Clase 19 - Análisis Matemático 1 - LC: Más aplicaciones de la derivada

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

3 de Junio de 2020

Índice

Resumen

$$f(x)\begin{cases} Dom\, f \\ simetria \rightarrow opcional \\ cruce\ con\ los\ ejes\ (0, f(0))\ (x_0, 0) \rightarrow opcional \\ A.V.(\lim_{x\to a^\pm} = \pm\infty) \\ A.H.(\lim_{x\to\pm\infty} = L) \end{cases}$$

$$f'(x)\begin{cases} P.C.\ (x_c \in Dom\, f\ /\ f'(x_c) = 0\ \vee f'(x_c) \nexists) \\ f'(x) > 0 \Rightarrow f\ \nearrow,\ f'(x) < 0 \Rightarrow f\ \searrow \\ max/min\ local\ \nearrow\searrow\ \searrow\nearrow \end{cases}$$

$$f''(x)\begin{cases} f''(x) > 0 \rightarrow f \bigcup,\ f''(x) < 0 \rightarrow f \bigcap \\ P.I.\ (x_i \in Dom\, f\ /\ \bigcup\bigcap \vee \bigcap\bigcup) \\ x_c : min\ local\ si\ f''(x_c) > 0,\ max\ local\ si\ f''(x_c) < 0 \rightarrow opcional \end{cases}$$

Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\overbrace{x^2-x-12}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-3x-4}_{\to 0}} \to \frac{0}{0}\text{INDETERMINADO}$$

Bhaskara: Numerador: $x_1 = 4$ y $x_2 = -3$ Denominador: $x_1 = 4$ y $x_2 = -1$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x+3)}{\cancel{(x-4)}(x+1)} = \lim_{x\to 4}\frac{x+3}{x+1} = \frac{7}{5}$$

Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital - Caso 1

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto $\mathbb{I}$ excepto tal vez en un número a. Si :

- $g'(x) \neq 0$ en $\mathbb{I}$, y
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ó $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ (no es indeterminado!)

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(también es válido para límites por derecha/izquierda)

$$\lim_{x \to 4} \frac{\overbrace{x^2 - x - 12}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 - 3x - 4}_{\to 0}} \to \frac{0}{0}\, IND \quad \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x \to 4} \frac{\overbrace{2x - 1}^{\to 7}}{\underbrace{2x - 3}_{\to 5}} = \boxed{\frac{7}{5}}$$

Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital - Caso 2

Sean f y g funciones derivables para todo $x > N$. Si :

- $g'(x) \neq 0 \ \forall \, x > N$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ó $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ (no es indeterminado!)

Entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(también vale cuando $x \to -\infty$)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{sen\left(\frac{1}{x}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} \overbrace{\underbrace{=}_{L'H}}^{\to \frac{0}{0} IND} \lim_{x \to \infty} \frac{cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to \infty} cos \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} = \boxed{1}$$

Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital - Caso 3

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto $\mathbb{I}$ excepto tal vez en un número a. Si :

- $g'(x) \neq 0$ en $\mathbb{I}$, y
- $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ó $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ (no es indeterminado!)

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(también es válido para límites por derecha/izquierda)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\overbrace{ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}^{\to -\infty}}{\underbrace{tan(x)}_{\to -\infty}} \to \frac{-\infty}{-\infty}\ IND \underbrace{\overbrace{=}}_{L'H} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}{sec^2(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{cos^2(x)}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\overbrace{cos^2(x)}^{\to 0^-}}{\underbrace{x - \frac{\pi}{2}}_{\to 0^+}} \to \frac{0}{0}\ IND \underbrace{\overbrace{=}}_{L'H}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \cdot cos(x) \cdot (-sen(x))}{1} = \boxed{0}$$

Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital - Caso 4

Sean f y g funciones derivables para todo $x > N$. Si :

- $g'(x) \neq 0 \; \forall \, x > N$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ó $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ (no es indeterminado!)

Entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(también vale cuando $x \to -\infty$)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x^2 - x - 12}^{\to\infty}}{\underbrace{x^2 - 3x - 4}_{\to\infty}} \underbrace{\overbrace{=}^{\to \frac{\infty}{\infty} IND}}_{L'H} \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{2x - 1}^{\to\infty}}{\underbrace{2x - 3}_{\to\infty}} \underbrace{\overbrace{=}^{\to \frac{\infty}{\infty} IND}}_{L'H} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

Resumen

Si un límite de cociente de funciones nos da una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, entonces podemos calcularlo como el límite del cociente de las derivadas

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Otra indeterminaciones que pueden llevarse a la forma de L'Hôpital:

$$0.\infty \to \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \to \frac{0}{0}$$

$$0.\infty \to \frac{\infty}{\frac{1}{0}} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

$$1^\infty$$

Más ejemplos

- $$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{x}_{\to 0}\,\underbrace{\ln(x)}_{\to-\infty} = \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to-\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}} \underbrace{\overbrace{=}^{\to -\frac{\infty}{\infty}\ IND}}_{L'H} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{x^2}{x} =$$
  $$\lim_{x\to0^+} -x = \boxed{0}$$

- $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to1}\left(\underbrace{\boxed{\frac{x}{x-1}}}_{\to\pm\infty} - \underbrace{\boxed{\frac{1}{\ln(x)}}}_{\to\pm\infty}\right) = \lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)}\right) =$$
  $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln(x)-x+1}{x\ln(x)-\ln(x)}\right) \underbrace{\overbrace{=}^{\to\frac{0}{0}\ IND}}_{L'H} \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)+\frac{x}{x}-1}{\ln(x)+\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} =$$
  $$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)+1-1}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}} \underbrace{\overbrace{=}^{\to\frac{0}{0}\ IND}}_{L'H} \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to1} \frac{\overbrace{x^2}^{\to1}}{\underbrace{x(x+1)}_{\to2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Más ejemplos

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{3x} \to 0^0 \, IND$

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\cdot \ln(f(x))}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{3x} = \lim_{x \to 0^+} e^{3x \cdot \ln(x)} \underbrace{=}_{\textit{continuidad de e}} e^{\lim\limits_{x \to 0^+} 3x \ln(x)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} 3x \ln(x) = 3 \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\ln(x)}_{-\infty} = 3 \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \underbrace{\overbrace{=}^{\to -\frac{\infty}{\infty} \, IND}}_{L'H} [\cdots \textit{ver ejemplo anterior}] = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{3x} = e^0 = \boxed{1}$$

Corolario de la Regla de L'Hôpital

Corolario: Criterio de Derivabilidad en un punto

Sea f una función tal que:

1. es continua en $x = a$
2. es derivable en un intervalo abierto que contiene a a (excepto tal vez en a)

Entonces,

- Si f' tiene límite en a, entonces f es derivable en a con $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$
- Si f' diverge en a ($\to \pm\infty$), entonces f NO es derivable en a
- Si f' tiene límite por derecha y por izquierda en a, pero son diferentes, entonces f NO es derivable en a

En otras palabras:
Si f' es continua, f es derivable
Si f' tiene discontinuidad de salto o esencial, f No es derivable
Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ NO existe, NO PUEDO DECIR NADA SOBRE LA DERIVABILIDAD DE f

Corolario de la Regla de L'Hôpital

Corolario: Criterio de Derivabilidad en un punto

Sea f una función tal que:

1. es continua en $x = a$
2. es derivable en un intervalo abierto que contiene a a (excepto tal vez en a)

Entonces,

- Si f' tiene límite en a, entonces f es derivable en a con $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$
- Si f' diverge en a ($\to \pm\infty$), entonces f NO es derivable en a
- Si f' tiene límite por derecha y por izquierda en a, pero son diferentes, entonces f NO es derivable en a

DEMOSTRACIÓN:

• Hipótesis: f continua en $a \to \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, y f'(x) existe

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\to 0}}{\underbrace{x - a}_{\to 0}} \underbrace{\overbrace{=}^{\to \frac{0}{0}\, IND}}_{L'H} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{1}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$$

Ejemplo 1

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

¿Es derivable en x=0?

- f es continua en x=0 (hacer la demostración comprobando los 3 puntos!)
- Para $x \neq 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Como el límite de f' diverge, por el Corolario L'H. (2do item), la f no es derivable en a.

