

Clase 8 - Análisis Matemático 1 - LC: Límites I

Eugenia Díaz-Giménez¹

eugenia.diaz@unc.edu.ar

8 de Abril de 2020

Índice

1 Límites

- Definición

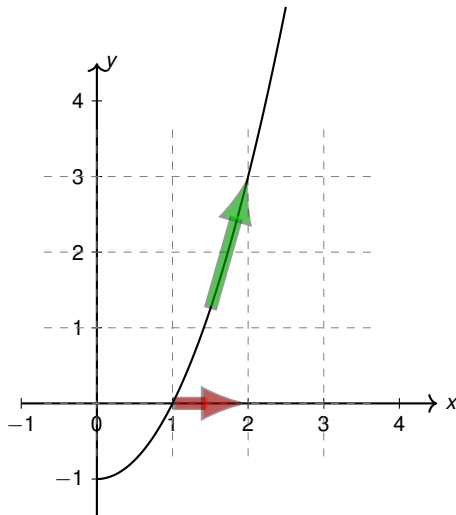
2 Propiedades

- Propiedades - Teoremas
- Ejemplos

3 Límites laterales

- Definición
- Ejemplos

Analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 2$

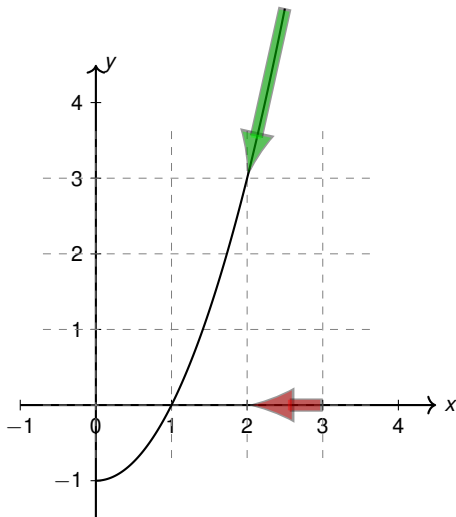


$$f(x) = x^2 - 1$$

x	y
1	0
1.5	1.25
1.9	2.61
1.95	2.80
1.98	2.92
1.99	2.96
1.999	2.996
1.9999	2.9996

Figure: $f(x) = x^2 - 1$

Analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 2$



$$f(x) = x^2 - 1$$

x	y
3	8
2.5	5.25
2.1	3.41
2.05	3.20
2.02	3.08
2.01	3.04
2.001	3.004
2.0001	3.0004

Figure: $f(x) = x^2 - 1$

Analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 2$

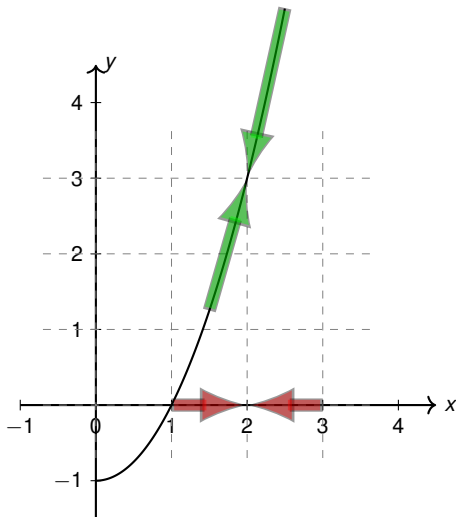


Figure: $f(x) = x^2 - 1$

$$f(x) = x^2 - 1$$

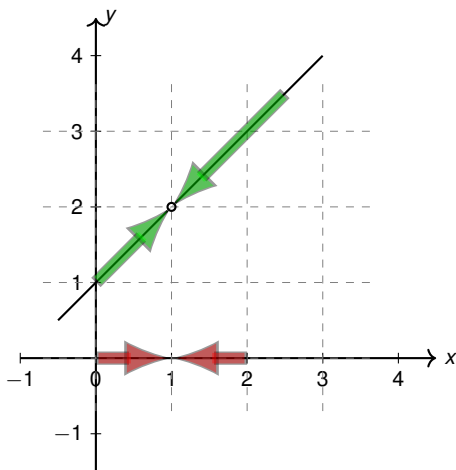
x	y
1.98	2.92
1.99	2.96
1.999	2.996
1.9999	2.9996
2	
2.0001	3.0004
2.001	3.004
2.01	3.04
2.02	3.08

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow f \rightarrow 3$$

En este caso, además:

$$f(2) = 3$$

Sea $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 1$



$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

x	y
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
1	\nexists
1.001	2.001
1.01	2.01
1.1	2.1
1.5	2.5

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow f \rightarrow 2$$

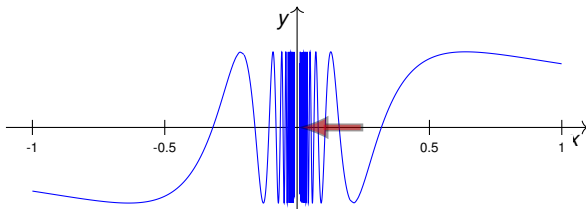
En este caso, además:

$$\nexists f(1)$$

Sea $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 0$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$



x	y
$\frac{1}{10\pi}$	0
$\frac{2}{23\pi}$	-1
$\frac{1}{30\pi}$	0
$\frac{2}{41\pi}$	1
$\frac{1}{100\pi}$	0

