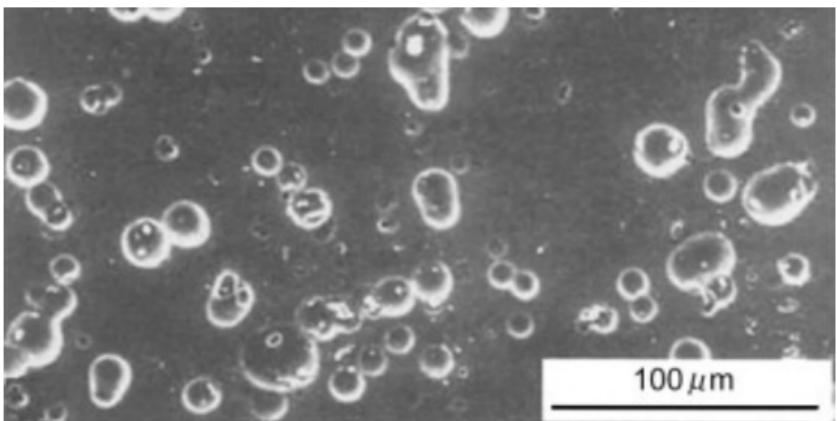


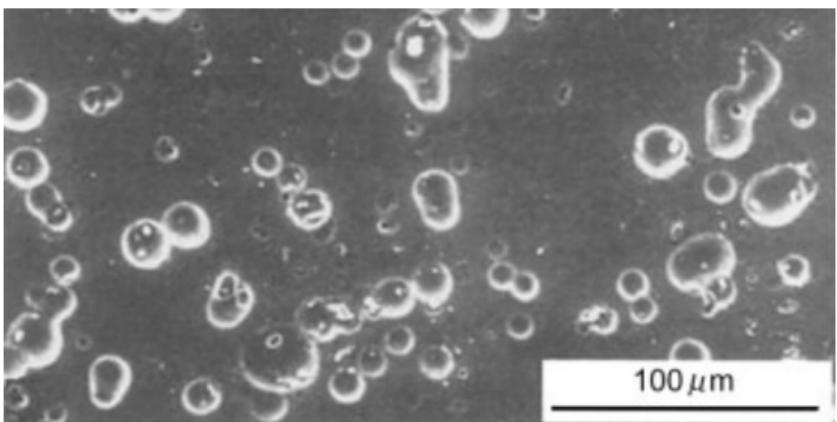
Einführung in räumliche Punktprozesse

Motivation



top left: ©2016 Hallas, bottom left: ©2008 Cruz & Gutiérrez, top right: ©2020 Hackl, bottom right: ©2020 Crowley
Jürgen Hackl

Motivation

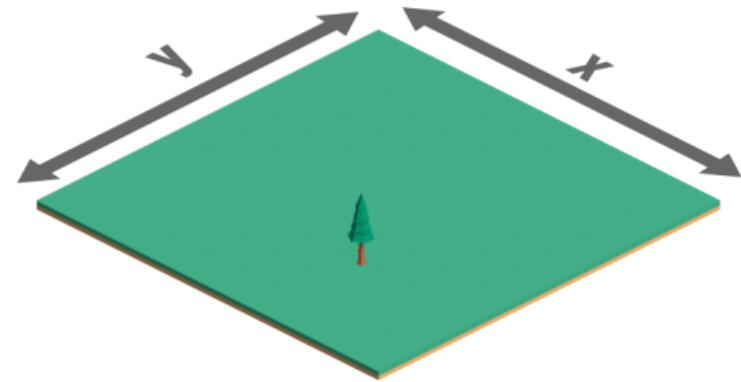


top left: ©2016 Hallas, bottom left: ©2008 Cruz & Gutiérrez, top right: ©2020 Hackl, bottom right: ©2020 Crowley
Jürgen Hackl

Überblick

Punktmusteranalyse

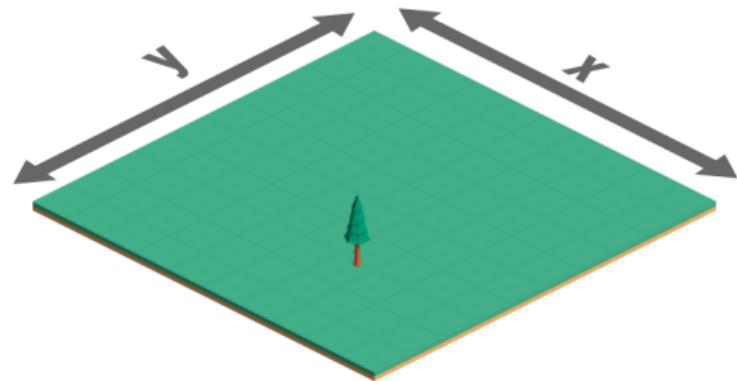
Die Untersuchung der **räumlichen Anordnung von Punkten** im (normalerweise zweidimensionalen) Raum.



Überblick

Punktmusteranalyse

Die Untersuchung der **räumlichen Anordnung von Punkten** im (normalerweise zweidimensionalen) Raum.



Inhalt:

- ▶ Arten von räumlichen Prozessen
- ▶ Beispiele für räumliche Prozesse

Überblick

Punktmusteranalyse

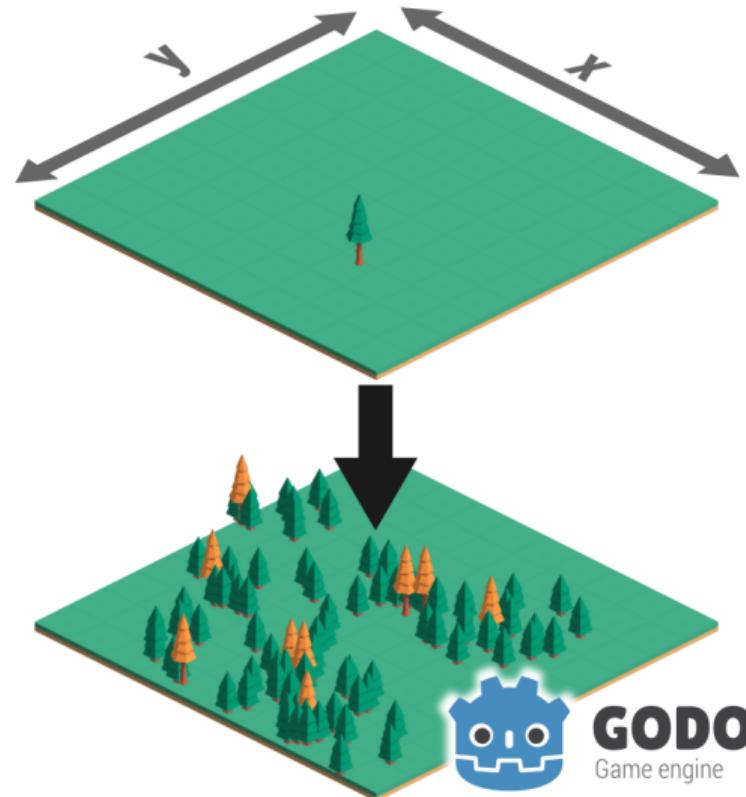
Die Untersuchung der **räumlichen Anordnung von Punkten** im (normalerweise zweidimensionalen) Raum.

Inhalt:

- ▶ Arten von räumlichen Prozessen
- ▶ Beispiele für räumliche Prozesse

Code verfügbar unter

<https://github.com/cisgroup/point-processes>



Räumliche Prozesse

Räumliche Prozesse

Beschreiben wie räumliche Muster möglicherweise entstanden sind.

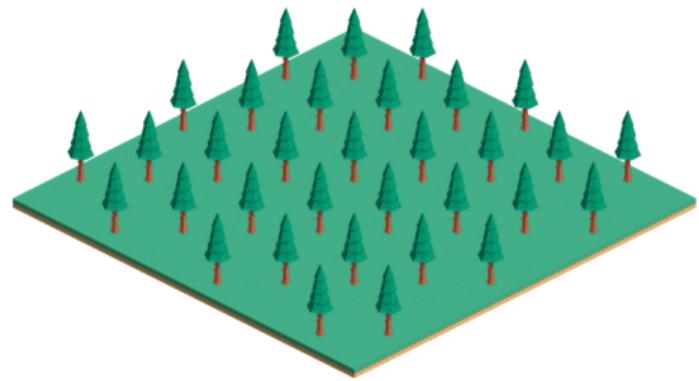
Räumliche Prozesse

Räumliche Prozesse

Beschreiben wie räumliche Muster möglicherweise entstanden sind.

