# Klassifikation mit Naive Bayes

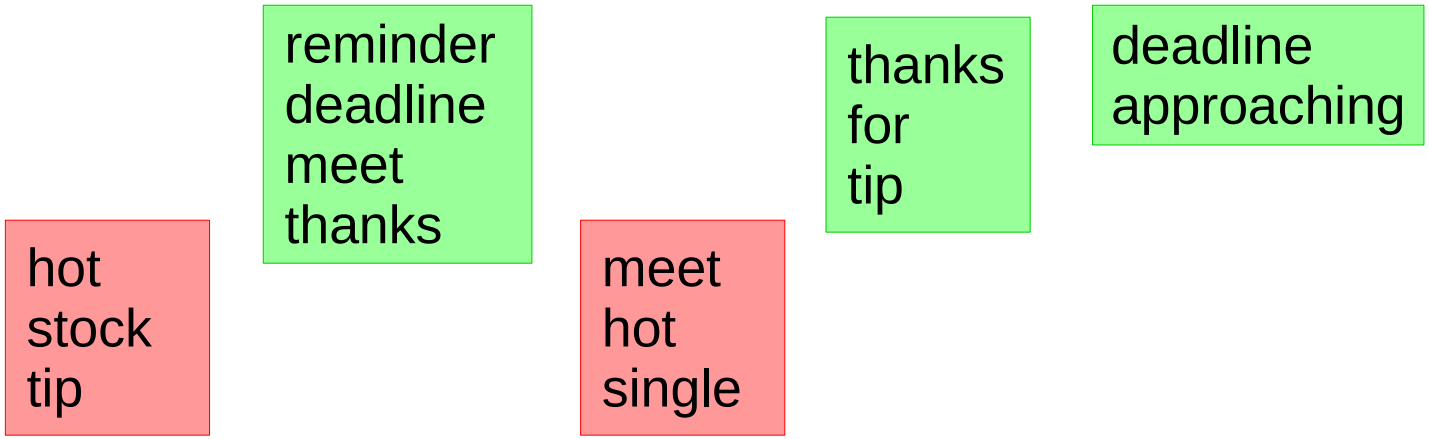
Florian Fink
(Vielen Dank an Helmut Schmid und Ben Roth für Teile der Folien)

Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung
Ludwig-Maximilian-Universität München
beroth@cis.uni-muenchen.de

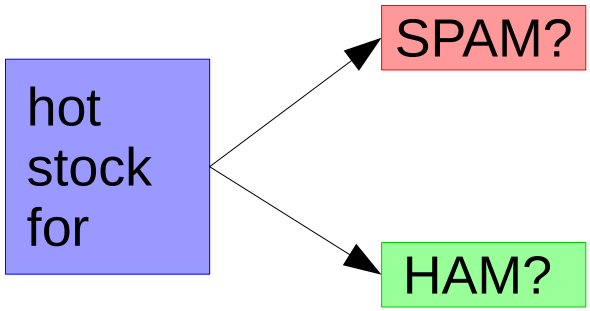
# Naive Bayes Classifier

# Aufgabenstellung

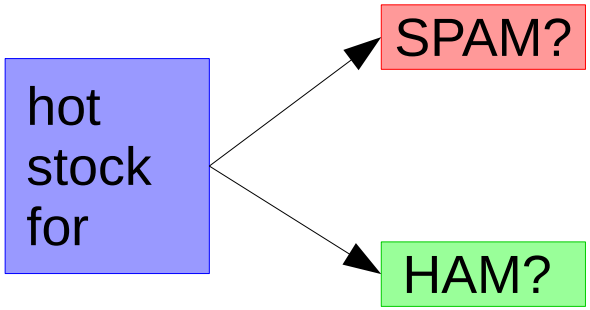
- Gegeben ein Traininscorpus:




- Entscheide ob neue (ungesehene) Emails der Kategorie HAM oder SPAM zugeordnet werden soll:



# Entscheidungskriterium




- Gegeben der Inhalt der Email, welche Kategorie ist wahrscheinlicher, SPAM oder HAM?

$$P(HAM|text) > P(SPAM|text)$$

- Warum ist das Entscheidungskriterium nicht:

$$P(text|HAM) > P(text|SPAM)$$

?

