

# Cosmología Estocástica con Memoria Finita: Un Modelo de Energía Oscura Log-Oscilatorio con Corte Geométrico de Ruido

Ernesto Cisneros Cino<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Miami, Florida, EE.UU.

Versión 3.2 — Noviembre 2025

## Abstract

Presentamos un marco de cosmología estocástica con memoria finita en el que la ecuación de estado de la energía oscura exhibe oscilaciones log-amortiguadas impulsadas por ruido estocástico autoconsistente. La ecuación de estado efectiva se parametriza como

$$w(z) = -1 + A e^{-z/z_\tau} \cos[\omega \ln(1+z) + \delta], \quad (1)$$

donde  $A$  es la amplitud de oscilación,  $\omega$  es una frecuencia en corrimiento al rojo logarítmico,  $\delta$  es una fase, y  $z_\tau = cH_0\tau$  codifica un tiempo de memoria finito  $\tau$ . A nivel microscópico, el modelo se deriva de dos campos escalares interactuantes sujetos a ruido de Ornstein–Uhlenbeck con intensidad proporcional a la temperatura de Gibbons–Hawking  $T_{\text{GH}} = H/2\pi$ , modulada por una función ventana geométrica que suprime el ruido a alto corrimiento al rojo.

Definimos el Modelo 2.1.1 como la implementación observationalmente viable más conservadora de este marco: la amplitud se restringe a  $A \leq 0.03$  y la intensidad de ruido se regula mediante un corte sigmoidal  $S(z)$  activado alrededor de  $z_c \sim 4$ . Esto asegura compatibilidad con restricciones actuales de supernovas tipo Ia, BAO y el CMB, mientras retiene una estructura temporal no trivial en  $w(z)$  a bajo corrimiento al rojo. El modelo es explícitamente falsable mediante comparación bayesiana con  $\Lambda$ CDM usando datos públicos (Pantheon+ y conjuntos de datos posteriores), y se acompaña de un protocolo de validación abierto.

Este artículo consolida el marco teórico, la parametrización observational y el protocolo de validación empírica en un solo preprint autocontenido destinado a escrutinio y extensión independientes.

## 1 Introducción

El descubrimiento de la aceleración cósmica [1, 2] sigue siendo uno de los enigmas centrales de la cosmología moderna. Aunque la constante cosmológica  $\Lambda$  proporciona un excelente ajuste fenomenológico a los datos actuales [3, 4], deja sin resolver preguntas fundamentales sobre el origen y la dinámica de la energía oscura. Una amplia familia de alternativas introduce grados de libertad dinámicos, gravedad modificada o parametrizaciones fenomenológicas de la ecuación de estado de la energía oscura [5–7].

En este trabajo exploramos una dirección diferente, motivada por procesos estocásticos y efectos de memoria finita. En lugar de tratar la energía oscura como un fluido estático o un campo escalar puramente determinista, consideramos un marco donde su ecuación de estado

---

<sup>\*</sup>Investigador independiente. Web: <https://ernestocisneros.art/cosmology-physics> | Código: <https://github.com/cisnerosmusic> | E-mail: [info@impulses.online](mailto:info@impulses.online)

efectiva  $w(z)$  exhibe oscilaciones amortiguadas impulsadas por ruido coloreado con tiempo de correlación finito. La idea clave es que la interacción entre memoria y fluctuación puede dejar una pequeña pero potencialmente observable estructura temporal en la historia de expansión tardía.

El presente artículo consolida y extiende notas previas sobre *cosmología estocástica con memoria finita* en un solo preprint autocontenido. (i) Formulamos el modelo estocástico subyacente en términos de campos escalares acoplados a una temperatura de Gibbons–Hawking, (ii) derivamos una parametrización log-oscilatoria efectiva para  $w(z)$ , (iii) definimos una implementación observacional conservadora (Modelo 2.1.1), y (iv) presentamos un protocolo explícito de validación empírica basado en datos públicamente disponibles.