Deterministischer Prozess:

- ▶ jeder Zustand ist kausal bestimmt
- ▶ Z.B. durch Funktionen, Punktlisten, etc



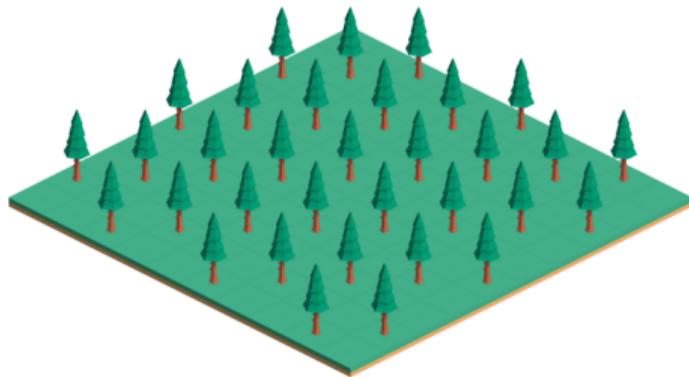
Räumliche Prozesse

Räumliche Prozesse

Beschreiben wie räumliche Muster möglicherweise entstanden sind.

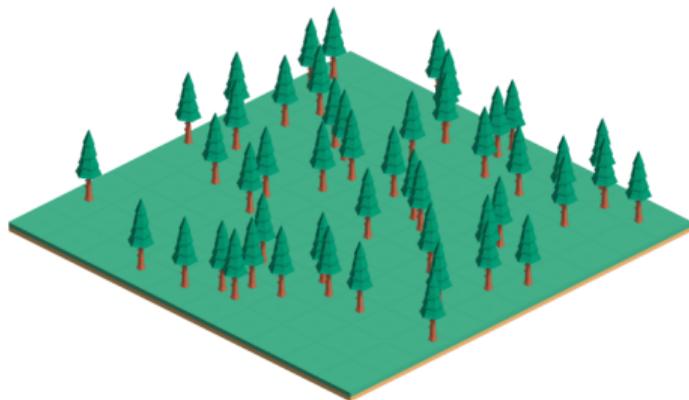
Deterministischer Prozess:

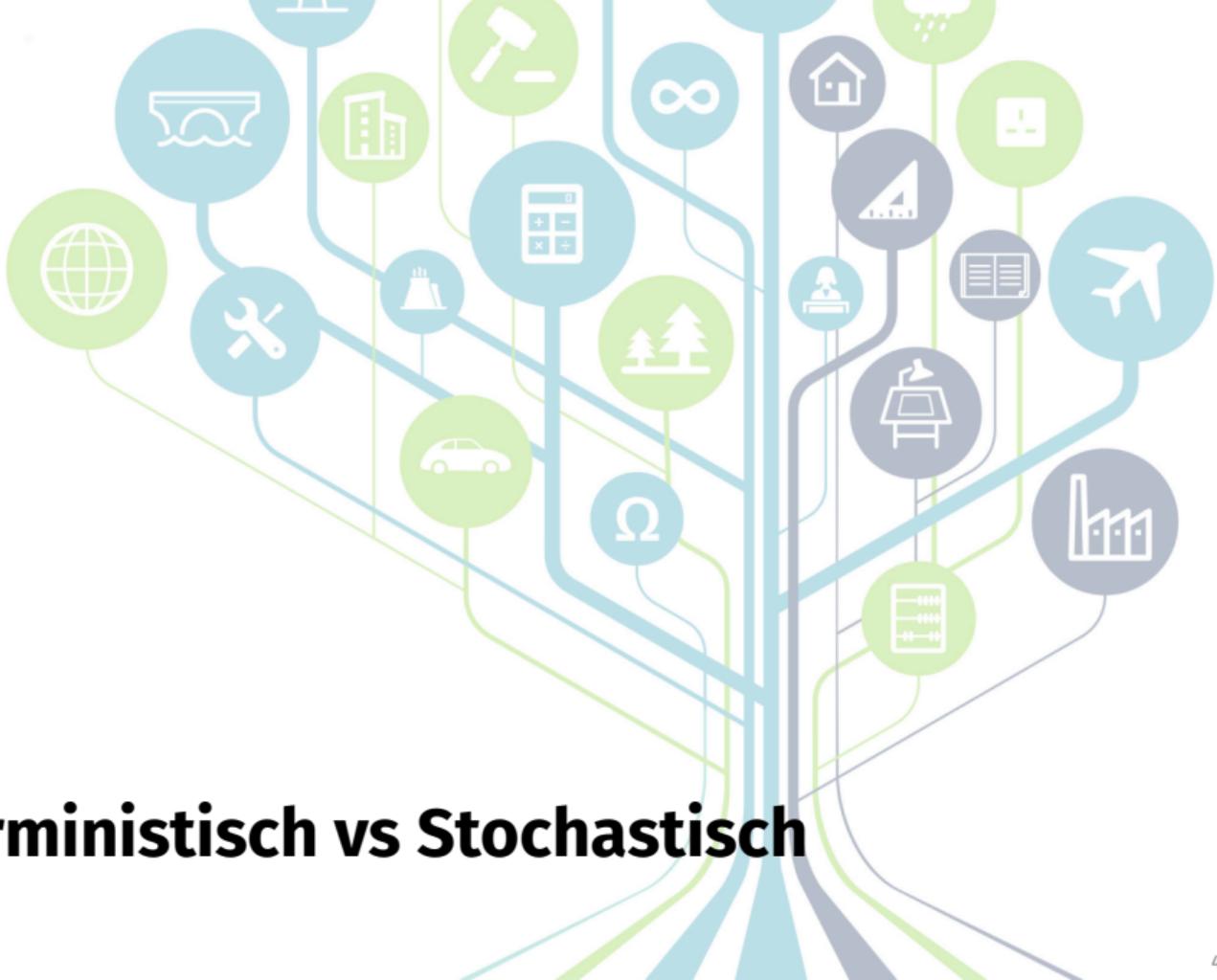
- ▶ jeder Zustand ist kausal bestimmt
- ▶ Z.B. durch Funktionen, Punktlisten, etc



Stochastischer Prozess:

- ▶ ein Zustand tritt nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein
- ▶ jede “Karte” ist eine Realisation eines Zufallsprozess



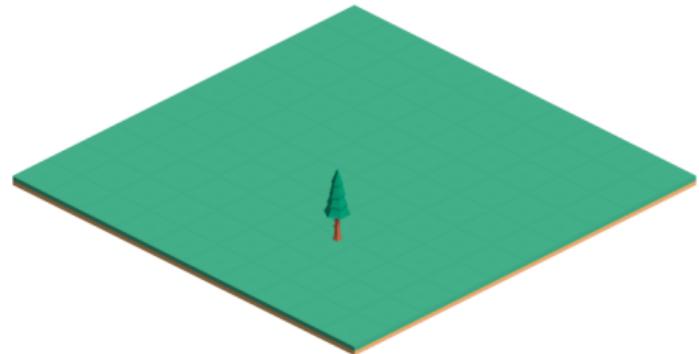


Level 1: Deterministisch vs Stochastisch

Stochastisch unabhängige Prozesse

Abhängig von zwei Konditionen:

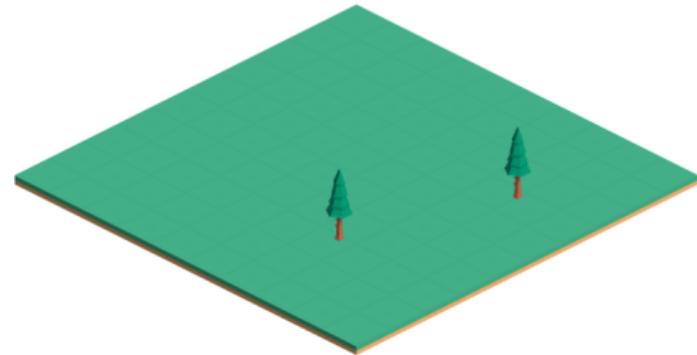
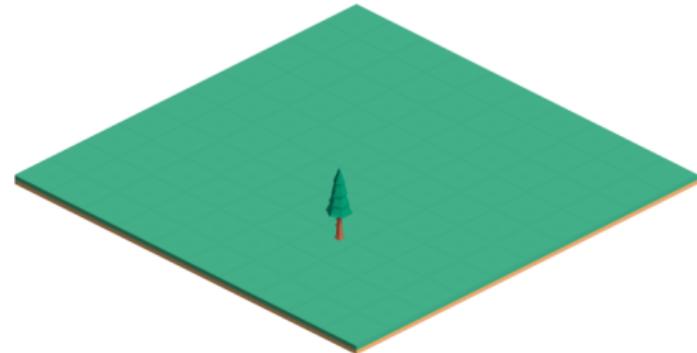
- jeder Ort hat die gleiche Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis



Stochastisch unabhängige Prozesse

Abhängig von zwei Konditionen:

- ▶ jeder Ort hat die **gleiche Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis
- ▶ einzelnen **Ereignisse sind unabhängig** voneinander

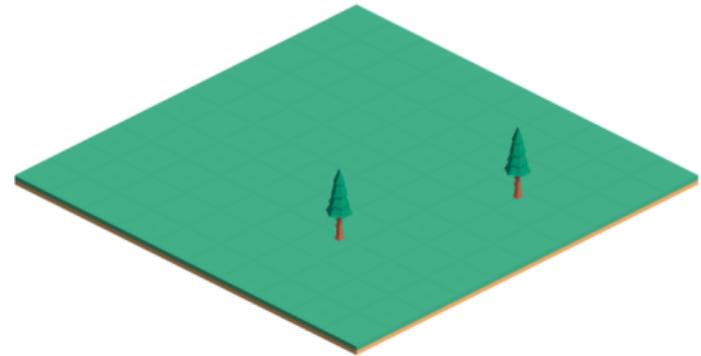
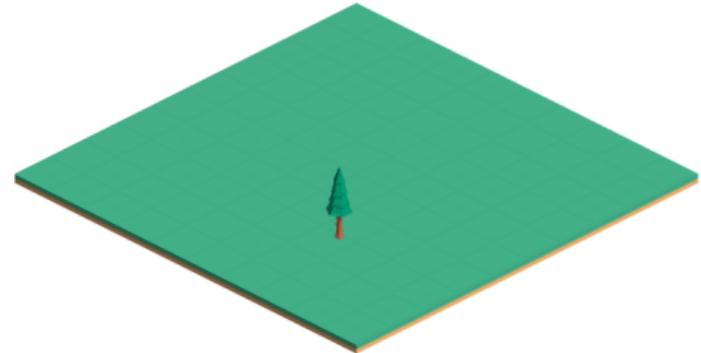


Stochastisch unabhängige Prozesse

Abhängig von zwei Konditionen:

- ▶ jeder Ort hat die **gleiche Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis
- ▶ einzelnen **Ereignisse sind unabhängig** voneinander

Vollständige räumliche Zufälligkeit
Complete spatial randomness (CSR)



Stochastisch unabhängige Prozesse

Abhängig von zwei Konditionen:

- jeder Ort hat die **gleiche Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis
- einzelnen **Ereignisse sind unabhängig** voneinander

Vollständige räumliche Zufälligkeit
Complete spatial randomness (CSR)

Beispiel: Simulation von CSR (uniform)

input: N number of points

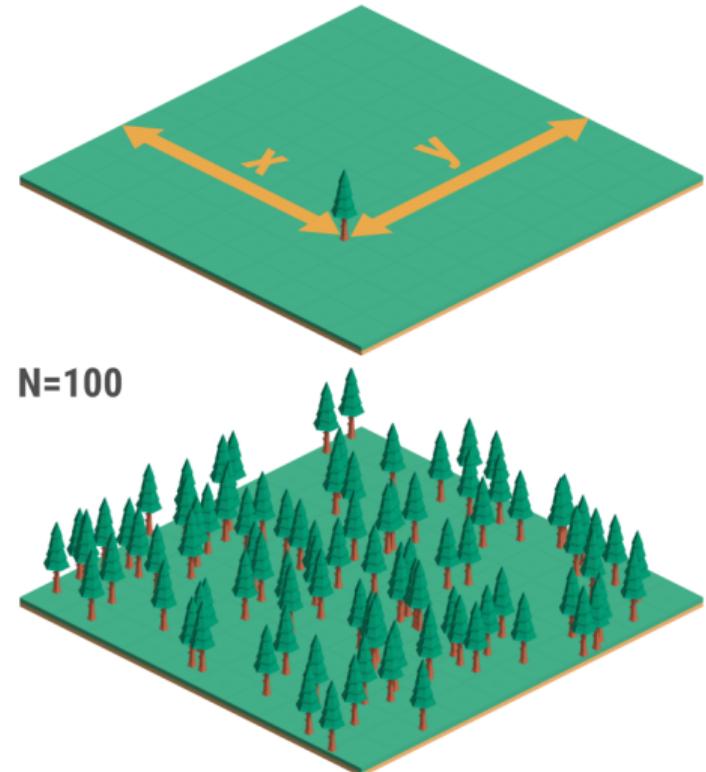
for $i \leftarrow 1$ **to** N **do**

$x \leftarrow \text{UniformRandom}(0,1);$

$y \leftarrow \text{UniformRandom}(0,1);$

 AddPoint(x,y)

end

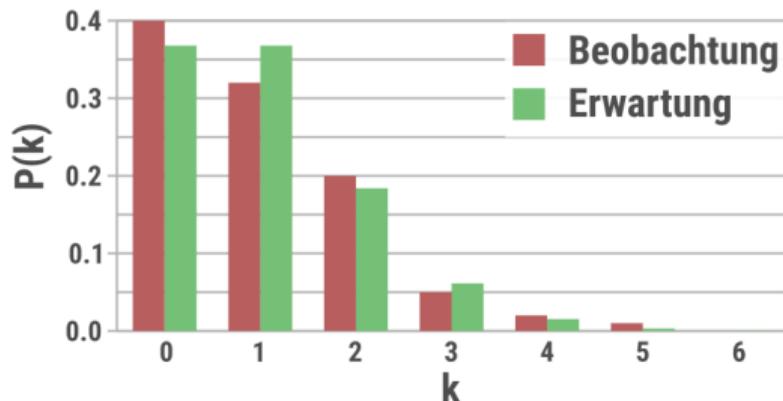
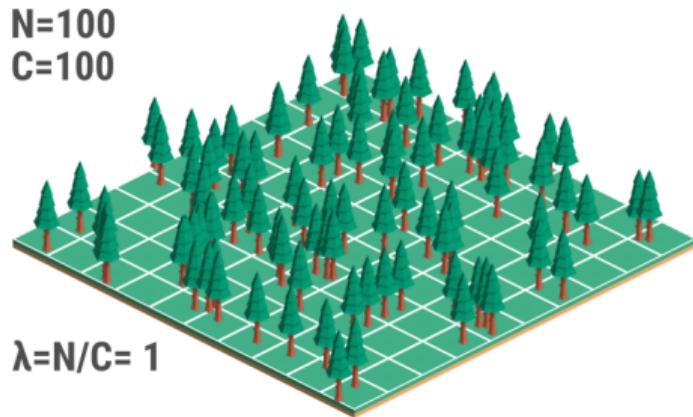




