

Clase 13 - Análisis Matemático 1 - LC: Derivadas I

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

29 de Abril de 2020

Índice

1 Repaso

- Dominio, continuidad, asíntotas

2 Derivadas

- Definición
- Ejemplos
- Teoremas y Definiciones

3 Reglas de derivación

- Suma, producto, cociente, potencia, composición
- Ejercicios

$$f(x)$$

- Dominio: $Dom f = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\}$
- Continuidad en \mathbb{I} : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \forall a \in \mathbb{I}$
- Discontinuidades evitable y de salto
- Discontinuidad esencial: asíntota vertical en $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} f(x) = \pm \infty$$

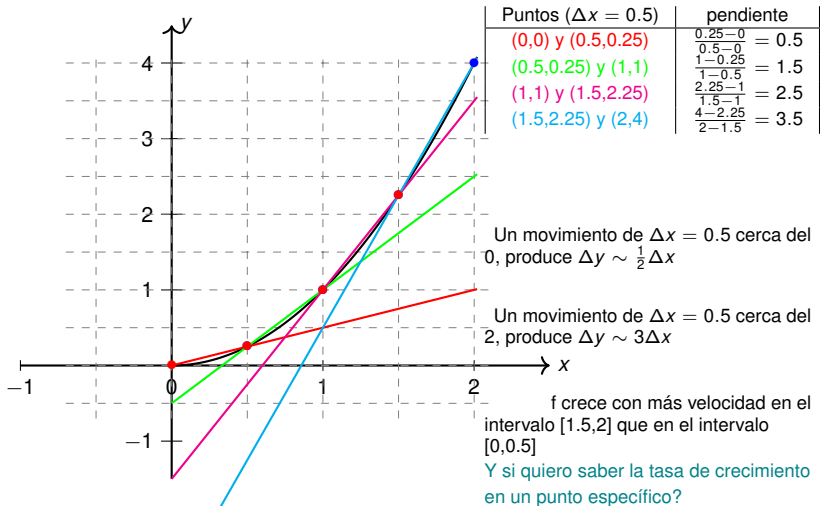
- Comportamiento en x grandes (en valor absoluto): Asíntotas horizontales en $y = L$ y/o en $y = M$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{y/o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = M$$

¿Cómo podemos obtener más información del gráfico de f ?

Recta secante

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Variación de la pendiente de la recta secante que pasa por un punto fijo cuando achicamos el Δx (recta secante entre los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$):

<https://www.geogebra.org/m/vcnwk5yp>

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

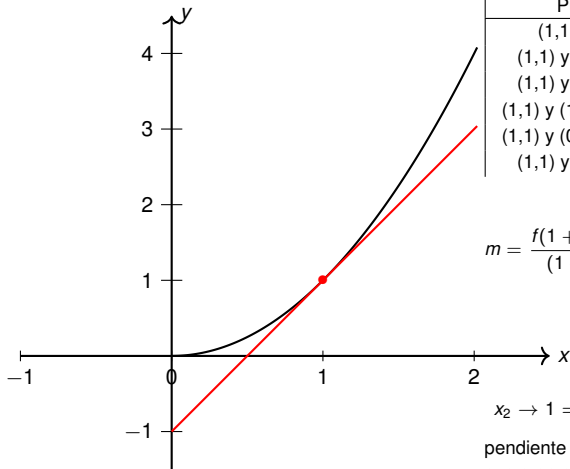


Figure: $f(x) = x^2$

Puntos	pendiente
(1,1) y (2,4)	$\frac{4-1}{2-1} = 3$
(1,1) y (1.5,2.25)	$\frac{2.25-1}{1.5-1} = 2.5$
(1,1) y (1.2,1.44)	$\frac{1.44-1}{1.2-1} = 2.2$
(1,1) y (1.01,1.0201)	$\frac{1.0201-1}{1.01-1} = 2.01$
(1,1) y (0.99,0.9801)	$\frac{0.9801-1}{0.99-1} = 1.99$
(1,1) y (0.5,0.25)	$\frac{0.25-1}{0.5-1} = 1.5$

$$x_2 = 1 + h \rightarrow$$

$$m = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$x_2 \rightarrow 1 \Rightarrow h \rightarrow 0 \Rightarrow \text{pendiente} \rightarrow 2$$

pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $x=1$!

