**PRENOM : CISSE**

**NOM : NIANG**

**Master II Expertise Statistique pour l'Economie et la Finance.**

## PREAMBULE

L'objectif de ce projet est de choisir le modèle optimal dans le cas où il y a un effet ARCH-GARCH sur les rendements de l'actif Bouygues et de l'indice Cac40 sur la période allant de 01/03/2005 au 04/12/2014. On dispose donc 2503 comme nombre d'observations pour chaque série. Pour ce faire, nous alors d'abord faire les études statistiques des cours de l'indice et de l'actif, ensuite de tester la stationnarité des séries à l'aide du test de Dickey-Fuller avant de nous intéresser enfin à la détermination du modèle (linéaire ou non linéaire) optimal.

## I. Etude statistique des prix de l'indice et de l'action

La procédure « Means » nous permet de faire une brève étude statistique des variations des cours de l'indice et de l'actif sur la période considérée. Elle décrit le nombre d'observations, la moyenne, l'écart type, le minimum et le maximum de chaque variable choisie.

Pour ce faire, nous allons exécuter les commandes ci-dessous :

```
proc means data=Finance.cisse;
var cac40 Bouygues;
run;
```

Le Système SAS 21:38 Tuesday, Oc

The MEANS Procedure

| Variable | Libellé | Nb | Moyenne | Écart-type | Minimum | Maximum |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CAC40 | CAC40 | 2503 | 4178.41 | 805.7155688 | 2519.29 | 6168.15 |
| Bouygues | Bouygues | 2503 | 34.6122553 | 11.1706738 | 17.6000000 | 66.2600000 |

A l'issue de ce tableau, on constate que le nombre d'observations pour chaque variable (l'actif et l'indice) est de 2503 sur la période considérée. Ainsi, la moyenne des cours de l'indice et son écart-type s'élèvent respectivement à hauteur de 4178,41 et de 805,71. Concernant l'actif, la moyenne est de 34,61 et son écart-type de 11,17. Ce dernier permet de mesurer la dispersion de l'ensemble de valeurs par rapport à la moyenne. Autrement dit, il nous donne l'idée sur la volatilité d'un titre donné. L'étendue des cours de variation est de 3648,86 pour l'indice et de 48,66 pour l'actif. Elle est mesurée par la différence entre la valeur de la plus de la grande (Maximum) et de la plus petite (Minimum) valeur observée pour chaque variable sur la période choisie.

### 1. Etude Statistique des rendements de l'action et de l'indice

Charpentier (2002) définit la rentabilité $R_t$ d'un titre comme étant la différence 1ère logarithmique de son prix P à l'instant t ($P_t$). Elle est donnée par la formule suivante :

$$R_t = \log P_t - \log P_{t-1} = \log\left(\frac{Pt}{Pt-1}\right)$$

Pour générer les rentabilités de l'indice et de l'actif sous SAS, nous allons saisir et exécuter les commandes suivantes :

```
data finance.cisse;
set Finance.cisse;
rentacac=log(Cac40/lag(Cac40));
renbouygues=log(Bouygues/lag(Bouygues));
run;
```

En adoptant la procédure « Means » sur les nouvelles variables, on obtient les résultats suivants :

Le Système SAS 21:38 Tuesday, Octob

The MEANS Procedure

| Variable | Libellé | Nb | Moyenne | Écart-type | Minimum | Maximum |
|---|---|---|---|---|---|---|
| rentacac | rentacac | 2502 | 4.6504263E-6 | 0.0017743 | -0.0113922 | 0.0131389 |
| renbouygues | renbouygues | 2502 | 0.000014247 | 0.0064591 | -0.0377306 | 0.0470687 |

Les rentabilités de l'actif et de l'indice ont une très faible volatilité et procurent respectivement un gain maximum de 4,7% et de 13,14%. La perte minimum est de 3,77% pour l'actif et de 11,39% pour l'indice.

## 2. Testons la normalité des distributions

Pour tester la normalité des distributions, on utilise le test de Jarque-Bera. Les deux coefficients (Skewness et Kurtosis) permettent de comparer une distribution à une distribution normale. Pour cela on pose l'hypothèse suivante :

H0 : skewness = 0 et Kurtosis = 3. Pou tester cette hypothèse, on va utiliser la formule suivante :

$$JB = \frac{N-K}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right)$$

Ou N est le nombre d'observation, S est la valeur de skewness et K représente la valeur de kurtosis et k représente le nombre de paramètres estimés.

Sous SAS, on a les codes suivants pour les deux séries

- **Pour la rentacac**

```
proc univariate data=Finance.Cisse;
var rentacac;
run ;
```

Le Système SAS 2

La procédure UNIVARIATE
Variable : rentacac (rentacac)

Moments

| | | | |
|---|---|---|---|
| N | 2502 | Somme poids | 2502 |
| Moyenne | 4.65043E-6 | Somme obs. | 0.01163537 |
| Écart-type | 0.00177426 | Variance | 3.14798E-6 |
| Skewness | 0.09932767 | Kurtosis | 7.08689498 |
| SS non corrigée | 0.00787316 | SS corrigée | 0.00787311 |
| Coeff Variation | 38152.5407 | Moy. erreur std | 0.00003547 |

On constate que le coefficient de Kurtosis est supérieur à 3 (valeur de coefficient de Kurtosis pour la loi normale). Ceci peut être expliqué par une forte probabilité d'occurrence de points extrêmes. Autrement dit, cette distribution est plus aplatie que celle de la loi normale.

Ainsi, le coefficient de Skewness est également supérieur à 0 (valeur théorique du coefficient de Skewness pour une loi normale). Ceci illustre la présence d'asymétrie, ce qui peut être un indicateur de non linéarité. En effet, la positivité de ce coefficient indique que la distribution est étalée à droite.

En conséquence, nous pouvons prédire que la série ne suit pas une loi normale.

Pour affirmer une telle assertion, nous devons effectuer le test de Jarque-Bera pour vérifier la normalité des séries. Sous H0 (Normalité de la distribution), ce test suit un khi-deux à 2 DL (Degré de Liberté)

Pour ce faire, on doit saisir et exécuter sous SAS, les commandes ci-après :

```
proc autoreg data=Finance.Cisse;
model rentacac= /normal;
run;
```

Le Système SAS 21:38 Tuesda

The AUTOREG Procedure

Dependent Variable rentacac
rentacac

Ordinary Least Squares Estimates

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.00787311 | DFE | 2501 |
| MSE | 3.14798E-6 | Root MSE | 0.00177 |
| SBC | -24590.015 | AIC | -24595.84 |
| Regress R-Square | 0.0000 | Total R-Square | 0.000[illegible] |
| Normal Test | 5215.5411 | Pr > ChiSq | <.0001 |
| Durbin-Watson | 2.0964 | | |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| |
|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 4.6504E-6 | 0.0000355 | 0.13 | 0.8957 |

(Proba > ChiSq) < 5%, alors on rejette l'hypothèse de normalité de la distribution.

