Ruina de una compañía de seguros

Hernández Cano Alejandro   Pacheco Tovar Alejandra Citlalli

1. Introducción

1.1. Objetivos

Exponer la importancia del estudio de los procesos estocásticos para brindar una respuesta clara y fundamentada a problemáticas que buscan resolver las compañias aseguradoras y su eficiencia al modelar en tiempo continuo. En particular, construiremos una compañía aseguradora con el fin de exponer lo anterior mencionado a partir de una aplicación específica. Por último, se analiza la probabilidad de ruina y se simulan datos para aproximar dicha probabilidad en `R`.

1.2. Motivación

En el ámbito actuarial; en particular en el caso de las compañías aseguradoras, los ingresos y egresos dependen de fenómenos aleatorios. Por lo tanto, su rentabilidad está fuertemente ligada a la modelización de dichos fenómenos. Para una aseguradora, estudiar la probabilidad de ruina es un caso de interés; ya que, está relacionada con la supervivencia de la compañia. En dicha probabilidad el paso del tiempo juega un papel fundamental. Por lo anterior, es posible desarrollar un modelo estocástico bajo ciertos supuestos; como lo son, la reserva, el monto de primas, el tiempo de reclamación. etc y determinar de forma explícita la probabilidad de ruina.

1.3. Planteamiento del problema

Se busca determinar la probabilidad de hundimiento de una compañía aseguradora, así como el tiempo esperado de ocurrencia.

Una compañía aseguradora cuenta con un recurso financiero que le permite pagar todas las indemnizaciones futuras producto de obligaciones existentes. La indemnización es la cantidad de capital que se paga al beneficiario del contrato en el caso de ocurrencia de algún siniestro. El siniestro tiene asociada una probabilidad; ya que, no se sabe si ocurrirá o no la contingencia asegurada ni cuándo se producirá ésta. A su vez, también recibe inyecciones continuas de capital por medio de las primas. Por cada riesgo que asumen las aseguradoras a través de los productos que comercializan, cobran una prima, que equivale al precio del seguro.

Para propósitos de este proyecto, nos limitaremos a considerar los ingresos de una aseguradora como el monto total neto de las primas y los egresos como el monto total neto de las reclamaciones saldadas. Así la pérdida neta de la aseguradora es la diferencia entre sus egresos e ingresos.

Si una aseguradora cuenta con una reserva inicial fija el momento de ruina ocurre cuando la reserva se agota; es decir, cuando no cuenta con capital suficiente para cumplir con sus obligaciones.Esto sucede cuando la cantidad de perdidas acumuladas es mayor o igual a nuestra reserva. Por lo tanto; para el estudio de la probabilidad y la esperanza que deseamos encontrar es suficiente con analizar el comportamiento de las pérdidas netas en el tiempo.

2. Exposición de la problemática y del modelo de ruina

En esta sección se inicia el desarrollo de un modelo que nos permita estudiar las pérdidas asociadas a las reclamaciones por la ocurrencia de algún siniestro.

Construcción de una compañía aseguradora.

Supongamos que una aseguradora cuenta con una reserva inicial fija A. Dicha compañía recibe un flujo continuo de B unidades monetarias por primas pagadas a cierto tiempo, para fines prácticos supondremos que cada unidad de tiempo será de un año. Por otro lado, la compañía paga reclamaciones a un tiempo Poisson de tasa variable $\lambda(t)$. Definamos lo siguiente:

a) El importe de de las reclamaciones al tiempo i como $Y_i \geq 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, \}$ como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F.

b) Las reclamaciones se dan en momentos aleatorios del tiempo. Se define entonces T_n, el tiempo que transcurrió entre las $n-1$ y n-ésimas reclamaciones con $n \in 1, 2, \ldots$. Los tiempos entre reclamación siguen una distribución exponencial de paramétro

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) \cdot dx \tag{1}$$

Donde $\lambda(x)$ representa la frecuencia con la que llegan las reclamaciones. Además sabemos que la ocurrencia de un siniestro es independiente del resto de ocurrencias, en consecuencia, las reclamaciones son independientes y por lo tanto los tiempos entre reclamación también serán independientes.