A lo largo de este trabajo adoptamos unidades naturales  $c = \hbar = k_B = 8\pi G = 1$  salvo que se indique lo contrario.

## 2 Energía Oscura Estocástica con Memoria Finita

### 2.1 Marco microscópico

Consideramos un fondo plano de Friedmann–Robertson–Walker (FRW) con factor de escala  $a(t)$  y tasa de Hubble  $H = \dot{a}/a$ . La energía oscura se modela como un fluido efectivo emergente de dos campos escalares interactuantes  $\phi$  y  $\chi$ , sujetos a fuerzas estocásticas coloreadas. Las ecuaciones para pequeñas desviaciones de la ecuación de estado efectiva  $w$  del valor de constante cosmológica  $-1$  pueden escribirse esquemáticamente como procesos de Ornstein–Uhlenbeck [8, 9]:

$$\dot{\zeta}_\phi = -\frac{\zeta_\phi}{\tau_\phi} + \sqrt{\frac{2\Gamma_\phi T_{\text{GH}}}{\tau_\phi^2}} \xi_\phi(t), \quad \dot{\zeta}_\chi = -\frac{\zeta_\chi}{\tau_\chi} + \sqrt{\frac{2\Gamma_\chi T_{\text{GH}}}{\tau_\chi^2}} \xi_\chi(t), \quad (2)$$

donde  $\zeta_{\phi,\chi}$  codifican desviaciones en el sector efectivo de energía oscura,  $\tau_{\phi,\chi}$  son tiempos de memoria (correlación),  $\Gamma_i$  son acoplamientos adimensionales, y  $\xi_i(t)$  son términos independientes de ruido blanco gaussiano con

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (3)$$

La intensidad del ruido es proporcional a la temperatura de Gibbons–Hawking [10]

$$T_{\text{GH}} = \frac{H}{2\pi}, \quad (4)$$

reflejando el acoplamiento entre el sector de energía oscura y la termodinámica del horizonte. En la implementación más simple tomamos  $\Gamma_i = \alpha_i 3H$  con  $\alpha_i = \mathcal{O}(1)$ , de modo que la amplitud del ruido está autoconsistentemente vinculada a la tasa de expansión.

### 2.2 Corte geométrico de ruido

En la versión original del modelo, el forzamiento estocástico (2) permanece activo a corrimiento al rojo arbitrariamente alto, lo que puede conducir a fluctuaciones excesivas incompatibles con la suavidad observada del CMB [3]. Para evitar esto, introducimos un *corte geométrico* que suprime el ruido en el Universo temprano y lo activa solo cuando la energía oscura se vuelve dinámicamente relevante.

Definimos una temperatura efectiva

$$T_{\text{eff}}(z) \equiv T_{\text{GH}}(z) S(z), \quad (5)$$

donde  $S(z)$  es una función ventana adimensional. En la realización mínima (Modelo 2.1.1) adoptamos un perfil sigmoidal suave

$$S(z) = \frac{1}{1 + \exp[(z - z_c)/\Delta z]}, \quad (6)$$

con parámetros de transición  $z_c \sim 4$  y  $\Delta z \sim 0.5$ .

La Figura 1 muestra el comportamiento de  $S(z)$  para diferentes valores de  $z_c$ . Esta elección asegura que:

- A alto corrimiento al rojo ( $z \gg z_c$ ),  $S(z) \rightarrow 0$  y el ruido se apaga efectivamente.
- Alrededor de  $z \simeq z_c$ ,  $S(z) \simeq 1/2$  y el impulso estocástico se activa suavemente.
- A bajo corrimiento al rojo ( $z \ll z_c$ ),  $S(z) \rightarrow 1$  y la dinámica estocástica completa está activa.

