

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
ВОПРОС ПО ВЫБОРУ, 3 СЕМЕСТР

Связанные колебания магнитных стрелок

Студент
Ришат ИСХАКОВ
513 группа

Преподаватель
Валерий Алексеевич
ДАНИЛИН



14 января 2017 г.

Цель работы: Изучение характера связанных колебаний магнитных стрелок двух расположенных рядом компасов.

В работе используются: неокуб, линейка, штатив, нитки, секундомер.

1. Описание установки

Две стрелки, собранные из шести магнитных шариков неокуба, подвесим на нити за середину на некотором расстоянии l друг от друга так, чтобы их оси совпадали. Под осью понимается прямая, соединяющая северный и южный конец стрелки. Стрелки будут направлены по магнитному полю Земли.

Если в начальный момент времени ($t = 0$) мы отклоним первую стрелку, вторую при этом придерживая в состоянии равновесия, а затем одновременно отпустим обе стрелки, мы будем наблюдать уменьшение амплитуды колебаний первой стрелки, в то время как для второй стрелки угол отклонения от оси будет расти. В некоторый момент первая стрелка остановится, при этом вторая стрелка будет иметь амплитуду и энергию колебания первой стрелки в начальный момент. Из-за наличия сил трения колебания будут постепенно затухать, но заметно это становится после 4-5 колебаний, трением можно будет пренебречь.

Такое явление наложения двух колебаний называется биением. Система ведет себя как связанные маятники, но в данном случае в роли соединения выступает магнитное взаимодействие между двумя намагниченными стрелками.

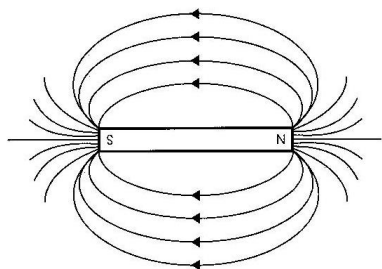


Рис. 1: Поле постоянного магнита

Если отклонить стрелки одновременно в одном направлении, будем наблюдать так называемые **синфазные** колебания. Если отклонить стрелки в разных направлениях одновременно, будем наблюдать **противофазные** колебания.

Для объяснения природы таких колебания слегка изменим условия эксперимента: поместим стрелки так, чтобы их оси были параллельны. Так биения видно еще лучше, в связи с природой распределения магнитного поля стрелки. На конце стрелки поле более неоднородно, чем на перпендикуляре к оси стрелки в плоскости стрелки.

2. Теория

2.1. Уравнение движения

$$\mathcal{J} \cdot \ddot{\epsilon} = \vec{M}, \quad (1)$$

где \mathcal{J} - момент инерции стрелки относительно центра масс, M - момент внешних сил.

$$M = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (2)$$

где $\vec{p}_m = \vec{I} \cdot V$ - магнитный момент, который зависит от намагниченности I и объема V стрелки, B - вектор магнитной индукции внешнего поля (горизонтальная компонента магнитного поля Земли)

Для малых углов φ отклонения:

$$M = -p_m \cdot B \cdot \sin \varphi \approx -p_m \cdot B \cdot \varphi \quad (3)$$

Дополнительный момент сил:

$$M_1 = p_m \cdot B_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4)$$

где \vec{B}_1 - вектор магнитной индукции, созданной второй стрелкой.

Так как стрелки одинаковы, то p_m и \mathfrak{I} для них будем считать равными. При таких условиях запишем уравнения движения обеих стрелок.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}\ddot{\varphi}_1 + p_m B \varphi_1 - p_m B_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ \mathfrak{I}\ddot{\varphi}_2 + p_m B \varphi_2 - p_m B_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Сложим и вычтем уравнения, введем замену: $\alpha_1 = \varphi_1 + \varphi_2$, $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + \omega_1 \alpha_1 &= 0, \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_2 \alpha_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \omega_1 = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}} + 2 \frac{p_m B_1}{\mathfrak{I}}} = \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}}$$

В общем случае колебания такого магнитного маятника состоят из двух независимых колебаний с частотами ω_1 и ω_2 , определяемые уравнениями выше и называются нормальными частотами.

