

Clase 17 - Análisis Matemático 1 - LC: Análisis de funciones II

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

15 de Mayo de 2020

Índice

- 1 Repaso
- 2 Teorema de Rolle y del valor medio
 - Enunciados
- 3 Crecimiento y Decrecimiento
 - Funciones Crecientes y decrecientes
 - Ejemplos
- 4 Concavidad y Convexidad
 - Funciones Cóncavas y Convexas
 - Concavidad y Convexidad de una función
 - Ejemplos

Repaso definiciones

Extremos Absolutos

- Una función f tiene un máximo absoluto en un punto c de su dominio si $f(c) \geq f(x)$ **para todo x en el dominio de f** . El punto c se llama **punto de máximo** de f , y $f(c)$ se llama **valor máximo** de f
- Una función f tiene un mínimo absoluto en un punto c de su dominio si $f(c) \leq f(x)$ **para todo x en el dominio de f** . El punto c se llama **punto de mínimo** de f , y $f(c)$ se llama **valor mínimo** de f

Extremos Locales

- Una función f tiene un máximo local en un punto c de su dominio si hay un intervalo Abierto \mathbb{I} que continene a c tal que $f(c) \geq f(x)$ **para todo $x \in \mathbb{I}$** . El punto c se llama **punto de máximo local** de f .
- Una función f tiene un mínimo local en un punto d de su dominio si hay un intervalo abierto \mathbb{J} que contiene a d tal que $f(d) \leq f(x)$ **para todo $x \in \mathbb{J}$** . El punto d se llama **punto de mínimo local** de f

Teorema de Fermat

Si f tiene un extremo (máximo o mínimo) local en $x = c$ y si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$

$$\text{si } x = c \text{ es extremo y } \exists f'(c) \Rightarrow f'(c) = 0$$

Importante: NO es válido el recíproco: que $f'(c) = 0$ NO implica que sea extremo

Puntos críticos

Un punto crítico de una función es un número c del dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe

$$P.C. = \{x \in \text{Dom } f / f'(x) = 0 \vee \nexists f'(x)\}$$

Extremos en Intervalos CERRADOS

- 1 Verificar continuidad en el intervalo cerrado (Weierstrass)
- 2 Buscar puntos críticos
- 3 Evaluar la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos que caen en el intervalo
- 4 Comparar los valores encontrados y elegir cuál es el máximo y cuál es el mínimo

Teoremas

Teorema de Rolle

Sea f una función tal que

- 1 f es continua en $[a, b]$
- 2 f es derivable en (a, b)
- 3 $f(a) = f(b)$

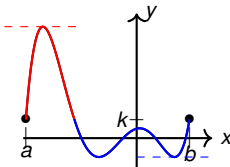
Entonces, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Demostración: llamemos k al valor en los extremos: $k = f(a) = f(b)$

- Si $f(x) = k \forall x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$ y se cumple la conclusión del teorema
- Si f no es constante, existe $x \in [a, b]$ / $f(x) > k$ o $f(x) < k$. Por Teo.de Weierstrass: \exists max y min.

• **Sup. $f(x) > k$:** entonces f tendrá un máximo en $c \in (a, b)$. Por Teo. de Fermat:
 $f'(c) = 0$ ✓

• **Sup $f(x) < k$:** entonces tendrá un mínimo en $c \in (a, b)$ y por T. de Fermat: $f'(c) = 0$ ✓



Ejemplos que no son ejemplos

Teorema de Rolle

Sea f una función tal que

- 1 f es continua en $[a, b]$
- 2 f es derivable en (a, b)
- 3 $f(a) = f(b)$

Entonces, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad [0, 1]$$

$$f(0) = 0 = f(1)$$

Calculemos la derivada:

$$f'(x) = 1 \text{ si } 0 < x < 1$$

$$\nexists c \in (0, 1) / f'(c) = 0!$$

POR QUÉ NO SE CUMPLE EL TEOREMA???

f NO es continua en $[0, 1]$

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad [-1, 1]$$

$$f(-1) = 1 = f(1) \text{ Cuál es } c \in (-1, 1) / f'(c) = 0?$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$f'(c) \neq 0$ si $c \neq 0$, y $\nexists f'(0)$,
POR QUÉ NO SE CUMPLE EL TEOREMA?

