Introducción

Este curso estará dividido en 5 capítulos los cuales serán explayados a continuación: en el capitulo 1, se explicarán los fundamentos matemáticos del curso. En el se verán diferentes representaciones, a través de conjuntos ortogonales, de señales periódicas en el tiempo, como son las series trigonométricas y exponencial de Fourier.

Además de la explicación de diferentes otros conceptos que son necesarios para el entendimiento posterior del comportamiento de señales eléctricas no sinusoidales.

El capitulo 2 , trata del análisis de señales no sinusoidales en los sistemas eléctricos redefiniendo los conceptos de valor medio, valor eficaz, potencia media y factor de potencia para este tipo de señales.

El capitulo 3 trata de diferentes fuentes, causas y efectos armónicos en los sistemas eléctricos además se da una introducción en lo que se refiere a normalización de la distorsión armónica y factor de potencia de los sistemas eléctricos.

El capitulo 4 da inicio a las soluciones pasivas planteadas para la eliminación armónica en los sistema de baja tensión, como son los diferentes tipos de filtros, centrandose en el calculo de filtros sintonizados.

Finalmente el capitulo 5 aborda dos de las principales circuitos relacionados a la eliminación activa de la distorsión armónica de los sistemas, a través, de la comprensión conceptual y matemática del filtro activo de potencia y del emulador resistivo para fuentes de alimentación.

Capitulo 1

- Fundamento matemático

1.1 - FUNCIONES O SEÑALES PERIÓDICAS:

Se le denomina función periódica a cualquier señal en el tiempo continuo que satisface la condición:

$$f(t) = f(t+T_o) = f(t+nT_o) \quad , \quad con\ n = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3 .... \qquad \textbf{(1.1)}$$

donde T_o es el mínimo numero positivo que cumple la relación y se le denomina periodo fundamental. La suma de dos señales periódicas puede ser o no periódica. Para saber esto se analizan dos señales (*x(t)* e *y(t)*) con periodos fundamentales T_1 y T_2 respectivamente, luego sea:

$$z(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \qquad \textbf{(1.2)}$$

La señal resultante, por lo tanto si x(t) e y(t) son periódicas se cumple que:

$$x(t) = x(t + kT_1) \qquad \textbf{(1.3)}$$

y

$$y(t) = y(t + l \cdot T_2) \qquad \textbf{(1.4)}$$

donde *k* y *l* son enteros de forma que se cumpla que :

$$z(t) = ax(t + k \cdot T_1) + by(t + l \cdot T_2) \tag{1.5}$$

Luego para que *z(t)* sea periódica de periodo ***T*** es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$ax(t + T) + by(t + T) = ax(t + k \cdot T_1) + by(t + l \cdot T_2) \tag{1.6}$$

O por lo tanto se debe tener:

$$T = k \cdot T_1 = l \cdot T_2 \tag{1.7}$$

De otra forma:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{k} \tag{1.8}$$

Como conclusión se puede decir que: la suma de dos señales periódicas es periódica, si solo si, el cociente de sus respectivos periodos se puede expresar como un numero racional.

1.2 - FUNCIONES PARES:

Se dice que una señal *x(t)* es par, o que posee simetría par si es idéntica a su reflexión sobre el origen (simétrica al eje de las ordenadas), es decir si:

$$x(-t) = x(t) \tag{1.9}$$

Se dice que una señal posee simetría impar si:

$$x(-t) = -x(t) \tag{1.10}$$

Una señal arbitraria *x(t)* se puede expresar siempre como la suma de una señal par y otra impar,

$$x(t) = x_P(t) + x_i(t) \tag{1.11}$$

Siendo $x_P(t)$ la parte par de *x(t),* que se puede representar como:

$$x_P(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] \tag{1.12}$$

Y $x_i(t)$ la parte impar de *x(t)* que se puede representar como:

$$x_i(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right] \tag{1.13}$$

1.3 - FUNCIONES ORTOGONALES:

Antes de entrar directamente en el concepto de ortogonalidad y representación de señales, es recomendable hacer una analogía de estos conceptos con los vectores

Observando la Fig.1.1, se tiene que la componente del vector $\boldsymbol{V}_1$ en la dirección de $\boldsymbol{V}_2$ está dado por $C_{12} \cdot \boldsymbol{V}_2$ (también llamado de proyección), por tanto C_{12} debe escogerse de manera que el vector error ($\boldsymbol{V}_e$) sea mínimo y esto ocurre cuando $\boldsymbol{V}_e$ es perpendicular a $\boldsymbol{V}_2$.