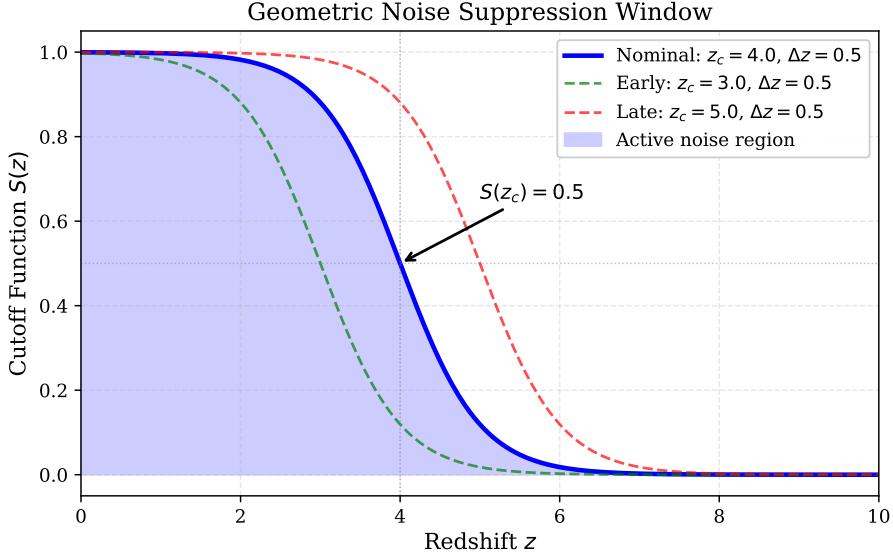


Figure 1: Ventana de supresión geométrica de ruido  $S(z)$ . La configuración nominal ( $z_c = 4.0$ ,  $\Delta z = 0.5$ , azul sólida) activa el ruido suavemente en tiempos tardíos mientras preserva la compatibilidad con el CMB. Los escenarios de activación temprana/tardía (discontinuas) ilustran la sensibilidad de parámetros.

Las ecuaciones modificadas de Ornstein–Uhlenbeck se convierten en

$$\dot{\zeta}_\phi = -\frac{\zeta_\phi}{\tau_\phi} + S(z(t)) \sqrt{\frac{2\Gamma_\phi T_{\text{GH}}(t)}{\tau_\phi^2}} \xi_\phi(t), \quad (7)$$

$$\dot{\zeta}_\chi = -\frac{\zeta_\chi}{\tau_\chi} + S(z(t)) \sqrt{\frac{2\Gamma_\chi T_{\text{GH}}(t)}{\tau_\chi^2}} \xi_\chi(t), \quad (8)$$

donde la dependencia temporal explícita  $z(t)$  está determinada por la expansión de fondo.

Para propósitos numéricos, a menudo es conveniente reescribir el sistema en términos del corrimiento al rojo  $z$  como variable de evolución, usando

$$\frac{dz}{dt} = -H(z)(1+z). \quad (9)$$

Las ecuaciones estocásticas se transforman entonces en

$$\frac{d\zeta_\phi}{dz} = \frac{1}{H(z)(1+z)} \left[ -\frac{\zeta_\phi}{\tau_\phi} + S(z) \sqrt{\frac{2\Gamma_\phi T_{\text{GH}}(z)}{\tau_\phi^2}} \xi_\phi(z) \right], \quad (10)$$

$$\frac{d\zeta_\chi}{dz} = \frac{1}{H(z)(1+z)} \left[ -\frac{\zeta_\chi}{\tau_\chi} + S(z) \sqrt{\frac{2\Gamma_\chi T_{\text{GH}}(z)}{\tau_\chi^2}} \xi_\chi(z) \right], \quad (11)$$

con ruido normalizado en corrimiento al rojo  $\xi_i(z)$  satisfaciendo

$$\xi_i(z) = \sqrt{H(z)(1+z)} \tilde{\xi}_i(z), \quad \langle \tilde{\xi}_i(z) \tilde{\xi}_j(z') \rangle = \delta_{ij} \delta(z - z'). \quad (12)$$