f no es derivable en $(-1, 1)$

$$f(x) = x \quad [-1, 1]$$

$$f'(x) = 1 \quad \forall x \in (-1, 1)$$

POR QUÉ NO SE CUMPLE EL TEOREMA?

$$f(-1) \neq f(1)$$

Teorema del Valor Medio

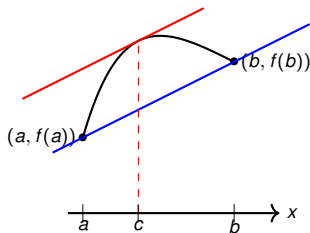
Teorema del Valor Medio

Sea f una función tal que

- 1 f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- 2 f es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que la derivada de la función en c es igual a la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (secante):

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



(ver <https://www.geogebra.org/m/MhWDzkgD>)

Teorema del Valor Medio

Teorema del Valor Medio

Sea f una función tal que

- 1 f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- 2 f es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que la derivada de la función en c es igual a la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (secante):

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración: La recta secante es

$$y = m \cdot (x - a) + f(a) \text{ con } m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sea $F(x) = f(x) - y(x)$ Distancia entre un punto en la curva y un punto en la recta secante

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$F(a) = 0$ y $F(b) = 0$ (evaluar o pensar en el gráfico que ambas coinciden en las puntas!)

$F(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) porque $f(x)$ e $y(x)$ lo son.

Por el Teo. de Rolle: $\exists c \in (a, b) / F'(c) = 0$

derivando $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

en $x = c$ (T. Rolle) $\Rightarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

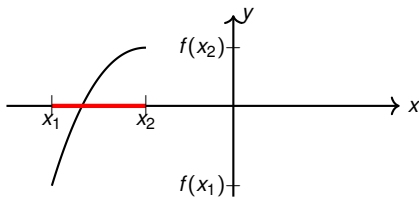
Creciente y Decreciente

Función Creciente

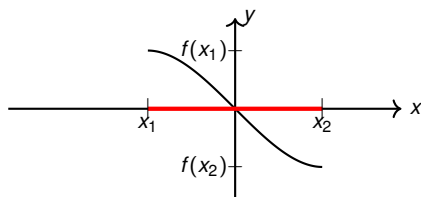
Una función f definida en un intervalo \mathbb{I} se dice creciente sobre \mathbb{I} si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$, con $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$

Función Decreciente

Una función f definida en un intervalo \mathbb{I} se dice decreciente sobre \mathbb{I} si y sólo si $f(x_1) > f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$, con $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$



f creciente sobre \mathbb{I}

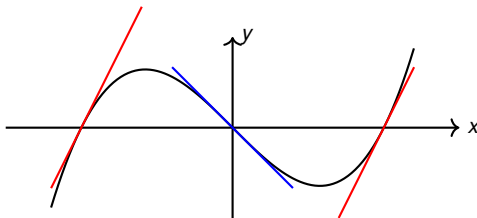


f decreciente sobre \mathbb{I}

Si en un intervalo \mathbb{I} una función es toda creciente, o toda decreciente, decimos que

f es monótona en \mathbb{I}

Crecimiento y Decrecimiento



Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable en el intervalo abierto (a, b)

- Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$

Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable en el intervalo abierto (a, b)

- Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$

Demostración:

Supongamos $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$. Tomemos x_1 y x_2 en $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. Entonces, f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) .

Del Teo. del V.M.: $\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{x_2 > x_1 \rightarrow x_2 - x_1 > 0} \cdot \underbrace{f'(c)}_{< 0}$$

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

f es decreciente en $[a, b]$

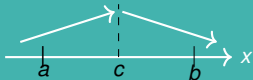
Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable en el intervalo abierto (a, b)

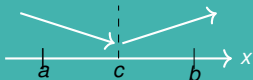
- Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$

Corolario

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(x) > 0$ a la izquierda de c y $f'(x) < 0$ a la derecha de c , entonces f crece a la izquierda de c , y decrece a la derecha de c , por lo tanto c es un máximo local.



Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(x) < 0$ a la izquierda de c y $f'(x) > 0$ a la derecha de c , entonces f decrece a la izquierda de c , y crece a la derecha de c , por lo tanto c es un mínimo local.