Puede concluirse que si C_{12} es cero $\boldsymbol{V}_1$ no tiene componentes en $\boldsymbol{V}_2$, por lo tanto se dice que son vectores independiente u ortogonales.

Se tiene entonces que $\boldsymbol{V}_1$ puede representarse en función de $\boldsymbol{V}_2$ como:

$$\vec{V}_1(t) = C_{12} \cdot \vec{V}_2(t) + \vec{V}_{emin}$$

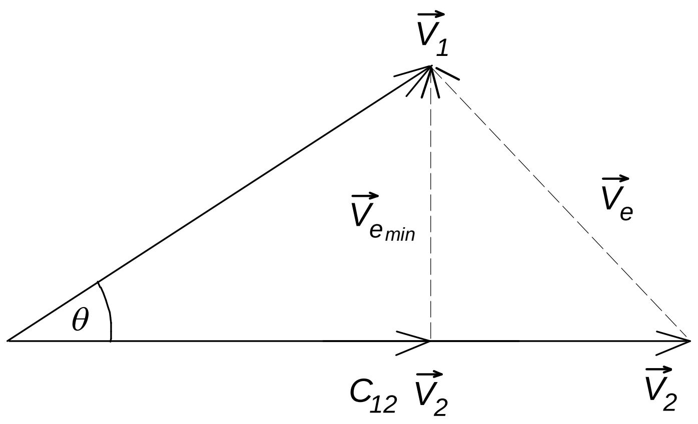

Fig. 1.1

Extendiendo este concepto a señales; considere dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y se desea aproximar $f_1(t)$ en términos de $f_2(t)$ en un cierto intervalo ($t_1<t<t_2$), de forma análoga a los vectores, entonces se tiene que:

$$f_1(t) \approx C_{12} \cdot f_2(t) \qquad \textbf{(1.14)}$$

ó

$$f_1(t) = C_{12} \cdot f_2(t) + f_e(t) \qquad \textbf{(1.15)}$$

Definiendose $f_e(t)$ como función error. Para tener una aproximación óptima se hace necesario reducir al mínimo el error $f_e(t)$ dado por:

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12} \cdot f_2(t) \qquad \textbf{(1.16)}$$

La solución a esto es minimizar el valor medio del error cuadrático, luego:

$$\overline{f_e^2}(t) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \left(f_1(t) - C_{12} \cdot f_2(t) \right)^2 dt \qquad \textbf{(1.17)}$$

minimizando en función de C_{12}, es decir:

$$\frac{d}{dC_{12}} \left\{ \overline{f_e^2} \right\} = 0 \qquad \textbf{(1.18)}$$

sustituyendo (1.17) en (1.18):

$$\frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \left(f_1(t) - C_{12} \cdot f_2(t) \right)^2 dt \right\} = 0 \qquad \textbf{(1.19)}$$

resolviendo el cuadrado del binomio y cambiando el orden de integración - diferenciación, se obtiene:

$$\frac{1}{(t_2 - t_1)} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} \left(f_1^2 \right) \cdot dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1 \cdot f_2 \cdot dt + 2C_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2 \cdot dt \right\} = 0 \qquad \textbf{(1.20)}$$

resolviendose la ecuación anterior se obtiene C_{12}

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) \cdot dt} \qquad \textbf{(1.21)}$$

$$f_1 \bullet f_2 = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot dt = 0 \qquad \textbf{(1.22)}$$

Que es análogo al producto punto igual a cero en los vectores que denota ortogonalidad entre ellos.

1.4 - REPRESENTACIÓN DE UNA SEÑAL POR UN CONJUNTO DE FUNCIONES REALES (O COMPLEJAS) ORTOGONALES:

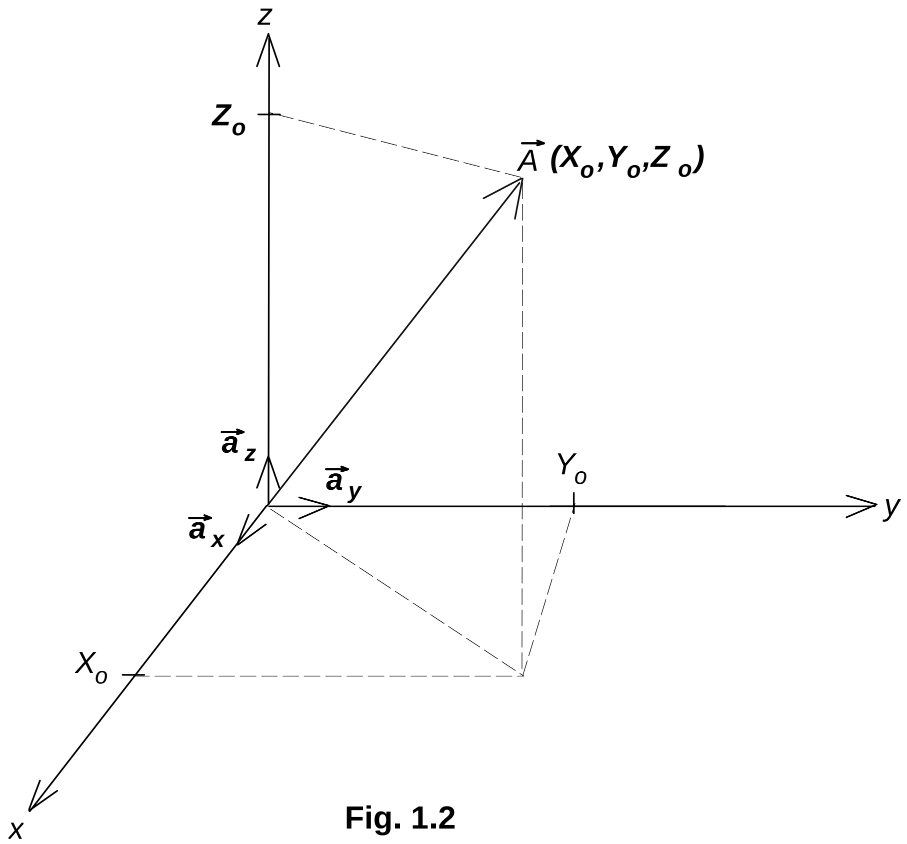

Fig. 1.2

$$\vec{A} = X_o \cdot \vec{a}_x + Y_o \cdot \vec{a}_y + Z_o \cdot \vec{a}_z \qquad \textbf{(1.23)}$$

Generalizando este concepto para un espacio de 'n' dimensiones ***A*** es expresado como:

$$\vec{A} = C_1 \cdot \vec{x}_1 + C_2 \cdot \vec{x}_2 + C_3 \cdot \vec{x}_3 + \ldots\ldots\ldots + C_n \cdot \vec{x}_n \qquad \textbf{(1.24)}$$

Análogamente una señal (o función) también puede aproximarse por funciones bases que sean ortogonales entre si (de modo de formar coordenadas). Luego, considerese un grupo o conjunto de n funciones *{$g_1(t)$, $g_2(t)$….$g_n(t)$}* ortogonales entre si en el intervalo t_1 a t_2, es decir cumple con:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_j(t)\cdot g_k(t)\cdot dt = 0 \qquad j \neq k \qquad \textbf{(1.25)}$$

y definiendo:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_j^2(t)\cdot dt \quad K_j \qquad = \; j \quad k \qquad \textbf{(1.26)}$$

considerando ahora que la función arbitraria *f(t)* se aproxima en el intervalo (t_1,t_2) mediante una combinación lineal de 'n' funciones ortogonales entre si:

$$f(t) \cong C_1 \cdot g_1(t) + C_2 \cdot g_2(t) + ... + C_k \cdot g_k(t) + ... + C_n \cdot g_n(t) \qquad \textbf{(1.27)}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot g_r(t) + f_e(t) \qquad \textbf{(1.28)}$$

Capitulo 1

- Fundamento matemático

Para obtener la mejor aproximación, se debe encontrar los valores adecuados de las constantes $C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$, tal que el valor medio de la función error cuadrática, $f_e^2(t)$, sea mínimo.
Por definición:

$$f_e(t) = f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot g_r(t) \quad \textbf{(1.29)}$$

y,

$$\overline{f_e^2}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot g_r(t) \right]^2 dt \quad \textbf{(1.30)}$$

Por lo tanto para minimizar el error cuadrático:

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \left(\overline{f_e^2}(t) \right) = \frac{\partial}{\partial C_j} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot g_r(t) \right]^2 dt \right\} = 0 \quad \textbf{(1.32)}$$

La derivada parcial para los términos diferentes (es decir $r \neq j$) son iguales a cero, dejando solamente dos términos en 1.32, luego:

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[-2 \cdot C_j \cdot f(t) \cdot g_j(t) + C_j^2 \cdot g_j^2(t) \right] \cdot dt \right\} = 0 \quad \textbf{(1.33)}$$

Resolviendo (1.33), se obtiene que:

$$C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot g_j \cdot dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_j^2 \cdot dt} \tag{1.34}$$

Sustituyendo (1.26):

$$C_j = \frac{1}{K_j} \cdot \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot g_j \cdot dt \tag{1.35}$$

Donde C_j, corresponden a los coeficientes que dan la mejor aproximación de *f(t)* por la serie dada por (1.27).

