Clase 18 - Análisis Matemático 1 - LC: Análisis de funciones

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

20 de Mayo de 2020

Índice

Función $f(x)$

1. Dominio de f: el conjunto de valores x en los que la función está bien definida

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \exists\, f\}$$

2. Simetrías - Paridad de f:

$$\text{si } f(-x) = f(x) \Rightarrow \text{ f par} \qquad \text{si } f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{ f impar}$$

3. Cruce del gráfico con los ejes coordenados
   $(0, f(0))$ cruce con el eje de las y; $(x_0, 0)$ cruce con el eje de las x (raíces)
4. Asíntotas Verticales (en un punto $x = a$ que NO pertenece al Dom f)

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$$

5. Asíntotas horizontales (comportamiento lejos) en $y = L$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Derivada primera de la función: $f'(x)$

1. Puntos críticos: Puntos del dominio de f en los que $f'(x) = 0$ o que la función no es derivable
$$P.C. = \{x \in Dom\, f \;/\; f'(x) = 0 \vee \nexists\, f'(x)\}$$
2. Crecimiento/Decrecimiento de la funión
$$\text{si } f'(x) > 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow \; f \text{ crece en } \mathbb{I}$$
$$\text{si } f'(x) < 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow \; f \text{ decrece en } \mathbb{I}$$
3. Máximos y mínimos locales
Si f crece a la izquierda de un punto crítico, y f decrece a la derecha del punto crítico, entonces es un punto de máximo local $\nearrow\searrow$
Si f decrece a la izquierda de un punto crítico, y f crece a la derecha del punto crítico, entonces es un punto de mínimo local $\searrow\nearrow$

Derivada segunda de la función: $f''(x)$

1. Concavidad hacia arriba y hacia abajo

$$\text{si } f''(x) > 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow \ f \text{ concava hacia arriba en } \mathbb{I} \qquad \bigcup$$

$$\text{si } f''(x) < 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow \ f \text{ concava hacia abajo en } \mathbb{I} \qquad \bigcap$$

2. Puntos de inflexión: son puntos en el dominio de f en los que cambia la concavidad de la función, pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

$$P.I. = \{x_i \in Dom\, f \ / \text{ f es } \bigcup x_i \bigcap \vee \text{ f es } \bigcap x_i \bigcup\}$$

3. Máximo y mínimo local con $f''(x_c)$
Si x_c es un P.C. y $f''(x_c) > 0 \Rightarrow x_c$ es mínimo local
Si x_c es un P.C. y $f''(x_c) < 0 \Rightarrow x_c$ es máximo local

Resumen

$$f(x) \begin{cases} Dom\, f \\ simetria \rightarrow opcional \\ cruce\ con\ los\ ejes\ (0, f(0))\ (x_0, 0) \rightarrow opcional \\ A.V.(\lim_{x \to a^{\pm}} = \pm\infty) \\ A.H.(\lim_{x \to \pm\infty} = L) \end{cases}$$

$$f'(x) \begin{cases} P.C.\ (x_c \in Dom\, f\ /\ f'(x_c) = 0\ \vee f'(x_c) \nexists) \\ f'(x) > 0 \Rightarrow f\ \nearrow,\ f'(x) < 0 \Rightarrow f\ \searrow \\ max/min\ local\ \nearrow\searrow\ \searrow\nearrow \end{cases}$$

$$f''(x) \begin{cases} f''(x) > 0 \rightarrow f \bigcup,\ f''(x) < 0 \rightarrow f \bigcap \\ P.I.\ (x_i \in Dom\, f\ /\ \bigcup\bigcap \vee \bigcap\bigcup) \\ x_c : min\ local\ si\ f''(x_c) > 0,\ max\ local\ si\ f''(x_c) < 0 \rightarrow opcional \end{cases}$$

Análisis completo de una función. Graficar.

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$$
$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$$
$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

Info a partir de f

$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \qquad f'(x) = -4x^3 + 4x \qquad f''(x) = -12x^2 + 4$

1. Dominio: El dominio son todos los reales porque es un polinomio
2. Paridad: $f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 3 = -x^4 + 2x^2 + 3 = f(x)$ $\boxed{\text{f es par}}$ (simétrica con respecto al eje y)
3. Cruce con los ejes coordenados
   cruce con eje y: $f(0) = 3 \rightarrow \boxed{(0,3)}$
   cruce con eje x (raíces): $0 = -x^4 + 2x^2 + 3$ $\quad x^2 = z \rightarrow 0 = -z^2 + 2z + 3$
   Baskhara: $z_{1,2} = \frac{-2\pm 4}{-2}$ $\quad z_1 = -1 \quad z_2 = 3 \qquad x^2 = 3 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$
   $\boxed{(-\sqrt{3},0) y (\sqrt{3},0)}$
4. A.V.: No posee porque tiene dominio $\mathbb{R}$
5. A.H:

$$\lim_{x\to+\infty} -x^4 + 2x^2 + 12 = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^4}_{\to\infty} \underbrace{\left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^4}\right)}_{\to -1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -x^4 + 2x^2 + 12 = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^4}_{\to\infty} \underbrace{\left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^4}\right)}_{\to -1} = -\infty$$

