

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
ВОПРОС ПО ВЫБОРУ, 3 СЕМЕСТР

Связанные колебания
магнитных стрелок

Студент
Ришат ИСХАКОВ
513 группа

Преподаватель
Валерий Алексеевич
ДАНИЛИН



14 января 2017 г.

Цель работы: Изучение характера связанных колебаний магнитных стрелок.

В работе используются: неокуб, линейка, штатив, нитки, секундомер.

Описание установки

Две стрелки, собранные из шести магнитных шариков неокуба, подвесим на нитях за середины на некотором расстоянии друг от друга так, чтобы их оси совпали (под осью понимается прямая, соединяющая северный и южный концы стрелки). В положении равновесия стрелки направлены по магнитному полю Земли.

Если в некоторый момент времени мы отклоним первую стрелку, вторую при этом удерживая в положении равновесия, а затем одновременно их отпустим, будет наблюдаться постепенное уменьшение амплитуды колебаний первой стрелки, сопровождаемое «раскачкой» второй стрелки. Через некоторое время первая стрелка остановится, передав (почти) всю энергию колебаний второй — они поменяются ролями. Подобное колебательное движение системы тел называют **биениями**.

Система ведет себя как связанные маятники, причём в роли соединения выступает магнитное взаимодействие стрелок.

Слегка изменим условия эксперимента: разместим стрелки так, чтобы их оси были параллельны. При такой конфигурации системы явление биений легче наблюдать, поскольку у концов стрелки поле обладает большей неоднородностью.

Из-за трения колебания постепенно затухают, но это становится заметным по прошествии 4–5 периодов биений, так что потерями энергии при анализе будем пренебрегать.

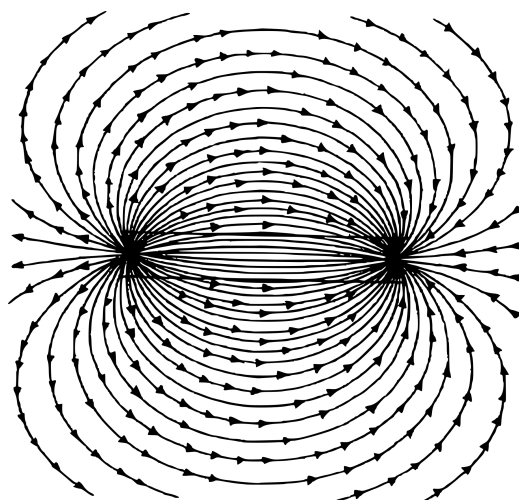


Рис. 1: Поле постоянного магнита

Теория

Уравнение движения

$$\mathfrak{I} \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (1)$$

где \mathfrak{I} — момент инерции стрелки относительно центра масс, ε — её угловое ускорение, M — момент действующих на неё внешних сил:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (2)$$

где \vec{p}_m — магнитный момент стрелки, \vec{B} — вектор магнитной индукции внешнего поля.

При малых углах отклонения φ стрелки от положения равновесия момент, вызванный горизонтальной компонентой магнитного поля Земли, есть

$$M = -p_m \cdot B \cdot \sin \varphi \approx -p_m \cdot B \cdot \varphi; \quad (3)$$

взаимодействие с соседней стрелкой (поле \vec{B}_1) вносит вклад

$$M_1 = p_m \cdot B_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4)$$

Так как стрелки одинаковы, p_m и \mathfrak{I} для них будем считать равными. Запишем уравнения движения обеих стрелок:

$$\begin{cases} \mathfrak{I}\ddot{\varphi}_1 + p_m B \varphi_1 - p_m B_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ \mathfrak{I}\ddot{\varphi}_2 + p_m B \varphi_2 - p_m B_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\alpha}_1 + \omega_1 \alpha_1 = 0; \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_2 \alpha_2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где после сложения и вычитания уравнений исходной системы введены замены

$$\alpha_1 \equiv \varphi_1 + \varphi_2, \quad \alpha_2 \equiv \varphi_1 - \varphi_2, \quad \omega_1 \equiv \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}}, \quad \omega_2 \equiv \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}}.$$

Таким образом, колебания складываются из двух (независимых) нормальных мод ω_1 и ω_2 , причём синфазные колебания соответствуют моде ω_1 , противофазные — моде ω_2 .

В общем случае происходят сложные колебания каждой из стрелок, природа которых объясняется наличием связи. Если считать, что $B_1 \ll B$ (связь слабая, стрелки существенно удалены друг от друга), можно найти связь между ω_1 и ω_2 :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_m (B + 2B_1)}{\mathfrak{I}}} = \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2B_1}{B}} \approx \omega_1 \left(1 + \frac{B_1}{B} \right). \quad (6)$$

Если разность между ω_1 и ω_2 невелика по сравнению с самими величинами, мы видим периодическое увеличение и уменьшение амплитуды колебаний маятников — биения;

$$\omega_b = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{B_1}{B} \sqrt{\frac{p_m B}{\mathfrak{I}}}. \quad (7)$$

С учётом $B_1 \simeq \frac{\mu_0 p_m}{r^3}$ получаем в приближении слабой связи $\omega_b \propto r^{-3}$.

Поле магнитной стрелки при сильной связи

Магнитные стрелки будем рассматривать как магнитные диполи.

Поле диполя:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right)$$

Задача плоская, поэтому: $\vec{p}_m(0, 0, p_m)$, $\vec{r}(x, 0, z - z')$. Здесь поле в точке $(x, 0, z)$, которое создается магнитным моментом в точке $(0, 0, z')$.

Разбиваем стрелку на элементарные диполи: $dp_m = \frac{p_m}{l} dz'$, где l - длина этой стрелки.