### 3 Ecuación de Estado Log-Oscilatoria Efectiva

#### 3.1 Parametrización

El efecto de grano grueso de la dinámica estocástica descrita arriba puede capturarse mediante una ecuación de estado efectiva para la energía oscura de la forma

$$w(z) = -1 + A e^{-z/z_\tau} \cos[\omega \ln(1+z) + \delta], \quad (13)$$

donde:

- $A$  es la amplitud de las oscilaciones,
- $\omega$  es la frecuencia de oscilación en corrimiento al rojo logarítmico,
- $\delta$  es una fase inicial,
- $z_\tau$  codifica la profundidad de memoria finita vía  $z_\tau = c H_0 \tau$ .

El factor exponencial  $e^{-z/z_\tau}$  asegura que las oscilaciones estén amortiguadas hacia alto corrimiento al rojo, consistente con la supresión de efectos estocásticos en el Universo temprano.

La Figura 2 ilustra el comportamiento de  $w(z)$  para diferentes valores de la amplitud  $A$ , mostrando oscilaciones log-suaves alrededor del valor  $\Lambda\text{CDM } w = -1$ .

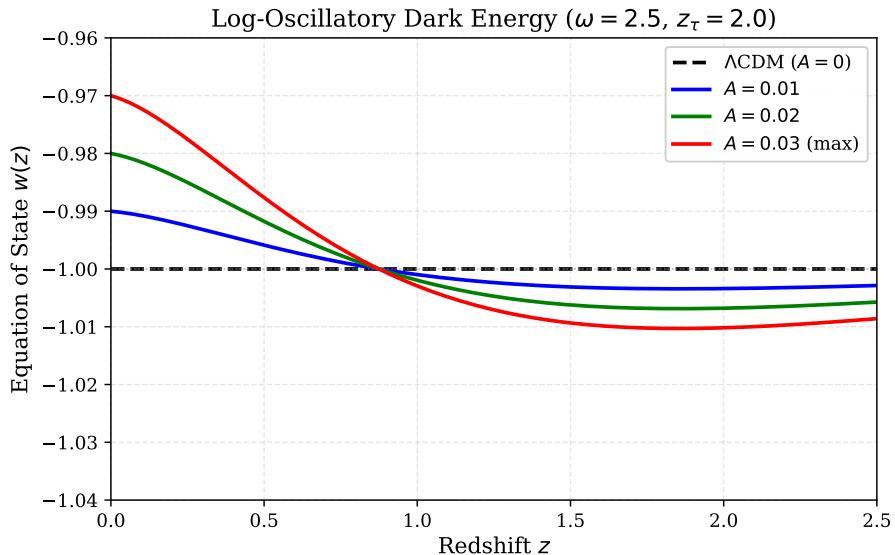


Figure 2: Ecuación de estado  $w(z)$  para diferentes amplitudes de oscilación. El modelo exhibe desviaciones log-periódicas amortiguadas de  $\Lambda\text{CDM}$  ( $A = 0$ , negra discontinua). La cota conservadora  $A \leq 0.03$  (roja) asegura viabilidad observacional mientras preserva la estructura de memoria finita.

En análisis bayesianos recomendamos una prior gaussiana truncada para  $A$ ,

$$A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2) \text{ truncada a } [0, A_{\max}], \quad (14)$$

con  $A_{\max} \equiv 0.03$  (ver Sección 4). Esto favorece desviaciones suaves de  $w = -1$  al nivel de pocos por ciento, en acuerdo con cotas observacionales actuales, mientras preserva la estructura implicada por el modelo microscópico.

### 3.2 Evolución de fondo

El fluido de energía oscura efectivo entra en la ecuación de Friedmann mediante

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \exp \left( 3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz' \right) \right], \quad (15)$$

donde la planitud implica  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ . Para parámetros dados  $(A, \omega, \delta, \tau H_0)$ , la integral en Ec. (15) puede evaluarse numéricamente interpolando  $w(z)$  en una grilla de corrimiento al rojo apropiada.