Derivada

Las pendientes de las secantes que pasan por el punto a

$$m = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\text{Cociente incremental}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

La pendiente de la recta tangente a la función en el punto a se define como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underbrace{=}_{x=a+h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y le llamaremos la derivada de f en a .

Derivada de f en a

Sea a un número en el dominio de f , la derivada de la función f en a es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto:

$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si existe la derivada en un punto a , se dice que f es derivable o diferenciable en a

El dominio de la $f'(x)$ son todos aquellos x en el dominio de f en los que la función es derivable.

Ejemplo 1

Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $a = 1$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

$$f(1+h) - f(1) = 1 + 2h + h^2 - 1^2 = 2h + h^2 = h(2+h)$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2$$

Ejemplo 2

Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{3-x}$ en x

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sqrt{3-(x+h)} - \sqrt{3-x}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{h}_{\rightarrow 0}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-(x+h)} - \sqrt{3-x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{3-(x+h)}]^2 - [\sqrt{3-x}]^2}{h [\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3-(x+h) - (3-x)}{h [\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}]} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{3} - \cancel{x} - h - \cancel{3} + \cancel{x}}{h [\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h} [\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}]} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{3-(x+h)}_{\rightarrow x}} + \sqrt{3-x}}_{\rightarrow \sqrt{3-x}}} = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}} = f'(x)}
 \end{aligned}$$

Teorema

Si existe la derivada en un punto a , se dice que f es derivable o diferenciable en a

Teorema

Si f es diferenciable en a entonces f es continua en a

$$\exists f'(a) \Rightarrow f \text{ es continua en } a$$

ATENCIÓN:

$p \Rightarrow q$ no es lo mismo que el recíproco $q \Rightarrow p$: si f es continua en a , no podemos decir nada a priori sobre si f es diferenciable en a !!!

PERO:

$p \Rightarrow q$ sí es lo mismo que el contrarrecíproco $\neg q \Rightarrow \neg p$: si f No es continua en a entonces f NO es diferenciable en a

Definiciones

Derivadas laterales

Se define la derivada a izquierda de f en a si nos acercamos al punto a con valores negativos de h ($a + h < a$!!!):

$$f'^-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se define la derivada a derecha de f en a si nos acercamos al punto a con valores positivos de h ($a + h > a$!!!):

$$f'^+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(a)$ existe si y sólo si las derivadas laterales existen y son iguales.

Ejercicio

Determinar si $f(x) = |x - 1|$ es derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{si } x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -(x - 1) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$1 \quad f'^-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$\text{Ya que } 1 \in [1, \infty) \Rightarrow f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Si } h \rightarrow 0^- \Rightarrow 1 + h < 1 \Rightarrow f(x) = -(x - 1) \Rightarrow f(1+h) = -((1+h) - 1)$$

$$f'^-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-((1+h) - 1) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(1+h-1) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = \boxed{-1}$$

$$2 \quad f'^+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f(1) = 0$$

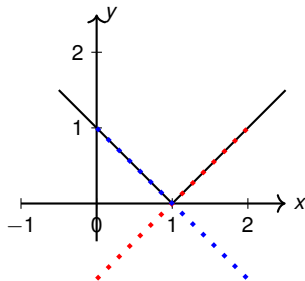
$$\text{Si } h \rightarrow 0^+ \Rightarrow 1 + h > 1 \Rightarrow f(x) = x - 1 \Rightarrow f(1+h) = ((1+h) - 1)$$

$$f'^+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{((1+h) - 1) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h-1) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = \boxed{1}$$

Dado que $f'^-(1) \neq f'^+(1) \Rightarrow \nexists f'(1)$

Y gráficamente...

