

Clase 14 - Análisis Matemático 1 - LC: Derivadas II

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

6 de Mayo de 2020

Índice

- 1 Repaso
 - Definición de derivadas, interpretación geométrica, reglas de derivación

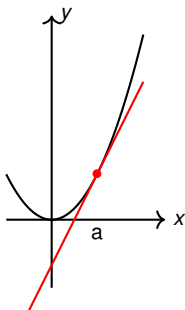
- 2 Derivadas de funciones trigonométricas
 - Derivadas trigonométricas

- 3 Derivadas de exponenciales y logaritmos
 - Derivadas de exponenciales
 - Derivadas de logaritmos

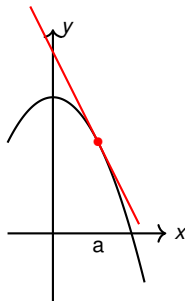
Derivada de f en a

Sea a un número **en el dominio de f** , la derivada de la función f en a es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto (i.e., el límite del cociente incremental):

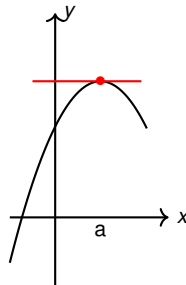
$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$$f'(a) > 0$$



$$f'(a) < 0$$



$$f'(a) = 0$$

Derivada de f en a

Sea a un número **en el dominio de f** , la derivada de la función f en a es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto (i.e, el límite del cociente incremental):

$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si existe la derivada en un punto a , se dice que f es derivable o diferenciable en a

Teorema

Si f es diferenciable en a entonces f es continua en a

$$\exists f'(a) \Rightarrow f \text{ es continua en } a$$

Teorema (contrarrecíproco)

Si f NO es continua en a entonces f NO es diferenciable en a

$$f \text{ NO es continua en } a \Rightarrow \nexists f'(a)$$

Derivadas laterales

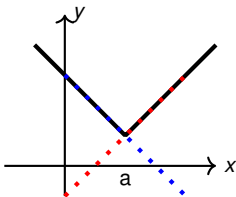
Se define la derivada a izquierda de f en a si nos acercamos al punto a con valores negativos de h ($a + h < a$!!!):

$$f'^-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se define la derivada a derecha de f en a si nos acercamos al punto a con valores positivos de h ($a + h > a$!!!):

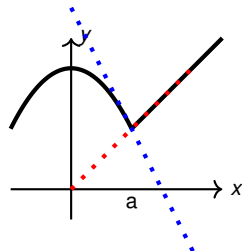
$$f'^+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(a)$ existe si y sólo si las derivadas laterales existen y son iguales.



$$f'^+(a) > 0$$

$$f'^-(a) < 0$$



$$f'^+(a) > 0$$

$$f'^-(a) < 0$$

$F(x)$	$F'(x)$
c	0
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$c \cdot f$	$c \cdot f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

El dominio de $f'(x)$ son todos los x en el dominio de f en los que la función es derivable.

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ 5-x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$. Trace un gráfico aproximado de $f(x)$

- 1 Determinar Dominio de f
- 2 Determinar Intervalos de continuidad (propiedades)
- 3 Estudiar continuidad en puntos sospechosos (cortes de la función!) (definición)
- 4 Calcular derivada en intervalos (reglas)
- 5 Estudiar derivabilidad en puntos sospechosos (definición)



Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$. Trace un gráfico aproximado de $f(x)$

1 Determinar Dominio de f

- $x \leq 0$: f es una parábola $\rightarrow \mathbb{R}$

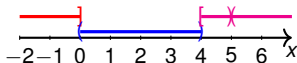
$$\Rightarrow (-\infty, 0]$$

- $0 < x < 4$: f es una recta $\rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (0, 4)$$

- $x \geq 4$: f es racional $\rightarrow 5 - x \neq 0 \rightarrow x \neq 5$

$$\Rightarrow [4, 5) \cup (5, \infty)$$



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{5\}$$

Ya que $5 \notin \text{Dom } f$:
 f NO es continua en $x=5$
 f NO es derivable en $x=5$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \rightarrow (0, 4) \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \rightarrow [4, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$. Trace un gráfico aproximado de $f(x)$