- **Pour la renbouygues**

Le Système SAS 21

La procédure UNIVARIATE
Variable : renbouygues (renbouygues)

Moments

| | | | |
|---|---|---|---|
| N | 2502 | Somme poids | 2502 |
| Moyenne | 0.00001425 | Somme obs. | 0.0356451 |
| Écart-type | 0.00645908 | Variance | 0.00004172 |
| Skewness | 0.5578481 | Kurtosis | 7.05683322 |
| SS non corrigée | 0.10434146 | SS corrigée | 0.10434095 |
| Coeff Variation | 45337.5528 | Moy. erreur std | 0.00012913 |

En faisant les mêmes analyses que précédemment, on constate que cette série distribution ne suit pas une loi normale.

```
proc autoreg data=Finance.Cisse;
model renbouygues= /normal;
run;
```

Le Système SAS 21:38 Tuesda

The AUTOREG Procedure

Dependent Variable renbouygues
renbouygues

Ordinary Least Squares Estimates

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.10434095 | DFE | 2501 |
| MSE | 0.0000417 | Root MSE | 0.00646 |
| SBC | -18124.319 | AIC | -18130.144 |
| Regress R-Square | 0.0000 | Total R-Square | 0.0000 |
| Normal Test | 5296.9108 | Pr > ChiSq | <.0001 |
| Durbin-Watson | 2.0832 | | |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| |
|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 0.0000142 | 0.000129 | 0.11 | 0.9122 |

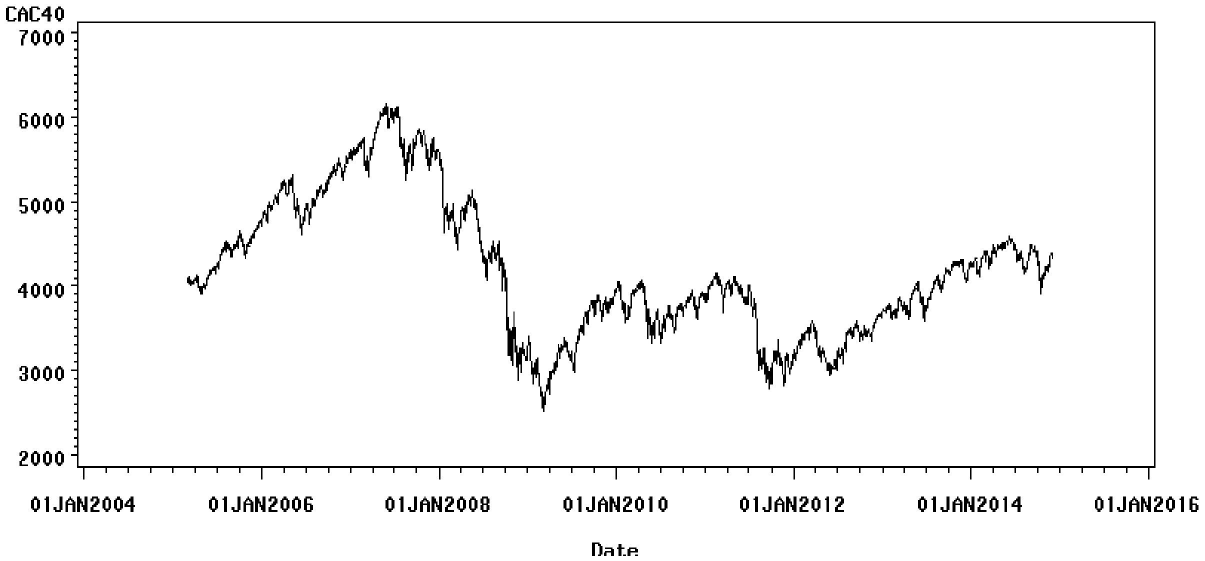
(Pr> ChiSq) <5%, alors on rejette l'hypothèse de normalité de la distribution.

## II. Etude Graphique

Les graphes ci-dessous représentent respectivement la variation des quatre séries (actif, indice, rendement actif, rendement indice) au cours de la période allant de 08/02/2007 au 04/12/2014

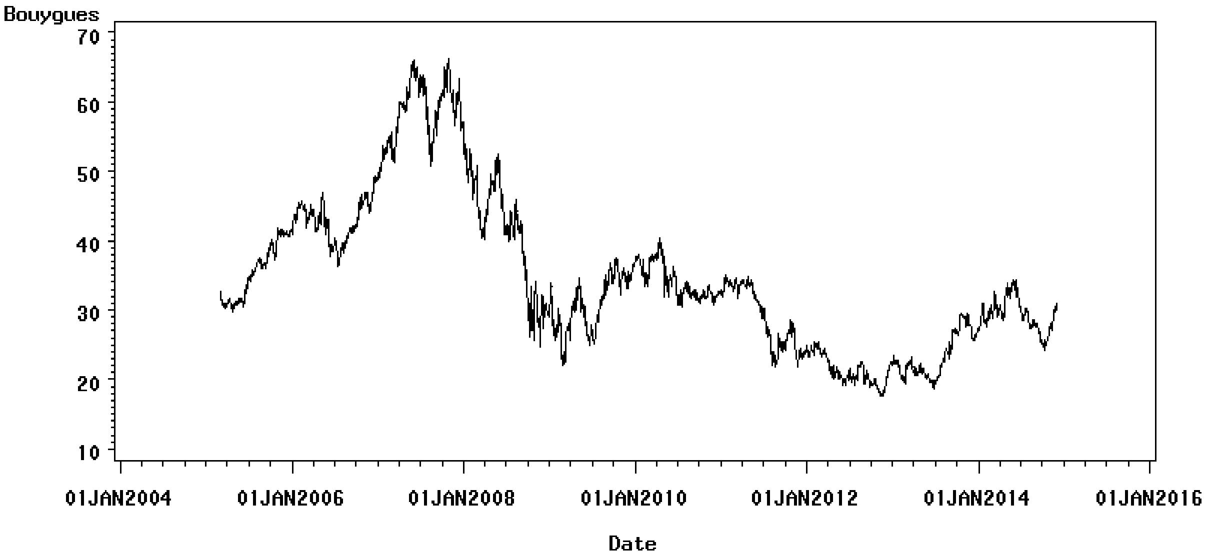
- **Représentation graphique des Prix**
  - Pour Cac40

```
proc gplot data=Finance.cisse;
symbol i=spline v=point h=2;
plot cac40*Date;
run;
```




- Pour Bouygues

```
proc gplot data=Finance.cisse;
symbol i=spline v=point h=2;
plot Bouygues*Date;
run;
```



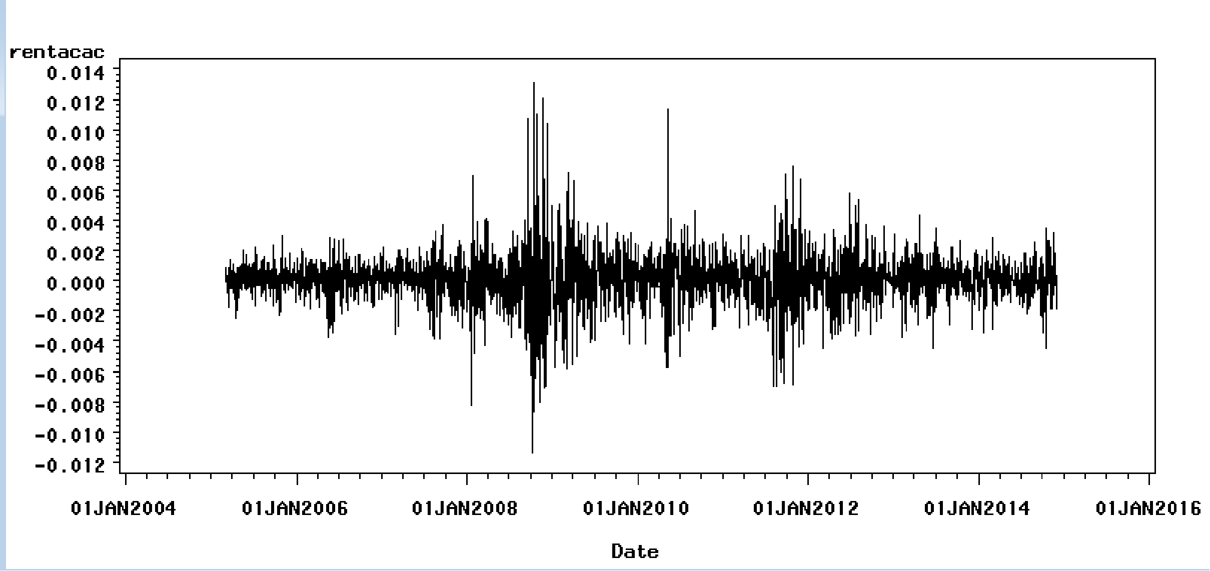

Commentaire :

Sans faire de test au préalable sur les stationnarités, on voit nettement que la dynamique des cours de l'actif et de l'indice ne semble pas satisfaire aux différents éléments de la stationnarité. En effet, au moins la première condition de la définition de la stationnarité, c'est-à-dire une moyenne constante et indépendante du temps, semble violée.

