Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Исследования Операций

Курсовая работа студента 311 группы

«Война на истощение»

Выполнил:

студент 3 курса 311 группы

Ситникова Екатерина Евгеньевна

Научный руководитель:

д.ф - м.н., профессор

Новикова Наталья Михайловна

Заведующий кафедрой

Исследования Операций

д.ф-м.н., профессор ____________________ Ю. Г. Евтушенко

Москва, 2020

Содержание

1. Введение.

Война на истощение – это игра на уступки, в которой каждый игрок выбирает оптимальное и конкретное время, до которого участник готов продолжать участие в конфликте. Это полезно при моделировании соревнований за пищу среди животных, забастовок, гонок вооружений, выхода из олигополии и других видов спора.

Считается, что официально термин «борьба на истощение» впервые ввел британский генетик и теоретический биолог-эволюционист John Maynarad Smith (1976). Ученый использовал методы теории игр при моделировании ситуаций из биологии, в частности эволюционной биологии и теории сигналов.

Война на истощение представляет собой борьбу, в процессе которой противники становятся слабее с течением времени. Например, если интерпретировать борьбу как конфликт между животными, это означает, что два или несколько представителей популяции начинают бороться за ценный приз (еду, возможность размножаться, укрытие и тд.). При этом стоимость соревнования пропорциональна времени, проведенному в конфликте, потому что участник мог затратить его на поиск сопоставимого приза в другом месте с большим шансом заполучить желаемое или конкуренты долго были уязвимы для нападения хищников.

Такая модель схожа с моделью аукционов второй цены, где игроки решают, какую ставку они готовы сделать с учетом их предпочтений. Затем победитель платит сумму, равную второй по величине ставке. Например, в случае двух участников победитель платит минимальную из двух величин.

Стоит заметить, что и в настоящий момент эта тема представляет собой актуальное и перспективное направление исследований. Есть немало сфер деятельности, в которых возможно применение подобных моделей. Например, в политике: часто можно наблюдать конфликт между двумя странами или коалициями стран. В этом случае справедлива модификация классической модели борьбы на истощение и представление примера как теоретико-игровую модель соперничества с функциями полезности, зависящими от продолжительности конфликта, и соответствующими стратегиями. Помимо этого, можно также рассмотреть соперничество двух фирм на рынке за возможность раньше конкурента создать и запатентовать изобретение, или случай выхода фирмы с рынка, на котором рыночная власть описывается как дуополия.

Целью работы является анализ данной игры. В результате, предполагается получить более глубокое понимание поведения игроков, а также распределения их выигрышей и потерь в конкретных случаях реализации.

2. Формулировка задачи

Война на истощение (Paul R. Milgrom and Robert J. Weber, 1980).

Каждый из двух игроков стремится завладеть некоторым предметом. Ценность этого предмета для игрока i описывается величиной v_i. Победителем является тот, кто дольше остается агрессивным. Предполагается, что затраты у обоих игроков одинаковы и равны единицы. Стратегия x_i игрока i означает: «Я буду агрессивным до момента времени $t = x_i$, если противник не остановится в некоторый момент $x_j < x_i$; в последнем случае я остановлюсь в момент времени $x_j + \varepsilon$ для того, чтобы получить предмет с минимальными издержками».

2.1. Дискретный случай

Предполагается, что информация о выигрыше соперника не является частной. Иначе говоря, каждый из них знает, насколько ценной является награда для соперника. В такой модели существуют оптимальные по Парето вектора выигрышей, то есть ситуация, при которой ни один из участников не может улучишь свой выигрыш без одновременного ухудшения положения второго, а также множество равновесий по Нэшу, при котором ни одному из игроков не выгодно отклонятся от выбранной стратегии при условии, что другой придерживается старой.

Возникает следующая игра в нормальной форме:

$$X_1 = X_2 = [0; +\infty)$$

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} v_1 - x_2 \text{ при } x_2 < x_1 \\ -x_1 \text{ при } x_1 < x_2 \\ \frac{v_1}{2} - x_1 \text{ при } x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -x_2 \text{ при } x_2 < x_1 \\ v_2 - x_1 \text{ при } x_1 < x_2 \\ \frac{v_2}{2} - x_2 \text{ при } x_1 = x_2 \end{cases}$$

(при равенстве для определения победителя бросается монета).

Докажем, что наша игра имеет в точности три оптимальных по Парето вектора выигрышей, два из которых соответствуют равновесиям по Нэшу.