- 1 Determinar Dominio de $f = \mathbb{R} - 5$
- 2 Determinar Intervalos de continuidad (propiedades)
 - $(-\infty, 0)$: la función es una parábola que es continua para todos los reales
 - $(0, 4)$: la función es una recta, es continua en todos los reales
 - $(4, 5)$: la función es cociente de continuas que no se anulan, entonces es continua
 - $(5, +\infty)$: la función es cociente de continuas que no se anulan, entonces es continua

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \rightarrow (0, 4) \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \rightarrow [4, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$. Trace un gráfico aproximado de $f(x)$

1 Determinar Dominio de $f = \mathbb{R} - 5$

2 Determinar Intervalos de continuidad: f es continua en

$$(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)$$

3 Estudiar continuidad en puntos sospechosos: ¿Qué pasa en $x = 0$, $x = 4$ y $x = 5$?

1 $0 \in \text{Dom} f$

$$\checkmark f(0) = -(0+1)^2 + 3 = 2$$

2 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)??$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -(x+1)^2 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 - x = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \nexists \quad \text{X}$$

f NO es continua en $x=0$

$$x = 4$$

1 $4 \in \text{Dom } f \quad \checkmark f(4) = \frac{1}{5-4} = 1$

2 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)??$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 5 - x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{5-x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1 \quad \checkmark$$

3 $f(4) = 1 = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad \checkmark$

f Sí es continua en $x=4$

$$x = 5$$

1 $5 \notin \text{Dom } f \quad \text{X}$

f NO es continua en $x=5$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & \text{si } 0 < x < 4 \rightarrow (0, 4) \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \rightarrow [4, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$. Trace un gráfico aproximado de $f(x)$

- 1 Determinar Dominio de $f = \mathbb{R} - 5$
- 2 Determinar Intervalos de continuidad: f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)$
- 3 Estudiar continuidad en puntos sospechosos: f NO es continua en $x=0$ ni en $x=5$. f SÍ es continua en $x=4$
- 4 Calcular derivada en intervalos (reglas)

$$F = -(x+1)^2 + 3 \Rightarrow F'(x) = -2 \cdot (x+1)^{(2-1)} \cdot (1+0) + 0 = -2(x+1)$$

$$F = 5 - x \Rightarrow F'(x) = 0 - 1 \cdot x^{(1-1)} = -1$$

$$F = \frac{1}{5-x} = (5-x)^{-1} \Rightarrow F'(x) = (-1) \cdot (5-x)^{(-1-1)} \cdot (0-1) = +(5-x)^{-2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ -1 & \text{si } x \in (0, 4) \\ \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x \in (4, 5) \cup (5, \infty) \end{cases}$$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & \text{si } 0 < x < 4 \rightarrow (0, 4) \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \rightarrow [4, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$. Trace un gráfico aproximado de $f(x)$

- 1 Determinar Dominio de $f = \mathbb{R} - 5$
- 2 Determinar Intervalos de continuidad: f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)$
- 3 Estudiar continuidad en puntos sospechosos: f NO es continua en $x=0$ ni en $x=5$. f SÍ es continua en $x=4$
- 4 Calcular derivada en intervalos (reglas):

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ -1 & \text{si } x \in (0, 4) \\ \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x \in (4, 5) \cup (5, \infty) \end{cases}$$

- 5 Estudiar derivabilidad en puntos sospechosos (definición): ¿qué pasa en $x=0$, $x=4$ y $x=5$?
 En $x=0$ la función NO es continua, entonces por el teorema: f NO es derivable en $x=0$
 En $x=5$ la función NO es continua, entonces por el teorema: f NO es derivable en $x=5$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & \text{si } 0 < x < 4 \rightarrow (0, 4) \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \rightarrow [4, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

Derivabilidad en $x=4$?

$$1 \quad f(4) = \frac{1}{5-4} = 1$$

$$2 \quad f'^-(4) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$(h \rightarrow 0^- \rightarrow 4+h < 4 \rightarrow f(x) = 5-x)$$

$$f'^-(4) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5-(4+h)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5-4-h-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 =$$

$$\boxed{-1}$$

$$3 \quad f'^+(4) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$(h \rightarrow 0^+ \rightarrow 4+h > 4 \rightarrow f(x) = \frac{1}{5-x})$$

$$f'^+(4) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{5-(4+h)} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1-(1-h)}{1-h}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{1-h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h(1-h)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-h)} = \boxed{1}$$

$$\nexists f'(4) \Rightarrow f \text{ NO es derivable en } x = 4$$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & \text{si } 0 < x < 4 \rightarrow (0, 4) \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \rightarrow [4, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$. Trace un gráfico aproximado de $f(x)$