# Bayes-Regel

$$P(HAM|text) = \frac{P(text|HAM) * P(HAM)}{P(text)}$$

- $P(text|HAM)$: bedingte BOW-Wahrscheinlichkeit
- $P(HAM)$: Prior-Wahrscheinlichkeit, dass eine Email der Kategorie HAM zugeordnet wird (wenn der Inhalt der Email nicht bekannt ist). Schätzung:

$$\tilde{p}(HAM) = \frac{\text{Anzahl HAM-Mails}}{\text{Anzahl alle Mails}}$$

- $P(text)$: BOW-Wahrscheinlichkeit des Inhalts der Email, ohne dass die Kategorie bekannt ist

# Entscheidungskriterium

Email ist HAM

$$\Leftrightarrow$$

$$P(HAM|text) > P(SPAM|text)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{P(HAM|text)}{P(SPAM|text)} > 1$$

$$\Leftrightarrow$$

# Entscheidungskriterium

Email ist HAM

$$\Leftrightarrow$$

$$P(HAM|text) > P(SPAM|text)$$

$$\Leftrightarrow$$

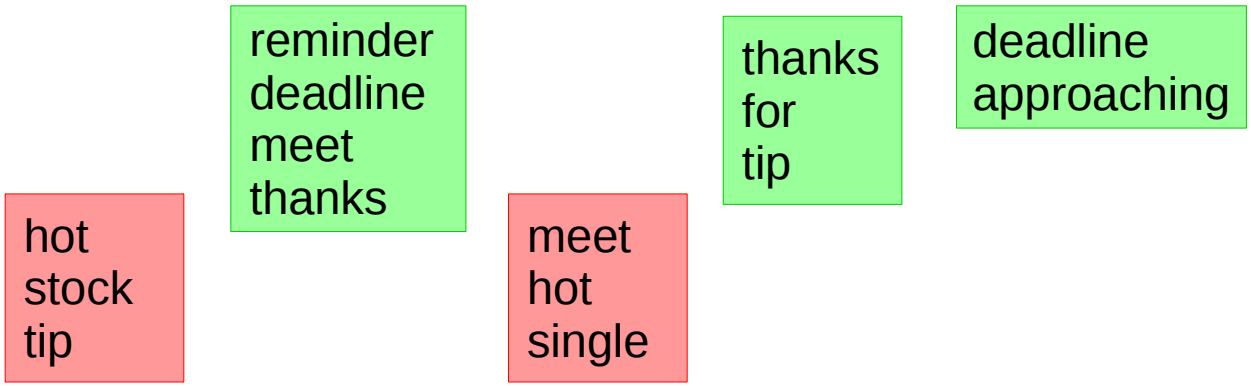
$$\frac{P(HAM|text)}{P(SPAM|text)} > 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{\frac{1}{P(text)}} P(text|HAM) * P(HAM)}{\cancel{\frac{1}{P(text)}} P(text|SPAM) * P(SPAM)} > 1$$

Was ist Entscheidungsregel für mehr als zwei Kategorien?

# Beispiel (Vorläufig)




- $\tilde{p}(HAM) = \frac{3}{5}$
- $\tilde{p}(SPAM) = \frac{2}{5}$
- $p(\text{hot stock for}|HAM)$

