Гармонический ряд по простым числам

Покажем, что ряд

$$\sum_{p-\text{простое}} \frac{1}{p}$$

расходится. Для этого воспользуемся дзета-функцией Римана и её представлением в виде бесконечного произведения:

$$\zeta(s) = \prod_{p-\text{простое}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Рассмотрим логарифм правой части при $s = 1$:

$$\ln \prod_{p-\text{простое}} \frac{1}{1-p^{-s}} = -\sum_{p-\text{простое}} \ln\left(1-p^{-s}\right) = \sum_{p-\text{простое}} \frac{1}{p} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p-\text{простое}} \frac{1}{np^n}$$

Последнее слагаемое можно оценить сверху:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p-\text{простое}} \frac{1}{np^n} < \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{nk^n} < \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

Таким образом,

$$\ln \zeta(1) < 1 + \sum_{p-\text{простое}} \frac{1}{p},$$

$$\sum_{p-\text{простое}} \frac{1}{p} > \ln \zeta(1) - 1.$$

Но $\zeta(1)$ равна сумме гармонического ряда, поэтому ряд

$$\sum_{p-\text{простое}} \frac{1}{p}$$

расходится.