## ➢ Représentation graphique des rendements

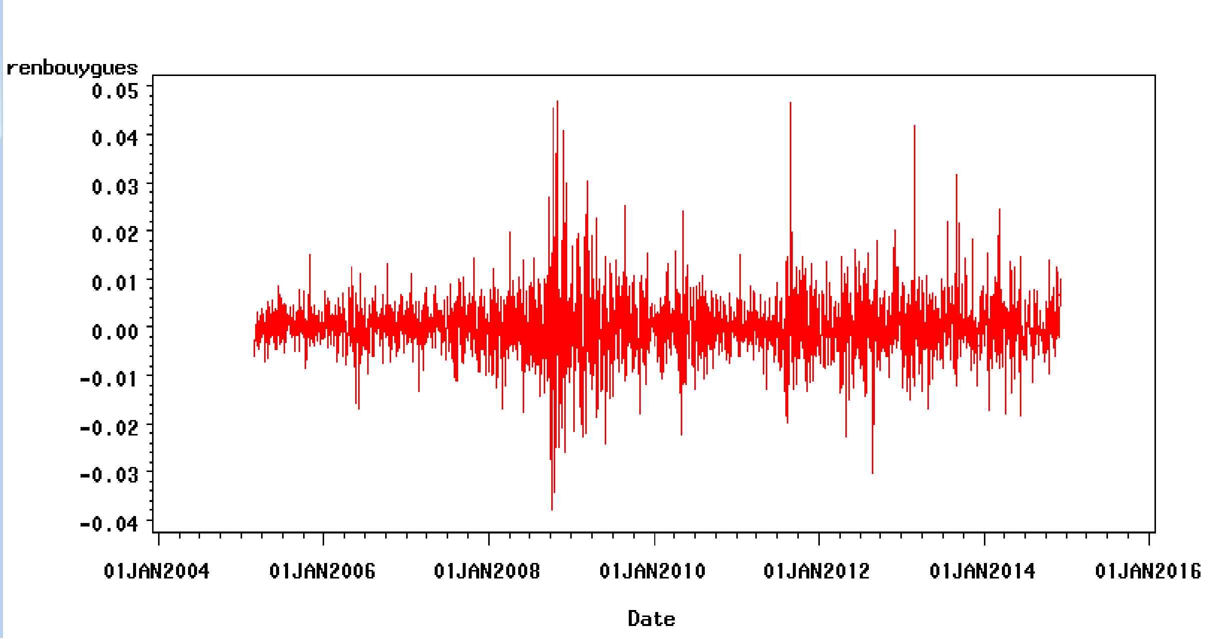
### ➢ Pour rentacac

```
proc gplot data=Finance.cisse;
symbol i=spline v=point h=2;
plot rentacac*Date;
run;
```




### ➢ Pour renbouygues

```
proc gplot data=Finance.cisse;
symbol i=spline v=point h=2 c=red;
plot renbouygues*Date;
run;
```



Commentaire :

En différenciant les deux variables, on constate que la variation des rendements de l'indice (rentacac) et celle de l'actif (renbouygues) semblent constantes au cours du temps. Alors on peut dire que les deux variables différenciées sont stationnaires au cours du temps.

## II. Vérification de la stationnarité des rentabilités des deux titres

Il existe plusieurs types de tests pour vérifier la stationnarité d'une série, parmi lesquels on peut en citer :
- Le test de Dickey-Fuller (DF)
- Le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF)
- Le test de Phillips-Perron (PP)
- Le test de KPSS ;

Dans le cadre de cette étude, nous allons utiliser le test ADF qui permet de déterminer l'ordre d'intégration d'une série c'est-à-dire le nombre de fois qu'il a fallu différencier la série pour qu'elle soit stationnaire tout en tenant compte d'une certaine autocorrélation des résidus du processus AR(1) des tests de Dickey et Fuller simple. Pour effectuer ce test, il faut au préalable choisir le nombre de retards à introduire dans le test de ADF augmente. Le corrélogramme encore appelé diagramme de fonction d'autocorrélation nous permet de choisir le nombre de retards optimal.

### 1. Corrélogramme des séries

L'étude de la fonction d'autocorrélation des séries nous permet de savoir quels sont les termes $\rho_k$ qui sont significativement différents de 0. Si aucun terme n'est significativement différent de 0, le processus étudié est sans mémoire et n'est donc affecté ni tendance ni saisonnalité. Les tests d'hypothèses sont les suivants :

$$H0 : \rho_k = 0$$
$$H1 : : \rho_k \neq 0$$

- POUR rentacac

```
proc arima data=Finance.Cisse;
identify var=rentacac;
run;
quit;
```

```
                              The ARIMA Procedure

                          Name of Variable = rentacac

                       Mean of Working Series     4.65E-6
                       Standard Deviation        0.001774
                       Number of Observations        2502

                                Autocorrelations

 Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

   0    3.14673E-6       1.00000     |                    |********************|             0
   1    -1.5243E-7       -.04844     |                   *|.                   |      0.019992
   2    -1.4895E-7       -.04733     |                   *|.                   |      0.020039
   3     -1.849E-7       -.05876     |                   *|.                   |      0.020083
   4    1.24572E-7       0.03959     |                   .|*                   |      0.020152
   5    -1.9036E-7       -.06049     |                   *|.                   |      0.020183
   6     1.2588E-8       0.00400     |                   .|.                   |      0.020255
   7     7.3165E-8       0.02325     |                   .|.                   |      0.020256
   8    5.90354E-8       0.01876     |                   .|.                   |      0.020266
   9    -1.5102E-7       -.04799     |                   *|.                   |      0.020273
  10     -2.523E-8       -.00802     |                   .|.                   |      0.020319
  11    2.85457E-8       0.00907     |                   .|.                   |      0.020320
  12    6.16145E-8       0.01958     |                   .|.                   |      0.020322
  13    -4.6417E-8       -.01475     |                   .|.                   |      0.020329
  14    -1.7416E-8       -.00553     |                   .|.                   |      0.020333
  15    -8.8986E-8       -.02828     |                   *|.                   |      0.020334
  16    1.53988E-7       0.04894     |                   .|*                   |      0.020350
  17     7.4276E-8       0.02360     |                   .|.                   |      0.020397
  18    -7.2789E-8       -.02313     |                   .|.                   |      0.020408
```

La série différenciée semble stationnaire mais sa moyenne n'est pas forcément nulle. On peut alors penser que la série de CAC40 (en log) est un processus I (1) avec dérive. Pour confirmer cette intuition, on mène les tests de Dickey et Fuller (appelé DF par la suite). Il faut pour cela choisir au préalable le nombre de retards à introduire dans la régression du test de DF pour blanchir les résidus.

