第十二章

> 1. 如果环 R 带乘法单位元 1，对任意 $a \in R$，请证明 $-a = (-1)a$。

证明： 根据分配律

$$a(1+(-1)) = a0\a + (-1)a = a0\(-1)a = -a + a0$$

同样根据分配律

$$a0 = a(0+0) = a0 + a0 = 2a0 = 0$$

故

$$(-1)a = -a + 0 = -a$$

> 2. 如果任取环 R 中的元素 x 都满足 $x^2 = x$，请证明环 R 是交换环。

证明: 任取a,b属于R中的元素

要证

$$ab = ba$$

即证

$$aabb = abab$$

因为

$$a^2b^2 = (ab)^2\ab = ab$$

故可得R为交换环

> 3. 请解释为什么 Z_n 在加法上的子群都是 Z_n 的子环。

对于任意 Z_n 在加法上的子群Z_n'

1. $Z_n' \neq \emptyset$,否则Z_n'不为子群
2. 任取$a, b \in {Z_n}'$，$ab = a + a + a + \cdots + a(b个a相加)$ 满足封闭性,故$ab \in {Z_n}'$
3. 对于任取非0的$a, b \in {Z_n}'$，有$-b \in {Z_n}'$,由封闭性得$a - b \in {Z_n}'$

> 14. 证明环 2Z 不与环 3Z 同构。

证明：假设环2Z与环3Z同构

则必有$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ 和 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

带入a=b=2

易得$\phi(ab) \neq \phi(a)\phi(b)$