Construcción del modelo

Consideramos a nuestro Proceso Poisson un proceso no homogéneo de parámetro $\lambda(t)$. En primer lugar se debe escoger una función $\lambda(t)$ que represente la frecuencia a la que llegan reclamaciones a la compañía y para esto vamos a suponer que para esta compañía la frecuencia es mayor a medida que pasa el tiempo. Si embargo, la frecuencia no crece indefinidamente pues es deseable que esté limitada por los recursos de la compañía aseguradora. Entonces vamos a suponer que a partir de un cierto tiempo la tasa se mantiene constante.
Bajo estos supuestos; una primera propuesta para la tasa de interés es la función logística, que es una tasa de crecimiento que se reduce cuando el modelo se acerca al máximo impuesto por los recursos del entorno pero esperamos que al tiempo $t = 0$ la tasa de reclamos también

sea 0; por lo tanto, vamos a proponer una función con un comportamiento similar a la función logística y que en $t = 0$ se anule. Es por esto que trabajaremos con la función:

$$\lambda(t) = c\tanh(t) = c\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

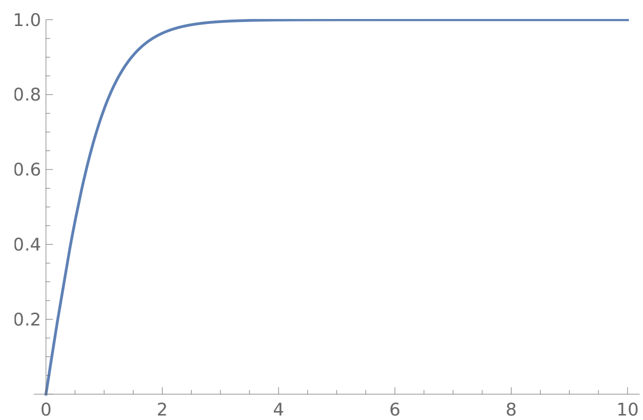

Figura 1: Función $\lambda(t) = c\tanh(t)$ con $c = 1$.

Consideremos la variable aleatoria $X_n = Y_n - bT_n$. Por un lado, Y_n nos indicará cuánto dinero se tuvo que pagar en la n-ésima reclamación. Además T_n nos dice cuánto tiempo pasó desde la reclamación anterior y al multiplicar esto por la tasa de dinero cada año, B, que recibe la compañía, entonces estamos recuperando exitosamente las ganancias totales en ese intervalo de tiempo. Por lo tanto X_n serán la pérdida total que la compañía enfrentó en ese lapso de tiempo (del cliente $n-1$ al cliente n). Definimos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$$

Esta variable aleatoria nos indica las pérdidas netas de la compañía hasta la n-ésima reclamación. Con este modelo ya podemos dar simples ecuaciones para nuestras preguntas iniciales.

Veamos ahora cómo calcular las pérdidas esperadas a la larga. Como ya vimos, S_n representa las pérdidas netas hasta la reclamación n. En la siguiente sección vemos que la función de distribución de los interarribos sigue la siguiente forma:

$$F_T(t) = 1 - (\cosh(t+T)\operatorname{sech} T)^{-c}$$

Donde T es la el tiempo de ocurrencia del evento anterior. De aquí podemos ver que:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} F_T &= \left(\lim_{T\to\infty} \cosh(t+T)\operatorname{sech} T\right)^{-c} \\
&= \left(\cosh t + \sinh t \lim_{T\to\infty} \tanh T\ \right)^{-c} \\
&= (\cosh t + \sinh t)^{-c}
\end{aligned}$$

$$= e^{-ct}$$

Es decir, la función que proponemos converge al proceso Poisson homogéneo de parámetro λ. Por otro lado, si consideramos $\mu = \mathbb{E}[Y_n]$, entonces $\mathbb{E}[X_n] = \mu - b\mathbb{E}[Y_n]$. Además, acabamos de dar la intuición de que $\lim_{n\to\infty} Y_n \xrightarrow{p} X$ con $X \sim \text{Exp}(c)$. Por lo tanto, $\mathbb{E}[Y_n] \to 1/c$ mientras $n \to \infty$. Por lo tanto, por la ley de los grandes números, las pérdidas netas que se enfrentarán en la compañía serán:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu - \frac{1}{bc}$$

De este resultado podemos concluir que, mientras $\frac{1}{bc} > \mu$, entonces se espera que la compañía floresca y tenga ingresos promedios positivos.

3. Resultados experimentales

Para hacer la simulación de nuestro proceso, lo primero que se hizo fue definir la función de tasa, dada por $c\tanh(t)$ con c un parámetro que nos dará una cota superior a nuestra tasa de llegadas de reclamos.

```r
# funcion de tasa de intensidad del proceso no homogeneo
lambda <- function(t, c)
        c*tanh(t)
```

Listing 1: Función de intensidad $\lambda(t) = c\tanh(t)$.