Au vu de la représentation des autocorrélations partielles de la série différenciée, on peut penser à un AR (1). On peut alors mener le test de DF pour p+1=1 d'où p=0

```
                     Partial Autocorrelations

 Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   1       -0.04844     |                   *|.                   |
   2       -0.04980     |                   *|.                   |
   3       -0.06389     |                   *|.                   |
   4        0.03108     |                   .|*                   |
   5       -0.06352     |                   *|.                   |
   6       -0.00248     |                   .|.                   |
   7        0.02150     |                   .|.                   |
   8        0.01247     |                   .|.                   |
   9       -0.04033     |                   *|.                   |
  10       -0.01201     |                   .|.                   |
  11        0.00417     |                   .|.                   |
  12        0.01569     |                   .|.                   |
  13       -0.00907     |                   .|.                   |
  14       -0.00940     |                   .|.                   |
  15       -0.03073     |                   *|.                   |
  16        0.04600     |                   .|*                   |
  17        0.02946     |                   .|*                   |
  18       -0.02267     |                   .|.                   |
  19       -0.01242     |                   .|.                   |
  20       -0.01012     |                   .|.                   |
  21        0.00944     |                   .|.                   |
  22       -0.00059     |                   .|.                   |
  23       -0.01463     |                   .|.                   |
  24       -0.01034     |                   .|.                   |
```

➤ Pour renbouygues

```
proc arima data=Finance.Cisse;
identify var=renbouygues;
run;
quit;
```

```
                              The ARIMA Procedure

                         Name of Variable = renbouygues

                    Mean of Working Series     0.000014
                    Standard Deviation         0.006458
                    Number of Observations         2502

                                Autocorrelations

 Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

   0    0.00004170        1.00000    |                    |********************|             0
   1    -1.7621E-6        -.04225    |                   *|.                   |      0.019992
   2    3.34612E-7        0.00802    |                   .|.                   |      0.020028
   3    -1.7896E-6        -.04291    |                   *|.                   |      0.020029
   4     -6.308E-7        -.01513    |                   .|.                   |      0.020066
   5    -2.2223E-6        -.05329    |                   *|.                   |      0.020070
   6     6.9156E-7        0.01658    |                   .|.                   |      0.020127
   7    6.15219E-8        0.00148    |                   .|.                   |      0.020132
   8    1.09983E-6        0.02637    |                   .|*                   |      0.020132
   9    -1.8518E-6        -.04440    |                   *|.                   |      0.020146
  10    -1.0427E-6        -.02500    |                   *|.                   |      0.020185
  11    -5.2176E-7        -.01251    |                   .|.                   |      0.020197
  12    4.11541E-7        0.00987    |                   .|.                   |      0.020201
  13    1.00437E-6        0.02408    |                   .|.                   |      0.020202
  14    1.75283E-6        0.04203    |                   .|*                   |      0.020214
  15    -1.4141E-6        -.03391    |                   *|.                   |      0.020249
  16    4.27604E-7        0.01025    |                   .|.                   |      0.020272
  17    5.62969E-8        0.00135    |                   .|.                   |      0.020274
  18    -5.7104E-7        -.01369    |                   .|.                   |      0.020274
  19    1.04466E-6        0.02505    |                   .|*                   |      0.020277
```

De même que CAC40, la série différenciée semble stationnaire mais sa moyenne n'est pas forcément nulle. On peut alors penser que la série bouygues (en log) est un processus I (1) avec dérive. Pour confirmer cette intuition, on mène les tests de Dickey et Fuller. Il faut pour cela choisir au préalable le nombre de retards à introduire dans la régression du test de DF pour blanchir les résidus.

```
                        Partial Autocorrelations

 Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   1       -0.04225    |                   *|.                   |
   2        0.00625    |                   .|.                   |
   3       -0.04239    |                   *|.                   |
   4       -0.01881    |                   .|.                   |
   5       -0.05440    |                   *|.                   |
   6        0.01040    |                   .|.                   |
   7        0.00165    |                   .|.                   |
   8        0.02164    |                   .|.                   |
   9       -0.04347    |                   *|.                   |
  10       -0.03141    |                   *|.                   |
  11       -0.01122    |                   .|.                   |
  12        0.00642    |                   .|.                   |
  13        0.02357    |                   .|.                   |
  14        0.03706    |                   .|*                   |
  15       -0.03289    |                   *|.                   |
  16        0.00841    |                   .|.                   |
  17        0.00993    |                   .|.                   |
  18       -0.01270    |                   .|.                   |
  19        0.02545    |                   .|*                   |
  20       -0.03506    |                   *|.                   |
  21        0.03140    |                   .|*                   |
  22       -0.01508    |                   .|.                   |
  23       -0.03653    |                   *|.                   |
  24       -0.02010    |                   .|.                   |
```

Au vu de la représentation des autocorrélations partielles de la série différenciée, on peut penser à un AR (1). On peut alors mener le test de DF pour p+1=1

p+1=1 ce qui implique que p=0

❖ **<u>Autocorrélations des rentabilités au carré</u>**

Il nous incombe d'abord de calculer les rentabilités au carré des deux variables afin de discuter sur les autocorrélations. Rentacac2 et renbouygues2 correspondent respectivement les rentabilités au carré de l'indice et de l'actif.

```
data finance.cisse;
set finance.cisse;
rentacac2=rentacac**2;
renbouygues2=renbouygues**2;
run;
```

✓ Rentacac2

```
proc arima data=finance.cisse;
identify var=rentacac2;
run;
```

```
                                   The ARIMA Procedure

                               Name of Variable = rentacac2

                          Mean of Working Series     0.000212
                          Standard Deviation         0.000626
                          Number of Observations         2502

                                    Autocorrelations

 Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

   0    3.91441E-7        1.00000    |                    |********************|             0
   1    7.59432E-8        0.19401    |                   .|****                |      0.019992
   2    9.68524E-8        0.24742    |                   .|*****               |      0.020731
   3    9.37663E-8        0.23954    |                   .|*****               |      0.021879
   4    9.26905E-8        0.23679    |                   .|*****               |      0.022904
   5    1.23054E-7        0.31436    |                   .|******              |      0.023862
   6    6.21487E-8        0.15877    |                   .|***                 |      0.025463
   7    6.44669E-8        0.16469    |                   .|***                 |      0.025856
   8    5.91887E-8        0.15121    |                   .|***                 |      0.026272
   9    8.74136E-8        0.22331    |                   .|****                |      0.026618
  10    9.09358E-8        0.23231    |                   .|*****               |      0.027356
  11    7.01974E-8        0.17933    |                   .|****                |      0.028134
  12     8.9349E-8        0.22826    |                   .|*****               |      0.028587
  13    6.70467E-8        0.17128    |                   .|***                 |      0.029306
  14    4.66313E-8        0.11913    |                   .|**                  |      0.029704
  15    7.04852E-8        0.18007    |                   .|****                |      0.029894
  16    8.01188E-8        0.20468    |                   .|****                |      0.030324
  17     7.3276E-8        0.18720    |                   .|****                |      0.030872
  18    8.56863E-8        0.21890    |                   .|****                |      0.031322
  19      6.495E-8        0.16593    |                   .|***                 |      0.031928
  20    4.42015E-8        0.11292    |                   .|**                  |      0.032270
  21    5.69582E-8        0.14551    |                   .|***                 |      0.032428
  22    5.80337E-8        0.14826    |                   .|***                 |      0.032688
  23    6.47354E-8        0.16538    |                   .|***                 |      0.032955
  24    3.89591E-8        0.09953    |                   .|**                  |      0.033285

                              "." marks two standard errors
```

D'après la représentation de la figure ci-dessus, on constate que les coefficients d'autocorrélations de la série rentaca2 pour divers décalages part d'une valeur très élevée et diminue de manière brutale. Il semble donc que la série soit stationnaire.

