

Clase 4 - Análisis Matemático 1 - LC: Funciones

Eugenia Díaz-Giménez¹

eugenia.diaz@unc.edu.ar

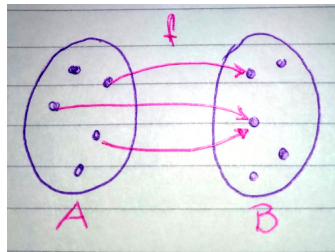
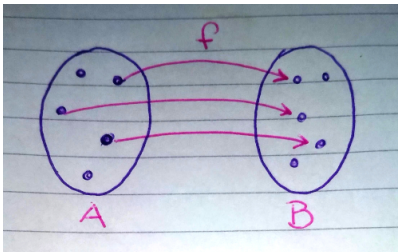
23 de Marzo de 2020

Índice

- 1 Funciones
 - Definición
 - Notación
- 2 Dominio e imagen
 - Definición
 - Ejemplos
- 3 Función lineal
 - Ecuación de la recta
 - Rectas paralelas y perpendiculares
- 4 Funciones elementales
 - Gráficos
 - Transformación de funciones
- 5 Funciones por partes
 - Gráficos

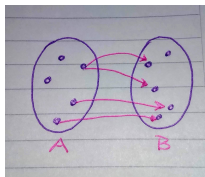
Definición

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A un **ÚNICO** elemento de un conjunto B

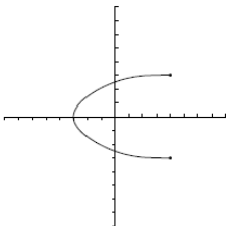


A : conjunto de salida B : conjunto de llegada

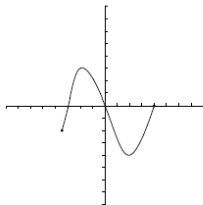
NO ES FUNCIÓN:



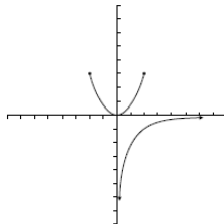
¿Cuál de las curvas es función? (trazar infinitas líneas verticales imaginarias)



NO



SÍ



NO

Notación

$$f : A \rightarrow B$$

- En general, salvo que se especifique algo distinto, tomaremos $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R} \Rightarrow f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Llamaremos x a los números que pertenecen al conjunto de salida, es la variable independiente
- Llamaremos y a los números que pertenecen al conjunto de llegada, es la variable dependiente
- Aplicaremos la función sobre los elementos del conjunto de salida para encontrar elementos del conjunto de llegada: $f(x) = y$
- Para denotar las funciones, en general utilizamos las letras minúsculas f, g, h , etc
- Para denotar la variables dependiente e independiente utilizamos las letras del final del alfabeto: x, y, z

Ejemplos de funciones:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$$

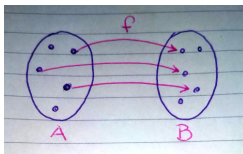
$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(z) = |z|$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x) = x + 3$$

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad f(w) = \sqrt{w}$$

Dominio e imagen

No necesariamente TODOS los elementos de A y de B son "tocados" por la función



Dominio

Es el subconjunto de todos los valores x del conjunto de salida en los cuales la función está definida

$$\text{Dom } f = \{x \in A / \exists f(x)\}$$

Imagen

Es el subconjunto de todos los valores y del conjunto de llegada que puede llegar a tomar la función

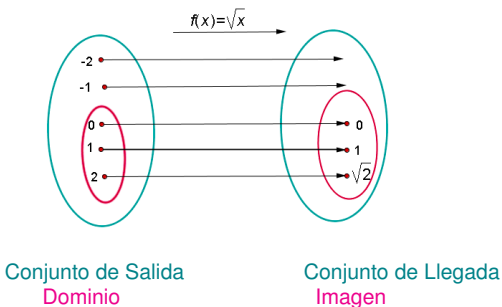
$$\text{Im } f = \{y \in B / \exists x \in A, f(x) = y\}$$

Ejemplo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / \exists \sqrt{x}\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

$$\text{Im } f(x) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y\} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\} = [0, +\infty)$$



Ejemplo: dar el dominio de

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\} = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\}$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$\text{Dom } g(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} = [-1, +\infty)$$

Ej1a: dar el dominio de

$$g(x) = \frac{2}{3x - 5}$$

$$\text{Dom } g(x) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \text{ existe}\} = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 5 \neq 0\}$$

$$3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\text{Dom } g(x) = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{5}{3}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