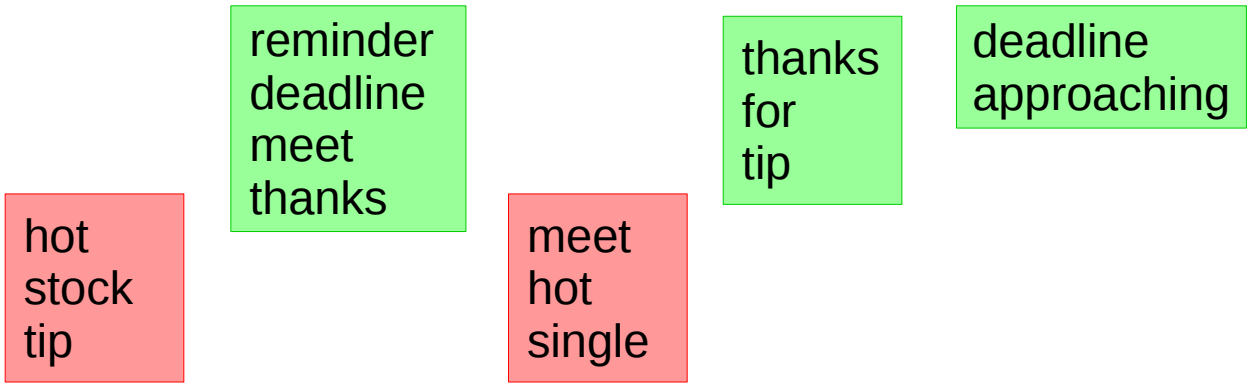
$$= \tilde{p}(\text{hot}|HAM)\tilde{p}(\text{stock}|HAM)\tilde{p}(\text{for}|HAM) = \ldots$$

- $p(\text{hot stock for}|SPAM)$

$$= \tilde{p}(\text{hot}|SPAM)\tilde{p}(\text{stock}|SPAM)\tilde{p}(\text{for}|SPAM) = \ldots$$

- ...

# Beispiel (Vorläufig)




- $\tilde{p}(HAM) = \frac{3}{5}$
- $\tilde{p}(SPAM) = \frac{2}{5}$
- $p(\text{hot stock for}|HAM)$

$$= \tilde{p}(\text{hot}|HAM)\tilde{p}(\text{stock}|HAM)\tilde{p}(\text{for}|HAM) = \frac{0 \cdot 0 \cdot 1}{9 \cdot 9 \cdot 9} = 0$$

- $p(\text{hot stock for}|SPAM)$

$$= \tilde{p}(\text{hot}|SPAM)p(\text{stock}|SPAM)\tilde{p}(\text{for}|SPAM) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 0$$

- Problem: Entscheidungskriterium ist nicht definiert $(\frac{0}{0})$

# Addiere-1 Glättung

**Addiere-1 Glättung** (Laplace-Glättung)

$$\tilde{p}(w) = \frac{n(w) + 1}{N + V}$$

(V = Anzahl der möglichen Wörter; N = Zahl der Tokens)

- ... ist optimal falls die uniforme Verteilung am wahrscheinlichsten ist, was in bei Textcorpora selten der Fall ist $\Rightarrow$ Zipf'sche Verteilung
- ... überschätzt daher die Wahrscheinlichkeit ungesehener Wörter.

# Addiere-$\lambda$ Glättung

reduziert das Ausmaß der Glättung

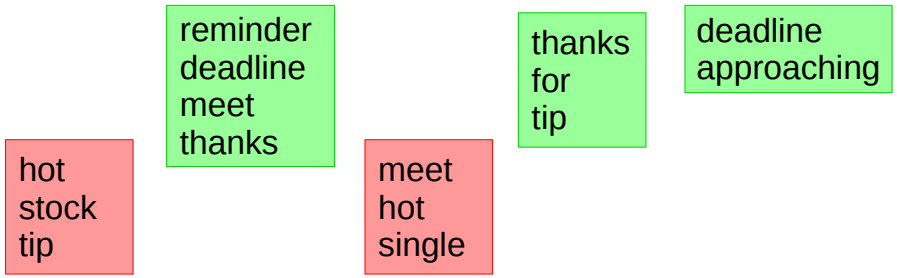
**Addiere-$\lambda$ Glättung**

$$\tilde{p}(w) = \frac{n(w) + \lambda}{N + V\lambda}$$

**Addiere-$\lambda$ Glättung für bedingte Wahrscheinlichkeiten**

$$\tilde{p}(w|y) = \frac{n(w, y) + \lambda}{n_y + V\lambda}$$

# Beispiel (mit Addiere-1 Glättung)




- $\tilde{p}(HAM) = \frac{3}{5}$, $\tilde{p}(SPAM) = \frac{2}{5}$
- Vokabular enthält $V = 10$ unterschiedliche Wörter
- $p(\text{hot stock for}|HAM) = \tilde{p}(\text{hot}|HAM)\tilde{p}(\text{stock}|HAM)\tilde{p}(\text{for}|HAM)$

