

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
ВОПРОС ПО ВЫБОРУ, 3 СЕМЕСТР

Связанные колебания
магнитных стрелок

Студент
Ришат ИСХАКОВ
513 группа

Преподаватель
Валерий Алексеевич
ДАНИЛИН



14 января 2017 г.

Цель работы: Изучение характера связанных колебаний магнитных стрелок.

В работе используются: неокуб, линейка, штатив, нитки, секундомер.

Описание установки

Две стрелки, собранные из шести магнитных шариков неокуба, подвесим на нитях за середины на некотором расстоянии друг от друга так, чтобы их оси совпали (под осью понимается прямая, соединяющая северный и южный концы стрелки). В положении равновесия стрелки направлены по магнитному полю Земли.

Если в некоторый момент времени мы отклоним первую стрелку, вторую при этом удерживая в положении равновесия, а затем одновременно их отпустим, будет наблюдаться постепенное уменьшение амплитуды колебаний первой стрелки, сопровождаемое «раскачкой» второй стрелки. Через некоторое время первая стрелка остановится, передав (почти) всю энергию колебаний второй — они поменяются ролями. Подобное колебательное движение системы тел называют **биениями**.

Система ведет себя как связанные маятники, причём в роли соединения выступает магнитное взаимодействие стрелок.

Слегка изменим условия эксперимента: разместим стрелки так, чтобы их оси были параллельны. При такой конфигурации системы явление биений легче наблюдать, поскольку у концов стрелки поле обладает большей неоднородностью.

Из-за трения колебания постепенно затухают, но это становится заметным по прошествии 4–5 периодов биений, так что потерями энергии при анализе будем пренебрегать.

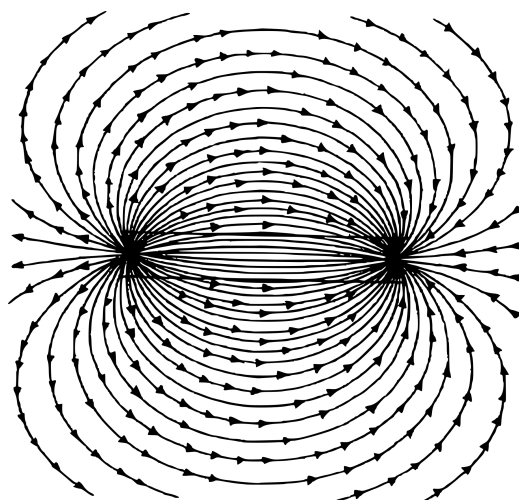


Рис. 1: Поле постоянного магнита

Теория

Уравнение движения

$$\mathfrak{I} \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (1)$$

где \mathfrak{I} - момент инерции стрелки относительно центра масс, M - момент внешних сил.

$$M = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (2)$$

где $\vec{p}_m = \vec{I} \cdot V$ - магнитный момент, который зависит от намагниченности I и объема V стрелки, B - вектор магнитной индукции внешнего поля (горизонтальная компонента магнитного поля Земли)

Для малых углов φ отклонения:

$$M = -p_m \cdot B \cdot \sin \varphi \approx -p_m \cdot B \cdot \varphi \quad (3)$$

Дополнительный момент сил:

$$M_1 = p_m \cdot B_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4)$$

где \vec{B}_1 - вектор магнитной индукции, созданной второй стрелкой.

Так как стрелки одинаковы, то p_m и \mathfrak{I} для них будем считать равными. При таких условиях запишем уравнения движения обеих стрелок.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}\ddot{\varphi}_1 + p_m B \varphi_1 - p_m B_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ \mathfrak{I}\ddot{\varphi}_2 + p_m B \varphi_2 - p_m B_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Сложим и вычтем уравнения, введем замену: $\alpha_1 = \varphi_1 + \varphi_2$, $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + \omega_1 \alpha_1 &= 0, \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_2 \alpha_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \omega_1 = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}} + 2 \frac{p_m B_1}{\mathfrak{I}}} = \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}}$$

В общем случае колебания такого магнитного маятника состоят из двух независимых колебаний с частотами ω_1 и ω_2 , определяемые уравнениями выше и называются нормальными частотами.