La distancia de luminosidad sigue como

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (16)$$

conduciendo al módulo de distancia observable

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L(z)}{\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (17)$$

## 4 Modelo 2.1.1: Amplitud Reducida y Corte Geométrico

El Modelo 2.1.1 se define como una realización observacionalmente conservadora del marco de cosmología estocástica con memoria finita, incorporando:

1. Un rango de amplitud restringido

$$0 \leq A \leq A_{\max}, \quad A_{\max} = 0.03, \quad (18)$$

con una prior gaussiana truncada  $\sigma_A \simeq 0.02$ .

2. Un corte geométrico  $S(z)$  en la intensidad de ruido, como en Ec. (6), con valores fiduciales

$$z_c \sim 4, \quad \Delta z \sim 0.5. \quad (19)$$

Estas elecciones están motivadas por las siguientes consideraciones:

- Oscilaciones de gran amplitud ( $A \gtrsim 0.1$ ) están fuertemente desfavorecidas por restricciones existentes de supernovas tipo Ia [4] y BAO [11].
- Se requiere un corte a alto corrimiento al rojo en el forzamiento estocástico para evitar estructura excesiva en el espectro de potencia del CMB.
- Una transición suave en  $S(z)$  reduce artefactos numéricos y corresponde a una activación físicamente gradual del ruido a medida que la energía oscura se vuelve dinámicamente relevante.

En la práctica, el Modelo 2.1.1 puede especificarse completamente mediante el vector de parámetros

$$\boldsymbol{\theta} = \{A, \omega, \delta, \tau H_0, \Omega_m, H_0\}, \quad (20)$$

con priors tales como

$$0 \leq A \leq 0.03, \quad (21)$$

$$1 \lesssim \omega \lesssim 5, \quad (22)$$

$$0 \leq \delta < 2\pi, \quad (23)$$

$$0.5 \lesssim \tau H_0 \lesssim 5, \quad (24)$$

$$\Omega_m \sim \mathcal{N}(0.315, 0.02^2), \quad (25)$$

$$H_0 \sim \mathcal{N}(70 \text{ km/s/Mpc}, 3^2). \quad (26)$$

Estos rangos pueden refinarse en análisis futuros.

## 5 Ventanas de Resiliencia y la Conjetura de Memoria Finita

### 5.1 Parámetro de estabilidad emergente

El análisis numérico del sistema estocástico revela un parámetro adimensional emergente que controla la estabilidad dinámica:

$$R = \tau\Omega, \quad (27)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de correlación del ruido de Ornstein–Uhlenbeck y  $\Omega$  es la frecuencia de oscilación característica. Este producto codifica el número de períodos de oscilación sobre los cuales el sistema retiene memoria.

Simulaciones Monte Carlo de las ecuaciones estocásticas completas sugieren que el sistema exhibe varianza mínima y estabilidad máxima cuando

$$0.5 \lesssim R \lesssim 3.5 \quad (28)$$

como se ilustra en la Figura 3.