Level 2: Uniform CSR

Erwartete Häufigkeitsverteilung

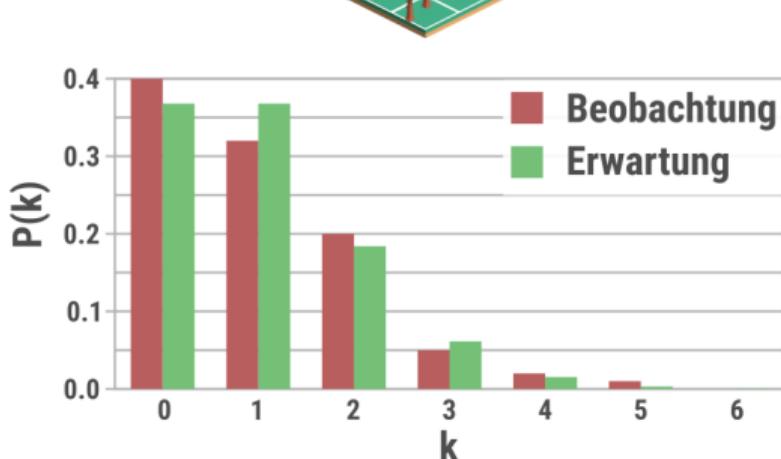
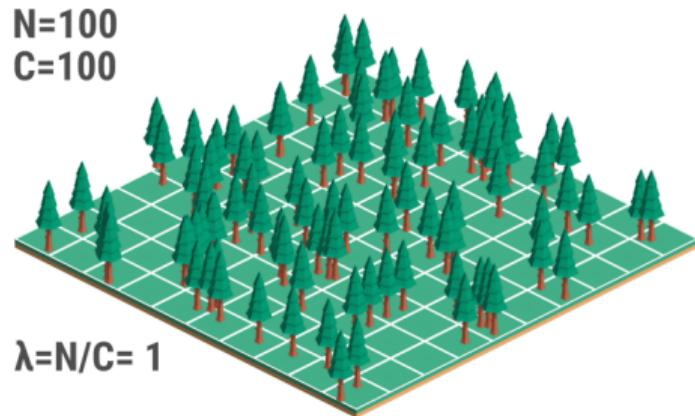
- Langfristig charakterisiert als **erwartete Häufigkeitsverteilung** von Ereignissen



Erwartete Häufigkeitsverteilung

- ▶ Langfristig charakterisiert als **erwartete Häufigkeitsverteilung** von Ereignissen
- ▶ Unter CSR wird der erwartete Anteil von Quadranten mit k Ereignissen durch eine **Poisson-Verteilung** angenähert:

$$P(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

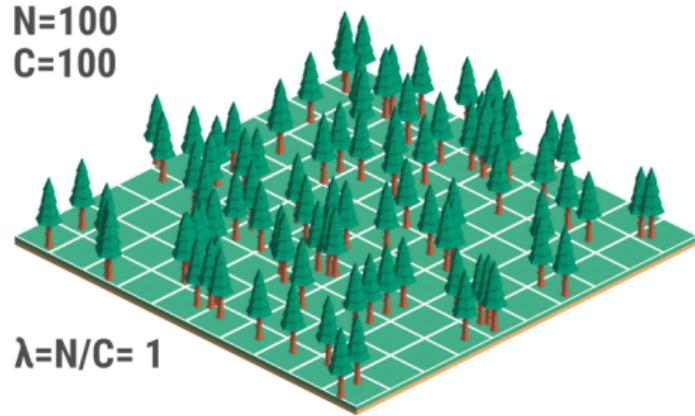


Erwartete Häufigkeitsverteilung

- ▶ Langfristig charakterisiert als **erwartete Häufigkeitsverteilung** von Ereignissen
- ▶ Unter CSR wird der erwartete Anteil von Quadranten mit k Ereignissen durch eine **Poisson-Verteilung** angenähert:

$$P(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

- ▶ wobei λ die durchschnittliche **Rate (Intensität)** der Ereignisse pro Quadrant im Untersuchungsgebiet ist.

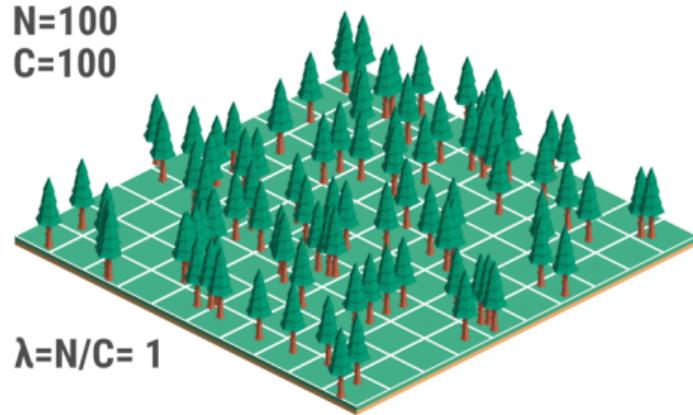


k	#Zellen	Beobachtung	Erwartung
0	40	0.4000	0.3679
1	32	0.3200	0.3679
2	20	0.2000	0.1839
3	5	0.0500	0.0613
4	2	0.0200	0.0153
5	1	0.0100	0.0031
6	0	0.0000	0.0005

Erwartete Häufigkeitsverteilung

- ▶ Langfristig charakterisiert als **erwartete Häufigkeitsverteilung** von Ereignissen
- ▶ Unter CSR wird der erwartete Anteil von Quadranten mit k Ereignissen durch eine **Poisson-Verteilung** angenähert:

$$P(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$



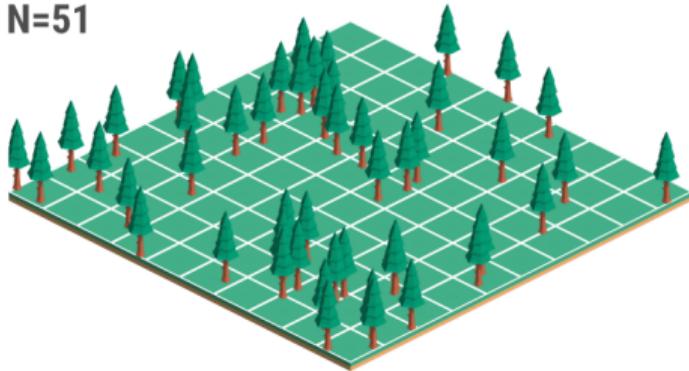
- ▶ wobei λ die durchschnittliche **Rate (Intensität)** der Ereignisse pro Quadrant im Untersuchungsgebiet ist.
- ▶ Ein Punktprozess unter CSR wird daher oft als homogener (stationärer) **räumlicher Poisson-Prozess** bezeichnet

k	#Zellen	Beobachtung	Erwartung
0	40	0.4000	0.3679
1	32	0.3200	0.3679
2	20	0.2000	0.1839
3	5	0.0500	0.0613
4	2	0.0200	0.0153
5	1	0.0100	0.0031
6	0	0.0000	0.0005

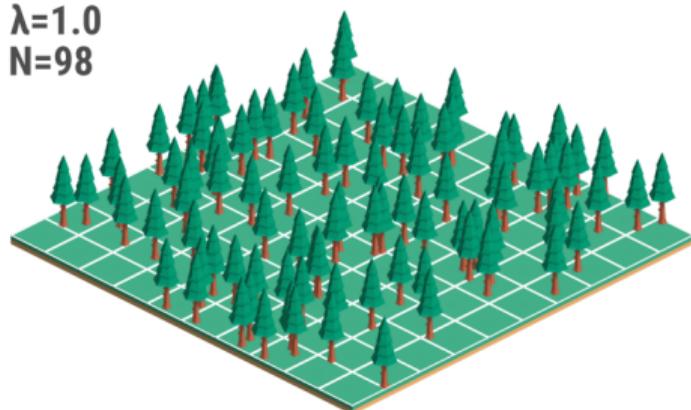
Poisson Punktprozess

- Verteilung für N Punkte in der Region $A \rightarrow N(A)$,

$$\lambda=0.5$$
$$N=51$$



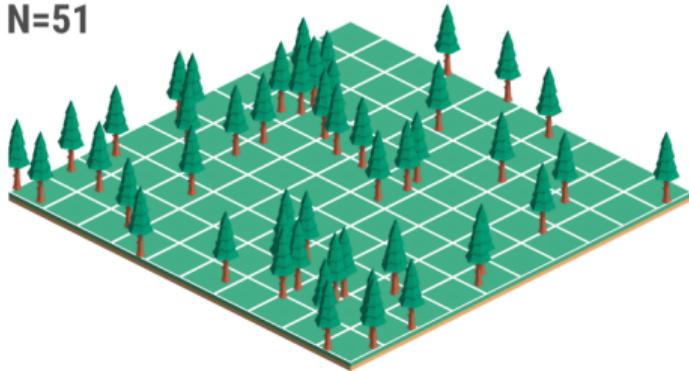
$$\lambda=1.0$$
$$N=98$$



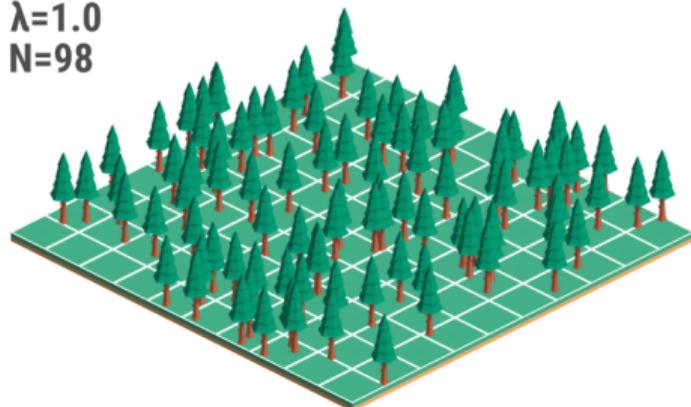
Poisson Punktprozess

- ▶ Verteilung für N Punkte in der Region $A \rightarrow N(A)$,
- ▶ mit Intensität $\lambda = \frac{N}{|A|}$.
($|A|$ ist die Fläche von A)