1.4.1 - La Serie trigonométrica de Fourier:

Esta representación completa es hecha por la serie trigonométrica de Fourier la cual está compuesta por los conjuntos ortogonales de funciones reales *{sen(nω_ot)}* que forma un conjunto impar y el conjunto *{cos(nω_ot)}* que es un conjunto par, por lo tanto:

$$f(t) = \{a_0 + a_1 \cos(\omega_o t) + a_2 \cos(2\omega_o t) + \ldots + a_n \cos(n\omega_o t) + b_1 sen(\omega_o t) + b_2 sen(2\omega_o t) + \ldots\ldots + b_n sen(n\omega_o t)\}$$

$$t_0 < t < t_0 + \frac{2\pi}{\omega_o} \qquad \textbf{(1.36)}$$

o,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot sen(n\omega_0 t)\right) \qquad \textbf{(1.37)}$$

La ec. (1.37) es la representación de *f(t)* por medio de la serie trigonométrica de Fourier en el intervalo (t_0,t_0+T) . Los coeficientes a_n y b_n están dados por:

$$a_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot cos(n\omega_0 t)\cdot dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} cos^2(n\omega_0 t)\cdot dt} \tag{1.38}$$

y

$$b_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot sen(n\omega_0 t)\cdot dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} sen^2(n\omega_0 t)\cdot dt} \tag{1.39}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \qquad (1.40)$$

Que representa el valor medio de *f(t)* (ó componente continua de la señal). También se tiene que:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(n\omega_0 t)\cdot dt = \int_{t_0}^{t_0+T} sen^2(n\omega_0 t)\cdot dt = \frac{T}{2} \qquad (1.41)$$

Por lo tanto, redefiniendo los coeficientes a_n y b_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot cos(n\omega_0 t)\cdot dt \qquad (1.42)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot sen(n\omega_0 t)\cdot dt \qquad (1.43)$$

1.4.2 - La Serie trigonométrica compacta de Fourier:

La ec.(1.37) puede ser reducida a una forma compacta a través de identidades trigonométricas, obteniendose:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cdot cos(n\omega_0 t + \phi_n) \right) \qquad \textbf{(1.44)}$$

En donde:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \textbf{(1.45)}$$

y

$$\phi_n = -tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n} \right) \qquad \textbf{(1.46)}$$

1.4.3 - La Serie exponencial de Fourier:

$$\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} e^{jn\omega_0 t}\cdot\left(e^{jm\omega_0 t}\right)^{*} dt = \begin{cases} 0 & si \;\; m\neq n \\ \dfrac{2\pi}{\omega_o} & si \;\; m=n \end{cases} \qquad \textbf{(1.47)}$$

Con:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Por lo tanto, es posible representar cualquier función *f(t)* mediante una combinación lineal de funciones exponenciales en el intervalo (t_o,t_o+T):

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + F_1\cdot e^{j\omega_o t} + F_2\cdot e^{j2\omega_o t} + ...+ F_n\cdot e^{jn\omega_o t} + ... \\ &+ F_{-1}\cdot e^{-j\omega_o t} + F_{-2}\cdot e^{-j2\omega_o t} + ...+ F_{-n}\cdot e^{-jn\omega_o t} \end{aligned} \qquad \textbf{(1.48)}$$

Para

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\cdot e^{jn\omega_o t} \qquad (t_o < t < t_o+T) \qquad \textbf{(1.49)}$$

Los coeficientes son obtenidos por:

$$F_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \left(e^{jn\omega_o t}\right)^* dt}{\int_{t_o}^{t_o+T} \left(e^{jn\omega_o t}\right) \cdot \left(e^{jn\omega_o t}\right)^* dt} \quad \textbf{(1.50)}$$

Obteniendo finalmente :

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-jn\omega_o t} dt \quad \textbf{(1.51)}$$

Debido a que las dos series son dos formas distintas de expresar la misma función existe una relación entre ellas, esta relación esta representada por la siguientes ecuaciones:

$$a_0 = F_0 \quad \textbf{(1.52)}$$

$$a_n = F_{-n} + F_n \quad \textbf{(1.53)}$$

$$b_n = \frac{\left(F_{-n} - F_n\right)}{j} \quad \textbf{(1.54)}$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right) \quad \textbf{(1.55)}$$