Для этого построим множество возможных выигрышей:

$$X_1 \times X_2 = X$$

$$U(x) = \{U = (u_1, u_2) | u_1 = u_1(x), u_2 = u_2(x), x \in X\}$$

$U(x)$ представляет собой некоторую область на координатной плоскости (u_1, u_2).

Для того, чтобы его изобразить, попробуем найти зависимость между функциями выигрышей игроков. Заметим, что кусочно-непрерывные функции u_1, u_2 являются линейными и убывающими. Соответственно, зависимость между ними будет также аффинной. Чтобы ее построить на координатной плоскости (u_1, u_2), нам достаточно взять любые две точки и по ним восстановить линейную функцию $u_2(u_1)$.

1) $x_1 = x_2$:

x_1	x_2	u_1	u_2
0	0	$\frac{v_1}{2}$	$\frac{v_2}{2}$
1	1	$\frac{v_1}{2} - 1$	$\frac{v_2}{2} - 1$

Следовательно, $u_2 = u_1 + \frac{v_2 - v_1}{2}$. При этом вектор выигрыша $(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2})$ будет соответствовать точке максимума.

2) $x_1 < x_2$:

x_1	x_2	u_1	u_2
0	1	0	v_2
1	3	-1	$v_2 - 1$

В данном пункте получаем следующую зависимость: $u_2 = u_1 + v_2$. Максимум на выбранном множестве будет в точке $(0, \varepsilon), \varepsilon > 0$, что соответствует вектору выигрыша $(0, v_2 - \varepsilon)$.

3) $x_2 < x_1$:

x_1	x_2	u_1	u_2
2	0	v_1	0
5	2	$v_1 - 2$	-2

То есть $u_2 = u_1 - v_1$, а максимум будет в точке $(\varepsilon, 0), \varepsilon > 0$, что соответствует вектору выигрыша $(v_1 - \varepsilon, 0)$.

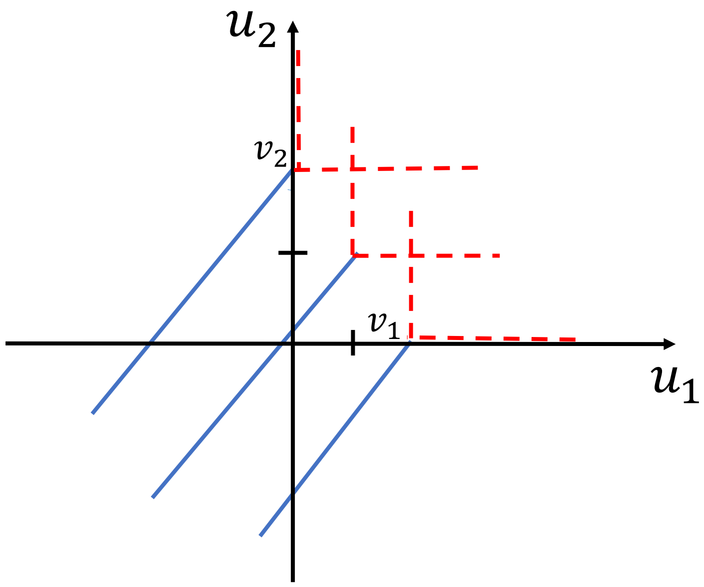

Рис. 1. Множество возможных выигрышей.

Множество парето-оптимальных выигрышей - это «северо - восточные» точки множества U(x). Таких точек только три, что следует из графического представления (рис. 1).

Таким образом, игра имеет три оптимальных по Парето вектора выигрышей: $(0, v_2 - \varepsilon), (\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}), (v_1 - \varepsilon, 0)$.

Теперь найдем множество равновесий Нэша NE(G) в нашей игре $G = (X_1, X_2, u_1, u_2)$. Для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} u_1(x_1^*, x_2^*) = \max\limits_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2^*) \\ u_2(x_1^*, x_2^*) = \max\limits_{x_2 \in X_2} u_1(x_1^*, x_2) \end{cases}$$

$\max\limits_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2^*) = \max\{0, v_1 - x_2^*\}$

$\max\limits_{x_2 \in X_2} u_2(x_1^*, x_2) = \max\{0, v_2 - x_1^*\}$

В равновесии по Нэшу каждый игрок рассматривает стратегии своего соперника как экзогенно заданные и максимизирует свою функцию выигрыша на множестве своих стратегий. В данном пункте мы предположили, что информация о цене противника не является конфиденциальной, поэтому для дальнейшего исследования NE – исходов нужно рассмотреть разные случаи взаиморасположения v_1 и v_2.

