Постигая преобразование Фурье

Содержание

1. Ряд Фурье и преобразование Фурье

Рассмотрим непрерывную периодическую функцию f с периодом 2π. Предположим, что её можно представить в виде ряда:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = 2\pi\delta_{mn},$$

откуда получим простой способ определения коэффициентов c_n:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx = 2\pi c_n,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Такой ряд называется рядом Фурье функции f.

Если период функции отличается от 2π, то можно сделать замену переменной и получить

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\frac{in2\pi x}{L}}, \quad c_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L/2}^{L/2} f(x')e^{\frac{-in2\pi x'}{L}}dx'.$$

Для непериодических функций растянем период на всю прямую $\mathbb{R}$

$$c_n = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int\limits_{-L/2}^{L/2} f(x')e^{\frac{-in2\pi x'}{L}}dx'.$$

Пусть $k_n = 2\pi n/L,\ \Delta k = 2\pi/L$:

$$c_n = \lim_{\Delta k\to 0}\frac{\Delta k}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{-ik_n x'}dx'.$$

Вернёмся к ряду:

$$f(x) = \lim_{\Delta k\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Delta k e^{ik_n x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{-ik_n x'}dx'.$$

Нетрудно понять, что предел суммы – это интеграл, поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{-ikx'}dx'\right]e^{ikx}dk.$$

Преобразованием Фурье называется отображение

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Оно позволяет по «форме сигнала» $f(x)$ судить о его спектре $\tilde{f}(k)$. А чтобы собрать сигнал из его спектра пользуются обратным преобразованием Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk.$$

В дальнейшем нам понадобится понятие **скалярного произведения функций**, поэтому для начала разберём его.

2. Скалярное произведение функций

Для векторов понятие скалярного произведения вводится обычно следующим образом

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta_{ab}.$$

В ортонормированном базисе его можно записать в виде

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_i b_i,$$

Для функций можно ввести операцию, свойства которой будут очень похожи на свойства скалярного произведения векторов:

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)\,dx.$$

Заметим, что в этом контексте преобразование Фурье выглядит как матрица перехода от одного базиса к другому. Рассмотрим его действие на скалярное произведение.

3. Равенство Парсеваля

Представим в скалярном произведении двух функций одну из них через её Фурье-образ:

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^*(k) e^{-ikx} g(x)\, dx\, dk = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)\, dk = \langle \tilde{f}|\tilde{g}\rangle.$$

Скалярное произведение – инвариант преобразования Фурье. В этом прослеживается аналогия с обычными векторами, скалярное произведение которых является инвариантом преобразования базиса.

4. Соотношение неопределённостей

Один из фундаментальных результатов квантовой механики – соотношение неопределённостей

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

является свойством преобразования Фурье. Под неопределённостями здесь понимают среднеквадратичные отклонения сопряжённых координаты и импульса:

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle}, \quad \Delta p_x = \hbar\sqrt{\langle (k - \langle k\rangle)^2\rangle}.$$

Так как с корнями работать неудобно, перейдём к дисперсиям:

$$D(x)\cdot D(k) = \langle \psi(x)|(x - \langle x\rangle)^2|\psi(x)\rangle\langle\tilde{\psi}(k)|(k - \langle k\rangle)^2|\tilde{\psi}(k)\rangle.$$

Здесь функции ψ и $\tilde{\psi}$ положим нормированными на 1. Для удобства выполним преобразование координат:

$$x' = x - \langle x\rangle, \quad k' = k - \langle k\rangle,$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\phi(x') = e^{-i\langle k\rangle x'}\psi(x), \quad \tilde{\phi}(k') = e^{ik\langle x\rangle}\tilde{\psi}(k),$$

используя которую перепишем искомое произведение в виде

$$D(x)\cdot D(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\phi^*(x)\phi(x)\, dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2\tilde{\phi}^*(k)\tilde{\phi}(k)\, dk$$

или

$$D(x) \cdot D(k) = \langle x\phi | x\phi \rangle \langle ik\tilde{\phi} | ik\tilde{\phi} \rangle = \langle x\phi | x\phi \rangle \langle (\tilde{\phi'}) | (\tilde{\phi'}) \rangle,$$

где неявно используется равенство

$$(\tilde{\phi'}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi' e^{-ikx}\, dx = \left. \frac{\phi e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right|_{-\infty}^{+\infty} + ik\tilde{\phi} = ik\tilde{\phi}.$$

Пользуясь равенством Парсеваля, получаем

$$D(x) \cdot D(k) = \langle x\phi | x\phi \rangle \langle \phi' | \phi' \rangle.$$

Это ни что иное, как произведение квадратов двух норм. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\langle x\phi | x\phi \rangle \langle \phi' | \phi' \rangle \geq \left| \langle x\phi | \phi' \rangle \right|^2.$$

Рассмотрим внимательнее правую часть и проинтегрируем по частям:

$$\langle x\phi | \phi' \rangle = -\langle \phi' | x\phi \rangle - \langle \phi | \phi \rangle,$$

$$\langle x\phi | \phi' \rangle + \langle \phi' | x\phi \rangle = -1.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|\langle x\phi | \phi' \rangle| + |\langle \phi' | x\phi \rangle| \geq 1, \quad |\langle x\phi | \phi' \rangle| \geq \frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к неравенству Коши-Буняковского, имеем

$$D(x) \cdot D(k) \geq \frac{1}{4},$$

откуда получаем соотношение неопределённостей:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Совершенно аналогично можно доказать другое соотношение:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

На этом пока всё.