# Clase 21 - Análisis Matemático 1 - LC: Integrales II

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

10 de Junio de 2020

# Índice

Preguntas:

1. Dada una función $f(x)$: ¿Existe una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$?
2. ¿Es posible calcular el área debajo de una curva sin recurrir a argumentos puramente geométricos?

# Definiciones

## Antiderivada

Sea $f$ una función definida en un intervalo $\mathbb{I}$. Decimos que $F$ es **una antiderivada o primitiva de f** si

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{I}$$

## Integral Indefinida

Sea $f$ una función definida en un intervalo $\mathbb{I}$. Se llama **integral indefinida de $f$ al conjunto de TODAS las antiderivadas de f** y se simboliza:

$$\int f(x)\, dx$$

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces la integral indefinida es **el conjunto infinito** de todas las funciones que tienen la forma $G(x) = F(x) + c$, y se denota:

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + c}$$

| Propiedades |
| --- |
| $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ <br> $\int (f-g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ |
| $\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$ |

| Métodos de integración |
| --- |
| Por sustitución: <br> $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ <br> con $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$ |
| Por partes: <br> $\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$ |

| | $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
| --- | --- | --- |
| *constante* | $0$ | $c$ |
| $r \neq -1$ | $x^r$ | $\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ |
| $r = -1, x \neq 0$ | $\frac{1}{x}$ | $\ln(\lvert x \rvert) + c$ |
| | $cos(x)$ | $sen(x) + c$ |
| | $sen(x)$ | $-cos(x) + c$ |
| | $e^x$ | $e^x + c$ |
| $a > 0$ | $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln(a)} + c$ |
| $-1 \leq x \leq 1$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $arcsen(x) + c$ <br> $-arccos(x) + c$ |
| | $\frac{1}{1+x^2}$ | $arctan(x) + c$ |

# Ejemplos

1. $$\int \frac{x\,dx}{9+x^2} \underbrace{=}_{u=9+x^2 \to du=2x\,dx} \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(|u|)+c =$$
$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(9+x^2\right)+c}$$

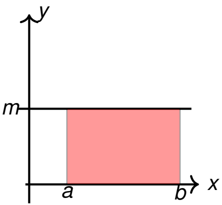
2. $$\int cos^2(x)\,dx =$$
$$\int \underbrace{cos(x)}_{f}\,\underbrace{cos(x)}_{g'}\,dx \underbrace{\underbrace{=}_{f=cos(x)\to f'=-sen(x)}}_{g'=cos(x)\to g=sen(x)} cos(x)sen(x) - \int (-sen(x))sen(x)\,dx$$
$$= cos(x)sen(x) + \int \underbrace{sen^2(x)}_{1-cos^2(x)}\,dx = cos(x)sen(x) + \int dx - \int cos^2(x)\,dx$$
$$\int cos^2(x) = cos(x)sen(x) + x + c - \int cos^2(x)\,dx$$
$$2\int cos^2(x)\,dx = cos(x)sen(x)+x+c \Rightarrow \boxed{\int cos^2(x)\,dx = \frac{cos(x)sen(x)}{2} + \frac{x}{2} + K}$$

Preguntas:

1. Dada una función $f(x)$: ¿Existe una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$?
2. ¿Es posible calcular el área debajo de una curva sin recurrir a argumentos puramente geométricos?

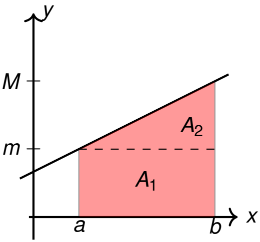
# Área con geometría

$$f(x) = m$$




$$A = (b - a).m$$

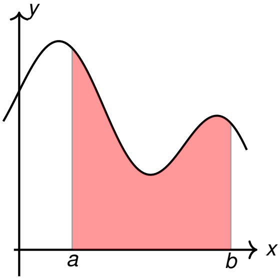
$$f(x) = ax + b$$




$$A = A_1 + A_2$$

$$A = (b-a).m + \frac{(b-a).(M-m)}{2}$$

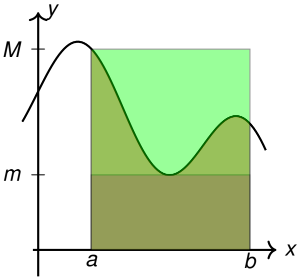
$$f(x) = sen(2x) - \frac{x^2}{10} + 3$$




$$A = ???$$

# Área con geometría

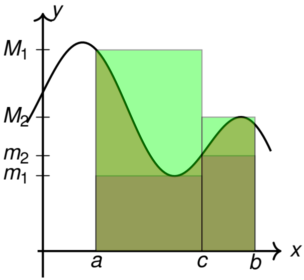
Tomemos una $f$ continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$
Teo. de Weierstrass: Tiene mínimo $m$ y máximo $M$ en el intervalo