1) Если $v_1 < v_2$, то первому игроку не выгодно вступать в сражение, так как второй сможет дольше оставаться «в плюсе», а следовательно, и дольше оставаться агрессивным, поэтому стратегия $(0, v_2)$, соответствующая вектору выигрыша $(0, v_2 - \varepsilon)$, входит в множество NE(G). Решением системы в данном пункте будет так же точка $(v_2, 0)$, так как:

$$\begin{cases} u_1(v_2, 0) = v_1 \geq \max\limits_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, 0) = \max\{0, v_1 - 0\} = v_1 \\ u_2(v_2, 0) = 0 \geq \max\limits_{x_2 \in X_2} u_2(v_2, x_2) = \max\{0, v_2 - v_2\} = 0 \end{cases}$$

А выигрыш составит $(v_1 - \varepsilon, 0)$.

2) Если $v_2 < v_1$, то рассуждая аналогично, получаем два равновесия по Нэшу: $(v_1, 0)$ и $(0, v_1)$, которые дают вектора выигрышей $(v_1 - \varepsilon, 0)$ и $(0, v_2 - \varepsilon)$ соответственно.

$$\begin{cases} u_1(0, v_1) = 0 \geq \max\limits_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, v_1) = \max\{0, v_1 - v_1\} = 0 \\ u_2(0, v_1) = v_2 \geq \max\limits_{x_2 \in X_2} u_2(0, x_2) = \max\{0, v_2 - 0\} = v_2 \end{cases}$$

3) Если $v_2 = v_1 = v$, то равновесными стратегиями будут точки (a, 0) и (0, a), где $a \geq v$:

$$\begin{cases} u_1(a, 0) = v \geq \max\limits_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, 0) = \max\{v, 0, \frac{v}{2}\} = v \\ u_2(a, 0) = 0 \geq \max\limits_{x_2 \in X_2} u_2(a, x_2) = \max\{0, v - a, \frac{v}{2} - a\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(0, a) = 0 \geq \max\limits_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, a) = \max\{0, v - a, \frac{v}{2} - a\} = 0 \\ u_2(0, a) = v \geq \max\limits_{x_2 \in X_2} u_2(0, x_2) = \max\{v, 0, \frac{v}{2}\} = v \end{cases}$$

Так как игроки могут ставить до бесконечности много, то и вариантов таких стратегий столько же, но при любом выборе параметра $a \geq v$, как было показано выше, соответствующие значения выигрышей не меняются - это $(v - \varepsilon, 0)$ и $(0, v - \varepsilon)$.

Мы получили, что наша игра G имеет два оптимальных по Парето NE-исхода с различными векторами выигрышей, значит, по лемме, в игре G имеет место борьба за лидерство. Следовательно, каждый из игроков заинтересован первым заявить момент времени, до которого он будет агрессивным, чтобы получить максимальный выигрыш.

Следующим шагом проанализируем стратегии игроков в NE - исходах. Пусть $\widetilde{x_1}$ - осторожная стратегия 1-го игрока. Тогда по определению:

$$\min_{x_2 \in X_2} u_1(\widetilde{x_1}, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2)$$

$$W(x_1) = \min_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2) = \min\{v_1 - x_1, -x_1, \frac{v_1}{2} - x_1\}.$$

Построим график функции W(x_1), из которого получим, что max W(x_1) = 0.