- ✓ Renbouygues

```
proc arima data=finance.cisse;
identify var=renbouygues2;
run;
```

```
                              The ARIMA Procedure

                         Name of Variable = renbouygues2

                      Mean of Working Series    0.000482
                      Standard Deviation        0.001365
                      Number of Observations        2502

                               Autocorrelations

 Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

   0    1.86339E-6        1.00000    |                    |********************|             0
   1    2.05249E-7        0.11015    |                   .|**                  |      0.019992
   2    3.27889E-7        0.17596    |                   .|****                |      0.020233
   3    3.05133E-7        0.16375    |                   .|***                 |      0.020836
   4    2.29833E-7        0.12334    |                   .|**                  |      0.021344
   5     4.8751E-7        0.26163    |                   .|*****               |      0.021627
   6    1.96254E-7        0.10532    |                   .|**                  |      0.022857
   7    3.14664E-7        0.16887    |                   .|***                 |      0.023050
   8     2.1174E-7        0.11363    |                   .|**                  |      0.023539
   9    3.66257E-7        0.19655    |                   .|****                |      0.023758
  10    3.15427E-7        0.16928    |                   .|***                 |      0.024399
  11    2.09649E-7        0.11251    |                   .|**                  |      0.024864
  12    4.35855E-7        0.23390    |                   .|*****               |      0.025066
  13    1.59976E-7        0.08585    |                   .|**                  |      0.025924
  14    1.65804E-7        0.08898    |                   .|**                  |      0.026038
  15    1.55924E-7        0.08368    |                   .|**                  |      0.026159
  16     2.872E-7         0.15413    |                   .|***                 |      0.026266
  17    3.10517E-7        0.16664    |                   .|***                 |      0.026625
  18    3.40458E-7        0.18271    |                   .|****                |      0.027038
  19     2.8239E-7        0.15155    |                   .|***                 |      0.027527
  20    1.13195E-7        0.06075    |                   .|*                   |      0.027859
  21    1.92102E-7        0.10309    |                   .|**                  |      0.027912
  22    2.09771E-7        0.11258    |                   .|**                  |      0.028063
  23    2.56511E-7        0.13766    |                   .|***                 |      0.028243
  24    1.40419E-7        0.07536    |                   .|**                  |      0.028510

                          "." marks two standard errors
```

D'après la représentation de la figure ci-dessus, on constate que les coefficients d'autocorrélations de la série renbouygues2 pour divers décalages part d'une valeur très élevée et diminue de manière brutale. Il semble donc que la série soit stationnaire.

**<u>Résumé</u>** :

Ces analyses faites sur les autocorrélations des rendements aux carrés confirment la propriété des séries financières selon laquelle : la série associée aux carrés des rendements présente généralement de fortes auto-corrélations tandis que celles des rendements tout court sont souvent très faibles (hypothèse de bruit blanc)

### 2. Test ADF

Il est représenté par trois modèles :

- ✓ Le modèle 1 : sans constante ni tendance

$$\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \sum_{j}^{P} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

- ✓ Le modèle 2 : avec constante et sans tendance

$$\Delta X_t = c + \rho X_{t-1} + \sum_{j}^{P} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

- ✓ Le modèle 3 : avec constante et tendance

$$\Delta X_t = c + b_t + \rho X_{t-1} + \sum_j^P \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

Ce test considère deux hypothèses :
- H0 qui signifie que la série a une racine unitaire (c'est-à-dire non stationnaire)
- H1 qui signifie que la série n'a pas de racine unitaire

A priori, nous fixons un seuil de risque de 5%. Ce qui signifie que si la p-value est supérieure à 5%, alors H0 est rejetée avec un risque de 5%. Les résultats fournis par SAS sont les suivants :

- Pour rentacac

```
proc arima data=Finance.Cisse;
identify var=rentacac stationarity=(ADF=(0));
run;
```

Le Système SAS 16:33 Tuesday, (

The ARIMA Procedure

Dickey-Fuller Unit Root Tests

| Type | Retards | Rho | Pr < Rho | Tau | Pr < Tau | F | Pr > F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zero Mean | 0 | -2625.53 | 0.0001 | -52.54 | <.0001 | | |
| Single Mean | 0 | -2625.54 | 0.0001 | -52.53 | <.0001 | 1379.83 | 0.0010 |
| Trend | 0 | -2625.55 | 0.0001 | -52.52 | <.0001 | 1379.29 | 0.0010 |

La p-value associée au test de DF dans le modèle M3 (Trend) (Pr<Tau=0.001) conduit à rejeter l'hypothèse nulle de racine unitaire. On teste alors conjointement la racine unitaire et la nullité du coefficient de la tendance par le test F3 (Fisher du modèle 3) afin de s'assurer que le modèle M3 était pertinent pour tester la racine unitaire. La p-value de ce test (Pr>F=0.001) conduit à rejeter l'hypothèse nulle de nullité jointe. Cela nous permet de conclure que la série n'a pas de racine unitaire autrement dit, elle est stationnaire.

- Pour renbouygues

```
proc arima data=Finance.Cisse;
identify var=renbouygues stationarity=(ADF=(0));
run;
```

Le Système SAS 16:33 Tuesday, O

The ARIMA Procedure

Dickey-Fuller Unit Root Tests

| Type | Retards | Rho | Pr < Rho | Tau | Pr < Tau | F | Pr > F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zero Mean | 0 | -2608.16 | 0.0001 | -52.17 | <.0001 | | |
| Single Mean | 0 | -2608.16 | 0.0001 | -52.16 | <.0001 | 1360.52 | 0.0010 |
| Trend | 0 | -2608.19 | 0.0001 | -52.15 | <.0001 | 1360.00 | 0.0010 |

La p-value associée au test de DF dans le modèle M3 (Trend) (Pr<Tau=0.001) conduit à rejeter l'hypothèse nulle de racine unitaire. On teste alors conjointement la racine unitaire et la nullité du coefficient de la tendance par le test F3 afin de s'assurer que le modèle M3 était pertinent pour tester la racine unitaire. La p-value de ce test (Pr>F=0.001) conduit à rejeter l'hypothèse nulle de nullité jointe. Cela nous permet de conclure que la série n'a pas de racine unitaire autrement dit, elle est stationnaire.

## CONCLUSION

Les résultats trouvés sont également prouvés par la propriété 1 des séries financières stipulée comme suit : « Généralement, le processus stochastique Pt est non stationnaire au sens de la stationnarité du second ordre alors que le processus associé au rendement est stationnaire au sens du second ordre ».

## III. Estimation de l'équation de la moyenne via le modèle de marché

Le modèle de marché développé par Markowitz (1959) et Sharpe (1963) décompose la rentabilité totale d'une action en deux :

- une partie due à l'influence du marché ;
- l'autre partie aux caractéristiques spécifiques de l'action.

Ainsi, les variations des rentabilités des actifs dépendent linéairement de facteurs communs à l'ensemble du marché et de facteurs spécifiques à chaque entreprise. Les facteurs communs à l'ensemble du marché sont représentés par un indice de marché. Le modèle de marché empirique s'écrit donc :

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i RM_t + \varepsilon_{it}$$

Où :

♣ $R_{it}$ : désigne le taux de la rentabilité de l'actif i

♣ $RM_t$ : désigne la rentabilité de l'indice de marché

♣ $\varepsilon_{it}$: désigne la rentabilité spécifique de l'actif

♣ $\alpha_i$ et $\beta_i$ sont des coefficients à déterminer.

Les coefficients αi et βi de la droite s'obtiennent par régression linéaire des rendements du marché sur les rendements d'un actif pour une même période. La méthode utilisée est celle des moindres carrés ordinaires. Le coefficient Bêta est donné par :

$$\beta_i = \frac{cov(RM_t, R_{it})}{var(RM_t)}$$

Alpha constitue l'intersection de la droite de régression avec l'axe des ordonnées, il représente donc la rentabilité qui aurait pu être obtenu sur l'action si la rentabilité du marché avait été nulle.

Si β > 1, le titre amplifie les variations du marché et sera qualifié d'agressif.
Si β < 1, le titre atténue les variations du marché et sera qualifié de défensif.
Si β < 0, les fluctuations du titre sont inverses à celles du marché

Par définition du modèle, les termes résiduels $\varepsilon_i$sont non corrélés avec la rentabilité du marché. Le risque total d'un actif se décompose donc en un terme de risque systématique (ou risque de marché) et un terme de risque non systématique (ou non diversifiable).