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow ???$$

En este caso, además:

$$\nexists f(0)$$

Definición

Si al **acercarnos** a un valor de $x = a$, la función **se acerca** a un valor L , diremos que **el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a a**

Notación: $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a$, o

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

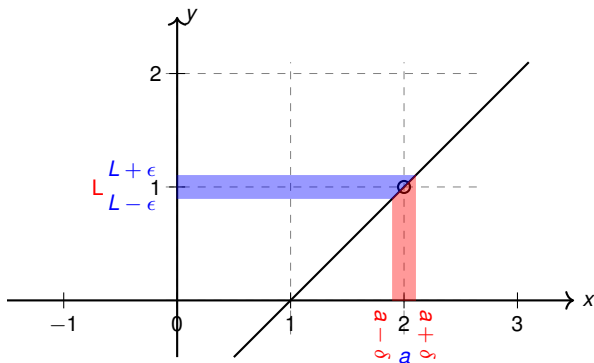
Pero... cuán cerca es "cerca"?

Sea $f(x) = x - 1$, y tomemos $a = 2$.

Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.1 de $L = 1$, llamando $0.1 = \epsilon$, podemos escribirlos en términos de distancia:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Cuáles son los valores de x para que eso se cumpla?

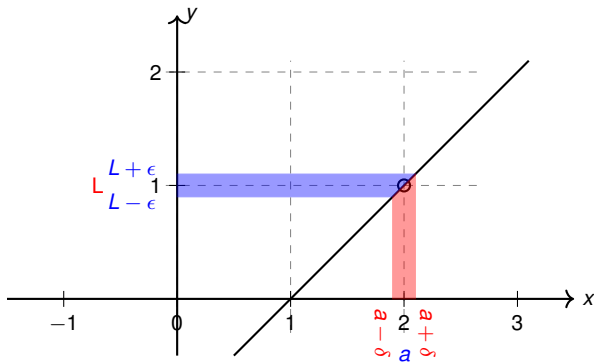


Sea $f(x) = x - 1$, y tomemos $a = 2$.

Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.1 de $L = 1$, llamando $0.1 = \epsilon$, podemos escribirlos en términos de distancia:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Cuáles son los valores de x para que eso se cumpla?



$$0 < |x - a| < \delta$$

Sea $f(x) = x - 1$, y tomemos $a = 2$.

Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.1 de $L = 1$, llamando $0.1 = \epsilon$, podemos escribirlos en términos de distancia:

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad (1)$$

Cuáles son los valores de x para que eso se cumpla?

$$0 < |x - a| < \delta$$

Cuánto es delta?

$$|f(x) - L| = |(x - 1) - 1| = |x - 2| \quad (1) < \epsilon$$

Tomando $\delta = \epsilon = 0.1$ me aseguro que la función esté a menos de 0.1 de $L = 1$, es decir: cuando $0 < |x - 2| < 0.1$ se cumple que $|f(x) - 1| < 0.1$

$0 < |x - 2|$ nos dice que $x \neq 2$

$$|x - 2| < 0.1 \Rightarrow -0.1 < x - 2 < 0.1 \Rightarrow -0.1 + 2 < x < 0.1 + 2$$

$$\Rightarrow 1.9 < x < 2.1 \Rightarrow x \in (1.9, 2.1) - \{2\}$$

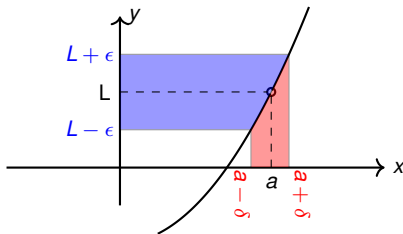
Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene al punto a , excepto quizás en $x = a$. Decimos que: el límite para x que tiende a a de $f(x)$ es el número L si para todo número $\epsilon > 0$, existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que si la distancia entre x y a es menor que δ , entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$



Propiedades

Proposiciones y teoremas

- 1 Si $f(x) = c$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$
- 2 Si $f(x) = cx$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ca$
- 3 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces:
 - a $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$
 - b $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$
 - c Si $M \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{L}{M}$
 - d Si $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si n es par, L debe ser positivo)
- 4 Si $f(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 5 Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (quizás excepto en a), y además $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ (Teorema del sandwich)

Aplicaciones y Ejemplos

- Si $p(x)$ es un polinomio, usando (2) y (3.b): $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 4x + 1 = -2$

- Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios, y si $q(a) \neq 0$, usando (2), (3.b) y (3.c):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{1}{3}$

- Si $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, usando (2), (3.b) y (3.d): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sqrt[n]{p(a)}$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^3 - 4x + 1} = \sqrt[3]{-2}$