$$(b - a).m \leq A \leq (b - a).M$$

# Área con geometría

Tomemos una $f$ continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$
Dividamos el intervalo en dos más pequeños: $[a, c]$ y $[c, b]$
Teo. de Weierstrass: Tiene mínimo $m_1$ y máximo $M_1$ en el intervalo $[a, c]$ y tiene mínimo $m_2$ y máximo $M_2$ en el $[c, b]$




$$(c-a).m_1 + (b-c).m_2 \leq A$$

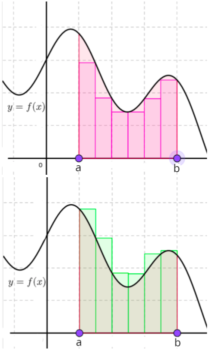
$$A \leq (c-a).M_1 + (b-c).m_2$$

# Área con geometría

Tomemos una $f$ continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$
Sigamos dividiendo en intervalos más pequeños:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$$

Llamemos $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ el ancho del intervalo k-ésimo. Y llamemos $\Delta$ al más grande de todos esos itervalos.
Teo. de Weierstrass: Tiene mínimo $m_k$ y máximo $M_k$ en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$




Suma inferior:

$$s = m_1.\Delta_1 + m_2.\Delta_2 + ... + m_n.\Delta_n \leq A$$

Suma superior:

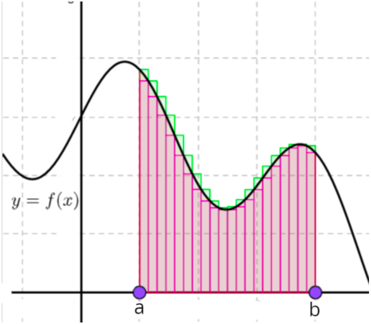
$$A \leq M_1.\Delta_1 + M_2.\Delta_2 + ... + M_n.\Delta_n = S$$

# Área con geometría

Tomemos una $f$ continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$
Sigamos dividiendo en intervalos más pequeños:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$$

Llamemos $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ el ancho del intervalo k-ésimo. Y llamemos $\Delta$ al más grande de todos esos itervalos.
Teo. de Weierstrass: Tiene mínimo $m_k$ y máximo $M_k$ en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$




https://www.geogebra.org/m/Fv6t696j

$$s \leq A \leq S$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k$$

(Sumas de Riemann)
El área encerrada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k$$

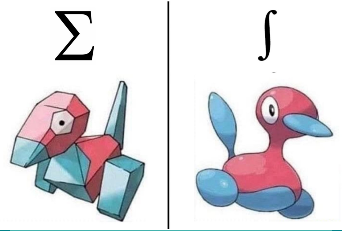
# Integral definida

## Integral definida

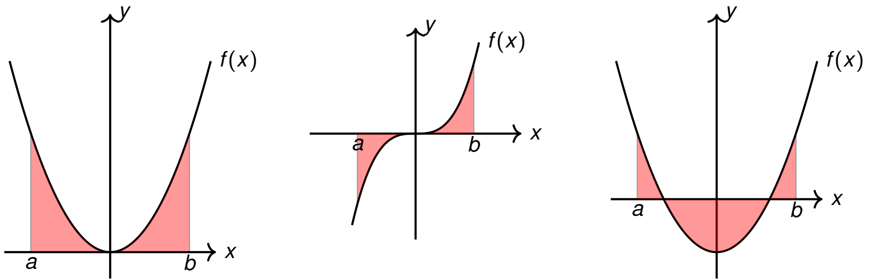
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, o bien es una función acotada y con un número finito de discontinuidades en el intervalo. La **integral definida de f en** $[a, b]$ **se denota** $\int_a^b f(x)dx$ y está dada por el área bajo la curva $y = f(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$:

$$\int_a^b f(x)dx = A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k$$

Los extremos del intervalo se llaman límite inferior y límite superior de integración



La integral es siempre el área comprendida entre la curva, el eje de las x, y los extremos del intervalo. Es positiva si está por arriba del eje x, y es negativa si está por debajo del eje x.

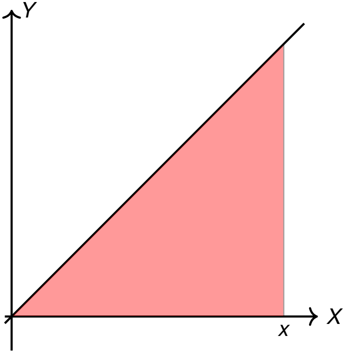


# Integral definida

Propiedades:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. Si $f(x) \geq 0\,\forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
4. Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\int_a^b (f(x) + g(x))\;dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
   $\int_a^b (f(x) - g(x))\;dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
6. Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
7. Si $f(x) \leq g(x)\,\forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Sea $f(x) = x$ y consideremos $\int_0^x f(t)\,dt$




$$A = \frac{x.x}{2}$$

$$A = \frac{x^2}{2} = F(x)$$

Pero sabemos que $F(x) = \frac{x^2}{2}$
es una antiderivada de $f(x) = x$!!!

