**Číselné sústavy - 1. týždeň**

Cieľom tohto cvičenia je, aby sme si:

* oprášili znalosti z číselných sústav
* precvičili prevody medzi nimi

**História vzniku číselných sústav**

Už oddávna sa ľudia snažili vyjadriť čísla pomocou znakov. Prvé historické záznamy čísel sa objavili už u starých Sumerov, ktorí používali klinové písmo. Využívali 60-tkovú sústavu. Tento systém používame dodnes pri určovaní hodín a uhlov. To je príklad nepozičnej číselnej sústavy.

Myšlienka pozičnej číselnej sústavy vznikla pravdepodobne v Číne. Z Číny sa tento číselný systém dostal do Indie. Tu sa zdokonalil tak, ako ho poznáme dnes. Odtiaľ sa rozšíril do arabských krajín okolo r. 773 n.l. Arabskí matematici pridali do systému desatinnú časť. Takýto číselný systém bol prinesený do Európy až v 12. storočí.

**Číselná sústava**

Číselná sústava je konečný počet rôznych číslic, resp znakov, ktoré sa dajú kombinovať podľa presných syntaktických pravidiel. Týmto kombináciam je priradený jednoznačný kvantitatívny význam. Podľa toho poznáme číselné sústavy *pozičné(polyadické)* , *polopozičné* (rímska sústava), *nepozičné* (sústava zvyškových tried).

Ďalej sa budeme zaoberať iba pozičnými číselnými sústavami.

Dohodnutá terminológia:

**Číslica** – dohodnutý grafický znak používaný na zápis čísel (napr. 5)  
**Číslo** – postupnosť číslic zostavená podľa určitých pravidiel a vyjadrujúca kvantitu (napr. 525)  
**Základ číselnej sústavy** - číselný zápis, ktorý udáva počet rôznych možných číslic v číselnej sústave (napr. základ desať je 10 a určuje 10 rôznych desiatkových číslic)

**Najčastejšie používané číselné sústavy**

**Desiatková** číselná sústava: z = 10, číslice 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9  
**Osmičková** číselná sústava: z = 108 , číslice 0,1,2,3,4,5,6,7  
**Dvojková** číselná sústava: z = 102 , číslice 0, 1  
**Šestnástková** (hexadecimálna) sústava: z = 1016 , číslice 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E, F

Poradie (pozícia) číslice v zápise čísla má svoju **váhu** a nie je ľubovoľné.

**Príklad**

***desiatkové číslo*** **525** = **5** x 102 + **2** x 101 + **5** x 100 je polyadický zápis čísla

Hodnota čísla je viazaná na pozíciu jednotlivých číslic. Pozícia jednotlivých číslic v tomto príklade má váhu stoviek, desiatok a jednotiek (mocniny desiatky).

**Príklad**

***dvojkové číslo*** **1001**2 = **1** x 23 + **0** x 22 + **0**x 21 + **1** x 20

Vyjadruje desiatkovú hodnotu 8 + 0 + 0 + 1 = **9**10

Uvedieme tabuľku niekoľkých mocnín dvojky:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 20 = 1 | 26 = 64 | 212 = 4096 |
| 21 = 2 | 27 = 128 | 213 = 8192 |
| 22 = 4 | 28 = 256 | 214 = 16384 |
| 23 = 8 | 29 = 512 | 215 = 32768 |
| 24 = 16 | 210 = 1024 | 216 = 65536 |
| 25 = 32 | 211 = 2048 | 217 = 131072 |

**ÚLOHY**

**1. Vypočítajte desiatkovú hodnotu niektorých dvojkových čísel v 8-bitovom registri (Pozor, máme na mysli absolútne hodnoty, nie čísla so znamienkom).**

00000001  
00000010  
00000011  
00010110  
10010101  
11000110  
01101100  
01111111  
10000000  
11111111