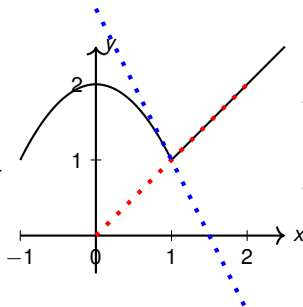
$$f(x) = |x - 1|$$



$$f'^+(1) = 1$$

$$f'^-(1) = -1$$

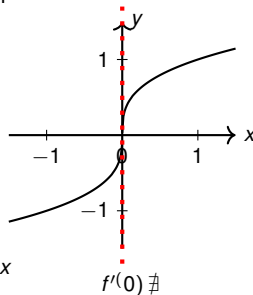
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



$$f'^+(1) = 1$$

$$f'^-(1) = -2$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



Y por supuesto, si la f tiene una discontinuidad en un punto, entonces NO es derivable en ese punto.

Reglas para derivar

Si f y g son derivables en x , y c una constante, entonces:

1 $(c)' = 0$

2 $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

3 $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4 $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

5 $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

6 Si $f(x) = x^r$, $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

7 Regla de la cadena: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Derivar con reglas

$F(x)$	$F'(x)$
c	0
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

1 $F(x) = x^2 \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot x^{(2-1)} = 2 \cdot x$

2 $F(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$
 $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$

3 $F(x) = x^3 + 3x^4 \Rightarrow F' = f' + g'$
 $F'(x) = 3 \cdot x^{(3-1)} + 3 \cdot 4 \cdot x^{(4-1)} =$
 $3x^2 + 12x^3$

4 $F(x) = (x-2) \cdot \sqrt{x} \rightarrow F = f \cdot g$
 $f = x-2, g = \sqrt{x} \Rightarrow F' = f' \cdot g + f \cdot g'$
 $f' = 1 \cdot x^{(1-1)} - 0 = 1 \quad g' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$
 $F'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + (x-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5 $F(x) = \frac{x^2+1}{2x^5+7x} \rightarrow F = \frac{f}{g}$
 $f = x^2 + 1$ y $g = 2x^5 + 7x$
 $\rightarrow F' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
 $f' = 2x$ y $g' = 10x^4 + 7 \Rightarrow$
 $F'(x) = \frac{2x \cdot (2x^5+7x) - (x^2+1) \cdot (10x^4+7)}{(2x^5+7x)^2}$

6 $F(x) = (x^2 + 2x)^3 \rightarrow F = f(g(x))$
 $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2 + 2x$
 $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
 $f' = 3x^2$ y $g' = 2x + 2$
 $f'(g(x)) = 3 \cdot (g(x))^2 = 3 \cdot (x^2 + 2x)^2$
 $F'(x) = 3 \cdot (x^2 + 2x)^2 \cdot (2x + 2)$

Derivar con reglas

$F(x)$	$F'(x)$
c	0
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

$$\blacksquare F = \frac{f}{g} \text{ con } f = 1 \text{ y } g = x$$

$$\bullet F' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$f' = 0 \text{ y } g' = 1$$

$$F'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\blacksquare F = x^{-1}$$

$$\bullet F'(x) = (-1) \cdot x^{(-1-1)} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Derivar con reglas

$F(x)$	$F'(x)$
c	0
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^3 + x}}{(2x + 9)^3}$$

$$F(x) = \sqrt{x^3 + x} \cdot (2x + 9)^{-3}$$

$$F = f \cdot g \text{ con } f(x) = \sqrt{x^3 + x} \text{ y } g(x) = (2x + 9)^{-3} \Rightarrow F' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$f(x) = H(J(x)) \text{ con } H(x) = \sqrt{x} \text{ y } J(x) = x^3 + x$$

$$f'(x) = H'(J(x)) \cdot J'(x) = \frac{1}{2\sqrt{J(x)}} \cdot (3x^2 + 1) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3x^2 + 1)$$

$$g(x) = M(N(x)) \text{ con } M(x) = x^{-3} \text{ y } N(x) = 2x + 9$$

$$g'(x) = M'(N(x)) \cdot N'(x) = (-3) \cdot (N(x))^{(-3-1)} \cdot 2 = -6 \cdot (2x + 9)^{-4}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3x^2 + 1) \cdot (2x + 9)^{-3} + \sqrt{x^3 + x} \cdot (-6 \cdot (2x + 9)^{-4})$$

FIN