

矩阵特征值问题

实习报告

计算机科学与技术系 计03班

陈键飞

2010011291

2012年6月12日

1 实习要求

使用幂法求出下列矩阵按模最大的特征值 λ_1 及其对应的特征向量 x_1 ，使得

$$|(\lambda_1)_{k+1} - (\lambda_1)_k| < 10^{-5}$$

1.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

2.

$$B = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2 算法描述

使用规格化过的幂法。初始向量 $v_0 = u_0 = (1, 1, 1)^T$ 。递推公式

$$\begin{cases} v_{k+1} = Av_k \\ u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{(v_{k+1})} \end{cases} \quad (1)$$

设矩阵 A 的 n 个特征值分别为 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ ，则算法的余项以 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ 的速度指数衰减，并且

$$\begin{cases} (v_k) \rightarrow \lambda_1 (k \rightarrow \infty) \\ e_k \sim O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \end{cases} \quad (2)$$

如果使用Rayleigh商加速，则

$$\begin{cases} \frac{(Au_k, u_k)}{(u_k, u_k)} \rightarrow \lambda_1 (k \rightarrow \infty) \\ e_k \sim O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} \end{cases} \quad (3)$$

3 实验结果

矩阵 A 与矩阵 B 的实验结果分别如表 2、表 refresultB。使用Rayleigh商加速后，矩阵 A 和 B 的迭代次数分别由24次、4次降低到了16次、2次。可见Rayleigh商的确可以加快特征值的收敛速度。最终求得

$$\lambda_{A1} = 11.26853 \quad (4)$$

$$\lambda_{B1} = 98.52170 \quad (5)$$

表 1: 矩阵 A 的幂法迭代过程

一般		使用Rayleigh加速	
迭代次数	特征值	迭代次数	特征值
1	8.000000	1	-3.714286
2	6.500000	2	-2.164384
3	5.692308	3	2.177862
4	8.972973	4	6.846065
5	11.722892	5	9.594150
6	10.041110	6	10.707290
7	11.585261	7	11.088753
8	10.893240	8	11.211807
9	11.304802	9	11.250721
10	11.215859	10	11.262949
11	11.257753	11	11.266783
12	11.274499	12	11.267985
13	11.265176	13	11.268362
14	11.270408	14	11.268480
15	11.267483	15	11.268517
16	11.269121	16	11.268528
17	11.268204		
18	11.268718		
19	11.268430		
20	11.268591		
21	11.268501		
22	11.268552		
23	11.268523		
24	11.268539		

表 2: 矩阵 B 的幂法迭代过程

一般		使用Rayleigh加速	
迭代次数	特征值	迭代次数	特征值
1	20.000000	1	98.520761
2	98.350000	2	98.521698
3	98.521607		
4	98.521699		