Resilience Valley: Stability in  $(\tau H_0, \omega)$  Space

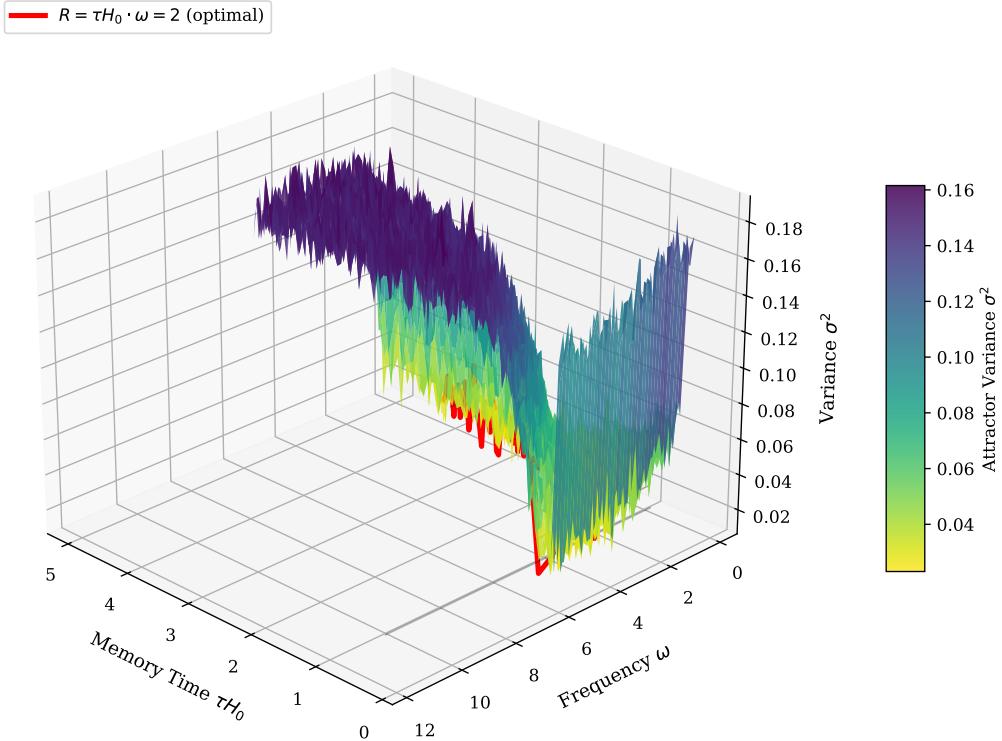


Figure 3: Valle de resiliencia en el espacio de parámetros  $(\tau H_0, \omega)$ . La superficie muestra la varianza del atractor calculada a partir de realizaciones Monte Carlo. La línea roja marca la trayectoria óptima  $R = \tau H_0 \cdot \omega = 2$ . Las barras negras indican la banda de resiliencia  $R \in [0.5, 3.5]$  donde la varianza se minimiza.

### 5.2 Generalización tentativa

La existencia de una banda preferida en  $R$  sugiere un posible principio general para sistemas disipativos con memoria y oscilación. Conjeturamos — tentativamente y sujeto a pruebas empíricas en múltiples dominios — que sistemas caracterizados por un tiempo de correlación finito

$\tau$  y una frecuencia dominante  $\Omega$  logran resiliencia máxima (definida operacionalmente como varianza mínima, coherencia máxima, o exponente de Lyapunov negativo) cuando

$$R = \tau\Omega \in [0.5, 3.5]. \quad (29)$$

Esta *Ley de Memoria Finita* (LMF) no se presenta como un principio universal establecido sino como una observación empírica del modelo cosmológico que invita a validación trans-dominio.

Enfatizamos que:

- La validación cosmológica presentada aquí es necesaria pero no suficiente para establecer la LMF como principio general.
- La extensión a otros sistemas (oscilaciones neuronales, dinámica de aprendizaje automático, turbulencia de fluidos) requiere experimentos controlados independientes.
- La conjetura es explícitamente falsable: si múltiples dominios muestran estabilidad óptima fuera de  $[0.5, 3.5]$  con alta significancia estadística, la LMF queda refutada.