Capitulo 1

- Fundamento matemático

1.5 - Representación Gráfica de Señales Periódicas

A) Espectro discreto monolateral

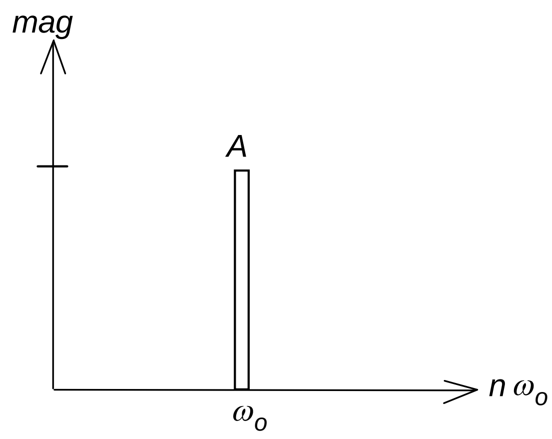

Fig. 1.3

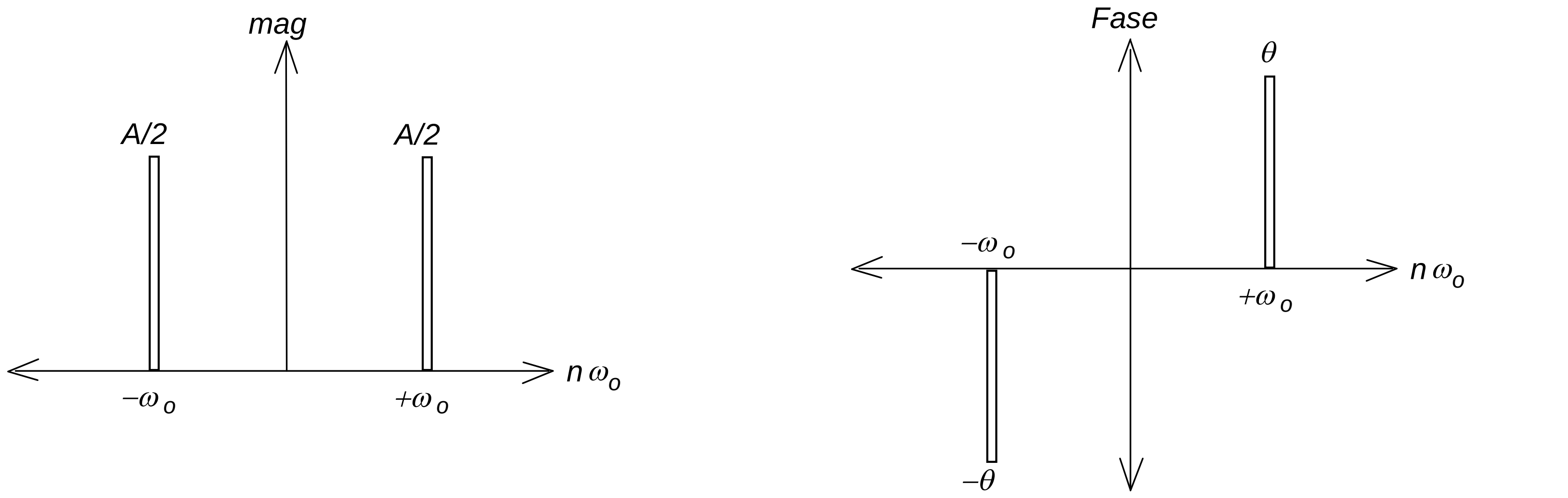

Fig. 1.4

B) Espectro discreto bilateral

1.6 - La Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \Im\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \qquad \textbf{(1.56)}$$

Y la transformada inversa:

$$f(t) = \Im^{-1}\left[F(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \qquad \textbf{(1.57)}$$

A diferencia de las series la transformada de Fourier nos da un espectro de frecuencias continuos, en el dominio de la frecuencia.

1.7 - Transformada discreta de Fourier

$$f(k\cdot\Delta\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n\cdot\Delta T)\cdot e^{\frac{-j2\cdot\pi\cdot k_n}{N}} \qquad \textbf{(1.58)}$$

$$f(n\cdot\Delta T)=\sum_{K=0}^{N-1} f(K\cdot\Delta\omega)\cdot e^{\frac{j2\cdot\pi\cdot k_n}{N}} \qquad \textbf{(1.59)}$$

Donde k, *n= 0, 1,……., N-1*, $\Delta\omega=\frac{2\cdot\pi}{\Delta T}$ y $\Delta T=\frac{T}{N}$

La TFD es frecuentemente usada en mediciones armónicas debido a que la medición de los datos son siempre utilizados en la forma de un función muestreada en el tiempo.