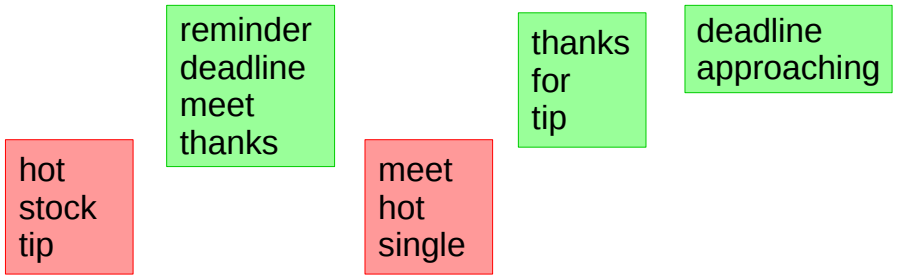
$$= \frac{(0+1)\cdot(0+1)\cdot(1+1)}{(9+10)\cdot(9+10)\cdot(9+10)} \approx 0.00029$$

- $p(\text{hot stock for}|SPAM) = \tilde{p}(\text{hot}|SPAM)\tilde{p}(\text{stock}|SPAM)\tilde{p}(\text{for}|SPAM)$

$$= \frac{(2+1)\cdot(1+1)\cdot(0+1)}{(6+10)\cdot(6+10)\cdot(6+10)} \approx 0.00146$$

- $\frac{P(text|HAM)*P(HAM)}{P(text|SPAM)*P(SPAM)} = \frac{0.00029\cdot 0.6}{0.00146\cdot 0.4} \approx 0.298 \Rightarrow$ Kategorie?

# Beispiel (mit Addiere-1 Glättung)




- $\tilde{p}(HAM) = \frac{3}{5}$, $\tilde{p}(SPAM) = \frac{2}{5}$
- Vokabular enthält $v = 10$ unterschiedliche Wörter
- $p(\text{hot stock for}|HAM) = \tilde{p}(\text{hot}|HAM)\tilde{p}(\text{stock}|HAM)\tilde{p}(\text{for}|HAM)$

$$= \frac{(0+1)\cdot(0+1)\cdot(1+1)}{(9+10)\cdot(9+10)\cdot(9+10)} \approx 0.00029$$

- $p(\text{hot stock for}|SPAM) = \tilde{p}(\text{hot}|SPAM)\tilde{p}(\text{stock}|SPAM)\tilde{p}(\text{for}|SPAM)$

$$= \frac{(2+1)\cdot(1+1)\cdot(0+1)}{(6+10)\cdot(6+10)\cdot(6+10)} \approx 0.00146$$

- $\frac{P(text|HAM)*P(HAM)}{P(text|SPAM)*P(SPAM)} = \frac{0.00029\cdot 0.6}{0.00146\cdot 0.4} \approx 0.298 < 1 \Rightarrow$ Email ist Spam

# Rechnen mit Logarithmen

- Bei der Multiplikation vieler kleiner Wahrscheinlichkeiten (z.B. aller Worte in einem langen Text) kann sich das Ergebnis schnell dem Wert 0 annähern, und u.U. nicht mehr korrekt repräsentiert werden.
- Deswegen vermeidet man möglichst immer die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten.
- Man verwendet stattdessen die Summe der logarithmierten Wahrscheinlichkeiten.
- $\log(a \cdot b \cdot c \cdot \dots) = \log(a) + \log(b) + \log(c) + \dots$
- Beispiel:

$$0.0001 * 0.001 * 0.00001 * 0.01 = 0.0000000000001$$

$$\log_{10}(0.0001 * 0.001 * 0.00001 * 0.01) =$$

# Rechnen mit Logarithmen

- Bei der Multiplikation vieler kleiner Wahrscheinlichkeiten (z.B. aller Worte in einem langen Text) kann sich das Ergebnis schnell dem Wert 0 annähern, und u.U. nicht mehr korrekt repräsentiert werden.
- Deswegen vermeidet man möglichst immer die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten.
- Man verwendet stattdessen die Summe der logarithmierten Wahrscheinlichkeiten.
- $\log(a \cdot b \cdot c \cdot \dots) = \log(a) + \log(b) + \log(c) + \dots$
- Beispiel:

$$0.0001 * 0.001 * 0.00001 * 0.01 = 0.0000000000001$$

$$\log_{10}(0.0001 * 0.001 * 0.00001 * 0.01) = -4 + (-3) + (-5) + (-2) = -14$$

- $\log(\frac{a}{b}) = ?$

# Entscheidungsregel mit Logarithmen

- Der Logarithmus ist monoton steigend, d.h. wir können ihn bei Ungleichungen auf beiden Seiten anwenden.
- Die Entscheidungsregel ist nun:

$$P(HAM|text) > P(SPAM|text)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\log P(HAM|text) > \log P(SPAM|text)$$

$$\Leftrightarrow$$

# Entscheidungsregel mit Logarithmen

- Der Logarithmus ist monoton steigend, d.h. wir können ihn bei Ungleichungen auf beiden Seiten anwenden.
- Die Entscheidungsregel ist nun:

$$P(HAM|text) > P(SPAM|text)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\log P(HAM|text) > \log P(SPAM|text)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\log P(HAM|text) - \log P(SPAM|text) > 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\log P(text|HAM) + \log P(HAM) - \log P(text|SPAM) - \log P(SPAM) > 0$$

- Den Quotienten der Wahrscheinlichkeiten zweier komplementärer Ereignisse nennt man auch **Odds**.
- Den Logarithmus dieses Quotienten nennt man **Log-Odds**.

# Unbekannte Wörter in den Test-Daten

- Es kann sein, dass Wörter in den Testdaten vorkommen, die in den Trainingsdaten nicht vorgekommen sind.
- Die möglichen Werte der Zufallsvariable wurden aber Anhand der Trainingsdaten gewählt, d.h. die Wahrscheinlichkeit der neuen Wörter ist nicht definiert.
- Zwei häufig verwendete Lösungen:
  - Wörter, die nicht in den Trainingsdaten vorkommen werden ignoriert ($\Rightarrow$ Testdokumente werden kürzer)
  - Wörter, die in den Trainigsdaten nur selten (z.B. 1-2-Mal) bzw. nicht vorkommen, werden (in Training und Test) durch einen Platzhalter `<UNK>` ersetzt.

# Implementierung

# Trainings- oder Test-Instanz

In unserem Fall:

- Features = Wörter (Tokens)
- Label
  - Binäre Klassifikation: HAM (True) vs SPAM (False)
  - Multi-Klassen Klassifikation (Übungsblatt): String für Kategorie (`"work"`, `"social"`, `"promotions"`, `"spam"`, ...)

```
class DataInstance:
    def __init__(self, feature_counts, label):
        self.feature_counts = feature_counts
        self.label = label
#...
```

# Trainings- oder Test-Set

- Menge der möglichen Merkmalsausprägungen ist z.B. für Glättung wichtig.
- Sanity-check: Welche Genauigkeit hätte Vorhersage der Häufigsten Kategorie?

```
class Dataset:
    def __init__(self, instance_list, feature_set):
        self.instance_list = instance_list
        self.feature_set = feature_set
    def most_frequent_sense_accuracy(self):
        # ...
```

# Klassifikator

Welche Informationen benötigen wir, um das Naive-Bayes Modell zu erstellen?

- ...

# Klassifikator

Welche Informationen benötigen wir, um das Naive-Bayes Modell zu erstellen?

- Für die Schätzung von $P(w|HAM)$ bzw. $P(w|SPAM)$
  - $n(w, HAM)$ bzw. $n(w, SPAM)$:
    Je ein Dictionary, welches jedes Wort auf seine Häufigkeit in der jeweiligen Kategorie abbildet.
  - $n_{HAM}$ bzw. $n_{SPAM}$:
    Die Anzahl aller Wortvorkommen pro Kategorie
    (kann aus den Values der Dictionaries aufsummiert werden)
  - Für die Glättung: Parameter $\lambda$ und Größe des Vokabulars $V$
- Für die Schätzung von $P(HAM)$ bzw. $P(SPAM)$
  - Jeweils die Anzahl der Trainingsemails pro Kategorie.

