Ограниченная аналитическая функция

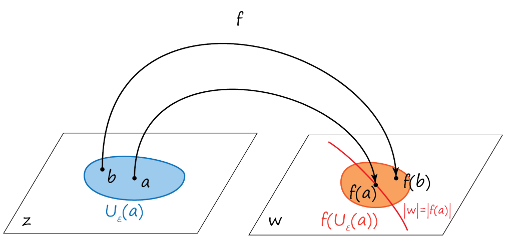
Продолжаем цикл «простенько и со вкусом». Сегодня рассмотрим задачу от всё того же Серёжи, которая мучила меня пару месяцев. Требуется доказать, что если аналитическая на всей комплексной плоскости функция ограничена ($|f(z)| < M$), то она всюду постоянна.

Начнём с понятия аналитической функции. Если мы имеем всюду аналитическую функцию $f(z)$, то она дифференцируема на всей комплексной плоскости. Поэтому малая окрестность любой точки плоскости z_0 конформно отображается на окрестность точки $w_0 = f(z_0)$:

$$f(z_0 + \varepsilon) = w_0 + f'(z_0)\varepsilon + o(\varepsilon),$$

растягиваясь при этом в $|f'(z_0)|$ раз.

Доказывать будем от противного. Итак, пусть у нас есть аналитическая функция $f(z) \neq \mathrm{const}$, которая вдобавок ограничена: $|f(z)| < M$. Если она ограничена, то в некоторой точке a её модуль $|f(z)|$ достигает своего наибольшего значения. Как мы уже знаем, функция $f(z)$ переводит окрестность точки a в окрестность точки $f(a)$, как показано на рисунке ниже.



Как мы видим, в окрестности точки $f(a)$ найдётся точка $w = f(b)$, для которой $|f(b)| > |f(a)|$. Но это противоречит нашему допущению о наибольшем значении $|f(z)|$. Следовательно, $f(z) = \mathrm{const}$.