Sous SAS, on a les résultats suivants :

```
proc autoreg data=Finance.Cisse;
model renbouygues=rentacac;
run;
```

Le Système SAS 21:38 Tuesday, Octo

The AUTOREG Procedure

Dependent Variable renbouygues
renbouygues

Ordinary Least Squares Estimates

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.04899181 | DFE | 2500 |
| MSE | 0.0000196 | Root MSE | 0.00443 |
| SBC | -20008.033 | AIC | -20019.683 |
| Regress R-Square | 0.5305 | Total R-Square | 0.5305 |
| Durbin-Watson | 2.0202 | | |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Approx. Prob. > \|t\| | Libellé de la variable |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 1.9163E-6 | 0.0000885 | 0.02 | 0.9827 | |
| rentacac | 1 | 2.6514 | 0.0499 | 53.15 | <.0001 | rentacac |

On constate que le coefficient β=2,6514>1, alors le titre de la rentabilité CAC40 est qualifié d'agressif.

1. MODELE ARCH

Avant d'utiliser les modèles ARCH, il est nécessaire de vérifier si le processus présente ou pas un effet ARCH. Pour ce faire, nous allons effectuer le test ARCH.

- ✓ Test ARCH

C'est un test lié à Engle (1982). Il est parti d'un processus Xt généré par un processus ARMA ou par un modèle linéaire le plus général.

$H_0$ **:** homoscédasticité : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0$

$H_1$ : Hétéroscédasticité : $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_q$

Si H0 est acceptée, alors on a l'homoscédasticité et l'équation de variance se ramène à une constante. Si H0 est rejetée, les résidus de l'équation de la moyenne suivent un processus ARCH(q).

La mise en place du test ARCH se fait en trois (3) étapes décrites de la façon suivante :

- ✓ On estime l'équation de la moyenne
- ✓ On récupère les résidus et on les élève au carré
- ✓ On régresse les résidus estimes au carré sur une constante et sur les q valeurs passées

Sous SAS, la récupération des résidus se fait avec les commandes suivantes :

```
proc autoreg data=Finance.Cisse;
model renbouygues=rentacac / ARCHTEST;
output out=Finance.residus r=resid;
run;
```

Calcul des résidus au carré.

Théoriquement on a :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Sous SAS on a:

```
data Finance.Rcarre;
set Finance.residus;
Residuaucarre=resid**2;
run;
```

Pour déterminer l'ordre de corrélation, on étudie les autocorrélations partielles. On calcule ensuite le Multiplicateur de Lagrange LM=T$*$ $R^2$.

Tests Q et LM pour perturbations ARCH

| Ordre | Q | Pr > Q | LM | Pr > LM |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 84.8800 | <.0001 | 85.0588 | <.0001 |
| 2 | 106.5613 | <.0001 | 94.0908 | <.0001 |
| 3 | 111.4732 | <.0001 | 94.8235 | <.0001 |
| 4 | 123.7087 | <.0001 | 102.2990 | <.0001 |
| 5 | 129.5197 | <.0001 | 103.6449 | <.0001 |
| 6 | 138.0454 | <.0001 | 107.1881 | <.0001 |
| 7 | 142.8831 | <.0001 | 108.2648 | <.0001 |
| 8 | 153.4018 | <.0001 | 113.0531 | <.0001 |
| 9 | 155.7463 | <.0001 | 113.0748 | <.0001 |
| 10 | 158.4901 | <.0001 | 113.5506 | <.0001 |
| 11 | 173.3468 | <.0001 | 122.8901 | <.0001 |
| 12 | 177.3228 | <.0001 | 122.9478 | <.0001 |

On constate que les probabilités (Pr>LM) sont toutes inférieures à 5%. Donc on rejette l'hypothèse d'homoscédasticité des paramètres alfa. Les résidus de l'équation de la moyenne suivent alors un effet arch.

## 2. Modèles ARCH linéaires

### a. Modèle ARCH(q) et estimation

L'existence d'un effet ARCH conduit à associer l'équation de la moyenne à l'équation de la variance de la variance conditionnelle qui est la suivante :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Avec : $\alpha_0 \geq 0$; $\alpha_i \geq 0$ pour tout i

```
proc arima data=Finance.Rcarre;
identify var=residuaucarre;
run;
```

```
                    Partial Autocorrelations

 Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   1        0.18408    |                    .|****               |
   2        0.06120    |                    .|*                  |
   3        0.01758    |                    .|.                  |
   4        0.05570    |                    .|*                  |
   5        0.02374    |                    .|.                  |
   6        0.03842    |                    .|*                  |
   7        0.02112    |                    .|.                  |
   8        0.04467    |                    .|*                  |
   9        0.00308    |                    .|.                  |
  10        0.01405    |                    .|.                  |
  11        0.06236    |                    .|*                  |
  12        0.00496    |                    .|.                  |
  13        0.03341    |                    .|*                  |
  14        0.02409    |                    .|.                  |
  15       -0.00552    |                    .|.                  |
  16        0.00015    |                    .|.                  |
  17        0.01139    |                    .|.                  |
  18        0.00238    |                    .|.                  |
  19       -0.00148    |                    .|.                  |
  20        0.00727    |                    .|.                  |
  21        0.00401    |                    .|.                  |
  22        0.00840    |                    .|.                  |
  23        0.01766    |                    .|.                  |
  24       -0.01682    |                    .|.                  |
```

On constate qu'à partir de l'ordre q=2, les autocorrélations partielles sont non significativement différentes de zéro.

```
proc autoreg data=Finance.Rcarre;
model renbouygues=rentacac/garch=(q=2);
run;
```

Le Système SAS — 21:38 Tuesday, Octob

**The AUTOREG Procedure**

Dependent Variable    renbouygues
                      renbouygues

**Ordinary Least Squares Estimates**

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.04899181 | DFE | 2500 |
| MSE | 0.0000196 | Root MSE | 0.00443 |
| SBC | -20008.033 | AIC | -20019.683 |
| Regress R-Square | 0.5305 | Total R-Square | 0.5305 |
| Durbin-Watson | 2.0202 | | |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| | Libellé de la variable |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 1.9163E-6 | 0.0000885 | 0.02 | 0.9827 | |
| rentacac | 1 | 2.6514 | 0.0499 | 53.15 | <.0001 | rentacac |

Algorithm converged.

GARCH Estimates

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.04906593 | Observations | 2502 |
| MSE | 0.0000196 | Uncond Var | 0.00002068 |
| Log Likelihood | 10124.7324 | Total R-Square | 0.5298 |
| SBC | -20210.341 | AIC | -20239.465 |
| Normality Test | 10305.9167 | Pr > ChiSq | <.0001 |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| | Libellé de la variable |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 0.0000150 | 0.0000700 | 0.21 | 0.8300 | |
| rentacac | 1 | 2.5547 | 0.0345 | 73.99 | <.0001 | rentacac |
| ARCH0 | 1 | 0.0000133 | 2.7894E-7 | 47.83 | <.0001 | |
| ARCH1 | 1 | 0.2561 | 0.0196 | 13.08 | <.0001 | |
| ARCH2 | 1 | 0.0987 | 0.0141 | 7.02 | <.0001 | |

On voit nettement que les contraintes de positivité de la variance conditionnelle ont été respectées et que les $\alpha_i$ sont significatifs. Donc le modèle ARCH (2) reste valide.

### b. Modèle GARCH (p, q)

L'objectif de ce modèle est de réduire le nombre de retard pris en compte afin d'avoir un modèle moins paramétré. Pour ce faire, il va falloir introduire des valeurs retardées de la variance dans l'équation du modèle.

L'équation s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha_0 > 0 \\ \alpha_i \geq 0 \ \forall i \\ \beta_j \geq 0 \ \forall j \\ \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1 \end{cases}$$

Ces contraintes permettent entre autres de garantir la positivité de la variance conditionnelle.