Ejemplo 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

¿es derivable en x=0?
Veamos si f(x) es continua y qué pasa con límite de f':

1. $f(0) = 0$
2. $\lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (Es el producto de una función acotada por otra que tiende a 0)
3. $f(0) = \lim_{x \to 0}$ ✔

f es continua en x=0

$x \neq 0$

$$f'(x) = 2xsen\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Calculemos el límite de la derivada:

$$\lim_{x \to 0} 2xsen\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \nexists$$

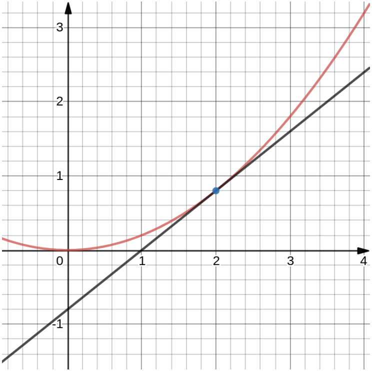
Puedo decir algo sobre si f es derivable en x=0??? NO

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \boxed{0}$$

f' no es continua en $x = 0$, pero f sí es derivable en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 2xsen\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Aproximación lineal



Recta tangente en $x = x_0$: $y = Ax + B$ tal que $A = f'(x_0)$ y si $x = x_0 \to y = f(x_0)$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

En un entorno pequeño alrededor de x_0 la función se parece a la recta

Aproximación lineal o de 1er orden

En un entorno alrededor de x_0, los valores de la función se puede aproximar por los valores de la recta tangente la función en el punto.
Si $|x - x_0| < \delta$, $f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Si la función es cóncava hacia arriba, los valores de la aproximación estarán subestimados.
Si la función es cóncava hacia abajo, los valores de la aproximación estarán sobreestimados.

Aproximación lineal

Calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{25}$

1. Tomemos la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$
2. Seleccionemos un valor x_0 cercano al número que queremos averiguar, pero del que sí sabemos calcular el valor de la función en ese punto: $x_0 = 27$ ya que $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$
3. Calculemos la derivada de f:
   $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$ con $f'(27) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{27}$
4. Escribamos la aproximación lineal alrededor de $x_0 = 27$ (la recta tangente al gráfico en el punto $x_0 = 27$!): $f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \boxed{3 + \frac{1}{27}(x - 27)}$
5. Calculemos para $x = 25$
   $$f(25) \sim 3 + \frac{1}{27}(25 - 27) = 3 - \frac{2}{27} \sim 3 - 0.074 = 2.926$$
6. Comparando con la calculadora: $\sqrt[3]{25} \sim 2.9240$, el error es 0.002

Aproximación lineal

Calcular el valor aproximado de $\sqrt{4.1}$

1. Tomemos la función $f(x) = \sqrt{x}$
2. Seleccionemos un valor x_0 cercano al número que queremos averiguar, pero del que sí sabemos calcular el valor de la función en ese punto: $x_0 = 4$ ya que $f(4) = \sqrt{4} = 2$
3. Calculemos la derivada de f:
   $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ con $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$
4. Escribamos la aproximación lineal alrededor de $x_0 = 4$ (escribir la recta tangente al gráfico en el punto $x_0 = 4$: $f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \boxed{2 + \frac{1}{4}(x-4)}$
5. Calculemos para $x = 4.1$:
$$f(4.1) \sim 2 + \frac{1}{4}(4.1 - 4) = 2 + \frac{1}{4}\frac{1}{10} = 2 + \frac{1}{40} = 2 + 0.025 = 2.025$$
6. Comparando con la calculadora: $\sqrt{4.1} \sim 2.0248$, el error es 0.00015433

Tarea: Estimar $\ln(1.134)$

Misceláneas

- Aproximación de orden dos alrededor de x_0:

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

- Aproximación de orden k - POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN k:

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Misceláneas

¿ “L’Hôpital” o “L’Hospital”?
En la época de Guillaume François Antoine, marqués de L’Hôpital (∼1600), en la ortografía francesa se escribía "L’Hospital", con una "s" muda, que posteriormente fue reemplazada por el acento circunflejo en la letra *o* y se eliminó la s.
Por lo que el tipo en su época firmaba sus publicaciones como marqués de L’Hospital.