$$\lambda=0.5$$
$$N=51$$

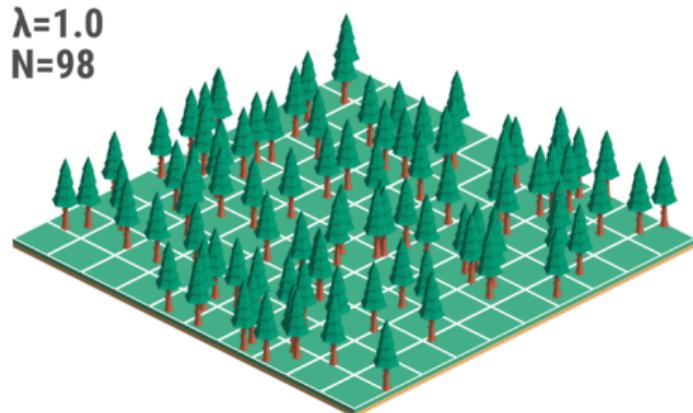
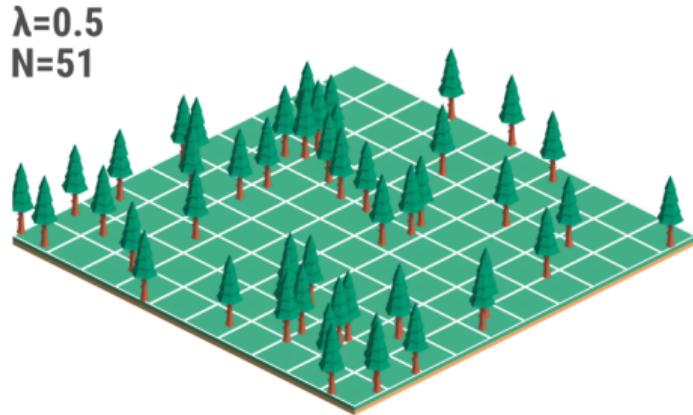


$$\lambda=1.0$$
$$N=98$$



Poisson Punktprozess

- ▶ Verteilung für N Punkte in der Region $A \rightarrow N(A)$,
- ▶ mit Intensität $\lambda = \frac{N}{|A|}$.
($|A|$ ist die Fläche von A)
- ▶ D.h. $N = \lambda|A|$ Punkte, die zufällig in einer Region mit der Fläche A verteilt sind, und
- ▶ $N(A) \sim \text{Poisson}(\lambda|A|)$

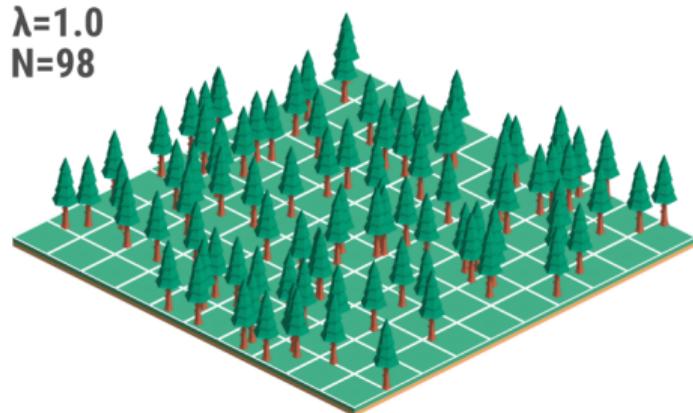
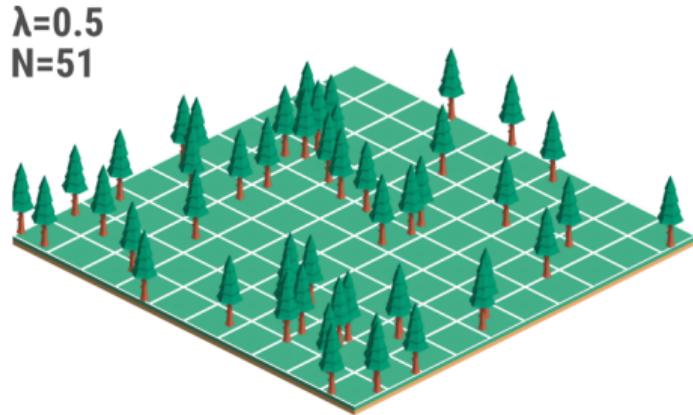


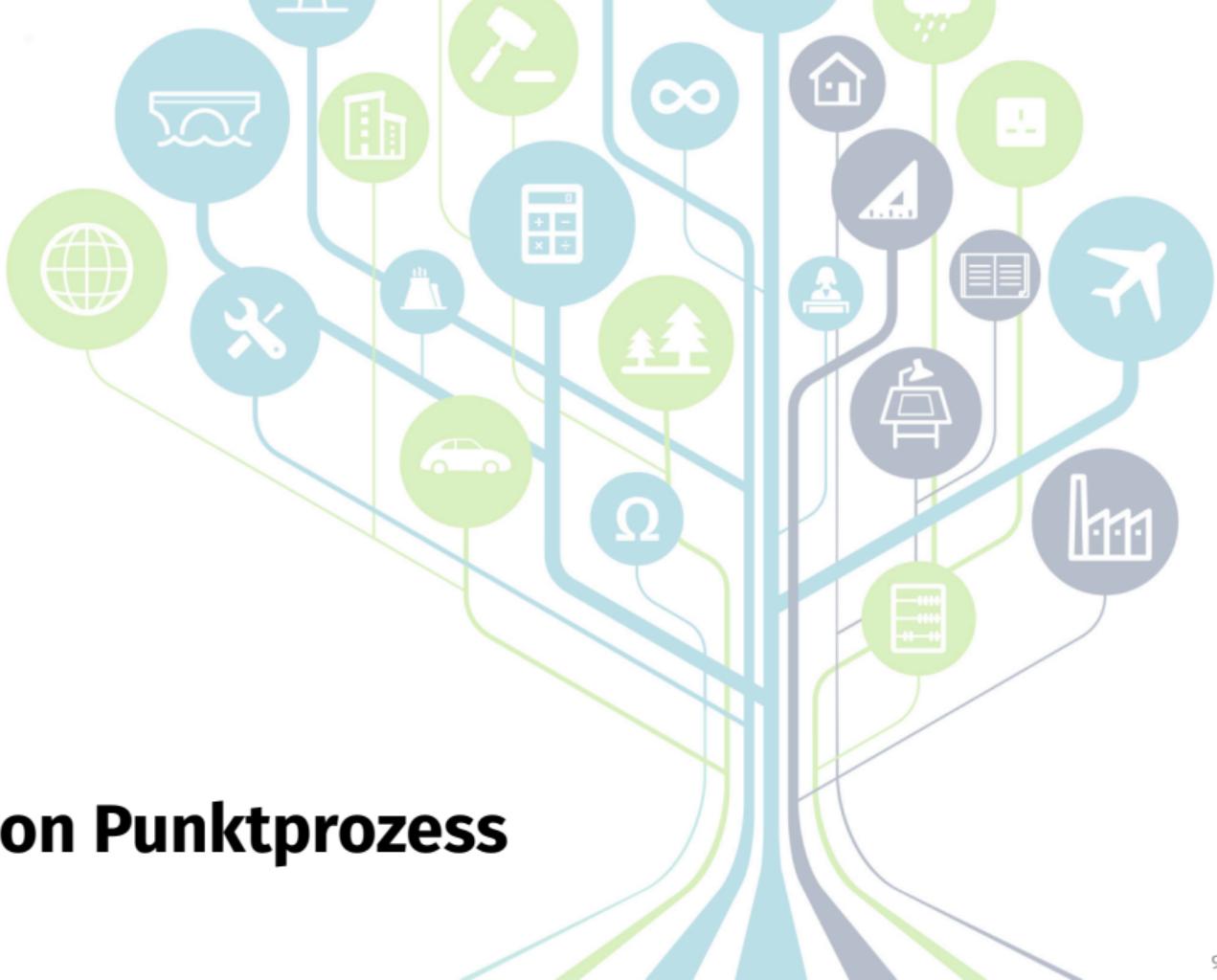
Poisson Punktprozess

- ▶ Verteilung für N Punkte in der Region $A \rightarrow N(A)$,
- ▶ mit Intensität $\lambda = \frac{N}{|A|}$.
($|A|$ ist die Fläche von A)
- ▶ D.h. $N = \lambda|A|$ Punkte, die zufällig in einer Region mit der Fläche A verteilt sind, und
- ▶ $N(A) \sim \text{Poisson}(\lambda|A|)$