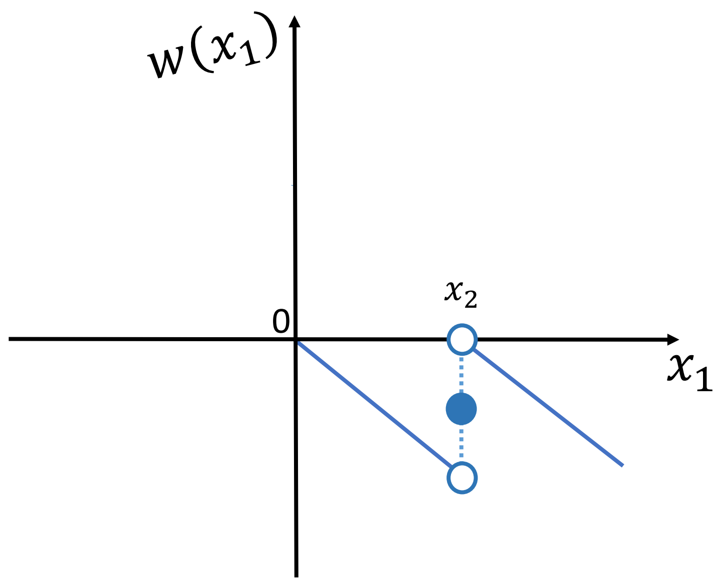

Рис. 2. W(x_1) = $\min_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2)$

При этом $\min_{x_2 \in X_2} u_1(\widetilde{x_1}, x_2) = -\widetilde{x_1}$, следовательно , $\widetilde{x_1} = 0$.

Никто из участников войны на истощение не знает, сколько ему придется заплатить за предмет спора и сколько он получит в конце игры, до момента ее завершения.

Наличие элемента неопределенности предполагает, что может возникнуть необходимость в оценке риска, обусловленного стратегией предложения времени капитуляции, которое использует каждый игрок.

Риск в данной игре действительно существенен и заключается в том, что при определенных условиях победителю придется платить больше истинной ценности предмета для него. Например, если провести аналогию с биологической моделью, в которой два животных борются за еду, это означает, что победитель за время соревнования истратил слишком много сил и выигранная пища уже не восполнит необходимое для его функционирования количество энергии и питательных веществ.

Не приемлющий риск игрок предпочтет использовать свою осторожную стратегию, так как в этом случае им движет стремление огранить свои потери, а не максимизировать выигрыш. Но другие участники могут иметь стимулы к отклонению от такого выбора, связанные с возможностью получения большего выигрыша, но с риском проигрыша, то есть получения выигрыша меньшего, чем при применении осторожной стратегии.

Выше было показано, что единственной осторожной стратегией первого игрока является $\widetilde{x_1} = 0$, применение которой дает гарантированный выигрыш, равный 0. Аналогичный результат получается и для второго. Следовательно, во всех NE-исходах один из участников использует свою осторожную стратегию. Но как охарактеризовать в этом случае стратегию его противника?

Было доказано, что осторожная стратегия единственная. Если игрок ей не придерживается, значит, он использует стратегию, которая влечет для него какой-то риск, возможно, даже незначительный. Рассмотрим для определенности NE-исходы, соответствующие случаю $v_1 < v_2$, $(0, v_2)$ и $(v_2, 0)$.

Каждый игрок, принимая решение о выборе своего действия, учитывает интересы и возможные цели своего соперника, влияющие на исход игры. Но невозможно отрицать, что и другие факторы, например, как социальное воздействие, также оказывают свое влияние на предпочтения участников конфликта. Для наглядности последующих размышлений предлагаю в рассматриваемых исходах встать на место игрока, который решил не придерживаться осторожной стратегии и оценить риск его выбора.

1) Исход $(0, v_2)$.

Второй игрок решает выбрать своей стратегией v_2. Для оценки риска ему нужно исключить неопределенность и посмотреть, что он получит в каждом из случаев.

Если игрок решает не придерживаться своей осторожной стратегии, то ему стоит быть агрессивным до конца и держаться до последнего. В предположении игры информация о цене не является конфиденциальной, поэтому в рассматриваемом случае первый игрок знает, что ценность приза для его соперника больше, чем для него самого, поэтому тот, скорее всего, будет дольше за него бороться, если не капитулирует до начала игры, то есть не выберет $x_2 = 0$. Если бы участники не могли выбирать время остановки таким образом, чтобы оно превышало цену их выигрыша, иначе говоря, чтобы $x_i > v_i$, то $x_1 \leq v_1 < v_2 = x_2$. В этом случае у второго игрока агрессивная стратегия не будет рискованной, потому что в любом случае при ее применении он получит положительный выигрыш. Но в условиях нашей задачи множество возможных стратегий представляет собой луч $[0, +\infty)$. Поэтому самым опасным для второго игрока будет ситуация, если первый или не захочет придерживаться рационального поведения и не будет стремиться максимизировать свой выигрыш и минимизировать потери, а предпочтет разорить своего соперника или погубить вместе с собой, или же решит воспользоваться своей рискованной стратегией. Поэтому, учитывая его мотивы, он выберет стратегию не сдаваться и постарается быть агрессивным дольше, чем его соперник. Следовательно, выберет $x_1 \geq v_2 = x_2$. Значит, с точки зрения второго игрока, выбор стратегии v_2 является очень рискованным шагом. Конечно, она может принести ему наибольший возможный выигрыш, но в силу неопределенности о стратегии противника она может также и полностью его разорить. В таком случае говорят, что игрок применяет свою *очень рискованную стратегию.*

2) Исход $(v_2, 0)$.

