

Clase 7 - Análisis Matemático 1 - LC: Funciones IV

Eugenia Díaz-Giménez¹

eugenia.diaz@unc.edu.ar

1 de Abril de 2020

Índice

- 1 Repaso clase anterior...
 - Parábolas, Circunferencias, Elipses. Funciones trigonométricas

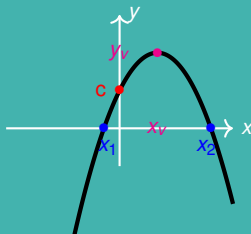
- 2 Funciones trigonométricas inversas
 - Ecuaciones trigonométricas

- 3 Función Exponencial y Logaritmo
 - Exponencial
 - Función inversa
 - Logaritmo
 - Ecuaciones

Repaso...

Parábolas

- Forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Forma factorizada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$
- Forma canónica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$
 $x_v = -\frac{b}{2a}$



Repaso...

Circunferencia y Elipse

- Ecuación de la circunferencia: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Centro en (x_0, y_0) y radio r

- Ecuación de la elipse: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
Centro en (x_0, y_0) con semieje a lo largo del eje $x = a$, y semieje a lo largo del eje $y = b$

Ejemplo: Encontrar el centro y semiejes de la siguiente elipse

$$x^2 + 4y^2 - 8x = -16y - 28 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 8x) + (4y^2 + 16y) = -28$$

$$x^2 - 8x = x^2 - 2 \cdot 4x =$$

$$4y^2 + 16y = 4(y^2 + 4y) = 4(y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y)$$

$$x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 - 4^2 = (x - 4)^2 - 16$$

$$4(y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 - 2^2) = 4((y + 2)^2 - 4)$$

$$(x - 4)^2 - 16 + 4(y + 2)^2 - 16 = -28 \quad \Rightarrow \quad (x - 4)^2 + 4(y + 2)^2 = -28 + 32 = 4$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{4(y+2)^2}{4} = 1$$

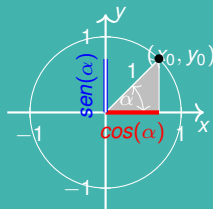
$$\frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

$$x_0 = 4, y_0 = -2, a = 2, b = 1$$

Repaso...

Funciones trigonométricas

- Partiendo de la circunferencia unitaria, se definen $x = \cos(\alpha)$ y $y = \sin(\alpha)$



- Identidad trigonométrica: $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

- Otras funciones trigonométricas:

- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

- $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$

- $\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$

- $\cotan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

Repaso...

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{cos}(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

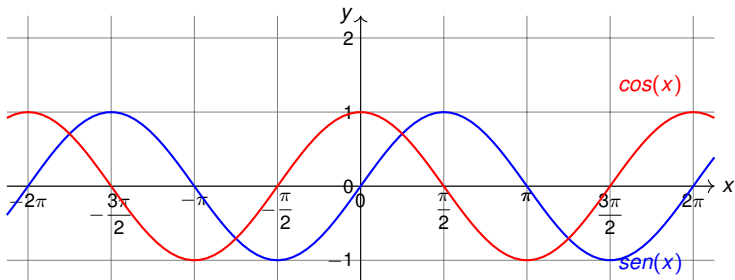
Fórmulas para suma de ángulos:

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$$

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\text{sen}(y)$$

$\cos(x)$ es una función par: $\cos(-x) = \cos(x)$

$\text{sen}(x)$ es una función impar: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$



Ecuaciones trigonométricas

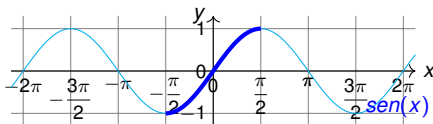
Función inversa:

$$f(x) = y$$

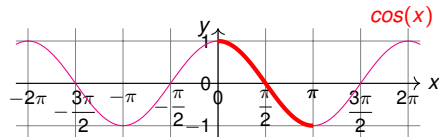
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$$

$$x = f^{-1}(y)$$

Las funciones trigonométricas tienen inversa si restringimos su dominio/imagen



$$\text{sen}(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$



$$\text{cos}(x) : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

Los nombres de las funciones inversas de las trigonométricas son: “arco[nombre]” y se denotan:

$\arcsen(x)$ $\arccos(x)$ $\arctan(x)$ etc

$$\arcsen(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

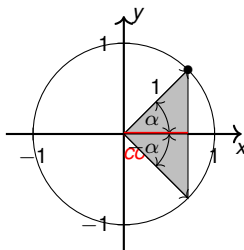
Ecuaciones trigonométricas

$$\cos(\alpha) = p$$

Cuál es el valor de α ?

$$\arccos(\cos(\alpha)) = \arccos(p) \Rightarrow \alpha = \arccos(p)$$

Es la única solución?