Beispiel: Simulation eines Poisson Punktprozesses

```
input: λ Intensität, |A| Fläche
for i to PoissonRandom(λ|A|) do
    x ← UniformRandom(0,1);
    y ← UniformRandom(0,1);
    AddPoint(x,y)
end
```





Level 3: Poisson Punktprozess

Effekte erster und zweiter Ordnung

Limitierung der CSR

- ▶ CSR ist **kein natürlicher Prozess**
→ in der realen Welt Prozesse sind nicht CSR
- ▶ CSR wird als Referenz (**Nullhypothese**) verwendet

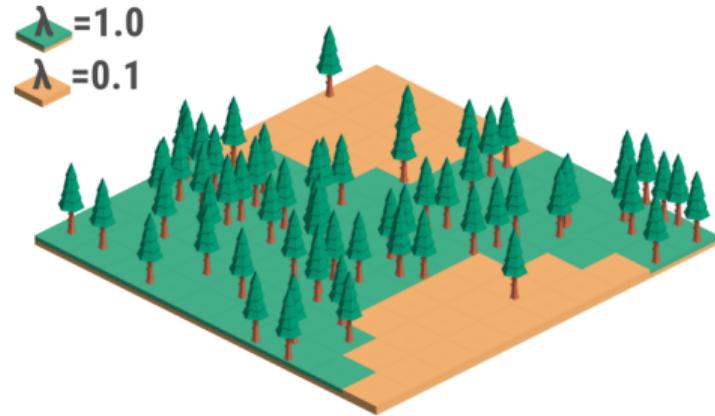
Effekte erster und zweiter Ordnung

Limitierung der CSR

- CSR ist **kein natürlicher Prozess**
→ in der realen Welt Prozesse sind nicht CSR
- CSR wird als Referenz (**Nullhypothese**) verwendet

Einflüsse von:

- **Effekte erster Ordnung:** erzeugen eine Variation der Punktdichte abhängig von der Lage.
 - Einfluss der Bodenart



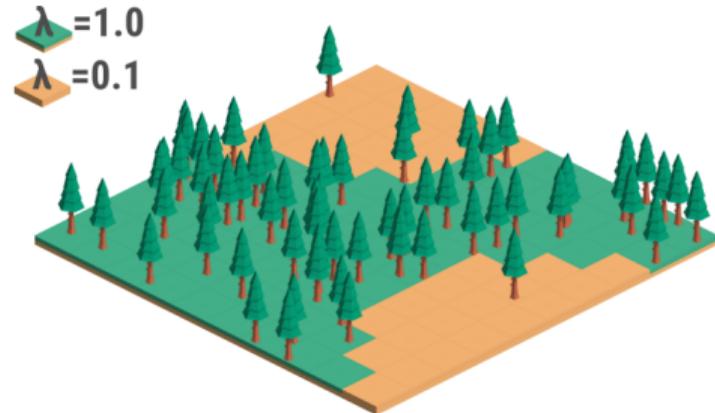
Effekte erster und zweiter Ordnung

Limitierung der CSR

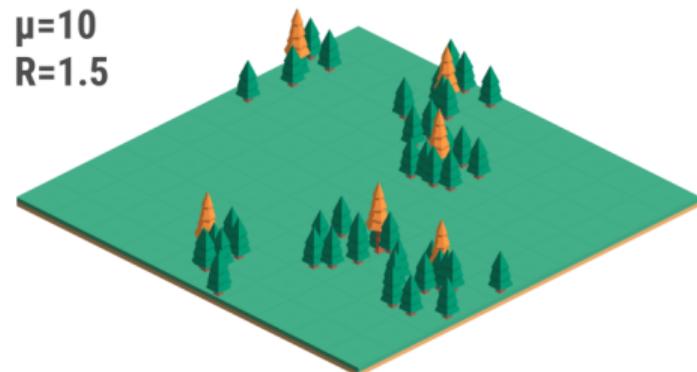
- CSR ist **kein natürlicher Prozess**
→ in der realen Welt Prozesse sind nicht CSR
- CSR wird als Referenz (**Nullhypothese**) verwendet

Einflüsse von:

- **Effekte erster Ordnung:** erzeugen eine Variation der Punktdichte abhängig von der Lage.
 - Einfluss der Bodenart
- **Effekte zweiter Ordnung:** ergeben sich aus Wechselwirkungen zwischen Ereignissen.
 - Pollen und Samenflug