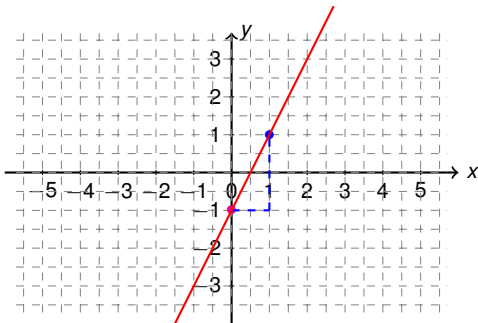
Ecuación de una recta

$$y = ax + b$$

a : pendiente

b : ordenada al origen

$$y = 2x - 1$$



Ecuación de una recta

$$y = ax + b$$

Qué significa que pase por un punto? Por ej.: pasa por el punto (x_0, y_0)

$$f(x_0) = y_0$$

Dar la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

2 datos, 2 incógnitas: sistema de ecuaciones (repasar del curso de nivelación)

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Despejamos a y b

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Paralelas y perpendiculares

Paralelas

Dadas la recta $y = a_1x + b_1$ y la recta $y = a_2x + b_2$, son paralelas si $a_1 = a_2$

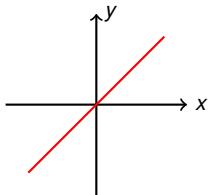
Perpendiculares

Dadas la recta $y = a_1x + b_1$ y la recta $y = a_2x + b_2$, son perpendiculares si $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

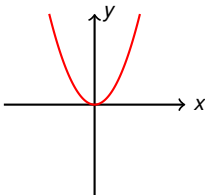
(ATENCIÓN: no decimos nada de b_1 ni b_2 !)

Funciones Elementales

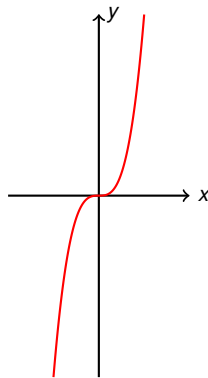
$$f(x) = x$$



$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = x^3$$

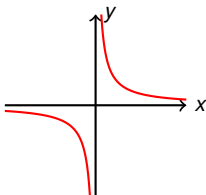


Funciones Elementales

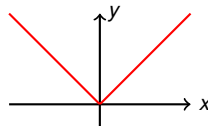
$$f(x) = \sqrt{x}$$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$



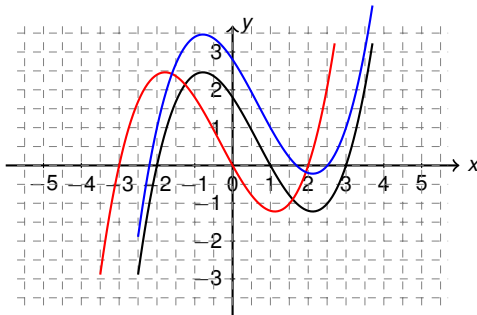
$$f(x) = |x|$$



Transformaciones

- desplazamientos
- rotaciones
- reflexiones
- compresión y estiramiento

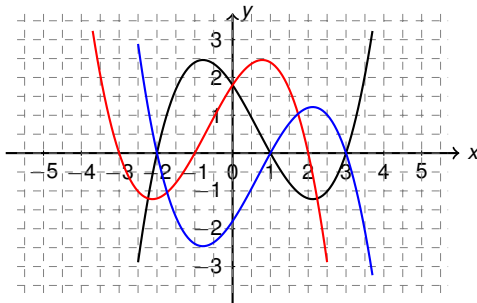
$f(x)$, $f(x+1)$ y $f(x)+1$:



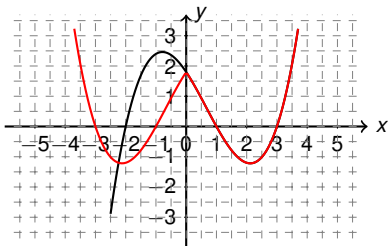
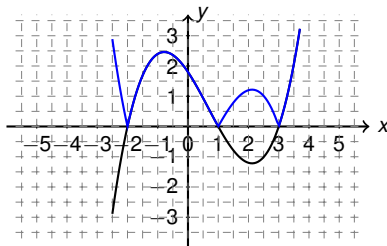
Sea $a > 0$:

- $f(x+a)$ es un desplazamiento horizontal en a unidades hacia la izquierda ←
- $f(x-a)$ es un desplazamiento horizontal en a unidades hacia la derecha →
- $f(x)+a$ es un desplazamiento vertical en a unidades hacia arriba ↑
- $f(x)-a$ es un desplazamiento vertical en a unidades hacia abajo ↓

$f(x)$, $f(-x)$ y $-f(x)$:



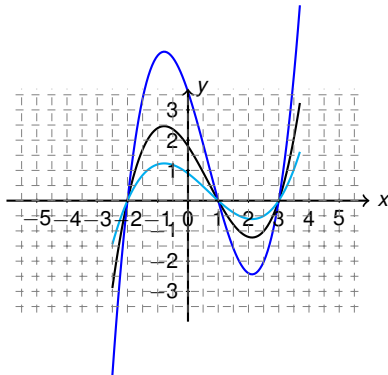
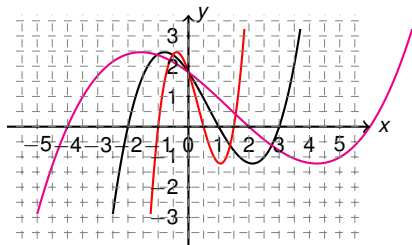
- $f(-x)$ es una rotación respecto del eje y (dejar fijo $f(0)$)
- $-f(x)$ es una rotación respecto del eje x (dejar fijas las raíces $f(x) = 0$)

$f(x)$ y $f(|x|)$  $f(x)$ y $|f(x)|$ 

- $f(|x|)$ la función no cambia para los $x > 0$ y para los $x < 0$ es un reflejo respecto del eje y de la parte de la función definida para $x > 0$
- $|f(x)|$ la función no cambia en las regiones en las que $f(x) > 0$ y en los intervalos en los que $f(x) < 0$ se le hace rotar con respecto al eje x para convertirla en positiva

$$f(x), 2f(x) \text{ y } \frac{1}{2}f(x)$$

$$f(x), f(2x) \text{ y } f\left(\frac{1}{2}x\right)$$



Sea $a > 1$

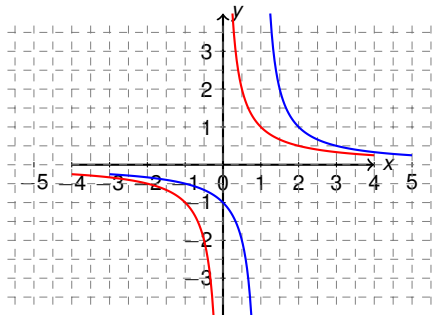
- $f(ax)$ se comprime el gráfico sobre el eje x en un factor $\frac{1}{a}$ (Ej: si $a=2$ se comprime a la mitad, si $a=3$ se comprime a un tercio). Queda fijo $f(0)$
- $f\left(\frac{1}{a}x\right)$ se estira el gráfico sobre el eje x en un factor a (al doble, triple, etc). Queda fijo $f(0)$
- ↔
- $af(x)$ se estira el gráfico sobre el eje y un factor a . Quedan fijas las raíces ($f(x) = 0$) ↑
- $\frac{1}{a}f(x)$ se comprime el gráfico en el eje y en un factor $\frac{1}{a}$. Quedan fijas las raíces ($f(x) = 0$) ↓

Ejemplo

Dibujar $g(x) = \frac{1}{x-1}$

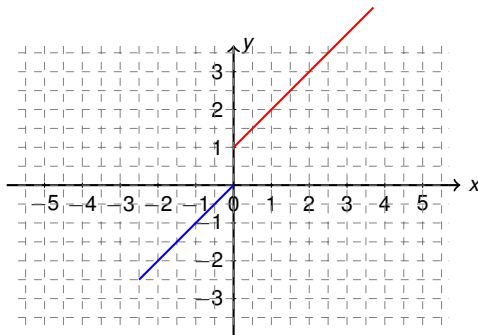
Función elemental: $f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = f(x-1)$:



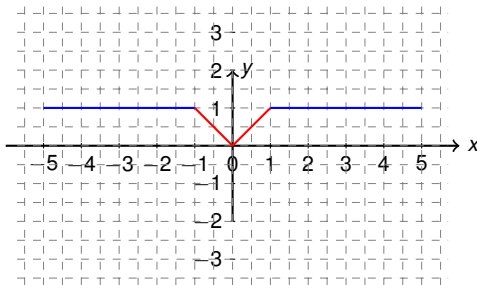
Funciones por partes

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Funciones por partes

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$



FIN