En se référant au diagramme de la fonction d'autocorrélations suivant des résidus, on peut retenir comme ordre p=3.

```
                                Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

  0    4.52032E-9        1.00000    |                    |********************|              0
  1    8.3209E-10        0.18408    |                   .|****                |       0.019992
  2    4.2046E-10        0.09301    |                   .|**                  |       0.020658
  3    2.0009E-10        0.04426    |                   .|*                   |       0.020825
  4    3.1573E-10        0.06985    |                   .|*                   |       0.020863
  5    2.1754E-10        0.04813    |                   .|*                   |       0.020956
  6    2.6345E-10        0.05828    |                   .|*                   |       0.021000
  7    1.9841E-10        0.04389    |                   .|*                   |       0.021065
  8    2.9251E-10        0.06471    |                   .|*                   |       0.021101
  9    1.3807E-10        0.03054    |                   .|*                   |       0.021180
 10    1.4933E-10        0.03304    |                   .|*                   |       0.021198
 11    3.4742E-10        0.07686    |                   .|**                  |       0.021218
 12    1.7969E-10        0.03975    |                   .|*                   |       0.021329
 13    2.4936E-10        0.05516    |                   .|*                   |       0.021359
 14    2.2401E-10        0.04956    |                   .|*                   |       0.021416
 15    1.0818E-10        0.02393    |                   .|.                   |       0.021462
 16    8.3844E-11        0.01855    |                   .|.                   |       0.021472
 17    1.2582E-10        0.02783    |                   .|*                   |       0.021479
 18    9.5996E-11        0.02124    |                   .|.                   |       0.021493
 19    8.0606E-11        0.01783    |                   .|.                   |       0.021501
 20    8.9458E-11        0.01979    |                   .|.                   |       0.021507
 21    8.6796E-11        0.01920    |                   .|.                   |       0.021515
 22    1.1084E-10        0.02452    |                   .|.                   |       0.021521
 23    1.3807E-10        0.03054    |                   .|*                   |       0.021533
 24    1.5165E-11        0.00335    |                   .|.                   |       0.021550
```

```
proc autoreg data=Finance.Rcarre;
model renbouygues=rentacac/garch=(p=3, q=2);
run;
```

**GARCH Estimates**

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.04914805 | Observations | 2502 |
| MSE | 0.0000196 | Uncond Var | 0.00002182 |
| Log Likelihood | 10210.8366 | Total R-Square | 0.5290 |
| SBC | -20359.074 | AIC | -20405.673 |
| Normality Test | 17607.5069 | Pr > ChiSq | <.0001 |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| | Libellé de la variable |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 0.0000308 | 0.0000750 | 0.41 | 0.6812 | |
| rentacac | 1 | 2.5115 | 0.0405 | 61.98 | <.0001 | rentacac |
| ARCH0 | 1 | 5.7706E-7 | 4.9625E-8 | 11.63 | <.0001 | |
| ARCH1 | 1 | 0.0596 | 0.005996 | 9.93 | <.0001 | |
| ARCH2 | 1 | 0.0448 | 0.005685 | 7.88 | <.0001 | |
| GARCH1 | 1 | -0.3392 | 0.0175 | -19.35 | <.0001 | |
| GARCH2 | 1 | 0.3304 | 0.0105 | 31.42 | <.0001 | |
| GARCH3 | 1 | 0.8780 | 0.0122 | 72.17 | <.0001 | |

On constate ici, que les coefficients sont tous significatifs mais l'hypothèse de la positivité des coefficients est violée. Essayons de voir à nouveau le test avec comme ordre p=2 q=1

**GARCH Estimates**

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.04913209 | Observations | 2502 |
| MSE | 0.0000196 | Uncond Var | 0.00002042 |
| Log Likelihood | 10201.6921 | Total R-Square | 0.5291 |
| SBC | -20356.435 | AIC | -20391.384 |
| Normality Test | 20085.4530 | Pr > ChiSq | <.0001 |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| | Libellé de la variable |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 0.0000419 | 0.0000780 | 0.54 | 0.5914 | |
| rentacac | 1 | 2.5198 | 0.0399 | 63.19 | <.0001 | rentacac |
| ARCH0 | 1 | 2.1776E-7 | 2.3472E-8 | 9.28 | <.0001 | |
| ARCH1 | 1 | 0.0398 | 0.005107 | 7.79 | <.0001 | |
| GARCH1 | 1 | 0.4361 | 0.1582 | 2.76 | 0.0058 | |
| GARCH2 | 1 | 0.5134 | 0.1536 | 3.34 | 0.0008 | |

Tous les coefficients sont maintenant positifs et significatifs. D'où le modèle GARCH (2,1) est validé.

### ➢ Modèle ARCH-M

Engle-Lilien-Robbins (1987) ont proposé des modèles ARCH-M où la variance conditionnelle est une variable explicative de la moyenne conditionnelle.

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t + \delta\sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

```
proc autoreg data=Finance.Rcarre;
model renbouygues=rentacac/garch=(q=2,mean=linear);
run;
```

GARCH Estimates

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.56339417 | Observations | 2502 |
| MSE | 0.0002252 | Uncond Var | . |
| Log Likelihood | 7034.85549 | Total R-Square | 0.5328 |
| SBC | -14030.587 | AIC | -14059.711 |
| Normality Test | 5864.3159 | Pr > ChiSq | <.0001 |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| | Libellé de la variable |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | -0.000046 | 0.000734 | -0.06 | 0.9505 | |
| rentacac | 1 | 1.0810 | 0.0159 | 68.20 | <.0001 | rentacac |
| ARCH0 | 1 | 0.000179 | 3.1364E-6 | 57.02 | <.0001 | |
| ARCH1 | 1 | 0.2111 | 0.0192 | 11.00 | <.0001 | |
| DELTA | 1 | -0.000654 | 3.1332 | -0.00 | 0.9998 | |

D'après ce tableau, on peut dire que le coefficient du delta n'est pas significatif du fait que la Prob>|t| associé au delta est supérieure à 5%.  Autrement dit, ce modèle n'est pas valide.

### ➢ Modèle GARCH-M

Engle-Lilien-Robbins (1987) ont proposé des modèles GARCH-M où la variance conditionnelle est une variable explicative de la moyenne conditionnelle. Ces processus semblent ainsi plus adaptés à une description de l'influence de la volatilité sur le rendement des titres.

Un processus yt satisfait une représentation GARCH-M linéaire si et seulement si :

$$\begin{cases} \Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t + \delta\sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_{t-j}^2 \end{cases}$$

```
proc autoreg data=Finance.Rcarre;
model renbouygues=rentacac/garch=(p=3,q=2, mean=linear);
run;
```

GARCH Estimates

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.56366321 | Observations | 2502 |
| MSE | 0.0002253 | Uncond Var | . |
| Log Likelihood | 7106.29797 | Total R-Square | 0.5326 |
| SBC | -14142.172 | AIC | -14194.596 |
| Normality Test | 10031.4844 | Pr > ChiSq | <.0001 |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| | Libellé de la variable |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 0.000348 | 0.000643 | 0.54 | 0.5886 | |
| rentacac | 1 | 1.0720 | 0.0170 | 63.24 | <.0001 | rentacac |
| ARCH0 | 1 | 9.1747E-6 | 9.9045E-7 | 9.26 | <.0001 | |
| ARCH1 | 1 | 0.0508 | 0.005927 | 8.58 | <.0001 | |
| ARCH2 | 1 | 0.0361 | 0.005658 | 6.38 | <.0001 | |
| GARCH1 | 1 | -0.3320 | 0.0235 | -14.14 | <.0001 | |
| GARCH2 | 1 | 0.3293 | 0.0128 | 25.64 | <.0001 | |
| GARCH3 | 1 | 0.8748 | 0.0161 | 54.48 | <.0001 | |
| DELTA | 1 | -1.8755 | 3.0202 | -0.62 | 0.5346 | |

Contraintes de positivités des coefficients non respectées

Prob(delta) = 0,5346> 5% donc le modèle n'est pas valide.