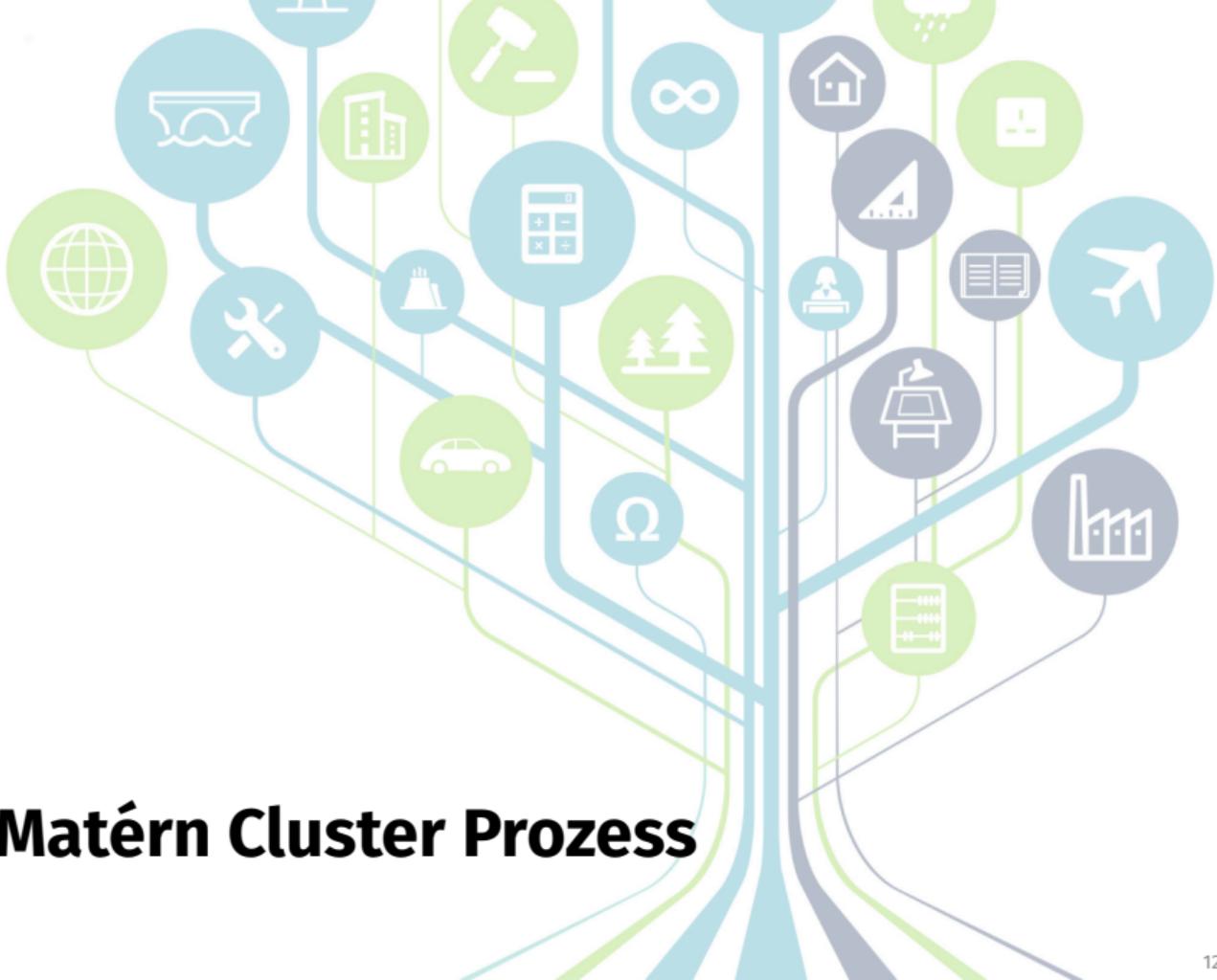


$$\begin{aligned}\lambda &= 0.1 \\ \mu &= 10 \\ R &= 1.5\end{aligned}$$



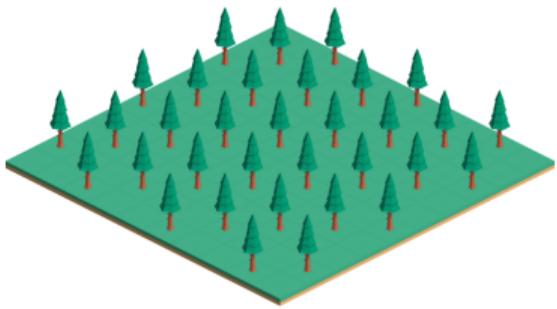


Level 4: Inhomogener Poisson Punktprozess

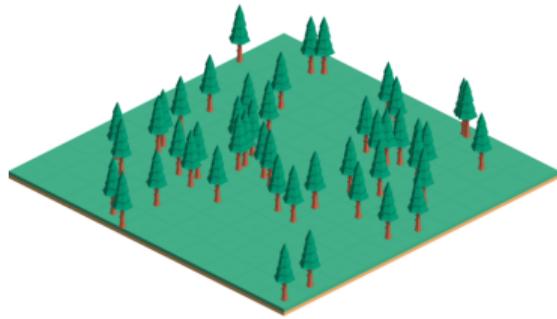


Bonus Level: Matérn Cluster Prozess

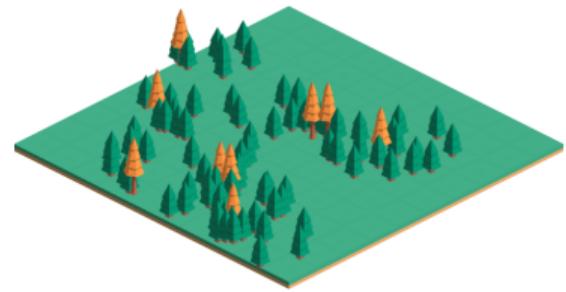
Räumliche Muster



Regulär



Zufällig



Cluster

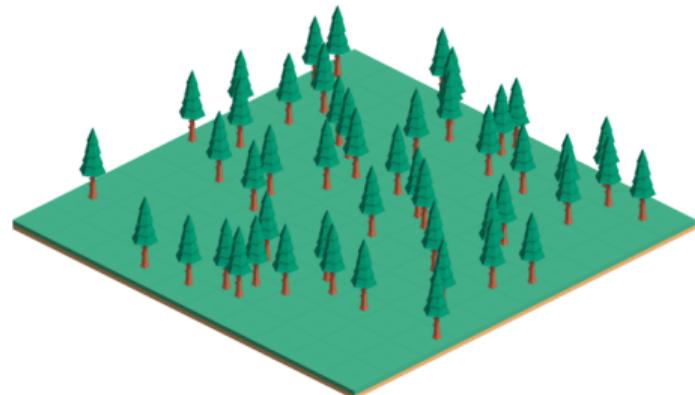
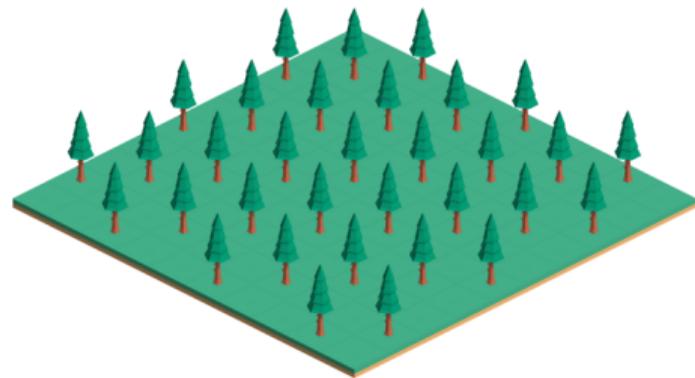
Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ Deterministische und stochastische Prozess
- ▶ Unabhängige Zufallsprozess
- ▶ Vollständige räumliche Zufälligkeit (CSR)
- ▶ Poisson Punktprozess
- ▶ Effekte erster und zweiter Ordnung, z.B:
 - ▶ Inhomogener Poisson Punktprozess
 - ▶ Matérn Cluster Prozess
- ▶ Räumliche Muster

Code verfügbar unter

<https://github.com/cisgroup/point-processes>



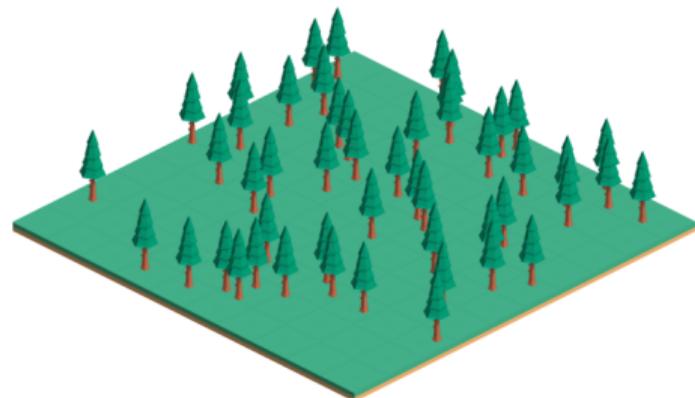
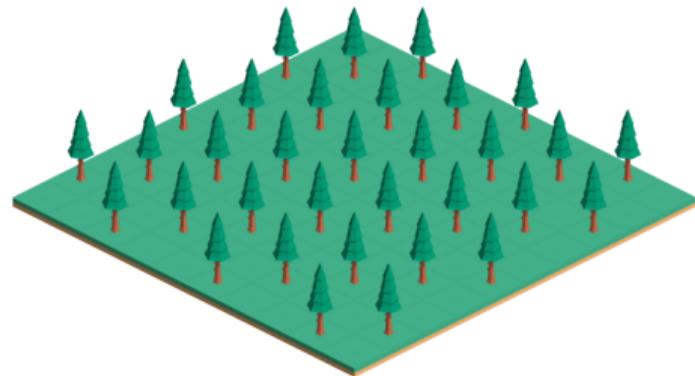
Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ Deterministische und stochastische Prozess
- ▶ Unabhängige Zufallsprozess
- ▶ Vollständige räumliche Zufälligkeit (CSR)
- ▶ Poisson Punktprozess
- ▶ Effekte erster und zweiter Ordnung, z.B:
 - ▶ Inhomogener Poisson Punktprozess
 - ▶ Matérn Cluster Prozess
- ▶ Räumliche Muster