Результатом аналогичных рассуждений: v_1 - очень рискованная стратегия первого игрока. Однако, так как известно, что $v_1 < v_2$, то первому игроку нет смысла выбирать своей стратегией v_1, и он решает пойти на еще более рискованный шаг. Выбрав своей стратегией v_2, в худшем случае он не только лишается всего, но и уходит в минус. Но при этом с ней у него есть шанс получить максимальный выигрыш. Поэтому v_2 - очень рискованная стратегия для второго игрока.

Рассматривая все остальные NE – исходы по аналогии, получаем, что в них один из участников использует свою единственную осторожную стратегию и получает гарантированный выигрыш, а другой – очень рискованную.

2.2. Абсолютно непрерывный случай

Теперь предположим, что v_1 и v_2 - две независимые равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины. Обозначим за F - распределение случайных величин, а за f - их плотность. Игрок i наблюдает v_i, но не наблюдает v_j. Множество его стратегий $\widetilde{X_i}$:

$$\widetilde{x_i} \in \widetilde{X_i} : \widetilde{x_i} \text{ измеримое отображение из [0,1] в } X_i.$$

Функции выигрыша определяются так:

$$\widetilde{u_i}(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} u_i(\widetilde{x_1}(v_1), \widetilde{x_2}(v_2))dv_1 dv_2.$$

Сколько же стоит ждать игроку с ценой v_i, прежде чем сдаться и уступить?

В данных условиях определим симметричное байессовское равновесие. Обозначим за $x_i(v_i)$ время остановки i игрока с ценой v_i. Также предположим, что функция определяющая оптимальное время остановки возрастающая и дифференцируемая. Введем функцию $y_i(x_i) = x_i^{-1}(x_i)$ для определения выигрыша, который получит игрок, если уступит в момент времени x_i. По свойству обратной функции, $y_i(x_i) = x_i^{-1}(x_i(v_i)) = v_i$. При этом, так как мы ищем симметричное равновесие и для обоих игроков продолжительность игры одинаковая, то нам нужно знать $y_j(x_i) = x_j^{-1}(x_i(v_i))$, что означает выигрыш, который получит j игрок, если игра закончится в момент времени x_i.

Если игрок капитулирует в момент времени $x_i < x_j$, то он получает выигрыш, равный (-x_i), а его соперник выиграет $(v_j - x_i)$. Функции выигрыша выглядят следующим образом:

$$u_i(v_1, v_2, x_1, x_2) = \begin{cases} v_i - x_j \text{ при } x_j \leq x_i \\ -x_i \text{ при } x_j > x_i \end{cases}$$

Ожидаемую полезность участника, который сдается в момент времени x_i, можно записать как матожидание выигрыша:

$$-x_i[1-F(y_j(x_i))] + \int\limits_0^{y_j(x_i)} (v_i - x_j) dF(y_j(x_j)) = -x_i[1-F(y_j(x_i))] + \int\limits_0^{y_j(x_i)} (v_i - x_j) f(v_j) dv_j.$$

Функции, определяющие время, когда игрок сдается, зависят только от цены. Так же в наших предположениях, они возрастающие, иначе говоря, чем больше цена выигрыша для участника, тем дольше он будет бороться за приз. По лемме о взаимной монотонности прямой и обратной функции следует, что и обратные функции тоже возрастающие. Рассмотрим первое слагаемое, которое соответствует случаю $x_i < x_j$. При таких значениях функций остановок $i-$ый игрок получает $(-x_i)$. Вычислим вероятность наступления этого события. Из вышесказанных замечаний по поводу прямой и обратной функции получаем следующую цепочку преобразований:

$$x_i < x_j \iff y_i < y_j \Rightarrow v_i = y_i(x_i) < y_i(x_j) < y_j(x_i) < y_j(x_j) = v_j.$$

$$\mathsf{P}(x_i < x_j) \iff \mathsf{P}(v_i < y_j(x_i)) \iff 1 - F(y_j(x_i)),$$

где $F(y_j(x_i))$ – функция распределения случайно величины v_i в точке $y_j(x_i)$. Другими словами, мы нашли вероятность того, что цена $i-$го игрока меньше, чем выигрыш $j-$ в момент завершения игры, а в силу сделанных предположений это равнозначно тому, что первый остановится раньше.

