Метод разделения переменных

и граничными условиями

$$u(0,t) = \mu_1(t), \tag{1}$$

$$u(l,t) = \mu_2(t) \quad (t \geq 0). \tag{2}$$

Изучение общей первой краевой задачи начнем с решения следующей простейшей задачи I: найти непрерывное в замкнутой области $[0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T]$ решение однородного уравнения:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \tag{2}$$

и однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \tag{5}$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу: найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{6}$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{5}$$

и представимое в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{6}$$

где $X(x)$ — функция только переменного x, $T(t)$ — функция только переменного t. Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (4) и производя деление обеих частей равенства на a^2XT, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{7}$$

где $\lambda = const$, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая — только от x. Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{8'}$$

Граничные условия (5) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{9}$$

202 уравнения параболического типа

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма — Лившиця)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{10}$$

исследованную при решении уравнения колебаний в главе II (см. § 3, п. 1). При этом было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

существуют нетривиальные решения уравнения (8), равные

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{12}$$

Этим значением λ_n соответствуют решения уравнения (8'):

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}, \tag{13}$$

где C_n — не определенные пока коэффициенты. Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{14}$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям. Обратимся теперь к решению задачи (I). Составим формальный ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t}\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{15}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{16}$$

т. е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении её в ряд по синусам на интервале $(0,l)$:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь (15) с коэффициентами C_n, определяемыми по формуле (17) и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (I). Для этого нужно доказать, что