Если стрелки отклонять в одном и том же направлении на один угол, они колеблются синхронно с частотой ω_1 . Если же стрелки отклонить на одинаковый угол от положения равновесия в разных направлениях, тогда колебания происходят с частотой ω_2 .

В произвольном же случае колебаний происходят сложные колебания каждого из маятников, природа которых объясняется наличием связей. Если считать, что $B_1 \ll B$, то есть стрелки удалены на достаточное расстояние, то можно найти связь между ω_1 и ω_2 ($\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$).

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}} = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2B_1}{B}} \approx \omega_1 \left(1 + \frac{B_1}{B}\right) \quad (7)$$

Если разность между ω_1 и ω_2 невелика по сравнению с самими величинами, мы видим периодическое увеличение и уменьшение амплитуды колебаний маятников. Такое явление называется биением. Их частота определяется:

$$\omega_6 = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{B_1}{B} \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}} \quad (8)$$

Тогда $T_6 = \frac{2\pi}{\omega_6}$ есть время, за которое происходит перекачка энергии.

В первом приближении $B_1 \ll B$, то есть связь слабая. Тогда поле диполя на направлении, перпендикулярном оси: $B_1 = \mu_0 \frac{p_m}{r^3}$. Тогда циклическая частота биений

$$\omega_6 = \frac{B_1}{B} \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}} \sim \frac{1}{r^3}$$

Однако в нашем случае положение стрелок сильно зависит от \vec{B}_1 , поэтому нужно посчитать поле магнитной стрелки более строго.

2.2. Поле магнитной стрелки при сильной связи

Магнитные стрелки будем рассматривать как магнитные диполи.

Поле диполя:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right)$$

Задача плоская, поэтому: $\vec{p}_m(0, 0, p_m)$, $\vec{r}(x, 0, z - z')$. Здесь поле в точке $(x, 0, z)$, которое создается магнитным моментом в точке $(0, 0, z')$.

Разбиваем стрелку на элементарные диполи: $dp_m = \frac{p_m}{l} dz'$, где l - длина этой стрелки.

Тогда поле элемента стрелки равно:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3 \cdot (dp_m \cdot (z - z')) \cdot (\vec{i} \cdot x + \vec{k} \cdot (z - z'))}{r^5} - \frac{\vec{k} \cdot dp_m}{r^3} \right) \quad (9)$$

Выделим две компоненты: dB_x и dB_z и проинтегрируем их по всем элементам.

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3 \cdot (z - z') \cdot x}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \frac{p_m}{l} dz' = \dots = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x \cdot p_m}{l} \left(\frac{1}{(x^2 + (z - \frac{l}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + (z + \frac{l}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{l} \left(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{3 \cdot (z - z')^2 \cdot dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \dots = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{lx^2} \left(\frac{\left(z + \frac{l}{2}\right)^3}{\left(\left(z + \frac{l}{2}\right)^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Для второй стрелки с учетом малости углов отклонения элементарный дипольный момент можно положить равным:

$$dp_m \approx \frac{p_m}{l} dz$$

Тогда вращательный момент, действующей со стороны первой стрелки на элемент второй стрелки:

$$d\vec{M} = [dp_m \vec{r}, \vec{B}] = \vec{k}(dp_{mx} \cdot B_z - dp_{mz} \cdot B_x) \tag{12}$$

$$dp_{mx} \cdot B_z = dp_m \cdot B_z \cdot \sin \varphi \approx \frac{p_m \cdot \varphi}{l} \cdot B_z dz$$

$$dp_{mz} \cdot B_x = dp_m \cdot B_x \cdot \cos \varphi \approx \frac{p_m}{l} \cdot B_x dz$$

Вычислим интегралы:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} B_z dz = \dots = \frac{\mu_0 \cdot p_m}{2\pi \cdot x^2} \tag{13}$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} B_x dz = 0 \tag{14}$$

Тогда вращательный момент будет:

$$M \approx \frac{\mu_0 \cdot p_m^2}{2\pi \cdot lx^2} \cdot \varphi \tag{15}$$

То есть $\omega_6 \sim \frac{1}{r}$ при условии наличия сильной связи между магнитными стрелками.