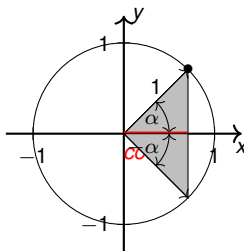
Ecuaciones trigonométricas

$$\cos(\alpha) = p$$

Cuál es el valor de α ?

$$\arccos(\cos(\alpha)) = \arccos(p) \Rightarrow \alpha = \arccos(p)$$

Es la única solución?



α es solución, y en este caso $-\alpha$ también es solución (la función coseno es par!!!).
Son las únicas soluciones? Función periódica con período $2\pi \Rightarrow$

$$\alpha + n.2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

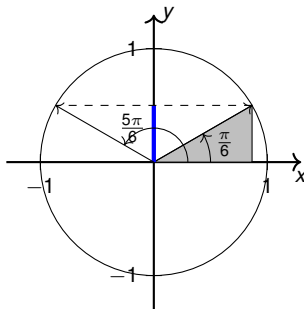
\vee

$$-\alpha + n.2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 1

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$$

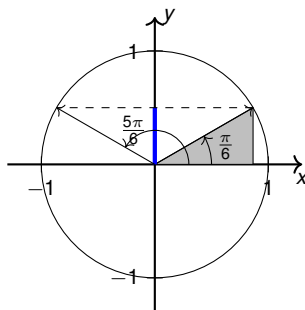
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Ejemplo 1

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



$$\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_1 = \frac{5\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

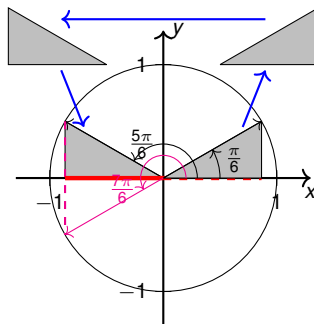
∨

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

Ejemplo2

$$\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

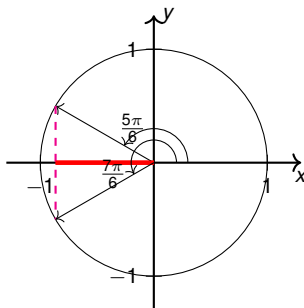
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Ejemplo2

$$\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



$$\alpha_0 = 5\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_1 = 7\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = 5\frac{\pi}{6} + n.2\pi$$

∨

$$\alpha = 7\frac{\pi}{6} + n.2\pi$$

Ejemplo3 (forma analítica - la forma gráfica en la próxima clase)

$$\text{sen}(x) = \cos(2x)$$

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$$

Id. trigo.:

$$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$$

$$\cos(2x) = 1 - \text{sen}^2(x) - \text{sen}^2(x) = 1 - 2\text{sen}^2(x)$$

$$\text{sen}(x) = 1 - 2\text{sen}^2(x)$$

$$\text{sen}(x) + 2\text{sen}^2(x) - 1 = 0$$

$$z = \text{sen}(x) \rightarrow 2z^2 + z - 1 = 0$$

$$\rightarrow \text{Bsk} : z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \rightarrow z_1 = \frac{1}{2} \quad z_2 = -1$$

Ejemplo3

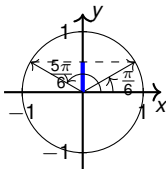
$$\operatorname{sen}(x) = \cos(2x)$$

$$z = \operatorname{sen}(x)$$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

(ver ejemplo1)

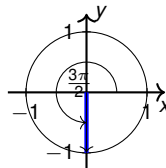


$$x = \frac{\pi}{6} + n.2\pi \vee x = 5\frac{\pi}{6} + n.2\pi$$

$$\text{Solución} = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + n.2\pi \vee x = 5\frac{\pi}{6} + n.2\pi \vee x = 3\frac{\pi}{2} + n.2\pi\}$$

$$z = -1$$

$$\operatorname{sen}(x) = -1$$



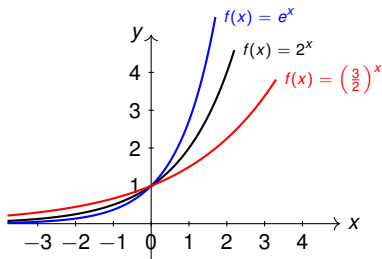
$$x = 3\frac{\pi}{2} + n.2\pi$$

Función exponencial

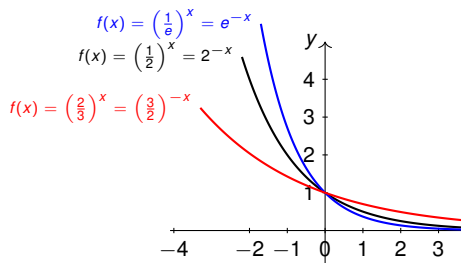
Sea $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a^x$$

$a > 1$



$a < 1$



$$a^0 = 1$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } f(x) = (0, +\infty)$$

Función Exponencial

Propiedades: Sean $a > 0$, $b > 0$, x e $y \in \mathbb{R}$

$$1 \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

$$2 \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$3 \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$4 \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$5 \quad (ab)^x = a^x b^x$$

La base más usada es la base $a = e$, y a la función $f(x) = e^x$ se le llama función exponencial¹, mientras que si la base $a \neq e$ a la función $f(x) = a^x$ se le llama función exponencial de base a .

