

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ  
ВОПРОС ПО ВЫБОРУ, 3 СЕМЕСТР

---

Связанные колебания  
магнитных стрелок

---

Студент  
Ришат ИСХАКОВ  
513 группа

Преподаватель  
Валерий Алексеевич  
ДАНИЛИН



14 января 2017 г.

**Цель работы:** Изучение характера связанных колебаний магнитных стрелок.

**В работе используются:** неокуб, линейка, штатив, нитки, секундомер.

## Описание установки

Две стрелки, собранные из шести магнитных шариков неокуба, подвесим на нитях за середины на некотором расстоянии друг от друга так, чтобы их оси совпали (под осью понимается прямая, соединяющая северный и южный концы стрелки). В положении равновесия стрелки направлены по магнитному полю Земли.

Если в некоторый момент времени мы отклоним первую стрелку, вторую при этом удерживая в положении равновесия, а затем одновременно их отпустим, будет наблюдаться постепенное уменьшение амплитуды колебаний первой стрелки, сопровождаемое «раскачкой» второй стрелки. Через некоторое время первая стрелка остановится, передав (почти) всю энергию колебаний второй — они поменяются ролями. Подобное колебательное движение системы тел называют **биениями**.

Система ведет себя как связанные маятники, причём в роли соединения выступает магнитное взаимодействие стрелок.

Слегка изменим условия эксперимента: разместим стрелки так, чтобы их оси были параллельны. При такой конфигурации системы явление биений легче наблюдать, поскольку у концов стрелки поле обладает большей неоднородностью.

Из-за трения колебания постепенно затухают, но это становится заметным по прошествии 4–5 периодов биений, так что потерями энергии при анализе будем пренебрегать.

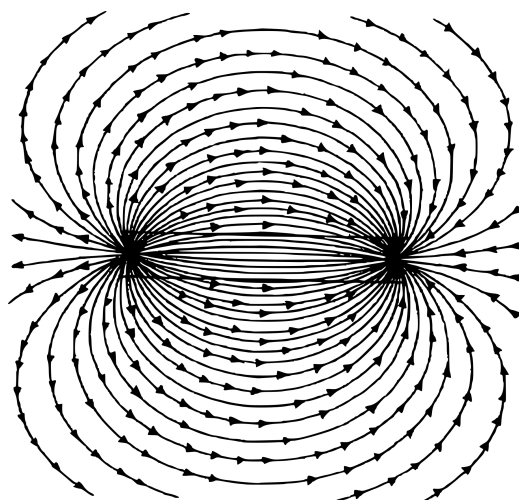


Рис. 1: Поле постоянного магнита

# Теория

## Уравнение движения

$$\mathfrak{I} \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (1)$$

где  $\mathfrak{I}$  — момент инерции стрелки относительно центра масс,  $\varepsilon$  — её угловое ускорение,  $M$  — момент действующих на неё внешних сил:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (2)$$

где  $\vec{p}_m$  — магнитный момент стрелки,  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции внешнего поля.

При малых углах отклонения  $\varphi$  стрелки от положения равновесия момент, вызванный горизонтальной компонентой магнитного поля Земли, есть

$$M = -p_m \cdot B \cdot \sin \varphi \approx -p_m \cdot B \cdot \varphi; \quad (3)$$

взаимодействие с соседней стрелкой (поле  $\vec{B}_1$ ) вносит вклад

$$M_1 = p_m \cdot B_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4)$$

Так как стрелки одинаковы,  $p_m$  и  $\mathfrak{I}$  для них будем считать равными. Запишем уравнения движения обеих стрелок:

$$\begin{cases} \mathfrak{I} \ddot{\varphi}_1 + p_m B \varphi_1 - p_m B_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ \mathfrak{I} \ddot{\varphi}_2 + p_m B \varphi_2 - p_m B_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\alpha}_1 + \omega_1 \alpha_1 = 0; \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_2 \alpha_2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где после сложения и вычитания уравнений исходной системы введены замены

$$\alpha_1 \equiv \varphi_1 + \varphi_2, \quad \alpha_2 \equiv \varphi_1 - \varphi_2, \quad \omega_1 \equiv \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}}, \quad \omega_2 \equiv \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}}.$$

Таким образом, колебания складываются из двух (независимых) нормальных мод  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , причём синфазные колебания соответствуют моде  $\omega_1$ , противофазные — моде  $\omega_2$ .

В общем случае происходят сложные колебания каждой из стрелок, природа которых объясняется наличием связи. Если считать, что  $B_1 \ll B$  (*связь слабая, стрелки существенно удалены друг от друга*), можно найти связь между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}} = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2B_1}{B}} \approx \omega_1 \left( 1 + \frac{B_1}{B} \right). \quad (6)$$

Если разность между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  невелика по сравнению с самими величинами, мы видим периодическое увеличение и уменьшение амплитуды колебаний маятников — биения;

$$\omega_b = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{B_1}{B} \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}}. \quad (7)$$

С учётом  $B_1 \simeq \frac{\mu_0 p_m}{r^3}$  получаем в приближении слабой связи  $\omega_b \propto r^{-3}$ .

