Решение уравнений на комплексной плоскости

Содержание

На прошлой неделе мы с Сергеем столкнулись с новой для нас задачей, о которой ранее не задумывались: потребовалось найти все комплексные корни уравнения $f(z) = 0$. В связи с новизной этой проблемы мы начали перебирать различные варианты решения, в основном неудачные.

1. Подход первый: сведение к системе уравнений

Функцию комплексного переменного можно рассматривать как пару функций двух действительных переменных переменных и свести исходную задачу к системе

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = 0, \\ v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = 0, \end{cases}$$

которую уже можно решать итерационными методами. Проблема заключается в том, что мы хотим найти все корни этого уравнения (в некоторой конечной области, разумеется). Итерационные методы же дают ответы в зависимости от начальных приближений. Поэтому этот способ нам не подходит.

2. Подход второй: точки неаналитичности функции

Одна из самых знаменитых формул ТФКП, формула Коши, имеет вид

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

где $f(z)$ аналитическая всюду внутри контура и точка z_0 лежит внутри контура.

Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{1}{f(z)}\, dz$$

Начнём с простого. Пусть $f(z) = z - z_0$. Тогда, если z_0 лежит внутри контура, то $I = 1$, а в противном случае $I = 0$.

Пойдём дальше и рассмотрим $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)$. Если контур охватывает сразу 2 корня то имеем

$$I = \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_1} = 0.$$

Уже не так хорошо.

Попробуем заменить 1 в числителе на некоторую функцию, например, рассмотрим

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C d\mathrm{Ln}\, f(z)$$

Так как $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$, то мы можем рассматривать изменения аргумента вдоль контура вместо интегрирования:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_C d\mathrm{Arg}\, f(z) = \frac{\Delta \mathrm{Arg}\, f(z)}{2\pi}.$$

Это удобнее для программирования, так как вблизи корня для нахождения подынтегрального выражения придётся делить на очень маленькие числа, что может приводить к ошибкам.

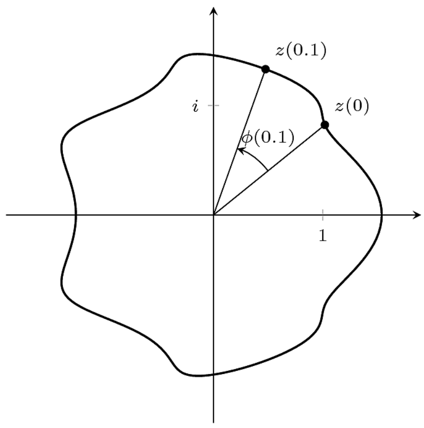
3. Подход третий: изменение аргумента

Представим контур, который окружает область в которой мы ищем корень, в виде параметрически заданной кривой $z(t)$, причём $z(0) = z(1)$.

Пусть точка 0 находится внутри контура. Определим непрерывную функцию

$$\phi(t) = \mathrm{Arg}\, z(t) - \mathrm{Arg}\, z(0),$$

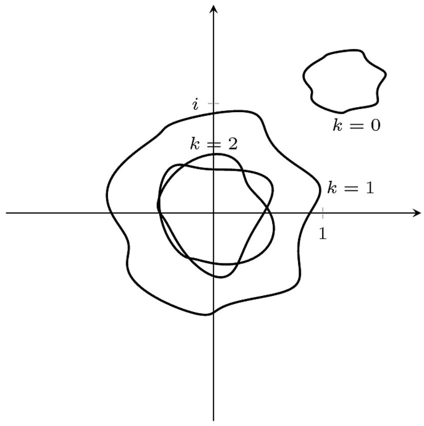
где значение аргумента выбирается в соответствии с условием непрерывности. Введём также понятие изменение аргумента вдоль контура



$$\Delta\phi = \phi(1) - \phi(0) = \phi(1).$$

Так как 0 находится внутри контура, то $\Delta\phi = 2\pi$.

Будем говорить, что контур k раз оборачивается вокруг 0, если $\Delta\phi = 2\pi k$. Аналогично, контур k раз оборачивается вокруг z_0, если $z(t) - z_0$ k раз оборачивается вокруг 0.



Рассмотрим теперь контур вида

$$z(t) = z_1(t) \cdot z_2(t).$$

Так как $\operatorname{Arg} z(t) = \operatorname{Arg} z_1(t) + \operatorname{Arg} z_2(t)$, то $\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2$, откуда для числа оборотов контура имеем

$$k = k_1 + k_2.$$

Пусть функция $f(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots(z-z_n)$ некоторый многочлен степени n. Контур $z(t)$ перейдёт в контур $w(t) = f(z(t))$, причём из вышесказанного следует, что число оборотов $w(t)$ вокруг нуля равно числу корней, оказавшихся внутри контура $z(t)$.

Так как все многочлены над комплексным полем можно представить в виде произведения линейных двучленов, то для любого многочлена число оборотов образа контура вокруг 0 равно числу корней, если кратные корни считать различными.