Ejemplos

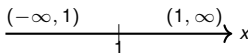
Determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente. Determinar mínimos y máximos locales y absolutos: $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $f'(x) = 2x - 2$

- Determinar puntos críticos ($f' = 0$ o $\nexists f'$) y puntos que no pertenecen al dominio de f

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Dom } f' = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 2 = 2 \cdot (x - 1) \rightarrow \boxed{x = 1} \text{ es P.C.}$$

- ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos



- Construir tabla y analizar signos de la f'

	$(-\infty, 1)$	$x = 1$	$(1, \infty)$
2	+	+	+
$(x-1)$	-	0	+
f'	-	0	+
f	decrece ↘		crece ↗

- Definir crecimiento y decrecimiento de la f : f decrece $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$
- Seleccionar mínimos y máximos locales: $x = 1$ es mínimo local
- Analizar los límites en el infinito para saber si hay max/min absolutos: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$x=1$ es mínimo absoluto, $f(1) = 0$. No hay máximos.

Ejemplos

Determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente. Determinar mínimos y máximos locales y absolutos: $f(x) = 2x\sqrt{3-x}$ $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{3-x} + 2x \cdot \frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)$

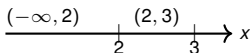
$$= 2\sqrt{3-x} - \frac{x}{\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{\sqrt{3-x}}$$

- Determinar puntos críticos ($f' = 0$ o $\nexists f'$) y puntos que no pertenecen al dominio de f :

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / 3-x \geq 0\} = (-\infty, 3] \quad \text{Dom } f' = (-\infty, 3) \quad \boxed{x=3} \text{ es P.C.}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{6-3x}{\sqrt{3-x}} \rightarrow 6-3x = 0 \rightarrow 3(2-x) = 0' \rightarrow \boxed{x=2} \text{ es P.C.}$$

- ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos



- Construir tabla y analizar signos de la f'

	$(-\infty, 2)$	$x = 2$	$(2, 3)$
$3 \cdot (2-x)$	+	0	-
$\sqrt{3-x}$	+	1	+
f'	+	0	-
f	crece ↗		decrece ↘

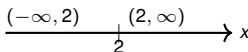
- Definir crecimiento y decrecimiento de la f : f crece $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, 3)$
- Seleccionar mínimos y máximos locales: $x = 2$ es máximo local, $f(2) = 4$
- Analizar los límites en el infinito para saber si hay max/min absolutos: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

Ejemplos

Determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente. Determinar mínimos y máximos locales y absolutos: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$

- Determinar puntos críticos ($f' = 0$ o $\nexists f'$) y puntos que no pertenecen al dominio de f :
 $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$ $\text{Dom } f' = \text{Dom } f$
 $f'(x) = 0$ No hay P.C.
- ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos



- Construir tabla y analizar signos de la f'

	$(-\infty, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
f'	—		—
f	decrece ↘		decrece ↘

- Definir crecimiento y decrecimiento de la f : f decrece $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
 - Seleccionar mínimos y máximos locales: No tiene
 - Analizar los límites en el infinito y las asíntotas verticales para saber si hay max/min absolutos: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- No hay máximos ni mínimos absolutos

Resumen

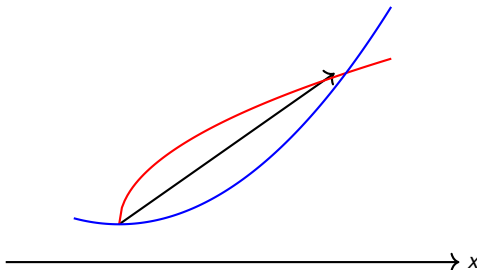
¿Cómo determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente? ¿Cómo determinar mínimos y máximos locales y absolutos?

- 1 Determinar puntos críticos ($f' = 0$ o $\nexists f'$) y puntos que no pertenecen al dominio de f
- 2 ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos
- 3 Construir tabla y analizar signos de la f' evaluando los factores en números dentro de cada intervalo
- 4 Definir crecimiento y decrecimiento de la f ($f' > 0 \rightarrow f$ crece, $f' < 0 \rightarrow f$ decrece)
- 5 Seleccionar mínimos y máximos locales (corolario del teorema) $\searrow \nearrow$ o $\nearrow \searrow$
- 6 Analizar los límites en el infinito (y las asíntotas verticales si hubiera) para saber si hay max/min absolutos