## Сильная связь

Магнитные стрелки представляют собой магнитные диполи:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right). \quad (8)$$

Поскольку задача плоская, введём такие координаты, что  $\vec{p}_m(0, 0, p_m)$ ,  $\vec{r}(x, 0, z - z')$ , и разобьём стрелку на элементарные диполи:  $dp_m = p_m dz'/l$ , где  $l$  — длина стрелки.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3 \cdot (dp_m \cdot (z - z')) \cdot (\vec{i} \cdot x + \vec{k} \cdot (z - z'))}{r^5} - \frac{\vec{k} \cdot dp_m}{r^3} \right). \quad (9)$$

Выделим компоненты  $dB_x$  и  $dB_z$  и проинтегрируем их:

$$B_x = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi l} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{3 \cdot (z - z') \cdot x \cdot dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\mu_0 x \cdot p_m}{4\pi l} \left( \frac{1}{\left(x^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(x^2 + \left(z + \frac{l}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right);$$

$$B_z = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi l} \left( \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{3 \cdot (z - z')^2 \cdot dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} - \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi l x^2} \frac{\left(z + \frac{l}{2}\right)^3}{\left(\left(z + \frac{l}{2}\right)^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для второй стрелки с учетом малости углов отклонения элементарный дипольный момент можно положить равным  $dp_m = p_m dz/l$ , тогда

$$d\vec{M} = [d\vec{p}_m, \vec{B}] = \vec{k} (dp_{mx} \cdot B_z - dp_{mz} \cdot B_x). \quad (10)$$

Выражения в скобках упрощаются:  $dp_{mx} \cdot B_z \approx \frac{p_m \cdot \varphi}{l} \cdot B_z dz$ ,  $dp_{mz} \cdot B_x \approx \frac{p_m}{l} \cdot B_x dz$ ;

$$\int_{-l/2}^{+l/2} B_z dz = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi x^2}, \quad \int_{-l/2}^{+l/2} B_x dz = 0 \quad \Rightarrow \quad M \approx \frac{\mu_0 p_m^2}{2\pi l x^2} \varphi.$$

Следовательно, при наличии сильной связи  $\omega_b \propto \sqrt{M} \propto r^{-1}$ .

## Эксперимент

Будем размещать стрелки на различных расстояниях  $r$  друг от друга и отклонять одну из стрелок из положения равновесия, удерживая другую. Пронаблюдаем  $n$  биений и измерим их продолжительность  $t = nT_b = 2\pi n/\omega_b$ .

$r$ , см	17.5	19	20	22	23	24.5	25	26	27	28	30	32	33	35
$t$ , с	14.35	12.37	13.23	14.41	11.28	16.07	16.72	13.26	14.13	15.92	13.68	7.65	17.4	20.25
$n$	5	4	4	4	3	4	4	3	3	3	2	1	2	2
$T_b$ , с	2.87	3.09	3.31	3.60	3.76	4.02	4.18	4.42	4.71	5.31	6.84	7.65	8.7	10.13
$\ln r$	2.86	2.94	3.00	3.09	3.14	3.20	3.22	3.26	3.30	3.33	3.40	3.47	3.50	3.56
$\ln T$	1.05	1.13	1.20	1.28	1.32	1.39	1.43	1.49	1.55	1.67	1.92	2.03	2.16	2.32

Таблица 1: Данные эксперимента

Построим график  $\ln T(\ln r)$ , угловым коэффициентом которого является показатель степени  $\alpha$  зависимости  $T \propto r^\alpha$ .

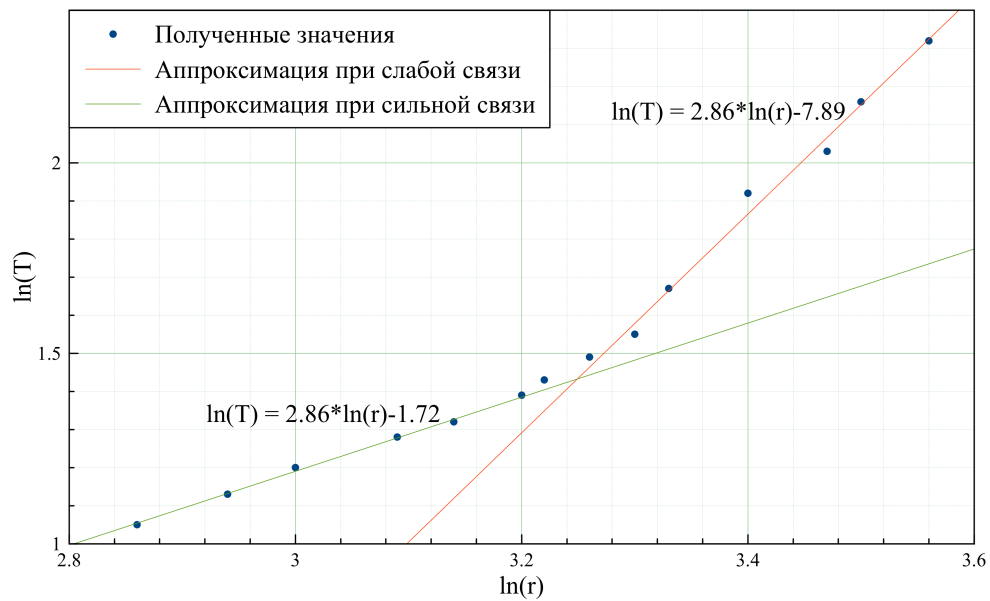


Рис. 2: График в двойном логарифмическом масштабе

## Выводы

- При малых расстояниях между магнитными стрелками их можно рассматривать как связанные маятники с сильной связью и наблюдать явление биений, причём  $\omega_b \propto 1/r$ .
- На больших расстояниях влияние поля стрелок уменьшается;  $\omega_b \propto 1/r^3$ .