Знакомство с дзета-функцией Римана

Содержание

1. Закон Стефана-Больцмана

Если вкратце, то интегральная плотность потока энергии теплового излучения определяется законом Стефана-Больцмана:

$$P = \sigma T^4,$$

где σ – эмпирически полученная постоянная Стефана-Больцмана. Эту же формулу можно получить из квантовых соображений, откуда можно получить теоретическое значение этой постоянной:

$$\sigma = \frac{k^4}{4c^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx.$$

Рассмотрим внимательнее интеграл в правой части. Попробуем его взять, разложиив в ряд:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}x^3}{1-e^{-x}}\,dx = \int\limits_0^\infty x^3\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\,dx.$$

Меняя местами интегрирование и суммирование, получаем

$$\sum_{n=1}^\infty\int\limits_0^\infty x^3e^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}\int\limits_0^\infty t^3e^{-t}\,dt = \Gamma(4)\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}.$$

Про гамма-функцию поговорим как-нибудь в другой раз, а вот на сумме остановимся подробнее. Для неё существует отдельное обозначение

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4} = \zeta(4).$$

Эта функция носит название *дзета-функции Римана*.

2. Определение

Дзета-функция Римана $\zeta(n)$ определяется выражением

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^n}$$

Особый интерес представляет определение значений этой функции через математические константы вроде π и e.

Рассмотрим сначала

$$\zeta(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

В правой части стоит гармонический ряд, который расходится. Поэтому можно считать, что $\zeta(1) = \infty$. При $k \leq 1$ ряд, вообще говоря, расходится. Но это не обязывает обращаться $\zeta(n)$ в бесконечность. Например,

$$\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2}.$$

Для расчёта в точках, в которых ряд не сходится, используется аналитическое продолжение. Именно поэтому появляются такие «парадоксы».

3. $\zeta(2)$. Доказательство Эйлера

Многочлен $P_n(x)$, множество корней которого $\{x_i\}$ можно представить в виде

$$P_n(x) = A \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Но что если мы возьмем функцию с бесконечным числом корней и попробуем разложить её в произведение? Одним из первых до этого додумался Эйлер и представил в таком виде синус:

$$\sin x = Ax(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi) \ldots$$

Константа определяется при помощи предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

откуда

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \ldots$$

Попробуем получить несколько первых членов ряда Маклорена, раскрывая произведения:

$$\sin x = x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{x^3}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^2} \frac{x^5}{\pi^4} \ldots$$

Сравним с рядом Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$

откуда

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Кстати, необязательно использвовать синус – подойдет и косинус:

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

Отсюда,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2),$$

откуда можно получить ответ.

Вообще говоря, бесконечные произведения, посроенные таким образом, не обязаны совпадать с функцией. Например, $e^z - 1$ имеет корни $2\pi n i$, однако, произведение

$$z\left[1 + \left(\frac{z}{2\pi}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{z}{2 \cdot 2\pi}\right)^2\right]\ldots$$

является нечётной функцией, и представляет из себя разложение $\operatorname{sh}(z/2)$.

Можно получить тот же результат при помощи ряда Фурье функции x^2

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx,$$

рассмотрев его значение в точке $x = \pi$.

Есть и другие способы, например интегральное представление и связь с числами Бернулли, о которых ниже.

4. $\zeta(4)$. Интегральное представление

Используя то же разложение Эйлера, можно получить значение $\zeta(4)$. Для этого заметим, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^2}.$$

Второе слагаемое справа мы уже втречали выше. Подставляя его значение, получаем

$$\zeta(4) = \zeta(2)^2 - 2\frac{\pi^4}{120} = \frac{\pi^2}{90}.$$

Этот результат можно получить и другими способами. Нетрудно убедиться, что

$$\sin(x)\sin(ix) = ix^2\left(1 - \frac{x^4}{\pi^4}\right)\left(1 - \frac{x^4}{2^4\pi^4}\right)\ldots$$

Также можно использовать ряд Фурье функции x^4

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4}\right)(-1)^n \cos nx$$

в точке $x = \pi$.

В самом начале статьи нами было получено

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \Gamma(4)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Обобщая для произвольного n, получаем интегральное представление:

$$\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\,dx}{e^x - 1}$$

5. Значения в других чётных точках

5.1. Через степени $\zeta(2)$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано для $\zeta(4)$, можно получить выражение для любого $\zeta(2m)$. Для начала получим $\zeta(6)$, возводя $\zeta(2)$ в куб:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^3=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}+3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m\neq k}\frac{1}{k^4}\frac{1}{m^2}+3!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m>k}\sum_{n>m}\frac{1}{k^2}\frac{1}{m^2}\frac{1}{n^2}$$

Сумму во втором слагаемом можно найти из следующих соображений:

$$\zeta(2)\zeta(4)=\zeta(6)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m\neq k}\frac{1}{k^4}\frac{1}{m^2},$$

а сумму из третьего слагаемого – при помощи следующего члена ряда Маклорена:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m>k}\sum_{n>m}\frac{1}{k^2}\frac{1}{m^2}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^6}{7!}.$$

Собрав всё вместе, получим

$$\zeta(2)^3=\zeta(6)+3(\zeta(2)\zeta(4)-\zeta(6))+\frac{3!\pi^6}{7!},$$

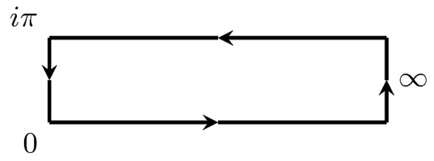
откуда

$$\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}.$$

Дальше становится всё сложнее и более громоздко, поэтому рассмотрим другие способы.

