

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ  
ВОПРОС ПО ВЫБОРУ, 3 СЕМЕСТР

---

## Связанные колебания магнитных стрелок

---

Студент  
Ришат ИСХАКОВ  
513 группа

Преподаватель  
Валерий Алексеевич  
ДАНИЛИН



14 января 2017 г.

**Цель работы:** Изучение характера связанных колебаний магнитных стрелок двух расположенных рядом компасов.

**В работе используются:** неокуб, линейка, штатив, нитки, секундомер.

## 1. Описание установки

Две стрелки, собранные из шести магнитных шариков неокуба, подвесим на нити за середину на некотором расстоянии  $l$  друг от друга так, чтобы их оси совпадали. Под осью понимается прямая соединяющая Северный и Южный конец стрелки. Стрелки будут направлены по магнитному полю земли. Отклоним одну из стрелок из положения равновесия, придерживая вторую. Будем наблюдать за колебаниями подобной системы.

Если в начальный момент времени ( $t = 0$ ) мы отклоним первую стрелку, вторую при этом придерживая в состоянии равновесия, а затем одновременно отпустим обе стрелки, мы будем наблюдать уменьшение амплитуды колебаний первой стрелки, в то время как для второй стрелки угол отклонения от оси будет расти. В некоторый момент первая стрелка остановится, при этом вторая стрелка будет иметь амплитуду и энергию колебания первой стрелки в начальный момент. Из-за наличия сил трения колебания будут постепенно затухать, но заметно это становится после 4-5 колебаний, следовательно трение пренебрежимо мало.

Подобная перекачка энергии от одной стрелки к другой называется биением. Система ведет себя как связанные маятники, но в данном случае в роли соединения выступает магнитное взаимодействие между двумя намагниченными стрелками.

Если отклонить стрелки одновременно в одном направлении, будем наблюдать так называемые синфазные колебания. Если отклонить стрелки в разных направлениях одновременно, будем наблюдать противофазные колебания.

Для объяснения природы таких колебания слегка изменим условия эксперимента: поместим стрелки так, чтобы их оси были параллельны. Так биения видно еще лучше, в связи с природой распределения магнитного поля стрелки. На конце стрелки поле более неоднородно, чем на перпендикуляре к оси стрелки в плоскости стрелки.

## 2. Теория

### 2.1. Уравнение движения

$$\mathcal{I} \cdot \ddot{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (1)$$

где  $\mathcal{I}$  - момент инерции стрелки относительно центра масс,  $M$  - момент внешних сил.

$$M = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (2)$$

где  $\vec{p}_m = \vec{I} \cdot V$  - магнитный момент, который зависит от намагниченности  $I$  и объема  $V$  стрелки,  $B$  - вектор магнитной индукции внешнего поля (горизонтальная компонента магнитного поля Земли)

Для малых углов  $\varphi$  отклонения:

$$M = -p_m \cdot B \cdot \sin \varphi \approx -p_m \cdot B \cdot \varphi \quad (3)$$

Дополнительный момент сил:

$$M_1 = p_m \cdot B_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4)$$

где  $\vec{B}_1$  - вектор магнитной индукции, созданной второй стрелкой.

Так как стрелки одинаковы, то  $p_m$  и  $\mathfrak{I}$  для них будем считать равными. При таких условиях запишем уравнения движения обеих стрелок.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}\ddot{\varphi}_1 + p_m B \varphi_1 - p_m B_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ \mathfrak{I}\ddot{\varphi}_2 + p_m B \varphi_2 - p_m B_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Сложим и вычтем уравнения, введем замену:  $\alpha_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ , получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + \omega_1 \alpha_1 &= 0, \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_2 \alpha_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \omega_1 = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}} + 2\frac{p_m B_1}{\mathfrak{I}}} = \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}}$$

В общем случае колебания такого магнитного маятника состоят из двух независимых колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , определяемые уравнениями выше и называются нормальными частотами.

Если стрелки отклонять в одном и том же направлении на один угол, они колеблются синхронно с частотой  $\omega_1$ . Если же стрелки отклонить на одинаковый угол от положения равновесия в разных направлениях, тогда колебания происходят с частотой  $\omega_2$ .

В произвольном же случае колебаний происходят сложные колебания каждого из маятников, природа которых объясняется наличием связей. Если считать, что  $B_1 \ll B$ , то есть стрелки удалены на достаточное расстояние, то можно найти связь между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ).

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}} = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2B_1}{B}} \approx \omega_1 \left(1 + \frac{B_1}{B}\right) \quad (7)$$

Если разность между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  невелика по сравнению с самими величинами, мы видим периодическое увеличение и уменьшение амплитуды колебаний маятников. Такое явление называется биением. Их частота определяется:

$$\omega_6 = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{B_1}{B} \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}} \quad (8)$$

Тогда  $T_6 = \frac{2\pi}{\omega_6}$  есть время, за которое происходит перекачка энергии.

В таком приближении  $B_1 = \mu_0 \frac{p_m}{r^3}$ , то есть циклическая частота биений

$$\omega_6 = \frac{B_1}{B} \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}} \sim \frac{1}{r^3}$$

Однако в нашем случае положение стрелок сильно зависит от  $\vec{B}_1$ , поэтому нужно посчитать поле магнитной стрелки более строго.

## 2.2. Поле магнитной стрелки

Магнитные стрелки будем рассматривать как магнитные диполи.

Поле диполя:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right)$$

Задача плоская, поэтому:  $\vec{p}_m(0, 0, p_m)$ ,  $\vec{r}(x, 0, z - z')$ . Здесь поле в точке  $(x, 0, z)$ , которое создается магнитным моментом в точке  $(0, 0, z')$ .

Разбиваем стрелку на элементарные диполи:  $dp_m = \frac{p_m}{l} dz'$ , где  $l$  - длина этой стрелки.

Тогда поле элемента стрелки равно:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3 \cdot (dp_m \cdot (z - z')) \cdot (\vec{i} \cdot x + \vec{k} \cdot (z - z'))}{r^5} - \frac{\vec{k} \cdot dp_m}{r^3} \right) \quad (9)$$

## 3. Вывод

- При определенных расстояниях между магнитными стрелками их можно рассматривать как связанные маятники и наблюдать явление биения,  $\omega_b \sim \frac{1}{r^2}$ .
- На очень близких расстояниях не выполняется условие слабой связи и биения отсутствуют. Но из-за сильной неоднородности поля на концах стрелки мы видим нелинейные колебания.