Инварианты. След тензора

Давно я сюда ничего не писал, надо разбавить это неловкое пятимесячное молчание. Разбавить чем-то простеньким, но со вкусом.

На днях мой товарищ Серёжа спросил у меня: «А с чего бы это вдруг след тензора 2 ранга является инвариантом преобразования координат? Все об этом говорят, но доказательства я не видел.» Ну мы с ним на скорую руку обрисовали кривенькое доказательство, но меня оно не очень-то устроило. И придумал я куда менее кривое доказательство.

Итак, пусть имеется тензор 2 ранга A, который в собственном базисе имеет диагональный вид

$$a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij},$$

а его след

$$\mathrm{Tr} A = \sum_i \lambda_i.$$

Рассмотрим теперь произвольное преобразование координат, определяемое матрицей T. При этом преобразовании $A' = TAT^{-1}$ и компоненты тензора будут иметь вид

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} t_{ik} a_{kl} t^{-1}_{lj} = \sum_{k,l} t_{ik} \lambda_k \delta_{kl} t^{-1}_{lj} = \sum_k \lambda_k t_{ik} t^{-1}_{kj},$$

а след

$$\mathrm{Tr} A' = \sum_{i,j} \sum_k \lambda_k t_{ik} t^{-1}_{kj} \delta_{ij} = \sum_k \lambda_k \sum_i t^{-1}_{ki} t_{ik} = \sum_k \lambda_k \delta_{kk} = \sum_k \lambda_k = \mathrm{Tr} A.$$

Что и требовалось доказать.