¹ $e = 2.7182818284...$

Función inversa de la Exponencial: Logaritmo

$$f(x) = a^x$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

Es biyectiva \Rightarrow tiene inversa

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

A la función inversa de la función exponencial de base a le llamaremos *logaritmo en base a*

$$f(x) = a^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x)) \rightarrow \log_a(a^x) = x = a^{\log_a(x)}$$

A la función inversa de la función exponencial (de base e) le llamaremos *logaritmo natural*

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x)$$

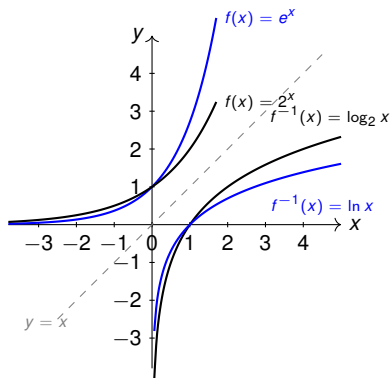
$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x)) \rightarrow \ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}$$

Gráficos

$$a > 1$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\log_a(1) = 0$$

Propiedades del logaritmo

Sea $a > 1$

$$1 \quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$2 \quad \log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

$$3 \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a(x) + \log_a(y^{-1})$$

Podemos escribir las funciones exponenciales y los logaritmos en cualquier base utilizando sólo la base e :

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

(En general, trabajaremos con el logaritmo natural y la función exponencial)

Ecuaciones - Ej.24a

$$\sqrt{e^x} = e^{\sqrt{x}} \rightarrow e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0$$

$$(e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\sqrt{x}} \quad \text{Pot de pot :}$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = e^{\sqrt{x}} \quad \text{aplico inversa :}$$

$$\ln(e^{\frac{1}{2}x}) = \ln(e^{\sqrt{x}})$$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x} \quad \text{elevo cuadrado :}$$

$$\frac{1}{4}x^2 = x \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0 \Rightarrow x \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{4}x - 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x = 1$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Ejemplo

Resolver

$$\sqrt[3]{\ln(x)} = \ln(\sqrt[3]{x}) \quad x > 0$$

$$\ln(\sqrt[3]{x}) = \ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln(x) \text{ Reemplazando}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\ln(x)} = \frac{1}{3}\ln(x)$$

Elevo al cubo

$$\ln(x) = \left(\frac{1}{3}\ln(x)\right)^3 = \frac{1}{27}\ln^3(x)$$

$$\ln(x) - \frac{1}{27}\ln^3(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) \left(1 - \frac{1}{27}\ln^2(x)\right) = 0$$

$$\ln(x) = 0 \quad \vee \quad 1 - \frac{1}{27}\ln^2(x) = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad 27 = \ln^2(x) \rightarrow \sqrt{27} = |\ln(x)| \rightarrow \ln(x) = \sqrt{27} \vee \ln(x) = -\sqrt{27}$$

$$x = 1 \quad \vee \quad \ln(x) = \pm\sqrt{27} \rightarrow e^{\ln(x)} = e^{\pm\sqrt{27}}$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = e^{\pm\sqrt{27}}$$

$$\text{Solución} = x = 1 \vee x = e^{\sqrt{27}} \vee x = e^{-\sqrt{27}}$$

Ej 24d

$$\ln(x+2) + \ln(x+4) = \ln(2x+5) \rightarrow (x+2 > 0) \wedge (x+4 > 0) \wedge (2x+5 > 0)$$

$$(x > -2) \wedge (x > -4) \wedge (x > -\frac{5}{2}) \Rightarrow x > -2$$

$$\ln((x+2)(x+4)) = \ln(2x+5)$$

$$e^{\ln((x+2)(x+4))} = e^{\ln(2x+5)}$$

$$(x+2)(x+4) = 2x+5 \Rightarrow x^2 + 4x + 2x + 8 = 2x + 5$$

$$x^2 + 6x + 8 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\text{Bsk } x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = -3$$

Ver intervalo de definición:

Solución: $x_1 = -1$

FIN