3. Эксперимент

Подвесим две стрелки на нитях на различных расстояниях r . Будем выводить одну из стрелок из равновесия, придерживая другую. Замерим n биений за некоторое время t . Найдем период биений $T_6 = \frac{t}{n}$.

r , см	17.5	19	20	22	23	24.5	25	26	27	28	30	32	33	35
t , с	14.35	12.37	13.23	14.41	11.28	16.07	16.72	13.26	14.13	15.92	13.68	7.65	17.4	20.25
n	5	4	4	4	3	4	4	3	3	3	2	1	2	2
T_6 , с	2.87	3.09	3.31	3.60	3.76	4.02	4.18	4.42	4.71	5.31	6.84	7.65	8.7	10.13
$\ln r$	2.86	2.94	3.00	3.09	3.14	3.20	3.22	3.26	3.30	3.33	3.40	3.47	3.50	3.56
$\ln T$	1.05	1.13	1.20	1.28	1.32	1.39	1.43	1.49	1.55	1.67	1.92	2.03	2.16	2.32

Таблица 1: Данные эксперимента

Построим график $\ln T(\ln r)$, углом наклона которого будет α в зависимости $T = C \cdot r^\alpha$

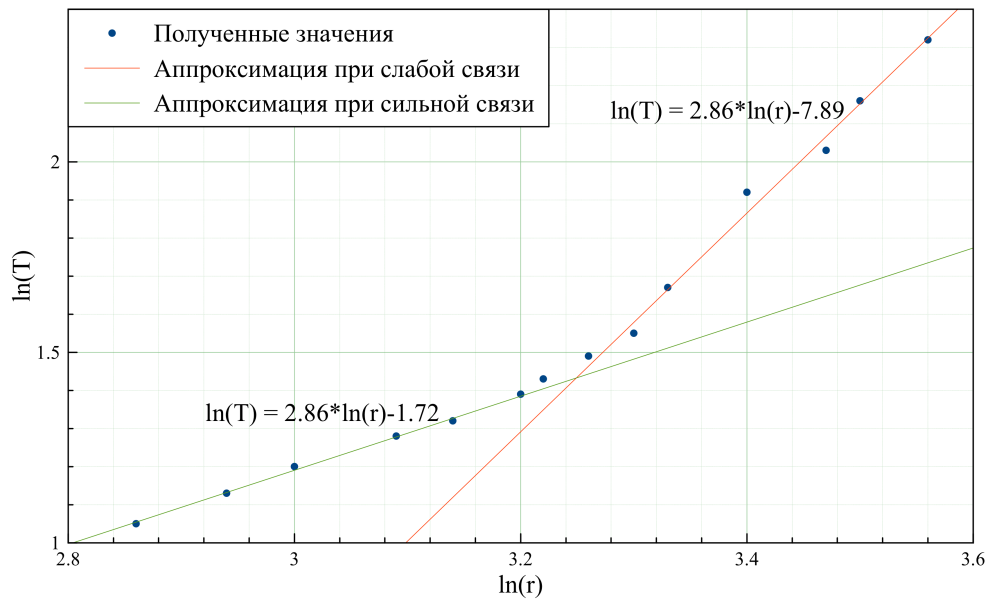


Рис. 2: Логарифмический график

4. Вывод

- При малых расстояниях между магнитными стрелками их можно рассматривать как связанные маятники с сильной связью и наблюдать явление биения, $\omega_b \sim \frac{1}{r}$.
- На больших расстояниях влияние поля стрелок друг на друга уменьшается, но биения до сих пор присутствуют с $\omega_b \sim \frac{1}{r^3}$.