En cuento a nuestros pagos, supondremos que tienen una distribución μX^2 donde $X \sim \mathcal{N}(1, 0)$. Sabemos que $X^2 \sim \chi_1^2$ y por lo tanto podemos simular estos cobros usando:

```r
# simula un pago aleatorio con promedio especificado
simular_pago <- function(media)
        media*rchisq(1, df=1)
```

Listing 2: Toma una muestra de μX^2 con $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

El siguiente problema al que nos enfrentamos será la simulación de tiempos de interarribo. Para esto recordamos que la distribución de un proceso no homogéneo, dado que el tiempo del evento anterior fue T está dado por:

$$F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(T+\tau)\, d\tau\right)$$

Para nuestro caso particular, se puede probar que:

$$F_T(t) = 1 - (\cosh(t+T)\operatorname{sech} T)^{-c}$$

Como observación adicional, vemos que nuestra distribución converge a una función exponencial de parámetro c cuando $T \to \infty$. La siguiente figura compara las funciones de densidad de ambas, siendo la azul nuestra distribución y la naranja la exponencial de parámetro c. La función de densidad es:

$$f_T(t) = c \operatorname{sech} T \sinh(t+T)(\cosh(t+T) \operatorname{sech} T)^{-1-c}$$

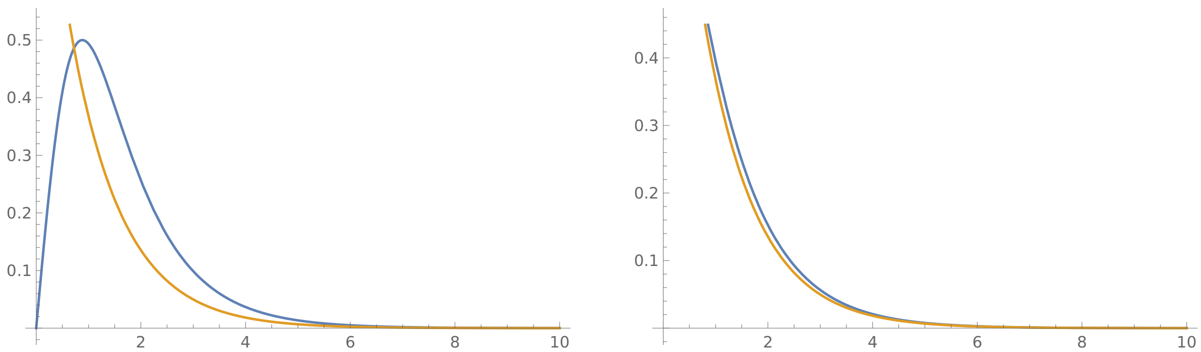

Figura 2: Función $f_T(t)$ con $c=1$ contra exponencial de parámetro $c=1$. A la izquierda $T=0$ y a la derecha $T=1$

Además, conociendo la función quantil $F_T^{-1}(p)$ de la distribución, podemos agarrar muestras aleatorias con tal distribución partiendo de una uniforme en $(0,1)$. En nuestro caso, está función está dada por:

$$F_T^{-1}(p) = \operatorname{arccosh}\left((1-p)^{-1/c} \tanh T\right) - T$$

Con estos datos, exitósamente podemos simular un interarribo:

```
# simula el tiempo de interarribo dado que el evento anterior sucedio
# al momento `t_ant`
simular_interarribo <- function(t_ant, c) {
        quantil <- function(p)
                acosh(cosh(t_ant)*(1-p)^(-1/c)) - t_ant
        sample_from(quantil)
}
```

Listing 3: Simular T_n

Donde el muestreo se hace usando:

```
# Recibe la funcion quantil de una distribucion y regresa una muestra
# que siga la misma
sample_from <- function (Finv)
        Finv(runif(1, 0, 1))
```