# Klassifikator: Konstruktor

```
def __init__(self, positive_word_to_count, negative_word_to_count,\
        positive_counts, negative_counts, vocabsize, smoothing):
    # n(word, HAM) and n(word, SPAM)
    self.positive_word_to_count = positive_word_to_count
    self.negative_word_to_count = negative_word_to_count

    # n_HAM and n_SPAM
    self.positive_total_wordcount = \
        sum(positive_word_to_count.values())
    self.negative_total_wordcount = \
        sum(negative_word_to_count.values())

    self.vocabsize = vocabsize

    # P(HAM) and P(SPAM)
    self.positive_prior = \
        positive_counts / (positive_counts + negative_counts)
    self.negative_prior = \
        negative_counts / (positive_counts + negative_counts)

    self.smoothing = smoothing
```

# Klassifikator: Übersicht

```
class NaiveBayesWithLaplaceClassifier:
    def log_probability(self, word, is_positive_label):
        # ...
    def log_odds(self, feature_counts):
        # ...
    def prediction(self, feature_counts):
        # ...
    def prediction_accuracy(self, dataset):
        # ...
    def log_odds_for_word(self, word):
        # ...
    def features_for_class(self, is_positive_class, topn=10):
        # ...
```

# Berechnung von $P(w|HAM)$ bzw $P(w|SPAM)$

Wahrscheinlichkeitsschätzung ...

- ... geglättet
- ... wird logarithmiert zurückgegeben

```
def log_probability(self, word, is_positive_label):
    if is_positive_label:
        wordcount = self.positive_word_to_count.get(word, 0)
        total = self.positive_total_wordcount
    else:
        wordcount = self.negative_word_to_count.get(word, 0)
        total = self.negative_total_wordcount
    return math.log(wordcount + self.smoothing) \
        - math.log(total + self.smoothing * self.vocabsize)
```

# Berechnung der Log-Odds

- Was wird in den zwei Summen jeweils berechnet?

```
def log_odds(self, feature_counts):
    # language model probability
    pos_logprob = sum([ count * self.log_probability(word, True) \
        for word, count in feature_counts.items()])
    # prior probability
    pos_logprob += math.log(self.positive_prior)
    # same for negative case
    neg_logprob = sum([ count * self.log_probability(word, False) \
        for word, count in feature_counts.items()])
    neg_logprob += math.log(self.negative_prior)
    return pos_logprob - neg_logprob
```

# Anwenden des Klassifikators, Test-Accuracy

- Vorhersage
  - Anwenden des Modells auf die Feature-Counts einer Test-Instanz
  - Vorhersage einer Kategorie (HAM/True oder SPAM/False) gemäß der Entscheidungsregel

```
def prediction(self, feature_counts):
    # ...
```

- Berechnung der Test-Accuracy
  - Zunächst Vorhersage für alle Instanzen des Dataset
  - Dann Vergleich mit dem richtigen Kategorien-Label

```
def prediction_accuracy(self, dataset):
    # ...
```

# Multi-Klassen Klassifikation

# Multi-Klassen Klassifikation

- Erweiterung: Klassifikator unterscheidet $n$ verschiedene Kategorien ($n \geq 2$)
- $\Rightarrow$ Übungsblatt
- Entscheidungsregel: wähle Kategorie $c^*$, die die Wahrscheinlichkeit $p(c^*|text)$ maximiert.

$$c^* = \arg\max_c p(c|text)$$

- $\arg\max_x f(x)$ wählt einen Wert x (aus der Definitionsmenge) aus, für den der Funktionswert $f(x)$ maximal ist.
- Durch Anwendung der Rechenregeln, die bedingte Unabhängigkeitsannahme, und unsere Schätzmethode (Laplace) gilt:

$$c^* = \arg\max_c p(c)p(text|c)$$

$$= \arg\max_c \log[p(c)] + \sum_{w \in text} \log[\tilde{p}(w|c)]$$

# Multi-Klassen Klassifikation

- Entscheidungsregel: wähle Kategorie $c^*$, die die Wahrscheinlichkeit $p(c^*|text)$ maximiert.