## 6 Predicciones Observacionales

El Modelo 2.1.1 produce varias predicciones cualitativas y cuantitativas:

1. **Oscilaciones suaves en  $w(z)$ .** Las desviaciones de  $w = -1$  están al nivel de pocos por ciento, con oscilaciones concentradas en  $z \lesssim 2$ .
2. **Compatibilidad con el CMB a alto corrimiento al rojo.** El corte geométrico  $S(z)$  suprime efectos estocásticos para  $z \gtrsim 4$ , evitando conflicto con la suavidad del espectro primordial [3].
3. **Señal ISW (Sachs–Wolfe Integrado) tardía.** El  $w(z)$  modulado induce pequeñas características oscilatorias en el crecimiento del potencial gravitacional a  $z \lesssim 2$ , potencialmente imprimiendo estructura en correlaciones cruzadas CMB–LSS.
4. **Banda de memoria finita.** La posterior bayesiana para  $\tau H_0$  y  $\omega$  debería concentrarse cerca de la ventana de resiliencia, con el producto  $R = \tau H_0 \cdot \omega$  alcanzando un pico en  $[0.5, 3.5]$  si el modelo es correcto.
5. **Falsabilidad vía comparación bayesiana.** Un análisis conjunto de SNe Ia Pantheon+ [4], BAO [11], y restricciones del CMB a bajo- $z$  puede falsear el modelo si el Criterio de Información Bayesiano (BIC) favorece  $\Lambda$ CDM por  $\Delta\text{BIC} > 10$  de manera robusta.

## 7 Protocolo de Validación Empírica (Resumen)

Un protocolo operacional completo para validar el modelo usando datos públicos se provee en una implementación complementaria (a ser liberada en GitHub). Aquí resumimos los pasos principales para el análisis viable mínimo con supernovas Pantheon+ [4]:

1. Descargar y limpiar el conjunto de datos Pantheon+ (1701 SNe Ia,  $0.01 < z < 2.3$ ).
2. Implementar el modelo  $w(z)$  como en Ec. (13) y calcular  $\mu(z)$  para cada conjunto de parámetros  $\boldsymbol{\theta}$ , usando integración numérica de Ec. (15).
3. Definir una verosimilitud gaussiana

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\mu_i^{\text{obs}} - \mu(z_i; \boldsymbol{\theta})}{\sigma_i} \right)^2, \quad (30)$$

con  $\sigma_i$  las incertidumbres observacionales.

4. Muestrear la posterior  $\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta} | \text{datos})$  usando un muestreador MCMC como `emcee` [12].
5. Calcular el  $\chi^2$  de mejor ajuste y el BIC tanto para Modelo 2.1.1 como para  $\Lambda\text{CDM}$ , y evaluar  $\Delta\text{BIC}$ .
6. Inspeccionar la posterior para  $A$ ,  $\tau H_0$ ,  $\omega$  para verificar si la predicción de memoria finita  $R \in [0.5, 3.5]$  es soportada.

Un resultado negativo (por ejemplo,  $A$  consistente con cero y fuerte preferencia por  $\Lambda\text{CDM}$ ) *refutaría* la formulación actual del modelo y se considera tan valiosa científicamente como una detección positiva.

## 8 Discusión

El marco de cosmología estocástica con memoria finita se sitúa en la interfaz entre cosmología, procesos estocásticos y sistemas dinámicos con retroalimentación. Al introducir un tiempo de correlación explícito  $\tau$  e intensidad de ruido autoconsistente proporcional a  $T_{\text{GH}}$ , el modelo sugiere que la aceleración cósmica tardía puede exhibir pequeñas estructuras temporales en lugar de ser exactamente constante.

Más allá de la cosmología, la misma combinación de memoria finita y dinámica oscilatoria aparece en múltiples dominios, desde osciladores amortiguados hasta oscilaciones corticales y optimización de aprendizaje automático. Esto motiva la conjectura más amplia de la Ley de Memoria Finita, en la cual el producto adimensional  $R = \tau\Omega$  yace en una banda de resiliencia  $R \in [0.5, 3.5]$  para una amplia clase de sistemas. El presente trabajo se enfoca en el sector cosmológico; la validación multi-dominio se difiere a estudios futuros.