Otros ejemplos

■ Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

ATENCIÓN: No puedo aplicar directamente la propiedad del cociente (3.c) ya que el denominador se anula $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

■ Calcular

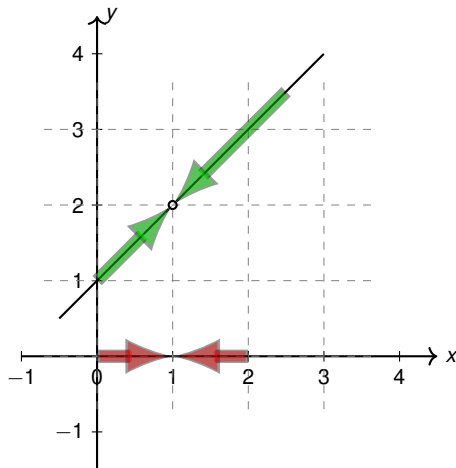
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$$

$$\frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x} = \frac{(2 - \sqrt{4 - x})(2 + \sqrt{4 - x})}{x(2 + \sqrt{4 - x})} = \frac{4 - (4 - x)}{x(2 + \sqrt{4 - x})} = \frac{x}{x(2 + \sqrt{4 - x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x}} = \frac{1}{4}$$

Volvamos a tomar $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, y analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$



x	y	
0.5	1.5	$x < 1$
0.9	1.9	
0.99	1.99	
0.999	1.999	
1	\nexists	
1.5	2.5	$x > 1$
1.1	2.1	
1.01	2.01	
1.001	2.001	

Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

Límites laterales

Límite por derecha

Decimos que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha si los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando nos acercamos a $x = a$ por valores más grandes (pero cercanos) que a : $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Límite por izquierda

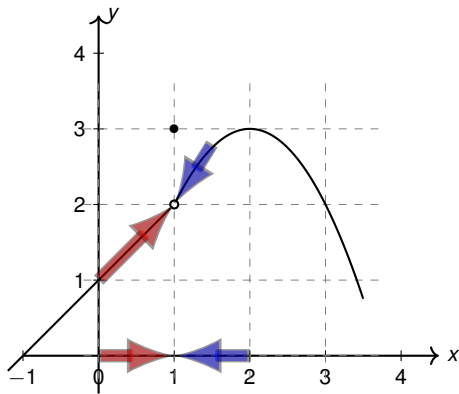
Decimos que M es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda si los valores de $f(x)$ se aproximan a M cuando nos acercamos a $x = a$ por valores más chicos (pero cercanos) que a : $M = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Teorema

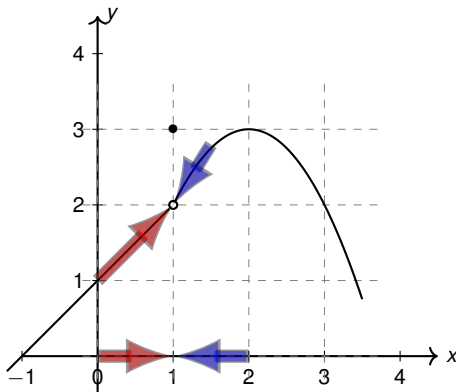
Sea una función definida en un intervalo abierto que contiene a a (excepto quizás en $x = a$), entonces: el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y vale L , sí y sólo sí existen ambos límites laterales y son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Ejemplo 1



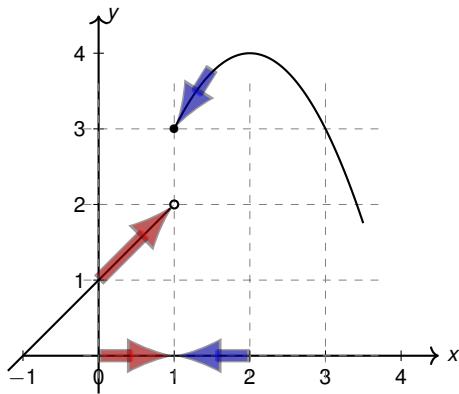
Ejemplo 1



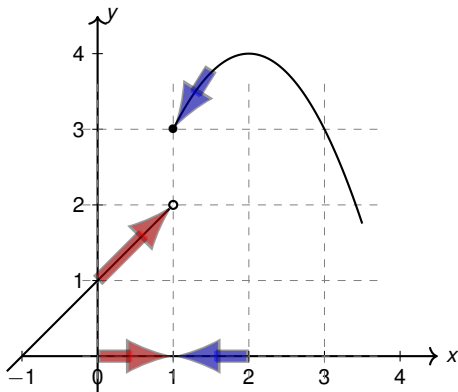
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Ejemplo2



Ejemplo2



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \nexists$$

Ejemplo3

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -(x - 2)^2 + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x - 2)^2 + 3 = 2$$

ya que los límites laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Ejemplo4

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 0 \\ 9 - (x - 3)^2 & \text{si } 0 < x < 4 \\ -1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

$$x \rightarrow 4^- \Rightarrow x < 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 9 - (x - 3)^2 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

$$x \rightarrow 4^+ \Rightarrow x > 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} -1 = -1$$

ya que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \nexists$$

FIN