**2. Vypočítajte desiatkovú hodnotu niektorých dvojkových čísel v 11 bitovom registri**

00100110011  
11001100000  
10000000000  
11111111111

**3. Vypočítajte desiatkovú hodnotu niektorých dvojkových čísel v 14 bitovom registri**

00100010010011  
10010001001000  
10000000000000  
11111111111111

**Príklad**

***osmičkové číslo*** **127**8 = **1** x 82 + **2** x 81 + **7** x 80

vyjadruje desiatkovú hodnotu 64 + 16 + 7 = **87**10

**ÚLOHY**

**4. Vypočítajte desiatkovú hodnotu osmičkových čísel**

234  
765  
106  
777

**Príklad**

***šestnástkové číslo*** **93**16 = **9** x 161 + **3** x 160

vyjadruje desiatkovú hodnotu 144 + 3 = **147**10

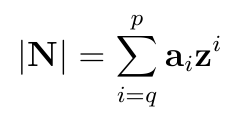
**ÚLOHY**

**5. Vypočítajte desiatkovú hodnotu šestnástkových čísel**

123  
2A1  
1BC  
DE

**Čo si zapamatať**

Ak číslo **N** predstavuje postupnosť číslic **ai** z danej číselnej sústavy, potom pre jeho absolutnú hodnotu platí:



pričom:

q môže byť < 0 (pôjde o racionálne číslo),

p >= 0

z > 1 ( nemá zmysel uvažovať sústavy o z = 0 alebo z = 1), zije váha číslice ai

Poznámka: budeme sa zaoberať iba s celými kladnými číslami (q = 0), hodnota p je konečná a je daná dohodnutou vnútornou konštrukciou počítača (registre, pamäť).

**Prevody medzi číselnými sústavami**

Budeme sa zaoberať prevodmi celých kladných čísel:

1. do desiatkovej sústavy
2. z desiatkovej sústavy
3. medzi sústavami o z ≠ 10

**Prevod do desiatkovej sústavy**

Tento prevod sme už vykonali v prechádzajucej kapitole, keď sme jednoducho vyčíslili hodnotu polynómu ∑aizi (v aritmetike desiatkovej sústavy).

**Príklad**

Skúste previesť 1320 do desiatkovej sústavy.

Uvedomme si, že to môže byť 13204, 13205,... Nech je to 13208.

Potom jednoducho 13208= **1** x 83 + **3** x 82 + **2** x 81 + **0** x 80 = 72010

**Príklad**

Podobne číslo 1011 môže byť dvojkové, osmičkové, ...

10112 = 1110 ale 10118 = 52110, alebo 101116 = 411310

**Príklad**

Nájdite desiatkovú hodnotu šestnástkového čísla FE

FE16 = 15 x 161 + 14 x 160 = 254

**Prevod z desiatkovej sústavy**

Prevod sa vykonáva postupným delením čísla základom číselnej sústavy, do ktorej sa číslo prevádza dovtedy, kým nie je podiel nula. Výpočet sa deje v aritmetike desiatkovej sústavy. Ukážeme na príklade.

5310 preveďme do štvorkovej sústavy

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 53 : 4 | = 13 zvyšok | **1** | ↑ |
| 13 : 4 | = 3 zvyšok | **1** |
| 3 : 4 | = 0 zvyšok | **3** |

Postupnosť zvyškov v opačnom poradí predstavuje zápis prevedeného čísla v požadovanej číselnej sústave 5310= 3114

**Príklad**

Preveďte 2310do sústavy o základe 2, potom 8, potom 16

Ukážeme prevod iba do dvojkovej sústavy.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 23 : 2 | = 11 zvyšok | **1** | ↑ |
| 11 : 2 | = 5 zvyšok | **1** |
| 5 : 2 | = 2 zvyšok | **1** |
| 2 : 2 | = 1 zvyšok | **0** |
| 1 : 2 | = 0 zvyšok | **1** |

2310= 101112  
2310 = 278  
2310= 1716

Vidíme, že čím je väčší základ sústavy, tým menší počet číslic je treba na vyjadrenie hodnoty čísla - dľžka zápisu je kratšia.