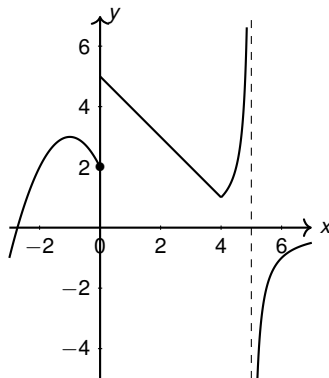
- 1 Determinar Dominio de $f = \mathbb{R} - 5$
- 2 Determinar Intervalos de continuidad: f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)$
- 3 Estudiar continuidad en puntos sospechosos: f NO es continua en $x=0$ ni en $x=5$. f Sí es continua en $x=4$
- 4 Calcular derivada en intervalos (reglas):

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ -1 & \text{si } x \in (0, 4) \\ \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x \in (4, 5) \cup (5, \infty) \end{cases}$$

- 5 Estudiar derivabilidad en puntos sospechosos (definición): ¿qué pasa en $x=0$, $x=4$ y $x=5$?
 En $x=0$ la función NO es continua, entonces por el teorema: f NO es derivable en $x=0$
 En $x=5$ la función NO es continua, entonces por el teorema: f NO es derivable en $x=5$
 En $x=4$ la función SÍ es continua pero la derivada por derecha no es igual a la derivada por izquierda, entonces f NO es derivable en $x=4$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & \text{si } 0 < x < 4 \rightarrow (0, 4) \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \rightarrow [4, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$



Derivadas de funciones trigonométricas

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\text{sen}(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \text{sen}(h)}^{\text{sen}(x+h)} - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)[\cos(h) - 1] + \cos(x)\text{sen}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)[\cos(h) - 1]}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x)\text{sen}(h)}{h} \right) \\ &= \text{sen}(x) \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_{L.N. \rightarrow 0} + \cos(x) \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}}_{L.N. \rightarrow 1} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}(x)$$

$$f(x) = \tan(x)$$

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\text{sen}(x))' \cdot \cos(x) - \text{sen}(x) \cdot (\cos(x))'}{(\cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\overbrace{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}^{=1}}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \sec^2(x)$$

Calcular $(\text{cosec}(x))'$, $(\sec(x))'$ y $(\cotan(x))'$

Ejemplos

■ $f(x) = 2x \cos(x) + \text{sen}(x^2 + 1)$
 $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$ y $(F(G(x)))' = F'(G(x)) \cdot G'(x)$

$$f'(x) = 2[\cos(x) + x(-\text{sen}(x))] + \cos(x^2 + 1) \cdot (2x)$$

$$f'(x) = 2 \cos(x) - 2x \text{sen}(x) + 2x \cos(x^2 + 1)$$

■ $f(x) = \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2$
 $F(x) = x^2$, $G(x) = \text{sen}(x)$ y $H(x) = \frac{1}{x}$
 $\Rightarrow f(x) = F(G(H(x))) \rightarrow f'(x) = F'(G(H(x))) \cdot G'(H(x)) \cdot H'(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Derivada de exponenciales

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

$$F(x) = e^x \text{ y } G(x) = \ln(a) \cdot x \rightarrow f(x) = F(G(x))$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$$

Derivadas de Logaritmos

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

Ejemplos

■ $f(x) = \ln(\cos(x))$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

■ $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left[\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right] = x^x \cdot [\ln(x) + 1]$$

■ $f(x) = x^{\tan(x)} = e^{\tan(x) \cdot \ln(x)}$

$$f'(x) = e^{\tan(x) \cdot \ln(x)} \cdot \left[\sec^2(x) \cdot \ln(x) + \tan(x) \cdot \frac{1}{x} \right]$$

■ $f(x) = \log_x(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)} = [\ln(x)]^{-1}$

$f'(x) \dots$ TAREA!

Resumen

$F(x)$	$F'(x)$
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$c \cdot f$	$c \cdot f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$



	$f(x)$	$f'(x)$
<i>constante</i>	c	0
$r \in \mathbb{R}$	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	e^x	e^x
$a > 0$	a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$x > 0$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$a > 0 \wedge x > 0$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$