No posee

Gráfico

$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \qquad f'(x) = -4x^3 + 4x \qquad f''(x) = -12x^2 + 4$

Dom f $\mathbb{R}$
f es par
cruce con eje x $A = (-\sqrt{3}, 0)$ y $B = (\sqrt{3}, 0)$
cruce con eje y $C = (0, 3)$
No tiene A.V
No tiene A.H
$lim(x \to \infty) = -\infty = lim(x \to -\infty)$

Info a partir de f'

$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ $f'(x) = -4x^3 + 4x$ $f''(x) = -12x^2 + 4$

1. P.C.: $x_c \in Dom\, f \ / \ f'(x_c) = 0$ o $f'(x_c) \nexists$
   $Dom\ f' = \mathbb{R}$ f es derivable en todo su dominio
   $f'(x) = 0 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x-1)(x+1) \Rightarrow x_c = 0, x_c = 1, x_c = -1$

2. Crecimiento/decrecimiento: signos de la derivada 1ra
   $-4x(x-1)(x+1) > 0 \vee -4x(x-1)(x+1) < 0$

x_c; $x \notin Dom$	$(-\infty, -1)$ x=-1000	$(-1, 0)$ x=-0.5	$(0, 1)$ x=0.5	$(1, +\infty)$ x=1000
$-4x$	+	+	−	−
$(x-1)$	−	−	−	+
$(x+1)$	−	+	+	+
$f'(x)$	+	−	+	−
$f(x)$	↗	↘	↗	↘

3. Máximos y mínimos locales (veo comportamiento de f a derecha e izq de P.C.)
   Máximos locales en $\boxed{x_c = -1, f(x_c) = 4}$ y en $\boxed{x_c = 1, f(x_c) = 4}$ (es una función par!)
   Mínimo local en $\boxed{x_c = 0, f(x_c) = 3}$

Gráfico

$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \qquad f'(x) = -4x^3 + 4x \qquad f''(x) = -12x^2 + 4$

$Dom\, f\ \mathbb{R}$
f es par
No tiene A.V
No tiene A.H
$lim(x \to \infty) = -\infty = lim(x \to -\infty)$
cruce con eje x: $A = (-\sqrt{3}, 0)$ y $B = (\sqrt{3}, 0)$
cruce con eje y: $C = (0, 3)$

f crece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ f decrece $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
máx local: $P = (-1, 4)$ y $Q = (1, 4)$ mín local: $R = (0, 3)$

Info a partir de f''

$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \qquad f'(x) = -4x^3 + 4x \qquad f''(x) = -12x^2 + 4$

1. Buscamos las raíces de f'' para definir intervalos
$f''(x) = 0 = -12x^2 + 4 = -12\left(x^2 - \frac{4}{12}\right) = -12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) =$
$-12\left(x - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$

2. Concavidad hacia arriba/abajo: signos de la derivada 2da
$-12\left(x - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) > 0 \vee -12\left(x - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0$

$x_r; x \notin Dom$	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ x=-1000	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ x=0	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ x=1000
$-12.\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$+$	$-$	$-$
$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

3. Puntos de inflexión (puntos del dominio en que cambia la concavidad)
$x_i = -\frac{\sqrt{3}}{3}, f(x_i) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 3 = \frac{5}{9} + 3 = \frac{32}{9}$
$x_i = \frac{\sqrt{3}}{3}, f(x_i) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 3 = \frac{5}{9} + 3 = \frac{32}{9}$

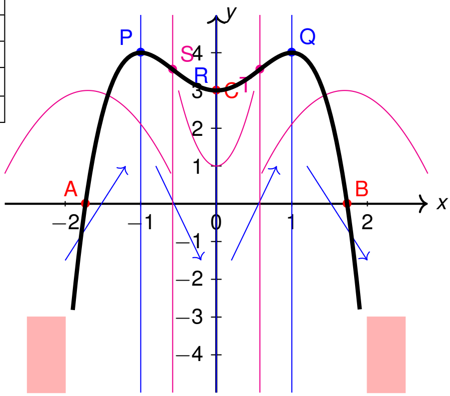
Gráfico

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \qquad f'(x) = -4x^3 + 4x \qquad f''(x) = -12x^2 + 4$$

Dom f $\mathbb{R}$
f es par
No tiene A.V
No tiene A.H
$lim(x \to \infty) = -\infty = lim(x \to -\infty)$
cruce con eje x: $A = (-\sqrt{3}, 0)$ y $B = (\sqrt{3}, 0)$
cruce con eje y: $C = (0, 3)$

f crece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ f decrece $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
máx local: $P = (-1, 4)$ y $Q = (1, 4)$ mín local: $R = (0, 3)$

f cóncava abajo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ f cóncava arriba $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$
P.I.: $S = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{9}\right)$ y $T = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{9})$