Code verfügbar unter

<https://github.com/cisgroup/point-processes>



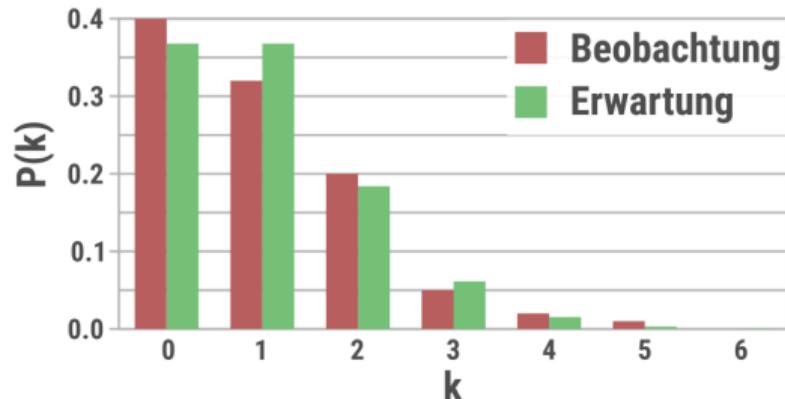
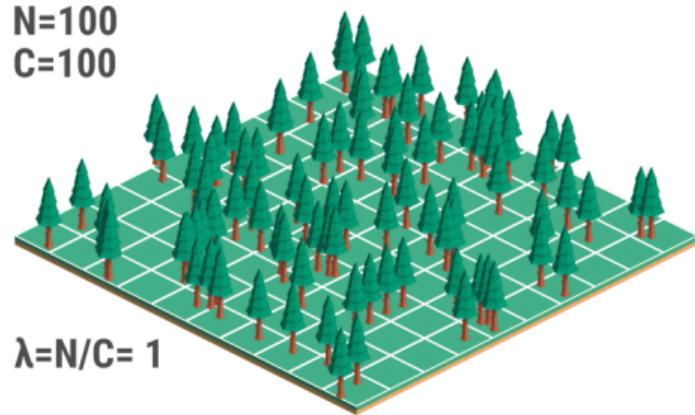
Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ Deterministische und stochastische Prozess
- ▶ Unabhängige Zufallsprozess
- ▶ Vollständige räumliche Zufälligkeit (CSR)
- ▶ Poisson Punktprozess
- ▶ Effekte erster und zweiter Ordnung, z.B:
 - ▶ Inhomogener Poisson Punktprozess
 - ▶ Matérn Cluster Prozess
- ▶ Räumliche Muster

Code verfügbar unter

<https://github.com/cisgroup/point-processes>



Zusammenfassung

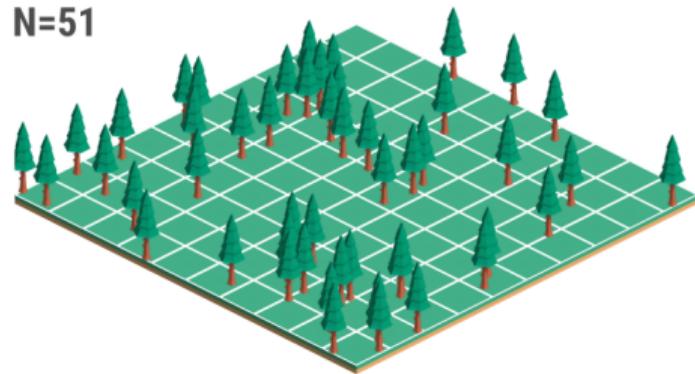
Zusammenfassung

- ▶ Deterministische und stochastische Prozess
- ▶ Unabhängige Zufallsprozess
- ▶ Vollständige räumliche Zufälligkeit (CSR)
- ▶ Poisson Punktprozess
- ▶ Effekte erster und zweiter Ordnung, z.B:
 - ▶ Inhomogener Poisson Punktprozess
 - ▶ Matérn Cluster Prozess
- ▶ Räumliche Muster

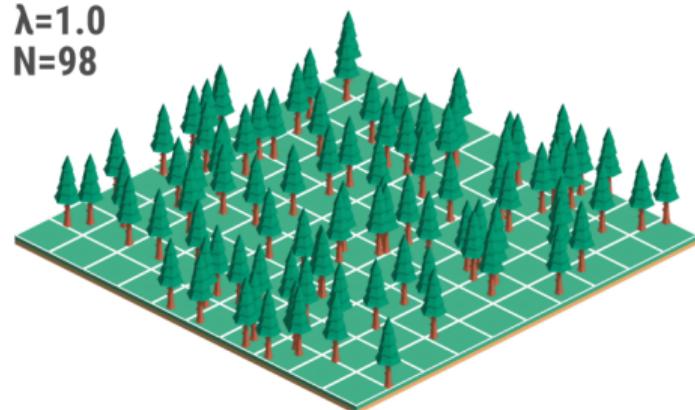
Code verfügbar unter

<https://github.com/cisgroup/point-processes>

$$\lambda=0.5$$
$$N=51$$



$$\lambda=1.0$$
$$N=98$$



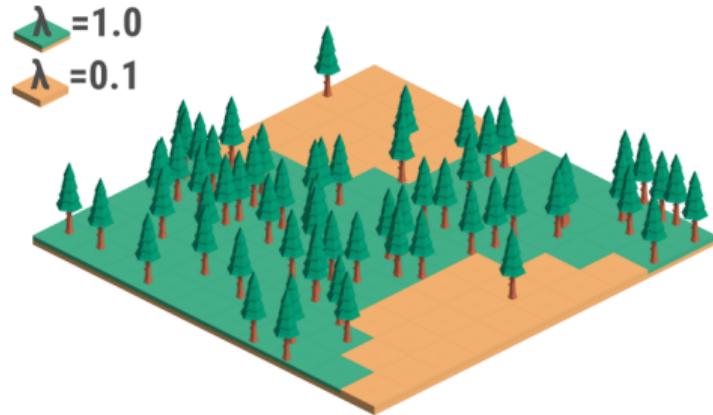
Zusammenfassung

Zusammenfassung

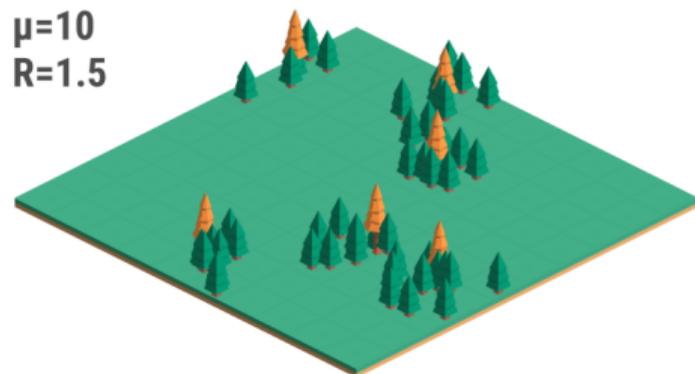
- ▶ Deterministische und stochastische Prozess
- ▶ Unabhängige Zufallsprozess
- ▶ Vollständige räumliche Zufälligkeit (CSR)
- ▶ Poisson Punktprozess
- ▶ Effekte erster und zweiter Ordnung, z.B:
 - ▶ Inhomogener Poisson Punktprozess
 - ▶ Matérn Cluster Prozess
- ▶ Räumliche Muster

Code verfügbar unter

<https://github.com/cisgroup/point-processes>



$\lambda=0.1$
 $\mu=10$
 $R=1.5$



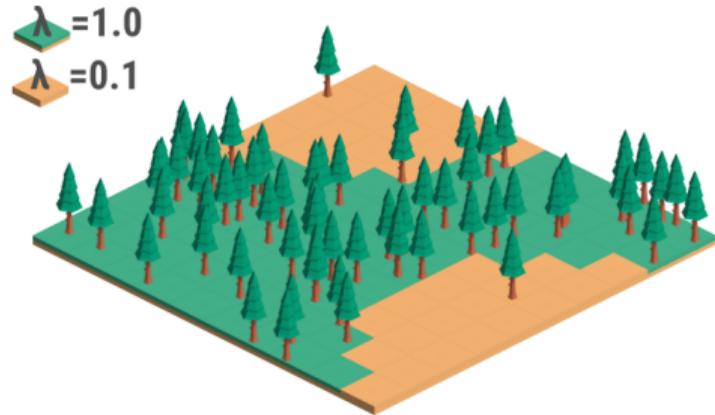
Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ Deterministische und stochastische Prozess
- ▶ Unabhängige Zufallsprozess
- ▶ Vollständige räumliche Zufälligkeit (CSR)
- ▶ Poisson Punktprozess
- ▶ Effekte erster und zweiter Ordnung, z.B:
 - ▶ Inhomogener Poisson Punktprozess
 - ▶ Matérn Cluster Prozess
- ▶ Räumliche Muster

Code verfügbar unter

<https://github.com/cisgroup/point-processes>



$$\begin{aligned}\lambda &= 0.1 \\ \mu &= 10 \\ R &= 1.5\end{aligned}$$