Второе слагаемое соответствует случаю $x_i \geq x_j$, при котором $j-$ый участник капитулирует раньше, и $i-$ый игрок получит $(v_i - x_j)$.

Участник конфликта i стремится максимизировать свою ожидаемую полезность, учитывая стратегию соперника $x_j(\cdot)$. Поэтому значения v_i, x_i будем выбирать исходя из максимизации следующей формулы:

$$\max_{x_i}\{ \int\limits_0^{y_j(x_i)} (v_i - x_j) f(v_j) dv_j - x_i[1 - F(y_j(x_i))]\}.$$

Используя условие оптимальности первого порядка, продифференцируем выражение по x_i и приравняем к нулю:

$$(v_i - x_j)f(y_j(x_i))y_j'(x_i) - [1 - F(y_j(x_i))] + f(y_j(x_i))y_j'(x_i))x_i = 0 \tag{1}$$

В силу симметрии мы имеем $x_j(\cdot) = x_i(\cdot) = x(\cdot)$, в силу равновесия - $v_i = v_j = v$, а по свойству обратной функции $y_j(\cdot) = y_i(\cdot) = y(\cdot) = x^{-1}(x(v)) = v$, следовательно, (1) можем переписать как:

$$y_j'(x_i)v_i f(y_j(x_i)) - [1 - F(y_j(x_i))] = 0 \iff y'(x) = \frac{1 - F(y(x))}{vf(y(x))} = \frac{1 - F(v)}{vf(v)}.$$

Используя формулу для производной обратной функции, т.е $y'(x) = \frac{1}{x'(v)}$, получаем:

$$x'(v) = \frac{vf(v)}{1 - F(v)}.$$

А симметричным байессовским равновесие будет:

$$x(v) = \int\limits_0^v \frac{zf(z)}{1 - F(z)} dz \tag{2}$$

Мы получили общий вид формулы. В нашем случае известно, что случайные величины распределены равномерно на [0, 1], поэтому в (2) заменим $F(z) = z, f(z) = 1$ и проинтегрируем:

$$x(v) = -v - ln(1 - v) \tag{3}$$

Заметим, что при использовании игроками равновесных стратегий (3) реализуются войны сколь угодно большой протяженности во времени. Длительность зависит от цены, если устремить ее к 1, то получим:

$$\lim_{v \to 1^+} [-v - ln(1 - v)] = \infty$$

$$\lim_{v \to 1^-} [-v - ln(1 - v)] = \infty$$

При этом математическое ожидание длины войны конечно:

$$\mathsf{E}(x) = \int\limits_0^1 [-v - ln(1 - v)] dv = \frac{1}{2}.$$

В результате получаем:

1) каждый из игроков рад ждать до бесконечности много, если его сигнал приближается к верхней границе, но при этом ценность его выигрыша далека от бесконечности;

2) если не ограничивать сверху множество возможных стратегий, то у участников может возникнуть мотивация ставить больше, чем стоит для них объект. И в случае, когда этой мотивации поддадутся все игроки, то даже победитель останется в минусе.

3. Заключение

Модель войны на истощение или ее модификации применимы для описания ситуаций из различных областей, включая экономику, биологию, политологию и других сфер, имеющих отношение к моделированию конфликтов, например, военных.

Актуальность этого направления характеризуется множеством исследовательских статей, написанных по теме типа борьбы на истощение за последнее время. В этой работе рассматриваются два частных случая: дискретное и абсолютно непрерывное распределение цен участников. При этом вычисляются и анализируются равновесные и оптимальные стратегии, что помогает улучшить понимание поведения игроков, определить мотивы выбора определенного хода.

4. Библиография.

1) Nalebuff B., Riley J. 1984. "Asymmetric Equilibria in the War of Attrition".

2) Milgrom, P. R., and R. J. Weber. 1985. "Distributional Strategies for Games with Incomplete Information".

3) Herve Moulin. 1981. "Theorie des jeux pour L'economie et la politique".

4) Yuk-fai Fong, Ronald Peeters, Daniela Puzzello, Javier Rivas and Jan Wenzelburger. 2001. "The B.E. Journal of Theoretical Economics".