Этот способ работает и для функций, представимых в виде ряда Тейлора всюду внутри контура. В этот класс функций входят тригонометрические и гиперболические функции, а также оговоренные выше многочлены. Доказать это можно, воспользовавшись интегралом, к которому мы пришли в предыдущей части:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{\Delta\phi}{2\pi}.$$

Чтобы не усложнять доказательство, будем считать, что кратных корней у функции нет. Тогда используя формулу Коши, получим

$$I = \sum_{i=1}^{k} \lim_{z \to z_i} \frac{f'(z)(z - z_i)}{f(z)}$$

Для функций, представимых в виде ряда Тейлора везде внутри области получим

$$f(z) = f(z_i) + f'(z_i)(z - z_i) + o(z - z_i) = f'(z_i)(z - z_i) + o(z - z_i).$$

$$I = \sum_{i=1}^{k} \lim_{z \to z_i} \frac{f'(z)(z - z_i)}{f'(z_i)(z - z_i) + o(z - z_i)} = \sum_{i=1}^{k} 1 = k.$$

Следовательно, число корней

$$k = \frac{\Delta\phi}{2\pi}.$$

Теперь перейдём к более сложным функциям. Пусть $f(z) = \sqrt{z}$. Это двузначная функция, поэтому потребуем непрерывности отображения, какая бы ветвь не была выбрана. Тогда $z(t) = w(t) \cdot w(t)$. Отсюда, если корень внутри контура, то $\Delta\phi_w = \Delta\phi_z/2 = \pi$, $k = 1/2$. В противном случае так же получается 0. Обобщая, получаем, что для $f(z) = z^\alpha$ имеем $k = \alpha$ если корень внутри контура.

Рассмотрим, наконец, отображение

$$f(z) = \frac{z+1}{z}.$$

Если мы выберем в качестве контура окружность с центром в 0 и радиусом, меньшим 1, то $k = -1$. Если же взять такую же окружность с центром в -1, то $k = 1$. Если же контур охватывает обе этих точки, то $k = 0$. Поэтому если присутствуют отрицательные степени нулевое изменение аргумента не гарантирует отсутствия корней в области. Способ обойти это ограничение очевиден – привести всё выражение к общему знаменателю и рассматривать только числитель.

4. Алгоритм

Для удобства деления пополам, в качестве области, в которой будем искать корни, удобно выбрать прямоугольник. Алгоритм похож на поиск в ширину на графе:

1. Если внутри области есть корни, то положим исходный прямоугольник в очередь
2. Пока очередь не пуста и диагональ прямоугольника больше погрешности определения корня:
   (a) Возьмем прямоугольник из очереди
   (b) Разобъём его пополам вдоль длинной стороны
   (c) Для получившихся прямоугольников определим число корней внутри
   (d) Если корни внутри прямоугольников есть, то добавим их в очередь
3. Центры оставшихся в очереди прямоугольников и есть искомые корни

```
cmplxs roots(func f, cmplx z1, cmplx z2, double eps) {
    std::queue<rectangle> rects;

    // небольшие сдвиги начальных границ, чтобы корни
    // с меньшей вероятностью легли на границу областей
    rectangle r = {z1 - eps, z2 + eps * cmplx(0, 1)};

    auto n = numberOfRoots(f, r);
    if (n == 0)
        return {};

    rects.push(r);
    while (!rects.empty() && rects.front().diag() > eps) {
        r = rects.front();
        rects.pop();

```

```
        rectangle r1, r2;
        r.divide(r1, r2);

        auto n1 = numberOfRoots(f, r1);
        auto n2 = numberOfRoots(f, r2);

        if (n1) rects.push(r1);
        if (n2) rects.push(r2);
    }

    cmplxs roots;
    while (!rects.empty()) {
        auto z = rects.front().center();

        if (std::abs(z.real()) < eps)
            z = cmplx(0, z.imag());
        if (std::abs(z.imag()) < eps)
            z = cmplx(z.real(), 0);

        roots.push_back(z);
        rects.pop();
    }

    return roots;
}
```

Для определения числа корней внутри прямоугольника используется функция

```
unsigned int numberOfRoots(func f, cmplx z1, cmplx z2) {
    int n = 100;
    double angle = 0;
    cmplx zs[] = {z1, cmplx(z2.real(), z1.imag()),
                  z2, cmplx(z1.real(), z2.imag()), z1};
    double arg = NAN;
    for (int j = 0; j < 4; ++j)
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        auto z = (zs[j] * double(n-i) + zs[j+1] * double(i)) / n;
```

```
        double arg1 = std::arg(f(z));
        if (isnan(arg)) {
            arg = arg1;
            continue;
        }
        // дополняем старый аргумент до непрерывности с новым
        if (arg1 - arg > M_PI)
            arg += 2.0 * M_PI;
        if (arg - arg1 > M_PI)
            arg -= 2.0 * M_PI;
        angle += arg1 - arg;
        arg = arg1;
    }

    return std::abs((int) round(angle / M_PI / 2));
}
```

Код можно посмотреть здесь.