$$c^* = \arg\max_c p(c|text)$$

- Gilt die folgende Implikation?

$$c^* = \arg\max_c p(c|text) \Rightarrow \frac{p(c^*|text)}{1 - p(c^*|text)} \geq 1$$

- Gilt die folgende Implikation?

$$\frac{p(c^*|text)}{1 - p(c^*|text)} > 1 \Rightarrow c^* = \arg\max_c p(c|text)$$

# Multi-Klassen Klassifikation

- Gilt die folgende Implikation?

$$c^* = \arg\max_c p(c|text) \Rightarrow \frac{p(c^*|text)}{1 - p(c^*|text)} \geq 1$$

*Nein. Bei 3 oder mehr Kategorien kann es sein, dass die wahrscheinlichste Kategorie eine WK* $p(c^*|text) < 0.5$ *hat, und die Odds* $< 1$ *sind.*

- Gilt die folgende Implikation?

$$\frac{p(c^*|text)}{1 - p(c^*|text)} > 1 \Rightarrow c^* = \arg\max_c p(c|text)$$

*Ja. Wenn die wahrscheinlichste Kategorie Odds* $> 1$ *hat, ist die WK* $p(c^*|text) > 0.5$*, und alle anderen Kategorien müssen eine kleinere WK haben.*

# Multi-Klassen Naive Bayes: Implementierung

- Um die Werte $\tilde{p}(w|c)$ zu berechnen, benötigen wir die Worthäufigkeiten pro Klasse $n(w, c)$
  Lösung: Dictionary
  (str,str) $\rightarrow$ int
- Für die priors $p(c)$ brauchen wir die Anzahl der Instanzen pro Klasse:
  str $\rightarrow$ int
- Außerdem noch die Vokabulargröße und den Glättungsparameter

```
class NaiveBayesClassifier:
    def __init__(self, word_and_category_to_count, \
        category_to_num_instances, vocabsize, smoothing):
        # ...
```

# Log-Odds pro Wort

$\Rightarrow$ Übungsblatt

- Die Log-Odds für eine Kategorie $c$ können auch nur für ein Wort (anstelle eines ganzen Dokuments) berechnet werden.
- Beginne mit $\log \frac{p(c|w)}{1-p(c|w)}$ und wende die Rechenregeln an

$$\log \frac{p(c|w)}{1-p(c|w)} = \ldots$$

$$= \log[\tilde{p}(w|c)] + \log[p(c)] - \log[\sum_{c' \neq c} \tilde{p}(w|c')p(c')]$$

- Die Log-Odds pro Wort zeigen an, wie stark ein Wort auf die jeweilige Kategorie hinweist
- Man kann dann alle Wörter anhand ihrer Log-Odds sortieren, und einen Eindruck bekommen, was das Modell gelernt hat (d.h. was für das Modell wichtig ist)

# Trainieren und Evaluieren eines Klassifikators

Um einen Klasifikator trainieren und evaluieren zu können, brauchen wir 3 Datensets:

1. Trainingsdaten: Auf diesen Daten schätzt das Modell seine Parameter automatisch. (Z.B. Wortwahrscheinlichkeiten und Kategorien-Priors)
2. Entwicklungsdaten: Auf diesen Daten können verschiedene Model-Architekturen und Hyper-Parameter[1] verglichen werden. **Was z.B. in unserem Fall?**
3. Testdaten: Auf diesen Daten kann, **nachdem durch die Entwicklungsdaten eine Modelarchitektur endgültig bestimmt wurde**, ein Schätzwert gewonnen werden, wie gut das Modell auf weiteren ungesehenen Daten funktioniert.

[1] Parameter, die nicht automatisch gelernt werden.

# Zusammenfassung

- Wahrscheinlichkeitsrechung
  - Satz von Bayes
  - Bedingte Unabhängigkeit
- Naive Bayes Klassifikator
  - Entscheidungsregel, und "umdrehen" der Formel durch Satz von Bayes
  - Glättung der Wahrscheinlichkeiten
  - Log-Odds
- Fragen?