Если стрелки отклонять в одном и том же направлении на один угол, они колеблются синхронно с частотой ω_1 . Если же стрелки отклонить на одинаковый угол от положения равновесия в разных направлениях, тогда колебания происходят с частотой ω_2 .

В произвольном же случае колебаний происходят сложные колебания каждого из маятников, природа которых объясняется наличием связей. Если считать, что $B_1 \ll B$, то

если стрелки удалены на достаточное расстояние, то можно найти связь между ω_1 и ω_2 ($\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$).

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_m(B+2B_1)}{\mathfrak{I}}} = \sqrt{\frac{p_mB}{\mathfrak{I}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2B_1}{B}} \approx \omega_1 \left(1 + \frac{B_1}{B}\right) \quad (7)$$

Если разность между ω_1 и ω_2 невелика по сравнению с самими величинами, мы видим периодическое увеличение и уменьшение амплитуды колебаний маятников. Такое явление называется биением. Их частота определяется:

$$\omega_6 = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{B_1}{B} \sqrt{\frac{p_mB}{\mathfrak{I}}} \quad (8)$$

Тогда $T_6 = \frac{2\pi}{\omega_6}$ есть время, за которое происходит перекачка энергии.

В первом приближении $B_1 \ll B$, то есть связь слабая. Тогда поле диполя на направлении, перпендикулярном оси: $B_1 = \mu_0 \frac{p_m}{r^3}$. Тогда циклическая частота биений

$$\omega_6 = \frac{B_1}{B} \sqrt{\frac{p_mB}{\mathfrak{I}}} \sim \frac{1}{r^3}$$

Однако в нашем случае положение стрелок сильно зависит от \vec{B}_1 , поэтому нужно посчитать поле магнитной стрелки более строго.

Поле магнитной стрелки при сильной связи

Магнитные стрелки будем рассматривать как магнитные диполи.

Поле диполя:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right)$$

Задача плоская, поэтому: $\vec{p}_m(0, 0, p_m)$, $\vec{r}(x, 0, z - z')$. Здесь поле в точке $(x, 0, z)$, которое создается магнитным моментом в точке $(0, 0, z')$.

Разбиваем стрелку на элементарные диполи: $dp_m = \frac{p_m}{l} dz'$, где l - длина этой стрелки.

Тогда поле элемента стрелки равно:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3 \cdot (dp_m \cdot (z - z')) \cdot (\vec{i} \cdot x + \vec{k} \cdot (z - z'))}{r^5} - \frac{\vec{k} \cdot dp_m}{r^3} \right) \quad (9)$$

Выделим две компоненты: dB_x и dB_z и проинтегрируем их по всем элементам.

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3 \cdot (z - z') \cdot x}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \frac{p_m}{l} dz' = \dots =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x \cdot p_m}{l} \left(\frac{1}{(x^2 + (z - \frac{l}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + (z + \frac{l}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (10)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{l} \left(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{3 \cdot (z - z')^2 \cdot dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \dots =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{lx^2} \left(\frac{(z + \frac{l}{2})^3}{\left((z + \frac{l}{2})^2 + x^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (11)$$

Для второй стрелки с учетом малости углов отклонения элементарный дипольный момент можно положить равным:

$$dp_m \approx \frac{p_m}{l} dz$$

Тогда вращательный момент, действующей со стороны первой стрелки на элемент второй стрелки:

$$d\vec{M} = [dp_m, \vec{B}] = \vec{k}(dp_{mx} \cdot B_z - dp_{mz} \cdot B_x) \quad (12)$$

$$dp_{mx} \cdot B_z = dp_m \cdot B_z \cdot \sin \varphi \approx \frac{p_m \cdot \varphi}{l} \cdot B_z dz$$

$$dp_{mz} \cdot B_x = dp_m \cdot B_x \cdot \cos \varphi \approx \frac{p_m}{l} \cdot B_x dz$$

Вычислим интегралы:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} B_z dz = \dots = \frac{\mu_0 \cdot p_m}{2\pi \cdot x^2} \quad (13)$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} B_x dz = 0 \quad (14)$$

Тогда вращательный момент будет:

$$M \approx \frac{\mu_0 \cdot p_m^2}{2\pi \cdot lx^2} \cdot \varphi \quad (15)$$

То есть $\omega_b \sim \frac{1}{r}$ при условии наличия сильной связи между магнитными стрелками.