Análisis completo de una función. Graficar.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot (x^2-1)^2 - (-4x) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-4(x^2-1) \cdot (x^2 - 1 - 4x^2)}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{-4(-3x^2-1)}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

Info a partir de f

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$

1. Dominio: $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 - 1 \neq 0\}$
   $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \qquad \boxed{Dom\, f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$
2. Paridad: $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$ $\boxed{\text{f es par}}$ (simétrica con respecto al eje y)
3. Cruce con los ejes coordenados: cruce con eje y: $f(0) = -1 \rightarrow \boxed{(0,-1)}$
   cruce con eje x (raíces): $0 = x^2 + 1$ $\boxed{\text{No tiene raices reales}}$
4. A.V.: $\lim\limits_{\underbrace{x \to -1^-}_{x<-1 \to x+1<0}} \frac{x^2+1}{\underbrace{(x-1)}_{\to -2}\underbrace{(x+1)}_{\to 0(-)}} = +\infty \qquad \lim\limits_{\underbrace{x \to -1^+}_{x>-1 \to x+1>0}} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty$

   $\lim\limits_{\underbrace{x \to 1^-}_{x<1 \to x-1<0}} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty \qquad \lim\limits_{\underbrace{x \to 1^+}_{x>1 \to x-1>0}} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = +\infty$

   $\boxed{\text{x} = -1 \text{ es A.V. y x} = 1 \text{ es A.V.}}$
5. A.H: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$

   $\boxed{y = 1 \text{ es A.H.}}$

Gráfico

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
f es par
No tiene cruce con eje x
cruce con eje y $A = (0, -1)$
A.V en x=-1 y en x=1 $lim(-1^-) = +\infty$ y $lim(-1^+) = -\infty$ $lim(1^-) = -\infty$ y $lim(1^+) = +\infty$
A.H en y=1 (en $+\infty$ y $-\infty$)

Info a partir de f'

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

1. P.C.: $x_c \in Dom\, f \;/\; f'(x_c) = 0$ o $f'(x_c) \nexists$
   $Dom\, f' = Dom\, f$; f es derivable en el dominio de f
   $f'(x) = 0 = -4x \Rightarrow \boxed{x_c = 0}$

2. Crecimiento/decrecimiento: signos de la derivada 1ra
   $\frac{-4x}{(x^2-1)^2} > 0 \vee \frac{-4x}{(x^2-1)^2} < 0$

x_c; $x \notin Dom$	$(-\infty, -1)$ x=-1000	$(-1, 0)$ x=-0.5	$(0, 1)$ x=0.5	$(1, +\infty)$ x=1000
$-4x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(x^2-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

3. Máximos y mínimos locales (veo comportamiento de f a derecha e izq de P.C.)
   Máximo local en $\boxed{x_c = 0}$

Gráfico

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
f es par
No tiene cruce con eje x
cruce con eje y $A = (0, -1)$
A.V en x=-1 y en x=1 $lim(-1^-) = +\infty$ y $lim(-1^+) = -\infty$ $lim(1^-) = -\infty$ y $lim(1^+) = +\infty$
A.H en y=1 (en $+\infty$ y $-\infty$)

f crece $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ f decrece $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
máx local: $P = (0, -1)$

Info a partir de f''

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

1. Buscamos las raíces de f'' para definir intervalos
   $f''(x) = 0 = 12x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{12} \Rightarrow$ NO tiene raíces

2. Concavidad hacia arriba/abajo: signos de la derivada 2da
   $$\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} > 0 \vee \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} < 0$$
   $$\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^2} \cdot \frac{1}{(x^2-1)} = \boxed{\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$x_r; x \notin Dom$	$(-\infty, -1)$ x=-1000	$(-1, 1)$ x=0	$(1, +\infty)$ x=1000
$\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^2}$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\bigcup$	$\bigcap$	$\bigcup$

3. Puntos de inflexión (puntos del dominio en que cambia la concavidad)
   NO existen

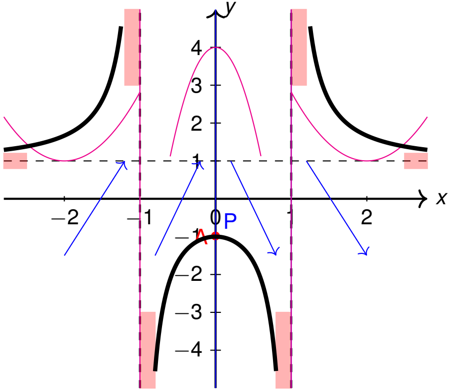
Gráfico

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
f es par
No tiene cruce con eje x
cruce con eje y $A = (0, -1)$
A.V en x=-1 y en x=1 $lim(-1^-) = +\infty$ y $lim(-1^+) = -\infty$ $lim(1^-) = -\infty$ y $lim(1^+) = +\infty$
A.H en y=1 (en $+\infty$ y $-\infty$)

f crece $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ f decrece $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
máx local: $P = (0, -1)$

f cóncava abajo $(-1, 1)$ f cóncava arriba $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
P.I.: No hay



FIN