## ➢ Modèle IGARCH

Les processus IGARCH (p, q) proposés par Engle et Bollerslev (1986), correspondent au cas d'une racine unitaire dans le processus de variance conditionnelle. Ces modèles sont alors caractérisés par un effet de persistance dans la variance. C'est à dire qu'un choc sur la variance conditionnelle actuelle se répercute sur toutes les valeurs futures prévues.

Un processus $\varepsilon_t$ satisfait une représentation IGARCH (p, q) si et seulement si dans un modèle GARCH (p, q) la somme des coefficients donne 1. Ou encore un modèle GARCH (p, q) avec une racine unitaire entraine un modèle IGARCH (p, q).

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 1$$

```
proc autoreg data=Finance.Rcarre;
model renbouygues=rentacac/garch=(p=1,q=1,type=integrated);
run;
```

Integrated GARCH Estimates

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.56355692 | Observations | 2502 |
| MSE | 0.0002252 | Uncond Var | . |
| Log Likelihood | 7084.15361 | Total R-Square | 0.5327 |
| SBC | -14137.008 | AIC | -14160.307 |
| Normality Test | 17484.1411 | Pr > ChiSq | <.0001 |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| | Libellé de la variable |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 0.000114 | 0.000284 | 0.40 | 0.6888 | |
| rentacac | 1 | 1.0770 | 0.0167 | 64.63 | <.0001 | rentacac |
| ARCH0 | 1 | 6.9076E-7 | 8.9176E-8 | 7.75 | <.0001 | |
| ARCH1 | 1 | 0.0238 | 0.001851 | 12.86 | <.0001 | |
| GARCH1 | 1 | 0.9762 | 0.001851 | 527.45 | <.0001 | |

La somme des paramètres estimés donne 1. $\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 1$, donc il y a la présence de la racine unitaire (c'est-à-dire non stationnaire) dans l'équation de la variance. Ce modèle est candidat.

## 3. Modèles ARCH/GARCH non linéaires

La seconde grande approche couvre les modèles ARCH non linéaires et plus particulièrement la prise en compte des phénomènes asymétries. L'idée est toute simple : l'effet hétéroscédastique n'est sans doute pas le même suivant que l'erreur précédente est positive ou négative. Deux grandes classes de modèles ont été proposés :

### a. Modele EGARCH

Nelson (1990) s'est intéressé aux évolutions asymétriques de la variance à l'aide des modèles EGARCH (Exponential Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic).

Il s'agit d'un modèle log-linéaire présent par Nelson lors d'une étude sur les rentabilités des actifs financiers. La spécification porte sur le logarithme de la variance conditionnelle et permet ainsi d'éviter les contraintes de positivité sur les coefficients. $\alpha_i$ et $\beta_i$

Il s'écrit de la manière suivante :

$$ln\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(\emptyset z_{t-i} + \gamma[|z_{t-i}|]) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j ln\sigma_{t-j}^2$$

Où :

$$z_{t-i} = \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}$$

Selon Nelson (1991) les contraintes de positivité sur les coefficients des modèles GARCH (p, q), d'une part, étaient souvent violées en pratique et, d'autre part, éliminaient toute possibilité de comportement cyclique. Cette critique n'est plus valable dans le cas des modèles GARCH exponentiels puisque les coefficients peuvent être positifs ou négatifs.

En exécutant le programme ci-dessous sous SAS, on a les résultats suivants :

```
proc autoreg data=Finance.Rcarre;
model renbouygues=rentacac/garch=(p=1, q=1, type=exp);
run;
```

-             -

Exponential GARCH Estimates

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSE | 0.56529854 | Observations | 2502 |
| MSE | 0.0002259 | Uncond Var | . |
| Log Likelihood | 7101.09098 | Total R-Square | 0.5312 |
| SBC | -14155.233 | AIC | -14190.182 |
| Normality Test | 11195.2901 | Pr > ChiSq | <.0001 |

| Variable | DDL | Estimation | Erreur type | Valeur du test t | Prob. Approx. > \|t\| |
|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 0.000110 | 0.000199 | 0.55 | 0.5794 |
| rentacac | 1 | 1.0389 | 0.0177 | 58.58 | <.0001 |
| EARCH0 | 1 | -0.1479 | 0.0454 | -3.26 | 0.0011 |
| EARCH1 | 1 | 0.0892 | 0.0146 | 6.10 | <.0001 |
| EGARCH1 | 1 | 0.9815 | 0.005453 | 180.01 | <.0001 |
| THETA | 1 | 0.0304 | 0.0978 | 0.31 | 0.7561 |

D'après ce tableau, on constate que la probabilité associée au THETA n'est pas statistiquement significative du fait qu'elle est supérieure à 5% (prob>|t|=0,7561 >5%).  On peut en déduire que le modèle EGARCH n'est pas candidat.

### b. Modèle TGARCH

Dans cette formulation GARCH à seuil, introduite par Zakoian (1990), la forme quadratique est remplacée par une fonction linéaire par morceaux. Chacun des segments étant associé à des chocs de même nature ; ce qui permet d'obtenir différentes fonctions de volatilité selon le signe et les valeurs des chocs.

Ce modèle peut être représenté comme suit :

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_{t-i}^{+}\varepsilon_{t-i}^{+} - \alpha_{t-i}^{-}\varepsilon_{t-i}^{-}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}$$

$$= \alpha_0 + \alpha^{+}(L)\varepsilon_t^{+} - \alpha^{-}(L)\varepsilon_t^{-} + \beta(L)\sigma_t$$

Où :

$$\begin{cases} \varepsilon_t^{+} = \max(\varepsilon_t, 0) \\ \varepsilon_t^{-} = \min(\varepsilon_t, 0) \end{cases}$$

Dans la mesure où la spécification ne porte pas sur un carré mais sur l'écart-type conditionnel, il est possible de supprimer les contraintes de positivité des coefficients. La suppression de ces contraintes permet de prendre en compte les phénomènes d'asymétrie concernant la volatilité.

La procédure sous SAS :

```
proc autoreg data=Finance.Rcarre;

model renbouygues=rentacac/garch=(p=1, q=1, type=threshold);
run;
```

## IV. Résumé des résultats obtenus précédemment

Nous allons donc prendre en compte tous les modèles. Nous choisirons le modèle pour lequel les critères AIC et SBC sont minimisés.

| Modélisation | AIC | SBC | Log-Likelihood |
|---|---|---|---|
| ARCH (2) | -20239,465 | -20210,341 | 10124,7324 |
| **GARCH (2, 1)** | **-20391,384** | **-20356,435** | **10201,6921** |
| IGARCH (1, 1) | -14160,307 | -14137,008 | 7084,15361 |

La modélisation GARCH (2, 1) minimise au mieux les critères AIC et SBC. Il semble que le modèle le plus approprié soit GARCH (2,1). En effet, il possède le critère d'information le plus faible mais également la log-vraisemblance la plus élevée. L'avantage du modèle GARCH est d'être un processus permettant de prendre en compte les contraintes de positivité de la variance conditionnelle ce qui est une caractéristique commune des séries financières en générale.

## ANNEXE

Les différentes étapes à suivre pour mener à bien ce travail :

**Etape 1** : Création de la bibliothèque permanente nommée **Finance** sous **SAS**

```
libname FINANCE "C:\Users\Dell inspiron 13\Desktop\TD_FINANCE";
run;
```

**Etape 2** : Création de la table nommée **Cisse** qui contient les différentes variables à étudier tout au long de ce travail et importer les données dans la bibliothèque permanente Finance à l'aide de cette table

```
proc means data=Finance.cisse;
var cac40 Bouygues;
run;
```