## 9 Limitaciones y Trabajo Futuro

Este trabajo tiene varias limitaciones importantes:

- El análisis presente se enfoca en la historia de expansión de fondo. Un tratamiento completo incluyendo perturbaciones y anisotropías del CMB aún no se ha llevado a cabo.
- El potencial de los campos escalares subyacentes y sus acoplamientos se tratan efectivamente; una derivación lagrangiana microscópica completa queda abierta.
- Solo se consideran priors mínimas y un conjunto de datos restringido (SNe Ia Pantheon+) en el protocolo empírico base. Una evaluación robusta requiere combinar datos de BAO, CMB, crecimiento de estructura y lentes gravitacionales.
- La conexión con la Ley de Memoria Finita más amplia a través de dominios permanece conjetal y se basa en modelos de juguete y análisis dimensional.

El trabajo futuro abordará estas limitaciones mediante: (i) implementar el modelo en solucionadores de Boltzmann para confrontar datos del CMB y LSS, (ii) explorar formas alternativas del corte geométrico  $S(z)$ , (iii) realizar un análisis bayesiano conjunto con conjuntos de datos de DESI, Planck y lentes débiles, y (iv) extender el análisis de memoria finita a experimentos controlados en otros sistemas dinámicos.

## 10 Conclusiones

Hemos presentado un modelo autoconsistente de cosmología estocástica con memoria finita en el que la energía oscura exhibe oscilaciones log-amortiguadas en su ecuación de estado, impulsadas por ruido acoplado a Gibbons–Hawking con un corte geométrico. El Modelo 2.1.1 observationalmente conservador restringe la amplitud de oscilación y regula el ruido a alto corrimiento al rojo, produciendo un candidato viable para pruebas empíricas contra datos actuales y futuros.

El marco es explícitamente falsable y está diseñado para ser probado por investigadores independientes usando conjuntos de datos públicos y código de fuente abierta. Independientemente del resultado, el modelo proporciona un ejemplo concreto de cómo pueden integrarse efectos de memoria finita en la dinámica cosmológica, y puede inspirar enfoques similares en otras áreas de la física y sistemas complejos.

## Agradecimientos

El autor agradece a la comunidad de computación científica de código abierto por herramientas como `numpy`, `scipy`, `matplotlib`, y `emcee`, que hacen posible la investigación independiente. Este trabajo no recibió financiamiento externo y se libera con la intención explícita de ser libremente probado, criticado y extendido.

## Disponibilidad de Datos y Código

Una implementación de referencia del modelo, junto con scripts para reproducir el protocolo de validación mínima con supernovas Pantheon+, se hará públicamente disponible en <https://github.com/cisnerosmusic> y se archivará con un DOI en Zenodo. Todo el código y documentación se liberan bajo la Licencia MIT.

Documentación completa del proyecto: <https://ernestocisneros.art/cosmology-physics>

## References

- [1] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.
- [2] S. Perlmutter et al. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586, 1999.
- [3] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020.
- [4] D. Brout et al. The Pantheon+ Analysis: Cosmological Constraints. *Astrophys. J.*, 938(2):110, 2022.
- [5] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys. D*, 15:1753–1935, 2006.
- [6] Shinji Tsujikawa. Quintessence: A Review. *Class. Quant. Grav.*, 30:214003, 2013.
- [7] C. Wetterich. The Cosmon model for an asymptotically vanishing time dependent cosmological ‘constant’. *Astron. Astrophys.*, 301:321–328, 1995.
- [8] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. On the Theory of the Brownian Motion. *Phys. Rev.*, 36:823, 1930.

- [9] C. W. Gardiner. *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 4th edition, 2009.
- [10] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation. *Phys. Rev. D*, 15:2738–2751, 1977.
- [11] A. G. Adame et al. DESI 2024 VI: Cosmological Constraints from the Measurements of Baryon Acoustic Oscillations. *arXiv e-prints*, 2024.
- [12] Daniel Foreman-Mackey, David W. Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: The MCMC Hammer. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, 125:306, 2013.