**ÚLOHY**  
Preveďte 4610 do sústavy o základe 2, potom 8, potom 16  
Preveďte 3810 do sústavy o základe 2, potom 8, potom 16

**Prevod medzi sústavami o z ≠ 10**

Zvyčajne sa robí prevod najskôr do desiatkovej (vyčíslením hodnoty polynómu) a z nej do požadovanej sústavy (delením základom sústavy, do ktorej sa prevádza). Tento spôsob je zvolený preto, aby sa matematické operácie vykonávali v desiatkovej aritmetike.

Venujme sa najbežnejším prevodom medzi sústavami o základe **2, 8, 16,** medzi ktorými je možné použiť jednoduché pravidlo.  
Ukážeme na príklade. Uvažujme dvojkové číslo:

00010000111100112

Ak číslo ***sprava*** rozdelíme po skupinách o troch čísliciach a každú skupinu vyhodnotíme ako osmičkové číslo, potom hodnota čísla v osmičkovej sústave bude:  
0 001 000 011 110 011 = 103638

Ak číslo ***sprava*** rozdelíme po skupinách o štyroch čísliciach a každú skupinu vyhodnotíme ako šestnástkové číslo, potom hodnota v šestnástkovej sústave bude:  
0001 0000 1111 0011 = 10F316

Ak chceme prevod čísla zo sústavy o základe 16 do 2 alebo z 8 do 2, potom budeme každú číslicu v danej sústave rozpisovať na 4 alebo 3 dvojkové číslice.

Napríklad:

1A616 = 0001 1010 0110  
7518 = 111 101 001

Poznámka: Uvedený postup sa nedá použiť na prevod medzi sústavami o základe 8 a 16 (nie je taký exponent e, aby platilo 8e = 16).

**ÚLOHY**

Napíšte tabuľku prevodov niektorých čísel medzi sústavami o základe 10, 2, 8, 16 Návod: Prvý stľpec čísla 0,1,2, ...16,20, 38, 100, druhý stľpec zodpovedajúce dvojkové čísla, tretí stľpec zodpovedajúce osmičkové, štvrtý stľpec zodpovedajúce šestnástkové čísla.

**Aritmetické operácie v dvojkovej sústave**

Z pohľadu používaných technických zariadení v počítači sa spracovávajú operácie **súčtu, rozdielu, násobenia a delenia dvoch binárnych čísel.**

**Súčet dvoch čísel**

Platia nasledujúce pravidlá:

0 + 0 =   0

0 + 1 =   1

1 + 0 =   1

1 + 1 = **1**0

           ↓

           (prenos do vyššsieho rádu)

**Príklad 1**

Spočítajme:

0 0 1 1 0 6  
 + 0 1 0 0 0 + 8  
 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_  
 0 1 1 1 0 14

**Príklad 2**

Máme spočítať dve 5-ciferné čísla:

0 0 1 0 0 4  
 + 0 0 1 1 0 + 6  
 <-- prenos do vyššieho rádu \_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 10  
  
 0 1 0 1 0 = 1010

**Príklad 3**

0 1 1 1 1 15  
 + 0 0 0 0 1 + 1  
 <-- prenos do vyššieho rádu \_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 16  
  
 1 0 0 0 0 = 1610

Zmyslom príkladov je ukázať jednak na daný počet cifier sčitovaných čísel (pretože neskôr treba definovať, čo to znamená preplnenie registra o pevnej dľžke) a jednak uvedomiť si šírenie prenosu do vyššieho rádu. Tento prenos sa jednoducho pripočíta k číslici vo vyššom ráde. V poslednom príklade vzniklo preplnenie 5-bitového registra pri sčitovaní kladných čísel, ktoré sú zobrazené napr. v doplnkovom kóde (zmenila sa hodnota najvyššieho rádu na 1). Ak však uvažujeme absolútne hodnoty, potom pretečenie vzniká vtedy, keď prenos zo súčtu vyjde mimo register.

**ÚLOHY**

Precvičte sčitovanie v 11-bitovom registri a v 14-bitovom registri.

10001011001  
+ 01101010001  
 ---------------  
  
 10010010010  
+ 00111001101  
 ---------------  
  
 00011111100000  
+ 11010000100100  
 ------------------