Эксперимент

Подвесим две стрелки на нитях на различных расстояниях r . Будем выводить одну из стрелок из равновесия, придерживая другую. Замерим n биений за некоторое время t . Найдем период биений $T_b = \frac{t}{n}$.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|
| r , см | 17.5 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24.5 | 25 | 26 | 27 | 28 | 30 | 32 | 33 | 35 |
| t , с | 14.35 | 12.37 | 13.23 | 14.41 | 11.28 | 16.07 | 16.72 | 13.26 | 14.13 | 15.92 | 13.68 | 7.65 | 17.4 | 20.25 |
| n | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| T_b , с | 2.87 | 3.09 | 3.31 | 3.60 | 3.76 | 4.02 | 4.18 | 4.42 | 4.71 | 5.31 | 6.84 | 7.65 | 8.7 | 10.13 |
| $\ln r$ | 2.86 | 2.94 | 3.00 | 3.09 | 3.14 | 3.20 | 3.22 | 3.26 | 3.30 | 3.33 | 3.40 | 3.47 | 3.50 | 3.56 |
| $\ln T$ | 1.05 | 1.13 | 1.20 | 1.28 | 1.32 | 1.39 | 1.43 | 1.49 | 1.55 | 1.67 | 1.92 | 2.03 | 2.16 | 2.32 |

Таблица 1: Данные эксперимента

Построим график $\ln T(\ln r)$, углом наклона которого будет α в зависимости $T = C \cdot r^\alpha$

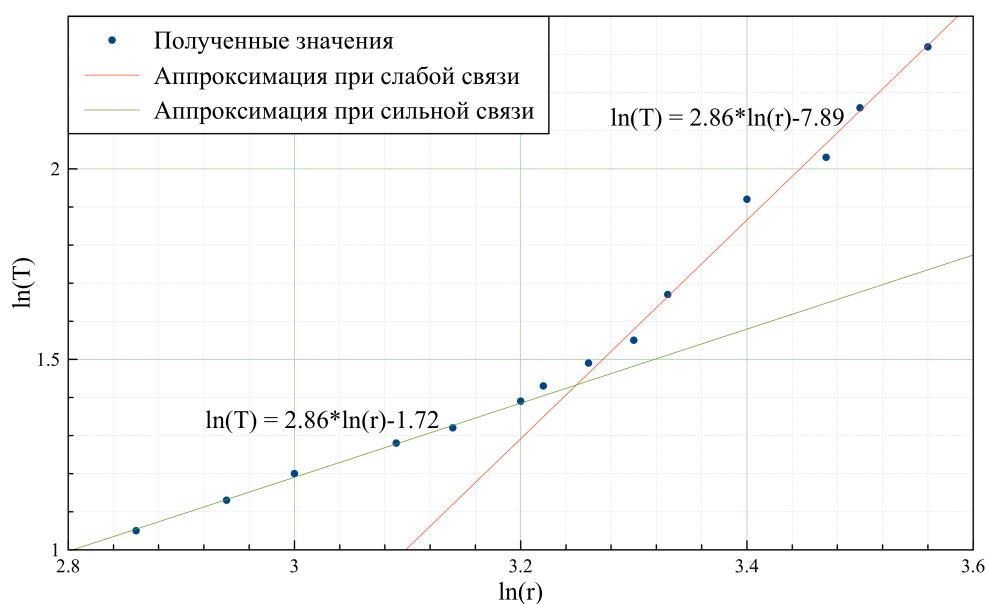


Рис. 2: Логарифмический график

Вывод

- При малых расстояниях между магнитными стрелками их можно рассматривать как связанные маятники с сильной связью и наблюдать явление биения, $\omega_b \sim \frac{1}{r}$.
- На больших расстояниях влияние поля стрелок друг на друга уменьшается, но биения до сих пор присутствуют с $\omega_b \sim \frac{1}{r^3}$.