5.2. Вычисление интеграла

Для вычисления интеграла воспользуемся интегрированием по контуру в комплексной области. Выберем контур следующим образом:



Тогда

$$\oint\limits_C \frac{z^{n-1}\,dz}{e^z-1} = \int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{e^x-1} - \int\limits_0^\infty \frac{(x+i\pi)^{n-1}\,dx}{-e^x-1} - \int\limits_0^\pi \frac{i^n y^{n-1}\,dy}{e^{iy}-1} = 0.$$

Немного преобразуем:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{e^x-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (i\pi)^k \int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1-k}\,dx}{e^x+1} = i^n \int\limits_0^\pi \frac{(\cos y - 1 - i\sin y)y^{n-1}\,dy}{2(1-\cos y)}.$$

Сведём второй интеграл в левой части к первому:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{e^x+1} = \int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{e^x-1} - \int\limits_0^\infty \frac{2x^{n-1}\,dx}{e^{2x}-1} = (1-2^{1-n}) \int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{e^x-1}.$$

Обозначим $I_n = \Gamma(n)\zeta(n)$. Получаем

$$I_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (i\pi)^k (1-2^{1-n+k}) I_{n-k} = -i^n \left(\int\limits_0^\pi \frac{y^{n-1}\,dy}{2} + \int\limits_0^\pi \frac{iy^{n-1}\sin y\,dy}{2(1-\cos y)} \right).$$

Рассмотрим случай $n = 2m$ и выделим действительную часть:

$$I_{2m} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2k} (-1)^k \pi^{2k} (1-2^{1-2m+2k}) I_{2(m-k)} = (-1)^{m+1} \frac{\pi^{2m}}{4m},$$

откуда

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m}}{4(1-2^{-2m})(2m)!} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}\pi^{2k}}{(2k)!}\frac{2^{2m-1}-2^{2k}}{2^{2m}-1}\zeta(2m-2k).$$

Посчитаем несколько значений:

$$\zeta(2) = \tfrac{\pi^2}{4(1-1/4)\cdot 2} = \tfrac{\pi^2}{6},$$
$$\zeta(4) = -\tfrac{\pi^4}{4(1-1/16)\cdot 24} + \tfrac{\pi^2}{2}\tfrac{8-4}{16-1}\tfrac{\pi^2}{6} = -\tfrac{\pi^4}{90} + \tfrac{4\pi^4}{180} = \tfrac{\pi^4}{90},$$
$$\zeta(6) = \tfrac{\pi^6}{4(1-1/64)\cdot 720} + \tfrac{\pi^2}{2}\tfrac{32-4}{64-1}\tfrac{\pi^4}{90} - \tfrac{\pi^4}{24}\tfrac{32-16}{64-1}\tfrac{\pi^2}{6} = \tfrac{3\pi^6}{63\cdot 45} = \tfrac{\pi^6}{945}.$$

Но всё-равно хочется более короткой и выразительной формулы. Для этого свяжем зета-функцию и числа Бернулли.

6. Связь с числами Бернулли. Производящая функция

Вернёмся к бесконечному произведению

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Возьмём логарифм от обеих частей

$$\ln\sin x = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

и продифференцируем

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{2x}{\pi^2n^2}}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}},$$

а потом домножим на x и немного преобразуем:

$$x\frac{\cos x}{\sin x} = ix + \frac{2ix}{e^{2ix}-1} = 1 - 2\frac{x^2}{\pi^2n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}},$$

В левой части мы видим производящую функцию чисел Бернулли:

$$\frac{2ix}{e^{2ix}-1} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 2ix + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\frac{(2ix)^{2k}}{(2k)!}.$$

Пользуясь этим разложением и меняя порядок суммирования справа, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\frac{(2ix)^{2k}}{(2k)!} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}x^{2k},$$

откуда имеем

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{(2k)!}.$$

Вернёмся к функции $x\operatorname{ctg} x$:

$$x\operatorname{ctg} x = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}x^{2k}.$$

Отсюда нетрудно получить

$$-\frac{\pi x}{2}\operatorname{ctg}\pi x = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k}.$$

Так как

$$\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2},$$

то функция

$$G(x) = -\frac{\pi x}{2}\operatorname{ctg}\pi x = \sum_{k=0}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k}$$

является производящей функцией для значений дзета-функции в чётных положительных точках.

7. Продолжение следует

Про значения в нечётных точках известно немногое, и у меня пока нет идей на их счёт. В следующей части будут аналитическое продолжение, функциональное уравнение дзета-функции, а также немножко про нули и гипотезу Римана.