Тогда поле элемента стрелки равно:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3 \cdot (dp_m \cdot (z - z')) \cdot (\vec{i} \cdot x + \vec{k} \cdot (z - z'))}{r^5} - \frac{\vec{k} \cdot dp_m}{r^3} \right) \quad (8)$$

Выделим две компоненты: dB_x и dB_z и проинтегрируем их по всем элементам.

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3 \cdot (z - z') \cdot x}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \frac{p_m}{l} dz' = \dots = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x \cdot p_m}{l} \left(\frac{1}{(x^2 + (z - \frac{l}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + (z + \frac{l}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{l} \left(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{3 \cdot (z - z')^2 \cdot dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz'}{(x^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \dots = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{lx^2} \left(\frac{(z + \frac{l}{2})^3}{\left((z + \frac{l}{2})^2 + x^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Для второй стрелки с учетом малости углов отклонения элементарный дипольный момент можно положить равным:

$$dp_m \approx \frac{p_m}{l} dz$$

Тогда вращательный момент, действующей со стороны первой стрелки на элемент второй стрелки:

$$d\vec{M} = [dp_m \vec{r}, \vec{B}] = \vec{k}(dp_{mx} \cdot B_z - dp_{mz} \cdot B_x) \quad (11)$$

$$dp_{mx} \cdot B_z = dp_m \cdot B_z \cdot \sin \varphi \approx \frac{p_m \cdot \varphi}{l} \cdot B_z dz$$

$$dp_{mz} \cdot B_x = dp_m \cdot B_x \cdot \cos \varphi \approx \frac{p_m}{l} \cdot B_x dz$$

Вычислим интегралы:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} B_z dz = \dots = \frac{\mu_0 \cdot p_m}{2\pi \cdot x^2} \quad (12)$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} B_x dz = 0 \quad (13)$$

Тогда вращательный момент будет:

$$M \approx \frac{\mu_0 \cdot p_m^2}{2\pi \cdot l x^2} \cdot \varphi \quad (14)$$

То есть $\omega_6 \sim \frac{1}{r}$ при условии наличия сильной связи между магнитными стрелками.

Эксперимент

Подвесим две стрелки на нитях на различных расстояниях r . Будем выводить одну из стрелок из равновесия, придерживая другую. Замерим n биений за некоторое время t . Найдем период биений $T_6 = \frac{t}{n}$.

r , см	17.5	19	20	22	23	24.5	25	26	27	28	30	32	33	35
t , с	14.35	12.37	13.23	14.41	11.28	16.07	16.72	13.26	14.13	15.92	13.68	7.65	17.4	20.25
n	5	4	4	4	3	4	4	3	3	3	2	1	2	2
T_6 , с	2.87	3.09	3.31	3.60	3.76	4.02	4.18	4.42	4.71	5.31	6.84	7.65	8.7	10.13
$\ln r$	2.86	2.94	3.00	3.09	3.14	3.20	3.22	3.26	3.30	3.33	3.40	3.47	3.50	3.56
$\ln T$	1.05	1.13	1.20	1.28	1.32	1.39	1.43	1.49	1.55	1.67	1.92	2.03	2.16	2.32

Таблица 1: Данные эксперимента

Построим график $\ln T(\ln r)$, углом наклона которого будет α в зависимости $T = C \cdot r^\alpha$

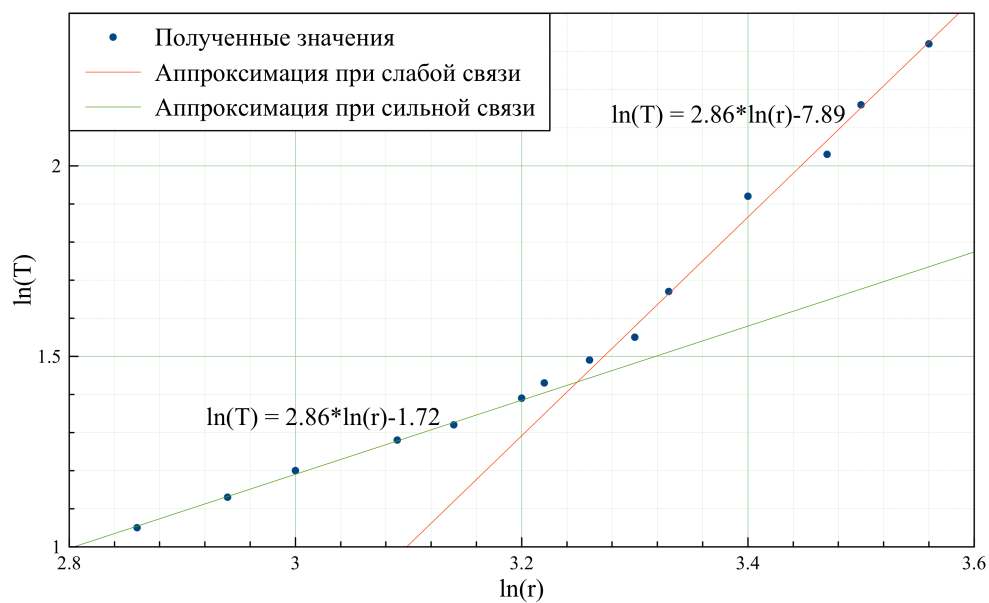


Рис. 2: Логарифмический график

Вывод

- При малых расстояниях между магнитными стрелками их можно рассматривать как связанные маятники с сильной связью и наблюдать явление биения, $\omega_b \sim \frac{1}{r}$.
- На больших расстояниях влияние поля стрелок друг на друга уменьшается, но биения до сих пор присутствуют с $\omega_b \sim \frac{1}{r^3}$.