = (x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4$$

$$-9 = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 13$$

$$-9 + 13 = (x-3)^2 + (y-2)^2 \quad \Rightarrow \quad 4 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

Centro: $(3, 2)$, radio: $r = 2$

Circunferencia

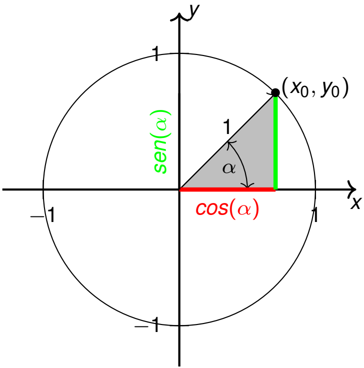
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Elipse

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Trigonometría

A partir de la circunferencia con radio r=1 y centro en $(0,0)$ se definen las funciones trigonométricas:
Los puntos sobre la circunferencia tienen coordenadas (x,y) y llamamos $x = cos(\alpha)$ e $y = sen(\alpha)$ donde α es el ángulo desde el eje de las x hasta el radio que une el punto con el origen.



Trigonometría

Otras funciones trigonométricas:

$$\text{(tangente)} \;\; tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

$$\text{(secante)} \;\; sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$$

$$\text{(cosecante)} \;\; cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$$

$$\text{(cotangente)} \;\; cotan(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$$

Puntos sobre circunferencia unidad (radio 1, centro en (0,0) $\rightarrow$ Eq. de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 1$$

ya que $x = cos(\alpha)$ e $y = sen(\alpha)$, se define la identidad trigonométrica:

$$cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1$$

Ángulos notables

(Ver apunte del curso de nivelación - nociones geométricas - relación grados/radianes: $180^\circ = \pi$)

grados	0	30	45	60	90
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Construcción de tabla con valores de la función seno(x) para los ángulos notables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(α)					

Escribir en cada casilla la secuencia de numeros del 0 al 4

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(α)	0	1	2	3	4

Tomar la raíz cuadrada a cada uno

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(α)	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$

Dividir cada uno por 2

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(α)	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Ángulos notables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Fórmula para suma de ángulos:

$$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$$

$$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$$

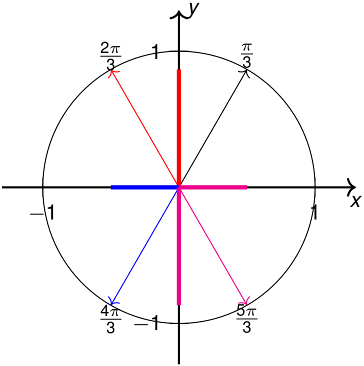
$cos(x)$ es una función par: $cos(-x) = cos(x)$
$sen(x)$ es una función impar: $sen(-x) = -sen(x)$

Ejemplo

Calcular:

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

1. Forma gráfica



$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo

Calcular:

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2. Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$$

$$= sen\left(\frac{\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) sen\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

Ejemplo

Calcular:

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2. Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$$

$$= sen\left(\frac{\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

Ejemplo

Calcular:

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2. Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$$

$$= sen\left(\frac{\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo

Calcular:

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2. Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$$

$$= sen\left(\frac{\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$$

Ejemplo

Calcular:

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2. Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$

$$= sen\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

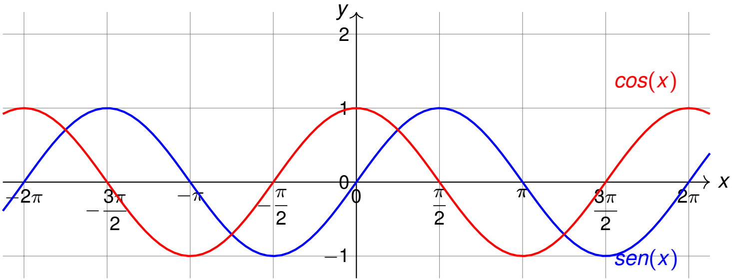
$$cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Formula del coseno de la suma...

$$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad y \quad sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + sen^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

Gráficos



$$cos(x + 2\pi) = cos(x)$$

$$sen(x + 2\pi) = sen(x)$$

$$sen(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad cos(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Gráficos

Dibujar

$$f(x) = 3cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$F(x) = cos(x) \qquad F\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \qquad 3F\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$