第九章

> 5. 定义映射
>
> $$\varphi : G \longmapsto G$$
>
> 为:
>
> $$g \longmapsto g^2$$
>
> 请证明 ϕ 是一种群同态当且仅当 G 是阿贝尔群。

证明:

$$若\forall a, b \in G,当\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)，有(ab)^2 = a^2b^2$$

由消去律有

$$ba = ab$$

,得证G为阿贝尔群。

$$若有G为阿贝尔群，\forall a, b \in G,有ab = ba恒成立$$

$$\varphi(a) = a^2, \varphi(b) = b^2则\varphi(a)\varphi(b) = a^2b^2 = abab = (ab)^2 = \varphi(ab)$$

> 6.设
>
> $$\varphi : G \longmapsto H$$
>
> 是一种群同态。
>
> 请证明：如果 G 是循环群，则 ϕ(G)也是循环群；如 果 G 是交换群，则 ϕ(G) 也是交换群。

证明:

1. 假设G为循环群

$$\forall a \in G,有a^i = e成立$$

$$\because G \longmapsto H为群同态$$

故有

$$\varphi(a^i) = \varphi(a)\varphi(a)\cdots\varphi(a)$$

$$\varphi(a^i) = \varphi^i(a) = \varphi(e)$$

2. 假设G为交换群

$$\forall a, b \in G,有a^i = e, b^j = e成立$$

$$\because G \longmapsto H为群同态$$

故有

$$\varphi(ab)=\varphi(ba)$$

则

$$\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(b)\varphi(a)$$

> 7. 证明：如果 H 是群 G 上指标为 2 的子群，则 H 是 G 的正规子群。

即

$$[G:H]=2$$

$$\exists g\in G$$

1. 假设g在H中

$$\forall h\in H$$

由封闭性易得

$$gh\in H且hg\in H$$

则

$$gH=Hg$$

2. 假设g不在H中，则g必然在G-H中，由H是群G上指标为2的子群，故：

$$gH=G-H且Hg=G-H$$

则

$$gH=Hg$$

综上，H 是 G 的正规子群

> 8. 给定任意群 G，H 是群 G 的正规子群。请证明，如果群 G 是阿贝尔群，则商群 G/H也是阿贝尔群。

证明：

已知H为G的正规子群，设G/H的阶为n。

$$\because G为阿贝尔群。$$

$$\forall a,b\in G,ab=ba$$

H为G的正规子群，则商群G/H中任取aH，bH

$$\forall aH,bH\in G/H$$

由封闭性有

$$(aH)(bH)=abH=baH=(bH)(aH)$$

故则商群 G/H也是阿贝尔群。

> 9. 给定任意群 G，H 是群 G 的正规子群。请证明，如果群 G 是循环群，则商群 G/H也是循环群。

证明: 已知G为循环群，则

$$\forall a \in G, \exists i, a^i = e$$

$$\forall aH \in G/H$$

由封闭性有

$$(aH)^i = a^i H = eH = H$$

故商群 G/H也是循环群