Listing 4: Muestreo de una variable aleatoria dado el quantil F^{-1}

Y ahora sí, podemos hacer la simulación de nuestro proceso Poisson

```r
# simula un pago aleatorio con promedio especificado
simular_pago <- function(media)
        media*rchisq(1, df=1)

# simula el proceso de poisson de la aseguradora por completo,
# por a lo mas `t_max` unidades de tiempo, empezando con `fondos` fondos
# pagando al rededor de `pago_promedio` por reclamo, recibiendo
# `ganancias` por unidad de tiempo continuas y teniendo `n_clientes` clientes
simular_proceso <- function(t_max, fondos, pago_promedio, ganancias,
                            n_clientes) {

        n <- 1 # el numero de reclamos actuales
        Ts <- NULL # los tiempos de interarribo
        Ys <- NULL # los pagos de reclamos
        Xs <- NULL # las perdida netas del n-esimo reclamo
        Ss <- NULL # las perdidas cumulativas que ha recibido la empresa

        while (sum(Ts) < t_max && (length(Ss) == 0 || max(Ss) <= fondos)) {
                Ys[n] <- simular_pago(pago_promedio)
                Ts[n] <- simular_interarribo(sum(Ts), n_clientes)
                Xs[n] <- Ys[n] - ganancias*Ts[n]
                if (n == 1)
                        Ss[n] <- Xs[n]
                else
                        Ss[n] <- Xs[n] + Ss[n-1]
                n <- n + 1
        }

        list(Ys, Ts, Xs, Ss)
}
```

Listing 5: Simular compañía de seguros

Para poder obtener datos más precisos, se hizo uso de una función auxiliar que repite la simulación hasta cumplir con una restricción empírica de convergencia:

```r
# repite el evento estocastico `simular` hasta converger en su
# valor por al menos `iter_no_change` iteraciones seguidas
converger <- function(simular, rtol = 0.001, atol = 0.0001,
                      iter_no_change = 10) {
        it <- 0 # iteracion actual
        est <- 0.0 # estimado actual
        est_ant <- 0.0 # estimado anterior
        it_nochange <- 0 # iteraciones sin cambio
```

```
        while (it_nochange < iter_no_change) {
                actual <- simular()
                est_ant <- est
                est <- (est_ant*it + actual)/(it + 1)

                if (abs(est - est_ant) <= atol + rtol*abs(est_ant))
                        it_nochange <- it_nochange + 1
                else
                        it_nochange <- 0

                it <- it + 1
                print(paste("It:", it, "Estimacion:", est))
        }
        est
}
```

Listing 6: Convergencia de un evento estocástico

Con estas funciones y declarando constantes de prueba, podemos calcular la probabilidad de nuestro proceso, así como hacer algunas graficaciones de una simulación particular:

```
# ejecuta el proceso estocastico e imprime y muestra resultados
main <- function() {
        clientes <- 10
        fondos <- 10
        pago_promedio <- 1
        ganancias <- 0.99*clientes
        t_max <- 100

        # estima probabilidad
        simular <- function() {
                res <- simular_proceso(t_max, fondos, pago_promedio,
                 ↪  ganancias,
                                       clientes)
                max(res[[4]]) > fondos
        }
        prob <- converger(simular)
        print(paste("Probabilidad estimada:", prob))

        # muestra resultados de una ejecucion particular
        res <- simular_proceso(t_max, fondos, pago_promedio, ganancias,
         ↪  clientes)
        Ys <- res[[1]]
        Ts <- res[[2]]
        Xs <- res[[3]]
```

```
        Ss <- res[[4]]
        n <- length(Ys)

        # prepara plot
        tiempo = NULL
        for (i in 1:n)
                tiempo[i] <- sum(Ts[1:i])
        ingresos = numeric(n) + ganancias
        perdidas = Ys
        dinero = fondos - Ss
        print("Graficando una simulacion particular")
        plot(tiempo, dinero, type = "l", ylim = c(0, max(dinero)),
             xlab = "tiempo", ylab = "dinero", col = "blue", pch = 1)
        points(tiempo, ingresos, type = "l", col = "green", pch = 2)
        points(tiempo, perdidas, type = "s", col = "red", pch = 3)
        legend("bottomleft", legend = c("dinero", "ganancias", "perdidas"),
               col = c("blue", "green", "red"), pch = c(1,2,3))
        title("Resumen capital de aseguradora")
}

main()
```

Listing 7: Función principal de la simulación

Una salida obtenida fue:

```
"It: 1 Estimacion: 1"
"It: 2 Estimacion: 1"
<...>
"It: 305 Estimacion: 0.757377049180328"
"Probabilidad estimada: 0.757377049180328"
```

Con su respectiva gráfica:

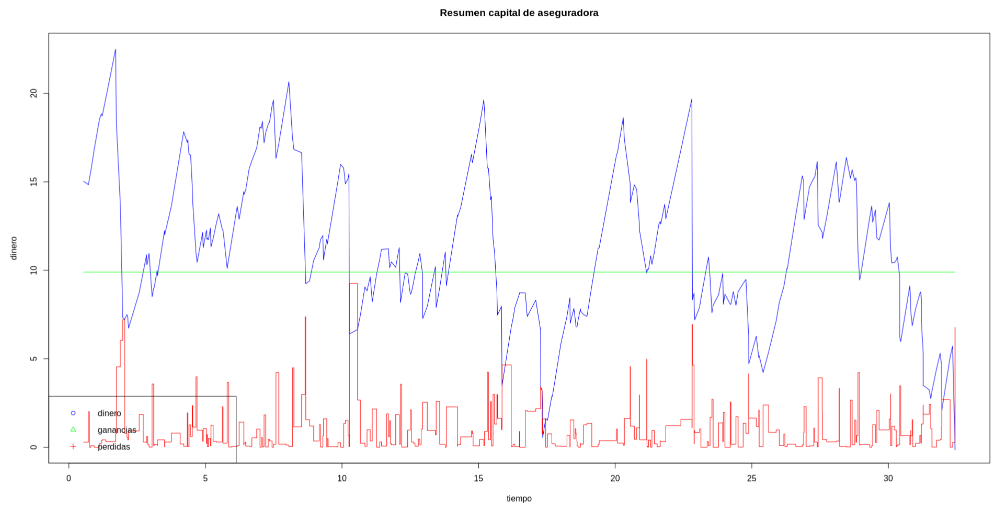

Figura 3: Salida del programa

Aquí podemos notar que $\mu = 1 > \frac{1}{bc}$ y por lo tanto se esperaba que la compañía cayera en ruina. Notamos que esto ocurrio una gran cantidad de veces (más de 75 %) tan solo en los primeros 100 años. Este resultado experimental concuerda con lo que se vio en la teoría en las secciones anteriores.

4. Conclusiones

En este trabajo realizamos el modelo teórico de una compañía de seguros. Bajo ciertos supuestos, llegamos a un proceso de Poisson no homogéneo para este modelo. Además, dimos ciertos resultados teóricos del comportamiento de nuestra cadena a la larga, i.e., para $t \to \infty$. Acompañamos este desarrollo con un código extenso para la simulación de dicho modelo, en el lenguaje `R`.

Dado que obtener resultados experimentales a tiempo infinito es una tarea complicada, acompañamos nuestro código con una simulación para una cantidad finita de tiempo y poder estimar la probabilidad de bancarrota en ese tiempo.

Partiendo de este trabajo teórico y los resultados experimentales que presentamos en este proyecto, se podría hacer un trabajo mucho más extenso para poder cubrir casos no contemplados, quitar limitaciones e incluso expandir el alcance. Por ejemplo, se podría desarrollar para un número variable de individuos, o una tasa más cercana a lo que se podría observar en la realidad, que consideramos las limitaciones más grandes de nuestro modelo.

Nuestra función de tasa planteada $c \tanh(t)$ sirve para obtener resultados precisos al inicio de la compañía, pero cuando el tiempo aumenta, converge al proceso Poisson estándar, de parámetro c. Esto está parcialmente justificado, pues a la larga es más difícil obtener información precisa sobre los accidentes que podrían sufrir accidentes. Por otro lado, el número de clientes fue considerado constante y esta suposición compromete la integridad del modelo. Se consideraría modificar esta suposición en primera instancia, aunque el modelado cambia mucho y se sale del enfoque del trabajo.

5. Bibliografía y referencias

- J.R Norris. (1998). Markov Chains . University of Cambridge: Cambridge University Press.
- Sandoya, Fernando; Matemáticas Actuariales y Operaciones de seguros; segunda edición; ISBN: 978-9978-310-46-5; ESPOL; 2007

A. Obtención de expresiones

Para obtener los resultados de $F_T(t)$ y $F_T^{-1}(t)$ se utilizó `Mathematica`:

```
In[1]:= \[Lambda][t_, c_] = c*Tanh[t]

Out[1]= c Tanh[t]

In[2]:= F[t_, T_, c_] =
         1 - Exp[-Integrate[\[Lambda][\[Tau] + T, c], {\[Tau], 0, t},
             Assumptions -> {T \[Element] \[DoubleStruckCapitalR],
               t \[Element] \[DoubleStruckCapitalR], T >= 0, t >= 0}]]

Out[2]= 1 - (Cosh[t + T] Sech[T])^-c

In[3]:= f[t_, T_, c_] = D[F[t, T, c], t]

Out[3]= c Sech[T] (Cosh[t + T] Sech[T])^(-1 - c) Sinh[t + T]

In[4]:= Q[p_, T_, c_] =
         Function[y,
           t /. Solve[F[t, T, c] == y, t, Reals,
              Assumptions -> {0 < y < 1, c > 0}][[2, 1]]][p]

Out[4]= -T + ArcCosh[(1 - p)^(-1/c) Cosh[T]]
```