Funciones Cóncavas y Convexas

Si f es creciente:



Funciones conVexas o cóncavas hacia arriba: \cup

Si f es derivable en un intervalo \mathbb{I} y la curva de f queda arriba de todas las rectas tangentes a la función en los puntos de ese intervalo, f se dice cóncava hacia arriba

Funciones cónCavas o cóncavas hacia abajo: \cap

Si f es derivable en un intervalo \mathbb{I} y la curva de f queda por debajo de todas las rectas tangentes a la función en los puntos de ese intervalo, f se dice cóncava hacia abajo

Concavidad en intervalos

Prueba de concavidad

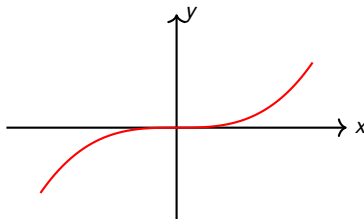
Si f tiene derivadas segundas en un intervalo \mathbb{I}

- Si $f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{I}$, entonces f es cóncava hacia arriba en \mathbb{I}
- Si $f''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{I}$, entonces f es cóncava hacia abajo en \mathbb{I}

$$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \rightarrow x > 0 \quad f \text{ es } \cup$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow 6x < 0 \rightarrow x < 0 \quad f \text{ es } \cap$$



Concavidad en intervalos

Prueba de concavidad

Si f tiene derivadas segundas en un intervalo \mathbb{I}

- Si $f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{I}$, entonces f es cóncava hacia arriba en \mathbb{I}
- Si $f''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{I}$, entonces f es cóncava hacia abajo en \mathbb{I}

Punto de inflexión

Sea f continua en \mathbb{I} ; y derivable en \mathbb{I} salvo quizás en un punto x_0 de \mathbb{I} . Si la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o viceversa) en el punto $(x_0, f(x_0))$, entonces x_0 se llama **punto de inflexión**

ATENCIÓN: los puntos de inflexión NO son los puntos que hacen cero la $f''(x)$. (Tarea: piensa en $f(x) = x^4$)

Ejemplos

Determinar intervalos donde f es cóncava hacia arriba y hacia abajo, y dar los puntos de inflexión.

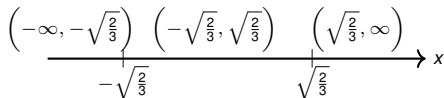
$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 1 \quad f'(x) = 4x^3 - 8x \quad f''(x) = 12x^2 - 8$$

- 1 Buscar los puntos que anulan a la f'' y los que no pertenecen al dominio

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 8 = 0 \rightarrow 12\left(x^2 - \frac{8}{12}\right) = 0 \rightarrow 12\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad f''(x) = 12\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

- 2 ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos



- 3 Construir tabla y analizar signos de la f'' tomando valores en los intervalos, y decidir sobre la concavidad de f , y los P.I.

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$
$\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	-	-	-	0	+
$\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	-	0	+	+	+
f''	+	0	-	0	+
f	U		∩		U

- 4 Determinar puntos de inflexión (cambios de concavidad) $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Máximo y mínimo local - El regreso!

Prueba de la derivada segunda

Si f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a c :

- Si $f'(c) = 0$ (c es P.C.) y $f''(c) > 0$ entonces c es mínimo local de f
- Si $f'(c) = 0$ (c es P.C.) y $f''(c) < 0$ entonces c es máximo local de f

Atención: si $f''(c) = 0$ no podemos decir nada, hay que hacer otro análisis.

Ejemplo: Encontrar máximos y mínimos locales

$$f(x) = x(x-1)^3 \quad f'(x) = (x-1)^3 + x \cdot 3(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+3x) = \boxed{(x-1)^2(4x-1)}$$

$$f''(x) = 2(x-1)(4x-1) + (x-1)^2 \cdot 4 = 2(x-1)[4x-1+2(x-1)] = \boxed{2(x-1)(6x-3)}$$

Puntos críticos: $f'(x) = 0 = (x-1)^2(4x-1) \Rightarrow x_c = 1$ y $x_c = \frac{1}{4}$

Prueba derivada 2da:

$f''(1) = 0$ Entonces no podemos decir nada de $x_c = 1$

$f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} > 0 \quad x_c = \frac{1}{4}$ es mínimo local.

FIN