# Teoremas fundamentales del cálculo

Primer Teorema fundamental del Cálculo . Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \;\; \forall x \in [a, b]$$

Entonces $F$ es una antiderivada de $f$ en $[a, b]$, es decir que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

# Teoremas fundamentales del cálculo

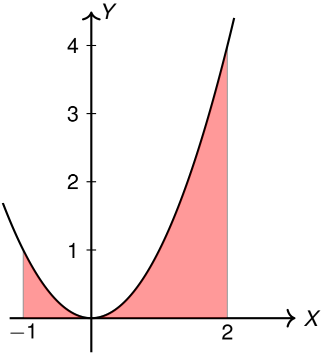
Segundo Teorema fundamental del Cálculo . Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea G una primitiva de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b \quad \boxed{\text{Regla de Barrow}}$$

# Ejemplos

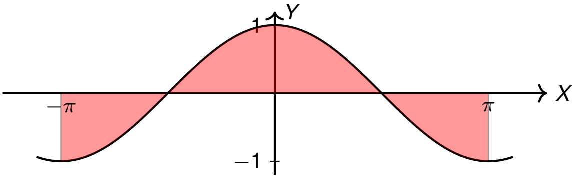
$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8+1}{3} = \boxed{3}$$

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + c\right)\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} + c - \left(\frac{(-1)^3}{3} + c\right) = \frac{8+1}{3} + c - c = 3$$



# Ejemplo

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(x)\, dx = sen(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = sen(\pi) - sen(-\pi) = \boxed{0}$$



# Métodos: sustitución

## Método de sustitución para la integral definida

Sean f y g' funciones continuas en sus dominios, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

En particular, si F es una primitiva de f, etonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

Ejemplo: $$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x+2)^3} \underbrace{=}_{\underbrace{u=x+2,\, du=dx}_{x=3,u=5;x=-1,u=1}} \int_1^5 \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2}u^{-2}\Big|_1^5 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{1^2}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-1\right) = -\frac{1}{2}\frac{(-24)}{25} = \boxed{\frac{24}{50}}$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)^3} = \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2}u^{-2} = -\frac{1}{2(x+2)^2} \Rightarrow \int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x+2)^3} = -\frac{1}{2(x+2)^2}\Big|_{-1}^{3} = \ldots$$

# Métodos: por partes

## Integración por partes para la integral definida

Sean f y g funciones derivables en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Ejemplo:

$$\int_{-1}^1 xe^x dx \underbrace{\underbrace{=}_{f=x,g'=e^x}}_{f'=1,g=e^x} xe^x\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = \left(e - (-1)e^{-1}\right) - e^x\Big|_{-1}^1 = e + e^{-1} - \left(e - e^{-1}\right) =$$

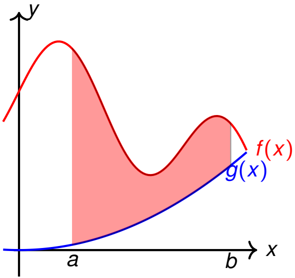
$$e + e^{-1} - e + e^{-1} = \boxed{\frac{2}{e}}$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x \Rightarrow \int_{-1}^1 xe^x dx = e^x(x-1)\Big|_{-1}^1 = \ldots$$

# Área entre dos curvas

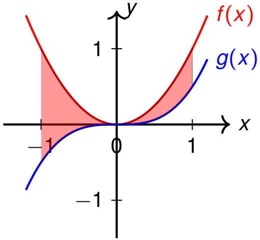
Sean f y g tales que $f(x) \geq g(x) \, \forall x \in [a, b]$. Entonces **el área comprendida entre los gráficos de f y g y las rectas verticales x=a y x=b está dada por**

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$



# Ejemplo 1

$f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x^3}{2}$ en $[-1, 1]$

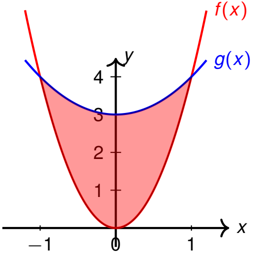



$$A = \int_{-1}^{1} \left( x^2 - \frac{x^3}{2} \right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx - \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\left( \frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3} \right) - \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

# Ejemplo 2

Calcular el área encerrada por las curvas de $f(x) = 4x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$




$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4x^2 = x^2+3 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow 3x^2-3 = 0 \Rightarrow 3(x^2-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$A = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + 3)dx - \int_{-1}^{1} 4x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_{-1}^{1} - 4\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 3 - \left(\frac{(-1)}{3} + 3(-1)\right)\right) - 4\left(\frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3}\right) = \frac{2}{3} + 6 - \frac{8}{3} = \boxed{4}$$